UNTERSUCHUNGEN

ÜBER DIE

BEWEGUNG DES WASSERS IN CANÄLEN UND FLÜSSEN.

VON

MAU,
KÖNIGL. KREIS-BAUINPECTOR.

(MIT 1 TAFEL ABBILDUNGEN.)

(SONDERABDRUCK AUS DER ZEITSCHRIFT FÜR BAUWESEN, JAHRG. 1890.)

BERLIN 1890.
VERLAG VON ERNST & KORN
WILH. ERNST.

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER DIE

BEWEGUNG DES WASSERS IN CANÄLEN UND FLÜSSEN.

VON

MAU,

KÖNIGL. KREIS-BAUINPECTOR.

(MIT 1 TAFEL ABBILDUNGEN.)

(SONDERABDRUCK AUS DER ZEITSCHRIFT FÜR BAUWESEN, JAHRG. 1890.)

BERLIN 1890.
VERLAG VON ERNST & KORN
WILH. ERNST.

Wenn auch die theoretische Hydrodynamik in den Forschungen ihres ersten Theiles über die Bewegung idealer d. i. „nicht reibender" Flüssigkeiten glänzende Erfolge aufzuweisen hat, so stehen hiergegen die Ergebnisse des zweiten Theiles dieser Wissenschaft, welcher die Bewegegung realer d. i. „reibender" Flüssigkeiten behandelt, erheblich zurück. Neben der theoretischen Ermittlung des bekannten Ausflufscoefficienten und der Bestätigung des Poiseuilleschen Gesetzes, nach welchem die Ausflufszeit einer durch Haarröhren strömenden Wassermenge direct proportional der Länge der Röhre, umgekehrt proportional dem Druckunterschiede an beiden Enden und der vierten Potenz des Durchmessers ist,[1]) dürfte die Bestimmung des Coefficienten der „inneren Reibung" des Wassers, welchen Meyer $=0{,}0132$[2]), Helmholtz und Piotrowski $=0{,}014061$ für Centimeter und Secunde aus Versuchen ermittelt haben, als das für die praktische Hydrotechnik wichtigste Ergebnifs zu bezeichnen sein. Für die dieser Abhandlung gestellte Aufgabe, welche für die Praxis von ganz aufserordentlicher Bedeutung ist, konnte eine streng wissenschaftliche Lösung bis jetzt noch nicht geliefert werden. Mit Recht darf als Grund der Schwierigkeit und Fruchtlosigkeit dieser Forschungen nicht etwa die Unzulänglichkeit der mathematischen Rechnungsweisen, sondern die Unzulänglichkeit der grundlegenden Anschauungen über das Wesen der Materie betrachtet werden; erst wird die Frage endgültig entschieden sein müssen, ob die Materie stetig den Raum erfüllt (Stetigkeitshypothese), oder ob sie aus einzelnen Massentheilchen zusammengesetzt ist (Molecularhypothese), bevor man mit der Wirklichkeit übereinstimmende Werthe aus theoretischen Untersuchungen über Flüssigkeitsbewegungen erwarten darf, bei denen gerade die von den kleinsten Theilen der Flüssigkeit im Innern ausgeübten Kräfte trotz ihrer verhältnifsmäfsigen Kleinheit doch sehr beträchtlich in die Erscheinung treten.

Jene im Vorstehenden angedeutete Aufgabe konnte daher nur in der Weise behandelt werden, dafs von den verschiedenen Forschern die aus besonderen Versuchen erhaltenen Ergebnisse durch die passendsten und einfachsten mathematischen Formeln ausgedrückt wurden. Leider zeigte sich sehr bald, dafs diese Formeln wohl für solche den Versuchen ähnliche Verhältnisse annähernd richtige Werthe lieferten, allein für abweichende Verhältnisse sind die Ergebnisse der Formeln weder unter einander noch mit der Wirklichkeit in Uebereinstimmung zu bringen. In neuerer Zeit haben zwei schweizerische Ingenieure eine neue Formel aufgestellt, welche mit nur einem veränderlichen Coefficienten alle Messungsergebnisse in sich begreifen soll. Die Formel ist ebenfalls auf graphisch-empirischem Wege abgeleitet und ergiebt, da alle untersuchten Verhältnisse berücksichtigt sind, meistens auch überall nur mittlere Abweichungen, sie bleibt aber jede Erklärung über die Natur ihrer Coefficienten schuldig.

Wenn wir nun im Nachfolgenden den umgekehrten Weg einschlagen, nämlich unter von vornherein gemachten Annahmen eine Formel über die Bewegung des Wassers in Canälen abzuleiten, so darf dieses Verfahren einen Anspruch auf strenge Wissenschaftlichkeit aus den oben angeführten Gründen durchaus nicht erheben, vielmehr wird ein solcher erster Versuch, auf möglichst elementarem Wege die in Rede stehenden Erscheinungen zu beschreiben, die weitgehendste Nachsicht in Anspruch nehmen müssen.

1.

Betrachten wir die durch den symmetrischen Querschnitt F eines Canals in einer Secunde fliefsende Wassermenge, so wird diese einen Rauminhalt $=F\cdot v$ und ein Gewicht von der Gröfse $F\cdot v\cdot p$ haben, wenn v die mittlere Geschwindigkeit und p das Gewicht der Raumeinheit Wasser bezeichnet. Nehmen wir an, die Bewegung sei eine gleichförmige, sodafs die treibenden Kräfte den widerstehenden gleich sind, und betrachten den Vorgang nicht vom dynamischen, sondern vom statischen Standpunkte aus, was zulässig ist, da an Stelle jedes seinen Platz verlassenden Wassertheilchens sofort ein anderes unter genau denselben Bedingungen treten mufs, so haben wir es mit einem Körper auf einer um den Winkel φ geneigten schiefen Ebene zu thun, der mit einer Kraft von $F\cdot v\cdot p\cos\varphi$ normal auf seine Unterlage drückt und mit einer Kraft von $F\cdot v\cdot p\sin\varphi$ auf der schiefen Ebene herabzugleiten strebt. Die normalen Druckkräfte werden — feste Wandungen vorausgesetzt — durch diese aufgehoben; die auf die abwärts gerichtete Bewegung wirkende Gleitkraft $F\cdot v\cdot p\sin\varphi$ mufs durch die am benetzten Umfange entstehenden, sog. Reibungskräfte vernichtet werden. Es ist daher vornehmlich nöthig, Annahmen über die Gröfse und Vertheilung dieser am benetzten Umfange auftretenden Reibungskräfte zu machen, und es ist klar, dafs diese Annahmen äufserst einfach gehalten werden müssen, wenn die Möglichkeit der rechnerischen Durchführbarkeit und der allgemeinen Anwendbarkeit für alle Profile und Materialien gewahrt bleiben soll.

Die Versuche haben unzweifelhaft erwiesen, dafs der Widerstand, welchen der benetzte Umfang der Bewegung des abfliefsenden Wassers entgegensetzt, nach dem Grade der Rauhigkeit der benetzten Fläche verschieden grofs ist. Es geht aber aus den Versuchen ebenso unzweifelhaft hervor, dafs der Widerstand selbst der glattesten Wände nicht gleich Null wird.

1) Mém. des Sav. Etr. t. 9 1846.

2) Meyer, Pogg. Ann. Bd. 113, S. 384; 1861.

Wenn dies doch der Fall sein sollte, so würde bei absolut glatten Wandungen das Eintreten einer gleichförmigen Bewegung unmöglich sein, da Reibungskräfte zur Vernichtung der Gleitkraft nicht würden entstehen können. Demgemäfs müssen wir annehmen, dafs die vom benetzten Umfange geleistete Widerstandskraft zunächst aus zwei Theilen besteht, von denen der eine von dem Grade der Rauhigkeit der vom Wasser berührten Flächen allein abhängt, während wir den anderen als von dem Material dieser Flächen abhängig denken. Der Kürze und Anschaulichkeit halber nennen wir den ersteren den „Rauhigkeitswiderstand", den letzteren den „Adhäsionswiderstand", ohne dafs hierbei moleculare Wirkungen besonders ins Auge gefafst werden sollen, vielmehr mag diese Bezeichnung nur andeuten, dafs die entsprechende Kraft durch mechanische Eingriffe nicht zum Verschwinden gebracht werden kann. Die Versuche haben nun ferner auch ergeben, dafs die Form des Querprofils nicht ohne Einflufs auf die Geschwindigkeit des fliefsenden Wassers ist. Wir wollen auch diesen berücksichtigen und ihn als „Profilwiderstand" bezeichnen, sodafs also die gesamte auf den fliefsenden Wasserkörper ausgeübte Hemmungskraft in drei Theile: den Rauhigkeits-, den Adhäsions- und den Profil-Widerstand zerlegt ist.

Um die Gröfse dieser Kräfte zu bestimmen, nehmen wir als gemeinsame Eigenschaften aller drei an, dafs sie gleichmäfsig auf der benetzten Umfangsfläche vertheilt und dem Einheitsgewichte der Flüssigkeit proportional sind, ferner, dafs alle drei mit dem Neigungswinkel des Canals, aber vielleicht nach verschiedenen Functionen von φ, veränderlich sind, und endlich, dafs die von ihnen hervorgerufenen Widerstandskräfte nach dem Quadrat der Geschwindigkeit des fliefsenden Wassers wachsen. Wir unterscheiden die drei Kräfte dadurch von einander, dafs wir den Adhäsionswiderstand unabhängig von dem durch den Wasserkörper auf die Flächeneinheit seiner Unterlage ausgeübten (specifischen) Druck, den Rauhigkeitswiderstand dagegen diesem Druck umgekehrt, den Profilwiderstand — vorläufig — diesem Druck proportional annehmen. Diese Voraussetzungen lassen sich zwar mit den Anschauungen der Statik über Reibung nicht überall ganz in Einklang bringen, allein es darf hierbei auch nicht übersehen werden, dafs die Reibungskräfte bei Flüssigkeiten in ganz anderer Weise in Wirksamkeit treten müssen als bei festen Körpern. Von einer eingehenden Begründung der gemachten Annahmen glauben wir im Interesse der Kürze und mit Rücksicht darauf absehen zu dürfen, dafs zu diesem Zwecke die Aufstellung neuer, ebenfalls nicht zweifellos nachweisbarer Voraussetzungen erforderlich sein würde. Es bleibt nur möglich, das Zutreffende der Annahmen an der Uebereinstimmung der daraus abgeleiteten Formelergebnisse mit den Ergebnissen der Messungen zu prüfen.

Bezeichnen wir nun den von der Flächeneinheit des benetzten Umfanges s gelieferten Adhäsionswiderstand mit βp, so wird, da die Fläche des ganzen vom betrachteten Wasserkörper berührten Bettes $s \cdot v$ ist, der Adhäsionswiderstand der ganzen Umfangsfläche $= \beta \cdot p \cdot s \cdot v$ sein. Nach den obigen Annahmen ist derselbe noch einer Function des Gefälles ($J = \operatorname{tg} \varphi$) und dem Quadrate der Geschwindigkeit des Wassers proportional zu setzen, und wir erhalten dann die Gröfse des gesamten Adhäsionswiderstandes $W_\mu = \beta \cdot p \cdot s \cdot v \cdot f_2(J) \cdot v^2$. Der auf die Gewichtseinheit des fliefsenden Wasserkörpers ausgeübte „specifische" Adhäsionswiderstand ergiebt sich hieraus $W_\mu = \beta \cdot f_2(J) \cdot \dfrac{p \cdot s \cdot v}{p \cdot F \cdot v} \times v^2$, oder $W_\mu = \dfrac{\beta f_2(J)}{R} v^2$, wenn wir für das Verhältnifs $\dfrac{F}{s}$ die bekannte gebräuchliche Bezeichnung R (= mittlerer Radius) einsetzen.

Um in ähnlicher Weise den auf die Gewichtseinheit des fliefsenden Wasserkörpers ausgeübten specifischen Rauhigkeitswiderstand W_ν zu bestimmen, ist zu beachten, dafs, wie bereits erwähnt, das auf dem Umfang lastende Gewicht des Wasserkörpers $= F \cdot v \cdot p \cos \varphi$ und demnach der auf die Flächeneinheit entfallende Antheil $\dfrac{F \cdot v \cdot p \cos \varphi}{s \cdot v} = Rp \cos \varphi$ ist. Diesem specifischen Normaldruck, also der veränderlichen Gröfse R, ist mithin der Rauhigkeitswiderstand umgekehrt proportional zu setzen. Bezeichnen wir nun, wie oben, mit αp den von der Flächeneinheit des benetzten Umfanges ausgeübten Rauhigkeitswiderstand, so wird vom ganzen Umfange, entsprechend den gemachten Annahmen, eine Hemmungskraft von der Gröfse $\dfrac{\alpha f_1(J)}{R} ps \cdot v \cdot v^2$ ausgeübt, von welcher der auf die Gewichtseinheit des fliefsenden Wasserkörpers entfallende Antheil $W_\nu = \dfrac{\alpha f_1(J)}{R} \cdot \dfrac{p \cdot s \cdot v}{F \cdot v \cdot p} \cdot v^2 = \dfrac{\alpha f_1(J)}{R^2} \cdot v^2$ ist.

