

MIROSLAW LEWANDOWSKI*

METODA OBLICZENIA HARMONICZNYCH NAPIĘCIA WYJŚCIOWEGO FALOWNIKA ZA POMOCĄ FUNKCJI BESSELA

A METHOD OF CALCULATIONS OF HARMONICS IN OUTPUT VOLTAGE OF A INVERTER USING BESSEL'S FUNCTIONS

Streszczenie

W niniejszym artykule opisano sposób kształtowania przebiegu sterującego falownikiem napięcia, zapewniającego regulację podstawowej harmonicznego sygnału wyjściowego oraz minimalizację zawartości harmonicznego. Przedstawiono algorytm wyznaczania współczynników szeregu Fouriera na podstawie funkcji Bessela pierwszego rodzaju. Ten sposób wyznaczania współczynników umożliwia szybkie ustalenie charakterystyk sygnału bez potrzeby jego całkowania i związanych z tym efektów ubocznych.

Słowa kluczowe: funkcja Bessela, współczynniki analizy Fouriera, falownik napięcia

Abstract

The paper aims to present the algorithm for the estimation of the coefficients of the Fourier analysis. The estimation is based on Bessel's function of the first kind. The analysis of the Fourier coefficients provides with further details about the influence the parameters on the significant amplitudes and series of the harmonics that form the shape of the signal. This approach of the coefficient estimation enables fast detecting of the signal details without the necessary integration and its side effects.

Keywords: Bessel function, coefficients of the Fourier analysis, bridge inverter

* Dr inż. Mirosław Lewandowski, Instytut Maszyn Elektrycznych, Wydział Elektryczny, Politechnika Warszawska.

1. Wstęp

Mimo wielu analogii istniejących pomiędzy sterowaniem silnikiem indukcyjnym i silnikiem prądu stałego, nie można powiedzieć, że istnieje jakaś jedna standardowa metoda regulacji napędów trakcyjnych z silnikami indukcyjnymi, tak jak w przekształtnikowych napędach prądu stałego. Wynika to z postaci zależności na moment silnika indukcyjnego, która wskazuje, że moment silnika indukcyjnego może być regulowany na wiele różnych sposobów w zależności od wyboru elektromagnetycznych zmiennych stanu. Jednemu czasowemu przebiegowi momentu będzie odpowiadał zbiór par przebiegów czasowych określonych elektromagnetycznych zmiennych stanu. Obecnie istnieje wiele odmian sterowania wektorowego w zależności od metod modulacji PWM [10]. Sygnały okresowe można aproksymować („przybliżyć”) za pomocą tzw. szeregu Fouriera, czyli sumy sygnałów (ko) sinusoidalnych (harmonicznymi) o odpowiednio dobranych częstotliwościach. Transformacja Fouriera jest podstawowym narzędziem analizy częstotliwościowej sygnałów.

2. Zastosowanie funkcji Bessla do wyznaczenia współczynników Fouriera

Przebieg czasowy okresowy można przedstawić w postaci

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\omega_n t) \quad (1)$$

Współczynniki A_0 , A_n , B_n nazywamy współczynnikami Fouriera i określamy je ogólnie znanymi wzorami [1]. Opis matematyczny przebiegu napięcia wyjściowego falownika i zarazem określający czasy stanów przewodzenia zaworów (tyrystorów, tranzystorów) pracujących w trybie impulsowym falownika napięcia podany jest równaniem (2) [9]

$$U_R(t, s_0, s_1, \varphi, \psi, \varepsilon) = U_c \times \left\{ [s_m(t, s_0, s_1, \varphi, \psi)] + \frac{2}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \sin(n\pi a(t, s_0, s_1, \varphi, \psi)) \cos(nm_f(\omega_1 t - \varphi - \varepsilon)) \right\} \quad (2)$$

gdzie:

- U_c – wartość napięcia zasilania falownika (wartość stała),
- ω_1 – częstotliwość kątowna podstawowej harmonicznnej sygnału wyjściowego falownika,
- m_f – wielokrotność impulsów względem częstotliwości podstawowej harmonicznnej,
- φ – kąt przesunięcia fazowego między sygnałami wielofazowymi,
- ψ – faza podstawowej harmonicznnej sygnału wyjściowego falownika,
- ε – kąt przesunięcia fazowego wzorca ciągu impulsów dystrybucji,
- n – indeks sumacyjny szeregu dystrybucyjnego, określający dokładność obliczeń.

