



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000300713

- XXII. Heft: Verhandlungen der in Dresden (1866) und Berlin (1890) abgehaltenen Conferenzen zur Vereinbarung einheitlicher Prüfungsmethoden für Bau- und Konstruktions-Materialien. — Nachruf von A. Martens. Mit 1 Portrait in Lichtdruck. VIII u. 164 S. Preis M. 12.—
- XXIII. Heft: Verhandlungen der in Wien im Jahre 1893 abgehaltenen Conferenz zur Vereinbarung einheitlicher Prüfungsmethoden für Bau- und Konstruktions-Materialien. Bearbeitet von Prof. H. Gollner und Prof. A. Martens. Mit einer Tafel in Steindruck. 111 S. Preis M. 9.—
- XXIV. Heft: Die Biegunselasticität der Steinbalken. Belastungsversuche an einem Tonnenflechtwerkdache. Versuche über die Ausschläge schnell umlaufender Wellen. Mit 16 Abbildungen im Text, 2 Lichtdr. und 3 lithographischen Tafeln. 56 S. Preis M. 12.—
- XXV. Heft: Dauerversuche von Bauschinger, ausgeführt in den Jahren 1886 — 1893. Prüfung der Werderschen Festigkeitsmaschine. Knickversuche mit Winkel-eisen. Härteversuche. Mit 13 Abbildungen im Text und 4 lithographirten Tafeln. 48 S. Preis M. 10.—
- XXVI. Heft: I. Festigkeit und Abnützbarkeit von Hartsteinen. — II. Festigkeitsversuche mit Eisenbahn-Wagen-Kuppelungen. — III. Ueber die Biegungsfestigkeit gekrümmter Stäbe. Mit 1 Abbildung im Text und 2 lithographischen Tafeln. 43 S. Preis M. 8.—
- XXVII. Heft: I. Abhängigkeit der Bruchgefahr von der Art des Spannungszustandes. — II. Prüfung einer gusseisernen Säule auf Ausknicken. — III. Das elastische Verhalten des Erdbodens. — IV. Probe-Belastung von Decken. Mit 6 Abbildungen im Text, 4 Stein- u. 2 Lichtdrucktafeln. 43 Seiten. 1900. Preis M. 12.—
- XXVIII. Heft: I. Versuche über Elastizität und Festigkeit von Gusseisen. — II. Ueber die Abhängigkeit der Härteziffer von der Grösse der Druckfläche und dem Krümmungshalbmesser. — III. Druckversuche mit Wasserkissen. Mit 14 Abbildungen im Text und 4 Steintafeln. 48 Seiten. 1902. Preis M. 10.—



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000315049

J. X. 47/1396



Handwritten mark

MITTHEILUNGEN

AUS DEM

MECHANISCH-TECHNISCHEN LABORATORIUM

DER

K. TECHNISCHEN HOCHSCHULE MÜNCHEN.

GEGRÜNDET VON J. BAUSCHINGER.

NEUE FOLGE.

HERAUSGEGEBEN VON

AUGUST FÖPPL.

DER GANZEN REIHE VIERUNDZWANZIGSTES HEFT.

INHALT:

- I. DIE BIEGUNGSELASTICITÄT DER STEINBALEN.
- II. BELASTUNGSVERSUCHE AN EINEM TONNENFLECHTWERKDACHE.
- III. VERSUCHE ÜBER DIE AUSSCHLÄGE SCHNELL UMLAUFENDER WELLEN.

Handwritten: F. N. 20775

MIT 16 ABBILDUNGEN IM TEXT, 2 LICHTDRUCK- UND 3 LITHOGRAPHISCHEN TAFELN.



MÜNCHEN

THEODOR ACKERMANN

KÖNIGLICHER HOF-BUCHHÄNDLER

1896.

Handwritten: VIII 2

Handwritten: 208



MITTHEILUNGEN

TECHNISCH-TECHNISCHEN LABORATORIUM

K. TECHNISCHES HOCHSCHULE MITTEL

g.x.47/1896



nr inw. 1862

AUGUST 1896

Vorwort.

In 21 Heften dieser „Mittheilungen“ hat *Johann Bauschinger* die Ergebnisse seiner wissenschaftlichen Untersuchungen im hiesigen Laboratorium veröffentlicht. Nach seinem Tode kamen noch nachträglich 2 Hefte über die von ihm geleiteten Verhandlungen der „Conferenzen“ heraus. — In einem dieser Hefte (dem 22.) hat Herr *Martens* einen warm empfundenen Nachruf für *Bauschinger* gebracht. Diesem trefflichen Lebensbilde vermag ich nichts beizufügen, — um so weniger, als ich *Bauschinger* während seines Lebens selbst niemals persönlich näher getreten bin.

An die überall hoch angesehene erste Reihe der „Mittheilungen“, durch die *Bauschinger* seinen Ruf als bedeutender Experimentator für alle Zeiten fest begründet hat, soll sich jetzt eine neue Folge schliessen, in der ich über meine Versuche berichten will.

Dabei habe ich natürlich einen schweren Stand. — Die Erwartung und selbst das Verlangen, dass der Nachfolger eines gefeierten Mannes die Lebensarbeit seines Vorgängers einfach da fortsetze, wo dieser aufhörte, sind menschlich erklärlich genug und man wird sich dabei kaum der Ungerechtigkeit bewusst, die in einem solchen Verlangen liegt. Man vergisst zu leicht, dass in den Stücken, die ganz besonders die Grösse und die Eigenart eines hervorragenden Mannes ausmachten, ihn ein Nachfolger niemals erreichen kann. Schlimm genug, wenn er es überhaupt versucht: wer Erhebliches leisten will, darf sich nach keinem Meister und daher auch nicht nach seinem Vorgänger richten. Wissen und Können, Fähigkeiten und Neigungen sind nach so verschiedenen Richtungen hin vertheilt, dass immer nur Jeder für sich selbst den Weg finden kann, auf dem er seine beste Kraft zu entfalten vermag.

Schon als meine Berufung zum Nachfolger *Bauschinger's* in Frage kam, habe ich diesen Anschauungen sofort Ausdruck gegeben. Ich liess keinen Zweifel darüber, dass sich meine Arbeiten voraussichtlich zum grossen Theile in anderen Bahnen bewegen würden, wie die meines Vorgängers. Auch sonst habe ich jede Gelegenheit, die sich mir bot, dazu benützt, mich gegen eine Rolle zweiten Ranges zu verwahren, wie sie — wenn auch in gut gemeinter Absicht — dem zugebracht wird, den man „in seines Vorgängers Geiste fortzuarbeiten und seinen Wegen mit Geschick zu folgen“ anweist.

So sehr ich auch die verdienstvolle Wirksamkeit *Bauschinger's* zu schätzen weiss, muss ich mir doch das Recht wahren, meine eigenen Wege einzuschlagen. Ich habe es in den Arbeiten, über die dieses erste Heft der neuen Folge der „Mittheilungen“ berichtet, gethan. Man wird daraus ersehen, dass ich mir es mehr zum Ziele gesteckt habe, das Verhalten ganzer Konstruktionstheile oder auch zusammengesetzter Konstruktionen als die Eigenschaften des dazu verwendeten Materials an sich zu erforschen. Ich werde dabei von der Absicht geleitet, entweder die Ergebnisse theoretischer Untersuchungen an der Hand beobachteter Thatsachen zu prüfen oder auch durch die Versuche erst die nöthige Grundlage für eine richtige Fassung der Theorie dieser Konstruktionen zu gewinnen. Selbst eine Versuchsreihe, wie die über die

Schwingungserscheinungen an schnell laufenden Wellen, also die Erforschung eines rein dynamischen Problems, rechne ich ganz zum Aufgabenkreis eines mechanisch-technischen Laboratoriums.

Ueber die von *Bauschinger* in seinen letzten Jahren mit der *Wöhler'schen* Maschine durchgeführten Dauerversuche beabsichtige ich in einem der nächsten Hefte dieser „Mittheilungen“ eine Zusammenstellung der darüber vorliegenden Aufzeichnungen zu veröffentlichen. Für die nächste Zeit habe ich zwar keine Weiterführung dieser Versuche in Aussicht genommen und ich hätte die Zusammenstellung daher auch schon anstatt dieses Heftes bringen können. Man wird aber begreiflich finden, dass ich wenigstens für das erste Heft der neuen Folge der „Mittheilungen“ einem Berichte über Arbeiten den Vorzug gab, die von mir selbst herrühren und die daher ein Urtheil darüber zulassen, was man in Zukunft aus dem hiesigen Laboratorium zu erwarten hat.

Der Verlagshandlung, die, wie man namentlich aus den beiden Lichtdrucktafeln erkennen wird, keine Kosten scheute, um das neue Heft würdig auszustatten, spreche ich den gebührenden Dank aus.

München im Februar 1896.

A. Föppl.

I. Die Biegungselasticität der Steinbalken.

Seit langer Zeit hat man die Erfahrung gemacht, dass die aus Biegungsversuchen ermittelte „Biegungsfestigkeit“ fast aller Steinarten weit grösser ausfiel, als die an Zugprobestücken gefundene „Zugfestigkeit“ des gleichen Materials. So ist, um nur einige Beispiele anzuführen, im 18. Hefte der Bauschinger'schen Mittheilungen S. 10 die Zugfestigkeit eines „grobkörnigen, glimmerreichen“ gelben Granits zu 9,5 bis 18 *atm*, die Biegungsfestigkeit zu 74 bis 91 *atm*, ferner auf S. 13 die Zugfestigkeit eines feinkörnigen Buntsandsteins zu 14 bis 15, die Biegungsfestigkeit zu 45 bis 48 *atm* angegeben und ähnlich liegt das Verhältniss der beiden Festigkeitsziffern bei den meisten Steinsorten.

Die verschiedene Bewerthung der Zugfestigkeit und der Biegungsfestigkeit schliesst aber einen Widerspruch in sich. Denn die Formel, nach der die „Biegungsfestigkeit“ aus den Versuchsdaten berechnet ist, also

$$\delta = \frac{3 Pl}{2 bh^2}$$

nach der Bauschinger'schen Bezeichnungsweise (S. 7 des gleichen Heftes) ist aus der gewöhnlichen Biegungstheorie hergeleitet, deren Zweck gerade darin besteht, die Biegungsbeanspruchung auf Zug- und Druckspannungen zurückzuführen. Wer sich dieser Formel zur Berechnung der Biegungsfestigkeit bedient, muss daher nothwendig erwarten, dass der Werth von δ mit der Zugfestigkeit des Materials übereinstimme. Abweichende Angaben für beide Werthe bilden ein Eingeständniss dafür, dass entweder die zur Berechnung von δ gebrauchte Formel auf Balken aus Steinmaterial nicht anwendbar ist oder dass bei den Versuchen irgend ein Umstand von Einfluss war, der nicht klar gelegt wurde.

Natürlich ist dieser Widerspruch schon lange bemerkt worden. Um ihn zu heben, lag es am nächsten, die Giltigkeit der gewöhnlichen Biegungstheorie für Steinbalken in Zweifel zu ziehen. Man hatte dazu auch um so mehr Veranlassung, als die Elasticitätsmessungen häufig ein abweichendes elastisches Verhalten der Steine gegen Zug-

und Druckbeanspruchung erkennen liessen. Man wurde so zu der Annahme geführt, dass die neutrale Faser im Querschnitte eines gebogenen Steinbalkens von der Mitte aus erheblich gegen die Druckseite hin verschoben sei. Schon Navier, der Schöpfer der heutigen Biegungstheorie, hat diese Annahme erwähnt und de Saint-Venant, der Herausgeber der 3. Auflage der Navier'schen Vorlesungen*) hat sie näher ausgeführt und jene aus zwei ungleichen Dreiecken bestehende Spannungsvertheilungsfigur gezeichnet, die seither von den Autoren, die sich mit dieser Frage beschäftigten, meistens zu Grunde gelegt wurde.

In neuerer Zeit ist dieser Gedanke namentlich von Herrn Melan**) weiter verfolgt und auch von Herrn Hartig***) in einer grösseren Abhandlung über die Festigkeitseigenschaften einiger sächsischer Bausteine, die sich auf Versuchsergebnisse der Berliner Versuchsanstalt stützt, vertreten worden.

Um zu einer eindeutigen Darstellung zu gelangen, behielten beide Forscher die Hauptgrundlage der Navier'schen Biegungstheorie, wonach die Querschnitte des gebogenen Balkens auch nach der Formänderung eben bleiben sollen (in der Folge kurz als die „Navier'sche Annahme“ bezeichnet) bei und fügten dazu die fernere Voraussetzung, dass der Elasticitätsmodul sowohl für Zug als für Druck innerhalb des ganzen in Betracht kommenden

*) Navier, Résumé des Leçons. 3ème éd. Paris 1864, S. 172 und 180. Auf S. 172 sagt Navier: „Si cette hypothèse (dass die neutrale Axe durch den Schwerpunkt gehe) était exactement conforme aux effets naturels, les valeurs de la constante R (der specifischen Bruchspannung) déduites, au moyens des formules précédentes (die der Formel für δ oben entsprechen), des expériences sur la rupture par flexion ne différeraient point des résultats obtenus par les expériences directes sur la rupture des corps produits par extension ou par écrasement. Lorsque cet accord n'a pas lieu, on doit l'attribuer à ce que les fibres des corps n'opposant pas des résistances égales à l'extension et à la compression, l'axe d'équilibre (d. i. die neutrale Faser) change de situation etc.

**) J. Melan, Wochenschrift d. österr. Ing. u. Arch.-Vereins. Jahrgang 1890, S. 223.

***) Hartig, Civilingenieur, Bd. 38, 1892, S. 80.

Intervalls als constant betrachtet werden dürfe, dass aber beide von einander erheblich verschieden seien. Auf diesen beiden Annahmen liess sich in widerspruchsfreier und eindeutiger Weise eine Theorie der Biegungsfestigkeit von Steinbalken aufbauen, die sich mit den wichtigsten, bis dahin bekannten Versuchsergebnissen in der Hauptsache vereinigen liess.

Zunächst führte diese Theorie natürlich wieder zu dem von de Saint-Venant angenommenen Spannungsvertheilungsgesetze. Die wichtigste und bei den für die Zugfestigkeit und für den Widerstand gegen Biegung vorliegenden Versuchswerten unerlässliche Folgerung dieser Theorie, die der Kürze halber in der Folge als die Melan'sche bezeichnet werden möge, bestand aber darin, dass die neutrale Faser von der Balkenmitte erheblich nach der Druckseite hin verschoben sei. So findet Melan den Abstand z der neutralen Schicht von der äussersten Faser auf der Zugseite zu

$$z = \frac{\sqrt{\mu}}{1 + \sqrt{\mu}} h$$

worin μ das Verhältniss der beiden Elasticitätscoefficienten für Druck und Zug und h die Höhe des Querschnitts bedeuten. Melan wendet seine Entwicklungen selbst nur auf die Biegungsfestigkeit von Betonplatten an und wird hier durch den Vergleich des Biegungswiderstandes dieser künstlichen, steinartigen Massen mit ihrer Zugfestigkeit zu dem Werthe $\sqrt{\mu} = 4$ geführt, so dass für Beton $z = \frac{4}{5} h$ zu setzen wäre, d. h. $\frac{4}{5}$ des Querschnitts wäre bei der Biegung einer Betonplatte auf Zug und nur $\frac{1}{5}$ auf Druck beanspruchte. Der Abstand der neutralen Faser von der Mitte wird also hier gleich 0,3 von der Querschnittshöhe h gesetzt.

Hartig berechnet für den aus den Brüchen der Firma Carl Sparmann & Co. in Häslich bei Bischheim stammenden Granit aus folgenden von dem Berliner Laboratorium herrührenden Angaben:

Länge des Prismas (Stützweite)	$l = 25 \text{ cm}$
Breite des Prismaquerschnittes	$b = 6 \text{ cm}$
Höhe „ „	$h = 6 \text{ cm}$
Mittelwerth der Bruchbelastungen	$P_{\max} = 1682 \text{ kg}$
Specifische Zerreibfestigkeit	$K_z = 69,8 \text{ atm}$

die Verhältnisszahl μ zu $\mu = 3,67$, woraus für den oben mit z bezeichneten Abstand

$$z = 0,657 h$$

folgt. Der Abstand der neutralen Faser von der Mitte beträgt also hiernach immer noch 0,157 h .

Diese Art der Behandlung des Gegenstandes war ohne Zweifel nicht nur berechtigt, sondern bis auf Weiteres auch geboten. Denn die Aufgabe der Theorie besteht überall darin, die in der Wirklichkeit beobachteten Er-

scheinungen zu einem in sich widerspruchsfreien Bilde zu verarbeiten und alle Folgerungen, die sich aus den hierfür gewählten Grundlagen ziehen lassen, möglichst vollständig klar zu legen. Aufgabe der experimentellen Forschung ist es dann wiederum, an diese über die bisherigen Erfahrungen hinausreichenden Schlüsse der theoretischen Untersuchung anzuknüpfen und sie auf ihre Uebereinstimmung mit den Thatsachen zu prüfen. Nur durch ein wechselseitiges Ineinandergreifen beider Untersuchungsmethoden wird ein stetiger Fortschritt in der Naturerkenntniss ermöglicht.

Nachdem in der Melan'schen Theorie und bei der von ihr durch Hartig gemachten Anwendung auf den Häslicher Granit die Behandlung der Biegungsfestigkeit der Steinbalken scharf bestimmte Umrisse angenommen hatte, war es daher durchaus geboten, die Folgerungen dieser Theorie einer experimentellen Prüfung zu unterwerfen. Offenbar eignete sich dazu am besten eine Untersuchung über die Lage der neutralen Faser, da diese verhältnissmässig einfach und sehr sicher auf experimentellem Wege durchgeführt werden kann. Als ich über die Hilfsmittel des hiesigen Laboratoriums verfügen konnte, war es darum eine der ersten Aufgaben, die ich in Angriff nahm, die Melan'sche Theorie auf ihre Uebereinstimmung mit den Thatsachen zu prüfen.

Schon jetzt will ich erwähnen, dass ich es nach den seither von mir gesammelten Erfahrungen als ziemlich zweifellos ansehen darf, dass man bei einem direkten Versuche mit einem Steinbalken aus dem Häslicher Granit, auf den sich die Berechnung des Herrn Hartig bezog, die neutrale Schicht sicher nicht um mehr als einige (etwa zwei bis fünf) Hundertel der Querschnittshöhe aus der Mitte verschoben gefunden hätte, während die berechnete Verschiebung über 15 Hundertel betrug. Durch einen solchen direkten Versuch würde freilich nicht etwa die Melan-Hartig'sche Theorie selbst als falsch nachgewiesen werden, — denn diese ist in sich durchaus folgerichtig —, sondern es würde nur gezeigt werden, dass ihre Anwendung im concreten Falle von falschen Voraussetzungen ausging.

Die von vornherein bedenklichste Voraussetzung ist natürlich die über das elastische Verhalten der Steine gegen Zug und Druck. Die Annahme, dass der Elasticitätsmodul für ein Belastungsintervall von $-x$ bis auf $+x \text{ atm}$ bei der Spannung 0 einen plötzlichen Sprung mache, zu beiden Seiten des spannungslosen Zustandes aber constante Werte behalte, steht mit den Elasticitätsmessungen Bauschinger's durchaus nicht im Einklange. Im Gegentheil sagt Bauschinger selbst bei der Erläuterung der von ihm im 18. Hefte gegebenen Formänderungsdiagramme: „Dadurch (nämlich durch die Art

der Darstellung) tritt der stetige Uebergang der Druck- in die Zugcurven da, wo er zu erwarten ist, also wo der Zug in der gleichen Richtung zum Lager ausgeübt ist und wo keines der Probestücke vorher belastet worden war, meistens recht schön hervor“. Der bedeutendste Experimentator auf diesem Gebiete „erwartete“ also im Allgemeinen ein völlig anderes elastisches Verhalten der Steine, als es von der Melan-Hartig'schen Theorie vorausgesetzt wird.

Offenbar sind nach dieser Richtung auch sonst noch in technischen Kreisen vielfach irrige Meinungen verbreitet. So begegnete es mir noch vor Kurzem, dass ich um Auskunft ersucht wurde, wie gross für ein bestimmtes Material der Elasticitätsmodul für Zug und wie gross der für Druck sei, ohne dass eine Angabe hinzugefügt wurde, auf welche Spannungen sich beide beziehen sollten. Vielmehr sollten beide Werthe (nebst einigen anderen) einer theoretischen Untersuchung zu Grunde gelegt, also auf alle Werthe zwischen 0 und der grössten vorkommenden Spannung angewendet werden.

Dem gegenüber halte ich es für nützlich, zunächst einmal zu betonen, dass ich die Erwartung Bauschinger's über den stetigen Uebergang der Zugcurven in die Druckcurven vollständig theile, und dann auch die Erwägungen darzulegen, die mich selbst zu dieser Ansicht führten. Innerhalb eines hinreichend kleinen Belastungsintervalls von 0 bis $+x$ wird man nämlich die „Zugcurve“ immer genau genug als gradlinig ansehen können. Lässt man nun die Spannung von x um dx , also bis auf $x-dx$ sinken, so geht die Längenänderung um $\alpha \cdot dx$ zurück, wenn α den innerhalb des Intervalls nach Voraussetzung constanten Dehnungscoefficienten bezeichnet. Die Spannungsverminderung dx kann aber auch dahin aufgefasst werden, dass zu der ursprünglichen Zugspannung x eine Druckspannung von der Grösse dx getreten ist. Sieht man also den durch die Spannung x herbeigeführten Zustand des Materials als den Anfangszustand an, so ist für diesen zweifellos der Elasticitätsmodul für Zug gleich dem für Druck, solange natürlich, als es sich nur um kleine Formänderungen handelt. Dies gilt auch dann noch, wenn die ursprüngliche Spannung x der Null beliebig genähert wird. Nun wäre ja allerdings immer noch ein Sprung im ganzen elastischen Verhalten des Materials möglich, sobald die Anfangsspannung x bis auf Null herabgesunken ist. Bedenkt man aber, dass die Molekularkräfte im spannungslosen Zustande sicher nicht alle plötzlich wegfallen, sondern dass sie sich über jeden gegebenen Querschnitt nur so ausgleichen, dass ihre Resultirende verschwindet, so kann man nur einen stetigen Uebergang durch den Spannungszustand Null zunächst für Beanspruchungen der gleichen Art und daher nach den vorstehenden Ueberlegungen gleiche Elasticitätsmoduli

für unendlich kleine Zug- und Druckbeanspruchungen erwarten.

Wenn diese Erwartung zutrifft, ist es aber offenbar ein ganz aussichtsloses Beginnen, zwei feste Werthe für die Elasticitätsmoduli einander gegenüber zu stellen, die für alle vorkommenden Spannungen anwendbar sein sollen. Wenn die Annäherung, dass beide einander gleich sind, nicht genügt, muss jede andere Annahme ebenso versagen, sobald man sie auf grössere Spannungsintervalle anwendet.

Abgesehen von diesen Ueberlegungen, die zu grosser Vorsicht bei der Anwendung der Melan-Hartig'schen Theorie mahnen, hielt ich es aber auch für sehr gewagt, die Navier'sche Annahme, dass die Querschnitte eben bleiben sollen, bei Steinbalken ohne genaue Prüfung beizubehalten. In der That zeigte sich auch, dass merkliche Abweichungen davon vorkommen; indessen sind diese doch viel geringer, als ich es von vornherein für möglich hielt. Der starke Verdacht, den ich gegen die Zulässigkeit der Navier'schen Annahme ursprünglich hegte, hat sich vielmehr im grossen Ganzen nicht bestätigt.

Auch sonst hat die Untersuchung einen erheblich anderen Verlauf genommen, als ich mir ihn ursprünglich vorgestellt hatte. Namentlich hat (zunächst wenigstens bei den von mir untersuchten Materialien) der im Eingange erwähnte Widerspruch zwischen der Biegezugfestigkeit und der Zugfestigkeit eine ganz unerwartete Aufklärung gefunden.

Während des Sommerhalbjahres hat Herr A. Houkowsky, Studirender an der mechanisch-technischen Abtheilung unserer Hochschule, eine grössere Zahl von Messungen zum Zwecke dieser Untersuchung ausgeführt, die ich zum Theil hier verwenden werde; wo es geschieht, werde ich seinen Namen besonders nennen. Sonst sind alle Messungen von mir selbst, oder wenn zwei Beobachter nöthig waren, von mir mit Herrn Assistenten Klebe, der mir bei dieser ganzen Untersuchung getreulich zur Seite stand, gemeinschaftlich ausgeführt worden.

§ 1. Herrichtung und Behandlung der Versuchsstücke.

Die ersten Versuche stellte ich mit Steinbalken an, die aus dem in München viel verwendeten Blauberger Granit hergestellt waren. Ich liess je 3 Parallelepiped von der gelben und der blauen Spielart dieses Steines von 170 cm Länge, 20 cm Breite und 30 cm Höhe anfertigen, von denen indessen bisher nur 3 (ein gelber und zwei blaue) zu den Versuchen verwendet wurden. Als ich nach langen mühsamen Versuchen über das ganze Verhalten der Granitbalken ins Klare gekommen war, beschloss ich die Hauptversuche auch an einem andern, möglichst von dem vorigen verschiedenen Stein zu wiederholen. Herr Baumeister Buchner in Würzburg hatte die Freundlichkeit, mir zu

diesem Zwecke 3 Parallelepipede aus Mainsandstein, die in den Dimensionen mit den vorigen übereinstimmten und dem Bruche in Höchberg entstammten, kostenfrei zu überlassen, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen Dank ausspreche.

Es zeigte sich bald, dass sich die Sandsteinbalken bei der Biegung fast genau so verhielten wie die Granitbalken, nämlich beide annähernd so, wie es von der Biegungstheorie von jeher vorausgesetzt worden war, solange man von dem Widerspruche zwischen den experimentell ermittelten Werthen der Zug- und Biegungsfestigkeit nichts wusste. Bei der grossen inneren Wahrscheinlichkeit die man diesem Verhalten, das man desshalb wohl als das normale bezeichnen darf, ohne Zweifel zuzuschreiben hat (man erinnere sich nur der damit im Zusammenhange stehenden Untersuchungen der mathematischen Elasticitätstheorie), glaubte ich annehmen zu dürfen, dass auch die meisten übrigen Steinsorten ähnliche Ergebnisse liefern würden. Um Zeit und Kraft nicht zu zersplittern, beschränkte ich mich daher auf die möglichst genaue und sorgfältige Untersuchung jener wenigen Granit- und Sandsteinbalken, wobei es natürlich meine Hauptaufgabe war, den Widerspruch zwischen Zug- und Biegungsfestigkeit, der allein zur Annahme eines anderen als jenes normalen Verhaltens geführt hatte, aufzuklären. — Späterhin hoffe ich auch noch andere Materialien nach der gleichen Methode untersuchen zu können. Namentlich sind es Balken aus Beton und aus Gusseisen, für die ich eine solche Untersuchung zunächst in Aussicht genommen habe.

Bei den Biegungsversuchen wurden die Balken in horizontaler Lage in die Werder'sche Maschine eingespannt. Für eine Entlastung von dem Eigengewicht der Balken, das immerhin schon eine merkliche Rolle gegenüber der Biegungslast im horizontalen Sinne spielte, konnte nicht gesorgt werden. Die Eigenlast wurde an den Enden des Balkens von Auflagerplatten aufgenommen, die geschmiert wurden, damit keine grössere Reibung auftreten konnte.

Die freie Spannweite der Balken betrug bei allen Versuchen 150 *cm*. Die Biegungslast griff in der Mitte an. Schon nach den ersten orientirenden Versuchen erkannte ich, dass eine Stützung des Balkens gegen abgerundete Kanten nicht genügte, um einen constanten Lastangriff zu verbürgen. Ich liess daher 6 Stahlcylinder von 6 *cm* Durchmesser anfertigen, von denen an jedem Ende und in der Mitte der Spannweite je zwei als rechtwinklig zu einander gekreuzte Walzen angeordnet wurden, durch die die Auflagerkräfte und die Biegungslast genau in der Mittelebene des Balkens und senkrecht zu dessen Längsrichtung übertragen wurden. Um eine Zerstörung des Steins an den Druckübertragungsstellen zu verhüten, liess ich zwischen die drei an die Balkenoberfläche an-

grenzenden, senkrecht zur Längsaxe des Balkens stehenden Walzen und den Stein schmale Pappstreifen beilegen.

Ehe die Formänderungen endgiltig gemessen wurden, brachte ich jeden Balken durch wiederholte Belastungen in einen constanten Zustand. Bei den ersten Belastungen, wenn diese auch nur klein sind, treten stets bleibende Formänderungen ein. Nachdem die Last aber öfters aufgebracht und wieder entfernt worden ist, wachsen diese nicht mehr an und die Formänderungen gehen, soweit als die Genauigkeit der Messung reicht, nach der Entlastung vollständig wieder zurück. Geht man später zu höheren Belastungen über, so tritt die Erscheinung von Neuem auf und man muss abermals durch öfteren Wechsel zwischen Belastung und Entlastung dafür sorgen, dass der Balken wieder einen constanten Zustand annimmt. Sobald dies geschehen ist, geht der Balken nach Fortnahme der Last nicht nur vollständig wieder in die vorausgegangene Form zurück, sondern die Formänderungen sind auch bei wiederholtem Aufbringen der gleichen Last so genau einander gleich, als dies die Genauigkeit der Messung nur irgend erkennen lässt. Dies gilt selbst für Lasten, die schon ziemlich nahe an der Bruchgrenze liegen. Versuche, bei denen es nicht zutraf, wurden verworfen und meist liess sich der Grund der Abweichung in irgend einer Unregelmässigkeit bald erkennen und beseitigen.

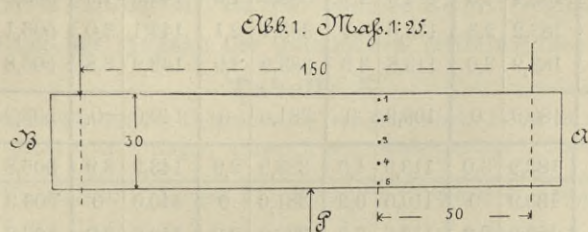
Für die Praxis bezw. für das Studium der Biegungserscheinungen kommt natürlich nur jener constante Zustand in Betracht. Die dauernden Umlagerungen der Moleküle, die sich in den anfänglichen bleibenden Formänderungen aussprechen, haben mit der Ausbildung des Spannungszustandes nichts zu thun.

§ 2. Einfache Spiegelversuche zur Prüfung der Navier'schen Annahme.

Zuerst wurde, um die Navier'sche Annahme, dass die Querschnitte nach der Biegung eben bleiben, zu prüfen, ein Balken aus gelbem Granit L. Nr. 5220 a von den früher angegebenen Dimensionen auf einer Breitseite mit 5 Spiegeln versehen. In einer zur Längsaxe senkrechten Reihe wurden nämlich in gleichen Abständen von je 7 *cm* fünf kleine kreisrunde Löcher von $2\frac{1}{2}$ bis 3 *mm* Durchmesser und 5 *mm* Tiefe gebohrt, von denen die beiden äussersten um 1 *cm* vom Rande des Balkens abstanden. In jedes dieser Löcher wurde mit Hilfe eines dazu passenden Zapfens ein runder Stift von 5 *mm* Dicke eingekittet, der um 12 bis 15 *mm* über die Balkenoberfläche vortragte. Auf jeden Stift wurde nach der Erhärtung des Kitts ein kleiner Spiegel festgeschraubt. Die Spiegel waren hiedurch mit den unmittelbar darunter liegenden Theilen des Balkens fest verbunden und mussten die

elastischen Verschiebungen dieser Theile mitmachen. Der mit dieser Spiegelreihe versehene Balken wurde dann zur Vornahme des Biegungsversuchs in die Werder'sche Maschine gebracht, so dass die Spiegelreihe nach oben hin zu liegen kam.

Der Abstand des Querschnitts, zu dem die Spiegelreihe gehörte, vom nächsten Auflagerquerschnitt betrug 50 cm. Abb. 1 zeigt den Balken im Grundriss und gibt



die den einzelnen Spiegeln beigelegten Nummern an. P ist die von der Maschine ausgeübte Kraft.

Auf der nach A hin gelegenen Seite des Balkens wurden drei Fernrohre zur Beobachtung der Spiegel 1, 3, 5 mit gemeinsamer Scala und auf der Seite nach B hin zwei andere zur Beobachtung der Spiegel 2 und 4 aufgestellt. Aehnlich wurde auch bei den weiter folgenden Versuchen verfahren. Hierauf wurde der Balken belastet und die Drehung, die jeder einzelne Spiegel um die verticale Axe ausführte, an den horizontalen Scalen abgelesen.

Man sieht ohne Weiteres ein, dass sich alle Spiegel desselben Querschnitts bei derselben Belastung um gleich viel drehen müssen, wenn die Navier'sche Annahme zutreffen soll. Eine schätzungsweise vorher ausgeführte Berechnung über die ungefähre Grösse der zu erwartenden elastischen Drehung des Querschnitts hatte bereits gezeigt, dass sich wenigstens gröbere Abweichungen von der Navier'schen Annahme durch merklich verschiedene Spiegelablesungen verrathen müssten, wenn die Methode auch nicht fein genug ist, um geringere Abweichungen zu entdecken.

Nach diesen Vorbereitungen wurde der erste Versuch am 21. März 1895 in Gegenwart einer grösseren Zahl von Praktikanten durchgeführt. Leider war das Stativ, auf dem die Fernrohre 2 und 4 standen, wie sich bald herausstellte, nicht sicher aufgestellt und wegen des vorzeitigen Bruches des Balkens liess sich dies Versehen auch nicht mehr gut machen. Ich glaubte nämlich die Belastung bis auf 10 t steigern zu können und ich wollte gerne von vornherein so weit als möglich gehen, um grössere Ablesungen zu erhalten. Nachdem die Ablesung bei 9 t Belastung gemacht war, trat indessen plötzlich der Bruch ein. Die Bruchfläche war gegen die Längsaxe etwas geneigt und ein wenig seitlich, so dass sie am einen Ende etwa 2, am anderen etwa 7 cm vom Mittelquerschnitt abstand. Sie enthielt einige grössere krystalinische Nester.

Die Ablesungen der Spiegel von der Seite A her gebe ich in Tabelle 1 wieder. Die Beobachter waren Studierende, die sich an dem gerade abgehaltenen Uebungscursus des Laboratoriums beteiligten.

Tabelle 1.

Granitbalken 5220^a auf Biegung, Ablesungen mm, Scalentfernung ca. 203 cm.

Belastung in t	Spiegel 1		Spiegel 3		Spiegel 5	
	Ab- lesung	Beweg- ung	Ab- lesung	Beweg- ung	Ab- lesung	Beweg- ung
0	190,1	—	329,9	—	389,9	—
1	190,2	0,1	330,2	0,3	390,2	0,3
2	190,7	0,6	330,6	0,7	390,5	0,6
3	190,9	0,8	330,8	0,9	390,8	0,9
4	191,1	1,0	330,9	1,0	390,9	1,0
5	191,7	1,6	331,2	1,3	391,2	1,3
6	192,1	2,0	331,7	1,8	391,8	1,9
7	192,8	2,7	332,1	2,2	392,2	2,3
8	193,3	3,2	332,7	2,8	392,8	2,9
9	194,0	3,9	333,2	3,3	393,4	3,5

Ich habe diesen Versuch, obschon er nicht ganz einwandfrei ist, hier vollständig aufgeführt, weil es der erste war. Er zeigte bereits, dass grössere Abweichungen von der Navier'schen Annahme nicht vorlagen. Bei den grösseren Lasten hat sich freilich der auf der Zugseite liegende Spiegel 1 immerhin merklich mehr gedreht als die beiden anderen, eine Erscheinung, die sich auch bei den späteren Versuchen gewöhnlich wiederholte.

Nachdem der Versuch durch den vorzeitigen Bruch des Balkens unterbrochen war, liess ich die übrigen Granitbalken zuvor sämtlich mit 8 t probiren und wählte, nachdem sie diese Last alle ausgehalten hatten, zwei aus blauem Granit aus, die ich für die weiteren Versuche herichten liess. Die späteren Biegungsversuche sind an ihnen meistens bei einer Belastung von 8 t durchgeführt worden. Ich betrachtete diesen Belastungszustand als den normalen und machte es mir zur Hauptaufgabe, die ihm entsprechenden Formänderungen zu studiren.

Später wiederholte ich die Hauptversuche mit den bereits erwähnten Sandsteinbalken. Von diesen brach der erste unter einer Last von nicht ganz 2 t (man wird etwa 1,95 t nehmen können). Die beiden anderen wurden auf 1,2 t probirt und bei dieser Normalbelastung untersucht.

An dieser Stelle gebe ich nur die einfachen Spiegelversuche wieder, die nach dem Muster des vorher beschriebenen durchgeführt wurden. Beobachter waren bei diesen Versuchen Herr Assistent Klebe und ich.

Der Granitbalken L Nr. 5219a wurde auf einer Breitseite mit drei Stiftenreihen versehen, die mit den römischen Ziffern I, II, III bezeichnet wurden. Man konnte nun 3 verschiedene Querschnitte untersuchen. Reihe I hatte vom nächsten Auflagerquerschnitt 2 cm Abstand, Reihe III

50 cm, wie beim vorigen Balken, und Reihe II lag in der Mitte zwischen beiden, also 26 cm vom Auflager entfernt. Für jede Reihe wurde der Versuch, nachdem der Balken mehrmals belastet und wieder entlastet war, nach dem Muster des vorigen wiederholt, indem immer mit 5 Fernrohren von 2 Seiten her gleichzeitig abgelesen wurde. Die Scalentfernung konnte wegen des beschränkten Raumes diesmal nur zu 175 cm gewählt werden und musste in einem Falle (bei Reihe I) auf 140 cm herabgesetzt werden, so dass eine Reduction der zugehörigen Ablesungen erforderlich war.

Tabelle 2.

Granitbalken 5219^a auf Biegung, Untersuchung von Querschnitt II in 26 cm Entfernung vom Auflager, Ablesungen mm, Scalenabstand 175 cm.

Belastg. in t	Spiegel 1		Spiegel 2		Spiegel 3		Spiegel 4		Spiegel 5	
	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung
0	290,9	—	190,8	—	158,8	—	160,7	—	560,8	—
2	291,8	0,9	191,7	0,9	159,8	1,0	161,4	0,7	561,7	0,9
4	292,6	1,7	192,8	2,0	160,5	1,7	162,6	1,9	562,5	1,7
6	293,4	2,5	193,5	2,7	161,3	2,5	163,4	2,7	563,3	2,5
8	294,1	3,2	194,1	3,3	162,0	3,2	164,0	3,3	564,1	3,3
0	290,9	0	190,9	0,1	158,9	0,1	160,9	0,2	560,9	0,1
8	294,1	3,2	194,1	3,2	162,0	3,1	163,9	3,0	564,1	3,2
0	290,9	0	190,9	0	158,9	0	161,0	0,1	560,9	0

Ich habe hier nur den letzten Satz der Beobachtungen wiedergegeben; bei den vorhergehenden war der Balken noch nicht genügend in den constanten Zustand übergegangen. Bei den später folgenden Beobachtungen an den Reihen III und I stimmten alle aufeinander folgenden Beobachtungssätze bis auf einzelne Zehntel vollkommen mit einander überein.

Der Raumersparniss wegen gebe ich aber auch hier nur die letzten Beobachtungssätze wieder.

Tabelle 3.

Granitbalken 5219^a auf Biegung, Untersuchung von Querschnitt III in 50 cm Abstand vom Auflager, Ablesungen mm, Scalenabstand 175 cm.

Belastg. in t	Spiegel 1		Spiegel 2		Spiegel 3		Spiegel 4		Spiegel 5	
	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung
0	260,2	—	179,8	—	390,2	—	150,1	—	500,1	—
2	260,9	0,7	180,4	0,6	390,8	0,6	150,9	0,8	500,8	0,7
4	261,6	1,4	181,0	1,2	391,4	1,2	151,4	1,3	501,3	1,2
6	262,2	2,0	181,7	1,9	392,0	1,8	152,0	1,9	502,0	1,9
8	262,8	2,6	182,1	2,3	392,5	2,3	152,4	2,3	502,5	2,4
0	260,2	0	179,8	0	390,2	0	150,1	0	500,1	0
8	262,9	2,7	182,0	2,2	392,5	2,3	152,4	2,3	502,5	2,4
0	260,3	0,1	179,8	0	390,2	0	150,0	-0,1	500,1	0
8	262,9	2,6	182,0	2,2	392,5	2,3	152,4	2,4	502,5	2,4
Mittel aus all. Sätzen für 8 t	—	2,7	—	2,2	—	2,3	—	2,3	—	2,4

Tabelle 4.

Granitbalken 5219^a, Untersuchung von Querschnitt I in 2 cm Abstand vom Auflager, Ablesungen mm, Scalenabstand für die Spiegel 2 und 4 gleich 175 cm, für die Spiegel 1, 3, 5 gleich 140 cm.

Belastg. in t	Spiegel 1		Spiegel 2		Spiegel 3		Spiegel 4		Spiegel 5	
	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung
0	180,9	—	109,9	—	381,0	—	140,1	—	503,9	—
2	181,8	0,9	111,0	1,1	381,8	0,8	141,2	1,1	504,7	0,8
4	182,4	1,5	112,0	2,1	382,5	1,5	142,0	1,9	505,3	1,4
6	183,2	2,3	113,0	3,1	383,1	2,1	143,1	3,0	506,1	2,2
8	183,9	3,0	113,8	3,9	383,9	2,9	143,9	3,8	506,8	2,9
0	180,9	0	109,9	0	381,0	0	140,0	-0,1	503,9	0
8	183,9	3,0	113,9	4,0	383,9	2,9	143,9	3,9	506,8	2,9
0	180,9	0	110,0	0,2	381,0	0	140,0	0	503,9	0
8	183,9	3,0	113,8	3,8	383,9	2,9	143,8	3,9	506,8	2,9
Mittel aus all. Sätzen für 8 t	—	3,0	—	3,9	—	2,9	—	3,8	—	2,9
desgl. reducirt auf 175 cm Scalenabstand	—	3,7	—	3,9	—	3,6	—	3,8	—	3,6

Die einzige über die unvermeidlichen Versuchsfehler hinausfallende Abweichung von der Navier'schen Annahme wird bei diesem Balken durch die grössere Ablenkung des auf der Zugseite liegenden Spiegels 1 im Querschnitt III angezeigt. Dieser Querschnitt entspricht genau dem des anderen Balkens, für den die Ablesungen in Tabelle 1 zusammengestellt sind, wo schon dieselbe Erscheinung beobachtet wurde. Selbst der Unterschied der Drehung gegenüber den andern Spiegeln ist (bei Berücksichtigung der verschiedenen Scalenabstände) fast genau gleich in beiden Fällen. — Hierbei sei übrigens darauf hingewiesen, dass die Grössen der Ablesungen selbst (auch nach Reduction auf gleiche Scalenabstände) in beiden Fällen nicht unmittelbar mit einander verglichen werden können, da sich der Balken infolge verschiedener Nachgiebigkeit der Pappunterlagen auf beiden Seiten auch als Ganzes drehen konnte, so dass diese Drehung, die für beide Balken natürlich merklich verschieden sein kann, in den Ablesungen mit inbegriffen ist. Ich werde darauf alsbald zurückkommen. Umittelbar mit einander vergleichbar sind nur die Ablesungen für denselben Balken, da dessen Lage während der Versuche nicht geändert wurde und die Differenzen von Ablesungen zwischen verschiedenen Balken.

Die in der Tabelle 2 bis 4 niedergelegten Versuche wurden am 29. und 30. März 1895 ausgeführt. Ihnen folgten dann am 1. Oktober entsprechende Versuche mit dem Sandsteinbalken 5356^b. Dieser wurde mit 4 Stiftenreihen (für je 5 Spiegel, ganz wie vorher), armirt. Man theilte nämlich die halbe Spannweite von 75 cm in 4 gleiche Theile, brachte die Reihe I im Auflagerquerschnitt selbst an und liess die Reihen II, III und IV in den

Theilpunkten folgen. In der Mitte selbst wurde natürlich keine Reihe untergebracht, da der Mittelquerschnitt schon aus Symmetriegründen eben bleiben muss. Ich begnügte mich damit, den Balken nur unter der Normalbelastung von $1,2t$ zu untersuchen. Die Richtung der Kraft stand, wie auch bei den übrigen Biegungsversuchen mit Sandsteinbalken, in der „Breitlage“ senkrecht zum Lager. Hier will ich nur einen Beobachtungssatz für Reihe IV ausführlicher mittheilen; bei den anderen Reihen begnüge ich mich mit der Angabe der gefundenen Mittelwerthe.

Tabelle 5.

Sandsteinbalken 5356". Untersuchung von Querschnitt IV in rund 56 cm Abstand vom Auflager, Ablesung mm, Scalenabstand = 200 cm.

Be- lastg. in t	Spiegel 1		Spiegel 2		Spiegel 3		Spiegel 4		Spiegel 5	
	Ab- lesung	Dreh- ung	Ab- lesung	Dreh- ung	Ab- lesung	Dreh- ung	Ab- lesung	Dreh- ung	Ab- lesung	Dreh- ung
0	162,4		356,3		38,4		56,1		65,1	
1,2	163,5	1,05	357,2	0,92	39,3	0,9	57,0	0,95	66,1	0,93
0	162,4		356,3		38,4		56,1		65,2	
1,2	163,4		357,3		39,3		57,1		66,1	
0	162,4		356,4		38,4		56,1		65,2	

Tabelle 6.

Mittelwerthe der Spiegelablenkung für die übrigen Querschnitte.

