CZASOPISMO TECHNICZNE Ś
WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

z. 1-Ś/2007
ISSN 0011-4561
ISSN 1897-6336

JAN GASZYŃSKI*

# OSIADANIE WARSTWY GRUNTU NASYCONEJ CIECZĄ Z UWZGLĘDNIENIEM POLA TEMPERATURY

# THE CONSOLIDATION PROCESS OF POROUS MEDIA UNDER THE TEMPERATURE INFLUENCE

Streszczenie

W artykule podano rozwiązanie zagadnienia początkowo-brzegowego dla konsolidującej warstwy porowatej z polem temperatury. Przeanalizowano właściwości funkcji opisującej osiadanie brzegu w zależności od parametrów termicznych ośrodka dla początkowej i końcowej chwili procesu.

*Słowa kluczowe*: *grunt, konsolidacja, temperatura*

Abstract

The paper presents solution of the system of equations for consolidation of porous medium where pores are filled by a low compressible liquid. The skeleton stress, pore pressure and field temperature are coupled. The solution of an initial-boundary value problem for an uniaxial strain state for the consolidating layer has been analyzed.

*Keywords*: *soil, consolidation, temperature*

* Dr hab. Jan Gaszyński, prof. PK, Instytut Geotechniki, Wydział Inżynierii Środowiska, Politechnika Krakowska.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

## 1. Wstęp

Potrzeba rozstrzygania zagadnień związanych z budownictwem oraz inżynierią i ochroną środowiska sprawia, że analiza stanów naprężenia i odkształcenia w gruncie pozostaje ciągle jednym z najczęściej podejmowanych tematów zarówno w badaniach eksperymentalnych, jak i rozważaniach teoretycznych. Zakres tej tematyki jest bardzo obszerny. Wynika on z faktu pojawiania się problemów geotechnicznych w każdym procesie inwestycyjnym (posadowienie budowli) oraz w zadaniach związanych z wykorzystaniem środowiska gruntowego przy magazynowaniu i transporcie odpadów oraz energii. Do grupy tych zagadnień należą problemy przechowywania i transportu energii cieplnej w ośrodku gruntowym.

Ruch ciepła w gruncie powoduje zmiany jego temperatury, oddziałujące na stan naprężeń. Rezultatem tego są odkształcenia mogące mieć wpływ na obiekty posadowione na gruncie. Te zagadnienia są przedmiotem dalszej części artykułu. Rozważany jest problem deformacji warstwy gruntu (jako porowatego ośrodka nasyconego cieczą), wywołanej obciążeniem zewnętrznym i zmianami temperatury. Do rozwiązania zadania przyjęto model termokonsolidacji [1, 6, 7], bazujący na sprzężeniu pól naprężeń w szkielecie, ciśnienia wody w porach oraz pola temperatury. W szczególności dokonano oceny wpływu temperatury na osiadanie warstwy gruntu w jednoosiowym stanie odkształcenia.

## 2. Równania termokonsolidacji

Rozważana jest konsolidująca warstwa gruntu o miąższości $h$, spoczywająca na nieodkształcalnym podłożu. Proces konsolidacji wywołuje równomiernie rozłożone obciążenie $q_0$. Wpływ na ten proces ma także pole temperatury, która w chwili początkowej ma określony rozkład. Przyjmuje się, że w szkielecie gruntowym i cieczy określone jest pole temperatury, oddziałujące na stany naprężeń, a tym samym na proces konsolidacji. Zakłada się, że pola naprężeń w szkielecie, ciśnień w cieczy i temperatury są ze sobą sprzężone, a sposób tego sprzężenia opisuje model termokonsolidacji [7]. Stan procesu opisują następujące funkcje:

$w$ – przemieszczenie w kierunku $z$, prostopadłym do brzegu (osiadanie),
$\sigma_z$ – naprężenie w szkielecie,
$\sigma$ – ciśnienie cieczy w porach,
$\vartheta$ – temperatura wywołana procesem konsolidacji ($\vartheta = T - T_0$),
$T$ – temperatura bezwzględna w chwili $t$,
$T_0$ – temperatura bezwzględna w chwili początkowej $t_0$.

