

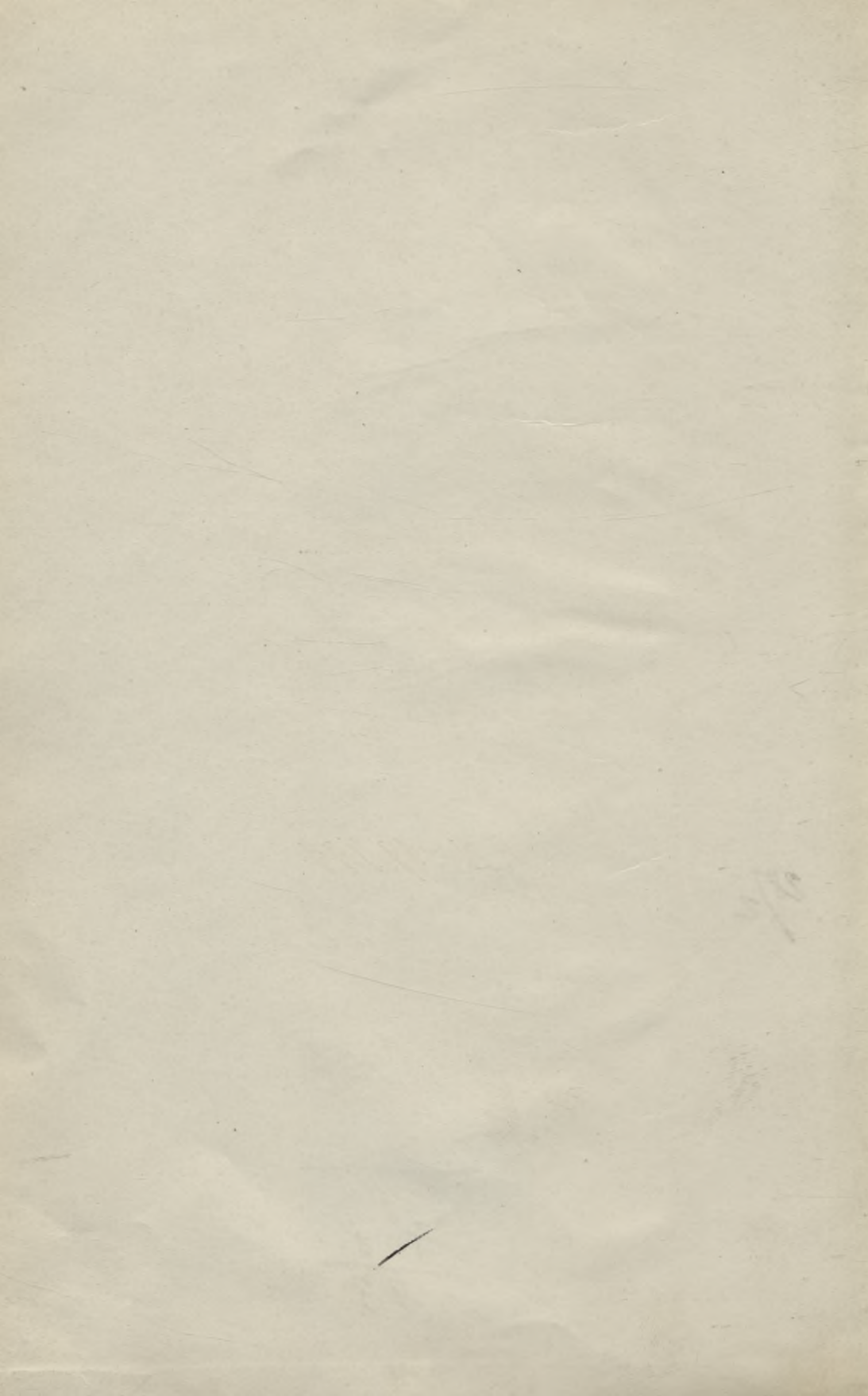
4
40

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000305716

x
289



J

DIE BERECHNUNG
EBENER UND GEKRÜMMTER
BEHÄLTERRÖDEN.

VON

PH. FORCHHEIMER
PROFESSOR IN AACHEN.

MIT FÜNFZEHN ABBILDUNGEN IN HOLZSCHNITT.

287/2

J. Nr. 19791



BERLIN 1894.

VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN.

(VORMALS ERNST & KORN.)

~~III B.~~

~~288.~~

33.

Sonderdruck aus der Zeitschrift für Bauwesen, Jahrg. 1894.

Alle Rechte vorbehalten.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW
III 33197

Akc. Nr. 3292 149

1. Grundgleichungen für Blechstreifen.

Für die unter der Einwirkung äußerer Kräfte durchgebogene Achse eines ursprünglich geraden Balkens gilt bekanntlich die Beziehung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_x}{JE} \dots \dots \dots (1)$$

In dieser Gleichung bedeutet M_x das Biegemoment der äußeren Kräfte, J das Trägheitsmoment des Balkenquerschnittes, E den Elasticitätsmodul. Bei der Ableitung von (1) wird nicht vorausgesetzt, daß der Balken, als seine Achse noch eine Gerade bildete, spannungslos gewesen sei, wohl aber, daß er sich bei der Biegung seitlich beliebig zusammenziehen und ausdehnen konnte. Wird jede seitliche Bewegung verhindert, handelt es sich z. B. um das mittlere Stück einer Platte von großer seitlicher Ausdehnung und bedeutet M_x das Biegemoment, J das Trägheitsmoment des Streifens von der Breite „Eins“, so tritt an die Stelle von (1)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_x}{JE(1 + \mu^2)} \dots \dots \dots (2)$$

worin μ den Coefficienten der Quercontraction bezeichnet. Wenn die Platte wagerecht, $2l$ lang, an beiden Enden aufgelagert ist, und mit einer gleichförmig vertheilten lothrechten Last von der Größe p auf der Flächeneinheit belastet ist, ferner auf die beiden Enden des Streifens von der Breite Eins außer den lotrechten Auflagerdrucken $-pl$ zwei gleich große aber entgegengesetzt gerichtete wagerechte Zugkräfte $\pm S$ und Momente $\pm M_l$ wirken, so gilt (für das Achsenkreuz der Abb. 2)

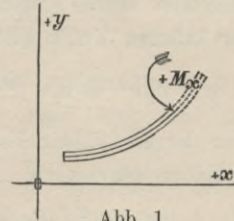


Abb. 1.

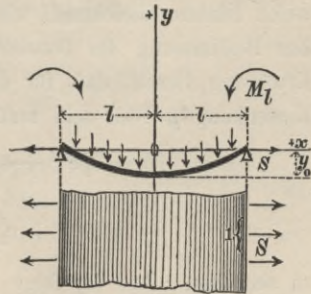


Abb. 2.

$$M_x = \frac{pl^2}{2} - \frac{px^2}{2} + M_l + Sy \quad \dots \quad (3)$$

worin y und daher auch Sy negativ ist, oder

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{p(l^2-x^2)}{2} + M_l + Sy}{JE(1+\mu^2)} \quad \dots \quad (4)$$

oder, wenn eine Hilfsgröße

$$w = \sqrt{\frac{S}{JE(1+\mu^2)}} \quad \dots \quad (5)$$

eingeführt wird,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ \frac{p(l^2-x^2)}{2S} + \frac{M_l}{S} + y \right\} w^2 \quad \dots \quad (6)$$

Dieser Ausdruck (6) kann als Differentialgleichung der Curve aufgefaßt werden, welche die Plattenachse unter dem Einflusse der äußeren Kräfte bildet. Ihre allgemeine Lösung lautet:

$$y = c_1 e^{wx} + c_2 e^{-wx} - \frac{p(l^2-x^2)}{2S} + \frac{p}{Sw^2} - \frac{M_l}{S} \quad (7)$$

