

MACIEJ KRASIŃSKI, STANISŁAW STACHOŃ*

**NIEUSTALONE DRGANIA W UKŁADACH NAPĘDOWYCH
MECHANIZMU PODNOSZENIA DŹWIGNIC W PROCESIE
ROZRUCHU PRZY PODNOSZENIU ŁADUNKU****TRANSIENT VIBRATIONS IN POWER TRANSMISSION
SYSTEMS OF A CRANE LIFTING MECHANISM DURING
A STARTING PROCESS OF CARGO HOISTING****Streszczenie**

W niniejszym artykule przedstawiono analizę dynamiczną układu napędowego mechanizmu podnoszenia dźwignic z silnikiem asynchronicznym. Opisano metodę, która pozwala (w określonych przedziałach czasowych) na ścisłe rozwiązanie układu różniczkowych równań ruchu, czyli na uzyskanie w postaci analitycznej funkcji $\varphi(t)$ i $x(t)$ opisujących ruch bębna i ruch podnoszonego ładunku. Zrealizowano odpowiednią procedurę numerycznych obliczeń, za pomocą której wyznaczono przemieszczenia, prędkości oraz przyspieszenia bębna i podnoszonego ładunku w każdej chwili procesu podnoszenia dla zadanych danych. W dalszej kolejności wyznaczono czas rozruchu, czas podnoszenia ładunku na zadaną wysokość oraz przedstawiono wykresy siły napinającej w linie S i momentu dynamicznego M_d w czasie całego procesu podnoszenia.

Słowa kluczowe: dźwignice, wciągarka, mechanizm podnoszenia, drgania przejściowe układu napędowego

Abstract

The paper deals with a dynamic analysis of a power transmission system of a crane lifting mechanism with an asynchronous motor. The method of exact and analytic solution of differential equations describing movements of a hoisting drum and a hoisting cargo by analytical functions $\varphi(t)$ and $x(t)$ is given. Using that method displacements, velocities and accelerations of the drum and the hoisting cargo have been determined for every time. The starting time and the time of cargo lifting on specified altitude have been determined next. In the paper diagrams of the tension force S of the line and the dynamic moment M_d applied to the hoisting drum in function of the time t are presented.

Keywords: cranes, hoisting winch, lifting mechanism, transient vibrations of power transmission systems

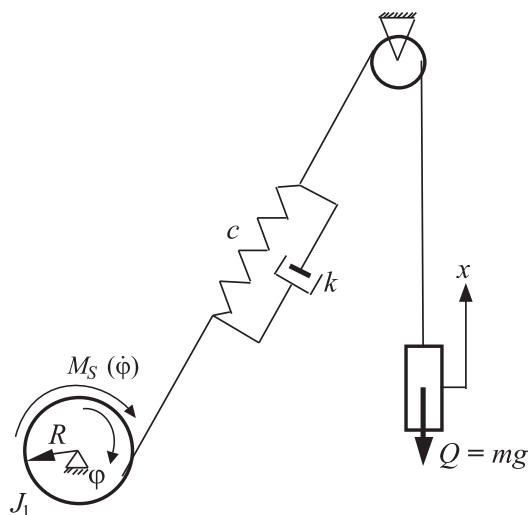
* Dr inż. Maciej Krasiński, dr inż. Stanisław Stachoń, Instytut Konstrukcji Maszyn, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

Rozruch każdego układu napędowego jest najważniejszym i najtrudniejszym etapem całej jego pracy. W czasie rozruchu układ pracuje w warunkach ekstremalnych w wyniku działań obciążeń dynamicznych. Znajomość tych obciążeń jest niezbędna przy konstruowaniu i obliczaniu poszczególnych elementów, wchodzących w skład danego układu.

W niniejszym artykule dokonano analizy dynamicznej mechanizmu podnoszenia dźwignic [1, 2] w warunkach nieustalonych, podejmując próbę analitycznego rozwiązania tego problemu. W celu uproszczenia i tak dość skomplikowanych obliczeń analizę przeprowadzono, uwzględniając następujące założenia:

- zlinearyzowano (w pewnych granicach prędkości obrotowej) zredukowaną charakterystykę silnika,
- przyjęto stałą średnią sztywność c liny i współczynnik tłumienia k (niezależnie od jej czynnej długości),
- pominięto drgania skrętne przekładni,
- przyjęto stały średni moment bezwładności J_1 , zredukowany na wałek bębna.



Rys. 1. Schemat układu napędowego
Fig. 1. Scheme of a power transmission system

Nieliniowe równania ruchu, opisujące rozruch mechanizmu, którego schemat przedstawiono na rys. 1, scałkowano metodą analityczno-numeryczną, bazując na przyjętej charakterystyce silnika dla dwóch przypadków:

- a) podnoszenie wiszącego ciężaru na linie,
- b) podnoszenie spoczywającego ciężaru na podłożu.

2. Równania ruchu

Zgodnie z oznaczeniami przyjętymi na rys. 1 ruch bębna i ruch podnoszonego ciężaru Q opisują następujące równania

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\phi} &= M_s (\dot{\phi}) - Rk(R\dot{\phi} - \dot{x}) - Rc(R\phi - x) \\ m\ddot{x} &= k(R\dot{\phi} - \dot{x}) + c(R\phi - x) - mg \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:

- J_1 – moment bezwładności bębna,
- M_s – moment silnika,
- R – promień bębna,
- c, k – sztywność i współczynnik tłumienia liny,
- m – masa podnoszonego ciężaru $Q = mg$.

Po podzieleniu pierwszego równania przez J_1 i po pomnożeniu drugiego przez R oraz wprowadzając nową zmienną

$$\psi = \frac{x}{R} \quad (2)$$

otrzymano

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + \frac{kR^2}{J_1}(\dot{\phi} - \dot{\psi}) + \frac{cR^2}{J_1}(\phi - \psi) &= \frac{M_s(\dot{\phi})}{J_1} \\ mR^2\ddot{\psi} - kR^2(\dot{\phi} - \dot{\psi}) - cR^2(\phi - \psi) &= -mgR \end{aligned} \quad (3)$$

a po wprowadzeniu dodatkowych oznaczeń

$$\begin{aligned} kR^2 &= D; & cR^2 &= C \\ mR^2 &= J_2; & mgR &= M_R \end{aligned} \quad (4)$$

układ równań (1) przyjmie postać

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + \frac{D}{J_1}(\dot{\phi} - \dot{\psi}) + \frac{C}{J_1}(\phi - \psi) &= \frac{M_s(\dot{\phi})}{J_1} \\ \ddot{\psi} - \frac{D}{J_2}(\dot{\phi} - \dot{\psi}) - \frac{C}{J_2}(\phi - \psi) &= -\frac{M_R}{J_2} \end{aligned} \quad (5)$$