W jednoosiowym stanie deformacji równania tego modelu mają postać

$$Ew_{,zz} + \frac{H}{R}\sigma_{,z} - \frac{E}{T_0}b_3\vartheta_{,z} = 0 \tag{1a}$$

$$\sigma_{,zz} = \frac{1}{kR}\dot{\sigma} - \frac{H}{kR}\dot{w}_{,z} + \frac{E}{kRT_0}b_2\dot{\vartheta} \tag{1b}$$

$$\vartheta_{,zz} = \left(b_0 + \frac{E}{R}b_2^2\right)\frac{E}{\lambda_T T_0}\dot{\vartheta} + \frac{E}{R\lambda_T}b_2\dot{\sigma} + \frac{E}{\lambda_T}b_3\dot{w}_{,z} \tag{1c}$$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Związki fizyczne zapiszemy w postaci

$$\sigma_z = Ew_{,z} + \frac{Q}{R}\sigma - \left(b_1 - \frac{Q}{R}b_2\right)\frac{E}{T_0}\vartheta$$
$$\sigma = Qw_{,z} + R\theta - b_2\frac{E}{T_0}\vartheta \tag{2}$$

W równaniach (1), (2) wystepują parametry materiałowe ośrodka:
- $A$, $N$, $Q$, $R$ – stałe Biota,
- $k$ – współczynnik przepuszczalności,
- $\lambda_T$ – współczynnik przewodnictwa cieplnego,
- $\alpha_T^s$, $\alpha_T^c$, $\alpha_T^{sc}$ – współczynniki liniowej rozszerzalności cieplnej szkieletu, cieczy oraz wpływu rozszerzalności cieplnej szkieletu na wydatek cieczy i odwrotnie,
- $\rho$, $c_v$ – gęstość właściwa i ciepło właściwe ośrodka.

Tutaj i dalej przyjęto oznaczenia

$$H = Q + R\,, \qquad M = A - \frac{Q^2}{R}\,, \qquad E = 2N + M$$

$$K = A + \frac{2}{3}N\,, \qquad B = \frac{E\cdot R^2}{E\cdot R + H^2} \tag{3}$$

$$b_0 = \rho\cdot c_v\frac{T_0}{E}\,, \qquad b_1 = \left(3K\alpha_T^s + Q\alpha_T^{sc}\right)\frac{T_0}{E}\,, \qquad b_2 = \left(Q\alpha_T^{sc} + R\alpha_T^c\right)\frac{T_0}{E}$$

$$b_3 = b_1 - \frac{Q}{R}b_2\,, \qquad b_4 = \frac{E}{R}b_2 - \frac{H}{R}b_3\,, \qquad b_5 = b_0 + \frac{E}{R}b_2^2 + b_3^2$$

Rozwiązane zostaną następujące zadania:
1. Konsolidacja warstwy ośrodka porowatego pod zadanym obciążeniem brzegu (podstawowe zadanie dla oceny odkształceń podłoża gruntowego).
2. Ocena wpływu temperatury na proces konsolidacji (zadanie ważne dla analizy zagadnień geotermalnych).

*Warunki początkowe*

Uwzględniając właściwości układu równań (1), zapiszemy warunki początkowe w postaci [4, 5, 7]

$$Ew_{,zz}^o + \frac{H}{R}\sigma_{,z}^o - \frac{E}{T_0}b_3\vartheta_{,z}^o = 0$$
$$\sigma^o - Hw_{,z}^o + \frac{E}{T_0}b_2\vartheta^o = 0\,, \qquad t = t_o \tag{4}$$
$$\left(b_0 + \frac{E}{R}b_2^2\right)\frac{1}{T_0}\vartheta^o + \frac{1}{R}b_2\sigma^o + b_3w_{,z}^o = 0$$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

*Warunki brzegowe*

Przyjmując poprzednio przyjęte założenia o obciążeniu warstwy oraz założenia, że górny brzeg warstwy jest przepuszczalny, dolny nieprzepuszczalny i podobnie dla temperatury, zapiszemy warunki brzegowe dla obydwu zadań w postaci

Dla $z = 0$

$$\sigma_z = -q_o H(t), \quad \sigma = 0, \quad \vartheta = \vartheta_0 L(t) \tag{5}$$

Dla $z = h$

$$w = 0, \quad \sigma_{,z} = 0, \quad \vartheta_{,z} = 0 \tag{6}$$

Tak sformułowane zagadnienie początkowo-brzegowe stanowi podstawę do konstrukcji rozwiązania zadania.