Von der Richtigkeit dieser Lösung kann man sich durch Differentiation überzeugen. In der That geht aus (7) hervor:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= c_1 w e^{wx} - c_2 w e^{-wx} + \frac{px}{S} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= w^2 (c_1 e^{wx} + c_2 e^{-wx}) + \frac{p}{S}, \end{aligned}$$

oder, wenn man $c_1 e^{wx} + c_2 e^{-wx}$ nach (7) durch y ausdrückt,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = w^2 \left\{ \frac{p(l^2-x^2)}{2S} + \frac{M_l}{S} + y \right\},$$

welch letztere Gleichung, wie verlangt, mit (6) übereinstimmt. Zur Bestimmung der Constanten c_1 und c_2 kann zunächst die Erwägung dienen, daß für die Auflager, also für $x = \pm l$ die Einsenkung y Null sein muß, oder

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 e^{wl} + c_2 e^{-wl} + \frac{p}{Sw^2} - \frac{M_l}{S} \\ &= c_1 e^{-wl} + c_2 e^{wl} + \frac{p}{Sw^2} - \frac{M_l}{S} \quad \dots \quad (8) \end{aligned}$$

zu sein hat. Aus (8) folgt

$$c_1 = c_2 = \left[-\frac{p}{Sw^2} + \frac{M_l}{S} \right] : \left[e^{wl} + e^{-wl} \right] \quad \dots \quad (9)$$

Die Einsetzung des Werthes von c_1 und c_2 aus (9) in (7) liefert als Gleichung der elastischen Linie

$$y = \frac{e^{wx} + e^{-wx}}{e^{wl} + e^{-wl}} \cdot \left[-\frac{p}{Sw^2} + \frac{M_l}{S} \right] - \frac{p(l^2 - x^2)}{2S} + \frac{p}{Sw^2} - \frac{M_l}{S}$$

oder endlich

$$y = \left[\frac{p}{Sw^2} - \frac{M_l}{S} \right] \left[1 - \frac{e^{wx} + e^{-wx}}{e^{wl} + e^{-wl}} \right] - \frac{p(l^2 - x^2)}{2S} \quad (10)$$

2. Der Boden bilde einen Streifen, der um seine beiden unverrückbaren Ränder wippt.

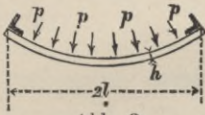


Abb. 3.

Wenn die Platte (Abb. 3) um die unverrückbaren Ränder wippen, d. h. sich drehen kann, ist $M_l = 0$, sodafs die Gl. (10) der elastischen Linie in

$$y = \frac{p}{Sw^2} \left[1 - \frac{e^{wx} + e^{-wx}}{e^{wl} + e^{-wl}} \right] - \frac{p(l^2 - x^2)}{2S} \quad (11)$$

übergeht. Die Länge $2s$ dieser Linie ist gröfser als die ursprüngliche Plattenlänge $2l$; die Platte mufs sich also um $2s - 2l$ dehnen und eben diese Dehnung ist es, welche bei unverrückbaren Enden eine Zugspannung S hervorruft. S ist also nicht unabhängig von p und für S gilt, wenn mit h die Plattendicke bezeichnet wird,

$$S = \frac{s - l}{l} \cdot E(1 + \mu^2) h \quad (12)$$

Da die Curve schwach geneigt, also $\frac{dy}{dx}$ sehr klein ist, kann

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\} dx \quad (13)$$

gesetzt werden. Nun folgt aus (10)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{Sw} \cdot \frac{-e^{wx} + e^{-wx}}{e^{wl} + e^{-wl}} + \frac{px}{S} \quad (14)$$

und

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = \frac{p^2}{S^2 w^2} \frac{e^{2wx} - 2 + e^{-2wx}}{[e^{wl} + e^{-wl}]^2} - \frac{2p^2 x e^{wx} - e^{-wx}}{S^2 w} \frac{1}{e^{wl} + e^{-wl}} + \frac{p^2 x^2}{S^2} \quad (15)$$

oder nach (13)

$$\frac{ds}{dx} = 1 + \frac{p^2}{2S^2 w^2} \frac{e^{2wx} + e^{-2wx}}{[e^{wl} + e^{-wl}]^2} - \frac{p^2}{S^2 w^2} \cdot \frac{1}{[e^{wl} + e^{-wl}]^2} - \frac{p^2 x}{S^2 w} \cdot \frac{e^{wx} - e^{-wx}}{e^{wl} + e^{-wl}} + \frac{p^2 x^2}{2S^2} \quad (16)$$

Die Integration liefert

$$\int \frac{ds}{dy} = x + \frac{p^2}{4S^2w^3} \frac{e^{2wx} - e^{-2wx}}{[e^{wl} + e^{-wl}]^2} - \frac{p^2x}{S^2w^2[e^{wl} + e^{-wl}]^2} \\ - \frac{p^2x[e^{wx} + e^{-wx}]}{S^2w^2[e^{wl} + e^{-wl}]} + \frac{p^2[e^{wx} - e^{-wx}]}{S^2w^3[e^{wl} + e^{-wl}]} + \frac{p^2x^3}{6S^2} \quad (17)$$

oder für die Verlängerung zwischen 0 und l nach Einführung dieser Grenzen

$$s - l = \frac{5p^2}{4S^2w^3} \frac{e^{wl} - e^{-wl}}{e^{wl} + e^{-wl}} - \frac{p^2l}{S^2w^2[e^{wl} + e^{-wl}]^2} - \frac{p^2l}{S^2w^2} \\ + \frac{p^2l^3}{6S^2} \dots \dots \dots (18)$$

Die Längeneinheit verlängert sich demnach um

$$\frac{s-l}{l} = \frac{p^2l^2}{S^2} \left\{ \frac{5}{4w^3l^3} \frac{e^{wl} - e^{-wl}}{e^{wl} + e^{-wl}} - \frac{1}{w^2l^2[e^{wl} + e^{-wl}]^2} - \frac{1}{w^2l^2} + \frac{1}{6} \right\} \quad (19)$$

Die Vereinigung von (19) mit (12) liefert

$$\frac{S^3}{E(1 + \mu^2)hp^2l^2} = \frac{5}{4w^3l^3} \frac{e^{wl} - e^{-wl}}{e^{wl} + e^{-wl}} - \frac{1}{w^2l^2[e^{wl} + e^{-wl}]^2} \\ - \frac{1}{w^2l^2} + \frac{1}{6} \dots \dots \dots (20)$$

Da nach (5) $S = JE(1 + \mu^2)w^2 \dots \dots \dots$ (21) ist, so kann man statt (20) auch

$$\frac{J^3 E^2 (1 + \mu^2)^2}{hp^2l^8} = \frac{1}{w^6l^6} \left\{ \frac{5}{4w^3l^3} \frac{e^{wl} - e^{-wl}}{e^{wl} + e^{-wl}} - \frac{1}{w^2l^2[e^{wl} + e^{-wl}]^2} - \frac{1}{w^2l^2} + \frac{1}{6} \right\}$$

setzen. Da ferner bei einer Platte von der Breite Eins $J^3 = h^3 : 1728$ ist, folgt

$$\frac{h^4 E(1 + \mu^2)}{pl^4} = \frac{\sqrt{1728}}{w^3l^3} \left\{ \frac{5}{4w^3l^3} \frac{e^{wl} - e^{-wl}}{e^{wl} + e^{-wl}} - \frac{1}{w^2l^2[e^{wl} + e^{-wl}]^2} - \frac{1}{w^2l^2} + \frac{1}{6} \right\}^{1/2} = \varphi \dots \dots \dots (22)$$

worin φ eine Function von wl darstellt. Nach (22) läßt sich φ unschwer berechnen, wenn h , E , μ , p und l gegeben sind. Damit man dann aus φ auch leicht wl bestimmen könne, sind

weiter unten in einer Tabelle (S. 6) die zu einander gehörigen Werthe von q und wl zusammengestellt. Aus wl ergibt sich w und nach (21) die Zugkraft S . Für die Senkung in der Mitte, wo $x = 0$ ist, gilt nach (11)

$$y_0 = \frac{p}{Sw^2} \left[1 - \frac{2}{e^{wl} + e^{-wl}} - \frac{w^2 l^2}{2} \right] \quad (23)$$

und hieraus ergibt sich nach (3) das Maximalmoment in der Plattenmitte unter Berücksichtigung, daß das Endmoment $M_l = 0$ ist, zu

$$M_0 = \frac{pl^2}{2} + Sy_0 = \frac{p}{w^2} \left[1 - \frac{2}{e^{wl} + e^{-wl}} \right] \quad (24)$$

Die größte Inanspruchnahme des Tragstoffes findet in der Plattenmitte statt, wird hier durch die Zugkraft S und das Moment M_0 hervorgerufen und beträgt

$$\sigma_{\max} = \frac{S}{h} + \frac{6M_0}{h^2} \quad (25)$$

Eine nähere Betrachtung von (23) und (24) würde übrigens lehren, daß y_0 negativ und M_0 positiv ist.

