

J.X.28/1930



Gerlands Beitr. zur Geophys. 27
Sonderdruck aus „Gerlands Beiträge zur Geophysik“
Bd. 27 (1930), S. 1—25 Herausgegeben von V. Conrad, Wien

*Ha-455
(27)*

Die Entstehung der Kontinente

Von
Josef Geszti
Budapest

Hoffman

(Mit 5 Figuren)

54.2096



Leipzig
Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H.
1930

J. X. 23/1930



Mr inv. 1784

17816

1

Die Entstehung der Kontinente

Von

Josef Geszti, Budapest.

(Mit 5 Figuren.)

Zusammenfassung: Im Urzustand der Erde waren die geschmolzenen simischen Massen überall in gleicher Schichthöhe von leichteren geschmolzenen Sialmassen umhüllt. Diese konzentrische Materialverteilung wurde aber später gestört. In der Gegenwart bestehen die Kontinente aus salischen, die Böden der Ozeane zumeist aus simischen Materialien (vertikale Stoffabsonderung). Es wird gezeigt, daß diese Massenumlagerung durch eine thermodynamische Wirkung hervorgerufen wurde. Die Heraushebung der Kontinente wird auf die Verdichtung der simischen Massen zurückgeführt, besonders auf den Dichtesprung derselben beim Übergang von der Schmelze zum Kristall.

Die Entstehung der thermodynamischen Wirkung wird der Inhomogenität der verschiedene Beimischungen enthaltenden salischen Massen zugeschrieben.

Summary: In the ancient form of the earth the liquid sima masses were everywhere, — in the same height of strata — enveloped by light, molten sial masses. This concentric distribution of material however has been disturbed later on. At present the continents consist of sial and the bottoms of the oceans mostly of sima materials (vertical separation of material). It has been shown that this distribution of masses was created by thermo-dynamic effect.

The elevation of the continents has been attributed to the condensation of the sima masses, specially on the point of becoming solid during the transition from liquid to crystallised state.

The origin of the thermo-dynamic effect is being attributed to the inhomogenous sial masses containing various auxiliary mixtures.

Allgemeines.

„Die Statistik der Höhenstufen der Erdrinde führt, wie bekannt, zu dem merkwürdigen Ergebnis, daß es zwei Höhen gibt, die am häufigsten vorkommen, während die dazwischenliegenden Stufen recht selten sind. Es gibt wohl in der ganzen Geophysik kaum ein zweites Gesetz von solcher Klarheit und Sicherheit wie dieses, daß es zwei bevorzugte Niveaus auf der Erde gibt, die abwechselnd nebeneinander vorkommen und in den Kontinenten und Tiefseeböden in Erscheinung treten“ (A. WEGENER, Entstehung der Kontinente und Ozeane. 3. Aufl. 1922).

Einen Versuch, die Entstehung dieser beiden Niveaus (Sprunghöhen) der Kontinente zu erklären, hat Verfasser bereits in einer vor-

Heft 1

Akc. Nr.

5192/51

epk-J-15/2013

201- D/543

hergehenden Studie („Zur Frage der Entstehung der Kontinente und Ozeane“ in Gerl. Beitr. z. Geoph., Bd. 22, S. 353—384) unternommen und ist dort zu dem Ergebnis gelangt, daß die totale Sprunghöhe $\Delta\lambda_1$ aus zwei Teilen besteht. Der eine Teil $\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda$ kann auf den Gewichtsdruck des Wassers der Meere zurückgeführt werden, während der andere, die „Ausgangssprunghöhe“ (mit $\Delta\lambda$ bezeichnet) eine Erklärung in einem Verdichtungsprozeß der erkaltenden Silikathülle der Erde finden dürfte. Die Entstehung der Kontinente wurde in der Studie noch nicht berührt; nun wird versucht, das Versäumte im Rahmen dieser Fortsetzung nachzuholen.

Es ist eine unbestrittene Tatsache, daß die Erde zuerst als schmelzflüssiger Körper eine durch die gleichzeitig wirkenden Attraktions- und Zentrifugalkräfte bedingte äußere Grenzfläche besaß, die auf diese Kräfte bezogen eine Niveaufläche war, daher weder lokale Erhebungen noch Senkungen oder Vertiefungen in dem Sinne aufweisen konnte, wie solche derzeit an der erstarrten Kruste vorzufinden sind.

Ein jeder Weltkörper ist bei seiner Bildung chemisch homogen, da einerseits bei sehr hohen Temperaturen noch alle in Betracht kommenden Stoffe mischbar, andererseits die konvektiven Wärmeströmungen von solcher Intensität sind, daß eine starke Durchmischung die Gleichmäßigkeit des Materials und der Temperatur ermöglicht. Bei der Erkaltung tritt jedoch eine Differentiation in stofflicher und thermischer Beziehung ein. Die Mischbarkeit der Stoffe nimmt ab, es sondern sich Stoffe aus, die, dem Gesetz der Schwere folgend, sich in konzentrischen Schichten lagern. Diese konzentrischen Schichten des Weltkörpers kommen langsam zur Ruhe, die konvektiven Wärmeströmungen gelangen dann nur von einer Dichteschicht bis zur anderen, da die schwereren Moleküle der unteren Schicht nicht mehr soviel Bewegungsenergie besitzen, um in die obenliegenden, leichteren Schichten, entgegen den Schwerkraften, empordringen zu können und dort ihre höhere Wärmeenergie abzugeben. Die potentielle Wärmeenergie wird hier zum größten Teil schon durch Leitung übertragen. Die Temperatur und die Druckzunahme werden gegen das Zentrum des Weltkörpers hin bewirken, daß die Dichte in dieser Richtung durchweg zunimmt. Jede einzelne stoffliche Grenzfläche wird dementsprechend eine Dichteänderung ergeben, und, falls sie an einem bedeutenden Dichtesprung liegt, ist sie gleichzeitig eine Abstufungsfläche der Wärmeverteilung. Der Temperaturgradient muß dementsprechend an diesen Grenzflächen eine Verschiebung erfahren.

Nach G. TAMMANN („Kristallisieren und Schmelzen“, Leipzig 1903. S. 181) sind in dem Falle, wenn keine Konvektionsströme von Belang sich ausbilden können und die Temperatur mit der Tiefe beständig zunimmt, zwei Fälle zu unterscheiden. Nimmt mit wachsender Tiefe die Temperatur mit steigendem Druck schneller zu als auf der Schmelzkurve der Lösung, so wird bei der Abkühlung die Temperatur zuerst auf der Oberfläche bis auf die Schmelzkurve sinken und die Kristallisation auf der Oberfläche beginnen. Gilt die umgekehrte Beziehung, so beginnt die Kristallisation im Inneren des Weltkörpers und kann sogar in jeder Dichteschicht selbständig vonstatten gehen. In diesem Falle wird das Kristallisierungsprodukt etwas unter die Tiefe sinken, in welcher der Druck des maximalen Schmelzpunktes herrscht.

Beginnt die Kristallisation auf der Oberfläche, so werden die kristallisierten Schollen wegen ihrer Kristallisationskontraktion untersinken (Versuche von BARUS, JOLLY und P. ESKOLA, der bei Eklogiten, bei sehr hohen Drucken eine Volumenverminderung von sogar 20% festgestellt haben will), wobei sie in Schichten gelangen, deren Temperatur durchweg diejenige der Schmelzkurve übersteigt. Durch Untersinken der erstarrten Schollen strömt neuer, geschmolzener Stoff an die Stelle der abgesunkenen Massen, und dadurch wird der Bildung von Kristallisationszentren an der Oberfläche auf kurze Zeit Einhalt geboten. Die Abkühlung dauert jedoch fort, in den neu herzugeströmten Massen beginnen sich wieder neue Kristallisationszentren zu bilden; es kommt zu einer Periodizität im Entstehen und Untersinken der kristallinen Massen. Die Dauer, die Zeitamplitude dieser periodischen Schwingungen, ist eine Funktion der Oberflächentemperatur. Ist die Temperatur der Schmelze beim Erstarrungspunkt angelangt, so sind die Zeitamplituden von relativ langer Dauer; wenn jedoch die Abkühlung unter den Erstarrungspunkt der Schmelze gelangt, werden immer größere Massen untersinken; die Zeitdauer der Perioden verkürzt sich, bis bei vollkommener Erstarrung die Amplitude verschwindet. G. TAMMANN erklärt damit die Entstehung und die Periodizität der Sonnenflecken, die als Kristallisationszentren in Bildung begriffene, zukünftige Sonnenkontinente wären. Sind in der kristallisierenden Schmelze Gase gelöst, so wird der größte Teil derselben bei der Kristallisation frei, es entstehen Protuberanzen, Sonnenfackeln, also all jene Erscheinungen, die wir an der Sonnenoberfläche beobachten können (G. TAMMANN, Kristallisieren und Schmelzen. 1903. S. 183).

Ob nun die Kristallisation an der obersten oder an einer tiefer

liegenden Schicht der Erde begonnen hat, ist bei unserem Problem nebensächlich; von Wichtigkeit ist die Stoffsonderung, die an den Kontinenten und dem Boden der Meere zum Vorschein kommt. Dort das leichtere Sial, blockartig geschichtet, mit einer enormen Sprunghöhe, hier die schwereren simischen Massen. Wir werden zeigen, daß diese eigenartige Massenanordnung nie entstanden wäre, wenn die Kristallisation nicht zuerst bei den salischen Massen aufgetreten wäre und erst dann eine Fortsetzung bei den simischen Materialien gefunden hätte. Hätte diese zeitliche Reihenfolge nicht bestanden, so hätten die aus salischen Massen gebildeten kontinentalen Blöcke nicht entstehen und aus der simischen Unterlage herausgehoben werden können.

Im Urzustand der Erde, als diese an der Oberfläche noch schmelzflüssig war, erfolgte die Schichtung der liquiden Materialien, der Schwere entsprechend, der Dichte nach konzentrisch. Die oberste, liquide Schicht bestand daher aus den leichtesten Materialien der sich später bilden den Kruste, aus den salischen Massen.

Die salischen Massen mußten daher in überall gleicher Schichthöhe die nächstschwere, untere Schicht der simischen Massen einhüllen.

Gegenwärtig, nach der Erkaltung und Kristallisation beider Stoffe, zeigt die Oberfläche der Erde eine ganz andere Massenanordnung. Der simische Boden der Ozeane ist freigelegt oder doch nur mit einer dünnen Schicht salischen Stoffes bedeckt; hingegen sind die salischen Stoffe zu riesigen kontinentalen Blöcken aufgetürmt und tauchen dabei bis zu bedeutenden Tiefen in die simischen Massen ein.

Bei diesem merkwürdigen Sachverhalt drängt sich sofort die Frage auf, welche geheimnisvollen Kräfte die ursprüngliche Schichtenfolge, die Gleichgewichtslage der natürlichen Niveauflächen stören und die Umlagerung von solchen riesigen Massen vollführen konnten.

In schmelzflüssigem Zustand der Stoffe konnte doch diese Umlagerung wohl nicht geschehen. Nach H. S. WASHINGTON beträgt doch

die Dichte der europäisch-salischen Massen	2.76
„ „ „ atlantisch-simischen „	2.85
Differenz	0.09 ¹⁾

¹⁾ Diese Dichtedifferenz kann auch im schmelzflüssigen Zustand angenommen werden.

Bei jedem m^3 ergibt sich also eine Differenz von 90 kg Gewicht. Mit einer beispielsweise 40000 m hohen Säule ergibt diese Differenz einen Gewichtsdruck von $40000 \times 90 = 3.6 \cdot 10^6$ kg/m². Ebenso groß wird der Auftrieb einer solchen in Säulenform gedachten salischen Masse, welche in die allseits umgebende schwerere simische Masse bis zu dieser Tiefe eintaucht. Nachdem beide Massen schmelzflüssig sind, muß sich die durch den Auftrieb gehobene leichtere Masse am obersten Niveau ausbreiten und die seitlich begrenzende schwerere Masse überfluten, gleichwie Öl in Wasser nicht als Säule bestehen kann, sondern sich auf der Oberfläche ausbreitet. Eine vertikale stoffliche Separation, wie wir sie bei den Kontinenten und Meeresböden finden, konnte daher im schmelzflüssigen Zustand beider Stoffe weder entstehen noch bestehen.

Aber auch in bereits festem Zustand konnte eine solche Umlagerung der Massen nicht vor sich gehen, da doch außerordentlich große Gegenkräfte hätten bewältigt werden müssen. Um eine 40 km hohe Säule von nur 1 m² Grundfläche aus festem salischem Material in das dichtere, geschmolzene simische Material dem Auftrieb entgegen hineinzuzwängen, müßte eine Arbeit von $7.2 \cdot 10^{10}$ mkg geleistet werden. Wäre auch die simische Masse kristallin gewesen, so hätten außerdem noch innere Festigkeitskräfte bewältigt werden müssen. Unter den irdischen massenbewegenden, mechanischen Kräften gibt es keine, die diese Arbeit geleistet hätte. Woher kamen nun die riesigen Energien und Kräfte, die diese Arbeit geleistet haben? Alle mit der Empirik scheinbar in Gegensatz stehenden Erscheinungen kann man doch den säkularen Zeitwirkungen nicht zuschreiben! Wie wir im folgenden sehen werden, bietet sich hierfür eine ganz einfache Erklärung.

Die Umlagerung der salischen Massen.

Es sei schematisch durch Fig. 1 die Oberfläche der Erde im Urzustand dargestellt, wo noch die geschmolzenen salischen Massen die geschmolzenen simischen konzentrisch in gleicher Dicke bedeckten.

α sei ein Bruchteil der ganzen Oberfläche der Erde (F), wo Kontinente, β wo Ozeane entstehen werden.

$$\alpha F + \beta F = F, \text{ es ist daher } \alpha + \beta = 1.$$

Wir wollen die Bedingungen stellen, daß

1. über dem Gebiet α die Temperatur T_1 niedriger ist als die über β herrschende T_2 ; es sei daher $T_1 < T_2$ ¹⁾;
2. der Übergang von der Schmelze zum Kristall mit einer Volumenverminderung verbunden ist²⁾.
3. die Dichte der Schmelzen mit der Tiefe zunimmt.

Wie aus den Fußnoten hervorgeht, sind dies keine willkürlichen, hypothetischen Voraussetzungen.

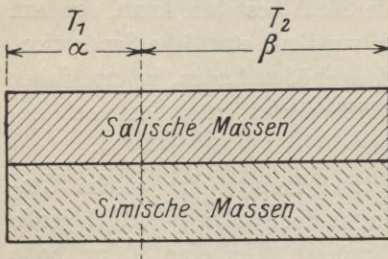


Fig. 1.

Infolge der niedrigeren Temperatur über α wird hier die Abkühlung der Sialschicht schneller vonstattengehen als im Bereich β . Die Folge der Abkühlung wird die Kristallisation der dort befindlichen obersten Sialschicht sein. Die kristallinen Massen erleiden eine Volumenverminderung, d. h. eine Verdichtung, sie sinken daher in die dünnere geschmolzene Schicht ein. Die untersinkende Masse wird durch zu-

¹⁾ Daß $T_1 < T_2$ ist, mag hier als Vorbedingung gelten, deren Richtigkeit im nachfolgenden Kapitel „Das Wärmegefälle als Ursache der Umagerung“ dargelegt wird.

²⁾ Die Versuche von G. TAMMANN, die er mit 40 leicht schmelzbaren organischen und anorganischen Substanzen im Temperaturintervall zwischen 80—200° C und bis zu Drucken von 3000 kg/cm², bei einigen sogar bis 10000 kg/cm² ausgeführt hat (G. TAMMANN, Aggregatzustände. 1923), zeigten, daß der Unterschied zwischen den Volumina des flüssigen und des kristallinen Zustandes mit höheren Drucken immer kleiner wird und zugleich den Schmelzpunkt verschiebt. Er folgerte daraus, daß bei einem bestimmten Druck ein maximaler Schmelzpunkt anzunehmen sei, bei welchem die Kristallisation ohne Volumenänderung vor sich ginge. — Die Schmelzkurven verliefen bei Drucken über 3000 kg/cm² viel weniger gekrümmt zur Koordinatenachse des Druckes als bei Drucken unter 3000 kg/cm², weshalb also das Maximum der Schmelzkurven bei sehr hohen Drucken bei den meisten Stoffen wohl über 20000 kg/cm² liegen dürfte. Diesem Druck entspricht in den salischen Massen eine Tiefe von ca. 77—80 km oder noch mehr, da doch der maximale Schmelzpunkt bei einem Druck von über 20000 kg/cm² liegt. — VOGT setzt die Lage des maximalen Schmelzpunktes von Feldspat oder Augit in ungefähr 150 km Tiefe zu etwa 1400° C an. F. v. WOLF glaubt in dieser Gegend auch den maximalen Schmelzpunkt der Silikate im allgemeinen annehmen zu dürfen. Nach diesen Forschern ist der Übergang von der Schmelze zum Kristall bis zu einer Tiefe von 150 km von einer Volumenverminderung begleitet. Für unsere Ausführungen genügen diese Tiefen voll-

strömende neue ersetzt. Dadurch aber, daß beim Erstarren die Masse eine größere Dichte erlangt, wird die Menge der noch in Schmelze befindlichen leichten Sialmassen vermindert. War am Anfang die Menge der leichten salischen Massen M , so wurde sie nach der ersten Erstarrungsperiode, durch die Ausscheidung einer Masse μ , die als feste salische Masse in die Tiefe sinkt, $M - \mu$.

Die festgewordene, versunkene und dadurch ausscheidende Masse μ kann nur aus einer Massenschicht von identischer Dichte ersetzt werden. Wäre diese Dichte größer, so müßte die zugeströmte Masse untersinken.

Es kann daher bei geschmolzenen, liquiden Substanzen, in denen ein langperiodiger Massenaustausch stattfindet, als allgemeine Regel gelten, daß das Ersetzte mit dem Ersetzenden an Masse und — da hier die Tauschvolumina identisch sind — auch an Dichte gleich sein muß.

In der nächsten Erstarrungsperiode wird bei denselben Temperaturen wieder eine Masse μ sich verdichten (wenn sie dieselben Beimischungen enthält) und aus der zurückgebliebenen Menge $M - \mu$ der leichteren Masse ausscheiden. Am Ende dieser zweiten Periode wird die Masse der geschmolzenen salischen Massen bereits $M - 2\mu$ sein, bei der dritten $M - 3\mu$ usw. Besteht die Temperaturdifferenz ohne Änderung weiter, so wird sich der Verdichtungs- und Versinkungsvorgang weiter fortsetzen, bis die höchstliegenden leichteren, geschmolzenen salischen Massen allmählich vom Gebiet β zu α hinübergeströmt sind, wo sie sich abkühlen und versinken. Die Möglichkeit hierzu hängt vom Dichteunterschied der beteiligten, in verschiedenem Aggregatzustand befindlichen Materialien (Sial, Sima) ab. Sie strebt einem Minimum zu, das erreicht wird, wenn der Dichteunterschied beider Materialien Null wird. Dieser statische Gleichgewichtszustand wird unter schichtenweisem Aufbau des sich immer mehr vertiefenden salischen Blocks erreicht; im Endzustand, bei gleichen spezifischen Gewichten, erreicht der Block die größtmögliche Tiefe und verharrt hier in schwebendem Zustand. Die Tiefe, bis zu welcher das Untersinken erfolgt, vergrößert sich also mit jeder Erstarrungsperiode, weil die neu absinkenden Schollen die bereits früher abgesunkenen immer tiefer drücken, bis ein Block sich bis zur Oberfläche aufgebaut

ständig, da wir uns nur mit den obersten Schichten des Erdkörpers befassen wollen, d. h. mit einem Bereich, wo der Druck unsere Voraussetzung noch nicht bestreitbar machen kann.

hat, ein weiterer Zufluß von schmelzflüssigen salischen Massen daher verhindert wird.

Ist dieser Gleichgewichtszustand erreicht, dann schwebt der fertige salische Block, der später zu einem Kontinent wird, bei gleichen spezifischen Gewichten ($S_{\text{ial}_{\text{fest}}} = S_{\text{ima}_{\text{geschm.}}}$) im Sima. Bevor dieser Zustand eintritt, ergeben die durch die Verdichtung verursachten Bewegungen eine Zirkulation, die gemäß der Fig. 2 verläuft.

In der oberen salischen Schicht strömt das leichtere Material von β nach α , d. h. $\alpha \leftarrow \beta$, und im schwereren simischen von $\alpha \rightarrow \beta$. Dem hydrostatischen Gleichgewichtsprinzip entsprechend streben die flüs-

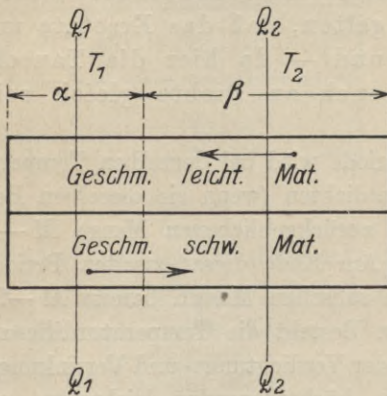


Fig. 2.

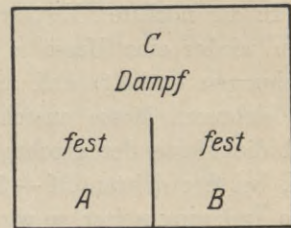


Fig. 3.

sigen Stoffe einem radialen Massenausgleich zu. Werden daher durch Kristallisieren die Massen in α schwerer, muß unten schweres Material verdrängt werden und oben, infolge des gestörten Gleichgewichtes zwischen Q_1 und Q_2 , leichtes zufließen. Diese Strömungen dienen daher zum Massenausgleich und zur Wahrung des Gleichgewichtes. Die früher angegebene Regel über den Ersatz der untersinkenden Massen ist daher eine logische Folge des hydrostatischen Gleichgewichtsprinzips.

Es besteht aber keine prinzipielle Notwendigkeit dafür, daß gerade die obersten Schichten zuerst kristallisieren müssen, es können auch tieferliegende salische Massen den Anfang machen. Von Wichtigkeit ist bloß, daß zuerst die salischen Massen und erst dann die simischen Massen zur Kristallisation kommen, weiter, daß die festgewordenen Stoffe auch in die simische Schicht eindringen und diese seitlich nach oben verdrängen.

Das Hinüberwandern, die Umlagerung der Stoffe von einem Ort zum anderen kommt in der Gleichgewichtslehre der physikalischen Chemie sehr oft vor. Einen ähnlichen Umlagerungsprozeß wollen wir hier dem Buche von Dr. ROBERT MARC: „Vorlesungen über die chemische Gleichgewichtslehre“ (1901. S. 34) entnehmen:

„Außer dem Übergang von dem flüssigen in den festen Zustand und umgekehrt vermögen die Stoffe noch eine Reihe anderer Zustandsänderungen zu erfahren; es sind dies die Änderungen der Modifikation.

Wir kennen zahlreiche Fälle, wo chemisch-analytisch gleich zusammengesetzte feste Stoffe sich in bezug auf ihre physikalischen und chemischen Eigenschaften ganz beträchtlich voneinander unterscheiden. Diese Erscheinung nennen wir Polymorphie, die entstehenden abweichenden Stoffe Modifikationen. Denken wir uns in einer geschlossenen Kammer von der Form der Fig. 3 nach *A* die eine, nach *B* die andere Modifikation gebracht, und es habe *A* den größeren, *B* den niedrigeren Dampfdruck. In *C* ist der gemeinsame identische Dampf. Hat sich zwischen *A* und *C* Gleichgewicht eingestellt, so herrscht zwischen *C* und *B* kein Gleichgewicht, für *B* ist der Druck zu groß; es muß sich also Dampf als *B* kondensieren. Dadurch wird aber der Dampfdruck für *A* zu gering, es wird *A* von neuem verdampfen und wiederum muß sich *B* ausscheiden. Dies wird so fortgehen, bis sämtliches *A* verschwunden und in *B* übergegangen ist. Einen ähnlichen Vorgang würden wir beobachten, wenn über *A* und *B* ein Lösungsmittel sich befände und *A* leicht, *B* weniger leicht löslich wären.

Es ist also stets der Stoff mit dem größeren Dampfdruck gegenüber dem Stoff mit dem geringeren Dampfdruck labil und die Modifikation mit der größeren Löslichkeit labil gegenüber derjenigen mit der geringeren Löslichkeit, und ebenso sehen wir, daß der löslichere Stoff auch den größeren Dampfdruck besitzen muß. Wenn der Dampfdruck des Stoffes *A* wesentlich höher ist als der Dampfdruck des Stoffes *B*, so wird zweifellos ceteris paribus die Umwandlung viel rascher erfolgen, als wenn die Dampfdrucke nur wenig verschieden sind.“

Noch ein weiteres lehrreiches Beispiel wollen wir anführen. Es sei in *A* Wasser, in *B* trockenes Land. Über *A* und *B* liegt die Atmosphäre. In *A* sei die Temperatur höher als in *B*, d. h. $T_A > T_B$.

Wasser und Luft bilden ein im Gleichgewicht befindliches System. Entstehender Wasserdampf wird mit der Luft eine gasförmige Lösung (analog der Schmelze) bilden, in welcher der Wasserdampf (H_2O) die eine, die Luft die andere Komponente darstellt. Die über *A* befindliche

Lösung wird so viel Dampf aufnehmen, wie eben der Temperatur von T_A entspricht. Gelangt diese Lösung durch Strömung in den Raum B , wo die Temperatur T_B ist, so wird die Lösung übersättigt, es scheidet ein Teil der einen Komponente, des Wasserdampfes, aus und wird zu Wasser, welches auf B niederschlägt. Die abgekühlte Mischung strömt wieder nach A zurück, wird dort erwärmt, nimmt wieder Dampf auf, der auf B als Wasser niedergeschlagen wird. Dieses Spiel wird sich so lange und so oft wiederholen, als eine Temperaturdifferenz zwischen den Atmosphären über A und B besteht und bis sämtliches Wasser von A nach B transportiert worden ist.

Diese Umlagerung wird durch die Temperaturdifferenz $T_A - T_B$ hervorgerufen, sie ist daher eine thermische Arbeitsleistung.

Die der Temperaturdifferenz entsprechende Potentialdifferenz der Wärme hat auch die Massenumlagerung der salischen Stoffe verursacht.

Die Entstehung der Ausgangssprunghöhe $\Delta \lambda$ der Kontinente.

Durch die Umlagerung der Massen wurde die salische Decke der simischen Stoffe immer dünner, bis das Sima im Gebiet β fast bis zur Oberfläche der Erde, d. h. dorthin gelangte, wo die wirksamsten Abkühlungsmöglichkeiten bestanden. Zu dieser Zeit verharrten im Gebiet α die neugebildeten, aus kristallinen salischen Massen bestehenden Blöcke der zukünftigen Kontinente, tief in die umgebenden, noch geschmolzenen simischen Massen eingetaucht, in schwebendem Zustande, ohne aus diesen herauszuragen, also ohne eine Sprunghöhe zu besitzen.

Nun tritt auch im Gebiet β die energische Abkühlung, der Übergang aus Schmelze in Kristall ein.

Das isostatische Tauchgewicht bzw. das hydrostatische Gleichgewicht eines in einer Flüssigkeit schwebenden oder schwimmenden Körpers läßt sich durch die folgende Gleichung ausdrücken:

$$h_\alpha \gamma_\alpha = h_\beta \gamma_\beta,$$

wo h_α die Höhe des festen Körpers, h_β die Höhe der verdrängten Flüssigkeit, γ_α , γ_β die entsprechenden spezifischen Gewichte des hydrostatisch getragenen und tragenden Stoffes sind.

Das hydrostatische Gleichgewicht besteht, wenn entweder

1. $h_\alpha = h_\beta$ ist. Dann aber muß $\gamma_\alpha = \gamma_\beta$ sein, um obiger Gleichung zu genügen. Diese beiden Bedingungen aber entsprechen einem schwebenden Beharrungszustand. Oder

2. $h_\alpha > h_\beta$ ist. In diesem Falle ist $\gamma_\alpha < \gamma_\beta$. Hier muß der feste Körper um die Sprunghöhe $h_\alpha - h_\beta = \Delta\lambda$ aus der Schmelze herausragen.

In der Gegenwart ragen aber die Kontinente, d. h. die Sammelstätten salischen Stoffes, um eine Sprunghöhe $\Delta\lambda_1$ aus dem Sima heraus.

Da die salischen und simischen Krustenteile, wie die gravimetrischen Messungen ergeben, im isostatischen Gleichgewicht sind, mußte sich aus dem Urzustand, wo noch keine Sprunghöhe vorhanden, daher $h_\alpha = h_\beta$, ($h_\alpha - h_\beta = \Delta\lambda = 0$) und $\gamma_\alpha = \gamma_\beta$ war, mit fortschreitender Abkühlung ein Zustand herausbilden, der durch $\gamma_\beta > \gamma_\alpha$ charakterisiert werden kann und in welchem Falle eben h_α größer als h_β werden mußte. Keine andere Möglichkeit kann einen statischen Gleichgewichtszustand ergeben. Es konnte sich nur auf diese Weise eine Sprunghöhe bilden.

Wir unterscheiden drei Zustände und drei damit korrespondierende relative Materiallagerungen:

1. Sial und Sima geschmolzen. Konzentrische Dichteschichtung.
2. Sial fest, Sima geschmolzen. Vertikale Materialabsonderung. Gleichgewicht: schwebender Beharrungszustand, keine Sprunghöhe.
3. Sial und Sima fest. Gleichgewicht: hydrostatisch eingestellte Sprunghöhe.

Jeder sich abkühlende Körper kann seine Dichte in Abhängigkeit von Temperatur und Druck ändern, und zwar:

1. als flüssiger Körper;
2. beim Übergang von Schmelze zu Kristall und
3. als fester Körper.

Der Verdichtungsvorgang in der flüssigen Phase beider Stoffe, wo sie noch konzentrisch übereinandergelagert sind, interessiert uns im Rahmen unseres Problems nicht. Im Dichtesprung dürfte die Verdichtung beider Materialien prozentuell annähernd gleich sein.

Im festen Zustand, wo die Kontraktionskoeffizienten beider Substanzen kaum voneinander abweichen, werden ihre Verdichtungskurven in Abhängigkeit von Temperatur und Druck nicht stark divergieren.

Eine anschauliche Darstellung der Verhältnisse wird von Nutzen sein. Fig. 4 sei das Zeitdiagramm des Verdichtungsprozesses von Sial und Sima. Die Kurve *AB* gebe den Verlauf der Verdichtung der ge-

geschmolzenen Sialmassen an, die Kurve HC den Verlauf der Verdichtung der geschmolzenen Simamassen.

Im Zeitpunkt Z_1 sind beide, Sial und Sima, noch geschmolzen. Die Sialschmelze liegt dann gleichmäßig auf der Simaschmelze verteilt.

Vom Zeitpunkt Z_1 an beginnt das Sial zu kristallisieren, das Sima jedoch ist noch geschmolzen. Der Übergang von Schmelze zu Kristall wird beim Sial durch BC angedeutet. Im Punkte C ist die Kristallisa-

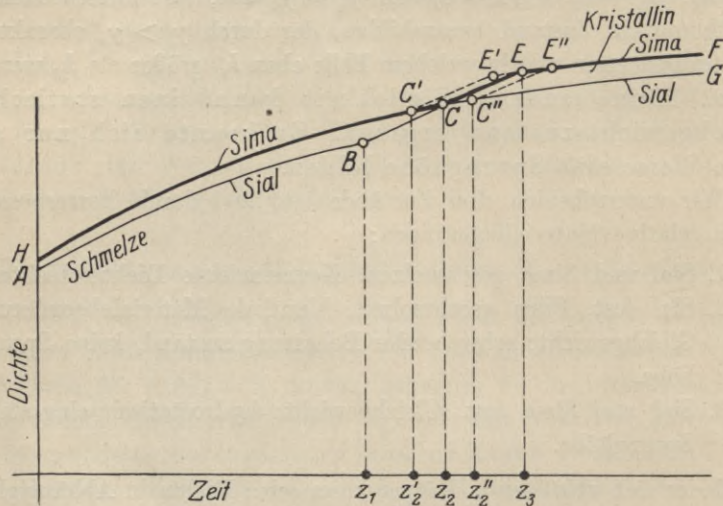


Fig. 4.

tion des Sial beendet, und wenn es die Dichte des geschmolzenen Sima erlangt hat, wird die kristalline Sialmasse in der geschmolzenen simischen schwebend verharren, ohne Sprunghöhe, bzw. ohne aus ihr herauszuragen.

Von C bis G verdichten sich die bereits festen, kristallinen salischen Massen. Der zeitliche Verlauf der Verdichtung der salischen Massen soll durch die Kurve ABC wiedergegeben sein. Nahezu parallel, jedoch zeitlich verschoben, verläuft der Verdichtungsprozeß der simischen Massen, angedeutet durch die Kurve HCE .

Der Dichtesprung der Phasenänderung beider Materialien wird durch BC und CE angegeben.

In der zeitlichen Verschiebung, im asynchronen Verlauf beider Dichtesprünge liegt eben die Erklärung unseres Problems.

Bezüglich der Lage des Punktes C sind nun drei Fälle möglich, und zwar:

1. Mit dem Ende des Dichtesprunges der salischen Massen im Punkt C kann der Anfang des Dichtesprunges der simischen Massen zusammenfallen.
2. Die Kristallisation der simischen Stoffe beginnt, bevor die der salischen beendet wäre. Diese Voreilung ist durch $C'C$ angedeutet, der Verlauf der Phasenänderung durch $C'E'$.
3. Die Kristallisation der salischen Massen ist bereits beendet, bevor die der simischen begonnen hätte. Das Nacheilen dieses Prozesses ist durch CC'' angegeben, der Verlauf des Überganges durch $C''E''$.

Nach welchem der drei hier angeführten Fälle die Kristallisation beider Materialien tatsächlich verlaufen ist, kann mit Bestimmtheit wohl nicht angegeben werden. Die Schmelz- bzw. Erstarrungstemperatur der simischen Stoffe dürfte zwischen 1100 — 1300° C liegen, die der salischen bei 1000 bis 1200° C, da ja beide Stoffe Beimischungen enthalten, die, wie bekannt, den Schmelzpunkt stark beeinflussen. Infolge dieses Umstandes hat keines der beiden Materialien einen bestimmten Schmelzpunkt.

Zuerst mußten bei der Abkühlung diejenigen salischen Massen kristallisieren, die den höchsten Schmelzpunkt besaßen. Diese bildeten die ersten Kristallkeime, die dann die weitere Kristallisation förderten. Solange aber die simischen Massen durch geschmolzene salische bedeckt waren, wurde infolge dieser Massenanordnung die Erstarrung des Sima verhindert. Erst als die Deckschicht durch Umlagerung immer dünner wurde, konnte die Abkühlung auch in den simischen Massen einsetzen, um auch diese Stoffe zu kristallisieren, trotzdem sie, wie erwähnt, eine höhere Schmelztemperatur besitzen.

Es ergibt sich also der sehr beachtenswerte Umstand, daß trotz der höheren Schmelz- bzw. Erstarrungstemperatur doch die simischen Massen später zur Kristallisation gelangt sein müssen.

Aus dem Umstande jedoch, daß die Umwandlungstemperaturen beider Stoffe nicht bedeutend voneinander abweichen können (sonst könnten Kristallzentren salischen Materials in der simischen Schmelze nicht bestehen), folgern wir, daß auch die Punkte C' und C'' von C nicht weit entfernt liegen dürften. Es erhalten sich deshalb in der Nähe

des Punktes C die kristallinen, angesammelten salischen Massen schwebend in der simischen Schmelze.

Die salischen Massen stehen im Punkte C zu Blöcken aufgeschichtet zeitlich nach dem Dichtesprung (Umwandlung), wogegen den geschmolzenen simischen hier dieser Prozeß noch bevorsteht.

Nun greift der Kristallisationsprozeß auch auf die simischen Massen über. Es beginnt auch in diesem Gebiet β das Versinken der kristallinen Tafeln, mit diesem das Ausscheiden der leichteren, und das schrittweise Überhandnehmen der dichteren Massen.

Dieser Verdichtungsprozeß wird das allmähliche Herausheben der salischen Blöcke aus der simischen Schmelze bewirken.

Wie früher bereits erörtert, kann hier folgende Gleichung angewendet werden:

$$h_a \gamma_a = h_\beta \gamma_\beta.$$

h_a ist die Höhe der salischen Blöcke,

h_β die Tauchtiefe bzw. die Höhe der verdrängten Materialschicht,

γ_a das spezifische Gewicht der salischen Massen,

γ_β „ „ „ „ simischen Massen.

γ_β kann auch geschrieben werden $\gamma_\beta = \delta \gamma_a$, wo $\delta > 1$, das heißt $\delta = 1 + \varepsilon$ ist.

Bei der Erkaltung ist ε immer positiv. Im Schmelzpunkt der simischen Massen ist $\gamma_a^{\text{fest}} = \gamma_\beta^{\text{geschm.}}$, somit $\varepsilon = 0$ und $\delta = 1$; bei fortschreitender Abkühlung nimmt jedoch ε eine wachsende positive Größe an, wodurch $\delta > 1$.

Wie bekannt, ist

$$h_a \gamma_a = h_\beta \gamma_\beta; \quad \frac{h_a}{h_\beta} = \frac{\gamma_\beta}{\gamma_a} = \delta.$$

Das Verhältnis der Dicke der kontinentalen Schale h_a zur Tauchtiefe h_β kann durch die vom Schmelzpunkt an gerechnete relative Verdichtung der simischen Massen δ ausgedrückt werden.

Es ist:

$$\gamma_\beta = \delta \gamma_a; \quad \gamma_\beta = (1 + \varepsilon) \gamma_a; \quad \varepsilon = \frac{\gamma_\beta - \gamma_a}{\gamma_a} = \frac{\Delta \gamma}{\gamma_a};$$

ε kann aber auch anders geschrieben werden:

$$h_a = \delta h_\beta, \quad h_a = (1 + \varepsilon) h_\beta, \quad \varepsilon = \frac{h_a - h_\beta}{h_\beta} = \frac{\Delta h}{h_\beta}.$$

Diese Gleichungen geben uns eine Definition von ε . ε ist danach die Dichtedifferenz beider Substanzen, bezogen auf die Dichte der kontinentalen Blöcke. Dieses Maß kann auch durch das Verhältnis der Ausgangssprunghöhe zur Tauchtiefe ausgedrückt werden.

Die hydrostatische Gleichgewichtsbedingung $h_a \gamma_a = h_b \gamma_b$ kann anschaulich geometrisch dargestellt werden unter Benutzung des folgenden allbekannten Lehrsatzes: „Schneiden sich zwei Sehnen eines Kreises, so sind die Produkte der einer jeden Sehne zugehörigen Teilschnitte einander gleich.“

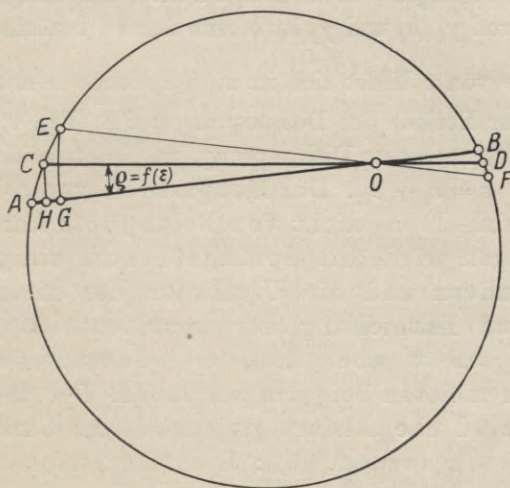


Fig. 5.

Somit ist:

$$\overline{AO} \cdot \overline{BO} = \overline{CO} \cdot \overline{DO} = \overline{EO} \cdot \overline{FO} \text{ usw.}$$

Setzt man statt $\overline{AO} = h_a$, $\overline{BO} = \gamma_a$, $\overline{CO} = h_b$ und statt $\overline{DO} = \gamma_b$ ein, so kommt die Sehnengleichung auf die mit der hydrostatischen Gleichgewichtsbedingung identische Form:

$$h_a \gamma_a = h_b \gamma_b,$$

womit noch nicht gesagt sein soll, daß der vollständige Erkaltungsprozeß sich auf ein und demselben Kreis abspielen muß. Da nun in unserem Falle die zwei Längen h_a und h_b nicht stark voneinander abweichen, müssen sie dicht nebeneinander liegen, d. h. einen spitzen Winkel einschließen, der nur sehr klein sein kann und der eine Funktion von ε ist, $q = f(\varepsilon)$.

Im schwebenden Zustand der kontinentalen Blöcke war $h_a = h_\beta$ und $\gamma_a^{\text{fest}} = \gamma_\beta^{\text{geschm.}}$; es ist dann $\varepsilon = 0$, die zwei Sehnen fallen zusammen. Sobald aber die Änderung des Aggregatzustandes der simischen Massen beginnt, werden die Sehnen nicht mehr zusammenfallen und einen spitzen Winkel $\varrho = f(\varepsilon)$ einschließen, gleichzeitig wird eine Sprunghöhe $\Delta\lambda$ entstehen, gleich $h_a - h_\beta = \overline{AH}$ oder \overline{AG} .

Je größer die relative Dichteänderung wird, um so größer wird der eingeschlossene Winkel ϱ und dementsprechend die Ausgangssprunghöhe $\Delta\lambda$ sein. Wie aus Fig. 5 zu entnehmen, ist das Maß der epirogenetischen Bewegungen von mehreren Faktoren abhängig, und zwar von ε , h_a und von γ_a (h_β und γ_β ist bereits durch ε berücksichtigt).

Die Größe von ε bildet sich in zwei Perioden heraus, und zwar ε_{I} während der Periode des Dichtesprunges \overline{CE} (Fig. 4) in der Zeit $Z_3 - Z_2$, und ε_{II} nach dem Dichtesprung, wo bereits beide Substanzen kristallin sind. $\varepsilon = \varepsilon_{\text{I}} + \varepsilon_{\text{II}}$. Der Hauptanteil von ε dürfte in ε_{I} enthalten sein, da ε_{II} nicht von Belang sein kann und nur dazu auslangen wird, die Sprunghöhe um einige hundert Meter zu ändern und die Uferlinien der Meere zu verschieben. Zur Entstehung der kontinentalen Ausgangssprunghöhe selbst aber muß ε_{I} während des Dichtesprunges am meisten beigetragen haben. Die Werte von ε bzw. von ε_{I} sind überall fast gleich, diesem Umstand kann es zugeschrieben werden, daß: 1. die Oberflächen der Kontinente annähernd auf gleichem Niveau liegen, 2. die Sprunghöhen relativ nur wenig voneinander abweichen, 3. auf der Erde zwei bevorzugte Niveaus zu finden sind, die in den Tiefseeböden und in den Oberflächen der Kontinente in Erscheinung treten. Die Ausgangssprunghöhe $\Delta\lambda$ läßt sich aus der totalen, effektiv bestehenden Sprunghöhe $\Delta\lambda_1$ nach folgender Formel berechnen (siehe die Studie des Verfassers: „Zur Frage der Entstehung der Kontinente und Ozeane“ in Gerl. Beitr. z. Geoph., Bd. 22, S. 370).

