CZASOPISMO TECHNICZNE Ś
WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

z. 2-Ś/2008
ISSN 0011-4561
ISSN 1897-6336

JOANNA JANICKA*

TRANSFORMACJA WSPÓŁRZĘDNYCH Z ZASTOSOWANIEM WYBRANYCH METOD *m*-ESTYMACJI

TRANSFORMATION OF COORDINATES WITH ROBUST ESTIMATION

S t r e s z c z e n i e

W niniejszym artykule zaproponowano wykorzystanie odpornych na błędy grube metod wyrównywania obserwacji w procesie transformacji współrzędnych, w przypadku gdy punkty łączne mogą być obarczone błędami grubymi. W tym celu wykorzystano dwie spośród metod *m*-estymacji do wyznaczenia parametrów transformacji, a następnie wyniki porównano z tradycyjną transformacją Helmerta z korektą posttransformacyjną Hausbrandta.

Słowa kluczowe: *transformacja współrzędnych*, *m-estymacja*

A b s t r a c t

In this paper robust estimation methods for coordinate transformation is proposed. To avoid influence of blunder in coordinates of reference points two types of robust estimation were analyzed. The results were compared with Helmert transformation with Hausbrandt correction.

Keywords: *transformation of coordinates*, *robust estimation*

* Mgr inż. Joanna Janicka, Instytut Geodezji, Wydział Geodezji i Gospodarki Przestrzennej, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie.

1. Wstęp

Ze względu na dokonującą się integrację europejską zadaniem priorytetowym stało się wprowadzenie ujednoliconego, zgodnego ze standardem europejskim układu współrzędnych. Konieczne jest zatem wyznaczenie współrzędnych punktów istniejącej poziomej osnowy geodezyjnej w nowym państwowym układzie współrzędnych. Utworzenie takiej bazy osnów możliwe jest m.in. przez transformację istniejących zbiorów współrzędnych punktów z układu dotychchczasowego do nowego. Ten sposób możliwy jest do realizacji w przypadku osnowy szczegółowej III klasy oraz lokalnych układów współrzędnych.

Metodą najczęściej stosowaną do tego typu obliczeń jest transformacja Helmerta, w której estymacja parametrów transformacji (wektora parametrów $\underline{X}$) odbywa się metodą najmniejszych kwadratów, polegającą na wyznaczeniu minimum funkcji celu $\xi\,(\underline{X}) = \underline{V}^T\underline{PV}$ względem wektora $\underline{X}$, przy czym $\underline{V}$ jest wektorem poprawek do punktów łącznych w układzie wtórnym.

Metoda najmniejszych kwadratów ma największe zastosowanie w procesie wyznaczania parametrów transformacji. Niestety, ma istotną wadę – nie jest odporna na błędy grube. Oznacza to, że obserwacje obarczone takim błędem traktowane są jak wszystkie inne, co w znaczący sposób może wpływać na wyznaczane wartości parametrów transformacji, a w końcowym etapie na jej wynik. Błędy grube sprawiają, że współrzędne punktów dostosowania mają „nieprawdziwe” wartości. Powodem błędów grubych mogą być błędy popełnione podczas pierwotnych pomiarów, wówczas zaburzone są współrzędne punktów w układzie pierwotnym. Jeżeli natomiast błędy popełnione zostały podczas np. wznowienia punktu, wówczas nieprawidłowe będą współrzędne w układzie wtórnym.

2. *m*-estymacja a korekta Hausbrandta

W wyniku transformacji Helmerta wszystkie punkty dostosowania otrzymują nowe współrzędne, które nie muszą pokrywać się z istniejącymi już współrzędnymi katalogowymi tych punktów. Różnice określone poniższymi wzorami są poprawkami do punktów łącznych w układzie wtórnym

$$V_x = X - X_w, \qquad V_y = Y - Y_w \tag{1}$$

gdzie:

X, Y – współrzędne punktu dostosowania przed transformacją w układzie wtórnym,
X_w, Y_w – współrzędne punktu dostosowania po transformacji w układzie wtórnym.