3. Der Boden bilde einen Streifen, dessen beide Ränder unverrückbar eingeklemmt sind.

Der mathematische Ausdruck der Forderung, daß die Platte (Abb. 4) an den Auflagern nicht wippen könne, also die

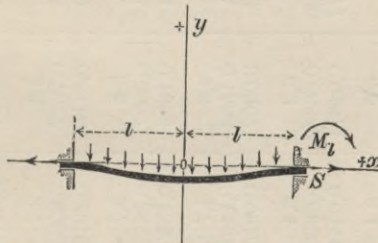


Abb. 4.

Tangenten der elastischen Linie dort wagerecht seien, lautet, daß für $x = \pm l$ der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ Null sein muß. Nun folgt aus (10)

$$\frac{dy}{dx} = - \left[\frac{p}{Sw^2} - \frac{M_l}{S} \right] w \frac{e^{wx} - e^{-wx}}{e^{wl} + e^{-wl}} + \frac{px}{S} \quad (26)$$

Setzt man hier $x=l$ ein, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = - \left[\frac{p}{S w^2} - \frac{M_l}{S} \right] w \frac{e^{wl} - e^{-wl}}{e^{wl} + e^{-wl}} + \frac{pl}{S} \quad (27)$$

und, da dieser Ausdruck Null sein mu\ss, weiter

$$M_l = - \frac{pl e^{wl} + e^{-wl}}{w e^{wl} - e^{-wl}} + \frac{p}{w^2}; \quad \dots \quad (28)$$

hiernach nimmt die Gleichung (10) der elastischen Linie die Form an

$$y = \frac{pl}{S w} \frac{e^{wl} + e^{-wl}}{e^{wl} - e^{-wl}} \left[1 - \frac{e^{wx} + e^{-wx}}{e^{wl} + e^{-wl}} \right] - \frac{p(l^2 - x^2)}{2 S} \quad (29)$$

Die Differenzirung liefert

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{pl e^{wx} - e^{-wx}}{S e^{wl} - e^{-wl}} + \frac{px}{S} \quad \dots \quad (30)$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 &= \frac{p^2 l^2 e^{2wx} + e^{-2wx}}{S^2 [e^{wl} - e^{-wl}]^2} - \frac{2 p^2 l^2}{S^2 [e^{wl} - e^{-wl}]^2} - \\ &- \frac{2 p^2 l x e^{wx} - e^{-wx}}{S^2 e^{wl} - e^{-wl}} + \frac{p^2 x^2}{S^2} \quad \dots \quad (31) \end{aligned}$$

und f\u00fcr das Differential der Bogenl\u00e4nge nach (13)

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dx} &= 1 + \frac{p^2 l^2}{2 S^2} \cdot \frac{e^{2wx} + e^{-2wx}}{[e^{wl} - e^{-wl}]^2} - \frac{p^2 l^2}{S^2 [e^{wl} - e^{-wl}]^2} - \\ &- \frac{p^2 l x e^{wx} - e^{-wx}}{S^2 e^{wl} - e^{-wl}} + \frac{p^2 x^2}{2 S^2} \quad \dots \quad (32) \end{aligned}$$

Die Integration giebt

$$\begin{aligned} s &= x + \frac{p^2 l^2}{4 S^2 w} \frac{e^{2wx} - e^{-2wx}}{[e^{wl} - e^{-wl}]^2} - \frac{p^2 l^2 x}{S^2 [e^{wl} - e^{-wl}]^2} - \\ &\frac{p^2 l x}{S^2 w} \cdot \frac{e^{wx} + e^{-wx}}{e^{wl} - e^{-wl}} + \frac{p^2 l}{S^2 w^2} \cdot \frac{e^{wx} - e^{-wx}}{e^{wl} - e^{-wl}} + \frac{p^2 x^3}{6 S^2} \quad (33) \end{aligned}$$

oder nach Einf\u00fchrung der Grenzen 0 und l f\u00fcr die Verl\u00e4ngerung zwischen Mitte und Ende

$$\begin{aligned} s &= l + \frac{p^2 l^2}{4 S^2 w} \frac{e^{wl} + e^{-wl}}{e^{wl} - e^{-wl}} - \frac{p^2 l^3}{S^2 [e^{wl} - e^{-wl}]^2} - \frac{p^2 l^2}{S^2 w} \frac{e^{wl} + e^{-wl}}{e^{wl} - e^{-wl}} \\ &+ \frac{p^2 l}{S^2 w^2} + \frac{p^2 l^3}{6 S^2} \quad \dots \quad (34) \end{aligned}$$

Ein Plattenst\u00fcck von der L\u00e4nge Eins dehnt sich also infolge der Durchbiegung um

$$\frac{s-l}{l} = \frac{p^2 l^2}{S^2} \left\{ \frac{3}{4wl} \frac{e^{wl} + e^{-wl}}{e^{wl} - e^{-wl}} - \frac{1}{[e^{wl} - e^{-wl}]^2} + \frac{1}{w^2 l^2} + \frac{1}{6} \right\} \quad (35)$$

Die Dehnung läßt sich wie im vorhergehenden Falle auch durch die Zugspannung S mit Hilfe der Gleichung

$$S = \frac{s-l}{l} E(1 + \mu^2)h \quad \quad (12)$$

ausdrücken, welche, mit (35) vereinigt,

$$\frac{S}{E(1 + \mu^2)h} = \frac{p^2 l^2}{S^2} \left\{ \frac{3}{4wl} \frac{e^{wl} + e^{-wl}}{e^{wl} - e^{-wl}} - \frac{1}{[e^{wl} - e^{-wl}]^2} + \frac{1}{w^2 l^2} + \frac{1}{6} \right\} \quad (36)$$

liefert. Da nun nach (5)

$$S = JE(1 + \mu^2)w^2 \quad \quad (21)$$

und bei einer Platte $J = \frac{1}{12} h^3$ ist, folgt aus (36) weiter

$$\frac{h^4 E(1 + \mu^2)}{pl^4} = \frac{\sqrt{1728}}{w^3 l^3} \left\{ \frac{3}{4wl} \frac{e^{wl} + e^{-wl}}{e^{wl} - e^{-wl}} - \frac{1}{[e^{wl} - e^{-wl}]^2} + \frac{1}{w^2 l^2} + \frac{1}{6} \right\}^{1/2} = \psi \quad \quad (37)$$

worin ψ eine Function von wl bezeichnet. Nach (37) läßt sich ψ unschwer berechnen, wenn h , E , μ , p und l gegeben sind. Damit man auch aus ψ leicht wl bestimmen könne, sind in der schon erwähnten Tabelle auch die Werthe von ψ eingetragen. Wieder ergibt sich w aus wl und nach (21) die Zugkraft S . Für die Senkung in der Mitte, wo $x=0$ ist, gilt nach (29)

$$y_0 = \frac{pl}{Sw} \frac{e^{wl} + e^{-wl}}{e^{wl} - e^{-wl}} \left[1 - \frac{2}{e^{wl} + e^{-wl}} \right] - \frac{pl^2}{2S} \quad (38)$$