Quer- schnitt	Spiegel 1	Spiegel 2	Spiegel 3	Spiegel 4	Spiegel 5
I	2,32	2,23	2,20	2,25	2,35
II	2,12	1,90(?)	2,30	2,32	2,30
III	1,80	1,65	1,80	1,70	1,75
IV	1,05	0,92	0,90	0,95	0,93

Ich habe die Mittelwerte hier bis auf hundertstel mm ausgerechnet, obschon natürlich der (vom Ablesen herführende) unvermeidliche mittlere Beobachtungsfehler nicht wohl unter 0,1 mm angenommen werden kann. Bei II, Sp. 2 liegt wohl ein größeres Versehen vor. Ich hatte die Mittelwerthe nicht sofort nach dem Versuche ausgerechnet und bemerkte das unwahrscheinliche Resultat erst bei der späteren Zusammenstellung der Beobachtungen. Ueberhaupt ist zu bemerken, dass die Ablesungen der Spiegel 2 und 4 oft unter ungünstigeren Bedingungen vorgenommen werden mussten und mir nicht so unbedingt vertrauenswürdig erscheinen wie jene der ungeraden Spiegel, die ich stets selbst ablas.

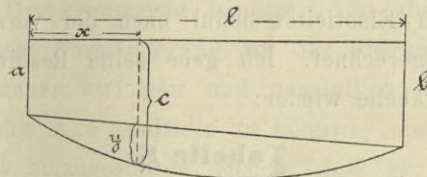
Schliesslich erwähne ich noch, dass Herr H o u k o w s k y am 13. August auch einen Versuch dieser Art mit dem Granitbalken 5219 b vornahm. Er besetzte nur die beiden Endstifte und den mittelsten Stift mit Spiegeln. Die Stiftenreihe hatte vom nächsten Auflager 53 cm Abstand. Bei 8 t Belastung und 175 cm Scalenabstand fand Herr H. für alle drei Spiegel dieselbe Drehung von 2,0 Scal-

theilen, die bei mehrmaliger Wiederholung des Versuchs ohne jede Abweichung wiederkehrte. Für die unbedingte Genauigkeit dieser Ablesungen, bei denen es sich um einzelne Zehntel Unterschied handelt, vermag ich mich in dessen natürlich nicht zu verbürgen.

§ 3. Elastische Linie des Granit-Balkens 5219 a.

Um die Gestalt der elastischen Linie dieses Balkens für die Normalbelastung von 8 t zu ermitteln, theilte ich die ganze Spannweite in 10 gleiche Theile und mass für jeden Theilpunkt in der Mitte mit Hülfe der von Bauschinger für diesen Zweck construirten Rollen-
vorrichtung mit dem Uebersetzungsverhältniss 1 : 50 die von der Sehne aus gerechneten Ordinaten der elastischen Linie. Bei jedem Versuche war je einer dieser Apparate an jedem Ende der Spannweite und der dritte in jenem Querschnitt befestigt, dessen relative Verschiebung gegen die beiden andern festgestellt werden sollte. War dann die Ablesung für das linke Auflager a, für das rechte b

Abb. 2.



und für den Querschnitt im Abstand x vom linken und $l-x$ vom rechten Auflager c (vgl. Abb. 2), so berechnete sich die Ordinate y der elastischen Linie (von der Sehne aus genommen) zu

$$y = c - b \frac{x}{l} - a \frac{l-x}{l}$$

Da diese Durchbiegungsmessungen von sehr einfacher Art sind und mit Apparaten und nach Methoden ausgeführt wurden, die im hiesigen Laboratorium seit Jahren als unbedingt zuverlässig erprobt sind, darf ich mich darauf beschränken, hier nur die Schlussresultate anzugeben.

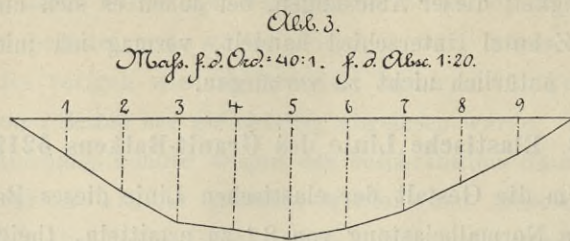
Tabelle 7.

Ordinaten der elastischen Linien für die Normalbelastung von 8 t.

Punkt	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Abstand vom linken Auf- lager in cm	15	30	45	60	75 (Mitte)	90	105	120	135
Ordinaten der elast. Linie in $\frac{1}{50}$ mm	6,0	12,1	17,4	18,4	20,1	18,6	16,6	11,3	5,9

Die Zehntel sind bei den Ablesungen unsicher. In Abb. 3 ist die elastische Linie nach diesen Messungen in 800 facher Verzerrung gezeichnet. Die Abscissen sind

nämlich im Massstabe 1 : 20 verkleinert und die Ordinaten im Verhältnisse 40 : 1 vergrössert.



Aus dem Biegeparabole $f = 0,4 \text{ mm}$ in der Mitte, der Kraft $P = 8000 \text{ kg}$, der Spannweite $l = 150 \text{ cm}$ und dem Trägheitsmomente $\Theta = 45\,000 \text{ cm}^4$ berechnet sich nach der gewöhnlichen Biegungstheorie der Elasticitätsmodul*) für den Granitbalken 5219a bei dieser Belastung nach der Formel

$$E = \frac{Pl^3}{48 f \Theta}$$

zu $E = 312\,500 \text{ atm}$.

Hierauf hat dann noch Herr Honkowsky für eine bis zu $8 t$ von Null an aufsteigende Belastung den Biegeparabole in der Mitte gemessen und für jeden Belastungszustand den Elasticitätsmodul nach der vorausgehenden Formel ausgerechnet. Ich gebe seine Resultate in der folgenden Tabelle wieder:

Tabelle 8.

Biegeparabole und Elasticitätsmodul bei aufsteigenden Lasten.

Belastung in t	Biegeparabole in $\frac{1}{100} \text{ mm}$	Elasticitätsmodul in atm
0,25	1,4	279000
0,5	3,2	244000
0,75	4,4	266000
1,0	5,4	289000
1,25	6,4	305000
1,5	7,6	308000
1,75	8,6	318000
2,0	9,6	325000
2,25	10,6	332000
2,5	11,4	342000
3,0	13,8	340000
3,5	16,0	342000
4,0	18,6	336000
4,5	21,4	329000
5,0	24,2	323000
5,5	27,2	316000
6,6	30,2	310000
7,0	35,8	306000
8,0	41,4	302000

*) Hier wie überall in dieser Abhandlung verstehe ich unter dem Elasticitätsmodul immer jene Grösse, die sich aus dem Vergleiche der ganzen rein elastischen Formänderung mit der zugehörigen Belastung ergibt. Für den Fall eines centrisch gezogenen Stabes entspricht also z. B. der Elasticitätsmodul in dem von mir gebrauchten Sinne der Definition

$$E = \sigma \frac{l}{\Delta l}$$

Wie schon die Abweichung des Biegeparaboles für $8 t$ von dem vorher von mir gefundenen Werthe zeigt, sind die hundertstel Millimeter bei diesen Messungen unsicher, so dass auf die ersten Versuche mit geringen Lasten und entsprechend kleinen Durchbiegungen nicht viel Werth zu legen ist. Immerhin scheint durch diese Messung bewiesen zu sein, dass der Elasticitätsmodul bei einer Beanspruchung, die zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ der Bruchlast liegt (diese betrug $12 t$) ein Maximum hat, dass er aber bis zu einer Beanspruchung von $\frac{2}{3}$ der Bruchlast nur erst um 10—12 Procent abnimmt. Natürlich gelten diese Bemerkungen ganz ausschliesslich für das gerade untersuchte Material, so dass man nicht berechtigt ist, allgemeynere Schlüsse daraus zu ziehen.

Schliesslich habe ich noch für die Normalbelastung von $8 t$ die Tangentenrichtungen der elastischen Linie mit Hülfe einfacher Spiegelversuche gemessen, um auch auf diesem Wege eine Controle zu erhalten, obschon wegen der Kleinheit der Ablesungen hier keine besondere Genauigkeit zu erwarten war. Wie früher die längs eines Querschnitts, beobachtete ich jetzt die längs der Balkenaxe in einer Reihe aufgesteckten Spiegel und verglich ihre Ablesungen untereinander. Auf der einen Hälfte des Balkens konnte ich dazu die schon von den ersten Spiegelversuchen her vorhandenen Mittelstifte der Querschnitte I, II und III benutzen. Neue Stifte wurden noch im Mittelquerschnitt IV und den symmetrisch zu III, II, I liegenden Querschnitten V, VI, VII auf der anderen Balkenhälfte eingekittet. Zuerst wurde die linke Hälfte mit Einschluss des in der Mitte sitzenden Stiftes IV mit Spiegeln besetzt und nachdem hierfür die Ablesungen, zu denen 4 Fernrohre gehörten, gewonnen waren, wurde in derselben Weise für die andere Hälfte, wiederum mit Einschluss des Stiftes IV, verfahren.

(Tabelle 9 siehe Seite 9.)

Wie aus der Ablenkung von Spiegel IV hervorgeht, hatte sich der ganze Balken (offenbar wegen der verschiedenen Nachgiebigkeit der Unterlagen zu beiden Seiten) etwas gedreht, eine Erscheinung, auf die schon bei der

worin σ die spezifische Zugspannung und Δl die rein elastische Änderung der Länge l bedeuten. Im Gegensatz dazu wird von vielen Autoren unter E die Grösse

$$E = d \sigma \frac{l}{\Delta l}$$

verstanden, wobei die d unendlich kleine einander entsprechende Zuwächse bezeichnen. Für Materialien, die dem Hooke'schen Gesetze der Proportionalität zwischen Spannung und Formänderung gehorchen, fallen natürlich beide Definitionen zusammen. Bei Steinen trifft dies aber nicht zu, und ich glaube mich hier überall an die erste Definition halten zu sollen, theils weil sich nach ihr der Werth von E zuverlässiger aus den Versuchsdaten berechnen lässt, theils weil man gerade diesen Werth von E zur Umrechnung einer beobachteten Formänderung auf die zugehörige Spannung nöthig hat. Beim Vergleiche meiner Angaben mit anderen, namentlich auch mit manchen von Bauschinger herrührenden, ist aber auf diesen Unterschied gehörig zu achten.

Tabelle 9.

Spiegelbeobachtungen zur Bestimmung der Tangentenrichtungen der elast. Linie am 9. Juli 1895, Scalenabstand = 175 cm für alle Spiegel.
a) erste Hälfte.

Belastung	Spiegel I		Spiegel II		Spiegel III		Spiegel IV	
	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung
0	100,0	—	520,0	—	100,1	—	50,0	—
8	103,6	+ 3,6	523,7	+ 3,7	102,5	+ 2,4	51,0	+ 1,0
0	99,9	- 0,1	520,0	0	100,1	0	49,9	- 0,1
8	103,5	+ 3,6	523,6	+ 3,6	102,5	+ 2,4	51,0	+ 1,1
0	99,9	0	520,0	0	100,1	0	50,0	+ 0,1

1) Zweite Hälfte.

Belastung	Spiegel VII		Spiegel VI		Spiegel V		Spiegel IV	
	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung
0	680,0	—	490,0	—	160,0	—	50,2	—
8	678,1	- 1,9	488,6	- 1,4	159,8	- 0,2	51,2	+ 1,0
0	680,0	0	490,0	0	160,0	0	50,2	0
8	678,1	- 1,9	488,6	- 1,4	159,8	- 0,2	51,2	+ 1,0
0	680,0	0	490,0	0	160,0	0	50,2	0

Besprechung der früher angestellten Spiegelversuche hingewiesen worden war. Um die Tangentenrichtungen der elastischen Linie zu erhalten, muss man daher die Bewegungen relativ zum Mittelspiegel IV bilden. Man erhält so für die Drehungen der Querschnitte relativ zum Mittelquerschnitt

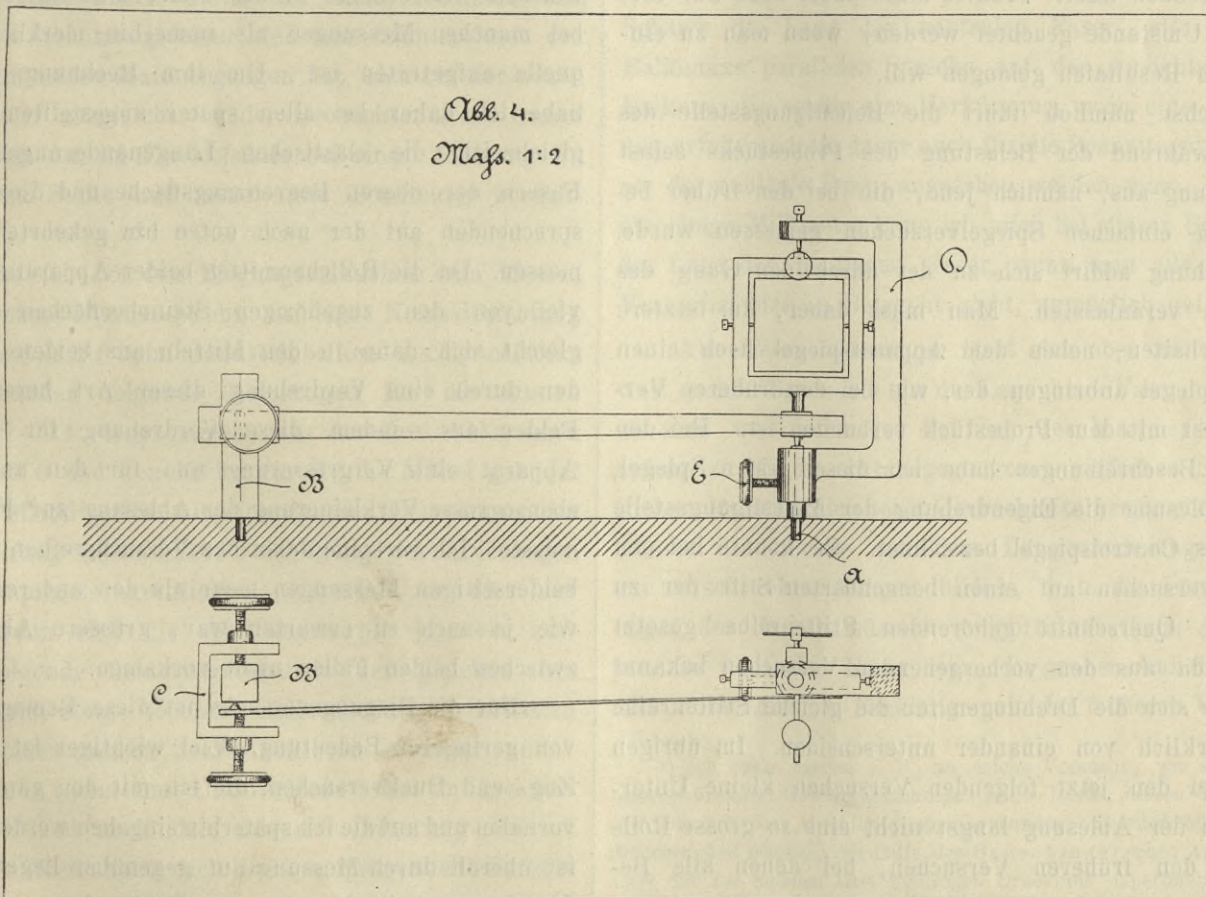
bei Spiegel I + 2,6 mm Ausschlag bei 175 cm Scalenabstand

„	„	II	+ 2,6	„	„	„	„
„	„	III	+ 1,4	„	„	„	„
„	„	IV	0	„	„	„	„
„	„	V	- 1,2	„	„	„	„
„	„	VI	- 2,4	„	„	„	„
„	„	VII	- 2,9	„	„	„	„

Der Vergleich dieser Ziffern mit den nach der gewöhnlichen Theorie aus der Gleichung der elastischen Linie für 0,4 mm Biegungspfeil berechneten liefert eine Uebereinstimmung, die so weit reicht, als es die unvermeidlichen Beobachtungsfehler, die sich auch in den vorstehenden Ziffern selbst schon hinreichend aussprechen, erwarten lassen.

§ 4. Anwendung des Bauschinger'schen Spiegelapparates zur Messung beliebiger Formänderungen an grösseren Versuchsstücken.

So viel mir bekannt ist, hat man den Bauschinger'schen Spiegelapparat seither nur bei der Anstellung von Zug- und Druckversuchen benützt. Um aber nun auch die elastische Formänderung bei der Biegung der Steinbalken genauer verfolgen und namentlich um die Lage der neutralen Axe ermitteln zu können, musste ich den Apparat so umzugestalten suchen, dass er die Messung der Abstandsänderung von zwei beliebig auf der Oberfläche des Versuchsstückes gegebenen Punkten gestattete,



gleichgültig, welcher Art die Formänderung des Balkens im Uebrigen sein mochte. Mit Hülfe des Herrn Assistenten Klebe, aus dessen geschickten Händen schon so viele Apparate der Bauschinger'schen Konstruktion hervorgegangen sind, ist mir dies auch ganz nach Wunsch gelungen.

An den Punkten des Versuchsstücks, deren Abstandsänderung gemessen werden soll, befestigt man zwei Stifte, in derselben Weise, wie es schon vorher (§ 2) beschrieben wurde. Am einen Punkte konnte auch derselbe konische Stift (A in Abb. 4) benutzt werden, der vorher schon zur Aufnahme eines Spiegels bei dem einfachen Spiegelversuch gedient hatte. Der andere Stift B wird auch mit einem kleinen runden Zapfen in das Loch im Steine festgekittet. Nach oben hin ist er aber vierkantig gestaltet, von 38 mm Höhe und 10 mm Breite und Dicke, um die Feder des Bauschinger'schen Apparates mit Hülfe eines Bügels C und einer Schraube daran so anlegen zu können, dass das andere Federende mit angemessenem Druck auf dem Umfange des Hartgummiröllchens am Spiegel aufsitzt. Der Spiegel selbst wird von einem kleinen leichten Rahmen D getragen, in dem er sich auf Spitzen leicht zu drehen vermag. Der Rahmen sitzt auf dem konischen Stifte A am andern Ende der Länge, die man beobachten will und ist mittelst einer Schraube E darauf festgeklemmt.

Bei einer Entfernungsänderung zwischen beiden Stiften erfolgt eine entsprechende Drehung des Spiegels, aus der sich die Dehnung oder Verkürzung in bekannter Weise leicht berechnen lässt. Freilich muss dabei noch auf verschiedene Umstände geachtet werden, wenn man zu einwandfreien Resultaten gelangen will.

Zunächst nämlich führt die Befestigungsstelle des Spiegels während der Belastung des Probestücks selbst eine Drehung aus, nämlich jene, die bei den früher besprochenen einfachen Spiegelversuchen gemessen wurde. Diese Drehung addirt sich zu der durch den Gang des Apparates veranlassten. Man muss daher, um letztere rein zu erhalten, neben dem Apparatspiegel noch einen zweiten Spiegel anbringen, der, wie bei den früheren Versuchen, fest mit dem Probestück verbunden ist. Bei den folgenden Beschreibungen habe ich diesen festen Spiegel, dessen Ablesung die Eigendrehung der Befestigungsstelle angibt, als Controlspiegel bezeichnet. Er konnte bei den Biegungsversuchen auf einen benachbarten Stift der zu demselben Querschnitt gehörenden Stiftenreihe gesetzt werden, da aus den vorhergehenden Versuchen bekannt war, dass sich die Drehungen für die gleiche Stiftenreihe nicht merklich von einander unterscheiden. Im übrigen spielen bei den jetzt folgenden Versuchen kleine Unterschiede in der Ablesung längst nicht eine so grosse Rolle wie bei den früheren Versuchen, bei denen alle Bewegungen nur wenige Scalentheile ausmachten.

Wenn der Controlspiegel und der Apparatspiegel von derselben Scala abgelesen werden, gibt die Differenz ihrer Ablesungen, die durch die elastische Längenänderung an sich verursachte Spiegeldrehung an, die den weiteren Berechnungen zu Grunde zu legen ist. Wurden gleichzeitig zwei Längenänderungen in verschiedenen Fasern desselben Balkenabschnitts gemessen, so genügte die Anbringung eines einzigen Controlspiegels. Zuweilen kam es dann auch vor, dass die Ablenkung des Controlspiegels für den zweiten Apparat im umgekehrten Sinne gezählt werden musste. Dies hing von der Aufstellung der zweiten Scala ab. Der Sinn, in dem die Drehung zu nehmen war, wurde bei jedem Versuche sorgfältig controlirt.

Bei den Biegungsversuchen, um die es sich meistens handelte, verdrehen sich zwei aufeinander folgende Querschnitte normaler Weise nur um eine zur horizontalen Biegungsebene senkrechte Axe gegen einander. Die Entfernung zwischen zwei auf einer horizontalen Begrenzungsfläche angebrachten Stiften ändert sich dann auch in einigem Abstände von der Fläche um ebensoviel als die zwischen den Befestigungsstellen selbst. Für den Fall dagegen, dass die Querschnitte aus irgend welchen Gründen zugleich eine Drehung um eine zur Krafrichtung parallele horizontale Axe gegeneinander ausführen sollten, würde die Entfernungsänderung für die um etwa 25 mm von der Balkenoberfläche abstehende Röllchenmitte von jener zwischen den Befestigungsstellen der Stifte etwas abweichen. Es scheint in der That, dass dieser Umstand bei manchen Messungen als immerhin merkliche Fehlerquelle aufgetreten ist. Um ihm Rechnung zu tragen, habe ich daher bei allen später angestellten Versuchen gleichzeitig die elastischen Längenänderungen für die Fasern der oberen Begrenzungsfläche und die ihnen entsprechenden auf der nach unten hin gekehrten Seite gemessen. Da die Röllchenmitten beider Apparate um gleich viel von den zugehörigen Steinoberflächen abstanden, gleicht sich dann in den Mitteln aus beiden Ablesungen der durch eine Verdrehung dieser Art hereingebrachte Fehler aus, indem diese Verdrehung für den einen Apparat eine Vergrößerung und für den anderen eine ebensogrosse Verkleinerung der Ablesung zur Folge haben musste. Ich vertraue daher den Versuchsreihen mit solchen beiderseitigen Messungen mehr als den anderen, obschon, wie ja auch zu erwarten war, grössere Abweichungen zwischen beiden Fällen nicht vorkamen.

Für die Biegungsversuche ist diese Bemerkung daher von geringerer Bedeutung. Viel wichtiger ist sie bei den Zug- und Duckversuchen, die ich mit den ganzen Balken vornahm und auf die ich späterhin eingehen werde. Bei diesen ist überall durch Messung auf gegenüber liegenden Seiten dafür gesorgt worden, dass der Fehler fortgeschafft wurde.

Bei Beachtung dieser Vorsichtsmassregeln arbeitete der Bauschinger'sche Apparat in der hier beschriebenen Anwendungsform meistens geradezu tadellos, wozu freilich die unausgesetzte Sorgfalt, die Herr Klebe auf die richtige Montirung bei jeder neuen Umstellung verwendete, gewiss viel beigetragen hat. Man konnte dies an den constanten Ablesungen bei wiederholten Belastungen und an dem genauen Zurückgehen in die Nullstellung nach der Entlastung ganz sicher feststellen. Traf es einmal nicht zu, so liess sich die Ursache immer leicht erkennen und beseitigen. So kam es z. B. vor, dass einmal ein Stift locker geworden war. Natürlich muss auch darauf geachtet werden, dass nicht etwa die Sonne auf eine Apparatfeder scheint oder sonst eine merkliche Temperaturänderung veranlasst wird.

Ebenso ändert sich auch nach dem Anbringen des Apparats wegen der damit verbundenen Erwärmung durch die Finger und die nachfolgende Abkühlung der Apparatfeder die Ablesung anfänglich ziemlich stark und zwar stetig und in jener Richtung, die eine Verkürzung der Feder anzeigt. Um diese in constantem Sinne regelmässig verlaufenden Aenderungen unschädlich zu machen, braucht man übrigens nicht so lange zu warten, bis der Apparat vollständig zur Ruhe gekommen ist, wenn man nur die Vorsicht gebraucht, mehrere Messungen in gleichen Zeitabständen hintereinander auszuführen und die Mittelwerthe zu bilden. Dies hat noch den weiteren Vorzug, dass man immer an einer neuen Stelle der Scala abzulesen hat, wodurch der Schätzungsfehler, den man beim Ablesen der Zehntel zum ersten Male begangen hat, sich bei der neuen Ablesung eher ausgleicht, da der Beobachter sonst immer leicht geneigt ist, im Zweifelsfalle bei einer Ablesung an der früheren Stelle auf seine erste Schätzung zurückzukommen.

So habe ich bei den Biegungsversuchen zum Messen der elastischen Formänderung bei der Normalbelastung von $8 t$ (bezw. $1,2 t$ beim Sandsteinbalken u. s. f.) meistens fünf aufeinander folgende Ablesungen für die Lasten $0-8-0-8-0 t$ vorgenommen, aus den drei Ablesungen für die Last 0 und den beiden für $8 t$ die Mittel gebildet und beide Mittelwerthe mit einander zur Berechnung der Längenänderung (unter Berücksichtigung der Ablesungen des Controlspiegels) verglichen. Natürlich ist dies nur zulässig, wenn sich die Ablesungen für je zwei aufeinander folgende Belastungszustände der gleichen Art nur noch um einige Zehntel Scalentheile (im höchsten Falle um einen ganzen Scalentheil) von einander unterscheiden und wenn die Unterschiede alle im gleichen Sinne gehen und nach dem aus der Erfahrung bei oft wiederholten Messungen sich bald einprägenden Gesetze abnehmen.

In der hier beschriebenen Ausführungsart eignet sich der Bauschinger'sche Apparat sehr gut zum Studium der Formänderungen an beliebigen grösseren Probekörpern. Namentlich wird er sich auch zur Untersuchung des Verhaltens ganzer Bauwerke gegen veränderliche Belastungen öfters mit Vortheil verwenden lassen, worauf ich hier noch besonders aufmerksam machen möchte*). Herr Assistent Klebe wird auf Wunsch sicher gern bereit sein, den Apparat in zuverlässiger Ausführung zu liefern.

§ 5. Messung der Längenänderungen verschiedener Fasern zwischen denselben Querschnitten bei der Biegung der Steinbalken.

Die Lage der neutralen Faser im gebogenen Steinbalken, auf die es mir ursprünglich hauptsächlich ankam, habe ich dadurch ermittelt, dass ich irgend zwei Querschnitte in einem Abstände von 12 oder von 15 cm ringsum mit Bleistiftstrichen auf dem Balken markiren und dann längs der gezogenen Linien Stiftenreihen anbringen liess. Zwischen je zwei entsprechenden Stiften beider Reihen mass ich die elastische Längenänderung bei der Normalbelastung oder auch bei irgend einer anderen Belastung mit dem Bauschinger'schen Apparate. Nachdem die Messung für alle Stiftenpaare durchgeführt war, konnte ich mit den erhaltenen Werthen ein Diagramm auftragen, in dem die Abscissen die Lagen der Punkte im Querschnitt und die Ordinaten die zugehörigen Längenänderungen angaben. Daraus ergab sich mit hinlänglicher Schärfe die Lage der neutralen Faser, also jener zur Balkenaxe parallelen Strecke auf der Ansichtsfäche des Balkens, die weder eine Verkürzung, noch eine Verlängerung erfuhr und die daher auch für die Spannungsvertheilung als die neutrale Faser angesehen werden muss. Um mehr als einige Millimeter kann ich mich bei dieser Bestimmung der Lage der neutralen Faser, wenn man alle denkbaren Versuchsfehler in Betracht zieht, unmöglich geirrt haben.

Aus diesen Messungen lässt sich aber natürlich noch weit mehr folgern als nur die Lage jener Faser. So lassen sie eine weit schärfere Prüfung der Navier'schen Annahme zu als die vorausgegangenen einfachen Spiegelversuche. Falls nämlich beide Querschnitte genau eben blieben, müsste das vorher erwähnte Längenänderungsdiagramm ein verschränktes Trapez bilden, d. h. die Längenänderungen der Fasern müssten proportional ihren Abständen von der neutralen Faser sein. In grober Annäherung ist dies wohl auch, im Einklange mit den früheren Versuchen,

*) Ich denke hierbei z. B. an solche Versuche, wie sie von dem österreichischen „Gewölbeausschusse“ in den letzten Jahren durchgeführt und kürzlich zum Abschlusse gebracht wurden. Es würde offenbar keine Schwierigkeit machen, mit Hilfe des Bauschinger'schen Apparates die Lage der zur mobilen Last gehörigen Drucklinie experimentell zu ermitteln.

erfüllt; die dort schon in einzelnen Fällen beobachteten minder erheblichen Abweichungen treten aber hier viel deutlicher hervor.

Wenn ich übrigens sage, dass man in erster Annäherung bei der theoretischen Behandlung der Biegungserscheinungen das Längenänderungsdiagramm immerhin nach wie vor als gradlinig ansehen darf, so erinnere ich mich dabei natürlich selbst am besten der thatsächlich bestehenden Abweichungen; ich will damit nur sagen, dass diese Abweichungen nicht so gross sind, dass man darum die auf die Navier'sche Annahme gestützten Näherungstheorien ganz verwerfen müsste.

Einen anderen und fast noch wichtigeren Schluss kann man aus der Gestalt des Längenänderungsdiagramms auf jene des Diagramms der Spannungsvertheilung ziehen. Aus Zug- und Druckproben kann man entnehmen, wie gross die Spannungen sind, die den betreffenden Längenänderungen entsprechen. Damit erhält man aber, von allem andern abgesehen, eine sehr scharfe Controle für die Zuverlässigkeit der gewonnenen Resultate. Denn man weiss ja, dass erstens die Summe aller Zugspannungen in jedem Querschnitte gleich der Summe aller Druckspannungen und dass zweitens das statische Moment des aus beiden resultierenden Kräftepaars gleich dem Momente der äusseren Kräfte (gleich dem Biegemomente) sein muss.

Auf diese Verwerthung und Prüfung der Messungsergebnisse komme ich in einem späteren Abschnitte ausführlicher zurück. Schon jetzt will ich aber erwähnen, dass ich bei dieser Prüfung anfänglich auf eine anscheinend unüberwindliche Schwierigkeit stiess. Ich musste darauf stossen, weil ja alle bisherigen, auch durch von mir selbst angestellte Messungen im Wesentlichen bestätigten Erfahrungen stets zu dem Schlusse geführt hatten, dass die neutrale Faser von der Mitte weit ab nach der Druckseite hin verschoben sei. Dass dies thatsächlich und jedenfalls in dem zu erwartenden Maasse sicher nicht zutrifft, hatten meine direkten Messungen aber unwiderleglich bewiesen. Erst als ich mich entschloss, einen Zugversuch in bisher noch nie versuchten Dimensionen vorzunehmen, klärte sich der Widerspruch auf und meine Messungen bestanden nun auch jene doppelte strenge Probe, soweit als es ihre Genauigkeit überhaupt erwarten liess.

Ich habe diese Bemerkung hier eingeschaltet, weil der Leser bei der flüchtigen Durchsicht der verschiedenen Messungsreihen leicht zu der Meinung kommen könnte, dass es sich nur um eine Prüfung des Materials nach verschiedenen, in lockerer Verbindung mit einander stehenden Richtungen gehandelt hätte. In der That schliessen sich aber alle diese Messungen zu einem einheitlichen Bilde zusammen, sie stützen und bestätigen sich gegenseitig in

solcher Art, wie sie es nur vermögen, wenn sie sämmtlich von gröberem Fehlern frei sind.

Von den beiden Granitbalken L. Nr. 5219a und 5219b, mit denen die Mehrzahl aller Versuche durchgeführt wurden, liess ich den ersten so herrichten, dass er Messungen in vier verschiedenen Abständen vom Auflager zulies. Allerdings waren hier nur auf der nach oben hin gewendeten horizontalen Begrenzungsfläche Messstifte eingekittet worden.

Beim anderen Balken Nr. 5219 b dagegen lenkte ich meine Aufmerksamkeit nur auf die Fasern zwischen zwei ein für alle Male ausgewählten Querschnitten, ohne mich um das Verhalten des Balkens an anderen Stellen zu kümmern. Dafür wurde die Messung zwischen diesen Querschnitten um so sorgfältiger durchgeführt. Während zwischen je 2 Querschnitten bei dem ersten Balken nur 5 Stiftenpaare auf einer Seitenfläche zur Verfügung standen, waren auf den beiden ausschliesslich in Betracht gezogenen Querschnitten des anderen Balkens 20 Stiftenpaare untergebracht, von denen je 7 auf eine Breitseite und 3 auf eine Schmalseite kamen. Die äussersten Stifte waren auf jeder Seitenfläche stets um 1 cm von der Kante abgerückt und die übrigen waren in gleichen Abständen zwischen ihnen vertheilt.

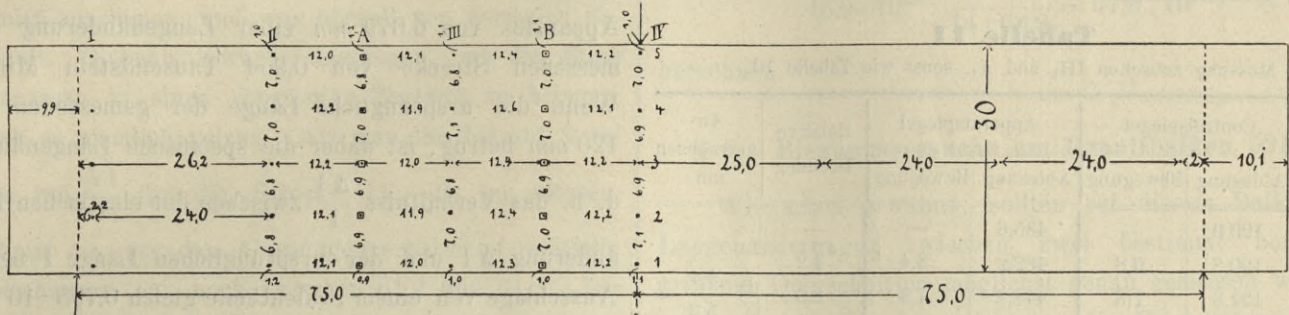
Beim Bohren der Löcher und beim Einkitten der Stifte waren die Entfernungen, zumal beim ersten Balken, allerdings nicht immer so genau innegehalten worden, wie ich es gewünscht hätte. Solange sich die Abweichungen von den vorgeschriebenen Maassen innerhalb der Dimensionen eines Bohrloches halten, sind sie indessen nicht allzu bedenklich. Ohnehin muss man nämlich von vornherein darauf rechnen, dass man die Stifte nicht an einem genau bestimmten Punkte des Körpers befestigen kann. Der Kitt haftet in einem endlichen Bezirk an dem Balken und muss die elastischen Formänderungen dieses Bezirks mitmachen, da er im anderen Falle losspringen müsste. Man kann daher nie genau wissen, wie gross die zwischen einem Stiftenpaare liegende Messlänge für den Stein selbst in Ansatz zu bringen ist. Am nächsten liegt es natürlich, dafür die Entfernung zwischen den Stiftenmitten oder zwischen den Bohrlochmitten zu setzen; man ist aber keineswegs sicher, ob sich der Stift nicht so bewegt, als wenn er mit irgend einem anderen Punkte innerhalb der Kittfläche starr verbunden wäre. Leider lässt sich diese Fehlerquelle bei der getroffenen Einrichtung nicht vermeiden und es ist nicht unmöglich, wenn auch nicht wahrscheinlich, dass die Berechnung der specifischen Längenänderung aus den Beobachtungsdaten dadurch in einzelnen Fällen selbst um einige Procente gefälscht wurde. Glücklicherweise kann dadurch der Gesamtverlauf des Längenänderungsdiagramms nicht merklich be-

einflusst werden. Nur die stetige Aufeinanderfolge der einzelnen Punkte im Diagramm, die Eleganz der Figur wird dadurch geschädigt und diese selbst lässt dann wieder, wenn alle sonstigen Fehler vermieden sind, darauf schliessen, wie weit der besprochene Umstand sich geltend gemacht hat. Jedenfalls wird ferner durch die Bildung von Durchschnittswerthen der Fehler entsprechend ver-

mindert, und wenn man weit genug darin gehen kann, ganz unschädlich gemacht.

Die bei der Anbringung der Stifte vorgekommenen Abweichungen sind im Vergleiche hierzu nicht sehr erheblich. Für den Balken 5219 a wurden nach Beendigung der Biegungsversuche alle Stiftenentfernungen genau nachgemessen. In Abb. 5 sind alle Stifte des Balkens mit

Abb. 5 Maß 1:10.



ihren Abständen eingetragen. Die Reihen I, II, III, IV, von denen schon bei Besprechung der früheren Versuche die Rede war, hatten conische Stifte zum Aufsetzen der Spiegelrahmen, die Reihen A und B vierkantige zum Festklemmen der Apparatfedern. Man konnte nun nacheinander die Längenänderungen von 20 Strecken messen, nämlich von je 5 zwischen den Reihen II und A, zwischen A und III, zwischen B und III und zwischen B und IV. Näher nach dem Auflager gelegene Strecken habe ich nicht gemessen, weil dort die Längenänderungen zu gering werden und daher keine hinreichend genauen Resultate erwartet werden konnten.

nach dem Anlegen erst wieder genügend abkühlen muss. Daher stammen unzweifelhaft die Abweichungen zwischen den aufeinanderfolgenden Ablesungen für 0, nämlich 473,0; 474,8; 475,1; 475,3. Ich nehme aber auch den ersten Beobachtungssatz absichtlich hier mit auf, um den regelmässig in ähnlicher Art wiederkehrenden Einfluss der Temperaturänderung der Feder bald nach dem Anlegen zu zeigen.

Innerhalb jeder Reihe sind die einzelnen Stifte in derselben Weise wie schon bei den früheren Versuchen mit arabischen Ziffern versehen und zwar so, dass die Stifte 1 stets auf der Zugseite liegen. Unter III₄—B₁ ist in leichtverständlicher Bezeichnungsweise jene Strecke zu verstehen, die zwischen den Reihen III und B liegt und von der äussersten Kante der Druckseite rund 8 cm Abstand hat.

Tabelle 10.

Granitbalken 5219^a auf Biegung, Messung zwischen III₅—A₅, Controlspiegel auf III₄, Ablesungen mm, Scalenentfernung = 175 cm, Röllchendurchmesser = 6,679 mm, ausgeführt am 2. April 1895.

Die zahlreichen Messungen, die mit diesem Balken zum Theile von mir, zum grösseren Theile aber von Herrn Houkowsky vorgenommen wurden, führten im Wesentlichen alle zu den gleichen Resultaten. Es ist natürlich nicht möglich, alle ausführlich abzudrucken. Ich gebe zunächst die von mir selbst angestellten Beobachtungen wieder. Diese beziehen sich nicht nur auf die Normalbelastung von 8 t, sondern auch auf dazwischen liegende Stufen. Die erste Tabelle für die Länge A₅—III₅ gebe ich vollständig nach der Originalaufschreibung wieder, obschon der erste Beobachtungssatz für 0, 2, 4, 6, 8, 0 t unbedingt zu verwerfen ist. Der Versuch war der erste, den ich überhaupt mit dem Bauschinger'schen Apparat in der neuen Anwendungsform vornahm und ich hatte dabei noch nicht beachtet, dass sich die Apparatfeder

Last in t	Controlspiegel		Apparatspiegel		Relative Drehung	Angewachsen um
	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung		
0	120,0	—	473,0	—	—) 4,1 5,5 5,4 5,4
2	120,9	0,9	478,0	5,0	4,1	
4	121,5	1,5	484,1	11,1	9,6	
6	122,1	2,1	490,1	17,1	15,0	
8	122,5	2,5	496,0	23,0	20,5	
0	120,0	0	474,8	1,8	—) 5,1 5,2 5,0
2	120,9	0,9	479,4	4,6	3,7	
4	121,5	1,5	485,1	10,3	8,8	
6	122,1	2,1	490,9	16,1	14,0	
8	122,6	2,6	496,4	21,6	19,0	
0	120,0	0	475,1	0,3	—) 5,0 5,1 5,3
2	120,9	0,9	479,7	4,6	3,7	
4	121,5	1,5	485,3	10,2	8,7	
6	122,1	2,1	491,0	15,9	13,8	
8	122,6	2,6	496,8	21,7	19,1	
0	120,0	—	475,3	0,2	—) 2,2 2,6
1	120,6	0,6	477,6	2,3	1,7	
2	120,9	0,9	480,1	4,8	3,9	
3	121,2	1,2	483,0	7,7	6,5	

Die Strecke III₅—A₅ lag auf der Druckseite und eine Vergrößerung der Ablesung am Apparatspiegel entsprach, wie vorher festgestellt wurde, einer Verkürzung der gemessenen Strecke. Unmittelbar nach dieser ersten Messung wurden, während an der Lage des Balkens in der Maschine nichts geändert wurde, die Längenänderungen der Strecken III₁—A₁ auf der Zugseite und III₃—A₃ in der Mitte beobachtet. Ich begnüge mich hier mit dem Abdruck der letzten Beobachtungssätze.

Tabelle 11.

Messung zwischen III₁ und A₁, sonst wie Tabelle 10.

Last in <i>t</i>	Controlspiegel		Apparatspiegel		Relative Drehung	An- gewachsen um
	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung		
0	120,0	—	485,6	—	—) 4,4 5,3 6,0
2	120,8	0,8	482,2	3,4	4,2	
4	121,3	1,3	478,3	7,3	8,6	
6	121,9	1,9	473,6	12,0	13,9	
8	122,3	2,3	468,0	17,6	19,9	
0	120,0	0	485,1	0,5	—	—
0,5	120,1	0,1	484,5	0,6	0,7) 0,9 1,1 1,3 2,3
1,0	120,3	0,3	483,8	1,3	1,6	
1,5	120,6	0,6	483,0	2,1	2,7	
2,0	120,9	0,9	482,0	3,1	4,0	
3,0	121,1	1,1	479,9	5,2	6,3	

Tabelle 12.

Messung zwischen III₃ und A₃, sonst wie vorher.

Last in <i>t</i>	Controlspiegel		Apparatspiegel		Relative Drehung	An- gewachsen um
	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung		
0	120,0	—	429,2	—	—) + 0,6 - 1,0 + 0,3
2	120,9	0,9	430,2	1,0	- 0,1	
4	121,4	1,4	430,1	0,9	+ 0,5	
6	121,9	1,9	431,6	2,4	- 0,5	
8	122,4	2,4	431,8	2,6	- 0,2	
0	120,0	0	428,9	- 0,3	—	—

In der letzten Tabelle entsprechen bei den relativen Drehungen die positiven Vorzeichen Verlängerungen der gemessenen Strecke.

Aus diesen drei ersten Messungen ging schon deutlich hervor, dass die neutrale Faser im vorliegenden Falle jedenfalls ganz nahe bei der Mittellinie des Balkens lag. Für denselben Balken hat sich dies auch bei allen späteren Messungen bestätigt. Da ich diesen Versuchen während des Sommersemesters nicht viel Zeit widmen konnte, übertrug ich Herrn Houkowsky die Messung der Längenänderungen der übrigen Strecken. Soweit es die laufenden Geschäfte des Laboratoriums gestatteten, wurde Herr Houkowsky dabei von Herrn Assistenten Klebe unterstützt und auch ich selbst habe öfters Gelegenheit genommen, die Messungen zu controliren, so dass ich sie

im grossen Ganzen jedenfalls als zuverlässig betrachten darf, wenn ich auch natürlich eine vollkommene Genauigkeit im Einzelnen nicht unbedingt verbürgen kann.

Ich gebe zunächst die Schlussresultate des Herrn Houkowsky für die Normalbelastung von 8 *t* und zwar so, dass die gefundenen Mittelwerthe sofort auf absolutes Maass umgerechnet sind. Für die Scalentfernung von 175 *cm* entspricht nämlich ein Scalentheil der Millimeter-Scala bei einem Röllchendurchmesser des Bauschinger'schen Apparates von 6,679 *mm* einer Längenänderung der gemessenen Strecke von 0,954 Tausendstel Millimeter. Wenn die ursprüngliche Länge der gemessenen Strecke 120 *mm* betrug, ist daher die spezifische Längenänderung, d. h. das Verhältniss $\frac{\Delta l}{l}$ zwischen der elastischen Längenänderung Δl und der ursprünglichen Länge *l* bei einem Ausschlage von einem Scalentheile gleich $0,795 \cdot 10^{-5}$. Für die Normalbelastung von 8 *t* ist daher z. B. die spezifische elastische Verkürzung der Strecke III₅—A₅, nach der in Tabelle 10 wiedergegebenen Messungsreihe gleich

$$19,0 \cdot 0,795 \cdot 10^{-5} = 15,1 \cdot 10^{-5}$$

zu setzen. In derselben Weise hat auch Herr Houkowsky seine Messungen auf absolutes Maass umgerechnet. Er hat, wie aus der nachstehenden Tabelle hervorgeht, für dieselbe Längenänderung den Werth $15,8 \cdot 10^{-5}$ gefunden. Der hiernach zwischen meinem Werthe bestehende Unterschied fällt indessen noch in die Grenzen der unvermeidlichen Versuchsfehler.

Tabelle 13.

Spezifische Längenänderungen der durch Stifte markirten 20 Strecken des Granitbalkens 5219^a bei der Normalbelastung von 8 *t*.

