

MACIEJ BIEDA, ZBIGNIEW PIEKARSKI*

QUASI-OKRESOWA OPTYMALIZACJA Z DWOMA STEROWANIAMI PODSTAWOWYMI DRGAJĄCEGO PRĘTA WSPORNIKOWEGO

QUASI-PERIODIC OPTIMIZATION OF THE BAR WITH TWO VARIOUS BASIC CONTROLS

Streszczenie

W niniejszym artykule po raz pierwszy przebadany został numerycznie problem drgań podłużnych sprężystego pręta. Zakładamy, że jego przekrój jest quasi-okresowy niezależnie w dwóch różnych i rozłącznych zbiorach Z_1 i Z_2 zbioru Z podprzedziałów, na które podzielono całą długość L pręta, czyli zmienną niezależną $x \in [0, L]$. Otrzymane numeryczne wyniki przebadanego przykładu przedstawiono na wykresach 2, 3.

Słowa kluczowe: drgania podłużne pręta, quasi-okresowe sterowanie, dwa sterowania podstawowe

Abstract

In this work an issue of longitudinal oscillation of resilient rod, with the assumption that it has a quasi-periodical cross-section in autonomous, different and separable sets Z_1 and Z_2 of set Z of ranges, that the all length L of rod was divided into, (i.e. argument) has been numerically checked for the first time.

Keywords: longitudinal oscillation bars, quasi-periodical control, two basic controls

*Mgr inż. Maciej Bieda, dr hab. Zbigniew Piekarski, Instytut Fizyki, Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki Stosowanej, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

W niniejszym artykule po raz pierwszy przedstawiono przykład zastosowania optymalizacji quasi-okresowej, w przypadku gdy dwie różne funkcje sterujące występują w dwóch różnych podzbiorach zbioru odcinków, na które podzielono całkowity przedział zmiennej niezależnej. Wykorzystując wyniki prac [5, 6], sformułowano zadanie quasi-okresowej optymalizacji drgań podłużnych pręta wspornikowego oraz przeprowadzono przykładowe obliczenia numeryczne ilustrujące jego zastosowanie. Praca ta jest uogólnieniem wyników otrzymanych w publikacji [1], gdzie optymalizowana belka podzielona była na dwa równe odcinki, czyli sterowanie z założenia było okresowe.

2. Rozważania ogólne

Typowy problem autonomicznej optymalizacji jest następujący – szukamy minimum funkcjonału celu

$$J(\bar{u}) = \int_0^L f_0(\bar{y}(x), \bar{u}(x)) dx \quad (1)$$

w którym wektor $\bar{y}(x) = (y_1, \dots, y_n)^T$ należy do przestrzeni stanów, natomiast wektor $\bar{u}(x) = (u_1, \dots, u_m)^T$ do przestrzeni sterowań. Minimum funkcjonału (1) szukamy przy ograniczeniach w formie układu zwyczajnych różniczkowych równań stanu

$$\frac{d}{dx} y_k(x) = f_k(\bar{y}, \bar{u}), \quad x \in [0, L], \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

z warunkami brzegowymi w postaci jednorodnych, liniowych równań algebraicznych

$$P_\alpha(\bar{y}(0)) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \alpha^0 \leq n \quad (3a)$$

$$K_\beta(\bar{y}(L)) = 0, \quad \beta = 1, 2, \dots, \beta^L \leq n \quad (3b)$$

Przyjmujemy, że funkcje

$$f_0, f_k, \frac{\partial f_0}{\partial y_i}, \frac{\partial f_k}{\partial y_i}, P_\alpha, K_\beta, y_k \quad (4)$$

są określone i ciągłe ze względu na wszystkie swoje argumenty (dla $i, k = 1, 2, \dots, n$).

W zależności od rodzaju badanego problemu narzucane są inne, dodatkowe ograniczenia. W artykule zostanie omówione zadanie optymalizacji, w którym sterowanie jest quasi-okresowe niezależnie w dwóch różnych podzbiorach zbioru rozłącznych odcinków, na które podzielony został całkowity przedział $[0, L]$ zmiennej x .