Powyższy układ równań zmieniono tak, że drugie równanie tego układu zastąpiono różnicą obydwu równań i otrzymano nowy w postaci

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + \frac{D}{J_1}(\dot{\phi} - \dot{\psi}) + \frac{C}{J_1}(\phi - \psi) &= \frac{M_s(\dot{\phi})}{J_1} \\ \ddot{\phi} - \ddot{\psi} + \left(\frac{D}{J_1} + \frac{D}{J_2}\right)(\dot{\phi} - \dot{\psi}) + \left(\frac{C}{J_1} + \frac{C}{J_2}\right)(\phi - \psi) &= \frac{M_s(\dot{\phi})}{J_1} + \frac{M_R}{J_2} \end{aligned} \quad (6)$$

Po wprowadzeniu jeszcze jednej nowej zmiennej ϕ , takiej że

$$\phi = \phi - \psi \quad (7)$$

i odpowiednim przekształceniom prawej strony drugiego równania układ (6) przyjmie ostatecznie postać

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + \frac{D}{J_1}\dot{\phi} + \frac{C}{J_1}\phi &= \frac{M_s(\dot{\phi})}{J_1} \\ \ddot{\phi} + \frac{D}{J}\dot{\phi} + \frac{C}{J}\phi &= \frac{M_s(\dot{\phi}) - M_R}{J_1} + \frac{M_R}{J} \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie

$$J = \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2}$$

3. Charakterystyka silnika i jej matematyczny opis

Moment napędowy M_s silników asynchronicznych oblicza się za pomocą podanego niżej wzoru Klossa [3], w którym występujące wielkości zilustrowano na rys. 2.

$$M_s = \frac{2M_k}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}} \quad (9)$$

gdzie:

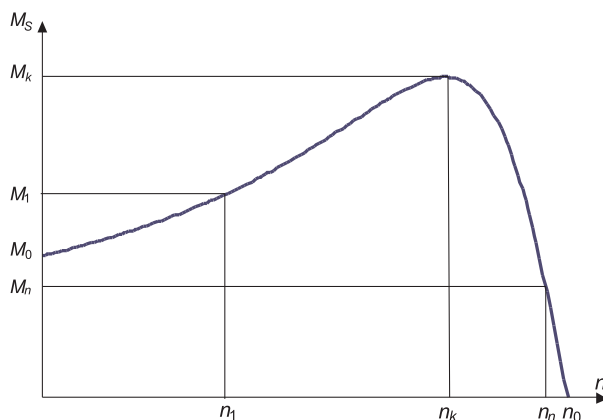
$$\begin{aligned} s &= \frac{n_0 - n}{n_0} && \text{– poślizg względny,} \\ s_k &= s_n (u + \sqrt{u^2 - 1}) && \text{– poślizg krytyczny,} \\ s_n &= \frac{n_0 - n_n}{n_0} && \text{– poślizg nominalny,} \\ u &= \frac{M_k}{M_n} \end{aligned} \quad (10)$$

przy czym:

M_k, n_k – moment krytyczny, obroty krytyczne,

M_n, n_n – moment znamionowy, obroty znamionowe.

Na rysunku 2 przedstawiono charakterystykę silnika ośmiobiegunowego o mocy $N = 1,1$ kW, dla którego: $u = 2,2$; $n_0 = 750$ obr./min; $n_k = 542$ obr./min; $n_n = 700$ obr./min.



Rys. 2. Charakterystyka silnika asynchronicznego
Fig. 2. Asynchronous motor performance

4. Rozwiązanie przypadku podnoszenia wiszącego ciężaru na linie

Przedstawiona w rozdziale 3 charakterystyka silnika asynchronicznego $M_s = M_s(\dot{\phi})$ pozwala na linearyzację tego momentu w pewnych granicach $\dot{\phi}$, a tym samym w pewnych, jeszcze nieznanach, przedziałach czasu Δt .

Niech $M_s = a + b\dot{\phi}$,

gdzie w pierwszym obliczeniowym kroku: $a = M_0$, $b = \frac{M_1 - M_0}{\dot{\phi}_1}$ (jak na rys. 2).

Wówczas układ równań (8) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} + \frac{D}{J_1} \dot{\phi} + \frac{C}{J_1} \phi &= \frac{a + b\dot{\phi}}{J_1} \\ \ddot{\phi} + \frac{D}{J} \dot{\phi} + \frac{C}{J} \phi &= \frac{a + b\dot{\phi} - M_R}{J_1} + \frac{M_R}{J}\end{aligned}\quad (11)$$

Po podstawieniu za zmienną ϕ

$$\phi = \eta + \phi_0 \quad (12)$$

gdzie $\phi_0 = \frac{M_R}{C}$ jest statycznym względnym kątem skręcenia, układ ten przyjmie postać

$$\begin{aligned}\ddot{\eta} + \frac{D}{J_1} \dot{\eta} + \frac{C}{J_1} \eta &= \frac{a + b\dot{\phi} - M_R}{J_1} \\ \ddot{\eta} + \frac{D}{J} \dot{\eta} + \frac{C}{J} \eta &= \frac{a + b\dot{\phi} - M_R}{J_1}\end{aligned}\quad (13)$$

Przenosząc niewiadome na lewe strony równań oraz wiedząc, że moment M_R w rozpatrywanym przypadku jest stały i wynosi $M_R = mgR$, otrzymano układ dwóch równań różniczkowych liniowych, niejednorodnych, a mianowicie

$$\begin{aligned}\ddot{\eta} - \frac{b}{J_1} \dot{\eta} + \frac{D}{J_1} \dot{\eta} + \frac{C}{J_1} \eta &= \frac{a - mgR}{J_1} \\ \ddot{\eta} - \frac{b}{J_1} \dot{\eta} + \frac{D}{J} \dot{\eta} + \frac{C}{J} \eta &= \frac{a - mgR}{J_1}\end{aligned}\quad (14)$$

a)

Jeżeli $b \neq 0$, układ ten można sprowadzić do układu równań jednorodnych, stosując podstawienie

$$\eta = w + \lambda t, \quad \text{gdzie} \quad \lambda = -\frac{a - mgR}{b} \quad (15)$$

i wtedy zapisać go następująco

$$\begin{aligned}\ddot{w} - \frac{b}{J_1} \dot{w} + \frac{D}{J_1} \dot{w} + \frac{C}{J_1} w &= 0 \\ \ddot{w} - \frac{b}{J_1} \dot{w} + \frac{D}{J} \dot{w} + \frac{C}{J} w &= 0\end{aligned}\quad (16)$$