$\Delta\lambda_1$ ist die bereits durch den Gewichtsdruck der Meere vergrößerte Sprunghöhe.

$$\Delta\lambda_1 = \Delta\lambda \frac{\gamma_s}{\gamma_s - \gamma_w}$$

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda_1 \frac{\gamma_s - \gamma_w}{\gamma_s} = h_\beta (\delta - 1) = h_\beta \varepsilon = h_\beta (\varepsilon_{\text{I}} + \varepsilon_{\text{II}})$$

$$h_{\beta} = \Delta \lambda_1 \frac{\gamma_s - \gamma_w}{\gamma_s (\varepsilon_I + \varepsilon_{II})}$$

$$h_{\beta} \approx 0.666 \Delta \lambda_1 \frac{1}{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}$$

$\gamma_s = 3$ spezifisches Gewicht des subkrustalen Materials,

$\gamma_w = 1$ „ „ „ „ Wassers.

Fassen wir die gefundenen Ergebnisse zusammen, so ergibt sich, daß sowohl auf das Maß der Ausgangssprunghöhe, als auch auf die totale Sprunghöhe die Dichtedifferenz beider Materialien von ausschlaggebender Bedeutung war. Da aber die zur Heraushebung der bereits gebildeten kontinentalen Blöcke bedeutendste relative Dichteänderung der Dichtesprung der simischen Materialien gewesen sein muß, so hat dieser Dichtesprung entsprechend ε_I , den gewichtigsten Einfluß auf die Größe der Ausgangssprunghöhe.

Numerische Kontroll-Rechnungen.

Verlässliche Versuchsergebnisse über die Verdichtung von Silikatschmelzen beim Erstarren stehen uns nicht zur Verfügung. BARUS hat solche angenähert bestimmt und gibt sie zu 3.4—3.9% an [Phil. Mag. (5), 1893, Vol. 35, p. 186, 306].

Unter Benutzung seiner Daten ergibt sich:

$$h'_{\beta} = 0.666 \frac{5}{0.034} = 97.9 \text{ km}$$

$\Delta \lambda_1 = 5$ km ist die totale Sprunghöhe der Kontinente.

$h'_{\alpha} = h'_{\beta} + \Delta \lambda_1 = 97.9 + 5 = 102.9$ km wäre die Dicke der kontinentalen Schollen bei $\varepsilon = 0.034$.

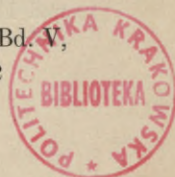
Bei der oberen Grenze $\varepsilon = 0.039$ ist:

$$h''_{\beta} = 0.666 \frac{5}{0.039} = 85.4 \text{ km},$$

$$h''_{\alpha} = 85.4 + 5 = 90.4 \text{ km}.$$

Die Werte von BARUS ergeben für die Krustendicke der Kontinente: 90.4 — 102.9 km. Um auch andere Stützpunkte für die wahrscheinliche Größenordnung dieser Verdichtungsskalare zu erhalten, wollen wir einige Werte aus der Metallographie anführen. Sie werden uns außerordentlich gute Dienste leisten.

Wir finden im „Handbuch der Experimentalphysik“ (Bd. V,



S. 530—533. Leipzig 1930, Akad. Verlagsges. m. b. H.) folgende Längen-Schwindmaße für verschiedene technische Metalle und Legierungen:

Metall	Längen-Schwindmaß ¹⁾	Kontraktion in % bei der Umwandlung bis Zimmertemp.
Aluminium . . .	1.6—1.8	4.8—5.4
Al-Bronze . . .	1.4—2.2	4.2—6.6
Grauguß	0.5—1.2	1.5—3.6
Hartguß	1.5	4.5
Stahlguß	0.8—2	2.4—6
Kupfer	1.4—2	4.2—6
Messing, 64% Cu	1.4—1.8	4.2—5.4
Nickel	1.7—2	5.1—6

Wir wollen den früher benutzten Rechnungsvorgang umkehren und den Wert von ε bestimmen, bei welchem die von HELMERT berechnete Krustendicke von 120 km sich ergibt.

$$h_{\beta} = 0.666 \Delta \lambda_1 \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{daraus } \varepsilon = \frac{0.666 \Delta \lambda_1}{h_{\beta}}$$

Da in diesem Fall $h_{\alpha} = 120$ km ist, wird $h_{\beta} = 120 - \Delta \lambda_1 = 115$ km sein:

$$\varepsilon = \frac{0.666 \cdot 5}{115} = 0.0289.$$

$\varepsilon = \varepsilon_I + \varepsilon_{II} = 0.0289$. Die relative prozentuelle Verdichtung wäre daher 2.89%. Dieser Wert kann jedoch mit den tabellarischen Zahlen der Metalle nicht ohne weiteres verglichen werden, da in letzteren die Erkaltungskontraktion des festen Zustandes bis zur Zimmertemperatur inbegriffen ist, jedoch bei der Kruste von einer derartig weitgehenden Abkühlung noch nicht gesprochen werden kann. Die Kruste dürfte im Mittel auf 500—600° C abgekühlt sein, weshalb zur Vergleichung die gefundene Kontraktion von 2.89% noch abgeändert werden muß. Die tabellarischen Kontraktionen ergeben nämlich die Kontraktion von einzelnen Metallen, wogegen die Zahl 2.89% eine Verhältniszahl der Dichten von Sima und Sial bis zur Temperatur 500—600° C wäre. Nehmen wir in ziemlicher Annäherung den Dichtesprung der simischen Massen zu 2.89% an. Die volumetrische Kontraktion der Silikate liegt im Temperaturintervall von 20—1000° C,

¹⁾ Unter Längen-Schwindmaß versteht die Metallographie die Verkleinerung der Längenabmessung eines Gußstückes während des Erstarrens und Erkaltens auf Zimmertemperatur. Es handelt sich hier um technische Schmelzen, die in Formen gegossen werden und dort erstarren.

d. h. noch im festen Zustand zwischen 0.162—1.6%, im Mittel bei 1%; $2.89 + 1 = 3.89\%$ würde die totale Kontraktion der Silikate vom Schmelzpunkt bis zur Zimmertemperatur ergeben.

Dieser geänderte Wert fällt, wie ersichtlich, in die Kategorie der Grau- und Stahlgüsse.

Näher in diese Untersuchungen einzugehen, ist uns leider versagt, da fast gar keine zuverlässigen Daten über die Kontraktionsfaktoren der zu berücksichtigenden Silikate zur Verfügung stehen; aber schon die hier angeführten, aus der Metallographie entlehnten Werte machen unsere Folgerungen plausibel.

Die von O. HECKER ausgeführten Schweremessungen über dem Meere erbrachten den Beweis, daß die Schwerkraft über der ausgedehnten Tiefsee im allgemeinen den gleichen Betrag hat, wie über den Flachländern der Kontinente und daß im allgemeinen eine große Annäherung an den völligen Gleichgewichtszustand besteht. Das Ergebnis der HECKERSchen Messungen ist für die Frage der Isostasie als ein die gesamte Erdkruste beherrschendes Prinzip von entscheidender Bedeutung gewesen. Nun haben wir gezeigt, wie die Kontinente, der Boden der Ozeane, die Meere selbst entstanden sind. Wie wir gesehen haben, ist das Entstehen und Herausheben der kontinentalen Blöcke, das Niederschlagen der Dampfsphäre, unter stetiger und vollkommener Wahrung des hydrostatischen Gleichgewichtsprinzips vonstatten gegangen, da ja eine jede Phase dieses Entstehungsprozesses im statischen Gleichgewicht abgelaufen ist.

Vom Urzustand her hatten wir ja ein vollständig geschlossenes Kräftesystem vor uns, in welchem Gleichgewicht herrschte; es konnte sich aus diesem nur ein Zustand herausbilden, in dem ebenfalls Gleichgewicht der wirkenden Kräfte herrscht. Störungen können nur nach der Verfestigung der Kruste entstehen und höchstens Werte bis zur Grenze der allerdings sehr beschränkten inneren Festigkeitskräfte der Kruste annehmen. Deshalb konnten diese Störungen nur von lokalem Charakter sein und mußten im geschlossenen System durch Wirkungen pro und contra aufgehoben werden. Den Gesetzen der klassischen Mechanik entsprechend, war nach wie vor das System als Ganzes betrachtet, im Gleichgewicht.

Das Wärmegefälle als Ursache der Umlagerung.

Von bedeutender Wichtigkeit ist nun die Frage, wieso es möglich war, daß sich Temperaturdifferenzen an der Erdoberfläche heraus-

bilden konnten, welche zu den bisher erörterten Massenumlagerungen führten.

Zwei Möglichkeiten kommen in Betracht. Erstens exogene Einwirkungen, etwa durch die Strahlungsenergie der Sonne verursacht, oder zweitens endogene Einflüsse, die durch die verschiedene Zusammensetzung der inhomogenen Schmelzen ausgelöst wurden.

Die Strahlungsenergie der Sonne dürfte eine ausschlaggebende Wirkung kaum ausgeübt haben, da im Urzustand der noch schmelzflüssigen Erde diese von einer mächtigen Dampf-Luft-Hülle umgeben war, die die Wassermengen der Meere, das kristalline Wasser der Lithosphäre usw. enthielt. (Der Dissoziationsgrad von Wasserdampf ist bei Temperaturen bis $T = 1500^\circ$ unbedeutend, es kann also mit der ganzen Dampfmenge gerechnet werden.) Die Wärmekapazität des Wasserdampfes liegt ziemlich hoch; es können daher nur bedeutende Wärmemengen eine Änderung der Temperatur verursachen, und die Strahlungsenergie der Sonne war viel zu klein, um diese enormen Gas- und Dampf-mengen zu durchdringen und bis zu der Oberfläche der Erde reichende Temperaturverschiebungen entstehen zu lassen.

Einen ausschlaggebenden Einfluß üben jedoch die Beimischungen der salischen und simischen Stoffe auf den Erstarrungspunkt dieser krustenbildenden Materialien aus.

Über die Zusammensetzung der Lithosphäre wissen wir sehr wenig; die Geochemie konnte nur die äußerste Krustenschale von 10—16 km Mächtigkeit erschließen. Über größere Tiefen stehen uns überhaupt keine chemischen Analysen, noch Dichtebestimmungen zur Verfügung. Die Analysen dieser Schale ergaben das Resultat, daß es im wesentlichen 12 Elemente sind, die den Baustoff der Kruste liefern. Sie allein sind schon mit 98.63% an der Zusammensetzung der Erdrinde beteiligt. Alle anderen Elemente spielen eine gänzlich untergeordnete Rolle.

Nachfolgend geben wir die von H. S. WASHINGTON ausgeführten, auf die Zusammensetzung der einzelnen Erdkrustenteile bezüglichen Analysen tabellarisch zusammengefaßt:

Diese Analysen sind von großem Interesse, weil aus ihnen die verschiedenartige Zusammensetzung der einzelnen Erdkrustenteile kenntlich wird. Es muß darauf hingewiesen werden, daß die bei den Ozeanen bestimmten Werte nur auf spärliches Material gegründet sind und nur auf die bis über den Meeresspiegel aufgestiegenen Laven bezogen werden können. Auch standen aus den ozeanischen Gebieten

		Zahl der Analysen	Dichte	Mittlere Erhebung
1	Erde	5159	2.74	+ 687
2	Nordamerika	1709	2.76	+ 700
3	Südamerika	138	2.75	+ 580
4	Europa	1985	2.76	+ 300
5	Asien	114	2.73	+ 950
6	Afrika	223	2.75	+ 650
7	Australien	287	2.79	+ 350
8	Antarktis	103	2.84	?
9	Atlantisches Gebiet . . .	56	2.85	—4116
10	Pazifisches Gebiet	72	3.05	—4520

Gebiet Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
SiO ₂	59.47	60.19	61.36	59.84	61.92	58.21	60.16	53.66	50.59	50.03
Al ₂ O ₃	15.45	15.76	15.20	15.12	15.49	15.28	14.74	16.82	15.81	15.51
Fe ₂ O ₃	3.10	2.88	3.03	3.17	3.17	3.52	2.60	4.01	4.44	3.88
FeO	3.82	3.67	3.30	3.67	2.75	3.73	4.41	5.34	5.79	6.23
MgO	3.51	3.16	3.47	3.61	2.63	3.51	3.76	4.67	5.79	6.62
CaO	5.11	4.81	4.88	4.97	4.50	5.09	5.03	7.59	7.36	7.99
Na ₂ O	3.86	3.90	4.08	3.73	4.10	4.83	3.50	3.58	4.27	4.00
K ₂ O	3.14	3.07	2.69	3.40	3.23	3.28	3.03	2.32	2.31	2.10
H ₂ O	1.15	1.01	1.04	1.24	1.23	1.26	1.19	0.93	1.47	1.16
TiO ₂	0.91	1.01	0.56	0.83	0.68	0.84	1.01	0.87	1.63	1.96
P ₂ O ₅	0.24	0.26	0.11	0.23	0.12	0.20	0.26	0.17	0.43	0.25
MnO	0.09	0.10	0.12	0.08	0.10	0.07	0.15	0.03	0.04	0.15
Rest	0.15	0.18	0.16	0.11	0.08	0.18	0.16	0.01	0.07	0.12
Zusammen .	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

— im Gegensatz zu den Kontinenten — vorwiegend Gesteine des geologisch jüngeren Vulkanismus zur Verfügung.

Jeder Schmelze entspricht bekanntlich bei gegebenem Druck eine zugeordnete Schmelz- bzw. Erstarrungstemperatur (Schmelztemperatur = Erstarrungstemperatur), bei welcher sie in die kristalline Form übergeht.

Zwei oder mehrere kristalline Körper vermögen eine flüssige Lösung zu bilden bei einer Temperatur, die erheblich unter den Erstarrungspunkten der einzelnen Komponenten liegt, und ebenso kann auch in dieser Lösung die Kristallisation jeder der Komponenten unterhalb ihres spezifischen Erstarrungspunktes stattfinden. Dieser für unsere

Erörterungen äußerst wichtige Umstand erklärt z. B. die Tatsache, daß Laven noch weit unterhalb des Erstarrungspunktes sämtlicher im vollkristallinen Gestein möglichen Silikate flüssig sein können; sie erklärt auch, weshalb trotz des sehr hohen Schmelzpunktes der Kieselsäure (etwa bei 1700°C) diese z. B. im Granit sich zulezt, und zwar in Form von Quarz, ausscheidet, dessen Bildung erst bei einer erheblich tieferen Temperatur, unterhalb 800°C , möglich ist.

Mit den Gesetzen der Schmelzpunkterniedrigung in Lösungen befaßten sich RAOULT und VAN T'HOFF. Auf ihre grundlegenden Arbeiten soll bloß hingewiesen werden, da uns hier diese Theorien nicht interessieren. Uns genügt das Festlegen der Tatsache, daß die Erstarrungstemperatur der in Schmelze befindlichen Lösungen durch Beimischungen sehr stark beeinflußt werden kann. Auch die Metallurgie bietet hierfür Beispiele in Hülle und Fülle. Wir wollen nur ein lehrreiches Beispiel anführen.

Weichlote bestehen aus Zinn, Blei und Wismut. Die Schmelz- bzw. Erstarrungstemperatur der Weichlote kann durch Änderung der Mischung verschiedenartig beeinflußt werden, und zwar:

Zinn in % Schmelzt. 231.8	Blei in % Schmelzt. 327	Wismut in % Schmelzt. 271	Erstarr.-Temp. der Schmelze $^{\circ}\text{C}$
15	25	60	125
20	20	60	124
24.8	22.1	53.1	121
21.4	27.8	50.8	107
20.6	26.8	52.6	103
20	26	54	101
15	32	52.5	96

Hätten wir ein sehr großes Gefäß, in welchem geschmolzene Weichlote mit verschiedenen Beimischungen nebeneinander lagern, und wären diese Schmelzen durch eine gemeinschaftliche, gleichmäßig temperierte Gashülle bedeckt, so würde bei der Temperatur von 125° die erste, bei 124° die zweite Legierung kristallisieren usf. bis 96° , wo auch die letzte Legierung vollständig in die kristalline Form übergehen würde.

Die Beimischungen der Schmelzen ergeben auch bei gleichmäßig abnehmender Außentemperatur eine zeitliche Verschiebung der Kristallisation, und wenn dabei auch noch

neben Verschiedenheit der Dichtigkeiten der Schmelzen die Wärmezufuhr von unten her erfolgt, wird der Erkaltpungsprozeß mit Blockbildungen verbunden sein, welche nach Beendigung der Kristallisation Unebenheiten mit Sprunghöhen an der Oberfläche entstehen lassen werden, so wie wir das bereits zur Erklärung der Entstehung der Kontinente ausgeführt haben.

Beginnt die Kristallisation in der Tiefe, so geht die Inkrustation relativ rasch vonstatten, weil dann durch die kristalline Tiefenschicht der aufströmenden Wärme, der konvektiven Wärmevermittlung ein namhafter Widerstand in den Weg gelegt wird. Die Folge wird sein, daß die geschmolzenen Massen, welchen auf diese Weise die Wärmezufuhr von unten abgesperrt wurde, an der Oberfläche mehr Wärme abgeben, als sie von unten zum Ausgleich des Verlustes erhalten können. Dadurch wird die Abkühlung dieser Schmelze eingeleitet.

Beginnt jedoch die Kristallisation an der Oberfläche und versinken die erstarrten Schollen, so kommt es auch so zu dem eben beschriebenen Abkühlungsprozeß, da jetzt statt der unten entstandenen die versunkenen Schollen der Wärmeströmung einen Widerstand entgegenseetzen und ebenso von sich aus auf eine rasche Kristallisation hinwirken werden. Der Kristallisationsprozeß ist daher mit denselben Abkühlungserscheinungen verbunden, mag er von unten oder von oben einsetzen. Im Prinzip ändert sich nichts. (Siehe noch Anmerkung am Schluß.)

Mit der Wärmeisolierung des Gebietes α muß auch die Temperatur seiner Schmelze sinken. Es wird daher $T_1 < T_2$ sein. (T_2 ist die Temperatur der Schmelzen des Gebietes β , wo die Kristallisation noch nicht begonnen hat.)

Wir gelangten so auf einem Umweg zu dem Ergebnis, welches oben eine Bedingung unserer Ausführungen war, daß nämlich $T_1 < T_2$ ist. Es besteht daher zwischen den Gebieten α und β jene Temperaturdifferenz, die zu einer potentiellen Energiequelle wird und entgegen der Schwereschichtung die beiden Materialien gegeneinander vertikal absondert und durch vertikalen Schub die Entstehung der Kontinente herbeiführt.

Während der Abkühlung durchlaufen die Stoffe, aus welchen die Himmelskörper bestehen, verschiedene Entwicklungsperioden. Bei sehr hohen Temperaturen sind die Stoffe dissoziiert, sie bestehen aus pri-

mären Elementen. Es gibt noch keine zusammengesetzten chemischen Verbindungen. Erst beim Sinken der Temperatur entstehen verschiedene chemische Verbindungen, die sehr stark durchgemischt eine ziemlich homogene Sphäre ergeben.

Bei weiterer Abkühlung sondern sich die Komponenten der Gemische voneinander, scheiden aus, der Weltkörper wird im Schwerefeld konzentrisch geschichtet. Auch dieser Gleichgewichtszustand der entstandenen Schmelzen wird durch fortgesetzte Abkühlung gestört, da verschiedene Beimischungen in verschiedenen Gebieten eine zeitliche Verschiebung der Kristallisation und dadurch lokale Massenumlagerungen bewirken.

Die Sammelstätten der leichteren Materialsphäre (Sialsphäre) werden infolge des Verdichtungsprozesses der Unterlage (Simasphäre) aus dieser herausgehoben. Auf diese Weise entstehen Erhebungen an der Oberfläche des erstarrenden Weltkörpers.

Das Sial war einst eine konzentrisch gelagerte Erdsphäre, die sich durch eine thermodynamische Wirkung auf weiten Gebieten der Erde angesammelt und sich in kristallinem Zustand als ein erstarrtes steinernes Meer in den schwereren simischen Massen eingebettet hat. Die Tiefe dieses steinernen Meeres ist durch die Hydrostatik bestimmt; sie ist eine Funktion der spezifischen Gewichte von Sial und Sima. Da aber diese Werte nur wenig voneinander abweichen, sind auch diese steinernen Meere sehr tief. Mit diesen Stoffumlagerungen ist die Wirkung des Erkaltungsprozesses noch nicht zu Ende. Zeitlich erheblich verschoben, beginnt nun in der auf der Kruste liegenden, noch konzentrischen Dampfsphäre eine Umwandlung, die Phasenänderung.

Das aus dem Dampf sich niederschlagende Wasser sammelt sich an den tiefsten Stellen der Erdkruste und vermehrt durch seinen Gewichtsdruck die bereits vorhandene Ausgangssprunghöhe der Kontinente. (Siehe die Studie des Verfassers: „Zur Frage der Entstehung der Kontinente und Ozeane“ in Gerl. Beitr. z. Geoph., 1929, Bd. 22, S. 353—384.)

Diese Vermehrung der Sprunghöhe $\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda$ ist ebenso eine Funktion der spezifischen Gewichte, wie vorhin bei den salischen und simischen Massen. Die Frage, ob nun gegenwärtig diese epirogenetischen Krustenbewegungen einen Abschluß gefunden haben, steht mit dem Erkaltungsprozeß der Erde in enger Beziehung.

Ein jedes aufgenommene —, gewonnene —, abgegebene —, verlorene Wärmequantum wird einen vorher bestandenen Gleichgewichtszustand stören und durch eine Massenbewegung zu einem neuen Gleichgewicht

führen. Diese Arbeit aber wird bei der Erstarrung die Konfiguration der Erde beeinflussen. Wie dem auch sei, in der letzten Erkaltpériode, beim Wärmetod der Erde, werden keine Wassermere mehr bestehen, an ihrer Stelle werden riesige kristalline Eisblöcke mit namhafter Sprunghöhe die salischen Erdteile verbinden. Ihre Oberfläche wird infolge der Ausdehnung beim Gefrieren höher liegen als die der heutigen Kontinente. Sie werden die zuletzt entstandenden kristallinen Kontinente der Erde, die letzte Phasenänderung einer äußeren Erdsphäre sein.

Literatur.

- GUTENBERG, B., Lehrbuch der Geophysik. 1929.
BORN, A., Isostasie und Schweremessung. 1923.
HOFF, J. H. VAN T', Über die Theorie der Lösungen. 1900.
MACH, E., Prinzipien der Wärmelehre. 1923.
TAMMANN, G., Kristallisieren und Schmelzen. 1903.
— Aggregatzustände. 1923.
Handbuch der Experimentalphysik, Bd. 5. Leipzig 1930 (Akad. Verlagsges. m. b. H.).
MARC, R., Vorlesungen über die chemische Gleichgewichtslehre. 1911.
REJTÖ, A., Einige Prinzipien der theoretischen mechanischen Technologie der Metalle. 1927.
CZOCHRALSKI, J., Moderne Metallkunde. 1924.
NÖLKE, F., Geotektonische Hypothesen. 1924.
WEGENER, A., Die Entstehung der Kontinente und Ozeane. 1929.
SAPPER, K., Vulkankunde. 1927.

Anmerkung: Einige Bemerkungen über die Anwendung der Theorie der eutektischen Schmelzen auf dieses Problem konnten in der Korrektur aus Raumgründen nicht mehr Platz finden und werden demnächst nachgetragen.

Zur Berechnung von oszillatorischen Luft- und Wasserströmungen.

Von

B. Haurwitz, Leipzig.

Zusammenfassung: Zur Bestimmung von Strömungen in der Atmosphäre und Hydrosphäre dürfen die in manchen Arbeiten benutzten gewöhnlichen Differentialgleichungen nicht verwendet werden, da sie nur die Bewegung eines Massenpunktes beschreiben. Die Behandlung einer Flüssigkeit oder eines Gases als System von unendlich vielen (als Grenzfall von $n \rightarrow \infty$) Massenpunkten ist sehr schwierig, im allgemeinen sicher nicht leichter als die Behandlung der gleichen Probleme mit den Methoden der Hydrodynamik. Man kann die beanstandeten punktmechanischen Gleichungen auch nicht nachträglich in hydrodynamische umdeuten, wenn man nicht die ganz unzulängliche und auf die Bewegung eines festen Körpers führende Annahme machen will, daß die lokalen Ableitungen der Geschwindigkeit verschwinden. Schließlich wird noch angedeutet, wie die richtigere hydrodynamische Behandlung des Problems unter der Anwendung der BJERKNES'schen Störungsgleichungen zu verlaufen hätte.

Summary: In the determination of the motions of the atmosphere and the hydrosphere one cannot apply the differential equations which have been used in many papers, since in this way one arrives at the motion of only one mass-point. The treatment of a liquid or a gas as a system of n mass-points (or respectively of an infinite number of mass-points) is very difficult, certainly more complicated than the treatment of the same problem by hydrodynamical methods. One can only transform the equations obtained by the mass-point treatment into the hydrodynamical equations by assuming that the local derivatives of the velocity vanishes. This assumption, however, is infounded and leads to the motion of a rigid body. Finally the correct hydrodynamical treatment of the problem is indicated with application of the perturbation equations of V. BJERKNES.

Im folgenden soll auf einen wesentlichen Mangel in der analytischen Behandlung von oszillatorischen Strömungen in Wasser und Luft bei manchen Autoren hingewiesen werden.

Über dieses Problem hat vor längerer Zeit F. M. EXNER¹⁾ eine Arbeit veröffentlicht, aus der hervorgehen soll, daß ein Luftteilchen unter dem Einfluß eines konstanten Druckgradienten und der Coriolis-

¹⁾ F. M. EXNER, Über oszillatorische Bewegungen der Luft. Ann. d. Hydrographie, 1913.

beschleunigung im allgemeinen eine zykloidale Bahn beschreiben wird. Dieses Resultat wurde durch Integration des Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{du}{dt} + \lambda v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{dv}{dt} - \lambda u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

erhalten, wo u und v die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten, $\lambda = 2 \omega \sin \varphi$ die doppelte Vertikalkomponente des Vektors der Erdrotation, ρ die Dichte und p der Druck ist.

Wie das EXNERSche Ergebnis herauskommt, kann man sich leicht folgendermaßen ohne Rechnung klarmachen: Die konstante Gradientbeschleunigung allein würde die Bewegung des Massenpunktes auf einer Geraden veranlassen. Andererseits bewegt sich ein Massenpunkt auf der rotierenden Erde auf einem Kreise (Trägheitskreis), und zwar mit einer konstanten Geschwindigkeit, die gleich der ursprünglichen Geschwindigkeit des Punktes ist. Diese zweite (Kreis-) Bewegung ist natürlich eine Folge der Corioliskraft. Kreisbewegung und geradlinige Bewegung zusammen superponieren sich nun zu der von EXNER berechneten Zykloide.

Wir haben im vorhergehenden ausdrücklich immer von Bewegung eines Massenpunktes und nicht von Bewegung einer Luftmasse gesprochen; denn die benutzten Gleichungen gehören zur Mechanik des Massenpunktes und können daher auch nur Bewegung eines Massenpunktes beschreiben. Für die reibungsfreie Bewegung eines Massenpunktes auf einer Ebene, die im betrachteten Punkte tangential an die Erde gelegt ist, wäre also, von einigen irrelevanten Vereinfachungen und von der Interpretation der hydrodynamischen Druckbeschleunigung auf Verhältnisse der Punktmechanik abgesehen, alles in Ordnung. Nicht in Ordnung ist aber die Übertragung dieser Resultate auf Luft oder Wasser. Wenn man versuchen will, Probleme der Mechanik der Continua von der punktmechanischen Seite her anzugreifen, so darf man nicht außer acht lassen, daß die Bewegung eines Massenpunktes (= Flüssigkeitsteilchens) wesentlich durch die umgebenden, mit ihm durch elastische oder andere Bindungen verknüpften Teilchen beeinflusst wird. (Daß der Fall starrer Verbindung der Massenpunkte auf Luft- und Wasserbewegungen nicht angewendet werden kann, bedarf keiner näheren Ausführung.) Will man dieser gegenseitigen Beeinflus-

sung Rechnung tragen, so hat man für ein System von n Freiheitsgraden ein System von n LAGRANGESchen Gleichungen 2. Art zu integrieren, was bekanntlich auch im Falle kleiner Schwingungen, wobei die Koeffizienten des Systems als konstant angenommen werden können, zu recht komplizierten mathematischen Betrachtungen führt. Im übrigen hätte man eigentlich nicht diese n Gleichungen zu integrieren, sondern von ihnen ausgehend, zunächst den Grenzübergang zu unendlich vielen Massenpunkten, also zu unendlich vielen Freiheitsgraden zu vollziehen. Dabei ist es recht schwierig, die Bindungen zwischen den einzelnen Massenpunkten auszudrücken. Auf jeden Fall treten aber dabei räumliche Differenzenquotienten auf, so daß man beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ neben den Ableitungen nach der Zeit auch Ableitungen nach den räumlichen Koordinaten erhält. Die Differentialgleichungen werden also, wie ja auch in der Mechanik der Continua, partiell. Natürlich erfordert diese Methode auch noch besondere Konvergenzuntersuchungen darüber, ob die Lösung der Differenzgleichung gegen die der entsprechenden Differentialgleichung strebt, wenn man die Differenzgleichung selbst gegen die entsprechende Differentialgleichung konvergieren läßt¹⁾. Es zeigt sich, daß bei bestimmten Typen von Differentialgleichungen diese Konvergenz allgemein nur unter gewissen Bedingungen vorhanden ist.

Nach dem Gesagten dürfte klar sein, daß man aus der Behandlung der oszillatorischen Bewegung eines Massenpunktes nur sehr vage und allgemeine Schlüsse auf die Bewegungen eines Kontinuums machen kann, da es sich bei dem zugrunde liegenden Grenzübergang auf unendlich viele Freiheitsgrade um eine sehr weitgehende Veränderung der Problemstellung handelt. Man ist freilich in der Lage, gewisse Schlüsse von punktförmigen Oszillatoren auf Schwingungen der Continua zu übertragen, wie es etwa in der Hydrodynamik von LAMB in den einleitenden Bemerkungen zu den Kapiteln über Flutwellen und über Zähigkeit geschieht, oder wie es BARTELS zur Abschätzung des Einflusses der Reibung auf die Gezeiten der Atmosphäre²⁾ tut. Aber weitergehende Schlüsse auf Gestalt und Größe der Bahn zu ziehen, ist verfehlt. Man vergleiche dazu etwa die Erklärung der von SANDSTRÖM gefundenen oszillatorischen Luftbewegungen durch EXNER (a. a. O.).

¹⁾ Vgl. R. COURANT, K. FRIEDRICHS und H. LEWY, Über die partiellen Differenzgleichungen der math. Physik. Math. Ann., 1928, Bd. 100, S. 32.

²⁾ J. BARTELS, Über die atmosphärischen Gezeiten. Abh. d. Preuß. Met. Inst., 1927, Bd. VIII, Nr. 9.

Es ist viel wahrscheinlicher, daß man es hier mit Beobachtungs- und Interpolationsfehlern in dem weitmaschigen skandinavischen Beobachtungsnetz zu tun hat als mit oszillatorischen Strömungen, zumal durch Rechnung leicht nachgewiesen werden konnte, daß es wegen ihrer im Verhältnis zur Wellenlänge sehr geringen Amplitude ziemlich unmöglich ist, solche Undulationen, wie sie bei den von EXNER gemachten Voraussetzungen auftreten könnten, nachzuweisen. Gleiches gilt für die Deutung der quasistationären Front vom 10. Oktober 1923 durch BECKER¹⁾. Auch hier ist die Übereinstimmung zwischen berechneter Formel und Beobachtung dem Zufall und den Beobachtungsfehlern zuzuschreiben.

Man wird den vorstehenden Ausführungen gegenüber vielleicht darauf hinweisen, daß EXNER in einer weiteren Arbeit²⁾, in der er auch selbst betont, daß seine vorige Arbeit über den gleichen Gegenstand unzulänglich war, wieder dasselbe Resultat gefunden hat, und zwar unter Benutzung der hydrodynamischen Gleichungen, eine Vermutung, die auch durch Darstellung in Lehrbüchern nahegelegt wird. Gerade an diesem Beispiele läßt sich aber zeigen, wie leicht man durch unzureichende Anwendung der mathematischen Methoden zu falschen Schlüssen verleitet werden kann³⁾. In Wirklichkeit ergeben die punktmechanische und die hydrodynamische Betrachtungsweise gar nicht die gleichen Resultate. In der ersten, auf punktmechanischen Betrachtungen beruhenden Arbeit EXNERS (1913) ergab sich nämlich erst aus dem Zusammenwirken von Coriolis- und Gradientbeschleunigung, die sich nicht genau das Gleichgewicht hielten, die oszillatorische, zyklonale Bahn. Einwirkung der Gradientbeschleunigung allein hätte, wie auch schon oben ausgeführt wurde, nur eine geradlinige Bahn erzeugt. In der zweiten, auf Hydrodynamik aufgebauten Arbeit dagegen

¹⁾ R. BECKER, Zur Dynamik anisobarer Bewegung an Gleitflächen. Gerl. Beitr. z. Geoph., 1929, Bd. XXI, S. 1.

²⁾ F. M. EXNER, Über oszillierende Strömungen in Wasser und Luft. Ann. d. Hydrogr., 1919, S. 155. Obwohl EXNER in dieser Untersuchung selbst auf die Mängel seiner früheren Rechnung hinweist, schienen nähere Ausführungen dazu nicht überflüssig zu sein, da er nicht eingehend genug betont, worin die Unrichtigkeit in seiner ersten Arbeit besteht, und da sein Aufsatz anscheinend noch nicht genügt hat, weitere Arbeiten zu verhindern, die auf der punktmechanischen Betrachtungsweise beruhen.

³⁾ Mit Rücksicht auf den beklagenswerten kürzlichen Tod EXNERS möchte ich bemerken, daß diese Untersuchung, mit deren Inhalt sich EXNER, wie seine oben zitierte Arbeit beweist, sicher einverstanden erklärt hätte, bereits 1929 geschrieben wurde.

(1919) ergibt sich das aus der Hydrodynamik bekannte Resultat, daß Flüssigkeitsbewegungen oszillatorisch sein können und im allgemeinen auch sind, auch wenn äußere Kräfte, also auch die Corioliskraft, fehlen. Das ist auch ganz klar und eine Folge der unendlichen Anzahl von Freiheitsgraden oder, anders gesprochen, eine Folge der physikalischen Natur der Flüssigkeit, nicht des Einwirkens einer Coriolisbeschleunigung, die freilich einen maßgebenden Einfluß auf die Stabilität dieser Strömungen hat (Zyklonenproblem). Jedenfalls dürfte das Beispiel die Unzulänglichkeit der punktmechanischen Betrachtungsweise genügend belegen.

Man könnte noch an einen anderen Rechtfertigungsversuch für die beanstandete Methode denken. Ersetzt man nämlich in dem obigen Gleichungssystem die vollständigen Differentialquotienten nach der Zeit durch partielle, so wird es formal identisch mit den beiden ersten hydrodynamischen Bewegungsgleichungen für langsame Bewegungen¹⁾; denn bei diesen kann man bekanntlich die in u , v und ihren Ableitungen quadratischen Glieder vernachlässigen. Aber es ist zu beachten, daß man aus diesen Gleichungen nur eine Relation zwischen Druck- und Windfeld bekommt (BERNOULLISCHE Gleichung der Hydrodynamik). Die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen des zweidimensionalen Problems lauten für kleine Geschwindigkeiten beim Fehlen äußerer Kräfte, die für die folgenden prinzipiellen Betrachtungen unwesentlich sind,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Dazu kommt aber noch als dritte Gleichung die Kontinuitätsgleichung, die für die ebene Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit bekanntlich lautet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Während also in den Bewegungsgleichungen bei kleinen Geschwindigkeiten die „quadratischen“ Glieder $u \frac{\partial u}{\partial x}$ usw., die die räum-

¹⁾ Selbstverständlich ist die Bedeutung der EULERSCHEN hydrodynamischen Gleichungen ganz anders als die der EXNERSCHEN und BECKERSCHEN. Diese beziehen sich auf einen individuellen Massenpunkt, jene auf einen festen Ort. Daß die Gleichungen in ihrer ersten Interpretation als Gleichungen eines Massenpunktes keine brauchbare Lösung des Problems liefern können, wurde aber eben gezeigt.

lichen Ableitungen enthalten, vernachlässigt werden können, gegenüber den „linearen“ Gliedern $\frac{\partial u}{\partial t}$ usw., treten die räumlichen Ableitungen in der Kontinuitätsgleichung auf, da hier beide Glieder von gleicher (außerdem erster) Ordnung sind. Daraus sieht man, daß das Geschwindigkeitsfeld auch räumliche Änderungen aufweisen kann und außer in speziellen Fällen auch aufweisen wird (vgl. S. 33), was in den Lösungen der erwähnten Arbeiten nicht der Fall ist. Natürlich befriedigen auch diese räumlich konstanten Lösungen die Kontinuitätsgleichung, da sie von x und y gar nicht abhängen; aber es handelt sich ja gerade darum, möglichst allgemeine Integrale zu bekommen und nicht nur solche, die besagen, die Flüssigkeit könne sich wie ein starrer Körper bewegen.

Schließlich möchte ich noch ein paar ganz skizzenhafte Andeutungen darüber machen, wie das Problem der oszillatorischen Bewegung von Wasser und Luft hydrodynamisch behandelt werden kann, und zwar allgemeiner als es EXNER tut, der nur das stationäre Problem behandelt und die Wirkung der Coriolisbeschleunigung nur unvollkommen berücksichtigt.

In Richtung der konstant vorausgesetzten allgemeinen Strömung U (nur senkrecht zu dieser wirkend nimmt EXNER die Corioliskraft an) orientieren wir die x -Achse. Über diese Grundströmung überlagern sich nun kleine Störungen, deren x -Komponente u , deren y -Komponente v heiße; p sei die Abweichung des Druckes vom Normalwert (Störungsdruck). Die konstante Dichte des Mediums werde mit ρ bezeichnet. Geht die betrachtete Bewegung auf der rotierenden Erdoberfläche vor sich, die für den betrachteten Teil als waagrecht angesehen werden soll, so lauten die Bewegungsgleichungen, wenn $\lambda = 2\omega \sin \varphi$ die vertikale Komponente des Erdrotationsvektors mit $\omega = 7.29 \cdot 10^{-4}$ (Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation), φ geographische Breite, k den GULDBERG-MOHNschen Reibungskoeffizienten bedeutet, nach dem von BJERKNES in die Meteorologie eingeführten Prinzip der kleinen Störungen¹⁾

¹⁾ Vgl. insbesondere V. BJERKNES, Über die hydrodynamischen Gleichungen usw. (Geofys. Publ., Bd. V, S. 11) und H. SOLBERG, Integrationen der atmosph. Störungsgleichungen (Geofys. Publ., Bd. V, S. 9), dem die Darstellung im Prinzip folgt. Eine kurze, inzwischen freilich schon überholte Darstellung der leitenden Gedanken bei der Aufstellung der Störungsgleichungen bei GUTENBERG, Lehrbuch der Geophysik, Abschn. XVI, von. L. WEICKMANN, S. 884ff.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + k u - \lambda v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\
 & \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + k v + \lambda u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\
 & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.
 \end{aligned}$$

Was die Berücksichtigung der Reibung nach dem GULDBERG-MOHNschen Ansatz betrifft (im Falle der Verwendung des HESSELBERG-SVERDRUPschen Ansatzes wäre formal genau so vorzugehen), so sei ausdrücklich betont, daß wir ihn an sich für durchaus nicht befriedigend halten bei der Behandlung derartiger Aufgaben. Er wurde hier nur übernommen, um die Vergleichbarkeit unserer Resultate mit anderen Arbeiten zu erleichtern. Überdies erhält man die vom GULDBERG-MOHNschen Ansatz freie Bewegung leicht durch $k = 0$.

Wir machen den Ansatz:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & u = A e^{i(\alpha x - \delta t) + \beta y} \\
 & v = B e^{i(\alpha x - \delta t) + \beta y} \\
 & p = \rho D e^{i(\alpha x - \delta t) + \beta y}
 \end{aligned}$$

wo A , B , D , α , δ und β zu bestimmende Konstante sind, und zwar sind A , B , ρD die Amplituden der Störungsgrößen, α ist umgekehrt proportional der Wellenlänge ($\alpha = 2\pi/L$), δ die Orbitalfrequenz ($\delta = 2\pi/T$), β bestimmt die Veränderung der Amplituden in der y -Richtung. Durch Einsetzen der Werte (2) in (1) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & [-i(\delta - \alpha U) + k] A - \lambda B + i\alpha D = 0 \\
 & \lambda A + [-i(\delta - \alpha U) + k] B + \beta D = 0 \\
 & i\alpha A + \beta B = 0
 \end{aligned}$$

Da uns triviale Nulllösungen unseres Problems nicht interessieren, müssen wir verlangen, daß die Amplituden A , B , ρD unserer Störungsgrößen nicht Null werden. Zu diesem Zwecke müssen wir die Determinante des linearen homogenen Gleichungssystems (3) gleich Null setzen, also

$$(4) \quad (\alpha^2 - \beta^2) [-i(\delta - \alpha U) + k] = 0.$$

Bevor wir diese Relation weiter diskutieren, sei jedoch noch auf etwas anderes hingewiesen. EXNER (1913) und BECKER setzen voraus, daß der Druckgradient konstant sei¹⁾. Das würde heißen, daß in unserem

¹⁾ Vgl. dazu auch HESSELBERG (Ann. d. Hydrogr., 1915, S. 311), wo, freilich mit der unzulässigen punktmechanischen Methode, oszillierende Strö-

Gleichungssystem der Störungsdruck p verschwindet, also D gleich Null sein muß. Setzt man noch U und k gleich Null, was mit den Arbeiten beider Autoren übereinstimmt, so erhält man für die Orbitalfrequenz δ aus den beiden ersten Gleichungen (3)

$$(4a) \quad \delta = \pm \lambda = \pm 2\omega \sin \varphi$$

und daraus die gleichen Werte für die Periodendauer wie die beiden genannten Arbeiten. Aus der dritten Gleichung (3) folgt dann in Verbindung mit (4a) $\beta = \pm \alpha$, eine Gleichung, die in den beiden zitierten Arbeiten, wie S. 31 gesagt, einfach durch die Werte Null befriedigt wird, was für den ganz speziellen Fall der Druckkonstanz noch spezielle Lösungen auswählt¹⁾.

Der Gleichung (4) wird genügt durch

$$(I) \quad \beta = \alpha.$$

Dann ist

$$A = iB; \quad D = -\frac{1}{\alpha} [i\lambda - i(\delta - \alpha U) + k] B.$$

$$(II) \quad \beta = -\alpha$$

mit

$$A' = -iB'; \quad D' = -\frac{1}{\alpha} [i\lambda + i(\delta - \alpha U) - k] B'.$$

$$(III) \quad -i\delta + i\alpha U + k = 0$$

mit

$$A'' = i\frac{\beta}{\alpha} B''; \quad D'' = -i\frac{\lambda}{\alpha} B''.$$

Jedem dieser drei Fälle entspricht eine bestimmte Lösung, also:

$$(I) \quad u = iB e^{i(ax - \delta t) + \alpha y}$$

$$(5a) \quad v = B e^{i(ax - \delta t) + \alpha y}$$

$$p = -\rho \frac{1}{\alpha} [i\lambda - i(\delta - \alpha U) + k] B e^{i(ax - \delta t) + \alpha y}.$$

$$(II) \quad u = -iB' e^{i(ax - \delta t) - \alpha y}$$

$$(5b) \quad v = B' e^{i(ax - \delta t) - \alpha y}$$

$$p = -\rho \frac{1}{\alpha} [i\lambda + i(\delta - \alpha U) - k] B' e^{i(ax - \delta t) - \alpha y}.$$

mungen bei variablem Druckgradienten behandelt werden, wobei sich in Übereinstimmung mit unserer früheren Bemerkung ebenfalls ergibt, daß sich die Schwingungen kaum werden nachweisen lassen.