Przedział $[0, L]$ dzielimy na N podprzedziałów (odcinków), każdy o długości

$$\Delta l_q = l_q - l_{q-1} \quad (5)$$

za pomocą punktów $l_q, q = 1, 2, \dots, N$ spełniających nierówności

$$0 = l_0 < l_1 < l_2 < \dots < l_N = L \quad (6)$$

Aby mogła zaistnieć quasi-okresowość sterowania, musimy przyjąć, że przynajmniej jedna z długości (5) jest różna od pozostałych.

Zmienną niezależną x przebiegającą odcinek o indeksie q oznaczamy przez x_q

$$x_q \equiv x \in [l_{q-1}, l_q] \quad (7)$$

Każdą taką zmienną można wyrazić za pomocą jednej z nich, dowolnie wybranej, np. zmiennej x_1

$$x_q = A_q x_1 + l_{q-1} \quad (8)$$

gdzie

$$A_q = \frac{\Delta l_q}{l_1}, \quad 0 \leq x_1 \leq l_1 \quad (9)$$

Z założenia sterowanie musi być quasi-okresowe w dwóch różnych podzbiorach odcinków (5). Sytuację taką otrzymujemy w następujący sposób: zakładamy, że zbiór Z liczb całkowitych od 1 do N (tj. zbiór wartości indeksu q) jest podzielony na dwa rozłączne podzbiory Z_1 i Z_2

$$\begin{aligned} Z_1 \cup Z_2 &= Z, & Z &= \{1, 2, \dots, N\} \\ Z_1 \cap Z_2 &= \emptyset \end{aligned} \quad (10)$$

Za pomocą takich podzbiorów możemy zapisać dwa warunki, które muszą spełnić funkcje sterowania, aby były w różny sposób quasi-okresowe w podzbiorach Z_1 i Z_2 . Pierwszy warunek powtarzalności ma postać

$$u_l(x_r) = a_l(x_1), \quad r \in Z_1 \quad (11)$$

natomiast drugi

$$u_l(x_s) = b_l(x_1), \quad s \in Z_2 \quad (12)$$

gdzie $l = 1, 2, \dots, m$. Sterowania $u_l(x_r)$ powtarzają swoje wartości w podprzedziałach o indeksie r należących do zbioru Z_1 , natomiast sterowania $u_l(x_s)$ w podprzedziałach o indeksie s należących do Z_2 . Przyjmujemy, że sterowania podstawowe $a_l(x_1)$ oraz $b_l(x_1)$ są od siebie niezależne. O każdym sterowaniu – a więc również o podstawowych – zakładamy, że należą do stałego obszaru U , najczęściej domkniętego, przestrzeni sterowań, zawierającego funkcje określone i odcinkami ciągłe o skończonej liczbie punktów nieciągłości

$$a_l(x_1) \in U, \quad b_l(x_1) \in U \quad (13)$$

Proces quasi- optymalizacji określony wyżej w przedziale $[0, L]$ sprowadzamy do formy równoważnej zapisanej w podprzedziale $[0, l_1]$. Jak w [6], stosować będziemy po wykorzystaniu (8), (11), (12) następujące oznaczenia

$$\begin{aligned} y_k(x_q(x_1)) &\equiv y_k^q(x_1) \\ u_l(x_r(x_1)) &\equiv u_l^r(x_1) = a_l(x_1) \\ u_l(x_s(x_1)) &\equiv u_l^s(x_1) = b_l(x_1) \end{aligned} \quad (14)$$

Wzory (14) pozwalają zapisać n równań stanu (2) jako nN równań określonych w pierwszym podprzedziale zmiennej x_1 za pomocą wzoru (8)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_1} y_k^r(x_1) &= A_r f_k(\bar{y}^r, \bar{a}), & r \in Z_1 \\ \frac{d}{dx_1} y_k^s(x_1) &= A_s f_k(\bar{y}^s, \bar{b}), & s \in Z_2 \end{aligned} \quad (15)$$

z warunkami brzegowymi (3) w postaci

$$\begin{aligned} P_\alpha(y^1(0)) &= 0 \\ K_\beta(y^N(l_1)) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Do układów równań (15) musimy dołączyć warunki ciągłości, które możemy zapisać za pomocą równości

$$y_k^{p+1}(0) = y_k^p(l_1), \quad p = 1, 2, \dots, (N-1) \quad (17)$$

Funkcjonał celu (1) daje się, po zmianie zmiennych całkowania za pomocą (8), przedstawić w formie

$$J(\bar{a}, \bar{b}) = \int_0^{l_1} \left\{ \sum_r A_r f_0(\bar{y}^r, \bar{a}) + \sum_s A_s f_0(\bar{y}^s, \bar{b}) \right\} dx_1 \quad (18)$$