Aby współrzędne katalogowe nie ulegały zmianom na skutek transformacji, wprowadzono korektę posttransformacyjną Hausbrandta. Celem korekty jest pozostawienie bez zmian współrzędnych punktów dostosowania w układzie wtórnym, a pozostałym punktom przydzielenie poprawki wyznaczonej z zastosowaniem specjalnych wzorów interpolacyjnych. W ten sposób świadomie deformuje się wyniki wcześniejszej transformacji Helmerta przez warunek niezmienności współrzędnych katalogowych

$$V_{xj} = \frac{\sum[V_{xi}\cdot(1/d_{ij})]}{\sum(1/d_{ij})}, \qquad V_{yj} = \frac{\sum[V_{yi}\cdot(1/d_{ij})]}{\sum(1/d_{ij})} \tag{2}$$

gdzie:

$i = 1, 2, ..., n$,

j – wskaźnik punktu transformowanego,

d_{ij} – długości obliczane na podstawie współrzędnych pierwotnych.

Można zatem stwierdzić, że jeżeli współrzędne punktu łącznego obarczonego błędem grubym uznane zostaną za prawidłowe współrzędne katalogowe, wówczas korekta Hausbrandta „wyinterpoluje" nieprawidłowe wartości poprawek do pozostałych, transformowanych punktów. W związku z tym zaproponowano zastosowanie metod wyrównywania obserwacji odpornych na błędy grube w procesie estymacji parametrów transformacji, ponieważ odporne metody wyrównania obserwacji pozwalają w pewnym stopniu wykrywać błędy grube, a następnie minimalizować ich wpływ na wyniki obliczeń. Chodzi głównie o przypadki, kiedy nie jesteśmy pewni jakości posiadanych materiałów, tzn. poprawności współrzędnych w układzie pierwotnym lub wtórnym.

W procesie wyrównywania obserwacji z zastosowaniem metod *m*-estymacji na wstępnym etapie poprawki do punktów łącznych wyznaczane są tradycyjnie metodą najmniejszych kwadratów

$$\underline{V} = \underline{A}\,\underline{X} - \underline{L} \tag{3}$$

gdzie:

$\underline{V}$ – wektor poprawek do punktów łącznych w układzie wtórnym,

$\underline{A}$ – macierz współczynników transformacji,

$\underline{X}$ – wektor parametrów transformacji,

$\underline{L}$ – wektor wyrazów wolnych.

Po wyznaczeniu poprawek do punktów łącznych obliczany jest C_V – estymator macierzy kowariancji wektora $\underline{V}$

$$C_v = m_0^2[P^{-1} - A(A^T PA)^{-1} A^T] \tag{4}$$

Diagonalne elementy macierzy C_V są kwadratami błędów średnich odpowiednich estymatorów poprawek v_i a zatem na ich podstawie można obliczyć standaryzowane estymatory poprawek

$$\overline{v}_i = \frac{v_i}{m_{v_i}} \tag{5}$$

Po obliczeniu standaryzowanych estymatorów poprawek należy sprawdzić, czy mieszczą się one w pewnym dopuszczalnym przedziale oznaczanym Δv_i w którym losowe poprawki mają wysokie, chociaż mniejsze od jedności prawdopodobieństwo wystąpienia. Ponieważ funkcja gęstości poprawki jest symetryczna, granice przedziału dopuszczalnego określone są następująco

$$\Delta v_i = [-k, k] \tag{6}$$

Podsumowując, przedziały mówią o tym, jakie jest prawdopodobieństwo, że obliczona poprawka jest poprawką losową. A zatem z prawdopodobieństwem γ = 0,988 można stwierdzić, że poprawka należąca do przedziału $\overline{v} = [-2,5;\ 2,5]$ jest poprawką losową. Poprawki spoza przedziału dopuszczalnego traktowane są jako grube wskazujące, że dana obserwacja obarczona jest błędem grubym.