Za pomocą opisanych parametrów możemy wymusić zarówno amplitudę podstawowej harmonicznej, jak i jej fazę, a także wpływać na spektrum sygnału wyjściowego. Chwilową wartość głębokości modulacji szeregu impulsów zapisuje się jako parametryczną zmienną czasu

$$s_m(t, s_0, s_1, \varphi, \psi) \quad (3)$$

Funkcje modulacyjne stosowane w przekształtnikach obwodów głównych pojazdów trakcyjnych są różnej postaci. Do najczęściej stosowanych należy modulacja sinusoidalna opisana równaniem

$$s_m = s_0 + \frac{1}{2}s_1 \cos(\theta_1) \quad (4)$$

Przebieg U_R po uwzględnieniu (4) zapiszmy w następującej postaci (5), dogodnej do dalszej analizy

$$U_R = s_0 + \frac{1}{2}s_1 \cos(\theta_1) + U_{RR} \quad (5)$$

gdzie

$$U_{RR} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi s_m) \cos(nm_f \theta_2) \quad (6)$$

oraz

$$\theta_1(t) = \int \omega_1(t) - \varphi - \psi, \quad \theta_2(t) = \int \omega_1(t) - \varphi - \psi - \varepsilon \quad (7)$$

Dla $s_0 = 0,5$ wyrażenie (6), po uwzględnieniu (4) i (7), przyjmuje postać

$$U_{RR} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{2} s_1 \cos(\theta_1) + \frac{n\pi}{2}\right) \right\} \cos(nm_f \theta_2) \quad (8)$$

Uwzględniając wyrażenie na sinus sumy kątów, otrzymujemy

$$U_R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left\{ \sin\left[\frac{n\pi}{2} s_1 \cos(\theta_1)\right] \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left[\frac{n\pi}{2} s_1 \cos(\theta_1)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right\} \cos(nm_f \theta_2) \quad (9)$$

Biorąc pod uwagę związki (10), (11) między funkcjami trygonometrycznymi i funkcjami Bessela pierwszego rodzaju w postaci [9]

$$\cos(s * \cos(\theta)) = J_0(s) - 2[J_2(s)\cos 2\theta - J_4(s)\cos 4\theta + J_6(s)\cos 6\theta - \dots] \quad (10)$$

$$\sin(s * \cos(\theta)) = 2[J_1(s)\cos 2\theta - J_3(s)\cos 3\theta + J_5(s)\cos 5\theta - \dots] \quad (11)$$

oraz

$$s_2 = \frac{n^* \pi}{2} s_1, \quad Z_N = (-1)^{q-1}; \quad Z_P = (-1)^{q+1}, \quad Z_C = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad Z_S = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (12)$$

otrzymujemy

$$U_R = U_{R1} + U_{R2} + U_{R3} + U_{R4} + U_{R0} \quad (13)$$

gdzie

$$U_{R1} = \sum_n \frac{2}{n\pi} \left\{ \sum_q J_{(2q-1)}(s_2) Z_C Z_N \cos((2q-1)\theta_1 - nm_f \theta_2) \right\} \quad (14)$$

$$U_{R2} = \sum_n \frac{2}{n\pi} \left\{ \sum_q J_{(2q-1)}(s_2) Z_C Z_N \cos((2q-1)\theta_1 + nm_f \theta_2) \right\} \quad (15)$$

