Die Lehre

von den

einfachen Maschinentheilen

von

Friedrich Karl Herrmann Wiebe,
Professor und ord. Lehrer der Maschinenkunde am Königl. Gewerbe-Institut und an der Königl. Bau-Akademie zu Berlin, Ingenieur und Mühlenbaumeister,

bearbeitet

für den Unterricht an den Königl. *Preufs. techn.* Lehranstalten sowie zum Gebrauche beim Entwerfen und Konstruiren von Maschinen und zum Selbst-Studium.

Mit einem Atlas von 50 Tafeln in Aqua tinta und mit vielen in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Zweiter Band.

BERLIN.
VERLAG VON ERNST & KORN.
1860.

Die Lehre

von der

Verbindung der Maschinentheile,

eingeleitet durch

die Entwickelung einiger Grundlehren der Mechanik,

von

Friedrich Karl Herrmann Wiebe,
Professor und ord. Lehrer der Maschinenkunde am Königl. Gewerbe-Institut und an der Königl. Bau-Akademie zu Berlin, Ingenieur und Mühlenbaumeister,

bearbeitet

für den Unterricht an den Königl. Preuſs. techn. Lehranstalten, sowie zum Gebrauche beim Entwerfen und Konstruiren von Maschinen und zum Selbst-Studium.

Mit einem Atlas von 26 Kupfertafeln in Aqua tinta und mit vielen in den Text eingedruckten Holzschnitten.

(Tafel 25 bis 50.)

BERLIN.
VERLAG VON ERNST & KORN.
1860.

Inhalts-Verzeichnifs.

b) Wirkung mehrer mechanischen Kräfte auf ein Massenelement.

c) Wirkung **mehrer** mechanischen Kräfte auf ein **festes System** von Massenelementen.

Von den auf ein festes System angebrachten Kräften.

Von den in einem festen System thätigen Kräften.

d) Wirkungen fester Systeme, die von mechanischen Kräften in Anspruch genommen werden, auf einander.

Von der Verschiebung zweier festen Systeme.

Von der gemeinschaftlichen Bewegung fester Systeme.

Seite

Von der absoluten Bewegung.

Stoſs fester Systeme.

Von der Verbindung der Maschinentheile.

A. Verbindende Maschinentheile, welche eine rotirende Bewegung vermitteln.

a) Zapfenlager.

Hölzerne Zapfenlager.

Metallene Zapfenlager.

B. Verbindende Maschinentheile, welche eine gradlinige Bewegung vermitteln.

a) Verbindende Maschinentheile für gradlinige Bewegung mit dauerndem Verschlufs.

1) Stopfbuchsen.

2) Kolben.

Inhalts-Verzeichnifs

der Kupfertafeln des ersten und zweiten Bandes.

Tafel 1 bis 24 incl. gehören zum ersten Bande — Tafel 25 bis 50 zum zweiten Bande.

Passive Maschinentheile.

Zweiter Theil.

Einleitung.

Nach der in der Einleitung zum ersten Bande dieses Werkes (I. S. 4) gegebenen *Auseinandersetzung* nennen wir zwei Maschinentheile mit einander verbunden, wenn sie so mit einander zusammenhängen, dafs sie sich nach gewissen Richtungen hin unabhängig von einander bewegen können, aber nicht nach allen. Die Konstruktionen, durch welche ein solcher Zusammenhang hergestellt wird, bezeichnen wir als verbindende Maschinentheile, Maschinen-Verbindungen. Sie bilden den Gegenstand des vorliegenden Bandes.

Während bei den im ersten Bande abgehandelten befestigenden Maschinentheilen überall nur der Zustand des Gleichgewichtes maafsgebend war, in der Weise, dafs es stets nur darauf ankam, zwischen den Drucken, welche auf die Körper einwirken, und welche entweder eine Formveränderung derselben, oder eine Verschiebung und Trennung der Körper zu bewirken streben, einerseits, und zwischen der Widerstandsfähigkeit der Materialien, aus welchen die Körper bestehen oder zwischen den Befestigungsmitteln, durch welche sie zusammenhängen, andrerseits, einen Zustand vollkommenen Gleichgewichts herzustellen: so wird es hier noch darauf ankommen, die Einflüsse der Bewegung in Betracht zu ziehen.

Um diese Einflüsse für die Folge mit genügender Klarheit beurtheilen zu können, erscheint es nöthig, hier einige Untersuchungen über die Bewegung und über die bewegenden Kräfte voraus zu schicken. Dafs es sich dabei nicht um eine umfassende Entwickelung der Gesetze der Mechanik handeln könne, dafs es vielmehr nur darauf ankomme, einige für das Verständnifs des Folgenden nöthig scheinende Sätze ein für allemal festzustellen, ist durch den ausgesprochenen Zweck dieses Lehrbuches bedingt, und bedarf an dieser Stelle nicht einer ausführlichern Begründung. Wir beginnen unsere Untersuchungen mit der Betrachtung der Kräfte im Allgemeinen, und wollen sodann auf die bewegenden Kräfte specieller eingehen.

Einige Grundlehren der Mechanik.

A. Von den Kräften im Allgemeinen.

Begriff von Kraft.

§ 1. *Wir erblicken in der Natur fortwährende Veränderungen des augenblicklich vorhandenen Zustandes.* Diese Veränderungen gehen zum Theil mit einer solchen Entschiedenheit vor sich, dafs sie durch die Sinne sofort erkennbar sind, theils aber auch so allmählig und langsam, dafs sie erst durch eine aufmerksame Beobachtung und durch gründliche Forschung wahrgenommen werden können; ja gewisse Veränderungen entziehen sich vollständig unsern Sinnen, und wir können über ihr Dasein nur Vermuthungen aufstellen. Ueberall erscheinen uns diese Veränderungen als Wirkungen von irgend etwas Wirkendem, als Folgen irgend eines Etwas. Dieses Wirkende, dieses, seiner Natur und seinem eigentlichen innern Wesen nach, uns unbekannte Etwas nennen wir Kraft. Wir schreiben also jene Veränderungen dem Wirken von Kräften zu.

Hiernach verstehen wir unter Kraft (fr. *force* — engl. *force*) dasjenige Etwas, welches eine Veränderung in einem gegebenen Zustande herbeizuführen vermag, oder wirklich herbeiführt.

Zustand des Gleichgewichts. Lebendige Kraft.

§ 2. In der Definition des vorigen Paragraphen ist angedeutet, dafs eine Kraft auch in einem solchen Zustand sich befinden könne, dafs sie keine Veränderung wirklich hervorbringt. Diesen Zustand nennen wir den Zustand des Gleichgewichtes (fr. *état d'équi-*

libre — engl. *state of equilibrium*), oder wir sagen, die Kraft sei gebunden. Wir setzen voraus, dafs ein solcher Zustand nur dadurch herbeigeführt werden könne, dafs die Wirkung jener Kraft, durch die Wirkung einer oder mehrer andern Kräfte aufgehoben werde. Diese andern Kräfte nennen wir die Gegenkräfte (fr. *contre-forces* — engl. *counter-forces*). Wenn also von dem Zustande des Gleichgewichtes die Rede ist, so setzt dies immer voraus, dafs wenigstens zwei, oder auch mehre Kräfte dabei eine Rolle spielen.

Wenn dagegen eine Kraft so wirkt, dafs sie in der That Veränderungen herbeiführt, so sagen wir, die Kraft sei frei oder lebendig, es sei eine lebendige Kraft (fr. *force vive* — engl. und lat. *vis viva*).

Eine lebendige Kraft bringt also fortwährend, und so lange Veränderungen hervor, bis diese Veränderungen durch irgend eine Gegenkraft aufgehoben werden.

Das hier Gesagte bezieht sich ganz allgemein auf alle Zustände, die geändert werden können, d. h. *auf Alles, was der Einwirkung* von Kräften fähig ist. Es gilt in dieser Allgemeinheit beispielsweise auch von geistigen, gesellschaftlichen und ähnlichen Zuständen. Wir lassen diese jedoch hier vollkommen unberührt; beschäftigen uns vielmehr zunächst nur mit den Veränderungen, welche an Naturkörpern vorkommen, und zwar hier wiederum vorläufig in der gröfsten Allgemeinheit.

Beharrungsvermögen.

§ 3. Da wir alle Veränderungen, die wir an Körpern wahrnehmen, der Wirkung von Kräften zuschreiben, so folgt daraus, dafs kein Körper an und für sich fähig sei, eine Veränderung in seinem eben vorhandenen Zustande hervorzubringen, dafs es dazu vielmehr stets der Einwirkung einer Kraft bedürfe. So lange also keine Kraft auf einen Körper einwirkt, oder so lange die Kräfte, welche auf denselben einwirken, im Gleichgewicht sind, beharrt der Körper in dem Zustande, in welchem er sich eben befindet. Dieses Gesetz pflegt man als eine besondere Eigenschaft der Körper anzusehen, obwohl es nur eine nothwendige Folge von der Annahme ist, dafs die Ursachen von Veränderungen in der Einwirkung von Kräften bestehen. Als Eigenschaft der Körper betrachtet, pflegt man dieses Gesetz das Beharrungs-Vermögen, oder die Trägheit der Körper (fr. *inertie* — engl. *inertia*) zu nennen. Jenen Zustand, in welchem ein

Körper sich eben befindet, und welcher nur durch die Einwirkung irgend einer Kraft geändert werden kann, nennen wir den **Beharrungszustand** des Körpers.

Verschiedenartige Kräfte.

§ 4. Es ist schon angeführt worden, dafs wir das eigentliche Wesen der Kräfte nicht kennen, und es ist anzunehmen, dafs, so lange sich unser Geist in dem Zustande befindet, dafs er seine Wahrnehmungen nur mit Hilfe der Sinne schöpfen kann, die ihm als Menschen verliehen sind, wir nicht im Stande sein werden, dieses eigentliche innere Wesen der Kräfte zu ergründen. Wir können vielmehr auf das Vorhandensein der Kräfte nur aus den Wirkungen schliefsen, welche wir wahrnehmen. Es liegt nahe, dafs wir diese Wirkungen mit einander vergleichen, dafs wir für gleichartige oder ähnliche Wirkungen bestimmte Arten von Kräften annehmen, die wir als verschieden von andern Kräften, welche andere Wirkungen hervorbringen, voraussetzen. In vielen Fällen ist es gelungen, nachzuweisen, dafs Wirkungen, welche anfangs sehr verschiedener Art zu sein schienen, dennoch von ein und derselben Ursache hervorgebracht werden können, dafs also gewisse, als verschiedenartig angenommene Kräfte, dennoch im Grunde als ein und dieselbe Art von Kräften angesehen werden mufsten. Wie weit es dem menschlichen Geist noch gelingen wird, die grofse Zahl verschiedenartiger Kräfte, welche die Wissenschaft gegenwärtig noch annimmt, auf eine geringere Zahl, oder gar nur auf eine Urkraft zurückzuführen, läfst sich nicht ermessen; es mufs hier genügen, festzustellen, dafs eben die Annahme **verschiedenartiger** Kräfte nur eine Hypothese ist, welche gleichwohl die Anschauung und Betrachtung wesentlich erleichtert.

Im Allgemeinen pflegen wir die Kräfte verschieden zu benennen und als verschiedenartig vorauszusetzen, je nachdem der Zustand, welcher geändert worden ist, oder die stattgehabte Veränderung verschieden waren. Wir sprechen in diesem Sinne von chemischen, von physikalischen Kräften, und lassen unter diesen allgemeineren Begriffen noch Unterabtheilungen zu, indem wir z. B. von optischen, elektrischen Kräften etc. handeln.

Wenn es darauf ankommt, die Wirkungen gleichartiger Kräfte zu untersuchen, zu beurtheilen und der Rechnung zu unterwerfen, so ist es nöthig, diese Wirkungen zunächst mit einander zu vergleichen, sie zu messen.

Untersuchung der Kräfte.

§ 5. Sobald wir in derartige Untersuchungen eingehen, tritt uns die Nothwendigkeit entgegen von einander zu unterscheiden: a) die Körperelemente, welche einer Veränderung in ihrem Beharrungszustande durch die Einwirkung von Kräften unterworfen sind; b) die Kräfte, welche diese Veränderungen hervorbringen, und endlich c) die hervorgebrachten Veränderungen selbst.

Begriff von Masse.

§ 6. a) Die Körperelemente, welche durch die Einwirkung von Kräften einer Veränderung in ihrem Beharrungszustande unterworfen sind, erscheinen uns im Gegensatz zu den Kräften, welche wir uns als thätig (aktiv) denken, als das Leidende (Passive). Sie sind das Bleibende in den Veränderungen, dasjenige, dessen Zustand nur geändert wird, welches aber, seiner Quantität nach, keiner Aenderung unterworfen ist. Die Menge dieser beharrenden, aber einer Aenderung ihres Beharrungszustandes fähigen Elemente in einem Körper, nennen wir die *Masse (fr. masse — engl. masse)* des Körpers. Wir bezeichnen sie in der Folge mit m. Es ist dabei vorläufig gleichgiltig, durch welche Einheit wir die Masse eines Körpers messen wollen. Die absolute Zahl, welche das Maafs für die Masse eines Körpers angiebt, und welche wir künftig für m in die Rechnung einzuführen haben, richtet sich natürlich nach dem Werthe der angenommenen Einheit.

Das Wesen der Masse ist uns eben so unzugänglich, wie das der Kräfte; wir erkennen das Vorhandensein der Masse nur aus den Kräften, welche auf sie einwirken. Wir setzen aber voraus, dafs die Masse in einem gegebenen Körper etwas Konstantes sei; ein Werth, der unabhängig ist von dem Zustande, in welchem sich der Körper befindet, und unabhängig von den Veränderungen, welche dieser Zustand erleidet.

Begriff von »Gröfse einer Kraft«; »Gröfse ihrer Wirkung«.

§ 7. b) Die Kräfte, welche Veränderungen in dem Beharrungszustande der Körper erzeugen, sind unserer Wahrnehmung nur vermöge jener Veränderungen zugänglich. Sind die Kräfte lebendig, so bieten uns ihre Wirkungen Mittel zu ihrer Beurtheilung dar. Wir können diese Wirkungen messen, und pflegen aus der Gröfse der Wirkung auf die Gröfse der Kraft zurückzuschliefsen. Allein niemals können wir uns darauf einlassen, die Kräfte selbst messen zu wollen. Kräfte, welche im Gleichgewicht sind, bringen keine Veränderungen hervor; ihre Wirkung ist aufgehoben, und in diesem Zustande sind die Kräfte unserer direkten Wahrnehmung im Allgemeinen entzogen; wir können nur durch Vernunftschlüsse auf das Vorhandensein von Kräften geführt werden, die sich im Zustande des Gleichgewichts befinden. Dennoch bietet sich selbst für diesen Zustand ein Mittel dar, auf die Gröfse der Kräfte zu schliefsen. Wir pflegen nämlich die Wirkung zu betrachten, welche die Kräfte hervorbringen würden, wenn plötzlich der Zustand des Gleichgewichts aufgehoben würde. Bei der Beurtheilung der Wirkung lebendiger Kräfte sind immer die wirklich hervorgebrachten Veränderungen mit in Betracht zu ziehen; bei der Beurtheilung einer Kraft im Zustande des Gleichgewichts hat man es dagegen niemals mit wirklich hervorgebrachten, sondern nur mit vorausgesetzten, gedachten Veränderungen zu thun. Man stellt sich daher die Sache oft auch so vor, als habe man bei der Untersuchung einer Kraft im Zustande des Gleichgewichts die Kraft selbst, abgesondert von ihren Wirkungen einer Beurtheilung zu unterziehen, während man bei der Untersuchung einer lebendigen Kraft die Kraft in Verbindung mit ihren Wirkungen zu betrachten habe. Wenn man nun für den Zustand des Gleichgewichts aus der Wirkung, welche die Kraft hervorbringen würde, wenn sie plötzlich frei würde, auf die Gröfse der Kraft schliefst, so pflegt man diesen Schlufs vorzugsweise als Messen der Kraft, und die Gröfse jener gedachten Wirkung, als Gröfse oder Werth der Kraft zu bezeichnen. Wir wollen diese Bezeichnungen, da sie allgemein üblich sind, beibehalten, dabei aber niemals vergessen, was wir eigentlich darunter zu verstehen haben. Wenn wir dagegen die Wirkungen einer lebendigen Kraft untersuchen, und dieselben durch Messen bestimmen, so nennen wir im Gegensatz zu jenem Falle, das Maafs für dieselben die Wirkungsgröfse, auch die Leistung oder Arbeit der Kraft (fr. *travail* — engl. *work done*).

Maafs der Veränderungen, welche eine Kraft erzeugt.

§ 8. c) Die Veränderungen, welche Kräfte in dem Beharrungszustande der Körper hervorbringen, sind für unser Vorstellungsvermögen nur in einer gewissen Folge denkbar. Diese Folge bedingt, dafs wir uns jene Veränderungen nur in einer bestimmten Zeit denken können. Ist nun $d\varphi$ die Veränderung, welche eine Kraft in dem Beharrungszustande eines Massenelementes dm während eines Zeitelementes dt hervorgebracht hat, so können wir im Allgemeinen setzen:

$$1)\ d\varphi = f \, . \, dt,$$

wenn wir die Zeit t als das Urvariable, und somit dt als einen absolut konstanten Werth ansehen. In diesem Ausdruck kann nun f entweder konstant, oder eine Funktion von t, oder auch eine Funktion von einem oder von mehren anderen Veränderlichen sein. In allen Fällen drückt sich aus:

$$2)\ f = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Den Werth f nennen wir das Aenderungsmaafs der Kraft, den Werth $d\varphi$ das Aenderungselement der Kraft. Eine Kraft, welche so wirkt, dafs das Aenderungsmaafs f in jedem Augenblick konstant ist, so dafs sie also in jedem Zeitelement dt eine gleich grofse Aenderung $d\varphi$ hervorbringt, nennen wir eine konstant wirkende Kraft. Wirkt dagegen die Kraft so, dafs $d\varphi$ in jedem Augenblick einen andern Werth hat, so ist auch das Aenderungsmaafs f in jedem Augenblick ein anderes, und wir nennen eine solche Kraft eine veränderlich wirkende.

Ausdruck für die Gröfse einer Kraft.

§ 9. Nach diesen Erörterungen werden wir im Stande sein Ausdrücke zu finden, welche uns die Gröfse der Kraft und die Gröfse der Wirkung angeben.

Im Allgemeinen sind wir berechtigt die Gröfse der Kraft, welche auf einen Körper einwirkt, für um so beträchtlicher zu halten, je gröfser die Menge der Körperelemente ist, in deren Beharrungszustand die Kraft eine Aenderung herbeizuführen strebt, und je gröfser die Veränderung selbst ist, welche die Kraft jedem einzelnen dieser Körperelemente im nächsten Zeitelemente ertheilen würde, wenn sie plötzlich frei würde. Bezeichnen wir mit dm ein beliebiges Massenelement, mit $d\varphi$ die Veränderung, welche dasselbe im nächsten Zeitelemente in seinem Beharrungszustande erleiden würde, so würde ein Maafs für die Gröfse der Kraft, die auf den ganzen Körper wirkt, gefunden werden in dem Ausdrucke:

$$3)\ \Sigma(dm \, . \, d\varphi) = \Sigma(dm \, . \, f \, . \, dt),$$

d. h. wir müssen jedes Massenelement mit seinem Aenderungselement multipliciren, und die Summe der Produkte bilden.

Da wir aber auf diese Weise immer noch dt als Faktor in dem Ausdruck behalten, und da es bequemer ist für das Maafs der Gröfse einer Kraft einen endlichen Ausdruck zu haben, so können wir, da überdies dt ein konstanter Werth ist, den Ausdruck durch

dt dividiren. Bezeichnen wir das Maafs für die Gröfse der Kraft mit K, so ergiebt sich hiernach:

$$4)\ dK = dm\frac{d\varphi}{dt} = dm.f.$$

$$5)\ K = \Sigma\left(dm\frac{d\varphi}{dt}\right) = \Sigma(dm.f).$$

Ist f eine Funktion von m, d. h. ändert sich der Aenderungswerth der Kraft in irgend einer Weise mit dm, so ergiebt sich:

$$6)\ K = \int f_m\, dm + \text{Const.},$$

wenn dagegen der Aenderungswerth f für jedes Massenelement derselbe ist, wobei übrigens gar nicht ausgeschlossen bleibt, dafs f eine Funktion von irgend einem andern Variablen als m sein kann, so ergiebt sich:

$$7)\ K = m.f,$$

und daraus, mit Berücksichtigung von Gleichung 2):

$$8)\ f = \frac{K}{m} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Ausdruck für die Leistung einer momentan wirkenden Kraft.

§ 10. Von dem eben behandelten Falle haben wir einen andern wesentlich zu unterscheiden. Wir haben nämlich zur Bestimmung der Gröfse einer Kraft die Veränderung in Betracht gezogen, welche die Kraft im nächsten Zeitelemente hervorbringen würde, falls sie frei wäre. Denken wir uns jetzt, die Kraft sei wirklich frei, aber nur während eines einzigen Zeitelementes. Die Wirkung der Kraft würde für diesen Fall sich ausdrücken während eines Zeitelementes für ein Massenelement durch:

$$dm.d\varphi.$$

Diese Wirkung bleibt bestehen, selbst wenn nach Verlauf dieses ersten Zeitelementes die Einwirkung der Kraft wieder aufhörte.

Kräfte, welche in der eben angedeuteten Weise wirksam sind, so nämlich, dafs die Dauer ihrer Einwirkung nur ein Zeitelement beträgt, nennen wir momentan oder plötzlich wirkende Kräfte. Wir unterscheiden von denselben solche Kräfte, deren Einwirkung eine endliche Zeit hindurch währt, und nennen diese für die Zeit ihrer Wirkung kontinuirlich oder dauernd wirkende Kräfte.

Zufolge des Beharrungsvermögens der Körper wird, nachdem eine momentan wirkende Kraft dem Massenelement im ersten Zeitelement die Veränderung $d\varphi$ ertheilt hat, diese Veränderung für jedes folgende Zeitelement, und so lange fortbestehen bleiben, bis durch eine Gegenkraft dieselbe wiederum aufgehoben wird. Aber der Werth $d\varphi$ kann sich, nachdem die Einwirkung der Kraft aufgehört hat, nicht mehr ändern, denn eine solche Aenderung würde immer wieder eine neue Wirkung der Kraft voraussetzen. Man ist daher gezwungen, von dem Augenblicke der Einwirkung an, $d\varphi$ für das Massenelement dm als konstant anzusehen, und folglich ist es von diesem Augenblick an nicht mehr möglich, $d\varphi$ als eine Funktion der Zeit zu betrachten. Das Maafs der Wirkung einer momentan wirkenden Kraft für eine bestimmte endliche Zeit wird sich ausdrücken durch $dm\int d\varphi$, welches Integral von dem Augenblicke der Einwirkung an zu nehmen ist. Bezeichnen wir nun mit dW die Wirkungsgröfse der Kraft auf ein Massenelement, so haben wir:

$$9)\quad dW = dm\int d\varphi = dm.\varphi,$$

oder für den ganzen Körper:

$$10)\quad W = \Sigma(dm.\varphi),$$

d. h. wir können die Wirkungsgröfse einer momentan wirkenden Kraft bestimmen, indem wir jedes Massenelement mit dem Aenderungswerth in einer bestimmten endlichen Zeit multipliziren und die Summe der Produkte bilden. Wenn nun auch φ nicht eine Funktion der Zeit sein kann, so bleibt doch nicht ausgeschlossen, dafs es eine Funktion von irgend einem andern Werthe, z. B. von m sein könne; in diesem Falle hat man:

$$11)\quad W = \int \varphi_m\, dm + \text{Const.},$$

und endlich, wenn φ für jedes Massenelement dasselbe ist:

$$12)\quad W = m\varphi.$$

Ausdruck für die Leistung einer kontinuirlich wirkenden Kraft.

§ 11. Betrachten wir nunmehr lebendige Kräfte, welche kontinuirlich wirken. Hier hört die Einwirkung nicht nach dem ersten Zeitelement auf, sondern es wird in jedem folgenden Zeitelement immer wieder ein Aenderungszuwachs $= d\varphi$ stattfinden. Wir sind nach dem Obigen zu der Voraussetzung berechtigt, dafs die Leistung einer auf ein Massenelement kontinuirlich wirkenden Kraft in irgend einem Zeitelement um so gröfser sei, je gröfser die Veränderung ist, welche die Kraft bis zu diesem Zeitelement bereits hervorgebracht hat, und je gröſser die Veränderung ist, welche die Kraft während dieses Zeitelementes von Neuem hervorbringt. Bezeichnen wir mit φ die Veränderung, welche die Kraft bis zu dem in Betracht zu ziehenden Augenblick bereits erzeugt hat, so drückt sich offenbar die Wirkungsgröſse für das nächste Zeitelement und für ein Massenelement aus durch:

$$13)\quad dm \,.\, \varphi\, d\varphi,$$

und für eine gewisse Zeit t, für jedes Massenelement durch: $dm\Sigma\varphi d\varphi$, folglich für den ganzen Körper durch:

$$14)\quad \Sigma(dm\Sigma\,\varphi\,.\,d\varphi) = \Sigma[dm\,.\,\Sigma(\varphi\,.\,f\,.\,dt)].$$

Ist φ eine Funktion von m und bezeichnen wir die Wirkungsgröſse für ein Zeitelement, oder (wie wir künftig diesen Werth nennen wollen) das Leistungselement (Wirkungselement) mit dL, so ergiebt sich:

$$15)\quad dL = dm\int\left(\varphi_m\, d\varphi\right) + \text{Const.},$$

worin das Integral zwischen den Grenzen von m zu nehmen ist, welche der Masse des ganzen Körpers entsprechen.

Ist dagegen φ für jedes Massenelement dasselbe, wobei φ, wie früher, eine Funktion von irgend einem andern Variabeln sein kann, so ergiebt sich das Leistungselement:

$$16)\quad dL = m\varphi\, d\varphi.$$

Die Leistung der Kraft auf den ganzen Körper für eine bestimmte Zeit ergiebt sich aus den eben bestimmten Werthen, und zwar aus 15):

$$17)\quad L = \int\left(\int\varphi_m\, d\varphi\right) dm + \text{Const.},$$

und aus 16):

$$18)\quad L = m\int\varphi\, d\varphi + \text{Const.},$$

worin φ zwischen den Grenzen zu nehmen ist, welche der Zeitdauer entsprechen, für welche man die Wirkungsgröſse bestimmen will. Ist $\varphi = \varphi$ der Werth von φ nach der Zeit t, $\varphi = \varphi'$ dagegen der Werth von φ nach der Zeit t', so hat man die Leistung für die Zeitdauer $t - t'$:

$$19)\quad L_{(t-t')} = m\int_{\varphi'}^{\varphi} \varphi\, d\varphi + \text{Const.},$$

$$= \tfrac{1}{2}m(\varphi^2 - \varphi'^2).$$

Setzen wir zufolge der Formel 1) $d\varphi = f dt$, und nehmen wir an, daſs $f = f_t$ eine Funktion von t sei, so folgt zunächst:

$$\varphi = \int f_t\, dt,$$

folglich, wenn wir φ in Bezug auf m konstant nehmen, nach 18):

$$20)\quad L = m\int\left(\int f_t dt\right) f_t dt + \text{Const.},$$

welches Integral zwischen den Grenzen von t zu nehmen ist, die der Zeitdauer der Beobachtung entsprechen.

Ist endlich f keine Funktion von t, hat man es also mit einer konstant und kontinuirlich wirkenden Kraft zu thun, so ist:

$$21)\quad L_{(t-t')} = \tfrac{1}{2} m f^2 (t^2 - t'^2)$$

und mit Rücksicht auf 7):

$$22)\quad L_{(t-t')} = \tfrac{1}{2} K f (t^2 - t'^2).$$

Wir müssen hier darauf verzichten, noch mehr Formeln für eine Reihe von speziellen Fällen herzuleiten, die aus besondern Werthen hervorgehen würden, welche φ oder f annehmen können. Nur die Bemerkung mag hier schliefslich noch hervorgehoben werden, dafs die eben geführten Untersuchungen für alle Arten von Kräften, die auf Körper einwirken, gelten müssen, ohne Rücksicht auf die Art und Beschaffenheit der von den Kräften hervorzubringenden, oder wirklich hervorgebrachten Veränderungen; dafs ferner die Begriffe von Masse und lebendiger Kraft ganz bestimmte und allgemeine sind, und nicht, wie Poncelet behauptet*), nur uneigentliche, konventionelle Benennungen, die man eingeführt hat, um gewisse mathematische Ausdrücke kurz zu bezeichnen.

B. Von den mechanischen Kräften.

a) Wirkung einer mechanischen Kraft auf ein Massenelement.

Bewegung.

§ 12. Nach Feststellung jener allgemeinen Wahrheiten gehen wir zur Untersuchung derjenigen Kräfte über, welche uns hier besonders beschäftigen.

Unter den zahllosen Veränderungen, welche wir an den Körpern wahrnehmen, spielen eine grofse Rolle die Veränderungen des Ortes, oder derjenigen Stelle im Raum, welche die Körper einnehmen. Diese Ortsveränderungen nennen wir Bewegungen, und

---

*) Poncelet »Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen«, deutsch herausgegeben von Schnuse I. S. 10 und 11.

schreiben dieselben der Wirkung gewisser Kräfte zu, welche wir mechanische Kräfte nennen. Indem wir uns hier zunächst mit den mechanischen Kräften beschäftigen, wollen wir zuerst die Gesetze der Veränderungen untersuchen, welche diese Kräfte hervorzubringen vermögen, und wirklich hervorbringen, und sodann auf die Bestimmung der Gröfse der Kräfte und ihrer Wirkung eingehen.

Zwar sind alle Körper fortwährend in gemeinschaftlicher Bewegung, insofern sie ihre Stelle im Universum dauernd ändern, allein aufser dieser allgemeinen Bewegung bemerken wir auch, dafs gewisse unter diesen gemeinschaftlich bewegten Körpern ihren Ort im Vergleich zu dem Ort, den die andern Körper während der Bewegung einnehmen, ändern. In diesem Sinne nennen wir solche Körper relativ bewegte, die andern Körper aber ruhende. Betrachten wir nun ein System solcher relativ bewegten Körper, so können einzelne derselben wiederum im Vergleich zu den übrigen Körpern, mit denen sie sich übrigens gemeinschaftlich bewegen, ihre Stellung verändern. *Solchen Körpern schreibt* man dann wiederum in Bezug auf die andern eine relative Bewegung zu, und pflegt diejenige Bewegung, welche dem ganzen System gemeinschaftlich ist, im Gegensatz zu dieser relativen Bewegung, eine absolute Bewegung zu nennen; es bleibt dabei natürlich nicht ausgeschlossen, dafs diese absolute Bewegung in Vergleich zu der Stellung noch anderer Körper wieder als eine relative erscheint. Relative und absolute Bewegungen erscheinen daher immer nur als Gegensätze und als abgeleitete Begriffe, sie sind nicht Grundbegriffe, wie der Begriff der Bewegung selbst.

Wirkt eine mechanische Kraft auf ein Massenelement ein, so hat sie das *Bestreben*, dasselbe in gerader Linie fortzubewegen.

Die Lage dieser geraden Linie, in Vergleich zu andern Linien, nennt man die Richtung der Kraft.

Erfolgt wirklich eine Bewegung des Massenelementes, so bleibt dieselbe in Folge des Beharrungsvermögens (S. 6) bestehen, bis sie durch die Einwirkung einer andern Kraft geändert wird. Das Massenelement bewegt sich in gerader Linie fort; die Lage dieser geraden Linie heifst die Richtung der Bewegung. Kein Massenelement kann die Richtung seiner Bewegung ändern, oder die Bewegung ganz oder theilweise verlieren, wenn nicht als Ursache dieser Veränderung die Wirkung einer andern Kraft eintritt.

Bewegung eines Punktes, Bahn, Weg.

§ 13. Die Masse eines Körpers erfüllt den Raum, welchen der Körper einnimmt. Ein Massenelement können wir uns als die Masse denken, welche ein Raumelement erfüllt; als Raumelement gilt aber der körperliche Punkt. Ein Massenelement ist also die Masse, welche ein Punkt des Körpers besitzt. Man pflegt daher, anstatt der Bezeichnung Massenelement eines Körpers, häufig auch die Benennung „materieller Punkt“ oder kurz die Bezeichnung „Punkt“ zu brauchen, und wir wollen uns diesem Gebrauch anschliefsen, indem wir künftig unter Punkt, sobald nicht eine andere Bedeutung ausdrücklich hervorgehoben wird, überhaupt ein Massenelement verstehen.

Die Linie, welche ein Punkt bei seiner Bewegung beschreibt, nennen wir die Bahn des Punktes.

Die Bahn eines Punkts ist geradlinig, wenn der Punkt nur der Einwirkung einer einzigen Kraft, oder auch mehrer Kräfte, welche in derselben Richtung wirken, folgt. Eine krummlinige Bahn setzt immer die Einwirkung mehrer (wenigstens zweier) Kräfte voraus, deren Richtung nicht dieselbe ist.

Die absolute Länge der Bahn, welche ein Punkt in einer bestimmten Zeit zurücklegt, nennt man den Weg des Punktes für diese Zeit. Der Weg eines Punktes in einem Zeitelement heifst das Wegelement des Punkts. Wir bezeichnen dasselbe in der Folge mit ds.

Gleichförmige Bewegung.

§ 14. Das Wegelement eines Punktes ist entweder in jedem Zeitelement gleich grofs, oder es unterliegt einer Aenderung. Wenn das Wegelement in jedem Zeitelement denselben Werth hat, so sagen wir, die Bewegung sei gleichförmig. Nach dem Frühern können wir uns eine gleichförmige Bewegung nur als möglich denken, wenn auf einen bewegten Punkt entweder gar keine mechanische Kräfte einwirken, oder wenn die auf denselben einwirkenden Kräfte sich im Zustande des Gleichgewichtes befinden, denn, wenn mechanische Kräfte auf den Punkt einwirken, und dieselben sind nicht im Zustande des Gleichgewichts, so müssen sie nothwendiger Weise eine Aenderung im Beharrungszustande des Punktes erzeugen, und da die Aenderungen, welche mechanische Kräfte erzeugen, Ortsveränderungen sind, die Ortsveränderungen aber durch die Wege gemessen werden, so mufs unter der zuletzt gemachten Annahme nothwendiger Weise in jedem Zeitelement eine Wegänderung stattfinden.

Die gleichförmige Bewegung können wir uns entstanden denken, entweder:

a) dadurch, dafs Kräfte, die eine Zeit lang auf einen Punkt einwirkten, aber nicht im Zustand des Gleichgewichts waren, plötzlich zu wirken aufhören, oder plötzlich in den Zustand des Gleichgewichts gelangen; in diesem Fall wird die Bewegung, die sie dem Punkte ertheilt haben, bestehen bleiben, aber keine Aenderung weiter erleiden; oder

b) dadurch, dafs mechanische Kräfte auf einen Punkt, der nicht in Bewegung war, momentan einwirkten; in diesem Falle wird der Punkt Bewegung erhalten, aber die Bewegung wird nach § 10 in jedem folgenden Zeittheil ungeändert bleiben.

Die momentane Einwirkung mechanischer Kräfte auf einen materiellen Punkt nennen wir Stofs, und die gleichförmige Bewegung pflegt man daher auch wohl Stofsbewegung zu nennen.

Geschwindigkeit.

§ 15. *Das Verhältnifs* $\frac{ds}{dt}$, d. h. das Verhältnifs zwischen dem Wegelement zu der Dauer eines Zeitelementes nennt man die Geschwindigkeit, bezeichnen wir dieselbe mit c, so hat man:

$$23)\quad \frac{ds}{dt} = c.$$

$$24)\quad ds = c\,dt.$$

Diese Ausdrücke sind nicht zu verwechseln mit den sehr ähnlichen für das Aenderungselement und für das Aenderungsmaafs einer Kraft (S. 10. No. 1 und 2), welche wir gleich brauchen werden. Da wir dt als absolut konstant ansehen, so wird bei einer gleichförmigen Bewegung, in welcher also auch ds für jedes Zeitelement konstant ist, $\frac{ds}{dt} = c$ ebenfalls konstant sein. Es läfst sich also eine gleichförmige Bewegung auch so definiren, dafs es eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit sei. Für die gleichförmige Bewegung folgt aus 24) durch Integriren:

$$25)\quad \left\{\begin{array}{l} s = ct \\ c = \frac{s}{t} \\ t = \frac{s}{c} \end{array}\right. .$$

Wenn s der Weg in der Zeit t ist, so ist offenbar bei einer gleichförmigen Bewegung $\frac{s}{t}$ der Weg in einer Zeiteinheit; da aber (zufolge 25) $\frac{s}{t} = c$ ist, so kann man allgemein die Geschwindigkeit auch definiren als den Weg, welchen ein Punkt in einer Zeiteinheit zurücklegen würde, falls er von irgend einem Augenblick ab sich gleichförmig bewegte.

Geschwindigkeits-Aenderung; Veränderte Bewegung, Acceleration.

§ 16. Wir haben oben gesehen, dafs, wenn auf einen Punkt eine Kraft allein einwirkt, oder, wenn mehre Kräfte, welche nicht im Zustande des Gleichgewichts sich befinden, auf den Punkt einwirken, eine gleichförmige Bewegung nicht stattfinden kann. Es wird vielmehr in diesem Falle das Wegelement ds in jedem Zeitelement ein anderes sein. Die Bewegung eines Punktes unter diesen Umständen nennen wir eine ungleichförmige oder eine veränderte. Da zufolge der Gleichung 24) ds sich ausdrückt durch:

$$ds = c.dt,$$

so mufs, da dt absolut konstant ist, die Veränderung, welche durch den Einflufs jener mechanischen Kräfte erzeugt wird, sich auf den Werth c beziehen. Das heifst: die Veränderungen, welche mechanische Kräfte in dem Beharrungszustande eines Körpers hervorbringen, lassen sich als Geschwindigkeitsänderungen ansehen. Das Aenderungselement $d\varphi$ einer mechanischen Kraft ist hiernach nichts anders, als die Geschwindigkeitsänderung, welche die Kraft einem Massenelement in einem Zeitelement zu ertheilen vermag. Nennen wir dieselbe dc, so ist $d\varphi = dc$ und nach S. 10 No. 1):

$$d\varphi = dc = f.dt;$$

es ist folglich die Geschwindigkeit c nach Verlauf einer gewissen Zeit t, oder die Endgeschwindigkeit für die Zeit t:

$$26)\quad c = \Sigma f.dt.$$

Das veränderliche Wegelement ds drückt sich hiernach aus (24) durch:

$$27)\quad ds = (\Sigma f.dt)dt.$$

Ist f eine Funktion von t, so ist:

$$28)\quad c = \int f_t dt$$

$$29)\quad ds = \left(\int f_t dt\right)dt,$$

und es ändern sich folglich die in den einzelnen Zeitelementen stattfindenden Geschwindigkeiten nach dem Gesetze des Werthes $\int f_t dt$.

Wenn man dagegen eine konstant wirkende Kraft betrachtet (S. 10), so findet man:

$$30)\quad c = ft.$$

$$31)\quad ds = c\,.\,dt = ft\,.\,dt,$$

d. h. bei konstant wirkenden mechanischen Kräften ändern sich die Geschwindigkeiten wie die Zeiten. Erfolgt die Bewegung nach diesem Gesetz, so nennen wir sie eine gleichmäfsig veränderte Bewegung, und zwar eine gleichmäfsig beschleunigte, wenn die Geschwindigkeiten wachsen, und eine gleichmäfsig verzögerte, wenn die Geschwindigkeiten fortwährend abnehmen. Erfolgt eine veränderte Bewegung nach einem andern Gesetze, so nennen wir sie eine ungleichmäfsig veränderte, und zwar bei fortwährendem Wachsthum der Geschwindigkeiten eine ungleichmäfsig beschleunigte, bei fortwährender Abnahme der Geschwindigkeiten eine ungleichmäfsig verzögerte. Das Aenderungsmaafs f nennt man bei mechanischen Kräften auch wohl die Acceleration oder die Beschleunigung, beziehlich Verzögerung.

Aus den Gleichungen 24), 29) und 31) ergiebt sich der Gesammtweg s für eine bestimmte Zeit t:

für den allgemeinsten Fall:

$$32)\quad s = \Sigma(c\,.\,dt),$$

d. h. man hat jedes Zeitelement mit der Geschwindigkeit, welche während desselben stattgefunden, zu multipliziren, und die Produkte zu summiren.

Ist $c = \int f_t dt$ (28), so folgt aus 29):

$$33)\quad s = \int\left(\int f_t dt\right) dt.$$

und endlich für eine konstant wirkende Kraft, also für die gleichmäfsig veränderte Bewegung:

$$34)\quad s = \int_{t'}^{t} ft\,.\,dt = \tfrac{1}{2} f(t^2 - t'^2),$$

worin s den Weg bezeichnet, welcher während der Zeitdauer $(t - t')$ zurückgelegt wird.

Gleichmäfsig veränderte Bewegung.

§ 17. Die gleichmäfsig veränderte Bewegung ist in der Mechanik von besonderer Wichtigkeit. Es mögen daher die eben gefundenen Resultate nebst einigen leicht herzuleitenden hier zusammengestellt werden.

Es bezeichne:

t die Zeit, während welcher eine konstant wirkende Kraft frei gewirkt hat,

s den Weg in dieser Zeit,

c die Geschwindigkeit nach Verlauf der Zeit t (Endgeschwindigkeit),

f das Aenderungsmaafs,

so ist:

$$35)\quad \begin{cases} s = \frac{1}{2} f t^2 = \frac{1}{2} \frac{c^2}{f} = \frac{1}{2} c t \\ c = f t = \sqrt{2 f s} = \frac{2s}{t} \\ f = \frac{c}{t} = \frac{2s}{t^2} = \frac{c^2}{2s} \\ t = \frac{c}{f} = \frac{2s}{c} = \sqrt{\frac{2s}{f}} \end{cases}$$

Für $t = 1$, also für die Zeiteinheit folgt hieraus:

$$f = c = 2s,$$

d. h. das Aenderungsmaafs einer konstant wirkenden Kraft ist gleich der Geschwindigkeit, welche die Kraft einem Massenelement nach Verlauf der ersten Zeiteinheit (Sekunde) ertheilt hat, oder gleich dem doppelten Wege, welchen das Massenelement vermöge der Einwirkung der Kraft in der ersten Sekunde zurückgelegt hat.

Schwerkraft.

§ 18. Unter der grofsen Menge von mechanischen Kräften, welche in der Natur wirksam sind, nimmt eine besonders hervorragende Bedeutung die Schwerkraft in Anspruch. Die Schwerkraft ist eine mechanische Kraft, deren Einwirkung alle Körper im ganzen Universum unterworfen sind, und welche man gewöhnlich als eine Anziehung darzustellen pflegt, welche sämmtliche Massenelemente im ganzen Weltall gegeneinander ausüben, und derzufolge jedes Massenelement sich nach jedem andern hin zu bewegen strebt. Die Gröfse dieser Anziehungskraft zwischen je zwei Massenelementen ist nach Newtons Entdeckungen umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung derselben. Es ist hier nicht der Ort, in allgemeine Untersuchungen dieser interessanten und bedeutungsvollen Kraft einzugehen, welche als ein grofses Gesetz durch das Weltall wirkt, und jedem unendlich kleinen Theil desselben eine Bedeutung beilegt, indem sie ihn mit jedem andern und mit dem grofsen Ganzen in Beziehung bringt: wir haben hier der

Schwerkraft nur Erwähnung gethan, um die Wirkung zu bezeichnen, welche sie zwischen dem *Erdkörper* und jedem Körper, welcher demselben unmittelbar angehört, ausübt. Jeder auf der Erde befindliche Körper wird von jedem Element des Erdkörpers angezogen, und das Resultat dieser verschiedenen Anziehungen ist, dafs jedes Massenelement eines Körpers das Bestreben hat, sich nach dem Mittelpunkt der Erde zu bewegen. Dies führen wir hier vorläufig nur als Thatsache an; der Beweis, dafs diese Thatsache eine nothwendige Folge allgemeiner Gesetze für die Wirkung mechanischer Kräfte ist, läfst sich hier noch nicht führen. Hiernach ist die Richtung der Erdschwerkraft überall die Richtung des Erd-Radius, und folglich für verschiedene Punkte eines Körpers verschieden. Die sehr geringe Abweichung der Radien des Erdkörpers für benachbarte Punkte berechtigt aber zu der Annahme, dafs man selbst für gröfsere Entfernungen die Richtungen der Erdschwerkraft als parallel ansehen kann. Wird die Wirkung der Schwerkraft auf einen Körper nicht durch eine Gegenkraft aufgehoben, so *erfolgt Bewegung in der Richtung der Kraft*, also in der Richtung des Erdradius; die Bewegung, welche die Schwerkraft in Körpern erzeugt, welche dem System des Erdkörpers angehören, nennen wir den Fall der Körper. Die Körper fallen. Da die Gröfse der Kraft, welche das Fallen bewirkt, nach dem oben angeführten Newtonschen Gesetz sich umgekehrt mit dem Quadrat der Entfernung vom Erdmittelpunkt ändert, folglich in verschiedenen Entfernungen eine verschiedene ist, und da andrerseits die Thatsache feststeht, dafs die Erde keine vollkommene Kugel, sondern an den Polen abgeplattet ist, so folgt daraus, dafs die Gröfse der Schwerkraft an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche verschieden grofs sein mufs, je nachdem der Erdradius einen verschiedenen Werth hat. *Die Wirkung der Schwerkraft ist hiernach an den Polen gröfser, als am Aequator.* Aber auch an ein und demselben Ort der Erde mufs die Wirkung der Schwerkraft mit der Entfernung von der Erdoberfläche abnehmen. In dieser letzten Beziehung ist aber zu bemerken, dafs die Entfernungen von der Erdoberfläche, mit welchen man es gewöhnlich zu thun hat, gegen den Erdradius so verschwindend klein sind, dafs man sie für einen gegebenen Ort der Erde für die gewöhnlich vorkommenden Fälle vollkommen vernachlässigen kann, und folglich die Schwerkraft der Erde für einen bestimmten Ort als Beispiel einer konstant wirkenden Kraft betrachten kann, welche also, wenn sie frei wirkt, eine gleichmäfsig veränderte Bewegung erzeugen mufs.

Das Aenderungsmaafs der Schwerkraft ist für unsere Gegenden durchschnittlich

$$f = 31{,}25 \text{ preufsische Fufs.}$$

Wir bezeichnen dies Aenderungsmaafs künftig überall mit g.

g bedeutet also künftig überall das Aenderungsmaafs (die Acceleration) der Schwerkraft an einem bestimmten Orte. Für unsere Gegenden ist hiernach:

$$36)\quad \begin{cases} g = 31{,}25 \text{ preufs. Fufs,} \\ g = 9{,}81 \text{ Mètres,} \\ g = 30{,}20 \text{ pariser Fufs,} \\ g = 32{,}20 \text{ englische Fufs,} \\ g = 31{,}03 \text{ wiener Fufs *).} \end{cases}$$

Mit Berücksichtigung dieser Werthe nehmen die Formeln (S. 20) für die durch die Schwerkraft gleichmäfsig veränderte Bewegung folgende Gestalt an, wenn die Bedeutung der Buchstaben dieselbe bleibt, wie auf S. 20.

$$37)\quad \begin{cases} \text{für } g = 31{,}25 \text{ preufs. Fufs:} & \text{für } g = 9{,}81 \text{ Mètres:} \\ s = 15{,}625t^2 = 0{,}016c^2 = \tfrac{1}{2}ct, & s = 4{,}905t^2 = 0{,}0510c^2 = \tfrac{1}{2}ct, \\ c = 31{,}25t = 7{,}906\sqrt{s} = \dfrac{2s}{t}, & c = 9{,}81t = 4{,}429\sqrt{s} = \dfrac{2s}{t}, \\ g = \dfrac{c}{t} = \dfrac{2s}{t^2} = \dfrac{c^2}{2s}, & g = \dfrac{c}{t} = \dfrac{2s}{t^2} = \dfrac{c^2}{2s}, \\ t = 0{,}032c = 0{,}253\sqrt{s} = \dfrac{2s}{c}, & t = 0{,}1019c = 0{,}4514\sqrt{s} = \dfrac{2s}{c}. \end{cases}$$

Druck; Gewicht.

§ 19. Nachdem wir in Vorstehendem die Veränderungen, welche mechanische Kräfte hervorbringen, im Allgemeinen untersucht haben, schreiten wir nun zur Bestimmung der Gröfse der mechanischen Kräfte.

Wir haben oben gesehen, dafs Kräfte im Zustande des Gleichgewichts sich im Allgemeinen der Wahrnehmung durch unsere Sinne entziehen. Die mechanischen Kräfte machen in gewisser Beziehung eine Ausnahme. Wirkt eine mechanische Kraft auf unsern Körper ein, und sind wir veranlafst, dieselbe durch unsern Körper im Gleichgewicht zu halten, so erregt sie unser sinnliches Gefühl in einer Weise, welche wir im Allgemeinen Druck nennen. Der Druck ist also vorläufig das Gefühl, welches in uns durch die Ausübung der Gegenkraft hervorgerufen wird. Wir gehen von

---

*) Weisbachs Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik. II. Aufl. I. S. 54.

dieser, zunächst durch unsere *Sinne* gewonnenen Vorstellung weiter, und bezeichnen allgemein mit der Benennung **Druck** den **Einflufs**, welchen eine nach Bewegung strebende, aber im Zustande des Gleichgewichts sich befindende mechanische Kraft auf einen Körper ausübt; den *Einflufs* der Gegenkraft, durch welchen die zuerst gedachte Kraft im *Gleichgewicht* erhalten wird, nennen wir den **Gegendruck**. Hiernach sind **Druck** und **Gegendruck** zwei ganz unzertrennliche Vorstellungen. Sobald eine mechanische Kraft im Gleichgewicht gehalten wird, also einen **Druck** ausübt, müssen wir uns schon nach dem Frühern stets eine Gegenkraft denken, welche die Wirkung der ersten aufhebt, und welche folglich einen **Gegendruck** auf den Körper ausübt.

Es ist hiernach die Bezeichnung **Druck** zwar nichts anders, als was wir auf S. 9 ganz allgemein **Gröfse einer Kraft** genannt haben, nur dafs wir überhaupt unter **Druck** die **Gröfse einer mechanischen Kraft** verstehen; allein vermöge jener *sinnlichen Anschauung*, *welche wir durch unsern Körper von dem* Druck gewinnen, *sind wir im Stande einen neuen Ausdruck für* das Maafs der Gröfse einer mechanischen Kraft herzuleiten. Wir brauchen nämlich nur die Gröfse einer mechanischen Kraft, welche auf einen Körper einwirkt (ihren Druck), nach dem **Gegendruck** zu beurtheilen, welchen unser Körper ausüben mufs, um jene Kraft im Gleichgewicht zu halten, indem wir einen bestimmten Gegendruck als Einheit annehmen.

Den Gegendruck, welchen wir ausüben müssen, um einen Körper, welcher durch die Schwere in Anspruch genommen ist, im Gleichgewicht zu halten, nennen wir das Gewicht des Körpers. Von dieser Vorstellung ausgehend, verstehen wir unter dem **Gewicht** *eines Körpers allgemeiner den* **Gegendruck**, *welcher erforderlich ist, um einen durch die Schwere in Anspruch* genommenen Körper im Gleichgewicht zu halten.

Wenn wir nun zur Bestimmung des Druckes, welchen mechanische Kräfte ausüben, irgend einen Gegendruck als Einheit annehmen sollen, so liegt es nahe, dazu einen Gegendruck zu wählen, welcher durch eine so allgemein verbreitete Kraft, wie die Schwerkraft ist, hervorgerufen wird. Wir werden dann den Druck, welchen alle anderen mechanischen Kräfte erzeugen, mit dieser bestimmten Einheit vergleichen. Der absolute Werth der Einheit ist vorläufig beliebig festzustellen, und man hat ihn in der That in verschiedenen Ländern verschieden grofs angenommen.

In Preufsen hat man als Einheit für den Druck mechanischer Kräfte, denjenigen Gegendruck festgestellt, welcher erforderlich ist, um den sechs und sechzigsten Theil eines Kubikfufses destillirten Wassers bei einer Temperatur von 15 Grad Réaumur im luftleeren Raum im Gleichgewicht zu halten, wenn derselbe nur durch die Schwerkraft in Anspruch genommen wird. Diese Einheit heifst ein Pfund. Kürzer gesagt:

die Einheit des Druckes ist ein Pfund, oder das Gewicht von $\frac{1}{66}$ Kubikfufs destillirten Wassers bei 15 Grad Réaumur im luftleeren Raum.

In Frankreich ist die Einheit des Druckes das Gewicht eines Centimètre cube destillirten Wassers bei $+3{,}5^0$ R. und heifst diese Einheit ein Gramme.

Bestimmung des Druckes einer mechanischen Kraft; Maafs für die Masse.

§ 20. Wir haben nun zwei Mittel gefunden, die Gröfse einer mechanischen Kraft zu messen, nämlich 1) durch die Formeln S. 4 bis 8 und 2) durch den Druck, welchen sie ausübt. Die absoluten Zahlen, welche das Maafs für die Gröfse der Kraft geben, sind in beiden Fällen abhängig von dem Werth der Einheit; sie können verschieden sein; sie können aber unter Umständen auch gleich grofs sein. Da wir den Werth der Einheit für den Druck schon bestimmt haben, so wird es nur von dem Werthe der Einheit in der Formel 5)

$$K = \Sigma(dm.f)$$

abhängen, ob beide Methoden die Gröfse einer mechanischen Kraft zu bestimmen gleiche Zahlen liefern oder nicht. Die Einheit für das Aenderungsmaafs ist die Längeneinheit, es ist aber die Einheit für die Masse noch nicht definitiv festgesetzt, und diese Einheit können wir daher noch beliebig wählen.

Es hat sich als zweckmäfsig herausgestellt, bei der Untersuchung mechanischer Kräfte die Masseneinheit so zu wählen, dafs, wenn man die Gröfse der Schwerkraft, welche auf einen Körper wirkt, einmal nach der Gewichtseinheit, und dann nach dem Ausdruck $\Sigma(dm.f)$ mifst, beide Bestimmungen dieselbe Zahl liefern. Da die Schwerkraft für jedes Massenelement erfahrungsmäfsig denselben Aenderungswerth g hat, so folgt aus der eben gemachten Annahme, und wenn wir das Maafs für die Gröfse der auf einen Körper einwirkenden Schwerkraft durch das Gewicht gemessen mit G bezeichnen, für die Gröfse der Kraft einmal

$$K = G,$$

und mit Anwendung der Formel 7) auf S. 11 auch:

$$K = mg,$$

und da beide Werthe von K dieselbe Zahl liefern sollen, so hat man:

$$38) \begin{cases} G = mg \\ m = \dfrac{G}{g} \\ g = \dfrac{G}{m}. \end{cases}$$

Als Resultat dieser Untersuchungen ergiebt sich zunächst, daſs man die Gröſse jeder mechanischen Kraft überhaupt nach Pfunden bestimmen könne, und dann, daſs sich dieselbe durch die Formeln auf S. No. 4 bis 7 ausdrücken lasse, indem nun für die Masseneinheit ein bestimmter Werth festgestellt worden ist.

Führen wir die eben bestimmten Werthe in jene allgemeinen Formeln (4 bis 7 S. 11) ein, so ergiebt sich als allgemeiner Ausdruck:

$$39)\ K = \Sigma(dm\,.\,f) = \frac{1}{g}\Sigma(dG\,.\,f).$$

Ist f eine Funktion von m, so findet man:

$$40)\ K = \int f_m dm + \text{Const.} = \int f_{\left(\frac{G}{g}\right)}\,.\,d\frac{G}{g} + \text{Const.}$$

Ist dagegen f für jedes Massenelement dasselbe, so folgt:

$$41)\ K = mf = \frac{f}{g}\,G.$$

$$42)\ f = \frac{K}{m} = g\,\frac{K}{G}.$$

Bestimmung der Wirkungsgröſse einer mechanischen Kraft durch die Geschwindigkeits-Aenderung.

§ 21. Nach diesen Vorausbestimmungen kann es nicht schwer fallen, die Wirkungsgröſse der mechanischen Kräfte, wenn sie frei wirken zu bestimmen, sei es, daſs sie nur momentan, oder daſs sie kontinuirlich wirken. Wir benutzen dazu die früher ganz allgemein hergeleiteten Formeln.

Da die Aenderungen mechanischer Kräfte nach dem Frühern überhaupt Geschwindigkeits-Aenderungen sind, so wird, wenn wir die Geschwindigkeit in irgend einem Augenblick mit c bezeichnen, überall in den allgemeinen Formeln anstatt φ der Werth c gesetzt werden müssen.

Es ergiebt sich sodann für momentan wirkende Kräfte allgemein das Leistungselement für ein Zeitelement (S. 12):

$$43)\ dW_{dt} = dm\,.\,dc,$$

und für eine kontinuirlich wirkende Kraft nach S. 13 (No. 13).

$$44)\ dL_{dt} = dm\,.\,c\,.\,dc,$$

folglich das Leistungselement für eine bestimmte Zeitdauer:

für eine momentan wirkende Kraft:

$$45)\ dW_{(t-t')} = dm\int_{c'}^{c} dc = dm(c-c'),$$

und für eine kontinuirlich wirkende Kraft:

$$46)\ dL_{(t-t')} = dm\int_{c'}^{c} c\,.\,dc = \tfrac{1}{2}dm(c^2-c'^2),$$

worin c' die Geschwindigkeit zu Anfange, c diejenige zu Ende der Beobachtung bezeichnet, wenn t' die Zeit bedeutet, welche von dem Augenblick der freien Einwirkung der Kraft bis zu dem Augenblicke, in welchem die Beobachtung beginnt, verflossen ist, und t diejenige, welche bis zur Vollendung der Beobachtung verflossen ist.

Die Leistung der Kraft für den ganzen Körper läſst sich aus diesem Leistungselement in bekannter Weise, sei es durch direktes Summiren, sei es durch Integriren, bestimmen.

Die beiden Gleichungen enthalten folgende Gesetze:

1) Die Leistung einer lebendigen Kraft, welche auf ein Massenelement momentan wirkt, drückt sich für eine bestimmte Zeit aus durch das Produkt aus dem Massenelement in die Differenz der Geschwindigkeiten, welche das Massenelement zu Anfange und zu Ende der Beobachtung besitzt.

2) Die Leistung der lebendigen Kraft, welche auf ein Massenelement kontinuirlich, gleichviel ob konstant oder veränderlich wirkt, drückt sich aus für eine bestimmte Zeit durch das halbe Produkt aus dem Massenelement in die Differenz der Quadrate der Geschwindigkeiten, welche das Massenelement am Anfang und am Ende der Beobachtung besitzt.

Einen Ausdruck von der Form $dm.c$ nennt man auch wohl die Quantität oder Gröſse der Bewegung des Massenelementes, den Ausdruck $\frac{1}{2}dm\,.\,c^2$ aber kurzweg die lebendige Kraft des Massenelements und den Ausdruck von der Form $\frac{1}{2}dm(c^2-c'^2)$ den Gewinn des Massenelementes an lebendiger Kraft.

Bestimmung der Wirkungsgröfse einer mechanischen Kraft durch den Druck und den Weg.

§ 22. Da sich nach den Gesetzen für die Bewegung ausdrückt ganz allgemein (S. 17 und 18)

$$c = \frac{ds}{dt}; \quad dc = f dt,$$

so läfst sich für eine kontinuirlich wirkende Kraft das Leistungselement für ein Zeitelement auch schreiben:

$$dL_{dt} = dm \,.\, c \,.\, dc = dm \frac{ds}{dt} \,.\, f dt.$$
$$= dm f \,.\, ds,$$

worin ds das Wegelement ist, welches das Massenelement in einem Zeitelement zurückgelegt hat. Es ist aber $dm.f. = dK$ (S. 11. No. 4), folglich:

$$47) \quad dL_{dt} = dK ds = dm \,.\, c \,.\, dc = dm \,.\, f \,.\, ds.$$

In dieser Gleichung liegt das wichtige Gesetz:

die Leistung einer mechanischen Kraft, welche kontinuirlich, gleichviel ob konstant oder veränderlich auf ein Massenelement wirkt, ist in jedem Zeitelement gleich dem Produkt aus dem Druck der Kraft in den Weg, welchen das Massenelement durch die Kraft bewegt, zurücklegt.

Ist die Kraft für die Zeitdauer $(t - t')$ konstant, so ist auch $f.dm = dK$ konstant, und bezeichnet s den Weg während der Zeit $(t - t')$, welchen das Massenelement, durch die Kraft bewegt, zurücklegt, so hat man:

$$48) \quad \boldsymbol{dL_{(t-t')} = dm \,.\, f \,.\, s = dK \,.\, s = \tfrac{1}{2} dm (c^2 - c'^2)}.$$

Ist endlich für den ganzen Körper, sowohl der Druck auf jedes Massenelement, als auch der Weg konstant, so folgt:

$$49) \quad \boldsymbol{L = K \,.\, s = \tfrac{1}{2} m (c^2 - c'^2)}.$$

Fufspfund, Pferdekraft.

§ 23. Das Produkt $K.s$ ist gebildet aus dem Maafs für den Druck K, welcher nach Gewichtseinheiten (Pfunden) gemessen ist, und aus dem Maafs für den Weg s, welcher nach Längeneinheiten (Fufsen) gemessen wird.

Die Einheit für Ks ist also weder ein Pfund noch ein Fufs, sondern eine ganz neue Einheit, nämlich die Leistungseinheit für eine Kraft. Naturgemäfs nimmt man für diese Einheit eine solche Leistung an, welche in der Bewegung einer Druckeinheit (eines Pfundes) um eine Längeneinheit (einen Fufs) besteht, und nennt diese Einheit, der Zusammensetzung entsprechend, ein Fufspfund. Drückt man also die Leistung einer Kraft durch das Produkt Ks aus, so sagt man, sie betrage in einer bestimmten Zeit Ks Fufspfund und schreibt der Ausdruck häufig:

$$L = Ks^{(fpf)}.$$

Die Franzosen nehmen als Leistungseinheit die Bewegung eines Drucks von 1 Kilogramme um 1 Mètre an, und bezeichnen dieselbe als Kilogrammemètre, geschrieben:

$$L = Ks^{km} \text{ oder } L = Ks^{k \times m}.$$

Es ist:

$$50) \begin{cases} 1^{fpf} = 0{,}1468^{km} \\ 1^{km} = 6{,}8121^{fpf}. \end{cases}$$

Ist die Leistung während der Zeitdauer, in welcher sie hervorgebracht wurde, konstant, und bezeichnet man diese Zeitdauer mit t, so ist die Leistung in der Zeiteinheit:

$$51) \quad \frac{L}{t} = \frac{Ks}{t} = K\frac{s}{t}.$$

Wenn nun die Leistung dadurch konstant ist, dafs sowohl die in einzelnen Zeitelementen wirkenden Drucke, als auch die Wege dieser Drucke konstant sind, so folgt, dafs die Bewegung selbst eine gleichförmige ist. In diesem Fall hat man $\frac{s}{t} = c$, wenn c die konstante Geschwindigkeit bezeichnet, und es folgt die Leistung in der Zeiteinheit:

$$52) \quad \frac{L}{t} = K \,.\, c.$$

Die Leistung in einer Zeiteinheit nennen wir die Intensität der Kraft, und es ergiebt sich für eine Bewegung mit gleichförmiger Geschwindigkeit die Intensität gleich dem Produkt aus dem Druck in die Geschwindigkeit.

Eine Kraft, deren Intensität 510 Fufspfund oder 75 Kilogrammètres in der Sekunde beträgt, nennt man eine Pferdekraft. Man mifst die Intensität einer Kraft häufig, indem man eine Pferdekraft als Einheit nimmt. Bezeichnet:

N die Anzahl der Pferdekräfte, so folgt:

$$53) \begin{cases} \frac{L}{t} = Kc = N \,.\, 510 \text{ Fufspfund} = N \,.\, 75^{km} \\ N = \frac{Kc^{fpf}}{510} = \frac{Kc^{km}}{75} \\ K = \left(\frac{N \,.\, 510}{c \text{ Fufs}}\right) \text{Pfund} = \left(\frac{N \,.\, 75}{c \text{ Mètres}}\right) \text{Kilogrm.} \\ c = \left(\frac{N \,.\, 510}{K \text{ Pfund}}\right) \text{Fufs} = \left(\frac{N \,.\, 75}{K \text{ Kilogr.}}\right) \text{Mètres.} \end{cases}$$

Ist die Leistung während der Zeitdauer, in welcher sie hervorgebracht ist, nicht konstant, so kann man dafür einen gewissen mittlen Werth einführen, insofern man unter dem mittlen Werth einer veränderlichen Gröfse einen solchen konstanten Werth versteht, welcher in irgend einer Beziehung dasselbe Resultat erzeugt, wie der veränderliche Werth. Die obigen Formeln 51 bis 53 geben zugleich die mittlen Werthe für K, $c\frac{L}{t}$ u. s. w., wenn diese Gröfsen während der Zeit t veränderlich waren.

b) Wirkung mehrer mechanischen Kräfte auf ein Massenelement.

Grundsätze für die Wirkung mehrer Kräfte auf ein Massenelement — Zusammensetzen, Zerlegen der Kräfte. Allgemeine Bedingungen des Gleichgewichts.

§ 24. In den vorhergehenden Untersuchungen haben wir überall nur eine Kraft auf ein Massenelement wirkend gedacht. Zwar haben wir bei der Bestimmung des Druckes den Zustand des Gleichgewichts und somit nach den früheren Betrachtungen stillschweigend zwei Kräfte, deren Wirkungen sich aufheben, vorausgesetzt, allein wir haben den Gleichgewichtszustand immer nur als einen gegebenen und möglichen Fall betrachtet, ohne zu untersuchen, unter welchen Bedingungen dieser Fall eintreten kann. Gegenwärtig schreiten wir zur Untersuchung der Verhältnisse, welche eintreten, wenn zwei oder mehre Kräfte auf ein Massenelement wirken. Wir stellen zu diesem Zweck zunächst einige Grundsätze auf, die wir künftig mehrfach brauchen werden.

1) Wenn mehre Kräfte gleichzeitig auf ein Massenelement wirken, so ist das Resultat ihrer Gesammtwirkung während eines Zeitelementes dasselbe, welches auch erreicht worden wäre, wenn dieselben Kräfte während desselben Zeitelementes in einer beliebigen Reihenfolge gewirkt hätten, so dafs das Massenelement während eines Theils des Zeitelementes zuerst der Wirkung und der Richtung der einen Kraft, dann der Wirkung und der Richtung einer folgenden etc. gefolgt wäre.

2) Diese Vorstellung hindert nicht, dafs wir uns, anstatt der mehren Kräfte, welche gleichzeitig auf ein Massenelement wirken, eine einzige Kraft denken können, welche so beschaffen ist, dafs sie, wenn sie allein wirkte, während desselben Zeitelementes in dem Massenelement dieselbe Wirkung erzeugen würde, welche die verschiedenen einzelnen Kräfte zusammen erzeugen. Diese Kraft nennt man die

resultirende Kraft, die *Resultante*, die Mittelkraft; die andern Kräfte nennt man in Bezug auf die Resultante, deren Seitenkräfte, *Komponenten*. Denkt man die Mittelkraft verschiedener Seitenkräfte, so sagt man, dafs man die Seitenkräfte zusammensetze.

3) Die Wirkung jeder Kraft läfst sich auffassen als das Resultat mehrer anderer gleichzeitig wirkender Kräfte, oder mit andern Worten, jede Kraft läfst sich als Resultante verschiedener Seitenkräfte ansehen. Bestimmt man die Seitenkräfte, als deren Resultante man die gegebene Kraft ansehen will, so sagt man, man zerlege die Kraft in Seitenkräfte.

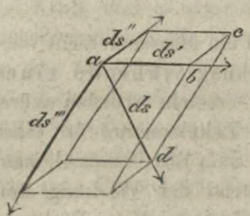
4) Aus dem Begriff des Gleichgewichts (S. 5) folgt, dafs mehre Kräfte, welche auf ein Massenelement wirken, im Gleichgewicht sind, wenn die Wirkungsgröfse ihrer Mittelkraft gleich Null ist.

5) Auch folgt aus dem Vorgetragenen leicht, dafs mehre auf ein Massenelement wirkende Kräfte im Gleichgewicht sind, wenn die Wirkungsgröfsen *ihrer sämmtlichen* Seitenkräfte gleich Null sind, und umgekehrt.

Prinzip des Parallelepipedums der Kräfte.

§ 25. Denken wir uns drei Kräfte, deren Richtungen nicht in derselben Ebene liegen, auf ein Massenelement wirken. Die Elemente dieser Kräfte seien:

$$dK' = dmf',$$
$$dK'' = dmf'',$$
$$dK''' = dmf''',$$



und die Wegelemente derselben mögen bezeichnet werden mit $ds' = c'dt$, $ds'' = cdt$, $ds''' = c'''dt$.

Wir können uns nun nach dem ersten Grundsatz in § 24 den Fall auch so denken, dafs während eines bestimmten Zeitelementes die Wirkungen nach einander erfolgt wären, so, dafs zuerst das Massenelement vermöge der Kraft $dK'ds'$ den Weg ds' zurückgelegt hätte, also von a nach b gelangt sei, dann in einem folgenden Theil desselben Zeitelements in der Richtung von ds'' vermöge der Kraft $dK''ds''$ den Weg $bc = ds''$ und endlich in einem dritten Theil des Zeitelementes vermöge der Kraft $dK'''ds'''$ den Weg $cd = ds'''$ in der Richtung von ds''' zurückgelegt habe. Es wird dann nach Vollendung des Zeitelements das Massenelement sich in d befinden. Dasselbe würde stattfinden, wenn vermöge einer einzigen Kraft dK, welche in der Richtung ad wirksam ist, das Massenelement in dem Zeitelement den Weg $ds = ad$ zurückgelegt hätte. Es läſst sich also die Wirkung der drei Kräfte durch eine einzige ersetzen, deren Leistung sich ausdrückt durch $dKds$, und diese Kraft $dKds$ ist die Resultante aus den drei Kräften $dK'ds'$, $dK''ds''$, $dK'''ds'''$.

Es folgt hieraus das Gesetz:

Wenn drei Kräfte, deren Richtungen nicht in derselben Ebene liegen, auf ein Massenelement wirken, so erfolgt die gemeinschaftliche Wirkung nach der Diagonale des Parallelepipedums, welches durch die Gröſse und Richtung der Wegelemente der drei Kräfte gegeben ist, auch ist das Wegelement der Mittelkraft gleich der Länge dieser Diagonale. Dies Gesetz nennt man das Prinzip des Parallelepipedums der Kräfte.

Parallelepipedum der Geschwindigkeiten.

§ 26. Zufolge des Ausdrucks $ds = c\,.\,dt$ verhalten sich die Wegelemente in einem bestimmten Zeitelemente, wie die in diesem Zeitelemente stattfindenden Geschwindigkeiten. Trägt man auf den Richtungslinien der Kräfte anstatt der Wegelemente die in dem betrachteten Zeitelemente stattfindenden Geschwindigkeiten ab, so folgt, daſs die Diagonale des Parallelepipedums der Geschwindigkeiten sowohl der Gröſse als der Richtung nach gleich der Geschwindigkeit der Mittelkraft sein müsse.

Das Leistungselement, die Mittelkraft, aber drückt sich aus durch:

$$dKds = dm\,.\,c\,.\,dc.$$

Sind nun die Seitenkräfte ihrer Geschwindigkeit und Richtung nach gegeben, so ist auch die Geschwindigkeit und Richtung der Mittelkraft, und dadurch ihr Leistungselement entweder durch einfache geometrische, oder durch analytische Betrachtung zu finden.

Prinzip der virtuellen Leistungen.

§ 27. Für den Fall, daſs die Richtungen der Seitenkräfte mit einander rechte Winkel machen, ist offenbar zufolge des Parallelepipedums der Geschwindigkeiten (Figur umstehend):

$$c^2 = c'^2 + c''^2 + c'''^2,$$

folglich:

$$cdc = c'dc' + c''dc'' + c'''dc''',$$

und:

$$54)\quad dm.cdc = dm.c'dc' + dm.c''dc'' + dm.c'''dc''',$$

oder (nach 47):

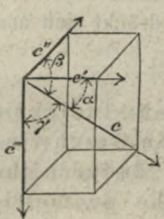
$$55)\quad dK.ds = dK'.ds' + dK''.ds'' + dK'''.ds'''.$$

Darin liegt der Satz:

das Leistungselement der Mittelkraft dreier Kräfte, deren Richtungen zu einander normal sind, und welche in verschiedenen Ebenen liegen, ist gleich der Summe der Leistungselemente der einzelnen Kräfte; und umgekehrt jedes Leistungselement läfst sich durch die Summe dreier anderer Leistungselemente ersetzen, deren Geschwindigkeits-Richtungen zu einander normal und in verschiedenen Ebenen liegen.

Nennen wir α, β, γ die Winkel, welche die Richtungslinie der Mittelkraft mit den einzelnen zu einander normalen Seitenkräften bildet, so folgt:

$$56)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{c'}{c} = \dfrac{c'}{\sqrt{(c'^2 + c''^2 + c'''^2)}} = \dfrac{ds'}{ds} \\ \cos\beta = \dfrac{c''}{c} = \dfrac{c''}{\sqrt{(c'^2 + c''^2 + c'''^2)}} = \dfrac{ds''}{ds} \\ \cos\gamma = \dfrac{c'''}{c} = \dfrac{c'''}{\sqrt{(c'^2 + c''^2 + c'''^2)}} = \dfrac{ds'''}{ds}. \end{cases}$$



Hieraus folgt, dafs die gleichzeitigen Geschwindigkeiten für ein Zeitelement oder auch die Wegelemente der zu einander normalen Seitenkräfte gleich den Projektionen der Geschwindigkeit oder des Wegelementes der Mittelkraft auf die Richtungen der Wege der Seitenkräfte sind. Diese gleichzeitigen Seiten-Geschwindigkeiten nennt man, in Bezug auf die mittlen Geschwindigkeiten, die virtuellen Geschwindigkeiten, die Werthe $dm.c'dc'$ etc. nennen wir die virtuellen Arbeiten, und es läfst sich das Gesetz der Gleichungen 54 und 55) auch so fassen: Jedes Arbeitselement einer Kraft ist gleich der Summe seiner virtuellen Arbeiten.

Diesen Satz nennt man das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, besser wollen wir ihn das Prinzip der virtuellen Arbeiten nennen.

Ist ds der Weg während eines Zeitelements, welchen das Massenelement, durch die Mittelkraft getrieben, zurücklegen würde, so wollen wir die Wege ds', ds'', ds''' d. h. die Projektionen des Wegelementes ds auf die Richtung der Seitenkräfte, die virtuellen Wegelemente der Seitenkräfte für ds nennen.

Parallelogramm der Kräfte.

§ 28. Ist das Wegelement der einen von den drei Kräften gleich Null, hat man es also nur mit zwei Kräften zu thun, so läfst sich immer durch die Richtungen der beiden Kräfte eine Ebene legen. Es folgt sehr leicht aus dem Vorgetragenen, dafs in diesem Falle anstatt des Parallelepipedums ein Parallelogramm erscheint, dafs das Wegelement der Mittelkraft gleich der Diagonale des Parallelogramms der Wegelemente, und die Geschwindigkeit der Mittelkraft gleich der Diagonale des Parallelogramms der Geschwindigkeiten ist.

Prinzip des unmöglichen Gleichgewichts für ein Massenelement.

§ 29. Wirken drei Kräfte auf ein Massenelement, deren Richtungslinien in verschiedenen Ebenen liegen, so läfst sich immer eine resultirende Kraft finden, deren Leistungselement einen bestimmten Werth hat. Daraus folgt, dafs drei solcher Kräfte niemals für sich im Gleichgewicht sein können. Ebenso läfst sich zeigen, dafs zwei Kräfte, welche auf ein Massenelement wirken, und deren Richtungslinien einen Winkel mit einander bilden, niemals für sich im Gleichgewicht sein können.

Dies Gesetz nennen wir das Prinzip des unmöglichen Gleichgewichts.

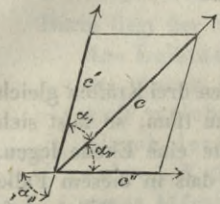
Mittelkraft einer beliebigen Anzahl von Kräften. Hilfssatz.

§ 30. In Folge des Satzes vom Parallelepipedum der Geschwindigkeiten kann man von einer beliebigen Anzahl von Kräften immer die Leistung der Mittelkraft bestimmen, denn man braucht die einzelnen Kräfte nur zunächst zu je zwei zusammenzusetzen und damit fortzufahren, bis man dieselben auf drei Kräfte, die in verschiedenen Ebenen liegen, oder auch auf zwei Kräfte in einer Ebene reducirt hat, und von diesen dann wieder die Mittelkraft bilden. Die so gefundene Mittelkraft ist die Mittelkraft sämmtlicher Kräfte. Bei dieser Zusammensetzung kann man sich des folgenden, geometrisch leicht nachzuweisenden Satzes bedienen:

Sind c' und c'' die *Geschwindigkeiten* zweier Kräfte, ist $_{,}\alpha_{,,}$ der Winkel, welchen *die Richtungen* mit einander bilden, so ist die Geschwindigkeit der Mittelkraft durch die Gleichung gegeben:

$$c^2 = c'^2 + c''^2 + 2c'c'' \,.\, \cos{}_{,}\alpha_{,,},$$

folglich:



$$cdc = c'dc' + c''dc'' + \cos{}_{,}\alpha_{,,}(c'dc'' + c''dc')$$

und daher das Leistungselement der Mittelkraft.

$$57)\quad dm\,cdc = dm[c'dc' + c''dc'' + \cos{}_{,}\alpha_{,,}(c'dc'' + c''dc')],$$

und wenn $\alpha_{,}$, $\alpha_{,,}$ die Winkel bezeichnen, welche die Geschwindigkeit c mit c', und c mit c'' macht, so hat man auch:

$$58)\quad \frac{c'}{c''} = \frac{\sin\alpha_{,,}}{\sin\alpha_{,}},$$

d. h.: **die Geschwindigkeiten der beiden Kräfte verhalten sich umgekehrt zu einander wie die Sinus der Winkel, welche dieselben mit der Richtung der Geschwindigkeit der dritten Kraft bilden.**

Ist der Winkel, welchen die *Richtungen* der beiden Kräfte bilden, $_{,}\alpha_{,,} = 90$ Grad, so folgt, da $\cos 90^\circ = 0$:

$$dm\,c\,dc = dm(c'dc' + c''dc''),$$

also die Leistung der Mittelkraft gleich der Summe der Leistungen der Seitenkräfte, welches auch unmittelbar aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten sich ergiebt. Da nun in diesem Falle $\sin\alpha_{,} = \cos\alpha_{,,}$ ist, so hat man:

$$59)\quad \begin{cases} \dfrac{c'}{c''} = \dfrac{\sin\alpha_{,,}}{\cos\alpha_{,,}} = \operatorname{tang}\alpha_{,,} = \operatorname{cotang}\alpha_{,}. \\ c' = c\,.\,\sin\alpha_{,,};\quad c'' = c\,.\,\cos\alpha_{,,}. \end{cases}$$

Mittelkraft zweier Kräfte, deren Richtungen in derselben geraden Linie liegen.

§ 31. Wenn der Winkel $_{,}\alpha_{,,} = 0$ ist, so ist $\cos{}_{,}\alpha_{,,} = 1$; ist dagegen $_{,}\alpha_{,,} = 180$ Grad, so ist $\cos{}_{,}\alpha_{,,} = -1$, in beiden Fällen fallen die Richtungen der Geschwindigkeiten zusammen, und zwar liegen sie im ersten Falle nach derselben Richtung, in andern Falle sind sie entgegengesetzt. Man hat daher für den Fall, dafs die beiden Kräfte nach derselben Richtung wirken:

$$c^2 = c'^2 + c''^2 \pm 2c'c'',$$

folglich:

$$60)\quad c = c' \pm c'',$$

d. h. die resultirende Geschwindigkeit ist dann gleich der Summe oder gleich der Differenz der Geschwindigkeiten der einzelnen

Kräfte. Giebt man den Geschwindigkeiten, je nachdem sie in dem einen oder in dem andern Sinne liegen, bestimmte Vorzeichen, so kann man den Satz auch so fassen:

Wenn die Richtungslinien zweier Kräfte in dieselbe gerade Linie fallen, so ist die resultirende Geschwindigkeit gleich der algebraischen Summe der einzelnen Geschwindigkeiten.

Mit Hilfe dieser Sätze kann man aber auch jede Kraft, welche ihrer Richtung und Geschwindigkeit nach gegeben ist, immer in zwei oder mehre Seitenkräfte zerlegen.

Bestimmung der Mittelkraft durch das Axensystem.

§ 32. Durch geschicktes Zusammensetzen und Zerlegen der Kräfte kann man oft verwickelte Rechnungen sehr erleichtern. Hat man z. B. eine beliebige Menge von Kräften, welche auf ein Massenelement wirken, so kann man die Mittelkraft derselben auch so bestimmen, daſs man zuerst drei Richtungen annimmt, die zu einander normal sind (Axensystem), daſs man sodann jede einzelne Kraft nach diesen drei Richtungen zerlegt, die algebraische Summe der einzelnen Geschwindigkeiten, die in einerlei Richtungslinie fallen, bildet, und nun diese drei Geschwindigkeiten wieder zusammensetzt, die resultirende Geschwindigkeit ist dann diejenige der Mittelkraft.

Es seien c', c'', c''', c'''' ... etc. die Geschwindigkeiten verschiedener Kräfte, $\alpha_{,}$, $\alpha_{,,}$, $\alpha_{,,,}$, $\alpha_{,,,,}$ .... die Winkel, welche sie mit der ersten Axe bilden, $\beta_{,}$, $\beta_{,,}$, $\beta_{,,,}$, $\beta_{,,,,}$.... die Winkel mit der zweiten und $\gamma_{,}$, $\gamma_{,,}$, $\gamma_{,,,}$, $\gamma_{,,,,}$ ... die Winkel mit der dritten Axe. Zerlegt man die Geschwindigkeit c' nach der Richtung der drei Axen, so hat man mit Benutzung der Gleichung 56) die Seiten-Geschwindigkeit nach der ersten Axe: $c' \cos \alpha_{,}$, nach der Richtung der zweiten Axe $c' \cos \beta_{,}$, nach der Richtung der dritten Axe $c' \cos \gamma_{,}$. In gleicher Weise zerlegt man die übrigen Geschwindigkeiten, und wenn man nun die algebraische Summe der Geschwindigkeiten, die in einerlei Axe liegen, bildet, und diese für die erste Axe mit $c_{,}$, für die zweite Axe mit $c_{,,}$, für die dritte Axe mit $c_{,,,}$ bezeichnet, so folgt die Geschwindigkeit nach der ersten Axe:

$$61)\quad \begin{cases} c' \cos \alpha_{,} + c'' \cos \alpha_{,,} + c''' \cos \alpha_{,,,} + \ldots . = c_{,}, \\ \text{die nach der zweiten Axe:} \\ c' \cos \beta_{,} + c'' \cos \beta_{,,} + c''' \cos \beta_{,,,} + \ldots . = c_{,,}, \\ \text{die nach der dritten Axe:} \\ c' \cos \gamma_{,} + c'' \cos \gamma_{,,} + c''' \cos \gamma_{,,,} + \ldots . = c_{,,,}, \end{cases}$$

und folglich die mittle Geschwindigkeit c:

$$62)\ c=\sqrt{(c_{\prime}^2+c_{\prime\prime}^2+c_{\prime\prime\prime}^2)}.$$

Die Winkel α, β, γ, welche c mit den Axen bildet, findet man durch die Gleichung 56):

$$\cos\alpha=\frac{c_{\prime}}{c},\quad \cos\beta=\frac{c_{\prime\prime}}{c},\quad \cos\gamma=\frac{c_{\prime\prime\prime}}{c}.$$

Bei Bestimmung der Ausdrücke $c'\cos\alpha_{\prime}$ etc. ist besonders auf das Vorzeichen von $\cos\alpha_{\prime}$ etc. zu achten, und es sind die Winkel stets in demselben Sinne zu messen.

Die Leistung, welche aus der Wirkung einer beliebigen Zahl von Kräften nach der Richtung einer der drei Axen hervorgeht, nennen wir eine Kräftesumme für diese Richtung. Wirken beliebig viele Kräfte auf ein Massenelement, so kann man in jedem Augenblick die Wirkung derselben auf drei Kräftesummen, deren Richtungen in den drei Axen liegen, zurückführen. Jede der drei Kräftesummen läfst sich behandeln, als ob sie die Leistung einer einzigen in dieser Richtung wirkenden Gesammtkraft sei, und wenden wir das Prinzip der virtuellen Leistungen an, so ergiebt sich sehr leicht für beliebig viele Kräfte, die auf ein Massenelement wirken, das Gesetz:

> die Leistung der Mittelkraft in irgend einem Zeitelement ist gleich der Summe dreier Kräftesummen für drei zu einander normale Axen.

Parallelepipedum und Parallelogramm der Drucke.

§ 33. Sind die sämmtlichen Kräfte, welche auf ein Massenelement wirken, konstante, d. h. ist das Aenderungsmaafs für dieselben in jedem Zeitelement dasselbe, so folgt nach S. 19 (No. 30) $c'=f't'$, $c''=f''t''$ etc. Nehmen wir an, dafs die sämmtlichen Kräfte gleich lange Zeit wirksam gewesen sind, also $t'=t''$ etc., so folgt ferner, dafs die Geschwindigkeiten unter sich in jedem Augenblicke dasselbe Verhältnifs haben, und wenn man für die Geschwindigkeiten in den Gleichungen 61) die Werthe $f't$, $f''t$, $f'''t$ etc. substituirt, und durch t durchweg dividirt, so hat man:

$$63)\ \begin{cases} f'\cos\alpha_{\prime}+f''\cos\alpha_{\prime\prime}+f'''\cos\alpha_{\prime\prime\prime}+\ldots=f_{\prime}, \\ f'\cos\beta_{\prime}+f''\cos\beta_{\prime\prime}+f'''\cos\beta_{\prime\prime\prime}+\ldots=f_{\prime\prime}, \\ f'\cos\gamma_{\prime}+f''\cos\gamma_{\prime\prime}+f'''\cos\gamma_{\prime\prime\prime}+\ldots=f_{\prime\prime\prime}, \end{cases}$$

und folglich das Aenderungsmaafs der Mittelkraft:

$$64)\ f=\sqrt{(f_{\prime}^2+f_{\prime\prime}^2+f_{\prime\prime\prime}^2)}.$$

Es drücken sich aber die Drucke, welche die Kräfte auf das Massenelement ausüben, aus durch:

$$dK' = dmf', \quad dK'' = dmf'' \text{ etc.}$$

Wenn man nun die obigen Gleichungen 63) mit dm multiplizirt und für dmf' etc. die Werthe dK' etc. setzt, so hat man:

$$65) \left\{ \begin{array}{l} dK' \cos\alpha_{,} + dK'' \cos\alpha_{,,} + dK''' \cos\alpha_{,,,} + \ldots = dK_{,}, \\ dK' \cos\beta_{,} + dK'' \cos\beta_{,,} + dK''' \cos\beta_{,,,} + \ldots = dK_{,,}, \\ dK' \cos\gamma_{,} + dK'' \cos\gamma_{,,} + dK''' \cos\gamma_{,,,} + \ldots = dK_{,,,}, \end{array} \right.$$

und folglich der Mitteldruck:

$$66) \quad dK = \sqrt{(dK_{,}^2 + dK_{,,}^2 + dK_{,,,}^2)}.$$

$$67) \quad \cos\alpha = \frac{dK_{,}}{dK} = \frac{f_{,}}{f}, \quad \cos\beta = \frac{dK_{,,}}{dK} = \frac{f_{,,}}{f}, \quad \cos\gamma = \frac{dK_{,,,}}{dK} = \frac{f_{,,,}}{f}.$$

Hat man es mit veränderlich wirkenden Kräften zu thun, so ändert sich freilich f in jedem Zeitelement, man kann jedoch für die Dauer eines Zeitelements f als konstant ansehen, und versteht man unter f' f'' etc. die bestimmten gleichzeitigen Werthe, welche die Aenderungsmaafse in einem bestimmten Zeitelement besitzen, so gelten die obigen Gleichungen unter dieser Voraussetzung auch für veränderlich wirkende Kräfte; und dann ergeben sich durch jene Betrachtungen die Gesetze:

1) In jedem Zeitelement verhalten sich die Drucke, welche verschiedene Kräfte auf ein Massenelement ausüben, zu einander, wie die Geschwindigkeiten, welche die Kräfte dem Massenelement in diesem Augenblick ertheilen würden, falls sie frei wirkten.

2) Wenn man die Drucke ihrer Gröfse und Richtung nach durch Linien darstellt, so gilt das Gesetz, welches wir als Parallelepipedum resp. Parallelogramm der Kräfte und der Geschwindigkeiten bezeichnet haben, mit allen seinen Konsequenzen auch für die Drucke.

In dieser Gestalt nennen wir dies Gesetz das Prinzip des Parallelepipedums resp. des Parallelogramms der Drucke.

Bedingungen für das Gleichgewicht nach dem Prinzip der virtuellen Leistungen.

§ 34. Sind die Geschwindigkeiten in der Richtung aller dreier Axen gleichförmig, d. h. nach S. 16, wenn die Kräftesummen für die Richtungen aller dreier Axen im Gleichgewicht sind, so ist auch die mittle Geschwindigkeit gleichförmig, und folglich sind die Kräfte überhaupt im Gleichgewicht. Denn nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten ergiebt sich $dm.cdc = dmc_{,}dc_{,} + dmc_{,,}dc_{,,} + dmc_{,,,}dc_{,,,}$, und da die Geschwindigkeiten $c_{,}$, $c_{,,}$, $c_{,,,}$ konstant sind, so sind ihre Differentiale *gleich* Null, folglich ist die Summe ihrer virtuellen *Arbeiten gleich* Null, d. h. es ist auch die Arbeit der Mittelkraft gleich *Null*. Dasselbe findet statt, wenn die virtuellen Geschwindigkeiten $c_{,}$, $c_{,,}$, $c_{,,,}$ einzeln gleich Null sind.

Hieraus ergiebt sich als Bedingung des Gleichgewichts:

Sollen mehre Kräfte, deren Richtungslinien in verschiedenen Ebenen liegen, im Gleichgewicht sein, so müssen die Kräftesummen für drei zu einander normale Axen gleich Null sein.

Dieser Satz gilt auch umgekehrt.

Sind die sämmtlichen Kräfte im Gleichgewicht, so ist das Massenelement entweder in Ruhe, oder es bewegt sich in gerader Linie mit *gleichförmiger Geschwindigkeit*. Im ersten Falle sind die Wegelemente jeder der drei *Kräftesummen* gleich Null, im andern Falle sind die Wegelemente in jedem Zeitelement konstant. Da in beiden Fällen $dc = fdt$ gleich Null ist, so folgt, da dt nicht Null sein kann, das Aenderungsmaafs $f = 0$; folglich sind die resultirenden Drucke *in der Richtung jeder der drei Kräftesummen in beiden Fällen gleich Null.*

Liegen die Richtungen der verschiedenen Kräfte alle in derselben Ebene, so gelten die obigen Sätze in der Weise, dafs man nur die Kräftesummen für zwei zu einander normale Axen in dieser Ebene in Betracht zu ziehen hat.

Substituirung gegebener Kräfte durch andere.

§ 35. Aus dem eben Vorgetragenen ziehen wir hier noch einige Folgerungen, die sich leicht einsehen lassen, und welche für die folgenden Betrachtungen von Interesse sind.

1) Sind mehre Kräfte, die auf ein Massenelement wirken, nicht im Gleichgewicht, und man läfst eine neue Kraft auf das Massenelement wirken, deren Leistungselement demjenigen der resultirenden Kraft gleich, aber entgegengesetzt ist, so tritt Gleichgewicht ein.

Dasselbe geschieht, wenn man auf das Massenelement anstatt der einen neuen Kraft, ein System von neuen Kräften wirken läfst, dessen Resultirende ein gleiches, aber entgegengesetztes Leistungselement hat, als die Resultirende des ersten Systems.

2) Sind mehre Kräfte an einem Massenelement im Gleichgewicht, so läfst sich jede von ihnen so auffassen, als ob sie eine Kraft sei, deren Leistung der resultirenden Kraft sämmtlicher übrigen Kräfte gleich und entgegengesetzt ist, oder als ob sie die resultirende Kraft eines Systemes von Kräften sei, dessen resultirende

Leistung der resultirenden *Leistung* sämmtlicher übrigen gegebenen Kräfte gleich und entgegengesetzt ist.

3) Wirkt ein System von Kräften auf ein Massenelement ein, und es erfolgt Bewegung, so läfst sich der Fall auch so ansehen, als wirke eine Kraft, welche gleich der resultirenden *aller* übrigen Kräfte ist, allein frei auf das System ein, während alle übrigen Kräfte einzeln durch Gegenkräfte, die ihnen gleich und entgegengesetzt sind, im Gleichgewicht gehalten werden. Sind aber die auf ein Massenelement wirkenden Kräfte sämmtlich im Gleichgewicht, so läfst sich die Sache auch so auffassen, als ob jede einzelne Kraft für sich durch eine gleiche und entgegengesetzte im Gleichgewicht gehalten werde. Wenn man nach den Gesetzen 1, 2 und 3 die Wirkung, welche eine gegebene Kraft, oder ein gegebenes System von Kräften auf ein Massenelement ausübt, hervorgebracht denkt durch eine andere Kraft, oder durch ein anderes System von Kräften, so sagt man, diese andere Kraft, oder dieses andere System werde der ersten Kraft, oder dem ersten System *substituirt.*

Aeufsere und innere Kräfte eines Massenelements.

§ 36. Aus dem letzten Satz (No. 3) des vorigen Paragraphen folgt, dafs wenn mehre Kräfte auf ein Massenelement einwirken, man sich die Sache so vorstellen könne, als ob jede einzelne Kraft nach ihrer Richtung auf das Massenelement einen Druck ausübe, welcher durch einen gleichen, aber entgegengesetzten Gegendruck aufgehoben wird; gleichviel ob das ganze System im Gleichgewicht oder in Bewegung ist. Diese Gegendrucke sind wir genöthigt wiederum der Wirkung von Kräften zuzuschreiben. Dergleichen Kräfte nennen wir *Reaktionskräfte*, auch wohl *innere Kräfte* des Massenelementes zum Unterschiede von den zuerst betrachteten Kräften, welche wir äufsere Kräfte, oder bewegende Kräfte nennen. Jenen Gegendruck, welchen eine äufsere Kraft hervorruft, nennen wir die Reaktion auch wohl den Widerstand des Massenelements. Die innern Kräfte eines Massenelements erscheinen uns stets nur im Zustande des Gleichgewichts; niemals sind sie fähig Bewegung hervorzurufen. Wir können ihr Vorhandensein nur als Hypothese hinstellen, als Folgerung aus den Ansichten, welche wir über die Wirkung der Kräfte aufgestellt haben; unserer direkten Wahrnehmung entziehen sie sich vollständig.

Aus den eben entwickelten Begriffen folgt:

wenn eine oder mehre Kräfte auf ein Massenelement einwirken, so entspricht stets jedem wirkenden Drucke eine gleich große, aber nach entgegengesetzter Richtung wirkende Reaktion.

Gleichung für die Bahn eines Massenelements.

§ 37. Die sämmtlichen auf ein Massenelement wirkenden Kräfte können wir in jedem Zeitelement auf drei Kräftesummen zurückführen, deren Richtungslinien stets parallel mit drei angenommenen, zu einander normalen und in verschiedenen Ebenen liegenden Axen bleiben (§ 32), indem wir dazu die Gleichungen 61) S. 35 benutzen.

Sind $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$ die Koordinaten eines Massenelements in Bezug auf dasselbe Axensystem, auf welches wir die ursprünglichen Kräfte zurückgeführt haben, und sind für die drei zu einander normalen Kräftesummen $c_{,}$, $c_{,,}$, $c_{,,,}$ die Geschwindigkeiten für irgend ein Zeitelement, so sind die Wege des Massenelements in der Richtung der Axen:

$$ds' = c_{,}dt, \quad ds'' = c_{,,}dt, \quad ds''' = c_{,,,}dt.$$

Diese Wege bilden das Wachsthum der Koordinaten, und bezeichnen wir die letzten mit x, y, z, so ist:

$$dx = ds' = c_{,}dt, \quad dy = ds'' = c_{,,}dt, \quad dz = ds''' = c_{,,,}dt.$$

Da aber die betrachteten Zeitelemente für sämmtliche Axen dieselben sind, so folgt, wenn wir dt aus diesen Ausdrücken entwickeln, und die so gefundenen Werthe einander gleich setzen:

$$dt = \frac{dx}{c_{,}} = \frac{dy}{c_{,,}} = \frac{dz}{c_{,,,}},$$

folglich:

$$68) \begin{cases} dy = dx \cdot \frac{c_{,,}}{c_{,}} \\ dz = dx \cdot \frac{c_{,,,}}{c_{,}}, \end{cases}$$

und wenn man integrirt, und die Constante wie oben bezeichnet:

$$69) \begin{cases} y = \int \frac{c_{,,}}{c_{,}} dx + a_{,,}, \\ z = \int \frac{c_{,,,}}{c_{,}} dx + a_{,,,}. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen ist also der Weg des Massenelements bestimmt.

Geradlinige Bahn eines Massenelements.

§ 38. Die Gleichungen für den Weg des Massenelements zeigen, dafs wenn die Geschwindigkeiten $c_{\prime}$, $c_{\prime\prime}$, $c_{\prime\prime\prime}$ konstant sind, oder wenn nur ihr Verhältnifs konstant ist, der Weg eine gerade Linie wird. Die Geschwindigkeiten sind aber konstant, wenn sie gleichförmig sind, wenn also die einzelnen Kräftesummen sich im Zustande des Gleichgewichts befinden, und ihr Verhältnifs ist konstant, wenn entweder die einzelnen Kräfte konstant wirkende sind, oder, wenn zwar die einzelnen Kräfte veränderlich wirkende sind, aber doch so, dafs die Aenderungsmaafse ihrer Kräftesummen nach den normalen Axen in jedem Augenblick ein konstantes Verhältnifs haben.

Im ersten Fall hat man $c_{\prime}=f_{\prime}t$, $c_{\prime\prime}=f_{\prime\prime}t$, $c_{\prime\prime\prime}=f_{\prime\prime\prime}t$, und da die Kräfte konstant wirken, so sind die Aenderungsmaafse $f_{\prime}$, $f_{\prime\prime}$, $f_{\prime\prime\prime}$ konstant, folglich die Verhältnisse konstant.

Bezeichnet man diese konstanten Verhältnisse $\frac{f_{\prime\prime}}{f_{\prime}}$ mit q und $\frac{f_{\prime\prime\prime}}{f_{\prime}}$ mit p, so hat man für die Gleichung des Weges:

$$y=qx+a_{\prime\prime}$$
$$z=px+a_{\prime\prime\prime}.$$

Sind dagegen die Kräfte veränderlich wirkend, so hat man nach der Gleichung No. 26 (S. 18):

$$c_{\prime}=\Sigma f_{\prime}dt,\quad c_{\prime\prime}=\Sigma f_{\prime\prime}dt,\quad c_{\prime\prime\prime}=\Sigma f_{\prime\prime\prime}dt,$$

folglich:

$$\frac{c_{\prime\prime}}{c_{\prime}}=\frac{\Sigma f_{\prime\prime}\,.\,dt}{\Sigma f_{\prime}\,.\,dt} \text{ und } \frac{c_{\prime\prime\prime}}{c_{\prime}}=\frac{\Sigma f_{\prime\prime\prime}\,.\,dt}{\Sigma f_{\prime}\,.\,dt}.$$

Ist nun zwar $f_{\prime}$, $f_{\prime\prime}$, $f_{\prime\prime\prime}$ in jedem Augenblick veränderlich, aber doch so, dafs immer

$$\frac{f''}{f_{\prime}}=q,\quad \frac{f_{\prime\prime\prime}}{f_{\prime}}=p$$

ist, so hat man:

$$\frac{c_{\prime\prime}}{c_{\prime}}=\frac{\Sigma qf_{\prime}dt}{\Sigma f_{\prime}dt}=q \text{ und } \frac{c_{\prime\prime\prime}}{c_{\prime}}=\frac{\Sigma pf_{\prime}dt}{\Sigma f_{\prime}dt}=p,$$

und daher ebenfalls die Gleichung für die Bahn des Massenelements wie vorhin:

$$y=qx+a_{\prime\prime},$$
$$z=px+a_{\prime\prime\prime}.$$

In beiden Fällen ergiebt sich also die Gleichung der geraden Linie.

Hieraus folgt:

Wirken mehre Kräfte auf ein Massenelement ein, so kann es sich nur in drei Fällen in gerader Linie bewegen, nämlich:

a) wenn alle Kräfte konstant wirkende sind;

b) wenn die einzelnen Kräfte zwar veränderlich wirkende sind, aber doch so, dafs die Aenderungsmaafse der Kräftesummen nach drei zu einander normalen Axen sich stets in konstantem Verhältnifs zu einander ändern.

In diesen beiden Fällen erfolgt die resultirende Bewegung mit veränderter Geschwindigkeit.

c) wenn alle Kräfte im Gleichgewicht sind, und dann ist die Bewegung eine gleichförmige.

In allen andern Fällen bewegt sich das Massenelement in einer Kurve, und umgekehrt: Bewegt sich das Massenelement in einer Kurve, so findet keiner dieser drei Fälle statt.

Krummlinige Bahn eines Massenelements.

§ 39. Sind in den Gleichungen 69):

$$y = \int \frac{c_{ii}}{c_i}\, dx + a_{ii},$$

$$z = \int \frac{c_{iii}}{c_i}\, dx + a_{iii}$$

die Verhältnisse $\frac{c_{ii}}{c_i}$ und $\frac{c_{iii}}{c_i}$ nicht konstant, so bewegt sich das Massenelement in einer Kurve. Sind die *Verhältnisse* in jedem Augenblick andere, so kann dies daher rühren, dafs entweder die Geschwindigkeiten c_i, c_{ii}, c_{iii} der drei Kräftesummen alle drei sich unabhängig von einander ändern, oder daher, dafs die Geschwindigkeiten sich nach einer oder nach zwei Axen gar nicht ändern, also gleichförmig sind, wohl aber nach der dritten, *resp.* nach den beiden andern Axen.

Hiernach ist die krummlinige Bewegung als das Resultat anzusehen:

a) entweder von drei Kräftesummen, welche unabhängig veränderlich sind,

b) oder von einer Kräftesumme, die im Gleichgewicht ist, und von zwei Kräftesummen, von welchen jede entweder konstant oder veränderlich wirkend sein kann;

c) oder endlich von zwei Kräftesummen, welche im Gleichgewicht sind, und von einer Kräftesumme, welche entweder konstant oder veränderlich wirkend ist.

Nach den auf S. 17 über die Entstehung der gleichförmigen Geschwindigkeit gemachten Bemerkungen läfst sich in den beiden unter b und c genannten Fällen die krummlinige Bewegung auch auffassen, als hervorgegangen aus der Wirkung dreier zu einander normalen Kräftesummen, von denen eine oder zwei momentan wirkend, die beiden anderen, resp. die dritte aber kontinuirlich, sei es konstant oder veränderlich wirkend, zu denken sind.

Bewegung in einer ebenen Kurve.

§ 40. Die Kurve, welche den Gleichungen No. 69 entspricht, ist im Allgemeinen eine Kurve von doppelter Krümmung; sie wird eine ebene Kurve, wenn entweder y oder z konstant wird, d. h. wenn die in der Richtung der einen Axe liegende Geschwindigkeit gleich Null ist. Für die Bewegung in einer ebenen Kurve haben wir also die Bedingungsgleichungen:

$$70)\quad \begin{cases} y = \int \frac{c_{{\prime\prime}}}{c_{\prime}}\, dx + a_{{\prime\prime}} \\ z = 0 \text{ oder } c_{{\prime\prime\prime}} = 0. \end{cases}$$

Die Bewegung in einer ebenen Kurve läfst sich also immer als das Resultat zweier Kräftesummen ansehen, deren Richtungen zu einander normal sind, und von welchen entweder die eine im Gleichgewicht, und die andere konstant resp. veränderlich wirkend, oder aber welche beide veränderlich wirkend zu denken sind.

Parabelbahn.

§ 41. Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einflufs zweier Kräftesummen, deren Richtungen normal zu einander sind und von denen eine im Gleichgewicht ist, also eine gleichförmige Geschwindigkeit bedingt, die andere aber konstant wirkend ist, so ist die Bahn eine Parabel; denken wir nämlich, die gleichförmige Geschwindigkeit finde in der Axe der X statt, die ungleichförmige in der Axe der Y, und es sei $f_{{\prime\prime}}$ das Aenderungsmaafs der konstant wirkenden Kraft. Man hat sodann:

$$c_{{\prime\prime}} = f_{{\prime\prime}} t \text{ (No. 35. S. 20)},$$

worin t die Zeit bedeutet, welche seit der Einwirkung der Kraft verflossen ist. Diese Zeit ist aber dieselbe, während welcher in der Axe der X ein bestimmter Weg x mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $c_{\prime}$ durchlaufen ist, und sie findet sich nach No. 25. S. 17);

$$t = \frac{x}{c_{\prime}}.$$

Man hat also für die Gleichung der Kurve (No. 69):

$$y = \int \frac{c_{\prime\prime}}{c_{\prime}} dx + a_{\prime\prime} = \int \frac{f_{\prime\prime} t}{c_{\prime}} dx + a_{\prime\prime}$$

$$71)\quad y = \int \frac{f_{\prime\prime} x}{c_{\prime}^2} dx = \tfrac{1}{2} \frac{f_{\prime\prime}}{c_{\prime}^2} . x^2 + a_{\prime\prime},$$

welches die Gleichung der Parabel ist.

Sind die Kräftesummen nicht normal zu einander, schliefsen ihre Richtungen vielmehr den Winkel α ein, so kann man sie immer auf zwei zu einander normale Kräftesummen zurückführen. Nimmt man die Richtung der einen dieser normalen Kräftesummen mit der Richtung der konstant wirkenden Kraft zusammenfallend, so läfst sich die gleichförmige Geschwindigkeit der andern Kräftesumme $c_{\prime}$ in zwei andre Geschwindigkeiten zerlegen (No. 59. S. 34), deren eine in der Richtung der XAxe liegt, und gleich $c_{\prime} \sin \alpha$ ist, die andre in der Richtung der YAxe liegt und gleich $c_{\prime} \cos \alpha$ ist. Man hat sodann die Geschwindigkeitssumme in der YAxe (No. 60. S. 34):

$$c_{\prime\prime} = c_{\prime} \cos \alpha + f_{\prime\prime} t,$$

und nach der obigen Darstellung $t = \frac{x}{c_{\prime} \sin \alpha}$ setzt man nun in der allgemeinen Gleichung für die Kurve:

$$y = \int \frac{c_{\prime\prime}}{c_{\prime}} dx + a_{\prime\prime},$$

für $c_{\prime\prime}$ den Werth $c_{\prime} \cos \alpha + f_{\prime\prime} t$ und für $c_{\prime}$ den Werth $c_{\prime} \sin \alpha$; sodann aber für t den eben berechneten Werth, so ergiebt sich leicht:

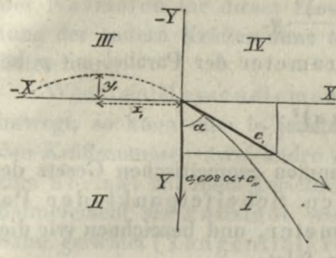
$$72)\quad \begin{cases} y = \int \left(\operatorname{cotg} \alpha + \frac{f_{\prime\prime}}{(c_{\prime} \sin \alpha)^2} . x\right) dx + a_{\prime\prime} \\ y = x . \operatorname{cotg} \alpha + x^2 . \frac{f_{\prime\prime}}{2(c_{\prime} \sin \alpha)^2} + a_{\prime\prime}. \end{cases}$$

Diese Kurve ist aber ebenfalls eine Parabel. Dies läfst sich auf folgende Weise zeigen. Zunächst finden wir einen Wendepunkt der Kurve, wenn y ein Maximum oder ein Minimum wird, und nach bekannten Regeln haben wir zur Bestimmung dieses Wendepunkts zu setzen:

$$dy = \operatorname{cotg} \alpha + \frac{f_{\prime\prime}}{(c' \sin \alpha)^2} x = 0,$$

daraus folgt:

$$73)\quad x_{\prime} = - \frac{c_{\prime}^2}{f_{\prime\prime}} . \sin \alpha . \cos \alpha . = - \tfrac{1}{2} \frac{c_{\prime}^2}{f_{\prime\prime}} . \sin 2\alpha.$$



Da nun die zweite Ableitung immer **positiv** ist, so lange $f_{,,}$ als positiv gedacht wird, weil nämlich das Quadrat im Nenner immer positiv sein mufs, so entspricht der eben bestimmte Werth von x einem **Minimum**, also einem negativen Werth von y; es wird also der Wendepunkt im III. oder IV. Quadranten liegen. Er liegt im III. Quadranten, wenn das zugehörige x **negativ** ist, und dies tritt ein, nach 73), wenn α ein **spitzer** Winkel ist. Dagegen wird x positiv, wenn α ein stumpfer Wtnkel, also $\cos\alpha$ negativ ist, und dann liegt der Wendepunkt im IV. Quadranten.

Setzen wir den Werth von x aus 73 in 72, so erhalten wir für den Wendepunkt:

$$74)\quad y_{,} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{c_{,}^{2}}{f_{,,}}\cos.\alpha^{2} + a_{,,}.$$

Verlegen wir nun den Anfangspunkt der Koordinaten in den Wendepunkt der Kurve, so ist zunächst $a_{,,}. = 0$ und nennen wir die neuen Koordinaten y' und x', so ist offenbar $x = x' - \frac{c_{,}^{2}}{f_{,,}}\sin\alpha\,.\cos\alpha$ (nach No. 73) und wenn wir diesen Werth in die Gleichung 72) einsetzen, so geht dieselbe nach einer leichten Rechnung über in:

$$75)\quad y' = \tfrac{1}{2}\,\frac{f_{,,}}{(c_{,}\sin\alpha)^{2}}\,.\,x'^{2},$$

welches wieder die Gleichung der **Parabel** ist; dieselbe geht in die Gleichung No. 71 über, wenn α gleich einem **Rechten** ist.

Zu bemerken ist hier noch, dafs die **konkave** Seite der Parabel immer der Axe der Y, oder derjenigen Axe zugekehrt ist, welche der Richtung der **konstant** wirkenden Kräftesumme entspricht.

Da endlich die **gleichförmige** Geschwindigkeit nach S. 17 als das Resultat einer **momentan** wirkenden Kraft aufgefafst werden kann, so läfst sich die **Parabelbewegung immer betrachten als das Resultat einer momentan wirkenden Kräftesumme und einer konstant wirkenden Kräftesumme, deren Richtungen einen Winkel mit einander bilden.**

Krümmungskreis der Bahn, — Normalkraft, Tangentialkraft.

§ 42. Die Gleichung 75) läfst sich auch folgendermaafsen schreiben:

$$x^2 = \frac{2(c_{,} \sin \alpha)^2}{f_{,,}} y,$$

und folglich ist, wenn wir den Parameter der Parabel mit p bezeichnen:

$$p = \frac{2(c_{,} \sin \alpha)^2}{f_{,,}}.$$

Nun ist aber nach einem bekannten geometrischen Gesetz der Krümmungshalbmesser für den Scheitelpunkt der Parabel gleich dem halben Parameter, und bezeichnen wir diesen Krümmungshalbmesser mit r, so folgt:

$$76)\ r = \tfrac{1}{2} p = \frac{(c_{,} \sin \alpha)^2}{f_{,,}}.$$

Dieser Krümmungshalbmesser liegt aber in der Axe der Y, d. h. in der Richtung der konstant wirkenden Kräftesumme.

Nun ist klar, dafs wir jeden beliebigen Kreis als Krümmungskreis des Scheitels einer Parabel ansehen können, und dafs für jedes Bogenelement eines Kreises, welches von einem Massenelement durchlaufen wird, immer die obige Gleichung gelten mufs, sobald wir unter $f_{,,}$ das Aenderungsmaafs einer in der Richtung des Radius wirkenden konstanten Kraft, unter $c_{,}$ eine gleichförmige Geschwindigkeit, welche mit der Richtung der konstanten Kraft, oder mit der Richtung des Radius den Winkel α bildet, verstehen.

Ebenso leicht ist es einzusehen, dafs wenn ein Massenelement sich in einer beliebigen Kurve bewegt, und wir denken für irgend ein Element der Kurve den Krümmungskreis: die obige Gleichung auch für dieses Kurvenelement gelten mufs. Hieraus folgt aber folgendes wichtige Gesetz:

> Bewegt sich ein Massenelement in einer beliebigen Kurve, so läfst sich für jedes Element der Bahn die Bewegung als das Resultat zweier Kräftesummen ansehen, von denen die eine nach der Richtung des Krümmungshalbmessers für dieses Bahnelement als konstant wirkend, die andre aber als im Gleichgewicht, folglich eine gleichförmige Geschwindigkeit bedingend, und mit der ersten einen beliebigen Winkel bildend, gedacht werden mufs.

Nimmt man den Winkel, welchen die beiden Kräftesummen mit einander bilden, gleich einem Rechten, und beachtet man, dafs die Richtung des Krümmungsradius eines Bahnelementes immer mit der Normalen für dieses *Element* zusammenfällt, so ist die Richtung der andern Kräftesumme tangential, und es folgt aus dieser Betrachtung:

Wenn ein Massenelement sich in einer beliebigen Kurve bewegt, so kann man in jedem Element der Bahn für die wirkenden Kräftesummen zwei andre substituiren (§38), von denen die eine normal zur Bahn gerichtet (Normalkraft) immer für dieses Bahnelement als konstant wirkend, die andre tangential zur Bahn gerichtet (Tangentialkraft) als im Gleichgewicht befindlich betrachtet werden mufs.

Die Gleichung 76):

$$r = \frac{(c_{,} \sin \alpha)^2}{f_{,,}}$$

gilt hiernach ganz allgemein, sobald man unter r den Krümmungshalbmesser in irgend einem Element der Kurve, unter $f_{,,}$ das Aenderungsmaafs der Normalkraft, unter $c_{,}$ die gleichförmige Seitengeschwindigkeit und unter α den Winkel versteht, welchen diese *gleichförmige Seitengeschwindigkeit* mit der Normale der Kurve bildet. Wird die gleichförmige Seitengeschwindigkeit tangential genommen, so ist $\alpha = 90$ Grad $\sin \alpha = 1$, und man hat:

$$77) \left\{ \begin{aligned} r &= \frac{c_{,}^2}{f''} \\ f_{,,} &= \frac{c_{,}^2}{r}. \end{aligned} \right.$$

Da aber die Tangente für ein Kurvenelement mit diesem zusammenfällt, so kann man unter $c_{,}$ auch die Geschwindigkeit in der Richtung der Bahn, oder die Geschwindigkeit, mit welcher das Massenelement in dem betrachteten Augenblick sich eben bewegt verstehen.

Centripetalkraft und Centrifugalkraft.

§ 43. Aus den Untersuchungen des vorigen Paragraphen folgt, dafs wenn ein Massenelement sich in einer beliebigen Kurve bewegt, man immer das Aenderungsmaafs $f_{,,}$ der Normalkraft nach der Gleichung 77) bestimmen kann, sobald man die Geschwindigkeit des Massenelements und den Krümmungshalbmesser der Bahn kennt. Diese Normalkraft äufsert auf das Massenelement einen Druck in der Richtung nach dem Mittelpunkt des Krümmungskreises, und diesem Druck mufs eine gleich grofse, aber entgegengesetzt wirkende Reaktion (§ 36) entsprechen. Man nennt daher auch wohl die Normalkraft, welche das Bestreben darstellt, das Massenelement dem Mittelpunkt des Krümmungskreises zu nähern, die **Centripetalkraft**, die gleich grofse, aber entgegengesetzte **Reaktion** dagegen, welche das Bestreben ausdrückt, das Massenelement von dem Mittelpunkt des Krümmungskreises zu entfernen, die **Centrifugalkraft** (Fliehkraft, Schwungkraft). Nennt man dF das Werthelement einer von beiden, so drücken sich offenbar beide aus (nach Gleichung 76 und 4) durch:

$$78)\quad dF = dm\,.\,f_{\prime\prime} = dm\,.\,\frac{c_{\prime}^{2}}{r} = \frac{dG}{g}\,.\,\frac{c_{\prime}^{2}}{r}\,.$$

Bezeichnet man eine von beiden als **positiv**, so ist die andere **negativ** zu bezeichnen. Auch ist es klar, dafs es gleichgiltig bleibt, welchen von beiden Drucken man als den wirkenden, und welchen man als die Reaktion ansehen *will*; in manchen Fällen erleichtert es die Anschauung, wenn man die Centripetalkraft als Reaktion der Centrifugalkraft betrachtet.

Kreisbewegung.

§ 44. Die Gleichung 77):

$$f_{\prime\prime} = \frac{c_{\prime}^{2}}{r}$$

zeigt, dafs das Aenderungsmaafs der Centrifugalkraft in jedem Augenblick **konstant** ist, wenn $\frac{c_{\prime}^{2}}{r}$ konstant ist, also unter andern, wenn $c_{\prime}$ konstant und r konstant ist. Der **Krümmungshalbmesser** r ist nur konstant, wenn die Kurve, in welcher das Massenelement sich bewegt, ein **Kreis** ist. Bewegt sich also ein Massenelement in einem Kreise, und zwar so, dafs die Geschwindigkeit in der Richtung der Bahn in jedem Augenblick **konstant** ist, so ist auch das **Aenderungsmaafs der Normalkraft**, und **diese selbst konstant**, und umgekehrt:

Ist das **Aenderungsmaafs der Normalkraft konstant**, und bewegt sich ein Massenelement in einem **Kreise**, so ist die **Geschwindigkeit** in der **Richtung der Bahn** in jedem Augenblick **konstant**.

Aus diesen Gesetzen lassen sich noch mancherlei Folgerungen leicht herleiten.

Die **Bewegung im Kreise** kommt bei Maschinen sehr häufig vor. Man bezeichnet sie gewöhnlich als **Rotationsbewegung**, oder als **rotirende Bewegung**, pflegt aber diese Benennungen allgemeiner auch wohl auf die *Bewegungen* in einer geschlossenen Kurve überhaupt auszudehnen.

Bewegt sich ein Massenelement in einem Kreise, so daſs die Tangential-Geschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn dieselbe ist, so nennt man die Bewegung eine gleichförmig rotirende, im entgegengesetzten Falle eine ungleichförmig rotirende.

Die gleichförmig rotirende Bewegung ist also als das Resultat einer konstant wirkenden Normalkraft, und einer im Gleichgewicht befindlichen Tangentialkraft anzusehen.

Ist dagegen bei der Bewegung eines Massenelements in einem Kreise die Normalkraft veränderlich wirkend, d. h. ist das Aenderungsmaaſs $f_{\prime\prime}$ derselben für verschiedene Bahnelemente verschieden groſs (was jedoch nicht ausschlieſst, daſs es, wie oben nachgewiesen worden, während der Zeitdauer, welche das Durchlaufen jedes einzelnen Bahnelementes erfordert, als konstant betrachtet werden könne), so ist auch die Geschwindigkeit in der Richtung der Bahn veränderlich.

Winkelgeschwindigkeit, Peripherie-Geschwindigkeit.

§ 45. Bewegt sich ein Massenelement in einem Kreise, so können wir uns den Radius dieses Kreises als mathematische Linie ohne Masse, und mit dem Massenelement gemeinschaftlich rotirend denken, ohne daſs dadurch in den Bewegungsverhältnissen des Massenelements irgend etwas geändert wird.

Ist in irgend einem Punkte der Bahn $c_{\prime} = \frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit des Massenelements, und $v = \frac{ds'}{dt}$ die Geschwindigkeit irgend eines andern *Punktes dieses Radius*, welcher den Abstand ϱ vom *Mittelpunkt hat*, so sind offenbar die in gleichen Zeitelementen von dem Massenelement und von jenem Punkt zurückgelegte Wege gleich den Längen der gleichzeitig durchlaufenen Bogenelemente, und da diese, wie leicht ersichtlich, sich wie die Radien verhalten, so hat man:

$$ds : ds' = r : \varrho$$

und folglich auch $c_{\prime} : v = r : \varrho$,

oder:

$$c_{\prime} = v \frac{r}{\varrho}.$$

Man kann also die Geschwindigkeit des Massenelements finden, wenn man den Radius r desselben und außerdem die Geschwindigkeit v irgend eines Punktes in diesem Radius und den Abstand ϱ dieses Punkts vom Mittelpunkt des Kreises kennt. Nimmt man diesen Punkt so an, daſs sein Abstand ϱ gleich der Längeneinheit ist, so nennt man die Geschwindigkeit desselben in Bezug auf das Massenelement die Winkel-Geschwindigkeit, und bezeichnet man dieselbe mit w, so hat man:

$$c_{,} = w\,r\,; \quad w = \frac{c_{,}}{r}\,.$$

Es ist also unter der Winkel-Geschwindigkeit eines rotirenden Massenelements diejenige Geschwindigkeit zu verstehen, welche ein Punkt, der in dem Abstand 1 von dem Mittelpunkt des Kreises mit dem Massenelement gemeinschaftlich rotirt, besitzt. Im Gegensatz hierzu pflegt man die Geschwindigkeit $c_{,}$, welche das Massenelement in der Richtung seiner Bahn hat, die Peripherie-Geschwindigkeit des Massenelements zu nennen.

Führen wir in die Gleichung 78) die Winkel-Geschwindigkeit w ein, so ergiebt sich für die Centrifugalkraft:

$$79)\quad \left\{\begin{aligned} dF &= dm\,.\,f_{,,} = dm\,\frac{c_{,}^2}{r} = dm\,.\,w^2\,.\,r \\ &= \frac{dG}{g}\,.\,\frac{c_{,}^2}{r} = \frac{dG}{g}\,w^2\,.\,r \\ r &= \frac{dm}{dF}\,.\,c_{,}^2 = \frac{dF}{dm}\,.\,\frac{1}{w^2} = \frac{f_{,,}}{w^2} \\ f_{,,} &= \frac{dF}{dm} = w\,.\,c_{,} \end{aligned}\right.$$

Bewegt sich ein Massenelement in einem Kreise, so nennt man den Weg, welchen dasselbe zurücklegt, in dem es einmal die Peripherie des Kreises durchläuft, eine Umdrehung. Ist die Bewegung eine gleichförmig rotirende, so ist offenbar die Zeitdauer einer Umdrehung nach No. 25. S. 17:

$$t = \frac{s}{c} = \frac{2\pi r}{c_{,}} = \frac{2\pi}{w}\,.$$

Macht das Massenelement in einer Minute n Umdrehungen, so ist andrerseits auch:

$$t = \frac{60}{n}\,,$$

aus diesen beiden Ausdrücken ergeben sich folgende Formeln:

$$
80)\quad \begin{cases}
t = \dfrac{60}{n} = \dfrac{2\pi r}{c_{,}} = \dfrac{2\pi}{w} \\
n = \dfrac{60}{t} = \dfrac{60 c_{,}}{2\pi r} = \dfrac{60 w}{2\pi} = 9{,}5493\,\dfrac{c_{,}}{r} = 9{,}5493\,w \\
c_{,} = \dfrac{2\pi r}{t} = \dfrac{2\pi r \,.\, n}{60} = wr = 0{,}1047\,rn \\
r = \dfrac{c_{,} t}{2\pi} = \dfrac{60}{2\pi} \cdot \dfrac{c_{,}}{n} = \dfrac{c_{,}}{w} = 9{,}5493\,\dfrac{c_{,}}{n} \\
w = \dfrac{2\pi}{t} = \dfrac{2\pi}{60} \,.\, n = \dfrac{c_{,}}{r} = 0{,}1047\,n.
\end{cases}
$$

In diesen Formeln bedeutet:

t die Zeitdauer einer Umdrehung in Sekunden,
n die Anzahl der Umdrehungen in einer Minute,
$c_{,}$ die Peripherie-Geschwindigkeit,
r den Halbmesser des Kreises, in welchen sich das Massenelement bewegt,
w die *Winkel-Geschwindigkeit*,
$c_{,}$, r, w sind in einerlei Maafseinheit zu nehmen; die Zeiteinheit ist die Sekunde.

Ist die Bewegung nicht gleichförmig rotirend, so gelten obige Formeln noch für die mittlen Werthe.

Aus den Formeln 80 lassen sich, indem man die Werthe für die Geschwindigkeit $c_{,}$ in die Formeln 53. Seite 28 einführt, folgende für den praktischen Gebrauch bequeme Formeln herleiten (die Zahlenwerthe sind abgerundet):

$$
81)\quad \begin{cases}
\mathbf{Kr} = \mathbf{4868}\,\dfrac{\mathbf{N}}{\mathbf{n}} \\
\sqrt{\mathbf{Kr}} = \mathbf{70}\sqrt{\dfrac{\mathbf{N}}{\mathbf{n}}} \\
\sqrt[3]{\mathbf{Kr}} = \mathbf{17}\sqrt[3]{\dfrac{\mathbf{N}}{\mathbf{n}}},
\end{cases}
$$

in welchen Formeln bezeichnet:

K den Druck in der Richtung der Peripherie in Pfunden,
r den Abstand dieses Druckes von der Drehaxe in Fufsen,
N die Anzahl der wirksamen Pferdekräfte,
n die Anzahl der Umdrehungen in einer Minute.

Nimmt man K in Kilogrammes, r in Mètres, so hat man:

$$81\text{a)}\quad\begin{cases} Kr = 718\,\dfrac{N}{n} \\ \sqrt{Kr} = 27\sqrt{\dfrac{N}{n}} \\ \sqrt[3]{Kr} = \ 9\sqrt[3]{\dfrac{N}{n}}\,. \end{cases}$$

Prinzip der virtuellen und reellen Wege.

§ 46. Denken wir uns ein Massenelement, auf welches eine beliebige Anzahl von Kräften einwirkt, deren Drucke in irgend einem Augenblick die Werthe dK', dK''.... haben. Denken wir ferner ein ganz beliebiges Axensystem so, dafs der Durchschnittspunkt der Axen in das Massenelement fällt, und lassen die früher eingeführten Bezeichnungen gelten, so ist nach Gleichung 65. S. 37 der resultirende Druck in der Richtung der ersten Axe:

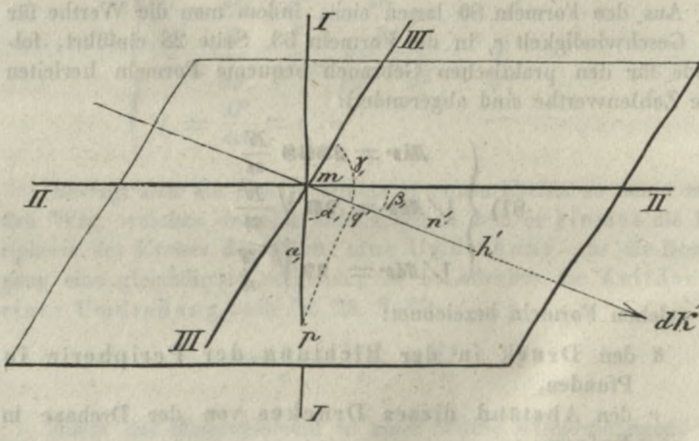
$$dK_{\prime} = \Sigma(dK' \,.\, \cos\alpha_{\prime}),$$

in der Richtung der zweiten Axe:

$$dK_{\prime\prime} = \Sigma(dK' \cos\beta_{\prime}),$$

in der Richtung der dritten Axe:

$$dK_{\prime\prime\prime} = \Sigma(dK' \,.\, \cos\gamma_{\prime}).$$



Nehmen wir in einer der drei Axen einen beliebigen Punkt p, dessen Abstand von dem Massenelement $pm = a_{\prime}$ sei, projiciren wir diesen Abstand auf die Richtung jeder Kraft, indem wir die Normalen pq', pq''*).... ziehen, und nehmen wir die Projektionen von $a_{\prime}$ auf die Richtung der einzelnen Kräfte a', a'', a''' etc., so ist offenbar:

$$\cos \alpha_{\prime} = \frac{mq'}{mp} = \frac{a'}{a_{\prime}},$$

und man hat daher:

$$dK_{\prime} = \Sigma\left(dK' \cdot \frac{a'}{a_{\prime}}\right),$$

folglich, da der Nenner $a_{\prime}$ allen Summanden rechts gemeinschaftlich *ist:*

$$82)\quad dK_{\prime} \cdot a_{\prime} = \Sigma\,(dK' \cdot a').$$

In Bezug auf die beiden andern Axen würde sich für einen beliebigen Punkt derselben, dessen Abstand vom Massenelement $b_{\prime}$ beziehlich $e_{\prime}$ sei, nachweisen lassen:

$$82\text{a})\quad \begin{cases} dK_{\prime\prime} \cdot b_{\prime} = \Sigma(dK'b') \\ dK_{\prime\prime\prime} \cdot e_{\prime} = \Sigma(dK'e'). \end{cases}$$

Denken wir eine Ebene durch den Punkt p normal zur Axe mp, und daher parallel mit der Ebene, in welcher die beiden andern Axen *liegen; es mögen die Richtungen der verschiedenen* Kräfte diese Ebene in den Punkten h', h''... etc. schneiden, und es sei $mh' = n'$, $mh'' = n''$ etc., so ist:

$$\cos \alpha_{\prime} = \frac{mp}{mh'} = \frac{a_{\prime}}{n'},$$

folglich:

$$dK_{\prime} = \Sigma\,(dK' . \cos \alpha_{\prime}) = \Sigma\left(\frac{dK}{n'} \cdot a_{\prime}\right),$$

und da wieder $a_{\prime}$ allen Summanden gemeinschaftlich ist, so folgt:

$$83)\quad \left\{ \frac{dK_{\prime}}{a_{\prime}} = \Sigma\left(\frac{dK'}{n'}\right). \right.$$

Ein ähnliches Gesetz läfst sich für die beiden andern Axen nachweisen, und wenn p', p''.... und q', q''.... die Entfernungen von dem Massenelement bezeichnen, in welchen die Richtungen der Drucke dK', dK''.... zwei andere Ebenen schneiden, von denen je eine normal ist auf je einer der beiden andern Axen, so hat man auch:

$$83\text{a})\quad \begin{cases} \dfrac{dK_{\prime\prime}}{b_{\prime}} = \Sigma\left(\dfrac{dK'}{p'}\right) \\ \dfrac{dK_{\prime\prime\prime}}{e_{\prime}} = \Sigma\left(\dfrac{dK'}{q'}\right). \end{cases}$$

Nun ist p (in der Figur) ein **beliebiger** Punkt einer der drei

---

*) In der Figur ist nur eine Kraft dK' ihrer Richtung nach gezeichnet, um nicht durch viele Linien das Bild undeutlich zu machen; es gelten natürlich für alle andern Kraftrichtungen dieselben Beziehungen, welche für diese eine gelten.

Axen; es ist aber auch *das* angenommene Axensystem *ein* beliebiges, und folglich, da man durch jeden Punkt im Raume und durch das Massenelement immer eine gerade Linie legen, diese aber als Axe eines Axensystems ansehen kann, so gilt die oben bewiesene Gleichung 82) für jeden beliebigen Punkt, der aufserhalb des Massenelements liegt, und da ferner jede Ebene normal sein kann, zu einer entsprechenden, durch das Massenelement gedachten Axe, so gilt die Gleichung 83) für jede beliebige Ebene.

Die Entfernung des Massenelementes von dem Durchschnittspunkte einer Kraftrichtung mit einer angenommenen Ebene wollen wir den **reellen Weg** der Kraft für diese Ebene nennen.

Denken wir uns *einen Punkt in einem beliebigen Abstande* von dem Massenelement, und projiciren wir diesen Abstand auf die Richtung einer auf das Massenelement wirkenden Kraft, so nennen wir die Projektion den **virtuellen** Weg der Kraft in Bezug auf den Punkt (analog der Bezeichnung *in* § 27, *doch nicht damit zu verwechseln*).

Zerlegen wir sämmtliche Drucke nach drei auf einander normale Axen, deren Durchschnittspunkt im Massenelement liegt, und von denen eine durch einen angenommenen Punkt geht, so nennen wir die Summe der Drucke für diese letztgenannte Axe (S. 37) auch wohl den resultirenden Druck für den gedachten Punkt. Legen wir durch den angenommenen Punkt eine Ebene, welche normal ist zum Abstande des Punkts von dem Massenelement, so wollen wir den resultirenden Druck für den gedachten Punkt auch als „Normaldruck für diese Ebene“ bezeichnen.

Nach diesen Erklärungen können wir die Gesetze, welche die Gleichungen 82 und 83 enthalten, *folgendermaafsen* ausdrücken:

> Wirken beliebig viele Kräfte auf ein Massenelement, so ist für jeden beliebigen Punkt aufserhalb des Massenelements in irgend einem Augenblick das Produkt aus dem resultirenden Druck für diesen Punkt in den Abstand des Punkts von dem Massenelement gleich der Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man den Druck jeder einzelnen Kraft mit ihrem virtuellen Wege in Bezug auf den angenommenen Punkt multiplizirt, und es ist ferner für jede beliebige Ebene der Quotient aus dem Normaldruck für

diese Ebene durch den normalen Abstand derselben von dem Massenelement gleich der Summe der Quotienten, welche gebildet werden, indem man jeden einzelnen Druck durch seinen reellen Weg in Bezug auf die Ebene dividirt.

Dieses Gesetz wollen wir das *Prinzip der virtuellen und reellen Wege* nennen. Wir haben dasselbe hier für den allgemeinsten Fall entwickelt, und es bleibt nur übrig, daraus Folgerungen für spezielle Anwendungen zu ziehen.

Anwendung des Prinzips der virtuellen und reellen Wege auf die resultirende Kraft, und auf die Normalkraft bei der Bewegung in einer beliebigen Kurve.

§ 47. Nach § 35. No. 3 (S. 39) kann man für die Wirkung der einzelnen Kräfte diejenige ihrer Resultirenden substituiren. Für den im vorigen Paragraphen betrachteten Fall würde man offenbar haben, wenn man den virtuellen Weg der Resultirenden in Bezug auf den *gewählten Punkt* mit a, den reellen Weg mit n bezeichnet:

$$84) \quad \begin{cases} dK_{,}\, a_{,} = dK \,.\, a = \Sigma(dK'\, a') \\ \dfrac{dK_{,}}{a_{,}} = \dfrac{dK}{n} = \Sigma\left(\dfrac{dK'}{n'}\right). \end{cases}$$

Die Gesetze dieser beiden Gleichungen lassen sich ähnlich wie die der Gleichungen 82) und 83) in Worten ausdrücken, nämlich so:

Wirken beliebig viele Kräfte auf ein Massenelement, und man denkt irgend einen Punkt aufserhalb des Massenelements, projicirt den Abstand dieses Punkts auf die Richtung jeder einzelnen Kraft und auch auf die Richtung der Resultirenden sämmtlicher Kräfte, so ist das Produkt aus dem resultirenden Druck in die Projektion jenes Abstands auf die Richtung der Resultirenden gleich der Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man jeden einzelnen Druck mit der Projektion jenes Abstandes auf seine Richtung multiplizirt. Aufserdem ist der Quotient aus dem resultirenden Druck durch seinen reellen Weg in Bezug auf eine beliebige Ebene gleich der Summe der Quotienten, welche gebildet werden, indem man jeden einzelnen Druck durch seinen reellen Weg in Bezug auf dieselbe Ebene dividirt.

Liegt der gewählte *Punkt* in der Richtung der **Resultirenden**, so ist der *resultirende* Druck für diesen Punkt offenbar der Mitteldruck *sämmtlicher* Kräfte, folglich $dK_{,} = dK$; die Drucke nach den beiden andern Axen, welche normal zu der gewählten Richtung zu denken sind, würden dann zufolge der Gleichung 67) gleich Null sein, insofern die Winkel β und γ gleich 90 Grad sind, und man hat also für diesen Fall die Bedingungsgleichungen:

$$85)\quad \begin{cases} dK\,.\,a_{,} = \Sigma(dK_{,}\,a') \\ \Sigma(dK'\,b') = 0 \\ \Sigma(dK'\,c') = 0, \end{cases}$$

oder:

$$86)\quad \begin{cases} \dfrac{dK}{a_{,}} = \Sigma\left(\dfrac{dK'}{n'}\right) \\ \Sigma\dfrac{dK'}{p'} = 0 \\ \Sigma\dfrac{dK'}{q'} = 0, \end{cases}$$

wenn p' und q' die reellen *Wege in Bezug auf zwei Ebenen* bezeichnen, welche zu je einer der beiden andern Axen normal, oder, was dasselbe heifst, welche mit der Richtung der Resultirenden parallel und unter sich normal sind.

Bewegt sich ein Massenelement in einer beliebigen **Kurve**, so ist in Folge des Gesetzes in § 42. S. 46 in jedem Augenblicke der Druck in der Richtung der Normalen als konstant wirkend, derjenige in der Richtung der Tangente als im Gleichgewicht befindlich, anzusehen. Zerlegt man in irgend einem Augenblick die sämmtlichen auf das Massenelement wirkenden Drucke nach drei Axen, von denen die eine (die erste) mit der Richtung des Krümmungshalbmessers zusammenfällt, so müssen die beiden andern in einer Ebene liegen, welche zu dem Krümmungshalbmesser normal ist, folglich die Kurve berührt; die *Resultirende* aus den beiden Kräftesummen, welche in dieser Ebene liegen, giebt die Leistung in der Richtung der Tangente, und da diese gleich Null sein soll, so mufs auch nach § 34 (S. 38) der Druck in der Richtung jeder dieser beiden Axen gleich Null sein. Man hat daher auch für diesen Fall die Gleichungen 85 und 86 in Geltung, wenn

dK den Druck der Normalkraft,

$a_{,}$ den Abstand eines beliebigen Punktes auf der Normalen zur Kurve von dem Massenelement,

$a', a'' \ldots.$ die Projektion dieses Abstandes auf die Richtung der verschiedenen Kräfte,

$b' b'' \ldots$ und $e' e''$ die Projektionen der Abstände zweier Punkte, die in der Berührungsebene der Kurve in je einer von zwei sich im Berührungspunkt rechtwinklig schneidenden Axen liegen, auf die Richtung der verschiedenen Kräfte,

$n' n'' \ldots$ die reellen Wege der verschiedenen Kräfte in Bezug auf eine Ebene, die im Abstande $a_{,}$ zur Richtung des Krümmungshalbmessers normal, also mit der Berührungsebene parallel ist,

$p' p'' \ldots$ und $q' q'' \ldots$ die reellen Wege der verschiedenen Kräfte in Bezug auf je zwei zu einander normale und mit dem Krümmungshalbmesser parallele Ebenen

bezeichnen.

Anwendung des Prinzips der virtuellen und reellen Wege auf den Zustand des Gleichgewichts.

§ 48. *Sind beliebig viele Kräfte, welche auf ein Massenelement wirken, im* ***Gleichgewicht***, *und wir denken ein beliebiges* Axensystem, dessen Durchschnittspunkt mit dem Massenelement zusammenfällt, so sind die resultirenden Drucke für jede der drei Axen einzeln gleich Null (§ 34. S. 38), es ist also:

$$dK_{,} = 0; \quad dK_{,,} = 0; \quad dK_{,,,} = 0;$$

und es folgt daher für den Zustand des Gleichgewichts nach Gleichung 82 und 83):

$$87) \begin{cases} \Sigma(dK' a') = 0 \\ \Sigma(dK' b') = 0 \\ \Sigma(dK' e') = 0. \end{cases}$$

$$88) \begin{cases} \Sigma\left(\frac{dK'}{n'}\right) = 0 \\ \Sigma\left(\frac{dK'}{p'}\right) = 0 \\ \Sigma\left(\frac{dK'}{q'}\right) = 0. \end{cases}$$

Hierin liegen folgende Sätze:

1) **Sind beliebig viele Kräfte, welche auf ein Massenelement wirken, im Gleichgewicht, und man nimmt einen beliebigen Punkt im Raume an, projicirt den Abstand desselben von dem Massenelement auf die Richtung jeder einzelnen Kraft, so ist die Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man den Druck**

jeder Kraft mit der *Projektion* jenes Abstandes auf ihre Richtung *multiplizirt*, gleich Null.

2) Sind beliebig viele Kräfte, welche auf ein Massenelement wirken, im Gleichgewicht, und man denkt eine beliebige Ebene im Raum, so ist die Summe der Quotienten, welche gebildet werden, indem man den Druck jeder Kraft durch ihren *reellen* Weg in Bezug auf diese Ebene dividirt, gleich Null.

Diese Sätze gelten auch umgekehrt.

Wenn nämlich mehre Kräfte auf ein Massenelement wirken und es ist:

> entweder für jeden beliebigen Punkt im Raume die Summe der Produkte aus dem Druck jeder Kraft in die *Projektion* des *Abstandes* jenes Punktes von dem Massenelement auf die Richtung der Kraft gleich Null, oder:
>
> für jede beliebige Ebene die Summe der Quotienten, welche gebildet werden, *indem man* den Druck jeder Kraft durch *ihren* reellen Weg in Bezug auf jene Ebene dividirt, gleich Null,

so sind die Kräfte im Gleichgewicht.

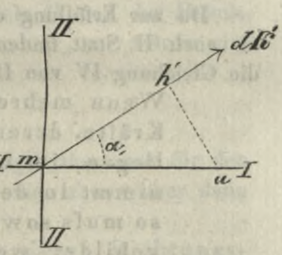
Um nun nachzuweisen, dafs jene Bedingungen für **jeden beliebigen Punkt**, oder **für jede beliebige Ebene** statt finden, braucht man nur zu zeigen, dafs sie für drei Punkte erfüllt werden, deren jeder in einer andern von drei durch das Massenelement gehenden zu einander *rechtwinkligen* Axen liegt, oder dafs sie für drei Ebenen gelten, die auf solchen Axen *folglich* nach unter einander normal sind. Dies läfst sich sehr leicht geometrisch beweisen, indem man das Axensystem um seinen Durchschnittspunkt dreht, und nun zeigt, dafs wenn diese obigen Bedingungen für das Axensystem in der *ursprünglichen* Lage gelten, dieselben auch für jede andere Lage gelten müssen, in welche man dasselbe durch Drehung bringen kann. Endlich läfst sich eben so leicht nachweisen, dafs der Durchschnittspunkt des anzunehmenden Axensystems auch aufserhalb des Massenelements liegen könne. Man hat also die obigen Bedingungs-Gleichungen überhaupt nur für drei Punkte, deren Ebene nicht durch das Massenelement geht, beziehlich für drei sich rechtwinklich schneidende Ebenen, nachzuweisen.

Bemerkung über die Vorzeichen bei Anwendung des Prinzips der virtuellen und reellen Wege.

§ *49.* Bei der Anwendung dieser Gesetze (§ *46* bis § 48) ist es von der gröfsten Wichtigkeit, die **Vorzeichen** richtig anzuwenden, welche den Cosinus und den Linien, welche entweder die Projektionen des Abstandes der gewählten Punkte auf die Richtungen der Kräfte, oder die reellen Wege der Kräfte in Bezug auf die gewählten Ebenen bedeuten, angehören. In dieser Beziehung ist zu bemerken, dafs man die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte mit den angenommenen Axen bilden, von jeder Axe anfangend stets in ein und demselben Sinne messen mufs, und dafs wenn man die Richtungen, nach welchen die Kräfte das Massenelement einzeln zu bewegen streben, als positiv ansicht, die Verlängerungen dieser Richtungen rückwärts über das Massenelement hinaus als negativ betrachtet werden müssen, und umgekehrt. Es erleichtert dabei die Betrachtung, wenn man entweder sämmtliche Kräfte als ziehend, oder *sämmtliche Kräfte als schiebend sich vorstellt.*

Prinzip der statischen Momente für den Zustand des Gleichgewichts.

§ 50. Sind mehre Kräfte, die auf ein Massenelement wirken, und deren Richtungslinien in derselben Ebene liegen, im Gleichgewicht, und zerlegt man den Druck jeder Kraft nach zwei Axen, die zu einander normal sind, und in derselben Ebene liegen, so folgt leicht (§ 34. S. 38), wenn dK', dK'' .... die Drucke und $\alpha_{\prime}$ $\alpha_{\prime\prime}$ ... die Winkel, welche die Richtung derselben mit der einen Axe bilden, folglich $(90^\circ - \alpha_{\prime})$, $(90^\circ - \alpha_{\prime\prime})$ ... die Winkel mit der andern Axe sind:



$$\text{I.}\quad \Sigma(dK' . \cos\alpha_{\prime}) = 0$$

$$\text{II.}\quad \Sigma(dK' . \sin\alpha_{\prime}) = 0.$$

Nach dem Frühern folgt aus der Gleichung I. auch (S. 57):

$$\text{III.}\quad \Sigma(dK'\, mh') = 0.$$

Nun ist aber $\sin\alpha_{\prime} = \frac{uh'}{mu}$, folglich hat man auch nach II. $\Sigma\left(dK' . \frac{uh'}{mu}\right) = 0$, und da mu bei sämmtlichen Drucken dasselbe ist, so folgt:

$$\text{IV.}\quad \Sigma(dK' . uh') = 0.$$

Die Linie *uh'* oder die Normale von irgend einem Punkt auf die Richtungslinie *einer* Kraft nennt man den **Hebelsarm** dieser Kraft in Bezug auf den Punkt, das Produkt von der Form $dK'.uh'$ oder das Produkt aus dem Druck einer Kraft in ihren Hebelsarm nennt man das **statische Moment** der Kraft in Bezug auf jenen Punkt.

Bezeichnet man den Hebelsarm der Kräfte mit $r'\, r''\ldots$, so hat man die Gleichung IV in der Form:

$$89)\ \Sigma(dK'.r') = 0.$$

Da nun die Lage der Axe *mu* in der Ebene gleichgiltig ist, so folgt, dafs Alles, was für den Punkt *u* bewiesen ist, auch für jeden andern Punkt der Ebene gilt, und daher läfst sich die so eben entwickelte Gleichung IV in Verbindung mit III als Gesetz so ausdrücken:

> Sind mehre Kräfte, die auf ein Massenelement wirken, und deren Richtungslinien in derselben Ebene liegen, im Gleichgewicht, und man denkt in der Ebene einen beliebigen Punkt, so ist sowohl die Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man jeden Druck mit der Projektion des Abstandes jenes Punktes von dem Massenelement auf die Richtungslinie des Druckes multiplizirt, als auch die Summe der statischen Momente in Bezug auf jenen Punkt, gleich Null.

Da zur Erfüllung des Gleichgewichts sowohl die Gleichung I als auch II Statt finden mufs, da ferner die Gleichung III von I, die Gleichung IV von II abgeleitet wurde, so folgt umgekehrt:

> Wenn mehre, auf ein Massenelement wirkende Kräfte, deren Richtungslinien in derselben Ebene liegen, im Gleichgewicht sein sollen, und man nimmt in der Ebene einen beliebigen Punkt an, so mufs sowohl die Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man jeden einzelnen Druck mit der Projektion des Abstandes jenes Punktes von dem Massenelement auf die Richtungslinie des Drucks multiplizirt, als auch die Summe der statischen Momente der Drucke in Bezug auf diesen Punkt gleich Null sein.

Hat man es mit Kräften zu thun, deren Richtungslinien in verschiedenen Ebenen liegen, und man will die Bedingungen des Gleichgewichts untersuchen, so kann man aufser den in § 48. S. 57 angeführten Gesetzen auch noch folgendes Verfahren befolgen: Man zerlegt jede einzelne Kraft in zwei andere, von denen eine in eine bestimmt angenommene, durch das Massenelement gehende Ebene fällt, die andere in einer Richtung normal zu dieser Ebene liegt. Nun wendet man für das Gleichgewicht in der Ebene die eben aufgestellten Gesetze an, und untersucht, ob aufserdem noch entweder die Summe der Drucke in der zur Ebene normalen Richtung gleich Null ist, oder aber ob in Beziehung auf diese Richtung die Gesetze S. 48. No. 1 oder 2 erfüllt werden, indem man entweder einen Punkt in der normalen Richtung annimmt und seinen Abstand auf die Richtung jeder Kraft projicirt, oder indem man zu der angenommenen Ebene eine Parallelebene denkt, und die reellen Wege der einzelnen Drucke in Bezug auf diese Ebene untersucht etc.

Anwendung des Prinzips der statischen Momente auf Kräfte, die nicht im Gleichgewicht sind.

§ 51. Wirken mehre Kräfte, deren Richtungslinien in derselben Ebene liegen, auf ein Massenelement, und die Kräfte sind nicht im Gleichgewicht, so wird nach § 35. No. 1 Gleichgewicht hergestellt sein, wenn wir eine neue Kraft auf das Massenelement einwirken lassen, welche der Resultirenden gleich und entgegengesetzt ist. Sobald diese Kraft einwirkt, gelten die Gesetze des vorigen Paragraphen. Ist der resultirende Druck dK und der Hebelsarm in Bezug auf einen angenommenen Punkt r, so würde also folgen:

$$\Sigma(dK'r') - dK \,.\, r = 0.$$

$$90)\quad dK \,.\, r = \Sigma(dK'r').$$

Das Prinzip der statischen Momente gilt also auch für den Fall, dafs die Kräfte nicht im Gleichgewicht sind, nimmt aber dann die Form an:

> Wirken beliebig viele Kräfte, deren Richtungslinien in ein und derselben Ebene liegen, auf ein Massenelement, so ist in jedem Augenblick das statische Moment der Mittelkraft in Bezug auf einen Punkt in der Ebene der Kräfte gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte in Bezug auf denselben Punkt.

Liegt der angenommene Punkt in der Richtung der Resultirenden, so ist offenbar der Hebelsarm der Resultirenden in Bezug auf diesen Punkt gleich Null, und es folgt daher der Satz:

Sind mehre Kräfte, die auf ein Massenelement wirken, und deren Richtungslinien in derselben Ebene liegen, **nicht** im Gleichgewicht, so ist dennoch die Summe der statischen Momente in Bezug auf jeden Punkt in der Richtung der Resultirenden gleich Null.

Prinzip der konstanten Leistungen für parallele Ebenen.

§ 52. Denken wir, es wirken beliebig viele Kräfte auf ein Massenelement, und dasselbe bewege sich unter dem Einflufs derselben in einer gewissen Kurve; zerlegen wir nun sowohl die Drucke, als die Wegelemente nach drei zu einander normalen Axen, so ist das Leistungselement in irgend einem Augenblick in der Richtung der ersten Axe:

$$dK_{,}\, ds_{,} = \Sigma(dK' \cos \alpha_{,}) \,.\, \Sigma(ds' \cos \alpha_{,}),$$

in der Richtung der zweiten Axe:

$$dK_{,,}\, ds_{,,} = \Sigma(dK' \,.\, \cos \beta_{,}) \,.\, \Sigma(ds' \,.\, \cos \beta_{,}),$$

in der Richtung der dritten Axe:

$$dK_{,,,}\, ds_{,,,} = \Sigma(dK' \,.\, \cos \gamma_{,}) \,.\, \Sigma(ds' \,.\, \cos \gamma_{,}),$$

und das Leistungselement der Mittelkraft (§ 32. S. 36):

$$dK.ds = dK_{,}\, ds_{,} + dK_{,,}\, ds_{,,} + dK_{,,,} \,.\, ds_{,,,} = \Sigma(dK' \,.\, \cos \alpha_{,}) \,.\, \Sigma(ds' \cos \alpha_{,})$$
$$+ \Sigma(dK' \cos \beta_{,}) \,.\, \Sigma(ds' \,.\, \cos \beta_{,}) + \Sigma(dK' \,.\, \cos \gamma_{,}) \,.\, \Sigma(ds' \,.\, \cos \gamma_{,}).$$

Ist nun für irgend eine Zeitdauer der Druck in der Richtung einer der drei Axen konstant, so ist (S. 27. *Gleichung* 48) für diese Zeit die Leistung in dieser Richtung gleich dem Produkt aus dem konstanten Druck in den Weg, welchen derselbe in dieser Zeit zurückgelegt hat. Wenn also z. B. der resultirende Druck für die erste Axe während einer bestimmten Zeitdauer konstant ist, so ist die Kräftesnmme (§ 32. S. 36) für diese Richtung in der genannten Zeitdauer gleich $(dK_{,} \,.\, s_{,})$; die Drucke in der Richtung der beiden andern Axen mögen dabei während dieser Zeitdauer konstant oder beliebig veränderlich sein. Die Form der Bahn des Massenelements ist aber nach § 38 und 39 von der Beschaffenheit der Kräftesummen für alle drei Axen abhängig. Diese Form der Bahn kann, wenn die Kräftesumme nach der Richtung der einen Axe eine konstante ist, sowohl eine gerade Linie sein, wenn auch die Kräftesummen für die beiden andern Axen konstant sind (§ 38) als auch irgend eine Kurve bilden (§ 39). Wie sie aber auch beschaffen sein mag, die Arbeit in der Richtung der konstant wirkenden Kräftesumme wird sich immer ausdrücken durch $(dK_{,} . s_{,})$, wenn $dK_{,}$ der konstante Druck, $s_{,}$ der Weg dieses Druckes ist. Nun ist aber der Weg $s_{,}$, den das Massenelement von irgend einer Lage aus bis zu irgend einer andern Lage in der Richtung einer bestimmten Axe durchläuft, nichts anderes, als der Zuwachs der Ordinate des Weges nach der Richtung dieser Axe für die Zeit, in welcher das Massenelement aus der ersten Lage in die zweite übergeht. Der Werth dieses Ordinaten-Zuwachses aber wird dargestellt durch den normalen Abstand der beiden Ebenen, welche man durch das Massenelement in seiner ersten und in seiner spätern Lage normal zu der Axe denken kann. Hierin nun liegt der Satz:

> Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einfluſs einer beliebigen Menge von Kräften in irgend welcher Kurve, und es ist für irgend eine Richtung der Druck für eine gewisse Zeit konstant, so ist die Leistung der Kräftesumme für *diese Richtung, indem das Massenelement aus einer Ebene, die normal zu der Richtung ist*, in eine andere, ebenfalls zu der Richtung normale Ebene übergeht, immer dieselbe und wird durch das Produkt aus dem konstanten Druck in den normalen Abstand der beiden Ebenen gemessen, gleichviel wie die Kurve beschaffen sein mag, welche das Massenelement bei dieser Bewegung beschreibt. Es ist folglich auch der Gewinn an lebendiger Kraft, und mithin auch der Zuwachs an Geschwindigkeit derselbe. (§ 21. S. 26 und § 22. S. 27.)

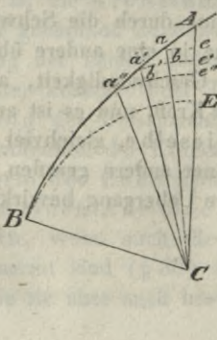
Dieses Gesetz findet besonders Anwendung für alle die Fälle, wo nach der Richtung der Vertikalen die Schwere die einzige wirkende Kraft ist. Ein Körper, welcher nur durch die Schwerkraft getrieben aus einer horizontalen Ebene in eine andere übergeht, erlangt immer denselben Zuwachs an Geschwindigkeit, also auch immer denselben Gewinn an lebendiger Kraft, und es ist auch die auf ihn wirkende Kraftrichtung immer dieselbe, gleichviel ob er in der vertikalen Linie oder in irgend einer andern geraden Linie (geneigte Ebene) oder in einer Kurve den Uebergang bewirke.

Prinzip der konstanten Leistungen, wenn der konstante Druck stets durch denselben Punkt geht.

§ 53. Der Satz des vorigen Paragraphen läfst sich noch auf eine allgemeinere Form bringen, und gewinnt dann folgende Gestalt:

Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einflufs mehrer Kräfte in einer Kurve, und es existirt ein Punkt, für welchen der resultirende Druck (§ 46. S. 54) konstant ist, so ist auch die Leistung, der Gewinn an lebendiger Kraft und die Geschwindigkeits-Aenderung konstant, welche für das Massenelement Statt finden, indem dasselbe seine Entfernung von jenem Punkte um ein bestimmtes Stück ändert, und zwar drückt sich immer die Leistung für eine bestimmte Zeit aus durch das Produkt aus dem konstanten Druck in die Differenz der Entfernung von jenem Punkt, welche das Massenelement am Anfange und am Ende der Zeit besitzt: die Kurve, welche während dieser Zeit durchlaufen wird, mag eine beliebige Form haben.

Denn es bewege sich das Massenelement in der Kurve AB so, dafs der resultirende Druck für den Punkt C konstant $= dK$ ist, nehmen wir auf der Kurve AB unendlich kleine Wegstücken an, Aa, aa', $a'a''$.... und beschreiben aus C mit den Abständen aC, $a'C$.... BC Kugelflächen, welche AC in den Punkten e, e', e''...E schneiden, so ist für ein unendlich kleines Wegstück Aa das Kugelelement ae als eben, Ae aber als normal zu dieser Ebene, und der konstante Druck dK als parallel mit AC wirkend anzusehen, das Leistungselement, welches auf das Massenelement wirkt, indem dasselbe von A nach a sich bewegt, drückt sich also nach dem vorigen Satze aus durch $dK.Ae$, welche Gestalt auch immer das Kurvenelement Aa haben mag. Ebenso läfst sich zeigen, dafs das Leistungselement für die Bewegung von a nach a' gleich $dK.ab$ $= dK.ee'$ etc. ist; es ist folglich die Leistung der stets durch den Punkt C gehenden konstant wirkenden Kraft, indem das Massenelement sich von A



nach B bewegt, gleich: $\Sigma(dK.Ae')$ und da dK für alle Elemente konstant ist, auch gleich:

$$dK.\Sigma(Ae) = dK.AE = dK(AC - CE) = dK.(AC - BC),$$

das ist, was zu beweisen war.

Dieser Fall kommt auf den des vorigen Paragraphen zurück, wenn man annimmt, dafs der Punkt C unendlich weit entfernt liegt, die Richtungen nach C also alle als parallel angesehen werden können.

Geht die Richtung einer Kraft stets durch einen bestimmten Punkt, so pflegt man diesen Punkt den Mittelpunkt der Kraft zu nennen.

Bewegung eines Massenelements durch Gleichgewichtslagen. — Stabiles, labiles Gleichgewicht.

§ 54. Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einflufs beliebiger Kräfte in einer gewissen Kurve, so setzt dies immer voraus, dafs die Kräfte nicht in allen aufeinander folgenden Lagen des Massenelements im Gleichgewicht sind, denn wäre dies der Fall, so müfste (§ 38) die Bahn eine gerade Linie sein.

Wenn jedoch bei der Bewegung eines Massenelements in einer Kurve die Kräfte in irgend einem Punkte durch eine Gleichgewichtslage gehen, d. h. wenn für irgend einen Punkt die resultirende Leistung aus sämmtlichen Kräften Null wird, so ist in diesem Punkte die Geschwindigkeit des Massenelements ein Maximum oder ein Minimum.

Denn, zerlegen wir die Leistung sämmtlicher Kräfte nach drei zu einander normalen Richtungen, so ist nach Gleichung 54) S. 32 in jedem Augenblick:

$$dm.c\,dc = dm\,c_{,}\,dc_{,} + dm\,c_{,,}\,dc_{,,} + dm\,c_{,,,}\,dc_{,,,},$$

wenn c die resultirende Geschwindigkeit, $c_{,}$, $c_{,,}$, $c_{,,,}$ die Geschwindigkeiten nach der Richtung der drei Axen bezeichnen. Nun ist offenbar die resultirende Geschwindigkeit (c), mit welcher sich das Massenelement bewegt, in dem Augenblick ein Maximum oder Minimum, wo ihr Differenzial dc gleich Null wird, d. h. wenn die Gleichung erfüllt wird:

$$dc = \frac{dm\,c_{,}\,dc_{,} + dm\,c_{,,}\,dc_{,,} + dm\,c_{,,,}\,dc_{,,,}}{dm\,c} = 0,$$

oder:

$$dm\,c_{,}dc_{,} + dm\,c_{,,}dc_{,,} + dm\,c_{,,,}\,dc_{,,,} = 0.$$

Diese Gleichung zeigt aber an, dafs, wenn $dc = 0$ sein soll, d. h. wenn die Geschwindigkeit des Massenelements ein Maximum oder ein Minimum sein soll, die resultirende Leistung sämmtlicher Kräfte gleich Null sein müsse, d. h. dafs die Kräfte für diesen Augenblick im Gleichgewicht sein müssen.

Die Geschwindigkeit ist ein Maximum, wenn die zweite Ableitung negativ ist, sie ist ein Minimum, wenn die zweite Ableitung positiv ist. Wenn nun von der Gleichgewichtslage aus die Kräfte dem Massenelement einen negativen Geschwindigkeitszuwachs ertheilen, d. h. wenn sie das Bestreben haben, das Massenelement an der Entfernung aus der Gleichgewichtslage zu hindern, oder, was dasselbe sagt, wenn sie in solchem Sinne wirken, dafs sie das Massenelement, so bald es sich aus der Gleichgewichtslage entfernt, wieder in dieselbe zurückzuführen streben, so nennt man eine solche Gleichgewichtslage eine stabile. Wenn dagegen von der Gleichgewichtslage ab die Kräfte dem Massenelement einen positiven Geschwindigkeitszuwachs ertheilen, d. h. wenn sie das Bestreben äufsern, das Massenelement, sobald es einmal die Gleichgewichtslage verlassen hat, nicht wieder in dieselbe zurückzuführen, so sagt man, die Gleichgewichtslage sei nicht stabil, auch wohl, es sei eine labile Gleichgewichtslage. Dieser Darstellung gemäfs läfst sich folgender Satz aufstellen:

> Wenn ein Massenelement sich unter dem Einflufs beliebiger Kräfte in einer Kurve bewegt, und die Kräfte erlangen für irgend einen Punkt der Kurve eine Gleichgewichtslage, so ist die Geschwindigkeit des Massenelements ein Maximum, wenn die Gleichgewichtslage eine stabile ist, dagegen ein Minimum, wenn die Gleichgewichtslage eine labile ist.

Bestimmung des stabilen und labilen Gleichgewichts.

§ 55. Betrachten wir nun wiederum den Fall, welcher in § 53 vorausgesetzt wurde. Denken wir, das Massenelement bewege sich in einer Kurve, und für einen bestimmten Punkt sei der resultirende Druck ein konstanter; ziehen wir von diesem Punkte Normalen an die Kurve, so wird in den Durchschnittspunkten dieser Normalen mit der Kurve diese letzte entweder einen gröfsten oder kleinsten Abstand von dem Punkte haben. Das Massenelement wird also, nachdem es einen solchen Durchschnittspunkt passirt hat, seinen Abstand von dem Mittelpunkt der Kraft im entgegengesetzten Sinne zu ändern beginnen, als vor dem Durchgange durch denselben; und zwar so, dafs wenn es einen nächsten Durchschnittspunkt passirt, von da an die Entfernungen vom Mittelpunkt der Kraft wachsen, und wenn es einen entferntesten Durchschnittspunkt passirt, die Abstände vom Mittelpunkt der Kraft von da ab sich verringern. Hat nun die Kraft das Bestreben, das Massenelement dem Mittelpunkt der Kraft konstant zu nähern (Anziehungskraft), so wird der Geschwindigkeitszuwachs vor einem nächsten Punkt, wo sich das Massenelement dem Mittelpunkt der Kraft nähert, sich also im Sinne der Kraft bewegt, positiv; hinter demselben, wo sich also das Massenelement im entgegengesetzten Sinne der Kraft bewegt, negativ; dagegen wird in analoger Weise der Geschwindigkeitszuwachs vor einem entferntesten Punkt negativ, hinter demselben positiv; es wird also für eine Anziehungskraft in einem nächsten Punkte ein Maximum der Geschwindigkeit, in einem entferntesten Punkte ein Minimum der Geschwindigkeit stattfinden, und es *stellt daher für eine solche Kraft ein* nächster *Punkt* immer eine stabile Gleichgewichtslage, ein entferntester Punkt immer eine labile Gleichgewichtslage dar. Hat dagegen die Kraft das Bestreben, das Massenelement konstant von dem Mittelpunkt der Kraft zu entfernen (Abstofsungskraft), so finden genau die entgegengesetzten Verhältnisse statt.

Es ist natürlich hierbei vorausgesetzt, dafs die Richtung, in welcher die Kraft wirksam ist, als positiv angesehen wird.

Legen wir durch die Durchschnittspunkte der Normalen mit der Kurve Ebenen, welche normal zu jenen Normalen sind, so sind dies Berührungsebenen zur Kurve. Liegt nun der Mittelpunkt der Kraft so entfernt, dafs man alle von der Kurve nach demselben gezogenen Linien als *parallel* ansehen kann (der Fall des § 52), so werden auch diese Berührungsebenen alle normal zu der Kraftrichtung, und unter sich parallel sein.

Die obigen Gesetze lassen sich nun leicht auch auf den Fall übertragen, wo die konstante Kraft immer parallel mit einer bestimmten, geraden Linie bleibt (§ 52). Hier wird für jede Berührungsebene, welche zur Kraftrichtung normal ist, die Geschwindigkeit des Massenelements ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem diese Ebene einem nächsten oder einem entferntesten Berührungspunkt entspricht.

Schwingende Bewegung. Gesetz für die Schwingung durch eine stabile Gleichgewichtslage.

§ 56. Denken wir, ein Massenelement bewege sich auf einer Kurve unter dem Einflufs einer konstant wirkenden Anziehungs- oder Abstofsungskraft; es habe seine Bewegung in irgend einem Punkte der Kurve mit Null-Geschwindigkeit begonnen, während es in diesem Punkte den Abstand a' vom Mittelpunkt der Kraft besafs, und habe sich bis zu einem Punkte, welcher einer stabilen Gleichgewichtslage entspricht und den Abstand a von dem Mittelpunkt der Kraft hat, bewegt. Die Leistung der Kraft auf das Massenelement ist in diesem Augenblick geworden nach § 53 (Gleichung 48. S. 27):

$$dK.(a'-a) = \tfrac{1}{2} dm \,.\, c^2,$$

in sofern $a'-a$ die Abstandsänderung, welche das Massenelement unter der Einwirkung der Kraft vom Zustand der Ruhe aus und c die Endgeschwindigkeit bedeutet, welche das Massenelement im Punkt a erlangt hat. Mit dieser erlangten Geschwindigkeit passirt das Massenelement die stabile *Gleichgewichtslage, und von nun an wird* der Geschwindigkeitszuwachs in der Richtung nach dem Mittelpunkt der Kraft konstant negativ, d. h. es nimmt die Geschwindigkeit, mit welcher das Massenelement sich dem Sinne der Kraft entgegen bewegt, fortwährend ab, bis sie endlich Null wird. Dieser Augenblick tritt ein, wenn die Summe der dem Massenelement in den einzelnen Zeitelementen entzogenen Geschwindigkeiten wieder c geworden ist, oder wenn die auf das Massenelement nun verzögernd einwirkende Kraft eine Leistung gleich $-\tfrac{1}{2} dm \,.\, c^2$ erzeugt hat. Da aber

$$\tfrac{1}{2} dm \,.\, c^2 = (a'-a) \,.\, dK$$

ist, so folgt:

$$-\tfrac{1}{2} dmc^2 = -(a'-a) \,.\, dK,$$

d. h. die, dem Massenelement bei seiner, dem *Sinne der* Kraft entgegengesetzten Bewegung entzogene lebendige Kraft ist gleich derjenigen geworden, welche die Kraft dem Massenelement bei seiner Bewegung im Sinne der Kraft ertheilt hat, sobald die Abstandsänderung $(a'-a)$ von dem Mittelpunkt der Kraft gleich aber entgegengesetzt derjenigen Abstandsänderung geworden ist, welche das Massenelement bei seiner Bewegung im Sinne der Kraft erlangt hat. Das Massenelement erlangt also auf der andern Seite der stabilen Gleichgewichtslage denselben Abstand von dem Mittelpunkt der Kraft, welchen es bei dem Beginn der Bewegung nach der Gleichgewichtslage hin besessen hatte. Sobald es diesen Abstand erlangt hat, ist seine *Geschwindigkeit* wieder Null geworden; die konstant wirkende Kraft bewegt nun, falls dieser Augenblick nicht einer Gleichgewichtslage entspricht, das Massenelement wieder in ihrem Sinne nach der Gleichgewichtslage hin, und dasselbe passirt diese Lage wiederum nach der entgegengesetzten Seite hin, bis es wieder mit Null-Geschwindigkeit in seiner ursprünglichen Lage angekommen ist. Nun wiederholt sich das Spiel von Neuem. Endlich läfst sich noch ganz allgemein zeigen, dafs bei der Bewegung von der Ruhe nach dem Punkt des stabilen Gleichgewichts hin einerseits, und bei der Entfernung von diesem Punkt andrerseits, in gleichen Abständen vom Mittelpunkt der Kraft gleich grofse Geschwindigkeiten Statt finden müssen.

Denn es sei c die Geschwindigkeit, welche das Massenelement erreicht hat, indem sein Abstand vom Mittelpunkt der Kraft gleich x geworden, und zwar während es sich von dem Zustand der Ruhe, oder von dem Abstand a' aus nach dem Mittelpunkt der Kraft hin bewegt, es sei ferner f das Aenderungsmaafs der Kraft, so ist offenbar die gewonnene lebendige Kraft:

$$\tfrac{1}{2} dm \,.\, c^2 = dK \,.\, (a' - x) = dm \,.\, f(a' - x),$$

folglich:

$$c = \sqrt{[2f(a' - x)]}.$$

Indem das Massenelement den Punkt des stabilen Gleichgewichts erreicht, ist die Arbeit der konstant wirkenden Kraft gleich $dK(a' - a)$ geworden, und wenn es sich bis zum Abstande x wieder von der Gleichgewichtslage entfernt hat, so ist demselben die Arbeit $dK(a - x)$ ertheilt, folglich besitzt es die Arbeit:

$$dK(a' - a) + dK(a - x) = dK(a' - x);$$

ist nun in diesem Augenblick seine Geschwindigkeit c' geworden, so hat man:

$$\tfrac{1}{2} dm \,.\, c'^2 = dK \,.\, (a' - x) = \tfrac{1}{2} dmf(a' - x)$$

$$c' = \sqrt{[2f \,.\, (a' - x)]},$$

folglich:

$$c' = c.$$

Aus dieser Darstellung folgt folgendes Gesetz:

Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einflufs beliebiger Kräfte in einer Kurve, so, dafs für einen bestimmten Punkt die resultirende Kraft eine konstant wirkende ist, und fängt die Bewegung in der Kurve mit Null-Geschwindigkeit an, so wird das Massenelement, falls es bei seiner Bewegung eine stabile Gleichgewichtslage durchläuft, auf der andern Seite dieser Lage eine ebenso grofse Entfernung von dem Mittelpunkt der Kraft erlangen, als es bei dem Beginn der Bewegung hatte, dann für einen Augenblick zur Ruhe kommen, sich hierauf, wieder mit Null-Geschwindigkeit beginnend, rückwärts in seine ursprüngliche Lage zurückbewegen, und diese hin- und hergehende Bewegung ununterbrochen fortsetzen. Bei dieser Bewegung hat das Massenelement zu beiden Seiten der stabilen Gleichgewichtslage in gleichen Abständen vom Mittelpunkt der Kraft gleiche Geschwindigkeiten.

Diese Gesetze lassen sich leicht für den Fall verstehen, wo der Mittelpunkt der Kraft unendlich weit entfernt liegt.

Eine solche hin- und hergehende Bewegung eines Massenelements nennen wir eine schwingende Bewegung. Die Bewegung von dem Zustand der Ruhe aus durch die stabile Gleichgewichtslage bis wiederum zum Zustand der Ruhe hin, nennen wir eine Schwingung. Die Schwingungen wiederholen sich hiernach ununterbrochen, so lange die Resultirende für den Mittelpunkt der Kraft konstant wirkend bleibt. Diese Voraussetzung trifft jedoch bei den in der Praxis vorkommenden Fällen nur sehr selten zu.

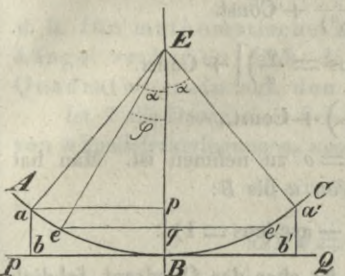
Mathematisches Pendel — Pendelschwingung im Kreisbogen.

§ 57. Ein Massenelement, welches unter dem Einflufs der Schwerkraft in irgend einer Kurve schwingt, so dafs es bei dieser Schwingung eine stabile Gleichgewichtslage durchläuft, nennt man ein mathematisches Pendel. Ist diese Kurve ein Kreisbogen, so nennt man das Pendel ein Kreispendel.

Es schwinge ein Massenelement unter dem Einflufs der Schwerkraft in dem Kreisbogen ABC. Ist EB die Richtung der Schwere, so erhalten wir die Lage des stabilen Gleichgewichts, wenn wir die Berührungsebene des Kreisbogens denken, welche normal zu EB ist, und zwischen dem Kreisbogen und dem Mittelpunkt der Kraft liegt. Der Berührungspunkt dieser Ebene B ist der Punkt des stabilen Gleichgewichts (§ 55). Fängt die Bewegung des Massenelements in a an, wo der Abstand von der Ebene gleich ab ist, so mufs, nach § 56, das Massenelement, nachdem es den Punkt B passirt hat, sich so weit erheben, dafs der Abstand $a'b'$ gleich ab wird; d. h. es wird der Winkel aEB gleich BEa' sein müssen.

Den Winkel $aEB = BEa'$ nennen wir den Erhebungswinkel, bezeichnen wir denselben mit α. Hat sich das Massenelement unter dem Einfluſs der Schwere von a, mit Null-Geschwindigkeit anfangend, bis nach einem beliebigen Punkte e bewegt, und legen wir durch a und e die beiden Ebenen ap und eq normal zu EB, so ist die Geschwindigkeit, mit welcher das Massenelement in e ankommt, dieselbe, welche es erlangt haben würde, indem es von p nach q frei gefallen wäre (§ 52), folglich:

$$c = \sqrt{(2g.pq)}$$
$$= \sqrt{[2gr(\cos\varphi - \cos\alpha)]},$$



wenn wir mit r den Halbmesser des Kreisbogens, mit φ den Winkel eEB, um welchen das Massenelement nun noch von der Gleichgewichtslage entfernt ist, bezeichnen. Ist in diesem Augenblick ds das Wegelement, so ist auch, wenn wir die Geschwindigkeit für die Dauer eines Zeitelements als konstant ansehen:

$$c = \frac{ds}{dt},$$

es ist aber jedenfalls:

$$ds = -d\varphi \, . \, r,$$

da das Wegelement ds wächst, wenn das Element des veränderlichen Winkels φ abnimmt, folglich:

$$c = \frac{-r\,.\,d\varphi}{dt} = \sqrt{[2g(\cos\varphi - \cos\alpha)\,.\,r]}$$

$$dt = -\sqrt{\left(\frac{r}{2g}\right)} \, . \, \frac{d\varphi}{\sqrt{(\cos\varphi - \cos\alpha)}}.$$

Die Zeit, welche das Massenelement braucht, um von a nach B zu gelangen, wird sich finden, indem wir diesen Ausdruck integriren, und das Integral zwischen den Grenzen $\varphi = \alpha$ und $\varphi = o$ nehmen. Allein das Integral von $\frac{d\varphi}{\sqrt{(\cos\varphi - \cos\alpha)}}$ läſst sich nicht in geschlossener Form erhalten. Wir können es aber für hinreichend kleine Winkel ermitteln, indem wir, mit Vernachlässigung der vierten Potenzen, von φ und α setzen:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}; \quad \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\sqrt{(\cos\varphi - \cos\alpha)} = \sqrt{\frac{(\alpha^2 - \varphi^2)}{2}},$$

folglich für kleine Erhebungswinkel:

$$dt = -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{(\alpha^2 - \varphi^2)}}$$

$$t = -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\alpha^2 - \varphi^2)}} + \text{Const.}$$

$$= -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \left[-\text{arc}\left(\cos = \frac{\varphi}{\alpha}\right)\right] + \text{Const.}$$

$$= \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \text{arc}\left(\cos = \frac{\varphi}{\alpha}\right) + \text{Const.},$$

welches Integral von $\varphi = \alpha$ bis $\varphi = o$ zu nehmen ist. Man hat sodann für die Zeit der Bewegung von a bis B:

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \left[\text{arc}\,(\cos = 0) - \text{arc}\,(\cos = 1)\right].$$

Der Bogen, dessen $\cos = 0$ ist, ist aber der Quadrant, folglich $\text{arc}\,(\cos = 0) = \frac{1}{2}\pi$, und der Bogen, dessen $\cos = 1$ ist, ist Null, folglich ist $t = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$.

Indem nun das Massenelement von dem Punkt B aus seine Bewegung nach C hin fortsetzt, verliert es allmählich die Geschwindigkeit, welche im Punkt B das Maximum erreicht hatte. In dem Punkt e', welcher in derselben Horizontalen mit dem Punkt e liegt, wird nach § 56 die Geschwindigkeit wieder gleich derjenigen im Punkte e geworden sein, und man hat:

$$c = \sqrt{[2g\,(\cos\varphi - \cos\alpha)\,.\,r]},$$

es ist aber auch hier $ds = -d\varphi\,.\,r$ und $c = -\frac{d\varphi\,.\,r}{dt}$, folglich hat man auch für diesen Theil der Schwingung:

$$dt = \frac{-d\varphi\,.\,r}{\sqrt{[2g\,.\,(\cos\varphi - \cos\alpha)\,.\,r]}},$$

und es mufs sich die Zeitdauer, welche das Massenelement braucht, um von B nach dem Punkt der Ruhe a' zu gelangen, genau in derselben Weise, wie vorhin, finden.

Nennen wir T die Zeit einer ganzen Pendelschwingung, so ist:

$$90)\quad T = 2t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}} = 0{,}5620\sqrt{r}.$$

Man sieht, dafs in diesem Ausdruck der Erhebungswinkel α nicht vorkommt; es ist also die Zeitdauer einer Pendelschwingung unabhängig vom Erhebungswinkel, so lange derselbe so klein ist, dafs man die oben gemachte Substitution für $\cos\alpha$ gelten lassen kann.

Den Radius des Kreisbogens r nennt man die Länge des Pendels. Für eine Länge r' ist die Dauer der Schwingung:

$$T' = \pi \sqrt{\frac{r'}{g}},$$

folglich:

$$91)\quad T : T' = \sqrt{r} : \sqrt{r'},$$

d. h. für mathematische Kreispendel von verschiedener Länge verhalten sich die Schwingungszeiten wie die Quadratwurzeln aus den Längen der Pendel.

Ist T die Dauer einer Pendelschwingung, so ist $T.n$ die Dauer von n Pendelschwingungen, nennen wir diese $T_{,}$, so hat man:

$$T_{,} = nT = n\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

$$92)\quad n = \frac{T_{,}}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Für ein Pendel von der Länge r' hat man in derselben Zeit die Anzahl der Pendelschwingungen:

$$n' = \frac{T_{,}}{\pi}\sqrt{\frac{g}{r'}},$$

folglich:

$$92\text{a})\quad n : n' = \sqrt{\frac{1}{r}} : \sqrt{\frac{1}{r'}} = \sqrt{r'} : \sqrt{r},$$

d. h. für mathematische Kreispendel von verschiedenen Längen verhalten sich die Anzahl von Schwingungen in einer gegebenen Zeit **umgekehrt** wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen.

