

LESZEK MIKULSKI, ADAM KISIEL\*

## OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE ŚCISKANEGO PRĘTA CIENKOŚCIENNEGO

---

### OPTIMAL DESIGN OF THIN-WALLED BEAM UNDER COMPRESSION

#### Streszczenie

W artykule przedstawiono wyniki optymalnego kształtowania przekroju poprzecznego pręta cienkościennego o profilu dwuteowym. Rozpatrzono pręt ściskany siłą na mimośrodku. Zastosowano założenia Własowa oraz uwzględniono wpływ przemieszczeń na wielkości sił przekrojowych. Obliczenia wykonano, opierając się na własnym programie numerycznym, w którym jako funkcję celu przyjęto minimum maksymalnego przemieszczenia przy zachowaniu stałej objętości materiału pręta.

*Słowa kluczowe: pręt cienkościenny, optymalizacja, mimośrodkowe ściskanie*

#### Abstract

The paper presents the results of the optimal design of a thin-walled beam of I-cross section subjected to eccentric compression. The Vlasov theory assumptions are used taking into account the influence of the displacements on section forces. The goal function is defined as the minimum of the maximum displacement, under constant volume condition. The numerical analysis is performed by means of the authors' own numerical program.

*Keywords: thin-walled beam, optimal design, eccentric compression*

---

\* Prof. dr hab. inż. Leszek Mikulski, dr inż. Adam Kisiel, Instytut Mechaniki Budowli, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska.

### Oznaczenia

$M_y$	– moment zginający względem osi $y$
$M_z$	– moment zginający względem osi $z$
$M_{Rx}$	– moment skręcający względem osi $x_R$
$M_s$	– moment skręcający
$M_\omega$	– moment giętno-skrętny
$B_\omega$	– bimoment
$v, w, \alpha$	– funkcje przemieszczeń i obrót przekroju
$A, I_x, I_y, I_z, I_\omega$	– charakterystyki geometryczne i wycinkowe przekroju poprzecznego
$e_z, e_y$	– mimośrodek siły $P_x$
$E, G, \tilde{E} = \frac{E}{1-\nu^2}$	– stałe materiałowe

## 1. Wstęp

Problem optymalnego kształtowania konstrukcji stalowych dotyczy zasadniczo konstrukcji wykonanych z prętów o przekrojach cienkościennych. Na ogół w praktyce inżynierskiej stosuje się przekroje otwarte. Na etapie projektowania można tak ukształtować konstrukcję, aby pod przewidywanym obciążeniem istotne efekty istniejące w prętach cienkościennych [4] nie występowały. Wymaga to bardzo silnych założeń i dokładności wykonania konstrukcji [5]. Jednak niewielkie nawet imperfekcje geometryczne czy zaburzenia sposobu przyłożenia obciążenia powodują znaczące zmiany w rozkładzie sił wewnętrznych i w konsekwencji ujawnienie się efektów giętno-skrętnych, które są bardzo istotne w prętach cienkościennych o profilach otwartych. Stąd w procesie projektowania konstrukcji stalowych, a szczególnie w zagadnieniach optymalizacji, należy te efekty uwzględnić z wyjątkową starannością, bowiem mają one istotny udział w ocenie nośności konstrukcji [3, 4].

W niniejszym artykule ograniczono się do poszukiwania optymalnych szerokości półek dwuteowego (przed optymalizacją: IPE180) przekroju poprzecznego pręta wspornikowego (słupa), obciążonego siłą ściskającą równoległą do osi pręta, przyłożoną na dowolnym mimośrodku.

## 2. Sformułowanie zadania optymalizacji

Zmienną decyzyjną (sterowaniem) jest zmienny wzdłuż długości rozkład szerokości półek dwuteownika przy zachowaniu stałej wysokości środnika oraz stałej grubości półek i środnika. Funkcją celu jest maksymalne przemieszczenie punktów konstrukcji. Tak więc zadanie optymalizacji sformułowane jest następująco: wyznaczyć optymalny rozkład szerokości półek słupa dwuteowego, który minimalizuje funkcję celu przy przyjętych ograniczeniach. Ograniczeniami są stała objętość materiału, z którego wykonany jest pręt oraz minimalne i maksymalne wartości szerokości półek.