## 3. Rozwiązanie zadania

Do rozwiązania zadania wykorzystamy transformację Laplace'a, zdefiniowaną związkami

$$\begin{aligned} \left[\overline{w}(z,s), \overline{\sigma}_z(z,s), \overline{\sigma}(z,s), \overline{\vartheta}(z,s)\right] &= \int_0^\infty \left[w(z,t), \sigma_z(z,t), \sigma(z,t), \vartheta(z,t)\right]\cdot\exp(-st)dt \\ \left[w(z,t), \sigma_z(z,t), \sigma(z,t), \vartheta(z,t)\right] &= \int_s \left[\overline{w}(z,t), \overline{\sigma}_z(z,t), \overline{\sigma}(z,t), \overline{\vartheta}(z,t)\right]\cdot\exp(st)ds \end{aligned} \tag{7}$$

Po wykonaniu tej transformacji na układzie równań (1) oraz na warunkach początkowych (4) i warunkach brzegowych (5), (6), a także po scałkowaniu równania (1a) otrzymamy

$$E\overline{w}_{,z} + \frac{H}{R}\overline{\sigma} - \frac{E}{T_0}b_3\overline{\vartheta} = -q_0\overline{H}(s) \tag{8a}$$

$$\overline{\sigma}_{,zz} = \frac{s}{kR}\overline{\sigma} - \frac{sH}{kR}\overline{w}_{,z} + \frac{sE}{kRT_0}b_2\overline{\vartheta} \tag{8b}$$

$$\overline{\vartheta}_{,zz} = \left(b_0 + \frac{E}{R}b_2^2\right)\frac{sE}{\lambda_T T_0}\overline{\vartheta} + \frac{sE}{R\lambda_T}b_2\overline{\sigma} + \frac{sE}{\lambda_T}b_3\overline{w}_{,z} \tag{8c}$$

Wyeliminowanie transformaty przemieszczenia wyliczonej z równania (8a), z równań przepływu (8b) i przewodnictwa (8c) daje po przekształceniach

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_{,zz} - \frac{s}{kB}\overline{\sigma} - \frac{s}{kT_0}b_4\overline{\vartheta} &= \frac{1}{k}\frac{H}{ER}q_0 s\overline{H}(s) \\ \overline{\vartheta}_{,zz} - \frac{sE}{\lambda_T T_0}b_5\overline{\vartheta} - \frac{s}{\lambda_T}b_4\overline{\sigma} &= -\frac{1}{\lambda_T}b_3 q_0 s\overline{H}(s) \end{aligned} \tag{9}$$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Jest to sprzężony układ dwóch niejednorodnych równań różniczkowych zwyczajnych. Rozwiązanie równań (9) znajdujemy jako sumę całek – szczególnej dla równania niejednorodnego i ogólnej dla równania jednorodnego

$$\begin{aligned} \overline{\sigma} &= \overline{\sigma}_{\mathrm{og}} + \overline{\sigma}_{\mathrm{sz}} \\ \overline{\vartheta} &= \overline{\vartheta}_{\mathrm{og}} + \overline{\vartheta}_{\mathrm{sz}} \end{aligned} \tag{10}$$