¹⁾ Man beachte, daß wir die Gleichungen EXNERS und BECKERS hydrodynamisch deuten wollten, da sie andernfalls, wie ausführlich dargelegt, von vornherein nicht anwendbar sind.

Im dritten Falle wird β willkürlich. Man kann dann statt $e^{\beta y}$ eine beliebige Funktion $\varphi(y)$ und statt $\beta e^{\beta y}$ deren Ableitung $\varphi'(y)$ einführen, wovon man sich etwa durch direktes Einsetzen überzeugen mag.

Wegen der Beziehung (III) muß mindestens eine der beiden Größen α und δ komplex sein bzw. imaginär. Komplexes oder imaginäres α würde eine in der x -Richtung unendlich anwachsende Störung geben, was natürlich ausgeschlossen ist. Also muß δ komplex sein:

$$\delta = \delta_1 + i\delta_2$$

und die Beziehung (III) wird

$$-i\delta_1 + \delta_2 + i\alpha U + k = 0,$$

also

$$(4b) \quad \begin{aligned} \delta_1 &= \alpha U \\ \delta_2 &= -k. \end{aligned}$$

Der Periodenfaktor oder besser Exponentialfaktor lautet demnach $\exp[i\alpha(x - Ut) - kt]$. Die betrachtete Schwingung hat die Periode:

$$\frac{2\pi}{\delta} = \frac{2\pi}{\alpha U} = \frac{L}{U} = T.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenstörung ist gleich der Geschwindigkeit U der Grundströmung. Die Ausdrücke für die Störungsgrößen werden

$$(5c) \quad \begin{aligned} u &= \frac{i}{\alpha} B e^{i\alpha(x-Ut)} e^{-kt} \varphi'(y) \\ v &= B e^{i\alpha(x-Ut)} e^{-kt} \varphi(y) \\ p &= -\rho \frac{i}{\alpha} \lambda B e^{i\alpha(x-Ut)} e^{-kt} \varphi(y). \end{aligned}$$

Zu den Ausdrücken (5a—c) sei noch bemerkt, daß man auf den rechten Seiten, um eine physikalisch anwendbare Lösung zu bekommen, nur die Real- oder Imaginärteile oder eine reelle lineare Kombination von beiden zu nehmen hat. Der Umweg über die komplexe Schreibweise ist aber bequemer für die Rechenarbeit.

Wir wollen die Integrale (5c) noch etwas näher betrachten. Haben wir z. B. den Fall eines Strömens zwischen den festen Grenzen $y = 0$ und $y = h$, so muß v an diesen beiden Grenzen verschwinden. Das heißt, daß $\varphi(y)$ an den beiden Stellen $y = 0$ und $y = h$ Nullstellen haben muß. Durch diese Forderung wird der Funktionenbereich der φ eingengt. Beispiele von Funktionen $\varphi(y)$, die dieser Forderung genügen, sind $\sin\left(n\pi \frac{y}{h}\right)$, wo n eine beliebige ganze Zahl ist, oder $y(y - h)$. Im ersten

Fälle treten je nach der Größe von n eine bestimmte Anzahl Knotenlinien im Strömungsverlauf auf, im zweiten Falle sind die Amplituden in der Mitte des Strömungsbettes am größten. Wir können die Gleichung der Stromlinien ohne feste Wahl von φ bestimmen. Wählen wir in (5c) für u und v nur die Realteile, also

$$u = -\frac{B}{\alpha} \sin \alpha (x - Ut) e^{-kt} \varphi'(y)$$

$$v = B \cos \alpha (x - Ut) e^{-kt} \varphi(y),$$

so wird die Differentialgleichung der Stromlinien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

und

$$(6) \quad \varphi(y) = \frac{\text{const}}{\sin \alpha (x - Ut)}$$

ist die gesuchte Gleichung der Stromlinien.

Schließlich sei noch bemerkt, daß man durch reelle lineare Kombination der Real- und Imaginärteile der partikulären Integrale (5a—c) Lösungen von größerer Allgemeinheit erhalten kann. In den Integralen (5a—b) tritt der Reibungsfaktor k nur in der Druckamplitude auf. Dadurch kommt er aber, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, wieder in die Bestimmungsgleichung für die Orbitalfrequenz δ . Es ist zu beachten, daß δ auch beim Fehlen von Reibung komplex sein kann, wodurch die Amplituden mit der Zeit zu- oder abnehmen. Vielleicht habe ich später Gelegenheit, auf diese Fragen zurückzukommen.

Im übrigen möchte ich mich vorläufig mit diesen kurzen Andeutungen begnügen und auf den naheliegenden Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit den Beobachtungen erst bei der Veröffentlichung im Gange befindlicher umfangreicherer Rechnungen eingehen. Hier lag mir vor allem daran, das Unrichtige der punktmechanischen Behandlungsweise klarzustellen und zu zeigen, daß man statt dessen mit den Gleichungen der Hydrodynamik zu arbeiten hat, die natürlich wegen der für die Integrationsarbeit notwendigen Vereinfachungen auch kritisch auf die Beobachtungsergebnisse angewendet werden müssen.

Leipzig, Juni 1930, Geophysik. Institut.

Über die Konvergenz der Reihe für das äußere Raumpotential.

Von

F. Hopfner, Wien.

(Mit 1 Figur.)

Zusammenfassung: Es wird gezeigt, daß die Entwicklung des Raumpotentials nach allgemeinen Kugelfunktionen für den Außenraum auch für einen gewissen Bereich im Innenraum der anziehenden Masse konvergent ist.

Résumé: Il est démontré que le développement du potentiel du volume en série suivant les fonctions sphériques valable pour l'espace extérieur est également convergent pour un certain domaine de l'espace intérieur de la masse attirante.

Summary: The development of the potential of space in series of spherical harmonics for the exterior space is convergent too in a certain region of the interior space of attracting mass.

Die Beantwortung der Frage nach dem Konvergenzbereich der Reihenentwicklung für das äußere Raumpotential

$$V = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{Y_i}{b^{i+1}}$$

ist für die Geophysik von besonderer Bedeutung, da die Gültigkeit einer Anzahl grundlegender Sätze, wie das CLAIRAUTSche Theorem, das Theorem von BRUNS u. a., für die Niveaufläche in Meereshöhe von der Art der Beantwortung dieser Frage abhängt. Obzwar ich mich vor kurzem bereits mit diesem Gegenstande befaßt habe¹⁾, scheint mir seine nochmalige Behandlung unter anderen Gesichtspunkten nicht überflüssig.

Es sei M jener Punkt an der Erdoberfläche, der den kleinsten Abstand vom Erdschwerpunkt hat. Mit diesem Abstand als Radius r_1 werde eine Kugel um den Erdschwerpunkt beschrieben. Der Erdkörper wird hierdurch in zwei Bestandteile zerlegt, nämlich in eine Kugel vom Radius r_1 und in jene Massen, die im Außenraum dieser Kugel liegen. Letztere Massen denken wir uns von der Kugel in den Außenraum

hinaus derart verschoben, so daß die innere Begrenzungsfläche dieser Massen — es sind das Teile der Kugeloberfläche vom Radius r_1 — während der Verschiebung beständig mit der Oberfläche konzentrisch zum Erdschwerpunkt beschriebener Kugeln zusammenfällt. Hierdurch wird eine Formveränderung der verschobenen Massen hervorgerufen. Diese Formveränderung soll später dadurch rückgängig gemacht werden, daß die verschobenen Massen in gleicher Weise wie beim Hingange

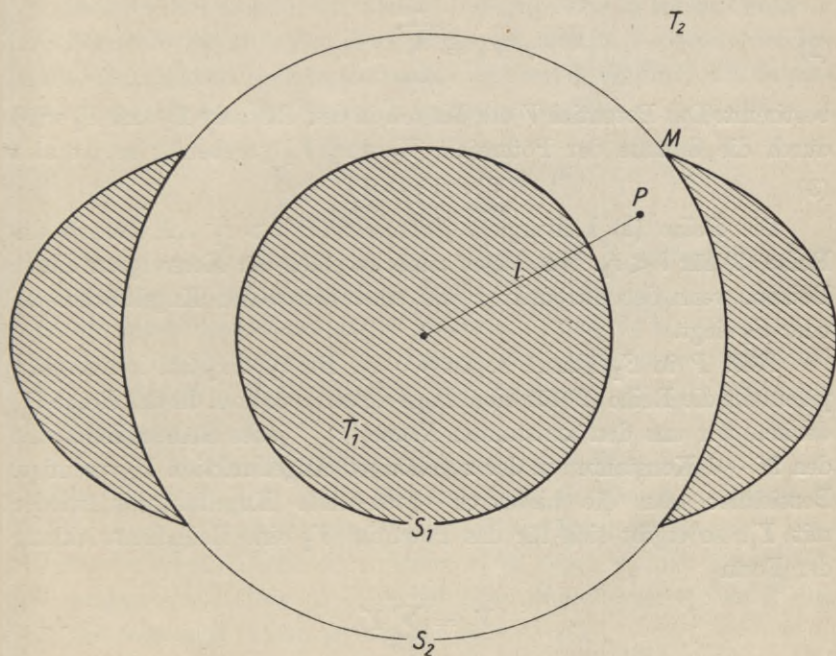


Fig. 1.

zum geeigneten Zeitpunkt wieder an die Kugeloberfläche vom Radius r_1 zurückgeschoben werden, damit nach völligem Rückgang die verschobenen Massen zusammen mit der Masse der Kugel vom Radius r_1 wieder den ursprünglichen Erdkörper herstellen.

Die Figur zeigt die Verhältnisse, nachdem die Massen im Außenraum der Kugel vom Radius r_1 von deren Oberfläche S_1 hinweggeschoben worden sind. Diese Massen liegen nach völligem Hingang auf der Kugeloberfläche S_2 vom Radius r_2 auf. Im Raume zwischen den beiden Kugelflächen S_1 und S_2 werde der Punkt P in der Entfernung l vom Schwerpunkt als Aufpunkt angenommen, so daß also

$r_1 < l < r_2$ ist. Das Potential V_1 der Kugel vom Radius r_1 auf den Punkt P wird als Potential des Außenraumes durch die Relation

$$(1) \quad V_1 = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{Y'_i}{l^{i+1}}$$

gegeben. Für die Massen im Raume T_2 ist P ein innerer Punkt; ihr Potential V_2 bezüglich P wird daher durch

$$(2) \quad V_2 = \sum_{i=0}^{i=\infty} Y''_i l^i$$

bestimmt. Das Potential V der Massen in den Räumen T_1 und T_2 wird durch die Summe der Potentiale V_1 und V_2 gegeben²⁾; es ist also

$$(3) \quad V = V_1 + V_2.$$

Die Reihe (1) konvergiert jedenfalls für $l > r_1$ und ebenso die Reihe (2) für $l < r_2$. Wir fragen zunächst nach der Konvergenz dieser Reihen, wenn der Aufpunkt P auf einer der beiden Kugelflächen S_1 oder S_2 liegt.

Fällt P in S_1 hinein, so ist $l = r_1$. Da $r_1 < r_2$ ist, konvergiert jedenfalls die Reihe (2) für diese Lage des Aufpunktes. In der Reihe (1) denken wir uns den konstanten Nenner r_1^{i+1} jedes Reihengliedes mit den $2i + 1$ Konstanten in der zugehörigen Kugelfunktion Y'_i vereinigt. Bezeichnet man die hierdurch entstehende Kugelfunktion wieder mit Y'_i , so ergibt sich für das Potential V_1 eine Reihenentwicklung der Form

$$V_1 = \sum_{i=0}^{i=\infty} Y'_i.$$

Diese Reihe ist konvergent und stellt daher das Potential V_1 der Kugel vom Radius r_1 auf einen ihrer Oberflächenpunkte dar. Denn V_1 ist im ganzen Raume eindeutig, endlich und stetig; also sind die Werte von V_1 auf der Kugelfläche S_1 nach bekannten Sätzen aus der Theorie der Kugelfunktionen in eine konvergente Reihe der angegebenen Art — und zwar nur in einer Weise — entwickelbar.

Es liege jetzt P auf S_2 ; dann ist $l = r_2$. Da $r_2 > r_1$ ist, konvergiert jedenfalls die Reihe (1). In der Reihe (2) denke man sich den konstanten Faktor r_2^i mit den $2i + 1$ Konstanten in der zugehörigen Kugelfunktion Y''_i vereinigt. Bezeichnet man die hierdurch entstehende Kugelfunktion wieder mit Y''_i , so ergibt sich für das Potential V_2 eine Reihe der Form

$$V_2 = \sum_{i=0}^{i=\infty} Y_i'',$$

die konvergent ist. V_2 ist nämlich im ganzen Raume eindeutig, endlich und stetig. Man schließt daher wie im vorigen Falle, daß die Werte von V_2 auf der Kugelfläche S_2 in eine konvergente Reihe nach allgemeinen Kugelfunktionen der angegebenen Art — und zwar nur in einer Weise — entwickelbar sind.

Aus der Relation (3) folgt somit der Satz: Der in einem Punkte P des Bereiches zwischen den Kugelflächen S_1 und S_2 — diese dem Bereiche zugerechnet — eintretende Potentialwert V ist durch die Summe zweier unendlicher, im Punkte P konvergenter Reihen darstellbar:

$$(4) \quad V = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{Y_i'}{l^{i+1}} + \sum_{i=0}^{i=\infty} Y_i'' l^i;$$

die Werte der Konstanten in den allgemeinen Kugelfunktionen Y_i' und Y_i'' sind von der Auswahl der Stelle P unabhängig und werden nur von der Massenanzordnung in den Räumen T_1 und T_2 bestimmt.

Diese Reihe findet in der Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen ihr Analogon in der bekannten LAURENTSchen Reihe.

Die Reihe (4) konvergiert für einen jeden Wert von l , der die Bedingung $r_1 \leq l \leq r_2$ erfüllt. Man lasse jetzt die Massen im Raume T_2 in der eingangs beschriebenen Weise sich der Masse im Raume T_1 unbegrenzt nähern; hierbei konvergiere r_1 so gegen r_2 , daß l beständig die vorgegebene Bedingung befriedigt; man wähle ferner r_1 zum Radius der Einheitskugel. Dann ist für $\lim r_2 = r_1 = 1$

$$V = \sum_{i=0}^{i=\infty} Y_i' + \sum_{i=0}^{i=\infty} Y_i'';$$

faßt man noch je zwei Kugelfunktionen gleicher Ordnung in eine einzige Y_i von derselben Ordnung zusammen, so ergibt sich

$$(5) \quad V = \sum_{i=0}^{i=\infty} Y_i.$$

Man schließt daher: Der in einem Punkte der Einheitskugel eintretende Potentialwert ist durch eine unendliche, auf der ganzen Einheitskugel konvergente, nach allgemeinen Kugelfunktionen fortschreitende Reihe der angegebenen Art darstellbar; es ist daher $\lim_{i \rightarrow \infty} Y_i = 0$; die Werte der $2i + 1$ Konstanten in der Kugelfunktion Y_i sind unabhängig von

der Auswahl des Aufpunktes auf der Einheitskugel und werden nur von der Massenordnung im Erdkörper bestimmt.

Da die Reihe (5) in einem jeden Punkt der Einheitskugel konvergiert, ist die Reihe

$$(6) \quad V = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{Y_i}{l^{i+1}}$$

für $l > 1$, also in einem jeden Punkt im Außenraum von S_1 , um so mehr konvergent. Diese Reihe ist, wenn l hinreichend groß, d. h. der Aufpunkt A im Außenraum des Erdkörpers angenommen wird, die Entwicklung seines Potentials für den Außenraum. In der Tat gibt diese Reihe den im eingangs bestimmten Punkt M eintretenden Wert des Potentials, wenn sich der Punkt A dem Punkte M auf einem ganz im Außenraum des Erdkörpers liegenden, im übrigen beliebigen Weg unbegrenzt nähert.

Also gibt die Reihe auch den in jedem Punkt außerhalb der Einheitskugel eintretenden Potentialwert des Erdkörpers. Die Reihe gibt daher insbesondere auch den in jedem Punkte im Innenraum des Erdkörpers außerhalb der Einheitskugel eintretenden Potentialwert. Also gibt sie auch die Werte des Potentials auf der Niveauläche in Meereshöhe, die unterhalb der Festländer im Innenraum des Erdkörpers außerhalb der angenommenen Einheitskugel verläuft.

Dieses Ergebnis steht in Übereinstimmung mit dem Resultate, zu dem ich in der eingangs angeführten Abhandlung gekommen bin¹⁾.

Um das Ergebnis dem Verständnis näherzubringen, wollen wir von der Integraldarstellung für das Potential

$$V = \int \frac{dm}{e}, \quad e = l \left(1 - 2 \frac{l'}{l} \cos \lambda + \frac{l'^2}{l^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ausgehen. Die binomische Reihe für e nach Potenzen von l'/l konvergiert für $l'/l < 1$. Wir wollen zunächst von dieser Voraussetzung absehen, aber die Rechnung doch in der üblichen Weise formal durchführen. Das Ergebnis der formalen Rechnung ist die Gleichung (6), in der wegen der Lage des Koordinatenursprungs im Erdschwerpunkt übrigens $Y_1 = 0$ ist. Erst jetzt wollen wir nach dem Konvergenzbereich dieser Reihe fragen, den man bisher durch die Forderung $l'/l < 1$ immer vorweg — und zwar zu eng — festgesetzt hat. Die Antwort auf diese Frage geben die vorangehenden Betrachtungen. Die Reihe (6) konvergiert für einen jeden Wert $l \geq 1$, da die Reihe (5) für jede Lage

des Aufpunktes auf der Einheitskugel konvergiert. Die Reihe (6) konvergiert also für jeden Aufpunkt auf und außerhalb der Einheitskugel, obzwar für jede Lage des Aufpunktes im Bereiche zwischen der Erdoberfläche und der Einheitskugel l'/l auch Werte ≥ 1 annimmt. Die Reihe (6) gibt daher wirklich den Wert des Erdpotentials im Außenraum der Einheitskugel, wenn nur ihr Radius geeignet bestimmt wird. Die Konvergenz der Reihe (6) könnte übrigens als eine nachträgliche Rechtfertigung für die gliedweise Integration der für $l'/l \geq 1$ divergenten binomischen Reihe angesehen werden; jedoch verfolgen die Darlegungen dieses Absatzes natürlich nur den Zweck, die früheren Ergebnisse dem Verständnis näherzubringen.

Literatur.

1. HOPFNER, F., Der Konvergenzbereich der Reihe für das äußere Raumpotential. Diese ZS., 1930, Bd. 25, S. 336.
 2. POINCARÉ, H., Théorie du Potentiel Newtonnien. Paris 1899. S. 204.
-

Ein verbessertes Verfahren zur Bestimmung des Gehaltes der Freiluft an Radiumemanation.

Von

Walter Kosmath, Klagenfurt.

(Vorläufige Mitteilung.)

(Mit 1 Figur.)

Zusammenfassung: In der vorliegenden Arbeit wird zunächst gezeigt, daß das Kokosnußkohleverfahren (die „Ansaugmethode“, das 1928 eine Verbesserung erfahren hat, für die Bestimmung des augenblicklichen RaEm-Gehaltes bzw. der vertikalen Verteilung der Emanation nicht völlig geeignet ist.

Es werden dann die Anforderungen, denen eine Methode zur Bestimmung des augenblicklichen RaEm-Gehaltes genügen soll, angeführt.

Ferner wird eine Methode angegeben, die jenen Anforderungen gerecht zu werden scheint, und auf die Vorteile derselben gegenüber der Ansaugmethode hingewiesen.

Auch für bioklimatische, balneologische bzw. medizinische Fragen wäre das angegebene Verfahren von Bedeutung. Das Verfahren wäre auch bei Flugzeugaufstiegen und Ballonfahrten durchführbar.

Das in meiner Arbeit: „Der Gehalt der Freiluft an Radiumemanation und deren vertikale Verteilung in der Nähe des Erdbodens“¹⁾ verwendete Kokosnußkohleverfahren, das eine Verbesserung der bisher benutzten Kohlemethode darstellt, genügt nicht völlig den Anforderungen eines Verfahrens, das die natürlichen Emanationsverhältnisse in der Atmosphäre wiedergeben soll. Das Kokosnußkohleverfahren, bei dem je nach dem mittleren Emanationsgehalt der Freiluft am Beobachtungsort 2—4 Stunden Freiluft durch Kokosnußkohlesäulen hindurchgesaugt werden muß, um in den Kohleröhren eine zur elektrometrischen Messung genügende Emanationsmenge anzusammeln, liefert nur Durchschnittswerte des RaEm-Gehaltes in der Freiluft über den Zeitraum, in den der Saugversuch fällt.

Bedenkt man, daß der RaEm-Gehalt der Freiluft innerhalb der Saugdauer von 2—4 Stunden durch Änderungen der meteorologischen Faktoren mehr oder minder starke Änderungen erfahren kann, so wird

¹⁾ WALTER KOSMATH, Gerl. Beitr. z. Geoph., 1930, Bd. 25, S. 95.

man das Kohleverfahren („Ansaugmethode“) von 1928 nur als roquantitatives Verfahren gelten lassen können.

Studiert man mit Hilfe des Kohleverfahrens, das ich 1928 in Graz zur Bestimmung der vertikalen Verteilung der RaEm in der Freiluft verwendet habe, etwa den vertikalen Abfall der Emanation z. B. zwischen drei Höhenstufen 1 m, 25 m, 50 m, so müßte man staubfreie und trockene Freiluft gleichzeitig durch drei Saugleitungen aus den erwähnten Höhen ansaugen, und zwar je durch mindestens 2 Stunden. Um der in der elektrometrischen Anordnung noch meßbaren minimalen Emanationsmenge nicht allzu nahe zu kommen, was eine Vergrößerung des relativen Fehlers bedeuten würde, wäre es sogar besser, beim Ansaugen aus der 50-m-Stufe die Saugdauer von 2 auf 3 bzw. 4 Stunden zu erhöhen.

Man würde also erst in 2—4 Stunden ein zusammengehöriges Wertetrippl, RaEm-Gehalt in 1 m, RaEm-Gehalt in 25 m, RaEm-Gehalt in 50 m erhalten. Die Berechnungen des vertikalen RaEm-Abfalles müßte man auf den Mittelpunkt der Saugdauer von 2 bis 4 Stunden beziehen und die sich so ergebenden RaEm-Konzentrationsverhältnisse r_2/r_1 , r_3/r_1 — unter r_1 , r_2 , r_3 sind die Emanationskonzentrationen in den Höhen 1 m, 25 m, 50 m zu verstehen — für den Abfall in dem angegebenen Zeitpunkt als repräsentativ ansehen. Die so gefundenen Werte r_2/r_1 und r_3/r_1 werden um so besser der natürlichen vertikalen Emanationsverteilung im erwähnten Zeitpunkt entsprechen, je kürzer die Saugzeit ist.

Um eine getreue Wiedergabe der Emanationsverhältnisse in der Freiluft zu erhalten, wird man sich wohl nach einer anderen Methode umsehen müssen, nämlich nach einer einfachen Methode, welche die Luftprobenentnahme von 2 Stunden auf eine bedeutend kürzere Zeit, etwa auf 10 Minuten herabdrückt. Erst wenn uns dies gelungen ist, können wir mit einer einwandfreien Durchforschung der RaEm-Verteilung in der Freiluft und ihrer Abhängigkeit von den meteorologischen Faktoren beginnen und an die Beantwortung der Frage nach einem täglichen bzw. jährlichen Gang der Höhenverteilung herangehen. Um diesbezügliche Beobachtungen auch an Orten, welche fernab von Siedlungen liegen, anstellen zu können, wäre es auch wünschenswert, eine Methode aufzufinden, die vom Laboratorium unabhängig ist.

Eine exakte Methode zur Bestimmung des RaEm-Gehaltes bzw. der vertikalen RaEm-Verteilung in der Freiluft müßte folgenden Forderungen genügen:

Es müßte möglich sein, in verhältnismäßig kurzer Zeit eine Menge

von ungefähr 100 Liter Freiluft durch einen Adsorber so weit zu entemanieren, daß die durch denselben aus dem Luftquantum entnommene RaEm-Menge zur elektrometrischen Messung hinreicht. Weiters müßte man die Luftprobenentnahme unabhängig von einem Laboratorium durchführen können. Um die Höhenverteilung der Emanation bis in eine Höhe von 6000 m experimentell verfolgen zu können, müßte die neue Methode auch für Flugzeugaufstiege und Ballonbeobachtung geeignet sein.

A. WIGAND und F. WENK¹⁾ haben bereits im Jahre 1924 Flugzeugaufstiege in Halle unternommen, um den RaEm-Gehalt der Freiluft in verschiedenen Höhenlagen bis 4000 m zu bestimmen. Bei diesen

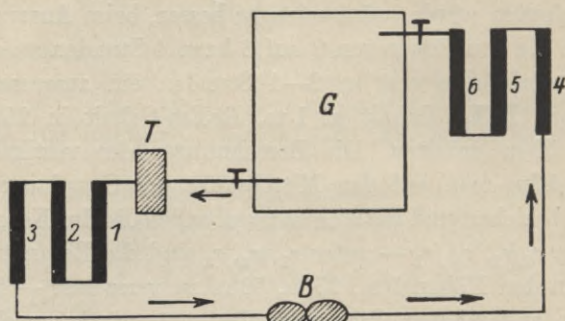


Fig. 1.

Versuchen haben sie ein Verfahren verwendet, bei dem die Saugzeit bereits nur 5—10 Minuten betrug. Die Emanation wurde bei diesen Versuchen in einem mit flüssiger Luft gekühlten Gefäß angesammelt. Da flüssige Luft oft nur schwer erhältlich und nicht gut transportabel ist, so ist diese Methode nicht überall durchführbar.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren angegeben, das den oben aufgestellten Forderungen gerecht zu werden verspricht. Das Verfahren ist noch nicht experimentell erprobt, dürfte aber praktisch verwertbar sein, da bei demselben keine technisch schwierigen Manipulationen erforderlich sind. Ich beabsichtige, dasselbe auf seine praktische Verwendbarkeit hin zu überprüfen.

Dieses Verfahren wäre einfach:

Zunächst müßte man ein ungefähr 25 Liter fassendes, druckfestes, zylindrisches Gefäß aus 3—4 mm dickem Eisenblech mit einem Durchmesser von 30 cm und einer Höhe von 40 cm in einen Kreis schalten, der in Abb. 1 schematisch skizziert ist, und mittels des Gebläses *B* einen

¹⁾ A. WIGAND und F. WENK, Ann. d. Phys., IV. Folge, 1928, Bd. 86, Nr. 13.

Kreisstrom von 3—4 Liter pro Minute 10—15 Minuten lang unterhalten, etwa in dem Sinne, der in Abb. 1 durch Pfeile angedeutet ist, um die Altluft des Gefäßes vor der Luftprobenentnahme zu entemanieren. Dabei würde die Altluft die Trockenvorlage *T*, dann drei 50 cm lange Kokosnußkohlesäulen 1, 2, 3 mit einem Durchmesser von 1 cm durchströmen, worin die Emanation der Altluft teilweise angesammelt wird. Emanationsärmere Luft würde abermals drei Kohlesäulen 4, 5, 6 von derselben Dimensionierung wie die Säulen 1, 2, 3 durchströmen und abermals entemanieren werden. Für diese Zwecke wäre die Kokosnußkohle von der Firma J. PRESTON (208 West Street, Sheffield, England) vorzüglich geeignet. Auf Grund meiner Erfahrungen über diese Kokosnußkohlesorte glaube ich, daß bei dem angegebenen Zirkulationsverfahren bei einer Saugmenge von 3—4 Liter in der Minute in den sechs hintereinander geschalteten Kohlesäulen vollständige Adsorption zu erwarten ist.

Nach der Entemanierung der Altluft könnte man das Eisengefäß mittels einer Autopumpe mit Freiluft auf 5—6 Atm. Druck vollpumpen, was in 10 Minuten mit Hilfe einer mittelgroßen Autopumpe erreicht werden kann.

Dann müßte man die Freiluft aus dem Gefäß durch 6 hintereinander geschaltete, emanationsfreie Kohlesäulen von der angegebenen Dimensionierung bis zum Druckausgleich langsam ausströmen lassen und dann die Gefäßluft, die aus einem Gemenge von Freiluft mit Altluft besteht, durch Zirkulation durch ebendieselben Kohlesäulen, durch die die Freiluft zuvor ausgeströmt ist, entemanieren.

Dann hätte man die Emanation, die in 100 bzw. 125 Liter Freiluft enthalten ist, bei vollständiger Adsorption in den 6 Kohlesäulen adsorbiert.

Nach der Entemanierung der Luftprobe müßte man die Kohlesäulen glühen, gleichzeitig die Glutgase in einer Ionisationskammer auffangen und dann die elektrometrische Messung nach dem üblichen Verfahren durchführen.

Bei der Ansaugmethode von 1928 muß man 2—4 Stunden Freiluft ansaugen. Bei der hier beschriebenen Methode würde dagegen die Luftprobenentnahme höchstens 10 Minuten benötigen. Diese Methode würde daher zu Ergebnissen führen, die den wirklichen Verhältnissen besser entsprechen, weil innerhalb der 10 Minuten, welche die Probenentnahme beansprucht, kaum eine merkliche Änderung des Emanationsgehaltes der Freiluft eintritt.

Bei der Ansaugmethode muß man überdies an der Stelle, an welcher der Emanationsgehalt der Freiluft untersucht werden soll, eine Saugleitung bauen und, um dieselbe vor dem Wetter zu schützen, eine Holzhütte in der Nähe errichten, was nicht überall durchgeführt werden kann (z. B. bei Beobachtungen auf Bergspitzen, im Gletschergebiet, im Sumpfgebiet usw.). Bei der hier beschriebenen neuen Methode wäre dies nicht notwendig, und außerdem hätte dieselbe auch den Vorteil, daß der Beobachter nicht andauernd an der gewählten Beobachtungsstelle verbleiben müßte, vielmehr könnte er mit Hilfe dieses Verfahrens bei Beobachtung des Emanationsgehaltes in erdbodennahen Luftschichten nach Bedarf die Luftproben an verschiedenen Stellen des Beobachtungsgebietes entnehmen, was für vergleichende Messungen, die für das Erkennen von Zusammenhängen von Bedeutung sind, unbedingt erforderlich ist. Es darf aber an dieser Stelle nicht verschwiegen werden, daß die hier beschriebene Methode auch einen Nachteil hat, der durch das Gewicht der Eisengefäße bedingt ist — ein solches Gefäß würde ungefähr 12 kg wiegen —, wodurch ein gleichzeitiger Transport mehrerer Gefäße — dies wäre beim Studium der vertikalen Verteilung notwendig — in siedlungsferne Gegenden erschwert wird. Bei der neuen Methode wäre eigentlich nur die elektrometrische Messung an das Laboratorium gebunden.

Abschließend wäre noch zu erwähnen, daß die in der vorliegenden Arbeit beschriebene Methode auch für Flugzeugaufstiege und Ballonbeobachtungen geeignet wäre; denn man hätte dabei nur einige 12 kg schwere, 25 Liter fassende Eisengefäße mit einem Durchmesser von 30 cm und einer Höhe von 40 cm zur Luftprobenentnahme in verschiedenen Höhenlagen mitzuführen. So könnte man die Höhenverteilung der Emanation experimentell bis in eine Höhe über 6000 m genau verfolgen. Zur Luftprobenentnahme in einer Höhe über 2000 m wird man größere, mindestens 100 Liter fassende, ungefähr 20 kg schwere Gefäße mit einem Durchmesser von 50 cm und einer Höhe von 60 cm verwenden müssen, um eine zur Messung genügende Emanationsmenge anzusammeln.

Die vorliegende Methode wäre auch für bioklimatische, balneologische bzw. medizinische Fragen von Bedeutung. Gerade Fragen aus diesen Wissensgebieten haben mich dazu veranlaßt, nach einer auch für diese Zwecke geeigneten Methode zur Bestimmung des RaEm-Gehaltes der Freiluft zu suchen.

Zur Definition des idealen Strahlungsfilters.

Von

F. Lauseher, Wien.

(Mit 3 Figuren.)

WOLFGANG KAEMPFERT hat in einer Arbeit: „Über die Durchlässigkeit von Strahlungsfiltern“¹⁾ als ideales Filter ein solches bezeichnet, welches für den gewünschten Spektralbereich vollkommen durchlässig, für alle anderen Wellenlängen jedoch vollkommen undurchlässig ist. Diese übliche Definition des idealen Filters kann man in einer einfachen Weise erweitern, die wohl teilweise schon bekannt ist, die ich jedoch leider in der meteorologischen Literatur noch nirgends gelesen habe.

Neben Messungen der Strahlungsenergie in $\text{gcal/cm}^2/\text{min}$ ist es nämlich sehr oft wünschenswert, vor eine Meßapparatur, die eine bestimmte Wellenlängenempfindlichkeitskurve $E(\lambda)$ hat, Filter von solcher Durchlässigkeitskurve $D(\lambda)$ zu bringen, daß ein bestimmtes Wirkungsverhältnis der verschiedenen Wellenlängen $W(\lambda)$ erzielt wird. Für kalorisch arbeitende Apparate ist bei Verwendung eines schwarzen Körpers $E(\lambda)$ eine Konstante und auch $W(\lambda) = \text{constans}$ gilt, wenn man im Energiemaß messen will. Dies ist der von W. KAEMPFERT hervorgehobene Fall: Aus $W(\lambda) = \text{constans}$ für den Durchlässigkeitsbereich λ_1 bis λ_2 und $W(\lambda) = 0$ für alle anderen Wellenlängen folgt bei $E(\lambda) = \text{constans}$ $D(\lambda) = 1$ von λ_1 bis λ_2 und außerhalb $D(\lambda) = 0$. Für Photozellen usw. ist dagegen $E(\lambda)$ eine andere, meist angenähert bekannte Funktion der Wellenlänge und $W(\lambda)$ kann etwa die relative Farbenempfindlichkeit des Auges oder die Wellenfrequenzabhängigkeit irgendeines anderen biologischen Effektes (z. B. Erythembildung) sein. Allgemein gilt für ein ideales Filter:

$$W(\lambda) = E(\lambda) \cdot D(\lambda),$$

und folglich ist nach Möglichkeit für jede Wellenlänge $D = W/E$ und hierbei $D_{\text{max}} = 1$ zu wählen.

Ein einziges Beispiel, dargestellt in der schematischen Fig. 1, soll vor Augen führen, wie wichtig es ist, die Idealität eines Filters

¹⁾ W. KAEMPFERT, Gerl. Beitr. z. Geophys. Bd. 23, 1929, S. 167ff.

stets relativ zur Meßmethode und zum Meßziel einzuschätzen. Es beantwortet die Frage: Welche Durchlässigkeitskurve muß ein ideales Filter haben, damit man mit einer Kaliumzelle bei beliebiger Wellenlängenverteilung der zu messenden Lichtenergie (zum Beispiel blauer Himmel oder Wolken) der Farbenempfindlichkeit des Auges angepaßte Messungen erhält. Die Ordinaten sind für alle drei Kurven so gewählt, daß das Maximum gleich groß wird.

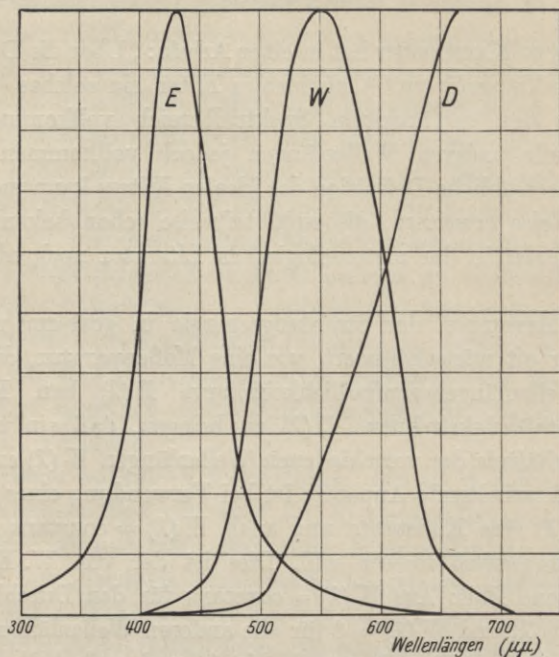


Fig. 1. Durchlässigkeit D des idealen Filters zur Erzielung der Augenempfindlichkeitskurve W vor einer Kaliumzelle (E).

Von der praktischen Beachtung dieser Definition des idealen Strahlungsfilters darf man sich wohl eine Erweiterung der Ziele der Untersuchungen der Filterdurchlässigkeit erwarten. Manches Filter, dessen Durchlässigkeitsgebiet ganz unscharf begrenzt ist, wird sich für Verwendung von Zellen gut eignen, während es für kalorische Messungen gar nicht „ideal“ ist.

Die voranstehenden Betrachtungen wären daher folgendermaßen zusammenzufassen:

1. Die Wirkung der Strahlung wird in zahlreichen, meist noch

besser zu untersuchenden $W(\lambda)$ -Kurven von Einzelforschern angegeben.

2. Die Institute in De Bilt und Frankfurt a. M. werden uns in ihrer erfreulichen Wirksamkeit wohl mannigfache $D(\lambda)$ -Kurven vermitteln.

3. Der dritte Faktor in der angegebenen Definitionsgleichung, die $E(\lambda)$ -Kurve, sollte ebenso systematisch bestimmt werden.

Einige allgemeine Folgerungen betreffend die Form idealer Durchlässigkeitskurven.

Für den selektiven Photoeffekt findet man meist Empfindlichkeitskurven $E(\lambda)$, die ziemliche Ähnlichkeit mit Glockenkurven von der Form

$$E(\lambda) = E(\lambda_2) \cdot e^{-\varepsilon_2^2(\lambda-\lambda_2)^2}$$

haben. Je größer die positive Konstante ε_2^2 ist, desto steiler fällt die Kurve vom Maximalwert $E(\lambda_2)$, zugehörig zur Wellenlänge λ_2 , nach beiden Seiten symmetrisch ab, desto selektiver ist also die Wellenlängen-Empfindlichkeitskurve des Instrumentes.

Für die analoge Kurve der zu messenden Wirkung $W(\lambda)$ setzen wir zur Untersuchung auch eine Glockenkurve an:

$$W(\lambda) = W(\lambda_1) \cdot e^{-\varepsilon_1^2(\lambda-\lambda_1)^2}$$

Wieder ist der Betrag der Konstanten ε_1^2 ein Maß dafür, ob die Kurve mehr oder weniger konkav gegen die Achse der Wellenlängen verläuft. Der sehr wichtige Grenzfall $\varepsilon_1^2 = 0$ (Ausartung der Glockenkurve in eine Gerade) ist den Versuchen angepaßt, Photozellen zu Messungen in getrennten Spektralbereichen in der Absicht heranzuziehen, Messungsergebnisse in einer dem Energiemaß proportionalen Einheit zu erhalten.

Aus $W = E \cdot D$ folgt für die allgemeine Form der Durchlässigkeitskurve des zu obigen Annahmen idealen Filters

$$D = D(b) \cdot e^{-a^2(\lambda-b)^2},$$

wobei

$$a^2 = \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2$$

und

$$b = \lambda_1 + \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2} \cdot (\lambda_1 - \lambda_2).$$

(Im Falle $a^2 = 0$ wird $D = \text{const } e^{\varepsilon^2(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda}$.)

Die Größe von a^2 ist für die Form der Kurve D entscheidend. Es gibt drei Fälle:

1. $a^2 > 0$, d. h. $\varepsilon_1^2 > \varepsilon_2^2$.

Da die zu messende Wirkung selektiver ist als die Empfindlichkeitskurve des Meßinstruments, muß als ideale Durchlässigkeitskurve eine Glockenkurve (oder deren Teil) gewählt werden, und zwar eine um so selektivere, je größer $\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2$ ist.

2. $a^2 < 0$, d. h. $\varepsilon_1^2 < \varepsilon_2^2$.

$D(\lambda)$ ist in diesem Falle eine Kurve von der Form e^{x^2} mit einem Minimum bei der Wellenlänge b . Die zu große Selektivität des Meßinstrumentes muß abgestumpft werden.

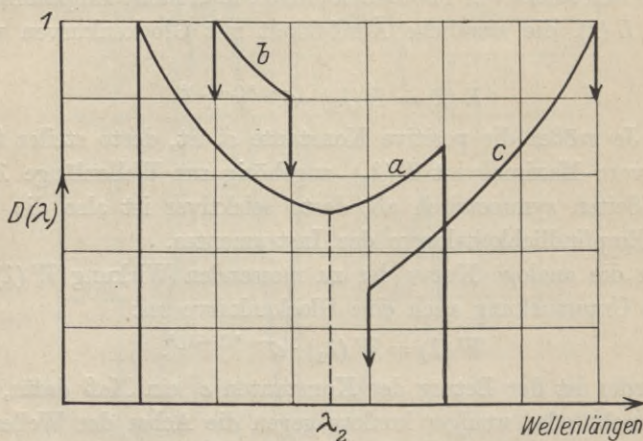


Fig. 2. Schematische Darstellung der für $W = \text{constans}$ idealen Durchlässigkeitskurve.

3. $a^2 = 0$, d. h. $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2$.

In diesem sehr zufälligen Falle nimmt die ideale Filterdurchlässigkeitskurve mit wachsender Wellenlänge zu oder ab, je nachdem, ob $\lambda_1 > \lambda_2$ oder $\lambda_1 < \lambda_2$, d. h. die zu messende Wirkung auf längere oder kürzere Wellen empfindlicher ist als der Meßapparat.

Diese aus dem Begriff der Selektivität (stärker oder schwächer konkav gegen die Abszisse) folgenden Schlüsse sind natürlich von der Annahme spezieller Kurvenformen (hier Glockenkurven) weitgehend unabhängig.

Der obenerwähnte wichtige Grenzfall $\varepsilon_1^2 = 0$ gehört in die zweite Gruppe. (Das Meßinstrument ist selektiv $\varepsilon_2^2 > 0$, das Meßziel ist vollkommenes Zurücktreten der Selektivität $\varepsilon_1^2 = 0$.) Hier ist

$$D(\lambda) = \text{const} \cdot e^{\varepsilon_1^2 (\lambda - \lambda_2)^2},$$

also $a = -\varepsilon_2^2$ und $b = \lambda_2$. Zur Messung getrennter Spektralbereiche mit Zellen sind also die beiden in Fig. 2 abgebildeten Kurvenformen ideal, Kurve a , wenn der gewünschte Wellenbereich das Empfindlichkeitsmaximum des Instrumentes (λ_2) enthält, anderenfalls die Kurven b und c . Je weniger selektiv $E(\lambda)$ ist, einen je engeren Spektralbereich man zu messen beabsichtigt und je weiter man vom Empfindlichkeitsmaximum bei λ_2 entfernt ist, desto ähnlicher wird das Filter dem „kalorisch idealen“.

Der zuletzt besprochene Fall bietet Gelegenheit, die Festsetzung der absoluten Werte von $D(\lambda)$ etwas genauer zu betrachten. Aus der Gleichung $W = E \cdot D$ erhält man zunächst natürlich nur einen Repräsentanten der Schar $C \cdot D$ idealer Kurven, wobei C ein Parameter ist. Hat nun die ideale Filterdurchlässigkeitskurve die Form e^{x^2} oder e^{-x^2} und will man nur in einem bestimmten Spektralbereich messen (der das Maximum der Kurve e^{-x^2} bei Wellenlänge b nicht enthält), so setzt man an der durch den höheren Wert der Kurve D ausgezeichneten Grenze des Spektralbereichs $D = 1$ und erhält so die in Fig. 2b abgebildeten Kurven.

