

ANDRZEJ TRUTY*

SZTYWNOŚĆ GRUNTÓW W ZAKRESIE MAŁYCH ODKSZTAŁCEŃ. ASPEKTY MODELOWANIA NUMERYCZNEGO

SMALL STRAIN STIFFNESS OF SOILS. NUMERICAL MODELING ASPECTS

Streszczenie

W artykule omówiono problematykę analizy stanów granicznych użyteczności w zagadnieniach interakcji konstrukcji budowlanych z podłożem ze szczególnym uwzględnieniem silnych zmian sztywności gruntów w zakresie małych odkształceń tj. rzędu $10^{-6} \div 10^{-3}$. Szczegółowo przedstawiono sformułowanie teoretyczne modelu konstytutywnego "Hardening Soil-small" w jego wersji referencyjnej opublikowanej w pracy Benz [3], dokonane modyfikacje, oraz szczegóły jego implementacji, wykonanej przez autora, w programie MES Z_Soil.PC v2009.

Słowa kluczowe: grunty, modele konstytutywne, interakcja konstrukcji z podłożem

Abstract

The serviceability limit state analysis for soil-structure interaction problems, concerned with a strong soil stiffness variation in the range of low strains, i.e. $10^{-6} \div 10^{-3}$, is the subject of this paper. The theoretical formulation of the Hardening Soil-small constitutive model for soils, in its reference form proposed by Benz [3], certain modifications, and details of the implementation, made by the author of this paper in the FEM program Z_Soil.PC v2009, are presented.

Keywords: soils, constitutive models, soil-structure interaction

* Dr hab. inż. prof. PK Andrzej Truty, Zakład Podstaw Konstrukcji Inżynierskich, Instytut Geotechniki, Wydział Inżynierii Środowiska, Politechnika Krakowska.

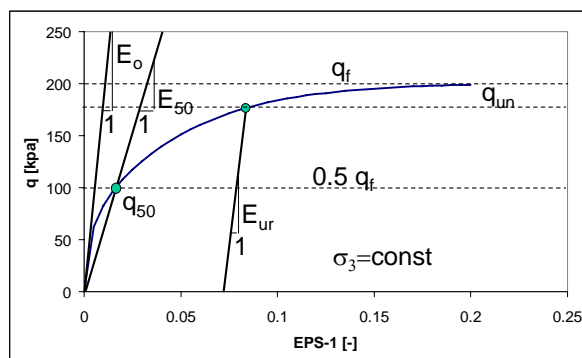
1. Wstęp

Problem zagadnienia interakcji konstrukcji budowlanych z gruntem, realizowanych coraz częściej w bliskim sąsiedztwie istniejącej już zabudowy, stawia przed projektantem dwa bardzo trudne zadania, a mianowicie wyznaczenie obwiedni wielkości sił wewnętrznych w elementach konstrukcji (np. ścianach szczelinowych, ściankach szczelnych) oraz oszacowanie wpływu analizowanej inwestycji na obiekty sąsiadujące. Zwłaszcza to ostatnie zadanie jest nie lada wyzwaniem albowiem wymaga zastosowania wyrafinowanych narzędzi modelowania numerycznego włączając tu złożony model konstytutywny ośrodka gruntowego, ewentualny efekt sprzężenia deformacji i przepływu wód gruntowych spowodowany czasowym odwadnianiem wykopu, problem kontaktu konstrukcji podatnej z podłożem oraz wierne odwzorowanie całego procesu budowy niejednokrotnie w skali czasu rzeczywistego. Pominiecie jednego z tych istotnych czynników może prowadzić do wręcz absurdalnych wyników. Stąd też zasadniczym celem tego artykułu jest przybliżenie problematyki sztywności gruntów i jej znaczenia dla zagadnień interakcji konstrukcji z podłożem oraz przedstawienie jednego z prostszych modeli gruntu, który z powodzeniem można zastosować do tej klasy zagadnień. Modelem tym jest tzw. model Hardening Soil (HS) oraz jego wersja rozszerzona Hardening Soil-small (HS-small), zaimplementowane wcześniej w programie Plaxis, a obecnie również i w najnowszej wersji programu Z_Soil.PC v2009.

2. Sztywność gruntów w zakresie małych odkształceń

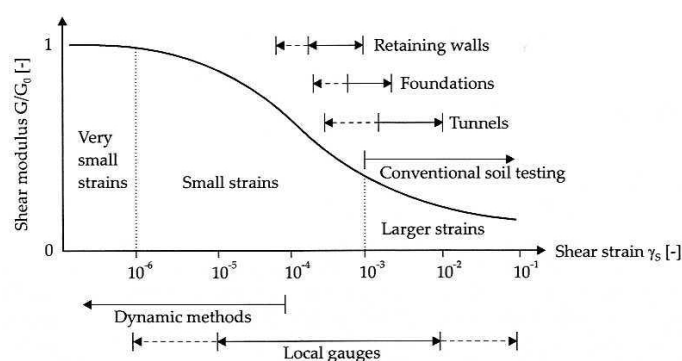
Celem nakreślenia problematyki sztywności gruntów wprowadźmy pojęcia wybranych wartości modułów sztywności będących wynikiem interpretacji charakterystyk ścinania $q - \varepsilon_1$ otrzymywanych z testów trójosiowych prowadzonych w warunkach swobodnego drenażu. Wynik takiego testu dla ustalonej wartości naprężenia konsolidującego $\sigma_3 = \text{const}$ przedstawiono na Rys. 1. Na rysunku tym pokazano interpretacje dla trzech wartości modułów tj. tzw. modułu w zakresie bardzo małych odkształceń E_o , modułu odciążenia-obciążenia wtórnego E_{ur} oraz siecznego modułu sztywności E_{50} wyznaczanego jako tangens kąta nachylenia prostej poprowadzonej przez wierzchołek układu $q - \varepsilon_1$ oraz punkt przecięcia prostej $q = \frac{q_f}{2}$ z charakterystyką ścinania. Wyznaczenie wartości modułu E_o nie jest możliwe przy zastosowaniu standardowego aparatu trójosiowego a jednym ze sposobów jest pomiar prędkości propagacji fali ścinania bezpośrednio po zakończeniu procesu izotropowej konsolidacji, przeprowadzenie badań z wykorzystaniem kolumn rezonansowych, badania trójosiowe z zastosowaniem elementów typu "bender" czy wreszcie badania polowe z wykorzystaniem sondy SCPT lub metody sejsmiki powierzchniowej[2].