### 3. Kryterium optymalizacji

Funkcja celu dotyczy sztywności konstrukcji, która jest określona maksymalnymi przemieszczeniami jej punktów. W rozwiązywanym zadaniu przyjęto, że siła jest konserwatywna (stała wartość i kierunek w globalnym układzie współrzędnych) oraz że mimośród siły jest ustalony, co oznacza, że punkt przyłożenia siły w stosunku do swobodnej, końcowej ścianki pręta w procesie deformacji nie ulega zmianie. Wynika z tego, że maksymalna wartość przemieszczenia wystąpi w jednym z wierzchołków przekroju, w którym przyłożona jest siła. Zależy ona od dwukierunkowego zginania i skręcania wywołanego momentem giętno-skrętnym oraz skręcającym. Aktywne ograniczenia nałożone są na geometrię pręta; inne możliwe ograniczenia, jak np. wartości naprężeń w stosunku do dopuszczalnych, potraktowano jako nieaktywne – spełniono je na drodze odpowiedniego doboru wartości ograniczeń aktywnych. Jako warunek poboczny optymalizacji przyjęto stałą objętość materiału, z którego wykonany jest pręt.

### 4. Równania stanu i warunki brzegowe

Równania stanu opisujące deformację i siły przekrojowe w teorii prętów cienkościennych otwartych znane są z podstawowej literatury przedmiotu [1–3]. Jednak dotyczą one pręta o osi prostej i o stałych: kształcie i wielkości przekroju poprzecznego. W przypadku prętów o zmiennych przekrojach należy bardzo starannie przeanalizować wpływ zmiany kształtu i wielkości wymiarów przekroju nie tylko na położenie środka masy, ale także środka zginania i głównego zerowego punku współrzędnej wycinkowej. Dlatego uzasadnionym założeniem – nie tylko ze względu na konieczność spełnienia istotnych wymagań stosowanej teorii, ale także z powodów praktycznych realnego wykonania konstrukcji – jest przyjęcie odcinkami stałych wymiarów przekroju poprzecznego. W tym przypadku wystarczy bowiem precyzyjne określenie warunków zszycia. Zagadnienie znacznie się upraszcza w przypadku prętów o przekrojach mających dwie osie symetrii – wszystkie wymienione wyżej punkty pokrywają się. W przypadku optymalnego kształtowania przekroju należy ponadto przeanalizować wpływ procesu optymalizacji na zmianę osi środkowej w sąsiednich przekrojach, a w konsekwencji na zmianę współrzędnej wycinkowej, od wartości której zależą równania opisujące deformację. Ten problem nie występuje w przekroju dwuteowym przy założeniu dodatkowym, że zmiany szerokości półek będą zachowywać dwuosiowość symetrii przekroju oraz że wysokość środknika nie ulegnie zmianie. W sposób zdecydowany upraszcza to sformułowanie równań stanu i umożliwia wykorzystanie ścisłych elementów skończonych w przedziałach, w których przekrój jest stały. Długości przedziałów charakterystycznych są dowolne, jednak muszą być określone jako zadane w procesie optymalizacji.

W każdym przedziale charakterystycznym mamy do dyspozycji równania stanu

$$M_y(x) = P_x(e_z + w(L) - w(x))$$

$$w''(x) = -\frac{M_y(x)}{\tilde{EI}_y(x)}$$

$$M_z(x) = -P_x(e_y + v(L) - v(x))$$

$$v''(x) = \frac{M_z(x)}{\tilde{EI}_z(x)}$$

$$B_\omega(x) = \tilde{EI}_\omega(x)\alpha''(x)$$

$$M_\omega(x) = -\tilde{EI}_\omega(x)\alpha'''(x)$$

$$M_s(x) = GI_x(x)\alpha'(x)$$

$$M_{Rx}(x) = M_\omega(x) + M_s(x)$$

$$M_{Rx}(x) = M_y(x)v'(x) + M_z(x)w'(x)$$

z warunkami zszycia

$$v(x^-) = v(x^+), \quad w(x^-) = w(x^+), \quad \alpha(x^-) = \alpha(x^+)$$

$$v'(x^-) = v'(x^+), \quad w'(x^-) = w'(x^+), \quad \alpha'(x^-) = \alpha'(x^+)$$