Aus der Formel 90 folgt für $T = 1$:

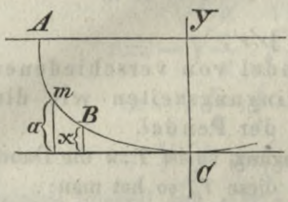
$$r = \frac{g}{\pi^2} = \frac{31{,}25}{9{,}8696} = 3{,}1666 \text{ Fuſs.}$$

Ein Pendel, dessen Schwingungsdauer eine Sekunde beträgt, nennt man ein Sekundenpendel. Hiernach ist die Länge eines mathematischen Sekundenpendels:

$$3{,}1667 \text{ Fuſs} = 38 \text{ Zoll preuſsisch,}$$
$$= 0{,}9938 \text{ Mètres.}$$

Pendelschwingung in einer beliebigen Kurve — Cykloïdenpendel — Tautochrone — Brachystochrone.

§ 58. Es sei allgemein (Fig. auf folg. Seite) ABC eine beliebige Kurve, in welcher ein Massenelement sich unter dem Einfluſs der Schwerkraft bewegt. C sei ein Punkt des stabilen Gleichgewichts, und zugleich der Anfangspunkt des Koordinatensystems, dessen eine Axe cy mit der Richtung der Schwere zusammenfällt, also in dem Punkte C normal zur Kurve ist, während die beiden andern Axen in einer horizontalen, die Kurve C berührenden Ebene liegen. Ist a der Abstand des Punktes, in welchem das Massenelement seine Bewegung von der Ruhe aus beginnt, so ist die erlangte Geschwindigkeit in dem Augenblick, wo es den Punkt B erreicht hat, dessen Abstand von der Horizontalen gleich x ist:



$$c = \sqrt{[2g(a-x)]}$$

Ist ds das Kurvenelement, so ist auch

$$c = \frac{-ds}{dt}$$

folglich

$$dt = \frac{-ds}{\sqrt{[2g(a-x)]}}.$$

Um nun die Zeit zu finden, welche das Massenelement braucht, um von einem Punkte der Kurve bis zu einem andern zu gelangen, mufs man diesen Ausdruck integriren, indem man ds und x von ein und demselben Urvariablen abhängig macht, und dann das Integral zwischen den entsprechenden Grenzen nehmen. Man kann dazu die Gleichung der Kurve benutzen. Ist dieselbe:

$$y = f_x + C$$
$$z = \varphi_x + C',$$

so hat man:

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = dx\sqrt{[1 + (df_x)^2 + (d\varphi_x)^2]},$$

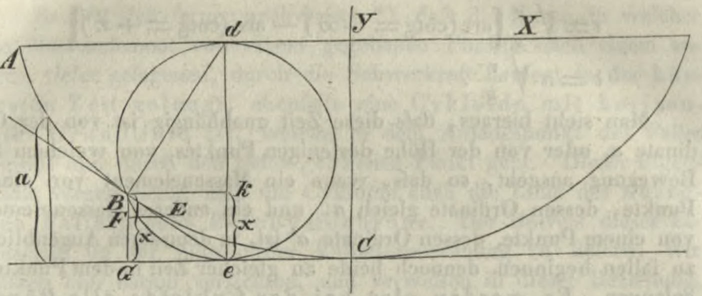
folglich ganz allgemein:

$$93)\quad t = -\frac{1}{\sqrt{2g}}\int\sqrt{\left[\frac{1 + (df_x)^2 + (d\varphi_x)^2}{a-x}\right]}dx + \text{Const.}$$

Gewöhnlich führt diese Methode, wegen des schwierigen Integrals, nur schwer zum Ziele, und man sucht lieber ds aus andern Eigenschaften der Kurve herzuleiten, wie wir es bei dem Kreispendel gethan.

Von den verschiedenen Kurven, in welchen Pendelschwingungen stattfinden können, hat, aufser dem Kreisbogen, noch die Cykloïde ein besonderes Interesse.

Es sei ABC eine Cykloïde, welche durch Abwickelung eines Kreises von dem Halbmesser gleich r auf der horizontalen Linie AX entstanden ist. Der Erzeugungskreis sei bei seiner Abwickelung in die Lage gekommen, in welcher er eben das Kurvenelement BE beschreibt; er berühre dabei die Grundlinie AX in d, und indem er sich auf derselben fortwälzt, macht er zunächst, indem er



das Element BE beschreibt, eine unendlich kleine Drehung um den Punkt d; es ist folglich die Sehne Bd des Erzeugungskreises die Normale für den Punkt B, und daher die hierzu normale Sehne Be Tangente für denselben. Wo die Richtung der Normalen mit der Richtung der Schwere zusammenfällt, ist ein Punkt des stabilen Gleichgewichts (§ 55). Da die Erzeugungslinie horizontal ist, so ist leicht einzusehen, dafs dies der Punkt C sein müsse, welcher zugleich Scheitel der Cykloïde ist. Nun ist:

$$BE = \frac{BF}{\sin(BEF)} = \frac{BF}{\sin(BeG)} = \frac{BF \cdot Be}{BG}.$$

Es ist aber $BE = ds$; $BF = dx$; $BG = x$; $Be = \sqrt{(ed \cdot ek)} = \sqrt{(2r \cdot x)}$, folglich hat man:

$$ds = dx\sqrt{\frac{2r}{x}},$$

setzt man diesen Werth in den oben gefundenen allgemeinen Ausdruck für dt, so hat man:

$$dt = \frac{-ds}{\sqrt{[2g(a-x)]}} = -\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(ax - x^2)}}$$

folglich:

$$t = -\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(ax - x^2)}}$$

$$= -\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \cdot \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{2x - a}{2\sqrt{(ax - x^2)}}\right) {}^{*)}$$

$$= \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \mathrm{arc}\left(\mathrm{cotg} = \frac{2x - a}{2\sqrt{(ax - x^2)}}\right).$$

Nehmen wir dies Integral zwischen den Grenzen $x = a$ bis $x = 0$, so findet man die Zeit, welche das Massenelement braucht, um von der Ruhe aus bis zum Punkt des stabilen Gleichgewichts in der Cykloïde zu fallen:

---

*) Es ist nämlich (Wolffs Zahlenlehre II. Th. § 607. No. 9):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(m + px - qx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{q}} \ \mathrm{arc}\left[\mathrm{tang} = \frac{2qx - p}{2\sqrt{q} \cdot \sqrt{(m + px - qx^2)}}\right].$$

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}}\left[\operatorname{arc}(\cotg = -\infty) - \operatorname{arc}(\cotg = +\infty)\right]$$

$$t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Man sieht hieraus, dafs diese Zeit unabhängig ist von der Ordinate a, oder von der Höhe desjenigen Punktes, von welchem die Bewegung ausgeht, so dafs, wenn ein Massenelement von einem Punkte, dessen Ordinate gleich a, und ein anderes Massenelement von einem Punkte, dessen Ordinate a' ist, in demselben Augenblicke zu fallen beginnen, dennoch beide zu gleicher Zeit in dem Punkte C anlangen. Es werden also bei der Cykloïde alle Bögen, die man von irgend einem Punkte der Kurve bis zum Scheitelpunkte rechnen kann, in gleichen Zeiten durchfallen, und deshalb nennt man die Cykloïde in Bezug auf diese Eigenschaft tautochronische Linie; das Kreispendel ist dagegen nur für kleine Erhebungswinkel annähernd isochron.

Da die Cykloïde zu beiden Seiten der Linie CY symmetrisch ist, so läfst sich, wie beim Kreispendel, zeigen, dafs die Zeit, welche das Massenelement braucht, um von C aus sich wiederum bis zum Abstande a von der Horizontalen zu erheben, ebenfalls gleich t sein müsse. Demnach ist die Dauer einer Schwingung in der Cykloïde:

$$94)\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = \pi\sqrt{\frac{4r}{g}},$$

d. h. die Dauer der Schwingung ist ebenso grofs, wie bei einem isochron schwingenden Kreispendel, dessen Pendellänge gleich dem doppelten Durchmesser des erzeugenden Kreises der Cykloïde ist.

Denken wir die Cykloïde auf einen cylindrischen Körper, dessen Seiten vertikal sind, dessen Grundfläche aber eine ganz beliebige Form haben mag, aufgewickelt, und zwar so, dafs die Grundlinie der Cykloïde in einer horizontalen Ebene bleibt, so entsteht eine Kurve von doppelter Krümmung, welche aber immer noch dieselbe Eigenschaft des Tautochronismus haben mufs, wie die ursprüngliche Cykloïde, denn es ist für diese Kurve in dem Ausdruck:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{[2g(a-x)]}}$$

für denselben Werth von x das Kurvenelement ds von derselben Länge, wie bei der ursprünglichen Cykloïde, es hat also dt denselben Ausdruck, und folglich lassen sich daran dieselben Entwickelungen knüpfen, welche wir eben besprochen haben.

Es läfst sich ferner nachweisen *), dafs die Kurve, in welcher ein Massenelement von einem gegebenen *Punkte* nach einem andern, tiefer gelegenen, durch die Schwerkraft bewegt in der kürzesten Zeit gelangt, ebenfalls eine Cykloïde mit horizontaler Grundlinie ist, welche in dem Anfangspunkt des Falles beginnt und durch den tiefer gelegenen Punkt geht. Dieser Eigenschaft wegen nennt man die Cykloïde auch die Linie des kürzesten Falles, auch Brachystochrone. Der Beweis dieser Eigenschaft ist nur mittelst der Variationsrechnung zu liefern, wir müssen hier darauf verzichten, und verweisen in dieser Beziehung, sowie in Betreff des Beweises, dafs die Cykloïde mit horizontaler Grundlinie die einzige Tautochrone sei, auf das unten genannte Werk von Poisson **).

Allgemeines Gesetz für das Gleichgewicht eines Massenelements auf einer Kurve.

§ 59. **Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einflufs verschiedener Kräfte in einer beliebigen Kurve, und ist die Resultirende aus diesen Kräften in irgend einem Augenblick normal zur Kurve, so sind die Kräfte in diesem Augenblick im Gleichgewicht, und umgekehrt: wenn die Kräfte in irgend einem Augenblick im Gleichgewicht sein sollen, so mufs die Resultirende normal zur Kurve sein.**

Dieser Satz folgt unmittelbar aus der Darstellung in § 55, denn für irgend einen Augenblick läfst sich die Resultirende als konstant wirkend betrachten (§ 33) und für eine konstant wirkende Kraft ist in § 55 nachgewiesen, dafs die Kräfte eine Gleichgewichtslage haben, wenn die Richtung der Resultirenden für einen gewissen Punkt normal zur Kurve ist.

Es sei (Fig. auf folg. Seite) AB eine beliebige ebene Kurve; das Massenelement befinde sich in a, und es wirken auf dasselbe die Drucke ein dG, parallel mit der Axe BX und dF parallel mit der Axe BY. Die Richtung des resultirenden Druckes ist dann zu bestimmen durch Gleichung 59) und mit Rücksicht auf Satz 2 in § 33 durch:

$$\tang \alpha = \frac{dF}{dG},$$

wenn α den Winkel bezeichnet, den der resultirende Druck mit

---

*) Vergl. Traité de Mécanique par S. D. Poisson. T. I. § 285. S. 425.
**) Ebendaselbst. Tom. I. § 283. S. 422.

der Richtung dG macht. Soll nun die Lage a eine Gleichgewichtslage sein, so muſs diese Richtung des resultirenden Druckes normal zur Kurve sein, und für diesen Fall hat man auch:

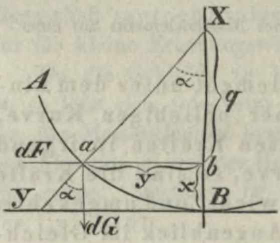
$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{dy}{dx},$$

folglich muſs für die Gleichgewichtslage immer die Gleichung statt finden:

$$95)\quad \frac{dF}{dG} = \frac{dy}{dx}.$$

Gleichgewicht eines Massenelements auf einer rotirenden Kurve.

§ 60. Denken wir nun, daſs dG der Druck der Schwerkraft sei, daſs die Axe BX vertikal sei, daſs die Kurve AB um die Axe BX gedreht werde, und daſs folglich das Massenelement der Einwirkung der Centrifugalkraft unterworfen sei. Da das Massenelement sich bei jener Drehung in einem Kreise bewegt, dessen Halbmesser die Ordinate y ist, so hat man, wenn w die Winkelgeschwindigkeit, und n die Anzahl der Umdrehungen bezeichnet, welche die Kurve in einer bestimmten Zeit $T_{,}$ macht, nach No. 79 und 80:



$$dF = d \cdot \frac{dG}{g} \cdot w^2 \cdot y = \frac{dG}{g} \cdot \frac{4\pi^2}{T_{,}^2} \cdot n^2 g.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung 95), so folgt für die Gleichgewichtslage:

$$\frac{n^2}{g} \cdot \frac{4\pi^2}{T_{,}^2} \cdot y = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \alpha,$$

folglich:

$$n = \frac{T_{,}}{2\pi} \cdot \sqrt{\left(g \cdot \frac{\operatorname{tang} \alpha}{y}\right)}.$$

Nun ist $\frac{y}{\operatorname{tang} \alpha} = Xb$ oder gleich der Subnormalen des Punktes a in Bezug auf die Drehaxe XB. Bezeichnen wir diese Subnormale Xb mit q, so ergiebt sich:

$$96)\quad n = \frac{T_{,}}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{q}}.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit der Gleichung 92), so ergiebt sich die Zahl der Schwingungen n' eines mathematischen Pendels, dessen Pendellänge gleich der Subnormalen ist, in derselben Zeit $T_{\prime}$:

$$n' = \frac{T_{\prime}}{\pi} \sqrt{\frac{g}{q}},$$

folglich doppelt so grofs.

Hierin liegt folgendes Gesetz:

Kann ein Massenelement in einer Kurve, welche in einer vertikalen Ebene liegt, und die sich um eine vertikale Axe dreht unter dem Einflufs der Schwerkraft und der Centrifugalkraft sich bewegen, so ist das Massenelement im Gleichgewicht, sobald die Anzahl der Umdrehungen, welche die Kurve um die Axe in einer gegebenen Zeit macht, halb so grofs ist, als die Zahl der Schwingungen eines mathematischen, isochron schwingenden Kreispendels, dessen Pendellänge gleich ist der, auf der Umdrehungsaxe gemessenen Subnormalen desjenigen Punktes der Kurve, in welchem das Massenelement sich befindet.

Gleichgewicht eines Massenelements auf einer rotirenden Parabel.

§ 61. Aendert sich die Zahl der Umdrehungen, und ist auch die Subnormale veränderlich, so wird das Massenelement sich auf der Kurve fortbewegen so lange, bis wieder die Bedingungs-Gleichung 96) erfüllt wird; es wird also, falls die Kurve die entsprechende Ausdehnung und Gestalt hat, für eine geänderte Anzahl von Umdrehungen endlich in eine neue Lage kommen, in welcher es wiederum im Gleichgewicht ist.

In der Praxis ist jedoch die Bedingung von Wichtigkeit, eine solche Kurve zu bestimmen, auf welcher das Massenelement sich zwar fortbewegt, sobald die Anzahl der Umdrehungen, damit die Centrifugalkraft dF und folglich auch die Richtung der Resultirenden zur Kurve sich ändert, die jedoch so beschaffen ist, dafs das Massenelement bei dieser Fortbewegung niemals auf der Kurve ins Gleichgewicht gelangen kann, wenn nicht die Anzahl der Umdrehungen in einer bestimmten Zeit wieder denselben Werth n erreicht hat, dafs aber, sobald dieser Werth wieder erreicht ist, das Massenelement, wo es sich auch auf der Kurve befinden mag, im Gleichgewicht sei.

Die gesuchte Kurve mufs offenbar die Eigenschaft haben, dafs ihre Subnormale für jeden Punkt konstant sei, denn wenn in der Gleichung:

$$n = \frac{T_{\prime}}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{q}}$$

die Subnormale q konstant ist, so kann die Gleichung nicht anders erfüllt werden, als wenn auch n einen konstanten Werth hat, sobald aber n diesen Werth erreicht, wird die Gleichung erfüllt, wo auch das Massenelement sich auf der Kurve befinden mag.

Bekanntlich ist die Parabel eine Kurve, deren Subnormale für die symmetrische Axe konstant gleich dem halben Parameter ist. Es folgt daher für die gesuchte Parabel die Gleichung:

$$x^2 = 2qy,$$

und wenn man q aus der Gleichung 96) entwickelt und hier einsetzt:

$$x^2 = \frac{T_{\prime}^2 \cdot g}{2\pi^2 \cdot n^2} \cdot y.$$

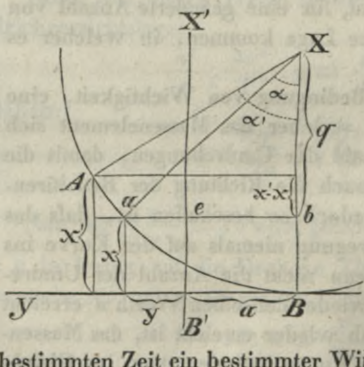
Bezeichnet n die Anzahl der Umdrehungen in einer Minute, so hat man $T_{\prime} = 60$, und nach Ausrechnung der Zahlenwerthe:

$$97) \quad x^2 = 5684{,}115 \cdot \frac{y}{n^2}.$$

Hierdurch ist die Parabel bestimmt; die Rotationsaxe ist die Axe der X.

Gleichgewicht eines Massenelements auf einem rotirenden Kreisbogen.

§ 62. Ist die Kurve AB, in welcher sich das Massenelement bewegen kann, ein Kreisbogen, dessen Halbmesser $= r$ ist, und welcher um seinen Durchmesser rotirt, so drückt sich die Subnormale aus durch:



$$q = r \cdot \cos\alpha,$$

und da r für jeden Punkt konstant ist, so findet man, indem man diesen Werth von q in die Gleichung 96) einsetzt:

$$98) \quad n = \frac{T_{\prime}}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos\alpha}}.$$

Es entspricht daher jeder Anzahl von Umdrehungen in einer bestimmten Zeit ein bestimmter Winkel α, welcher der Erhebungswinkel oder Ausschlagswinkel heifst. Aendert sich die Anzahl der Umdrehungen, so wird auch der Ausschlagswinkel geändert, das Massenelement kann dann bei einer geänderten Umdrehungszahl ins Gleichgewicht kommen, aber nothwendiger Weise in einer andern Lage, und dies bedingt einen wesentlichen Unterschied mit dem eben betrachteten Fall (§ 61), wo sich das Massenelement in einer Parabelbahn bewegte.

Hat der Winkel α zugenommen bis α', so ist die Entfernung des Massenelements von der Horizontalen um

$$x' - x = r(\cos\alpha' - \cos\alpha)$$

gewachsen.

Der hier besprochene Fall setzt voraus, dafs der Mittelpunkt des Kreises, in welchem das Massenelement steigen und fallen kann, in der Rotationsaxe liege. Diese Annahme ist keineswegs nothwendig. Denken wir, es sei $X'B'$ die Rotationsaxe, während XB eine andre vertikale, durch den Mittelpunkt des Kreisbogens AB gehende Axe vorstelle. Der Abstand der Axe $X'B'$ von XB sei a. Für irgend eine Lage des Massenelements in a ist nun die Subnormale auf der neuen Axe:

$$q = ae = r\,.\,\cos\alpha - a\,.\,\operatorname{cotg}\alpha,$$

und folglich:

$$99)\quad n = \frac{T_{\prime}}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r\,.\cos\alpha - a\,.\,\operatorname{cotg}\alpha}}\,.$$

Bei dieser Anordnung ändert sich die Subnormale nicht in demselben Sinne, in welchem der Cosinus des Erhebungswinkels sich ändert. Es ist denkbar, dafs, während sich der Winkel α wachsend bis α' ändert, die Aenderung der Subnormale äufserst gering sein, dafs also für die Lagen des Massenelements in dem Bogen $\alpha' - \alpha$ die Subnormale fast einen konstanten Werth haben könne, und dafs mithin für diese Lagen der Kreisbogen, welcher um eine Sehne rotirt, näherungsweise dieselben Eigenschaften haben könne, welche die Parabel, die um ihre symmetrische Axe rotirt, für alle Lagen des Massenelements hat. Es wird dabei wesentlich auf die Entfernung a der Rotationsaxe von dem Mittelpunkt des Kreisbogens ankommen, und wir wollen, da dieser Gegenstand von praktischer Wichtigkeit ist, untersuchen, welchen Werth a haben müsse, damit für die Lagen des Massenelements in dem Bogen von $\alpha' - \alpha$ die Subnormale nahezu konstant bleibe.

Für den Erhebungswinkel α ist die Subnormale:

$$q = r\,.\,\cos\alpha - a\,.\,\operatorname{cotg}\alpha,$$

und für den Erhebungswinkel α' hat sie den Werth:

$$q' = r\,.\,\cos\alpha' - a\,.\,\operatorname{cotg}\alpha'.$$

Wenn nun die Subnormale für den Ausschlagswinkel α denselben Werth hat, als für α', so kann sie zwar für jeden zwischen α und α' liegenden Winkel einen andern Werth haben, allein sie wird, indem sich der Winkel von α bis α' ändert, sich nur in der Weise ändern können, daſs sie um eben soviel wächst, als sie abnimmt, so daſs also ihr mittler Werth derselbe bleibt. Wir setzen demnach:

$$q = q'; \quad r \,.\, \cos\alpha - a \,.\, \operatorname{cotg}\alpha = r \,.\, \cos\alpha' - a \,.\, \operatorname{cotg}\alpha',$$

folglich:

$$100) \quad a = r \,.\, \frac{\cos\alpha - \cos\alpha'}{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\alpha'}.$$

Z. B. es soll das Massenelement, während es den Bogen von 30 Grad bis 45 Grad durchläuft, nahezu eine konstante Subnormale haben, wie weit muſs die vertikale Sehne, um welche der Kreisbogen rotirt, von dem Durchmesser desselben entfernt sein.

Es ist:

$$a = r \frac{\cos 30^0 - \cos 45^0}{\operatorname{cotg} 30^0 - \operatorname{cotg} 45^0}$$

$$a = 0{,}217\, r.$$

Es ist dann die Subnormale:

$$\begin{aligned} q &= r \,.\, \cos\alpha - a \,.\, \operatorname{cotg}\alpha \\ &= r(\cos\alpha - 0{,}217 \operatorname{cotg}\alpha), \end{aligned}$$

also für:

30^0	$q = 0{,}4901\, r$
32^0	$q = 0{,}5007\, r$
34^0	$q = 0{,}5073\, r$
36^0	$q = 0{,}5103\, r$
$37\frac{1}{2}{}^0$	$q = 0{,}5106\, r$
38^0	$q = 0{,}5103\, r$
40^0	$q = 0{,}5074\, r$
42^0	$q = 0{,}5021\, r$
44^0	$q = 0{,}4946\, r$
45^0	$q = 0{,}4901\, r.$

Die gröſste Differenz der Subnormalen beträgt also nur circa $0{,}02\, r$, und da sich die Umdrehungszahlen umgekehrt verhalten, wie die Quadratwurzeln aus den Subnormalen (No. 96), so wird, während das Massenelement auf diesem Bogen sich befindet, die Zahl der Umdrehungen, bei welchen es im Gleichgewicht ist, höchstens zwischen n und $n\sqrt{\frac{0{,}5106}{0{,}4901}} = 1{,}02\, n$ variiren können.

Es ist übrigens hervorzuheben, daſs diese Betrachtungen nur zulässig sind, wenn a positiv ist, d. h. wenn die Rotationsaxe zwischen dem Mittelpunkt des Kreisbogens und dem Massenelement angenommen wird. Nimmt man sie auf der entgegengesetzten Seite, so ist immer:

$$q = r \,.\, \cos\alpha + a \,.\, \operatorname{cotg}\alpha$$

$$= \cos\alpha\left(r + \frac{a}{\sqrt{(1 - \cos\alpha^2)}}\right);$$

es ändert sich also q in demselben Sinn, wie $\cos\alpha$, und es können daher nie für zwei Winkel von verschiedenen Cos. gleiche Subnormalen statt finden.

c) Wirkung mehrer mechanischen Kräfte auf ein festes System von Massenelementen.

Festes System.

§ 63. Unter einem festen System von Massenelementen verstehen wir zwei oder mehre Massenelemente, welche in fester Verbindung (Th. I. § 3) mit einander stehen, die folglich mit einander so zusammenhängen, daſs sich keines unabhängig von dem andern bewegen kann, und deren Abstand unter einander daher stets unverändert bleibt, wie sich auch der Abstand der einzelnen Elemente von andern, nicht zu dem System gehörigen Punkten ändern mag (§ 12).

Jeder feste Körper stellt hiernach ein festes System von Massenelementen dar, so lange man von der Formänderung, welche er durch äuſsere Kräfte erleiden kann, absieht.

Ein Massenelement, welches sich vollkommen unabhängig von andern Massenelementen bewegen kann, welches also keinem festen System angehört, nennen wir frei.

Innere Kräfte eines festen Systems — Festigkeit.

§ 64. Wirkt eine Kraft auf ein zu einem festen System gehöriges Massenelement, so hat sie im Allgemeinen das Bestreben, den Abstand desselben von den übrigen Elementen des Systems zu ändern; da aber eine solche Aenderung nicht statt finden kann, so lange das System ein festes bleiben soll, so muſs dies Bestreben durch eine Gegenkraft aufgehoben werden. Es muſs also der Druck der äuſserlich auf das Massenelement wirkenden Kraft durch einen Gegendruck, welcher dem ersten der Gröſse nach gleich aber der Richtung nach entgegengesetzt ist, im Gleichgewicht gehalten werden (§ 19). *Diesen Gegendruck* schreiben wir analog der Betrachtung *in* § *36* einer innern Kraft des Systems zu. Wir nennen diese innere Kraft die Festigkeit des Systems.

Unter der Festigkeit eines festen Systems verstehen wir also überhaupt diejenigen Kräfte, welche sich der Aenderung des gegenseitigen Abstandes der einzelnen Elemente des Systems entgegensetzen.

Die Festigkeit eines Systems wird durch jeden äufsern Druck, welcher auf dasselbe wirkt, in Anspruch genommen, sie ist immer als eine diesem Druck gleich grofse, aber in entgegengesetzter Richtung wirkende Reaktion anzusehen, welche in dem Punkte wirksam zu denken ist, in welchem die Richtung des äufsern Druckes das System trifft. Von der *Richtung dieses Druckes* gegen die Elemente des festen Systems, *und von der Lage und der Beschaffenheit* dieser letzten ist es abhängig, in welcher Weise auch die übrigen Punkte des Systems sich an der durch jenen äufsern Druck hervorgerufenen Reaktion betheiligen. Jenachdem diese Betheiligung eine verschiedene ist, *pflegt man* der Festigkeit verschiedene Bezeichnungen beizulegen, als absolute, relative etc. (Vergl. I. S. 193). Sind die äufsern Drucke so grofs, dafs die innern Kräfte des Systems ihnen nicht mehr das Gleichgewicht halten können, so erfolgt eine Aenderung des gegenseitigen Abstandes der einzelnen Elemente, oder mit andern Worten eine Formänderung des Systems. Bei dieser Formänderung nehmen zuweilen die innern Kräfte des Systems zu, und es tritt dann in gewissen Fällen endlich ein Augenblick ein, in welchem sie den äufsern Kräften wiederum das Gleichgewicht halten. Hört die Wirkung der äufsern Kräfte auf, so stellt sich die ursprüngliche gegenseitige Lage der Elemente entweder vollkommen, oder theilweise, oder gar nicht wieder her. Man sagt dann, das System sei vollkommen, unvollkommen elastisch, oder *unelastisch. Sind* die äufsern Kräfte so grofs, dafs die innern Kräfte des Systems ihnen überhaupt nicht das Gleichgewicht halten können, so erfolgt eine Zerstörung des festen Systems, entweder nachdem zuvor eine Formveränderung mit Zunahme der innern Kräfte in der eben besprochenen Weise statt gefundenen hat (zähes System), oder, ohne dafs vorher irgend welche Formveränderung erfolgt ist (sprödes System).

Bei den folgenden Untersuchungen dieses Abschnittes setzen wir immer voraus, dafs wir es mit einem absolut festen System zu thun haben, abstrahiren also ganz von der Möglichkeit einer Formveränderung, oder einer Zerstörung des Systems durch die auf dasselbe wirkenden Kräfte.

Allgemeine Gesetze für die Bewegung eines festen Systems. — Fortschreitende und drehende Bewegung.

§ 65. Bewegt sich ein festes System unter dem Einfluſs beliebiger Kräfte, so haben entweder alle Massenelemente desselben gleiche Geschwindigkeit, oder sie haben verschiedene Geschwindigkeiten, doch stehen in diesem Fall die Geschwindigkeiten in einem bestimmten abhängigen Verhältniſs zu einander; denn, da die Elemente des Systems ihren gegenseitigen Abstand nicht ändern können, so kann das Wegelement eines Massenelementes in einem Zeitelement nicht unabhängig sein von dem Wegelement, welches jedes der anderen Massenelemente in derselben Zeit zurücklegt.

Sind die Geschwindigkeiten aller Massenelemente in einer gewissen Zeit unter sich stets gleich groſs und haben sie auch einerlei Richtung, so schreiten die sämmtlichen Massenelemente in parallelen geraden Linien fort, und umgekehrt. Sind dagegen die Geschwindigkeiten der einzelnen Massenelemente während einer gewissen Zeit nicht gleich groſs, oder sind sie zwar gleich groſs, aber ihre Richtungen sind entgegengesetzt, so bewegen sich sämmtliche Massenelemente in Kurven. Da aber die Massenelemente dabei ihren gegenseitigen Abstand nicht ändern dürfen, so müssen auch die in irgend einem Augenblick von ihnen beschriebenen Kurvenelemente überall denselben Abstand von einander behalten, also entweder äquidistant sein, oder zusammenfallen. Dies ist nicht anders denkbar, als wenn die gleichzeitig durchlaufenen Kurvenelemente sämmtlich aus ein und demselben Punkte beschrieben werden können, wobei jedoch nicht ausgeschlossen bleibt, daſs dieser Punkt in demselben Zeitelement selbst fortrückt. Denn: denken wir uns irgend ein Massenelement des Systems, und es sei der Weg desselben in dem betrachteten Zeitelement irgend ein beliebiges Kurvenelement, denken wir uns sodann den Mittelpunkt des Krümmungskreises dieses Kurvenelements, und nehmen an, dieser Mittelpunkt sei mit dem System fest verbunden, so dürfen die Abstände aller übrigen Massenelemente von diesem fest verbundenen Punkte sich bei der Bewegung nicht ändern. Nun erscheint aber der Mittelpunkt jenes Krümmungskreises für den Augenblick, in welchem jenes zuerst betrachtete Massenelement sein Kurvenelement durchläuft, als fester Punkt, um welchen die Drehung erfolgt, und da alle übrigen Massenelemente in demselben *Augenblick* ihren Abstand von jenem Mittelpunkt nicht *ändern dürfen*, so müssen sie unter allen Umständen in diesem Augenblicke Bogenelemente aus demselben Mittelpunkt beschreiben. Aber die Massenelemente dürfen auch ihren Abstand unter einander nicht ändern. Dazu gehört zweierlei, nämlich:

a) die Bogenelemente, welche die einzelnen Massenelemente bei jener Bewegung beschreiben, müssen entweder in ein und derselben Ebene, oder in parallelen Ebenen liegen, und

b) die Bogenelemente müssen sämmtlich mit derselben Winkelgeschwindigkeit durchlaufen werden. Dies läfst sich leicht einsehen, wenn man beachtet, dafs, falls diese beiden Bedingungen für *irgend ein Element nicht* erfüllt werden, dasselbe *nothwendiger Weise eine Verschiebung gegen* die übrigen erleiden werde.

Denken wir nun die Ebene des Krümmungskreises für das zuerst betrachtete Bahnelement, so müssen alle übrigen Bahnelemente nach der Bedingung a) entweder *in dieser Ebene*, oder *in solchen* Ebenen liegen, welche *mit derselben parallel* sind. Errichten wir im Mittelpunkt des zuerst betrachteten Krümmungskreises eine Normale zu der Ebene desselben, so erscheinen offenbar im Allgemeinen die Wegelemente sämmtlicher Massenelemente als Bögen, welche den Peripherien der Grundflächen von Kegeln angehören, deren gemeinschaftliche Axe die eben betrachtete Normale, deren gemeinschaftliche Spitze der *Mittelpunkt* des zuerst betrachteten Krümmungskreises ist, und deren Grundflächen in jenen *parallelen* Ebenen liegen. Das heifst nichts anders, als es fallen die Wegelemente sämmtlicher Massenelemente mit Kreisbögen zusammen, welche aus den Punkten beschrieben werden, in welchen jene Normale die betreffenden Parallelebenen schneidet. Die Kreise, mit deren Bögen die Wegelemente *zusammenfallen*, sind aber auch die Krümmungskreise der Wegelemente, und es folgt daraus, dafs die Mittelpunkte sämmtlicher Krümmungskreise der einzelnen Wegelemente nicht nur in parallelen Ebenen, sondern auch in ein und derselben geraden Linie liegen müssen, welche normal ist zu jenen parallelen Ebenen. Diese gerade Linie heifst die Drehungsaxe des Systems. Da übrigens das zuerst betrachtete Massenelement ein beliebiges war, so mufs der Mittelpunkt des Krümmungskreises jedes anderen Massenelementes dieselben Eigenschaften haben, und schon hieraus folgt der eben entwickelte Satz, denn nur in dem Fall, wo die Mittelpunkte *sämmtlicher Krümmungskreise in* derselben geraden Linie liegen, lassen sich sämmtliche Wegelemente als Bogenstücke von den Peripherien der Grundflächen normaler Kegel auffassen, deren gemeinschaftliche Axe diese gerade Linie, und deren gemeinschaftliche Spitze ein beliebiger Punkt dieser geraden Linie ist.

Im nächsten Augenblick kann der Punkt, aus welchem wir die sämmtlichen Wegelemente beschrieben dachten, noch derselbe sein, oder er kann seine Lage geändert haben, d. h. jener Punkt kann, während die Massenelemente des Systems um ihn eine Drehung machen, selbst fortrücken. Geschieht dies Fortrücken immer in derselben Ebene, in welcher der zuerst betrachtete Krümmungskreis liegt, so beschreibt das zuerst betrachtete Massenelement, und folglich auch alle übrigen ebene Kurven. Die Drehungsaxe des Systems rückt dabei parallel mit ihrer ursprünglichen Lage fort. Schreitet der Punkt, um welchen wir die Drehung erfolgend denken, so fort, dafs er nicht stets in jener Ebene bleibt, so beschreiben sämmtliche Massenelemente Kurven von doppelter Krümmung, *dabei schreitet die Axe so fort*, dafs sie fortwährend andere Winkel mit ihrer *ursprünglichen* Lage macht.

Aus diesen Darstellungen folgt nun folgendes Gesetz:

> Wenn ein festes System sich bewegt, und die Geschwindigkeiten der einzelnen Massenelemente sind der Richtung und Gröfse nach in irgend einem Augenblick **nicht** gleich, so läfst sich die Bewegung immer so auffassen, als ob sämmtliche Massenelemente in diesem Augenblick eine Drehung um ein und dieselbe Axe mit derselben Winkelgeschwindigkeit und in parallelen Ebenen machten, während diese Axe gleichzeitig nach irgend einem Gesetz fortrückt. Es ist dabei nicht ausgeschlossen, dafs eine dieser beiden Bewegungen Null sein könne.

Ferner ergeben sich folgende Gesetze:

1) Ist der Weg, welchen ein Massenelement macht, gegeben, und ist auch die Lage der übrigen Massenelemente des Systems gegen dieses Element bekannt, so ist der Weg aller übrigen Massenelemente bestimmt;

2) Aendert sich in irgend einem Augenblick die Geschwindigkeit eines Massenelements des festen Systems, so ändern sich gleichzeitig die Geschwindigkeiten aller übrigen Elemente, und

3) Bleibt in irgend einem *Augenblick* die Geschwindigkeit irgend eines *Elements* des festen Systems ungeändert, so bleibt *die* Geschwindigkeit aller übrigen Elemente des Systems ungeändert.

Aus dem oben entwickelten Gesetz ergiebt sich, dafs wenn ein festes System in Bewegung ist, im Allgemeinen jedes Massenelement gleichzeitig zwei Bewegungen mache, nämlich:

1) eine drehende Bewegung um eine gemeinschaftliche Axe mit einer allen Massenelementen gemeinschaftlichen Winkelgeschwindigkeit, und
2) eine fortschreitende Bewegung, welche alle Massenelemente mit der Axe gemeinschaftlich besitzen, und deren Wegelemente für alle Massenelemente gleich grofs und parallel sind.

Diese beiden gleichzeitig erfolgenden Bewegungen können wir immer hervorgebracht denken durch Kräfte, welche auf die einzelnen Massenelemente in entsprechenden Richtungen wirken, und indem wir den Grundsatz 1. des § 24 anwenden, können wir diese beiden gleichzeitig erfolgenden Bewegungen auch so auffassen, als ob sie innerhalb der Dauer eines Zeitelementes nach einander statt fänden, wobei es dann gleichgiltig ist, ob wir die fortschreitende Bewegung oder die drehende Bewegung als die zuerst erfolgende ansehen wollen.

Angriffspunkt einer Kraft. — Auf ein festes System angebrachte, und in einem festen System thätige Kräfte.

§ 66. Es ist hier ein sehr wesentlicher Unterschied hervorzuheben, welcher zwischen der Bewegung eines freien Massenelements und der Bewegung eines Massenelements, welches einem festen System angehört, statt findet. Ein freies Massenelement kann den Kräften, die auf dasselbe wirken, immer frei folgen und die Bahn desselben ist daher nur von diesen Kräften abhängig (vergl. § 37. S. 42); ein Massenelement, welches einem festen System angehört, kann dagegen nicht der Einwirkung der Kräfte, welche dasselbe in Anspruch nehmen, frei folgen, sondern seine Bahn ist auch bedingt durch den Zusammenhang mit den übrigen Elementen desselben Systems, und es ist durch diesen Zusammenhang gezwungen, jenen oben angedeuteten Bewegungsgesetzen zu folgen. Wie also auch die Kräfte beschaffen sein mögen, die auf die verschiedenen Massenelemente eines festen Systems wirken, das Resultat ihrer Wirkung wird immer jene fortschreitende und gleichzeitig drehende Bewegung der einzelnen Massenelemente sein.

Derjenige Punkt eines festen Systems, in welchem wir eine Kraft wirksam denken, heifst der Angriffspunkt dieser Kraft.

Denken wir uns beliebige Kräfte in verschiedenen Angriffspunkten auf ein System wirkend, und denken wir, dafs durch den Einflufs dieser Kräfte das System sich bewegt, so wird dieselbe Bewegung auch hervorgebracht werden können, wenn anstatt jener in den verschiedenen Angriffspunkten wirkenden Kräfte andere Kräfte in jedem einzelnen Massenelement des Systems thätig wären; nämlich solche Kräfte, welche jedem Massenelement während des betrachteten Zeitelementes zuerst eine bestimmte fortschreitende und dann eine bestimmte drehende Bewegung (oder auch in umgekehrter Folge) ertheilen. Wir können also immer für die Wirkung der in verschiedenen Angriffspunkten beliebig auf das System wirkenden Kräfte zwei Reihen anderer Kräfte substituiren (§ 35. No. 3), die in jedem einzelnen Massenelement als thätig zu denken sind, so dafs die eine Reihe von Kräften jedem Massenelement eine gemeinschaftliche mit gleicher Geschwindigkeit und in *parallelen Richtungen erfolgende* fortschreitende Bewegung ertheilt, während die andere Reihe von Kräften jedem Massenelement eine Drehung um eine gemeinschaftliche Axe mit derselben Winkelgeschwindigkeit, und in einer zu dieser Axe normalen Ebene ertheilt.

Die beliebigen in verschiedenen Angriffspunkten des festen Systems wirkenden Kräfte nennen wir „auf das System wirkende oder angebrachte Kräfte", und wenn wir für dieselben in der eben angedeuteten Weise andere Kräfte substituiren, die in jedem einzelnen Massenelement thätig gedacht, demselben die Bewegung ertheilen würden, welche es wirklich erleidet, so nennen wir diese substituirten Kräfte „die in dem System thätigen oder lebendigen Kräfte". Die in dem System thätigen Kräfte lassen sich immer zerlegen in die Kräfte der fortschreitenden und in diejenigen der drehenden Bewegung.

Nun können wir nach § 35 und 36 und nach § 64 den Fall immer so auffassen, als würden sämmtliche auf das feste System angebrachte Kräfte durch innere Kräfte des Systems, die ihnen der Richtung nach gleich, aber entgegengesetzt sind, im Gleichgewicht gehalten, und als wirkten die in dem System thätigen Kräfte allein frei auf die einzelnen Massenelemente ein.

Um nun die Gesetze, nach welchen die Wirkung von Kräften auf ein festes System erfolgt, zu ermitteln, wollen wir zunächst die auf ein System angebrachten Kräfte, dann die in dem System thätigen Kräfte einer nähern Betrachtung unterziehen.

Von den auf ein festes System angebrachten Kräften.

Vollkommenes, unvollkommenes Gleichgewicht — Gegenkraft, Mittelkraft (Resultirende) mehrer auf ein festes System wirkenden Kräfte.

§ 67. Wirken beliebige Kräfte auf ein festes System, so ertheilen sie im Allgemeinen jedem Punkte desselben, wie wir oben gesehen haben, eine fortschreitende und eine drehende Bewegung. Wir sagen, die Kräfte, welche auf ein System wirken, seien in irgend einem Augenblick in vollkommenem Gleichgewicht, wenn sie dem System keine Bewegung, oder den einzelnen Massenelement keinen Geschwindigkeitszuwachs in diesem Augenblick ertheilen. Wenn dagegen die Kräfte dem System zwar keine fortschreitende, aber eine drehende Bewegung ertheilen, oder wenn sie zwar keine drehende, aber eine fortschreitende Bewegung bewirken, so sagen wir, es finde theilweises oder unvollkommenes Gleichgewicht statt, und bezeichnen den erstgenannten Fall als Gleichgewicht gegen fortschreitende, den andern Fall als Gleichgewicht gegen drehende Bewegung.

Sind mehre Kräfte, welche auf ein System wirken, nicht im Gleichgewicht, und es kann eine neue Kraft auf das System wirkend gedacht werden, durch deren Einwirkung Gleichgewicht statt finden würde, so nennen wir diese Kraft die Gegenkraft des Systems von Kräften. Denken wir in dem Angriffspunkt der Gegenkraft eine Kraft wirkend, welche derselben der Richtung nach gleich aber entgegengesetzt ist, so nennen wir diese die Mittelkraft, oder die Resultirende des ganzen Systems; denn offenbar würde die Wirkung der einzelnen in den verschiedenen Angriffspunkten wirkenden Kräfte durch die Wirkung dieser *Mittelkraft* substituirt werden können, das heifst, es würde die Wirkung auf das feste System dieselbe bleiben, wenn wir anstatt der einzelnen Kräfte die Mittelkraft in dem bestimmten Angriffspunkt allein wirksam denken.

Es folgt aus dieser Darstellung jedoch durchaus nicht, dafs für jedes feste System, auf welches beliebige Kräfte einwirken, jedesmal nur **eine** Mittelkraft wirklich denkbar sei; es kann vielmehr die fortschreitende Bewegung des Systems eine andere und in einem andern Angriffspunkt wirksame Gegenkraft bedingen, als die drehende Bewegung, ja es läfst sich oft die drehende Bewegung, welche die Kräfte dem System ertheilen, gar nicht durch eine einzige Gegenkraft im *Gleichgewicht* erhalten. Wir können demgemäfs unterscheiden eine Resultirende der fortschreitenden Bewegung, und eine Resultirende der drehenden Bewegung des Systems, indem wir unter jener eine solche Kraft verstehen, die, wenn sie in entgegengesetzter Richtung in *ihrem* Angriffspunkte wirkte, Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung, und unter der letztgenannten eine solche Kraft verstehen, welche, wenn sie an *ihrem* Angriffspunkt in entgegengesetzter Richtung wirkte, Gleichgewicht gegen drehende Bewegung herstellen würde.

Grundsätze für die Wirkung mehrer auf ein festes System angebrachten Kräfte.

§ 68. Bevor wir auf die Bestimmung der Resultirenden der Gröfse und Richtung nach eingehen, stellen wir zunächst folgende Grundsätze auf:

1) Wenn die sämmtlichen auf ein festes System wirkenden Kräfte in ihren Angriffspunkten einzeln im *Gleichgewicht sind, so ist das ganze System* im vollkommenen Gleichgewicht.

In diesem Falle ist nämlich überhaupt keine mechanische Wirkung auf irgend einen Punkt des Systems vorhanden.

2) Wenn die auf ein festes System wirkenden Kräfte in ihren Angriffspunkten nicht im Gleichgewicht sind, so erfolgt Bewegung des ganzen Systems; die Angriffspunkte der Kräfte legen dabei in irgend einem Augenblicke gewisse Wegelemente zurück; soll nun die Gegenkraft im Stande sein, in dem System Gleichgewicht herzustellen, so mufs nach den ersten Prinzipien von der Wirkung der Kräfte, die Wirkungsgröfse der Gegenkraft gleich und entgegengesetzt sein der Summe sämmtlicher Wirkungsgröfsen, welche sich bilden, indem man in jedem Angriffspunkt den resultirenden Druck (§ 46. S. 54) der in demselben wirkenden Kräfte für die *Richtung*, nach welcher die Bewegung des Angriffspunktes erfolgt, bestimmt, und diesen Druck mit dem Wegelemente, welches der Angriffspunkt bei der Bewegung durchläuft, multiplicirt (§ 22. S. 27). Dabei ist wohl zu beachten, dafs jedes Produkt negativ zu nehmen ist, für welches der Weg, den der Angriffspunkt durchläuft, der Richtung, in welcher der resultirende Druck für diesen Angriffspunkt wirkt, entgegengesetzt ist, vorausgesetzt nämlich, dafs man diejenigen Produkte positiv nimmt, für welche die Richtung des resultirenden Drucks mit der Richtung, in welcher die Bewegung erfolgt, zusammenfällt.

Dieses wichtige Gesetz haben wir hier als Grundsatz aufgestellt. Es bedarf auch in der That keines Beweises, da es unmittelbar aus der Betrachtung fliefst, dafs die Wirkung irgend einer Kraft nur durch eine eben so grofse und entgegengesetzte Wirkung aufgehoben werden kann, dafs ferner, wenn das System eine Bewegungsänderung erführe, dies nur durch die in den einzelnen Angriffspunkten wirksamen Kräfte geschehen könne; und dafs endlich die Wirkungsgröfsen dieser Kräfte nach den Richtungen hin, nach welchen sie ihre Angriffspunkte wirklich bewegen, sich summiren müssen.

Anwendung des Prinzips der virtuellen Wege auf Kräfte, die auf ein festes System wirken.

§ 69. Bezeichnet nun K den Druck der Resultirenden für irgend eine der Bewegungen, welche das System annehmen kann; dS das Wegelement, welches der Angriffspunkt dieses Drucks durchlaufen mufs, K', K'', K''' .... seien die resultirenden Drucke für verschiedene Angriffspunkte nach der Richtung, in welcher die Bewegung des Systems erfolgt, und ds', ds'', ds''' seien die Wegelemente, welche sie bei dieser Bewegung durchlaufen, so ist offenbar in Folge des Gesetzes No. 2 in § 68:

$$101)\ K.dS = K'.ds' + K''.ds'' + K'''.ds''' + \ldots = \Sigma(K'.ds'),$$

folglich:

$$101\,\mathrm{a})\ \Sigma(K'ds') - K.dS = 0,$$

welche Gleichung den Fall des Gleichgewichts bezeichnet, indem $-K.dS$ das Leistungselement der Gegenkraft ausdrückt. — Diese Gleichungen gelten übrigens ganz allgemein, sowohl wenn das System eine fortschreitende Bewegung erfährt, als auch für eine drehende Bewegung, wenn nämlich dS, ds' ..... die unendlich kleinen Wege sind, welche durch Drehung durchlaufen werden, und welche immer für ein Zeitelement als geradlinigt betrachtet werden können.

Nun läfst sich aber für jeden Angriffspunkt das Gesetz der virtuellen und reellen Wege anwenden § 46. S. 54. Nehmen wir nämlich in der Richtung der resultirenden Drucke, welche in den verschiedenen Angriffspunkten wirksam sind, beliebige Abstände von den Angriffspunkten selbst, und es seien a', a'', a''' .... diese Abstände, denken wir nun, K' sei der resultirende Druck von einer Menge anderer Drucke $K'_{,}$, $K'_{,,}$, $K'_{,,,}$ ...., die in demselben Angriffspunkte wirken, und wir projiciren den Abstand a' auf die Richtungen dieser Drucke, so dafs $a'_{,}$, $a'_{,,}$, $a'_{,,,}$ .... die Projektionen werden; mit den übrigen Drucken, welche in den andern Angriffspunkten wirken, machen wir es ebenso, dann folgt nach Gleichung 82):

$$K'a' = K'_{,}a'_{,} + K'_{,,}a'_{,,} + K'_{,,,}a'_{,,,} + \ldots = \Sigma(K'_{,}a'_{,}),$$

$$K' = \Sigma\left(\frac{K'_{,}a'_{,}}{a'}\right),$$

setzen wir diesen Werth in die Gleichung 101), so folgt:

$$102)\ K.dS = \Sigma\left(K'_{,}a'_{,}.\frac{ds'}{a'}\right).$$

Da der Abstand a' ein beliebiger ist, so können wir auch $a' = ds'$, d. h. wir können a' für jeden Angriffspunkt gleich dem Wegelement dieses Angriffspunkts nehmen, bezeichnen wir dann die Projektion des Wegelements ds' auf die Richtung der verschiedenen in demselben Angriffspunkt wirkenden Kräfte mit $ds'_{,}$, $ds'_{,,}\ldots$, so folgt:

$$103)\ K.dS = \Sigma(K'_{,}ds'_{,}).$$

Diese Gleichung lehrt das Prinzip der virtuellen Wege auf Kräfte anwenden, welche auf ein festes System wirken. Sie heifst in Worten:

> Wenn auf ein festes System beliebige Kräfte einwirken, und das System erleidet in irgend einem Augenblick eine unendlich kleine Bewegung, gleichviel wie dieselbe beschaffen ist, so ist das Produkt aus dem Druck der Resultirenden in das Wegelement ihres Angriffspunkts gleich der Summe der Produkte, welche man erhält, indem man jeden einzelnen Druck, der auf das System wirkt, multiplizirt mit der Projektion des Wegelements (welches sein Angriffspunkt bei dieser Bewegung durchläuft) auf die Richtung des Drukkes; wobei die Vorzeichen nach § 49 zu bestimmen sind.

Für den Zustand des Gleichgewichts gilt die Gleichung 101 a):

$$\Sigma(K'ds') - K.dS = 0,$$

oder da KdS hier keine andere Rolle spielt, als $K'ds'$ etc. auch:

$$104)\ \Sigma(K.dS) = 0,$$

und es folgt, wie sich für diesen Fall sehr leicht entwickeln läfst, das Gesetz in folgender Form:

> Wenn auf ein festes System beliebig viel Kräfte wirken, und dieselben sind im Gleichgewicht, so mufs, wenn man dem ganzen System eine beliebige unendlich kleine, sei es fortschreitende

oder drehende Verrückung ertheilt, die Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man jeden einzelnen Druck mit der Projektion des Wegelements (welches sein Angriffspunkt bei dieser Verrückung durchläuft) auf die Richtung der einzelnen Drucke multiplizirt, gleich Null sein.

In allen Fällen, wo die in endlichen Zeiten durchlaufenen Wege der Angriffspunkte sich verhalten, wie die unendlich kleinen Wege, gilt das Gesetz auch für endliche Verrückungen des festen Systems.

Suchen wir nunmehr die eben entwickelten allgemeinen Gesetze auf besondere Fälle anzuwenden, und daraus Folgerungen zu ziehen, welche in vielen Fällen die Betrachtung vereinfachen.

Bedingungen des Gleichgewichtes für Kräfte, die auf ein festes System wirken.

§ 70. Wirken beliebig viele Kräfte auf ein festes System, und es soll vollkommenes *Gleichgewicht statt finden*, so müssen nach § 67 zwei Bedingungen erfüllt werden:

1) Es mufs für jede fortschreitende Bewegung die Leistung der Resultirenden Null sein; und:

2) Es mufs für jede drehende Bewegung die Leistung der Resultirenden Null sein.

Es mufs also die Gleichung 104) sowohl für jede fortschreitende Bewegung, als auch für jede drehende Bewegung erfüllt werden. Wird nur eine von beiden Bedingungen erfüllt, so ist unvollkommenes Gleichgewicht vorhanden.

Sind beliebige Kräfte, die auf ein festes System wirken, im Gleichgewicht, so läfst sich jede als die Gegenkraft aller übrigen ansehen. (Vergl. §. 35. No. 2).

Um zu zeigen, dafs die Leistung für jede beliebige *Richtung* in Bezug auf fortschreitende Bewegung gleich Null ist, genügt es, zu zeigen, dafs sie für drei zu einander normale Richtungen gleich Null ist, und um zu zeigen, dafs die resultirende Leistung für jede beliebige Drehung gleich Null sei, genügt es zu zeigen, dafs sie für drei zu einander normale Axen gleich Null sei. (Vergl. § 48. S. 58).

Wenn nach irgend einer Richtung keine fortschreitende Bewegung statt finden soll, so mufs, wenn K, K', K'', K'''.... die resultirenden Drucke für diese Richtung, ds, ds', ds''... aber die

Wegelemente sind, welche von den Angriffspunkten gleichzeitig durchlaufen werden, zufolge Gleichung 104) sein für diese Richtung:

$$\Sigma(K.ds) = 0,$$

nun sind bei der fortschreitenden Bewegung die Wegelemente der einzelnen Angriffspunkte alle gleich grofs (§ 65. S. 88), es folgt also als Bedingung für das Gleichgewicht in Bezug auf fortschreitende Bewegung nach irgend einer Richtung:

$$105)\ \Sigma(K) = 0,$$

d. h. es mufs die Summe sämmtlicher resultirenden Drucke für diese Richtung gleich Null sein.

Wenn in Bezug auf drehende Bewegung um irgend eine Axe Gleichgewicht vorhanden sein soll, so mufs auch die Gleichung 104) erfüllt werden. Nennen wir $R_{,}$, $R_{,,}$, $R_{,,,}$ ... die Halbmesser der Krümmungskreise der Wegelemente, welche die einzelnen Angriffspunkte bei der Drehung um jene Axe beschreiben würden, oder, was dasselbe sagt, die normalen Abstände der Angriffspunkte von der Drehungsaxe, $K_{,}$, $K_{,,}$, $K_{,,,}$ .... die resultirenden Drucke nach der Richtung der Wegelemente, welche die Angriffspunkte durchlaufen würden, und bemerken wir, dafs die einzelnen Wegelemente sich ausdrücken durch $ds_{,} = C'.dt$, wenn C'... die Geschwindigkeiten bedeuten (Gleichung 24. S. 17) oder, da $C' = wR_{,}$ (Gleichung 80. S. 51) wenn w... die Winkel-Geschwindigkeiten bezeichnen, durch $ds_{,} = wR_{,}dt$, so folgt für die Gleichung 104) in Bezug auf Drehung folgende Gestalt:

$$\Sigma(K_{,}ds_{,}) = \Sigma(K_{,}wR_{,}dt) = 0,$$

und da dt ein gemeinschaftlicher Faktor, w aber ebenfalls allen Summanden gemeinschaftlich ist, insofern alle Angriffspunkte sich nur mit derselben Winkel-Geschwindigkeit bewegen können (§. 65. S. 86), so folgt als Bedingung des Gleichgewichts in Bezug auf Drehung um irgend eine Axe:

$$106)\ \Sigma(K_{,}R_{,}) = 0,$$

worin $K_{,}$ den resultirenden Druck in jedem Angriffspunkt bezeichnet, in einer Richtung, welche in einer durch den Angriffspunkt gehenden, zur Drehaxe normalen Ebene liegt, und zu dem Halbmesser $R_{,}$ normal ist.

Zerlegt man die sämmtlichen in ein und demselben Angriffspunkt wirkenden Drucke nach zwei Richtungen, von denen eine parallel mit der angenommenen Drehaxe ist, die andere aber in jene normale Ebene fällt, so erscheint offenbar der Druck $K_{,}$ auch als der resultirende Druck aus allen diesen in der genannten Ebene liegenden Drucken, und das Produkt $K_{,}R_{,}$ erscheint als das statische

Moment dieses resultirenden Druckes (§ 50. S. 60). Es gilt dann das Gesetz des § 51, d. h. man kann setzen:

$$K_{\prime}R_{\prime} = \Sigma(K_{\prime}'R_{\prime}'),$$

wenn man unter $K_{\prime}'$, $K_{\prime}''$, $K_{\prime}'''$.... die Komponenten sämmtlicher in demselben Angriffspunkt wirkender Kräfte in Bezug auf eine, zur Drehaxe normale Ebene versteht, und wenn $R_{\prime}'$, $R_{\prime}''$, $R_{\prime}'''$ etc. die Hebelsarme dieser Komponenten, oder die Normalen bezeichnen, welche man von dem Durchschnittspunkt der Drehaxe mit der Ebene auf die Richtung der Drucke $K_{\prime}'$, $K_{\prime}''$, $K_{\prime}'''$.... ziehen kann. Demnächst geht die Gleichung 106) über in:

$$106\text{a}) \quad \Sigma(K_{\prime}'R_{\prime}') = 0,$$

d. h. wenn in Bezug auf Drehung um eine gewisse Axe Gleichgewicht bestehen soll, und man zerlegt die sämmtlichen in den einzelnen Angriffspunkten wirkenden Kräfte nach je zwei Richtungen, von denen die einen parallel mit der Drehaxe sind, die andern aber in Ebenen liegen, welche normal zu der Drehaxe sind und durch den Angriffspunkt der einzelnen Kräfte gehen, so mufs die Summe der statischen Momente dieser letztgenannten Komponenten in Bezug auf die Durchschnittspunkte ihrer Ebenen mit der Drehaxe gleich Null sein.

Nun ist aber zu bemerken, dafs der Hebelsarm $R'_{\prime}$ die Normale ist, welche man von der Drehaxe auf die in der zur Drehaxe normalen Ebene liegende Komponente ziehen kann, diese Normale giebt aber zugleich den Abstand einer Ebene, welche mit der Drehaxe parallel ist, und durch die Komponente geht; in dieser hier erwähnten Ebene liegt aber auch die ursprüngliche Kraftrichtung, da ja diese Kraftrichtung mit ihren Komponenten in einer und derselben Ebene liegen mufs, die eine Komponente aber die eben erwähnte, die andere dagegen mit der Drehaxe parallel ist; es stellt also die Normale $R'_{\prime}$ den Abstand der Drehaxe von einer Ebene dar, welche mit derselben parallel durch die ursprüngliche Kraftrichtung gelegt ist, oder mit andern Worten, es ist der Hebelsarm $R'_{\prime}$ der Komponente, welche auf Drehung um irgend eine Axe wirkt, nichts anders, als die kürzeste Entfernung der ursprünglichen Kraftrichtung von dieser Drehaxe.

Nach diesen Darstellungen ist es nun nicht schwer die Bedingungen für das vollkommene Gleichgewicht mehrer auf ein festes System wirkender Kräfte aufzustellen.

Zunächst denken wir ein festes Axensystem, es seien α, β, γ; α', β', γ' etc. die Winkel, welche die in den verschiedenen Angriffspunkten wirksamen Kräfte mit den Axen bilden. Die resultirenden Drucke in dem ersten Angriffspunkt nach der Richtung der ersten Axe sind dann $\Sigma(K.\cos\alpha)$, im zweiten Angriffspunkt $\Sigma(K'.\cos\alpha')$, im dritten $\Sigma(K''.\cos\alpha'')$ etc., ebenso lassen sich die in den einzelnen Angriffspunkten wirkenden resultirenden Drucke für die beiden andern Axen bestimmen, und es folgt aus der Gleichung 105) als Bedingung des Gleichgewichts gegen fortschreitende Bewegung:

$$107)\quad \begin{cases} \Sigma(K.\cos\alpha)=0 \\ \Sigma(K.\cos\beta)=0 \\ \Sigma(K.\cos\gamma)=0. \end{cases}$$

Die Komponenten der Kräfte in Ebenen, welche zu den angenommenen Axen normal sind, drücken sich aus durch $K.\sin\alpha$, $K'.\sin\alpha'$, $K''.\sin\alpha''$.... für die Ebenen normal zur ersten Axe; durch $K.\sin\beta$... und durch $K.\sin\gamma$.... für die Ebenen normal zur zweiten und dritten Axe, und es folgt für die Bedingung des Gleichgewichts gegen drehende Bewegung aus Gleichung 106a) für alle drei Axen:

$$108)\quad \begin{cases} \Sigma(K.\sin\alpha.R_{,})=0 \\ \Sigma(K.\sin\beta.R_{,,})=0 \\ \Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,})=0, \end{cases}$$

worin $R_{,}$, $R_{,,}$, $R_{,,,}$ die kürzesten Entfernungen der Richtungslinien der einzelnen Kräfte von der ersten, zweiten und dritten Axe bezeichnen.

Die Gleichungen 107 und 108):

$$\Sigma(K.\cos\alpha)=0;\quad \Sigma(K.\cos\beta)=0;\quad \Sigma(K.\cos\gamma)=0,$$

und

$$\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,})=0;\quad \Sigma(K.\sin\beta.R_{,,})=0;\quad \Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,})=0$$

stellen sechs Bedingungs-Gleichungen dar, welche erfüllt werden müssen, wenn vollständiges Gleichgewicht der verschiedenen auf ein festes System wirkenden Kräfte vorhanden sein soll.

Bestimmung der Resultanten der fortschreitenden Bewegung für Kräfte, die unter beliebigen Winkeln auf ein festes System wirken.

§ 71. Da nun jede Kraft in einem festen System, an welchem Gleichgewicht statt findet, als die Gegenkraft aller übrigen sich ansehen läfst, so können wir nach den oben gefundenen Gesetzen leicht die Gröfse, die Richtung und den Angriffspunkt der Resultanten von Kräften bestimmen, die nicht im Gleichgewicht sind. Wir wollen zuerst die Untersuchung führen in Bezug auf die Resultante der fortschreitenden Bewegung, dann in Bezug auf die Resultante der drehenden Bewegung, und endlich zu bestimmen suchen, in welchen Fällen das System nur eine Resultante hat, oder mit andern Worten, in welchen Fällen die Resultanten gegen die fortschreitende und gegen die drehende Bewegung der Richtung und Gröfse nach zusammenfallen können.

Bezeichnen wir mit Q die Resultante gegen die fortschreitende Bewegung, mit A, B, Γ die Winkel, welche ihre Richtung mit den drei Axen macht, so wird, wenn vorhin nicht Gleichgewicht vorhanden war, dieses eintreten, sobald eine der Resultante gleiche, aber der Richtung nach entgegengesetzte Kraft auf das System einwirkt; es werden dann die Bedingungs-Gleichungen 107) erfüllt werden, und zwar werden sie die Form annehmen:

$$109) \left\{\begin{array}{l} \Sigma(K.\cos\alpha) - Q.\cos A = 0 \\ \Sigma(K.\cos\beta) - Q.\cos B = 0 \\ \Sigma(K.\cos\gamma) - Q.\cos \Gamma = 0. \end{array}\right.$$

Zur Bestimmung der vier unbekannten Werthe Q, A, B, Γ haben wir noch die vierte Gleichung, die durch die Bedingung gegeben ist, dafs die drei Winkel A, B, Γ von einer Linie mit drei andern gebildet werden, welche letztere unter einander rechte Winkel machen. Für diesen Fall ist nämlich nach einem bekannten Satze:

$$(\cos A)^2 + (\cos B)^2 + (\cos \Gamma)^2 = 1.$$

Aus diesen vier Gleichungen folgt zunächst durch eine leichte arithmetische Operation:

$$Q^2 = [\Sigma(K.\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K.\cos\beta)]^2 + [\Sigma(K.\cos\gamma)]^2,$$

folglich die Resultante sämmtlicher Kräfte der Gröfse nach:

$$110) \quad Q = \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K.\cos\beta)]^2 + [\Sigma(K.\cos\gamma)]^2\right\}},$$

ferner:

$$111) \left\{\begin{array}{l} \cos A = \dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha)}{Q} \\ \cos B = \dfrac{\Sigma(K.\cos\beta)}{Q} \\ \cos \Gamma = \dfrac{\Sigma(K.\cos\gamma)}{Q}. \end{array}\right.$$

Vergleichen wir diese beiden Gleichungen mit den Gleichungen 66 und 67) § 33. S. 37, so ergiebt sich durch eine sehr einfache Betrachtung, dafs die Resultirende der fortschreitenden Bewegung der Gröfse und Richtung nach ganz in derselben Weise gefunden wird, als ob die in den verschiedenen Angriffspunkten wirkenden Drucke parallel mit ihren ursprünglichen Richtungen an einen einzigen Punkt getragen würden, und man nun den resultirenden Druck aus allen diesen Drucken zusammensetzte.

Für die fortschreitende Bewegung läfst sich hiernach immer eine Resultante finden, da es aber nur darauf ankommt, die Bedingungen der Gleichungen 109) zu erfüllen, so ist der Angriffspunkt der Resultanten in Bezug auf fortschreitende Bewegung ganz gleichgültig, ja wir können die Resultante gegen fortschreitende Bewegung in jedem beliebigen Punkte des Systems angreifend denken, oder aber wir können anstatt der einen Resultanten uns auch mehre resultirende Kräfte denken, welche zusammen wirkend die Bedingungs-Gleichungen erfüllen. Sobald wir also an einem festen System beliebig viele Kräfte wirkend haben, welche nicht im Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung sind, so wird ein solches Gleichgewicht eintreten, sobald wir eine oder mehre Gegenkräfte anbringen, welche die Bedingungen der Gleichungen 109) erfüllen; in welchen Punkten wir diese Kräfte angreifen lassen, ist in Bezug auf fortschreitende Bewegung ganz gleichgiltig; nicht so in Betreff der drehenden Bewegung.

Bestimmung der Resultanten der fortschreitenden Bewegung für Kräfte, deren Richtungslinien parallel sind.

§ 72. Wenn die Richtungen sämmtlicher Kräfte parallel sind, so bilden sie sämmtlich dieselben Winkel mit den drei Axen; es werden also die Faktoren $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ in den Gleichungen 110 und 111) gemeinschaftliche, und es geht für diesen Fall die Gleichung 110) über in:

$$Q = \sqrt{\left\{[\Sigma(K)]^2\,[\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2]\right\}}$$

und zufolge des bekannten Gesetzes $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$ hat man:

$$112)\quad Q = \Sigma(K),$$

folglich auch, wenn man diese Werthe in die Gleichungen 111) einsetzt:

$$113)\quad \begin{cases} \cos A = \cos\alpha \\ \cos B = \cos\beta \\ \cos \Gamma = \cos\gamma, \end{cases}$$

für parallele Kräfte ist also die Resultante gegen fortschreitende Bewegung gleich der Summe der sämmtlichen Kräfte, und die Richtung der Resultante ist parallel mit der Richtung der einzelnen Kräfte.

Sollen die Kräfte, deren Richtungen parallel sind, gegen fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sein, so folgt aus Gleichung 112):

$$112\text{a)}\quad \Sigma(K) = 0.$$

Gesetze für das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung, wenn die Kraftrichtungen parallel sind.

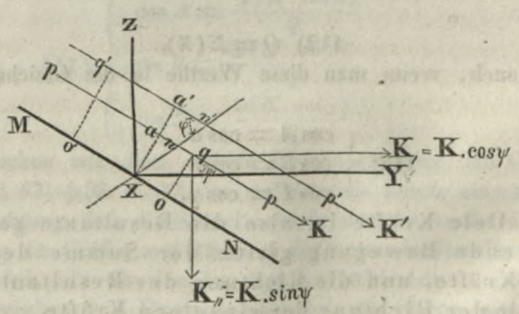
§ 73. Untersuchen wir nun die Verhältnisse der drehenden Bewegung.

Zu dem Ende wollen wir zunächst die Gesetze des Gleichgewichts gegen drehende Bewegung näher betrachten.

In den Gleichungen 108):

$$\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,}) = 0;\quad \Sigma(K.\sin\beta.R_{,,}) = 0;\quad \Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,}) = 0$$

bezeichnen $R_{,}$, $R_{,,}$, $R_{,,,}$ die kürzesten Abstände der einzelnen Kräfte von den drei angenommenen Axen; diese kürzesten Abstände werden erhalten, wenn man durch die Richtungen der Kräfte Ebenen legt, die parallel mit den Axen sind, und die Abstände dieser Ebenen, oder die Normalen von den betreffenden Axen auf die Ebenen konstruirt. Jede Ebene, parallel mit einer der drei Axen, ist normal auf der Ebene, in welcher die beiden andern Axen liegen, die so gedachte Ebene durch irgend eine Kraftrichtung ist also die projicirende Ebene für diese Kraftrichtung auf die Ebene der beiden andern Axen, und ihre Durchschnittslinie mit dieser letztgenannten Ebene ist die Projektion der Kraftrichtung auf diese; die Normale von der Axe auf die projicirende Ebene, oder der gesuchte kürzeste Abstand ist also gleich der Normalen von dem Durchschnittspunkt der drei Axen auf die Projektion der Kraftrichtung. Es sei z. B. die Ebene des Papiers diejenige der Axen YZ; pq sei die Projektion der Kraftrichtung K auf diese Ebene oder der Durch-



schnitt dieser Ebene mit einer Ebene, welche durch die Richtung von K parallel zur ersten Axe gelegt werden kann, dann ist Xa, oder die Normale von der Axe X auf diese Ebene, welche gleich ist der Normalen vom Durchschnittspunkt der Axen auf die Projektion pq, die gesuchte kürzeste Entfernung $R_{\prime}$.

Betrachten wir nun zunächst den Fall, dafs die Richtungen sämmtlicher Kräfte parallel mit einander sind. Es werden dann auch die projicirenden Ebenen, und folglich auch die Projektionen parallel mit einander sein; ist z. B. $p'q'$ die Projektion der Kraftrichtung K', so ist offenbar $a'X = R_{\prime}'$, gleich dem kürzesten Abstande der Kraft K', und es fallen daher die Hebelsarme sämmtlicher parallelen Kräfte in Bezug auf eine bestimmte Axe in ein und dieselbe Ebene, welche durch diese Axe geht, und normal zu den Kraftrichtungen ist. Nun gehen auch, unter der Bedingung, dafs die Kraftrichtungen parallel sind, dafs folglich die Neigungswinkel, welche sie mit den drei angenommenen Axen bilden, für alle Kräfte dieselben sind, die Gleichungen 108), nach Ausscheidung der gemeinschaftlichen Faktoren $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, über in:

$$114)\quad \Sigma(KR_{\prime}) = 0;\quad \Sigma(KR_{\prime\prime}) = 0;\quad \Sigma(KR_{\prime\prime\prime}) = 0.$$

Denken wir durch die Axe X eine Ebene nX gelegt, welche die projicirenden Ebenen der Kraftrichtungen unter einem beliebigen Winkel φ schneidet, so sieht man leicht, dafs die Hebelsarme

$$R_{\prime} = Xa = Xn\,.\,\sin\varphi;\quad R_{\prime}' = Xa' = Xn'\,.\,\sin\varphi$$

etc. sind. Setzen wir diese Werthe in die Gleichung 114), so folgt, indem man mit dem gemeinschaftlichen Faktor $\sin\varphi$ dividirt,

$$\Sigma(K\,.\,Xn) = 0 \text{ etc.},$$

d. h. man kann, wenn die Kraftrichtungen parallel sind, anstatt der kürzesten Entfernungen von den Drehaxen, auch beliebig andere Abstände der projicirenden Ebene von den Drehaxen einführen, wenn dieselben nur sämmtlich zur Drehaxe normal und unter sich parallel sind.

Legt man durch die Axe X eine Ebene MN, welche parallel mit den projicirenden Ebenen ist, so folgt leicht, dafs wenn q, q'... die Angriffspunkte der parallelen Kräfte sind, die Abstände $qo = aX = R_{\prime}$, $q'o' = a'X = R_{\prime}'$.... zu setzen sind. Bezeichnet man mit x, x', x'' etc. die Abstände der Angriffspunkte der parallelen Kräfte von einer Ebene, die mit ihrer Richtung parallel ist, so folgt aus Gleichung 114) auch:

$$\Sigma(Kx) = 0 \text{ etc.}$$

Sind die Kraftrichtungen zwar unter sich parallel, aber nicht parallel mit der Ebene in Bezug auf welche die Abstände ihrer Angriffspunkte x, x', x''... gegeben sind, sondern bilden sie mit derselben einen beliebigen Winkel ψ, so kann man offenbar für jede der einzelnen Kräfte K, K', K'' etc. immer zwei andere substituiren, welche wir mit $K_{,}$ und $K_{,,}$, $K'_{,}$ und $K'_{,,}$ etc. bezeichnen wollen; und von denen die Kräfte $K_{,}$, $K'_{,}$ parallel, die Kräfte $K_{,,}$, $K'_{,,}$... normal zu der Ebene sind. Durch diese Substitution wird offenbar das Gleichgewicht nicht geändert; und es gilt dann in Bezug auf die mit der Ebene parallelen Kräfte die Gleichung:

$$\Sigma(K_{,}x) = 0.$$

Es ist aber offenbar $K_{,} = K . \cos\psi$, $K'_{,} = K' . \cos\psi$ etc. Setzen wir diese Werthe für $K_{,}$, $K'_{,}$ etc. ein, so geht die Gleichung über in:

$$\Sigma(K . \cos\psi . x) = 0,$$

und da $\cos\psi$ allen Summanden gemeinschaftlich ist, so folgt auch:

$$115) \quad \Sigma(K . x) = 0.$$

Diese wichtige Gleichung drückt folgendes Gesetz aus:

> Wenn auf ein festes System beliebig viele Kräfte wirken, deren Richtungslinien parallel sind und die Kräfte sind in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht, so ist die Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man jede Kraft mit dem normalen Abstand ihres Angriffspunktes von einer beliebig gegebenen Ebene multiplicirt, gleich Null.

Sind die Kräfte unter sich parallel, und denken wir drei beliebige Ebenen, welche unter einander normal sind (Koordinaten-Ebenen), so gilt das Gesetz für alle drei Koordinaten-Ebenen, und wenn x, x', x''... die Koordinaten der Angriffspunkte in Bezug auf die erste Ebene, y, y', y'' und z, z', z''.... die Koordinaten in Bezug auf die zweite und dritte Ebene bezeichnen, so hat man für parallele Kräfte, die an einem festen System im Gleichgewicht gegen drehende Bewegung sein sollen, die drei Bedingungs-Gleichungen:

$$116) \quad \Sigma(Kx) = 0; \quad \Sigma(Ky) = 0; \quad \Sigma(Kz) = 0.$$

Fügen wir noch die Bedingung der Gleichung 112a) hinzu, welche das Gleichgewicht in Bezug auf fortschreitende Bewegung enthält, so sind die vier Gleichungen:

$$\Sigma(Kx) = 0; \quad \Sigma(Ky) = 0; \quad \Sigma(Kz) = 0$$

und

$$\Sigma(K) = 0.$$

vier Bedingungs-Gleichungen, welche sämmtlich erfüllt werden müssen, wenn parallele Kräfte, die auf ein festes System wirken, in vollkommenem Gleichgewicht sein sollen.

Das Produkt $K.x$ aus dem Druck einer Kraft in den normalen Abstand ihres Angriffspunkts von einer Ebene nennt man das Moment der Kraft in Bezug auf die Ebene. Es ist dieser Ausdruck nicht zu verwechseln mit dem statischen Moment einer Kraft in Bezug auf eine Axe.

Bestimmung des Angriffspunktes der Resultanten von parallelen Kräften, die auf ein festes System wirken; Kräftepaar.

§ 74. Werden die Bedingungs-Gleichungen 116) erfüllt, aber nicht 112a), so rückt das feste System geradlinig fort, ohne daſs eine Drehung erfolgt; die Resultante der fortschreitenden Bewegung läſst sich dann durch die Gleichungen 112 und 113) der Gröſse und Richtung nach bestimmen. Will man nun auch Gleichgewicht gegen die fortschreitende Bewegung herstellen, so muſs man eine Kraft Q, die gleich dieser Resultante ist, also

$$Q = \Sigma(K)$$

in entgegengesetzter Richtung der Resultanten auf das System wirken lassen; allein sobald man diese Kraft einführt, wird zwar die fortschreitende Bewegung aufgehoben, aber es ist denkbar, daſs nun die Bedingungs-Gleichungen gegen die drehende Bewegung dadurch gestört werden. Soll gleichwohl das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung bestehen bleiben, so ist der Angriffspunkt dieser Kraft nicht mehr beliebig (vergl. S. 99), sondern, wenn X, Y, Z die Koordinaten desselben sind, so muſs zufolge der Gleichung 116) die Bedingung erfüllt werden:

$$\begin{aligned} \Sigma(Kx) - QX &= 0 \\ \Sigma(Ky) - QY &= 0 \\ \Sigma(Kz) - QZ &= 0, \end{aligned}$$

daraus folgen die Koordinaten für den Angriffspunkt der Resultanten paralleler Kräfte, unter der Voraussetzung, daſs in dem System keine drehende Bewegung statt finden soll:

$$117) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{\Sigma(Kx)}{Q} = \frac{\Sigma(Kx)}{\Sigma(K)} \\ Y &= \frac{\Sigma(Ky)}{Q} = \frac{\Sigma(Ky)}{\Sigma(K)} \\ Z &= \frac{\Sigma(Kz)}{Q} = \frac{\Sigma(Kz)}{\Sigma(K)}. \end{aligned} \right.$$

Da übrigens zufolge der Bedingung, dafs die Kräfte gegen drehende Bewegung im Gleichgewicht sein sollen, sowohl $\Sigma(Kx)$ als $\Sigma(Ky)$ und $\Sigma(Kz)$ einzeln gleich 0 sind, so folgt auch $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, d. h. wenn parallele Kräfte in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, aber nicht in Bezug auf fortschreitende Bewegung, so liegt der Angriffspunkt der Resultirenden der fortschreitenden Bewegung so, dafs wenn man durch denselben drei zu einander normale Ebenen legt, die Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf jede dieser Ebenen gleich Null ist; oder mit anderen Worten, es ist der Angriffspunkt der Resultirenden immer in dem Anfangspunkt des angenommenen Koordinatensystems zu denken, und er liegt daher in jeder der Drehaxen, für welche Gleichgewicht gegen drehende Bewegung nachgewiesen werden kann.

In diesem Fall läfst sich folglich durch eine einzige Gegenkraft Gleichgewicht gegen drehende und gegen fortschreitende Bewegung herstellen.

Wenn die parallelen Kräfte, welche auf ein festes System wirken, weder in Bezug auf drehende noch in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind, so werden die Bedingungs-Gleichungen nicht erfüllt; dieselben haben dann im Allgemeinen die Form:

$$\Sigma(Kx)=A;\quad \Sigma(Ky)=B;\quad \Sigma(Kz)=C,$$
$$\Sigma(K)=Q,$$

soll nun die Gegenkraft $-Q$, welche die fortschreitende Bewegung aufhebt, gleichzeitig auch die drehende Bewegung aufheben, so folgt wieder als Bedingung:

$$\Sigma(Kx)-QX=0=\Sigma(Kx)-A=0 \text{ etc.,}$$

und daraus:

$$117\text{a})\quad \begin{cases} X=\dfrac{A}{Q}=\dfrac{\Sigma(Kx)}{Q}=\dfrac{\Sigma(Kx)}{\Sigma(K)} \\[2ex] Y=\dfrac{B}{Q}=\dfrac{\Sigma(Ky)}{Q}=\dfrac{\Sigma(Ky)}{\Sigma(K)} \\[2ex] Z=\dfrac{C}{Q}=\dfrac{\Sigma(Kz)}{Q}=\dfrac{\Sigma(Kz)}{\Sigma(K)}. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen sind die Koordinaten des Angriffspunktes der Resultirenden gegen fortschreitende Bewegung unter der Bedingung vollständig bestimmt, dafs dieselbe Gegenkraft, welche die fortschreitende Bewegung aufhebt, gleichzeitig auch die drehende Bewegung aufheben soll; vorausgesetzt nämlich, dafs A, B, C und Q reelle Werthe sind.

Die beiden Gleichungen 117 und 117a) zeigen, dafs wenn auf ein festes System parallele Kräfte einwirken, in folgenden beiden Fällen sich immer eine einzige Gegenkraft und deren Angriffspunkt bestimmen läſst, nämlich:

1) wenn die parallelen Kräfte von Hause aus schon gegen drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, aber in Bezug auf fortschreitende Bewegung kein Gleichgewicht statt findet;

2) wenn die parallelen Kräfte weder in Bezug auf fortschreitende Bewegung noch in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind.

Es bleibt noch ein dritter Fall zu erörtern, nämlich der, wenn

3) die parallelen Kräfte von Hause aus gegen fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind, aber nicht gegen drehende Bewegung.

Wir werden sogleich zeigen, daſs dann das vollkommene Gleichgewicht nicht durch eine einzige Gegenkraft hergestellt werden kann.

Dieser Fall entspricht nämlich den Gleichungen:

$$\Sigma(Kx) = A;\quad \Sigma(Ky) = B;\quad \Sigma(Kz) = C;\quad \Sigma(K) = 0.$$

Denken wir nun, es würde eine einzige Kraft angebracht, welche im Stande wäre das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung herzustellen, so würde durch dieselbe offenbar die Gleichung $\Sigma(K)=0$ gestört werden, und es würde nun eine fortschreitende Bewegung eintreten. Um aber die Gleichung $\Sigma(K)=0$ aufrecht zu erhalten, ist es nöthig wenigstens zwei Kräfte auf das System wirken zu lassen, die der Gröſse nach gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt, und deren Richtungslinien parallel mit den Richtungslinien der gegebenen Kräfte sind. Nennen wir diese beiden Kräfte P und $-P$. Durch Einführung dieser beiden Kräfte wird das Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung nicht gestört, denn es ist offenbar, wenn $\Sigma(K)=0$ ist, auch $\Sigma(K)+P-P=0$.

Nennen wir die Koordinaten des Angriffspunktes der beiden Kräfte P und $-P$ beziehlich X, Y, Z und X', Y', Z', so folgt, wenn diese Kräfte das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung herstellen sollen:

$$118)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma(Kx)+P(X-X')=0 \\ \Sigma(Ky)+P(Y-Y')=0 \\ \Sigma(Kz)+P(Z-Z')=0. \end{array}\right.$$

Diese drei Bedingungs-Gleichungen sind die einzigen, welche sich für die Bestimmung der Drucke P und $-P$, sowie der Koordinaten ihrer Angriffspunkte aufstellen lassen, sie enthalten sieben

Unbekannte, nämlich P, X, Y, Z, X', Y', Z', und es sind daher immer vier davon beliebig zu geben.

Giebt man den Druck $+P$ der Gröfse nach, und auch seinen Angriffspunkt durch die Koordinaten X, Y, Z, so sind die Koordinaten des Angriffspunktes für den Druck $-P$ durch die Gleichungen 118) zu finden.

Durch die Werthe $(X-X')$, $(Y-Y')$, $(Z-Z')$ ist übrigens die gegenseitige Lage der Angriffspunkte der beiden Kräfte vollkommen bestimmt, so dafs wenn man die Gröfse der Kräfte P annimmt, es nur auf diese gegenseitige Lage ankommt, nicht aber auf die absolute Lage der Angriffspunkte.

Man sieht überhaupt, dafs die Gleichungen 118) folgendes Gesetz ausdrücken:

> Wenn auf ein festes System beliebig viele parallele Kräfte wirken, welche im Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung sich befinden, aber nicht im Gleichgewicht gegen drehende Bewegung, so ist in Bezug auf drehende Bewegung niemals eine einzige Resultante denkbar, sondern es müssen deren wenigstens zwei angenommen werden, deren Richtungen parallel sind mit denjenigen der parallelen Kräfte, und die einander der Gröfse nach gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt sind. Man kann die Gröfse dieser beiden Resultanten beliebig annehmen, dann aber ist die gegenseitige Lage der Angriffspunkte vollkommen bestimmt.

Da diese beiden Resultanten parallel mit einander und mit den Richtungen der ursprünglich gegebenen Kräfte sind, so läfst sich durch beide *immer eine Ebene legen, welche parallel ist* mit den Richtungen der gegebenen Kräfte.

Zwei gleich grofse Kräfte, deren Richtungen parallel aber entgegengesetzt sind, und welche sich nicht im Gleichgewicht gegen Drehung befinden, nennt man ein **Kräftepaar.**

Das Produkt aus dem Druck einer der beiden Kräfte in den kürzesten Abstand ihrer Richtungslinien nennt man das **Moment des Kräftepaars.**

Die Wirkung paralleler Kräfte, die in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind, nicht aber in Bezug auf drehende Bewegung, läfst sich daher immer durch ein Kräftepaar ersetzen.

welches in einer mit den Kraftrichtungen parallelen Ebene liegt, dessen Kräfte beliebig grofs angenommen werden können, und dessen Angriffspunkte eine bestimmte relative Lage gegen einander haben, die man konstruiren kann, sobald man die Gröfse der Kräfte des Kräftepaars gegeben hat.

Die Entfernung der Angriffspunkte des Kräftepaars drückt sich wie leicht zu übersehen ist, aus durch:

$$\sqrt{\left\{(X-X')^2+(Y-Y')^2+(Z-Z')^2\right\}},$$

und wenn ψ der Winkel ist, welchen die Verbindungslinie der Angriffspunkte mit der Richtung der Kräfte macht, so ist die kürzeste Entfernung der Richtungslinien der Kräfte, wie ebenfalls durch eine einfache Betrachtung zu übersehen ist:

$$\sin\psi\,.\sqrt{\left\{(X-X')^2+(Y-Y')^2+(Z-Z')^2\right\}}$$

und folglich das Moment des Kräftepaares:

$$118\,\mathrm{a})\quad P\,.\sin\psi\sqrt{\left\{(X-X')^2+(Y-Y')^2+(Z-Z')^2\right\}}=$$

$$=\sin\psi\,.\sqrt{\left\{[\Sigma(Kx)]^2+[\Sigma(Ky)]^2+[\Sigma(Kz)]^2\right\}}\quad \text{(Gl. 118)}$$

in welchem Ausdruck ψ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtungen der parallelen Kräfte mit der Verbindungslinie der Angriffspunkte des Kräftepaares bilden.

Bestimmung der Resultanten und ihrer Angriffspunkte für Kräfte, die auf ein festes System wirken, und welche zwar in parallelen Ebenen liegen, aber nicht unter einander parallel sind.

§ 75. Untersuchen wir nun den Fall, dafs Kräfte, die zwar nicht parallel sind, deren Richtungslinien aber in parallelen Ebenen liegen, auf ein festes System wirken.

Wir setzen zuerst den allgemeinsten Fall voraus, nämlich:

A. dafs die Kräfte weder in Bezug auf fortschreitende noch in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht seien.

Denken wir drei Koordinaten-Ebenen, von denen eine (die dritte) parallel ist mit den Ebenen der Kräfte, die beiden andern also (die erste und zweite) normal zu den Ebenen der Kräfte sind; es liegt dann die erste und zweite Axe in einer Ebene parallel mit den Ebenen der Kräfte, und die dritte Axe ist normal zu den Ebenen der Kräfte.

Da die Komponenten sämmtlicher Kräfte, welche parallel mit der dritten Axe sind, *unter der gemachten Annahme* nothwendiger Weise gleich *Null* sein müssen, in sofern der Neigungswinkel γ gegen diese Axe für alle Kräfte gleich einem Rechten, also $\cos\gamma$ gleich Null ist, so folgt, dafs die Resultirende der fortschreitenden Bewegung für diese Richtung ebenfalls Null ist, und dafs also die Resultirende der fortschreitenden Bewegung überhaupt in einer Ebene liegen mufs, welche mit den Ebenen der Kräfte parallel ist. Die allgemeinen Gleichungen **110** und **111**) für die Resultirende der fortschreitenden Bewegung gehen dann über in die Form:

$$119)\quad \begin{cases} Q = \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K.\sin\alpha)]^2\right\}} \\ \cos A = \dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha)}{Q} = \sin B \\ \sin A = \dfrac{\Sigma(K.\sin\alpha)}{Q} = \cos B, \end{cases}$$

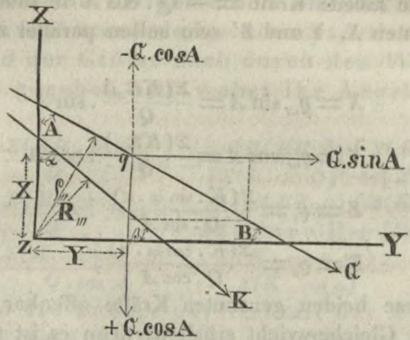
insofern nämlich in diesem Falle die Neigungswinkel α und β, welche die einzelnen Kräfte mit der ersten und zweiten Axe machen, immer zusammen einen Rechten betragen.

Durch diese Gleichungen ist die Resultante der fortschreitenden Bewegung der Kräfte in parallelen Ebenen der Gröfse und Richtung nach gegeben. Führt man eine Gegenkraft gleich $-Q$ ein, so erlangt das System Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung, gleichviel in welchem Angriffspunkt diese Gegenkraft angebracht wird. Soll aber die Gegenkraft auch *Gleichgewicht* gegen drehende Bewegung herstellen, so mufs sie die allgemeinen Bedingungs-Gleichungen **108**) erfüllen, nämlich es mufs sein:

$$119\text{a})\quad \begin{cases} \Sigma(K.\sin\alpha.R_{,}) - Q.\sin A.\varrho_{,} = 0 \\ \Sigma(K.\sin\beta.R_{,,}) - Q.\sin B.\varrho_{,,} = 0 \\ \Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,}) - Q.\sin\Gamma.\varrho_{,,,} = 0, \end{cases}$$

worin $\varrho_{,}$, $\varrho_{,,}$, $\varrho_{,,,}$ die kürzesten Abstände der Kraftrichtung Q von den drei Axen, oder die Abstände der Projektionen ihrer Richtung auf die zu den betreffenden Axen normalen Projektionsebenen von dem Durchschnittspunkt der Axen (§ 73. S. 100) bezeichnet. Beachtet man, dafs $\sin\gamma \ldots \sin\Gamma = 1$ ist, dafs $\sin\beta = \cos\alpha$; $\sin B = \cos A$ etc. ist, so folgt:

$$119\text{b})\quad \begin{cases} \Sigma(K.\sin\alpha.R_{,}) - Q.\sin A.\varrho_{,} = 0 \\ \Sigma(K.\cos\alpha.R_{,,}) - Q.\cos A.\varrho_{,,} = 0 \\ \qquad \Sigma(KR_{,,,}) - Q.\varrho_{,,,} = 0. \end{cases}$$



Es sei die Ebene des Papiers die dritte Projektionsebene, also parallel mit den Ebenen, in welchen die Kräfte liegen, die Axe Z normal zur Ebene des Papiers, dann liegen die Axen X und Y in der Ebene des Papiers, nun ist $\varrho_{,,,}$ der Abstand der Projektion der Resultirenden auf die Ebene XY und durch die dritte Gleichung zu bestimmen, nämlich:

$$\varrho_{,,,} = \frac{\Sigma(KR_{,,,})}{Q}.$$

Zugleich bemerkt man, dafs die Abstände $R_{,}\ldots$ und $R_{,,}\ldots$. nämlich die kürzesten Entfernungen der Kräfte K, K'.... von den Axen X und Y, nichts anderes darstellen, als die Entfernungen der Parallelebenen, in welchen die Kraftrichtungen liegen, von der Projektionsebene XY, oder mit andern Worten die Abstände z, $z_{,}$, $z_{,,}\ldots$ der Angriffspunkte der Kräfte von der dritten Projektionsebene. Es ist also $R_{,} = R_{,,} = z$ etc. und die beiden ersten Gleichungen liefern daher für den Abstand des Angriffspunktes der Resultirenden von der Ebene XY die beiden Werthe:

$$\varrho_{,} = \frac{\Sigma(K\,.\,\sin\alpha\,.\,z)}{Q\,.\,\sin A}$$

$$\text{und } \varrho_{,,} = \frac{\Sigma(K\,.\,\cos\alpha\,.\,z)}{Q\,.\,\cos A}.$$

Diese beiden Werthe sind nicht nothwendiger Weise einander gleich, und man sieht daher, dafs es in diesem Falle nicht immer möglich ist nur eine Resultirende für das System zu finden. Um nun aber das System im vollkommenen Gleichgewicht zu halten, stellen wir uns vor, es wirke eine Kraft $= -Q.\sin A$ in dem Punkte q, dessen Koordinaten X, Y und Z seien, parallel mit der

Axe Y und eine zweite Kraft $= - Q \cdot \cos A$ in dem Punkte q' *), dessen Koordinaten X, Y und Z' sein sollen parallel mit der Axe X. Nimmt man:

$$X = \varrho_{,,,} \sin A = \frac{\Sigma(KR_{,,,})}{Q} \cdot \sin A$$

$$Y = \varrho_{,,,} \cos A = \frac{\Sigma(KR_{,,,})}{Q} \cdot \cos A$$

$$Z = \varrho_{,} = \frac{\Sigma(K \cdot \sin \alpha \cdot z)}{Q \cdot \sin A}$$

$$Z' = \varrho_{,,} = \frac{\Sigma(K \cdot \cos \alpha \cdot z)}{Q \cdot \cos A},$$

so werden diese beiden genannten Kräfte offenbar das System in vollkommenem Gleichgewicht erhalten; denn es ist nach 119):

120) $Q \cdot \sin A = \Sigma(K \cdot \sin \alpha)$; $Q \cdot \cos A = \Sigma(K \cdot \cos \alpha)$,

folglich in Bezug auf fortschreitende Bewegung:

$$\Sigma(K \cdot \sin \alpha) - (Q \cdot \sin A) = 0$$

$$\Sigma(K \cdot \cos \alpha) - (Q \cdot \cos A) = 0,$$

welche Gleichungen zeigen, daſs durch die beiden Kräfte Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung hergestellt ist, und da in Bezug auf drehende Bewegung um die Axe Z die Hebelsarme der Kräfte $- Q \cdot \sin A$ und $- Q \cdot \cos A$ beziehlich X und Y sind, so hat man:

$$\Sigma(KR_{,,,}) - Q \cdot \sin A \cdot X - Q \cdot \cos A \cdot Y =$$

$$\Sigma(KR_{,,,}) - (\sin A^2 + \cos A^2) \cdot \Sigma(KR_{,,,}) = 0,$$

(indem man nämlich für X und Y die oben bestimmten Werthe setzt) welche Gleichung zeigt, daſs keine Drehung um die Axe Z statt findet. Man hat aber in Bezug auf Drehung um die Axe Y, da die Kraft $- Q \cdot \sin A$ keine Drehung um diese Axe bewirkt, insofern sie mit derselben parallel ist:

$$\Sigma(K \cdot \cos \alpha \cdot z) - Q \cdot \cos A \cdot Z' = 0$$

(wenn man für Z' den oben angenommenen Werth setzt), und ebenso findet man in Bezug auf Drehung um die Axe X:

$$\Sigma(K \cdot \sin \alpha \cdot z) - Q \cdot \sin A \cdot Z = 0.$$

Man sieht also:

I. wenn Kräfte in parallelen Ebenen wirken, ohne selbst parallel zu sein, und wenn die Kräfte weder in Bezug auf fortschreitende Bewegung noch in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind: so ist die Wir-

*) Der Punkt q' ist in der Figur normal über oder unter dem Punkt q liegend zu denken; er deckt sich also mit dem Punkte q und konnte daher nicht besonders bezeichnet werden.

kung der Kräfte im Allgemeinen nur auf zwei Resultirende zurückzuführen, deren eine parallel mit der Axe der X ist, und der Gröſse nach durch den Werth $Q \cdot \cos A = \Sigma(K \cdot \cos\alpha)$ gegeben ist, wobei ihr Angriffspunkt die Koordinaten

$$120\,a)\left\{\begin{aligned} X &= \frac{\Sigma(KR_{,,,})}{Q} \cdot \sin A = \frac{[\Sigma(KR_{,,,})]\,[\Sigma(K \cdot \sin\alpha)]}{[\Sigma(K \cdot \cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K \cdot \sin\alpha)]^2} \\ Y &= \frac{\Sigma(KR_{,,,})}{Q} \cdot \cos A = \frac{[\Sigma(KR_{,,,})]\,[\Sigma(K \cdot \cos\alpha)]}{[\Sigma(K \cdot \cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K \cdot \sin\alpha)]^2} \\ Z' &= \frac{\Sigma(K \cdot \cos\alpha \cdot z)}{Q \cdot \cos A} = \frac{\Sigma(K \cdot \cos\alpha \cdot z)}{\Sigma(K \cdot \cos\alpha)} \end{aligned}\right.$$

hat, während die andere parallel mit der Axe der Y ist, sich durch $Q \cdot \sin A = \Sigma(K \cdot \sin\alpha)$ ausdrückt, und ihr Angriffspunkt durch die Koordinaten X und Y, welche dieselben wie die der ersten Kraft sind, und durch die Ordinate

$$120\,b)\ \left\{\ Z = \frac{\Sigma(K \cdot \sin\alpha \cdot z)}{Q \cdot \sin A} = \frac{\Sigma(K \cdot \sin\alpha \cdot z)}{\Sigma(K \cdot \sin\alpha)}\right.$$

gegeben ist.

Beachtet man, daſs die Axen X und Y ganz beliebig angenommen sind, nur durch die Bedingung bestimmt, daſs sie zu einander normal, und daſs sie in einer mit den Ebenen der Kräfte parallelen Ebene liegen sollen, so ergiebt sich, daſs die Wirkung sämmtlicher Kräfte in dem behandelten Falle sich immer auf zwei Resultirende zurückführen läſst, die in zwei mit den Kräften parallelen Ebenen liegen, zu einander normal sind, in den Ebenen aber gegen die Richtungen der gegebenen Kräfte eine ganz beliebige Lage haben können. Nimmt man diese Lage an, so sind die Axen beziehlich parallel mit den angenommenen Richtungen der beiden Resultirenden zu legen, und nun sind die Resultirenden und ihre Angriffspunkte durch die Gleichungen 120, 120a und 120b) zu bestimmen.

Wenn sich der Fall auf eine einzige Resultirende zurückführen lassen soll, so muſs sein:

$$Z = Z',$$

oder nach 120a) und 120b):

$$\frac{\Sigma(K \cdot \cos\alpha \cdot z)}{\Sigma(K \cdot \sin\alpha \cdot z)} = \frac{\Sigma(K \cdot \cos\alpha)}{\Sigma(K \cdot \sin\alpha)};$$

dies ist im Allgemeinen nur möglich, wenn entweder:

1) der Werth z sämmtlichen Summanden ein gemeinschaftlicher Faktor ist, der sich dann links fortheben läſst, d. h. wenn die Kräfte sämmt-

lich in ein und derselben Ebene liegen, und weder in Bezug auf fortschreitende noch *in Bezug* auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, oder:

2) wenn die Kräfte sämmtlich parallel sind, wobei sie in verschiedenen Ebenen liegen können, aber dabei nicht von Hause aus in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sein dürfen (vergl. § 74. S. 105), denn in diesem Falle ist $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ rechts und links in der Gleichung ein gemeinschaftlicher Faktor für alle Summanden, und die Gleichung wird vollkommen erfüllt. Wären aber die Kräfte in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht, so ginge die rechte Seite der Gleichung in die Form $\frac{0}{0}$ über, woraus sich nicht der Schlufs ziehen läfst, dafs nun auch $Z = Z'$ sein müsse.

Uebrigens läfst sich der in diesem Paragraphen behandelte allgemeine Fall auch zurückführen auf eine Resultirende und auf ein Kräftepaar. Denn (vgl. die Figur auf S. 109) bringen wir z. B. in dem Punkte q', der durch die Koordinaten X, Y, Z' (Gleichung 120a) gegeben ist, und in welchem die Resultirende $Q.\cos A = \Sigma(K.\cos\alpha)$ wirksam ist, zwei gleich grofse, der Richtung nach aber entgegengesetzte Kräfte an, welche parallel mit der Richtnng der Kraft $Q.\sin A$, folglich normal zu der Richtung der in dem Punkte q' wirkenden Kraft $Q.\cos A$ sind, und deren eine gleich $+Q.\sin A$, die andere gleich $-Q.\sin A$ ist, so wird in dem System in Bezug auf Gleichgewicht nichts geändert; nun aber läfst sich die Kraft $+Q.\sin A$ und $+Q.\cos A$ vereinigen zu der Resultirenden Q und es bleibt in dem Punkt q' somit wirksam die Kraft Q und die Kraft $-Q.\sin A$, welche mit der Kraft $Q.\sin A$ in dem Punkt q, der durch die Koordinaten X, Y, Z (Gleichung 120b) gegeben ist, parallel ist, folglich in einer Ebene liegt, und auch der Gröfse nach gleich, aber entgegengesetzt ist. Diese beiden Kräfte bilden also ein Kräftepaar. In ganz gleicher Weise kann man das System zurückführen auf die Kraft Q, welche in dem Punkte q angreift, und auf ein Kräftepaar $+Q.\cos A$ und $-Q.\cos A$, von dem die Kraft $-Q.\cos A$ in dem Punkte q wirksam zu denken ist. Da nun die Richtung der Axen X und Y in der dritten Projektionsebene beliebig zu nehmen ist (vergl. oben), so ist auch die Lage der Ebene, in welcher das Kräftepaar wirksam zu denken ist, gegen die Richtung von Q beliebig zu nehmen, nur mufs sie normal sein zu den Parallelebenen, in welchen die Kräfte liegen. Es ist also der behandelte Fall immer zurückzuführen:

II. auf eine der Gröfse und Richtung nach (Gleichung 119) bestimmte Kraft Q, deren Angriffspunkt durch die Koordinaten-Gleichung 120a) zu bestimmen ist, und auf ein Kräftepaar, welches in einer zu den Ebenen der Kräfte normalen Ebene liegt, die mit der Richtung von Q einen beliebig angenommenen Winkel A bildet. Die Kräfte dieses Kräftepaares sind $+Q.\cos A$ und $-Q.\cos A$, und es ist die Kraft $-Q.\cos A$ in demselben Angriffspunkt wirksam zu denken, in welchem die Kraft Q wirkt, während die Kraft $+Q.\cos A$ in einem normalen Abstande von diesem Angriffspunkt wirksam zu denken ist, der gleich:

$$121)\quad Z'-Z=\frac{\Sigma(K.\cos\alpha.z)}{\Sigma(K.\cos\alpha)}-\frac{\Sigma(K.\sin\alpha.z)}{\Sigma(K.\sin\alpha)}$$

ist; wobei unter α.... die Winkel zu verstehen sind, welche die Richtungen der Kräfte K... mit der Ebene machen, in welcher das Kräftepaar liegt; da nämlich diese Ebene parallel mit derselben Axe angenommen worden, mit welcher die Kräfte die Winkel α.... bilden. Das Moment dieses Kräftepaares ist offenbar:

$$121\text{a})\quad Q.\cos A.(Z'-Z)=\Sigma(K.\cos\alpha.z)-\Sigma(K.\sin\alpha.z).\operatorname{cotg}A$$

$$=\Sigma(K.\cos\alpha.z)-\Sigma(K.\sin\alpha.z)\frac{\Sigma(K.\cos\alpha)}{\Sigma(K.\sin\alpha)},$$

welches mit Benutzung der Gleichungen 121) und 119) folgt, und worin α.... die Winkel bezeichnen, welche die einzelnen Kräfte mit der Ebene machen, in welche das Kräftepaar liegt.

Sind die Kräfte parallel, so folgt, wie leicht ersichtlich, das Moment des Kräftepaars gleich Null, und man kann das System auf eine Resultirende zurückführen.

Da nun der Winkel, welchen das Kräftepaar mit der Richtung von Q macht, ein beliebiger sein kann, so kann man ihn auch gleich einem Rechten nehmen, d. h. man kann auch die eine der beiden Axen mit der Resultirenden Q parallel, die andere normal zu derselben nehmen. Allein für diesen Fall reichen die Gleichungen 120), 120a) und 120b) nicht aus, um die Lage der Angriffspunkte zu bestimmen, da dieselben für $A=90$ Grad $\cos A=0$, folglich die Ordinate $Z'=\infty$ liefern würden. Man sieht leicht, wie in diesem Fall zu verfahren ist. Nehmen wir die erste Axe normal zur Resultirenden der fortschreitenden Bewegung und folglich die zweite Axe parallel mit dieser Richtung, so folgt (Gleichung 119):

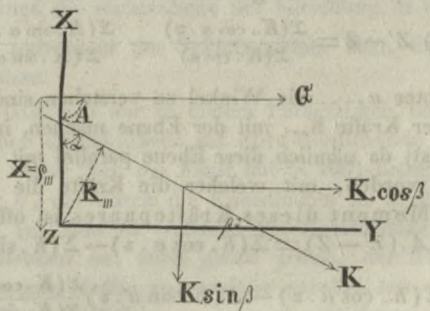
$$Q=\Sigma(K.\sin\alpha)$$
$$\Sigma(K.\cos\alpha)=0,$$

worin α.... die Winkel bezeichnen, welche die Kräfte mit der ersten Axe machen. Führt man lieber die Winkel β.... ein, welche die Kräfte mit der zweiten Axe, oder was dasselbe ist, mit der Richtung von Q machen, so hat man:

$$122) \quad \begin{aligned} Q &= \Sigma(K.\cos\beta) \\ \Sigma(K.\sin\beta) &= 0. \end{aligned}$$

Soll nun die Kraft Q so liegen, daſs sie auch Gleichgewicht gegen drehende Bewegung herstellt*), so hat man in Bezug auf Drehung um die Axe Z:

$$122\text{a}) \quad \Sigma(KR_{,,,}) - Q.X = 0,$$



in Bezug auf Drehung um die Axe XZ:

$$122\text{b}) \quad \Sigma(K.\cos\beta.z) - Q.Z = 0.$$

Allein in Bezug auf Drehung um die Axe ZY kann die Kraft Q unter keinen Umständen das Gleichgewicht herstellen, da sie parallel mit dieser Axe ist; man muſs also, um dieses Gleichgewicht herzustellen, und dabei andrerseits nicht das Gleichgewicht in Bezug auf fortschreitende Bewegung zu stören, zwei neue Kräfte $+P$ und $-P$ einführen, welche in einer Ebene liegen, die normal zu der Axe ZY ist, und welche die *Bedingungs-Gleichung* erfüllen:

$$122\text{c}) \quad \begin{aligned} \Sigma(K.\sin\beta.z) + P.Z' - P.Z'' &= 0. \\ \Sigma(K.\sin\beta.z) - P(Z'' - Z') &= 0. \end{aligned}$$

III. Man kann also den Fall, daſs die Kräfte, welche auf ein festes System wirken, zwar in parallelen Ebenen liegen, aber nicht selbst parallel sind, während unter ihnen weder in Bezug auf fortschreitende noch in Bezug auf drehende Bewegung Gleichgewicht statt fin-

*) Vergl. S. 90.

det, immer auf eine Kraft Q, welche der Richtung und Gröſse nach durch die Gleichungen 119) gegeben ist, und auf ein Kräftepaar, welches in einer zu der Richtung Q normalen Ebene liegt, zurückführen.

Hat man Q der Richtung und Gröſse nach bestimmt, so findet man die Koordinaten des Angriffspunktes, nämlich

1) den Abstand X von einer mit der Richtung von Q parallelen und zu den Parallelebenen der Kräfte normalen Ebene (ZY) aus 122a):

$$X = \frac{\Sigma(KR_{,,,})}{Q} = \frac{\Sigma(KR_{,,,})}{\Sigma(K.\cos\beta)},$$

worin $R_{,,,}$ die kürzesten Abstände der Kraftrichtungen K... von einer in dieser Ebene liegenden, zu den Parallelebenen der Kräfte normalen Axe bezeichnet,

2) den Abstand der Ebene, in welcher Q liegt, und welche mit den Ebenen der Kraftrichtungen parallel ist, von irgend einer mit dieser Ebene parallelen Ebene (Grundebene): 122b):

$$Z = \frac{\Sigma(K.\cos\beta.z)}{Q} = \frac{\Sigma(K.\cos\beta.z)}{\Sigma(K.\cos\beta)},$$

worin β.... den Winkel bezeichnet, welchen die Kraftrichtungen mit der Richtung von Q machen, z.... aber die Abstände der Angriffspunkte der Kräfte von der Grundebene sind.

3) Die Koordinate Y, welche die Lage des Angriffspunktes von Q in der Richtung der Kraft Q angeben würde, bleibt unbestimmt, und man kann folglich jeden Punkt der Kraftrichtung Q, als Angriffspunkt betrachten.

4) Für die Bestimmung des Kräftepaars hat man die Bedingung, daſs dasselbe in einer Ebene liegen müsse, welche zu der Richtung der Kraft Q normal ist, und die Gleichung 122c), aus welcher folgt für das Moment des Kräftepaars:

$$P(Z''-Z') = \Sigma(K.\sin\beta.z),$$

so daſs man von den beiden Werthen P und $(Z''-Z')$ einen beliebig annehmen kann. Dieser Ausdruck folgt auch aus der allgemeinen Gleichung 121a), indem man beachtet, daſs $\Sigma(K.\cos\alpha) = 0$ ist.

Betrachten wir nun den Fall:

B. daſs die Kräfte zwar in Bezug auf drehende Bewegung, nicht aber in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind.

Die Resultirende gegen fortschreitende Bewegung ist der Lage und Richtung nach auch in diesem Falle durch die Gleichungen 119) zu bestimmen, da aber zufolge der Bedingung, dafs die Kräfte gegen drehende Bewegung im Gleichgewicht sein sollen, ihre Momente für drei Axen gleich Null sind, so folgt nach Gleichung 119a) auch $\varrho_{\prime} = 0$, $\varrho_{\prime\prime} = 0$, $\varrho_{\prime\prime\prime} = 0$, d. h. der Angriffspunkt der Resultirenden mufs im Anfangspunkte des Koordinatensystems liegen, oder so dafs er den Bedingungen entspricht, welche in Folge der Gleichungen 117) für den analogen Fall paralleler Kräfte aufgestellt worden sind (S. 104). In diesem Fall ist also eine Resultirende denkbar.

C. Wenn endlich auf ein festes System Kräfte wirken, deren Richtungslinien zwar in parallelen Ebenen liegen, aber nicht unter einander parallel sind, und wenn die Kräfte zwar in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind, aber nicht in Bezug auf drehende Bewegung, so läfst sich die Wirkung der Kräfte immer nur auf ein Kräftepaar zurückführen.

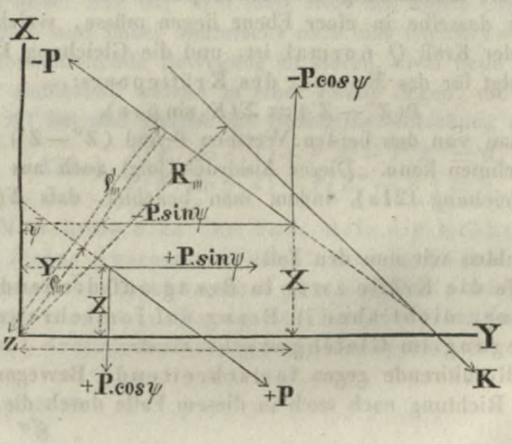
Die Gleichungen 119) nehmen für den gegebenen Fall die Form an:

$$\Sigma(K \,.\, \sin\alpha) = 0; \quad \Sigma(K \,.\, \cos\alpha) = 0,$$

und die Gleichungen in Bezug auf Drehung haben die Form:

$$\Sigma(K \,.\, \sin\alpha \,.\, z) = A, \quad \Sigma(K \,.\, \cos\alpha \,.\, z) = B, \quad \Sigma(K \,.\, R_{\prime\prime\prime}) = C,$$

wenn wir die früheren Bezeichnungen, und die zu Anfange dieses Paragraphen angenommene Lage der Koordinatenebenen gelten lassen. Man sieht leicht, dafs das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung nur durch ein Kräftepaar $+P$ und $-P$ herzustel-



len ist, dessen Kräfte in Ebenen liegen, die mit den Parallelebenen der Kräfte parallel sind, denn wollte man nur eine einzige Kraft einführen, so würde durch dieselbe das Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung gestört werden. Bezeichnen wir den Abstand des Angriffspunkts von $+P$ von der Grundebene mit Z, denjenigen von $-P$ mit Z', den Winkel, welcher die Richtung von P mit der ersten Axe macht, mit ψ; ferner den Hebelsarm in Bezug auf die Axe Z von $+P$ mit $\varrho_{\prime\prime\prime}$, denjenigen von $-P$ mit $\varrho'_{\prime\prime\prime}$, so folgt, wenn die Kräfte $+P$ und $-P$ die Resultirenden der drehenden Bewegung sein sollen:

$$\text{a)}\ \Sigma(K.\sin\alpha.z) = P.\sin\psi\,(Z-Z'),$$

$$\text{b)}\ \Sigma(K.\cos\alpha.z) = P.\cos\psi\,(Z-Z'),$$

$$\text{c)}\ \Sigma(KR_{\prime\prime\prime}) = P(\varrho_{\prime\prime\prime}-\varrho'_{\prime\prime\prime}).$$

Aus den Gleichungen a) und b) folgt:

$$123)\ \operatorname{tang}\psi = \frac{\Sigma(K.\sin\alpha.z)}{\Sigma(K.\cos\alpha.z)},$$

durch welche Gleichung die Lage der Durchschnittslinie der Ebene, welche man durch die Kraftrichtungen des Kräftepaars legen kann, mit der Grundebene (ersten Projektionsebene) gegen die Axen XZ und YZ vollkommen bestimmt ist. Nennen wir nun den Neigungswinkel der Ebene, in welcher das Kräftepaar liegt, mit der Grundebene φ, so ist, wie leicht ersichtlich:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{(Z-Z')}{(\varrho_{\prime\prime\prime}-\varrho'_{\prime\prime\prime})} = \frac{(Z-Z')}{\Sigma(KR_{\prime\prime\prime})}\cdot\frac{1}{P};$$

(vermöge Gleichung c). Indem wir aber die Gleichungen a) und b) quadriren, addiren, und $Z-Z'$ entwickeln, folgt:

$$(Z-Z') = \frac{1}{P}\cdot\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\alpha.z)]^2 + [\Sigma(K.\cos\alpha.z)]^2\right\}}$$

$$123\text{a)}\ \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\alpha.z)]^2+[\Sigma(K.\cos\alpha.z)]^2\right\}}}{\Sigma(KR_{\prime\prime\prime})}.$$

Durch die Gleichungen 123 und 123a) ist die Lage der Ebene, in welcher das Kräftepaar wirksam zu denken ist, der Richtung nach vollkommen bestimmt. Der kürzeste Abstand der beiden Kraftrichtungen $+P$ und $-P$ ist aber, wie die Figur leicht übersehen läſst, gleich

$$\sqrt{\left\{(Z-Z')^2 + (\varrho_{\prime\prime\prime}-\varrho'_{\prime\prime\prime})^2\right\}},$$

und indem wir die Werthe für $(Z-Z')^2$ und $(\varrho_{\prime\prime\prime}-\varrho'_{\prime\prime\prime})^2$ einsetzen und mit P multipliziren, folgt das Moment des Kräftepaars:

$$123\text{b)}\ \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\alpha.z)]^2+[\Sigma(K.\cos\alpha.z)]^2+[\Sigma(KR_{\prime\prime\prime})]^2\right\}}.$$

Bezeichnen wir den Abstand der beiden Kraftrichtungen mit a, die Koordinaten des Angriffspunktes der einen von beiden Gegenkräften $(+P)$ mit X, Y, Z, so sind, wie sich leicht übersehen läfst, die Koordinaten des Angriffspunkts der andern Gegenkraft $(-P)$:

$$123\text{c})\quad Z' = Z + a \,.\, \sin\varphi;\quad Y' = Y + a \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\psi;$$
$$X' = X + a \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin\psi.$$

Für den Fall, dafs sämmtliche Kraftrichtungen parallel sind, folgt aus 123), 123a) und 123b):

$$124)\quad \begin{cases} \text{tang}\,\psi = \text{tang}\,\alpha \\ \text{tang}\,\varphi = \dfrac{\Sigma(Kz)}{\Sigma(K.R_{'''})}, \end{cases}$$

und das Moment des Kräftepaars:

$$124\text{a})\quad \sqrt{\left\{[\Sigma(Kz)]^2 + [\Sigma(KR_{'''})]^2\right\}},$$

in welchen Gleichungen z die Abstände der Angriffspunkte der einzelnen parallelen Kräfte von einer beliebigen mit ihrer Richtung parallelen Ebene und $R_{''''}$ die Hebelsarme in Bezug auf eine beliebige, und zu dieser Ebene normale, Axe bezeichnen.

In dem Falle endlich, wo sämmtliche Kräfte in ein und derselben Ebene liegen, folgt:

$$125)\quad \begin{cases} \text{tang}\,\psi = \dfrac{z \,.\, \Sigma(K \,.\, \sin\alpha)}{z \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha)} = \dfrac{0}{0} \\ \text{tang}\,\varphi = 0, \end{cases}$$

und das Moment des Kräftepaares:

$$125\text{a}) = \Sigma(K \,.\, R_{'''}),$$

d. h. in diesem Fall bleibt die Neigung des Kräftepaares (Winkel ψ) gegen die Axe XZ unbestimmt und kann beliebig genommen werden, das Kräftepaar, welches für die Wirkung der Kräfte substituirt werden kann, liegt in derselben Ebene, in welcher die Kräfte liegen, $(\varphi = 0)$ und es ist das Moment des Kräftepaares gleich der Summe der Momente sämmtlicher auf Drehung wirkenden Kräfte in Bezug auf eine beliebige zur Ebene der Kräfte normale Axe.

Bestimmung der Resultirenden und ihres Angriffspunktes für Kräfte, welche auf ein festes System wirken, und deren Richtungslinien eine beliebige Lage haben.

§ 76. Wir wenden uns nun zu dem allgemeinsten Fall, nämlich zu dem, dafs auf ein festes System beliebige Kräfte in ganz beliebigen Richtungen wirken, und dafs es darauf ankommt, ihre Resultirende der Gröfse und Richtung nach zu bestimmen.

Wenn zunächst:

A. **die Kräfte weder in Bezug auf drehende noch in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind:**

so können wir, indem wir drei beliebige Koordinatenebenen annehmen, die Resultirende der fortschreitenden Bewegung Q der Gröfse und Richtung nach bestimmen nach § 71 und mittelst der Gleichungen 110) und 111).

Um nun aber den Angriffspunkt der Resultirenden zu finden, denken wir uns sämmtliche Kräfte in den einzelnen Angriffspunkten nach drei zu einander normalen Richtungen zerlegt, die Komponenten parallel mit den drei Axen sind dann:

$$K.\cos\alpha\ldots,\quad K.\cos\beta\ldots,\quad K.\cos\gamma\ldots,$$

Nun haben wir drei Gruppen paralleler Kräfte, für die wir nach § 74 und Gleichung 117a) drei Resultirende einführen können. Es seien $Q_{,}$ die Resultirende aller parallelen Kräfte $K.\cos\alpha\ldots$ und X, Y, Z die Koordinaten ihres Angriffspunktes; in ähnlicher Weise bezeichnen $Q_{,,}$ und $Q_{,,,}$ die Resultirenden der parallelen Kräfte $K.\cos\beta\ldots$ und $K.\cos\gamma\ldots$ und $X_{,,}$, $Y_{,,}$, $Z_{,,}$ beziehlich $X_{,,,}$, $Y_{,,,}$, $Z_{,,,}$ die Koordinaten ihrer Angriffspunkte. Wir haben dann:

$$126)\quad \begin{cases} Q_{,}=\Sigma(K.\cos\alpha), & Q_{,,}=\Sigma(K.\cos\beta), \quad Q_{,,,}=\Sigma(K.\cos\gamma) \\ X_{,}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.x)}{\Sigma(K.\cos\alpha)}, & X_{,,}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\beta.x)}{\Sigma(K.\cos\beta)}, \quad X_{,,,}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\gamma.x)}{\Sigma(K.\cos\gamma)} \\ Y_{,}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.y)}{\Sigma(K.\cos\alpha)}, & Y_{,,}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\beta.y)}{\Sigma(K.\cos\beta)}, \quad Y_{,,,}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\gamma.y)}{\Sigma(K.\cos\gamma)} \\ Z_{,}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.z)}{\Sigma(K.\cos\alpha)}, & Z_{,,}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\beta.z)}{\Sigma(K.\cos\beta)}, \quad Z_{,,,}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\gamma.z)}{\Sigma(K.\cos\gamma)}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen zeigen folgendes Gesetz:

I. **Wenn auf ein festes System beliebig viele Kräfte einwirken, welche weder in Bezug auf fortschreitende noch in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, so läfst sich ihre Wirkung immer auf drei einzelne Kräfte zurückführen, deren Richtungen einzeln parallel sind mit drei beliebig angenommenen zu einander normalen Axen, und deren Angriffspunkte vollständig durch die Gleichung 126) bestimmt sind.**

Da nun die Richtung der Resultirenden der fortschreitenden Bewegung Q durch die Gleichungen 110) und 111) vollkommen bestimmt ist, so können wir jede dieser drei Kräfte, auf welche wir so eben das System zurückgeführt haben, zerlegen nach zwei Richtungen, von welchen eine parallel mit der Richtung von Q, die andere aber normal dazu ist, wir erhalten dann zwei Gruppen von Kräften, nämlich eine Gruppe, bestehend aus drei Kräften, die unter sich und mit der Richtung von Q parallel sind, und eine andere Gruppe von drei Kräften, welche in Ebenen liegen, die normal zu der Richtung von Q sind, welche folglich in parallelen Ebenen liegen. Da die Resultirende mit den Axen die Winkel A, B, Γ bildet, so bildet sie dieselben Winkel der Reihe nach auch mit den drei Kräften $Q_{,}$, $Q_{,,}$, $Q_{,,,}$, welche der Reihe nach mit diesen Axen parallel sind. Hiernach haben wir die beiden Gruppen:

parallel mit Q:	normal zu Q:
$Q_{,}\,.\cos A = Q\,.\cos A^2,$	$Q_{,}\,.\sin A = Q\,.\cos A\,.\sin A,$
$Q_{,,}\,.\cos B = Q\,.\cos B^2,$	$Q_{,,}\,.\sin B = Q\,.\cos B\,.\sin B,$
$Q_{,,,}\,.\cos \Gamma = Q\,.\cos \Gamma^2,$	$Q_{,,,}\,.\sin \Gamma = Q\,.\cos \Gamma\,.\sin \Gamma.$

Die Kräfte der ersten Gruppe lassen sich durch die Gleichungen 110) und 111) vereinigen. Es ist ihre Resultante (Gleichung 110), 111) und 112):

$$Q_{,}\,.\cos A + Q_{,,}\,.\cos B + Q_{,,,}\,.\cos \Gamma =$$
$$\frac{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2}{Q} + \frac{[\Sigma(K.\cos\beta)]^2}{Q} + \frac{[\Sigma(K.\cos\gamma)]^2}{Q} =$$

$$127)\quad Q = \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K.\cos\beta)]^2 + [\Sigma(K.\cos\gamma)]^2\right\}}.$$

Der Angriffspunkt dieser Resultante ergiebt sich nach 117a), wenn wir die Koordinaten mit X, Y, Z bezeichnen:

$$128)\quad \begin{cases} X = \dfrac{Q_{,}\,.\cos A\,.\,X_{,} + Q_{,,}\,.\cos B\,.\,X_{,,} + Q_{,,,}\,.\cos \Gamma\,.\,X_{,,,}}{Q_{,}\,.\cos A + Q_{,,}\,.\cos B + Q_{,,,}\,.\cos \Gamma} \\[2ex] Y = \dfrac{Q_{,}\,.\cos A\,.\,Y_{,} + Q_{,,}\,.\cos B\,.\,Y_{,,} + Q_{,,,}\,.\cos \Gamma\,.\,Y_{,,,}}{Q_{,}\,.\cos A + Q_{,,}\,.\cos B + Q_{,,,}\,.\cos \Gamma} \\[2ex] Z = \dfrac{Q_{,}\,.\cos A\,.\,Z_{,} + Q_{,,}\cos B\,.\,Z_{,,} + Q_{,,,}\,.\cos \Gamma\,.\,Z_{,,,}}{Q_{,}\,.\cos A + Q_{,,}\,.\cos B + Q_{,,,}\,.\cos \Gamma}. \end{cases}$$

Setzen wir in diese Gleichungen die Werthe der Gleichungen 126) für $Q_{,}$, $Q_{,,}$, $Q_{,,,}$; $X_{,}$, $X_{,,}$, $X_{,,,}$ etc., so ergiebt sich mit Berücksichtigung, dafs nach Gleichung 111)

$$\cos A = \frac{\Sigma(K.\cos\alpha)}{Q},\quad \cos B = \frac{\Sigma(K.\cos\beta)}{Q},\quad \cos \Gamma = \frac{\Sigma(K.\cos\gamma)}{Q}$$

ist:

128a)

$$X = \frac{\Sigma(K.\cos\alpha.x).\Sigma(K.\cos\alpha)+\Sigma(K.\cos\beta.x).\Sigma(K.\cos\beta)+\Sigma(K.\cos\gamma.x).\Sigma(K.\cos\gamma)}{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2+[\Sigma(K.\cos\beta)]^2+[\Sigma(K.\cos\gamma)]^2}$$

$$Y = \frac{\Sigma(K.\cos\alpha.y).\Sigma(K.\cos\alpha)+\Sigma(K.\cos\beta.y).\Sigma(K.\cos\beta)+\Sigma(K.\cos\gamma.y).\Sigma(K.\cos\gamma)}{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2+[\Sigma(K.\cos\beta)]^2+[\Sigma(K.\cos\gamma)]^2}$$

$$Z = \frac{\Sigma(K.\cos\alpha.z).\Sigma(K.\cos\alpha)+\Sigma(K.\cos\beta.z).\Sigma(K.\cos\beta)+\Sigma(K.\cos\gamma.z).\Sigma(K.\cos\gamma)}{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2+[\Sigma(K.\cos\beta)]^2+[\Sigma(K.\cos\gamma)]^2}$$

Es ist übrigens leicht zu übersehen, dafs der hier bestimmte Angriffspunkt der Resultirenden dieser drei parallelen Kräfte in der Ebene liegen mufs, welche durch die Angriffspunkte der drei Kräfte gelegt werden kann, denn läge er aufserhalb dieser Ebene und zerlegte man die sämmtlichen Kräfte in zwei andere, parallel und normal zu der Ebene, so würde diejenige Komponente der Mittelkraft, welche parallel mit der Ebene ist, und deren Angriffspunkt aufserhalb der Ebene läge, einen Hebelsarm in Bezug auf eine in der Ebene liegende, und die Richtungen der Komponenten der drei Kräfte, deren Angriffspunkte in der Ebene liegen, schneidende Axe haben, während diese Komponenten einen Hebelsarm in Bezug auf diese Axe nicht hätten; es würde also durch die Mittelkraft Gleichgewicht gegen drehende Bewegung nicht hergestellt werden.

Betrachten wir jetzt die zweite Gruppe der Komponenten, deren Richtungen in Ebenen liegen, welche zur Richtung der Resultirenden der fortschreitenden Bewegung normal sind, so können diese Kräfte keine fortschreitende Bewegung bedingen, wohl aber ist eine drehende Bewegung denkbar. Wir haben es also mit Kräften zu thun, die dem im vorigen Paragraphen unter C. behandelten Fall entsprechen, und für welche ein Kräftepaar substituirt werden kann. Um die Verhältnisse dieses Kräftepaares zu bestimmen, denken wir uns irgend eine Ebene, welche normal zu der Richtung von Q ist, nennen den normalen Abstand des Angriffspunktes $Q_{,}$ von dieser Ebene $Z_{,}^{0}$, den normalen Abstand der Angriffspunkte $Q_{,,}$ und $Q_{,,,}$ von derselben Ebene $Z_{,,}^{0}$, $Z_{,,,}^{0}$, denken ferner in der Ebene eine beliebige Axe, und bezeichnen die Winkel, welchen die Richtungslinien von $Q_{,}.\sin A$ mit dieser Axe bildet mit $\alpha_{,}^{0}$, ebenso die Winkel, welche die Richtungslinien der Kräfte $Q_{,,}.\sin B$ und $Q_{,,,}.\sin \Gamma$ mit derselben Axe bilden mit $\alpha_{,,}^{0}$, $\alpha_{,,,}^{0}$, so ergiebt sich der Neigungswinkel der Durchschnittslinie der Ebene des Kräftepaars mit jener Axe ψ nach 123:

$$\tang \psi = \frac{Z_{\prime}{}^{0} Q_{\prime} . \sin A . \sin \alpha_{\prime}{}^{0} + Z_{\prime\prime}{}^{0} Q_{\prime\prime} . \sin B . \sin \alpha_{\prime\prime}{}^{0} + Z_{\prime\prime\prime}{}^{0} Q_{\prime\prime\prime} . \sin \Gamma . \sin \alpha_{\prime\prime\prime}{}^{0}}{Z_{\prime}{}^{0} Q_{\prime} . \sin A . \cos \alpha_{\prime}{}^{0} + Z_{\prime\prime}{}^{0} Q_{\prime\prime} . \sin B . \cos \alpha_{\prime\prime}{}^{0} + Z_{\prime\prime\prime}{}^{0} Q_{\prime\prime\prime} . \sin \Gamma . \cos \alpha_{\prime\prime\prime}{}^{0}}$$

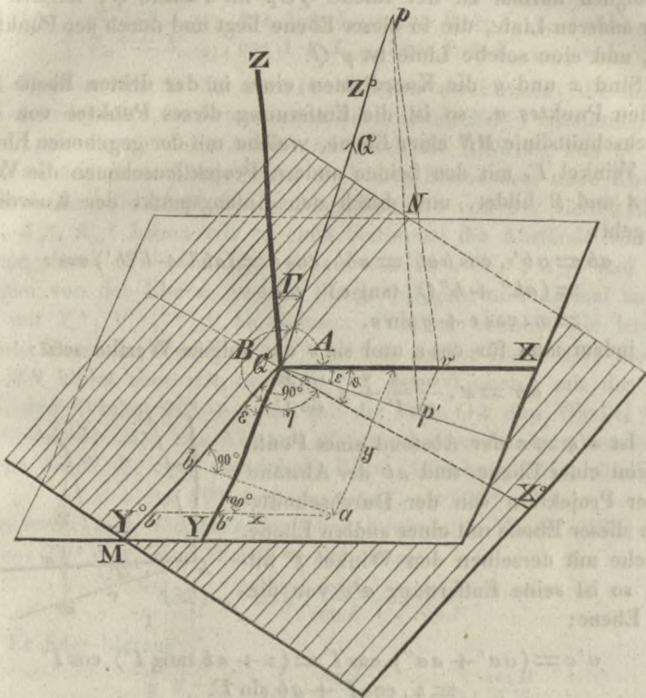
und in ähnlicher Weise läfst sich der Neigungswinkel φ der Ebene des Kräftepaares gegen die Richtung von Q nach 123a), sowie das Moment des Kräftepaares nach 123b) finden. Wollte man die in diesen Gleichungen vorkommenden Werthe analytisch ausdrücken, so kompliciren sich die Ausdrücke so sehr, dafs sie ihren Werth als Formeln für den Gebrauch verlieren, und es besser ist in jedem einzelnen Falle die Rechnung besonders durchzuführen. Um diese Rechnung zu erleichtern, dürfte folgender Weg zu empfehlen sein.

Wir verlegen den Anfangspunkt des ursprünglichen Koordinatensystems in den Angriffspunkt von Q. Es sind sodann die Koordinaten der drei Angriffspunkte $Q_{\prime}$, $Q_{\prime\prime}$, $Q_{\prime\prime\prime}$ durch die Gleichungen zu finden:

$$129) \left\{ \begin{array}{lll} X_{\prime(\varrho)} = X_{\prime} - X, & Y_{\prime(\varrho)} = Y_{\prime} - Y, & Z_{\prime(\varrho)} = Z_{\prime} - Z, \\ X_{\prime\prime(\varrho)} = X_{\prime\prime} - X, & Y_{\prime\prime(\varrho)} = Y_{\prime\prime} - Y, & Z_{\prime\prime(\varrho)} = Z_{\prime\prime} - Z, \\ X_{\prime\prime\prime(\varrho)} = X_{\prime\prime\prime} - X, & Y_{\prime\prime\prime(\varrho)} = Y_{\prime\prime\prime} - Y, & Z_{\prime\prime\prime(\varrho)} = Z_{\prime\prime\prime} - Z. \end{array} \right.$$

Legen wir nun durch den Angriffspunkt von Q, also durch den Anfangspunkt des neuen Koordinatensystems eine Ebene normal zur Richtung von Q (vierte Ebene), so bildet diese Ebene mit den Ebenen, in welchen die Axen X und Y liegen (dritte Ebene), den Winkel Γ mit der Ebene, in welcher die Axen X und Z (zweite Ebene) liegen, den Winkel B, und mit der Ebene, in welcher die Axen Y und Z (erste Ebene) liegen, den Winkel A; denn der Winkel, welchen zwei Ebenen bilden, wird gemessen durch den Winkel, welchen zwei Linien einschliefsen, die in einem Punkte der Durchschnittslinie einzeln normal auf den Ebenen sind. Der Angriffspunkt von Q ist aber ein Punkt der Durchschnittslinien der vier Ebenen, die Richtung Q ist normal auf der vierten Ebene, die Axe der Z ist normal auf der Ebene, in welcher die Axen der X und der Y liegen, folglich macht diese Ebene mit der vierten Ebene den Winkel, welcher die Richtung von Q mit der Axe der Z bildet, d. i. den Winkel Γ etc.

Projiciren wir die Richtung von Q auf die Ebene, in welcher die Axen der X und der Y liegen, und bezeichnen wir den Winkel, welcher die Projektion Qp' mit der Axe X bildet, mit ε, ziehen von p, die Normale $p'v$ auf die Axe X und verbinden pv, so ist auch pv normal zu QX, und daher:



$$130)\quad \cos\varepsilon = \frac{Qv}{Qp'} = \frac{Qp \, . \cos A}{Qp \, . \sin(Qpp')} = \frac{\cos A}{\sin(p\,QZ)} = \frac{\cos A}{\sin \Gamma}.$$

Ebenso findet man:

$$\cos(p'QY) = \frac{\cos B}{\sin \Gamma} = \sin\varepsilon,$$

d. h. der **Kosinus** des Winkels, welchen die **Projektion einer Linie** auf eine Ebene mit einer in dieser Ebene liegenden Axe macht, ist gleich dem Quotienten aus dem Kosinus des Winkels, welchen die Linie selbst mit derselben Axe macht, durch den Sinus des Winkels, welchen die Linie mit einer zu der Ebene normalen Axe macht; ähnlich läfst sich eine Regel für den **Sinus** ableiten.

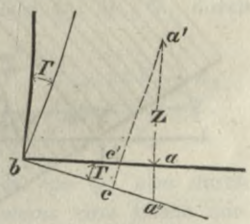
Die **Durchschnittslinie** MN, zwischen der vierten Ebene und der dritten Ebene, ist normal zu der Projektion Qp', denn, da sie in der vierten Ebene liegt, so ist sie normal auf pQ, und da sie auch in der dritten Ebene liegt, so ist sie normal zu QZ, sie ist folglich normal zu der Ebene QZp im Punkte Q, folglich zu jeder anderen Linie, die in dieser Ebene liegt und durch den Punkt Q geht, und eine solche Linie ist $p'Q$.

Sind x und y die Koordinaten eines in der dritten Ebene liegenden Punktes a, so ist die Entfernung dieses Punktes von der Durchschnittslinie MN einer Ebene, welche mit der gegebenen Ebene den Winkel Γ, mit den beiden andern Projektionsebenen die Winkel A und B bildet, und durch den Anfangspunkt der Koordinaten geht:

$$\begin{aligned} ab &= ab' \,.\, \cos bab' = ab' \,.\, \cos \varepsilon = (ab'' + b''b') \cos \varepsilon \\ &= (ab'' + b''Q \,.\, \mathrm{tang}\, \varepsilon) \,.\, \cos \varepsilon \\ &= x \,.\, \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon, \end{aligned}$$

und indem man für $\cos \varepsilon$ und $\sin \varepsilon$ die obigen Werthe setzt:

$$ab = x \,.\, \frac{\cos A}{\sin \Gamma} + y \frac{\cos B}{\sin \Gamma}.$$



Ist $a'a = z$ der Abstand eines Punktes von einer Ebene, und ab der Abstand seiner Projektion von der Durchschnittslinie dieser Ebene mit einer andern Ebene, welche mit derselben den Winkel Γ bildet, so ist seine Entfernung $a'c$ von dieser Ebene:

$$\begin{aligned} a'c &= (aa' + aa'') \cos \Gamma = (z + ab \,\mathrm{tang}\, \Gamma) \cos \Gamma \\ &= z \,.\, \cos \Gamma + ab \sin \Gamma. \end{aligned}$$

Setzen wir für ab den vorhin bestimmten Werth, und bezeichnen wir den Abstand $a'c$ mit z^0, so ist:

$$131) \quad z^0 = z \,.\, \cos \Gamma + x \cos A + y \cos B,$$

d. h. der Abstand eines Punktes, dessen Koordinaten x, y und z sind von einer Ebene, die im Anfangspunkt des Koordinatensystems normal steht auf einer durch den Anfangspunkt des Koordinaten gehenden, und mit den drei Koordinatenaxen die Winkel A, B, Γ bildenden Linie, ist gleich der Summe der Produkte, welche gebildet werden, wenn man jede der drei Koordinaten einzeln mit dem Kosinus des Winkels multiplizirt, welcher die Richtung jener Linie mit derjenigen Axe bildet, mit welcher die betreffende Koordinate parallel ist.

Hiernach hat man die Abstände der Angriffspunkte der Kräfte $Q_{,}$, $Q_{,,}$ und $Q_{,,,}$ von der Ebene, welche im Angriffspunkt von Q normal zu der Richtung der Mittelkraft Q gedacht ist:

$$131a) \begin{cases} Z_{\prime}{}^{0} = X_{\prime(\varrho)} \cdot \cos A + Y_{\prime(\varrho)} \cdot \cos B + Z_{\prime(\varrho)} \cdot \cos \Gamma \\ Z_{\prime\prime}{}^{0} = X_{\prime\prime(\varrho)} \cdot \cos A + Y_{\prime\prime(\varrho)} \cdot \cos B + Z_{\prime\prime(\varrho)} \cdot \cos \Gamma \\ Z_{\prime\prime\prime}{}^{0} = X_{\prime\prime\prime(\varrho)} \cdot \cos A + Y_{\prime\prime\prime(\varrho)} \cdot \cos B + Z_{\prime\prime\prime(\varrho)} \cdot \cos \Gamma. \end{cases}$$

Denken wir in der vierten Ebene zwei Axen, die normal auf einander sind, und von denen die eine mit MN*) zusammenfällt; legen wir durch diese Axen und durch die Richtung von Q Ebenen, so sind diese Ebenen und die vierte Ebene drei neue Koordinatenebenen, die Abstände der Angriffspunkte von der vierten Ebene $Z_{\prime}{}^{0}$, $Z_{\prime\prime}{}^{0}$, $Z_{\prime\prime\prime}{}^{0}$ haben wir so eben bestimmt; die Abstände von der Ebene durch MN und Qp wollen wir $X_{\prime}{}^{0}$, $X_{\prime\prime}{}^{0}$, $X_{\prime\prime\prime}{}^{0}$ und diejenigen von der Ebene, welche durch Qp geht und normal zu MN ist, mit $Y_{\prime}{}^{0}$, $Y_{\prime\prime}{}^{0}$, $Y_{\prime\prime\prime}{}^{0}$ bezeichnen. Nun ist offenbar die letztgenannte Ebene in dem Punkte Q normal zu der Linie MN; die Linie MN bildet aber mit der Axe QY den Winkel ε mit der Axe QX, den Winkel $90^{0} + \varepsilon$ und mit der Axe QZ den Winkel 90^{0}, folglich findet man den Abstand y^{0} irgend eines Punktes von dieser Ebene dnrch die oben entwickelte Regel (Gleichung 131), nämlich:

$$y^{0} = z \cdot \cos 90^{0} + y \cdot \cos \varepsilon + x \cdot \cos (90^{0} + \varepsilon),$$

oder wenn man für $\cos \varepsilon$ den oben bestimmten Werth (130) und für $\cos (90^{0} + \varepsilon)$ den Werth $- \sin \varepsilon$ setzt:

$$132) \quad y^{0} = y \cdot \frac{\cos A}{\sin \Gamma} - x \frac{\cos B}{\sin \Gamma}.$$

Es folgt hieraus:

$$132a) \begin{cases} Y_{\prime}{}^{0} = Y_{\prime(\varrho)} \cdot \dfrac{\cos A}{\sin \Gamma} - X_{\prime(\varrho)} \cdot \dfrac{\cos B}{\sin \Gamma} \\ Y_{\prime\prime}{}^{0} = Y_{\prime\prime(\varrho)} \cdot \dfrac{\cos A}{\sin \Gamma} - X_{\prime\prime(\varrho)} \cdot \dfrac{\cos B}{\sin \Gamma} \\ Y_{\prime\prime\prime}{}^{0} = Y_{\prime\prime\prime(\varrho)} \cdot \dfrac{\cos A}{\sin \Gamma} - X_{\prime\prime\prime(\varrho)} \cdot \dfrac{\cos B}{\sin \Gamma}. \end{cases}$$

Die Linie Qp' erscheint offenbar als die Projektion derjenigen Axe, welche in der vierten Ebene liegt und in Q zu MN normal ist, auf die dritte Ebene. Bezeichnen wir den Winkel, welchen die genannte Axe mit der Axe QZ macht mit σ, den Winkel mit QY mit η und den Winkel mit QX mit ϑ, so ist nach der früher entwickelten Regel (130):

$$\cos \varepsilon = \frac{\cos \vartheta}{\sin \sigma}, \qquad \sin \varepsilon = \frac{\cos \eta}{\sin \sigma},$$

daraus folgt:

$$\cos \vartheta = \cos \varepsilon \cdot \sin \sigma, \qquad \cos \eta = \sin \varepsilon \cdot \sin \sigma.$$

---

*) Siehe die Figur auf S. 123.

Nun ist aber der Winkel σ offenbar gleich $90^0 + \Gamma$ und daher $\sin\sigma = \cos\Gamma$, und indem wir für $\cos\varepsilon$ und $\sin\varepsilon$ die oben gefundenen Werthe setzen, ergiebt sich:

$$\cos\vartheta = \frac{\cos A \,.\, \cos\Gamma}{\sin\Gamma}, \quad \cos\eta = \frac{\cos B \,.\, \cos\Gamma}{\sin\Gamma}.$$

Die Ebene, welche durch MN*) und Qp gelegt wird, ist aber normal auf der ebenerwähnten Axe, und da diese Axe mit den drei ersten Axen die Winkel σ, η und ϑ macht, so folgt der Abstand eines beliebigen Punktes von dieser Ebene (131):

$$x_0 = z \,.\, \cos\sigma + y \,.\, \cos\eta + z \,.\, \cos\vartheta,$$

und wenn man für $\cos\sigma$ setzt $\cos(90^0 + \Gamma) = -\sin\Gamma$ und für $\cos\vartheta$ und $\cos\eta$ die eben bestimmten Werthe, so folgt:

$$x_0 = -z\sin\Gamma + y \,.\, \frac{\cos B \,.\, \cos\Gamma}{\sin\Gamma} + x \,.\, \frac{\cos A \,.\, \cos\Gamma}{\sin\Gamma},$$

oder durch eine leichte Umformung:

$$x_0 = \frac{z \,.\, \cos\Gamma^2 + y \,.\, \cos B \,.\, \cos\Gamma + x \,.\, \cos A \,.\, \cos\Gamma - z}{\sin\Gamma} = \frac{z_0\cos\Gamma - z}{\sin\Gamma}.$$

Hiernach ist also:

133)

$$X_{,}^{0} = \frac{X_{,(\varrho)} . \cos A . \cos\Gamma + Y_{,(\varrho)} . \cos B . \cos\Gamma + Z_{,(\varrho)} . \cos\Gamma^2 - Z_{,(\varrho)}}{\sin\Gamma}$$

$$X_{,,}^{0} = \frac{X_{,,(\varrho)} . \cos A . \cos\Gamma + Y_{,,(\varrho)} . \cos B . \cos\Gamma + Z_{,,(\varrho)} . \cos\Gamma^2 - Z_{,,(\varrho)}}{\sin\Gamma}$$

$$X_{,,,}^{0} = \frac{X_{,,,(\varrho)} . \cos A . \cos\Gamma + Y_{,,,(\varrho)} . \cos B . \cos\Gamma + Z_{,,,(\varrho)} . \cos\Gamma^2 - Z_{,,,(\varrho)}}{\sin\Gamma},$$

oder:

$$133\text{a)}\quad X_{,}^{0} = \frac{Z_{,}^{0} \,.\, \cos\Gamma - Z_{,(\varrho)}}{\sin\Gamma}, \quad X_{,,}^{0} = \frac{Z_{,,}^{0} \,.\, \cos\Gamma - Z_{,,(\varrho)}}{\sin\Gamma},$$

$$X_{,,,}^{0} = \frac{Z_{,,,}^{0} \,.\, \cos\Gamma - Z_{,,,(\varrho)}}{\sin\Gamma}.$$

Es kommt nur noch darauf an die Winkel $\alpha_{,}^{0}$, $\alpha_{,,}^{0}$, $\alpha_{,,,}^{0}$ zu bestimmen, welche die drei Kraftrichtungen $Q_{,} . \sin A$, $Q_{,,} . \sin B$, $Q_{,,,} . \sin\Gamma$ mit einer von den neuen, in der vierten Ebene liegenden Axen bilden. Wir wählen die Axe, welche normal zu MN ist, als diejenige, mit welcher die genannten zu bestimmenden Winkel gebildet werden, und nennen diese Axe die Axe der X^0. Jene drei Kraftrichtungen sind entstanden, indem man die Drucke $Q_{,}$, $Q_{,,}$, $Q_{,,,}$ nach der Richtung Q und normal dazu zerlegte, sie erscheinen also als die Projektionen der Kraftrichtungen $Q_{,}$, $Q_{,,}$, $Q_{,,,}$ auf die zu Q normale vierte Ebene, oder da diese letztgenannten Kraftrichtungen parallel mit den drei ersten Axen sind, als die Pro-

---

*) Siehe die Figur auf S. 123.

jektionen dieser drei Axen auf die vierte Ebene. Nun macht die Axe QX*) mit der angenommenen neuen Axe der X^0 den Winkel ϑ; mit der zu der Ebene, in welcher diese neue Axe liegt, normalen Axe Qp (Axe der Z^0) den Winkel A und mit der Axe MN (oder der Axe der Y^0) den Winkel $90^0 + \varepsilon$.

Wir haben also nach dem Gesetz (130) auf S. 123 für den Winkel, welchen die Projektion von QX auf die vierte Ebene mit der Axe der X^0 macht, oder, was dasselbe ist, für den Winkel, welcher die Kraftrichtung $Q_{\prime} . \sin A$ mit der Axe der X^0 macht:

$$134) \left\{ \begin{aligned} \cos \alpha_{\prime}{}^0 &= \frac{\cos \vartheta}{\sin A} = \frac{\cos A \,.\, \cos \Gamma}{\sin A \,.\, \sin \Gamma} = \operatorname{cotg} A \,.\, \operatorname{cotg} \Gamma \\ \sin \alpha_{\prime}{}^0 &= \frac{\cos (90^0 + \varepsilon)}{\sin A} = \frac{- \sin \varepsilon}{\sin A} = \frac{- \cos B}{\sin A \,.\, \sin \Gamma} . \end{aligned} \right.$$

Ebenso findet man den Winkel, welchen die Projektion der Axe QY oder die Kraftrichtung $Q_{\prime\prime} . \sin B$ mit der Axe der X^0 macht, durch die Betrachtung, dafs die Axe QY mit der Axe der X^0 den Winkel η mit der Axe der Y^0 den Winkel ε und mit der Axe der Z^0 den Winkel B bildet:

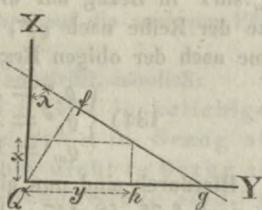
$$134\,a) \left\{ \begin{aligned} \cos \alpha_{\prime\prime}{}^0 &= \frac{\cos \eta}{\sin \varepsilon} = \frac{\cos B \,.\, \cos \Gamma}{\sin B \,.\, \sin \Gamma} = \operatorname{cotg} B \,.\, \operatorname{cotg} \Gamma \\ \sin \alpha_{\prime\prime}{}^0 &= \frac{\cos \eta}{\sin B} = \frac{\cos A}{\sin B \,.\, \sin \Gamma} , \end{aligned} \right.$$

und endlich ergiebt sich der dritte Winkel, da die Axe QZ mit der Axe der X^0, den Winkel $\sigma = 90^0 + \Gamma$; mit der Axe der Y^0 einen Rechten, und mit der Axe der Z^0 den Winkel Γ bildet:

$$134\,b) \left\{ \begin{aligned} \cos \alpha_{\prime\prime\prime}{}^0 &= \frac{\cos (90^0 + \Gamma)}{\sin \Gamma} = -1 \\ \sin \alpha_{\prime\prime\prime}{}^0 &= \frac{\cos 90^0}{\sin \gamma} = 0, \end{aligned} \right.$$

d. h. die Richtung $Q_{\prime\prime\prime} . \sin \Gamma$ macht mit der Richtung der Axe der X^0 einen Winkel von 180 Grad, ist der Richtung der Axe X^0 also entgegengesetzt.

Endlich lassen sich auch noch die Hebelsarme der Kräfte $Q' . \sin A$, $Q_{\prime\prime} . \sin B$ und $Q_{\prime\prime\prime} . \sin \Gamma$ in Bezug auf die Axe pQ leicht bestimmen. Sind nämlich x und y die Koordinaten eines Punktes parallel mit der Ebene gemessen, auf welcher die dritte Axe normal steht, so ist der kürzeste Abstand der Richtungslinie der Kraft, welche durch diesen Punkt



*) Siehe die Figur auf S. 123.

geht, und deren Projektion mit der Axe der X den Winkel λ bildet, von der dritten Axe offenbar:

$$135)\ \begin{cases} Qf = Qg \,.\, \cos\lambda = (y + hg)\cos\lambda = (y + x \operatorname{tang}\lambda)\cos\lambda \\ \quad = y \,.\, \cos\lambda + x\sin\lambda. \end{cases}$$

Macht die Kraftrichtung selbst mit der Axe der X den Winkel α, mit der Axe der Y den Winkel β und mit der Axe der Z den Winkel γ, so hat man nach dem Frühern (130) für den Winkel, welcher ihre Projektion mit der Axe der X bildet:

$$\cos\lambda = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}, \qquad \sin\lambda = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma},$$

folglich die kürzeste Entfernung der Kraftrichtung von der Axe der Z oder den Hebelsarm der Kraft in Bezug auf die Axe der Z:

$$135\text{a})\ Qf = R_{\prime\prime\prime} = \frac{x \,.\, \cos\beta}{\sin\gamma} + \frac{y \,.\, \cos\alpha}{\sin\gamma}.$$

Man findet also den Hebelsarm einer Kraft, deren Richtung durch einen gegebenen Punkt geht und mit den drei Axen gegebene Winkel bildet, in Bezug auf eine Axe, wenn man jede einzelne der beiden Koordinaten, welche nicht mit dieser Axe parallel sind, *multiplizirt* mit dem Kosinus des Neigungswinkels, welchen die Kraftrichtung mit derjenigen Axe macht, die der andern von beiden parallel ist, und die Summe der Produkte dividirt durch den Sinus des Neigungswinkels, welchen die Kraftrichtung mit derjenigen Axe macht, für welche man den Hebelsarm bestimmen will, oder wenn man jede der beiden Koordinaten mit dem Sinus des Neigungswinkels *multiplizirt*, welchen die Projektion der Kraftrichtung auf eine Ebene, die normal zu der Axe ist, für welche man den Hebelsarm bestimmen will, bildet mit derjenigen Axe, mit welcher die betreffende Koordinate parallel ist; und die Summe nimmt.

Nennen wir die Hebelsarme der drei Kräfte $Q_{\prime}.\sin A$, $Q_{\prime\prime}\sin B$, $Q_{\prime\prime\prime}.\sin\Gamma$ in Bezug auf die mit der Richtung Q zusammenfallende Axe der Reihe nach $\varrho_{\prime}{}^{0}$, $\varrho_{\prime\prime}{}^{0}$, $\varrho_{\prime\prime\prime}{}^{0}$, so findet man diese Hebelsarme nach der obigen Regel (135):

$$134)\ \begin{cases} \varrho_{\prime}{}^{0} = X_{\prime}{}^{0} \,.\, \sin\alpha_{\prime} + Y_{\prime}{}^{0} \,.\, \cos\alpha_{\prime}{}^{0} \\ \varrho_{\prime\prime}{}^{0} = X_{\prime\prime}{}^{0} \,.\, \sin\alpha_{\prime\prime} + Y_{\prime\prime}{}^{0} \,.\, \cos\alpha_{\prime\prime}{}^{0} \\ \varrho_{\prime\prime\prime}{}^{0} = X_{\prime\prime\prime}{}^{0} \,.\, \sin\alpha_{\prime\prime\prime} + Y_{\prime\prime\prime}{}^{0} \,.\, \cos\alpha_{\prime\prime\prime}{}^{0} = -\, Y_{\prime\prime\prime}{}^{0}. \end{cases}$$

Hierdurch sind nun alle Elemente bestimmt, deren man bedarf, um nach § 75. (S. 117, Gleichung 123), 123a) und 123b) die Lage und das Moment des Kräftepaares zu bestimmen.

Man hat nämlich zu setzen in jenen Gleichungen:

$$137)\quad\begin{cases}\Sigma(K.\sin a.z) = Q_{\prime}.\sin A.\sin\alpha_{\prime}{}^{0}.Z_{\prime}{}^{0} + Q_{\prime\prime}.\sin B.\sin\alpha_{\prime\prime}{}^{0}.Z_{\prime\prime}{}^{0} + \\ \qquad Q_{\prime\prime\prime}.\sin\Gamma.\sin\alpha_{\prime\prime\prime}{}^{0}.Z_{\prime\prime\prime}{}^{0} \\ \Sigma(K.\cos a.z) = Q_{\prime}.\sin A.\cos\alpha_{\prime}{}^{0}.Z_{\prime}{}^{0} + Q_{\prime\prime}.\sin B.\cos\alpha_{\prime\prime}{}^{0}.Z_{\prime\prime}{}^{0} + \\ \qquad Q_{\prime\prime\prime}.\sin\Gamma.\cos\alpha_{\prime\prime\prime}{}^{0}.Z_{\prime\prime\prime}{}^{0} \\ \Sigma(K.R_{\prime\prime\prime}) = Q_{\prime}.\sin A.\varrho_{\prime}{}^{0} + Q_{\prime\prime}.\sin B.\varrho_{\prime\prime}{}^{0} + Q_{\prime\prime\prime}.\sin\Gamma.\varrho_{\prime\prime\prime}{}^{0}.\end{cases}$$

Es ergiebt sich sodann aus Gleichung 123) der Winkel ψ, welchen die Durchschnittslinie der Ebene des Kräftepaars und der vierten Ebene mit der Axe der X^0 macht; aus Gleichung 123a) der Winkel, welchen die Ebene des Kräftepaars mit der vierten Ebene, oder überhaupt mit einer Ebene macht, die normal ist zur Richtung der Resultirenden der fortschreitenden Bewegung, und endlich aus Gleichung 123b) das Moment des resultirenden Kräftepaares *).

Ueberhaupt folgt aus der eben durchgeführten Rechnung:

II. Wenn auf ein festes System beliebige Kräfte einwirken, welche weder in Bezug auf fortschreitende noch in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, so läſst sich ihre Wirkung immer zurückführen auf eine Kraft, welche der Richtung und Gröſse nach (Gleichung 127, 128, 128a), und auf ein Kräftepaar, dessen Moment der Gröſse nach, und dessen Ebene der Lage nach (Gleichung 123 und 136) zu bestimmen sind.

Ziehen wir nunmehr den zweiten Fall in Betracht:

B. Wenn auf ein festes System Kräfte in beliebigen Richtungen wirken, welche zwar in Bezug auf drehende Bewegung, nicht aber in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind, so läſst sich immer eine Resultante durch die Gleichungen 127), 128) und 128a) der Gröſse und Richtung nach bestimmen.

Dieser Fall ist nämlich ohne Weiteres auf die analogen Fälle auf S. 104 und 115 zurückzuführen.

Was nun endlich den dritten Fall anbetrifft, nämlich:

C. Wenn auf ein festes System Kräfte in beliebigen Richtungen wirken, welche zwar in Bezug auf fortschreitende Bewegung, aber nicht in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, so

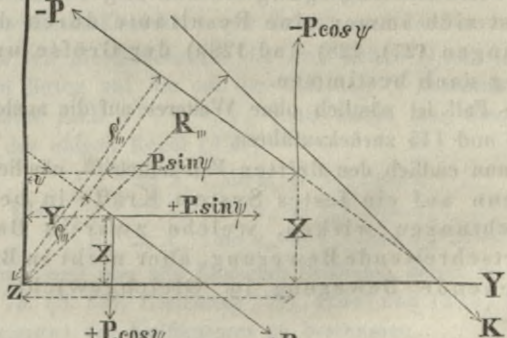
*) Eine kürzere Entwickelung dieses Falles findet man auf S. 142.

läfst sich die Wirkung derselben immer nur auf ein resultirendes Kräftepaar zurückführen.

Um dies nachzuweisen, verfahren wir ganz ähnlich wie auf S. 116 C.

Zunächst ist einleuchtend, dafs eine Gegenkraft, welche wir in das System einführen möchten, das Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung stören würde; es sind also wenigstens zwei gleich grofse, parallele, aber der Richtung nach entgegengesetzte Kräfte $+P'$ und $-P'$ einzuführen, welche mit den drei Axen die Winkel A, B und Γ bilden mögen.

Legen wir durch die parallelen Richtungen der Kräfte $+P'$ und $-P'$ eine Ebene, und verbinden nun ihre Angriffspunkte, so liegt auch diese Verbindungslinie in derselben Ebene In jedem Falle lassen sich aber die beiden Kräfte in dieser Ebene zerlegen in je zwei andere, von denen die einen parallel sind mit einer der Koordinaten-Ebenen, z. B. mit der Ebene XY, und die andern in die Richtung der Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte fallen. Die Komponenten, parallel mit der Grundebene XY, sind unter sich parallel, gleich grofs, aber entgegengesetzt, und mögen mit $+P$ und $-P$ bezeichnet werden, die Komponenten nach der Richtung der Verbindungslinie sind ebenfalls gleich grofs, entgegengesetzt und fallen in dieselbe gerade Linie, sie mögen mit $+P''$ und $-P''$ bezeichnet werden. Diese beiden Komponenten halten einander das Gleichgewicht, sie nehmen nur die innern Kräfte des Systems in Anspruch, und können auf das System weder auf Drehung noch auf Fortschreiten wirken; sie fallen also aus der Betrachtung, und man sieht, dafs, wie man auch die Lage und Richtung der beiden



Kräfte $+P'$ und $-P'$ gewählt haben mag, sich für dieselben immer zwei andere $+P$ und $-P$ substituiren lassen, die in denselben Angriffspunkten wirken, deren Richtungen parallel mit einer der Koordinatenebenen sind, und aufserdem in derselben Ebene liegen, welche durch die Kräfte $+P'$ und $-P'$ gelegt werden konnte.

Behalten wir die Bezeichnungen auf S. 116 bei, so folgt, dafs, wenn die beiden Kräfte $+P$ und $-P$ Gleichgewicht gegen drehende Bewegung herstellen sollen, sein müsse:

$$\text{a)}\ \Sigma(K.\sin\alpha.R_{,}) = P.\sin\psi(Z-Z')$$
$$\text{b)}\ \Sigma(K.\sin\beta.R_{,,}) = P.\cos\psi(Z-Z')$$
$$\text{c)}\ \Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,}) = P.(\varrho_{,,,}-\varrho'_{,,,}).$$

Durch dieselben Betrachtungen, welche bereits auf S. 117 angestellt worden, und in Erwägung, dafs wir diese Betrachtungen, welche für die Ebene XY gelten, hier auch für die Ebene XZ und ZY anstellen können, folgt allgemein:

Der Neigungswinkel der Ebene des Kräftepaars gegen die Ebene XY

$$138)\ \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{\{[\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,})]^2 + [\Sigma(K.\sin\beta.R_{,,})]^2\}}}{\Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,})},$$

d. h. man findet die Tangente des Neigungswinkels der Ebene, in welcher das resultirende Kräftepaar liegt, gegen eine der Koordinatenebenen gleich dem Quotienten aus der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Momentensummen der einzelnen Kräfte in Bezug auf die beiden Axen, die in dieser Ebene liegen, durch die Momentensumme der einzelnen Kräfte in Bezug auf die Axe, welche normal zu dieser Ebene ist.

Es folgt ferner:

Der Neigungswinkel der Durchschnittslinie der Ebene des Kräftepaars mit einer der Koordinatenebenen gegen eine der Axen, welche in dieser Ebene liegen:

$$138\text{a)}\ \operatorname{tang}\psi = \frac{\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,})}{\Sigma(K.\sin\beta.R_{,,})},$$

d. h. man findet die Tangente des Neigungswinkels, welchen die Durchschnittslinie der Ebene des Kräftepaars mit einer der Koordinatenebenen gegen eine in dieser letztgenannten Ebene liegende Axe macht, gleich dem Quotienten aus der Momentensumme der einzelnen Kräfte in Bezug auf diese Axe durch die Momentensumme in Bezug auf die andere in derselben Ebene liegende Axe.

138b) Das Moment des Kräftepaars

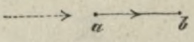
$$\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,})]^2 + [\Sigma(K.\sin\beta.R_{,,})]^2 + [\Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,})]^2\right\}},$$

d. h. das Moment des resultirenden Kräftepaars ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Momentensummen der einzelnen Kräfte in Bezug auf die drei Axen.

Vorschlag zur Annahme eines allgemein giltigen Modus die Winkel zu zählen, welche Kraftrichtungen mit rechtwinkligen Koordinaten-Axen bilden.

§ 77. Bei den vorhergehenden statischen Untersuchungen hat man mit Kräften zu thun, deren Richtungslinien nicht in ein und derselben Ebene liegen; man bestimmt sodann die Lage dieser Richtungslinien durch die Winkel, welche sie mit drei angenommenen Koordinaten-Axen machen; es ist sehr wichtig die Vorzeichen der Winkelfunktionen richtig in die Rechnung einzuführen, und um in dieser Beziehung keinen Irrthum zu begehen, mufs man die Winkel, welche die Richtungslinien mit den einzelnen Axen machen, von jeder Axe aus stets in demselben Sinne rechnen (vergl. § 59). Es erscheint wünschenswerth, dafs man sich allgemein über einen Modus einige, nach welchem bei dergleichen Untersuchungen die Kraftrichtungen zu bestimmen sind, und zu dem Zwecke scheint folgendes Verfahren empfehlenswerth:

1) Man sehe sämmtliche Kräfte so an, als ob sie in ihrem Angriffspunkt ziehend wirken, und nehme ihre Werthe dann absolut.

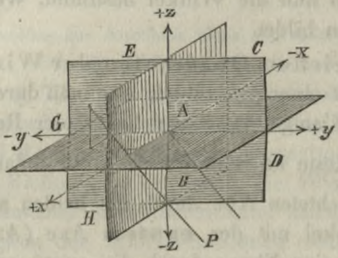


Um dies zu verstehen, diene folgende Erläuterung: Strebt eine Kraft ein Massenelement von *a* nach *b* zu bewegen, so können wir entweder die Kraft in einem Punkte wirkend denken, der auf derselben Seite von *a* liegt, auf welcher auch *b* liegt, und so als ob sie das Massenelement anziehe, oder wir können die Kraft auch in einem Punkte wirksam denken, der auf der entgegengesetzten Seite von *a* liegt, und so, als ob die Kraft das Bestreben habe, das Massenelement abzustofsen (§ 55. S. 67). Im ersten Falle bezeichnen wir die Wirkung, indem wir sagen, die Kraft wirke ziehend, im andern Fall, indem wir sagen, die Kraft wirke schiebend auf das Massenelement. Es ist gleichgiltig, ob wir sämmtliche Kräfte in ihren Angriffspunkten ziehend, oder ob wir sämmtliche Kräfte schiebend wirkend denken. Um eine Uebereinstimmung herbeizuführen, mögen stets sämmtliche Kräfte *ziehend* angenommen werden, und wenn sie *schiebend* gedacht werden sollen, möge man es ausdrücklich bemerken.

2) Die Winkel, welche eine Kraftrichtung mit den drei Axen macht, werden gefunden, wenn man von dem Anfangspunkt der Koordinaten eine Linie zieht, parallel mit der Richtung der Kraft, und in demselben Sinne, in welchem die Kraft auf ihren Angriffspunkt *ziehend* wirkt, und nun die Winkel bestimmt, welche diese Linie mit den drei Axen bildet.

3) Um zu beurtheilen, in welchem Quadranten der Winkel liegt, den diese Richtung mit einer Axe bildet, lege man durch die betrachtete Axe und durch diejenige Axe, welche in der Reihenfolge $\overset{1}{X}, \overset{2}{Y}, \overset{3}{Z}$ ihr die entfernteste ist, eine Ebene, und sodann eine Ebene normal zu der betrachteten Axe durch die beiden anderen Axen. Um also den Winkel mit der **ersten** Axe (Axe der X) zu bestimmen, lege man eine Ebene durch die erste und dritte Axe (Axe der X und der Z) und eine Ebene durch die zweite und dritte Axe (Axe der Y und der Z). Um den Winkel mit der **zweiten** Axe (Axe der Y) zu beurtheilen, lege man eine Ebene durch die zweite und erste Axe (Axe der Y und der X) und eine Ebene durch die erste und dritte Axe (Axe der X und der Z) und endlich um den Winkel zu bestimmen, welchen eine Kraftrichtung mit der **dritten** Axe macht, lege man eine Ebene durch die dritte und erste Axe und eine Ebene durch die erste und zweite Axe. Die beiden Ebenen, welche man für jede einzelne Axe gedacht hat, theilen den Raum in vier Abtheilungen. Die erste Abtheilung liegt zwischen dem Theile der durch die betrachtete Axe gelegten Ebene, welcher den *positiven* Zweig dieser Axe enthält, und demjenigen Theil der durch die beiden andern Axen gelegten Ebene, welcher den *positiven* Zweig der in der obenerwähnten Reihenfolge zunächst liegenden Axe enthält. Alle Linien, welche vom Anfangspunkt der Koordinaten gezogen in diese Abtheilung fallen, bilden mit der betrachteten Axe Winkel, die im *ersten Quadranten* liegen. Die zweite Abtheilung liegt zwischen diesem zuletzt erwähnten Theil der durch die beiden andern Axen gelegten Ebene, und demjenigen Theil der durch die betrachtete Axe gelegten Ebene, welche den *negativen* Zweig dieser Axe enthält. Alle Linien, die in diese Abtheilung fallen, bilden Winkel mit der betrachteten Axe, die im *zweiten Quadranten* liegen. Die dritte Abtheilung des Raumes liegt zwischen den so eben be-

zeichneten Theil der durch die betrachtete Axe gelegten Ebene, und demjenigen Theil der durch die beiden andern Axen gelegten Ebene, welcher den negativen Zweig der in der obigen Reihenfolge zunächst liegenden Axe enthält. Diese Abtheilung stellt den dritten Quadranten, und die noch übrige Abtheilung den vierten Quadranten dar.



Denkt man die drei Koordinatenebenen, so wird durch dieselben der Raum in acht Abtheilungen getheilt, die wir mit *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* bezeichnen. Die Punkte, welche in diesen Abtheilungen liegen, haben folgende Koordinaten-Vorzeichen, nach welchen sich die Bezeichnung der Abtheilungen bestimmen soll.

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
$+x$	$+x$	$-x$	$-x$	$-x$	$-x$	$+x$	$+x$
$+y$	$+y$	$+y$	$+y$	$-y$	$-y$	$-y$	$-y$
$+z$	$-z$	$+z$	$-z$	$+z$	$-z$	$+z$	$-z$.

(Die Abtheilung *F* ist in der Figur nicht sichtbar).

Bezeichnen wir die Winkel mit der ersten Axe durch α, mit der zweiten Axe durch β und mit der dritten Axe durch γ, und nehmen wir den oben dargestellten Modus der Winkelzählung an, so ergiebt sich folgende Zusammenstellung:

Eine Linie, durch den Angriffspunkt der Koordinaten parallel mit einer Kraftrichtung gezogen, liegt in der Abtheilung	Die Winkel liegen in den Quadranten			Vorzeichen der Kosinus			Vorzeichen der Sinus			Vorzeichen der Kotangente			Vorzeichen der Tangente		
	α	β	γ	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	$\sin\alpha$	$\sin\beta$	$\sin\gamma$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\beta$	$\operatorname{ctg}\gamma$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{tg}\gamma$
A	I	I	I	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
B	I	IV	II	+	+	−	+	−	+	+	−	−	+	−	−
C	II	I	IV	−	+	+	+	+	−	−	+	−	−	+	−
D	II	IV	III	−	+	−	+	−	−	−	−	+	−	−	+
E	III	II	IV	−	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	−
F	III	III	III	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+
G	IV	II	I	+	−	+	−	+	+	−	−	+	−	−	+
H	IV	III	II	+	−	−	−	−	+	−	+	−	−	+	−

Aus dieser Zusammenstellung ist ersichtlich, dafs die Vorzeichen der Kosinus von Winkeln, welche Linien bilden, die durch den Anfangspunkt der Koordinaten gehen und in irgend einer Abtheilung liegen, dieselben sind, welche auch die Koordinaten von Punkten haben, die in derselben Abtheilung liegen. Diese Vorzeichen sind jedoch nicht zu verwechseln mit den Vorzeichen, welche etwa die Koordinaten des Angriffspunkts der Kraft haben.

Es wirke z. B. in einem Punkte, dessen Koordinaten $+x$, $-y$, $+z$ sind, eine Kraft, welche mit der ersten und zweiten Axe einen Winkel mit positivem, mit der dritten Axe einen Winkel mit negativem Kosinus mache, so liegt der Winkel α im ersten, der Winkel β im vierten und der Winkel γ im zweiten Quadranten. Die Kraftrichtung ist in der Figur angedeutet. Die entgegengesetzte Kraftrichtung macht mit den drei Axen Winkel, deren Kosinus eben so grofs, aber entgegengesetzt sind, sie bildet also mit der ersten und zweiten Axe Winkel mit negativem und mit der dritten Axe einen Winkel mit positivem Kosinus, liegt also in der Abtheilung E.

Aus den obigen Darstellungen ist nun leicht ersichtlich, welche Bedeutung es haben müsse, wenn die Kräfte selbst mit positivem oder negativem Vorzeichen ($+P$ und $-P$) erscheinen, oder in die Rechnung eingeführt werden. Es kann dies nämlich in zwiefachem Sinne geschehen, entweder deuten die Vorzeichen $+P$ und $-P$ überhaupt nur an, dafs zwei Kräfte in parallelen Richtungen, aber entgegengesetzt wirkend, gedacht werden sollen, und es ist dann gleichgiltig, welche von beiden man als positiv, und welche man als negativ betrachten will, oder sie deuten an, dafs die betrachtete Kraft, welche mit negativem Vorzeichen erscheint, in ihrem Angriffspunkt in einem Sinne wirkt, welcher demjenigen der übrigen Kräfte entgegengesetzt ist; dafs sie also, wenn wir allgemein die Kräfte ziehend wirkend denken, in ihrem Angriffspunkte schiebend wirke; sie wird sofort in eine Kraft verwandelt werden können, welche ziehend wirkt, und dann absolut zu nehmen sein.

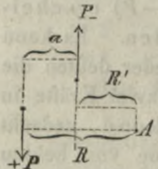
Gesetze über die Wirkung, Zusammensetzung und Zerlegung der Kräftepaare. Parallelogramm und Parallelepipedum der Kräftepaare und der Paar-Axen.

§ 78. Aus den Betrachtungen der §§ 74, 75 und 76 ergiebt sich, dafs, wenn auf ein festes System Kräfte wirken, welche in Bezug auf drehende Bewegung nicht im Gleichgewicht sind, das Gleichgewicht nur in dem einzigen Fall, wo die Kraftrichtungen parallel und zugleich die Summe sämmtlicher Kräfte nicht gleich Null ist (S. 105. No. 2, Gleichung 117a) durch eine einzige Gegenkraft herzustellen ist, in jedem andern Falle aber das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung sich nur durch ein Kräftepaar herstellen läfst. Hieraus folgt, dafs überhaupt jede drehende Bewegung, welche Kräfte, die auf ein festes System wirken, diesem zu ertheilen streben, sich auf ein resultirendes Kräftepaar zurückführen lasse.

Es ist von Interesse einige Eigenschaften der Kräftepaare hier hervorzuheben.

1) Jedes Kräftepaar hat das Bestreben das System um eine Axe zu drehen, die normal ist zu der Ebene, in welcher das Kräftepaar liegt; der Punkt, in welchem die Axe die Ebene schneidet, läfst sich aus den Eigenschaften des Kräftepaares nicht bestimmen; es kann jeder beliebige Punkt sein, wenn er nicht durch andere Bedingungen gegeben ist.

Denn es sei R der kürzeste Abstand der Kraft $+P$ von der beliebig angenommenen Drehaxe A; R' der kürzeste Abstand der Kraft $-P$, dann ist die Summe der Momente, welche auf Drehung um die angenommene Axe wirken, $P.R - P.R' = P.(R - R')$, es ist aber immer $R - R'$ der kürzeste Abstand der Kraftrichtungen $+P$ und $-P$, bezeichnen wir denselben mit a, so ist Pa das Moment des Kräftepaars (S. 106), und es folgt, dafs die Summe der Momente für die Drehung um eine beliebige zur Ebene des Paares normale Axe immer gleich dem Moment des Kräftepaars ist, d. h. immer denselben Werth hat.



2) Man kann für jedes Kräftepaar ein anderes substituiren, welches in derselben Ebene liegt, und dasselbe Moment hat; es ist dabei gleichgiltig, welche Lage die Kraftrichtungen des neuen Paares gegen die des ersten haben, auch kann man entweder den Abstand der neuen Kraftrichtungen von einander, oder die Gröfse der Drucke derselben beliebig annehmen.

Denn, da das Bestreben auf Drehung um eine beliebige Axe durch die Summe der Momente in Bezug auf diese Axe gemessen wird, so hat das neue Kräftepaar in Bezug auf jeden beliebigen Punkt der Ebene immer dasselbe Bestreben auf Drehung, wie das erste Kräftepaar, sobald sein Moment dasselbe ist (No. 1).

3) Man kann daher die eine Kraftrichtung eines Kräftepaares durch einen beliebigen Punkt in der Ebene gehen lassen, und derselben eine beliebige Richtung geben, während die andere einen beliebigen Abstand von diesem Punkt bekommen kann.

Ist Pa das Moment eines Kräftepaars, und a' der Abstand des neuen Kräftepaars, so ist:

$$139)\left\{\begin{array}{l} P'=\frac{Pa}{a'} \\ a=\frac{Pa}{p'}. \end{array}\right.$$

4) Jedes Kräftepaar kann durch ein anderes ersetzt werden, welches in einer parallele Ebene liegt, und dasselbe Moment hat.

Denn da das Bestreben auf Drehung um irgend eine zur Ebene des Paares normale Axe durch das Moment des Kräftepaares ausgedrückt wird, so hat das neue Kräftepaar, da es in einer parallelen Ebene liegt, die folglich auch normal ist zu einer beliebigen Axe, welche normal zur Ebene des ersten Paares ist, dasselbe Bestreben auf Drehung um diese Axe, welches das erste Paar hat, sobald sein Moment dasselbe ist.

5) Kräftepaare, welche in derselben Ebene liegen, lassen sich durch ein einziges Kräftepaar ersetzen, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der einzelnen Kräftepaare ist, wobei diejenigen Momente, welche die Ebene in entgegengesetzten Richtungen zu drehen streben, mit entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen sind.

Denn man kann jedes der Kräftepaare $P'a'$, $P''a''$, $P'''a'''$.... in ein anderes verwandeln, dessen Richtungen in zwei bestimmte Parallellinien fallen. Ist a der kürzeste Abstand dieser beiden Parallellinien, so ist nach 139 die Kräftesumme in der einen Richtung:

$$+\left(\frac{P'a'}{a}+\frac{P''a''}{a}+\frac{P'''a'''}{a}\ldots\ldots\right)=P$$

und die Kräftesumme in der entgegengesetzten Richtung:

$$-\left(\frac{P'a'}{a}+\frac{P''a''}{a}+\frac{P'''a'''}{a}\right)=-P,$$

folglich hat man wiederum ein Kräftepaar, und es ist dessen Moment:

$$Pa=P'a'+P''a''+P'''a'''+\ldots\ldots$$

6) **Kräftepaare, welche *in parallelen* Ebenen liegen, lassen sich durch ein einziges Kräftepaar ersetzen, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der einzelnen Kräftepaare ist,** wobei diejenigen Momente, welche die Ebenen in entgegengesetzten Richtungen zu drehen streben, mit entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen sind.

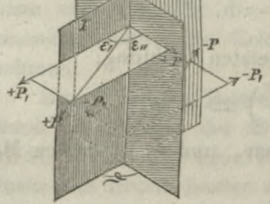
Denn, man kann jedes dieser Kräftepaare nach No. 4 in eine bestimmte Ebene verlegen, welche mit den Ebenen der Kräftepaare parallel ist, und dann nach No. 5 diese Kräftepaare vereinigen.

7) **Kräfte, welche auf Drehung um irgend eine Axe wirken, lassen sich in Bezug auf drehende Bewegung durch ein Kräftepaar ersetzen, welches in einer zu der Axe normalen Ebene liegt, und dessen Moment gleich der Summe der Momente der einzelnen Kräfte in Bezug auf diese Axe ist.**

Denn das Bestreben auf Drehung um eine gegebene Axe wird gemessen durch die Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte in Bezug auf diese Axe (S. 95); ein Kräftepaar, dessen Moment gleich der Summe der Momente der einzelnen Kräfte ist, hat dasselbe Bestreben auf Drehung zu wirken, (No. 1 und 2) würde also, wenn man es im entgegengesetzten Sinne wirken ließe, die Drehung durch die einzelnen Kräfte aufheben, und ersetzt demnach deren Wirkung auf drehende Bewegung.

Die Ebene, in welcher ein Kräftepaar liegt, nennen wir die **Paar-Ebene**; eine Normale zu dieser Ebene: eine **Paar-Axe**, und den kürzesten Abstand der Richtungslinien: den **Hebelsarm** des Kräftepaars, oder kurz der **Paar-Arm**.