Zależność siecznego modułu ścinania G od różnicy odkształceń $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$, lub analogicznie zależność siecznego modułu Younga E od wartości odkształcenia osiowego ε_1 przyjmują charakterystyczny kształt określany mianem krzywej typu S . Atkinson w swej pracy [1] (por. Rys. 2) pokazał w jakich zakresach odkształceń pracują różnego typu konstrukcje budowlane współpracujące z gruntem. Analizując wspomniany wykres łatwo zauważyć można, że np. w przypadku konstrukcji typu ściany szczelinowe, stosowane w modelach uproszczonych, takich jak np. Mohra-Coulomba (M-C), wartości modułów sztywności powinny być wyższe od tych stosowanych dla zagadnienia fundamentów płytkich. Co więcej sztywność gruntów na ogół dość silnie zależy od stanu naprężeń efektywnych *in situ*. Te dwa podsta-



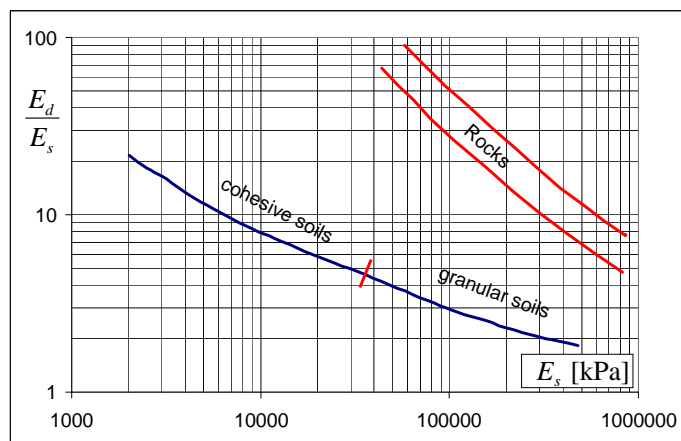
Rys. 1. Interpretacja różnych wartości modułów sztywności
Fig. 1. Interpretation of different stiffness moduli

wowe efekty nie mają bezpośredniego odzwierciedlenia w jakże chętnie stosowanej przez inżynierów normie PN-81/B-03020, a to z uwagi na fakt, że łatwiej jest przecież odczytać "uniwersalne" wartości modułów sztywności z tabelki niż trudzić się i je po prostu wyznaczać. Tematyka ta była i jest do tej pory poruszana w wielu artykułach i wystąpieniach konferencyjnych potwierdzając istotę problemu. Należy tu podkreślić iż w wielu przypadkach badacze starają się tak dobrać wartości parametrów w modelach konstytutywnych gruntów aby dostać jak najlepsze dopasowanie w zakresie odkształceń aż do 20 %. Jest to oczywisty nonsens albowiem po pierwsze charakter deformacji w teście trójosiowym nie jest w żaden sposób jednorodny, z uwagi na licznie występujące pasma koncentracji odkształceń nieodwracalnych, po wtóre w stanach odległych od stanu granicznego, a z takimi na ogół mamy do czynienia w problemach interakcji grunt-konstrukcja, zdecydowana większość współpracującej masy gruntu odkształca się w zakresie odkształceń zdecydowanie poniżej 1 %.



Rys. 2. Diagram Atkinsona [1]
Fig. 2. Atkinson's diagram [1]

Analizując główne czynniki decydujące o przebiegu krzywej "S", Benz [3] w swej pracy doktorskiej wymienił w przypadku gruntów sypkich wielkość naprężenia średniego, nato-



Rys. 3. Zależność $\frac{E_d}{E_s} - E_s$ wg Alpiana (za Benzem[3])

Fig. 3. Relation $\frac{E_d}{E_s} - E_s$ by Alpan (after Benz [3])

miast w przypadku gruntów spoistych wskaźnik plastyczności.

Interesujący wykres uzależniający stosunek tzw. modułu "dynamicznego" E_d , czyli modułu w zakresie bardzo małych odkształceń ($E_d = E_o$), do modułu statycznego E_s , rozumianemu jako moduł sieczny (na wykresie $q - \epsilon_1$) dla wartości odkształcenia osiowego rzędu $\epsilon_1 \approx 10^{-3}$ został opublikowany przez Alpiana (za Benzem [3]). Diagram ten (por. Rys. 3) pokazuje, że stosunek $\frac{E_d}{E_s}$ zmienia się praktycznie od wartości 2 dla żwirów aż do wartości 10 odpowiednio dla plastycznych gruntów spoistych.

3. Główne elementy modelu HS oraz HS-small

Model HS i jego wersja rozszerzona HS-small zostały zaprojektowane celem odwzorowania następujących efektów makroskopowych jakie wykazują grunty poddane monotonicznym ścieżkom obciążenia, a mianowicie zależności sztywności od stanu naprężeń efektywnych, plastycznego płynięcia, zmiany objętości podczas płynięcia plastycznego oraz silnej zmiany sztywności wraz ze wzrostem amplitudy odkształcenia dewiatorowego, szczególnie w zakresie tzw. małych odkształceń tj. $\gamma = 10^{-6} \div \gamma = 10^{-3}$. Ten ostatni efekt jest niesłychanie istotny z punktu widzenia problematyki interakcji konstrukcja-grunt a zupełnie niemożliwy do odwzorowania przez klasyczne modele gruntu takie jak model Mohra-Coulomba czy Modified Cam-Clay. Pierwotna wersja modelu, będąca sprężysto-plastycznym ekwiwalentem hiposprężystego modelu Duncana-Changa, została zaproponowana przez Schanza [7], następnie została zmodyfikowana poprzez wprowadzenie mechanizmu objętościowego (powierzchni typu Cap) przez Schanza, Vermeera i Bonniera [8] oraz wzbogacona o efekt zmiany sztywności w zakresie małych odkształceń przez Benza [3] w 2006 r. Opis modelu HS/HS-small zawarty w niniejszym artykule, bazuje na pracy Benza [3]. W stosunku do wersji referencyjnej

modelu w niniejszej pracy zaproponowano dwie modyfikacje poprzez wprowadzenie uproszczonej formuły dla prawa dylatacji (dla wersji HS-small) oraz korektę prawa wzmocnienia dla naprężenia prekonsolidacji p_c w mechanizmie objętościowym. Model HS/HS-small należy do klasy wielopowierzchniowych modeli sprężysto-plastycznych ze wzmocnieniem typu izotropowego. Proces plastycznego płynięcia i towarzyszącego mu wzmocnienia kontrolowany jest zasadniczo przez dwa główne mechanizmy plastyczne zwane dalej odpowiednio mechanizmami ścinania oraz objętościowym. Są one zapisane standardowo poprzez wyspecyfikowanie równania powierzchni plastyczności, prawa płynięcia plastycznego oraz prawa wzmocnienia.

Konwencja znakowania składowych stanu naprężenia w programie Z_Soil zakłada, że naprężenia rozciągające są traktowane jako dodatnie, w związku z tym aby usprawnić przejście z notacji używanej w pracy Benza należy wykonać następujące podstawienia: $\underline{\sigma}_1 = -\sigma_3$, $\underline{\sigma}_2 = -\sigma_2$ oraz $\underline{\sigma}_3 = -\sigma_1$.

3.1. Mechanizm ścinania

Powierzchnia plastyczności zdefiniowana jest następującym wzorem

$$f_1 = \frac{q_a}{E_{50}} \frac{q}{q_a - q} - 2 \frac{q}{E_{ur}} - \gamma^{PS} = 0 \quad (1)$$

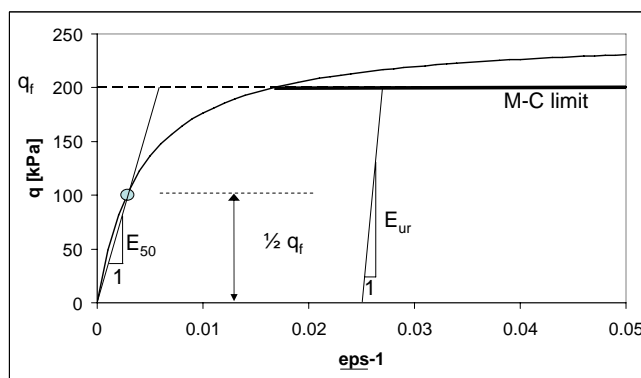
gdzie

$$q_f = \frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi} (\underline{\sigma}_3 + c \cot \phi) = \frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi} (-\sigma_1 + c \cot \phi) \quad (2)$$

$$q_a = \frac{q_f}{R_f} \quad (3)$$

$$q = \underline{\sigma}_1 - \underline{\sigma}_3 = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (4)$$

Współczynnik R_f ($R_f < 1$) powoduje, że asymptota hiperboli aproksymującej krzywą $q - \epsilon_1$ jest przesunięta w górę w stosunku do niszczącej wartości naprężenia dewiatorowego q_f . Stąd też równanie f_1 ważne jest tylko dla $q \leq q_f$. Obrazuje to Rys. 4.