Endlich möge γp den von der Flächeneinheit des benetzten Umfanges herrührenden Profilwiderstand bezeichnen, dann ist der gesamte Profilwiderstand $W_\pi = \gamma \cdot f_3(J) \cdot Rps \cdot v \cdot v^2$ und der specifische Profilwiderstand

$$W_\pi = \gamma \cdot f_3(J) \cdot \frac{R \cdot p \cdot s \cdot v}{F \cdot v \cdot p} \cdot v^2 = \gamma f_3(J) v^2.$$

Wir haben somit für die auf die Gewichtseinheit des fliefsenden Wasserkörpers ausgeübte Hemmungskraft den Ausdruck

$$W_\mu + W_\nu W_\pi = \left\{ \frac{\alpha \cdot f_1(J)}{R^2} + \frac{\beta f_2(J)}{R} + \gamma f_3(J) \right\} v^2$$

gefunden, welcher bei gleichförmiger Bewegung ebenso grofs als die auf dieselbe Gewichtseinheit ausgeübte Gleitkraft sein mufs. Letztere ist $= \dfrac{F \cdot v \cdot p}{F \cdot v \cdot p} \sin \varphi$ oder $= J$, wenn wir unsere Betrachtungen lediglich auf Fälle mit so kleinem Neigungswinkel α beschränken, dafs der Sinus mit der Tangente vertauscht werden kann. Wir erhalten dann die Gleichung

$$\text{I)} \qquad J = \left\{ \frac{\alpha \cdot f_1(J)}{R^2} + \frac{\beta f_2(J)}{R} + \gamma f_3(J) \right\} v^2,$$

welche ausdrückt, dafs die Summe sämtlicher wirkenden Kräfte, geschätzt nach der Bewegungsrichtung, verschwinden mufs.

Aus Gleichung I ergeben sich durch sehr einfache Umwandlungen

$$\text{II)} \qquad \frac{R^2 J}{v^2} = \alpha f_1(J) + \beta f_2(J) \cdot R + \gamma f_3(J) R^2$$

und

$$\text{III)} \qquad v = \sqrt{\frac{R}{\alpha f_1(J) + \beta f_2(J) R + \gamma f_3(J) R^2}} \cdot \sqrt{RJ}.$$

Von der Fortsetzung der statischen Betrachtung sehen wir unter Hinweis auf das nie zum Verschwinden zu bringende Kräftepaar (Moment) ab.

2.

Um nun zu zeigen, dafs die vorgetragenen Ausführungen nicht ganz abseits von den durch die Messungen ermittelten

Werthen liegen, wenden wir die letzten Gleichungen auf die von dem Herrn Wirkl. Geheimrath Dr. G. Hagen im Jahrgang 1881 S. 403 u. ff. der Zeitschrift für Bauwesen veröffentlichten Messungen an, welche von dem Captain Allan Cunningham in den Jahren 1874 bis 1879 an dem Ganges-Canal mit der gröfsten Sorgfalt ausgeführt sind. Zu diesem Zwecke eignet sich am besten die Gleichung II, da die rechte Seite derselben eine nach Potenzen von R entwickelte Function darstellt. Um jedoch die nähere Bestimmung der Functionen von J zu vermeiden, müssen wir annehmen, dafs dieselben für kleine Werthe von J nahezu constant sind und als in die Coefficienten α, β, γ eingehend gedacht werden können. Setzen wir nun die linke Seite der Gleichung II $\frac{R^2J}{v} = y$, ferner $\alpha f_1(J) = \alpha'$, $\beta f_2(J) = \beta'$ und $\gamma f_3(J) = \gamma'$, so erhalten wir die Gleichung

IV) $$y = \alpha' + \beta' R + \gamma' R^2,$$

aus welcher die Werthe der neuen Coefficienten α', β', γ' bestimmt werden können, da die Werthe für y sich aus den Messungsergebnissen berechnen lassen.

Werden die R als Abscissen, die y als Ordinaten angenommen, so kennzeichnet Gleichung IV eine parabolische Curve, welche die Ordinaten-Achse in der Entfernung α' vom Anfang schneidet und deren Achse senkrecht zur x-Achse steht; die Curve steigt mit erhabener Krümmung zu dieser Achse fortwährend, ihre Tangente bildet an der Stelle $R = 0$ mit der Abscissen-Achse einen Winkel, dessen Tangente β' ist.

In umstehender Tabelle I sind die erwähnten Messungen in der veröffentlichten Reihenfolge wiederholt und es ist überall der Werth für $\frac{R^2J}{v} = y$ beigesetzt; die letzte Spalte enthält R in Metermafs. Diese Zahlen sind auch für die graphische Darstellung benutzt, während für die Rechnung das englische Fufsmafs (1 Fufs englisch = 0,3048 m) beibehalten ist. Es verdient bemerkt zu werden, dafs die Werthe von y unabhängig von jedem Mafssystem sind.

Die in Abb. 1 der beiliegenden Zeichnungen dargestellten Werthe von y lassen nun deutlich mehrere Gruppen erkennen, von denen jede für sich das oben angeführte Parabelgesetz befolgt. Von den 43 Messungen bilden die Nr. 101 bis 127 und Nr. 197 in 11 Messungen die erste Reihe; Nr. 151 bis 163 und Nr. 212 bis 217 bilden mit ebenfalls 11 Messungen eine zweite Reihe; Nr. 201 bis 205 stellen in 4 Messungen eine dritte Reihe dar, Nr. 221 bis 225 in 5 Messungen eine vierte Reihe, und endlich wird eine fünfte Reihe durch die 7 Messungen Nr. 131 bis 139 gebildet. Für die noch übrig bleibenden 5 Messungen Nr. 173 bis 181 ordnen sich die Werthe y in keine den anderen ähnliche Reihe; es darf angenommen werden, dafs, wenn diese Messungen thatsächlich fehlerfrei sind, hier die Glieder, mit denen sie entsprechende Reihen bilden würden, ausgefallen sind.

Bei der Bildung der einzelnen Reihen waltet keinerlei Willkür ob, vielmehr scheiden sich die einzelnen Reihen in der graphischen Darstellung so offenbar von einander und zeigen trotzdem im allgemeinen denselben Curvenlauf, dafs zweifellos auf eine Verschiedenheit in den Grundelementen geschlossen werden mufs.

Gehen wir von der ersten Reihe, für welche R den weitesten Spielraum von 0,21 m bis 2,42 m aufweist, aus und bestimmen die Coefficienten α', β' und γ'. Nach der Methode der kleinsten Quadrate ergeben sich dieselben aus den drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} n\alpha' + \beta'\Sigma R + \gamma'\Sigma R^2 &= \Sigma y, \\ \alpha'\Sigma R + \beta'\Sigma R^2 + \gamma'\Sigma R^3 &= \Sigma y R, \\ \alpha'\Sigma R^2 + \beta'\Sigma R^3 + \gamma'\Sigma R^4 &= \Sigma y R^2. \end{aligned}$$

Setzt man für n, ΣR, ΣR^2 usw. die zutreffenden Zahlenwerthe ein, so lauten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 11\alpha' + 59{,}01\beta' + 375{,}0217\gamma' &= 0{,}0062657, \\ 59{,}01\alpha' + 375{,}0217\beta' + 2530{,}2476\gamma' &= 0{,}038938, \\ 375{,}0217\alpha' + 2530{,}2476\beta' + 17296{,}23\gamma' &= 0{,}261949, \end{aligned}$$

und es ergeben sich daraus α', β', γ' wie folgt:

$$\begin{aligned} \alpha' + 6{,}7469365\beta' + 46{,}920565\gamma' &= 0{,}00069849025, \\ \alpha' + 6{,}3552228\beta' + 42{,}878127\gamma' &= 0{,}00065985426, \\ \alpha' + 5{,}3645454\beta' + 34{,}092882\gamma' &= 0{,}00056960909. \end{aligned}$$

Hieraus durch Subtraction:

$$\begin{aligned} 0{,}3917137\beta' + 4{,}042438\gamma' &= 0{,}00003863599, \\ 1{,}3823911\beta' + 12{,}827683\gamma' &= 0{,}00012888116, \end{aligned}$$

woraus folgt: $$\begin{aligned} \beta' + 10{,}319879\gamma' &= 0{,}0000986332, \\ \beta' + 9{,}279344\gamma' &= 0{,}0000932306. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man:

$$1{,}040535\gamma' = 0{,}0000054026,$$

also $$\begin{aligned} \gamma' &= 0{,}000005192, \\ \beta' &= 0{,}00004505, \\ \alpha' &= 0{,}0001509, \end{aligned}$$

sodafs die Gleichung der Curve lautet:

$$y = 0{,}0001509 + 0{,}00004505\,R + 0{,}000005192\,R^2$$

und zwar für englisches Fufsmafs.

Zur Verwandlung in Metermafs dient die Bemerkung, dafs y dieselbe Gröfse behalten mufs. Sei $R = \Sigma \cdot R'$, wo R' die Gröfse von R in Metermafs bezeichnet und $\Sigma = 0{,}3048$ ist, so erhält man

$$y = 0{,}0001509 + \frac{0{,}00004505}{0{,}3048} R' + \frac{0{,}000005192}{0{,}3048^2} R'^2$$
$$= 0{,}0001509 + 0{,}0001478\,R' + 0{,}00005589\,R'^2.$$

Man könnte also sagen, von jedem Quadratmeter der Umfangsfläche wird (für $p = 1000$ kg) ein Rauhigkeitswiderstand von 0,1509 kg, ein Adhäsionswiderstand von 0,1478 kg und ein Profilwiderstand von 0,05589 kg ausgeübt, wenn in diesen Zahlen nicht noch die Werthe der Functionen $f_1(J)$, $f_2(J)$ und $f_3(J)$ enthalten wären.

Die aus der Curvengleichung berechneten und in die graphische Darstellung eingetragenen Werthe für y lassen den Verlauf der Curve deutlich erkennen. Es ist für

$R =$	0	1'	2'	3'	4'
$y =$	0,0001509	0,0002011	0,0002618	0,0003328	0,0004142

$R =$	5'	6'	7'	8'
$y =$	0,0005059	0,0006081	0,0007207	0,0008436

Wenn somit die entwickelte Formel den Ergebnissen dieser ersten Reihe mit nahezu überraschender Genauigkeit folgt, so leuchtet doch bei der Betrachtung der übrigen Reihen ein, dafs sie in gleicher Weise zur Berechnung ähnlicher Werthe der Coefficienten nicht ausreichen. Entweder sind der Messungen zu wenige, oder sie liegen so dicht zusammen, dafs bei der Ungenauigkeit jeder einzelnen Messung die wahren Curvenelemente mit Sicherheit nicht erhalten werden können. Es ist zu bedauern, dafs dem Verfasser das Werk des Captain Allan Cunningham nicht zugänglich ist, um feststellen zu können, ob thatsächlich Unterschiede in der materiellen oder geometrischen Beschaffenheit der Profile vermerkt worden sind; es würden

Tabelle I. Messungen am Ganges-Canal.

Nummer der Messung	R in engl. Fuſs	v in engl. Fuſs	J	$y = \frac{R^2 \cdot J}{v^2}$	R in Meter	Bemerkungen.
101	7,94	4,06	0,000189	0,0007229	2,420	1. Reihe.
103	7,65	3,87	207	8089	2,332	1. „
105	7,19	3,70	222	8383	2,192	1. „
113	6,88	3,85	228	7281	2,097	1. „
117	6,14	3,67	220	6158	1,871	1. „
119	5,43	3,74	245	5164	1,655	1. „
121	5,00	3,43	240	5100	1,524	1. „
124	3,26	2,43	195	3509	0,994	1. „
125	1,95	1,61	203	2978	0,594	1. „
127	0,69	0,60	113	1949	0,210	1. „
131	4,20	1,24	025	2868	1,280	5. „
132	3,65	4,83	473	2701	1,113	5. „
135	2,99	3,20	253	2209	0,911	5. „
136	2,94	2,79	208	2310	0,896	5. „
137	2,94	2,51	200	2744	0,896	5. „
138	2,72	2,54	145	1663	0,829	5. „
139	2,52	2,20	151	1981	0,768	5. „
151	9,34	4,02	227	0,0012254	2,847	2. „
155	8,42	3,58	217	12004	2,566	2. „
158	7,84	3,43	215	11233	2,390	2. „
160	7,26	3,22	214	10879	2,213	2. „
162	6,78	3,39	221	8840	2,067	2. „
163	6,18	3,05	171	7021	1,884	2. „
173	3,86	1,35	088	7194	1,177	
174	4,20	1,34	125	12280	1,280	
175	4,07	1,79	215	11115	1,241	ohne Reihenglieder.
180	2,26	0,87	148	9987	0,689	
181	1,69	0,44	090	13277	0,515	
197	6,88	3,85	228	7281	2,097	1. Reihe. Identisch mit 113.
201	9,02	3,17	191	15464	2,749	3. Reihe.
202	8,72	3,12	200	15623	2,658	3. „
204	8,21	3,01	198	14730	2,502	3. „
205	7,96	3,07	208	13983	2,426	3. „
212	7,46	2,94	160	10302	2,274	2. „
214	7,05	2,81	146	9190	2,149	2. „
215	6,79	2,80	145	8527	2,070	2. „
216	6,53	2,70	144	8423	1,990	2. „
217	6,32	2,63	140	8084	1,926	2. „
221	4,84	2,86	295	8449	1,475	4. „
222	4,50	2,82	291	7410	1,372	4. „
223	4,37	2,79	297	7283	1,332	4. „
224	4,18	2,74	304	7075	1,274	4. „
225	4,07	2,71	0,000306	0,0006902	1,241	4. „