Abweichungen von der Idealität.

Ist dagegen die ideale Durchlässigkeitskurve eine echte Glockenkurve mit einem Maximum bei

$$b = \lambda_1 + \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2} (\lambda_1 - \lambda_2)$$

und will man eine Wirkung W messen, die sich nicht auf enge Spektralbereiche beschränkt, so wird man auf eine genaue Erfüllung obiger Idealitätsbetrachtungen nicht einmal im Prinzip rechnen dürfen. Je verschiedener die Empfindlichkeitsmaxima von E und W liegen ($\lambda_1 - \lambda_2$ groß), desto weiter ist b von λ_1 entfernt. Die Auffindbarkeit eines Filters, das in einem so breiten Spektralbereich vorgeschriebene Bedingungen erfüllt, ist natürlich fast ausgeschlossen. Jedoch spielt in Teilen des Spektrums, wo weder E noch W mehr eine wesentliche Größe haben, ein Abweichen der D -Kurve von der praktisch auch nur aus dem Verlauf der E - und W -Kurven in der Nähe ihrer Maxima bestimmten idealen D -Kurve keine Rolle. Man wählt also für eine geeignet erscheinende Wellenlänge ($\bar{\lambda}$) $D = 1$ und zeichnet nach dieser Festlegung die zur ursprünglich mit beliebigem Ordinatenmaßstab gezeichnete Kurve affine (vgl. Fig. 3). (Auf diese Weise wurde auch

die D -Kurve in Fig. 1 gewonnen, indem für Wellen $> 650 \mu\mu$ die Durchlässigkeit als gleichgültig angesehen wurde. Die Annäherung an den Wert 1 wurde dabei nicht eckig, sondern abgerundet gezeichnet.)

Überlegungen über die erlaubten Abweichungen von der Ideal-

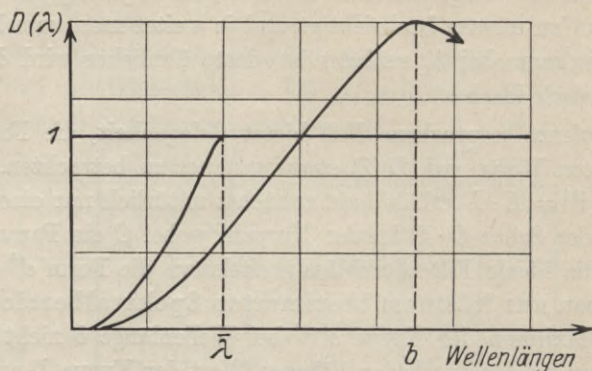


Fig. 3. Festlegung der absoluten Werte einer idealen Durchlässigkeitskurve.

gleichung $W = E \cdot D$ sind nötig und werden vielfach angestellt, um bewußt die Methodik der Strahlungsmessungen, besonders getrennter Spektralbereiche, von Fehlern zu befreien. Doch wird man dabei nicht allzu streng vorgehen können. Denn Methode heißt Umweg, und Umwege, die in Neuland führen, sind auch als Irrwege wertvoll.

Eine einfache Methode zur Untersuchung der Verdunstung von Seeoberflächen.

Von

A. Sinjagin, Leningrad.

(Mit 6 Figuren.)

Zusammenfassung: Die vorliegende Arbeit stellt den Versuch dar, den Seeabfluß zur Bestimmung der Insulationsverdunstung der freien Seeoberfläche auszunutzen. Die Menge der während der Zeit $t_2 - t_1$ verdampften Massen

$$J = \iiint_{t_1(Q)}^{t_2} [V_N - V(t)] dq dt$$

wird als jene Wassermenge, die sich als Defizit der Abflußmenge des Sees bei Tage gegenüber den nächtlichen Werten ergibt, bestimmt. Mit anderen Worten, es wird ein Strom mit negativer Geschwindigkeit $V_N - V(t)$ in der Richtung zum See fingiert, der die intensive Verdunstung der Seeoberfläche bei Tage ersetzt (kompensiert) und uns unmittelbar die Möglichkeit bietet, den Betrag dieses Verdunstungsverlustes auszurechnen.

Als Ergebnis der unvollkommenen Beobachtungen des Verfassers ergab sich die Möglichkeit, einige Zahlenangaben zu bekommen und eine Tabelle der Werte von

$$J, \bar{J} = \frac{1}{\Omega} J, \bar{\bar{J}} = \frac{1}{(t_2 - t_1) \Omega} J$$

für zwei aufeinanderfolgende Tage zu berechnen. Der Unterschied der beiden Tage bestand nur darin, daß der eine völlig klar war, der andere aber vorwiegend trüb, infolgedessen die Verdunstung im ersten Falle sehr intensiv, im zweiten aber nur schwach vor sich ging.

Die Leichtigkeit der Beobachtung bei der vorgeschlagenen Methode, die vollkommen natürlichen Versuchsbedingungen erlauben leicht, zahlreiche statistische Angaben zu bekommen und daher die Insulationsverdunstung in ihren Beziehungen zu verschiedenen meteorologischen Bedingungen, deren leisester Wechsel sich in ihr so scharf abspiegelt, zu studieren.

Résumé: Dans la présente note l'auteur donne l'idée de l'utilisation des égoûts d'un lac pour la détermination de l'évaporation de la surface libre d'un lac causée par l'insolation. La quantité des masses évaporées pendant $t_2 - t_1$:

$$J = \iiint_{t_1(Q)}^{t_2} [V_N - V(t)] dq dt$$

est déterminée comme la quantité d'eau non écoulee dans les égouts dans la journée, par comparaison au découlement de la nuit. Autrement dit, il est construit un courant fictif avec vitesse négative $V_N - V(t)$ dirigé vers le lac et qui en compensant l'évaporation intense de la surface du lac dans la journée, donne la possibilité de calculer la valeur de cette évaporation.

Les résultats des observations de l'auteur quoique imparfaites qu'elles soient ont permis d'obtenir des données numériques et de construire un tableau de valeurs

$$J, \bar{J} = \frac{1}{\Omega} J \quad \text{et} \quad \bar{J} = \frac{1}{(t_2 - t_1) \Omega} J$$

pour deux jours contigus, dont un fut serein, avec évaporation très intense dans la journée et l'autre couvert et avec évaporation insignifiante dans la journée.

La facilité de cette méthode d'observations et les conditions naturelles de l'expérience permettent d'obtenir un grand matériel statistique et, par conséquent, d'étudier l'évaporation en connection avec de différentes conditions météorologiques dont les changements minimes y sont reflétés avec tant de sensibilité.

Summary: In the present paper the author suggests the idea of taking advantage of the lake drain for the determination of evaporation of the free surface of the lake caused by insolation. The amount of evaporized masses for the time $t_2 - t_1$:

$$J = \iiint_{t_1(Q)}^{t_2} [V_N - V(t)] dq dt$$

is determined as the amount of water left undrained by day, if compared to the night drainage, i. e. there is constructed a fictitious stream with negative velocity $V_N - V(t)$ directed to the lake, compensating the intensive evaporation of the lake surface by day, and allowing an immediate estimation of the value.

The results of the author's imperfect observations allowed to obtain some numerical data as well as to construct a table of values:

$$J, \bar{J} = \frac{1}{\Omega} J, \quad \bar{J} = \frac{1}{(t_2 - t_1) \Omega} J$$

referring to two adjacent days, differing from one another only by one being quite clear and with very intensive evaporation by day time and the other preeminently murky and with an insignificant amount of evaporation by day time.

The facility of the method of observations in supplying quite natural conditions for the installation of the experiment, allows to obtain an extensive statistical material and thus to study the evaporation, caused by insolation, with regard to different meteorological conditions, the least change of which it so sensitively reflects.

Einleitung.

Verdunstungsmessungen an natürlichen Wasserflächen stoßen auf große Schwierigkeiten, da an der freien Wasseroberfläche ganz andere Bedingungen vorhanden sind als bei den künstlichen Anordnungen, mit deren Hilfe die Verdunstungsgröße bestimmt wird.

Es sollen hier nicht die gebräuchlichen Systeme der Verdunstungsmessung und ihre Mängel besprochen werden; dies bleibe einer speziellen Untersuchung vorbehalten. Hier genüge die Tatsache, daß unter dem Einfluß einer Reihe störender Ursachen keine einzige dieser Anordnungen uns eine Messung der wahren Verdunstungsgröße gestattet. Weder die gesamte Verdunstung wird auf diese Art richtig erhalten, geschweige denn der Tagesgang dieser Größe. Aber es ist eine andere Stellung der Aufgabe möglich, wenn man den Versuch macht, in erster Linie die natürlichen Verhältnisse bei der Verdunstung zu erfassen, wobei man freilich zunächst einige Opfer hinsichtlich der absoluten Genauigkeit solcher Messungen in Kauf nehmen muß.

Es wird hier der Versuch unternommen, aus der Messung des Abflusses eines beliebigen Sees eine Methode zur Bestimmung seiner Tagesverdunstung möglichst genau abzuleiten. Durch ein solches indirektes Verfahren werden die natürlichen Verhältnisse ungestört erfaßt.

§ 1. Stellung des Problems.

Die Bilanz eines Sees besteht, wie bekannt, aus der Zufuhr der in ihn mündenden Zuflüsse und den unmittelbar auf die Seeoberfläche auffallenden Niederschlag, vermindert um die durch die Abflüsse geförderten Wassermassen und die Verdunstung seiner Oberfläche.

Die Intensität der Zuflüsse reagiert auf den Niederschlag, die oberirdischen im allgemeinen stärker als die unterirdischen. Im Falle eines eben ausgefallenen Regens können wir keine stationären Verhältnisse erwarten. Unsere weiteren Überlegungen gelten also für den Fall einer Trockenperiode. Als stationär ist dann sicher das Durchsickern des Seewassers durch den Untergrund sowie die Menge der unterirdischen Zuflüsse während einiger Tage anzusehen, während ein oberirdischer Abfluß (sofern ein solcher überhaupt vorhanden ist) und die Verdunstung der Seeoberfläche im allgemeinen eine gut ausgesprochene tägliche Periode besitzen. Während einer Trockenperiode entsprechender Länge ist die unterirdische Bilanz des Sees genügend stationär, so daß unter dieser Voraussetzung eine gemeinsame Untersuchung der täglichen Veränderungen im Regime des Ausflusses und der Verdunstung möglich

erscheint. Es erscheint dann möglich, aus der messenden Verfolgung des einen Faktors Schlüsse auf die Größe und das Verhalten des anderen zu ziehen.

Wir betrachten einen See mittlerer Größe und geringer Tiefe mit



Fig. 1.

einem nicht sehr breiten und tiefen Abfluß. Derartige Seen sind im russischen Seengebiet häufig anzutreffen. Ein gutes Beispiel für einen derartigen See ist der nicht große Toroschinsee bei der Stadt Luga [$\varphi = 58^{\circ} 46' (N)$, $\lambda = 29^{\circ} 52' (E)$], den der Autor im Juli 1929 während seiner praktischen Arbeiten profiliert hat (Fig. 1).

Dieser See hat eine Fläche von ungefähr 66000 m^2 und einen

schwach geneigten Abfluß von 30 m Länge, der diesen See mit einer großen Biegung des Flusses Luga verbindet.

Der im Sommer stets vorhandene geringe Unterschied der Wasser-niveaus ruft eine schwache, aber beständige Strömung vom See zum Fluß hervor. Sei der Querschnitt dieses Abflusses an einer bestimmten Stelle zu einer beliebigen Zeit $Q(t)$, die wahre Mittelgeschwindigkeit der Strömung $\bar{V}(t)$ an dieser Stelle, so ist die Quantität des Wassers M , das von t_1 bis t_2 durch den Abfluß ausgeflossen ist, gegeben durch:

$$(1) \quad M = \int_{t_1}^{t_2} \bar{V}(t) \cdot Q(t) dt.$$

Beziehen wir nun die Quantität des ausgeströmten Wassers noch auf die Fläche des Sees selbst, die durch F bezeichnet werde, so gibt dann

$$(2) \quad \bar{M} = \frac{M}{F} = \frac{1}{F} \int_{t_1}^{t_2} \bar{V}(t) Q(t) dt$$

die Verminderung des Wasserstandes im See an. Die Mittelwerte der Größen V und Q während der betrachteten Periode geben uns auch den Mittelwert des Abflusses aus dem See, der, sofern der Wasserstand im See während dieser Zeit sich nicht ändert, durch den Zufluß aus den unterirdischen Quellen kompensiert werden muß. Wir erhalten so einen Überblick über den Wasserhaushalt des Sees.

Außer dem Studium dieser mittleren Verhältnisse ist aber auch eine Untersuchung der tatsächlichen Veränderungen im Ab- und Zufluß des Sees im Laufe eines Tages, also das Studium des täglichen Ganges dieser Vorgänge von Interesse. Es ist notwendig, hierzu Terminbeobachtungen der in Betracht kommenden Größen anzustellen. Dem Studium dieser Frage wollen wir uns zunächst zuwenden.

§ 2. Der tägliche Gang des Abflusses.

Wir sind bei der im folgenden beschriebenen Meßmethode, die sowohl wegen ihrer Einfachheit als auch ihrer Brauchbarkeit im Falle vollkommenen Mangels von Meßanordnungen geblieben. Selbstverständlich ist sie je nach den besonderen Verhältnissen des zu untersuchen-den Sees verschiedenen Modifikationen unterworfen und kann auch noch bedeutend genauer durchgeführt werden.

Der Abflußkanal wurde in der Nähe seiner Ausmündung aus dem See gereinigt und ihm auf eine Länge von 4—5 m eine definierte geo-

metrische Form gegeben, so daß sein Querschnitt die Gestalt eines gleichschenkligen Trapezes hatte. Dadurch erhielten wir die Möglichkeit, die Stromgeschwindigkeit mit einer großen Genauigkeit (0.05 m/sec) zu bestimmen. Die Ausmessung der Stromgeschwindigkeit erfolgte im Mittelfaden des Stromes auf die Art, daß die Schwimmdauer eines entsprechend geformten Schwimmholzes zwischen zwei Punkten, die voneinander 3 m entfernt waren, bestimmt wurde. Ist stärkerer Wind vorhanden, so ist die Bestimmung der Stromgeschwindigkeit auf diese Art nicht unmittelbar möglich. Jedoch halfen wir uns bis zu Windstärke 3 (der BEAUFORT-Skala), bei welcher auf der offenen Fläche des Sees noch keine merkbare Erregung statthatte, so, daß der Abfluß in dem Gebiete, wo die Geschwindigkeitsmessung stattfand, mit Brettern überdeckt wurde, in die Lücken von 15—20 cm zur Beobachtung des Schwimmholzes eingeschnitten waren. Dadurch wurde der Windeinfluß in genügendem Maße vom Schwimmkörper abgehalten und die Messung nur unbedeutend gestört.

Außer der Geschwindigkeit des Stromes im Abfluß wurde ebenso auch die Tagesschwankung des Wasserniveaus an der gleichen Stelle ermittelt und jene meteorologischen Elemente, deren Gang von Einfluß auf das zu untersuchende Phänomen ist, gemessen. Es sei hier bemerkt, daß leider damals bei diesen Untersuchungen kein Instrument zur Verfügung stand, um die Luftfeuchtigkeit direkt zu messen. Ihr annähernder Gang mußte aus dem Verlauf der Temperatur abgeschätzt werden.

In der nachstehenden Tabelle 1 sind die Ergebnisse der Beobachtungen vom 12. und 13. VII. 1929 zusammengestellt. Es bedeuten:

t Datum und Zeit der Beobachtung,

P den Luftdruck,

T die Temperatur der Luft,

W Windrichtung und Stärke,

N Grad und Art der Bewölkung.

In den zwei letzten Rubriken sind die Werte der Stromgeschwindigkeit V_0 (in m/sec) und die Schwankung des Wasserniveaus Δh (in mm) angegeben.

Die absoluten Werte des Kanalquerschnittes, an dem die Messungen des Abflusses stattfanden, waren: Höhe des Trapezes 0.25 m, Bettbreite am Grund 1.50 m, Bettbreite oben 2.25 m.

Betrachtet man die Tabelle, so sieht man, daß ein ausgeprägter täglicher Gang der Geschwindigkeit $V = V(t)$ und ebenso eine aller-

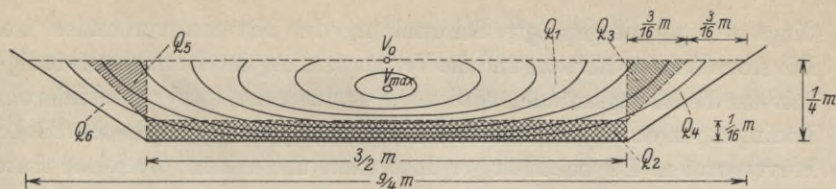


Fig. 2.

Tabelle 1.

Datum	t h m	T ° C	P mm	W	N	$\Delta \bar{h}$ mm	V_0 m/sec
12. VII. 1929	01 00	19.0	769	still	0/0	—	0.22
	06 30	18.2	768	„	1/0 CiSt	0	0.23
	07 00	19.5	768	„	1/0 Ci St	2	0.22
	07 30	—	768	„	0/0	2	0.21
	08 00	21.1	767	„	0/0	3	0.19
	08 30	—	767	„	0/0	4	0.18
	09 30	—	767	„	0/0	4	0.18
	10 00	23.3	767	„	0/0	5	0.18
	11 00	—	766	E 0	0/0 Cu	5	0.18
	13 00	25.2	766	E 1	1/1 Cu	5	0.17
	14 00	26.0	766	E 1	1/1 Cu	4	0.1(6)
	15 00	—	765	E 0	1/0 CiSt	3	0.1(6)
	16 00	25.1	765	still	0/0	2	0.1(6)
	17 00	24.5	764	„	0/0	0	0.18
	18 30	—	764	SE 1	0/0	—	0.19
	19 00	23.2	764	SE 0	0/0	—	0.20
	20 00	—	763	still	0/0	—	0.21
	21 00	21.5	763	„	1/1 Cu	—	0.22
	22 00	—	763	„	0/0	—	0.22
	24 00	19.1	763	„	0/0	—	0.22
13. VII. 1929	02 00	—	762	„	0/0	—	0.22
	05 00	17.7	761	„	4/0 CiCu	—	0.23
	08 30	19.6	761	„	1/0 CiCu	—	0.21
	10 00	22.1	761	„	CiSt 6/3 CuNi	3	0.20
	11 30	23.2	761	W 2	8/6 CiSt CuNi	4	0.19
	13 30	24.2	760	W 3	9/7 ACu CuNi	4	0.19
	14 30	—	760	SW 2	10/7 ACu CuNi	4	0.19
	17 00	23.0	760	SW 1	10/10 StCu	2	0.20
	18 00	—	760	still	10/10 Ni	—	0.20
	19 00	21.3	759	„	10/10 Ni	—	0.21
21 00	20.4	759	S 2	10/10 Ni	—	0.21	
22 00	—	758	S 3	10/10 Ni	—	0.22	

dings weniger ausgeprägte Schwankung des Niveaus vorhanden ist. Die Abnahme des Niveaus und die Verlangsamung der Stromgeschwindigkeit um die Mittagsstunden wird offenbar unter den früher geschilderten Bedingungen durch die intensive Verdunstung der freien Seeoberfläche hervorgerufen. Da bei kräftiger Insolation und relativ trockener Luft zu Mittag die Verdunstung über dem See kräftiger vonstatten geht als während der Nachtstunden, so wird während des Tages eine geringere Menge aus dem See abfließen müssen, um die stationäre Bilanz aufrechtzuerhalten. Durch Vergleich der Abflußmengen während des Tages und während der Nacht erhalten wir so die Möglichkeit, die Größe des Verdunstungsstromes über dem See selbst festzustellen. Freilich erhält man so nicht direkt die absoluten Werte der Verdunstung, da man unmittelbar aus der Differenz der Abflußgrößen während des Tages und der Nacht nur den Wert der Differenz der Verdunstungsströme erhält. Wir wissen aber, daß die nächtliche Verdunstung ungefähr zehnmal kleiner als die bei Tage ist und können doch annähernd die Größe der Verdunstung auch absolut ermitteln. Das Verhältnis der Tages- und Nachtwerte der Verdunstung hängt übrigens noch von meteorologischen Faktoren ab; in subtropischen und tropischen Ländern kann es noch größer sein.

Derartig kleine Abweichungen können aber ignoriert werden, wenn wir die Genauigkeit unserer Methode in Betracht ziehen. Sie sind hier, wo es überhaupt vermöge der Stellung des Problems nur auf relative Werte ankommt, gänzlich außer acht zu lassen. Uns interessiert hier ja die Frage, festzustellen, welches Zeitintervall z. B. verfließt zwischen dem Beginn der Insolation und dem Anfangen intensiver Verdunstung, welcher Zusammenhang besteht zwischen der Größe der Verdunstung und der Ergiebigkeit des Abflusses usw.?

Zu diesem Zwecke muß zunächst einmal festgestellt werden, wie man überhaupt aus den gemessenen Daten die Ergiebigkeit des Abflusses berechnen kann, also jenes Wasserquantum, das in der Zeiteinheit den definierten Querschnitt des Abflußkanals passiert.

In der Größe J sind die Funktionen $\bar{V}(t)$ und $Q(t)$ enthalten, die beide sich mit der Zeit verändern. Die mittlere Geschwindigkeit $\bar{V}(t)$ ist dabei definiert als:

$$(3) \quad \bar{V}(t) = \frac{1}{Q(t)} \iint_{(Q)} v(y, z, t) dy dz.$$

In unserem speziellen Fall ist Q ein gleichschenkliges Trapez, und da die Strömungsgeschwindigkeit im Abflußkanal nur klein ist, dürfen

wir laminare Strömung voraussetzen. Die Familie der Isotachen hat dann folgendes Aussehen¹⁾:

Bei der vorliegenden Versuchsgenauigkeit erschien es überflüssig, die Stromgeschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen wirklich auszumessen. Es genügt die Ausmessung der Oberflächengeschwindigkeit im Mittelfaden des Stromes, V_0 , aus der dann die Wasserförderung des Stromes nach folgender Formel berechnet wurde:

$$W(t) = \bar{V}(t) \cdot Q(t) = \sum_{i=1}^n V(Q_i, t) \cdot Q_i.$$

Hier bedeutet $V(Q_i, t) = V_i$ die mittlere Geschwindigkeit im Bereich Q_i . Wir nehmen $n = 6$. Die Fig. 2 gibt uns 1. die Größe Q_i , 2. die Mittelwerte V_i (mit Hilfe einfacher graphischer Interpolation). Wir erhalten:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = \frac{3}{16} \cdot \frac{6}{4} = 0.28 \\ Q_2 = \frac{1}{3} Q_1 = 0.09 \\ Q_3 = Q_5 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{16} \right)^2 = 0.02 \\ Q_4 = Q_6 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = Q_3 = 0.03 \end{array} \right.$$

und

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{16} + \frac{8}{8} \right) V_{\max} = 0.72 V_{\max} \\ V_2 = \frac{2}{8} V_{\max} = 0.25 V_{\max} \\ V_3 = V_5 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{8} + \frac{3}{8} \right) V_{\max} = 0.31 V_{\max} \\ V_4 = V_6 = \frac{V_{\max}}{8} = 0.12 V_{\max} \end{array} \right.$$

$$\sum_{i=1}^6 Q_i = Q = 0.47 \text{ m}^2; \quad V_{\max} = 1.23 V_0.$$

Also:

$$(4) \quad W(t) = \sum_{i=1}^6 Q_i V_i = 0.24 V_{\max} = 0.30 V_0(t). \quad [\text{m}^3/\text{sec}]$$

Die Kurve $V_0(t)$ (Tabelle 1), multipliziert mit 0.30 (m²), gibt uns also die Kurve $W(t)$.

¹⁾ Handbuch der Physik, Bd. VII, S. 180. 1927.

Der Wert $W(t)$ hängt noch ab von der Größe $Q(t)$, d. h. von der Höhe h des Wasserniveaus im Abflusse.

In einem durchflossenen See nun können die Variationen des Seespiegelniveaus h nicht bedeutend sein, da in derartigen Wasserbecken die Neigung besteht, möglichst bald stationäre Zustände zu erreichen, wenigstens unter normalen klimatischen Bedingungen. Da der Kanal ferner genügend lang ist, werden auch die Werte Δh nicht beträchtlich sein. Es erklärt sich so auch, daß die tägliche Schwankung des Wasserspiegels im Kanal bloß $\alpha = 4-5$ mm beträgt (siehe Tabelle 2). Wir wollen noch untersuchen, wie groß ungefähr die Fehler bei unserem Verfahren sind.

Wir gehen von Formel (4) aus und erhalten:

$$\Delta W_{\max} = V_{\max} \cdot \Delta Q_{\max}.$$

Der relative Fehler ist:

$$f(\%) = \frac{100 \cdot \Delta W}{W} = \frac{100 \cdot \Delta Q}{Q}.$$

Aus der Tabelle der beobachteten Werte (Tabelle 1) finden wir folgende Grenzwerte:

$$V_{\max} = 0.23 \text{ m/sec}; \quad Q = 0.47 \text{ m}^2; \quad 100 \cdot \Delta Q = 2.25 \times 0.5 \text{ m}^2.$$

Indem wir diese Werte in obige Formel einsetzen, erhalten wir folgende Werte der Fehler:

$$\Delta W_{\max} \leq 0.003 \text{ m}^3/\text{sec}$$

$$f\% \leq 3\%.$$

Setzen wir einmal $\alpha = 5$ mm und dann $\alpha = 10$ mm, so erhalten wir einen relativen Fehler von 3% bzw. 6%. Diese Zahlen zeigen uns aber auch, daß wir theoretisch den täglichen Gang von $Q(t)$ nicht vernachlässigen sollen. Wir haben festgestellt, daß das Niveau des Stromes im Abflußkanal vom Stand des Seespiegels abhängt. Eine Abnahme des Wasserstandes im See ruft die Verkleinerung der Geschwindigkeit \bar{V} und die Abnahme des Wasserstandes Δh hervor. Der Verlauf der Kurve $Q(t)$ verstärkt noch den Tagesgang der Ausflußmenge $W(t)$.

Den Tagesgang der Kurve $h(t)$ kann man in erster Näherung als Parabel ansehen und sie graphisch in Form der Fig. 3 darstellen. Nehmen wir als Anfangspunkt der Zeitählung 06^{h} und setzen $T = 12^{\text{h}}$, so ist die Gleichung der Parabel gegeben durch

$$h(t) = \alpha \left[1 - \frac{\left(t - \frac{T}{2}\right)^2}{\left(\frac{T}{2}\right)^2} \right] \text{ in mm.}$$

Ist ferner $2b$ die Breite des Abflusses, so ergibt sich für die zeitliche Veränderung des Querschnittes folgende Beziehung:

$$Q(t) = Q(0) - 2\alpha b \left[1 - \frac{\left(t - \frac{T}{2}\right)^2}{\left(\frac{T}{2}\right)^2} \right].$$

Nach Umformung folgt aus ihr:

$$(5) \quad Q(t) = Q(0) - 8\alpha b \frac{t}{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right).$$

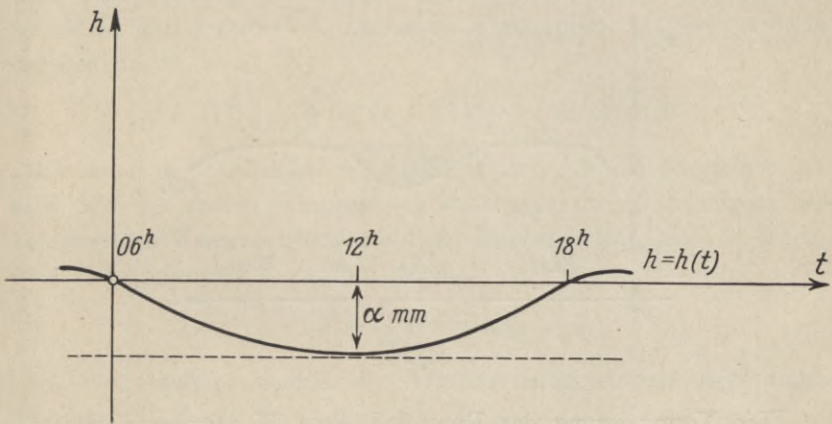


Fig. 3.

Setzt man dies in Gleichung (4) ein, so folgt:

$$(6) \quad W(t) = \left[Q_0 - 8\alpha b \frac{t}{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right) \right] \bar{V}(t) \text{ m}^3/\text{sec}.$$

In diesem speziellen Falle hat Gleichung (6) folgende zahlenmäßige Form:

$$W(t) = [0.53 - 0.0007 t^h (12 - t^h)] \bar{V}(t) \text{ m}^3/\text{sec}.$$

Wir wissen von früher, daß das vom täglichen Gang des Wasserniveaus herrührende Korrektionsglied maximal 3% ausmachen kann.

§ 3. Der Verlauf der Kurve $W(t)$.

Wir wollen uns nun der Betrachtung der Ergebnisse unserer Beobachtungen zuwenden. Die erste Tatsache, die in die Augen fällt, ist der stark ausgeprägte Gang unserer Funktion mit einer regelmäßigen und exakten Periode und einer veränderlichen, von den meteorologi-

schen Bedingungen abhängigen Amplitude. Anfangs Juli 1929 wurde vom Autor folgender Fall am Toroschinsee beobachtet.

Infolge hohen Wasserstandes im Flusse Luga war der Niveauunterschied zwischen Ursprung und Mündung des Abflusses nur sehr unbedeutend, so daß die Strömung zweimal im Laufe des Tages ihre Richtung änderte. Namentlich bei Tage war das Niveau des Sees niedriger als der Wasserstand im Fluß, während in der Nacht eine Strömung vom See zum Fluß einsetzte. Bei normalem Wasserstand der Luga tritt hingegen eine Umkehr der Stromrichtung nicht mehr ein, es kommt nur mehr zu einer Abnahme der Strömungsgeschwindigkeit.

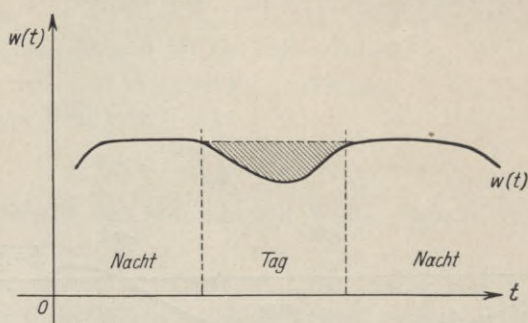


Fig. 4.

Die Verminderung der Durchflußmenge W tritt am Tage von 07^h bis 21^h auf, das Minimum fällt nicht auf den Mittag, sondern ist etwas gegen 13^h bis 15^h verschoben. Im Laufe der Nacht bleibt W ungefähr konstant. Wir erhalten so schematisch das Bild der Fig. 4.

Die Erklärung dieses Effektes ist einfach. Die Verminderung der Wasserführung des Kanals im Laufe des Tages würde die stationäre Tagesbilanz des Sees stören, wenn der Prozeß der Verdunstung von der Seeoberfläche unter dem Einfluß der Insolation keine Kompensation schaffen würde. Die unterirdischen Zu- und Abflüsse des Sees hatten keine Zeit, sich während des Beobachtungszeitraumes merkbar zu ändern. Indem wir uns nun das Massendefizit des Ausflusses während des Tages berechnen gegenüber den bei Nacht erhaltenen Werten, und dieses Ergebnis auf die Flächeneinheit des Sees beziehen, erhalten wir die Werte der Insolationsverdunstung. Diese sei mit J bezeichnet, ferner sei W_n der mittlere Wasserabfluß während der Nacht aus dem See und T die Dauer der Insolationsperiode.

Wäre keine Verdunstung vorhanden, so würde während der Zeit T

eine Wassermenge $W_n \cdot T$ ausfließen. Da aber Verdunstung vorhanden ist, so gibt $W_n - W(t)$ jene Wassermenge in der Zeiteinheit an, die von der Seeoberfläche aus verdunstet. Wir können eine fiktive Strömung mit der Geschwindigkeit $V(t) - V_n$, die jetzt negativ, also gegen den See gerichtet ist, einführen. Die durch sie geförderte Wassermenge ist so groß, daß sie, zur tatsächlich vorhandenen Strömung hinzugefügt, Konstanz der Strömung während des ganzen Tages bewirken würde. Sie würde den Insolationsverlust des Sees gerade decken, mithin müßte auch sein Ausfluß konstant bleiben. Mit Hilfe dieser fiktiven Strömung kann man nun alle Rechnungen einfach durchführen. Die Quantität des durch die Wirkung der Insolation verdampften Wassers ist dann gegeben durch:

$$(7) \quad J = \int_0^T [W_n - W(t)] dt = T \cdot W_n - \int_0^T Q(t) \bar{V}(t) dt.$$

J hat dann die Dimension m^3 . Bedeutet weiter F die Oberfläche des Sees, von der aus die Verdunstung stattfindet, so ist die Menge des verdunsteten Wassers, bezogen auf die Flächeneinheit, also die Intensität der Verdunstung, gegeben durch:

$$\bar{J} = \frac{1}{F} J \quad \text{in mm,}$$

und wir erhalten hieraus die Verdunstungsgeschwindigkeit durch Division mit T zu:

$$\bar{\bar{J}} = \frac{1}{T} \bar{J} = \frac{1}{FT} J \quad \text{in mm/st.}$$

Nach diesen Formeln wollen wir die weiteren Rechnungen durchführen.

§ 4. Zahlenresultate.

Der allgemeine Verlauf von $W = W(t)$ am 12. VII. 1929, wobei eine Korrektur für Schwankungen des Wasserniveaus nicht berücksichtigt ist, wird durch die folgende gestrichelte Kurve ausgedrückt.

Darüber ist die für die Schwankungen des Wasserniveaus im See korrigierte Kurve ausgezogen aufgetragen.

Wir sehen, daß sich die gestrichelte Kurve für W (mit einer Skala auf der linken Achse) in den Tagesstunden noch tiefer und etwas ausgeglichener erwies.

In der Nacht annulliert sich die Korrektur, und beide Kurven W fallen praktisch zusammen. Die horizontale gestrichelte Linie \bar{W} gibt den wahren Mittelwert W für 24 Stunden.

$$\bar{W} = \frac{1}{24} \int_{00^h}^{24^h} W(t) dt = 0.060 \text{ m}^3/\text{sec}.$$

Die obere gestrichelte Horizontale bedeutet den nächtlichen Mittelwert $W_n = 0.066$, welcher beinahe konstant ist. Der erste Wert \bar{W} gibt uns kein klares Bild der Verdunstung, da er gleichzeitig für Tag und Nacht, die nicht gleichwertig hinsichtlich ihrer Verteilung sind, berechnet ist.

Weiterhin werden wir eine Reihe von Werten J , \bar{J} und $\bar{\bar{J}}$, getrennt für den Tag, die Nacht und andere Zeitintervalle, die hinsichtlich der

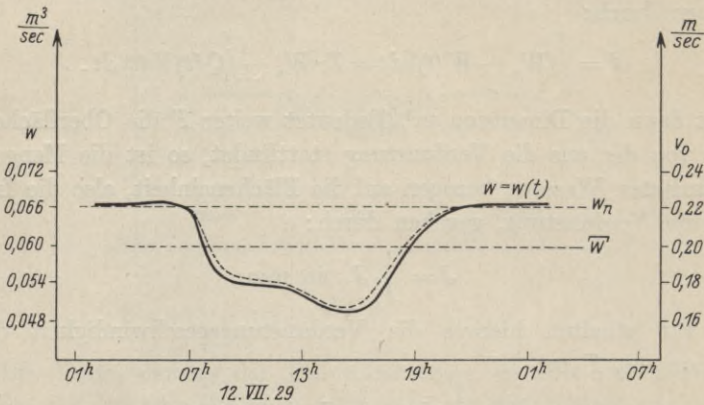


Fig. 5.

Verdunstungsbedingungen charakteristisch sind, geben. Doch wollen wir zuerst betrachten, welcher Art der allgemeine Zusammenhang zwischen der Kurve $W(t)$ und dem Verlauf der meteorologischen Elemente im Laufe dieser Tage ist.

Wir wählen die zwei aufeinanderfolgenden Tage, den 12. und den 13. Juli 1929, die infolge der stark verschiedenen Stärke der Bewölkung charakteristisch sind, sonst aber in jeder Hinsicht sich wenig unterscheiden. Diese Unterschiede müssen stark auf die Verdunstungswerte einwirken, während die Konstanz der übrigen Bedingungen diesen Faktor der Bewölkung isoliert und den Grad seines Einflusses zu schätzen ermöglicht. Die Bewölkung vergrößerte sich während der Nacht vom 12. auf den 13. Juli und bedingte eine scharfe Verminderung der Verdunstungswerte. Das Auftragen der Daten der Tabelle 1 auf eine Zeichnung, welche unten angeführt ist (Fig. 6), mit aufeinandergelegten Maß-

stäben, ermöglicht uns, alle Kurven gleichzeitig zu betrachten, und erleichtert die Bestimmung des Charakters der sie verbindenden Gesetzmäßigkeiten.

Unmittelbar aus der Zeichnung (Fig. 6) sehen wir, daß der Gang der Kurve $W = W(t)$ das Spiegelbild des Temperaturganges $T = T(t)$ darstellt. Die Zunahme von $T(t)$ ruft eine Abnahme des Wasserabflusses hervor, d. h. eine Zunahme der Verdunstung und umgekehrt¹⁾. Ferner sehen wir, daß die Zunahme ΔT unter dem Einflusse der Insolation um 04^h des 12. und um 04^h 30' des 14. beginnt. Die Abnahme des Ab-

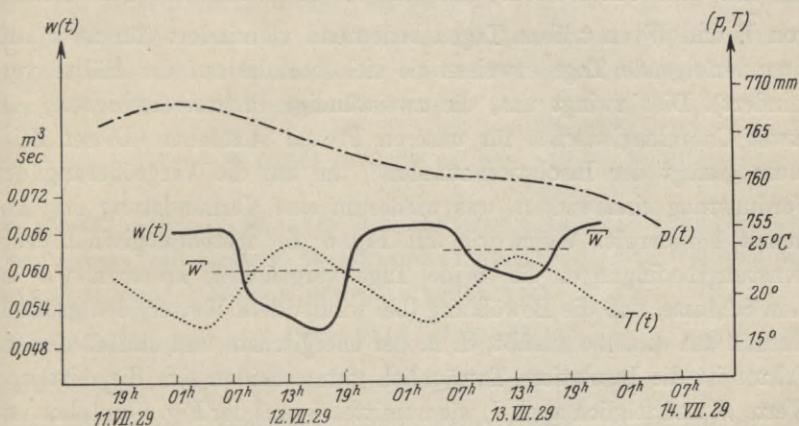


Fig. 6.

flusses beginnt aber im ersten Falle um 2 Stunden später (um 07^h morgens), im zweiten Falle um 07^h 30' (ebenfalls um 2 Stunden später). Die Zunahme der Verdunstung beginnt etwas früher, da ihre Einwirkung auf den Abfluß sich erst einige Zeit später äußert. Wenn wir folglich von der Verteilung der Abflußgröße W in der Zeit zum Gang der Verdunstung auf der Seeoberfläche übergehen, können wir die Schlußfolgerung ziehen, daß ihre Zunahme erst etwa eine Stunde nach dem Beginn der Morgeninsolation einsetzt.

Eine weitere Stunde später macht sie sich bereits im Regime des Abflusses bemerkbar. Das Maximum der Verminderung des Abflusses fällt am klaren Tage (dem 12. VII.) auf 16^h nachmittags, während T_{\max}

¹⁾ Es wäre interessant, den Gang der Kurve der Insolation selbst, welche für denselben Punkt und zu derselben Zeit beobachtet wurde, mit $W(t)$ zu vergleichen. Diese Beobachtungen konnten jedoch vom Autor nicht ausgeführt werden.

wiederum auf 14^h fällt, d. h. um dieselben 2 Stunden früher. An trüben Tagen (dem 13. VII.) tritt W_{\min} etwas früher ein, es ist mehr gegen die Eintrittszeit von T_{\max} verschoben. Diese Verspätung ist teils durch die Verzögerung der Reaktion, teils durch eine tatsächliche Verspätung der Verdunstungsextreme zu erklären.

Das nächtliche Maximum von W fällt auf den Sonnenaufgang, d. h. wiederum ca. 2 Stunden gegenüber der Eintrittszeit des nächtlichen Minimums der Lufttemperatur verschoben. Diese Verzögerungen bewahren ihren Charakter auch an trüben (doch trockenen) Tagen, nur mit dem Unterschiede, daß sich die Amplitude der Schwankung von \bar{V} und W an trüben Tagen bedeutend vermindert (für zwei aufeinanderfolgende Tage erweisen sie sich beinahe auf die Hälfte vermindert). Dies zwingt uns, die zweistündige Phasenverschiebung als etwas Charakteristisches für unseren Prozeß anzusehen. Dieser Zeitraum genügt der Insolationzunahme, um auf die Vergrößerung der Verdunstung einzuwirken, was wiederum eine Verminderung des Abflusses hervorruft. Wenn wir auf Fig. 6 die meteorologischen Verdunstungsbedingungen für beide Tage vergleichen, kommen wir zu dem Schlusse, daß die Bewölkung (bei windstillem Wetter) den größten Einfluß auf dieselbe ausübt, d. h. der energischste und einflußreichste Faktor ist die Insolation. Tatsächlich unterscheiden sich die mittleren Werte W und folglich auch J , wie unmittelbar aus der Fig. 6 zu sehen ist, sehr bedeutend (ein Wert ist beinahe doppelt so groß als der andere) bei nur geringen Unterschieden der mittleren Temperaturen und des mittleren Luftdrucks für diese Tage ($\Delta \bar{T} = 1.2^\circ$; $\Delta \bar{p} = 5.0$ mm).

Wir stellen nun die Frage, welcher Art die Überschüsse der Tagesverdunstung im Vergleich mit der nächtlichen für verschiedene Zeitintervalle sind. Ferner kann man außer für den Tag noch J , \bar{J} , $\bar{\bar{J}}$ für eine ganze Reihe von Intervallen betrachten. So können für uns von Interesse sein: 1. Zeitintervalle der größten Verdunstungsintensität, 2. Zeitintervalle einer größeren Verdunstung als das Tagesmittel, 3. die Zeit der am schnellsten abnehmenden und zunehmenden Verdunstung (die Umgebung der Inflexionspunkte der Kurve W) usw. Um dieselben zu berechnen, müssen wir die Formel (20) verallgemeinern und die Differenz $W_n - W(t)$ zwischen den veränderlichen Grenzwerten t_1 und t_2 integrieren. Hier wird die Formel wie folgt geschrieben:

$$(8) \quad J = \int_{t_1}^{t_2} [W_n - W(t)] dt.$$

Betrachten wir nun die drei folgenden Zeitintervalle (t_1, t_2).