Rys. 4. Hiperboliczna aproksymacja charakterystyki ścinania $q - \epsilon_1$
Fig. 4. Hyperbolic approximation of shear characteristic $q - \epsilon_1$

Równanie potencjału plastycznego, wykorzystujące prawo dylatacji wg Rowe'a [6], przyjmuje następującą postać

$$g_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \psi_m = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \psi_m \quad (5)$$

gdzie

$$\sin \psi_m = D \frac{\sin \phi_m - \sin \phi_{cs}}{1 - \sin \phi_m \sin \phi_{cs}} \quad (6)$$

$$\sin \phi_m = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3 + 2c \cot \phi} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{-(\sigma_1 + \sigma_3) + 2c \cot \phi} \quad (7)$$

$$\sin \phi_{cs} = \frac{\sin \phi - \sin \psi}{1 - \sin \phi \sin \psi} \quad (8)$$

W powyższych wyrażeniach ϕ_m jest wartością zmobilizowanego kąta tarcia wewnętrznego natomiast ϕ_{cs} jest wartością kąta tarcia wewnętrznego w stanie krytycznym.

W modelu HS korekcie podlega efekt plastycznej ścisłości wg reguły

$$\text{dla } \sin \phi_m < \sin \phi_{cs} \rightarrow D = 0 \quad (9)$$

$$\text{dla } \sin \phi_m \geq \sin \phi_{cs} \rightarrow D = 1 \quad (10)$$

z kolei w modelu HS-small reguła ta jest nieco inna

$$\text{dla } \sin \phi_m < \sin \phi_{cs} \rightarrow D = 0.25 \quad (11)$$

$$\text{dla } \sin \phi_m \geq \sin \phi_{cs} \rightarrow D = 1 \quad (12)$$

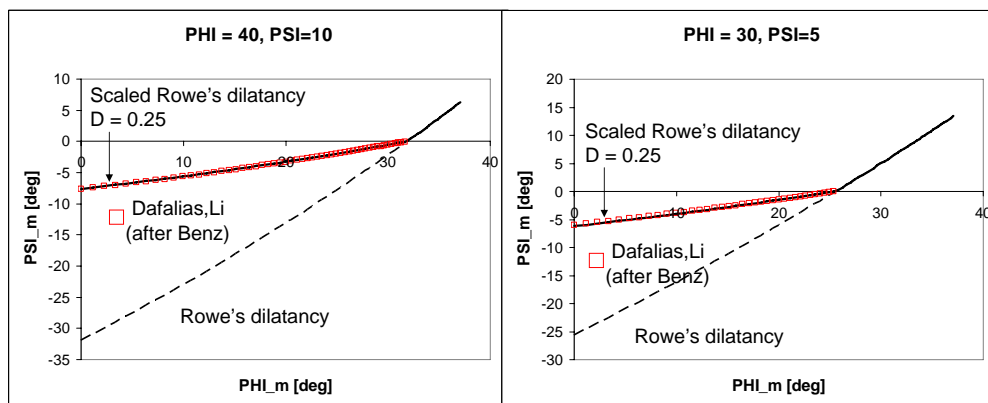
W referencyjnej wersji modelu HS-small wg Benz a zastosowano bardzo skomplikowane prawo dylatacji zapożyczone z prac Dafaliasa i Li[3]. Analizując wykresy na Rys. 5 można zauważyć, że praktycznie identyczny efekt otrzymuje się skalując prawo Rowe'a przez współczynnik $D = 0.25$ co zdecydowanie upraszcza implementację modelu.

Prawo wzmocnienia dla parametru γ^{PS} zapisane jest następująco:

$$d\gamma^{PS} = h_i d\lambda_1 \left(\frac{\partial g_1}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_2} - \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_3} \right) = d\lambda_1 \quad (13)$$

gdzie $d\lambda_1$ jest mnożnikiem plastycznym dla mechanizmu ścinania. Funkcja h_i przyjmuje wartość $h_i = 1$ w modelu HS natomiast w modelu HS-small jej postać zostanie podana w dalszej części artykułu.

Zaproponowana przez Schanza postać równania powierzchni plastyczności wraz z prawem wzmocnienia dla parametru γ^{PS} pozwala otrzymywać hiperboliczne zależności $q - \varepsilon_1$ w testach trójosiowego ściskania w warunkach typu drained. W związku z tym w trakcie symulacji takiego testu powierzchnia plastyczności ewoluuje, a kolejne jej postaci, dla rosnących wartości parametru wzmocnienia γ^{PS} , pokazano na Rys. 6. Aby uwzględnić przypadek gdy dwie wartości naprężeń są sobie równe Benz wprowadził dodatkowy warunek plastyczności o identycznej konstrukcji jak równanie (1) zastępując σ_3 poprzez σ_2 . Jest to istotna niedogodność i w niniejszej pracy wykorzystany został algorytm, zaproponowany wcześniej przez Runnesona i Larssona [5], polegający na dodaniu dwóch dodatkowych równań więzów w



Rys. 5. Przeskalowane prawo dylatacji Rowe'a w obszarze kontrakcji
Fig. 5. Scaled Rowe's dilatancy law in contractant domain

postaci $f_4 = \sigma_2 - \sigma_1$ oraz $f_5 = \sigma_3 - \sigma_2$, który rozwiązuje wszelkie problemy przecięć kilku powierzchni plastyczności jeżeli procedura powrotu na powierzchnię plastyczności zdefiniowana jest w przestrzeni naprężeń głównych. Należy tu dodać, że mechanizm ścinania jest dodatkowo kontrolowany przez warunek Mohra-Coulomba i opcjonalnie warunek Rankina.

3.2. Mechanizm objętościowy

Powierzchnia plastyczności dla mechanizmu objętościowego ma kształt zdeformowanej elipsydy w płaszczyźnie dewiatorowej, a równanie ją opisujące przyjmuje następującą postać

$$f_2 = \frac{\tilde{q}^2}{M^2} + p^2 - p_c^2 \quad (14)$$

$$\tilde{q} = \sigma_1 + (k^{-1} - 1)\sigma_2 - k^{-1}\sigma_3 \quad (15)$$

$$k = \frac{3 - \sin\phi}{3 + \sin\phi} \quad (16)$$

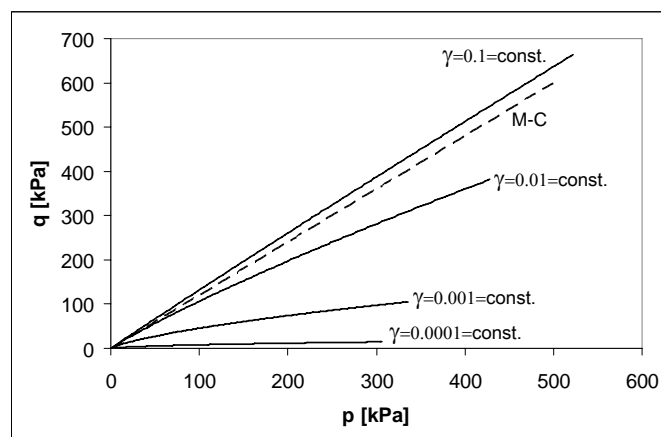
Prawo płynięcia plastycznego przyjęte jest jako stowarzyszone stąd też potencjał plastyczny wyrażony jest jak niżej

$$g_2 = \frac{\tilde{q}^2}{M^2} + p^2 \quad (17)$$

Zmodyfikowane prawo wzmocnienia (w wersji modelu Benza parameter p_c po prawej stronie równania zastąpiony jest naprężeniem średnim p) zapisane jest następująco

$$d p_c = h_i d\lambda_2 2H \left(\frac{p_c + c \cot\phi}{\sigma^{\text{ref}} + c \cot\phi} \right)^m p \quad (18)$$