Das Moment M_l für $x=l$, das heißt am Ende, ist bereits bekannt und durch (28) gegeben; jenes in der Mitte, für $x=0$, findet sich endlich nach (3), (28) und (38) zu

$$M_0 = \frac{pl^2}{2} + M_l + Sy_0 = \frac{p}{w^2} - \frac{pl}{w} \frac{2}{e^{wl} - e^{-wl}} \quad (39)$$

Wie bei stärkeren eingemauerten Balken, bei welchen S nicht in Betracht kommt, hat das Mittelmoment M_0 entgegengesetztes Vorzeichen wie das Endmoment M_l und einen kleineren Absolutwerth, sodafs M_l für die Wahl der Plattendicke maßgebend und die größte Inanspruchnahme

$$\sigma_{\max} = \frac{S}{h} + \frac{6M_l}{h^2} \quad \quad (40)$$

erscheint.

Beispiel. Ein Schweißeisenblech von 1 cm Stärke sei 1 m weit gespannt und durch 2 m Wasserdruck, also 0,2 kg auf den qcm, belastet. Wie stark wird das Eisen beansprucht, wenn sich die Blech-Enden frei drehen können?

Im gegebenen Falle ist $h=1$, $l=50$, $p=0,2$, $E(1+\mu^2)$ etwa $= 2200000$, $J = h^3 : 12 = 0,08333$ zu setzen. Formel (22) giebt $\varphi = \frac{h^4 E(1+\mu^2)}{pl^4} = \frac{2200000}{0,2 \cdot 6250000} = 1,76$. Für dieses φ giebt die Tabelle $wl=1,743$ oder $w=0,03486$ und nach (21) $S=JE(1+\mu^2)w^2 = 0,08333 \cdot 2200000 \cdot 0,001215 = 222,7$. Für $wl=1,743$ ist ferner z. B. nach „den Tafeln der Hyperbelfunctionen und der Kreisfunctionen“, von Dr. W. Ligowski, Berlin 1890 (Pr. 5 *M*)⁴ $2 : (e^{wl} + e^{-wl}) = 1 : \text{Cof } wl = 0,3396$ und daher nach (24) das Moment in der Mitte $M_0 = \frac{p}{w^2} \left[1 - \frac{2}{e^{wl} + e^{-wl}} \right] = \frac{0,2[1 - 0,3396]}{0,001215} = 108,7$. Da die Kraft S eine Zugspannung $S : h = 222,7$ und das Moment M_0 eine Zugspannung $6 M_0 : h^2 = 652,2$ hervorruft, beträgt die größte Inanspruchnahme σ_{\max} nur $222,7 + 652,2 = 874,9$ kg f. 1 qcm, während sie bei einfacher Auflagerung $\frac{1}{2} pl^2 : \frac{1}{6} h^2 = 1500$ kg für 1 qcm betragen würde. Die Einsenkung berechnet sich nach (23) zu $y_0 = \frac{p}{Sw^2} \left[1 - \frac{2}{e^{wl} + e^{-wl}} - \frac{w^2 l^2}{2} \right] = \frac{0,2}{222,7 \cdot 0,001215} [1 - 0,34 - 1,52] = -0,64$ cm, während sie bei losem Aufliegen nach bekannter Formel $-5 pl^4 : 24 JE(1 + \mu^2) = -1,42$ cm sein würde.

Ist das 1 m weit gespannte, 1 cm starke Schweißeisenblech an den Enden unverrückbar eingeklemmt, statt frei drehbar, so nimmt bei 2 m Wasserdruck die Rechnung folgende Gestalt an. Es ist $\psi = 1,76$, nämlich so groß wie früher φ . Die Tabelle giebt $wl = 0,732$ oder $w = 0,01464$ und nach (21) $S = JE(1 + \mu^2)w^2 = 0,08333 \cdot 2200000 \cdot 0,0002143 = 39,3$, sowie nach

$$(28) \quad M_l = -\frac{pl}{w} \frac{e^{wl} + e^{-wl}}{e^{wl} - e^{-wl}} + \frac{p}{w^2} = \frac{p}{w^2} \left\{ -\frac{lw}{\text{tg } wl} + 1 \right\} = -\frac{0,2 \times 0,1725}{0,0002143} = -161,0,$$

sodafs sich die größte Inanspruchnahme auf Zug $S : h + 6 M_l : h^2 = 39,3 + 966,6 = 1005,9$ findet. Wenn die Enden sich trotz der Einklemmung verschieben könnten, so würde das Endmoment $-\frac{pl^2}{3} = -166,7$, also dem Absolutwerthe nach nur wenig größer als bei unverrückbaren Enden sein, während sich die größte Inanspruchnahme auf Zug, weil S fortfällt, von 1005,9 auf $2pl^2 : h^2 = 1000$ kg f. 1 qcm vermindern würde. Bei drehbaren aber unverschieblichen Enden hatte die größte Zugspannung 874,9 betragen; durch die Einklemmung hat die Inanspruchnahme also nicht, wie man zu glauben versucht sein könnte, ab-, sondern

zugenommen. In praktischer Hinsicht wird ferner zu bedenken sein, daß die Platte ihren gefährlichen Querschnitt bei drehbarer Lagerung in der Mitte, bei nicht drehbarer an den Auflagern besitzt und hier vielleicht durch Nietreihen geschwächt wird. Auch die Abnahme, welche das Mittelmoment erfährt, wenn man die undrehbaren Enden unverrückbar befestigt, ist nur gering. Dasselbe sinkt nämlich von

$$\frac{1}{6} pl^2 = 83,33 \text{ cmkg nach (39) auf } M_0 = \frac{p}{w^2} \left\{ 1 - \frac{2lw}{e^{wl} - e^{-wl}} \right\} =$$

$$= \frac{p}{w^2} \left\{ 1 - \frac{lw}{\sin lw} \right\} = \frac{0,2 \cdot 0,0840}{0,0002143} = 78,4 \text{ cmkg herab. Dabei steigt}$$

sogar die Zugbeanspruchung in der Mitte von 500 auf $39,3 + 470,4 = 509,7 \text{ kg}$ für 1 qcm empor. Die Einsenkung endlich mißt bei verrückbaren Enden $-pl^4 : 24 J (1 + \mu^2) = -0,28 \text{ cm}$ und bei nicht verschiebbaren nicht viel weniger, nämlich nach (38)

$$y_0 = \frac{pl}{Sw} \frac{e^{wl} + e^{-wl}}{e^{wl} - e^{-wl}} \left[1 - \frac{2}{e^{wl} + e^{-wl}} \right] - \frac{pl^2}{2S} = \frac{0,2 \cdot 50}{39,3 \cdot 0,01464} \frac{0,21881}{\text{qg}} - \frac{0,2 \times 2500}{2 \times 39,3} = -0,27 \text{ cm.}$$

Bei größerer Last vermindert zwar

die Unverrückbarkeit der eingeklemmten Enden die Inanspruchnahme, aber so lange die Elasticitätsgrenze nicht überschritten ist, nicht in erheblichem Grade, wie aus nachstehender Zusammenstellung der Inanspruchnahme hervorgeht, welche die schon betrachtete Platte von 1 m Spannweite und 1 cm Dicke bei den Lasten $p = 0,2, 0,4$ und $0,6$ erleidet:

Last p in kg f. 1 qcm	0,2	0,4	0,6
Zugkraft S in kg f. 1 cm	39,3	126,2	227,7
Endmoment M_l in cmkg	161,0	300,4	419,8
Inanspruchnahme σ_{\max} bei unverrückbar eingeklemmten Enden	1005,1	1928,7	2746,6
Inanspruchnahme $2pl^2 : h^2$ bei verrückbar eingeklemmten Enden	1000	2000	3000.