Całka szczególna układu niejednorodnego spełnia układ równań

$$\begin{aligned} &\overline{\sigma}_{\mathrm{sz},zz} - \frac{s}{kB}\overline{\sigma}_{\mathrm{sz}} - \frac{s}{kT_0} b_4 \overline{\vartheta}_{\mathrm{sz}} = \frac{1}{k}\frac{H}{ER} q_0 s\overline{H}(s) \\ &\overline{\vartheta}_{\mathrm{sz},zz} - \frac{sE}{\lambda_T T_0} b_5 \overline{\vartheta}_{\mathrm{sz}} - \frac{s}{\lambda_T} b_4 \overline{\sigma}_{\mathrm{sz}} = -\frac{1}{\lambda_T} b_3 q_0 s\overline{H}(s) \end{aligned} \tag{11}$$

Po rozwiązaniu układu (11) otrzymujemy

$$\overline{\sigma}_{\mathrm{sz}} = \frac{b_3 b_4 + \dfrac{H}{R} b_5}{b_4^2 - \dfrac{E}{B} b_5} q_0 \overline{H}(s) \tag{12}$$

$$\overline{\vartheta}_{\mathrm{sz}} = -\frac{1}{B}\frac{b_3 + \dfrac{BH}{ER} b_4}{b_4^2 - \dfrac{E}{B} b_5} T_0 q_0 \overline{H}(s) \tag{13}$$

Całka ogólna spełnia układ równań

$$\overline{\sigma}_{\mathrm{og},zz} - \frac{s}{kB}\overline{\sigma}_{\mathrm{og}} - \frac{s}{kT_0} b_4 \overline{\vartheta}_{\mathrm{og}} = 0 \tag{14a}$$

$$\overline{\vartheta}_{\mathrm{og},zz} - \frac{sE}{\lambda_T T_0} b_5 \overline{\vartheta}_{\mathrm{og}} - \frac{s}{\lambda_T} b_4 \overline{\sigma}_{\mathrm{og}} = 0 \tag{14b}$$

Rozwiązanie tego układu równań zapiszemy w postaci

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_{\mathrm{og}} &= \overline{G}_{,zz} - \frac{sE}{\lambda_T T_0} b_5 \overline{G} \\ \overline{\vartheta}_{\mathrm{og}} &= \frac{s}{\lambda_T} b_4 \overline{G} \end{aligned} \tag{15}$$

gdzie $\overline{G}(z,s)$ jest funkcją spełniającą tożsamościowo równanie (14b) oraz równanie

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

$$\left[d_z^4-\left(\frac{s}{kB}+\frac{sE}{\lambda_T T_0}b_5\right)d_z^2-\left(b_4^2-\frac{E}{B}b_5\right)\frac{s^2}{k\lambda_T T_0}\right]\overline{G}(z,s)=0 \tag{16}$$

Pierwiastki równania charakterystycznego określają związki

$$r_1^2=\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T}}\rho_1^2, \qquad r_2^2=\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T}}\rho_2^2 \tag{17}$$

tutaj oznaczono

$$\begin{aligned}
\rho_1^2&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{B}\sqrt{\frac{\lambda_T T_0}{k}}+Eb_5\sqrt{\frac{k}{\lambda_T T_0}}+\mu\right]\\
\rho_2^2&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{B}\sqrt{\frac{\lambda_T T_0}{k}}+Eb_5\sqrt{\frac{k}{\lambda_T T_0}}-\mu\right]\\
\mu^2&=\left(\frac{1}{B}\sqrt{\frac{\lambda_T T_0}{k}}-Eb_5\sqrt{\frac{k}{\lambda_T T_0}}\right)^2+4b_4^2
\end{aligned} \tag{18}$$

Funkcja $\overline{G}(z,s)$ dana jest związkiem

$$\begin{aligned}
\overline{G}&=c_1 sh\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_1 z\right)+c_2 ch\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_1 z\right)+\\
&+c_3 sh\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_2 z\right)+c_4 ch\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_2 z\right)
\end{aligned} \tag{19}$$

Stąd całki ogólne poszukiwanych funkcji $\overline{\sigma}_{og}$ i $\overline{\vartheta}_{og}$