Występujące w równaniach (15)(18) parametry M i H decydują w znacznej mierze o wielkości generowanego przez model współczynnika rozporu bocznego w stanie normalnej konsolidacji K_o^{NC} oraz wartościach stycznego modułu edometrycznego przy różnych poziomach naprężenia pionowego.



Rys. 6. Ewolucja powierzchni plastyczności mechanizmu dewiatorowego
Fig. 6. Evolution of the deviatoric yield surface

3.3. Dodatkowe mechanizmy plastyczne

Mechanizm ścinania kontrolowany jest dodatkowo przez warunek plastyczności M-C oraz opcjonalnie przez warunek Rankina. Warunek plastyczności M-C i odpowiadający mu potencjał plastyczny (analogiczny jak dla mechanizmu ścinania) przyjmują następujące postaci

$$f_1^* = \sigma_1 - \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \sigma_3 - \frac{2c \cos \phi}{1 + \sin \phi} = 0 \quad (19)$$

$$k = \frac{3 - \sin \phi}{3 + \sin \phi} \quad (20)$$

$$g_1^* = g_1 \quad (21)$$

Z kolei komplet równań dla mechanizmu Rankina zapisany jest jak niżej

$$f_3 = \sigma_1 - f_t \quad (22)$$

$$g_3 = f_3 \quad (23)$$

gdzie f_t jest zadaną wartością wytrzymałości na rozciąganie (domyślna wartość $f_t = 0$).

3.4. Zależność parametrów sztywności od poziomu naprężenia

Podstawowym efektem obserwowanym w badaniach eksperymentalnych, a także i polowych (np. sondowanie CPT), jest zależność modułów sztywności G lub E od poziomu naprężenia. Generalnie dla większych wartości naprężenia (bądź to naprężenia średniego lub minimalnego naprężenia głównego) sztywność jest większa chociaż. W związku z tym bieżące wartości modułów sztywności w modelach HS i HS-small wyrażone są poprzez następujące prawa potęgowe

$$E_{ur} = E_{ur}^{\text{ref}} \left(\frac{\sigma_3^* + c \cot \phi}{\sigma^{\text{ref}} + c \cot \phi} \right)^m = E_{ur}^{\text{ref}} \left(\frac{-\sigma_1^* + c \cot \phi}{\sigma^{\text{ref}} + c \cot \phi} \right)^m \quad (24)$$

$$E_{50} = E_{50}^{\text{ref}} \left(\frac{\sigma_3^* + c \cot \phi}{\sigma^{\text{ref}} + c \cot \phi} \right)^m = E_{50}^{\text{ref}} \left(\frac{-\sigma_1^* + c \cot \phi}{\sigma^{\text{ref}} + c \cot \phi} \right)^m \quad (25)$$

$$E_o = E_o^{\text{ref}} \left(\frac{\sigma_3^* + c \cot \phi}{\sigma^{\text{ref}} + c \cot \phi} \right)^m = E_o^{\text{ref}} \left(\frac{-\sigma_1^* + c \cot \phi}{\sigma^{\text{ref}} + c \cot \phi} \right)^m \quad (26)$$

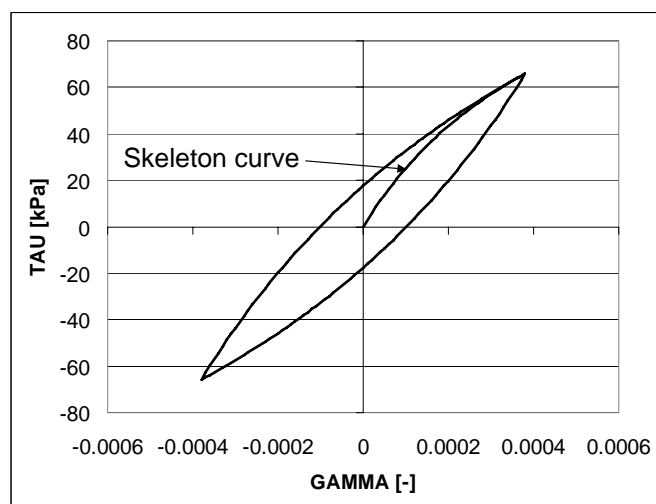
gdzie

$$\sigma_3^* = -\sigma_1^* = \max(\sigma_3, \sigma_L) = \max(-\sigma_1, \sigma_L) \quad (27)$$

Wprowadzenie wielkości σ_3^* w powyższych równaniach ma ograniczyć degradację sztywności dla bardzo małych wartości naprężenia σ_3 .

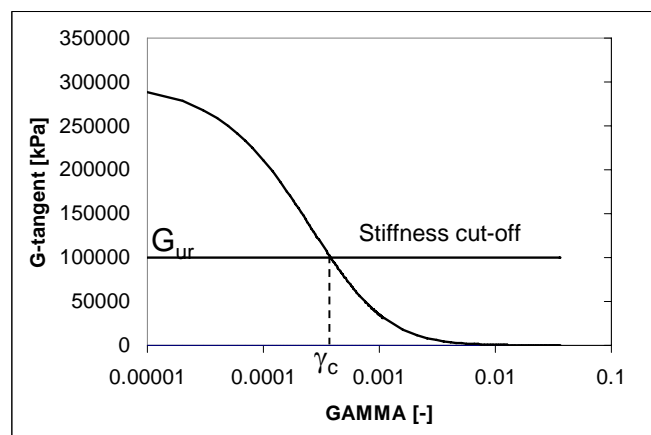
3.5. Rozszerzenie modelu HS do wersji HS-small

Celem uwzględnienia efektu silnej zmiany sztywności w zakresie małych odkształceń



Rys. 7. Prawo Masinga
Fig. 7. Masing rule

Następnie, tzw. punkty nagłego zwrotu ścieżek naprężeń/odkształceń wykrywane są w przestrzeni odkształceń posługując się tensorem historii odkształcenia H_{ij} (drugiego rzędu)