8) **Kräftepaare, welche in Ebenen liegen, die sich schneiden, lassen sich immer durch ein Kräftepaar ersetzen, dessen Moment sich bestimmen läfst, welches in einer Ebene liegt, die durch die Durchschnittslinie der beiden Paar-Ebenen geht, und deren Lage gegen die beiden Paar-Ebenen eine bestimmte ist.**



Es sei ϑ der Neigungswinkel der beiden Paar-Ebenen, $a^I P^I$ sei das Moment des Kräftepaars in der ersten Ebene, $a^{II} P^{II}$ das Moment des Paares in der zweiten Ebene. Da die Kräftepaare jede Lage in der Ebene haben können, so lassen sich ihre Richtungen auch normal zur Durchschnittslinie denken, und wenn a der Abstand zweier Punkte der Durchschnittslinie ist, so lassen sich die Kräfte beider Paare durch diese Punkte der Durchschnittslinie legen. Nach Gleichung 139) sind sodann die Kräfte der beiden Paare:

$$P_{\prime} = \frac{a^{I} P^{I}}{a}; \quad P_{\prime\prime} = \frac{a^{II} P^{II}}{a}.$$

Nun greifen in dem einen Punkte der Durchschnittslinie die Kräfte $+P_{\prime}$ und $\pm P_{\prime\prime}$, im andern Punkte die Kräfte $-P_{\prime}$ und $\mp P_{\prime\prime}$ an. Da diese beiden Gruppen in ihren Angriffspunkten normal zur Durchschnittslinie sind, so liegen sie in parallelen Ebenen, die normal zur Durchschnittslinie sind; jede der beiden Gruppen läfst sich zusammensetzen nach dem Parallelogramm der Kräfte (§§ 28 und 30) und man hat in dem einen Angriffspunkt die Resultante:

$$P = \{P_{\prime}^{2} + P_{\prime\prime}^{2} + 2 P_{\prime} P_{\prime\prime} . \cos \vartheta\},$$

in dem andern Angriffspunkt eine ebenso grofse, aber entgegengesetzt gerichtete Resultante. Anstatt der ursprünglichen Kräfte können wir diese beiden Kräfte wirkend denken; sie sind parallel, liegen in einer Ebene, welche durch die Durchschnittslinie der ersten beiden Paar-Ebenen geht, und ihr Moment ist $= Pa$, oder wenn wir für P den obigen Werth, und darin für $P_{\prime}$ und $P_{\prime\prime}$ die vorhin gefundenen Ausdrücke setzen:

$$140) \quad Pa = \sqrt{\{(a^{I} P^{I})^{2} + (a^{II} P^{II})^{2} + 2(a^{I} P^{I}) . (a^{II} P^{II}) . \cos \vartheta\}}.$$

Der Neigungswinkel, welchen die neue Paar-Ebene gegen die erste oder die zweite Paar-Ebene macht, ist gleich dem Winkel, welchen die Kraftrichtungen P und $P_{\prime}$ resp. $P_{\prime\prime}$ einschliefsen. Es ist also, wenn diese Winkel mit $\varepsilon_{\prime}$ und $\varepsilon_{\prime\prime}$ bezeichnet werden:

$$140\text{a}) \quad \begin{cases} \sin \varepsilon_{\prime} = \sin \vartheta . \dfrac{P_{\prime}}{P} = \sin \vartheta . \dfrac{a^{I} P^{I}}{aP} \\ \sin \varepsilon_{\prime\prime} = \sin \vartheta . \dfrac{P_{\prime\prime}}{P} = \sin \vartheta . \dfrac{a^{II} P^{II}}{aP} . \end{cases}$$

Man sieht hieraus folgendes Gesetz:

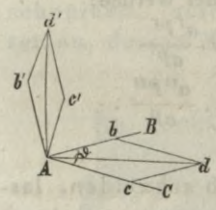
Kräftepaare in Ebenen, die sich schneiden, lassen sich stets zu einem Paare zusammensetzen, indem man den Neigungswinkel der beiden Paar-Ebenen konstruirt, auf den Schenkeln desselben in jeder Ebene Stücke abschneidet, welche dem Kräftepaar in dieser Ebene proportional sind, in der Ebene dieses Winkels über diesen Stücken ein

Parallelogramm konstruirt, und von dem Scheitel des Winkels die Diagonale zieht. Die Diagonale *ist proportional* dem resultirenden Kräftepaar; die Ebene durch die Diagonale und normal zur Ebene des Winkels ist die Paar-Ebene des resultirenden Kräftepaares, und die Winkel, welche die Diagonale mit den Schenkeln des Winkels bildet, sind gleich den Neigungswinkeln dieser Ebene gegen die betreffenden ersten Paar-Ebenen.

Dies interessante Gesetz bietet die gröfste Analogie mit dem Prinzip des Parallelogramms der Kräfte und der Geschwindigkeiten dar; wir nennen es das Prinzip des Parallelogramms der Kräftepaare.

9) Zwei Kräftepaare, deren Paar-Axen nicht parallel sind, *lassen* sich zu einem *Kräftepaare* vereinigen, indem man zwei Linien konstruirt, die sich schneiden, und den Paar-Axen einzeln parallel sind, von dem Durchschnittspunkt dieser Linien auf jeder ein Stück abträgt, welches dem Moment des Kräftepaars proportional ist, mit dessen Axe die betreffende Linie parallel ist, und aus diesen Stücken ein Parallelogramm konstruirt. Die Diagonale des Parallelogramms vom Durchschnittspunkt der Linien aus, repräsentirt, der Gröfse nach, das Moment des resultirenden Kräftepaars, und der Lage nach die Axe desselben. Die Paar-Ebene des resultirenden Kräftepaars ist normal zu dieser Axe.

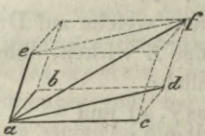
Denn es seien AB und AC die Schnitte der Paar-Ebenen der gegebenen Kräftepaare mit einer Ebene, die zu beiden normal ist, $ABC = \vartheta$ ist der Neigungswinkel beider Ebenen, nach dem vorigen Satz ist der Normalschnitt der resultirenden Paar-Ebene und das Moment des resultirenden Kräftepaars durch die Diagonale Ad zu bestimmen, wenn Ac dem Moment des Kräftepaars in der Ebene AC, Ab dem Moment des Kräftepaares in der Ebene AB proportional ist. Errichten wir in der Ebene ABC in A auf AB die Normale Ab' auf AC die Normale Ac', so sind diese Normalen auch normal auf den Ebenen AB und AC, und folglich parallel mit den Paar-Axen; machen wir $Ab' = Ab$, $Ac' = Ac$, vollenden das Parallelogramm und ziehen die Diagonale Ad', so ist sehr leicht geometrisch zu zeigen, dafs $Ad' = Ad$, und normal zu Ad sei. Da Ad'



$= Ad$ ist, so ist auch Ad' proportional dem resultirenden Kräftepaar, und da Ad' normal zu Ad ist, so ist Ad' auch normal zu der Ebene, in welcher das resultirende Paar liegt, folglich eine Paar-Axe des resultirenden Paars. Dies war nachzuweisen.

Wir nennen dies Gesetz das Parallelogramm der Paar-Axen.

10) Wirken auf ein festes System drei Kräftepaare, deren Paar-Axen nicht in eine Ebene gelegt werden können, so kann man dieselben zu einem Kräftepaar vereinigen, dessen Moment durch die Gröfse, und dessen Paar-Axe durch die Lage der Diagonale eines Parallelepipedums repräsentirt wird, dessen Seiten einzeln proportional den Momenten der gegebenen Kräftepaare, und parallel mit deren Paar-Axen sind. Die Ebene des resultirenden Kräftepaars steht normal auf der Diagonale des Parallelepipedums.



Denn es lassen sich nach dem vorigen Satze die Kräftepaare, deren Axen parallel mit ab und ac sind, zu einem Kräftepaar zusammensetzen, dessen Axe ad ist, und es läfst sich dieses Kräftepaar mit dem dritten, dessen Axe ac ist, wiederum zusammensetzen zu einem resultirenden Kräftepaare. Die Axe desselben ist af, und es ist auch af proportional dem Moment desselben, wenn ae, ac und ab proportional sind dem Momente der einzelnen Kräftepaare. Nun ist aber af auch die Diagonale des Parallelepipedums $eabdcf$.

Wir nennen dies Gesetz das Parallelepipedum der Paar-Axen.

Die Kräftepaare lassen sich auch nach dem Gesetz No. 8 zusammensetzen, indem man zuerst die Kräftepaare in zwei Ebenen zu einem komponirt, und dieses dann mit dem Kräftepaar in der dritten Ebene zusammensetzt.

11) Jedes Kräftepaar läfst sich in zwei oder mehre andere zerlegen, von denen entweder die Lage der Paar-Axen oder die Gröfse der Momente der Kräftepaare gegeben sein kann.

Dies folgt unmittelbar aus den Gesetzen No. 8, 9 und 10.

12) Der Neigungswinkel der Paar-Axe gegen eine beliebige Ebene ist der Komplementswinkel des Neigungswinkels der Paar-Ebene gegen dieselbe Ebene, oder

auch des Neigungswinkels der Paar-Axe gegen eine auf dieser Ebene normale Axe.

Dies folgt unmittelbar aus der Bedingung, dafs die Paar-Axe normal zur Paar-Ebene ist.

Mit Hilfe dieser Gesetze lassen sich oft die Entwickelungen der §§ 75 und 76 wesentlich vereinfachen. Betrachten wir z. B. den Fall in § 76 A. Wir zerlegen sämmtliche Kräfte in ihren Angriffspunkten nach drei Richtungen, parallel mit den drei Axen; es entstehen die Kräfte: $K.\cos\alpha\ldots$, $K.\cos\beta\ldots$, $K.\cos\gamma\ldots$, und es läfst sich die Resultirende der fortschreitenden Bewegung nach den Gesetzen auf S. 100 und nach den Gleichungen 127, 128, 128 a) der Gröfse und Richtung nach, so wie ihr Angriffspunkt bestimmen. Nun wirken die Kräfte $K.\cos\beta$ und $K.\cos\gamma$ auf Drehung um die Axe der X; ihre Momente sind $K.\cos\beta.z\ldots\ldots$ und $K.\cos\gamma.y$. Diese Momente lassen sich durch ein Kräftepaar ersetzen (No. 7), dessen Moment ist:

$$141)\ \Sigma(K.\cos\beta.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.y).$$

In gleicher Weise lassen sich die Momente, welche auf Drehung um die Axe der Y nnd um diejenige der Z wirken, durch Kräftepaare ersetzen, deren Momente beziehlich:

$$141)\ \begin{cases} \Sigma(K.\cos\alpha.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.x) \text{ und} \\ \Sigma(K.\cos\alpha.y) + \Sigma(K.\cos\beta.x) \end{cases}$$

sind. Da die Axen dieser Kräftepaare normal zu einander sind, so ergiebt sich nach No. 10 das Moment des resultirenden Kräftepaars gleich:

$$141\text{a})\ \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\beta.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.y)]^2 + [\Sigma(K.\cos\alpha.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.x)]^2 + [\Sigma(K.\cos\alpha.y) + \Sigma(K.\cos\beta.x)]^2\right\}},$$

oder:

$$\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,})]^2 + [\Sigma(K.\sin\beta.R_{,,})]^2 + [\Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,})]^2\right\}},$$

und es findet sich der Neigungswinkel $\eta_{,}$ der resultirenden Paar-Axe gegen die Ebene YZ:

$$141\text{b})\ \tan\eta_{,} = \frac{\Sigma(K.\cos\beta.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.y)}{\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\alpha.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.x)]^2 + [\Sigma(K.\cos\alpha.y) + \Sigma(K.\cos\beta.x)]^2\right\}}}$$

oder nach 135 a) gleich:

$$\tan\eta_{,} = \frac{\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,})}{\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\beta.R_{,,})]^2 + [\Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,})]^2\right\}}}.$$

und der Neigungswinkel $\varphi_{,}$ der resultirenden Paar-Ebene gegen die Ebene *YZ*, oder der Neigungswinkel der resultirenden Paar-Axe gegen die Axe der *X* nach No. 12:

$$141\,c)\quad \operatorname{tang}\varphi_{,} = \operatorname{cotg}\eta_{,} = \frac{1}{\operatorname{tang}\eta_{,}}$$

u. s. w.

Die Gleichungen, welche entstehen, indem man anstatt der Koordinaten die Hebelsarme der Kräfte (nach Gleichung 135 a) S. 128) einführt, sind dieselben, welche wir unter 138 und 138a) S. 131 auf anderem Wege entwickelt haben, und es gelten für Kräftepaare, deren Paar-Axen normal zu einander sind und die nicht in derselben Ebene liegen, die auf S. 131 bei Gelegenheit der Entwickelung dieser Gleichungen aufgestellten Regeln.

Festes System mit fixen (festgehaltenen) Punkten.

§ 79. Die bisherigen Untersuchungen über die Gesetze, welche für Kräfte gelten, die auf ein festes System wirken, setzten überall voraus, dafs jeder Punkt des Systems diejenige Bewegung machen könne, welche durch die Einwirkung jener Kräfte bedingt wurde; wir nennen ein System, für welches diese Voraussetzung zutrifft ein freies System. Es kommen jedoch sehr häufig auch solche Anordnungen vor, bei denen jene Voraussetzungen nicht gelten; es kann vielmehr die Bedingung gestellt sein, dafs gewisse Punkte des festen Systems sich nicht bewegen dürfen, wie auch die Kräfte des Systems beschaffen sein mögen; solche Punkte nennen wir fixe Punkte, oder festgehaltene Punkte des Systems, und das System selbst im Gegensatz zu dem freien System, nennen wir ein festes System mit fixen Punkten. Die Fälle, welche hier von besonderem Interesse sind, sind folgende:

a) ein festes System mit einem fixen Punkte,
b) ein festes System mit zwei fixen Punkten,
c) ein festes System mit drei fixen Punkten.

Nach den vorstehenden Andeutungen haben wir unter einem fixen Punkt eines Systems überhaupt einen solchen zu verstehen, welcher weder eine fortschreitende Bewegung noch eine rotirende Bewegung um irgend eine Axe annehmen kann. Hieraus folgt zunächst:

1) dafs das System überhaupt keine fortschreitende Bewegung haben könne, denn eine solche würde allen Punkten des Systems gemeinschaftlich (§ 65. S. 88), folglich auch den fixen Punkten eigen sein, und dies widerspricht der Voraussetzung, und

2) dafs die Drehaxe des Systems immer durch die fixen Punkte gehen müsse; denn nur die Punkte, welche in der Drehaxe liegen, haben keine rotirende Bewegung.

Diese beiden Bedingungen erheischen, dafs in den fixen Punkten Kräfte wirksam sein müssen, deren Komponenten, in Bezug auf drei normale Axen, gleich und entgegengesetzt den Komponenten aller übrigen Kräfte in Bezug auf dieselben Axen sind (§ 71. S. 99), und deren Momente in Bezug auf irgend eine Axe, welche nicht durch die fixen Punkte geht, zusammen gleich und entgegengesetzt der Summe der Momente aller übrigen auf das System wirkenden Kräfte sein müssen; denn, denken wir solche Kräfte in das System eingeführt, so wird das System überhaupt im Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung sein (*erste Bedingung*), und es wird auch im Gleichgewicht gegen drehende Bewegung sein in Bezug auf jede Axe, welche nicht durch die fixen Punkte des Systems geht (zweite Bedingung).

Die Kräfte, welche dieser Darstellung nach in den fixen Punkten wirksam sein müssen, um diese Punkte eben als fixe zu konstituiren, nennen wir die Reaktionen des Systems gegen die fixen Punkte, und die ihnen gleichen aber entgegengesetzten Kräfte, deren Komponenten nach den drei Axen also in demselben Sinne wirken, wie die Komponenten der Resultirenden der fortschreitenden Bewegung des Systems nach denselben Axen, nennen wir die Drucke des Systems gegen die fixen Punkte.

1) Festes System mit einem fixen Punkt. Der Druck Q des Systems gegen den fixen Punkt und die Richtung dieses Druckes ist hier ohne Weiteres zu bestimmen durch die Gleichungen 110 und 111) S. 98; denn da nur ein fixer Punkt vorhanden ist, so mufs die Reaktion gegen denselben gleich der Gegenkraft des Systems $(-Q)$ gegen fortschreitende Bewegung sein. Denken wir drei normale Koordinaten-Axen, auf welche wir das System beziehen, und denken wir in dem fixen Punkt, dessen Koordinaten X, Y und Z sein mögen, die Kraft $-Q$ wirkend, welche mit den Axen die Winkel A, B, Γ macht, so haben wir nunmehr in Bezug auf diese drei Axen drei Kräftepaare, und es ist das Moment des Kräftepaars, welches auf Drehung um die erste Axe wirkt:

$$\Sigma(K.\cos\beta.z)+\Sigma(K.\cos\gamma.y)-Q.\cos B.Z-Q.\cos\Gamma.Y),$$

nun ist aber (111. S. 98):

$$Q.\cos B=\Sigma(K.\cos\beta);\quad Q.\cos\Gamma=\Sigma(K.\cos\gamma);$$

folglich drückt sich das Moment des Kräftepaares in Bezug auf die erste Axe aus, durch:

$$\Sigma(K \,.\, \cos\beta \,.\, [z - Z]) + \Sigma(K \,.\, \cos\gamma \,.\, [y - Y]).$$

In ähnlicher Weise lassen sich die Momente der Kräftepaare in Bezug auf die beiden andern Axen darstellen. Nun sieht man aber leicht, dafs $(z - Z)$ ... $(y - Y)$ ... $(x - X)$ nichts anders bezeichnet, als die Koordinaten der Angriffspunkte der Kräfte in Bezug auf ein Koordinaten-System, dessen Anfangspunkt in dem ersten Koordinaten-System die Koordinaten X, Y, Z hat, mit anderen Worten, dessen Anfangspunkt der fixe Punkt ist. Verlegt man also den Anfangspunkt der Koordinaten in den fixen Punkt und nennt man die neuen Koordinaten $x_{,}, y_{,}, z_{,}$ so ist das Moment des Kräftepaares in Bezug auf die erste Axe

$$\Sigma(K \,.\, \cos\beta \,.\, z_{,}) + \Sigma(K \,.\, \cos\gamma \,.\, y_{,}) \text{ u. s. w.}$$

Es folgt sodann leicht folgendes Gesetz:

> Rotirt ein festes System um **einen** fixen Punkt, so erhält man die Lage der Drehaxe und das Moment des resultirenden Kräftepaares, indem man durch den fixen Punkt drei beliebige zu einander normale Koordinatenaxen annimmt, die Kräftepaare des Systems für diese drei Axen durch Bildung der entsprechenden Momentensummen bestimmt, und diese drei Kräftepaare nach den Gleichungen 141a) (resp. 138) zusammensetzt.

Für den Fall, dafs man die Koordinatenaxen durch den fixen Punkt legt, sind die Momente der Reaktion gegen den fixen Punkt in Bezug auf alle drei Axen Null; legt man dagegen die Koordinatenaxen nicht durch den fixen Punkt, so hat man die Momente der in dem fixen Punkte wirkenden Reaktion mit in Betracht zu ziehen.

2) Festes System mit zwei fixen Punkten. Hat ein festes System zwei fixe Punkte, so müssen beide in der Drehaxe liegen, und es folgt daher, dafs die Drehaxe des festen Systems durch die gerade Linie gegeben ist, welche durch die beiden fixen Punkte geht; es erfolgt daher die Drehung sämmtlicher Punkte des Systems in Ebenen, welche zu der Verbindungslinie der beiden fixen Punkte normal sind. Das Kräftepaar in Bezug auf diese Verbin-

dungslinie als Drehaxe mufs das resultirende Kräftepaar des Systems sein, und es müssen folglich die Kräftepaare in Bezug auf zwei Axen, die unter sich und zu der Verbindungslinie der fixen Punkte normal sind, einzelne gleich Null sein; denn wäre dies nicht der Fall, und man brächte das System auf drei Kräftepaare für diese drei Axen, so würde das resultirende Kräftepaar eine andere Paar-Axe haben, als die Verbindungslinie der beiden fixen Punkte. Nehmen wir nun ein rechtwinkliges Koordinaten-System an, dessen eine Axe (Axe der Z) mit der Verbindungslinie der beiden fixen Punkte der Richtung nach zusammenfällt, so liegen die beiden andern Axen in einer Ebene, welche normal zu der Verbindungslinie ist, und es sind die Koordinaten der fixen Punkte in Bezug auf diese beiden Axen gleich Null, während sie in Bezug auf die Axe der Z mit Z_I und Z_{II} bezeichnet werden mögen.

Bezeichnet nun Q_I' den Druck des Systems gegen den ersten fixen Punkt, parallel mit der Axe der X, Q_I'' und Q_I''' die Drucke in demselben Punkt, welche parallel mit der zweiten und dritten Axe sind, und bezeichnen wir analog mit Q_{II}', Q_{II}'', Q_{II}''' die Drucke des Systems in dem zweiten fixen Punkt; ihre Reaktionen also mit entgegengesetztem Vorzeichen, so müssen folgende Gleichungen erfüllt werden:

1) $\Sigma(K \,.\, \cos\alpha) - Q_I' - Q_{II}' = 0.$
2) $\Sigma(K \,.\, \cos\beta) - Q_I'' - Q_{II}'' = 0.$
3) $\Sigma(K \,.\, \cos\gamma) - Q_I''' - Q_{II}''' = 0.$
4) $\Sigma(K \,.\, \cos\beta \,.\, z) + \Sigma(K \,.\, \cos\gamma \,.\, y) - Q_I'' \,.\, Z_I - Q_{II}'' \,.\, Z_{II} = 0.$
5) $\Sigma(K \,.\, \cos\alpha \,.\, z) + \Sigma(K \,.\, \cos\gamma \,.\, x) - Q_I' \,.\, Z_I - Q_{II}' \,.\, Z_{II} = 0.$

Die drei ersten Gleichungen stellen die Bedingungen des Gleichgewichts gegen fortschreitende Bewegung dar, die beiden letzten die Bedingungen des Gleichgewichts gegen Drehung um die Axen X und Y. Die Gleichungen 1), 2), 4) und 5) genügen zur Bestimmung der Drucke Q_I' Q_I'' und Q_{II}' Q_{II}'', wogegen zur Bestimmung der Drucke Q_I''' und Q_{II}''', nämlich derjenigen, welche in den fixen Punkten auf Verschieben des Systems in der Richtung der Verbindungslinie wirken, nur die eine Gleichung 3) vorhanden ist; es bleibt daher einer von diesen beiden Drucken entweder willkürlich anzunehmen oder durch andere Bedingungen zu bestimmen.

Entwickelt man aus 1) und 5) die Drucke Q_I' und Q_{II}' so findet man:

$$
142)\quad \begin{cases}
Q_{I}' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.[z - Z_{II}]) + \Sigma(K.\cos\gamma.x)}{Z_{I} - Z_{II}} \\[2ex]
Q_{II}' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.[z - Z_{I}]) + \Sigma(K.\cos\gamma.x)}{Z_{II} - Z_{I}} \\[2ex]
Q_{I}'' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\beta.[z - Z_{II}]) + \Sigma(K.\cos\gamma.y)}{Z_{I} - Z_{II}} \\[2ex]
Q_{II}'' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\beta.[z - Z_{I}]) + \Sigma(K.\cos\gamma.y)}{Z_{II} - Z_{I}} \\[2ex]
\text{während zwischen } Q_{I}''' \text{ und } Q_{II}''' \text{ nur die Beziehung bleibt} \\
Q_{I}''' + Q_{II}''' = \Sigma(K.\cos\gamma).
\end{cases}
$$

Man bemerkt leicht, dafs der Nenner in den obigen Gleichungen überall die Entfernung der beiden fixen Punkte ausdrückt, und dafs der Zähler die Momentensummen in Bezug auf Drehung um eine Axe bezeichnet, die durch den andern fixen Punkt geht, und normal sowohl zu der Richtung der Verbindungslinie der fixen Punkte, als zu der Richung ist, für welche man den Druck des Systems bestimmen will (135a). Hieraus ergiebt sich, dafs die Gleichungen 142) *folgendes Gesetz darstellen:*

> **Wenn in einem festen System, auf welches beliebige Kräfte einwirken zwei fixe Punkte vorhanden sind, so rotirt dasselbe um eine Axe, welche durch die beiden fixen Punkte geht (fixe Axe); man findet den Druck des Systems auf einen der fixen Punkte nach einer Richtung, die normal zu dieser Drehaxe ist, wenn man die Summe der Momente der sämmtlichen übrigen auf das System angebrachten Kräfte in Bezug auf eine Axe, die durch den andern fixen Punkt geht, und normal sowohl zur Drehaxe, als zu der betrachteten Richtung ist, dividirt durch den Abstand der beiden fixen Punkte.**

Das **Moment des auf Drehung um die fixe Axe** wirkenden Kräftepaares drückt sich aus durch:

$$
142a)\quad \begin{cases}
\Sigma(K.\cos\alpha.y) + \Sigma(K.\cos\beta.x) \\
\text{oder auch durch} \\
\Sigma(K.\sin\gamma.R_{III}) \text{ (Gleichung 135a)}
\end{cases}
$$

wenn R_{III} den kürzesten Abstand jeder Kraftrichtung von der fixen Axe, und γ den Winkel bezeichnet, den die Kraftrichtung mit der fixen Axe bildet.

Liegen die sämmtlichen Drucke in Ebenen, welche **normal zu der fixen Axe sind**, so ist für alle Drucke $\gamma = 90°$ folglich

$\cos\gamma = 0$, und es folgt, dafs der Druck, welcher auf Verschieben in der Richtung der Axe wirkt, Null ist; bezeichnen wir den Abstand der beiden fixen Punkte mit L, die Koordinaten der Drucke K... in Bezug auf eine Ebene, welche durch den ersten fixen Punkt geht und normal zur fixen Axe ist mit z_0.... so folgt:

$$Z_{II} - Z_I = L; \quad z = z_0 + Z_I = z_0 + Z_{II} - L$$
$$Z_I - Z_{II} = -L; \quad z - Z_{II} = z_0 - L; \quad z - Z_I = z_0.$$

Es gehen also die Gleichungen 142) für diesen Fall über in folgende:

$$\text{142 b)} \left\{ \begin{array}{l} Q_I' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.[L - z_0])}{L}; \quad Q_I'' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\beta.[L - z_0])}{L} \\[2ex] Q_{II}' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.z_0)}{L}; \quad Q_{II}'' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\beta.z_0)}{L}; \end{array} \right.$$

d. h. wenn ein festes System um eine Axe rotirt, welche durch zwei fixe Punkte geht, und es liegen sämmtliche Kräfte, die auf das System wirken, in Ebenen die zu der Axe normal sind, so findet man den Druck auf jeden der fixen Punkte nach irgend einer Richtung, wenn man die mit dieser Richtung parallelen Komponenten jeder Kraft mit dem Abstand ihres Angriffspunkts von einer Ebene, welche in dem andern fixen Punkt normal zur Drehaxe ist, multiplizirt, und die Summe der Produkte durch den Abstand der beiden fixen Punkte dividirt.

3) Festes System mit drei fixen Punkten. Hat ein festes System drei fixe Punkte, so können dieselben entweder in gerader Linie liegen, oder nicht.

Liegen die der fixen Punkte in gerader Linie, so ist der Fall zum Theil auf den vorigen zurückzuführen; die Drehaxe mufs mit jener geraden Linie zusammenfallen, allein indem man die Bedingungsgleichung 1 bis 5 (S. 146) bildet, und die Drucke auf den dritten fixen Punkt Q_{III}', Q_{III}'', Q_{III}''' mit den Koordinaten X_{III}, Y_{III} und Z_{III} einführt, so ergiebt sich bald, dafs nun die Zahl der Unbekannten gröfser ist, als die Zahl der Gleichungen; es lassen sich also nun die Drucke auf die fixen Punkte nicht anders bestimmen, als indem man entweder neue Bedingungen giebt, oder indem man gewisse Drucke annimmt. Diese Bemerkung gilt natürlich nur unter der Voraussetzung, dafs das System ein absosut festes (§ 64. S. 84) sei, dafs wir also keine Formveränderung desselben voraussetzen dürfen. In manchen Fällen ist die Voraussetzung zulässig, dafs das System durch eine Ebene, die normal zu der Verbindungslinie der drei fixen Punkte ist, und durch den mittlern fixen

Punkt geht, sich in zwei feste Systeme jedes mit zwei fixen Punkten zerlegen lasse, und dann sind die Drucke auf die fixen Punkte nach Anleitung der Gleichungen 142) zu bestimmen, indem man die Kräfte, deren Angriffspunkte auf der einen Seite der Ebene liegen als zu dem einen System, diejenigen auf der anderen Seite der Ebene als zu dem andern System gehörig ansieht.

Hat ein festes System drei fixe Punkte, welche **nicht** in gerader Linie liegen, so ist das System in vollkommenem Gleichgewicht, denn es kann zufolge des für die fixen Punkte im Anfange dieses Paragraphen entwickelten Satzes No. 1 (S. 143) keine fortschreitende Bewegung haben, und es kann auch keine drehende Bewegung um irgend eine Axe annehmen, denn eine solche Drehaxe müfste alle drei fixen Punkte aufnehmen, und das würde der Voraussetzung widersprechen, dafs die drei fixen Punkte nicht in ein und derselben geraden Linie liegen.

Reduktion der Kräfte in einem System mit zwei fixen Punkten.

§ 80. *Hat ein festes System zwei fixe Punkte, und ist es daher gezwungen um eine Axe zu rotiren, welche durch diese beiden Punkte geht, so nennt man diese Axe die fixe Axe des Systems.*

I. Denken wir ein festes System mit zwei fixen Punkten, und es mögen die Kraftrichtungen sämmtlich in Ebenen liegen, die normal zur fixen Axe sind. Wir können nun den Druck bestimmen, den jede einzelne Kraft parallel mit ihrer Richtung in jedem der beiden fixen Punkte erzeugt, indem wir nämlich einstweilen alle übrigen Kräfte fortdenken, und die Gleichung 142b) oder das Gesetz derselben (S. 148) für diese Kraft allein anwenden. Wir sagen dann, die Kraft werde auf die fixen Punkte reduzirt. Wenn wir sämmtliche Kräfte einzeln auf die fixen Punkte reduziren, so erhalten wir in jedem der fixen Punkte eine Reihe von Drucken, deren Richtungen sämmtlich in einer Ebene liegen, die in dem fixen Punkt normal zur Drehaxe ist, und indem wir diese Drucke nach bekannten Regeln zusammensetzen, oder auch nach zwei rechtwinklig angenommenen Axen zerlegen, erhalten wir wieder die Drucke sämmtlicher Kräfte auf den fixen Punkt.

Die Richtigkeit dieses Gesetzes leuchtet ein, wenn wir berücksichtigen, dafs die mit den Kräften vorgenommenen Operationen lediglich die Berechnung der Gleichungen 142b) darstellen, mit dem Unterschiede, dafs wir für jede Kraft zuerst die Werthe $\frac{K.(L-z_0)}{L}$

und $\frac{K - z_0}{L}$ bilden, hierauf aber, nachdem durch diese Operation sämmtliche Kräfte reduzirt sind, die Werthe $\frac{K.(L-z)}{L}.\cos\alpha$ u. s. w. bilden, und dann die Summation dieser Werthe vornehmen.

II. Wenn die Drucke $K \ldots$, welche auf Drehung eines festen Systems um eine fixe Axe wirken in Ebenen liegen, die zu der fixen Axe normal sind, so kann man im Durchschnittspunkt jeder solchen Ebene mit der fixen Axe zwei gleich grofse, aber entgegengesetzt gerichtete Drucke $\mp K$ und $\pm K$ angebracht denken, die dem in dieser Ebene liegenden Druck $\pm K$ gleich und mit der Richtung desselben parallel sind. Nun giebt immer der ursprüngliche Druck $\pm K$ mit einem der beiden in der Axe angebrachten Drucke $\mp K$ ein Kräftepaar, während der andere Druck in der Axe $\pm K$ durch die Reaktion der fixen Punkte aufgehoben wird. Die verschiedenen Drucke $\pm K$, welche mit den ursprünglichen Drucken gleich grofs und gleich gerichtet sind, kann man auf die fixen Punkte reduciren, und dabei nach dem so eben entwickelten Gesetz verfahren, während das in der Ebene bestehende Kräftepaar den Gesetzen für die Kräftepaare unterworfen bleibt. Das Moment dieses Kräftepaares ist offenbar $K.R_{,,,}$, wenn $R_{,,,}$ der kürzeste Abstand der Kraftrichtung $\pm K$ von der fixen Axe ist. Man kann alle die einzelnen Kräftepaare zu einem Kräftepaar vereinigen, man kann jedes in eine beliebige parallele Ebene verlegen, man kann für jedes Kräftepaar ein anderes substituiren, dessen Hebelsarm oder dessen Druck beliebig anzunehmen sind. Man kann dabei die Kraft $\mp K$ immer durch die fixe Axe gehend denken oder auch nicht. Denkt man für das Kräftepaar $KR_{,,,}$ ein anderes Kräftepaar, das demselben gleich ist, dessen Druck aber K_0 und dessen Hebelsarm ϱ sei, so sagt man, es sei der Druck K von dem Hebelsarm $R_{,,,}$ auf dem Hebelsarm ϱ reduzirt worden, und aus der Gleichung

$$143)\quad \left\{\begin{array}{l} KR_{,,,} = K_0\,\varrho \text{ folgt:} \\ K_0 = K.\dfrac{R_{,,,}}{\varrho} \\ \varrho = \dfrac{K}{K_0}.R_{,,,}. \end{array}\right.$$

Das Reduziren der Kräfte ist daher nichts anderes, als die Substitution eines Kräftepaars, durch ein anderes, dessen Moment dem ersten gleich ist, und man hat bei dieser Substitution volle Freiheit alle die Gesetze in Anwendung zu bringen, welche wir für die Kräftepaare (§ 78) entwickelt haben, nur darf man nie vergessen, daſs man es hierbei stets mit den Momenten zu thun hat, daſs also die Kräfte jedes substituirten Kräftepaars in Bezug auf fortschreitende Bewegung sich aufheben, und daſs folglich durch dergleichen Reduktionen der Druck auf die fixen Punkte nicht geändert wird.

Von den in einem festen System thätigen Kräften.

Thätige (lebendige) Kräfte der fortschreitenden Bewegung; Mittelpunkt derselben, Schwerpunkt, Guldinsche Regeln.

§ 81. Wenden wir uns nunmehr wieder zu den Betrachtungen des § 66. S. 88. Wir haben in dem Vorstehenden die wichtigsten Gesetze über die Wirkung der auf ein festes System angebrachten Kräfte entwickelt, und es wird sich nun darum handeln, die Gesetze für die in einem festen System thätigen Kräfte festzustellen. Nachdem dies geschehen, haben wir noch die Beziehungen zu untersuchen, welche zwischen den auf ein festes System angebrachten, und den in einem festen System thätigen Kräften statt finden. Zunächst ist wiederholt darauf hinzuweisen, daſs der Begriff der in einem System thätigen Kräfte nur auf einer Vorstellung beruht, welche wir zur Erleichterung der Anschauung gewisser Vorgänge eingeführt haben. Wir substituiren für die auf das System in verschiedenen Angriffspunkten angebrachten Kräfte andere Kräfte, nämlich solche, die in jedem einzelnen Massenelement thätig sein müſsten, um in dem System genau dieselbe Wirkung hervorzubringen, welche jene erzeugen (S. 66), oder mit anderen Worten, wir denken uns in dem System anstatt der auf dasselbe angebrachten Kräfte, andere Kräfte angebracht, deren Betrachtung bequemer ist. Da also die in einem System thätigen Kräfte sich vollkommen ansehen lassen, als eine neue Gruppe auf das System angebrachter Kräfte, durch welche wir die Wirkung der ursprünglich angebrachten Kräfte ersetzt denken, so werden sie auch im Allgemeinen keinen anderen Gesetzen unterliegen, als denen, welche wir für die auf ein festes System angebrachten Kräfte in den vorigen Paragraphen hergeleitet haben, nur werden diese Gesetze sich dadurch modificiren, daſs gewisse neue Bedingungen hinzutreten, welche diese neuen Kräfte erfüllen müssen, um den Voraussetzungen zu entsprechen, die wir für dieselben gemacht haben.

Indem wir also die thätigen oder lebendigen Kräfte (S. 89) betrachten, welche der fortschreitenden Bewegung des Systems entsprechen, werden wir von der Resultirenden dieser Kräfte und von deren Angriffspunkt sprechen können, und indem wir die thätigen oder lebendigen Kräfte der rotirenden Bewegung des Systems untersuchen, werden wir von dem Moment des resultirenden Kräftepaars, von der Lage der resultirenden Paaraxe u. s. w. handeln können, und zu bestimmen haben, welche eigenthümlichen Verhältnisse durch das Hinzutreten der gemachten Voraussetzungen entstehen.

Erinnern wir uns an die Resultate der Untersuchungen, die wir in § 65 über die Bewegung eines festen Systems angestellt haben (S. 88) und betrachten wir zunächst die fortschreitende Bewegung des Systems.

Zufolge jener Untersuchungen haben wir die lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung als solche zu betrachten, welche die *sämmtlichen* Massenelemente *in* der betrachteten Zeit durch gleich grofse und parallele geradlinigte Wegelemente treiben. Dies ist nicht anders denkbar, als indem wir diese in den einzelnen Massenelementen wirksamen Kräfte als gleich grofs und parallel ansehen. Jede dieser Kräfte hat also denselben Werth

$$dK = dm \, . \, f$$

und da sie sämmtlich parallel sind, so ist ihre Resultirende (§ 72. Gl. 112):

$$143) \quad Q = \Sigma(dK) = \Sigma(dm \, . \, f) = f \, . \, \Sigma(dm) = f \, . \, M.$$

Es bezeichnet aber offenbar $\Sigma(dm)$ die Summe aller Massenelemente oder die Gesammtmasse des Systems. Wir bezeichnen dieselbe künftig durch M. Da nun die Leistung jeder einzelnen Kraft sich ausdrückt durch

$$dK \, . \, ds = dm \, . \, f \, . \, ds,$$

ds aber ebenfalls für sämmtliche Massenelemente gleich grofs ist, so ist die Gesammtleistung aller lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung mit Rücksicht auf Gleichung 47) (S. 27)

$$143a) \quad \Sigma(dK \, . \, ds) = ds \, . \, f \, . \, \Sigma(dm) = M \, . \, f \, . \, ds = M \, . \, c \, . \, dc,$$

d. h. wenn ein festes System eine fortschreitende Bewegung hat, so ist die Leistung sämmtlicher lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung ebenso grofs, als ob die Gesammtmasse des Systems, in einem Punkte vereinigt, sich mit der, den sämmtlichen Massenelementen gemeinschaftlichen Geschwindigkeit bewegte.

Wir können nun auch die Lage des Angriffspunkts dieser Resultirenden bestimmen (§ 74), d. h. denjenigen Punkt, in welchem wir anstatt der sämmtlichen lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung des Systems ihre Resultirende wirksam denken können, so dafs durch Einführung der Resultirenden lediglich die fortschreitende, aber keine drehende Bewegung in dem System erzeugt wird. Diesen so bestimmten Angriffspunkt nennen wir den Mittelpunkt der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung. Wir bedienen uns zu seiner Bestimmung ganz einfach der Gleichungen 117a), S. 104, welche, mit Berücksichtigung der hier gemachten Voraussetzungen, folgende Form annehmen:

$$144)\quad X = \frac{\Sigma(dm\,.\,x)}{M}; \quad Y = \frac{\Sigma(dm\,.\,y)}{M}; \quad Z = \frac{\Sigma(dm\,.\,z)}{M}.$$

Man sieht, dafs in diesen Werthen überall das gemeinschaftliche Aenderungsmaafs f herausgefallen ist, und, dafs der Abstand des Mittelpunkts der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung von irgend einer Ebene gefunden wird durch die Summe der Produkte jedes Massenelements in seinen Abstand von derselben Ebene, dividirt durch die Gesammtmasse des Systems.

Es folgt hieraus, dafs die Lage dieses Mittelpunktes unabhängig von der Gröfse der lebendigen Kräfte, und nur abhängig ist von der Gruppirung der einzelnen Massenelemente des Systems.

Der Mittelpunkt der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung ist also:

1) in einem gegebenen festen System ein bestimmter Punkt, der in dem System so lange eine unveränderte Lage behält, als die Vertheilung der Massenelemente des Systems unverändert bleibt;

2) stets derselbe für alle Kräfte, die auf das System so einwirken, dafs sie jedes Massenelement in derselben Richtung und mit demselben Aenderungsmaafs in Anspruch nehmen, gleichviel wie grofs dieses Aenderungsmaafs sein mag, und gleichviel ob diese Kräfte als lebendige oder als angebrachte Kräfte (§ 66) betrachtet werden.

Die Schwerkraft (§ 18) ist als eine auf jedes feste System in einer Weise wirkende Kraft zu betrachten, die den zuletzt gemachten Voraussetzungen entspricht. Der Angriffspunkt der Resultirenden der Schwerkraft (der Schwerpunkt) fällt also mit dem Mittelpunkt der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung in jedem materiellen System zusammen. Es ist also der Mittelpunkt der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung eines festen Systems und der Schwerpunkt identisch.

Bezeichnen wir mit dG die Gewichte der einzelnen Massenelemente, so ist $dG = g \cdot dm$ und $G = g \cdot M$ (Gl. 38. S. 25), und indem man in Gleichung 144) Zähler und Nenner mit g multiplizirt, ergiebt sich durch Einsetzung dieser Werthe

$$144\text{a)}\quad X = \frac{\Sigma(dG \cdot x)}{G}; \quad Y = \frac{\Sigma(dG \cdot y)}{G}; \quad Z = \frac{\Sigma(dG \cdot z)}{G}.$$

Bezeichnet dV das Volumelement eines Körpers, und γ das Gewicht einer Volumeinheit, so ist offenbar $dG = dV \cdot \gamma$ und $G = \Sigma(dV \cdot \gamma)$, worin γ für jedes Volumelement einen andern oder auch denselben Werth haben kann. Im ersten Falle nennt man das System in Bezug auf seine Dichtigkeit heterogen (ungleichartig), im letzten Falle homogen (gleichartig). Setzt man diese Werthe in 144a), so hat man allgemein:

$$144\text{b)}\quad X = \frac{\Sigma(dV \cdot \gamma \cdot x)}{\Sigma(dV \cdot \gamma)}; \quad Y = \frac{\Sigma(dV \cdot \gamma \cdot y)}{\Sigma(dV \cdot \gamma)}; \quad Z = \frac{\Sigma(dV \cdot \gamma \cdot z)}{\Sigma(dV \cdot \gamma)},$$

und für homogene Systeme:

$$144\text{c)}\quad X = \frac{\Sigma(dV \cdot x)}{V}; \quad Y = \frac{\Sigma(dV \cdot y)}{V}; \quad Z = \frac{\Sigma(dV \cdot z)}{V}.$$

Nehmen wir in den Gleichungen 144, 144a, b und c) den Anfangspunkt des Koordinatensystems im Schwerpunkt an, so wird X, Y und Z einzeln gleich Null, und es folgt:

> dafs die Summe der Momente der einzelnen Massen-, Gewichts oder Raumelemente in Bezug auf jede durch den Schwerpunkt gedachte Ebene gleich Null sei.

Bezeichnet $\Sigma_{\prime}(dV.x)$ die Summe der Momente der auf einer Seite einer beliebigen durch den Schwerpunkt gedachten Ebene liegenden Elemente, und $\Sigma_{\prime\prime}(dV.x)$ die Summe der Momente der auf der anderen Seite dieser Ebene liegenden Elemente, so hat man:

$$\Sigma(dV \cdot x) = \Sigma_{\prime}(dV \cdot x) + \Sigma_{\prime\prime}(dV \cdot x) = 0,$$

folglich:

$$\Sigma_{\prime}(dV \cdot x) = -\Sigma_{\prime\prime}(dV \cdot x),$$

d. h. jede durch den Schwerpunkt eines Systems gedachte Ebene theilt dasselbe in zwei Theile, die so beschaffen sind, dafs die Momentensummen beider Theile gleich grofs sind, aber nach entgegengesetzten Richtungen wirken.

Durch die Gleichung 144c) ist für homogene Systeme die Bestimmung der Lage des Schwerpunktes eine rein geometrische Operation.

Der Begriff des festen Systems (§ 63) gestattet für unsere Untersuchungen jede beliebige Gruppirung der materiellen Punkte (Massenelemente), wir können sie nach denselben Gesetzen gruppirt denken, nach denen geometrische Punkte sich gruppiren lassen, also auch nach den Gesetzen, nach denen diese in Gestalt von Linien, Flächen, Körpern sich anordnen lassen, und es wird nach dieser Bemerkung verständlich sein, wenn wir vom Schwerpunkt einer Linie, einer Fläche oder eines Körpers sprechen.

Wir müssen hier auf die geometrischen Bestimmungen der Schwerpunktslagen in Linien, Flächen und Körpern, sowie auf die weitern Untersuchungen der geometrischen Bedeutung des Schwerpunkts verzichten. Die wichtigsten Resultate jener Bestimmungen stellen wir weiter unten zusammen, und fügen hier gleichfalls in Gestalt eines Resultates zwei wichtige Gesetze an, welche die geometrische Bedeutung des Schwerpunkts erkennen lassen. Es sind dies die sogenannten Guldinschen Regeln *); sie lauten:

1) Der Inhalt eines Rotationskörpers [einer Rotationsfläche] ist gleich dem Produkte aus der Erzeugungsfläche [Erzeugungslinie] in den bei der Erzeugung des Rotationskörpers [der Rotationsfläche] durchlaufenen Weg des Schwerpunktes der erzeugenden Fläche [der Linie].

2) Der Inhalt jedes Körpers [jeder Oberfläche], welcher zwischen zwei beliebigen Ebenen liegt, und aufserdem von lauter parallelen geraden Linien begrenzt [gebildet] wird (schief abgeschnittener prismatischer Körper) ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt [Umfang] der ebenen Figur, welche den Durchschnitt mit der einen Ebene darstellt in den normalen Abstand dieser Ebene von dem Schwerpunkt der Fläche [des Umfangs] der Durchschnittsfigur mit der andern Ebene.

Gesetz für die Bewegung und die Lage der Drehaxe eines freien Systems.

§ 82. Wenn auf ein festes System beliebige Kräfte einwirken, so nimmt dasselbe, wie wir in § 65 gesehen haben, im Allgemeinen gleichzeitig aufser der allen Massenelementen gemeinschaftlichen

---

*) Den Beweis dieser Sätze siehe „Weisbach, Ingenieur und Maschinen-Mechanik, Th. I. § 119 und 120“, und: „Die mechanischen Prinzipien der Ingenieurkunst und Architektur von Moseley; deutsch von Scheffler,“ I. § 38 bis 41.

fortschreitenden Bewegung auch eine Rotationsbewegung an, welche um eine gemeinschaftliche Axe mit einer allen Massenelementen gemeinsamen Winkelgeschwindigkeit statt findet. Die Axe um welche das System rotirt, ist entweder durch fixe Punkte (§ 79) bestimmt, und das System ist also gezwungen um eine gewisse Axe zu rotiren, oder das System ist frei, und dann wird offenbar die Axe um welche das System rotirt im Allgemeinen eine Lage annehmen, die von der Lage und Beschaffenheit der Kräfte abhängig ist, welche eine Rotation des Systems bewirken. Folgen wir der angenommenen Vorstellung, so haben wir uns die fortschreitende Bewegung in irgend einem Zeitelement durch Kräfte hervorgebracht zu denken, die, in den einzelnen Massenelementen wirksam, lediglich diese fortschreitende Bewegung erzeugen, und die drehende Bewegung, welche gleichzeitig erfolgt, haben wir durch eine andere Gruppe von Kräften hervorgebracht zu denken, welche in jedem einzelnen Massenelement wirksam, lediglich diejenige drehende Bewegung erzeugen, welche das Massenelement erleidet. Da nun die lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung in dem festen System nur eine fortschreitende, aber keine drehende Bewegung hervorbringen sollen, und da wir den Angriffspunkt ihrer Resultirenden der Bedingung gemäfs bestimmt haben, dafs wenn wir anstatt der Kräfte nur ihre Resultirende wirksam denken, in dem System gleichfalls keine Drehung erfolge: so mufs offenbar die Richtung dieser Resultirenden unter allen Umständen die Drehungsaxe des Systems schneiden; oder mit andern Worten: die Axe, um welche das System unter dem Einflufs der zweiten Gruppe der lebendigen Kräfte gleichzeitig eine Drehung erleidet, mufs durch die Richtung der Resultirenden der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung gehen; denn im entgegengesetzten Falle würde die Resultirende der fortschreitenden Bewegung einen Hebelsarm in Bezug auf diese Axe besitzen, und gleichfalls auf Drehung um dieselbe wirken, was der Voraussetzung widerspricht. Da nun aber in jedem Augenblick die Axe, um welche das System eine Drehung erleidet die Richtung der Resultirenden der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung schneiden soll, so mufs sie auch in jedem Augenblick die Bahn des Angriffspunkts dieser Resultirenden schneiden, weil nämlich diese Bahn in jedem Augenblick mit der für diesen Augenblick statt finden Richtung der Resultirenden zusammenfällt. Dies heifst aber nichts anders, als dafs die Axe, um welche sich das freie System dreht in jenem Augenblick durch den Angriffspunkt der Resultirenden selbst gehen müsse, denn die in den verschiedenen Zeitelementen stetig aufeinanderfolgenden Lagen des Angriffspunkts einer Kraft bilden eben die Bahn desselben. Da nun der Angriffspunkt der Resultirenden der lebendigen Kräfte des Systems in jedem Augenblick derselbe Punkt, nämlich der Schwerpunkt des Systems ist, so geht die Drehaxe des freien Systems stets durch den Schwerpunkt desselben.

Die Bewegung eines freien Systems ist also immer so aufzufassen, als ob die Gesammtmasse des Systems im Schwerpunkt vereinigt, sich fortschreitend bewegte, und als ob sämmtliche Massenelemente gleichzeitig eine Drehung um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe und zwar mit gemeinschaftlicher Winkelgeschwindigkeit erleiden.

Trägheitsmoment eines festen Systems.

§ 83. Betrachten wir nunmehr ein festes System, welches um eine beliebige Axe rotirt. Die einzelnen Massenelemente beschreiben in jedem Augenblick Wegelemente, die in parallelen zur Drehaxe normalen Ebenen liegen (S. 86. § 65a.). Denkt man die kürzesten Abstände der Massenelemente von der Drehaxe, so fallen die bei der Drehung beschriebenen Wegelemente mit Bogenelementen zusammen, deren Radien diese Abstände sind, und deren Mittelpunkte in der Drehaxe liegen. Die in den einzelnen Massenelementen zu denkenden lebendigen Kräfte, welche diese Drehung hervorbringen, fallen aber ihrer Richtung nach mit diesen Wegelementen zusammen, es bilden also jene Radien auch die kürzesten Abstände der Kraftrichtungen von der Drehaxe, und da diese Kraftrichtungen mit der Drehaxe sämmtlich rechte Winkel machen, da sie in Ebenen liegen, welche zur Drehaxe normal sind, so drückt sich ihr Moment aus durch $dK.R$, wenn dK der in dem Massenelement wirksame Druck, und R der Abstand des Massenelements von der Drehaxe ist, oder indem wir setzen $dK = dm.f$ (S. 11. No. 4) und $f = \frac{dc}{dt}$ (S. 18) auch durch $dm.R.\frac{dc}{dt}$. Führen wir nach S. 50 anstatt dc die Winkelgeschwindigkeit w ein, so hat man $dc = dw.R$, folglich ist $f = \frac{dw}{dt}.R$, und es ist das auf Drehung wirkende Moment unter der Form:

$$dm.R^2.\frac{dw}{dt} = dK.R$$

für jedes einzelne Massenelement darzustellen.

Das Leistungselement der in dem Massenelement wirksam gedachten Kraft ist aber $dK.ds$, oder $d\mathring{m}.f.c.dt$ (S. 27), oder (indem man für c den Werth wR (S. 50) und für f wiederum $\frac{dw.R}{dt}$ setzt):

$$dm.R^2.w.dw = dK.ds.$$

Vergleicht man diesen Werth mit dem eben gefundenen Ausdruck für das statische Moment, so ergiebt sich:

$$145)\quad dK.ds = (dK.R).w.dt,$$

d. h. das Leistungselement einer Kraft, welche eine Drehung um eine Axe bewirkt, ist gleich dem statischen Moment in Bezug auf diese Axe, multiplizirt mit der Winkelgeschwindigkeit und dem Zeitelement.

Die Summe der statischen Momente drückt sich offenbar aus durch:

$$145\text{a})\ \Sigma(dK.R) = \Sigma\left(dm.R^2.\frac{dw}{dt}\right) = \frac{dw}{dt}.\Sigma(dm.R^2) = f_{,}.\Sigma(dm.R^2)$$

(wenn man nämlich unter $f_{,} = \frac{dw}{dt}$ das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit versteht), und die Summe der Leistungselemente sämmtlicher lebendigen Kräfte der drehenden Bewegung durch

$$145\text{b})\quad \Sigma(dK.ds) = \Sigma(dm.R^2.w.dw) = w.dw.\Sigma(dm.R^2).$$

In beiden Ausdrücken kommt der Faktor $\Sigma(dm.R^2)$, oder die Summe der Produkte aus jedem Massenelement in das Quadrat seines kürzesten Abstandes von der Drehaxe vor. Diese Summe nennt man das Trägheitsmoment des festen Systems für diese Drehaxe.

Wenn man die Drehaxe, für welche das Trägheitsmoment gilt, nicht besonders bezeichnet, also allgemein vom Trägheitsmoment eines Systems spricht, so versteht man darunter, dafs dasselbe für eine Axe gilt, die durch den Schwerpunkt geht. Wir bezeichnen künftig das Trägheitsmoment eines Systems für eine durch den Schwerpunkt gehende Axe immer mit J, und für eine andere, nicht durch den Schwerpunkt gehende Axe mit $J_{,}$. Die Gleichungen 145a) und 145b) gehen also im Allgemeinen in die Form über:

$$145\text{c})\quad \begin{cases} \Sigma(dK.R) = f_{,}.J_{,} = \frac{dw}{dt}.J_{,} \\ \Sigma(dK.ds) = J_{,}.w.dw, \end{cases}$$

worin das Trägheitsmoment

$$145\text{d})\quad J_{,} = \Sigma(dm.R^2)$$

zu setzen ist.

Man sieht, dafs das Trägheitsmoment eines festen Systems unabhängig ist von der Gröfse der Kräfte, welche eine drehende Bewegung erzeugen und nur abhängig von der Gruppirung der Massenelemente gegen die Drehaxe. Stellen wir ähnliche Betrachtungen an, wie bei der Bestimmung der Lage des Schwerpunkts (S. 154), so ergiebt sich, indem wir für die Massenelemente deren Gewichte einführen:

$$146)\quad J_{\prime} = \Sigma(dm \,.\, R^2) = \frac{1}{g} \,.\, \Sigma(dG \,.\, R^2)$$

und wenn wir die Volumenelemente einführen:

$$146a)\quad J_{\prime} = \frac{1}{g} \,.\, \Sigma(dV \,.\, \gamma \,.\, R^2)$$

für homogene Systeme hat man:

$$146b)\quad J_{\prime} = \frac{\gamma}{g} \,.\, \Sigma(dV \,.\, R^2),$$

worin γ das Gewicht der Raumeinheit des Körpers bezeichnet. Der Ausdruck $\Sigma(dV \,.\, R^2)$ ist ein rein geometrischer; wir nennen ihn das räumliche Trägheitsmoment des Systems und bezeichnen denselben mit $T_{\prime}$ beziehlich mit T. Es ist also:

$$146c)\quad J_{\prime} = \frac{\gamma}{g} \,.\, T_{\prime}; \quad J = \frac{\gamma}{g} \,.\, T.$$

wobei nicht zu vergessen ist, dafs diese Beziehungen nur für homogene Systeme gelten.

Drehungshalbmesser und Reduktion der Massen.

§ 84. Der Ausdruck (145a):

$$\Sigma(dK \,.\, R) = J_{\prime} \,.\, \frac{dw}{dt} = J_{\prime} \,.\, f_{\prime}$$

erscheint als das Moment des resultirenden Kräftepaars der sämmtlichen lebendigen Kräfte der drehenden Bewegung. Man kann dasselbe immer unter der Form Pa ausdrücken, und nach den Gesetzen in § 78 den Werth P oder den Hebelsarm a beliebig wählen, auch kann man die Richtung von $+P$ und $-P$, welche das Kräftepaar bilden und den Angriffspunkt dieser Kräfte in verschiedener Weise variiren. Denken wir den Angriffspunkt der einen Kraft $(-P)$ in der Drehaxe, so stellt a den Hebelarm der andern Kraft $(+P)$ in Bezug auf die Drehaxe dar. Ist der Angriffspunkt von $+P$ ein mit dem System fest verbundener Punkt, so rotirt er mit derselben Winkelgeschwindigkeit, und indem wir die in den einzelnen Massenelementen wirksam gedachten lebendigen Kräfte des Systems durch die Wirkung des resultirenden Kräftepaars ersetzt denken, werden wir nothwendig auch anstatt der in den einzelnen Punkten des Systems vertheilten Massenelemente in dem Angriffspunkt von P eine konzentrirte Masse $(M_{,})$ denken müssen, auf welche wirkend der Druck P dem System dieselbe Winkelgeschwindigkeit ertheilen würde, welche unter dem Einflufs jener Kräfte statt findet. Ist f das Aenderungsmaafs des Drucks P, so ist zunächt $P = M_{,}.f$, uud da $f = \frac{dc}{dt} = \frac{dw.a}{dt}$, so hat man $P = M_{,}.\frac{dw.a}{dt}$, folglich das Moment des resultirenden Kräftepaars $Pa = M_{,}.\frac{dw}{dt}.a^2$; es ist aber auch $Pa = \Sigma(dK.R) = J_{,}.\frac{dw}{dt}$, folglich hat man

$$147)\quad \begin{cases} M_{,}a^2 = J_{,} \\ M_{,} = \frac{J_{,}}{a^2}; \quad a = \sqrt{\left(\frac{J_{,}}{M_{,}}\right)}. \end{cases}$$

Man nennt das Maafs der Masse $M_{,}$ welche in dem Abstand a von der Drehaxe vereinigt sein müfste, damit ein in diesem Abstande auf Drehung wirkender Druck dieselbe Winkelgeschwindigkeit in dem System erzeuge, wie die in den einzelnen Massenelementen wirksam gedachten, auf Drehung wirkenden lebendigen Kräfte des Systems: die auf diesen Abstand reduzirte Masse. Die auf einen gegebenen Abstand reduzirte Masse drückt sich aus durch das Trägheitsmoment des Systems in Beziehung auf diese Axe, dividirt durch das Quadrat des gegebenen Abstandes.

Man kann die Masse des Systems auf jeden beliebigen Abstand reduziren, d. h. man kann in jedem beliebigen Abstand von der Drehaxe eine bestimmte Menge materieller Punkte vereinigt denken, so, dafs die einzelnen auf Drehung wirkenden lebendigen Kräfte durch eine einzige in diesem Abstande wirkende Kraft sich ersetzen lassen. Andererseits kann man eine beliebige Masse als reduzirte Masse des Systems betrachten, und den Abstand a berechnen in welchem sie unter der eben genannten Voraussetzung vereinigt sein müfste. Es ist daher auch zulässig diese Masse so zu wählen, dafs sie gleich der Summe aller Massenelemente des Systems ist. In diesem Falle hätten wir für $M_{,}$ zu setzen $(\Sigma dm) = M$ und es würde sich der entsprechende Abstand finden:

$$147\text{a})\quad a_{,} = \sqrt{\left(\frac{J_{,}}{\Sigma(dm)}\right)} = \sqrt{\left(\frac{J_{,}}{M}\right)} = \varrho_{,}.$$

Wir nennen diesen Abstand, für welchen die reduzirte Masse des Systems gleich der Summe der Massenelemente des Systems ist, den Drehungshalbmesser oder Trägheitshalbmesser des

Systems für diese Axe, und bezeichnen ihn mit $\varrho_{,}$. Unter dem „Drehungshalbmesser", ohne weitere Bezeichnung der Axe, ist der Drehungshalbmesser in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt gehende Axe verstanden; wir bezeichnen einen solchen mit ϱ.

Für homogene Systeme ist $M = V.\frac{\gamma}{g}$ und 146c) $J_{,} = \frac{\gamma}{g}.T_{,}$ folglich:

$$147b)\quad \begin{cases} \varrho_{,} = \sqrt{\left(\frac{J_{,}}{M}\right)} = \sqrt{\left(\frac{T_{,}}{V}\right)} \\ \varrho = \sqrt{\left(\frac{J}{M}\right)} = \sqrt{\left(\frac{T}{V}\right)} \\ M = \frac{J}{\varrho^2} = \frac{J_{,}}{\varrho_{,}^2} \end{cases}$$

Aus der Gleichung 147) und 147a) ergiebt sich:

$$147c)\quad \begin{cases} a^2 . M_{,} = \varrho'^2 . M \\ M_{,} = \frac{\varrho'^2}{a^2} . M \end{cases}$$

d. h. die auf einen gegebenen Abstand a von der Drehaxe reduzirte Masse ist gleich der Gesammtmasse des Systems, multiplizirt mit dem Quadrat des Verhältnisses des Drehungshalbmessers des Systems für diese Axe zu dem gegebenen Abstand.

Uebrigens bemerkt man, daſs wenn man die Masse des Systems auf einen gegebenen Abstand reduzirt, es für die Betrachtung gleichgiltig bleibt, ob man diese reduzirte Masse in einen Punkt konzentrirt denkt, oder ob man sie in einem Cylindermantel, dessen Axe die Rotationsaxe und dessen Halbmesser der gegebene Abstand ist, beliebig vertheilt denkt, denn es kommt für die hier vorliegenden Untersuchungen nur darauf an, daſs sämmtliche Elemente der reduzirten Masse denselben Abstand von der Drehaxe haben.

Einige Sätze für die Berechnung der räumlichen Trägheitsmomente.

§ 85. Die Berechnung der räumlichen Trägheitsmomente ist eine rein geometrische Operation. Wir wollen hier jedoch einige Sätze zusammenstellen, welche diese Berechnung in vielen Fällen erleichtern. Es läſst sich übrigens nach der Bemerkung auf S. 155 bei Gelegenheit der Schwerpunktsbestimmungen übersehen, was man unter dem räumlichen Trägheitsmoment von Linien, Flächen und Körpern zu verstehen habe.

1) Ist J das Trägheitsmoment eines Systems in Bezug auf eine Axe, die durch den Schwerpunkt des Systems geht, und ist M die

Masse des Systems, so ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine in dem Abstande e mit jener parallele Axe

$$148)\quad J_{,} = J + Me^2,$$

denn wenn man die Richtung von dem Schwerpunkt normal auf die neue Axe als Axe der X eines Koordinatensystems ansieht, dessen zweite (Y) Axe auf der durch beide Axen zu legenden Ebene normal steht, so ist für den Schwerpunkt als Anfangspunkt der Koordinaten der Abstand jedes Massenelementes von der Axe der Z, welche mit der Rotationsaxe durch den Schwerpunkt identisch ist:

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

und der Abstand von der neuen Axe ist offenbar

$$R = \sqrt{[(x+e)^2 + y^2]}.$$

Es ist also:

$$J_{,} = \Sigma(dm\,.\,R^2) = \Sigma\Big(dm\,.\,[(x+e)^2 + y^2]\Big)$$

und wenn man entwickelt:

$$J_{,} = \Sigma[dm\,(x^2+y^2)] + \Sigma(dm)\,e^2 + 2e\,.\,\Sigma(dmx).$$

Nun ist $\Sigma(dmx) = 0$ nach S. 154, $\Sigma[dm\,(x^2+y^2)] = \Sigma(dmr^2) = J$ und $\Sigma(dm) = M$, und man erhält durch Einsetzung dieser Werthe die Gleichung 148).

In gleicher Weise ergiebt sich das räumliche Trägheitsmoment:

$$148a)\quad T_{,} = T + Ve^2,$$

wenn V das Volum des Systems bezeichnet.

2) Bezeichnet ϱ den Trägheitshalbmesser des Systems, so kann man in die Gleichung 148) setzen: $J = M\varrho^2$ (147b) und man hat

$$149)\quad \begin{cases} J_{,} = M(\varrho^2 + e^2) \\ T_{,} = V(\varrho^2 + e^2). \end{cases}$$

Hieraus folgt, dafs wenn der Trägheitshalbmesser ϱ im Vergleich zu e sehr klein ist, das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Axe näherungsweise ausgedrückt werden kann durch:

$$149a)\quad \begin{cases} J_{,} = Me^2 \\ T_{,} = Ve^2, \end{cases}$$

d. h. durch das Produkt aus der Masse, beziehlich dem Volum in das Quadrat des Abstandes des Schwerpunkts von der Rotationsaxe.

Da aber aus Gleichung 147b) folgt:

$$J_{,} = M\varrho_{,}^2; \quad T_{,} = V\varrho_{,}^2,$$

so hat man nach Einsetzung dieser Werthe in Gleichung 149) und wenn man $\varrho_{,}$ entwickelt:

$$150)\quad \varrho_{,} = \sqrt{(\varrho^2 + e^2)},$$

d. h. der Drehungshalbmesser eines festen Systems in

Bezug auf eine gegebene Axe ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate des Drehungshalbmessers in Bezug auf eine parallele durch den Schwerpunkt gehende Axe und der Entfernung der gegebenen Axe.

Auch folgt nach Gleichung 147c):

$$150a)\quad M_{,} = M\,.\,\frac{\varrho^2 + e^2}{a^2},$$

d. h. die auf den Abstand a reduzirte Masse ist gleich der Gesammtmasse des Systems, multiplizirt mit dem Verhältnisse der Summe der Quadrate des Drehungshalbmessers des Systems für eine durch den Schwerpunkt gehende parallele Axe und der Entfernung dieser Axe von der Rotationsaxe zu dem Quadrat des Abstandes a.

3) Denken wir ein System welches durch zwei parallele Ebenen begrenzt wird, und welches sich also durch Ebenen, die mit jenen Begrenzungsebenen parallel sind, in lauter parallele, ebene und unendlich dünne Schichten zerlegen läfst; es sei F der Flächeninhalt einer dieser Schnittflächen, e die Entfernung ihres Schwerpunkts von einer Umdrehungsaxe, t das räumliche Trägheitsmoment der Schnittfläche in Beziehung auf eine durch ihren Schwerpunkt gehende parallele Axe, und dx die Dicke der Schicht. Man hat sodann:

$$151)\quad T_{,} = \Sigma(e^2\,.\,F\,.\,dx) + \Sigma(t\,.\,dx),$$

welcher Ausdruck sich integriren läfst, wenn t und F als Funktionen der Entfernung x der beiden parallelen Begrenzungsebenen gegeben sind.

Wenn ein System durch ein konstantes Profil erzeugt wird, welches sich*) normal auf einer Kurve fortbewegt, indem der Schwerpunkt dieses Profils das Kurvenelement ds beschreibt, so kann man das Trägheitsmoment des zwischen zwei aufeinander folgenden Profilen liegenden Elementes, dessen Volum $F\,.\,ds$ ist, ausdrücken nach 149a) näherungsweise durch $t_{,} = F\,.\,ds\,.\,e^2$, folglich das räumliche Trägheitsmoment des ganzen Systems durch:

$$159a)\quad T_{,} = \Sigma(t_{,}) = \Sigma(F\,.\,ds\,.\,e^2) = F\,.\,\Sigma(ds\,.\,e^2).$$

Es ist aber $\Sigma(ds\,.\,e^2)$ nichts anders, als das Trägheitsmoment der Richtlinie des Systems in Bezug auf die betrachtete Rotationsaxe d. h. das räumliche Trägheitsmoment des Systems ist näherungsweise gleich dem Produkte aus dem erzeugen-

*) Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen, von J. V. Poncelet; deutsch von Schnuse, I. S. 152 u. f.

den Profil in das räumliche Trägheitsmoment der Richtlinie.

4) Wenn man die Trägheitsmomente derselben Ebene in Beziehung auf zwei in dieser Ebene sich rechtwinklig schneidende Axen zusammenaddirt, so erhält man das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Axe, die im Durchschnittspunkt der beiden erstgenannten Axen auf der Ebene normal steht (polares Trägheitsmoment); denn es sei:

$$T_{,} = \Sigma(dV.R^2)$$

das Trägheitsmoment der Ebene in Bezug auf die zuletzt erwähnte Axe, und man nehme diese und die beiden in der Ebene liegenden Axen als Koordinatenaxen, dann ist offenbar, wenn x und y die Abstände des Elements dV von den beiden letztgenannten Axen bezeichnen $R^2 = x^2 + y^2$:

$$152) \quad \Sigma(dV.R^2) = \Sigma(dV.x^2) + \Sigma(dV.y^2),$$

worin die Werthe $\Sigma(dV.x^2)$ und $\Sigma(dV.y^2)$ die Trägheitsmomente der Ebene in Bezug auf die Axe X und Y ausdrücken.

Ist dz die Dicke eines räumlichen Elementes, so ist offenbar das Trägheitsmoment eines prismatischen Körpers, der jene Ebene zur Grundfläche hat:

$$T_{,} = \Sigma\left\{[\Sigma(dV.R^2)].dz\right\} = \Sigma(dV.R^2)\ (\Sigma.dz)$$

$$152a) \quad T_{,} = z.\Sigma(dV.R^2) = z\left\{\Sigma(dV.x^2) + \Sigma(dV.y^2)\right\}.$$

Gesetze für die Beziehungen zwischen den auf ein festes System angebrachten und den in dem festen System thätigen Kräften. — Massenwiderstände.

§ 86. Durch die Untersuchungen der §§ 81 bis 85 ist es gelungen, die Bewegung eines festen Systems zurückzuführen auf die Bewegung von Punkten, in denen die Masse des Systems vereinigt zu denken ist; nämlich so, dafs man die fortschreitende Bewegung des Systems immer so betrachten kann, als ob die Gesammtmasse des Systems im Schwerpunkt vereinigt, die fortschreitende Bewegung erleide, und dafs man die drehende Bewegung des Systems immer so auffassen kann, als ob die Gesammtmasse des Systems in einem Abstande von der Rotationsaxe gleich dem Drehungshalbmesser die drehende Bewegung erleide. Hierdurch ist man im Stande die Gesetze, welche wir in den Abschnitten a) und b) für die Bewegung eines Massenelementes entwickelt haben, auf die Bewegung eines Systems von Massenelementen zu beziehen.

Die in dem System thätigen (lebendigen) Kräfte und folglich auch ihre Resultirenden sind nach der Voraussetzung nichts anderes, als Kräfte, welche wir für die Wirkung der auf das System angebrachten Kräfte substituiren; es folgt hieraus ohne Weiteres (§ 35. S. 38) dafs in jedem Augenblick die Wirkung der sämmtlichen auf das System angebrachten Kräfte gleich der Wirkung der denselben substituirten Kräfte sein müsse. Bezeichnet

dL das Leistungselement der Resultirenden sämmtlicher auf das System angebrachten Kräfte in Bezug auf fortschreitende Bewegung,
$dL_{,}$ das Leistungselement der Resultirenden sämmtlicher auf das System angebrachten auf Drehung wirkenden Kräfte,
M die Gesammtmasse des Systems,
ds das Wegelement,
f das Aenderungsmaafs (die Beschleunigung) und
c die Geschwindigkeit des Schwerpunkts des Systems,
$J_{,}$ das Trägheitsmoment,
$\varrho_{,}$ den Drehungshalbmesser,
w die Winkelgeschwindigkeit, und
$f_{,}$ das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit,

so mufs sein:

$$153)\quad \begin{cases} dL = M.f.ds = M.c.dc \\ dL_{,} = J_{,}.w.dw = M.\varrho_{,}^2.w.dw, \end{cases}$$

folglich:

$$153a)\quad \begin{cases} dL + dL_{,} = M.c.dc + J_{,}.w.dw \\ \qquad = M.(c.dc + \varrho_{,}^2.w.dw), \end{cases}$$

oder wenn $v = \varrho_{,}.w$ die Geschwindigkeit ist, mit welcher ein Punkt in den Abstand $\varrho_{,}$ von der Drehaxe rotirt:

$$153b)\quad \begin{cases} dL = M.c.dc \\ dL_{,} = M.v.dv \\ dL + dL_{,} = M.(c.dc + v.dv). \end{cases}$$

Diese wichtigen Gleichungen drücken folgendes Gesetz aus:

1) Wenn ein festes System unter dem Einflufs beliebiger Kräfte sich bewegt, so ist in jedem Augenblick das Leistungselement der Resultirenden der auf das System **angebrachten** Kräfte sowohl für die fortschreitende, als für die drehende Bewegung gleich dem Leistungselement der sämmtlichen in dem System **thätigen** Kräfte.

Da wir nach § 71, zufolge der Bemerkung auf S. 99, die Resultante der fortschreitenden Bewegung in jedem beliebigen

Punkt angreifend denken können; so lange es nur darauf ankommt, die Gesetze der *fortschreitenden* Bewegung zu untersuchen, so können wir, indem wir nur die fortschreitende Bewegung des Systems betrachten, die Resultante der fortschreitenden Bewegung im Schwerpunkt, welcher ja die fortschreitende Bewegung des ganzen Systems repräsentirt, angreifend denken, und wenn wir die Bemerkung am Ende der S. 98 beachten, ergiebt sich folgendes Gesetz:

2) Die fortschreitende Bewegung des Schwerpunkts eines festen Systems findet immer in derselben Weise statt, als ob sämmtliche auf das System wirkenden Kräfte parallel mit ihren ursprünglichen Richtungen im Schwerpunkt vereinigt wirkten.

Die gleichzeitigen Bewegungen, nämlich die fortschreitende Bewegung des ganzen Systems und die Rotationsbewegung um eine Axe, die durch den Schwerpunkt geht (§ 82), kann man auch nach dem Grundsatz No. 1 in § 24 als innerhalb der Dauer eines Zeitelements aufeinander folgend betrachten. Während nun die drehende Bewegung erfolgt, kann man offenbar den Schwerpunkt, durch welchen nothwendig die Drehaxe des Systems geht (§ 82), für diesen Augenblick als fixen Punkt des Systems auffassen. Die Lage der Drehaxe wird sich daher nach dem Gesetz in § 79. No. 1 (S. 145) ermitteln lassen. Es folgt hieraus das Gesetz:

3) Die Lage der Drehaxe eines festen Systems wird gefunden, wenn man durch den Schwerpunkt drei normale Koordinatenaxen legt, die Momente der auf das System wirkenden Kräfte für jede dieser Axen bestimmt und nach der Gleichung 141c) (resp. 138) die Lage der resultirenden Paaraxe des Systems gegen die angenommenen Axen ermittelt.

Aus den Gleichungen 153) und 153a) folgt:

$$154)\quad \begin{cases} dL - M.c.dc = 0 \\ dL_{,} - J_{,}.w.dw = 0 \\ dL + dL_{,} - M.c.dc - J_{,}.w.dw = 0. \end{cases}$$

Die Werthe $-M.c.dc$ und $-J_{,}.w.dw$ drücken aber nichts anders aus, als die Leistungselemente der Resultirenden von Kräften, welche den lebendigen Kräften der Gröfse nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt sind, solche Kräfte würden also als Gegenkräfte der in dem System wirksamen Kräfte erscheinen, und wenn man daher in den einzelnen Massenelementen die Gegenkräfte der in dem System wirksamen Kräfte angebracht denkt, so würde zufolge der Gleichungen 154) Gleichgewicht in dem System vorhanden sein, denn die Gleichungen 154) sind nichts anderes, als die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht. Da die in den einzelnen Massenelementen wirksam gedachten Kräfte solche sind, welche in den Massenelementen die entsprechende Bewegung erzeugen würden, so sind ihre Gegenkräfte als solche aufzufassen, welche der Bewegung der Massenelemente entgegenwirken, wir wollen sie daher als die Massenwiderstände der Bewegung bezeichnen, und es folgt aus der Gleichung 154) das Gesetz:

4) Wie auch die auf ein festes System wirkenden Kräfte beschaffen sein mögen, so ist doch in jedem Zeitelement zwischen diesen Kräften und den Massenwiderständen der Bewegung Gleichgewicht vorhanden.

Es lassen sich also für jedes Zeitelement die Gleichgewichtsgesetze (§ 69 und folgende) auf ein jedes System, das sich in Bewegung befindet, anwenden, sobald man die sämmtlichen auf das System angebrachten, und die sämmtlichen in dem System wirkenden Massenwiderstände in Betracht zieht.

Der aus sämmtlichen lebendigen Kräften der fortschreitenden Bewegung resultirende Druck für irgend eine Richtung drückt sich aus nach Gleichung 143) (S. 152) durch $M.f$, folglich der Druck der Massenwiderstände durch $-M.f$; und das Moment des aus sämmtlichen lebendigen Kräften der drehenden Bewegung resultirenden Kräftepaars drückt sich aus nach Gleichung 145c) (S. 158) durch $f_{,}.J_{,}$, folglich das Moment der Massenwidersände in Bezug auf drehende Bewegung durch $-f_{,}.J_{,}$. Wenn nun die Resultirende der fortschreitenden Bewegung aus sämmtlichen auf das System angebrachten Kräften für dieselbe Richtung mit $\Sigma(K)$ und das Moment des resultirenden Kräftepaars aus sämmtlichen auf das System angebrachten Kräften für dieselbe Axe mit $\Sigma(Ka)$ bezeichnet wird, so mufs nach dem eben entwikkelten Satze No. 4 und zufolge der Bedingungen des Gleichgewichts sein:

$$154a) \quad \begin{cases} \Sigma K - M.f = 0 \\ \Sigma(Ka) - f_{,}.J_{,} = 0, \end{cases}$$

und daraus folgt:

das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung:

$$154\text{b)}\quad f = \frac{\Sigma(K)}{M} = \frac{\text{Resultirender Druck}}{\text{Gesammtmasse}},$$

und das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit:

$$154\text{c)}\quad f_{,} = \frac{\Sigma(Ka)}{J_{,}} = \frac{\text{Summe der statischen Momente}}{\text{Trägheitsmoment}}.$$

Substituirung der auf Drehung wirkenden Kräfte eines festen Systems durch die Normalkräfte und Tangentialkräfte. Resultirende der Normalkräfte.

§ 87. Betrachten wir ein festes System, welches um irgend eine Axe rotirt, die Axe selbst möge fortschreiten oder nicht. Wenden wir auf jedes Massenelement die Betrachtungen an, welche wir in § 42 und 43 angestellt haben, so können wir die Bewegungen der einzelnen Massenelemente allemal auch erzeugt denken durch eine Normalkraft und eine Tangentialkraft; wir können also anstatt der Kräftegruppe, welche wir bisher als die in dem System wirksamen Kräfte der rotirenden Bewegung bezeichnet haben, noch andere Kräftegruppen substituiren, nämlich so, dafs wir in jedem Augenblick in jedem Massenelement eine konstantwirkende Normalkraft, und eine im Gleichgewicht befindliche Tangentialkraft wirksam denken. Die in den einzelnen Massenelementen wirkenden Tangentialkräfte sind in ihren Angriffspunkten einzeln im Gleichgewicht, ihr Druck auf das System ist folglich gleich Null (§ 34); die in den einzelnen Massenelementen wirksamen Normalkräfte wirken in der Richtung des Halbmessers des Kreiselements, welches das Massenelement in diesem Augenblick durchläuft; sie liegen folglich alle in parallelen Ebenen und ihre Richtungen schneiden sämmtlich die Drehaxe, sie üben auf jedes Massenelement einen Druck, durch welchen die Ablenkung des Massenelements von der Richtung der Tangente bedingt wird, diesem Druck (die Centripetalkraft) entspricht in jedem Massenelement eine gleich grofse entgegengesetzt gerichtete Reaktion (Centrifugalkraft), welche zunächst die Festigkeit des Systems in Anspruch nimmt, indem sie das Bestreben darstellt, die einzelnen Massenelemente radial von der Drehaxe zu entfernen. Wir können nun für die sämmtlichen in den einzelnen Massenelementen wirksamen Normalkräfte, die Resultirende bestimmen, wobei es im Allgemeinen gleichgiltig ist, ob wir für diese Untersuchung die Centrifugalkräfte, oder die Centripetalkräfte benutzen; die

Resultirenden werden sich nur durch die entgegengesetzte Richtung von einander unterscheiden *).

Es ist am Orte die Bemerkung ausdrücklich hervorzuheben, dafs die Centrifugalkraft oder die Centripetalkraft nicht als Kräfte aufgefafst werden dürfen, welche durch die rotirende Bewegung erst entstehen, und welche nun fähig sein könnten, auf das System irgend wie als darauf angebrachte Kräfte eine Wirkung zu äufsern. Die in den einzelnen Massenelementen wirkenden Normalkräfte, welche wir nunmehr betrachten, sind vielmehr nichts anders, als Kräfte, welche wir für die Wirkung der auf das System angebrachten, die drehende Bewegung bedingenden Kräfte, oder auch für die Wirkung der in dem System wirksamen (lebendigen) Kräfte der drehenden Bewegung substituiren. Wir dürfen dieselben also nicht mit jenen zugleich wirksam denken, sondern nur entweder die einen, oder die andern. Die Normalkräfte (Centrifugal- oder Centripetalkräfte), oder deren Resultirende sind daher nicht im Stande, irgend welche Aenderung derjenigen Bewegung hervorzubringen, welche die auf das System angebrachten Kräfte bedingt haben, oder welche das System überhaupt besitzt. Wir betrachten sie nur, weil die Anschauung von den Verhältnissen der drehenden Bewegung und ihren Bedingungen zuweilen einfacher und bequemer ist, wenn wir diese drehende Bewegung durch die gleichzeitige Bewegung der Massenelemente mit gleichförmiger Geschwindigkeit nach der Richtung der Tangente und mit gleichmäfsig beschleunigter, durch einen konstantwirkenden Normaldruck bedingter Geschwindigkeit nach der Richtung des Radius hervorgebracht denken (§ 42).

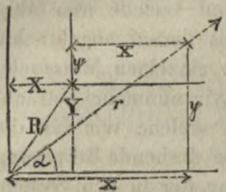
Da die Normalkräfte als Kräfte, die zwar in parallelen Ebenen liegen, deren Richtungen aber unter einander nicht parallel sind, erscheinen, so können wir ihre Wirkung im Allgemeinen auffassen nach dem in § 75 unter A. behandelten Fall; sie läfst sich also zurückführen (§ 75. AIII. S. 114) auf eine der Richtung und Gröfse nach zu bestimmende Resultirende Q, und auf ein Kräftepaar, welches in einer zur Richtung Q normalen Ebene liegt.

Es sei die Drehaxe die dritte Axe eines Koordinatensystems, dessen beide andern Axen also in einer zur Drehaxe normalen Ebene liegen. X, Y, Z seien die Korrdinaten des Schwerpunkts, x, y, z die Koordinaten der einzelnen Massenelemente, und x', y', z'

*) Vergleiche die Bemerkung am Schlusse des § 43.

seien die Koordinaten derselben Massenelemente in Bezug auf ein mit dem erwähnten Koordinatensystem paralleles durch den Schwerpunkt gehendes Koordinatensystem, endlich sei R der kürzeste Abstand des Schwerpunkts von der Drehaxe.

Zufolge dieser Disposition ist offenbar:



$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)} \qquad R = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$$
$$x = X + x' \qquad y = Y + y'$$

und da die Normalkräfte sämmtlich in der Richtung ihres kürzesten Abstandes r von der Drehaxe wirken, so ist der Winkel α den sie mit der ersten Axe machen zu bestimmen durch die Werthe

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$
$$\sin\alpha = \frac{y}{r}.$$

Die Resultirende von Kräften in parallelen Ebenen drückt sich durch Gleichung 119) aus:

$$Q = \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K.\sin\alpha)^2]\right\}}$$

worin wir hier für K die Werthe der in den einzelnen Massenelementen wirksam zu denkenden Normalkräfte zu setzen haben. Es ist aber nach Gleichung 79), S. 50 der Druck der Normalkraft:

$$dF = dm.w^2.r$$

und demnächst für jedes Massenelemennt:

$$K.\cos\alpha = dm.w^2.r.\frac{x}{r} = w^2.dm.x = w^2.dm.(X + x')$$

$$K.\sin\alpha = dm.w^2.r.\frac{y}{r} = w^2.dm.y = w^2.dm.(Y + y').$$

Man hat also, da w^2 gemeinschaftlich ist, die Resultirende aus allen Centrifugalkräften:

$$Q = w^2.\sqrt{\left\{[\Sigma(dm.X + dm.x')]^2 + [\Sigma(dm.Y + dm.y')]^2\right\}}.$$

Es ist aber nach dem Gesetz in § 81, S. 154 der Werth $\Sigma(dm.x')$ und $\Sigma(dm.y')$ jeder gleich Null, da diese Ausdrücke die Momentensummen für Ebenen vorstellen, die durch den Schwerpunkt gehen, und wenn man nun die Ausdrücke:

$$[\Sigma(dm.X + dm.x')]^2 \text{ und } [\Sigma(dm.Y + dm.y')]^2$$

berechnet, indem man sie auf die Form bringt:

$$[\Sigma(dm.X) + \Sigma(dm.x')] \text{ und } [\Sigma(dm.Y) + \Sigma(dm.y')]$$

so fallen die Summanden $\Sigma(dm.x')$ und $\Sigma(dm.y')$, da sie gleich Null sind fort, und man erhält schliefslich:

$$Q = w^2 \cdot \sqrt{\left\{[\Sigma(dm \cdot X)]^2 + [\Sigma(dm \cdot Y)]^2\right\}}$$
$$= w^2 \cdot \sqrt{\left\{[\Sigma(dm)]^2 \cdot [X^2 + Y^2]\right\}}.$$

155) $Q = w^2 \cdot (\Sigma \cdot dm) \cdot R = M \cdot w^2 \cdot R,$

auch ergiebt sich nach Gleichung 119) für die Richtung von Q:

$$\cos A = \frac{w^2 \cdot [\Sigma(dm \cdot X) + \Sigma(dm \cdot x')]}{Q} = \frac{X}{R}; \quad \sin A = \frac{Y}{R}.$$

Hieraus folgt, daſs die Richtung der Resultirenden der Normalkraft mit der Richtung der kürzesten Entfernung des Schwerpunkts des Systems von der Drehungsaxe zusammenfällt, und folglich sowohl die Drehaxe, als die mit derselben parallele durch den Schwerpunkt gehende Koordinatenaxe schneidet.

Für eine Drehaxe, die durch den Schwerpunkt geht, ist $R = 0$, folglich auch die Resultirende aller Normalkräfte nach Gleichung 155) gleich Null. Aus dieser Gleichung und der eben angeführten Bemerkung folgt folgendes Gesetz:

> *Wenn ein festes System um eine gegebene Axe rotirt, so ist der resultirende Druck aller in den einzelnen Massenelementen wirkenden Normalkräfte derselbe, welcher auch statt finden würde, wenn die Gesammtmasse des Systems in einem Punkte vereinigt, dessen Abstand gleich dem kürzesten Abstande des Schwerpunkts des Systems von der Drehaxe ist, mit der gemeinschaftlichen Winkelgeschwindigkeit des Systems um dieselbe Axe rotirt; für jede durch den Schwerpunkt gehende Rotationsaxe ist der Druck aller Normalkräfte gleich Null.*

Rotation eines freien Systems. — Freie Axen.

§ 88. In einem freien System geht die Drehaxe immer durch den Schwerpunkt des Systems (§ 82. S. 157). Die Normalkräfte sind hier also immer als Kräfte aufzufassen, die in parallelen Ebenen liegen, und deren Resultirende gleich Null ist; der Fall entspricht also dem in § 75 unter C. S. 116 behandelten. Solche Kräfte können aber im Allgemeinen noch ein resultirendes Kräftepaar haben, dessen Ebene und Moment durch die Gleichungen 123), 123a) und 123b) zu bestimmen bleibt. Nach 123a) ist der Neigungswinkel der Paarebene gegen die parallele Ebene, in welcher die Kräfte liegen zu finden; da nun die Kraftrichtungen hier sämmtlich die Drehaxe schneiden, so ist ihr kürzester Abstand von derselben $R_{,,,} = 0$ und folglich findet sich tang $\varphi = \infty$, daher steht die Ebene des resultirenden Kräftepaars normal auf der Ebene der Kräfte, d. h. sie ist parallel mit der Drehaxe. Der Winkel ψ, unter welchem sie die angenommene Koordinatenaxe der X schneidet, ist nach Gleichung 123) zu bestimmen und nach Einsetzung der entsprechenden Werthe hat man:

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\Sigma(dm\,.\,y'\,.\,z')}{\Sigma(dm\,.\,x'\,.\,z')}.$$

Endlich ist das Moment der resultirenden, in dieser Ebene liegenden Kräftepaares nach Gleichung 123b) und nach Einsetzung der entsprechenden Werthe:

$$w^2\,.\,\sqrt{\left\{[\Sigma(dm\,.\,y'\,.\,z')]^2 + [\Sigma(dm\,.\,x'\,.\,z')]^2\right\}}.$$

Da nun aber zufolge der Voraussetzung die Axe der Z' die resultirende Axe des freien Systems ist, deren Lage durch die auf das System angebrachten Kräfte bestimmt ist (vergl. § 86. No. 3), so mufs in Bezug auf jede zu dieser Axe normale Axe das resultirende Moment gleich Null sein (vergl. die Darstellung in § 79. No. 2). Das eben berechnete Moment ist aber ein solches, welches eine Drehung um eine Axe bedingen würde, die zu der Axe der Z' normal ist und mit der Axe der X den Winkel $(90^\circ - \psi)$ bildet, (da die Paarebene dieses Moments mit der Axe der Z' parallel ist und mit der Axe der X den Winkel ψ macht). Es mufs also das eben berechnete Moment gleich Null sein. Nun bemerkt man aber, dafs der Werth dieses Moments bedingt ist, durch die Lage der Massenelemente gegen die resultirende Axe der Z'. Diese Lage kann von vorne herein so beschaffen sein, dafs der Ausdruck

$$w^2\,.\,\sqrt{\left\{[\Sigma(dm\,.\,y'\,.\,z)]^2 + [\Sigma(dm\,.\,x'\,.\,z')]^2\right\}} = 0$$

ist, was im Allgemeinen erfordern würde, dafs einzeln:

$$\Sigma(dm\,.\,y'\,.\,z') = 0 \text{ und } \Sigma(dm\,.\,x'\,.\,z') = 0$$

sei, oder es läfst sich auch denken, dafs die Massenelemente von vorne herein eine solche Lage nicht haben; dafs sich also für das Moment ein reeller Werth ergiebt. In diesem Falle müssen aber offenbar die Massenelemente in dem Augenblick in welchem Bewegung eintritt eine Lage annehmen, durch welche jene Bedingung erfüllt wird, d. h. es mufs das ganze System sich gegen die (durch die auf dasselbe angebrachten Kräfte bedingte) Rotationsaxe so verschieben, dafs die eben aufgestellte Bedingungsgleichung erfüllt wird. Das System rotirt dabei um die Axe der Z', allein in sehr eigenthümlicher Weise, indem nämlich sämmtliche Massenelemente gleichzeitig um eine zweite Axe rotiren, die gegen die Axe der Z' geneigt ist, und welche gemeinschaftlich mit den um sie rotirenden Massenelementen um die Axe der Z' als um diejenige, welche durch die auf das System angebrachten Kräfte gegeben ist, rotirt. Die hierdurch bedingten höchst merkwürdigen Bewegungsverhältnisse können wir hier nicht spezieller untersuchen, da dies eine zu weit führende Diskussion nöthig machen würde; wir können darauf um so eher verzichten, als dieselben für unsere Zwecke von minderer Wichtigkeit sind.

Eine Axe für welche die in dem System wirksam zu denkenden Normalkräfte (Centripetal- oder Centrifugalkräfte) der einzelnen Massenelemente in vollkommenem Gleichgewicht (§ 70) sich befinden, nennt man eine **freie Axe.**

Damit die Axe gegen fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sei, mufs die Resultirende aus allen Normalkräften gleich Null sein; dies ist der Fall, wie in § 87 nachgewiesen, wenn die Axe durch den Schwerpunkt des Systems geht. Eine freie Axe mufs also durch den Schwerpunkt des Systems gehen.

Aber nicht jede Axe, die durch den Schwerpunkt des Systems geht, ist eine freie Axe; es mufs vielmehr auch das aus den Normalkräften, welche eine Rotation um die Axe bedingen, hervorgehende resultirende Kräftepaar gleich Null sein, um die Axe zu einer freien zu machen, d. h. es müssen die Momentensummen für drei zu einander normale Axen gleich Null sein. Dazu gehört nach der obigen Darstellung:

$$156)\quad \begin{cases} \Sigma(dm\,.\,x'\,.\,z') = 0 \text{ und} \\ \Sigma(dm\,.\,y'\,.\,z') = 0, \end{cases}$$

wenn z' die Koordinaten der Massenelemente in Bezugauf die Rotationsaxe, x' und y' aber die Koordinaten der Massenelemente in Bezug auf zwei andere, im Schwerpunkt des Systems auf der Rotationsaxe normale, Axen bezeichnen.

Diese Bedingung wird erfüllt:

a) wenn z' für alle Massenelemente gleich Null ist, d. h. wenn alle Massenelemente in einer Ebene liegen, die auf der Axe der Z' normal ist. Hieraus folgt:

> Für Massenelemente, die sämmtlich in einer Ebene liegen, ist die im Schwerpunkt der Ebene zu derselben normale Axe eine freie Axe.

b) Wenn das System durch Ebenen, die normal zu der Axe der Z' sind, sich in ebene Schichten zerlegen läfst, und für jede einzelne Schicht, deren Massenelemente also immer einen gemeinschaftlichen Werth von z' haben, die Bedingungen $\Sigma(dm\,.\,x') = 0$ und $\Sigma(dm\,.\,y' = 0)$ erfüllt werden, d. h. also wenn die Schwerpunkte der sämmtlichen Schichten in der Axe der Z' liegen. Dies wird durch folgendes Gesetz ausgedrückt:

> Jede durch den Schwerpunkt gehende Axe, welche die Schwerpunkte sämmtlicher auf derselben normal stehenden Elemente eines Systems enthält, ist eine freie Axe.

Es läfst sich zeigen, dafs jedes feste System wenigstens drei freie Axen haben müsse, und dafs diese freien Axen im Schwerpunkt normal zu einander sind.

Kennt man eine freie Axe des Systems, so lassen sich die andern freien Axen zuweilen ohne weitere Rechnung angeben, denn nach dem eben angeführten, nur mit Hilfe ausgedehnter analytischer Rechnungen nachzuweisenden Satze, müssen die andern Axen in der Ebene liegen, welche im Schwerpunkt normal zu der ersten freien Axe ist; haben nun sämmtliche in dieser Ebene liegenden Axen zu der ersten Axe ganz gleiche Beziehungen, so werden alle diese Axen freie sein. Dies ist z. B. der Fall mit einem homogenen Rotationskörper: denn, dreht sich eine ebene Figur um eine in ihrer Ebene liegende Axe, so ist diese Axe eine freie Axe des erzeugten Rotationskörpers, nach dem Satz b), und wenn man durch den Schwerpunkt dieses Rotationskörpers eine zu jener Axe normale Ebene legt, so liegen die andern freien Axen in dieser Ebene, und da der Durchschnitt dieser Ebene mit dem Rotationskörper entweder eine Kreisfläche oder eine Kreis-Ringfläche ist, so haben alle Durchmesser dieser Fläche dieselben Beziehungen zur Rotationsaxe, sind also sämmtlich freie Axen.

Für jede Axe, die mit einer freien Axe parallel ist, aber nicht durch den Schwerpunkt geht, ist das Moment des auf Kippen der Achse wirkenden Kräftepaars ebenfalls gleich Null; denn wenn für die freie Axe $\Sigma(dm.x'.z') = 0$ und $\Sigma(dm.y'.z')$ gleich Null ist, und wir legen durch den Schwerpunkt eine Ebene normal zu den beiden Axen, nehmen den Durchschnittpunkt der neuen Axe mit diese Ebene als Anfangspunkt des neuen Koordinatensystems, dessen Axen parallel sein sollen mit denen des erstgedachten Koordinatensystems (dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt war), so sind, wenn X und Y die Koordinaten jenes neuen Anfangspunkts bedeuten:

$$z = z'; \quad x = X + x'; \quad y = Y + y'$$

wenn wir diese Werthe in die obigen Bedingungs-Gleichungen (156) einsetzen, so ist:

$$\Sigma(dm \,.\, x \,.\, z) - X \,.\, \Sigma(dm \,.\, z') = 0$$

$$\Sigma(dm \,.\, y \,.\, z) - Y \,.\, \Sigma(dm \,.\, z') = 0$$

und da $\Sigma(dm.z') = 0$ ist (§ 81. S. 154), so ist auch $\Sigma(dm.x.z) = 0$ und $\Sigma(dm \,.\, y \,.\, z) = 0$, d. h. es sind die Summen der Momente der Normalkräfte für zwei zu der neuen Axe normale Koordinatenaxen einzeln gleich Null, und daher besteht kein Bestreben die Axe zu kippen. Wohl aber besteht für solche Axe durch die Resultirende der Normalkräfte (Gleichung 155) ein Bestreben auf Verschieben, d. h. ein Druck auf die Axe. Eine Axe für welche kein Bestreben auf Kippen besteht, sondern nur ein aus den Normalkräften resultirender Druck, nennen wir eine Hauptaxe des Systems.

Rotation eines Systems mit fixen Punkten; Druck der Normalkräfte auf die fixen Punkte.

§ 89. Wenn ein festes System um einen fixen Punkt rotirt, der nicht der Schwerpunkt ist, und man denkt die Bewegung durch den Einflufs der in den einzelnen Massenelementen wirkenden Normal- und Tangentialkräfte bedingt, so ist zunächst der Druck auf den fixen Punkt gleich der Resultirenden aus allen Normalkräften; das ist nach Gleichung 155):

$$Q = M \,.\, w^2 \,.\, R.$$

worin M die Gesammtmasse des Systems und R den kürzesten Abstand des Schwerpunkts des Systems von der durch den fixen Punkt zu denkenden Rotationsaxe bezeichnet. Ist diese, durch die auf das System angebrachten Kräfte bedingte, und nach § 79. S. 145 der Lage nach zu bestimmende Rotationsaxe eine Hauptaxe (§ 88. Schlufs), so wird die Rotation um diese Hauptaxe unmittelbar statt finden; ist jedoch die in angegebener Weise ermittelte Rotationsaxe keine Hauptaxe, so mufs das feste System seine Lage gegen dieselbe so lange ändern, bis eine Hauptaxe des Systems mit dieser gegebenen Rotationsaxe zusammenfällt. Die hierdurch komplizirten Bewegungsverhältnisse sind analog denen in § 87. S. 172 erwähnten Rotationsbewegungen eines freien Systems, dessen resultirende Paaraxe nicht mit einer freien Axe zusammenfällt, und können hier nicht weiter erörtert werden.

Bei weitem gröfsere Wichtigkeit für unsere Zwecke hat die Rotation eines festen Systems um eine fixe Axe, die durch zwei gegebene fixe Punkte geht. Behalten wir die in § 79 und 87 gewählten Bezeichnungen bei, so läfst sich der Fall offenbar zurück führen auf den in § 79 unter No. 2 (S. 148) behandelten Fall, dafs sämmtliche Drucke (die Normalkräfte) in Ebenen liegen, die zur fixen Axe normal sind, wir werden also die Drucke in den fixen Punkten I und II nach zwei Richtungen, die parallel sind, mit zwei durch den ersten fixen Punkt angenommenen zu der fixen Axe und unter einander normalen Koordinatenaxen finden, indem wir in die Gleichung 142b) für $K.\cos\alpha$ und für $K.\cos\beta = K.\sin\alpha$ die auf Seite 170 bestimmten Werthe $w^2.dm.x$ und $w^2.dm.y$ setzen. Wir haben sodann:

$$157)\quad \begin{cases} Q_I' = w^2.\dfrac{\Sigma[dm.x.(L-z)]}{L}; & Q_I'' = w^2.\dfrac{\Sigma[dm.y.(L-z)]}{L} \\[2ex] Q_{II}' = w^2.\dfrac{\Sigma(dm.x.z)}{L}; & Q_{II}'' = w^2.\dfrac{\Sigma(dm.y.z)}{L}, \end{cases}$$

worin Q_I' und Q_I'' die Drucke im ersten fixen Punkt Q_{II}' und Q_{II}'' die Drucke im zweiten fixen Punkt; z die Abstände der Massenelemente von einer Ebene durch den ersten fixen Punkt, und normal zur Drehaxe, x und y die Ordinaten der Massenelemente auf den Axen gemessen, in deren Richtung die Drucke Q_I', Q_I'' und Q_{II}', Q_{II}'' statt finden, L die Entfernung der beiden fixen Punkte von einander, und w die Winkelgeschwindigkeit des Systems bezeichnen.

Es seien wieder x', y', z' die Koordinaten in Bezug auf ein Koordinatensystem, das mit dem angenommenen parallel ist, und dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt ist; es seien X, Y, Z die Koordinaten des Schwerpunkts in Bezng auf das zuerst angenommene System. Setzt man wieder $x = X + x'$, $y = Y + y'$, $z = Z + z'$ wie auf Seite 170 und beachtet man, dafs $\Sigma(dm.x')$, $\Sigma(dm.y')$, $\Sigma(dm.z')$ einzeln gleich Null sind (§ 81. S. 154), so lassen sich die Werthe für die Drucke durch leichte Rechnung umformen in folgende:

$$157a)\quad \begin{cases} Q_I' = w^2.\dfrac{X.(L-Z).\Sigma(dm) - \Sigma(dm.x'.z')}{L} \\[2ex] Q_{II}' = w^2.\dfrac{X.Z.\Sigma(dm) + \Sigma(dm.x'.z')}{L} \\[2ex] Q_I'' = w^2.\dfrac{Y.(L-Z).\Sigma(dm) - \Sigma(dm.y'.z')}{L} \\[2ex] Q_{II}'' = w^2.\dfrac{Y.Z.\Sigma(dm) + \Sigma(dm.y'.z')}{L}. \end{cases}$$

Ist die Rotationsaxe eine Hauptaxe, so ist für die durch den Schwerpunkt gehende mit derselben parallele Axe, welche dann eine freie Axe ist $\Sigma(dm.x'.z') = 0$ und $\Sigma(dm.y'.z') = 0$, folglich hat man für diesen Fall:

$$157b)\quad \begin{cases} Q_I' = w^2 . \frac{X}{L} . (L-Z) . M; & Q_I'' = w^2 . \frac{Y}{L} . (L-Z) . M \\ Q_{II}' = w^2 . \frac{X}{L} . Z . M; & Q_{II}'' = w^2 . \frac{Y}{L} . Z . M . \end{cases}$$

Setzt man Q_I' und Q_I'' im ersten fixen Punkt, und ebenso Q_{II}' Q_{II}'' im zweiten fixen Punkt zu einer Resultirenden zusammen, so hat man nach einer einfachen Umformung mit Hilfe der Gleichung 155), S. 171:

$$157c)\quad \begin{cases} Q_I = w^2 . M . R . \frac{L-Z}{L}; & Q_{II} = w^2 . M . R . \frac{Z}{L} \\ \quad = Q . \frac{L-Z}{L}; & \quad = Q . \frac{Z}{L} . \end{cases}$$

worin Q_I den resultirenden Druck auf den ersten fixen Punkt, Q_{II} denjenigen auf den zweiten fixen Punkt, R den Abstand des Schwerpunkts von der Drehaxe, M die Gesammtmasse des Systems, Q den resultirenden Druck durch die Normalkraft bezeichnen. Auch ergiebt sich leicht, dass in diesem Falle Q_I und Q_{II} parallel mit dem kürzesten Abstande R sind. Hieraus folgt:

> Rotirt ein festes System um eine fixe Axe, welche parallel mit einer freien Axe des Systems ist, so kann man die Gesammtmasse des Systems im Schwerpunkt vereinigt rotirend denken, und findet den Druck auf die fixen Punkte, indem man den Druck der durch den Schwerpunkt gehenden Normalkraft auf die fixen Punkte nach § 79 oder 80 reduzirt. Ist die fixe Axe des Systems nicht parallel mit einer freien Axe, so ist dies nicht zulässig.

Pendelschwingungen eines festen Systems um horizontale und um geneigte Axen.

§ 90. Ein festes System, welches unter dem Einfluss der Schwere um eine fixe Axe schwingt, so dass es bei dieser Schwingung eine stabile Gleichgewichtslage durchläuft, nennen wir ein körperliches (— zusammengesetztes — physikalisches —) Pendel.

Ist nämlich ein festes System um eine fixe Axe drehbar, so ist jedes Massenelement gezwungen in einem Kreisbogen sich zu bewegen, und es wird, wenn die Bedingungen des § 56 und 57 statt finden, eine schwingende Bewegung machen; es muss folglich auch das ganze System schwingen. Nun haben aber die einzelnen Massenelemente verschiedene Abstände von der Drehaxe, und auch verschiedene Erhebungswinkel; jedes Massenelement würde also, wenn es frei schwingen könnte, im Allgemeinen eine andere Schwingungsdauer (§ 57) und folglich auch eine andere Winkelgeschwindigkeit besitzen; dies ist nicht möglich, sobald die Massenelemente ein festes System bilden.

Haben wir es nun mit der Untersuchung der Bewegungsverhältnisse eines festen Systems welches um eine fixe Axe schwingt zu thun, so verfahren wir wieder am Besten in der Weise, dafs wir einen Punkt zu ermitteln suchen, der mit dem System fest verbunden ist, und in welchem die Gesammtmasse des System vereinigt, dieselben Einflüsse auf das System ausüben würde, wie die in den einzelnen Punkten vertheilten Massenelemente. Diesen Punkt nennen wir den Mittelpunkt der Schwingung, auch wohl kurz den Schwingungspunkt.

Der Schwingungspunkt mufs offenbar folgende Bedingungen erfüllen:

1) die in dem Schwingungspunkt vereinigte Gesammtmasse mufs denselben Druck auf die fixen Punkte ausüben, welcher aus den einzelnen Massenelementen *resultiren* würde;
2) wenn das System durch die *stabile Gleichgewichtslage* geht (§ 54 bis 57), mufs auch der Schwingungspunkt in stabiler Gleichgewichtslage sein, und
3) die in dem Schwingungspunkt vereinigte Gesammtmasse mufs dieselbe Schwingungsdauer haben, welche das körperliche Pendel hat.

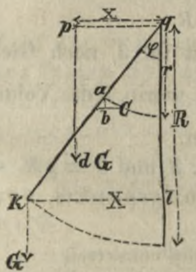
Wir betrachten zunächst den Fall, in welchem die fixe Axe horizontal ist, und dann folgt leicht, dafs zur *Erfüllung* der ersten Bedingung gehört, dafs der Schwingungspunkt in derselben zur fixen Axe normalen Ebene liegen mufs, in welcher der Schwerpunkt liegt (§ 79) und ebenso leicht folgt aus der zweiten Bedingung, dafs der Schwingungspunkt auch in derjengien Ebene liegen mufs, welche durch die Axe und den Schwerpunkt gelegt werden kann; es folgt also, indem wir die beiden ersten Bedingungen zusammenfassen, dafs der Schwingungspunkt in der Durchschnittslinie zweier Ebenen liegen mufs, von denen die eine durch den Schwerpunkt normal zur Axe, und die andere durch den Schwerpunkt und die Axe gelegt werden kann; hierin liegt der *Satz:*

der Schwingungspunkt eines festen Systems liegt in der Linie, welche den kürzesten Abstand des Schwerpunkts von der fixen Axe darstellt.

Zur Untersuchung der dritten Bedingung stellen wir folgende Betrachtungen an:

Es bezeichne r den Abstand des Schwingungspunkts von der Drehaxe, und wir denken in demselben die Gesammtmasse $M = \frac{G}{g}$ des Systems vereinigt, $ac = ds$ sei das Wegelement, welches der Schwingungspunkt bei der Drehung durchläuft $ab = dh$ sei das Wegelement in der Richtung der Schwere, so folgt aus § 52, wenn wir unter f das Aenderungsmaafs in der Richtung ac verstehen:

$$f . M . ds = M . g . dh; \quad f = g . \frac{dh}{ds} = g . \sin \varphi.$$



Bezeichnet c die Peripheriegeschwindigkeit des Schwingungspunktes, so ist $c = w . r = f . dt$, und wenn wir unter f' das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit verstehen, so ist $w = f' dt$; wir haben also:

$$c = w . r = f . dt = f' . dt . r.$$

Daher

$$\text{I.} \quad f' = \frac{f}{r} = g . \frac{\sin \varphi}{r}.$$

Nun ist hier die Schwere als die auf das System angebrachte Kraft anzusehen, und daher das Moment des auf Drehung wirkenden Kräftepaars $\Sigma(dG . x)$, wenn $x = pq$ der Hebelsarm der in dem betrachteten Massenelement wirkenden Schwerkraft ist; bezeichnet $kl = X$ den Abstand des Schwerpunkts von der durch die Axe gelegten Vertikalebene, so ist nach Gleichung 144a), S. 154:

$$\Sigma(dG . x) = G . X$$

und da $X = kl = R . \sin \varphi$ ist, wenn wir unter R den Abstand qk des Schwerpunkts von der Drehaxe verstehen, so ist das auf Drehung wirkende Moment: $GR . \sin \varphi$. Substituiren wir für die auf das System angebrachten Kräfte, die in dem System thätigen Kräfte, so ist deren Moment nach Gleichung 145a) $f_{,} J_{,}$ und es ist nach dem Gesetz in § 86. No. 1 und nach Gleichung 154c) zu setzen:

$$G . R . \sin \varphi = f_{,} . J_{,}.$$

$$\text{II.} \quad f_{,} = \frac{G . R . \sin \varphi}{J_{,}}.$$

Da nun der Schwingungspunkt ein mit dem System fest verbundener Punkt ist, so hat er in jedem Augenblick dieselbe Winkelgeschwindigkeit, welche das System hat, es mufs daher auch das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit des Schwingungspunkts f' gleich demjenigen der Winkelgeschwindigkeit sein, welche die auf das System angebrachten Kräfte bedingen, d. h. es ist zu setzen $f' = f_{,}$ oder

$$g \cdot \frac{\sin\varphi}{r} = \frac{G \cdot R \cdot \sin\varphi}{J_{,}},$$

da nun $\sin\varphi$ auf beiden Seiten der Gleichung identisch ist, insofern der Schwingungspunkt denselben Erbebungswinkel hat, wie der Schwerpunkt, weil beide auf demselben Radius liegen, so folgt der Abstand des Schwingungspunkts von der Drehaxe:

$$158)\quad r = \frac{gJ_{,}}{GR} = \frac{\gamma T_{,}}{GR} = \frac{T_{,}}{VR}$$

indem man nämlich für homogene Systeme setzt für $J_{,}$ nach Gleichung 146c) $\frac{\gamma}{g} \cdot T_{,}$ und für G den Werth γV, worin V das Volum und γ das Gewicht der Volumeinheit bezeichnet.

Setzt man nach Gleichung 147b) $J_{,} = \varrho_{,}^2 \cdot M$ und $G = gM$, so findet man auch den Abstand des Schwingungspunkts vom Drehpunkt:

$$158\text{a})\quad r = \frac{\varrho_{,}^2}{R} = \frac{\text{Quadrat des Drehungshalbmessers}}{\text{Abstand des Schwerpunkts}},$$

und folglich für ein Kreispendel bei geringen Ausschlägen nach Gleichung 190), S. 72 die Schwingungsdauer:

$$158\text{b})\quad T = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{J_{,}}{GR}\right)} = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{T_{,}}{gVR}\right)}$$

$$= \pi\varrho_{,} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{gR}\right)} = 0{,}5620 \cdot \frac{\varrho_{,}}{R} \cdot \sqrt{R}.$$

Der Punkt, in welchem die Axe durch die Ebene geschnitten wird, welche man normal zur Axe durch den Schwingungspunkt legen kann, heifst der Aufhängepunkt des körperlichen Pendels.

Denken wir, das System schwinge um eine andere fixe Axe, welche durch den eben bestimmten Schwingungspunkt geht, und mit der eben betrachteten Axe parallel ist, so dafs der eben ermittelte Schwingungspunkt nun Aufhängepunkt wird. Der Abstand des neuen Schwingungspunkts ist offenbar

$$r' = \frac{\varrho'^2_{,}}{R'}$$

wen $\varrho'_{,}$ den Drehungshalbmesser und R' den Abstand des Schwerpunkts von der neuen Drehaxe bezeichnet. Nun sei ϱ der Drehungshalbmesser für eine durch den Schwerpunkt gehende Axe, so ist, da der Abstand des Schwerpunkts von der ersten Axe R, und da offenbar $r = R + R'$ ist, nach Gleichung 150) und 158a)

$$r = \frac{\varrho^2 + R^2}{R} = R + R', \text{ daher}$$

$$159)\quad R' = \frac{\varrho^2}{R},$$

aufserdem ist offenbar nach derselben Gleichung und mit Benutzung des eben gefundenen Werths

$$r' = \frac{\varrho^2 + R'^2}{R'} = \frac{\varrho^2}{R'} + R' = R + R'$$

also

$$159a)\quad r' = r,$$

d. h. der Schwingungspunkt und der Aufhängepunkt eines festen Systems stehen in solcher Beziehung zu einander, dafs, wenn man den Schwingungspunkt zum Aufhängepunkt macht, und läfst das System um eine durch denselben gehende mit der vorigen parallele Axe schwingen, der frühere Aufhängepunkt nun Schwingungspunkt wird.

Aufserdem folgt aus der Gleichung 159) noch

$$R' . R = \varrho^2,$$

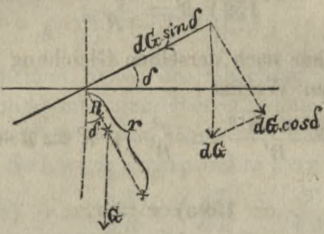
d. h. das Quadrat des Drehungshalbmessers für eine durch den Schwerpunkt gehende Axe ist gleich dem Produkt aus den Abständen des Schwerpunkts von dem Aufhängepunkt und von dem Schwingungspunkt.

Da nun ferner ϱ^2, d. i. das Quadrat des Drehungshalbmessers für eine bestimmte durch den Schwerpunkt gehende Axe ein konstanter Werth ist, so folgt, dafs auch $R . R'$ ein konstanter Werth ist, und folglich liegt hierin das Gesetz:

> Wenn man in einem festen System beliebig viele horizontale und unter sich parallele Axen denkt, und man denkt für jede Axe den entsprechenden Schwingungspunkt, so ist das Produkt aus dem Abstande des Schwerpunktes von einer beliebigen Axe, und aus dem Abstande des Schwerpunkts von dem zu dieser Axe gehörigen Schwingungspunkte für alle parallelen Axen ein konstanter Werth, und gleich dem Quadrat des Drehungshalbmessers für eine durch den Schwerpunkt gehende parallele Axe.

Wir haben bis jetzt die Schwingungen eines Systems um eine horizontale Axe betrachtet; nehmen wir nunmehr an, die fixe

Axe sei nicht horizontal, sondern bilde mit der Horizontalen den Winkel δ.



Offenbar lassen sich nun die in den einzelnen Massenelementen wirksamen Drucke der Schwerkraft zerlegen in zwei andere, von denen die einen $dG . \sin \delta$ durch den Widerstand der fixen Punkte aufgehoben werden, die andere $dG . \cos \delta$ aber als lauter gleich grofse in den einzelnen Massenelementen wirksame und konstant wirkende Drucke zu betrachten sind. Wir werden für diese Drucke genau dieselben Betrachtungen anstellen können, die wir zu Anfange dieses Paragraphen für die Drucke angestellt haben, die parallel mit der Schwerkraft waren, und es werden offenbar überall dieselben Resultate gefunden werden, wenn wir nur überall für das Aenderungsmaafs der Schwere g jetzt das Aenderungsmaafs $g . \cos \delta$ einführen. Wir finden dann nach I. und II. (S. 179):

$$f' = g . \cos \delta . \frac{\sin \varphi}{r_0} \qquad f_{,} = \frac{G . \cos \delta . R_0 . \sin \varphi}{J_{,}}$$

worin r_0 den kürzesten Abstand des Schwingungspunkts von der geneigten Drehungsaxe, R_0 den kürzesten Abstand des Schwerpunkts von derselben Axe $J_{,}$ das Trägheitsmoment in Bezug auf dieselbe Axe bezeichnet. Durch Gleichsetzung beider Werthe findet man wieder wie in Gleichung 158 und 158a):

$$160) \quad r_0 = \frac{gJ_{,}}{GR_0} = \frac{\gamma T_{,}}{GR_0} = \frac{T_{,}}{VR_0} = \frac{\varrho_{,}^2}{R_0}$$

worin unter r_0 der Abstand eines Punkts von der Drehaxe, der auf der kürzesten Entfernung des Schwerpunkts von der Drehaxe liegt, verstanden ist, welcher, wenn die Gesammtmasse des Systems in demselben vereinigt wäre, mit dem System dieselbe Schwingungsdauer hätte, dieselbe Reaktion in den fixen Punkten hervorrufen, auch mit dem System gleichzeitig die stabile Gleichgewichtslage passiren würde. Die Schwingungsdauer eines solchen Systems findet sich leicht durch Gleichung 90) S. 72, wenn man für g den Werth $g . \cos \delta$ setzt:

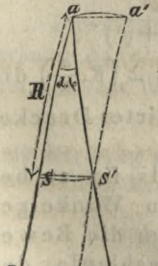
$$160\text{a})\quad T = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{r_0}{g \cdot \cos\delta}\right)} = 0{,}5620 \cdot \sqrt{\left(\frac{r_0}{\cos\delta}\right)}.$$

Man sieht aus Gleichung 158) und 160), daſs wenn die fixe Axe durch den Schwerpunkt geht, wenn also $R = 0$, oder $R_0 = 0$ ist, der Abstand des Schwingungspunktes und auch die Schwingungsdauer unendlich groſs sein müſste, d. h. daſs ein solches System überhaupt nicht schwingt, ebenso folgt aus Gleichung 160a) daſs wenn $\delta = 90^0$ ist, d. h. wenn die Schwingungsaxe vertikal ist, ebenfalls die Schwingungsdauer unendlich groſs sein müſste, d. h. daſs in diesem Fall keine Pendelschwingungen statt finden können.

Uebrigens gelten, wie leicht zu übersehen ist, die Gesetze der Gleichungen 159 und 159a) auch für geneigte Axen.

Zurückführung eines festen Systems mit fixen Punkten auf ein freies System.

§ 91. Denken wir ein festes System, welches um einen fixen Punkt oder um eine fixe Axe rotirt, und stellen wir uns vor, daſs wir in jedem *Augenblicke* die *Reaktionen* (§ 79, S. 144) kennen, welche in den fixen Punkten statt finden müssen, um dieselben als fixe Punkte zu konstituiren. Wenn wir nun das System als freies System betrachten, und wir denken in den Punkten, die wir bisher als fixe Punkte angesehen haben, Kräfte auf das System angebracht, deren Angriffspunkte diese Punkte sind, und die in jedem Augenblick der Richtung und Gröſse nach gleich jenen Reaktionen sind, so muſs offenbar das System genau dieselbe Bewegung haben, die es als System mit fixen Punkten hatte. Es wird sich durch diese Betrachtungsweise jedes System mit fixen Punkten auf ein freies System zurückführen lassen.



Da aber jedes freie System sich so bewegt, als habe der Schwerpunkt eine fortschreitende Bewegung, und als rotirten alle Massenelemente mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um eine Axe, die durch den Schwerpunkt geht, so muſs dieses Gesetz der obigen Darstellung zufolge auch für ein System mit fixen Punkten gelten. Daſs dem so sei, läſst sich durch folgende Betrachtung veranschaulichen. Es sei a ein fixer Punkt des Systems, S der Schwerpunkt, R der Abstand des Schwerpunkts von der Drehaxe, b sei ein beliebiges Massenelement, w die Winkelgeschwindigkeit, und es sei in irgend einem Zeitelement das System aus der Lage aSb durch Drehung um den Winkel $d\varphi$ in die Lage $aS'b'$ gekommen, durch Rotation um den den Punkt a; es läſst sich nun zufolge des Grundsatzes § 24 (S. 29) die Bewegung auch so betrachten, als ob das System in diesem Zeitelement sich so bewegt hätte, daſs zuerst der Schwerpunkt und alle Massenelemente gemeinschaftlich um gleiche und parallele Wegstücken fortgeschritten wären, und daſs dann alle Massenelemente um eine Drehaxe, die parallel mit der Axe durch den fixen Punkt ist, und durch den Schwerpunkt geht, sich um den Winkel $d\varphi$ gedreht hätten, wodurch dann der Punkt a' wieder in den Punkt a, und der Punkt b'' in den Punkt b' rücken, und folglich das System die Lage $aS'b'$, die es auch durch Rotation um die fixe Axe erlangt hat, annehmen würde. Es ist hierbei wieder gleichgiltig, in welcher Reihenfolge wir diese beiden Bewegungen uns vorstellen; jedenfalls finden aber beide Bewegungen während der Dauer desselben Zeitelements dt statt, in dessen Verlauf auch die Drehung um den Punkt a statt finden kann. Hieraus folgt:

1) Die Drehung um die Axe durch den Schwerpunkt muſs man so ansehen, als ob sie mit derselben Winkelgeschwindigkeit erfolgt, wie die Drehung um den fixen Punkt, wie dies durch eine einfache Betrachtung der Figur sich zeigen läſst.
2) Die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung des Schwerpunkts ist offenbar gleich der Geschwindigkeit, mit welcher der Schwerpunkt das Bogenelement SS' durchläuft, d. i. gleich wR, folglich ist das Aenderungsmaaſs der fortschreitenden Bewegung $f = f_{\prime}R$, wenn $f_{\prime}$ das Aenderungsmaaſs der Winkelgeschwindigkeit ist.

Mit Anwendung der Gleichung 154c) und 149) ergiebt sich nun:

$$161)\quad f = f_{\prime}R = \frac{\Sigma(Ka)}{J_{\prime}} \,.\, R = \frac{\Sigma(Ka)}{R\,.\,M} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + \varrho^2)} \,.$$

Nach Gleichung 139) (S. 137) ist $\frac{\Sigma(Ka)}{R} = \Sigma\left(K.\frac{a}{R}\right)$ die Summe sämmtlicher auf den Abstand R reduzirter Drucke; hierin liegt folgender Satz:

Wenn ein festes System um eine als fix zu betrachtende Axe mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit w rotirt, so läſst sich die Bewegung auch so betrachten, als durchlaufe der Schwerpunkt in jedem Zeitelement mit fortschreitender Bewegung ein Wegelement, das normal ist zu dem kürzesten Abstand des Schwerpunkts von der Drehaxe, während gleichzeitig sämmtliche Massenelemente um eine durch den Schwerpunkt gehende, mit der fixen Axe parallele Axe mit derselben Winkelgeschwindigkeit w rotiren. Das Aenderungsmaafs jener fortschreitenden Bewegung drückt sich aus durch die Summe aller auf den Abstand des Schwerpunkts reduzirten Drucke, dividirt durch die Masse und multiplizirt mit dem Verhältnifs des Quadrats des kürzesten Abstandes des Schwerpunkts von der fixen Axe zur Summe dieses Quadrates und dem Quadrat des Drehungshalbmessers für die durch den Schwerpunkt gedachte Axe.

Aus der Gleichung 161) folgt, dafs der Druck, der im Schwerpunkt auf fortschreitende Bewegung wirkt, und welcher durch die Reaktion im fixen Punkte aufgehoben werden mufs, indem er mit dieser Reaktion ein Kräftepaar bildet, sich ausdrückt durch:

$$161\text{a)}\quad K = fM = \frac{\Sigma(Ka)}{R} \cdot \frac{R^2}{(R^2+\varrho^2)}\,.$$

Endlich ist das Moment des Kräftepaars, welches auf Drehung des Schwerpunkts um den fixen Punkt wirkt

$$161\text{b)}\quad K.R = \Sigma(Ka) \cdot \frac{R^2}{R^2+\varrho^2}$$

und das Moment des Kräftepaars, welches auf Drehung um die durch den Schwerpunkt gehende parallele Axe wirkt, nach Gleichung 145a) und 161):

$$161\text{c)}\quad f_{,}J = \frac{\Sigma(Ka)}{J_{,}} \,.\, J = \Sigma(Ka)\frac{\varrho^2}{R^2+\varrho^2}\,.$$

Durch Addition der Gleichungen 161b) und 161c) ergiebt sich wieder $\Sigma(Ka)$ als die Summe der Momente der Kräftepaare in der zur Drehaxe des Systems normalen Ebene.

d) Wirkung fester Systeme, die von mechanischen Kräften in Anspruch genommen werden, auf einander.

Grundsätze für die Wirkung fester Systeme auf einander.

§ 92. Denken wir zunächst zwei feste Systeme (§ 63) von Massenelementen, so können dieselben sich entweder berühren oder nicht. Berühren sich die festen Systeme, so mufs die Berührung wenigstens in einem Massenelement statt finden, sie kann auch in mehren zugleich erfolgen; in beiden Fällen können wir die sich berührenden Massenelemente als Flächenelemente ansehen, und es wird immer eine beiden gemeinschaftliche Normale denkbar sein. Wenn die beiden Systeme sich nicht berühren, so können sie entweder ihren Abstand von einander gar nicht ändern, oder sie können denselben vergröfsern oder vermindern. Wenn diese Verminderung des Abstandes dauernd erfolgt, oder wenn doch die Verminderung des Abstandes überwiegend ist, gegen die etwa inzwischen eintretende Vergröfserung desselben, so müssen sich die festen Systeme endlich treffen, d. h. es mufs endlich ihr Abstand Null werden, sie müssen endlich sich berühren, und dann ist wieder in jedem Berührungselement eine gemeinschaftliche Normale denkbar.

Wenn die festen Systeme sich nicht berühren, so findet erfahrungsmäfsig gleichwohl eine Einwirkung der einzelnen Massenelemente aufeinander statt (vergl. § 18. S. 20). Diese Art der Einwirkung, welche Folge der allgemeinen Gravitation ist, lassen wir einstweilen ganz aufser Betracht, da sie für die vorliegenden Zwecke, wo wir es immer nur mit Systemen zu thun haben, die verhältnifsmäfsig eine sehr geringe Zahl von Massenelementen besitzen, nur von fast ganz verschwindender Bedeutung ist. Hat man dagegen mit so ausgedehnten Systemen zu thun, wie sie durch ganze Himmelskörper dargestellt werden, so ist allerdings die eben angedeutete Einwirkung dieser Systeme aus der Ferne auf einander von der gröfsten Bedeutung.

Nach der eben vorgetragenen Darstellung haben wir hier nur den Fall zu betrachten, wo sich die beiden festen Systeme berühren; sei es nun, dafs diese Berührung von Hause aus stattgefunden hat, oder dafs sie erst entstanden ist, indem die festen Systeme einander trafen. In beiden Fällen beurtheilen wir die Wirkung der beiden Systeme auf einander nach folgenden Grundsätzen:

Wenn sich zwei feste Systeme berühren, so sind entweder Kräfte vorhanden, welche eine Trennung beider Systeme herbeiführen, oder es sind solche Kräfte nicht vorhanden, und dann bleiben die beiden Systeme während der Dauer der Betrachtung in Berührung. Dieser letzte Fall ist es, den wir hier zunächst voraussetzen.

Die beiden festen Systeme mögen sich während der Dauer der Betrachtung nicht trennen; sie können dabei gleichwohl ihre Berührungspunkte ändern. *Hierbei ist* es denkbar, dafs sich beide Systeme bewegen, *oder*, dafs *sich nur* eines von beiden bewegt. Wenn *sich* nur eines von *beiden* Systemen bewegt, das andere aber nicht, so nennen wir dieses das fixe System, das erste das bewegliche System.

Bewegen sich dagegen beide Systeme, indem sie dabei zugleich ihre Berührungspunkte ändern, so können wir im Sinne des Grundsatzes in § 24. No. 1 diese beiden gleichzeitigen Bewegungen immer so auffassen, als ob sie innerhalb der Dauer desselben Zeitelementes nach einander erfolgten, indem wir nämlich annehmen, dafs zuerst beide Systeme nach entsprechenden Richtungen gemeinschaftlich sich bewegen ohne ihre Berührungspunkte zu ändern, und dafs dann das eine System still stände, und das andere sich so bewege, dafs nun die Aenderung der Berührungspunkte erfolge. Es werden durch eine solche Betrachtung die Bewegungen zurückgeführt auf die Bewegung eines zusammenhängenden Gesammtsystems, und auf die Bewegung eines beweglichen Systems gegen ein fixes System.

Hierzu dienen folgende Untersuchungen. Die beiden Systeme werden mit I und II bezeichnet; wir betrachten zunächst alle Bewegungen des Systems II, und nehmen an, dafs das System I sich mit dem System II gemeinschaftlich bewege, ohne dafs die Berührungspunkte sich ändern; dann betrachten wir das System II als fixes System, und untersuchen, welche Bewegungen nun noch das System I. machen müsse, um die bedingte Aenderung der Berührungspunkte herbeizuführen.

Wenn das System II sich bewegt, so hat es im Allgemeinen eine fortschreitende Bewegung und eine drehende Bewegung um irgend eine Axe; soll nun das System I sich nicht von dem System II trennen, und auch die Berührungspunkte nicht ändern, so mufs es sich *mit derselben Geschwindigkeit* nach derselben Richtung *fortschreitend* bewegen, und auch mit derselben Winkelgeschwindigkeit um dieselbe Axe rotiren.

Es seien:

K^{I} und K^{II} die Summen der Komponenten der auf die beiden Systeme wirkenden Kräfte für die Richtung der fortschreitenden Bewegung des Systems II.

M^{I} und M^{II} die Massen der beiden Systeme.

f^{I} und f^{II} die Aenderungsmaafse der Geschwindigkeiten, welche die Kräfte K^{I} und K^{II} der Masse M^{I} und M^{II} zu ertheilen streben.

$(Pa)^I$ und $(Pa)^{II}$ die statischen Momente der auf die beiden Systeme wirkenden Kräfte in Bezug auf Drehung um die Axe, um welche sich das System wirklich dreht.

f_I^I und f_I^{II} die Aenderungsmaafse der Winkelgeschwindigkeiten für dieselbe Axe.

J_I^I und J_I^{II} die Trägheitsmomente der beiden Systeme in Bezug auf dieselbe Axe. Nach dem Früheren finden die Beziehungen statt:

$$K^I = M^I . f^I;\ K^I = M^{II} . f^{II};\ (Pa)^I = J_I^I . f_I^I;\ (Pa)^{II} = J_I^{II} . f_I^{II}.$$

Indem nun das System I den Bewegungen des Systems II genau folgt, so als ob beide ein System bilden, bewegt es sich mit Geschwindigkeiten, deren Aenderungsmaafse gleich denen des Systems II sind, nämlich gleich f^{II} und f_I^{II}. Die auf das System I wirkenden Kräfte haben aber das Bestreben, dem System I die Aenderungsmaafse f^I und f_I^I zu ertheilen, es wird also indem sich beide Systeme gemeinschaftlich bewegen in dem System I noch ein Bestreben auf Bewegung bleiben, dem während der Dauer dieser gemeinschaftlichen Bewegung nicht Genüge gethan ist, und welchem, wenn das System I nach Vollendung jener gemeinschaftlichen Bewegungen frei wird, noch die Aenderungsmaafse $(f^I - f^{II})$ beziehlich $(f_I^I - f_I^{II})$ in dem System I entsprechen würden. Diesem auf die Masse M^I wirkenden Bestreben auf Bewegung entspricht nach § 19. S. 23 ein Druck, und ein statisches Moment, welches wir mit K, beziehlich mit (Pa) bezeichnen wollen, und es ist:

$$162)\quad \begin{cases} K = M^I . (f_I^I - f_I^{II}) = K^I - \dfrac{M^I}{M^{II}} . K^{II} \\ (Pa) = J_I^I . (f^I - f^{II}) = (Pa) - \dfrac{J_I^I}{J_I^{II}} . (Pa)^{II}. \end{cases}$$

Die Komponenten der Kräfte, welche auf das System I wirken für Richtungen, die zu der Bewegungsrichtung des Systems II normal sind, bleiben dabei ungeändert, ebenso die Kräftepaare für Axen, die zu der Drehaxe des Systems *II* normal sind.

I. Hieraus folgt, dafs, wenn beide Systeme sich bewegen, man das eine von beiden immer als fixes System betrachten kann, das andere als bewegliches System, indem man vorher oder nachher die Bewegungen untersucht, welche das bewegliche System mit dem fixen gemeinschaftlich macht. Die Summe der Drucke und das Kräftepaar, welches bei jener Betrachtung auf das bewegliche System und zwar parallel mit der Richtung der Bewegung des als fix betrachteten Systems wirkend zu denken sind, bestimmen sich nach Gleichung 162), wobei namentlich die Vorzeichen bei der Bildung der algebraischen Summen zu beachten sind.

Wenn beide Systeme fallen, und es wirken in der Richtnng der Schwere keine andern Kräfte auf die einzelnen Systeme, so ist das Aenderungsmaafs $f^{I} = g$ und $f^{II} = g$, folglich $K = 0$. d. h.

II. Wenn zwei Systeme sich berühren und frei fallen, so ist der aus der Schwere hervorgehende Druck, mit welchem das eine System gegen das andere geprefst wird gleich Null.

Nehmen wir an, dafs das zweite System mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegt. Die gleichförmige Bewegung bedingt nach § 14. S. 16, dafs die Kräfte, welche auf das zweite System angebracht sind, für die Richtung der Bewegung im Gleichgewicht seien, d. h. dafs K^{II} gleich Null sei. In diesem Falle ist auch f^{II} gleich Null, und wenn wir eine drehende Bewegung betrachten, so mufs für eine gleichförmige Winkelgeschwindigkeit auch das Aenderungsmaafs derselben $f_{\prime}^{II} = 0$ sein. Für diesen Fall nun gehen die Gleichungen 162) über in

$$162\text{a)} \quad K = K^{I}; \quad (Pa) = (Pa)^{I}.$$

III. d. h. Wenn zwei feste Systeme die sich berühren sich gleichzeitig bewegen, und das eine von beiden bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschreitend oder mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit drehend um eine Axe, so bleibt sowohl die Summe der Komponenten des Druckes der auf das andere System angebrachten Kräfte für diese Richtung, als auch das resultirende Kräftepaar des andern Systems für diese Dreh-axe ungeändert.

Nach dem Inhalt dieses Paragraphen läfst sich die Bewegung zweier festen Systeme, die sich berühren im Allgemeinen auf zwei Bewegungen zurückführen, von denen wir die eine, welche beide Systeme gemeinschaftlich haben die gemeinschaftliche Bewegung, die andere dagegen, welche eine Aenderung der Berührungspunkte der beiden Systeme zur Folge hat, die Verschiebung nennen wollen. Ebenso folgt aus den vorigen Untersuchungen, dafs bei der Betrachtung der Verschiebung wir immer das eine von beiden Systemen als fixes, das andere als bewegliches System ansehen können.

Die Berührungspunkte der beiden Systeme sind immer als Punkte zu betrachten, die sowohl dem einen System, wie dem andern

System angehören. Diese Punkte werden aber je nachdem man sie zu dem einen System oder zu dem andern System gehörend betrachtet, verschiedene Wege durchlaufen Die ursprünglichen Berührungspunkte des als fix betrachteten Systems werden nur Wege durchlaufen, welche der gemeinschaftlichen Bewegung entsprechen; die Berührungspunkte des beweglichen Systems dagegen werden gleichzeitig die Wege beschreiben, die aus der gemeinschaftlichen Bewegung hervorgehen, und diejenigen, welche durch die Verschiebung bedingt werden, sie werden also sich nach einer resultirenden Richtung bewegen, deren Komponenten jene Einzelwege sind. Wir nennen die resultirenden Bewegung, welche diese Punkte jenen beiden Komponenten zufolge machen, die absolute Bewegung der Berührungspunkte des beweglichen Systems.

Nach diesen Auseinandersetzungen haben wir nun folgende Dispositionen; wir handeln:

1) von der Verschiebung,
2) von der gemeinschaftlichen Bewegung,
3) von der absoluten Bewegung.

Von der Verschiebung zweier festen Systeme.

Gesetz über die Möglichkeit der Verschiebung; Kippen, Gleiten.

§ 93. Indem wir von zwei festen Systemen eins als fixes System, das andere als bewegliches System betrachten, setzen wir voraus, dafs beide Systeme stets in Berührung bleiben sollen (§ 92), dafs aber gleichwohl eine Aenderung der Berührungspunkte statt finden kann. Untersuchen wir zunächst, wie diese Aenderung der Berührungspunkte beschaffen sein kann.

Indem sich die Berührungspunkte ändern, bewegt sich das bewegliche System, und da wir wissen, dafs jede Bewegung eines festen Systems sich auf eine fortschreitende und auf eine drehende zurückführen läfst, so wird auch bei der Verschiebung des beweglichen Systems dasselbe entweder fortschreitend sich bewegen, oder drehend, oder beides zugleich.

Wenn das bewegliche System sich fortschreitend verschiebt, so durchlaufen alle Punkte desselben, folglich auch die Berührungspunkte gleich grofse und parallele Wegelemente (§ 65. S. 88). Wenn dagegen das bewegliche System sich drehend verschiebt, so beschreiben die Berührungspunkte im Allgemeinen Kreisbögen um eine gemeinschaftliche Axe.

Wie nun auch die Verschiebung beschaffen sein mag, ob sie fortschreitend oder drehend erfolgt, so dürfen doch niemals die Wegelemente, welche die Berührungspunkte des beweglichen Systems beschreiben, innerhalb des festen Systems fallen denn in diesem Falle würde das bewegliche System entweder in das fixe System eindringen, oder dasselbe verdrängen müssen, beides widerspricht den Voraussetzungen. Es müssen also die von dem Berührungspunkt des **beweglichen Systems** beschriebenen Wegelemente entweder das fixe System in jedem Augenblick **berühren**, oder, wenn sie das fixe System schneiden, sich von demselben **abheben.**

Eine Verschiebung, bei welcher alle Berührungspunkte Wegelemente beschreiben, die sich von dem fixen System abheben würde das bewegliche System zu einem freien machen, und der Bedingung widersprechen, dafs die beiden Systeme sich nicht trennen dürfen. Es ist aber denkbar, dafs eine Anzahl von Berührungspunkten sich von dem fixen System abhebt, während gewisse andere Berührungspunkte mit dem fixen System im Zusammenhange bleiben. Diese eigenthümliche Art der Verschiebung erfolgt immer, wenn das bewegliche System eine Drehung macht um eine Axe, die durch einen der Berührungspunkte geht, und beide Systeme berührt. Die Berührungspunkte, welche in dieser Axe liegen, bleiben bei der Drehung des beweglichen Systems unbewegt, folglich in Berührung mit dem fixen System, die übrigen Berührungspunkte beschreiben Bogenelemente in Ebenen normal zu dieser berührenden Axe, welche also im Allgemeinen das fixe System schneiden, und welche daher, wenn die angegebene Drehung wirklich erfolgt, von dem fixen System sich abheben müssen. Wir nennen eine Drehung des beweglichen Systems um eine Axe die beide Systeme berührt, während alle andern Berührungspunkte des beweglichen Systems, die nicht in diese Axe liegen sich von dem fixen System abheben: „**Kippen.**"

Bewegt sich dagegen das bewegliche System so, dafs alle Berührungspunkte Wegelemente beschreiben, die das fixe System berühren, so nennen wir die Verschiebnng der Berührungspunkte: „**Gleiten.**" Nach dem Obigen wird es ohne Weiteres verständlich sein, wenn wir unterscheiden „fortschreitendes Gleiten" und „drehendes Gleiten."

Grundgesetze über die Widerstände der Verschiebung; Reibungswiderstände.

§ 94. Wenn zwei feste Systeme sich berühren, so wird es von der Form der Berührungsflächen abhängen, ob eine Verschiebung überhaupt möglich ist, und wenn dies der Fall ist, in welchem Sinne und nach welchen Richtungen Verschiebung erfolgen kann. In den meisten Fällen liegt es, auch ohne besondere Untersuchung, nahe, ob und welche Möglichkeit der Verschiebung vorhanden ist, in andern Fällen bedarf es zur Feststellung dieser Möglichkeit einer besondern Betrachtung, für welche das im vorigen Paragraphen ausgesprochene Gesetz einen Anhalt bietet.

Wenn sich zwei feste Systeme, von denen eins als fixes System betrachtet werden kann, berühren, und es ist für gewisse Richtungen die Möglichkeit der fortschreitenden Verschiebung, oder für gewisse Drehaxen die Möglichkeit der drehenden Verschiebung **nicht** vorhanden, so müssen alle auf das System angebrachten Kräfte, welche auf Fortschreiten nach dieser Richtung wirken, beziehlich sämmtliche Kräftepaare, welche auf Drehung um diese Axe wirken, im Gleichgewicht sein.

Ergiebt sich nun dieses Gleichgewicht nicht schon aus den auf das bewegliche System angebrachten Kräften, so mufs dasselbe durch den Widerstand des fixen Systems hergestellt werden.

Hieraus folgt, dafs das fixe System nach jeder Richtung, für welche die Möglichkeit des Verschiebens nicht statt findet, einen Widerstand leistet, welcher der Resultirenden aus allen Drucken, die auf Verschieben nach dieser Richtung wirken, gleich und entgegengesetzt ist.

Die Richtigkeit dieser Gesetze erhellt aus den Grundprinzipien der ganzen Mechanik, dafs nämlich eine Kraft, die nicht Bewegung erzeugt, nur durch eine gleich grofse und entgegengesetzt wirkende Gegenkraft aufgehoben werden könne.

Jede Kraft, die durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben wird, äufsert das Bestreben das bewegliche System in das fixe System einzudrängen. Aus diesem Bestreben geht erfahrungsmäfsig ein Widerstand hervor, der jeder Verschiebung in einer Ebene, die normal zu der Richtung jener Kraft ist, widerstrebt. Diesen Widerstand nennen wir den Reibungswiderstand.

Die Reibungswiderstände erscheinen hiernach als eine neue Gruppe von Kräften, die sich der Verschiebung des beweglichen

Systems entgegensetzen. Sie sind verschieden von den auf das bewegliche System angebrachten Kräften, obwohl sie von denselben abhängig sind, und erscheinen daher auch als neue auf das System angebrachte Kräfte; aber da sie immer nur der Verschiebung entgegenwirken, niemals selbst eine Verschiebung bewirken können, so nennt man sie auch passive Widerstände, im Gegensatz zu den auf das System ursprünglich angebrachten Kräften, die man die bewegenden Kräfte des Systems nennt.

Ueber die Wirkung dieser eigenthümlichen Kräfte stellen wir folgende Prinzipien auf:

1) Die Reibungswiderstände erscheinen immer als Drucke, die der Verschiebung des beweglichen Systems entgegenwirken, und da sie niemals selbst Bewegung erzeugen können, so findet keine Verschiebung statt, sobald die Reibungswiderstände gleich, oder gröſser sind, als der auf Verschiebung wirkende resultirende Druck der bewegenden Kräfte, oder sobald ihr statisches Moment gleich oder gröſser ist, als das auf Drehung um eine gegebene Axe wirkende statische Moment der bewegenden Kräfte;
2) die Angriffspunkte der Reibungswiderstände sind stets die Berührungspunkte der beiden Systeme;
3) die Gröſse der Reibungswiderstände ist immer abhängig von der Gröſse derjenigen Komponenten der in den Berührungspunkten wirkenden Drucke, welche durch den Widerstand des festen Systems aufgehoben werden. Wir nennen daher diese Komponenten „Reibung erzeugende Drucke“;
4) die Richtung der Reibungswiderstände liegt stets in einer Ebene, die normal zu der Richtung der Reibung erzeugenden Drucke ist. In dieser Ebene kann der Reibungswiderstand jede beliebige Lage haben, doch immer so, daſs, wenn man den Reibungswiderstand zerlegt nach der Richtung, in welcher Verschiebung erfolgt, und normal dazu, die Komponente für die erstgenannte Richtung direkt entgegengesetzt ist der Richtung in welcher Verschiebung erfolgt.

Diese beiden zuletzt aufgestellten Grundsätze sind wohl zu beachten; sie sind verschieden von den bisher üblichen Annahmen; sie erklären aber die Erscheinungen der Reibung vollständig, lassen sich mit allen über die Reibung bestehenden Erfahrungen vereinigen, und führen bei ihrer Anwendung nicht zu Widersprüchen mit andern mechanischen Gesetzen, wie dies der Fall ist, wenn man die Reibungswiderstände ganz allein von den Normaldrucken abhängig macht.

Das Vorhandensein der Widerstände der Reibung ist nicht durch die Voraussetzungen herzuleiten, die wir ganz allgemein über die Wirkung der Kräfte aufgestellt haben; es ist uns nur durch die Erfahrung bekannt. Die Gröfse dieser Widerstände, und die Gesetze ihrer Abhängigkeit sind daher nur durch die Erfahrung festzustellen. Sobald wir aber diese Gesetze kennen, d. h. sobald wir die Gröfse und Eigenschaften dieser Kräfte selbst kennen, werden wir sie den allgemein festgestellten Gesetzen über die Wirkung der Kräfte vollständig unterwerfen können.

Die wichtigsten Versuche über die Reibung sind von Amontons, Coulomb, Vince, G. Rennie, N. Wood, und zuletzt von Morin angestellt worden. Alle diese Versuche haben einen Unterschied in der Reibung herausgestellt, zwischen dem Fall, wo längere Zeit dieselben Punkte beider Systeme in Berührung waren, und es darauf ankam die Verschiebung zu beginnen, und dem Fall, wo die Verschiebung bereits eingetreten war, und fortgesetzt werden sollte. Den ersten Fall bezeichnet man als die Reibung der Ruhe, und den andern als die Reibung der Bewegung.

Die Gesetze der Reibung sind sämmtlich unter folgenden Voraussetzungen ermittelt worden, und gelten folglich auch nur unter diesen Voraussetzungen:

a) dafs die Oberflächen der sich berührenden festen Systeme (Körper) einen gewissen Grad von Glätte und Regelmäfsigkeit besitzen;
b) dafs die Körper sich durch die Bewegung selbst nicht beträchtlich erwärmen;
c) dafs die Oberflächen der Körper durch die Bewegung keine irgend merkliche Abnutzung und Formveränderung erleiden.

Erfahrungsresultate über die Reibung des Gleitens.

§ 95. Die von Morin gemachten Versuche (§ 93. und 94.) über die Reibung des Gleitens (gleitende Reibung) haben folgende Gesetze theils bestätigt, theils herausgestellt:

1) Beziehung zwischen der Reibung der Ruhe und der Reibung der Bewegung.

Die gleitende Reibung der Ruhe ist denselben Gesetzen unterworfen, wie die Reibung der Bewegung, sie ist aber in den meisten *praktischen* Fällen mit viel geringerer Sicherheit zu bestimmen. Unter denselben Umständen ist die Reibung der Ruhe gröfser, als die Reibung der Bewegung. Jene Unsicherheiten werden für die Praxis in vielen Fällen wenig erheblich durch die Beobachtung Morins, dafs eine geringe Erschütterung der Berührungspunkte des einen Systems, also ein sehr geringer Stofs, im Stande ist, die Reibung der Ruhe in diejenige der Bewegung umzuwandeln. Diese Bemerkung veranlafst, dafs man bei allen Konstruktionen, bei welchen die Reibung vermöge ihres Widerstandes die Stabilität mit bewirkt, und bei denen Erschütterungen zu befürchten sind, die Reibung der Bewegung in die Rechnung einführen mufs.

2) Beziehung zwischen dem Reibungswiderstande und dem Reibung erzeugenden Druck.

Der Werth der gleitenden Reibung ist proportional dem Reibung erzeugenden Druck zwischen beiden Systemen. Das Verhältnifs zwischen dem Werth der Reibung Θ und dem Reibung erzeugenden Druck N nennt man den Reibungs-Koeffizienten; *wir bezeichnen künftig den Reibungs-Koeffizienten stets mit* μ, und es ist:

$$163)\quad \begin{cases} \mu = \dfrac{\Theta}{N} \\ \Theta = \mu \, . \, N. \end{cases}$$

3) Beziehung zwischen dem Reibungs-Koeffizienten und der Anzahl der Berührungspunkte.

Der Reibungs-Koeffizient ist unabhängig von der Anzahl der Berührungspunkte, sobald sich der Reibung erzeugende Druck mit der Anzahl der Berührungspunkte nicht ändert. Dieses Gesetz erleidet jedoch eine Modifikation von der weiter unten die Rede sein wird, wenn die Zahl der Berührungspunkte (Gröfse der Reibungsfläche) im Verhältnifs zu dem Reibung erzeugenden Druck sehr klein, oder sehr grofs ist.

4) Beziehung zwischen dem Reibungs-Koeffizienten und dem Gesetz, nach welchem die Berührungspunkte aufeinander folgen.

Wenn die Berührungspunkte des einen Systems zwar fortwährend mit anderen Punkten des zweiten Systems in Berührung kommen, diese Punkte des zweiten Systems jedoch immer von Neuem und in einer stetigen Folge von den Punkten des ersten Systems in Anspruch genommen werden, wie dies bei der Drehung von Zapfen in Lagern der Fall ist, so ist der Reibungs-Koeffizient geringer, als bei der gewöhnlichen gleitenden Reibung. Man nennt die Reibung unter den angedeuteten Verhältnissen „Zapfenreibung“; sie erscheint nur als besonderer Fall des drehenden Gleitens, nicht als eine besondere Art der Reibung.

5) Beziehung zwischen dem Reibungs-Koeffizienten und der Geschwindigkeit der Verschiebung.

Der Reibungs-Koeffizient ist unabhängig von der Geschwindigkeit, nnd so lange als konstant anzusehen, so lange der Reibung erzeugende Druck und die Beschaffenheit der Oberflächen sich nicht ändert.

6) Beziehung zwischen dem Reibungs-Koeffizienten und der Beschaffenheit der Oberflächen.

Der Reibungs-Koeffizient ist abhängig von der Natur des Materials, aus welchem das *feste System* besteht, er ist aufserdem abhängig davon, ob eine schlüpfrige Substanz (Schmiere) zwischen den Berührungspunkten sich befindet, von welcher Art und Beschaffenheit diese Schmiere ist, und von der Menge, in welcher die Schmiere sich zwischen den Berührungspunkten befindet.

Hinsichtlich der Menge der Schmiere sind zwei Fälle zu unterscheiden: a) der Fall, wo die Berührungspunkte mit der Schmiere nur leicht abgerieben werden, und b) der Fall, wo in Folge einer gröfseren Menge und einer angemessenen Konsistenz der Schmiere sich fortwährend eine zusammenhängende Lage von Schmiere zwischen den Berührungspunkten der beiden Systeme befindet, so dafs durch diese Zwischenlage die Berührungsflächen vollständig getrennt sind. Dieser Fall setzt voraus, dafs der Reibung erzeugende Druck in jedem einzelnen Berührungspunkte hinreichend klein sei, um die Schmiere nicht herauszudrängen.

In dem unter a) gedachten Falle ist das Material, aus welchem jedes der beiden Systeme besteht, von wesentlichem Einflufs auf den Werth des Reibungs-Koeffizienten, und es folgen die Resultate der Morin'schen Versuche weiter unten.

In dem unter b) erwähnten Falle ist nach den Versuchen von Morin dagegen der Reibungs-Koeffizient viel mehr abhängig von der Natur der Schmiere, als von der Beschaffenheit des Materials. Morin erwähnt: dafs wenn eine zusammenhängende Lage von Schweinefett oder Baumöl zwischen die Berührungsflächen gebracht wird, der Reibungs-Koeffizient einen ziemlich konstanten Werth zwischen 0,07 und 0,08 behält, gleichviel, ob die reibenden Materialien Holz und Metall, Holz und Holz, oder Metall und Metall sind.

Denselben *Reibungs-Koeffizienten* fand Morin auch für Talgschmiere, *mit* Ausnahme des *Falles*, wo *Eisen* auf Eisen gleitet, wofür Morin den Reibungs-Koeffizienten im *Mittel* = 0,10 gefunden hat. Aufserdem empfiehlt Morin Talg, Seife und Graphit als die Schmieren, welche für Hölzer den geringsten Reibungs-Koeffizienten geben, wogegen Oel und Feuchtigkeit für Hölzer einen gröfsern Reibungs-Koeffizienten ergeben. Für Metalle geben Oel und Schweinefett den günstigsten Reibungs-Koeffizienten.

Unter den Resultaten, welche man hinsichtlich der Reibung von Flächen erhalten hat, zwischen denen durch die Zwischenlage einer fettigen Schicht eine vollkommene Trennung der Berührungspunkte bewirkt ist, herrscht nach dem Obigen eine grofse Uebereinstimmung; nicht so ist dies der Fall, wenn man verschiedene Grade der Fettigkeit, die zwischen den oben durch die Fälle a) und b) bezeichneten Grenzzuständen liegen, in Betracht zieht. Die Resultate der Untersuchungen weichen hier vielfach von einander ab, und Moseley *) meint, dafs dies weniger in dem verschiedenen *Grade der Fettigkeit*, als in dem verschiedenen Verhältnifs der Gröfse der reibenden Flächen zu dem Reibung erzeugenden Drucke, welcher bei den Versuchen obgewaltet hat, begründet sei, eine Ansicht, der wir vollkommen beistimmen. Denn es leuchtet ein, bemerkt Moseley, dafs einer jeden besonderen Art von Fett ein besonderer Druck auf die Flächeneinheit entsprechen mufs, bei welchem eine vollkommene Trennung der beiden Flächen durch die Zwischenlage einer zusammenhängenden Schicht dieses Fettes bewirkt wird, so dafs, wenn der Druck auf die Flächeneinheit jenen Werth überschreitet, die vollkommene Trennung nicht mehr erreicht werden kann, in welcher Fülle man auch die fettige Substanz verwenden mag. Der Druck auf die *Flächeneinheit* bei welchem noch eine Trennung der beiden Flächen durch die zwischenliegende Schicht des Fettes möglich ist, und der, wenn man ihn allmählich vergröfsert, ein allmähliches Herausdrängen der Schmiere zur Folge hat, ist offenbar von der Natur der Schmiere abhängig; es fehlen über die Bestimmung dieses Druckes noch die nöthigen Versuche, ebenso wie über die Werthe der Reibungs-Koeffizienten für verschiedene Abstufungen, in denen die Schmiere, durch Steigerung jenes Druk-

*) Die mechanischen Prinzipien der Ingenieurkunst und Architektur von Heinrich Moseley. Aus dem Englischen übersetzt und mit Erläuterungen versehen von H. Scheffler. I. S. 182.

kes allmählich herausgedrängt wird. Aber selbst wenn der Reibung erzeugende Druck noch kein Herausdrängen der Schmiere und dadurch eine Verminderung der Fettigkeit bedingt, ist es denkbar, dafs bei einer sehr grofsen Ausdehnung der Berührungsflächen der Zusammenhang der einzelnen Elemente der schmierenden Substanz unter einander der Verschiebung auf eine merkliche Weise entgegenwirkt, und daher die Reibung vermehrt, so dafs der Reibungs-Koeffizient bei demselben Reibung erzeugenden Drucke in diesem Falle mit der Berührungsfläche wachsen mufs.

In den beiden eben genannten Fällen, nämlich, wenn der Druck auf die Flächeneinheit entweder so grofs wird, dafs er anfängt die Schmiere herauszudrücken, oder wenn der Druck auf die Flächeneinheit so gering ist, dafs die Konsistenz der Schmiere einen merklichen Werth im Vergleich zu dem Reibung erzeugenden Drucke hat, erleidet hiernach das Gesetz No. 3 eine Modifikation. Es ist zu bemerken, dafs Morin seine Versuche nur mit verhältnifsmäfsig geringer Belastung für die Flächeneinheit (etwa 14 bis 20 Pfund auf den Quadratzoll) angestellt hat; Versuche von G. Rennie zeigen, dafs bei grofsen Belastungen auf die Flächeneinheit der Reibungs-Koeffizient der Ruhe wächst, und zwar so, dafs er bis zu einer gewissen Grenze des Druckes konstant bleibt, dann aber sehr schnell mit dem Druck pro Flächeneinheit zunimmt. Die Resultate der Versuche von Rennie sind weiter unten zusammengestellt; sie zeigen, dafs wenn der Normaldruck einen Werth erreicht, der sich demjenigen nähert, bei welchem die Flächen angegriffen werden, der Reibungs-Koeffizient bis über das Dreifache desjenigen wachsen kann, der bei geringem Drucke konstant ist.

Bestimmung des Reibung erzeugenden Druckes; und Vertheilung desselben.

§ 96. Nach § 95. No. 2 ist die Gröfse der Reibungswiderstände, die dem Gleiten des beweglichen Systems entgegenwirken, proportional den Reibung erzeugenden Drucken, und nach § 94. No. 3 sind die Reibung erzeugenden Drucke diejenigen Komponenten der auf das bewegliche System angebrachten Drucke, welche durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben werden.

Nach dem zweiten Grundsatze in § 94. mufs die Resultirende aus den Komponenten sämmtlicher Kräfte für jede Richtung, nach welcher kein Verschieben statt finden kann, durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben werden; es ist folglich diese Resultirende „der Reibung erzeugende Druck" und der aus demselben entspringende Reibungswiderstand wirkt in einer Ebene die normal zur Richtung derselben (nach dem Gesetz No. 4 in § 94) ist. Es läſst sich hiernach immer leicht die Gröſse des ganzen Reibung erzeugenden Druckes bestimmen, allein es kommt bei der Bestimmung der statischen Momente der Reibungswiderstände häufig auch darauf an, festzustellen wie groſs der Reibung erzeugende Druck in jedem Elemente der Berührungsfläche sei, da nach § 94. No. 2 jeder Berührungspunkt als Angriffspunkt eines Reibungswiderstandes betrachtet werden kann. Hiernach wird es sich darum handeln, zu ermitteln, wie groſs der Druckantheil von dem gesammten Reibung erzeugenden Drucke sei, der auf jeden einzelnen Berührungspunkt gerechnet werden muſs.

Diese Druckantheile werden in den meisten praktischen Fällen kaum mit der nöthigen Richtigkeit und Schärfe zu bestimmen sein, sie werden bedingt durch die Elastizitätsverhältnisse der gedrückten Oberflächen, durch die Genauigkeit mit welcher die Gestalt dieser Oberflächen den absoluten geometrischen Formen nahe kommt, und durch die Lage der Angriffspunkte der auf das System angebrachten bewegenden Kräfte. Sehen wir, wie bei den vorliegenden Betrachtungen überall, von den Elastizitätsverhältnissen ab, nehmen wir gar keine Formveränderung als zulässig an, und betrachten wir also die beiden Systeme als absolut feste, so läſst sich für die Vertheilung des gesammten Reibung erzeugenden Druckes auf die einzelnen Berührungspunkte kein Gesetz herleiten, und es bleibt nur übrig in bestimmten Fällen darüber Hypothesen aufzustellen. In den meisten Fällen ist die Hypothese zulässig:

> daſs die Druckantheile, welche von dem gesammten Reibung erzeugenden Druck auf die einzelnen Berührungselemente treffen, sich verhalten wie die Projektionen der Berührungselemente auf eine Ebene, die normal ist zu dem Reibung erzeugenden Druck.

Es bezeichne:

λ, $\lambda_{,}$, $\lambda_{,,}$ die Winkel, welche die einzelnen Elemente der Berührungsfläche mit der Richtung des Reibung erzeugenden Druckes machen;

dF, $dF_{,}$, $dF_{,,}$ seien die Gröſsen der Flächenelemente;

$dA = dF \,.\, \sin\lambda$, $dA_{\prime} = dF_{\prime} \,.\, \sin\lambda_{\prime}$... seien die Größen der Projektionen der Flächenelemente;

$A = \Sigma(dA) = \Sigma(dF \,.\, \sin\lambda)$ sei der Flächeninhalt der Projektion der sämmtlichen Elemente der Berührungsfläche auf eine Ebene, die normal ist zur Richtung des Reibung erzeugenden Druckes;

Q sei der gesammte Reibung erzeugende Druck, und

dQ, $dQ_{\prime}$, $dQ_{\prime\prime}$.... die Druckantheile der Flächenelemente.

Nun hat man nach dem obigen Gesetz:

$$\Sigma(dQ) = Q = dQ + dQ_{\prime} + dQ_{\prime\prime} + \ldots.$$

und nach der obigen Hypothese:

$$dQ : dQ_{\prime} : dQ_{\prime\prime} : \ldots = dA : dA_{\prime} : dA_{\prime\prime} : \ldots$$

folglich:

$$dQ : (dQ + dQ_{\prime} + dQ_{\prime\prime} + \ldots) = dA : (dA + dA_{\prime} + dA_{\prime\prime} + \ldots)$$

das ist:

$$164)\quad dQ = \frac{\Sigma(dQ)}{\Sigma(dA)} \,.\, dA = \frac{Q}{A} \,.\, dA = \frac{Q}{A} \,.\, dF \,.\, \sin\lambda.$$

Den Werth $\frac{Q}{A}$ oder den Druck auf die Flächeneinheit der Projektion nennt man den spezifischen Druck der Projektion, und die Gleichung 164) sagt daher:

> der Druckantheil, den ein Element der Berührungsfläche von dem gesammten Reibung erzeugenden Druck zu erleiden hat, und welcher in diesem Flächenelement einen Reibungswiderstand erzeugt, der normal zur Richtung dieses Druckes ist, drückt sich aus durch den spezifischen Druck der Projektion der gesammten Berührungsfläche auf eine Ebene, die normal ist zu der Richtung des Reibung erzeugenden Druckes, multiplizirt mit der Projektion dieses Elementes auf dieselbe Ebene.

Es haben also ganz allgemein gleich große Projektionen der Berührungsfläche gleiche Druckantheile auszuhalten, und folglich gleich große Reibungswiderstände zu erleiden.

In ein und demselben Berührungselement erleiden die einzelnen Punkte gleich große Druckelemente, und es sind daher die in den einzelnen Punkten eines Berührungselements wirksamen Reibungswiderstände als gleich große und parallele Kräfte anzusehen, so daß man stets den Angriffspunkt der Reibungswiderstände in den Schwerpunkt des Berührungselementes verlegen kann.

Wenn sämmtliche Berührungselemente in ein und derselben Ebene liegen, oder wenn sie auch in verschiedenen Ebenen liegen, die aber sämmtlich denselben Neigungswinkel λ mit der Richtung des Reibung erzeugenden Druckes bilden, so ist $\sin \lambda$ in Gleichung 164) konstant, und man hat $A = F . \sin \lambda$, folglich geht die Gleichung 164) über in

$$164a) \quad dQ = \frac{Q}{F} . dF,$$

für diesen Fall ist also der Druckantheil jedes Elementes gleich dem Druck auf die Einheit der ganzen Berührungsfläche, multiplizirt mit der Gröfse des Flächenelementes.

Widerstände gegen fortschreitendes Gleiten; Reibungswinkel.

§ 97. Da die Widerstände der Reibung immer nur dem Gleiten entgegenwirken, so kommen sie überhaupt nur zur Geltung, wenn ein Gleiten, sei es ein fortschreitendes oder drehendes Gleiten möglich ist. Wir haben in § 93 gesehen, dafs die berührenden *Oberflächen* nur unter gewissen Voraussetzungen die Möglichkeit des Gleitens zulassen. Die folgenden Betrachtungen setzen nun überall die Möglichkeit des Gleitens voraus, und unter diesen Voraussetzungen wollen wir sowohl die Resultirende der Widerstände des fortschreitenden Gleitens, als auch das statische Moment der Widerstände des drehenden Gleitens bestimmen.

Die Richtung des fortschreitenden Gleitens sei gegeben, und die Gröfse und Richtung der Resultirenden aus allen auf das bewegliche System angebrachten Kräften sei bestimmt; der Werth derselben sei Q, und der Winkel, welchen ihre Richtung mit einer Ebene bildet, die normal zu der Richtung des Gleitens ist, sei φ. Wenn wir nun Q nach zwei Richtungen zerlegen, von denen eine nach der gegebenen *Richtung* des Gleitens, und die andere normal dazu, fällt, so ergeben sich die Komponenten: $Q . \sin \varphi$ und $Q . \cos \varphi$. Nun mufs die Komponente $Q . \cos \varphi$ die in der Richtung normal zur Richtung des Gleitens liegt durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben werden (§ 94.) und folglich bildet diese Komponente den Reibung erzeugenden Druck. Ist nun μ der Reibungs-Koeffizient, so ist die Gröfse des Reibungswiderstandes, welchen wir jetzt und künftig immer mit Θ bezeichnen:

$$165) \quad \Theta = \mu . Q . \cos \varphi,$$

und da der Reibungswiderstand immer der auf Verschieben wirkenden

Komponente entgegenwirkt, so bleibt für den auf fortschreitendes Verschieben wirkenden Druck noch übrig:

$$165\text{a)}\quad P = Q.\sin\varphi - \Theta = Q.(\sin\varphi - \mu.\cos\varphi) = Q.\cos\varphi.(\tang\varphi - \mu).$$

Hierin liegt folgendes Gesetz:

> Wenn ein bewegliches System auf einem fixen System nach irgend einer Richtung fortschreitend gleiten kann, so ist der auf Gleiten wirkende Druck gleich derjenigen Komponenten der Resultirenden aller auf das bewegliche System angebrachten Kräfte, welche in einer zur Richtung des Gleitens normalen Ebene liegt, multiplizirt mit der Differerenz zwischen der Tangente des Neigungswinkels der Resultirenden gegen diese normale Ebene und dem Reibungs-Koeffizienten.

Dieser Druck ist also vollkommen unabhängig:

1) von der Gröfse der Berührungsfläche;
2) von der Form der Berührungsfläche.

Bei Gradführungen in Koulissen ist es z. B. unter sonst gleichen Verhältnissen in Bezug auf die Reibungswiderstände gleichgiltig, ob diese Koulissen prismatisch, cylindrisch oder flach gestaltet sind.

Ist der Reibungswiderstand Θ gröfser; als der auf Gleiten wirkende Druck, so findet kein Gleiten statt (§ 94. No. 1). Wir sagen dann, das bewegliche System befinde sich innerhalb des Gleichgewichts gegen Gleiten.

Wenn der Reibungswiderstand kleiner ist, als der auf Verschieben wirkende Druck, so findet Gleiten statt, und zwar ist das Aenderungsmaafs der Geschwindigkeit, mit der das bewegliche System in diesem Augenblick gleitet (§ 86. Gleichung 154b), S. 160):

$$165\text{b)}\quad f = \frac{\text{Druck}}{\text{Masse}} = \frac{Q}{M}.(\sin\varphi - \mu.\cos\varphi),$$

wenn M die Masse des beweglichen Systems bezeichnet.

Wir sagen in diesem Fall, das bewegliche System befinde sich aufserhalb des Gleichgewichts gegen Gleiten.

In dem Falle endlich, wo der Reibungswiderstand gleich dem auf Verschieben wirkenden Druck ist, findet zwar auch noch Gleichgewicht gegen Gleiten statt, allein jede Verminderung des Reibungswiderstandes bringt das System aufserhalb, und jede Vermehrung desselben innerhalb des Gleichgewichts gegen Gleiten. Wir nennen dieses Verhältnifs den Grenzzustand des Gleichgewichts gegen Gleiten, oder wir sagen, das bewegliche System befinde sich an der Grenze des Gleitens.

Das bewegliche System befindet sich hiernach innerhalb, aufserhalb oder an der Grenze des fortschreitenden Gleitens, wenn

$$\Theta > Q \,.\, \sin\varphi;\quad \Theta < Q \,.\, \sin\varphi;\quad \Theta = Q \,.\, \sin\varphi,$$

oder nach Gleichung 165), wenn

$$\mu \,.\, \cos\varphi \,. > \sin\varphi;\quad \mu \,.\, \cos\varphi \,. < \sin\varphi;\quad \mu \,.\, \cos\varphi = \sin\varphi$$

ist. Dividiren wir mit $\cos\varphi$, so gehen diese Bedingungen über in

$$166)\quad \mu \,. > \operatorname{tang}\varphi;\quad \mu \,. < \operatorname{tang}\varphi;\quad \mu = \operatorname{tang}\varphi.$$

Hieraus folgt, dafs die Zustände des Gleitens, und die Grenze des Gleitens abhängig sind von dem Verhältnifs des Reibungs-Koeffizienten zu der Tangente des Neigungswinkels der Resultirenden gegen eine Ebene, die normal ist zur Richtung des Gleitens.

Bei demselben Reibungs-Koeffizienten werden diese Zustände also nicht von der Gröfse der Resultirenden, sondern nur von ihrer Richtung abhängig sein; die Grenze des Gleitens wird bei einem bestimmten Werth des Neigungswinkels erreicht sein, und diesen besonderen Werth des Neigungungswinkels, welcher der Grenze des Gleitens entspricht, nennen wir den Reibungswinkel, Gleitwinkel, Ruhewinkel. Wir bezeichnen diesen besondern Werth von φ künftig immer mit ϑ und wir haben nach Gleichung 166) die Beziehung:

$$166\text{a})\quad \operatorname{tang}\vartheta = \mu,$$

d. h. die Tangente des Gleitwinkels ist gleich dem Reibungs-Koeffizienten.

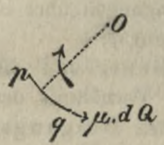
Widerstände gegen drehendes Gleiten, Reibungsmoment; Hebelsarm der Reibung.

§ 98. Um nun das statische Moment der Reibungswiderstände zu bestimmen, nehmen wir an, dafs das bewegliche System sich um eine gegebene Axe drehen könne; diese Axe ist entweder eine fixe Axe, oder sie kann doch für einen Augenblick als fixe Axe betrachtet werden.

Die Resultirende der fortschreitenden Bewegung aus allen auf das bewegliche System angebrachten Kräften ist dann durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben, und folglich ist diese Resultirende der Reibung erzeugende Druck.

In der umstehenden Figur sei die Drehaxe O normal zur Ebene des Papiers. Damit überhaupt Drehung erfolgen könne müssen (nach

§ 93) die Richtungen der von den Berührungspunkten des beweglichen Systems beschriebenen Wegelemente die Elemente der Berührungsfläche berühren, d. h. sie müssen in die Berührungsfläche jedes einzelnen Berührungselementes fallen, zugleich müssen diese Wegelemente in Ebenen liegen, die normal zur Drehaxe sind, sie werden also mit der Durchschnittslinie zusammenfallen, welche die Drehungsebene (Ebene des Papiers) mit den Berührungsebenen der einzelnen Elemente bildet.



pq sei ein Wegelement in dieser Durchschnittslinie für irgend einen Berührungspunkt. Die Richtung der Resultirenden Q bilde mit den einzelnen Berührungselementen den Winkel λ. Es ist dann der Druckantheil jedes Elementes nach *Gleichung 164)*:

$$dQ = \frac{Q}{A} . dF . \sin\lambda$$

und die daraus hervorgehende Reibung:

$$\mu . dQ = \frac{\mu . Q}{A} . dF . \sin\lambda.$$

Dieser Widerstand liegt in *einer* Ebene, die normal zur Richtung von Q ist. Die Richtung desselben in dieser Ebene ist immer nach dem Grunsatz 4) in § 94. zu bestimmen.

Nun sind aber zwei Fälle möglich, nämlich:

I. die Ebene, in welcher der Reibungswiderstand liegt, fällt mit der Drehungsebene zusammen, oder:

II. die Ebene, in welcher der Reibungswiderstand liegt, schneidet die Drehungsebene.

I. Betrachten wir zunächst den ersten Fall. Derselbe tritt ein, wenn die Richtung des resultirenden Druckes mit der Drehaxe parallel ist. In diesem Falle mufs die Richtung des Reibungswiderstandes in jedem Berührungselement offenbar der Richtung in welcher die Drehung erfolgt entgegengesetzt sein, d. h. sie fällt mit der Richtung pq zusammen, und folglich ist das Moment des Reibungswiderstandes, wenn wir den Schwerpunktsabstand des Elementes von der Drehaxe mit r bezeichnen:

$$\mu . dQ . r = \mu . \frac{Q}{A} . dA . r,$$

und daher die Summe der Momente sämmtlicher Reibungswiderstände, oder das statische Moment der Gesammtreibung, welches wir künftig mit (Θa) bezeichnen wollen:

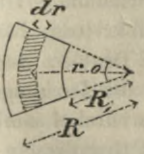
$$167)\ (\Theta a) = \Sigma\left[\mu \cdot \frac{Q}{A} \cdot dA \cdot r\right] = \mu \cdot Q \cdot \frac{\Sigma(dA \cdot r)}{A}.$$

Hieraus folgt:

Wenn ein festes System auf einem andern um eine gegebene Axe drehend gleitet, und wenn dabei die Richtung der Resultirenden aller auf das bewegliche System angebrachten Kräfte mit der Drehaxe zusammenfällt, so ist das statische Moment der Reibungswiderstände gleich dem Produkt, welches man erhält, wenn man den resultirenden Druck mit dem Reibungs-Koeffizienten und mit einem Quotienten multiplizirt, dessen Zähler gleich der Summe der Produkte aus der Projektion jedes Berührungselementes (auf eine zur Drehaxe normale Ebene) in den Abstand dieses Elementes von der Drehaxe, und dessen Nenner die Summe der Projektionen sämmtlicher Berührungselemente ist.

Man sieht, dafs in diesem Falle das statische Moment der Reibungswiderstände nur abhängig ist von der Gröfse und Lage der Projektionen der einzelnen Elemente, und nicht abhängig ist von der Form der Berührungsfläche; es werden also kegelförmige, kugelförmige, ebene etc. Zapfen unter der Voraussetzung, dafs die Richtung des Druckes mit der Drehaxe zusammenfällt, gleiche Reibungsmomente haben, wenn ihre Projektionen kongruent sind, und wenn die resultirenden Drucke sowohl, als die Reibungs-Koeffizienten gleich sind.

Der Ausdruck $\frac{\Sigma(dA \cdot r)}{A}$ ist nur von der Gestalt und Lage der Projektion abhängig; er ist ein rein geometrischer, wir nennen ihn den Hebelsarm der Reibung, und bezeichnen denselben mit $\mathfrak{R}$. Der Hebelsarm der Reibung ist hiernach derjenige Werth, mit welchem μQ, d. i. der gesammte Reibungswiderstand multiplizirt werden mufs, um das statische Moment der Reibung zu erhalten, und man hat:



$$167\text{a})\ (\Theta a) = \mu Q \cdot \mathfrak{R}.$$

Ist die Projektion der Berührungsfläche auf eine Ebene normal zur Drehaxe ein ringförmiger Sektor, welcher einem Winkel o angehört, so ist:

$$dA = o \,.\, r \,.\, dr; \qquad \Sigma(dA) = \int o \,.\, r \,.\, dr = \tfrac{1}{2} \,.\, o \,.\, r^2 + C,$$

$$dA \,.\, r = o \,.\, r^2 \,.\, dr; \quad \Sigma(dA \,.\, r) = \int o \,.\, r^2 \,.\, dr = \tfrac{1}{3} \,.\, o \,.\, r^3 + C.$$

und wenn wir die Integrale zwischen den Grenzen $r = R_{,}$ und $r = R$ nehmen, so ist der Hebelsarm der Reibung:

$$167\text{b)} \quad \mathfrak{R} = \tfrac{2}{3} \,.\, \frac{R^3 - R_{,}^{\,3}}{R^2 - R_{,}^{\,2}} \,.$$

Es ist also der Hebelsarm der Reibung eines ringförmigen Sektors unabhängig von dem Werthe des Winkels, welchem er angehört, und nur abhängig von dem Werthe des gröfsten und kleinsten Radius. Ist $R_{,} = 0$, so hat man den Hebelsarm der Reibung für eine Fläche, deren *Projektion* ein Kreis von Radius R oder jeder beliebige Sektor dieses Kreises ist:

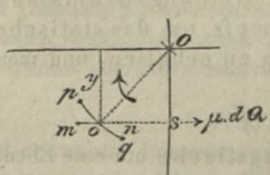
$$167\text{c)} \quad \mathfrak{R} = \tfrac{2}{3} \,.\, R.$$

Ist die Berührungsoberfläche eine krumme Fläche, so ist die Möglichkeit der Drehung nur vorhanden, wenn diese krumme Fläche eine Rotationsfläche ist, deren Axe mit der Drehaxe zusammenfällt. Ist dagegen die Berührungsfläche eine Ebene, so mufs dieselbe normal zur Drehaxe sein, wenn die Möglichkeit der Drehung vorhanden sein soll. Die Form der Berührungsfläche, d. h. die Gestalt der ebenen Figur, welche die sämmtlichen Berührungspunkte enthält, ist dabei gleichgiltig, der Hebelsarm der Reibung ist immer durch die Gleichung:

$$167\text{d)} \quad \mathfrak{R} = \frac{\Sigma(dA \,.\, r)}{A},$$

sei es durch Integriren, oder durch ein Näherungsverfahren zu berechnen.

II. Es bleibt noch der Fall zu erledigen, wo die Richtung des resultirenden Druckes *nicht mit der* Drehaxe zusammenfällt. Die Reibungswiderstände, welche auch hier *im Schwerpunkt* jedes Flächenelementes normal zur Richtung des resultirenden Druckes sind, liegen in Ebenen, welche die Drehungsebenen schneiden. Die Durchschnittslinie sei mn, so mufs nach dem Grundgesetz 4 in § 94 die Richtung mn auch die Richtung des Reibungswiderstandes $\mu \,.\, \frac{Q}{A} . dF \,.\, \sin\lambda$ sein, wie sich leicht übersehen läfst. Der Hebelsarm einer Kraft, deren Richtung mn ist, wird durch Os



dargestellt, und setzen wir $Os = y$, so ist das Moment der im Elemente pq wirksamen Reibung:

$$168)\quad \mu \,.\, \frac{Q}{A} \,.\, dF \,.\, \sin\lambda \,.\, y.$$

Nehmen wir drei Koordinatenaxen an. Die erste Axe sei die Drehaxe, die zweite falle mit der Projektion von Q auf die Drehungsebene zusammen; die dritte Axe OZ ist dann parallel mit der Durchschnittslinie mn, was sich durch eine einfache Betrachtung zeigen läfst.