$$U_{R3} = -\sum_n \frac{2}{n\pi} \left\{ \sum_q J_{(2q)}(s_2) Z_S Z_P \cos((2q)\theta_1 - nm_f \theta_2) \right\} \quad (16)$$

$$U_{R4} = -\sum_n \frac{2}{n\pi} \left\{ \sum_q J_{(2q)}(s_2) Z_S Z_P \cos((2q)\theta_1 + nm_f \theta_2) \right\} \quad (17)$$

$$U_{R0} = -\sum_n \frac{2}{n\pi} J_{(0)}(s_2) Z_S \cos(nm_f \theta_2) \quad (18)$$

gdzie:

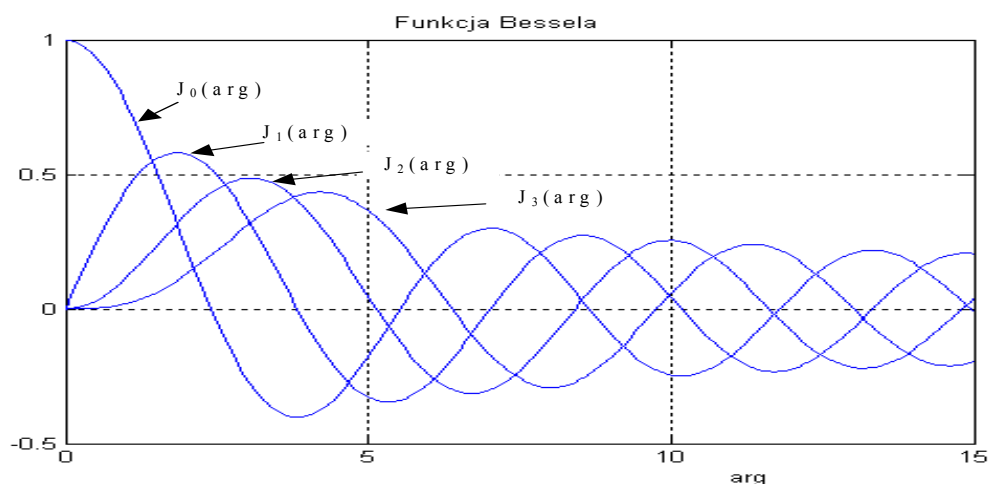
q – indeks w sumie określający rząd funkcji Bessela pierwszego rodzaju.

Ze wzoru (13) wynika wprost struktura czasowa i częstotliwościowa sygnału U_R . Przebieg napięcia wyjściowego falownika jest sumą nieskończoną sygnałów harmonicznym o dyskretnych pulsacjach ω_1 i $k_i \omega_1$

$$k_i = \begin{cases} (2q) \pm nm_f & n \text{ nieparzyste} \\ (2q-1) \pm nm_f & n \text{ parzyste} \end{cases} \quad (19)$$

Amplituda pulsacji podstawowej ω_1 określona jest przez wartość $0,5s_1$, a amplituda rzędu nm_f – przez wartość $J_0(s_2)$ funkcji Bessela zerowego rzędu w punkcie s_2 . Amplitudy par bocznych dla ustalonego q mają jednakową wysokość i określoną przez wartość $J_{2q-1}(s_2)$ dla n nieparzystego $J_{2q}(s_2)$ dla n parzystego oraz funkcji Bessela w punkcie s_2 . Udział poszczególnych składowych harmonicznym zależy silnie od wartości wskaźnika s_2 i jego zależności od n . Teoretycznie pasmo przebiegu opisanego wyrażeniem U_R jest nieograniczone. Z dokładnej analizy, uwzględniającej właściwości funkcji Bessela, wynika jednak, że prawie cała moc przebiegu jest zawarta w paśmie ograniczonym. W analizie zawartości harmonicznym w prądzie silnika czy prądzie sieci trakcyjnej ważne znaczenie ma oszacowanie szerokości tego pasma w zależności od wartości s_2 . Wykres funkcji Bessela kilku pierwszych rzędów zmiennej s_2 pokazany jest na ryc. 1. Dla określonej war-

tości s_2 znaczące wartości przybierają funkcje Bessela kilku wyższych rzędów, w praktyce od pewnego rzędu q prążki boczne widma sygnału są już na tyle małe, że można je pominąć.