1. Wir schließen das ganze Zeitintervall, in dem die Verdunstung stärker als während der Nacht stattfand, aus, d. h. das ganze Intervall, wo die Kurve $W = W(t)$, die Gerade $W = W_n$ schneidend, kleiner als diese bleibt. Beginn und Ende dieses Intervalls, t_1 und t_2 , sind dann die Wurzeln der Gleichung $W_n - W(t) = 0$. In unserem Falle ergeben sich die Abszissen der Kreuzungspunkte:

$$\begin{aligned} t_1 &= 07^{\text{h}} \\ t_2 &= 21^{\text{h}} \end{aligned} \quad (12 \text{ und } 13. \text{ VII.}) \quad t_2 - t_1 = 14^{\text{h}}.$$

Wir stellen uns die Frage, wie groß die Wassermenge (in m^3) war, die in dem Zeitraum von 14 Stunden nur unter dem Einfluß der Insolation verdunstet ist. Nach der Formel (8) erhalten wir, indem wir das Integral als Differenz ausdrücken:

$$(9) \quad J = \int_{07^{\text{h}}}^{21^{\text{h}}} [W_n - W(t)] dt = (0.066 \text{ m}^3/\text{sec} \cdot 14^{\text{h}} - \sum_{i=1}^{14} W_i) 3600,$$

wo $3600^{\text{s}} = 1^{\text{h}}$ ist, W_i aber den Mittelwert für das entsprechende Stundenintervall darstellt. Wenn wir die Ordinaten der Fig. 6 entnehmen und sie in obige Formel einsetzen, erhalten wir:

$$J (12. \text{ VII.}) = 275 \text{ m}^2,$$

daraus folgt durch Division mit $F = 66000 \text{ m}^2$, $\bar{J} = 3.9 \text{ mm}$ und $\bar{J} = 0.30 \text{ mm/st}$. Wenn wir folglich keine stabile Bilanz hätten und keine Wasserzufuhr erfolgen würde, würde das Niveau des Sees um 6,5 mm sinken¹⁾.

Die entsprechenden Werte der Größe J für den 13. Juli werden bedeutend kleiner sein. Hier, wie späterhin überall die Berechnung weglassend, da sie dem oben Erörterten ganz analog ist, führen wir unten in der Tabelle 2 direkt die Zahlenresultate an.

Das scharfe Sinken aller drei Werte für den folgenden Tag läßt sich, wie wir bereits gesehen, ausschließlich mit der Bewölkungszunahme und der damit verbundenen Verminderung der Insolation erklären.

2. Als zweites Beispiel wollen wir dasjenige Zeitintervall (t_1, t_2) betrachten, das durch eine Verdunstung, die größer als das Tagesmittel ist, bestimmt wird, zum Vergleich mit dem früher besprochenen Verdunstungszeitraum, in dem sie größer war als während der Nacht. Die Grenzen des Intervalls (t_1, t_2) sind die Wurzeln der Gleichung $\bar{W} - W(t) = 0$. (Sie sind in der entsprechenden Kolonne der Tabelle 2

¹⁾ Pro 24 Stunden.

angegeben.) Die Werte J , \bar{J} , $\bar{\bar{J}}$ unterscheiden sich wenig von den vorausgegangenen. Das kommt daher, weil die beiden Kurven eine gleich scharfe Abnahme zeigen und die Verdunstung überaus schnell das Tagesmittel überschreitet (siehe Tabelle 2).

3. Das dritte Intervall (t_1, t_2) wählen wir für die energiereichste Phase des Prozesses, welcher auf die mittleren Stunden des Tages fällt und eine Zunahme (für beide Tage) der Verdunstungsgeschwindigkeit bedingt.

4. Endlich, als vierten und letzten Fall, betrachten wir die zwei- bis vierstündige Periode der intensivsten Verdunstung, deren Geschwindigkeit sich als größer erweist als alle von uns beobachteten: 0.5 mm.

Tabelle 2.

Fall Nr.	Datum VII. 1929	Zeitintervall		$t_2 - t_1$		J m ²	\bar{J} mm	$\bar{\bar{J}}$ mm/st
		t_1	t_2	st	sec			
1	12. VII.	07 ^h	21 ^h	14 ^h	50 400	275	3.9	0.30
	13. VII.	07 ^h	21 ^h	14 ^h	50 400	155	2.2	0.18
2	12. VII.	07 ^h 30'	19 ^h	11 ^h 30'	41 400	270	3.8	0.36
	13. VII.	09 ^h	19 ^h	10 ^h	36 000	150	2.2	0.24
3	12. VII.	09 ^h	17 ^h	8 ^h	28 800	220	3.2	0.42
	13. VII.	10 ^h 30'	17 ^h 30'	7 ^h	25 200	125	1.8	0.24
4	12. VII.	14 ^h	16 ^h	2 ^h	7 200	70	1.0	0.48
	13. VII.	11 ^h	17 ^h	6 ^h	21 600	115	1.6	0.30

Eine sorgfältigere Konstruktion der Kurven $W(t)$ und das Vorhandensein eines ausgiebigeren statistischen Materials würde uns die Möglichkeit geben, eine größere Zahl von Intervallen, welche im physikalischen Sinne interessant sind, zu erhalten und den täglichen Gang der Verdunstung genauer zu untersuchen. Wir haben hier nur die typischsten Fälle gewählt, da unser Beobachtungsmaterial durchaus ungenügend ist.

Mit dieser Tabelle 2 schließen wir unsere Erörterung, da eine genaue Analyse von zwei Tagen (12. und 13. VII. 1929) wohl hinlänglich die Möglichkeiten, Mängel und Vorteile dieser Methode beleuchtet, obwohl sie natürlich dieselben nicht vollständig umfaßt. Die Erörterung verfolgte nur den Zweck, alle wichtigen praktischen Hinweise für eine vollständige Ausführung des Experiments nach der besprochenen Methode zu geben, und die tatsächlich erhaltenen Daten sind nur nebenbei erwähnt. Wenn man das Experiment sorgfältiger als der Autor, mit Hilfe einer größeren Zahl meteorologischer Beobachtungen, wiederholen würde, könnte das erhaltene statistische Material ein recht genaues Bild der täglichen Verdunstung unter ganz normalen Bedingungen geben.

Die Entwicklung des Wellen-Begriffes, IV

Von

Karl Uller, Gießen

(Mit 5 Figuren)

Zusammenfassung: Für die ebene und kugelige Welle von elementarer Schwankungsform kann die in der vorangehenden Abhandlung III aus dem Interferenz-Prinzip hergeleitete, das Quadrat des Wellennormalenpaares bestimmende Differentialgleichung streng integriert werden. Es zeigt sich, daß es zwei Formen von Wellen gibt, die α - und die β -Welle, die abhängen von dem Vorzeichen des imaginären Teiles der Wurzel aus dem Wellenparameter a , in welchem die Erregungsart der Quelle und die Eigenschaften des Mittels zusammentreten. In der β -Welle ist zwar die Phasengeschwindigkeit erster Art konstant, doch tritt auch in konservativen Mitteln die Verlöschungsfunktion $e^{\mathcal{W}}$ auf. In der α -Welle dagegen ist ihr Bau abhängig von der Lagerung der Wellenflächen unmittelbar an der Quelle, ist ferner die Lagerungsdichte der Wellenflächen in der Welle räumlichen Schwankungen unterworfen, die in unmittelbarer Nähe der Quelle sehr stark sind und nach außen rasch abfallen. Infolgedessen unterliegen auch Phasengeschwindigkeit und Verlöschung räumlichen Schwankungen. In dem Wellenfeld folgen sich daher Gebiete sehr hoher und sehr niedriger Feldstärken, jedes von der Dicke $\frac{1}{8} \cdot \lambda_{\infty}$, in der ebenen Welle. In der kugeligen Welle steigen außerdem die Feldstärken zu einem Minimum herab, um dann wieder anzusteigen. Man kann daher von einer Quellen-Sphäre reden, bestehend aus einem System von Wellen-Schalen konstanter Dicke und von nach außen hin abnehmender Stärke. Die Energie verläßt also nicht ungehemmt und nicht gleichmäßig abfallend diese Sphäre. Vielleicht haben wir hier auch den Prototyp des Atoms vor uns. Zum Schluß wird gezeigt, wie die bisherige, EULERSche, Lösung nicht verstanden werden darf und wie sie die Entwicklung des Wellen-Begriffes verhindert hat.

1. Die wahre Kugelwelle von elementarer Schwankungsform

Die Wellenflächen-Systeme $\Phi' = \text{const}$ und $\Phi'' = \text{const}$ sind bei punktsymmetrischer Quelle in einem für uns ruhenden, homogenen, isotropen und fremdkraftfreien Mittel meistens konzentrische Kugelflächen um die Quelle. Es fragt sich aber, nach welchem Gesetz die Flächen-Parameter Φ' und Φ'' verteilt sind oder, was dasselbe besagt, wie die beiden Wellennormalen $w' = \text{grad } \Phi'$ und $w'' = \text{grad } \Phi''$ als Funktionen des Radius r sich darstellen. Diese Frage können wir, im Besitz des wellenbeherrschenden Interferenz-Prinzipes, das wir in der vorangehenden gleichbetitelten Abhandlung III für Wellen von elemen-

terer Schwankungsform zu entwickeln begonnen haben [1], jetzt ohne Annahmen und Vernachlässigungen beantworten. Wir erinnern daran, daß für irgendwelche lineare und homogene Feldgleichungen eine Skalarwelle von der Form ist

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta = \frac{1}{2} \{ \delta \cdot e^{i(v't - \Phi)} + \delta^* \cdot e^{-i(v^*t - \Phi^*)} \} \\ = e^{-\varphi''} \{ \delta' \cos \varphi' - \delta'' \sin \varphi' \} \end{cases}$$

mit den beiden Wellenphasen $\varphi' = v't - \Phi'$ und $\varphi'' = v''t - \Phi''$, die mit den Geschwindigkeiten

$$c' = \frac{v'}{w'^2} \cdot w' \quad \text{bzw.} \quad c'' = \frac{v''}{w''^2} \cdot w''$$

über die bezüglichen Phasenflächen Φ' und Φ'' fortwandern. In einer Vektorwelle treten statt der Wellenskalare δ' und δ'' entsprechende Wellenvektoren auf, beides Größen, die erst nach Einführung des Interferenz-Prinzips definiert sind. Die Kugelwelle ist streng verwirklicht, wenn eine elastische Hohlkugel in einem elastischen Mittel Drucken unterliegt, die nach der genannten Zeitform variieren, oder wenn eine kugelförmige thermische Wellenquelle in einem wärmeleitenden festen Körper in entsprechender Weise Temperatur-Schwankungen erfährt. Es wird dann eine kugelsymmetrische Verdünnungsverdichtungs-Welle bzw. eine Temperatur-Welle auslaufen, deren Wellennormalenpaar $w = w' + iw''$ hinter der Front der skalaren Grundgleichung

$$(2) \quad w^2 + i \operatorname{div} w - a = 0$$

zu genügen hat. Auf diese Gleichung stößt man, welcher physikalischer Natur auch die Welle sei, wenn nur das Mittel ruht, homogen und isotrop sowie fremdkraftfrei ist [1]. In dem komplexen Wellenparameter a treten die Eigenschaften des Mittels und der Quelle in bestimmter, aus den zugrunde gelegten Feldgleichungen und dem Interferenz-Prinzip folgender Weise zusammen; in der elastischen Welle z. B. ist

$$a = v^2 D / (\varepsilon_v + \frac{4}{3} \varepsilon_g),$$

in der Temperatur-Welle ist

$$a = -i v c D / \lambda.$$

Da $w = w_r = f(r) \cdot r$, nimmt (2) die Form an:

$$(2') \quad f' = i r f^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \frac{f}{r} - i \frac{a}{r}.$$

Das ist eine RICCATISCHE Differentialgleichung, deren Lösungen bekanntlich hinsichtlich der Integrationskonstante c gebrochene lineare

Funktionen sind¹⁾. Diese Eigentümlichkeit bedingt die unten sich offenbarenden Merkwürdigkeiten. Da $\sqrt{a}/r - i/r^2$ eine partikuläre Lösung von (2') für f ist, so erhält man für w der kugeligen Welle die vollständige Lösung:

$$(3) \quad w = \left\{ \sqrt{a} - \frac{2\sqrt{a}}{1 - c \cdot e^{-i2\sqrt{a} \cdot r}} - \frac{i}{r} \right\} \frac{r}{r}$$

oder auch, indem wir $c = e^{i2\gamma}$ setzen,

$$(3') \quad w = \left\{ \sqrt{a} \cdot \operatorname{cotgh} \zeta - \frac{i}{r} \right\} \frac{r}{r}$$

mit $\zeta = -i(\sqrt{a} \cdot r - \gamma)$. Beide Werte der Wurzel sind möglich. Man verifiziert die Lösung am bequemsten durch den Ansatz

$$w_r = a \operatorname{cotgh}(\beta r + \gamma) + \frac{\delta}{r}$$

mit $\alpha\beta\gamma\delta$ als Konstanten. Dieser Ansatz liefert auch sofort die Lösung:

$$(4) \quad w_x = \sqrt{a} \cdot \operatorname{cotgh} \{ -i(\sqrt{a} \cdot x - \gamma) \}$$

für die ebene Welle, die durch

$$\frac{dw_x}{dx} - iw_x^2 + ia = 0$$

gekennzeichnet ist. Man sieht, daß das Wellennormalenpaar für die kugelige Welle sich von dem für die ebene Welle nur durch das additive Glied $-i/r$ unterscheidet, das in der Nähe der Quelle ($r \sim 0$) von bedeutendem Einfluß ist.

Wir wollen die Integrationskonstante näher bestimmen. Dem Ort r_0 sei der Wert w_0 zugeordnet. Setzen wir

$$\frac{\sqrt{a} + [(w_0 r_0 / r_0) + i / r_0]}{\sqrt{a} - [(w_0 r_0 / r_0) + i / r_0]} = \varrho,$$

so kommt aus (3):

$$(5) \quad c = e^{i2\gamma} = -\varrho \cdot e^{+i2\sqrt{a} \cdot r_0},$$

so daß, weil $\gamma = -i/2 \cdot \log c$,

$$(5') \quad \begin{cases} \gamma' = \{ \sqrt{a} \}' \cdot r_0 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \varrho'' / \varrho' + (h + \frac{1}{2}) \pi \\ \gamma'' = \{ \sqrt{a} \}'' \cdot r_0 - \frac{1}{2} \log |\varrho|. \end{cases}$$

Aus (3') ergibt sich

$$(6) \quad \operatorname{div} w = \frac{ia}{\sinh^2 \zeta} + \frac{2\sqrt{a}}{r} \operatorname{cotgh} \zeta - \frac{i}{r^2}.$$

¹⁾ Z. B. SERRET-SCHEFFERS, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Leipzig 1914 (Teubner). Bd. III, S. 150.

Dieser Ausdruck verschwindet nur im Unendlichen, falls bis dorthin die Wellenfront vorgeschritten ist, und zwar, welchen Wert man auch γ und \sqrt{a} beilege, wie es ja auch nach der Anschauung sein muß. Für $r = \infty$ ist also nach (2) $w^2 = a$, mit der Lösung

$$(7) \quad w = \sqrt{a} \cdot \frac{r}{r}$$

in allen Fällen, ohne jede Bedingung.

Im Endlichen ist aber $\operatorname{div} w \neq 0$, woraus mit (2) folgt:

$$(8) \quad \overleftarrow{w} \neq -\overrightarrow{w},$$

wenn wir mit einem übergesetzten Pfeile die Richtung der Welle von ihrer Quelle weg bzw. auf ihre Quelle zu bezeichnen. Denn da die Form (2) für jede Welle gilt, so muß für die auslaufende bzw. für die in sich zurückgeworfene Welle sein:

$$\overrightarrow{w}^2 + i \operatorname{div} \overrightarrow{w} - a = 0 \quad \text{bzw.} \quad \overleftarrow{w}^2 + i \operatorname{div} \overleftarrow{w} - a = 0,$$

woraus bei Umkehrbarkeit, definiert durch $\overrightarrow{w} + \overleftarrow{w} = 0$ an jeder Stelle, folgen würde $\overrightarrow{w}^2 = a = \overleftarrow{w}^2$, also $\operatorname{div} w = 0$. Aus der so bewiesenen Unumkehrbarkeit folgt: In der einlaufenden Welle — darunter ist stets die allseitig in sich zurückgeworfene, ausgelaufene Welle, nicht die teilweise zum Brennpunkt konvergierende, gebrochene Welle gemeint — ist also die Lagerung der Wellenflächen Φ' und Φ'' , gekennzeichnet durch w' und w'' , eine andere als in der auslaufenden Welle, sind damit die Verlöschung, die Geschwindigkeiten und die Wellenlänge andere.

An Gleichung (7) ist weiter zu erkennen, daß in den Lösungen (3) bzw. (4) die positive \sqrt{a} allein die auslaufende Welle bestimmt und die negative \sqrt{a} allein die einlaufende Welle. Sollen nun gemäß der Ungleichheit (8) die Integrationen (3) und (4) verschieden sein für die auslaufende und die einlaufende Welle, dann darf die Integrationskonstante γ weder Null noch proportional \sqrt{a} sein; denn sonst würde ein Vorzeichenwechsel von \sqrt{a} die Größe w in (3) bzw. (4) unverändert lassen.

Wir entwickeln jetzt ausführlich

$$(9) \quad \operatorname{cotgh} \zeta = \frac{\cosh \zeta' \cdot \sinh \zeta'' - i \cos \zeta'' \cdot \sin \zeta''}{\sinh^2 \zeta' + \sin^2 \zeta''},$$

mit $\zeta' = \{\sqrt{a}\}' \cdot r - \gamma''$; $\zeta'' = -\{\sqrt{a}\}' \cdot r + \gamma'$.

Man sieht, daß bei großen Beträgen von ζ' sich $\operatorname{cotgh} \zeta$ dem Werte $\operatorname{cotgh} \zeta' \simeq \pm 1$ nähert, je nachdem $\zeta' \gtrless 0$ ist. Nach Gleichung (3')

wird aber in unendlicher Ferne nur für $\operatorname{cotgh} \zeta = +1$ die Gleichung (7) erreicht; es muß also im Unendlichen ζ' positiv sein.

Es ist nun von großer Bedeutung, daß der Grenzwert $\operatorname{cotgh} \zeta = +1$ auf zwei Wegen hinsichtlich der Integrationskonstante erreichbar ist:

$\alpha.$ durch einen beliebig endlichen Wert von c ,

$\beta.$ durch $c = \pm \infty$,

in beiden Fällen gleichgültig, ob die Welle eine auslaufende oder einlaufende ist; jedoch ist die Integrationskonstante in diesen Wellen verschieden. Bei endlichem c ist nämlich der Grenzwert (7) nach (3) nur dann möglich, wenn $\{\sqrt{a}\}' > 0$ ausfällt. Ist hingegen $\{\sqrt{a}\}' \leq 0$, dann muß, um in $r = \infty$ den Grenzwert $w = \sqrt{a} \cdot r/r$ zu erreichen, gemäß (3) die Integrationskonstante $c = \pm \infty$ gesetzt werden oder, was dasselbe besagt, $\gamma' = -\infty$. Nach (5) ist das der Fall, wenn $|\varrho| = \infty$, also $(w_0, r_0/r_0)_{r_0 = \infty} = \sqrt{a}$ ist, was auch die Lösung von (7) ist; wie es ja sein muß, wenn unsere Überlegung richtig ist.

Wir schreiben jetzt ausführlich mit (9) nach (3'):

$$(10\alpha) \quad \left\{ \begin{array}{l} w' = \left\{ \frac{\{\sqrt{a}\}' \sinh \zeta' \cdot \cosh \zeta' + \{\sqrt{a}\}'' \sin \zeta'' \cdot \cos \zeta''}{\sinh^2 \zeta' + \sin^2 \zeta''} \right\} \frac{r}{r} \\ w'' = \left\{ \frac{\{\sqrt{a}\}'' \sinh \zeta' \cdot \cosh \zeta' - \{\sqrt{a}\}' \sin \zeta'' \cdot \cos \zeta''}{\sinh^2 \zeta' + \sin^2 \zeta''} - \frac{1}{r} \right\} \frac{r}{r} \end{array} \right.$$

mit $\zeta' = \{\sqrt{a}\}'' \cdot r - \gamma''$; $\zeta'' = -\{\sqrt{a}\}' \cdot r + \gamma'$.

Wir sehen, daß auch hier, in vorliegender spezieller Wellenaufgabe, eine Wellennormale zweiter Art w'' vorhanden ist, selbst wenn das Mittel Energie nicht verschlucken kann, entsprechend unserem in Abhandlung III geführten Beweise, daß — entgegen der heutigen Meinung — nur in speziellen Fällen diese Normale nicht existiert. Was aber völlig unerwartet kommt, ist die Entdeckung, daß in (10 α) die beiden Wellennormalen nicht Konstanten sind, sondern räumlichen Schwankungen unterliegen, entsprechend den zeitlichen Feldschwankungen in der Quelle! Die Lagerungsdichte der Φ' - und Φ'' -Flächen ist also von der Erregungsart abhängig! (Zur Erläuterung der Lagerungsdichte diene, daß es sich bei graphischer Darstellung empfiehlt, nur die Flächen gleichmäßig zunehmender Parameterwerte der Φ zu zeichnen, also z. B. $\Phi_1 = c + \delta$; $\Phi_2 = c + 2\delta$ usw. Dann bestimmt $w = \operatorname{grad} \Phi$ die Lagerungsdichte der Φ -Flächen, d. h. die Anzahl der gezeichneten Flächen je Längeneinheit ihrer Orthogonale. Umgekehrt hat man in der ge-

zeichneten Lagerungsdichte ein Maß für w .) Und schließlich erleben wir die noch größere Überraschung, daß die Divergenz der w -Linien infolge der kugeligen Ausbreitung lediglich die Wellennormale zweiter Art beeinflußt — man beachte das Glied $1/r$ —, so daß die Wellen-Intensitätskurve $e^{\psi'' - \phi_0''}$ nicht nur die eben genannten räumlichen Schwankungen aufweist, sondern außerdem noch ein stark ausgeprägtes Minimum haben kann!

Betrachten wir nunmehr die Wurzel aus dem Wellenparameter a . Es ist

$$(11) \quad \sqrt{a} = \{\sqrt{a}\}' + i\{\sqrt{a}\}'' = \pm \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}\{|a| + a'\}} \pm i \sqrt{\frac{1}{2}\{|a| - a'\}} \right\},$$

worin die Wurzeln absolut zu nehmen sind und $\pm i$ gilt, je nachdem $a'' \geq 0$. Es ist $\{\sqrt{a}\}'' \neq 0$, allemal wenn $a'' \neq 0$, aber auch wenn $a'' = 0$ und $a' < 0$ ist. Das positive Vorzeichen vor der geschweiften Klammer in (11) gilt, wie oben bewiesen, für die auslaufende, das negative Vorzeichen für die einlaufende Kugelwelle. Man beachte, daß Auslauf und Einlauf sich auf die Bewegung der Wellenfront beziehen, deren analytische Beschreibung aber, wie oben hervorgehoben, außerhalb unserer Formeln liegt.

$$a'' \geq 0 \text{ und } \{\sqrt{a}\}' \geq 0 \text{ machen sonach } \{\sqrt{a}\}'' > 0,$$

$$a'' \geq 0 \text{ und } \{\sqrt{a}\}' \leq 0 \text{ machen sonach } \{\sqrt{a}\}'' < 0.$$

$$\text{Ist } a'' = 0; a' > 0, \text{ so wird } \{\sqrt{a}\}' = \pm \sqrt{|a'|}; \{\sqrt{a}\}'' = 0;$$

$$\text{ist } a'' = 0; a' < 0, \text{ so wird } \{\sqrt{a}\}' = 0; \{\sqrt{a}\}'' = \pm \sqrt{|a'|}.$$

Der Fall α mit $\{\sqrt{a}\}'' > 0$ liegt also vor, wenn a'' und $\{\sqrt{a}\}'$ gleiche Vorzeichen haben, wenn also in der auslaufenden Welle $a'' > 0$ oder in der einlaufenden Welle $a'' < 0$ ist; oder wenn $a'' = 0; a' < 0$ und $\{\sqrt{a}\}'' = +\sqrt{|a'|}$, also die Welle dabei eine auslaufende ist.

Der Fall β mit $\{\sqrt{a}\}'' \leq 0$ liegt vor, wenn a'' und $\{\sqrt{a}\}'$ ungleiche Vorzeichen haben, wenn also in der auslaufenden Welle $a'' < 0$ oder in der einlaufenden Welle $a'' > 0$ ist; oder wenn $a'' = 0; a' > 0$, oder wenn $a'' = 0, a' < 0$ und $\{\sqrt{a}\}'' = -\sqrt{|a'|}$, also die Welle dabei eine einlaufende ist.

Da a'' von der Richtung der Welle unabhängig ist, hat $\{\sqrt{a}\}''$ in der einlaufenden Welle das entgegengesetzte Vorzeichen wie in der auslaufenden. Das berührt weder die Umkehrbarkeit der Planwelle (7), noch die Unumkehrbarkeit der Wellen (3) und (4), wohl aber den Charakter der letztgenannten Wellen; denn es wird ein und dieselbe

α - bzw. β -Welle auslaufend zu einer β - bzw. α -Welle einlaufend. Ein „stehender Wellenzustand“ ist deshalb unmöglich.

Ein besonders zu behandelnder Fall γ liegt vor, wenn $a = 0$ ist.

Die Analysen von (4) und (3) ergeben uns ganz ungewohnte Wellenbau. Um sicher zu sein, daß diese nicht etwa auf einem Versehen oder auf einer falschen Auslegung beruhen, wollen wir zuerst die ebene Welle (7) untersuchen, der sich jede ebene Welle (4) und jede Kugelwelle (3) in der Ferne unbegrenzt nähert.

Dort ist in der auslaufenden Welle nach (7) und (11)

$$w' = \{\sqrt{a}\}' \frac{r}{r} > 0,$$

also die Phasengeschwindigkeit erster Art $c' = (v'/w'^2) \cdot w'$ stets nach außen gerichtet, und

$$w'' = \{\sqrt{a}\}'' \frac{r}{r} \geq 0,$$

je nachdem $a'' \geq 0$; also ist die Phasengeschwindigkeit zweiter Art $c'' = (v''/w''^2) \cdot w''$ nach außen gerichtet, wenn $v'' \geq 0$ und $a'' \geq 0$ ist, dagegen nach innen gerichtet, wenn $v'' \geq 0$ und $a'' \leq 0$ ist. Im Falle $a'' = 0$; $a' > 0$ ist $w'' = 0$, dagegen im Falle $a'' = 0$; $a' < 0$ ist $w' = 0$, $w'' = +|\sqrt{a}'|$, also in der auslaufenden Welle c'' nach außen bzw. nach innen gerichtet, je nachdem $v'' \geq 0$ ist.

In der einlaufenden Welle ist $w' < 0$, also die Phasengeschwindigkeit erster Art c' stets nach innen gerichtet, und $w'' \leq 0$, je nachdem $a'' \geq 0$, also die Phasengeschwindigkeit zweiter Art c'' nach innen gerichtet, wenn $v'' \geq 0$ und $a'' \geq 0$ ist, dagegen nach außen gerichtet, wenn $v'' \geq 0$ und $a'' \leq 0$ ist. Im Falle $a'' = 0$, $a' > 0$ ist $w'' = 0$, dagegen im Falle $a'' = 0$, $a' < 0$ ist $w' = 0$, $w'' = -|\sqrt{a}'|$, also c'' in der einlaufenden Welle nach innen bzw. nach außen gerichtet, je nachdem $v'' \geq 0$ ist.

Allgemein läßt sich über den Wellenparameter a nur so viel sagen, daß bei reiner Sinus-Erregung $a'' < 0$, bei reiner Exponential-Erregung $a'' = 0$ sein muß, und daß a im allgemeinen auch dann komplex, wenn v nicht komplex ist.

In der Abhandlung I, S. 406 [3] findet sich insbesondere eine Tabelle von Werten des Wellenparameters a für die im Vordergrund des Interesses stehenden physikalischen Wellengattungen. Wir vermögen darin zwei Untergruppen hervorzuheben. In der einen Gruppe, die die elementare Welle der Elektromagnetik für an-

hysteretische Nichtleiter sowie der Elastik anhysteretischer Mittel umfaßt, ist der Wellenparameter von der Form $a = v^2 \cdot p$, worin p eine positiv reelle Größe von der Dimension des Quadrates einer reziproken Geschwindigkeit ist. In der zweiten Gruppe, die die elementare Welle der Thermik, der Diffusik und der viskosen Hydrodynamik umfaßt, ist der Wellenparameter von der Form $a = -iv \cdot p$, worin p eine positiv reelle Größe von der Dimension sec/cm^2 ist. Wir bezeichnen noch mit A das logarithmische Dekrement bzw. Inkrement, worunter wir den natürlichen Logarithmus des Quotienten a_1/a_2 zweier um die Zeit einer ganzen Periode $\tau = 2\pi/v'$ verschiedener Werte der schwingenden Größe verstehen, so daß, weil

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{A \cdot e^{-v''t}}{A \cdot e^{-v''(t+\tau)}} = e^{v''\tau}$$

$v''/v' = A/2\pi$ positiv bei einem Dekrement, negativ bei einem Inkrement ausfällt. Im Intervall $0 \leq a_1/a_2 \leq 1$ liegt A zwischen $-\infty$ und 0; ein Intervall $1 \leq a_1/a_2 < \infty$ liegt A zwischen 0 und $+\infty$.

In der ersten Untergruppe (Elektromagnetik und Elastik für konservative Mittel) ist nun, weil $a = v^2 \cdot p$,

$$(12a) \left\{ \begin{array}{l} a' = (v'^2 - v''^2) \cdot p = v'^2 \left(1 - \frac{A^2}{4\pi^2}\right) \cdot p \geq 0 \\ a'' = 2v'v'' \cdot p = v'^2 \frac{A}{\pi} \cdot p \geq 0 \\ a'^2 + a''^2 = a a^* = (v'^2 + v''^2)^2 \cdot p^2; \quad \sqrt{a} = \pm \sqrt{p} \cdot \{v' + i v''\}. \end{array} \right.$$

Es ist somit a' positiv oder negativ, je nachdem das Dekrement oder Inkrement kleiner als $+2\pi$ bzw. größer als -2π ist, und a'' ist positiv oder negativ, je nachdem ein Dekrement oder ein Inkrement vorliegt. Da $\{\sqrt{a}\}'' = \pm \sqrt{p} \cdot v''$, ist $\{\sqrt{a}\}''$ in der auslaufenden Welle bei gedämpfter Erregung positiv, Fall α , bei schwellender oder permanenter Erregung negativ bzw. Null, so daß Fall β vorliegt. In der einlaufenden Welle umgekehrt. Bei reiner Sinus-Erregung ($v'' = 0$) verschwindet a'' , in welchem Falle $a' > 0$, also $\{\sqrt{a}\}'' = 0$ und somit $w'' = 0$ ist; es verschwindet a'' aber auch bei reiner Exponential-Erregung ($v' = 0$), in welchem Falle $a' < 0$, also $\{\sqrt{a}\}' = 0$ und somit $w' = 0$ ausfällt. Da $c' = \pm 1/\sqrt{p} = c''$, so sind die beiden Phasengeschwindigkeiten stets gleich und gleichgerichtet, und zwar nach außen bei der auslaufenden Welle und nach innen bei der einlaufenden Welle. — Im Falle reiner Sinus-Erregung ($v'' = 0$; $a' > 0$; $a'' = 0$)

ist $w'' = 0$; im Falle reiner Exponential-Erregung ($v' = 0$; $a' < 0$; $a'' = 0$) ist $w' = 0$.

In der zweiten Untergruppe (Thermik, Diffusik, Visko-Hydrodynamik) hat man, weil $a = -iv \cdot p$,

$$(12b) \left\{ \begin{array}{l} a' = v'' \cdot p = \frac{A}{2\pi} v' \cdot p \cong 0; \quad a'' = -v' \cdot p \cong 0 \\ a'^2 + a''^2 = a a^* = v v^* \cdot p^2 = (v'^2 + v''^2) \cdot p^2 \\ \sqrt{a} = \pm \sqrt{\frac{p}{2}} \left\{ \sqrt{v'^2 + v''^2 + v''} - i \sqrt{v'^2 + v''^2 - v''} \right\} \\ = \pm \sqrt{\frac{p v'}{2}} \cdot \left\{ \sqrt{1 + \frac{A^2}{4\pi^2} + \frac{A}{2\pi}} - i \sqrt{1 + \frac{A^2}{4\pi^2} - \frac{A}{2\pi}} \right\}, \end{array} \right.$$

wobei wir anmerken wollen, daß der Ausdruck

$$\sqrt{1 + \frac{A^2}{4\pi^2} + \frac{A}{2\pi}}$$

im Intervall $-\infty < \frac{A}{2\pi} < +\infty$ von Null bis Positiv-Unendlich monoton ansteigt.

Im Gegensatz zu (12a) ist hier a'' stets negativ oder Null und a' positiv oder negativ, je nachdem ein Dekrement oder ein Inkrement vorliegt. Demgemäß ist $\{\sqrt{a}\}'$ in der auslaufenden Welle stets negativ, Fall β , in der einlaufenden stets positiv, Fall α ; es verschwindet nur, wenn $v' = 0$ und $v'' > 0$ ist, Fall β . Somit sind w' und w'' stets einander gegengerichtet. — Im einzelnen sind bei reiner Sinus-Erregung

($v'' = 0$; $a' = 0$) w' und w'' entgegengesetzt $= \pm \sqrt{\frac{p v'}{2}}$; bei reiner Exponential-Erregung ($v' = 0$; $a'' = 0$) hat man bei Dämpfung $w' = \pm \sqrt{p v''}$; $w'' = 0$, bei Schwellung $w' = 0$; $w'' = \mp \sqrt{p |v''|}$.

Da in der auslaufenden Welle w'' stets negativ, in der einlaufenden stets positiv, ist in der auslaufenden Welle bei schwellender Erregung ($v'' < 0$) neben c' nach außen auch c'' nach außen gerichtet, dagegen bei gedämpfter Erregung ($v'' > 0$) neben c' nach außen c'' nach innen gerichtet. Andererseits ist in der einlaufenden Welle bei schwellender Erregung ($v'' < 0$) neben c' nach innen auch c'' nach innen gerichtet, dagegen bei gedämpfter Erregung ($v'' > 0$) neben c' nach innen c'' nach außen gerichtet. — Bei reiner Exponential-Erregung ($v' = 0$) ist bei Dämpfung $c'' = \infty$, dagegen bei Schwellung $c'' = \mp v'' / \sqrt{p |v''|}$, also in der auslaufenden Welle nach außen, in der einlaufenden Welle

nach innen gerichtet. — Bei reiner Sinus-Erregung ($v'' = 0$) ist $c' = \pm \sqrt{\frac{2v'}{p}}$; $c'' = \infty$.

Von Wichtigkeit sind auch die Wellenparameter-Werte in der elektromagnetischen Molekulartheorie. Während in der MAXWELL-HERTZschen Theorie

$$a = \frac{v^2}{c_0^2} \left\{ \varepsilon \mu - i \frac{\lambda \mu}{v} \right\},$$

worin ε die Dielektrizitätskonstante, μ die magnetische Permeabilität und λ die elektrische Leitfähigkeit bezeichnet, fallen in der Molekulartheorie der elektrische Erregungsbeiwert ε sowie der magnetische Erregungsbeiwert μ komplex und abhängig von v aus. In ihr ist daher

$$(12c) \left\{ \begin{aligned} a' &= \frac{1}{c_0^2} \{ (v'\mu' - v''\mu'') (v'\varepsilon' - v''\varepsilon'') - (v''\mu' + v'\mu'') (v''\varepsilon' + v'\varepsilon'' - \lambda) \} \\ a'' &= \frac{1}{c_0^2} \{ (v''\mu' + v'\mu'') (v'\varepsilon' - v''\varepsilon'') + (v'\mu' - v''\mu'') (v''\varepsilon' + v'\varepsilon'' - \lambda) \}. \end{aligned} \right.$$

Dreierlei heben wir aus unserer Untersuchung heraus:

1. Während bei reiner Sinus-Erregung ($v'' = 0$) in der ersten Untergruppe die Ausbreitung rein sinusförmige Wellenbilder zeigt, zeigt sie in der zweiten Untergruppe exponentiell abfallende Sinuskurven, trotz reiner Sinus-Erregung und trotzdem daß in der Temperatur- und Diffusionswelle Energie nicht verschluckt wird.

2. Während bei reiner Exponential-Erregung ($v' = 0$) es in der ersten Untergruppe keine Wellenflächen erster Art gibt, gibt es diese Flächen $\Phi' = \text{const}$ in der zweiten Untergruppe, falls diese Erregung gedämpft ist!

Mir scheint, daß diese höchst auffällige Erscheinung bei den LIESEGANGSchen Ringen verwirklicht ist. Wenn man z. B. einen Tropfen 20prozentige Silbernitrat-Lösung auf eine homogene Gelatine-Schicht aufsetzt, die etwas Ammonium-Bichromat gelöst enthält, so bekommt man ein konzentrisches System dunkler Ringe, die ruhen. Die Diffusionswelle erlischt natürlich mit der Zeit, aber in den Maximis der Konzentration bleibt die Ausfällung. — Da sind ferner die NOBILISchen Farbenringe, die an den Niederschlagshäutchen auf der Kathode eines stromdurchflossenen Elektrolyten bei geeigneter Anordnung sichtbar werden. — Auch die Leuchtscheiben in der geschichteten elektrischen Entladung durch GEISSLER-Röhren hin-

durch erklären sich vermutlich so, was die wellenkinematische Seite der Erscheinung anbelangt. In beiden Fällen sind nämlich exponential abklingende, mit- und gegenläufig geführte, elektromagnetische Wellen im Spiel. Das Mittel im Rohr, primär homogen, muß, wenn die Vermutung richtig ist, Eigenschaften haben, die trotz Leitfähigkeit den zweiten Wellenparameter a'' zu Null machen.

3. Während die Richtung der Phasengeschwindigkeit erster Art c' im Innern der Welle stets mit derjenigen der Wellenfront identisch ist, kann diejenige der Phasengeschwindigkeit zweiter Art c'' in der zweiten Untergruppe derjenigen der Wellenfront auch gegengerichtet sein. Das ist dadurch möglich, daß der Exponentialausdruck $e^{-\nu''t} \cdot e^{\Phi''}$ einerseits örtlich mit wachsendem r sowohl ansteigen als auch abfallen kann, andererseits zeitlich je nach dem Vorzeichen von ν'' die Kurve sowohl sich aufrecken als auch in sich zusammensinken kann. Wogegen die Sinuskurve $\sin\{\nu't - \Phi\}$ sich nur in sich verschiebt. Während somit die Phase erster Art φ' stets von der Quelle weg läuft, kann die Phase zweiter Art φ'' auch auf die Quelle zu laufen.

Die Ausbreitung innerhalb der ebenen Welle geht nun in graphischer Darstellung so vor sich, daß die Exponentialkurve $e^{\nu''t}$ sich je nach dem Vorzeichen von ν'' zur Fortpflanzungslinie hin bzw. sich von ihr weg bewegt, und die Scheitel der wandernden Sinuskurve $\sin \Phi'$ sich an dieser beweglichen, aber in sich starren Grenz- und Leitkurve sowie an deren Spiegelbildkurve unterhalb der Fortpflanzungslinie entlang bewegen. Die Phasen φ' laufen dabei bis zur momentanen Lage der Leitkurve, die Phasen φ'' in der Leitkurve; beide parallel der Fortpflanzungslinie. Die Gesamtwirkung ist, daß sich die Nullwerte in der Welle, die Dauerwerte, mit der Geschwindigkeit c' von der Quelle weg bewegen, gleichzeitig aber die Zwischenwerte, ab- und zunehmend, eine Bewegung derselben vortäuschen, die über die Grundbewegung hinweghuscht, dieser gleich- oder entgegengerichtet. Man sieht diese Wellenbilder-Folge gelegentlich an Oberflächen-Wellen des Wassers.

Nunmehr können wir in Sicherheit die Analyse der Wellen (3) und (4) zwischen Ferne und nächster Nähe ihrer Quelle zu Ende führen.

2. Die β -Welle

Im Falle β mit $\{\sqrt{a}\}'' \leq 0$ liefert Gleichung (3) mit $c = \pm \infty$ für das Wellennormalenpaar

$$w = \left\{ \sqrt{a} - \frac{i}{r} \right\} \frac{r}{r},$$

so daß

$$(10\beta) \quad w' = \{ \sqrt{a} \}' \frac{r}{r} = \text{const}; \quad w'' = \left\{ -\frac{1}{r} + \{ \sqrt{a} \}'' \right\} \frac{r}{r} < 0.$$

Während die erste Wellennormale w' konstant ist, steigt in der kugeligen Welle die zweite Wellennormale w'' von $-\infty$ am Quellpunkt mit wachsendem r monoton an, bleibt aber stets negativ; nach der bisherigen Rechnung für Wellen der ersten Gruppe unter (12) kann ein w'' überhaupt nicht auftreten, wenn die Quelle permanent schwingt. Die Geschwindigkeit $c' = v'/w'^2 \cdot w'$ der Phase erster Art ist in unserem Falle dem Betrage nach konstant; sie ist positiv in der auslaufenden Welle, negativ in der einlaufenden. Die Geschwindigkeit $c'' = v''/w''^2 \cdot w''$ der Phase zweiter Art ist dem Betrage nach veränderlich; an der Quelle ist sie verschwindend klein, nähert sich aber mit wachsendem Abstände r von der Quelle dem konstanten Werte $v''/|\{ \sqrt{a} \}''|$. Bei schwelloser Erregung ($v'' < 0$) ist sie nach außen gerichtet, bei schwindender Erregung ($v'' > 0$) nach innen. Das gilt sowohl für die auslaufende als auch für die einlaufende Welle; c'' und c' können also einander entgegen gerichtet sein.

In der ebenen Welle ist neben w' auch w'' konstant.