Tabela 1

Wartości współczynnika *k* dla przyjętego poziomu prawdopodobieństwa

γ – prawdopodobieństwo, z którym $\overline{v} \in <-k, k>$	0,38	0,68	0,87	0,95	0,988	0,997
k	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Kolejnym krokiem w procesie odpornego wyrównania jest ponowne wyznaczenie poprawek do punktów łącznych, z tym że w drugiej iteracji wartości wag obserwacji podejrzanych o obarczenie błędami grubymi zostaną zmodyfikowane z zastosowaniem funkcji tłumienia. Pozostałe wagi pozostaną niezmienione.

W rachunku wyrównawczym znanych jest kilka metod *m*-estymacji różniących się postacią funkcji tłumienia lub funkcji wagowej. Do najbardziej znanych należą metody: Hubera, Hampela, duńska lub np. zasada wyboru alternatywy.

Metoda Hubera była jedną z pierwszych metod odpornego wyrównania niezależnych obserwacji geodezyjnych. W metodzie tej funkcja tłumienia ma postać

$$t(\overline{v}_i) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{dla} \quad \overline{v}_i \in <-k, k> \\ \operatorname{sgn}(\overline{v}_i) k \dfrac{1}{v_i} & \text{dla} \quad \overline{v}_i \notin <-k, k> \end{array} \right\} \tag{7}$$

skąd wynika następująca funkcja wagowa

$$\widehat{p} = t(\overline{v}_i)\, p = \left\{ \begin{array}{ll} p & \text{dla} \quad \overline{v}_i \in <-k, k> \\ \operatorname{sgn}(\overline{v}_i)\, pk \dfrac{1}{\overline{v}_i} & \text{dla} \quad \overline{v}_i \notin <-k, k> \end{array} \right\} \tag{8}$$

Jeżeli standaryzowany estymator poprawki $\overline{v}_i$ mieści się w granicach określonych przez parametr *k*, waga takiej obserwacji nie podlega zmianom w procesie iteracyjnym. Jeśli natomiast $\overline{v}_i \notin <-k, k>$, wówczas wartość wagi zostaje zmniejszona przez funkcję tłumienia zgodnie z drugim członem wyrażenia.

Metoda Hampela realizuje ten sam cel, czyli zmniejszenie wagi dla obserwacji obarczonej błędem grubym, z tym że wprowadzono dodatkowe przedziały pośrednie (na lewo i na prawo od przedziału dopuszczalnego), w których funkcja tłumienia w liniowy sposób zmniejsza swe wartości. W metodzie tej funkcja tłumienia przyjmuje postać

$$t(\overline{v}_i) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{dla} \quad \overline{v}_i \in <-k, k> \\ \dfrac{|\overline{v}_i| - k_b}{k - k_b} & \text{dla} \quad |v_i| \in (k, k_b> \\ 0 & \text{dla} \quad |\overline{v}_i| > k_b \end{array} \right\} \tag{9}$$

Funkcja duńska charakteryzuje się natomiast tym, że poza przedziałem dopuszczalnym funkcja tłumienia maleje ekspotencjalnie, a oś *y* jest asymptotą tej funkcji

$$t(\overline{v}) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad \overline{v} \in (-k, k> \\ \exp\left[-l\left(\left|\overline{v}\right| - k\right)^{g}\right] & \text{dla} \quad \left|\overline{v}\right| > k \end{cases} \tag{10}$$

Ważną rolę w zestawie metod *m*-estymacji odgrywa również metoda opracowana przez R. Kadaja – zasada wyboru alternatywy. W odróżnieniu od pozostałych metod funkcja wagowa metody ZWA nie jest funkcją składaną. Zatem nie określa się dla niej przedziałów dopuszczalnych, czyli parametru *k* ustalanego *a priori*. Funkcja wagowa metody ZWA przyjmuje postać