Nun denken wir in jedem Berührungselement die Normale zu der Berührungsebene, in welcher dieses Element liegt. Diese Normale bildet mit der Richtung von Q den Komplementswinkel von λ, da λ den Winkel bezeichnete, den die Richtung von Q mit der Berührungsebene selbst bildet. Wenn nun diese Normale mit den Richtungen der drei Axen die Winkel φ, χ, ψ macht, und wenn die Richtung von Q mit denselben Axen die Winkel A, B, Γ bildet, so ist nach einem bekannten geometrischen Gesetz der Winkel, den die beiden Richtungen (Q und die Normale) mit einander bilden, nämlich $(90^\circ - \lambda)$ durch die Gleichung zu bestimmen:

$$\cos(90^\circ - \lambda) = \cos A \,.\, \cos\varphi + \cos B \,.\, \cos\chi + \cos\Gamma \,.\, \cos\psi = \sin\lambda$$

und da $\Gamma = 90^\circ$ ist, so hat man $\cos A = \sin B$, und daher:

$$\sin\lambda = \sin B \,.\, \cos\varphi + \cos B \,.\, \cos\chi.$$

Hiernach geht nun die Gleichung 168) über in:

$$\mu Q \,.\, \frac{(dF \,.\, \sin B \,.\, \cos\varphi + dF \,.\, \cos B \,.\, \cos\chi) \,.\, y}{A}$$

und da auch $A = \Sigma(dF \,.\, \sin\lambda)$ ist, so hat man zu setzen:

$$A = \Sigma(dF \,.\, \sin B \,.\, \cos\varphi + dF \,.\, \cos B \,.\, \cos\chi)$$
$$= \sin B \,.\, \Sigma(dF \,.\, \cos\varphi) + \cos B \,.\, \Sigma(dF \,.\, \cos\chi).$$

Man bemerke, dafs φ und χ die Winkel sind, welche die Normalen in den Elementen der Berührungsflächen mit der Axe der X und derjenigen der Y bilden, dafs folglich φ und χ auch die Winkel sind, welche je zwei Ebenen, die einzeln normal sind, auf einer der Axen und auf einer der Normalen mit einander einschliefsen. Die Ebenen normal auf der Normalen ist das Element der Berührungsfläche; die Ebene normal auf der ersten Axe ist die Drehungsebene, und die Ebene normal auf der zweiten Axe ist die Ebene parallel mit mn (zweite Projektionsebene). Hiernach ist $dF \,.\, \cos\varphi$ die Projektion eines Berührungselementes auf die Drehungsebene, und $dF \,.\, \cos\chi$ die Projektion eines Berührungselementes auf die zweite Koordinatenebene. Bezeichnen wir diese Elemente der Projektionen mit $dA_{,}$ und $dA_{,,}$ so ist das Moment des Reibungswiderstandes in einem Berührungselement:

$$d(\Theta a) = \mu Q \cdot \left[\frac{dA_{,} \cdot \sin B + dA_{,,} \cdot \cos B}{\Sigma(dA_{,}) \cdot \sin B + \Sigma(dA_{,,}) \cdot \cos B}\right] \cdot y$$

und daher ist die Summe der Momente der Reibungswiderstände:

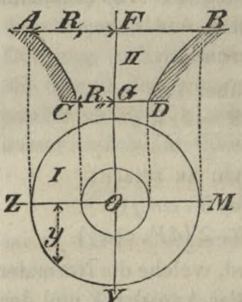
$$168\text{a}) \left\{\begin{aligned}(\Theta a) &= \mu Q \cdot \Sigma\left[\frac{dA_{,} \cdot \sin B \cdot y + dA_{,,} \cdot \cos B \cdot y}{\Sigma(dA_{,}) \cdot \sin B + \Sigma(dA_{,,}) \cdot \cos B}\right] \\ &= \mu Q \cdot \left[\frac{\sin B \cdot \Sigma(dA_{,} \cdot y) + \cos B \cdot \Sigma(dA_{,,} \cdot y)}{\sin B \cdot \Sigma(dA_{,}) + \cos B \cdot \Sigma(dA_{,,})}\right].\end{aligned}\right.$$

Für den Fall, dafs die Richtung des resultirenden Druckes parallel mit der Drehungsebene ist, hat man $B = o$, folglich ist dann das Moment der Reibung:

$$169\text{b}) \ (\Theta a) = \mu Q \cdot \frac{\Sigma(dA_{,,} \cdot y)}{\Sigma(dA_{,,})}.$$

Der Ausdruck in den Klammern ist auch hier der Hebelsarm der Reibung.

Gewöhnlich sind die reibenden Oberflächen Rotationsflächen, deren Erzeugungsaxe die Drehaxe ist. Denkt man durch die Richtung des Druckes und die Axe eine Ebene, und eine zweite Ebene normal zu dieser ebenfalls durch die Axe, so wird durch beide Ebenen die Rotationsfläche in Linien geschnitten, welche der Erzeugungslinie der Rotationsfläche kongruent sind. Um nun die Werthe der Gleichung 169a) zu bestimmen, sei in nebenstehender Figur:



I die Projektion der Rotationsfläche auf die Drehungsebene $= \Sigma(dA_{,})$,

II die Projektion der Rotationsfläche auf eine Ebene, die durch die Drehaxe geht, und normal zur Projektion OY des resultirenden Drucks auf die Drehungsebene YZ ist $= \Sigma(dA_{,,})$.

Die Projektion I ist immer eine Ringfläche oder ein voller Kreis, und der Ausdruck $\Sigma(dA_{,} \cdot y)$ ist nichts anderes, als die Summe der statischen Momente sämmtlicher Elemente dieses Ringstückes in Bezug auf die Axe OZ. Ist Y der Abstand des Schwerpunkts des halben Ringstückes $\frac{1}{2}\Sigma(dA)$ von der Axe OZ, so ist offenbar:

$$\Sigma(dA_{,} \cdot y) = 2 \cdot (Y \cdot \tfrac{1}{2}\Sigma(dA)).$$

Nun ist der Schwerpunkt der Halbkreisfläche von dem Mittelpunkt entfernt um $Y = \frac{4R}{3\pi}$, daher ist das statische Moment der Halbkreisfläche $Y \cdot \frac{1}{2}\Sigma(dA) = \frac{4R}{3\pi} \cdot \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{2}{3}R^3$, und wenn man mit $R_{\prime}$ und $R_{\prime\prime}$ den gröfsten und kleinsten Durchmesser der Rotationsfläche bezeichnet, so ist:

$$\Sigma(dA_{\prime} . y) = \tfrac{4}{3}(R_{\prime}^3 - R_{\prime\prime}^3).$$

Die Komponente, welche normal zur Drehaxe ist $Q . \cos B$ erzeugt offenbar nur in dem Theil der Berührungsfläche Reibung, gegen den sie gerichtet ist, d. i. der Theil, welcher dem Bogen $ZYM_{\prime}$ entspricht. Die Projektion dieses Theils auf die Ebene II ist die Figur $ABCD$. Betrachtet man den Ausdruck $\Sigma(dA_{\prime\prime} . y)$ so ist derselbe die Summe der Produkte aller Elemente der Fläche $ABCD$ in ihre Abstände von der Rotationsfläche, und diese Summe ist nichts anderes, als der kubische Inhalt des Theiles des Rotationskörpers, welcher zwischen der Ebene $ABCD$ und der vordern Berührungsfläche ZYM liegt; d. i. der halbe Inhalt des Rotationskörpers, den die ganze Berührungsfläche umschliefst. Dieser Rotationskörper läfst sich aber auch nach der ersten Guldin'schen Regel ausdrücken (S. 155). Bezeichnet nämlich S den Flächeninhalt des Stückes $ACGF$, und Z den Abstand des Schwerpunktes dieses Stückes von der Drehaxe, so ist auch der Inhalt des halben Rotationskörpers:

$$\Sigma(dA_{\prime\prime} . y) = S . \pi . Z,$$

und hiernach geht die Gleichung 168a) über in:

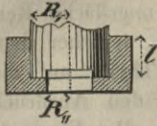
$$168c)\quad (\Theta a) = \mu Q . \frac{\sin B . \frac{4}{3}(R_{\prime}^3 - R_{\prime\prime}^3) + \cos B . S . \pi . Z}{\sin B . \pi . (R_{\prime}^2 - R_{\prime\prime}^2) + 2 \cos B . S},$$

worin bezeichnet:

Θa das statische Moment der Reibung einer Rotationsfläche;
μ den Reibungs-Koeffizienten;
Q den resultirenden Druck der auf das bewegliche System wirkenden Kräfte;
B den Neigungswinkel der Richtung dieses Druckes gegen die Drehungsebene;
$R_{\prime}$ den gröfsten, $R_{\prime\prime}$ den kleinsten Halbmesser der Berührungsfläche;
S den Flächeninhalt der ebenen Figur, durch deren Rotation die Reibungsfläche entstanden ist;
Z den Abstand des Schwerpunktes dieser Figur von der Drehaxe; folglich
SZ das statische Moment der erzeugenden Figur in Bezug auf die Drehaxe.

Der Hebelsarm der Reibung drückt sich aus nach Gleichung 168c) durch:

$$168\text{d})\quad \mathfrak{R} = \frac{\sin B \,.\, \frac{4}{3}(R_{,}^3 - R_{,,}^3) + \cos B \,.\, S \,.\, \pi \,.\, Z}{\sin B \,.\, \pi \,.\, (R_{,}^2 - R_{,,}^2) + 2\cos B \,.\, S}$$
$$= \frac{4 \operatorname{tang} B \,.\, (R_{,}^3 - R_{,,}^3) + 3\pi \,.\, S Z}{3\pi \,.\, \operatorname{tang} B \,.\, (R_{,}^2 - R_{,,}^2) + 6 S} \,.\, \cos B.$$



Es möge hier die Bestimmung des Hebelsarms der Reibung für verschiedene Zapfenformen folgen:

a) Cylindrische Zapfen von der Länge l.

Es ist $S = l \,.\, R_{,}$; $Z = \frac{1}{2} R_{,}$ folglich der Hebelsarm der Reibung:

$$169)\quad \mathfrak{R} = \frac{8 \operatorname{tang} B \,.\, (R_{,}^3 - R_{,,}^3) + 3\pi \,.\, l \,.\, R_{,}^2}{6\pi \,.\, \operatorname{tang} B \,.\, (R_{,}^2 - R_{,,}^2) + 12 l \,.\, R_{,}} \,.\, \cos B.$$

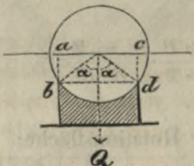
Setzen wir $R_{,,} = m \,.\, R_{,}$ und $l = n \,.\, R_{,}$ so ist:

$$169\text{a})\quad \mathfrak{R} = R_{,} \,.\, \cos B \,.\, \frac{8 \operatorname{tang} B \,.\, (1 - m^3) + 3\pi \,.\, n}{6\pi \,.\, \operatorname{tang} B \,.\, (1 - m^2) + 12 n},$$

und wenn der Druck normal zur Axe ist:

$$169\text{b})\quad \mathfrak{R} = \frac{\pi}{4} \,.\, R_{,}.$$

Dies setzt voraus, dafs der cylindrische Zapfen wenigstens zur Hälfte umschlossen ist. Wenn dagegen der Zapfen nur auf eine Bogenlänge gleich 2α umschlossen ist, und zwar so, dafs dieselbe gegen die Richtung des resultirenden Druckes symmetrisch vertheilt ist, so hat man den Inhalt des Körpers $a\,b\,c\,d$ oder den Werth:



$$\Sigma(dA_{,,} \,.\, y) = l \,.\, R_{,}^2 \,.\, (\alpha + \sin\alpha \,.\, \cos\alpha),$$

und $\Sigma(dA_{,,}) = 2 l \,.\, R_{,} \,.\, \sin\alpha,$

folglich:

$$169\text{c})\quad \mathfrak{R} = \tfrac{1}{2} R_{,} \,.\, \left(\frac{\alpha + \sin\alpha \,.\, \cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = R_{,} \,.\, \frac{\alpha + \frac{1}{2} \,.\, \sin 2\alpha}{2 \,.\, \sin\alpha}$$
$$= \tfrac{1}{2} R_{,} \,.\, \left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} + \cos\alpha\right).$$

Man sieht leicht, dafs wenn der Zapfen nur auf die Bogenlänge α umschlossen wäre, diese aber auf einer Seite der Richtung des resultirenden Druckes von der Mittellinie an gerechnet läge, mit andern Worten, dafs wenn man die halbe Umschliefsung fortliefse, der Werth $\Sigma(dA_{,,} \,.\, y)$ sowohl, als $\Sigma(dA_{,,})$ jeder halb so grofs werden würde, dafs also $\mathfrak{R}$ ungeändert bliebe. Diese Bemerkung trifft immer zu, wenn der Druck normal zur Axe ist, gleichviel welche Form der Zapfen hat.

Wenn α sehr klein wird, so ist $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ nahezu gleich 1, und

auch $\cos\alpha$ nahezu gleich 1, und wenn α gleich Null wird, so werden diese Werthe genau erreicht. Man hat daher für einen cylindrischen Zapfen, der nur in einer Seite aufliegt, oder, der doch nur eine sehr kleine Berührungsfläche hat, falls der Druck normal zur Axe ist:

$$169\text{d})\quad \mathfrak{R} = R_{\prime}.$$

b) **Konischer Zapfen** von der Länge l.

Es ist $S = \frac{R_{\prime} + R_{\prime\prime}}{2} . l$;

$$S . Z = \tfrac{1}{2} l . R_{\prime\prime}^2 + \tfrac{1}{6} l . (R_{\prime} - R_{\prime\prime}) . (R_{\prime} + 3 R_{\prime\prime}) = \tfrac{1}{6} l . R_{\prime} . (R_{\prime} + 2 R_{\prime\prime}),$$

folglich der **Hebelsarm der Reibung**:

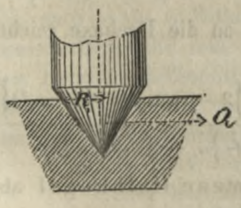
$$170)\quad \mathfrak{R} = \frac{8 . \tang B . (R_{\prime}^3 - R_{\prime\prime}^3) + \pi l . R_{\prime} . (R_{\prime} + 2 R_{\prime\prime})}{6\pi . \tang B . (R_{\prime}^2 - R_{\prime\prime}^2) + 6 l . (R_{\prime} + R_{\prime\prime})} . \cos B.$$

Setzen wir wieder $R_{\prime\prime} = m . R_{\prime}$ und $l = n . R_{\prime}$ so geht der Ausdruck über in:

$$170\text{a})\quad \mathfrak{R} = \tfrac{1}{6} R_{\prime} . \cos B . \frac{8 . \tang B . (1 - m^3) + \pi n . (1 + 2m)}{\pi . \tang B . (1 - m^2) + n . (1 + m)},$$

und wenn der Druck **normal** zur Drehaxe ist:

$$\mathfrak{R} = \frac{\pi}{6} R . \frac{1 + 2m}{1 + m}.$$

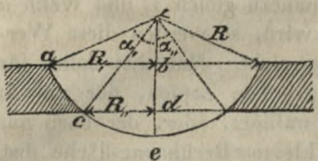


Dieser Ausdruck wird um so kleiner, je kleiner m ist, und daher am kleinsten, wenn $m = 0$ ist, d. h. wenn der Zapfen ein **voller Kegel** ist, der vom **Halbmesser** $R_{\prime}$ **bis zur Spitze aufliegt**. Man hat dann:

$$\mathfrak{R} = \frac{\pi}{6} R_{\prime}.$$

Es folgt auch aus diesen Gleichungen, daſs, wenn der **Druck normal zur Axe gerichtet** ist, es bei einem **kegelförmigen Zapfen gar nicht auf den Neigungswinkel des Kegels ankommt, sondern nur auf den gröſsten und kleinsten Radius der Berührungsfläche**, und daſs ein konischer Zapfen in diesem Fall immer ein **geringeres** Reibungsmoment haben müsse, als ein cylindrischer Zapfen, dessen Durchmesser gleich dem gröſsten Durchmesser des Kegels ist. Endlich ersieht man, daſs wenn der Zapfen von einem gewissen Durchmesser $R_{\prime}$ ab nach der Spitze hin um ein gewisses Stück aufliegt, das Moment der Reibung um so **geringer** ist, je länger **dieser aufliegende** Theil ist.

14 *



c) Kugelförmiger Zapfen mit einem Kugelhalbmesser $= R$ und von dem Centriwinkel $2\alpha_{\prime}$ bis zu dem Centriwinkel $2\alpha_{\prime\prime}$ eingesenkt.

Es ist der Flächeninhalt des Stückes $abcd = abe - dce$, daher ist:

$$S = \tfrac{1}{2} R^2 . \left\{ \alpha_{\prime} - \alpha_{\prime\prime} - \sin\alpha_{\prime} . \cos\alpha_{\prime} + \sin\alpha_{\prime\prime} . \cos\alpha_{\prime\prime} \right\}$$

$$= \tfrac{1}{2} R^2 . \left\{ \alpha_{\prime} - \alpha_{\prime\prime} - \tfrac{1}{2} . (\sin 2\alpha_{\prime} - \sin 2\alpha_{\prime\prime}) \right\},$$

ferner ist das statische Moment des Stückes $abcd$ durch eine einfache Rechnung zu finden:

$$SZ = \tfrac{1}{3} R^3 . \left\{ 1 - \cos\alpha_{\prime} . (1 + \tfrac{1}{2} \sin\alpha_{\prime}^2) - 1 + \cos\alpha_{\prime\prime} . (1 + \tfrac{1}{2} \sin\alpha_{\prime\prime}^2) \right\}$$

$$= \tfrac{1}{6} R^3 . \left\{ \cos\alpha_{\prime\prime} . (3 - \cos\alpha_{\prime\prime}^2) - \cos\alpha_{\prime} . (3 - \cos\alpha_{\prime}^2) \right\}.$$

Nun ist noch $R_{\prime} = R . \sin\alpha_{\prime}$; $R_{\prime\prime} = R . \sin\alpha_{\prime\prime}$ und man hat nach Gleichung 168d) den Hebelsarm der Reibung:

171) $\mathfrak{R} =$

$$\tfrac{1}{6} R . \cos B . \frac{8 . \operatorname{tang} B . (\sin\alpha_{\prime}^3 - \sin\alpha_{\prime\prime}^3) + \pi . \left\{ 3 . (\cos\alpha_{\prime\prime} - \cos\alpha_{\prime}) - (\cos\alpha_{\prime\prime}^3 - \cos\alpha_{\prime}^3) \right\}}{\pi . \operatorname{tang} B . (\sin\alpha_{\prime}^2 - \sin\alpha_{\prime\prime}^2) + \left\{ (\alpha_{\prime} - \alpha_{\prime\prime}) - \tfrac{1}{2} . (\sin 2\alpha_{\prime} - \sin 2\alpha_{\prime\prime}) \right\}}.$$

Für den Fall, dafs die Begrenzung bis an die Drehaxe reicht, ist $\alpha_{\prime\prime} = 0$, und man hat:

$$171\text{a)} \quad \mathfrak{R} = \tfrac{1}{6} R . \cos B . \frac{8 . \operatorname{tang} B . \sin\alpha_{\prime}^3 + \pi . \left\{ 2 - \cos\alpha_{\prime} . (3 - \cos\alpha_{\prime}^2) \right\}}{\pi . \operatorname{tang} B . \sin\alpha_{\prime}^2 + \left\{ \alpha_{\prime} - \tfrac{1}{2} . \sin 2\alpha_{\prime} \right\}}.$$

und für den Fall, dafs man eine vollkommene Halbkugel als reibende Fläche hat, ist $\alpha_{\prime} = \tfrac{1}{2}\pi$, und man hat:

$$171\text{b)} \quad \mathfrak{R} = \tfrac{2}{3} R . \cos B . \frac{\frac{4}{\pi} . \operatorname{tang} B + 1}{2 . \operatorname{tang} B + 1}.$$

Wenn hierbei der Druck normal zur Drehaxe ist, so geht der Hebelsarm der Reibung für die Halbkugel über in:

$$171\text{c)} \quad \mathfrak{R} = \tfrac{2}{3} \mathrm{R},$$

d. h. der Hebelsarm der Reibung für eine Halbkugel ist derselbe, gleichviel ob der Druck parallel mit der Drehaxe, oder normal zur Drehaxe wirkt.

Wenn nun ganz allgemein (Θa) das statische Moment der Reibung, und Pr das statische Moment der auf Drehung wirkenden bewegenden Kräfte, beides für eine gegebene Axe, bezeichnet, so ist immer (Θa) dem Moment Pr entgegengesetzt, folglich hat man als Moment der wirklich Drehung erzeugenden Kräfte:

$$172)\ (Pr - \Theta a) = f_{,} . J_{,}$$

(nach Gleichung 154a, S. 167, wenn $f_{,}$ das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit, und $J_{,}$ das Trägheitsmoment des Systems in Bezug auf dieselbe Axe bezeichnet) folglich ist:

$$172\text{a})\ f_{,} = \frac{Pr - (\Theta a)}{J_{,}}.$$

Je nachdem nun wieder $Pr > \Theta a$; $Pr = \Theta a$, oder $Pr < \Theta a$ ist, befindet sich das bewegliche System aufserhalb der Grenze des drehenden Gleitens, an der Grenze, oder innerhalb der Grenze desselben, und es lassen sich ähnliche Betrachtungen anstellen, wie am Schlusse des § 95.

Widerstände gegen Kippen; Stabilität; Rollen.

§ 99. Wir haben noch in § 93. derjenigen Veränderung der Lage des beweglichen Systems gegen ein fixes System gedacht, welche wir „Kippen" nannten. Bei dem Kippen berührt die Drehungsaxe des beweglichen Systems beide Systeme, und nimmt einen oder mehre Punkte der Berührungsfläche auf. Diese in der Axe des Kippens liegenden Punkte bleiben bei der Bewegung des beweglichen Systems in Ruhe, während alle andern Punkte Bogenelemente beschreiben, die sich von dem fixen System abheben. Aus dieser letzten Bedingung folgt, dafs, wenn wir die Begrenzungslinie der Berührungsfläche denken (die Berührungsfläche mag nun eben oder krumm sein):

1) die Axe des Kippens immer diese Begrenzungslinie berühren mufs;

und aus der ersten Bedingung folgt:

2) dafs die Axe des Kippens in derjenigen Berührungsebene beider Systeme liegen mufs, die dem Punkte angehört, in welchem diese Axe die Begrenzungslinie berührt.

Die Bedingung 1) ist sofort ersichtlich, wenn man bemerkt, dafs für jede Axe, welche die Begrenzungslinie der Berührungsfläche schneidet, unmittelbar benachbarte Berührungspunkte existiren, die auf verschiedenen Seiten dieser Axe liegen. Bei der Drehung des Systems um diese Axe würden nun zwar die Punkte auf der einen Seite sich von der Berührungsebene, in welcher die Axe liegt abheben können, die Punkte der andern Seite müfsten dann aber in diese Ebene einschneiden, und das widerspricht nach den Bedingungen des § 93 der Möglichkeit des Kippens.

Will man nun untersuchen, ob ein bewegliches System im Gleichgewicht gegen Kippen sei, so hat man nach dem Satz No. 1. nur nöthig, diese Untersuchungen für solche Axen anzustellen, welche die Begrenzungslinie der Berührungsfläche berühren.

Welche von allen den Linien, welche die Begrenzungslinie der Berührungsfläche unter den gemachten Bedingungen berühren, diejenige Axe sei, um die ein System, das nicht im Gleichgewicht gegen Kippen ist wirklich kippt, ist von der Form der Berührungsfläche und von der Lage und Gröfse der auf das fixe System angebrachten bewegenden Kräfte abhängig, und läfst sich in vielen Fällen ohne Weiteres angeben, in andern Fällen dagegen bedarf es einer besondern Untersuchung. Ist die Axe des Kippens entweder durch direkte Bestimmung festgestellt, oder zufolge einer Schätzung angenommen, so hat man die Momente sämmtlicher auf das bewegliche System angebrachten Kräfte für diese Axe zu bestimmen, und zwar so, dafs man die Momentensumme bildet für diejenigen Kräfte, welche auf Kippen wirken, und dann die Momentensumme derjenigen Kräfte, welche dem Kippen entgegenwirken. Die Momentensumme, welche auf Kippen wirkt, sei $\Sigma(Ka)$, und die Momentensumme, welche dem Kippen entgegenwirkt, sei $-\Sigma(Pb)$, dann ist das Moment, welches wirkliche Drehung erzeugt (QR):

$$173) \quad (QR) = \Sigma(Ka) - \Sigma(Pb).$$

Ist nun $\Sigma(Ka) > \Sigma(Pb)$, so erfolgt Kippen, und wir sagen, das bewegliche System sei aufserhalb des Gleichgewichtes gegen Kippen; ist dagegen $\Sigma(Ka) < \Sigma(Pb)$, so kann kein Kippen erfolgen, denn nach der Voraussetzung müfste nun das bewegliche System in entgegengesetztem Sinne des Kippens Bewegung erlangen, d. h. es müfsten die einzelnen Berührungspunkte anstatt sich abzuheben, in das fixe System eindringen, was nicht möglich ist. Wir bezeichnen diesen Zustand, als „innerhalb des Gleichgewichtes gegen Kippen"; ist endlich

$$\Sigma(Ka) = \Sigma(Pb),$$

so ist das bewegliche System an der Grenze des Gleichgewichts gegen Kippen, oder „an der Grenze des Kippens" denn jeder unendlich kleine Zuwachs von $\Sigma(Ka)$ bringt das System aufserhalb, und jeder unendlich kleine Zuwachs von $\Sigma(Pb)$ innerhalb der Grenze des Kippens.

Die Momentensumme $\Sigma(Pb)$ der Kräfte, welche dem Kippen entgegenwirken in Bezug auf irgend eine Axe nennt man die Stabilität des beweglichen Systems in Bezug auf Kippen um diese Axe, und das Verhältnifs

$$173\text{a)}\quad \frac{\Sigma(Pb)}{\Sigma(Ka)} = S$$

nennen wir die Sicherheit gegen Kippen, oder das Maafs der Stabilität des beweglichen Systems.

Je nachdem das bewegliche System an der Grenze, innerhalb, oder aufserhalb der Grenze des Kippens ist, ist das Maafs der Stabilität $S=1$; $S>1$; $S<1$.

Wenn ein bewegliches System aufserhalb des Gleichgewichts gegen Kippen ist, so ändert es seine Lage gegen das fixe System indem es sich um eine Axe dreht, die beide Systeme berührt. Diese Axe enthält einen oder mehrere Berührungspunkte, welche an der Drehung keinen Theil nehmen. Nun ist aber der Fall denkbar, dafs diese Berührungspunkte, welche nicht kippen, sich dennoch gleitend verschieben; dann wird die Axe des Kippens zwar ihre Lage gegen das fixe System ändern, aber sie wird nicht ihre Lage gegen das bewegliche System ändern, und wir werden die gleichzeitig erfolgenden Bewegungen nach dem Grundsatz in § 24. No. 1 einzeln als gleitende Bewegung und als kippende Bewegung betrachten können. Wir nennen diese Bewegung „gleitendes Kippen".

Es ist nun ferner noch der Fall denkbar, dafs die Oberflächen der beiden sich berührenden festen Systeme so beschaffen sind, dafs sie sich auf einander abwickeln können, und dafs die kippende Bewegung gerade in einer solchen Weise erfolgt, dafs durch dieselbe eine Abwickelung bedingt wird. Treffen diese beiden Bedingungen zusammen, so werden in demselben Zeitelement, in welchem das bewegliche System um eine bestimmte Axe kippt, in beiden Systemen die dieser Axe benachbarten Punkte, welche bis dahin noch nicht sich berührten, Berührungspunkte werden; dadurch heben sich diejenigen Punkte, die bis dahin in der Drehaxe lagen von einander ab, und es bildet sich eine neue Drehaxe, welche die der frühern Drehaxe benachbarten Punkte sowohl des fixen, als auch des beweglichen Systems enthält. Bei jeder neuen kippenden Bewegung des beweglichen Systems findet derselbe Vorgang statt, und es erfolgt also ein fortwährendes Kippen immer um neue, stetig auf einander folgende Drehaxen, wobei sich die Oberfläche des beweglichen Systems auf derjenigen des fixen Systems abwickelt. Diese Bewegung nennen wir Rollen oder Wälzen. Die Möglichkeit des Rollens ist also dadurch bedingt, daſs sich die Oberfläche des beweglichen Systems auf derjenigen des fixen Systems abwickeln könne, und hierzu gehört, daſs die Berührung fortwährend in einer geraden Linie, oder in einem Punkte statt finde.

Es ist übrigens denkbar, daſs während das bewegliche System rollt, während es also immer um eine neue Axe kippt, dieses Kippen ein gleitendes Kippen sein könne, d. h. daſs in demselben Augenblick, wo das Kippen um eine bestimmte Axe erfolgt, diese Axe selbst gleitend fortrückt, und im nächsten Augenblick zwar die der eben vorhandenen Drehaxe benachbarten Punkte des beweglichen Systems, aber nicht die derselben benachbarten Punkte des fixen Systems, sondern entfernter liegende Punkte desselben zur Berührung gelangen, und die neue Drehaxe bilden. Diese Bewegung nennen wir „gleitendes Rollen". Sie läſst sich immer zurückführen auf ein Gleiten und auf ein Rollen.

Wie aber auch das Kippen beschaffen sein mag, so wird man in dem Augenblick, in welchem das bewegliche System kippt, allemal die Axe des Kippens als fixe Axe betrachten und auf dieselbe die Gesetze der Drehung eines festen Systems um eine fixe Axe anwenden können (§ 79).

Gesetze des einfachen und des gleitenden Kippens; Bestimmung der Axe des Kippens.

§ 100. Nehmen wir an, die Berührungspunkte zweier festen Systeme liegen sämmtlich in ein und derselben Ebene; wir wollen untersuchen, unter welchen Verhältnissen das bewegliche System kippen, unter welchen es gleitend kippen wird, und wie die Axe des Kippens zu finden sei.

Wir denken drei Koordinatenaxen, deren Anfangspunkt vorläufig der Schwerpunkt des beweglichen Systems sei; und von denen die erste Axe normal zur Berührungsebene der beiden Systeme sei, die beiden andern Axen also parallel mit dieser Berührungsebene liegen müssen.

Wir bilden aus den auf das bewegliche System angebrachten Kräften die drei Drucksummen:

$$\Sigma(K.\cos\alpha);\quad \Sigma(K.\cos\beta);\quad \Sigma(K.\cos\gamma).$$

Die Drucksumme $\Sigma(K.\cos\alpha)$ wird durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben, ist also der Reibung erzeugende Druck, und die daraus hervorgehende Reibung ist $\mu.\Sigma(K.\cos\alpha)$. Die beiden andern Drucksummen haben eine Resultirende:

$$Q = \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\beta)]^2 + [\Sigma(K.\cos\gamma)]^2\right\}},$$

welche mit den beiden in der Berührungsebene liegenden Axen die Winkel B und Γ bildet, und man hat bekanntlich:

$$\cos B = \sin\Gamma = \frac{\Sigma(K.\cos\beta)}{Q}$$
$$\cos\Gamma = \sin B = \frac{\Sigma(K.\cos\gamma)}{Q}.$$

Die Resultirende Q wirkt auf Verschieben, sie bewirkt ein Gleiten des beweglichen Systems nach der Richtung Q mit einem Druck, der sich ausdrückt durch:

$$174)\quad P = Q - \mu.\Sigma(K.\cos\alpha).$$

Nun können wir auch die Momente der Kräftepaare für die drei Axen bilden. Dieselben sind (Gleichung 141, S. 142):

$$(P'a') = \Sigma(K.\cos\beta.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.y)$$
$$(P''a'') = \Sigma(K.\cos\alpha.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.x)$$
$$(P'''a''') = \Sigma(K.\cos\alpha.y) + \Sigma(K.\cos\beta.x).$$

Das Kräftepaar $(P'a')$ wirkt auf Drehung in einer Ebene, welche parallel ist mit der Berührungsebene und deren Axe, folglich normal ist zur Berührungsebene Durch welchen Punkt der Berührungsebene diese Axe geht, ist von der Natur des betrachteten Falles abhängig. Da nun auch der Reibung erzeugende Druck $\Sigma(K.\cos\alpha)$ auf derselben Ebene normal ist, so ist das Moment des Reibungswiderstandes nach Gleichung 167) zu bestimmen, und es ist dasselbe

$$(\Theta a) = \mu.\Sigma(K.\cos\alpha).\frac{\Sigma(dF.r)}{\Sigma(dF)}$$
$$= \mu.\Sigma(K.\cos\alpha).\mathfrak{R}$$

(wenn $\mathfrak{R}$ den Hebelsarm der Reibung bezeichnet).

Hiernach erleidet das System eine Drehung um eine zu der Berührungsebene normale Axe, und es ist das wirksame Moment der Drehung:

$$174\text{a})\quad P'a' - \Theta a = \Sigma(K.\cos\beta.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.y) - \mu.\Sigma(K.\cos\alpha).\mathfrak{R}.$$

Die Kräftepaare $(P''a'')$ und $(P'''a''')$ lassen sich zu einem einzigen Kräftepaar zusammensetzen. Nach Gleichung 140) und 140a) ist das Moment (Pa) dieses Kräftepaars:

$$Pa = \sqrt{\left\{(P''a'')^2 + (P'''a''')^2\right\}}$$

und die Winkel, welche die Paarebene dieses Paars (die übrigens normal ist zur Berührungsebene) mit den beiden Axen in dieser Ebene bildet B_i und Γ_i sind durch die Gleichungen (140a) zu bestimmen:

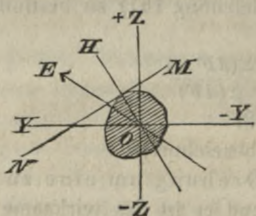
$$\cos B_{,} = \sin \Gamma_{,} = \frac{P''.a''}{Pa}$$

$$\cos \Gamma_{,} = \sin B_{,} = \frac{P'''.a'''}{Pa}.$$

Die Ebene des Kräftepaars Pa ist diejenige, in welcher ein Bestreben auf Drehung des beweglichen Systems vorhanden ist; konstruiren wir diese Paarebene, so steht dieselbe normal auf der Berührungsebene, schneidet diese in einer geraden Linie, und diese Durchschnittslinie schneidet im Allgemeinen die Begrenzungslinie der Berührungsfigur; nun wissen wir aus dem vorigen Paragraphen, dafs die Axe des Kippens in der Berührungsebene liegen, und die Begrenzungsfigur berühren mufs. Da nun aber die Axe des Kippens auch normal zur Paarebene sein mufs, so mufs sie auf der obigen Durchschnittslinie normal, und zwar diejenige Normale sein, welche die Begrenzungslinie der Berührungsfigur berührt, und dabei so liegt, dafs sie der Richtung in welcher das resultirende Kräftepaar Pa auf Drehung wirkt entspricht.

Hierdurch ist nun im Allgemeinen die Lage der Axe des Kippens bestimmt.

In nebenstehender Skizze sei die schraffirte Figur die ebene Berührungsfläche. OY, OZ seien die zweite und dritte Axe durch den Schwerpunkt des beweglichen Systems gehend, OE sei die Richtung von Q, nach welcher das System gleitet; OH sei die Durchschnittslinie der Ebene des auf Kippen wirkenden Kräftepaars mit der Berührungsebene, dann ist MN die Axe des Kippens. Soll nun die Axe des Kippens für jeden Augenblick als fixe Axe betrachtet werden können, so müssen nach § 79 die auf Verschieben der Axe wirkenden Drucke durch die Reaktion in der fixen Axe im Gleichgewicht gehalten werden.



Der auf Verschieben der Axe wirkende Druck wird gefunden, wenn man den rerultirenden Druck Q in zwei Komponenten zerlegt, von denen die eine normal zu $MN_{,}$ ist, die andere mit MN zusammenfällt. Da der Winkel HOE, welchen die Richtung OE mit der zur Axe normalen OH bildet, offenbar gleich $(B_{,} - B)$ ist, so ist die Komponente, welche auf Verschieben der Axe nach der Richtung OH wirkt:

$$Q . \cos (B_{,} - B)$$

und die Komponente, welche auf Verschieben nach der Richtung MN wirkt:

$$Q \,.\, \sin(B_{,} - B).$$

Die Drucke nun, welche dem Verschieben der Axe entgegenwirken, sind keine andern, als die Komponenten der Reibung, und da der Reibungswiderstand der Richtung von Q entgegengesetzt zu denken ist, so sind die Komponenten des Reibungswiderstandes für die Richtungen OH und MN

$$-\mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha) \,.\, \cos(B_{,} - B) \text{ und } -\mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha) \,.\, \sin(B_{,} - B).$$

Je nachdem nun:

$$Q \,.\, \cos(B_{,} - B) \leqq \mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha) \,.\, \cos(B_{,} - B)$$

$$\text{d. h.: } Q \,. \leqq \mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha), \text{ oder}$$

$$Q \,.\, \cos(B_{,} - B) > \mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha) \,.\, \cos(B_{,} - B)$$

$$\text{d. h.: } Q > \mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha)$$

ist, wird die Axe MN als fixe Axe oder als verschiebbare Axe zu betrachten sein; im ersten Falle wird das System einfach kippen ohne zu gleiten; im andern Falle wird ein gleitendes Kippen erfolgen.

Bestimmen wir nun das Moment sämmtlicher auf das bewegliche System angebrachten Kräfte für diese Axe MN, so ist dasselbe das auf Kippen wirkende Kräftepaar, und wenn wir dasselbe mit (Ka) bezeichnen, so ist das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit des Kippens:

$$174\text{b)} \quad f_{,} = \frac{Ka}{J_{,}},$$

worin $J_{,}$ das Trägheitsmoment des beweglichen Systems in Bezug auf die Axe des Kippens bedeutet; das Aenderungsmaafs des fortschreitenden Gleitens ist aber nach Gleichung 165b) (S. 202) und 174) (S. 217):

$$f = \frac{P}{M} = \frac{Q - \mu \,.\, \Sigma(\cos\alpha)}{M}$$

$$174\text{c)} \quad f = \frac{\sqrt{\{[\Sigma(K \,.\, \cos\beta)]^2 + [\Sigma(K \,.\, \cos\gamma)]^2\}} - \mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha)}{M}$$

Das bewegliche System kippt nun mit einer Winkelgeschwindigkeit deren Aenderungsmaafs $f_{,}$ ist, sobald das Moment Ka gröfser als Null ist, es ist dabei im Gleichgewicht gegen Gleiten, wenn $Q < \mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha)$ ist; wenn dagegen $Q > \mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha)$ ist, so gleitet es zugleich mit einer Geschwindigkeit, deren Aenderungsmaafs f (Gleichung 174c) ist.

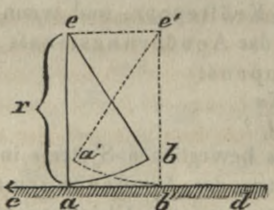
Diese Bestimmungen gelten, so lange das bewegliche System um eine Axe kippt, die *stets* durch dieselben Punkte des beweglichen Systems geht. Anders ist es, wenn die Möglichkeit des Rollens *vorhanden* ist.

Gesetze des Rollens; cylindrisches und konisches Rollen. Einfaches und gleitendes Rollen.

§ 101. Wir wollen nunmehr die Gesetze des Rollens untersuchen.

Das Rollen ist, wie im Paragraphen *99*. angedeutet worden, eine besondere Art des Kippens, es setzt also immer eine Axe voraus, um welche die Drehung des beweglichen Systems erfolgt, und welche in der Berührungsebene beider Systeme liegt, sowie ein auf Drehung um diese Axe wirkendes Kräftepaar, endlich ist das Rollen durch die *Möglichkeit* bedingt, dafs das bewegliche System auf dem fixen System sich abwickeln könne. Bevor wir hiernach die mechanischen Gesetze dieser Bewegung betrachten, wollen wir folgende Bemerkung hervorheben.

Es sei ab ein Kurvenelement, welches sich auf der Linie cd abwickeln soll, $ae = eb$ sei der Krümmungshalbmesser des Kurvenelements; und nach der Abwickelung sei das Bogenelement in die Lage $a'b'$ gekommen.



Offenbar ist die Länge $ab' = ab$ gleich der Länge des Kurvenelements, und es steht sowohl der Krümmungshalbmesser ae, als auch der Krümmungshalbmesser $b'e'$ normal auf cd, da in beiden Lagen und bei dem Uebergange von der einen Lage in die andere das Bogenelement ab fortwährend die Linie cd berühren soll. Hieraus folgt, dafs ee' der Weg, den der Krümmungsmittelpunkt bei der Abwickelung beschrieben hat, nicht nur eine äquidistante Kurve von cd ist, sondern auch gleich der Länge ab' d. i. gleich der Länge des Bogenelementes ab ist. Nun sieht man, dafs das Bogenelement aus der Lage abe, die es vor der Abwickelung hatte, in die Lage $a'b'e'$, in die es durch die Abwickelung gelangt ist, auch dadurch gebracht werden kann, dafs man sich vorstellt, der Krümmungsmittelpunkt e und alle Punkte des Systems aeb haben zuerst fortschreitend den Weg ee' beschrieben, dessen Länge gleich der Länge des Bogenelementes ab, und dessen Richtung äquidistant der Grundkurve ist, und dann habe das System eine Drehung gemacht nach einer Richtung, die entgegengesetzt der fortschreitenden Bewegung, und um einen Winkel der gleich demjenigen ist, welchen das Bogenelement einschliefst. Hieraus folgt:

> Jede Abwälzung eines Kurvenelementes auf einer Grundkurve kann zurückgeführt werden auf eine fortschreitende Bewegung, welche der Krümmungsmittelpunkt mit allen Punkten gemeinschaftlich macht, und auf eine nach entgegengesetzter Richtung erfolgende Drehung um den Krümmungsmittelpunkt, wobei der Berührungspunkt sich mit einer Peripheriegeschwindigkeit drehend bewegt, die gleich der Geschwindigkeit ist, mit welcher das ganze System sich fortschreitend bewegt.

Ist f das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung, $f_{\prime}$ das Aenderungsmaafs der drehenden Bewegung um den Krümmungsmittelpunkt, r der Krümmungshalbmesser, so mufs zufolge der letzten Bedingung bei vollständiger Abwälzung sein:

$$175)\quad f = -r . f_{\prime}.$$

Ist $f \gtrless -f_{\prime} . r$, so findet ein gleitendes Rollen statt, denn wir können uns immer vorstellen, das bewegliche System bewege sich gleitend ohne zu rollen mit einer Geschwindigkeit, deren Aenderungsmaafs dem Ueberschufs von f über $-f_{\prime} . r$ entspricht, und dann erfolge die Abwickelung mit dem Aenderungsmaafs $-f_{\prime} . r$.

Betrachten wir die drehende Bewegung, welche bei der Abwälzung statt finden mufs, und beachten wir, dafs wenn ein festes System eine drehende Bewegung macht, dies nur um eine allen Elementen gemeinschaftliche gradlinige Axe und mit einer gemeinschaftlichen Winkelgeschwindigkeit erfolgen kann, so ergiebt sich sofort aus dem obigen Satze, dafs eine Abwälzung eines festen Systems nur möglich ist, wenn die Mittelpunkte der Krümmungskreise sämmtlicher berührenden Kurvenelemente in ein und derselben geraden Linie liegen.

Diese gerade Linie ist entweder parallel mit der Berührungslinie, oder sie schneidet dieselbe, denn: aus dem Begriff der Berührung folgt, dafs die beiden festen Systeme eine gemeinschaftliche Berührungsebene haben; die Axe des Rollens liegt in dieser Berührungsebene; die Normalen auf der Berührungsebene, welche in den einzelnen Punkten der Axe des Rollens errichtet sind, sind auch normal zu dem rollenden System, gehen also durch die Krümmungsmittelpunkte der berührenden Kurvenelemente dieses Systems, und da diese Normalen alle in ein und derselben Ebene liegen (die zur Berührungsebene normal ist, und durch die Axe des Rollens geht), so liegen die Krümmungsmittelpunkte sämmtlich mit der Axe des Rollens in ein und derselben Ebene, da sie nun auch alle in gerader Linie liegen müssen, so mufs diese gerade Linie der Axe des Rollens entweder parallel sein, oder dieselbe schneiden.

Ist die gerade Linie, welche die sämmtlichen Krümmungsmittelpunkte aufnimmt und welche wir als Krümmungsaxe bezeichnen wollen, parallel mit der Axe des Rollens, so ist der Krümmungshalbmesser (r) für sämmtliche Berührungspunkte konstant und wir nennen diesen Fall des Rollens cylindrisches Rollen; wenn dagegen die Krümmungsaxe die Axe des Rollens schneidet, so bezeichnen wir das Abwälzen des beweglichen Systems als konisches Rollen. Bei dem konischen Rollen ist der Krümmungshalbmesser r nicht konstant, sondern veränderlich, aber es ist, unter r, r', r''... die Krümmungsradien verschiedener Berührungselemente, und unter a, a', a''... die Abstände dieser Elemente von dem Durchschnittspunkte zwischen der Axe des Rollens und der Krümmungsaxe verstanden:

$$r : r' : r'' \ldots = a : a' : a'' \ldots$$

Da nun ferner das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit $f_{,}$ mit welcher die Elemente um die Krümmungsaxe sich drehen für alle Elemente denselben Werth haben mufs, so folgt aus Gleichung 175), dafs das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung f für die einzelnen Berührungselemente verschieden sein mufs. Nun gehören aber diese sämmtlichen Berührungselemente einem System an, und es bedingt daher der Fall, dafs die einzelnen Elemente mit verschiedener Geschwindigkeit fortschreiten, eine Drehung um eine gemeinschaftliche Axe (§ 65). Diese gemeinschaftliche Axe ist normal zur Berührungsebene, da in der Berührungsebene sämmtliche Wegelemente liegen. Ist $f_{,,}$ das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit für die Drehung um diese Axe, und R der (veränderliche) Abstand der einzelnen Berührungselemente von dieser Axe, so ist offenbar

$$f = f_{,,} \cdot R = -r \cdot f_{,}$$

$$175\text{a)} \quad \frac{f_{,}}{f_{,,}} = -\frac{R}{r},$$

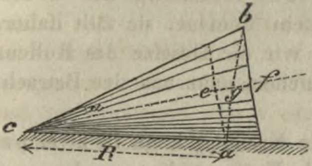
d. h. wenn ein System **konisch** rollt, so verhalten sich die Aenderungsmaafse der Winkelgeschwindigkeiten, mit denen das System um die Krümmungsaxe und um eine zur Berührungsebene normale Axe rotirt, umgekehrt wie der Krümmungshalbmesser irgend eines Punktes zu dem Abstande dieses Punktes von der letztgenannten Axe.

Da nun dies Verhältnifs für alle Elemente in irgend einem Augenblicke denselben Werth hat, so ist:

$$\frac{R}{r}=\frac{R'}{r'}=\frac{R''}{r''};\ r:r':r''=R:R':R''\ldots=a:a':a''\ldots$$

und hieraus folgt, dafs die zur Berührungsebene normale Axe, um welche das System rotirt, durch den Punkt gehen müsse, in welchem die Krümmungsaxe die Axe des Rollens schneidet.

Für den geraden Kegel mit kreisförmiger Grundfläche sei ab die Normale zur Berührungsebene in irgend einem Punkte;



der Schnitt des Kegels durch eine Ebene, welche durch ab geht und zur Axe des Rollens ac normal ist, ist eine Ellipse, das berührende Kurvenelement ein elliptisches, und zwar dasjenige, welches dem Endpunkt der langen Axe ab entspricht. Für dieses Kurvenelement ist der Krümmungshalbmesser:

$$r=\frac{p^2}{q}$$

wenn p die halbe kurze, q die halbe lange Axe ist. Es ist aber auch $p^2=mn$, wenn m und n die Radien der die Ellipse begrenzenden Kreise des Kegels sind. Man hat also:

$$r=\frac{ae\,.\,bf}{\frac{1}{2}ab}=\frac{R\,.\sin\alpha}{\frac{1}{2}ab}\,.\,\frac{\frac{1}{2}ab}{\cos\alpha}=R\,.\,\mathrm{tang}\,\alpha=ag,$$

folglich ist die Axe cf die Krümmungsaxe des Kegels, und es ist für den Kegel:

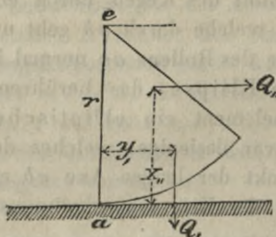
$$175\text{b})\quad \frac{f_{\prime}}{f_{\prime\prime}}=-\frac{R}{r}=-\mathrm{cotang}\,\alpha=-\frac{ce}{ae}=-\frac{h}{m},$$

worin α den Winkel bezeichnet, unter welchem die Krümmungsaxe die Axe des Rollens schneidet, m der Radius des Kegels in irgend einem Berührungspunkt, h die Höhe des Kegels für die Kreisebene, deren Radius m ist.

Denken wir nunmehr ein bewegliches System, für welches die Möglichkeit des cylindrischen Rollens vorhanden ist, und untersuchen wir, wie die Drucksumme zu bestimmen ist, welche auf Fortschreiten des Krümmungsmittelpunktes wirkt, und wie das Moment des Kräftepaars zu finden ist, welches auf Drehung des Systems um die Krümmungsaxe wirkt.

Im Allgemeinen werden die auf das bewegliche System angebrachten Kräfte sich nach § 76. A. No. 1 (S. 119) zurückführen lassen auf drei einzelne Kräfte, die einzeln parallel sind mit drei angenommenen Axen (Gleichung 126). Die Richtung *ae* normal zur Berührungsebene sei die erste, die Richtung *cd* (Figur auf S. 220), d. i. die in der Berührungsebene liegende zur Axe des Rollens normale Richtung sei die zweite, und die Axe des Rollens sei die dritte Koordinatenaxe; $Q_{,}$ $Q_{,,}$ $Q_{,,,}$ seien die mit den drei Axen parallelen Kräfte, deren Angriffspunkte durch die Koordinaten-Gleichungen 126) zu bestimmen sind.

Die Kraft $Q_{,,,}$ parallel mit der Axe des Rollens wirkt auf Verschieben des Systems nach der Richtung dieser Axe, hat aber in Bezug auf Drehung um diese Axe kein Moment, sie fällt daher, indem wir die Gesetze des Rollens untersuchen, ganz aus der Betrachtung.



Die Kraft $Q_{,,}$ kann in zwei parallele Kräfte zerlegt werden, von denen die eine durch die Krümmungsaxe *e*, die andere durch die Axe des Rollens *a* geht, und welche sich bestimmen durch die Gleichungen:

$$Q_{,,}^{(a)} = Q_{,,} \cdot \frac{(r - X_{,,})}{r}; \quad Q_{,,}^{(e)} = Q_{,,} \cdot \frac{X_{,,}}{r},$$

beide Kräfte wirken auf Fortschreiten des ganzen Systems.

Die Kraft $Q_{,}$ welche normal ist zur Berührungsebene, kann keine fortschreitende Bewegung in der Richtung des Rollens $ab_{,}$ erzeugen, dagegen kann sie auf Drehung in der Ebene des Rollens wirken, sie giebt das auf Kippen wirkende Kräftepaar, und das Moment desselben drückt sich aus durch $Q_{,} \cdot Y_{,}$. Dieses Kräftepaar können wir immer verwandeln in ein anderes, dessen Kräfte durch die Axen *e* und *a* gehen, und die sich daher bestimmen nach Gleichung 139), S. 137 durch die Werthe:

$$+ \frac{Q_{,} \cdot Y_{,}}{r} \text{ und } - \frac{Q_{,} \cdot Y_{,}}{r},$$

wobei übrigens auf das Vorzeichen von $Y_{,}$ wohl zu achten ist.

Endlich wirkt noch in der Axe a die Komponente der gleitenden Reibung, welche wir mit Θ bezeichnen wollen, dieselbe ist immer der Richtung der Kraft $Q_{\prime\prime}$, welche auf Fortschreiten des Systems wirkt, entgegengesetzt.

Nun haben wir in der Axe e die Kräfte wirkend:

$$176)\quad \frac{Q_{\prime\prime}.X_{\prime\prime}}{r} + \frac{Q_{\prime}.Y_{\prime}}{r} = Q_{(e)}$$

und in der Axe a die Kräfte:

$$176a)\quad Q_{\prime\prime}.\frac{(r-X_{\prime\prime})}{r} - \frac{Q_{\prime}.Y_{\prime}}{r} - \Theta = Q_{(a)}.$$

Denken wir nun in dem Angriffspunkte der Kraft $Q_{(e)}$ zwei Kräfte angetragen, die parallel mit der Richtung des Fortschreitens und gleich $+Q_{(a)}$ und $-Q_{(a)}$ sind, so hat man die Kräfte des beweglichen Systems zurückgeführt auf eine Drucksumme $Q_{(e)} + Q_{(a)}$ und auf ein Kräftepaar dessen Kräfte $+Q_{(a)}$ in der Axe a und $-Q_{(a)}$ in der Axe e wirkend, den Hebelsarm $ae = r$ haben.

Die **Drucksumme** wirkt auf fortschreitende Bewegung des Systems und *ergiebt sich:*

$$Q_{(e)} + Q_{(a)} = Q_{\prime\prime} - \Theta$$

und das **Moment** wirkt auf Drehung des Systems in der Ebene des Rollens und ist gleich:

$$Q_{(a)}.r = Q_{\prime\prime}.(r - X_{\prime\prime}) - Q_{\prime}.Y_{\prime} - r.\Theta.$$

Bezeichnet nun $J_{\prime} = \varrho_{\prime}^2.M$ das Trägheitsmoment des beweglichen Systems in Bezug auf eine Axe, die parallel mit der Axe des Rollens durch den Krümmungsmittelpunkt geht, so hat man das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit für Drehung um diese Axe:

$$176b)\quad f_{\prime} = \frac{Q_{(a)}.r}{J_{\prime}} = \frac{Q_{\prime\prime}.(r-X_{\prime\prime}) - Q_{\prime}.Y_{\prime} - r.\Theta}{J_{\prime}}$$

und das **Aenderungsmaafs der fortschreitenden** Bewegung:

$$176c)\quad f = \frac{Q_{\prime\prime} - \Theta}{M}.$$

Da nun die Bedingung des cylindrischen Rollens nach dem Obigen sich darstellte durch (Gleichung 175):

$$f = -f_{\prime}.r,$$

so folgt die **Komponente der gleitenden Reibung**, welche in der Axe a wirksam sein mufs, durch Entwickelung aus den Gleichungen 176b) und 176c), indem wir erst mit r multipliziren und die Werthe gleichsetzen:

$$176\text{d})\begin{cases}\Theta = \dfrac{Q_{\prime\prime}.[J_{\prime} + Mr.(r - X_{\prime\prime})] - Mr.Q_{\prime}.Y_{\prime}}{J_{\prime} + Mr^2} \\ \quad = Q_{\prime\prime} - \dfrac{r.M}{J_{\prime} + Mr^2}.(Q_{\prime\prime}.X_{\prime\prime} + Q_{\prime}.Y_{\prime}) \\ \quad = Q_{\prime\prime} - \dfrac{Mr^2}{J_{\prime} + Mr^2}.Q_{(e)}\end{cases}$$

folglich durch Einsetzung dieses Werths in die Gleichungen 176b) und 176c), nach gehöriger Reduktion:

$$177)\begin{cases}f_{\prime} = -\dfrac{Q_{\prime\prime}.X_{\prime\prime} + Q_{\prime}.Y_{\prime}}{J_{\prime} + Mr^2} = -Q_{(e)}.\dfrac{r}{J_{\prime} + Mr^2} \\ f = r.\dfrac{Q_{\prime\prime}.X_{\prime\prime} + Q_{\prime}.Y_{\prime}}{J_{\prime} + M.r^2} = Q_{(e)}.\dfrac{r^2}{J_{\prime} + Mr^2}\end{cases}$$

worin $J_{\prime}$ das Trägheitsmoment des Systems in Bezug auf Drehung um eine mit der Axe des Rollens parallele durch den Krümmungsmittelpunkt gehende Axe, und M die Gesammtmasse des Systems bezeichnet.

Da der Werth Θ durch die gleitende Reibung bedingt ist, so ist der gröfste Werth, welchen Θ haben kann, offenbar:

$$\Theta = \mu.Q_{\prime}.$$

So lange nun der aus der Bedingung des Rollens berechnete Werth der Komponente der gleitenden Reibung Θ kleiner ausfällt, als dieser Maximalwerth $\mu Q_{\prime}$, wird ein vollständiges Rollen erfolgen, sobald aber Θ gröfser ausfällt als $\mu Q_{\prime}$, kann die Bedingung der Gleichung 175) nicht mehr erfüllt werden, und es entsteht ein gleitendes Rollen.

Man hat für diesen Fall, indem man in Gleichung 176b) für Θ den Werth $\mu Q_{\prime}$ setzt:

$$177\text{a})\quad f_{\prime} = \frac{Q_{\prime\prime}.(r - X_{\prime\prime}) - Q_{\prime}.(Y + r.\mu)}{J_{\prime}}$$

und aus Gleichung 176c):

$$177\text{b})\quad f = \frac{Q_{\prime\prime} - \mu.Q_{\prime}}{M}$$

d. h. es ist das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung wie beim gleitenden Kippen (Gleichung 174c).

Erfahrungsmäfsig giebt es auch beim Rollen gewisse Widerstände, die sich dem Abwickeln der Berührungspunkte entgegensetzen und die, wie die Reibung, als passive Widerstände zu betrachten sind. Man pflegt diese Widerstände, deren Natur noch nicht gehörig aufgeklärt ist, die wälzende Reibung zu nennen. Man kann die wälzende Reibung immer als ein Kräftepaar denken, welches der Drehung des beweglichen Systems entgegenwirkt. Nennen wir das Moment dieses Kräftepaars $\mathfrak{W}$, so ist der Werth $\mathfrak{W}$ in den Gleichungen 176) bis 177) überall als ein Kräftepaar mit entgegengesetztem Zeichen hinzuzufügen. Wenn man die Kräfte dieses Kräftepaars auf den Abstand r reduzirt, so sind dieselben offenbar $+\frac{\mathfrak{W}}{r}$ und $-\frac{\mathfrak{W}}{r}$ und es gehen die Gleichungen 176) und 176a) mit Berücksichtigung der wälzenden Reibung über in folgende:

$$178)\quad \begin{cases} Q_{(c)} = \frac{Q_{\prime\prime} . X_{\prime\prime}}{r} + \frac{Q_{\prime} . Y_{\prime}}{r} - \frac{\mathfrak{W}}{r} \\ Q_{(a)} = \frac{Q_{\prime\prime} . (r - X_{\prime\prime})}{r} - \frac{Q_{\prime} . Y_{\prime}}{r} - \Theta + \frac{\mathfrak{W}}{r}. \end{cases}$$

Worin $Q_{(c)}$ den Druck bezeichnet, welcher in der Krümmungsaxe auf Fortschreiten derselben wirksam bleibt, $Q_{(a)}$ aber die Drucksumme bedeutet, welche in der Axe des Rollens wirksam zu denken ist. Nach (freilich ziemlich zweifelhaften) Versuchen von Coulomb mufs man schliefsen, dafs das Moment $\mathfrak{W}$ proportional sei der Drucksumme $Q_{\prime}$, welche normal gegen die Bahn des Rollens gerichtet ist, und dafs betrage:

beim Rollen von Pockholz	auf Eichenholz	$\mathfrak{W} = 0{,}0184\ Q_{\prime}$
- - -	Ulmenholz - -	$= 0{,}0311\ Q_{\prime}$
- - -	Gufseisen auf Gufseisen	$= 0{,}0178\ Q_{\prime}$
	(*Weisbach und Rittinger*) bis	$= 0{,}0187\ Q_{\prime}$
- - -	Eisenbahnräder auf Schienen	$= 0{,}019\ Q_{\prime}$
	(*de Pambour*) bis	$= 0{,}021\ Q_{\prime}$.

Im Allgemeinen ist also zu setzen:

$$178a)\quad \mathfrak{W} = \chi . Q_{\prime}$$

und man hat daher:

$$178b)\quad \begin{cases} Q_{(c)} = \frac{Q_{\prime\prime} . X_{\prime\prime}}{r} + \frac{Q_{\prime} . (Y_{\prime} - \chi)}{r} \\ Q_{(a)} = \frac{Q_{\prime\prime} . (r - X_{\prime\prime})}{r} - \frac{Q_{\prime} . (Y_{\prime} - \chi)}{r} - \Theta. \end{cases}$$

Hiernach ist in sämmtlichen Gleichungen von 176) bis 177a), in welchen $Y_{\prime}$ (die Ordinate der Drucksumme $Q_{\prime}$) vorkommt, diese Ordinate um den Werth χ zu vermindern, wenn man die wälzende Reibung berücksichtigen will.

Die Gesetze des konischen Rollens in derselben Allgemeinheit zu entwickeln, wie die des cylindrischen Rollens führt auf sehr komplizirte Ausdrücke. In besonderen Fällen werden sich diese Gesetze nach Analogie der eben durchgeführten Untersuchungen und mit Berücksichtigung der Bedingungs-Gleichung 175a), S. 222 ohne grofse Schwierigkeiten ermitteln lassen.

Anwendungen der Reibungsgesetze: Balkenschub — Quetschwalzen — Axenreibung.

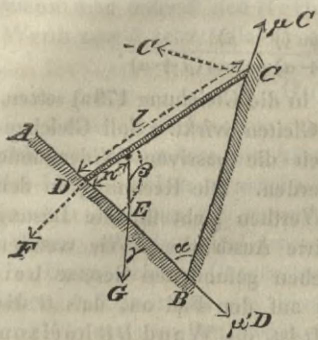
§ 102. *Die in dem vorigen Paragraphen entwickelten Gesetze* wollen wir auf einige bestimmte Fälle anwenden, indem wir einige der am häufigsten vorkommenden Aufgaben besprechen.

1. Balkenschub.

Ein Stab oder ein Balken ist zwischen zwei Wände gelegt, die den Winkel $ABC = \alpha$ einschliefsen; die Länge des Stabes ist l, und in dem Abstande n von dem einen Ende wirke eine Kraft G auf den Stab; gegeben ist die Neigung des Stabes gegen die eine Wand AB durch den Winkel $CDB = \beta$ und die Richtung der Kraft G durch den Winkel $BEG = \gamma$, welchen die Kraftrichtung G mit derselben Wand macht; zu *ermitteln ist:*

1) wie kann sich der Stab verschieben?
2) welche Kraft ist parallel mit der Wand AB erforderlich, um den Stab im Gleichgewicht zu halten? und
3) welchen Werth mufs der Winkel β haben, damit der Stab durch die Reibungswiderstände *und den Widerstand* des fixen Systems allein *im Gleichgewicht* gehalten werde?

Die Verschiebung des Stabes kann nur durch die bewegende Kraft G erfolgen, und zwar dadurch, dafs der Angriffspunkt dieser Kraft in dem Sinne desselben fortrückt; man sieht, dafs dabei der Stab mit seinen beiden Enden gleiten mufs, und zwar das Ende D nach A hin, das Ende C nach B hin. Durch den Widerstand des fixen Systems werden dabei in den Punkten C und D Kräfte aufgehoben, welche normal zu den Richtungen des Gleitens, und die daher Reibung erzeugende Drucke sind; diese Kräfte bezeichnen wir mit C und D, dann entstehen in den Punkten C und D die Reibungswiderstände μC und $\mu' D$, wenn μ und μ' die betreffenden Reibungs-Koeffizienten sind. Diese Reibungswiderstände wirken in Richtungen, die der Verschiebung *entgegengesetzt sind.* Offenbar wird in dem Zustande des Systems nichts geändert, wenn wir in dem Punkte C das fixe System fortgenommen, und dafür die durch dasselbe herbeigeführten Widerstände, nämlich die Reibung μC und den, dem aufgehobenen Druckantheil gleichen und entgegengesetzten Widerstand $-C$ als angebrachte Kräfte wirksam denken. Nun verfahren wir nach der Methode des § 97, indem wir die sämmtlichen Kräfte nach der Richtung des Gleitens des Punktes D und normal dazu zerlegen. Die Summe der Normaldrucke giebt den Reibung erzeugenden Druck D.



Indem wir die Richtung DA als *positiven* Zweig der ersten Axe, die Richtung DF als positiven Zweig der zweiten Axe ansehen, und die Winkel bestimmen, welche nach § 77 die Kraftrichtungen mit der Richtung DA bilden, finden wir als auf das bewegliche System angebrachten Kräfte:

1) die bewegende Kraft G unter dem Winkel $(180° - \gamma)$;

2) den Widerstand des fixen Systems in dem andern Stützpunkte als Kraft C unter dem Winkel $(90° - \alpha)$;

3) den Reibungswiderstand μC unter dem Winkel $(360° - \alpha)$.

Es ist mithin der in dem Punkte D Reibung erzeugende Normaldruck:

$$D = G . \sin(180° - \gamma) + C . \sin(90° - \alpha) + \mu C . \sin(360° - \alpha).$$

$$179) \begin{cases} D = G . \sin\gamma + C . \cos\alpha - \mu C . \sin\alpha \\ \quad = G . \sin\gamma + C . \sin\alpha . (\text{cotang}\,\alpha - \mu) \end{cases}$$

und der auf Gleiten des Punktes D wirkende Druck:

$$K = G . \cos(180° - \gamma) + C . \cos(90 - \alpha) + \mu C . \cos(360° - \alpha) - \mu' D.$$

$$179a) \begin{cases} K = -G . \cos\gamma + C . \sin\alpha + \mu . C . \cos\alpha - \mu' D \\ \quad = -G . (\cos\gamma + \mu' . \sin\gamma) + C . \sin\alpha . [1 + \text{cotang}\,\alpha . (\mu - \mu') + \mu . \mu']. \end{cases}$$

Hierdurch würde der Druck K, der auf Gleiten des Punktes D wirkt bestimmt, und folglich auch der gleich grofse aber entgegengesetzt im Punkte D, parallel mit AB anzubringende Druck, der erforderlich ist, um das System im Gleichgewicht zu halten, bekannt sein, wenn der Druck C bekannt wäre. Um den Druck C zu ermitteln dient die Momenten-Gleichung. Denn nehmen wir den Punkt D als Anfangspunkt des Koordinatensystems, so haben die Koordinaten der Angriffspunkte von G, C und μC folgende Werthe:

Die Koordinaten des Angriffspunktes von G sind

$$x = n . \cos\beta; \quad y = n . \sin\beta,$$

die Koordinaten des Punktes C sind

$$x' = l . \cos\beta; \quad y = l . \sin\beta,$$

und folglich hat man für das Gleichgewicht gegen Kippen:

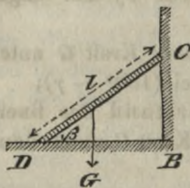
$$G . \sin\gamma . x - G . \cos\gamma . y + (C . \cos\alpha - \mu . C . \sin\alpha) . x' \\ + (C . \sin\alpha + \mu . C . \cos\alpha) . y' = 0$$

$$G . n . (\sin\gamma . \cos\beta - \cos\gamma . \sin\beta) + C . l . (\cos\alpha . \cos\beta - \mu . \sin\alpha . \cos\beta \\ + \sin\alpha . \sin\beta + \mu . \cos\alpha . \sin\beta) = 0,$$

folglich:

$$179\text{b})\quad C = \frac{n}{l}\,.\,G\,.\,\frac{\sin(\gamma-\beta)}{\mu\,.\,\sin(\beta+\alpha)-\cos(\beta+\alpha)}\,.$$

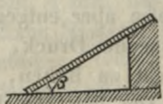
Indem wir nun den Werth 179b) in die Gleichung 179a) setzen, ergiebt sich der Druck, welcher auf Gleiten wirkt. Soll Gleichgewicht vorhanden sein, lediglich durch die passiven Widerstände allein, so mufs dieser Druck Null werden. Die Rechnung in den allgemeinen Werthen giebt für die Lösung sehr komplizirte Ausdrücke. Wir wenden dagegen die eben gefundenen Gesetze beispielsweise auf den Fall an, dafs G die Schwerkraft ist, die Wand DB horizontal, die Wand BC vertikal und $\mu=\mu'$ ist; dann ist $\alpha=90^0$; $\gamma=90^0$ folglich:



$$180)\quad \begin{cases} C = \dfrac{n}{l}\,.\,G\,.\,\dfrac{1}{\operatorname{tang}\beta+\mu} \\ D = G\,.\left(1-\dfrac{n}{l}\,.\,\dfrac{\mu}{\operatorname{tang}\beta+\mu}\right) \\ K = G\,.\left(\dfrac{n}{l}\,.\,\dfrac{1+\mu^2}{\operatorname{tang}\beta+\mu}-\mu\right). \end{cases}$$

Soll nun das System durch die passiven Widerstände allein im Gleichgewicht sein, so ist $K=0$, folglich:

$$180\text{a})\quad \operatorname{tang}\beta = \frac{n}{l}\,.\,\frac{1+\mu^2}{\mu}-\mu.$$



Wenn dagegen der Balken l in den Punkt C nur aufliegen soll, nicht angestützt ist, so ist in den obigen Gleichungen zu setzen $\alpha=180^0-\beta$ und man hat nach Gleichung 179), 179a) und 179b):

$$181)\quad \begin{cases} C = \dfrac{n}{l}\,.\,G\,.\cos\beta \\ D = G\,.\left\{1-\dfrac{n}{l}\;(\cos\beta^2+\mu\,.\,\sin\beta\,.\,\cos\beta)\right\} \\ K = G\,.\left\{\dfrac{n}{l}\,.\sin\beta\,.\cos\beta\,.\,(1+\mu^2)-\mu\right\}. \end{cases}$$

Wenn Gleichgewicht durch die passiven Widerstände allein statt finden soll, so mufs $K=0$ sein, und dann folgt:

$$181\text{a})\quad \begin{cases} \sin\beta\,.\,\cos\beta = \tfrac{1}{2}\sin 2\beta = \dfrac{l}{n}\,.\,\dfrac{\mu}{1+\mu^2} \\ \sin 2\beta = \dfrac{l}{n}\,.\,\sin 2\vartheta, \end{cases}$$

wenn man unter ϑ den **Reibungswinkel** versteht, und für μ den Werth $\tang \vartheta$ setzt (Gleichung 166a, S. 203).

2. Quetschwalzen.

Zwei Quetschwalzen von gleichen Halbmessern r bewegen sich gegen einander; die kürzeste Entfernung der Peripherien beider Walzen sei e; es wird ein Stück A, dessen Dicke $ab = \delta$ ist in einer Richtung, die normal zur Centrallinie ist gegen die beiden Walzen geschoben, und zwar mit einem Druck P.

Unter welchen Umständen werden die Walzen das Stück erfassen, und zwischen sich hindurchziehen?

Wir zerlegen den Druck P in zwei parallele Drucke, die durch die Berührungspunkte a und b gehen, und von denen jeder $= \frac{1}{2}P$ ist. Nun haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich:

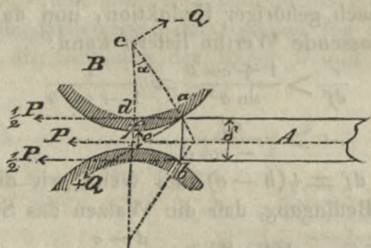
a) entweder das Stück A ist absolut fest, und unterliegt keiner Formveränderung, oder:

b) das Stück A läfst sich komprimiren, und die Dicke desselben ab kann vermindert werden.

Im **ersten** Falle ist gar keine Vorwärtsbewegung des Stückes A gegen die Walzen möglich, der ganze Druck $\frac{1}{2}P$ wird in jedem Berührungspunkt aufgehoben, und es bildet sich ein Reibungswerth $\mu \cdot \frac{1}{2}P$, in a und b normal zur Richtung von P, dessen Hebelsarm $r \cdot \sin\alpha$ ist, und welcher also mit dem Moment:

$$\mu \cdot \tfrac{1}{2}P \cdot r \cdot \sin\alpha$$

der Drehung jeder Walze entgegenwirkt.



Im **andern** Falle dagegen würde das Stück A in der Richtung aQ gegen die Walze (selbst wenn dieselbe still stände) abgleiten können; der Druck W, welcher sich der Formveränderung des Stückes in der Richtung ab entgegensetzt ist also nach dieser Richtung und normal dazu zu zerlegen in die beiden Drucke $W.\sin\alpha$ und $W.\cos\alpha$. Dieser letztgenannte Druck wird durch den Widerstand der Walze aufgehoben, erzeugt daher die Reibung $\mu \,.\, W \,.\, \cos\alpha$, und es bleibt folglich ein Bestreben auf Gleiten, welches sich ausdrückt durch:

$$W \,.\, \sin\alpha - \mu \,.\, W \,.\, \cos\alpha = W \,.\, \cos\alpha \,.\, (\operatorname{tang}\alpha - \mu).$$

Ist $\operatorname{tang}\alpha > \mu$ so wird das System A mit einem der Richtung aQ entgegengesetzten Druck gegen die Walzen sich verschieben, wenn aber $\operatorname{tang}\alpha \overline{\overline{<}}\, \mu$ ist, so wird eine Verschiebung des Stückes A gegen die Walze nicht statt finden, das Stück A wird mit der Walze fest zusammenhängen, und es wird daher das Stück A in Ruhe sein, wenn die Walze in Ruhe ist: dagegen mufs das Stück A der Bewegung der Walze folgen, wenn die Walze sich bewegt. Die Bedingung also, unter welcher das Stück A der Bewegung der Walze folgt, ist gegeben durch die Bedingung, dafs

$$\operatorname{tang}\alpha < \mu \quad \text{oder} \quad \operatorname{cotang}\alpha > \frac{1}{\mu}$$

sei. Nun ist:

$$\operatorname{cotang}\alpha = \frac{cd}{da} = \frac{r - df}{\sqrt{[(2r - df).df}}.$$

Setzen wir diesen Werth für $\operatorname{cotang}\alpha$ ein, so ergiebt sich als Bedingungs-Gleichung:

$$(r - df)^2 > \frac{1}{\mu^2} \,.\, (2r \,.\, df - df^2)$$

$$r^2 - 2r \,.\, df \,.\left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right) > - df^2 \,.\left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right),$$

und daraus:

$$\frac{r}{df} > \left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right) \cdot \left\{1 \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \mu^2}}\right\}.$$

Führen wir anstatt μ den Reibungswinkel ϑ ein, indem wir setzen:

$$\mu = \operatorname{tang}\vartheta,$$

so ergiebt sich nach gehöriger Reduktion, und da nur das **positive Zeichen** passende Werthe liefern kann:

$$\frac{r}{df} > \frac{1 + \cos\vartheta}{\sin\vartheta^2} = \frac{1}{1 - \cos\vartheta}$$

$$r > \frac{df}{1 - \cos\vartheta},$$

nun ist offenbar $df = \frac{1}{2}(\delta - e)$ und wenn wir dies einsetzen, so ergiebt sich als Bedingung, dafs die Walzen das Stück A mitziehen.

$$182) \quad 2r > \frac{d - e}{1 - \cos\vartheta}$$

d. h. **Wenn die Quetschwalzen ein gegen dieselben geführtes Stück erfassen und durchführen sollen, so mufs der Durchmesser der Quetschwalzen gröfser sein, als die Differenz zwischen der Dicke des Stückes und der kürzesten Entfernung der Peripherieen der Walzen, dividirt durch den Sinus versus des Reibungswinkels.**

Setzen wir voraus, dafs kein Gleiten zwischen den Berührungspunkten a und b und den Walzen statt finden kann, so ist das Stück A und die Walzen als ein zusammenhängendes System zu betrachten; reduziren wir nun das Kräftepaar, welches auf Drehen jeder Walze wirkt auf die beiden Kräfte $+Q$ und $-Q$, so würden die Punkte a und b als Angriffspunkte der Kräfte $+Q$ auf das Stück A zu betrachten sein, und wenn wir die Kraft Q in dem Punkte a in die beiden Komponenten $Q.\cos\alpha$ und $Q.\sin\alpha$ zerlegen, so wirkt in dem Punkte A die Kraft:

$$Q.\cos\alpha + \tfrac{1}{2}P$$

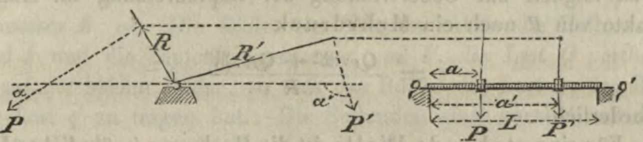
auf unterziehen des Stückes A nach der Richtung der Walzen, und die Kraft:

$$Q.\sin\alpha,$$

welche durch die ihr gleiche und entgegengesetzte Kraft $-Q.\sin\alpha$ in dem Punkte b im Gleichgewicht gehalten wird, nimmt die Festigkeit des Stückes auf Zerdrücken in Anspruch. Diese Kraft mufs gröfser sein, als die Kraft mit welcher das System A einer Formveränderung widersteht.

3. Axenreibung.

Auf einer liegenden Welle, die in zwei Lagern geht, und deren Länge l ist, sitzen zwei Räder von den Halbmessern R und R' in Entfernungen a und a' von dem einen Endpunkte; an den Peripherieen der Räder wirken die Drucke P und P' in Ebenen, die normal zur Welle sind, aber so, dafs die Drucke mit einer horizontalen, zu der Welle normalen Koordinatenaxe die Winkel α und α' bilden; die Hebelsarme der Reibung für die Wellenzapfen sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$; die Gewichte der Räder G und G', das Gewicht der Welle G''.



Das System soll sich im Sinne des Druckes P drehend bewegen, welches ist das statische Moment der Reibung? welches das auf Drehung wirkende Moment?

Wir haben es hier mit einem System mit fixer Axe zu thun und reduziren die Drucke zunächst auf die fixen Punkte, indem wir durch den ersten fixen Punkt eine horizontale (erste) zur Welle normale und eine vertikale (zweite) Axe annehmen. Wir haben mit Rücksicht auf *Gleichung* 142b), § 79:

$$183)\begin{cases} Q_I' = \dfrac{P.\cos\alpha.(L-a) + P'.\cos\alpha'.(L-a')}{L} \\ Q_I'' = \dfrac{(P.\sin\alpha + G).(L-a) + (P'.\sin\alpha' + G').(L-a')}{L} + \tfrac{1}{2}G''. \end{cases}$$

$$183a)\begin{cases} Q_{II}' = \dfrac{P.\cos\alpha.a + P'.\cos\alpha'.a'}{L} \\ Q_{II}'' = \dfrac{(P.\sin\alpha + G).a + (P'.\sin\alpha' + G').a'}{L} + \tfrac{1}{2}G. \end{cases}$$

Hieraus folgt, dafs der resultirende Druck im ersten fixen Punkt ist:

$$183b)\ Q_I = \sqrt{(Q_I'^2 + Q_I''^2)}$$

und im zweiten fixen Punkt:

$$183c)\ Q_{II} = \sqrt{(Q_{II}'^2 + Q_{II}''^2)}.$$

Hiernach ist das statische Moment der Reibung:

$$183d)\ \mathfrak{R}'.Q_I + \mathfrak{R}'.Q_{II}$$

und das auf Drehung wirkende Moment:

$$184)\ P.R - (P'.R' + Q_I.\mathfrak{R}' + Q_{II}.\mathfrak{R}'').$$

An der Grenze des drehenden Gleitens ist dies Moment gleich Null, wir nennen den Werth von P, welcher dem Grenzzustand des Gleitens entspricht P_0, und es ergiebt sich demnach:

$$184a)\begin{cases} P_0 = \dfrac{P'.R' + Q_I.\mathfrak{R}' + Q_{II}.\mathfrak{R}''}{R} \\ \quad = P'.\dfrac{R'}{R} + \dfrac{Q_I.\mathfrak{R}' + Q_{II}.\mathfrak{R}''}{R}. \end{cases}$$

Mit Vernachlässigung der Zapfenreibung würde man nur haben für den Zustand des Gleichgewichts:

$$P_0 = P'.\frac{R'}{R}$$

es ist folglich zur Ueberwindung der Zapfenreibung im Angriffspunkte von P noch ein Mehrdruck

$$= \frac{Q_I.\mathfrak{R}'' + Q_{II}.\mathfrak{R}''}{R}$$

erforderlich.

Für eine stehende Welle ist die Rechnung in ähnlicher Weise durchzuführen. Man hat anzunehmen, dafs der untere Zapfen den ganzen Vertikaldruck auszuhalten hat.

Wenn die Richtungen von P und P' vertikal, und die Hebelsarme der Reibung für beide Zapfen gleich grofs sind, so hat man $\alpha = \alpha' = 90°$, und man hat in den beiden fixen Punkten nur Vertikaldrucke, nämlich:

$$184\text{a)}\begin{cases} Q_I = \dfrac{(P+G).(L-a)+(P'+G').(L-a')}{L} + \tfrac{1}{2}G'' \\ Q_{II} = \dfrac{(P+G).a+(P'+G').a'}{L} + \tfrac{1}{2}G'' \end{cases}$$

und $Q_I + Q_{II} = P + P' + G + G' + G'' = Q$,

folglich:

das statische Moment der Reibung:

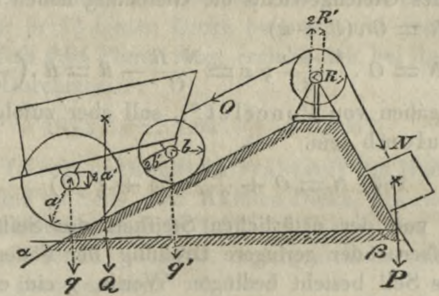
$$\mathfrak{R}.Q,$$

und daher der Werth von P an der Grenze des Gleichgewichts:

$$P = P'.\frac{R'}{R} + Q.\frac{\mathfrak{R}}{R}.$$

Gleichgewicht an der Rolle — Steifheit der Seile; Gleichgewicht auf zwei geneigten Ebenen — Wagenrollen.

§ 103. Es seien zwei geneigte Ebenen gegeben, deren Neigungswinkel gegen die Horizontale α und β sind, auf der einen bewegt sich ein Wagen, dessen Ladung Q ist, auf der andern ein gleitendes Gewicht P. Beide sind durch ein Seil verbunden, das über eine Rolle vom Halbmesser R geht, die in Zapfen ruht, deren



Halbmesser $R_,$ ist. Die Räder des Wagens haben die Halbmesser a und b und die Zapfenhalbmesser a' und b', die Last Q vertheilt sich auf die beiden Räder, so daſs das Rad a die Last q, das Rad b die Last q' zu tragen hat. Die Seilenden sind parallel mit den geneigten Ebenen.

Unter welchen Bedingungen ist das System im Grenzzustande des Gleichgewichts?

1. Gleichgewicht an der Rolle.

Die Spannungen der Seilenden seien N und O. Wir wollen annehmen, daſs die Bewegung im Sinne des Gewichtes P oder der

Spannung N eintreten könne, und nennen dann die Spannung N die **Kraft**, die Spannung O dagegen die **Last.**

Wäre das *Seil* vollkommen biegsam, so würde die Kraft und die Last jede an einem Hebelsarm wirken, der gleich R ist. Erfahrungsmäfsig aber bewirkt der Widerstand, den die *Steifheit* des Seils bei dem Auflegen auf die Rolle darbietet, dafs sich dasselbe ein wenig von der Rolle absperrt und auf diese Weise den Hebelsarm der Last vergröfsert. Dieser gröfsere Werth des Hebelsarms der Last sei $(R + x)$. Nach Versuchen von Eytelwein ist $x = \frac{\delta^2}{2}$ zu setzen, wenn man unter δ den Durchmesser des Seils in Zollen, unter R den Halbmesser der Rolle in Fufsen versteht, oder

$$185)\quad x = \frac{1}{3500}\,.\,\delta^2$$

wenn δ in preufsischen Linien,
R in preufsischen Fufsen

genommen wird.

Man würde also mit Vernachlässigung der *Zapfenreibung* für den Zustand des Gleichgewichts die Gleichung haben:

$$185\text{a})\ \begin{cases} N\,.\,R = O\,.\,(R + x) \\ N = O\,.\,\dfrac{R+x}{R};\ x = \dfrac{N\,.\,R}{O} - R = R\,.\left(\dfrac{N}{O} - 1\right). \end{cases}$$

Nach Angaben von Poncelet*), soll aber zufolge von Versuchen von Coulomb sein.

$$186)\quad N = O + \frac{\delta^\psi}{2R}\,.\,(\varphi + \chi\,.\,O)$$

worin φ ein von der natürlichen Steifheit des Seils abhängiger, durch die gröfsere oder geringere Drehung der Fäden und Litzen aus denen das Seil besteht bedingter Werth, χ ein ebenfalls konstanter, auf die Zunahme der Steifheit durch die Belastung O sich beziehender Koeffizient, und ψ ein Exponent der sich mit dem augenblicklichen Zustande des *Seils ändert, sein soll.* Hiernach würde man haben, indem man den Werth N in die Gleichung:

$$x = R\,.\left(\frac{N}{O} - 1\right)$$

einsetzt:

$$186\text{a})\quad x = \frac{\delta^\psi}{2}\,.\left(\frac{\varphi}{O} + \chi\right).$$

---

*) Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen von J. V. Poncelet, deutsch herausgegeben von Dr. C. H. Schnuse I, § 197.

Wenn man δ in preufsischen Linien und R in preufsischen Fufsen, O in preufsischen Pfunden nimmt, so ergiebt sich nach den Coulomb'schen Versuchen:

$$\text{für neue Seile } x = \delta^{1,74} . \left(\frac{1,19}{O} + 0,05\right)$$

$$\text{für alte Seile } x = \delta^{1,4} . \left(\frac{0,57}{O} + 0,012\right).$$

Nach den Versuchen von Weisbach, welche derselbe in seiner Ingenieur und Maschinen-Mechanik Th. I, § 181 mittheilt, berechnet sich unter denselben Voraussetzungen der Maafs- und Gewichtseinheiten:

1) Für ein getheertes Hanfseil von 19,2 Linien Stärke, gelegt um Scheiben von 4 bis 6 Fufs Durchmesser:

$$187) \quad x = 3,2 . \frac{R}{O} + 0,018;$$

2) für ein neues ungetheertes Hanfseil von 9 Linien Stärke und eine Rolle von $1\frac{3}{4}$ Fufs Durchmesser:

$$187a) \quad x = 0,18 . \frac{R}{O} + 0,0052;$$

3) für ein Drahtseil von 8 Linien Dicke, welches aus 16 Drähten von je $1\frac{1}{2}$ Linien Dicke bestand, und wovon jeder laufende Fufs 0,64 Pfund wog, ergiebt sich bei Rollen von 4 bis 6 Fufs Durchmesser:

$$187b) \quad x = 1,04 . \frac{R}{O} + 0,0067;$$

4) für ein frisch getheertes Drahtseil mit Hanfseelen in den Litzen und im Seile, von 7 Linien Dicke, bestehend aus 4 mal 4 = 16 Drähten von je $1\frac{1}{5}$ Linie Dicke, und pro laufenden Fufs 0,63 Pfund wiegend, ergiebt sich bei einer Rolle von $1\frac{3}{4}$ Fufs Durchmesser:

$$187c) \quad x = 1,30 . \frac{R}{O} + 0,00022.$$

Nachdem auf die eine oder die andere Weise der Werth von x bestimmt ist, ergiebt sich das Moment der Last $= O(\mathfrak{R} + x)$.

Die Spannung N hat aber aufser dem Moment der Last O noch dasjenige der Reibung zu überwinden. Nennen wir den, aus der Form des Zapfens und des Bogens zu bestimmenden, Hebelsarm der Reibung $\mathfrak{R}$ (§ 98, S. 203), und den Reibungswerth Θ, so ist das Moment der Reibung $\Theta\mathfrak{R}$, folglich haben wir die Gleichung für den Grenzzustand der Bewegung:

$$188) \quad NR = O(R + x) + \Theta\mathfrak{R},$$

oder da offenbar die Resultirende aus dem Druck N und dem Druck

O der „Reibung erzeugende Druck“ ist, die Richtungen von N und O, wie eine leichte Betrachtung der Figur zeigt, einen Winkel einschliefsen, der gleich $(\beta - \alpha)$ ist, so ist:

$$188\text{a)}\quad \Theta = \mu \, . \sqrt{\left\{N^2 + O^2 + 2N.O.\cos(\beta - \alpha)\right\}} \, .$$

Indem wir diesen Werth in die vorige Gleichung einsetzen, $O(R+x)$ auf die linke Seite schaffen, dann beide Seiten quadriren und nach N auflösen, ergiebt sich:

$$188\text{b)}\quad N = O.\frac{R.(R+x)+\mu^2.\mathfrak{R}^2.\cos(\beta-\alpha)}{R^2-\mu^2.\mathfrak{R}^2}.\left\{1 \pm \sqrt{\left[1-\frac{[R^2-\mu^2.\mathfrak{R}^2].[(R+x)^2-\mu^2.\mathfrak{R}^2]}{[R.(R+x)+\mu^2.\mathfrak{R}^2.\cos(\alpha+\beta)]^2}\right]}\right\}.$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen wird in dem am häufigsten vorkommenden Fällen sehr klein, so dafs man ihn vernachlässigen kann. Die *Gleichung* für N geht dann über in:

$$188\text{c)}\quad N = O \, . \frac{R.(R+x)+\mu^2.\mathfrak{R}^2.\cos(\beta-\alpha)}{R^2-\mu^2.\mathfrak{R}^2} \, .$$

Diese Gleichung giebt das Verhältnifs zwischen N und O für den Grenzzustand des Gleichgewichts. Nun ist aber offenbar:

$$N = P.[\sin(180 - \beta) - \mu.\cos(180 - \beta)].$$

$$188\text{d)}\quad N = P.(\sin\beta + \mu.\cos\beta) = P.\cos\beta.(\tang\beta + \mu)$$

und O ist durch folgende Betrachtung zu finden:

2. Gleichgewicht des Wagens auf der geneigten Ebene.

Die Drucke q und q', welche jede der Wagenaxen zu tragen hat, zerlegen wir parallel mit der geneigten Ebene und normal dazu; es ergiebt sich:

parallel mit der geneigten Ebene

$$q.\sin\alpha \text{ und } q'.\sin\alpha,$$

normal zu derselben

$$q.\cos\alpha \text{ und } q'.\cos\alpha.$$

Die letztgenannten Drucke werden durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben, sie erzeugen aber Reibungswiderstände in den Axen, deren Momente (wenn man den Hebelsarm der Reibung nach Gleichung 169d, S. 211, gleich dem Halbmesser der Rollen setzt), sich ausdrücken durch:

$$\mu'.q.\cos\alpha.a' \text{ und } \mu'.q'.\cos\alpha.b'$$

indem man nämlich unter μ' den Reibungs-Koeffizienten für die Axreibung versteht. Die Kräftepaare, die durch diese Momente dargestellt werden, lassen sich auf zwei parallele und entgegengesetzte Kräfte zurückführen, die parallel mit der betreffenden geneigten Ebene sind, und von denen die eine durch den Mittelpunkt der Räder, die andere durch den Berührungspunkt derselben geht. Diese Drucke wirken dem Rollen entgegen, müssen also von der Spannung O überwunden werden, sie sind, absolut betrachtet:

$$\mu' . q . \cos\alpha . \frac{a'}{a} \text{ und } \mu' . q' . \cos\alpha . \frac{b'}{b} .$$

Wenden wir nun die Gesetze des Rollens an, so ist der Druck, welcher im Mittelpunkt der Axe wirksam, parallel mit der geneigten Ebene dem Aufwärtsrollen widersteht, nach Gleichung 178b S. 227, und wenn wir die Richtung aufwärts als positiv betrachten, in jedem Rade:

$$189) \quad -\frac{q . \sin\alpha . a}{a} - \frac{q . \cos\alpha . \chi}{a} \text{ und } -\frac{q' . \sin\alpha . b}{b} - \frac{q' . \cos\alpha . \chi}{b},$$

wobei die rollende Reibung, die dem Rollen immer entgegenwirkt, mit entsprechendem Vorzeichen genommen ist. Soll nun der Druck O dem Grenzzustande für eine Bewegung des Wagens aufwärts entsprechen, so mufs sein:

$$189\text{a}) \quad O - \left(\mu' . q . \cos\alpha . \frac{a'}{a} + \mu' . q' . \cos\alpha . \frac{b'}{b} + \frac{q . \sin\alpha . a}{a} + \frac{q . \cos\alpha . \chi}{a} + \frac{q' . \sin\alpha . b}{b} + \frac{q' . \cos\alpha . \chi}{b}\right) = 0.$$

Daher:

$$189\text{b}) \quad O = \frac{q}{a} . [\cos\alpha . (\mu' . a' + \chi) + a . \sin\alpha] + \frac{q'}{b} . [\cos\alpha . (\mu' . b' + \chi) + b . \sin\alpha].$$

Wenn sämmtliche Räder gleiche Halbmesser und gleiche Zapfenhalbmesser haben, so folgt, mit Rücksicht darauf, dafs $q + q' = Q$ ist:

$$189\text{c}) \quad O = \frac{Q}{a} . [\cos\alpha (\mu' . a' + \chi) + a . \sin\alpha].$$

Setzt man diesen letzten Werth, den wir der Kürze wegen beibehalten wollen, in den Werth für N (Gleichung 188c), so ergiebt sich schliefslich, mit Rücksicht auf Gleichung 188d):

$$190) \quad \frac{P}{Q} = \frac{[\cos\alpha . (\mu' . a' + \chi) + a . \sin\alpha]\ [R . (R + x) + \mu^2 . \mathfrak{R}^2 . \cos(\beta - \alpha)]}{a . (R^2 - \mu^2 . \mathfrak{R}^2) . \cos\beta . (\tang\beta + \mu)}.$$

Mit Vernachlässigung aller passiven Widerstände würde sich ergeben:

$$190\text{a}) \quad \frac{P}{Q} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Wäre der Wagen auf der geneigten Ebene frei, und könnte durch seine Ladung Q herabrollen, so wäre der Druck, welcher auf Herabrollen wirkt, wie sich leicht entwickeln läfst, indem man die Gesetze des Rollens (§ 101) und die vorige Entwickelung beachtet:

$$191)\quad \begin{cases} Q_{(r)} = \dfrac{Q}{a} \cdot [a.\sin\alpha - \cos\alpha \,.\, (\mu'.a' + \chi)] \\ \quad\;\; = Q \,.\, \cos\alpha \,.\, \left(\operatorname{tang}\alpha - \dfrac{\mu'.a + \chi}{a}\right). \end{cases}$$

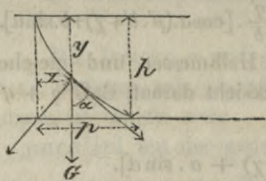
Ist nun $J_{,} = M' . \varrho_{,}^{2}$ das Trägheitsmoment der Räder, und M die Gesammtmasse des ganzen Systems, so ist nach Gleichung 177) das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung:

$$191\,\text{a})\quad \begin{cases} f = Q \,.\, \cos\alpha \,.\, \left(\operatorname{tang}\alpha - \dfrac{\mu'.a' + \chi}{a}\right) \cdot \dfrac{a^2}{J_{,} + M.a^2} \\ \;\; = g \,.\, \dfrac{\cos\alpha \,.\, \left(\operatorname{tang}\alpha - \dfrac{\mu'.a' + \chi}{a}\right)}{1 + \dfrac{J_{,}}{M.a^2}} \end{cases}$$

indem man nämlich $Q = Mg$ setzt.

Reibungswiderstände beim Gleiten eines festen Systems auf einer Kurve, unter Einwirkung der Schwere.

§ 104. Denken wir ein festes System, welches durch die Schwere gleitet. Die Gleichung der Kurve sei für horizontale und vertikale Koordinatenaxen gegeben, und es mögen y die **vertikalen Ordinaten** bedeuten. Zerlegen wir das Gewicht des Systems nach der Tangente zur Kurve und normal dazu, so ist die Kraft, mit welcher das Stück gleitet nach § 97. S. 202



$$G \,.\, \cos\alpha - \mu \,.\, G \,.\, \sin\alpha,$$

wenn α der Winkel ist, welcher die Tangente zur Kurve mit der Richtung der Schwere macht. Es ist folglich die **Arbeit**, welche die Schwere verrichtet, indem das Stück das Kurvenelement ds durchläuft:

$$G \,.\, (ds \,.\, \cos\alpha - \mu \,.\, ds \,.\, \sin\alpha).$$

Nun ist aber offenbar $ds \,.\, \cos\alpha = dy$ und $ds \,.\, \sin\alpha$, ist die Projektion des Kurvenelementes auf die Horizontalebene; bezeichnen wir dieses Projektionselement mit dp, so ist das Leistungselement:

$$G \,.\, (dy - \mu \,.\, dp),$$

folglich die Gesammtleistung:

$$G\!\int\!(dy - \mu \,.\, dp),$$

welches Integral zwischen den entsprechenden zusammengehörigen Werthen von y und p zu nehmen ist. Sind x' und p' und x'' und

p'' solche zusammengehörigen Werthe, so ist die Leistung der Schwere auf das bewegliche System, indem dasselbe aus der einen Lage in die andere übergeht.

$$192)\quad G\int(dy - \mu . dp) = G.(y' - y'') - \mu . G.(p' - p'') \\ = G.[y' - y'' - \mu.(p' - p'')].$$

Diese Gleichung drückt folgendes merkwürdige Gesetz aus:

Wenn ein festes System durch die Schwere bewegt aus einer horizontalen Ebene in eine andere übergeht, indem es auf einer beliebigen Kurve gleitet, so ist die Arbeit der gleitenden Reibung immer gleich dem Produkt aus dem Gewicht, multiplizirt mit dem Reibungs-Koeffizienten und der Projektion des durchlaufenen Kurvenstückes auf eine Horizontalebene.

Ist v'' die Geschwindigkeit, welche das System in dem Punkte besitzt, dessen vertikale Ordinate y'' ist, und v' die Geschwindigkeit des Systems in dem Punkte, dessen vertikale Ordinate y' ist, so hat man nach Gleichung 49):

$$G.(y' - y'') - \mu . G.(p' - p'') = \tfrac{1}{2}M.(v'^2 - v''^2),$$

folglich (da $G = Mg$ ist):

$$192\text{a})\quad \begin{cases} (y' - y'') = \dfrac{v'^2 - v''^2}{2g} + \mu.(p' - p'') \\ \qquad v' = \sqrt{\left\{2g.[y' - y'' - \mu.(p' - p'')] + v''^2\right\}}. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen kann man die Höhe finden $(y' - y'')$, welche einer gegebenen Endgeschwindigkeit v' entspricht, oder die Endgeschwindigkeit v', welche einer gewissen Fallhöhe $(y' - y'')$ entspricht.

Die Höhe $y' - y''$ pflegt man die Geschwindigkeitshöhe zu nennen; durch die Reibung wird die Geschwindigkeitshöhe um das Stück $\mu(p' - p'')$ vermindert. Dieses Stück nennt man den Verlust an Geschwindigkeitshöhe, und es folgt hieraus der Satz:

Wenn ein System durch die Schwere bewegt gleitend von einem höher gelegenen Punkte in einen tiefer gelegenen hinabsinkt, so ist der Verlust an Geschwindigkeitshöhe gleich dem Reibungs-Koeffizienten multiplizirt mit der Horizontalprojektion des gleitend durchlaufenen Weges, und es ist dabei ganz gleichgiltig, welche Form dieser Weg selbst hat.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeitshöhe oder den Vertikal-abstand der beiden Punkte mit h, die Projektion des durchlaufenen Weges auf eine Horizontalebene mit p, so gehen die Gleichungen über in:

$$192b)\quad \begin{cases} L \text{ (Leistung)} = G.(h - \mu p) \\ h = \dfrac{v'^2 - v''^2}{2g} + \mu p \\ v' = \sqrt{\left\{2g.(h - \mu p) + v''^2\right\}}. \end{cases}$$

Wenn dagegen ein festes System der Schwere entgegen sich mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit v'' aufwärts bewegt, so ergiebt sich leicht die Steighöhe:

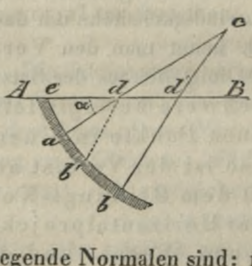
$$192c)\quad \begin{cases} h = \dfrac{v''^2 - v'^2}{2g} - \mu p \\ \text{und die Geschwindigkeit in einer gewissen Höhe} \\ v' = \sqrt{\left\{v''^2 - 2g.(h + \mu p)\right\}}. \end{cases}$$

Reibungswiderstände beim Gleiten eines festen Systems auf einer Kurve, wenn dasselbe mit einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit sich bewegt, und sonst keine bewegenden Kräfte auf dasselbe einwirken.

§ 105. Gestalten wir nunmehr die Aufgabe anders:

Es bewege sich ein festes System ohne Einwirkung der Schwere auf einer beliebigen Kurve, indem es in irgend einem Punkte der Kurve die Tangentialgeschwindigkeit c hat: welchen Einfluſs hat die Reibung auf die Aenderung der Geschwindigkeit c, wenn auch sonst keine bewegenden Kräfte auf das System einwirken?

Es sei in nebenstehender Figur $ds = ab$ ein beliebiges Element der Kurve; ac und bc seien Normalen im Anfangs- und Endpunkte dieses unendlich kleinen Elementes, so ist der Durchschnittspunkt dieser beiden Normalen der Mittelpunkt des Krümmungskreises des Elementes; den veränderlichen Winkel, welchen die Normalen zur Kurve mit einer beliebigen Axe z. B. AB bilden, nennen wir α, dann ist Winkel $ed'b = edb' = \alpha + d\alpha$, da ad und bd zwei unendlich nahe liegende Normalen sind: mithin ist Winkel $adb' = acb = d\alpha$. Nun können wir die Bewegung in dem Kurvenelement hervorgebracht denken durch eine Normalkraft, welche das gleitende Stück gegen die Kurve preſst, durch den Widerstand derselben aufgehoben



wird, folglich Reibung erzeugt, und durch eine Tangentialkraft. Die Normalkraft ist $\frac{M.c^2}{r}$ folglich die Reibung $= \frac{\mu M.c^2}{r}$, wenn r den Krümmungshalbmesser der Kurve bezeichnet. Dieser Reibungswerth ist als eine, normal zum Krümmungshalbmesser, also tangential wirkende, und die Geschwindigkeit c im Kurvenelement verzögernde Kraft zu denken, das Aenderungsmaafs der Geschwindigkeit, welches diese Kraft bedingt, ist daher in Bezug auf die Geschwindigkeit c negativ zu nehmen, und es ist also

$$f = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = -\frac{\mu.c^2}{r}.$$

Nun ist aber das Element der Geschwindigkeitsänderung auch gleich $f.dt$, und folglich haben wir

$$dc = f.dt = -\frac{\mu.c^2}{r}.dt,$$

da aber $dt = \frac{ds}{c}$, ferner $ds = r.d\alpha$ ist, so ergiebt sich, durch Einsetzung und nach gehöriger Umformung:

$$\frac{dc}{c} = -\mu.d\alpha,$$

und indem wir auf beiden Seiten integriren, ergiebt sich:

$$\int\frac{dc}{c} = -\mu\int d\alpha.$$

Nehmen wir das Integral rechts zwischen bestimmten Grenzen, so mufs auch das Integral links zwischen entsprechenden Grenzen gelten.

Wenn nun in irgend einem Punkte der Kurve, dessen Normale mit einer beliebig angenommenen Linie den Winkel α' bildet, die Geschwindigkeit des beweglichen Systems c' ist, und in irgend einem andern Punkte der Kurve bilde die Normale mit derselben Linie den Winkel α'', so findet sich die in diesem Punkte statt findende Geschwindigkeit durch die Gleichung:

$$\int_{c=c''}^{c=c'}\frac{dc}{c} = -\mu\int_{\alpha=\alpha''}^{\alpha=\alpha'} d\alpha$$

$$\log\text{nat}\, c'' - \log\text{nat}\, c' = -\mu.(\alpha'' - \alpha')$$

$$193)\quad \begin{cases} \log\text{nat}\,\dfrac{c'}{c''} = \mu.(\alpha'' - \alpha') \\ \dfrac{c'}{c''} = e^{\mu.(\alpha''-\alpha')} \\ c'' = \dfrac{c'}{e^{\mu.(\alpha''-\alpha')}} \end{cases}$$

In diesen Gleichungen bezeichnet c' die Geschwindigkeit in der Tangente zur Kurve in einem Punkte dessen Normale den Winkel α' mit einer beliebigen Linie macht; c'' die Geschwindigkeit, welche das gleitende System in einem andern Punkte besitzt, dessen Normale mit derselben Linie den Winkel α'' macht, wenn die Geschwindigkeitsänderung lediglich durch die Reibung bewirkt worden ist; e die Basis der natürlichen Logarithmen.

Ist die Kurve eine ebene Kurve, und nimmt man die Linie von welcher aus die Winkel α' und α'' gemessen sind in derselben Ebene, so ist $\alpha''-\alpha'$ der Winkel, welchen die beiden Normalen zur Kurve am Anfange und am Ende des betrachteten Weges mit einander bilden.

Die Arbeit der Reibung drückt sich offenbar aus durch

$$\tfrac{1}{2}M.(c''^2-c'^2)=-\tfrac{1}{2}M.(c'^2-c''^2)$$

und indem wir für c'' den oben gefundenen Werth setzen

193a) $$=-\tfrac{1}{2}M.c'^2.\left(1-\frac{1}{e^{2\mu.(\alpha''-\alpha')}}\right)=-\tfrac{1}{2}M.c'^2.\frac{e^{2\mu.(\alpha''-\alpha')}-1}{e^{2\mu.(\alpha''-\alpha')}}.$$

Hierin liegt folgendes Gesetz:

> Wenn ein festes System in einer Kurve gleitet, ohne dafs bewegende Kräfte auf dasselbe ferner einwirken, so ist die durch die Reibung konsumirte Arbeit, indem das System einen gegebenen Bogen der Kurve durchläuft proportional der Masse und dem Quadrat der Geschwindigkeit zu Anfang dieses Bogens und aufserdem eine logarithmische Funktion des Produkts aus dem Reibungs-Koeffizienten und der Differenz der Winkel, welche die Normalen im Anfangs- und im Endpunkt des Bogens mit einer gegebenen Linie bilden; im Uebrigen aber unabhängig von der Form der Kurve.

Aus der Gleichung $\quad \frac{c'}{c''}=e^{\mu.(\alpha''-\alpha')}$

folgt auch, dafs bei einer gegebenen Kurve das Verhältnifs der Anfangsgeschwindigkeit zur Endgeschwindigkeit ein konstanter Werth ist, unabhängig von dem Werthe der Geschwindigkeiten, und nur abhängig von den Winkeln, welche die erste und letzte Normale mit einer gegebenen Linie bilden. Sind diese Normalen der Lage nach gegeben, so ist für alle äquidistanten Kurven zwischen denselben Krümmungsradien dies Verhältnifs constant.

Es versteht sich übrigens ganz von selbst, dafs diese Betrachtungen nur *Giltigkeit* haben können für solche Kurvenstücke, für welche die Integrationen zulässig sind, und dafs sie daher nicht gelten können, wenn innerhalb des betrachteten Bogenstücks ein Wendepunkt der Kurve liegt.

Die Untersuchungen der §§ 104 u. 105, welche, soviel dem Verfasser bekannt ist, zwei bisher noch nicht aufgestellte Gesetze ergeben haben, dürften geeignet sein, auf die Theorie der Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen, namentlich in gekrümmten Röhren Anwendung zu finden.

Tabellen über die Reibungs-Koeffizienten.

§ 106. I. Reibung ebener Flächen, nachdem sie einige Zeit mit einander in Berührung gewesen sind.

Berührungsflächen.	Lage der Fasern.	Zustand der Flächen.	Reibungs-Koeffizient μ.	Reibungswinkel ϑ.
Versuche von Morin.				
Eichenholz auf Eichenholz	parallel	trocken	0,62	31° 48′
	parallel	mit trockener Seife abgerieben	0,44	23 45
	rechtwinklig	trocken	0,54	28 22
	rechtwinklig	mit Wasser benetzt	0,71	35 23
	Hirnholz des einen auf dem Längenholze des anderen	trocken	0,43	23 16
Eichenholz auf Ulmenholz	parallel	trocken	0,38	20 49
Ulmenholz auf Eichenholz	parallel	trocken	0,69	34 37
	parallel	mit trockener Seife abgerieben	0,41	22 18
	rechtwinklig	trocken	0,57	29 41
Eschen-, Tannen-, Buchen- und Ebereschenholz auf Eichenholz	parallel	trocken	0,53	27 56
Lohgares Leder auf Eichenholz	das Leder platt	trocken	0,61	31 23
	das Leder auf der hohen Kante	trocken	0,43	23 16
		mit Wasser benetzt	0,79	38 19
Schwarzes Riemenleder auf einer ebenen Fläche von Eichenholz	parallel	trocken	0,74	36 30
Schwarzes Riemenleder auf einer Trommel von Eichenholz	rechtwinklig	trocken	0,47	25 11
Geflochtener Hanf auf Eichenholz	parallel	trocken	0,50	26 34
	parallel	mit Wasser benetzt	0,87	41 2
Hanfne Seile auf Eichenholz	parallel	trocken	0,80	38 40
Schmiedeeisen auf Eichenholz	parallel	trocken	0,62	31 48
	parallel	mit Wasser benetzt	0,65	33 2
Gufseisen auf Eichenholz	parallel	mit Wasser benetzt	0,65	33 2
Messing auf Eichenholz	parallel	trocken	0,62	31 48
Liderung eines Kolbens von Rindleder auf Gufseisen	platt oder auf der hohen Kante	mit Wasser benetzt	0,62	31 48
		mit Oel, Talg oder Schweinefett	0,12	6 51
Schwarzes Riemenleder auf einer gufseisernen Rolle	platt	trocken	0,28	15 39
		mit Wasser benetzt	0,38	20 49
Gufseisen auf Gufseisen	. . . .	trocken	0,16 *	9 6
Schmiedeeisen auf Gufseisen	. . . .	trocken	0,19	10 46
Eichenholz, Ulmenholz, Hainbuchenholz, Schmiedeeisen, Gufseisen und Bronze, je zwei aufeinander	. . . .	mit Talg	0,10 **	5 43
		mit Oel oder Schweinefett	0,15 †	8 32

*) Die Flächen blieben etwas fettig.
**) Wenn die Berührung nicht lange genug gedauert hatte, um das Fett auszupressen.
†) Wenn die Berührung so lange gedauert hatte, dafs das Fett ausgeprefst war.

Berührungsflächen.	Reibungs-Koeffizient μ.	Reibungswinkel ϑ.
Versuche von Morin.		
Oolith auf Oolith	0,74	36° 30′
Muschelkalk auf Oolith	0,75	36 52
Ziegelstein auf Oolith	0,67	33 50
Eichenholz auf Oolith, das Holz vor Hirn	0,63	32 13
Schmiedeeisen auf Oolith	0,49	26 7
Muschelkalk auf Muschelkalk	0,70	35 0
Oolith auf Muschelkalk	0,75	36 52
Ziegelstein auf Muschelkalk	0,67	33 50
Schmiedeeisen auf Muschelkalk	0,42	22 47
Eichenholz auf Muschelkalk	0,64	32 38
Oolith auf Oolith, mit einer Zwischenlage von Mörtel, bestehend aus drei Theilen feinem Sande und einem Theile hydraulischem Kalk	0,74 *	36 30
Weicher Kalkstein auf weichem Kalksteine, gut behauen	0,74	36 30
Harter Kalkstein auf dito, dito	0,75	36 52
Gewöhnlicher Ziegelstein auf dito, dito	0,67	33 50
Eichenholz, vor Hirn, auf dito, dito	0,63	32 13
Schmiedeeisen auf dito, dito	0,49	26 7
Harter Kalkstein auf hartem Kalksteine, gut behauen	0,70	35 0
Weicher Kalkstein auf dito, dito	0,75	36 52
Gewöhnlicher Ziegelstein auf dito, dito	0,67	33 50
Eichenholz, vor Hirn, auf dito, dito	0,64	32 37
Schmiedeeisen auf dito, dito	0,42	22 47
Weicher Kalkstein auf weichem Kalksteine mit frischem Mörtel	0,74	36 30
Versuche von verschiedenen anderen Beobachtern.		
Weicher Quadersandstein auf demselben (Rennie)	0,71	35 23
derselbe auf demselben, mit frischem Mörtel (Rennie)	0,66	33 26
Harter, polirter Kalkstein auf demselben	0,58	30 7
Kalkstein auf Kalkstein, beide Flächen mit dem Meißel rauh gemacht (Bonchardi)	0,78	37 58
Gut bearbeiteter Granit auf rauhem Granit (Rennie)	0,66	33 26
derselbe mit frischem Mörtel (Rennie)	0,49	26 7
Hölzerner Kasten auf Steinpflaster (Regnier)	0,58	30 7
derselbe auf geschlagener Erde (Herbert)	0,33	18 16
Grob behauener Werkstein auf einer Unterlage von Thon	0,51	27 2
dito dito der Thon feucht und milde	0,34	18 47
dito dito der Thon feucht und mit dickem Sande bedeckt (Grève)	0,40	21 48

*) Nach einer Berührung von 10 bis 15 Minuten.

II. Reibung der Zapfen oder Axen auf ihren Lagern im Zustande der Bewegung.

Nach den Versuchen von Morin.

Berührungsflächen.	Zustand der Flächen.	Reibungs-Koeffizient μ, wenn die Schmiere erneuert wird: in der gewöhnlichen Weise.	Reibungs-Koeffizient μ, wenn die Schmiere erneuert wird: ununterbrochen.	Reibungswinkel ϑ.
Gusseiserne Axen auf gusseisernen Lagern	mit Baumöl, Schweinefett, Talg u. dünner Wagenschmiere bestrichen	0,07 bis 0,08	0,054	4° 0′; 4 35; 3 6
	mit denselben Fetten u. Wasser	0,08	0,28	4 35; 15 39
	mit Asphalt	0,054	0,19	3 6; 10 46
	fettig	0,14	—	7 58
	fettig und angefeuchtet	0,14	—	7 58
Gusseiserne Axen auf bronzenen Lagern	mit Baumöl, Schweinefett, Talg und dünner Wagenschmiere	0,07 bis 0,08	0,054	4 0; 4 35; 3 6
	fettig	0,16	—	9 6
	fettig und angefeuchtet	0,16	—	9 6
	kaum fettig	0,19	—	10 46
Gusseiserne Axen auf Lagern von Pockholz (lignum sanctum)	trocken	0,18	—	10 12
	mit Oel od. Schweinefett	—	0,09	5 9
	mit dergl. abgerieben .	0,10	—	5 43
	mit einer Mischung aus Schweinefett u. Molybden abgerieben	0,14	—	7 58
Schmiedeeiserne Axen auf gusseisernen Lagern	mit Baumöl, Schweinefett, Talg oder dünner Wagenschmiere	0,07 bis 0,08	0,054	4 0; 4 35; 3 6
Schmiedeeiserne Axen auf bronzenen Lagern	mit Baumöl, Schweinefett oder Talg	0,07 bis 0,08	0,054	4 0; 4 35; 3 6
	m. dicker Wagenschmiere	0,09	—	5 9
	fettig und angefeuchtet	0,19	—	10 46
	kaum fettig	0,25	—	14 2
Schmiedeeiserne Axen auf Lagern von Pockholz (lignum sanctum)	mit Oel oder Schweinefett geschmiert	0,11	—	6 17
	fettig	0,19	—	10 46
Bronzene Axen auf bronzenen Lagern	mit Oel	0,10	—	5 43
	mit Schweinefett . .	0,09	—	5 9
Bronzene Axen auf gusseisernen Lagern	mit Oel oder Talg . .	—	0,045 bis 0,052	2 35; 2 59
Axen von Pockholz auf gusseisernen Lagern	mit Schweinefett . .	0,12	—	6 51
	fettig	0,15	—	8 32
Axen von Pockholz auf Lagern von Pockholz	mit Schweinefett . .	—	0,07	4 0

Von der gemeinschaftlichen Bewegung fester Systeme.

d'Alembert'sches Prinzip und Beispiele für die Anwendung desselben.

§ 107. Denken wir verschiedene feste Systeme, die auf irgend eine Weise mit einander zusammenhängen, so, dafs sie sich gemeinschaftlich bewegen müssen, ohne dafs wir gerade die Bedingung stellen, dafs sie fest verbunden seien. Wir betrachten die Bewegung eines dieser Systeme, und bemerken, dafs der Zusammenhang mit den andern Systemen von Einflufs auf die Bewegung dieses Systems ist; wir wollen die Kräfte, welche den Einflufs dieses Zusammenhanges darstellen mit $Q_{,}$, $Q_{,,}$, $Q_{,,,}\ldots$ und die auf das betrachtete System aufserdem angebrachten bewegenden Kräfte mit $K_{,}$, $K_{,,}$, $K_{,,,}$ bezeichnen. Die Kräfte $K_{,}, K_{,,}\ldots$ und $Q_{,}, Q_{,,}\ldots$ geben eine Resultirende, und die Gröfse und Richtung dieser Resultirenden ist maafsgebend für die Bewegung des betrachteten Systems. Es sei P die Resultirende aus sämmtlichen auf das betrachtete System angebrachten und aus sämmtlichen durch die Einwirkung der verbundenen Systeme herrührenden Kräften, es sei ferner Q die Resultirende aus sämmtlichen durch die Einflüsse der verbundenen Systeme herrührenden Kräften, und K die Resultirende aus sämmtlichen auf das betrachtete System angebrachten bewegenden Kräften.

Nun denken wir K zerlegt in zwei Komponenten, von denen die eine der Gröfse und Richtung nach gleich P, die andere normal zu P ist, und mit V bezeichnet werden mag; hierdurch haben wir die sämmtlichen auf die Bewegung des betrachteten Systems Einflufs habenden Kräfte auf drei Kräfte gebracht, nämlich 1) die Komponente P, 2) die Komponente V und 3) die Resultirende aus den Einflüssen der verbundenen Systeme Q. Diese drei Kräfte erzeugen vereinigt dieselbe Bewegung, welche auch die Kraft P, die der Richtung und Gröfse nach gleich der Resultirenden aus allen Kräften ist, dem System ertheilen würde, folglich müssen die Kräfte V und Q im Gleichgewicht sein, d. h. es mufs sein:

$$194)\quad V + Q = 0;\quad V = -Q.$$

Zerlegen wir diese Kräfte nach drei zu einander normalen Koordinatenaxen und bezeichnen wir die Komponenten mit entsprechenden Marken, so mufs sein:

$$V_I + Q_I = 0;\quad V_{II} + Q_{II} = 0;\quad V_{III} + Q_{III} = 0.$$

Da aber P die Resultirende aus den Kräften K und Q ist, so ist auch:

$$P_I = K_I + Q_I;\ P_{II} = K_{II} + Q_{II};\ P_{III} = K_{III} + Q_{III}$$

und durch Kombination dieser beiden Gruppen von Gleichungen ergiebt sich:

194a) $V_I = -Q_I = K_I - P_I$; $V_{II} = -Q_{II} = K_{II} - P_{II}$;
$V_{III} = -Q_{III} = K_{III} - P_{III}$.

Die Kräfte V_I, V_{II}, V_{III} nennt man die verlornen Kräfte des Systems, sie werden erhalten, wenn man die auf das System angebrachten bewegenden Kräfte K_I, K_{II}... zerlegt nach der Richtung, in welcher das System sich wirklich bewegt und normal dazu. Die Kräfte P_I, P_{II}, P_{III} nennt man die reservirten Kräfte des betrachteten Systems, und es folgt aus dieser Darstellung folgendes Gesetz:

1) Die verlornen Kräfte eines festen Systems, welches sich gemeinschaftlich mit andern verbundenen Systemen bewegt, sind in jedem Augenblick mit den Kräften, die durch den Einfluſs der verbundenen Systeme bedingt werden, im Gleichgewicht.

2) Die Komponenten der verlornen Kräfte für drei beliebige Koordinatenaxen sind in jedem Augenblick gleich der Differenz der Komponenten der auf das betrachtete System angebrachten und der reservirten Kräfte auf dieselben Axen bezogen.

Diese Gesetze pflegt man das d'Alembert'sche Prinzip zu nennen.

Als Beispiel für die Anwendung des d'Alembert'schen Prinzips wollen wir die Aufgabe in § 103 benutzen, indem wir die Figur und die Bezeichnungen vollständig beibehalten, und annehmen, daſs die Räder des Wagens sämmtlich gleich groſs sind, gleiche Zapfenhalbmesser haben, gleiche Belastungen tragen und gleiche Trägheitsmomente haben. Für den Grenzzustand des Gleichgewichts gegen Bewegung im Sinne des Druckes P gilt die Bedingungs-Gleichung 190):

$$P = kQ,$$

wenn wir mit k die rechte Seite jener Gleichung bezeichnen. Sobald P gröſser wird, etwa den Werth $P + P' = kQ + P' = K$ bekommt, ist die bewegende Kraft, welche auf das gleitende System einwirkt offenbar:

$$P' . (\sin\beta + \mu . \cos\beta) = (K - kQ) . (\sin\beta + \mu . \cos\beta).$$

Bewegt sich das System, dessen Gewicht nun K ist mit einer Geschwindigkeit, deren Aenderungsmaafs gleich f ist, so ist die reservirte Kraft offenbar Mf und folglich die verlorene Kraft:

$$195)\quad V = (K - kQ) \cdot (\sin\beta + \mu \cdot \cos\beta) - Mf.$$

Diese verlorene Kraft mufs gleich und entgegengesetzt sein den Kräften, welche durch den Einflufs der beiden andern beweglichen Systeme, nämlich der Rolle und des Wagens entstehen, und welche durch das Seil auf das betrachtete System übertragen werden. Ist das Trägheitsmoment der Rolle $J_{,}$, so ist die Kraft, welche am Umfange der Rolle wirksam sein mufs, um derselben ein Aenderungsmaafs der Peripheriegeschwindigkeit gleich f oder ein solches der Winkelgeschwindigkeit $= \frac{f}{R}$ zu ertheilen gleich $\frac{J_{,} \cdot f}{R^2}$, und da diese Kraft offenbar der Bewegung des Systems K entgegenwirkt, so ist der Einflufs der Rolle auf die Bewegung dieses Systems:

$$\frac{-J_{,}}{R^2} \cdot f.$$

Die Masse des Wagens M' bewegt sich mit demselben Aenderungsmaafs f aufwärts. Der Druck, welcher dieses Aenderungsmaafs in der Masse bewirkt, und welcher parallel mit der geneigten Ebene durch den Mittelpunkt der Räder zu denken ist, findet sich durch Gleichung 177):

$$Q_{(e)} = \frac{f \cdot (J_{,,} + M_{,,} \cdot a^2)}{a^2},$$

wenn $J_{,,}$ das Trägheitsmoment der Räder, $M_{,,}$ die Masse des ganzen Wagens, und a den Halbmesser der Räder bezeichnet. Dieser Druck wirkt, mit Berücksichtigung der Steifheit des Seiles an dem Hebelsarm $R + x$ (Gleichung 185a) und entspricht, auf den Hebelsarm R reduzirt, einen Druck $Q_{(e)} \cdot \frac{R+x}{R}$, welcher der Bewegung des Systems K entgegenwirkt, und dessen Einflufs auf dieses System also durch:

$$195\text{a})\quad -f \cdot \frac{(J_{,,} + M_{,,} \cdot a^2)}{a^2} \cdot \frac{R+x}{R}$$

auszudrücken ist.

Demnach sind die Einflüsse der beiden andern beweglichen Systeme auf das betrachtete System zusammen:

$$195\text{b})\quad -f \cdot \left\{\frac{J_{,}}{R^2} + \frac{J_{,,} + M_{,,} \cdot a^2}{a^2} \cdot \frac{R+x}{R}\right\}$$

und wir haben folglich nach No. 1 des oben entwickelten Gesetzes:

$$195\text{c})\quad V - f \cdot \left\{\frac{J_{,}}{R^2} + \frac{J_{,,} + M_{,,} \cdot a^2}{a^2} \cdot \frac{R+x}{R}\right\} = 0,$$

und indem wir für V den oben bezeichneten Werth setzen und entwickeln:

$$195\text{d})\quad f = \frac{(K - kQ) \, . \, (\sin\beta + \mu \, . \, \cos\beta)}{M + \frac{J_{,}}{R^2} + \left(M_{,,} + \frac{J_{,,}}{a^2}\right) . \frac{R + x}{R}} \, .$$

worin f das Aenderungsmaafs der Geschwindigkeit ist, mit welcher das System K abwärts gleitet;

$K = Mg$ das Gewicht dieses Systems;

$Q = M_{,,}g$ das Gewicht des Wagens mit den Rädern;

$J_{,}$ das Trägheitsmoment, R der Halbmesser der Rolle;

$J_{,,}$ das Trägheitsmoment, a der Halbmesser der Wagenräder;

β der stumpfe Winkel, welchen die geneigte Ebene auf der K gleitet, mit der Horizontalen macht;

k das Verhältnifs des Gewichtes, welches auf der Seite von K wirksam sein mufs, um das ganze System in den Grenzzustand des Gleitens nach K hin zu bringen, zu dem Gewicht des Wagens Q (Gleichung 190), endlich

x die Vergröfserung des Hebelsarms der Last vermöge der Steifheit des Seils (Gleichung 185a).

Prinzip der Uebertragung der Arbeit.

§ 108. Kehren wir zu den Betrachtungen des § 92 zurück. Wir denken wiederum zwei feste Systeme, welche wir mit I und II bezeichnen wollen. Das System I kann auf dem System II sich verschieben, aber das System II bewegt sich dabei gleichzeitig nach irgend einer gegebenen Richtung. Wir haben gesehen, dafs dann nach dieser Richtung das erste System auf das zweite einen Druck ausübt, welcher durch Gleichung 162):

$$K = M^{I} . (f^{I} - f^{II})$$

zu bestimmen ist, wenn M^{I} die Masse des ersten (gleitenden) Systems, f^{I} das Aenderungsmaafs des auf dieses System einwirkenden Drucks für die Richtung der gemeinschaftlichen Bewegung, und f^{II} das Aenderungsmaafs der Geschwindigkeit des zweiten (ausweichenden) Systems bezeichnen. Wenn während der gemeinschaftlichen Bewegung in der Richtung dieser Bewegung das Wegelement da durchlaufen wird, so ist die Leistung dieses Druckes

$$K . da = M^{I} . (f^{I} - f^{II}) . da.$$

Wenn das ausweichende System sich allein bewegte, ohne dafs eine Einwirkung des gleitenden Systems statt fände, so würde bei Durchlaufung des Wegelementes da nun die Leistung $da . K^{II}$ verrichtet worden sein, durch die Einwirkung des gleitenden Systems aber ist nach dieser Richtung noch die Arbeit $K.da$ hinzugekommen, und wir nennen diese Arbeit $K.da$, daher die von dem gleitenden System auf das ausweichende System **übertragene Arbeit.**

Es bezeichne U die übertragene Arbeit, so besteht die Gleichung:

$$196)\quad dU = M^I.(f^I - f^{II}).da = K.da.$$

Die übertragene Arbeit ist gleich Null, entweder wenn da gleich Null ist, oder wenn $f^I - f^{II} = 0$ ist, der erste Fall setzt voraus, dafs überhaupt kein Wegelement von beiden Systemen gemeinschaftlich durchlaufen wird, dafs folglich das System II ein fixes System sei, der andere Fall setzt voraus, dafs das ausweichende System mit derselben Geschwindigkeit ausweicht, welche auch durch den Druck der auf das gleitende System wirkenden Kräfte nach dieser Richtung bedingt werden würde. Zwischen diesen beiden Grenzen kann es Werthe von f^{II} und da geben, welche die übertragene Arbeit zu einem Maximum machen; die Bestimmung dieser Werthe ist von der Natur des vorliegenden Falles abhängig.

Die Gleichung für U kann auch so geschrieben werden:

$$dU = (M^I f^I - M^I f^{II}).da.$$

Nun ist aber $M^I f^I$ die Komponente der Resultirenden aller auf das System angebrachten Kräfte für die Richtung der Bewegung, f^{II} dagegegen das Aenderungsmaafs der Geschwindigkeit, mit welcher das System sich nach dieser Richtung wirklich bewegt, folglich $M^I f^{II}$ die Komponente des Druckes, welcher die Bewegung des Systems wirklich bedingt, d. i. nach dem vorigen Paragraphen die Komponente der reservirten Kraft für diese Richtung, daher ist $M^I f^I - M^I f^{II}$ nichts anderes als die Komponente der verlornen Kraft des beweglichen Systems, und daher $dU = (M^I f^I - M^I f^{II}).da$ nichts anderes, als die Arbeit der verlornen Kraft. Hierin liegt der Satz:

> Wenn zwei materielle Systeme sich bewegen, so dafs das eine auf dem andern sich verschiebt, so ist die Arbeit der verlornen Kraft des einen Systems für die Richtung der gemeinschaftlichen Bewegung gleich der an das andere System übertragenen Arbeit.

Von der absoluten Bewegung.

Verzeichnung des absoluten Weges.

§ 109. Wenn zwei feste Systeme sich gemeinschaftlich bewegen, während das eine sich auf dem andern verschiebt, so ist die absolute Bewegung dieses verschiebbaren Systems die Resultirende aus der Bewegung in der Richtung der Verschiebung, und aus der Bewegung in der Richtung des Ausweichens. Kennt man in jedem Zeitelement die Geschwindigkeiten dieser beiden Bewegungen, so läfst sich der absolute Weg des verschiebbaren Systems leicht konstruiren. Ist umgekehrt der absolute Weg bekannt, und die Richtung, in welcher das ausweichende System sich bewegt, so kann man, wenn man in jedem Augenblicke die Geschwindigkeiten kennt, die Bahn des Gleitens konstruiren, indem man die Bedingung festhält, dafs die Systeme fortwährend in Berührung sein sollen.

Wir werden bei einer spätern Veranlassung auf die Methoden der Verzeichnung des absoluten Weges, und der Bahn des Gleitens näher eingehen.

Stofs fester Systeme.

Grundgesetze des Stofses.

§ 110. Wenn zwei feste Systeme, die sich nicht berühren, sich so bewegen, dafs sie in irgend einem Augenblick sich treffen, so übt das eine System auf das andere eine gewisse Wirkung aus, indem es im Allgemeinen der Geschwindigkeit des andern Systems eine Aenderung ertheilt. Erfolgt diese Aenderung plötzlich, so nennen wir die Einwirkung des einen Systems auf das andere einen Stofs. Die Wirkung des Stofses ist also immer als die Wirkung einer momentan wirkenden Kraft anzusehen (§ 10).

Wir nennen das eine von beiden Systemen das stofsende, das andere das gestofsene, wobei es gleichgiltig ist, welches von beiden Systemen wir als das stofsende und welches als das gestofsene betrachten wollen.

Nun nennen wir die Masse des stofsenden Systems M^I und die Geschwindigkeit, mit welcher dasselbe sich vor dem Stofse bewegt c, diejenige nach dem Stofse $c_{,}$; ferner möge M^{II} die Masse des gestofsenen Systems, und v und $v_{,}$ die Geschwindigkeiten desselben vor und nach dem Stofse sein. Zerlegen wir die Geschwindigkeiten c u. $c_{,}$ v u. $v_{,}$ nach der Richtung dreier angenommenen Koordinatenaxen, und bezeichnen wir die Komponenten durch entsprechende Marken, so ist offenbar die Leistung, welche in dem gestofsenen System hervorgebracht werden mufs, indem dasselbe aus der Geschwindigkeit c in die Geschwindigkeit $c_{,}$ übergeht, für die Richtung der drei Axen, da man es hier mit momentan wirkenden Kräften zu thun hat, nach Gleichung 45):

$$M^I . (c_{,}^I - c^I); \quad M^I . (c_{,}^{II} - c^{II}); \quad M^I . (c_{,}^{III} - c^{III}).$$

Diese Leistung *erscheint* aber als Leistung der Massenwiderstände, die sich der *Geschwindigkeitsänderung* entgegensetzen, sie mufs nach dem *Gesetz* No. 4. § 86 (S. 167) mit der Leistung der bewegenden Kräfte in jedem Augenblick im Gleichgewicht sein. Die Leistung der bewegenden Kräfte ist aber nichts anderes, als diejenige Leistung, welche das stofsende System abgiebt, indem es die Geschwindigkeitsänderung von v in $v_{\prime}$ erleidet, und für die drei Axen hat man diese Leistung:

$$M^{I}.(v_{\prime}^{I}-v^{I});\quad M^{II}.(v_{\prime}^{II}-v^{II});\quad M^{II}.(v_{\prime}^{III}-v^{III}).$$

Hiernach müssen zufolge des eben genannten Gesetzes die Gleichgewichtsbedingungen statt finden:

$$197)\left\{\begin{array}{l} M^{I}.(c_{\prime}^{I}-c^{I})+M^{II}.(v_{\prime}^{I}-v^{I})=0 \\ M^{I}.(c_{\prime}^{II}-c^{II})+M^{II}.(v_{\prime}^{II}-v^{II})=0 \\ M^{I}.(c_{\prime}^{III}-c^{III})+M^{II}.(v_{\prime}^{III}-v^{III})=0. \end{array}\right.$$

Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen durch einfache Entwickelung:

$$197a)\left\{\begin{array}{l} M^{I}c^{I}+M^{II}v^{I}=M^{I}c_{\prime}^{I}+M^{II}v_{\prime}^{I} \\ M^{I}c^{II}+M^{II}v^{II}=M^{I}c_{\prime}^{II}+M^{II}v_{\prime}^{II} \\ M^{I}c^{III}+M^{II}v^{III}=M^{I}c_{\prime}^{III}+M^{II}v_{\prime}^{III}. \end{array}\right.$$

Nach § 22. S. 26 nennt man das *Produkt* aus Masse und Geschwindigkeit die Gröfse der Bewegung, und es liegt in der Gleichung 197a) der Satz:

> Wenn zwei feste Systeme stofsend auf einander wirken, und es werden die Komponenten der Geschwindigkeiten für irgend eine der Koordinatenaxen durch den Stofs in beiden Systemen geändert, so ist gleichwohl die Summe der Gröfsen der Bewegung beider Systeme vor der Geschwindigkeitsänderung eben so grofs als nach der Geschwindigkeitsänderung.

Nach Vollendung des Stofses können folgende Fälle eintreten:

a) *Die Körper trennen sich nach Vollendung des Stofses von einander;* oder:

b) die Körper bleiben nach dem Stofse in Berührung mit einander.

Welcher von beiden Fällen aber auch stattfinden möge, so bleiben doch die beiden Systeme während der Zeitdauer, in welcher der Stofs statt findet, in Berührung, und müssen für diese Zeitdauer, man mag dieselbe als unendlich klein, oder nur als sehr klein ansehen, als zwei Systeme betrachtet werden, die sich nicht trennen können. Wenn aber die Systeme während der Dauer der Betrachtung in Berührung bleiben, so kommen die Gesetze des § 92 (S. 186) in Anwendung, und es sind dann die beiden Fälle möglich, daſs das eine System sich auf dem andern verschieben kann, oder daſs eine Verschiebung nicht möglich ist.

Wenn während des Stoſses die beiden Systeme sich nicht verschieben können, so müssen sie sich vollkommen gemeinschaftlich bewegen, d. h. sie müssen eine gleich groſse Geschwindigkeit nach derselben Richtung besitzen, und folglich müssen auch die Komponenten dieser Geschwindigkeit für die drei Axen während des Stoſses gleich groſs sein. d. h. man hat unter dieser Voraussetzung:

$$v_,^I = c_,^I;\quad v_,^{II} = c_,^{II};\ v_,^{III} = c_,^{III}$$

und dann folgt aus Gleichung 197a) für die Komponenten der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit:

$$197\text{b})\quad \left\{\begin{aligned} v_,^I &= \frac{M^I c^I + M^{II} v^I}{M^I + M^{II}} \\ v_,^{II} &= \frac{M^I c^{II} + M^{II} v^{II}}{M^I + M^{II}} \\ v_,^{III} &= \frac{M^I c^{III} + M^{II} v^{III}}{M^I + M^{II}}. \end{aligned}\right.$$

Aus welchen Gleichungen sich die resultirende Geschwindigkeit der Richtung und Gröſse nach bestimmen läſst.

Wenn dagegen das eine System auf dem andern gleiten kann, so denken wir die Richtung des Gleitens nach früheren Regeln bestimmt, nehmen dieselbe als dritte Axe des Koordinatensystems an, und zerlegen die Geschwindigkeiten des stoſsenden und des gestoſsenen Systems nach dieser Richtung und nach zwei Axen, die normal dazu sind. Nun findet eine Einwirkung der Körper auf einander (abgesehen von der Reibung) in der Richtung, in welcher ein Gleiten möglich ist, nicht statt, folglich findet auch nach dieser Richtung keine Geschwindigkeitsänderung statt, dagegen müssen beide Systeme nach jeder Richtung, die normal zur Richtung des Gleitens ist, während des Stoſses gleiche Geschwindigkeiten besitzen, daher hat man für die beiden Axen, die normal zur Richtung des Gleitens sind:

$$v_,^I = c_,^I;\quad v_,^{II} = c_,^{II}$$

wogegen für die Richtung des Gleitens die Geschwindigkeiten ungeändert bleiben. Die Gleichungen ergeben also:

$$197\text{c})\quad \left\{\begin{aligned} c_,^I = v_,^I &= \frac{M^I c^I + M^{II} v^I}{M^I + M^{II}} \\ c_,^{II} = v_,^{II} &= \frac{M^I c^{II} + M^{II} v^{II}}{M^I + M^{II}} \\ c_,^{III} = c^{III};&\quad v_,^{III} = v^{III}. \end{aligned}\right.$$

Wenn die Richtung des *Gleitens* in derselben Ebene liegt, welche man durch die Richtungen der beiden Geschwindigkeiten v und c legen kann, und man nimmt die Linie, welche normal ist zu dieser Ebene, als erste Axe an, die Richtung des Gleitens als dritte Axe, so gehen die Gleichungen über in:

$$197\,\text{d})\quad \begin{cases} c_{\prime}^{I} = v_{\prime}^{I} = \dfrac{M^{I}c^{I} + M^{II}v^{I}}{M^{I} + M^{II}} \\ c_{\prime}^{II} = 0;\quad v_{\prime}^{II} = 0;\quad c = 0;\quad v = 0 \\ c_{\prime}^{III} = c^{III};\quad v_{\prime}^{III} = v^{III}. \end{cases}$$

Nach den Gleichungen 197b), c), d) sind die *Gesetze* für die Geschwindigkeiten während des Stofses für jede Koordinatenaxe, in welcher eine Geschwindigkeitsänderung eintritt, vollkommen übereinstimmend, und wir wollen daher im Folgenden nur die Gesetze für eine Koordinatenaxe besprechen, indem wir von vorne herein annehmen, dafs die Koordinatenaxen in dem ersten Fall (Gleichung 197b) beliebig, in den beiden andern Fällen (Gleichung 197c und d) so angenommen worden sind, wie dort vorausgesetzt worden ist. Wir verstehen also von jetzt ab unter $cc_{\prime}$, $vv_{\prime}$ die Komponenten der Geschwindigkeiten nach der Richtung irgend einer Axe, in welcher Geschwindigkeitsänderung statt findet, indem wir die Marken I, II, III fortlassen.

Wenn das stofsende System vor dem Stofse die Geschwindigkeit v und nach dem Stofse die Geschwindigkeit $v_{\prime}$ hat, so hat dasselbe durch den Stofs eine lebendige Kraft abgegeben, welche sich ausdrückt durch:

$$M^{II}.(v^2 - v_{\prime}^2).$$

Diese von dem stofsenden System abgegebene lebendige Kraft geht im Augenblick des Stofses nur zum Theil an das gestofsene System über, denn dasselbe bewegt sich, nachdem der Stofs erfolgt ist, mit der Geschwindigkeit $c_{\prime} = v_{\prime}$, hat also einen Zuwachs an lebendiger Kraft erhalten, der gleich $M^{I}.(v_{\prime}^2 - c^2)$ ist; der Rest der lebendigen Kraft also, der Werth:

$$M^{II}.(v^2 - v_{\prime}^2) - M^{I}\,(v_{\prime}^2 - c^2)$$
$$= M^{II}.(v + v_{\prime}).(v - v_{\prime}) - M^{I}.(v_{\prime} + c).(v_{\prime} - c)$$

mufs irgend eine andere Arbeit verrichten, und durch dieselbe verbraucht werden. Diese Arbeit besteht im Allgemeinen in der Formveränderung der beiden Systeme, und wenn wir dieselbe Arbeit mit $\Sigma(K.ds)$ bezeichnen, so ist sie nach Gleichung 49) gleich der halben lebendigen Kraft, welche darauf verwendet worden ist. Wir haben also zu setzen:

$$2\Sigma(K.ds) = M^{II}.(v + v_{\prime}).(v - v_{\prime}) - M^{I}.(v + c).(v_{\prime} - c),$$

da nun nach Gleichung 197) $M^I.(v_, - c) = M^{II}.(v - v_,)$, und indem wir $v_, = \frac{M^I c + M^{II} v}{M^I + M^{II}}$ nach Gleichung 197b) setzen, auch $M^I.(v_, - c) = \frac{M^{II}.M^I}{M^{II} + M^I}.(v - c)$ ist, so folgt, die auf Formveränderung wirkende Arbeit oder die verlorne lebendige Kraft:

$$2\Sigma(K.ds) = \frac{M^{II}.M^I}{M^{II} + M^I}.(v - c).[(v + v_,) - (v_, + c)]$$

$$198)\ 2\Sigma(K.ds) = \frac{M^{II}.M^I}{M^{II} + M^I}.(v - c)^2 = \frac{M^{II}.M^I}{M^{II} + M^I}.u^2,$$

worin wir nämlich unter u die Differenz der Komponenten der Geschwindigkeiten der beiden Systeme, nach der Richtung der betrachteten Koordinatenaxe verstehen. Hierin liegt der Satz:

> Wenn zwei Systeme stofsend auf einander wirken, und es erleiden für irgend eine Koordinatenaxe die Komponenten der Geschwindigkeiten Aenderungen, so ist die lebendige Kraft, welche in der Richtung dieser Axe auf Formveränderung der beiden Systeme wirkt, gleich dem Produkt aus dem Quadrat der Differenz der Komponenten der Geschwindigkeiten, welche die beiden Systeme vor dem Stofse besafsen, multiplizirt mit dem Verhältnifs zwischen dem Produkt und der Summe der Massen.

Dies Verhältnifs nennt man das harmonische Mittel der Massen.

Die beiden Gleichungen 197a) und 198), und die aus denselben hergeleiteten Gesetze sind die Grundgesetze für die Wirkung zweier festen Systeme aufeinander, wenn dieselben stofsend zusammentreffen.

Bestimmung der lebendigen Kraft, welche durch den Stofs auf Formveränderung der Systeme wirkt — Geschwindigkeiten nach Wiederherstellung der Formveränderung.

§ 111. Untersuchen wir nunmehr die auf Formveränderung der beiden Systeme wirkende Arbeit. Es seien λ^I und λ^{II} die linearen Verlängerungen oder Verkürzungen, welche die beiden Systeme in dem Augenblick erlitten haben, in welchem dieselben nach der Richtung der betrachteten Koordinatenaxe die gemeinschaftlichen Geschwindigkeiten $v_, = c_,$ angenommen haben, und zwar sind λ^I und λ^{II} in der Richtung derselben Axe gemessen. Nun ist offenbar das Wegelement ds, welches der Druck der sich der Formveränderung widersetzt, durchläuft

$$ds = d\lambda^I + d\lambda^{II}.$$

Nach den im ersten Theile dieses Werkes S. 193 entwickelten Gesetzen, besteht aber die Gleichung:

$$E = \frac{P}{F} \cdot \frac{l}{\lambda},$$

wenn E den Elasticitäts-Modulus,
P den Druck, welcher auf Verlängerung oder Verkürzung wirkt,
F den Querschnitt des Systems normal zum Druck P,
l die ursprüngliche Länge, und
λ die Verlängerung oder Verkürzung
bezeichnet.

Hiernach ist:

$$P = \frac{E \cdot F}{l} \cdot \lambda$$

und das Arbeitselement dieser Formveränderung:

$$P \cdot d\lambda = \frac{E \cdot F}{l} \cdot \lambda \cdot d\lambda,$$

folglich die Gesammtleistung, die der Formveränderung von 0 bis λ entspricht:

$$\int_\lambda^0 P \cdot d\lambda = \frac{E}{l} \cdot \int_\lambda^0 F \cdot \lambda \cdot d\lambda.$$

Wenn F konstant ist können wir integriren, und es folgt:

$$199)\ \int_\lambda^0 P \cdot d\lambda = \frac{E \cdot F}{l} \cdot \tfrac{1}{2}\lambda^2 = \frac{E \cdot F}{l} \cdot \lambda \cdot \tfrac{1}{2}\lambda = \tfrac{1}{2} P \cdot \lambda.$$

Hieraus folgt:

Die Arbeit, welche einer gewissen linearen Verlängerung oder Verkürzung eines festen Systems entspricht, ist gleich dem halben Produkt aus dem Druck, welcher der durch diese Formveränderung entstehenden gröfsten Spannung das Gleichgewicht hält in den Werth der Verlängerung oder Verkürzung.

Da aber die Gleichung

$$199a)\ E = \frac{P}{F} \cdot \frac{l}{\lambda}$$

nur gilt für Verlängerungen oder Verkürzungen innerhalb der Grenze der vollkommenen Elastizität, so gilt auch das entwickelte Gesetz nur innerhalb dieser Grenzen.

Nun würden wir für vollkommen elastische Systeme, oder so lange überhaupt die Formveränderungen sich innerhalb der Grenze der vollkommenen Elastizität befinden, die Arbeit, welche auf Formveränderung der beiden Systeme wirkt, setzen können

$$\Sigma(K.ds) = \tfrac{1}{2}(P^I.\lambda^I + P^{II}.\lambda^{II}).$$

Da aber der Druck P^I, welcher die Verkürzung λ^I bewirkt, offenbar derselbe ist, welcher die Verkürzung λ^{II} bewirkt, so ist $P^I = P^{II}$ und wenn wir diesen Druck allgemein mit P bezeichnen, so ist:

$$199\text{b)}\quad \Sigma(Kds) = \tfrac{1}{2}P.(\lambda^I + \lambda^{II}).$$

Wenn wir nach der Gleichung für E (199a) die Werthe von λ^I und λ^{II} entwickeln, so ergiebt sich, indem wir die den beiden Systemen entsprechen Werthe mit Marken bezeichnen:

$$199\text{c)}\quad \Sigma(K.ds) = \tfrac{1}{2}P^2.\left(\frac{l^I}{E^I F^I} + \frac{l^{II}}{E^{II}F^{II}}\right)$$

und vermöge der Gleichung 198 ergiebt sich:

$$199\text{d)}\quad P = u.\sqrt{\left(\frac{M^{II}.M^I}{M^{II}+M^I}\right)}.\sqrt{\left[\frac{E^I F^I.E^{II}F^{II}}{l^I.E^I F^I + l^{II}.E^{II}F^{II}}\right]}.$$

Durch diese Gleichung ist man im Stande, den gröfsten Druck zu bestimmen, welcher, durch den Stofs hervorgerufen, auf Formveränderung der beiden Systeme wirksam ist, so lange man die beiden Systeme als vollkommen elastisch betrachtet.

Ist das eine von beiden Systemen, z. B. das System II, vollkommen hart, so dafs es gar keine Formveränderung erleidet, so ist $\lambda^{II} = 0$, und die Entwickelung würde ergeben:

$$199\text{e)}\quad P = u.\sqrt{\left(\frac{M^I.M^{II}}{M^I+M^{II}}\right)}.\sqrt{\left(\frac{E^I.F^I}{l^I}\right)}.$$

Wenn dagegen beide Systeme als absolut hart angenommen werden, so würde sich der auf Formveränderung wirkende Druck als unendlich grofs ergeben.

Denken wir nunmehr zwei Systeme, die nicht vollkommen elastisch sind, oder setzen wir allgemeiner voraus, die Formveränderungen überschreiten die Grenzen der vollkommenen Elastizität, und es entstehen bleibende Formveränderungen. In diesem Falle werden allerdings auch die Verlängerungen und Verkürzungen Funktionen der Drucke sein, durch welche sie erzeugt werden; aber es ist nicht mehr zulässig, dieselben, wie wir es vermöge der Gleichung $\lambda = P \cdot \frac{l}{F \cdot E}$ gethan haben, einfach proportinal diesen Drukken zu setzen. So lange nun die Abhängigkeit dieser Formveränderungen von den Drucken nicht bekannt ist, kann man auch die Gleichung

$$K \cdot ds = P \cdot (d\lambda^{I} + d\lambda^{II})$$

nicht integriren, und die Aufgabe, den auf Formveränderung wirkenden Druck zu bestimmen, bleibt ungelöst.

Näherungsweise mag es zulässig sein die Voraussetzung, dafs die Verkürzungen in direktem Verhältnifs zu den Drucken stehen, auch noch für Formveränderungen gelten zu lassen, die aufserhalb der Grenze der vollkommenen Elastizität liegen, und nur unter dieser Annahme gelten die Gleichungen *199)* bis *199e)* auch für nicht vollkommen elastische Systeme.

Sobald durch den Zusammenstofs zweier festen Systeme Formveränderung entweder in beiden oder nur in einem von beiden Systemen erfolgt ist, bleibt entweder diese Formveränderung bestehen, oder die Systeme stellen wieder ihre *ursprüngliche* Form ganz oder theilweise her. Wenn die Formveränderung bestehen bleibt, so ist das auf Formveränderung wirkende Arbeitsmoment durch dieselbe konsumirt, wenn dagegen die Systeme sich wieder ausdehnen, so wird durch diese Ausdehnung eine gewisse Kraft frei und wirkt auf Erzeugung von Geschwindigkeit.

Wenn die durch die Herstellung der ursprünglichen Form wieder frei gewordene Arbeit (wiedergewonnene lebendige Kraft) ein gewisser Theil, etwa ε, der auf die Formveränderung verwandten Arbeit ist, so würde die nach Verlauf einer Zeitdauer, welche die Zusammendrückung und Ausdehnung umfafst (Dauer des Stofses) verlorene Arbeit sich ausdrücken nach Gleichung 198 durch:

$$200)\ \tfrac{1}{2}\left(u^2 \cdot \frac{M^{I} \cdot M^{II}}{M^{I} + M^{II}} - \varepsilon \cdot u^2 \cdot \frac{M^{I} \cdot M^{II}}{M^{I} + M^{II}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} u^2 \cdot \frac{M^{I} \cdot M^{II}}{M^{I} + M^{II}} \cdot (1 - \varepsilon).$$

folglich gelten zur Bestimmung der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stofse die Bedingungs-Gleichungen (197 und 198):

$$M^{I} c + M^{II} v = M^{I} c_{,} + M^{II} v_{,}$$

$$M^{II} \cdot (v^2 - v_{,}^2) - M^{I} \cdot (c_{,}^2 - c^2) = u^2 \cdot \frac{M^{I} \cdot M^{II}}{M^{I} + M^{II}} \cdot (1 - \varepsilon).$$

Wenn wir nun die zweite Gleichung mit $M^{I} + M^{II}$ multipliziren, die erste Gleichung quadriren, auf Null bringen, von der ersten abziehen und gehörig ordnen, so ergiebt sich:

$$M^{II}.M^{I}.(v^2+c^2-2v.c)-M^{II}.M^{I}.(v_i^2+c_i^2-2v_i.c_i)$$
$$=u^2.M^{I}.M^{II}.(1-\varepsilon),$$

oder, wenn wir mit $M^{II}.M^{I}$ dividiren, und beachten, daſs $u^2=(v-c)^2$ (Gleichung 198) also gleich $v^2+c^2-2v.c$ ist, so ergiebt sich:

$$200\text{a})\quad c_i-v_i=u.\sqrt{\varepsilon}.$$

Aus dieser Gleichung und aus der Gleichung 197a)

$$M^{I}c+M^{II}v=M^{I}c_i+M^{II}v_i$$

folgt nun:

$$200\text{b})\quad \begin{cases} v_i=\dfrac{M^{I}c+M^{II}v}{M^{I}+M^{II}}-(v-c).\dfrac{M^{I}}{M^{I}+M^{II}}.\sqrt{\varepsilon} \\[2ex] c_i=\dfrac{M^{I}c+M^{II}v}{M^{I}+M^{II}}+(v-c).\dfrac{M^{II}}{M^{I}+M^{II}}.\sqrt{\varepsilon}. \end{cases}$$

Diese Gleichung lehrt die Geschwindigkeiten finden, welche die beiden Systeme in dem Augenblicke besitzen, wo die durch den Stoſs bewirkte Veränderung der Form sich wiederhergestellt hat. Ist diese Wiederherstellung vollständig erfolgt, so ist $\varepsilon=1$ zu setzen, ist sie dagegen gar nicht erfolgt, so ist $\varepsilon=0$ zu setzen.

Ist die gestoſsene Masse M^{I} gegen M^{II} unendlich groſs, und ist dieselbe in Ruhe, also $c=0$, so ist:

$$200\text{c})\quad v_i=-v.\sqrt{\varepsilon};\quad \varepsilon=\left(\frac{v_i}{v}\right)^2.$$

Nach *Newton* *) ist:

für Elfenbein . . . . $\varepsilon=(\frac{8}{9})^2=0{,}79$
- Glas . . . . $\varepsilon=(\frac{15}{16})^2=0{,}879$
- Kork, Stahl, Wolle $\varepsilon=(\frac{5}{9})^2=0{,}309$,

wobei vorausgesetzt ist, daſs der eine Körper, nämlich der stoſsende, die Kugelform, der gestoſsene die Plattenform hat.

Im Allgemeinen sind die Gesetze des Stoſses und die durch denselben erfolgenden Formveränderungen noch nicht genügend aufgeklärt.

Stoſs auf ein festes System, welches um eine fixe Axe rotirt. Maaſs für die Stoſswirkung.

§ 112. Denken wir ein festes System, welches um eine fixe Axe rotirt; die fixe Axe sei die dritte Axe eines Koordinatensystems, dessen beide anderen Axen in einer Ebene liegen, welche

*) Weisbach, Ingenieur und Maschinen-Mechanik, Theil I. § 278.

normal zur fixen Axe ist. Wir nehmen einen beliebigen Punkt der fixen Axe als Anfangspunkt der Koordinaten, und es seien X, Y, Z die Koordinaten des Schwerpunktes. M^I sei die Masse des rotirenden Systems, w die Winkelgeschwindigkeit, welche das System besitzt in dem Augenblicke, in welchem ein zweites System, dessen Masse M^{II} ist, mit der Geschwindigkeit v auf das rotirende System stöſst. Der getroffene Punkt habe die Koordinaten $x_{,}, y_{,}, z_{,}$ und die Richtung der Geschwindigkeit, mit welcher der Stoſs erfolgt, mache mit den drei Axen die Winkel α, β, γ.

Der Abstand des getroffenen Punktes von der Drehaxe ist:

$$\text{a)} \quad r_{,} = \sqrt{(x_{,}^2 + y_{,}^2)}.$$

Ist $J_{,}$ das Trägheitsmoment des rotirenden Systems in Bezug auf die Drehaxe, so ist die auf den Abstand r reduzirte Masse nach Gleichung 147c), S. 161:

$$\text{b)} \quad M_{,}^I = \frac{J_{,}}{r_{,}^2}.$$

Die Peripheriegeschwindigkeit in dem getroffenen Punkte ist wr, die Richtung derselben bilde mit den drei Axen die Winkel $\alpha_{,}, \beta_{,}, \gamma_{,}$, dann ist:

$$\text{c)} \quad \begin{cases} \cos\alpha_{,} = \sin\beta_{,} = \dfrac{y_{,}}{r_{,}} \\ \cos\beta_{,} = \sin\alpha_{,} = \dfrac{x_{,}}{r_{,}} \\ \cos\gamma_{,} = 0; \quad \gamma_{,} = 90. \end{cases}$$

Nun denken wir den Stoſs in derselben Weise erfolgend, als ob in dem Augenblick des Stoſses die reduzirte Masse $M_{,}^I$ frei mit der Masse M^{II} zusammenstieſse. Die Komponenten der Geschwindigkeiten der gestoſsenen Masse $M_{,}^I$ sind nun für die drei Axen:

$$\text{d)} \quad \begin{cases} c^I = wr \,.\, \cos\alpha_{,}; \quad c^{II} = wr \,.\, \cos\beta_{,}; \quad c^{III} = 0 \\ c^I = w \,.\, y_{,}; \quad\quad\; c^{II} = w \,.\, x_{,}. \end{cases}$$

Die Komponenten der stoſsenden Masse M^{II} sind für dieselben Axen:

$$\text{e)} \quad v^I = v \,.\, \cos\alpha; \quad v^{II} = v \,.\, \cos\beta; \quad v^{III} = v \,.\, \cos\gamma.$$

Wir behandeln nur den Fall, daſs die beiden Systeme sich während des Stoſses vollkommen gemeinschaftlich bewegen müssen, daſs folglich während des Stoſses eine Verschiebung der beiden Systeme nicht möglich sei. Dann ergeben sich nach Gleichung 197b) die gemeinschaftlichen Geschwindigkeiten, welche beide Systeme annehmen müſsten, wenn sie beide vollkommen frei wären:

$$201)\begin{cases} v_{,}^{I} = \dfrac{M_{,}^{I}\,.\,w\,.\,y_{,} + M^{II}\,.\,v\,.\cos\alpha}{M_{,}^{I} + M^{II}} \\ v_{,}^{II} = \dfrac{M_{,}^{I}\,.\,w\,.\,x_{,} + M^{II}\,.\,v\,.\cos\beta}{M_{,}^{I} + M^{II}} \\ v_{,}^{III} = \dfrac{M^{II}\,.\,v\,.\cos\gamma}{M_{,}^{I} + M^{II}}. \end{cases}$$

Nun ist aber das gestoſsene System im Augenblick des Stoſses nicht wirklich frei, sondern es ist gezwungen sich um eine Axe zu drehen, die durch die beiden fixen Punkte geht, es kann also nach der Richtung der fixen Axe gar nicht ausweichen, und es folgt daraus, daſs durch die fixen Punkte eine Stoſswirkung in der Richtung der Drehaxe aufgehoben werden muſs, welche dem Stoſs der Massen $M^I + M^{II}$ mit der Geschwindigkeit $v_{,}^{III}$ entspricht. Die durch die fixen Punkte in der Richtung der ersten Axe aufgehobene Stoſswirkung ist also:

$$201\text{a})\quad W^I = (M_{,}^{I} + M^{II})\,.\,v^{III} = M^{II}\,.\,v\,.\cos\gamma.$$

Die beiden andern Komponenten $v_{,}^{I}$ und $v_{,}^{II}$ würden eine resultirende Geschwindigkeit geben, welche sich ausdrückt durch:

$$v_{,,} = \sqrt{(v_{,}^{I2} + v_{,}^{II2})}$$

und welche mit den beiden Axen die Winkel bildet: $\alpha_{,,}$ und $\beta_{,,}$; es ist:

$$\cos\alpha_{,,} = \frac{v_{,}^{I}}{v_{,,}} = \sin\beta_{,,};$$

$$\cos\beta_{,,} = \frac{v_{,}^{II}}{v_{,,}} = \sin\alpha_{,,}.$$

Diese resultirende Geschwindigkeit bilde mit der Peripherie des Kreises, in welchem der getroffene Punkt gezwungen ist sich zu bewegen, den Winkel ε; es ist nach einem bekannten Gesetz der analytischen Geometrie:

$$\cos\varepsilon = \cos\alpha_{,}\,.\cos\alpha_{,,} + \cos\beta_{,}\,.\cos\beta_{,,} + \cos\gamma_{,}\,.\cos\gamma_{,,}$$

oder durch Einsetzung der oben bestimmten Werthe:

$$\text{f})\begin{cases} \cos\varepsilon = \dfrac{y_{,}}{r_{,}}\,.\,\dfrac{v_{,}^{I}}{v_{,,}} - \dfrac{x_{,}^{I}}{r_{,}}\,.\,\dfrac{v_{,}^{II}}{v_{,,}} \\ \sin\varepsilon = \sqrt{(1 - \cos\varepsilon^2)} = \pm\left(\dfrac{x_{,}\,.\,v_{,}^{I}}{r_{,}\,.\,v_{,,}} - \dfrac{y_{,}\,.\,v_{,}^{II}}{r_{,}\,.\,v_{,,}}\right). \end{cases}$$

Wenn wir nun die resultirende Geschwindigkeit in zwei Komponenten p und q zerlegen, von denen die eine p in der Richtung der wirklich möglichen Bewegung, d. i. in der Richtung der Peripherie liegt, die andere aber normal dazu ist, so erhalten wir die Werthe:

$$p = v_{,,} . \cos \varepsilon = \frac{y_,}{r_,} . v_,^{I} + \frac{x_,}{r_,} . v_,^{II},$$

die andere Komponente:

$$q = v_{,,} . \sin \varepsilon = \pm \left(\frac{x_,}{r_,} . v_,^{I} - \frac{y_,}{r_,} . v_,^{II} \right)$$

oder wenn wir für $v_,^{I}$ und $v_,^{II}$ die obigen Werthe setzen, so ergiebt sich, mit Berücksichtigung dafs $x_,^2 + y_,^2 = r_,^2$ (Gleichung a) ist:

$$201\text{b)} \begin{cases} p = \dfrac{M_,^{I} . w r_, + M^{II} . \dfrac{v}{r_,} . (\cos \alpha . y_, + \cos \beta . x_,)}{M_,^{I} + M^{II}} \\ q = \pm \dfrac{M^{II}}{M_,^{I} + M^{II}} . \dfrac{v}{r_,} . (\cos \alpha . x_, - \cos \beta . y_,). \end{cases}$$

Nennen wir den Winkel, welchen die Richtung der Stofsgeschwindigkeit mit der Richtung der Peripherie bildet, in welcher der getroffene Punkt gezwungen ist, sich zu bewegen δ, so ist

$$\text{g)} \begin{cases} \cos \delta = \cos \alpha . \cos \alpha_, + \cos \beta . \cos \beta_, + \cos \gamma . \cos \gamma_, \\ \quad = \cos \alpha . \dfrac{y_,}{r_,} + \cos \beta . \dfrac{x_,}{r_,}, \end{cases}$$

und daher ist auch:

$$201\text{c)} \quad p = \frac{M_,^{I} . w . r_, + M^{II} . v . \cos \delta}{M_,^{I} + M^{II}}.$$

Da nun aber das rotirende System auch im Augenblick des Stofses sich nur nach der Richtung der Peripheriegeschwindigkeit bewegen kann, da es also keine Komponente normal zu dieser Richtung besitzen kann, so mufs durch die Bedingung, dafs dafs das System eine fixe Axe haben soll die Komponente q durch die Reaktion dieser fixen Axe aufgehoben werden, und die fixe Axe mufs also einer Stofswirkung, die dieser Komponente q entspricht, das ist einer Stofswirkung

$$201\text{d)} \quad W^{II} = \pm q . (M_,^{I} + M^{II}) = \pm M^{II} . \frac{v}{r_,} . (\cos \alpha . x_, - \cos \beta . y_,)$$

Widerstand leisten. Diese Stofswirkung ist in dem getroffenen Punkte normal zur Peripherie, also radial zu denken.

Der getroffene Punkt kann also in dem Augenblick des Stofses nur die Komponente p wirklich annehmen; die derselben entsprechende Winkelgeschwindigkeit ist $w_, = \frac{p}{r_,}$, das ist:

$$201\text{e)} \begin{cases} w_, = \dfrac{M_,^{I} . w + M^{II} . \dfrac{v}{r_,} . \cos \delta}{M_,^{I} + M^{II}} \\ \quad = \dfrac{M_,^{I} . w + M^{II} . \dfrac{v}{r_,^2} . (\cos \alpha . y_, + \cos \beta . x_,)}{M_,^{I} + M^{II}}. \end{cases}$$

Es ist mithin der Zuwachs an Winkelgeschwindigkeit, welchen das System erhält:

$$201f)\ \begin{cases} w' - w = \dfrac{M_{,}^{I}.w + M^{II}.\dfrac{v}{r_{,}}.\cos\delta}{M_{,}^{I} + M^{II}} - w \\ \quad = \dfrac{M^{II}}{M_{,}^{I} + M^{II}} . \left(\dfrac{v}{r_{,}}.\cos\delta - w\right). \end{cases}$$

Die Zeitdauer, in welcher diese Aenderung der Winkelgeschwindigkeit erfolgt mag sehr klein sein, wir mögen dieselbe mit τ bezeichnen; wir wollen ferner das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit für diese kurze Zeit als konstant ansehen, und dasselbe mit $f_{,}$ bezeichnen, dann ist nach Gleichung 28):

$$w' - w = \int_{\tau}^{0} .f_{,}.d\tau = f_{,}.\tau,$$

$$202)\ \text{folglich}\ f_{,} = \frac{w' - w}{\tau} = \frac{M^{II}}{M_{,}^{I} + M^{II}} . \left(\frac{v}{r_{,}}.\cos\delta - w\right) . \frac{1}{\tau}.$$

Nun können wir uns die Aenderung der Winkelgeschwindigkeit auch durch einen Druck hervorgebracht denken, der anstatt des Stofses in dem gestofsenen Punkt während der Zeitdauer τ nach der Richtung die Peripherie wirksam gedacht, dieselbe Aenderung der Winkelgeschwindigkeit bedingen würde. Nennen wir diesen Druck P, so ist sein statisches Moment $P.r_{,}$ und wenn $J_{,}$ das Trägheitsmoment des Systems ist, so ist auch nach Gleichung 154) und 202):

$$202a)\ f_{,} = \frac{P.r_{,}}{J_{,}};\ P = \frac{f_{,}.J_{,}}{r_{,}} = \frac{w' - w}{\tau} . \frac{f_{,}}{r_{,}}.$$

Multipliziren wir den letzten Werth im Zähler und Nenner mit $r_{,}$ so ergiebt sich:

$$202b)\ P = \frac{w'r_{,} - wr_{,}}{\tau} . \frac{J_{,}}{r_{,}^{2}};\ P.\tau = (w'r_{,} - wr_{,}).M_{,}^{I}.$$

Nun ist $w'r_{,} - wr_{,}$ die Geschwindigkeitsänderung, welche der getroffene Punkt erleidet, $\frac{J_{,}}{r_{,}^{2}}$ ist die auf den getroffenen Punkt reduzirte Masse (Gleichung b); es ist folglich die Kraft, welche dieselbe Geschwindigkeitsänderung in dem getroffenen System bedingen würde, welche der Stofs erzeugt, proportional dem Produkt aus der Differenz der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stofse in die auf den getroffenen Punkt reduzirte Masse. Man nennt dies Produkt das **Maafs für die Stofswirkung.**

Nach der obigen Gleichung ist auch das Maafs für die Stofswirkung gleich dem Produkt aus der Kraft, welche dieselbe Geschwindigkeitsänderung in dem gestofsenen System bedingen würde in die Zeitdauer des Stofses. Unter diesen Modifikationen und Bedingungen lassen sich die Gesetze, welche für Drucke gelten auch für Stofswirkungen anwenden.

Die Kraft P zerlegen wir nach der Richtung der Axen der X und der Y in die beiden Komponenten:

$$\text{h)} \quad P.\cos\alpha_{\prime} = P.\frac{y_{\prime}}{r_{\prime}} \text{ und } P.\cos\beta = P.\frac{x_{\prime}}{r_{\prime}}.$$

Die Momente dieser Komponenten sind für die beiden Axen der X und der Y:

$$\text{i)} \quad P.\frac{x_{\prime}.z_{\prime}}{r_{\prime}} \text{ und } P.\frac{y_{\prime}.z_{\prime}}{r_{\prime}}.$$

Nun erscheint die Kraft P als eine auf das System angebrachte Kraft, und es müssen daher ihre Komponenten für die Axen der X und der Y sowohl, als ihre Momente für dieselben Axen gleich den Kräftesummen und Momenten der in dem System thätigen Kräfte sein.

Die in dem System thätigen Kräfte sind zunächst die in jedem Massenelement wirksam zu denkenden Drucke, welche ein Aenderungsmaafs der Geschwindigkeit des betrachteten Massenelementes in der Richtung des bei der Drehung durchlaufenen Wegelementes bedingen. Dieses Aenderungsmaafs ist gleich $f_{\prime}.r$, wenn $f_{\prime}$ das Aenderungsmaafs der gemeinschaftlichen Winkelgeschwindigkeit, und r den kürzesten Abstand des Massenelementes von der Drehaxe bezeichnet, und folglich sind diese Drucke $dm.f_{\prime}.r$. Nennen wir die Koordinaten der betrachteten Massenelemente x, y, z und die Winkel, welche die Richtung der von denselben durchlaufenen Bogenelemente mit den Axen der X und der Y bilden α' und β', so ist offenbar wie in Gleichung c):

$$\text{k)} \quad \cos\alpha' = \sin\beta' = \frac{y}{r}; \quad \cos\beta' = \sin\alpha' = \frac{x}{r}$$

und es sind folglich die Drucksummen der in den einzelnen Massenelementen thätigen Kräfte für die Richtung der beiden Axen, mit Berücksichtigung der Gleichung 144), S. 153:

$$\text{l)} \begin{cases} \Sigma\left(dm.f_{\prime}.r.\frac{y}{r}\right) = f_{\prime}.\Sigma(dm.y) = f_{\prime}.M.Y, \text{ und} \\ \Sigma\left(dm.f_{\prime}.r.\frac{x}{r}\right) = f_{\prime}.\Sigma(dm.x) = f_{\prime}.M.X, \end{cases}$$

und die Momente für diese beiden Axen:

$$f_{\prime}.\Sigma(dm.x.z) \text{ und } f_{\prime}.\Sigma(dm.y.z).$$

Nun *sieht* man, dafs sowohl die Drucksummen als die Momente der in den einzelnen Massenelementen thätigen Kräfte hier nur abhängig sind von der Gruppirung der Massenelemente, während die Komponenten der auf das System angebrachten Kraft P und deren Momente nur abhängig sind von P und von den Koordinaten des gestofsenen Punktes. Es ist also nicht nothwendiger Weise Gleichheit zwischen diesen Werthen vorhanden, und es müssen daher in dem System noch gewisse andere Kräfte als thätige Kräfte vorhanden sein, welche mit den in den einzelnen Massenelementen thätigen Kräfte jene Gleichheit herstellen. Diese Kräfte erscheinen als Wirkungen des Stofses auf die Drehaxe.

Wir wollen die Drucksumme dieser Stofswirkung nach der Richtung der ersten Axe mit $Q_{\prime}$ und nach der Richtung der zweiten Axe mit $Q_{\prime\prime}$ bezeichnen, während wir die Momente der Kräftepaare dieser Wirkungen für Drehung in einer Ebene, die normal zur ersten Axe ist mit $(Ka)'$ und für die Drehung in einer Ebene, die normal zur zweiten Axe ist, mit $(Ka)''$ bezeichnen. Nun haben wir zufolge der Bedingung, dafs die auf das feste System angebrachten Kräfte mit den in dem System thätigen Kräften im Gleichgewicht sein müsssn (§§ 66. und 86.) folgende Gleichgewichtsbedingungen:

$$203)\quad \begin{cases} P \cdot \dfrac{y_{\prime}}{r_{\prime}} = f_{\prime} \cdot M \cdot Y + Q_{\prime} \\ P \cdot \dfrac{x_{\prime}}{r_{\prime}} = f_{\prime} \cdot M \cdot X + Q_{\prime\prime} \\ P \cdot \dfrac{x_{\prime} \cdot z_{\prime}}{r_{\prime}} = f_{\prime} \cdot \Sigma(dm \cdot x \cdot z) + (Ka)' \\ P \cdot \dfrac{y_{\prime} \cdot z_{\prime}}{r_{\prime}} = f_{\prime} \cdot \Sigma(dm \cdot y \cdot z) + (Ka)''. \end{cases}$$

Setzen wir für $f_{\prime}$ den Werth der Gleichung 202a), so lassen sich die Werthe von $Q_{\prime}$, $Q_{\prime\prime}$, $(Ka)'$ und $(Ka)''$ entwickeln, nämlich:

$$203\text{a})\quad \begin{cases} Q_{\prime} = P \cdot r_{\prime} \cdot \left(\dfrac{y_{\prime}}{r_{\prime}^2} - \dfrac{M \cdot Y}{J_{\prime}}\right) \\ Q_{\prime\prime} = P \cdot r_{\prime} \cdot \left(\dfrac{x_{\prime}}{r_{\prime}^2} - \dfrac{M \cdot X}{J_{\prime}}\right) \\ (Ka)' = P \cdot r_{\prime} \cdot \left(\dfrac{x_{\prime} \cdot z_{\prime}}{r_{\prime}^2} - \dfrac{\Sigma(dm \cdot x \cdot z)}{J_{\prime}}\right) \\ (Ka)'' = P \cdot r_{\prime} \cdot \left(\dfrac{y_{\prime} \cdot z_{\prime}}{r_{\prime}^2} - \dfrac{\Sigma(dm \cdot y \cdot z)}{J_{\prime}}\right). \end{cases}$$

Setzen wir in diese Gleichungen den Werth von P aus Gleichung 202a) und multipliziren wir auf beiden Seiten mit τ, so ergeben sich links die Maafse für die Stofswirkungen auf die Axe, nämlich:

$$
203\text{b)}\left\{\begin{aligned}
Q_{,}.\tau &= (w' - w).J_{,}.\left(\frac{y_{,}}{r_{,}^{2}} - \frac{M.Y}{J_{,}}\right)\\
Q_{,,}.\tau &= (w' - w).J_{,}.\left(\frac{x_{,}}{r_{,}^{2}} - \frac{M.X}{J_{,}}\right)\\
(Ka)'.\tau &= (w' - w).J_{,}.\left(\frac{x_{,}.z_{,}}{r_{,}^{2}} - \frac{\Sigma(dm.x.z)}{J_{,}}\right)\\
(Ka)''.\tau &= (w' - w).J_{,}.\left(\frac{y_{,}.z_{,}}{r_{,}^{2}} - \frac{\Sigma(dm.y.z)}{J_{,}}\right).
\end{aligned}\right.
$$

Bedingungen, unter welchen die Stofswirkungen auf die Axe gleich Null sind. — Mittelpunkt des Stofses.

§ 113. Nach dem vorigen Paragraphen hat die fixe Axe eines rotirenden Systems, auf welches ein anderes in einer gegebenen Richtung stöfst, zweierlei Stofswirkungen zu erleiden. Die eine Gruppe dieser Stofswirkungen rührt davon her, dafs bestimmte Komponenten der Geschwindigkeit des stofsenden Systems durch das rotirende System, welches *gezwungen ist, nur um die gegebene Axe sich zu drehen*, aufgehoben werden; die andere Gruppe von Stofswirkungen ist dadurch bedingt, dafs die Massenelemente des rotirenden Systems ihre Geschwindigkeit plötzlich ändern, dafs dieser Geschwindigkeitsänderung die Massenwiderstände der einzelnen Elemente entgegenwirken, und dafs diese Massenwiderstände im Allgemeinen nicht im Stande sind, die durch den Stofs auf das rotirende System angebrachten Kräfte *vollständig* zu consumiren.

Die erste Gruppe enthält folgende beiden Stofswirkungen:

1) Eine Stofswirkung in der Richtung der Axe, welche sich ausdrückt nach Gleichung 201a) durch:

$$W^{I} = M^{II}.v.\cos\gamma;$$

2) Eine Stofswirkung *in einer Richtung, die in dem getroffenen* Punkt radial ist, und welche sich ausdrückt nach Gleichung 201d) durch:

$$W^{II} = \pm M^{II}.\frac{v}{r_{,}}.(\cos\alpha.x_{,} - \cos\beta.y_{,}).$$

Die erstgenannte Wirkung ist auf Verschieben der Axe gerichtet, die zweite wirkt auf Durchbiegen der Axe in einer Richtung, die in dem getroffenen Punkte radial ist.

Die andere Gruppe der auf die Axe erfolgenden Stofswirkungen ist durch die Gleichungen 203b) zu bestimmen.

Wir wollen nunmehr untersuchen, unter welchen Bedingungen alle diese Stoſswirkungen Null werden.

Damit die Stoſswirkung W^I gleich Null werde, muſs $\cos\gamma = 0$ sein; d. h. die Richtung der Geschwindigkeit des stoſsenden Systems muſs in eine Ebene fallen, die normal zur Drehaxe ist.

Damit die Stoſswirkung W^{II} gleich Null werde, ist die Bedingung zu erfüllen:

$$\cos\alpha \,.\, x_, = \cos\beta \,.\, y_,$$

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{y_,}{x_,}.$$

Nun ist $\frac{y_,}{x_,}$ die Cotangente des Winkels, welchen die Peripheriegeschwindigkeit des getroffenen Punktes im Augenblick des Stoſses mit der Axe der X macht, und wenn wir setzen

$$\operatorname{cotang} \alpha_, = \frac{\cos\alpha_,}{\sin\alpha_,} = \frac{\cos\alpha_,}{\cos\beta_,},$$

so folgt als Bedingungs-Gleichung:

$$204)\quad \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha_,}{\cos\beta_,} = \operatorname{cotang} \alpha_,,$$

das heiſst:

Wenn in dem rotirenden System keine Stoſswirkung radial in dem getroffenen Punkte wirksam sein soll, so müssen sich die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Geschwindigkeit des stoſsenden Systems mit zwei zur Drehaxe normalen Koordinatenaxen bildet, verhalten, wie die Cosinus der Winkel, welche die Peripheriegeschwindigkeit des rotirenden Systems im Augenblicke des Stoſses mit denselben Koordinatenaxen bildet.

Diese Bedingung wird immer erfüllt, wenn die Geschwindigkeit des stoſsenden Systems in einer Ebene liegt, welche das im Augenblick des Stoſses von dem getroffenen Punkte beschriebene Bogenelement berührt, oder welche normal ist zum kürzesten Abstande des getroffenen Punktes von der Drehaxe.

Man sieht, daſs die Bedingungen, unter welchen die Stoſswirkungen W^I und W^{II} gleich Null werden, lediglich von der Richtung der Geschwindigkeit des stoſsenden Systems abhängig sind. Aus der Form der Gleichungen 203b) ergiebt sich dagegen sofort, daſs die Bedingungen, unter welchen diejenigen Stoſswirkungen, welche aus den in dem gestoſsenen System thätigen Kräften hervorgehen, gleich Null werden, ganz allein von der Gruppirung der

Massenelemente und von der Lage des getroffenen Punktes gegen die Drehaxe abhängig sind.

Damit nämlich die Gleichungen 203b) einzeln gleich Null werden, mufs sein:

$$204\text{a)}\quad \begin{cases} \dfrac{y_,}{r_,^2} = \dfrac{M \cdot Y}{J_,}; & \dfrac{x_,}{r_,^2} = \dfrac{M \cdot X}{J_,} \\ \dfrac{x_, \cdot z_,}{r_,^2} = \dfrac{\Sigma(dm \cdot x \cdot z)}{J_,}; & \dfrac{y_, \cdot z_,}{r_,^2} = \dfrac{\Sigma(dm \cdot y \cdot z)}{J_,}. \end{cases}$$

Indem wir aus den beiden ersten Gleichungen den Werth von $r_,^2$ eliminiren, ergiebt sich:

$$204\text{b)}\quad \frac{x_,}{y_,} = \frac{X}{Y},$$

da nun $\frac{x_,}{y_,}$ die Tangente des Winkels ist, welchen der kürzeste Abstand des getroffenen Punktes mit der Axe der X bildet, und $\frac{X}{Y}$ die Tangente des Winkels ist, welchen der kürzeste Abstand des Schwerpunktes mit derselben Axe bildet, so ergiebt sich als erste Bedingung, unter welcher die Wirkung der Massenwiderstände auf die Axe gleich Null ist, dafs diese beiden *Abstände parallel* sein müssen, oder mit andern Worten, dafs der getroffene Punkt in einer Ebene liegen müsse, die durch den Schwerpunkt und durch die Drehaxe geht.

Indem wir die Gleichungen

$$\frac{x_,}{r_,^2} = \frac{M \cdot X}{J_,} \text{ und } \frac{y_,}{r_,^2} = \frac{M \cdot Y}{J_,}$$

quadriren, addiren und beachten, dafs $x_,^2 + y_,^2 = r_,^2$ und $X^2 + Y^2 = R^2$ ist, wenn wir unter R den kürzesten Abstand des Schwerpunktes von der Drehaxe verstehen, ergiebt sich:

$$204\text{c)}\quad r_, = \frac{J_,}{M \cdot R}.$$

Nun ist $M.R$ offenbar das statische Moment des rotirenden Systems in Bezug auf die Drehaxe, und folglich ist nach Gleichung 158a) der Quotient:

$\frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}}$ gleich dem Abstand des Schwingungspunktes.