Do rozwiązania problemu optymalizacji określonego obecnie w podprzedziale $[0, l_1]$, w którym sterowania podstawowe $\bar{a}(x_1)$ i $\bar{b}(x_1)$ nie są już quasi-okresowe, można zastosować jedną z klasycznych metod optymalnego sterowania, w naszym przypadku zasadę maksimum Pontriagina podaną np. w [4]. Aby wykorzystać jej wyniki, trzeba wprowadzić N hamiltonianów składowych

$$H^r(x_1) = A_r \psi_0 f_0(\bar{y}^r, \bar{a}) + A_r \sum_{i=1}^n \psi_i^r(x_1) f_i(\bar{y}^r, \bar{a}) \quad (19)$$

oraz

$$H^s(x_1) = A_s \psi_0 f_0(\bar{y}^s, \bar{b}) + A_s \sum_{i=1}^n \psi_i^s(x_1) f_i(\bar{y}^s, \bar{b}) \quad (20)$$

w których dowolna stała ψ_0 jest mniejsza od zera oraz $r \in Z_1, s \in Z_2$.

Za pomocą hamiltonianów (19), (20) wyznaczamy układy równań różniczkowych, które muszą spełniać zmienne sprzężone ψ_i^r oraz ψ_i^s dla $i = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{d}{dx_1} \psi_k^r(x_1) = - \frac{\partial H^r}{\partial y_k^r} \quad (21)$$

oraz

$$\frac{d}{dx_1} \psi_k^s(x_1) = - \frac{\partial H^s}{\partial y_k^s} \quad (22)$$

Zmienne sprzężone określone z układów (21) i (22) muszą spełniać warunki brzegowe wynikające z warunków transwersalności postaci

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \delta y_i^1(0) \psi_i^1(0) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \delta y_i^N(l_1) \psi_i^N(l_1) &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Przyrosty $\delta y_i^1(0)$ zmiennych stanu w punkcie początkowym $l_0 = 0$ zależą od siebie, ponieważ narzucone zostały warunki brzegowe (3a), natomiast $\delta y_i^N(l_1)$ zależą od siebie, gdyż obowiązują warunki (3b). Po eliminacji z warunków (23) przyrostów zależnych i po przyrównaniu do zera współczynników występujących przy pozostałych przyrostach niezależnych otrzymujemy szukane warunki brzegowe dla zmiennych sprzężonych. Będą to warunki albo do równań (21), albo do (22) w zależności od tego, do którego podzbioru, Z_1 czy Z_2 , należą liczby 1 oraz N .

Zmienne sprzężone muszą spełniać również, analogicznie do (17), warunki ciągłości

$$\psi_k^{p+1}(0) = \psi_k^p(l_1) \quad (24)$$

Niezależne sterowania podstawowe możemy znaleźć z dwóch niezależnych warunków optymalności

$$H_{1\text{opt}}(x_1) = \max_{a \in U} \sum_r H^r(x_1), \quad r \in Z_1 \quad (25)$$

oraz

$$H_{2\text{opt}}(x_1) = \max_{b \in U} \sum_s H^s(x_1), \quad s \in Z_2 \quad (26)$$

W przedziale $[0, l_1]$ zmiennej x_1 oba hamiltoniany optymalne $H_{1,2\text{opt}}$ są ciągłe.