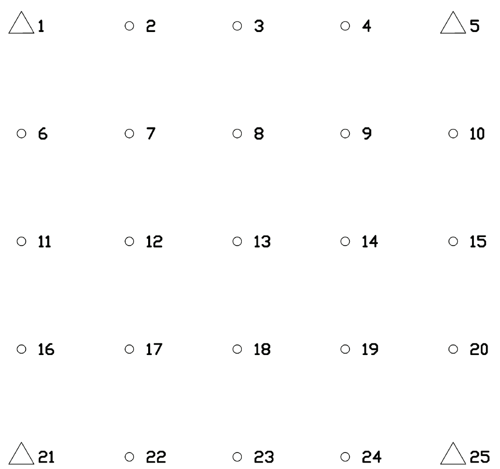
$$p\left(\left|v\right|\right) = \frac{1}{2} p \exp\left[-p\frac{v^2}{2}\right] \tag{11}$$

W praktyce oznacza to mniejszą lub większą modyfikację każdej wagi w kolejnych iteracjach.

W artykule wykorzystano dwie spośród zaprezentowanych metod *m*-estymacji:
a) metodę Hampela,
b) metodę ZWA.

3. Model testowy

Jako model testowy wykorzystany został zbiór współrzędnych punktów fikcyjnej sieci geodezyjnej rozciągającej się na obszarze 4 × 4 km. Punktom zbioru testowego nadano współrzędne w układzie lokalnym oraz w układzie państwowym. Punkty dobrano tak, aby tworzyły równomierną siatkę, w której nominalna odległość pomiędzy nimi wynosi 1000 m.



Rys. 1. Model testowy sieci geodezyjnej (Δ – punkty łączne transformacji, o – punkty transformowane)
Fig. 1. Survey network test model

Współrzędne w układzie ’65 określono w następujący sposób:
1) przyjęto współrzędne *B* i *L* punktu nr 13 (B = 54° 00’ 15’’, L = 22° 14’ 00’’),
2) współrzędne *B* i *L* punktu nr 13 przeliczono na układ 2000 za pomocą programu Geonet Unitrans.

Punkt nr 13 znajduje się w takim miejscu układu 2000, w którym zniekształcenie liniowe wynosi 0 i takie pozostaje dla całego obszaru sieci modelowej. Można więc utworzyć sieć modelową dla przyjętych przez siebie odległości pomiędzy punktami.

3) Mając określone współrzędne wszystkich punktów w układzie 2000, przeliczono je na układ 1965 za pomocą programu Geonet Unitrans, otrzymując współrzędne „katalogowe".

Ostatnim etapem było zaburzenie współrzędnych „katalogowych" wygenerowanymi błędami symulującymi błędy przypadkowe pomiaru.

4. Obliczenia

Obliczenia wykonano za pomocą autorskiego oprogramowania, wykorzystując transformację Helmerta z zastosowaniem korekt posttransformacyjnych Hausbrandta oraz *M*-transformację Helmerta.

W pierwszej iteracji program wykonuje tradycyjną transformację Helmerta, wyznaczając parametry transformacji oraz poprawki do punktów łącznych metodą najmniejszych kwadratów. Na podstawie obliczonych poprawek wyznacza się ich standaryzowane estymatory, a następnie sprawdza się, czy mieszczą się one w granicach przedziału dopuszczalnego $\Delta\overline{v}$.

Jeżeli tak, to waga danej obserwacji pozostaje niezmieniona, jeśli nie – wówczas jest modyfikowana z wykorzystaniem funkcji tłumienia lub w przypadku metody ZWA – funkcji wagowej. Następnie wyznaczana jest ekwiwalentna macierz wag zawierająca zmodyfikowane wagi obserwacji odstających i ponownie obliczane są parametry transformacji. Obliczenia wykonywane są do momentu, aż wszystkie standaryzowane estymatory poprawek znajdą się w granicach przedziału dopuszczalnego.