$$B_\omega(x^-) = P_x\omega(x^+) \Leftrightarrow \alpha''(x^-) = \frac{I_\omega(x^+)}{I_\omega(x^-)}\alpha''(x^+)$$

oraz warunkami brzegowymi

$$v(0) = 0, \quad w(0) = 0, \quad \alpha(0) = 0,$$

$$v'(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad \alpha'(0) = 0,$$

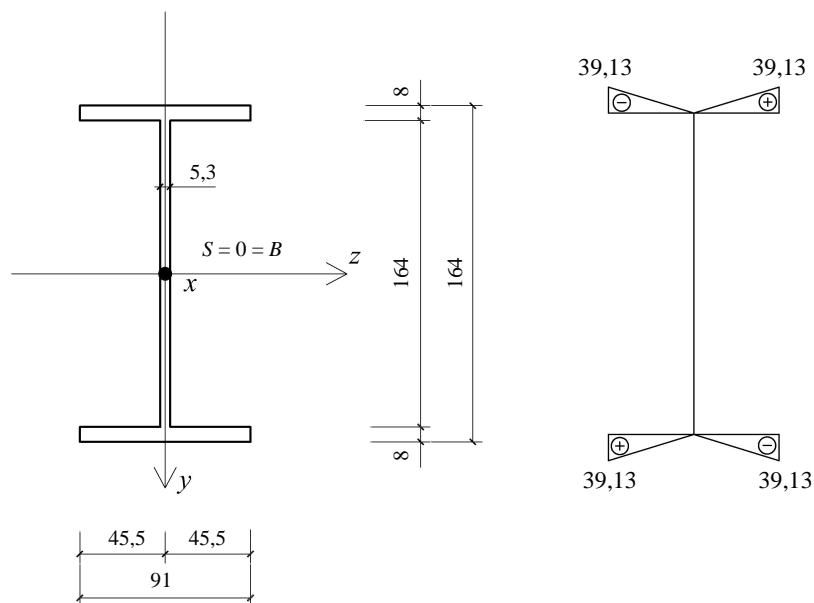
$$B_\omega(L) = P_x\omega(x_p) \Leftrightarrow \alpha''(L) = \frac{P_x\omega(x_p)}{EI_\omega(L)}$$

## 5. Rozwiązanie

Zagadnienie brzegowe teorii pręta cienkościennego rozwiązano z wykorzystaniem rozwiązania ścisłego powyższego układu równań dla założonej stałej wartości momentu  $M_{Rx}$  dla elementu będącego jednym przedziałem charakterystycznym. Rozwiązanie dla całego pręta uzyskano, wykorzystując warunki brzegowe i warunki zszycia.

W rozwiązaniu zadania optymalizacji wykorzystano wyniki określenia macierzy podatności funkcji celu w zależności od przyrostów zmiennej decyzyjnej. Ze względu na charakter ograniczenia (stała objętość) oraz nieliniową zależność elementów macierzy podatności w zależności od aktualnej geometrii optymalizowanego pręta na każdym kroku optymalizacji wyznaczano macierze podatności dla skończonych przyrostów dodatnich i ujemnych zmiennej decyzyjnej. Wybór maksymalnych elementów tak określonych macierzy wrażliwości gwarantował najszybsze osiągnięcie minimum funkcji celu. Problem wyznaczenia minimum globalnego rozwiązano na drodze zmiany wielkości przyrostów zmiennej decyzyjnej przy możliwości równoczesnego wyboru różnych punktów startu zadania optymalizacji. W przyjętym algorytmie dla rozwiązywanego zadania łatwo uzyskiwano minimum globalne niezależnie od punktu startu, co potwierdza właściwy wybór metody optymalizacji.