3. Quasi-okresowa optymalizacja drgań podłużnych pręta wspornikowego

Równanie drgań swobodnych i podłużnych pręta ma postać

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EF(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \rho F(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (27)$$

Przez podstawienie

$$w(x, t) = y_1(x) e^{-i\omega t} \quad (28)$$

i po odpowiednich przekształceniach równanie (27) można sprowadzić do układu dwóch równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} y_1 &= \frac{1}{EF(x)} y_2 \\ \frac{d}{dx} y_2 &= -\omega^2 \rho F(x) y_1 \end{aligned} \quad (29)$$

Do równań tych dołączamy ogólne (jednorodne) warunki brzegowe

$$\begin{aligned} y_2(0) + B_0 y_1(0) &= 0 \\ y_2(L) + B_L y_1(L) &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

gdzie

$$B_{0,L} = m_{0,L} \omega^2 - k_{0,L}$$

Stałe we wzorach (29), (30) oznaczają:

E – moduł Younga,

ρ – gęstość materiału pręta,

ω – częstość drgań własnych,

$m_{0,L}$ – masy punktowe umieszczone na końcach pręta,

$k_{0,L}$ – stałe sprężystości sprężyn mocujących początek i koniec pręta.

Wielkość $F(x)$ oznacza pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta, które w naszym przypadku będzie sterowaniem. Cały pręt dzielimy na trzy części ($N = 3$, $q = 1, 2, 3$). Punkty (5), które dzielą przedział $[0, L]$ na podprzedziały są np. następujące

$$l_1 = \frac{1}{4}L, \quad l_2 = \frac{3}{4}L \quad (31)$$

Tym samym odpowiednie odcinki mają długość (6)

$$\Delta l_1 = \frac{L}{4}, \quad \Delta l_2 = \frac{L}{2}, \quad \Delta l_3 = \frac{L}{4} \quad (32)$$

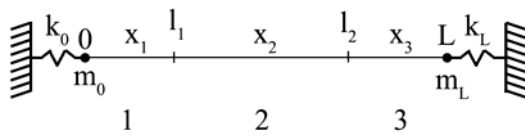
Odpowiednie stałe ilorazy (9) mają wartość

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 2, \quad A_3 = 1 \quad (33)$$

Zmienne niezależne x_q określone wzorami (8) przyjmują postać

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1 \leq l_1 \\ x_2 &= 2x_1 + (L/4) \\ x_3 &= x_1 + (3L/4) \end{aligned} \quad (34)$$

Drgający podłużnie pręt można przedstawić za pomocą ryciny



Ryc. 1. Podział drgającego pręta
Fig. 1. The division of the vibrating bar

Przyjmujemy, że zbiór Z dzielimy na dwa podzbiory Z_1 i Z_2 zgodnie z (10)

$$\begin{aligned} Z &= \{1, 2, 3\} \\ Z_1 &= \{1, 3\} \\ Z_2 &= \{2\} \end{aligned} \quad (35)$$

Wprowadzamy oznaczenia dane wzorami (14)

$$y_k(x_q(x_1)) = y_k^q(x_1), \quad k = 1, 2 \quad q = 1, 2, 3 \quad (36)$$

Oznaczenia (36) pozwalają zapisać warunki (11), (12) powtarzalności sterowania $F(x)$

$$\begin{aligned} F(x_1) = F(x_3) = a_1(x_1), & \quad r = 1, 3 \\ F(x_2) = b_1(x_1), & \quad s = 2 \end{aligned} \quad (37)$$

Poszukiwać będziemy minimum masy pręta długości L , czyli inaczej możemy powiedzieć, że funkcjonalem celu jest objętość pręta

$$J(F) = \int_0^L F(x) dx \quad (38)$$

Po wykorzystaniu zmiennych (34) całkę (38) przedstawiamy w formie

$$J = \int_0^{l_1} F(x_1) dx_1 + \int_{l_1}^{l_2} F(x_2) dx_2 + \int_{l_2}^{l_3} F(x_3) dx_3$$

Zmiana zmiennych całkowania również za pomocą (34) (po zastosowaniu (33) i (37)) prowadzi do

$$J(a, b) = \int_0^{l_1} \{2a_1(x_1) + 2b_1(x_1)\} dx_1 \quad (39)$$

W dalszych rozważaniach przyjmiemy, że częstość drgań pręta jest stała

$$\omega = \text{const} \quad (40)$$

Do rozważań wprowadzimy następujące bezwymiarowe stałe i wielkości zmienne (przekrój F_0 jest dowolny)