Rys. 8. Zależność stycznego modułu $G(\gamma)$
Fig. 8. $G(\gamma)$ curve (tangent stiffness)

oraz przyrostem bieżącego dewiatora odkształceń. Prawo ewolucji tego tensora jest dość złożone i z uwagi na ograniczoną objętość artykułu nie jest tu zamieszczone. Niestety, schemat implementacji procedury modyfikacji tensor H_{ij} , podany w pracy Benza, zawiera istotny błąd skutecznie uniemożliwiający efektywną implementację komputerową. Poprawiona wersja tego algorytmu podana jest w obszernym raporcie autora [10] będącym składowym elementem manuala teoretycznego programu Z_Soil.PC v2009. Następne modyfikacje wynikają z wprowadzenia funkcji h_i do praw wzmocnienia dla parametrów p_c i γ^{PS} . Jeśli przeanalizujemy równania (13) i (18) to zauważymy że celem zwiększenia sztywności materiału w zakresie małych odkształceń funkcja h_i musi przyjmować wartości $h_i > 1$. Wartość tej funkcji zmierza do jedności w momencie gdy maksymalna wartość ekwiwalentnego odkształcenie dewiatorowego γ_{hist} przekracza pewną wartość progową γ_c odpowiadającą redukcji wartości modułu G do wartości G_{ur} (lub odpowiednio modułu E do wartości E_{ur}). Wprowadzenie funkcji h_i do praw wzmocnienia jest niezbędne do prawidłowej aproksymacji krzywych ($G - \gamma$ lub $E - \epsilon_1$) w przypadku gdy ścieżki naprężeń mają swój początek bezpośrednio na powierzchni plastyczności.

Jak już wspomniano, nieliniowe związki naprężenie-odkształcenie w zakresie małych odkształceń opisane są formułą Hardina i Drnevicha, generującą zamknięte pętle histerezy (tzw. prawo Masinga) dla ustalonej wartości amplitudy naprężenia stycznego w teście cyklicznego obciążenia (por. Rys. 7). Formuła ta, zapisana dla bieżącej wartości siecznego modułu G , w odniesieniu do przypadku obciążenia pierwotnego, jest następująca

$$G_s = G_o \frac{1}{1 + a \frac{\gamma_{hist}}{\gamma_{0.7}}} \quad (28)$$

gdzie $a = 0.385$. Aby wykorzystać tę formułę dla przypadku odciążenia lub obciążenia wtórnego wystarczy podwoić wartość amplitudy odkształcenia $\gamma_{0.7}$ występującą w mianowniku. Wykorzystując powyższe równanie można wyprowadzić następujące zależności dla stycznego modułu G oraz progowej wartości odkształcenia γ_c (z warunku $G = G_{ur}$).

$$G = G_o \left(\frac{\gamma_{0.7}}{\gamma_{0.7} + a \gamma_{\text{hist}}} \right)^2 \quad \text{dla } \gamma_{\text{hist}} \leq \gamma_c \quad (29)$$

$$\gamma_c = \frac{\gamma_{0.7}}{a} \left(\sqrt{\frac{G_o}{G_{\text{ur}}}} - 1 \right) \quad (30)$$

Parameter materiałowy $\gamma_{0.7}$ określa amplitudę odkształcenia dewiatorowego γ_{hist} , dla której sieczny moduł G osiąga 70 % wartości modułu G_o .

Wracając do funkcji h_i Benz zaproponował następujące formuły

$$h_i = G_m^{1 + \frac{E_{\text{ur}}}{2E_{50}}} = G_m^{1 + \frac{E_{\text{ur}}^{\text{ref}}}{2E_{50}^{\text{ref}}}} \quad (31)$$

$$G_m = \frac{G_{\text{min}}}{G_{\text{ur}}} \quad (32)$$

$$G_{\text{min}} = \frac{G_o}{1 + a \frac{\gamma_{\text{hist}}^{\text{max}}}{\gamma_{0.7}}} \quad (33)$$

Podstawiając G_{min} do równania na G_m otrzymujemy następujące wyrażenie

$$G_m = \frac{G_o/G_{\text{ur}}}{1 + a \frac{\gamma_{\text{hist}}^{\text{max}}}{\gamma_{0.7}}} = \frac{E_o^{\text{ref}}/E_{\text{ur}}^{\text{ref}}}{1 + a \frac{\gamma_{\text{hist}}^{\text{max}}}{\gamma_{0.7}}} \quad (34)$$

Jak łatwo zauważyć po to by wyznaczyć wartość funkcji h_i rejestrowana być musi maksymalna wartość ekwiwalentnego odkształcenia dewiatorowego $\gamma_{\text{hist}}^{\text{max}}$ w trakcie całej historii obciążenia.

3.6. Definicja wartości początkowych dla parametrów wzmocnienia p_c i γ^{PS}

Ustawienie wartości początkowych dla parametrów wzmocnienia p_c oraz γ^{PS} jest problemem o dość istotnym stopniu złożoności i niebagatelnym wpływie na wyniki obliczeń. Przyjmując, że znamy stan naprężeń *in situ* σ_o musimy dodatkowo zdefiniować bądź to wartość współczynnika prekonsolidacji OCR, rozumianego w tym przypadku jako stosunek największego w historii naprężenia pionowego do jego wartości aktualnej, bądź też wielkość największego w historii obciążenia powierzchniowego q^{POP} jakie przyłożone było do powierzchni gruntu. Dodatkowo jeszcze musimy określić jaka była wartość współczynnika rozporu bocznego K_o^{SR} odpowiadająca maksymalnej wartości OCR bądź q^{POP} . Można przyjąć że wartość współczynnika K_o^{SR} dla gruntów konsolidowanych normalnie (wzdłuż linii K_o^{NC}) można określić przybliżoną formułą Jaky

$$K_o^{\text{SR}} = K_o^{\text{NC}} = 1 - \sin \phi \quad (35)$$

Z kolei dla gruntów konsolidowanych izotropowo, tak jak to ma miejsce w testach trójosiowych, $K_o^{\text{SR}} = 1$.

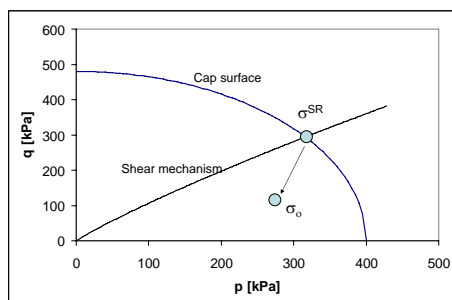
Po to by w dowolnym punkcie w podłożu, w przypadku gruntów konsolidowanych wzdłuż linii K_o^{NC} , móc wyznaczyć wartości p_c i γ^{PS} przyjmujemy, że w historii obciążenia, wtedy gdy $OCR = OCR_{max}$ bądź $q^{POP} = q_{max}^{POP}$, punkt SR (por. Rys. 9) należy do dwóch aktywnych powierzchni plastyczności f_1 oraz f_2 . Hipoteza ta ma swoje teoretyczne uzasadnienie z uwagi na fakt, że punkty przecięć powierzchni plastyczności są tzw. atraktorami ścieżek naprężeń. Procedura wyznaczenia stanu naprężeń w punkcie SR jest następująca

$$\sigma_y^{SR} = \sigma_{yo} OCR \quad \text{lub} \quad \sigma_y^{SR} = \sigma_{yo} + q^{POP} \quad (36)$$

$$\sigma_x^{SR} = \sigma_y^{SR} K_o^{SR} \quad (37)$$

$$\sigma_z^{SR} = \sigma_y^{SR} K_o^{SR} \quad (38)$$

$$(39)$$



Rys. 9. Wyznaczanie parametrów początkowych γ_o^{PS} i p_{co}
Fig. 9. Estimation of initial state variable γ_o^{PS} and p_{co}

Znając stan naprężeń w punkcie SR wartości początkowe γ_o^{PS} i p_{co} wyznaczamy z równań powierzchni plastyczności f_1 oraz f_2 .