1. Reihe: Coefficienten-Berechnung.

Nummer	R	R^2	R^3	R^4
101	7,94	63,0436	500,5662	3974,50
103	7,65	58,5225	447,6971	3424,90
105	7,19	51,6961	371,6950	2672,49
113	6,88	47,3344	325,6607	2240,54
197	6,88	47,3344	325,6607	2240,54
117	6,14	37,6996	231,4755	1421,26
119	5,43	29,4849	160,1030	869,36
121	5,00	25,0000	125,0000	625,00
124	3,26	10,6276	34,6460	112,95
125	1,95	3,8025	7,4149	14,46
127	0,69	0,4761	0,3285	0,23
$\Sigma R_{33} =$	59,01	375,0217	2530,2476	17596,23

Nummer	y	Ry	$R^2 y$
101	0,0007229	0,005741	0,045582
103	8089	6188	47336
105	8383	6028	43338
113	7281	5009	34464
197	7281	5009	34464
117	6158	3781	23215
119	5164	2804	15227
121	5100	2550	12750
124	3500	1144	3730
125	2978	581	1132
127	1494	103	711
$\Sigma y_{33} =$	0,0062657	0,038938	0,261949

hierdurch die vorgetragenen Anschauungen auf die einfachste Weise eine wesentliche Bestätigung finden können. Nichtsdestoweniger läſst sich erkennen, daſs die Curve jeder anderen Reihe von einem dem Anfangspunkte der ersten Reihe benachbarten Punkte unter nahezu demselben Tangentenwinkel ausgeht und einem der ersten Curve annähernd confocalen oder äquidistanten Lauf verfolgen muſs. Nehmen wir z. B. für die zweite Reihe an, daſs hier die Werthe α' und β' gleich denen der ersten Reihe wären, also beide Reihen sich nur durch abweichende Geometrie der Querschnitte unterschieden, so erhalten wir γ' aus der Gleichung:

$$11 \cdot 0{,}0001509 + 0{,}00004505\, \Sigma R + \gamma' \cdot \Sigma R^2 = \Sigma y$$

oder in Zahlen:

$$11 \cdot 0{,}0001509 + 0{,}00004505 \cdot 79{,}97 + \gamma' \cdot 590{,}5075 = 0{,}0054081,$$

woraus $\gamma' = 0{,}000009158$ folgt.

Aus der entsprechenden Curvengleichung

$$y = 0{,}0001509 + 0{,}00004505 \cdot R + 0{,}000009158\, R^2$$

sind die nachfolgenden Werthe zur graphischen Darstellung der Curve erhalten.

$R =$	0	1	2	3	4
$y =$	0,0001509	0,0002051	0,0002776	0,0003685	0,0004776
$R =$	5	6	7	8	9
$y =$	0,0006151	0,0007509	0,0009150	0,0010974	0,0012981.

Für die dritte Reihe würde man den Profilcoefficienten unter denselben Voraussetzungen aus der Gleichung

$$4 \cdot 0{,}0001509 + 0{,}00004505 \cdot 33{,}91 + \gamma' \cdot 288{,}1645 = 0{,}005980$$

erhalten und zwar $\gamma' = 0{,}000013356$.

Zur Curvenzeichnung sind die Werthe der nachfolgenden Tabelle aus Gleichung

$$y = 0{,}0001509 + 0{,}00004505 \cdot R + 0{,}000013356\, R^2$$

berechnet:

$R =$	7	8	9
$y =$	0,001121	0,001366	0,001638.

Wenn nun auch keineswegs mit Sicherheit behauptet werden kann, dafs sich die Curven der einzelnen Reihen lediglich durch die Profilcoefficienten unterscheiden (bei der fünften Reihe ist dies sicher nicht der Fall), so erscheint doch zweifellos erwiesen, dafs die bei weitem genaueste Curve der ersten Reihe der entwickelten Formel genau folgt und dafs die Curven der übrigen Reihen diese Formel im allgemeinen ebenfalls bestätigen, zum mindesten ihr nicht widersprechen.

Tabelle IIa. Messungen an der Weser.

Nummer	R	v	J	$y = \frac{R^2 \cdot J}{v^2}$
XI	0,8289	1,552	0,000780	0,0002225
I	1,0383	1,573	540	2353
IV	1,0726	0,955	202	2434
III	1,1084	0,952	205	2783
II	1,1241	0,966	185	2498
IX	1,3851	1,010	159	2986
VIII	1,4764	1,032	154	3148
VII	1,8690	1,190	182	4489
V	2,2107	1,485	200	4432
VI	2,3881	1,591	200	4506

Tabelle IIb. Messungen am Linth-Canal.

Nummer	R	v	J	y
1	1,5672	1,041	0,00029	0,000666
2	1,8078	1,170	30	689
3	1,9740	1,266	31	754
4	2,1693	1,347	32	830
5	2,2914	1,449	33	826
6	2,4663	1,500	0,00034	918
7	2,5254	1,542	34	911
8	2,6262	1,593	35	963
9	2,7042	1,644	36	973
10	2,7989	1,686	37	0,001020

Zur Vergleichung sind die Werthe von y aus den vom Verfasser im Jahre 1882 in der Weser ausgeführten Wassermessungen in vorstehender Tabelle IIa berechnet und in Abb. 1 ebenfalls durch Zeichnung dargestellt. Diese y decken sich fast genau mit den y-Werthen der fünften Reihe, aber auch sie sind viel zu ungenau, um zur Berechnung der Curvenelemente dienen zu können, jedoch lassen sie nichtsdestoweniger die annähernd parabolische Natur des Curvenlaufes erkennen. Ferner sind in gleicherweise die von Legler am Linth-Canal ausgeführten Messungen (s. Tabelle IIb) berechnet und in Abb. 1 zur Darstellung gebracht. Sie schliefsen sich, wie die Abbildung zeigt, ungefähr der ersten Reihe der Ganges-Messungen an.

Hierbei möge noch beiläufig darauf aufmerksam gemacht werden, dafs die Coefficienten selbstverständlich nur dann constant sein und bleiben können, wenn in der Stetigkeit aller in Betracht kommenden Factoren eine Unterbrechung nicht eintritt. Die Messungen V und VI des Verfassers sind bei überbordvollem Strom ausgeführt, dasselbe wird vermuthlich auch bei den Ganges-Canalmessungen Nr. 101, 151 und 201 der Fall gewesen sein, da von hier ab das Wachsen der Werthe von y die Einführung anderer Coefficienten in die bezügliche Formel erfordert. Zur Berechnung der Coefficienten-Werthe können demnach nur Messungsreihen benutzt werden, bei denen ein regelmäfsiges Aendern der Werthe für R (auch für J) stattfindet.

3.

Vor der weiteren Behandlung der erhaltenen Gleichungen dürfte es angezeigt sein, dieselben mit den bekannten empirischen Formeln zu vergleichen. Man sieht auf den ersten Blick, dafs Gleichung III mit der bekannten Bazinschen Geschwindigkeitsformel identisch ist, wenn von den Functionen des Gefälles J, $f_1(J)$, $f_2(J)$ und $f_3(J)$ abgesehen und der Profilcoefficient unterdrückt, d. i. $\gamma = 0$ gesezt wird. Wir haben dann

$$\text{V)} \qquad v = \sqrt{\frac{R}{\alpha' + \beta' R}} \cdot \sqrt{RJ}.$$

Bazin hat für α' und β' Zahlenwerthe angegeben, und zwar ändert sich nach ihm α' zwischen den Grenzen 0,0000045 bis 0,00070, während β' zwischen den verhältnifsmäfsig dicht zusammenliegenden Werthen 0,00015 bis 0,00024 angegeben wird, eine Thatsache, die unseren Annahmen in keiner Weise widerspricht, da sicherlich die Umfassungswände bezüglich der Rauhigkcit α' gröfsere Verschiedenheiten aufweisen werden, als bezüglich der Adhäsionskraft. Aus den Ganges-Messungen haben wir $\alpha' = 0{,}0001509$, $\beta' = 0{,}0001478$ erhalten; diese Gröfsen ändern sich etwas, wenn sie unmittelbar aus den Messungen berechnet werden.

Unter Zugrundelegung der Gleichung

$$\text{VI)} \qquad y = \alpha'_1 + \beta'_1 R$$

ergeben sich α'_1 und β'_1 aus den beiden Gleichungen

$$n\alpha'_1 + \beta'_1 \Sigma R = \Sigma y,$$
$$\alpha'_1 \Sigma R + \beta'_1 \Sigma R^2 = \Sigma R y.$$

Setzt man hierfür die entsprechenden Zahlenwerthe ein, so hat man

$$11\,\alpha'_1 + 59{,}01\,\beta'_1 = 0{,}0062657,$$
$$59{,}01\,\alpha'_1 + 375{,}0217\,\beta'_1 = 0{,}038938,$$

oder

$$\alpha'_1 + 6{,}3552228\,\beta'_1 = 0{,}00065985426,$$
$$\alpha'_1 + 5{,}3645454\,\beta'_1 = 0{,}00056960909.$$

Hieraus folgt $0{,}9906774\,\beta'_1 = 0{,}00009024517$ und endlich

$$\beta'_1 = 0{,}00009109,$$
$$\alpha'_1 = 0{,}00008095.$$

Für Metermafs behält α'_1 denselben Werth, β'_1 wird gleich $\frac{0{,}00009109}{0{,}3048} = 0{,}0002988$, wofür Bazin (für Canäle in Erde) 0,00028 angiebt, sodafs also der Adhäsionscoefficient mit dem bezüglichen Bazinschen Coefficienten übereinstimmt. Der Rauhigkeitscoefficient α'_1 weicht von dem durch Bazin angebenen Werth 0,00038 allerdings recht erheblich ab, jedoch dürfte sich diese Erscheinung durch die stärkere Veränderlichkeit der Rauhigkeit überhaupt wohl erklären lassen.

Die Gleichung VI, welche aus Gleichung IV dadurch erhalten ist, dafs der Profilcoefficient $\gamma' = 0$ gesetzt wurde, stellt eine Gerade dar, welche die y-Achse in der Entfernung α'_1 vom Coordinatenanfang schneidet, und gegen die x-Achse um einen Winkel geneigt ist, dessen Tangente β'_1 ist. Setzen wir nun auch noch $\alpha'_1 = 0$, d. h. bleibt auch die Rauhigkeit unberücksichtigt, so wird aus Gleichung VI die Gleichung

VII) $$y = \beta'_2 R.$$

Die Linie der y geht jetzt durch den Coordinatenanfang; führen wir für y seinen Werth $\frac{R^2 J}{v^2}$ ein und lösen die Gleichung nach v auf, so ergiebt sich die Gleichung

VIII) $$v = \sqrt{\frac{RJ}{\beta'_2}} = C\sqrt{RJ},$$

die bekannte Eytelweinsche Geschwindigkeitsformel, in welcher $C = \sqrt{\frac{1}{\beta'_2}}$ zu setzen ist. Der Coefficient C berechnet sich aus den Ganges-Messungen sehr leicht. Es ist $\beta'_2 = \frac{\Sigma y}{\Sigma R}$ $= \frac{0,0062657}{59,01} = 0,00010619$ in engl. Fufsmafs und $\frac{0,00010619}{0,3048}$ $= 0,00034839$ in Metermafs; daraus ergiebt sich $C = \frac{1}{\sqrt{0,00034839}}$ = rund 53,5, was mit der üblichen Annahme für $C(51)$ genau genug übereinstimmt.

Man erkennt hieraus, dafs unsere Formel die beiden bekannten Geschwindigkeitsformeln in sich schliefst und dafs die Bazinsche Formel durch Hinzufügung eines neuen Coefficienten aus der älteren Eytelweinschen Formel hergeleitet werden kann. Ueberraschend ist, wie bei der empirischen Ermittlung der Bewegungsgesetze des Wassers zuerst durch Eytelwein nur der am wenigsten veränderliche Coefficient, welcher der Haupthemmungsursache entspricht, berücksichtigt, dann als weitere Hemmungskraft von Bazin der Rauhigkeitswiderstand hinzugefügt wurde, wodurch die Geschwindigkeitsformel an Genauigkeit und Anpassungsfähigkeit erheblich gewann.