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}_{og}&=\left(\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}\rho_1^2-\frac{s}{\lambda_T T_0}Eb_5\right)\left[c_1 sh\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_1 z\right)+c_2 ch\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_1 z\right)\right]+\\
&+\left(\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}\rho_2^2-\frac{s}{\lambda_T T_0}Eb_5\right)\left[c_3 sh\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_2 z\right)+c_4 ch\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_2 z\right)\right]
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\vartheta}_{og}&=\frac{s}{\lambda_T}b_4\left[c_1 sh\left(\sqrt{\frac{s}{k\lambda_T T_0}}\rho_1 z\right)+c_2 ch\left(\sqrt{\frac{s}{k\lambda_T T_0}}\rho_1 z\right)+\right.\\
&\left.+c_3 sh\left(\sqrt{\frac{s}{k\lambda_T T_0}}\rho_2 z\right)+c_4 ch\left(\sqrt{\frac{s}{k\lambda_T T_0}}\rho_2 z\right)\right]
\end{aligned} \tag{21}$$

Dalej zajmiemy się wyznaczeniem transformaty przemieszczenia brzegu warstwy konsolidującej. Podstawiając otrzymane rezultaty (12), (13), (19)–(21) do równania (8a) i całkując względem zmiennej $z$, otrzymamy po przekształceniach

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

$$\overline{w}=\sqrt{\frac{\sqrt{k\lambda_T T_0}}{s}}\frac{1}{\rho_1}\left(-\frac{H}{ER}\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}\rho_1^2+\frac{s}{\lambda_T T_0}\left(\frac{H}{R}b_5+b_3b_4\right)\right)$$

$$\left(c_1 ch\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_1 z\right)+c_2 sh\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_1 z\right)\right)+\sqrt{\frac{\sqrt{k\lambda_T T_0}}{s}}\frac{1}{\rho_2}\left(-\frac{H}{ER}\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}\rho_2^2+\frac{s}{\lambda_T T_0}\left(\frac{H}{R}b_5+b_3b_4\right)\right)$$

$$\left(c_3 ch\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_2 z\right)+c_4 sh\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_2 z\right)\right)+-\frac{2\frac{H}{R}b_3b_4+\frac{E}{B}b_3^2+b_4^2-\frac{E}{R}b_5}{b_4^2-\frac{E}{B}b_5}\frac{1}{E}q_0\overline{H}(s)z+c_0 \qquad (22)$$

Występujące w równaniu (22) współczynniki $c_0$, …, $c_4$ należy wyznaczyć z warunków brzegowych. Po ich uwzględnieniu i przekształceniach otrzymamy

$$c_0=\frac{2\frac{H}{R}b_3b_4+\frac{E}{B}b_3^2+b_4^2-\frac{E}{R}b_5}{b_4^2-\frac{E}{B}b_5}\frac{1}{E}q_0h\overline{H}(s)$$

$$\begin{aligned}c_2=&-p_1\frac{1}{\rho_1^2-\rho_2^2}\frac{\sqrt{k\lambda_T T_0}}{s}q_0\overline{H}(s)-p_2\frac{\rho_2^2}{\rho_1^2-\rho_2^2}\frac{1}{B}\frac{\lambda_T T_0}{s}q_0\overline{H}(s)+\\&-\frac{1}{\rho_1^2-\rho_2^2}\frac{1}{b_4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_T T_0}{k}}\rho_2^2-Eb_5\right)\frac{\sqrt{k\lambda_T T_0}}{s}\frac{\vartheta_0}{T_0}\overline{L}(s)\end{aligned} \qquad (23)$$

$$\begin{aligned}c_4=&\,p_1\frac{1}{\rho_1^2-\rho_2^2}\cdot\frac{\sqrt{k\lambda_T T_0}}{s}q_0\overline{H}(s)+p_2\frac{\rho_1^2}{\rho_1^2-\rho_2^2}\frac{1}{B}\frac{\lambda_T T_0}{s}q_0\overline{H}(s)+\\&+\frac{1}{\rho_1^2-\rho_2^2}\frac{1}{b_4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_T T_0}{k}}\rho_1^2-Eb_5\right)\frac{\sqrt{k\lambda_T T_0}}{s}\frac{\vartheta_0}{T_0}\overline{L}(s)\end{aligned}$$

$$c_1=-c_2\cdot th\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_1 h\right),\qquad c_3=-c_4\cdot th\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_2 h\right)$$

gdzie $p_1$ i $p_2$ dane są związkami

$$p_1=\frac{b_3}{b_4},\qquad p_2=\frac{\frac{b_3}{b_4}+\frac{BH}{ER}}{b_4^2-\frac{E}{B}b_5} \qquad (24)$$