Na rysunku 1 przedstawiono przekrój poprzeczny dwuteownika IPE180 oraz wykresy współrzędnej wycinkowej. Osie główne centralne przekroju poprzecznego oznaczono jako  $y$  i  $z$ .



Rys. 1. Przekrój poprzeczny IPE180; wymiary w [mm], rzędne  $\omega(s)$  w [cm<sup>2</sup>]  
Fig. 1. Cross section of IPE180 beam. Dimensions in [mm], values of  $\omega(s)$  in [cm<sup>2</sup>]

## 6. Wyniki obliczeń numerycznych

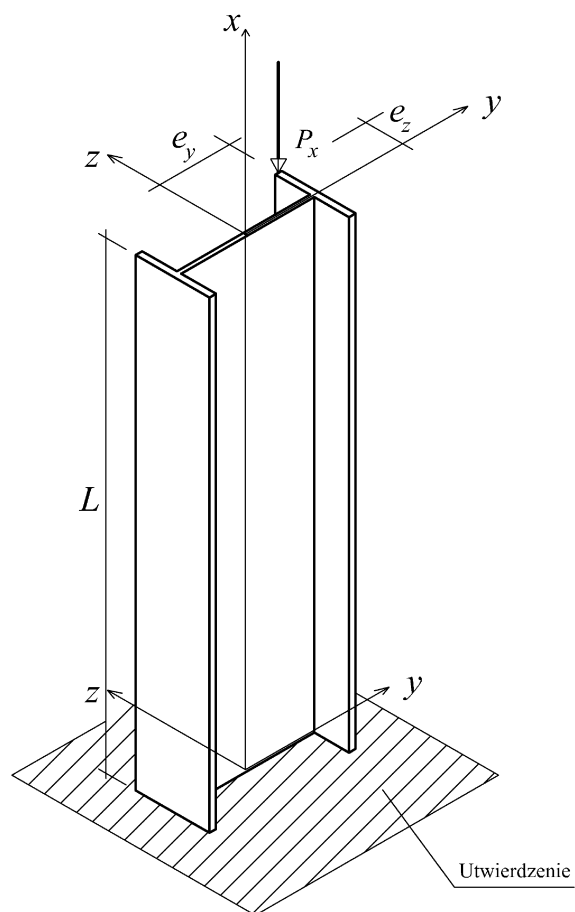
W rozwiązywanym zadaniu wstępny mimośród siły przyjęto jako stały. W obliczeniach ograniczono się do jednej (różnej od zera) składowej siły, równoległej do osi pręta przed deformacją.

Dane przyjęte do obliczeń:

- stalowy pręt wspornikowy o długości  $L = 3000$  mm, utwierdzony na jednym końcu, obciążony siłą ściskającą  $P_x = 25,0$  kN przyłożoną na krawędzi półki. Przyjęto stały mimośród ( $e_y = 86$  mm,  $e_z = 45,5$  mm). Kształt przekroju i jego wymiary początkowe podano na rys. 1, schemat statyczny na rys. 2.

Ponadto w obliczeniach przyjęto założenia:

- dokładność obliczeń – 12 (lub 24) przedziałów charakterystycznych, które mogą różnić się szerokościami półek,
- dokładność zmian szerokości półek – 1 mm,
- ograniczenia zmian szerokości półek: dolne 11 mm (przy większym zmniejszeniu szerokości półek stwierdzono wzrost naprężeń normalnych przekraczający wartości dopuszczalne). Ograniczenia górne – dowolne (przyjęto 30 mm, ale wartość maksymalna w żadnym przedziale nie została osiągnięta w procesie optymalizacji).