Von den übrigen gebräuchlichen Formeln wäre noch die Ganguillet-Kuttersche zu berücksichtigen. Dieselbe lautet:

$$v = \frac{\frac{1}{n} + 23 + \frac{0,00155}{J}}{1 + \{23 + 0,00155 J\}\frac{n}{\sqrt{R}}} \sqrt{RJ}$$

und läfst sich, wenn man $23 + \frac{0,00155}{J} = \varphi_1(J)$,

$$23 + 0,00155 J = \varphi_2(J) \text{ setzt,}$$

schreiben: $\frac{\sqrt{R} + n\varphi_2(J)}{\frac{1}{n} + \varphi_1(J)} = \frac{R}{v}\sqrt{J}$, woraus man

$$\frac{R^2}{v^2}J = y = \left[\frac{n\varphi_2(J)}{\varphi_1(J) + \frac{1}{n}}\right]^2 + \frac{2n\varphi_2(J)}{\left[\frac{1}{n} + \varphi_1(J)\right]^2}\sqrt{R} + \frac{1}{\left[\frac{1}{n} + \varphi_1(J)\right]^2}R$$

erhält.

Setzen wir

$$\left[\frac{n\varphi_2(J)}{\varphi_1(J) + \frac{1}{n}}\right]^2 = m', \quad \frac{2n\varphi_2(J)}{\left[\frac{1}{n} + \varphi_1(J)\right]^2} = n' \text{ u. } \frac{1}{\left[\frac{1}{n} + \varphi_1(J)\right]^2} = s',$$

so lautet die obige Gleichung $y = m' + n'\sqrt{R} + s'R$, worin die Coefficienten m', n', s' in ganz ähnlichem Sinne mit J veränderlich sein würden, wie unsere Coefficienten α', β' und γ'.

Aus der Ganguillet-Kutterschen Formel läfst sich für y ebenfalls ein dreigliedriger, nach Potenzen von R geordneter Ausdruck ableiten. Unter Voraussetzung eines constanten J, d. h. der Unveränderlichkeit der Coefficienten m', n', s', stellt diese Function eine hyperbolische Curve dar, die von einem auf der y-Achse in der Entfernung m' vom Coordinatenanfang liegenden Punkte ausgeht, wo sie die y-Achse berührt. Die erste Ableitung

$$\frac{dy}{dR} = \frac{n'}{2\sqrt{R}} + s'$$

läfst erkennen, dafs die Curve mit wachsendem R steigt und ihre Tangente sich dem Werthe s' asymptotisch nähert. Das negative Vorzeichen der zweiten Abeitung zeigt, dafs die Curve hohl zur x-Achse ist, wodurch sie sich wesentlich von unserer Curve IV unterscheidet. Da die Ganges-Messungen durchaus eine nach unten erhaben gekrümmte Curvenform verlangen, so liegt auf der Hand, dafs die Ganguillet-Kuttersche Formel diese Messungen nur unvollkommen beschreiben kann.

Fassen wir daher das, was aus dieser vergleichenden Betrachtung folgt, dahin zusammen, dafs in den beiden älteren Formeln die Function y als gerade Linie erscheint, in der jüngsten dagegen als Curve mit hohler Krümmung dargestellt ist, so ist erklärlich, dafs jede dieser Formeln nur innerhalb gewisser Grenzen einer Reihe von Messungsergebnissen mit genügender Genauigkeit zu folgen imstande sein kann und dafs sich bei Ausdehnung dieser Grenzen nach $R = 0$ und $R = \infty$ ganz erhebliche Abweichungen zeigen müssen. Es liegt daher der Gedanke nahe, diese Grenzwerthe der Function y festzustellen, um daraus Anhaltspunkte für den Gültigkeitsbereich der einzelnen Formeln und Aufschlufs über die Natur der Function y zu erhalten.

4.

Zu diesem Zwecke ist die Gröfse $y = \frac{R^2 J}{v^2}$ einer näheren Betrachtung zu unterziehen. Dieselbe besteht aus drei Gröfsen, von denen im allgemeinen zwei als unabhängig veränderlich angesehen werden können, während die dritte dann als abhängig veränderlich einen bestimmten Werth annehmen mufs. Einige Fälle sind hiervon ausgeschlossen, nämlich $J = 0$ und $R = 0$. Wenn $J = 0$ ist, mufs $v = 0$ sein, gleichgültig wie grofs R ist, und ebenso mufs, wenn $R = 0$ ist, $v = 0$ sein, gleichgültig, welchen Werth J hat. Erst wenn R und J gleichzeitg $= 0$ sind, wird die Function y verschwinden müssen. Setzen wir $R = 0$, so wird $y = J\left(\frac{R}{v}\right)^2_0$. Da nun R und v von gleichen Dimensionen sind und gleichzeitig verschwinden, so leuchtet ein, dafs $\left(\frac{R}{v}\right)^2_0$ nicht $= 0$ sein, sondern sich einer Constanten nähern wird, was ja auch mit den vorher behandelten Ganges-Messungen, sowie mit den später mitzutheilenden Bazinschen Messungen übereinstimmt.

Für $R = 0$ ist

IX) $$y = \alpha' = \alpha f_1(J)$$

und es ist nöthig, dafs, wenn nun noch $J = 0$ gesetzt wird, $f_1(J_0) = 0$ wird, damit für R und $J = 0$ ebenfalls $y = 0$ wird.

Für $J = 0$ ergiebt sich:

X) $$y = \alpha f_1(J_0) + \beta f_2(J_0) R + \gamma f_3(J_0) R^2.$$

Der Werth $\left(\frac{J}{v^2}\right)_0 \cdot R^2 = y$ ist gleichfalls unbestimmt. Aus der Zusammenstellung der Messungen, welche Darcy und Bazin an sechs rechteckigen Canälen ausgeführt haben und welche in den Abb. 2, 3 und 4 graphisch dargestellt sind, läfst sich jedoch mit gröfster Sicherheit schliefsen, dafs auch $\left(\frac{J}{v^2}\right)_0 = \text{const.}$ ist. Bildet man nämlich aus diesen Versuchen neue Reihen mit constantem R und trägt die zu den bezüglichen Gefällen gehörigen y als Ordinaten, die Gefälle als Abscissen auf, so zeigt die Abb. 2a, dafs die neuentstandenen Curven für die $R = 0{,}10$, $= 0{,}15$ und $= 0{,}20$ die y-Achse für $J = 0$ schneiden und sich asymptotisch für $J = \infty$ einer der x-Achse parallelen Linie nähern. Wir haben also aus Gleichung X, da $f_1(J_0) = 0$ sein mufs,

XI) $$R^2\left(\frac{J}{v^2}\right)_0 = \text{const.}\, R^2 = \beta f_2(J_0) R + \gamma f_3(J_0) R^2.$$

Auch ist aus Abb. 2a abzuleiten, dafs

XII) $$R^2\left(\frac{J}{v^2}\right)_\infty = \text{const.}\, R^2 = \beta f_2(J_\infty) R + \gamma f_3(J_\infty) R^2$$

sein mufs, woraus sich gewisse Bedingungen für die Functionen $f_2(J)$ und $f_3(J)$ ergeben würden.

Vorläufig möge als erwiesen gelten, dafs für $J = 0$ oder $R = 0$ die Function y einen constanten Werth annimmt, und wir wenden uns nun zu den bei weitem wichtigeren oberen Grenzwerthen, d. h. wir wollen den Werth $y = y_m$ zu bestimmen suchen, wenn R bis zu seinem gröfsten Werthe R_m zunimmt.

Hier ist zunächst die Bemerkung einzuschalten, dafs R_m nicht für alle Querschnitte $= \infty$ wird, was man gewöhnlich anzunehmen pflegt. Für die aus geschlossenen Curven gebildeten Querschnitte ist dies selbstverständlich, z. B. ist für den Vollkreis $R_m = \frac{r^2\pi}{2r\pi} = \frac{r}{2}$, allein auch für das Rechteck wird R_m nicht unendlich. Bezeichne b die Breite, t die Tiefe des Rechteckes, so ist $R = \frac{bt}{b+2t}$ und $R_m = \frac{b}{2}$. Wir wollen das Rechteck zu den geschlossenen Querschnittsformen rechnen und können daher sagen, dafs für geschlossene Querschnitte R_m endlich, für offene unendlich ist. Ferner ist für den oberen Grenzwerth von y noch der Werth J_m ins Auge zu fassen. Wir wollen nur zwei Fälle berücksichtigen: 1) J ist in der Versuchsreihe fortwährend constant $= J_m$, und 2) J ist derart veränderlich, dafs $J_m = 0$ für $R = R_m$ wird.

Endlich kommt der Grenzwerth von $v = v_m$ in Betracht. Wird $J_m = 0$, so ist auch $v_m = 0$ und es wird

$$y_m = \frac{C_m\,(R_m \cdot J_m)_{\substack{\infty \quad 0}}}{0} = \frac{\text{const}}{0} = \infty \text{ für den Fall, dafs } R_m = \infty,$$

dagegen $y_m = \dfrac{C_m\,(R_m \cdot J_m)_0}{0} = \dfrac{0}{0} = \text{const}$ für den Fall, dafs R_m endlich bleibt.

Ist J constant und J_m nicht $= 0$, so wird

$$C_m\,(R_m \cdot J_m)_\infty = \infty \text{ für } R_m = \infty, \text{ und}$$
$$C_m\,(R_m \cdot J_m) = \text{const für ein endliches } R_m.$$

In diesem Falle könnte $v_m = \text{const}$, oder $= \infty$, oder aber, entsprechend den Werthen R_m, für endliche R_m endlich, für unendliche R_m aber unendlich werden.

Um einen Anhalt zur Beurtheilung dieses Falles zu gewinnen, greifen wir auf die Gleichung I

$$J = \left\{\frac{\alpha'}{R^2} + \frac{\beta'}{R} + \gamma'\right\} v^2$$

zurück. Es mufs hier die linke Seite constant bleiben, während auf der rechten Seite $R = R_m$ und $v = v_m$ werden. Ist nun $R_m = \infty$, so verschwinden die Brüche $\frac{\alpha'}{R_m^2}$ und $\frac{\beta'}{R_m}$ und es bleibt $$J = \gamma' v_m^2.$$

Für $v_m = \infty$ müfste $\gamma' = 0$ sein, ein endliches v_m liefse den Profilcoefficienten als endliche Gröfse bestehen.

Ist R_m eine endliche Gröfse, so verschwinden die Brüche $\frac{\alpha'}{R_m^2}$ und $\frac{\beta'}{R_m}$ nicht; für $v_m = \infty$ müfste dann die ganze Klammergröfse verschwinden, d. h. $\gamma' = -\left[\frac{\alpha'}{R_m^2} + \frac{\beta'}{R_m}\right]$ sein; ein endliches R_m gestattete einen endlichen positiven Werth der Klammergröfse.

Im Sinne unserer Annahmen bedeutet dies, dafs wenn für R_m sämtliche Hemmungswiderstände verschwinden, eine gleichförmige Bewegung nur bei unendlich grofser Geschwindigkeit zustande kommen kann; bleibt jedoch irgend ein Hemmungswiderstand wirksam, so kann die Geschwindigkeit nur einen endlichen Grenzwerth erreichen. Verfolgen wir die Annahme $v_m = \infty$, so wird für endliche R_m der Endwerth $y_m = \frac{\text{const}}{\infty} = 0$, für unendliche R_m dagegen $= \frac{\infty}{\infty} = \text{const}$. Die zweite Annahme ergiebt für endliche R_m den Endwerth $y_m = \frac{\text{const}}{\text{const}} = \text{const}$, für unendliche R_m dagegen $= \frac{\infty}{\text{const}} = \infty$. Eine Entscheidung, welche von beiden Annahmen die richtige ist, läfst sich von vornherein nicht treffen. Da es auch der Vorstellung mehr zusagt, dafs die sämtlichen Widerstandskräfte nie ganz verschwinden können, so wollen wir v_m endlich annehmen, obgleich die Messungsergebnisse dies anscheinend nicht bestätigen, und erhalten nun für die Endwerthe von y die folgenden Gröfsen:

1. $y_m = \infty$ für $R_m = \infty$ und $J_m = 0$,
2. $y_m = \infty$ für $R_m = \infty$ und J_m constant,
3. $y_m =$ endlich für R_m endlich und $J_m = 0$,
4. $y_m =$ endlich für R_m endlich und J_m const.

Allgemein wird demnach y_m für offene Querschnitte unendlich, für geschlossene nimmt es dagegen einen endlichen Werth an.

Unsere Formel IV ($y = \alpha' + \beta' R + \gamma' R^2$) vermag, wie leicht ersichtlich, den vorgehenden Bedingungen zu genügen, indem sie für endliche R_m ein endliches, für unendliche R_m ein unendliches R_m ergiebt. Es verdient bemerkt zu werden, dafs für den Fall $v_m = \infty$ die obige Formel nicht imstande ist, die hieraus abgeleitete Bedingung eines endlichen y_m für $R_m = \infty$ zu erfüllen.

Da die später aufzuführenden Messungen sich hauptsächlich auf rechteckige Querschnitte erstrecken, so wird es zweckmäfsig sein, die Curve der y für diesen Fall genauer zu untersuchen.