3.7. Implementacja modelu w programie MES Z_Soil.PC v2009

Zaproponowana przez autora tego artykułu procedura rozwiązująca problem tzw. "powrotu na powierzchnię plastyczności" (w języku angielskim nazywana jako "closest point projection algorithm" CPP) sformułowana została w przestrzeni naprężeń głównych bazując na pomysły Larrsona i Runnesona [5] zastosowanym do modeli plastycznych typu Mohra-Coulomba. To podejście możliwe jest jednak tylko wtedy gdy wartość modułu sprężystego nie zależy od stanu naprężenia. Aby wyeliminować tę niedogodność przyjęto, że wartość modułu sprężystego wyznaczana jest dla stanu naprężenia w punkcie pośrednim tj. $\sigma^* = (1 - \theta)\sigma_N + \theta \sigma_{N+1}^{i-1}$. Stan naprężenia σ_N odpowiada ostatniej konfiguracji równowagi, natomiast σ_{N+1}^{i-1} konfiguracji aktualnie iterowanej ale z przesunięciem o jedna iterację wstecz. Dla uzyskania zbieżnego schematu numerycznego należy przyjąć $\theta = 0.5$.

Podstawową trudnością w sformułowaniu schematu iteracyjnego CPP jest przyjęcie odpowiedniego zbioru zmiennych niezależnych oraz zmiennych zależnych. W omawianej implementacji przyjęto następujący wektor zmiennych niezależnych

$$\mathbf{v} = \{ \Delta \tilde{\epsilon}_{N+1}^p, \Delta \lambda_{N+1}, p_{cN+1}, \gamma_{N+1}^{PS}, \sin \psi_{mN+1} \}^T \quad (40)$$

Z kolei wektor zmiennych zależnych zbudowany jest ze składowych naprężeń głównych $\tilde{\sigma}_{N+1} (\Delta \tilde{\epsilon}_{N+1}^p)$, będących funkcją przyrostu odkształceń plastycznych wyrażonych również w układzie osi głównych.

Wektor residuów równań uaktualniających zmienne niezależne składa się z następujących członów (wielkości z nadkreśleniem ($\tilde{\cdot}$) podane są w układzie osi głównych)

$$\mathbf{r} = \{ \mathbf{r}_{\epsilon^p}, \mathbf{r}_\lambda, r_{p_c}, r_\gamma, r_{\sin \psi_m} \}^T \quad (41)$$

$$\mathbf{r}_{\epsilon^p} = \Delta \tilde{\epsilon}_{N+1}^p - \sum_k^{NJACT} \Delta \lambda_k \tilde{\mathbf{b}}_k (\tilde{\sigma}_{N+1}, \sin \psi_{mN+1}) = 0 \quad (42)$$

$$\mathbf{r}_\lambda = f_k (\tilde{\sigma}_{N+1}, p_{cN+1}, \gamma_{N+1}^{PS}) = 0 \quad (43)$$

$$r_{p_c} = p_{cN+1} - C_1 (-2 C_2 \Delta \lambda_2 p + C_3)^{C_4} + c \cot \phi = 0 \quad (44)$$

$$r_\gamma = \gamma_{N+1}^{PS} - \gamma_N^{PS} - \mathbf{v}_1^T \mathbf{b}_1 (\tilde{\sigma}_{N+1}, \sin \psi_{mN+1}) \Delta \lambda_1 h_i = 0 \quad (45)$$

$$r_{\sin \psi_m} = \sin \psi_{mN+1} - D \frac{\sin \phi_m (\sigma_{N+1}) - \sin \phi_{cs}}{1 - \sin \phi_m (\sigma_{N+1}) \sin \phi_{cs}} = 0 \quad (46)$$

gdzie

$$\tilde{\mathbf{b}}_k = \frac{\partial g_k}{\partial \tilde{\sigma}} \quad (47)$$

$$\mathbf{v}_1 = \{1, 1, -1\}^T \quad (48)$$

$$f_\sigma = \left(\frac{\sigma_3^* + c \cot \phi}{\sigma^{\text{ref}} + c \cot \phi} \right)^m \quad (49)$$

$$C_1 = \sigma^{\text{ref}} + c \cot \phi \quad C_2 = -H h_i \frac{1-m}{C_1} \quad C_3 = \left(\frac{p_{cN} + c \cot \phi}{\sigma^{\text{ref}} + c \cot \phi} \right)^{1-m} \quad C_4 = \frac{1}{1-m} \quad (50)$$

a *NJACT* jest ilością aktywnych aktualnie mechanizmów plastycznych.

Rozwiązanie powyższego nieliniowego układu równań, w przypadku gdy nie jest aktywna powierzchnia mechanizmu objętościowego f_2 a $\sin \psi_m$ jest ustalone, można uzyskać w postaci zamkniętej. Co więcej jest to koniecznością z uwagi na specyfikę równania dla powierzchni plastyczności f_1 (por. równanie 1), w którym wyrażenie w mianowniku $q_a - q$ musi być zawsze liczbą dodatnią. Można pokazać, że powyższy układ równań da się sprowadzić do równania kwadratowego z uwagi na $\Delta \lambda_1$ o współczynnikach zależnych od ilości i rodzaju aktywnych mechanizmów plastycznych (z wyłączeniem objętościowego). W pewnych przypadkach szczególnych równanie to redukuje się do równania liniowego i ta specyficzna sytuacja musi być w programie przewidziana. Współczynniki wspomnianego równania kwadratowego dla każdej możliwej kombinacji mechanizmów plastycznych wyrażone są bardzo skomplikowanymi i rozbudowanymi wzorami, w związku z tym nie zostały zamieszczone w niniejszym artykule.

Oprócz efektywnego algorytmu CPP koniecznym jest również sformułowanie algorytmicznego operatora stycznego \mathbf{D}^{ATS} . W swojej pracy Benz nazywa wyprowadzony przez siebie operator styczny (zresztą dla sytuacji tylko jednego aktywnego mechanizmu plastycznego) operatorem konsystentnym. Stwierdzenie to nie jest prawdziwe albowiem dla tego

modelu, zwłaszcza w wersji HS-small, nie ma możliwości wyliczenia konsystentnej macierzy \mathbf{D}^{ATS} , chyba że zależność sztywności od stanu naprężeń będziemy traktować schematem *explicite* i wówczas $\sigma^* = \sigma_N$. Ten schemat, w rękach niedoświadczonych inżynierów, jest jednak narzędziem bardzo niebezpiecznym albowiem wyniki bardzo silnie zależą od wielkości kroku przyrostowego.

W niniejszej pracy podana będzie postać przybliżonego operatora konsystentnego, który definiuje się w następujący sposób[4]

$$\mathbf{D}^{ATS} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\sigma}{\partial\mathbf{v}} \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\varepsilon} \quad (51)$$

gdzie \mathbf{v} jest wektorem zmiennych niezależnych. Ponieważ algorytm CPP sterowany jest zadaną wielkością przyrostu odkształceń $\Delta\varepsilon_{N+1}$ stąd też zachodzi następujący związek

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\varepsilon} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{v}} \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\varepsilon} = \mathbf{0} \quad (52)$$

gdzie $\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\varepsilon}$ możemy wyliczyć jako

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\varepsilon} = - \left[\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{v}} \right]^{-1} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varepsilon} \quad (53)$$

Podstawiając to wyrażenie do wzoru (51) otrzymujemy"

$$\mathbf{D}^{ATS} = \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} - \frac{\partial\sigma}{\partial\mathbf{v}} \left[\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{v}} \right]^{-1} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varepsilon} \quad (54)$$

gdzie

$$\mathbf{r} = \{ \mathbf{r}_{\varepsilon^p}, \mathbf{r}_{\lambda}, r_{p_c}, r_{\gamma}, r_{\sin\psi_m} \}^T \quad (55)$$

Szczegółowe postaci wszystkich pochodnych cząstkowych oraz metody rzutowania wielkości wyliczanych w zredukowanej przestrzeni naprężeń głównych do układu kartezjańskiego skompletowane są w raporcie autora [10].