Jenseit der Elasticitätsgrenze wirkt eine Unverrückbarkeit der Enden viel kräftiger auf die Inanspruchnahme und ermäßigt sie wesentlich. Wird $E(1 + \mu^2) = 220000$ statt $= 2200000$ gesetzt, so steigt für $p = 0,6$ die Zugkraft S von 227,7 auf 234,9, sinkt das Moment M_l von 419,8 auf 218,2 und fällt σ_{\max} von 2746,6 auf 1544,1 kg f. 1 qcm herab.

4. Näherungsverfahren für den unter 2 betrachteten Fall.

Ein Näherungsverfahren*) läßt sich für das drehbar befestigte Blech von unveränderlichem Auflagerabstand ableiten,

*) Dieses Verfahren ist mit etwas abweichender Ableitung in der Brückenbauanstalt der Gutehoffnungshütte zu Sterkrade üblich.

wenn man auf die Form der elastischen Linie keine Rücksicht nimmt, und nur die Durchbiegungsgröße beachtet. Man kann nämlich annehmen, daß das Blech einen Theil αp der Last p als Balken trägt und den anderen $(1 - \alpha) p$ als Kette. Für die Balkensenkung in der Mitte gilt dann nach bekannter Formel (wenn man das Vorzeichen nicht berücksichtigt)

$$y_0 = \frac{5 \alpha p l^4}{24 J E (1 + \mu^2)} = \frac{5 \alpha p l^4}{2 h^3 E (1 + \mu^2)} \quad (41)$$

und für den Pfeil der flachen Kette mit der Spannkraft S

$$y_0 = \frac{(1 - \alpha) p l^2}{2 S} \quad \text{oder} \quad y_0 + \frac{\alpha p l^2}{2 S} = \frac{p l^2}{2 S} \quad (42)$$

Aus (41) und (42) geht

$$y_0 \left[1 + \frac{h^3 E (1 + \mu^2)}{5 l^2 S} \right] = \frac{p l^2}{2 S} \quad \dots \quad (43)$$

hervor. Der Längenunterschied zwischen einer Sehne $2l$ und einem zugehörigen flachen Bogen vom Pfeil y_0 beträgt ziemlich genau $\frac{4}{3} y_0^2 : l$. Durch die Biegung erfährt also die Längeneinheit des Bleches eine Dehnung von ungefähr $\frac{2}{3} y_0^2 : l^2$ und es muß, da der Blechquerschnitt h beträgt, angenähert

$$S = \frac{2 y_0^2}{3 l^2} h E (1 + \mu^2) \quad \dots \quad (44)$$

gelten und demnach, wie die Einsetzung dieses Werthes in (43) lehrt,

$$y_0^3 + \frac{3}{10} h^2 y_0 = \frac{3}{4 h E (1 + \mu^2)} p l^4 \quad \dots \quad (45)$$

sein. Aus (45) kann man, am einfachsten durch probiren, y_0 bestimmen. Sobald y_0 bekannt ist, folgt nach (41)

$$\alpha = \frac{2 h^3 E (1 + \mu^2)}{5 p l^4} y_0 \quad \dots \quad (46)$$

und nach (42)

$$S = \frac{(1 - \alpha) p l^2}{2 y_0} \quad \dots \quad (47)$$

Die größte Zuginanspruchnahme setzt sich aus der durch die Kraft S erzeugten Spannung $S:h$ und der durch das Moment $\frac{1}{2} \alpha pl^2$ erzeugten $\frac{3 \alpha pl^2}{h^2}$ zu

$$\sigma_{\max} = \frac{S}{h} + \frac{3 \alpha pl^2}{h^2} \quad (48)$$

zusammen.

Beispiel. Bei dem schon betrachteten Blech von $h=1$, $l=50$, $E(1+\mu^2)=2200000$, $p=0,2$ lautet beispielsweise (45) $y_0^3 + 0,3 y_0 = 0,42614$ und findet sich $y_0 = 0,6212$ cm, hieraus $\alpha = 0,437$, $S = 226,5$ kg f. 1 cm und die Inanspruchnahme $\sigma_{\max} = 226,5 : 1 + 3 \cdot 0,437 \cdot 0,2 \cdot 2500 : 1 = 226,5 + 655,5 = 882,0$ kg f. 1 qcm. Hervorzuheben ist, daß diese Werthe beinahe mit jenen übereinstimmen, welche das strenge Verfahren geliefert hat, nämlich mit $y_0 = 0,64$, $S = 222,7$ und $\sigma_{\max} 874,9$.

5. Der Boden bilde eine Scheibe, die um ihren unverrückbaren Umfang wippt.

Das Verhalten lose aufliegender, sowie das eingeklemmter Scheiben hat Grashof unter der Annahme untersucht, daß sich die Mittelebene derselben, wenn auf ihren Randkreis keine Zug- oder Druckkräfte wirken, an keiner Stelle dehnt oder kürzt. Das ist nun nicht der Fall, weil sich auch bei verschieblich gelagerter Scheibe die Mittelebene bei der Biegung in eine Umdrehungsfläche verwandeln muß, wobei die Halbmesser gedehnt und die vom Scheibenmittelpunkte aus beschriebenen Kreise verkleinert werden müssen. Die Grashofschen Entwicklungen gelten aber immerhin annähernd für Platten, welche lose oder eingeklemmt und zugleich verschieblich gelagert sind, sodafs der Randkreis der Mittelebene bei der Biegung der Platte etwas einschrumpfen kann und sich die Randstücke gegen die Achse hin zu bewegen vermögen. Ist der Umfang hingegen unverrückbar und zugleich so festgehalten, daß die Platte um ihn wippen kann, so führt folgendes Näherungsverfahren zum Ziele, bei welchem man annimmt, daß der Behälterboden einen Theil αp der Last als lose liegendes Blech unter den Voraussetzungen Grashofs trage, und den Rest $(1-\alpha)p$ als kugel-

förmiger Hängeboden. Bei der lose liegenden Platte vom Halbmesser r ist die Senkung des Mittelpunktes dann nach Grashofs „Theorie der Elasticität und Festigkeit, Berlin, 1878“ S. 335, Gl. (587)

$$x_0 = \frac{3}{16} (1 - \mu)(5 + \mu) \frac{\alpha pr^4}{h^3 E} \dots (50)$$

Da ein kugelförmiges Blech (vgl. Abb. 5) vom Kugelhalmesser r_1 , welches einem Wasserdruck $(1 - \alpha)p$ ausgesetzt ist, bekanntlich an allen Punkten nach allen Richtungen parallel zu seiner Oberfläche Spannungen von der Größe $S = \frac{1}{2} (1 - \alpha) pr_1$ auf der Querschnittsfläche von der Dicke des Bleches und von der Länge Eins erfährt und bei flachem Kugelabschnitt der Pfeil

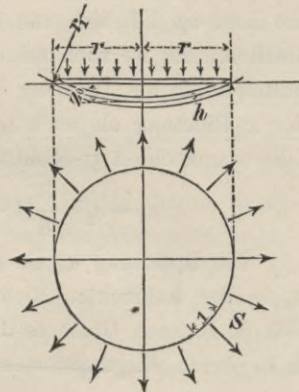


Abb. 5.