	Strecken zwischen den Querschnitten			
	II — A	III — A	III — B	IV — B
Mittlere Entfernung der Strecke vom Auflager	32,3 <i>cm</i>	44,4 <i>cm</i>	56,6 <i>cm</i>	68,9 <i>cm</i>
1 (Zugseite)	+ 11,5 · 10 ⁻⁵	+ 15,2 · 10 ⁻⁵	+ 22,7 · 10 ⁻⁵	+ 27,0 · 10 ⁻⁵
2	+ 4,8 · 10 ⁻⁵	+ 8,1 · 10 ⁻⁵	+ 10,3 · 10 ⁻⁵	+ 13,8 · 10 ⁻⁵
3 (Mitte)	- 0,4 · 10 ⁻⁵	+ 1,0 · 10 ⁻⁵	- 0,7 · 10 ⁻⁵	+ 0,4 · 10 ⁻⁵
4	- 6,1 · 10 ⁻⁵	- 7,5 · 10 ⁻⁵	- 10,6 · 10 ⁻⁵	- 12,9 · 10 ⁻⁵
5 (Druckseite)	- 10,2 · 10 ⁻⁵	- 15,8 · 10 ⁻⁵	- 21,7 · 10 ⁻⁵	- 28,0 · 10 ⁻⁵

Positive Vorzeichen bedeuten in dieser Zusammenstellung Dehnungen, negative Verkürzungen.

Nachdem diese Messungen vollständig durchgeführt waren, wurde die Belastung allmählich bis zum Bruche gesteigert. Als man 10 *t* erreicht hatte, wurden noch drei Messungen der Längenänderungen zwischen den Quer-

schnitten IV und B vorgenommen. Herr H. fand im Mittel für die Strecken

$$\begin{aligned} IV_1-B_1 & \frac{\Delta l}{l} = +34,7 \cdot 10^{-5} \\ IV_3-B_3 & \text{,,} \quad -1,6 \cdot 10^{-5} \\ IV_5-B_5 & \text{,,} \quad -34,4 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Auch $12t$ wurden noch erreicht. Als diese Last aber zum zwölften Male aufgebracht werden sollte, erfolgte der Bruch. Die Bruchfläche fiel fast genau mit dem Mittelquerschnitt zusammen und war überall von normaler Beschaffenheit. Siebenmal wurde angezogen, um den Stein einigermaassen in einen constanten Zustand zu bringen, was auch so ziemlich gelang. Als man ihn hierauf 3 mal belastete, um $\frac{\Delta l}{l}$ für die Strecke IV_1-B_1 zu messen, schwankten die aus den Ablesungen erhaltenen relativen Spiegeldrehungen nur noch zwischen 61,2 und 61,8. Die dem Bruch unmittelbar vorausgehende spezifische Dehnung an der gemessenen Stelle ist daher im Mittel gleich

$$+48,9 \cdot 10^{-5}$$

zu setzen.

Als dann auch die Mittelfaser IV_3-B_3 untersucht werden sollte, erfolgte, wie schon erwähnt, beim zweiten Belasten der Bruch. Nach der allerdings in Folge dessen nicht sehr zuverlässigen einmaligen Messung würde die Mittelfaser unmittelbar vor dem Bruche eine Dehnung

von $4,6 \cdot 10^{-5}$ erfahren haben, während sie sich bei $10t$ verkürzt gezeigt hatte.

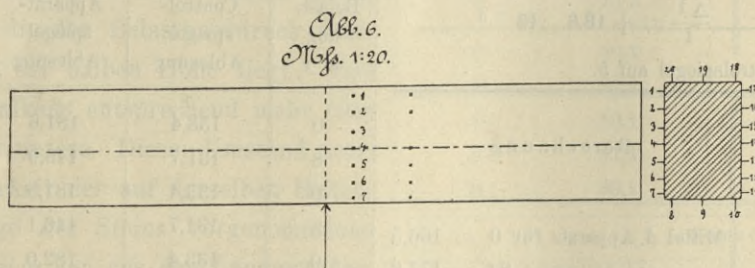
Nach der gewöhnlichen Formel berechnet sich die Biegungsfestigkeit des Balkens zu **150 atm**. Von noch mehr Interesse als diese ist indessen die grösste, vor dem Bruche noch von ihm ertragene spezifische Dehnung. Aus der zwischen IV_1-B_1 gemessenen Dehnung lässt sich diese wenigstens annähernd zu

$$48,9 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{15 \cdot 75}{14 \cdot 68,9} = 57,0 \cdot 10^{-5}$$

berechnen.

§ 6. Biegungsversuche am Granitbalken 5219 b.

Wie schon erwähnt, sollten bei diesem Balken die Längenänderungen zwischen zwei bestimmt herausgegriffenen Querschnitten möglichst genau gemessen werden, während ich darauf verzichtete, die Formänderung des Balkens im Uebrigen zu verfolgen. Eine solche Beschränkung war durchaus nöthig, um die Arbeit nicht allzusehr anschwellen zu lassen. Ich wählte die Querschnitte nahe bei der Mitte, weil die Formänderungen dort grösser sind. Wenn es sich nicht mit Rücksicht auf den für den Angriff der Belastung frei zu haltenden Raum erboten hätte, würde ich gerne zwischen zwei symmetrisch zur Mitte liegenden Querschnitten gemessen haben; so



aber mussten beide Querschnitte auf derselben Balkenhälfte gewählt werden.

Abb. 6 zeigt den Balken im Grundriss und im Querschnitt mit Eintragung der den 20 Stiftenpaaren zugeheilten Ordnungsnummern. Die Messlänge zwischen den Stiften wählte ich etwas grösser als beim vorigen Balken: sie sollte 15 cm betragen, wurde aber beim Nachmessen im Mittel zu 149 mm gefunden. Diese Zahl ist der Berechnung der spezifischen Längenänderungen zu Grunde gelegt. Ueber die Vertheilung der Stifte habe ich schon vorher berichtet.

Die ersten Messungen mit diesem Balken führte, während ich verreist war, Herr Houkowsky im August 1895 aus. Später habe ich aber dann alle Messungen selbst wiederholt. Von einzelnen Werthen abgesehen, die ganz aus dem Rahmen herausfielen und offenbar auf Ablesefehlern beruhten, stimmen übrigens die H.'schen

Resultate mit den meinigen im Wesentlichen überein. Ich beschränke mich daher darauf, über meine eigenen Beobachtungen zu berichten, die ich um ihrer Wichtigkeit willen etwas ausführlicher wiedergeben werde. Wegen der stetig sich ändernden Ablesungen, die Veranlassung dafür und die Berücksichtigung des Fehlers durch Ziehen der Mittelwerthe verweise ich auf S. 11. Die vor dem Strich stehenden Beobachtungen sind für die Berechnung verworfen.

(Tabelle 14 siehe Seite 16.)

In Abb. 7 sind die ermittelten Werthe zu einem Längenänderungsdiagramm aufgetragen. Die neutrale Faser ist hier um etwa $13,7\text{ mm}$ von der Mitte nach der Druckseite hin verschoben, d. h. um $4,6\%$ der ganzen Höhe. Die wichtigste Abweichung der Diagrammlinie von einer Geraden zeigt sich auf der Zugseite. Die Dehnung der äussersten Strecke 1 auf dieser Seite — und auch schon die der vorausgehenden — ist unverkennbar grösser, als

Tabelle 14.

Versuche am 16. und 17. Sept. 1895 am Granitbalken 5219^b mit der Normalbelastung von 8 t; Messung an den Längen 1 bis 7, während diese nach oben hin liegen. Scalentfernung = 175 cm. Messlänge = 149 mm. Reduction der Spiegeldrehungen auf spezifische Längenänderungen in absolutem Maasse durch Multiplication mit $0,64 \cdot 10^{-5}$. Dehnungen positiv.

a) Länge 1, Controlspiegel auf 3.

Belastung in t	Controlspiegel Ablesung	Apparatspiegel Ablesung	Berechnung
0	71,0	183,0	Mittel d. Apparats für 0 = 187,8
8	68,6	226,9	" " " 8t = 229,4
0	71,0	185,9	41,6
8	68,6	228,2	Controlspiegel 2,4
0	71,0	187,0	Relative Drehung = 44,0
8	68,6	229,0	$\frac{\Delta l}{l} = + 28,2 \cdot 10^{-5}$
0	71,0	188,0	
8	68,6	229,8	
0	71,0	188,5	

b) Länge 2, Controlspiegel auf 5.

Belastung in t	Controlspiegel Ablesung	Apparatspiegel Ablesung	Berechnung
0	88,0	203,8	Mittel d. Apparats für 0 = 204,6
8	85,6	231,0	" " " 8t = 231,2
0	88,0	204,5	26,6
8	85,6	231,2	Controlspiegel 2,4
0	88,0	204,7	Relative Drehung = 29,0
8	85,6	231,3	$\frac{\Delta l}{l} = + 18,6 \cdot 10^{-5}$
0	88,0	204,6	

c) Länge 3, Controlspiegel auf 5.

Belastung in t	Controlspiegel Ablesung	Apparatspiegel Ablesung	Berechnung
0	158,3	165,0	Mittel d. Apparats für 0 = 166,5
8	155,8	177,0	" " " 8t = 177,8
0	158,2	166,1	11,3
8	155,9	177,7	Controlspiegel 2,4
0	158,2	166,6	Relative Drehung = 13,7
8	155,8	178,0	$\frac{\Delta l}{l} = + 8,8 \cdot 10^{-5}$
0	158,2	166,9	

d) Länge 4, (Mitte) Controlspiegel auf 5.

Belastung in t	Controlspiegel Ablesung	Apparatspiegel Ablesung	Berechnung
0	158,1	137,0	Mittel d. Apparats für 0 = 139,3
8	155,9	139,0	" " " 8t = 140,1
0	158,1	138,5	0,8
0 (nach einigem Warten)	158,1	138,9	Controlspiegel 2,4
8	155,8	140,0	Relative Drehung = 3,2
0	158,2	139,3	$\frac{\Delta l}{l} = + 2,0 \cdot 10^{-5}$
8	155,8	140,3	
0	158,2	139,6	

e) Länge 5, Controlspiegel auf 3.

Belastung in t	Controlspiegel Ablesung	Apparatspiegel Ablesung	Berechnung
0	196,0	141,0	Mittel d. Apparats für 0 = 146,0
8	193,4	132,0	" " " 8t = 135,8
0	195,9	143,4	10,2
0 (nach längerem Warten)	195,9	146,0	Controlspiegel 2,5
8	193,4	135,8	Relative Drehung = 7,7
0	195,9	146,0	$\frac{\Delta l}{l} = - 4,9 \cdot 10^{-5}$
8	193,4	135,8	
0	195,9	146,0	

f) Länge 6, Controlspiegel auf 5.

Belastung in t	Controlspiegel Ablesung	Apparatspiegel Ablesung	Berechnung
0	158,6	104,0	Mittel d. Apparats für 0 = 104,5
8	156,2	81,7	" " " 8t = 81,8
0	158,5	104,6	22,7
8	156,2	82,0	Controlspiegel 2,3
0	158,5	104,8	Relative Drehung = 20,4
			$\frac{\Delta l}{l} = - 13,1 \cdot 10^{-5}$

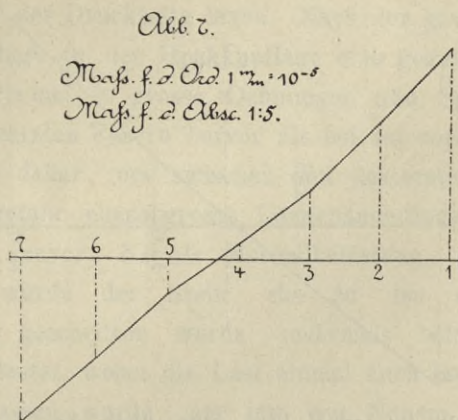
g) Länge 7, Sitz d. Controlspiegels nicht notirt.

Belastung in t	Controlspiegel Ablesung	Apparatspiegel Ablesung	Berechnung
0	133,4	181,6	NB! Am folgenden Tage vorgenommen. Der Stein war inzwischen umgelegt, daher die abweichende Ablesung für den Controlspiegel.
8	131,7	145,9	
0	133,4	181,9	
8	131,7	146,1	Mittel d. Apparats für 0 = 181,8
0	133,4	182,0	" " " 8t = 146,0
			35,8
			Controlspiegel 1,7
			Relative Drehung = 34,1
			$\frac{\Delta l}{l} = - 21,8 \cdot 10^{-5}$

man nach dem Verlauf der übrigen Diagrammlinie erwarten könnte. Dies steht in Uebereinstimmung mit der bei den einfachen Spiegelversuchen mehrfach beobachteten Erscheinung, dass in nicht allzugroßem Abstände von der Mittelebene der letzte Spiegel auf der Zugseite sich merklich mehr drehte als die übrigen.

Bei der nun folgenden Versuchsreihe wurden die Längenänderungen entsprechender Fasern auf der oberen und der unteren horizontalen Begrenzungsfläche des Steines gleichzeitig gemessen. Wegen der mühseligen Montirung und Einstellung des nach unten gekehrten Spiegels begnügte ich mich hier mit der Messung für die Stiftenpaare

1, 3, 5, 7 auf der unteren und die ihnen entsprechenden 17, 15, 13, 11 auf der oberen Seitenfläche des Steins. Bei dieser zweiten Reihe wurde nämlich der Stein umgelegt,



so dass die Stiftenpaare 1 bis 7 jetzt nach unten gekehrt waren. Dabei wurde der Balken zugleich aber auch um die vertikale Achse gedreht, so dass die Strecken 1 bis 17 immer noch auf der Zugseite lagen, damit alle Fasern in derselben Weise beansprucht wurden, wie bei den vorausgegangenen Versuchen. Zum Umlegen des Steines wurde ich natürlich nur durch den Wunsch veranlasst, den etwa vom Eigengewicht oder von der Walzenlagerung herrührenden Einfluss (vgl. S. 10) auf die Ablesungen zu verfolgen.

Wenn die Berührungsstelle der beiden Walzen in der Mitte des Balkens, durch die der Belastungsdruck übertragen wird nicht genau in der halben Höhe liegt, wird die obere Grenzfläche des Balkens entsprechend mehr oder weniger angestrengt als die untere. Dieser Umstand stört zwar nicht die Vergleichbarkeit der auf derselben Seitenfläche bei der gleichen Lage des Steins vorgenommenen Messungen; für den Vergleich der aus den Längenänderungen ermittelten Spannungen mit den gegebenen äusseren Kräften ist er aber natürlich von Bedeutung. Wie viel er auszumachen vermag, ergibt sich am sichersten durch Umlegen des Steins und Wiederholung der Beobachtung.

Der Einfachheit halber wurde nur an einem einzigen Controlspiegel abgelesen, der immer auf einem Stifte der oberen Begrenzungsfläche befestigt war und stets auf dieselbe Scala eingestellt wurde wie der Spiegel des oberen Apparats. Um indessen noch besonders zu prüfen, ob es zulässig sei, die gefundene Ablesung auch für die andere Grenzfläche als gültig anzusehen, habe ich später, als ich den Stein in der Hochkantlage untersuchte, einen besonderen Versuch zu diesem Zwecke angestellt. Ich steckte nämlich oben und unten je einen festen Spiegel auf und verglich deren Ablesungen während der Biegung des Balkens mit einander. Ich führe zunächst diesen Versuch hier an.

Tabelle 15.

Vergleich der Ablesungen von zwei Controlspiegeln auf gegenüberliegenden Seitenflächen desselben Querschnitts.

Belastung in t	Spiegel oben auf 8	Spiegel unten auf 20
0	170,4	380,0
5	167,9	382,4
0	170,4	380,0
5	167,9	382,4
0	170,4	380,0

Die absoluten Werthe der Ablenkung sind hiernach in der That als gleich anzusehen, da ein Zehntel Scalentheile nicht weiter in Betracht kommt. Der verschiedene Ablenkungssinn ist dadurch bedingt, dass die Scalen der benutzten Ablesefernrohre in entgegengesetzter Richtung zählten, worauf auch bei der Reduction der übrigen Ablesungen gehörig zu achten ist.

Ich lasse nun die Ergebnisse der Biegungsversuche folgen.

Tabelle 16.

Gleichzeitige Messungen für die oberen und unteren Längen am Granitbalken 5219^b, sonst wie in Tabelle 14.

a) Längen 1 (unten) und 17 (oben).

Belastung in t	Controlspiegel	Apparat auf 17	Apparat auf 1
0	80,1	151,7	279,0
8	81,3	103,0	235,8
0	80,1	150,2	277,8
8	81,4	102,5	235,1
0	80,1	150,0	277,3
8	81,4	102,2	235,1
0	80,1	150,0	277,0

Berechnung

Apparat 17		Apparat 1	
Mittel für 0 =	150,1	Mittel für 0 =	277,4
„ „ 8 t =	102,3	„ „ 8 t =	235,1
	<u>47,8</u>		<u>42,3</u>
Controlspiegel	1,3	Controlspiegel	1,3
Relative Drehung =	49,1	Relative Drehung =	41,0
Mittel für oben und unten = 45,0			
$\frac{\Delta l}{l}$ im Mittel = + 28,8 · 10 ⁻⁵			

b) Längen 3 (unten) und 15 (oben). (Die Feder liegt jetzt unten auf der entgegengesetzten Seite des Röllchens an als vorher.)

Belastung in t	Controlspiegel	Apparat auf 15	Apparat auf 3
0	140,1	160,3	248,0
8	141,3	144,9	261,0
0	140,1	159,2	249,0
8	141,3	144,2	261,5
0	140,1	159,0	249,5
8	141,4	144,0	261,9
0	140,1	158,9	249,9

Berechnung

Apparat 15	Apparat 3
Mittel für 0 = 159,0	Mittel für 0 = 249,5
„ „ 8t = 144,1	„ „ 8t = 261,7
14,9	12,2
Controlspiegel 1,2	Controlspiegel 1,2
Relative Drehung = 16,1	Relative Drehung = 13,4
Mittel für oben und unten = 14,7.	
$\frac{\Delta l}{l}$ im Mittel = + 9,4 · 10 ⁻⁵	

c) Längen 5 (unten) und 13 (oben).

Belastung in t	Controlspiegel	Apparat auf 13	Apparat auf 5
0	110,5	134,6	165,2
8	111,7	145,8	174,0
0	110,4	135,0	164,0
8	111,8	145,7	173,0
<hr/>			
0	110,4	135,1	163,6
8	111,8	145,8	172,6
0	110,4	135,1	163,1
8	111,8	145,7	172,2
0	110,4	135,1	163,0

Berechnung

Apparat 13	Apparat 5
Mittel für 0 = 135,1	Mittel für 0 = 163,2
„ „ 8t = 145,7	„ „ 8t = 172,4
10,6	9,2
Controlspiegel 1,4	Controlspiegel 1,4
Relative Drehung = 9,2	Relative Drehung = 10,6
Mittel für oben und unten = 9,9	
$\frac{\Delta l}{l}$ im Mittel = - 6,3 · 10 ⁻⁵	

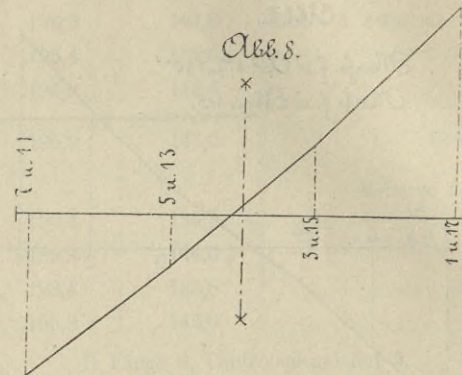
d) Längen 7 (unten) und 11 (oben).

Belastung in t	Controlspiegel	Apparat auf 11	Apparat auf 7
0	197,9	145,2	218,7
8	199,0	182,3	250,3
<hr/>			
0	197,9	145,0	218,5
8	199,0	181,8	250,2
0	197,9	144,7	218,5
8	199,0	181,4	250,2
0	197,9	144,3	218,5

Berechnung

Apparat 11	Apparat 7
Mittel für 0 = 144,7	Mittel für 0 = 218,5
„ „ 8t = 181,6	„ „ 8t = 250,2
36,9	31,7
Controlspiegel 1,1	Controlspiegel 1,1
Relative Drehung = 35,8	Relative Drehung = 32,8
Mittel für oben und unten = 34,3	
$\frac{\Delta l}{l}$ im Mittel = - 21,9 · 10 ⁻⁵	

Abb. 8 zeigt das nach diesen Messungen konstruierte Längenänderungsdiagramm, das seinem allgemeinen Verlaufe nach mit dem früheren (Abb. 7) unstreitig eng übereinstimmt.



Namentlich ist auch hier eine über das proportionale Maass hinausreichende Dehnung der äusseren Fasern auf der Zugseite unverkennbar.

Wie ich schon früher ausführte, sind die aus gleichzeitigen Messungen auf der oberen und unteren Seite gewonnenen Mittelwerthe zuverlässiger, als die aus den vorigen Versuchen hervorgegangenen, bei denen eine etwa durch zufällige Umstände bedingte geringe Biegung des Steines in der durch die Axe gelegten lothrechten Ebene die Resultate fälschen konnte. Auf diese Ursache dürfte meiner Ansicht nach die mangelhafte Uebereinstimmung zwischen den Messungen für die Länge 5 nach den Tabellen 14 und 16 zurückzuführen sein.

Die neutrale Faser ist auch nach den letzten Messungen zwischen den beiden in Betracht gezogenen Querschnitten von der Mitte aus etwas nach der Druckseite hin verschoben und zwar um etwa 9 mm oder 3 Procent der Querschnittshöhe, also jedenfalls um mehr, als durch die Versuchsfehler zu erklären wäre. Mit Rücksicht auf das Verhalten des früher untersuchten Balkens 5219 a bleibt es indessen fraglich, ob diese verhältnissmässig immerhin geringfügige Abweichung von der Mitte hier nicht durch Zufälligkeiten in der Zusammensetzung des Steins zwischen den beiden Querschnitten bedingt war. Freilich zeigte auch der Sandsteinbalken 5356 c, wie man alsbald sehen wird, ein ganz ähnliches Verhalten.

§ 7. Biegung des Granitbalkens 5219 b in der Hochkantlage.

Da es nicht ausgeschlossen erschien, dass das Verhältniss der beiden Querschnittsseiten b und h von Einfluss auf die Biegungserscheinungen sein könnte, beobachtete ich den Stein bei der jetzt zu besprechenden Messungsreihe in der Hochkantlage. Ich meine damit jene Lage des Balkens, bei der die grössere Querschnittsseite vertical, die kleinere horizontal und daher parallel zur Krafrichtung stand. Während also vorher h = 30 und b = 20 cm war, ist jetzt h = 20 und b = 30 cm.

Hier standen allerdings nur 3 Messlängen auf der oberen Seite, nämlich die zwischen den Stiftenpaaren 8, 9, 10, und 3 auf der unteren Seite 20, 19, 18 zur Verfügung, von denen 8 und 20 auf der Zugseite und 10 und 18 auf der Druckseite lagen. Nach der gewöhnlichen Theorie bringt in der Hochkantlage eine gegebene Biegunlast $1\frac{1}{2}$ mal so grosse Dehnungen und Spannungen in den äussersten Fasern hervor als bei der vorigen Lage. Ich wählte daher, um zwischen den äussersten Stiftenpaaren ungefähr ebensogrosse Längenänderungen zu erhalten als zuvor, $5t$ als Normalbelastung. Selbstverständlich wurde der Stein, ehe zu den definitiven Messungen geschritten wurde, mehrmals belastet und wieder entlastet, wobei die Last einmal auch längere Zeit darauf gelassen wurde, um ihn von Neuem in einen constanten Zustand zu versetzen. Hier sind die Resultate meiner Messungen:

Tabelle 17.

Biegungsversuche am Granitbalken 5219^b in der Hochkantlage unter der Normalbelastung von $5t$, Scalentfernung = 175 cm , Messlänge = 149 mm , Dehnungen positiv.

a) Längen 8 (oben) und 20 (unten).

Belastung in t	Controlspiegel	Apparat auf 8	Apparat auf 20
0	179,9	202,7	541,9
5	177,1	239,2	505,5
0	179,9	202,7	541,8
5	177,1	239,3	505,2
0	179,9	202,8	541,9
5	177,1	239,4	505,2
0	179,9	202,8	541,7

Berechnung

Apparat 8	Apparat 20
Mittel für 0 = 202,8	Mittel für 0 = 541,8
„ „ $5t$ = 239,4	„ „ $5t$ = 505,2
36,6	36,6
Controlspiegel 2,8	Controlspiegel 2,8
Relative Drehung = 39,4	Relative Drehung = 39,4
Mittel für oben und unten = 39,4	
$\frac{\Delta l}{l}$ im Mittel = $+ 25,2 \cdot 10^{-5}$	

b) Längen 9 (oben) und 19 (unten).

Belastung in t	Controlspiegel	Apparat auf 9	Apparat auf 19
0	163,3	154,2	238,0
5	160,7	155,3	236,1
0	163,3	154,7	237,5
5	160,7	155,5	235,9
0	163,3	154,9	237,1
5	160,7	155,6	235,6
0	163,3	155,0	237,0

Berechnung

Apparat 9	Apparat 19
Mittel für 0 = 154,9	Mittel für 0 = 237,2
„ „ $5t$ = 155,6	„ „ $5t$ = 235,7
0,7	1,5
Controlspiegel 2,6	Controlspiegel 2,6
Relative Drehung = 3,3	Relative Drehung = 4,1
Mittel für oben und unten = 3,7	
$\frac{\Delta l}{l}$ im Mittel = $+ 2,4 \cdot 10^{-5}$	
c) Längen 10 (oben) und 18 (unten).	

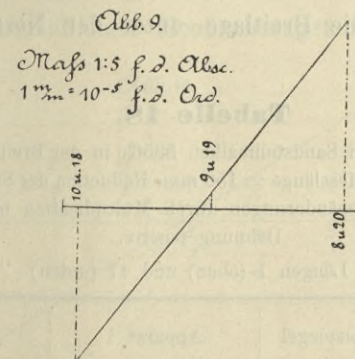
Belastung in t	Controlspiegel	Apparat auf 10	Apparat auf 18
0	170,5	151,1	265,1
5	167,9	116,7	299,6
0	170,4	150,8	265,0
5	167,9	116,7	299,1
0	170,4	150,5	265,0
5	167,9	116,5	299,0
0	170,4	150,3	265,0

Berechnung

Apparat 10	Apparat 18
Mittel für 0 = 150,5	Mittel für 0 = 265,0
„ „ $5t$ = 116,6	„ „ $5t$ = 299,0
33,9	34,0
Controlspiegel 2,5	Controlspiegel 2,5
Relative Drehung = 31,4	Relative Drehung = 31,5
Mittel für oben und unten = 31,4	
$\frac{\Delta l}{l}$ im Mittel = $- 20,1 \cdot 10^{-5}$	

Das Längenänderungsdiagramm ist nach diesen Ziffern in Abb. 9 aufgetragen.

Um einen Vergleich mit den bei der vorigen Messungsreihe erhaltenen Werthen ausführen zu können, beachte man, dass 1. die Last hier 5 , früher $8t$ betrug, dass 2. bei



der Hochkantlage in den äussersten Fasern die $1\frac{1}{2}$ fache Dehnung für die gleiche Last zu erwarten ist und dass 3. hier der Abstand der Messstifte von der Mitte $\frac{9}{10}$, früher $\frac{14}{15}$ von der halben Balkenhöhe ausmachte. Zum Zwecke des ungefähren Vergleichs sind daher die spezifischen Längenänderungen zwischen den äussersten Stiftenpaaren bei dem vorigen Versuch mit

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot 15 \cdot 9}{2 \cdot 8 \cdot 14 \cdot 10} = 0,90$$

zu multipliciren. In der That hat man nun $28,8 \cdot 10^{-5} \cdot 0,9 = 25,9 \cdot 10^{-5}$ gegenüber $25,2 \cdot 10^{-5}$ beim jetzigen Versuch auf der Zugseite und $21,9 \cdot 10^{-5} \cdot 0,9 = 19,7 \cdot 10^{-5}$ gegenüber $20,1 \cdot 10^{-5}$ auf der Druckseite, also eine durchaus befriedigende Uebereinstimmung. Hiernach erscheint der Ausspruch — zunächst wenigstens für den untersuchten Granit — gerechtfertigt, dass die Biegungserscheinungen ihrer Art nach nicht merklich von dem Verhältnisse der beiden Querschnittsseiten abhängig sind.

Schliesslich mache ich noch darauf aufmerksam, dass die Ziffern für die oberen und unteren Fasern in der Hochkantlage weit besser mit einander übereinstimmen als bei der Breitlage. Dies ist wohl darauf zurückzuführen, dass der Balken bei der Hochkantlage nebensächlichen Biegungen in der lothrechten Ebene viel weniger ausgesetzt ist als bei der Breitlage. Offenbar war auch die genaue Centrirung des Kraftangriffs hier besser gelungen als vorher.

§ 8. Biegungsversuche an dem Sandsteinbalken 5356 c.

Dieser Balken hat dieselben Abmessungen und ist genau in derselben Weise mit 20 Stiftenpaaren zwischen zwei Querschnitten armirt wie der vorige Granitbalken Nr. 5219 b. Die Messlängen betragen indessen hier genau 150 mm und ihre Mitten stehen um gerade 60 cm vom Auflager ab gegenüber 149 mm und 60,25 cm bei dem Granitbalken.

Mit Rücksicht auf die vorhergegangenen Erfahrungen beobachtete ich von vornherein stets gleichzeitig die Längenänderungen entsprechender Strecken auf der oberen und unteren Grenzfläche des Balkens. Sonst sind alle Versuche genau ebenso durchgeführt wie sie beim Granitbalken beschrieben wurden. Ich gebe zunächst die Beobachtungen für die Breitlage unter der Normalbelastung von 1,2 t wieder.

Tabelle 18.

Biegungsversuche am Sandsteinbalken 5356c in der Breitlage, Scalentfernung = 175 cm, Messlänge = 150 mm, Reduction der Spiegeldrehungen auf spezifische Längenänderungen durch Multiplication mit $0,636 \cdot 10^{-5}$, Dehnung positiv.

a) Längen 1 (oben) und 17 (unten)

Belastung in t	Controlspiegel	Apparat 1	Apparat 17
0	73,3	144,2	447,4
1,2	72,0	176,7	474,1
0	73,2	144,4	448,1
1,2	72,0	176,9	474,9
0	73,2	144,7	448,6
1,2	72,0	176,9	475,0
0	73,2	144,9	449,0

Berechnung

Apparat 1		Apparat 17	
Mittel für 0	= 144,7	Mittel für 0	= 448,6
„ „ 1,2 t	= 176,9	„ „ 1,2 t	= 475,0
	<hr/>		<hr/>
	32,2		26,4
Controlspiegel	= 1,2	Controlspiegel	= 1,2
	<hr/>		<hr/>
Relative Drehung	= 33,4	Relative Drehung	= 27,6
Mittel für oben und unten = 30,5			
$\frac{\Delta l}{l}$ im Mittel = + $19,4 \cdot 10^{-5}$.			

b) Längen 2 (oben) und 16 (unten).

Belastung in t	Controlspiegel	Apparat 2	Apparat 16
0	73,1	126,2	425,6
1,2	71,9	145,7	443,5
0	73,1	123,2	426,1
1,2	71,9	142,0	444,1
0	73,2	123,3	426,8
1,2	71,9	142,2	444,9
0	73,1	123,4	428,0

Berechnung

Apparat 2		Apparat 16	
Mittel für 0	= 123,3	Mittel für 0	= 427,0
„ „ 1,2 t	= 142,1	„ „ 1,2 t	= 444,5
	<hr/>		<hr/>
	18,8		17,5
Controlspiegel	= 1,2	Controlspiegel	= 1,2
	<hr/>		<hr/>
Relative Drehung	= 20,0	Relative Drehung	= 18,7
Mittel für oben und unten = 19,3			
$\frac{\Delta l}{l}$ im Mittel = + $12,3 \cdot 10^{-5}$.			

c) Längen 3 (oben) und 15 (unten).

Belastung in t	Controlspiegel	Apparat 3	Apparat 15
0	73,2	148,7	434,5
1,2	72,0	160,0	445,2
0	73,2	149,0	438,0
1,2	72,0	160,2	447,0
0	73,2	149,0	439,0
1,2	72,0	160,4	447,9
0	73,2	149,0	439,9

Berechnung

Apparat 3		Apparat 15	
Mittel für 0	= 149,0	Mittel für 0	= 439,0
„ „ 1,2 t	= 160,3	„ „ 1,2 t	= 447,5
	<hr/>		<hr/>
	11,3		8,5
Controlspiegel	= 1,2	Controlspiegel	= 1,2
	<hr/>		<hr/>
Relative Drehung	= 12,5	Relative Drehung	= 9,7
Mittel für oben und unten = 11,1			
$\frac{\Delta l}{l}$ im Mittel = + $7,1 \cdot 10^{-5}$.			

d) Längen 4 (oben) und 14 (unten).

Belastung in t	Controlspiegel	Apparat 4	Apparat 14
0	78,1	104,9	418,0
1,2	76,9	106,8	417,1
0	78,1	105,2	418,3
1,2	76,9	106,7	417,1
0	78,1	105,2	418,4
1,2	76,9	106,6	417,2
0	78,1	105,1	418,4

Berechnung

Apparat 4		Apparat 14	
Mittel für 0 =	105,2	Mittel für 0 =	418,4
„ „ 1,2t =	106,7	„ „ 1,2t =	417,2
	1,5		1,2
Controlspiegel =	1,2	Controlspiegel =	1,2
Relative Drehung =	2,7	Relative Drehung =	0,0
Mittel für oben und unten = 1,3			
$\frac{\Delta l}{l}$ im Mittel = + 0,8 · 10 ⁻⁵ .			

e) Längen 5 (oben) und 13 (unten).

Belastung in t	Controlspiegel	Apparat 5	Apparat 13
0	110,3	138,1	441,1
1,2	109,0	130,7	432,0
0	110,3	138,2	441,6
1,2	109,0	130,8	432,1
0	110,3	138,3	442,0
1,2	109,0	131,0	432,6
0	110,3	138,2	442,1

Berechnung

Apparat 5		Apparat 13	
Mittel für 0 =	138,2	Mittel für 0 =	441,9
„ „ 1,2t =	130,9	„ „ 1,2t =	432,3
	7,3		9,6
Controlspiegel =	1,3	Controlspiegel =	1,3
Relative Drehung =	6,0	Relative Drehung =	8,3
Mittel für oben und unten = 7,1			
$\frac{\Delta l}{l}$ im Mittel = - 4,5 · 10 ⁻⁵ .			

f) Längen 6 (oben) und 12 (unten)

Belastung in t	Controlspiegel	Apparat 6	Apparat 12
0	110,3	126,9	312,1
1,2	109,0	109,9	293,5
0	110,3	127,0	313,0
1,2	109,0	110,5	294,0
0	110,3	127,1	313,1
1,2	109,0	110,5	294,4
0	110,3	127,2	313,5

Berechnung

Apparat 6		Apparat 12	
Mittel für 0 =	127,1	Mittel für 0 =	313,2
„ „ 1,2t =	110,5	„ „ 1,2t =	294,2
	16,6		19,0
Controlspiegel =	1,3	Controlspiegel =	1,3
Relative Drehung =	15,3	Relative Drehung =	20,3
Mittel für oben und unten = 17,8.			
$\frac{\Delta l}{l}$ im Mittel = - 11,3 · 10 ⁻⁵ .			

g) Längen 7 (oben) und 11 (unten).

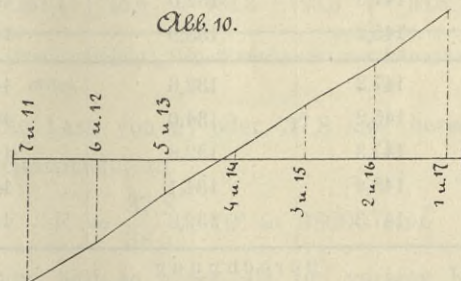
Belastung in t	Controlspiegel	Apparat 7	Apparat 11
0	112,0	87,6	314,1
1,2	110,7	59,6	286,6
0	112,0	87,5	315,1
1,2	110,7	60,7	288,0
0	112,0	87,4	315,8
1,2	110,7	60,4	288,1
0	112,0	87,4	316,0

Berechnung

Apparat 7		Apparat 11	
Mittel für 0 =	87,4	Mittel für 0 =	315,6
„ „ 1,2t =	60,5	„ „ 1,2t =	288,0
	26,9		27,6
Controlspiegel =	1,3	Controlspiegel =	1,3
Relative Drehung =	25,6	Relative Drehung =	26,3
Mittel für oben und unten = 25,9			
$\frac{\Delta l}{l}$ im Mittel = - 16,5 · 10 ⁻⁵ .			

Abb. 10 gibt das Längenänderungsdiagramm. Mit Ausnahme des letzten Stückes auf der Zugseite schliesst sich die Diagrammlinie ziemlich genau an eine Gerade an, so dass die Abweichungen davon nicht mehr ausmachen, als die unvermeidlichen Beobachtungsfehler. Wie beim

Abb. 10.



vorigen Granitbalken ist aber auch hier die Dehnung der äussersten Fasern auf der Zugseite merklich grösser, als wenn die Querschnitte genau eben geblieben wären. Bei einem einfachen Spiegelversuch muss sich dies darin aussprechen, dass sich Spiegel 1 etwas mehr dreht als die übrigen (vgl. hiezu die Tabellen 5 und 6, die sich auf den anderen Sandsteinbalken bezogen).

Der Abstand der neutralen Faser von der Mitte berechnet sich zu etwa 7 mm oder etwas über 2% der Querschnittshöhe. Die neutrale Faser ist auch hier etwas nach der Druckseite hin verschoben, wie es der Melan-Hartig'schen Theorie entspricht, aber längst nicht in dem Maasse, wie diese es verlangt.

Auch den Sandsteinbalken habe ich in der Hochkantlage durchgebogen. Ich gebe die Messungen, die genau nach Art der früheren durchgeführt wurden, in nachstehender Tabelle wieder:

Tabelle 19.

Biegung des Sandsteinbalkens 5356° in der Hochkantlage bei der Normalbelastung von 0,8 t, Stifte 8 und 20 auf der Zugseite, 8 oben, ausgeführt am 2. Okt. 1895, sonst wie bei Tab. 18.

a) Längen 8 (oben) und 20 (unten).

Belastung in t	Controlspiegel	Apparat 8	Apparat 20
0	174,8	181,8	406,3
0,8	172,8	212,7	433,9
0	174,8	181,0	406,0
0,8	172,8	213,2	434,2
0	174,8	181,4	406,4
0,8	172,8	213,3	434,5
0	174,8	181,6	406,6

Berechnung

Apparat 8		Apparat 20	
Mittel für 0 =	181,3	Mittel für 0 =	406,3
„ „ 0,8t =	213,2	„ „ 0,8t =	434,3
	31,9		28,0
Controlspiegel	2,0	Controlspiegel	2,0
Relative Drehung =	33,9	Relative Drehung =	30,0

Mittel für oben und unten = 31,9

$$\frac{\Delta l}{l} \text{ im Mittel} = + 20,3 \cdot 10^{-5}$$

b) Längen 9 (oben) und 19 (unten).

Belastung in t	Controlspiegel	Apparat 9	Apparat 19
0	147,3	132,0	444,8
0,8	145,2	133,9	445,9
0	147,3	132,6	446,0
0,8	145,2	134,0	446,6
0	147,3	132,8	446,5
0,8	145,2	134,1	447,0
0	147,3	132,8	446,8

Berechnung

Apparat 9		Apparat 19	
Mittel für 0 =	132,7	Mittel für 0 =	446,4
„ „ 0,8t =	134,0	„ „ 0,8t =	446,8
	1,3		0,4
Controlspiegel	2,1	Controlspiegel	2,1
Relative Drehung =	3,4	Relative Drehung =	2,5

Mittel für oben und unten = 2,9

$$\frac{\Delta l}{l} \text{ im Mittel} = + 1,8 \cdot 10^{-5}$$

c) Längen 10 (oben) und 18 (unten).

Belastung in t	Controlspiegel	Apparat 10	Apparat 18
0	174,7	170,2	257,0
0,8	172,7	141,3	230,0
0	174,7	169,0	257,0
0,8	172,6	141,2	230,0
0	174,7	168,8	257,0
0,8	172,6	141,1	230,1
0	174,7	168,7	257,0

Berechnung

Apparat 10		Apparat 18	
Mittel für 0 =	168,8	Mittel für 0 =	257,0
„ „ 0,8t =	141,1	„ „ 0,8t =	230,0
	27,7		27,0
Controlspiegel	2,1	Controlspiegel	2,1

Relative Drehung = 25,6

Relative Drehung = 24,9

Mittel für oben und unten = 25,2

$$\frac{\Delta l}{l} \text{ im Mittel} = - 16,0 \cdot 10^{-5}$$

Zum angenäherten Vergleiche der Dehnungen bei der Breitlage mit denen bei der Hochkantlage muss man hier jene mit

$$\frac{3 \cdot 0,8 \cdot 15 \cdot 9}{2 \cdot 1,2 \cdot 14 \cdot 10} = 0,964$$

multipliciren. Man erhält dann $19,4 \cdot 10^{-5} \cdot 0,964 = 18,7 \cdot 10^{-5}$ gegenüber $20,3 \cdot 10^{-5}$ und $16,5 \cdot 10^{-5} \cdot 0,964 = 15,9 \cdot 10^{-5}$ gegenüber $16,0 \cdot 10^{-5}$.

Auf der Zugseite ist die Uebereinstimmung zwar nicht so befriedigend wie beim Granitbalken. Im Ganzen kann man aber doch auch hier sagen, dass sich die Formänderungen in der Breitlage zu denen in der Hochkantlage ungefähr so verhalten, wie es die gewöhnliche Biegunstheorie lehrt.

§ 9. Zug- und Druckversuche an gewöhnlichen Probestücken.

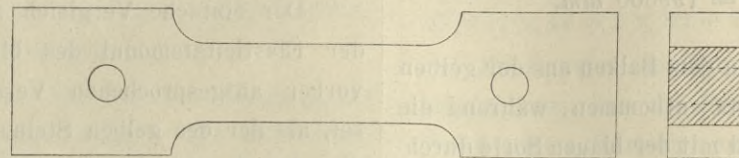
Schon bald nachdem ich durch die ersten Biegungsversuche einen ungefähren Ueberblick über das thatsächliche Verhalten gebogener Steinbalken gewonnen hatte, schritt ich dazu, die Zug- und Druckfestigkeit und den Elasticitätsmodul für beide Beanspruchungsarten in der herkömmlichen Weise zu ermitteln. Ich liess also zunächst aus den Bruchstücken des Granitbalkens 5220 a und später auch aus denen des Granitbalkens 5219 a Probestücke in den üblichen Dimensionen herstellen und prüfte sie genau in der Weise, wie dies Bauschinger zu thun pflegte. Namentlich benutzte ich auch denselben Spiegelapparat, mit dem Bauschinger seine Versuche anstellte, machte also keinen Gebrauch von der Befestigung an eingekitteten Stiften, zu der ich bei den Biegungsversuchen genöthigt war. Die Röllchendurchmesser dieses

Apparates betragen (abweichend von jenen der vorher benutzten) 6,428 mm. Der Scalenabstand wurde zu 160,7 cm gewählt und die Scala hatte Doppelmillimetertheilung. Bildet man die Summe der Bewegungen beider Spiegel, so gibt bei einer Messlänge von 10 cm die Zahl der Scalentheile mit 10⁻⁵ multiplicirt ohne Weiteres die spezifische Längenänderung an. Nur in einer Beziehung wich ich von dem von Bauschinger regelmässig innegehaltenen Verfahren ab. Ich versetzte nämlich, wie vor-

her bei den Biegeversuchen, jedes Probestück durch wiederholte Belastung in einen constanten Zustand, ehe ich zu den definitiven Messungen schritt, weil es mir darauf ankam, die elastische Längenänderung unvermischt mit der bleibenden zu erhalten.

Aus dem Granitbalken 5220 a liess ich vier Zugstücke von der in Abb. 11 gezeichneten Form herstellen, von denen jedoch eines bei der Bearbeitung zerbrach. Der Bruch ging durch das eine Loch, so dass das Stück

Abb. 11. Mass. 1:2,5



später noch als Balken zu einem Biegeversuch verwendet werden konnte. Von den drei übrigen ging beim Zugversuch bei zweien die Bruchfläche durch eines der Löcher und nur beim letzten erfolgte der Bruch im Mittelstück. Diese Form der Zugprobestücke, von der ich mir bessere Resultate versprach als von der einfachen Keileinspannung hat daher keinen Vorzug vor dieser und ich habe darum die Zugstücke aus dem anderen Balken als einfache Parallelepipede herstellen lassen.

Als ich mit dem ersten Zugstück 5220 a, I bis auf 2 t gekommen war und nachdem der constante Zustand für diese Last erreicht war, erhielt ich den nachstehenden Beobachtungssatz:

Tabelle 20.

Zugversuch mit dem Granitstück 5220^a, I, Querschnitt 7,45×7,45 cm = 55,35 qcm, Messlänge = 10 cm, Scalenabstand = 160,7 cm, Ablesung in Doppelmillimetern, Röllchen-Durchmesser = 6,428 mm, am 24. April 1895.

Belastung in t	Spiegel links		Spiegel rechts		Längen- änderung in 1/1000 mm	Ange- wachsen um
	Ab- lesung	Be- wegung	Ab- lesung	Be- wegung		
0	269,8	—	153,9	—	—	
0,5	267,7	2,1	155,3	1,4	3,5) 5,1 5,5 6,1 12,0
1,0	265,2	4,6	157,9	4,0	8,6	
1,5	262,7	7,1	160,9	7,0	14,1	
2,0	259,8	10,0	164,1	10,2	20,2	
2,5	253,9	15,9	170,2	16,3	32,2	
3,0	wird nicht ganz erreicht; Bruch an der Einspannstelle.					