Hiernach ergiebt sich als zweite Bedingung, unter welcher die Wirkung der Massenwiderstände auf die Drehaxe gleich Null ist,

> dafs der getroffene Punkt einen Abstand von der Drehaxe haben müsse, welcher gleich dem Abstand des Schwingungspunktes des rotirenden Systems von derselben Axe ist.

Es folgt hieraus ferner, dafs wenn die Drehaxe durch den

Schwerpunkt geht, unter allen Umständen eine Einwirkung der Massenwiderstände auf die Axe ausgeübt wird.

Damit nun endlich die Kräftepaare gleich Null werden, ist zufolge der Gleichung 204a) noch zu setzen:

$$204\text{d)} \left\{ \begin{array}{l} z_{,} = \dfrac{r_{,}^2}{x_{,}} \cdot \dfrac{\Sigma(dm \,.\, x \,.\, z)}{J_{,}} \text{ und auch} \\ z_{,} = \dfrac{r_{,}^2}{y_{,}} \cdot \dfrac{\Sigma(dm \,.\, y \,.\, z)}{J_{,}}. \end{array} \right.$$

Diese beiden Bedingungen für $z_{,}$ müssen gleichzeitig erfüllt werden; es ist aber nicht unter allen Umständen möglich, sie gleichzeitig zu erfüllen; die Möglichkeit der Erfüllung beider Bedingungen, und folglich die Möglichkeit, dafs die Kräftepaare, welche durch die Massenwiderstände sich bilden, und welche auf Kippen der fixen Axe wirken, gleich Null seien, ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{x_{,}}{y_{,}} = \frac{\Sigma(dm.x.z)}{\Sigma(dm.y.z)}.$$

Diese Bedingung findet unter andern statt:

1) wenn $x_{,} = y_{,}$ und $\Sigma(dm.x.z) = \Sigma(dm.y.z)$ ist; und dies wird erfüllt, wenn das rotirende System zwei Ebenen der Symmetrie hat, welche sich in der Drehaxe schneiden, und so liegen, dafs der getroffene Punkt gleich weit von beiden entfernt ist. z ist für diesen Fall unbestimmt.

2) wenn $\Sigma(dm.x.z) = 0$ und $\Sigma(dm.y.z) = 0$ ist; in diesem Falle ist z gleich Null, d. h. der getroffene Punkt mufs in der Ebene liegen, in welcher die Koordinatenaxen liegen, für welchen die eben genannten Werthe gleich Null sind. Dieser Fall findet statt, wenn die Drehungsaxe eine Hauptaxe des Systems ist (§ 88. S. 175), und wenn der getroffene Punkt in derjengen zur Drehaxe normalen Ebene liegt, in welcher auch der Schwerpunkt liegt. Denn nehmen wir den Durchschnittspunkt dieser Ebene mit der Drehungsaxe als Anfangspunkt der Koordinaten, so ist $z_{,} = 0$ und nach § 88. S. 174 auch

$$\Sigma(dm.x.z) = 0 \text{ und } (\Sigma dm.y.z) = 0.$$

Derjenige Punkt eines rotirenden Systems, welcher, wenn er von einem stofsenden System getroffen wird, keine Stofswirkungen durch die Massenwiderstände auf die Drehaxe bedingt, heifst der Mittelpunkt des Stofses.

Damit ein Mittelpunkt des Stofses vorhanden sei, müssen die

Bedingungen der Gleichung 204 d) gleichzeitig erfüllt werden; auſserdem gilt für die Lage des Mittelpunktes des Stoſses Folgendes:

1) derselbe liegt in einer Ebene, die durch die Drehaxe und durch den Schwerpunkt gelegt werden kann (Gleichung 204 b);
2) in dieser Ebene hat er von der Drehaxe denselben Abstand, welchen der Schwingungsmittelpunkt des Systems besitzt (Gleichung 204 c);
3) ist die Drehungsaxe eine Hauptaxe, so fällt der Mittelpunkt des Stoſses mit dem Schwingungsmittelpunkt zusammen, d. h. er liegt in der kürzesten Entfernung des *Schwerpunktes* von der Drehungsaxe (Gleichung 204 d).

Damit überhaupt keine Stoſswirkung auf die Drehaxe erfolge, müssen für die Richtung der Geschwindigkeit des stoſsenden Systems folgende Bedingungen erfüllt werden:

1) die Richtung der Geschwindigkeit muſs durch den Mittelpunkt des Stoſses gehen;
2) dieselbe muſs normal sein zu der Ebene, welche durch die Drehaxe und durch den Schwerpunkt gelegt werden kann. Dies folgt aus den Gesetzen, welche wir für die Bedingungen hergeleitet haben, unter welchen W^I und W^{II} gleich Null werden (S. 268).

Von der Verbindung der Maschinentheile.

Allgemeine Anordnung der verbindenden Maschinentheile.

§ 114. Wenn wir eine Maschine in Bewegung betrachten, so bemerken wir, daſs immer nur gewisse Theile derselben in Bewegung sind, während die unterstützenden Maschinentheile in Bezug auf jene relativ in Ruhe sich befinden. Diejenigen Theile nun, welche den Uebergang zwischen den in Bewegung befindlichen und den in Ruhe befindlichen Theilen vermitteln, müssen zwar selbst in Ruhe sein, indessen doch eine solche Beschaffenheit haben, daſs sie die Bewegung der aktiven Theile zulassen, und im Allgemeinen auch diese Bewegung sicher stellen. Es folgt hieraus, daſs die aktiven Maschinentheile gegen diese eben erwähnten Theile eine relative Bewegung machen müssen, daſs diese relative Bewegung indessen nicht nach allen Richtungen hin wird statt finden dürfen, und daſs folglich die aktiven Maschinentheile mit den ruhenden Maschinentheilen in solcher Weise zusammenhängen, daſs dadurch der Begriff der „Verbindung", wie wir ihn im ersten Theile dieses Werkes aufgestellt, und auf S. 3 dieses Theiles wiederholt haben, erfüllt wird.

Die verbindenden Maschinentheile oder Maschinen-Verbindungen kommen daher überall vor, wo zwei Maschinentheile so mit einander zusammenhängen, daſs der eine sich gegen den andern zwar in irgend einer Weise verschieben kann, der Zusammenhang aber zwischen beiden Theilen bestehen bleibt.

Da bei diesen Verschiebungen immer die beiden Theile mit einem gewissen Druck gegen einander gepreſst werden, so muſs, wenn dieser Druck durch den Widerstand des relativ in Ruhe be findlichen Theiles aufgehoben wird, zwischen beiden Theilen Reibung statt finden, und es kommen daher bei den verbindenden Maschinentheile im Allgemeinen diejenigen Gesetze zur Anwendung, welche wir in § 93. der Grundlehren der Mechanik entwikkelt haben. Auch ergeben sich aus dem Umstande, dafs zwischen den mit einander verbundenen Maschinentheilen während der Bewegung immer Reibungswiderstände statt finden, welche mit einer gewissen Geschwindigkeit überwunden werden müssen, und daraus dafs das Arbeits-Moment dieser Reibung immer auf Kosten der nutzbaren Arbeit von der bewegenden Kraft überwunden werden mufs, für die Konstruktion der verbindenden Maschinentheile im Allgemeinen die folgenden Regeln:

1) Alle verbindenden Maschinentheile mufs man so anordnen, dafs der Druck, welcher durch den Widerstand des ruhenden Theils aufgehoben wird, möglichst gering sei.
2) Die reibenden Oberflächen müssen sich möglichst vollständig berühren, und daher in ihrer geometrischen Form möglichst kongruent sein.
3) Die reibenden Oberflächen müssen aus solchen Materialien gewählt sein, welche der Abnutzung durch die Reibung so vollständig als möglich widerstehen, und zugleich einen möglichst geringen Reibungs-Koeffizienten haben.
4) Die Konstruktion mufs so angeordnet sein, dafs man mit Sicherheit, und auf möglichst bequeme Weise Schmiere zwischen die reibenden Oberflächen bringen kann.

In vielen Fällen tritt auch hier, wie bei den Befestigungs-Konstruktionen (Th. I. § 5. S. 7) noch die Bedingung hinzu, dafs die Fuge, d. h. die Oberfläche, in welcher sich die beiden Maschinentheile berühren, und welche die Reibung auszuhalten hat, wasser-, luft- oder dampfdicht sei.

Diese Bedingungen sind für die Konstruktion der verbindenden Maschinentheile maafsgebend, es tritt denselben noch hinzu das als allgemeines Prinzip aufgestellte Erfordernifs, dafs die verbindenden Maschinentheile hinreichend stark sein müssen, um unter Einwirkung der Drucke nicht allein nicht zerstört zu werden, sondern auch keine bleibende Form-Veränderung zu erleiden.

Wenn dies die allgemeinen Rücksichten sind, die man bei der Anordnung der Verbindungstheile zu nehmen hat, so kommen dazu noch eine Menge anderer Rücksichten und Erfordernisse, die aus der Natur des einzelnen Falles hervorgehen, und vorzugsweise von der Art der relativen Bewegung abhängig sind, welche der bewegte Maschinentheil gegen den ruhenden erleidet. In dieser Beziehung haben wir bei den am häufigsten vorkommenden Verbindungstheilen vorzugsweise zwei Arten der Bewegung zu unterscheiden, und zwar die drehende Bewegung um eine als unwandelbar zu betrachtende Axe, und die gradlinige Bewegung. Demgemäſs wollen wir bei der Besprechung der verbindenden Maschinentheile dieselben in die beiden folgenden Hauptgruppen ordnen:

A. Verbindende Maschinentheile, welche eine rotirende Bewegung vermitteln, und

B. Verbindende Maschinentheile, welche eine gradlinige Bewegung vermitteln.

A. Verbindende Maschinentheile, welche eine rotirende Bewegung vermitteln.

Allgemeines.

§ 115. Da bei den Maschinen die rotirende Bewegung im Allgemeinen viel häufiger vorkommt, als die gradlinige Bewegung, so sind auch die Verbindungstheile, welche diese Bewegung zulassen viel umfassender und häufiger in der Anwendung, als diejenigen, welche eine gradlinige Bewegung vermitteln. Die rotirende Bewegung geschieht fast überall um eine als fix zu betrachtende Drehaxe; sie ist entweder kontinuirlich, und zwar so, daſs der rotirende Maschinentheil wenigstens eine ganze Umdrehung nach einer bestimmten Richtung macht, oder so, daſs der rotirende Maschinentheil nur einen *Theil* der ganzen *Peripherie* in dem einen Sinne durchläuft, und dann zurückkehrt, um einen ebenso groſsen Theil der Peripherie im entgegengesetzten Sinne zu durchlaufen. Die erste Art der Bewegung ist den Drehaxen oder Wellen vorzugsweise eigenthümlich, die andere Art der Bewegung kommt dagegen unter Andern vor, wenn zwei stangenförmige Körper den Winkel, den ihre Längenrichtungen mit einander bilden, zeitweise ändern. Die verbindenden Maschinentheile für diese beiden Arten der rotirenden Bewegung charakterisiren sich in ihrer Konstruktion:

a) als Zapfenlager,

b) als Charniere oder Gelenke.

Wir werden diese beiden Gruppen von Maschinentheilen hiernächst einzeln abhandeln.

a) Zapfenlager.

Allgemeine Anordnung der Zapfenlager; verschiedene Arten von Zapfenlagern, und deren Benennung.

§ 116. Die Zapfenlager dienen zur Verbindung der Zapfen der Wellen (Th. I. § 105. S. 262) mit den unterstützenden Maschinentheilen, sie umschliefsen die Zapfen entweder ganz oder theilweise, und müssen also an dieser Stelle eine der Zapfenform entsprechende Gestalt haben, und zwar so, dafs wenn der Zapfen einen vollen Rotationskörper darstellt, das Zapfenlager an der Stelle, wo dasselbe mit der Zapfenoberfläche in Berührung ist, im Allgemeinen einen kongruenten hohlen Rotationskörper bildet. Man nennt diesen Theil die Höhlung des Zapfenlagers. Der Theil des Zapfenlagers, welcher die Höhlung enthält, und namentlich die Oberfläche dieser Höhlung hat die Reibung auszuhalten, man mufs denselben also aus einem Material darstellen, welches für den genannten Zweck möglichst geeignet ist, und man wählt dazu entweder eine feste Holzart oder Metall. Da nun die Höhlung durch die Reibung einer gröfsern oder geringern Abnutzung unterworfen ist, da ferner die Höhlung eine besonders sorgfältige Bearbeitung erfordert, so pflegt man den Theil, welcher die Höhlung enthält, gewöhnlich nicht in einem Stück mit den übrigen zur Unterstützung des Zapfens dienenden Theilen zu konstruiren, sondern man setzt denselben besonders in die letztgenannten Theile ein, und nennt ihn dann das Lagerfutter. Man unterscheidet hiernach Lager mit hölzernen Futtern und Lager mit metallenen Futtern. Denjenigen Theil, in welchen das Lagerfutter eingesetzt und befestigt wird, nennt man im Allgemeinen den Lagerkörper; man konstruirt denselben wiederum aus Holz oder aus Metall, und hiernach pflegt man die Zapfenlager einzutheilen:

a) in hölzerne Zapfenlagen, das sind solche, deren Lagerkörper von Holz ist, und

b) in metallene, vorzugsweise eiserne Zapfenlager, das sind solche, deren Lagerkörper von Metall, beziehlich von Eisen ist.

Man hat hölzerne Zapfenlager mit hölzernem oder auch mit metallenem Futter, und ebenso metallene Zapfenlager mit hölzernem und mit metallenem Futter; gewöhnlich ist jedoch, bei den hölzernen Lagern auch hölzerne Futter, und bei den metallenen Lagern auch metallene Futter anzuwenden.

Die Konstruktion der Lagerkörper ist natürlich wesentlich durch die Art des Materials bedingt, sie ist aber noch ferner abhängig von der Lage der Welle, und in diesem Sinne unterscheidet man

Lager für liegende Wellen,
Lager für stehende Wellen.

Die Lager für liegende Wellen heifsen vorzugsweise Zapfenlager, die Lager für die untern Zapfen stehender Wellen aber nennt man Spurlager. Das Lagerfutter der Spurlager ist nur in den seltensten Fällen, allenfalls bei ganz leichten Spindeln von Holz, in den bei weitem meisten Fällen aber von Metall.

Die Axe der Lagerhöhlung mufs stets sehr genau mit der geometrischen Axe des Zapfens zusammenfallen. Da nun die Aufstellung des Zapfenlagers nur in seltenen Fällen gleich von Hause aus so richtig erfolgen kann, dafs dieser Bedingung genügt wird, und da ferner selbst während des Betriebs der Maschine durch Senkung oder Verschiebung der Unterstützungen Abweichungen zwischen diesen beiden Axen vorkommen können, so mufs jeder Lagerkörper so konstruirt sein, dafs man durch sehr geringe Verschiebung desselben die genaue Einstellung der Lagerhöhlung bewirken kann. Sobald man nun das Lager richtig eingestellt hat, mufs man den Lagerkörper in der passenden Lage befestigen können.

Die Einstellung und die Befestigung des Lagerkörpers in der richtigen Lage geschieht meist entweder durch Keile oder durch Schrauben; man nennt diese Befestigungsmittel dann „Stellkeile“ beziehlich „Stellschrauben“.

Die Anordnung der Zapfenlager ist noch wesentlich bedingt:

a) durch die Richtung des resultirenden Druckes, welcher durch den Widerstand des Lagers aufgehoben werden soll, und

b) durch die Lage der fixen Punkte, die man zur Unterstützung des Lagers gewinnen kann.

In erster Beziehung ist der Fall, wo der Druck nur in der Richtung der Axe wirkt, von dem zu unterscheiden, wo er normal zur Axe wirkt, oder wo er mit der Richtung der Axe einen spitzen Winkel macht. Wir wollen diese drei Fälle bezeichnen:

1) als Zapfenlager mit Längendruck,
2) - - - Seitendruck,
3) - - - schiefem Druck.

Bei der Konstruktion der Zapfenlager ist auf die Richtung des Druckes sehr genau Acht zu geben; man mufs dieser Richtung die gröfste Widerstandsfähigkeit des Lagers entgegenstellen, und man mufs dabei zugleich darauf sein Augenmerk lenken, dafs die Richtung des Druckes womöglich stets normal gegen die Unterstützungs-Ebene des Lagers falle. In allen Fällen ist freilich diese Bedingung nicht zu erfüllen, dann aber mufs man dafür sorgen, dafs der Druck mit genügender Sicherheit im *Gleichgewicht* erhalten werde.

Was die oben unter b) angeführte Lage der fixen Punkte, die man zur Unterstützung des Lagers gewinnen kann, anbetrifft, so pflegt man dieselben entweder von unten her, d. h. unmittelbar von dem Fndament oder dem Fufsboden aus zu erhalten, oder man mufs sie von der Decke her oder von der Seite her zu erlangen suchen. Hiernach pflegt man die Anordnung der Zapfenlager verschieden zu benennen. Man hat stehende, *hängende*, seitwärts unterstützte Lager, sowohl für *liegende* als für stehende Wellen. Wenn die Entfernung des Lagerkörpers von den für die Unterstützung zu gewinnenden fixen Punkten in einem gewissen Grade beträchtlich ist, so pflegt man aufser dem Lagerkörper noch sogenannte Lagergerüste anzuordnen. Dieselben sind entweder mit dem Lagerkörper aus einem Stück, oder man konstruirt sie als besondere Theile. Für stehende Lager nennt man diese Gerüste Böcke oder Ständer; für hängende Lager heifsen sie Hängeböcke oder Stühle, für seitwärts unterstützte Lager sind es meistens Konsole.

Wenn man zwischen zwei Säulen oder zwischen zwei Wänden einen *Querbalken befestigt*, um darauf den Lagerkörper zu stellen, so *nennt man einen solchen Querbalken einen Steg*; wenn man dagegen einen Querbalken zu demselben Zwecke durch ein Paar horizontaler Balken unterstützt und ihn auf diesen befestigt, so nennt man den Querbalken ein Angewelle (Angewäge, Angeweihe) und die das Angewelle unterstützenden horizontalen Balken die Streckschwellen oder die Schwellen.

Um Zapfenlager durch Mauerwerk von unten her zu unterstützen, pflegt man entweder einzelne Pfeiler aufzumauern, und darauf eine Fundament- oder Lagerplatte von Eisen zu legen, oder man befestigt eine solche Platte in der Oeffnung einer Mauer (Mauerplatte). Ist die Mauer von geringer Stärke, so thut man besser, einen vollständigen eisernen Rahmen oder eine Zarge in derselben anzubringen, welche dann Mauerkasten oder Lagerkasten, Lagerzarge genannt wird.

Beispiele zu den eben angeführten Konstruktionen bieten die Tafeln 25 und die folgenden in hinreichender Anzahl.

Hölzerne Zapfenlager.

Konstruktion der hölzernen Zapfenlager.

§ 117. Die hölzernen Zapfenlager, d. h. diejenigen Zapfenlager, deren Lagerkörper von Holz ist, kommen meist nur in gröfseren, und nicht besonders exakt konstruirten Maschinen vor; sie haben den Uebelstand, dafs sie gewöhnlich viel Raum erfordern, und dafs sie wegen der Wandelbarkeit des Holzes im Verlauf der Zeit die richtige Lage der Welle beeinträchtigen. Dennoch wendet man sie häufig noch in Mühlen und in solchen mechanischen Fabriken an, wo man hölzerne Wellen, oder hölzerne freistehende Gerüste zur Unterstützung der Lagerfutter anzuwenden pflegt; sie bieten dann den Vortheil der Einfachheit und Billigkeit und zeichnen sich noch dadurch aus, dafs sie eine gewisse Elasticität und Nachgiebigkeit besitzen, welche bei vorkommenden Stöfsen, die in roher gearbeiteten Maschinen nicht zu vermeiden sind, von Wichtigkeit ist. Die hölzernen Zapfenlager haben ferner noch den Vortheil, dafs sie von weniger geübten Arbeitern in gutem und brauchbarem Stande erhalten werden können, dafs sie sich leichter und ohne Hilfe von Maschinenfabriken durch Mühlenbauer oder Zimmerleute herstellen und ergänzen lassen, und dafs sie in vielen Fällen in sehr einfacher Weise da angewandt werden können, wo eine Eisenkonstruktion schwierig und komplizirt werden würde.

Auf Tafel 25 sind einige Konstruktionen für hölzerne Lagergerüste dargestellt.

Taf. 25. Fig. 1 zeigt die gewöhnliche Anordnung eines hölzernen Zapfenlagers für Wasserradwellen und ähnliche schwere liegende Wellen. Fig. 1a zeigt die Ansicht nach der Richtung der Welle, Fig. 1b diejenige von Oben gesehen, und Fig. 1c die Ansicht von der Seite. Das Angewelle *A* von Eichen- oder von Kienenholz trägt das Lagerfutter *B*; dieses ist hier wie in den sämmtlichen auf diesem Blatte dargestellten Beispielen von Holz; man könnte indessen an der Stelle dieses Lagerfutters auch ein metallenes oder ein vollständiges eisernes Zapfenlager auf dem Angewelle befestigen. Das Zapfenlager ist für eine hölzerne Taf. 25. Fig. 1.

Welle konstruirt, in welche ein eiserner Zapfen eingelegt ist, der mit seiner Walze in der Lagerhöhlung läuft (vergl. Tafel 13. Fig. 17 u. folg.). Da nun die Walze des eisernen Zapfens bedeutend schwächer ist, als die hölzerne Welle, so müfste man das Lagerfutter entweder an der äufsersten Kante des Angewelles befestigen, oder man mufs das Angewelle, wie die Figuren 1a, 1b und 1c zeigen entsprechend ausschneiden, damit in dem runden Ausschnitt das Ende des hölzernen Wellenhalses frei sich bewegen könne. Die letzte Anordnung ist namentlich bei schweren Wellen vorzuziehen; denn, obwohl das Angewelle durch den Ausschnitt wesentlich geschwächt wird, so behält es doch eine gröfsere Stabilität; wollte man nämlich das Lagerfutter an der äufsersten Kante des Angewelles befestigen, damit die Stirnfläche der Welle vor dem Angewelle sich bewegen könne, so würde das Angewelle leicht kippen können, und dadurch die Sicherheit der Unterstützung gefährden. Das Angewelle ruht auf den beiden Streckschwellen *C C'*, die wiederum auf Mauerwerk, oder wie z. B. bei dem äufsern Lager von Wasserradwellen auf Holmen oder Rähmen von Gerinnewänden *D D'* befestigt sind. Nach den in dem vorigen Paragraphen aufgestellten Grundsätzen mufs das Lager verstellbar sein, damit dasselbe genau in die richtige Lage gebracht, und darin befestigt werden könne. Dies ist hier auf folgende Weise erreicht: Das Angewelle liegt auf den Streckschwellen zwischen zwei Knaggen, die, wie Fig. 1c zeigt, mittelst eiserner Nägel auf den Streckschwellen befestigt sind; der Zwischenraum zwischen diesen beiden Knaggen ist um mehrere Zoll gröfser, als die Breite des Angewelles und wird auf jeder der Streckschwellen durch je zwei Holzkeile *EE, E'E'* ausgefüllt. Wenn diese Holzkeile fest eingetrieben sind, so sichern sie das Angewelle gegen Verschieben, indessen kann man durch entsprechendes Lösen der Keile auf der einen Seite und durch Antreiben der andern Keile das Angewelle nicht nur nach der Richtung der Welle verschieben, sondern auch die Lage desselben so reguliren, dafs die Axe der Lagerhöhlung genau parallel mit der Axe des Zapfens werde. Das Verschieben des innern Angewelles bei Wassermahlmühlen bezeichnen die Müller mit der Benennung „zu Mehl“ und „zu Wasser“ jenachdem das Angewelle in der Richtung nach der Mühle hin oder nach dem Wasserrade hin durch die Keile gezogen wird. Die Konstruktion gestattet aber noch eine Verschiebung des Angewelles nach Richtungen, die normal zur Welle sind, und die bei Wassermühlen gewöhnlich mit „Wasser auf!“ und „Wasser unter!“ bezeichnet werden. Um diese Verschiebung zu bewirken dienen die beiden Keile F und F'. Das Angewelle ist nämlich da, wo es auf den Streckschwellen liegt ausgeschnitten; es bilden sich neben den Streckschwellen zwei Ansätze, und zwischen diese Ansätze und die Streckschwellen werden die Keile F und F' eingetrieben. Die Ausschnitte für die Keile sind schwalbenschwanzförmig, damit beim Lösen des einen oder des andern Keiles derselbe nicht sofort herausfalle, sondern zwischen den Ansätzen hängen bleibe.

Taf. 25. Fig. 2 zeigt eine etwas veränderte Einrichtung derselben Konstruktion; und zwar Fig. 2a eine Ansicht des Lagers in der Richtung der Welle, Fig. 2b eine Ansicht desselben in der Richtung normal zur Welle, und Fig. 2c einen Durchschnitt durch die Mitte des Lagers und zwar mittelst einer Ebene, die durch die Axe der Welle geht. Das Angewelle A mit dem in ähnlicher Weise wie Fig. 1 angeordneten Lagerfutter B liegt hier in Einschnitten, die in den Streckschwellen CC angebracht sind, und gegen deren Absätze die Keile EE in gleicher Weise eingetrieben sind, wie in der vorigen Figur gegen die Knaggen. Die Einrichtung der Keile F ist unverändert, wie in Fig. 1. Taf. 25. Fig. 2.

Wenn man veranlafst ist, das Angewelle gegen Kippen oder auch gegen Aufheben, also gegen einen von unten nach oben wirkenden Druck sicher zu stellen, kann man die Konstruktion in der in Fig. 3 auf Taf. 25 dargestellten Weise abändern. Das Angewelle A ist hier an beiden Enden gabelförmig ausgeschnitten; die Streckschwellen CC' sind mit Schlitzen versehen, durch welche man die untern Schenkel dieser Gabeln durchschiebt. Da die Schlitze in den Streckschwellen breiter sind, als die Gabelschenkel oder Zapfen des Angewelles, so gewähren sie noch den nöthigen Platz, um die Keile EE' darin anzubringen, durch welche das Angewelle in der Richtung der Wellaxe verschoben werden kann, während die Keile FF' dazu dienen das Angewelle in der hierzu normalen Richtung anzuziehen und es demnächst zu befestigen. Taf. 25. Fig. 3.

Die hier dargestellten Angewelle lassen sich vermittelst der Keile in der horizontalen Ebene nach zwei auf einander normalen Richtungen verschieben. Zuweilen ist es erforderlich die Verschiebung auch in der vertikalen Ebene herbeizuführen, und dann kann man die in den Figuren 4, 8 und 9 angegebenen Konstruktionen wählen.

Taf. 25. Fig. 4 zeigt ein kleines hölzernes Lager, welches nach der vertikalen und nach einer horizontalen Richtung verstellbar ist. Das Lagerfutter bildet zugleich den Steg A; die Lagerhöhlung Taf. 25. Fig. 4.

umschliefst den ganzen Zapfen, und es ist daher die obere Hälfte derselben in dem Lagerdeckel *B* angebracht, der durch Schraubenbolzen mit dem Lagerfutter zusammenhängt. Das Lagerfutter mit seinen beiden Enden liegt zwischen zwei hölzernen Knaggen *CC*, die an ein Gerüst, oder an eine Wand angebolzt sind; der von den Knaggen gebildete Schlitz ist höher, als das Lagerfutter, und die solchergestalt gebildeten Zwischenräume sind durch die Keile *EE*, *E'E'* ausgefüllt, durch welche man das Lager heben und senken, demnächst aber in der richtigen Höhenlage befestigen kann. Uebrigens bemerkt man in Fig. 4d dafs die Schlitze für die Zapfen des Lagerfutters schmaler sind, als das Lagerfutter selbst; es sind also die Zapfen mit Brüstungen versehen, und die durch diese Brüstungen gebildeten Ansätze dienen als Widerlager für die Keile *FF'* durch welche man die horizontale Verschiebung bewirken kann; auch hier sind die Querschnitte der Keile so gewählt, dafs diese gegen Herausfallen nach vorne gesichert sind. Es ist Fig. 4a eine Ansicht des Lagers nach der Richtung der Welle, Fig. 4b eine Ansicht von einem Ende, also normal zur Welle, Fig. 4c ein Durchschnitt durch die Mitte des Lagers, und zwar in einer Ebene, die durch die Axe der Welle geht, Fig. 4d eine obere Ansicht des Lagers. Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{8}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Taf. 25. Fig. 5. Taf. 25. Fig. 5 zeigt ein hölzernes Zapfenlager, welches behufs Ausrückung der Welle seitwärts verschoben werden kann. Das Angewelle *A* mit dem Lagerfutter *B* liegt der ganzen Länge nach auf einer Schwelle *D*, nach deren Richtung es sich mittelst eines Rückhebels *G* hin- und herschieben läfst. In der Schwelle *D* ist bei *a* ein hölzerner Zapfen befestigt, der in eine entsprechende Nuth, die sich in der untern Fläche des Angewelles befindet eingreift, und der nicht nur verhindert, dafs das Angewelle zur Seite von der Schwelle herabgleite, sondern auch den Betrag der möglichen Längen-Verschiebung feststellt. Der Rückhebel setzt sich unten in eine Vertiefung in der Schwelle ein, ist oberhalb des Angewelles mit zwei Knaggen oder Zapfen versehen und greift mit diesen zwischen zahnartige Zapfen des Angewelles. Fig. 5a stellt die Ansicht nach der Richtung der Welle dar, Fig. 5b die obere Ansicht, und Fig. 5c den Durchschnitt durch Schwelle und Angewelle gerade durch die Vertiefung in der Schwelle, welche zum Einsetzen des Hebels dient. Der Rückhebel ist in Fig. 5b und 5c herausgenommen gedacht. Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{24}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Auf Taf. 25. Fig. 6 ist ein hölzernes Lagerfutter gezeichnet, wie solches bei derartigen hölzernen Zapfenlagern gebräuchlich ist. Man wählt dazu ein möglichst hartes und zähes Holz. Von inländischen Hölzern eignet sich zur Herstellung von Lagerfuttern am besten das Weifsbuchenholz; man wählt dazu möglichst durchwachsene Stücke aus, und bearbeitet sie immer so, dafs die Höhlung des Lagerfutters in ihrer Oberfläche möglichst viel Hirnholzfasern hat, besonders in der Richtung, gegen welche der Druck des Zapfens gerichtet ist. Damit das Lagerfutter nicht seitwärts kippe oder sich aus dem Angewelle heraushebe, arbeitet man es gewöhnlich schwalbenschwanzförmig, und schiebt es auf den Grath (Th. I. S. 180. § 84. No. 6) in das Angewelle ein, wie dies aus den Figuren 1a, 2a, 3a, 5a, 7a bis 9a zu ersehen ist. Fig. 6a ist die obere Ansicht, 6b die Vorderansicht, und 6c der Querschnitt des hölzernen Lagerfutters, sämmtliche Figuren in $\frac{1}{8}$ der natürlichen Gröfse. Taf. 25. Fig. 6.

Taf. 25. Fig. 7 zeigt ein hölzernes Bocklager. Der Steg A ist hier nicht zum Verstellen eingerichtet; er wird durch ein Paar Stiele CC unterstützt, die in die Streckschwelle D eingezapft, und gegen diese, wie gegen die Unterlagsschwellen EE gehörig verstrebt sind. Fig. 7a ist die Vorderansicht, 7b die Seitenansicht, beide in $\frac{1}{32}$ der natürlichen Gröfse. Will man den Steg verstellbar haben, so kann man eine der beiden folgenden Konstruktionen wählen. Taf. 25. Fig. 7.

Taf. 25. Fig. 8 zeigt einen hölzernen, zwischen zwei Säulen in der Weise verstellbaren Steg, dafs sich derselbe heben und senken und nach rechts und links hin verschieben läfst. Die beiden Säulen CC' sind auf eine gewisse Länge mit Schlitzen versehen; der Steg hat an beiden Enden lange Schlitzzapfen, welche durch die Schlitze hindurch reichen, aber niedriger sind, als die Schlitze; die Zwischenräume, welche zwischen diesen Zapfen und den Wandungen der Schlitze oben und unten bleiben, sind durch Keile geschlossen, und man sieht leicht, wie durch diese vier Keile $EEE'E'$, wenn man die entsprechenden derselben löst, die andern antreibt, das Heben und Senken des Stegs bewirkt werden kann. Die Verschiebung nach der Seite wird durch vier andere Keile $FFF'F'$ hervorgebracht. Die Schlitzzapfen des Steges sind nämlich nach der Dicke geächselt (Th. I. S. 176. § 82. No. 5). Die Achseln oder Brüstungen, welche sich bilden, haben von den Säulen CC' einen gewissen Abstand, und dieser ist durch Keile ausgefüllt. Auch hier haben die Keile einen schwalbenschwanzförmigen Querschnitt, weil sie sonst leicht beim Lösen herausfallen könnten. Fig. 8a zeigt die Vorderansicht der Konstruktion, Fig. 8b die obere An- Taf. 25. Fig. 8.

sicht des Steges, und die Säulen im Durchschnitt durch den Schlitz, Fig. 8c ist die Ansicht von einer Säule her, die Keile $F'F'$ liegen hinter der Säule und sind in dieser Figur verdeckt. Alle drei Figuren sind in $\frac{1}{24}$ der natürlichen Gröfse.

Wenn man leichtere Konstruktionen, namentlich Säulen und Steg von geringerer Stärke anwenden will, so empfiehlt sich die
Taf. 25. Fig. 9. Anordnung in Fig. 9 auf Taf. 25. Der Steg ist hier nur so stark, wie die Zapfen in der vorigen Figur, d. h. er besteht aus einem Bohlstück, das in seiner ganzen Stärke durch den Schlitz hindurch reicht; der Schlitz selbst ist gebildet, indem die Säulen CC' nur an einer Seite um einen geringen Theil der Dicke des Steges ausgeschnitten sind, und der übrige Theil des Ausschnittes sich in hölzernen an die Säulen angeschraubten Laschen befindet. Die Verstellung der Höhenlage des Steges ist ganz wie in der vorigen Konstruktion (Fig. 8 auf Taf. 25). Dagegen mufs hier das Verschieben nach der Seite auf andere Weise bewirkt werden, als dort, da die Zapfenbrüstungen fehlen. Man hat daher die Keile FF' horizontal gestellt, und sie in Oeffnungen gesteckt, welche quer durch das Bohlstück, welches den Steg bildet, neben den Säulen angeordnet sind. Fig. 9a zeigt die Vorderansicht, 9b die Ansicht von der Seite, und 9c die obere Ansicht, in welcher die Säulen über dem Schlitz durchschnitten sind. Die Figuren sind in $\frac{1}{24}$ der natürlichen Gröfse.

Es braucht wohl kaum besonders hervorgehoben zu werden, dafs die Säulen CC' in den Figuren 8 und 9, welche oben abgebrochen gezeichnet sind, nicht freistehend, sondern oben in der Decke befestigt zu denken sind. Wollte man die Säulen freistehend machen, so müfste man sie nach Anleitung der Fig. 7 verstreben.

Auch Hängelager lassen sich in Holz konstruiren, wie dies die Figuren 2 und 3 auf Tafel 30 zeigen, welche weiter unten beschrieben werden sollen.

Metallene Zapfenlager.

Material für die Lagerfutter.

§ 118. Die Lagerfutter der metallenen Zapfenlager werden, wie wir bereits in § 116 gesehen haben, entweder aus Holz, oder aus Metall konstruirt. Wenn man die Lagerfutter aus Holz macht, so wählt man dazu entweder, wie bei den hölzernen Zapfenlagern Weifsbuchenholz, oder man nimmt eine der festen ausländischen Holzarten, unter denen für den vorliegenden Zweck die gebräuchlichsten und empfehlenswerthesten das Buchsbaumholz und das Pockholz sind. Beide Holzarten haben ein sehr dichtes Gefüge.

Das Buchsbaumholz gehört zu den europäischen Holzarten, und zwar ist es das dichteste und schwerste der in Europa vorkommenden Hölzer; es ist von blafsgelber Farbe, oft auch in die tiefere gelbe Färbung übergehend; es hat sehr dichte und feine Jahresringe und ungemein feine Spiegel; das Buchsbaumholz kommt von dem hochstämmigen Buchsbaum (*Buxus sempervirens aborescens*), welcher in dem südlichen Europa heimisch ist, und dort in Stämmen von ziemlich beträchtlicher Stärke vorkommt.

Das Pockholz (*Lignum sanctum*, auch Franzosenholz oder Guajakholz genannt) ist eine amerikanische Holzart, und gehört zu den schwersten und dichtesten bekannten Hölzern. Die Farbe ist grünlichbraun, zuweilen in das Schwarzbraune übergehend; parallel mit den Holzfasern zeigen sich Streifen von gelber und schwarzer Farbe; der Splint ist bedeutend heller als der Kern, und fällt oft in das Blafsgelbe oder schmutzig Weifse. Das Holz selbst ist sehr stark mit Harz durchzogen, daher es sich auch bei der Bearbeitung, namentlich in den Sägespähnen fettig anfühlt, und so gewissermaafsen eine eigenthümliche Schmiere besitzt, die es für die Anwendung zu Lagerfuttern sehr geeignet macht. Es ist übrigens sehr schwer zu bearbeiten, fast gar nicht spaltbar und sehr spröde. Das Pockholz kommt von dem Guajakbaum (*Guajacum officinale*), welcher in Mittelamerika heimisch ist.

Für die Stellung der Holzfasern in den Lagerfuttern, und für die Auswahl der zu diesen Maschinentheilen besonders geeigneten Stücke gelten die in dem vorigen Paragraphen (S. 283) aufgestellten Vorschriften.

Die hölzernen Lagerfutter zieht man gewöhnlich den metallenen da vor, wo man das Zapfenlager nicht sicher genug gegen eindringenden Staub und Sand schützen kann, und wo man demzufolge häufige Abnutzung zu befürchten hat, ferner wo die Zapfenlager chemischen Einflüssen, z. B. sauren Dämpfen u. s. w. ausgesetzt sind, welche für das Metall nachtheilig sind, und eine Oxydation der Oberfläche bedingen würden; ferner sind die hölzernen Lagerfutter auch in vielen Fällen billiger herzustellen, leichter zu bearbeiten und leichter zu ergänzen, als metallene, und endlich kann man wohl zuweilen veranlafst sein die Einflüsse, die durch die Berührung zweier verschiedener Metalle entstehen, zu vermeiden, und aus diesem Grunde das metallene Lagerfutter durch ein hölzernes zu ersetzen.

Was nun die metallenen Lagerfutter anbetrifft, so ist bei der Auswahl des Metalles vorzugsweise die in § 114. S. 274 unter No. 3 aufgestellte Bedingung maafsgebend. Die Ansichten und die Erfahrungen über das in bestimmten Fällen beste Lagermetall sind noch aufserordentlich abweichend und unsicher. Nicht wenig trägt zu dieser Unsicherheit altes Herkommen und Gewohnheit bei, von der man sich nicht loszumachen wagt, und für welche man ein Vorurtheil besitzt.

Früher brauchte man als Lagermetall vorzugsweise, oder fast ausschliefslich Legirungen von Kupfer, in neuerer Zeit hat man mit ziemlich günstigem Erfolg, namentlich für schmiedeeiserne Zapfen, gutes, sowohl graues als weifses Gufseisen angewandt, endlich hat man anstatt der Kupferlegirungen auch Legirungen von Wismuth und von Antimon zur Anwendung gebracht.

Die Kupferlegirungen welche man für Lagerfutter anwendet sind Messing, Bronze und Rothgufs.

Messing ist Kupfer und Zink.

Bronze ist Kupfer und Zinn.

Rothgufs ist Kupfer, Zinn und Zink, oder Messing und Bronze.

Das reine Messing eignet sich wegen seiner Sprödigkeit nicht wohl zu Lagerfuttern; es hat nämlich die üble Eigenschaft, dafs sich leicht einzelne Körnchen unter Einwirkung der Reibung ablösen, und nun sich zwischen den Zapfen und das Lagerfutter drängen, dadurch aber nicht nur Veranlassung zu vermehrter Reibung, sondern auch zur Abnutzung des Zapfens und des Lagerfutters geben, indem sich Rinnen und Vertiefungen in diese Theile einschleifen. Man sagt, wenn das Lager oder der Zapfen auf solche Weise angegriffen werden, sie „fressen“ einander.

Das Gufseisen ist für schmiedeeiserne Zapfen, welche nur einen mäfsigen Druck auf die Unterlage ausüben, und welche sich mit keiner sehr bedeutenden Geschwindigkeit bewegen, ein sehr geeignetes Lagermetall, es ist porös genug, um die Schmiere in einem gewissen Grade an der Oberfläche einzuziehen und diese daher immer fettig zu erhalten, es läfst sich leicht bearbeiten und ist vor allen Dingen sehr viel wohlfeiler, als irgend eine Metall-Legirung von Kupfer.

Die Rezepte, welche man für Kompositionen zu Lager-Metallen angegeben hat, sind sehr zahlreich; es lassen sich kaum bestimmte Verhältnisse als allgemein giltige feststellen, da die Sorgfalt in der Anfertigung, die Genauigkeit der Aufstellung und der Beaufsichtigung, der Zweck und die Geschwindigkeit, namentlich aber der Druck des Zapfens von aufserordentlichem Einflufs auf die Haltbarkeit und die Bewährung des Lagerfutters sind. Wir lassen jedoch hier eine Zusammenstellung einiger Metallkompositionen folgen, die nicht nur zu Zapfenlagern, sondern auch zu manchen andern Gegenständen des Maschinenbaues, namentlich für verbindende Maschinentheile geeignet sind, und die wir hier des Zusammenhanges wegen mit aufführen.

1) *) *Kupfer* 80; *Zinn* 18; *Zink* 2;

Treibradlager für Lokomotiven; fast weifs, dichtkörnig, sehr hart, doch ohne Schwierigkeit zu bearbeiten. Der Zinkzusatz soll die Festigkeit vermehren, indem er dem Bersten des Lagers vorbeugt.

2) *Kupfer* 82; *Zinn* 16; *Zink* 2;

Lagerfutter für Lenkerstangen, Farbe wenig röthlich; Bruch zeigt ein dichtes Korn, grofse Festigkeit; geschmeidiger als No. 1.

3) *Kupfer* 83; *Zinn* 15; *Zink* 1,5; *Blei* 0,5;

zu Lagern, welche Stöfse auszuhalten und sehr starke Reibung zu ertragen haben.

4) *Kupfer* 87; *Zinn* 12; *Antimon* 1;

zu den Ventilkugeln und zu andern Theilen, an welchen Löthungen mit Schlagloth vorkommen (bei den Ventilkugeln wird das Luftloch verlöthet). Von rothem, fein körnigem Bruch und sehr geschmeidig.

5) *Kupfer* 88; *Zinn* 10; *Zink* 2;

zu Pumpencylindern, zu Ventilgehäusen und zu Hähnen. Der Bruch ist blafsroth, die Legirung läfst sich sehr gut feilen und poliren.

6) *Kupfer* 84; *Zinn* 14; *Zink* 2;

Legirung der vorigen ähnlich; sehr geeignet für die Ringe von Excentriks.

7) a) *Kupfer* 80; *Zinn* 18; *Antimon* 2;

b) *Kupfer* 81; *Zinn* 17; *Antimon* 2;

beide Legirungen eignen sich für Dampfpfeifen; die Legirung a) giebt einen helleren Ton, als b); beide sind zwar hart, aber gut zu drehen und zu feilen.

---

*) Die Legirungen 1 bis 12 sind nach Angaben von Lafond in der Giefserei zu Aubin.

8) *Kupfer* 98; *Zinn* 2;

die Legirung läfst sich schmieden, wie reines Kupfer; das Zinn verhindert, dafs beim Giefsen Blasen entstehen.

9) *Kupfer* 78; *Zinn* 20; *Zink* 2;

zu Lagern für Eisenbahnfahrzeuge. Man kann das Zinn weglassen (so dafs bleibt: *Kupfer* 97,5; *Zink* 2,5); die Legirung ist dann mehr porös, aber sonst ebenso gut.

10) *Kupfer* 25; *Zinn* 5; *Gufseisen* 70;

zu demselben Zweck, aber viel wohlfeiler, von weifsgrauer Farbe, ein wenig ins Gelbliche gehend, aber von gröfserer Festigkeit wie No. 9.

11) *Antimon* 50; *Blei* 30; *Zink* 20;

graues Lagermetall von geringer Härte, aber ungemein glatt; durch Sandkörner leicht geritzt und verdorben.

12) *Antimon* 10; *Blei* 50; *Zink* 40;

Metall zu kleinen Zahnrädern, deren Zähne auf der Maschine eingeschnitten werden.

13) *Kupfer* 5,5; *Zinn* 14,5; *Zink* 80;

Fentons Legirung für Zapfenlager, läfst sich in eisernen Kesseln schmelzen, ist leicht zu bearbeiten und soll 50 Prozent billiger als Messing sein.

14) *Kupfer* 22,2; *Zinn* 33,3; *Antimon* 44,4;

Legirung zu Lagerfuttern.

15) *Kupfer* 13,3; *Zinn* 73,3; *Antimon* 13,3;

desgleichen, etwas weicher als die vorige.

16) *Kupfer* 5,5; *Zinn* 83,3; *Antimon* 11,1;

17) *Kupfer* 2; *Zinn* 80; *Antimon* 18;

Beide ebenfalls zu Lagerfuttern.

18) *Antimon* 5,0; *Blei* 10,0; *Zinn* 35,0; *Zink* 50;

Diese von Dalton angegebene Legirung eignet sich z. B. für die Lager der Glätt- und Druckwalzen in Kattunfabriken.

Materialien zum Schmieren (Schmiermittel).

§ 119. Um die Reibung zwischen dem Lagerfutter und dem Zapfen möglichst gering zu machen, müssen die Zapfen geschmiert werden. Ueber den Einflufs der Schmiere auf den Werth des Reibungs-Koeffizienten sind bereits in § 95. No. 6. S. 196 Angaben gemacht und in § 106. S. 245 finden sich die wichtigsten Versuche über die Gröfse desselben zusammengestellt.

Die zum Schmieren der Zapfenlager und der andern verbindenden Maschinentheile angewandten Schmiermittel sollen im Allgemeinen einen doppelten Zweck erfüllen.

1) soll die Schmiere die Reibungswiderstände vermindern;
2) soll dieselbe die Erwärmung und die daraus entspringende Abnutzung der reibenden Maschinentheile beseitigen.

Jenachdem die eine oder die andere Rücksicht in den Vordergrund tritt, und endlich mit Betracht des Kostenpreises der verschiedenen Schmiermittel pflegt man die Auswahl derselben zu treffen. Im Allgemeinen unterscheidet man flüssige Schmiermittel und feste Schmiermittel.

Flüssige Schmiermittel.

a) Das einfachste und billigste Schmiermittel ist kaltes Wasser; da dasselbe aber zwischen den reibenden Maschinentheilen sich bald erwärmen und dann verdampfen würde, so läfst es sich nur da anwenden, wo es kontinuirlich ergänzt werden kann, wo man also mittelst einer Wasserleitung das Wasser stets in reichem Maafse zuführen kann, und wo zugleich die Möglichkeit geboten ist, das gebrauchte Wasser zu entfernen, ohne dafs es in den Maschinenräumen Unreinigkeit und schädliche Nässe verbreitet. Aufserdem ist zu bemerken, dafs das Wasser nur Anwendung finden sollte, wenn die Maschinen lange Zeit hinter einander im Gange sind, und sich nach eintretendem Stillstande leicht von dem anhängenden Wasser reinigen lassen, weil sonst das Wasser Veranlassung zum Rosten der Zapfen giebt. In Walzwerken, bei schweren Wasserrädern und in ähnlichen Fällen wendet man das Wasser besonders mit grofsem ökonomischem Vortheil an; freilich ist der Reibungs-Koeffizient für Wasserschmiere nicht unbeträchtlich höher, als für Oelschmiere.

Andere flüssige Schmiermittel sind die Fette und die nicht trocknenden fetten Oele. Man unterscheidet dieselben als animalische und vegetabilische Schmieren.

b) Die animalischen Schmiermittel sind die von Thieren herrührenden dünnflüssigen und nicht leicht gerinnenden Fette, namentlich Klauenfett, welches aus den Markknochen der Thiere durch Kochen ausgeschieden wird; Ochsenpfotenfett, Kammfett; diese Fette bilden sehr gute, lang wirksam bleibende und sehr reine Schmieren; sie greifen die Maschinentheile nicht an, enthalten nicht, wie die vegetabilischen Schmieren beigemischte Stoffe, werden an der Luft nicht trocken und zähe, und werden daher bei solchen Maschinen gebraucht, bei denen es auf besonders sorgfältige Schmiere ankommt.

c) Als vegetabilische Schmiermittel werden fast alle fetten Oele benutzt, die nicht zu den trocknenden, Firnisse bildenden Oelen gehören, namentlich das Rüböl, besonders aber Olivenöl (Baumöl). Das Baumöl ist gewöhnlich an und für sich reiner als das Rüböl, da letzteres im ungereinigten Zustande eine Menge Pflanzenschleim und Pflanzeneiweifs enthält, im gereinigten Zustande aber nicht selten noch Spuren von Schwefelsäure, die man zum Reinigen des Rüböls braucht, besitzt, wodurch die Maschinentheile angegriffen werden.

Feste Schmiermittel.

Als feste Schmiere braucht man gewöhnlich Talg, Schweinefett, Butter, Seife, sowohl harte als sogenannte grüne oder schwarze Seife, selten Holztheer und fettige Harze. — Für Holzwerk, z. B. für hölzerne Radzähne benutzt man Graphit (Wasserblei). Man könnte diese Schmiermittel einfache nennen, im Gegensatz zu den zusammengesetzten, oder künstlichen Schmiermitteln, für die es eine ganz aufserordentliche Menge von Rezepten giebt. Es kann hier unmöglich die Absicht sein, auch nur den gröfsten Theil dieser Rezepte zusammenzustellen, indessen wollen wir als Beispiele einige der bekanntesten hier anführen:

Ein Theil Kammfett und zwei Theile Baumöl läfst man mit einem Theil Seife zergehen, und erhält dadurch eine sehr gute Schmiere für Zapfen. Ein Zusatz von etwa noch einem Theil Wasserblei macht die Schmiere für hölzerne Radzähne sehr geeignet.

Vier Theile Kammfett, ein Theil Thran und ein Theil Talg geben eine gute Schmiere für Zapfen, die sich auch zum Einfetten der Maschinenriemen eignet.

Booths Patentschmiere für Eisenbahnwagen-Axen. Ein halbes Pfund gewöhnliche Soda wird in vier Quart Wasser mit 3 Pfund reinem Talg und 6 Pfund Palmöl (oder auch 8 Pfund Talg und 10 Pfund Palmöl) gemischt, und bis zur Siedehitze des Wassers erwärmt. Hierauf wird es fortwährend umgerührt, bis es auf etwa 12 bis 15 Grad Réaumur abgekühlt ist.

72 Pfund Talg und 36 Pfund Palmöl werden mit 18 Quart Wasser eingeschmolzen, und in diese Masse nach und nach 16 Quart Rüböl, sowie eine Lösung von $4\frac{1}{2}$ Pfund Soda mit 56 Quart Wasser, die in einem besonderen Gefäfse bereitet sein mufs, gegossen. Nachdem das Ganze $2\frac{1}{2}$ Stunden gekocht hat, läfst man es

durch ein Sieb laufen, um die Unreinigkeiten, welche der Talg und die Oele enthalten, auszuscheiden. Diese Schmiere wird unter andern für die Zapfenlager der Eisenbahnfahrzeuge, namentlich in Belgien angewandt.

Eine Schmiere aus Rüböl und Kautschuk soll für feinere Maschinen anstatt des Klauenfettes sich sehr gut eignen; sie wird erhalten, wenn man 50 Gewichtstheile Rüböl mit 1 Gewichtstheil Kautschuk, welches in sehr kleine Stückchen geschnitten ist, zusammen kocht.

Zum Schmieren eiserner und hölzerner Radzähne wird ein Gemenge von Talg mit $\frac{1}{10}$ sehr fein gepulvertem Glas (Glasstaub) empfohlen. Die Holzzähne sollen mehr als doppelt so lange halten, als wenn sie nur mit Talg und Graphit geschmiert werden.

Talg und gesiebte Asche mit etwas Wachs geschmolzen, giebt ebenfalls eine sehr gute Schmiere für Radzähne und für hölzerne Zapfenlager.

Zwei Gewichtstheile Talg, ein Theil Graphit und ein Theil Schwefel. Diese Schmiere eignet sich ganz besonders für die im vorigen Paragraphen unter No. 18 angegebene Lagerlegirung, und überhaupt für Zapfen, welche geneigt sind warm zu laufen.

Zwanzig Theile erwärmtes Schweinefett mit zwei Theilen fein gepulvertem Schwefel geben eine Schmiere, die ebenfalls sehr geeignet ist das Warmlaufen der Zapfen zu verhüten.

Die Anwendung des Schwefels (Schwefelblüthe) in der Schmiere, ist ein bekanntes Mittel, nicht allein die Erwärmung des Zapfens zu verhüten, sondern auch Zapfen, die heifs geworden sind, abzukühlen. Bei Lokomotiv-Axen pflegt man sich dadurch zu helfen, dafs man etwas Schwefelblüthe zwischen die Zapfenlager streut, wenn sie sich erhitzt haben, indessen soll dies stets den Zapfen selbst angreifen. Uebrigens ist jede feste Schmiere, besonders aber Talg ein ganz vorzügliches Mittel, heifsgehende Zapfen abzukühlen. Durch das Schmelzen der festen Schmiere wird immer Wärme gebunden, und in gleicher Weise läfst sich die abkühlende Wirkung des Schwefels erklären, indem beim Schmelzen des Schwefels eine sehr beträchtliche Wärmemenge latent wird; ob nicht auch die starke chemische Verwandtschaft des Schwefels zum Eisen mit zur Abkühlung beitrage, mag dahingestellt bleiben.

Olmsted's Maschinenschmiere besteht aus Schweinefett und Harz. Sie wird bereitet, indem man einen Theil fein gepulverten Harzes mit drei Theilen Schweineschmalz, ohne Anwendung von Wärme sorgfältig zusammenrührt. Diese Mischung schmilzt bei einer geringeren Temperatur, als das Schweinefett, nämlich bei 22 bis 23° C. Der Zusatz von Harz widersetzt sich der Neigung des Schweineschmalzes in freiwillige Zersetzung überzugehen, und ranzig zu werden. Die Mischung eignet sich daher zum Schmieren kupferner und messingener Maschinentheile, wie Kolben, Hähne, Zapfen u. s. w. Mit und ohne Zusatz von Graphit kann man dieselbe auch zum Anstrich eiserner Maschinentheile benutzen, um diese gegen das Rosten zu schützen.

Um feine Oele behufs der Anwendung zum Schmieren feiner Maschinentheile zu reinigen, vermischt man sie mit Alkohol, erwärmt sie sehr mäfsig, am besten durch Aussetzen an das Sonnenlicht, und schüttelt sie von Zeit zu Zeit in dem wohl verschlossenen Glase um. Nachdem das Oel wasserhell geworden, läfst man die Mischung sich absetzen, das Oel, welches schwerer ist, als der Alkohol setzt sich unten ab, und der Alkohol bildet die obere Schicht; man kann dann das gereinigte Oel auf bekannte Weise unter dem Alkohol abziehen.

Vorrichtungen zur vergleichenden Untersuchung der Wirkungen verschiedener Schmiermittel.

§ 120. Der Werth der Schmiermittel ist ein sehr relativer und richtet sich wesentlich nach dem Falle, in welchem die Schmiere angewandt wird. Man kann, da die Bedingungen, welche die Schmiere zu erfüllen hat, und welche im vorigen Paragraphen angegeben wurden, verschiedene sind, die Schmiere immer nur nach den Bedingungen beurtheilen, welche sie vorzugsweise erfüllen soll. Für Zapfen, die nur geringe Drucke auszuhalten haben, wird im Allgemeinen eine dünnflüssige Schmiere, welche einen möglichst geringen Reibungswiderstand bildet, die vortheilhafteste sein; bei Zapfen, die unter sehr starkem Drucke stehen, mufs, wie bereits in § 95. S. 197 angedeutet worden, die Schmiere die nöthige Konsistenz besitzen, um nicht zwischen den reibenden Flächen herausgedrängt zu werden, sie mufs ferner die Eigenschaft haben, die durch die Reibung erzeugte Wärme zu binden und abzuleiten. Die Versuche, welche man bis jetzt über die Eigenschaften der Schmiermittel angestellt hat, beziehen sich leider nur auf die Ermittlung des Reibungswiderstandes, und so überwiegend wichtig diese Ermittlung für gewisse Fälle ist, so wenig genügt dieselbe für die zuletzt angedeuteten Fälle, um ein richtiges Urtheil über den Werth der Schmiere zu bilden.

Zur Prüfung des Reibungswiderstandes der Schmiermittel hat man verschiedene Apparate angegeben, welche einen Vergleich gestatten, zwischen den einzelnen Schmiermitteln, obwohl sie nicht geeignet sind, ein bestimmtes Maafs für den Reibungswiderstand festzustellen. In den meisten Fällen der Praxis genügt jener Vergleich, und es kommt dann nur darauf an zu untersuchen, welches Schmiermittel einen gröfsern, welches einen geringern Reibungswiderstand liefert, und wie sich diese Widerstände zu einander verhalten.

Ein sehr sinnreiches kleines Instrument ist von Mac Naught angegeben, und nach einem in der Sammlung des Königl. Gewerbe-Instituts zu Berlin befindlichen Exemplar hier gezeichnet worden. Taf. 26. Fig. 1a und b zeigen den Mac-Naught'schen Apparat in der Hälfte der natürlichen Gröfse, und zwar Fig. 1a in der Seitenansicht, Fig. 1b in der Ansicht von einem Ende. Ein kleines Gerüst *A* kann mittelst einer Klemmschraube *B* an einem Tisch, oder überhaupt an einer horizontalen Platte befestigt werden; dies Gerüst trägt eine kleine vertikalstehende stählerne Spindel *C*, die unten in einer Kernspitze läuft, und mittelst einer Stellschraube *D* gehörig sicher eingestellt werden kann; das obere Lager der Spindel ist ein Halslager; die Spindel trägt aufserhalb desselben eine kleine Scheibe von Messing oder von Kupfer *F* mit aufgebogenem Rande. Die Fläche dieser Scheibe ist sehr sorgfältig abgedreht und polirt, es liegt auf derselben eine zweite Scheibe *G* ganz lose auf; zwischen beide Flächen kann die Schmiere gebracht werden, die man untersuchen will, und um dies leicht zu bewirken, auch während des Ganges die Schmiere zu ergänzen, hat die Scheibe *G* einen röhrenförmigen Ansatz, der oben durch ein Schräubchen *H* verschlossen wird; wenn man das Schräubchen herausnimmt, kann man von oben her einige Tropfen Schmieröl eingiefsen. Nun befindet sich an dem Gerüst *A*, und von einem Arm desselben unterstützt noch ein Hebel *J*, welcher auf einer Schneide nach Art der Waagebalken ruht, und drei Arme hat; zwei davon *KL* sind horizontal, der dritte Arm *M* ist vertikal. Von den beiden horizontalen Armen ist der eine *K* länger als der andere, enthält eine Skala, und ein verschiebbares Gewicht, der kürzere Arm *L* dient nur zur Aufnahme einer Kugel, welche als Gegengewicht dient, und dem Arm *K* sowie dem darauf befindlichen verschiebbaren Gewicht, wenn es auf Null gestellt ist, das Gleichgewicht hält. Der dritte Arm *M* hat unten einen kleinen horizontalen Stift, und gegen denselben kann sich ein Stift *N* legen, der an der Scheibe *G* befestigt ist. Wenn nun mittelst der Schnurscheibe *E* die Spindel *C* mit der Scheibe *F* in eine bestimmte Um-

Taf. 26. Fig. 1.

drehungs-Geschwindigkeit versetzt worden ist, so würde, wenn wir uns den Stift *N* fort denken, die Scheibe *G* von der Scheibe *F* mitgenommen werden, da sie auf letzter ruht, und beide Scheiben würden sich gleich geschwinde drehen. Dies Mitnehmen erfolgt vermöge der Reibung, die zwischen den Scheiben *F* und *G* statt findet, will man die Scheibe *G* festhalten, so dafs sie sich nicht dreht, so mufs man die Reibung überwinden, und man mufs offenbar um so mehr Kraft anwenden, die Scheibe *G* festzuhalten, während die Scheibe *F* rotirt, je gröfser die Reibung zwischen beiden Scheiben ist. Die Kraft also, welche erforderlich ist, um die Scheibe *G* festzuhalten, und sie an der Rotation mit der Scheibe *F* zu verhindern, giebt einen Maafsstab für den Reibungswiderstand zwischen beiden Scheiben, und folglich auch für den Schmierwerth des Oels, welches man zwischen beide Scheiben gebracht hat, sobald dieser Schmierwerth nur in dem geringern oder gröfsern Reibungswiderstande gefunden wird. Das Festhalten der Scheibe *G* geschieht dadurch, dafs sich der Stift *N* gegen den Stift in dem Hebelsarm *M* legt; der Reibungswiderstand hat das Bestreben den Hebel *M* zur Seite zu schieben, und es kommt darauf an, denselben genau im Gleichgewicht zu halten; dies kann durch das bewegliche Gewicht auf dem Hebelsarm *K* geschehen, welches man so lange hinausschiebt, bis der Hebel genau balancirt. Je weiter man das Gewicht auf dem Hebel *K* hinausschieben mufs, desto gröfser ist der Reibungswiderstand, und wenn man die Stellung des Gewichtes an der Skala abliest und notirt, so geben die Verhältnisse dieser Zahlen die Verhältnisse der Reibungswiderstände der verschiedenen Schmiermittel.

Dies Instrument ist für den Gebrauch sehr bequem, und in vielen Fällen zur Ermittelung des Werthes der Schmiermittel sehr geeignet, so dafs seine gröfsere Verbreitung wohl wünschenswerth erscheint.

Eine andere Methode die Schmiermittel zu probiren ist von Nasmith angegeben worden *). Derselbe sucht den Einflufs der Zeit auf die Schmiere in vergleichender Weise zu bestimmen, und geht von der Bemerkung aus, dafs sich bei manchen Schmiermitteln, welche anfangs sehr gute Resultate liefern, nach Verlauf einiger Zeit, oft erst nach mehren Tagen durch den Einflufs der Luft und durch die Berührung mit dem Metall, eine Verdickung

---

*) Mechan. Mag. 1850. Oct. p. 314, und polytechn. Centralblatt 1851. S. 162.

zeigt, indem die Schmiermittel klebrig werden, und die Bewegung der geschmierten Theile hemmen. Bei zarten Mechanismen, z. B. bei Uhrwerken, Zählapparaten u. s. w. ist die nach Verlauf einiger Zeit eintretende Verdickung ein sehr grofser Uebelstand, und wenn man daher die vergleichsweise Tauglichkeit gewisser Oele zu derartigen Anwendungen prüft, ohne auch die Zeit als Element der Prüfung in Anschlag zu bringen, so wird man zu ganz falschen Schlüssen geführt, insofern z. B. die trocknenden Oele, wie unter andern Leinöl, ein oder zwei Tage lang die Schmierung vorzüglich gut bewirken, am Ende des zweiten oder dritten Tages aber so dick und klebrig werden, dafs sie die Bewegung der Maschinentheile hemmen.

Bei einem zum Schmieren von Maschinentheilen bestimmten Oele ist eine dauernd flüssige Beschaffenheit eine sehr schätzbare Eigenschaft. Dasjenige Oel, welches die längste Zeit über in Berührung mit Messing und Eisen flüssig bleibt, ist offenbar für die Schmierung viel mehr geeignet, als ein anderes, welches bald dick wird. Hieraus folgert Nasmith, dafs es sehr nothwendig sei, bei Untersuchungen über den vergleichsweisen Werth von Schmierölen, den Einflufs der Zeit sorgfältig zu berücksichtigen.

Um einen Begriff von der Wichtigkeit dieser Untersuchungen zu geben, führt Nasmith an, dafs in manchen Baumwollspinnereien 50000 Spindeln mit einer Geschwindigkeit von 4000 bis 5000 Umdrehungen in einer Minute sich drehen; der geringste Mangel in der Beschaffenheit des Oels, verursacht durch das Klebrigwerden, hat in einem solchen Falle einen nicht unbeträchtlichen Mehrbetrag an Brennmaterial für die treibende Dampfmaschine zur Folge, um den nöthigen Zuwachs an Betriebskraft bei einer so grofsen Geschwindigkeit und einer so grofsen Zahl in Bewegung befindlicher Theile zu liefern. Nasmith theilt die Thatsache mit, dafs durch das blofse Anzünden des Gaslichtes und durch die hierdurch herbeigeführte Temperatur-Erhöhung in den Arbeitssälen, die immerhin geringe Vermehrung der Flüssigkeit des Schmieröls in einem bedeutenden Spinnerei-Etablissement eine Verminderung um mehre Pferdekräfte in der Leistung der treibenden Dampfmaschine möglich machte.

Die von Nasmith angegebene Oelprobe besteht in einer 4 Zoll breiten und 6 Fufs langen Eisenplatte, auf deren Oberfläche sechs gleich grofse, der Länge nach gehende Rinnen ausgehobelt sind. Diese Eisenplatte wird in geneigter Lage, etwa mit einem

Gefälle von 1 Zoll auf 6 Fuſs aufgestellt, und in folgender Weise benutzt:

Angenommen, man habe sechs verschiedene Oelsorten zu probiren, und wünsche zu erfahren, welche von denselben am längsten unter Einwirkung der Luft, und in Berührung mit dem Eisen flüssig bleibe, so gieſst man am obern Ende der Platte in jede Rinne eine gleich groſse Quantität je eines dieser Oele und zwar gleichzeitig ein. Dies geschieht mittelst einer Reihe kleiner Messingröhren, die eine bestimmte Quantität Oel fassen, und gleichzeitig umgekippt oder geöffnet werden. Die Oele beginnen nun gleichzeitig ihren Lauf auf der Platte abwärts; eines hat am ersten Tage einen Vorsprung, ein anderes am zweiten oder dritten Tage; mit dem fünften Tage stellt sich gewöhnlich das richtige Resultat heraus. Die schlechten Oele, wenn sie auch anfangs gut liefen, kommen bald zum Stillstand, während die guten Oele ihren Lauf fortsetzen, und erst nach allmählicher Gerinnung still stehen; nach Verlauf von 8 oder 10 Tagen bleibt kein Zweifel mehr, welches Oel dem andern vorausgeeilt ist. Leinöl macht am ersten Tage einen bedeutenden Fortschritt, und sitzt fest, nachdem es einen Weg von 18 Zollen durchlaufen hat; Wallrathöl erster *Qualität* eilt dem Wallrathöl zweiter Qualität im ersten Tage $13\frac{1}{2}$ Zoll voraus, wird aber schon am dritten Tage von letzterm überholt, und bleibt am achten Tage stehen, während das Walrathöl zweiter Qualität noch am Ende des neunten Tages flüssig war.

Folgende Tabelle giebt ein Beispiel einer derartigen neuntägigen Oelprobe.

Tag der Probe.	Wallrathöl: bestes.	Wallrathöl: gemeines.	Galli-poliöl.	Schwein-schmalz.	Rüböl.	Leinöl,
Erster Tag . .	2' $8\frac{1}{2}$"	1' 7"	— $10\frac{1}{4}$"	— $10\frac{1}{4}$"	1' $2\frac{1}{2}$"	1' $5\frac{1}{2}$"
Zweiter - . .	4' 2"	3' 9"	1' $2\frac{1}{4}$"	— $10\frac{1}{2}$"	1' $6\frac{1}{4}$"	1' 6"
Dritter - . .	4' $5\frac{3}{4}$"	4' $6\frac{3}{4}$"	1' 6"	— $10\frac{3}{4}$"	1' 7"	1' $6\frac{1}{4}$"
Vierter - . .	4' 6"	4' 11"	1' $6\frac{1}{2}$"	— $10\frac{3}{4}$"	1' $7\frac{1}{8}$"	1' $6\frac{1}{4}$"
Fünfter - . .	4' 6"	5' $1\frac{1}{2}$"	1' $7\frac{5}{8}$"	— $11\frac{3}{4}$"	1' $7\frac{1}{4}$"	1' $6\frac{1}{4}$"
Sechster - . .	4' 6"	5' 4"	1' $8\frac{3}{4}$"	Stillstand	1' $7\frac{1}{4}$"	1' $6\frac{1}{4}$"
Siebenter - . .	4' $6\frac{1}{8}$"	5' $6\frac{3}{4}$"	1' 9"	—	1' $7\frac{1}{4}$"	1' $6\frac{3}{4}$"
Achter - . .	Stillstand	5' $7\frac{3}{8}$"	1' $9\frac{1}{4}$"	—	1' $7\frac{3}{4}$"	Stillstand
Neunter - . .	—	5' 8"	1' $9\frac{1}{4}$"	—	Stillstand	—

Eine dritte Vorrichtung um den Werth der Schmiermittel vergleichungsweise zu bestimmen, rührt von Sinclair her, und wird auf dem Caledonian-Railway für diesen Zweck angewendet. Dieser Apparat besteht aus einer kurzen cylindrischen Welle, an deren Enden zwei cylindrische Zapfen sorgfältig angedreht sind, die in gut passenden Zapfenlagern laufen. Ueber das eine Zapfenlager hinaus ist die Welle verlängert und trägt hier ein kleines Schwungrad, während in der Mitte, zwischen beiden Lagern auf der Welle eine kleine Seiltrommel mit schraubenförmig eingedrehter Nuthe angebracht ist. Die Schraubengänge, welche diese Nuth bilden, sind nach flachen Kreisbögen ausgerundet, und dienen dazu, ein Seil von $\frac{3}{16}$ bis $\frac{1}{4}$ Zoll Stärke darin aufzuwickeln. Das eine Ende dieses Seils wird an der kleinen Windetrommel mittelst einer Schleife befestigt, indem man es an einen kleinen radial stehenden Stift anhängt; das andere Ende des umgewickelten Seiles hängt an der Trommel herab, und trägt ein Gewicht. Nachdem die beiden Zapfenlager mit dem zu prüfenden Oel versehen sind, das Seil aufgewickelt und das Gewicht angehängt ist, läfst man letzteres frei niedersinken. Hierdurch wird die Welle in Umdrehung gesetzt; endlich, wenn das Seil sich abgewickelt hat, fällt die Schleife von dem Stift ab, und die Welle mit dem Schwungrade rotirt weiter fort. Die Güte der Schmiere wird nun danach beurtheilt, wie lange die Welle noch leer umläuft, bevor sie zur Ruhe kommt; die Zeit wird an einer *Sekundenuhr* beobachtet, und man schliefst nun, dafs dasjenige Oel einen geringern Reibungswiderstand liefere, bei dessen Anwendung die Welle längere Zeit in Rotation verblieben ist, weil der Stillstand der Welle überhaupt nächst dem Luftwiderstande nur der Verzögerung durch die Reibung beizumessen ist.

Dieser Apparat würde schon geeignet sein die Wirkung der Schmiermittel unter einem gewissen Druck zu beurtheilen, wenn man die Zapfen in den Lagern etwa durch Vermehrung des Gewichtes des Schwungrades oder auf andere Weise einem bestimmten Drucke aussetzte. Da es an Versuchen über das Verhalten der Schmiere bei verschiedenen Belastungen der reibenden Flächen noch ganz fehlt, so hat der Verfasser in der Werkstatt des Königl. Gewerbe-Institutes den Bau eines Apparates veranlafst, durch welchen es möglich werden wird, derartige Versuche anzustellen, und welcher auf dem Prinzip des Prony'schen Zaumes beruht.

Schmierbüchsen, mechanische Schmier-Vorrichtungen und Schmierhähne.

§ 121. Damit die Schmiere die beabsichtigte Wirkung äufsere, ist es erforderlich, dafs sie stets in angemessener Menge vorhanden sei. Die reibenden Maschinentheile konsumiren die Schmiere, und es mufs daher in zweckmäfsige Weise immer neue Schmiere zugeführt werden. Bei der Anordnung der Maschinen ist daher besonders auch darauf Rücksicht zu nehmen:

dafs die der Reibung unterworfenen Maschinentheile leicht und sicher geschmiert werden können.

Die festen Schmiermittel haben das Bequeme, dafs man Stücke davon neben den zu schmierenden Maschinentheil, entweder frei, oder in angemessene Behälter oder Gehäuse legen kann; durch die geringe Erwärmung bei dem Gange der Maschine schmilzt die Schmiere allmählich, und fliefst den reibenden Oberflächen zu. Die flüssigen Schmiermittel dagegen würden, wenn man sie in gröfsern Mengen auf die Maschinentheile giefsen wollte, bald abfliefsen, und die reibenden Oberflächen würden bald trocken gehen, wenn man nicht entweder verhindert, dafs die in gröfserer Menge aufgegossene Schmiere zu schnell und leicht abfliefsen könne, oder wenn man nicht das Zugiefsen der flüssigen Schmiere häufig wiederholt, oder endlich, wenn man nicht Sorge dafür trägt, dafs von einem gewissen Schmier-Vorrathe aus allmählich kleine Quantitäten Schmiere zu den reibenden Oberflächen gelangen können.

Die letztgenannte Anordnung, durch welche es möglich wird, nur in längern Zwischenräumen neuen Schmier-Vorrath in die Maschine zu bringen, während von dem eingebrachten Vorrath während des Ganges der Maschine nach und nach hinreichende Mengen zwischen die reibenden Oberflächen gelangen, um dort konsumirt zu werden, bedingt gewisse Einrichtungen an den Maschinen, die man Schmier-Vorrichtungen, Schmierbüchsen nennt.

Die Schmier-Vorrichtungen, von denen wir hier einige Beispiele mittheilen wollen, können wir im Allgemeinen in folgende Gruppen eintheilen:

1) Schmier-Vorrichtungen, welche kontinuirlich wirken (Schmierbüchsen);
2) Schmier-Vorrichtungen, welche nur während des Ganges der Maschine Schmiere zuführen (mechanische Schmier-Vorrichtungen);
3) Schmier-Vorrichtungen, welche nur periodenweise, und nach dem Ermessen des Maschinenwärters Schmiere zulassen (Schmierhähne).

Diese Eintheilung bezieht sich auf die Art und Weise, wie die Schmier-Vorrichtungen wirksam sind. Man könnte die Schmier-Vorrichtungen auch nach den Arten der Maschinen eintheilen, in welchen sie gebraucht werden, da manche Konstruktionen wesentlich durch die Anordnung und Einrichtung der zu schmierenden

Maschinen bedingt sind. Von dieser Art sind z. B. die Schmier-Vorrichtungen für die Axlager der Eisenbahnfahrzeuge. Wir werden diese letztgenannte Gruppe von Schmier-Vorrichtungen daher hier aussondern, und sie bei Gelegenheit der Beschreibung der Konstruktion der Axlager besprechen. Hier handelt es sich nur um einige Beispiele von Schmier-Vorrichtungen, welche von der Konstruktion der zu schmierenden Maschinentheile mehr oder weniger unabhängig sind.

1) Schmier-Vorrichtungen, welche kontinuirlich wirken (Schmierbüchsen).

Diese Art von Schmier-Vorrichtungen besteht meistens in einem Oelbehälter, aus welchem ein Docht vermöge der Kapillarität das Oel ansaugt, und in kleinen Quantitäten den zu schmierenden Oberflächen zuführt. Solche Einrichtungen haben den Uebelstand, dafs die Zuführung ununterbrochen, also auch dann erfolgt, wenn die Maschine still steht, folglich keine Schmiere erfordert. Gewöhnlich geht der in dieser Zeit zufliefsende Schmier-Vorrath verloren, wenn man nicht besondere Einrichtungen trifft, um denselben aufzufangen und zu sammeln, oder die Schmier-Vorrichtung aufser Thätigkeit zu setzen. Dagegen zeichnet sich diese Gruppe durch besondere Einfachheit in der Konstruktion aus; sie ist daher auch diejenige, welche am häufigsten zur Anwendung kommt.

Taf. 26. Fig. 2 bis 8 zeigen einige Schmier-Vorrichtungen dieser Art in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse.

Taf. 26. Fig. 2 ist eine Schmierbüchse der einfachsten Art, aus Weifsblech oder Messingblech zusammengelöthet, und gefalzt; sie wird in eine passende Bohrung des Lagerdeckels mit ihrem untern kurzen cylindrischen Rohr lose eingesteckt, was für feststehende Lager, die keiner Erschütterung ausgesetzt sind, genügt. Der ebenfalls lose aufgesetzte Deckel schützt das Oel gegen Staub und Unreinigkeiten. Taf. 26. Fig. 2.

Taf. 26. Fig. 3 zeigt eine ähnliche Einrichtung in etwas besserer Ausführung. Die Schmierbüchse ist von Messing oder Bronze gegossen, aufsen abgedreht; das Schmierrohr ist mit einem Schraubengewinde versehen, mittelt dessen es in die Schmieröffnung des Lagerdeckels eingeschraubt werden kann. Der Deckel der Schmierbüchse kann entweder fest aufgeklemmt oder auch fest gelöthet sein; er ist oben mit einer Oeffnung versehen, durch welche man Schmieröl eingiefsen und den Docht einbringen kann, wenn man nicht den Deckel abnehmen will. Diese Oeffnung ist so eingerich- Taf. 26. Fig. 3.

tet, dafs sie das Ausspritzen des Oels hindert, selbst wenn der Maschinentheil mit der Schmierbüchse in Bewegung ist; auch gestattet die Oeffnung das Eingiefsen des Oels mittelst einer mit langem Halse versehenen Oelkanne, wenn die Schmierbüchse an einem schwer zugänglichen Ort angebracht ist; wenn dagegen die Schmierbüchse leicht zugänglich ist, und namentlich in staubigen Räumen, thut man besser den Deckel ohne Oeffnung zu machen, und denselben so einzurichten, dafs er sich abheben läfst. Das im Innern der Büchse befindliche Kupferröhrchen für den Docht ist mit Zinn eingelöthet.

Taf. 26. Fig. 4. Taf. 26. Fig. 4 stellt eine aus der Werkstatt von A. Borsig in Berlin herrührende Schmierbüchse für Maschinentheile, die sich mit der Schmierbüchse in Bewegung befinden, dar. Der Docht ist oben, wo er aus dem Schmierröhrchen heraushängt, und in das Oel eintaucht, aufgedreht, und hängt in zwei Zipfeln abwärts; der Deckel der Schmierbüchse ist fest aufgeschraubt, und hat in der Mitte eine Oeffnung zum Eingiefsen des Oels; diese Oeffnung ist durch eine von innen gegen gelegte Scheibe verschlossen, doch so, dafs sie von Aufsen her mittelst Niederdrücken der Scheibe geöffnet werden kann, wenn man Oel eingiefsen will. Man sieht, dafs die Scheibe durch eine Spiralfeder, die auf das mittlere Schmierröhrchen aufgesteckt ist, gegen die Oeffnung geprefst wird, dafs die Scheibe oben einen Knopf hat, durch den man sie niederdrücken kann, und dafs sie konisch gestaltet ist, damit das eingegossene Oel leicht abfliefsen und in die Schmierbüchse gelangen kann. Der obere Knopf der Scheibe ist mit einer sehr feinen Oeffnung durchbohrt, um in das Innere der Büchse Luft eintreten zu lassen, und dadurch den luftverdünnten Raum zu vermeiden, welcher beim Ausfliefsen des Oels allmählich entstehen, und diesem Ausfliefsen selbst ein Hindernifs bereiten könnte.

Taf. 26. Fig. 5. Taf. 26. Fig. 5 zeigt eine Schmierbüchse für einen ähnlichen Zweck, und nach ähnlicher Konstruktion, wie die vorige; sie ist aus der Fabrik von F. Wöhlert in Berlin hervorgegangen, und unterscheidet sich von der vorigen im Wesentlichen durch die Anordnung des Deckels und der Vorrichtung zum Verschliefsen der Oeffnung im Deckel. Die Spiralfeder, welche die Scheibe gegen die Oeffnung prefst, liegt hier aufserhalb der Schmierbüchse in einem kleinen Behälter über dem Deckel; die Oeffnung im Deckel ist mit einem napf-förmigen Rande versehen, welcher das Eingiefsen des Oels erleichtert; das Oel selbst gelangt durch mehre kleine Oeffnungen im Boden dieses Napfs in die eigentliche Schmierbüchse. Fig. 5a zeigt den Durchschnitt, Fig. 5b theilweise die obere Ansicht und den Horizontalschnitt. Man sieht aus dieser letztgenannten Figur, wie die Schmier-Vorrichtung durch vier Schräubchen auf dem Maschinentheil befestigt ist, und wie die Schräubchen gegen unbeachsichtigte Lösung gesichert sind, indem man durch die Köpfe von je zweien derselben einen kleinen Stift gesteckt hat.

Taf. 26. Fig. 6 veranschaulicht eine Schmierbüchse ohne Docht. Diese Art von Schmierbüchsen war von Coquatrix in Lion auf der pariser Ausstellung in mehren Exemplaren ausgestellt. Der Schmierbehälter war dort meist von Glas, kann aber begreiflicherweise auch von Metall sein. In den Boden der Büchse ist ein mit einer Durchbohrung versehenes Messingstück eingesetzt, durch welches das Oel zu den reibenden Flächen gelangen kann. Die Durchbohrung erweitert sich nach dem Innern der Schmierbüchse und nimmt dort eine Schraube auf, deren Muttergewinde in das obere Ende des Messingstücks eingeschnitten ist. Diese Schraube hat oben einen flachen Kopf, an welchem man sie mit der Hand drehen kann, und eine Sperrfeder, welche die Möglichkeit gewährt, die Schraube nach einer sehr geringen Drehung festzustellen. Das untere Ende der Schraube bildet einen kleinen Kegel, der in eine konische Erweiterung der Durchbohrung pafst, und diese, jenachdem man die Schraube tiefer hinabschraubt, immer mehr verengt und endlich ganz absperrt. Das Oel gelangt aus dem Oelbehälter mittelst zweier kleinen seitlichen Durchbohrungen in die konische Erweiterung des Schmierrohrs. Diese Anordnung hat den Vortheil, dafs man 1) die Durchflufsöffnung für die Schmiere mittelst der Schraube sehr genau reguliren, und dadurch den Oelverbrauch auf ein Minimum beschränken kann, und 2) dafs man, wenn die Maschine still steht, auch den Zuflufs der Schmiere absperren kann. Der Deckel der Schmierbüchse ist von Messing, und die Stellschraube liegt im Innern der Schmierbüchse, wird also von dem Deckel gegen zufällige Verstellung geschützt. Taf. 26. Fig. 6.

Taf. 26. Fig. 7 und 8 sind Schmier-Vorrichtungen für Maschinentheile, die schwer zugänglich sind, und für welche die Schmierbüchse in einer gewissen Entfernung von den zu schmierenden Flächen angebracht werden mufs. Die Schmiere wird durch ein kupfernes Röhrchen nach der erforderlichen Stelle hingeleitet. Fig. 7 zeigt eine Einrichtung, die im Prinzip mit den Konstruktionen Fig. 4 und 5 übereinstimmt. Der Verschlufs der Oeffnung im Deckel der Schmierbüchse stimmt mit der Einrich- Taf. 26. Fig. 7 u. 8.

tung in Fig. 4 überein, und erfolgt durch eine im Innern der Büchse liegende Spiralfeder, während die Schmieröffnung selbst aufsen wie in Fig. 5 mit einem Napf zum bessern Eingiefsen der Schmiere versehen ist. Fig. 8 dagegen stellt einen einfachen Blechkasten mit Charnierdeckel vor. Die Schmierbüchse ist hier, abweichend von den übrigen bisher mitgetheilten Konstruktionen, in welchen sie cylindrisch war, länglich viereckig. Fig. 8a zeigt die Ansicht von einem Ende, Fig. 8b die Vorderansicht.

2) Schmier-Vorrichtungen, welche nur während des Ganges der Maschine Schmiere zuführen (Mechanische Schmier-Vorrichtungen).

Diese Konstruktionen haben gegen die frühern den Vorzug, dafs sie eine gröfsere Ersparung an Schmiermaterial zulassen, indem sie nur dann den reibenden Oberflächen Schmiere zuführen, wenn diese wirklich der Schmiere bedürfen. Da hier das Schmieren von der Bewegung der Maschine abhängig gemacht wird, so pflegt man diese Konstruktionen auch mechanische Schmierbüchsen zu nennen. Die mechanischen Schmier-Vorrichtungen sind in der Regel viel komplizirter (etwa mit Ausnahme der in Fig. 9 mitgetheilten) als die kontinuirlich wirkenden und werden daher in der Regel nur bei solchen Zapfen angewendet, die eine grofse Menge Schmiere konsumiren würden, die also unter bedeutendem Drucke arbeiten, und häufig für längere Zeit zum Stillstand kommen.

Taf. 26. Fig. 9 bis 13 zeigen einige mechanische Schmierbüchsen in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse.

Taf. 26. Fig. 9. Taf. 26. Fig 9 zeigt die einfachste Konstruktion einer mechanischen Schmierbüchse, die aber nur da anwendbar ist, wo die Büchse selbst eine gewissermaafsen schüttelnde Bewegung hat. Die Vorrichtung ist von Sharp-Brothers in Manchester konstruirt zum Schmieren derjenigen Kopflager der Pleyelstangen, welche an die Kurbelwarze angreifen, und folglich in eigenthümlicher Weise an der kreisförmigen Bewegung der Kurbel und an der hin- und hergehenden Bewegung des Kolbens Theil nehmen. Die Büchse selbst ist mit der Pleyelstange aus einem Stücke geschmiedet; das in der Mitte eingesetzte Schmierrohr dient zugleich der Scheibe, welche nach Art der Anordnungen in Fig. 4, 5 und 7 die in dem Deckel befindliche zum Füllen der Schmierbüchse bestimmte Oeffnung verschliefst, zur Führung, indem diese Scheibe in der Mitte mit einem cylindrischen röhrenförmigen Ansatz versehen, und mit diesem auf das Schmierrohr aufgeschoben ist; eine Spiralfeder, die in dem erweiterten Schmierrohr Platz findet, prefst die Scheibe gegen den Deckel. Jener röhrenförmige Ansatz der Scheibe ist aber ringsum mit fensterartigen Schlitzen durchbrochen; indem nun die Schmierbüchse mit der Pleyelstange schnell mit jener eigenthümlichen Bewegung umschwingt, wird das Oel in derselben gegen den Deckel und dessen Ansatz geschleudert, und eine kleine Portion desselben gelangt in das Innere des Schmierröhrchens und fliefst durch dasselbe zwischen die reibenden Maschinentheile. Die Vorrichtung kann natürlich nur so lange wirksam sein, als die Maschine in Bewegung ist.

Taf. 26. Fig. 10 zeigt eine andere mechanische Schmierbüchse, welche in der Werkstatt des Königl. Gewerbe-Instituts in Berlin ausgeführt ist. Fig. 10a stellt einen Durchschnitt in der Längenaxe des Zapfens, Fig. 10b einen solchen normal gegen die Axe des Zapfens dar. Auf dem Deckel des Zapfenlagers sitzt ein würfelförmiges messingenes Gehäuse, welches die vorräthige Schmiere aufnimmt. Das Schmierrohr im Innern des Gehäuses erhebt sich über das Niveau der Schmiere und endigt oben in eine längliche Schale, deren Längen-Dimension normal zur Zapfenaxe gerichtet ist. Ueber dieser Schale, parallel mit der Zapfenaxe liegt eine kleine Welle, welche zwei mit sehr kleinen Schöpfgefäfsen versehene Arme trägt. Wie der Durchschnitt in Fig. 10b zeigt, sind diese Schöpfgefäfse so eingerichtet, dafs sie die Schmiere schöpfen können, gleichviel ob sich die kleine Welle nach der einen oder nach der andern Richtung umdreht. Bei jeder Umdrehung dieser kleinen Welle erfassen die Schöpfarme eine kleine Quantität Schmiere, heben sie in die Höhe, und entleeren sie in die längliche Schale, aus welcher sie in die Schmierröhre und demnächst zwischen den Zapfen und das Lagerfutter gelangt. Es kommt also nur darauf an, die kleine Welle in Umdrehung zu setzen; hierzu dient ein Rädchen, welches aufserhalb der Schmierbüchse auf der kleinen Welle befestigt ist, eine bestimmte Anzahl (hier 18) ausgerundeter Zähne trägt, und von einem, in den zu schmierenden Zapfen, oder in dessen Welle eingeschraubten Stift ergriffen werden kann. Bei jeder Umdrehnng der Hauptwelle wird durch diesen Stift mindestens ein Zahn des Rades fortgeschoben, folglich bei 18 Umdrehungen der Hauptwelle wird die kleine Welle einmal umgedreht, und auf diese Weise gelangen in der gleichen Zeit zwei Füllungen der Schöpfarme in das Schmierrohr. Durch die Zahl der Radzähne und durch die Gröfse der Schöpfgefäfse läfst sich die Menge der Schmiere, die zur Ver- Taf. 26. Fig. 10.

theilung kommt, reguliren. Schraubt man den Stift aus der Welle weiter heraus, so wird das Rad bei jeder Umdrehung um mehr als eine Zahntheilung gedreht, dasselbe geschieht, wenn man mehre Stifte in der Peripherie der Hauptwelle anbringt.

Taf. 26. Fig. 11. Taf. 26. Fig. 11 ist eine ähnliche Konstruktion, wenigstens in soweit es die Bewegung einer kleinen Welle durch die Hauptwelle, welche geschmiert werden soll, anbetrifft. Die Schöpfgefäfse fallen hier fort, dagegen bildet die kleine Welle einen hahnförmigen Verschlufs der Schmierbüchse; nur ist der Hahnkörper nicht durchbohrt, sondern nur mit einer kleinen Höhlung versehen. Bei jeder Umdrehung der kleinen Welle füllt sich die Höhlung, wenn sie oben steht mit Oel aus der Schmierurne, und entleert sich in das Schmierrohr, wenn sie unten ankommt. Die Gröfse der Höhlung und die Zahl der Umdrehungen, welche die kleine Welle macht, wird hier maafsgebend sein für die Menge Schmiere, welche in einer gegebenen Zeit in das Schmierrohr, und von da zwischen den Zapfen und das Lager gebracht wird.

Taf. 26. Fig. 12. Taf. 26. Fig. 12 zeigt eine von dem Ingenieur Faivre in Paris konstruirte Schmier-Vorrichtung. *Fig.* 12a *dient zur* Erläuterung des Prinzips, *Fig.* 12b *ist ein* Durchschnitt normal zur Axe des zu schmierenden Zapfens, und Fig. 12c ein Längenschnitt der Schmier-Vorrichtung nach der Richtung der Zapfenaxe. Auf dem Lagerdeckel befindet sich die Schmierbüchse, und zwar mit demselben aus einem Stück gegossen; dieselbe ist mittelst eines aufgepafsten Deckels verschlossen. Die Schmierbüchse ist im Innern durch eine niedrige Querwand, die mit der Richtung des Zapfens parallel läuft, in zwei Abtheilungen getheilt; die gröfsere derselben (in Fig. 12b links befindliche) ist zur Aufnahme des Schmiervorraths bestimmt, die kleinere kommunizirt mittelst einer Durchbohrung im Boden mit den zu schmierenden Flächen. Es kommt darauf an, in angemessenen Pausen kleine Quantitäten Oel aus der gröfseren Abtheilung in die kleinere und somit zum Verbrauche gelangen zu lassen. Zu diesem Zweck liegt über der gröfsern Abtheilung, parallel mit der Axe des Zapfens, eine kleine kurbelartig ausgebogene Welle (Krummaxe) von Draht, und an der Kurbel dieser kleinen Krummaxe hängt ein Stückchen Draht, dessen eines Ende für diesen Behuf ösenartig umgebogen ist. Dreht man die kleine Kurbelaxe, so nimmt dies Stückchen Draht nach und nach die in Fig. 12a angedeuteten Lagen an, d. h. es taucht in den Schmiervorrath ein, hebt die anhaftende Schmiere, bringt sie über die zweite kleinere Abtheilung, und streift sie, indem es die in Fig. 12b gezeichnete *Stellung* annimmt, an der Querwand der Schmierbüchse ab, so dafs die Schmiere in die kleinere Abtheilung abfliefst. Zur Bewegung der kleinen Kurbelwelle *sitzt* auf derselben aufserhhalb der Schmierbüchse, und über das Zapfenlager hinausreichend, eine leichte Friktionsscheibe, welche in eine in dem vorstehenden Zapfenende der zu schmierenden Welle eingedrehte Nuth keilförmig einfafst, und hierdurch die erforderliche Reibung erhält, um mit dem Zapfen in Umdrehung gesetzt zu werden. Nach dem, zwischen der Friktionsscheibe auf der kleinen Krummaxe und dem Durchmesser der in dem treibenden Zapfen befindlichen Nuth gewählten Verhältnisse, läfst das Drahtstückchen nach zwei, drei, vier und mehr Umdrehungen der Hauptwelle immer einen Tropfen der Schmierflüssigkeit in die kleinere Abtheilung gelangen. — Bei der Anordnung dieser Vorrichtung mufs man auf die Richtung, nach welcher der Zapfen sich umdreht, Rücksicht nehmen.

Taf. 26. Fig. 13 stellt eine von dem Mechaniker Decoster in Paris *konstruirte, und demselben in Frankreich patentirte* Schmier-Vorrichtung dar, und zwar ist *Fig. 13a* ein Querschnitt normal zur Axe des zu schmierenden Zapfens, und Fig. 13b ein Längenschnitt nach der Richtung der Axe. Das Reservoir zur Aufnahme der Schmiere liegt unter dem Zapfenlager; der Zapfen hat in der Mitte seiner Länge eine ringsum eingedrehte Nuth, und in dieser Nuth hängt eine kleine Charnierkette ohne Ende, welche unten in die Schmiere eintaucht; wenn sich nun der Zapfen dreht, wickelt sich die Kette in der Nuth fortwährend ab, da sie dabei stets durch den Schmiervorrath streicht, so nimmt sie kleine Quantitäten desselben, welche an der Kette hängen bleiben, mit in die Höhe, und streift sie oben an den Rändern des Zapfens ab, so dafs sie von da zwischen den Zapfen und das Lagerfutter fliefsen. Die nicht konsumirte Schmiere kann durch die Durchbohrungen, welche in *Fig. 13b* rechts und links sichtbar sind, wieder in das Oelreservoir zurückfliefsen, und kommt von Neuem zur Wirkung. Die Zapfen sollen mittelst dieser Einrichtung drei Monate und länger laufen können, ohne dafs man nöthig hat, für Ergänzung des Schmiervorrathes zu sorgen. Diese Ergänzung selbst kann nach Abnahme des Lagerdeckels leicht bewirkt werden. Das Lagerfutter besteht hier, wegen der erforderlichen Nuth der Länge nach aus zwei Theilen. Man könnte indessen auch die Schmierkette ganz aufserhalb des Lagers anbringen, und hätte dann nicht nöthig, das Lagerfutter zu theilen. Die kleine Schraube in Fig. 13b links dient

Taf. 26. Fig. 13.

zum Ablassen der überflüssigen Schmiere; auch kann der Boden des Schmierbehälters herausgenommen werden, um die erforderliche Reinigung zu bewirken. Anstatt der Schmierkette kann man auf die Welle auch eine kleine Filzscheibe aufsetzen, welche stets in den Schmierbehälter eintaucht, sich mit der Welle dreht, und dem Zapfen fortwährend kleine Portionen Oel zuführt.

3) Schmier-Vorrichtungen, welche nur periodenweise, und nach dem Ermessen des Maschinenwärters Schmiere zulassen (Schmierhähne).

Die einfachste Konstruktion dieser Art von Schmier-Vorrichtungen besteht in einem Schmier-Reservoir, welches durch einen Hahn verschlossen ist; sobald der Maschinist den Hahn öffnet, fliefst die Schmiere aus; man könnte die Einrichtung etwa wie die in Fig. 11 auf Taf. 26 dargestellte Konstruktion wählen, nur hätte man den Verschlufs der Schmierröhre als Hahn zu gestalten, und den Bewegungs-Mechanismus, wie solcher vorhin beschrieben worden, fortzulassen.

Sehr häufig wendet man diese Anordnung der Schmierbüchsen da an, wo man Schmiere in einen Raum führen will, in welchem sich Dampf oder Luft befindet unter einem höheren Drucke als der Atmosphärendruck. So sind z. B. Schmier-Vorrichtungen erforderlich, um Oel in den Cylinder einer Dampfmaschine zu führen, behufs Schmierung des Kolbens. Wollte man hier ohne Weiteres den Schmierhahn, welcher das Schmierrohr mit dem Oelreservoir in Verbindung setzt, öffnen, so würde der Dampf oder die Luft ausblasen und die Schmiere aus dem Reservoir heraustreiben. Bei kleineren Maschinen behilft man sich mit jener oben beschriebenen einfachen Vorrichtung, indem man den Augenblick abpafst, wo der Dampf von der Seite des Kolbens, an welcher sich der Schmierhahn befindet, abströmt; bei gröfseren Maschinen dagegen, oder bei solchen, die sehr schnell gehen, und wo die Dauer eines Kolbenhubs nicht genügen würde, um die Schmiere gehörig ausfliefsen zu lassen, wendet man solche Vorrichtungen an, die gestatten, das Oelreservoir von der äufsern Luft abzusperren, sobald es mit dem dampferfüllten Raume in Verbindung gebracht werden soll, und während die Schmiere ausfliefst: dagegen das Oelreservoir mit der äufseren Luft wieder in Verbindung zu setzen, nachdem man die Kommunikation mit dem Dampfraume abgesperrt hat, und während man es mit neuer Schmiere füllen will. Von dieser Art sind die auf Tafel 26.

Fig. 14, 15 und 16 in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse dargestellten Schmierhähne.

Tafel 26. Fig. 14 ist eine von A. Borsig in Berlin zum Schmieren von Lokomotiv-Cylindern ausgeführte Konstruktion. Das in Form einer Urne gestaltete auf den Cylinder aufgeschraubte Oelreservoir kann durch einen horizontalen Hahn mit dem Innern desselben in Zusammenhang gesetzt werden, ist aber für diesen Augenblick von der äufsern Luft ganz abgesperrt. Dieser Verschlufs wird durch einen in dem obern Theil der Urne befindlichen vertikalen Hahn bewirkt, welcher vermöge seiner Konstruktion durch den Dampfdruck im Innern der Urne fest in seinen Sitz gedrückt wird. Der Hahn ist oben mit einer geränderten Scheibe versehen, mittelst welcher man ihn zur Füllung der Urne drehen kann; er wird dann in die in der Figur gezeichnete Lage gebracht, wobei eine Seitenöffnung in der Hahnwandung mit einer Durchbohrung in der Urne zusammenfällt; durch diese Oeffnung wird das Oel eingegossen. Damit aber beim Eingiefsen des Oels der in der Urne befindliche Dampf oder die Luft entweichen könne, sind den in der Figur gezeichneten Oeffnungen diametral gegenüber ein Paar ähnliche Oeffnungen angebracht, welche beim Umdrehen des Hahns gleichzeitig mit den Schmieröffnungen abgesperrt oder geöffnet werden. Taf. 26. Fig. 14.

Taf. 26. Fig. 15 zeigt eine aus der Fabrik von F. Wöhlert in Berlin hervorgegangene Schmier-Vorrichtung; sie ist zum Schmieren des Dampfmaschinenkolbens für die 200pferdige Dampfmaschine der Hamburger Wasserwerke bestimmt. Die Konstruktion unterscheidet sich von der so eben beschriebenen dadurch, dafs der Hahn zum Füllen der Urne umgekehrt liegt, d. h. mit der Erweiterung des hohlen Kegels nach oben, und dafs derselbe so eingerichtet ist, dafs er die Schmiere bequem aufnimmt, selbst wenn man sie in reichlichem Maafse aufgiebt. Taf. 26. Fig. 15.

Taf. 26. Fig. 16 stellt eine englische Konstruktion eines Schmierhahnes für ähnliche Zwecke vor, welche sich von den beiden vorigen Anordnungen dadurch unterscheidet, dafs man durch einen einzigen Hahn dieselben Bedingungen erfüllt, für welche dort zwei Hähne angebracht waren. Fig. 16a zeigt einen Durchschnitt durch die Axe des Hahnes, Fig. 16b einen solchen normal zur Axe des Hahnes. Der Hahn ist hohl, und fafst in seinem Innern soviel Schmiere, als auf einmal zugelassen werden soll; die Wandung des Hahnes hat zwei Durchbohrungen, welche aber nicht diametral gegenüberstehen, sondern so, dafs wenn die obere Taf. 26. Fig. 16.

mit der Schmierurne kommunicirt, die untere von dem Schmierrohr abgesperrt ist. In dieser Stellung kann sich die Höhlung des Hahnes mit Oel füllen; durch eine geringe Drehung des Hahns wird die obere Oeffnung zur Seite geschoben und versperrt, während die untere Oeffnung die Schmiere in das Schmierrohr fliefsen läfst. Es versteht sich wohl von selbst, dafs durch kleine Oeffnungen in beiden Stellungen des Hahnes für die Kommunikation der innern Höhlung mit der Atmosphäre gesorgt sein mufs, damit das Einfliefsen und Ausfliefsen der Schmiere ungehindert erfolgen könne. Die hier gezeichnete Anordnung gewährt noch den Vortheil, dafs selbst durch ein Versehen, niemals der Hahn so gestellt werden kann, dafs der Dampf aus dem Cylinder ausbläst, was bei den beiden andern Vorrichtungen in Fig. 14 und Fig. 15 allerdings möglich ist.

Dasselbe könnte man auch bei Anwendung zweier Hähne erreichen, wenn man die in Fig. 14 und 15 dargestellten Konstruktionen so abänderte, dafs die Axen der beiden Hähne parallel und horizontal liegen, und durch ein Paar kleine Stirnrädchen, die sich im Eingriff befinden, mit einander verbunden werden. Dreht man nun den einen der beiden Hähne, so mufs sich der andere entgegengesetzt drehen, da zwei eingreifende Stirnräder immer eine entgegengesetzte Drehung der Axen bedingen; wenn nun die Bohrungen der Hähne entsprechend eingerichtet sind, so können niemals beide Hähne gleichzeitig geöffnet sein. Diese Einrichtung war auf der pariser Ausstellung in mehren Exemplaren vorhanden.

Zapfenlager für Eisenbahnwagen.

§ 122. Den im vorigen Paragraphen beschriebenen Schmier-Vorrichtungen für Zapfenlager und für andere Maschinentheile reiht sich nach den Andeutungen auf S. 299 eine Gruppe von Schmier-Vorrichtungen an, welche den Zapfenlagern der Eisenbahnfahrzeuge eigenthümlich ist, und welche wir hier mit den gebräuchlichsten Konstruktionen dieser Zapfenlager selbst beschreiben wollen.

Bei den Eisenbahnfahrzeugen ruht das Lager stets auf dem Zapfen; dasselbe bildet die Verbindung zwischen dem Wagenkasten und den ihn unterstützenden Axen und Rädern; es hat daher den ganzen Druck auszuhalten, welcher vom Eigengewicht des Wagens und von der Ladung herrührt, und sich auf die sämmtlichen Lager entweder gleichmäfsig oder nach einem andern Gesetz vertheilt; zugleich hat der Zapfen der Wagenaxe und das Lager den Erschütterungen und den Stöfsen, die bei der Bewegung vorkommen, zu widerstehen. Diese Bedingungen, zugleich mit der sehr schnellen Bewegung des Zapfens in dem Lager erheischen nicht allein eigenthümliche Konstruktion für das Lager selbst, sondern auch für die Schmier-Vorrichtung.

Axlager für feste Schmiere.

Die älteste und einfachste Lagerkonstruktion für Fahrzeuge ist die auf Taf. 27 in Fig. 1 dargestellte. Sie ist, wie sämmtliche Figuren*) der Tafel 27 in $\frac{1}{16}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet; die sämmtlichen eingeschriebenen Maafse sind englische Zolle. Fig. 1a zeigt die Vorderansicht, Fig. 1b die Seitenansicht eines Axlagers, wie es ursprünglich an Kohlenwagen auf englischen Eisenbahnen angewendet wurde; es ist fest an das Holzgestell des Wagens angeschraubt, ohne dazwischen befindliche Feder, und ohne besondere Kammer zur Aufnahme des Schmiermaterials. Man findet es gegenwärtig selbst für Kohlenwagen und für Transportwagen für Erde und Baumaterialien auf Interimsbahnen zweckmäfsiger, die Verbindung des Lagers mit dem Wagengerüst durch Federn zu vermitteln; sei es indem man Stahlfedern anwendet, oder indem man auch nur eine federnde Verbindung von Holz konstruirt, welche dadurch hergestellt werden kann, dafs man das Lager in der Mitte eines sehr elastischen Holzstückes anschraubt, welches nur an beiden Enden mit dem Wagengerüst zusammenhängt, sonst aber sich unter der Einwirkung der Last und der Stöfse in der Mitte federnd durchbiegen kann. Durch die Anwendung der Federn werden die, besonders bei grofsen Geschwindigkeiten bedeutenden Stöfse gemildert, und dadurch eine Quelle der Abnutzung sowohl des festen Schienenweges, als der darauf laufenden Fahrzeuge minder schädlich gemacht. Ebenso ist es bei der gegenwärtig üblichen Geschwindigkeit eines Eisenbahnzuges unerläfslich, eine fortwährend wirksame Schmierung der Axlager zu bewirken, widrigenfalls die Axen sich bald erhitzen, stark abnutzen und brechen, oder auch eine Entzündung des Wagens herbeiführen würden.

Taf. 27 Fig. 1.

*) Für die Zeichnungen auf Taf. 27 ist aufser einigen Original-Aufnahmen benutzt worden: *Railway-Machinery, a treatise on the mechanical engineering of railways by Daniel Kinnear Clark*, und Heusinger von Waldeg „Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens."

Diesen Bedingungen entsprechend abgeändert erscheint die Konstruktion auf Taf. 27. Fig. 2, und zwar ist Fig. 2a ein Durchschnitt nach der Axe des Zapfens, Fig. 2b ein solcher normal zu dieser Richtung, und Fig. 2c und 2d sind die diesen Durchschnitten entsprechenden Ansichten. In ungefähr derselben Gröfse und mit geringen Modifikationen waren lange Zeit hindurch Axlager für fast alle Bahnen üblich. Die Feder ist auf dem Deckel *d* des Lagers durch vier $\frac{5}{8}$ Zoll starke Bolzen fest aufgeschraubt; diese Bolzen dienen zugleich dazu den Untertheil *u* des Lagers mit dem Obertheil zu vereinigen. Die über dem Axzapfen befindliche Kammer zur Aufnahme der Schmiere ist ganz geschlossen, und kann durch den Deckel *e* mit neuem Schmiervorrath gespeist werden. Die Schmiere selbst ist eine feste (S. 290) welche, sobald der Zug sich in Bewegung setzt und die reibenden Theile sich erwärmen, flüssig wird, und dann allmählich durch das Schmierloch dem Zapfen zufliefst. Der obere Theil des Lagers enthält ein halbrundes metallenes Lagerfutter, welches nach Erfordern ergänzt werden kann. Damit ein Schwanken der Axen und Axbüchsen in der Richtung des Zuges verhindert werde, zugleich auch um zu verhüten, dafs letztere um die Zapfen hin- und herschwingen können, sind an dem gufseisernen Körper des Lagers zwei Nuthen *nn* angegossen, die zur Führung desselben dienen; sie gleiten zwischen zweien, an das Wagengestell angeschraubten schmiedeeisernen Platten von rechteckigem Querschnitt ($\frac{5}{8}$ und $\frac{3}{4}$ Zoll), welche deshalb auch die Axhalter heifsen, zuweilen noch durch Streben und Zugstangen abgesteift und mit den benachbarten Axhaltern verbunden sind, jedenfalls aber so eingerichtet sein müssen, dafs sie eine vertikale Verschiebung des Wagengerüstes gegen die Lagerbüchse gestatten, sobald durch die Ladung und durch die Stöfse die Axfedern durchgebogen werden. Der Raum *r*, welcher zwischen dem vordern Ansatz des Zapfens (der Traube) und der vertikalen, davor liegenden und mit dem Obertheil zusammenhängenden Platte bleibt, dient zur Aufnahme der durch das Lagerfutter abgeflossenen nicht konsumirten Schmiere, welche nach Abnahme des Untertheils *u* sich entfernen läfst.

Taf. 27. Fig. 3. Taf. 27. Fig. 3 zeigt in zwei Durchschnitten (3a und 3b) und in zwei Ansichten (3c und 3d) eine ähnliche Lagerkonstruktion, welche von W. A. Adams in Birmingham herrührt. Figur 3a ist ein Durchschnitt durch die Zapfenaxe, Fig. 3b ein solcher normal dazu, Fig. 3c eine obere Ansicht, und Fig. 3d eine Vorderansicht, d. h. eine Ansicht nach der Richtung der Zagfenaxe.

Aufser den bedeutenderen Dimensionen des Zapfens (6 Zoll Länge und 3 Zoll Durchmesser) weicht die Konstruktion noch in einigen wichtigen Details von der vorigen ab. Zunächst liegt die Feder nicht frei auf dem Lagerdeckel, sondern zwischen zweien an demselben angegossenen vertikalen Ansätzen, welche zur Aufnahme der Feder eine gabelförmige Nuth *aa* bilden, gleichwohl aber der Feder ein freies Spiel gestatten. Die Metall-Einlage ist 1 Zoll dick, $5\frac{7}{8}$ Zoll lang und $2\frac{1}{2}$ Zoll breit; man sieht also, dafs zwischen dem 6 Zoll langen Zapfen in horizontaler Richtung noch $\frac{1}{8}$ Zoll Zwischenraum im Lagerfutter bleibt, so dafs die Axe eine geringe seitliche Verschiebung machen kann. Auch bemerkt man, dafs das Lagerfutter um $\frac{1}{2}$ Zoll schmäler ist, als der Zapfendurchmesser, dafs es also den Zapfen nicht bis zur Hälfte umschliefst. Hierdurch soll bewirkt werden, dafs die Schmiere, die an dem Zapfen hängt an dem Theil desselben, welcher sich aufwärts dreht, nicht so leicht durch das Lagerfutter abgestreift wird. Freilich wird durch diese Einrichtung etwas an Lagerfläche für den Zapfen verloren, dieser Nachtheil soll jedoch durch die bessere Schmierung der Lagerflächen reichlich ausgeglichen werden. Damit nun bei vorkommenden Stöfsen die Axe nicht so leicht aus dem Lagerfutter herausspringe, hält Adams es für nöthig, zwischen dem Axzapfen und den gufseisernen Seitenwänden des Lagers nicht mehr als $\frac{1}{8}$ Zoll Spielraum an jeder Seite zu gestatten. Der halbrunde Untertheil des Lagers ist $\frac{3}{8}$ Zoll von dem Zapfen entfernt, und nur $5\frac{9}{16}$ Zoll lang, also um $\frac{7}{16}$ Zoll kürzer als der Zapfen, und um $\frac{5}{16}$ Zoll kürzer als das Lagerfutter, so dafs wenn die Stirnflächen des Lagerfutters sich um diesen Betrag abgenutzt haben, die horizontalen Verschiebungen der Axe in ihrer eigenen Richtung durch diesen Untertheil begrenzt werden. Die Führungsnuthen für die Axträger sollen nach Adams nicht unter 9 Zoll lang sein, insbesondere wenn, wie bei dieser Konstruktion, die Feder nur lose auf dem Lager aufliegt.

An der Konstruktion von Adams werden im Allgemeinen zwei Uebelstände gerügt, welche zwar bei geringen Geschwindigkeiten fast gar nicht zum Vorschein kommen, aber bei Geschwindigkeiten von mehr als 30 englischen Miles in der Stunde nachtheilig auftreten. Dies sind: 1) der Umstand, dafs die Verschiebung der Axe in ihrer eigenen Richtung sich mit der Abnutzung der Lagerfutter ändert, und überhaupt sich nicht reguliren läfst, und 2) der Uebelstand, dafs das Axlager nach dem Rade hin offen ist, und folglich dem Staube und den Unreinigkeiten, welche bei einer schnellen Bewegung des Zuges sich durch den Luftzug vom Erdboden erheben, zugänglich bleibt. Diese Unreinigkeiten setzen sich auf den aus dem Lager hervorragenden eingefetteten Theil des Zapfens und werden so in das Innere des Lagers gezogen.

Um die beiden ebengenannten Uebelstände zu beseitigen hat Clark, Ingenieur bei der Great North of Scotland-Eisenbahn die
Taf. 27. Fig. 4. auf Taf. 27. Fig. 4 angegebene Konstruktion ausgeführt, welche als eine Verbesserung des Adams'schen Lagers erscheint. Zur Begrenzung der Seitenschwankungen der Axe ist die Vorderwandung der Lagerhülse verlängert; in dieser Verlängerung schiebt sich ein Eisenstück x von viereckigem Querschnitt, dessen innerer Kopf mit einem Metallzapfen versehen ist, und welches durch eine Klemmschraube y, die durch einen Schlitz dieses Stückes geht, in angemessener Entfernung von der Stirnfläche des Axzapfens festgestellt werden kann. Wenn die Axe sich nach rechts oder nach links verschiebt, so kann dies nur soweit erfolgen, bis die Stirnfläche des Axzapfens sich gegen den kleinen Metallzapfen in dem Stück x entweder in dem Lager rechts oder in dem Lager links stützt; damit aber für die Reibung, die in diesem Falle zwischen diesen beiden Theilen statt findet, Shmiere vorhanden sei, hat die Schmierkammer noch eine Durchbohrung unmittelbar über dem Kopf des kleinen Metallzapfens. Um andererseits den dichten Verschlufs des Lagers an der innern, dem Rade zugekehrten Seite zu erlangen, wendet Clark eine Schutzplatte z von Lindenholz an, welche auf die Axe aufgesteckt ist, dieselbe umschliefst, und sich in einer Art von Falz bei der Abnutzung des Lagers ein wenig verschieben kann. Diese Schutzplatte z, deren Konstruktion aus der Fig. 4a, b, c und d zu ersehen ist, soll sich als das beste Mittel erwiesen haben, um das Eindringen des Staubes und der Unreinigkeiten zu verhüten. Man hat anstatt des Lindenholzes auch Leder, Kautschuk, Filz, Steinpappe u. s. w. angewandt, jedoch, wie Clark behauptet, mit viel geringerem Erfolg. Uebrigens stellt Fig. 4a einen vertikalen Durchschnitt durch die Axe des Zapfens, Fig. 4b einen solchen normal dazu, Fig. 4c einen horizontalen Durchschnitt durch die Zapfenaxe, und Fig. 4d eine theilweise Ansicht der Lagerbuchse nach der Richtung der Wellenaxe dar.

Taf. 27. Fig. 5. Taf. 27. Fig. 5 zeigt eine andere Einrichtung, um den dichten Verschlufs des Axlagers zu bewirken. Bei der vorigen Anordnung mufste die Schutzplatte mit dem Lagerfutter niedersinken, wenn sich dieses abnutzte, da das Lagerfutter in dem Lagergehäuse fest war, die Wagenlast durch die Federn auf das Lagergehäuse übertragen wurde, und folglich das ganze Lagergehäuse bei eintretender Abnutzung niedersinken mußte. Hier ist in sofern eine abweichende Einrichtung getroffen worden, als die Wagenlast durch den Federstift unmittelbar auf das Lagerfutter übertragen wird; dieses ist in dem Gehäuse verschiebbar, sehr genau in dasselbe eingepaßt, und kann nun bei eintretender Abnutzung ohne das Lagergehäuse niedersinken. Die Schutzplatte kann also an dem Lagergehäuse unmittelbar befestigt sein. Das Spiel der Axe nach der Richtung ihrer Länge ist hier dadurch begrenzt, daß an den Axzapfen als Fortsetzung ein kleinerer Zapfen mit Schraube angedreht ist; dieser Zapfen reicht durch die Vorderwand des Lagerkörpers, und nun kann man den Spielraum des Zapfens durch eine von Außen aufgedrehte Mutter nach Ermessen begrenzen. Fig. 5a zeigt einen Längenschnitt durch die Axe des Zapfens, Fig. 5b einen Querschnitt normal dazu.

Axlager für Oelschmiere.

Die bisher beschriebenen Axlager waren für feste Schmiere eingerichtet. Man hat gegen die feste Schmiere mannigfache Bedenken erhoben, und auf einer großen Zahl von Eisenbahnen hat man sie vollständig aufgegeben, und dafür die Oelschmiere eingeführt. Jene Bedenken beziehen sich namentlich darauf, daß die feste Schmiere erst dann zur Wirkung gelangen kann, wenn sie durch Erwärmung der reibenden Theile flüssig wird, und daß sie daher stets eine solche Erwärmung voraussetzt, während die Schmiere doch vielmehr den Zweck haben soll, die Erwärmung zu verhüten. Ferner wendet man gegen die feste Schmiere ein, daß bei Sommerwärme, oder wenn durch zu starke Erhitzung des Lagers ein großer Theil des Schmiervorrathes auf einmal flüssig wird, sehr bedeutende Verluste an Schmiere durch Abtropfen entstehen. Endlich aber hat man auch gefunden, daß bei zweckmäßiger Konstruktion der Schmier-Vorrichtungen die Oelschmiere billiger ist, als die feste Schmiere. So fand Gruson auf der Berlin-Hamburger Bahn, daß man bei gehöriger Sorgfalt und zweckmäßiger Anordnung der Schmier-Vorrichtungen für ein Lager auf 1000 Meilen nicht mehr als 7,05 Loth Oel verbrauche, während auf derselben Bahn früher für dieselbe Strecke 8 bis $8\frac{1}{2}$ Pfund Oel konsumirt wurden, und nach Neesens Beobachtungen sogar auf 1000 Meilen für ein Zapfenlager 13,53 Pfund feste Schmiere von Palmöl und Talg verbraucht wurden. Nach den neuesten Zusammenstellungen des Verbrauchs an Schmiermaterial auf den preufsischen Eisenbahnen *), variirte der Betrag des für eine Axmeile verbrauchten Schmiermaterials von 1,09 Loth bis 0,03 Loth, welches für 1000 Meilen und für einen Zapfen 545 Loth bis abwärts 15 Loth beträgt. Der gröfste Verbrauch fand auf der Aachen-Düsseldorf-Ruhrorter Eisenbahn, der geringste auf der Bonn-Kölner Bahn statt; auf der Berlin-Hamburger Bahn betrug der Durchschnittsverbrauch circa 20 Loth; auf der Köln-Mindener und auf der Thüringischen Bahn 80 Loth für einen Zapfen auf 1000 Meilen. Es sind hier die Zapfenlager von Personenwagen gemeint, indessen ist nicht angegeben, ob Oelschmiere oder ob feste Schmiere in Gebrauch war.

Die wesentlichste Schwierigkeit für die Anwendung der Oelschmiere besteht in einer möglichst ökonomischen Zuführung des Oels zu den Zapfen. Früher wandte man Schmierbüchsen mit Docht an, da jedoch der Docht kontinuirlich, also auch während des Stillstandes der Wagen die Schmiere zuführt, (siehe S. 299), so entstehen dadurch nicht unwesentliche Verluste; diese Verluste wurden noch erhöht durch einen schlechten Verschlufs der Schmierbüchsen, die den Eintritt des Regenwassers und dadurch das Ausspühlen der Schmiere nicht wirksam genug verhinderten. Jenen Uebelständen hat Gruson durch die auf Taf. 28. Fig. 1 gezeichnete Einrichtung des Axlagers zu begegnen gesucht. Fig. 1a zeigt einen Längendurchschnitt durch die Axe des Zapfens, Fig. 1b einen Querdurchschnitt normal dazu. Gruson beschreibt seine Konstruktion folgendermaafsen: **)

In dem oberen Theile des eigentlichen Lagerkastens, d. h. über der, den ganzen Kasten horizontal durchschneidenden Wand *P* befinden sich das Oelbehältnifs *A* und die Zwischenkammer *B*. Beide sind abermals durch eine Wand von einander getrennt, und letztere in der Richtung *FF* durchbohrt. Durch dieses Schmierloch wird ein Docht gesteckt, der mit einem Ende bis auf den Boden des Schmierbehältnisses hinunterreicht, und dessen anderes Ende auf dem Boden der Zwischenkammer liegt. Das Oelbehältnifs *A* hat in dem oberen Theile eine Oeffnung von *b* bis *b*, wel-

*) Statistische Nachrichten von den Preufsischen Eisenbahnen. Bearbeitet auf Anordnung Sr. Excellenz des Herrn Chefs des Königlichen Ministeriums für Handel, Gewerbe und öffentliche Arbeiten, von dem technischen Eisenbahn-Bureau genannten Ministeriums: Band II. die Ergebnisse des Jahres 1854 enthaltend. Berlin 1856. Verlag von Ernst und Korn.

**) Eisenbahn-Zeitung, redigirt und herausgegeben von Carl Etzel und Ludwig Klein. VIII. Jahr 1850. S. 102.

che mittelst eines Deckels *D* dicht geschlossen wird; der obere Rand des Schmierbehälters ist derartig nach Innen gekrümmt, daſs alles Oel, welches durch heftige Schwankungen des Lagers emporgeschleudert wird, wieder in den Kasten zurückkommt. Der Deckel hat zwei Ränder, von denen der eine in die obere Oeffnung des Schmierbehälters paſst, während der zweite den äuſseren Rand des Schmierbehälters von auſsen umfaſst, so daſs es dem Regen wie dem Staub unmöglich wird, einzudringen. Damit der etwas schwere guſseiserne Deckel durch Stoſsen der Axen, wenn diese z. B. durch Abnutzung flache Stellen erhalten haben, sich nicht öffnen und schlieſsen kann, wird derselbe mit einer Feder geschlossen, die sich auf dem einen Ende auf eine am mittleren Charniergelenk des Lagerkastens angegossene Ecke stützt und zugleich verhindert, daſs der geöffnete Deckel allein wieder zufallen kann, am anderen dagegen auf dem Deckel aufgenietet ist. Ebenso, wie das Oelbehältniſs gegen Eindringen fremder Elemente geschützt ist, wird auch die Zwischenkammer *B* durch eine Platte *C* geschützt, die auf der oberen Fläche der Seitenwände *S* aufliegt und diese mit einem Rand überragt. Diese Platte wird mit der ganzen Last, welche das Lager zu tragen bekommt, auf dasselbe gedrückt, indem in der Höhlung des Deckels ein Stift *O* eingesetzt wird, dessen untere Seite kugelförmig, die obere mit einem Zapfen versehen ist, der in den Federring paſst.

Durch den Boden *P* der obenerwähnten Kammer *B* und das Antimonlager *G* führen zwei Schmierlöcher *EE*, das zur Verminderung der Reibung des Axschenkels im Lager nöthige Schmieröl zu.

Die Anfertigung des Antimonlagers *GG* geschieht in der einfachen Weise, daſs der Lagerkasten umgedreht auf eine Unterlage gesetzt, in richtige Stellung zur Axe gebracht, dann der Axschenkel entweder gewärmt, oder um so viel, als das Lager durch Schwindung des warmen Lagermetalls gegen die kalte Axe zu eng würde, durch Anlegen von schwachen Papieren verstärkt, und hierauf das warme, nicht zu heiſse Antimonmetall in seiner Mischung mit Blei mit einem Holzstabe wohl durcheinander gerührt, genau bis zur Hälfte des Axschenkels, den Kopf mit eingeschlossen, in den Lagerkasten eingegossen wird.

In die beiden Schmierlöcher, die bereits im Lagerkasten gebohrt sind, werden Holzpflöckchen eingeschlagen, auf welche eine kleine Schiene gelegt wird, die nach dem Guſs aus dem fertigen Lager herausgenommen, das umständliche Einhauen der Nute erspart.

Um die Schmierkammern gegen Staub und Wasser zu schützen, wurden dichte Verschlüsse angewendet, dasselbe ist unbedingt noch nothwendiger bei der ganzen unten freistehenden Hälfte des Axschenkels, um diesen gegen den durch Wind und Räder aufgewühlten Staub zu verwahren und dessen bei Antimonlagern so gefährliche Wirkungen zu verhindern, denn gerade in dieses Metall setzt sich jedes auſsergewöhnlich harte Körnchen Sand, wenn es gegen die Axe fliegt, fest und wirkt fortwährend schleifend, und ist erst an einer einzigen Stelle die glatte Oberfläche des Schenkels verletzt, so ist ein Fressen und Brennen des Lagers die nothwendige Folge.

Zu dem Ende mufs die hintere Oeffnung des Lagers geschlossen werden. Um dies zu können, sind zwei Leisten *MM* (siehe Querprofil) an den unteren Seiten der Lagerwangen nach Innen springend angegossen; dieselbe Leiste geht auch an der inneren Seite des Lagers, der der Nabe zugekehrten, aufwärts; gegen diese Leiste und auf derselben ruht ein Antimoneinsatzstück *K*, welches, da es von vorn ausgeschoben werden mufs, aufserdem noch durch den von derselben Seite einzuschiebenden Kasten *J* getragen und gegen die vertikale Leiste gedrückt wird, so dafs es seine Stellung nicht verändern kann. Dieses Einsatzstück ist von demselben Metall, wie die Lager gegossen, gewährt also den Vortheil, dafs, wenn es im neuen Zustande wirklich etwas zu scharf an die Axe gepafst sein sollte, es nicht brennen und fressen würde, weil es von dem oberen Lager soviel Schmiere erhält, als zur Vermeidung der Friktion nöthig wird, aufserdem sich aber sehr gut an die Form der Axe anpassen läfst und leicht herzustellen ist. Der eingeschobene Schubkasten wird durch einen an der vorderen Seite angebrachten, durch eigene Schwere immer nach unten fallenden Haken, der um den Knopf des Kastens fällt, gehalten. Um Sand und andere Unreinlichkeiten, die von oben auf die Axschenkel fallen könnten, abhalten zu können, ist ein Schutzbogen *N* angebracht, der über den Nabenring mit einigem Spielraum pafst.

Man könnte bei dieser Lagerkonstruktion wohl einwenden, dafs sie an demselben Fehler leide, wie die alten Lager, die ebenfalls mit einem Docht von oben geschmiert werden, besonders was das Ablaufen der im Schmierkasten noch verbleibenden Schmiere auf den Endstationen betrifft, allein es bleibt immer noch hierbei zu bedenken, dafs ein Lager nicht mehr Oel erhält, als zu der Reise, die dem Wagen bevorsteht, nothwendig ist.

Man hat den Uebelständen, welche die Anordnung der Schmierdochte herbeiführt, nämlich der kontinuirlichen Zuführung der Schmiere, durch andere Vorrichtungen entgegenzuwirken gesucht, und hieher gehört namentlich das Zuführen der Schmiere von unten. Diese Einrichtung, die übrigens vielen Beifall und Eingang auf mehrern Eisenbahnen gefunden hat, ist für den Schmierverbrauch sehr ökonomisch, allein man wirft ihr vor, dafs mit der ablaufenden und sich in einen Oelbehälter unter dem Zapfen sammelnden Schmiere, auch das fein zertheilte Metall, das durch die Abnutzung des Lagerfutters sich bildet, in die Schmiere gelangt, diese allmählich verdickt, und dadurch zum ferneren Schmieren ungeeignet macht.

Taf. 27. Fig. 6. Taf. 27. Fig. 6 zeigt ein Axlager, welches zum Schmieren des Zapfens von unten eingerichtet ist, und zwar ist Fig. 6a ein Längenschnitt durch die Axe des Zapfens, Fig. 6b ein Querschnitt normal dazu, Fig. 6c eine Ansicht des Lagers von unten nach oben gesehen, Fig. 6d eine obere Ansicht des Lagerfutters und Fig. 6e Details des Lagerverschlusses. Das hier gezeichnete Axlager ist von Meggenhofen für die Main-Weser Eisenbahn konstruirt worden. Das Lager ist ausschliefslich für Oelschmiere bestimmt, indessen ist oberhalb des Lagers noch ein kleiner Schmierkasten, um bei etwaigem Warmlaufen des Zapfens von oben her noch Schmiere einbringen zu können. Die Schmier-Vorrichtung von unten wirkt nur während der Zapfen in Umdrehung ist; zu diesem Zwecke schwimmt auf dem Oelspiegel in dem untern Schmiergefäfs ein kleiner Cylinder von Kork oder von einem andern leichten Holz; dieser Cylinder wird beständig gegen den Zapfen gedrückt, und damit dies noch erfolge, wenn das Oel in dem Behälter sinkt, wird der ganze Schmierbehälter durch eine unter demselben liegende flache Feder in die Höhe geprefst. Durch die geringe Reibung zwischen dem Zapfen und dem Cylinder wird dieser bei der Drehung des Zapfens mit in Umdrehung gesetzt, und führt so aus dem Oelvorrath die anhängende Schmiere dem Zapfen zu. Das Oelgefäfs ist mit einer nach vorne führenden Röhre versehen, wodurch dasselbe gespeist wird; zugleich kann man nach Abnahme des Deckels, welcher die Mündung dieser Röhre fest verschliefst, den Stand des Oels in dem Gefäfs erkennen. Das Schmiergefäfs und der Cylinder dürfen nicht zu breit sein, damit der letztere nicht sich gegen die Brüstung des Zapfens setze und dort festgeklemmt werde. Der Cylinder wird auch zuweilen aus Eisenblech hohl angefertigt. Der Verschlufs des Lagers an der innern, dem Rade zugekehrten Seite wird durch eine Ledermanschette bewirkt, welche durch die Federn an die Rückwand der Höhlung angedrückt wird, an welcher sie in der Vertikalen bei erfolgender Abnutzung des Lagerfutters beliebig gleiten kann; um die Manschette an der Rotation mit dem Zapfen zu hindern, sind an dieselbe zwei kleine eiserne Winkel angenietet, die in einer entsprechenden Nuth des Lagerkörpers gleiten können. Das Lagerfutter dieses Zapfens besteht aus einer Antimonlegirung, welche in ein Bronzestück gegossen ist; dasselbe ist an der obern Aufsenseite mit einem runden abgedrehten Zapfen *a* versehen, welcher in den Lagerkörper, der die Wagenlast trägt, eingesteckt ist; hierdurch wird eine gewisse Beweglichkeit des Lagerfutters möglich gemacht, welche noch durch die Abrundung der Langseiten (Fig. e) desselben erhöht wird. Diese Konstruktion gestattet, dafs bei dem Durchlaufen von Kurven das Lagerfutter sich einer geringen Verschiebung der Axe akkomodirt, und dadurch den sonst unvermeidlichen Reibungswiderständen, welche aus dem Klemmen der Axschenkel in den Lagern entstehen, entgeht. Zugleich macht diese Anordnung die Anwendung von Axhaltern entbehrlich; die Tragefeder ist auf dem Lagerkörper festgeschraubt, und die Spannstangen sind unmittelbar an dem Lagerkörper befestigt (Fig. 6b und 6d).

Die Zuführung der Schmiere von unten, welche bei dem soeben beschriebenen Lager durch eine kleine Schmierrolle bewirkt wurde, hat man auf der Köln-Mindener Eisenbahn noch auf andere Weise herbeigeführt. Der Schmierkasten liegt auch hier unter dem Zapfen; über dem Oelspiegel befindet sich aber ein horizontales, mit grobem Friefs oder einem ähnlichen Wollenzeuge benageltes Brettstückchen, welches durch kleine Federn von unten gegen den Zapfen gedrückt wird, und mittelst einiger Saugedochte mit dem Oelvorrath kommunizirt; das Wollenzeug wird so stets stark mit Oel getränkt erhalten, der Zapfen streift den Bedarf an Schmiere von dem Wollenzeuge ab, und der Ueberschufs geht wieder zurück in den Oelkasten.

Auf der Bonn-Kölner Eisenbahn hat man eine Vorrichtung, um die Oelschmiere von oben und ohne Docht dem Zapfen zuzuführen. Der Schmierbehälter kommunizirt nämlich, wie bei der festen Schmiere, durch röhrenförmige Durchbohrungen mit dem Zapfen; diese $\frac{1}{4}$ Zoll im Durchmesser haltenden Röhren sind oben durch kleine Kugeln verschlossen; ein kleiner Drahtkorb hindert die Kugel seitwärts von der Oeffnung fortzurollen, dagegen wird die Kugel bei den Erschütterungen während der Fahrt häufig emporspringen und wieder niederfallen, dabei öffnet sie die Röhre, und verschliefst sie wieder, läfst aber in der Zwischenzeit kleine Portionen Oel durchfliefsen. Während der Wagen nicht in Bewegung ist, wird der Durchflufs der Schmiere gehemmt.

Eine andere Einrichtung zur Versorgung des Zapfens mit
Taf. 27. Oelschmiere ist auf Taf. 27. Fig. 7 dargestellt; es ist die in
Fig. 7. Amerika am häufigsten gebrauchte Konstruktion, welche in England zuerst von Hodges eingeführt worden ist. Fig. 7a zeigt einen Längenschnitt durch die Axe des Zapfens, Fig. 7b einen Querschnitt normal dazu, Fig. 7c eine Ansicht des Lagers von hinten, d. h. von dem Rade aus, und Fig. 7d eine Ansicht von vorne, d. h. nach dem Rade hingesehen. Die wesentlichste Eigenthümlichkeit dieses Lagers besteht darin, dafs der ganze freie Raum, sowohl unter dem Axschenkel, als zur Seite desselben voll Baumwollen-Abfall gestopft wird. Derselbe wird vollständig mit Oel getränkt, und hält die Hälfte des ganzen Zapfens in beständiger Berührung mit der Schmierflüssigkeit. Ein kleinerer Theil der

letztern wird freilich von der Schulter des Zapfens stets abtropfen, zur Aufnahme dieser überfliefsenden Schmiere dient das unterhalb angebrachte Oelgefäfs. Die Schmiere, welche aus den, den Zapfen unmittelbar berührenden Baumwollentheilchen konsumirt wird, ergänzt sich, vermittelst der Kapillarität der Baumwollenfasern aus der übrigen vorräthigen Baumwollenmasse. Diese Einrichtung soll den Vortheil haben, dafs die häufige Ergänzung des Schmiervorrathes, sowie die dadurch bedingte ängstliche Beaufsichtigung der Axen, damit sie nicht ohne Schmiere laufen, fortfällt; die mit dieser Einrichtung versehenen Axen sollen 8000 englische (etwa 1800 preufsische) Meilen durchlaufen, bevor der Schmiervorrath ergänzt zu werden braucht.

Die Dichtung der inneren Schulter des Zapfens ist bei der in Fig. 7 dargestellten Konstruktion dadurch bewirkt, dafs auf dem Axschenkel ein schmiedeeiserner Ring mit eingedrehter Nuth aufgetrieben ist, in welche Nuth eine Lederscheibe pafst, die durch eine schmiedeeiserne Scheibe an ihrem Platz erhalten wird. Die Ergänzung des Oels geschieht durch eine im obern Theil des Lagerkörpers befindliche, gewöhnlich durch eine Schraube verschlossene Oeffnung; das Ablassen des übergeflossenen Oels aus dem Sammelgefäfs geschieht in ähnlicher Weise. Zur Einbringung des Baumwollen-Abfalls ist an der Vorderseite des Lagers eine rechtwinklige Oeffnung, welche während des Gebrauchs des Wagens durch eine Platte mit vier Schrauben dicht verschlossen ist.

Axlager für Lokomotiven.

Fig. 8 und 9 auf Tafel 27 stellen zwei Konstruktionen für Lokomotiv-Axlager dar.

Taf. 27. Fig. 8 ist ein Lager für eine Lokomotive mit innerm Rahmen, und zwar ist *Fig.* 8a eine Ansicht des Lagers von vorne, *Fig.* 8b *eine solche* von der Seite, und 8c und 8d sind *Ansichten* von unten und von oben. Der Lagerkörper ist aus einem massivem Stück Schmiedeeisen gearbeitet; dies macht die Konstruktion zwar theurer, als wenn der Lagerkörper von Gufseisen ist, allein es gewährt den Vortheil gröfserer Sicherheit, längerer Dauer und eines geringeren Gewichtes; welche Umstände besonders für die Triebaxen der Maschinen mit grofser Geschwindigkeit von Wichtigkeit sind. Um bei dieser Konstruktion den Oelbehälter leichter herstellen zu können, ist dessen Höhlung nicht in das volle Stück eingearbeitet, sondern es ist die Vorder- und Hinterwand durch eine aufgenietete schmiedeeiserne Platte gebildet. Die in der Taf. 27. Fig. 8.

Mitte der Schmierkammer befindliche, oben ausgerundete Erhöhung dient zur Aufnahme der gabelförmigen Federstütze, durch welche die Belastung auf das Lager übertragen wird.

Das Schmiermaterial ist für Lokomotivlager fast ausschliefslich Oel. Dasselbe wird entweder in die obere Kammer gegeben, und durch Röhrchen mit Hebedochten von da aus auf den Zapfen geführt, oder (was besonders bei solchen inneren Lagern, zu denen man schwieriger gelangen kann, empfehlenswerth ist), man bringt besondere leicht zugängliche Schmiergefäfse an dem Rahmen der Lokomotive an, von denen man das Oel durch Kupferröhrchen nach dem Axlager leitet.

Der gufseiserne Untertheil des in Fig. 8 dargestellten Lagers ist hohl, und nimmt die überfliefsende Schmiere auf. Der ganze Lagerkörper ruht auf der Axe; die Axhalter dagegen, welche an dem Rahmstück der Maschine fest sind, müssen sich, sobald die Tragefedern spielen, gegen den Lagerkörper gleitend verschieben. Fig. 8b zeigt die gewundene Nuth, welche in den Lagerkörper eingehauen ist, und die zur Aufnahme der für die angedeutete Verschiebung nöthigen Schmiere dient.

Taf. 27. Fig. 9. Taf. 27. Fig. 9 zeigt ein Lokomotivaxlager für Federbelastung, welche von unten angehängt ist. Fig. 9a ist die Vorderansicht, und Fig. 9b der Längenschnitt nach der Axe des Zapfens. Die hier angegebene Uebertragung der Last auf die Triebaxe ist oft bei grofsen Triebrädern und grofsen Kesseldurchmessern erforderlich. Das hier gezeichnete Lager ist von einer Maschine mit vier gekuppelten Rädern; es zeigt eine Konstruktion, durch welche man die Entfernung der beiden Triebaxen reguliren, und das Lager stets fest zwischen den Axhaltern einstellen kann. Dies wird durch Anziehen des Keils *a* bewirkt, welcher unten mit einer Schraube versehen ist, und durch welchen die eine Wandung des Axhalters verstellt wird.

Taf. 28. Fig. 1. Taf. 28. Fig. 1 ist ein Axlager von *Gruson*; die *Beschreibung* desselben s. S. 314.

Einfache Zapfenlager für liegende Wellen.

Allgemeine Prinzipien für die Konstruktion einfacher Zapfenlager.

§ 123. Die Konstruktion metallener Zapfenlager für liegende Wellen, so verschieden sie in der äufseren Form und in den Verhältnissen je nach der Ansicht und dem Geschmack der Konstrukteurs ausgeführt wird, hat doch ziemlich allgemein das Bedürfnifs herausgestellt, jedes Zapfenlager aus einer bestimmten Reihe von Theilen zusammenzusetzen. Nach dieser allgemeinen Anordnung kann man an jedem metallenen Zapfenlager fast ohne Ausnahme folgende Theile unterscheiden (vergl. § 116. S. 276).

1) das Lagerfutter (die Lagerschalen, die Einlagen),
2) den Lagerkörper (Lagerblock, Lagerklotz),
3) den Lagerdeckel (Lagerkappe, Lagerhut),
4) die Deckelschrauben,
5) die Lagerplatte (Sohlplatte, Grundplatte),
6) die Befestigungsschrauben.

Ueber das Material des Lagerfutters ist schon früher das Nöthige angeführt worden; den Lagerkörper, den Lagerdeckel und die Lagerplatte macht man gewöhnlich bei metallenen Zapfenlagern aus Gufseisen, selten, und nur in Ausnahmefällen von Schmiedeeisen oder von Bronze, Messing u. s. w. Die Deckelschrauben und die Befestigungsschrauben sind fast immer von Schmiedeeisen.

Die Formen und die Verhältnisse des Zapfenlagers sollten von keinen anderen Rücksichten abhängig gemacht werden, als von den Bedingungen, die der Zapfen, für welchen das Lager bestimmt ist, und demgemäfs dieses selbst zu erfüllen hat. Die Dimensionen der einzelnen Theile des Lagers müssen sich nach den Drucken richten, welche der Zapfen auszuhalten hat, die Form der einzelnen Theile mufs nach der Richtung dieser Drucke und nach der Art des Widerstandes bemessen werden, welchen sie auszuhalten haben, und die ganze Anordnung des Zapfenlagers mufs durch die möglichste Einfachheit bei der Anfertigung, bei der Aufstellung und bei des Beaufsichtigung oder bei dem Gebrauche bemessen werden.

Alle diese Rücksichten hat man bei der Konstruktion eines Zapfenlagers zu nehmen, wenn man dasselbe für einen bestimmten, seinen Bedingungen nach vollkommen gegebenen Fall zu entwerfen hat. Allein wollte man dies konsequent durchführen, so müfste man fast für jeden Zapfen ein anderes Zapfenlager konstruiren, und man würde dadurch zu einer aufserordentlichen Komplikation der einzelnen Theile gelangen, aus denen eine Maschine besteht. Wo nun der vorliegende Fall nicht eine ganz besondere Sorgfalt in der Auffassung seiner Eigenthümlichkeit erheischt, wo er ferner nicht ohnehin die Anfertigung eines besonderen Gufsmodells verlangt, pflegt man sich damit zu begnügen, für denselben eine Lagerform zu benutzen, welche so beschaffen ist, dafs sie die Erfüllung einer grofsen Menge der am häufigsten vorkommenden Bedingungen in sich vereinigt, und welche daher zwar auch für diesen Fall passend ist, aber doch auch einige Verhältnisse, Dimensionen und Formen enthält, die für diesen eben vorliegenden Fall überflüssig sind, und die man nicht gewählt haben würde, wenn man das Lager für diesen Fall besonders hätte konstruiren können. Die Oekonomie in der Ausführung der Zapfenlager, und namentlich in der Anfertigung der Gufsmodelle, hat daher zur Annahme gewisser stereotyper Formen und Verhältnisse geführt, welche so beschaffen sind, dafs sie die Anwendung ein und desselben *Zapfenlagers* in möglichst vielen verschiedenen Fällen gestatten.

Dies ist der Gesichtspunkt, nach welchem man die gewöhnlichen metallenen Zapfenlager zu konstruiren hat, und welchen wir bei der Bestimmung der Formen und Verhältnisse der Zapfenlager festhalten wollen. Wir werden demgemäfs die Dimensionen der Zapfenlager unter der Voraussetzung zu ermitteln suchen:

> dafs sämmtliche Theile des Lagers in Bezug auf ihre Festigkeit dieselbe Widerstandsfähigkeit gewähren, welche auch der Zapfen selbst darbietet, selbst wenn sie durch die gröfsten Drucke, die der Zapfen mit gehöriger Sicherheit auszuhalten vermag, auf die ungünstigste Weise in Anspruch genommen werden.

Indem wir die Zapfenlager, welche für die am häufigsten vorkommenden Fälle dienen sollen, nach diesen Prinzipien proportioniren, machen wir ausdrücklich darauf aufmerksam, dafs diejenigen Dimensionen, welche in einem bestimmten Falle nicht in der vorausgesetzten ungünstigsten Weise in Anspruch genommen werden, für diesen Fall zu stark sind, und dafs man dieselben daher vermindern kann, wenn die Umstände eine Abänderung des vorhandenen Modells, oder die Anfertigung eines neuen Modells rechtfertigen. Dies wird allemal gerechtfertigt sein, wenn eine gröfsere Anzahl Zapfen von demselben Durchmesser unter ganz gleichen Bedingungen anzuordnen ist.

Bestimmung des gröfsten Druckes, welchen ein Zapfen von gegebenem Durchmesser mit genügender Sicherheit auszuhalten vermag.

Die Zapfen liegender Wellen werden nach Th. I. S. 263 entweder auf Bruch oder auf Torsion in Anspruch genommen. Die Drucke, welche Zapfen von gegebenem Durchmesser auf Torsion auszuhalten vermögen, und welche sich durch die Formeln Th. I. S. 268 und 269 bestimmen, sind im Allgemeinen geringer, als diejenigen, welche die Zapfen aushalten können, wenn sie auf Bruch in Anspruch genommen werden, und welche die Formeln Th. I. S. 265 angeben. Hier sieht man aber, dafs der Druck, welchen ein Zapfen von gegebenem Durchmesser auf Bruch mit genügender Sicherheit aushalten kann, um so gröfser ist, je kürzer der Zapfen ist, und von je festerm Material derselbe ist. Der gröfste Druck, welcher bei einem Zapfen von gegebenem Durchmesser in Rechnung zu bringen ist, findet also statt, wenn der Zapfen von Schmiedeeisen ist, und wenn derselbe die geringste Länge hat, welche für die Ausführung zulässig ist. Diese geringste Länge haben wir nach Th. I. S. 264 gleich $\frac{4}{3}$ des Durchmessers angenommen, und da die Zapfenlager in möglichst vielen Fällen brauchbar sein sollen, so werden wir dasselbe Lager sowohl für einen schmiedeisernen als für einen gufseisernen Zapfen anzuwenden haben, und daher bei der Berechnung den Druck des schmiedeeisernen Zapfens zu Grunde legen müssen.

Die für diesen Fall passende Formel S. 265. Th. I. giebt:

$$P = 736{,}5\, d^2$$

wenn $l = \frac{4}{3}\, d$,

worin P den Druck in Pfunden bezeichnet, welchen ein schmiedeeiserner Zapfen auf Bruch mit genügender Sicherheit auszuhalten vermag,

d und l den Durchmesser und die Länge des Zapfens in Zollen bedeuten.

Diese Beziehung zwischen dem Druck und dem Zapfendurchmesser, werden wir für die Berechnung der Lagerverhältnisse zu Grunde legen. Es folgt daraus:

$$d = 0{,}037 \cdot \sqrt{(P)}.$$

Bestimmung der Dimensionen und Verhältnisse einfacher Zapfenlager nach des Verfassers Prinzipien.

§ 124. Nach diesen allgemeinen Prinzipien (§ 123) wollen wir nunmehr die Dimensionen und Verhältnisse der einzelnen Theile eines Zapfenlagers bestimmen. Taf. 28. Fig. 2 giebt die allgemeine Anordnung eines nach des Verfassers Ansichten konstruirten Zapfenlagers, welches wir bei den nachfolgenden Bestimmungen zu Grunde legen. Taf. 28. Fig. 2.

1) Die Lagerfutter.

Die Lagerfutter haben die Länge des Zapfens, die Metalldicke, welche dieselben haben müssen, läfst sich durch Rechnung nicht gut bestimmen. Da die Lagerfutter meist aus theurem Metall bestehen, auch nur die Oberfläche derselben in eigentlichem Gebrauch ist, und allein in Anspruch genommen wird, so ist es im Allgemeinen eine Metall-Verschwendung, wenn man sie dicker macht, als nöthig ist, um sie gut bearbeiten zu können und um noch einige Dicke für die Abnutzung zu gewähren. Es wird in den meisten Fällen genügen, die Metalldicke gleich $\frac{1}{12}$ vom Zapfendurchmesser zu machen, mit der Modifikation, dafs man $\frac{1}{8}$ Zoll als Minimum und $\frac{3}{4}$ Zoll als Maximum der Metalldicke annimmt. Man wird daher für Zapfen unter $1\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser die Metalldicke $\frac{1}{8}$ Zoll machen, und für Zapfen über 9 Zoll Durchmesser dieselbe gleich $\frac{3}{4}$ Zoll beibehalten. Abweichungen hiervon sind natürlich da gerechtfertigt, wo das Lagerfutter einer starken Abnutzung unterliegt, wie z. B. bei Eisenbahnwagen, oder wo das Lagerfutter nicht vollständig und fest vom Lagerkörper umschlossen ist, so dafs es also auf relative Festigkeit in Anspruch genommen wird; in solchen Fällen macht man das Lagerfutter wohl auch $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{4}$ des Zapfendurchmessers stark. Die Lagerfutter haben an den Enden Ränder oder Rippen, deren Dicke gleich der Metalldicke ist, und mit welchen sie den Lagerkörper umgreifen.

Theils um den Zapfen besser in das Lager bringen zu können, theils auch um bei etwaiger Abnutzung das Lager wieder schliefsend zu machen, ist das Lagerfutter in zwei Hälften getheilt; die eine Hälfte oder Schale liegt in dem Lagerkörper, die andere in dem Lagerdeckel; beide müssen so eingepafst werden, dafs sie in allen Punkten aufliegen und sich nicht verschieben können. Die Verschiebung in der Richtung der Länge des Zapfens wird durch die umgreifenden Ränder verhindert; es bleibt also nur die Drehung der Lagerfutter in ihren Sitzen zu verhindern. Im Allgemeinen ist kein besonderes Bestreben zu solcher Drehung vorhanden; die Kraft, welche auf Drehung in dem gedachten Sinne wirkt, ist keine andere, als die Reibung an der Oberfläche des Zapfens, und da diese unter allen Umständen schon wegen der Schmiere kleiner sein mufs, als die Reibung, welche zwischen der Lagerschale und dem Lagerkörper statt findet, so wird es entweder gar keiner, oder doch nur einer sehr geringen Befestigung der Lagerschalen in dem Lagerkörper und in dem Deckel bedürfen, um die Drehung zu verhüten.

Die äufsere Begrenzung der Lagerschalen ist in der Durchschnittsebene normal zur Zapfenaxe entweder ein reguläres Polygon, namentlich ein Quadrat, seltener ein Sechseck, häufig ein Achteck oder ein Kreis. Am sichersten lassen sich die Lagerschalen in das Lager einpassen, wenn man den Lagerkörper mit dem Lagerdeckel zusammenspannt, auf der Drehbank richtig cylindrisch ausbohrt, und die beiden Lagerschalen zusammen von aufsen genau passend cylindrisch abdreht. In Fig. 2 ist die Lagerbegrenzung als regelmäfsiges Sechseck angenommen, um für diese Form ein Beispiel zu geben, während Fig. 4 ein Beispiel von cylindrisch eingepafsten Lagerschalen giebt.

Die Lagerschalen müssen stets so in den Lagerkörper eingesetzt werden, dafs die Fuge zwischen beiden Schalen nicht mit der Fuge zwischen Lagerkörper und Lagerdeckel zusammentrifft; und es ist daher zu empfehlen, diese letztgenannte Fuge pq mit der Tangente durch den höchsten Punkt des Zapfens zusammenfallen zu lassen. Der Lagerdeckel, welcher die obere Schale umgreift, kann dann noch mit seinen Ansätzen m, n in den Lagerkörper einfassen, und hindert so jede seitliche Verschiebung der obern Lagerhälfte.

Die beiden Hälften der Lagerschalen berühren sich entweder in der mitteln Fuge, oder es ist zwischen beiden ein geringer Spielraum. In letzterm Falle mufs man diesen Spielraum durch Holzklötzchen, Papp- oder Lederscheiben ausfüllen, damit die obere Lagerhälfte durch ungleichmäfsiges Anziehen der Deckelschrauben sich nicht schräge stelle und festklemme. Hat sich das Lagerfutter abgenutzt, und man will wieder das Lager schliefsend machen, so feilt man in dem Falle, wo sich beide Hälften berühren aus der Fuge etwas heraus, im andern Falle macht man die Zwischenlage etwas dünner.

2) Der Lagerkörper.

Der Lagerkörper reicht, wie aus der zuletzt angeführten Disposition hervorgeht, bis zur Tangente durch den höchsten Punkt des Zapfens herauf; er hat einen Ausschnitt, welcher die untere Lagerschale und den Lagerdeckel mit seinen Ansätzen aufnimmt; dieser Ausschnitt hat eine Breite gleich dem Durchmesser des Zapfens, vermehrt um die doppelte Metallstärke, also gleich $\frac{7}{6}d$; derselbe ist durch zwei pfeilerartige Ständer begrenzt, welche zur Aufnahme der Deckelschrauben dienen; die Breite dieser Ständer ist gleich der Breite zwischen den Rändern der Lagerfutter, also, in der Richtung der Zapfenaxe gemessen $= \frac{4}{3} d - 2 . \frac{1}{12} d = \frac{7}{6} d$; die Dicke der Ständer ist so bemessen, dafs sie, ohne zu sehr geschwächt zu werden, die Hülsen für die Deckelschrauben bilden können; sie reichen daher in ihrer Dicke bis zur Mitte der Deckelschrauben, so dafs die eine Hälfte dieser letztern in den Ständern liegt, die andere Hälfte aber von einer halbcylindrischen Ausbauchung x umschlossen wird, welche sich den Ständern anschliefst. Die Wandstärke dieser halbcylindrischen Ausbauchung x ist gleich dem Halbmesser der Deckelschrauben, und ebenso viel beträgt die Eisenstärke, welche zwischen dem Lagerausschnitt und der Höhlung für die Bolzen stehen bleibt. Bezeichnet δ den Durchmesses der Deckelschrauben, so ist hiernach die Entfernung der Mittellinien der beiden Deckelschrauben:

$$d + 2 . \tfrac{1}{12} d + 2\delta.$$

Nun kann man aber den Durchmesser der Deckelschrauben berechnen; denn sie werden offenbar in der ungünstigsten Weise in Anspruch genommen, wenn der Druck P, welchen der Zapfen auszuhalten hat, von unten nach oben gerichtet ist, und wenn folglich dieser Druck auf Abreifsen der Schrauben wirkt. Sind zwei Schrauben vorhanden, so hat jede den Druck:

$$P' = \tfrac{1}{2} P = 368{,}25\, d^2$$

(s. S. 323) auszuhalten, und man findet daher die Dicke der Schrauben durch die Gleichung (Th. I. S. 97):

$$\delta = 0{,}018 . \sqrt{(P')} = d . 0{,}018 . \sqrt{(368{,}25)} = 0{,}345\, d,$$

wofür man die Stärke der **Deckelschrauben**, wenn deren im Ganzen zwei vorhanden sind:

$$\delta = \frac{1}{3} d.$$

nehmen kann.

Setzen wir diesen Werth in die oben bestimmte **Entfernung der Mittellinien** der **beiden Deckelschrauben**, so finden wir:

$$d + 2 . \tfrac{1}{12} d + 2 d = \frac{11}{6} \delta.$$

Die beiden Ständer mit ihren halbcylindrischen Ausbauchungen sind mit der Sohlplatte in einem Stück gegossen, und die Sohlplatte enthält Durchbohrungen für die Befestigungsschrauben. Diese Befestigungsschrauben werden ganz in derselben Weise in Anspruch genommen, wie die Deckelschrauben, falls der

Druck auf den Zapfen von unten nach oben wirkt, sie bekommen also auch denselben Durchmesser wie jene, und man hat daher auch:

Durchmesser der **Befestigungsschrauben** $= \frac{1}{3} d$

(wenn deren im Ganzen zwei vorhanden sind). Damit nun die Muttern der Befestigungsschrauben sich bequem drehen lassen, mufs von der Begrenzung der halbcylindrischen Ansätze, da wo sie sich der Sohlplatte anschliefsen bis zur Mitte der Befestigungsschrauben, wenigstens eine Entfernung sein, die gleich dem Halbmesser der Mutter, also gleich dem Durchmesser der Schraube ist. Man vergröfsert diese Entfernung, aus später anzugebenden Gründen, zweckmäfsiger Weise noch um $\frac{1}{6} d$ auf jeder Seite, und dann ergiebt sich die **Entfernung der Mittellinien** der beiden **Befestigungsschrauben** gleich $3\frac{1}{2} d$, nämlich:

Entfernung der Mittellinien der Deckelschrauben	$1\frac{1}{6} d$
Zweimal von den Mittellinien der Deckelschrauben bis zum Rande der halbcylindrischen Ansätze	$\frac{4}{6} d$
Zweimal von da, bis zu den Mittellinien der Befestigungsschrauben	$\frac{4}{6} d + 2 . \frac{1}{6} d$
	$3\frac{1}{2} d.$

Nun läfst sich auch leicht die Stärke berechnen, welche der Lagerkörper mit der Grundplatte zusammen in der Mitte, d. h. in dem tiefsten Punkte des zur Aufnahme der Lagerfutter bestimmten Ausschnittes haben mufs. Wenn nämlich der Druck auf den Zapfen $P = 736{,}5\, d^2$ von unten nach oben gerichtet ist, so wird der Lagerkörper mit der Sohlplatte als ein durch die beiden Befestigungsschrauben festgehaltener balkenförmiger Körper erscheinen, welcher in der Mitte durch den Druck P belastet ist. Dieselbe Betrachtung wird maafsgebend sein, wenn der Druck von oben nach unten wirkt, aber die Sohlplatte durch irgend einen Umstand hohl liegt. Wir werden also, um auch für diese ungünstigen Fälle gesichert zu sein, die Stärke des Körpers nach der Gleichung Th. I. S. 217. No. 8 berechnen müssen, nämlich:

$$PL = 4\, W . k = 4 . \tfrac{1}{6} b h^2 . k,$$

hier ist $P = 736{,}5\, d^2$; $L = 3{,}5\, d$, nämlich gleich der Entfernung der Mittellinie der Befestigungsschrauben; $b = \frac{7}{6} d$, nämlich gleich der Breite des Lagerkörpers, und h ist die gesuchte Dicke; es folgt, wenn k für Gufseisen $= 7000$ ist:

$$h = 0{,}69\, d.$$

Wir setzen dafür ohne Nachtheil, die **Stärke des Lagerkörpers in der Mitte**, nämlich vom tiefsten Punkte des Ausschnitts für die Lagerfutter bis zur Unterkante der Sohlplatte:

$$h = 0{,}667\,d = \frac{2}{3}\,d.$$

Hieraus folgt, dafs von der **Unterkante der Sohlplatte** bis zur **Mitte des Zapfens** die Entfernung gleich

$$\tfrac{2}{3}d + \tfrac{1}{12}d + \tfrac{1}{2}d = \frac{5}{4}\,d$$

sei. Diese Entfernung ist leicht zu merken und wird bei der Konstruktion von Maschinen, namentlich bei der Disposition der Wellenleitungen und der Lagergerüste vielfach gebraucht.

3) Der Lagerdeckel.

Die Stärke des Lagerdeckels in der Mitte ist nach denselben Gesichtspunkten zu berechnen, wie diejenige des Lagerkörpers. Der Deckel wird durch die Deckelschrauben gehalten, und der Druck wirkt in der Mitte, falls derselbe den Zapfen von unten nach oben in Anspruch nimmt. In der Gleichung

$$PL = 4W.k = 4.\tfrac{1}{6}bh^2.k$$

ist $L = \frac{11}{6}$; $b = \frac{7}{6}$; $P = 736{,}5d^2$; $k = 7000$; folglich findet man, die **Stärke des Deckels in der Mitte** (d. h. vom höchsten Punkte des Lagerausschnittes bis zur Oberkante, mit Ausschlufs des Schmiernapfs

$$h' = \frac{1}{2}\,d.$$

Der Deckel ist oben mit einem angegossenen Schmiernapf versehen, und hat in der Mitte eine Durchbohrung, welche die Schmiere zwischen die reibenden Oberflächen gelangen läfst. Die Höhe des Schmiernapfes macht man etwa $\frac{1}{6}d$, und dann ergiebt sich **die Höhe des ganzen Lagers**

ohne den Schmiernapf $= 2\tfrac{1}{3}\,d$,
mit dem Schmiernapf $= 2\tfrac{1}{2}\,d$,

nämlich

von der Unterkante der Sohlplatte bis zum Zapfenmittel	$= \frac{15}{12}d$
von da bis zum höchsten Punkt des Zapfens	$= \frac{6}{12}d$
Metalldicke des Lagerfutters	$= \frac{1}{12}d$
Dicke des Lagerdeckels	$= \frac{6}{12}d$
	$2\frac{1}{3}d$
Höhe des Schmiernapfs	$\frac{1}{6}d$
Summa	$2\frac{1}{2}d.$

Man kann auch den Schmiernapf fortlassen, und eine der früher beschriebenen Schmierbüchsen (Taf. 27) auf den Deckel aufschrauben.

Der Deckel schliefst sich in seiner Form derjenigen des Lagers an; er bekommt an jedem Ende einen Ansatz, durch welchen die Deckelschrauben gesteckt werden; dieser Ansatz mufs oben Platz genug haben, um der Schraubenmutter als Auflage zu dienen; es genügt, wenn man die Höhe dieses Ansatzes etwa $\frac{5}{12}d$ macht.

4) und 5) Die Deckelschrauben und die Befestigungsschrauben.

Die Durchmesser der Deckelschrauben und der Befestigungsschrauben sind schon oben bestimmt worden. Bei kleineren Lagern ist auf jeder Seite nur eine vorhanden; bei gröfseren Zapfendurchmessern nimmt man auf jeder Seite deren zwei. Da nun jede dieser Schrauben nur halb soviel auszuhalten hat, als wenn *nur eine Schraube* vorhanden wäre, so braucht ihr Durchmesser *nur* $\sqrt{\frac{1}{2}}$ *mal so stark zu sein*; man hat also für die **Stärke der Deckelschrauben** und der **Befestigungsschrauben:**

wenn auf jeder Seite eine vorhanden $\delta = \mathbf{\frac{1}{3}}\boldsymbol{d},$

wenn auf jeder Seite zwei vorhanden $\delta = \mathbf{\frac{1}{4}}\boldsymbol{d}$

(wenn man nämlich für $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}236$ den runden Werth 0,25 gelten läfst).

Man nimmt den Durchmesser der Deckelschrauben und der Befestigungsschrauben nicht über $1\frac{1}{4}$ bis $1\frac{1}{2}$ Zoll; bei Anwendung von nur einer Schraube auf jeder Seite würde dieser Grenzwerth bei einem Zapfendurchmesser von $3\frac{3}{4}$ Zoll bis $4\frac{1}{2}$ Zoll erreicht werden; bei Zapfen von gröfserem Durchmesser als 4 Zoll ordnet man daher auf jeder Seite zwei Schrauben an.

Wohl zu bemerken ist, dafs die berechneten Schraubendurchmesser unter der Voraussetzung gefunden worden sind, dafs der Druck, welcher auf den Zapfen wirkt,

1) den Zapfen auf Bruch in Anspruch nimmt,

2) von unten nach oben wirkt.

Wenn diese Voraussetzungen, welche die ungünstigsten sind für die Berechnung der Deckelschrauben, nicht zutreffen, so kann man die Schrauben von geringerem Durchmesser machen. Ist der

Zapfen z. B. vorzugsweise auf Torsion in Anspruch genommen, und würde also der Zapfendurchmesser auf Bruch berechnet, nur einen geringen Werth bedingen, so kann man die Schraubenbolzen nach diesem geringeren Durchmesser proportioniren; würde andererseits der Druck nicht von unten nach oben wirken, sondern umgekehrt, so könnten die Deckelschrauben allenfalls ganz fortbleiben. Zapfen, welche einen Durchmesser von 6 Zoll bekommen, würden nach Tab. XV. und XVI. Th. I. S. 266

von Schmiedeeisen einen Druck von 26500 Pfund,
- Gufseisen - - - 18560 -

aushalten können; sie würden auf jeder Seite zwei Schraubenbolzen von $1\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser erfordern ($\delta = \frac{1}{4}d$) und da man nicht gern gröfsere Durchmesser für die Schrauben wählt, so behält man diesen Durchmesser auch für stärkere Zapfen bei, hat aber dann stets die Stellung oder die Konstruktion des Lagers so anzuordnen, dafs die Deckelschrauben durch einen nicht gröfsern Druck als 26500 Pfund auf Abreifsen in Anspruch genommen werden. Da wo Erschütterungen und Stöfse zu befürchten sind, müssen sowohl die Muttern der Deckelschrauben, als diejenigen der Befestigungsschrauben mit Gegenmuttern versehen sein, oder durch andere Mittel, gegen das unbeabsichtigte Lösen der Muttern geschützt werden (Th. I. S. 102):

6) Die Grundplatte des Lagers.

Die Stärke der Grundplatte in der Mitte des Lagers ist schon oben berechnet worden; nach den Enden hin kann dieselbe schwächer werden, und man läfst sie da wo die Schrauben durchgezogen werden etwa so stark, wie die Ansätze des Lagerdeckels, d. i. $\frac{5}{12}d$. Die Grundplatte bekommt zweckmäfsiger Weise auf beiden Seiten kleine angegossene Schalen oder Becken, um die überlaufende Schmiere aufzunehmen.

Die Breite der Grundplatte ist, ohne diese Becken gleich der Länge des Zapfens, vermindert um die Dicke der beiden vorspringenden Ränder der Lagerfutter, also $\frac{4}{3}d - 2 . \frac{1}{12}d = \frac{7}{6}d$.

Die Länge der Grundplatte ist so lang, dafs die Schraubenmuttern für die Befestigungsschrauben noch gehörig Platz haben; sie mufs daher von der Mitte der Befestigungsschrauben noch etwa $1\frac{1}{2}\delta$ hinausreichen, und da wir die Entfernung der Mittellinien der Schrauben oben gleich $3\frac{1}{2}d$ gefunden haben, so hat man für die Länge der Grundplatte

$$3\tfrac{1}{2}d + 2 \cdot 1{,}5\,\delta = 3\tfrac{1}{2}d + 3 \cdot \tfrac{1}{3}d = 4\tfrac{1}{2}\,d.$$

Die Grundplatte enthält die Oeffnungen, durch welche die Befestigungsschrauben gehen. Um das Lager beim Aufstellen noch ein wenig verschieben zu können, und um dadurch die Welle in die richtige Lage bringen zu können, sind die Oeffnungen für die Schraubenbolzen länglich; die Länge kann etwa $1\frac{1}{2}\delta$ betragen.

Zuweilen ist man in dem Platz für das Lager beschränkt; man läfst dann die Befestigungsschrauben und den entsprechenden Theil der Grundplatte ganz fort, und benutzt die Deckelschrauben zugleich als Befestigungsschrauben. Zu diesem Zweck bekommen die Deckelschrauben oben, da wo sie aus dem Deckel in den Lagerkörper eintreten Ansätze (Bunde), welche sich in den Lagerkörper einlegen, und als Widerlager oder als Köpfe dienen für die unteren Verlängerungen der Deckelschrauben, welche bis durch das Stück, auf welchem das Lager befestigt werden soll, durchgeführt sind, und hier mit Muttern angezogen werden. Die unteren Köpfe der Deckelschrauben, welche in Fig. 1a auf Taf. 28 punktirt gezeichnet sind, fallen dann fort; die obere Partie der Deckelschrauben, von den vorhin erwähnten Ansätzen an, bleibt unverändert. Die Dicke der Grundplatte in dem tiefsten Lagerausschnitt braucht dann nicht gröfser zu sein, wie die Dicke des Lagerdeckels in der Mitte.

Es ist in Tabelle XV. S. 266 des I. Theils eine Auswahl von Zapfendurchmessern zusammengestellt worden, welche 24 verschiedene Nummern enthält. Um die Anzahl der anzufertigenden Gufsmodelle für die Zapfenlager noch etwas zu beschränken, pflegt man, wenigstens bei den dünneren Zapfen nur immer für eine Nummer um die andere ein besonderes Lagermodell anzufertigen, und dasselbe auch für den nächst schwächern Zapfen zu benutzen, indem man nur die Lagerhöhlung passend ausbohrt. So wendet man z. B. für einen Zapfen von $\frac{3}{4}$ Zoll Durchmesser dasselbe Modell an, welches für den 1zölligen Zapfen gilt, da aber hier das Lager auf $\frac{3}{4}$ Zoll anstatt auf 1 Zoll Durchmesser gebohrt wird, so ist nur die Metallstärke um $\frac{1}{8}$ Zoll stärker als sie bei dem 1zölligen Zapfen ausfällt, sonst unterscheidet sich das Lager gar nicht. Natürlich mufs man auch die Länge des $\frac{3}{4}$zölligen Zapfens ebenso grofs machen, als diejenige des 1zölligen Zapfens.

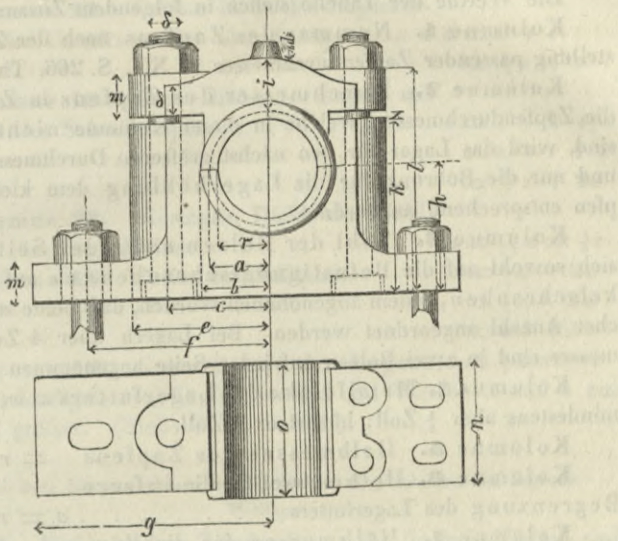
Hiernach wird es möglich für die in der Tabelle XV. S. 266 des I. Theiles zusammengestellten 24 verschiedenen Zapfendurchmesser mit 17 Lagermodellen auszukommen *).

Nach den vorstehend ausführlich entwickelten Grundsätzen ist nun folgende Tabelle für die Dimensionen der Zapfenlager entworfen worden. Die Maafse dieser Tabelle sind preufsische Linien (12 Linien gleich einem Zoll), sie sind in der nebenstehenden Figur durch Buchstaben bezeichnet, während sie auf Tafel 28. Figur 2 durch die Verhältnifszahlen angedeutet sind; die Maafse der Tabelle sind so geordnet, dafs sie der Reihe nach alle Elemente geben, um das Lager zu zeichnen.

*) Die im folgenden Paragraphen angegebene Zusammenstellung von Sharp-Brothers hat von 2 Zoll bis 12 Zoll Zapfendurchmesser 18 Lager; und Redtenbacher giebt von 3 Centimètres bis 30 Centimètres ($1\frac{1}{8}$ Zoll bis $11\frac{1}{2}$ Zoll) Zapfendurchmesser 19 verschiedene Lager, während nach unserer Zusammenstellung von $\frac{3}{4}$ Zoll bis 12 Zoll Zapfendurchmesser nur 17 Lager erfordert werden.

Tabelle über die Dimensionen eiserner Zapfenlager mit metallenen Lagerfuttern (nach des Verfassers Anordnung).

1. No. des Zapfens.	2. Durchmesser des Zapfens. Zoll.	3. Zahl der Schraubenbolzen auf jeder Seite.	4. Metalldicke des Lagerfutters in Linien.	5. Breiten-Dimensionen in Linien: r	6. a	7. b	8. c	9. δ	10. e	11. f	12. g
2	1	1	1,5	6	7,5	9	13	4	17	23	29
4	$1\frac{1}{2}$	1	1,5	9	10,5	12	18	6	24	33	42
6	2	1	2	12	14	16	24	8	32	44	56
8	$2\frac{1}{2}$	1	2,5	15	17,5	20	30	10	40	55	70
10	3	1	3	18	21	24	36	12	48	66	84
12	$3\frac{1}{2}$	1	3,5	21	24,5	28	42	14	56	77	98
14	4	1	4	24	28	32	48	16	64	88	112
15	$4\frac{1}{2}$	2	4,5	27	31,5	36	49,5	13,5	63	83	103,5
16	5	2	5	30	35	40	55	15	70	92,5	115
17	$5\frac{1}{2}$	2	5,5	33	38,5	44	60,5	16,5	77	101,5	126,5
18	6	2	6	36	42	48	66	18	84	111	138
19	7	2	7	42	49	56	74	18	92	119	146
20	8	2	8	48	56	64	82	18	100	127	154
21	9	2	9	54	63	72	90	18	108	135	162
22	10	2	9	60	69	78	96	18	114	141	168
23	11	2	9	66	75	84	102	18	120	147	174
24	12	2	9	72	81	90	108	18	126	153	180



13. Höhen-Dimensionen in Linien: h	14. i	15. k	16. l	17. m	18. Dimensionen nach der Axe in Linien: n	19. o	2. Durchmesser des Zapfens Zoll.	1. No.
15,5	6	21,5	29	5	13	16	1	2
22,5	9	31,5	42	7,5	21	24	$1\frac{1}{2}$	4
30	12	42	56	10	28	32	2	6
37,5	15	52,5	70	12,5	35	40	$2\frac{1}{2}$	8
45	18	63	84	15	42	48	3	10
52,5	21	73,5	98	17,5	49	56	$3\frac{1}{2}$	12
60	24	84	112	20	56	64	4	14
67,5	27	94,5	126	22,5	63	72	$4\frac{1}{2}$	15
75	30	105	140	25	70	80	5	16
82,5	33	115,5	154	27,5	77	88	$5\frac{1}{2}$	17
90	36	126	168	30	84	96	6	18
105	42	147	196	35	98	112	7	19
120	48	168	224	40	112	128	8	20
135	54	189	252	45	126	144	9	21
149	60	209	278	50	142	160	10	22
163	66	229	304	55	158	176	11	23
177	72	249	330	60	174	192	12	24

Die Werthe der Tabelle stehen in folgendem Zusammenhange:

Kolumne **1.** Nummer des Zapfens nach der Zusammenstellung passender Zapfendurchmesser in XV. S. 266. Th. I.

Kolumne **2.** Durchmesser des Zapfens in Zollen. Für die Zapfendurchmesser, welche in dieser Kolumne nicht enthalten sind, wird das Lager für den nächst gröfseren Durchmesser benutzt und nur die Bohrung für die Lagerhöhlung dem kleineren Zapfen entsprechend angeordnet.

Kolumne **3.** Zahl der Bolzen auf jeder Seite; bezieht sich sowohl auf die Befestigungsschrauben, als auf die Deckelschrauben, indem angenommen worden, dafs beide stets in gleicher Anzahl angeordnet werden. Bei Lagern über 4 Zoll Durchmesser sind je zwei Bolzen auf jeder Seite angenommen.

Kolumne **4.** Metalldicke des Lagerfutters $= x$; $x = \frac{1}{12} d$; mindestens aber $\frac{1}{8}$ Zoll; höchstens $\frac{3}{4}$ Zoll.

Kolumne **5.** Halbmesser des Zapfens $= r$

Kolumne **6.** Halbmesser für die äufsere Begrenzung des Lagerfutters . . . . $a = r + x$

Kolumne **7.** Halbmesser für die Ränder der Lagerfutter . . . . $b = a + x$

Kolumne **8.** Entfernung von der Mitte des Zapfens bis zur Mitte der Deckelschrauben $c = b + \delta$

Kolumne **9.** Durchmesser der Deckelschrauben und der Befestigungsschrauben

Bei je einer Schraube auf jeder Seite $\delta = \frac{1}{3} d$

Bei je zwei Schrauben auf jeder Seite $\delta = \frac{1}{4} d$

Kolumne **10.** Entfernung von der Mitte des Zapfens bis zur äufsern Begrenzung des Lagerköpers . . . . $e = c + \delta$

Kolumne **11.** Entfernung von der Mitte des Zapfens bis zur Mitte der Befestigungsschrauben . . . . $f = e + 1\frac{1}{2}\delta$

Kolumne **12.** Halbe Breite der Sohlplatte . . . . $g = f + 1\frac{1}{2}\delta$
$= b + 5\delta$

Kolumne **13.** Entfernung von der Mitte des Zapfens bis zur Unterkante der Sohlplatte . . , ... $h = \frac{7}{6} d + x$
$= \frac{7}{3} r + x$

Kolumne **14.** Dicke des Lagerdeckels in der Mitte (mit Ausschlufs des Schmiernapfs) . . $i = \frac{1}{2} d = r$

Kolumne **15.** Gröſste Höhe des Lagerkörpers von der Unterkante der Grundplatte . . . $k = h + r$
$= \frac{10}{3} r + x$

Kolumne **16.** Ganze Höhe des Lagers mit Ausschluſs des Schmiernapfs . . . . $l = h + d + x$
$= k + r + x$
$= \frac{13}{3} r + 2x$

Kolumne **17.** Geringste Dicke der Sohlplatte und des Lagerdeckels . . . . $m = \frac{5}{12} d = \frac{5}{6} r$

Kolumne **18.** Breite der Sohlplatte . . . $n = \frac{4}{3} d - 2x$
$= \frac{8}{3} r - 2x$
$= o - 2x$

Kolumne **19.** Ganze Breite des Lagers $o = \frac{4}{3} d = \frac{8}{3} r$.

Für schnellgehende Zapfen werden die Werthe n und o entsprechend gröſser. (Siehe Th. I. S. 264.)

Verschiedene Konstruktionen von einfachen Zapfenlagern für liegende Wellen.

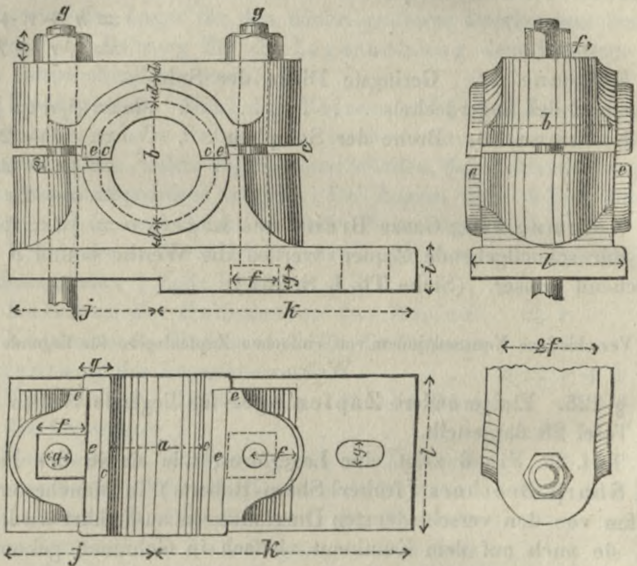
§ 125. Einige andere Zapfenlager für liegende Wellen sind auf Tafel 28 dargestellt.

Taf. 28. Fig. 3 zeigt eine Lagerform, wie sie in der Fabrik von Sharp-Brothers (früher Sharp-Roberts) in Manchester für Zapfen von den verschiedensten Durchmessern ausgeführt wird, und wie sie auch auf dem Kontinent vielfach in Gebrauch gekommen ist. Der Lagerdeckel erscheint etwas schwer und plump, auch reicht der Lagerkörper nicht so hoch hinauf, als bei der im vorigen Paragraphen erläuterten Konstruktion. Der umstehende Holzschnitt wiederholt diese Form, und wir lassen weiter unten die Dimensionen derselben für verschiedene Zapfendurchmesser folgen. Der Holzschnitt*) zeigt die Form dieser Lager sowohl mit als ohne vorspringende Sohlplatte, in welchem letztern Falle die Deckelschrauben zugleich zur Befestigung des Lagers auf der Unterstützung dienen. In der nachfolgenden Tabelle bedeutet a den Durchmesser des Zapfens, also auch den innern Durchmesser der Lagerhöhlung; b den äuſsern Durchmesser der Lagerfutter, folglich $\frac{b-a}{2}$ die Wandstärke derselben; zugleich ist b die Breite des Lagerkörpers. Die Lagerfutter sind im äuſsern rund mit abgeplatteten Seiten, um das Drehen zu verhindern. Diese Konstruktion

Taf. 28. Fig. 6.