Celem artykułu było wykazanie, że zaproponowana transformacja Helmerta z zastosowaniem metod *m*-estymacji nazywana dalej *M*-transformacją Helmerta pozwala uzyskać lepsze wyniki w sytuacji, gdy któryś punkt łączny obarczony jest błędem grubym. Jako wynik transformacji traktowane są współrzędne wszystkich punktów w układzie wtórnym. W tym celu punkt łączny nr 1 zaburzono błędem grubym, dodając do współrzędnej X i Y w układzie wtórnym 0,30 m

$$X'_1 = X_1 + 0{,}30\ \text{m}, \qquad Y'_1 = Y_1 + 0{,}30\ \text{m}$$

W związku z tym, że sieć jest modelem testowym i znane są współrzędne wszystkich punktów w układzie wtórnym, można wiarygodnie ocenić wyniki transformacji.

W wyniku transformacji Helmerta wszystkie punkty dostosowania otrzymały nowe współrzędne. Zadaniem korekty Hausbrandta jest wyinterpolowanie poprawek do pozostałych transformowanych punktów z założeniem, że punkty łączne są bezbłędne. Jeśli więc punkt nr 1 obarczony jest błędem grubym, korekta tego nie wykryje, a wręcz przeciwnie – pozostałe punkty dopasuje do punktów łącznych, pomimo że jeden z nich ma współrzędne obarczone grubym błędem i w niewłaściwy sposób nastąpi wpasowanie transformowanych punktów.

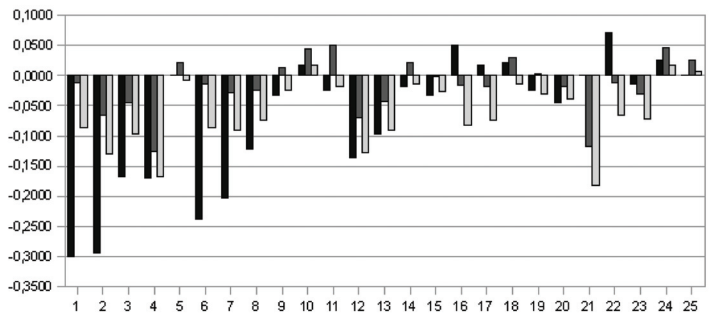
Poprawki do punktów dostosowania wyliczone z zastosowaniem metod odpornych na błędy grube mają wartości, które doprowadzają współrzędne punktów łącznych do bliższych „katalogowym", a zatem korygują błąd gruby na punkcie nr 1 i pozostałym punktom łącznym nadają odpowiednie poprawki.

Wyniki obliczeń tzw. *M*-transformacji Helmerta oraz transformacji Helmerta z korektą Hausbrandta przedstawiono na wykresach w postaci różnic współrzędnych pomiędzy współrzędnymi katalogowymi a wynikami uzyskanymi z tradycyjnej metody transformacji oraz wynikami *M*-transformacji Helmerta.