In der Messung für 2,5 t ist auch die bleibende Dehnung enthalten; die gefundene Ziffer ist daher für die Berechnung des Elasticitätsmoduls nicht verwerthbar; wohl aber die für 2 t. Diese Last entspricht einer spezifischen Spannung von 36,1 atm und für den Elasticitätsmodul E erhält man bei dieser Spannung

$$E = \frac{36,1}{20,2} \cdot 10^5 = 179000 \text{ atm.}$$

Die Zugfestigkeit kann aus dem Versuche natürlich nicht bestimmt werden.

Ganz andere Werthe erhielt ich für das Stück 5220a, II das unmittelbar neben dem vorigen aus demselben Balken entnommen und genau in gleicher Weise behandelt worden war.

Tabelle 21.

Zugversuch mit dem Granitstück 5220^a, II, Querschnitt = 7,42×7,13 cm = 52,90 qcm, sonst Alles wie bei Tab. 20. Letzter Beobachtungssatz, nachdem der constante Zustand für 2 t erreicht war.

Belastung in t	Spiegel links		Spiegel rechts		Längen- änderung in 1/1000 mm	Ange- wachsen um
	Ab- lesung	Be- wegung	Ab- lesung	Be- wegung		
0	266,9	—	161,0	—	—	
0,25	265,4	1,5	162,1	1,1	2,6) 3,5 4,7 5,4 5,3 5,6 5,8 5,9
0,5	264,0	2,9	164,2	3,2	6,1	
0,75	262,3	4,6	167,2	6,2	10,8	
1,0	260,3	6,6	170,6	9,6	16,2	
1,25	258,2	8,7	173,8	12,8	21,5	
1,5	256,0	10,9	177,2	16,2	27,1	
1,75	253,8	13,1	180,8	19,8	32,9	
2,0	251,4	15,5	184,3	23,3	38,8	
2,25	Grade erreicht; Bruch senkrecht zur Längsaxe im Mittelstück.					

Für die Last von 2 t oder 37,8 atm berechnet sich der Elasticitätsmodul zu

$$E = \frac{37,8}{38,5} \cdot 10^5 = 98000 \text{ atm,}$$

also fast nur halb so gross als im vorigen Falle. Der Mittelwerth der Dehnung für die nahe bei der Bruchgrenze liegende Last von 2 t oder 37,8 atm, aus den vorausgegangenen Beobachtungssätzen berechnet, stellte sich nämlich auf 38,5 · 10⁻⁵ (anstatt 38,8 in der Tabelle). Die Zugfestigkeit folgt aus dem Versuche zu

$$42,5 \text{ atm.}$$

Das dritte Zugstück 5220 a, III endlich, das von Herrn H o u k o w s k y in derselben Weise untersucht wurde, ver-

hielt sich wieder ähnlich wie das erste. Ich gebe hier nur die Resultate wieder. Der Querschnitt betrug 55,65 qcm. Für die Lasten 0,25; 0,5; 0,75; 1,0; 1,25; 1,5; 1,75; 2,0 t betrug die spezifische Dehnung (mit Weglassung des Factors 10^{-5}) bzw. 1,4; 3,1; 5,0; 7,3; 9,6; 12,5; 15,2; 18,0. Beim Weitergehen erfolgte der Bruch zwischen 2,4 und 2,5 t an der Einspannstelle.

Für die Last von 2 t oder 35,9 atm berechnet sich der Elasticitätsmodul zu

$$E = \frac{35,9}{18,0} \cdot 10^5 = 199000 \text{ atm.}$$

Diese drei Zugstücke waren dem Balken aus der gelben Spielart des Blauberger Granits entnommen, während die Biegeversuche ganz vorwiegend mit der blauen Sorte durchgeführt waren. Nun liess sich allerdings erwarten, dass sich die beiden Varietäten in Bezug auf die elastischen Eigenschaften nicht viel von einander unterscheiden würden, und ich habe daher auch bei allen vorläufigen Berechnungen die gefundenen Zahlen ohne Weiteres auch für den blauen Granit als gültig betrachtet. Um eine einwandfreie Grundlage zu gewinnen, habe ich indessen später, am 11. Oktober 1895 auch noch für zwei dem Balken 5219a entnommene Zugstücke die vorigen Messungen in gleicher Weise wiederholt. Die Querschnitte waren hier etwas grösser als vorher. Ich konnte daher beim Zugstücke 5219a, IV den constanten Zustand für 3 t herstellen, während der Bruch bei etwa 3,1 t unmittelbar beim Einspannquerschnitt erfolgte, so dass die Zugfestigkeit aus dem Versuch nicht bestimmt werden konnte. Beim anderen Stück 5219a III, das im Balken an das vorhergehende angrenzte, erhielt ich erheblich andere Werthe. Selbst bei 4 t hielt es noch und liess sich in den constanten Zustand bringen; beim Weitergehen brach es zwischen 4,4 und 4,5 t Belastung, wiederum dicht beim Einspannquerschnitt. Ich gebe hier nur die Resultate der letzten Beobachtungssätze wieder.

Tabelle 22.

Zugstück 5219a, III, Querschnitt = $9,84 \times 7,91 \text{ cm} = 77,83 \text{ qcm}$, ganze Länge = 42 cm, in constantem Zustande für 4,0 t Belastung, sonst wie in Tab. 20.

Zugkraft in t	= 0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,45
Zugkraft in atm	= 6,4	12,8	19,3	25,7	32,1	38,5	45,0	51,4	57,2
$\frac{\Delta l}{l}$ in Hunderttausendsteln	= 1,4	3,6	5,7	7,7	11,4	14,5	17,6	20,8	Bruch

Zugstück 5219a, IV, Querschnitt = $9,67 \times 7,83 \text{ cm} = 75,72 \text{ qcm}$, ganze Länge = 42 cm, in constantem Zustande für 3 t sonst wie vorher.

Zugkraft in t	= 0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,1
Zugkraft in atm	= 6,6	13,2	19,8	26,4	33,0	39,6	40,9
$\frac{\Delta l}{l}$ in Hunderttausendsteln	= 2,0	4,6	7,8	10,8	14,1	18,0	Bruch

Für das Stück III berechnet sich der Elasticitätsmodul unter der Last von 4 t = 51,4 atm zu

$$E = \frac{51,4}{20,8} \cdot 10^5 = 247000 \text{ atm}$$

für das Stück IV dagegen schon bei der Last von 3 t = 39,6 atm zu

$$E = \frac{39,6}{18,0} \cdot 10^5 = 220000 \text{ atm.}$$

Alle diese Angaben des Elasticitätsmoduls beziehen sich natürlich auf den kleinsten Werth, der vor dem Bruch noch sicher beobachtet werden konnte; bei kleineren Lasten ist der Elasticitätsmodul überall höher.

Der einfache Vergleich scheint nun zu lehren, dass der Elasticitätsmodul des blauen Granits entgegen der vorher ausgesprochenen Vermuthung beträchtlich höher sei, als der des gelben Steins. Man muss aber beachten, dass bei den letzten Zugstücken die Querschnitte grösser waren. Es gehört nämlich zu den merkwürdigsten und am wenigsten vorherzusehenden Ergebnissen dieser Arbeit, dass sich Stücke mit grösserem Querschnitt bei der gleichen spezifischen Spannung meist viel weniger dehnen als Stücke mit kleinem Querschnitt.

Aus dem Zugstück 5220a II, dessen Bruchfläche sich zwar im Mittelstück, aber doch ziemlich nahe an dem Beginn der Verstärkung befand, liess ich durch Weghauen der Enden das parallelepipedische Druckstück 5220a II herstellen. Die gesammte Länge betrug 20,4 cm, und die Messlänge war dieselbe wie vorher beim Zugversuch. Ich gebe hier die Resultate:

Tabelle 23.

Druckversuch mit dem Granitstück 5220a, II ¹ (Alles wie in Tab. 21).									
Belastung in t	= 0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	
oder in atm	= 4,73	9,45	14,16	18,90	23,63	28,35	33,06	37,81	
$\frac{\Delta l}{l}$ in Hunderttausendsteln	= 1,3	2,8	4,2	5,8	7,4	9,1	10,7	12,3	

Die höheren Lasten sind von geringerem Interesse. Ich erwähne hier nur, dass ich bis 10 t = 189 atm ging und $\frac{\Delta l}{l}$ dafür gleich $74,5 \cdot 10^{-5}$ fand, während bei 5 t die spezifische Dehnung $35,8 \cdot 10^{-5}$ betrug. Später wurde das Stück zerdrückt. Die Druckfestigkeit stellte sich auf 1260 atm. Zwei Würfel von 6 cm Seitenkante, die ausserdem noch aus einem anderen Theile desselben Zugstücks 5220a II herausgearbeitet waren, wurden bei 1130 und bei 1240 atm zerdrückt.

Der Elasticitätsmodul für Druck betrug für 2 t noch über 300 000 atm und sank auch bei erheblich höheren Lasten nicht gar viel unter diesen Werth, während er bei demselben Stücke, zwischen denselben Querschnitten gemessen, für Zug nur 98 000 atm bei der gleichen Belastung betragen hatte. Freilich ist der niedrige Werth von 98 000 atm für den Zugelasticitätsmodul ein einzeltes Resultat.

Weitere Elasticitätsmessungen an kleinen Probestücken habe ich nicht mehr vorgenommen, da sie kein besonderes Interesse mehr für mich boten, nachdem ich erkannt hatte, dass alle auf diesem Wege gefundenen Werthe mit grossem Misstrauen zu betrachten sind. In der That habe ich auch die Messungen dieses Abschnitts nicht mitgetheilt, um sie als brauchbare Daten weiterhin zu verwerthen, sondern nur um die Unzulänglichkeit der seither geübten Methode zur Feststellung des elastischen Verhaltens von Steinen bei Zugbeanspruchung darzuthun.

§ 10. Schlussfolgerungen aus den vorausgehenden Beobachtungsergebnissen.

Nachdem ich einerseits die bei der Biegung auftretenden elastischen Längenänderungen und andererseits die diesen Längenänderungen entsprechenden specifischen Spannungen bei den Zug- und Druckversuchen ermittelt hatte, konnte ich dazu übergehen, die erhaltenen Werthe auf ihre Zuverlässigkeit zu prüfen. Ich brauchte dazu nur mit Hilfe der Tabellen des vorigen Abschnitts die bei den Biegungsversuchen gewonnenen Längenänderungsdiagramme in Spannungsvertheilungsdiagramme umzuwandeln. Dann musste sich zeigen, ob für den ganzen Querschnitt die Summe der Zugspannungen gleich jener der Druckspannungen und ob das Moment des aus ihnen resultirenden Paares gleich dem Biegemomente sei.

Freilich hätte ich mich dabei in Verlegenheit befinden können, welche der so stark von einander abweichenden Versuchsreihen für die Zugelasticität bei dieser Umrechnung zu Grunde zu legen sei. Es zeigt sich aber, dass eine Uebereinstimmung durchaus nicht herzustellen ist, selbst wenn man die dafür günstigsten Werthe aus den gefundenen auswählt. In der That lehrt ja auch schon eine flüchtige Ueberlegung, dass für ein von dem gradlinigen nicht viel abweichendes Formänderungsdiagramm, dessen neutrale Faser in der Nähe der Querschnittsmitte liegt, nur ein Elasticitätsmodul für Zug, der innerhalb des in Betracht kommenden Spannungsintervalls im Mittel nicht viel kleiner ist als der für Druck, die unerlässliche Bedingung der Gleichheit der gesammten Zug- und Druckkräfte für den ganzen Querschnitt erfüllen kann. Dasselbe lehrt auch die Momentenbedingung. Ich will dies kurz an der Hand der Durchrechnung des die geringste Abweichung liefernden Falles nachweisen. Nach Tabelle 13 lässt das Längenänderungsdiagramm für die zwischen III und A liegenden Strecken noch am ersten eine Uebereinstimmung mit den Ergebnissen der Zugproben für den Granitbalken 5219 a erwarten, weil dort die neutrale Faser am meisten nach der Druckseite hin (um etwa 8 mm) verschoben erscheint. Ferner ist unter allen Zugversuchen der mit dem Zugstück 5219 a, III am günstigsten,

weil dort der Elasticitätsmodul selbst bei 51,4 atm noch zu 247 000 atm gefunden wurde. Combinirt man nun diese für die zu prüfende Annahme günstigsten Versuchsreihen miteinander, so erhält man für das Stiftenpaar 1 bei einer specifischen Längenänderung von $+15,2 \cdot 10^{-5}$ die specifische Spannung von 40,0 atm, für das Stiftenpaar 2 die specifische Spannung von 26,0 atm, für 3 die Spannung 4,6 atm, für den Abstand der neutralen Faser von der Mitte 8,2 mm und für die Spannung in der äussersten Faser 42,0 atm. Die Summe aller Zugspannungen würde hienach ergeben

$$20 \times (1 \times 47 + 7 \times 33 + 7 \times 15,3 + 0,82 \times 2,3) = 7620 \text{ kg.}$$

Zu Gunsten der zu prüfenden Annahme sei ferner angenommen, dass die Probe der Gleichheit von Zug- und Druckkräften befriedigt sei, da für das Stück 5219 a III keine Druckelasticitätsmessung vorgenommen wurde. Wir hätten dann ein Kräftepaar vor uns, von dem jede Kraft = 7620 kg wäre. Da die Spannungen langsamer wachsen, als die zugehörigen Abstände von der neutralen Faser, so ist der Hebelarm des Kräftepaares sicher kleiner als $\frac{2}{3}$ der Querschnittshöhe. Zu Gunsten der Annahme will ich ihn aber zu 20 cm rechnen und erhalte damit für das Moment des Kräftepaares

$$7620 \text{ kg} \times 20 \text{ cm} = 152\,400 \text{ cmkg.}$$

Andererseits findet man aber aus den äusseren Kräften das Biegemoment für den in der Mitte zwischen den Stiftenreihen III und A liegenden Querschnitt zu

$$4000 \text{ kg} \times 44,4 \text{ cm} = 177\,600 \text{ cmkg.}$$

Selbst unter den günstigsten Annahmen lässt sich daher keine Uebereinstimmung zwischen den Zugelasticitätsmessungen und den direkten Messungen der Formänderungen am gebogenen Balken herstellen. Der Schluss ist vielmehr gar nicht abzuweisen, dass selbst jenes Zugstück, das sich unter allen am steifsten gegen Zugbeanspruchung erwiesen hatte, den Elasticitätsmodul noch zu niedrig gegenüber dem für den ganzen Balken gültigen geliefert hat.

Dabei ist wohl im Auge zu behalten, dass der Wert von 247 000 atm bei 51,4 atm Spannung gegenüber allen früheren Angaben schon ganz ungewöhnlich hoch liegt. Im 10. Hefte der Bauschinger'schen Mittheilungen ist z. B. der Zugelasticitätsmodul für 2 Granitsorten auf S. 14 zu 59000 atm bei 38 atm Spannung und zu 31000 atm bei 36 atm Spannung angegeben. Freilich ist bei diesen Angaben zu beachten, dass das Material vor der Messung nicht in einen constanten oder nahezu constanten Zustand übergeführt wurde, so dass die gemessenen Längenänderungen nicht nur die elastischen, sondern auch die bleibenden umfassen, sowie dass der Elasticitätsmodul hier allem Anschein nach der zweiten in der Fussnote zu § 3 erwähnten Definition entspricht.

§ 11. Zug- und Druckversuche mit dem ganzen Balken.

Die vorausgehenden Erfahrungen und die an sie geknüpften Ueberlegungen liessen nur einen Ausweg aus den Widersprüchen, zu denen sie geführt hatten, erkennen: es blieb nichts anderes übrig, als den ganzen Balken, an dem der Biegungsversuch unternommen war, ohne jede Aenderung einem Zugversuche zu unterwerfen. Freilich war ein Zugversuch mit so grossen Stücken im hiesigen Laboratorium — und jedenfalls auch anderwärts — bis dahin nie ausgeführt worden und ich musste daher zuvor eine ganz neue Einrichtung dafür beschaffen. Mit Hülfe der altbewährten Beamten des Laboratoriums — es ist mir eine angenehme Pflicht, hier besonders den Werkmeister des Laboratoriums, Herrn Braun, zu nennen — ist mir dies aber ganz nach Wunsch gelungen.

Die ganze Einrichtung ist aus der Abbildung auf der oberen Hälfte von Tafel I zu erkennen. Natürlich schloss ich nachher auch einen Druckversuch mit dem ganzen Balken an, der von vornherein keine Schwierigkeiten bot.

Für den Zugversuch wurde jedes Ende des 170 cm langen Balkens zwischen zwei starken, auf beiden Seiten übergreifenden Gusseisenbacken auf eine Länge von etwa 22 cm gefasst. Die Innenflächen der Backen waren mit Meisselhieben geraut und zwischen sie und den Stein wurden Beiplatten beigelegt. Beide Backen wurden mit starken Schrauben fest zusammengezogen. Nach rückwärts laufen die Backen in Lappen aus, die mit 7 cm grossen Löchern versehen sind; durch die an jedem Ende ein Bolzen gesteckt wird, um das ganze Stück in die Maschine einhängen zu können. Der aus den Backen zusammengesetzte Einspannkopf auf der der Maschine zugewendeten Seite wurde mit Hülfe eines Seils an dem Laufkahn des Laboratoriums aufgehängt. Auf ihn wird mit Hülfe von Zugstangen die von der Maschine ausgeübte Kraft übertragen. Gegenüber den grossen Zgukräften, um die es sich hier handelt, kommt die sich höchstens auf einige Kilogramm belaufende horizontale Componente des Seilzuges, die in Folge der Aufhängung etwa auftreten könnte, ganz und gar nicht in Betracht. Der andere Einspannkopf wurde mit Hülfe gekreuzter Walzen auf einer Stütze gelagert, um ihm freie Beweglichkeit in horizontaler Richtung zu sichern. Er war an den Kreuzkopf angehängt, der seinerseits durch einen aus vier starken Stangen gebildeten Rahmen, der sich in der Abbildung dem ersten Blicke aufdrängt, gegen das Maschinen-gestell abgestützt wurde.

Natürlich gelang es nicht sofort, einen hinreichend genau centrischen Angriff der Belastung zu erreichen. Darin liegt überhaupt eine Hauptschwierigkeit bei allen Zugversuchen mit Steinen. Selbst eine geringe Excentricität des Lastangriffs bringt schon erhebliche Abweichungen

von der gleichmässigen Spannungsvertheilung hervor, wie aus den Formeln der gewöhnlichen und hier ohne Zweifel recht gut mit der Wirklichkeit übereinstimmenden Theorie hinreichend bekannt ist.

Um ein Abhülfemittel brauchte ich aber nicht verlegen zu sein. Ich hatte natürlich, wie es auch die Abbildung zeigt, die von dem Biegeversuch her an dem Balken angebrachten Messstifte daran gelassen und konnte nun nach Belieben jede von den dadurch markirten Strecken während der Belastung messen. Zeigten sich beim Lastangriff zu stark von einander abweichende Längenänderungen, so konnte durch passende Beilagen in den Augen der Zugstangen u. s. w. eine besser centrische Lastübertragung herbeigeführt werden. Freilich ist diese Justirung ziemlich mühsam, da sie nach jeder Correctur immer wieder einen neuen Beobachtungssatz für mindestens 4 Stiftenpaare verlangt und ich habe mich daher schliesslich damit begnügt, wenigstens allzu grobe Abweichungen von der gleichmässigen Spannungsvertheilung zu vermeiden.

Bei diesen Versuchen habe ich mich zugleich wiederholt durch hintereinander ausgeführte Messungen an den verschiedenen Messstrecken davon überzeugt, dass das Mittel der Dehnungen für die in halber Höhe des Balkens auf den beiden vertikal stehenden Grenzflächen liegenden Strecken 4 und 14 vollkommen mit dem Gesamtmittel der Dehnungen aller Strecken für den ganzen Querschnitt übereinstimmt, was ja auch von vornherein zu erwarten war.

Nachdem durch die Vorversuche ein ziemlich centrischer Lastangriff erzielt worden war, konnte ich mich daher damit begnügen, für den Hauptbeobachtungssatz zur Ermittlung des Zusammenhangs zwischen specifischer Spannung und Dehnung nur die Längenänderungen der Mittelstrecken 4 und 14 zu messen und das Mittel aus beiden dem Mittelwerth der Spannung gegenüber zu stellen.

Als einen Hauptvorzug dieser ganzen Versuchsanordnung betrachte ich es, dass die Messungen beim Zugversuch genau an denselben Strecken und mit Benutzung derselben Messstifte und des ganzen übrigen Messapparats vorgenommen werden können, die schon zur Beobachtung der Formänderung bei der Biegung gedient hatten. Hier ist kaum noch ein Zweifel darüber möglich, wie gross die Spannungen anzunehmen sind, die den bei der Biegung auftretenden Längenänderungen entsprechen.

Da der Granitbalken 5219 a schon bei den Biegeversuchen bis zum Bruch gebracht war und mir ein Versuch an einem der beiden Bruchstücke nicht beweiskräftig genug erschien, standen mir zur Ausführung der Zugversuche der Granitbalken 5219 b und der Sandsteinbalken 5356 c, die auch jetzt noch unverseht sind, zur Verfügung.

Den Granitbalken habe ich bis zu 28 *t* oder 46,67 *atm* belastet, ihn in den constanten Zustand für diese Zuglast gebracht und dann den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung für die von 0 an bis dahin anwachsenden Lasten ermittelt. Ueber 28 *t* konnte ich nicht hinausgehen, weil ich die Einspannvorrichtung von vornherein nicht stark genug für so grosse Lasten hatte construiren lassen. Ich hatte nicht zu hoffen gewagt, dass man so hoch mit der Last würde hinaufgehen dürfen, ohne einen Bruch des Steines an der Einspannstelle oder ein Herausgleiten aus den Backen, wie es anfänglich auch einmal vorkam, herbeizuführen. Im Uebrigen lag mir auch nichts daran, den Stein bis zum Bruch zu bringen, da dieser nur in der Nähe der Einspannköpfe zu erwarten war, wobei man über den wahren Werth der Zugfestigkeit natürlich nichts erfährt.

Ueberhaupt bin ich zu der Ueberzeugung gelangt, dass es ein ziemlich aussichtsloses Beginnen ist, den wahren Wert der Zugfestigkeit von Steinen (also die spezifische Spannung an der Stelle, bei der eben der Bruch beginnt) durch Zugversuche, die bis zum Abreissen getrieben werden, zu ermitteln. Schon Bauschinger sagt im 18. Hefte der Mittheilungen S. 7: „Die Bestimmung der Zugfestigkeit der Steine ist eine sehr schwierige Aufgabe.“ Er gibt zwar hinter diesem Satz Mittel an zur Centrirung des Lastangriffs, die ohne Zweifel sehr empfehlenswerth sind, die aber doch nicht ausreichen, um jene Schwierigkeit zu heben. Betrachtet man in der That die vorher in dieser Abhandlung beschriebenen Zugversuche, so würde man ohne weitere Anhaltspunkte vier wegen Bruchs in der Einspannstelle für die Ermittlung der Zugfestigkeit verwerfen müssen, einen aber, der mit dem Stück 5220 a, II (vgl. Tab. 21) angestellt wurde, als beweiskräftig anzusehen haben. Man käme so dazu, die Zugfestigkeit des untersuchten gelben Granits zu 42,5 *atm* anzunehmen, während die Biegezugfestigkeit nach der gewöhnlichen Formel (bei 9 *t* Bruchlast) sich auf 112,5 *atm* berechnet. Damit hätte man wieder jene Abweichung zwischen Zugfestigkeit und Biegezugfestigkeit, die den Anstoss zu meiner Untersuchung gegeben hat. Beachtet man aber, dass sich gerade dieses Probestück, das den „normalen“ Bruch aufwies, in elastischer Hinsicht ganz abnormal verhielt (Elasticitätsmodul vor dem Bruche nur 98000 *atm*), so kann man die Bemessung der Zugfestigkeit nach diesem Versuche nur verwerfen. Wenn man aus dem Bruche bei so abnormalem Verhalten überhaupt etwas schliessen darf, so wäre es eher noch, dass die spezifische Dehnung unter $\frac{8}{9}$ der Bruchlast sich auf $38,8 \cdot 10^{-5}$ belief. Die grösste elastische Dehnung, die das Material verträgt, ehe der Bruch eintritt, lässt sich sicherer beobachten und ihr Werth ist auch sonst von grösserer Bedeutung als die

spezifische Spannung, die dem Bruch vorausgeht. Von der spezifischen Spannung kennt man immer nur den Mittelwerth über den ganzen Querschnitt und man ist niemals sicher, welche Abweichungen vom Mittelwerth an einzelnen Stellen vorkommen, selbst wenn die äussere Last vollkommen centrirt angreift.

Aus diesen Gründen halte ich es für vollkommen ausreichend, bei solchen Zugversuchen nur die elastischen Dehnungen — allerdings für einen möglichst grossen Spannungsbereich — zu bestimmen. Ich fand z. B. bei dem Granitbalken für 28 *t* Zugbelastung oder 46,7 *atm* mittlerer Spannung eine elastische Dehnung von nur $14,4 \cdot 10^{-5}$ und da ich z. B. bei der Biegung stets beobachtete, dass der Granit weit höhere Dehnungen (bis zum vierfachen Betrage, S. 15) aushält, ehe er bricht, schliesse ich, dass auch die Zugfestigkeit weit höher liegt als 46,7 *atm*. In diesem Schlusse würde ich auch nicht wankend werden, selbst wenn einmal bei einer Spannung von ungefähr dieser Grösse einer meiner Granitbalken ganz regelmässig in der Mitte abreißen sollte. Ich würde dann nur vermuthen können, dass irgend eine Zufälligkeit, ein schon vorher bestandener Riss oder dergleichen das Material an der Bruchstelle erheblich geschwächt hätte.

Allerdings erfährt man bei diesem Vorgehen nicht genau, wie gross die Zugfestigkeit dieses Materials nun wirklich zu setzen sei. Ich halte dies aber für keinen Nachtheil, denn in der That braucht man in der Praxis eine Angabe über die Zugfestigkeit von Steinen immer nur entweder zu Berechnungen über die Biegezugfestigkeit oder über excentrische Druckbelastungen. Es ist daher nicht nur möglich, sondern wegen des Verwendungszweckes auch vortheilhafter, die Zugfestigkeit des Steins unmittelbar aus dem Biegezugversuche herzuleiten.

Ehe ich dazu übergehe, die wichtigsten Beobachtungssätze mitzutheilen, muss ich noch eine Schwierigkeit erwähnen, die sich auf die Herstellung des „constanten“ Zustandes bezieht und die mir gerade bei diesen Zugversuchen besonders aufgefallen ist. Es gelingt verhältnissmässig leicht, entweder durch wiederholte Belastungen und Entlastungen oder auch durch längeres Stehenlassen der Last den Balken in einen Zustand zu versetzen, der innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Messung durchaus constant ist, solange als man die Messungen hintereinander fortsetzt. Lässt man aber nun den Balken über Nacht spannungslos in der Maschine liegen und fährt am anderen Morgen mit den Beobachtungen fort, so bemerkt man, dass sich der Balken verändert hat. Ein zwei- oder dreimaliges Anziehen mit der vorher angewendeten grössten Belastung genügt zwar, um den Balken sofort wieder vollständig in einen constanten Zustand zurückzuführen, aber dieser ist von dem am Tage vorher

zuweilen recht merklich verschieden. Der Balken ist durch das Liegen steifer geworden, d. h. sein Elasticitätsmodul hat sich gehoben. Sehr deutlich zeigt sich dies an zwei sich völlig entsprechenden, um 15 Stunden auseinander liegenden Beobachtungssätzen an dem Sandsteinbalken, die ich daher vollständig wiedergeben werde.

Auch am Granitbalken zeigten sich dieselben Erscheinungen, wenn auch vielleicht in geringerem Maasse; sie wurden hier nur nicht genauer verfolgt und anfänglich nur als Ungenauigkeiten der Messung gedeutet. Ich werde mich daher damit begnügen, für den Granitbalken nur den letzten Beobachtungssatz mitzutheilen.

Tabelle 24.

Zugversuch mit dem Granitbalken 5219^b, Querschnitt = 600 qcm, Messlänge = 149 mm, Ablesungen einfache Millimeter, Scalenabstand = 188 cm. Reduction der Spiegeldrehungen auf spezifische Dehnungen durch Multiplication mit 0,596 · 10⁻⁵.

Belastung		Controlspiegel		Apparat auf 4			Apparat auf 14			Mittel für beide Apparate	$\frac{\Delta l}{l}$
in t	in atm.	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung	Relative Drehung	Ablesung	Bewegung	Relative Drehung		
0	0	156,2	--	115,8	—	—	716,9	—	—	—	—
4	6,7	154,2	— 2,0	111,2	4,6	2,6	712,9	4,0	2,0	2,3	1,37 · 10 ⁻⁵
8	13,3	153,5	— 2,7	108,0	7,8	5,1	709,2	7,7	5,0	5,05	3,01 „
12	20,0	153,9	— 2,3	105,3	10,5	8,2	706,9	10,0	7,7	7,95	4,74 „
16	26,7	154,4	— 1,8	101,5	14,3	12,5	704,2	12,7	10,9	11,7	6,97 „
20	33,3	154,8	— 1,4	97,0	18,8	17,4	701,5	15,4	14,0	15,7	9,36 „
24	40,0	155,1	— 1,1	92,2	23,6	22,5	698,6	18,3	17,2	19,85	11,83 „
28	46,7	155,3	— 0,9	87,0	28,8	27,9	695,7	21,2	20,3	24,1	14,36 „
0	0	156,2	0	115,7	0,1	0,1	716,9	0	0	—	—

Für die Belastung mit 46,7 atm berechnet sich hier nach der Zugelastizitätsmodul zu

$$E = \frac{46,7}{14,36} \cdot 10^5 = 325000 \text{ atm.}$$

also ganz erheblich höher als bei allen früheren kleineren Probestücken aus demselben Material.

Ich schliesse hieran sofort die Ergebnisse des Druckversuchs mit demselben Balken.

Tabelle 25.

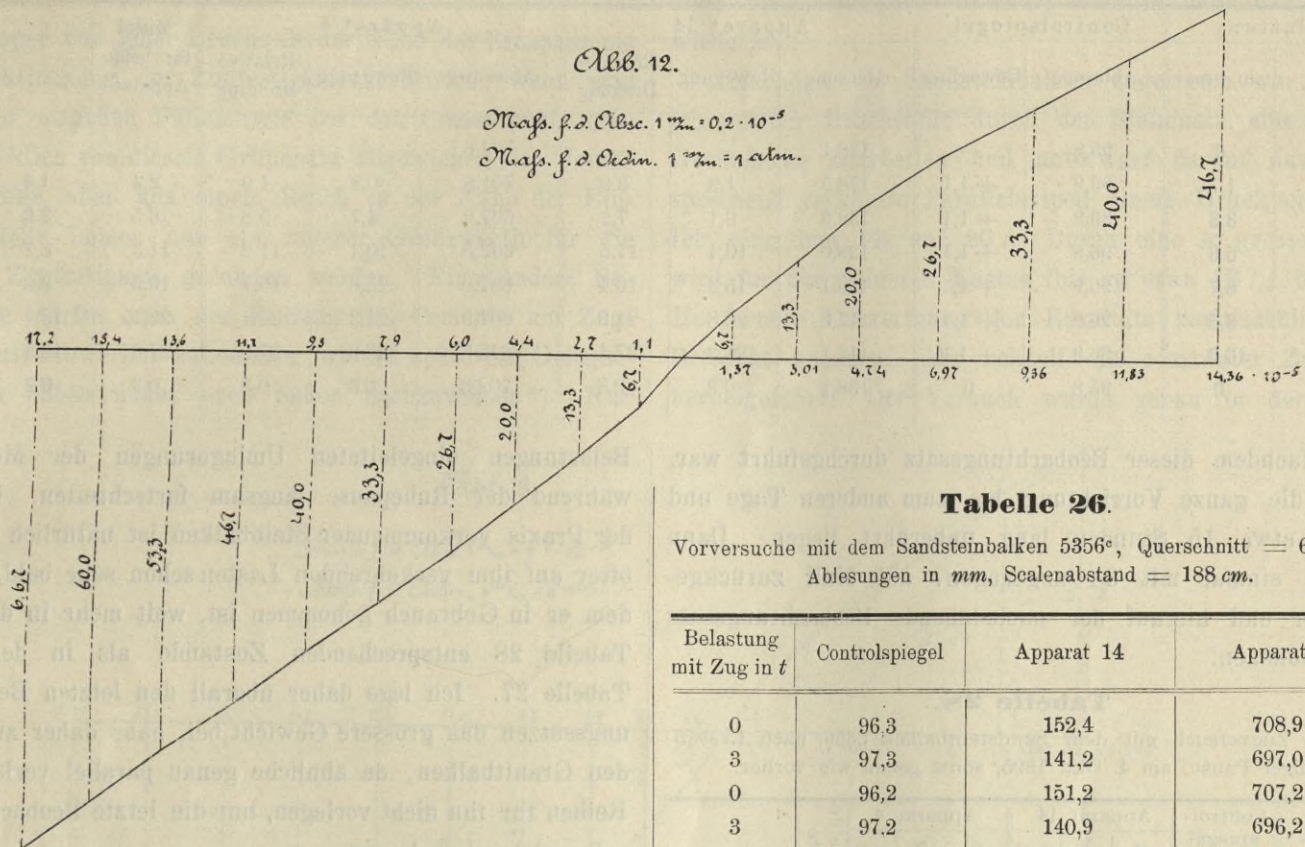
Druckversuch mit dem Granitbalken 5219^b nachdem der constante Zustand für 40 t hergestellt ist, sonst alles wie in Tabelle 24.

Belastung		Controlspiegel		Apparat auf 14			Apparat auf 4			Mittel für beide Apparate	$\frac{\Delta l}{l}$
in t	in atm	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung	Relative Drehung	Ablesung	Bewegung	Relative Drehung		
0	0	101,4	—	149,3	—	—	621,0	—	—	—	—
4	6,7	102,2	0,8	148,7	0,6	1,4	619,3	1,7	2,5	1,9	1,1 · 10 ⁻⁵
8	13,3	102,2	0,8	146,5	2,8	3,6	616,4	4,6	5,4	4,5	2,7 „
12	20,0	102,2	0,8	144,1	5,2	6,0	613,0	8,0	8,8	7,4	4,4 „
16	26,7	102,2	0,8	141,7	7,6	8,4	609,9	11,1	11,9	10,1	6,0 „
20	33,3	102,2	0,8	138,7	10,6	11,4	606,5	14,5	15,3	13,3	7,9 „
24	40,0	102,2	0,8	135,7	13,6	14,4	603,1	17,9	18,7	16,5	9,8 „
28	46,7	102,2	0,8	132,5	16,8	17,6	600,0	21,0	21,8	19,7	11,7 „
32	53,3	102,2	0,8	129,4	19,9	20,7	596,9	24,1	24,9	22,8	13,6 „
36	60	102,2	0,8	126,4	22,9	23,7	593,6	27,4	28,2	25,9	15,4 „
40	66,7	102,2	0,8	123,5	25,8	26,6	590,5	30,5	31,3	28,9	17,2 „
0	0	101,4	0	149,4	0,1	0,1	621,1	— 0,1	— 0,1	—	—
40	66,7	102,2	0,8	123,4	26,0	26,8	590,2	30,8	31,6	—	—
60	100	102,3	0,9	106,7	42,7	43,6	572,6	48,5	49,4	—	—
80	133,3	102,4	1,0	89,8	59,6	60,6	555,9	65,2	66,2	—	—
0	0	101,4	} 1,1	145,4	4,0	} 57,0	616,0	4,9	} 61,2	59,1	35,2 · 10 ⁻⁵
80	133,3	102,4		89,2	56,2		555,8	60,2			
0	0	101,2		144,9	0,5		615,7	0,3			

Der Elasticitätsmodul für Druck bei 46,7 atm stellt sich hiernach auf

$$E = \frac{46,7}{11,7} \cdot 10^5 = 399,000 \text{ atm,}$$

also in der That, wie man nach dem Längenänderungsdiagramm bei der Biegung desselben Balkens erwarten musste, nicht allzuviel höher als der Elasticitätsmodul für Zug bei der gleichen Belastung.



In dem Diagramme Abb. 12, sind die spezifischen Dehnungen als Abscissen und die ihnen nach den vorhergehenden Tabellen zukommenden spezifischen Spannungen als Ordinaten aufgetragen.

§ 12. Fortsetzung dieser Messungen an dem Sandsteinbalken 5356 c.

Für den Leser, der sich selbst eine eigene Meinung über die Ausbildung des „constanten Zustandes“ unmittelbar nach den Beobachtungsdaten bilden möchte, wird es vielleicht von Interesse sein, wenn ich hier eine Tabelle über die Vorgeschichte des Balkens mit aufnehme. Der Balken hatte vorher zur Anstellung der Biegungsversuche gedient, blieb dann über Nacht liegen, wurde eingespannt und im Ganzen neun mal mit 3 t auf Zug beansprucht, um einen nahezu centrischen Lastangriff herbeizuführen, so wie dies früher beschrieben wurde. Dann wurden die Apparate auf die Mittelmarken 4 und 14 gesetzt. Von da ab schreibe ich einfach die Ablesungen aus dem Beobachtungshefte ab, wobei nur zu bemerken ist, dass der Controlspiegel auf Marke 12 stand und von derselben Scala abgelesen wurde wie Apparat 14, sowie dass die Scala für Apparat 4 im gleichen Sinne zählte wie die für Apparat 14.

Tabelle 26.

Vorversuche mit dem Sandsteinbalken 5356^c, Querschnitt = 600 qcm, Ablesungen in mm, Scalenabstand = 188 cm.

Belastung mit Zug in t	Controlspiegel	Apparat 14	Apparat 4
0	96,3	152,4	708,9
3	97,3	141,2	697,0
0	96,2	151,2	707,2
3	97,2	140,9	696,2
0	96,2	151,0	706,8
3	97,2	140,8	696,2
0	96,1	150,9	706,4
3	97,1	140,7	696,1
0	96,1	150,9	706,2
1	97,0	148,9	705,0
2	97,0	144,7	700,9
3	97,0	140,8	695,8
4	97,1	134,1	690,9
5	97,0	125,4	684,8
6	97,0	116,0	678,0
0	96,0	142,0	704,6
6	97,0	115,0	677,3
0	96,0	140,9	704,0
6	97,0	114,2	677,0
0	96,0	140,1	703,5
6	97,0	113,8	676,8
6 t nach 10'	97,0	112,1	675,8
0	95,8	138,8	702,7
6	96,9	112,1	675,7
0	95,8	138,4	702,6

Von dem gegen das Ende hin erwähnten Falle, wo die Last von 6 t zehn Minuten lang stehen gelassen wurde, abgesehen, wurden alle Messungen in ununterbrochener Reihe durchgeführt, und man wird ungefähr annehmen können, dass von der einen Ablesung bis zur nächsten etwa zwei Minuten verstrichen. Nach der letzten Messung

wurde angenommen, dass der constante Zustand hinreichend erreicht sei und es schloss sich daran sofort die Aufnahme eines Hauptbeobachtungssatzes, über den die folgende Tabelle berichtet.

Tabelle 27.

Zugversuch mit dem Sandsteinbalken 5356°, nachdem der constante Zustand für 6 t eben erreicht wurde, am 3. Okt. 1895, sonst wie vorher. Reduction auf spezifische Dehnungen durch Multiplication mit 0,592 · 10⁻⁵.

Belastung		Controlspiegel		Apparat 14			Apparat 4			Mittel für beide Apparate	$\frac{\Delta l}{l}$
in t	in atm	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung	Relative Drehung	Ablesung	Bewegung	Relative Drehung		
0	0	95,8	—	138,4	—	—	702,6	—	—	—	—
1	1.7	96,9	+ 1,1	136,5	1,9	3,0	701,8	0,8	1,9	2,4	1,4 · 10 ⁻⁵
2	3.3	96,9	+ 1,1	132,3	6,1	7,2	697,9	4,7	5,8	6,5	3,8 „
3	5.0	96,9	+ 1,1	128,0	10,4	11,5	692,5	10,1	11,2	11,3	6,7 „
4	6.7	96,9	+ 1,1	123,1	15,3	16,4	687,0	15,6	16,7	16,5	9,8 „
5	8.3	96,9	+ 1,1	117,6	20,8	21,9	681,3	21,3	22,4	22,1	13,1 „
6	10.0	96,9	+ 1,1	112,1	26,3	27,4	675,8	26,8	27,9	27,6	16,3 „
0	0	95,8	0	138,1	0,3	0,3	702,3	0,3	0,3	0,3	0,2 „

Nachdem dieser Beobachtungssatz durchgeführt war, blieb die ganze Vorrichtung bis zum anderen Tage und zwar etwa 15 Stunden lang unberührt liegen. Dann wurde einmal mit 6 t angezogen, auf Null zurückgegangen und hierauf der nachstehende Beobachtungssatz aufgenommen.

Tabelle 28.

Zweiter Zugversuch mit dem Sandsteinbalken 5356° nach 15 stündiger Pause, am 4. Okt. 1895, sonst genau wie vorher.

Belastung		Controlspiegel		Apparat 14			Apparat 4				$\frac{\Delta l}{l}$
in t	in atm	Ablesung	Bewegung	Ablesung	Bewegung	Relative Drehung	Ablesung	Bewegung	Relative Drehung	Mittel f. beide Apparate	
0	0	95,9	—	124,2	—	—	703,4	—	—	—	—
1	1.7	97,3	1,4	122,8	1,4	2,8	703,0	0,4	1,8	2,3	1,4 · 10 ⁻⁵
2	3.3	97,3	1,4	119,3	4,9	6,3	699,2	4,2	5,6	5,9	3,5 „
3	5.0	97,3	1,4	115,7	8,5	9,9	693,9	9,5	10,9	10,4	6,2 „
4	6.7	97,3	1,4	111,0	13,2	14,6	688,4	15,0	16,4	15,5	9,2 „
5	8.3	97,3	1,4	105,8	18,4	19,8	682,7	20,7	22,1	20,9	12,4 „
6	10.0	97,3	1,4	100,1	24,1	25,5	676,9	26,5	27,9	26,7	15,8 „
7	11.7	97,3	1,4	91,0	33,2	34,6	669,2	34,2	35,6	35,1	—

7,35 12,2 Bruch vor dem Einspannkopfe, 5–20 mm von diesem entfernt, daher ziemlich senkrecht zur Längsrichtung; Bruchfläche mit gelben Lagerstreifen durchzogen.

Für die Last von 7 t ist die spezifische Dehnung in der Tabelle nicht ausgefüllt, weil der beobachtete Werth von $35,1 \times 0,592 \cdot 10^{-5} = 20,8 \cdot 10^{-5}$, zugleich die bleibende Dehnung in sich schliesst, indem bei diesem Versuche zum ersten Male über 6 t Zugbelastung hinausgegangen worden war.

Der Vergleich der beiden Tabellen 27 und 28 zeigt sofort, dass der Balken in der 15 stündigen Ruhezeit steifer wurde. Ich schliesse daraus, dass die mehrmalige Belastung mit 6 t, die aus Tab. 26 hervorgeht, noch nicht genügt, um einen ganz stabilen Zustand des Balkens herbeizuführen, sondern dass die durch die vorausgehenden

Belastungen eingeleiteten Umlagerungen der Moleküle während der Ruhepause langsam fortschreiten. Ein in der Praxis vorkommender Steinbalken ist natürlich für die öfter auf ihm verkehrenden Lasten schon sehr bald, nachdem er in Gebrauch genommen ist, weit mehr in dem der Tabelle 28 entsprechenden Zustande als in dem von Tabelle 27. Ich lege daher überall den letzten Beobachtungssätzen das grössere Gewicht bei, habe daher auch für den Granitbalken, da ähnliche genau parallel verlaufende Reihen für ihn nicht vorlagen, nur die letzte Beobachtungsreihe abdrucken lassen.

Bei 7,35 t trat der Bruch ein, aber unmittelbar am Einspannkopfe. Man muss sich natürlich sehr hüten, daraus etwa zu schliessen, dass die Zugfestigkeit des Steines gleich 12,2 atm zu setzen sei. Zu einem solchen Schlusse wäre man nur berechtigt, wenn man sicher wäre, dass die Zugbelastung gleichförmig über den Bruchquerschnitt vertheilt gewesen wäre. Nun ist allerdings die Einspannung bei den ersten Vorversuchen so justirt worden, dass die Dehnungen aller Messstrecken ziemlich gleich waren, also an jenen Stellen auch eine wenigstens nahezu gleichförmige Spannungsvertheilung stattfand. In der Nähe der Einspannstelle braucht dies aber darum durchaus noch nicht erfüllt zu sein. Im Gegentheil muss man erwarten, dass die Spannungsvertheilung dort von zufälligen Umständen, wie verschieden starkes Anziehen der Schrauben u. s. f. stark beeinflusst ist und dass ferner im Allgemeinen die der Peripherie näher gelegenen Flächenelemente des Querschnitts grössere Spannungen übertragen als die central gelegenen Theile, weil auch die äusseren Kräfte an der Peripherie angreifen. Je weiter man sich vom Einspannkopf entfernt, um so mehr muss sich dies durch die elastischen Formänderungen des Stückes ausgleichen. In der That darf man ja in der Festigkeitslehre stets die an einer Auflagerstelle auf den

Körper übertragenen äusseren Kräfte durch ihre Resultirende ersetzen, sobald die Entfernung von der Angriffsstelle gross ist gegenüber den Querschnittsabmessungen des Stabes. In der Nähe der Angriffsstelle selbst ist aber ein solcher Ersatz durchaus unzulässig. Mit Recht hat man daher von jeher Brüche in der Nähe der Einspannung zur Bestimmung der Zugfestigkeit verworfen, wenn man auch in manchen Fällen (wie bei den Cementprüfungen) ausdrücklich von diesem Grundsatz abgewichen ist. Jedenfalls kann aber aus einem Bruch in der Nähe der Einspannstelle immer nur ein unterer Grenzwert für die wahre Zugfestigkeit gefunden werden. Eine andere Bedeutung dürfte auch der Prüfung des Cements auf Zugfestigkeit schwerlich zukommen, wie ich späterhin Gelegenheit zu haben hoffe, noch näher nachzuweisen*). Nur

durch die eingehenden Vorschriften über die Gestalt der Zugstücke u. s. f., die für die Normenprobe gegeben sind, wird der durch die Einspannung hereingebrachte Fehler praktisch dadurch unschädlich gemacht, dass er sich bei allen vergleichenden Versuchen stets in derselben Weise wiederholt.