Uwzględniając otrzymane rezultaty, zapiszemy transformatę osiadania brzegu warstwy konsolidującej $\overline{w}_0=\overline{w}(z=0,s)$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

$$\overline{w}_0 = -\frac{H}{ER}\left[ p_1\overline{G}_1(h,s,\rho_1,\rho_2) - \sqrt{\frac{\lambda_T T_0}{k}}\frac{1}{B}\, p_2\overline{G}_2(h,s,\rho_1,\rho_2)\right] q_0\overline{H}(s) +$$
$$+\left(b_3b_4 + \frac{H}{R}b_5\right)\left[ p_1\sqrt{\frac{k}{\lambda_T T_0}}\overline{G}(h,s,\rho_1,\rho_2) + p_2\frac{1}{B}\overline{G}_4(h,s,\rho_1,\rho_2)\right] q_0\overline{H}(s) +$$
$$-\frac{1}{b_4}\frac{H}{ER}\left[\sqrt{\frac{\lambda_T T_0}{k}}\overline{G}_2(h,s,\rho_1,\rho_2) - \frac{H}{R}Eb_5\overline{G}_3(h,s,\rho_1,\rho_2)\right]\frac{\vartheta_0}{T_0}\overline{L}(s) + \qquad (25)$$
$$+\frac{1}{b_4}\left(b_3b_4 + \frac{H}{R}b_5\right)\left[\overline{G}_4(h,s,\rho_1,\rho_2) - Eb_5\sqrt{\frac{k}{\lambda_T T_0}}\overline{G}_3(h,s,\rho_1,\rho_2)\right]\frac{\vartheta_0}{T_0}\overline{L}(s) +$$
$$+\frac{2\frac{H}{R}b_3b_4 + \frac{E}{B}b_3^2 + b_4^2 - \frac{E}{R}b_5}{b_4^2 - \frac{E}{B}b_5}\frac{1}{E}hq_0\overline{H}(s)$$

Tutaj przyjęto oznaczenia

$$\overline{G}_1(h,s,\rho_1,\rho_2) = \frac{1}{\rho_1^2-\rho_2^2}\frac{\rho_1 th\left[\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_1 h\right] - \rho_2 th\left[\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_2 h\right]}{\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}}$$

$$\overline{G}_2(h,s,\rho_1,\rho_2) = \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1^2-\rho_2^2}\frac{\rho_2 th\left[\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_1 h\right] - \rho_1 th\left[\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_2 h\right]}{\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}} \qquad (26)$$

$$\overline{G}_3(h,s,\rho_1,\rho_2) = \frac{1}{\rho_1\rho_2}\frac{1}{\rho_1^2-\rho_2^2}\frac{\rho_2 th\left[\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_1 h\right] - \rho_1 th\left[\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_2 h\right]}{\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}}$$

$$\overline{G}_4(h,s,\rho_1,\rho_2) = \frac{1}{\rho_1\rho_2}\frac{1}{\rho_1^2-\rho_2^2}\frac{\rho_2^3 th\left[\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_1 h\right] - \rho_1^3 th\left[\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_2 h\right]}{\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}}$$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Dokonując odwrócenia transformacji Laplace'a na (25), możemy wyznaczyć osiadanie brzegu. Operacja ta zwykle wymaga obliczenia złożonych całek [3], tak też jest i w tym przypadku. Ważne rezultaty, mianowicie osiadanie w chwili początkowej i końcowej procesu konsolidacji można jednak uzyskać w stosunkowo prosty sposób. Zastosujemy do tego celu twierdzenia graniczne [3] orzekające, że