Rozwiązań $w(t)$ i $\eta(t)$ poszukuje się w postaci

$$\begin{aligned} w(t) &= Ae^{rt} \\ \eta(t) &= Be^{rt} \end{aligned} \quad (17)$$

które po podstawieniu do powyższych równań różniczkowych pozwalają na otrzymanie następującego układu na stałe A i B

$$\begin{aligned} A\left(r^2 - \frac{b}{J_1}r\right) + B\left(\frac{D}{J_1}r + \frac{C}{J_1}\right) &= 0 \\ A\left(-\frac{b}{J_1}r\right) + B\left(r^2 + \frac{D}{J}r + \frac{C}{J}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Aby stałe A i B były rozwiązaniami niezerowymi, przyrównano wyznacznik główny układu do zera i w ten sposób otrzymano równanie 4. stopnia na niewiadomą r w postaci

$$r^4 + \left(\frac{D}{J} - \frac{b}{J_1}\right)r^3 + \left(\frac{C}{J} + \frac{bD}{J_1^2} - \frac{bD}{J_1J}\right)r^2 + \left(\frac{bC}{J_1^2} - \frac{bC}{J_1J}\right)r = 0 \quad (19)$$

Jednym z rozwiązań jest $r_1 = 0$, zaś pozostałe trzy pierwiastki równania r_2 , r_3 i r_4 , z których jeden jest rzeczywisty, a dwa zespolone – sprzężone, należy wyznaczyć, rozwiązując odpowiednie równanie 3. stopnia.

Dysponując wszystkimi rozwiązaniami r , można wyznaczyć stosunek stałych A i B , wykorzystując dowolne równanie układu (18).

$$\text{I tak} \quad \frac{B_n}{A_n} = \frac{\frac{b}{J_1}r_n}{r_n^2 + \frac{D}{J}r_n + \frac{C}{J}} = p_n \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3 \text{ i } 4 \quad (20)$$

Wówczas poszukiwane rozwiązania układu (16) przyjmą postać

$$\begin{aligned} w(t) &= \sum_{n=1}^4 A_n e^{r_n t} \\ \eta(t) &= \sum_{n=1}^4 p_n A_n e^{r_n t} \end{aligned} \quad (21)$$

Ponieważ r_1, r_2 są rozwiązaniami rzeczywistymi ($r_1 = 0$), dlatego stałe A_1, A_2 i B_1, B_2 też są rzeczywiste; $B_1 = 0, B_2 = p_2 A_2$.

Rozwiązania r_3 i r_4 są natomiast rozwiązaniami zespolonymi – sprzężonymi

$$\begin{aligned} r_3 &= r_0 + i\omega \\ r_4 &= r_0 - i\omega \end{aligned} \quad (22)$$

więc stałe A_3, A_4 i B_3, B_4 oraz odpowiednie stosunki tych stałych (p_3 i p_4) też muszą być zespolone – sprzężone.

$$\frac{B_3}{A_3} = \frac{\frac{b}{J_1} r_3}{r_3^2 + \frac{D}{J} r_3 + \frac{C}{J}} = p_0 + i\mu$$

$$\frac{B_4}{A_4} = \frac{\frac{b}{J_1} r_4}{r_4^2 + \frac{D}{J} r_4 + \frac{C}{J}} = p_0 - i\mu$$
(23)

Dla takich rozwiązań r_1, r_2, r_3 i r_4 funkcje $w(t)$ i $\eta(t)$ można zapisać w odmiennej postaci, a mianowicie

$$w(t) = A_1 A_2 e^{r_2 t} + e^{r_0 t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$$

$$\eta(t) = p_2 A_2 e^{r_2 t} + e^{r_0 t} [(p_0 C_1 + \mu C_2) \cos \omega t + (p_0 C_2 - \mu C_1) \sin \omega t]$$
(24)

zaś poszukiwane funkcje, opisujące ruch bębna $\varphi(t)$ i ruch podnoszonego ciała $x(t)$ oraz (niezbędne do warunków początkowych) ich pierwsze pochodne, wyrażone są – zgodnie z (2), (7), (12) i (15) – następującymi zależnościami

$$\varphi(t) = A_1 + A_2 e^{r_2 t} + e^{r_0 t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) - \frac{a - mgR}{b} t$$

$$\dot{\varphi}(t) = r_2 A_2 e^{r_2 t} + e^{r_0 t} [(r_0 C_1 + \omega C_2) \cos \omega t + (r_0 C_2 - \omega C_1) \sin \omega t] - \frac{a - mgR}{b}$$
(25)

$$x(t) = e^{r_0 t} R [(C_1(1 - p_0) - \mu C_2) \cos \omega t + (C_2(1 - p_0) + \mu C_1) \sin \omega t] +$$

$$+ R \left[A_1 + A_2 (1 - p_2) e^{r_2 t} - \frac{a - mgR}{b} t - \frac{mgR}{C} \right]$$
(26)

$$\dot{x}(t) = R [A_2 (1 - p_2) r_2 e^{r_2 t} + e^{r_0 t} (C_1 [r_0 (1 - p_0) + \mu \omega] + C_2 [\omega (1 - p_0) - \mu r_0]) \cos \omega t] +$$

$$+ R \left[e^{r_0 t} (C_1 [\mu r_0 - \omega (1 - p_0)] + C_2 [r_0 (1 - p_0) + \mu \omega]) \sin \omega t - \frac{a - mgR}{b} \right]$$

Wykorzystując warunki początkowe

$$\varphi(0) = \frac{mgR}{C}, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

otrzymano układ równań (27), z którego należy wyznaczyć stałe A_1, A_2, C_1 i C_2

$$A_1 + A_2 + C_1 = \frac{mgR}{C}$$

$$r_2 A_2 + r_0 C_1 + \omega C_2 = \frac{a - mgR}{b}$$

$$A_1 + A_2 (1 - p_2) + C_1 (1 - p_0) - \mu C_2 = \frac{mgR}{C}$$

$$r_2 (1 - p_2) A_2 + [r_0 (1 - p_0) + \mu \omega] C_1 + [\omega (1 - p_0) - \mu r_0] C_2 = \frac{a - mgR}{b}$$
(27)