*) W. Salzenberg „Vorträge über Maschinenbau“ S. 50.

möchten wir nicht empfehlen, da sie es unmöglich macht, das Lager, behufs Einpassen der Lagerfutter von Innen auszubohren. An den abgeplatteten Stellen ist die Metalldicke des Futters $= c$. Die Entfernung der Aufsenfläche des Lagerfutters von der Ober-



kante der Sohlplatte ist $= d$, und von der Oberkante des Deckels $= 2d$. Der Deckel greift in seiner ganzen Breite mit einem Ansatz von der Dicke e zwischen die Backen des Lagers ein, und ebenso stark ist der Rand des Futters. f ist die halbe Breite der obern Deckelfläche, und auch der Radius für die cylindrischen Ansätze, durch welche die Schraubenbolzen gesteckt sind; zugleich ist f die Seite des quadratischen Kopfes der Deckelbolzen, dessen Höhe gleich g ist. g ist noch die Breite des Futterrandes, der Durchmesser der Bolzen, und die Höhe der sechseckigen Muttern, deren äufserer Durchmesser gleich $2g$ ist. h ist die Höhe der Sohlplatte ohne vorspringende Lappen, also für den Fall, dafs die Deckelschrauben zugleich als Befestigungsschrauben dienen; i die Sohlplatte mit vorspringenden Lappen, also für den Fall, dafs besondere Befestigungsschrauben angeordnet werden; j die halbe Länge der Sohlplatte im ersten Fall, k desgleichen im letzten Falle, und l die Breite der Sohlplatte.

Tabelle
über die Dimensionen eiserner Zapfenlager mit Metall-Einlagen nach Sharp-Brothers Anordnung.

Durchmesser des Zapfens in Zollen.	Dimensionen des Lagers in Linien.											
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*
2	24,0	33,0	2,5	5,0	4,2	12,0	7,5	8,5	12,0	38,5	66,0	40,0
$2\frac{1}{4}$	27,0	36,9	2,8	5,6	4,7	13,0	8,2	9,5	13,2	42,7	72,2	45,0
$2\frac{1}{2}$	30,0	40,9	3,1	6,1	5,1	14,0	8,9	10,4	14,4	46,9	78,4	50,0
$2\frac{3}{4}$	33,0	44,8	3,4	6,7	5,6	15,0	9,6	11,4	15,6	51,2	84,6	55,0
3	36,0	48,7	3,7	7,2	6,0	16,1	10,2	12,4	16,9	55,4	90,7	60,0
$3\frac{1}{4}$	39,0	52,7	4,1	7,8	6,4	17,1	10,9	13,3	18,1	59,6	96,9	65,0
$3\frac{1}{2}$	42,0	56.6	4,4	8,4	6,9	18,1	11,6	14,3	19,3	63,8	103,1	70,0
$3\frac{3}{4}$	45,0	60,6	4,7	8,9	7,3	19,1	12,3	15,3	20,5	68,0	109,3	75,0
4	48,0	64,5	5,0	9,5	7,7	20,1	13,0	16,2	21,7	72,2	115,5	80,0
$5\frac{1}{2}$	54,0	72,4	5,6	10,6	8,6	22,1	14,4	18,2	24,2	80,7	127,9	90,0
5	60,0	80,2	6,2	11,7	9,5	24,2	15,7	20,1	26,6	89,1	140,2	100,0
6	72,0	96,0	7,5	14,0	11,2	28,2	18,5	24,0	31,5	106,0	165,0	120,0
7	84,0	111,7	8,7	16,2	13,0	32,3	21,2	27,9	36,4	122,9	189,7	140,0
8	96,0	127,5	10,0	18,5	14,7	36,4	24;0	31,7	41,2	139,7	214,5	160,0
9	108,0	143,2	11,5	20,7	16,5	40,4	26,7	35,6	46,1	156,6	239,2	180,0
10	120,0	159,0	12,5	23,0	18,2	44,5	29,5	39,5	51,0	173,5	264,0	200,0
11	132,0	174,7	13,8	25,2	20,0	48,6	32,2	43,4	55,9	190,4	288,7	220,0
12	144,0	190,5	15,0	27,5	21,7	52,6	35,0	47,2	60,7	207,2	313,5	240,0

Nach den Resultaten dieser Tabelle ergiebt sich:
die Metalldicke der Lagerfutter . . . $= \frac{5}{32}d + \frac{3}{4}$ Linien
der Durchmesser der Schraubenbolzen $= \frac{7}{30}d + 1{,}8$ -
die Länge des Zapfens . . . . $= 1\frac{5}{11}d + 2{,}4$ -

Redtenbacher*) giebt
für die Dicke des Lagerfutters $= 0{,}074\,d + 0{,}28$ Centimeter
$= \frac{2}{27}d + 1\frac{1}{3}$ Linien
für die Länge des Zapfens . . $= 1{,}21\,d + 0{,}87$ Centimeter
$= 1\frac{5}{24}d + 4$ Linien.

Beide Angaben geben durchweg gröfsere Metalldicken für die Lagerschalen, als die von uns festgestellten; die Zapfenlänge ist nach den Verhältnissen von Sharp-Brothers durchweg gröfser als die von uns angenommene; dagegen stimmt sie nach den Angaben von Redtenbacher bei einem Zapfendurchmesser von etwa $2\frac{1}{2}$ Zoll mit der unsrigen überein, und giebt für Zapfendurchmesser unter $2\frac{1}{2}$ Zoll gröfsere, für Zapfendurchmesser über $2\frac{1}{2}$ Zoll geringere Längen als unsere Angaben. Ein Zapfen von 6 Zoll Durchmesser giebt z. B.:

*) Redtenbacher's „Resultate für den Maschinenbau".

	nach Sharp-Brothers,	Redtenbacher,	n. d. Verfasser,
Metalldicke der Schalen	12 Linien,	$6\frac{2}{3}$ Linien,	6 Linien,
Länge der Zapfen	110 -	91 -	96 -

Taf. 28. Fig. 4. Eine andere Lagerkonstruktion zeigt Taf. 28. Fig. 4 in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröfse. Es ist ein von dem englischen Mechaniker Fox konstruirtes, in der Werkstatt des Königl. Gewerbeinstituts zu Berlin befindliches Lager für einen Zapfen von 3 Zoll Durchmesser. Fig. 4a ist die Ansicht des zusammengestellten Lagers, Fig. 4b die Seitenansicht desselben, Fig. 4c die obere Ansicht nach Abnahme des Lagerdeckels, Fig. 4d ist eine Ansicht des abgenommenen und umgelegten Lagerdeckels nach Herausnahme des Lagerfutters, Fig. 4e ist eine Ansicht desselben von der Seite, Fig. 4f sind Durchschnitte des Lagerfutters, und zwar ein Schnitt in der Ebene durch die Axe des Zapfens, und ein zweiter Schnitt normal dazu nach der Richtung xy. Das Lager zeichnet sich dadurch aus, dafs der Lagerblock von der Horizontalebene durch die Mitte des Zapfens an nicht in seiner ganzen Breite in die Höhe geführt ist, dafs vielmehr nur die Hülsen, welche zur Aufnahme der Deckelschrauben dienen, von hier an als cylindrische Pfeiler aa' bis etwa zur Tangente durch den höchsten Punkt des Zapfens hinaufgeführt sind. Der Lagerdeckel hat entsprechende Höhlungen, mit denen er zwischen diese Pfeiler eingreift, während er die obere Hälfte des Lagerfutters ganz umschliefst. Die vorspringenden Ränder des Lagerfutters sind in den Lagerblock und in den Deckel eingelassen; die äufsere Rundung des untern Lagerfutters ist in der Mitte mit einer koncentrischen Verstärkungsrippe versehen, die in eine entsprechende Nuth des Lagerblockes eingreift, und durch einen vorspringenden Zapfen die Drehung dieses halben Lagerfutters hindert; das obere Lagerfutter hat anstatt dieser koncentrischen Rippe eine geradlinige im Scheitel der äufsern Rundung von einem Rande zum andern, parallel mit der Axe laufende Rippe, welche sich in eine passende Nuth einlegt. In Fig. 4d ist diese Nuth sichtbar. Dies Lager von Fox zeichnet sich durch die grofse Sicherheit aus, mit welcher der Lagerdeckel mit dem Lagerblock und mit den Lagerfuttern zusammenhängt.

Taf. 28. Fig. 5. Taf. 28. Fig. 5 giebt ein Beispiel von einem Zapfenlager mit zwei Deckelschrauben und zwei Befestigungsschrauben auf jeder Seite. Das Lager ist im Allgemeinen nach den Verhältnissen und Dimensionen konstruirt, welche wir in dem vorigen Paragraphen entwickelt haben, nur unterscheidet es sich in der Art und Weise, wie die Lagerfutter in den Lagerkörper und in den Deckel eingesetzt sind. Die von dem Verfasser in dieser Figur gewählte Konstruktion zeigt, dafs die Lagerfutter keine vorspringenden Ränder haben, dagegen sind sie von Aufsen nicht cylindrisch, sondern kugelförmig abgedreht, und der Lagerdeckel mit dem Lagerkörper bildet eine Hohlkugel, welche das Lagerfutter genau passend umschliefst. Fig. 5a zeigt eine Vorderansicht, Fig. 5b einen Vertikaldurchschnitt in einer Ebene, die durch die Axe des Zapfens geht, Fig. 5c eine obere Ansicht des Lagerblocks nach Abnahme des Deckels und der obern Lagerfutterhülsen, Fig. 5d eine Ansicht des Lagerdeckels von der Seite, Fig. 5e eine Ansicht desselben von oben, nachdem er umgelegt und das Lagerfutter herausgenommen worden.

Durch die hier gewählten Anordnungen wird erreicht, dafs das Lagerfutter sich in dem Lagerkörper nach allen Richtungen hin ein wenig verdrehen könne, und hierdurch wird es möglich, dafs, wenn das Lager nicht sehr exakt aufgestellt ist, oder wenn dasselbe durch Nachgeben oder Verschieben der Unterstützungen oder der Befestigungen aus seiner richtigen Lage gekommen ist, sich gleichwohl die Axe des Lagerfutters richtig einstellen kann, d. h. so, dafs sie mit der Axe des Zapfens genau zusammenfällt. Dies ist eine äufserst wichtige, und oft durch die gewöhnliche Lagerkonstruktion schwer zu erreichende Bedingung. Sobald nämlich die Lagerfutter in dem Lagerkörper fest sind, und es erfolgt eine geringe Verschiebung des Lagers gegen die Richtung der Welle, so tritt nothwendiger Weise ein Klemmen des Zapfens im Lager ein; es entstehen Seitendrucke, die oft ganz aufserordentliche Reibungswerthe und Abnutzungen herbeiführen.

Bei der Aufstellung der Zapfenlager ist es daher von der gröfsten Wichtigkeit, die Axe der Lager mit der Axe der Welle übereinstimmend zu bekommen, und diese Wichtigkeit steigert sich zugleich mit der Schwierigkeit, die genannte Bedingung zu erfüllen, wenn man sehr lange Wellenleitungen hat, die durch feste Kuppelungen mit einander zusammenhängen, oder wenn ein und dieselbe Welle an mehren Punkten durch Zapfenlager unterstützt ist. Hier handelt es sich dann im Allgemeinen darum, die Axen der Höhlungen der Lagerfutter bei der Aufstellung genau in eine gerade Linie zu bekommen. Der Verfasser hat für diesen Zweck mit gutem Erfolg folgendes Mittel angewandt:

Jedes aufzustellende Zapfenlager wird vor der Aufstellung durch zwei Blechscheiben geschlossen, welche genau den Durchmesser der Höhlung des Lagerfutters haben, und an den beiden äufsersten Rändern der Lagerfutter in die Höhlung derselben eingeklemmt werden. In der Mitte jeder dieser Blechscheiben ist eine kleine Oeffnung, und die Linie, welche die Mitten dieser kleinen Oeffnungen verbindet, repräsentirt folglich die Mittellinie oder die Axe der Lagerhöhlung. Man stellt nun zuerst die beiden äufsersten Lager der ganzen Wellenleitung auf und zwar so, dafs man hinter das eine Lager, in der Höhe der kleinen Oeffnung der Blechscheibe eine Lichtflamme anbringt, und nun das erste Lager so lange verschiebt, bis man durch die Oeffnungen in den beiden Blechscheiben, welche dieses Lager schliefsen, und durch die Oeffnungen in den Blechscheiben des erstgenannten Lagers die hinter diesem befindliche leuchtende Flamme sieht. In dieser Stellung müssen offenbar die Mittellinien der beiden Lager in ein und dieselbe gerade Linie fallen; befestigt man die Lager in dieser Stellung, und richtet man nun die zwischen den äufsersten beiden Lagern anzuordnenden Lager in ähnlicher Weise so ein, dafs man von dem ersten Lager aus durch die Oeffnungen in sämmtlichen Blechscheiben die hinter der letzten Blechscheibe befindliche leuchtende Flamme sieht, so befinden sich dann offenbar die Mittellinien sämmtlicher Lager in derselben geraden Linie; und die Aufstellung der Wellenleitung (vorausgesetzt, dafs die Wellen selbst gerade sind) wird sehr richtig erfolgen können.

Taf. 28. Fig. 6, 7, 8 zeigen einige Lagerkonstruktionen für Zapfen von geringem Durchmesser, etwa bis zu $1\frac{1}{2}$ Zoll und darunter.

Taf. 28 Fig. 6. Taf. 28. Fig. 6 ist ein kleines Zapfenlager ohne besondere Lagerfutter, dasselbe ist entweder ganz aus Bronze, oder ganz aus Gufseisen konstruirt. Bei Zapfen von $1\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser kann man bis zu etwa 60 Umdrehungen in der Minute ohne allen Nachtheil Schmiedeeisen auf Gufseisen laufen lassen, so also, dafs bei schmiedeeisernen Zapfen hier das ganze Lager von Gufseisen sein kann. Fig. 6a zeigt die Vorderansicht, Fig. 6b die Ansicht von der Seite; man sieht, dafs der Lagerdeckel mit Ansätzen über den Lagerblock übergreift, und dafs die Deckelschrauben zugleich als Befestigungsschrauben dienen.

Taf. 28. Fig. 7. Taf. 28. Fig. 7 ist ein kleines Lager von Gufseisen mit Metallfuttern, und zwar von sehr einfacher Konstruktion. Die äufsere Begrenzung der Lagerfutter ist rechteckig; beide Hälften sind fast ganz von dem Lagerkörper umschlossen; der Lagerdeckel besteht aus einer einfachen Platte, die durchweg einen gleich grofsen rechteckigen Querschnitt hat. Die Deckelschrauben, die in sämmtlichen

Figuren herausgenommen sind, werden in dem Lagerkörper durch quer durchgeschlagene Splinte befestigt. Fig. 7a ist eine Vorderansicht des Lagers, Fig. 7b eine Ansicht von der Seite, Fig. 7c eine Ansicht von oben, mit dem Lagerdeckel. Die Figuren sind halbe natürliche Gröfse.

Taf. 28. Fig. 8 stellt eine etwas gefälligere Form eines Lagers für Zapfen von geringem Durchmesser dar. Die Lagerfutter sind hier durch Flächen begrenzt, deren Querschnitte Spitzbögen bilden, die Ränder der Lagerfutter haben eine ähnliche Form; der Lagerdeckel umschliefst die ganze obere Hälfte des Lagerfutters, und greift mit Ansätzen zwischen die Pfeiler des Lagerblocks; die Deckelschrauben sind in sehr ähnlicher Weise, wie in der vorigen Figur in dem Lagerkörper befestigt. Fig. 8a ist die Vorderansicht des Lagers, Fig. 8b die obere Ansicht nach Fortnahme des Lagerdekkels und der obern Hälfte des Lagerfutters. Die Figuren sind halbe natürliche Gröfse. Taf. 28 Fig. 8.

Zuweilen ist bei den Zapfenlagern die Bedingung zu erfüllen, dafs der Zapfen durch das Lager sehr sicher geführt sein soll, und dafs nicht das geringste Schlottern des Zapfens im Lager statt finden darf. Diese Bedingung kommt z. B. bei den Zapfen der Spindeldocke von Drehbänken vor. Taf. 28. Fig. 9 zeigt die Einrichtung eines solchen Zapfenlagers, und zwar ist Fig. 9a eine Vorderansicht, Fig. 9b eine Seitenansicht, beide in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröfse. Fig. 9c ist das Lagerfutter in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Gröfse. Das Lagerfutter besteht hier aus einem ungetheilten Stahlringe (Fig. c), welcher in der Lagerhöhlung ein wenig konisch ausgebohrt ist; er ist genau in den Vorderschenkel der Spindeldocke eingepafst, und wird in letzterm befestigt, nachdem die Oeffnung dazu genau ausgedreht und dann erwärmt worden ist. Hierdurch erweitert sich die Oeffnung, und wenn man nun den Stahlring einsetzt, so umschliefst sie denselben, nachdem sie sich beim Erkalten wieder zusammengezogen hat, sehr fest. Der Zapfen ist der innern Bohrung des Stahlringes entsprechend, auch ein wenig konisch, und zwar so, dafs der gröfsere Durchmesser nach der Spindeldocke hin liegt. Nachdem die Stahlspitze x, welche durch Mutter und Gegenmutter in dem hintern Schenkel der Spindeldocke befestigt ist, zurückgezogen worden, kann man die Welle (Spindel) mit dem konischen Zapfen einbringen; und demnächst läfst sich durch die Schraube an der Stahlspitze x den Druck reguliren, mit welchem der konische Zapfen in die Lagerhöhlung geprefst werden soll. Findet eine Abnutzung des Zapfens statt, so dafs er in Taf. 28. Fig. 9.

der Höhlung schlotterig wird, so schraubt man die Spitze x ein wenig vor und preſst den Zapfen dadurch wieder fest in seinen Sitz. Diese Konstruktion ist von einer der kleinen Handdrehbänke entnommen, welche in der Werkstatt des Königl. Gewerbeinstituts zu Berlin gebaut werden, und dient zugleich als Beispiel für die Anordnung eines Zapfenlagers mit Längendruck (S. 278); durch die Stahlspitze x wird der Längendruck in der Richtung der Welle aufgehoben.

Anordnung der Hängelager. Einfahe Hängelager.

§ 126. Wir haben in § 116. bereits erwähnt, daſs man nicht immer die Unterstützung der Zapfenlager von unten her bewirken könne, und daſs man oft die fixen Punkte zur Befestigung und Unterstützung des Lagers über dem Zapfenlager aufsuchen müsse. Die Lagerkonstruktionen für diesen Fall heiſsen Hängelager.

Die einfachste Form eines Hängelagers wird offenbar erhalten, wenn man ein gewöhnliches Zapfenlager von einer der auf Tafel 28 dargestellten Formen umkehrt, so daſs die Grundplatte oben ist, und nun diese Grundplatte an einen besonders dazu angebrachten Balken, oder an einen Etagenbalken u. s. w. anschraubt. Die Last der Welle hängt dann im Lagerdeckel an den Deckelschrauben und an den Befestigungsschrauben. Hat man das Lager nach unsern in § 124. aufgestellten Prinzipien konstruirt, so sind diese Theile vollkommen stark genug, die Belastungen auszuhalten. Indessen ist für diesen Fall die Vorsicht niemals auſser Acht zu lassen, daſs man die Schraubenmuttern, sowohl die der Befestigungsschrauben, als diejenigen der Deckelschrauben gegen unbeabsichtigte Lösung schützt; denn sobald durch die Erschütterungen eine solche Lösung erfolgt, muſs die Welle aus dem Lager herausfallen (vergl. § 124. S. 330).

Wenn die Entfernung des Wellenmittels von der Decke einen gewissen Werth erreicht, so kann man mit der oben beschriebenen Anordnung nicht mehr auskommen; man wendet dann besondere Hängeböcke an, wie deren auf Tafel 29 bis 31 mehre dargestellt sind.

Die Konstruktion dieser Hängeböcke kann, wie die auf Tafel 29, 30 und 31 gezeichneten Anordnungen nachweisen, sehr verschieden gewählt werden. Der wesentlichste Grund dieser Verschiedenheit beruht auf der Bedingung, daſs die Hängeböcke nicht immer nur zur Unterstützung eines einzigen Zapfenlagers dienen, sondern häufig mehre Zapfenlager zugleich umfassen sollen. Man kann füglich hiernach unterscheiden:

einfache Hängelager,
kombinirte Hängelager.

Die einfachen Hängelager lassen sich wiederum in sehr verschiedener Weise anordnen. Entweder ist der Lagerkörper mit dem Hängebock in einem Stück dargestellt, oder es ist ein gewöhnliches, einfaches Zapfenlager gewählt, welches auf einem besondern Hängebock befestigt ist. Andererseits ergeben sich Verschiedenheiten in der Anordnung dadurch, dafs die Aufhängung des Hängebockes entweder zu beiden Seiten des Zapfenlagers erfolgen kann, oder auch nur auf einer Seite desselben. Man unterscheidet hiernach:

zweiseitige Hängelager und
einseitige Hängelager.

Die Figuren auf Taf. 29, sowie Taf. 30. Fig. 1 und 2 geben Beispiele von einfachen Hängelagern, und zwar sind die Hängelager auf Taf. 29 sämmtlich von Eisen, wogegen Taf. 30. Fig. 2 und 3 Hängeböcke von Holz darstellen.

Die sämmtlichen Figuren der Tafel 29 sind in $\frac{1}{8}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Taf. 29. Fig. 1 ist ein zweiseitiges Hängelager von Gufseisen, welches den Lagerkörper und den Lagerblock aus einem Stück gegossen darstellt. Das Lager ist in der Bahnhofswerkstatt der Königl. Preufsischen Ostbahn zu Dirschau angewandt, und dient durch Veränderung der Bohrung in dem Metallfutter für Zapfen von $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$ und $2\frac{3}{4}$ Zoll Durchmesser, und zwar für die Hauptwellenleitung. Fig. 1a ist eine Ansicht in der Richtung der Welle, Fig. 1b eine Ansicht normal zu der Welle, Fig. 1c ein Durchschnitt in einer Vertikalebene, die durch die Axe des Zapfens geht, Fig. 1d ein Horizontalschnitt nach der Linie xy der Fig. 1a. Der Hängebock wird durch zwei starke Schrauben quer vor einen der Etagenbalken geschraubt, und wird zum Theil in denselben eingelassen. In die Oeffnung, welche sich unter dem Lager in dem Hängebock befindet, wird ein Blechkasten geschoben, welcher die durch den Zapfen abfliefsende Schmiere aufnimmt. Man sieht dafs die kleinen vorspringenden Ränder, welche mit Höhlungen versehen sind, um die Schmiere zunächst aufzufangen am Boden dieser Höhlungen durchbohrt sind, damit die Schmiere in den Blechkasten abtropfen kann. Eine ganz ähnliche Einrichtung ist an dem Lager Taf. 29. Fig. 2, welches für dieselbe Werk-

Taf. 29. Fig. 1. — Taf. 29. Fig. 2.

statt bestimmt ist. Dieses Lager ist ein einseitiges Hängelager, welches ebenfalls mit dem Lagerkörper aus einem Stück gegossen ist; es ist für die Nebenwellen bestimmt, welche über den Drehbänken und Hobelmaschinen angebracht sind, um die Betriebsriemscheiben für diese Maschinen aufzunehmen. Da diese Wellen nur kurz sind, so pflegt man die beiden Hängelager, welche zu je einer solchen Welle gehören, mit einander in Verbindung zu setzen, und hierzu dient der Arm, welcher rechts aus Fig. 2a und Fig. 2d hervorragt. Das Lager wird unter den Balken geschraubt. Fig. 2a ist eine Ansicht nach der Richtung der Welle, Fig. 2b eine solche normal zu dieser Richtung, Fig. 2c ein Durchschnitt in einer Vertikalebene durch die Axe der Welle, und zwar nach der Linie *pq* in Fig. 2a, und Fig. 2d ein Horizontalschnitt nach der Linie *mn* in Fig. 2a.

Taf. 29. Fig. 3. Taf. 29. Fig. 3 zeigt ein einseitiges, ziemlich stark gehaltenes Hängelager, welches in der Maschinenfabrik von F. Wöhlert in Berlin für die Kölnische Baumwollspinnerei ausgeführt worden ist. Derartige Lager sind für die genannte Spinnerei in obiger Fabrik in sehr verschiedenen Dimensionen angefertigt worden, und zwar für Abstände der Mittellinien der Wellen von der Unterkante der Balken von 6, 9, 12 und 18 Zoll, und für Ausladungen (horizontaler Abstand des Wellenmittels von der Mittellinie der Aufhängung), welche in derselben Weise verschieden sind. Das hier gezeichnete Lager hat eine Ausladung von 5 Zollen und das Wellenmittel liegt 12 Zoll unter den Balken; es dient durch Veränderung der Bohrung des Lagerfutters für Wellen von $2\frac{3}{4}$ Zoll bis 3 Zoll und wiegt etwa 70 Pfund. Fig. 3a ist eine Ansicht nach der Richtung der Welle, Fig. 3b eine solche normal dazu, Fig. 3c ein Vertikalschnitt nach der Linie *vw* in Fig. 3a und Fig. 3d ein Horizontalschnitt nach der Linie *rs* in Fig. 3a mit der Ansicht von unten nach oben. Bemerkenswerth ist die eigenthümliche Befestigung des Lagerdeckels, welche in Fig. 3a sichtbar ist. Der Lagerdeckel hat hier gar keinen Druck auszuhalten, deshalb kann nicht nur die Befestigung leicht und die Deckelschraube verhältnifsmäfsig schwach sein, sondern man kann auch die obere Hälfte des Lagerfutters ganz fortlassen, wie dies Fig. 3c zeigt.

Taf. 29. Fig. 4. Taf. 29. Fig. 4 ist ein zweiseitiges Hängelager, welches gleichfalls mit dem Lagerkörper in einem Stück gegossen ist. Fig. 4a ist die Vorderansicht, Fig. 4b die Seitenansicht. Das hier gezeichnete Lager hat der Verfasser für einen Zapfen von $1\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser bei 8 Zoll Abstand des Wellenmittels von der Unterkante der Balken angeordnet, indem dazu ein umgekehrtes Bocklager benutzt wurde. Die Welle hängt hier in dem Lagerdeckel, und das unbeabsichtigte Lösen der Schrauben ist hier durch Splinte verhindert worden, welche unmittelbar unter den Muttern der Deckelschrauben durch diese letztgenannten durchgesteckt sind.

Eine andere vom Verfasser ausgeführte Konstruktion ist auf Taf. 29. Fig. 5 dargestellt. Das Hängelager ist zweiseitig; der Hängebock aber unabhängig von dem eigentlichen Zapfenlager, indem letzteres durch die Deckelschrauben, welche hier zugleich als Befestigungsschrauben dienen, auf dem Hängebock angebolzt ist. Fig. 5a ist eine Vorderansicht, Fig. 5b ist eine Seitenansicht. Taf. 29. Fig 5.

Taf. 29. Fig. 6 zeigt die Konstruktion eines Hängelagers von Schmiedeeisen, welche der Verfasser öfter angewandt hat, und die in vielen Fällen einfacher und billiger ist, als ein Hängebock von Gufseisen. Fig. 6a ist die Vorderansicht, Fig. 6b die Seitenansicht. Ein Stück Flacheisen von $\frac{1}{2}$ Zoll Dicke und 2 Zoll Breite ist nach der Form des Hängebockes gebogen und das Metallfutter unmittelbar in den untern Theil des schmiedeeisernen Bügels eingelegt. Da kein nach oben gerichteter Druck vorhanden ist, so ist die obere Hälfte des Metallfutters fortgelassen, und die Welle nur durch einen quer durch den Bügel gezogenen Bolzen gegen Herrausspringen bei etwaigen zufälligen Stöfsen gesichert. Um dem Ganzen mehr Steifheit gegen Seitenschub zu geben, ist oben zwischen den Schenkeln des Bügels noch ein Querriegel von Schmiedeeisen eingenietet. Taf. 29. Fig. 6.

Taf. 29. Fig. 7 ist ein kleines Hängelager von Gufseisen, bei welchem das Metallfutter ebenfalls nur den untern Theil des Zapfens umschliefst, und die Welle in ähnlicher Weise, wie in Fig. 6 gegen das Herausspringen geschützt ist. Das Lager ist in der Fabrik von F. Wöhlert in Berlin für die Kölnische Baumwollspinnerei angefertigt, und dient zur Unterstützung der Welle der Leitrollen für Riemscheiben. Auf der $\frac{5}{4}$ Zoll starken Welle sitzt eine Leitrolle von 11 Zoll Durchmesser und 4 Zoll Breite. Die Welle ist nicht länger als erforderlich ist, um diese Rolle aufzunehmen, und die Hängelager für die beiden Endzapfen der Welle liegen einander folglich so nahe, dafs man beide Hängeböcke mit der Befestigungsplatte in einem Stück darstellen konnte. Fig. 7a zeigt die Ansicht nach der Richtung der Welle, Fig. 7b die Ansicht normal dazu, Fig. 7c den Vertikalschnitt durch die Lager mittelst einer Ebene, die durch die Axe der Wellen geht, und Taf. 29. Fig. 7.

Fig. 7d einen Horizontalschnitt nach der Richtung *tu* in Fig. 7a und zwar von unten nach oben gesehen. Jedes Lager ist mit einem kleinen Schmiernapf versehen.

Taf. 30. Fig. 1. Taf. 30. Fig. 1 zeigt noch ein einfaches Hängelager von Gufseisen. Dasselbe ist einseitig, der Hängebock und das Lager sind aus einem Stück, das Metallfutter ist besonders eingesetzt, und der Deckel ist auf eigenthümliche Weise an den Hängebock befestigt, indem er seitwärts angeschraubt ist. Dies ist nur zulässig, wenn gegen den Deckel kein erheblicher Druck statt findet. Fig. 1a ist eine Ansicht nach der Richtung der Welle, Fig. 1b eine Ansicht normal zu dieser Richtung, Fig. 1c ein Vertikalschnitt mit einer Ebene, die durch die Axe des Zapfens geht.

Es ist schon früher bemerkt worden, dafs man die Hängeböcke auch aus Holz konstruiren könne, und Figur 2 und 3 auf Tafel 30 geben hierzu Beispiele. Diese Figuren sind, wie sämmtliche Figuren der Tafel 30, in $\frac{1}{12}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Taf. 30. Fig. 2. Taf. 30. Fig. 2 zeigt ein zweiseitiges Hängelager aus Holz von sehr einfacher Konstruktion; es ist aus zwei Kreuzhölzern von 4 Zoll im Quadrat gebildet, welche mit den obern Enden an den unterstützenden Balken angeblattet, und mit den untern Enden gegenseitig überblattet und verbolzt sind. Das hölzerne Lagerfuter ist zwischen beide Schenkel des Hängelagers eingelegt. Fig. 2a ist eine Ansicht in der Richtung der Welle, Fig. 2b ein Vertikalschnitt mit einer Ebene, die durch die Axe des Zapfens geht, und Fig. 2c eine obere Ansicht des hölzernen Lagerfutters.

Taf. 30. Fig. 3. Taf. 30. Fig. 3 stellt einen etwas stärker konstruirten Hängebock von Holz dar. Das Zapfenlager ist von Gufseisen, ohne besondere Lagerfutter; es ist auf einem hölzernen Stege befestigt, welcher in der früher (§ 117) beschriebenen Weise durch Keile seitwärts verstellbar ist. Der Steg wird an jedem Ende von zwei Hängesäulen umschlossen, welche aus 4- und 5zölligem Kreuzholz gebildet, sowohl an den Etagenbalken als am untern Ende mit einander verbolzt, und durch starke Streben abgesteift sind. Das Hängelager ist von dem Verfasser für die liegende Welle eines hölzernen Rofswerkes ausgeführt worden. Fig. 3a zeigt die Ansicht in der Richtung der Welle; Fig. 3b einen Vertikalschnitt durch die Axe der Welle.

Kombinirte Hängelager.

§ 127. Wenn ein und derselbe Hängebock zur Unterstützung mehr als eines Zapfenlagers dienen soll, so richtet sich die Konstruktion desselben wesentlich nach der Lage der Zapfen, beziehlich der Wellen, denen diese angehören, gegen einander, und nach der Richtung des Druckes, welcher auf die Zapfen einwirkt. Da hiernach die Bedingungen für die Anordnung eines Hängebockes sich sehr kompliciren können, so müssen wir uns hier darauf beschränken, nur einige der am häufigsten vorkommenden Anordnungen als Beispiele aufzuführen. Wir wählen dazu folgende Fälle aus:

a) Hängelager für zwei Zapfen, deren Axen parallel sind und vertikal über einander liegen:

(Anordnung in der Vertikalebene).

b) Hängelager für drei Zapfen, von denen der eine einer stehenden Welle angehört, die beiden anderen aber die Endzapfen zweier in ein und derselben Richtung liegender Wellen sind:

(Anordnung in der Vertikalebene).

c) Hängelager für zwei Zapfen, deren einer der obere Endzapfen einer stehenden Welle, der andere ein Halszapfen einer liegenden Welle ist:

(Anordnung in der Vertikalebene).

d) Hängelager für drei Zapfen, die sämmtlich liegenden Wellen angehören; zwei dieser Wellen liegen in ein und derselben Richtung; die dritte ist normal zu dieser Richtung:

(Anordnung in der Horizontalebene).

Taf. 30. Fig. 4 stellt die unter a) erwähnte Anordnung eines Zapfenlagers aus der Werkstatt des Königl. Gewerbe-Instituts zu Berlin dar. Fig. 4a ist die Ansicht in der Richtung der Wellen, Fig. 4b ein Vertikalschnitt in einer Ebene durch die Axen der beiden parallelen Wellen. Die Figuren sind in $\frac{1}{12}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Der Hängebock ist zweiseitig, das obere Lager ist mit dem Hängebock aus einem Stück, das untere ist ein gewöhnliches, unabhängiges Zapfenlager, welches auf der untern Platte des Hängebockes besonders aufgeschraubt ist, und zwar in der Weise, dafs die Deckelschrauben zugleich als Befestigungsschrauben dienen. Die bogenförmigen Verstärkungsrippen, welche das obere Lager tragen, würde man auch dann anordnen, wenn man nur das untere Lager brauchen wollte; das heifst: man ver- Taf. 30. Fig. 4.

strebt die Schenkel des Hängebockes durch derartige Querrippen selbst bei einfachen Hängelagern, wenn die Mittellinie der Welle sehr tief unter der Befestigungsebene des Hängebockes liegt.

Taf. 30. Fig. 5. Taf. 30. Fig. 5 zeigt ein Hängelager für die oben unter b) erwähnte Anordnung. Dasselbe ist in der Maschinenfabrik von F. Wöhlert in Berlin für die Kölnische Baumwollenspinnerei ausgeführt worden. Fig. 5a ist die Ansicht in der Richtung der liegenden Wellen, Fig. 5b ist zur Hälfte eine Ansicht, zur Hälfte ein Vertikalschnitt mit einer Ebene, die durch die Axe der liegenden und der stehenden Welle geht, Fig. 5c ist ein Horizontalschnitt, und zwar die linke Hälfte der Figur mit einer Ebene durch die Axe der liegenden Welle, und die rechte Hälfte mit einer Ebene durch die Mitte des Halslagers der stehenden Welle. Beide Hälften sind von unten nach oben gesehen. Die Befestigungsplatte des Hängelagers wird durch sechs Bolzen unter den Etagenbalken festgeschraubt; dieselbe hat in der Mitte eine mit hochkantiger Verstärkungsrippe eingefafste Durchbohrung, um die stehende Welle durchgehen zu lassen, und ist mit den Hängeböcken der beiden Lager für die liegenden Wellen aus einem Stück gegossen. Diese Hängeböcke bilden unten zugleich die Lagerkörper, in welche die Metallfutter unmittelbar eingelegt sind; die oberen Hälften der Lagerfutter sind durch Deckel gehalten, deren jeder mittelst zweier eiserner Keile in eigenthümlicher Weise angezogen werden kann. Die Durchbohrung der Verstärkungsrippe des Hängebockes, welche man unterhalb der Lagerkörper in jedem Hängebock bemerkt, dient zur Aufnahme eines kleinen Gefäfses aus Weifsblech, in welchem sich die abtropfende Schmiere sammelt. Das Halslager für die stehende Welle befindet sich unmittelbar über den Lagern für die liegenden Wellen; es wird durch einen achteckigen Kasten gebildet, dessen eine Hälfte mit den Hängeböcken und den Befestigungsplatten aus einem Stück gegossen ist (vergl. Fig. 5c), dessen andere (vordere) Hälfte aber durch vier Schrauben an dieser ersten befestigt ist. Der Kasten hat vier Abtheilungen zur Aufnahme von vier Metallfuttern, welche den Hals der stehenden Welle umschliefsen, und von denen jedes durch zwei Stellschrauben centrirt werden kann. Damit diese Futter nicht nach unten herausgleiten, ist eine aus zwei Hälften bestehende gufseiserne Bodenplatte (Fig. 5c links) von unten her unter den Kasten geschraubt. Die sämmtlichen Figuren sind in $\frac{1}{12}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

In der eben beschriebenen Anordnung unterbricht die stehende Welle die Richtung der liegenden Welle; die oben unter c) erwähnte Anordnung unterscheidet sich von dieser dadurch, daſs die liegende Welle nicht unterbrochen ist, sondern über der stehenden fortgeht; ein Beispiel hierzu giebt die auf Taf. 31. Fig. 1 gezeichnete Konstruktion. Dieselbe stellt in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröſse ein kombinirtes Hängelager vor, welches in der Maschinenbauanstalt von F. Wöhlert in Berlin für die Fabrik der Herrn Lindgens und Söhne in Mühlheim an der Ruhr ausgeführt ist. Fig. 1a ist eine Ansicht in der Richtung der liegenden Welle, Fig. 1b eine Ansicht normal dazu, Fig. 1c ein Vertikalschnitt durch die Axe der liegenden Welle, Fig. 1d zur Hälfte (links) eine Ansicht des Lagers von unten nach oben, zur andern Hälfte ein Horizontalschnitt durch die Mitte des Zapfenlagers für die stehende Welle (nach *ab* in Fig. 1a). Der Hängebock für die liegende Welle ist mit dem Lagerkörper desselben aus einem Stück, und würde ein einfaches, zweiseitiges Hängelager bilden, wenn nicht unterhalb des Lagers für die liegende Welle der Lagerkörper für die stehende Welle, und zwar in der gewöhnlichen Konstruktion eines einfachen Zapfenlagers gleich angegossen wäre. Dieser Lagerkörper läſst sich im Guſsmodell leicht von dem Lagerbock trennen, und letzterer kann dann allein eingeformt und gegossen werden. Für die genannte Fabrik wurden im Ganzen geliefert: zwei kombinirte Lager, wie sie hier gezeichnet, für eine liegende Welle von $2\frac{1}{2}$ Zoll und für eine stehende Welle von 2 Zoll Durchmesser: ein kombinirtes Lager für eine stehende Welle von $2\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser und für eine liegende Welle, die ebenso stark ist, welches nur durch Veränderung der Bohrung im Lagerfutter hergestellt wurde, und ein einfaches Hängelager für eine dreizöllige liegende Welle, wozu ebenfalls dasselbe Modell benutzt werden konnte. Taf. 31. Fig. 1.

Taf. 31. Fig. 2 zeigt in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröſse die oben (S. 347) unter d) erwähnte Anordnung. Von einer liegenden Hauptwelle von $3\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser werden links und rechts zwei liegende Nebenwellen von $2\frac{3}{4}$ Zoll Durchmesser getrieben. Das hier in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröſse gezeichnete Lager ist in der Fabrik von F. Wöhlert in Berlin für die Kölnische Baumwollenspinnerei ausgeführt worden. Fig. 2a ist eine Ansicht in der Richtung der Hauptwelle, Fig. 2b eine Ansicht in der Richtung der Nebenwellen, Fig. 2c ein Horizontalschnitt mit einer Ebene, die durch die Linie *ef* (ganz oben) in Fig. 2b geht, und zwar so, daſs die Taf. 31. Fig. 2.

Durchschnittsfigur in der Zeichnung umgelegt ist, Fig. 2d ist ein Horizontalschnitt, und zwar die eine Hälfte (links) nach der Richtung *ab*, die andere Hälfte (rechts) nach der Richtung *cd* in Fig. 2a. Die Grundplatte des Hängelagers ist mit vier Bolzen an den Etagenbalken befestigt; mit derselben aus einem Stück gegossen ist der Hängebock mit dem Lagerkörper für die Hauptwelle. Der Lagerdeckel dieses Lagers ist mittelst zweier Deckelschrauben an dem Lagerkörper befestigt (Fig. 2a). Die beiden Schenkel des Lagerbockes für die Hauptwelle tragen die Zapfenlager der beiden Nebenwellen, und zwar jedes mittelst zweier Schrauben. Die Zapfenlager für die Nebenwellen (Fig. 2b) sind also als besondere Theile konstruirt, die Deckel derselben sind mit je einer Deckelschraube befestigt. Man sieht übrigens aus Fig. 2a und 2b, dafs sowohl unter dem Lager für die Hauptwelle, als auch unter denjenigen der Nebenwellen in dem Hängebock Aussparungen angebracht sind, in welche man Kästchen von Weifsblech zur Aufnahme der abtropfenden Schmiere einstellen kann.

Noch andere Konstruktionen von Hängelagern wird man aus den Beispielen für Konsollager, welche in dem nächsten Paragraphen folgen, ableiten können.

Anordnung der Konsollager. Einfache Konsollager.

§ 128. Wenn die Wellenleitung in einer Höhe durchgeführt wird, welche eine Unterstützung von unten, oder ein Anhängen der Lager an die Decke nicht gestattet, oder wenn aus irgend welchen andern Gründen die Unterstützung der Zapfenlager von der Seite her wünschenswerth ist, so sucht man entweder die Umfassungsmauern oder auch einzelne zum Tragen der Decke bestimmte Säulen oder Stiele zur Befestigung der Zapfenlager zu benutzen. Man pflegt dann die Lager auf Konsole zu stellen, welche man an den Wänden oder an den Säulen befestigt, oder man pflegt die gegossenen eisernen Säulen gleich so zu gestalten (Blatt 34), dafs sie ohne besonders angeschraubte Konsole geeignet sind zur Befestigung der Zapfenlager zu dienen. Wenn die Lager mit besonderen Konsolen versehen sind, so nennt man sie Konsollager, wenn dagegen die Säulen unmittelbar zur Unterstützung des Lagers eingerichtet sind, so pflegt man die Lager Säulenlager zu nennen.

Sowohl die Konsollager als die Säulenlager können entweder einfache oder kombinirte sein; sie können ferner entweder so eingerichtet sein, dafs das Konsol mit dem Lagerkörper aus einem Stück, oder so, dafs das Konsol als besonderer Maschinentheil dargestellt ist, auf welchem dann das Zapfenlager befestigt wird.

Die einfachen Konsollager und Säulenlager dienen nur zur Unterstützung eines einzigen Zapfenlagers; die kombinirten zur Unterstützung mehrer Zapfenlager. Die einfachen Konsollager unterscheiden sich in ihrer Anordnung noch durch die Richtung, welche die zu unterstützende Welle gegen die Mauer hat, die zur Unterstützung des Lagers dienen soll. Die am häufigsten vorkommenden Fälle sind:

a) die Richtung der Wellenleitung ist parallel mit der Mauer, durch welche das Lager unterstützt werden soll, und
b) die Richtung der Wellenleitung ist normal zu der unterstützenden Mauer.

Im ersten Falle heifsen die Lager vorzugsweise Konsollager, im andern Falle nennt man sie auch Wandlager oder Mauerlager.

Taf. 32. Fig. 1 bis 4 stellen verschiedene einfache Konsollager, Fig. 5 und 6 zwei einfache Wandlager dar, und Taf. 32. Fig. 7, sowie Taf. 33 zeigen verschiedene kombinirte Konsollager.

Die sämmtlichen Figuren der Tafel 32 sind in $\frac{1}{8}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Taf. 32. Fig. 1 ist ein einfaches Konsollager für eine Welle von 2 Zoll Durchmesser. Das Konsol ist mit drei Schrauben an der Säule oder an der Mauer befestigt, und das eigentliche Zapfenlager ist an demselben festgeschraubt, indem man die Deckelschrauben zugleich als Befestigungsschrauben benutzt hat. Um die untere Mutter dieser Schrauben anziehen zu können, ist die Rippe des Konsols an den betreffenden Stellen ausgespart worden. Ueber die Konstruktion des Konsols sind schon im I. Theil S. 184 Angaben gemacht, und man könnte hier in Bezug auf die Befestigung des Zapfenlagers auf der Konsolplatte, sowie in Bezug auf die Befestigung des Konsols an der Wand oder an der Säule eine der auf Taf. 11. Fig. 12 dargestellten, und am angeführten Orte beschriebenen Konstruktionen wählen. Das hier gezeichnete Konsollager ist aus der Werkstatt des Königl. Gewerbe-Instituts zu Berlin hervorgegangen, und zwar ist Fig. 1a eine Ansicht in der Richtung der Welle, Fig. 1b eine solche normal dazu. Taf. 32. Fig. 1.

Taf. 32. Fig. 2 ist ein, in der Maschinenfabrik von F. Wöhlert in Berlin angefertigtes Konsollager, welches für eine $2\frac{1}{2}$ Zoll Taf. 32. Fig. 2.

starke Welle bestimmt ist. Dasselbe ist im Charakter der auf Taf. 29. Fig. 3, Taf. 30. Fig. 5, Taf. 31. Fig. 2 gezeichneten, für die Kölnische Baumwollenspinnerei bestimmten Lager gehalten. Der Lagerkörper ist mit dem Konsol aus einem Stück gegossen; der Lagerdeckel ist durch Schrauben an dem Lagerkörper befestigt, indessen fehlt in dem Lagerdeckel das Metallfutter, da der auf die Welle einwirkende Druck nur nach unten gerichtet ist. Unterhalb des Zapfens ist die Konsolrippe durchbrochen, um einem Kasten zur Aufnahme der abtropfenden Schmiere Platz zu geben. Das Konsollager wiegt, ohne Metalleinlage, 30 Pfund; es ist zur Befestigung an einer runden, hohlen, eisernen Säule bestimmt; diese ist an der entsprechenden Stelle mit einer ebenen Ansatzplatte versehen, welche an dem obern und untern Rande vorspringende Knaggen hat, gegen welche die Vertikalplatte des Konsols durch Keile eingestellt werden kann. Hat man hierdurch das Lager in die richtige Lage gebracht, so wird es durch zwei Befestigungsschrauben angezogen und festgestellt. Fig. 2a ist eine Ansicht, Fig. 2b ein Vertikalschnitt mit einer Ebene, die durch die Axe des Zapfens geht.

Taf. 32. Fig. 3. Taf. 32. Fig. 3 ist ein Konsollager von der Wellenleitung zum Betriebe der mechanischen Werkstatt des Königl. Gewerbe-Instituts zu Berlin. Fig. 3a ist eine Ansicht in der Richtung der Welle, Fig. 3b ein Vertikalschnitt mit einer Ebene durch die Axe des Zapfens. Die Sohlplatte des wie ein gewöhnliches Zapfenlager konstruirten Lagers ist mit einem angegossenen konsolartigen Ansatz versehen, dessen Vertikalplatte nach der Rundung der Säule ausgebogen ist; diese Höhlung der Konsolplatte umfaſst die 6 Zoll starke eiserne Säule, und wird durch zwei Schraubenbolzen, welche quer durch die ganze Säule und durch das Konsol gehen, festgeklemmt.

Taf. 32. Fig. 4. Taf. 32. Fig. 4 ist ein Konsollager für eine Ausladung von 12 Zoll. Der Zapfen hat $2\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser. Der Lagerkörper ist mit dem Konsol aus einem Stück gegossen. Die Form des Lagerkörpers stimmt mit der auf Taf. 28. Fig. 2 gezeichneten, von dem Verfasser festgestellten Normalform (S. 332) in der Hauptsache überein; die Sohlplatte des Lagers geht hier in das Konsol über. Das Konsol ist durch drei Befestigungsschrauben entweder an einer Säule, oder an einer Mauerplatte von Guſseisen befestigt. Diese in Fig. 4a und 4b sichtbare Mauerplatte wird durch vier Bolzen oder Maueranker an der Wand befestigt, und ist mit entsprechenden Knaggen versehen, um das Konsollager mittelst Keile, die gegen diese Knaggen getrieben werden, in die richtige Lage bringen zu können. Fig. 4a ist eine Ansicht in der Richtung der Welle, Fig. 4b eine Ansicht normal dazu.

Taf. 32. Fig. 5 ist ein Mauerlager für den Fall, dafs die Richtung der Welle normal zur Richtung der unterstützenden Mauer ist (s. oben S. 351). Dasselbe stellt eine in den berliner Königlichen Mühlen vielfach angewandte, von der Maschinenfabrik von F. A. Egells in Berlin ausgeführte Konstruktion dar. Fig. 5a ist eine Ansicht in der Richtung der Welle, Fig. 5b eine Ansicht normal dazu. Das durch drei Maueranker oder Bolzen an der Mauer befestigte Konsol trägt ein gewöhnliches Zapfenlager, das durch zwei Keile, die sich gegen entsprechende Knaggen der horizontalen Konsolplatte setzen, in horizontaler Richtung verstellbar ist. Taf. 32. Fig. 5.

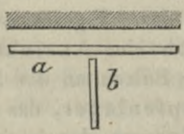
Geht die Welle durch die Mauer hindurch, so pflegt man häufig das Lager nicht vor der Mauer, sondern in derselben anzubringen. Zu dem Zwecke ist die Mauer durchbrochen, und die Oeffnung mit einem gemauerten Bogen überspannt; auf der Sohle der Maueröffnung befestigt man eine Grundplatte, und auf dieser das Lager. Ist die Mauer schwach, oder kann man einen gemauerten Bogen über dem Lager nicht anbringen, so mauert man wohl einen vollständigen eisernen Rahmen, eine Zarge, nach Art der Thürzargen ein, und befestigt in diesem das Lager. Ein Beispiel für solche Konstruktion zeigt Taf. 32. Fig. 6 und zwar ist Fig. 6a eine Ansicht eines solchen Mauerkastens, Fig. 6b ein Vertikalschnitt mit einer Ebene durch die Axe des Zapfens. Der Rahmen hat unten zwei Lappen (Fig. 6a) durch welche Maueranker zur Befestigung des Rahmens gezogen sind (der Lappen rechts ist in Fig. 6a abgebrochen gedacht, wegen Mangels an Raum auf der Tafel). In dem Rahmen befindet sich eine horizontale Querwand, auf welcher ein gewöhnliches Zapfenlager befestigt ist. Dasselbe ist in gewöhnlicher Weise durch Keile verstellbar. Taf. 32. Fig. 6.

Kombinirte Konsollager.

§ 129. Die Anordnung der kombinirten Konsollager ist nicht nur nach denselben Rücksichten zu bemessen, welche wir bereits in § 127 bei der Anordnung der kombinirten Hängelager als maafsgebend angeführt haben, sondern es kommt hier zu der Lage der Wellen gegeneinander noch ein neues Element hinzu, nämlich die Lage der Wellen gegen die Richtung der Mauer, welche zur Unterstützung und Befestigung des Konsols dienen soll. Hierdurch kompliciren sich die möglichen einfachen Fälle schon sehr beträchtlich, und wir müssen uns daher darauf beschränken, nur einige dieser Fälle als Beispiele für die Anordnung derartiger Lager hier vorzuführen.

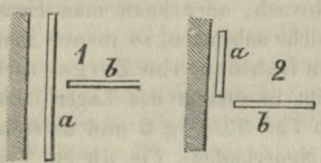
Die hier behandelten Fälle sind folgende:

a) Konsollager für zwei liegende Wellen, von denen eine (*a*) mit der Mauer parallel, die andere (*b*) aber normal zu der Mauer ist (Taf. 32. Fig. 7):



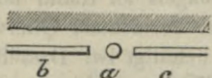
(Anordnung in der Horizontalebene.)

b) Konsollager für zwei Wellen, von denen die eine vertikal (*a*), die andere (*b*) horizontal, und letztere zur Mauer normal ist. Hier sind zwei Fälle behandelt, nämlich 1) der Fall, wo die stehende Welle an der liegenden vorbeigeht (Taf. 33. Fig. 1), und 2) der Fall, wo die stehende Welle neben der liegenden anfängt Taf. 33. Fig. 2):



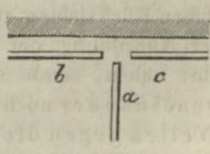
(Anordnung in der Vertikalebene.)

c) Konsollager für drei Wellen, von denen die eine vertikal (*a*), die beiden andern aber horizontal (*b* und *c*) und mit der Mauer parallel sind (Taf. 33. Fig. 3):



(Anordnung in der Horizontalebene.)

d) Konsollager für drei Wellen, die sämmtlich horizontal sind; die eine davon (*a*) ist normal zur Mauer, die beiden andern (*b* und *c*) sind parallel mit der Mauer (Taf. 33. Fig. 4):



Tafel 32. Fig. 7 zeigt ein kombinirtes Konsollager für zwei liegende Wellen (Anordnung a. s. oben) von denen die eine von $3\frac{1}{2}$ Zoll Zapfendurchmesser parallel mit der Wand ist und die Hauptwelle darstellt, während die andere von $2\frac{1}{4}$ Zoll Zapfendurchmesser von dieser als Nebenwelle abgezweigt, und normal zur Wand ist. Fig. 7a ist eine Ansicht in der Richtung der Hauptwelle, Fig. 7b eine solche in der Richtung der Nebenwelle, und Fig. 7c eine Ansicht von oben nach Abnahme der beiden Lagerdeckel. Das hier gezeichnete Lager ist in der Fabrik von F. Wöhlert in Berlin ausgeführt. Das Konsol ist unabhängig von den beiden Zapfenlagern, welche durch Schrauben auf demselben befestigt sind, und zwar hat das Zapfenlager der Hauptwelle vier und das der Nebenwelle zwei Befestigungsschrauben. Die Sohlplatte des erstgenannten Lagers ist zur Aufnahme der vier Befestigungsschrauben in der Richtung der Welle erweitert (Fig. 7c); auch sieht man aus Fig. 7c, dafs die Oeffnungen für die Befestigungsschrauben länglich sind, und zwar sowohl die Oeffnungen in der Sohlplatte des Lagers, als diejenigen in der Horizontalplatte des Konsols; jedoch so, dafs die Längenrichtungen je zweier korrespondirenden Oeffnungen sich rechtwinklig kreuzen. Hierdurch ist das Lager vor der Befestigung in der Horizontalebene nach allen Richtungen ein wenig verschiebbar, und läfst sich leicht in die richtige Lage bringen. Beide Zapfenlager sind durch Keile, welche sich gegen Knaggen an der Horizontalplatte des Konsols legen verstellbar. Das Konsol selbst wird durch drei Mauer-Anker oder Schraubenbolzen an der Mauer befestigt. Die Figuren 7a, 7b und 7c sind sämmtlich in $\frac{1}{8}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Taf. 32. Fig. 7.

Tafel 33. Fig. 1 und 2 sind kombinirte Konsollager für eine stehende und eine liegende Welle nach der oben unter *b* angedeuteten Anordnung. Fig. 1 entspricht dem Falle, wo die stehende Welle ihrer ganzen Länge nach an der liegenden vorbeigeht, und Fig. 2 dem Falle, wo die stehende Welle an dem Konsollager erst beginnt. Für beide Anordnungen ist genau dasselbe Gufsmodell brauchbar, nur ist das Lager in Fig. 2 dadurch von oben in Fig. 1 verschieden, das erstes gerade die umgekehrte Stellung hat, so dafs die Unterkante der Fig. 1 in Fig. 2 Oberkante ist, und dafs ferner das Halslager der stehenden Welle in Fig. 1 mit einem Spurlager in Fig. 2 vertauscht ist. Mit Rücksicht auf diesen zwiefachen Gebrauch ist das Konsol konstruirt. Man sieht in Fig. 1b, dafs das Halslager für die stehende Welle ein gewöhnliches Zapfenlager ist, welches man seitwärts Taf. 33. Fig. 1 u. 2.

an eine Rippe des Konsols angeschraubt hat, während das Spurlager: Fig. 2 ein einfaches Spurlager ist, dessen Sohlplatte auf der Horizontalplatte des Konsols ruht. Fig. 1a ist eine Ansicht des Konsollagers nach der Richtung der liegenden Welle, Fig. 1b ist ein Vertikalschnitt mit einer Ebene, die durch die Axen der beiden Wellen geht. Fig. 1c ist eine obere Ansicht des Consollagers, doch nur zur Hälfte (links) der Anordnung der Fig. 1 entsprechend; die andere Hälfte der Figur (rechts) ist eine obere Ansicht des Konsollagers, wenn es der Anordnung der Fig. 2 entsprechend in umgekehrter Stellung für ein Spurlager benutzt wird. Fig. 2 zeigt einen Vertikalschnitt für diese letztgedachte Anordnung, und zwar wieder mittelst einer Ebene geschnitten, welche durch die Axe beider Wellen geht. Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{12}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Das Konsol ist durch vier Maueranker an der Wand befestigt; die Horizontalplatte des Lagers ist sowohl oben als unten mittelst zweier Rippen an die Vertikalplatte angeschlossen; sie hat eine Durchbrechung, um für die Anordnung in Fig. 1 die stehende Welle durchgehen zu lassen; diese Durchbrechung ist hinreichend schmal, damit die Sohlplatte des Spurlagers bei der Anordnung in Fig. 2 noch die nöthige Unterstützung durch die Horizontalplatte findet.

Taf. 33. Fig. 3. Taf. 33. Fig. 3 zeigt ein kombinirtes Konsollager für eine stehende Welle, und zwei liegende Wellen, welche beide mit der unterstützenden Wand parallel sind; es ist dies die oben (S. 354) unter *c* angedeutete Anordnung. Das Konsol ist durch vier Schrauben oder Maueranker an der Wand befestigt; die Vertikalplatte des Konsols hat zwei vorspringende Konsolrippen, die in zwei verschiedenen Horizontalebenen zur Unterstützung von Horizontalplatten dienen. In der obern Horizontalebene liegen die Platten ausserhalb der Konsolrippen und nehmen die Lager für die beiden liegenden Wellen auf; zwischen den Konsolrippen entspricht diesen Platten eine horizontale Verbindungsrippe; in der untern Horizontalebene liegt die Platte zwischen den beiden Konsolrippen; sie dient zur Befestigung des Lagers für die stehende Welle. Dieses Lager kann nur ein Spurlager sein, welches sich auf der Horizontalplatte ohne Schwierigkeit würde befestigen lassen, oder es kann, wie in der Figur ein Halslager sein; es ist folglich auch bei dieser Konstruktion das Konsol sowohl für den Fall zu brauchen, wo die stehende Welle erst auf dem Konsol anfängt, als auch für den hier gezeichneten Fall, wo die stehende Welle sich unterhalb des Konsols fortsetzt; man hat aber nicht nöthig wie bei der *Konstruktion* in *Fig.* 1 *und* 2 das Konsol umzukehren, wenn man ein Spurlager darauf befestigen will. Das hier gebrauchte Halslager ist abweichend von der gewöhnlichen Anordnung der Zapfenlager konstruirt; es besteht aus zwei halbkreisförmigen Ringen, in welche die Lagerfutter eingelegt sind, und die mittelst vorspringender Lappen durch Schraubenbolzen vereinigt werden können; an jeden dieser beiden Halbringe, ist eine horizontale Sohlplatte angegossen, welche auf der Horizontalplatte des Konsols durch je zwei Schraubenbolzen befestigt werden kann. (Vergl. *Fig.* 3a und 3c.) Die Horizontalplatte des Konsols hat von aufsen her einen Einschnitt, um die stehende Welle bequem einlegen zu können, auch ist sie mit Knaggen versehen, gegen welche sich, behufs Einstellung und Befestigung des Lagers Keile eintreiben lassen. Fig. 3a ist eine Ansicht normal gegen die unterstützende Wand, Fig. 3b eine Ansicht in der Richtung der liegenden Welle, und Fig. 3c eine obere Ansicht; sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{12}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Taf. 33. Fig. 4 giebt die Konstruktion eines Konsollagers für drei *liegende* Wellen nach der oben (S. 354) angegebenen Anordnung. Zwei von diesen Wellen sind mit der unterstützenden Mauer parallel die dritte ist normal dazu. Die drei Lager werden sämmtlich auf derselben Horizontalplatte des Konsols befestigt; die Horizontalplatte hat zwischen den Lagern Durchbrechungen, ist aber unter jedem Lager durch eine besondere Konsolrippe unterstützt, so dafs dann drei vorhanden sind. Die Vertikalplatte des Konsols ist durch vier Maueranker oder Schraubenbolzen an der unterstützenden Wand befestigt. Die Befestigungsschrauben für die Zapfenlager gehen entweder durch die Verstärkungsrippen, beziehlich die Konsolrippen durch, oder sie endigen in Verstärkungen, welche diese Rippen an den betreffenden Stellen erhalten (Vergl. *Fig.* 4b) Fig. 4a ist eine Ansicht normal zur unterstützenden Wand, Fig. 4b eine Ansicht parallel mit der unterstützenden Wand, und Fig. 4c eine obere Ansicht Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{12}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Taf. 33. Fig. 4.

Säulenlager.

§ 130. Wir haben in § 128 unter Säulenlagern solche Lager verstanden, die unmittelbar von einer Säule oder einem Stiel getragen werden, welcher zur Unterstützung des Gebäudes dient. Diese Lager bilden gewissermaafsen den Uebergang zu den Bock-lagern, welche durch besondere Gerüste, die von unten aufgebaut sind, getragen werden; sie unterscheiden sich von denselben dadurch, dafs diese Gerüste bei den Säulenlagern noch einen andern wichtigen Zweck erhalten, als allein den das Lager zu tragen.

Die Säulen, welche als Baukonstruktion zur Unterstützung des Gebäudes gehören, können nämlich in verschiedener Weise benutzt werden, um Lager daran zu befestigen.

1) Die einfachste Methode ist die, dafs man die Sohlplatte eines gewöhnlichen Zapfenlagers unmittelbar in vertikaler Lage an die Säule anschraubt. Diese Methode ist jedoch nur dann anzuwenden, wenn die Mittellinie der Wellenleitung nahe genug an der Säule vorbeiführt, und wenn der Druck gegen das Lager nicht in der vertikalen Richtung erfolgt. Es wird nämlich bei dieser Konstruktion die Lagerfuge vertikal, und man vermeidet es gern, das Lager so anzuordnen, dafs der Druck gegen die Lagerfuge gerichtet ist, weil man nach dieser Richtung durch Nachziehen der Deckelschrauben nicht den Schlufs des Lagers herstellen kann, wo selbiges abgenutzt ist.

2) Eine andere Methode die Säulen des Gebäudes zur Unterstützung des Lagers zu benutzen, beruht auf der Anwendung von Konsols.

3) Ferner kann man die Säulen selbst unmittelbar zur Aufnahme des Lagers einrichten, und dies sind die eigentlichen Säulenlager.

4) Endlich konstruirt man auch wohl so, dafs man zwischen zwei benachbarten Säulen einen Balken (Steg) anordnet, welcher das Lager trägt.

Die unter No. 1 angeführte Methode ist so einfach, dafs sie kaum einer besonderen Erläuterung durch Zeichnung bedarf.

Die unter No. 2 angegebene Anordnung setzt die Anwendung von Konsols voraus. Es sind dergleichen Konsols, welche sich zur Befestigung an Säulen eignen, bereits oben abgehandelt worden, und namentlich gehören dahin die einfachen Konsols auf Taf. 32. Fig. 1 bis 4. Um aber noch eine Zusammenstellung einer Säule mit einem Konsol zur Unterstützung eines Zapfenlagers zu geben ist die auf Taf. 34. Fig. 1 gezeichnete Anordnung ausgewählt.

Taf. 34. Fig. 1. — Taf. 34. Fig. 1 zeigt die Konstruktion, welche in der grofsen Reparaturwerkstatt der Stargard-Posener Eisenbahn zu Stargard in Anwendug ist. Die hohle gufseiserne Säule ist unten mit einem Schraubenbolzen auf dem Fundament befestigt, (Fig. 1 d) oben trägt sie einen hölzernen Unterzug für die Etagenbalken, welcher mittelst zweier Schraubenbolzen auf der Kopfplatte der Säule befestigt ist; zur Verstärkung dieser Befestigung, und zugleich um den Etagenbalken, welcher unmittelbar über der Säule auf dem Unterzug ruht mit der Säule in feste Verbindung zu bringen, sind auf der Kopfplatte noch zwei gufseiserne Futterstücke angebracht (Fig. 1g im Detail), welche einmal unter sich und mit dem Unterzuge durch zwei horizontale Schraubenbolzen verbunden sind, und sodann zwischen der Kopfplatte und dem Etagenbalken durch zwei vertikale Schraubenbolzen (für jedes Futterstück einer) eingeklemmt werden. Da wo das Konsollager an der Säule befestigt werden soll, ist diese mit einer vertikalen vorspringenden Platte versehen, die genau gehobelt ist, und auf welche die Vertikalplatte des Konsols, die gleichfalls gehobelt ist, genau pafst. Das Konsol ist an der Platte durch vier Schraubenbolzen befestigt; das Lager auf dem Konsol, ebenfalls mit gehobelten Flächen aufliegend, durch zwei dergleichen. Um das Lager sehr genau einstellen zu können sind zwei Systeme von Stellschrauben vorhanden. Das eine System hat seine Muttern in der vorspringenden Platte der Säule, und dient dazu das ganze Konsol mit dem Lager in vertikaler Ebene zu verstellen; das andere System hat seine Muttern in Vorsprüngen der Horizontalplatte des Konsols, und dient dazu das Lager auf dem Konsol in horizontaler Richtung zu verstellen. So exakt sich durch diese beiden Systeme von Stellschrauben, namentlich, da die Berührungsflächen in den Fugen sämmtlich gehobelt sind die beabsichtigten Einstellungen vornehmen lassen, so bleibt doch noch die Schwierigkeit übrig, bei Aufstellung mehrerer Säulen für dieselbe Richtung der Wellenleitung, die vorspringenden Platten der Säulen genau in parallele Vertikalebenen zu bringen. Sind nämlich diese vorspringenden Platten auch nur ein wenig verdreht gegen einander, selbst wenn sie genau vertikal sind, so ist eine Regulirung dieses Fehlers äufserst schwierig, und kann durch die vorhandenen Stellvorrichtungen nicht bewirkt werden.

Fig. 1a zeigt eine Ansicht der Säule mit dem Konsol in der Richtung der Wellenleitung, Fig. 1b ein Ansicht normal zu dieser Richtung, Fig. 1c eine obere Ansicht des Säulenkopfes mit dem Unterzug und dem Etagenbalken, Fig. 1d ein Horizontalschnitt der Säule in der Ebene des Fufsbodens mit einer Ansicht der Fufsplatte der Säule, Fig. 1e die obere Ansicht der Kopfplatte, Fig. 1f ein Vertikalschnitt des untern und des obern Theils der Säule, und Fig. 1g Details der Futterstücke, welche auf der Kopfplatte der Säule befestigt sind (s. oben). Die Figuren sind in $\frac{1}{24}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Die oben (S. 358) unter No. 3 erwähnte Anordnung der Säulenlager, nach welcher die Säule selbst, ohne Anwendung besonderer Konsols zur Aufnahme der Zapfenlager vorgerichtet ist, wird auf Taf. 24 durch die beiden Konstruktionen Fig. 2 und Fig. 3 repräsentirt, und zwar zeigt Fig. 2 ein einfaches, Fig. 3 ein kombinirtes Säulenlager. Beide sind in der Maschinenfabrik von A. Borsig in Moabit bei Berlin ausgeführt, und hier in $\frac{1}{24}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Taf. 34. Fig. 2. Taf. 34. Fig. 2 ist ein einfaches Säulenlager, welches dadurch gebildet ist, dafs die Säule, welche einen kreuzförmigen Querschnitt hat, an dem oberen Theile mit einem konsolartigen Arm versehen ist, der in bekannter Weise zwischen Knaggen das Zapfenlager aufnimmt. Die Säule ruht unten mit einer verbreiteten quadratischen Fufsplatte (Fig. 2e) auf dem Fundament, oben hat sie eine oblonge Kopfplatte, (2b) auf welcher der aus zwei parallelen Holzarmen bestehende Unterzug mittelst vier Bolzen befestigt ist. Diese Bolzen reichen zugleich durch die beiden Etagenbalken, welche unmittelbar über der Säule liegen, und welche so mit dem Unterzug und der Kopfplatte fest verbunden werden. Braucht man zwischen der Säule noch Stützpunkte für die Lager, so wendet man Hängelager an. Das zu der hier gezeichneten Säulenkonstruktion gehörige Hängelager ist in Fig. 2f und 2g besonders dargestellt. Fig. 1a ist eine Ansicht der Säule mit dem Arm in der Richtung der Wellenleitung, Fig. 2b ein Horizontalschnitt unmittelbar über der Kopfplatte der Säule, Fig. 2c ein solcher unmittelbar über dem Arm, Fig. 2d ein Horizontalschnitt durch die Säule, aus welchem man zugleich sieht, wie an einzelnen Stellen die vier Kreuzflügel des Querschnitts durch horizontale Zwischenplatten verstärkt sind. Fig. 2e ist ein Horizontalschnitt unmittelbar über der Fufsplatte der Säule, mit einer Ansicht dieser Fufsplatte, Fig. 2f ist die Ansicht des zugehörigen Hängelagers in der Richtung der Wellenleitung, und Fig. 2g ist eine Ansicht desselben normal zu dieser Richtung.

Taf. 34. Fig. 3. Taf. 34. Fig. 3 ist ein kombinirtes Säulenlager. Die Säule ist am obern Theile zur Aufnahme von drei Zapfenlagern eingerichtet. Die Richtung der Hauptwellenleitung geht gerade durch die Mittellinie der Säulen, und da hiernach diese Wellenleitung die Säule schneidet, so ist letztere an dem oberen Theile in zwei Schenkel gespalten; durch deren gabelförmigen Zwischenraum die

Welle hindurchgeführt ist. Zwischen diesen Schenkeln befindet sich eine Horizontalplatte, welche nach der Richtung der Hauptwellenleitung über der Säule hervorgekragt ist. Diese Horizontalplatte nimmt bei *a* das Lager für die Hauptwelle, bei *bb'* die Zapfenlager für die beiden Nebenwellen, welche rechtwinklig zur Hauptwelle sind, auf. Die Lager werden durch Schraubenbolzen auf der Horizontalplatte befestigt. Die Säule hat, wie in der vorigen Konstruktion einen kreuzförmigen Querschnitt; die Fufsplatte ist rund, und ruht auf dem achteckigen Fundamentstein, auf welchem sie mit zwei Schraubenbolzen befestigt ist (Fig. 3e). Die Etagenbalken sind seitwärts an die Schenkel des obern Theils der Säule angeschraubt. Fig. 3a ist eine Ansicht der Säule nach der Richtung der Hauptwellenleitung, Fig. 3b eine Ansicht nach der Richtung der Nebenwellenleitung, Fig. 3c ein Horizonschnitt durch die Etagenbalken und zwar in der Ebene, welche durch die obersten Befestigungsbolzen geht, Fig. 3d ein Horizontalschnitt durch die beiden Schenkel der Säule, und zwar etwa in der Mitte derselben; man sieht die Horizontalplatte, welche die drei Lager aufnimmt im Grundrifs. Fig. 3e ist ein Horizontalschnitt unmittelbar über der Fufsplatte der Säule. In Fig. 1a ist übrigens der vordere Etagenbalken fortgenommen gedacht.

Säulenlager für Dampfmaschinen.

§ 131. Bei der Konstruktion von Dampfmaschinen ist oft die Aufgabe zu lösen: Zapfenlager in ziemlich beträchtlicher Höhe über dem Niveau des Maschinenraumes so zu unterstützen, dafs auch nach den Seiten hin, und über dem Lager ein hinreichend grofser freier Raum bleibe. Diese Bedingungen sind sowohl bei derjenigen Anordnung der Dampfmaschinen zu erfüllen, wo die Schwungradwelle unmittelbar über dem Cylinder liegt, und folglich die Zapfenlager derselben in solcher Höhe unterstützt werden müssen, dafs der Cylinder mit der Stopfbuchse, die Kolbenstange, Lenkerstange und Kurbel noch unter dem Lager Platz finden: als auch bei denjenigen Maschinen, welche die Uebertragung der Bewegung des Kolbens an die Kurbel durch einen über dem Cylinder liegenden Balancier vermitteln. In letzterem Falle müssen die Axlager des Balanciers eine entsprechende Unterstützung erhalten.

Einige Beispiele von Konstruktionen der Lagergerüste für den genannten Zweck geben die Figuren 1 und 2 auf Tafel 35 und Figur 1 auf Tafel 36.

Taf. 35. Fig. 1. Taf. 35. Fig. 1 ist ein Säulenlager für eine Dampfmaschine, und zwar ist Fig. 1a die Vorderansicht, Fig. 1b eine Seitenansicht der Hälfte des obern Theils der Säule mit dem einen Zapfenlager, Fig. 1c eine obere Ansicht eines Viertels der Säule mit der Hälfte des einen Lagers, Fig. 1d ist die Hälfte eines Horizontalschnittes nach der Linie *ab* in Fig. 1a, und Fig. 1e ist ebenfalls die Hälfte eines Horizontalschnittes der Säule nach der Linie *cd* der Fig. 1a. Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{24}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Die Unterstützung der beiden Zapfenlager ist hier durch eine hohle gufseiserne Säule von der Form eines abgestumpften Kegels gebildet. Die Wandungen dieser Säule sind zur Verminderung des Aufwandes an Material, und auch zu dem Zwecke, um auf bequeme Weise in das Innere der Säule gelangen zu können, mit Durchbrechungen versehen, deren Ränder mit vorspringenden Rippen eingefafst sind, wie dies die Figuren 1, 1d und 1e zeigen. Bei der Bearbeitung werden diese Ränder blank polirt, die Wandungen der Säule aber mit einem Anstrich von Oelfarbe, am besten bronzegrün versehen, was einen sehr gefälligen Eindruck macht. Die Säule hat unten einen Flansch, mit welchem sie auf der Fundamentplatte mittelst Schraubenbolzen oder Maueranker gehörig befestigt ist.

Der obere Rand der Säule trägt zwei Zapfenlager; deren Axen mit dem Durchmesser der Säule zusammenfallen. Die Zapfenlager sind durch Keile, die gegen die hervorspringenden Knaggen des Säulenwerks wirken, verstellbar, und lassen sich, wenn sie die richtige Stellung angenommen haben, durch Schraubenbolzen befestigen. Diese Zapfenlager können die Axe eines Balanciers tragen, wenn man eine Balancier-Maschine zu konstruiren hat; in diesem Falle steht der Dampfcylinder in angemessener Entfernung neben der Säule, und das Zapfenlager der Schwungradwelle liegen ebenfalls in der entsprechenden Entfernung auf der entgegengesetzten Seite der Säule; es müssen aber der Cylinder, die Säule, und die Zapfenlager der Schwungradwelle auf ein und derselben Fundamentsplatte befestigt werden.

Das hier gezeichnete Säulenlager ist aber auch ganz besonders für den Fall brauchbar, wo die Schwungradwelle der Dampfmaschine über dem Cylinder liegen soll. Der Cylinder wird dann in dem Inneren der Säule aufgestellt, und an der Fundamentplatte der Säule befestigt; die Schwungradwelle ist eine sogenannte Krummaxe, d. h. sie hat einen Bug, welcher die Kurbel darstellt, während sie mit ihren Zapfen zu beiden Seiten dieses Bugs in den Zapfenlagern ruht, über das eine, oder über beide Lager hinaus ist die Kurbelwelle verlängert, und trägt aufserhalb der Säule das Schwungrad. Das Innere der Säule ist ganz geeignet die zur Gradführung der Kolbenstange nöthigen Maschinentheile aufzunehmen, auch ist zwischen den Lagern hinreichend Platz, um die zur Steuerung und für die Expansion bestimmten Excentriks aufnehmen zu können.

Die Anordnung dieses Säulenlagers ist bei mehren Dampfmaschinen aus der Fabrik von A. Borsig in Berlin ausgeführt.

In Fig. 2 auf Taf. 35 geben wir eine andere Anordnung einer Unterstützung für die Zapfenlager der Schwungradwelle einer Dampfmaschine. Diese Anordnung zeichnet sich durch grofsen Reichthum in der Ausstattung aus, und eignet sich für solche Fälle, wo die Dampfmaschine gewissermaafsen den Mittelpunkt einer zierlich und elegant ausgeführten Maschinenanlage bilden soll. Die Konstruktion ist von einer englischen Maschine entnommen; die Haupttheile der Dampfmaschine sind zum bessern Verständnifs des Ganzen durch punktirte Linien angedeutet worden. Fig. 2a ist die Hauptansicht der ganzen Anlage, Fig. 2b ein vertikaler Durchschnitt in einer durch die Axe der Schwungradwelle gehenden Ebene. Taf. 35. Fig. 2.

Die Architektur des Lagergerüstes ist den gothischen Formen nachgebildet. Die beiden Mittelsäulen *aa* tragen einen horizontalen Steg von Gufseisen *b*, welcher durch Schraubenbolzen zwischen den obern Enden der Säulen befestigt ist, und auf welchem das Zapfenlager *c* für die Schwungradwelle *d* ruht; dasselbe ist durch Keile verstellbar und wird mittelst Schraubenbolzen, die mit Splinten in den verstärkten Theilen des Steges befestigt sind, gehalten. Die Kurbel ist auf einen über das Lager hervorragenden Kopf der Schwungradwelle aufgesetzt.

Das ganze Gerüst stützt sich seitswärts gegen die Seitenmauern des Maschinenraumes, indem unmittelbar an diesen Mauern zu beiden Seiten halbe Säulen *ee*, den Mittelsäulen *aa* ähnlich aufgstellt sind. Zur Verstrebung zwischen den Mittelsäulen *aa* und diesen Endpfeilern *ee* dienen drei Spitzbögen aus Gufseisen. Diese bestehen aus je zwei Halbbögen *f.f.f.f.*, von denen die beiden an die Endpfeiler grenzenden Halbbögen mit diesen in einem Stück gegossen sind, während die vier neben den Mittelsäulen stehenden

Halbbögen besonders gegossen, und durch Schraubenbolzen an den Mittelsäulen befestigt sind. Die Bekrönung der Spitzbögen stellt einen horizontalen, durchbrochenen Querbalken dar, mit dessen Oberkante in gleicher Höhe ein Fufsboden liegt, der noch durch zwei *T*-förmige Querbalken unuterstützt wird, die an den Steg *b* angebolzt sind: Wie aus Fig 2a ersichtlich ist, führt von dem Fufsboden des Maschinenraumes eine leichte Wendeltreppe auf den von der Säulenstellung getragenen Fufsboden; mittelst dieser Treppe kann man leicht zu dem Zapfenlager gelangen, um es zu schmieren.

Der Dampfmaschinencylinder steht vor der Mittellinie zwischen beiden Mittelsäulen; das zur Gradführung der Kolbenstange dienende Hebelsystem ist dem sogenannten Evanschen Parallelogramm, welches auf dem Gesetz beruht. dafs der Winkel im Halbkreise ein Rechter ist, nachgebildet, weicht aber dadurch von der Genauigkeit der Evanschen Gradführung ab, dafs der Stützpunkt des einen Hebels an die eine Mittelsäule verlegt ist, während er in der Projektion, welche Fig. 2a darstellt. mit der Mittellinie des Cylinders zusammenfallen mufste. Dadurch ist auch bedingt, dafs dieser an der Mittelsäule befestigte Hebel länger geworden ist, als die Hälfte des andern Hebels, und dafs sein Angriffspunkt an diesen andern Hebel, nicht in der Mitte desselben liegt. Das Ende dieses letzgenannten, gröfsern Hebels gleitet in einen, von einem Konsol getragenen, an der Seitenmauer des Maschinenraumes befestigten Konsol. Endlich ist noch zu erwähnen, dafs das Lagergerüst bei *c* zur Unterstützung der Regulatorwelle dient.

Taf. 36. Fig. 1. Ein drittes Beispiel für die Unterstützung der Zapfenlager bei Dampfmaschinen giebt die Figur 1 auf Tafel 36. Das Lager gehört schon in die Gruppe der in dem folgenden Paragraphen näher erörterten Bocklager. Fig. 1a stellt die Vorderansicht, Fig. 1b die Seitenansicht, Fig. 1c einen Horizontalschnitt durch das Gerüst nach der Linie *ab* in Fig. 1a dar; sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{16}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Um die beiden Zapfen der Kurbelwelle, oder der Axe des Balanciers einer Dampfmaschine zu unterstützen, werden zwei solcher Lagerböcke parallel mit einander aufgestellt, und auf einer gemeinschaftlichen Fundamentplatte befestigt; aufserdem bringt man die beiden Böcke durch Querstangen, die durch die beiden Ansätze *xx* gesteckt und verschraubt sind, mit einander in fester Verbindung. Der Lagerkörper des Zapfenlagers ist mit dem Bockgerüst in einem Stück gegossen; die Kurbel wird auf einem, über das vordere Bockgerüst hervorragenden Kopfe der Kurbelwelle befestigt, und der Cylinder steht dann vor dem vordern Bockgerüst, an welchem man auch die zur Gradführung der Kolbenstange dienenden Maschinentheile befestigt. Man kann auch den Cylinder zwischen zwei solcher Bocklager stellen und eine Krummaxe anwenden. In allen Fällen mufs aber der Cylinder mit den beiden Böcken auf ein und derselben Fundamentplatte stehen. Endlich kann man noch die Anordnung so treffen, dafs man nur eines der beiden Lager der Kurbelwelle durch ein Bockgerüst, das andere aber durch eine Begrenzungsmauer des Maschinengerüstet unterstützt; indessen ist es auch für diesen Fall rathsam, das Bockgerüst gegen die Mauer mit Hilfe der Ansätze xx durch eiserne Stangen abzustreben.

Berechnung und Verhältnisse der Bocklager.

§ 132. Die Bocklager (§ 116. S. 278) wendet man an, wenn man Zapfenlager unmittelbar von unten her zu unterstützen hat, und wenn die Entfernung von dem Niveau der Aufstellungsebene so beträglich wird, dafs man mit der einfachen Höhe des Lagerkörpers nicht mehr ausreicht. Man stellt in solchem Falle das Zapfenlager auf ein Gerüst, das Lagergerüst, oder Bockgerüst, auch der Lagerbock genannt, welches seinerseits auf dem Fundament befestigt ist. Bei gröfsern Höhen des Lagermittels über dem Niveau der Aufstellungsebene kann man die Lagergerüste auch durch Säulen ersetzen, und die Konstruktion geht dann in diejenige über, welche wir in den beiden letzten Paragraphen bereits besprochen haben.

Der Körper des Zapfenlagers ist entweder mit dem Bockgerüst in einem Stück gegossen, oder man setzt das Zapfenlager, welches die früher erörterte einfache Form hat (§ 124. S. 323) als besonderen Theil auf den Lagerbock auf, richtet es so ein, dafs es durch Keile verstellbar ist, und durch Schrauben befestigt werden kann. Die auf Tafel 37 dargestellten Bocklager zeigen durchweg die erstgenannte Anordnung, bei welcher das Lager mit dem Bockgerüst in einem Stück gegossen ist.

Die Form der Bockgerüste wird durch die Bedingungen, welche sie etwa noch aufser derjenigen, dafs sie das Zapfenlager tragen sollen, zu erfüllen haben, bedingt, oft werden an dem Bockgerüst noch Gradführungen, Hebel etc. angebracht, oft mufs zwischen den Füfsen des Bockgerüstes noch hinreichender Platz bleiben, um für ein Rad, oder einen andern Maschinentheil den nöthigen Raum zur Bewegung zu gestatten, oft endlich dient ein und dasselbe Bockgerüst zur Unterstützung von mehr als einem Zapfenlager (kombinirte Bocklager). Nach allen diesen Rücksichten, und auch nach der Gefälligkeit der äufsern Erscheinung ist die Form des Bocklagers zu bemessen, und dabei noch ganz besonders zu beachten, nach welcher Richtung der resultirende Druck, und das resultirende Kräftepaar, aus allen auf das Bocklager angebrachten Kräften wirksam sind. Diesen Richtungen entsprechend mufs die Form des Bocklagers, sowie die Dimensionen desselben so gewählt werden, dafs es mit möglichster Oekonomie an Material hinreichende Widerstandsfähigkeit gewährt.

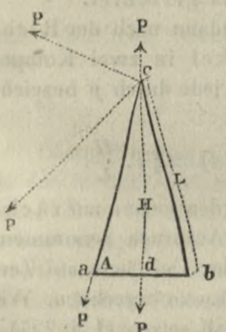
Man übersieht leicht, dafs es nach Maafsgabe dieser Bedingungen, die sich aufserordentlich kompliciren können, eine unendliche Mannigfaltigkeit in der Anordnung der Bocklager geben könne. Man wird, wenn man ein Bocklager zu konstruiren hat, und dabei mit einer gewissen Gründlichkeit verfahren will, im Allgemeinen in fol gender Art zu operiren haben:

Zuerst reduzirt man die sämmtlichen auf das System wirkenden Kräfte auf den Mittelpunkt des Zapfens, den man als fixen Punkt betrachtet, wobei die in den §§ 79 und 80, sowie in § 91 der „Grundlehren der Mechanik" gegebenen Regeln zur Anwendung kommen, alsdann hat man die Dimensionen des Gerüstes so zu bestimmen, und die Formen desselben so zu wählen, dafs, indem man das Fundament als fixes System betrachtet, und das Gerüst als bewegliches System ansieht, weder ein Kippen, noch ein Gleiten, noch eine Trennung beider Systeme (§ 93 u. f.) möglich ist, und dafs auch das System selbst keine bleibende Formveränderung erleiden kann.

Dies würde das Verfahren sein, welches anzuwenden ist, wenn man ein Bockgerüst für einen bestimmten Fall zu konstruiren hat. Allein die Oekonomie in den Gufsmodellen, welche eine Maschinenfabrik vorräthig zu halten hat, bedingt auch hier ähnliche Rücksichten, wie wir sie bereits in § 123 bei *Gelegenheit* der Konstruktion der einfachen Zapfenlager näher entwickelt haben. Man begnügt sich oft damit, Bockgerüste zu konstruiren, welche für möglichst viele Fälle brauchbar sind, und welche man daher ein für alle Male für die ungünstigste Lage des Druckes stark genug macht. Indem wir den in § 123. S. 322 für die Zapfenlager ausgesprochenen Grundsatz auch hier gelten lassen, wollen wir die Dimensionen der Bocklager unter der Voraussetzung zu ermitteln suchen:

dafs sämmtliche Theile des Bockgerüstes in Bezug auf ihre Festigkeit dieselbe Widerstandsfähigkeit gewähren, welche auch der Zapfen selbst darbietet, selbst wenn sie durch die gröfsten Drucke, die der Zapfen mit gehöriger Sicherheit auszuhalten vermag, auf die ungünstigste Weise in Anspruch genommen werden.

In den meisten Fällen läfst sich das Bockgerüst ansehen als eine Konstruktion, deren Grundform in der Vertikalebene ein gleichschenkliges Dreieck bildet, welches mit seiner Basis *ab* auf dem Fundament befestigt ist, während seine Spitze *c* den Zapfen trägt. (Vergl. den nebenstehenden Holschnitt.) Der auf Verschiebung und auf Formveränderung dieses Systems wirkende Druck ist kein anderer, als der auf den Zapfen bei *c* wirkende resultirende Druck, und wenn wir, zufolge des oben wiederholt aufgestellten Grundsatzes, annehmen, dafs alle Theile des Gerüstes dieselbe Widerstandsfähigkeit haben sollen, wie der Zapfen, so müssen sie die Einflüsse des gröfsten Druckes, den der Zapfen auszuhalten vermag, mit genügender Sicherheit ertragen können.



Den gröfsten Druck, welchen ein Zapfen von gegebenem Durchmesser mit genügender Sicherheit auszuhalten vermag, haben wir bereits in § 123. S. 322 und 323 bestimmt. Bezeichnen wir diesen Druck in Pfunden mit P; den Durchmesser des schmiedeeisernen Zapfens mit d, so ist, wenn die Länge des Zapfens $\frac{4}{3}d$ beträgt

$$P = 736{,}5\, d^2$$

(S. 323 und I. S. 265).

Nun sind aber die Einflüsse dieses Druckes auf die einzelnen Theile des Bockgerüstes sehr verschieden, je nach der **Richtung**, welche dieser in dem Punkte *c* angebrachte Druck hat. — Um diese Einflüsse zu untersuchen, wollen wir verschiedene Richtungen, die der Druck P annehmen kann betrachten, indem wir zuerst seine Richtung vertikal abwärts annehmen, sodann den Druck aus dieser Lage in verschiedene andere Richtungen gedreht denken, und zwar beispielsweise von rechts nach links herum, bis er die zur ersten Lage entgegengesetzte vertikal aufwärts gehende Richtung annimmt. Es genügt die

Betrachtung innerhalb dieser Grenzen, weil, wenn wir die Richtung des Druckes noch weiter gedreht denken, die Einflüsse auf die beiden Schenkel des Gerüstes sich nur umkehren, in absoluter Beziehung aber dieselben bleiben, wie innerhalb der angenommenen Grenzen:

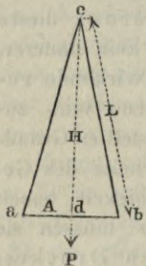
Es bezeichne:

$A = ab$ die Länge der Grundlinien des Gerüstes,

$H = cd$ die Höhe des Gerüstes,

$L = ab = ac$ die Länge eines Schenkels des Gerüstes.

1) Der Druck P ist vertikal abwärts gerichtet.



Der Druck läfst sich sodann nach der Richtung der beiden Schenkel in zwei Komponenten zerlegen, von denen jede durch p bezeichnet werde. Es ist alsdann

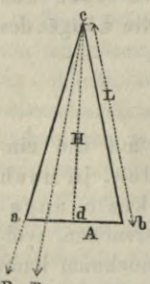
$$p = \tfrac{1}{2} P . \cos \angle (acd) = \tfrac{1}{2} P . \frac{H}{L}.$$

Die beiden Schenkel werden sodann auf rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen, und sind nach Bewandnifs der Umstände auf Zerdrücken, oder auf Zerknicken zu berechnen. Wir müssten für diesen letzten Fall setzen (I S. 227).

$$p = \frac{B . E}{L^2} = \tfrac{1}{2} \frac{P . H}{L} = \tfrac{1}{2}\, 736{,}5\, d^2 \frac{H}{L}.$$

$$1) \qquad B = \frac{368}{E} d^2\, H . L$$

worin B das Biegungsmoment des Querschnittes; E den Elasticitätsmodul des Materials bezeichnet. Für Gufseisen ist $E = 17\,000\,000$, folglich hat man



$$2) \quad B = \frac{d^2}{46200} . H . L = \frac{d^2}{46200} . H . \sqrt{(H^2 + \tfrac{1}{4} A^2)}.$$

Ein Bestreben auf Kippen, Gleiten, oder Abheben des Systems findet in diesem Falle nicht statt.

2) Der Druck P wird aus dieser Lage (No. 1) immer weiter nach links gedreht, bis er endlich in die Richtung ac fällt.

Sobald der Druck die vertikal abwärts gehende Richtung verläfst, und sich dem Schenkel ac mehr nähert, wird die Komponente nach ac immer gröfser, diejenige nach bc immer kleiner. Es kann daher der Schenkel bc in seinen Dimensionen schwächer werden, der Schenkel ac mufs aber stärker werden, da er in immer höherem Maafse auf rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen wird. In dem Augenblick, wo der Druck P mit der Richtung ac zussmmenfällt ist die Komponente nach $bc = 0$, und man hat für den Widerstand gegen Zerknicken (I. S. 227).

$$P = \frac{B \cdot E}{L^2},$$

folglich

$$3) \qquad B = \frac{P \cdot L^2}{E} = \frac{736{,}5\, d^2 \cdot L^2}{E}$$

und wenn man wieder den Elasticitätsmodul des Gufseisens einführt:

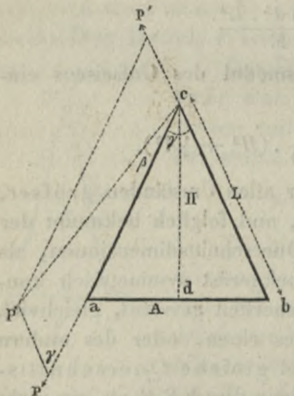
$$4) \qquad B = \frac{d^2}{23100} \cdot L^2 = \frac{d^2}{23100} \cdot (H^2 + \tfrac{1}{4}A^2).$$

Dieses Biegungsmoment ist unter allen Umständen gröfser, als das in dem vorigen Falle gefundene, und folglich bekommt der Schenkel ac in diesem Falle gröfsere Querschnittsdimensionen, als in dem vorigen Falle. Soll nun das Bockgerüst symmetrisch konstruirt werden, so dafs es genügende Sicherheit gewährt, gleichviel, ob der Druck P nach der Richtung des einen, oder des andern Schenkels fällt, so müssen beide Schenkel gleiche Querschnittsdimensionen bekommen, und es ist dann dieser Fall als ein mehr ungünstiger, als der vorige (No. 1) anzusehen.

Sobald aber die Richtung des Druckes die Vertikale cd verläfst, tritt ein Bestreben auf Gleiten ein, und es ist dann zu untersuchen, ob die Reibung allein diesem Bestreben genügenden Widerstand leistet, oder, ob noch besondere Vorkehrungen durch die Befestigung des Gerüstes auf der Unterlage getroffen werden müssen, die hinreichende Widerstandsfähigkeit gegen gleitende Verschiebung darbieten. (Vergl. § 97. S. 201 und I. § 5. S. 7 und I. § 43. S. 84.) Man hat die Richtung des Druckes P da wo sie die Basis ab schneidet, in eine horizontale Komponente, die auf Verschieben wirkt, und in eine vertikale Komponente, welche Reibung erzeugt, zu zerlegen.

3) *Die Richtung des Druckes P verläſst die Richtung des Schenkels ac, und fällt auſserhalb des Gerüstes.*

In diesem Falle läſst sich die Richtung von P stets in zwei Komponenten nach der Richtung der Schenkel ac und bc zerlegen; die Komponente nach ac nimmt diesen Schenkel auf *rückwirkende Festigkeit*; die andere Komponente nimmt den Schenkel bc auf *absolute Festigkeit* in Anspruch. Nennt man



γ den Winkel acd, d. i. der Winkel, den die beiden Schenkel einschlieſsen,

β den Winkel, welchen die Richtung von P mit der Richtung des Schenkels ac macht,

p den Werth der Komponente nach ac,

p' den Werth der Komponente nach bc,

so ist nach Gleichung 58 (S. 34 und § 33. S. 36)

$$\frac{P}{p} = \frac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}; \quad \frac{P}{p'} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

folglich:

$$p = P \cdot \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\gamma}; \quad p' = P \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Wenn der Winkel γ gegeben ist, so nehmen die Drucke p und p' die *gröſsten Werthe* an, wenn für den Druck p der

$$\sin(\beta+\gamma) = 1$$

und für den Druck p' $\quad \sin\beta = 1$

ist; das heiſst:

> *Die* **rückwirkende** *Festigkeit des, der Druckrichtung zunächst liegenden Schenkels wird am stärksten in Anspruch genommen, wenn der auf den Zapfen wirkende resultirende Druck auf der Richtung des andern Schenkels normal ist, und die* **absolute Festigkeit** *des von der Druckrichtung entfernter liegenden Schenkels wird am stärksten in Anspruch genommen, wenn die Richtung des auf den Zapfen wirkenden resultirenden Druckes auf dem dieser Richtung zunächst liegenden Schenkel normal ist.*

In beiden Fällen drückt sich die auf die Schenkel wirkende Komponente aus durch

$$p = p' = \frac{P}{\sin\gamma}.$$

Es ist aber:

$$\sin\gamma = 2 \sin \tfrac{1}{2}\gamma \cos \tfrac{1}{2}\gamma$$
$$= 2 \,.\, \tfrac{1}{2} \frac{A}{L} \,.\, \frac{H}{L} = \frac{A\,.\,H}{L^2}$$

folglich

5) $$\boldsymbol{p = p' = \frac{P\,.\,L^2}{A\,.\,H} = 736{,}5\,\frac{d^2\,.\,L^2}{A\,.\,H}}.$$

Wenn nun das Bockgerüst für eine möglichst vielfache Verwendung konstruirt werden soll, so werden wir es im Allgemeinen für diese beiden ungünstigsten Fälle zu konstruiren haben, dann ist es stark genug, dem gröfsten Druck, welchen der Zapfen mit Sicherheit auszuhalten vermag gehörig zu widerstehen, sowohl

a) wenn dieser Druck in der ungünstigsten Richtung auf **Zerreifsen** des einen Schenkels wirkt, als auch

b) wenn dieser Druck in der ungünstigsten Richtung auf **Zerknicken** des andern Schenkels wirkt:

dann hat das Bockgerüst auch genügende Widerstandsfähigkeit, für alle günstigeren Richtungen des Druckes.

Der Druck, welchem das Bockgerüst genügenden Widerstand leisten soll, drückt sich in beiden Fällen aus nach Gleichung 5) und ist folglich seinem Werthe nach abhängig von dem Verhältnifs zwischen Grundlinie und Höhe des Bockgerüstes, nennt man nämlich dieses Verhältnifs α, also:

$$\frac{\text{Grundlinie des Bockgerüstes}}{\text{Höhe des Bockgerüstes}} = \frac{A}{H} = \alpha$$

so hat man

6) $$A = \alpha\, H$$
$$L^2 = H^2 + \tfrac{1}{4}A^2 = H^2\,(1 + \tfrac{1}{4}\alpha^2)$$

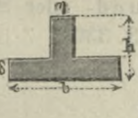
und nach Gleichung 5)

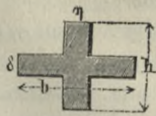
7) $$p = p' = P\,.\,\frac{1 + \frac{1}{4}\alpha^2}{\alpha} = 736{,}5\, d^2\,.\,\frac{1 + \frac{1}{4}\alpha^2}{\alpha}.$$

Die am häufigsten vorkommenden Querschnittsformen der Schenkel für Bockgerüste sind folgende:

1) der L-förmige Querschnitt

2) der T-förmige Querschnitt



3) der **kreuzförmige** Querschnitt 

Diese Querschnitte werden durch je zwei Rippen gebildet, deren gröfste Dimensionen b und h normal zu einander sind; die **kleinsten** Dimensionen der Rippen, δ und η wollen wir die **Dicke der Rippen** nennen, während wir b und h die **Breite der Rippen** nennen.

Die Dimensionen b, h, δ, η, müssen nun so bestimmt werden, dafs der auf **Zerreifsen in Anspruch genommene Schenkel selbst bei der ungünstigsten Richtung des Druckes** p' **gehörigen Widerstand leiste, und dafs andererseits der auf Zerknicken in Anspruch genommene Schenkel, selbst bei der ungünstigsten Richtung des Druckes keinerlei Biegung erleiden könne** (I. S. 227).

a) **Berechnung des Bockgerüstes auf Abreifsen.**

Es sei F der Flächeninhalt des Querschnittes, so ist zu setzen:

$$F \, . \, k = p'$$

wenn $k = 3500$ Pfund die Belastung ist, welche das Gufseisen pro Quadratzoll mit Sicherheit gegen Zerreifsen tragen kann.

Gewöhnlich sieht man diejenige Rippe, deren Breite mit der Axe des Zapfenlagers parallel ist, als **Hauptrippe** an, die andere aber als **Verstärkungsrippe**, und man pflegt dann wohl nur **den Querschnitt der Hauptrippe** in Betracht zu ziehen, wenn es sich um die Berechnung auf absolute Festigkeit handelt. — Es **möge** b **die Dimension sein, welche mit der Axe des Lagers parallel ist**, dann hat man

8) $$b\,\delta \, . \, 3500 = p' = 736{,}5 \, d^2 \, . \, \frac{1 + \frac{1}{4}\alpha^2}{\alpha}.$$

Die **Breite der Hauptrippe** b kann man passend gleich der Breite der **Grund- oder Sohlplatte des Lagers** machen, und diese ist nach S. 330

$$b = \frac{7}{6}\, d$$

folglich hat man

$$\delta = \frac{736{,}5}{3500 \cdot \frac{7}{6}} \cdot d \cdot \frac{1 + \frac{1}{4}\alpha^2}{\alpha}$$

9) $$\delta = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5{,}54}}\, \boldsymbol{d} \cdot \frac{\mathbf{1} + \frac{1}{4}\alpha^2}{\alpha}.$$

Differenziirt man den Ausdruck $\frac{1 + \frac{1}{4}\alpha^2}{\alpha}$ nach α und setzt man die erste Ableitung gleich 0, so folgt

$$\partial\, \frac{1 + \frac{1}{4}\alpha^2}{\alpha} = \frac{\frac{1}{4}\alpha^2 - 1}{\alpha^2} = 0$$

folglich, wenn man α entwickelt

9a) $$\alpha = \mathbf{2}.$$

Dieser Werth von α liefert für δ ein Minimum; da nun aber ein gleichschenkliges Dreieck, bei welchem die Basis gleich der doppelten Höhe ist, nur stattfinden kann, wenn der Winkel in der Spitze ein rechter ist, so folgt aus dieser Entwickelung folgender Satz:

> Die Form eines Bockgerüstes, welches einem in ungünstigster Richtung auf **Zerreifsen** wirkenden Drucke mit dem geringsten Querschnitt, also auf die vortheilhafteste Weise genügenden Widerstand leistet, ist ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis gleich der doppelten Höhe ist, dessen Winkel an der Spitze also einen Rechten beträgt.

Für verschiedene Werthe von α geht nun der Werth von

$$\delta = d \cdot \frac{1}{5{,}54} \cdot \frac{1 + \frac{1}{4}\alpha^2}{\alpha}$$

in diejenigen über, welche folgende Tabelle enthält.

Tabelle

über die Dicken der Hauptrippen von Bockgerüsten, welche auf die ungünstigste Weise auf Zerreifsen in Anspruch genommen werden.

(Die Breite der Hauptrippe beträgt $\frac{7}{6}$ d).

$\alpha = \frac{\text{Grundlinie}}{\text{Höhe}}$	$\frac{1 + \frac{1}{4}\alpha^2}{\alpha}$	Winkel in der Spitze γ	Dicke der Hauptrippe δ
$\frac{1}{2}$	2,125	28° —	0,384d
$\frac{5}{8}$	1,750	34° 40′	0,316d
$\frac{3}{4}$	1,521	41° —	0,274d
$\frac{7}{8}$	1,361	47° 20′	0,245d
1	1,250	53° —	0,226d
$\frac{23}{20} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$	1,155	60° —	0,209d
$\frac{5}{4}$	1,113	64° —	0,201d
$\frac{10}{7} = \sqrt{2}$	1,060	70° 40′	0,191d
$\frac{3}{2}$	1,042	73° 40′	0,188d
$\frac{7}{4}$	1,009	82° 20′	0,182d
2	1,000	90° —	0,180d

Es sei z. B. ein Bockgerüst auf den Widerstand gegen Zerreifsen zu berechnen, wenn der Durchmesser des Zapfens 4 Zoll beträgt, und wenn die Basis $\frac{3}{4}$ von der Höhe des Gerüstes beträgt:

Die Hauptrippe bekommt folgende Dimensionen.

Breite (parallel mit der Axe des Zapfens) $= \frac{7}{6} \cdot 4 = 4\frac{2}{3}''$.
Dicke $0{,}274 \cdot 4 = 1{,}096 = 1{,}1''$.

Ist das Verhältnifs der Grundlinie zur Höhe $\frac{23}{20}$, welches stattfindet, wenn das Gerüst ein gleichseitiges Dreieck bildet, so würde sein:

Breite (wie vorhin) $= 4\frac{2}{3}''$.
Dicke $= 0{,}226 \cdot 4 = 0{,}9''$.

Es kann die Aufgabe gestellt werden:

Bei gegebener Höhe dasjenige Verhältnifs zwischen Grundlinie und Höhe des Bockgerüstes zu bestimmen, welches, wenn das Gerüst genügenden Widerstand gegen **Zerreifsen**, selbst bei der ungünstigsten Richtung des Druckes gewährt, gleichwohl den **geringsten Aufwand** an Material erfordert.

Der Querschnitt des Bockgerüstes drückt sich aus durch

$$b\delta = \frac{7}{6} d \,.\, d \,.\, \frac{1}{5{,}54} \,.\, \frac{1 + \frac{1}{4}\alpha^2}{\alpha}$$

multipliciren wir mit der Länge des Schenkels L so ist $b\delta \,.\, L$ das Volum eines Schenkels, oder, da $L = H\sqrt{1 + \frac{1}{4}\alpha^2}$ nach Gleichung b, so ist das Volum:

$$b\delta \,.\, L = \frac{7}{6 \,.\, 5{,}54} d^2 \,.\, H \frac{1 + \frac{1}{4}\alpha^2}{\alpha} \,.\, \sqrt{1 + \frac{1}{4}\alpha^2}.$$

Der Ausdruck

$$\frac{1 + \frac{1}{4}\alpha^2}{\alpha} \,.\, \sqrt{1 + \frac{1}{4}\alpha^2} = \frac{(1 + \frac{1}{4}\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{\alpha}$$

ist also zu einem Minimum zu machen, indem man nach α die Ableitung nimmt, und diese gleich Null setzt.

Es ist

$$\partial \frac{(1 + \frac{1}{4}\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{\alpha} = \frac{\alpha \,.\, \frac{3}{2}(1 + \frac{1}{4}\alpha^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\alpha - (1 + \frac{1}{4}\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{\alpha^2}$$

woraus folgt:

$$\frac{3}{4}\alpha^2 - (1 + \frac{1}{4}\alpha^2) = 0$$

10) $$\alpha = \sqrt{2}.$$

Daher findet unter den Bedingungen der obigen Aufgabe der geringste Aufwand an Material statt, wenn sich die Grundlinie zur Höhe verhält wie

$\sqrt{2} : 1$ oder nahe wie $10 : 7$.

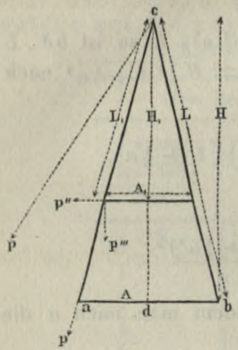
b) Berechnung des Bockgerüstes auf Zerknicken.

Nach dem Obigen wird der eine Schenkel des Bockgerüstes auf die ungünstigste Weise auf Zerknicken in Anspruch genommen, wenn die Richtung des auf den Zapfen reducirten Druckes normal ist zu der Richtung des andern Schenkels.

Die Gröfse dieses Druckes ist dann nach Gleichung 7)

$$p = P \,.\, \frac{1 + \frac{1}{4}\alpha^2}{\alpha} = 736{,}5 d^2 \,.\, \frac{1 + \frac{1}{4}\alpha^2}{\alpha}.$$

Dieser Druck darf nicht so grofs sein, dafs unter seiner Einwirkung eine Ausbauchung des Bockgerüstes stattfinden kann. Da die Gefahr des Ausbauchens mit dem Quadrat der freistehenden Länge des Schenkels wächst, so ist es zweckmäfsig bei gröfseren Längen dem Gerüste Querrippen zu geben, wodurch der auf Zerknicken in Anspruch genommene Schenkel an den andern Schenkel angehängt wird. Den Punkt nun wo der auf Zerknicken in Anspruck genommene Schenkel durch eine solche Querrippe festgehalten wird, sehen wir als festen Stützpunkt an, und betrachten nur die freie Länge L' als diejenige, welche bei dem Widerstand gegen Zerknicken in Rechnung zu stellen ist.



In dem Angriffspunkt der Querrippe läfst sich der Druck p in zwei andere zerlegen, von denen der eine p'' nach der Richtung der Querrippe wirkt, und diese auf Zerreifsen in Anspruch nimmt, der andere p''' aber normal zur Querrippe ist, und auf Verschiebung derselben wirkt. Diese beiden Drucke kommen nur zur Geltung, wenn wirklich der Schenkel grade an dieser Stelle sich ausbauchen wollte; welches Bestreben nicht nothwendig eintritt; ist ein solches Bestreben nun nicht vorhanden, so wird der ganze Druck p auf den untern Theil des Schenkels weiter übertragen, und es ist daher der untere Theil des Schenkels auf denselben Druck p gegen Zerknicken zu berechnen, welcher auch für den obern Theil des Schenkels gilt.

Die Drucke p'' p''' ergeben sich gewöhnlich so gering, dafs die Dimensionen, welche man aus konstruktiven Gründen der Querrippe geben mufs, viel beträchtlicher sind, als die, welche aus der Berechnung dieser Drucke sich ergeben würden.

Setzen wir nunmehr die Gleichung an, welche (nach I. S. 227) den Druck ergiebt, den der freistehende Theil des Schenkels, dessen

Länge $= L$,
Biegungsmoment $= B$,
Elasticitätsmodul $= E$,

sein mag, mit Sicherheit gegen Zerknicken tragen kann, so ergiebt sich

$$p = \frac{B \cdot E}{L^2}$$

und mit Hilfe der Gleichung 7 folgt:

$$11) \qquad B = \frac{736{,}5\, d^2}{E} \cdot \frac{1 + \frac{1}{4}\alpha^2}{\alpha} \cdot L^2.$$

Bezeichnen wir mit

$A_{,}$ die Länge der Querrippe,

$H_{,}$ der Abstand derselben vom Scheitel des Gerüstes,

so ist offenbar

$$12 \quad \begin{cases} \frac{A_{,}}{H_{,}} = \frac{A}{H} = \alpha \text{ und} \\ L_{,}^2 = H_{,}^2\,(1 + \frac{1}{4}\alpha^2) \end{cases}$$

folglich hat man

$$B = \frac{736{,}5}{E} \cdot d^2 \cdot H_{,}^2 \,\frac{(1 + \frac{1}{4}\alpha^2)^2}{\alpha}$$

und wenn man den Elasticitätsmodulus des Gufseisens gleich 17 000 000 Pfund nimmt, so ist

$$13) \qquad B = \frac{d^2}{23100} \cdot H_{,}^2 \cdot \frac{(1 + \frac{1}{4}\alpha^2)^2}{\alpha}.$$

Will man denjenigen Werth von α bestimmen, für welchen B, das Biegungsmoment, also auch die Dimensionen des Querschnittes ein Minimum werden, so hat man nach α zu differenziiren. Es ergiebt sich:

$$d\,\frac{(1 + \frac{1}{4}\alpha^2)^2}{\alpha} = \frac{\alpha^2\,(1 + \frac{1}{4}\alpha^2) - (1 + \frac{1}{4}\alpha^2)^2}{\alpha^2} = 0$$

woraus folgt:

$$\tfrac{3}{4}\alpha^2 = 1$$

$$14) \qquad \alpha = \sqrt{\tfrac{4}{3}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3} = \text{nahe } \tfrac{23}{20}.$$

Dieses Verhältnifs ist kein anderes, als welches zwischen Grundlinie und Höhe des gleichseitigen Dreiecks besteht, und es folgt daher der Satz:

> Die Form des Bockgerüstes, welches einem in ungünstigster Richtung auf **Zerknicken** wirkenden Drucke mit dem geringsten Biegungsmoment, also auf die vortheilhafteste Weise genügenden Widerstand leistet, ist ein gleichseitiges Dreieck.

Um nun die Dimensionen des Querschnitts zu berechnen, müssen wir in Gleichung 14 die Werthe der Biegungsmomente, wie sie in Theil I. S. 208 zusammengestellt sind einsetzen. Wir gestatten uns jedoch hier folgende, zur Vereinfachung der Rechnung beitragende Voraussetzung:

Wir nehmen an, dafs die Hauptrippe sowohl, als die Verstärkungsrippe für sich allein stark genug sein sollen, um den ganzen Druck, der auf Zerknicken wirkt mit Sicherheit aufzunehmen, dafs aber die gegenseitige Wirkung der beiden Rippen auf einander darin bestehe, dafs jede Rippe verhindert, dafs die andere nach der Richtung ihrer kleinsten Dimension ausgebaucht werde. Unter dieser Voraussetzung werden wir nicht wie es sonst bei der Bestimmung des Biegungsmoments bei der Berechnung auf Zerknicken geschehen mufste, die kleinste Dimension jeder Rippe, sondern deren gröfsere Dimension in der höheren Potenz einzuführen haben.

Wir haben also zu setzen

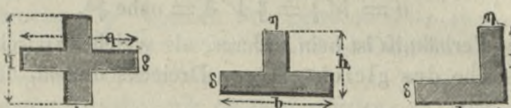
$$B = \tfrac{1}{12}\,\delta\, b^3 = \tfrac{1}{12}\,\eta\, h^3$$

woraus folgt:

$$15) \qquad \frac{\delta}{\eta} = \frac{h^3}{b^3}$$

das heifst:

> Wenn das Bockgerüst sowohl nach der Richtung der Breite als nach der Richtung der Dicke der Hauptrippe gleiche Widerstandsfähigkeit gegen Zerknicken besitzen soll, so müssen sich die Dicken der beiden Rippen umgekehrt verhalten, wie die Kuben ihrer Breiten, oder es müssen sich die Breiten der Rippen umgekehrt verhalten, wie die Kubikwurzeln aus den Dicken derselben.



Es sei wieder

b die Breite der Hauptrippe $= \frac{7}{6}\,d$

$\frac{h}{b} = q$ das Verhältnifs der Breiten der beiden *Rippen*,

folglich: $$h = \frac{7}{6}\,d \,.\, q$$

$$\eta = \frac{\delta}{q^3}.$$

Man hat also nach Gleichung 13

$$\tfrac{1}{12}\,\delta\, b^3 = \tfrac{1}{12}\left(\frac{7}{6}\right)^3 \delta\, d^3 = \frac{d^2}{23100}\cdot H_{,}^{2}\cdot\frac{(1+\frac{1}{4}\alpha^2)^2}{\alpha}$$

und daraus

$$16)\quad \delta = \frac{1}{3000}\cdot\frac{H_{,}^{2}}{d}\cdot\frac{(1+\frac{1}{4}\alpha^2)^2}{\alpha} = \frac{d}{3000}\cdot\left(\frac{H_{,}}{d}\right)^2\cdot\frac{(1+\frac{1}{4}\alpha^2)^2}{\alpha}.$$

Vergleichen wir diesen Werth für die Dicke der Hauptrippe mit dem in Gleichung 9) bei der Berechnung auf Zerreifsen gefundenen, und untersuchen wir, unter welchen Umständen beide Werthe gleich grofs werden, und wann sich der eine gröfser als der andere findet. Zu diesem Zwecke setzen wir die Werthe für δ aus den Gleichungen 9 und 16 einander gleich:

$$\frac{d}{3000}\cdot\frac{H_{,}^{2}}{d^2}\cdot\frac{(1+\frac{1}{4}\alpha^2)^2}{\alpha} = \frac{d}{5{,}54}\cdot\frac{1+\frac{1}{4}\alpha^2}{\alpha}$$

daraus folgt

$$\frac{H_{,}^{2}}{d^2} = \frac{3000}{5{,}54}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{4}\alpha^2}$$

$$17)\quad \frac{H_{,}}{d} = 23{,}27\,.\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{4}\alpha^2}} = 46{,}54\,.\sqrt{\frac{1}{4+\alpha^2}}.$$

Die Berechnung auf Zerreifsen, und diejenige auf Zerknicken liefern also gleiche Resultate für die Stärke der Rippe, wenn die vertikale Höhe des freistehenden Theils des Schenkels das $\left[\frac{46{,}54}{\sqrt{4+\alpha^2}}\right]$fache des Zapfendurchmessers ist; wenn diese Höhe gröfser ist, so liefert die Berechnung auf Zerknicken gröfsere Resultate, ist dagegen diese Höhe geringer, so liefert die Berechnung auf Zerreifsen gröfsere Resultate.

Für verschiedene Werthe von α ergeben sich nach Gleichung 17 folgende Beziehungen:

Die Berechnungen auf Zerreifsen und auf Zerknicken geben gleiche Resultate für die Dicke der Hauptrippe.

Für ein Verhältnifs $\frac{\text{Grundlinie}}{\text{Höhe}}$.	Wenn die Höhe des freistehenden Theils des Schenkels gleich ist.
$\alpha = \frac{1}{2}$	$H_{,} = 22{,}6\,d$
$\alpha = \frac{5}{8}$	$H_{,} = 22{,}1\,d$
$\alpha = \frac{3}{4}$	$H_{,} = 21{,}8\,d$
$\alpha = \frac{7}{8}$	$H_{,} = 21{,}3\,d$

Für ein Verhältniss $\frac{\text{Grundlinie}}{\text{Höhe}}$.	Wenn die Höhe des freistehenden Theils des Schenkels gleich ist.
$\alpha = 1$	$H_{\prime} = 20{,}8\,d$
$\alpha = \frac{23}{20} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$	$H_{\prime} = 20{,}1\,d$
$\alpha = \frac{5}{4}$	$H_{\prime} = 19{,}8\,d$
$\alpha = \frac{10}{7} = \sqrt{2}$	$H_{\prime} = 19{,}0\,d$
$\alpha = \frac{3}{2}$	$H_{\prime} = 18{,}6\,d$
$\alpha = \frac{7}{4}$	$H_{\prime} = 17{,}5\,d$
$\alpha = 2$	$H_{\prime} = 16{,}4\,d$

Ist also die Höhe des freiliegenden Theils eines Gerüstschenkels grösser als etwa das 16,4fache, beziehlich das 22,6fache des Zapfendurchmessers, so hat man die Dicke der Hauptrippe nach der Gleichung 16 zu berechnen:

$$\delta = \frac{d}{3000} \cdot \left(\frac{H'}{d}\right)^2 \cdot \frac{(1 + \frac{1}{4}\alpha^2)^2}{\alpha}.$$

Den Coëfficienten

$$\frac{(1 + \frac{1}{4}\alpha^2)^2}{\alpha}$$

für verschiedene Werthe von α ausgerechnet, giebt folgende Tabelle.

$\frac{\text{Grundlinie}}{\text{Höhe}}$.	Werth von $\frac{(1 + \frac{1}{4}\alpha^2)^2}{\alpha}$
$\alpha = \frac{1}{2}$	2,2578
$\alpha = \frac{5}{8}$	1,9278
$\alpha = \frac{3}{4}$	1,7347
$\alpha = \frac{7}{8}$	1,6222
$\alpha = 1$	1,5633
$\alpha = \frac{23}{20} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$	**1,5396** Minimum
$\alpha = \frac{5}{4}$	1,5471
$\alpha = \frac{10}{7} = \sqrt{2}$	1,5750
$\alpha = \frac{3}{2}$	1,6276
$\alpha = \frac{7}{4}$	1,8325
$\alpha = 2$	2,0000

Auch hier kann die Aufgabe gestellt werden:

Bei gegebener Höhe, dasjenige Verhältnifs zwischen Grundlinie und Höhe eines Bockgerüstes zu bestimmen, welches, wenn das Gerüst genügenden Widerstand gegen **Zerknicken** *selbst bei der ungünstigsten Richtung des Druckes gewährt, gleichwohl den* **geringsten Aufwand an Material** *erfordert.*

Da sich der Querschnitt des Bockgerüstes ausdrückt durch

$$b\delta = \frac{7}{6} d \cdot \frac{d}{3000} \cdot \left(\frac{H_{\prime}}{d}\right)^2 \cdot \frac{(1 + \frac{1}{4}\alpha^2)^2}{\alpha}$$

so ist, wenn L die Länge des Schenkels bezeichnet: (abgesehen von der Verstärkungsrippe)

$$b\delta \,.\, L$$

das Volum des Gerüstschenkels, und da $L = H\sqrt{1 + \frac{1}{4}\alpha^2}$ ist, so ist das Volum des Gerüstschenkels

$$b\delta \,.\, L = \frac{7}{6} d \cdot \frac{d}{3000} \cdot \left(\frac{H_{\prime}}{d}\right)^2 \cdot H \frac{(1 + \frac{1}{4}\alpha^2)^2}{\alpha} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4}\alpha^2}.$$

Differenziiren wir nach α, so ergiet sich

$$\partial_{(\alpha)} \frac{(1 + \frac{1}{4}\alpha^2)^{\frac{5}{2}}}{\alpha} = \frac{\frac{5}{4}\alpha^2 (1 + \frac{1}{4}\alpha^2)^{\frac{3}{2}} - (1 + \frac{1}{4}\alpha^2)^{\frac{5}{2}}}{\alpha^2} = 0$$

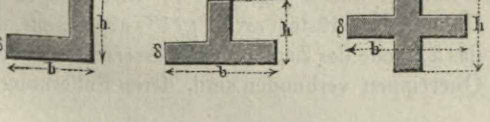
$$\frac{5}{4}\alpha^2 - (1 + \frac{1}{4}\alpha^2) = 0$$

18) $$\alpha = 1.$$

Daher findet unter den Bedingungen der obigen Aufgabe, der geringste Aufwand an Material statt, wenn die Grundlinie gleich der Höhe ist.

c) Konstruktion der Verstärkungsrippe.

Wir haben gesehen, dafs die üblichen *Querschnittsformen* für Bockgerüste, die nachstehenden sind:



Die Rippe, deren Breite mit der Axe des Zapfens parallel ist, haben wir als Hauptrippe bezeichnet; ihre Breite ist

$$b = \frac{7}{6} d .$$

ihre Dicke δ ist nach den Gleichungen 9 und 16 zu bestimmen. Die zweite Rippe, deren Dimensionen h und η sind, gilt als Verstärkungsrippe. Da die Hauptrippe nach den obigen Berechnungen für sich allein einen genügend grofsen Querschnitt bekommen soll, um die nöthige Sicherheit gegen Zerreifsen des betreffenden Schenkels darzubieten, so können wir bei der Konstruktion der Verstärkungsrippe von dem Widerstande gegen Abreifsen ganz absehen, und haben nur nöthig derselben diejenige Form zu geben, welche dem Widerstande gegen Zerknicken am passendsten entspricht. Die Verstärkungsrippe kann daher auch als Körper von gleicher Widerstandsfähigkeit konstruirt werden, indem man gewöhnlich ihre Dicke konstant, und etwa gleich der Dicke der Hauptrippe macht, während man die Breite derselben von unten nach oben hin nach einer entsprechenden Kurve abnehmen läfst.

d) Resultate.

Betrachten wir nur die Werthe von $\alpha = \frac{\text{Grundlinie}}{\text{Höhe}}$, welche zwischen den Grenzen $\frac{1}{2}$ und 2 liegen, aus denen man bei der Konstruktion von Lagergerüsten nicht hinaus zu gehen pflegt, so wird man folgende Regeln zu beachten haben.

1) Beträgt die Höhe des Gerüstes weniger als das 16fache des Zapfendurchmessers so sind die Dimensionen des Gerüstes stets nach der Gleichung 9 auf Zerreifsen zu berechnen.

2) Beträgt die Höhe des Gerüstes mehr als das 16fache, aber weniger als das 23fache des Zapfendurchmessers, so entscheidet die Gleichung 17 und die daraus berechnete Tabelle (S. 369), ob bei dem angenommenen Verhältnifs zwischen Grundlinie und Höhe, die Dicke der Hauptrippe auf Zerreifsen (Gl. 9) oder auf Zerknicken (Gl. 16) zu berechnen sei.

3) Die unter 1 und 2 angegebenen Bedingungen gelten auch, wenn die Höhe des Gerüstes zwar gröfser ist, als das 16fache, beziehlich das 22fache des Zapfendurchmessers, wenn aber die Schenkel durch Querrippen verbunden sind, deren Entfernung vom Schei-

tel des Gerüstes das 16fache, beziehlich das 22fache des Zapfendurchmessers nicht übersteigt.

4) Wird das Gerüst auf Zerreifsen berechnet, so bekommt man die geringste Dicke der Hauptrippe, wenn die Schenkel einen rechten Winkel einschliefsen (Gl. 9a), und man bekommt den geringsten Aufwand an Material, wenn sich die Grundlinie des Gerüstes zu dessen Höhe vertheilt, wie die Diagonale eines Quadrats zur Seite desselben Quadrats (Gl. 10).

5) Wird das Gerüst auf Zerknicken berechnet, so bekommt man die geringste Dicke der Hauptrippe, wenn die Schenkel einen Winkel von 60 Grad einschliefsen (Gl. 14), und man bekommt den geringsten Aufwand an Material, wenn die Grundlinie gleich der Höhe ist (Gl. 18).

6) Die nachfolgende Tabelle giebt die Verhältnisse der Dicke der Hauptrippe zum Durchmesser des Zapfens für verschiedene Werthe des Verhältnisses $\frac{\text{Grundlinie}}{\text{Höhe}} = \alpha$ und für verschiedene Werthe des Verhältnisses $\frac{\text{freie Höhe der Hauptrippe}}{\text{Zapfendurchmesser}}$. Unter freier Höhe der Hauptrippe ist die vertikale Entfernung des Zapfenmittelpunktes von der Mittellinie der Querrippe verstanden.

Tabelle

über das Verhältnifs $\left\{\frac{\text{Durchmesser des Zapfens}}{\text{Dicke der Hauptrippe}}\right\}$ für Bockgerüste, welche auf die ungünstigste Weise durch einen Druck in Anspruch genommen werden, der gleich demjenigen ist, den ein schmiedeeiserner Zapfen von gegebenem Durchmesser mit genügender Sicherheit aushalten kann.

(Die Breite der Hauptrippe gleich $\frac{7}{6}$ vom Zapfendurchmesser.)

Verhältnifs: $\left\{\frac{\text{Freie Höhe des Gerüstes}}{\text{Zapfendurchmesser}}\right\} = \frac{H_1}{d}$	Verhältnifs $\left\{\frac{\text{Grundlinie}}{\text{Höhe}}\right\}$ des Gerüstes $= \alpha$.										
	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1	$\frac{23}{20}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{10}{7}=\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	2
$\frac{H_1}{d} = 16$ (und weniger)	0,384	0,316	0,274	0,245	0,226	0,209	0,201	0,191	0,188	0,182	0,180
$\frac{H_1}{d} = 17$	0,384	0,316	0,274	0,245	0,226	0,209	0,201	0,191	0,188	0,182	0,193
18	0,384	0,316	0,274	0,245	0,226	0,209	0,201	0,191	0,188	0,198	0,216
19	0,384	0,316	0,274	0,245	0,226	0,209	0,201	0,191	0,196	0,221	0,241
20	0,384	0,316	0,274	0,245	0,226	0,209	0,206	0,210	0,217	0,244	0,267
21	0,384	0,316	0,274	0,245	0,230	0,226	0,227	0,232	0,239	0,269	0,294
22	0,384	0,316	0,283	0,277	0,255	0,251	0,253	0,257	0,266	0,299	0,327
23	0,398	0,340	0,306	0,286	0,276	0,272	0,273	0,278	0,287	0,323	0,353
24	0,434	0,370	0,333	0,311	0,300	0,296	0,297	0,302	0,313	0,352	0,384
25	0,470	0,402	0,361	0,338	0,326	0,321	0,322	0,328	0,339	0,382	0,417
26	0,509	0,434	0,391	0,366	0,352	0,347	0,349	0,355	0,367	0,413	0,451
27	0,549	0,469	0,422	0,394	0,380	0,374	0,376	0,383	0,396	0,445	0,486
28	0,590	0,504	0,453	0,424	0,408	0,402	0,404	0,412	0,425	0,479	0,523
29	0,633	0,540	0,486	0,455	0,438	0,432	0,433	0,441	0,456	0,514	0,561
30	0,677	0,578	0,521	0,487	0,469	0,462	0,464	0,473	0,488	0,550	0,600
31	0,723	0,618	0,556	0,520	0,500	0,493	0,496	0,504	0,521	0,587	0,641
32	0,770	0,658	0,592	0,553	0,534	0,526	0,528	0,538	0,556	0,626	0,683
33	0,820	0,700	0,630	0,589	0,567	0,559	0,562	0,572	0,591	0,665	0,726
34	0,870	0,793	0,669	0,625	0,602	0,593	0,596	0,607	0,627	0,706	0,771
35	0,922	0,787	0,708	0,662	0,638	0,629	0,632	0,643	0,665	0,748	0,817
36	0,975	0,833	0,750	0,700	0,675	0,665	0,668	0,680	0,703	0,792	0,864
37	1,030	0,880	0,792	0,740	0,713	0,703	0,706	0,719	0,743	0,836	0,913
38	1,087	0,928	0,835	0,781	0,752	0,741	0,745	0,758	0,782	0,882	0,963
39	1,145	0,976	0,880	0,822	0,792	0,781	0,784	0,799	0,824	0,929	1,014
40	1,204	1,028	0,925	0,865	0,834	0,821	0,823	0,840	0,866	0,978	1,067

Anmerkung: Die stärker gezogenen Linien geben die Grenze an, zwischen der Berechnung der Dicke der Hauptrippe auf Zerreifsen, und auf Zerknicken.

Beispiel: Für einen Zapfen von 6 Zoll Durchmesser, soll ein 12 Fufs hohes Gerüst konstruirt werden; die Basis des Gerüstes soll 8 Fufs messen.

Es ist

$$\frac{H_{\prime}}{d} = \frac{12 \cdot 12}{6} = 24$$

ferner ist

$$\alpha = \frac{8}{12} = \frac{3}{4}$$

folglich, wenn man keine Querrippe giebt ist

die Breite der Hauptrippe $b = \frac{7}{6} d = 7$ Zoll,

die Dicke der Hauptrippe $\delta = 0{,}333 d = 2$ Zoll,

giebt man aber eine Querrippe, welche nicht über $21 d$, d. h. nicht über $10\frac{1}{2}$ Fufs vom Zapfenmittelpunkt entfernt ist, so wird zwar die Breite der Hauptrippe wie vorhin 7 Zoll, aber die Dicke der Hauptrippe $\delta = 0{,}274 d = 1{,}644$ oder etwa $1\frac{5}{8}$ Zoll.

Die Länge jedes Schenkels ist $\sqrt{(12^2 + 4^2)} = 12{,}65$ Fufs oder 151,80 Zoll, folglich das Volum jedes Schenkels bei einer Breite der Rippe von 7 Zoll

bei 2 Zoll Dicke: $7 \cdot 2 \cdot 151{,}8 = 7 \cdot 303{,}6$ Kubikzoll,
bei $1\frac{5}{8}$ Zoll Dicke: $7 \cdot 1 \cdot \frac{5}{8} \cdot 151{,}8 = 7 \cdot 216{,}7$ Kubikzoll.

Wollte man dem Gerüst die geringste Dicke der Hauptrippe geben, wenn es keine Querrippe hat, so müfste es ein gleichseitiges Dreieck werden, folglich würde bei 12 Fufs Höhe, die Basis $\frac{23}{20} \cdot 12 = 13{,}8$ Fufs $= 165{,}6$ Zoll; die Dicke der Hauptrippe würde sodann nach der Tabelle, weil $\frac{H_{\prime}}{d}$ nach wie vor $= 24$ ist

$$\delta = 0{,}296 \cdot 6 \cdot = 1{,}776 \text{ Zoll},$$

folglich das Volum eines Schenkels

$$7 \cdot 1{,}776 \cdot 165{,}6 = 7 \cdot 294{,}1 \text{ Kubikzoll}.$$

Wenn dagegen unter derselben Voraussetzung, dafs das Gerüst keine Querrippe haben soll, das Gewicht des Schenkels möglichst klein ausfallen soll, so wird die Basis gleich der Höhe, nämlich 12 Fuſs = 144 Zoll, und man findet, da $\frac{H_{\prime}}{d}$ wie vorhin = 24 ist, in diesem Falle n. d. Tabelle

$$\delta = 0{,}300 \,.\, 6 = 1{,}8 \text{ Zoll.}$$

Da nun hier die Länge des Schenkels = $\sqrt{12^2 + 6^2}$ = 13,416 Fuſs = 161 Zoll ist, so ist das Volum des Schenkels

$$7 \,.\, 1{,}8 \,.\, 161 = 7 \,.\, 289{,}8 \text{ Kubikzoll.}$$

Giebt man dem Gerüst eine Querrippe, die nicht über 21d = 10½ Fuſs von dem Scheitel entfernt ist, so ist es auf Zerreiſsen zu berechnen, und man findet dann für diejenige Form, welche die geringste Dicke der Rippe liefert $\alpha = 2$, folglich nach der Tabelle

$$\delta = 0{,}180 \,.\, 6 = 1{,}08 \text{ Zoll}$$

und da hier die Länge des Schenkels = $\sqrt{2 \,.\, 12^2}$ = 16,97 Fuſs = 203,64 Zoll, so ist das Volum des Schenkels

$$7 \,.\, 1{,}08 \,.\, 203{,}64 = 7 \,.\, 219{,}9 \text{ Kubikzoll.}$$

Um nun schlieſslich noch das kleinste Volum des Schenkels zu finden, wenn man eine Querrippe anwendet, müſste man das Verhältniſs zwischen Höhe und Basis = $\sqrt{2}$ machen; für diesen Fall ist die Dicke der Hauptrippe

$$\delta = 0{,}191 \,.\, 6 \text{ Zoll} = 1{,}146 \text{ oder } 1{,}15 \text{ Zoll}$$

und als Volum, da die Basis = 12 . $\sqrt{2}$ folglich die Länge des Schenkels = $\sqrt{12^2 + 2 \,.\, 6^2}$ = 14,70 Fuſs = 176,4 Zoll

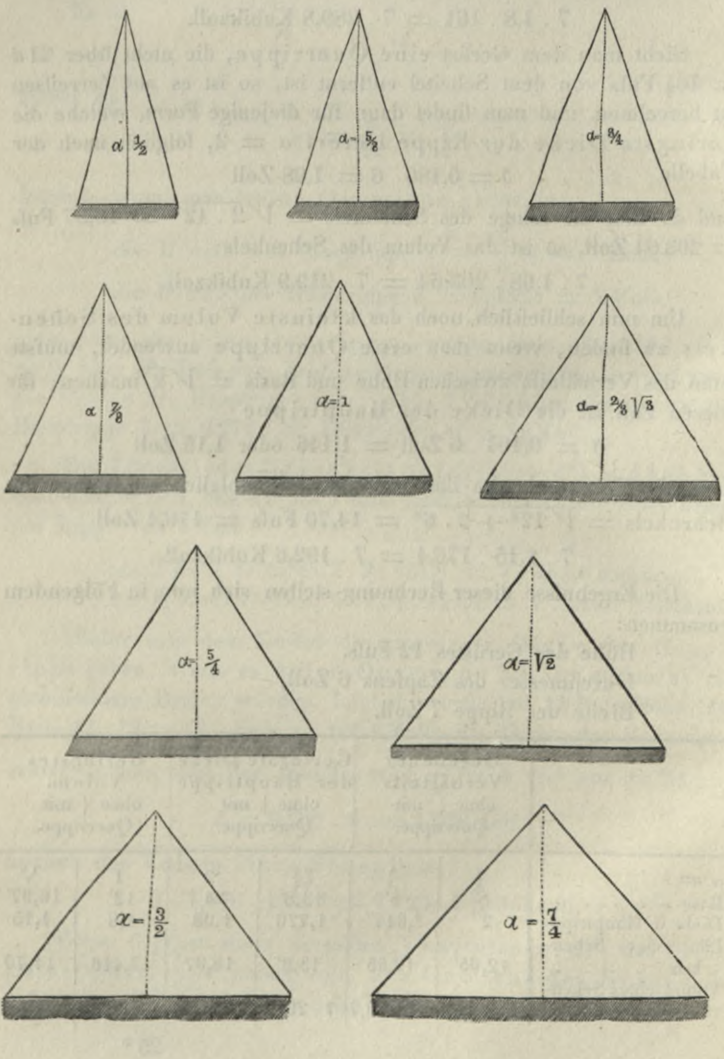
$$7 \,.\, 1{,}15 \,.\, 176{,}4 = 7 \,.\, 192{,}6 \text{ Kubikzoll.}$$

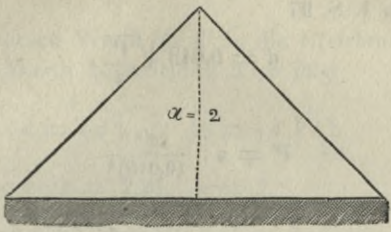
Die Ergebnisse dieser Rechnung stellen sich nun in Folgendem zusammen:

Höhe des Gerüstes 12 Fuſs,
Durchmesser des Zapfens 6 Zoll,
Breite der Rippe 7 Zoll.

	Gegebenes Verhältniſs ohne Querrippe	Gegebenes Verhältniſs mit Querrippe	Geringste Dicke der Hauptrippe ohne Querrippe	Geringste Dicke der Hauptrippe mit Querrippe	Geringstes Volum ohne Querrippe	Geringstes Volum mit Querrippe
α =	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{23}{20}$	2	1	$\frac{10}{7}$
Basis	8′	8′	13,8′	24′	12′	16,97′
Dicke d. Hauptrippe	2″	1,644″	1,776	1,08	1,8	1,15
Länge eines Schenkels	12,65′	12,65′	13,8′	16,97	13,416	14,70
Volum eines Schenkels	7 . 303,6	7 . 216,7	7 . 294,1	7 . 219,9	7 . 289,8	7 . 192,6

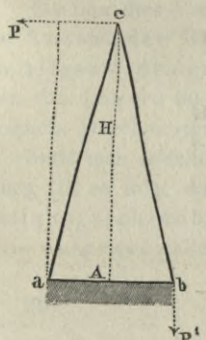
Um die **Verhältnisse**, welche das **Bockgerüst** bekommt bei den **verschiedenen Werthen** von α, welche die **Tabelle** enthält anschaulich zu machen, folgt hier eine **Zusammenstellung der verschiedenen Formen**, in denen überall die Höhe gleich grofs angenommen worden ist:





e) Berechnung der Bocklager auf Kippen.

Wenn die Richtungslinie des Druckes, der in dem Scheitel des Gerüstes angebracht ist, aufserhalb der Schenkel des Gerüstes fällt, so wirkt derselbe auf Kippen des Systems (§ 99). Dies Kippen kann nur um die Kante *a* des Gerüstes erfolgen, und der Hebelarm der auf Kippen wirkenden Kraft ist offenbar die von der Axe des Kippens *a* auf die Richtung der Kraft *P* gezogenen Normale. Wie sich leicht übersehen läfst, ist das auf Kippen wirkende Moment am gröfsten, wenn der Druck *P* parallel mit der Basis des Gerüstes ist. In diesem Falle ist der Hebelsarm gleich *H* und das Moment, welches auf Kippen wirkt ist



$$P\,.\,H = 736{,}5\,.\,d^2\,.\,H \text{ (S. 371).}$$

Die Kräfte, welche dem Kippen entgegenwirken sind theils das Gewicht des Gerüstes, theils der Widerstand, welcher von den Befestigungsmitteln herrührt, die man zur Befestigung des Gerüstes auf der Unterlage angebracht hat. Da man stets einen Ueberschufs an Widerständen gegen das Kippen haben mufs, so lassen wir das Moment des Gewichtes des Gerüstes aufser Berechnung, und setzen nur das Moment der Befestigungsmittel gleich dem auf Kippen wirkenden Moment. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, dafs das Gerüst bei *b* durch Schraubenbolzen befestigt sei, und dafs diese Schraubenbolzen mit genügender Sicherheit einen Druck $= P'$ auf Zerreifsen aushalten können. Hieraus ergiebt sich das Moment des Widerstandes der Schraubenbolzen in Bezug auf die Axe des Kippens

$$A\,.\,P'$$

und wenn z Schraubenbolzen, jeder vom Durchmesser d' vorhanden sind, so ist nach I. S. 97

$$d' = 0{,}018 \sqrt{\frac{P'}{z}}$$

folglich

$$P' = z \cdot \frac{d'^2}{(0{,}018)^2}$$

und man hat

$$AP' = Az \cdot \frac{d'^2}{(0{,}018)^2}.$$

Setzen wir das auf Kippen wirkende Moment gleich dem Moment des Widerstandes der Schraubenbolzen, so hat man

$$PH = AP'$$

$$763{,}5\,d'^2 \cdot H = Az \cdot \frac{d'^2}{(0{,}018)^2}$$

folglich

$$d' = d \cdot 0{,}018 \cdot \sqrt{\frac{736{,}5}{z}} \cdot \sqrt{\frac{H}{A}}.$$

Nun ist (S. 371)

$$\frac{A}{H} = \alpha,$$

folglich hat man

$$d' = 0{,}49\,d \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha \cdot z}}$$

wofür wir rund setzen:

19) $$\boldsymbol{d' = \tfrac{1}{2} d \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha \cdot z}}}$$

Die Schraubenbolzen, welche zur Befestigung des Bocklagers gegen Kippen dienen, müssen aber auch für den Fall hinreichend stark sein, wenn der Druck P' von unten nach oben wirkend, die Schraubenbolzen auf Abreifsen in Anspruch nimmt. Für diesen Fall sind die Schraubenbolzen lediglich nach den auf S. 326, 327 und 329 angegebenen Verhältnissen zu berechnen. Man hat daher auf jeder Seite des Lagergerüstes wenigstens

entweder eine Schraube deren Durchmesser $= \frac{1}{3}\boldsymbol{d}$

oder zwei Schrauben - - $= \frac{1}{4}\boldsymbol{d}$

ist anzuordnen, und zwar gilt die erste Anordnung bei Zapfendurchmessern bis zu 4 Zoll, die letzte bei Zapfendurchmessern über 4 Zoll.

Setzt man diesen Werth für d' in die Gleichung 19, und zugleich für z den Werth 1, beziehlich 2, so folgt

$$\tfrac{1}{3}d = \tfrac{1}{2}d\sqrt{\frac{1}{\alpha}};\ \tfrac{1}{4}d = \tfrac{1}{2}d\sqrt{\frac{1}{2\alpha}}$$

$$\alpha = \tfrac{9}{4} = 2{,}25;\ \alpha = 2.$$

Es werden also die gewöhnlichen Befestigungsschrauben, welche an Zahl und Durchmesser gleich den Deckelschrauben des Lagers gemacht werden, dem Bestreben zu Kippen nur dann genügenden Widerstand darbieten, wenn das Verhältnifs zwischen Grundlinie und Höhe des Gerüstes $= 2\frac{1}{4}$, beziehlich gleich 2 ist.

Da nun dies Verhältnifs gewöhnlich nicht erreicht wird, so ist die Anzahl der Befestigungsschrauben des Bockgerüstes im Allgemeinen gröfser, als die Anzahl der Deckelschrauben des Lagers zu machen, wenn man sämmtliche Schrauben von gleichem Durchmesser macht.

Setzt man nämlich für d' die Werthe $\frac{1}{3}d$ und $\frac{1}{4}d$ in die Gleichung 19, so folgt durch leichte Umformung die Anzahl der Befestigungsschrauben, welche auf der, der Axe des Kippens entgegengesetzten Seite anzuordnen sind

$$20)\qquad z = \frac{9}{4\,\alpha} \text{ und } z = \frac{4}{\alpha}.$$

Hiernach ergiebt sich für verschiedene Werthe von α, und für verschiedene Durchmesser des Zapfens folgende Anzahl von Schrauben.

Tabelle

über die Anzahl und den Durchmesser von Befestigungsschrauben, zur Befestigung von Bockgerüsten gegen das Bestreben und Kippen.

(Die angegebene Anzahl von Schrauben ist zwar nur auf der Seite erforderlich, welche der Axe des Kippens gegenüber liegt, während auf der anderen Seite nicht mehr Schrauben erforderlich sind, als das Lager auf derselben Seite Deckelschrauben besitzt, allein, man pflegt der Sicherheit wegen auf beiden Seiten des Gerüstes gleich viel, nämlich die gröfste Anzahl von Schrauben zu wählen.)

Durchmesser des Zapfens in Zollen.	Durchmesser der Befestigungsschrauben in Linien.	Anzahl der Deckelschrauben auf jeder Seite.	Anzahl der Befestigungsschrauben für verschiedene Werthe von $\left\{\frac{\text{Grundlinie}}{\text{Höhe}}\right\}$ des Gerüstes.										
			$\alpha = \frac{1}{2}$	$\alpha = \frac{5}{8}$	$\alpha = \frac{3}{4}$	$\alpha = \frac{7}{8}$	$\alpha = 1$	$\alpha = \frac{23}{20} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\alpha = \frac{5}{4}$	$\alpha = \frac{10}{7} = \sqrt{2}$	$\alpha = \frac{3}{2}$	$\alpha = \frac{7}{4}$	$\alpha = 2$
1	4	1	5	4	3	3	3	2	2	2	2	2	2
$1\frac{1}{2}$	6	1	5	4	3	3	3	2	2	2	2	2	2
2	8	1	5	4	3	3	3	2	2	2	2	2	2
$2\frac{1}{2}$	10	1	5	4	3	3	3	2	2	2	2	2	2
3	12	1	5	4	3	3	3	2	2	2	2	2	2
$3\frac{1}{2}$	14	1	5	4	3	3	3	2	2	2	2	2	2
4	16	1	5	4	3	3	3	2	2	2	2	2	2
$4\frac{1}{2}$	13,5	2	8	7	6	5	4	4	4	3	3	3	2
5	15	2	8	7	6	5	4	4	4	3	3	3	2
$5\frac{1}{2}$	16,5	2	8	7	6	5	4	4	4	3	3	3	2
6	18	2	8	7	6	5	4	4	4	3	3	3	2

Formgebung der Bockgerüste — Beschreibung einiger Beispiele von Bockgerüsten.

§ 133. Nachdem wir im vorigen Paragraphen die **Berechnung der Bockgerüste** erörtert haben, ist noch Einiges über die **Formgebung** derselben hinzuzufügen:

Nicht immer sind die Schenkel des Bockgerüstes **geradlinig**; man ist oft veranlafst sie mehr oder weniger in geschweiften und gebogenen Formen zu konstruiren. Ohne besonderen Grund sollte man jedoch nicht von der gradlinigen, als der einfachsten und die gröfste Steifheit gewährenden Form abweichen, und es ist mindestens als ungerechtfertigt zu bezeichnen, wenn man aus blofser Liebhaberei an geschweiften Formen die geradlinigen Formen aufgiebt.

Als Gründe für die Wahl einer geschweiften Form können etwa folgende vorkommen:

1) Wenn man an dem Bockgerüste an gewissen Stellen noch andere Maschinentheile anzubringen oder zu befestigen hat, und diese Stellen so liegen, dafs sie von den gradlinigen Schenkeln nicht aufgenommen werden könnten. Beispiele geben die Figuren 1 und 7 auf Tafel 36.

2) Wenn aus irgend einem Grunde der Platz zwischen den Schenkeln oder auch aufserhalb der Schenkel noch anderweitig gebraucht wird, und man bei Anwendung gradliniger Schenkel entweder eine zu schmale oder eine zu breite Basis des Gerüstes bekommen würde. Als Beispiel mag Figur 6 auf Tafel 36 dienen.

3) Wenn das Bockgerüst für mehrere Zapfenlager zugleich dient, und wenn die Lage dieser Zapfenlager eine solche ist, dafs man sie durch geradlinige Formen nicht in passender Weise miteinander in Zusammenhang bringen kann. Auch hier diene Figur 6 auf Tafel 36 als Beispiel.

4) Wenn die ganze Maschine sich in ihren einzelnen Theilen so zusammenbaut, dafs die gradlinigen Formen des Bockgerüstes unharmonisch und störend erscheinen, und man vielmehr veranlafst ist mit den Formen des Bockgerüstes den Hauptformen der Maschine zu folgen.

Wenn es nun also auch in den meisten Fällen angemessen sein wird, dem Bockgerüst geradlinige Schenkel zu geben, so ist man, sowohl in den Stellen, wo sich die Lager oder überhaupt die festen Punkte an das Gerüst anschliefsen, als auch da wo sich die Verbindungsrippen an die Schenkel ansetzen doch veranlafst abgerundete Formen zu wählen; ja die Querrippen selbst macht man in sehr vielen Fällen in geschweiften und ausgerundeten Begrenzungen. Der Grund von dieser Anordnung ist theils der, dafs die gradlinien Schenkel, leichter und gefälliger durch abgerundete Uebergänge an jene Theile sich anschliefsen lassen, theils aber auch die allgemeine Regel bei Gufsstücken jeden scharfen Knick und alle scharf einspringenden Winkel möglichst zu vermeiden, weil sie sich nur mit Mühe scharf und richtig formen lassen, endlich aber auch die Rüchsicht auf die nach dem Erkalten des Gusses entstehenden Spannungsverhältnisse des Gufsstückes. Die gebogenen Rippen geben leichter nach und behalten in der Regel nicht eine so beträchtliche Spannung, als die geradlinigen Rippen, welche die gegenüberliegenden Punkte des Bockgerüstes auf dem kürzesten Wege verbinden.

Jedenfalls erfordert eine zweckmäfsige, ansprechende und gefällige Formgebung eines Bockgerüstes eine gewisse Uebung und Umsicht, und einen nicht ungebildeten Sinn für Formen.

In Folgendem sind einige einfache Bockgerüste für Zapfenlager gröfstentheils ausgeführten Maschinen entnommen, beschrieben.

Taf. 36. Fig. 1. Taf. 36. Fig. 1 ist ein Bockgerüst für die Schwungradwelle einer Dampfmaschine, welches bereits oben S. 383 erörtert worden ist.

Taf. 36. Fig. 2. Taf. 36. Fig. 2 stellt ein Bockgerüst mit zwei Zapfenlagern vor. Fig. 2a ist die Vorder-Ansicht, Fig. 2b die Seiten-Ansicht, und Fig. 2c ein Durchschnitt nach der Linie *cd* in Fig. 2a um die Querschnittsform der Verstärkungsrippe zu zeigen. Diese drei Figuren sind in $\frac{1}{12}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Das hier dargestellte Bockgerüst dient zur Unterstützung einer Dampfwinde. Das obere Lager nimmt die Zapfen für die Welle der Windetrommel auf, das untere Lager dagegen trägt eine Vorgelegswelle, beide Wellen sind durch Stirnräder mit einander in Zusammenhang gebracht. Es sind zwei solcher Gerüste vorhanden, welche parallel zu einander aufgestellt, und in einem Abstande von 3 Fufs und 10 Zoll von einander befestigt sind. Zwei schmiedeeiserne Spannstangen, welche durch die Ansätze *mn* gehen, sichern die richtige Stellung der Gerüste zu einander. Die untere Welle (Vorgelegswelle) ist zugleich die Kurbelwelle für die zum Betriebe dienenden oscillirenden Dampfmaschinen, welche ihren Platz zwischen den Schenkeln des Gerüstes finden, und mit ihren Kolbenstangen unmittelbar an die Kurbeln greifen, die an den beiden Enden der Vorgelegswelle befestigt sind. Die Stellung der Kurbeln ist, beiläufig bemerkt, so gewählt, dafs sie mit einander einen rechten Winkel bilden, dafs also stets wenn die eine auf dem todten Punkt ist, die andere sich in voller Wirkung befindet.

Taf. 36 Fig. 3. Taf. 36. Fig. 3 zeigt ein kleines Bockgerüst, und zwar Fig. 3a die Vorder-Ansicht, Fig. 3b die obere Ansicht, und Fig. 3c den Querschnitt eines Schenkels nach der Linie *ef* in Fig. 3a; sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{10}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Zwischen den Schenkeln des Bockgerüstes befindet sich in der Basis eine Verbindungsrippe; aber nur die Enden der Flanschen, mit welchen der Bock aufsteht, sind bearbeitet, während die Verbindungsrippe etwas zurücktritt. Die Zeichnung stellt zugleich dar, wie der Bock auf einem gufseisernen Balken von T-förmigem Querschnitt befestigt ist. Um das Bocklager genau einstellen zu können ist der Balken mit Knaggen versehen, zwischen denen mittelst eingetriebener Keile der Bock seitwärts verschoben werden kann. Die Bolzenlöcher für die Befestigungsschrauben in dem unterstützenden Balken müssen etwas länglich sein.

Taf. 36. Fig. 4 giebt ein kleines kombinirtes Bocklager für zwei liegende Wellen. Fig. 4a ist die Vorder-Ansicht, Fig. 4b ist ein Horizontalschnitt nach der Linie *gk* in Fig. 4a; beide Figuren sind in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Die Befestigung des Bocklagers auf der Unterlage wird durch 4 Befestigungsschrauben bewirkt, deren Bolzenlöcher in der Fufsplatte des Bockgerüstes verstärkt sind, wie dies bei *p* und *q* ersichtlich ist. Taf. 36 Fig. 4.

Die in den beiden Lagern befindlichen Drehaxen können beispielsweise Führungsrollen tragen, oder sonst auf irgend eine Weise mit einander im Zusammerhange stehen; jedenfalls ist diese sehr einfache Kombination für mancherlei Fälle brauchbar.

Taf. 36. Fig. 5 zeigt ein starkes Bocklager für einen gufseisernen Zapfen von 10 Zoll Durchmesser. Fig. 5a ist die Vorder-Ansicht, Fig. 5b ein Vertikalschnitt nach der Linie *ik* in Fig. 5a und Fig. 5c ein Horizontalschnitt nach der Linie *lm* in Fig. 5a; alle drei Figuren sind in $\frac{1}{20}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Taf. 36. Fig. 5.

Die Lagerfutter bestehen hier aus vier Lagerschaalen, ohne vorspringende Ränder; um jedoch die seitliche Verschiebung aufzuheben, ist jede dieser Lagerschaalen in der Mitte mit einer vortretenden Rippe (Feder) versehen, welche in eine Nuth der Lagerhöhlung eingreift. Durch Anziehen der Deckelschrauben wird nun die in dem Lagerdeckel befindliche Lagerschaale nachgespannt, während die Seitenschaalen keine besondere Vorrichtung zum Anziehen besitzen. Es ist also bei der Konstruktion dieses Lagers vorausgesetzt, dafs der auf den Zapfen wirkende Druck nur nach oben oder nach unten gerichtet ist, aber nicht seitwärts, und dafs die seitwärts eingelegten Lagerschaalen nur zur Führung des Zapfens dienen; gleichwohl ist das Lager durch die schrägen Seitenrippen, auch gegen Seitendruck abgestrebt. Auf dem Lagerdeckel, welcher durch vier Deckelschrauben angezogen werden kann, befindet sich ein geräumiger Schmiernapf.

Taf. 36. Fig. 6 stellt einen Lagerbock für zwei Zapfenlager liegender Wellen vor. Fig. 6a ist die Vorder-Ansicht, Fig. 6b die Taf. 36. Fig 6.

Seiten-Ansicht, Fig. 6c ein Horizontalschnitt nach der Linie *no* in Fig. 6a. Diese drei Figuren sind in $\frac{1}{12}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Den hier gezeichneten Lagerböcken gegenüber und parallel zu denselben ist ein zweiter Bock aufgestellt, der insofern einfacher ist, als er die beiden Lager nicht zu enthalten braucht, sondern nur den oberen Theil des hier gezeichneten Bockes. Ueber beide Böcke wird oben bei *r* ein hölzerner Balken gelegt, und durch die Schraubenbolzen *ss* befestigt. Dieser Balken nimmt in der Mitte seiner Länge das obere Lager einer stehenden Welle auf, die von unten herauf kommt und ein grofses konisches Rad trägt, und zwar gerade da, wo der Lagerbock bei *AB* ausgebogen ist, um für dieses Rad Platz zu gewähren. In das genannte grofse konische Rad greift ein kleineres konisches Rad ein, welches auf der Welle *C* sitzt, und die Bewegung mittelst Stirnräder auf eine liegende Welle überträgt, deren Lager bei *D* ist. Man sieht, wie hier wegen des grofsen konischen Rades, welches zwischen den Schenkeln des Bockgerüstes Platz finden soll, diese Schenkel zurückgezogen sind, und wie in einfacher Weise das Lager *C*, das in geringer Entfernung über der Basis des Bockgerüstes angebracht sein mufs, an diese Schenkel sich anschliefst.

Taf. 36. Fig. 7. Taf. 36. Fig. 7 zeigt ein sehr leichtes Bockgerüst für eine Handpumpe. Fig. 7a ist die Vorder-Ansicht, Fig. 7b die Seiten-Ansicht, und Fig. 7c ein Horizontalschnitt nach der Linie *pq* in Fig. 7a. Diese sämmtlichen Figuren sind in $\frac{1}{10}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Es sind zwei solche Bockgerüste parallel zu einander aufgestellt, und bei *yy'*, *zz'* durch schmiedeeiserne Querbolzen mit einander verbunden. Zwischen beiden Gerüsten steht eine kleine doppeltwirkende Druckpumpe, deren Kolbenstange in einer Geradführung geht, welche bei *xx* an den beiden Bockgerüsten angebracht ist. Oben liegt bei *w* eine gekröpfte Welle, durch welche die Pumpenstange und der Kolben der Pumpe bewegt werden, und zwar durch Arbeiter mittelst Kurbeln, die auf den Enden der Welle *w* befestigt sind; aufserdem sitzt auf dieser Welle ein kleines Schwungrad zur Ausgleichung der Bewegung. Das Ganze ist unter Leitung des Verfassers in der mechanischen Werkstatt des Königlichen Gewerbeinstituts zu Berlin konstruirt und ausgeführt worden.

Zapfenlager für stehende Wellen.

Allgemeine Prinzipien für die Konstruktion der Spurlager.

§ 134. Die Konstruktion und Anordnung der Zapfenlager für stehende Wellen unterscheidet sich von denjenigen für liegende Wellen durch die Verschiedenheit der Konstruktion der Zapfen, und durch gewisse Bedingungen, welche bei den stehenden Wellen häufig hinzutreten. Dergleichen Bedingungen sind z. B. dafs sich die Welle genau centriren lasse, d. h. dafs dieselbe mit ihrer geometrischen Axe genau mit einer bestimmten vertikalen Linie zusammenfallend eingestellt werden könne, ferner, dafs die stehende Welle sich während des Betriebes in der Vertikalen auf- und niederschieben lasse u. s. w. Diese Bedingungen modificiren sowohl die Konstruktion der Lager für die unteren Zapfen, als diejenige der oberen Zapfen stehender Wellen.

Die unteren Zapfen stehender Wellen sind sogenannte Spurzapfen (vergl. Th. I. S. 271) und die für dieselben konstruirten Zapfenlager nennt man Spurlager auch Fufslager.

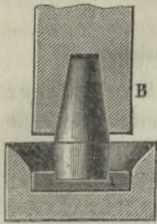
Die Zapfenlager für die oberen Zapfen stehender Wellen heifsen, wenn die Welle durch das Lager nach oben hindurch reicht, und also über dasselbe hinaus verlängert ist, Halslager, im andern Falle, wenn der obere Zapfen das Ende der Welle bildet, nennt man sie auch wohl Endlager oder Stirnlager, nicht zu verwechseln mit Kopflager, unter welcher Bezeichnung man gewisse Theile der Gelenke versteht.

Die Spurlager haben gewöhnlich bestimmte einzelne Theile, welche sich erfahrungsmäfsig als zweckmäfsig herausgestellt haben. Diese sind folgende:

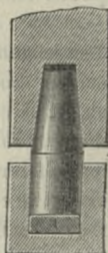
1) Die Spurplatte, welche entweder von Stahl, oder von einer harten Metall-Legirung gemacht wird, und welche dem Spurlager als Unterlage dient.

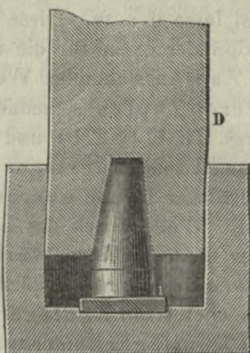
A

2) Der Spurnapf, ein cylindrisches, oder prismatisches Stück, welches mit seiner unteren Grundfläche aufsteht, während von obenher die Spurplatte in dasselbe eingelassen ist. Die Konstruktion ist, wenn der Spurzapfen keinen erheblichen Seitendruck auszuhalten hat, entweder wie bei *A*, wo die Spurplatte eben ist, und sich im Boden einer flachen Vertiefung (der Spur) des aus Bronze oder einer anderen Metall-Legirung


B 2

bestehenden Spurnapfes befindet, welcher den unteren Theil des Spurzapfens umschliefst, oder die Konstruktion ist wie bei *B*, wo diese Vertiefung (Spur) in die Spurplatte selbst eingedreht ist; in diesem Falle kann der Spurnapf von Gufseisen sein. Hat dagegen der Zapfen einen mehr beträchlichen Seitendruck auszuhalten, so mufs man ihn entweder wie bei *C* konstruiren, wo er tiefer in den Spurnapf eingesenkt, und auf einer gröfseren Länge von demselben umschlossen ist, oder man wählt bei noch gröfserem Seitendrucke die Anordnung bei *D*, wo der eigentliche Spurzapfen ganz von dem

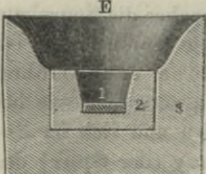

C 2


D 2

Seitendrucke befreit ist, und dieser durch eine Umschliefsung des unteren Wellen-Endes aufgehoben ist. Dafs man diese Umschliefsung aus einzelnen Theilen machen und nach Art der Lagerfutter liegender Wellen nachspannen kann, werden die weiter unten zu beschreibenden Beispiele erläutern.

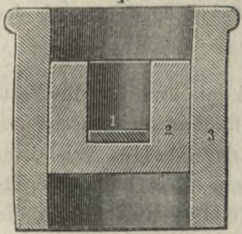
3) Der Spurklotz, oder Spurblock. Der Spurnapf mit der Spurplatte ist oft noch in ein gufseisernes Prisma, oder in einen gufseisernen Cylinder eingelegt, namentlich,

E



wenn man den Spurnapf von Bronze macht, und man demselben möglichst kleine Dimensionen geben will; wie z. B. bei *E* dargestellt ist. Diese Hülle heifst der Spurklotz; derselbe enthält oben gewöhnlich ein Reservoir für die Aufnahme der Schmiere. Zuweilen kann dieser Theil ganz entbehrt werden, und der Spurnapf gilt dann zugleich als Spurklotz. Will man dem Spurnapf mit der Spurplatte und der auf selbiger ruhenden Welle eine vertikale Verstellbarkeit geben, so wird der Spurklotz entsprechend lang, der Spurnapf ist abgedreht, und in den passend ausgebohrten Spurklotz so eingesetzt, dafs er sich in der Höhlung desselben verschieben läfst. Der Holzschnitt *F* macht dies anschaulicher. (Vergleiche auch die Beispiele in den folgenden Paragraphen.)

F



Der Horizontalschnitt des Spurklotzes ist entweder quadratisch, oder in Form eines regelmäfsigen Sechseckes, oder Achteckes, oder endlich auch wohl kreisförmig.

4) Der Spurkasten. Dies ist ein hohler Kasten, dessen innere Höhlung etwas weiter ist, als der äufsere Durchmesser des Spurklotzes, so dafs dieser letztgenannte, indem er auf dem Boden des Spurkastens ruht, in der Horizontalebene innerhalb der Umfassung des Spurkastens sich ein wenig verschieben läfst.

5) Die Centrirungsschrauben, welche zur Verschiebung und demnächst zur Feststellung des Spurklotzes innerhalb des Spurkastens dienen. Die Muttergewinde der Centrirungsschrauben sind gewöhnlich in den Umfassungswänden des Spurkastens befindlich, und selbst wenn der Spurkasten von Gufseisen ist, in diese Wände unmittelbar eingeschnitten. Man wendet gewöhnlich drei oder vier Centrirungsschrauben an, deren Köpfe viereckig oder sechseckig sind, und aufserhalb des Spurkastens mit Hilfe eines Schraubenschlüssels angezogen werden können. Wo die Welle starken Erschütterungen ausgesetzt ist, mufs man zur Feststellung der Centrirungsschrauben noch besondere Gegenmuttern anwenden.

6) Die Sohlplatte des Spurlagers, welche gewöhnlich mit dem Spurkasten aus einem Stück gegossen ist, und welche zur Befestigung des Spurlagers dient. Zuweilen ist der Spurkasten für diesen Zweck nur mit angegossenen Lappen versehen.

7) Die Befestigungsschrauben, durch welche der Spurkasten auf der Unterstützung festgehalten wird. Bei starken Konstruktionen und gemauerten Fundamenten, versehen oft die Fundamentanker die Stelle der Befestigungsschrauben, wenn man es nicht vorzieht, über das Fundament zuerst eine Fundamentplatte zu legen, und auf diese erst den Spurkasten zu stellen.

Ueber die Bestimmung der Formen und Verhältnisse der Spurlager würde hier genau dasselbe zu wiederholen sein, was wir bereits auf S. 321 und 322 bei Gelegenheit der Zapfenlager für liegende Wellen gesagt haben, und das wir hier zum Verständniſs des Folgenden in Erinnerung zu bringen bitten.

Bestimmung der Dimensionen und Verhältnisse einfacher Spurlager nach des Verfassers Prinzipien.

§. 135. Als Grundlage für die Konstruktion und für die Feststellung der Verhältnisse der Spurlager ist offenbar am passendsten der Durchmesser des Spurzapfens an der Stelle, wo derselbe auf der Spurplatte ruht, anzusehen. Wir haben bereits im Ersten Theile S. 271 gesehen, von welchen Rücksichten die Bestimmung dieses Durchmessers abhängig ist, und daſs für die Berechnung desselben, wenn man von dem Seitendruck, den das untere Ende der Welle auszuhalten hat, Abstand nimmt: der Vertikaldruck, oder die Belastung der Spurplatte maaſsgebend ist.

Nach Th. I. S. 273 gelten folgende Beziehungen zwischen dem Zapfendurchmesser und dem Vertikaldruck, welchen die Spurplatte auszuhalten hat:

bis 64 Umdr.	bis 125 Umdr.	bis 216 Umdr.
	für Bronzeplatten:	
$d = 0{,}028\sqrt{P}$	$d = 0{,}031\sqrt{P}$	$d = 0{,}034\sqrt{P}$
$P = 1276\, d^2$	$P = 1041\, d^2$	$P = 866\, d^2$
	für Stahlplatten:	
$d = 0{,}018\sqrt{P}$	$d = 0{,}020\sqrt{P}$	$d = 0{,}022\sqrt{P}$
$P = 3086\, d^2$	$P = 2500\, d^2$	$P = 2066\, d^2$

worin

P den Vertikaldruck auf die Spurplatte in preuſsischen Pfunden,

d den Durchmesser des Spurzapfens an der Auflagefläche in preuſsischen Zollen

bezeichnet.

Der gröſste Werth, welchen der Vertikaldruck bei einem gegebenen Durchmesser des Zapfens haben kann, findet also bei langsam gehendem Zapfen bis 64 Umdrehungen, und wenn die Spurplatte von Stahl ist, statt. Benutzt man also jene Angaben zur Bestimmung des Durchmessers der Spurzapfen, so kann selbst im ungünstigsten Falle der Vertikaldruck höchstens

$$P = 3086\, d^2$$

betragen.

Dieser Druck preſst den Spurklotz gegen den Boden des Spurkastens, und wenn man den Spurklotz durch die Centrirungsschrauben verschieben will, so muſs die gleitende Reibung, welche aus dem Druck P hervorgeht überwunden werden. Diese gleitende Reibung drückt sich aus durch

$$\mu \,.\, P$$

wenn μ den Reibungs-Coëfficienten bezeichnet. (Gleich. 165 auf S. 201.) Es muſs nun jede einzelne Centrirungsschraube im Stande sein den Druck $\mu \,.\, P$ auszuüben, und wenn δ den Durchmesser der Centrirungsschrauben in preuſsischen Zollen bezeichnet, so ist nach Th. I. S. 91

$$\delta = 0{,}029 \sqrt{\mu \,.\, P} = 0{,}029\, d \sqrt{\mu \,.\, 3086}$$

zu nehmen.

Nun ist nach der Tabelle in § 106 S. 245 für die gleitende Reibung von Guſseisen auf Guſseisen der Reibungs-Coëfficient $\mu = 0{,}16$ anzunehmen, und für diesen Werth ergiebt sich

$$\delta = 0{,}644\, d$$

wofür man in runder Zahl den etwas gröſseren Werth

$$\delta = \tfrac{2}{3}\, d$$

als **Durchmesser der Centrirungsschrauben** annehmen kann.

Von dem Durchmesser der Centrirungsschrauben ist auch die Höhe ihrer Schraubenmuttern abhängig, und da diese in die Wandungen des Spurkastens eingeschnitten sind, so müſsten diese an der Stelle wo die Centrirungsschrauben durchgehen mindestens eine Dicke gleich dem Durchmesser der Centrirungsschrauben haben.

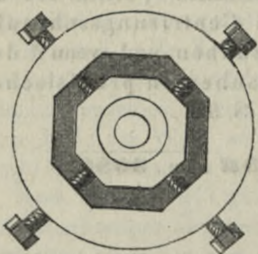
Dies würde an der Stelle, wo die Muttern der Centrirungsschrauben in die Wandungen des Spurkastens eingeschnitten sind, eine **Wandstärke des Spurkastens**

$$= \tfrac{2}{3}\, d$$

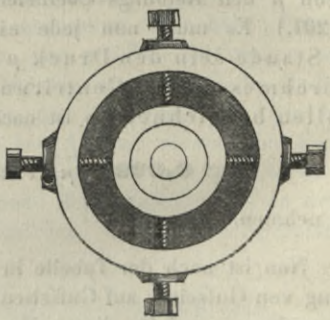
ergeben.

Diese Wandstärke des Spurkastens ist jedoch eben nur an der Stelle nöthig, wo die Schrauben durchgehen; man kann daneben die Wandstärke schwächer nehmen, und pflegt daher zweckmäfsiger Weise den Spurkasten so zu begrenzen, dafs er aufsen kreisförmig, innen achteckig oder sechseckig ist, je nachdem man 4 oder 3 Schrauben anwenden will. (Holzschnitt *G*.) Auch kann man im Inneren und Aefseren eine kreisförmige Begrenzung geben, und da, wo die Schrauben durchgehen, eine Verstärkung anbringen, wie der Holzschnitt *H* zeigt. Die durchgehende Wandstärke des Kastens kann in diesem Falle etwa gleich $\frac{1}{2}d$ sein.

G



H



Der **Spurklotz** bekommt gewöhnlich im Aeufseren die Form, welche der Spurkasten im Inneren hat; jenachdem also der Spurkasten im Inneren achteckig (Holzschnitt *G*) oder rund (Holzschnitt *H*) ist, pflegt man den Spurklotz ebenfalls achteckig oder rund zu gestalten. Dies ist indessen nicht als eine nothwendige Regel anzusehen; es würde vielmehr stets empfehlenswerth sein, dem Spurklotz, wenigstens da, wo die Centrirungsschrauben angreifen eine ebene Begrenzung zu geben.

Der Durchmesser des Spurklotzes mufs um so viel kleiner sein, als der innere Durchmesser des Spurkastens, wie der Betrag der durch die Centrirungsschrauben zuläfsigen Verschiebung ausmacht. Dies ist allerdings abhängig von der Genauigkeit der Aufstellung, indessen wird man für die gewöhnlichen Fälle ausreichen, wenn man die durch die Centrirungsschrauben zu bewirkende Verschiebung zu allen Seiten der mittleren Stellung um etwa die Hälfte des Zapfendurchmessers annimmt; es würde also der **äufsere Durchmesser des Spurklotzes** um den Durchmesser des Zapfens d **kleiner** sein, als der innere Durch messer des Spurkastens.

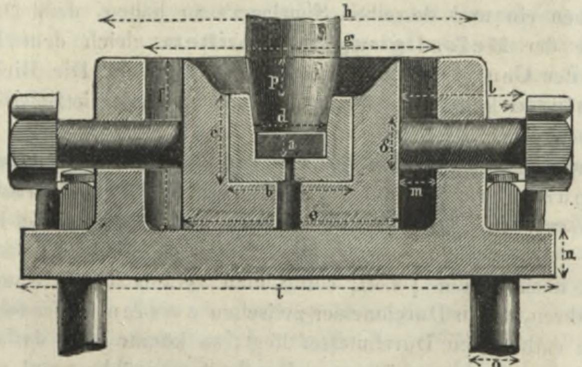
In den Spurklotz ist der Spurnapf eingelassen, den man gewöhnlich von Bronze macht, und in dessen Boden die Spurplatte liegt. Wie der Durchmesser der Spurplatte zu bestimmen ist, haben wir schon oben gesehen; die Dimensionen des Spurnapfes und des Spurklotzes lassen sich nicht berechnen; sie sind nach der Konstruktion, die man dem Lager geben will, verschieden, und können für die gewöhnlichen Fälle etwa so bemessen werden, dafs man dem Spurnapf etwa $\frac{5}{3}$ vom Durchmesser der Spurplatte und dem **Spurklotz** etwa das Dreifache vom Durchmesser der Spurplatte giebt. Ebensowenig läfst sich über die erforderlichen Höhen dieser Theile theoretisch eine Feststellung machen; es genügt erfahrungsmäfsig, wenn man die Dicke der Spurplatte etwa $\frac{1}{3}$ vom Zapfendurchmesser macht, wenn der Zapfen zur Hälfte seiser Höhe, die gleich seinem kleinsten Durchmesser genommen werden kann, in den Spurnapf eingesenkt ist, und wenn die Höhe des ganzen Spurklotzes gleich der lichten Höhe des Spurkastens, nämlich gleich $\frac{7}{3}$ vom Zapfendurchmesser gemacht wird.

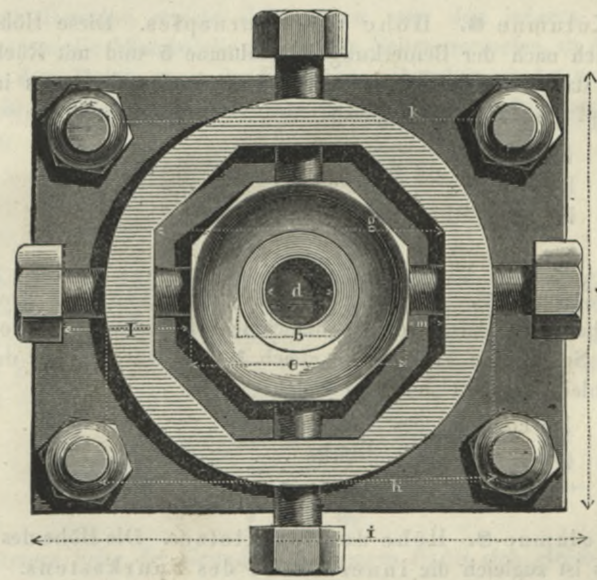
Die Befestigungsschrauben und die Sohlplatten werden bei einem Zapfen, der nur Vertikaldruck auszuhalten hat, theoretisch nicht wesentlich in Anspruch genommen; die Rechnung wird hier Dimensionen liefern, die praktisch doch nicht ausführbar wären. Es ist daher rathsam, um möglichst wenig Verschiedenheit in den Schrauben ein und desselben Spurlagers zu haben, dem Durchmesser der **Befestigungsschrauben** gleich dem Durchmesser der Centrirungsschrauben zu machen. Die Dicke der **Sohlplatte** kann man ebenso stark machen, wie die Befestigungsschrauben.

Nach diesen Prinzipien läfst sich nun eine Zusammenstellung von Spurlagern machen, die für den gewöhnlichen Gebrauch hinreichen werden. Die folgende Tabelle giebt eine solche Reihenfolge. — Die Durchmesser der Spurzapfen steigen hier anfangs um $\frac{1}{4}$ Zoll, nachher um $\frac{1}{2}$ Zoll; sollte man veranlafst sein Spurzapfen auszuführen, deren Durchmesser zwischen zweien in der folgenden Tabelle enthaltenen Durchmesser liegt, so könnte man das Spurlager für den nächst gröfseren Durchmesser wählen, und nur den Spurnapf und die Spurplatte dem gewählten Durchmesser entsprechend ausbohren und abdrehen.

Tabelle über die Dimensionen eiserner Spurlager mit stählernen Spurplatten (nach des Verfassers Anordnung).

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
			Dimensionen in preussischen Linien.																
No.	Durchmesser des Zapfens in Zollen.	Zulässige Vertikalbelastung in alten preuſs. Pfunden.	Dicke der Spurplatte.	Spurnapf.		Spurklotz.		Spurkasten-Durchmessr.		Grundplatte.		Entfern. der Mitten d. Befestigungsschr.	Centrirungsschraub.		Spielraum zwischen Spurnapf u. Spurkl.	Dicke der Grundplatte.	Durchm. der Befestigungssch.	Tiefe der Schmieröffnung.	Kleinster Durchm. des Zapfens.
				Durchmesser	Höhe	Durchmesser	Höhe	innerer	äuſserer	lange Seite	schmal. Seite		Durchmesser	Länge					
			a	*b*	*c*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*δ*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*	*d*
1	$\frac{1}{2}$	772	2	10	7	18	14	24	32	44	36	36	4	10	3	4	4	3	6
2	$\frac{3}{4}$	1736	3	15	10,5	27	21	36	48	66	54	54	6	15	4,5	6	6	4,5	9
3	1	3086	4	20	14	36	28	48	64	88	72	72	8	20	6	8	8	6	12
4	$1\frac{1}{4}$	4824	5	25	17,5	45	35	60	80	110	90	90	10	25	7,5	10	10	7,5	15
5	$1\frac{1}{2}$	6948	6	30	21	54	42	72	96	132	108	108	12	30	9	12	12	9	18
6	$1\frac{3}{4}$	9457	7	35	24,5	63	49	84	112	154	126	126	14	35	10,5	14	14	10,5	21
7	2	12334	8	40	28	72	56	96	128	176	144	144	16	40	12	16	16	12	24
8	$2\frac{1}{2}$	19300	10	50	35	90	70	120	160	220	180	180	20	50	15	20	20	15	30
9	3	27774	12	60	42	108	84	144	192	264	216	216	24	60	18	24	24	18	36





Die Werthe der Tabelle stehen in folgendem Zusammenhange:

Kolumne **1.** ist die laufende Nummer.

Kolumne **2.** Durchmesser des Zapfens in Zollen, anfangs nach $\frac{1}{4}$ Zollen, dann nach $\frac{1}{2}$ Zollen fortschreitend.

Kolumne **3.** Zulässige Vertikalbelastung in alten preufsischen Pfunden; berechnet nach der Formel

$$P = 3086 d^2,$$

welche oben S. 400 und Thl. I. S. 273 angeführt worden ist. Es ist eine Stahlplatte vorausgesetzt; macht man die *Spurplatte* von Bronze, so darf man etwa nur $\frac{4}{5}$ von derjenigen Belastung rechnen, welche eine Stahlplatte tragen kann.