Ryc. 1. Funkcje Bessela pierwszego rodzaju

Fig. 1. Bessel functions of the first kind

3. Wybrane elementy algorytmu

Dla zadanej wartości m_f wyznaczamy rzędy znaczących harmonicznych wg wyrażen (19) i opisanej własności wynikającej z funkcji Bessela oraz szeregujemy pary liczb n i q , dla których spełniony jest warunek rzędu obliczanej harmonicznej. Obliczymy wartości funkcji Bessla

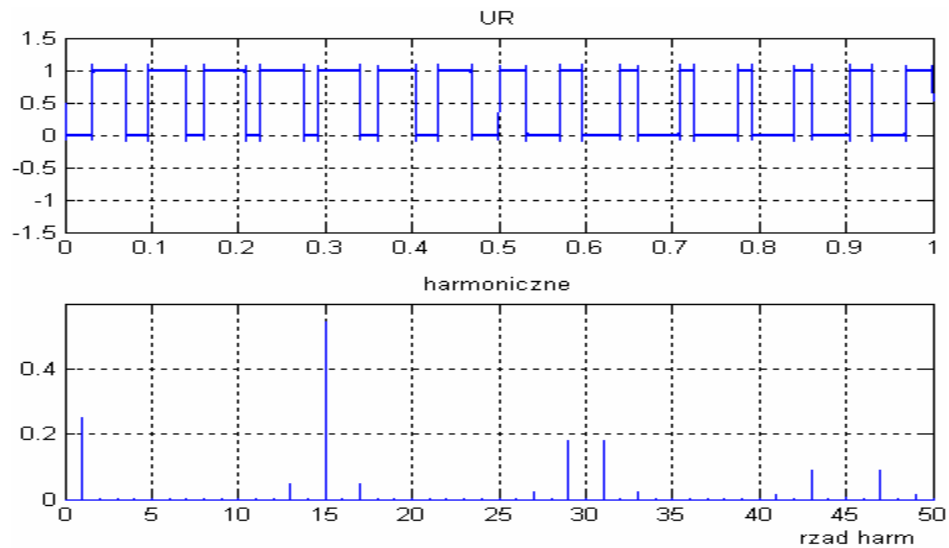
$$J_{(2q)}(s_2) \quad \text{lub} \quad J_{(2q-1)}(s_2) \quad (20)$$

oraz fazy

$$((2q-1)\theta_1 \pm nm_f\theta_2) \quad \text{lub} \quad ((2q)\theta_1 \pm nm_f\theta_2) \quad (21)$$

w zależności od n (parzyste, nieparzyste) i przyjmując $\omega_1 = 0$.

Ze względu na fakt, że dla szeregu par n i q funkcja opisana wyrażeniem (14)–(18) spełnia warunek zadanego rzędu harmonicznych, ważną czynnością redukującą czas obliczeń jest wybór szeregu par n i q , dla których amplitudy zadanej harmonicznej mają znaczącą wartość. Na rycinie 2 przedstawiono przebieg U_R dla $m_f = 15$ i $s_1 = 0,5$. W tabelicy 1 przedstawiono amplitudy poszczególnych harmonicznych obliczonych wg wyrażenia (13) i wg transformaty Fouriera, dla dwóch różnych ilości próbek przebiegu LP = 10 000 i LP = 1 000 000.