Dysponując znaną funkcją $\varphi(t)$, oblicza się czas t_1 z warunku

$$M_1 = a_1 + b_1 \dot{\varphi}_1 \Rightarrow \dot{\varphi}_1(t) = \frac{M_1 - a_1}{b_1} \quad (28)$$

Dla kolejnych kroków rozwiązywania postępuje się jak następuje:

- linearyzujemy dalszą część wykresu M_S , określając wartości M_i , M_{i+1} oraz $\dot{\varphi}_i$ i $\dot{\varphi}_{i+1}$,
- obliczamy moment $M_i = a_i + b_i \dot{\varphi}_i$,

$$\text{gdzie } a_i = \frac{M_i \dot{\varphi}_{i+1} - M_{i+1} \dot{\varphi}_i}{\dot{\varphi}_{i+1} - \dot{\varphi}_i}, \quad b_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{\dot{\varphi}_{i+1} - \dot{\varphi}_i}$$

- powtarzamy procedurę obliczeniową, wyznaczając ponownie „nowe” funkcje $\varphi(t)$ i $x(t)$, a ich stałe obliczamy z warunków początkowych, którymi są wartości końcowe z poprzedniego kroku,
- obliczenia przeprowadzamy do chwili, gdy $M_S = mgR \Rightarrow a + b\dot{\varphi} - mgR = 0$, tzn. do momentu, w którym obroty silnika się ustalą, czyli zamknie się etap rozruchu układu napędowego; czas rozruchu jest sumą przedziałów czasowych Δt_i , wyznaczonych na każdym kroku przedstawionej procedury.

b)

Jeżeli $b = 0$ (taki przypadek może wystąpić w maksimum momentu silnika M_S), układ równań (14) przyjmuje prostszą postać, a mianowicie

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \frac{D}{J_1} \dot{\varphi} + \frac{C}{J_1} \varphi &= \frac{a - mgR}{J_1} \\ \ddot{\eta} + \frac{D}{J} \dot{\eta} + \frac{C}{J} \eta &= \frac{a - mgR}{J_1} \end{aligned} \quad (29)$$

Wówczas drugie równanie tego układu można łatwo rozwiązać, stosując podstawienie

$$\eta = \xi + \delta, \quad \text{gdzie} \quad \delta = \frac{J}{J_1} \frac{a - mgR}{C} \quad (30)$$

ponieważ sprowadza się ono do postaci

$$\ddot{\xi} + \frac{D}{J} \dot{\xi} + \frac{D}{J} \xi = 0 \quad (31)$$

Rozwiązaniem drugiego równania jest więc funkcja

$$\eta(t) = e^{-\beta t} (D_1 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t) + \frac{J}{J_1} \frac{a - mgR}{C} \quad (32)$$

gdzie

$$\beta = \frac{D}{2J}; \quad \omega = \frac{\sqrt{4CJ - D^2}}{2J}$$

Po podstawieniu tego rozwiązania do pierwszego równania układu (29) i dwukrotnym scałkowaniu otrzymano rozwiązanie $\varphi(t)$ w postaci

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \frac{a - mgR}{2(J_1 + J_2)} t^2 + \frac{e^{-\beta t}}{J_1(\omega^2 + \beta^2)} \left(D\beta D_1 + D\omega D_2 + \frac{C(\omega^2 - \beta^2)D_1 - 2C\omega\beta D_2}{\omega^2 + \beta^2} \right) \cos \omega t + \\ & + A_1 t + A_2 + \frac{e^{-\beta t}}{J_1(\omega^2 + \beta^2)} \left(D\beta D_2 - D\omega D_1 + \frac{C(\omega^2 - \beta^2)D_2 + 2C\omega\beta D_1}{\omega^2 + \beta^2} \right) \sin \omega t \end{aligned} \quad (33)$$

oraz wykorzystując związki (2), (7) i (12) – rozwiązanie $x(t)$

$$x(t) = R \left[\varphi(t) - e^{-\beta t} (D_1 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t) - \frac{J}{J_1} \frac{a - mgR}{C} \right] - R \frac{mgR}{C} \quad (34)$$

Z warunków początkowych danego kroku dla funkcji $\varphi(t)$ i $x(t)$, określonych wzorami (33) i (34), można wyznaczyć stałe A_1 , A_2 , D_1 i D_2 .

5. Rozwiązanie przypadku podnoszenia ciężaru spoczywającego na podłożu

Właściwy proces podnoszenia ciała spoczywającego na podłożu zaczyna się z chwilą skasowania luzu w linie. Luz ten określony jest kątem obrotu bębna ψ_0 . Dopiero od tego momentu ruch bębna i ruch podnoszonego ciała opisuje układ równań (1), przedstawiony w rozdz. 1 i dlatego właśnie od tego momentu zaczęto mierzyć czas t oraz obliczać kąt obrotu bębna φ .

Wspomniany wcześniej etap kasowania luzu nie dotyczy wprawdzie samego procesu podnoszenia ciała, ale poddano go osobnej analizie, aby ustalić prędkość obrotową $\dot{\varphi}_k$, przy której rozpoczyna się podnoszenie. Wartość tej prędkości stanowi jeden z warunków początkowych ruchu.

Ruch bębna przy kasowaniu luzu opisany jest równaniem

$$J_1 \ddot{\varphi} = M_s(\ddot{\varphi}) \quad (35)$$

które po przyjęciu zlinearyzowanej postaci momentu $M_s = a + b\dot{\varphi}$,

gdzie: $a = M_0$, $b = \frac{M_1 - M_0}{\dot{\varphi}_1}$, można zapisać następująco

$$J_1 \ddot{\varphi} = a + b\dot{\varphi} \quad (36)$$

Rozwiązaniem powyższego równania jest funkcja

$$\varphi(t) = \frac{aJ_1}{b^2} \left(e^{\frac{b}{J_1} t} - 1 \right) - \frac{a}{b} t \quad (37)$$

Przyrównując jej wartość dla czasu kasowania luzu t_k do wartości kąta ψ_0 , można obliczyć czas t_k , rozwiązując równanie

$$\frac{aJ_1}{b^2} \left(e^{\frac{b}{J_1} t_k} - 1 \right) - \frac{a}{b} t_k = \psi_0 \quad (38)$$

oraz prędkość końcową bębna $\dot{\phi}_k$, która wynosi

$$\dot{\phi}_k = \frac{a}{b} \left(e^{\frac{b}{J_1 t_k}} - 1 \right) \quad (39)$$

W chwili $t = 0$ (tzn. po skasowaniu luzu) na spoczywające ciało o masie m działają tylko dwie siły, które się wzajemnie równoważą: siła ciężkości Q i reakcja podłoża N . Następnie zaczyna działać dodatkowa (narastająca) siła w linii $S = Rc\phi + Rk\dot{\phi}$.