Aus den Beziehungen (10 β) ergibt sich für die beiden Wellenflächen-Systeme:

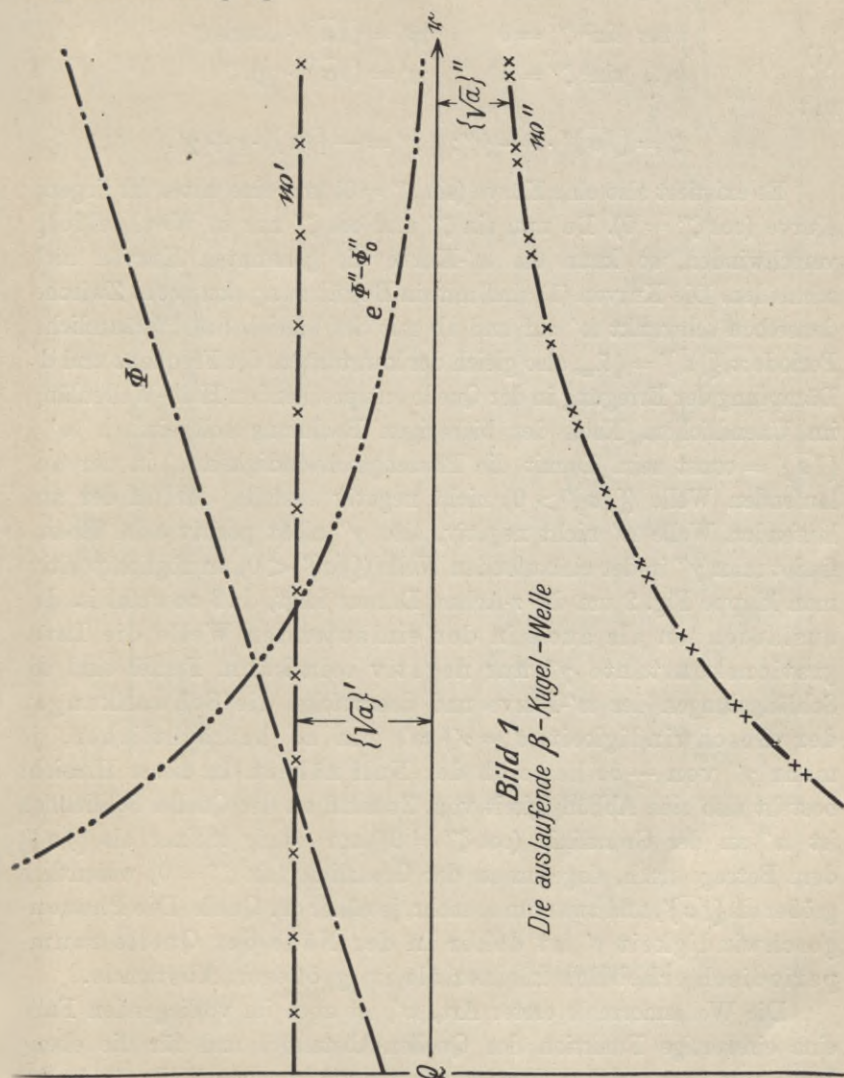
$$(1) \quad \Phi' - \Phi'_0 = \{ \sqrt{a} \}' (r - r_0); \quad \Phi'' - \Phi''_0 = \{ \sqrt{a} \}'' (r - r_0) + \log \frac{r_0}{r},$$

sowie

$$(2) \quad e^{\Phi'' - \Phi''_0} = \frac{r_0}{r} \cdot e^{\{ \sqrt{a} \}'' (r - r_0)}.$$

Der Phasenparameter erster Art Φ' steigt in der auslaufenden Welle linear mit dem Abstand r an, fällt in der einlaufenden Welle linear mit dem Abstand ab. Der Phasenparameter zweiter Art Φ'' ist sowohl in der auslaufenden als auch in der einlaufenden Welle am Quellpunkt $+\infty$, im Punkt r_0 gleich Null, und in unendlicher Ferne $-\infty$; die Exponentialkurve $e^{\Phi'' - \Phi''_0}$ fällt dementsprechend von $+\infty$ monoton auf Null herab. Alle diese zeitfreien Beziehungen in der β -Welle findet man in Bild 1 graphisch und schematisch niedergelegt; es sind lauter glatte Kurven, obgleich die Erregung periodisch sein kann. Diese Gesetze befolgt in der ersten Untergruppe (12a) die auslaufende Welle bei schwelloser oder permanenter Erregung, in der einlaufenden

Welle bei schwindender Erregung; in der zweiten Untergruppe (12b) die auslaufende Welle, sowie außerdem noch bei gedämpfter reiner Exponential-Erregung.



3. Die α -Welle

Im Falle α , wo $\{V(a)\}'' > 0$ ist, liegen die Dinge wesentlich verwickelter. Dann gelten für das Wellennormalenpaar w die ausführlich geschriebenen Formeln (10a) im ersten Abschnitt. Die w' - und die

w' -Kurven in Funktion des Abstandes r von der Quelle sind im Gegensatz zum Falle β geschlängelt. Wir haben hinsichtlich der Wellennormale erster Art w' (siehe Bild 2):

$$(1) \quad \begin{cases} \text{für } \sin^2 \zeta'' = 0 & w' = \{\sqrt{a}\}' \cdot \cotgh \zeta' \\ \text{,, } \sin^2 \zeta'' = 1 & w' = \{\sqrt{a}\}' \cdot \tgh \zeta' \end{cases}$$

mit

$$\zeta' = \{\sqrt{a}\}'' \cdot r - \gamma''; \quad \zeta'' = -\{\sqrt{a}\}' \cdot r + \gamma'.$$

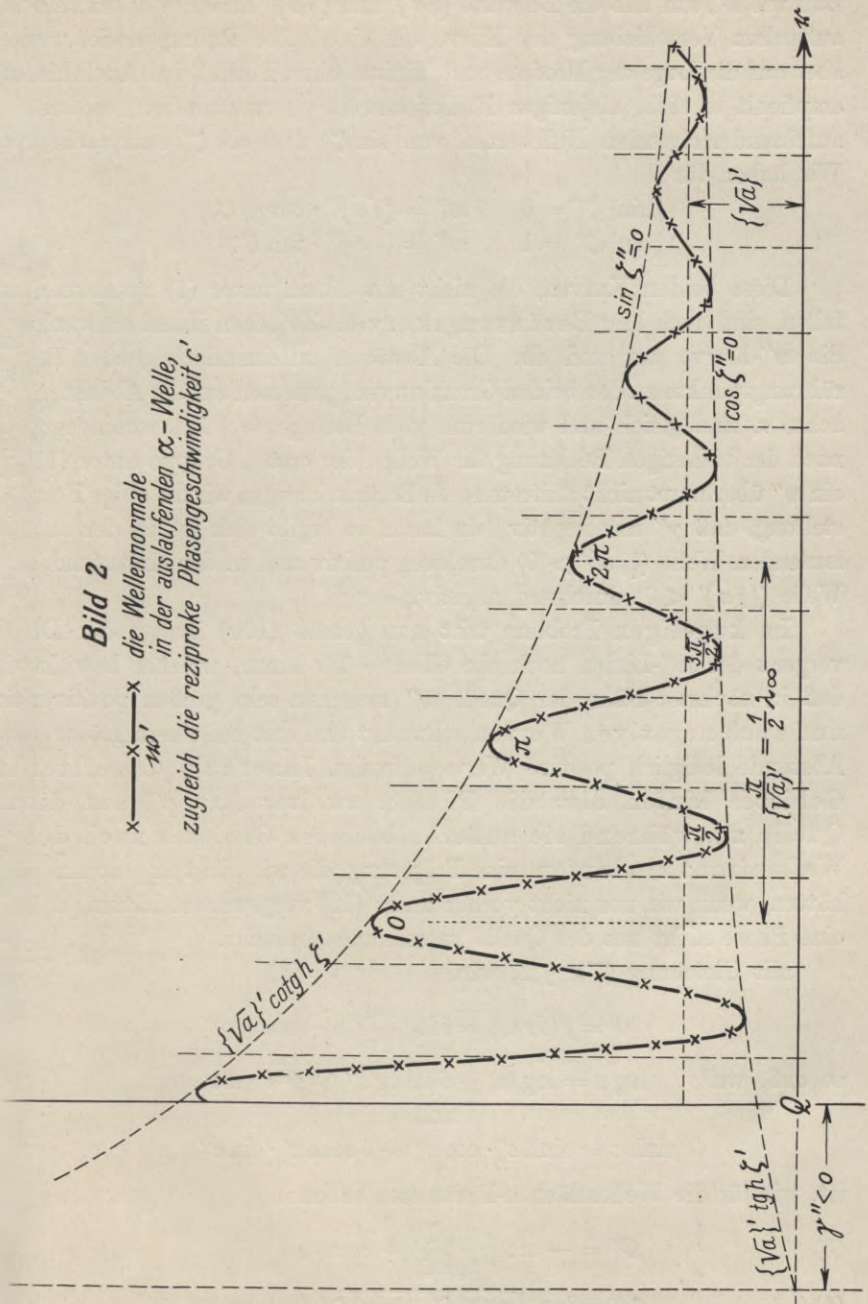
Es existiert also eine Kurve ($\sin \zeta'' = 0$) und eine unter ihr liegende Kurve ($\cos \zeta'' = 0$). Da nun $\sin \zeta''$ und $\cos \zeta''$ nur in Wechselfolge verschwinden, so kann die w' -Kurve die genannten Kurven nicht schneiden. Die Kurven (1) sind mithin Berührungskurven. Zwischen denselben schwankt w' auf und ab mit der hinsichtlich ζ'' räumlichen Periode $\pi/\{\sqrt{a}\}' = \frac{1}{2}\lambda_\infty$, also gleich der konstanten, der Frequenz und der Dämpfung der Erregung in der Quelle entsprechenden Halb-Wellenlänge im Unendlichen. Nach der bisherigen Rechnung soll einfach $w' = \{\sqrt{a}\}' = \text{const}$ sein. Damit die Phasengeschwindigkeit c' in der auslaufenden Welle ($\{\sqrt{a}\}' > 0$) nicht negativ ausfalle, darf in der auslaufenden Welle w' nicht negativ, also γ'' nicht positiv sein. Ebenso findet man γ'' in der einlaufenden Welle ($\{\sqrt{a}\}' < 0$) unmöglich positiv; man klappe Fig. 2 um die r -Achse. Daraus folgt, daß sowohl in der auslaufenden als auch in der einlaufenden Welle die Integrationskonstante γ'' nur negativ sein kann. Ferner sind die Schlängelungen der w' -Kurve und demzufolge die Schwankungen der Geschwindigkeit $c' = v'/|w'|$ um so beträchtlicher, je mehr γ'' von $-\infty$ her sich der Null nähert. In dieser Hinsicht besteht also eine Abhängigkeit vom Zustand an der Quelle. Schließlich ist w' an der Grenzlinie ($\cos \zeta'' = 0$) nur wenig kleiner als $\{\sqrt{a}\}'$, dem Betrage nach, dagegen an der Grenzlinie ($\sin \zeta'' = 0$) wesentlich größer als $\{\sqrt{a}\}'$, und zwar um so mehr, je näher der Quelle. Die Phasengeschwindigkeit c' ist daher in der Nähe der Quelle raumperiodisch erheblich kleiner als im größeren Abstände.

Die Wellennormale erster Art, w' , ist auch im vorliegenden Falle eine einwertige Funktion des Quellen-Abstandes und für die ebene Welle von dem gleichen Betrage wie für die kugelige Welle, trotz der Divergenz der w' -Linien. Das gilt dann auch für die Verteilung der Φ' -Werte.

Im ebenen Problem (4) ist die ebenfalls einwertige Wellennormale zweiter Art, w'' (siehe Bild 3), nach (10a) von gleichem

Bild 2

die Wellennormale
in der auslaufenden α -Welle,
zugleich die reziproke Phasengeschwindigkeit c' .



Bau wie w' , nur daß die Beiwerte $\{\sqrt{a}\}'$ und $\{\sqrt{a}\}''$ anders verteilt sind, außerdem Verschiebung der Kurve um eine halbe Raumperiode, was aber auf die Lage der Maxima und Minima ohne Einfluß ist. Auch hier empfiehlt es sich, diejenigen Funktionswerte hervorzuheben, die den aufeinanderfolgenden Nullwerten von $\sin \zeta''$ und $\cos \zeta''$ entsprechen. Wir haben für

$$(2) \quad \begin{cases} \sin^2 \zeta'' = 0 & w'' = \{\sqrt{a}\}'' \cdot \operatorname{cotgh} \zeta', \\ \sin^2 \zeta'' = 1 & w'' = \{\sqrt{a}\}'' \cdot \operatorname{tgh} \zeta'. \end{cases}$$

Diese beiden Kurven, die nicht mit denen unter (1) zusammenfallen, sind auch hier Berührungskurven. Zwischen ihnen schwankt die w'' -Kurve auf und ab. Die Abstände aufeinanderfolgender Berührungspunkte an den beiden Grenzkurven, gemessen auf der Abszissenachse r , sind gleich und wiederum vom Betrage $= \frac{1}{8} \lambda_\infty$, wohingegen nach der bisherigen Rechnung für Wellen der ersten Gruppe unter (11) ein w'' überhaupt nicht auftreten soll. Berücksichtigen wir die obige Feststellung, daß γ'' nur negativ sein kann, so ergibt sich w'' in der auslaufenden Welle ($\{\sqrt{a}\}' > 0$) durchweg positiv und in der einlaufenden Welle ($\{\sqrt{a}\}' < 0$) durchweg negativ.

B Im kugeligen Problem tritt nun gemäß (10a) infolge der Divergenz der w'' -Linien noch ein Glied $-1/r$ hinzu, welches bewirkt, daß in nächster Nähe der Quelle w'' zwischen sehr großen positiven und auch negativen Werten schwankt und erst bei einem größeren Abstände lediglich positive Werte aufweist. Innerhalb des ersten Gebietes laufen also die Phasen zweiter Art φ'' auf die Quelle zu, während sie außerhalb dieses Gebietes nach der Wellenfront hin laufen, eine Folgerung, die wir nicht angenommen hätten, wenn wir uns nicht vorher unter (12) vergewissert hätten, daß eine Phase nicht aus der Quelle zu stammen braucht.

Mit Gleichung (3'), § 1, wird

$$\Phi = f(dr w) = i \log \frac{\sin \zeta}{r} + \text{const},$$

so daß, weil $\log z = \log |z| + i \operatorname{arctg} z''/z' + i 2 k \pi$
und

$$\sinh z = \sinh z' \cdot \cos z'' + i \cosh z' \cdot \sin z''$$

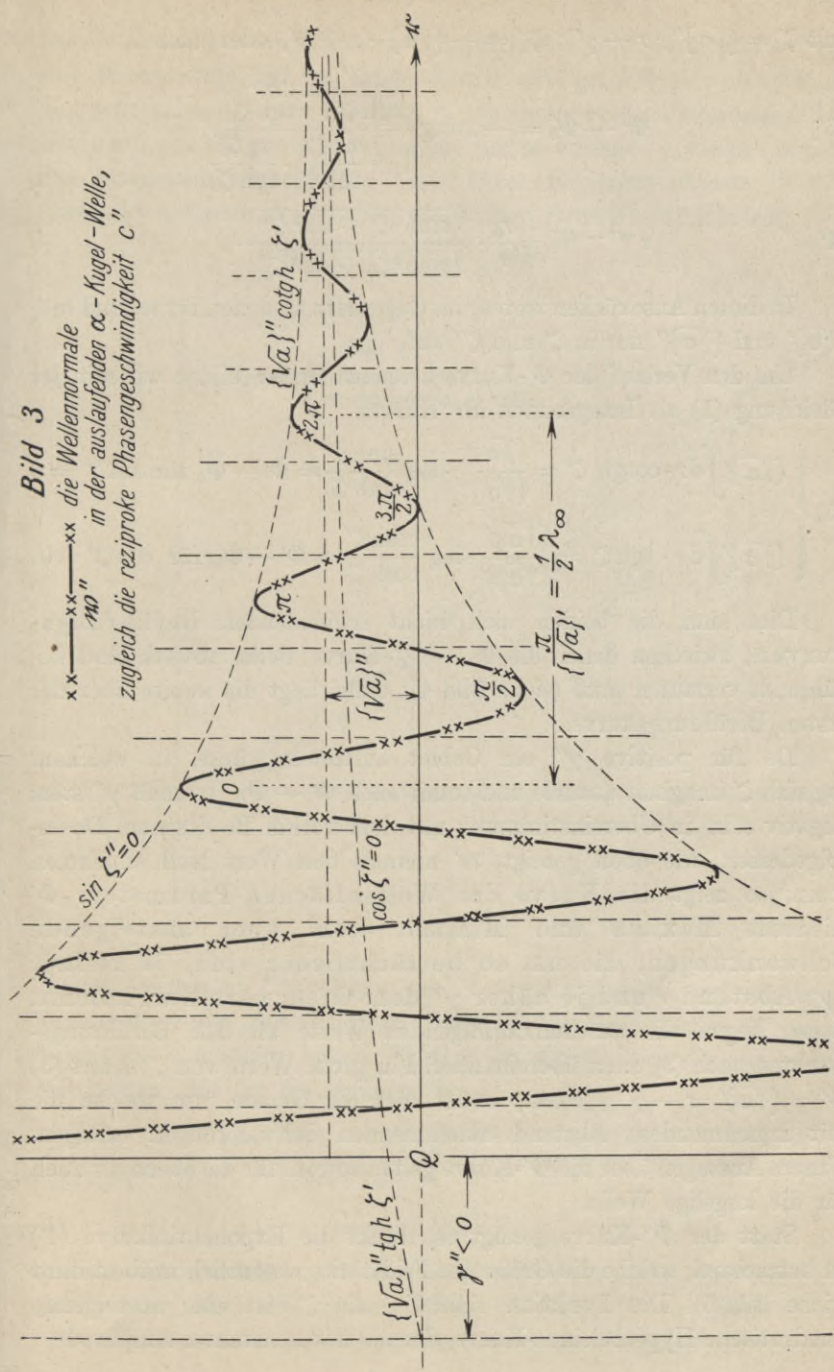
ist, wir für die Wellenflächen-Parameter haben:

$$(3) \quad \Phi' = - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \zeta''}{\operatorname{tgh} \zeta'} + \text{const},$$

$$(4) \quad \Phi'' = \log \left| \sqrt{\sinh^2 \zeta' + \sin^2 \zeta''} \right| / r + \text{const},$$

Bild 3

xx — xx — xx die Wellennormale
 140" in der auslaufenden α -Kugel-Welle,
 zugleich die reziproke Phasengeschwindigkeit c "



mit $\zeta' = \{\sqrt{a}\}' \cdot r - \gamma''$; $\zeta'' = -\{\sqrt{a}\}' \cdot r + \gamma'$, oder auch

$$(3') \quad \Phi' - \Phi_0 = -\arctg \frac{\frac{\operatorname{tg} \zeta''}{\operatorname{tgh} \zeta'} - \frac{\operatorname{tg} \zeta_0''}{\operatorname{tgh} \zeta_0'}}{1 + \frac{\operatorname{tg} \zeta''}{\operatorname{tgh} \zeta'} \cdot \frac{\operatorname{tg} \zeta_0''}{\operatorname{tgh} \zeta_0'}}$$

$$(4') \quad e^{\Phi'' - \Phi_0''} = \frac{r_0}{r} \cdot \frac{\sqrt{\sinh^2 \zeta' + \sin^2 \zeta''}}{\sqrt{\sinh^2 \zeta_0' + \sin^2 \zeta_0''}}$$

In diesen Ausdrücken treten, im Gegensatz zu denen für w' und w'' , $\{\sqrt{a}\}'$ und $\{\sqrt{a}\}''$ nur in ζ' und ζ'' auf.

Um den Verlauf der Φ' -Kurve kennenzulernen, bilden wir mit der Gleichung (1) als Integranden die Kurven

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{\sqrt{a}\}' \int dr \cdot \operatorname{cotgh} \zeta' = \frac{\{\sqrt{a}\}'}{\{\sqrt{a}\}''} \cdot \log \frac{\sinh \zeta'}{\sinh \zeta_0'} = \Phi' - \Phi_0' \text{ für } \sin \zeta'' = 0 \\ \{\sqrt{a}\}' \int dr \cdot \operatorname{tgh} \zeta' = \frac{\{\sqrt{a}\}'}{\{\sqrt{a}\}''} \cdot \log \frac{\cosh \zeta'}{\cosh \zeta_0'} = \Phi' - \Phi_0' \text{ für } \cos \zeta'' = 0. \end{array} \right.$$

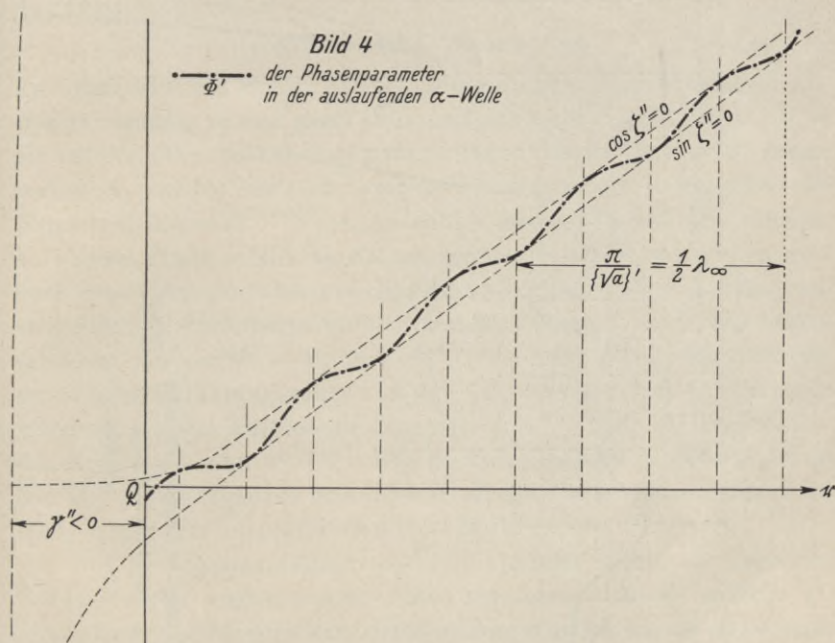
Dies sind die beiden sich nicht schneidenden Berührungskurven, zwischen denen die $\Phi' - \Phi_0'$ -Kurve, beide abwechselnd berührend, verlaufen muß (siehe Bild 4); dabei liegt die zweite über der ersten Berührungskurve.

Da für positive γ'' ein Gebiet auftreten würde, in welchem $\log \sinh \zeta'$ imaginär ausfielen und somit auch $\Phi' - \Phi_0'$, so muß γ'' stets negativ sein, in Übereinstimmung mit dem vorhin Bewiesenen. Da infolgedessen, wie oben gezeigt, w' niemals den Wert Null annehmen kann, so zeigt die Kurve des Wellenflächen-Parameters Φ' niemals Maxima und Minima, wohl aber ansteigende Schwankungen, die um so beträchtlicher sind, je kleiner der Abstand r und je näher γ'' dem Grenzwert Null kommt. Dabei liegen die aufeinanderfolgenden Werte an den Berührungspunkten nach (3) um π übereinander. Für große Werte von ζ' liefert (3) $\Phi' = \{\sqrt{a}\}' \cdot r - \gamma'' + \text{const}$; es ist dies die Gerade, um welche die mit zunehmendem Abstand abnehmenden Schwankungen erfolgen. Unsere Aussagen über die Φ' -Kurve gelten sowohl für die ebene als auch für die kugelige Welle.

Statt der Φ'' -Kurve genügt es, direkt die Exponentialkurve (4') zu betrachten, welche die Größe der Feldstärke wesentlich mitbestimmt (siehe Bild 5). Die Funktion $\sinh^2 \zeta' + \sin^2 \zeta''$ ist eine ansteigende quadratische Hyperbelsinus-Kurve, der die mit konstanter Amplitude 1

positiv schwankenden Werte $\sin^2 \zeta''$ aufgesetzt sind. Multipliziert man ihre Wurzelwerte mit $1/r$, so erhält man eine geschlängelte Kurve, die von sehr hohen Werten herabsteigt, um dann wieder anzusteigen. Das Minimum erreicht die Abszissenachse um so weniger, je kleiner negativ die Integrationskonstante γ'' ist. Diese Exponentialkurve $e^{\Phi'' - \Phi_0''}$ schwankt auf und ab zwischen den beiden Berührungslinien

$$\alpha \frac{\sinh \zeta'}{r} = S \text{ und } \alpha \frac{\cosh \zeta'}{r} = C,$$



die den Werten $\sin \zeta'' = 0$ bzw. $\cos \zeta'' = 0$ entsprechen und von denen letztere über der ersteren liegt. Diese beiden Grenzkurven S und C fallen von unendlich hohen Werten am Quellpunkt ab auf je ein Minimum, das für die S -Kurve bei

$$(6) \quad \{\sqrt{a}\}' \cdot r_S = \operatorname{tgh} \{ \{\sqrt{a}\}' \cdot r_S - \gamma'' \} \leq 1$$

liegt, und für die C -Kurve bei

$$(7) \quad \{\sqrt{a}\}' \cdot r_C = \operatorname{cotgh} \{ \{\sqrt{a}\}' \cdot r_C - \gamma'' \} \geq 1$$

erreicht wird, welches auch der Wert von γ'' sei. Die r_C -Werte sind stets größer, die r_S -Werte stets kleiner als $1/\{\sqrt{a}\}' = \bar{r}$; beide Werte nähern sich um so mehr diesem Grenz- und Mittelwert \bar{r} , je kleiner γ''

ist, wobei γ'' bis $-\infty$ laufen kann. Die Exponentialfunktion $e^{\Phi'' - \Phi_0''}$ hat also ein stärkstes Minimum im ungefähren Ab-

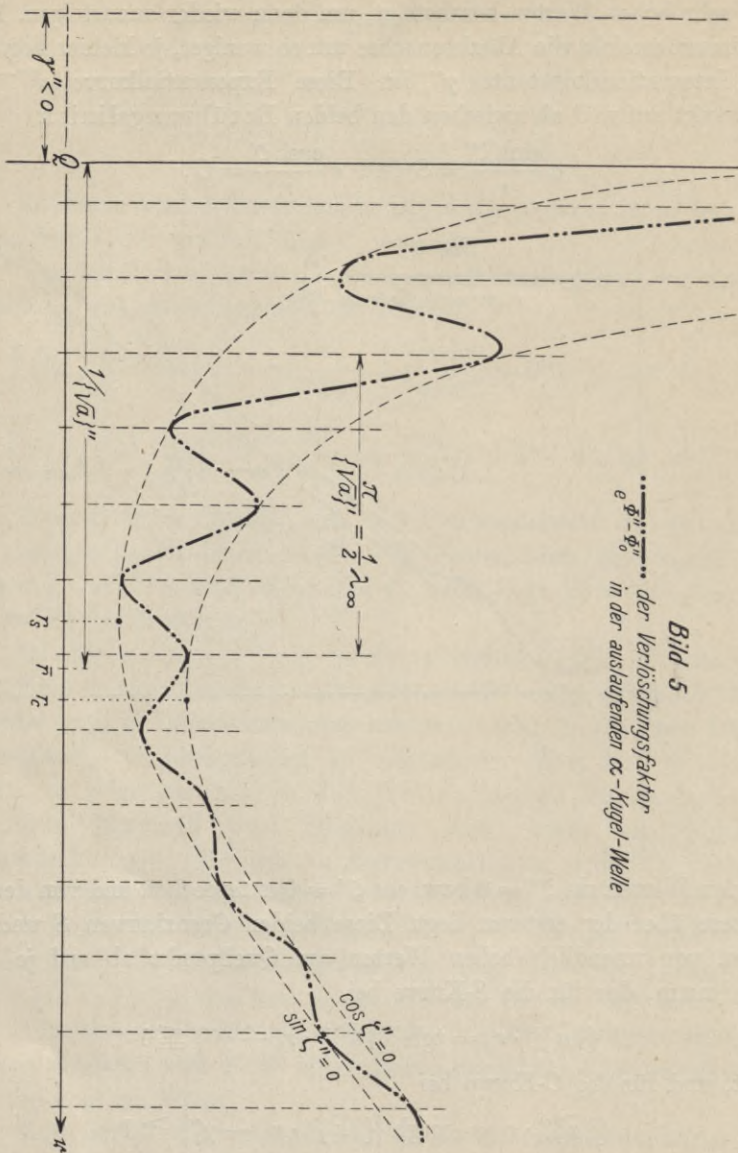


Bild 5
 der Verlöschungsfaktor
 $e^{\Phi'' - \Phi_0''}$
 in der auslaufenden α -Kugel-Welle

stand r_s mit dem ungefähren Betrage

$$\frac{\{|a\}'' \cdot r_0}{|\sinh^2 \zeta_0' + \sin^2 \zeta_0|} \cdot \cosh \{ \{|a\}'' r_s - \gamma'' \}$$

nach den Gleichungen (6) und (7), woraus hervorgeht, daß diese Funktion nie unter den Wert

$$\{\sqrt{a}\}'' \cdot r_0 : \sqrt{\sinh^2 \zeta'_0 + \sin^2 \zeta''_0}$$

herabsinken kann. Die Abstände aufeinanderfolgender oberer und unterer Berührungspunkte mit den beiden Grenzkurven, gemessen auf der Abszissenachse r sind, wie bei den w' - und w'' -Kurven, gleich und vom Betrage $= \frac{1}{8} \cdot \lambda_\infty$. Der Ordinaten-Abstand der beiden Grenzkurven S und C ist proportional

$$\{\cosh \zeta' - \sinh \zeta'\} : r = e^{-\zeta'/r}.$$

Er nimmt also von kleinen Werten in der Ferne mit abnehmendem Abstände r ständig zu und steigt stark und stärker im Gebiete ($0 < r < \bar{r}$) bis auf den Wert ∞ am Quellpunkte. Da in diesem Gebiete w'' raumperiodisch positive und auch negative Werte annimmt, so steigt hier die Exponentialkurve $e^{\Phi'' - \Phi_0''}$ steil an und ab, Maxima und Minima zeigend. Im ebenen Problem fällt der Faktor $1/r$ weg, infolgedessen gibt es zwar auch Schwankungen, aber zwischen zwei nach außen ohne Minimum ansteigenden Berührungskurven und ohne Maximinima. — An den beiden ortsfesten Kurven $\Phi' - \Phi_0'$ und $e^{\Phi'' - \Phi_0''}$ ist noch folgendes bemerkenswert. Jeder Berührungspunkt von $\Phi' - \Phi_0'$ an einer ihrer Grenzkurven hat genau dieselbe Abszisse wie derjenige von $e^{\Phi'' - \Phi_0''}$ an der entsprechenden Grenzkurve von $e^{\Phi'' - \Phi_0''}$. Die Phasengipfel von $\Phi' - \Phi_0'$ und die Intensitätsgipfel von $e^{\Phi'' - \Phi_0''}$ liegen also genau übereinander; das gleiche gilt von den Mulden.

Daß die Exponentialkurve $e^{\Phi'' - \Phi_0''}$ jenseits \bar{r} mit abnehmenden Schwankungen wieder ansteigt, läßt vermuten, daß die α -Welle als auslaufende nur bei schwindender Erregung möglich ist, als einlaufende nur bei schwellender Erregung. In der Tat finden wir diese Bedingungen in der ersten Untergruppe unter (12a), dagegen in der Untergruppe (12b) nur für die einlaufende Welle, mag die Erregung schwellend oder schwindend sein. Das gilt auch für $\nu' = 0$, also auch bei reiner Exponentialerregung; die Untergruppe (12b) verlangt dann aber, daß die Erregung anschwellen. Daran erkennen wir, daß die Schlängelungen nicht lediglich durch die Periodizität in der Erregung bedingt sind. — Nach der Molekulartheorie, Gruppe (12c), ist bei reiner Sinus-Erregung ($\nu'' = 0$) oder reiner Exponential-Erregung ($\nu' = 0$; $\varepsilon'' = 0 = \mu''$) eine auslaufende elektromagnetische α -Welle unmöglich, wenn die ersten Erregungsbeiwerte ε' und μ' positiv sind; dann fällt nämlich α'' negativ aus. Natürlich gelten unsere Beziehungen nicht mehr in der Nähe

der Wellenfront, wo in Wirklichkeit die Intensität fast unmittelbar auf Null herabsinkt, wobei aber auch noch der Wellenskalar bzw. der Wellenvektor eine Rolle spielt, eine Rolle, die in vorliegender Abhandlung noch nicht in Betracht gezogen ist, die aber unsere Ergebnisse nicht wesentlich beeinflusst.

In den schematischen Bildern 2—5 sind die Gesetzmäßigkeiten, denen die α -Welle unterliegt, in Form von Kurven niedergelegt. Es sind im Gegensatz zu denen für die β -Welle geschlängelte Kurven. Die Schlängelungen sind am größten an der Quelle ($r=0$), dabei aber endlich, weil, wie oben bewiesen, $\gamma'' \neq 0$ ist.

Die Ausbreitung in diesem recht verwickelten und seltsam anmutenden Falle geht nun in graphischer Darstellung folgendermaßen vor sich. Von der Quelle läuft eine räumliche Sinuskurve aus, deren positive Köpfe an der Exponentialkurve $e^{\Phi'' - \Phi_0''}$ entlanggleiten, gleichzeitig die negativen Köpfe an dem Spiegelbilde der Exponentialkurve unterhalb der Abszissenachse. Diese beiden geschlängelten Leitkurven liegen aber nur bei permanenter Erregung ($\nu'' = 0$) fest. Bei Schwellung der Erregung entfernen sich die in sich starren Linien von der Abszissenachse weg, bei Schwund bewegen sie sich auf diese zu; beides gemäß dem Faktor $e^{-\nu'' t}$. Die Amplituden der Sinuskurve, an ihnen entlang gleitend, hüpfen somit auf und nieder, indem sie aus zweifachem Grunde ab- und zunehmen, einmal durch die Bewegung der Leitkurven, dann durch deren geschlängelte Form. Auch die Geschwindigkeiten der beiden Phasen sind nicht konstant. Die Geschwindigkeit der Phase φ' hat hinsichtlich ζ'' eine räumliche Periode von der Länge $\frac{1}{2} \lambda_\infty$, die wandernde Sinuskurve verschiebt sich also nicht starr. Wegen der starken Veränderlichkeit der Momentanwerte der Feldgröße Δ kann man von einer Wellenlänge im allgemeinen nicht reden. Es gibt nur eine für den Dauerwert $\Delta = 0$. Sie ist zu berechnen aus $\cos \{ \nu' t - \Phi' + \arctg \delta'' / \delta' \} = 0$, woraus ersichtlich, daß sie selbst im Falle $\delta'' / \delta' = \text{const}$ keine Konstante ist. Auch die Geschwindigkeit der Phase φ'' , die durch die Bewegung der Exponentialkurve hervorgerufen wird und parallel oder antiparallel r gerichtet ist, hat eine Raumperiode $\frac{1}{2} \lambda_\infty$. Zu alledem kommt bei der kugeligen Welle noch, daß die Köpfe der ungleichmäßig wandernden Sinuskurve sich durch ein räumlich festliegendes Minimum hindurchbewegen müssen, das bei r_s liegt, um jenseits sich wieder zu vergrößern, aber mit abnehmenden Schwankungen. So kommt es, daß über die ungleichmäßige Grundbewegung der Dauerwerte nach außen sich eine ebenfalls ungleichmäßige Bewegung der Zwischenwerte über-

lagert, die jenseits r_S nach außen, diesseits r_S aber nach innen gerichtet ist.

Maxima und Minima der Leitkurve $e^{\Phi'' - \Phi_0''}$ gibt es nur bei der Kugelwelle im Gebiete ($0 < r < \bar{r}$).

Man lasse sich, nebenher bemerkt, nicht in die Versuchung führen, den Faktor $1/r$ in dem Ausdruck für $e^{\Phi'' - \Phi_0''}$ und $\Phi'' - \Phi_0''$ für den Amplitudenfaktor δ zu beanspruchen. Bei der gedämpften Welle oder bei der Erfüllung des Wellenkohärenz-Satzes würde der Fehler offenbar werden. Die Raumverteilung des Wellenskalars δ geschieht nach anderen Gesetzen, die verschieden sind je nach der Natur der Welle. Wir kommen darauf später zurück.

Was den Mittelwert \bar{r} zwischen r_S und r_C anbelangt, so hat er den Wert

$$\bar{r} = \frac{1}{\{\sqrt{a}\}''} = \frac{\lambda_\infty}{2\pi} \cdot \frac{\{\sqrt{a}\}'}{\{\sqrt{a}\}''}.$$

Somit ist in der ersten Untergruppe (12a), § 1:

$$(8a) \quad \bar{r} = \frac{\lambda_\infty}{|A|}$$

und in der zweiten Untergruppe (12b), § 1:

$$(8b) \quad \bar{r} = \frac{\lambda_\infty}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{4\pi^2 + A^2} + A}{\sqrt{4\pi^2 + A^2} - A}}.$$

Als auslaufende kann die α -Welle der ersten Untergruppe ein Dekrement haben, das ebensowohl kleiner als auch größer als 1 ist. In der zweiten Untergruppe ist r stets größer als $\lambda_\infty/2\pi$ bei Schwund und stets kleiner als $\lambda_\infty/2\pi$ bei Schwellung der Erregung.

Die α -Welle verliert die Schlängelungen in den Φ' - und Φ'' -Kurven in dem Maße, wie $\{\sqrt{a}\}'$ gegen Null geht. Dann wird $\zeta'' = \text{const}$, so daß w' und w'' aperiodisch ausfallen. Das tritt ein, wenn $a'' = 0$; $a' < 0$ und die Welle eine auslaufende ist.

4. Die γ -Welle

Im Falle γ , wo $a = 0$, was in der idealen Flüssigkeit und im elastisch-starren Körper sowie im elektrisch erregungslosen Körper der Grenzfall ist, sind die Lösungen der Grundgleichung (2), § 1, andere als (3) bzw. (4) daselbst.

Für die ebene Welle ergibt sich aus

$$\frac{dw_x}{dx} - i w_x^2 = 0$$

$$(1) \quad w_x = \frac{i}{\gamma + x}$$

und für die kugelige Welle aus

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 w_r) - i w_r^2 = 0$$

$$(2) \quad w_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{i}{\gamma \cdot r - 1},$$

wenn γ die Integrationskonstante. Wenn man die Ausgangsgleichungen in ihre reellen und imaginären Bestandteile zerlegt, findet man, daß überall $w' = 0$ sowie

$$\frac{dw_x''}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dr} (r^2 w_r'') < 0$$

sein müssen. Ferner nähern sich w_x'' und w_r'' für sehr große r dem Werte Null, in Übereinstimmung mit Gleichung (7), § 1.

Eine Wellennormale erster Art gibt es also in der γ -Welle nicht. Die Phasengeschwindigkeit c' ist somit unendlich groß. Die Wellennormale zweiter Art fällt in der ebenen Welle von hohen positiven Werten monoton auf Null herab, wogegen sie in der kugeligen Welle von unendlich negativen Werten zu positiven übergeht und dann erst gegen Null abfällt.

Daß die von einer oszillierenden Wellen-Quelle in reinem Wasser ($a = 0$) auslaufende kugelige Welle mit $[w'w''] = 0$ einerseits, andererseits die Oberflächenwelle mit $(w'w'') = 0$, die doch von der erstgenannten so verschieden ist, im Grunde genau demselben Grundgesetz $w^2 + i \operatorname{div} w = 0$ für die Wellenflächensysteme gehorchen, ist ohne die wahre Wellentheorie nicht zu begreifen. Vor YOUNGS und FRESNELS Zeit hatte man in der Tat beide Wellen für wesensverschieden gehalten¹⁾, und später auch nur aus der Natur des Mittels auf Wesensgleichheit der genannten verschiedenen Wellen geschlossen.

5. Der Einfluß der Integrationskonstante γ

Bisher hatten wir die Integrationskonstante γ als gegeben betrachtet und dabei erfahren, daß γ'' nur negativ sein darf. Jetzt denken wir uns γ variiert. Nach (5), § 1, heißt das: Wir variieren bei gegebenem

¹⁾ H. LOVE, Lehrbuch der Elastizität. Leipzig 1907 (Teubner). S. 9.

Mittel und gegebener Wellenform w_0 an der Kugelfläche (r_0). Betrachten wir den von dieser Fläche und der Kugelfläche ($r = \infty$) eingeschlossenen Raum, so schließen wir aus (10a), § 1, daß im Falle α , also wenn $\{\sqrt{a}\}''$ positiv ist, für jede α -Welle die Wellenflächen-Lagerung innerhalb einer Oberfläche bedingt ist von derjenigen an dieser Oberfläche. Das gleiche gilt für den Grenzfall, wenn α den Wert Null annimmt. Wellenlänge, Geschwindigkeit, Verlöschung, Energieniveaus und Strahlung an einem Ort sind dann also abhängig von der Lagerung der Wellenflächen an der Wellen-Quelle; sie können dann also an demselben Ort ganz verschieden ausfallen je nach dem Zustand an der Wellen-Quelle. Ein solcher Einfluß ist der bisherigen Vorstellung ein völlig Neues; denn nach ihr liegen die Wellenflächen unter allen Umständen gleich abständig und fest. Eine Folge dieses Einflusses ist, daß eben diese Oberflächenwerte w_0 , wenn wir sie variieren — entsprechend einem anderen Zustand der Quelle —, die Werte von w und Φ in der Welle schwanken lassen, und zwar mit periodischem Anteil. Ändert sich dadurch γ' , so verschieben sich die Schlängelungen von Φ' und Φ'' zwischen ihren Berührungskurven; ändert sich dadurch γ'' , dann verschieben sich die Berührungskurven parallel r .

Im Falle β , also wenn $\{\sqrt{a}\}'' \leq 0$, gibt es hingegen keinen Einfluß der Oberflächenwerte w_0 . Ist insbesondere $(w_0 r_0) = -i$, dann hat man nach (5), § 1, $\gamma'' = \{\sqrt{a}\}'' \cdot r_0$. Man sieht, daß dieser Wert von w_0 nicht unter α fallen kann, weil mit ihm γ'' nicht negativ ausfiele. Im Falle α sind also die Oberflächenwerte w_0 nicht völlig beliebig. Zu beachten ist dabei, daß für den Eintritt der Fälle α , β und γ sowie für den Radius \bar{r} der Quellen-Sphäre die Konstante γ , also der Anfangszustand, ohne Einfluß ist.

6. Kritik der EULERSchen Lösung

Es sei Mathematikern zur Lösung vorgelegt die partielle Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{\partial^2(qU)}{\partial p^2} - \omega^2 \frac{\partial^2(qU)}{\partial q^2} = 0,$$

worin U die gesuchte Funktion, ω eine reelle Konstante, p und q irgendzwei unabhängige Veränderliche sein sollen, unter den Bedingungen, daß qU und $q \partial U / \partial p$ für $p = 0$ in gegebene Funktionen $f(q)$ und $F(q)$ übergehen. Auf Grund der EULERSchen Partiallösung $qU = \Psi(q \pm \omega p)$,

worin Ψ eine beliebige reguläre Funktion, werden sie als Lösung angegeben¹⁾:

$$(3) \quad U = \frac{1}{q} \left\{ \frac{1}{2} [f(q + \omega p) + f(q - \omega p)] + \frac{1}{2\omega} \int_{q - \omega p}^{q + \omega p} F(\xi) \cdot d\xi \right\}.$$

Im „ebenen Problem“ ist (qU) durch U zu ersetzen.