Nachdem der Sandsteinbalken abgerissen war, liess ich an der Bruchstelle durch den Steinmetz eine ebene Grenzfläche anarbeiten und unterwarf darauf das entsprechend verkürzte Parallelepiped einem Druckversuche. Ich ging hier bis auf 20 t. Durch eine so grosse Last wird für die kleineren Lasten (bis zu etwa 10 t), die für die fernere Verwerthung der Resultate hauptsächlich in Betracht kommen, sehr schnell ein constanter Zustand herbeigeführt. Der Versuch wurde genau in derselben

Abb. 13.

Maass. f. d. Absc. $1 \text{ mm} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-5}$
 Maass. f. d. Ord. $1 \text{ mm} = \frac{1}{4} \text{ atm.}$

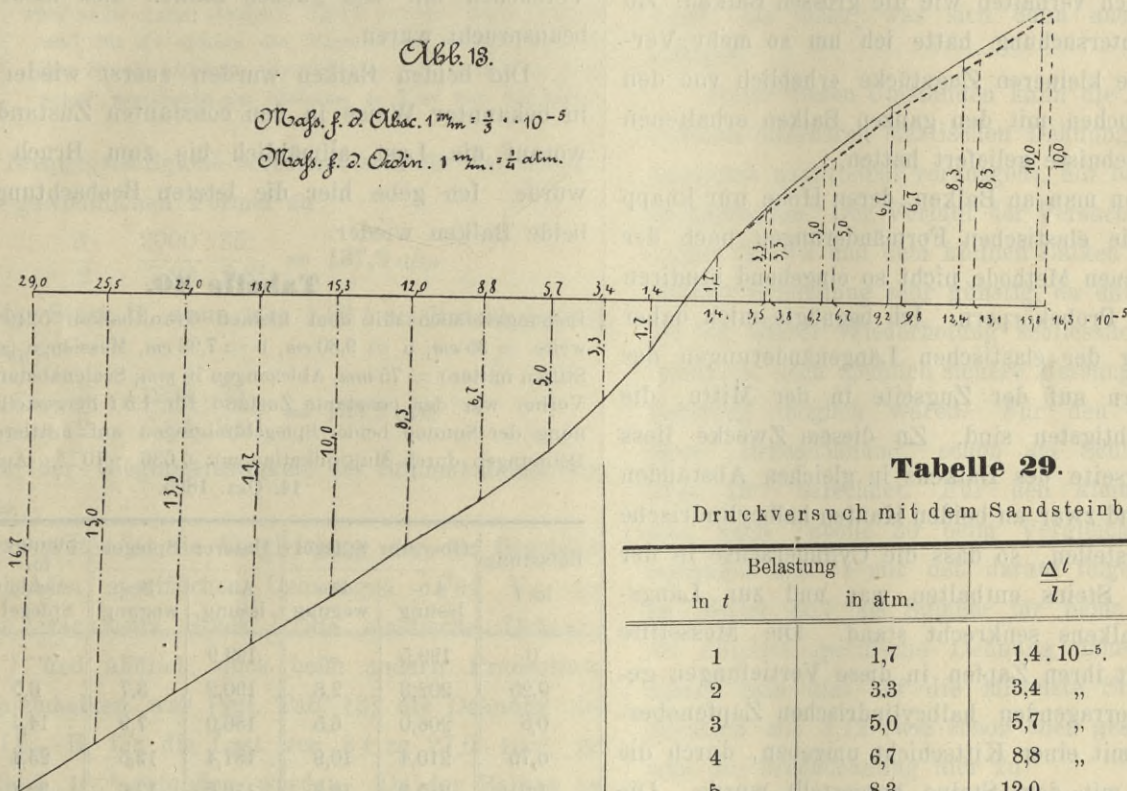


Tabelle 29.

Druckversuch mit dem Sandsteinbalken 5356c.

Belastung		$\frac{\Delta l}{l}$	Elasticitätsmodul in atm.
in t	in atm.		
1	1,7	$1,4 \cdot 10^{-5}$	117000
2	3,3	3,4	98000
3	5,0	5,7	88000
4	6,7	8,8	76000
5	8,3	12,0	69000
6	10,0	15,3	65000
7	11,7	18,7	62000
8	13,3	22,0	60000
9	15,0	25,5	58000
10	16,7	29,0	57000
20	33,3	62,1	53000

Weise wie für den Granitbalken angestellt. Es wird genügen, wenn ich hier nur die Resultate angebe, In der letzten Spalte habe ich auch den zur betreffenden Last gehörigen Elasticitätsmodul angegeben,

*) Ein sehr einfacher Versuch, den ich inzwischen anstellte, hat mir dies vollkommen bestätigt. Ich liess in den zur Herstellung von Zugprobekörpern für die Cementprüfung dienenden Formen zwei Kautschukkörper herstellen, die nach ihrer Erhärtung in der Gestalt vollkommen mit den bei der Normenprüfung benützten Cement-Zugstücken übereinstimmten. Zieht man auf einer oberen Seitenfläche eines solchen Zugstückes eine Anzahl Linien senkrecht zur Zugrichtung, fasst dann das Stück mit den beiden Zangen des Michaelis'schen Apparates und zieht an, so krümmen sich jene Linien, abgesehen natürlich von der in der Mitte gelegenen, so, dass sie der Mitte die convexe Seite zukehren. Daraus lässt sich ohne Weiteres schliessen, dass beim Zugversuch im Michaelis'schen Apparate die Dehnung und daher auch die Spannung in der Achse des Zugstückes kleiner ist als zu beiden Seiten. Misst man die Längenänderungen, so erhält man auch einen ungefähren Ueberblick über die Spannungsvertheilung im Bruchquerschnitt. Ein vorläufiger

Versuch, den ich bisher mit den einfachsten Hilfsmitteln (durch Abgreifen mit dem Zirkel) anstellte, zeigte, dass die Spannungen an den Kanten mehrmals (etwa 3 bis 4 mal) so gross sind als die in der Symmetrieebene, die zu den ebenen Seitenflächen senkrecht steht. Daraus folgt, dass die wahre Zugfestigkeit des Cements, die beim Eintritt des Bruches an den beiden Kanten überwunden wird, beträchtlich höher ist, als die „scheinbare“ Zugfestigkeit, die man durch Division der Bruchlast, durch den Bruchquerschnitt, also unter der Annahme einer gleichförmigen Spannungsvertheilung erhält. Ich behalte mir vor, diese Versuche noch genauer auszuführen (ist inzwischen geschehen) und über ihr Ergebniss später besonders zu berichten. Einstweilen möchte ich nur bemerken, dass die wahre Zugfestigkeit nahezu doppelt so gross sein dürfte als die scheinbare.

Abb. 13 zeigt für den Sandstein den gesetzmässigen Zusammenhang zwischen elastischer Längenänderung und Spannung. Auf der Zugseite sind die der Tab. 28 entnommenen Werthe durch die ausgezogene und die zur Tabelle 27 gehörigen durch die gestrichelte Linie dargestellt.

§ 13. Biegungsversuche mit kleinen Balken.

Aus dem einen Bruchstücke des Granitbalkens 5219a hatte ich vier ungefähr gleiche Parallelepipede entnehmen lassen, von denen die mit den römischen Zusatzziffern III und IV bezeichneten zu den in § 9 beschriebenen Zugversuchen verwendet wurden, während die beiden anderen zu Biegungsversuchen dienten. Es kam mir darauf an, zu untersuchen, ob Balken von so viel kleineren Dimensionen sich ähnlich verhalten wie die grossen Balken. Zu einer solchen Untersuchung hatte ich um so mehr Veranlassung als die kleineren Zugstücke erheblich von den bei den Zugversuchen mit den ganzen Balken erhaltenen abweichende Ergebnisse geliefert hatten.

Freilich kann man an Balken, deren Höhe nur knapp 10 cm beträgt die elastischen Formänderungen nach der früher beschriebenen Methode nicht so eingehend studiren als an grösseren Probekörpern. Ich begnügte mich daher mit der Messung der elastischen Längenänderungen der äussersten Fasern auf der Zugseite in der Mitte, die ohnehin am wichtigsten sind. Zu diesem Zwecke liess ich auf der Zugseite des Balkens in gleichen Abständen von der Mitte und zwar an beiden Kanten halbcylindrische Stiftenlöcher herstellen, so dass die Cylinderachse in der Grenzfläche des Steins enthalten war und zur Längsrichtung des Balkens senkrecht stand. Die Messstifte wurden dann mit ihren Zapfen in diese Vertiefungen gelegt und die vorragenden halbcylindrischen Zapfenoberflächen wurden mit einer Kittschicht umgeben, durch die die Verbindung mit dem Steine hergestellt wurde. Die Mittellinien der in dieser Weise eingekitteten vier Messstifte ragten nun zu beiden Seiten über den Stein hinaus und waren in der Grenzfläche des Balkens auf der Zugseite enthalten. Der Stein wurde dann in horizontaler Lage in die Maschine gebracht und durch eine in der Mitte concentrirte Last gebogen. Die Kraftübertragung wurde wieder durch Stahlwalzen vermittelt. An dem nach oben und dem nach unten vorstehenden Stiftenpaare wurde je ein Apparat zur Messung der Dehnung angebracht. Von der Aufstellung eines Controlspiegels sah ich diesmal ab, traf vielmehr die von Bauschinger regelmässig benutzte Einrichtung, die Federn beider Apparate so anzubringen, dass sich die Spiegel in Folge der elastischen Dehnung nach entgegengesetzter Seite drehen. Aus der Summe der beiden Spiegelbewegungen fällt dann die

Eigendrehung, die das Probestück etwa ausführte, heraus und die Summe lässt sich ohne Weiteres auf den Mittelwerth der specifischen Dehnung an den beiden Kanten der Zugseite umrechnen. Man erfährt dann freilich nicht genau, wie gross die Dehnung an jeder der beiden Kanten für sich genommen ist. Da indessen ohnehin nur geringfügige Eigendrehungen des ganzen Probekörpers zu erwarten sind, lässt sich aus der annähernden Gleichheit der Ausschläge an beiden Spiegeln doch hinreichend beurtheilen, ob die Dehnungen an beiden Kanten ungefähr gleich untereinander sind, ob also die Last genau genug centrisch angreift.

Schliesslich erwähne ich noch, dass die Probestücke aus dem Auflagerende vom Bruchstücke des grossen Balkens herausgearbeitet waren, bei den vorausgehenden Versuchen mit den ganzen Balken also nicht erheblich beansprucht waren.

Die beiden Balken wurden zuerst wieder für 1,5 t in bekannter Weise in den constanten Zustand gebracht, worauf die Last allmählich bis zum Bruch gesteigert wurde. Ich gebe hier die letzten Beobachtungssätze für beide Balken wieder.

Tabelle 30.

Biegungsversuch mit dem kleinen Granitbalken 5219^a, I, Spannweite = 35 cm, h = 9,80 cm, b = 7,93 cm, Messlänge (zwischen den Stiften mitten) = 75 mm, Ablesungen in mm, Scalenabstand = 175 cm. Vorher war der constante Zustand für 1,5 t hergestellt. Umrechnung der Summe beider Spiegeldrehungen auf mittlere specifische Dehnungen durch Multiplikation mit $0,636 \cdot 10^{-5}$. Ausgeführt am 14. Okt. 1895.

Belastung in t	Oberer Spiegel		Unterer Spiegel		Summe für beide Spiegel	Mittlere specifische Dehnung
	Ab- lesung	Be- wegung	Ab- lesung	Be- wegung		
0	199,5	—	193,9	—	—	—
0,25	202,3	2,8	190,2	3,7	6,5	$4,1 \cdot 10^{-5}$
0,5	206,0	6,5	186,0	7,9	14,4	9,2 „
0,75	210,4	10,9	181,4	12,5	23,4	14,9 „
1,0	215,3	15,8	176,3	17,6	33,4	21,2 „
1,25	220,5	21,0	170,9	23,0	44,0	28,0 „
1,5	225,6	26,1	165,2	28,7	54,8	34,9 „
0	199,8	+ 0,3	194,2	— 0,3	0,0	0
1,5	225,8	26,0	164,8	29,4	55,4	35,2 „
1,75	232,9	33,1	157,0	37,2	70,3	—
2,0	243,9	44,1	146,0	48,2	92,3	—
0	204,2	+ 4,4	189,5	+ 4,7	9,1	—
2,0	245,9	—	144,3	—	—	—
2,0 nach 10'	248,1	—	142,0	—	—	—
0	205,8	—	188,0	—	—	—
2,0	248,3	—	141,7	—	—	—
0	206,0	—	187,2	—	—	—
2,0	Keine sichere Ablesung mehr möglich. Die Scala verschiebt sich erst ganz langsam, dann läuft sie etwas schneller um einige mm vor, worauf der Bruch erfolgt. Der Bruch liegt um 3—4 cm seitlich von der Mitte und geht durch eines der Stiftenlöcher. Bruchfläche von normalem Aussehen.					

Tabelle 31.

Biegungsversuch mit dem kleinen Granitbalken 5219^a, II, $h = 9,90$ cm
 $b = 7,84$ cm, sonst wie vorher.

Belastung in t	Oberer Spiegel		Unterer Spiegel		Summe für beide Spiegel	Mittlere spezifische Dehnung
	Ab- lesung	Be- wegung	Ab- lesung	Be- wegung		
0	390,8	—	130,3	—	—	—
0,25	393,7	2,9	127,3	3,0	5,9	$3,3 \cdot 10^{-5}$
0,5	397,3	6,5	123,1	7,2	13,7	8,7 „
0,75	401,9	11,1	118,1	12,2	23,3	14,8 „
1,0	407,5	16,7	112,6	17,7	34,4	21,9 „
1,25	413,3	22,5	106,3	24,0	46,5	29,6 „
1,5	419,3	28,5	100,1	30,2	58,7	37,3 „
0	391,0	+ 0,2	130,5	- 0,2	0,0	0
1,5	419,5	28,5	100,0	30,5	59,0	37,5 „
1,75	427,9	36,9	91,0	39,5	76,4	—

2 wird nicht ganz erreicht; 1,95 t wurden noch getragen und für 2 t spielte die Wage schon nahezu ein, als der Bruch erfolgte. Bruchfläche von normalem Aussehen, senkrecht zur Stabaxe, ca 1 cm von der Mitte.

Die Biegezugfestigkeit berechnet sich für das Stück I nach der gewöhnlichen Formel zu

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{2000 \cdot 35}{7,93 \cdot 9,9^2} = 137,9 \text{ atm}$$

und für das Stück II, wenn man 1,95 t als Bruchbelastung ansieht, zu

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1950 \cdot 35}{7,84 \cdot 9,9^2} = 133,2 \text{ atm}$$

gegenüber der Biegezugfestigkeit des Stamm balkens von 150,0 atm.

Interessanter ist die Vergleichung der der Bruchlast vorausgehenden spezifischen Dehnungen. Für $\frac{3}{4}$ der Bruchlast war beim Stück I die elastische Dehnung $35,2 \cdot 10^{-5}$ und ähnlich auch beim andern Probestück. Beim Stamm balken war (vgl. Tab. 13) die Dehnung der Strecke IV₁—B₁ für die Last von 8 t zu $27,0 \cdot 10^{-5}$, für 10 t zu $34,7 \cdot 10^{-5}$ gefunden worden. Da der Balken bei 12 t brach, haben wir als $\frac{3}{4}$ der Bruchlast 9 t . Nimmt man dafür den Mittelwerth aus den beiden vorausgehenden Zahlen, also $30,8 \cdot 10^{-5}$ und reducirt auf die äusserste Faser in der Mitte, so erhält man

$$30,8 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{15 \cdot 75}{14 \cdot 68,9} = 36,3 \cdot 10^{-5}$$

Beachtet man noch die Correctur, die auch an dem Werthe $35,2 \cdot 10^{-5}$ für den kleinen Balken anzubringen ist, um die Dehnung grade nur für die mittelste Stelle zu erhalten (wozu man mit $\frac{175}{156,25} = 1,12$ multipliciren muss), so erhält man

$39,4 \cdot 10^{-5}$ beim kleinen, $36,3 \cdot 10^{-5}$ beim grossen Balken als grösste Dehnung für $\frac{3}{4}$ der Bruchlast. Diese Zahlen stehen fast genau im umgekehrten Verhältniss zu den berechneten Biegezugfestigkeiten. Dies spricht dafür, dass

für ein gegebenes Material der Bruch viel mehr von der erreichten elastischen Dehnung als von der zugehörigen Spannung abhängt, die je nach dem Zustande des Materials (also nach der Vorgeschichte) wechseln kann.

In der That sprechen alle vorausgehenden Beobachtungen (ich erinnere hier namentlich an das Verhalten des Zugstücks 5220 a II, Tab. 21, das sich im Uebrigen ganz abweichend von seinen Nachbarstücken verhielt) zu Gunsten dieser an und für sich schon nahe genug liegenden Annahme, die sich mir im Verlaufe meiner Versuche immer überzeugender aufdrängte. In der That sah ich auch bei dem in Tab. 31 beschriebenen Versuche, als ich die Dehnung für 1,5 t mit der bei dem vorhergehenden Balken bei derselben Last erhaltenen verglich, sofort voraus, dass das Stück bei einer etwas niedrigeren Belastung brechen würde als jenes, was sich dann auch vollkommen bestätigte.

Unter diesen Umständen kann die Angabe jener noch deutlich messbaren elastischen Dehnung, die dem Bruche möglichst unmittelbar vorausgeht, ein besonderes Interesse beanspruchen. Der Verlauf der Versuche mit dem Stamm balken 5219 a und dem kleinen Balken 5219 a I ist einer solchen Ermittlung sehr günstig, da unter derselben Last, die bei öfterer Wiederholung schliesslich den Bruch herbeiführte, noch ziemlich sichere Messungen der elastischen Dehnung möglich waren. Für den Stamm balken war diese „Bruchdehnung“ schon am Schlusse von § 5 zu $57,0 \cdot 10^{-5}$ berechnet. Für den kleinen Balken findet man nach Tabelle 30 beim Vergleich der letzten Belastungen mit 2 t mit den darauf folgenden Entlastungen im Mittel 86,7 als Summe für beide Spiegeldrehungen, als mittlere spezifische Dehnung daher $55,1 \cdot 10^{-5}$. Reducirt man dies auf die mittelste Stelle durch Multiplication mit 1,12 (wie schon oben geschehen), so findet man die Bruchdehnung hier zu

$$61,7 \cdot 10^{-5},$$

also eine im Hinblick auf die unvermeidliche Unsicherheit solcher Grenzbestimmungen recht befriedigende Uebereinstimmung.

Schliesslich erwähne ich noch, dass auch die dem Balken 5220 a aus gelbem Granit entnommenen Probestücke 5220 a, I; 5220 a, III und 5220 a IV, die theilweise schon zu den in § 9 beschriebenen Zugversuchen gedient hatten, durch eine Biegezuglast zerbrochen wurden. Die schon bei diesen Stücken auf andere Art versuchte Messung der Bruchdehnung glückte indessen nicht nach Wunsch, weil die Messapparate nicht derart angebracht waren, dass man zuverlässige Resultate hätte erwarten dürfen. Ich begnüge mich daher mit der Angabe der nach der gewöhnlichen Biegezugformel berechneten Biegezugfestigkeit.

Die Spannweite betrug bei allen drei Stücken 25 cm, die Seite des nahezu quadratischen Querschnitts zwischen 65 und 75 mm. Ausgeführt wurden die Versuche von Herrn Houkowsky unter Mitwirkung des Herrn Klebe. Die „Biegungsfestigkeit“ berechnet sich danach

für das Stück 5220 a, I zu 109 atm

„ „ „ 5220 a, III „ 117 „

„ „ „ 5220 a, IV „ 141 „

gegenüber der Biegungsfestigkeit des Stamm balkens von 112 atm, die aber, wie es scheint, durch eine schadhafte Stelle (vgl. § 2) beeinträchtigt wurde.

§ 14. Zugversuche mit kleinen Zugstücken.

Die mit dem Michaelis'schen Zerreißapparate an Cementprobekörpern vorgenommenen Zugversuche ergeben regelmässig sehr gut unter einander übereinstimmende Resultate. Es liegt daher nahe, bei einer grösseren Untersuchung, wie ich sie hier beschrieb, auch die Zugfestigkeit der Steine in derselben Art zu prüfen. Freilich muss man dabei wohl im Auge behalten, dass bei dieser Methode von vornherein darauf verzichtet wird, eine von der Einspannstelle weit entfernte Bruchfläche zu erzielen. Die erhaltenen Zahlen sagen daher nichts über die wahre Zugfestigkeit des Materials aus, die an der stärkst beanspruchten Stelle des Querschnitts auftritt, eignen sich aber sonst sehr gut zum Vergleich mit anderen Materialien, die unter den gleichen Bedingungen geprüft wurden.

Da die Gestalt der Probekörper hier von wesentlichem Einfluss ist, habe ich sie in Abb. 14 wiedergegeben. Die Einschnürung wurde zuerst am ganzen Stück vom Steinmetz eingearbeitet und dann wurden durch Zerschneiden mit der Steinsäge aus dem prismatischen Stück 11 Probekörper gewonnen. Sie rühren vom Granitbalken 5219 a her. Die Zugversuche wurden genau in derselben Art wie bei Zementprüfungen durchgeführt und ergaben die folgenden Resultate:

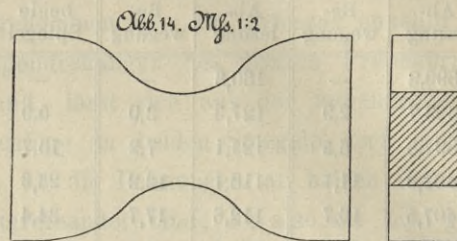
Tabelle 32.

Zugversuch im Michaelis'schen Zerreißapparate mit kleinen Zugstücken aus dem Granitbalken 5219^a.

Stück Nr.	Querschnitt	Abgerissen mit kg	auf 1 qcm
1	2,16 × 2,74 = 5,92 qcm	352,5	59
2	2,04 × 2,65 = 5,41 „	325	60
3	2,05 × 2,78 = 5,70 „	303,5	53
4	2,03 × 2,69 = 5,46 „	302,5	55
5	2,10 × 2,71 = 5,69 „	330	58
6	2,20 × 2,70 = 5,94 „	372,5	63
7	2,13 × 2,69 = 5,73 „	357,5	62
8	2,51 × 2,79 = 7,00 „	392,5	56
9	2,15 × 2,72 = 5,85 „	317,5	54
10	2,10 × 2,70 = 5,67 „	307,5	54
11	1,96 × 2,73 = 5,35 „	312,5	58

Mittel **57,5**

Die auf 1 qcm bezogenen Werthe oder die „scheinbaren Zugfestigkeiten“ stimmen zwischen den einzelnen Probekörpern besser überein, als man mit Rücksicht auf die ziemlich grobkörnige Zusammensetzung des Granits



hätte erwarten können. Bei einem so kleinen Querschnitt macht es schon etwas aus, ob grade ein Glimmerblättchen mehr oder weniger in der Bruchfläche liegt.

In dem Michaelis'schen Apparat wird die Centrirung des Kraftangriffs viel leichter und sicherer erzielt, als bei den gewöhnlichen Zugversuchen mit Steinen, und darauf ist ohne Zweifel die gute Uebereinstimmung zwischen den gefundenen Zahlen zurückzuführen. Freilich hat man nun immer noch nicht die wahre Zugfestigkeit des Materials, denn es unterliegt keinem Zweifel, dass bei Probekörpern von dieser Gestalt die spezifische Spannung in den nach der Mitte zu liegenden Theilen des Bruchquerschnitts geringer ist als an den Kanten, oder, genauer gesagt, an den beiden Querschnittsseiten, die zur Einschnürung des Stücks gehören. Denkt man sich auf einer der beiden ebenen Ansichtsflächen des Stücks eine Anzahl gerader Linien senkrecht zur Zugaxe gezogen, so werden diese bei der Zugbelastung und der dadurch hervorgerufenen elastischen Formänderung des Stücks Krümmungen annehmen, so dass sich die hohle Seite nach den Einspannköpfen hin kehrt. Die Aufbiegung der beiden Enden einer dieser Linien in der Nähe der einen Einspannung wird durch die Uebertragung der äusseren Zugkraft von beiden Seiten her bedingt. Im Ganzen läuft diese Formänderung aber darauf hinaus, dass die spezifische Dehnung und daher auch die Spannung in der vorher schon erwähnten Weise von der gleichförmigen Vertheilung über den Querschnitt abweicht.

Diese Betrachtungen sind zwar nicht durch direkte Beobachtungen, die immerhin mit ziemlich erheblichen Schwierigkeiten verbunden wären, gestützt*), sie gründen sich aber auf die durch meine übrigen Versuche im Ganzen recht wohl bestätigten Anschauungen der gewöhnlichen Elasticitäts- und Festigkeitslehre und sie stehen

*) Vgl. hierzu die Fussnote auf S. 31. Nimmt man vorläufig an, dass die wahre Zugfestigkeit nach den dort erwähnten Messungen ungefähr das Doppelte der „scheinbaren“ beträgt, so stimmen die nach Tab. 32 erhaltenen Resultate ziemlich gut mit der „Biegungsfestigkeit“ überein. Der noch verbleibende Unterschied dürfte auf die Schwächung durch die Bearbeitung zurückzuführen sein.

ferner auch mit der Thatsache im Einklang, dass in dem gebogenen Balken nachweislich erheblich grössere Zugspannungen auftreten, als die an den kleinen Zugstücken ermittelte „scheinbare Zugfestigkeit“ beträgt.

§ 15. Vergleichung der Biegungsversuche mit den Zugversuchen.

Hier verfähre ich zur Controle der gefundenen Resultate in derselben Weise, wie schon in § 10, indem ich nämlich aus den für den Granitbalken 5219 b und für den Sandsteinbalken 5356 c bei den Biegungsversuchen ermittelten Längenänderungsdiagrammen mit Hülfe der an den ganzen Balken vorgenommenen Zug- und Druckelastizitäts-Messungen auf die Spannungsvertheilung im Querschnitt schliesse. Allerdings besteht hier insofern eine Lücke, als bei den Zugelastizitäts-Messungen so hohe Dehnungen wie bei den Biegungen nicht erreicht werden konnten. Dafür stehen uns aber zwei Gleichgewichtsbedingungen der über den Querschnitt vertheilten inneren Kräfte mit den äusseren zur Verfügung. Eine dieser beiden Gleichgewichtsbedingungen können wir zur Controle der vorgenommenen Messungen und die andere zur Ergänzung des Spannungsvertheilungsdiagramms auf der Zugseite verwenden. Dabei geht die zweite Gleichgewichtsbedingung gar nicht einmal als Mittel zur Prüfung der gewonnenen Resultate verloren, denn das nach ihr ergänzte Spannungsvertheilungsdiagramm muss dann immer noch den Vergleich mit den Ergebnissen der direkten Zugelastizitätsmessungen aushalten können.

Der Weg, den ich hiernach einzuschlagen habe, ist folgender: Aus den elastischen Verkürzungen auf der Druckseite bestimme ich die zugehörigen Druckspannungen nach den Druckelastizitätsmessungen mit dem ganzen Balken. Dann berechne ich die Summe aller Druckspannungen für den ganzen Querschnitt. Ebenso gross muss auch die Summe aller Zugspannungen sein und diese Bedingung dient zur Ergänzung der Spannungsvertheilung auf der Zugseite. Ferner lässt sich von vornherein voraussehen (wie schon in § 10), dass der Hebelarm des Kräftepaars aus den Zug- und Druckkräften etwas, aber nur wenig kleiner ist als $\frac{2}{3}$ der Querschnittshöhe, also als 20 cm. Ehe daher noch die Zugspannungen in Frage zu kommen brauchen, kann man die Momentenbedingung des Gleichgewichts zwischen äusseren und inneren Kräften schon dazu verwenden, um die Druckhälfte des Spannungsvertheilungsdiagramms für sich genommen auf ihre Richtigkeit zu prüfen. Wenn diese Probe, soweit als es die Genauigkeit der Messungen überhaupt erwarten lässt, erfüllt ist, wird man dann mit um so mehr Vertrauen zur Ergänzung des Diagramms auf der Zugseite mit Hülfe der andern Gleichgewichtsbedingung schreiten.

Von den Messungen an den gebogenen Balken verwende ich natürlich nur solche, die in der Breitlage stattfanden und bei denen gleichzeitig oben und unten beobachtet wurde. Für den Granitbalken hatten sich die Längenänderungen nach Tab. 16 wie folgt ergeben:

$$\begin{array}{cccc} \text{Längen} & 1 \text{ u. } 17 & 3 \text{ u. } 15 & 5 \text{ u. } 13 & 7 \text{ u. } 11 \\ \frac{\Delta l}{l} & = +28,8 \cdot 10^{-5} & +9,4 \cdot 10^{-5} & -6,3 \cdot 10^{-5} & -21,9 \cdot 10^{-5} \end{array}$$

Aus den Druckversuchen in Tabelle 25 folgen daraus die Druckspannungen für 5 und 13 zu 27,7 atm, für 7 und 11 zu 84,1 atm. Die neutrale Faser haben wir nach dem Längenänderungsdiagramm um 9 mm nach der Druckseite hin verschoben anzunehmen und für die äusserste Faser folgt durch Extrapolation, die auf die kurze Strecke von 1 cm ganz unbedenklich ist, eine spezifische Verkürzung von $23,9 \cdot 10^{-5}$ und eine Druckspannung von 90,4 atm. Die gesammte Druckkraft für den ganzen Querschnitt wird damit

$$\text{Druckkraft} = 20 \text{ cm} \left(3,8 \text{ cm} \times \frac{27,7}{2} \text{ atm} + 10,33 \text{ cm} \times \frac{27,7 + 90,4}{2} \text{ atm} \right) = 13250 \text{ kg.}$$

Andererseits ist das Biegemoment für die Mitte der Messlängen, die um 60,25 cm vom Auflager abstand, bei 4000 kg Auflagerdruck

Biegemoment = $4000 \times 60,25 = 241\,000 \text{ cmkg}$ zu setzen. Wir haben nun die erste Probe: das aus den äusseren Kräften berechnete Biegemoment, dividirt durch die über den Querschnitt vertheilte gesammte Druckkraft, muss den Hebelarm des Kräftepaars der inneren Kräfte, also eine Kleinigkeit weniger als 20 cm ergeben. Wir finden:

$$\text{Hebelarm} = 241\,000 : 13250 = 18,2 \text{ cm.}$$

Das scheint nun freilich etwas zu niedrig zu sein, da sich der Hebelarm des Kräftepaars nicht um 1,8 cm von $\frac{2}{3}$ der Querschnittshöhe unterscheiden kann. Dafür weicht das Spannungsvertheilungsdiagramm zu wenig von einem gradlinigen ab. Immerhin kann man aber mit der erreichten Annäherung an den richtigen Werth ohne Zweifel noch zufrieden sein.

Ich schreite jetzt zur Ergänzung des Spannungsvertheilungsdiagramms auf der Zugseite. Für die Längen 3 und 15 mit der spezifischen Dehnung von $9,4 \cdot 10^{-5}$ kann die zugehörige Zugspannung aus Tab. 24 gleich 33,2 atm entnommen werden. Für die Längen 1 und 17 mit $28,8 \cdot 10^{-5}$ spezifischer Dehnung ist aber eine Extrapolation aus der nur bis $14,36 \cdot 10^{-5}$ reichenden Tabelle 24 ganz unzulässig. Bezeichnet man die Spannung in der äussersten Faser mit x, so hat man für die gesammte Zugkraft den Ausdruck

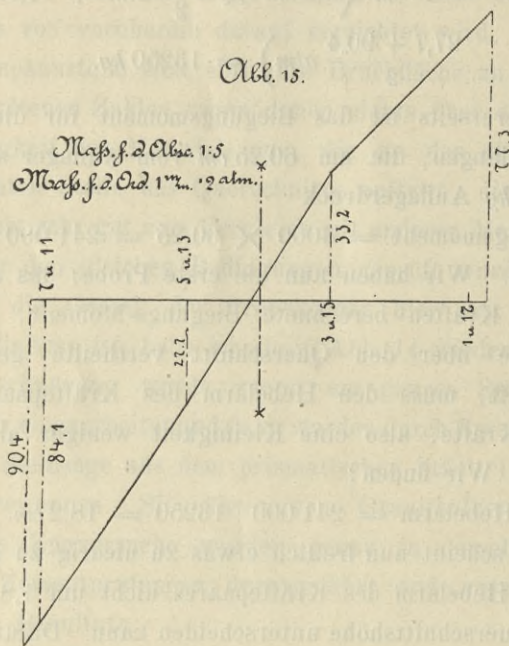
$$\text{Zugkraft} = 20 \text{ cm} \left(5,6 \text{ cm} \times 16,6 \text{ atm} + 10,3 \text{ cm} \frac{33,3 + x}{2} \right)$$

Dies gleich dem Betrage der Druckkraft, also gleich 13250 kg gesetzt, liefert

$$x = 77,3 \text{ atm.}$$

Natürlich kommt es mir bei diesem Werthe mehr auf die Grössenordnung als auf den genauen Betrag an. Jedenfalls bin ich aber zu dem Schlusse berechtigt, dass an dieser Stelle des Balkens bei der Last von 8 t tatsächlich Zugspannungen von ca. 70—80 atm vorgekommen sind. In der Mitte waren die Spannungen natürlich noch grösser und ausserdem kann man nach Analogie mit dem Verhalten des Balkens 5219 a annehmen, dass die Spannungen noch beträchtlich höher steigen können, ehe ein Bruch eintritt, falls nicht zufällig eine schwächere Stelle in Frage kommt, wie beim gelben Granitbalken 5220 a, der schon bei 9 t brach.

In Abb. 15 ist das in der angegebenen Weise ergänzte Spannungsvertheilungsdiagramm aufgetragen. Offenbar kann man gegen die Zulässigkeit des berechneten



Werthes von x aus der Gestalt des damit konstruirten Diagramms keinen Einwand erheben. Auch der nun rückwärts aus dem Vergleich der berechneten Spannung x mit der zugehörigen Dehnung berechnete Werth des Elasticitätsmoduls, nämlich

$E = 250,000 \text{ atm}$ für 77,3 atm Zugspannung ist durchaus wahrscheinlich und gibt zu keinen Bedenken Veranlassung. Insofern ist also auch die zweite Probe zu Gunsten unserer Messungen ausgefallen.

Beim Sandsteinbalken 5356 c, zu dem ich jetzt übergehe, liegen die Verhältnisse insofern günstiger für diese Betrachtungen, als von vornherein mehr Punkte des Längenänderungsdiagramms bekannt sind, so dass eine schärfere Berechnung namentlich der gesamten Druckkraft möglich wird als vorher. Auch bei den Zug-

versuchen sind höhere und der Bruchgrenze näher liegende Werthe der Dehnung erreicht worden als beim Granitbalken, so dass sich ein gutes Stück der Zugseite des Spannungsvertheilungsdiagramms sofort konstruieren lässt. Freilich befindet man sich dafür in Verlegenheit, welche der nicht unerheblich von einander abweichenden Zugelasticitätsmessungen*) (nach Tabelle 27 oder 28) man zu Grunde legen soll. Wie aus jenen Messungen hervorging, hängt der Elasticitätsmodul in recht merklichem Maasse von der Vorgeschichte des Stückes ab und man weiss nicht recht, welchen von den verschiedenen „constanten Zuständen“, deren das Material fähig ist, man bei den Biegungsversuchen als vorhanden annehmen soll. Um diese Frage zu entscheiden, muss immer noch eine der beiden Gleichgewichtsbedingungen zur Ergänzung des Spannungsvertheilungsdiagramms verwendet werden, während die andere ausschliesslich zur Prüfung dient.

Nach Tabelle 18 war für die Strecken

$$\frac{\Delta l}{l} = +19,4 \cdot 10^{-5} + 12,3 \cdot 10^{-5} + 7,1 \cdot 10^{-5} + 0,8 \cdot 10^{-5}$$

$$\frac{\Delta l}{l} = -4,5 \cdot 10^{-5} - 11,3 \cdot 10^{-5} - 16,5 \cdot 10^{-5}$$

Auf der Druckseite erhalte ich daher durch Interpolation aus Tabelle 29 für die Strecken

	5 u. 13	6 u. 12
die Druckspannungen	4,1 atm	8,0 atm
	7 u. 11 an der Kante	
die Druckspannungen	10,6 atm	11,1 atm.

Die neutrale Faser ist von der Mitte nach der Druckseite um 7 mm verschoben. Die gesammte Druckkraft berechnet sich hiernach in derselben Weise, wie es beim Granitbalken gezeigt worden war, zu

$$\text{Druckkraft} = 1815 \text{ kg.}$$

Da das Diagramm eine hinreichende Zahl von Punkten enthält, kann man hier auch ziemlich genau berechnen, um wie viel die resultirende Druckkraft von der neutralen Faser entfernt ist. Ich fand diesen Abstand zu 9,24 cm. Nun kommen von der Querschnittshöhe von 30 cm auf die Druckseite 14,3 cm. Wäre das Spannungsvertheilungsdiagramm auf der Druckseite geradlinig, so müsste der Schwerpunktsabstand $\frac{2}{3}$ von 14,3 oder 9,53 cm betragen. Da nun die Krümmungsverhältnisse des Diagramms auf der Zugseite ganz ähnlich sind wie auf der Druckseite, so wird man als Hebelarm des aus den Zug- und Druckkräften resultirenden Kräftepaars

$$\text{Hebelarm} = \frac{2}{3} \cdot 30 \cdot \frac{9,24}{9,53} = 19,4 \text{ cm}$$

zu setzen haben.

*) Vgl. hiezu die ausgezogene und die punktirte Zugcurve in Abb. 13.

Andererseits berechnet sich das Biegemoment bezogen auf die Mitte der Messlängen bei 60 cm Abstand vom Auflager und 600 kg Auflagerdruck zu

$$\text{Biegemoment} = 36000 \text{ cmkg}$$

Die Probe besteht nun darin, dass dieses Biegemoment durch die Druckkraft dividirt den Hebelarm des Kräftepaars geben muss. Man findet

$$\frac{36000}{1815} = 19,8 \text{ cm,}$$

also eine durchaus befriedigende Uebereinstimmung, wie sie nach den Genauigkeitsgrenzen der Messungen nicht besser verlangt werden kann.

Trägt man versuchsweise nach Tabelle 27 oder 28 die Zugcurven des Spannungsvertheilungsdiagramms so weit auf, als diese Tabellen reichen, also bis zu dem Punkte 2 und 16, so zeigt sich, dass diese Curve ihrer allgemeinen Gestalt nach vollkommen der Druckcurve gleicht, gleichgiltig ob man den einen oder anderen Zustand des Materials in Betracht zieht. Da nun beide Curven gleiche Flächen mit der Abscissenachse einschliessen müssen, folgt unter diesen Umständen, dass der grösste Werth der Zugspannung sich zur Druckspannung in der entgegengesetzten Faser umgekehrt verhalten muss wie die Abstände von der neutralen Faser. Für die äusserste Faser auf der Zugseite, der nach der früheren Zusammenstellung die spezifische Dehnung von $20,9 \cdot 10^{-5}$ zuzuschreiben ist, haben wir daher als Zugspannung

$$\frac{11,1 \cdot 14,3}{15,7} = 10,1 \text{ atm}$$

zu setzen, so dass sich der Elasticitätsmodul des Sandsteinbalkens bei einer Zugspannung von dieser Höhe daraus zu 48,000 atm berechnet.

Die Zugspannung für die Strecke 2 u. 16, die 100 mm von der neutralen Faser absteht, bestimmt sich ebenfalls durch den Vergleich der Zugseite des Spannungsvertheilungsdiagramms mit der Druckseite. Dem Abstände von 100 mm auf der Zugseite entspricht auf der Druckseite ein Abstand von $100 \times \frac{143}{157} = 91 \text{ mm}$. In diesem Abstände ist die Druckspannung gleich 8,2 atm. Für den entsprechenden Abstand auf der Zugseite hat man daher die Zugspannung gleich $8,2 \times \frac{10,1}{11,1} = 7,5 \text{ atm}$ zu setzen. Da die zugehörige spezifische Dehnung $12,3 \cdot 10^{-5}$ betrug, berechnet sich daher der Elasticitätsmodul für 7,5 atm Zugspannung zu 61000 atm.

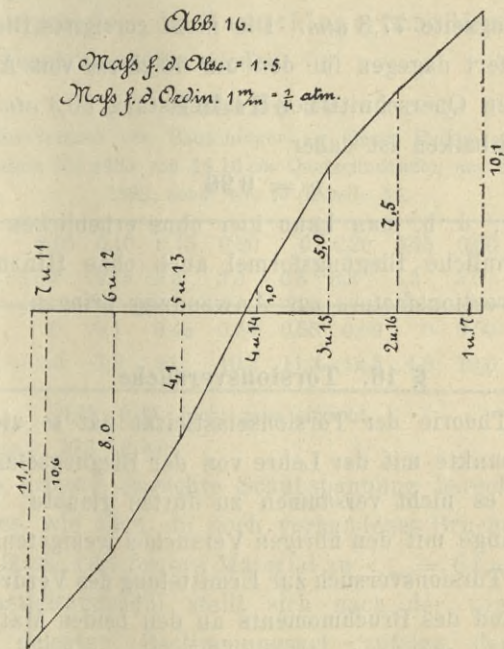
Bis dahin habe ich die Bedingung der Gleichheit zwischen Zug- und Druckkräften nur zur Berechnung der letzten Punkte des Spannungsvertheilungsdiagramms auf der Zugseite benutzt. Die Bedingung lässt aber nun immer noch eine Prüfung des gesammten Systems der

Messungen übrig. Dazu braucht man nur den soeben berechneten Werth der Zugspannung in der Faser 2 und 16 mit den aus den Tabellen 27 und 28 folgenden Werthen zu vergleichen. Nach Tabelle 27 würde der Dehnung von $12,3 \cdot 10^{-5}$ die Spannung 7,9 atm und nach Tabelle 28 die Spannung 8,3 atm entsprechen gegenüber der berechneten Spannung von 7,5 atm.

Die Uebereinstimmung ist daher nicht gerade glänzend. Wenn man aber berücksichtigt, dass das elastische Verhalten des Steins recht merklich von der Behandlung abhängt, die er vorher erfuhr, und wenn man sich ferner erinnert, an wie viel grösseren Widersprüchen alle früheren Bemühungen, die Resultate von Zugversuchen mit denen von Biegeversuchen an Steinen zu vereinigen, gescheitert sind, kann man immerhin ganz zufrieden damit sein.

Die beiden noch fehlenden Punkte des Spannungsvertheilungsdiagramms für die Strecken 3 und 15 und 4 und 14 kann man nun dem Zugversuche der Tabelle 27 entnehmen, wenn man nur berücksichtigt, dass alle Spannungen im Verhältnisse 7,5 : 7,9 zu verkleinern sind, weil sich nach den vorhergehenden Ermittlungen der Balken während der Biegung etwas weniger steif verhielt als bei jenem Zugversuche. Man findet so für die Strecken 3 und 15 eine Zugspannung von 5,0 atm und für die Strecke 4 und 14 die Zugspannung 1,0 atm.

In Abb. 16 ist das Spannungsvertheilungsdiagramm mit diesen Werthen aufgetragen. Dabei ist wohl zu beachten, dass der allgemeine Verlauf der Curve auch



auf der Zugseite mit Ausnahme des letzten Punktes, für den kein direkter Versuch verwendet werden konnte, unmittelbar durch direkte Messungen bestätigt ist, da die vorgenommene proportionale Aenderung den Charakter der

Curve selbst nicht verwischen kann. Namentlich erkennt man auch, dass in der That, wie schon vorher erwähnt, der Verlauf der Curve auf der Zugseite ganz analog dem auf der Druckseite ist.

Nach diesen Ergebnissen sind wir nun auch im Stande, die in der äussersten Faser der Zugseite wirklich auftretende Spannung mit jener zu vergleichen, die aus der gewöhnlichen Bieungsformel hervorgeht. Für den Sandsteinbalken berechnet sich diese für den um 60 cm vom Auflager abstehenden Querschnitt bei einer Belastung von 1,2 t zu 12 atm, während sie nach den vorausgehenden Ermittlungen thatsächlich nur 10,1 atm betrug. Setzt man also, um eine Uebereinstimmung herzustellen, anstatt der gewöhnlichen Bieungsformel

$$\sigma = \frac{6 M}{bh^2}$$

wo σ die grösste Zugspannung im Querschnitt und M das Bieungsmoment bedeuten, nun

$$\sigma = \eta \cdot \frac{6 M}{bh^2}$$

wo η ein Erfahrungscoefficient ist, so hat man für den untersuchten Sandsteinbalken dem Coefficienten η den Werth

$$\eta = 0,84$$

beizulegen. Die Versuche an dem Granitbalken eignen sich nicht so gut zur Bestimmung des Coefficienten η , weil dort nicht für alle Strecken gleichzeitige Messungen durchgeführt wurden. Ungefähr und für praktische Zwecke genau genug lässt er sich aber auch aus den früheren Rechenergebnissen ermitteln. Darnach betrug die Spannung auf der Zugseite 77,3 atm. Die nicht corrigirte Bieungsformel liefert dagegen für den um 60,25 cm vom Auflager abstehenden Querschnitt bei 8 t Belastung 80,3 atm. Für den Granitbalken ist daher

$$\eta = 0,96$$

zu setzen, d. h. man kann hier ohne erheblichen Fehler die gewöhnliche Bieungsformel auch ohne Hinzufügung eines Correctionsfactors zur Anwendung bringen.