Wtedy reakcja podłoża zaczyna maleć, ponieważ jej wartość wynosi

$$N = mg - Rc\phi - Rk\dot{\phi} \quad (40)$$

Dopóki reakcja podłoża N istnieje ($N > 0$), dopóty ciało jest w spoczynku, czyli $x(t) = 0$, $\dot{x}(t) = 0$, $\ddot{x}(t) = 0$.

Zatem do czasu $t = t_n$, po którym zniknie reakcja podłoża ($N = 0$), czyli do czasu, gdy $Rc\phi + Rk\dot{\phi} = mg$, układ różniczkowych równań ruchu (1) opisujący ruch bębna i ruch podnoszonego ciała redukuje się do jednego równania

$$J_1 \ddot{\phi} = M_S - R^2 k \dot{\phi} - R^2 c \phi \quad (41)$$

Po wprowadzeniu oznaczeń jak we wzorach (4) oraz przyjęciu zlinearyzowanej postaci momentu M_S jak w równaniu (36) równanie to można zapisać w postaci

$$\ddot{\phi} + \frac{D-b}{J_1} \dot{\phi} + \frac{C}{J_1} \phi = \frac{a}{J_1} \quad (42)$$

Dokonując podstawienia $\phi = w + \delta$ gdzie $\delta = \frac{a}{C}$, otrzymano równanie jednorodne

$$\ddot{w} + \frac{D-b}{J_1} \dot{w} + \frac{C}{J_1} w = 0 \quad (43)$$

którego rozwiązaniem (w zależności od wartości parametru zlinearyzowanej charakterystyki silnika b) są funkcje

$$w(t) = e^{-\varepsilon t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \quad (44)$$

gdym

$$\frac{C}{J_1} - \frac{(D-b)^2}{4J_1^2} > 0$$

przy czym

$$\varepsilon = \frac{D-b}{2J_1}, \quad \omega = \sqrt{\frac{C}{J_1} - \frac{(D-b)^2}{4J_1^2}}$$

$$w(t) = C_1 e^{\varepsilon t} + C_2 e^{\varepsilon^* t} \quad (45)$$

gdy

$$\frac{C}{J_1} - \frac{(D-b)^2}{4J_1^2} < 0$$

przy czym

$$r_1 = -\frac{D-b}{2J_1} - \sqrt{\frac{(D-b)^2}{4J_1^2} - \frac{C}{J_1}}; \quad r_2 = -\frac{D-b}{2J_1} + \sqrt{\frac{(D-b)^2}{4J_1^2} - \frac{C}{J_1}}$$

Zatem rozwiązaniem równania (42) mogą być funkcje

$$\varphi(t) = e^{-\varepsilon t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) + \frac{a}{C} \quad (46)$$

lub

$$\varphi(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \frac{a}{C} \quad (47)$$

Wykorzystując warunki początkowe, które są warunkami końcowymi etapu kasowania luzu, tzn. $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \frac{a}{b} \left(e^{\frac{b}{J_1 t_k}} - 1 \right)$, wyznaczono stałe A i B oraz stałe C_1 i C_2 , rozwiązując następujące układy równań

$$\begin{cases} 0 = A + \frac{a}{C} \\ \frac{a}{b} \left(e^{\frac{b}{J_1 t_k}} - 1 \right) = \omega B - \varepsilon A \end{cases} \quad (48)$$

$$A = -\frac{a}{C}, \quad B = \frac{b \Psi_0 + a t_k}{J_1 \omega} - \frac{\varepsilon}{\omega} \frac{a}{C} \quad (49)$$

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 + \frac{a}{C} \\ \frac{a}{b} \left(e^{\frac{b}{J_1 t_k}} - 1 \right) = r_1 C_1 + r_2 C_2 \end{cases} \quad (50)$$

$$C_1 = -\frac{a}{r_2 - r_1} \left[\frac{r_2}{C} + \frac{1}{b} \left(e^{\frac{b}{J_1 t_k}} - 1 \right) \right], \quad C_2 = -\frac{a}{r_2 - r_1} \left[\frac{r_1}{C} + \frac{1}{b} \left(e^{\frac{b}{J_1 t_k}} - 1 \right) \right] \quad (51)$$

Z warunku $Rc\dot{\varphi} + Rk\varphi = mg$ można wyznaczyć czas napinania linii t_n , rozwiązując następujące równanie

$$(CA - DA\varepsilon + DB\omega) \cos \omega t_n + (CB - DB\varepsilon - DA\omega) \sin \omega t_n = (mgR - a)e^{\varepsilon t_n} \quad (52)$$

Znając czas t_n , dalej należy postępować tak jak w przypadku podnoszenia wiszącego ciężaru na linie, czyli wg procedury zamieszczonej w rozdz. 2.

Jedyną różnicą w tej procedurze są warunki początkowe ruchu w pierwszym kroku obliczeń, gdyż dla funkcji opisującej ruch bębna $\varphi(t)$ będą to wartości końcowe etapu napinania liny, czyli wartości funkcji $\varphi(t)$ i $\dot{\varphi}(t)$ (określonej równaniem (46) lub (47)) dla $t = t_n$.

Zatem warunki początkowe dla pierwszego kroku przyjmują następującą postać

$$\varphi(0) = \varphi_n, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_n, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

gdzie $\varphi_n, \dot{\varphi}_n$ to – odpowiednio – kąt obrotu i prędkość kątowna bębna po napięciu liny.

6. Symulacja komputerowo-analityczna procesu rozruchu

Przyjmując (zgodnie z tab. 1 i rys. 3) linearyzację zredukowanej charakterystyki silnika asynchronicznego opisanego w rozdz. 3, obliczenia symulacyjne przeprowadzono dla następujących danych:

- $m = 430 \text{ kg}$ – masa podnoszonego ciężaru,
- $c = 2,4 \cdot 10^4 \text{ N/m}$ – sztywność liny,
- $k = 0,5 \text{ Ns/m}$ – współczynnik tłumienia liny,
- $R = 0,25 \text{ m}$ – promień bębna,
- $J_1 = 100 \text{ kg m}^2$ – zredukowany moment bezwładności silnika, przekładni i bębna na wałek bębna,
- $i = 1/80$ – przełożenie zastosowanej przekładni,
- $\psi_0 = 0 \text{ rad}$ – kąt opisujący luz liny w chwili rozpoczęcia ruchu.