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{\omega^2 \rho L^2}{E}, & \quad \varepsilon_1 = \frac{l_1}{L}, & \quad z = \frac{x_1}{L}, & \quad 0 \leq z \leq \varepsilon_1 \\ Y_1^q(z) = \frac{y_1^q}{L}, & \quad Y_2^q = \frac{y_2^q}{EF_0}, & \quad a(z) = \frac{a_1}{F_0}, & \quad b(z) = \frac{b_1}{F_0} \end{aligned} \quad (41)$$

Przy takich oznaczeniach funkcjonal celu (39) przyjmuje formę

$$J = F_0 L \int_0^{\varepsilon_1} \{2a + 2b\} dz \quad (42)$$

W pracy [3] udowodniono, że równoważny do rozpatrywanego jest przypadek dualny. Oznacza to, że zamiast szukać minimum funkcjonału (42) przy warunku (40) stałej częstości można szukać minimum częstości ω (wyrażonej za pomocą funkcji Rayleigha) przy stałej wartości wyrażenia (42). W takiej sytuacji należy przyjąć warunek normalizacji w postaci

$$\int_0^{\varepsilon_1} \{2a(z) + 2b(z)\} dz = 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{4}, \quad 0 \leq z \leq \frac{1}{4} \quad (43)$$

Równania stanu (29) za pomocą wielkości (8), (36), (37) i (41) przedstawiamy w formie (15)

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} Y_1^1(z) = \frac{1}{a(z)} Y_2^1 \\ \frac{d}{dz} Y_2^1(z) = -\varphi a(z) Y_1^1 \end{cases} \quad r = 1 \quad (44a)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} Y_1^2(z) = \frac{2}{b(z)} Y_2^2 \\ \frac{d}{dz} Y_2^2(z) = -2\varphi b(z) Y_1^2 \end{cases} \quad s = 2 \quad (44b)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} Y_1^3(z) = \frac{1}{a(z)} Y_2^3 \\ \frac{d}{dz} Y_2^3(z) = -\varphi a(z) Y_1^3 \end{cases} \quad r = 3 \quad (44c)$$

Korzystając ze wzorów (42), (43) i (44), obliczamy hamiltoniany składowe (19) i (20). Za ich pomocą, z warunków optymalności (25) i (26), które dla rozważanego przykładu przyjmują formę

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \sum_r H^r(z) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} \sum_s H^s(z) &= 0 \end{aligned} \quad (45)$$

obliczamy szukane sterowania $a(z)$ oraz $b(z)$

$$a(z) = \sqrt{\frac{\sum_r \psi_1^r Y_2^r A_r}{\lambda \sum_r A_r - \varphi \sum_r \psi_2^r Y_1^r A_r}} \quad (46)$$

$$b(z) = \sqrt{\frac{\sum_s \psi_1^s Y_2^s A_s}{\lambda \sum_s A_s - \varphi \sum_s \psi_2^s Y_1^s A_s}}$$

Równania sprzężone (21), (22) obliczamy z tych samych hamiltonianów. Okazuje się, że problem jest samosprężony. Podstawienia

$$\begin{aligned} \psi_1^q &= -k Y_2^q \\ \psi_2^q &= k Y_1^q \end{aligned} \quad k > 0 \quad (47)$$

sprowadzają otrzymane równania sprzężone, warunki brzegowe uzyskane z (23) oraz warunki ciągłości (24) do odpowiednich związków dla zmiennych stanu, czyli do równań (44) i warunków (30) w postaci

$$\begin{aligned} Y_2^1(0) + \beta_0 Y_1^1(0) &= 0 \\ Y_2^3(1/4) + \beta_L Y_1^3(1/4) &= 0 \end{aligned} \quad (48)$$

gdzie

$$\beta_{0,L} = B_{0,L} L / EF_0$$

oraz do warunków ciągłości

$$Y_k^{p+1}(0) = Y_k^p(1/4) \quad (49)$$

Po wykorzystaniu stałych (33) oraz podstawień (47) z wyrażeń (46) otrzymujemy końcowe wzory na szukane przekroje