4. Przykład praktyczny

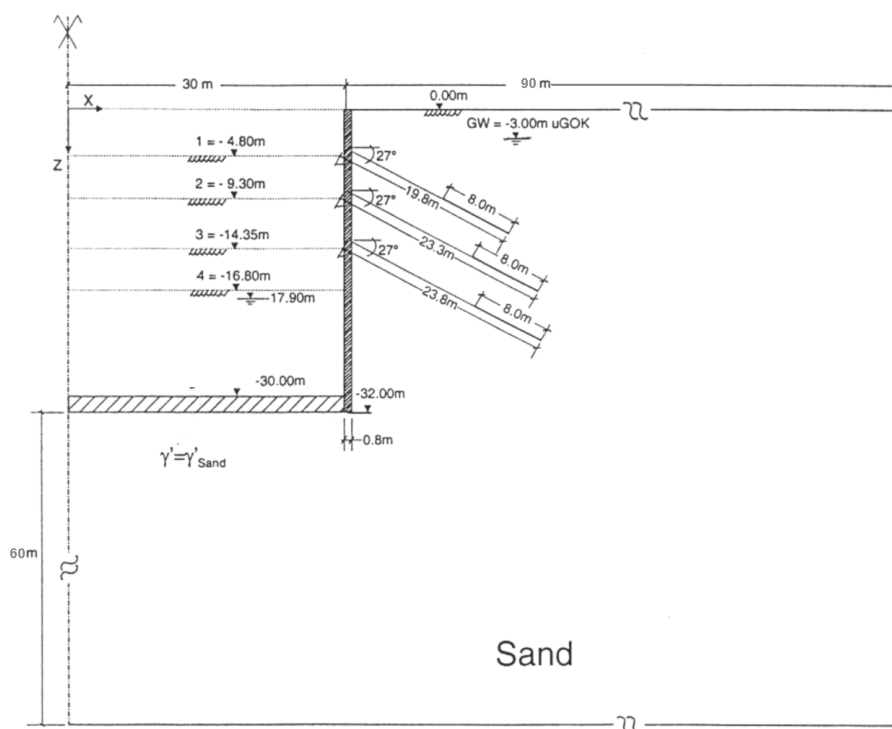
Aby zaprezentować różnice pomiędzy modelami HS, HS-small i M-C wykonano obliczenia dla problemu głębokiego wykopu w piasku berlińskim zabezpieczonym kotwioną ścianą szczelinową. Szkic tego zagadnienia oraz poszczególne fazy technologiczne pokazano na Rys. 10. Parametry materiałowe przyjęto za Benzem [3] natomiast oraz raportem [9], warunki początkowe wygenerowane zostały przyjmując $OCR = 1$ oraz $K_o^{SR} = 1 - \sin\phi$. Obliczenia wykonano wykorzystując model HS, HS-small i dla porównania model M-C. Kluczowym elementem tego testu jest sposób zamodelowania odwodnienia wykopu, wykonanego pod osłoną nieprzepuszczalnej poziomej przesłony usytuowanej w poziomie zawieszenia ściany szczelinowej. Powoduje ona, że za ścianą nie tworzy się klasyczny lej depresyjny. Należy

podkreślić, że ten aspekt decydował o tak wielkim rozrzucie wyników obliczeń wykonanych przez wiele ośrodków naukowych w Europie. Celem wykonania sensownego porównania wyników obliczeń w modelu M-C przyjęto zmienny po głębokości rozkład modułu E wg następującego prawa potęgowego [9]

$$E = 20000\sqrt{y} \text{ kPa} \quad \text{for } y \leq 20\text{m} \quad (56)$$

$$E = 60000\sqrt{y} \text{ kPa} \quad \text{for } y > 20\text{m} \quad (57)$$

Tym sposobem początkowe moduły sztywności w modelu HS i M-C były bardzo podobne.



Rys. 10. Schemat zadania ściany szczelinowej w piasku berlińskim[9]

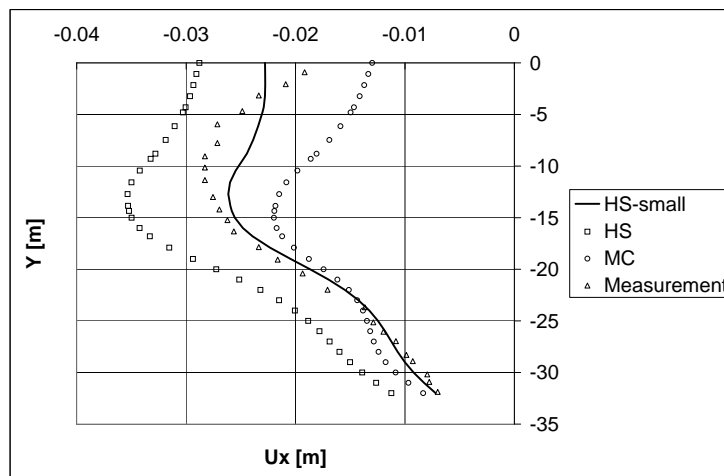
Fig. 10. Problem of a diaphragm wall in Berlin Sand[9]

Wymiary obszaru obliczeniowego, siatkę elementów skończonych oraz warunki brzegowe pokazano na Rys. 11. Na prawym brzegu pionowym wprowadzono elementy strefy wysączenia [11] oraz warunek brzegowy na ciśnienie porowe wyrażony poprzez stałą wysokość ciśnienia $y = -3$ m, natomiast na części lewego brzegu aż do strefy nieprzepuszczalnej przesłony wprowadzono elementy strefy wysączenia oraz zmienny w czasie warunek brzegowy na wysokość ciśnienia pozwalający zamodelować stopniowe odwadnianie obszaru zamkniętego pomiędzy ścianą i szczelną przesłoną.

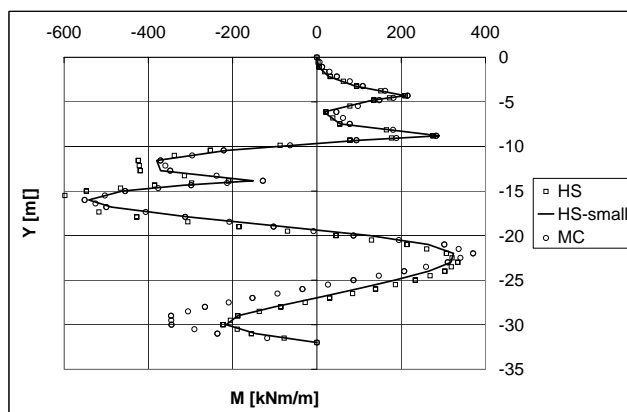
twy zamodelowano elementami prętowymi o przekroju poprzecznym $A = 0.0015 \text{ m}^2$ oraz $E = 210000000 \text{ kPa}$.