Die Physiker nun haben diese Lösung für ihre „Wellengleichung“

$$(1) \quad \ddot{U} - \omega^2 \nabla^2 U = 0$$

übernommen, sofern diese auf die Form (2) führt und die beigegebenen Bedingungen sich mit den eben angegebenen identifizieren lassen, und wenigstens noch die Methode, sofern das nicht der Fall ist. Sich von der Selbstverständlichkeit gefangen nehmen lassend, daß, wenn man p mit der Zeit und q mit dem Abstand eines Raumpunktes von einem Bezugspunkt identifiziert, ω die Abmessung einer Geschwindigkeit annimmt, erlagen sie alle hemmungslos der Vorstellung, daß die Gleichung (3) mit den Argumenten $q + \omega p$ und $q - \omega p$ die kugelsymmetrische Lösung ihrer Wellengleichung (1) sei, mit dem Anfangszustand:

$$U_0 = \frac{1}{q} \cdot f(q); \quad \dot{U}_0 = \frac{1}{q} \cdot F(q).$$

Sie deuteten und deuten die abstrakte Lösung (3) wellensinnig aus, nämlich so, daß die gegeneinander laufenden Phasen $q + \omega p$ und $q - \omega p$ existieren, die sich mit der konstanten und vom Anfangszustand unabhängigen Geschwindigkeit ω nach außen bzw. nach innen fortpflanzen, daß mithin der Parameter Φ im Wellenflächen-System eine lineare Funktion des Abstandes sei. Diese Aussage ist in Wahrheit eine naive Ausdeutung, die bei völligem Mangel an Einsicht in das Problem der Ausbreitung sich ganz von selbst einstellt, wenn eine Ausbreitung auf die Form (2) zurückgeführt werden kann, die ihrerseits nur aus der Grundgleichung (1) entwickelbar ist [1]. Es kam den Physikern gar nicht zu Bewußtsein — obwohl die Anschau einer mehrfach gekräuselten Wasserfläche genügt hätte —, daß der Welle ein besonderes Wesen eigne, welches zuerst zu erforschen sei. Man wäre dann auf die Tatsache gestoßen, daß es in der Welle Flächen-Systeme von bestimmter Eigengesetzlichkeit gibt und daß die Gesetze der Ausbreitung aus diesen mit Notwendigkeit folgen müßten, Gesetze, die auch bestehen

¹⁾ Z. B. RIEMANN-WEBER, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Braunschweig 1901 (Vieweg & Sohn). Bd. II, S. 213 und S. 304.

müssen, wenn die Wellenzustandsgleichung nicht von der beschränkten Form (1) ist. Ja, man hat die EULERSche Formel nicht einmal geprüft; denn mit ihr läßt sich weder die Totalreflexion noch die gedämpfte Sinuswelle darstellen. Die Lösung (3) mit ihrer zufälligen Ausdeutbarkeit hat den Antrieb zu einer unvoreingenommenen, theoretischen Untersuchung der allgemeinen Ausbreitung geradezu verhindert. Befangen in dem reinen Feld-Begriff und bestärkt durch das Verfahren, das von Gleichung (2) zur ausdeutbaren Lösung (3) geführt hatte, verstieg man sich vielmehr zu der Behauptung, daß Wellen Sinnestäuschungen seien, daß der allgemeine Begriff der Welle mitsamt ihren möglichen Verästelungen aufgehe in den allgemeinen Begriff des mit der konstanten Geschwindigkeit ω sich ausbreitenden Feldes! Es war nur eine logische Folgerung hieraus, daß Wellen wie Felder mathematisch beliebig zerlegbar seien. Statt also ein offenbar im Untergrunde wirkendes Wellen-Prinzip aufzuspüren und mit ihm das Gleichungs-System der Welle vorgelegten Feldgleichungen zu entlocken, aus welchem Wellenlänge, Geschwindigkeit usw. gesetzmäßig und annahmefrei sich ergeben, wird im ohne Anstrengung erlangten Besitz der übernommenen Scheinlösung (3) als selbstverständlich gedacht, daß es nur ein System der Wellenflächen $\Phi = \text{const}$ gebe, daß es linear sei, die Φ also bei graphischer Darstellung in gleichen Abständen lägen, woraus eine konstante Geschwindigkeit sich ergebe, die gleich sei der Frontgeschwindigkeit, und daß der Anfangszustand sowie die Form der Erregung in der Quelle keine Rolle spiele. Wir aber ersehen an unserem vorliegenden, streng gelösten Beispiel, dessen Lösung sich auf die von uns entwickelte wahre Wellen-Theorie stützt, daß ein Argument $\chi(t) - \omega \cdot \Psi(r)$ schlechthin noch nicht mathematischer Ausdruck für eine Welle ist. Wir wissen, daß es zwei Systeme von Wellenflächen gibt. Wir wissen, daß zu dem „Anfangszustande“ auch die anfängliche Lage der Wellenflächen gehört. Die Ausdeutung der Gleichung (3) als Lösung der Wellengleichung mißleitete schließlich dazu, ebene und kugelige Wellen als umkehrbar anzusehen, so daß — den Gedanken der Zusammensetzbarkeit der Wellen aus elementaren Kugelwellen aufgreifend — jede Welle umkehrbar sei, das soll heißen: Eine Welle, in sich allseitig zurückgeworfen, könne durch die gleiche Wellenflächen-Lagerung mit der gleichen Geschwindigkeit entgegengerichtet laufen. Unsere strenge Lösung erweist auch dies als einen Irrtum. Sie zeigt übrigens auch an der bloßgelegten Inkonzanz der Wellengeschwindig-

keiten, daß es unmöglich ist, veränderliche Felder durch Summierung wirklicher elementarer Kugelwellen aufzubauen [2].

Wir können nun unsere Kritik der EULERSchen Lösung mit dem hoffentlich nicht mehr seltsam klingenden Satz beschließen: Ausgerechnet dann, wenn p die Zeit und q den Abstand eines Raumpunktes vom Bezugspunkt bezeichnen soll, wenn Gleichung (2) also eine Bedingung für ein raumzeitliches Geschehnis in einem Felde sein soll, das wir als Welle bezeichnen, ist Gleichung (3) **nicht** die Lösung von Gleichung (2), und zwar deshalb nicht, weil in (3) das Wesen der Welle nicht zum Ausdruck gebracht ist. Für uns, die wir im Besitz der Grundzüge der Wellen-Kinematik sind, ist Gleichung (2) nichts weiter als eine physikalische Bedingung, die einer beliebigen Überlagerung von konzentrischen Kugelwellen beliebiger Form, aber ein und derselben Gattung aufgedrückt ist.

Bei der Ermittlung der Wellenphasen in unserer Lösung sind wir nicht von dieser Bedingung (2) ausgegangen, sondern von der Gleichung (2), § 1, welche die Auswirkung des Interferenz-Prinzips auf die Phasen darstellt [1].

7. Schlußworte

Je nach dem Schwall oder Schwund sowie der Frequenz der Erregung in der Wellen-Quelle und den Eigenschaften des Wellenträgers sind zu unserer Überraschung zwei Formen von ebenen und kugeligen Wellen möglich: die α -Welle, falls $\{\sqrt{a}\}'' > 0$, und die β -Welle, falls $\{\sqrt{a}\}'' \leq 0$ ist; dazu gesellt sich noch im Grenzfall ($a = 0$) die γ -Welle. Die Form der α -Welle ist so verschieden von den beiden anderen, daß man schon daraus auf das Vorzeichen von $\{\sqrt{a}\}''$ schließen kann. Diese Form zeigt nämlich raumperiodische Schwankungen in der Lagerungsdichte der Φ' - und Φ'' -Flächen; dieselbe ist also entgegen der heutigen Meinung abhängig von der Wellenform. Infolgedessen schwanken nicht nur die beiden Phasengeschwindigkeiten c' und c'' raumperiodisch, sondern auch die Funktion $e^{\Phi'' - \Phi'}$, welche die Feldstärke wesentlich mitbestimmt. Diese Schwankungen rühren her von dem Glied $i \operatorname{div} w$ der Ausgangsgleichung (2), § 1, in Verbindung mit den Eigenschaften der Quelle und des Mittels. Je größer daher die mittlere Krümmung der Wellenflächen und je stärker die räumliche Veränderlichkeit ihrer Gradienten, um so stärker die von diesem Glied hervorgerufenen räumlichen Schwankungen der Φ' - und Φ'' -Werte. In unmittelbarer Nähe

der Quellen oder in Gebieten sehr starker Beugung oder sehr starker Krümmung der Führungsfläche bei geführten Wellen haben wir demnach Riefelungen in der graphischen Darstellung der w' - und w'' -Verteilung zu erwarten. In der Welle rufen sie den Eindruck von Interferenzen hervor, sind aber keine. Dasselbe Glied $i \operatorname{div} w$ vermag dagegen in der β - und γ -Welle keine Riefelungen zu rechtfertigen. Noch überraschender jedoch ist die Auswirkung des Interferenz-Prinzips, daß in unmittelbarer Umgebung der konzentrierten Quelle Q die räumlich schwankenden Feldwerte durch ein vom Anfangszustande an der Quelle unabhängiges Minimum (bei \bar{r}) hindurchgehen. Entsprechendes gilt auch für die Energie-Bewegung, die zeitweilig auch zurückflutet. Wo die Feldstärke klein, ist auch die Strahlung klein; eine quellenfreie Strahlung liegt ja nicht vor. Da außerhalb \bar{r} die Schwankungen beträchtlich geringer sind, so sind wir berechtigt, das Gebiet zwischen Q und \bar{r} als Quellen-Sphäre zu bezeichnen. In ihm finden wir das Wellenfeld zerlegt in Schalen von der konstanten Dicke $1/4 \cdot \lambda_\infty$, getrennt voneinander durch tiefe Furchen. Schalenförmige Gebiete sehr hoher Feldstärke wechseln ab mit solchen sehr niedriger Feldstärke. Die Energie verläßt nicht ungehindert und nicht gleichmäßig abfallend diese Sphäre.

Wo man daher in der Natur auf Schichtungen stößt, die eine nicht-stationäre Energie-Quelle oder -Senke in ihrer nächsten Umgebung hervorruft oder hervorgerufen hat, ist der Verdacht angebracht, daß Wellen-Schalen vorliegen, sofern Interferenzen, also mehrere Wellenquellen, ausgeschlossen erscheinen. Hier sind zu nennen die Druck-Unterschiede in der Nähe eines Schallgebers mit enger Öffnung im freien Raume; man beobachtet an bestimmten Stellen des Raumes Überdrucke und an anderen Stellen Unterdrucke. — Von ganz besonderer Bedeutung sind die überraschenden und merkwürdigen Auswirkungen des Interferenz-Prinzips in der Physik der Atome und Molekeln, weil hier das Geschehen zweifellos von Wellen beherrscht wird und weil hier die Beschaffenheit der Welle in der unmittelbaren Nähe sehr konzentrierter Wellen-Quellen zu untersuchen und in Rechnung zu ziehen ist. Hier, wo die Divergenz des Wellennormalenpaares sehr stark von Null verschieden ist, ist die α -Welle mit ihren sehr starken Schwankungen als auslaufende elektromagnetische Welle im reinen Äther möglich, in den Zeiten, wo die Kerne gedämpft schwingende Wellen-Quellen sind. Elektronen innerhalb der Quellen-Sphäre sind in den Furchen geringer Feldstärke nur schwachen Antriebskräften aus-

gesetzt, befinden sich daher in verhältnismäßig stabilen Gebieten. Das ganze, tief geriefelte Feld des schwingenden Kerns sinkt mit der Zeit in sich zusammen, wird aber wahrscheinlich immer wieder durch erneute Anregung des Kerns erneuert. Verfasser dieses ist überzeugt, daß hier in den sehr stark ausgeprägten Wellen-Schalen innerhalb der Quellen-Sphäre die Wurzel des Quantenhaften entblößt ist; doch genügt die vorliegende einfache Wellenaufgabe nicht, um atomtheoretische Gedanken aussichtsreich zu verfolgen. Auch soll das neuerworbene Gebiet sicherer Erkenntnis abgegrenzt bleiben gegen das Gebiet, wo heute noch fast freies Feld für Spekulationen ist. Wenn die Vermutung Wahrheit ist, dann sind Quanten nichts Körperliches, nichts Energetisches, sondern rein Wellenkinematisches, also Apriorisches.

Die völlig neuartigen Ergebnisse, zu denen uns die wahre Darstellung der ebenen und kugeligen Welle geführt hat, Fälle, in denen wir die Hauptgleichung (2), § 1, streng integrieren konnten, wird man zweifellos in Fällen beliebig geformter Wellenflächen verallgemeinert wiederfinden: Wir werden neben der radialen Riefelung im Relief der Φ' - und Φ'' - Werte auch auf azimutale Riefelung stoßen.

Wir haben bis jetzt nur die Funktionen Φ' und Φ'' ermittelt. Die Abhängigkeit des Wellenskalars bzw. des Wellenvektors vom Abstände r ist durch ganz andere Gesetze gegeben, die von der Natur der Welle bedingt sind. Darauf können wir erst später eingehen. Dann erst kennen wir die physikalische Feldstärke in der Welle.

Wir hatten früher, in der Abhandlung I, aus praktischen Gründen die Planwelle als eine idealisierte Welle definiert, in welcher das Wellennormalenpaar sowie der Wellenskalar bzw. der Wellenvektor als konstant angesehen sind [1]. Wenn die Planwelle einfach ist ($[\mathfrak{w}' \mathfrak{w}''] = 0$), dann haben wir die gewöhnliche ebene Welle vor uns. Sehen wir uns nun die strenge Lösung der Grundgleichung (2), § 1, für die ebene Welle an, das ist Gleichung (4) daselbst, dann erkennen wir, daß unsere Definition der Planwelle nicht überall zulässig ist. Auch in der ebenen Welle, sofern sie eine α -Welle ist, gibt es Schwankungen der Geschwindigkeit beider Phasen, Schwankungen, die von hohen Beträgen ohne Maxima an der Quelle zu verschwindenden in großem Abstände zurückgehen. Unser Planwellen-Ausdruck ist also für α -Wellen nur in Bereichen gültig, die weitab von Quelle und starken Beugungsgebieten liegen.

Weil die Geschwindigkeiten c' und c'' nicht konstant sind und außerdem vielfach ein Zeichenwechsel von v'' mit einem Umschlag der α -Wellenform in die β -Wellenform und umgekehrt verbunden ist, so

ist es — selbst wenn die Zusammensetzung einer wirklichen Welle, die aus einer ansteigenden, permanenten und dann absteigenden Erregung stammt, aus drei Planwellenstücken erlaubt ist [4] —, unmöglich, diese Approximation auf ausgesprochene Kugelwellen auszudehnen.

Schließlich lehrt unsere vorliegende annahmenfreie und strenge Untersuchung als Ausfluß der allgemeinen Gleichung (14), § 4 der Abhandlung III, in Verbindung mit einer früheren [5], daß Streckenmessungen durch wellenübertragene Zeitsignale, allgemein und grundsätzlich betrachtet, unmöglich sind, selbst nicht mit Frontgeschwindigkeiten in homogenen Mitteln; denn auch diese können durch fremde Kraftfelder inkonstant ausfallen, so daß die zu dem Zweck notwendige Linearität zwischen Zeit und Weg nicht besteht.

Literatur

1. Die Entwicklung des Wellen-Begriffes, III. Gerl. Beitr. z. Geoph., 1930, Bd. 25, S. 199.
 2. Desgleichen, II. Ebenda, 1929, Bd. 24, S. 309.
 3. Desgleichen, I. Ebenda, 1927, Bd. 18, S. 398.
 4. Analyse der Planwelle usw. Ebenda, 1928, Bd. 20, S. 123.
 5. Die Front- und Rückengeschwindigkeit von Verzerrungswellen in festen, schweren Körpern. Ebenda, 1926, Bd. 15, S. 219.
-

Die erste Bewegung bei einem Erdbeben.

Von

M. Hasegawa, Kyoto.

(Mit 9 Figuren.)

Zusammenfassung: Die Quadrantenverteilung des Zuges und Stoßes der ersten Bewegung bei einem Erdbeben nach T. SHIDA läßt uns eine Voraussetzung über den Bruch im Innern des Materials machen, die lautet: Ein Innenbruch rührt von einem Scherungsdruck in einer Ebene her, und die Bruchbewegung ist nur von diesem Scherungsdruck bedingt, unabhängig von den da herrschenden anderen Innendrucken. Es wird die theoretische Verteilung der ersten Bewegung der P und S bei einem solchen Scherungsbruch in einem Punkt abgeleitet. Diese mathematische Behandlung bestimmt zugleich die wahrscheinliche Richtung der Fortpflanzung des Bruches im Hypozentrum. Die Verteilung der ersten Bewegung ist von dem Vorgang des Bruches abhängig. Wenn die Brüche in allen Punkten im Hypozentralgebiet, dieselbe Richtung haben, dann verteilt sich die erste Bewegung in erster Annäherung gleich wie beim Punktbruch, obwohl das Amplitudenverhältnis mehr oder minder gestört wird.

Stoß und Zug der ersten Bruchbewegung in einem Azimut entsprechen Stoß und Zug der ersten P -Welle in entfernten Stationen in diesem Azimut, wie man aus dem Tangobeben sieht. Aus dieser Beziehung wird theoretisch geschlossen, daß die Amplitude und Zeitdauer der ersten Bewegung im Bebediagramm nicht das Maßgebende für die erste Bruchbewegung sind, sondern daß sie unmittelbar von dem Bruchvorgang bedingt sind.

Der Erdbebenbruch (abgesehen von verhältnismäßig tiefen Erdbeben) scheint die Tendenz zu haben, sich bei horizontalem Scherungsdruck längs einer vertikalen Ebene auszubreiten. Es wird auch die Verteilung der ersten Bewegung bei geneigter Orientierung des Bruches untersucht.

Zum Schluß wird noch auf einige Probleme bezüglich der Einsturz- und Explosionsbeben aufmerksam gemacht.

Seit T. SHIDA über die Verteilung der ersten Bewegung eines Erdbebens eine systematische Untersuchung ausgeführt und in den Jahren 1917 und 1918 seine Ansicht über die Vorgänge im Hypozentrum beim Erdbeben in Vorträgen mitgeteilt hat, wurde diese Methode als wichtiges Hilfsmittel für die Erforschung der verborgenen Ursachen der Erdbeben angenommen und in Japan von verschiedenen Forschern wiederholt. Darüber kann man eine umfassende Literaturzusammenstellung in „A Historical Sketch of the Development of Seismology in Japan“ von T. TERADA und T. MATSUZAWA¹⁾ finden.

Die mathematische Behandlung dieses Problems verdankt man erst H. NAKANO²⁾, der die STOKESSche Theorie (über die Fortpflanzung der mechanischen Störungen im Innern eines elastischen Körpers) auf die Fälle der verschiedenen Kraftkerne angewandt hat. Solche theoretische Ergebnisse müssen mit dem Beobachtungsmaterial bei Erdbeben durch die dynamische Betrachtung über den Vorgang der unterirdischen Änderungen, die die Erdbebenwellen hervorrufen, verbunden werden.

Es scheint, daß SHIDAS Meinung durch die Erfahrung bei den Erdbeben in den letzten Jahren bestätigt wird. Da sein erwähnter Vortrag nicht veröffentlicht wurde, will ich hier zuerst kurz den Inhalt angeben und noch auf Grund der gesamten bisherigen Untersuchungen eine allgemeine Behandlung der Beziehungen zwischen Natur und Vorgang des Erdbebenbruches und der Verteilung der Erstabewegung versuchen.

1. SHIDAS Arbeit und ihre Bedeutung.

In seinem letzten Vortrag hat T. SHIDA zwei Beispiele von Erdbeben behandelt. Das eine Beben war am 18. V. 1917 im mittleren Teil von Japan (Fig. 1). Bei diesem Beispiel zeigt sich folgendes:

- I. Die ersten Bewegungen erfolgen in der vertikalen Ebene durch Epizentrum und Beobachtungsstation.
- II. Die ersten Bewegungen erfolgen bei gewissen Stationen in der Richtung zum Epizentrum hin (Zugbewegung), während sie bei anderen Stationen in der Richtung vom Herd aus erfolgen (Stoßbewegung).
- III. Zug- und Stoßgebiete verteilen sich auf die Quadranten, die durch zwei aufeinander senkrecht stehende Gerade durch das Epizentrum gebildet werden, und zwar finden in gegenüberliegenden Quadranten gleich gerichtete Bewegungen statt.

Die Tatsachen I und II sind schon früher beobachtet worden. B. GUTENBERG³⁾ hat auch in „Die Mitteleuropäischen Beben“ ausführlich dieses Problem untersucht, aber die Verteilung der Zug- und Stoßbewegung in diesem Falle ist in einer einfachen Form nicht aufgetreten.

Als zweites Beispiel behandelte T. SHIDA ein kleines Beben vom 26. XI. 1916, dessen Epizentrum im japanischen Mittelmeer gelegen ist. Bei diesem Beben sind die ersten Bewegungen, die bis in 300 km Epizentralentfernung verfolgt werden konnten, durchweg in allen Azimuten Zugbewegungen.

Dieser zweite Typus eines Erdbebens findet sich noch besser ausgebildet bei dem am nächsten Tage folgenden Nachbeben, nämlich bis ca. 80 km Zugwelle, darüber Stoßwelle. Die beiden Erdbeben Typen sind in Fig. 2 schematisch dargestellt. T. SHIDA nennt den ersten Typus Spaltungsbeben, den zweiten Einsturzbeben und gibt eine schematische Darstellung des Bruchvorganges bei jedem der beiden Typen.



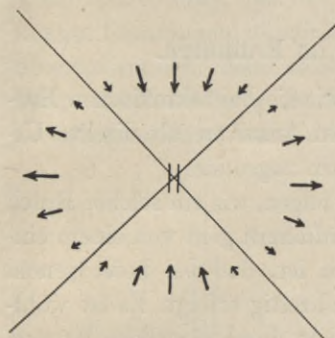
Fig. 1. Verteilung der ersten Bewegung des Tenriugawabebens am 18. V. 1917. Nach T. SHIDA.

Die Einteilung ist dabei nach dem mechanischen Vorgange im Hypozentrum vorgenommen. Theoretisch ist noch ein dritter Typus, Explosionsbeben, möglich. Diese Einteilung deckt sich nicht mit einer Unterscheidung des Erdbebens nach dem äußerlich zutage tretenden geologischen Änderungen oder den vermuteten genetischen Ursachen.

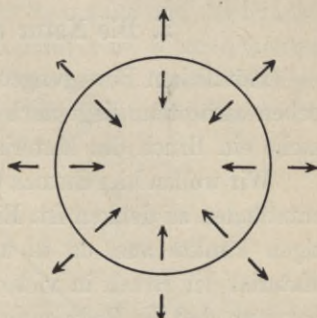
Dem Problem der Anfangsbewegung hat man seit diesem Vortrag SHIDAS bei allen großen Erdbebenbearbeitungen in Japan die größte

Aufmerksamkeit geschenkt. Von verschiedenen Forschern sind Untersuchungen veröffentlicht worden. Das mit größter Sorgfalt durchgearbeitete Beobachtungsmaterial zeigt, daß der weitaus größte Teil zu den Spaltungsbeben gehört.

Das Gesetz über die Verteilung von Stoß- und Zugwellen bei der Anfangsbewegung ist keine Theorie, sondern aus dem Beobachtungs-



Spaltungsbeben.



Einsturzbeben.

Fig. 2.

material empirisch abgeleitet. Die Ursache des Phänomens ist in den Eigenschaften der Erdkruste zu suchen. Was man aus dem Gesetz mit Sicherheit abzuleiten vermag, ist folgendes:

1. Die Natur der zuerst ausgesandten Welle (longitudinal, wie es auch die Theorie verlangt),
2. die Natur der Fortpflanzung der Welle im Erdinnern, und
3. die Art des Bruches.

Die verschiedene Verteilung der Stoß- und Zugwellen ist abhängig von dem Anfangszustand im Herd und von den Erlebnissen auf der durchlaufenen Strecke. Die Elastizitätstheorie für einen vollkommen elastischen Körper lehrt uns, daß sich Kompressions- bzw. Dilatationswellen ungeändert fortpflanzen. Die Untersuchung von E. GHERZI⁴⁾ über die Kompressions- und Dilatationswellen der Erdbeben liefert eine interessante Frage über das Auftreten der ersten Welle in großer Entfernung. Nach K. SEZAWA⁵⁾ ändert sich bei einer Wellengruppe in dispergierenden Medien die Phase. Ob diese Theorie der dispergierenden Medien zur Erklärung der Umkehr von Zug- und Stoßwellen ausreicht, läßt sich aus japanischen Beobachtungen allein noch nicht feststellen. Dazu bedarf es der internationalen Zusammenarbeit der Forscher

bei Weltbeben, die für die Untersuchung dieser Frage besonders günstig sind.

Da wir über die Bahn, auf der die Welle durch das Erdinnere wandert, bereits im großen und ganzen unterrichtet sind, so können wir aus der an der Erdoberfläche beobachteten Verteilung Schlüsse ziehen auf die Art des Bruches im Hypozentrum.

2. Die Natur eines Bruches im Erdinnern.

Plötzlichen Bewegungen des Bodens, wie sie bei tektonischen Erdbeben auftreten, liegt nach der allgemeinen Annahme als direkte Ursache ein Bruch des Materials im Erdinnern zugrunde.

Wir wollen hier SHIDAS Gedankengang folgen, wie ein solcher Bruch entstanden zu denken ist. Ein Bruch im Erdinnern geht von einem einzigen Punkte aus, da es unwahrscheinlich ist, daß bei heterogenem Material der Bruch in vielen Punkten gleichzeitig erfolgt. Es ist wohlbekannt, daß die Bedingung des Bruches nicht durch sämtliche Beträge des dort herrschenden Innendruckes, sondern durch den Unterschied des Druckes in den Richtungen bestimmt ist. Nach der mathematischen Theorie der Elastizität lassen sich die auf einen im Gleichgewicht befindlichen Punkt wirkenden inneren Kräfte zerlegen in Kompressions- und Scherungskräfte. Das Material im Erdinnern steht unter dem Einfluß der Schwerkraft und der inneren Kräfte. Erstere kann auch bei einem Erdeinsturz oder Erdbeben unmittelbare Ursache eines Bebens sein. Im übrigen aber wirkt sich die Schwerkraft im Erdinnern auch als starker Kompressionsdruck aus. Da man sich schwer vorstellen kann, daß ein unterirdischer Körper unter dem Einfluß von hydrostatischen Kompressionskräften zerbricht, so müssen die Scherungskräfte die Ursache für den Bruch sein.

Nach der elastischen Theorie gelten die Beziehungen zwischen Scherungsdrücken $Z_y = Y_z$ usw. Wenn man nun einen Scherungsdruck durch zwei parallel entgegengesetzt gerichtete Pfeile darstellt, so folgt nach diesen Beziehungen, daß das Vorhandensein eines solchen Druckes gleichzeitig das Vorhandensein eines Scherungsdruckes in einer zur ersten senkrechten Richtung bedeutet, wie in Fig. 2a dargestellt ist. Der oben beschriebene und in dieser Figur dargestellte Druckzustand mit zwei aufeinander senkrechten Kraftsystemen entspricht dem Begriff des Scherungsdruckes nach LOVE.

Es läßt sich bewiesen⁶⁾, daß der Scherungsdruck äquivalent ist

einer Spannung senkrecht zu einer der Ebenen, die den Winkel zwischen beiden obenerwähnten aufeinander senkrechten Ebenen halbieren, und einen Druck senkrecht zu der anderen. Die absoluten Beträge von Spannung, Druck und Scherungsdruck sind gleich (siehe Fig. 2b).

Ein solcher Scherungsdruck entspricht einer Verrückung ohne Volumenänderung, bei der die Hauptachsen der Verrückungsflächen in zwei Richtungen, nämlich in Richtung der Spannung und des Druckes übereinstimmen. Eine solche Verrückung heißt eine reine Scherung. Wenn die Verrückung die Grenzen der vollkommenen Elastizität überschreitet, so kann man auf sie nicht mehr die Elastizitätstheorie an-

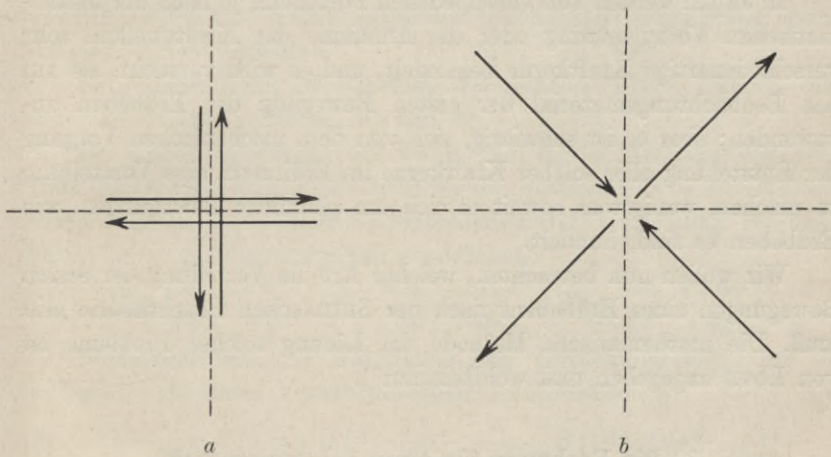


Fig. 3.

wenden. Jedoch kann man mit einer gewissen Berechtigung annehmen, daß als Folge des Bruches des Materials um den betrachteten Punkt die Spannungs- und Druckbewegungen in den obengenannten zwei Richtungen stattfinden. Die Kraft, die bei einem solchen Bruch in einem Punkt im Innern eines Körpers auftritt, rührt her von der Entspannung des inneren Druckes und ist aus der zeitlichen Änderung des Impulsmomentes der Bruchbewegung zu berechnen.

Von T. SHIDA ist aus der Quadrantenverteilung der ersten Bewegung des Erdbebens als Ursache des Bruches im Erdinnern eine reine Scherung nachgewiesen, und in diesem Falle ist die Bruchbewegung ganz unabhängig von dem übrigen inneren Druck. Mit anderen Worten: Der innere Druck, der durch den Bruch entspannt wird, ist ein Scherungs-

druck in einer Ebene, während andere Scherungsdrucke gerade senkrecht zu der ersten und der hydrostatische Druck unverändert erhalten bleiben.

Es sind also die bei einem Bruch um einen Punkt in einem Körper auftretenden Massenkräfte zwei Paare von gleichen und entgegengesetzt gerichteten Zug- und Stoßkräften, die in einem rechten Winkel zusammenstoßen.

Wir wollen hier nur zwei einheitliche Kraftkerne als die unmittelbare Ursache der Erdbebenbewegung annehmen, nämlich das eben erwähnte Kraftsystem und die nach unten gerichtete Schwerkraft. Das erste entspricht dem Spaltungsbeben, das zweite dem Einsturzbeben.

In Japan werden von verschiedenen Forschern, je nach der mathematischen Voraussetzung oder der Annahme der Kraftquellen, sehr verschiedenartige Kraftkerne behandelt, und es wird versucht, sie auf das Beobachtungsmaterial der ersten Bewegung der Erdbeben anzuwenden; aber es ist schwierig, sich von dem mechanischen Vorgang der Entstehung aller solcher Kraftkerne im Erdinnern eine Vorstellung zu machen, wenigstens soweit es sich um plötzliche Bewegungen, wie Erdbeben es sind, handelt.

Wir wollen nun betrachten, welcher Art die Verteilung der ersten Bewegungen eines Erdbebens nach der SHIDASchen Bruchtheorie sein muß. Die mathematische Methode der Lösung solcher Probleme ist von LOVE angegeben und wohlbekannt¹⁾.

3. Die Rechnung für einen Scherungsbruch.

Wir denken uns in den isotropen, homogenen Medien ein rechtwinkeliges Koordinatensystem (x, y, z) . Setzt man voraus, daß eine einfache Kraft von dem Betrage $\chi(t)$ in dem Anfangspunkt in Richtung der x -Achse wirkt, so läßt sich die Verrückung im Innern der Medien folgendermaßen ausdrücken:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} u_x &= \frac{1}{4\pi\varrho} \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x^2} \int_{r/a}^{r/b} t' \chi(t-t') dt' \\ &+ \frac{1}{4\pi\varrho r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \left\{ \frac{1}{a^2} \chi \left(t - \frac{r}{a} \right) - \frac{1}{b^2} \chi \left(t - \frac{r}{b} \right) \right\} \\ &+ \frac{1}{4\pi\varrho b^2 r} \chi \left(t - \frac{r}{b} \right), \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 v_x &= \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x \partial y} \int_{r/a}^{r/b} t' \chi(t-t') dt' \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi\rho r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \left\{ \frac{1}{a^2} \chi\left(t-\frac{r}{a}\right) - \frac{1}{b^2} \chi\left(t-\frac{r}{b}\right) \right\}, \\
 w_x &= \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x \partial z} \int_{r/a}^{r/b} t' \chi(t-t') dt' \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi\rho r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial z} \left\{ \frac{1}{a^2} \chi\left(t-\frac{r}{a}\right) - \frac{1}{b^2} \chi\left(t-\frac{r}{b}\right) \right\},
 \end{aligned}$$

worin a und b die Geschwindigkeiten der longitudinalen sowie transversalen Wellen bedeuten.

Falls diese Kraft in Richtung der y -Achse wirkt, ergeben sich ähnliche Ausdrücke für u_y , v_y und w_y .

Bei einem Scherungsdruck wählt man in der Richtung der Zugkraft die x -Achse und in der Richtung der Stoßkraft die y -Achse, dann lassen sich die x -, y - und z -Komponenten der Verrückung in einem Punkt (x, y, z) folgendermaßen ausdrücken:

$$(2) \quad U = \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad V = \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad W = \frac{\partial w_x}{\partial x} - \frac{\partial w_y}{\partial y}.$$

Bezeichnet man zur Abkürzung den Verrückungsvektor mit D , so ergibt sich, unter Vernachlässigung der Konstante:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad D &= \frac{1}{a^3 r^2} F(0,1) \chi^{(1)}\left(t-\frac{r}{a}\right) - \frac{1}{b^3 r^2} F(1,1) \chi^{(1)}\left(t-\frac{r}{b}\right) \\
 &\quad + \frac{1}{a^2 r^3} F(2,6) \chi\left(t-\frac{r}{a}\right) - \frac{1}{b^2 r^3} F(3,6) \chi\left(t-\frac{r}{b}\right) \\
 &\quad + \frac{1}{a r^4} F(6,15) \chi^{(-1)}\left(t-\frac{r}{a}\right) - \frac{1}{b r^4} F(6,15) \chi^{(-1)}\left(t-\frac{r}{b}\right) \\
 &\quad + \frac{1}{r^5} F(6,15) \chi^{(-2)}\left(t-\frac{r}{a}\right) - \frac{1}{r^5} F(6,15) \chi^{(-2)}\left(t-\frac{r}{b}\right).
 \end{aligned}$$

Hierin ist

$$\chi^{(1)}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \chi(t), \quad \chi^{(-1)}(t) = \int \chi(t) dt \quad \text{und} \quad \chi^{(-2)}(t) = \iint \chi(t) dt^2$$

und $F(m, n)$ bedeutet einen Vektor, dessen x -, y - und z -Komponenten folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$(4) \quad \left\{ m + \frac{n(y^2 - x^2)}{r^2} \right\} x, \quad \left\{ -m + \frac{n(y^2 - x^2)}{r^2} \right\} y \quad \text{und} \quad \frac{n(y^2 - x^2)}{r^2} z.$$

In diesen Ausdrücken sieht man, daß der Vektor $F(m, n)$, wenn $m = 0$ und $n > 0$, in die Richtung des Radiusvektors fällt und, wenn $m = 0$ und $n < 0$, nach dem Anfangspunkt des Koordinatensystems gerichtet ist. Wenn $m = n$, dann liegt er in der Richtung senkrecht zum Radiusvektor. Denkt man sich eine Kugel vom Halbmesser r um den Anfangspunkt, dann ist der Vektor $F(m, n)$ normal zu der Kugeloberfläche gerichtet, wenn $m = 0$, und tangential gerichtet, wenn $m = n$. Man kann im allgemeinen diesen Vektor in normale und tangentielle Komponenten zerlegen, nämlich:

$$(5) \quad F(m, n) = F(0, n - m) + F(m, n).$$

Jedes Glied in der Formel (3) hat als Faktor eine Potenz von a/r oder b/r . Aus den Aufzeichnungen der Erdbeben kann man vermuten, daß die im Hypozentrum zuerst auftretende Kraft in den meisten Fällen sich in kurzer Zeit verändert, so daß man die Beträge von $\chi^{(1)}(t)$, $\chi(t)$, $\chi^{(-1)}(t)$ und $\chi^{(-2)}(t)$ als gleich in der Größenordnung annehmen kann. Um die Fortpflanzung einer solchen Störung mittels der Formel (3) zu bestimmen, ist es genau genug, abgesehen von der Umgebung des Epizentralgebietes, nur die Glieder mit niedrigsten Potenzen von $1/r$ zu betrachten.

Wir wollen hier voraussetzen, daß alle Funktionen anfangs gleiche Vorzeichen haben, wollen aber nachher diese Voraussetzung noch untersuchen.

Die Verrückungen in entfernten Stationen lassen sich also in der ersten Annäherung schreiben:

$$(6) \quad D = \frac{1}{a^3 r^2} F(0, 1) \chi^{(1)}\left(t - \frac{r}{a}\right) - \frac{1}{b^3 r^2} F(1, 1) \chi^{(1)}\left(t - \frac{r}{b}\right).$$

Die durch das erste Glied dargestellte Verrückung pflanzt sich mit der Geschwindigkeit a fort, und zwar radial vom Epizentrum. Transformiert man $1/a^3 r^2 \cdot F(0, 1)$ auf Kugelkoordinaten (r, φ, θ) , und bezeichnet den absoluten Betrag mit \mathfrak{P} , dessen x -, y - und z -Komponenten mit \mathfrak{P}_x , \mathfrak{P}_y und \mathfrak{P}_z sind, dann ergibt sich:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{P}_x = \frac{x}{r} \mathfrak{P}; \quad \mathfrak{P}_y = \frac{y}{r} \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{P}_z = \frac{z}{r} \mathfrak{P} \\ \text{mit} \\ \mathfrak{P} = -\frac{1}{a^3 r} \sin^2 \varphi \cos 2\theta \end{array} \right.$$

Denkt man sich eine Kugel mit dem Halbmesser $r = \text{const}$ um den Anfangspunkt, dann verteilt sich diese Verrückung auf der Kugeloberfläche folgendermaßen auf einen Kreis $\varphi = \text{const}$:

$$\mathfrak{P} = \text{Minimum, wenn } x = 0,$$

$$\mathfrak{P} = \text{Maximum, wenn } y = 0.$$

Die absoluten Beträge der Maxima und Minima sind gleich.

$$\mathfrak{P} = 0, \text{ wenn } x = \pm y.$$

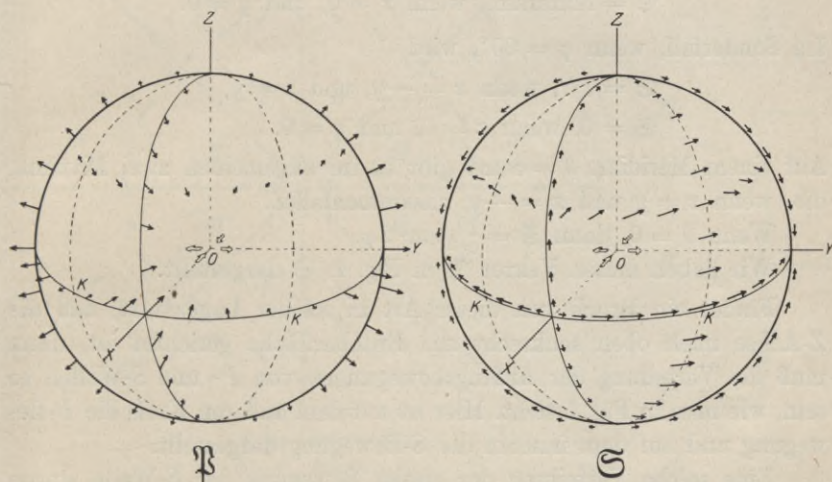


Fig. 4.

Die räumliche Verteilung der ersten Bewegung eines Spaltungsbebens.

Entlang einem Meridian erhält \mathfrak{P} den größten Wert am Äquator (Fig. 4, \mathfrak{P}). Wenn ein solcher Scherungsbruch sich im Erdinnern so lagert, daß seine z -Achse senkrecht nach oben zu der Erdoberfläche steht, dann ist es klar, daß die Gebiete der Zug- und Stoßbewegungen von den am Epizentrum senkrecht aufeinanderstehenden zwei geraden Linien getrennt werden, und die Verrückung an diesen Linien ein Minimum und zwischen den Linien ein Maximum ist, wie man aus Fig. 1 ersieht. (Wir nennen solche Linien, die die Zug- und Stoßgebiete trennen, die Knotenlinien.) In diesem Falle müssen die Knotenlinien von zwei Wellen P und \bar{P} übereinstimmen.

Bezeichnet man die Amplitude der Transversalwelle mit \mathfrak{S} , so erhält man:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_x = -\frac{x}{b^3 r^4} (2y^2 + z^2), \quad \mathfrak{E}_y = \frac{y}{b^3 r^4} (2x^2 + z^2), \\ \mathfrak{E}_z = \frac{z}{b^3 r^4} (x^2 - y^2) \\ \mathfrak{E} = \frac{1}{b^3 r} \sin \varphi \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 2\theta} \end{array} \right.$$

Auf einem Breitenkreis $\varphi = \text{const}$ ist:

$\mathfrak{E} = \text{Maximum}$, wenn $x = y$, und $x = -y$,

$\mathfrak{E} = \text{Minimum}$, wenn $x = 0$, und $y = 0$.

Im Sonderfall, wenn $\varphi = 90^\circ$, wird

$\mathfrak{E} = 1/r$, wenn $x = -y$, und $x = y$,

$\mathfrak{E} = 0$, wenn $x = 0$, und $y = 0$.

Auf einem Meridian $\theta = \text{const}$ gibt es im allgemeinen zwei Maxima, die, wenn $x = y$ und $x = -y$, zusammenfallen.

Wenn $\theta = 0$, dann $\mathfrak{E} = \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi$.

Wir haben diesen Vektor \mathfrak{E} in Fig. 4, \mathfrak{E} dargestellt.

Findet ein Bruch von dieser Art in solcher Lage statt, daß die Z-Achse nach oben senkrecht zur Erdoberfläche gerichtet ist, dann muß die Verteilung der Anfangsbewegungen von P- und S-Wellen so sein, wie man in Fig. 5 sieht. Hier ist auf dem äußeren Kreis die P-Bewegung und auf dem inneren die S-Bewegung dargestellt.

Eine solche Verteilung der ersten Bewegung der S-Welle wurde schon von T. SHIDA bei seinem Vortrag im Jahre 1918 theoretisch vorausgesagt und nachher von seinen Schülern an einem großen Beobachtungsmaterial weiter untersucht. Ich will jedoch hierauf vorläufig nicht weiter eingehen.

Aus der Fig. 5 ersieht man, daß der Halbkreis aus vier Oktanten besteht, in denen die Richtung der Anfangsbewegungen der P- und S-Wellen jeweils verschieden ist. Aus dieser Beziehung kann man mittels der Beobachtung in einer Bebenwarte die Richtung des Scherungsdruckes im Hypozentrum mit einer gewissen Genauigkeit bestimmen. Solche Bestimmung ist anwendbar, falls die Beobachtungsstationen nicht um das Epizentrum herumliegen.

4. Der Vorgang des Bruches.

Bisher hatten wir den Bruch als einen Punkt angesehen. Es handelt sich hierbei nicht um einen geometrischen Punkt, sondern um einen

Punkt von bestimmter Ausdehnung. Wenn man nun den ganzen Bruch in diesem noch genauer betrachten will, dann muß man sich vorstellen, daß er in irgendeinem Punkte dieses Gebietes beginnt, sich fortpflanzt und nach einer gewissen Zeit beendet ist.

Wir wollen betrachten, in welcher Richtung sich der Bruch von einem Punkt mit der größten Wahrscheinlichkeit fortpflanzt. Dafür

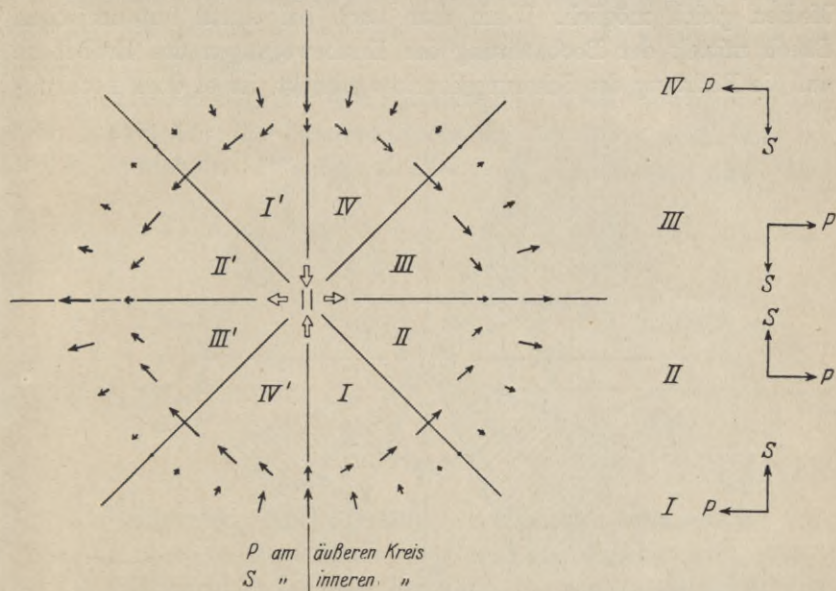


Fig. 5. Verteilung der ersten Bewegung auf der Erdoberfläche bei einem Spaltungsbeben.

gelten die Glieder mit der höchsten Potenz von $1/r$ in Formel (3), nämlich:

$$(9) \quad \begin{cases} D_n = \frac{1}{r^5} F(6, 15) \left\{ \chi^{(-2)} \left(t - \frac{r}{a} \right) - \chi^{(-2)} \left(t - \frac{r}{b} \right) \right\} \\ \sim \frac{1}{r^4} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) F(6, 15) \chi^{(-1)} \left(t - \frac{r}{a} \right). \end{cases}$$

Man kann durch die Zusammenlegung der radialen und tangentialen Komponenten, mit Rücksicht auf die Beziehungen (4) und (5), diesen Vektor anschaulich machen.