$$x_0 = r^2 : 2r_1$$

gesetzt werden kann, folgt für den Pfeil des Hängebodens

$$x_0 = \frac{(1 - \alpha) pr^2}{4 S} \dots (51)$$

Aus (50) und (51) geht bei Fortschaffung von α

$$x_0 \left[1 + \frac{4h^3 E}{3(1 - \mu)(5 + \mu)r^2 S} \right] = \frac{pr^2}{4 S} \dots (52)$$

hervor. Der Längenunterschied zwischen einer Sehne $2r$ und einem zugehörigen flachen Bogen vom Pfeil x_0 beträgt ziemlich genau $\frac{4}{3} x_0^2 : r$. Durch die Senkung erfährt also das Blech eine Dehnung von ungefähr $\frac{2}{3} x_0^2 : r^2$ für die Längeneinheit und zwar nach doppelter Richtung, sodafs, weil der Blechquerschnitt h beträgt, angenähert

$$S = \frac{2}{3} \cdot \frac{x_0^2}{r^2} \cdot \frac{h E}{1 - \mu} \dots (53)$$

zu setzen ist. Die Einführung dieses Werthes in (52) liefert für x_0 die Gleichung

$$x_0^3 + \frac{2h^2}{5 + \mu} x_0 = \frac{3pr^4(1 - \mu)}{8hE} \dots (54)$$

aus welcher sich α_0 und zwar am leichtesten durch Probieren bestimmen läßt. Ist α_0 bekannt, so folgt nach (50)

$$\alpha = \frac{16}{3} \frac{h^3 E}{pr^4 (1 - \mu) 5 + \mu} \alpha_0 \quad \dots \quad (55)$$

und nach (51)

$$S = \frac{(1 - \alpha) pr^2}{4 \alpha_0} \quad \dots \quad (56)$$

Die Beanspruchung des lose liegenden Bleches durch die Last αp läßt sich aus Grashofs Entwicklungen wie folgt ableiten. Es ist nach seinen Gleichungen (589) im Scheibenzentrum die Dehnung der äußersten Faser, sowohl nach der x -Richtung als auch nach der hierzu senkrechten, ebenfalls wagerechten y -Richtung

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{3}{8} (1 - \mu) (3 + \mu) \frac{r^2 \alpha p}{h^2 E} \quad \dots \quad (57)$$

Die Spannung σ_x ist gleich σ_y , während die Spannung σ_z in der lothrechten Richtung Null ist, und daher ergibt sich (z. B. nach Grashofs Gleichungen 53) für die durch αp , d. h. durch Biegemomente erzeugten größten Zugspannungen

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\varepsilon_x E}{1 - \mu} = \frac{3}{8} (3 + \mu) \frac{r^2}{h^2} \alpha p \quad \dots \quad (58)$$

Zu dieser Zugspannung tritt dann noch die von S hervorgerufene, gleichmäßig über den Querschnitt verteilte hinzu, sodafs die größte Zugspannung

$$\sigma_{\max} = \frac{S}{h} + \frac{3}{8} (3 + \mu) \frac{r^2}{h^2} \alpha p \quad \dots \quad (59)$$

wird.

Beispiel. Ein Blech von 140 cm Durchmesser und 1 cm Stärke aus Schweifeseisen mit $\mu = 0,32$, $E = 2000000$ kg f. 1 qcm werde durch einen Wasserdruck $p = 0,2$ kg auf 1 qcm belastet. Es ist $h = 1$ und $r = 70$ und folgt nach (54) $\alpha_0^3 + \frac{2 \cdot 1}{5,32} \alpha_0 = \frac{3 \cdot 0,2 \cdot 24010000 \cdot 0,68}{8 \cdot 1 \cdot 2000000} =$ oder $\alpha_0^3 + 0,3759 \alpha_0 = 0,61226$ oder $\alpha_0 = 0,703$ cm, sowie nach (55) $\alpha = \frac{16 \cdot 1 \cdot 2000000 \cdot 0,703}{3 \cdot 0,2 \cdot 24010000 \cdot 0,68 \cdot 5,32} =$ $= 0,4318$ und nach (56) $S = \frac{0,5682 \cdot 0,2 \cdot 4900}{4 \cdot 0,703} = 198,0$ kg f. 1 cm.

Die Spannkraften S bewirken eine Zugspannung $198,0:1 = 198,0$, die Lasten $\alpha p = 0,08636$ eine solche von $\frac{3}{8} \cdot 3,32 \cdot \frac{4900}{1} \cdot 0,08636 = 526,8$, sodafs sich $\sigma_{\max} 724,8$ kg f. 1 qcm findet. Die durch die Einfachheit ihrer Begründung und ihres Baues bemerkenswerthe Formel von B a c h in seiner „Elasticität und Festigkeit, Berlin, 1889—90, S. 353“ würde $\sigma_{\max} \geq p \frac{r^2}{h^2}$ oder $\sigma_{\max} \geq 980$ kg f. 1 qcm, also nicht unerheblich zu grofs ergeben. Bei verschiebbarem Rand endlich, also für $S = 0$ und $\alpha = 1$ fände sich nach (59) $\sigma_{\max} = 1220,1$.

6. Der Boden bilde eine am Umfange eingeklemmte Scheibe.

In dem nach verschiedenen Verfahren behandelten ersten Beispiele hat es sich gezeigt, dafs es bei einem eingeklemmten Streifen die Inanspruchnahme auf Zug, so lange sie innerhalb der Elasticitätsgrenze bleibt, kaum beeinflusst, ob man die Klemmränder unverrückbar oder verschieblich befestigt; so waren 1000 und 1005,9 kg Zug f. 1 qcm zwei zusammengehörende Werthe. Es ist die Annahme wohl zulässig, dafs auch bei der am Umfange eingeklemmten Scheibe die Rechnung so durchgeführt werden darf, als ob der Umfang verschieblich wäre, und dafs dies wieder unter Grashofs Voraussetzungen geschehen kann. Derselbe findet am angegebenen

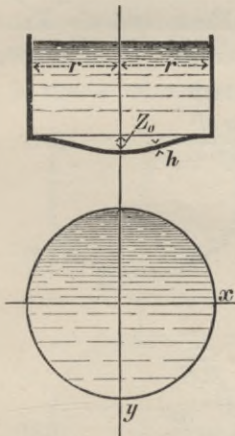


Abb. 6.

Orte, Gl. 594 und 595, dafs die grösste Dehnung in den untersten Fasern am Rande in der Richtung der Halbmesser herrscht und hier

$$E \epsilon_x = \frac{3}{4} (1 - \mu^2) \frac{r^2}{h^2} p \dots \dots (60)$$

ist, während die eingeklemmte Kreislinie selbst seiner Voraussetzung gemäfs ihre Länge nicht ändert. Die grösste Zugspannung wird also durch

$$\sigma_{\max} = \frac{E \epsilon_x}{1 - \mu^2} = \frac{3}{4} \frac{r^2}{h^2} p \dots \dots (61)$$

ausgedrückt.

Beispiel. Für die letztbetrachtete Scheibe von $r=70$, $h=1$ cm, $\mu=0,32$, $p=0,2$ kg f. 1 qcm ist nach (61) σ_{\max} 735,0 kg f. 1 qcm, also nicht kleiner, als wenn sie um den Umfang wippen kann.