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} s\cdot \overline{w}(s) &= \lim_{lt\to\infty} w(t) \\ \lim_{s\to \infty} s\cdot \overline{w}(s) &= \lim_{lt\to 0} w(t) \end{aligned} \tag{27}$$

Należy więc obliczyć odpowiednie granice dla funkcji (25). Mamy oczywiście

$$\lim_{s\to 0} \frac{th\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_i h\right)}{\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}} = \rho_i h, \qquad i = 1,2 \tag{28}$$

$$\lim_{s\to \infty} \frac{th\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_i h\right)}{\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}} = 0$$

a stąd

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} \overline{G}_1(h,s,\rho_1\rho_2) &= h \\ \lim_{s\to 0} \overline{G}_2(h,s,\rho_1\rho_2) &= 0 \\ \lim_{s\to 0} \overline{G}_3(h,s,\rho_1\rho_2) &= 0 \\ \lim_{s\to 0} \overline{G}_4(h,s,\rho_1\rho_2) &= -h \end{aligned} \tag{29}$$

oraz

$$\lim_{s\to 0} \overline{G}_i(h,s,\rho_1\rho_2) = 0, \qquad i = 1, ..., 4$$

Stąd otrzymujemy początkowe i końcowe osiadanie warstwy, wywołane obciążeniem zewnętrznym $q_0$

$$w_0(t\to 0) = \frac{2\frac{H}{R}b_3 b_4 + \frac{E}{B}b_3^2 + b_4^2 - \frac{E}{R}b_5}{b_4^2 - \frac{E}{B}b_5}\frac{1}{E}hq_0 \tag{30}$$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

$$w_0(t \to \infty) = \frac{1}{E} hq_0 - \frac{1}{b_4}\left(b_3 b_4 + \frac{H}{R} b_5\right) h \frac{\vartheta_0}{T_0} \tag{31}$$

Zakładając brak wrażliwości ośrodka na zmiany temperatury, otrzymamy z (30) przy uwzględnieniu (3)

$$w(t \to 0) = \frac{H}{RE + H^2} hq_0 \tag{32}$$

## 4. Uwagi końcowe

Otrzymane wyniki, mimo że stanowią fragment pełnego rozwiązania zagadnienia brzegowego dla warstwy konsolidującej, pozwalają podjąć dyskusję o właściwościach tego rozwiązania. Tak więc jest widoczne, że końcowe osiadanie brzegu warstwy dane wzorem (30) opisuje analogiczna zależność jak dla ośrodka niewrażliwego na temperaturę, z uwzględnieniem, oczywiście, jej wpływu. Inaczej jest z początkowym osiadaniem warstwy. Jest ono różne w przypadku ośrodka wrażliwego na temperaturę i niewrażliwego. O wielkości tych różnic decydują termiczne właściwości ośrodka.

## Literatura


[1] Biot M.A., *General theory of three-dimensional consolidation*, J. Appl. Phys., No. 12, 1941, 155.

[2] Coussy O., *Mechanics of Porous Continua*, John Willey & Sons, 1995.

[3] Doetsch G., *Praktyka przekształcenia Laplace'a*, PWN, Warszawa 1964.

[4] Gaszyński J., *Identyfikacja modelu konsolidacji Biota na podstawie realizacji jednoosiowego zadania brzegowego*, Archiwum Hydrotechniki PAN, XXXI, t. 1–2, 1984, 125-135.

[5] Gaszyński J., *Konsolidacja porowatej warstwy nasyconej cieczą z uwzględnieniem wpływu temperatury*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Budownictwo 1756, Gliwice 2007.

[6] Kowalski S.J., *Thermomechanics of drying process of fluid-saturated porous media*, Drying Technology, Vol. 12, No. 4, 1994, 453-482.

[7] Strzelecki T., *Równania termokonsolidacji gruntów i skał*, Geotechnika i Budownictwo Specjalne, XXIX AGH, Kraków 2006, 285-299.


BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