$$a(z) = \sqrt{\frac{C_{12}}{2\Lambda + \varphi C_{11}}} \quad (50)$$

$$b(z) = \sqrt{\frac{C_{22}}{2\Lambda + \varphi C_{21}}} \quad (51)$$

W powyższych wzorach

$$\begin{aligned} C_{11} &= (y_1^1)^2 + (y_1^3)^2, & C_{21} &= 2(y_1^2)^2 \\ C_{12} &= (y_2^1)^2 + (y_2^3)^2, & C_{22} &= 2(y_2^2)^2 \end{aligned} \quad (52)$$

oraz

$$\Lambda = -\frac{\lambda}{k} = \text{dowolna stała} \quad (53)$$

Warunek normalizacji (43) dany jest przez formułę

$$\int_0^{1/4} \{a(z) + b(z)\} dz = \frac{1}{2} \quad (54)$$

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że aby rozwiązać postawiony problem, trzeba rozwiązać (metodą kolejnych przybliżeń) trzy układy równań (44) z warunkami brzegowymi (48) i ciągłości (49). Sterowania występujące w układach liczymy ze związków (50) i (51). Sterowania te muszą spełniać dodatkowy warunek normalizacji (54).

4. Obliczenia numeryczne

Przeprowadzone zostały dla drgań podłużnych pręta wspornikowego, czyli dla przypadku, gdy warunki brzegowe (30) przemieniają się w

$$Y_1^1(0) = 0, \quad Y_2^2(1/4) = 0 \quad (55)$$

Układ równań różniczkowych (44) z warunkami brzegowymi (55) oraz warunkami ciągłości (55) rozwiązano numerycznie metodą kolejnych przybliżeń z użyciem programu Mathematica 5. Jako zerowe przybliżenie sterowań we wszystkich trzech podprzedziałach przyjmujemy $a_0 = b_0 = 1$. Warunek normalizacyjny (54) jest wtedy spełniony tożsamościowo oraz równania (44) są równaniami różniczkowymi o stałych współczynnikach. Po ich rozwiązaniu, czyli znalezieniu wielkości $Y_k^{q_0}(z)$ oraz φ^0 za ich pomocą znajdujemy pierwsze przybliżenie przekrojów, dobierając stałą Λ tak, aby spełniony był warunek (54) oraz aby była ona stała zadaną dokładnością. Tak otrzymane przekroje wstawiamy do układów równań (44). Otrzymujemy w ten sposób równania o zmiennych współczynnikach. Aby takie układy równań rozwiązać, dzielimy każdy z podprzedziałów na małe odcinki, w których można przyjąć, że współczynniki w równaniach są stałe. Rozwiązujemy te równania kolejno w każdym odcinku, spełniając jednocześnie warunki ciągłości zmiennych stanu na końcu każdego poprzedniego i początku następnego odcinka. Aby uzyskać gładki przebieg rozwiązań, każde z nich przybliżamy za pomocą wielomianów typu

$$Y_k^{q_\alpha}(z) = a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 \quad (56)$$

Wielomiany te (a więc stałe współczynniki od a do e) są różne dla kolejnych przybliżeń α , dla poszczególnych podprzedziałów $q = 1, 2, 3$ oraz dla różnych wielkości $k = 1, 2$.

Wielomiany przybliżające w kolejnych trzech podprzedziałach (z których każdy podzielony jest na 100 odcinków) są następujące:

$$Y_1^1 = -3,24668 \times 10^{-7} + 0,911749z + 0,48295z^2 - 0,0242751z^3 - 0,525121z^4$$

$$Y_2^1 = 0,999998 + 0,000284z - 1,36808z^2 + 0,573647z^3 - 0,0124457z^4$$

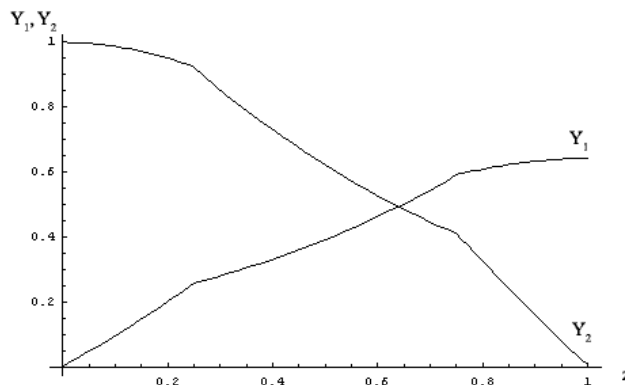
$$Y_1^2 = 0,197686 - 0,0413416z + 1,46134z^2 - 1,71819z^3 + 1,03583z^4$$