Współczynnik tarcia (efektywny) na kontakcie ściana-grunt przyjęto równy 80 % wartości kąta tarcia wewnętrznego w piasku [9]. Nieprzepuszczalną przesłonę wprowadzono przy wykorzystaniu elementów interfejsowych, w których wymuszono ciągłość przemieszczeń oraz brak przepływu (nieciągłość pola ciśnień porowych).

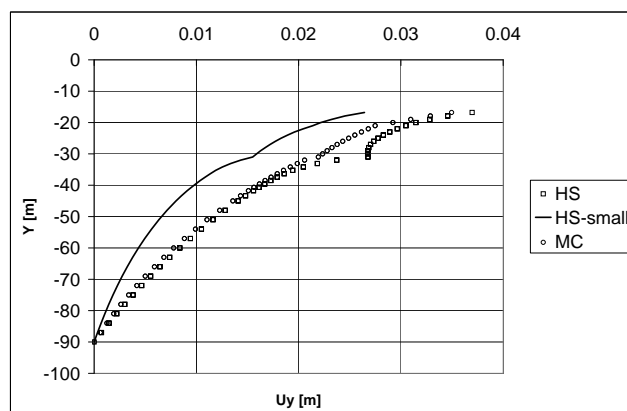
Wykres linii ugięcia dla modeli HS, HS-small i M-C, po wykonaniu ostatniego wykopu, pokazano na Rys. 12. Można dostrzec przyzwoitą zgodność ugięcia otrzymanego modelem HS-small z wynikami pomiaru inklinometrycznego [9]. Wykresy momentów zginających na 1 mb ściany pokazano na Rys. 13. Na wykresie tym można dostrzec niezbyt duże rozbieżności pomiędzy modelami HS, HS-small i M-C, co więcej maksymalny moment w modelu HS-small i M-C są niemal identyczne. Istotne różnice da się zauważyć na wykresie pokazanym na Rys. 14 gdzie przeanalizowano efekt wypiętrzenia dna wykopu. Model HS-small redukuje tę wielkość, w stosunku do modelu M-C i HS, z 36mm do około 26mm. Jednym z bardziej interesujących aspektów tego typu analiz jest wpływ realizowanej konstrukcji na obszar w bezpośrednim sąsiedztwie. Analizując wykres osiadań za ścianą (por. Rys. 15), w ostatniej fazie wykonywania wykopu, zauważamy bardzo istotne różnice pomiędzy wynikami otrzymanymi z modeli HS, HS-small i M-C. Model M-C generuje wypiętrzenie gruntu bezpośrednio za ścianą, czego nigdy nie obserwuje się w praktyce, natomiast modele HS i HS-small generują osiadania. O ile model M-C i HS generują dodatkowe osiadania nawet 100m od strefy wykopu o tyle HS-small redukuje osiadania do zera już w odległości 50m.



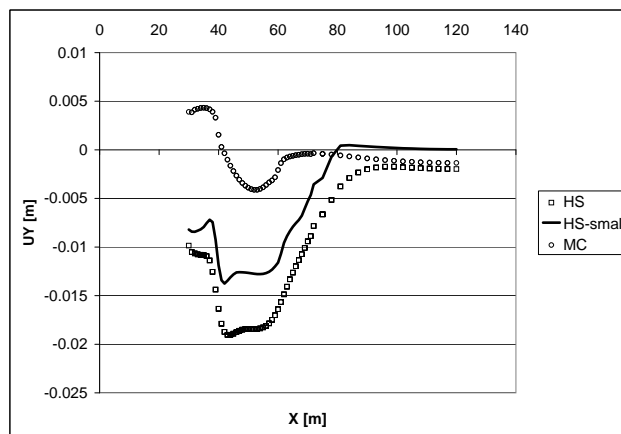
Rys. 12. Wykres ugięcia ściany po wykonaniu ostatniego etapu wykopu
Fig. 12. Wall deflection at last stage of excavation



Rys. 13. Rozkład momentu zginającego w ścianie po wykonaniu ostatniego etapu wykopu
Fig. 13. Bending moment at last stage of excavation



Rys. 14. Wypiętrzenie podłoża po wykonaniu wykopu
Fig. 14. Vertical heaving of subsoil at last stage of excavation



Rys. 15. Wykres osiadań terenu za ścianą po wykonaniu ostatniego etapu wykopu
 Fig. 15. Ground settlements behind the wall at last stage of excavation

5. Wnioski

W pracy przedstawiono sformułowanie teoretyczne oraz schemat implementacji wielomechanizmowego sprężysto-plastycznego modelu Hardening Soil-small, uwzględniającego efekt silnej zmiany sztywności w zakresie małych odkształceń. Efektywność modelu i jego zalety zademonstrowano na przykładzie zagadnienia kotwionej ściany szczelinowej zainstalowanej w piasku z Berlina. Wyniki tej symulacji pokazały dobrą zgodność wyliczonych i pomierzonych ugięć ściany dla modelu HS-small. Analizując otrzymane rezultaty można wnioskować, że w praktycznych zagadnieniach geotechniki, zwłaszcza w tych, w których interesuje nas stan graniczny użyteczności stosowanie uproszczonego modelu M-C może prowadzić do zdecydowanie błędnych oszacowań.

References

- [1] Atkinson J.H., Salfors G., *Experimental determination of soil properties*, Proceedings 10th ECSMFE, Florence, 1991, 3:915–956.
- [2] Barański M., Szczepański T., *Zastosowanie metod sejsmiki powierzchniowej do oceny sztywności gruntu*, XIX Konferencja Naukowa "Metody Komputerowe w Projektowaniu i Analizie Konstrukcji Hydrotechnicznych", Korbiewów, 2007.
- [3] Benz T., *Small-strain stiffness of soils and its numerical consequences*, PhD thesis, University of Stuttgart, 2006.
- [4] Borja R., *Cam-Clay plasticity, Part II, Implicit integration of constitutive equations based on a nonlinear stress predictor*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1991, 88:225–240.

- [5] Larson R., Runesson K., *Implicit integration and consistent linearization for yield criteria of the Mohr-Coulomb type*, Mechanics of Cohesive-Frictional Materials, 1996, 1:367–383.
- [6] Rowe P.W., *The stress dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1962, 269:500–527.
- [7] Schanz T., *Zur Modellierung des mechanischen Verhaltens von Reibungsmaterialien*, Mitt. Inst. für Geotechnik 45, Universität Stuttgart, 1998.
- [8] Schanz T., Vermeer P.A., Bonier P.G., *Formulation and verification of the Hardening Soil Model*, Beyond 2000 in Computational Geotechnics, Rotterdam, 1999.
- [9] Schweiger H.F., *Benchmarking in geotechnics. part i: Results of benchmarking. part ii: Reference solution and parametric study*, Report CGG_IR006_2002, Institute for Soil Mechanics and Foundation Engineering, Graz University of Technology, Austria, March 2002.
- [10] Truty A., *Hardening soil model with small strain stiffness*, Report Z_Soil.PC 080901, ZACE Services Ltd, September 2008.
- [11] Zimmermann Th., Truty A., Urbański A., Podleś K., *Z_SOIL.PC 2007 3D user manual: Theory, Tutorials and benchmarks, Data preparation*, Elmepress International & Zace Services Ltd, Switzerland, 2007.