7. Der Boden bilde einen flach gekrümmten Streifen.

Die Näherungsverfahren lassen sich auch gut anwenden, wenn die Böden flach gekrümmt sind und unter der Last

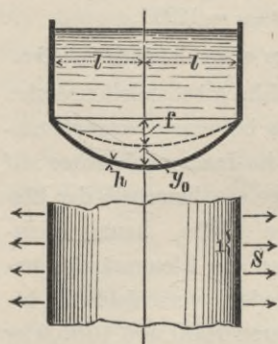


Abb. 7.

um ihre Befestigungslinien wippen, wobei ihre Pfeile von f auf $f + y_0$ (bezw. $f + x_0$) anwachsen mögen. Handelt es sich um einen Streifenboden, so kann er wieder als Platte und als Kette aufgefasst werden. Dann gilt für erstere wie vorher im Absatz 4

$$y_0 = \frac{5 \alpha p l^4}{2 h^3 E (1 + \mu^2)} \quad (41)$$

für letztere

$$f + y_0 = \frac{(1 - \alpha) p l^2}{2 S} \quad (62)$$

und daher

$$f + y_0 + \frac{h^3 E (1 + \mu^2)}{5 l^2 S} y_0 = \frac{p l^2}{2 S}$$

oder

$$f S + y_0 S + y_0 \frac{h^3 E (1 + \mu^2)}{5 l^2} = \frac{p l^2}{2} \quad (63)$$

Die Bogenlänge des Bodens vor der Biegung kann $= 2l + \frac{4}{3} \frac{f^2}{l}$

und nach der Biegung $= 2l + \frac{4}{3} \frac{(f + y_0)^2}{l}$, also die Verlängerung der Längeneinheit infolge der Einsenkung genügend

genau $= \frac{2}{3} \frac{2 f y_0 + y_0^2}{l^2}$ gesetzt werden. Daher muß

$$S = \frac{2}{3} \frac{2 f y_0 + y_0^2}{l^2} h E (1 + \mu^2) \quad (64)$$

oder

$$y_0^3 + 3 f y_0^2 + 2 f^2 y_0 + \frac{3}{10} h^2 y_0 = \frac{3 p l^4}{4 h E (1 + \mu^2)} \quad (65)$$

sein, aus welcher Gleichung man y_0 durch Probieren bestimmt
Dann folgt aus (41)

$$\alpha = \frac{2 h^3 E (1 + \mu^2)}{5 p l^4} y_0 \dots (66)$$

aus (62)

$$S = \frac{(1 - \alpha) p l^3}{2 (f + y_0)} \dots (67)$$

endlich die größte Inanspruchnahme

$$\sigma_{\max} = \frac{S}{h} + \frac{3 \alpha p l^2}{h^2} \dots (68)$$

Beispiel. Für $2l=100$, $f=1$, $h=1$ cm, $p=0,2$ kg f. 1 qcm, $E(1 + \mu^2) = 2200000$ kg f. 1 qcm, lautet (65) $y_0^3 + 3y_0^2 + 2,3 y_0 = 0,42614$ und ist $y_0 = 0,153$ cm, $\alpha = 0,1077$, $S = 193,5$ kg f. 1 cm, $\sigma_{\max} = 193,5 + 161,6 = 355,1$ kg f. 1 qcm. Durch den Pfeil von nur einem Centimeter, den das Blech vor der Belastung besafs, sank also die Inanspruchnahme von 874,9, wie sie bei der ebenen Platte aufgetreten war, auf 355,1 herab.

8. Der Boden bilde eine flache Kugelhaube.

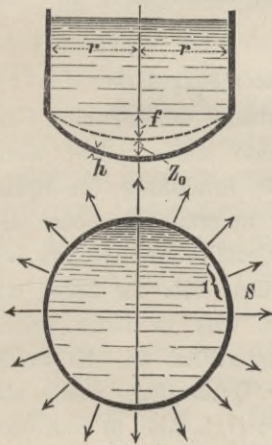


Abb. 8.

Bei einem flachen Kugelhängeboden, der um den Randkreis wippt, gestaltet sich anklingend an Absatz 5 die Rechnung wie folgt. Die Tragwirkung spricht sich in

$$x_0 = \frac{3}{16} (1 - \mu) (5 + \mu) \frac{\alpha p r^4}{h^3 E} (50)$$

die Hängewirkung in

$$f + x_0 = \frac{(1 - \alpha) p r^2}{4 S} (69)$$

aus, und aus (50) und (69) geht

$$S f + S x_0 + \frac{4 h^3 E}{3 (1 - \mu) (5 + \mu) r^2} x_0 = \frac{p r^2}{4} (70)$$

hervor. Der Verlängerung $\frac{2}{3} \cdot \frac{2 f x_0 + x_0^2}{r^2}$ der Längeneinheit des Bodenbogens bei der Durchbiegung entsprechend muß

$$S = \frac{2}{3} \frac{2 f x_0 + x_0^2}{r^2} \frac{h E}{1 - \mu} \dots (71)$$

sein. Die Vereinigung von (70) und (71) giebt für x_0 die Gleichung

$$x_0^3 + 3fx_0 + 2fx_0^2 + \frac{2h^2x_0}{5 + \mu} = \frac{3pr^4(1 - \mu)}{8hE}. \quad (72)$$

Kennt man x_0 , so erhält man nach (50)

$$\alpha = \frac{16h^3E}{3(1 - \mu)(5 + \mu)pr^4} x_0 \quad \dots \quad (73)$$

und aus (69)

$$S = \frac{(1 - \alpha)pr^2}{4(f + x_0)}. \quad \dots \quad (74)$$

endlich die größte Zuginanspruchnahme in den untersten Fasern der Bodenmitte (wie in Absatz 5) zu

$$\sigma_{\max} = \frac{S}{h} + \frac{3}{8}(3 + \mu)\frac{r^2}{h^2}\alpha p \quad \dots \quad (59)$$

Beispiel. Für $h=1$, $r=70$ cm, $p=0,2$, $E=2000000$ kg f. 1 qcm, $\mu=0,32$ lautet (72) $x_0^3 + 3x_0^2 + 2,376x_0 = 0,6123$ und findet sich $x_0=0,203$ cm, $\alpha=0,1246$, $S=178,3$ kg f. 1 cm, $\sigma_{\max}=330,3$ kg f. 1 qcm.

9. Der Boden bilde eine Umdrehungsfläche.

Wenn die Krümmung des Bodens, welcher eine Umdrehungsfläche mit lothrechter Achse bilden möge, nicht sehr flach ist, so bleibt es für die Ermittlung der Spannungen gleichgültig, ob man die ursprüngliche oder die durch den Wasserdruck veränderte Gestalt des Behälters betrachtet. Zunächst werde angenommen, daß der Boden ein

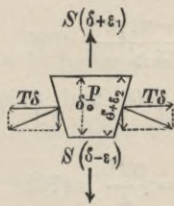


Abb. 9.

Innenboden, d. h. daß er längs seines äußeren Randes unterstützt sei. Es werde nun ein von der Quadratform wenig abweichendes Trapez (vgl. Abb. 9) von der Höhe δ betrachtet, dessen Seiten von Parallelkreisstücken von der Länge $\delta \pm \epsilon_1$ und von Meridianstücken von der Länge $\delta + \epsilon_2$ gebildet werden. Wenn dann p den auf die Flächeneinheit lastenden Wasserdruck,

S die auf die Längeneinheit des Parallelkreises in der Meridianrichtung und T die auf die Meridianeinheit in der Parallelkreisrichtung wirkende Zug- oder Druckspannung

bezeichnet, so liefert die Vereinigung der Einzelkräfte folgende Mittelkräfte: den Wasserdruck $p\delta^2$ senkrecht zur Bodenfläche, ferner in der Meridianrichtung zwei Kräfte, die zusammen die Gröfse $2S\delta$ besitzen, und senkrecht zu den Meridiansseiten zwei Kräfte $T(\delta + \varepsilon_2)$, deren auf den mittleren Meridian senkrecht gerichteten Theilkräfte die Gröfse

$$T(\delta + \varepsilon_2) \cdot \frac{\delta}{\delta + \varepsilon_2} = T\delta \text{ haben.}$$

Da der Behälter eine Umdrehungsfläche bildet, kommen weitere Spannungen nicht vor, insbesondere, wenigstens bei dünnen Böden, keine senkrecht zur Schale gerichteten Scheerkräfte in den vier Randflächen des gewählten Trapezes. Führt man nun durch die Vierecksmitte P einen Schnitt senkrecht zum Meridian, also einen sogenannten Hauptschnitt, so erhält man eine Curve, die zwar in P den dortigen Parallelkreis berührt, aber nicht mit ihm zusammenfällt. Man kann nun das Viereck als zwei gekreuzte Hängeketten betrachten, welche zusammen

$p\delta^2$ zu tragen haben und von denen die eine durch die Kräfte von der Summe $2S\delta$, die andere durch die beiden $T\delta$ gespannt wird. Die Mittelpunkte beider Kettenbögen liegen auf der Flächennormalen des Punktes P , nämlich auf einer Geraden, welche die Behälterachse schneidet und zugleich den Umrifs unter rechtem Winkel trifft. Die Krümmungshalbmesser der beiden Bögen sind aber verschieden, denn während die Lage des Mittelpunktes des Meridianbogens unbeschränkt ist, hat der zu ihm senkrechte Hauptschnittbogen seinen Mittelpunkt auf der Umdrehungsachse. Um dies zu beweisen, werde durch D sehr nahe an P

(vgl. Abb. 10) ein Parallelkreis durchgelegt, dessen Halbmesser nahezu x beträgt, wenn x den Abstand des Punktes P von der Behälterachse bezeichnet.