Der Werth von y ändert sich nicht, wenn der mittlere Radius R durch die wirkliche Tiefe t ausgedrückt und in y eingesetzt wird, nur dafs jetzt y erst $= y_m$ wird, wenn t den Werth ∞ erreicht. Denken wir uns nun die Werthe von y als Ordinaten, die t als Abscissen aufgetragen, so wird sich eine Curve ergeben müssen, die steigend und hohl zur x-Achse verläuft und sich einer dieser Achse Parallelen im Abstand y_m asymptotisch nähert. Es müfste demnach $\frac{dy}{dt} = 0$ für $t = \infty$ und $\frac{d^2y}{dt^2}$ negativ sein. Nehmen wir nun für die Abscissen statt der t-Werthe die R-Werthe, so erhalten wir unsere y-Curve, welche wie erstere ebenfalls hohl zur x-Achse gekrümmt sein und an dem Punkte $R = R_m$ die Ordinate $y = y_m$ zeigen mufs. Die Tangente in diesem Punkte ist aber nicht der x-Achse parallel geblieben, sondern hat sich nach dem Coordinatenanfang zu geneigt. Sei $y = m + nR$ die Gleichung dieser Tangente, so wird an der Stelle R_m

XIII) $\quad y_m = m + n R_m$ sein müssen.

Aus unserer Gleichung IV würden wir erhalten

XIV) $\quad y_m = \alpha' + \beta' R_m - \gamma' R_m^2$, wobei das Vorzeichen des dritten Gliedes negativ zu setzen ist, damit die zweite Ableitung negativ und die Curve hohl gekrümmt ausfällt.

Endlich ist noch

XV) $$\left(\frac{dy}{dR}\right)_{R=Rm} = \beta' - 2\gamma' R_m = n.$$

Setzt man nun $\beta' = n + 2\gamma' R_m$ in die durch Gleichsetzung der rechten Seiten von Gleichung XIII und XIV zu bildende neue Gleichung, so wird:

XVI) $\quad m + nR_m = \alpha' + (n + 2\gamma' R_m) R_m - \gamma' R_m^2$, woraus

XVII) $\quad \alpha' = m - \gamma R_m^2$ folgt.

Benutzt man die aus XV für β' und in XVII für α' erhaltenen Werthe zum Einsetzen in die allgemeine Gleichung IV, so wird $\quad y = m - \gamma R_m^2 + (n + 2\gamma' R_m) R - \gamma' R^2$.

Hieraus erhält man leicht

XVIII) $$y = m + nR - \gamma'(R_m - R)^2.$$

Für $R = 0$ wird $y_0 = m - \gamma' R_m^2$, woraus $\gamma' = \frac{m - y_0}{R_m^2} = \frac{y}{R_m^2}$ und schliefslich

XIX) $$y = m + nR - p\left(\frac{R_m - R}{R_m}\right)^2$$

erhalten wird.

Die letzte Gleichung läfst erkennen, dafs für $R_m = \infty$ oder für sehr breite Canäle das letzte Glied als Constante p genommen werden kann, wodurch dann die Function y eine gerade Linie darstellen würde.

Es ist nun zu prüfen, ob und wie die Ergebnisse der Messungen diesen Herleitungen entsprechen.

5.

Wenn nun auch Wassermessungen in einer sehr grofsen Menge ausgeführt worden sind, so ist doch die Zahl derjenigen, die sich zur Berechnung von Coefficienten oder zur Verwendung bei wissenschaftlichen Untersuchungen eignen, ganz aufserordentlich gering. Diese Erscheinung ist um so auffallender, als in jüngster Zeit auch an den Wasserbautechniker Aufgaben herantreten, denen er mit Hülfe der unzuverlässigen Erfahrungsformeln kaum zu genügen vermag. Die umfangreichsten derartigen Messungen haben die französischen Ingenieure Darcy und Bazin ausgeführt und in dem Werke „Recherches hydrauliques" veröffentlicht. Im Nachfolgenden sind 17 Messungsreihen berücksichtigt, wovon drei in trapezförmigen Querschnitten mit $R_m = \infty$ angestellt wurden. Hauptsächlich ist jedoch bei der Auswahl der Messungsreihen das Material der Canäle in Betracht gezogen und es sind deshalb die aus rauhen Brettern hergestellten fast sämtlich (12) aufgeführt. Die übrigen (5) mögen zur Vergleichung und Ergänzung dienen. Demnach ordnen sich die Messungsreihen wie folgt:

A. Canäle aus rauhen Brettern.

a) $R_m = \infty$.

Reihe Nr. 21: symmetrisches Trapez $J = 0{,}0015$;
Reihe Nr. 22: unsymmetrisches Trapez $J = 0{,}0049$;
Reihe Nr. 23: Dreieck $J = 0{,}0049$.

b) R_m = endlich.

α) Rechtecke von annähernd gleicher Breite.

Reihe Nr. 9: $b = 1{,}983$ m; $J = 0{,}0015$;
Reihe Nr. 6: $b = 1{,}990$ m; $J = 0{,}00208$;
Reihe Nr. 7: $b = 1{,}990$ m; $J = 0{,}0049$;
Reihe Nr. 10: $b = 1{,}987$ m; $J = 0{,}0059$;
Reihe Nr. 8: $b = 1{,}990$ m; $J = 0{,}00824$;
Reihe Nr. 11: $b = 1{,}982$ m; $J = 0{,}00839$.

β) Rechtecke von verschiedener Breite.

Reihe Nr. 19: $b = 0{,}80$ m; $J = 0{,}0043$;
Reihe Nr. 20: $b = 0{,}48$ m; $J = 0{,}0060$.

γ) Halbkreis.

Reihe Nr. 26: $d = 1{,}40$ m; $J = 0{,}0015$.

B. Canäle aus anderen Materialien.

a) $R_m = \infty$ fehlt.

b) R_m = endlich.

a) Glattgehobeltes Holz.

Reihe Nr. 28: Rechteck $b = 0{,}10$ m; $J = 0{,}0047$;
Reihe Nr. 29: Rechteck $b = 0{,}10$ m; $J = 0{,}0150$.

b) Glatter Cement.

Reihe Nr. 2: Rechteck $b = 1{,}812$ m; $J = 0{,}0049$;
Reihe Nr. 24: Halbkreis $d = 1{,}25$ m; $J = 0{,}0015$.

c) Ziegel.

Reihe Nr. 3: Rechteck $b = 1{,}911$ m; $J = 0{,}0049$.

Die folgenden Tabellen III enthalten die Elemente der Messungen und die aus denselben berechneten Werthe für y. Die unter A.a), A.b)α) und B.a) angeführten Reihen sind in den Abbildungen 2 bis 4 graphisch dargestellt. Man übersieht leicht, dafs die einzelnen Messungen nicht immer mit der wünschenswerthen Genauigkeit sich aneinander anschliefsen, sodafs besonders bei geringer Anzahl und Ausdehnung der Einzelmessungen eine sichere Ermittlung der Coefficienten kaum erwartet werden kann, und zwar umsoweniger, als es sich um die Berechnung von drei verschiedenen Coefficienten handelt. Mit Rücksicht hierauf erschien es zweckmäfsig, neben der nach der Methode der kleinsten Quadrate durchgeführten Berechnung

Tabellen III. Messungen von Darcy und Bazin.

Nr.	R	v	$y=\frac{R^2J}{v^2}$	R	v	$y=\frac{R^2J}{v^2}$	R	v	$y=\frac{R^2J}{v^2}$	R	v	$y=\frac{R^2J}{v^2}$
	Canäle aus rauhen Brettern.											
	Reihe 21. Trapez. $J=0{,}0015$.			Reihe 22. Trapez. $J=0{,}0049$.			Reihe 23. Dreieck. $J=0{,}0049$.			Reihe 19. Rechteck. $J=0{,}0043$, $b=0{,}80$ m		
1	0,102	0,730	0,0000292	0,079	1,090	0,0000254	0,100	1,258	0,0000308	0,065	0,868	0,00002419
2	0,148	0,892	411	0,110	1,436	287	0,129	1,531	346	0,091	1,059	3182
3	0,179	1,021	459	0,137	1,612	354	0,151	1,694	387	0,111	1,261	3332
4	0,205	1,102	520	0,158	1,765	399	0,167	1,837	406	0,126	1,384	3547
5	0,227	1,175	559	0,174	1,905	409	0,182	1,940	432	0,140	1,497	3782
6	0,247	1,228	605	0,190	1,985	450	0,196	2,008	467	0,152	1,561	4008
7	0,264	1,281	634	0,203	2,089	452	0,208	2,081	490	0,163	1,648	4212
8	0,278	1,339	645	0,216	2,150	490	0,219	2,143	518	0,172	1,708	4346
9	0,292	1,376	677	0,226	2,247	495	0,229	2,203	531	0,189	1,806	4684
10	0,306	1,415	699	0,236	2,308	513	0,239	2,257	549	0,202	1,898	4856
11	0,319	1,452	725	0,246	2,365	530	0,248	2,299	571	0,213	1,974	0,00005016
12	0,334	1,485	0,0000760	0,255	2,416	550	0,256	2,363	0,0000615	—	—	—
	Reihe 9. Rechteck. $J=0{,}0015$, $b=1{,}983$ m			Reihe 6. Rechteck. $J=0{,}00208$, $b=1{,}990$ m			Reihe 7. Rechteck. $J=0{,}0049$, $b=1{,}990$ m			Reihe 20. Rechteck. $J=0{,}0043$, $b=0{,}80$ m		
1	0,084	0,548	0,00003541	0,074	0,635	0,00002787	0,057	0,826	0,00002358	0,072	1,087	0,00002654
2	0,124	0,724	4379	0,111	0,819	3793	0,083	1,127	2658	0,086	1,218	2970
3	0,180	0,945	5436	0,138	0,962	4287	0,104	1,325	3030	0,093	1,281	3149
4	0,219	1,106	5869	0,161	1,076	4651	0,122	1,479	3356	0,097	1,290	3358
5	0,251	1,234	6220	0,183	1,152	5206	0,138	1,612	3602	0,106	1,423	3311
6	0,278	1,343	6432	0,198	1,259	5112	0,154	1,711	3944	0,113	1,505	3401
7	0,304	1,420	0,00006884	0,215	1,324	5464	0,167	1,808	4171	0,120	1,558	3548
8	—	—	—	0,231	1,374	5894	0,179	1,898	4353	0,126	1,602	3694
9	—	—	—	0,244	1,440	5977	0,191	1,967	4635	0,131	1,673	0,00003701
10	—	—	—	0,258	1,487	6252	0,202	2,045	4772	—	—	—
11	—	—	—	0,268	1,552	6207	0,213	2,102	5027	—	—	—
12	—	—	—	0,281	1,587	0,00006517	0,222	2,179	0,00005063	—	—	—
	Reihe 10. Rechteck. $J=0{,}0059$. $b=1{,}987$ m			Reihe 8. Rechteck. $J=0{,}00824$, $b=1{,}990$ m			Reihe 11. Rechteck. $J=0{,}00839$, $b=1{,}982$ m			Reihe 26. Halbkreis. $J=0{,}0015$, $d=1{,}40$ m		
1	0,052	0,910	0,00001956	0,045	1,074	0.00001427	0,045	1,080	0,00001431	0,119	0,795	0,0000342
2	0,078	1,213	2415	0,070	1,348	2241	0,068	1,394	2020	0,164	0,984	419
3	0,115	1,595	3051	0,088	1,594	2523	0,102	1,830	2601	0,193	1,132	440
4	0,144	1,847	3586	0,104	1,776	2831	0,129	2,100	3176	0,219	1,230	483
5	0.169	2,039	4044	0,120	1,902	3264	0,153	2,306	3669	0,243	1,297	528
6	0,190	2,206	4377	0,131	2,053	3370	0,172	2,495	3992	0,261	1,374	550
7	0,209	2,349	0,00004675	0,142	2,186	3477	0,189	2,664	0,00004241	0,281	1,413	603
8	—	—	—	0,154	2,268	3814	—	—	—	0,294	1,486	597
9	—	—	—	0,165	2,357	4033	—	—	—	0,309	1,524	627
10	—	—	—	0,174	2,447	4186	—	—	—	0,321	1,579	628
11	—	—	—	0,184	2,518	4410	—	—	—	0,334	1,612	652
12	—	—	—	0,192	2,612	0,00004448	—	—	—	0,344	1,660	659
13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,351	1,689	0,0000653
	Canäle aus glattgehobeltem Holz.						**Canäle aus glattem Cement.**					
	Reihe 28. Rechteck. $J=0{,}0047$, $b=0{,}10$ m			Reihe 29. Rechteck. $J=0{,}015$, $b=0{,}10$ m			Reihe 2. Rechteck. $J=0{,}0049$, $b=1{,}812$ m			Reihe 24. Halbkreis. $J=0{,}001{,}5$ $d=1{,}25$ m		
1	0,0090	0,273	0,00005108	0,0092	0,571	0,00003946	0,051	1,018	0,0000127	0,112	0,921	0,0000209
2	0,0158	0,395	7520	0,0131	0,701	5308	0,077	1,338	167	0,153	1,135	260
3	0,0202	0,481	8289	0,0162	0,818	5962	0,098	1,537	205	0,184	1,267	302
4	0,0228	0,530	8698	0,0186	0,914	6295	0,114	1,731	220	0,208	1,401	314
5	0,0257	0,592	8899	0,0225	1,086	6525	0,131	1,853	253	0,229	1,483	338
6	0,0277	0,643	8722	—	—	—	0,145	1,984	267	0,247	1,562	355
7	0,0284	0,658	0,00008756	—	—	—	0,158	2,081	292	0,264	1,612	382
8	—	—	—	—	—	—	0,170	2,171	309	0,279	1,681	392
9	—	—	—	—	—	—	0,181	2,258	329	0,289	1,754	387
10	—	—	—	—	—	—	0,193	2,326	348	0,303	1,803	401
11	—	—	—	—	—	—	0,203	2,397	363	0,314	1,847	411
12	—	—	—	—	—	—	0,212	2,460	0,0000380	0,315	1,862	0,0000408

Canäle aus Ziegeln.