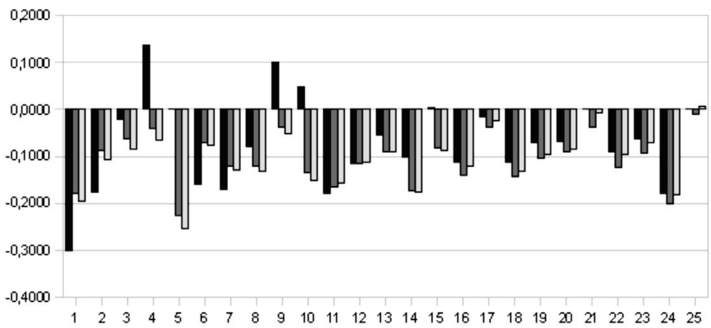
Tabela 2

Wartości poprawek do punktów łącznych

Poprawki do punktów łącznych	Transformacja Helmerta bez błędu grubego	Transformacja Helmerta (błąd gruby na pkt 1)	Transformacja Helmerta z funkcją Hampela (błąd gruby na pkt 1)	Transformacja Helmerta z funkcją ZWA (błąd gruby na pkt 1)
V_{x1}	0,062	0,212	0,289	0,213
V_{y1}	0,014	0,164	0,121	0,105
V_{x5}	–0,032	–0,032	–0,022	–0,008
V_{y5}	–0,057	–0,207	–0,225	–0,254
V_{x21}	–0,020	–0,170	–0,117	–0,181
V_{y21}	0,016	0,016	0,037	0,008
V_{x25}	–0,011	–0,011	–0,025	–0,007
V_{y25}	0,026	0,026	0,010	0,008



Rys. 2. Różnice współrzędnych *X* w układzie wtórnym
Fig. 2. Coordinates *X* differences in a secondary coordinate system



Rys. 3. Różnice współrzędnych *Y* w układzie wtórnym
Fig. 3. Coordinates *Y* differences in a secondary coordinate system

Kolorem granatowym – oznaczone są różnice pomiędzy współrzędnymi katalogowymi a współrzędnymi uzyskanymi w wyniku transformacji Helmerta z korektą Hausbrandta.

Kolorem czerwonym – oznaczone są różnice pomiędzy współrzędnymi katalogowymi a współrzędnymi uzyskanymi w wyniku *M*-transformacji Helmerta z zastosowaniem metody Hampela.

Kolorem żółtym – oznaczone są różnice pomiędzy współrzędnymi katalogowymi a współrzędnymi uzyskanymi w wyniku *M*-transformacji Helmerta z zastosowaniem metody ZWA.

5. Wnioski

Z przeprowadzonych badań wynika, że *M*-transformacja Helmerta powoduje lepsze wpasowanie obu rozpatrywanych układów niż transformacja Helmerta z korektą Hausbrandta. Punkty łączne otrzymują wprawdzie w wyniku transformacji nowe współrzędne, ale w przypadku gdy któryś z nich obarczony jest błędem grubym, ma to pozytywny wpływ na wynik całej transformacji. Transformacja Helmerta z korektą Hausbrandta nie wykryła błędu grubego na pkt nr 1, a zatem pozostałe punkty łączne otrzymały nieprawidłowe wartości poprawek. Skutkiem tego jest większa różnica pomiędzy współrzędnymi katalogowymi a uzyskanymi z transformacji.

Porównując wyniki transformacji wykorzystującej odporną metodę Hampela i metodę ZWA, ta pierwsza dała nieco lepszy wynik.

Podsumowując, gdy nie można obiektywnie ocenić jakości danych, na podstawie których wykonane będą obliczenia, proponuje się zastosowanie tzw. *M*-transformacji Helmerta. Należy jednak rozważyć, którą odporną metodę wyrównywania obserwacji zastosować.

Literatura

[1] Kadaj R., *Polskie układy współrzędnych. Formuły transformacyjne, algorytmy i programy*, Rzeszów 2002.

[2] Kadaj R., *Rozwinięcie koncepcji niestandardowej metody estymacji*, Geodezja i Kartografia, 1979.

[3] Wiśniewski Z., *Rachunek wyrównawczy w geodezji*, Wydawnictwo UWM, Olsztyn 2005.

[4] Kamiński W., *Odporna na błędy grube transformacja Helmerta*, Olsztyn 1999.

[5] Kamiński W., Wiśniewski Z., *Analiza wybranych, odpornych na błędy grube, metod wyrównania obserwacji geodezyjnych*, Geodezja i Kartografia, 1992.

[6] Huber P., *Robust Estimation of a Location Parameter*, Ann. Math. Statist 35, 1964.

[7] Hampel F.R., *Robust Estimation*, A Condensed Partial Survey Z. Warsch. Verw. Geb. 27, 1973

[8] Krarup T., Kubuk K., *The Danish Method, Experinence and Philosophy*, DGK, Heft 98, 1983.