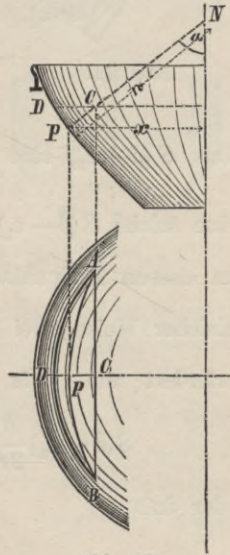


Abb. 10.

Dieser Parallelkreis treffe den Hauptschnitt in den Punkten *A* und *B*. Dann gilt für den Pfeil des Parallelbogens

$$\overline{CD} = \frac{\overline{AB}^2}{8x} \dots \dots \dots (75)$$

Der Pfeil des Schnittbogens *APB* ist nun

$$\overline{CP} = \overline{CD} \sin \alpha = \frac{\overline{AB}^2}{8x} \sin \alpha$$

und da der zugehörige Halbmesser $\overline{AB}^2 : 8CP$ sein muß, folgt, daß er die Länge*)

$$n = \frac{x}{\sin \alpha} \dots \dots \dots (76)$$

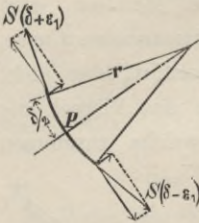


Abb. 11.

besitzt, welche von *P* aus aufgetragen in der That zu dem Schnittpunkte *N* der Normalen mit der Umdrehungsachse führt. Sucht man jetzt die dem Wasserdrucke pS^2 entgegengerichteten Theilkräfte der Bodenspannungen des betrachteten Trapezes auf, so folgt (vgl. Abb. 11) für den Meridianschnitt,

daß $S(\delta + \epsilon_1)$ eine Theilkraft $S(\delta + \epsilon_1) \frac{\delta}{2r}$ und $S(\delta - \epsilon_1)$ eine solche $S(\delta - \epsilon_1) \frac{\delta}{2r}$ liefert. Für den Hauptschnittbogen, an dessen Endpunkten die beiden $T\delta$ angreifen, folgen in gleicher Weise zwei Theilkräfte $T\delta \cdot \frac{\delta}{2n}$. Das Gleichgewicht erfordert nun, daß

$$S(\delta + \epsilon_1) \frac{\delta}{2r} + S(\delta - \epsilon_1) \frac{\delta}{2r} + T \frac{\delta^2}{n} = p\delta^2$$

oder daß

$$\frac{S}{r} + \frac{T}{n} = p \dots \dots \dots (77)$$

*) Gl. (76) geht, nebenbei bemerkt, auch unmittelbar aus dem Meusnierschen Satz hervor.

sei. Die Größe von S ergibt sich daraus, daß die lothrechten Theilkräfte sämtlicher S eines Parallelkreises dem Gewichte G der (in Abb. 12 gestrichelten) innerhalb dieses Kreises auf dem Boden lastenden Wassermenge gleich sein müssen. Ist der Meridian in P unter dem Winkel α geneigt, so gilt also*)

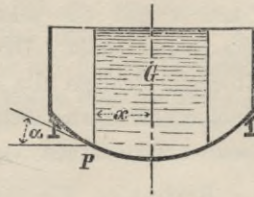


Abb. 12.

$$2\pi x S \sin \alpha = G$$

oder

$$S = \frac{G}{2\pi x \sin \alpha} \dots \dots \dots (78)$$

Kennt man S , so folgt T aus (77). Bildet die Umdrehungsfläche einen Kegel, so ist $r = \infty$ und gilt

$$\frac{T}{n} = p \dots \dots \dots (79)$$

In diesem Falle ist T auch ohne Kenntniss von S bestimmbar. Endlich bedürfen noch die Vorzeichen von S , T , r , n und x einer Erläuterung. Das Pluszeichen gilt in (77) bis (79) für Zugspannungen und für Halbmesser, die im Wasser liegen. Bei Hängeböden mit nach innen gebauchten Meridianen (hängenden Kelchen) ist daher r negativ, S , T , n und x positiv, und bei inneren Stützböden (Gegenböden, wie die Innenhaube von Abb. 13) ist S , T , r , n und x negativ, sodafs eine Versteifung gegen Einknicken angebracht werden muß.

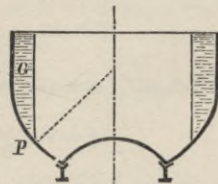


Abb. 13.

Die Formeln (77), (78) und (79) gelten auch für Außenböden, also für vorkragende Wandungen, wenn man unter G nunmehr (vgl. Abb. 13) das Gewicht der Wassermasse außerhalb des lothrechten Cylinders versteht, dessen Grundlinie

*) Formel (78) hat für hängende Kugelböden bereits deren Erfinder Dupuit im „Traité de la conduite et de la distribution des eaux, Paris 1854“ S. 243 veröffentlicht. Uebersetzt von Sonne im Handbuch der Ingenieur - Wissenschaften, Leipz. 1879, Cap. II, S. 79.

mit der Tiefe unter dem Spiegel und n proportional mit der Höhe über der Kegelspitze D wächst, hat T in halber Höhe zwischen C und D d. i. im Punkte E und nicht etwa wie S im Punkte B seinen Scheitelwerth.*) In E ist $n=8,196$, $p=8,0$ und daher nach (79) $T=65,57$ ton für 1 m oder 655,7 kg Zug für 1 cm, also dem Zifferwerth nach größer als das größte S und für die Blechstärke des Stützens AB maßgebend. Wird das gelochte Blech bis zu 750 kg f. 1 qcm zwischen den Nietten oder das volle bei doppelreihiger Nietung bis zu 450 kg in Anspruch genommen, so hat es demnach eine Dicke von $655,7 : 450 = 1,5$ cm zu erhalten.

Auf die Berechnung der die Bleche begrenzenden Druckringe und der Versteifungen soll hier nicht weiter eingegangen werden. Für hängende Kugelböden hat bereits Dupuit**) das nöthige angegeben. Für andere Formen werde auf den schon genannten Vortrag***) , sowie auf Reuleauxs Constructeur, 4. Aufl., Braunschweig 1887—9, verwiesen.

*) Es tritt sogar häufig der Fall ein, daß die maßgebende Spannung T ihren größten Werth im höchsten Punkte des Stützbodens hat, wie z. B. bei den beiden im „Bericht über die Excursionen der Bau-Ingenieure unter Leitung der Prof. Heinzerling, Intze u. Forchheimer, Aachen, 1888“ mit eingehenden Abbildungen veröffentlichten Intzeschen Behältern in Düren und Wesel.

**) Am angegeb. Orte.

***) Journal für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung 1884. S. 70.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

Halle a. S., Buchdruckerei des Waisenhanes.

S. 61



WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

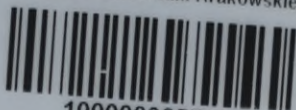


L. inw.

33197

Kdn., Czapskich 4 — 678. 1. XII. 52. 10.000

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000305716