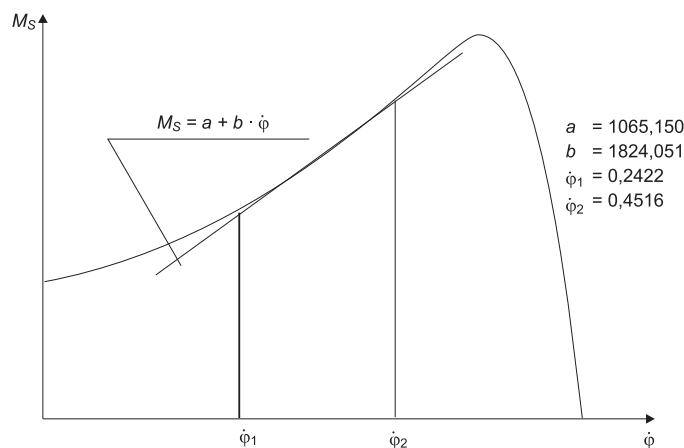
Obliczenia numeryczne wykonano za pomocą programu opracowanego w EXCELU, dla obu przypadków rozruchu przedstawionych w niniejszym artykule, tzn. dla:

- 1) rozruchu wiszącego ładunku na linie,
- 2) rozruchu spoczywającego ładunku na podłożu po skasowaniu luzu wstępnego w linie ($\psi_0 = 0$).

Tabela 1

Współczynniki a i b opisujące zredukowany moment silnika $M_s = a + b\dot{\varphi}$ dla przyjętych (w linearyzacji) zakresów jego prędkości kątowej

$\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2$ [rad/s]	a [Nm]	b [Nm/s]
0,0000–0,2422	1196,950	1279,793
0,2422–0,4516	1065,150	1824,051
0,4516–0,6021	951,495	2075,721
0,6021–0,7069	1496,071	1171,317
0,7069–0,7527	2850,246	–744,448
0,7527–0,7919	4382,830	–2780,636
0,7919–0,8508	7093,701	–6203,698
0,8508–0,9098	11441,235	–11313,347
0,9098–0,9490	15004,923	–15230,551
0,9490–0,9817	16523,486	–16830,685



Rys. 3. Ilustracja linearyzacji zredukowanego momentu silnika
Fig. 3. Illustration of linearization of a motor reduced moment

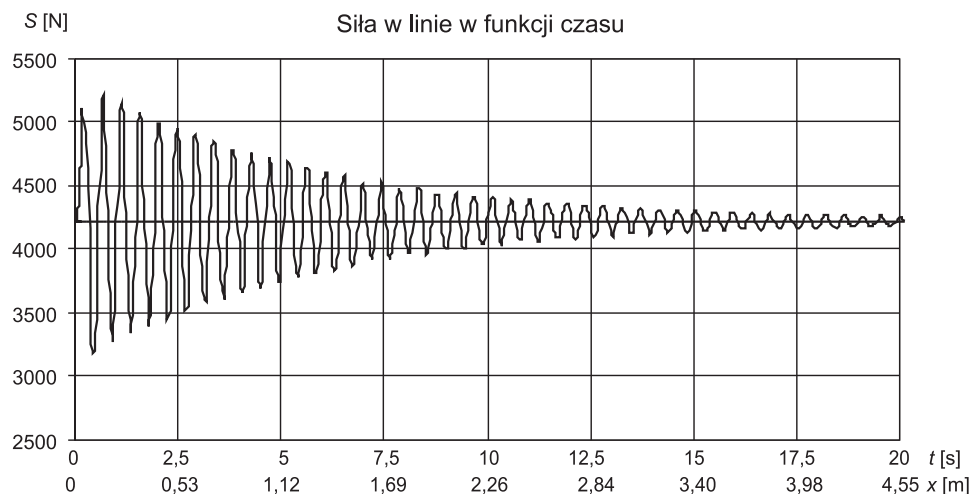
Wyniki tych obliczeń zaprezentowano – odpowiednio – w tab. 2 i 3, zamieszczając w nich wartości przemieszczeń ($\varphi(t)$; $x(t)$), prędkości ($\dot{\varphi}(t)$; $\dot{x}(t)$) oraz przyspieszeń ($\ddot{\varphi}(t)$; $\ddot{x}(t)$) bębna i podnoszonego ładunku w czasie jego podnoszenia. Zaś na rysunkach 4–7 przedstawiono wykresy ilustrujące wartość siły w linie $S(t)$ oraz wartość momentu dynamicznego, działającego na bęben wciągarki $M(t)$ w czasie procesu podnoszenia ładunku.

Tabela 2

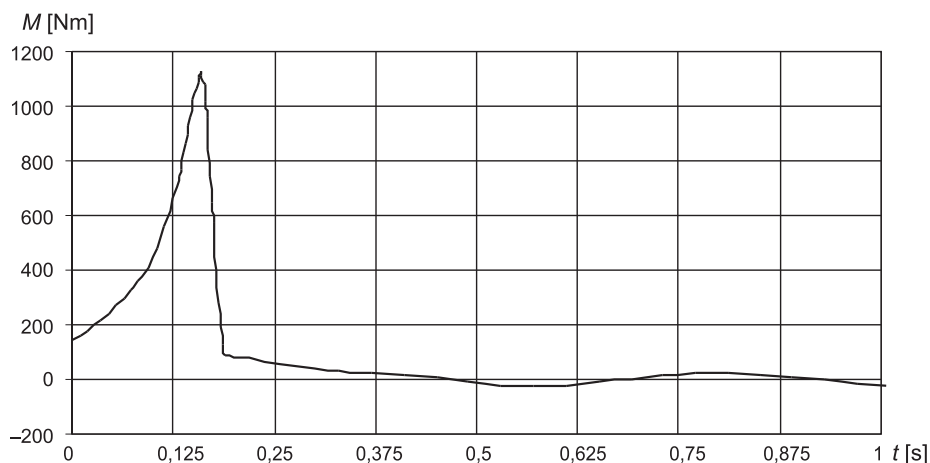
Wartości przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń bębna oraz ładunku dla rozruchu z ładunkiem wiszącym na linie (podnoszenie na wysokość $h = 10$ m)