Ryc. 2. Przebieg czasowy U_R oraz widmo sygnału dla $s_1 = 0,5$ i $m_f = 15$ Fig. 2. The course the temporary U_R , as well as the spectrum of signal for $s_1 = 0,5$ and the $m_f = 15$

Tablica 1

Rząd harmonicznych	Amplitudy wybranych harmonicznych					
	wg współczynników Fouriera				wg wzoru (13)	
	LP = 100 000		LP = 1 000 000			
1	0,2588	1,56932	0,2499	-1,5707	0,2501	-1,5708
:						
11	0,0096	1,5881	0,0007	1,5725	0,0006	1,57080
13	0,0494	1,5912	0,0468	1,5728	0,04661	1,5708
15	0,5430	1,5943	0,5421	1,5732	0,54217	1,5708
17	0,4234	1,5975	0,0460	1,5735	0,04661	1,5708
19	0,0010	1,6006	0,0005	1,5738	0,0006	1,5708
:						
27	0,0245	1,6132	0,0220	1,5750	0,02197	1,5708
29	0,1776	1,6163	0,1803	1,5754	0,18043	1,5708
30	0,0056	-1,5237	0,0006	-1,5661	0,0000	0,0000
31	0,1829	-1,5221	0,1806	-1,5659	0,18043	-1,5708
33	0,0195	-1,5189	0,0219	-1,5656	0,02197	-1,5708

4. Wnioski

Amplitudy fal bocznych np. 13 i 17 mają różną amplitudę, natomiast gdy liczymy wg wzoru (13), amplitudy fal bocznych mają równe amplitudy. Różnice wynikają z metody liczenia. Dokładność obliczeń można poprawić, zwiększając liczbę badanych okresów, co oczywiście zwiększa czas obliczeń. Algorytm obliczenia współczynników Fouriera z zasto-

sowaniem funkcji Bessela, pozwala na znaczne zmniejszenie czasu obliczeń. Dla danej liczby próbek LP, obliczając współczynniki Fouriera, komputer szacunkowo wykonuje LP razy instrukcje mnożenia. W przypadku obliczania współczynników Fouriera z zastosowaniem funkcji Bessela, instrukcja mnożenia wywoływana jest 1000 razy. Skrócenie czasu obliczeń jest istotną zaletą analizy widma w czasie rzeczywistym.

Literatura

- [1] Cholewicki T., *Metody obliczania obwodów elektrycznych*, PWT, Warszawa.
- [2] Lewandowski M., *Modulator szerokości impulsów w układzie napędowym pojazdu trakcyjnego*, Konferencja naukowa „Problemy Rozwoju Trakcji Elektrycznej w Polsce”, Warszawa 1983.
- [3] Lewandowski M., Ważyński K., *Układ sterowania silnikiem asynchronicznym z modulacją szerokości impulsów*, III Sympozjum „Podstawowe problemy energoelektroniki”, PTETiS.1, Bielsko-Biała 1985.
- [4] Lewandowski M., Szelaąg A., *Minimizing of output voltage of the inverter*, Archiv für Elektrotechnik, 1986.
- [5] Lewandowski M., *Microprocessor-controlled PWM modulator – IASTED*, Conference Identification, Modelling and Simulation, Paris 1987.
- [6] Lewandowski M., *Systemy sterowania i dynamika pojazdów trakcyjnych wyposażonych w komputery pokładowe*, KBN – Grant nr 331439102, 1996.
- [7] McLachlan N.W., *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, 1964.
- [8] Orłowska-Kowalska T., *Bezczujnikowe układy napędowe z silnikami indukcyjnymi*, OWPW, 2003.
- [9] Skarpetowski G., *Sposób sterowania elektrycznym zaworem przekształtnika*, Rzeczpospolita Polska, Patent Nr 168286.
- [10] Skarpetowski G., *Uogólniona teoria przekształtników statycznych*, WPW, Warszawa 1997.
- [11] Szabatin J., *Przetwarzanie sygnałów*, PWN, 2005.