Rys. 2. Schemat statyczny optymalizowanego pręta

Fig. 2. Static scheme of the optimized beam

W kolejnych zadaniach optymalizacji przyjęto, że cały pręt wykonany ma być z elementów o stałych przekrojach i równych długościach, przy czym ich liczba wynosi – odpowiednio – 2, 3, 4, 12 lub 24 elementy. W pierwszym wierszu, oznaczonym symbolem „0”, podano wyniki obliczeń dla pręta o stałym przekroju (1 element) otrzymane zgodnie z teorią liniową, w drugim – z uwzględnieniem wpływu przemieszczeń na rozkład wartości sił przekrojowych. W procesie poszukiwania optymalnego rozkładu szerokości półek przekroju dwuteowego konsekwentnie uwzględniano wpływ przemieszczeń na rozkład wartości sił przekrojowych.

Wyniki obliczeń zestawiono w tab. 1. W poszczególnych kolumnach zamieszczono:

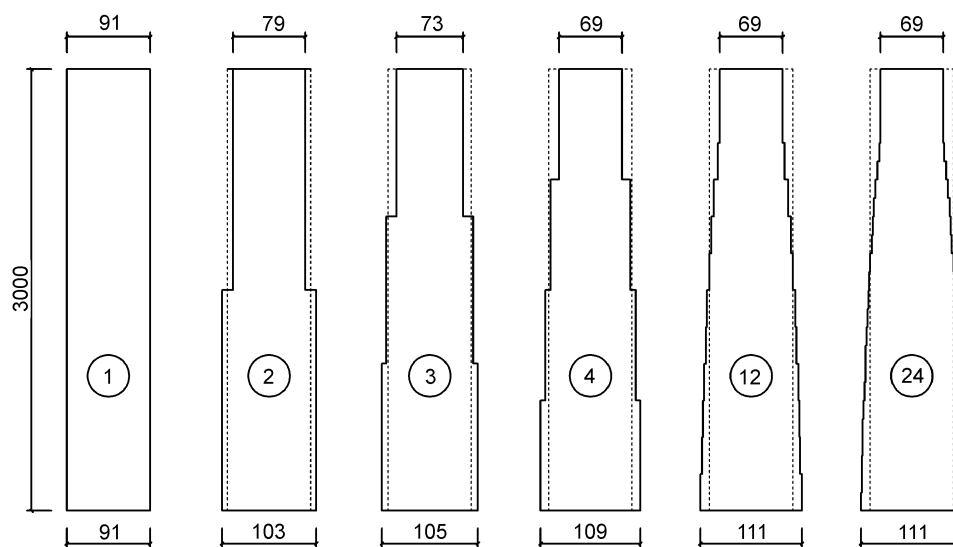
- 1 – liczba elementów o stałych przekrojach,
- 2 – wartości przyrostów dodatnich lub ujemnych szerokości półek [mm] w poszczególnych przedziałach charakterystycznych,
- 3 – wartość funkcji celu (maksymalna długość wektora całkowitego przemieszczenia [cm] z uwzględnieniem zginania i skręcania),
- 4 – wartości maksymalnych naprężeń normalnych [MPa] w przekroju, w którym występuje maksymalna wartość momentów zginających,

5 – wartości maksymalnych naprężeń normalnych [MPa] w przekroju, w którym występuje maksymalna wartość bimomentu.

Optymalny kształt półek dla różnych parametrów zadania optymalizacji przedstawiono na rys. 3 (liczby zakreślone kółkami odpowiadają liczbom elementów wpisanych w pierwszej kolumnie tabeli wyników). Wymiary podano w [mm]. W celu lepszej ilustracji wyników optymalizacji przyjęto różne skale dla długości i szerokości półki.