§ 16. Torsionsversuche.

Die Theorie der Torsionselasticität hat so viele Berührungspunkte mit der Lehre von der Bieungselasticität, dass ich es nicht versäumen zu dürfen glaubte, im Zusammenhange mit den übrigen Versuchen wenigstens einen einfachen Torsionsversuch zur Ermittlung des Verdrehungswinkels und des Bruchmoments an den beiden Materialien anzustellen. Natürlich benutzte ich dazu wieder Balkenabschnitte von dem vollen Querschnitte 20 × 30 cm und zwar konnte dazu je eine Bruchhälfte des Granitbalkens 5219 a und des Sandsteinbalkens 5356 a ohne weitere Vorbereitung benutzt werden, da die Brüche bei beiden sehr

regelmässig fast genau senkrecht zur Axe verlaufen waren. Abgesehen von zwei, die beiden Balkenenden kastenförmig umschliessenden Einspannköpfen, die ich neu herstellen lassen musste, konnte ich die vorhandene Torsionseinrichtung, mit der mein Vorgänger seine Versuche angestellt hatte, verwenden und ich schloss mich auch sonst ganz dem von ihm geübten und erprobten Verfahren an, so dass ich hier wohl auf eine besondere Beschreibung der Versuchseinrichtung verzichten darf. Nur die eine kleine Abänderung muss ich hierbei erwähnen, dass ich die von der Maschine auf den gusseisernen Hebel ausgeübte Kraft durch Vermittlung einer kleinen Stahlwalze übertragen liess, weil ich dies für sicherer hielt, als eine direkte Uebertragung, um über die Grösse des Hebelarms nicht im Zweifel zu sein.

Der Granitbalken wurde zuerst mehrmals mit 3 t oder mit einem Torsionsmoment von rund 1500 *mlg* beansprucht, bis er in einen constanten Zustand gebracht schien, worauf der in der nachstehenden Tabelle wiedergegebene Beobachtungssatz folgte.

Tabelle 33.

Torsionsversuch mit der einen Bruchhälfte des Granitbalkens 5219 a, nachdem der constante Zustand für 3 t Belastung hergestellt war, Hebelarm = 49,15 cm, Messlänge = 50 cm, Ablesungen Doppelmillimeter, Scalenentfernung = 343,8 cm, ausgeführt am 18. Oktober 1895.

Last in t	Linkes Fernrohr	Rechtes Fernrohr	Verdrehung
0	180,0	180,0	—
0,5	184,6	184,3	0,3
1,0	188,6	188,1	0,5
1,5	192,0	191,3	0,7
2,0	195,1	194,2	0,9
2,5	197,9	196,9	1,0
3,0	200,8	199,4	1,4
3,5	204,1	202,6	1,5
4,0	207,9	205,9	2,0
4,5	211,9	209,3	2,6
5,0	215,9	212,5	3,4

Nachdem die Ablesung für 5 t gerade beendet ist, tritt nach vorausgehendem Knistern der Bruch ein. Die Bruchfläche geht von einer Einspannstelle aus schief zur Balkenaxe, so dass die äussersten Punkte um ca. 38 cm in Richtung der Balkenaxe von einander liegen.

Die grösste Schubspannung berechnet sich nach der sogenannten genauen Theorie, d. h. nach der Formel

$$\tau_{\max} = \frac{9 M}{2 b^2 h} \quad (M = \text{Torsionsmoment})$$

zu $\tau_{\max} = 92,2 \text{ atm}$. Der Berechnung des Schubelasticitätsmoduls lege ich die Beobachtung für 3,0 t Belastung zu Grunde, weil hiefür die bleibenden Aenderungen schon beseitigt waren. Freilich sind die Zahlen für die Verdrehung so klein, dass schon die unvermeidlichen Schätzfehler beim Ablesen einen bedeutenden Einfluss haben

und kein genaues Resultat erwarten lassen. Der Verdrehungswinkel ϑ war bei 3 t Belastung in Bogenmaass

$$\vartheta = \frac{1,4 \times 2}{3438} = 0,00081.$$

Der Elasticitätsmodul G berechnet sich daher, wenn mit l die Messlänge bezeichnet wird, nach der Formel (man vgl. Bach, Festigkeitslehre, S. 223, Gl. 154):

$$G = 3,6 \cdot \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{M l}{\vartheta}$$

zu $G = 197\,000 \text{ atm}$.

Mein Vorgänger Bauschinger hat bei einem am 1. Dez. 1892 angestellten und bisher noch nicht veröffentlichten Torsionsversuche an einem blauen Granitbalken von $14 \times 14 \text{ cm}$ Querschnitt, der ebenfalls den Blauburger Granitwerken entstammte, die Schubspannung für den Bruch zu 95 atm gefunden. Seine Zahlen für den Schubelasticitätsmodul lassen sich mit den meinigen indessen nicht unmittelbar vergleichen, da nur ein Beobachtungssatz angestellt wurde, der unter fortwährender Steigerung der Belastung bis zum Bruche führte, so dass die bleibenden Aenderungen nicht völlig ausgeschieden werden können. Dazwischen wurde zwar auch einigemal entlastet, aber dann immer wieder mit der Steigerung der vorausgegangenen Last fortgefahren. Die Bauschinger'schen Zahlen gebe ich in der folgenden Tabelle wieder:

Tabelle 34.

Torsionsversuch von Bauschinger an einem Balken mit Blauburger Granit Nr. 4482 von 14 cm Querschnittsseite, Messlänge = 50 cm , Hebelarm = 50 cm sonst wie in Tab. 33.

Last = 0,05 0,1 0,15 0,2 0,25 0,3 0,35 0,4 0,45 0,5 0
Verdrehg. = 0,4 0,8 1,1 1,6 2,0 2,4 2,8 3,4 4,0 4,7 1,8

Last = 0,5 0,55 0,6 0,65 0,7 0,75 0 0,75 0,8 0,85 0,9
Verdrehg. = 4,7 5,2 5,8 6,5 7,3 8,0 2,0 8,2 8,8 9,6 10,2

Last = 0,95 1,0 0 1,0 1,05 1,1 1,15 1,2 nicht ganz erreicht
Verdrehg. = 10,9 11,6 3,0 11,8 12,6 13,2 14,0 Bruch.

Nach diesen Beobachtungsdaten kann man den Schubelasticitätsmodul etwa in der folgenden Weise berechnen. Bei $0,5 \text{ t}$ betrug die Verdrehung $4,7$ Scalentheile und bei der darauf folgenden Entlastung $1,8$. Die elastische Verdrehung würde also gleich $2,9$ zu setzen sein und daraus würde nach der schon vorher gebrauchten Formel $G = 138\,000 \text{ atm}$ folgen. Für die Last von $0,75 \text{ t}$ mit $6,0$ elastischer Verdrehung hätte man dagegen $G = 100\,000 \text{ atm}$. Bauschinger selbst hat dagegen im Beobachtungshefte, indem er der anderen in der Fussnote zu § 3 erwähnten Definition folgt und die bleibenden Dehnungen nicht ausscheidet, den Elasticitätsmodul für das Belastungsintervall von $0,5$ bis $0,75 \text{ t}$ (mit $0,25 \text{ t}$ Laststeigerung und $3,3$ Verdrehungszuwachs) zu $59\,000 \text{ atm}$ berechnet.

Der Sandsteinbalken 5356 a wurde zuerst mit kleineren Lasten und dann wiederholt mit $0,7 \text{ t}$ beansprucht, worauf der nachstehende Beobachtungssatz folgte.

Tabelle 35.

Torsionsversuch mit der einen Bruchhälfte des Sandsteinbalkens 5356 a, nachdem der constante Zustand für $0,7 \text{ t}$ erreicht war, am 19. Okt. 1895, sonst wie in Tab. 33.

Last in t	Linkes Fernrohr	Rechtes Fernrohr	Verdrehung
0	170,0	170,0	—
0,1	171,1	170,9	0,2
0,2	172,7	172,1	0,6
0,3	174,0	173,1	0,9
0,4	175,3	174,1	1,2
0,5	176,6	175,0	1,6
0,6	177,9	175,9	2,0
0,7	179,1	176,8	2,3
0,8	181,1	178,0	3,1
0,9	184,8	179,8	5,0

Bei wiederholter Beobachtung zeigt sich ein zuerst ganz langsames Anwachsen der Verdrehung um einige Zehntel Scalentheile, dann tritt, 3 Minuten nach Aufbringen der Last, der Bruch ein, der ähnlich wie beim Granitbalken verläuft.

Die grösste erreichte Schubspannung berechnet sich hier zu

$$\tau_{\max} = 16,6 \text{ atm}$$

und der Elasticitätsmodul G für die Last von $0,7 \text{ t}$ mit der Verdrehung von $2,3$ Scalentheilen zu

$$G = 28\,000 \text{ atm}$$

Auch diesem Versuche vermag ich einen bisher nicht veröffentlichten Torsionsversuch Bauschinger's an einem rothen Buntsandstein gegenüber zu stellen. Freilich rührte dieser Stein aus einer anderen Bezugsquelle, nämlich aus dem Bruche der Gebr. Adlmann aus Wertheim a. M. her. Ich gebe hier die Bauschinger'sche Messung nach dem Beobachtungshefte wieder.

Tabelle 36.

Torsionsversuch von Bauschinger an einem Balken von rothem Buntsandstein No. 4483 von $14,16 \text{ cm}$ Querschnittsseite, am 2. Dezember 1892, sonst wie in Tabelle 34.

Last = 0,05 0,10 0,15 0,20 0 0,20 0,25 0,30 0,35 0,40
Verdrehg. = 0,8 1,15 2,3 3,3 0,5 3,3 4,3 5,5 6,6 7,7

Last = 0 0,4 0,45 0,50 0,55 0,60 0 0,60 0,65 0,70
Verdrehg. = 2,0 7,9 9,0 10,2 11,3 12,5 4,3 12,6 14,0 15,2

Last = 0,75 0,80 nicht ganz erreicht
Verdrehung = 16,3 Bruch.

Die grösste erreichte Schubspannung berechnet sich für dieses, wie auch ein noch vorhandenes Bruchstück erkennen lässt, viel festere Material zu $\tau_{\max} = 64 \text{ atm}$. Der Schubelasticitätsmodul stellt sich nach der von mir zu Grunde gelegten Bestimmungsart zufolge den Bauschinger'schen Zahlen für $0,4 \text{ t}$ Belastung auf $G = 54\,000 \text{ atm}$ und für $0,6 \text{ t}$ Belastung auf $G = 56\,000 \text{ atm}$. Bauschinger selbst berechnet ihn, indem er in gleicher Art, wie vorher angegeben, verfährt, für das Belastungsintervall von $0,4$ bis $0,6 \text{ t}$ zu $33\,000 \text{ atm}$.

§ 17. Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse dieser Untersuchung.

Den ersten Anlass zu meiner Untersuchung gab das in der Einleitung begründete Misstrauen gegen die Zuverlässigkeit der Melan'schen Theorie der Biegeelastizität steinartiger Massen. Durch die ersten Versuche wurden die Zweifel, die ich in Bezug auf die Schlussergebnisse dieser Theorie hegte, in der That bestätigt. Beim näheren Studium aller mit dem Problem zusammenhängenden Erscheinungen ergab sich aber, dass jene Theorie an sich wohl geeignet sein könnte, eine annähernd richtige Darstellung der Thatsachen zu liefern, dass es vielmehr hauptsächlich der Benutzung ungenauer Zahlen-Coëfficienten zuzuschreiben ist, wenn sie zu Folgerungen führte, die mit der Wirklichkeit nicht übereinstimmen.

Denn in der That gelang es mir, den strengen experimentellen Nachweis dafür zu liefern, dass im gebogenen Steinbalken weit höhere Zugspannungen auftreten, ehe der Bruch erfolgt, als sie bei direkten Zugversuchen mit demselben Materiale scheinbar erreicht werden können. Als Grund hat sich dafür ergeben, dass bei den Zugversuchen mit Steinproben auf eine gleichförmige Vertheilung der Spannungen nicht gerechnet werden kann.

Als ein interessantes und auch praktisch wichtiges Nebenresultat ergab sich dabei, dass auch die Prüfung des Cements nach den „Normen“ keineswegs die wahre Zugfestigkeit des Cements kennen lehrt, dass diese vielmehr erheblich höher liegt, als gewöhnlich angenommen wird.

Ferner stellte sich die auf den ersten Blick sehr auffällig erscheinende Thatsache heraus, dass man den Elasticitätsmodul an kleinen Probestücken niedriger und zuweilen sehr viel niedriger findet, als an grossen Körpern, wie sie beim Bau verwendet werden. Diese Frage erfordert noch ein weiteres Studium.

Es fällt mir natürlich nicht ein, an der strengen Gültigkeit des „Gesetzes der proportionalen Widerstände“ — wie es Herr Kick nennt — unter der Voraussetzung, dass es richtig angewendet wird, irgendwie zu zweifeln. Die diesem Satze zu Grunde liegende Ueberlegung wird in allen Gebieten der Physik angewendet und sie hat sich überall bewährt. Ich bin daher geneigt, sie a priori für unzweifelhaft richtig anzusehen.

Nach jenem Gesetze müsste der Elasticitätsmodul für Probekörper von allen Grössen gleich hoch gefunden werden, falls alle Bedingungen in entsprechender Weise abgeändert sind. Diese Voraussetzung ist aber hier keineswegs erfüllt. Es ist wohl ziemlich zweifellos, dass durch die Bearbeitung von Steinkörpern stets eine gewisse Lockerung der Oberflächenschichten eintritt, deren Maass von der Art der Bearbeitung abhängt. Man erkennt

daraus sofort, dass kleinere Versuchskörper, die mit denselben Werkzeugen bearbeitet wurden, den grossen gegenüber im Nachtheile sind. Bei beiden erstreckt sich die Lockerung ungefähr auf die gleiche Tiefe; bei den kleinen Stücken macht die gelockerte Schicht aber einen grösseren Theil des gesammten Querschnittes aus als bei den grossen.

Auch die erheblichen Unterschiede in der Festigkeit, die zwischen kleinen Probestücken angetroffen werden, die im Steinblock unmittelbar neben einander lagen und die sich auch noch durch die ungefähr gleich grosse „Bruchdehnung“ als ursprünglich gleichartig zu erkennen gaben, lässt sich durch eine zufällig etwas verschiedene Bearbeitung leicht erklären. Man weiss ja auch z. B., dass ein an sich durchaus wetterbeständiger Granit bei unvorsichtiger Bearbeitung gelegentlich feine Haarrisse erhält, die beim Betrachten nicht wahrgenommen werden, sich aber nachher durch Abwittern im Frost recht unangenehm bemerklich machen.

Mit solchen Zufälligkeiten hat man bei der Benützung kleiner Probestücke immer zu rechnen. Bei den Prüfungen der Metalle hat man sich schon längst dazu entschlossen, Probestücke von denselben Abmessungen zu untersuchen, wie sie im Bau vorkommen, anstatt sich mit kleinen Proben zu begnügen, bei denen man nicht sicher ist, wie weit sich ihre Eigenschaften mit der Bearbeitung ändern. Nach den Ergebnissen meiner Untersuchung wird man nun auch bei der Prüfung der Steine — namentlich wenn es sich um die Bestimmung der Zugelastizität und der Zugfestigkeit handelt — dazu übergehen müssen, grosse Gebrauchsstücke zu untersuchen, um zuverlässige Resultate zu erhalten. Nur wenn sich die Stücke ausschliesslich mit der Steinsäge herstellen lassen, von der eine stärkere Lockerung der Oberflächenschichten weniger zu befürchten ist, darf man bis zu einem gewissen Grade davon absehen.

Eine Steinlamelle von 20×30 cm Querschnitt, wie ich sie verwendet habe, entspricht eben grade nur einer Eisenlamelle von den üblichen Abmessungen.

Insofern ist meine Untersuchung freilich noch unvollständig, als sie sich nur auf zwei Materialien — einen ziemlich harten Granit und einen weichen Sandstein — erstreckte. Indessen hat sich meine Annahme, dass sich der Sandstein nicht gar viel anders verhalten würde als der Granit, den ich vorher untersucht hatte, vollkommen bestätigt, und man wird es daher begreiflich finden, dass ich auch bei der Mehrzahl der übrigen Steine ähnliche Eigenschaften vermute. Selbstverständlich ist aber die Ausdehnung der Untersuchung auch auf andere Materialien erforderlich, ehe man darüber etwas Bestimmtes aussagen darf. Ich habe indessen bereits Balken aus Stampfbeton

und aus Gusseisen anfertigen lassen, die ich demnächst nach der gleichen Methode zu prüfen beabsichtige, so dass wenigstens noch für diese beiden Materialien schon bald eine zuverlässige Unterlage für die Beurtheilung der Biegungserscheinungen zu erwarten ist. *)

*) Während des Druckes habe ich die Versuche mit einem der Gusseisenbalken so weit gefördert, dass ich das Gesetz für die Längenänderung der zwischen zwei Querschnitten gelegenen Fasern anzugeben vermag. Die neutrale Faser war auch hier ein wenig (um 2,3 % der Querschnittshöhe) nach der Druckseite hin verschoben; das Längenänderungsdiagramm ist ziemlich gradlinig und zeigt nur auf der äussersten

Dass in dieser Arbeit die wirkliche Vertheilung der Spannungen über den Querschnitt eines gebogenen Balkens ermittelt wurde — nicht auf Grund irgend einer Hypothese, sondern nach Messungen, die ihrer ganzen Anlage nach durchaus einwandfrei sind — ist ein Ergebniss, das ich wohl mit Fug und Recht der Beachtung weiterer Kreise empfehlen darf.

Faser der gedrückten Seite eine merkliche Abweichung von dem Gradliniengesetz. Diese Faser ist nämlich im Verhältnis zu den anderen etwas zu stark verkürzt.

II. Belastungsversuche an einem Tonnenflechtwerkdache.

In früheren Veröffentlichungen *) habe ich eine neue Dachkonstruktion zur Ueberdeckung rechteckiger Räume empfohlen, die im Wesentlichen den Schwedler'schen Kuppeldächern über kreisförmigen Grundrissen nachgebildet ist. Ich nannte den neuen Dachverband ein „Tonnenflechtwerk“, während ich die Schwedler'schen Dächer als „Kuppelflechtwerke“ bezeichnete. Unter den „Flechtwerken“ verstehe ich nämlich räumliche Stabgebilde, deren Stäbe sämmtlich auf einem Mantel enthalten sind, der zusammen mit den Widerlagsmauern den zu überdeckenden Raum umschliesst. Sie stehen im Gegensatze zu den Binderkonstruktionen, deren Stäbe in den umschlossenen Raum hineinreichen.

Die theoretische Grundlage, auf der diese Konstruktionen beruhen, möge hier nur kurz besprochen werden; eine ausführlichere Darstellung findet man in meinen früheren Schriften.

Die Lehre von den gegliederten Tragkonstruktionen oder die Fachwerktheorie befasste sich früher fast ausschliesslich mit ebenen Problemen. Man untersuchte die Steifigkeitsbedingungen ebener Stabgebilde, die man als Binder bezeichnete, und berechnete die Spannungen, die in den Stäben auftreten, unter der Voraussetzung, dass auch alle Lasten, die an den Bindern angreifen, in der Konstruktionsebene enthalten sind. Um Verbände zu erhalten, die auch im dreifach ausgedehnten Raume widerstandsfähig sind, stellte man eine Reihe solcher Binder, gewöhnlich in parallelen Ebenen, nebeneinander und vereinigte sie durch eine Querkonstruktion, der die Aufgabe zugetheilt wurde, die Knotenpunkte der Binder gegen ein Herausreten aus ihrer Konstruktionsebene zu sichern. Dazu gehörte freilich, dass die Querkonstruktion auch zur Aufnahme von Lasten, die etwa senkrecht zur Binderebene auftreten, geeignet sein musste. Bei Dachkonstruktionen

*) Vgl. besonders mein „Fachwerk im Raume“, Leipzig 1893, ferner auch Civ.-Ing. 1894, S. 465.

kommen Lasten dieser Art in der Regel aber wenig in Betracht.

Dieses Verfahren, den räumlichen Stabverband durch Zusammenfügung ebener Verbände aufzubauen, wurde zuerst von Schwedler bei seinen Kuppeldächern verlassen. Bei diesen Dächern ist die Zurückführung der Kraftübertragung auf die in der ebenen Fachwerktheorie behandelten Fälle ganz ausgeschlossen und daher kam es auch, dass man die richtige Berechnung der Stabspannungen bei unsymmetrischer Belastung noch nicht kannte, zu einer Zeit, als schon eine grosse Zahl Schwedler'scher Kuppeln ausgeführt war. Selbst eine geometrisch einwandfreie Darlegung der Gründe für die thatsächlich beobachtete Steifigkeit des Schwedler'schen Stabverbandes fehlte bis vor nicht gar langer Zeit.

In meinen früheren Schriften habe ich diese Lücke ausgefüllt. Freilich ist der einfache geometrische Lehrsatz, auf dem die Steifigkeit der Schwedler'schen und zugleich aller übrigen Flechtwerke beruht, wie sich nachher herausstellte, schon lange vorher gefunden und bewiesen worden. Er blieb nur immer wenig beachtet, gerieth zuweilen fast in Vergessenheit und wurde dann zu verschiedenen Zeiten wieder neu aufgefunden, so auch von mir. Mein hochverehrter früherer Lehrer, Herr Prof. Mohr, hatte die Freundlichkeit, mich vor Kurzem auf einen Beweis aufmerksam zu machen, den Cauchy *) im Jahre 1813 von dem Satze gegeben hat. Auch Maxwell kannte den Satz und stützte darauf eine sehr bemerkenswerthe Untersuchung über die Verbiegung krummer Flächen, die etwa den Mänteln der Flechtwerke entsprechen. Ebenso kommt der Satz bei Möbius vor.

Der Satz sagt aus, dass ein Stabverband, der ein aus Dreiecken zusammengesetztes Polyeder mit einem einfach zusammenhängenden Innenraum bildet, unverschieblich und

*) Journ. de l'école polyt. Vol. 9. 1813.

zugleich statisch bestimmt ist. Der Umstand, dass so hervorragende Mathematiker, wie ich sie vorher aufzählte, schon lange vor mir den Satz gefunden und bewiesen haben, bringt mir — wenn mir dadurch auch die Priorität geraubt wird, auf die ich früher Anspruch zu haben glaubte, — doch den Vortheil, dass man die Richtigkeit des Satzes um so bereitwilliger zugeben wird. Ich kann daher ganz davon absehen, den Beweis, den ich selbst für den Satz gegeben habe, hier auch nur andeutungsweise zu wiederholen.

Gibt man den Satz zu, so folgt die Möglichkeit widerstandsfähiger Tragkonstruktionen, deren Stäbe nur auf einem Mantel enthalten sind, also die Steifigkeit der Flechtwerke, unmittelbar daraus. Man braucht ein solches Polyeder, wie es im Satze vorkommt, nur durch einen Schnitt in zwei Theile zu zerlegen und den einen Theil mit Hilfe der vom Schnitt getroffenen Stäbe mit der festen Erde, d. h. mit Widerlagsmauern u. s. f. zu verbinden. Da vorher schon der Zusammenhang mit dem weggeschnittenen Reste hinreichte, um die Steifigkeit des Verbandes zu sichern, muss dies um so mehr zutreffen, nachdem der Rest durch die als starrer Körper anzusehende Erde ersetzt ist.

Zum Tonnenflechtwerk gelangt man speciell, wenn man von einem Polyeder ausgeht, das einen prismatischen Innenraum umschliesst, einen Schnitt parallel zur Axe legt und das eine Stück auf geeigneten Widerlagsmauern befestigt.

Einen besonderen Vorzug hat übrigens das Tonnenflechtwerk vor dem Kuppelflechtwerk voraus: die Stabspannungen können nämlich bei ihm viel einfacher berechnet werden als bei den Kuppeln. Dies hängt damit zusammen, dass die auf einer Tonnenseite enthaltenen Stäbe für sich betrachtet ein ebenes Fachwerk, nämlich einen Balken mit parallelen Gurtungen, ausmachen. Die Berechnung kann daher ganz auf die aus der ebenen Fachwerktheorie bekannte von solchen Balken zurückgeführt werden. Greift z. B. eine Einzellast an einem beliebigen Knotenpunkt an, so braucht man diese nur in zwei Seitenkräfte zu zerlegen, die in die sich beiderseits anschliessenden Tonnenseitenflächen fallen, und die Stabspannungen der dazu gehörigen Fachwerkbalken in der gewöhnlichen Weise zu berechnen. Man hat dann nur noch zu beachten, dass beide Balken eine gemeinsame Gurtung haben, für die sich die in beiden Balken ermittelten Stabspannungen einfach summieren.

Von Wichtigkeit ist dann noch bei den Tonnenflechtwerken ebenso wie bei den Schwedler'schen Kuppeln der Umstand, dass die Steifigkeit der Knotenpunkte, von der bei der Berechnung der Stabspannungen abgesehen wird, die Widerstandsfähigkeit gegen Einzellasten oder un-

symmetrische Lastvertheilungen erheblich erhöht. Ich will mich nicht damit aufhalten, die Gründe dafür hier zu wiederholen und begnüge mich mit der Bemerkung, dass die Versuche dieses Verhalten vollkommen bestätigt haben. Aus dem am Schlusse dieser Abhandlung angestellten Vergleiche der Versuchsdaten mit den Ergebnissen der Rechnung, die ohne Berücksichtigung der Steifigkeit der Knotenpunkte durchgeführt ist, wird dies deutlich genug hervorgehen.

Aus den für ausgeführte Schwedler'sche Kuppeln nachträglich aufgestellten genauen Berechnungen der Stabspannungen für concentrirte Einzellasten ging übrigens schon längst unzweideutig hervor, dass diese Kuppeln solchen Lasten nur vermöge der durch die Steifigkeit der Knotenpunkte bewirkten Lastvertheilung zu widerstehen vermögen. Ich bin nun zwar nicht der Meinung, dass man sich bei den Tonnenflechtwerkdächern auf diesen Umstand ausschliesslich verlassen soll, glaube aber, dass man sich mit Rücksicht auf ihn damit begnügen darf, für die Berechnung, die im Uebrigen von der Steifigkeit der Knotenpunkte ganz absehen kann, verhältnissmässig geringe Lastunterschiede zwischen benachbarten Knotenpunkten anzunehmen. Nähere Angaben darüber findet man in meiner Abhandlung im Civ.-Ing.

Einem neu vorgeschlagenen Tragwerke Eingang in die Praxis zu verschaffen, ist sehr schwer, wenn man nicht gerade selbst Gelegenheit zu einer passenden Bauausführung hat. Jeder Andere scheut sich, die Verantwortung für eine praktisch noch nicht erprobte Konstruktion zu übernehmen. Als ich meine Vorschläge veröffentlicht hatte, interessirten sich einige jüngere Techniker, von denen einer früher mein Assistent war, für die Konstruktion und sie thaten sich, in der Hoffnung, ein Geschäft damit zu machen, zusammen, um die Konstruktion in die Praxis einzuführen. Zu diesem Zwecke knüpften sie namentlich auch in England Verbindungen an. Die Verhandlungen schienen anfänglich Erfolg zu versprechen, scheiterten aber dann an dem Misstrauen gegen die Tragfähigkeit der Tonnenflechtwerkdächer bei einseitiger Belastung. Dieses Misstrauen ging so weit, dass die beiden grössten technischen Zeitschriften Englands die Aufnahme einer Beschreibung der Konstruktion rundweg ablehnten, mit der Begründung, dass ein solches Dach bei einseitiger Belastung notwendig einstürzen müsse.

Solchem Misstrauen gegen das Ungewohnte und noch nicht Erprobte, das sich vielleicht auch anderwärts geregt hat, ohne dass ich so genaue Kenntniss davon erhielt, kann man nicht mit theoretischen Entwicklungen, die ich längst gegeben hatte, sondern nur mit augenscheinlichen Thatsachen die Spitze abbrechen. Ich liess daher ein Tonnenflechtwerkdach in solcher Grösse, wie es die mir

zur Verfügung stehenden Mittel gestatteten, in meinem Laboratorium herstellen und prüfte es auf sein Verhalten gegen die beiden gefährlichsten Belastungsfälle, die in Betracht kommen können. Ein Blick auf Tafel II, die das Dach unter einer einseitigen Belastung von rund 90 kg auf 1 qm der Dachfläche im Lichtdruck darstellt, zeigt schon, wie wenig berechtigt jene Zweifel waren.

Der Ausführung legte ich ein Projekt zu Grunde, das von den vorher genannten Herren detaillirt ausgearbeitet worden war und das mir von ihnen freundlichst zur Verfügung gestellt wurde. Nach diesem Projekt sollte, als jene Verhandlungen in England schwebten, ein erstes Dach zum Versuche dort ausgeführt werden; es ist also dasselbe Projekt, gegen das sich das vorher geschilderte Misstrauen geregt hatte. *)

An sich waren hier schon die Abmessungen mit Rücksicht auf den ins Auge gefassten Zweck ziemlich klein gewählt worden (die Spannweite 13,8 m, die Länge 18,8 m). Ich musste sie aber natürlich noch weiter verkleinern, um die Herstellung in meiner Werkstätte zu ermöglichen. Die am stärksten beanspruchten Stäbe des Projekts sollten aus Winkeleisen von 65 mm Schenkellänge bestehen. Ich entschied mich nun dafür, alle Stäbe aus dem kleinsten im Handel vorkommenden Winkeleisen von 13 mm Schenkellänge herzustellen und verkleinerte mit Rücksicht darauf sämtliche Dimensionen im Verhältnisse 1:5. Die weniger beanspruchten und daher schwächer gehaltenen Stäbe des Projekts musste ich nun freilich, der Kosten wegen, ebenfalls aus demselben Winkeleisen anfertigen lassen. Sonst ist aber alles so genau wie möglich dem ursprünglichen Projekt in $\frac{1}{5}$ der natürlichen Grösse nachgebildet. — Die Niete musste ich besonders anfertigen lassen. Sie sind alle 3,2 mm stark, gegenüber den stärksten Niete von 19 mm des Projekts also etwas zu schwach ausgefallen. Ausserdem sind alle kalt genietet und in ihrer Festigkeit dadurch etwas geschädigt.

Jedenfalls erkennt man aus diesen Angaben, dass das ausgeführte Dach dem ursprünglichen Projekt gegenüber keineswegs verstärkt ist; denn dadurch, dass man schwächer beanspruchten Stäben einen grösseren Querschnitt gibt, als er ihnen eigentlich zukäme, erhöht man nicht die Festigkeit einer Konstruktion, die nur von den Spannungen an der gefährlichsten Stelle abhängt.

Bei der Ausführung im Kleinen kam es mir natürlich in erster Linie darauf an, die Einrichtungen so zu treffen, dass man unmittelbar einen Schluss auf das Verhalten eines in dem grössern Maassstabe ausgeführten Daches ziehen könne. Ein solcher Vergleich ist hier ohne Weiteres

möglich. Bei der einen der beiden grössern Versuchsreihen wurde das elastische Verhalten des Daches unter dem Einflusse einer concentrirten Last im mittelsten Knotenpunkte des Scheitels beobachtet. Nun ist ohne Weiteres klar, dass die von einer solchen Last in den einzelnen Stäben hervorgerufenen Spannungen ganz unabhängig von dem Maassstabe der Konstruktion sind. Denn bei allen Kräftezerlegungen kommt es nur auf die Richtungen der Stäbe und nicht auf ihre absoluten Längen an. Rechnet man mit den Momenten, so muss man auch in beiden Fällen zu demselben Ergebnisse kommen, da alle Hebelarme in demselben Maasse verkleinert sind.

Dies gilt von den Gesamtspannungen der Stäbe. Bei der Ausführung in $\frac{1}{5}$ der ursprünglich geplanten Grösse sind aber die Querschnitte der Stäbe auf $\frac{1}{25}$ vermindert, da auch die Schenkellängen (die übrigens bei den käuflichen kleinen L-Eisen ziemlich stark, nämlich von etwa 1,6 bis zu dem normalen Werthe von 2,0 mm wechseln) etwa in demselben Verhältnisse abnehmen wie die Schenkellängen. Im grossen Maassstab würde also jeder Stab ungefähr die 25-fache Gesamtspannung aufnehmen können, wie bei der Ausführung im Kleinen. Dies trifft, wie aus der Euler'schen Formel hervorgeht, auch für die auf Ausknicken beanspruchten Stäbe zu und ebenso auch für die Nietverbindungen.

Bei 5-facher Grösse ist also das gleiche Verhalten des Daches zu erwarten, wenn man an dem entsprechenden Knotenpunkte die 25-fache Last aufbringt. Natürlich erscheinen dann auch die Knotenpunktsverschiebungen und die Entfernungsänderungen zwischen entsprechenden Punkten überhaupt in 5-facher Grösse, d. h. die in verschiedenen Maassstäben ausgeführten Dächer bleiben sich auch nach der Formänderung geometrisch ähnlich, wenn sie es vorher waren, falls sich die Lasten wie die Quadrate der Maassstäbe verhalten. Dies gilt nicht nur für Einzellasten, sondern auch für beliebig zusammengesetzte Lastensysteme. Berechnet man bei solchen die Lasten dagegen nach dem Quadratmeter des Grundrisses oder der Dachfläche, so verhalten sich geometrisch ähnliche Tragkonstruktionen gleich bei gleichen Lasten auf den Quadratmeter.

Die Einzellast, die ich bei der einen grossen Versuchsreihe an dem mittelsten Scheitelknotenpunkt anbrachte, betrug 80 kg. Dies entspricht also bei der ursprünglich projektirten 5-fachen Grösse des Daches einer Last von 2000 kg. Mit Rücksicht auf die auch im grossen Maassstabe nur geringe Maschenweite von 1,88 m ist dies ohne Zweifel für ein Dach schon eine sehr erhebliche Belastung, die in der Wirklichkeit überhaupt nicht vorkommt. Es fragt sich sehr, ob man bei den ausgeführten Schwedler'schen Kuppeldächern eine so bedeutende Last an einem

*) Einer dieser Herren, Herr Ing. Eichner, hat in der Südd. Bauzeitung 1895, S. 81 die Berechnung der Stabspannungen ausführlich wiedergegeben.

einzelnen Knotenpunkt aufhängen dürfte, ohne sehr bedenkliche Erscheinungen hervorzurufen.

Bei der anderen Versuchsreihe, zu der das Lichtdruckbild Tafel II gehört, wurden alle Knotenpunkte der einen Dachhälfte mit gleichen Gewichten belastet, während die andere Seite leer blieb. Die Lasten bestanden, wie es die Tafel zeigt, aus je 3 zusammengeschürten Backsteinen des alten bayerischen Formats (von 28 cm Länge). Im Mittel aus verschiedenen Wägungen betrug das Gewicht eines solchen Bündels 12,8 kg. Auf den Quadratmeter der Dachfläche bezogen macht dies 90,4 kg aus. Ebenso gross hat man auch die Belastung in jedem grösseren Maassstabe zu wählen, um gleichartige Erscheinungen zu erzielen.

Wenn es auch im Allgemeinen misslich ist, aus Versuchen an einem Modell auf eine Ausführung im grossen Maassstabe zu schliessen, so liegen die Verhältnisse hier doch so einfach und durchsichtig, dass ein solcher Schluss im grossen Ganzen sicher nicht zu erheblichen Fehlern führen kann. Ausserdem kann auch das von mir geprüfte Dach kaum noch als ein Modell bezeichnet werden, da es immerhin schon ziemlich beträchtliche Abmessungen (2,76 m Spannweite, 3,76 m Länge) hat. Ich habe auch in der That die Absicht, es jetzt, nach Beendigung der Versuche, zur Ueberdeckung eines kleinen Anbaues im Hofe des Laboratoriums zu verwenden. Desshalb unterliess ich es auch, die Lasten über das angegebene und für Dachkonstruktionen sehr reichliche Maass hinaus zu steigern, bis sich etwa dauernde Verbiegungen oder ein Bruch eingestellt hätten. Es wäre mir wie eine Barbarei vorgekommen, die von dem geschickten Werkmeister des Laboratoriums in langer mühevoller Arbeit sauber hergestellte Tragkonstruktion ohne zwingende Gründe der Vernichtung Preis zu geben.

Auf der einen Seite ist das Dach an eine Bretterwand angeschlossen, die bei einer grösseren Ausführung durch eine Mauer oder eine verglaste Eisenwand zu ersetzen wäre. Nach vorn ist an Stelle eines solchen Abschlusses ein Binder angeordnet. Natürlich hätte man auch die Wand auf der Hinterseite durch einen Binder ersetzen können und umgekehrt; es kam mir aber darauf an, beide Arten des Abschlusses an derselben Konstruktion ausführen zu lassen. Unten ruht das Dach auf einem Holzrahmen.

Die Herstellung erfolgte in der Art, dass zuerst alle in demselben Querschnitte liegenden, zur Tonnenaxe rechtwinklig stehenden Stäbe zu einer „Rippe“ zusammengenietet wurden, an der auch die Knotenpunktplättchen befestigt wurden. Nachdem auch der Abschlussbinder, der am meisten Arbeit verursachte, hergestellt war, wurden alle Rippen und der Binder auf den inzwischen vorgerich-

teten Rahmen aufgestellt. Dann wurden die parallel zur Längsrichtung des Daches verlaufenden „Pfettenstäbe“ aufgebracht und vernietet. Die Diagonalstäbe wurden zuletzt eingezogen.

Für eine Ausführung im grossen Maassstabe wäre ein solches Vorgehen freilich kaum möglich. Eine aus dem Verbands isolirte Rippe ist so schwank, dass man sie fertig montirt kaum aufziehen und aufstellen könnte. Der Werkmeister liebte es, die Rippen aus diesem Grunde mit Schlangen zu vergleichen. Sobald die Rippen durch die Pfetten verbunden waren, änderte sich das Bild indessen schon so erheblich, dass sich ein Mann während der Arbeit unbesorgt auf die Konstruktion lehnen konnte. Die volle Steifigkeit trat aber natürlich erst ein, als auch die Diagonalstäbe eingezogen waren.

Bei einer Ausführung in einigermaßen grossem Maassstabe müsste man jedenfalls so wie bei der Aufstellung eines Binderdaches von einem Ende her vorgehen, das Montirungsgerüst hierauf in der Richtung der Tonnenaxe verschieben und in dieser Weise zum anderen Ende hin fortschreiten. Gegen einen solchen Arbeitsvorgang lässt sich aus den hier gewonnenen Erfahrungen kein Bedenken ableiten.

Die Knotenpunkte des fertigen Daches wurden in übersichtlicher Weise mit Ordnungsnummern versehen. Die Auflagerknotenpunkte brauchten keine Nummern zu erhalten. Wenn die eine Hälfte des Daches belastet wurde, bog sich zwar auch das Längsholz des Rahmens auf der belasteten Seite ein wenig durch, so dass auch die Auflagerknotenpunkte nicht ganz fest blieben. Diese geringen Verschiebungen sind aber ohne besonderes Interesse und da es schwierig gewesen wäre, sie mit den vorhandenen Einrichtungen zu messen, wurden sie ganz unbeachtet gelassen.

Zu jeder Rippe gehören 9 freie Knotenpunkte, denen beim Binder 9 Knotenpunkte des Obergurts entsprechen. Auf dem Binder wurden diese fortlaufend mit 1, 11, 21 bis 91 bezeichnet, die der nächsten Rippe mit 2, 12, 22 bis 92 u. s. f. Hierdurch ist der Vortheil erreicht, dass alle Knotenpunkte mit gleicher Einerstelle zur selben Rippe, alle mit gleicher Zehnerstelle zur selben Pfette gehören. Man kann daher aus der Ordnungsnummer die Lage jedes Knotenpunktes sofort erkennen, ohne dass man nöthig hätte, eine Uebersichtszeichnung zu Rathe zu ziehen. Der mittelste Scheitelknotenpunkt z. B. gehört zur Rippe 6 und zur Pfette 4, hat daher die Ordnungsnummer 46.

Für jede der beiden Belastungen, unter denen das Dach geprüft wurde, musste die Verschiebung jedes einzelnen Knotenpunktes in lothrechter und wagrechter Richtung gemessen werden, um ein Bild von den elastischen Formänderungen des ganzen Tragwerks zu erhalten. Wenn

die Einzellast in der Mitte aufgebracht war, genügte es indessen aus Symmetriegründen, die Messungen nur auf eine Dachhälfte zu erstrecken. Für die der Holzwand zugeordneten letzten Rippen wurde ebenfalls von einer Messung abgesehen, obschon hier keine vollständige Symmetrie besteht, da man auf der einen Seite den Binder und auf der anderen Seite die Holzwand hat. Der Unterschied ist aber auf beiden Seiten nicht sehr erheblich und die ausgeführten Messungen reichen daher vollständig hin, von dem elastischen Verhalten des Daches ein deutliches Bild zu geben.

Von den wagrechten Verschiebungen kommen nur jene senkrecht zur Tonnenaxe in Betracht. Parallel zur Tonnenaxe können nur ganz geringfügige Bewegungen im Betrage der Verkürzungen oder Verlängerungen der Pfettenstäbe zu Stande kommen, die sich mit einfacheren Hilfsmitteln nicht feststellen lassen. Die in der Querschnittsebene erfolgenden wagrechten Verschiebungen sind natürlich erheblich grösser. Sie wurden dadurch gemessen, dass man einen Bauschinger'schen Rollenapparat auf einem festen Stativ anbrachte und eine Stange mit dem einen Ende auf dem Rollenumfang ruhen liess, deren anderes Ende gelenkig mit dem zu untersuchenden Knotenpunkte verbunden wurde. Die Stange ging natürlich horizontal in der Richtung senkrecht zur Tonnenaxe, also in der Richtung der Verschiebung, die gemessen werden sollte. An dem Gradbogen des Rollenapparats konnten die Verschiebungen mit Hilfe eines Nonius auf Hundertel *mm* abgelesen werden.

Die senkrechten Verschiebungen wurden mit Hilfe eines Kathetometers gemessen, dessen Nonius Zwanzigstel *mm* direkt abzulesen gestattet. Darüber hinaus konnte noch bis auf einige Hundertel *mm* geschätzt werden. Dem entsprechend sind in den nachfolgenden Tabellen beide Verschiebungs-Componenten auf Hundertel *mm* angegeben. Wenn man bei einer etwaigen weiteren Verwerthung der gegebenen Zahlen sicher gehen will, muss man sie aber zuvor auf Zehntel *mm* abrunden, da nur deren Genauigkeit ziemlich verbürgt werden kann.

Bei der Messung wurde stets so vorgegangen, dass der Rollenapparat und das Kathetometer zuerst für den unbelasteten Zustand des Daches abgelesen wurden. Dann wurde belastet, das Kathetometer neu eingestellt und wieder abgelesen. Nachdem dies geschehen war, wurde die Last abgenommen, das Kathetometer von Neuem eingestellt und nochmals abgelesen. Wenn beide Instrumente innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler wieder denselben Stand einnahmen wie bei der ersten Ablesung, war die Messung der betreffenden elastischen Verschiebung erledigt. In derselben Weise musste dann für alle übrigen Knotenpunkte fortgeföhren werden. Die Ausführung der Messungen wurde dadurch ziemlich zeitraubend, umsomehr als

der beschränkte Raum, in dem sie vorgenommen werden mussten, manche Hindernisse in den Weg legte. Namentlich die häufige Belastung und Entlastung der einen Dachhälfte machte viele Mühe.

Die Ergebnisse dieser Verschiebungsmessungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Horizontale Verschiebungen, die nach aussen hin gehen, sind positiv, die nach der Tonnenaxe hin gerichteten also negativ bezeichnet. Bei den Knotenpunkten der Firstpfette 54, für die diese Festsetzung keinen Sinn hat, sind die Vorzeichen so gewählt wie bei der belasteten Dachhälfte. Bei dem anderen Belastungsfall (80 *kg* an Knotenpunkt 46) kommen natürlich keine horizontalen Verschiebungen der Knotenpunkte der Firstpfette vor. Von den vertikalen Verschiebungen sind die nach unten hingehenden mit dem positiven Vorzeichen versehen.

Tabelle

über die Knotenpunktverschiebungen des Tonnenflechtwerkdaches.
(Vgl. hierzu die Tafeln III und IV.)