Nummer	R	v	$y=\frac{R^2J}{v^2}$
	Reihe 3. Rechteck. $J=0{,}0049$, $b=1{,}911$ m		
1	0,059	0,839	0,0000239
2	0,087	1,117	294
3	0,111	1,274	375
4	0,129	1,440	335
5	0,147	1,555	436
6	0,165	1,626	502
7	0,178	1,731	517
8	0,189	1,831	522
9	0,204	1,874	579
10	0,212	1,973	568
11	0,225	2,012	614
12	0,237	2,047	0,0000659

der Coefficienten α', β' und γ' noch für sämtliche Reihen die Coefficienten α'_1 und β'_1 zu ermitteln für den Fall, dafs $\gamma' = 0$ angenommen wird. Es müfste sich der Einflufs der Profilform in der Abweichung der beiden Coefficienten deutlich erkennen lassen, da diese viel sicherer berechnet werden können, als jene drei.

A. a. Die offenen Profile.

Reihe Nr. 21: Trapez mit 1 m breiter Grundlinie, beiderseits um 45° geneigten Seitenwänden; $J = 0{,}0015$.

Die drei Bestimmungsgleichungen für α', β', γ' lauten:

$$0{,}758109\,\alpha' + 0{,}208575633\,\beta' + 0{,}059426132181\,\gamma' = 0{,}000049008508.$$

$$2{,}901\,\alpha' + 0{,}758109\,\beta' + 0{,}208575633\,\gamma' = 0{,}000179908.$$

$$12\,\alpha' + 2{,}901\,\beta' + 0{,}758109\,\gamma' = 0{,}0006986.$$

Aus denselben ergiebt sich

$$y = 0{,}00000508 + 0{,}0002563\,R - 0{,}0001397\,R^2.$$

Für $\gamma' = 0$ ist

$$y = 0{,}00001129 + 0{,}0001941\,R.$$

Reihe Nr. 22: Trapez mit 1 m breiter Grundlinie, eine Seitenwand senkrecht, die andere um 45° geneigt; $y = 0{,}0049$.

Die drei Bestimmungsgleichungen:

$$0{,}448628\,\alpha' + 0{,}095065594\,\beta' + 0{,}020856886\,\gamma' = 0{,}0000213470466,$$

$$2{,}23\,\alpha' + 0{,}448628\,\beta' + 0{,}095065594\,\gamma' = 0{,}0001021006,$$

$$12\,\alpha' + 2{,}23\,\beta' + 0{,}448628\,\gamma' = 0{,}0005183,$$

ergeben

$$y = 0{,}00001083 + 0{,}0001815\,R - 0{,}00003663\,R^2.$$

Für $\gamma' = 0$ ist

$$y = 0{,}00001179 + 0{,}0001690\,R.$$

Reihe Nr. 23: Dreieck, beide Seiten um 45° geneigt; $J = 0{,}0049$.

Die drei Bestimmungsgleichungen:

$$0{,}476698\,\alpha' + 0{,}101998694\,\beta' + 0{,}022510200886\,\gamma' = 0{,}0000241906729,$$

$$2{,}324\,\alpha' + 0{,}476698\,\beta' + 0{,}101998694\,\gamma' = 0{,}0001139049,$$

$$12\,\alpha' + 2{,}324\,\beta' + 0{,}476698\,\gamma' = 0{,}0005260,$$

ergeben

$$y = 0{,}00002096 + 0{,}0000596\,R + 0{,}0003606\,R^2.$$

Für $\gamma' = 0$ ist

$$y = 0{,}0000971 + 0{,}0001917\,R.$$

Wenn, wie dies in 4. nachgewiesen ist, die Curve der y eine nach der x-Achse erhaben gekrümmte Linie bilden soll, so ist dazu nöthig, dafs die zweite Ableitung einen positiven Werth hat, und dieses erfordert ein positives Vorzeichen des dritten Gliedes. In den obigen drei Versuchsreihen ist dies nur bei dem Dreieckquerschnitt der Fall. Die beiden Trapezquerschnitte ergeben negative Profilcoefficienten und deshalb hohl gekrümmte Curven. Da nun aber die einzelnen Messungen der Reihen 21 und 22 recht erhebliche Abweichungen untereinander zeigen, ihre Anzahl auch mit Rücksicht auf das Wachsen von R bis ∞ eine recht geringe ist, so kann diesen Reihen eine nennenswerthe Beweiskraft für die drei Coefficienten nicht beigelegt werden. Berücksichtigen wir, dafs auch bei den Ganges-Canal-Messungen sich die erhabene Krümmung der y-Linie deutlich herausgestellt hat und sich dasselbe Gesetz bei dem Canal mit dreieckigem Querschnitt wiederholt, so dürfen wir wohl unsere Annahme solange als erwiesen betrachten, bis sie durch genaue Versuche als unzutreffend sich herausstellt. Uebrigens können aus dem übrigen Messungsmaterial noch eine grofse Anzahl einschlägiger Reihen beigebracht werden, die unsere Annahme bezüglich der erhabenen Krümmung unterstützen würden, nur ist hierbei selten die Art des Querschnitts genau genug angegeben. In Abb. 5 ist eine kleine Zusammenstellung mehrerer Messungsreihen dargestellt, deren Elemente die Tabelle IV enthalten. Sie dürfte wohl genügen, um zu zeigen, dafs selbst die riesigen Wassermengen des Mississippi nach den Messungen bei Vicksburg das erörterte Gesetz befolgen. (Die abweichenden Messungen bei Columbus deuten auf die fehlende Stetigkeit der Querprofile.) Viel besser als die Coefficienten des Trinoms schliefsen sich die des Binoms aneinander an. Es läfst sich aus ihnen zwar durch Mitteln der Werthe für α'_1 und β'_1 die allgemeine Gleichung

$$y = 0{,}00001093 + 0{,}0001849\,R$$

bilden, jedoch genügen die Ergebnisse nicht, um aus ihnen die Natur der Functionen $\alpha'_1 = \alpha f'_1(J)$ und $\beta'_1 = \beta f'_2(J)$ herleiten zu können.

Tabelle IV.

Nummer	R	v	J	y
	Mississippi.			
	Vicksburg.			
1	9,497	1,074	0,00002227	0,00174
2	15,886	1,694	3029	266
3	17,484	1,926	4811	396
4	19,538	2,118	6379	543
5	19.566	2,008	4365	390
	Columbus.			
6	20,081	2,121	0,00006800	0,00609
	Carrolton.			
7	21,953	1,807	0,00002051	0,00303
8	22,085	1,794	1713	260
9	22,413	1,229	342	114
10	22.673	1,212	384	124
	Seine à Poissy.			
1	2,164	0,704	0,000090	0,000848
2	2,341	0,705	87	959
3	3,426	0,720	57	1291
4	3,788	0,719	60	1656
5	4,137	0,723	50	1636
6	4,328	0,791	54	1616
7	4,836	0,887	62	1841
8	5,135	0,045	67	1976
9	5,448	1,015	0,000075	2138
	Saône.			
1	2,720	0,488	0,0000400	0,00124
2	3,314	0,565	—	133
3	3,539	0,582	—	146
4	3,598	0,592	—	146
5	4,044	0,687	—	139
6	4,463	0,722	—	153
7	4,825	0,725	—	177

A. b. Die geschlossenen Profile.

Reihe Nr. 9. Die drei Bestimmungsgleichungen:

$$0{,}335494\,\alpha' + 0{,}084227454\,\beta' + 0{,}022118885746\,\gamma' = 0{,}00002075074961,$$

$$1{,}44\,\alpha' + 0{,}335494\,\beta' + 0{,}084227454\,\gamma' = 0{,}00008546283,$$

$$7\,\alpha' + 1{,}44\,\beta' + 0{,}335494\,\gamma' = 0{,}00038761,$$

ergeben

$$y = 0{,}00001665 + 0{,}0002534\,R - 0{,}0002793\,R^2.$$

Für $\gamma' = 0$ ist

$$y = 0{,}00002538 + 0{,}0001458\,R.$$

Reihe Nr. 6. Die drei Bestimmungsgleichungen:

$$0{,}511926\,\alpha' + 0{,}117867022\,\beta' + 0{,}028227807366\,\gamma' = 0{,}00002940227647,$$

$$2{,}362\,\alpha' + 0{,}511926\,\beta' + 0{,}117867022\,\gamma' = 0{,}00013044727,$$

$$12\,\alpha' + 2{,}362\,\beta' + 0{,}511926\,\gamma' = 0{,}000622,$$

ergeben

$$y = 0{,}00000963 + 0{,}0002761\,R - 0{,}0002984\,R^2.$$

Für $\gamma' = 0$ ist

$$y = 0{,}00001825 + 0{,}0001706\,R.$$

Reihe Nr. 7. Die drei Bestimmungsgleichungen:

$$0{,}310466\,\alpha' + 0{,}056185754\,\beta' + 0{,}010609166822\,\gamma' = 0{,}00001368028150,$$

$$1{,}832\,\alpha' + 0{,}310466\,\beta, + 0{,}056185754\,\gamma' = 0{,}00007703734,$$

$$12\,\alpha' + 1{,}832\,\beta' + 0{,}31046\,\gamma' = 0{,}00046969,$$

ergeben

$$y = 0{,}00001388 + 0{,}0001536\,R + 0{,}00007\,R^2.$$

Für $\gamma' = 0$ ist

$$y = 0{,}00001270 + 0{,}0001732\,R.$$

Reihe Nr. 10. Die drei Bestimmungsgleichungen:

$$0{,}151091\,\alpha' + 0{,}025937157\,\beta' + 0{,}004676179475\,\gamma' = 0{,}00000612409714,$$

$$0{,}957\,\alpha' + 0{,}151091\,\beta' + 0{,}025937157\,\gamma' = 0{,}00003649472,$$

$$7\,\alpha' + 0{,}957\,\beta' + 0{,}151091\,\gamma' = 0{,}00024104,$$

ergeben

$$y = 0{,}00000987 + 0{,}0001872\,R - 0{,}00004767\,R^2.$$

Für $\gamma' = 0$ wird

$$y = 0{,}00001054 + 0{,}0001748\,R^0.$$

Reihe Nr. 8. Die drei Bestimmungsgleichungen:

$$0{,}229147\,\alpha' + 0{,}035799645\,\beta' + 0{,}005838981523\,\gamma' = 0{,}00000879235798,$$

$$1{,}569\,\alpha' + 0{,}229147\,\beta' + 0{,}035799645\,\gamma' = 0{,}00005711038,$$

$$12\,\alpha' + 1{,}569\,\beta' + 0{,}229147\,\gamma' = 0{,}00040024,$$

ergeben

$$y = 0{,}00000346 + 0{,}0002729\,R - 0{,}0003033\,R^2.$$

Für $\gamma' = 0$ ist

$$y = 0{,}00000732 + 0{,}0001991\,R.$$

Reihe Nr. 11. Die drei Bestimmungsgleichungen:

$$0{,}122491\,\alpha' + 0{,}01906164\,\beta' + 0{,}003117238855\,\gamma' = 0{,}00000448020171,$$

$$0{,}8581\,\alpha' + 0{,}122491\,\beta' + 0{,}01906164\,\gamma' = 0{,}000029271784,$$

$$7\,\alpha' + 0{,}8581\,\beta' + 0{,}122491\,\gamma' = 0{,}000211301,$$

ergeben

$$y = 0{,}00000418 + 0{,}0002394\,R - 0{,}0001911\,R^2.$$

Für $\gamma' = 0$ ist

$$y = 0{,}00000631 + 0{,}0001948\,R.$$

Reihe Nr. 19. Die drei Bestimmungsgleichungen:

$$0{,}261454\,\alpha' + 0{,}04472848\,\beta' + 0{,}007988662054\,\gamma' = 0{,}0000113631,$$

$$1{,}624\,\alpha' + 0{,}261454\,\beta' + 0{,}04472848\,\gamma' = 0{,}0000678442,$$

$$11\,\alpha' + 1{,}624\,\beta' + 0{,}261454\,\gamma' = 0{,}0004347,$$

ergeben

$$y = 0{,}00001241 + 0{,}0002028\,R - 0{,}0001192\,R^2.$$

Für $\gamma' = 0$ ist

$$y = 0{,}00001455 + 0{,}0001691\,R.$$

Reihe Nr. 20. Die drei Bestimmungsgleichungen:

$$0{,}10208\,\alpha' + 0{,}011336714\,\beta' + 0{,}001288111488\,\gamma' = 0{,}00000348435349,$$

$$0{,}944\,\alpha' + 0{,}10208\,\beta' + 0{,}011336714\,\gamma' = 0{,}00003176405,$$

$$9\,\alpha' + 0{,}944\,\beta' + 0{,}10208\,\gamma' = 0{,}00029786,$$

ergeben

$$y = 0{,}00000208 + 0{,}0004352\,R - 0{,}00129\,R^2.$$

Für $\gamma' = 0$ ist

$$y = 0{,}00001524 + 0{,}0001702\,R.$$

Reihe Nr. 26. Die drei Bestimmungsgleichungen:

$$0{,}970449\,\alpha' + 0{,}28730976\,\beta' + 0{,}0878056564\,\gamma' = 0{,}000057927193,$$

$$3{,}433\,\alpha' + 0{,}970449\,\beta' + 0{,}28730976\,\gamma' = 0{,}0001985924,$$

$$13\,\alpha' + 3{,}433\,\beta' + 0{,}970449\,\gamma' = 0{,}0007181,$$

ergeben

$$y = 0{,}00001213 + 0{,}0001952 - 0{,}0001131\,R^2.$$

Für $\gamma' = 0$ ist

$$y = 0{,}00001819 = 0{,}0001403\,R.$$

B. Canäle aus verschiedenen Materialien.

b) Geschlossene Profile.