Kolumne **4.** Dicke der Spurplatte, dieselbe ist nach dem Obigen angenommen

$$a = \tfrac{1}{3} d.$$

Kolumne **5.** Durchmesser des Spurnapfes; derselbe ist so bemessen, dafs sowohl am Boden, als an den Seitenwänden eine Metallstärke bleibt, die gleich der Dicke der Spurplatte ist, deshalb ist der Durchmesser des Spurnapfes gleich Durchmesser der Spurplatte plus 2mal Dicke derselben:

$$b = \tfrac{5}{3} d.$$

Kolumne **6.** Höhe des Spurnapfes. Diese Höhe ergiebt sich nach der Bemerkung zu Kolumne 5 und mit Rücksicht darauf, dafs der Zapfen um die Hälfte seines Durchmessers in den Spurnapf eintauchen soll, gleich:

$$\begin{array}{ll} \tfrac{1}{2}\ \text{Zapfendurchmesser} \ldots\ldots & = \tfrac{1}{2} d \\ \text{plus Dicke der Spurplatte} \ldots\ldots & = \tfrac{1}{3} d \\ \text{plus Bodenstärke des Spurnapfes} \ldots & = \tfrac{1}{3} d \\ \hline \end{array}$$

$$c = \tfrac{7}{6} d.$$

Kolumne **7.** Durchmesser des Spurklotzes. Derselbe ist so bestimmt, dafs, nachdem der Spurnapf eingesetzt ist, noch zu beiden Seiten eine Wandstärke gleich $\frac{2}{3}$ vom Durchmesser des Zapfens bleibt; ergiebt sich also gleich:

$$\begin{array}{ll} \text{Durchmesser des Spurnapfes} \ldots\ldots & = \tfrac{5}{6} d \\ \text{plus 2mal } \tfrac{2}{3}\ \text{Wandstärke} \ldots & = 2 \cdot \tfrac{2}{3} d = \tfrac{4}{3} d \\ \hline \end{array}$$

$$e = 3 d.$$

Kolumne **8.** Höhe des Spurklotzes. Die Höhe des Spurklotzes ist zugleich die innere Höhe des Spurkastens. Es ist darauf gerechnet, dafs nach Einsenkung des Spurnapfes die Bodenstärke des Spurklotzes noch gleich der Wandstärke an der Seite $= \frac{2}{3}d$ bleibt, und dafs das Schmier-Reservoir, welches sich über dem Spurnapf bildet, eine Tiefe gleich dem halben Zapfendurchmesser hat. Hiernach ergiebt sich die Höhe des Spurklotzes gleich:

$$\begin{array}{lr} \text{Höhe des Spurnapfes} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; & c = \frac{7}{6}d \\ \text{plus Bodenstärke} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & = \frac{2}{3}d \\ \text{plus Tiefe des Schmiernapfes} \;.\;.\;. & = \frac{1}{2}d \\ \hline \end{array}$$

$$f = \frac{7}{3}d.$$

Kolumne **9.** Innerer Durchmesser des Spurkastens. Nach den oben (S. 402) gemachten Bestimmungen ist angenommen worden, dafs der Spurklotz in dem Spurkasten sich von der mittleren Stellung aus auf allen Seiten um die Hälfte des Zapfendurchmessers verschieben lasse. Hiernach ergiebt sich der innere Durchmesser des Spurkastens gleich:

$$\begin{array}{lr} \text{Durchmesser des Spurklotzes} \;.\;.\;. & e = 3d \\ \text{plus 2mal halber Zapfendurchmesser} & = d \\ \hline \end{array}$$

$$g = 4d.$$

Kolumne **10.** Aeufserer Durchmesser des Spurkastens. Derselbe ergiebt sich, wenn man den inneren Durchmesser um die Wandstärke auf beiden Seiten vermehrt, da dieselbe gleich dem Durchmesser der Centrirungsschrauben $= \frac{2}{3}d$ angenommen ist, so findet man dem äufseren Durchmesser des Spurkastens gleich:

$$\begin{array}{lr} \text{Innerer Durchmesser des Spurkastens} & g = 4d \\ \text{plus 2mal Wandstärke} \;.\;. = 2 \,.\, \frac{2}{3}d & = \frac{4}{3}d \\ \hline \end{array}$$

$$h = \frac{16}{3}d.$$

Kolumne **11. 12.** Die Grundplatte ist rechteckig angenommen, die längere Seite ragt zu beiden Seiten um den Zapfendurchmesser über dem Spurkasten vor, die kürzere Seite nur um $\frac{1}{3}$ des Zapfendurchmessers, es ergiebt sich hiernach die längere Seite der Grundplatte gleich:

$$\begin{array}{lr} \text{Aefserer Durchmesser des Spurkastens} & h = \frac{16}{3}d \\ \text{plus 2mal Zapfendurchmesser} \;.\;.\;. & = \frac{6}{3}d \\ \hline \end{array}$$

$$i = \frac{22}{3}d,$$

die kürzere Seite der Grundplatte dagegen findet sich gleich:

Aeufserer Durchmesser des Spurkastens $h = \frac{16}{3} d$
plus 2mal $\frac{1}{3} d$ . . . . $= \frac{2}{3} d$

$$j = 6d.$$

Kolumne **13.** Entfernung der Befestigungsschrauben. Dieselbe ist so zu bemessen, dafs die Schraubenmuttern in den Ecken der Grundplatte Platz finden. Da die Befestigungsschrauben einen Durchmesser gleich $\frac{2}{3} d$ haben (vergl. Kolumne 18), so ist auch der Radius ihrer Schraubenmuttern so grofs, und folglich ist die Entfernung derselben in der längeren Seite gleich:

Lange Seite der Grundplatte . . . $i = \frac{22}{3} d$
minus 2mal $\frac{2}{3} d$ . . . . $= \frac{4}{3} d$

$$k = 6d.$$

Dagegen ist die Entfernung der Befestigungsschrauben in der kürzeren Seite gleich:

Kurze Seite der Grundplatte . . . $j = 6d$
minus 2mal $\frac{2}{3} d$ . . . . $= \frac{4}{3} d$

$$k' = \frac{14}{3} d.$$

Kolumne **14.** Durchmesser der Centrirungsschrauben. Derselbe ist oben (S. 391) durch Rechnung festgestellt, und beträgt:

$$\delta = \frac{2}{3} d.$$

Kolumne **15.** Länge der Centrirungsschrauben. Man hat die Länge der Centrirungsschrauben, mit Ausschlufs des Kopfes so zu bemessen, dafs durch dieselben die gröfste Verschiebung des Spurklotzes, welche von vorn herein angenommen ist, möglich wird. Diese Verschiebung ist im Ganzen höchstens gleich dem Zapfendurchmesser, und es ergiebt sich also die Länge der Centrirungsschrauben gleich:

Wandstärke des Spurkastens . . . . . $= \frac{2}{3} d$
plus Zapfendurchmesser . . . , . . $= d$

$$l = \frac{5}{3} d.$$

Kolumne **16.** Spielraum zwischen Spurnapf und Spurkasten. Derselbe ist (vergl. Kolumne 9 und S. 392) gleich dem halben Zapfendurchmesser angenommen worden; es ergiebt sich also:

$$m = \frac{1}{2} d.$$

Kolumne **17.** Dicke der Grundplatte. Auch diese ist nach den oben (S. 393) getroffenen Bestimmungen angenommen worden:

$$n = \tfrac{2}{3}d.$$

Kolumne **18.** Durchmesser der Befestigungsschrauben. Derselbe beträgt nach der Annahme (S. 393):

$$o = \tfrac{2}{3}d.$$

Kolumne **19.** Tiefe der Schmieröffnung. Nach der Bestimmung der Kolumne 3 ist dieselbe gleich dem halben Zapfendurchmesser:

$$p = \tfrac{1}{2}d.$$

Kolumne **20** giebt den Durchmesser des Zapfens in Linien.

Beispiele von Spurlagern. —. Einfache Spurlager. — *Spurlager mit Seitendruck.* — *Spurlager, deren Spur sich nach unten hin herausnehmen läfst.*

§. 136. Auf Tafel 37 sind einige Beispiele von ausgeführten einfachen Spurlagern gezeichnet, welche so gewählt sind, dafs sie eine Zusammenstellung der in der Anwendung am häufigsten vorkommenden Fälle darbieten.

Einfache Spurlager.

Taf. 37. Fig. 1 zeigt ein kleines Spurlager von dem Mühleisen einer französischen Handmühle. Fig. 1a ist ein Vertikalschnitt nach der Linie *ab* in Fig. 1b, und Fig. 1b ist die obere Ansicht der ganzen Konstruktion. Beide Figuren sind in $\frac{3}{8}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Taf. 37. Fig. 1.

Der Spurkasten hat zu seiner Befestigung zwei angegossene Lappen. Anstatt der einzelnen Befestigungsbolzen, welche durch diese Lappen gehen, sind hier die beiden Schrauben durch ein horizontales Verbindungsstück zu einem Bügel vereinigt, welcher so angeordnet ist, dafs der Spurkasten nach allen Richtungen eine kleine Verschiebung erleiden und dann an der richtigen Stellun befestigt werden kann. Dies ist in folgender Weise möglich gemacht: Der Bügel steckt in einem nach der Länge des hölzernen Steges, der die Unterlage des Spurkastens bildet, gerichtetem Schlitz; man kann also den Spurkasten mit dem Bügel zusammen nach der

Richtung dieses Schlitzes verschieben, bevor man durch Anziehen der Schrauben ihn fest macht. Um aber jene Bedingung zu erfüllen, mufs auch noch eine Verschiebbarkeit normal zu der oben bezeichneten Richtung vorhanden sein. Diese Verschiebbarkeit ist dadurch hergestellt, dafs der ganze Spurkasten um den einen der beiden Bolzen (hier um den Bolzen rechts) drehbar ist, indem dieser Bolzen genau in das Loch des Lappens pafst; der andere Bolzen (links) bleibt, wie der erste, bei dieser Drehung fest stehen; damit aber der Spurkasten sich gegen den Bolzen, wenn man ihn zurechtdreht, verschieben könne, ist die Oeffnung für diesen zweiten Bolzen im Lappen des Spurkastens durch einen bogenförmigen Schlitz gebildet, welcher aus dem Mittelpunkt des ersten Bolzens beschrieben ist (vergl. Fig. 1b). Die Spurplatte ist rund; die Spur in derselben sehr wenig vertieft; die Spurplatte ist in den Spurkasten ein wenig konisch eingedreht. Der Raum im Inneren des Spurnapfes, welcher nach dem Einsetzen des Spurzapfens übrig bleibt wird mit Schmiere angefüllt, und um eine Verunreinigung derselben zu verhüten, deckt man den Spurkasten mit einem runden hölzernen Deckel zu, der aus zwei *Hälften* besteht, damit man ihn einbringen kann, auf den kleinen Absatz x ruht, und mit Zapfen, die in den Einschnitt y einfassen, versehen ist, damit er sich nicht mitdrehe. In Fig. 1b ist die eine Hälfte dieses hölzernen Deckels eingelegt gezeichnet, die andere aber ist herausgenommen gedacht.

Taf. 37. Fig. 2. Taf. 37. Fig. 2 ist ein kombinirtes Lager mit Bockgerüst gezeichnet. Dasselbe nimmt eine liegende Welle und das Spurlager für eine stehende Welle auf. Fig. 2a ist die Vorder-Ansicht, Fig. 2b die Seiten-Ansicht, Fig. 2c ein Vertikalschnitt der beiden Lager ohne das Bockgerüst, nach der Linie *ef* in Fig. 2d, Fig. 2d ist die obere Ansicht der beiden Lager, und Fig. 2e ist ein Vertikalschnitt derselben nach der Linie *cd* in Fig. 2c. Alle fünf Figuren sind in $\frac{1}{24}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Diese Anordnung befindet sich in der mechanischen Werkstatt des Königlichen Gewerbe-Instituts zu Berlin; die liegende Welle ist die Schwungradwelle einer vierpferdigen Dampfmaschine, welche kurz vor dem Lager ein konisches Rad trägt, durch welches die Bewegung einem anderen konischen Rade mitgetheilt wird, das auf einer stehenden Welle sitzt. Das Spurlager dieser stehende Welle ist unmittelbar über dem Zapfenlager der liegenden Welle angebracht.

Das Bockgerüst, welches die kombinirten Lager trägt, und auf welchem diese als ein besonders konstruirter Maschinentheil befestigt sind, hat vier Füfse. Diese sind dadurch hergestellt, dafs man zwei ganz gleich geformte Lagerböcke, jeden mit zwei Füfsen, schräg gegeneinander gestellt und oben mittelst eines starken Schraubenbolzens p vereinigt hat. Einen weiteren Zusammenhalt bekommen diese Lagerböcke durch die Sohlplatte der eigentlichen Lagerkonstruktion, welche mit vier Schraubenbolzen qq auf der von den Lagerböcken gebildeten Platform befestigt ist.

Die für das Zapfenlager und für das Spurlager kombinirte Konstruktion besteht aus einem sechseckigen Spurkasten, in welchem der Spurnapf r, der ebenfalls sechseckig ist, und in dem die runde Spurplatte liegt, mittelst dreier Centrirungsschrauben sss verschoben und genau befestigt werden kann. Die Sohlplatte dieses Spurkastens ist nach hinten hin mit zwei angegossenen Ständern versehen, welche wieder mit der Grundplatte der ganzen Konstruktion zusammenhängen. Zwischen diesen Ständern und den beiden Platten bildet sich ein rechteckiger, rahmenförmiger Schlitz, der zur Aufnahme der Lagerfutter für die liegende Welle dient. Da diese Lagerfutter von der Seite her eingeschoben werden müssen, so können sie nicht mit vorspringenden Rändern versehen sein, um aber gleichwohl eine Seitenverschiebung derselben zu verhüten sind sie an ihren Rückseiten, d. h. an den von der Lagerhöhlung abgewendeten Seiten mit nuthenförmigen Einschnitten versehen, in welche die seitwärts durch die Ränder des Rahmens eingetriebenen Keile tt und u hineinfassen. Diese Keile haben aufserdem noch den Zweck die Lagerfutter gegen den Zapfen anzutreiben, und dadurch einen richtigen Anschlufs des Lagers herzustellen. Das untere Lagerfutter wird von zwei Keilen tt, die hochkantig stehen, das obere Futter nur von einem, flachliegenden Keil u angetrieben.

Die ganze Konstruktion hat sich als sehr stabil und solide bewährt.

Einfache Spurlager mit Seitendruck.

Die beiden oben beschriebenen Spurlager setzen voraus, dafs die stehende Welle im Wesentlichen nur einen Vertikaldruck zu erleiden habe, oder dafs doch der Horizontaldruck auf dem Spurzapfen sehr unbedeutend sei. Bei dem in Fig. 1 auf Taf. 37 dargestellten Spurlager befindet sich für den Spurzapfen nur eine kleine Vertiefung; das Spurlager in Fig. 2 auf Taf. 37 hat zwar für den

Spurzapfen eine vollständige seitliche Umfassung von Bronze, auf deren Boden die stählerne Spurplatte liegt; allein, wenn durch einen Seitendruck der bronzene Spurnapf ausgeschliffen ist, so läfst er sich nicht mehr nachstellen. Wenn nun auf den Spurzapfen beträchtliche Seitendrucke einwirken, so mufs man eine ähnliche Einrichtung zum Nachstellen des Lagers machen, wie bei den Lagern liegender Wellen; d. h. man mufs das untere Ende der stehenden Welle mit getheiltem Lagerfutter umgeben, während die Stahlspitze des Spurzapfens auf der ebenen Spurplatte ohne in eine Vertiefung einzufassen, frei aufsteht. *Diese getheilten Lagerfutter* sind dann durch Stellschrauben, welche zugleich die Centrirungsschrauben vertreten können, anzuspannen. Beispiele hierzu geben die Fig. 3 und 4 auf Taf. 37.

Taf. 37. Fig. 3. Taf. 37. Fig. 3 stellt ein Spurlager mit dreifach getheiltem Lagerfutter vor. Fig. 3a ist die Seiten-Ansicht, Fig. 3b die obere Ansicht; beide Figuren sind in $\frac{1}{8}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Der Spurkasten ist aufsen cylindrisch, innen sechsseitig begrenzt; er ist von aufsen mit drei Lappen zur Befestigung auf der Unterlage versehen, so dafs die Sohlplatte die Form eines Dreiecks mit abgerundeten Ecken bekommt. In dem Boden des Spurkastens ist die Spurplatte v eingelegt, so dafs der Spurzapfen auf derselben seitwärts frei gleiten kann. Das untere Ende der stehenden Welle wird von den drei Lagerfuttern www umfafst, von denen jedes mittelst einer besonderen durch die Seitenwandung des Kastens gehenden Stellschraube angespannt werden kann.

Taf. 37. Fig. 4. Taf. 37. Fig. 4 zeigt ein anderes Spurlager für Seitendruck mit getheilten Lagerfuttern. Fig. 4a ist ein Vertikalschnitt nach der Linie gh in Fig. 4b, und Fig. 4b ist ein Horizontalschnitt nach der Linie ik in Fig. 4a. Beide Figuren sind in $\frac{1}{8}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Das hier gezeichnete Spurlager ist in der von dem Verfasser erbauten Dampfmahlmühle des Herrn W. Rothe in Lübeck angewendet, und in der Maschinenfabrik von A. Borsig in Moabit bei Berlin ausgeführt worden. Die stehende Welle treibt vier Mahlgänge, und zwar mittels Riemen. Wenn alle vier Gänge in Betrieb sind, so ist der Seitendruck gegen den Zapfen ziemlich ausgeglichen, wenn dagegen einer oder zwei Gänge ausgerückt sind, so kann ein nicht unbeträchtlicher Seitendruck statt finden, und zwar je nach der Lage der ausgerückten Gänge bald nach der einen bald nach der anderen Richtung. Um das Lager nun stets schliefsend zu erhaltend sind die beiden Lagerfutter von Bronze, welche das 3 Zoll starke Ende der stehenden Welle umschliefsen, auf ihrer äufseren Fläche schwach konisch abgedreht, und in den ebenso ausgedrehten Spurkasten von Gufseisen passend eingesetzt, jedoch so, dafs die Futter nicht den Boden des Kastens erreichen, sondern noch etwa 1 Zoll von demselben abstehen. Haben sich nun die Lagerbacken ausgelaufen, so werden sie tiefer in den Kasten hineingetrieben, und in Folge ihrer Konizität wieder fester an die Welle angedrückt. Damit die Backen sich nicht mit der Welle zusammen in dem Lagerkasten drehen, hat jede eine Feder, welche in einer entsprechenden Nuth des Kastens pafst. Zur Feststellung der Lagerbacken dienen vier Stellschrauben, welche ihre Muttergewinde in der Wandung des Spurkastens haben. Die Spurplatte ist eben, und wie im vorigen Beispiel in den Boden des Spurkastens eingelegt.

Diese Konstruktion hat sich sehr gut bewährt.

Spurlager, deren Spur sich nach unten hin herausnehmen läfst.

Wenn sich die Spurplatten oder der Spurnapf ausgelaufen haben, oder sonst einer Reperatur bedürfen, so mufs man dieselben aus dem Spurkasten entfernen können. Dies ist jedenfalls zu bewerkstelligen, wenn man die Welle heraushebt und den Spurkasten abnimmt, oder auch indem man die Welle so hoch emporhebt, dafs der tiefste Punkt des Spurzapfens über den höchsten Rand des Spurkastens hinüberreicht, worauf man den Spurkasten seitwärts fortziehen kann. Allein diese Operationen, so einfach sie erscheinen, sind doch oft mit sehr grofser Schwierigkeit, oder wenigstens mit Umständen und Weitläufigkeiten verbunden. Ist z. B. die stehende Welle sehr lang, und reicht sie durch mehrere Etagen hindurch, so ist das Herausnehmen derselben beschwerlich, ist andererseits die stehende Welle mit Rädern versehen, welche, wie das oft der Fall ist, sich unmittelbar unter einer Balkenlage bewegen, so kann man dieselbe nicht heben, ohne entweder die Räder oder die Balkenlage zu entfernen. Für solche Fälle hat man Vorkehrungen an den Spurlagern zu treffen, welche es möglich machen, das Spurlager, nachdem die Welle einfach abgestützt, oder aufgehängt worden, nach unten niederzulassen, soweit, dafs die Unterkante des Spurzapfens höher bleibt, als der obere Rand des Spurlagers, und es dann seitswärts herauszunehmen. Beispiele dieser Anordnungen geben die Fig. 5, 6 und 7 auf Taf. 37.

Taf. 37. Fig. 5. Taf. 37. Fig. 5 zeigt ein Spurlager für die stehende Welle einer Mahlmühle, welche eine Kraft von 20 Pferden bei 28 Umdrehungen in einer Minute überträgt. Fig. 5a ist ein Vertikalschnitt nach der Linie *lm* in Fig. 5b und Fig. 5b ist die obere Ansicht der Konstruktion. Beide Figuren in $\frac{1}{10}$ der natürlichen Gröfse.

Der Spurkasten *A* befindet sich in angemessener Höhe über der Grundplatte, und wird durch gufseiserne Rippen *BB* getragen und gehörig verstrebt; nach der einen Richtung hin haben diese Rippen eine Durchbrechung *CC*, um dem niedergelassenen Spurnapf herausziehen zu können. Der Spurnapf *D* ist von Bronze, die eingelegte Spurplatte von Stahl. Derselbe ruht auf zwei starken Keilen von Schmiedeeisen *EE*, welche durch die Trageripppen des Spurkastens getrieben sind, und welche die Stelle des Bodens im Spurkasten vertreten. Der Spurnapf ist mit einem schmiedeeisernen Ringe umgeben, gegen welchen die 4 Centrirungsschrauben *FF* wirken, so dafs beim Anziehen oder Lösen derselben der Spurnapf auf den Keilen *EE* gleitet. Will man den Spurnapf herausnehmen, so wird die Welle abgestützt, die Keile *EE* werden herausgeschlagen, der Spurnapf wird niedergelassen, bis er auf der Sohlplatte ruht, und dann wird er durch die Oeffnungen *CC* herausgezogen. Beim Einbringen des Spurnapfes ist der Gang des Verfahrens der umgekehrte.

Durch Anwendung der Keile hat man zugleich ein Mittel eine geringe Vertikalstellung der stehenden Welle zu bewirken.

Taf. 37. Fig. 6. Taf. 37. Fig. 6 giebt eine andere Anordnung eines Spurlagers für die obengenannten Zwecke. Fig. 6a ist ein Vertikalschnitt nach der Linie *no* in Fig. 6b, und Fig. 6b ist eine obere Ansicht, und zwar so gewählt, dafs die eine Hälfte der Figur (rechts) die obere Ansicht des halben Spurlagers, die andere Hälfte der Figur aber (links) die obere Ansicht der Grundplatte ohne das Spurlager zeigt. Beide Figuren sind in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Die Konstruktion rührt von einem Freunde des Verfassers, dem Ingenieur R. R. Werner in Berlin her; sie gestattet ein sehr leichtes Entfernen des ganzen Spurlagers behufs irgend einer Reperatur. Man sieht nämlich, dafs die Grundplatte des Lagers mit zwei erhöhten Ansätzen *GG* versehen ist, auf welchen der Spurkasten steht, und auf denen derselbe mittelst zweier in Seitenschlitze *gg* eingeschobener Schraubenbolzen befestigt ist. Der Zwischenraum zwischen den Erhöhungen *GG* ist ein wenig breiter als die Breite des Spurlagers. Will man nun das Lager herausnehmen, so stützt man die Welle ab, löst die Befestigungsschrauben und zieht dieselben durch die Schlitze *gg* heraus; nun dreht man das Spurlager um 90 Grad herum, läfst es zwischen den Erhöhungen *GG*, welche wie oben erwähnt entsprechend weit auseinander stehen, nieder, und zieht es seitwärts heraus.

Bemerkenswerth ist noch für die Konstruktion dieser Lagers, dafs die Spurplatte, welche eine Vertiefung für die Spur enthält äufserlich konisch abgedreht, und in den entsprechend ausgebohrten Spurnapf eingesetzt ist, so jedoch, dafs sie den unteren Boden nicht berührt. Durch die Belastung der Welle wird die Spurplatte immer fester in ihren Sitz getrieben. Um dieselbe nach Erfordern wieder heraustreiben zu können dient die Oeffnung *h* in dem Boden des Spurnapfes. *i* ist eine kleine Schmierrinne in dem Boden der Spur.

Taf. 37. Fig. 7 stellt ein Spurlager für die stehende Welle einer Mahlmühle dar, welches auch ein Niederlassen behufs des Fortnehmens des Spurnapfes gestattet. Fig. 7a ist eine Vorder-Ansicht, Fig. 7b ein Vertikalschnitt nach der Linie *pq* in Fig. 7a und Fig. 7c ein Horizontalschnitt nach der Linie *rs* in Fig. 7a. Alle drei Figuren sind in $\frac{1}{8}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Taf. 37. Fig. 7.

Der Spurkasten *A* wird von einem gufseisernen Bock *BB*, mit dem er in einem Stück gegossen ist, getragen, und ruht auf der Fundamentplatte *C*, auf welcher er durch Keile, die hinter Knaggen der Fundamentplatte greifen, horizontal verschiebbar ist. Die genauere Centrirung wird mittelst der Centrirungsschrauben bewirkt, welche ihre Muttergewinde in den Seitenwänden des Spurkastens haben, und mit ihren Enden gegen den achteckigen Spurnapf *D* wirken. Dieser ist im Inneren mit einer Buchse von Bronze ausgefuttert, die in ihrem Boden die stählerne Spurplatte aufnimmt. Der Spurkasten *A* hat einen nach der Vertikalen verschiebbaren Boden *E*, welcher genau in die achteckige Höhlung pafst, und auf welchem der Spurnapf *D* mittelst der Centrirungsschrauben gleitend verschiebbar ist. Dieser Boden *E* ruht auf einer starken schmiedeeisernen Schraube *F* welche wiederum mit ihrer Mutter *f* auf der gufseisernen Hülse *G* liegt, die auf der Fundamentplatte *C* befestigt ist. Durch Anziehen der Mutter *f*, oder durch Lösen derselben wird die Schraubenspindel *F* aufwärts oder niederwärts bewegt, da sie selbst, vermöge des achteckigen Bodens *E* an dem sie befestigt ist, verhindert ist, sich zu drehen (Thl. I. S. 55). So giebt diese Konstruktion ein Mittel den Spurnapf aufser durch die Centrirungsschrauben in der Horizontalen, auch noch durch die Schraube F in der Vertikalen zu verstellen. Soll nun solche Vertikalstellung oft wiederholt werden, so wendet man die als „Steinstellung" bezeichneten, weiter unten beschriebenen Maschinentheile an; hier ist vorausgesetzt, dafs die Schraube nur selten zum Vertikalstellen benutzt wird, während sie vorzugsweise dazu dient, die Möglichkeit zu gewähren, den Spurnapf nach unten herauszunehmen. Man stützt nämlich die stehende Welle ab, schraubt die Schraube mit dem Spurnapf nieder, soweit es geht, löst die Hülse GG von der Sohlplatte und zieht sie nebst der Schraube seitwärts heraus, dann sinkt der Spurnapf bis auf die Grundplatte und kann ebenfalls seitwärts herausgezogen werden.

Konstruktion der oberen Lager stehender Wellen. — Beispiele von gewöhnlichen Halslagern stehender Wellen.

§ 137. Die Zapfenlager für die oberen Zapfen stehender Wellen lassen sich in vielen Fällen den Zapfenlagern für liegende Wellen vollkommen nachbilden. Man hat dann nur nöthig, ein gewöhnliches Zapfenlager so anzuordnen, dafs die Axe desselben vertikal wird, und dann die vertikale Sohlplatte von den Seiten her an einen Balken, oder an ein Konsol, oder unmittelbar an eine Säule, oder an eine Wand anzuschrauben, oder man kann auch wohl den Lagerkörper eines solchen Lagers mit der Unterstützung in einem Stück giefsen.

Beispiele dieser Art geben unter anderen einige der bereits früher mitgetheilten kombinirten Hängelager, Konsollager etc., so namentlich Fig. 1 auf Taf. 31 wo das obere Zapfenlager der stehenden Welle mit seinem Lagerkörper an das Hängegerüste angegossen ist (vergl. S. 349). Ferner Taf. 33. Fig. 1 wo das Lager für die stehende Welle von gewöhnlicher Konstruktion an das gufseiserne Konsol angeschraubt ist (vergl. S. 355).

Zuweilen gestattet die ganze Anordnung des unterstützenden Gerüstes eine seitliche Befestigung in vertikaler Ebene, wie vorhin angenommen worden, nicht. Man mufs dann die gewöhnliche Form der Zapfenlager für liegende Wellen für den genannten Zweck etwas modificiren. So zeigt z. B. Taf. 33. Fig. 3 an dem Konsol ein oberes Lager für eine stehende Welle, welches aus zwei zusammengeschraubten in vertikaler Ebene getheilten Lagerhälften besteht, die einen horizontalen Flansch haben, mit welchem sie auf den vorspringenden Ansätzen des Konsols befestigt sind (vergl. S. 356). Eine noch andere Modification eines gewöhnlichen Zapfenlagers für den Gebrauch bei einem oberen Zapfen einer stehenden Welle zeigt:

Taf. 38. Fig. 1. Das Lager setzt voraus, dafs die Mittellinie der stehenden Welle gerade auf die Mitte eines über derselben liegenden Balkens trifft. Fig. 1a ist die Seiten-Ansicht des Lagers mit der Welle, Fig. 1b die Vorder-Ansicht von dem Lagerdeckel aus gesehen, Fig. 1c die Ansicht von unten nach oben hin gesehen, Fig. 1d die Ansicht von hinten (von dem Lagerkörper nach der Welle hin gesehen). Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{24}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Taf. 38. Fig. 1.

Das Lager, für eine gufseiserne Welle von $4\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser bestimmt, hat keine besonderen Lagerfutter, der Zapfen läuft vielmehr unmittelbar in dee Lagerhöhlung des Deckels und des Körpers. Um eine seitliche Verschiebung des Deckels gegen den Lagerkörper zu verhüten ist ersterer mit Vorsprüngen versehen, welche zwischen den Einschnitt des Lagerkörpers eingreifen. Der Lagerdeckel ist durch zwei Schraubenbolzen anzuziehen, und für sich allein, nicht an den Balken unmittelbar befestigt; nur der Lagerkörper ist mit Hilfe von zwei Schraubenbolzen, welche durch eine horizontale Ansatzplatte gehen, von unten her an die untere Fläche des Balkens angeschraubt.

Man bemerkt übrigens, dafs, wenn die oberen Lager stehender Wellen den Zapfenlagern liegender Wellen nachgebildet sind, wenn sie also aus einem feststehenden Lagerkörper, und aus einem gegen diesen anzuspannenden Deckel bestehen, eine Abnutzung des Lagers, und das in Folge derselben erfolgende Anziehen der Deckelschrauben, jedesmal eine Aenderung der Lage der Wellenaxe herbeiführen mufs. Stand die Welle ursprünglich genau vertikal, und es hat sich das Lager nach einer Seite hin ausgelaufen, so wird die Wellenaxe durch das Anpressen des Deckels am obern Ende nach derjenigen Seite hinübergezogen, an welcher sich das Lager ausgelaufen hat; die Welle verliert daher ihre vertikale Lage. Dieser Fehler ist oft mit Hilfe der Centrirungsschrauben in dem Spurlager zu verbessern. Man rückt nämlich mit Hilfe dieser Schrauben auch das untere Ende der Welle soweit zur Seite, dafs die Welle wieder genau vertikal steht.

Fn vielen Fällen jedoch genügt die eben beschriebene Operation keinesweges. Es kommt nämlich oft nicht allein darauf an, dafs die Wellen genau vertikal stehen, sondern es wird auch noch oft erfordert, dafs die Wellen genau eine **bestimmte** vertikale Lage haben, aus der sie ohne Nachtheil nicht verschoben werden dürfen, selbst nicht unter der Bedingung, dafs sie nach dem Verschieben auch noch vertikal bleiben. So kann z. B. eine stehende Welle genau die Mittellinie zwischen mehreren eingreifenden Rädern einnehmen müssen, oder sie soll stets genau durch die Axe eines anderen, nicht verschiebbaren Maschinentheils gehen.

Wenn diese Bedingungen vorliegen, so mufs man das Lager für die stehende Welle so einrichten, dafs es von mehreren Seiten, wenigstens von zwei entgegengesetzten Seiten, besser von drei oder vier Seiten her, wie die Spurlager, verschiebbar sei. Man kann den Zapfen der Welle dann mit einem mehrfach getheilten Futter umschliefsen, und dasselbe entweder durch Keile oder durch Stellschrauben nachziehen.

Unter den früher mitgetheilten Konstruktionen giebt das Halslager für die stehende Welle in dem kombinirten Hängelager Fig. 5 auf Taf. 30 ein Beispiel dieser Anordnung. Die Welle ist, wie dies namentlich Fig. 5c auf Taf. 30 zeigt, von vier Lagerschaalen theilweise umschlossen; diese Lagerschaalen sind jede durch zwei Stellschrauben, die gegen den Rücken derselben wirken und ihre Muttern in der Wandung des umschliefsenden Gehäuses haben, gegen die Welle verstellbar (vergl. S. 348). Einige andere Konstruktionen zeigen die Fig. 2, 3 und 4 auf Taf. 38.

Taf. 38. Fig. 2. Taf. 38. Fig. 2 zeigt eine sehr einfache Konstruktion eines Halslagers für eine stehende Welle. Fig. 2a ist der Vertikalschnitt nach der Linie *ab* in Fig. 2b, und Fig. 2b ist die obere Ansicht des Lagers. Beide Figuren sind in $\frac{1}{10}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Das Lager besteht aus einem viereckigen Gehäuse *A*, dessen Boden sich zu einer kreisförmigen Sohlplatte *B* verbreitet; von dieser Sohlplatte laufen nach den vier Ecken des Gehäuses Verstärkungsrippen, um eine stabile Vereinigung zwischen beiden Theilen zu bewirken. Die Sohlplatte wird mit Hilfe von vier Befestifestigungsschrauben auf der Unterlage, die etwa durch zwei parallele Balken, zwischen denen die stehende Welle hindurchgeht, gebildet werden kann, befestigt. Da wo die Schrauben durch die Sohlplatte hindurchgehen, ist diese verstärkt. Das Gehäuse enthält zwei Lagerfutter, welche die Welle umschliefsen, und von entgegengesetzten Seiten her durch Schrauben, deren Muttern in einer Verstärkung der Gehäusewandung eingeschnitten sind, angezogen werden können. Um das Eindringen von Unreinigkeiten zu vermeiden ist das Gehäuse oben mit einer Platte *D* bedeckt, welche in der Fig. 2b fortgenommen gedacht ist.

Taf. 38. Fig. 3 stellt ein Halslager für eine stehende Welle dar, welches dreifach getheilt ist. Fig. 3a giebt den Vertikalschnitt nach der Linie *cd* in Fig. 3b, und Fig. 3b ist die obere Ansicht des Lagers. Beide Figuren sind in $\frac{1}{10}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Taf. 38. Fig. 3.

Das Halslager wird durch ein cylindrisches Gehäuse *A* gebildet, welches zwischen die Balken, welche die Unterstützung bilden sollen, eingelegt ist. Das Anspannen der Lagerfutter kann daher nicht von der Seite her erfolgen, sondern man mufs es von oben, oder von unten her bewirken. Hierin hat diese Konstruktion Aehnlichkeit mit den weiter unten zu beschreibenden Steinbuchsen. Das Gehäuse *A* hat unten einen vorspringenden Rand, und auf diesem ist mittelst dreier Schrauben *aaa*, der Boden eines zweiten Gehäuses von Gufseisen *B* festgeschraubt. Dieses zweite Gehäuse enthält drei rechteckig begrenzte Abtheilungen, in welche die drei Lagerfutter *bbb* eingelegt sind. Zwischen diesen Abtheilungen befinden sich die drei Ausweitungen *ccc*, welche mit Hanf, der in Talg oder in Oel getränkt ist, ausgefüllt werden, um dadurch den Zapfen in der gehörigen Schmiere zu erhalten. Oben ist das Gehäuse *B* durch eine Deckelscheibe *C* begrenzt, welche an dem vorspringenden Rande des Gehäuses *A* festgeschraubt ist, und welche in Fig. 3b fortgenommen gedacht ist. Die ganze Konstruktion wird noch durch eine Blechscheibe *E* bedeckt, welche in Fig. 3b ebenfalls nicht gezeichnet ist.

Um die Lagerfutter *bb* gegen die Welle zu pressen dienen die Keile *ddd*, welche ebenfalls in den rechteckig begrenzten Abtheilungen des Gehäuses *B* liegen, und mit ihren schrägen Flächen gegen die gleichfalls abgeschrägten Rücken der Lagerfutter *bbb* wirken. Drückt man die Keile nieder, ohne ihnen zu gestatten nach der Wandung des Gehäuses *A* hin nachgebend auszuweichen, so müssen die Lagerfutter nach den entgegengesetzten Seiten hin, das heifst, nach der Welle hin ausweichen, also gegen den Zapfen hin angeprefst werden. Das Niederdrücken der Keile aber wird bewirkt durch die Stellschrauben *eee*, deren Muttern bei *f* in Lappen eingeschnitten sind, die mit dem schmiedeeisernen Keil *d* aus einem Stücke dargestellt sind. Da die Stellschrauben *e* sowohl oben als unten einen Ansatz haben, mit welchem sie sich oben gegen den Deckel *E*, unten gegen die Bodenplatte des Gehäuses *B* stemmen, so sind sie verhindert sich gradlinigt zu bewegen, und da ihre Muttern an den Keilen festsitzen, so können dieselben sich nicht drehen; wenn man also die Schrauben dreht, so müssen sich die Muttern gradlinigt verschieben (Th. I. S. 56) und folglich müssen dann die Keile zu der oben beschriebenen Wirkung gelangen. Dies Drehen der Schrauben kann sowohl von oben her, als von unten her bewirkt werden, und zwar mit Hilfe eines Schraubenziehers, welcher auf den viereckigen Kopf der Schraube aufgesteckt werden kann.

Taf. 38. Fig. 4. Taf. 38. Fig. 4 stellt ein Halslager für eine stehende Welle dar, welches vierfach getheilt ist. Fig. 4a giebt eine Hauptansicht des ganzen Lagergerüstes mit dem Lager, Fig. 4b ist ein Horizonschnitt durch das Lager nach der Linie *ef* in Fig. 4a; Fig. 4c ist ein Vertikalschnitt nach der gebrochenen Linie *gh* in Fig. 4b und endlich Fig. 4d zeigt die Verbindung der Säulen, welche das Lager tragen mit der Balkenlage. Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{12}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Die Konstruktion rührt aus der Maschinenfabrik von A. Borsig in Moabit her, und ist bei einer Mahlmühle angewandt worden. Zwei gegenüberstehende Säulen *A*, von denen nur eine gezeichnet worden ist, sind mittelst Schrauben auf der Fundamentplatte *B* befestigt. Das obere Ende jeder Säule trägt einen Aufsatz *C* nach Art eines Doppelkonsols, und auf diesem ruht der Balken *D*, welcher der Etage des Gebäudes angehört. Zwischen den beiden Säulen *B* ist der gufseiserne Träger *E* befestigt, von welchem jedoch in der Zeichnung fast die ganze Hälfte rechts fortgelassen ist. Zur Befestigung desselben ist die Säule mit einer vorspringenden Rippe versehen, an welche sich der Träger *E* mittels vier Befestigungsschrauben ansetzt. In der Mitte seiner Länge erweitert sich der Träger *E* zu einem cylindrischen Gehäuse *F*, in dieses ist ein zweites Gehäuse *G* von Gufseisen hineingehängt, und mit seinem vorspringenden Rande mit Hilfe von Befestigungsschrauben *aa* fest gemacht. Dieses zweite Gehäuse *G* enthält wie Fig. 4b zeigt, vier rechteckig begrenzte Abtheilungen, welche zur Aufnahme der Lagerfutter *bb* dienen. Diese sind hier von gutem Pockholz; hinter jedem Lagerfutter liegt eine Platte von Schmiedeeisen, und gegen diese setzt sich je eine der vier Centrirungsschrauben *cccc*, welche ihre Muttergewinde in Verstärkungen der Wandungen des äufseren Gehäuses *F* haben. Durch Anziehen dieser Schrauben werden die Lagerfutter central gegen die Welle geprefst. Zur Feststellung der Centrirungsschrauben sind auf denselben noch Gegenmuttern angebracht. Die Zwischenräume zwischen den rechteckigen Abtheilungen des inneren Gehäudes *G* können auch hier mit Hanf oder Werg, der in Talg oder in Oel getränkt ist, ausgefüllt werden.

Konstruktion der Steinbuchsen. — Beispiele von ausgeführten Steinbuchsen.

§ 138. Eine besondere Gattung der oberen Lager stehender Wellen bilden die sogenannten Steinbuchsen. Die Mahlmühlen mit horizontalen Mühlsteinen sind nämlich gewöhnlich so eingerichtet, dafs der obere Mühlstein (Läufer), welcher mittels einer Haue (vergl. Thl. I. S. 419 u. f.) auf dem oberen Ende einer stehenden Welle (Mühleisen, Mühlenspindel) befestigt ist, sich mit dieser gemeinschaftlich dreht, während der untere Mühlstein (Bodenstein) fest liegt. Das Mühleisen mufs daher von unten durch den Bodenstein hindurch gehen, und in demselben ein Lager als Unterstützung finden. Ein solches Lager heifst eine Steinbuchse. Die Eigenthümlichkeit der Konstruktion der Steinbuchsen ist nun im Wesentlichen durch folgende Bedingungen gegeben:

1) Durch die Art der Befestigung der Steinbuchse. Diese kann kaum anders erfolgen, als, indem man die ganze Buchse in eine Oeffnung (Auge), die sich in der Mitte des Bodensteins befindet, hineinsteckt, und in derselben mittels hölzerner Keile festmacht.

2) Durch die Art der Centrirung des Lagers. Da nämlich die Axe des Mühleisens stets genau mit der Axe des Bodensteins zusammenfallen mufs, weil sonst der Läufer sich gegen den Bodenstein excentrisch bewegen würde, so darf das Anziehen der Lagerfutter nicht einseitig erfolgen (vergl. oben S. 417), sondern mufs mindestens von zwei entgegengesetzten Seiten bewirkt werden. Dabei ist jedoch zu beachten, dafs man wegen der oben beschriebenen Befestigung der Buchse im Bodenstein das Anspannen der Lagerfutter nicht von den Seiten her bewirken kann, sondern darauf angewiesen ist, dies entweder von oben oder von unten her herbeizuführen.

3) Durch die Art der Zuführung der Schmiere. Da nämlich während des Ganges die Steinbuchse von oben her unzugänglich ist, so mufs man in der Buchse selbst den nöthigen Vorrath von Schmier-Material anbringen, um stets das Mühleisen gehörig in Schmiere zu erhalten.

Die einfachsten Konstruktionen der Steinbuchsen sind entweder ganz von Holz, oder wenigstens mit hölzernen Lagerfuttern, die am besten so gestellt werden, dafs das Hirnholz der Futter gegen den Hals des Mühleisens gerichtet ist. Man verwendet zu diesen Futtern Weifsbuchen, besser noch Pockholz. Aufserdem wendet man auch Steinbuchsen mit metallenen Lagerfuttern an. Das Anziehen der Lagerfutter erfolgt gewöhnlich durch Keile, die hinter denselben eingetrieben werden, und die man entweder mit Hammerschlägen antreibt, oder durch Zugschrauben anzieht. Das Antreiben durch Schläge kann nicht füglich während des Ganges erfolgen, sondern nur wenn der Läuferstein abgehoben ist; wogegen bei Anwendung von Zugschrauben die Anordnung sich so treffen läfst, dafs man während des Ganges die Lagerfutter spannen kann.

Hier folgen einige Beispiele von Steinbuchsen.

Steinbuchsen mit hölzernen Futtern.

Taf. 38. Fig. 5. Taf. 38. Fig. 5 giebt eine Steinbuchse ganz von *Holz*, wie sie oft von dem Verfasser mit Erfolg ausgeführt worden ist. Fig. 5a ist die obere Ansicht, Fig. 5b die Seiten-Ansicht, Fig. 5c ein Vertikalschnitt nach der Linie *ik* in Fig. 5a. Die Figuren sind in $\frac{1}{8}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Das Gerippe der Buchse wird durch einen Holzklotz *A* von fast würfelförmiger Gestalt gebildet, welcher mittels hölzerner Keile *BB* in dem Auge des Bodensteins *C* befestigt ist. Dieser Buchsklotz besteht aus zwei Hälften, indem er durch eine Vertikal-Ebene, welche durch die Axe und durch die Mitte zweier gegenüberliegender Seiten geht, getheilt ist. In Fig. 5c kann man unten bei *a*, wo der Buchsklotz sichtbar wird, die Fuge, welche dieser Theilung entspricht, wahrnehmen. Der Buchsklotz hat in der Mitte eine vertikal-cylindrische Durchbohrung, die etwas weiter ist, als der Durchmesser des Halses für das Mühleisen, und in der Mitte jeder der vier vertikalen Seitenwände befinden sich vertikale Einschnitte, die nach unten hin sich schwalbenschwanzförmig erweitern. In diese vier Einschnitte sind die vier hölzernen Lagerfutter *DD* eingeschoben, welche durch hölzerne Keile *dd*, die sich gegen die Wandung des Auges im Bodenstein stemmen, angetrieben werden können. Das Antreiben erfolgt durch Schläge von oben auf die Keile, und kann daher nur bewirkt werden, wenn der Bodenstein abgenommen ist.

Da die Lagerfutter immer ziemlich scharf an den Hals des Mühleisens angepreſst sind, so würden sie, wenn man das Mühleisen in die Höhe schiebt leicht mitgenommen werden, und sich ebenfalls in die Höhe schieben. Um dies zu vermeiden sind die Einschnitte im Buchsklotz, in welche sie eingeschoben sind, schwalbenschwanzförmig gestaltet.

Wenn die Buchse mit dem Mühleisen gehörig centrirt ist, legt man oben um den hervortretenden Theil des Mühleisens einen in Fett getränkten Leinwandstreifen, der mit einem kleinen Nagel in dem Buchsklotz befestigt wird, und der die nöthige Schmiere liefert; das Ganze wird mit einer Blechscheibe überdeckt, um den von oben einfallenden Mehlstaub abzuhalten.

Taf. 38. Fig. 6 stellt eine Steinbuchse mit hölzernen Lagerfuttern dar, welche von unten her angezogen werden können. Taf. 38. Fig. 6. Fig. 6a ist ein Vertikalschnitt nach der Linie *lm* in Fig. 6b, und Fig. 6b ist eine obere Ansicht, Fig. 6c eine obere Ansicht nach Hinwegnehmen des guſseisernen Deckels, Fig. 6d sind Details des Bügels und der Schrauben zum Anziehen der Keile. Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröſse gezeichnet.

Diese Steinbuchse ist in der von dem Verfasser erbauten Dampfmahlmühle des Herrn W. Rothe in Lübeck mit sehr gutem Erfolg in Anwendung; sie besteht in ihrer Grundlage aus einem cylindrischen hölzernen Buchsklotz *A*, welcher oben und unten mit schmiedeeisernen Ringen *BB* gebunden ist, und welcher mittelst hölzerner Keile in dem Auge des Bodensteins befestigt wird. Der Buchsklotz enthält zwei Ausschnitte für die Lagerfutter *CC*, welche einander diametral gegenüberliegen, und zwei andere Ausschnitte *DD* zwischen diesen, welche mit Hanf, Werg oder mit Kuhhaaren gefüllt werden, die in Oel oder Talg getränkt sind. Hierdurch wird das Mühleisen stets in gehöriger Schmiere erhalten. Das Anziehen der beiden Lagerfutter *CC* erfolgt durch die hölzernen Keile *EE*, welche von unten nach oben hin angetrieben werden, und ihr Widerlager an der inneren Wand des Buchsklotzes *A* finden. Um die Keile *EE* anzupressen, und dadurch die Lagerfutter gegen das Mühleisen zu drängen, dienen die Schrauben *ee*, deren Spitzen gegen die mit Eisen beschlagenen Rücken der Keile pressen, während ihre Muttern in den guſseisernen Bügeln *f,f*, angebracht sind. Diese Bügel sind, jeder mit zwei Schraubenbolzen *gg*, an dem Buchsklotz befestigt, und zwar in der Weise, daſs die vier Schrauben *gggg* durch die ganze Länge des Buchsklotzes bis nach oben hindurchreichen, und oben mit ihren Muttern auf einer guſseisernen Platte *h* ruhen, welche auf diese Weise mit an den Buchsklotz angeschraubt wird. Die Platte *h* trägt in der Mitte einen, den Hals des Mühleisens umschliefsenden Teller, in welchem gleichfalls ein Packungs-Material mit Schmiere, welches dem in den Ausschnitt *DD* befindlichen ähnlich ist, eingelegt wird. Um diesen Teller zu bedecken, und dadurch das Packnngs-Material gegen die Einwirkung des Mehlstaubes zu schützen, ist der Teller mit einem Deckel *c* verschlossen, welcher mittelst zweier Lappen und der Schrauben *kk* an der Platte *h* befestigt wird.

Eine dritte Konstruktion für eine *Steinbuchse und* zwar mit zweitheiligen hölzernen Lagerfuttern ist auf Taf. 50 in Fig. 1 gezeichnet. Fig. 1a ist ein Vertikalschnitt nach der Linie *ab* in Fig. 1b, Fig. 1b ist die Ansicht von unten nach oben gesehen, und Fig. 1c zeigt den Bügel mit dem Keil im Detail. Sämmtliche Figuren sind in $\frac{3}{16}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Die hier dargestellte Buchse ist in den neu erbauten Königlichen Mühlen zu Berlin in Anwendung. Sie besteht aus einem cylindrischen Gehäuse von Gufseisen *A*, welches, wie Fig. 1b zeigt durch angegossene Scheidewände in verschiedene Abtheilungen getheilt ist. Zwei dieser Abtheilungen sind zur Aufnahme der beiden einander diametral gegenüberliegenden hölzernen Lagerfutter *BB* bestimmt, welche das Mühleisen *C* umschliefsen. Das eine Futter (links) liegt mit seinem Rücken fest an der Rückwand des Gehäuses, das andere Futter (rechts) liegt mit seinem Rücken an einem Keil von Schmiedeeisen *D*, dessen abgeschrägte Flanke an der gehörig passend bearbeiteten schrägen Rückwand des Gehäuses ruht. Drückt man den Keil *D* in die Höhe, so wird das Lagerfutter gegen das Mühleisen geprefst; zieht man den Keil nieder, so wird das Lagerfutter gelüftet. Zu diesen Operationen dient die Schraube *E*, deren Kopf *e* in einen entsprechenden Ausschnitt *e'* des Keils (vergl. Fig. 1c) eingelegt ist, und deren Mutter in den schmiedeeisernen Bügel *F* eingeschnitten ist. Der Bügel *F* ist mittels der Schrauben *f*, *f*, an dem gufseisernen Gehäuse *A* der Buchse von unten befestigt, so dafs man während des Ganges die Buchsklötze anziehen und lüften kann. Freilich wird immer nur der eine von beiden Klötzen angezogen, und zwar der, gegen welchen der Seitendruck des Mühleisens gerichtet ist. Oben ist die Buchse, wie die vorige mit einer tellerförmigen Erweiterung versehen, welche zur Aufnahme einer schmierehaltenden Packung dient, und welche mittels des schmiedeeisernen Deckels *G*, der durch zwei Schräubchen gehalten wird, verschlossen ist.

Steinbuchsen mit Metall-Futtern.

Die auf Taf. 38 in Fig. 3 dargestellte, und oben auf S. 419 beschriebene Konstruktion für ein Halslager stehender Wellen, könnte fast ohne alle Veränderungen auch als Steinbuchse benutzt werden, wenn man das Gehäuse *A* in dem Auge des Bodensteins befestigt. Andere Konstruktionen zeigen die Fig. 7 und 8 auf Taf. 38.

Taf. 38. Fig. 7 zeigt eine Steinbuchse mit zwei verstellbaren Metallfuttern, Fig. 7a ist die Ansicht von unten nach oben hin gesehen, Fig. 7b ein Horizontalschnitt nach der Linie *no* in Fig. 7c, Fig. 7c ist ein Vertikalschnitt nach der Linie *pq* in Fig. 7a, und Fig. 7d ist eine Seiten-Ansicht der Buchse. Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Taf. 38. Fig. 7.

Das Gerippe der Buchse wird durch einen fast würfelförmigen hohlen Kasten von Gufseisen *A* gebildet, welcher im Innern einen cylindrischen Einsatz *B* hat, mit dem er mittelst vier Rippen zusammenhängt. Der Kasten *A*, die Rippen und der Einsatz *B* sind in einem Stück gegossen. Der Einsatz enthält zwei rechteckig begrenzte Abtheilungen zur Aufnahme der Lagerfutter *C* und *D*. Beide Futter sind von Bronze, das Futter *D*, gegen welches der Druck gerichtet ist, ist aber breiter, als das Futter *C*. Die Rücken der Futter sind keilförmig, und der Neigung dieser Keilfläche entsprechend ist die hintere Begrenzungswand der Abtheilungen, in welchen die Futter liegen, gestaltet. Schiebt man also die Futter in die Höhe, so mufs ihre innere Höhlung gegen das Mühleisen gedrängt werden, wobei der Rücken der Keilfläche des Futters auf der Rückwand der Zelle gleitet. Um die Futter aufwärts zu pressen dienen die Stellschrauben *E* und *F*. Die Schraube *E* hat ihre Mutter in einer Verstärkung der Bodenplatte *G*, welche unten mit vier Befestigungsschrauben an den inneren Einsatz *B* angeschraubt ist; durch eine Gegenmutter *e* wird sie in ihrer Lage fixirt. Die andere Schraube *F* hat ihre Mutter in einem Bügel *A*, der, wie man aus Fig. 7d und 7a ersieht sich leicht zurückklappen läfst, indem man die Flügelschraube *h* herausschraubt. Diese Einrichtung gestattet die ganze Buchse von unten leicht auseinander zu nehmen, denn sobald der Bügel *A* mit der Schraube *F* niedergeklappt ist, läfst man das Futter *C* nach unten herausfallen, und kann dann das Futter *D* nach innen schieben und herausnehmen. Wenn nach Anspannen der Schraube *F* das Futter *C* die richtige Stellung hat, kann man durch die Gegenmutter *f* die Schraube *F* feststellen. Oben ist die Buchse durch die Deckscheibe J abgeschlossen. Die Zwischenräume m und n können wie bei den vorhin beschriebenen Buchsen mit einer schmierehaltenden Packung ausgestopft werden.

Taf. 38. Fig. 8. Taf. 38. Fig. 8 giebt eine Buchse mit drei Metallfuttern, von denen jedoch nur eines nachgespannt werden kann. Fig. 8a ist die obere Ansicht nach Fortnahme der Deckplatte, Fig. 8b ein Vertikalschnitt nach der Linie rs in Fig. 8a und Fig. 8c ist eine Vorder-Ansicht des Stellkeils mit der Schraube im Detail. Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Das Gehäuse der Buchse wird hier durch einen sechsseitig prismatischen Kasten von Gufseisen A gebildet, der zur besseren Befestigung im Auge des Bodensteins an drei seiner äufseren Begrenzungsflächen noch vorspringende Rippen hat. Der Kasten hat etwa auf $\frac{2}{3}$ seiner Höhe im Inneren eine horizontale, aber in der Mitte durchbrochene Scheidewand, welche den Boden für die Gehäuse aaa und bb bildet; das Gehäuse c hat keinen Boden. Die Gehäuse aaa sind wie früher beschrieben mit einer schmierehaltenden Packung ausgestopft, während in den Gehäusen bb die beiden feststehenden Lagerfutter enthalten sind; in dem Gehäuse c aber ist das bewegliche Futter verschiebbar, hinter welchem der Keil d liegt. Die schräge Fläche des Keils findet ihr Widerlager an der entsprechend geneigten Rückwand des Gehäuses c, so dafs durch Niederziehen des Keils das Futter mit seiner Höhlung an das Mühleisen angeprefst werden mufs. Um diese Bewegung herbeizuführen dient die Zugstange e, welche mit einem Tförmigen Kopf (vergl. Fig. 8c) in die Rückseite des Keils d eingelegt ist, und unten gegen irgend einen festen Punkt des Gerüstes mittelst der Flügelmutter f angezogen werden kann. Oben sind die Gehäuse aaa bb und c durch die gemeinschaftliche Deckplatte C abgeschlossen, welche in Fig. 8a fortgenommen gedacht ist, um das Innere der Buchse zeigen zu können.

Allgemeine Anordnung der Steinstellungen. — Beispiele ausgeführter Steinstellungen.

§ 139. Wir haben hier noch einer Gruppe von Konstruktionen für die Lager stehender Wellen zu erwähnen, welche wir mit dem Namen „Steinstellungen" bezeichnen wollen, da sie unter anderen eine sehr umfangreiche Anwendung bei Mahlmühlen finden, bei denen man die horizontalen Mühlsteine, mittels dieser Vorrichtungen in die entsprechende Entfernung von einander einstellt.

Es kommt nämlich aufser in dem oben erwähnten Falle auch sonst öfter vor, dafs eine stehende Welle während ihres Ganges in vertikaler Richtung verschoben werden mufs. Hierbei mufs man dieselbe nach Erfordern heben und senken, und mit der stehenden Welle natürlich auch ihre untere Unterstützung, nämlich den Spurzapfen mit der Spurplatte und dem Spurnapf. Hierzu kommt noch gewöhnlich die Bedingung, dafs diese Verstellung sehr genau und in sehr kleinen Abstufungen soll erfolgen können. Bei der Verstellung soll ferner die Welle ihre vertikale Lage nicht ändern, und endlich soll diese Verschiebung der Welle möglichst leicht erfolgen, gewöhnlich so leicht, dafs sie ein Arbeiter mit einer Hand ohne grofse Anstrengung auszuführen im Stande ist.

Man hat für den genannten Zweck im Allgemeinen zwei Systeme in Anwendung gebracht, welche wir bezeichnen wollen:

1) Das System des beweglichen Steges,
2) das System des festen Steges.

Das System des beweglichen Steges besteht darin, dafs man ein gewöhnliches Spurlager anwendet, und dies auf einem Steg, d. h. auf einem horizontalen Balken befestigt, der zwischen zwei Säulen oder Ständer so eingezapft ist, dafs er hebelförmig in vertikaler Ebene drehbar ist. Das eine Ende des Steges dient als Drehpunkt oder Stützpunkt, während das andere Ende durch irgend einen Mechanismus gehoben und gesenkt werden kann. Hierbei bekommt jedoch der Steg allmählig eine immer mehr geneigte Lage, die stehende Welle in dem Spurlager, welche hierbei nicht genau vertikal bleibt, ändert ihren Winkel gegen das Spurlager, und wenn man nicht ein Klemmen des Spurzapfens im Spurlager herbeiführen will, so mufs man den Spurzapfen als Kugelzapfen, oder doch wenigstens an der unteren Fläche abgerundet konstruiren (vergl. Taf. 13. Fig. 6 und 7). — Das Heben des beweglichen Endes des Steges kann entweder durch Keile bewirkt werden, die man unter den Steg treibt, oder durch Schrauben, oder durch eine neue Hebel-Kombination.

Diese Konstruktionen sind jedoch im Allgemeinen ziemlich unvollkommen und veraltet, und der Verfasser hat daher in den Tafeln, des ohnehin beschränkten Raumes wegen, die Anordnungen dieses Systems nicht mit aufgenommen. Bei Spurlagern, welche einen einigermaafsen beträchtlichen Seitendruck auszuhalten haben, sind die beweglichen Stege ohnehin nicht wohl anwendbar, da bei der Drehung des Steges, das Spurlager an derselben Theil nimmt, und folglich die Lagerfutter nicht parallel mit der Axe des Zapfens bleiben können; hierdurch würde aber ein starkes Klemmen des Zapfens in den umgebenden Lagerfuttern herbeigeführt werden.

Vollkommener ist die Anordnung der Steinstellungen mit festem Stege. Hier steht das Spurlager auf einer vollkommen festen Unterlage, und nur die Spur mit den sie zunächst umgebenden Theilen wird durch irgend einen Mechanismus vertikal verschoben.

Die Vorrichtung zum Verschieben der Spur, also die Steinstellung ist oft noch mit einer andern Einrichtung verbunden, welche zwar genau genommen nicht in dieses hier zu behandelnde Thema gehört, welche aber meist auf eine so einfache Weise mit der Steinstellung zusammenhängt, dafs wir sie gelegentlich mit derselben beschreiben wollen. Diese Einrichtung besteht in dem Mechanismus das auf der stehenden Welle (dem Mühleisen) befindliche Rad, durch welches dieselbe bewegt wird, in- und aufser Eingriff mit dem treibenden Rade zu bringen.

Sehr häufig nämlich erfolgt die Uebertragung der Bewegung an das Mühleisen durch ein auf einer stehenden Hauptbetriebswelle befindliches grofses Stirnrad, um welches die Getriebe mehrerer Mahlgänge so angeordnet sind, dafs sie sämmtlich mit diesem Haupt-Triebrade in Eingriff stehen. Soll nun einer der Mahlgänge aufser Betrieb gestellt werden, während die übrigen Gänge fortarbeiten, so läfst sich dies unter anderen dadurch erreichen, dafs man das betreffende Getriebe auf seinem Mühleisen so hoch in die Höhe schiebt, dafs die Zähne des Getriebes aufser Eingriff mit den Zähnen des grofsen Stirnrades kommen, und folglich sich weit genug über dem Stirnrade befinden, um von den Zähnen des letzten nicht erreicht zu werden. Der Mechanismus zum Heben des Getriebes für den genannten Zweck ist oft mit der Steinstellung kombinirt, und wo dies bei einer hier mitgetheilten Steinstellung der Fall war, haben wir keinen Anstand genommen, ihn hier ebenfalls mitzutheilen und zu beschreiben.

Steinstellungen mit festem Stege.

Die hier mitgetheilten Steinstellungen sind theils eigenen Ausführungen des Verfassers entnommen, theils sind sie anderweit ausgeführt worden, und haben sich bewährt. Das Heben der Spur erfolgt entweder durch Hebel in Verbindung mit Schrauben (Taf. 39. Fig. 3 und Taf. 40. Fig. 1) oder unmittelbar durch eine Druckschraube, deren Mutter mittelst eines Schneckenrades und einer Schraube ohne Ende bewegt wird (Taf. 39. Fig. 1 und 2, Taf. 40. Fig. 2 und 3).

Taf. 39. Fig. 1 zeigt eine von dem Verfasser mehrfach, zuletzt in der Dampfmahlmühle des Herrn W. Rothe in Lübeck ausgeführte Steinstellung ohne Vorrichtung zum Ausrücken. Fig. 1a ist ein Vertikalschnitt nach der Linie *ab* in Fig. 1c — Fig. 1b ist eine Seiten-Ansicht der Konstruktion und Fig. 1c ist ein Horizontalschnitt nach der Linie *cd* in Fig. 1a. Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Taf. 39. Fig. 1.

Der Spurzapfen *a* ruht auf der stählernen Spurplatte, welche in einen Spurnapf *b* von Bronze eingelassen ist. Das Loch im Boden des Spurnapfes dient dazu die Spurplatte, wenn es erforderlich ist, leicht herausschlagen zu können. Der Spurnapf *b* ist von Innen genau cylindrisch ausgebohrt, und umfafst als Lagerbuchse das untere Ende des Mühleisens, indem er den auf letztes wirkenden Seitendruck aufnimmt; aufsen ist der Spurnapf *b* achteckig, entsprechend der inneren Form des Spurkastens *c*, auf dessen Boden er ruht. Vier Stellschrauben *dddd*, deren Muttergewinde in der Wandung des Spurkastens sich befinden, dienen zum Centriren des Spurnapfes, und können durch die Gegenmuttern *eeee* in ihrer Stellung fixirt werden. Von den acht Seiten des Spurkastens *b*, werden vier durch die Stellschrauben in Anspruch genommen, zwei andere Seiten (vorn und hinten) sind unverändert, aber die beiden noch übrigen (links und rechts) sind mit je zwei vorspringenden Rippen versehen, zwischen denen sich eine sorgfältig gehobelte Nuth bildet. In diesen beiden Nuthen ist der ganze Spurkasten zwischen den vorspringenden, gleichfalls passend gehobelten Leisten der beiden Ständer *ff* vertikal verschiebbar.

Die Ständer *ff* erheben sich auf der Decke eines cylindrischen Unterbaues *g* von Gufseisen, mit welchem sie aus einem Stück gegossen sind, und an den sie sich mit entsprechenden Verstärkungsrippen anschliefsen. Mittels eines Flansches *h* ist dieser Unterbau *g* mit Hilfe entsprechender (hier nicht gezeichneter) Befestigungsschrauben auf der Fundamentplatte *i* befestigt, welche ihrerseits auf einem Fundament von Schnittsteinen, oder auf einem gemauerten Pfeiler ruhen kann.

Es bleibt nur noch zu zeigen, in welcher Weise der Spurkasten *c* mit dem Spurnapf und der Spur, zugleich auch mit den Centrirungsschrauben, zwischen den Führungen, welche die Ständer *ff* darstellen, vertikal verschoben werden kann.

Der Boden des Spurkastens *c* ruht auf dem Kopf der Schraubenspindel *k*, welche von Schmiedeeisen und mit flachem, auf der Drehbank geschnittenem Schraubengewinde versehen ist. Der Kopf derselben ist viereckig in den Boden des Spurkastens eingesetzt, und dadurch ist die Schraubenspindel gehindert sich zu drehen. Die Mutter *l* für die Schraubenspindel ist von Bronze; sie ruht mittelst eines vorspringenden, sauber abgedrehten Randes in einer tellerförmigen Schaale von Gufseisen *m*, die in eine Oeffnung der Fundamentplatte *i* genau in der Mittellinie der ganzen Konstruktion eingepafst ist. Auf dem Boden dieser Schaale *m* ist die Mutter drehbar, und der aufgebogene Rand der Schaale gestattet hier einen angemessenen Vorrath von Schmiere anzubringen, welche die Auflagefläche der Mutter stets in gehörigem Schmierstande erhält. Wird die Mutter gedreht, so mufs die Schraubenspindel *k* steigen oder sinken, da sich diese nicht drehen kann (Thl. I. S. 55) und somit wird der Spurkasten mit dem Mühleisen gehoben und gesenkt.

Das Umdrehen der Mutter *l* wird mit Hilfe eines Schneckenrades *n* bewirkt, welches mittelst Nuth und Keil auf derselben befestigt ist. In dieses Schneckenrad greift eine Schraube ohne Ende *o* ein, die sich in einem Ausbau des Gehäuses *g* befindet. Vor der Zusammenstellung des Ganzen ist zuerst diese Schraube ohne Ende von dem Innern des Gehäuses her in den Ausbau hineingeschoben, und dann ist die Welle *p* von Aufsen hindurch geschoben. Das eine Ende der Schraubenwelle *p* ist in dem Ausbau gelagert, das andere Ende liegt in einem auf der Fundamentplatte befestigten Zapfenlager *q*, und trägt an seinem äufseren Ende ein kleines Ziehrad *r*, durch dessen Umdrehung man die Welle *p*, mit dieser die Schraube ohne Ende *o*, das Schneckenrad *n* und die Mutter *l* drehen, und so den Spurkasten heben oder senken kann — Da der Eingriff der Schraube ohne Ende in das Schneckenrad einen Längendruck nach der Richtung der Welle erzeugt, so hat man denselben durch die beiden Stahlringe *s*, *s*, die zu beiden Seiten des Lagers *q* so auf der Welle befestigt sind, dafs sie an den Lagerbacken reiben, aufzuheben gesucht.

Die Schraube *k* hat auf einer Länge von einem Zoll $2\frac{1}{3}$ Schraubengänge bei einem Durchmesser von 21 Linien der Spindel.

Die Steigung ist also $\frac{3}{7}$ Zoll, und um eben soviel wird das Mühleisen bei einer Umdrehung der Mutter *l* gehoben oder gesenkt. Nun erfordert eine Umdrehung der Mutter *l* auch eine Umdrehung des Schraubenrades *n*, und da dieses 48 Zähne hat, bei jeder Umdrehung der Kurbelwelle und des Rädchens r, aber durch die Schraube ohne Ende nur ein Zahn weiter geschoben wird, so sind für eine Umdrehung der Mutter l 48 Umdrehungen der Welle p und des Rädchens r erforderlich. Hieraus folgt, dafs durch 48 Umdrehungen des Rädchens r das Mühleisen mit dem Spurkasten $\frac{3}{7}$ Zoll also bei einer Umdrehung der Welle p und des Rädchens r, das Mühleisen mit dem Spurkasten

$$\frac{3}{7 \cdot 48} = \frac{1}{112} \text{ Zoll} = \frac{3}{28} = 0.107 \text{ Linien}$$

gehoben oder gesenkt wird.

Um das Mühleisen mit dem Spurkasten um einen Zoll zu heben oder zu senken bedarf es also 112 Umdrehungen der Welle p mit dem Rädchen r.

Taf. 39. Fig. 2 stellt eine Steinstellung aus einer französischen Mühle *) (zu Stains bei St. Denis) vor, und zwar ist Fig. 2a die Vorder-Ansicht der ganzen Steinstellung nebst der Vorrichtung zum Ausheben des Getriebes (s. oben S 428), Fig. 2b ist eine obere Ansicht, ohne diese Vorrichtung, und Fig. 2c ist ein Vertikalschnitt nach der Linie ef in Fig. 2c. Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{8}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Taf. 39. Fig. 2.

Die Unterstützung des ganzen Systems wird durch einen starken gufseisernen Balken (Steg) A gebildet, welcher mit seinen beiden Enden zwischen zwei gufseisernen Säulen, die zugleich zur Unterstützung des Mühlengerüstes dienen, verschraubt ist. — Diese Säulen sind in der Zeichnung fortgelassen. Der Querschnitt des Steges ist nach den Enden hin kreuzförmig, in der Mitte Tförmig, weil sich hier an die Horizontalrippe des Kreuzes eine halbkreisförmige Ueberhöhung B ansetzt, die ebenfalls von Tförmigem Querschnitt, auf ihrem Scheitel den Spurkasten C trägt. Der Steg A mit der Ueberhöhung B und dem Spurkasten C sind aus einem Stück gegossen. Auf dem Boden des Spurkastens C steht eine cylindrische Buchse D von Gufseisen, welche von den vier Centrirungsschrauben $dddd$, die ihre Muttern in der Wandung des Spurkastens haben, ergriffen wird, und durch dieselben gehörig eingestellt werden kann. Diese Buchse endlich enthält den Spurnapf E mit der Spur e. Der Spurnapf ist ebenfalls cylindrisch und in die Höhlung der Buchse D genau eingepafst, so dafs er sich

---

*) Vergleiche des Verfassers: »Archiv für den praktischen Mühlenbau.« II. Abtheil. Heft 1. S. 4 und folg.

in derselben auf- und niederschieben läfst. Diese Operation, durch welche das Heben und Senken des Mühleisens bewirkt wird, geschieht mit Hilfe der Schraube *F*. Die Schraube *F* ist von Schmiedeeisen, mit scharfem Gewinde von 2,5 Millimètres (etwa 1,15 Linien) Steigung geschnitten, der obere Theil derselben, welcher ohne Gewinde ist, geht durch den Boden des Spurkastens *C* hindurch, ist in demselben durch eine Nuth, in welche eine an der Spindel befestigte Feder *f* eingreift, gegen Drehung gesichert, und reicht unter den Boden des Spurnapfes *E*, welcher auf dem Kopf der Schraubenspindel ruht. Die Höhlung der Buchse *D* ist weit genug, so dafs sich diese mit dem Spurnapf, wenn die Centrirungsschrauben *dd* in Wirksamkeit treten, gegen den Kopf der Schraube verschieben läfst, wobei die Buchse *D* auf dem Bodem des Spurkastens *C*, der Spurnapf *E* aber auf dem Kopf der Schraube *F* gleiten. Die Schraube bildet also die eigentlich tragende Konstruktion für den Spurnapf und für das Mühleisen mit dem auf dem Kopfe desselben ruhenden Läuferstein; durch Heben oder Senken der Schraube *F*, wird auch das Mühleisen mit Zubehör gehoben oder gesenkt.

Um Solches zu bewirken braucht man nur die Mutter *g* der Schraube *F* zu drehen (vergl. Thl. I. S. 55), und dies geschieht mit Hilfe des gufseisernen Schneckenrades *G*, welches auf der bronzenen Mutter *g* befestigt ist. Die Mutter selbst ruht dabei mit einem Flansch auf einer kleinen abgedrehten Erhöhung in der Mitte des Steges *A*. Zur Bewegung des Schneckenrades *G* ist die Schraube ohne Ende *G* angewendet, welche in die Zähne desselben eingreift, und mit Hilfe ihrer Welle *h*, die in den an dem Stege *A* verschraubten Lagern *ii* ruht, und an beiden Enden mit den Ziehrädern *kk* versehen ist, gedreht werden kann.

Das Schneckenrad *G* hat 21 Zähne, und da bei jeder Umdrehung der Schraube ohne Ende nur ein Zahn des Schneckenrades weiter geschoben wird, so gehören 21 Umdrehungen der Schraube ohne Ende oder des mit derselben zusammenhängenden Kurbelrädchens dazu, um die Mutter *g* einmal umzudrehen, und folglich um das Mühleisen um den Betrag der Steigung der Spindel zu heben oder zu senken. Da diese Steigung 1,15 Linien ist, so wird bei einer Umdrehung des Rädchens *k* oder der Mutter *g* das Mühleisen

$$\frac{1,15}{21} = 0,055 \text{ Linien}$$

gehoben oder gesenkt.

Es bleibt noch die Vorrichtung zum Ausheben des Getriebes (S. 428) zu beschreiben. Das Getriebe *J* ist genau cylindrisch und, auf das Mühleisen *K* passend, ausgebohrt; es läſst sich also auf dem Mühleisen auf- und niederschieben, ist aber durch die lange Feder *l*, die im Mühleisen befestigt ist und in eine Nuth des Getriebes einfaſst, gezwungen, sich mit dem Mühleisen gemeinschaftlich zu drehen. Das Getriebe *J* würde auf dem Mühleisen herunterfallen, wenn es nicht durch eine Hülse *L* unterstützt würde, die gleichfalls mit einer Nuth versehen ist, in welche die Feder des Mühleisens paſst; unter dieser Hülse liegt eine starke Schraubenmutter *M*, welche mit zwei Handhaben *NN* versehen ist, und deren Gewinde *m* in das untere Ende des Mühleisens eingeschnitten ist. Man sieht leicht, daſs, wenn man die Mutter *M* auf dem Mühleisen in die Höhe schraubt, die Hülse *L* gleichfalls in die Höhe geschoben wird, und mit derselben das auf ihr ruhende Getriebe *J*. Soll der Mahlgang wieder in Betrieb gesetzt werden, so hat man nur nöthig das Getriebe durch Niederschrauben der Mutter *M* soweit zu senken, daſs es wieder in gehörigen Eingriff mit den Zähnen des Stirnrades kommt, von welchem der Betrieb ausgeht.

Taf. 39. Fig. 3 zeigt eine einfache Steinstellung durch Hebel und ohne Vorrichtung zum Ausrücken des Getriebes. Fig. 3a ist eine Vorder-Ansicht. Fig. 3b ein Theil der Ansicht von oben, Fig. 3c ein Vertikalschnitt nach der Linie *gh* in Fig. 3a, und Fig. 3c ist die Verbindung des Hebels mit der Schraubenmutter im Detail. Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{12}$ der natürlichen Gröſse gezeichnet. Taf. 39. Fig. 3.

Die hier dargestellte Steinstellung rührt von einer Farbenmühle in der Nähe von Berlin her. Der Steg *A* ist von Holz, und besteht aus zwei parallelen Halbhölzern, die zwischen den Ständern des Mühlengerüstes so verzapft sind, daſs man sie durch Keile nach zwei Dimensionen in der Horizontalen verstellen kann (vergl. § 117 und Tafel 25). Der Spurkasten *B* ist daher nicht mit besonderen Centrirungsschrauben versehen, enthält vielmehr unmittelbar in seiner gehörig ausgebohrten Höhlung den genau passend abgedrehten Spurnapf *C* mit der Stahlspur. Durch vier Schraubenbolzen ist der Spurkasten auf dem Balken des Steges befestigt. Der Spurnapf *C* läſst sich in der Höhlung des Spurkastens auf- und nieder schieben; er ruht dabei auf dem Kopfe des Bolzens *D*, der in dem Boden des Spurkastens seine Führung bekommt, und der mit seinem untern Ende in einer Vertiefung des schmiedeeisernen Hebels *E* steht. Das eine Ende des Hebels *E* ist abgerundet und liegt in dem Lager F, welches aus Gufseisen konstruirt, und auf den Grundschwellen GG, befestigt ist. Auf denselben Schwellen steht eine kleine Pfanne H, welche dem unteren Ende der schmiedeeisernen Schraube J zum Stütz- und Dreh-Punkte dient. Diese Schraube kann mittelst des horizontalen, an ihrem obern Ende befestigten Rädchens K gedreht werden, sie enthält die Bronze-Mutter i, welche mit zwei Zapfen kk versehen ist, über welche das obere, gabelförmig getheilte Ende l, des Hebels E greift. Es ist leicht zu übersehen, dafs durch Drehung der Schraube J die Mutter i gehoben oder gesenkt werden mufs, da sie durch die Zapfen kk verhindert ist sich selbst zu drehen. Auf diese Weise bewegt man das Ende l des einarmigen Hebels E, und damit den Bolzen D und den Spurnapf C mit dem Mühleisen. Bei dieser Bewegung beschreibt das Hebel-Ende l einen Kreisbogen um den Stützpunkt F, folglich müssen auch die Zapfen kk der Mutter i einen solchen Kreisbogen beschreiben, und daraus folgt, dafs wenn der Stützpunkt H unverrückbar ist, die Schraubenspindel J nur in einer Stellung des Hebels E genau vertikal sein kann, während sie in jeder anderen Lage (wie auch in der Figur 3a gezeichnet ist) von der Vertikalen abweichen mufs.

Taf. 40. Fig. 1. Taf. 40. Fig. 1 stellt eine Steinstellung mit Hebel, verbunden mit einer Vorrichtung zum Ausrücken des Getriebes dar. Fig. 1a ist die obere Ansicht, Fig. 1b die Vorder-Ansicht, beide ohne die Ausrücke-Vorrichtung gezeichnet, Fig. 1c ist ein Vertikalschnitt nach der Linie ab in Fig. 1b, Fig. 1d ist ein Vertikalschnitt des Hebels nach der Linie cd in Fig. 1b, Fig. 1e ist ein Vertikalschnitt des Spurnapfes nach der Linie ef in Fig. 1f, und Fig. 1f ist eine Ansicht des Spurnapfes von unten nach oben gesehen. Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{10}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Diese Steinstellung ist in einer Dampfmahlmühle zu St. Denis in Anwendung *). Ein starker Steg von Gufseisen A dient zur Unterstützung der ganzen Vorrichtung. Derselbe ruht mit seinen beiden flachen Enden auf Fundamentpfeilern von Mauerwerk BB nnd ist auf denselben durch schmiedeeiserne Fundament-Anker CC verbolzt. Um den Steg durch eine Seitenverschiebung vorläufig richtig einstellen zu können, kann man ihn durch die bei-

---

*) Vergl. des Verfassers Werk: „Archiv für den praktischen Mühlenbau". Zweite Abtheilung, S. 27.

den Keile *aa*, welche sich zwischen die Pfeiler *BB* und zwischen die an den Steg angegossenen Knaggen *bb* stemmen, antreiben. Die Oeffnungen für die Anker *C* in den Enden des Steges sind, um dieser Verschiebung Raum zu geben, länglich, wie dies in Fig. 1a durch Fortschneiden der Muttern für die Fundament-Anker sichtbar gemacht ist. In der Mitte des Steges ist der cylindrische Spurkasten *D* angegossen, und durch zwei starke Verstärkungsrippen mit der Stegplatte in Zusammenhang gebracht. Die Seitenwände des Spurkastens *D* enthalten die Muttern für die vier Centrirungsschrauben *dddd*, durch welche das genauere Einstellen des Mühleisens bewirkt wird. Durch diese Centrirungsschrauben läfst sich eine Buchse *E*, von der Form eines achteckigen Parallelepipedum auf dem Boden des Spurkastens horizontal verschieben. Die Buchse ist cylindrisch ausgebohrt, und in dieselbe pafst der cylindrisch abgedrehte Spurnapf *F* von Bronze mit der Spurplatte, auf welcher der Spurzapfen des Mühleisens läuft. Es kommt nun darauf an, den Spurnapf *F* in der Buchse *E* auf und nieder zu schieben, und hierzu dient der Stempel *G*, der mit seinem oberen abgerundeten Ende unter den Boden des Spurnapfes fafst, während das untere, ebenfalls abgerundete Ende in die Höhlung des starken gufseisernen Hebels *H* eingreift. Der Hebel *H* ist mit seinen beiden gelenkförmigen Enden an den schmiedeeisernen Bolzen *J* und *K* aufgehängt. Der eine dieser Bolzen *J* (links in Fig. 1a und 1b) ist mittelst der Mutter *i* und des Ansatzes *o* fest an den Steg *A* angeschraubt, und bildet mit seinem unteren Ende den Drehpunkt des Hebels *H*, während der andere Bolzen *K*, ohne solchen Ansatz, frei durch die Verstärkung des Steges *A* sich durchschieben läfst, mit seinem oberen Ende an der Schraubenmutter *k* aufgehängt ist, und mit seinem unteren Ende den Hebel *H* im Angriffspunkt der Kraft erfafst. Durch Anziehen oder Lösen der Schraubenmutter *a* kann dieses Ende des Hebels gehoben oder gesenkt werden, und damit zugleich, indem sich der Hebel um das Ende des Bolzens *J* dreht, der Stempel *G* und mit diesem der auf ihm ruhende Spurnapf mit dem Mühleisen. Auch hier ist, wie bei der vorigen Steinstellung zu bemerken, dafs sowohl der Stempel *G*, als der Bolzen *K* bei der Stellung des Mühleisens ein wenig aus der vertikalen Lage abweichen müssen, was immerhin als ein Uebelstand anzusehen ist. Das Anziehen der Mutter *k* mufs durch einen besonderen Schraubenschlüssel geschehen.

Wir haben noch die Vorrichtung zum Ausheben des Getriebes zu beschreiben. — In der Mitte des Hebels *H*, unmittelbar unter der Stelle, wo der Stempel *G* steht, hat der Hebel eine Verbreiterung *h*, durch welche der Gelenkbolzen geht, an welchem das gabelförmige Ende *l* einer schmiedeeisernen Schraubenspindel *L* aufgehängt ist. Diese Schraubenspindel kann vermöge des Gelenkes bei *l*, durch ihr Gewicht immer vertikal abwärts hängen, selbst wenn der Hebel *H*, behufs der Steinstellung eine geneigte Lage hat. Auf der Schraubenspindel *L* steckt ein gufseiserner Querarm *M*, der jedoch kein Muttergewinde enthält, sondern sich über die Schraube frei fortschieben läfst, und dieser Querarm trägt mittelst der beiden schmiedeeisernen Stangen *NN*, die in hülsenförmigen Ansätzen *nn* des Steges *A* ihre Führung bekommen, oben einen Ring *O* aus Gufseisen. Auf diesem Ringe ruht das Getriebe *P*, wenn es in die Höhe gehoben und dadurch ausgerückt ist, wie dies die, in der Figur 1c angedeutete, Stellung zeigt. Ist das Getriebe mit dem Haupt-Triebrade in Eingriff, so sitzt es auf der konischen Verstärkung *Q* des Mühleisens *R*; dabei ist der Ring *O* mit dem Querarm *M* soweit niedergelassen, dafs er das Getriebe *P* gar nicht berührt, dieses sich vielmehr frei, und ohne an dem Ringe zu schleifen, drehen kann. Erst wenn das Getriebe ausgerückt werden soll, schiebt man, nachdem das Werk in Stillstand gesetzt ist, den Querarm *M* mit dem Ringe soweit in die Höhe, dafs der Ring sich unter das Getriebe legt, und dieses aufser Eingriff bringt. Die zum Ausheben und Einrücken nöthige Verschiebung des Ringes *O*, und des mit demselben zusammenhängenden Querarmes *M*, wird durch die mit Armen und Handhaben versehene Schraubenmutter *S* bewirkt, die man nach Erfordern auf der Schraubenspindel *L* auf- oder niederschraubt.

Taf. 40. Fig. 2. Taf. 40. Fig. 2 giebt eine Steinstellung mit Druckschraube, und ohne Vorrichtung zum Ausheben des Getriebes. Fig. 2a ist eine Ansicht der ganzen Konstruktion, wobei jedoch der Steg der Raumersparnifs wegen nur in seinem mittlern Theile, und nur an einer Seite mit seinem Anschlufs an die Säule des Gerüstes gezeichnet ist. Fig. 2b ist ein Vertikalschnitt nach der Linie *gh* in Fig. 2a. Beide Figuren sind in $\frac{1}{8}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Die hier dargestellte Steinstellung ist in der Maschinenfabrik von A. Borsig in Moabit bei Berlin ausgeführt. Sie wird getragen von einem starken gufseisernen Stege *A*, welcher mit seinen Enden an zwei hohle gufseiserne Säulen *B*, welche zugleich zur Unterstützung des Mühlengerüstes dienen, angeschraubt ist. (In der Zeichnung ist nur eine der beiden Säulen gezeichnet.)

In der Mitte erweitert sich der Steg zu einem cylindrischen Spurkasten *C*, der aber keinen Boden hat; die Buchse *D* ist vielmehr mittelst eines vorspringenden Flansches auf den obern Rand des Spurkastens aufgehängt, und kann durch zwei Schrauben *cc*, nachdem sie gehörig centrirt ist, festgeschraubt werden. Um dies Centriren möglich zu machen, müssen die Oeffnungen für diese Schrauben *cc* in dem Flansch der Buchse hinreichend geräumig sein. Die Centrirungsschrauben *dddd*, welche in der Wand des Spurkastens ihre Muttern haben, wirken gegen die Buchse *D*, in welcher sich der Spurnapf *E* mit der Spurplatte *e*, genau passend verschieben läfst. Der Spurnapf umschliefst in ziemlicher Länge das untere Ende des Mühleisens *F*, und der Spurzapfen ruht frei auf der stählernen Platte, die man, wenn es erforderlich ist, durch eine in dem Boden des Spurnapfes angebrachte Oeffnung heraus schlagen kann. Der Spurnapf *E* mit dem Mühleisen *F* wird von dem Kopf der starken schmiedeeisernen Schraube *G* getragen, deren lange Bronze-Mutter *g* in einer Höhlung des an dem Steg *A* aufgehängten gufseisernen Trägers *H* ruht. Die Schraube *G* ist an der Drehung gehindert, die Mutter *g* aber kann mit Hilfe des Schneckenrades *J* und der eingreifenden Schraube ohne Ende *K* gedreht werden, und hierdurch läfst sich (vergl. Thl. I. S. 55) die Schraube *G* mit dem darauf ruhenden Spurnapf und dem Mühleisen heben und senken. Die Schraube ohne Ende *K* liegt zwischen den beiden an den Steg *A* und an den Träger *H* angeschraubten Lagern *mm*; ihre Axe *l* ist bis zu einem passenden Punkte aufserhalb des Mühlengerüstes verlängert, wird hier durch ein kleines an der Säule *B* befestigtes Lager *n* unterstützt, und kann mit Hilfe des Rädchens *M* mit der Hand gedreht werden.

Das Schneckenrad *J* hat 33 Zähne, und die Schraube *G* hat $\frac{1}{2}$ Zoll Steigung, wenn man also eine ähnliche Betrachtung, wie bei den Steinstellungen Taf. 39. Fig. 1 und 2 anstellt, so ergiebt sich, dafs bei einer Umdrehung des Rädchens *M* oder der Schraube ohne Ende *K* das Mühleisen mit dem Steine

$$\frac{1}{2.33} = \frac{1}{66} \text{ Zoll oder } 0{,}182 \text{ Linien}$$

gehoben wird.

Taf. 40. Fig. 3 endlich zeigt eine Steinstellung mit Vorrichtung zum Ausheben des Getriebes mittelst Stellschraube, und mit hölzernen Stegen. Fig. 3a ist eine Ansicht der ganzen Konstruktion, in welcher die Stege, das Getriebe und der Ring zum Taf. 40. Fig. 3.

Ausrücken desselben durchschnitten sind, Fig. 3b ist ein Querschnitt des Spurkastens mit Zubehör, nach der Linie *ik* in Fig. 3c; Fig. 3c ist die obere Ansicht dieser Theile, und Fig. 3d ist eine obere Ansicht des zur Ausrücke-Vorrichtung gehörigen Querarms. Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Die hier dargestellte Konstruktion ist von dem Verfasser angegeben und mehrfach ausgeführt worden.

Zwei hölzerne Stege *A* und *B*, welche zwischen den Stielen des Mühlengerüstes verzapft sind, und in einiger Entfernung über einander liegen, dienen zur Unterstützung des ganzen Systems. Der obere Steg *A* trägt den Spurkasten *C* von Gufseisen, der mittelst zweier Schraubenbolzen darauf befestigt ist. In dem Spurkasten steht die Buchse *D*; gegen welche die Centrirungsschrauben *dddd* wirken, und in dieser Buchse ist der cylindrisch und genau passend abgedrehte Spurnapf *E* auf und nieder verschiebbar. In diesem steht die Spur mit dem Mühleisen *F*. Der Spurnapf ruht auch hier wie bei der vorigen Konstruktion, und bei denen auf Taf. 39 in Fig. 1 und 2 dargestellten Steinstellungen auf dem Kopf einer schmiedeeisernen Schraubenspindel *G*, welche durch eine Nuth und durch eine im Boden des Spurkastens angebrachte Feder verhindert ist, sich zu drehen. Diese Schraubenspindel reicht bis in den untern Steg *B* hinab, und stützt sich mittelst ihrer Schraubenmutter auf eine, in den Steg eingelegte, eiserne Platte. Auf der Schraubenmutter sitzt das Schneckenrad *H*, und dieses steht in Eingriff mit der Schraube ohne Ende *J*, auf deren Welle das Rädchen *K* sitzt. Der ganze Mechanismus entspricht sehr genau den, bei Gelegenheit der Fig. 1 und 2 auf Taf. 39 und der Fig. 2 auf Taf. 40, erörterten Einrichtungen, und bedarf hier keiner weiteren Erläuterung; es ist daher auch die Detailirung desselben in der Zeichnung unterblieben. Da das Schneckenrad 24 Zähne und die Schraube *G* $\frac{3}{8}$ Zoll Steigung hat, so entspricht einer Umdrehung des Rädchens *K* oder der Schraube ohne Ende *H* eine Verschiebung des Mühleisens von

$$\frac{3}{8.24} = \frac{1}{64} \text{ Zoll} = 0{,}187 \text{ Linien.}$$

Das Eigenthümliche der Konstruktion besteht theils in der Einfachheit der ganzen Anordnung für die Steinstellung, welche dadurch, dafs die schwersten Stücke derselben von Holz sind, viel billiger wird, als die meisten der vorhin beschriebenen Steinstellungen mit Druckschrauben, theils aber auch in der Art und Weise, wie die

Schraube G **neben ihrem Gebrauch zur Steinstellung auch noch zur Aushebung des Getriebes benutzt wird.** Dies geschieht folgendermaafsen:

Auf der Schraube G befindet sich über der, mit dem Schneckenrade H versehenen, und zur Steinstellung dienenden Mutter, noch eine zweite Mutter L mit vier Kreuzarmen. Diese läfst sich, während die Schraube G feststeht, auf derselben auf- und niederschrauben, und schiebt dabei einen Querarm von Gufseisen M im ersten Falle vor sich hin, während sie denselben beim Niederschrauben allmählig folgen läfst. Der Querarm M darf daher in seiner mittleren Verstärkung keine Mutter haben, sondern ist, frei gleitend, auf die Spindel G aufgesteckt. Derselbe hat die gleiche Bedeutung, wie der mit demselben Buchstaben M in Fig. 2 bezeichnete Arm und in gleicher Weise sind auch die Stangen N und der Ring O wie dort zu dem Zwecke angeordnet, beim Hinaufschrauben der Mutter L unter das Getriebe P zu fassen, dieses in die Höhe zu heben, und aufser Eingriff mit dem treibenden Stirnrade zu bringen. Bei der hier dargestellten Ausführung ist die Nabe Q mit den Armen, von dem Zahnkranze des Getriebes unabhängig gegossen, und auf dem viereckigen Mühleisen festgekeilt; der Zahnkranz setzt sich mittelst schräger Ansätze auf die Arme auf, und nimmt dieselben mit in Umdrehung, läfst sich aber auch leicht von denselben abheben, und, auf dem Ringe O ruhend, in die Höhe schieben.

b) Gelenke.

Allgemeine Anordnung der Gelenke. — Gelenke mit Stift und mit fester Axe. — Offene und geschlossene Kopflager.

§ 140. Die zweite Gruppe der verbindenden Maschinentheile welche eine rotirende Bewegung zulassen, bilden nach S. 275 die Gelenke oder Charniere. Wir verstehen unter einem Gelenk eine solche Verbindung zweier Maschinentheile, welche eine Veränderung des Winkels gestattet, den die Längendimensionen dieser Maschinentheile mit einander bilden, und zwar in der Weise, dafs die Maschinentheile entweder beide, oder wenigstens einer von ihnen sich um einen als fixe Axe anzusehenden Zapfen drehen können; dabei ist vorausgesetzt, dafs eine Trennung der Maschinentheile nicht erfolgen könne.

Die Gelenke finden hiernach z. B. Anwendung bei der Verbindung von Hebeln mit Stangen, von Stangen untereinander, bei Kurbeln u. s. w.

Jedes Gelenk besteht im Allgemeinen:

1) aus der Drehaxe, welche entweder in dem einen der zu verbindenden Maschinentheile befestigt ist (Gelenke mit fester Axe), während sich der andere Maschinentheil um dieselbe drehen kann: oder in einem Zapfen (Gelenkstift) besteht, welcher so eingeschoben ist, dafs sich beide zu verbindende Maschinentheile um denselben frei drehen können (Gelenke mit Stift),

2) aus den Endungen der beiden Maschinentheile, welche mit einander durch das Gelenk verbunden werden sollen. Sind diese beiden Maschinentheile Stangen, oder können wenigstens ihre Enden an der Verbindungsstelle stangenförmig gestaltet werden, so pflegt man das eine Ende gabelförmig zu machen, so dafs es den Stift oder die Gelenkaxe an beiden Enden umfafst, während das Ende des anderen Maschinentheils zwischen den beiden Gabelschenkeln die Gelenkaxe umfafst. Man unterscheidet daher gewöhnlich:

a) die Gabel des Gelenkes,

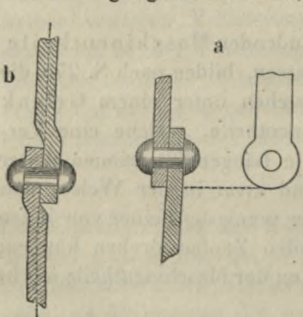
b) den Kopf des Gelenkes.

Die Gelenke lassen sich hiernach eintheilen in:

1) Gelenke mit Stift,

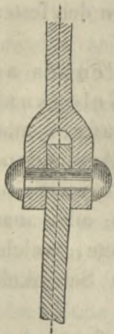
2) Gelenke mit fester Axe.

Die Gelenke mit Stift werden nur bei leichteren Konstruktionen und da angewendet, wo weder beträchtliche Drucke auf die Verbindungsstelle wirken, noch beträchtliche Geschwindigkeiten bei der Bewegung vorkommen, und wo eine Abnutzung, oder eine kleine Ungenauigkeit in dem Gelenke keine erheblichen Nachtheile herbeiführt. Sie können dadurch gebildet werden, dafs man die Enden der beiden Stangen *flach* gestaltet, durchbohrt, und einen Stift durchsteckt, welchen man an beiden Enden umnietet (vergl. den nebenstehenden Holzschnitt *a*). Wenn hierbei in der Richtung der Stangen ein Druck von einiger Erheblichkeit wirksam ist, so würde derselbe, da die Längenrichtungen nicht



zusammen in eine gerade Linie fallen, ein Kräftepaar bilden, das durch die Widerstandsfähigkeit des Stiftes aufgehoben werden müfste. Um in solchem Falle das auf Verbiegen des Stiftes wirkende Kräftepaar zu vermeiden, kröpft man die Stangen-Enden so, dafs die Mittellinien der Stangen in die Ebene fallen, in welcher die Gelenkfuge liegt (vergl. den Holzschnitt *b*).

Bei solchen Gelenken mit Stift, welche eine gröfsere Genauigkeit erfordern, wendet man lieber die Konstruktion mit Gabel und Kopf an, indem man nicht beide Stangen-Enden kröpft, sondern die eine Stange vollkommen grade läfst, und die andere nach beiden Seiten um diese herum biegt. So entsteht an dieser Stange die Gabel, an der andern der Kopf, wie der nebenstehende Holzschnitt andeutet. Wie diese Konstruktion in entsprechender Form auszuführen ist, zeigt Tafel 41. Figur 1.



Die Gelenke mit fester Axe wendet man in allen Fällen an, wo auf die Axe beträchtliche Drucke wirksam sind, oder wo die Gelenkbewegungen mit bedeutenden Geschwindigkeiten erfolgen und endlich wo man eine gewisse Genauigkeit bei dem Gange der Maschine erhalten will.

Man kann die drei oben genannten und durch die Holzschnitte erläuterten Konstruktionen auch hier anwenden, indem man die feste Axe in einem der beiden Gelenktheile anordnet. Hierbei treten dann folgende drei verschiedene Fälle der Konstruktion auf.

1) Die feste Axe bildet einen Zapfen, welcher über den Theil, in welchem sie befestigt ist, frei hervorsteht, und welcher gestattet, dafs man das andere Ende von der Seite her frei aufschieben kann. Dies würde z. B. eintreten, wenn man bei den beiden oben zuerst beschriebenen Anordnungen *a* und *b* die Axe in dem einen Stangenkopf befestigte, und als Zapfen über die Ebene desselben frei hervorstehen liefse. Eine solche Konstruktion kommt unter anderen bei den Kurbelgelenken vor.

2) Die feste Axe bildet zwei Zapfen, welche über den Theil, in welchem die Axe befestigt ist, zu beiden Seiten frei hervorstehen. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn man die Anordnung mit Kopf und Gabel wählt, und wenn man die Axe in demjenigen Theil befestigt, welcher den Kopf der Konstruktion bildet; der andere, gabelförmige Theil läfst sich dann nicht mehr von dem Ende des Zapfens her aufschieben, sondern mufs so eingerichtet sein, dafs man ihn von

der Seite her ansetzen, und um die beiden Zapfen zusammenstellen kann. Man mufs also die beiden Schenkel der Gabel mit getheilten Zapfenlagern versehen, welche man um die festen Zapfen zusammenbaut.

3) Die feste Axe bildet einen Zapfen, der aber an seinen beiden Enden befestigt ist und zwischen diesen beiden Enden in seinem mittleren Theil die Angriffsstelle für den anderen Maschinentheil darbietet. Dieser Fall tritt dann ein, wenn man die Axe in dem gabelförmigen Theil des Gelenkes befestigt; der Kopf des Gelenkes läfst sich dann wie im *vorigen Falle* nicht anders aufschieben, als indem man das Lager theilt, und um den festen Zapfen zusammenbaut.

Wenn man eine Stange mittelst eines Gelenkes an einen Hebel befestigt, so befestigt man die Gelenkaxe gewöhnlich in dem Hebel und selten in der Stange; man kann dabei jede der eben erwähnten Anordnungen zur Anwendung bringen, d. h. man kann entweder den Zapfen an der einen Seite, oder an beiden Seiten des Hebels hervorragen lassen, oder man kann den Hebel gabelförmig gestalten und die Stange, welche dann einen einfachen Kopf bekommt, zwischen den Schenkeln dieser Gabel angreifen lassen.

Das Ende desjenigen Maschinentheils, welcher die feste Axe umfafst, wird bei den Gelenken mit fester Axe gewöhnlich in analoger Weise, wie die Zapfenlager konstruirt d. h. man bildet zwei Lagerfutter, die aus einem geeigneten Material (vergl. § 118. S. 284) bestehen, und versieht dieselben mit einer passenden Schmiervorrichtung (vergl. § 119 S. 288). Hierbei mufs man dafür sorgen, dafs die Lagerfutter nach etwaiger Abnutzung sich wieder anziehen lassen; man wendet zu diesem Zweck etweder Schrauben oder Keile an. Dergleichen Konstruktionen nennt man, da sie den Zapfenlagern nachgebildet sind, und gewöhnlich die Köpfe der Stangen darstellen: **„Kopflager“**.

Man unterscheidet offene und geschlossene Kopflager.

Die offenen Kopflager werden in den Fällen 2 und 3, deren wir eben Erwähnung gethan, angewendet; sie müssen so konstruirt sein, dafs sie sich um den Zapfen herum zusammenstellen lassen, während die geschlossenen Kopflager in dem oben unter 1 erwähnten Falle Anwendung finden, und nur da gebraucht werden können, wo sich das Gelenkstück über das eine Ende des Gelenkzapfens frei aufschieben läfst. — Die Zeichnungen auf Tafel 41 und die Beschreibungen des folgenden Paragraphen geben zu dem Gesagten zahlreiche Beispiele.

Beispiele von Gelenk-Konstruktionen und von offenen und geschlossenen Kopflagern.

§ 141. Auf Tafel 41 ist eine Sammlung von Beispielen ausgeführter Gelenke und Kopflager, die wir in Folgendem beschreiben wollen.

Taf. 41. Fig. 1 zeigt ein einfaches Gelenk zur Verbindung zweier schmiedeeiserner Stangen von kreisförmigem Querschnitt. Fig. 1a ist die Ansicht in der Ebene, in welcher die Bewegung stattfindet, Fig. 1b ist die Ansicht normal zu dieser Ebene. Beide Figuren sind in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Taf. 41. Fig. 1.

Die eine Stange endet gabelförmig, die andere (obere) hat den Kopf des Gelenkes; beide gehen aus dem kreisförmigen Querschnitt zunächst in einen achteckigen, und dann in die entsprechenden Formen über. Die Drehaxe des Gelenkes ist durch einen Stift von Schmiedeeisen oder von Stahl gebildet, welcher an dem einen Ende einen Kopf hat, an dem anderen Ende aber durch eine aufgesteckte Scheibe mit vorgestecktem Splint gehalten wird.

Offene Kopflager mit schmiedeeisernem Bande.

Taf. 41. Fig. 2 stellt ein offenes Kopflager vor mit rechteckigem Bügel; die Stange ist in der Zeichnung fortgelassen. Fig. 2a ist die Vorder-Ansicht normal zu der Ebene, in welcher die Bewegung stattfindet, Fig. 2b ist die Seiten-Ansicht in der genannten Ebene. Beide Figuren sind in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Taf. 41. Fig. 2.

Die Lagerfutter sind von Bronze mit vorspringenden Rändern, hinter welche sich der schmiedeeiserne Bügel einlegt. Hakenkeil und Schliefskeil sind von Stahl; da wo dieselben durch den Bügel gehen, ist dieser verstärkt, auch sieht man in Fig. 2b, dafs der Schlitz, welchen der Bügel für diese Keile enthält, die zum Anziehen der Keile nöthige Verlängerung hat. Das untere Lagerfutter stützt sich gegen den Kopf der Stange, an welcher es befestigt werden soll.

Taf. 41. Fig. 3. **Taf. 41. Fig. 3** zeigt eine sehr ähnliche Konstruktion, welche sich von der vorigen dadurch unterscheidet, dafs das obere Lagerfutter in seiner äufseren Begrenzung spitzbogenförmig gestaltet ist, und dafs folglich auch der Bügel oder das Band eine entsprechende Form hat. Fig. 3a ist die Vorder-Ansicht, normal zu der Ebene, in welcher die Bewegung liegt; Fig. 3b ist ein Vertikalschnitt mit einer Normalen zu dieser Ebene nach der Linie *ab* in Fig. 3a. Beide Figuren sind in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Man bemerke, dafs an der oberen Spitze des gothischen Bogens das Band stärker gehalten ist, als an den Seiten. Die Form ist etwas gefälliger, aber nicht ganz so leicht herzustellen, wie Fig. 2.

Taf. 41. Fig. 4. **Taf. 41. Fig. 4** giebt ein offenes Kopflager von der Pleyelstange einer englischen von D. Gooch erbauten Lokomotive, Fig. 4a ist die Vorder-Ansicht normal zur Ebene, in welcher die Bewegung erfolgt, Fig. 4b ist ein Vertikalschnitt mit einer Normalen zu dieser Ebene nach der Linie *cd* in Fig. 4a. Beide Figuren sind in $\frac{1}{10}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Die Lagerfutter sind in ihrer äufseren Begrenzung achteckig, der vorspringende Rand aber, hinter welchen sich das schmiedeeiserne Band legt, ist rund und verdeckt diese achteckige Form, welche daher in Fig. 4a nur punktirt erscheint. Obwohl die Lagerfutter, ihrer Hauptmasse nach, von Bronze sind, so ist doch die innere Höhlung derselben an den Stellen, auf welche vorzugsweise der Druck wirkt, bei x und y tiefer ausgedreht, und mit einer Antimonlegirung ausgegossen. Um das Band zusammenzuhalten sind zwei Hakenkeile p und q angewandt, zwischen welche der Schliefskeil r eingetrieben wird. Dieser ist durch die Klemmschrauben *ss*, sowie durch einen kleinen Splint, der durch sein unteres Ende getrieben ist, gegen eine unbeabsichtigte Lösung gesichert. t ist ein Schmiernapf, dessen Körper von Schmiedeeisen mit dem Bande in einem Stück geschmiedet ist, während der Deckel von Messing besonders aufgesetzt ist. Die Pleyelstange, zu welcher dieses Kopflager gehört hat eine wirksame Länge von $6\frac{1}{2}$ Fufs (engl.), ist in der Mitte $3\frac{1}{2}$ Zoll, an den Enden 3 Zoll stark; der Kolben hat 17 Zoll (engl.) Durchmesser und 24 Zoll (engl.) Hub.

Taf. 41. Fig. 5. **Taf. 41. Fig. 5** ist das Kopflager von dem Ende der Lenkerstange einer Dampfmaschine von 100 Pferdekraft, welche zum Betriebe eines Walzwerkes in Königshütte in Schlesien dient, und von Herrn Maschinen-Inspektor Chuchul konstruirt ist. Fig. 5a ist die Vorder-Ansicht normal zu der Ebene, in welcher die Bewegung erfolgt, Fig. 5b ist links die Seiten-Ansicht in der Richtung dieser Ebene selbst, der rechte Theil der Fig. 5b stellt dagegen einen Vertikalschnitt mit einer Normalen zu jener Ebene vor, und zwar nach der Linie *ef* in Fig. 5a. Beide Figuren sind in $\frac{1}{10}$ der natürlichen Gröſse gezeichnet.

Die schmiedeeiserne Lenkerstange endet in zwei Armen, welche die Lagerfutter tragen. Diese sind an den Armen durch schmiedeeiserne *Bügel* befestigt, die aber hier, abweichend von den übrigen hier mitgetheilten Beispielen ringsum geschlossen sind. Jeder dieser Bügel ist mittelst zweier Schrauben, die quer durch beide Schenkel desselben und durch den betreffenden Arm der Lenkerstange gezogen sind, an dieser befestigt. Um die Lagerfutter anziehen zu können, dient hier ein einfacher Keil *m*, welcher aber nicht unmittelbar gegen die untere Fläche des Lagerfutters wirkt, sondern erst mittelst einer dazwischen gelegten Eisenplatte, die das Lagerfutter vor Beschädigung beim Eintreiben des Keils schützt. Um den Schlieſskeil *m* gegen eine unbeabsichtigte *Lösung* zu sichern dient die Klemmschraube *n*.

Taf. 41. Fig. 6 giebt eine Vorder-Ansicht von dem Kopflager einer englischen von Sharp erbauten Lokomotive. Die Figur ist in $\frac{1}{10}$ der natürlichen Gröſse gezeichnet. Taf. 41. Fig. 6.

Das Kopflager unterscheidet sich von den oben mitgetheilten Beispielen, namentlich von Fig. 2, 3 und 4 auf Taf. 41 dadurch, daſs hier ein besonderer Hakenkeil mit Schlieſskeil *a* und *b* angewandt sind, um das Band an der Stange zu befestigen, und ein zweites System von Hakenkeil und Schlieſskeil *c* und *d* zum Anspannen der Lagerfutter dient, während bei den früher beschriebenen Kopflagern nur ein System von Hakenkeil und Schlieſskeil für beide Zwecke vorhanden ist. Man bemerkt, daſs durch die hier getroffene Einrichtung das der Stange zunächst liegende Lagerfutter verschoben, und folglich der Mittelpunkt des Lagers nach auſsen gerückt wird, wogegen bei den vorhin erwähnten Konstruktionen durch Antreiben des Keils das äuſsere Lagerfutter der Stange genähert, und folglich der Mittelpunkt des Lagers gegen die Stange hin verschoben wird. Um die Keile festzuhalten dienen die Klemmschrauben *ee* und die Querkeile *ff*, welche wieder durch Splinte festgehalten werden. Das hier gezeichnete Kopflager gehört der Pleyelstange an, und umgreift die Krummaxe der mit „innen liegenden Cylindern“ versehenen Lokomotive. Die Cylinder haben 18 Zoll (engl.) im Durchmesser, 24 Zoll (engl.) Hub, und die wirksame Länge der Pleyelstange ist 5 Fufs 4 Zoll (engl.) zwischen den Mittelpunkten der Kopflager.

Taf. 41. Fig. 7.

Taf. 41. Fig. 7 giebt eine Ansicht eines Kopflagers nach der Konstruktion von Humphrys und zwar in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse.

Das schmiedeeiserne Band wird hier nicht durch Keile, wie bei den vorigen Konstruktionen, sondern durch schwalbenschwanzförmige Dübel *g* und *h*, an der Stange befestigt. Um die Dübel gegen das Herausgleiten zu sichern, sind noch die Schräubchen *i* und *k* angeordnet. Auch hier wird, wie in der vorigen Figur das der Stange zunächst liegende Lagerfutter angespannt, und zwar mit Hilfe einer Schraube *l*, deren Gewinde in den Kopf der Stange eingeschnitten ist, und deren verstählter Kopf sich unter den Boden des Lagerfutters stemmt. Es ist zu empfehlen noch eine Vorrichtung anzubringen, durch welche das Zurückgehen der Schraube *l* verhindert wird, etwa seitwärts einen Klemmring.

Taf. 41. Fig. 8.

Taf. 41. Fig. 8 giebt ein Kopflager für eine Pleyelstange nach der Konstruktion von Polonceau. Fig. 8a ist ein Schnitt mit der Ebene, in welcher die Bewegung erfolgt, und zwar nach der Linie *gh* in Fig. 8b; Fig. 8b dagegen ist ein Schnitt mit einer zu jener Ebene normalen Ebene nach der Linie *ik* in Fig. 8a. Beide Figuren sind in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Der schmiedeeiserne Bügel enthält zugleich den angeschmiedeten Schmiernapf *a*; die Befestigung des Bügels an der Stange erfolgt in ähnlicher Weise, wie in Fig. 7 durch schwalbenschwanzförmige Dübel *gh*, welche durch einen gemeinschaftlichen Schraubenbolzen *i* gegen das Herausfallen gesichert sind. Auch hier wird dasjenige Lager, welches der Stange zunächst liegt, angespannt, und folglich der Mittelpunkt des Lagers nach Aufsen gedrängt, und zwar in folgender Weise: die hintere Bodenfläche des Lagerfutters ist abgeschrägt und korrespondirt mit dem schmiedeeisernen Keil *l*, dessen andere Flanke sich gegen das Ende der Pleyelstange legt. Der Keil *l* ist durchbohrt, und enthält das Gewinde einer Schraube *m*, welche sich zwar drehen läfst, deren gradlinige Verschiebung aber verhindert ist; es mufs sich also die Mutter der Schraube, das ist der Keil *l*, gradlinig verschieben, wenn man die Schraube dreht, da er seinerseits gehindert ist, sich zu drehen (Thl. I. S. 55). Hierdurch kann das Lagerfutter nach aufsen gedrängt werden. Man sieht, dafs die Konstruktion sehr ähnlich ist, wie die auf Taf. 38. Fig. 3 gezeichnete und auf S. 419 beschriebene.

Offene Kopflager mit Lagerdeckel.

Taf. 41. Fig. 9 zeigt ein Kopflager nach der Konstruktion von Hawthorn und zwar ist Fig. 9a die Vorder-Ansicht normal zu der Ebene, in welcher die Bewegung erfolgt, und Fig. 9b ist die Seiten-Ansicht nach der Richtung dieser Ebene selbst. Beide Figuren sind in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Taf. 41. Fig. 9.

Die Lagerfutter sind von Bronze, sie haben zu beiden Seiten lappenförmige Ansätze x und y, durch welche die Schraubenbolzen mit hindurchgehen, die zur Befestigung des Lagerdeckels an dem Lagerkörper dienen. Der Lagerkörper ist hier an die schmiedeeiserne Lenkerstange mit angeschmiedet und besteht einfach in eine Platte, die mit der erforderlichen Höhlung zur Aufnahme des Lagerfutters versehen ist; der Lagerdeckel ist eine ähnliche Platte von Schmiedeeisen. Die beiden Schraubenbolzen vereinigen also auf jeder Seite vier verschiedene Theile mit einander, nämlich die Lappen der beiden Lagerfutter und den Lagerdeckel mit dem an der Stange befindlichen Lagerkörper. Durch Anziehen der Schrauben wird das äufsere Lagerfutter angespannt, und folglich der Mittelpunkt des Lagers nach der Stange hingezogen.

Taf. 41. Fig. 10 stellt ein Kopflager ganz von Bronze dar, und zwar Fig. 10a eine Vorder-Ansicht normal zu der Ebene, in welcher die Bewegung liegt, und Fig. 10b einen Durchschnitt mit einer Normalen zu dieser Ebene nach der Linie lm in Fig. 10a. Beide Figuren sind in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Taf. 41. Fig. 10.

Besondere Lagerfutter sind nicht vorhanden; es ist vielmehr der Lagerdeckel und der Lagerkörper unmittelbar mit der Lagerhöhlung versehen, da sie selbst aus Bronze sind. Beide Theile werden durch Schraubenbolzen vereinigt, und sind zu diesem Zwecke mit Lappen zu beiden Seiten versehen. Die Befestigung des Lagerkörpers an der Stange geschieht aber mittelst einer Hülse mit Keil. Die Hülse ist an dem Lagerkörper angegossen, wird auf das obere Ende der Stange aufgeschoben und mit Hilfe des Keils k angezogen.

Taf. 41. Fig. 11 zeigt ein Kopflager einer Lokomotive von Stephenson, und zwar ist Fig. 11a die Vorder-Ansicht normal zu der Ebene, in welcher die Bewegung erfolgt, und Fig. 11b ein Durchschnitt mit dieser Ebene selbst. Beide Figuren sind in $\frac{1}{10}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Taf. 41. Fig. 11.

Auch hier sind keine besonderen Lagerfutter angewandt, sondern es ist der ganze Lagerkörper, sowie der Lagerdeckel von Bronze, und die Lagerhöhlung ist unmittelber in diesen Theilen befindlich. Der Lagerkörper enthält zugleich den Schmiernapf; er ist mittelst eines schwalbenschwanzförmigen Dübels *a* auf dem Ende der Stange befestigt, welches sich zu diesem Zwecke plattenförmig erweitert. Der Lagerdeckel ist durch zwei Schraubenbolzen festgehalten, doch sind diese beiden Schraubenbolzen nicht einzeln mit Köpfen versehen, sondern sie sind zu einem zusammenhängenden Bügel vereinigt *b*, welcher den ganzen Lagerdeckel umschliefst, und unterhalb der Platte, welche das Stangen-Ende bildet, mit Muttern angezogen werden kann. Die Ränder der Schraubenmuttern sind mit Sperrzähnen versehen, in welche die beiden Enden der Stahlfeder *c* einfassen, um so das Zurückgehen der Schraubenmuttern zu verhüten. Der Sicherheit wegen sind aufserdem noch Gegenmuttern angeordnet.

Geschlossene Kopflager.

Taf. 41. Fig. 12. Taf. 41. Fig. 12 zeigt ein geschlossenes Kopflager von der einfachsten Konstruktion. Fig. 12a ist die Ansicht in der Richtung der Ebene, in welcher die Bewegung erfolgt, Fig. 12b die Vorder-Ansicht nach der Richtung normal zu jener Ebene. Beide Figuren sind in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Das Ende der schmiedeeisernen Stange ist oval ausgestreckt, die Lagerfutter von Bronze sind in ihrer äufseren Begrenzung achteckig, und in die entsprechende Oeffnung des Stangenkopfes eingepafst; sie haben keine vorspringende Ränder, vielmehr ist das äufsere Lagerfutter durch die Schraube *a*, deren Spitze sich in die Rückwand desselben einsetzt, das innere Lagerfutter dagegen durch den Keil *b*, welcher sich in eine Nuth der Rückwand desselben einschiebt, gegen das Herausfallen gesichert. Der Keil *b* dient zugleich zum Antreiben des inneren Lagerfutters, welches hierdurch von der Stange ab nach aufsen gedrängt wird, wodurch sich der Mittelpunkt des Lagers in demselben Sinne verschiebt.

Taf. 41. Fig. 13. Taf. 41. Fig. 13 ist ein Kopflager, welches in das gabelförmige Ende der Stange eingeschoben ist. Fig. 13a ist eine Vorder-Ansicht des Kopflagers normal zu der Ebene, in welcher die Bewegung erfolgt, Fig. 13b ist ein Durchschnitt mit einer Normalen zu dieser Ebene, und zwar nach der Linie *no* in Fig. 13a. Beide Figuren sind in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Die Gabel ist an das Ende der Stange angeschmiedet; die beiden Lagerfutter von Bronze haben vorspringende Ränder, sie sind von oben her zwischen die Schenkel der Gabel eingeschoben; ein Hakenkeil hält die beiden Schenkel zusammen, und der unter dem Hakenkeil liegende Schliefskeil dient zum Anziehen des äufseren Lagerfutters. Durch diese Konstruktion wird der Mittelpunkt des Lagers nach der Stange hingedrängt.

Taf. 41. Fig. 14 zeigt ein geschlossenes Kopflager für eine stärkere Konstruktion; Fig. 14a ist die Ansicht normal zur Ebene, in welcher die Bewegung erfolgt, Fig. 14b dagegen ist eine Ansicht des Kopflagers in der Richtung dieser Ebene selbst. Beide Figuren sind in $\frac{1}{10}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Taf. 41. Fig 14.

Die Stange ist von Schmiedeeisen, der Kopf derselben ist mit einer rechteckigen Durchbrechung versehen, so dafs sich ein ringsum geschlossener Rahmen bildet. Da wo die Lagerfutter sitzen ist die innere Höhlung dieses Rahmens enger, als weiter unten, wo sich die Keile befinden. Die Ausweitung des Rahmens an dieser zuletzt bezeichneten Stelle ist so grofs, dafs man jedes Lagerfutter, welches mit vorspringenden Rändern versehen ist, von der Seite her in den Rahmen einschieben kann; sie mufs also um die doppelte Breite eines Randes des Lagerfutters gröfser sein, als die Weite oben. Nachdem zuerst das obere Lagerfutter durch diese Ausweitung in den Rahmen seitwärts eingeschoben ist, rückt man es in die Höhe, so dafs die Ränder die Wände des schmaleren Theils des Rahmens umfassen, hierauf schiebt man in gleicher Weise das untere Lagerfutter ein, legt sodann den Hakenkeil ein, und schliefst das System durch Eintreibung des Schliefskeils. Beachtenswerth ist die Vorrichtung zur Verhütung des unbeabsichtigten Lösens des Schliefskeils, dieselbe entspricht dem auf Taf. 7. Fig. 4 dargestellten und Thl. I. S. 116 beschriebenen System.

Taf. 41. Fig. 15 giebt die von Reynolds auf der Eastern-Counties Eisenbahn eingeführte Konstruktion des Kopflagers für eine Lokomotive mit: „innen liegenden Cylindern". Die Figur stellt die Ansicht des Kopflagers dar normal zur Ebene, in welcher die Bewegung erfolgt, und zwar in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröfse. Taf. 41 Fig. 15.

Der Kopf der Stange umschliefst in festem Zusammenhange drei Seiten der beiden Lagerfutter; die vierte Seite, von welcher man die mit vorspringenden Rändern versehenen Lagerfutter einlegen kann, ist durch eine Platte bedeckt, die mit Haken an beiden Enden den mit der Stange zusammenhängenden Theil des Rahmens umgreift, und aufserdem mittelst zweier Schraubenbolzen an selbigem befestigt ist. Zum Anziehen des der Stange zunächst liegenden Lagerfutters dient ein **Keil** von Stahl, welcher dieses Lagerfutter von der Stange nach Aufsen hin treibt; in diesem Sinne rückt auch der Mittelpunkt des Lagers beim Anziehen des Keils fort.

Taf. 41. Fig. 16. Taf. 41. Fig. 16 zeigt ein von dem Verfasser angegebenes sehr einfach konstruirtes geschlossenes Kopflager, und zwar ist Fig. 16a eine Vorder-Ansicht normal zu der Ebene, in welcher die Bewegung erfolgt, Fig. 16b ist dagegen ein Vertikalschnitt normal zu jener Ebene nach der *Linie pq in Fig.* 16a. Beide Figuren sind in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Das Ende der Stange bildet einen vollkommen geschlossenen Rahmen mit rechteckiger Oeffnung; das obere Lagerfutter hat nur auf seiner obern Begrenzung vorspringende Ränder, es kann, bevor der Zapfen eingelegt ist, von der Seite eingeschoben und dann in die Höhe gerückt werden, so dafs die Ränder den obern Theil des Rahmens umfassen; das untere Lagerfutter wird dadurch gegen das Herausfallen gesichert, dafs der Keil, welcher zum Anziehen desselben dient, in eine Nuth eingreift, die in der Rückwand dieses Lagerfutters angeordnet ist. Durch Antreiben des Keils wird dieses Lagerfutter, und der Mittelpunkt des ganzen Lagers von der Stange fort nach aufsen gerückt. Zwei Klemmschrauben dienen zur Sicherung des Keils gegen unbeabsichtigtes Lösen.

B. Verbindende Maschinentheile, welche eine gradlinige Bewegung vermitteln.

Allgemeines.

§ 142. Die verbindenden Maschinentheile, welche eine gradlinige Bewegung zulassen (§ 114 S. 274) finden vorzugsweise Anwendung bei solchen Maschinen, in welchen flüssige Körper, seien es tropfbar flüssige oder luftförmige Körper, eine wesentliche Rolle spielen, namentlich also bei den Maschinen zum Heben oder Bewegen von Wasser oder Luft, und bei solchen Maschinen, welche durch Wasser, Luft oder Dampf in Bewegung gesetzt werden. Bei den genannten Arten von Maschinen kommen die gradlinigen Bewegungen sehr häufig zur Anwendung, und folglich auch diejenigen verbindenden Maschinentheile, welche zur Vermittelung der ruhenden Maschinentheile mit den gradlinig bewegten Maschinentheile bestimmt sind. Die Eigenthümlichkeiten der hier erwähnten Maschinen bedingen in vielen Fällen, dafs die Verbindungsstellen zwischen den bewegten und ruhenden Maschinentheilen dichte Fugen (Thl. I. § 5) darstellen, so dafs der gradlinig sich bewegende Theil gegen den ruhenden Theil sich verschieben könne, ohne dafs durch die Berührungsfläche Flüssigkeit entweiche. Hierdurch aber nehmen die für diese Zwecke konstruirten verbindenden Maschinentheile gewisse eigenthümliche Formen und Anordnungen an, welche wir *Dichtungen* oder *Verschlüsse* nennen wollen. Im Folgenden soll diese Art der verbindenden Maschinentheile für gradlinige Bewegungen, welche mit Verschlüssen versehen sind, ausschliefslich behandelt werden.

Das Charakteristische der hier zu besprechenden verbindenden Maschinentheile für gradlinige Bewegungen ist also, dafs sie nicht nur eine gradlinige Bewegung zulassen, sondern auch einen Verschlufs gewähren sollen, welcher einen Durchgang der Flüssigkeit verhindert. Die Bedingungen, welche dieser Verschlufs aufser der Dichthaltung noch zu erfüllen hat, können ziemlich mannigfaltig sein. Jedenfalls sind diese Bedingungen für die Konstruktion des betreffenden Maschinentheils von wesentlichem Einflufs; indem wir nun die hier zu erörternden Maschinentheile zu gruppiren und zu ordnen suchen, werden wir die Eigenthümlichkeiten des Verschlusses als Eintheilungsgrund benutzen können.

Der Verschlufs, welcher bei den in Rede stehenden Maschinentheilen vorkommt, ist entweder ein dauernder, oder ein nicht dauernder, das heifst, er soll entweder fortwährend bestehen bleiben, oder er soll so konstruirt werden, dafs man ihn nach Erfordern unterbrechen und wieder herstellen kann.

Hiernach theilen wir die hier zu besprechenden Maschinentheile ein in:

a) verbindende Maschinentheile für gradlinige Bewegung mit dauerndem Verschlufs,
b) verbindende Maschinentheile für gradlinige Bewegung mit unterbrechbarem Verschlufs,

a) Verbindende Maschinentheile für gradlinige Bewegung mit dauerndem Verschlufs.

Eintheilung der verbindenden Maschinentheile für gradlinige Bewegungen mit dauerndem Verschlufs.

§ 143. Bei der Konstruktion der verbindenden Maschinentheile für gradlinige Bewegung mit dauerndem Verschlufs kommen im Allgemeinen zwei Fälle zur Berücksichtigung; nämlich: entweder:

1) ein stangenförmiger Körper, gewöhnlich eine cylindrische Stange soll sich durch eine Wand hindurch in einen Raum hineinschieben, oder herausziehen lassen, wobei innerhalb dieses Raumes eine Flüssigkeit von einer höheren oder von einer geringeren Spannung sich befindet, als aufserhalb des Raumes; die Oeffnung in der Wand, durch welche die Stange sich bewegt, mufs dann mit einem Verschlufs versehen sein, so dafs die Flüssigkeit nicht durch diese Oeffnung entweichen kann: oder:

2) eine Wand, welche einen Raum gewöhnlich einen Cylinder in zwei Theile scheidet, so dafs auf der einen Seite dieser Wand eine Flüssigkeit von höherer Spannung sich befindet, als auf der andern Seite, soll sich in dem Raume selbst verschieben lassen, ohne dafs Flüssigkeit zwischen der Wand und der Begrenzungsfläche dieses Raumes hindurchgeht.

Im ersten Falle sitzt die Vorrichtung, durch welche der Verschlufs hergestellt wird, gewöhnlich an der Wand, durch welche die Stange hindurch geführt wird, fest; man nennt die Stange selbst dann im Allgemeinen eine „Kolbenstange“ und die Vorrichtung, welche zum Verschlufs dient, eine „Stopfbuchse“.

Im zweiten Falle ist die Vorrichtung, durch welche die Dichtung bewirkt werden soll, im Allgemeinen an der beweglichen Wand befestigt, und man nennt eine solche bewegliche Wand, welche mit einer Dichtungs-Vorrichtung versehen ist, gewöhnlich einen „Kolben“, die Dichtungs-Vorrichtung selbst aber die „Kolbenliderung“ oder die „Liderung“.

Die Maschinentheile, welche mit dauerndem Verschlufs versehen sind, und welche wir hier behandeln wollen, sind also einzutheilen in:

1) Stopfbuchsen,
2) Kolben.

Material für die Herstellung eines dichten Verschlusses. — Packung; Liderung.

§ 144. Die Methode, deren man sich zur Erzielung eines dichten und dauernden Verschlusses bedient, besteht im Allgemeinen darin, dafs man ein elastisches Material anwendet, welches die Fuge, durch die eine Entweichung der Flüssigkeit stattfinden könnte, überdeckt; dieses Material mufs so beschaffen sein, dafs es sich an die Oberfläche der Dichtungsfuge möglichst vollständig anschliefsen und anschmiegen läfst, dafs es der Reibung, welche der bewegte Maschinentheil vermöge des Druckes, mit dem das Dichtungs-Material angeprefst wird, ausübt, einen angemessenen Widerstand gegen Abnutzung entgegensetzt, dafs es nach etwa erfolgter Abnutzung und dadurch bedingter mangelhafter Dichtung, sich wieder anpressen läfst, um die Dichtung herzustellen, und dafs es geeignet ist, die zur Verminderung der Reibung nöthige Schmiere aufzunehmen. Endlich ist auch noch bei der Auswahl dieser Dichtungsmittel auf die Temperatur der Flüssigkeiten Rücksicht zu nehmen, da z. B. bei Dampf oder bei erhitzten Flüssigkeiten manche Dichtungsmittel nicht zulässig sind, welche bei geringen Temperaturen vortreffliche Dienste leisten.

Die Materialien, deren man sich zur Herstellung eines dauernden dichten Verschlusses für die hier in Rede stehenden Maschinentheile vorzugsweise bedient, sind

1) Leder,
2) Hanf und Werg,
3) vulkanisirter Kautschuck,
4) Filz,
5) Holz oder Holzspähne (Sägespähne),
6) Metall (Stahl oder Metall-Legirungen).

Das Leder ist nur für gewöhnliche, niedrige Temperaturen, etwa bis 30° C. anwendbar, in höheren Temperaturen verliert es an Elasticität, wird hornartig und widersteht dann der Abnutzung zu wenig. Ebenso eignet sich das Leder nicht für Dichtungen in eisenhaltigem Wasser, weil sich das Eisen mit der Gerbsäure im Leder verbindet, und dasselbe nachtheilig verändert. Man verwendet gutes Sohlleder (Mastricher Leder), welches gewöhnlich in die Form eines sogenannten Stulpes (Lederstulpes) oder einer Manchette (Ledermanchette), gebracht wird. Die Dicke des zu verwendenden Leders beträgt bei gröfseren Dichtungen $\frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{4}$ Zoll;

bei kleineren Dichtungen nimmt man schwächeres Leder von $\frac{1}{12}$ bis $\frac{1}{8}$ Zoll Dicke (vergl. die Tafeln).

Den Hanf und das Werg kann man bei höheren Temperaturen, als das Leder anwenden; gewöhnlich werden die Hanffasern, nachdem sie gehörig gekämmt sind, zu Zöpfen geflochten oder zu Wülsten gedreht, und in dieser Form als Dichtungs-Material verwandt. Hanfliderungen sind bei 120° C. und etwas darüber noch ganz brauchbar.

Vulkanisirter Kautschuck entweder in vollen Ringen, Scheiben, Stulpen und Manchetten verwandt, oder auf Leinwand aufgetragen und mit der Leinwand in schichtenweisen Lagen geordnet, ist in neuerer Zeit vielfach für die genannten Zwecke selbst bei höheren Temperaturen angewandt worden. Der Erfolg ist für ruhende Dichtungen ganz vorzüglich; für die hier in Rede stehenden Dichtungen aber, wo das Dichtungs-Material Reibungen mit Bewegung auszuhalten hat, hat sich diese Art der Dichtung vielfach nicht bewährt, indem unter dem Einflufs der Reibung das Kautschuck häufig schmierig wird, und sich an der reibenden Oberfläche ablöst. Es ist jedenfalls Vorsicht in der Auswahl der Qualität des Kautschucks anzurathen, wenn man ihn für den hier besprochenen Zweck verwenden will.

Filz ist ein in vielen Fällen sehr zweckmäfsig anzuwendendes Dichtungsmittel; er widersteht höheren Temperaturen besser als das Leder, ist aber der Abnutzung durch Sand mehr unterworfen, als dieses. Der zu diesen Dichtungen angewandte Filz wird zweckmäfsig besonders für diesen Zweck bereitet, und heifst dann Brunnenfilz. Die Art der Anwendung ist ziemlich übereinstimmend mit derjenigen des Leders und des Kautschucks.

Holz, namentlich Sägespähne, sollen für geringe Temperaturen, besonders wenn die Flüssigkeit, gegen welche die Dichtung angewandt wird, Wasser ist, ganz vorzügliche Dienste leisten; namentlich zeichnet sich dies Material durch Billigkeit aus.

Metall und Metall-Legirungen werden besonders bei sehr hohen Temperaturen angewendet. Man kann sich im Allgemeinen der in § 118 angegebenen Metall-Legirungen auch hier bedienen.

Bei den Stopfbuchsen (§ 143) wendet man das Dichtungs-Material gewöhnlich so an, dafs es von Aufsen nach Innen, also von der Peripherie nach dem Centrum der Kolbenstange hin angeprefst wird. In diesem Falle nennt man das zur Dichtung verwandte Material „die Packung" oder „Stopfung". — Bei Kolben dagegen geschieht das Anpressen des Dichtungs-Materials gewöhnlich und vorzugsweise von Innen nach Aufsen hin, also in einer Richtung von dem Centrum des Kolbens nach der Peripherie hin; bei dieser Anordnung nennt man das Dichtungs-Material gewöhnlich „Liderung“ (Liderung kommt her von Leder, weil man früher vorzugsweise Leder zu den Dichtungen verwandte).

1. Stopfbuchsen.

Bestimmung der Dimensionen und Verhältnisse einfacher Stopfbuchsen nach des Verfassers Principien.

§ 145. Jede Stopfbuchse enthält im Wesentlichen folgende Theile:

1) die Packung,
2) die Buchse (das Gehäuse),
3) die Einlage,
4) den Kopf,
5) die Spannschrauben,
6) den Boden.

Taf. 42. Fig. 1 zeigt die am häufigsten angewandte Form für gewöhnliche Stopfbuchsen und zwar Fig. 1a in der Ansicht von oben, Fig. 1b im Vertikalschnitt, beide Figuren sind in $\frac{1}{3}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Taf. 42. Fig. 1.

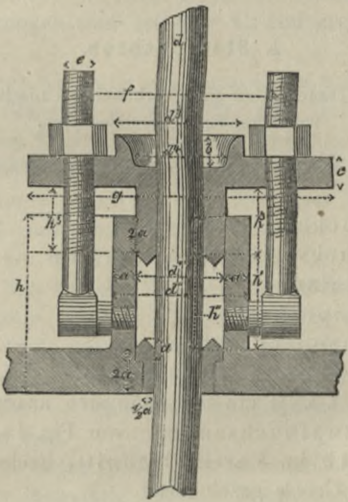
1. Die Packung.

Die Packung in den gewöhnlichen Stopfbuchsen besteht aus Hanf, welcher in Form einer Flechte um die Kolbenstange herum gelegt ist. Wie dick diese Hanfflechte sein müsse, und auf welche Länge sie die Stange umgeben müsse, läfst sich theoretisch nicht bestimmen; gewöhnlich macht man selbst bei den kleinsten Stopfbuchsen die Dicke der Hanfflechte nicht unter $\frac{1}{4}$ Zoll und selbst bei den gröfsten Stopfbuchsen nicht über $\frac{5}{4}$ Zoll. Im Allgemeinen pflegt man die Dicke der Hanfflechte von dem Durchmesser der Kolbenstange abhängig zu machen, und dann möchte sich empfehlen, die **Dicke der Hanfflechte,** welche wir mit a bezeichnen wollen, nicht über $\frac{1}{3}$ und nicht unter $\frac{1}{6}$ von dem Durchmesser der Kolbenstange zu nehmen, und zwar so, dafs man bei den schwächeren Kolbenstangen $\frac{1}{3}$, bei den stärksten Durchmessern der Kolbenstangen $\frac{1}{6}$ wählt, und selbst wenn diese Werthe kleiner als $\frac{1}{4}$ Zoll oder gröfser als

$\frac{5}{4}$ Zoll ausfallen sollten, doch diese Grenzen nicht überschreitet. Bezeichnet d den Durchmesser der Kolbenstange, so ist zu setzen:

$$a = \tfrac{1}{3}d \text{ bis } a = \tfrac{1}{6}d.$$

Will man anstatt der oben angegebenen, einen hinreichenden Spielraum für die Bestimmung der Dicke der Packung gewähren-



den Grenzen zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{6}d$ eine mehr präcise Bestimmung haben, so empfehle ich die Dicke der Packung so zu wählen, dafs man sie gleich einem Sechstel des um einen Zoll vermehrten Stangendurchmessers macht, also

$$a = \frac{d+1}{6} = \tfrac{1}{6}d + \tfrac{1}{6}\ \textbf{Zoll}.$$

Für eine Stange von einem Zoll Durchmesser würde die Dicke der Packung hiernach 4 Linien, für eine Stange von sechs Zoll Durchmesser aber 14 Linien werden.

2. Die Buchse.

Die Buchse oder das Gehäuse dient zur Aufnahme der Packung. Die Buchse ist gewöhnlich aus Gufseisen, innen und aufsen cylindrisch, und ihre Dimensionen sind wesentlich von dem Durchmesser der Kolbenstange und von der Dicke der Packung abhängig. Die **Wandstärke** der Büchse empfehle ich etwa gleich der Dicke der Packung zu machen, wie sie vorhin angegeben wurde. Nennen wir nun $\boldsymbol{d'}$ den **innern Durchmesser** $\boldsymbol{d''}$ den **äufsern Durchmesser** der Büchse, so ist

$$\boldsymbol{d' = d + 2a = \tfrac{5}{3}d} \text{ bis } \boldsymbol{\tfrac{4}{3}d}$$

und zwar gilt $\frac{5}{3}d$ für schwächere, $\frac{4}{3}d$ für stärkere Kolbenstangen. Präciser ist zu setzen

$$\boldsymbol{d'} = d + 2 \cdot \frac{d+1}{6} = \boldsymbol{\frac{4d+1}{3} = \tfrac{4}{3}d + \tfrac{1}{3}} \textbf{ Zoll.}$$

Der äufsere Durchmesser bestimmt sich hiernach

$$d'' = d' + 2a = d + 4a$$
$$\boldsymbol{d'' = \tfrac{7}{3}d} \text{ bis } \boldsymbol{\tfrac{5}{3}d,}$$

worin auch $\frac{7}{3}d$ für dünne, $\frac{5}{3}d$ für dicke Kolbenstangen gilt. Zieht man die präcisere Angabe vor, so ist zu setzen

$$d'' = d + 4a = d + 4 \cdot \frac{d+1}{6}$$
$$\boldsymbol{d'' = \frac{5d+2}{3} = \tfrac{5}{3}d + \tfrac{2}{3}} \textbf{ Zoll.}$$

Die **Höhen-Dimensionen des Gehäuses** ergeben sich folgendermaafsen:

Wenn die Packung neu eingelegt, und demnächst angemessen zusammengedrückt ist, so möge sie die Stange auf eine Länge umschliefsen, welche etwa $\frac{5}{3}$ bis $\frac{4}{3}$ vom Stangendurchmesser beträgt, d. h. welche etwa so hoch ist, als der innere Durchmesser der Büchse. Der Kopf der Stopfbuchse, welche zum Zusammendrücken der Packung dient, mufs dann noch hinreichend tief in die Büchse hineinreichen; es genügt, wenn derselbe noch etwa $\frac{2}{3}$ bis $\frac{1}{2}$ des Stangendurchmessers eingreift, so dafs hierdurch die Höhe der Buchse von dem tiefsten Punkt der Packung bis zu ihrem obern Rande etwa gleich dem äufsern Durchmesser der Buchse wird. Endlich bestimmt sich die ganze Höhe der Buchse von dem unteren Rande des Bodens, bis zum obersten Rande, wenn man die Einlage im Boden der Stopfbuchse zu jener Höhe (vom tiefsten Punkt der Packung bis znm obern Rande) noch hinzurechnet. Die Höhe dieser Einlage mag etwa ebensoviel betragen als die Tiefe, um welche der Kopf der Stopfbuchse in das Gehäuse eingreift, also auch etwa $\frac{2}{3}$ bis $\frac{1}{3}$ vom Stangendurchmesser. Wenn man diese Angaben beibehält, so ergiebt sich:

1) h' die Höhe der Packung an der Stange

$$h' = d' = \tfrac{5}{3}d \text{ bis } \tfrac{4}{3}d$$

oder auch

$$h' = \frac{4d + 1}{3} \text{ Zoll} = \tfrac{4}{3}d + \tfrac{1}{3} \text{ Zoll},$$

2) h'' die Höhe vom tiefsten Punkt der Packung bis zum obern Rand der Buchse

$$h'' = d'' = \tfrac{7}{3}d \text{ bis } \tfrac{5}{3}d$$

oder auch

$$h'' = \frac{5d + 2}{3} \text{ Zoll} = \tfrac{5}{3}d + \tfrac{2}{3} \text{ Zoll},$$

3) die Höhe von der Unterkante des Bodens bis zum obern Rande der Buchse:

$$h = h'' + \tfrac{2}{3}d \text{ bis } h'' + \tfrac{1}{3}d; \; h = 3d \text{ bis } 2d$$

oder auch

$$h = 2d + 1 \text{ Zoll}.$$

3. Die Einlage.

Die Einlage bildet bei Stopfbuchsen, welche aus Gufseisen gemacht sind, die Führung der Kolbenstange; sie wird gewöhnlich aus einer der Metall-Legirungen (§ 118), welche sich auch für Lagerschalen eigenen, hergestellt, und in den Boden der Stopfbuchse eingelegt. Die Figuren auf Taf. 42 geben mancherlei Beispiele für die Anordnung und Konstruktion dieser Einlage; die Höhe derselben ist etwa gleich der doppelten Dicke der Packung anzunehmen, also gleich 2a.

Der obere Rand der Einlage ist in gleicher Weise wie der untere Rand des Kopfes der Stopfbuchse abgeschrägt. Diese Abschrägung hat den Zweck, bei dem Anziehen des Kopfes gegen die Packung, nicht nur einen Druck in einer mit der Kolbenstange parallelen Richtung auszuüben, sondern auch einen Seitendruck. Gewöhnlich schrägt man die beiden Theile, Kopf und Einlage nur einseitig ab, und zwar so, dafs die Packung vermöge dieser Abschrägung nur nach der Stange hin geprefst wird; ich möchte dagegen empfehlen die Abschrägung, wie Fig. 1 und 2 und noch einige andere Figuren auf Taf. 42 zeigen nach zwei Richtungen zu machen, so dafs sich in der Mitte ein keilförmiger Rücken bildet. Hierdurch wird erreicht, dafs die Packung sowohl gegen die Kolbenstange, als gegen die innere Wand des Gehäuses geprefst wird, und folglich auch an letzterer einen dichten Verschlufs bewirkt.

4. Der Kopf der Stopfbuchse.

Der Kopf der Stopfbuchse ist der obere Theil derselben; er dient sowohl zum Anziehen der Packung, um dadurch die Dichtung zu bewirken, oder dieselbe nach Abnutzung der Packung wieder herzustellen, als auch zur Führung der Kolbenstange und zur Aufnahme der Schmiere. Bei kleineren Stopfbuchsen ist gewöhnlich der ganze Kopf aus einer Metall-Legirung; bei gröfseren macht man ihn auch wohl aus Gufseisen, und versieht ihn mit einer Einlage, derjenigen ähnlich, welche in den Boden der Stopfbuchse eingelassen ist.

Derjenige Theil des Stopfbuchsenkopfes, welcher der Kolbenstange als Führung dient, d. h. von der Abschrägung des unteren Randes bis zum Boden des Schmierbehälters, kann etwa gleich der Höhe der Packung, d. i. gleich h' gemacht werden; er ist in der Figur mit $\boldsymbol{h' = d'}$ bezeichnet.

Die Entfernung von der unteren Abschrägung des Kopfes bis zur Unterkante des Lappens für die Prefsschrauben, welche mit h''' bezeichnet ist, macht man etwa gleich dem Kolbenstangendurchmesser vermehrt um die Dicke der Packung a, also

$$\boldsymbol{h''' = d + a = \tfrac{4}{3}d \text{ bis } \tfrac{7}{6}d}$$

oder auch

$$\boldsymbol{h''' = \frac{7d + 1}{6} \text{ Zoll} = \tfrac{7}{6}d + \tfrac{1}{6} \text{ Zoll.}}$$

Die **Dicke des Lappens** $\boldsymbol{c}$ für die Schraubenbolzen ist passend gleich dem $1\frac{1}{2}$fachen der Dicke der Packung also gleich $\boldsymbol{1\frac{1}{2}a}$ zu machen, und die **Höhe des Schmiernapfes gleich** $\boldsymbol{a}$. Hiernach ergiebt sich die **Gesammthöhe des Kopfes** h^4 gleich:

Höhe von der Abschrägung bis zur Unterkante des Lappens . . .	$h''' = d + a$
Dicke des Lappens	$c = 1{,}5a$
Höhe des Randes des Schmiernapfes	$= a$
	$h^4 = d + 3{,}5a$

oder
$$h^4 = d + \tfrac{7}{6} d \text{ bis } d + \tfrac{7}{12} d$$
$$= \tfrac{13}{6} d \text{ bis } \tfrac{19}{12} d$$

oder auch
$$h^4 = \frac{19d + 7}{12} \text{ Zoll} = \tfrac{19}{12} d + \tfrac{7}{12} \text{ Zoll.}$$

Zieht man von dieser Gesammthöhe die Entfernung h' ab, so ergiebt sich die Tiefe des Schmiernapfes
$$b = \tfrac{1}{2} d \text{ bis } \tfrac{1}{4} d = 1\tfrac{1}{2} a$$

oder auch
$$b = \frac{d + 1}{4} \text{ Zoll} = \tfrac{1}{4} d + \tfrac{1}{4} \text{ Zoll.}$$

Die **horizontalen Dimensionen** des Stopfbuchsenkopfes sind zum Theil durch die Konstruktion unmittelbar gegeben.

d^3 der äufsere Durchmesser des Schmiernapfes
$$d^3 = d'' - 0{,}5a = d + 3{,}5a = h^4,$$

d^4 der innere Durchmesser des Schmiernapfes
$$d^4 = d'' - 1{,}5a = d + 2{,}5a,$$

f die Entfernung der Muttern der Schraubenbolzen
$$f = d'' + 3a,$$

und endlich

g die ganze Breite des Lappens für die Schraubenbolzen
$$g = d'' + 6a.$$

5. Die Spannschrauben.

Die Spannschrauben dienen zum Anziehen des Kopfes gegen die Packung, um dadurch die Packung zu komprimiren und die Dichtung herzustellen. Der Durchmesser der Spannschrauben würde sich nur berechnen lassen, wenn man den Druck kennt, welcher gegen die Packung ausgeübt werden mufs, um eine genügende Dichtung zu erzielen. Der Werth dieses Druckes ist aufserordentlich unsicher zu bestimmen; es genügt im Allgemeinen, wenn man den Durchmesser der Packungsschrauben etwas gröfser macht, als die Dicke der Packung. Bezeichnet nun e den Durchmesser der Spannschrauben, so empfehle ich zu nehmen
$$e = 1\tfrac{1}{4} a = \tfrac{5}{12} d \text{ bis } \tfrac{5}{24} d$$

oder präciser
$$e = \frac{5d + 5}{24} \text{ Zoll} = \tfrac{5}{24} d + \tfrac{5}{24} \text{ Zoll.}$$

Die Befestigung der Spannschrauben an der Buchse kann auf verschiedene Weise erfolgen, worüber die Beschreibung der Figuren auf Tafel 42 nachzusehen ist.

6. Der Boden der Stopfbuchse.

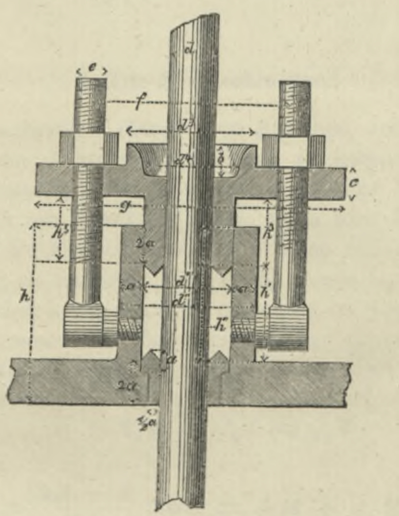
Gewöhnlich wird der Boden der Stopfbuchse mit dem Gehäuse und mit der Wandung des Raumes, welcher durch die Stopfbuchse abgeschlossen werden soll (z. B. des Deckels bei Pumpen oder Dampf-Cylindern), in einem Stück gegossen. Ist dies nicht zulässig, so mufs man einen besonderen Boden angiefsen und dann die Stopfbuchse mit Hilfe dieses Bodens an der Wandung befestigen. Die Dicke des Bodens ist dann etwa gleich der Dicke c des Lappens für die Schraubenbolzen zu machen.

Nach diesen Angaben ist folgende Tabelle entworfen worden:

Tabelle über die Dimensionen eiserner Stopfbuchsen mit Metall-Einlagen (nach des Verfassers Anordnung).

1. No.	2. Durchmesser der Kolbenstange Zoll.	3. Dicke der Packung in Linien. a	4. Durchmesser der Spannschrauben in Linien. e	5. Breiten-Dimensionen in Linien. d	6. d'	7. d''	8. d^3	9. d^4	10. f	11. g
2	1	4	5	12	20	28	26	22	40	52
4	1½	5	6¼	18	28	38	35½	30½	53	68
6	2	6	8	24	36	48	45	39	66	84
8	2½	7	8¾	30	44	58	54½	48½	79	100
10	3	8	10	36	52	68	64	56	92	116
12	3½	9	11¼	42	60	78	73½	64½	105	132
14	4	10	12½	48	68	88	83	73	118	148
15	4½	11	13¾	54	76	98	92½	81½	131	164
16	5	12	15	60	84	108	102	90	144	180
17	5½	13	16¼	66	92	118	111½	98½	157	196
18	6	14	17½	72	100	128	121	107	170	212
19	7	16	20	84	116	148	140	134	196	244

12. Höhen-Dimensionen in Linien. h	13. h'	14. h''	15. h^3	16. h^4	17. b	18. c	19. Durchmesser der Kolbenstange. Zoll.	20. No.
36	20	28	16	26	6	6	1	2
48	28	38	23	35½	7½	7½	1½	4
60	36	48	30	45	9	9	2	6
72	44	58	37	54½	10½	10½	2½	8
84	52	68	44	64	12	12	3	10
96	60	78	51	73½	13½	13½	3½	12
108	68	88	58	83	15	15	4	14
120	76	98	65	92½	16½	16½	4½	15
132	84	108	72	102	18	18	5	16
144	92	118	79	111½	19½	19½	5½	17
156	100	128	86	121	21	21	6	18
180	116	148	100	140	24	24	7	19



Die Werthe der Tabelle stehen in folgendem Zusammenhange:

Kolumne 1. Nummer der Kolbenstange, wenn man für die Durchmesser der Kolbenstangen dieselbe Zusammenstellung annimmt, welche in Tabelle XV. Thl. I. S. 266 für die Zapfendurchmesser gegeben ist. Für eine Kolbenstange, deren Durchmesser einer geringeren Nummer angehört, als die Tabelle sie giebt, kann man das Modell der Stopfbuchse für die nächst höhere Nummer gebrauchen, indem man den Kopf und die Einlage dem kleineren Durchmesser entsprechend ausbohrt.

Kolumne 2. Durchmesser der Kolbenstange in Zollen. Für diejenigen Durchmesser, welche hier nicht enthalten sind, siehe die Bemerkung zur vorigen Nummer.

Kolumne 3. Dicke der Packung in Linien, bestimmt nach der oben (S. 456) aufgestellten Formel . . . . $a = \frac{1}{6}d + \frac{1}{6}$ Zoll

$= \frac{1}{6}d + 2$ Lin.

Kolumne 4. Durchmesser der Spannschrauben in Linien. . . . . $e = 1\frac{1}{4}a$.

Kolumne 5. Durchmesser der Kolbenstange in Linien		
Kolumne 6. Innerer Durchmesser der Buchse	d'	$= d + 2a$
Kolumne 7. Aeufserer Durchmesser der Buchse	d''	$= d' + 2a$
		$= d + 4a$
Kolumne 8. Aeufserer Durchmesser des Schmiernapfes . . , ...	d^3	$= d'' - \frac{1}{2}a$
		$= d + 3\frac{1}{2}a$
Kolumne 9. Innerer Durchmesser des Schmiernapfes . . . . :	d^4	$= d^3 - a$
		$= d'' - 1\frac{1}{2}a$
		$= d + 2\frac{1}{2}a$
Kolumne 10. Entfernung der Mittellinien der Schraubenbolzen von einander	f	$= d^3 + 2e + a$
		$= d^3 + 3\frac{1}{2}a$
		$= d'' + 3a$
		$= d + 7a$
Kolumne 11. Gröfste Breite des Lappens für die Schraubenbolzen	g	$= f + 2e + a$
		$= f + 3\frac{1}{2}a$
		$= d^3 + 7a$
		$= d'' + 6\frac{1}{2}a$
		$= d + 10a$
Kolumne 12. Ganze Höhe der Buchse von der Unterkante des Bodens bis zur Oberkante des oberen Randes	h	$= h' + 4a$
		$= d' + 4a$
		$= d'' + 2a$
		$= d + 6a$
Kolumne 13. Höhe der Packung an der Stange, und zugleich Höhe von der untern Abschrägung des Stopfbuchsenkopfes bis zu dem Boden des Schmiernapfes	h'	$= d'$
		$= d + 2a$
Kolumne 14. Höhe vom tiefsten Punkt der Packung bis zum oberen Rand der Buchse	h''	$= d''$
		$= h' + 2a$
		$= d' + 2a$
		$= d + 4a$

Kolumne 15. Höhe von der unteren Abschrägung des Stopfbuchsenkopfes bis zur Unterkante des Lappens für die Spannschrauben . . . . $h^3 = d + a$

Kolumne 16. Ganze Höhe des Stopfbuchsenkopfes von der unteren Abschrägung bis zum oberen Rande des Schmiernapfes . . $h^4 = h' + b$

$$= h^3 + c + a$$
$$= h' + 1\tfrac{1}{2}a$$
$$= d' + 1\tfrac{1}{2}a$$
$$= d + 3\tfrac{1}{2}a$$
$$= d^3$$
$$= h^3 + 2\tfrac{1}{2}a$$

Kolumne 17. Tiefe des Schmiernapfes . . . . $b = a$

Kolumne 18. Dicke des Lappens für die Spannschrauben. . . . . $c = 1\tfrac{1}{2}a$

Beschreibung einiger ausgeführten Konstruktionen von Stopfbuchsen.

§ 146. Die im vorigen Paragraphen erörterte Hauptform für Stopfbuchsen erleidet, je nach den noch zu den gewöhnlichen hinzutretenden Bedingungen, nach dem Geschmack des Konstrukteurs, oder aus anderen Rücksichten oft mancherlei Abänderungen. Auf Tafel 42 ist eine Auswahl von verschiedenen Formen und Konstruktionen für Stopfbuchsen gegeben.

Stopfbuchsen mit Hanfpackung.

Taf. 42. Fig. 1 zeigt die im vorigen Paragraphen erörterte Form. Taf. 42. Fig. 1.

Taf. 42. Fig. 2 zeigt eine gegen die vorige etwas abgeänderte Konstruktion, Fig. 2a ist die Ansicht von oben, Fig. 2b der Vertikalschnitt nach der Linie *cd* in Fig. 2a; beide Figuren sind in $\frac{1}{3}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Die Verschiedenheit in der Konstruktion gegen die Anordnung in Fig. 1 besteht zunächst in der Art, die Spannschrauben an der Buchse zu befestigen. Während in Fig. 1 die unteren Enden der Spannschrauben mit Oesen versehen sind, und von aufsen her auf Stifte aufgesteckt werden, welche in die Wandung der Buchse eingeschraubt sind, hat man hier der Buchse halbcylindrische Ansätze gegeben, ähnlich wie man Taf. 42. Fig. 2.

sie dem Lagerkörper bei Zapfenlagern giebt; die Spannbolzen sind in diese Ansätze hineingesteckt und durch Querkeile festgehalten. Eine andere Verschiedenheit besteht in der Anordnung des Schmiernapfes, welcher hier fast ganz geschlossen ist, und ein Ausspritzen der Schmiere leichter verhindert; endlich ist auch die Einlage im Boden der Stopfbuchse hier etwas anders konstruirt, als in Fig. 1.

Taf. 42. Fig. 3. Taf. 42. Fig. 3 zeigt einige andere Konstruktions-Abänderungen der Stopfbuchse, namentlich des *Kopfes*, welcher hier von Gufseisen ist, und noch eine besonderen Einlage von *Metall* enthält. Die Spannschrauben sind hier dadurch an der Buchse befestigt, dafs diese seitwärts mit geschlitzten Lappen versehen ist, in welche man die, nach Art gewöhnlicher Schraubenbolzen konstruirten Spannschrauben seitwärts einschiebt. Fig. 3a ist die obere Ansicht, und Fig. 3b ein Theil des Vertikaldurchschnitts nach der Linie *ef* in Fig. 3a. Beide Figuren sind in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Taf. 42. Fig. 4. Taf. 42. Fig. 4 zeigt eine Stopfbuchse für eine starke Kolbenstange von $6\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser. Diese Anordnung hat den Zweck der Kolbenstange eine längere Führung zu gewähren, indem die Stopfbuchse aufserordentlich lang ist, und aufser mit einer Einlage im Boden, noch mit einer zweiten, verschiebbaren Einlage mitten in der Packung versehen ist. Auch hier ist der Kopf der Stopfbuchse von Gufseisen, mit einem eingesetzten Metallfutter; die Spannschrauben sind wie gewöhnliche Schraubenbolzen konstruirt, und durch einen an die Buchse angegossenen Flansch gesteckt. Zugleich halten die Spannschrauben auch einen Metall-Aufsatz fest, der den Schmiernapf überdeckt, und dem oberen Theil der Kolbenstange noch als Führung dient. Die hier im Vertikalschnitt in $\frac{1}{12}$ der natürlichen Gröfse gezeichnete Stopfbuchse ist aus der Fabrik von Boulton und Watt und zwar für ein Kriegsdampfschiff mit oscillirenden Cylindern bestimmt.

Taf. 42. Fig. 5. Taf. 42. Fig. 5 stellt eine horizontalliegende Stopfbuchse, z. B. für die Schieberstange einer Lokomotive dar. Fig. 5a ist ein Querschnitt durch den mit einer Schmierbuchse versehenen Kopf der Stopfbuchse, Fig. 5b ist ein Längenschnitt nach der Linie *gh* in Fig. 5a. Beide Figuren sind in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Die Schmierung der Kolbenstange erfolgt hier mittelst eines Dochtes, der die nöthige Schmiere aus dem mit einem Deckel verschliefsbaren Schmiernapf der Kolbenstange zuführt.

Stopfbuchsen für kleine Kolbenstangen mit Hanf-Packung.

Für Stangen von geringem Durchmesser pflegt man die Konstruktion der Stopfbuchsen oft sehr zu vereinfachen, indem man dann nicht selten die ganze Stopfbuchse von Metall macht, und den Kopf unmittelbar, und ohne Hilfe von Spannsschrauben an die Büchse *anschraubt*. Auf Taf. 42. Fig. 6, 7 und 8 sind dergleichen Konstruktionen gezeichnet.

Taf. 42. Fig. 6 zeigt eine kleine Stopfbuchse ganz aus Metall, welche mittelst eines Schraubengewindes in der Wand, durch welche die Stange geführt werden soll, befestigt wird. Eine besondere Einlage im Boden der Stopfbuchse ist hier nicht erforderlich, dagegen ist es zweckmäfsig, die Packung oben mit einer Scheibe zu überdecken, gegen welche der Kopf der Stopfbuchse wirkt. Hier ist nämlich der Kopf aufsen mit einem Schraubengewinde versehen, und das obere Ende der Buchse hat ein Muttergewinde, während der Schmiernapf aufsen sechseckig geformt ist, so dafs man den Kopf mit einem Schraubenschlüssel fassen und in die Buchse hineinschrauben kann, wodurch die Packung angeprefst wird. Damit nun hierbei nicht der Kopf unmittelbar auf die Packung wirkt, dient die Unterlagscheibe. Fig. 6a ist die obere Ansicht, Fig. 6b ein Vertikalschnitt nach der Linie *ik* in Fig. 6a. Beide Figuren sind in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Taf. 42. Fig. 6.

Eine gewisse Aehnlichkeit mit der vorigen Konstruktion hat die auf Taf. 42 in Fig. 7 dargestellte Anordnung. Fig. 7a ist die obere Ansicht, Fig. 7b ein Vertikalschnitt nach der Linie *lm* in Fig. 7a. Beide Figuren sind in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Diese Anordnung kann für noch kleinere Kolbenstangen als die vorige angewandt werden, da hier der Kopf der Stopfbuchse unmittelbar als Schraubenkopf gestaltet ist, und sich durch einen Schraubenschlüssel anziehen läfst, während bei der Anordnung in Fig. 6 nur der Rand des Schmiernapfes als Schraubenkopf dient. Taf. 42. Fig. 7.

Die Konstruktion in Fig. 8 auf Taf. 42 zeigt eine Stopfbuchse mit gufseisernem Gehäuse, und zwar in Fig. 8a in der Ansicht von oben, in Fig. 8b im Vertikalschnitt nach der Linie *no* in der Fig. 8a; beide Figuren in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Gröfse. Das Gehäuse ist wie bei den gröfsern in Fig. 1 bis 5 dargestellten Stopfbuchsen mit der Wandung oder dem Deckel aus einem Stück gegossen, in dem Boden der Buchse befindet sich eine Taf. 42. Fig. 8.

Metall-Einlage, während der Kopf der Stopfbuchse aus Metall (Bronze) ist. Die Konstruktion unterscheidet sich von der Anordnung in Fig. 1 auf Taf. 42 im Wesentlichen darin, dafs anstatt der beiden Spannbolzen in Fig. 1 hier nur eine Schraubenmutter angeordnet ist, welche den Kopf der Stopfbuchse umfafst, sich auf ein, an der äufseren Mantelfläche der Buchse angebrachtes Gewinde aufschrauben läfst, und aufsen sechseckig geformt ist, um sich durch einen Schraubenschlüssel anziehen zu lassen. Da sich hier der Kopf der Stopfbuchse beim Anziehen der Schraube nicht dreht, so bedarf es nicht der in Fig. 6 und 7 angeordneten Scheiben, welche die Packung überdecken.

Taf. 42. Fig. 9. Taf. 42. Fig. 9 zeigt den Vertikalschnitt einer Stopfbuchse für eine horizontale Kolbenstange, in $\frac{1}{3}$ der natürlichen Gröfse. Die Spannschrauben zum Anziehen des Kopfes liegen in einer Horizontal-Ebene, sind also in dem hier gezeichneten Vertikalschnitt nicht sichtbar. Der Schmiernapf, aus welchem die Schmiere mittelst eines Dochtes dem Kopf der Stopfbuchse zugeführt wird, ist von Messing und in die Buchse besonders eingeschraubt.

Stofbuchsen mit Leder- und Kautschuk-Packung.

Für die Kolbenstangen der sogenannten Taucher- oder Plungerkolben (Mönchskolben), deren man sich bei Druckpumpen für hydraulische Pressen, bei Dampfkesselspeisepumpen u. s. w. bedient, wendet man in den Stopfbuchsen häufig die Lederpackung (§ 144. S. 453) an.

Taf. 42. Fig. 10. Taf. 42. Fig. 10 zeigt eine solche Anordnung, und zwar ist Fig. 10a ein Vertikalschnitt durch die Stopfbuchse, während Fig. 10b eine Ansicht der Lederstulpen selbst zeigt. Beide Figuren sind in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Die beiden Lederstulpen, deren Ränder abgerundet sind, werden so geordnet, dafs sie mit ihren flachen Rändern aufliegen, wobei sie durch eine metallene oder eiserne Zwischenlagescheibe getrennt sind. Die aufgestülpten cylindrischen Theile der Stulpen umschliefsen die Stange in der Weise, dafs der eine Stulp abwärts reichend niederhängt, der andere aufwärts gehend in die Höhe steht; der Kopf der Stopfbuchse dient nur zur Führung der Kolbenstange und zur Befestigung der Stulpen; eine Pressung zur Herstellung der Dichtung, wie bei den Stopfbuchen mit Hanf-Packung soll durch denselben hier nicht ausgeübt werden. Diese Pressung geschieht vielmehr durch die Flüssigkeit, welche unter dem höheren Drucke steht, selbst, indem diese gegen den aufgestülpten Rand der Manchette wirkt, und denselben fest an die Kolbenstange anprefst. Ist nämlich der Raum unterhalb der Stopfbuchse (Fig. 10a) mit einer Flüssigkeit erfüllt, welche unter einem höheren Drucke steht, als diejenige in dem Raum über der Stopfbuchse, und hat daher die Flüssigkeit das Bestreben von unten nach oben durch die Stopfbuchse zu dringen, so kommt die untere Manchette zur Geltung, die Flüssigkeit drängt den unteren Lederstulp an die Kolbenstange und versperrt sich so den Durchgangsweg. Die obere Manchette ist dann ganz unthätig und überflüssig. Wenn dagegen in dem Raum über der Stopfbuchse eine stärker gespannte Flüssigkeit vorhanden ist, als in dem Raum unterhalb der Stopfbuchse; wenn z. B. unterhalb der Stopfbuchse ein luftverdünnter Raum ist, während sich über der Stopfbuchse atmosphärische Luft befindet, so hat diese das Bestreben von oben nach unten durch die Stopfbuchse zu dringen; dabei wird die obere Manchette an die Kolbenstange angeprefst, und so die Dichtung hergestellt; hierbei ist nun die untere Manchette unthätig und überflüssig. Jenachdem also abwechselnd über oder unter der Stopfbuchse die höher gespannte Flüssigkeit sich befindet, kommt die obere oder die untere Manchette zur Anwendung. Wenn dagegen konstant auf der einen Seite ein höherer Druck stattfindet, als auf der anderen, so ist auch nur eine der beiden Manchetten nöthig. Stopfbuchsen also, welche nur unterhalb einen höheren Druck haben, brauchen nur die untere Manchette, und können die obere entbehren. Umgekehrt, wenn bei einer Stepfbuchse stets unterhalb ein geringerer Druck wirksam ist, als oberhalb, so bedarf es nur der Anwendung der oberen Manchette, und man kann die untere Manchette fortlassen.

Der Fall, dafs unterhalb der Stopfbuchse stets ein gröfserer Druck ist, als über der Stopfbuchse, findet unter anderen statt bei dem Prefskolben der hydraulischen Presse. Hier bedarf es also nur der Anwendung einer Manchette, deren aufgestülpter, an die Kolbenstange sich anschmiegender Rand nach der Richtung des gröfseren Druckes, also nach dem Innern des Prefscylinders hin gerichtet ist. Die für dergleichen Prefscylinder übliche Stopfbuchsen-Konstruktion zeigt Fig. 11 auf Taf. 42 und Taf. 42.
zwar ist Fig. 11a ein Vertikalschnitt durch die Stopfbuchse Fig. 11.
in $\frac{1}{10}$ der natürlichen Gröfse, während Fig. 11b einen Vertikalschnitt durch den Lederstulp in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Gröfse darstellt. In der Wandung, durch welche sich der Prefskolben bewegt,

ist eine, den Kolben koncentrisch umgebende Höhlung von etwa 2 Zoll Höhe und einem Zoll in der radialen Dimension. In diese Höhlung ist ein Lederstulp gelegt, der wie Fig. 11b zeigt, so zusammengebogen ist, dafs er zwei koncentrische abwärts hängende cylindrische Lederlappen darstellt, welche oben durch eine abgerundete Umbiegung zusammenhängen. Wenn nun das, in dem Prefscylinder befindliche, unter sehr hohem Druck stehende Wasser in die Höhlung gelangt, so drängt es die beiden Lappen auseinander, prefst den einen gegen den Prefskolben, den anderen gegen die Wandung der Höhlung, und sperrt sich so jeden Durchgang ab. Diese sehr einfache Anordnung ist von Bramah angegeben, und hat die hydraulischen Pressen erst zu der Brauchbarkeit gebracht, deren wir uns zur Zeit erfreuen. Zugleich hat diese Dichtungs-Methode den Vortheil, dafs der Druck der Packung gegen die Kolbenstange sich nach dem Ueberdruck der stärker geprefsten Flüssigkeit regulirt.

Für sehr flüchtige und leichte Flüssigkeiten, z. B. für Aetherdämpfe, Chloroform, auch für Alkoholdämpfe hat du Tremblay eine Stopfbuchsen-Konstruktion angegeben, welche
Taf. 42. wir auf Taf. 42 in Fig. 12 im Vertikalschnitt und in $\frac{1}{4}$ der natür-
Fig. 12. lichen Gröfse mittheilen. Die Kolbenstange ist, soweit sie durch das Gehäuse oder die Buchse geht, mit einem möglichst schmiegsamen Gewebe oder mit einer Kautschuckhaut umgeben. Diese Umhüllung ist einerseits an dem konischen Einsatzstück befestigt, welches von unten her in den Boden der Buchse eingeschraubt ist, und welches denselben Zweck zu erfüllen hat, wie die metallenen Einlagen der gewöhnlichen Stopfbuchsen: andererseits ist die Umhüllung oben an einem ähnlichen konischen Stück aus Bronze befestigt, welches in den Deckel der Stopfbuchse eingeschraubt ist, und welches nach oben hin zu einem Schmiernapf sich verlängert. Mit Hilfe einer Druckpumpe wird durch ein seitwärts an dem Gehäuse angebrachtes Rohr in die Höhlung des Gehäuses Oel hineingeprefst, welches überall auf das Gewebe einen gleichmäfsigen Druck ausübt, dasselbe in die, in der Zeichnung angegebene Form prefst, und vornehmlich in der Mitte das Gewebe fest an die Kolbenstange anlegt. Man kann durch den Druck, unter welchen man das Oel in dem Gehäuse bringt, leicht den Druck der Umhüllung auf die Stange, und dadurch die Dichtung selbst reguliren. Anstatt die Höhlung mit Oel zu füllen, kann man auch Wasser oder Dampf hineinleiten.

Stopfbuchsen mit Metall-Packung.

Taf. 42. Fig. 13 zeigt in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse den Vertikalschnitt einer Stopfbuchse mit Metall-Packung nach der Konstruktion von Corren. Die Packung besteht hier aus vier Metallringen, welche an einer Stelle aufgeschlitzt, und aufsen konisch abgedreht sind. Die Ringe werden so übereinander gelegt, dafs die Schlitze versetzt sind. Die beiden unteren Ringe stellen äufserlich einen mit der Spitze nach unten, die beiden oberen Ringe einen mit der Spitze nach oben gekehrten abgestumpften Kegel dar, jeder der beiden Kegel ist umschlossen durch einen äufseren Ring, welcher mit seiner Höhlung auf den Kegel pafst, mit seiner äufseren Peripherie aber in das cylindrisch ausgebohrte Gehäuse pafst. Zieht man durch die Spannschrauben den Kopf der Stopfbuchse an, so wird der obere Ring niedergedrückt, und wirkt komprimirend auf die beiden oberen Packungsringe, wobei gleichzeitig diese auf die unteren beiden Packungsringe drücken, und selbige in den festliegenden unteren Umschliefsungsring hineinpressen. Dies bewirkt eine Zusammendrückung, und dadurch einen festen Anschlufs der Packungsringe an die Kolbenstange. Taf. 42. Fig. 13.

Andere Konstruktionen von Stopfbuchsen sind bei Gelegenheit der Beispiele von Kolben und Ventilen mitgetheilt worden, und enthalten namentlich

die Figuren	1	auf Tafel	43
	1 und 3	- -	44
	2 - 3	- -	45
	9	- -	46
	1 - 2	- -	47
	1	- -	48
	2	- -	49

noch verschiedene Anordnungen für Stopfbuchsen.

Die Figuren 14. 15 16. 17 auf Tafel 42 stellen Ausschlufsventile für Wasser unter hohem Druck dar, und werden weiter unten bei Gelegenheit der Ventile für Ausflufsöffnungen der Wasserleitungen im § 164 beschrieben werden. Taf. 42. Fig. 14 bis 17

2. Kolben.

Allgemeine Anordnung und Eintheilung der Kolben.

§ 147. Wir haben bereits in § 143 die allgemeine Bedeutung der Kolben erklärt. Nach jener Erklärung bilden die Kolben im Allgemeinen eine verschiebbare Wand in irgend einem Raume (Cylinder; Pumpenstiefel), so dafs diese Wand während der Verschiebung stets eine dichte Fuge mit der Begrenzung jenes Raumes darstellt. Der Zweck der Kolben ist dabei häufig, jedoch nicht immer, die Verdrängung oder das Fortschieben, auch wohl die Zusammendrückung der Flüssigkeit, welche unter einem höheren Drucke steht. Von diesem häufig vorkommenden Zwecke der Kolben ist man darauf gekommen auch alle übrigen Vorrichtungen, welche denselben Zweck erfüllen, selbst wenn ihnen die oben genannten charakteristischen Eigenthümlichkeiten der Kolben abgehen, mit der (uneigentlichen) Benennung „Kolben“ zu belegen. Wenn z. B. eine gewöhnliche cylindrische Stange mittelst einer Stopfbuchse in einen Raum hineingeführt wird, welcher mit einer Flüssigkeit erfüllt ist, und man schiebt diese Stange in jenen Raum hinein, so drängt ihr Volum entweder einen entsprechenden Theil der Flüssigkeit aus dem Raum hinaus (wie bei den Druckpumpen) oder es wird, wenn dies nicht möglich ist, die Flüssigkeit in dem Raume komprimirt. Dergleichen Vorrichtungen pflegt man Taucherkolben, Mönchskolben, Königskolben, oder mit der englischen Bezeichnung Plungerkolben zu nennen.

Die Taucherkolben sind also im Wesentlichen cylindrische Stangen, welche keine bewegliche Liderung haben (§ 143) wie die eigentlichen Kolben, und bei denen auch die Liderung nicht von Innen nach Aufsen angeprefst wird (§ 144 Schlufs): die vielmehr nur durch eine Stopfbuchse in den Raum hineingeführt sind, in welchem sie wirken sollen.

Die eigentlichen Kolben dagegen sind immer mehr oder weniger scheibenförmig, wenngleich zuweilen bei geringem Durchmesser und gröfserer Höhe diese Form auch in die eines balkenförmigen oder blockförmigen Körpers übergeht. Die Dichtung (Liderung) befindet sich an der äufseren Peripherie des Kolbens. Gewöhnlich besteht bei den Kolben die Liderung aus

Hanf, aus Leder (Filz; Kautschuck) oder aus Metall. Man pflegt diese Kolben daher einzutheilen in:

1) Kolben mit Hanf-Liderung,
2) Kolben mit Leder-Liderung,
3) Kolben mit Metall-Liderung.

Die Kolben haben in dem Raum, dessen dicht schliefsende bewegliche Zwischenwand sie bilden, gewöhnlich eine gradlinige, hin- und hergehende Bewegung. Nun kann verlangt werden, dafs der Kolben, er mag sich bei dieser hin- und hergehenden Bewegung, nach der einen oder nach der anderen Richtung bewegen, immer einen dichten Verschlufs herstellt, oder es kann auch die Aufgabe sein, dafs ein solcher dichter Verschlufs nur bei der Bewegung nach der einen Richtung hin stattfinde, während bei der entgegengesetzten Bewegung eine Kommunikation zwischen den beiden Abtheilungen, in welche der Kolben den Raum scheidet, bestehen bleibe. Im ersten Falle bilden die Kolben eine volle (massive) Scheidewand, im anderen Falle ist diese Scheidewand mit einer oder mehreren Durchbrechungen (Oeffnungen) versehen, welche, wenn der Kolben sich nach derjenigen Richtung bewegt, bei welcher ein dichter Verschlufs bestehen soll, durch Ventile abgesperrt werden, während bei der entgegengesetzten Bewegung diese Ventile sich öffnen, und eine Kommunikation zwischen beiden Abtheilungen herstellen. Die Kolben-Konstruktionen für jeden der beiden Fälle bieten mancherlei Verschiedenheiten dar, und man hat daher die Kolben einzutheilen in

Massive (volle) Kolben.
Durchbrochene Kolben (Ventilkolben).

Sowohl bei den massiven, als bei den Ventil-Kolben kann man Hanf-, Leder- oder Metall-Liderung anwenden. Berücksichtigen wir nun noch die Taucherkolben, so ergiebt sich folgende Eintheilung, der am häufigsten vorkommenden Kolben:

a. Taucherkolben.
b. Massive Kolben mit Hanf-Liderung.
c. Massive Kolben mit Leder-Liderung.
d. Massive Kolben mit Metall-Liderung.
e. Ventilkolben mit Hanf-Liderung.
f. Ventilkolben mit Leder-Liderung.
g. Ventilkolben mit Metall-Liderung.

Für alle diese Konstruktionen enthalten die Tafeln Beispiele.

Einzelne Theile der Kolben und deren Verhältnisse.

§ 148. Die gewöhnlichen Kolben bestehen im Wesentlichen aus folgenden Theilen:

1) dem Kolbenkörper,
2) der Kolbenliderung,
3) der Spannvorrichtung für die Kolben-Liderung,
4) der Vorrichtung zur Befestigung der Kolbenstange,
5) (bei den Ventilkolben) den Ventilen.

1) Der Kolbenkörper.

Der Kolbenkörper ist entweder von Holz oder von Eisen oder von Metall. Hölzerne Kolben sind sehr wenig dauerhaft, man findet sie meist nur bei ganz einfachen billigen Konstruktionen, die sich leicht repariren lassen, und welche auf keine grofse Dauer zu rechnen haben, z. B. bei provisorischen Anlagen. Eiserne Kolbenkörper wendet man für gröfsere Durchmesser an, und wo man nicht mit sauern, das Eisen angreifenden Flüssigkeiten zu thun hat. Metallene Kolbenkörper sind bei kleineren Durchmessern, bei sauber ausgeführten Konstruktionen, und in solchen Fällen anwendbar, wo man schädliche Einwirkungen der Flüssigkeit auf einen eisernen Kolbenkörper zu befürchten hat. Die Form und die Dimensionen des Kolbenkörpers lassen so viele Verschiedenheiten zu, dafs sich über die Verhältnisse derselben nicht füglich allgemeine Regeln aufstellen lassen.

2) Die Kolben-Liderung.

Die Kolben-Liderung ist an der äufseren Peripherie des Kolbens befestigt; die Höhe derselben beträgt bei Hanf-Liderung und Leder-Liderung gewöhnlich nicht unter $2\frac{1}{2}$ bis 3 Zoll, bei Metall-Liderung nicht unter 1 bis $1\frac{1}{2}$ Zoll. Bei gröfseren Kolbendurchmessern macht man sie etwas höher, so dafs man etwa für jeden Fufs des Kolbendurchmessers zu den oben genannten Werthen noch $\frac{1}{8}$ Zoll zulegt. Hiernach würde sich ergeben die Höhe der Liderung b

a) Hanf-Liderung und Leder-Liderung

$$b = 2\tfrac{1}{2}\ \text{Zoll} + \tfrac{1}{100}d \text{ bis } 3\ \text{Zoll} + \tfrac{1}{96}d,$$

b) Metall-Liderung

$$b = \mathbf{1\ Zoll} + \tfrac{1}{100}\boldsymbol{d} \text{ bis } \mathbf{1\tfrac{1}{2}\ Zoll} + \tfrac{1}{96}\boldsymbol{d}.$$

Ueber 6 Zoll macht man selbst bei den gröfsten Kolbendurchmessern die Liderung nicht hoch.

Zur Herstellung der Hanf-Liderung werden aus den Hanffasern Zöpfe geflochten, welche man spiralförmig um den Kolbenkörper herumwickelt, indem man den Anfang und das Ende des Zopfes an dem Kolbenkörper befestigt. Diese Zöpfe sind $\frac{1}{2}$ bis 1 Zoll dick und werden so herumgewickelt, dafs die Liderung etwa 1 bis $1\frac{1}{2}$ Zoll dick wird. Der Hanf kann vorher in Talg, Oel oder Trahn getaucht werden.

Die Leder-Liderung besteht entweder aus Lederstulpen, welche in gleicher Weise wirksam sind, wie in § 146 bei Gelegenheit der Erklärung der Fig. 10 auf Taf. 42 beschrieben wurde, oder man verwendet das Leder in Scheiben, die man über einander legt, zusammenprefst, und dann abdreht (vergl. Taf. 43. Fig. 7), oder endlich man legt das Leder als Mantel um den Kolbenkörper (vergl. Taf. 43. Fig. 11). Wenn man Lederstulpen (Manchetten) anwendet, so mufs man bei den massiven Kolben deren zwei brauchen, damit die Dichtung nach beiden Richtungen erfolge; bei den Ventilkolben dagegen, wo man nur nach einer Richtung eine Dichtung nöthig hat, kann man mit einer Manchette auskommen, wie dies in § 146 S. 469 näher erläutert ist.