t	φ	φ'	φ''	x	x'	x''
1	2	3	4	5	6	7
0,0000	0,2009	0,0000	1,4237	0,0000	0,0000	0,0000
0,1042	0,2130	0,2864	4,7827	0,0004	0,0167	0,5091
0,1509	0,2332	0,6228	10,4268	0,0020	0,0549	1,1935
0,1895	0,2640	0,8907	0,8817	0,0052	0,1177	2,0670
0,3303	0,3903	0,9098	0,3097	0,0443	0,4014	0,5892
0,4503	0,5011	0,9327	0,0501	0,0874	0,2538	-2,4187
0,5303	0,5756	0,9265	-0,1869	0,1005	0,0865	-1,3229
0,6103	0,6490	0,9087	-0,2096	0,1058	0,0822	1,2145
0,7303	0,7572	0,9020	0,1227	0,1296	0,3273	1,8573
0,8103	0,8300	0,9176	0,2243	0,1595	0,3902	-0,4418
0,9303	0,9413	0,9314	-0,0488	0,1961	0,1831	-2,1446
1,0503	1,0520	0,9111	-0,2049	0,2083	0,0840	0,8776
1,5303	1,4914	0,9062	-0,1441	0,3149	0,1313	1,5127
2,0103	1,9306	0,9038	-0,0672	0,4233	0,1886	1,7851
2,5303	2,4061	0,9061	0,0973	0,5446	0,3061	1,3081
3,0103	2,8455	0,9103	0,1342	0,6577	0,3299	0,6706
3,5303	3,3218	0,9204	0,1260	0,7841	0,3171	-0,7527
3,5703	3,3587	0,9245	0,0721	0,7960	0,2754	-1,2788

1	2	3	4	5	6	7
4,5303	4,2386	0,9240	-0,0382	1,0151	0,1958	-1,1117
5,0103	4,6785	0,9217	-0,0755	1,1232	0,1704	-0,7450
5,5303	5,1549	0,9147	-0,0987	1,2372	0,1584	0,2618
6,0103	5,5944	0,9122	-0,0755	1,3453	0,1769	0,5990
6,5303	6,0703	0,9099	0,0029	1,4630	0,2352	0,8524
7,0303	6,5280	0,9118	0,0527	1,5791	0,2699	0,5333
7,5303	6,9859	0,9153	0,0707	1,6961	0,2806	0,0229
8,0303	7,4440	0,9185	0,0538	1,8129	0,2662	-0,4173
8,5303	7,9021	0,9201	0,0152	1,9284	0,2372	-0,5988
9,0303	8,3603	0,9195	-0,0242	2,0423	0,2091	-0,4803
9,5303	8,8184	0,9174	-0,0464	2,1552	0,1944	-0,1627
10,0303	9,2764	0,9150	-0,0441	2,2680	0,1977	0,1784
12,0303	11,1079	0,9160	0,0328	2,7269	0,2527	-0,0325
14,0303	12,9400	0,9164	-0,0224	3,1850	0,2124	-0,0455
16,0303	14,7717	0,9153	0,0139	3,6423	0,2395	0,0782
18,0303	16,6037	0,9166	-0,0077	4,1011	0,2230	-0,0833
20,0303	18,4356	0,9154	0,0034	4,5583	0,2318	0,0739
22,3303	20,5422	0,9158	0,0052	5,0853	0,2328	0,0170
24,3303	22,3742	0,9161	-0,0031	5,5434	0,2266	-0,0226
26,3303	24,2060	0,9158	0,0016	6,0012	0,2303	0,0221
28,3303	26,0379	0,9161	-0,0006	6,4594	0,2284	-0,0187
43,8300	40,2350	0,91594	0,0001	10,0085	0,2290	0,0012



Rys. 4. Wykres siły napinającej linę w funkcji czasu (przypadek 1)
 Fig. 4. Diagram of the tension force of the rope in function of the time (case 1)



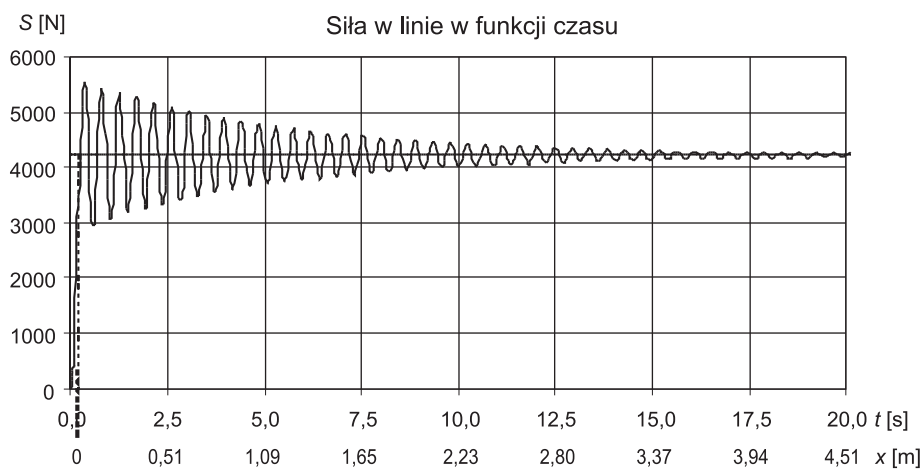
Rys. 5. Wykres momentu działającego na bęben wciągarki w funkcji czasu (przypadek 1)
Fig. 5. Diagram of the moment operating on the hoisting drum in function of the time (case 1)

Tabela 3

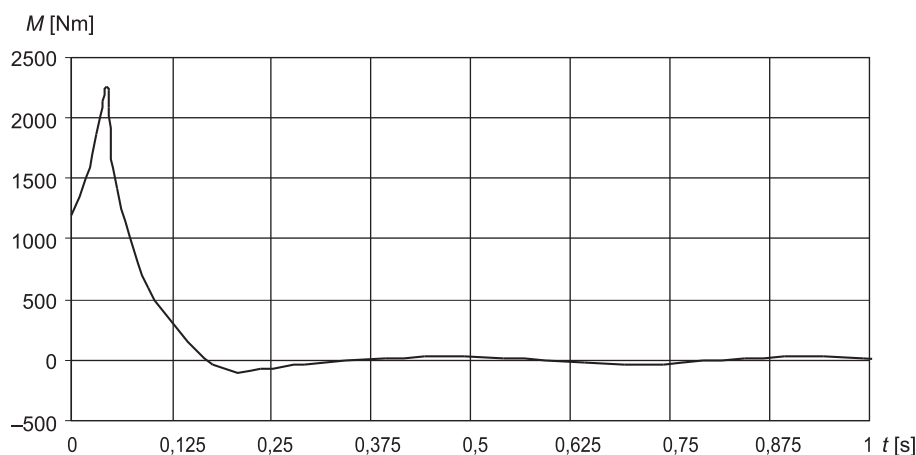
Wartości przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń bębna oraz ładunku dla rozruchu z ładunkiem spoczywającym na podłożu ze skasowanym luzem w linie (podnoszenie na wysokość $h = 10$ m)