Knotenpunkt No.	Verschiebungen in <i>mm</i>			
	bei der Belastung der zu den Pfetten 1-4 gehörenden Dachhälfte		bei der Belastung des Scheitelknotenpunktes No. 46 mit 80 <i>kg</i>	
	vertical	horizontal	vertical	horizontal
1	+ 1,87	- 0,63	0,00	- 0,02
2	+ 1,44	+ 0,18	0,00	+ 0,03
3	+ 1,21	+ 0,42	+ 0,12	+ 0,05
4	+ 0,79	+ 0,81	+ 0,06	+ 0,04
5	+ 0,63	+ 1,13	0,00	+ 0,05
6	+ 0,71	+ 1,08	0,00	+ 0,11
7	+ 0,50	+ 1,15	0,00	+ 0,11
8	+ 0,53	+ 1,11	0,00	0,00
11	+ 1,75	- 0,49	+ 0,23	- 0,04
12	+ 1,90	- 0,30	+ 0,07	+ 0,09
13	+ 1,65	- 0,14	0,00	+ 0,22
14	+ 1,63	+ 0,26	- 0,14	+ 0,31
15	+ 1,48	+ 0,33	- 0,17	+ 0,36
16	+ 1,42	+ 0,30	- 0,15	+ 0,37
17	+ 1,40	+ 0,33	- 0,14	+ 0,37
18	+ 1,28	+ 0,30	- 0,10	+ 0,38
21	+ 1,70	- 0,29	+ 0,28	0,00
22	+ 1,97	- 0,36	+ 0,04	+ 0,15
23	+ 2,51	- 0,41	- 0,21	+ 0,31
24	+ 2,39	- 0,44	- 0,35	+ 0,49
25	+ 2,47	- 0,37	- 0,54	+ 0,61
26	+ 2,39	- 0,46	- 0,51	+ 0,67
27	+ 2,48	- 0,43	- 0,48	+ 0,64
28	+ 1,77	- 0,40	- 0,38	+ 0,52
31	+ 1,60	- 0,25	+ 0,35	- 0,01
32	+ 2,02	- 0,47	+ 0,39	+ 0,03
33	+ 2,60	- 0,54	+ 0,46	+ 0,06
34	+ 2,61	- 0,59	+ 0,47	+ 0,16
35	+ 2,84	- 0,86	+ 0,25	+ 0,27
36	+ 3,10	- 0,70	+ 0,07	+ 0,39
37	+ 2,74	- 0,81	+ 0,27	+ 0,28
38	+ 2,61	- 0,68	+ 0,42	+ 0,16
41	+ 1,43	- 0,02	+ 0,25	0,0

Knotenpunkt No.	Verschiebungen in <i>mm</i>			
	bei der Belastung der zu den Pfetten 1—4 gehören- den Dachhälfte		bei der Belastung des Scheitelknotenpunktes No. 46 mit 80 <i>kg</i>	
	vertical	horizontal	vertical	horizontal
42	+ 1,61	— 0,24	+ 0,63	0,0
43	+ 1,82	— 0,39	+ 0,93	0,0
44	+ 2,04	— 0,46	+ 1,81	0,0
45	+ 1,80	— 0,46	+ 2,50	0,0
46	+ 1,83	— 0,58	+ 3,50	0,0
47	+ 1,91	— 0,49	+ 2,03	0,0
48	+ 1,73	— 0,48	+ 1,78	0,0
51	+ 0,88	+ 0,30	—	—
52	+ 0,45	+ 0,41	—	—
53	— 0,10	+ 0,52	—	—
54	— 0,29	+ 0,57	—	—
55	— 0,28	+ 0,92	—	—
56	— 0,40	+ 0,79	—	—
57	— 0,43	+ 0,83	—	—
58	— 0,53	+ 0,69	—	—
61	+ 0,47	+ 0,29	—	—
62	+ 0,15	+ 0,72	—	—
63	— 0,37	+ 0,79	—	—
64	— 0,68	+ 1,05	—	—
65	— 0,88	+ 1,10	—	—
66	— 0,95	+ 1,13	—	—
67	— 0,85	+ 1,18	—	—
68	— 0,85	+ 1,15	—	—
71	+ 0,22	+ 0,59	—	—
72	+ 0,05	+ 0,64	—	—
73	— 0,22	+ 0,67	—	—
74	— 0,25	+ 0,74	—	—
75	— 0,37	+ 0,74	—	—
76	— 0,45	+ 0,92	—	—
77	— 0,44	+ 0,78	—	—
78	— 0,40	+ 0,74	—	—
81	+ 0,10	+ 0,73	—	—
82	+ 0,07	+ 0,70	—	—
83	+ 0,03	+ 0,50	—	—
84	+ 0,07	+ 0,35	—	—
85	+ 0,02	+ 0,34	—	—
86	0,0	+ 0,21	—	—
87	+ 0,04	+ 0,20	—	—
88	+ 0,01	+ 0,16	—	—

Auf den Tafeln III und IV sind die Knotenpunktverschiebungen für beide Belastungsfälle nach der vorstehenden Tabelle in 36facher Vergrößerung eingetragen. Die Verbindungslinien der dadurch erhaltenen Punkte geben in entsprechender Verzerrung die Gestalt der deformirten Rippen an. Man erlangt dadurch einen guten Ueberblick über das elastische Verhalten des ganzen Daches unter den gewählten Lasten. Es ist kaum nöthig, noch besonders zu betonen, dass die Verbiegungen der Rippen in Wirklichkeit so gering waren, dass sie bei oberflächlicher Betrachtung überhaupt nicht wahrgenommen werden konnten.

Nach dem Satze von Maxwell über die Gegenseitigkeit der Verschiebungen kann man aus den auf Tafel III

dargestellten und in der vorausgehenden Tabelle aufgeführten Knotenpunktverschiebungen für die Belastung des Scheitelknotenpunktes 46 die ungefähre Grösse der Einsenkung dieses Knotenpunktes bei jeder beliebigen gegebenen Belastung berechnen. Genau wäre dies allerdings nur möglich, wenn sich die Messungen auch auf die Rippen 9 und 10 erstreckt hätten. Da diese Rippen der festen Wand benachbart sind, muss man annehmen, dass die Knotenpunktverschiebungen bei ihnen geringer sind als bei den ihnen entsprechenden auf der Vorderseite des Daches, wo die Wand durch den Binder ersetzt ist, der nach Tafel III merklich nachgegeben hat.

Wendet man diese Betrachtung auf den in Tafel IV dargestellten Fall der einseitigen Belastung des Daches an, so erhält man eine Controle für die Genauigkeit der Messungen. Zu diesem Zwecke hat man die Summe der Vertikalverschiebungen v auf Tafel III für die Rippen 2 bis 8 zu bilden, hierzu für die Rippen 9 und 10 die für die Rippen 2 und 3 beobachteten Werthe in entsprechender Abminderung schätzungsweise hinzuzufügen und das erhaltene Resultat im Verhältnisse 12,8:80 zu verkleinern, weil im Falle der Tafel IV die Knotenpunkte der einen Dachhälfte nur mit 12,8 *kg* und nicht wie der Scheitelpunkt bei Tafel III mit 80 *kg* belastet sind. Das Resultat hängt natürlich davon ab, wie man die Rippen 9 und 10 einschätzt; es wird aber nicht viel von 2 *mm* abweichen. Als gemessene Senkung des Scheitelknotenpunktes 46 ist auf Tafel IV $v = + 1,83$ *mm* eingetragen. Wahrscheinlich wurde diese Senkung aber etwas zu klein gemessen, denn für den benachbarten Knotenpunkt 47, von dem man eigentlich eine kleinere Senkung erwarten sollte, ist $v = + 1,91$ *mm* angegeben. erinnert man sich, dass die Genauigkeit der Messungen jedenfalls nicht höher als auf etwa 0,1 *mm* veranschlagt werden kann und beachtet man, dass die zur Belastung verwendeten Steinbündel im Gewicht merklich von einander abwichen (12,7 bis 12,9 *kg* im Mittel 12,8 *kg*), so kann man die Uebereinstimmung der auf den beiden Tafeln dargestellten Messungsreihen immer noch als hinreichend betrachten. Als Präzisionsmessungen sind aber natürlich beide nicht aufzufassen; sie sollten nur eine allgemeine Uebersicht geben und dazu sind sie reichlich genau genug.

Ausser diesen Formänderungen habe ich zum Schlusse noch die Spannungen für einige Stäbe, die bei einer Belastung des Scheitelknotenpunktes 46 mit 80 *kg* auftraten, durch einen direkten Versuch gemessen. Ich hatte ursprünglich die Absicht, diese Messungen auf eine grössere Zahl von Stäben auszudehnen. Die Messung gestaltete sich aber so umständlich, dass ich mich schliesslich damit begnügte, sie nur für die Stäbe der Pfettenreihe 4 im Scheitel, die zweifellos am meisten beansprucht sind, durchzuführen.

Im Princip ist die Sache zwar ganz einfach. Man braucht nur mit Hilfe des Spiegelapparates die elastische Längenänderung, die beim Aufbringen der Last zu Stande kommt, für jeden Stab zu bestimmen und sie mit jener zu vergleichen, die ein Stab von demselben Querschnitt erfährt, wenn er einem Zugversuche in der Werder'schen Maschine unterworfen wird. So bin ich auch im Allgemeinen vorgegangen. Erschwert wird die Ausführung des Versuchs aber dadurch, dass sich die Stäbe zugleich verbiegen, so dass die elastische Längenänderung für jede Faser von verschiedener Grösse ist. Natürlich handelt es sich dann um die Spannung im Schwerpunkte des Querschnittes. Bei den kleinen Profilen ist es aber schwer möglich, die Messung genau in der Schwerpunkthöhe vorzunehmen.

Bei den Stäben der Firstpfette war die Messung natürlich am leichtesten auszuführen. Der Schwerpunkt des Profils liegt etwa um 4,0 mm oberhalb der Unterkante. Ich liess nun zunächst den Bauschinger'schen Apparat so an den Stab befestigen, dass die Längenänderung einer Faser ermittelt wurde, die um etwa 4,5 mm (wie sich bei möglichst sorgfältigem Nachmessen herausstellte) über der Unterkante des Profils lag. Ausserdem mass ich noch mit Hilfe eines andern Apparates die Längenänderung in 45 mm Abstand von der Unterkante. Eine Faser von diesem Abstände kommt in dem Profile zwar überhaupt nicht vor, da es im ganzen nur 13 mm Höhe hat. Die gemessene Längenänderung hat nur die Bedeutung, dass sie bei einer gedachten Fortsetzung des Profils bis zu dieser Höhe zu erwarten wäre. Sie sollte mir über die Spannungsvertheilung im Querschnitte Aufschluss geben. Aus dem Vergleiche liess sich dann entnehmen, wie gross die Längenänderung für die Schwerpunktsfaser zu setzen ist.

Aehnlich verfuhr ich dann auch mit dem zum Vergleiche hergestellten Probestabe, der ganz wie die Pfetten selbst aus zwei \perp Eisen von 13 mm Schenkellänge zusammengenietet war und in der Werder'schen Maschine einem Zugversuche unterworfen wurde. Es zeigte sich auch hier, dass bei dem kleinen Profile ein genau centrischer Kraftangriff und hiermit eine gleichförmige Spannungsvertheilung nicht zu erreichen war. Die Messungen wurden mit demselben Apparate und in genau derselben Anordnung vorgenommen wie vorher bei den Pfetten selbst. Auch die Berechnung der Dehnung in der Schwerpunktsfaser erfolgte in derselben Weise wie vorher.

Nachdem diese Messungen vorlagen, ergaben sich die Stabspannungen im Dache aus einfachen Vergleichen. Natürlich sind die Stäbe der Firstpfette sämmtlich gedrückt. Die Spannungen betragen

für Stab 45—46: 179 kg im Ganzen oder 187 atm
 „ „ 44—45: 105 „ „ „ „ 109 „

für Stab 43—44: 40 kg im Ganzen oder 41 atm
 „ „ 42—43: 16 „ „ „ „ 17 „
 „ „ 41—42: 5 „ „ „ „ 6 „

Die Spannungen sind also nur sehr mässig. Man hätte die Last im Scheitelknotenpunkte ganz bedeutend steigern dürfen, ohne bleibende Formänderungen herbeizuführen. Es scheint, dass bei diesen Flechtwerkdächern die Rücksicht auf die zulässige Grösse der Knotenpunktverschiebungen, die im Vergleich zu den damit verbundenen Spannungen sehr beträchtlich sind, für die Wahl der Stabquerschnitte entscheidend sein muss.

Interessant ist ein Vergleich der gemessenen Stabspannungen mit jenen, die sich aus der Rechnung ergeben, wenn man keine Rücksicht auf die durch die Steifigkeit der Knotenpunkte bewirkte Lastvertheilung nimmt. Die Last von 80 kg im Scheitel würde dann in zwei Componenten in den sich zu beiden Seiten anschliessenden Balkenebenen zu zerlegen sein. Jede dieser Componenten ist nicht ganz 4-mal so gross als die Last selbst, und zwar ziemlich genau 300 kg. Ein Balken, dessen Spannweite das 10fache der Höhe (von rund 38 cm) beträgt und der in 10 quadratische Fächer mit doppelten steifen Diagonalen eingetheilt ist, erfährt unter einer in der Mitte angebrachten Last von 300 kg Stabspannungen in den Gurten, die vom Auflager aus nach der Mitte hin der Reihe nach

75, 225, 375, 525, 675 kg

betragen. Die Firstpfette dient aber als Gurt für zwei Balken, für die beide die vorstehend angeführten Bedingungen zutreffen. Auf die Stäbe dieser Pfette kommen demnach Druckspannungen, die doppelt so gross sind als vorher berechnet.

Vergleicht man damit die direkt gemessenen Spannungen, so findet man

für Stab
 45—46 berechnet = 1350 kg, gemessen - 179 kg oder 13%
 44—45 „ „ 1050 „ „ 105 „ „ 10%
 43—44 „ „ 750 „ „ 40 „ „ 5%
 42—43 „ „ 450 „ „ 16 „ „ 4%
 41—42 „ „ 150 „ „ 5 „ „ 3%

Die von mir längst vorausgesagte starke Verminderung der Stabspannungen in Flechtwerken durch die Ausgleichung der Last vermöge der Steifigkeit der Knotenpunkte hat sich demnach vollkommen bestätigt, und zwar in höherem Maasse, als ich dies selbst erwartet hatte. Man wird nun nicht mehr an der Zulässigkeit zweifeln, für die Berechnung nur verhältnissmässig geringe Lastunterschiede zwischen benachbarten Knotenpunkten anzunehmen, weil durch die Ausserachtlassung der lastausgleichenden Wirkung der steifen Knotenpunktverbindungen schon für eine ausreichende Sicherheit gesorgt ist.

Freilich sind, wie ich schon vorher erwähnte, bei

diesen Flechtwerkconstructionen nicht die Spannungen allein zu fürchten, sondern auch die unter Umständen über das zulässige Maass hinausgehenden rein elastischen Verschiebungen der Knotenpunkte. Ueber diese gibt zwar die vorausgegangene Tabelle ausführlichen Aufschluss; es wird aber von Interesse sein, auch hier einen Vergleich der durch direkte Messung gefundenen Werthe mit jenen anzustellen, die man durch die Rechnung erhält, wenn man von der Steifigkeit der Knotenpunkte wiederum absieht.

Zur Berechnung der Senkung des Scheitelknotenpunktes 46, wenn dieser mit 80 *kg* belastet ist, steht uns unter der angegebenen Voraussetzung die aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten von Mohr abgeleitete Formel

$$x = \frac{1}{P} \sum S^2 r$$

zur Verfügung, worin x die gesuchte elastische Senkung ist, P die Last von 80 *kg*, S die für jeden Stab berechnete Spannung bedeuten und $r = \frac{1}{EF}$, d. h. für jeden Stab gleich der Stablänge dividirt durch Elasticitätsmodul und Querschnitt, zu setzen ist.

Die berechneten Spannungen S für die Stäbe der Pfette 4 sind oben angegeben; die Pfetten 3 und 5 erfahren Zugspannungen von der halben Grösse. Die Spannung in jedem Diagonalstab der beiden sich an den First anschliessenden Balken ist gleich 106 *kg* zu setzen und die Spannungen in den Rippenstäben sind zu vernachlässigen. Alle übrigen Stäbe sind bei gelenkförmigen Knotenpunkten spannungslos, abgesehen von jenen im Binder. Auf den Binder will ich indessen jetzt keine Rücksicht nehmen, mir ihn vielmehr durch eine feste Wand, wie auf der andern Seite des Daches, ersetzt denken.

Die Grösse r bestimmt sich am einfachsten aus dem von mir angestellten Zugversuche in der Werder'schen Maschine mit einem aus zwei kleinen \perp Eisen zusammengesetzten Probestabe. Danach war r für eine Messlänge von 27 *cm* gleich $1,29 \cdot 10^{-5} \text{ cm/kg}$. Dies entspricht, nebenbei bemerkt, einem Elasticitätsmodul des Materials (wenn man 2 *mm* als Schenkelstärke annimmt) von knapp 2200 000 *atm*.

Für die Pfettenstäbe haben wir bei 38 *cm* Länge demnach $r = 1,81 \cdot 10^{-5} \text{ cm/kg}$ und für die Diagonalstäbe mit 53,6 *cm* Länge und halb so grossem Querschnitt $r = 5,12 \cdot 10^{-5} \text{ cm/kg}$ zu setzen.

Setzt man das alles in die Mohr'sche Formel ein, so erhält man

$$x = \frac{1}{80} \left\{ 1,29 \cdot 10^{-5} \cdot \left[2 (1350^2 + 1050^2 + 750^2 + 450^2 + 150^2) + 4 (675^2 + 525^2 + 375^2 + 225^2 + 75^2) \right] + 40 \cdot 5,12 \cdot 10^{-5} \cdot 106^2 \right\}$$

Beim Ausrechnen findet man

$$x = 2,08 \text{ cm}$$

In Wirklichkeit betrug die Senkung des Scheitelknotenpunktes aber nur 3,5 *mm*, also nur 17% der berechneten. Diese Ziffer steht in guter Uebereinstimmung mit den Ergebnissen der Spannungsmessungen. Denn wenn sich auch die Spannungen in der Firstpfette, wie sich vorher zeigte, in weit stärkerem Verhältniss vermindern, so ist eine ebenso starke Verminderung bei der elastischen Einsenkung nicht zu erwarten, weil in Wirklichkeit auch noch Stäbe in Spannung gerathen, die bei gelenkförmigen Knotenpunkten spannungslos wären, und weil ferner bei der Mohr'schen Formel nur die Hauptspannungen, nicht auch die Secundärspannungen der Stäbe berücksichtigt sind.

Wie hoch die grösste Spannung war, die mit Rücksicht auf die Verbiegungen in dem Materiale überhaupt auftrat, vermag ich aus den Versuchen übrigens nicht genau zu schliessen. Voraussichtlich trat sie im Stabe 45—46 unmittelbar am Knotenpunkte 46 auf. Für diesen Stab stehen mir zwei Messungen zur Verfügung. Nach der einen herrschte in 4,5 *mm* Höhe von der Unterkante eine mittlere spezifische Druckspannung von 182 *atm*. Nach der andern wäre in 45 *mm* Höhe von der Unterkante, wenn man sich den Querschnitt bis dahin fortgesetzt denkt, eine spezifische Zugspannung von 209 *atm* zu erwarten gewesen. Für die Schwerpunktsfaser war daraus schon die spezifische Druckspannung zu 187 *atm* berechnet worden und für diese Faser ist die Rechnung auch ganz einwandfrei, da die Spannung in der Schwerpunktsfaser für alle Querschnitte desselben Stabes gleich gross sein muss. In derselben Weise würde man für die oberste Faser des Stabes eine spezifische Druckspannung von 100 *atm* und für die stärkst gespannte unterste Faser eine Druckspannung von 225 *atm* finden. Diese Zahlen haben aber nur die Bedeutung von Mittelwerthen für die ganze gemessene Länge des Stabes von 27 *cm*. An der gefährlichsten Stelle ist daher jedenfalls die Beanspruchung höher als 225 *atm* gewesen. Immerhin scheint aus dieser Betrachtung hervorzugehen, dass die Zusatzspannungen infolge der Verbiegungen der Stäbe gegenüber den tatsächlich auftretenden axialen Spannungen keine grössere Rolle als bei andern Eisenconstructionen spielen. — Die Messungen der Knotenpunktverschiebungen geben zwar noch einige Anhaltspunkte zu Rechnungen über die Stabverbiegungen. Ich sehe aber davon ab, solche Rechnungen hier durchzuführen, da sie kein genaues Resultat versprechen und weil ich dieser Arbeit vor allen Dingen, den Charakter einer rein experimentellen Untersuchung, die von allen hypothetischen Zuthaten frei ist, bewahren möchte.

Es würde mich freuen, wenn die eingehende Prüfung

dieses ersten Tonnenflechtwerkdaches dazu führen sollte, das Misstrauen oder wenigstens die Gleichgültigkeit, die man dieser Konstruktion seither entgegenbrachte zu beseitigen. Zur Ueberdeckung von Sälen, Ausstellungshallen, Palmenhäusern u. s. w. verdienen die Tonnen-

flechtwerke dieselbe Bevorzugung, die man den Schwedlerschen Kuppelflechtwerken bei kreisförmigen Grundrissen heute überall einräumt. Dasselbe gilt nach meiner Ueberzeugung auch von den Flechtwerk-kuppeln über quadratischen Grundrissen, die ich früher empfohlen habe.

III. Versuche über die Ausschläge schnell umlaufender Wellen.

Jedermann weiss, wie störend sich die Centrifugalkräfte bei schnell umlaufenden Wellen bemerklich zu machen pflegen. Trotz aller Mühe gelingt es niemals vollständig, die auf der Welle sitzenden Körper genau zu centriren, so nämlich, dass die durch die Zapfenmittelpunkte gelegte Umdrehungsaxe mit einer durch den Schwerpunkt gehenden Hauptträgheitsaxe des ganzen rotirenden Systems zusammenfällt. Die unvermeidlichen Ausführungsfehler bringen unausgeglichene Centrifugalkräfte hervor, die mit dem Quadrate der Geschwindigkeit zunehmen, also erst bei grössern Umlaufzahlen erhebliche Werthe erreichen, dann aber freilich auch so schnell anwachsen, dass man über eine gewisse obere Grenze der Geschwindigkeit in der Regel nicht hinausgehen darf, ohne sehr bedenkliche Erscheinungen hervorzurufen.

Wenn die Umdrehungsaxe zwar durch den Schwerpunkt geht, die Hauptträgheitsaxe aber nicht ganz mit ihr zusammenfällt, setzen sich die Centrifugalkräfte zu einem resultirenden Kräftepaare zusammen. Bei hinreichender Geschwindigkeit wird das Kräftepaar gross genug, um eine merkliche Verbiegung der Welle herbeizuführen. Diese Verbiegung erfolgt aber in solchem Sinne, dass die Hauptträgheitsaxe der Umdrehungsaxe genähert wird. Die Ursache der Erscheinung wird also durch die von ihr erzielte Wirkung selbst vermindert, so dass ein übermässiges Anwachsen des durch die Centrifugalkräfte hervorgerufenen Kräftepaares nicht zu befürchten ist. Um anfängliche geringe Richtungsunterschiede zwischen Umdrehungsachse und Hauptträgheitsaxe braucht man sich daher auch bei den am schnellsten laufenden Wellen nicht weiter zu kümmern.

Ganz anders steht es, wenn der Schwerpunkt nicht auf der Umdrehungsaxe liegt. Die Centrifugalkräfte setzen sich dann (abgesehen von dem vorher erwähnten Kräftepaare, das daneben auftreten kann) zu einer durch den Schwerpunkt gehenden Resultirenden zusammen, die ebenfalls bei hinreichender Steigerung der Geschwindigkeit gross genug wird, um eine merkliche Verbiegung der Welle herbei-

zuführen. Die Kraft geht aber hier nach aussen und die Verbiegung der Welle vergrössert daher den Abstand des Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe. Die resultirende Centrifugalkraft wächst demnach sogar noch schneller als mit dem Quadrate der Umlaufzahl an.

Selbst wenn die Welle ursprünglich ganz genau centrirt war, kann sie bei einer höhern Geschwindigkeit zerstört werden. Es lässt sich nämlich beim Gange einer Maschine nicht vermeiden, dass gelegentlich kleine Erschütterungen vorkommen, wodurch die Welle ein klein wenig seitlich ausgebogen wird. Sobald die Centrifugalkräfte, die in dieser Lage auftreten, hinreichen, um die Ausbiegung aufrecht zu erhalten, nützt die ursprüngliche Centrirung nichts mehr und sobald man die Geschwindigkeit noch etwas weiter steigert, wächst eine einmal durch zufällige Umstände herbeigeführte geringe Ausbiegung immer weiter an, bis der Bruch erfolgt oder die Welle an irgend einer Führung anschlägt.

Dies Alles ist seit langer Zeit wohlbekannt. Den zuletzt beschriebenen Vorgang hat noch im vorigen Jahre Herr Prof. A. Ritter*) für eine Welle behandelt, auf der gar kein Drehkörper aufgekeilt ist. Die von ihm berechnete Geschwindigkeit, die nicht überschritten werden darf, ohne den Bruch der Welle herbeizuführen, entspricht jener, die ich später als die kritische Geschwindigkeit bezeichnet habe.

Bis vor Kurzem galten Betrachtungen dieser Art überall unbestritten als richtig, obschon man gelegentlich Beobachtungen an schnell laufenden Wellen machte, die sich damit nicht vereinigen liessen. Es scheint ein Verdienst von de Laval zu sein, solche Beobachtungen zuerst systematisch angestellt und für die Konstruktion schnell laufender Maschinen richtig benutzt zu haben. Dadurch gelang es ihm, in seiner Dampfturbine Umdrehungszahlen zu erreichen, die früher für unmöglich gehalten wurden.

Soviel mir bekannt ist, hat Herr de Laval seine Versuche mit schnell umlaufenden Wellen nicht veröffent-

*) Zeitschrift d. Ver. deutscher Ing. 1894. S. 752.

licht. In den Beschreibungen, die mir von der Laval'schen Dampfturbine zu Gesicht kamen, wird über diesen Punkt meist nur mit flüchtigen und den Kern der Sache keineswegs treffenden Bemerkungen hinweggegangen. Herr Prof. Wijkander, Direktor des Polytechnikums in Goteborg, theilte mir bei einem Besuche, mit dem er mein Laboratorium im letzten Sommer beehrte, freundlichst mit, dass sein Landsmann, Herr de Laval in der That ausgedehnte Versuche über die Schwingungen schnell rotirender Wellen angestellt habe, ehe er zur Konstruktion seiner Turbine schritt; sonst habe ich aber darüber nichts erfahren können.

Durch die Einführung der Laval'schen Turbinen in die Praxis ist indessen die Thatsache, dass sich schnell rotirende Wellen ganz anders verhalten, als aus den vorhin erörterten Betrachtungen hervorzugehen schien, in weiteren Kreisen schnell bekannt geworden. Ich selbst wurde im Frühjahr 1895 von Herrn Ingenieur L. Klein, jetzt in Saarbrücken, damals Assistent an der hiesigen Hochschule, darauf aufmerksam gemacht. Herr Klein hatte im hiesigen Bezirksverein des Vereins Deutscher Ingenieure einen Vortrag über die Laval'schen Turbinen gehalten. Er suchte mich, da ihm bei dieser Gelegenheit die vorher besprochenen landläufigen Anschauungen über die Wirkung der Centrifugalkräfte an schnell rotirenden Wellen entgegengehalten wurden, nachher auf, um meinen Rath darüber einzuholen, wie die in der Praxis beobachteten Erscheinungen zu erklären seien. Zugleich stellte er selbst mit einfachen Hilfsmitteln Versuche an, die ihm dieselben Erscheinungen ergaben, wie sie bei der Welle der Laval'schen Turbine auftreten.

Der Vortrag des Herrn Klein ist in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure*) abgedruckt. In einer nachträglich eingefügten Fussnote dieser Veröffentlichung wird auch die richtige Erklärung für die Erscheinung, um die es sich hier handelt, erwähnt. Mit der im Texte selbst gegebenen Erläuterung vermag ich mich freilich nicht einverstanden zu erklären, denn die Mechanik lehrt keineswegs — wie dort gesagt wird —, dass ein sich selbst überlassener frei rotirender Körper sich stets auf die durch den Schwerpunkt gehende Hauptachse der freien Drehung einstellt. Wie sich die Drehaxe eines solchen Körpers im Laufe der Zeit verschiebt, lehrt vielmehr die von Poincot gegebene lichtvolle Darstellung, in der von der „Polodie“ und der „Herpolodie“ Gebrauch gemacht wird. Dadurch wird indessen das erhebliche Verdienst des Herrn Klein um die Klärung dieser Frage, die er mit zäher Energie verfolgte, in keiner Weise geschmälert.

Die wiederholten Besprechungen, die ich mit Herrn

Klein hierüber führte, veranlassten mich schliesslich zu einem tieferen Nachdenken über das ganze Problem, wodurch ich endlich zur richtigen Deutung des Vorgangs geführt wurde. Es gelang mir, die ganze Erscheinung aus den einfachen Grundgleichungen der Dynamik abzuleiten. Ich habe diese Untersuchung als selbstständige Abhandlung im Civil-Ingenieur*) veröffentlicht. Eine andere Abhandlung, die sich mit einer verwandten Erscheinung beschäftigt, wird ihr in Kurzem in derselben Zeitschrift folgen.

Es wäre nicht am Platze, wenn ich hier auf die ziemlich verwickelte Rechnung, die mich zu dem gesteckten Ziele führte, zurückkommen wollte. Ich erwähne nur ganz im Allgemeinen, dass der Vorgang bei niedrigen Geschwindigkeiten ungefähr so verläuft, wie aus den früher geschilderten Erwägungen zu schliessen ist, dass diese aber nur bis zur „kritischen“ Geschwindigkeit ein ungefähr zutreffendes Bild geben, während sich nach Ueberschreitung der kritischen Geschwindigkeit die Erscheinungen vollständig umkehren. Die kritische Geschwindigkeit ist dabei jene, bei der die Welle sich immer weiter ausbiegt und schliesslich bricht, wenn ihre Ausschläge nicht durch irgend eine Führung in unschädlichen Grenzen gehalten werden.

Bei allen diesen Betrachtungen handelte es sich immer um eine Welle, die beiderseits unterstützt ist und auf der irgendwo ein Drehkörper etwas excentrisch aufgekeilt ist. Das Gewicht des Drehkörpers, dem das halbe Gewicht der Welle zuzuschlagen ist, sei mit Q und die anfängliche Exentricität mit e_0 bezeichnet. Dann möge man, während die Welle ruht, ein Zusatzgewicht P an Q anbringen, von solcher Grösse, dass die elastische Durchbiegung der Welle 1 cm beträgt. Ist die Welle zu steif, als dass sie eine rein elastische Durchbiegung von dieser Grösse annehmen könnte, so genügt es auch, etwa zu messen, wie gross die biegende Kraft sein muss, um eine Durchbiegung von 1 mm hervorzurufen. Unter P ist dann natürlich das 10-fache des ermittelten Betrages zu verstehen. In der That wird das Gewicht P nur eingeführt, um ein Maass für die Steifigkeit der Welle zu gewinnen, von der, wie leicht einzusehen, das ganze Verhalten der Welle in hohem Grade abhängig sein muss.

Aus P und Q berechnet sich dann, wie ich in meiner Abhandlung nachwies, die kritische Geschwindigkeit, die ich hier im Anschlusse an Herrn Klein mit n_∞ bezeichnen will, aus der einfachen Formel

$$n_\infty = 300 \sqrt{\frac{P}{Q}}$$

Meine Rechnung gestattet indessen nicht nur die Ermittlung von n_∞ , sondern sie lässt auch den ganzen

*) Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1895. S. 1189.

*) Civ. Ing. Bd. 61, Heft 4, 1895.

Charakter der Schwingungsbewegungen bei jeder beliebigen gegebenen Tourenzahl n erkennen. Ich wies in meiner Abhandlung nach, dass sich die Bewegung des Schwerpunktes von Q in zwei Antheile zerlegen lässt. Der erste Antheil besteht in einer gleichförmigen Rotation um die Umdrehungsaxe mit der Geschwindigkeit n und der zweite Antheil stellt eine schaukelnde Bewegung dar, die von elastischen Schwingungen der Welle herrührt. Wie gross der zweite Antheil ist, lässt sich nicht allgemein angeben; er ist nicht von der Tourenzahl, sondern von äusseren Bedingungen, von Störungen, die durch Bewegungen des Gestells u. s. w. hervorgerufen werden, abhängig. Der erste Antheil dagegen hängt nur von der Umdrehungsgeschwindigkeit ab und lässt sich genau angeben. — So lange sich (bei ganz kleinen Geschwindigkeiten) die Welle noch gar nicht durchgebogen hat, bildet der erste Antheil natürlich eine kreisförmige Bewegung, von Radius e_0 . Infolge der Durchbiegung der Welle ändert sich aber die Excentricität e_0 in e ab. Man kennt also den ersten Antheil der Schwerpunktsbewegung, wenn e angegeben wird. Diese Grösse ist aber durch die Formel (16) in meiner Abhandlung gegeben. Mit den von Herrn Klein gebrauchten, für die praktische Anwendung übersichtlicheren Bezeichnungen schreibt sich diese Formel

$$e = e_0 \frac{n_\infty^2}{n_\infty^2 - n^2}$$

Die Grösse n_∞ folgt aus der vorher dafür gegebenen Formel und die Tourenzahl n lässt sich ebenso wie e_0 unmittelbar messen. Man kann also die Richtigkeit der Formeln und damit der ganzen mathematischen Entwicklung ohne Weiteres an der Hand eines Versuches prüfen. Dazu ist nur nöthig, bei möglichst wenig schaukelndem Gang der Welle e direkt zu messen und damit den nach der Formel berechneten Werth zu vergleichen.

Die Formel zeigt, dass e und damit die Ausbiegung der Welle anfänglich nur langsam anwächst, wenn man n von 0 aus zunehmen lässt. Sobald man sich dem Werthe $n = n_\infty$ nähert, wächst e viel schneller und es wird unendlich gross, wenn man den Werth der kritischen Geschwindigkeit erreicht hat. Natürlich muss in der Nähe dieser Geschwindigkeit durch eine seitliche Führung mit entsprechendem Spielraume dafür gesorgt werden, dass die Ausbiegungen der Welle in Wirklichkeit das zulässige Maass nicht überschreiten. Die Formel ist dann innerhalb dieses Geschwindigkeitsgebietes nicht mehr anwendbar; sie lehrt nur, dass die Welle an die Führung anschlägt. Wenn n grösser wird als n_∞ , kehrt sich das Vorzeichen von e um; die Welle wird dann entgegengesetzt der ursprünglichen Excentricität durchgebogen. Je mehr nun n noch weiter wächst, desto kleiner wird die Aus-

biegung der Welle; für $n = \infty$ wird $e = 0$, d. h. durch die Verbiegung der Welle ist die ursprüngliche Excentricität vollständig ausgeglichen. Diesem Zustande eines vollständig ruhigen Ganges nähert sich die Welle schon dann, wenn n ein Mehrfaches von n_∞ ist. Aber auch schon wenn $n = n_\infty \sqrt{2}$ ist, wird die Excentricität nur so gross, wie sie in der Ruhe war.

Der Werth der kritischen Geschwindigkeit selbst lässt sich aus Versuchen natürlich nicht scharf bestimmen, da die Welle schon vorher und noch nachher an die Führung anschlägt. Dagegen steht der Prüfung der Formel für e bei Geschwindigkeiten, die entweder unterhalb oder oberhalb der kritischen liegen, kein Hinderniss im Wege. Von vornherein ist dabei nur in Betracht zu ziehen, dass man bei etwas schaukelndem Gang grössere Gesamtausschläge der Welle zu erwarten hat, als sie durch die Formel angegeben werden. In der That ist auch bei den Versuchen der Ausschlag meist etwas grösser gefunden worden, als es dem ersten Bewegungsantheile des Schwerpunktes entsprechen würde.

Nachdem die Abhandlung, in der ich die vorher wiedergegebenen Formeln abgeleitet habe, abgefasst war, forderte ich Herrn Klein auf, seine früheren Versuche in vollkommenerer Form wieder aufzunehmen und sie so einzurichten, dass meine theoretischen Ergebnisse daran geprüft werden könnten. Ich stellte ihm zu diesem Zwecke eine Einrichtung zur Verfügung, die von dem Werkmeister des Laboratoriums aufgebaut war. Ein kleines Räderwerk mit 36-facher Uebersetzung wurde durch einen Riemen von der Drehbank aus angetrieben; man konnte so — so lange der Riemen nicht rutschte — 8 verschiedene Umdrehungsgeschwindigkeiten herstellen.

Die Versuchskörper selbst bestanden aus kleinen Handrädchen von verschiedenen Gewichten, die auf Stahl-drahtwellen von 2 bis 5,5 mm Stärke, absichtlich ziemlich stark excentrisch aufgekeilt waren, damit die Erscheinungen möglichst deutlich hervortreten sollten. Das eine Ende der Welle war fest geklemmt und wurde von dem Antriebsmechanismus mitgenommen, das andere war frei drehbar gelagert.

An dem Tisch, der die ganze Vorrichtung trug, wurden zu beiden Seiten des als Drehkörper dienenden Handrädchens 2 Maassstäbe befestigt, die in der durch die Umdrehungsaxe gelegten horizontalen Ebene lagen, rechtwinklig zur Umdrehungsaxe standen und längs ihrer Richtung verschoben werden konnten. Um e zu messen, schob man die Maassstäbe von beiden beiden Seiten her so weit vor, bis sie eben von dem Umfange des Drehkörpers gestreift wurden. Der Stand jedes Maassstabes wurde dann an einer festen Marke abgelesen. In den folgenden Tabellen sind diese Ablesungen mit a bezeichnet.

Um in der Nähe der kritischen Geschwindigkeit die Ausschläge zu begrenzen, liess Herr Klein eine Führungszange anfertigen, die einen Ausschnitt hatte, innerhalb dessen die Welle zu bleiben genöthigt war. Durch Schliessen oder Oeffnen der Zange konnte man den Spielraum für die Welle verkleinern oder vergrössern. Gemessen wurde natürlich immer nur bei abgenommener Führungszange; sie diente nur dazu, entweder die kritische Geschwindigkeit beim Anlaufen zu überschreiten, oder um festzustellen, dass für eine gegebene Umdrehungsgeschwindigkeit die Ausschläge so gross waren, dass man sie praktisch als ∞ gross betrachten durfte.

Nur bei einem der 6 Versuchskörper, dessen kritische Geschwindigkeit auf 2460 Touren berechnet war, gelang es nicht, die kritische Geschwindigkeit zu überschreiten. Die Stösse wurden, lange bevor die angegebene Tourenzahl erreicht war, schon so stark, dass der schmale Riemen die erforderliche Arbeit nicht mehr übertragen konnte und ins Rutschen kam. Die ganze Vorrichtung war überhaupt zu schwach, um die Ueberschreitung der kritischen Geschwindigkeit, nach der zweifellos wieder ein ganz ruhiger Gang eingetreten wäre, erzwingen zu können. Man muss dabei namentlich auch beachten, dass die Ueberwindung der Reibung in der Führungszange schon einen recht erheblichen Arbeitsaufwand während dieses Uebergangsstadiums erfordert. Vermuthlich wäre die Ueberschreitung der kritischen Geschwindigkeit indessen auch mit diesem Versuchskörper gelungen, wenn man ihn nicht so stark excentrisch aufgekeilt hätte. Während der Versuche dachte aber Niemand an dieses Auskunftsmittel und später hätte es zu viel Umstände gemacht, den Versuch in dieser Form nochmals zu wiederholen.

Wenn die Welle in der Nähe der kritischen Geschwindigkeit nicht hinreichend geführt wird, treten bleibende Verbiegungen ein. Dies ist oft genug geschehen. Aus den Tabellen geht es daraus hervor, dass sich nach dem Versuche e_0 geändert hat. Um die Messungen, die zu verschiedenen Ausgangswerthen e_0 von e gehören, mit einander vergleichen zu können, hat Herr Klein die gemessenen Ausschläge in den folgenden Tabellen auf bestimmte feste Werthe von e_0 durch proportionale Aenderungen reducirt.

Anmerkung. Soeben (am 19. Februar 1896) ging mir eine Abhandlung von Herrn A. Stévant, Professeur à l'École des Mines de Liège, zu, die im Wesentlichen eine Bestätigung meiner theoretischen Resultate über diese Schwingungsbewegungen bildet, dabei aber eine interessante Erweiterung meiner Resultate enthält. Ich will deshalb nicht unterlassen, hier auf die Arbeit hizuweisen. Sie ist unter dem Titel „Note sur la turbine de Laval“ in der Revue universelle des Mines, t. XXXIII, 3^{ème} série, 1896, erschienen. — An anderer Stelle werde ich auf diese Arbeit näher eingehen.

Herr Klein hat schliesslich seine Versuchswerthe zur bessern Uebersicht graphisch aufgetragen. Die Curven auf Tafel V geben die nach meiner Formel berechneten Werthe von e an, während die gemessenen Werthe durch besondere Marken hervorgehoben sind. Die Abscissen der Curven stellen die Tourenzahlen (wie überall in dieser Abhandlung auf die Minute bezogen) und die Ordinaten die Excentricitäten e dar. Die den beobachteten Werthen beigeschriebenen Ziffern geben die Nummern der Versuche an, aus denen sie entnommen wurden und unter denen sie in den Tabellen aufgeführt sind.

In Bezug auf die Abweichungen zwischen den tatsächlich beobachteten und den nach meiner Formel berechneten Werthen von e bitte ich eine schon vorher gemachte Bemerkung zu beachten. Im Allgemeinen zeigt sich aber eine durchaus befriedigende Uebereinstimmung, so dass ich die Klein'schen Versuche als eine direkte Bestätigung meiner Rechnungen betrachten darf. Namentlich gilt dies von dem gesammten Verlauf der Schwingungswerten vor und nach der kritischen Tourenzahl, der für die Praxis das meiste Interesse hat. Ohne Zweifel wird dieser durch meine Formel richtig dargestellt. Ich kann daher den Constructeuren schnell laufender Maschinen nur empfehlen, bei deren Berechnung von meiner Formel Gebrauch zu machen, um so mehr als sie, wie fast alle praktisch wichtigen Formeln so überaus einfach gebaut ist, dass ihre Anwendung gar keinen nennenswerthen Zeitaufwand verursacht. Diese praktische Verwendung würde wohl vorwiegend darin zu bestehen haben, dass man die kritische Tourenzahl berechnet und dann dafür sorgt, dass die wirklich in Aussicht genommene Tourenzahl hinreichend weit von dieser — sei es nach oben oder nach unten — entfernt bleibt.

Nach diesen Vorbemerkungen sind die Klein'schen Tabellen ohne Weiteres verständlich und ich lasse sie daher jetzt genau in der Form, wie sie Herr Klein selbst zusammengestellt hat*), ohne weitere Zusätze folgen.

*) In einer Abhandlung in Heft 7 des Civ.-Ing., Jahrg. 1895 hat Herr Klein auch selbst über seine Versuche Bericht erstattet, worauf wegen näherer Einzelheiten hier verwiesen sein möge.

Aufschreibungen des Herrn L. Klein über seine Versuche.

Maasse der Versuchskörper.

No. der Versuchskörper	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Durchmesser des Versuchskörpers mm	87,0	87,8	107,2	107,1	134,5	134,5
„ der Welle mm	2,0	2,2	3,1	3,4	4,3	5,5
Gewicht des Versuchskörpers kg	0,248	0,261	0,427	0,445	0,823	0,841
„ der Versuchswelle kg	0,010	0,014	0,024	0,032	0,048	0,070
„ von Versuchskörper + 1/2 Welle = Q . . . kg	0,253	0,268	0,439	0,461	0,847	0,876
Entfernung von Einspannstelle bis Lagerstelle (in der Mitte dazwischen, sitzt der Körper festgekeilt) . . mm	285	285	285	285	285	285
An den Körper angehängte Zusatz-Belastung kg	0,448	0,548	2,048	3,048	6,048	10,048
Dabei biegt er sich durch um: mm	5,2	3,2	3,5	3,35	4,0	1,9
Daraus berechnet sich die Belastung bei 1 cm Durchbiegung P = kg	0,862	1,71	5,86	9,12	15,1	53
$n_{\infty} = 300 \sqrt{\frac{P}{Q}} =$	553	758	1095	1334	1265	2460

Messung der Durchbiegung.

Die Welle wird so befestigt, wie bei den Versuchen, also ihr eines Ende fest eingespannt, das andere drehbar gelagert. An den Versuchskörper wird ein Zusatz-Gewicht angehängt und nun die Entfernung von Unterkante Welle bis zu einer fixirten Horizontalebene gemessen. Alsdann das Gewicht abgenommen und diese Entfernung wieder bestimmt. Die Differenz leidet gibt die Durchbiegung. Darauf wird die Welle um 90° gedreht und ebenso verfahren, um doppelte Sicherheit gegen Ungenauigkeiten zu haben.

Versuchskörper No.	Zusatz-Gewicht kg	Abstand von der Horizontalebene in mm				Mittlere Durchbiegung mm
		Erste Stellung		um 90° gedreht		
		belastet	unbelastet	belastet	unbelastet	
I.	0,448	117,3	122,5	118,8	124,0	5,2
II.	0,548	115,2	118,6	120,4	123,4	3,2
III.	2,048	118,0	121,4	117,7	121,3	3,5
IV.	3,048	119,3	122,8	119,2	122,4	3,35
V.	6,048	118,5	122,5	118,2	122,2	4,0
VI.	10,048	121,7	123,5	122,0	124,0	1,9

Bemerkungen zu den folgenden Tabellen.

Bemerkung 1: Bei Messung von e lässt sich nicht konstatiren, ob es positiv oder negativ ist. Aus der Thatsache, dass bei hohen Tourenzahlen die Wellen wiederholt gerade gebogen wurden (Versuch 10, 11, 14, 18, 25, 28, 34) lässt sich schliessen, dass e negativ ist, wie es die Rechnung ergibt.

Bemerkung 2: Je weiter die Führungszange geöffnet wurde, um so weiter bog sich die Welle durch, sie legte sich immer an dieselbe an, ein Einstellen des Körpers war nicht zu erreichen.

Bemerkung 3: Die Welle hat bei $n < n_{\infty}$ eine bleibende Durchbiegung erlitten.