α) Glattgehobeltes Holz.

Reihe Nr. 28: Rechteck. Die drei Bestimmungsgleichungen:

$$0{,}00349286\,\alpha' + 0{,}000085902902\,\beta' + 0{,}0000021811314146\,\gamma' = 0{,}00000002982709593,$$

$$0{,}1496\,\alpha' + 0{,}00349286\,\beta' + 0{,}000085902902\,\gamma' = 0{,}0000012495143,$$

$$7\,\alpha' + 0{,}1496\,\beta' + 0{,}00349286\,\gamma' = 0{,}000055992,$$

ergeben

$$y = 0{,}000002115 + 0{,}0006588\,R - 0{,}01261\,R^2.$$

Für $\gamma' = 0$ ist

$$y = 0{,}00000418 + 0{,}0001788\,R.$$

Reihe Nr. 29: Rechteck. Die drei Bestimmungsgleichungen:

0,0013709 α' + 0,00002510378[illegible] β' + 0,00000048141660594 γ' = 0,00000000829066205,

$$0{,}0796\,\alpha, + 0{,}0013709\,\beta' + 0{,}000025103788\,\gamma' = 0{,}0000004663219,$$

$$5\,\alpha' + 0{,}0796\,\beta' + 0{,}0013709\,\gamma' = 0{,}000028036,$$

ergeben

$$y = -0{,}000000941 + 0{,}0006726\,R - 0{,}01517\,R^2{}_1.$$

Für $\gamma' = 0$ ist

$$y = 0{,}000002538 + 0{,}0001928\,R.$$

β) Glatter Cement.

Reihe Nr. 2: Rechteck. Die drei Bestimmungsgleichungen:

$$0{,}279343\,\alpha' + 0{,}048178301\,\beta' + 0{,}00867692885\,\gamma' = 0{,}0000088113713,$$

$$1{,}733\,\alpha' + 0{,}279343\,\beta' + 0{,}048178301\,\gamma' = 0{,}0000516071,$$

$$12\,\alpha' + 1{,}733\,\beta' + 0{,}279343\,\gamma' = 0{,}0003260,$$

ergeben

$$y = 0{,}0000052 + 0{,}0001465\,R - 0{,}00003442\,R^2.$$

Für $\gamma' = 0$ ist

$$y = 0{,}00000467 + 0{,}0001558\,R.$$

Reihe Nr. 24: Halbkreis. Die drei Bestimmungsgleichungen:

$$0{,}746845\,\alpha' + 0{,}201433\,\beta' + 0{,}05602824\,\gamma' = 0{,}0000279114,$$

$$2{,}8964\,\alpha' + 0{,}746845\,\beta' + 0{,}201433\,\gamma' = 0{,}0001050091,$$

$$12\,\alpha' + 2{,}89F4\,\beta' + 0{,}746845\,\gamma' = 0{,}000416005,$$

ergeben

$$y = 0{,}00000628 + 0{,}0001472\,R - 0{,}0001148\,R^2.$$

Für $\gamma' = 0$ ist

$$y = 0{,}00001142 + 0{,}0000963\,R.$$

γ) Ziegelmauerwerk.

Reihe Nr. 3: Rechteck. Die drei Bestimmungsgleichungen:

$$0{,}349605\,\alpha' + 0{,}067158341\,\beta' + 0{,}013455854\,\gamma' = 0{,}0000189090796,$$

$$1{,}943\,\alpha' + 0{,}349605\,\beta' + 0{,}067158341\,\gamma' = 0{,}000099499,$$

$$12\,\alpha' + 1{,}943\,\beta' + 0{,}349605\,\gamma' = 0{,}0005640,$$

ergeben

$$y = 0{,}00001144 + 0{,}0001988\,R + 0{,}0001157\,R^2.$$

Für $\gamma' = 0$ ist

$$y = 0{,}00000916 + 0{,}0002337\,R.$$

6.

Die Ergebnisse der vorstehenden Coefficienten-Berechnungen sind der bequemen Uebersicht wegen in den nachfolgenden beiden Tabellen V und VI zusammengestellt, und zwar enthält die erste Tabelle die Coefficienten des dreigliedrigen Ausdrucks für die geschlossenen Querschnitte, während in der zweiten Tabelle die Coefficienten des zweigliedrigen Ausdrucks für y (wenn $\gamma' = 0$ gesetzt wird) aufgeführt sind.

Von den vierzehn Reihen der Tabelle V hat sich nur bei drei Messungen ein positives γ' ergeben, sodafs bei weitem die gröfsere Anzahl der Versuche unsere Annahme bestätigt, und wir können daher den Satz als erwiesen betrachten, dafs bei geschlossenen Querprofilen die Curve der y eine hohl nach unten gekrümmte Linie darstellen mufs.

Nach den früheren Ausführungen bezeichnete n die Tangente des Neigungswinkels für den Punkt R_m, und es war nachgewiesen, dafs diese Gröfse n immer positiv bleiben mufs, da die y-Curve stetig steigen mufs. Um nun zu zeigen, inwieweit die berechneten Curven auch dieser Bedingung entsprechen, ist in Tabelle V den Messungsreihen der Werth $n = \beta - 2\gamma R_m$ beigesetzt. Es zeigt sich, dafs derselbe nur für vier Reihen positiv ausfällt; die Curven der übrigen zehn Reihen haben also einen Culminationspunkt vor $R = R_m$, von welchem ab die y-Curve fällt. Ob diese Erscheinung auf die Ungenauigkeit der Versuche oder auf die Unrichtigkeit der Annahme eines constanten Profilcoefficienten zurückzuführen ist, läfst sich mit Sicherheit nicht entscheiden. Vermuthlich ist letzteres der Fall und es wird angenommen werden müssen, dafs dieser Coefficient, von einer gewissen Gröfse für $R = 0$ ausgehend, mit wachsendem R bis zu einem gewissen Werthe für $R = R_m$ abnimmt. Da nun γ' nicht zuverlässig erhalten worden ist, so kann dies von den Coefficienten α' und β' auch nicht erwartet werden, und es ist daher nicht möglich, die Functionen $\alpha f_1(J)$, $\beta f_2(J)$ und $\gamma f_3(J)$ zu entwickeln. Die sechs ersten Versuchsreihen müfsten, da sie an Canälen vom selben Material und nahezu gleicher Breite angestellt sind, in den Veränderungen von α' und β' lediglich den Einflufs der verschiedenen Gefälle erkennen lassen. Bedauerlicherweise sind dieselben hierzu nicht genau und umfangreich genug, namentlich fehlen auch Versuche mit geringen Gefällen.

Besonderes Interesse verdienen die Reihen Nr. 28 und 29. Die graphische Darstellung der y-Curven, Abb. 3, zeigt auf das deutlichste die hohle Krümmung derselben; die aus den Messungen berechneten Coefficienten stellen Curven dar, wie aus der Abb. 3 ersichtlich, die recht deutlich auf den Punkt $R = R_m$ $y_m = 0$ hinweisen. Diese Erscheinung, in Verbindung mit den negativen Werthen der zehn Messungen für die Tangente n läfst sich nur dadurch erklären (vorausgesetzt die zweifellose Richtigkeit der Messungselemente), dafs $v_m = \infty$ sein müfste. Bei der Unzulänglichkeit des Materials mufs diese Frage unentschieden bleiben, jedoch zeigen die Messungen an den sehr schmalen Canälen, dafs über die Bewegung des Wassers durch sorgfältige Versuche im Experimentirsaal Aufschlüsse erhalten werden können, welche die Möglichkeit bieten, auch für die Erscheinungen bei der Bewegung der grofsen Wassermassen in natürlichen Flufsläufen Anhaltspunkte zu gewinnen.

Zwar sollte es nicht Aufgabe der vorliegenden Abhandlung sein, möglichst viel Coefficienten zu berechnen, allein diese Arbeit ist nicht zu umgehen, um die Richtigkeit der zugrunde gelegten Anschauungen zu erhärten. Es ist daher noch die Tabelle VI zusammengestellt aus den Coefficienten des Binoms, um zu zeigen, dafs ein gesetzmäfsiger Zusammenhang zwischen den an kleinen Canälen gewonnenen Ergebnissen und den Erscheinungen an gröfseren Wasserläufen stattfindet.

Der Coefficient β'_1 in der Tabelle VI zeigt in den Messungsreihen von 9 bis 11 ein fast stetiges Steigen mit wachsendem Gefälle und zwar von 0,000146 bis 0,000199 für $J = 0{,}00015$ bis $J = 0{,}00839$; nimmt man hierzu, dafs wir für β' bei den Ganges-Messungen den Werth 0,0001478 erhalten haben und dafs ferner der Coefficient der inneren Reibung für Wasser durch andere Versuche auf 0,00014 (für 1 Meter-

Tabelle V.

Reihe Nr.	J	α'	β'	γ'	$n = \beta' - 2\gamma' R_m$	$2 R_m$	
				Rauhe Bretter.			
9	0,00159	0,00001665	0,0002534	— 0,0002793	— 0,000300	1,983	Rechteck.
6	0,00208	0,00000963	0,0002761	— 0,0002984	— 0,000320	1,990	„
7	0,00490	(0,00001388)	(0,0001536)	(+ 0,0000700)	—	1,990	„
10	0,00590	0,00000987	0,0001872	— 0,0000477	+ 0,000095	1,987	„
8	0,00842	0,.....346	0,0002729	— 0,0003033	— 0,000334	1,990	„
11	0,00839	0,.....418	0,0002394	— 0,0001911	— 0,000143	1,982	„
26	0,0015	0,00001213	0,0001952	— 0,0001131	+ 0,000037	1,400	Halbkreis.
19	0,0043	0,....1241	0,0002028	— 0,0001192	+ 0,000107	1,800	Rechteck.
20	0,0060	0,00002080	0,0004352	— 0,0002900	— 0,000184	1,480	„
				Glatte Bretter.			
28	0,0049	0,000002115	0,0006568	— 0,01261	— 0,000602	0,10	„
29	0,0150	— 0,000000941	0,0006726	— 0,01517	— 0,000844	0,10	„
				Glatter Cement.			
24	0,0015	0,00000628	0,0001472	— 0,0001148	+ 0,0000037	1,250	Halbkreis.
2	0,0049	(0,00000521)	(0,0001465)	(+ 0,0000344)	—	1,812	Rechteck.
				Ziegelmauerwerk.			
3	0,0049	(0,00001144)	(0,0001988)	(+ 0,0001157)	—	1,911	„

Tabelle VI.

Reihe Nr.	J	α'	β'	Querschnitt.
		Rauhe Bretter.		
9	0,00150	0,00002538	0,0001458	Rechteck $b = 1{,}983$.
26	0,00150	1819	1403	Halbkreis $d = 1{,}25$.
21	0,00150	1129	1941	Trapez symmetrisch $b = 1{,}0$.
6	0,00208	1825	1706	Rechteck $b = 1{,}990$.
19	0,00430	1455	1691	„ $b = 0{,}800$.
7	0,00490	1270	1732	„ $b = 1{,}990$.
22	0,00490	1179	1690	Trapez unsymmetrisch.
23	0,00490	0971	1917	Dreieck.
10	0,00590	1054	1748	Rechteck $b = 1{,}987$.
20	0,00600	1524	1702	„ $b = 0{,}480$.
8	0,00824	732	1991	„ $b = 1{,}990$.
11	0,00839	631	1948	„ $b = 1{,}982$.
		Glatte Bretter.		
28	0,00490	0,00000418	0,0001788	Rechteck $b = 0{,}10$.
29	0,01500	0,00000254	0,0001928	„ $b = 0{,}10$.
		Glatter Cement.		
24	0,00150	0,00001142	0,0000963	Halbkreis $d = 1{,}25$.
2	0,00490	0,00000467	0,0001558	Rechteck $b = 1{,}812$.
		Ziegelmauerwerk.		
3	0,00490	0,00000916	0,0002337	Rechteck $b = 1{,}911$.

Secunde) ermittelt ist, so dürfte diese Ueberstimmung wohl auf einen ursächlichen Zusammenhang der fraglichen Zahlenwerthe mit grofser Sicherheit hindeuten.