t	φ	φ'	φ''	x	x'	x''	
1	2	3	4	5	6	7	8
0,0000	0,0000	0,0000	11,9695				Napinanie liny
0,0517	0,0206	0,8800	14,1639				
0,1752	0,1383	0,9400	-0,2964				
0,2426	0,2009	0,9166	-0,3497	0,0000	0,0000	0,0000	
0,2926	0,2463	0,9002	-0,2817	0,0009	0,0534	2,0405	Podnoszenie ładunku
0,3926	0,3355	0,8921	0,1441	0,0199	0,3379	2,6849	
0,4926	0,4260	0,9200	0,3194	0,0617	0,4337	-1,0662	
0,5926	0,5191	0,9372	-0,0318	0,0946	0,1919	-2,9419	
0,6926	0,6120	0,9160	-0,3182	0,1026	0,0186	0,0422	
0,7926	0,7023	0,8924	-0,0758	0,1108	0,1936	2,8467	
0,8926	0,7918	0,9049	0,2810	0,1431	0,4189	0,9118	
0,9926	0,8837	0,9318	0,1670	0,1832	0,3258	-2,4357	
1,5426	1,3884	0,9274	-0,1998	0,3047	0,0885	-1,5263	
2,5426	2,3023	0,9041	-0,1742	0,5180	0,1212	1,4427	
3,0426	2,7586	0,8997	-0,0351	0,6298	0,2153	1,8753	
3,5426	3,2150	0,9026	0,0958	0,7464	0,2991	1,3843	
4,0426	3,6717	0,9101	0,1608	0,8659	0,3366	0,3514	
4,5426	4,1288	0,9182	0,1418	0,9854	0,3186	-0,6623	
5,0426	4,5862	0,9230	0,0619	1,1025	0,2630	-1,2013	
5,5426	5,0437	0,9229	-0,0323	1,2164	0,2013	-1,1035	
6,0426	5,5010	0,9188	-0,0956	1,3277	0,1626	-0,5231	
6,5426	5,9581	0,9133	-0,1047	1,4383	0,1604	0,1940	

1	2	3	4	5	6	7	8
7,0426	6,4149	0,9091	-0,0648	1,5499	0,1894	0,6995	Podnoszenie ładunku
7,5426	6,8716	0,9078	-0,0025	1,6636	0,2311	0,8012	
8,0426	7,3284	0,9096	0,0502	1,7792	0,2644	0,5226	
8,5426	7,7853	0,9131	0,0711	1,8958	0,2757	0,0556	
9,0426	8,2424	0,9164	0,0562	2,0122	0,2637	-0,3560	
9,5426	8,6996	0,9181	0,0184	2,1274	0,2378	-0,5355	
10,0426	9,1568	0,9176	-0,0211	2,2413	0,2122	-0,4416	
11,0426	10,0710	0,9133	-0,0434	2,4668	0,2006	0,1399	
12,0426	10,9848	0,9114	0,0043	2,6943	0,2331	0,3352	
13,0426	11,8987	0,9140	0,0308	2,9245	0,2487	-0,0170	
14,0426	12,8129	0,9158	0,0043	3,1542	0,2301	-0,2335	
15,0426	13,7270	0,9145	-0,0200	3,3818	0,2150	-0,0433	
16,0426	14,6410	0,9129	-0,0077	3,6093	0,2242	0,1497	
17,0426	15,5550	0,9135	0,0119	3,8382	0,2367	0,0648	
19,0426	17,3831	0,9146	-0,0063	4,2959	0,2240	-0,0649	
22,0426	20,1252	0,9141	0,0054	4,9812	0,2320	-0,0175	
26,0426	23,7814	0,9140	0,0025	5,8951	0,2302	0,0053	
44,0430	40,2342	0,9140	0,0001	10,0083	0,22856	-0,0003	



Rys. 6. Wykres siły napinającej linę w funkcji czasu (przypadek 2)
 Fig. 6. Diagram of the tension force of the rope in function of the time (case 2)



Rys. 7. Wykres momentu działającego na bęben wciągarki w funkcji czasu (przypadek 2)
 Fig. 7. Diagram of the moment operating on the hoisting drum in function of the time (case 2)

7. Zakończenie

Przedstawiona analiza dynamiczna układu napędowego mechanizmu podnoszenia dźwignic pozwala (w określonych przedziałach czasowych) na ścisłe rozwiązanie układu różniczkowych równań ruchu, czyli na uzyskanie w postaci analitycznej funkcji $\varphi(t)$ i $x(t)$ opisujących ruch bębna i ruch podnoszonego ładunku. Ze względu na taki charakter otrzymanego rozwiązania stosunkowo łatwo zrealizowano odpowiednią procedurę numerycznych obliczeń, za pomocą której można wyznaczać przemieszczenie, prędkość oraz przyspieszenie bębna i podnoszonego ładunku w każdej chwili procesu jego podnoszenia dla dowolnych danych. Dysponując uzyskanymi w ten sposób wartościami, można w dalszej kolejności wyznaczać czas rozruchu, czas podnoszenia ładunku oraz wartość siły w linie S i wartość momentu dynamicznego M_d .

Przy podnoszeniu znacznie większych ładunków (o ciężarze kilku lub kilkunastu ton), kiedy to zredukowany moment rozruchowy silnika M_0 może okazać się niewystarczający do „normalnego” rozruchu, stosuje się modyfikację naturalnej charakterystyki silnika (za pomocą przełącznika gwiazda-trójkąt, rozrusznika rezystancyjnego albo falownika) tak, aby jego zredukowany moment na bębnie, do chwili uzyskania obrotów znamionowych, był odpowiednio większy od momentu oporów ruchu.

Przedstawiona metoda analityczna całkowania równań ruchu jest metodą ogólną i pozwala uwzględnić dowolną, a więc i zmodyfikowaną charakterystykę mechaniczną silnika.

Literatura

- [1] Pawlicki K., *Elementy dźwignic*, t. 1 i 2, PWN, Warszawa 1986.
- [2] Piątkiewicz A., Sobolski R., *Dźwignice*, t. 1 i 2, WNT, Warszawa 1978.
- [3] Stein Z., *Maszyny i napęd elektryczny*, WSiP, Warszawa 1985.