Bemerkung 4: Die Welle hat bei $n > n_{\infty}$ eine bleibende Durchbiegung erlitten.

$$e_0 = \left[\frac{(a_1^{\max} - a_1^{\min}) + (a_2^{\max} - a_2^{\min})}{4} \right]^{n=0}$$

$$e = e_0 + \left[\left(\frac{a_1^{\min} + a_2^{\min}}{2} \right)^{n=0} - \left(\frac{a_1^{\min} + a_2^{\min}}{2} \right)^{n=n} \right]$$

Versuchskörper I. $Q = 0,253$, $P = 0,862$, $n_{\infty} = 553$.

Ver- such Nr.	Touren pro Minute n	Entfernung von Fixpunkt				Exzentrizität in der Ruhe e_0	Gemessene Berechnete		Für die Zeichnung der Kurve			Bemerkungen
		I		II			Exzentrizität bei n Um- drehungen pro Minute		e_0	e	$e_{ber.}$	
		a 1 min	a 1 max	a 2 min	a 2 max		e	$e_{ber.}$				
1	0	44,8	47,4	45,0	47,5	1,275						
	350	43,3		43,5		1,35	+ 2,70	2,26	1,35	2,70	2,26	
2	0	44,5	47,2	45,0	47,7	1,35						Bemerkung 1
	612	—	—	—	—	1,65	—	— 7,3	1,70		— 7,5	schlägt aus, s. Bem. 2
3	0	44,2	47,5	44,7	48,0	1,65						siehe Bemerkung 3
	1044	45,0		44,7		1,675	— 1,325	— 0,65	1,70	— 1,345	— 0,66	Bemerkung 1.
4	0	44,3	47,7	44,7	48,0	1,675						
	1800	45,3		45,2		1,75	— 0,90	— 0,18	1,70	— 0,87	— 0,175	
5	0	44,3	47,8	44,5	48,0	1,75						
	2434	45,6		45,4		1,75	— 0,60	— 0,09	1,70	— 0,58	— 0,087	
6	0	44,2	47,7	44,5	48,0	1,75						
	4392	45,7		45,6		1,725	— 0,525	— 0,03	1,70	— 0,51	— 0,030	
7	0	44,3	47,8	44,6	48,0	1,725						
	7488	45,9		45,7		1,75	— 0,35	— 0,01	1,70	— 0,34	— 0,097	
		44,3	47,8	44,5	48,0	1,75						

Versuchskörper II. $Q = 0,268$, $P = 1,71$ kg, $n_{\infty} = 758$.

Ver- such Nr.	Touren pro Minute n	Entfernung von Fixpunkt				Exzentrizität in der Ruhe e_0	Gemessene Berechnete		Für die Zeichnung der Kurve			Bemerkungen
		I		II			Exzentrizität bei n Um- drehungen pro Minute		e_0	e	$e_{ber.}$	
		a 1 min	a 1 max	a 2 min	a 2 max		e	$e_{ber.}$				
8	0	38,0	40,0	45,8	47,8	1,0						
	342	37,3		45,0		1,0	1,75	1,26	1,0	1,75	1,26	
9	0	38,0	40,0	45,8	47,8	1,0						
	612	35,0		41,0		1,0	4,85	2,88	1,0	4,85	2,88	lief unruhig, schlug zeitweise aus
10	0	38,0	40,0	45,7	47,7	1,0						
	1044	38,0		45,7		0,825	— 1,07	— 0,91	0,75	— 0,97	— 0,83	siehe Bemerkung 3
11	0	38,2	39,8	46,0	47,7	0,825						
	1800	38,5		46,5		0,75	— 0,4	— 0,16	0,75	— 0,40	— 0,16	
12	0	38,0	39,5	46,3	47,8	0,75						
	2484	38,6		46,8		0,8	— 0,25	— 0,08	0,75	— 0,235	— 0,075	
13	0	38,0	39,7	46,3	47,8	0,8						
	4392	38,7		46,8		1,15	— 0,1	— 0,04	0,75	— 0,065	— 0,026	siehe Bemerkung 4.
14	0	37,7	40,0	45,7	48,0	1,15						
	7488	38,9		46,9		1,10	— 0,1	— 0,01	0,75	— 0,068	— 0,007	
	0	37,8	40,0	46,0	48,2	1,10						

Versuchskörper III. $Q = 0,439 \text{ kg}$; $P = 5,86 \text{ kg}$; $n_{\infty} = 1095$.

Versuch Nr.	Touren pro Minute n	Entfernung von Fixpunkt				Exzentrizität in der Ruhe e_0	Gemessene		Berechnete		Für die Zeichnung der Kurve			Bemerkungen.
		I		II			Exzentrizität bei n Um- drehungen per Minute		e_0	e	$e_{\text{ber.}}$			
		$a_{1 \text{ min}}$	$a_{1 \text{ max}}$	$a_{1 \text{ min}}$	$a_{1 \text{ max}}$		e	$e_{\text{ber.}}$				e_0	e	
	0	27,8	31,3	35,4	39,0	1,775								
15	342	27,6		35,0		1,875	2,075	2,08	1,80	1,99	1,995			
	0	27,4	31,3	35,4	39,0	1,875								
16	612	26,5		34,0		1,875	3,025	2,74	1,80	2,90	2,63			
	0	27,4	31,3	35,4	39,0	1,875								
17	1080	—		—		1,45	—	86,5	1,45	—	86,5	schlägt aus, s. Bem. 2		
	0	28,0	31,0	35,8	38,6	1,45						Bemerkung 4.		
18	1800	28,6		36,2		1,275	— 1,025	— 0,74	1,45	— 1,165	— 0,84			
	0	28,3	31,0	36,0	38,4	1,275								
19	2520	29,0		36,7		1,3	— 0,55	— 0,30	1,45	— 0,613	— 0,335			
	0	28,2	31,0	36,0	38,4	1,3								
20	4392	29,2		36,7		1,3	— 0,50	— 0,17	1,45	— 0,557	— 0,19			
	0	28,3	31,0	36,0	38,5	1,3								
21	7488	29,6		37,0		1,575	— 0,125	— 0,034	1,45	— 0,115	— 0,031			
	0	28,0	31,0	35,7	39,0	1,575								

Versuchskörper IV. $Q = 0,461 \text{ kg}$; $P = 9,12 \text{ kg}$; $n_{\infty} = 1334$.

Versuch Nr.	Touren pro Minute n	Entfernung von Fixpunkt				Exzentrizität in der Ruhe e_0	Gemessene		Berechnete		Für die Zeichnung der Kurve			Bemerkungen
		I		II			Exzentrizität bei n Um- drehungen per Minute		e_0	e	$e_{\text{ber.}}$			
		$a_{1 \text{ min}}$	$a_{1 \text{ max}}$	$a_{2 \text{ min}}$	$a_{2 \text{ max}}$		e	$e_{\text{ber.}}$				e_0	e	
	0	27,0	30,3	36,0	39,3	1,65								
22	350	27,0		36,0		1,60	1,70	1,72	1,65	1,75	1,77			
	0	27,1	30,3	36,1	39,3	1,60								
23	612	26,5		35,5		1,675	2,175	2,12	1,65	2,14	2,09			
	0	27,0	30,4	36,0	39,3	1,675						siehe Bemerkung 3		
24	1044	24,0		31,4		2,0	5,6	5,15	2,0	5,6	5,15	d. $e_0 = 2,0$ entsprechende Kurve ist strichpunktirt. S. Bem. 3		
	0	27,3	31,3	35,3	39,3	2,0								
25	1800	28,0		36,0		1,15	— 1,3	— 1,4	1,15	— 1,3	— 1,4	siehe Bemerkung 4		
	0	28,3	30,6	36,0	38,3	1,15								
26	2520	29,2		36,5		1,35	— 0,6	— 0,525	1,35	— 0,6	— 0,525			
	0	28,2	31,0	36,0	38,6	1,35								
27	4392	29,5		37,0		1,325	— 0,225	— 0,13	1,35	— 0,229	— 0,133			
	0	28,3	31,0	36,0	38,6	1,325								
28	7488	29,8		37,1		1,1	— 0,1	— 0,015	1,35	— 0,123	— 0,184	siehe Bemerkung 4.		
	0	28,6	31,0	36,3	38,3	1,1								

Versuchskörper V. $Q = 0,847 \text{ kg}$; $P = 15,1 \text{ kg}$; $n_{\infty} = 1265$.

Ver- such Nr.	Touren pro Minute n	Entfernung von Fixpunkt				Exzentrizität in der Ruhe e_0	Gemessene	Berechnete	Für die Zeichnung der Kurve			Bemerkungen
		I		II			Exzentrizität bei n Um- drehungen per Minute		e_0	e	e_{ber}	
		$a_{1 \text{ min}}$	$a_{1 \text{ max}}$	$a_{2 \text{ min}}$	$a_{2 \text{ max}}$		e	e_{ber}				
	0	13,8	16,0	23,4	25,6	1,1						
29	360	13,6	16,0	23,0	25,6	1,125	1,375	1,36	1,1	1,35	1,33	
	0	13,8	16,0	23,3	25,6	1,125						
30	612	13,2	16,0	22,7	25,6	1,1	1,75	1,44	1,1	1,75	1,44	
	0	13,8	16,0	23,4	25,6	1,1						
31	1080					1,6						schlägt aus, s. Bem.
	0	13,3	16,5	23,0	26,2	1,6						
32	1800	13,9	16,0	23,5	26,2	1,7	-1,1	-0,63	1,7	-1,1	-0,63	
	0	13,2	16,6	23,0	26,4	1,7						
33	2520											Nachdem eine Welle ruhig gelaufen, schlägt die Welle ganz aus, verbiegt sich, bleibt stehen, weil festge- setzt. Sie wird wieder gerade gebogen, die Versuche fortgesetzt, läuft unruhig.
	0	10,8	12,3	27,0	29,0	0,875						
34	2520	11,0	12,5	27,0	29,0	0,775	-0,975	-0,26	0,83	-1,05	-0,28	
	0	11,0	12,5	27,4	29,0	0,775						
35	4392	11,2	12,5	27,7	29,0	0,825	-0,475	-0,075	0,83	-0,478	-0,076	
	0	10,8	12,5	27,4	29,0	0,825						
36	7488	11,2	12,5	27,7	29,0	1,05	-0,45	-0,032	0,83	-0,355	-0,025	
	0	10,5	12,7	27,2	29,2	1,05						

Versuchskörper VI. $Q = 0,876 \text{ kg}$; $P = 53 \text{ kg}$; $n_{\infty} = 2460$.

Ver- such Nr.	Touren pro Minute n	Entfernung von Fixpunkt				Exzentrizität in der Ruhe e_0	Gemessen	Berechnete	Für die Zeichnung der Kurve			Bemerkungen
		I		II			Exzentrizität bei n Um- drehungen per Minute		e_0	e	e_{ber}	
		$a_{1 \text{ min}}$	$a_{1 \text{ max}}$	$a_{2 \text{ min}}$	$a_{2 \text{ max}}$		e	e_{ber}				
	0	24,0	25,8	30,8	32,8	0,95						
37	360	23,8	25,8	30,8	32,8	0,95	1,05	0,9				
	0	24,0	25,8	30,8	32,8	0,95						
38	612	23,8	25,8	30,5	32,8	0,95	1,20	1,02				
	0	24,0	25,8	30,8	32,8	0,95						
39	1044	22,7	25,8	29,8	32,8	1,08	2,18	1,32				
	0	24,0	26,0	30,7	33,0	1,08						
40	1584	21,0	26,0	30,0	33,0	1,08	2,93	1,84				Die ganze Vorrichtung kommt stark ins Zittern, der Riemen schleift; es wäre $n=1800$ zu erwarten, genaues Ablesen ist unmöglich.
	0	24,0	26,0	30,7	33,0	1,08						
41	1548	20,5	26,0	29,5	33,0	1,13	3,38	1,87				Wie bei Versuch 40. Es wären hier der Uebersetzung nach 4392 Touren zu er- warten.
	0	23,8	26,0	30,7	33,0	1,13						

Die Versuche mit diesem Körper wurden aufgegeben, da höhere Tourenzahlen nicht zu erreichen waren. Die 5,5 mm starke Welle überträgt die exzentrischen Zentrifugalkräfte auf die ganze Anordnung, durch deren Erschütterung mehr Arbeit beansprucht wird, als der Riemen übertragen kann; er muss auf der Scheibe rutschen, diese zurückbleiben.

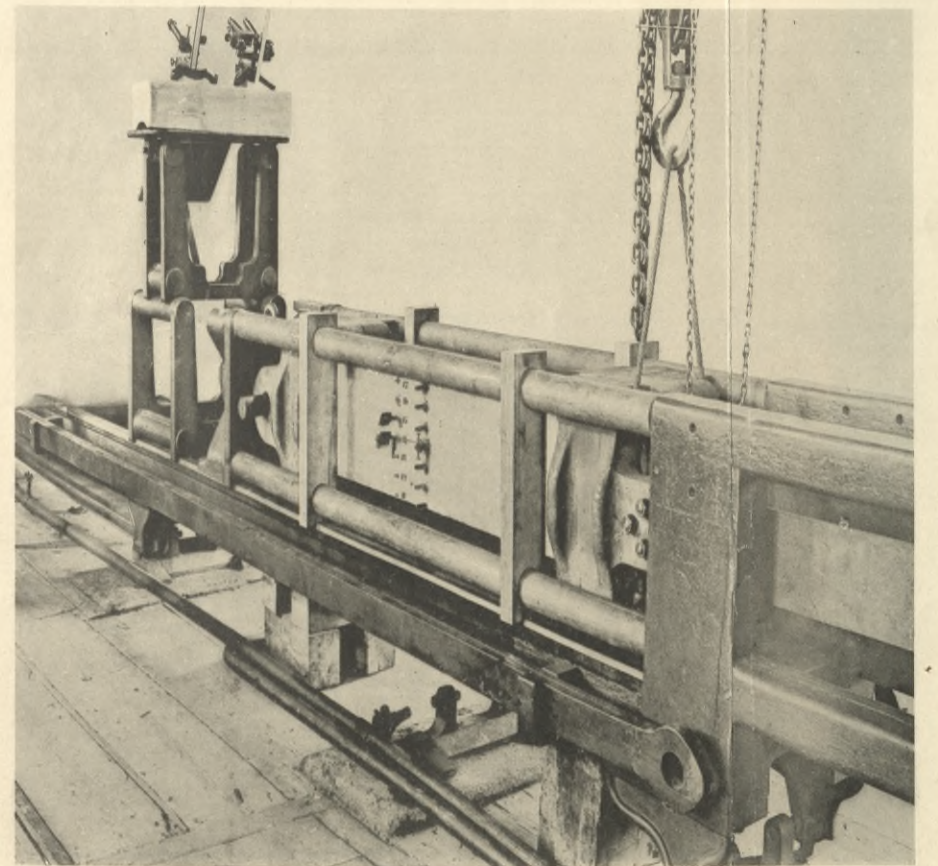
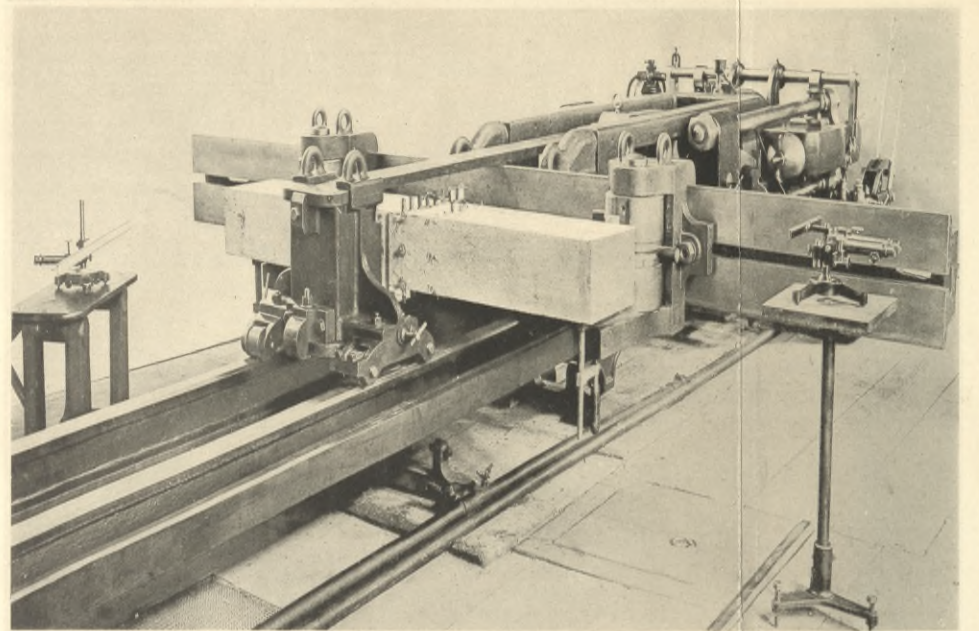
HEFT XXIV.

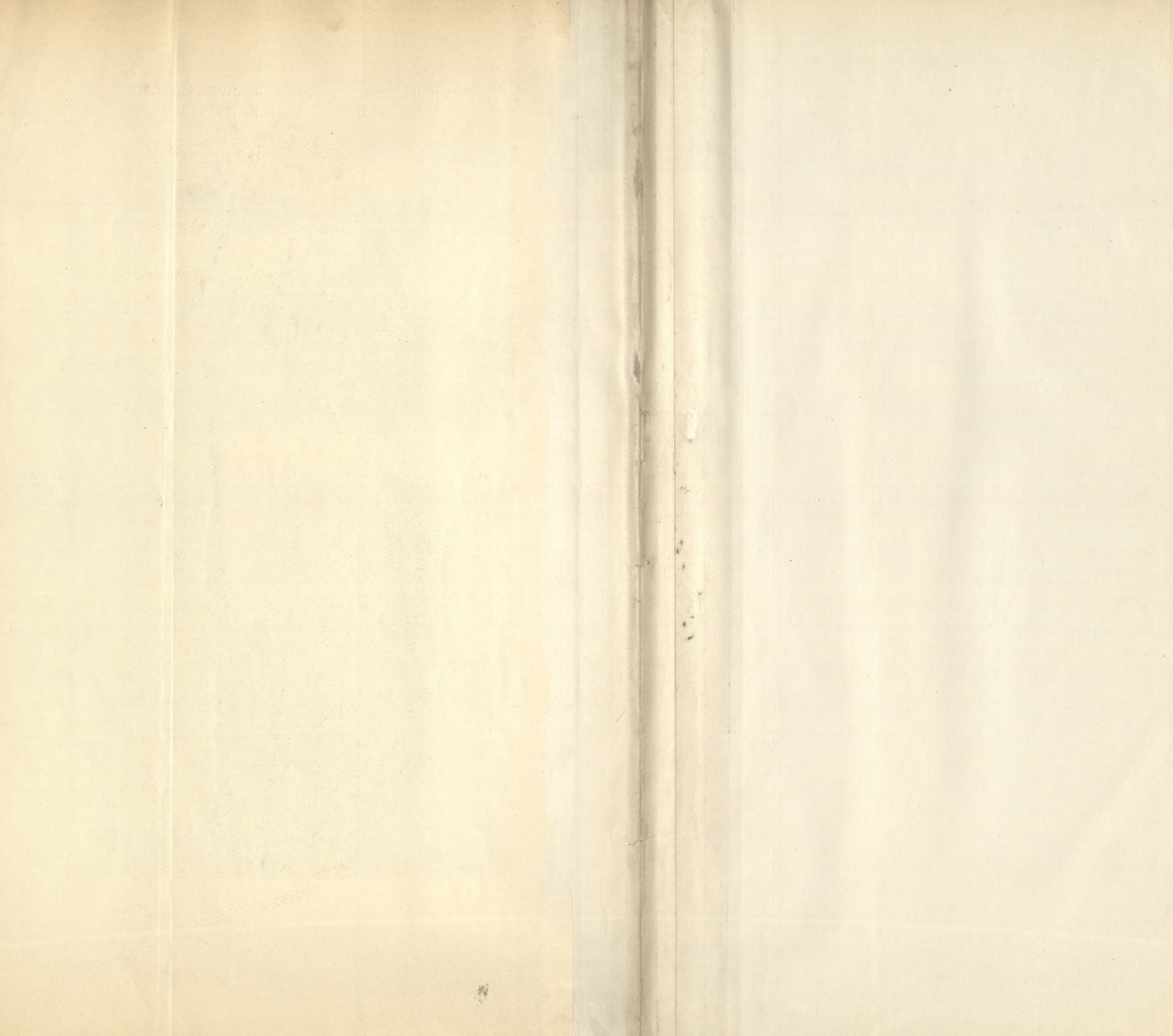
MITTHEILUNGEN AUS DEM MECHANISCH-TECHNISCHEN LABORATORIUM
DER K. TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN MÜNCHEN.

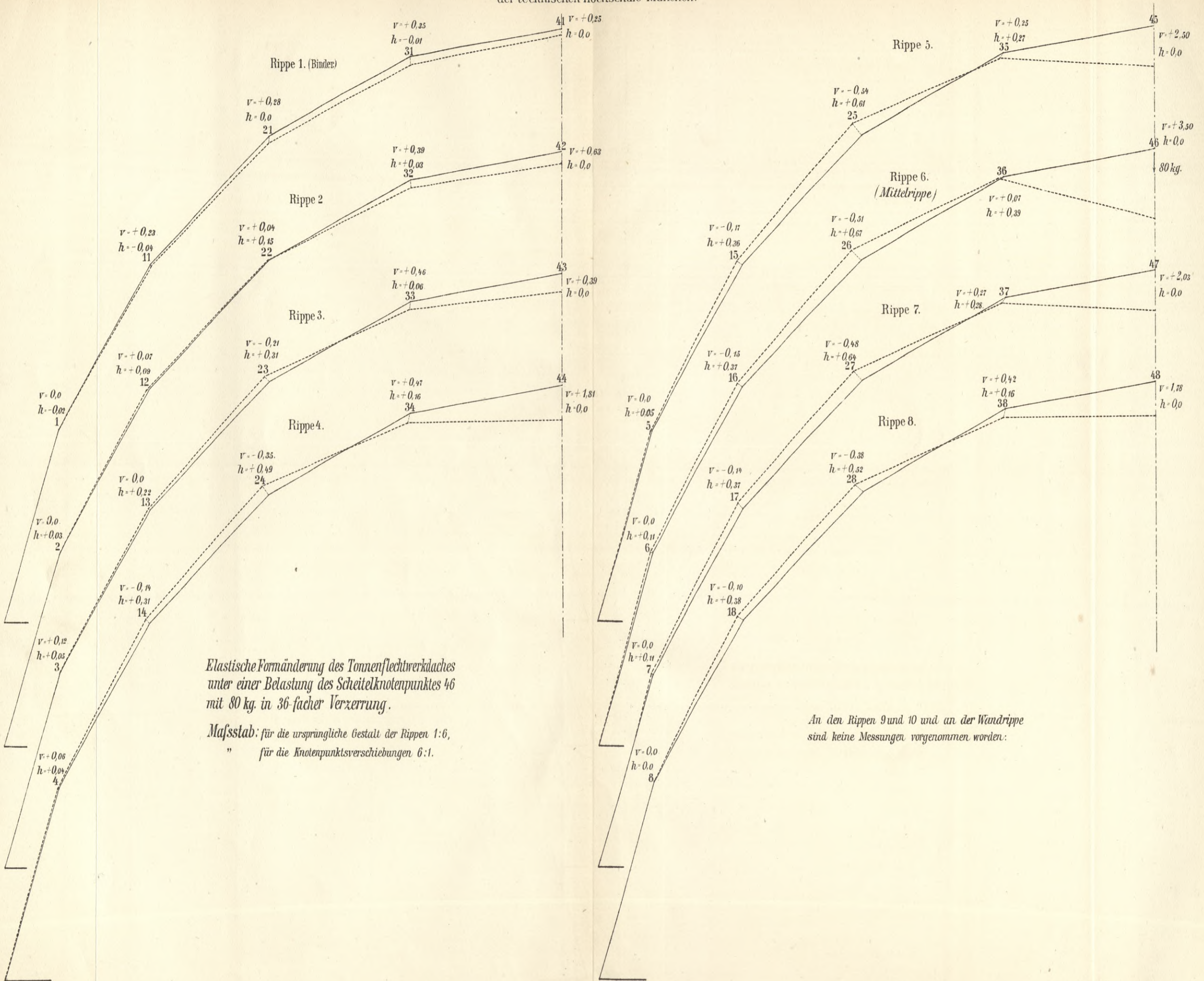
TAFEL II.



VERLAG VON THEODOR ACKERMANN, K. HOF-BUCHHÄNDLER.



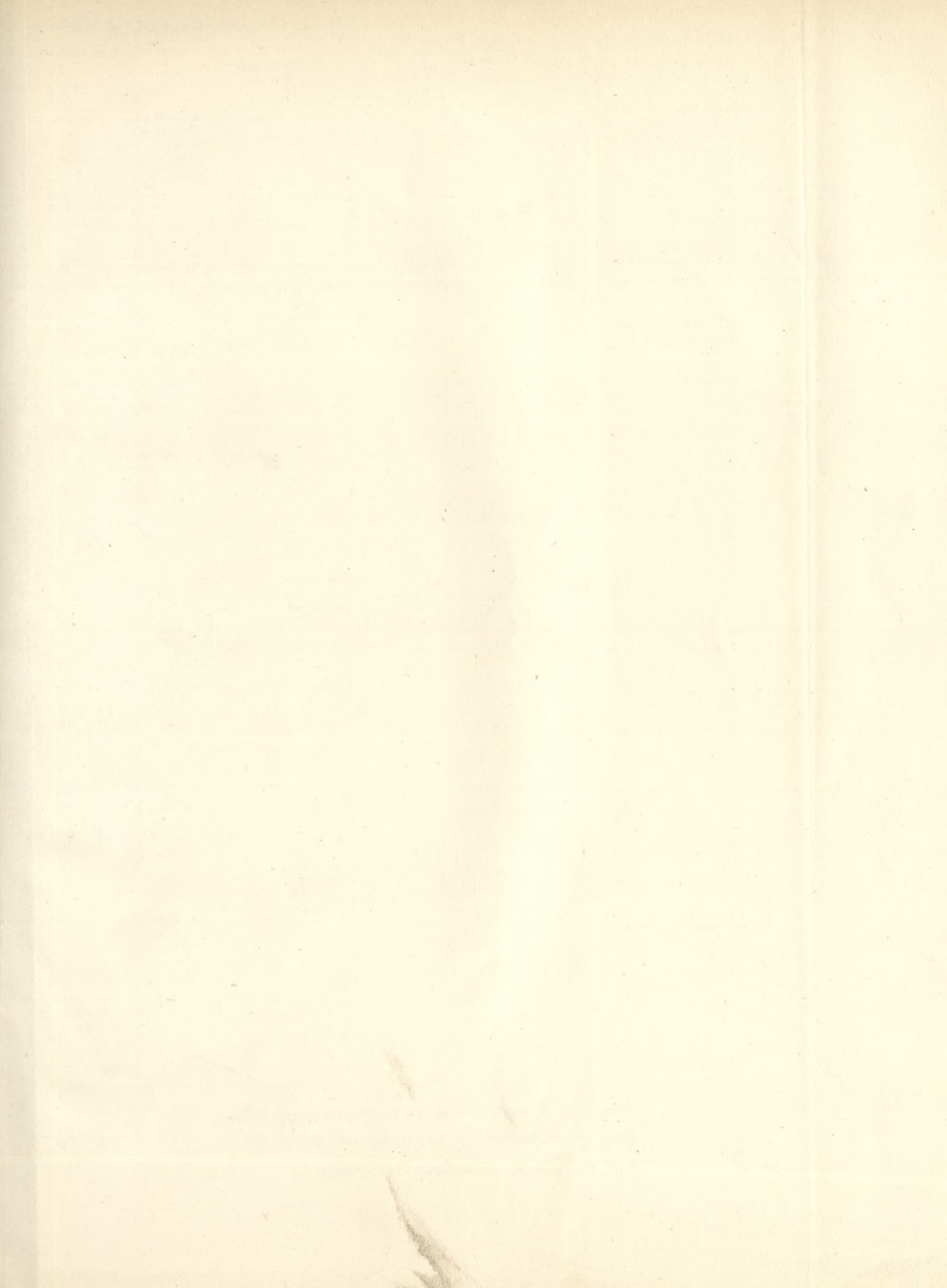




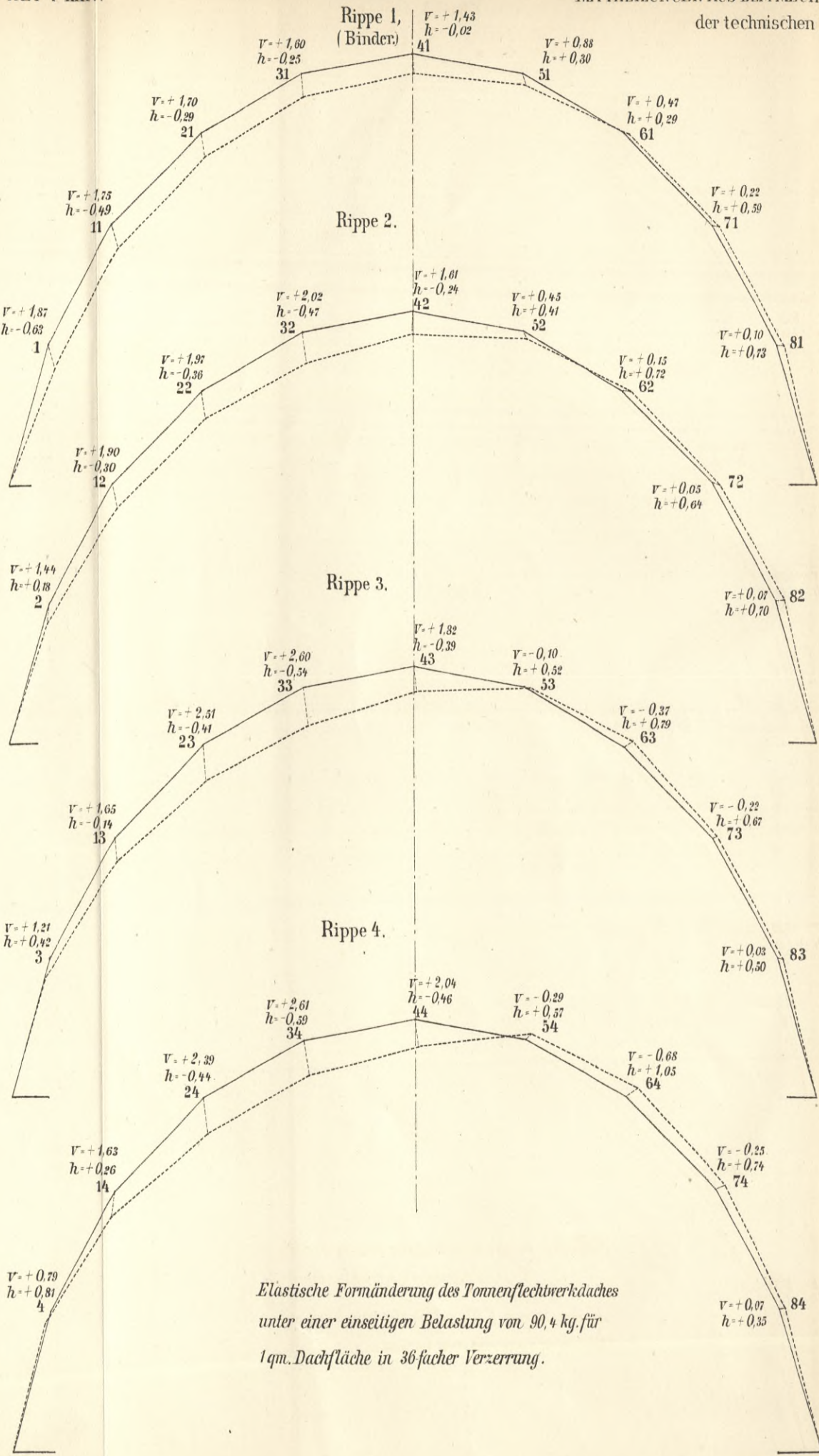
Elastische Formänderung des Tonnenflechtwerkdaches unter einer Belastung des Scheitelknotenpunktes 46 mit 80 kg. in 36-facher Verzerrung.

Mafsstab: für die ursprüngliche Gestalt der Rippen 1:6,
" für die Knotenpunktverschiebungen 6:1.

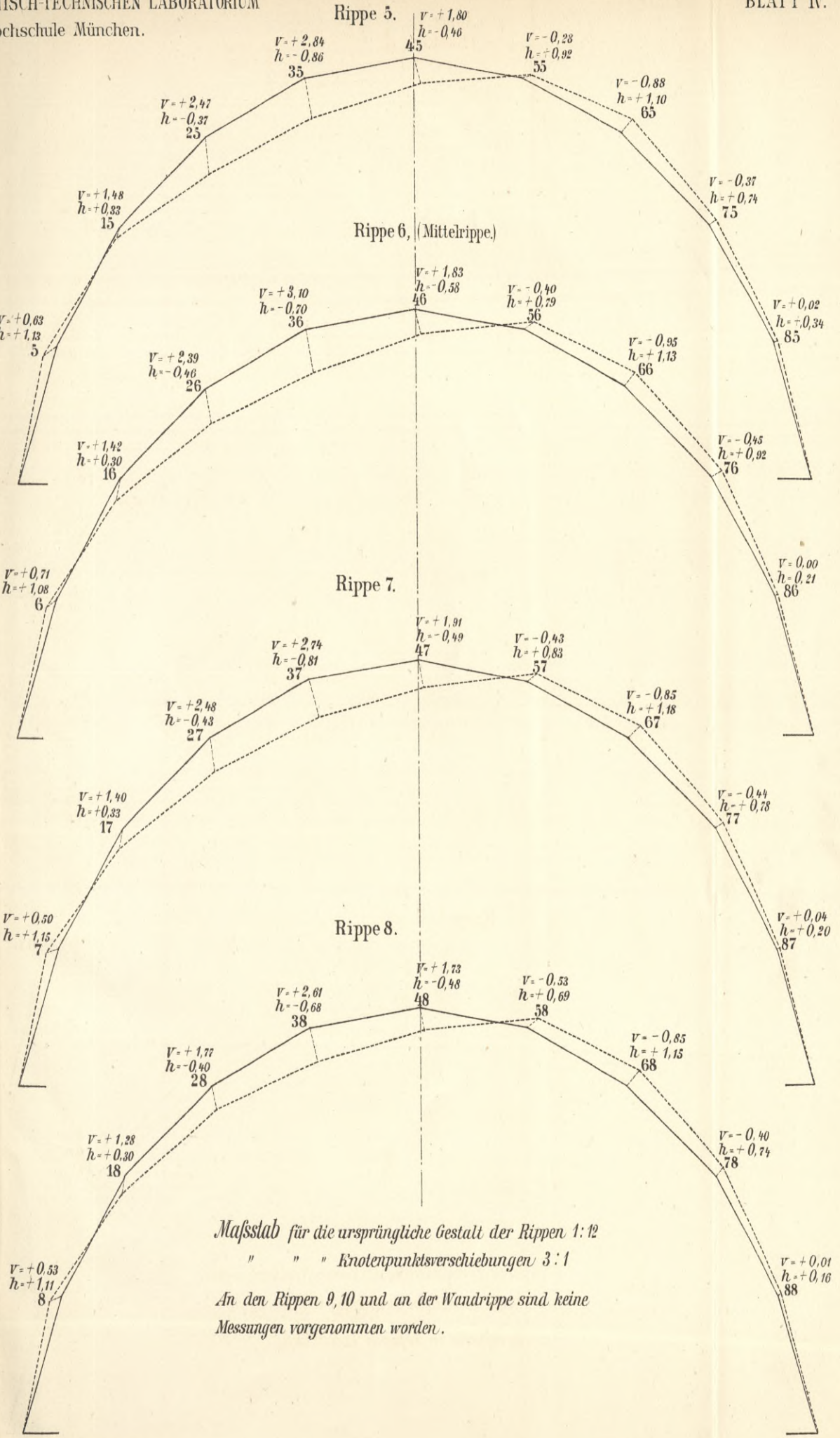
An den Rippen 9 und 10 und an der Wandrippe sind keine Messungen vorgenommen worden.



der technischen Hochschule München.



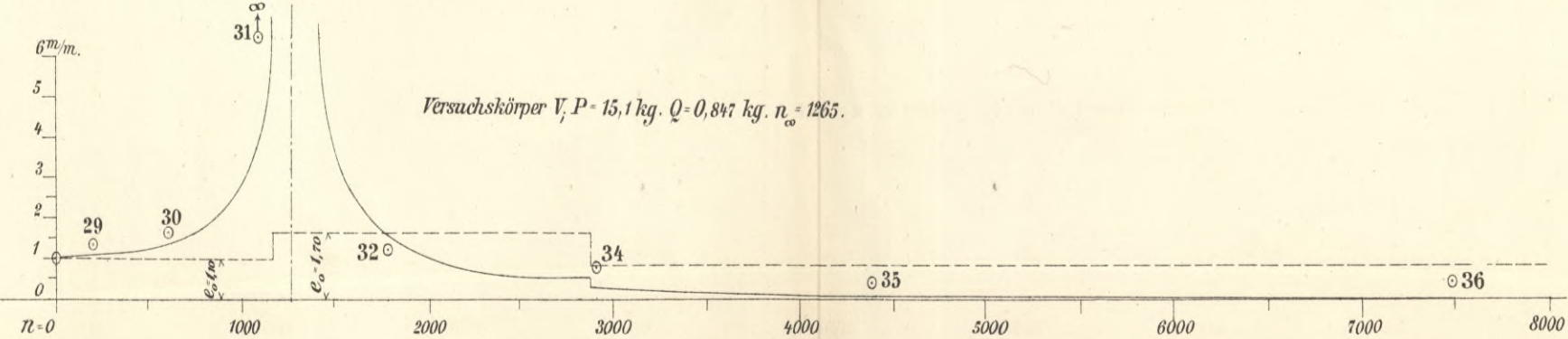
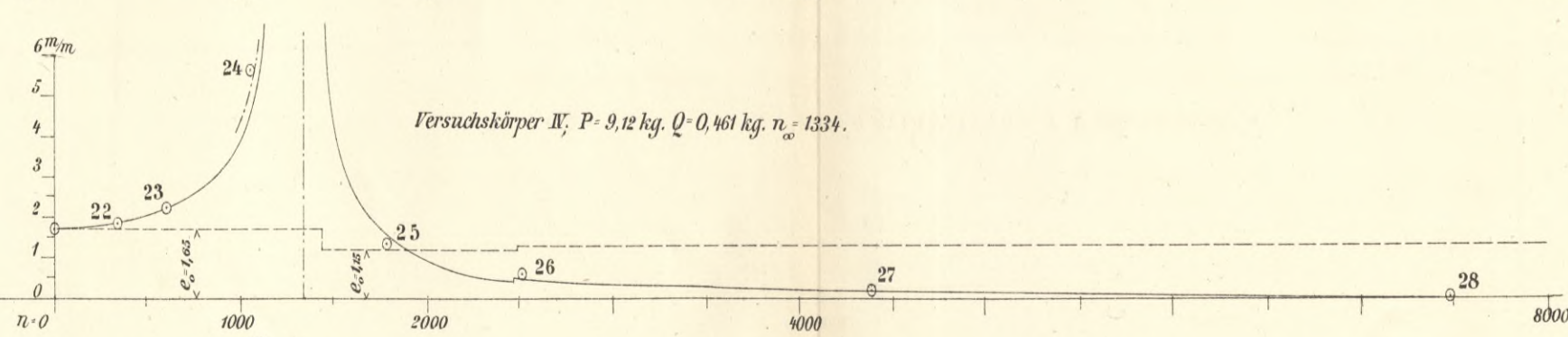
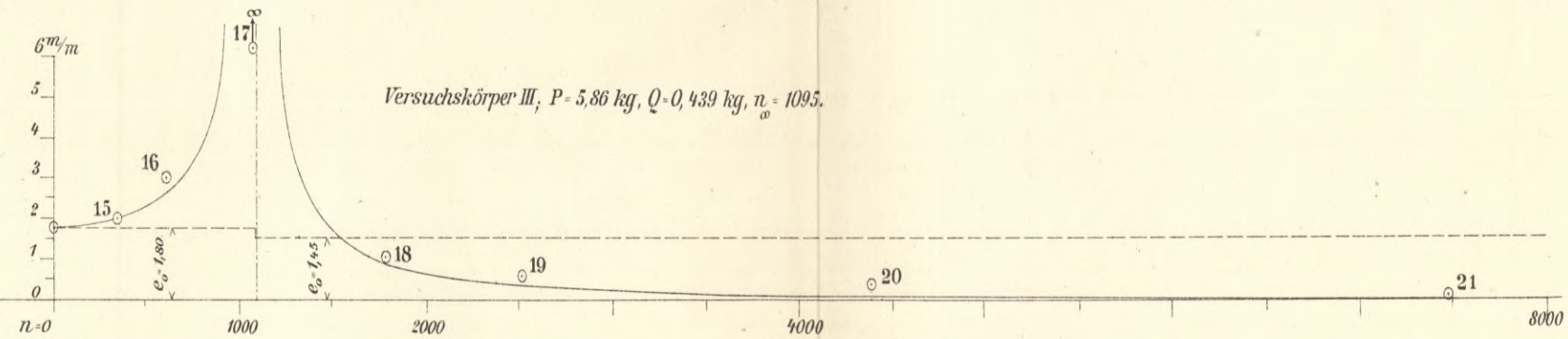
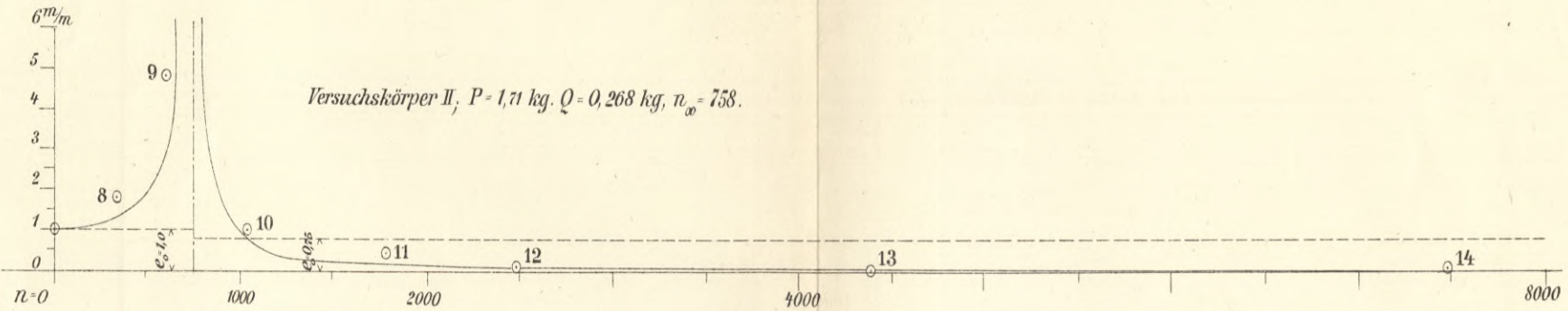
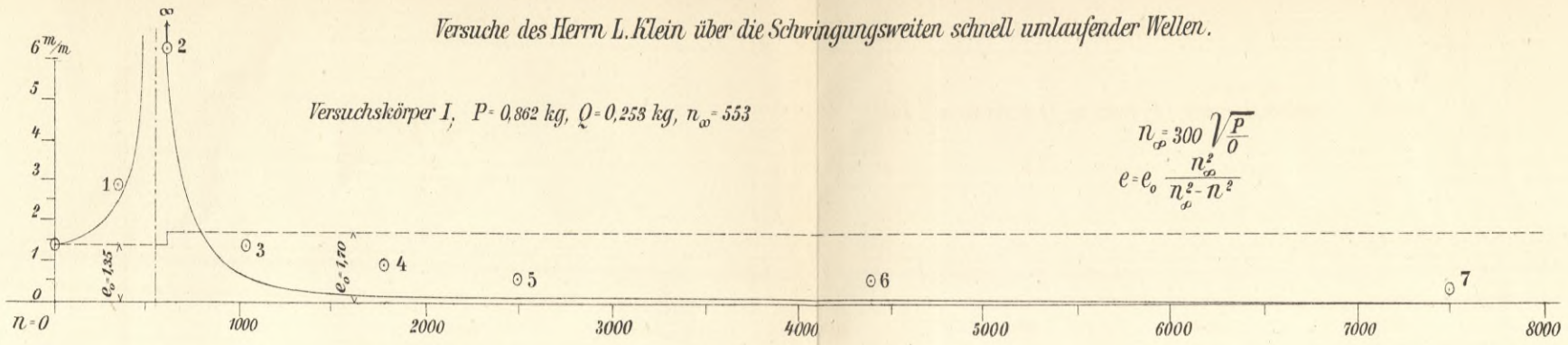
Elastische Formänderung des Tonnenflechtwerkdaches unter einer einseitigen Belastung von 90,4 kg für 1qm. Dachfläche in 36facher Verzerrung.



Masstab für die ursprüngliche Gestalt der Rippen 1:12 " " " Knotenpunktverschiebungen 3:1

An den Rippen 9, 10 und an der Wandrippe sind keine Messungen vorgenommen worden.

Versuche des Herrn L. Klein über die Schwingungswreiten schnell umlaufender Wellen.



○ durch Messung gefunden, Für die Excentricität $M 20:3$ Excentricität der Ruhe $= e_0$.

Biblioteka PK

J.X.47

/ 1894/1902



100000315048

1895

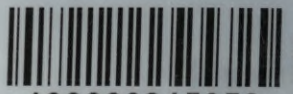
Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000315049

1896

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000315050

1897

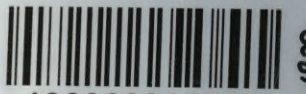
Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000315051

1898

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000315052

1900

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000315053

1902

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000300713

1894