$$Y_2^2 = 1,37632 - 2,27853z + 2,32097z^2 - 2,04963z^3 - 0,955753z^4$$

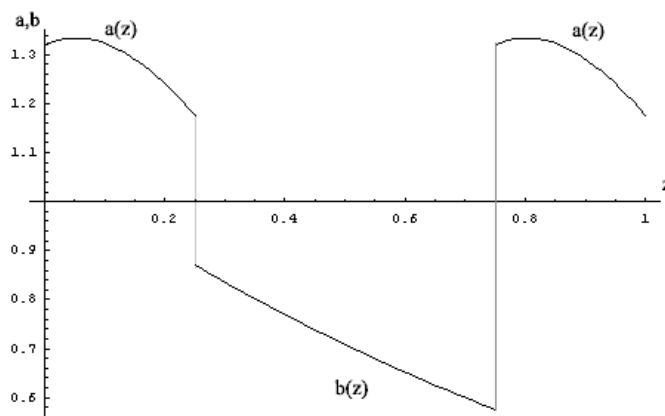
$$Y_1^3 = 0,1151619 + 0,715253z + 0,121296z^2 - 0,287828z^3 - 0,0221296z^4$$

$$Y_2^3 = 1,37632 - 2,27853z + 2,32097z^2 - 2,04963z^3 + 0,955753z^4$$

Graficzne przebiegi odpowiednich wielkości pokazano na ryc. 2, 3.



Ryc. 2. Zależność Y_1 i Y_2 od z w przedziale $[0, 1]$
Fig. 2. The comparison both Y_1 and Y_2 of z in the interval $[0, 1]$



Ryc. 3. Przebieg bezwymiarowych sterowań $a(z)$ i $b(z)$
 Fig. 3. Course of non-dimensional controls $a(z)$ and $b(z)$

5. Wnioski

Otrzymane wyniki pokazują, że założone quasi-okresowe zmiany przekroju drgającego pręta w sposób istotny zależą od podziału zmiennej niezależnej $x \in [0, L]$ na podprzedziały oraz od doboru podzbiorów Z_1 i Z_2 . W rozważanym przypadku (ryc. 2, 3) zmiany wartości liczbowych przekroju występują na pierwszym miejscu po przecinku. Wraz ze zmianami przekrojów $a(z)$ i $b(z)$ dobrze widoczne są w punktach styku podprzedziałów zmiany przebiegu wykresów zależności przemieszczeń i sił od zmiennej $0 \leq z \leq 1$. Dla okresowej zmiany przekroju pręta sprężystego wykonującego drgania poprzeczne zadanie takie opracowano – teoretycznie i numerycznie – w pracy [2].

Literatura

- [1] Bieda M., Piekarski Z., *Optymalizacja drgań pręta wspornikowego z quasi-okresowym sterowaniem*, Czasopismo Techniczne z. 11-M/2006, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej.
- [2] Gajewski A., Piekarski Z., *Optimization of compressed columns with periodic control in two set of subintervals of independent variable*, Proc. of the XIII Polish Conference on Computer Methods in Mechanics (Chairmen: A. Garstecki and J. Rakowski), 5–8 May, Poznań 1997, 395-402.
- [3] Griniew W.B., Filippow A.P., *Optymalizacja stierżniej po spektrum sobstwiennych znaczenii*, Naukowa Dumka, Kijów 1979.
- [4] Kaczorek T., *Teoria sterowania*, tom 2, PWN, Warszawa 1981.
- [5] Nizioł J., Piekarski Z., *The Quasi-Periodic Optimization with the Various System Functions*, Machine Dynamics Problems z. 1/2007, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej.
- [6] Piekarski Z., *Pewne problemy teorii sterowania okresowego*, Monografia 337, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, 2006.