Die Zunahme der Anfangsscherung in der xy -Ebene wegen dieser Verrückung ist, unter Vernachlässigung des konstanten Faktors:

$$\frac{1}{r^5} (35 \sin^2 2\theta - 19) \chi^{(-1)} \left(t - \frac{r}{a} \right).$$

Die Anfangsscherung wird nämlich um die Linien $xy = 0$ verkleinert und um die Linien $x = \pm y$ verstärkt; die Maxima der Zunahme liegen auf den Linien $x = \pm y$ und die Minima auf den Linien $xy = 0$ (Fig. 6). Man kann also erwarten, daß der Bruch sich am wahrscheinlichsten in den Richtungen der Ebenen $x = \pm y$ erstrecken wird. Die Fortpflanzung in diesen beiden Ebenen ist in isotropen homogenen Medien gleich möglich. Wenn man auch bei einem unterirdischen Bruch mittels der Beobachtung der Erdbewegungen des Erdbebens auf die Richtung des Scherungsdruckes schließt, ist es doch noch un-

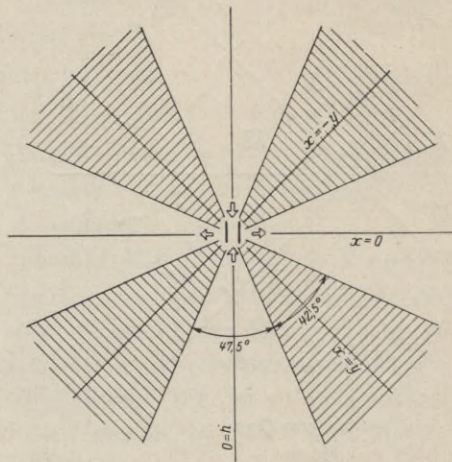


Fig. 6. Zunahme der Anfangsverrückung um den Bruchpunkt herum.

bestimmt, in welcher Richtung von beiden Bruchlinien der Bruch stattfindet, soweit nicht die auf der Oberfläche auftretende Änderung irgendwelche Anzeichen gibt, damit man sich den unterirdischen Zustand vorstellen kann.

Wählen wir nach T. SHIDA bei diesem Fall die Richtung der Zugachse als die Richtung der Scherung wie in Fig. 1, dann kann man auf einer der zwei Linien parallel zu den Knotenlinien, die mit der gezeichneten Richtung einen Winkel von 45° bilden, eine Spaltung in der Tiefe erwarten.

Diese Beziehung zwischen den Knoten- und Bruchlinien wurde schon früher von SAEM. NAKAMURA behauptet, und bei dem großen Erdbeben in Shimabara am 8. XII. 1922 wurde die Richtung der damals auftretenden oberflächlichen Verwerfung von ihm hierdurch er-

klärt. Und endlich hat das große Tangobebeben am 7. März 1927 ein deutliches Beispiel geliefert, indem eine Knotenlinie der ersten Bewegung mit der Genauigkeit, die das Beobachtungsmaterial aus dem japanischen Bereich zuließ, mit dem allgemeinen Verlauf der im Epizentralgebiet gefundenen großen Verwerfung zusammenfiel⁸⁾.

Man kann vermuten, daß der geologische Aufbau des Hypozentralgebietes von Einfluß ist, in welcher Richtung von zwei Bruchlinien der Bruch sich fortpflanzt.

Denkt man sich nun, daß infolge der relativen Verschiebung von zwei Erdschollen, die Zwischenschicht sich im Scherungszustand befindet, so wird die Scherung auf einer Linie, die zwischen den beiden

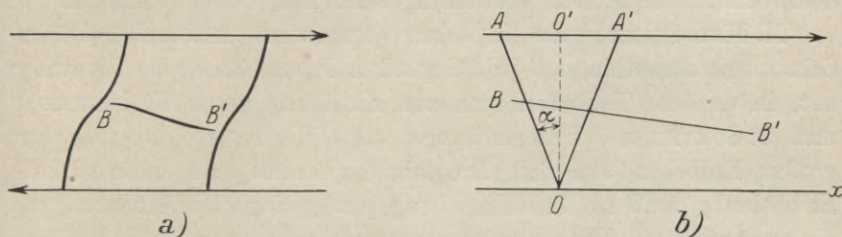


Fig. 7.

Grenzen entlang der Schicht verläuft, ein Maximum betragen (Fig. 7a). Wenn der Bruch in einem Punkt auf dieser Linie ausgelöst wird, so verläuft er wahrscheinlich auf einer Bruchlinie, die sich entlang der Schicht erstreckt.

Zieht man einen kleinen Teil der Zwischenschicht in Betracht, so kann man die dort stattfindende Verrückung als eine einfache Scherung ansehen (s. Fig. 7b). (Die einfache Scherung ist eine Zusammensetzung von reiner Scherung und Rotation.) Setzt man den Betrag der Scherung gleich s , so erhält man die Verrückungen u und v in der Richtung der x - und y -Achsen:

$$u = sy, v = 0,$$

$$s = 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Setzt man in Fig. 7b:

$$\widehat{AOO'} = \widehat{O'OA} = \alpha,$$

dann sieht man, daß durch die einfache Scherung s der Punkt A nach A' kommt. Es ist bewiesen, daß eine der Hauptachsen der Scherungsfläche parallel zu der den Winkel $\widehat{A'Ox}$ halbierenden Linie gerichtet

ist. Deswegen verläuft die oben gewählte Bruchlinie in dem Winkel $\frac{1}{2} \cdot \alpha$ gegen die Richtung der Pfeile. In der Fig. 7 ist die Bruchlinie durch BB' dargestellt.

Dieser Winkel kann vernachlässigt werden, soweit man über die Gesteinbeschaffenheit auf der Erdoberfläche orientiert ist.

Ob die Bruchlinie im Hypozentrum und die dazugehörige Bruchlinie auf der Oberfläche parallel sind, ist noch eine Frage. Wenn eine Häufung von Schollen infolge der Bewegung des umgebenden oder darunterliegenden Körpers gedrückt wird, so muß die Verteilung der Verrückung im Innern dieser Ansammlung abhängen von der Lage und der Form jeder einzelnen Scholle. Diese Beziehung kann man auch an dem Verlauf der großen Verwerfung beim Tangobeben bemerken¹¹⁾.

M. MATSUYAMA weist in seiner japanischen Abhandlung über Seismologie daraufhin, daß jede Gegend in Japan eine eigene Richtung hat, in der der Erdbebenbruch zur Auslösung neigt. E. GHERZIS⁴⁾ und O. SOMVILLES⁹⁾ Untersuchungen über die erste Bewegung der großen Erdbeben auf dem Erdglobus sprechen auch dafür. Diese Erscheinung muß im Zusammenhang mit geologischen Änderungen, die vermutlich in Erdbebengegenden stets vorhanden sind, berücksichtigt werden.

5. Der Vorgang des Bruches und die erste Bewegung.

Pflanzt sich der Bruch, wie oben gesagt, im Verlauf einer bestimmten Zeit auf einer Bruchlinie fort, so ist die erste Bewegung in einer entfernten Station eine Folge der gesamten Wirkungen der Brüche in allen Punkten auf der Bruchlinie. Diese Wirkung ist von der Intensität und der Richtung des Bruches, der Entfernung des jeweiligen Punktes von der Station und der Ankunftszeit der von jedem Bruch erregten ersten Welle abhängig.

Falls die Bruchlinie gerade ist, dann werden Zug und Stoß der ersten Bewegung in die vier Quadranten verteilt, wie oben erwähnt; auf die Amplituden aber kann man die erwähnten Theorien nicht anwenden.

Von der Intensität der einzelnen Brüche im Epizentralgebiet kann man nichts Allgemeingültiges sagen. Wir denken uns einen einfachen Fall, in dem die Intensität sich gleichmäßig entlang einer geraden Bruchlinie ausbreitet. Bei einer Station, die weit genug entfernt von dem Epizentrum liegt, ist der Unterschied der Amplituden der ersten Welle wegen der verschiedenen Abstände der Punkte zu vernach-

lässigen. In diesem Fall also kommt nur die Ankunftszeit der Wellen in Frage.

Setzt man h für die lineare Ausdehnung des ganzen Bruches und c für die mittlere Geschwindigkeit des Bruchfortganges, dann kann man die Größenordnung der Zeitdauer des Bruches durch h/c ausdrücken. Diese Zeit ist vergleichbar der Zeitdauer der ersten Bewegung des Erdbebens, was wir nachher untersuchen werden. Der Unterschied der Ankunftszeiten der Beiträge von den verschiedenen Punkten in dieser Zeit zur Anfangsbewegung des Erdbebens ist einerseits von dem Bruchverlauf, d. h. der Zeit h/c selbst, und andererseits von dem Azimut der Beobachtungsstation in bezug auf die Richtung der Bruchlinie abhängig. Die Wirkung des letzteren ist am größten im Falle h/a , worin a die Wellengeschwindigkeit ist. Wenn h/a in bezug auf h/c zu vernachlässigen ist, dann kann man dieselbe Verteilung der Erstbewegung wie bei dem Punktbruch erwarten, andernfalls muß die Punktsymmetrie von der Amplitude in Fig. 5 gestört werden.

Falls c größer als a ist, haben wir es mit voneinander unabhängigen Brüchen zu tun. Die Größe von c muß sowohl zu der Eigenschaft des Materials als auch zum Anfangszustande der elastischen Verrückung in gewisser Beziehung stehen.

Unter der ersten Bewegung der Erdbeben verstehen wir die Erdbewegung, die durch die Strecke vom Beginn des Bebens bis zum ersten merkbaren Punkt in der Aufzeichnung dargestellt wird. Nach dem Anfangszustand im Hypozentralgebiet geht der Bruch oft in Stufen vor sich. In solchem Fall ist es unmöglich, eine einfache Regel anzugeben, wie der Unterschied dieser Ankunftszeiten die Amplitude der ersten Bewegung beeinflußt. Auch aus diesem Grunde ist es, um die Verteilung der ersten Bewegung zu untersuchen, unbedingt notwendig, den Vergleich der Aufzeichnungen verschiedener Stationen selbst durchzuführen und jeden Stoß in der Anfangsbewegung richtig abzulesen.

Wenn wir von der Wirkung des Stationsuntergrundes und der Konstanten des Seismographen absehen, so zeigen die statistischen Untersuchungen der Zeitdauer der beobachteten ersten P -Einsätze manchmal eine systematische Änderung mit der Entfernung vom Epizentrum. Im allgemeinen erklärt man dies durch die Änderung der Wellenform während der Fortpflanzung, die durch den Unterschied der Energieabsorption im Erdinnern für verschiedene Wellenlängen bedingt ist. Jedenfalls muß, wenn die erste Bewegung in zwei Stationen zwei verschiedene Zeitdauern ergibt, der Stoß in der ersten Station ein Teil

des Stoßes in der zweiten oder ein ganz anderer als derjenige in der zweiten sein.

Die Fortpflanzung des Bruches kann man sich noch auf eine un stetige Art vorstellen; wenn nämlich infolge der Verschiebung einer Erdmasse an der Grenze die Scherungsdrucke verschiedene Richtungen haben, so ist es möglich, daß von der ersten Welle eines Bruches un stetig eine andere verursacht wird. Falls die einzelnen Brüche im Hypozentralgebiet verschiedene Richtungen haben, werden die Amplitude und Richtung der ersten Bewegung dieses Erdbebens je nach dem Zusammenhang der Zeit des Ausbruches und dessen Lage nicht eine einfache Verteilung zeigen, und man muß daher mit der Kenntnis des einfachen Falles das Beobachtungsmaterial richtig behandeln. Man findet ein solches Beispiel in A. IMAMURAS¹⁰⁾ Arbeit über das große Kwantôbeben im Jahre 1923.

6. Die erste Bewegung des Erdbebens und des Bruches.

Ob unsere bisherige Voraussetzung, daß die Funktionen $\chi^{(1)}(t)$ und $\chi^{(-2)}(t)$ am Anfang des Bruches dasselbe Vorzeichen haben, wirklich richtig ist, läßt sich erst feststellen, wenn man die Richtung der Verschiebung am Hypozentrum kennt.

Es ist schwer, bei gewöhnlichen Erdbeben dieses Verhältnis zu erkennen. Das Tangobeben hat auch in dieser Beziehung ein richtiges Beispiel geliefert; nämlich hierbei stimmt die Richtung der horizontalen Verschiebung auf beiden Seiten der Verwerfung mit der Zug- und Stoßverteilung der ersten Bewegung überein⁸⁾¹¹⁾. Da vermutet wird, daß die Herdtiefe dieses Erdbebens geringer als 20 km ist, kann man wohl dieses Erdbeben als einen Beweis ansehen, daß Zug und auch Stoß in der ersten Bewegung des Erdbebens gerade derselben Bruchbewegung im Hypozentrum entsprechen.

Wenn ein gepreßter Teil eines Körpers in einem Augenblick vom Druck durch einen Bruch befreit wird, dann muß die impulsive Kraft, die infolge dieser Bewegung in dem Körper auftritt, im selben Zeitpunkt in Richtung des Druckes maximal sein, folglich die zeitliche Änderung der Kraft am Anfang des Bruches eine negative sein in der Richtung, in der die Verschiebung stattfindet. Es würde allerdings unmöglich sein, daß ein umfangreicher Körper in einem Moment gänzlich bricht; beim Erdbeben braucht es vom Anfang der Bruchbewegung bis zum Auftreten der maximalen Kraft eine gewisse Zeit, welche hauptsächlich von der Ausdehnung des Hypozentrums, der Fortpflanzung des Bruches usw.

abhängig sein muß. Obwohl es also schwer ist, der Form der Bewegung eine theoretische Formel anzupassen, kann man doch die Funktion $\chi^{(1)}(t)$ für eine solche nehmen, die Null ist, wenn t gleich 0, und die anfangs in Richtung der Bruchbewegung mit t wächst.

Ist $\chi^{(1)}(t)$ nach der Zeit t_1 wieder Null, so hat $\chi(t)$ einen maximalen (oder minimalen) Wert in t_1 . t_1 ist die Zeitdauer der Erstbewegung des Erdbebens, die der Zeitdauer des Bruchvorganges im Hypozentrum entspricht.

Wenn der Bruch in einer Fläche stattfindet, dann läßt sich die Kraft $\chi(t)$, abgesehen von der Heterogenität, mit Hilfe der Flächenausdehnung überschlagen. Definiert man die Intensität des Bruches (wir haben dieses Wort schon im vorigen Kapitel gebraucht) durch die

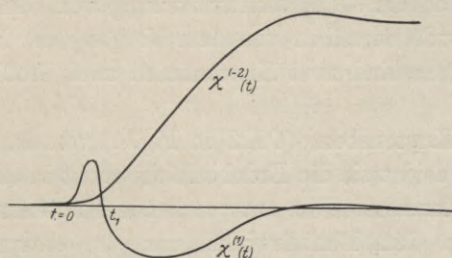


Fig. 8. Schematische Darstellung des Zusammenhangs zwischen der Bruchverschiebung im Hypozentrum und der ersten Bewegung des Bebens.

zeitliche Zunahme der Bruchfläche, dann kann man in einfachen Fällen die Beziehung der Intensität mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Bruches und der Funktion $\chi(t)$ klarmachen. Im allgemeinen entspricht die Größe der ersten Bewegung der Intensität des Bruchvorganges.

In Fig. 8 ist lediglich schematisch der Zusammenhang zwischen $\chi^{(1)}(t)$ und $\chi^{(-2)}(t)$ dargestellt. Man sieht hieraus, daß das was von der ersten Bewegung des Erdbebens direkt abhängig ist, nicht die erste Bruchverschiebung im Hypozentrum ist, sondern der Bruchvorgang.

Es ist auch bekannt, daß verschiedene Erdbeben verschiedene eigentümliche Formen des Beginns haben, die aus der Beziehung zu der Natur des Bruches, zu erklären seien.

M. MATSUYAMA¹⁸⁾ vermutet aus dem allmählichen Auftreten der ersten Bewegung des großen Kwantobebens (1923) eine plastische Nachbiegung im Hypozentralgebiet, deren große Wahrscheinlichkeit er aus

der Beschaffenheit des Materials bei hohen Temperaturen und Drucken schließt. Es scheint, daß diese wertvolle Mitteilung unter Berücksichtigung obiger theoretischer Überlegung gelesen werden muß. Es sei in dieser Beziehung bemerkt, daß das Erdbeben in großer Tiefe (ca. 300 km) immer mit einer plötzlichen Bewegung beginnt (siehe z. B. ZS. f. Geophys. Bd. 6, S. 96, Fig. 6).

7. Die Lage des Bruches und der Knotenlinien.

Was wir bisher theoretisch betrachtet haben, läßt darauf schließen, daß, wenn der Bruch infolge einer Scherung in einer vertikalen Ebene mit horizontaler Bewegung stattfindet, sich die Richtung der ersten Erdbewegung nach der Quadrantenverteilung von SHIDA richtet, obwohl die Amplitude derselben von dem Vorgang des Bruches gestört ist. In diesem Falle sind zwei Knotenlinien zwei Großkreise auf dem Globus.

Wenn eine Knotenebene (*OKZ* in Fig. 4) von der vertikalen abweicht, dann schneidet sie die Erdoberfläche nicht in einem Großkreis. In diesem Falle kann man die entsprechende Knotenlinie aus der Beziehung zwischen dem Einfallswinkel und der entsprechenden Epizentralentfernung aus Laufzeitkurven der Erdbebenwellen zeichnen. Es ist also klar, daß die Form der Knotenlinien von der Elastizität im Erdinnern abhängig ist; sie ist nämlich nicht stetig, wenn eine Diskontinuitätsfläche vorhanden ist. Z. B. kann es in der Nähe des Epizentrums solche Azimute geben, in welchen \bar{P} - und P -Einsätze in entgegengesetzten Richtungen auftreten, oder auch solche Azimute, in welchen nach der Entfernung vom Epizentrum die entgegengesetzte Erdbewegung auftritt, weil in diesem Falle die Knotenlinien nicht radial verlaufen. Solche Fälle kann man mit Hilfe einiger schematischer Abbildungen leicht begreifen.

Die mitteleuropäischen Beben (1911 und 1913) stellen nach GUTENBERG³⁾ eine komplizierte Verteilung der ersten Einsätze von P und \bar{P} dar. Beim Anblick der Aufzeichnungen scheint es doch möglich zu sein, durch erneute Ermittlung der Anfangseinsätze in einigen Stationen einen Fall mit einer geneigten Knotenfläche zu bekommen. Die erste Untersuchung, bei der eine systematische Verteilung der ersten Bewegung der P -Welle in großen Entfernungen angegeben ist, ist die Bearbeitung des Montanabebens (28. VI. 1925) von PERRY BYERLY¹²⁾. In diesem Falle lassen die Knotenlinien eine leichte Krümmung ver-

muten, die das Beobachtungsmaterial aus der Nähe des Epizentralgebietes allein nicht hätte finden lassen.

Ein Beispiel der entgegengesetzten Richtungen der \bar{P} - und P -Einsätze ist in Japan erst von K. WADATI¹³⁾ bei dem Tajimabeben gezeigt worden.

Sieht man in dieser Hinsicht die früheren Beobachtungen in Japan durch, so wird es wohl auch möglich sein, solche Fälle zu finden, da es scheint, daß Erstbewegungen mit geneigter z -Achse des Bruches richtiger zu erklären sind. SAEM. NAKAMURA¹⁴⁾ versucht beim großen Kwantôerdbeben im Jahre 1923 in dieser Absicht eine Erklärung, aber ohne Rücksicht auf \bar{P} und P . In diesem Falle muß die Erklärung in dieser Weise auch in Betracht gezogen werden.

Für die große Mehrheit der Quadrantenverteilungen der ersten Bewegung in früheren Beobachtungen, wie man sie in vielen Veröffentlichungen von SAEM. NAKAMURA aus Centr. Meteorol. Observatory, auch in den statistischen Untersuchungen von M. MATSUYAMA und K. SUDA findet, muß der Grund einerseits darin zu suchen sein, daß bei kleinen Erdbeben das Beobachtungsmaterial nicht ausreicht, um eine Feinstruktur der Verteilung zu erschließen, und daß andererseits bei kleinen Erdbeben die ersten P -Einsätze gewöhnlich schwer zu beobachten sind. Trotzdem kann man die Quadrantenverteilung der Mehrheit der Fälle nicht absprechen. Mit anderen Worten, der Erdbeben-Druck hat eine Tendenz, sich in einer Vertikalebene mit horizontaler Bewegung auszulösen. Bei dem Tangobeben zeigt die nach ENE gerichtete Knotenlinie keine Abweichungen in bezug auf die P - und \bar{P} -Einsätze, obwohl die Richtung der relativen resultierenden Verschiebungen in beiden Seiten der Verwerfung mit der Horizontalen merkbare Winkel bilden¹¹⁾. Der Bruch begann nämlich mit einer horizontalen Bewegung, wie S. KUNITOMI⁸⁾ bemerkt hat. Diese Angabe ist ein wichtiger Beitrag für die theoretischen Überlegungen der Dynamik der sogenannten Verwerfungsbeben. (Für die Bestimmung der nach NNW gerichteten Knotenlinie ist das Beobachtungsmaterial in Japan nicht ausreichend.)

Unsere Seisomographen sind also minder empfindlich für die Verschiebungen in einer horizontalen Ebene, die irgendwo im Erdinnern ruhiger vor sich zu gehen scheinen, ohne Begleiten des Ausbruches der großen Menge der lebendigen Energie in kurzer Zeit. Obwohl der unterirdische Mechanismus der Absenkung und Hebung der Erdoberfläche, wie sie vor oder nach dem Erdbeben vorgefunden werden, noch nicht

klar ist, muß man doch manchmal beträchtliche horizontale Verschiebung der Masse vermuten.

Es ist kaum nötig, erwähnt zu werden, wie wichtig auch die Untersuchung solcher Erscheinungen für die Erdbebenforschungen sind.

8. Bemerkung über die Einsturz- und Explosionsbeben.

Beim Einsturzbeben sieht man die Verrückung im Medium schon in Formel (1). Nimmt man die x -Achse als vertikal nach unten gerichtet, so erhält man für u , v und w in erster Näherung folgendes:

$$4\pi \rho u = \frac{x^2}{a^2 r^3} \chi\left(t - \frac{r}{a}\right) - \frac{1}{b^2} \left(\frac{x^2}{r^3} - \frac{1}{r}\right) \chi\left(t - \frac{r}{b}\right)$$

$$4\pi \rho (v, w) = \frac{x}{a^2 r^3} (y, z) \chi\left(t - \frac{r}{a}\right) - \frac{1}{b^2} \frac{x}{r^3} (y, z) \chi\left(t - \frac{r}{b}\right).$$

Die Welle des ersten und des zweiten Gliedes pflanzt sich mit der

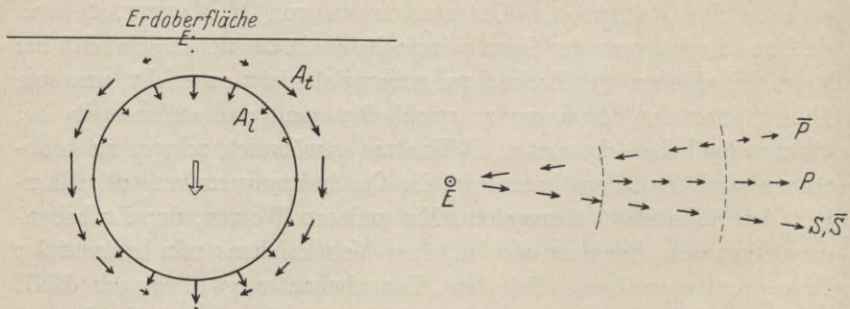


Fig. 9. Verteilung der ersten Bewegungen eines Einsturzbebens.

Geschwindigkeit a bzw. b fort; die erste Welle schwingt radial und die zweite transversal.

Bezeichnet man durch φ den Winkel zwischen dem Radiusvektor und der positiven Richtung der x -Achse, weiter durch A_l und A_t die Amplituden der Longitudinalen sowie transversalen Wellen, so ergibt sich

$$4\pi \rho A_l = \frac{\cos \varphi}{a^2 r}, \quad 4\pi \rho A_t = \frac{\sin \varphi}{b^2 r}.$$

Die Grenze von Zug und Stoß für die \bar{P} -Welle ist ein Kreis, während der P -Einsatz immer Stoß ist. Gemäß der Beziehung zur Herdtiefe ist es möglich, daß in einer Zone \bar{P} - und P -Einsätze in entgegengesetzten Richtungen auftreten. Die erste Bewegung der S -Welle findet radial aus dem Epizentrum statt und hat keine Knotenlinie (s. Fig. 9).

Von den Einsturzbeben haben wir sehr wenig Beobachtungsmaterial. Was im allgemeinen als der Mechanismus eines Einsturzbebens ohne merkbaren begleitenden Scherungsbruch angenommen ist, besteht in einem Felsenabsturz in einem unterirdischen Hohlraum, der vermutlich in der Nähe der Erdoberfläche existiert. In diesem Falle kann man nicht ein großes Erdbeben erwarten.

Bei dem zweiten Beispiel von T. SHIDA, in dem vielleicht nur \bar{P} -Einsatz beobachtet wurde, und bei dem man infolgedessen eine Herdtiefe von mindestens 30 km vermuten muß, kommt ein Hohlraum nicht in Frage. Eine mögliche Vermutung besteht hierbei darin, daß im Erdinnern eine allgemeine Abnahme des hydrostatischen Druckes entsteht und ein Flächenteil der Erdkruste plötzlich absinkt. Es ist möglich, daß dazu ein Bruch die Veranlassung gibt, und diese Bruchbewegung muß die theoretische Verteilung der ersten Bewegung des Einsturzbebens stören. Es läßt sich noch bezweifeln, ob eine solche Absenkung der Erdoberfläche in einer beträchtlichen Ausdehnung eine unmittelbare Ursache zu einem Erdbeben sein kann. In dieser Beziehung ist es wohl interessant, einen Blick auf das Tajymabeben (1925) zu tun. Daß die erste Bewegung dieses Erdbebens in Kyoto, wie von M. MATZUJAMA bemerkt, in einer eigenartigen Form in einer Stufe auftritt, gestattet zu vermuten, daß der Vorgang des ersten Bruches nicht einfach ist. Bei den beiden Untersuchungen von K. WADATI¹³⁾ und K. SUDA¹⁵⁾, die nicht genau übereinstimmen, liegt eine komplizierte Verteilung der ersten P - und \bar{P} -Einsätze vor. Man kann aber darin doch eine allgemeine Gestalt für ein Einsturzbeben bemerken. Für die Herdtiefe dieses Bebens sind die Werte zwischen 30—60 km berechnet. Über diese zwei verdächtig tiefen Einsturzbeben muß man noch weitere Untersuchungen der Seismogramme versuchen.

Bei einer Explosion im Innern des unendlichen homogenen Mediums fehlt theoretisch die S -Welle, die ja nur, wenn eine Diskontinuitätsfläche vorhanden ist, durch die Anregung der darin einfallenden P -Welle entstehen kann. Die Mechanik einer Explosion in der Nähe der Oberfläche läßt sich als ein Explosions- und teilweise Einsturzbeben annehmen. In der Tat kann man ohne weiteres den Unterschied des allgemeinen Aussehens zwischen den Aufzeichnungen des gewöhnlichen Nahbebens und der Oppauer Explosion bemerken. Es muß eine interessante Aufgabe sein, die letzteren Aufzeichnungen sowie auch die bei Sprengungsexperimenten vom seismodynamischen Standpunkt neuerdings zu untersuchen.

Die natürliche Explosion gehört zu den vulkanischen Erscheinungen. Aber es ist noch eine Frage, ob die sich im Zusammenhang mit den Vulkanausbrüchen einstellenden Erdbeben in ihrem mechanischen Vorgang die Explosionsbeben sind. In einer Mitteilung von F. OMORI¹⁶⁾ über den Erdbebenschwarm, den er nach der Eruption des Vulkans Sakurajima im Jahre 1914 in der ganz nahe stehenden Station Kagoshima beobachtet hat, zeigt er, daß in den meisten Fällen die Horizontalkomponente der ersten Bewegung entweder von dem Vulkan fort oder gegen ihn gerichtet ist und daß senkrecht hierzu im statistischen Mittel der Einsatz der „Transversalwelle“ erfolgt. Anscheinend deutet also diese Untersuchung darauf hin, daß diese Erdbeben von den Scherungsbrüchen herrühren. Allerdings, abgesehen davon, daß man in diesen Angaben im strengen Sinne die Art der ersten Bewegung, d. h. Zug und Stoß nicht bestimmen kann, sind auch die sogenannten Transversalwellen sehr undeutlich in den beigefügten Aufzeichnungen. Über die Art des Bruches bei den vulkanischen Beben muß man noch weitere Untersuchungen abwarten.

SAEM. NAKAMURA¹⁷⁾ hat bei einem Formosabeben am 14. IX. 1922 nicht nur in der Nähe des Epizentrums, sondern auch in Japan und in Korea, also nach Passierung des Chinesischen Meeres, überall Zugsbewegung beobachtet. Die dafür mögliche Erklärung scheint entweder auf eine plötzliche Kompression der Masse im Erdinnern oder auf eine abnormale Fortpflanzung der Welle von Formosa nach Japan zurückführbar zu sein. Diese letzte Erklärung müßte wohl auch untersucht werden, wenn man berücksichtigt, daß die Beobachtung der japanischen Erdbeben in Zikawei oft eine scheinbare Umkehr der Richtung der ersten Bewegung gibt, und weiter, daß die Seismographen in Göttingen bei dem Beben, das 13 Tage vorher im gleichen Epizentrum auftrat, eine deutliche Stoßbewegung am Anfang registrierten (was ich in Göttingen sehen konnte). Sowohl dieses Kompressionsbeben, beschrieben von SAEM. NAKAMURA, als auch tiefe Einsturzbeben sind eine interessante Erscheinung, die sorgfältigere Untersuchungen erfordern.

Göttingen, Juni 1930.

Literatur.

1. „Japan“. Tokyo 1926. S. 251—310.
2. NAKANO, H., Notes on the Nature of the Forces which give Rise to the Earthquake Motions. Seismolog. Bull. Centr. Met. Obs. (Japan), 1923, I, No. 3.

3. GUTENBERG, B., Die mitteleuropäischen Beben vom 16. Nov. 1911 und vom 20. Juli 1913. Straßburg 1915.
 4. GHERZI, E., Notes de sismologie. Zi-ka-wei, 1925, Nr. 6; 1928, Nr. 10.
 5. SEZAWA, K., On the Propagation of the Leading and Tailing Parts of a Train of Elastic Waves. Bull. Earthqu. Res. Inst., 1928, Vol. IV, p. 107.
 6. LOVE, A. E. H., Mathematical Theory of Elasticity. 4th ed., p. 82.
 7. — Ebenda, p. 304. — MATSUZAWA, T., On the Relative Magnitude of the Preliminary and Principal Portion of Earthquake Motions. Japan. Journ. of Astr. and Geophys., Vol. IV, No. 1.
 8. KUNITOMI, S., Note on the North Tango Earthquake of March 7, 1927. Geophys. Mag. Tokyo, 1930, Vol. II, p. 65.
 9. Der Inhalt der Arbeit O. SOMVILLES wird angegeben im „Lehrbuch der Geophysik“ von B. GUTENBERG, S. 271.
 10. IMAMURA, A., On the Multiple Source of Origin of the Great Kwantô Earthquake of 1923. Proc. Imp. Acad. Tokyo, Vol. V, No. 8.
 11. YAMASAKI, N., and TADA, F., The Oku-Tango Earthquake of 1927. Bull. Earthqu. Res. Inst., 1928, Vol. IV, p. 159. On the Horizontal Displacements of Earth Crust Produced by the Tango Earthquake, T. Terada and N. Miyabe, Proc. Imp. Acad. Tokyo, IV, No. 5, 1928.
 12. BYERLY, PERRY, The Montana Earthquake of June 28, 1925. Bull. Seismol. Soc. America, 1926, S. 209.
 13. WADATI, K., On the Mohorovicic Wave observed in Japan. Geophys. Mag. (Tokyo), Vol. 1, No. 3.
 14. NAKAMURA, SAEM., Seismol. Bull. Central Meteorol. Obs. Tokyo, 1924.
 15. SUDA, K., Seismol. Bull. Imp. Marine Obs. (Kobe), Vol. 1, No. 3.
 16. OMORI, F., The Sakurazima Eruptions and Earthquakes V. Bull. Imp. Earthqu. Invest. Comm., Vol. VIII, No. 5.
 17. NAKAMURA, SAEM., On the Destructive Earthquakes in Formosa on the 2nd and 15th of Sept. 1922. Seismol. Bull. Centr. Meteorol. Obs. (Japan), Vol. 1, No. 2.
 18. MATSUYAMA, M., Notes on the nature of the Kwantô Earthquakes. Union géod. Travaux Scien, 1925, Ser. A, No. 2.
-

PROFESSOR CARL DORNO,

der ausgezeichnete Forscher auf dem weiten Gebiete der Strahlung, der auch so manchen andern Zweig der Geophysik wesentlich gefördert hat, begeht zu Davos, der Heimatstätte seines Wirkens, am 3. August seinen 65. Geburtstag. Es seien ihm die herzlichsten Glückwünsche dargebracht.

Besprechungen.

Erikson, J. V., Den Kemiska denudationen i Sverige. La denudation chimique en Suède. Meddel. från Stat. Meteor.-Hydrogr. Anst. Bd. 5, No. 3, 96 S. (mit franz. Res.). Stockholm 1929.

Chemisch-analytische Verarbeitung der in den Jahren 1909—1925 vom Hydrographischen Büro bzw. (seit 1919) von der meteorol.-hydrograph. Staatsanstalt in Stockholm gesammelten 11313 Wasserproben von 69 Stationen an 28 schwedischen Flüssen, die über 57% der Fläche des Landes entwässern. Aus dem reichen Inhalt kann nur einiges hervorgehoben werden. Betreffs des Gehaltes des Flußwassers an gelösten anorganischen Stoffen ergibt sich, daß dieser abnimmt im umgekehrten Verhältnis zur Größe des Einzugsgebietes, zur Menge des Niederschlags und der Größe des Abflusses. In seenarmen Gebieten nimmt er gegen die Mündung des Flusses zu; in seenreichen Waldgebieten ist er am kleinsten unterhalb der Seen, offenbar weil diese Stoffe in den Seen niedergeschlagen werden. Am größten ist dieser Gehalt in den Kalkgebieten, am geringsten in den hochalpinen Gebieten. Speziell der Gehalt an CaO und MgO schwankt in weiten Grenzen, in engster Abhängigkeit von der Gesteinszusammensetzung. Weitere Bestimmungen beziehen sich auf den Härtegrad des Wassers, auf Alkalinität, Cl- und SO₃-Gehalt; in den Kalkgebieten ist Cl:SO₃ < 1, in den Waldgebieten > 1. Der pH-Faktor nimmt mit dem Gehalt an anorganischen Stoffen zu, mit dem an organischen Stoffen ab. Im allgemeinen sind die schwedischen Flüsse als sauer zu bezeichnen und zeigen nur in gewissen rein kalkigen Gebieten alkalische Reaktion. Der Gehalt an gelösten organischen Stoffen ist am größten in den Kalk- und Mergelgebieten, nimmt in den Waldgebieten mit der Größe des Einzugsgebietes ab und ist in den hochalpinen Gebieten am kleinsten. Der Gehalt an anorganischen Stoffen hat sein Maximum bei Niedrigwasser, sein Minimum bei Hochwasser. Die absolute Gesamtmenge der gelösten Stoffe beträgt in den reinen Kalkgebieten 60—70 t pro Jahr und Quadratkilometer, in den Waldgebieten 10 bis höchstens 20 t, in den hochalpinen 15 bis über 20 t. Insgesamt kann man die chemische Denudation zu 70—90% der totalen Denudation einschätzen (was ungefähr mit den von BAULIG für das ehemals vereiste Gebiet von Nordamerika ermittelten Werten übereinstimmt —, so daß sie jedenfalls den großartigsten Vorgang in der Abtragung des schwedischen Bodens darstellt.

F. Machatschek, Wien.

Maurain, Ch., Comptes Rendus de l'Assemblée de Prague. Union géodésique et géoph. intern., Sect. de magnétisme et électricité terrestres, Bull. 7, Paris 1929, 269 p.

In den Sitzungsberichten ist der Vorschlag von L. W. AUSTIN (Washington) sehr bemerkenswert, international das Studium der Korrelation zwischen den Phänomenen der Radio-Übertragung und der Sonnenaktivität aufzunehmen. Auf einige Spezialberichte folgen dann die Berichte der nationalen Komitees. Der letzte Teil des Berichtes enthält Mitteilungen verschiedener Forschess J. A. FLEMING und H. W. FISK berichten über die magnetischen Vermessungen, die in den Jahren 1905—1926 vom Terrestrial Magnetism Department der Carnegie-Institution angestellt wurden. Die beigegebenen Karten ermöglichen einen guten geographischen Überblick. J. A. FLEMING gibt Tabellen über die zuletzt bekanntgewordenen Werte der magnetischen Elemente an den erdmagnetischen Observatorien der Erde. G. R. WATT hebt die Notwendigkeit hervor, die atmosphärisch-elektrischen Untersuchungen durch Staubzählungen zu ergänzen.

W. F. G. SWANN gibt einen Bericht über seine letzten Arbeiten. Von O. H. GISH rühren Bemerkungen über den Erdstrom her.

V. CONRAD (Wien).

Vernadsky, W. J., Geochemie in ausgewählten Kapiteln. Autorisierte Übersetzung aus dem Russischen von Dr. E. KORDES. Leipzig 1930 (Akademische Verlagsges. m. b. H.). 370 S. Preis brosch. 23 RM., geb. 25 RM.

Wie in dem Werke „La Géochimie“ (Paris 1924) desselben Verfassers, handelt es sich auch in diesem Buche um eine Sammlung von Vorlesungen, welche der Verfasser in den Jahren 1922/23 an der Universität Paris gehalten und wesentlich erweitert hat. Die ursprünglichen vier Kapitel haben eine Ausdehnung auf sechs erfahren: I. Aus der Vorgeschichte der Geochemie. II. Die chemischen Elemente und ihre verschiedenen Arten von Vorkommen in der Erdrinde. III. Die Geochemie des Mangans und energetische Betrachtungen. IV. Das Silicium und die Silikate in der Erdrinde. V. Der Kohlenstoff und die lebende Substanz in der Erdrinde. VI. Die radioaktiven Elemente in der Erdrinde.

Für denjenigen, welcher die Entwicklung der geochemischen Arbeiten in den letzten Jahren verfolgt hat, ist es von außerordentlichem Interesse, zu beobachten, wie W. VERNADSKY das Problem gewissermaßen von der entgegengesetzten Seite anpackt und zeigt, daß das Studium der Gesteine und Minerale uns allein kein vollständiges Bild vom Haushalt der chemischen Elemente in der Erdrinde zu geben vermag und wie hierzu auch die organische Welt mit herangezogen werden muß, deren Mechanismus in den Kreislauf der Elemente in ganz wesentlichem Maße eingreift und regelt.

Den Geophysiker interessieren besonders die Abschnitte über die Geochemie des Jod und Brom, die Geschichte des freien Sauerstoffs, das Kapitel über die Materie im dispersen Zustand, die Geosphären der Erdrinde und die Energie der geochemischen Kreisprozesse. Von außerordentlichem Interesse ist ferner der Abschnitt über die Geochemie

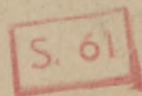
des Mangans, welche in dieser Ausführlichkeit und Sorgfalt meines Wissens bisher noch nicht geschrieben wurde und geradezu eine Monographie darstellt, für welche wir dem Verfasser sehr dankbar sein müssen. Ein Hauptteil des Werkes ist natürlich dem Kreislauf des Siliciums und Kohlenstoffes gewidmet. Wenn wir auch die vielleicht etwas zu breit gehaltenen Erörterungen über die Konstitution der Alumosilikate nicht in allem unterschreiben können — der Verfasser ist hier allzusehr auf seine Theorie vom „Kaolinkern“ eingestellt —, so müssen wir doch anerkennen, daß die in logischer Gedankenfolge entwickelten Deduktionen konsequent durchdacht, außerordentlich zur Originalität des Werkes beitragen und die noch vielfach im Dunkeln liegende Strukturforschung der Alumosilikate zu befruchten vermögen! Von Wichtigkeit ist ferner das, was über die Entstehung der Glaukonitsande und Alumophosphate gesagt wird. In dem allein 90 Seiten umfassenden Kapitel „Der Kohlenstoff und die lebende Substanz in der Erdkrinde“ finden sich neben den hauptsächlich den Biologen fesselnden Lebensvorgängen in der Biosphäre eine Unmenge von Daten, welche auch den Anorganiker interessieren, wie der Gehalt des Kohlenstoffes in den Gesteinen, die Graphitbildung, die biogene Entstehung des Erdöles.

Unverkennbar ist die naturphilosophische Einstellung, so, wenn der Verfasser die organische Substanz mit „lebenden Gesteinsarten“ vergleicht oder wenn er schreibt: „In der Erdkrinde muß man zwei verschiedene Arten von aktiver Substanz unterscheiden: die radioaktiven Elemente und die Gesamtheit der Organismen . . .“ Bei solchen Gedankengängen tritt uns der Unterschied gegenüber den Werken der westeuropäischen und amerikanischen Geochemiker V. M. GOLDSCHMIDT, F. CLARKE und H. WASHINGTON besonders deutlich vor Augen! Wir werden mit Befriedigung gewahr, wie die Arbeit W. VERNADSKYS die GOLDSCHMIDTSchen Forschungen unterstützt und erweitert. Eine Neuauflage des Buches wird jedoch die Arbeiten V. M. GOLDSCHMIDTS mehr als dies in dem Werke geschehen zu berücksichtigen haben!

Alles in allem ein außerordentlich lesenswertes Buch voll neuer und bestechender Ideen, das jeder naturwissenschaftlich Gebildete lesen sollte und das nicht nur dem Mineralogen und Geologen, sondern auch dem Biologen in ganz hervorragendem Maße Anregung bietet!

Zahlreiche historische Bemerkungen und bibliographische Notizen finden sich in einem 42 Seiten umfassenden Literaturverzeichnis, das den Wert des Buches ebenso wie ein gegenüber der ersten Auflage nun ausführlicheres Sachregister wesentlich steigert.

E. DITTLER (Wien).



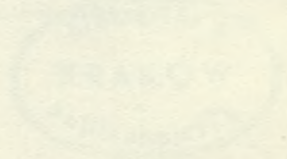
Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299584

II 7816

Faint, illegible text covering the majority of the page, likely bleed-through from the reverse side.



Biblioteka PK

J.X.28

/ 1930

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299584