Die Coefficienten α'_1 müfsten nach den Entwicklungen entsprechend der Gleichung IX mit dem Gefälle in geradem Verhältnifs stehen. Die berechneten Werthe α'_1 nehmen jedoch mit wachsendem Gefälle ab, und es mufs daran erinnert werden, dafs dies durch die Vernachlässigung des Profilcoefficienten, der keinenfalls für $R = 0$ verschwinden dürfte, zu erklären ist.

Es konnten in der vorliegenden Arbeit nicht wohl alle von Darcy und Bazin angestellten und veröffentlichten Versuchsreihen berücksichtigt werden, da einerseits die Bewältigung der mechanischen Rechenarbeit die Kräfte des Verfassers übersteigen würde, andererseits auch aus den vorgeführten Beispielen deutlich hervorgeht, dafs diese Versuche zur schliefslichen Bestimmung der Gefäll-Functionen doch nicht ausreichend sein würden.

Wenn daher vorläufig auch nur als erwiesen betrachtet werden kann, dafs die durch die Gröfse $y = \frac{R^2}{v^2} J$ als Ordinate für R als Abscisse beschriebene Curve sich durch einen dreigliedrigen Ausdruck darstellen läfst, dessen letztes Glied bei Querschnitten mit endlichem Höchstwerth von R ein negatives, bei Querschnitten mit unendlichem Höchstwerth von R ein positives Vorzeichen erhält, so wäre doch die Ausführung weiterer Versuche als dringend erforderlich nachgewiesen, um auch die praktische Wasserbaukunst auf die theoretische Grundlage zu stellen, welche sie bis jetzt entbehrt.

Halle a. S., Buchdruckerei des Waisenhauses.

Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen.

Abb. 1.

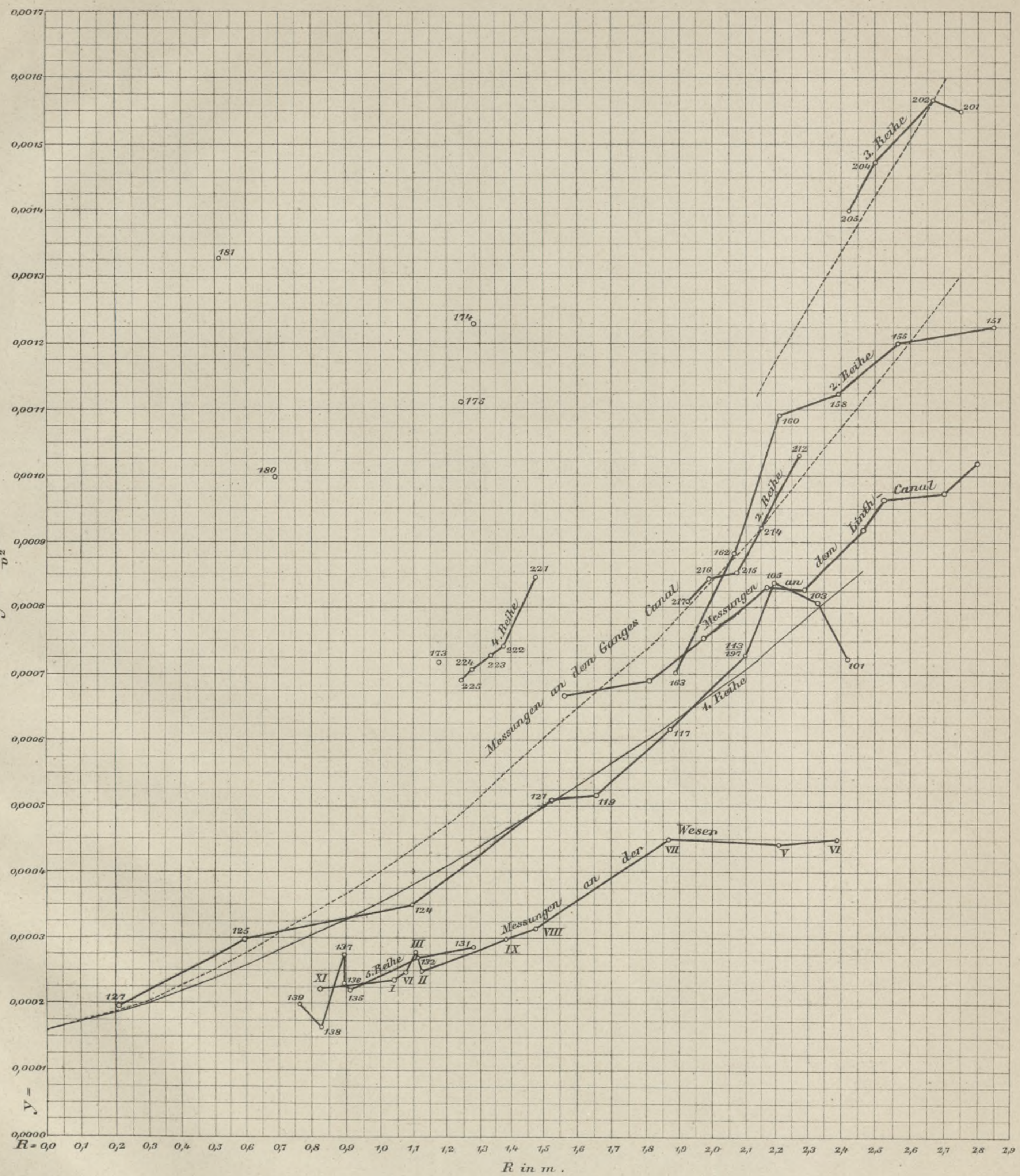


Abb. 2.

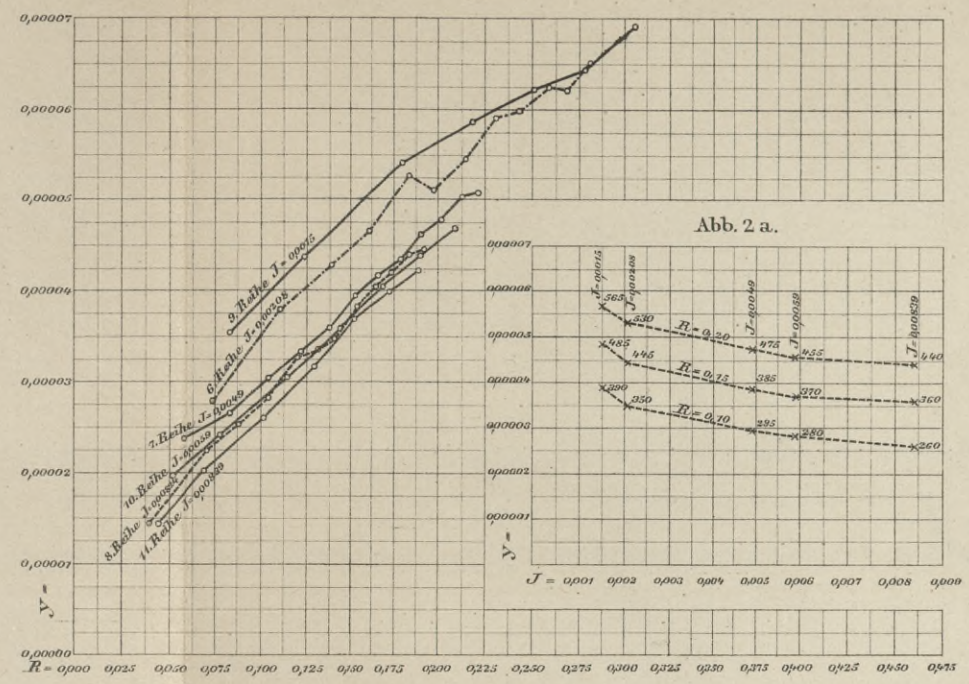


Abb. 3.

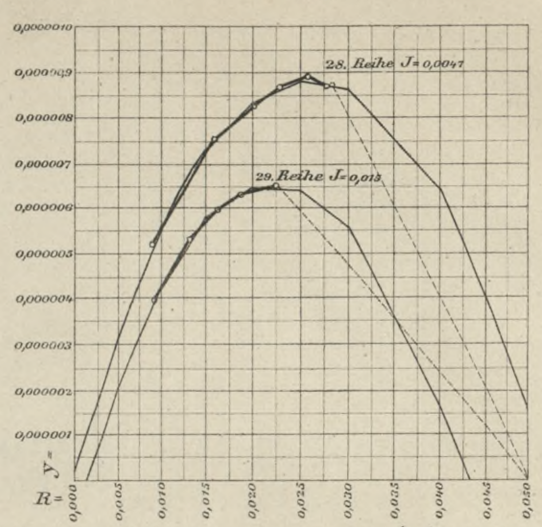


Abb. 4.
Offene Querschnitte.

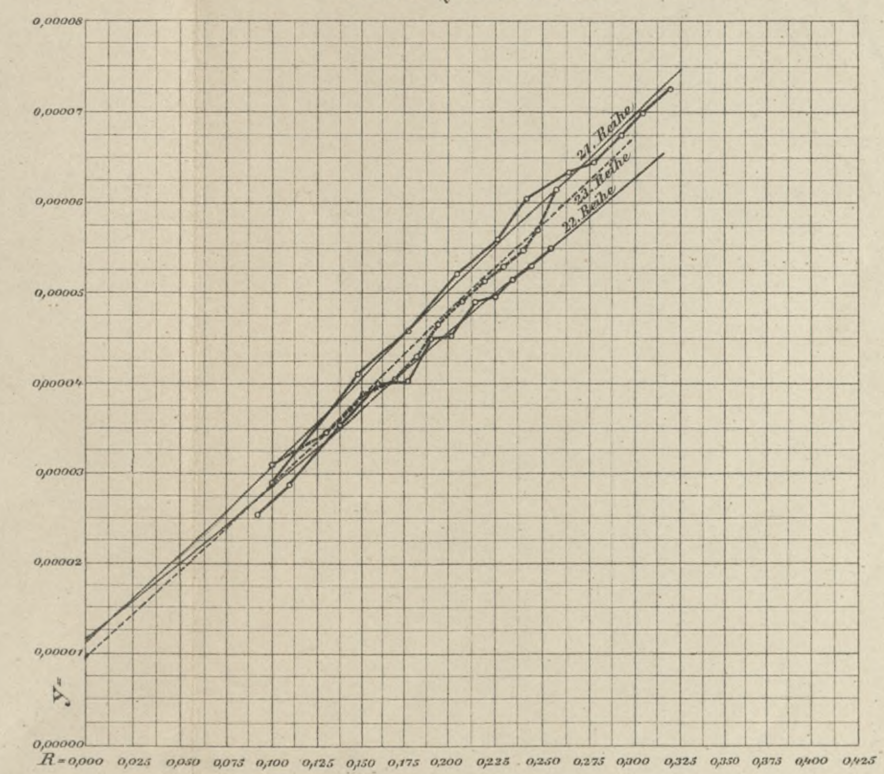
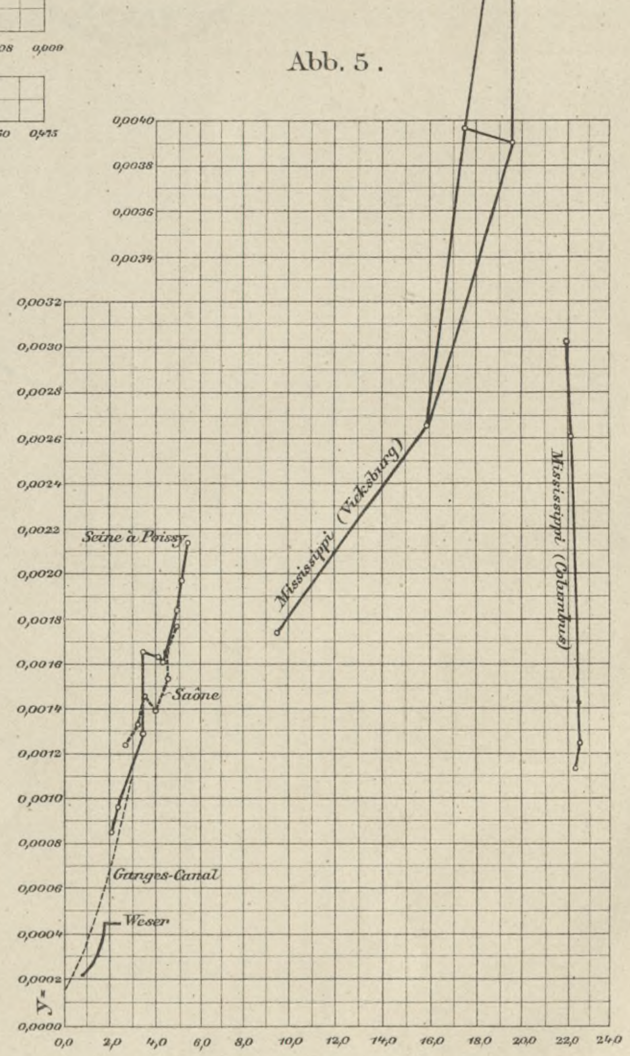


Abb. 5.



Ernst & Korn, Berlin.

Lith. Anst. v. Bogdan Gisevius, Berlin W.