Tabela 1

1	2	3	4	5
0	0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0	2,5637	77,933	127,787
1	0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0	3,9717	117,638	126,941
2	6, 6, 6, 6, 6, 6, -6, -6, -6, -6, -6	3,3582	90,701	162,539
3	7, 7, 7, 7, 2, 2, 2, 2, -9, -9, -9, -9	3,1943	86,367	186,893
4	9, 9, 9, 4, 4, 4, -2, -2, -2, -11, -11, -11	3,1453	83,252	206,661
12	10, 8, 7, 6, 4, 3, 0, -2, -5, -9, -11, -11	3,0897	77,858	206,592
24	10, 9, 9, 8, 8, 7, 6, 5, 5, 4, 3, 2, 1, 0, -2, -3, -4, -6, -8, -10, -11, -11, -11	3,0408	77,556	206,914



Rys. 3. Optymalny kształt półek pręta dwuteowego dla różnych parametrów zadania optymalizacji  
Fig. 3. Optimal shape of the beam's shelves for different parameters of optimization

## 7. Uwagi końcowe

Zastosowanie w projektowaniu inżynierskim teorii prętów cienkościennych stanowi wciąż trudność samą w sobie. Na ogół dobiera się takie przekroje oraz tak konstruuje kształt ramy, aby na mocy samych założeń wyeliminować kłopotliwe rachunki. Tymczasem łatwo wykazać dużą wrażliwość deformacji konstrukcji cienkościennych zarówno na zaburzenia warunków brzegowych, jak i różnego rodzaju imperfekcje, co świadczy o możliwości łatwego sprowokowania istotnych niezgodności z założeniami projektowymi i w konsekwencji wystąpienia znaczących rozbieżności zachowania się konstrukcji w stosunku do wyników otrzymanych w procesie projektowania. Z niniejszego artykułu wynika, że nie tylko możliwe jest uwzględnienie tych imperfekcji, ale równocześnie podjęcie próby optymalnego kształtowania przekroju poprzecznego zastosowanych prętów cienkościennych, które chociaż jest żmudne, jednak w dobie łatwego wykorzystania mocy obliczeniowej komputerów daje efektywne wyniki.

Na podstawie wykonanych obliczeń można także stwierdzić, że niedopuszczalne jest stosowanie teorii liniowej w cienkościennych prętach ściskanych; uwzględnienie wpływu przemieszczeń na rozkład wartości sił przekrojowych można łatwo uzyskać w wyniku iteracji – dość szybka zbieżność powoduje, że w praktycznych obliczeniach wystarczy ograniczyć się do kilku iteracji (w prezentowanym przykładzie już czwarta iteracja dawała wyniki z dokładnością ponad 98%). Równocześnie ograniczenie poszukiwania optymalnego kształtu do dwóch elementów o stałych szerokościach półek daje już ponad 65% zysk sztywności w stosunku do wartości odpowiadającej 24 elementom (dla 3 elementów – 83%, dla 4 – 89% itd.). Odpowiada to całkowitemu wzrostowi sztywności – odpowiednio – o 15% (19% i 21%), czemu jednak towarzyszy znaczny wzrost maksymalnych naprężeń normalnych – odpowiednio – o 25% (44% i 59%).

Autorzy zdają sobie również sprawę z faktu, że przed skierowaniem konkretnej propozycji dla projektantów, obliczenia numeryczne muszą być wykonane dla wielu zadań oraz zweryfikowane doświadczalnie. Stanowi to ważny bodziec do podejmowania dalszych badań w tym zakresie.

## Literatura

- [1] Własow W.Z., *Tonkostiennyje uprugije stierżni*, Gos. Izd. Fiz. Mat. Literat., Moskwa 1959.
- [2] Weiss S., Giżejowski M., *Stateczność konstrukcji metalowych. Układy prętowe*, Arkady, Warszawa 1991.
- [3] Piechnik S., *Pręty cienkościenne otwarte*, ZGPK, Kraków 2000.
- [4] Kisiel A., Piechnik S., Sikoń M., Struś S., *Weryfikacja doświadczalna hipotez Własowa w teorii prętów cienkościennych*, XIX Symp. MECS, Jachranka 2000.
- [5] Laskowski H., Mikulski L., *Optymalne kształtowanie stalowej ramy portadowej*, „Inżynieria i Budownictwo” 12/2005.