Die Metall-Liderung besteht entweder aus einzelnen Ringsegmenten (Taf. 43. Fig. 11), oder aus vollen Ringen, welche an einer Stelle aufgeschlitzt sind, damit sie sich aufbiegen und an die Cylinderwandung anpressen lassen (Taf. 43. Fig. 13 und 14. Taf. 45. Fig. 1. 2. 3. Taf. 48. Fig. 2. 3. 5 und 6) oder aus einem zusammenhängenden, mehrfach umwundenen Ringe (Taf. 48. Fig. 4). Die Ringe, deren man sich zur Metall-Liderung bedient, sind entweder von einer Metall-Legirung wie sie zu Zapfenlagern, Stopfbuchsen u. s. w. gebraucht wird, oder aus Stahl; in neuerer Zeit verwendet man mit grofsem Vortheil Liderungsringe aus gutem grauen oder halbirten Gufseisen. Die Dicke der Liderungsringe beträgt etwa $\frac{1}{4}$ bis 1 Zoll.

3. Die Spann-Vorrichtung für die Kolben-Liderung.

Die Vorrichtung, deren man sich bedient, um die Liderung gegen die Cylinderwandung anzupressen, ist nach der Art der Liderung und der gewählten Konstruktion des Kolbens verschieden.

Hanf-Liderung bedarf bei kleineren Kolben keiner besonderen Spann-Vorrichtung, da die Flüssigkeit, wenn sie in die Hanf-Liderung eindringt, die Fasern des Hanfes aufbläht, und so eine Pressung der Liderung gegen die Cylinderwandung bewirkt. Bei gröfseren Kolben, oder wo man starke Abnutzung der Liderung befürchtet, macht man an dem Kolbenkörper eine Vorrichtung, durch welche, ähnlich wie durch den Kopf der Stopfbuchsen (siehe diese) die Hanf-Liderung komprimirt und an die Wandungen angeprefst werden kann (Taf. 43. Fig. 4. 5 und 6). Bei Anwendung der Leder-Liderung wird, wie dies in § 146 S. 469 beschrieben worden, durch den Druck der Flüssigkeit der aufgestülpte Rand der Leder-Manchette gegen die Cylinderwandung geprefst, und es bedarf auch hier keiner besonderen Spann-Vorrichtung.

Die Metall-Liderung wird dagegen gewöhnlich mit besonderen Spann-Vorrichtungen versehen, welche meist aus elastischen Stahlfedern (Blatt- oder Ringfedern) bestehen, welche die geschlitzten Stahlringe aus einander biegen. Zuweilen verzichtet man darauf durch dergleichen Spann-Vorrichtungen die Pressung der Liderung gegen die Cylinderwandung zu reguliren, und bewirkt dann den dichten Anschlufs der Liderungsringe an die Cylinderwandung dadurch, dafs man den Liderungsringen von Hause aus einen gröfseren Durchmesser giebt, als dem Cylinder, und dieselben, indem man sie zusammendrückt, in den Cylinder einbringt; vermöge ihrer Elasticität haben sie dann das Bestreben ihre ursprüngliche Form wieder anzunehmen, und üben vermöge dieses Bestrebens einen Druck auf die Cylinderwand aus. Ueber die Eigenthümlichkeit dieser Art von Liderung handeln zwei Aufsätze in der „Zeitschrift des hannöverschen Architekten- und Ingenieur-Vereins“, auf welche wir hier verweisen müssen *). Taf. 45. Fig. 3 und Taf. 48. Fig. 4 geben Beispiele von diesen Konstruktionen.

4. Vorrichtungen zur Befestigung des Kolbens an der Kolbenstange.

Die Befestigung des Kolbens an der Kolbenstange geschieht immer an dem Kolbenkörper. Bei massiven Kolben er-

*) Der erste Aufsatz ist im Jahrgang 1856 (II. Band) der Zeitschrift des hannöverschen Architekten-Vereins S. 473 enthalten und rührt von Herrn Dr. Bargum her, der andere, an diesen anschliefsend, ist im Jahrgang 1858 (IV. Band) enthalten und von Herrn Blafs verfafst.

folgt dieselbe gewöhnlich in der Mitte des Kolbenkörpers, welcher hier nach Art einer Hülse konstruirt ist. Dieser Theil des Kolbenkörpers heifst dann das Herz oder das Herzstück. Im Allgemeinen ist hier auf die Befestigungs-Konstruktionen plattenförmiger Körper an stangenförmigen Körpern im ersten Theil dieses Werkes zu verweisen (Thl. I. §. 149. S. 412 und Taf. 22. Fig. 16 bis 20). Andere Konstruktionen werden wir bei Gelegenheit der Beschreibung der einzelnen Beispiele von Kolben-Konstruktionen besprechen. Die Kolbenstange ist entweder massiv oder hohl; im letzteren Falle geht gewöhnlich die Lenkerstange zur Bewegung des Kolbens in die hohle Kolbenstange hinein, und ist mittelst eines Charniers befestigt. Taf. 43. Fig. 1. Taf. 44. Fig. 1 und Taf. 45. Fig. 2 geben Beispiele dieser Konstruktion. Man macht indessen auch aus anderen Gründen die Kolbenstange hohl, wie dies die Beispiele auf Taf. 44. Fig. 3 und auf Taf. 48. Fig. 1 zeigen; bei der Beschreibung dieser Figuren soll hiervon ausführlicher die Rede sein. Zuweilen befestigt man die Lenkerstange unmittelbar an dem Kolben, so dafs keine Kolbenstange vorhanden ist. Dies ist zulässig, wenn der Cylinder oben offen ist, und man eine Stopfbuchse entbehren kann. Taf. 43. Fig. 3 und Fig. 8. Taf. 44. Fig. 5 geben hierzu Beispiele.

Bei den Ventilkolben macht die Befestigung der Kolbenstange dann einige Schwierigkeiten, wenn die Ventilöffnung gerade in der Mitte des Kolbens liegt; dann wird die Kolbenstange an ihrem unteren Ende gabelförmig getheilt, und zu beiden Seiten neben der Oeffnung im Kolbenkörper befestigt. Beispiele geben die Konstruktionen auf Taf. 45. Fig. 4. 5. 6.

5. Die Kolben-Ventile.

Die Konstruktion der Kolbenventile ist sehr mannigfaltig. Wir müssen hier auf die verschiedenen weiter unten abzuhandelnden Ventil-Konstruktionen verweisen, und auf die Kolben-Konstruktionen, welche auf Taf. 44. Fig. 1. 3. 4 und 5. Taf. 45. Fig. 4. 5. 6. 7 und Taf. 48. Fig. 7 und 8 gegeben sind.

Taucherkolben.

§ 149. Beispiele von Taucherkolben geben schon die Fig. 10 und 11 auf Tafel 42, welche oben S. 468 beschrieben worden sind. Fig. 10 ist ein Taucherkolben für eine gewöhnliche

Druckpumpe, wie sie z. B. zur Speisung der Dampfkessel benutzt wird. Fig. 11 ist ein Taucherkolben, welcher als Prefskolben für eine hydraulische Presse dient. Einige andere Taucherkolben von eigenthümlicher Konstruktion folgen hier.

Taf. 43. Fig. 1. Taf. 43. Fig. 1 zeigt den Taucherkolben von einer von Eugene Bourdon in Paris erbauten Druckpumpe, welche das Wasser der Seine für eine Wasserleitung emporhebt. Die Figur zeigt einen Vertikalschnitt in $\frac{1}{8}$ der natürlichen Gröfse.

Der Taucherkolben wird durch einen aufsen abgedrehten Cylinder von Gufseisen gebildet, welcher oben sich vasenförmig erweitert, und welcher durch eine gewöhnliche Stopfbuchse mit Hanf-Packung in den Pumpenstiefel eingeführt ist. Der Vertikalschnitt zeigt, dafs der Taucherkolben seiner ganzen Länge nach hohl ist, theils um sein Gewicht zu vermindern, theils um im Innern der Höhlung die verschiedenen Theile anzubringen, durch welche der Kolben mit der Lenkerstange verbunden wird. Die Lenkerstange endigt nämlich in einen kugelförmig abgedrehten Kopf, welcher, möglichst nahe dem Schwerpunkt des Kolbens, mit diesem verbunden werden mufs, um soviel als möglich die schädlichen Seitenpressungen zu vermeiden, welche namentlich dann stattfinden, wenn die Lenkerstange gegen die Axe des Kolbens geneigt ist. In der Höhlung des Kolbens ist zunächst ein Kernstück von Gufseisen befestigt, welches aufsen cylindrisch ist, und oben eine halbkugelförmige Höhlung besitzt, um das kugelförmige Ende der Lenkerstange zur Hälfte aufzunehmen, während der obere Theil dieses kugelförmigen Endes durch ein bronzenes Ringstück umschlossen ist, welches sich gegen einen Vorsprung im Inneren des Taucherkolbens legt und von diesem festgehalten wird. Diese sämmtlichen Theile, nämlich die Lenkerstange mit dem Ringstück und das gufseiserne Kernstück werden von unten her in die Höhlung des Taucherkolbens eingebracht, worauf man diese an ihrer unteren Mündung durch einen gufseisernen Pfropfen verschraubt. Die Druckschraube, welche in der Mitte dieses Pfropfens angebracht ist, hat den Zweck, das Kernstück und das Ringstück gegen den Kugelzapfen genau einzustellen, und, wenn die Verbindung sich abgenutzt hat, den Schlufs zwischen diesen Stücken wieder zu bewirken. Um zu dieser Schraube gelangen zu können, ist in der Wandung des Pumpencylinders eine, durch eine Platte verschliefsbare Oeffnung, angebracht. Löst man die Platte ab, so kann man mit der Hand hineinfassen und mit Hilfe eines Dorns die Schraube anziehen. Der Theil der inneren Höhlung des Taucherkolbens, welcher über dem, als Widerlager für das Lager des Kugelzapfens dienenden Ansatz liegt, ist erweitert, um den nöthigen Ausschlag für die Lenkerstange zu gewähren. Endlich ist die Höhlung des Taucherkolbens mittelst eines gufseisernen Deckes bedeckt, welcher in Form einer Kugelkappe gestaltet, und in der Mitte durchbohrt ist. Dieser Deckel wird auf die Lenkerstange aufgesteckt, und folgt der Seitenbewegung, welche dieselbe bei der Umdrehung der Kurbel annimmt, wobei er sich auf der oberen Mündung des Taucherkolbens frei hin- und herschiebt, doch so, dafs er diese Mündung stets bedeckt hält, und das Eindringen von Unreinigkeiten verhindert.

Ein anderer Taucherkolben von eigenthümlicher Konstruktion ist auf Taf. 48 in Fig. 1 gezeichnet, und zwar stellt Fig. 1a eine obere Ansicht mit theilweisem Durchschnitt dar, Fig. 1b ist ein Vertikalschnitt durch den ganzen Kolben nach der Linie *ab* in Fig. 1a. Fig. 1b ist ein Vertikalschnitt durch das Zapfenstück nach der Linie *cd* in Fig. 1a, und Fig. 1d ist eine Ansicht des eigentlichen Taucherkolbens. Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Dieser Kolben ist von der Druckpumpe für eine hydraulische Presse aus der Fabrik von Hummel (jetzt Bialon) in Berlin *). Es ist ein sogenannter Doppelkolben, indem er aus zwei in einander geschobenen koncentrischen Kolben besteht, welche beim Anfang des Pressens, so lange der Widerstand in der Presse noch geringer ist, zusammenwirken, indem man sie kuppelt, so dafs sie wie ein einziger Kolben arbeiten. Wird aber der Widerstand gröfser, so löst man den inneren Kolben von dem äufseren (röhrenförmigen) Kolben ab, und läfst letzteren allein arbeiten. Der äufsere röhrenförmige Kolben hat einen äufseren Durchmessser von $1\frac{3}{8}$ Zoll, und einen inneren Durchmesser von $1\frac{1}{4}$ Zoll mithin $\frac{1}{16}$ Zoll Wandstärke, er wirkt daher nur mit einer Ringfläche von 0,257 Quadratzoll Flächeninhalt. Diese Anordnung, wonach man zwei Kolben in einander arbeiten läfst, ist einer von Hick und Rothwells angegebenen nachgebildet, unterscheidet sich jedoch von selbiger dadurch, dafs bei der Hummel'schen Konstruktion zuletzt nur der röhrenförmige Kolben arbeitet, und der innere volle Kolben feststeht, während bei der von Hick und Rothwells ausgeführten Anordnung es gerade umgekehrt ist. Will man

*) Vergl. Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleifses in Preufsen. Jahrgang 1838. S. 194.

schliefslich mit einem sehr geringen Kolbenquerschnitt arbeiten, so ist die Hummel'sche Konstruktion vorzuziehen, da man aus praktischen Gründen dem ringförmigen Kolben leichter einen sehr kleinen Querschnitt geben kann, als dem vollen Kolben.

Die Kuppelung der beiden Kolben für die gemeinschaftliche Arbeit geschieht in folgender Weise. Auf dem äufseren, hohlen (röhrenförmigen) Kolben, welchen Fig. 1d noch besonders in der Ansicht zeigt, ist ein sogenanntes Zapfenstück von Bronze aufgeschraubt, welches man in Fig. 1a in der oberen Ansicht, in Fig. 1b in dem Vertikalschnitt nach der Linie *ab* und in Fig. 1c im Vertikalschnitt nach der Linie *cd* in Fig. 1a sieht. Dieses Zapfenstück ist mit seinen beiden Zapfen *yy* an den Pumpenhebel *xx* angehängt, der an der betreffenden Stelle gabelförmig ausgebaucht ist, und mit der Hand auf und nieder bewegt werden kann. Die Art der Aufhängung zeigt Fig. 1c. Das Zapfenstück ist hohl, und zwar in dem mittlen Drittel seiner Höhe, welches die Kolbenstange *z* des inneren Kolbens passend umschliefst, enger, als oben und unten. Die untere Erweiterung enthält die Schraubenmutter, welche zur Befestigung des Zapfenstückes auf dem röhrenförmigen Kolben dient; die obere Erweiterung dagegen enthält zwei quadrantenförmige Vorsprünge *qq*, welche die halbe Höhe dieser Oeffnung einnehmen, und dieselbe an zwei entgegengesetzten Seiten bis zum Durchmesser der Kolbenstange *z* verengen. An der Kolbenstange *z* dagegen befinden sich zwei Ansätze *rr*, welche so konstruirt sind, dafs man sie zwischen den quadrantenförmigen Vorsprüngen *qq*, durchschieben kann. Ist dies geschehen, und man dreht dann die Kolbenstange *z* um 90 Grad herum, so setzen sich die Ansätze *rr* unter die Vorsprünge *qq* und die beiden Kolben sind gekuppelt, wenigstens wird beim Niederdrücken des äufseren Kolbens, der innere Kolben mittelst der Vorsprünge *qq*, die nun auf den Ansätzen *rr* ruhen, mit niedergedrückt, wogegen beim Aufzuge des Kolbens die mittlere Verengung des Zapfenstückes von unten gegen die Ansätze *rr* wirkt, und den inneren Kolben mit hebt. In entgegengesetzter Weise wird die Lösung der beiden Kolben bewirkt.

Um die nun hier beschriebene Kuppelung und Lösung der beiden Kolben leicht bewirken zu können, und um den inneren Kolben, wenn er nicht arbeiten soll, festzustellen, geht die Kolbenstange *z* in ihrer oberen Verlängerung durch eine Hülse, welche ihr zugleich als Führung dient. Diese Hülse, die hier nicht mitgezeichnet ist, hat eine Klemmschraube, durch deren Anziehen man die Kolbenstange z festklemmen kann. Endlich ist das oberste Ende der Kolbenstange z mit einem quadratischen Kopf versehen, an welchen man einen Schraubenschlüssel ansetzen kann, um die Drehung der Kolbenstange behufs Kuppelung und Lösung zu bewirken. Ist, wie die Fig. 1b es darstellt, die Kuppelung gelöst, so braucht man nur die Kolbenstange z in der Hülse mittelst der Klemmschraube festzustellen, durch den Pumpenhebel den äufseren Kolben soweit zu heben, dafs die Ansätze *rr*, zwischen den Vorsprüngen *qq* hindurchgleitend, auf die mittlere Verengung des Zapfenstückes aufstofsen, dann die Klemmschraube zu lösen und die Kolbenstange um 90 Grad herum zu drehen. Das Lösen geschieht in umgekehrter Weise.

Damit, wenn der röhrenförmige Kolben allein wirkt, wobei er sich auf dem inneren Kolben gleitend verschiebt, die Luft in dem Raum zwischen dem innern Kolben und dem Zapfenstück nicht abwechselnd verdünnt, und komprimirt werde, ist die Oeffnung *s* angebracht, durch welche dieser Raum mit der Atmosphäre kommunicirt.

Die Dichtung der beiden Kolben ist aus dem Vertikalschnitt Fig. 1b zu ersehen. Der äufsere Kolben ist mittelst einer Stopfbuche mit Ledermanchetten gedichtet, wie sie in § 146 bei Fig. 10 auf Taf. 42 (S. 469) beschrieben ist. Die obere Manchette hindert das Eindringen der Luft, die untere Manchette das Entweichen des Wassers. Die Manchetten werden durch die Schraubenmutter *t* festgehalten, welche an ihrer oberen Fläche vier runde Löcher *uu* hat, um einen Schraubenschlüssel einsetzen zu können. Damit beim Drehen dieser Schraubenmutter die obere Manchette nicht mit verdreht werde, dient die Zwischenlagscheibe *v*. Die Liderung des inneren Kolbens besteht aus zwei ähnlichen Ledermanchetten, von denen die obere durch eine Schraube *w* an der Kolbenstange befestigt ist, die untere dagegen keiner Befestigung bedarf, da sie durch den Wasserdruck fortwährend an den Kolben angeprefst wird.

Massive Kolben mit Hanf-Liderung.

§ 150. Auf Taf. 43 in Fig. 2. 3. 4. 5 und 6 sind verschiedene massive Kolben mit Hanf-Liderung dargestellt.

Taf. 43. Fig. 2 zeigt einen einfachen eisernen Kolben mit Hanf-Liderung im Vertikalschnitt, und in $\frac{1}{3}$ der natürlichen Gröfse. Der Kolben hat keine besondere Vorrichtung zum An- Taf. 43. Fig. 2.

spannen der Liderung, welche auf den Theil der Mantelfläche des Kolbens, welcher zwischen dem oberen und dem unteren vorspringenden Rande liegt, so aufgewickelt wird, dafs die äufsere Begrenzung der Liderung über diese Ränder hervorragt. Die Ränder selbst müssen ein wenig kleiner im Durchmesser sein, als die Bohrung des Pumpenstiefels. Zur Verminderung des Gewichtes ist der Kolben hohl gemacht; die Kolbenstange hat unten eine konische Verstärkung, geht durch den, in der Mitte passend ausgebohrten Kolbenkörper hindurch, und wird mittelst einer Schraubenmutter von unten in die konische Bohrung fest hineingezogen.

Will man den Kolbenkörper von Holz machen, so wird er aus einem Klotze so gedreht, dafs die äufsere Form mit der hier in Fig. 2 dargestellten übereinstimmt; er wird dann aber nicht hohl gemacht, sondern bleibt voll; die Kolbenstange kann aber in gleicher Weise wie hier, auch an dem hölzernen Kolbenkörper befestigt werden. Da wo oben und unten die vorspringenden Ränder sind, legt man um den hölzernen Kolbenkörper zuweilen eiserne Ringe herum, um ihn gegen das Aufspalten zu schützen.

Taf. 43. Fig. 3. Taf. 43. Fig. 3 ist ein kleiner gufseiserner massiver Kolben mit Hanf-Liderung im Vertikaldurchschnitt und in $\frac{1}{3}$ der natürlichen Gröfse. Die äufsere Anordnung des Kolbens stimmt mit der soeben beschriebenen überein; auch hier ist keine besondere Spann-Vorrichtung für die Liderung, welche auf die Mantelfläche des Kolbens aufgewickelt wird. Der wesentlichste Unterschied zwischen dieser und der vorhin beschriebenen Konstruktion liegt in der Art der Befestigung der Stange zur Bewegung des Kolbens. Während bei der Anordnung in Fig. 2 eine eigentliche Kolbenstange an dem Kolbenkörper befestigt ist; hat man hier die Lenkerstange unmittelbar in die Höhlung des Kolbens hineingeführt, und mittelst eines Charniers angeschlossen. Zu diesem Zwecke hat das Ende der Lenkerstange ein Auge, mit welchem es zwischen zwei ähnlich geformte Backen des unter dem Kolbenboden verschraubten Bolzens eingreift; ein quer durch diesen Bolzenkopf und das Auge der Stange hindurch gesteckter, und mittelst Schraube befestigter Stift vollendet das Gelenk. Uebrigens mufs das Gelenk der Lenkerstange und des Kolbenbolzens aufserhalb des Kolbens zusammengesetzt werden, und kann dann erst im Boden des Kolbens festgeschraubt werden.

Taf. 43. Fig. 4. Taf. 43. Fig. 4 zeigt einen Kolben mit Hanf-Liderung im Vertikaldurchschnitt und in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse, welcher mit einer Vorrichtung zum Nachspannen der Packung versehen ist, so dafs dieses Spannen der Packung von unten her bewirkt werden kann. Der Kolben hat in seiner allgemeinen Form Aehnlichkeit mit dem in Fig. 2 dargestellten. Die Hanfzöpfe, welche die Liderung des Kolbens bilden, werden in die zwischen den beiden vorspringenden Rändern in der Mantelfläche des Kolbenkörpers sich bildende Nuth gewickelt; allein es ist hier nur der obere von den beiden vorspringenden Rändern an dem Kolbenkörper fest, und mit diesem aus einem Stück, der untere Rand ist in Form eines Ringstückes auf den Kolbenkörper aufgeschoben, und kann durch die Schraubenmutter *a*, welche auf ein Gewinde am untern Ende des Kolbenkörpers aufgeschraubt wird, in die Höhe geschoben werden, wobei sie auf die umgewickelte Hanf-Liderung komprimirend wirkt. Die Kolbenstange geht cylindrisch durch den Kolbenkörper hindurch, und legt sich oben mit einem Ansatz auf den oberen Boden desselben auf, während sie unten durch eine Schraubenmutter angezogen und befestigt werden kann.

Im Gegensatz zu diesem Kolben, bei welchem die Liderung von unten her nachzuspannen ist, zeigt Taf. 43. Fig. 5 eine an- Taf. 43.
dere Konstruktion, bei welcher die Hanf-Liderung von oben her Fig. 5
nachgespannt werden kann, und zwar stellt die genannte Figur den Vertikalschnitt eines kleinen eisernen Kolbens mit Hanf-Liderung in $\frac{1}{3}$ der natürlichen Gröfse dar. Der Kolbenkörper ist ein hohler, oben durch einen Boden geschlossenen Cylinder, mit einem unten über die Mantelfläche vorspringenden Rande. Am oberen Ende ist ein Deckel auf den Cylinder aufgeschoben, welcher in Form eines ähnlichen Randes übergreift, so dafs zwischen diesen beiden Rändern die Liderung aufgewickelt werden kann. Dieser obere Deckel ist beweglich, wodurch der Rand desselben auf die Liderung pressend wirkt, und zwar geschieht das hierzu erforderliche Anziehen des Deckels durch eine Schraubenmutter *b*, welche auf die Kolbenstange aufgeschraubt ist. Durch diese Schraubenmutter läfst sich die Spannung der Liderung reguliren. Die Kolbenstange ist in dem oberen Theil des Kolbenkörpers, der mit einer nabenartigen Verstärkung versehen ist, mit Hilfe eines Keils befestigt, während eine gufseiserne Scheibe, die auf die nach unten hin reichende Verlängerung der Kolbenstange aufgeschoben ist, und durch einen Stift festgehalten wird, die untere Höhlung des Kolbenkörpers abschliefst.

Die in den Figuren 2. 3. 4. 5 dargestellten, und oben beschriebenen Konstruktionen eignen sich nur für Kolben von geringen Durchmessern (etwa bis zu 8 bis 10 Zoll). Wenn man Kolben von gröfseren Durchmessern hat, so kann man die Liderung nicht wohl durch eine einzige in der Mitte des Kolbens wirkende Prefsschraube anziehen. Man konstruirt dann ebenfalls einen beweglichen Deckel, indessen wendet man dann mehrere, drei bis sechs Schrauben an, um denselben gegen die Liderung anzuziehen. Ein Beispiel solcher Konstruktion ist in Fig. 6 gegeben.

Taf. 43. Fig. 6. Taf. 43. Fig. 6 stellt einen Dampfmaschinenkolben mit Hanf-Liderung dar, welcher 28 Zoll äufseren Durchmesser hat, Fig. 1a ist zur Hälfte die obere Ansicht auf den Deckel, zur Hälfte die obere Ansicht nach Abnahme des Deckels, Fig. 6b ist die Vorder-Ansicht des zusammengestellten Kolbens, Fig. 6c ist ein Vertikalschnitt des Kolbens nach der Linie *ab* in Fig. 6a. Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{12}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Der Kolben ist für eine Dampfmaschine mit Condensation, welche bei $1\frac{1}{6}$ Atmosphäre Dampfspannung 50 Pferdekräfte hat, ausgeführt.

Der Kolben besteht zunächst aus dem Kolbenkörper und dem Kolbendeckel, welcher hier die Spann-Vorrichtung für die Packung darstellt. Der Kolbenkörper ist auf seiner Mantelfläche mit einer $\frac{3}{4}$ Zoll tiefen Nuth versehen, in welche man die starken Hanfzöpfe wickelt, welche die Liderung des Kolbens bilden sollen. Diese Zöpfe sind hier so geflochten, dafs sie einen ziemlich quadratischen (nicht halbrunden oder kreisförmigen) Querschnitt erhalten, indem man sie aus acht vierschäftigen, nicht sehr stark gedrehten, einen halben Zoll im Durchmesser haltenden Seilen zusammensetzt. Ein solcher Hanfzopf wird fünf- bis sechsmal spiralförmig auf den Kolbenmantel gewickelt, und dann durch den Deckel zusammengeprefst. Um den Deckel zu diesem Zweck auf dem Kolbenkörper verschieben und befestigen zu können, sind sechs Prefsschrauben angeordnet, deren quadratischer Schraubenkopf sich auf die Oberfläche des Deckels stützt, und deren metallene oder schmiedeeiserne Schraubenmutter im Innern des Kolbenkörpers versenkt sind. Um diese Schraubenmuttern in den Kolbenkörper befestigen und einlassen zu können, sind dieselben äufserlich in Form einer abgestumpften Pyramide, deren gröfsere Basis unten ist, gestaltet; in dem oberen Theile des Kolbens befinden sich nun dieser Form der Schraubenmuttern entsprechende Höhlungen, welche sich nach der äufseren Peripherie des Kolbens hin so verlängern und oben erweitern, dafs man hier die Schraubenmutter mit der breiteren Basis nach unten einsenken, sodann aber in hren eigentlichen Sitz seitwärts hineinschieben kann. Beim Anziehen der Schrauben mufs man die Vorsicht gebrauchen, die einzelnen Schrauben nach einander, und stets nur wenig auf ein mal anzuziehen, um so den Deckel möglichst gleichförmig niederzusenken. Man mufs ferner verhüten, dafs sich die Schrauben, nachdem sie richtig angezogen sind, wieder von selbst lösen, welches durch die Elasticität der Liderung und durch die bei dem Gange der Maschine erfolgenden Erschütterungen leicht geschehen kann. Zu diesem Zwecke sind, wie man aus der linken Hälfte der Fig. 6a sieht, zwischen die Schraubenköpfe Bogenstücke von Blech gelegt, und diese an dem Deckel des Kolbens durch kleine Schräubchen befestigt. Die Befestigung des Kolbens an seiner Kolbenstange ist durch einen stählernen Keil von rechteckigem Querschnitt bewirkt; um dieselbe möglichst sicher herzustellen, ist das Ende der Kolbenstange ein wenig konisch, und zwar (entgegengesetzt der Konstruktion in Fig. 2) so, dafs der gröfsere Durchmesser unten ist, der kleinere oben. Der Kolben ist in der Mitte entsprechend konisch ausgebohrt, so dafs durch Anziehen des in der Nähe der Oberkante des Kolbens liegenden Keils ein fester Schlufs hergestellt wird.

Massive Kolben mit Leder-Liderung.

§ 151. Ueber die Anwendung der Leder-Liderung bei den Kolben ist bereits in § 148. S. 475 das Wichtigste angeführt; sie hat Aehnlichkeit mit der Anwendung des Leders bei den Stopfbuchsen, worüber in §. 146 S. 469, sowie in § 144. S. 453 Angaben gemacht worden sind. Hier folgen einige Beispiele der Anwendung der Leder-Liderung bei massiven Kolben.

Taf. 43. Fig. 7 zeigt einen Kolben, welcher dadurch hergestellt ist, dafs man eine Anzahl von Lederscheiben oder Filzscheiben über einander gelegt, zusammengeprefst, und dann abgedreht hat. Die Figur giebt einen Vertikalschnitt des Kolbens in $\frac{1}{3}$ der natürlichen Gröfse. Die Liderungsscheiben, welche hier zugleich den Kolbenkörper bilden, sind oben und unten mit Scheiben von Metall oder von Eisen bedeckt, welche einen etwas geringeren Durchmesser haben, als die abgedrehten Liderungsscheiben, damit sie nicht an der Cylinderwandung streifen können; durch die beiden Begrenzungsscheiben der Liderung (Deckplatten) sind drei Schraubenbolzen, die um die Kolbenstange symmetrisch vertheilt sind (einer davon ist in der Figur vollständig sichtbar) hindurchgezogen; diese drei Schraubenbolzen dienen zum

Taf. 43. Fig. 7.

Zusammenpressen der Liderungsscheiben. Die Deckplatten haben in der Mitte nach aufsen gerichtete Verstärkungen, welche durchbohrt sind, ebenso sind die sämmtlichen Liderungsscheiben in der Mitte durchbohrt, um die Kolbenstange hindurchstecken zu können, welche sich oben mit einem Ansatz auf die Verstärkung der oberen Deckplatte stützt, und unten durch eine Schraubenmutter angezogen und befestigt werden kann. Der hier gezeichnete Kolben enthält 18 Scheiben von je zwei Linien Dicke.

Taf. 43. Fig. 8. Taf. 43. Fig. 8 giebt den Vertikalschnitt eines massiven Kolbens mit doppelter Lederstulpen-Liderung, in $\frac{1}{3}$ der natürlichen Gröfse. Die Dichtung soll hier nach beiden Richtungen erfolgen, deshalb sind zwei Stulpen angewandt (§ 146. S. 469), deren aufgestülpte Ränder entgegengesetzt gerichtet sind, zwischen beiden Stulpen liegt eine flache Scheibe aus Bronze oder aus Eisen. Der hier gezeichnete Kolben setzt sich unmittelbar mit einem Gelenk an die Lenkerstange an; der Bolzen, welcher oben das Auge für das Gelenk trägt, bildet die Grundlage des Kolbens; er ist unterhalb dieses Auges mit einem Ansatz versehen, gegen diesen wird eine Metallscheibe geschoben, welche zur Verminderung des Gewichtes an ihrer oberen Fläche ausgehöhlt ist, nach dieser Metallscheibe schiebt man den ersten Lederstulp auf, welcher mit seinem Rande aufwärts gerichtet ist, dann die Zwischenscheibe, hierauf den zweiten Lederstulp, welcher mit seinem Rande abwärts gerichtet ist, endlich wieder eine Metallscheibe, der ersten ähnlich, nur in umgekehrter Lage, und endlich werden diese fünf Stücke (drei Scheiben und zwei Lederstulpen) durch Anziehen einer Schraubenmutter auf dem Bolzen befestigt. Diese Konstruktion findet eine sehr häufige Anwendung bei Feuerspritzen und anderen Druckpumpen.

Man kann auch, um den Kolben leichter zu machen, die zwischen den beiden Lederstulpen liegende Zwischenscheibe fortlassen, wie dies die Konstruktion auf Taf. 43. Fig. 9 im Vertikalschnitt und in $\frac{1}{3}$ der natürlichen Gröfse zeigt. Hier ist noch, zum Unterschiede von der vorigen Anordnung, der Kolben an einer Kolbenstange befestigt, angenommen. Die beiden Metallscheiben haben etwas höhere Ränder, als bei der vorigen Konstruktion, und die Zwischenscheibe fehlt, so dafs nur vier Stücke (zwei Scheiben und zwei Stulpen) auf die Kolbenstange aufgeschoben, und durch die untere Befestigungsschraube angezogen werden. Im Uebrigen ist die Konstruktion wie die vorige.

Taf. 43. Fig. 9.

Bei den beiden eben beschriebenen Anordnungen ist kein eigentlicher Kolbenkörper vorhanden, oder vielmehr, es wird derselbe durch die Scheiben und die Stulpen gebildet; man kann daher nicht einen oder den anderen Stulp entfernen und auswechseln, ohne den ganzen Kolben von der Stange abzulösen. Bei gröfseren Kolben hat dies manches Unbequeme, und man ändert dann die Konstruktion in der Weise ab, wie dies Taf. 43. Fig. 10 zeigt. Hier ist der Vertikalschnitt eines, in der Maschinenfabrik von A. Wöhlert in Berlin für die Pumpen der Hamburger Wasserwerke, welche mit einer Dampfmaschine von 200 Pferdekraft arbeiten, konstruirten Kolbens in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Der Kolben hat 9 Zoll äufseren Durchmesser, und besitzt einen auf der Kolbenstange befestigten Kolbenköper. Dieser Kolbenkörper ist von Gufseisen, auf einer konischen Verstärkung der Kolbenstange durch einen Stahlkeil festgemacht, und bildet so die feste Grundlage zur Befestigung der beiden Ledermanchetten, von denen die eine mit aufwärtsstehendem Rande auf der oberen Fläche des Kolbenkörpers ruht, während die andere, mit abwärts gerichtetem Rande an der unteren Fläche des Kolbens hängt. Gufseiserne Scheiben füllen den inneren Raum der Manchetten zum Theil aus, und haben den Zweck, den vier Schraubenbolzen, die zur Befestigung der Manchetten an dem *Kolbenkörper* angeordnet sind, zu Widerlagern zu dienen. Die Köpfe dieser vier Schraubenbolzen sind in die oberen Einlagscheiben eingelassen, während die Muttern sich gegen die unteren Einlagscheiben legen. Taf. 43. Fig. 10.

Eine andere Konstruktion für einen kleinen massiven Kolben mit doppelter Manchetten-Liderung ist in Fig. 1 auf Tafel 48 enthalten; die Beschreibung desselben befindet sich oben § 149. S. 481. Hier ist noch darauf aufmerksam zu machen, dafs nur die obere Manchette durch eine Schraube *w* an der Kolbenstange festgehalten wird, während die untere Manchette gar nicht an dem Kolben befestigt ist, sondern nur durch den Wasserdruck stets gegen denselben geprefst wird.

Auch sehr grofse Kolben, wie sie bei Gebläsen vorkommen, dichtet man mit Ledermanchetten. Ein Beispiel solcher Kolbenkonstruktion ist auf Taf. 50 in Fig. 2 dargestellt. Fig. 2a ist die obere Ansicht des Gebläsekolbens mit durchschnittener Kolbenstange, Fig. 2b ist ein Vertikalschnitt nach der Linie *ef* in Fig. 2a, und Fig. 2c ist ein Schnitt durch einen Kolbenarm nach der Linie *cd* in Fig. 2b. Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{24}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Der Kolben hat 94 Zoll im äufseren Durchmesser, er ist für ein Gebläse auf der Hörder-Hütte in Westphalen ausgeführt; der Gebläse-Cylinder liegt horizontal, der Kolben folglich in vertikaler Ebene; um denselben nun gehörig zu unterstützen ist die Kolbenstange durch den Kolben hindurch geführt, und geht zu beiden Seiten desselben mittelst Stopfbuchsen durch die Cylinderdeckel hindurch, so dafs diese Stopfbuchsen einen wesentlichen Theil des Kolbengewichtes tragen. Die Kolbenstange ist von Schmiedeeisen, und, wie *Fig.* 2a deutlich erkennen läfst, hohl, sie ist da, wo der Kolben befestigt wird, mit einer konischen Verstärkung versehen, auf welche der passend ausgebohrte Kolben heraufgeschoben und dann durch eine starke Schraubenmutter angezogen wird; um eine Lösung dieser Schraubenmutter zu verhindern, ist dieselbe mittelst eines, quer durch die Kolbenstange geschlagenen Keils festgehalten. Der Kolbenkörper besteht aus einem gufseisernen Kranz, dessen Querschnitt Tförmig ist, der obere Balken des T ist mit der Kolbenstange parallel, und an denselben schliefsen sich acht Arme von Gufseisen an, die mit dem Kranz aus einem Stück gegossen sind, und die sich in der Mitte zu einer Nabe vereinigen, welche zur Befestigung auf der Kolbenstange, wie oben beschrieben, konisch ausgebohrt ist. Der Längenschnitt der Arme ist parabolisch, so dafs sich die Höhe derselben nach dem Kranz hin vermindert, der Querschnitt der Arme ist in Fig. 2c besonders gezeichnet. Man sieht aus dieser Figur, dafs die Arme oben und unten Verstärkungsrippen haben; diese dienen zur Aufnahme der Muttern für ein System von kleinen Befestigungsschrauben, welche den Zweck haben, die Deckbleche von Schmiedeeisen fest zu halten, welche zu beiden Seiten die Arme überdecken und den Kolben abschliefsen. Wenn wir nun wieder den Kranz des Kolbens betrachten, so dient der Ständer (die Mittelrippe) des Tförmigen Querschnittes zur Befestigung der Liderung. Diese besteht aus Lederstulpen, und zwar, da der Gebläsekolben doppeltwirkend sein soll, aus zwei Lederstulpen, deren aufgebogene Ränder nach entgegengesetzten Richtungen gekehrt sind. Die auf beiden Seiten der Mittelrippe des Tförmigen Kranzes liegenden Lederstulpen werden durch aufgelegte gufseiserne Segmente, deren auf jeder Seite acht sind, und durch Befestigungsschrauben, welche durch diese Segmente, durch die Lederstulpen und durch die Mittelrippe des Kranzes reichen, an dem Kranze befestigt. Es sind im Ganzen 32 solcher Befestigungsschrauben vorhanden, so dafs auf jedes der 8 Segmente jeder Seite, deren vier kommen.

Eine andere Anordnung der Leder-Liderung, bei welcher man keine eigentlichen Stulpen, die in Form eines L aufgebogen sind, sondern einen einfachen Ledermantel anwendet, ist auf Taf. 43 in Fig. 11 dargestellt. Diese Figur zeigt einen Vertikalschnitt eines massiven Kolbens, dessen Kolbenkörper aus Holz ist in $\frac{1}{3}$ der natürlichen Gröfse. Der aus einem Ellern-, Buchen- oder Eichenklotz gedrehte Kolbenkörper ist in der Mitte durchbohrt, und nimmt hier die Kolbenstange auf, welche sich mit einem Ansatz gegen die obere Fläche stützt, während eine Schraubenmutter mit eiserner Unterlagescheibe dieselbe von unten her anzieht. Die Ledertafel ist auf die äufsere Mantelfläche des Kolbens mittelst eiserner Nägel aufgenagelt, oder auch mit Holzschrauben befestigt; damit aber in keinem Falle die Köpfe der Nägel über die äufsere Fläche des Kolbens vorstehen, und die Cylinderwandung streifen können, ist die äufsere Mantelfläche des Kolbenkörpers nicht cylindrisch, sondern so ausgedreht, dafs sie nach der Mitte zu eine Höhlung darstellt. Hierdurch erweitert sich der Ledermantel nach oben und unten gefäfsartig, und die Wassersäule kann die Ränder desselben gegen die Wandungen des Cylinders anpressen. Taf. 43. Fig. 11.

Massive Kolben mit Metall-Liderung.

§ 152. Es ist bereits in § 148. S. 475 über die verschiedenen Arten der Anwendung metallener Kolben-Liderungen gesprochen worden, namentlich auch über die Art und Weise dieselben zu spannen. Indem wir hier auf jene Angaben verweisen, gehen wir zu der Erläuterung der in den Tafeln mitgetheilten zwölf Beispiele von massiven Kolben mit Metall-Liderung über.

Taf. 43. Fig. 12 zeigt einen massiven Kolben mit Metall-Liderung aus Segmenten, und zwar Fig. 12a in der oberen Ansicht nach Hinwegnahme des Deckels, und Fig. 12b im Vertikalschnitt nach der Linie *cd* in Fig. 12a. Beide Figuren sind in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Der Kolben hat einen Durchmesser von $12\frac{1}{2}$ Zoll. Der Kolbenkörper besteht aus einer gufseisernen Platte, welche in der Mitte eine nabenartige Verstärkung hat, welche zur Aufnahme des ein wenig konisch abgedrehten Endes der Kolbenstange dient; die Nabe ist entsprechend Taf. 43. Fig. 12.

ausgebohrt, und die Stange durch einen Keil auf der Nabe befestigt. Dies geschieht, bevor der Kolben zusammengestellt wird. Von der Nabe gehen drei armförmige Verstärkungsrippen aus, welche mit der Nabe und der Bodenplatte des Kolbens in einem Stück gegossen sind; diese dienen zur Unterstützung der Deckplatte, welche auf ihnen und auf einem Absatz der Nabe des Kolbens ruht, und durch drei Befestigungsschrauben, deren Köpfe in die Deckplatte versenkt sind, befestigt wird. Die rechte Seite der Fig. 12b bringt diese Konstruktion zur Anschauung, da hier der Durchschnitt durch eine dieser Rippen genommen ist. *Zwischen der* Bodenplatte des Kolbenkörpers und der Deckplatte liegen die Liderungs-Segmente und die Spann-Vorrichtung. Die Liderungs-Segmente treten ein wenig über die Peripherie des Kolbenkörpers und der Deckplatte hervor, sie sind in zwei Lagen über einander geordnet, so dafs jede Lage drei Segmente enthält, und die Stofsfugen der Segmente in der einen Lage gegen diejenigen in der anderen Lage versetzt sind. Damit sich die beiden Lagen nicht gegen einander verschieben, ist in der Berührungsfuge beider Lagen die obere mit einer Nuth, die untere mit einer eingreifenden Feder versehen. Die Segmente sind aus Gufseisen, beide Lagen zusammen haben genau die lichte Höhe zwischen Boden und Deckel des Kolbenkörpers. Hinter den Segmenten der Liderungsringe liegt ein koncentrischer Ring aus Gufseisen, welcher für sich dieselbe Höhe hat, welche die beiden Lagen der Liderungs-Segmente zusammen besitzen; auch dieser Ring ist aus Gufseisen und in drei Segmente getheilt, die jedoch so gestellt sind, dafs niemals eine Stofsfuge derselben mit einer Fuge der Liderungs-Segmente zusammen trifft. Um dieser Konstruktion die nöthige Elasticität zu geben, und die Spannung, mit welcher die Liderungs-Segmente gegen die Cylinderwandung geprefst werden, gehörig reguliren zu können, liegt hinter jedem Segment des inneren Ringes eine nach dem Mittelpunkt des Kolbens hin gekrümmte Blattfeder. In ihrer Mitte ist jede Blattfeder durchbohrt, und auf einen Zapfen aufgesteckt, der über den Kopf einer Spannschraube hervorragt; die Muttern dieser drei Spannschrauben sind in die Nabe des Kolbenkörpers eingeschnitten. Wenn man nun mittelst eines Schraubenschlüssels (nach Abnahme des Kolbendeckels) den Kopf einer dieser Spannschrauben ergreift, und diese aus der Nabe weiter herausschraubt, so wird die Feder stärker gespannt, indem sie flacher gedrückt wird; hierdurch wirkt die Feder mit ihren Enden schiebend auf das Segment des Spannringes, und dieses wirkt auf die Liderungs-Segmente in der Weise, dafs es dieselben stärker gegen die Cylinderwandung anprefst. Wenn man die Spannschraube entgegengesetzt dreht, und sie tiefer in die Nabe hineinschraubt, so findet die entgegengesetzte Wirkung statt. Um schliefslich die Spannschrauben in ihrer Lage festzustellen, sind sie über der Nabe mit Gegenmuttern *dd* versehen.

Taf. 43. Fig. 13 giebt eine andere Konstruktion eines vollen Kolbens mit Metall-Liderung und zwar mit zusammenhängenden, nur an einer Stelle geschlitzten Liderungsringen. Fig. 13a ist die Seiten-Ansicht des zusammengestellten Kolbens, Fig. 13b die obere Ansicht desselben nach Abnahme des oberen Deckels, und Fig. 13c ein Vertikaldurchschnitt nach der Linie *ef* in Fig. 13b. Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{12}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Taf. 43. Fig. 13.

Das Gerippe des Kolbens ist ziemlich übereinstimmend mit dem in Fig. 12 dargestellten, und soeben beschriebenen Kolben. Der Kolbenkörper von Gufseisen ist mittelst angegossener Hülse auf dem konisch verstärkten Ende der Kolbenstange mit Hilfe eines rechteckigen Stahlkeiles befestigt; der Deckel wird hier von vier (anstatt dort von drei) Armen unterstützt, welche mit dem Kolbenkörper und der Hülse aus einem Stück gegossen sind, und durch welche ebensoviel Schraubenbolzen gehen. Die Liderungsringe sind von Gufseisen, zwischen den Boden des Kolbenkörpers und den Deckel eingepafst, so dafs sie über die Peripherie beider ein wenig hervorragen. Es sind zwei über einander liegende Liderungsringe vorhanden, deren jeder an einer Stelle aufgeschlitzt ist; doch sind die Ringe so geordnet, dafs die beiden Schlitze einander im Durchmesser gegenüber stehen. An der Stelle, wo jeder Ring aufgeschlitzt ist, hat derselbe an seiner inneren Peripherie eine Verstärkung, und der Schlitz ist hier keilförmig erweitert. In diese Erweiterung pafst ein Keil von Schmiedeeisen oder von Stahl, dessen Schneidenwinkel etwa 60 Grad betragen kann. Die Schneide ist jedoch abgestumpft. Drängt man den Keil in die entsprechend gestaltete Schlitzöffnung hinein, so mufs sich der Schlitz erweitern, indem sich der Ring weiter aufbiegt, und seine Peripherie zu vergröfsern strebt; ist der Ring durch eine Umfassungswand gehindert, eine solche Erweiterung seiner Peripherie vorzunehmen, so übt er natürlich einen entsprechenden Druck gegen diese Umfassungswand aus. Durch das Eindringen der Spannkeile in die Schlitze der Liderungsringe hat man daher ein Mittel eine Spannung der Liderungsringe gegen die Cylinderwand auszuüben, und diese Spannung zu reguliren. Um nun die Spannkeile mit einem angemessenen Druck in die Schlitze zu pressen, sind Spannfedern angeordnet, welche in der hier gezeichneten Konstruktion aus kreisförmigen elastischen Stahlringen bestehen, deren Durchmesser wesentlich kleiner als der innere Durchmesser der Liderungsringe ist; diese Ringfedern stützen sich an dem, dem Schlitze diametral gegenüber liegenden Punkte gegen die innere Peripherie des Liderungsringes, während der Spannkeil mit einem, als Schraubengewinde geschnittenen Ansatzstifte durch den ihm zunächst liegenden Theil des *Ringes durchgesteckt ist.* Nun kann man durch Anziehen der Spannmuttern *mm* den Keil in den Schlitz hineindrängen, wobei der als Widerlager für die Spannmutter dienende Ring zusammengedrückt, und auf seine Elasticität in Anspruch genommen wird; gleichzeitig übt der Stützpunkt des Ringes an dem, dem Keil entgegengesetzten Punkte einen Druck auf den Liderungsring nach der Cylinderwandung hin. Um die Spannung des Ringes zu fixiren, dienen die auf der inneren Seite der Ringfedern auf den Ansatzstift des Keils aufgeschraubten Gegenmuttern.

Taf. 43. Fig. 14. Taf. 43. Fig. 14 zeigt einen Kolben, welcher dem vorigen in der Konstruktion sehr ähnlich ist, und nur in der Form und Anordnung der Spannfedern von demselben abweicht. Fig. 14a ist die Ansicht von oben nach Abnahme des Deckels, Fig. 14b ist ein Vertikalschnitt nach der Linie *gh* in Fig. 14a; beide Figuren sind in $\frac{1}{12}$ der natülichen Gröfse gezeichnet. Der Kolbenkörper und der Deckel, sowie die Art der Befestigung der Kolbenstange stimmen ganz mit derjenigen in Fig. 13 dargestellten und eben beschriebenen überein, nur ist darauf aufmerksam zu machen, dafs die Schrauben zur Befestigung des Deckels hier sowohl versenkte Köpfe als versenkte Muttern haben. Die Liderungsringe mit ihren Spannkeilen sind gleichfalls mit den in Fig. 13 dargestellten übereinstimmend, und kann hier auf die Beschreibung der letzteren verwiesen werden. Nur die Spannfedern mit den Spannschrauben sind hier anders konstruirt, als dort. Die Spannfedern sind nämlich hier von einem äufseren Durchmesser, der mit dem inneren Durchmesser der Liderungsringe übereinstimmt, nur in der Nähe des Spannkeils sind diese Ringfedern sehnenförmig eingezogen, so dafs sie nicht einen vollen Kreis, sondern nur ein grofses Kreis-Segment bilden. Die Mitte der sehnenförmigen Einbiegung ist verstärkt, und enthält ein Muttergewinde, durch dieses geht die Spannschraube *n* hindurch, welche mit ihrer Spitze gegen den Keil drückt. Auch diese Anordnung ist verschieden von der in *Fig.* 13 dargestellten, bei welcher die Schraubenspindel an dem Keil fest war, dessen Verlängerung sie bildete, und lose durch eine Oeffnung in dem Spannringe hindurch gesteckt war. Eine Gegenmutter an der Innenfläche der Spannfeder sichert auch hier die Spannschraube gegen eine nicht beabsichtigte Lösung. Man sieht übrigens, dafs während bei der in Fig. 13 dargestellten Anordnung jede Spannfeder nur an einem *Punkte sich* gegen ihren Liderungsring legt, hier die Spannfedern auf ihrer ganzen Peripherie (mit Ausschlufs der sehnenförmigen Einbiegung) sich gegen die innere Peripherie der Liderungsringe drängen. Man will dadurch eine gleichmäfsigere Spannung der Liderungsringe gegen die Cylinderwandung bewirken, indessen ist doch zu bemerken, dafs beim Anziehen der Spannschrauben die Liderungsringe und die Spannringe ihre Form nicht gleichmäfsig ändern, und dafs dann die gleichmäfsige Berührung beider nicht bestehen bleiben kann.

Taf. 44. Fig. 1 ist eine Kolben- und Ventil-Konstruktion einer Luftpumpe für eine Schiffsdampfmaschine; dieselbe wird weiter unten in § 154 beschrieben werden. Taf. 44. Fig. 1.

Taf. 44. Fig. 2 zeigt einen von Brunton konstruirten Dampfmaschinenkolben mit Metall-Liderung, welcher gegen die sonst gebräuchlichen Konstruktionen den Vortheil hat, dafs man die Liderung anspannen kann durch Drehung einer einzigen Schraube, und ohne den Deckel des Kolbens abzunehmen. Fig. 2a ist die Ansicht des Kolbens von unten, nach Abnahme des Deckels, Fig. 2b ist ein Vertikalschnitt nach der Linie *de* in Fig. 2a, beide Figuren sind in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Die Kolbenstange ist von Schmiedeeisen, der Kolbenkörper, der Kolbendeckel, die Liderungsringe, die Spannringe sind von Gufseisen. Der Kolbenkörper liegt hier oben, der Deckel unten, und zwar ist der Kolbenkörper dadurch an der Kolbenstange befestigt, dafs diese unten wesentlich verstärkt, und mit einem Schraubengewinde versehen ist; auf dieses Schraubengewinde ist der Kolbenkörper mit seiner Nabe, welche das Muttergewinde enthält, fest aufgeschraubt. Die Verstärkung des unteren Endes der Kolbenstange, auf welcher der Kolben befestigt ist, ist aber mit einer cylindrischen Höhlung versehen, in welcher die Vorrichtung zum Spannen der Liderung liegt. Die hier getroffene Anordnung ist nämlich folgende: Taf. 44. Fig. 2.

Zwei Liderungsringe von Gufseisen, deren jeder an einer

Stelle aufgeschlitzt ist, liegen über einander, so dafs die Schlitze versetzt sind; innerhalb jedes Liderungsringes liegt ein koncentrischer Spannring von Gufseisen, welcher ebenfalls an einer Stelle aufgeschlitzt ist, indessen liegt der Schlitz des inneren Ringes dem Schlitz des äufseren Ringes (Liderungsringes) diametral gegenüber. Wird der innere Ring aufgebogen, so drängt er auch den äufseren Ring auseinander, und sucht ihn zu erweitern; kann diese Formveränderung vermöge des Widerstandes der umschliefsenden Cylinderwand nicht stattfinden, so wird der äufsere Ring einen entsprechenden Druck auf die Cylinderwand ausüben, und dadurch die zur Dichtung erforderliche Spannung erlangen. Ein Bestreben den inneren Ring aufzubiegen, und dadurch die eben angegebene Wirkung zu erzielen, wird durch fünf Blattfedern ausgeübt, welche so hoch sind, dafs jede die beiden inneren Spannringe gleichzeitig übergreift, und welche auf der inneren Peripherie der Spannringe gleichmäfsig vertheilt sind. Die Enden jeder Blattfeder liegen an den Spannringen, die Mitte ist nach dem Mittelpunkt des Kolbens hin gebogen, und trägt einen Stift, welcher durch Mutter und Gegenmutter (der Form und Spannung der Feder entsprechend) sehr genau an derselben befestigt werden kann, und radial durch die gufseiserne Nabe des Kolbens hindurchgehend, in die oben erwähnte innere Höhlung des verstärkten Endes der schmiedeeisernen Kolbenstange hineingeführt ist. Schiebt man den Stift von dem Mittelpunkt nach auswärts, so wird dadurch die Spannfeder flacher gedrückt, und übt somit einen Druck auf den Spannring aus; kann man alle fünf Blattfedern auf diese Weise gleichzeitig spannen, so wird die Kolben-Liderung überall gleichzeitig gegen die Cylinderwandung geprefst. Um ein solches gleichzeitiges Herausschieben der fünf Stifte zu bewirken, liegt in der cylindrisch ausgebohrten Höhlung der Kolbenstange ein genau eingepafster Kloben von Schmiedeeisen, welcher sich in der Höhlung verschieben läfst; da wo einer der fünf Stifte in die Höhlung hineintritt, hat der Kloben einen keilförmigen Schlitz, gegen dessen schräge Fläche sich das Ende des Stiftes stützt, wie dies in Fig. 2b bei dem Stift rechts zu sehen ist. Wird nun dieser Kloben in der Höhlung der Kolbenstange aufwärts geschoben, so drängt er gleichzeitig alle fünf Stifte nach auswärts. Um die Verschiebung des Klobens zu bewirken ist derselbe in seiner Mitte durchbohrt, und mit einem Muttergewinde versehen; eine Schraubenspindel, welche in dies Muttergewinde eingreift, ist mit einem Ansatz in den Deckel des Kolbens versenkt, und reicht mit ihrem quadratischen Kopf durch den Deckel hindurch nach aufsen. Wenn man den Deckel an dem Kolbenkörper befestigt, was durch fünf Befestigungsschrauben (von denen eine in dem Vertikalschnitt Fig. 2b links sichtbar ist), die in ebensoviel armförmige Verstärkungsrippen des Kolbenkörpers eingreifen, geschieht, so ist die Schraubenspindel gehindert, sich gradlinig zu bewegen, es mufs also ihre Mutter, das ist der Kloben sich gradlinig verschieben, wenn man die Schraubenspindel dreht. Dies kann mittelst eines Schraubenschlüssels geschehen, ohne den Kolbendeckel zu lösen. Natürlich lassen sich hierdurch die Spannungen der Liderungsringe nur innerhalb gewisser Grenzen reguliren; will man sie in gröfserem Umfange ändern, so nimmt man den Kolbendeckel ab, und regulirt die Stellung der Stifte an den Blattfedern mit Hilfe der Muttern und Gegenmuttern, mit denen sie versehen sind.

Taf. 44. Fig. 3 zeigt einen Ventilkolben mit Hanf-Liderung von eigenthümlicher Konstruktion, welcher weiter unten in § 154 beschrieben werden wird, Taf. 44. Fig. 4 ist ebenfalls ein Ventilkolben mit Hanf-Liderung, dessen Beschreibung in § 154 folgt, und Taf. 44. Fig. 5 ist ein Ventilkolben mit Leder-Liderung, dessen Erläuterung in § 153 gegeben werden wird. Taf. 44. Fig. 3 bis 5.

Taf. 45. Fig. 1 stellt einen Kolben dar von einer Lokomotive auf der französischen Südbahn; der Kolben ist im Vertikaldurchschnitt in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Der ganze Kolben, mit Ausnahme der Liderungsringe, welche von Gufseisen, und der Spannringe, welche von Stahl sind, ist aus Schmiedeeisen. Der Kolbenkörper besteht aus einer Scheibe, welche nach der Mitte schalenförmig vertieft ist, und unten einen cylindrischen Rand hat, der zur Unterstützung des Deckels dient. In der Mitte hat diese Scheibe eine nabenförmige Verstärkung, ist von oben her auf die Kolbenstange aufgesteckt, und mittelst eines Rechts-Gewindes auf die Verstärkung der Kolbenstange aufgeschraubt; sie legt sich sodann auf den unteren Flansch, welcher an die Kolbenstange angeschmiedet ist, auf, und wird mittelst kleiner Schräubchen an diesem Flansch festgehalten, so dafs hierdurch eine unbeabsichtigte Lösung des Kolbens vermieden wird. Der Kolbendeckel ist ähnlich wie der Boden des Kolbenkörpers nach der Mitte hin gefäfsförmig eingebogen; er hat einen vorspringenden Rand, und legt sich mit diesem in den cylindrischen Rand des Kolbenkörpers ein, während er mit seiner Mitte sich auf den oben erwähnten Flansch der Kolbenstange legt. Man sieht in dem Taf. 45. Fig. 1.

Durchschnitt links, dafs der Kolbendeckel an einer Stelle seines Randes noch eine vorspringende Nase hat, mit welcher er durch einen Bayonetschlufs in den Rand des Kolbenkörpers eingreift (vergl. Thl. I. S. 380). Der Kolbendeckel wird mittelst einer Befestigungsschraube mit Links-Gewinde, die zur besseren Dichtung mit einem konischen Ansatz sich in den Deckel einsenkt, an der Kolbenstange befestigt; ein quer hindurch geschlagener Stift hindert diese Schraube zurückzugehen. Man sieht im Deckel noch rechts und links kleinere Oeffnungen mit Schraubengewinden; hier werden *Bolzen mit Handhaben eingeschraubt*, wenn man den Deckel abnehmen, oder aufsetzen will. Die Liderung besteht aus zwei gufseisernen, aufgeschlitzten Ringen, mit versetzten Schlitzen, hinter welchen eine gemeinschaftliche Feder liegt, die in einem kreisförmigen, an einem Ende aufgeschnittenen Ringe besteht, der von Hause aus einen gröfseren Durchmesser hat, als das Innere der Liderungsringe; drückt man diesen Federring zusammen und legt ihn hinter die Liderungsringe, so sucht er sich zu seiner gröfseren Peripherie wieder auszudehnen, und übt vermöge dieses Bestrebens einen Druck auf die Liderungsringe aus. Eine besondere Vorrichtung, um die Spannung zu reguliren, ist nicht vorhanden.

Taf. 45. Fig. 2. Taf. 45. Fig. 2 giebt *einen eigenthümlich konstruirten* Kolben von einer horizontalen Schiffsdampfmaschine, welche in der Fabrik von A. Borsig in Moabit bei Berlin für das, zwischen St. Petersburg und Rostock gehende Dampfschiff „Prinz Constantin" erbaut ist. Die Zeichnung stellt nicht allein den durchweg aus Gufseisen konstruirten Kolben mit seiner hohlen Kolbenstange dar, sondern auch des Zusammenhanges und besseren Verständnisses wegen den Dampfcylinder, in welchem sich der Kolben bewegt, und die Lenkerstange nebst Kurbel, und zwar ist Fig. 2a ein Vertikalschnitt, Fig. 2b ein Horizontalschnitt durch die Axe der Kolbenstange. Beide Figuren sind in $\frac{1}{24}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Der Kolbenkörper ist mit der hohlen Kolbenstange in einem Stück gegossen; die Kolbenstange bildet eine, an beiden Enden offene Röhre, welche zu beiden Seiten durch den Cylinderboden hindurch reicht, und hier durch starke Stopfbuchsen geführt wird, so dafs das Gewicht des Kolbens im Wesentlichen von der Kolbenstange getragen wird. Die hohle Kolbenstange ist an dem einen Ende durch einen aufgesetzten Deckel verschlossen, am anderen Ende ist sie offen, und es tritt hier die Lenkerstange von Schmiedeeisen in die Kolbenstange ein; der Ausschlag dieser Lenkerstange bestimmt die Weite der inneren Höhlung der Kolbenstange. Das Lager für die Kurbelwelle ist unmittelbar an dem Cylinder befestigt, wie dies Fig. 2a angiebt, während Fig. 2b, in welcher die Lenkerstange fortgelassen ist, zeigt, wie die Axe für das Charnier der Lenkerstange in der hohlen Kolbenstange befestigt ist. Man sieht, dafs für diesen Zweck in der hohlen Kolbenstange eine durchbrochene Querwand sich befindet, an welche diese Axe so angeschraubt ist, dafs ihre Mittellinie mit dem mittleren Durchmesser des Kolbens zusammenfällt. Fig. 2a zeigt nicht nur das Kopflager, welches diese Axe umschliefst, sondern auch die Art und Weise, wie demselben von dem verschlossenen Ende der Kolbenstange her durch ein kupfernes Rohr Schmiere zugeführt werden kann. Der Kolbendeckel ist durch Befestigungsschrauben auf dem Kolbenkörper befestigt; da dieselben oft gelöst werden müssen, um zur Kolbenliderung zu gelangen, so hat man die Muttergewinde für diese Befestigungsschrauben in bronzene Buchsen eingeschnitten, welche, wie der Schnitt in Fig. 2b zeigt, in den Kolbenkörper eingestämmt sind. Die Kolbenliderung wird durch gufseiserne Liderungsringe gebildet, doch ist keine besondere Spannvorrichtung vorhanden, selbst nicht eine hinter den Liderungsringen liegende Ringfeder. Die Liderungsringe sind vielmehr an einem Ende aufgeschlitzt und von Hause aus von gröfserem Durchmesser, als die Cylinderbohrung; sie werden zusammengeprefst, und in den Cylinder hineingeschoben, indem sie das Bestreben haben, ihre Form wieder anzunehmen, pressen sie gegen die innere Wandung des Cylinders. Soll diese Pressung auf der ganzen Peripherie gleichförmig stattfinden, so darf der Querschnitt der Ringe nicht durchweg gleich grofs sein (vergl. hierüber die auf S. 476 angeführten Aufsätze in der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins für das Königreich Hannover). — Das Dampfschiff, welchem dieser Kolben angehört ist ein Schraubenschiff, und die Schraube ist unmittelbar auf der Verlängerung der Kurbelwelle befestigt, hieraus erklärt sich einmal der geringe Hub, welchen der Kolben im Verhältnifs zu seinem Durchmesser hat, weil die Schraube eine verhältnifsmäfsig grofse Anzahl von Umdrehungen zu machen hat, sodann aber ist hierin auch die eigenthümliche Konstruktion des Zapfenlagers der Kurbelwelle begründet, welches in Fig. 2a in der Ansicht erscheint, und, welches um es besser anschaulich zu machen, nach der Linie *no* im Vertikalschnitt und in gröfserem Maafsstabe ($\frac{1}{16}$ der natürlichen Gröfse) aber wegen Mangel an Platz nicht hier, sondern auf Taf. 50 in Fig. 3, noch besonders gezeichnet ist. Um nämlich den Druck, welchen die Schraube in der Richtung der Wellenaxe (Längenrichtung des Schiffes) auf die Welle ausübt von der Kurbel abzuhalten, ist das der Schraube zunächst stehende Lager mit 5 Nuthen versehen, in denen 5 genau passend eingeschliffene ringförmige Ansätze der Welle Platz finden. Hierdurch wird erreicht, dafs der Längendruck auf die Welle sich auf 5 Flächen vertheilt.

Taf. 45. Fig 3. Taf. 45. Fig. 3 ist ein von Ramsbotton angegebener, und gegenwärtig vielfach in Gebrauch gekommener *Kolben*, welcher sich ganz besonders durch Leichtigkeit auszeichnet. Fig. 3a ist ein Vertikalschnitt des Kolbens in $\frac{1}{10}$ der natürlichen Gröfse, und Fig. 3b stellt in halber natürlicher Gröfse einen Schnitt durch die Kolbenwandung mit den Liderungsringen dar. Der hier dargestellte Kolben hat $17\frac{1}{4}$ Zoll Durchmesser, ist von Gufseisen und besteht nur aus einer einzigen Platte ohne Kolbendeckel, welche in der Mitte nabenförmig verstärkt, auf das verstärkte und konisch zugespitzte Ende der Kolbenstange aufgeschoben ist, und durch eine vorgelegte Schraubenmutter festgehalten wird. Man pflegt auch wohl den Kolben in ähnlicher Form von Schmiedeeisen oder von Stahl zu machen, und mit der Kolbenstange in einem Stück zu schmieden. Die *Kolbenplatte hat aufsen einen* cylindrisch aufgebogenen Rand, dessen Durchmesser ein ganz klein wenig geringer ist, als der Durchmesser des Cylinders. Nun sind in der Mantelfläche dieses Randes gewöhnlich drei, zuweilen nur zwei, auch vier ringförmige Nuthen eingedreht (nicht Schraubengänge), und in diese Nuthen werden Stahlringe von $\frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{8}$ Zoll Höhe gelegt. Diese Stahlringe sind an einem Ende aufgeschlitzt und haben von Hause aus einen etwas gröfseren Durchmesser, als die Bohrung des Cylinders, man biegt sie etwas aus einander, um sie über die äufsere Mantelfläche des Kolbens hinüber schieben zu können, und sobald sie bis an die Nuth geschoben sind, ziehen sie sich vermöge ihrer Elasticität in dieselbe hinein. Um den Kolben in den Cylinder einzusetzen müssen die Stahlringe komprimirt werden, dann haben sie das Bestreben sich wieder auszudehnen, und üben vermöge dieses Bestrebens einen Druck auf die Cylinderwandung aus. Die Schlitze der einzelnen Ringe müssen gegen einander versetzt sein, gleichwohl wird keine ganz vollständige Dichtung erreicht, da zwischen den Schlitzen hindurch immer Dampf entweichen kann. Bei genauer Ausführung und bei schnellem Gange des Kolbens ist dieser Verlust aber sehr unerheblich. Der aufgebogene Rand des Kolbens würde, wenn man die untere Fläche des Cylinderdeckels eben machte, einen sehr bedeutenden schädlichen Raum über dem Kolben bedingen; um dies zu vermeiden schliefst sich die Form des Cylinderdeckels derjenigen des Kolbenkörpers an, wie solches in Fig. 3a anschaulich gemacht ist.

Anstatt wie bei dem Ramsbotton'schen Kolben die Nuthen in dem Mantel des Kolbenkörpers concentrisch und cylindrisch zu machen, hat man auch wohl eine spiralförmige, kontinuirlich um den *Kolben* herumlaufende Nuth eingedreht, und dann, anstatt der einzelnen Stahlringe, einen zusammenhängenden Stab der Nuth entsprechend spiralförmig gewunden, und in die Nuth hineingelegt; dergleichen Kolben sind unter Andern von Th. Schultz in Wien angegeben und ausgeführt.

Aehnlichkeit mit dieser Anordnung von Schultz hat die auf Taf. 48. Fig. 2 dargestellte Konstruktion eines Dampfkolbens von Jay, Fig. 2a zeigt eine Vorder-Ansicht des Kolbens, Fig. 2b einen Vertikalschnitt, und Fig. 2c die Kolbenliderung besonders; sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{8}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Der Kolbenkörper ist von Gufseisen, ähnlich demjenigen des auf Taf. 45 in Fig. 3 dargestellten, und kurz vorher beschriebenen Ramsbotton'schen Kolbens; derselbe ist auf das Ende der Kolbenstange aufgeschraubt; damit aber die Schraube möglichst dicht halte, ist ein konischer Ansatz der Kolbenstange in die obere Fläche des Kolbens versenkt. Ein quer durch die Nabe des Kolbens und durch die Schraube der Kolbenstange getriebener Stift, hindert eine unbeabsichtigte Lösung derselben. Nur ist die äufsere Mantelfläche des Kolbenkörpers nicht wie beim Ramsbotton'schen Kolben mit mehreren ringförmigen Nuthen, auch nicht mit einer mehrere Umgänge machenden schmalen spiralförmigen Nuth versehen, sondern mit einer breiten Nuth, in welche ein spiralförmig gewundener elastisch gehämmerter Messingstab Platz finden kann. Fig. 2c stellt diesen Messingsstab dar, bevor er in die Nuth des Kolbens eingebracht wird. Man sieht, dafs hier, wenn die Liderung eingelegt ist, die einzelnen Schraubengänge der Liderung fest auf einander schliefsen, und dafs folglich hier keine Kommunikation wie sie bei dem Ramsbotton'schen und Schultz'schen Kolben zwischen den Liderungsringen hindurch stattfinden kann, möglich ist.

Eine dieser soeben beschriebenen Konstruktion verwandte Kolbenkonstruktion ist auf Taf. 48 in Fig. 3 im Vertikalschnitt und in $\frac{1}{8}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Es ist ein Dampfkolben von einem von F. Wöhlert in Berlin erbauten 30 Centner wiegenden Dampfhammer. Der Kolben ist von Schmiedeeisen; er wird durch zwei schmiedeeiserne Platten gebildet, von denen die eine, den Kolbenkörper darstellend in der Mitte nabenförmig verstärkt, und auf das cylindrische Ende der Kolbenstange aufgeschoben ist, so dafs sie sich gegen einen Ansatz der Kolbenstange legt. Die andere Platte bildet den Deckel, sie ist durchweg gleich dick, in der Mitte durchbohrt, auf die Kolbenstange aufgesteckt, und nun sind die beiden Platten aneinander und an der Kolbenstange durch eine starke Schraubenmutter, welche über die Deckelplatte auf das Ende der Kolbenstange aufgeschraubt ist, zusammengehalten. Zwischen beiden Platten, über die Peripherie derselben ein wenig vortretend, liegt ein einziger gufseiserner Liderungsring, an einer Stelle mit einem feinen Schlitz versehen, und durch einen innerhalb liegenden koncentrischen und ebenfalls aufgeschlitzten Spannring an die Cylinderwandung angeprefst. Der Schlitz des Spannringes liegt dem des Liderungsringes diametral gegenüber. Auch hier kann ein geringes Entweichen des Dampfes durch den Schlitz des Liderungsringes stattfinden.

Schliefslich seien hier noch drei Beispiele von Kolben mit Metall-Liderung erwähnt, welche ebenfalls auf Taf. 48 in den Fig. 4, 5 und 6 dargestellt sind. Diese drei Kolben haben Liderungsringe, welche durch *Keile gespannt werden*, nach Art der auf Taf. 43. Fig. 13 gegebenen, und oben S. 491 beschriebenen Konstruktion.

Taf. 48. Fig. 4 stellt einen grofsen Dampfkolben dar von 28 Zoll Durchmesser, welcher auf der Königshütte in Oberschlesien bei einer Dampfmaschine von 80 bis 100 Pferdekraft ausgeführt ist, und zum Betriebe eines Walzenzuges für Eisenbahnschienen dient. Fig. 4a ist die obere Ansicht nach Abnahme des Deckels, Fig. 4b ist ein Vertikalschnitt durch den Kolben nach der Linie *efg* in Fig. 4a, und Fig. 4c ist eine Ansicht des Deckels, wenn man denselben abgenommen und umgelegt denkt. Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{12}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Der Kolbenkörper besteht aus einer Boden*platte*, in der Mitte mit einer nabenförmigen Verstärkung versehen, welche auf das nach unten konisch zugespitzte Ende der Kolbenstange aufgesteckt, und durch einen starken Keil befestigt ist. Ein System vom zwölf radialen, armförmigen Verstärkungsrippen geht von dieser Nabe aus, und ist mit derselben und mit dem Boden des Kolbens aus einem Stück gegossen. Die Arme sind an ihren Enden durch eine aufrechtstehende cylindrische Rippe verbunden, auf derselben, und auf einem Ansatz der Nabe ruht der Kolbendeckel von Gufseisen, welcher an den Stellen, wo er aufliegt, und da, wo er die Liderungsringe berührt, vorspringende Leisten hat, die sich leichter bearbeiten lassen, als wenn der Deckel eine vollständige Ebene bildet (vergl. Fig. 4c). Zwölf Deckelschrauben befestigen den Deckel an den Enden der Arme, und vier andere Deckelschrauben in der Nähe der Nabe an dem Kolbenkörper. Die Muttern dieser Deckelschrauben sind in das Gufseisen der Arme, welche an den betreffenden Stellen verstärkt sind, eingeschnitten; die Köpfe derselben sind in die Oberfläche des Deckels versenkt. Zwischen Boden und Deckel liegen die aufgeschlitzten Liderungsringe mit ihren Spannringen, ähnlich konstruirt, wie in Fig. 13 auf Tafel 43; die Erläuterung dieser Konstruktion ist auf S. 491 nachzulesen. Die Keile werden hier jedoch ähnlich wie bei der Anordnung in Fig. 14 auf Taf. 43 bewegt, indem sie durch Schraubenbolzen, deren Muttern in die gufseisernen Spannringe eingeschnitten sind, angezogen, und durch Gegenmuttern festgestellt werden. Diese Spannschrauben gehen durch die cylindrische Verstärkungsrippe des Kolbenkörpers durch, und erhalten in selbiger noch eine gewisse Führung und Unterstützung.

Taf. 48. Fig. 5 zeigt einen Lokomotivkolben von 16 Zoll Durchmesser. Fig. 5a giebt die Ansicht von unten, Fig. 5b einen Vertikalschnitt nach *hi* der Fig. 5a und Fig. 5c einen Vertikalschnitt nach der Linie *kl* in Fig. 5a; sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{8}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Der Kolbenkörper von Gufseisen ist auf dem konisch zugespitzten verstärkten Ende der Kolbenstange mittelst eines Stahlkeils befestigt. Der Deckel ruht auf vier Armen des Kolbenkörpers und ist auf einen Ansatz der Nabe aufgeschoben, seine Befestigung erfolgt durch vier Deckelschrauben, deren Köpfe in den Deckel, der zu diesem Zwecke in der Mitte verstärkt ist, versenkt sind. Die Muttern der Deckelschrauben sind von Bronze, und von der Seite her in ausgesparte Oeffnungen der Arme eingeschoben (vergl. Fig. 5c). Die Liderungsringe von Gufseisen sind geschlitzt, die Schlitze der beiden übereinander liegenden Ringe sind versetzt, und jeder Schlitz kann durch einen Stahlkeil aufgetrieben werden. Um jedoch die durch den Schlitz gebildete Oeffnung möglichst zu decken ist ein Stück Stahl in die Schneide des Keils und in die Liderungsringe eingeschliffen (vergl. Fig. 5b links). Die Spannung des Keils wird hier durch Blattfedern von Stahl bewirkt, welche sich mit ihren Enden gegen Ansätze stemmen, die an der inneren Peripherie der Liderungsringe angegossen sind, und welche einen Bogen von 120 Grad einschliefsen. Eine Spannschraube, deren Mutter in der Mitte dieser Blattfedern angeordnet ist, wirkt mit ihrer Spitze gegen den Rücken des Spannkeils, der an der betreffenden Stelle eine kleine Vertiefung hat. Damit die Liderungsringe sich nicht gegen einander, und gegen die Ebene des Kolbens verschieben können, ist an einem der vier Arme eine Vorrichtung angebracht, welche in *Fig.* 5a in der oberen Ansicht, in Fig. 5c rechts im Durchschnitt sichtbar ist. Dieselbe besteht in zwei bügelartigen Streben, die mittelst eines Gelenkes an den betreffenden Arm angeschlossen sind, und welche sich gegen die innere Peripherie der Liderungsringe stemmen. Ein Ansatz an der inneren Peripherie der Liderungsringe, welcher von den beiden Streben klauenartig umfafst wird, hindert das Drehen der Liderungsringe. Noch ist darauf aufmerksam zu machen, dafs die Liderungsringe nicht durchweg von gleicher Dicke sind; sie haben an dem Schlitz die geringste Dicke, und an der dem Schlitz diametral gegenüberliegenden Stelle die gröfste Dicke.

Taf. 48. Fig. 6 stellt einen von Mathern angegebenen Kolben dar, welcher nur einen einzigen Liderungsring aus einer Metallkomposition hat. Fig. 6a ist die obere Ansicht des Kolbens nach Abnahme des Deckels, *Fig. 6b die Seiten-Ansicht*, Fig. 6c ist die obere Ansicht des Spannkeils, und Fig. 6d die Seiten-Ansicht desselben; sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{8}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Der Kolbenkörper ist ganz ähnlich der in Fig. 5 auf Taf. 48 dargestellten und soeben beschriebenen Konstruktion, angeordnet; der Deckel wird durch vier Deckelschrauben befestigt. Zwischen Boden und Deckel liegt nur ein Liderungsring, aus einer Metall-Legirung bestehend, dessen Schlitz oben eigenthümlich geformt ist. Derselbe hat nämlich, wie Fig. 6b zeigt, in der äufseren Ansicht diese Form: ; der horizontale Theil desselben wird durch einen flachen Ansatz des Keils ausgefüllt, während die vertikalen Theile des Schlitzes oben und unten nach dem Inneren des Kolbens hin sich keilartig erweitern (Fig. 6a). Die Feder zum Spannen des Keils ist sehr ähnlich der in Fig. 14 auf Taf. 43 dargestellten und oben S. 492 beschriebenen; sie ist von Stahl, legt sich ringförmig an die ganze innere Peripherie des Liderungsringes an, und ist nur in der Nähe des Keils etwa auf $\frac{1}{4}$ der Peripherie sehnenartig eingebogen, um die Spannschraube aufzunehmen. Diese hat hier jedoch ihre Mutter nicht in der Feder, sondern sie ist mit Mutter und Gegenmutter, die zu beiden Seiten der Feder liegen, versehen; damit die Schraube beim Anziehen der Spannmutter sich nicht drehe, mufs man sie mittelst eines Schraubenschlüssels fest halten, zu welchem Zwecke sie an ihrem inneren Ende mit einem Kopfe versehen ist.

Ventilkolben mit Leder-Liderung.

§ 153. *Die* durchbrochenen Kolben oder Ventilkolben finden vorzugsweise bei *Pumpen*, und zwar bei solchen Pumpen Anwendung, bei denen die Flüssigkeit (Wasser oder Luft) durch den Kolben hindurch treten soll. Gewöhnlich geschieht der Durchgang der Flüssigkeit durch den Kolben, beim Niedergange desselben, so dafs also die Flüssigkeit von unten nach oben den Kolben *passirt*, und *die* Ventile, welche bei der entgegengesetzten Bewegung, d. i. beim Aufgange des Kolbens, die Oeffnung verschliefsen sollen, müssen sich daher nach oben hin öffnen. Bei Pumpen für kaltes Wasser wendet man meist Leder-Liderung an, bei Wasser von höheren Temperaturen, z. B. bei den Luftpumpen der Dampfmaschinen, gewöhnlich Hanf-Liderung. Die Anwendung der Metall-Liderung für Ventilkolben kommt nur in sehr seltenen *Fällen* vor.

Wenn man die Ventilkolben mit Leder-Liderung versieht, so braucht man nach den in § 146 S. 469 und § 151 S. 485 gemachten Angaben nur einen Lederstulp anzuwenden, da der Kolben nur nach einer Richtung hin dicht zu halten braucht, nämlich nur beim Aufgange der Kolbenstange, während beim Niedergange, wo ohnehin *sich das* Ventil öffnet, ein Dichthalten der Liderung nicht erforderlich ist. Die Ventilkolben mit Leder-Liderung haben daher stets nur einen Lederstulp, dessen aufgestülpter Rand nach oben hin gerichtet ist.

Wo man das Leder zur Liderung anwenden kann, ist auch die Anwendung desselben zu den Ventilen gestattet; und da Lederklappen zu den einfachsten und besten Ventilen gehören, so pflegt man bei den Ventilkolben mit Leder-Liderung gewöhnlich auch Ventile mit Lederklappen zu finden. Indessen ist dies nicht immer der Fall, wie *das* Beispiel auf Taf. 44. Fig. 5 zeigt, welches einen Ventilkolben mit Leder-Liderung und mit einem Muschelventil vorstellt.

In den Tafeln sind vier verschiedene Konstruktionen durchbrochener Kolben mit Leder-Liderung gegeben.

Taf. 45. Fig. 4. Taf. 45. Fig. 4 zeigt einen kleinen Ventilkolben von $4\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser mit Leder-Liderung und mit zwei Klappenventilen von Leder. Fig. 4a ist die obere Ansicht des Kolbens, Fig. 4b ist ein Vertikalschnitt, Fig. 4c ist ein Horizontalschnitt durch den Kolben nach der Linie *ab* in Fig. 4b und nach Abnahme der Ventile, Fig. 4d ist die Querschiene, welche die Ventilplatte festhält in der Ansicht von oben und von einem Ende, und Fig. 4e stellt eine der beiden Klammern dar, durch welche die Querschiene an dem Kolbenkörper fest gehalten wird, ebenfalls in zwei Ansichten, von oben und von der Seite. *Sämmtliche Figuren sind* in $\frac{1}{3}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet.

Der Kolbenkörper ist von Bronze; er besteht aus einem cylindrischen Ringstück, welches oben einen nach der inneren Höhlung vortretenden Rand und mit diesem zusammenhängend, einen diametralen Querarm hat zur Aufnahme der Lederplatte, welche zwei Klappventile bilden soll; über diesen Rand wölbt sich ein Bügel, der gleichfalls mit dem Kolbenkörper aus einem Stück gegossen ist, und in dessen Gipfel eine Hülse angeordnet ist zur Befestigung der Kolbenstange von Schmiedeeisen. Die Lederscheibe zur Bildung der Klappventile liegt flach über den Rand und den Querarm des Kolbenkörpers, und wird im Durchmesser durch ein Querstück von Schmiedeeisen fest gehalten, das sich mit seiner abgeflachten Seite stumpf auf die Lederscheibe auflegt (Fig. 4d), während seine Enden in einen rechteckigen Querschnitt übergehen, und durch zwei kleine schmiedeeiserne Klammern festgehalten werden. Diese Klammern (Fig. 4e) werden durch je zwei Schräubchen an dem Rande des Kolbenkörpers, welcher an der betreffenden Stelle etwas verbreitert ist, festgeschraubt. Um den beiden Lederklappen, die auf diese Weise entstehen, und welche ihre Drehaxe im Durchmesser des Kolbens haben; den nöthigen Halt zu geben, sind dieselben durch schmiedeeiserne Platten überdeckt, welche mit den unter den Ventilklappen liegenden Gewichtsplatten zusammen mit Hilfe von je zwei Schräubchen an dem Leder befestigt sind. Die Ledermanchette, welche die Liderung bilden soll, ist von unten auf den Kolbenkörper aufgeschoben, sie wird durch einen Bronze-Ring, und mittelst vier Schrauben, deren Muttern in Verstärkungen des Kolbenringes eingeschnitten sind, an dem Kolbenkörper befestigt.

Taf. 45. Fig. 5. Taf. 45. Fig. 5 stellt eine andere Konstruktion für einen kleinen Kolben mit Leder-Liderung und Klappventil von Leder dar. Fig. 5a ist die Ansicht von oben, Fig. 5b die Seiten-

Ansicht, Fig. 5c ein Vertikalschnitt nach der Linie *cd* in Fig. 5a, sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{3}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Der Kolbenkörper ist wie bei der vorigen Konstrnktion von Messing oder Bronze, der Bügel zur Befestigung der Kolbenstange ist mit dem Kolbenkörper in einem Stück gegossen, und die Kolbenstange von Schmiedeeisen ist in den Bügel eingeschraubt und gegen unbeabsichtigte Lösung durch eine Gegenmutter gesichert. Die Mantelfläche des ringförmigen Kolbenkörpers hat unten etwa bis zur halben Höhe desselben einen geringeren Durchmesser, so dafs sich ein Ansatz bildet, gegen diesen legt sich der flache Rand des von unten aufgeschobenen, zur Liderung dienenden Lederstulps, welcher durch eine, auf den unteren Theil des Kolbenkörpers aufgezogene Schraubenmutter festgehalten wird. Die Schraubenmutter wird durch einen Dorn gedreht, und ist für diesen Zweck an ihrer äufseren Peripherie mit radialen Bohrungen versehen. Das Ventil ist durch eine Lederplatte gebildet, die mit der einen schmalen Seite durch drei Schräubchen an dem Rande des Kolbenkörpers befestigt ist, so dafs die Drehaxe des Ventils an einer Seite des Kolbens liegt. Die schmiedeeiserne Platten, mit denen das Ventil belastet ist, sind ähnlich konstruirt und befestigt, wie in Fig. 4 derselben Tafel.

Man hat auch die Leder-Liderung und das Lederventil in eigenthümlicher Weise zu einem Stück vereinigt. Dies wird erreicht durch die sogenannten Trichterkolben.

Taf. 48. Fig. 7 zeigt einen solchen Trichterkolben im Vertikalschnitt, und in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröfse. Der Kolbenkörper besteht aus einem hohlen, trichterförmig gestalteten Kegel von Bronze oder von Eisen, welcher an seiner ganzen Mantelfläche mit zahlreichen cylindrischen Bohrungen von etwa $\frac{1}{2}$ bis 1 Zoll Durchmesser versehen ist. Diese Bohrungen sind entweder parallel mit der Axe der Kolbenstange (wie in der Figur angegeben), gerichtet, oder man bringt sie auch wohl normal zum Kegelmantel an; dieselben haben den Zweck dem Wasser den Durchgang in das Innere des Kolbens zu gestatten. Um beim Aufgange des Kolbens dem Wasser diesen Durchgang zu verschliefsen, sind die Oeffnungen von Innen mit einem Ledertrichter, oder einer Düte von Leder bedeckt, welche da, wo die Ränder der Ledertafel, aus welcher sie gebildet ist, über einander greifen, sich nach Erfordern zu einem kleineren Durchmesser zusammenschieben kann. Diese Lederdüte wird unten in dem Kolbentrichter festgeklemmt, indem man an dieser Stelle auch die mit einem konischen Wulst versehene Kolbenstange durch den Kolben durchsteckt, und mittelst Mutter und Gegenmutter befestigt. Die Lederdüte reicht oben noch ein ganzes Stück aus dem Kolben heraus, und entwickelt sich zu dem Durchmesser des Pumpenstiefels, während der obere Durchmesser des Kolbenkörpers ein Stück kleiner ist, als der Durchmesser des Pumpenstiefels. Geht nun der Kolben aufwärts, und befindet sich über dem Kolben eine Wassermasse, die von demselben gehoben wird, so erfüllt diese die Lederdüte, und prefst sie nicht nur an die Wandung des Trichters an, so dafs die Durchgangsöffnungen bedeckt werden, sondern sie drängt auch den über den Rand des Kolbenkörpers vorstehenden Theil der Lederdüte gegen die Cylinderwandung, und bewirkt so die Liderung des Kolbens. Wenn dagegen der Kolben abwärts geht, und sich in eine unter dem Kolben befindliche Wassermasse eindrängt, so dringt diese durch die Oeffnungen in der Mantelfläche des Kolbens hindurch, und tritt auch in dem Spielraum zwischen dem oberen Rande des Kolbenkörpers und der Wandung des Cylinders, über den Kolben Hierbei faltet sich die Lederdüte zu einem kleineren Durchmesser zusammen. Zu der Düte verwendet man mit Vortheil anstatt des Leders auch vulkanisirten Kautschuck, und Gutta-Percha.

Um noch ein Beispiel für einen Ventilkolben mit Leder-Liderung zu geben, der *ein Ventil von Metall hat*, ist auf Taf. 44 in Fig. 5 ein solcher dargestellt, und zwar im Vertikalschnitt in halber natürlicher Gröfse. Der Kolbenkörper ist aus Bronze oder Messing, ein cylindrischer Ring, über den sich oben vier Arme bügelförmig wölben. Diese Arme tragen oben eine Oese, zu einem Gelenk dienend, durch welches die Lenkerstange an den Kolben angeschlossen werden soll; unterhalb der Oese sind die Arme zu einer cylindrischen Hülse ausgezogen, welche den Zweck hat, den Stiel des Muschelventils zu führen, und zugleich zur Hubbegrenzung des Ventils zu dienen. Der Lederstulp ist auf den Mantel des Ventilkolbens aufgeschoben, und wird durch einen Bronzering und durch vier Befestigungsschrauben, deren Muttergewinde in die Wandung des Kolbenkörpers eingeschnitten sind, befestigt. Dieser Bronzering bildet zugleich den Ventilsitz für das Muschelventil dessen Schlufsfläche eine Kugelzone ist.

Ventilkolben mit Hanf-Liderung.

§ 154. Wo man bei den Ventilkolben Leder-Liderung nicht anwenden will, bedient man sich in der Regel der Hanf-Liderung, welche ganz in derselben Weise angewandt wird, wie dies bereits früher bei den massiven Kolben mit Hanf-Liderung beschrieben worden ist. Da man in den meisten Fällen, wo man Hanf-Liderung für die Kolben anwendet, das Leder überhaupt nicht brauchen kann, so sind auch bei den Ventilkolben mit Hanf-Liderung die Ventile gewöhnlich nicht aus Leder, sondern entweder aus Metall, oder aus Kautschuck, indessen kommen Ausnahmen vor, und ist eine solche als Beispiel in dem Kolben auf Taf. 48. Fig. 8 dargestellt, welcher Hanf-Liderung und vier Lederklappen hat. In den Tafeln sind im Ganzen sechs Ventilkolben mit Hanf-Liderung darstellt, von denen einer mit Kautschuckventilen (Taf. 44. Fig. 1), einer mit Lederklappen (Taf. 48. Fig. 8) und die übrigen vier mit Ventilen aus Metall versehen sind.

Taf. 45. Fig. 6 giebt einen kleinen Ventil-Kolben von Gufseisen mit Hanf-Liderung und Klappventil. Fig. 6a ist die Seiten-Ansicht, Fig. 6b ein Horizontalschnitt nach der Linie *gh* in Fig. 6a, und Fig. 6c ist ein Vertikalschnitt nach der Linie *ef* in Fig. 6b. Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{3}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Der gufseiserne Kolbenkörper ist bestimmt auf seiner Mantelfläche die Hanf-Liderung aufzunehmen, er ist deshalb mit einer hinreichend tiefen und breiten Nuth versehen. Die Bohrung des Kolbenkörpers ist cylindrisch, die Klappe, welche dieselbe verschliefst, hat jedoch einen viereckigen Grundrifs, sie ist von Bronze und hat an der einen schmalen Seite zwei Ohren, welche zur Bildung des Gelenkes dienen, um welches sich die Klappe drehen soll; zwischen diese beide Ohren greift eine mit dem Kolbenkörper aus einem Stück gegossene Oese, und indem man durch diese drei Oeffnungen einen schmiedeeisernen Stift zieht, ist das Gelenk hergestellt. Die Klappe hat an ihrer unteren Fläche ringsum vorspringende Ränder, welche so bearbeitet sind, dafs sie einen möglichst vollkommenen Schlufs mit der Oberfläche des Kolbenkörpers gewähren. Quer über die Klappe ist ein schmiedeeiserner Bügel gestellt, welcher aber nicht allein die Kolbenstange aufnimmt, die in demselben durch eine vorgelegte Schraubenmutter befestigt ist, sondern auch zugleich zur Hubbegrenzung des Klappventils dient, und zu diesem Zweck mit einer vor- Taf. 45. Fig. 6.

springenden Nase versehen ist; in Fig. 6c ist der Zweck dieser Nase durch die punktirte Stellung der geöffneten Klappe angedeutet. Die Kolbenstange kann übrigens auch mit dem Bügel in einem Stück geschmiedet sein. Um den Bügel im Kolbenkörper zu befestigen, sind seine Schenkel verlängert und mit Ansätzen versehen; die Verlängerungen werden durch Schlitze in der Wandung des Kolbenkörpers zu beiden Seiten der Bohrung desselben durchgesteckt, und unten durch Keil und Schliefskeil angezogen, wobei sich die Ansätze auf die Oberfläche des Kolbenkörpers stützen.

Taf. 45. Fig. 7. Taf. 45. Fig. 7 stellt einen Ventilkolben mit Scheibenventil und mit Hanf-Liderung dar. Fig. 7a ist der Vertikalschnitt nach der Linie *lm* in Fig. 7b, und Fig. 7b ein Horizontalschnitt nach der Linie *ik* in Fig. 7a. Der Kolbenkörper ist von Bronze, auf seiner äufseren Mantelfläche zur Aufnahme der Hanf-Liderung, ohne besondere Spannvorrichtung, eingerichtet, und stellt einen mit 7 cylindrischen Durchbohrungen versehenen Kloben dar. Die mittelste dieser 7 Bohrungen dient zur Aufnahme der Kolbenstange, welche mit einem kleinen Ansatz sich gegen die Oberfläche des Kolbens stützend, hindurch gesteckt ist, und unten durch eine vorgelegte Schraubenmutter angezogen wird. Die sechs übrigen Bohrungen, welche *symmetrisch um die Kolbenstange* vertheilt sind, dienen zum Durchflufs des Wassers, wenn der Kolben niedergeht; beim Aufgange des Kolbens werden sie durch eine ebene Scheibe von Bronze bedeckt, welche auf der Kolbenstange aufgeschoben ist, und welche beim Niedergange des Kolbens durch den Wasserdruck gehoben wird. Hierbei erhält diese Scheibe durch die Kolbenstange die nöthige Führung, und durch einen Ansatz der Kolbenstange die Hubbegrenzung.

Taf 48. Fig. 8 zeigt einen Kolben von 16 Zoll Durchmesser, mit Hanf-Liderung und vier Lederklappen. Derselbe ist bei einer Pumpe zum Ausschöpfen eines schwimmenden Docks ausgeführt. Fig. 8a giebt die Ansicht von oben nach Fortnahme zweier Klappen, Fig. 8b ist ein Vertikalschnitt nach der Linie *mn* in Fig. 8a, und Fig. 8c ist ein Vertikalschnitt durch einen der Arme nach der Linie *op* in Fig. 8c. Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{8}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Der Kolbenkörper ist von Gufseisen, und stellt einen cylindrischen, auf der Mantelfläche mit einer Nuth zur Aufnahme der Hanf-Liderung versehenen Ring dar, welcher in der Mitte eine Nabe trägt, die zur Aufnahme der Kolbenstange bestimmt ist. Diese Nabe ist konisch ausgebohrt, und die

Kolbenstange ist mit ihrem verstärkten, nach unten konisch zugespitzten Ende hindurch gesteckt, und durch eine vorgelegte Schrauben mutter darin befestigt. Die Nabe hängt mit dem Ringe des Kolbenkörpers durch vier Arme zusammen, welche aber nicht radial stehen, sondern so gestellt sind, dafs sie einen aus dem Mittelpunkt des Kolbens beschriebenen Kreis berühren. Der Querschnitt eines dieser Arme ist in Fig. 8c besonders gezeichnet. Jeder Arm dient je einem der vier Klappventile zur Befestigung und einem benachbarten Ventil als Auflager. Die Ventile sind aus Lederplatten gebildet, sie werden durch Schienen, welche parallel mit dem betreffenden Arm über das Leder gelegt werden, und durch je fünf Befestigungsschrauben, deren Muttern in den Arm eingeschnitten sind, befestigt, und erhalten dadurch zugleich ihr Gelenk. Jede Klappe ist von oben durch eine Platte von Gufseisen, von unten durch ein Blechstück beschwert und versteift; diese Stücke sind aneinander und an dem Leder durch Schraubenbolzen befestigt. Diese Anordnung der Ventile gestattet dem Wasser einen freieren Durchflufs, als wenn dasselbe durch zwei Ventile, deren Drehaxe im Durchmesser liegt, sich durchdrängen müfste, indem die geöffneten Ventile sich so stellen, als bildeten sie die Anfänge eines vierfachen Schraubengewindes; das durch eine Ventilöffnung strömende Wasser nimmt seinen Ausweg nicht nur an der Cylinderwandung, sondern auch über den Rücken des benachbarten Ventils, indem es auf diesem spiralförmig aufsteigt.

Taf. 44. Fig. 4 stellt einen Ventilkolben mit Hanf-Liderung mit zwei Klappen von Metall dar. Fig. 4a ist die obere Ansicht, Fig. 4b ein Vertikalschnitt nach der Linie *hi* in Fig. 4a, Fig. 4c eine obere Ansicht nach Abnahme der Klappen und ihrer Lager, Fig. 4d stellt eine der beiden Metallklappen in der oberen Ansicht besonders dar, und Fig. 4e zeigt in zwei Ansichten die schmiedeeisernen Axlager für die Drehaxen der Klappen besonders. Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Der Kolbenkörper ist von Gufseisen, die Mantelfläche ist zur Aufnahme der Hanf-Liderung eingerichtet, und daher oben und unten mit einem vorspringenden Rande versehen; der Kolbenkörper erhebt sich noch über den oberen vorspringenden Rand, und bildet oben die Auflagefläche für die beiden Klappventile von Bronze oder Messing. Der hohle Kolben hat in seiner Mitte eine Nabe, welche konisch ausgebohrt ist, und die entsprechend gestaltete Kolbenstange aufnimmt; der gröfsere Durchmesser des Konus ist unten, es wird daher die Kolbenstange von unten durchgesteckt, und demnächst durch einen Keil festgetrieben. Dieser Keil ruht auf dem Mittelarm, welcher die Nabe mit dem Kolbenringe verbindet. Durch diesen Arm wird die Höhlung des Kolbens in zwei Durchbohrungen geschieden, deren Form im Allgemeinen durch die punktirten Linien in Fig. 4c angedeutet ist. Nur in der Nähe der oberen Mündung geht die Form dieser beiden Durchbohrungen in die Begrenzungen über, welche sich in Fig. 4c als obere Oeffnungen darstellen; dies wird durch die Ansätze *aa* (Fig. 4b) bewirkt. Diese oberen Offnungen sind mit Lederplatten eingefafst, welche durch je 6 kleine Schräubchen mit versenkten Köpfen auf dem oberen Kolbenrande befestigt sind, und welche den Klappventilen als elastische Auflageflächen dienen sollen. Die beiden Klappen von Metall, von denen eine in Fig. 4d besonders gezeichnet ist, haben angegossene und abgedrehte Zapfen, mit welchen sie sich in schmiedeeisernen Lagern drehen können. Es sind zwei Lagerstücke vorhanden, von denen eines in Fig. 4e in zwei Ansichten besonders dargestellt ist; jedes Lagerstück enthält zwei Bohrungen, nimmt die benachbarten Zapfen beider Klappen auf, und ist nach unten hin mit einer schienenartigen Verlängerung von quadratischem Querschnitt versehen, welche durch eine passende Oeffnung des Kolbenkörpers (Fig. 4c sind diese Offnungen sichtbar) hindurchreicht, und mittelst welcher es mit Hilfe einer Mutter und Gegenmutter unterhalb des Kolbens verschraubt wird. Auf den Oberkanten der beiden Lagerstücke ruht eine schmiedeeiserne Schiene, welche im Durchmesser quer über den Kolben reicht, auf die Kolbenstange mittelst einer Oeffnung aufgeschoben und an den beiden Lagerstücken durch Schrauben befestigt ist. Diese Schiene hat zu beiden Seiten in der Mitte ihrer Länge schräg aufwärts gebogene Vorsprünge, welche den Zweck haben, den Ventilen als Hubbegrenzung zu dienen. In Fig. 4a ist diese Schiene in der oberen Ansicht, in Fig. 4b im Durchschnitt sichtbar.

Taf. 44. Fig. 1 zeigt einen grofsen Luftpumpenkolben von $34\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser, mit Hanf-Liderung und Ventilen, die aus Kautschuckklappen gebildet sind. Des besseren Verständnisses wegen ist nicht nur der Kolben, mit seiner Kolbenstange, sondern in Fig. 1a ein Vertikalschnitt durch die ganze Luftpumpe gegeben; der Kolben selbst ist in Fig. 1a nach der Linie *abc* in Fig. 1b durchschnitten gezeichnet. Fig. 1b ist eine obere Ansicht des Kolbens und zwar in vier verschiedenen Zusammenstellungen, der eine Quadrant (links unten) giebt eine Ansicht des eigentlichen

Kolbenkörpers, entblöfst von allen darauf befestigten Theilen, der zweite Quadrant (links oben) zeigt den Kolben mit dem Gitterwerk bedeckt, welches die Durchflufsöffnungen für das Wasser bildet, der dritte Quadrant (rechts oben) zeigt die Ansicht des mit den Kautschuckplatten bedeckten Kolbens, und der vierte Quadrant (rechts unten) stellt die obere Ansicht des vollständig zusammengestellten Kolbens dar.

Die Luftpumpe, welche in Fig. 1a gezeichnet ist, dient für eine *Schiffsdampfmaschine*, und hat bei ihrer Aufstellung eine geneigte Lage, so dafs die Axe derselben etwa unter 45 Grad gegen die Vertikale geneigt ist. Der Pumpencylinder ist von Gufseisen, soweit sich jedoch der Pumpenkolben bewegt ist ein Metallfutter in den gufseisernen Cylinder eingesetzt. Am Boden der Pumpe ist das *Bodenventil*, und in dem, dem Kolben zunächst liegenden Deckel ist ein Druckventil angebracht; diese beiden Ventile, sowie das Kolbenventil sind im Wesentlichen nach denselben Prinzipien konstruirt, nur ist das Bodenventil etwas einfacher als die beiden anderen, indem es nur aus einer Etage besteht, während diese zwei Etagen haben. Die Kolbenstange ist von Bronze, sie ist hohl, und wird durch zwei Stopfbuchsen mit Hanfpackung geführt, von denen die eine in der Mitte des Druckventils, die andere in dem oberen gufseisernen Deckel angebracht ist (vergl. § 146. S. 465). Die Weite der Höhlung der Kolbenstange bestimmt sich durch den Ausschlag der Lenkerstange, welche in die Kolbenstange hineingeführt ist, und sich etwa in der Mitte derselben durch ein Gelenk an dieselbe anschliefst. Das Auge für dies Gelenk ist an einem schmiedeeisernen, kolbenartig konstruirten Stück befindlich, welches sich mit seiner Kolbenstange gegen die Nabe des Kolbens stützt, und von unten her durch eine Schraubenmutter von Bronze in derselben befestigt wird. Auf die eigenthümliche Konstruktion der Schraubenmutter, welche das Gewinde der schmiedeeisernen Stange vor jeder Berührung mit dem Wasser (Seewasser) schützt, ist hier besonders aufmerksam zu machen. Die hohle Kolbenstange ist auf die Nabe des Kolbens unmittelbar aufgeschraubt.

Der Kolben ist aus *Bronze*; er besteht aus einem *cylindrischen* Ringe, welcher durch sechs Arme mit der Nabe verbunden ist. Die äufsere Mantelfläche des *Kolbens* ist zur Aufnahme der Hanf-Liderung mit einem unten vorspringenden Rande versehen, während oben die für die Hanfzöpfe bestimmte Nuth durch einen Deckel von Bronze geschlossen ist. Dieser Deckel dient zugleich zum Anspannen der Liderung; er ist durch 12 Deckelschrauben mit hervorstehenden vierkantigen Köpfen befestigt; die Muttern dieser Deckelschrauben sind in Verstärkungen, welche an der inneren Mantelfläche des Kolbenringes vortreten, eingeschnitten. Man sieht aus Fig. 1b, dafs diese Köpfe kleine gezahnte Scheiben haben, und dafs zwischen je zwei derselben eine Feder auf dem Rande des Deckels angeschraubt ist, deren mit Zähnen versehene Enden in die gezahnten Scheiben eingreifen, und so ein unbeabsichtigtes Lösen der Deckelschrauben verhindern. Die sechs Arme des Kolbens sind etwa in der Mitte ihrer Länge durch ein Ringstück von Lförmigem Querschnitte verbunden, und hier bildet sich auf der Oberkante der Arme ein treppenförmiger Absatz, so dafs die Oberkante der Arme in dem an die Nabe grenzenden Theile etwas höher liegt, als in dem an den Kolbenring grenzenden Theile. Die beiden Ringflächen, welche sich solcher Gestalt, als zwei Stufen bilden, sind beide mit ringförmigen Gittern überdeckt, wie dies der Quadrant oben links in Fig. 1b in der oberen Ansicht, und Fig. 1a im Durchschnitt zeigt. Diese Gitter enthalten jedes in drei koncentrischen Reihen trapezförmige Durchflufsöffnungen für das Wasser, sie sind beide an dem mittleren Ringstück von Lförmigem Querschnitt durch Schräubchen mit versenkten Köpfen befestigt; das äufsere Gitter durch acht, das innere Gitter durch sechs solcher Schräubchen, deren Muttern in Verstärkungen der vertikalen Rippe des Lförmigen Ringstücks eingeschnitten sind; zugleich wird das äufsere Gitter an seiner äufseren Peripherie durch acht ähnliche Befestigungsschräubchen gehalten, welche in Verstärkungen des Kolbenringes eingeschraubt sind, und das innere Gitter, welches an seiner inneren Peripherie auf einem Absatz der Nabe des Kolbens ruht, wird durch die hohle Kolbenstange, welche hier auf die Nabe aufgeschraubt ist, festgeklemmt. Um beim Aufgange des Kolbens diese Durchflufsöffnungen im Kolbenventil zu verschliefsen, sind über jedes der beiden ringförmigen Gitter entsprechend geformte Scheiben von vulkanisirtem Kautschuck gelegt, welche sämmtliche Oeffnungen, deren jede etwa 1 Zoll lang und $\frac{7}{8}$ Zoll breit ist, gleichzeitig zudecken. Geht der Kolben abwärts, so sollen die Durchflufsöffnungen frei werden; dies geschieht nicht, indem sich die Kautschuckscheiben vertikal heben, sondern indem sie sich um ihre innern Peripherien, welche festgehalten werden, dütenförmig aufklappen. Es ist hierzu nöthig, einmal, dafs die innere Peripherien der ringförmigen Kautschuckscheiben festgehalten werden, sodann aber auch, dafs das Aufklappen der äufseren Peripherien angemessen begrenzt werde, weil sonst die Scheiben sich fast vertikal aufrichten, und demnächst sich nicht gehörig wieder schliefsen würden. Beides wird durch ein schalenartiges Gefäfs bewirkt, welches über jede der beiden ringförmigen Kautschuckscheiben gestellt ist. Die Schale für die äufsere Kautschuckscheibe wird durch Schraubenbolzen festgehalten, welche die Verlängerungen der acht Befestigungsschrauben bilden, die zur Befestigung des äufseren ringförmigen Gitters dienen (s. oben), die Schale für die innere Kautschuckscheibe wird durch die hohle Kolbenstange festgehalten, welche hier mit einem kleinen Ansatz auf dieselbe drückt. Man sieht, dafs die Wandung beider Schalen von einer grofsen Menge cylindrischer Oeffnungen durchbrochen ist; diese Oeffnungen haben den Zweck zu verhindern, dafs sich die aufgeklappten Kautschuckscheiben an die Oberfläche der Schalen fest ansaugen, wodurch sie abgehalten werden würden, sich beim Aufgange des Kolbens, zu schliefsen. Vermöge dieser Oeffnungen aber kann beim Aufgange des Kolbens das über demselben stehende Wasser auf die Rückseite der Kautschuckscheiben wirken, und dieselben niederdrücken.

Man hat vielfach bei Anwendung dieser Art von Ventilen darüber Klage geführt, dafs die Kautschuckscheiben sehr bald an dem inneren Rande, um welchen sie sich beim Spiel des Ventils drehen müssen, brechen. Abgesehen von der Mangelhaftigkeit des verwendeten Kautschucks, kann dieser Uebelstand auch durch eine fehlerhafte Befestigung der Kautschuckscheiben herbeigeführt werden. Wenn man nämlich die Kautschuckscheiben an ihrem inneren Rande festklemmt, so brechen sie sehr bald, während sie sich sehr gut halten, wenn man sich hütet den inneren Rand einzuklemmen, denselben vielmehr frei aufliegen läfst. Aus diesem Grunde ruhen die beiden Schalen nicht auf den Kautschuckplatten, sondern sind direkt auf die Ventilgitter aufgestellt, und überragen nur mit entsprechenden Ansätzen die inneren Ränder der Scheiben so, dafs diese hier noch einen geringen Spielraum haben.

Das Druckventil in dem oberen Theile des Pumpencylinders ist fast ganz genau so konstruirt, wie das Kolbenventil, nur dafs hier die Schale für die innere Kautschuckscheibe nicht durch die hohle Kolbenstange gehalten werden kann, sondern ähnlich, wie die Schale für die äufsere Kautschuckscheibe durch Verlängerung der Befestigungsschrauben des Gitters befestigt wird.

Das Bodenventil hat nur eine Etage, folglich auch nur ein Gitter mit Durchflufsöffnungen und ist dasselbe nicht besonders aufgesetzt, sondern mit dem Cylinderboden in einem Stück gegossen.

Taf. 44. Fig. 3 zeigt eine eigenthümliche Konstruktion eines Kolbens mit Hanf-Liderung und mit zwei Klappventilen von einer doppeltwirkenden Saugepumpe. Des besseren Verständnisses wegen ist die Anordnung der Pumpe in Fig. 3a im Vertikalschnitt in ihrem ganzen Zusammenhange gegeben, während Fig. 3b einen Horizontalschnitt nach der Linie *fg* der Fig. 1a zeigt. Beide Figuren sind in $\frac{1}{12}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Der Kolben hat einen Durchmesser von 8 Zollen; er ist an einer hohlen gufseisernen Kolbenstange befestigt, deren gröfster Querschnitt genau die Hälfte des Querschnittes des Pumpenkolbens beträgt; der äufsere Durchmesser derselben ist also $\frac{8}{\sqrt{2}} = 5{,}65$ Zoll. Der Grund dieser Anordnung soll weiter unten erläutert werden. Der Kolben selbst besteht aus einem Ringe von Bronze, dessen äufsere Mantelfläche in mehrfach beschriebener Weise zur Aufnahme der Hanf-Liderung mit einer Nuth versehen ist. Der Kolbenring hat einen diametral hindurch gehenden Steg (Scheidewand) in Form eines Y; in dem Winkel, welchen die beiden oberen Arme dieses Y bilden, liegt die gemeinschaftliche Drehaxe der beiden Klappventile, welche durch einen Bolzen von Messing gebildet wird, der durch entsprechende Ohren dieser Klappen und des Steges gezogen ist. Die Schlufsflächen der Klappventile sind von aufsen nach innen geneigt, und werden durch den hervorragenden Rand des Kolbenringes gebildet. Der Kolben trägt einen zwischen den beiden Klappen hindurch gehenden Bügel von Schmiedeeisen, welcher sowohl zur Hubbegrenzung der Klappen dient, als auch die Befestigung des Kolbens an der hohlen gufseisernen Kolbenstange mit Hilfe eines Schraubenbolzens vermittelt. Diese Kolbenstange geht mittelst einer gewöhnlichen Stopfbuchse durch den Cylinderdeckel, und ist oben durch eine Hülse mit Keil an eine schmiedeeiserne Stange angeschlossen, welche die Verlängerung der Kolbenstange bildet.

Das Pumpenrohr ist cylindrisch, oben mit einem Steigerohr versehen, unten auf einen vierkantigen Kasten aufgeschraubt, welcher die Bodenventile enthält. Auch diese Ventile sind von Bronze; sie erscheinen in Fig. 3b in der oberen Ansicht; ihre Drehaxen, ähnlich gebildet, wie die der Kolbenventile, fallen aber nicht zusammen, sondern liegen zu beiden Seiten des Ventilsitzes, während die Ventile selbst sich von der Mitte des Ventilsitzes aus öffnen; hier ist ebenfalls ein Steg, auf welchen sich die Ventile auflegen, und endlich sind auch die Schlufsflächen dieser Ventile, wie diejenigen der Kolbenventile unter etwa 45 Grad geneigt. Der Ventilkasten, welcher die Bodenventile enthält, hat unten eine cylindrische Verlängerung, an welche sich das Saugerohr anschliefst; er ist übrigens durch vier angegossene Lappen mittelst Schraubenbolzen auf zwei Unterlageschwellen befestigt.

Die Eigenthümlichkeit der hier beschriebenen Pumpe, durch welche die Konstruktion des Kolbens und der Kolbenstange bedingt wird, besteht darin, dafs sowohl beim Aufgange, als beim Niedergange des Kolbens, also kontinuirlich Wasser durch das Steigerohr ausfliefsen soll, während bekantlich bei einer ähnlich gebauten Pumpe mit dünner Kolbenstange allein beim Aufgange des Kolbens Wasser ausfliefst. Das Spiel der Pumpe wird durch folgende Betrachtung sich erklären. Wenn der Pumpenkolben den tiefsten Stand hat, und in die Höhe geht, so bildet sich unter dem Kolben ein luftverdünnter Raum, der Atmosphärendruck treibt das Wasser durch das Saugerohr, indem dasselbe das Bodenventil aufstöfst, in den Pumpenstiefel, und dieser füllt sich mit Wasser an. Hat der Kolben seinen Lauf aufwärts vollendet, und bewegt er sich wieder abwärts, so schliefst sich das Bodenventil, das Kolbenventil öffnet sich, und das angesogene Wasser tritt über den Kolben. Dies ist der erste Doppelhub der Pumpe, und soweit stimmt ihre Wirkung mit den gewöhnlichen Pumpen überein; beim zweiten Aufgange des Kolbens, wo das über dem Kolben stehende Wasser in das Steigerohr gehoben wird, auch noch; allein beim darauf folgenden Niedergange, wo der Raum unter dem Kolben und derjenige über dem Kolben, sowie das Steigerohr mit Wasser gefüllt sein mögen, drängt sich die dicke Kolbenstange in die Wassermenge ein, und mufs natürlich ein entsprechendes Volum des über dem Kolben stehenden Wassers verdrängen, welches durch das Steigerohr ausfliefst. Ist nun der Querschnitt der Kolbenstange halb so grofs als derjenige des Cylinders, so wird beim Niedergange des Kolbens auch die Hälfte des beim Aufgange angesogenen Wassers durch das Steigerohr hinausgedrängt, während die andere Hälfte im Pumpenstiefel zurückbleibt, und beim nachfolgenden Aufgange des Kolbens gehoben wird.

b) Verbindende Maschinentheile für gradlinige Bewegung mit unterbrechbarem Verschlufs.

Allgemeine Bedingungen für die Konstruktion der unterbrechbaren Verschlüsse.

§ 155. Nach der in § 142 aufgestellten Eintheilung haben wir nunmehr, nach Erledigung der *wichtigsten Maschinentheile* mit dauerndem Verschlufs noch den Fall zu erörtern, wo man Maschinentheile zu konstruiren hat, bei welchen nach Erfordern der Durchflufs einer Flüssigkeit abgesperrt und wieder hergestellt werden soll. Hier handelt es sich also gewöhnlich darum eine Oeffnung, sei dieselbe in einer Platte oder in einem Rohr oder in einer Gefäfswandung, durch welche eine Flüssigkeit sich hindurch bewegen kann, nach Erfordern zu verschliefsen oder dieselbe von dem Verschlufs zu befreien. Da die Flüssigkeit, wenn sie durch die Oeffnung ausfliefsen soll, gegen dieselbe einen gewissen Druck ausüben mufs, so mufs der verschliefsende Maschinentheil, sobald die Oeffnung geschlossen ist, mit seiner Fuge dicht halten, er mufs also mit einem angemessenen Druck gegen die verschliefsende Fuge angeprefst werden, und aufserdem mufs die Fuge selbst so beschaffen sein, dafs sie hinreichend dicht schliefst. Diese beiden Bedingungen werden also bei allen hier zu erörternden Maschinentheilen sich immer wiederholen; freilich werden sie in sehr verschiedener Weise erfüllt werden können.

1) Die Bedingung, dafs der verschliefsende Maschinentheil mit einem gewissen Druck gegen die schliefsende Fuge geprefst wird, sobald der Verschlufs stattfinden soll, wird entweder durch Gewichtsbelastungen oder durch Federbelastungen, oder auch durch Pressungen, welche mittelst Schrauben ausgeübt werden, erfüllt. Die Gewichtsbelastung besteht häufig in dem Druck der Flüssigkeit selbst, welche das Bestreben hat, auszufliefsen. Von der Art sind z. B. die Verschlüsse (Ventile), welche wir in den beiden vorigen Paragraphen bei Gelegenheit der durchbrochenen Kolben kennen gelernt haben. Der verschliefsende Maschinentheil ist dann so angeordnet, dafs er durch den Druck der Flüssigkeit selbst gegen seine schliefsende Fuge angeprefst wird, und daraus folgt, dafs, wenn er geöffnet werden soll, entweder dieser

Druck der Flüssigkeit aufgehoben werden, oder doch ein Gegendruck auf den verschliefsenden Maschinentheil ausgeübt werden mufs, welcher dem Druck der Flüssigkeit entgegengerichtet, und gröfser als dieser ist. Zuweilen ist jedoch die Konstruktion so angeordnet, dafs der Druck der Flüssigkeit, welche durch den Verschlufs abgesperrt wird, das Bestreben hat, diesen Verschlufs zu öffnen; dann wird der verschliefsende Maschinentheil durch einen äufseren Druck gegen die schliefsende Fuge geprefst (wie z. B. bei den Sicherheits-Ventilen und bei den Absperrventilen der Dampfkessel), als solchen äufseren Druck wendet man dann zuweilen Gewichte an, welche entweder unmittelbar auf den schliefsenden Maschinentheil wirken, oder welche durch Hebelkombinationen auf denselben drücken. Anstatt der Gewichte bedient man sich auch des Druckes gespannter Federn, und in manchen Fällen des Druckes, den man durch Druckschrauben ausüben kann, um den schliefsenden Maschinentheil gegen seine Fuge zu pressen; auch hier ist die Wirkung des Druckes entweder eine unmittelbare, oder sie wird durch Hebelkombination verstärkt. Endlich ist der Fall zu bemerken, wo der schliefsende Maschinentheil vermöge seiner eigenthümlichen Konstruktion durch den gegen die verschlossene Oeffnung gerichteten Druck der abgesperrten Flüssigkeit weder auf Oeffnen noch auf Schliefsen in Anspruch genommen wird; dergleichen Konstruktionen nennen wir **„entlastete Verschlüsse"**. Aber auch bei diesen entlasteten Verschlüssen ist es erforderlich zur Herstellung einer dichten Fuge einen gewissen Druck auf dieselbe auszuüben, damit möglichst alle Punkte der beiden Flächen, welche die Fuge bilden, zur Berührung gelangen.

2) Die zweite oben aufgestellte Bedingung, dafs nämlich die Berührungsflächen eine dicht schliefsende Fuge bilden, kann freilich auch hier, wie bei den Stopfbuchsen und Kolben-Liderungen dadurch erreicht werden, dafs man ein weiches und hinreichend elastisches Material für die schliefsenden Flächen verwendet; allein die Natur dieser Konstruktionen läfst dies nur in wenigen Fällen zu, und beschränkt auch die Auswahl der hier zu verwendenden Materialien sehr wesentlich; man kann hier gewöhnlich nur Leder oder Kautschuck anwenden (wie bei den oben in § 153 und 154 beschriebenen Klappventilen): ist aber in den meisten Fällen genöthigt, die schliefsenden Flächen von Metall (von Eisen oder von Metall-Legirungen), herzustellen, und dann läfst sich ein gehörig

dichter Verschlufs der Fuge nur dadurch erzielen, dafs man diese Fuge sehr sorgfältig bearbeitet, die beiden Berührungsflächen zusammenschleift, und endlich denselben eine solche Form giebt, dafs durch dieselbe der dichte Verschlufs und die passende Bearbeitung der Berührungsflächen befördert und erleichtert werde. — Die angemessen gestaltete Berührungsfläche der Durchflufsöffnung, auf welche der verschliefsende Maschinentheil dicht schliefsend pafst, nennt man den **Sitz** des verschliefsenden Maschinentheils (Ventilsitz, Hahnsitz u. s. w.).

Zu den beiden soeben besprochenen *Bedingungen*, kommen noch folgende, welche die verschliefsenden Maschinentheile zu erfüllen haben:

3) der verschliefsende Maschinentheil mufs hinreichende Festigkeit und Steifheit besitzen, um durch die einwirkenden Drucke der Flüssigkeit oder der Belastung (No. 1) nicht wesentliche und nachtheilige Formveränderungen zu erleiden;

4) der verschliefsende Maschinentheil mufs solche Vorrichtungen erhalten, dafs er sich leicht und schnell öffnen, und ebenso leicht und schnell wieder verschliefsen lasse. In vielen Fällen erfolgt das Oeffnen und Schliefsen der Durchflufsöffnungen durch den Druck der Flüssigkeit selbst, welche auf den *Verschlufs wirkt*; *dergleichen* Verschlüsse nennt man **selbstthätige Verschlüsse**; bei denselben mufs immer dafür gesorgt werden, dafs einmal der verschliefsende Maschinentheil sich nicht zu weit öffne, und sodann, dafs er sich nur auf vorgeschriebem Wege öffne, damit er nachher wieder sicher in seinen Sitz gelangen könne. Wo das Oeffnen und Schliefsen der Verschlüsse nicht durch den Druck der Flüssigkeit, welche auf dieselbe einwirkt, geschieht, bedarf es besonderer, oft sehr einacher, zuweilen auch ziemlich komplicirter Vorrichtungen, um dies zu bewirken; wir wollen diese Art von Verschlüssen (im Gegensatz zu den selbstthätigen) **Verschlüsse mit äufserer Handhabung** nennen;

5) die Form der Durchflufsöffnung mufs so gewählt werden, dafs die Flüssigkeit mit möglichst geringen hydraulischen Verlusten sich durch dieselbe hindurch bewegen kann; es müssen also alle unnöthigen Querschnittsverengungen und Richtungsveränderungen vermieden werden, und wo sich Verengungen des Querschnittes oder Veränderungen der Bewegungsrichtung nicht vermeiden lassen, müssen wenigstens die Uebergänge von einem Querschnitt in den anderen, oder

von einer Richtung in die andere möglichst allmählich erfolgen und durch Kurvenübergänge vermittelt werden. Alle scharfen und eckigen Formen sind hier zu vermeiden.

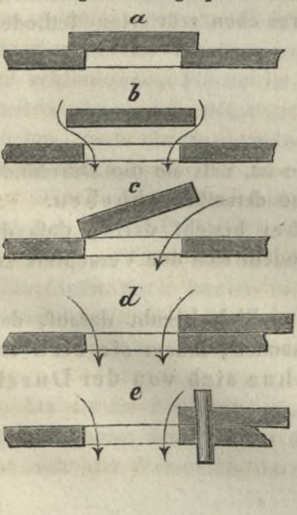
6) Wird der Verschlufs geöffnet, so mufs er der durchfliefsenden Flüssigkeit möglichst wenig Hindernisse bereiten, er darf derselben in ihrer Fortbewegung, nachdem sie die Durchflufsöffnung passirt ist, keine unnöthigen Widerstände und Hemmungen darbieten, und mufs die *Durchflufsöffnung* so vollkommen *als möglich frei* machen.

Alle diese *Bedingungen* vollständig und gleichzeitig, dabei auf einfache Weise zu erfüllen, ist eine schwierige Aufgabe für die Konstruktion, welche vollkommen noch nicht gelöst ist, und daher der Erfindung noch vielen Spielraum gewährt.

Methoden die Oeffnung frei zu machen und Eintheilung der unterbrechbaren Verschlüsse.

§ 156. So verschieden nun auch die Konstruktionen gewählt werden mögen, um die im vorigen Paragraphen aufgestellten Bedingungen für einen unterbrechbaren Verschlufs zur Erfüllung zu bringen, so kommen doch alle diese Konstruktionen darin überein, dafs sie im *Wesentlichen* zwei *Haupttheile* enthalten, nämlich

1) einen als ruhend anzusehenden Maschinentheil, welcher die Durchflufsöffnung enthält, und welcher wegen der nach No. 2 des vorigen Paragraphen für die Berührungsfläche der Durchflufsöffnung eingeführten Benennung, auch wohl im weiteren Sinne diese Benennung erhält, und der **Sitz** genannt wird,



2) einen beweglichen, wenigstens gegen die Durchflufsöffnung relativ beweglichen Maschinentheil, welcher zum Verschlufs der Durchflufsöffnung dient, und durch dessen Bewegung das Oeffnen und Schliefsen derselben *erfolgt*; wir wollen diesen Theil den **Körper** der Verschlufs-Konstruktion nennen.

Die relative Bewegung des Körpers gegen den Sitz, durch welche ein Oeffnen des Verschlusses erfolgt mag noch so komplicirt und eigenthümlich angeordnet sein, sie wird sich immer auf eine von drei Methoden, die möglich sind, zurückführen lassen. Denken wir nämlich den einfachsten Fall, wie in *a* dargestellt ist (s. vorige Seite); es sei eine Durchflufsöffnung in einer Wand gegeben, und man soll dieselbe dicht verschliefsen: so wird man am natürlichsten dies dadurch bewirken, dafs man eine Platte über die Oeffnung deckt. Nun kommt es darauf an, die Oeffnung nach Erfordern frei zu machen, dies kann aber nur auf eine der drei *folgenden Arten* geschehen; nämlich:

1) indem man die Platte von der *Oeffnung* abhebt, wie in *b* dargestellt ist, also die Berührung mit der Wand ganz aufhebt. Die in *c* dargestellte Methode, bei welcher man die Platte zwar an dem einen Rande noch aufruhen läfst, erscheint nur als eine unvollkommene Ausführung dieser Art die Platte abzuheben, und mufs derselben beigerechnet werden,

2) indem man die Platte zur Seite schiebt, wie dies in *d* dargestellt ist. Hier bleibt die Platte mit der Wand in Berührung, schiebt sich aber von der Oeffnung fort, und

3) indem man die Platte um irgend eine Axe dreht, wie solches die Figur *e* andeuten soll.

Die verschiedenen Konstruktionen der Maschinentheile, welche einen unterbrechbaren *Verschlufs darstellen*, *werden* daher in Beziehung auf die Art und Weise, wie dieser Verschlufs geöffnet werden kann, immer auf eine dieser drei Methoden zurückgeführt werden können, daher wollen wir diese Maschinentheile in drei Gruppen theilen, welche den drei eben erörterten Methoden der Oeffnung entsprechen.

1) Ventile.
2) Schieber.
3) Hähne.

Das Charakteristische der Ventile ist, dafs sie die Durchflufsöffnung frei machen, indem sie sich von derselben abheben.

Das Charakteristische der Schieber besteht darin, dafs die Durchflufsöffnung frei gemacht wird, indem sich der Verschlufs zur Seite fortschiebt.

Das Charakteristische der Hähne endlich beruht darauf, dafs dieselben die Durchflufsöffnung frei machen, indem sie sich um eine feste Axe drehen, jedoch ohne sich von der Durchflufsöffnung abzuheben.

1. Ventile.

Eigenthümlichkeiten der Ventile.

§ 157. Die Ventile sind von allen Konstruktionen für den Zweck, eine Durchflufsöffnung nach Erfordern zu schliefsen und zu öffnen, die einfachsten und am häufigsten benutzten. Da sie die Oeffnung frei machen, indem sie sich von derselben abheben, so folgt daraus schon, dafs bei dieser Bewegung sehr wenig Reibungswiderstände vorkommen, während bei den Schiebern und Hähnen, bei denen eine Berührung der Flächen während des Oeffnens bestehen bleibt, diese Reibungswiderstände oft eine wichtige Rolle spielen und namentlich dazu beitragen, die schliefsenden Fugen abzunutzen und undicht zu machen.

Die Ventile sind ferner die einzigen von den drei in § 156 angeführten Verschlüssen, welche sich dazu eignen selbstthätig zu wirken (§ 155 No. 4), denn da diese selbstthätige Wirkung durch den Druck der Flüssigkeit, welcher gegen die Oeffnung gerichtet ist, hervorgebracht wird, so fällt die Richtung dieses Druckes zusammen mit der Richtung, in welcher das Ventil sich bewegt, wenn es sich öffnet oder schliefst, und kann daher zur Erzielung dieser Bewegung verwandt werden.

Endlich ist noch hervorzuheben, dafs bei den Ventilen, wenn sie sich öffnen, die einzelnen Berührungspunkte der schliefsenden Flächen sich trennen, und dieselben Berührungspunkte sich wieder treffen, wenn die Ventile sich schliefsen, ohne das die Berührungspunkte des Ventilkörpers inzwischen mit einem anderen Theil der schliefsenden Fläche in Berührung gekommen sind; hierdurch wird erreicht, dafs selbst bei einer Abnutzung der schliefsenden Flächen, doch die Formveränderung beider so stattfinden kann, dafs dieselben kongruent bleiben.

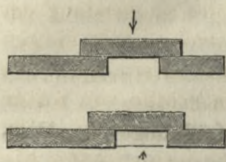
Die Ventile haben freilich neben den angeführten Vortheilen auch mancherlei Uebelstände; dahin gehören namentlich folgende:

Das geöffnete Ventil, da es sich von der Ventilöffnung abhebt, bleibt doch immer in der Richtung der durch die Oeffnung strömenden Flüssigkeit; es bildet also fast immer ein Hindernifs, welches wenigstens eine Ablenkung der Bewegungsrichtung bedingt.

Da ferner das Ventil, indem es die Offnung überdeckt, selbst bei Aufhebung des Druckes die Oeffnung noch schliefsen soll, so läfst sich der Verschlufs durch Ventile in einfacher Weise nur erreichen bei horizontalen Oeffnungen, und auch hier nur, wenn die Durchflufsöffnung so geordnet werden kann, dafs das Ventil sich vertikal aufwärts bewegen kann. Nur bei Anwendung der Klappventile lassen sich auch Oeffnungen, welche gegen die Horizontal-Ebene geneigt sind, durch Ventile verschliefsen, doch auch immer in einfacher Weise, nur so, dafs sich die Ventile von unten nach oben hin öffnen. Will man einen Ventilverschlufs in der Weise anordnen, dafs das Ventil sich von oben nach unten hin öffnet, so bedarf man zum Zuhalten des Ventils der Gegengewichte oder Federn, und man sucht eine solche *Anordnung zu meiden.*

Wenn der Wechsel zwischen Oeffnen und Schliefsen der Durchflufsöffnungen sehr schnell sich wiederholen soll, so sucht man die Anwendung der Ventile zu vermeiden, denn da nach dem soeben Gesagten das Oeffnen der Ventile durch eine vertikale Bewegung nach aufwärts erfolgt, so findet beim Schliefsen der Ventile stets ein Niederfallen derselben statt, welches bei den gewöhnlichen Ventilen nicht ohne einen gewissen Stofs beendigt wird, abgesehen davon, dafs die Zeit, welche zum Fallen des Ventils verwandt werden mufs, oft zu grofs ist, um die beabsichtigte Anzahl der Wechsel hervorzubringen. Immerhin wird während der Zeit, wo das Ventil fällt, namentlich bei selbstthätigen Ventilen eine gewisse *Flüssigkeitsmenge durch* das Ventil wieder zurückfliefsen. Diese Flüssigkeitsmenge heifst der „Ventilverlust", und um dieselbe so klein als möglich zu machen, zugleich auch um die Stöfse beim Niederfallen möglichst zu vermindern, sucht man das Ventil oft so zu konstruiren, dafs es eine möglichst geringe Hubhöhe bekommt, freilich mit Berücksichtigung der erforderlichen Gröfse der Durchflufsöffnung. Die hier zu erfüllende Aufgabe läfst sich dann gewöhnlich in der Weise formuliren: das Ventil so zu konstruiren, dafs dasselbe bei einer möglichst kleinen Hubhöhe eine möglichst grofse Durchflufsöffnung gewähre.

Die einfachste Form, in welcher das Ventil zu denken ist, ist nach § 156 die über eine Durchflufsöffnung gelegte Verschlufsplatte. Befindet sich die, mit Hilfe des Ventils abzusperrende Flüssigkeit über dieser Platte, so wirkt ihr Druck auf Schliefsen des Ventils, und wenn das Ventil dem Druck dieser Flüssigkeit entgegen geöffnet werden soll, so mufs ein Druck überwunden werden, welcher sich ausdrückt durch das Produkt aus dem Flächeninhalt der Durchflufsöffnung in den Druck, welchen die Flüssigkeit auf eine Flächen-Einheit ausübt. Wenn dagegen die abzusperrende Flüssigkeit sich unterhalb des Ventils befindet, so hat sie die Tendenz das Ventil



zu heben, und dann bedarf es der Ueberwindung dieses Druckes (welcher übrigens in derselben Weise zu berechnen ist, wie soeben angegeben wurde), um das Ventil zu schlieſsen, resp. geschlossen zu erhalten. Bei groſsen Durchgangsöffnungen und starken Flüssigkeitsdrucken sind die hier zu überwindenden Drucke sehr beträchtlich. Man hat daher für diese Fälle Konstruktionen ersonnen, welche den Zweck haben, das Ventil von dem Druck der Flüssigkeit ganz oder theilweise zu entlasten, d. h. das Ventil so zu gestalten, daſs der gegen die Durchfluſsöffnung gerichtete Druck der Flüssigkeit weder die Tendenz hat, das Ventil zu öffnen, noch diejenige es zu schlieſsen, oder daſs wenigstens diese Tendenz in vermindertem Maaſse vorhanden ist. Dergleichen Ventile heiſsen nach § 155 No. 1 entlastete Ventile, die anderen Ventile, welche diese Konstruktion nicht haben, wollen wir „Ventile mit Pressung“ nennen, und wir theilen daher die Ventile ein, in:

1) Ventile mit Pressung,
2) entlastete Ventile.

Verschiedene Arten von Ventilen — Klappventile.

§ 158. Jedes Ventil besteht aus gewissen Haupttheilen, diese sind:

1) der Ventilsitz,
2) der Ventilkörper,
3) die Führung des Ventils,
4) die Hubbegrenzung des Ventils,

zu diesen, bei allen Ventilen vorhandenen Theilen kommen noch zuweilen:

5) die Vorrichtung zur Bewegung des Ventils,
6) der Ventilkasten oder der Ventiltopf.

Aus den in den Tafeln mitgetheilten Beispielen, welche weiter unten erläutert werden sollen, lassen sich die Anordnungen dieser verschiedenen Theile erkennen. Hier mag noch bemerkt werden, daſs man den verschiedenen Ventilformen gewöhnlich nach der Gestalt ihres Sitzes verschiedene Benennungen beizulegen pflegt. Man unterscheidet danach:

1) Klappventile,
2) Scheibenventile,
3) Kegelventile,
4) Muschelventile,
5) Kugelventile,
6) entlastete Ventile,
7) Hochdruckventile für die Ausflufsöffnungen der Wasserleitungen.

Die fünf zuerst genannten *Gruppen* von Ventilen sind gewöhnlich Ventile mit Pressung.

Die Klappventile gehören zu den einfachsten Ventilkonstruktionen. Die Klappen werden entweder aus Leder, vulkanisirtem Kautschuck oder aus Metall konstruirt, und wir haben bereits bei Gelegenheit der Ventilkolben die wichtigsten derartigen Konstruktionen kennen gelernt, wie sich denn überhaupt die Klappventile vorzugsweise zur Anwendunp als selbstthätige Ventile eignen. Indem wir auf die Beschreibung der verschiedenen Klappventile in den §§ 153 und 154 verweisen, stellen wir der Uebersicht wegen hier die mitgetheilten Konstruktionen von Klappventilen nochmals zusammen:

Ventile mit Lederklappen.

Taf. 45. Fig. 4 (vergl. S. 504) ist in dem Kolben die Ventilöffnung durch zwei Lederklappen verschlossen, welche in der Mitte ihre Drehaxe haben.

Taf. 45. Fig. 5 (vergl. S. 504) giebt den Verschlufs einer Oeffnung durch ein einfaches Klappventil von Leder.

Taf. 48. Fig. 7 (vergl. S. 505) giebt ein Klappventil von Leder in Form einer konischen Düte, welches bei einem Trichterkolben angewendet ist.

Taf. 48. Fig. 8 (vergl. S. 508) zeigt den Verschlufs einer Kolbenbohrung durch vier Lederklappen, welche sich in eigenthümlicher Weise öffnen.

Klappventile mit Kautschuckplatten.

Taf. 44. Fig. 1 (vergl. S. 510) zeigt eine Luftpumpe für eine Schiffsdampfmaschine, welche drei Ventile enthält, die durch Kautschuckklappen gebildet sind.

Taf. 50. Fig. 7 ist ein kleines von Perneaux konstruirtes

Klappventil aus Kautschuck. Fig. 7a ist die Seitenansicht, Fig. 7b die obere Ansicht, Fig. 7a ein Vertikalschnitt nach der Linie *no* in Fig. 7b, sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Das Ventil und der Ventilsitz sind aus einem Kautschuckstück, welches einen cylindrischen Hut, nach Art einer Ledermanschette bildet, nur sind zwei gegenüber liegende Wandungen des aufgebogenen Randes flach gedrückt, und giebelförmig (Fig. 7c) gegeneinander gedrückt; hierdurch sind die Klappen gebildet, welche also an beiden Seitenrändern mit einander zusammenhängen, und nur oben zu einem gradlinigen Spalt zusammenschliefsen. Wenn das Ventil sich öffnet erweitert sich dieser Spalt zu der in Fig. 7b punktirten Form in ⬭.

Klappventile mit Metallklappen.

Taf. 44. Fig. 3 (vergl. S. 519) zeigt an einer doppelwirkenden Pumpe zwei verschiedene Konstruktionen von je 2 metallenen Klappventilen, beide mit geneigten Sitzen, das Kolbenventil hat zwei Klappen, deren Drehaxe in der Mitte liegt, das Bodenventil zwei viereckige Klappen, deren Drehaxen zu beiden Seiten liegen.

Taf. 44. Fig. 4 (vergl. S. 509) zeigt eine Kolbenöffnung, welche durch zwei Metallklappen verschlossen ist, deren Axen in der Mitte des Kolbens liegen. Die Ventilsitze sind mit Leder garnirt.

Taf. 45. Fig. 6 (vergl. S. 507) zeigt ein einfaches Klappventil von Metall in einem Pumpenkolben mit Hanf-Liderung.

Scheibenventile.

§ 159. Die Scheibenventile bestehen in einer ebenen Scheibe gewöhnlich von Bronze, welche den Rand der Durchflufsöffnung überdeckt, und welche auf denselben sehr gerade aufgeschliffen ist. Man wendet dergleichen Scheibenventile sehr häufig als Sicherheitsventile für Dampfkessel an, und dann kommt es darauf an, die Berührungsfläche zwischen dem Ventil und dem Ventilsitz so klein als möglich zu machen. Deshalb gestaltet man entweder den Rand der Ventilscheibe (Taf. 46. Fig. 1) oder den Rand des Ventilsitzes (Taf. 46. Fig. 2) fast schneidenartig. Gewöhnlich sind die Durchgangsöffnungen, welche durch die Scheibenventile verschlossen werden von vollem kreisförmigen Querschnitt, zuweilen auch von ringförmigem Querschnitt (Taf. 50. Fig. 3), auch pflegt man zuweilen mehrere kreisförmige Oeffnungen durch ein einziges Scheibenventil zu verschiefsen (Taf. 45. Fig. 7 und S. 508).

Bezeichnet d den äufseren Durchmesser der kreisförmigen Ausflufsöffnung des Ventils, h die Hubhöhe des Ventils, so ist der Flächeninhalt der horizontalen Durchflufsfläche $\frac{1}{4}\pi d^2$ und der Flächeninhalt der vertikalen cylindrischen Mantelfläche, durch welche der Ausflufs erfolgt, wenn das Ventil gehoben ist $\pi d \, . \, h$. Nimmt man beide gleich grofs an, so ist die erforderliche Hubhöhe des Ventils aus:

$$\tfrac{1}{4}\pi d^2 = \pi d \, . \, h$$

$$h = \tfrac{1}{4} d,$$

d. i. gleich einem Viertel des Ventildurchmessers. Will man bei gegebenem Querschnitt der Ausflufsöffnung die Hubhöhe des Ventils vermindern, so wählt man einen ringförmigen Querschnitt für den Ventilsitz. Bezeichnet d' den mittleren Durchmesser und a die Breite des Ringes, welcher denselben Flächeninhalt hat, wie der volle Kreis vom Durchmesser d, und nennt man die Hubhöhe eines solchen ringförmigen Ventils h', so hat man

$$\pi d' \, . \, a = \tfrac{1}{4}\pi d^2 = \pi d' \, . \, h',$$

folglich

$$a = \frac{d^2}{4d'}$$

und

$$h' = a = \tfrac{1}{4} d \, . \, \frac{d}{d'}.$$

Es ist also für diesen Fall die Hubhöhe in demselben Verhältnifs kleiner, als bei dem vollen Kreise, in welchem der Durchmesser des Ringstückes gröfser ist, als der Durchmesser des vollen Kreises, auch ist die Hubhöhe gleich der Breite der ringförmigen Ausflufsöffnung. Taf. 50. Fig. 4 giebt ein Beispiel von zwei ringförmigen Ventilen, und zwar von einem ringförmigen Kegelventil (links) mit einer einfachen ringförmigen Durchflufsöffnung, und von einem ringförmigen Scheibenventil (rechts) mit zwei concentrischen ringförmigen Durchflufsöffnungen. Auch Taf. 46. Fig. 4 giebt ein Beispiel von einem einfachen ringförmigen Scheibenventil.

In den Tafeln sind sechs verschiedene Konstruktionen von Scheibenventilen mitgetheilt.

Taf. 46. Fig. 1. Taf. 46. Fig. 1 ist ein Scheibenventil als Sicherheitsventil für einen Dampfkessel, konstruirt von R. R. Werner in

Berlin. Fig. 1a zeigt einen Vertikalschnitt durch die ganze Anordnung, in welchem das Ventil selbst, sowie der Ventilsitz in der Ansicht erscheint, in $\frac{1}{8}$ der natürlichen Gröfse, Fig. 1b eine obere Ansicht des Ventilsitzes, und Fig. 1c einen Vertikalschnitt durch den Ventilsitz und durch das Ventil nach der Linie *ab* in Fig. 1b; die beiden letztgenannten Figuren in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse. Auf dem Dampfkessel ist ein gufseisernes Mundstück befestigt, dessen obere Mündung den Ventilsitz aufnimmt, welcher mit seiner äufseren *Mantelfläche* konisch in dieselbe eingesetzt ist. Der Ventilsitz ist ringförmig, die obere Fläche desselben trägt den Ventilkörper, welcher oben auf dieselbe aufgeschliffen ist. Der Ventilkörper besteht aus einem cylindrischen Klotz von Bronze, dessen Grundfläche unten ausgehöhlt ist, so dafs sich hier in der Peripherie eine schneidenförmige Auflagefläche bildet. Die Führung des Ventils wird dadurch bewirkt, dafs die Oberfläche des Ventilsitzes vier aufrechtstehende Arme trägt, welche mit dem Ventilsitz aus einem Stück gegossen, die cylindrische Mantelfläche des Ventilkörpers umfassen, und auf diese Weise die Bewegung nach der Axe des Ventils beim Heben desselben sichern. Das gufseiserne Mundstück, dessen obere Mündung den Ventilsitz aufnimmt, trägt noch mittelst eines Flansches den gufseisernen Ventiltopf, welcher seitwärts ein Ansatzrohr zur Abführung des Dampfes hat; oben ist der Ventiltopf durch einen Deckel verschlossen, durch dessen Mitte eine schmiedeeiserne Stange verschiebbar geführt ist, welche sich mit ihrem unteren Ende in eine Höhlung stellt, die in der oberen Fläche des Ventilkörpers ausgespart ist. Der Ventilkörper ist an dieser Stange mittelst eines Stiftes aufgehängt; zugleich ist die Stange unten mit einem Bunde versehen, und auf derselben sind gufseiserne Platten angeordnet, welche man auf die Stange aufgeschoben hat, bevor der Deckel des Ventiltopfes geschlossen wurde. Diese Platten dienen als Gewichte, welche die Stange belasten, und folglich das Ventil in seinen Sitz pressen, sie sind so schwer gemacht, als der Pressung des Dampfdruckes, welcher von unten auf Heben des Ventils wirkt, entspricht. Die Bestimmung über die Anordnung der Sicherheitsventile für Dampfkessel schreibt vor, dafs die Belastung der Sicherheitsventile so eingerichtet sein müsse, dafs man zwar die Ventile von aufsen beliebig solle öffnen können, dafs man aber nicht im Stande sei, dieselben stärker, als vorschriftmäfsig zulässig ist, zu belasten. Dieser Vorschrift ist bei der hier mitgetheilten Konstruktion in folgender Weise genügt: der Ventiltopf, welcher die Gewichte enthält, ist verschlossen, da wo die Stange durch den Deckel geführt ist, befindet sich ein das Ende der Stange überdeckender Hut, welcher auf dem Deckel befestigt ist, und welcher verhindert, dafs man nicht von aufsen noch Gewichte auf die Stange aufpacke. Um aber die Stange von aufsen heben, und damit das daran hängende Ventil öffnen zu können, geht durch einen Schlitz des Hutes ein doppelarmiger Hebel, dessen Drehaxe durch ein Paar an den Hut angegossener Ohren getragen wird, und dessen inneres Ende unter eine auf dem Stangenende angeordnete Schraubenmutter greift. Durch Niederdrücken des äufseren Hebelendes wird das Ventil mit den Belastungsgewichten zugleich gehoben.

Eine andere Konstruktion eines Scheibenventils, gleichfalls in der Verwendung als Sicherheitsventil für Dampfkessel zeigt Taf. 46. Fig. 2. Fig. 2a ist ein Vertikalschnitt in $\frac{1}{4}$ der natür-
Taf. 46. Fig. 2.
lichen Gröfse, Fig. 2b ein Vertikalschnitt nach der Linie *cd* in Fig. 2c durch den Ventilkkörper, Fig. 2c ein Horizontalschnitt durch denselben nach der Linie *ef* in Fig. 2b. Die beiden Figuren 2b und 2c sind in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Das hier mitgetheilte Ventil ist durch das französische Edikt über die Anlage von Dampfkesseln zur Verwendung als Sicherheitsventil empfohlen. Auch hier trägt der Dampfkessel zunächst ein gufseisernes Mundstück, auf welchem der Ventilsitz von Bronze mit Hilfe von Flanschen und Schraubenbolzen befestigt ist. Zwei dieser Schraubenbolzen sind über ihren Kopf hinaus verlängert, der eine um einem schmiedeeisernen Hebel als Stützpunkt, der andere um demselben mittelst einer gabelförmigen Umfassung als Führung zu dienen. Der Ventilsitz schärft sich nach oben hin schneidenförmig zu, um für das Ventil eine möglichst geringe Auflagefläche zu gestatten. Der Ventilkörper hat eine ebene Scheibe, welche die schliefsende Fläche bildet; in der Mitte dieser Scheibe ist dieselbe nach oben hin zu einer zapfenförmigen Spitze ausgezogen, und auf dem Gipfel dieses Zapfens ruht der einarmige, oben erwähnte Hebel. Derselbe dient zur Uebertragung und Vergröfserung der Belastung, welche nöthig ist, um das Ventil dem Dampfdruck gegenüber geschlossen zu erhalten; diese Belastung, bestehend in einer gufseisernen Gewichtsscheibe, ist auf das freie Ende des Hebels aufgeschoben, und hier durch eine Klemmschraube befestigt. Um bei der Bewegung des Ventils dasselbe in der Axe des Ventilsitzes genau zu führen, ist die innere Höhlung des Ventilsitzes von da ab, wo sie sich zur schneidenförmigen Auflagefläche erweitert, bis nach unten cylin-

drisch ausgebohrt. Die Ventilscheibe geht nun in der Mitte ihrer unteren Fläche in drei Flügel oder Arme über, welche radial in der Axe zusammenlaufen (vergl. Fig. 2c) und deren äufsere Begrenzung genau mit der Mantelfläche der cylindrischen Bohrung des Ventilsitzes übereinstimmt. Diese Art der Führung des Ventils wird namentlich für Ventile von geringem Durchmesser sehr häufig in Anwendung gebracht; wendet man sie für Sicherheits-Ventile an, so ist der Flächeninhalt des Querschnittes dieser *Führungsarme* zwar bei der Berechnung der erforderlichen Belastung des Ventils mit in Rechnung zu stellen, jedoch mufs derselbe bei der Berechnung der Gröfse der Durchflufsöffnung von dem vollen Kreise in Abzug gebracht werden. Die Dicke der Arme beträgt etwa $\frac{1}{9}$ von dem lichten Durchmesser der Ventilöffnung, so dafs der Flächeninhalt eines Armes $\frac{1}{9}d \cdot \frac{1}{2}d = \frac{1}{18}d^2$ und aller drei Arme $= \frac{1}{6}d^2$ zu rechnen ist; es bleibt folglich als Durchflufsöffnung noch übrig:

$$\tfrac{1}{4}\pi d^2 - \tfrac{1}{6}d^2 = \mathbf{0{,}619}\, d^2$$

oder

$$\tfrac{3}{5}d^2 \text{ bis } \tfrac{5}{8}d^2.$$

Taf. 46. Fig. 3 zeigt den Vertikalschnitt eines anderen Scheiben-Ventils in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Gröfse. Das Ventil und der Ventilsitz sind von Bronze. Der Ventilsitz bildet einen Ring, dessen äufsere Mantelfläche sehr wenig konisch abgedreht, und mit einer Nuth, ähnlich den Kolben mit Hanf-Liderung, versehen ist. Auch hier kann man diese Nuth mit Hanf-Flechten umwickeln und dann den Ventilsitz in die Mündung des Rohrs hineindrehen, in welchem er befestigt werden soll; die konische Form erleichtert die Befestigung, und die Hanfumwickelung gestattet eine genügende Dichtung selbst wenn die Rohrwindung nicht genau bearbeitet ist. Das Ventil ist eine Scheibe mit wenig vorspringendem Rande, welcher, um die Schliefsungsfläche zu bilden, bearbeitet, und auf den, an seiner Oberfläche ebenfalls mit einem vorspringenden Rande versehenen Ventilsitz aufgeschliffen ist. Die Führung des Ventils ist hier durch einen Zapfen (Stiel) bewirkt, welcher in der Mitte der Ventilscheibe angegossen ist, und welcher seine Führung in einer nabenförmigen Hülse hat, welche im Innern des Ventilsitzes angeordnet ist, und der mit dem Ventilsitz durch zwei im Durchmesser liegende Arme zusammenhängt (der Steg des Ventils). Auch dieses Ventil kann als Sicherheits-Ventil benutzt werden, dann läfst man den Belastungshebel, oder die direkten Be- Taf. 46. Fig. 3.

lastungen auf eine Stange wirken, deren unteres zugespitztes Ende in die Höhlung gestellt wird, welche in der mittleren Verstärkung der Ventilscheibe angebracht ist.

Taf. 46. Fig. 4. Taf. 46. Fig. 4 giebt den Vertikalschnitt eines ringförmigen Scheiben-Ventils von den Wasserwerken zu Wolverhampton in England, konstruirt von Marten daselbst, im Vertikalschnitt, und in $\frac{1}{8}$ der natürlichen Gröfse. Das Ventil und der Ventilsitz sind von Gufseisen, die Schliefsfläche im Ventilsitz ist aus Holz, und zwar ist bei der Ausführung das *Holz der Stechpalme* dazu verwandt worden, welches in ringförmige Nuthen eingelegt ist, die die innere und äufsere Begrenzung der ringförmigen Durchflufsöffnung einschliefsen. Das Ventil hat die Form einer ringförmigen Schale, und bildet gewissermafsen den Uebergang zu den Muschel-Ventilen. Diese Schale trägt auf ihrer oberen, konkaven Begrenzungsfläche vier Arme, welche bügelförmig noch über dieselbe sich erheben und in der Mitte zu einer nabenförmigen Hülse sich vereinigen. Diese Hülse dient zur Führung des Ventils, indem dieselbe auf einen vertikalen Stift aufgesteckt ist, auf welchem sie sich bei dem Heben und Senken des Ventils gleitend verschieben kann. Um ein Festrosten zu verhindern, ist der Stift, soweit er zur Führung des Ventils dient, mit einer Messinghülse umgeben, der durch einen oben quer durch den Stift geschlagenen Keil festgehalten wird; dieser Keil dient zugleich zur Hubbegrenzung des Ventils. Der Führungsstift des Ventils ist in der Nabe des Ventilsitzes mit Hilfe eines Ansatzes und eines Keils befestigt, und diese Nabe hängt durch sechs Arme mit dem äufseren Ringe des Ventilsitzes zusammen.

Ueber die Bedeutung der ringförmigen Ventile sind oben schon Angaben gemacht worden, hier möge als ein weiteres Beispiel für die Konstruktion von dergleichen Ventile die auf Taf. 50 in Fig. 4 im Vertikalschnitt in $\frac{3}{16}$ der natürlichen Gröfse dargestellte Anordnung gelten. Dieselbe zeigt die Sicherheits-Ventile für einen Lokomotivkessel. Die Figur stellt zwei verschiedene Ventile dar, beide sind mit ihren Ventilsitzen aus Bronze. Das Ventil links, welches geschlossen gezeichnet ist, hat eine einfache ringförmige Durchflufsöffnung, in welche sich der Ventilkörpers als eine nach unten hin von aufsen und innen konisch zugeschärfte ringförmige Scheibe einsetzt, hier ist der Schlufs des Ventils durch eine Spiralfeder bewirkt, welche ohne Vermittelung eines Hebels unmittelbar über dem Ventil liegt, und deren Spannung dem Dampfdruck entsprechend normirt ist. Das andere Ventil (rechts in der Figur) ist geöffnet gezeichnet, die Durchflufsöffnung besteht aus zwei ringförmigen Schlitzen, welche die obere Fläche des Ventilsitzes durchdringen, und der Ventilkörper besteht aus zwei koncentrischen, durch Arme miteinander zu einem Stück vereinigten Ringen, welche jene beiden Schlitze gleichzeitig bedecken können; die Belastung dieses Ventils erfolgt durch Vermittelung eines schmiedeeisernen Belastungshebels. — Die beiden Ventilsitze sind in der Deckplatte des Mannlochs befestigt, welche den *oberen* Abschlufs des Dampfdomes der Lokomotive bildet; über beide Ventile ist ein auf dieser Deckplatte befestigtes, schornsteinähnliches Rohr gestellt, welches den durch die Ventile blasenden Dampf abführen soll. Die Ventilsitze sind äufserlich cylindrisch mit einem Schraubengewinde versehen und von unten in den Mannloch-Deckel eingeschraubt, sie sind mit Armen versehen, welche von der äufseren Ringfläche ausgehend, sich in der Mitte zu einer cylindrischen Nabe vereinigen; zwischen diesen Armen liegt bei dem Ventil rechts noch ein mit der Mantelfläche koncentrischer Reifen, welcher die Bohrung des Ventils in die beiden koncentrischen ringförmigen Kanäle scheidet. Die Ventilkörper sind sehr ähnlich konstruirt wie die Ventilsitze, der ringförmige Mantel des Ventilkörpers ist durch hochkantige Arme mit einer in der Mitte liegenden Nabe verbunden, und bei dem *Ventil* rechts bildet sich zwischen diesen Armen noch ein koncentrischer Ring, welcher die Deckplatte für die innere ringförmige Durchflufsöffnung hergiebt. Die Naben der Ventilsitze sowohl als diejenigen der Ventilkörper sind hohl und zwar so, dafs die Verlängerungen der letzteren genau passend in die Höhlungen der ersteren eingedreht sind, so dafs hierdurch die Ventile bei ihrem Spiel die nöthige Führung erhalten. In die Höhlung der Naben der Ventilkörper aber sind, unten zugespitzte, und in die Böden der Höhlungen eingesenkte Stangen von Schmiedeeisen gestellt, welche die Vorrichtungen zur Belastung der Ventile aufnehmen. Bei dem Ventil links hat diese Stange nicht weit über dem Ventilkörper einen tellerförmigen Ansatz, und ihr oberes Ende ist durch ein verstellbares Querstück von Schmiedeeisen geführt. Auf die Stange ist eine starke Spiralfeder von Stahl geschoben, welche sich unten auf den tellerförmigen Ansatz stützt, und oben gegen das bewegliche Querstück gestemmt ist. Die Spannung der Federn kann dadurch vermehrt werden, dafs man das bewegliche Querstück durch eine hier nicht gezeichnete Vorrichtung niederschraubt, wodurch der tellerförmige Ansatz und schliefslich durch Vermittelung der Stange das Ventil als Widerlager dient, welches die Spannung aufnimmt. Bei dem Ventil rechts ruht auf dem oberen Ende der in die Höhlung der Nabe des Ventilkörpers gesteckten Stange ein schmiedeeiserner einarmiger Hebel, welcher seinen Drehpunkt in einer an dem Mannlochdeckel befestigten Stütze hat, während das freie Ende des Arms durch einen Schlitz aus dem schornsteinartigen Aufsatzrohr hinausgeführt, und hier mittelst einer Federwage (die nicht mitgezeichnet ist) belastet werden kann.

Endlich ist hier noch der Uebersicht wegen das Scheibenventil in Erinnerung zu bringen, welches bei dem *Ventilkolben* Fig. 7 auf Taf. 45 angeordnet ist, und welches in § 154 S. 507 beschrieben worden ist; auf die hier angeordnete Führung, welche einige Aehnlichkeit mit der Führung des Ventils in Fig. 4. Taf. 46 hat, ist hier noch aufmerksam zu machen.

Kegelventile — Muschelventile — Kugelventile.

§ 160. Wenn man dem Ventilkörper, welcher bei den im vorigen Paragraphen beschriebenen Ventilen im Wesentlichen aus einer ebenen Scheibe besteht, die Form eines abgestumpften Kegels, oder einer Kugelkappe, *oder auch einer vollen* Kugel giebt, so pflegt man die Ventile Kegelventile, Muschelventile und Kugelventile zu nennen, und zwar:

Kegelventile, wenn der Ventilkörper ein Konus,
Muschelventile, wenn der Ventilkörper eine Kugelkappe oder Kugelzone und
Kugelventile, wenn der Ventilkörper eine volle Kugel ist.

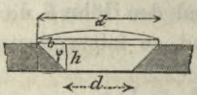
Die schliefsende Fläche des Ventilsitzes mufs natürlich der Oberfläche des Ventilkörpers entsprechend gestaltet sein. Gewöhnlich hat der Ventilkörper die konvexe Oberfläche, und der Ventilsitz hat dann die kongruente konkave Oberfläche. Bei den Kegelventilen indessen findet zuweilen der umgekehrte Fall statt, dafs nämlich der Ventilkörper den konkaven Kegel bildet und der Ventilsitz den konvexen Kegel; diese Konstruktion kommt zwar bei Ventilen mit Pressung seltener vor, indessen bei den entlasteten Ventilen mit konischen Schliefsflächen findet dieselbe öfter Anwendung.

Die Kegel-, Muschel- und Kugelventile stimmen darin überein, dafs sich die Durchflufsöffnung von unten nach oben hin erweitert, und dafs die schliefsende Fläche mit der horizontalen einen gewissen Winkel bildet; hierdurch wird erreicht, dafs die Flüssigkeit, indem sie das Ventil passirt, nicht wie bei den Scheibenventilen eine horizontale, sondern eine nach aufwärts gerichtete Direktion erhält; dies ist für den Durchflufs von Wasser und überhaupt von tropfbaren Flüssigkeiten oft von wesentlichem Nutzen, und deshalb wendet man diese Arten der Ventile vorzugsweise für dergleichen Flüssigkeiten an.

Ist d der kleinere Durchmesser der schliefsenden Fläche,
$d_{,}$ der gröfsere Durchmesser derselben,
r und $r_{,}$ der kleinere und der gröfsere Halbmesser derselben,
h die vertikale Höhe der schliefsenden Fläche, und
b die horizontale Breite derselben,

so ist:

$$b = \frac{d_{,} - d}{2} = r_{,} - r;\ d_{,} = 2b + d;\ r_{,} = b + r.$$



Gewöhnlich nimmt man b im bestimmten Verhältnifs zu h, und h im bestimmten Verhältnifs zu d; es sei:

$$h = \alpha d = 2\alpha r,$$
$$b = \beta h = \alpha \,.\, \beta \,.\, d = 2\alpha\beta \,.\, r,$$

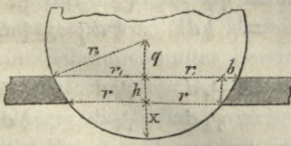
dann ist:

$$d_{,} = d\ (2 \,.\, \alpha \,.\, \beta + 1);\ r_{,} = r\ (2 \,.\, \alpha \,.\, \beta + 1).$$

Bei einem Kegelventil ist hiernach der Winkel, welcher die Seite des Kegels mit der Axe macht, zu bestimmen, ist nämlich dieser Winkel φ, so ist:

$$\text{tang. } \varphi = \frac{b}{h} = \beta.$$

Wenn man aber ein Muschelventil oder ein Kugelventil zu konstruiren hat, so handelt es sich noch um Bestimmung des Kugelhalbmessers, welcher erforderlich ist, damit die Kugelzone, durch welche die Schliefsfläche gebildet wird, die erforderlichen Dimensionen erhalten. Diese wird durch die nebenstehende Figur und folgende Rechnung gefunden:



Der gesuchte Kugelhalbmesser sei $r_{\prime\prime}$; es ist

$$1)\ r_{\prime\prime}^2 = r_\prime^2 + q^2 = r_\prime^2 + [r_{\prime\prime} - (h + x)]^2,$$

nun ist

$$r^2 = x\,(2r_{\prime\prime} - x) = 2r_{\prime\prime}x - x^2,$$

folglich

$$x^2 - 2r_{\prime\prime}x = -\,r^2\ (2).$$

Entwickeln wir hieraus x, so folgt:

$$x = r_{\prime\prime} \pm \sqrt{r_{\prime\prime}^2 - r^2}\ (3);$$

entwickeln wir die erste Gleichung durch Auflösung aller Klammern, substituiren wir darin die zweite Gleichung, und zuletzt für x die dritte Gleichung, so ergiebt sich der Kugelhalbmesser:

$$4)\qquad r_{\prime\prime} = \sqrt{\left\{\left[\frac{r_\prime^2 - r^2 + h^2}{2h}\right]^2 + r^2\right\}}$$

oder, wenn anstatt des gröfseren Radius $r_\prime$ und der Höhe h die Verhältnifszahlen α und β (s. oben) gegeben sind, so folgt:

$$5)\qquad r_{\prime\prime} = r\sqrt{\{(\alpha\beta^2 + \beta + \alpha)^2 + 1\}}$$

$$d_{\prime\prime} = d\sqrt{\{(\alpha\beta^2 + \beta + \alpha)^2 + 1\}}.$$

Für die Höhe der schliefsenden Fläche nimmt man gewöhnlich $\frac{1}{12}$ bis höchstens $\frac{1}{8}$ des kleinsten Durchmessers, aufserdem macht man die Breite der schliefsenden Fläche gewöhnlich gleich der Höhe derselben, höchstens gleich $1\frac{1}{4}$ derselben. Für diesen Fall ist $\beta = 1$ bis $1\frac{1}{4}$ und $\alpha = \frac{1}{12}$ bis $\frac{1}{8}$. Setzt man diese Werthe in die obigen Formeln ein, so ergiebt sich:

der kleinste Durchmesser der schliefsenden Fläche d,

		für $\beta = 1$		
ferner für	$\alpha =$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$,
der gröfste Durchmesser .	$=$	$\frac{7}{6}d$	$\frac{6}{5}d$	$\frac{5}{4}d$,
die Höhe der schliefsenden Fläche	$=$	$\frac{1}{12}d$	$\frac{1}{10}d$	$\frac{1}{8}d$,
die Breite derselben	$=$	$\frac{1}{12}d$	$\frac{1}{10}d$	$\frac{1}{8}d$,
bei einem Kegelventil der Winkel, welchen die Seite des Kegels mit der Axe bildet . .	$=$	$45°$	$45°$	$45°$,

bei einem Kugel- und Muschelventil, der Durchmesser der Kugel, welche den Ventilkörper bildet	$= 1{,}53d$	$1{,}56d$	$1{,}60d$,
		für $\beta = 1\frac{1}{4}$	
	$\alpha = \frac{1}{12}d$	$\frac{1}{10}d$	$\frac{1}{8}$,
der gröfste Durchmesser . . .	$= \frac{29}{24}d$	$\frac{5}{4}d$	$\frac{21}{16}d$,
die Höhe der schliefsenden Fläche	$= \frac{1}{12}d$	$\frac{1}{10}d$	$\frac{1}{8}d$,
die Breite derselben	$= \frac{5}{48}d$	$\frac{1}{8}d$	$\frac{5}{32}d$,
bei einem Kegelventil der Winkel, welchen die Seite des Kegels mit der Axe bildet . . .	$= 51^\circ\, 20'$	$51^\circ\, 20'$	$51^\circ\, 20'$,
bei einem Kugel- oder Muschelventil der Durchmesser der Kugel, welche den Ventilkörper bildet	$= 1{,}77d$	$1{,}80d$	$1{,}86d$.

Die Tafeln enthalten verschiedene Beispiele für diese drei Ventilkonstruktionen.

Kegelventile.

Aufser den beiden Kegelventilen auf Taf. 42. Fig. 15 und 17, welche weiter unten beschrieben werden sollen, sind noch auf Taf. 46 zwei verschiedene Konstruktionen von Kegelventilen dargestellt.

Taf. 46. Fig. 5 zeigt ein kleines Kegelventil von Bronze, und zwar Fig. 5a die obere Ansicht des Ventilsitzes nachdem das Ventil selbst herausgenommen ist, und Fig. 5b einen Vertikalschnitt nach der Linie qh in Fig. 5b. Beide Figuren sind in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Die Führung des Ventils geschieht hier mittelst eines in der Mitte des Ventilkörpers angegossenen Stiels, welcher bei dem Spiel des Ventils in einer Hülse sich verschieben kann, die von zwei Armen (dem Stege) des Ventilsitzes getragen wird. Die Hubbegrenzung des Ventils wird durch eine Schraubenmutter bewirkt, welche unten auf den Stiel des Ventils aufgeschraubt ist, und beim Heben desselben gegen den Steg schlägt; ein Splint, welcher unter der Schraubenmutter durch den Stiel des Ventils gezogen ist, hindert das Lösen der Mutter. Oben hat der Ventilkörper einen Knopf, um ihn leichter anfassen und herausnehmen zu können. Taf. 46. Fig. 5.

Taf. 46. Fig. 6. Taf. 46. Fig. 6 stellt ein Kegelventil dar, wie es bei Dampfkesseln als Absperrventil gebraucht werden kann. Fig. 6a ist ein Vertikalschnitt nach der Linie *lm* in Fig. 6b und Fig. 6b ist ein Horizontalschnitt nach der Linie *ik* in Fig. 6a. Beide Figuren sind in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Das Ventil mit seinem Ventilsitz sind von Bronze, und letzterer ist in dem Boden eines Ventiltopfes befestigt. Bemerkenswerth ist die Art der Führung des Ventils; diese erfolgt folgendermafsen. Der Ventilsitz ist genau cylindrisch ausgebohrt, und der Ventilkörper ist an seinem unteren Rande mit einem Ansatz versehen, der die Form eines hohlen cylindrischen Ringes besitzt, und welcher mit seiner äufseren Mantelfläche genau in die Höhlung des Ventilsitzes pafst. Beim Spiel des Ventils gleitet derselbe im Ventilsitz auf und nieder. Allein dieser cylindrische Ring würde den seitlichen Ausflufs der Flüssigkeit bei Erhebung des Ventils hindern, wenn nicht die Mantelfläche desselben mit entsprechenden Ausschnitten (Fenstern) versehen wäre. Die obere Fläche des Ventilkörpers ist mit einer Verstärkung versehen, in deren Höhlung eine schmiedeeiserne Stange pafst, mit deren Hilfe das Ventil in seinen Sitz geprefst werden kann. Das Ventil ist an dieser Stange aufgehängt, doch so, dafs die Stange sich unabhängig von dem Ventil drehen kann; dies ist dadurch erreicht, dafs die Stange etwa in der Mitte des in dem nabenförmigen Ansatz steckenden Theils auf ihrer Mantelfläche mit einer Nuth versehen ist; nun sind quer durch diesen nabenförmigen Ansatz zwei Stifte gebohrt, welche zur Hälfte ihrer Dicke in die Nuth hineinreichen, und die Mantelfläche derselben tangiren; hierdurch wird bewirkt, dafs, wenn man die Stange hebt, das Ventil mittelst der Stifte an der Stange hängen bleibt, während die tangirenden Stifte der Drehung der Stange innerhalb des nabenförmigen Ansatzes nicht hinderlich sind.

Muschelventile.

In den Tafeln sind zwei Muschelventile dargestellt, wenn man das auf Taf. 46. Fig. 4 gezeichnete Ventil, welches eine gewisse Aehnlichkeit mit den Muschelventilen hat, nicht mit dahin rechnen will. Auf Taf. 44. Fig. 5 ist bei Gelegenheit der Ventilkolben ein Muschelventil dargestellt und in § 153. S. 506 beschrieben; ein zwei-
Taf. 46. tes Muschelventil zeigt Taf. 46. Fig. 7 im Vertikalschnitt und
Fig. 7. in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Gröfse. Der Ventilsitz, der Ventilkörper, sowie der Bügel, welcher zur Führung des Ventils dient, sind

von Bronze. Dieser Bügel erhebt sich über den Ventilsitz, an welchem er durch Aufschrauben einer ringförmigen, mit den Armen des Bügels aus einem Stück gegossenen Mutter befestigt ist. Der Stiel des Ventils geht durch eine nabenförmige Verstärkung in der Mitte dieses Bügels, welche sowohl zur Führung desselben als auch zur Hubbegrenzung dient, indem der Ansatz, mit welchem der Stiel in den Ventilkörper übergeht beim Erheben des Ventils gegen die nabenförmige Verstärkung des Bügels stöfst.

Die Muschelventile bilden gewissermafsen den Uebergang zwischen den Kegelventilen und den Kugelventilen. Mit den Kegelventilen haben sie die ganze Anordnung, namentlich die Art der Führung gemein, mit den Kugelventilen dagegen die Form der schliefsenden Fläche, welche bei beiden eine Kugelzone ist; der Unterschied zwischen den Muschelventilen und den Kugelventilen besteht im Wesentlichen darin, dafs die Ventilkörper der Muschelventile nur Theile einer Kugel, die Ventilkörper der Kugelventile dagegen volle Kugeln sind.

Kugelventile.

Die Kugelventile, deren Ventilkörper volle Kugeln sind, deren Durchmesser S. 534 bestimmt wurde, sind nur für kleinere Durchflufsöffnungen anwendbar, weil sonst die Durchmesser der Kugeln zu grofs werden möchten. Hat man sehr grofse Durchflufsöffnungen nöthig, und will man gleichwohl Kugelventile anwenden, so zerlegt man die gröfsere Oeffnung in ein System kleinerer Oeffnungen, wie dies Taf. 46. Fig. 9 als Beispiel zeigt. Die Kugelventile liegen meist frei auf den Ventilöffnungen, und werden in keiner der bisher beschriebenen Arten gradlinig geführt, sondern gewöhnlich durch eine Vorrichtung, welche über dem Ventilkörper angebracht ist, und der Ventilkorb, oder kurz „der Korb“ heifst. Dieser Korb begrenzt den Hub des Ventils, und hindert die Kugel, wenn das Ventil geöffnet ist, seitwärts zu rollen. Da hiernach die Kugelventile nicht eine solche Führung bekommen, durch welche sie gezwungen sind, sich genau in der Axe des Ventilsitzes zu bewegen, wie z. B. die Führung aller übrigen bisher beschriebenen Scheiben-, Kegel- und Muschelventile eingerichtet war, so kann das Kugelventil immer noch frei spielen, selbst wenn die Ventilaxe nicht mehr vertikal, sondern geneigt stehen sollte, während die anderen Ventile bei einer geneigten Stellung der Axe, wobei das freie Fallen in ein

Gleiten längs der Führung umgewandelt wird, leicht sich festklemmen und den Dienst versagen. Dies ist der Grund, weshalb man bei allen solchen Maschinen, welche keine feste Aufstellung haben, sondern beweglich und transportabel sind, gern dergleichen Kugelventile zur Anwendung bringt; so z. B. bei den Speisepumpen der Lokomotiven u. s. w. In den Tafeln sind drei verschiedene Konstruktionen von Kugelventilen mitgetheilt worden.

Taf. 46. Fig. 8. Taf. 46. Fig. 8 zeigt *ein gewöhnliches Kugelventil* von einer Lokomotivspeisepumpe; Fig. 8a *ist ein Vertikalschnitt* nach der Linie *pq* in Fig. 8b und Fig. 8b ist ein Horizontalschnitt nach der Linie *no* in Fig. 8a und nach Hinwegnehmen der Kugel. Beide Figuren sind in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Der Ventiltopf ist von Gufseisen, in den Boden desselben ist der an seiner äufseren Mantelfläche ein wenig konisch gedrehte, mit einer Nuth für die Hanfpackung versehene Ventilsitz fest hineingedreht (vergl. Taf. 46. Fig. 3 und die Beschreibung S. 529). Auf der Mündung des Ventilsitzes ruht die Kugel, welche entweder massiv, oder auch hohl gegossen sein kann, und über der Kugel steht der Korb, ein aus drei Füfsen, die sich oben gewölbförmig zusammenschliefsen, und welche unten durch einen angegossenen Ring zusammengehalten *werden, bestehendes Gerüst.* Der Korb ist auf den Rand des Ventilsitzes gestellt, und wird mittelst einer schmiedeeisernen Schraube, die durch den Deckel des Ventiltopfes gezogen ist, und mit einer Gegenmutter festgehalten wird, auf den Ventilsitz und mit diesem zusammen auf den Boden des Ventiltopfes angeprefst. Ventilsitz, Ventilkugel und der Deckel des Ventiltopfes sind von Bronze.

Taf. 50. Fig. 5 stellt die Anwendung eines einfachen Kugelventils als Sicherheitsventil für einen Dampfkessel dar. Fig. 5a ist die obere Ansicht, Fig. 5b ein Vertikalschnitt nach der Linie *ik* in Fig. 5a, und Fig. 5c ist ein Vertikalschnit nach der Linie *gh* in Fig. 5b; sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Die den Verschlufs bildende hohle Kugel von Bronze hat einen äufseren Durchmesser von 4 *Zoll*, einen inneren von $3\frac{3}{4}$ Zoll, folglich $\frac{1}{8}$ Zoll Wandstärke; die Berührungsfläche in dem Ventilsitz hat nur eine Breite von $\frac{1}{16}$ Zoll; unmittelbar über der schliefsenden Fläche erweitert sich der Ventilsitz gefäfsartig, und enthält oben in dieser Erweiterung vier Einsprünge, welche die Kugel bei der Erhebung gegen zu grofse seitliche Ausweichung schützen sollen. Die Kugel ist an ihrem oberen Pol von einem

Sattelstück überdeckt, welches jede Drehung der Kugel gestattet, und welches oben in einen warzenartigen Knopf ausgeht, auf dem der Belastungshebel mittelst einer Aushöhlung ruht, welche in einer Verstärkung an der Unterkante des hochkantigen schmiedeeisernen Hebels angebracht ist. Der Stützpunkt des einarmigen Hebels wird nicht durch ein gewöhnliches Gelenk gebildet, sondern dadurch, dafs das Hebelende mit einer horizontalen Oese auf einen schmiedeeisernen Ständer aufgeschoben ist, und sich mit dem oberen Rande dieser Oese gegen eine mit einem kugelförmig abgerundeten Ansatz versehene und auf den Ständer aufgebrachte Schraubenmutter setzt. Die Bohrung der Oese darf nicht cylindrisch sein, sondern mufs, um das Spiel des Hebels zu gestatten, nach unten hin konisch erweitert sein. Das freie Ende des Hebels ist durch ein Gewicht, oder durch eine gespannte Feder belastet. Dies Ventil ist von Fenton als Sicherheitsventil bei Lokomotiven konstruirt worden.

Taf. 46. Fig. 9 zeigt ein System von Kugelventilen, dessen Kugeln aus Gutta-Percha sind, und welches von Hasking für die Wasserwerke in Hull konstruirt worden ist. Fig. 9a ist ein Vertikalschnitt nach der Linie *rs* in Fig. 9b, und Fig. 9b ist eine obere Ansicht und zwar in vier verschiedenen Anordnungen. Der erste Quadrant (oben rechts) zeigt die obere Ansicht des vollständig zusammengestellten Ventils; der zweite Quadrant (unten rechts) stellt die obere Ansicht, nach Abnahme des oberen Ventilringes dar, der dritte Quadrant (unten links) giebt die obere Ansicht nach Abnahme der beiden oberen Ventilringe, und der vierte Quadrant (oben links) stellt endlich die obere Ansicht dar, wenn die drei oberen Ventilringe fortgenommen sind, und nur der unterste Ventilring allein übrig ist. Die beiden Figuren 9a und 9b sind in $\frac{1}{8}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Taf. 46. Fig. 9.

Das Ventil ist in einen gufseisernen, mit einem Deckel verschlossenen Ventiltopf eingesetzt; es besteht aus 56 einzelnen kreisförmigen Durchflufsöffnungen, welche durch ebensoviele Kugeln von Gutta-Percha bedeckt werden, und welche, sammt den dazugehörigen Körben zum Fangen der Kugeln in vier koncentrische Reihen so geordnet sind, dafs das Ganze einen abgestumpften Kegel bildet. Dieser Kegel wird durch fünf über einander liegende, in ihren Durchmessern von unten nach oben hin abnehmende Ringe gebildet, welche schliefslich durch eine Klemmschraube auf einander und gegen den Boden des Ventilsitzes geprefst werden. Die Klemmschraube geht durch den Deckel des Ventiltopfes mittelst einer Stopfbuchse; unten, in den Deckel eingelassen, liegt eine Mutter von Bronze, welche zum Anziehen der Klemmschraube dient; oben, über dem Stopfbuchsendeckel liegt eine schmiedeeiserne Gegenmutter; das Anziehen der Schraube wird bewirkt, indem man sie mittelst eines auf den vierkantigen Kopf derselben aufgesetzten Schraubenschlüssels dreht. Von den fünf Ringen, aus welchen das ganze System besteht, enthalten die vier unteren Ringe die Ventilsitze.

Der unterste Ring deren	20
- zweite Ring von unten . . .	16
- dritte - -	12
- vierte - -	8
im Ganzen	56.

Diese Ringe bilden mit ihren inneren Mantelflächen einen hohlen kegelförmigen Raum, aus welchem das Wasser mittelst gebogener aufwärtssteigender Kanäle, welche in den Wandungen der Ringe angebracht sind, zu den Ventilöffnungen gelangt; jeder Ring hat an seiner inneren Kante auf der oberen Fläche eine ringförmig vorspringende Rippe, und an seiner unteren Fläche eine ringförmig eingedrehte Nuth, so dafs immer die Nuth eines oberen Ringes, die Rippe des zunächst darunter liegenden übergreift. Der unterste Ring enthält nur die 20 Ventilsitze mit ihren Kanälen; jeder folgende Ring aber enthält aufser seinen Ventilsitzen und Kanälen auch noch soviel Körbe in Form von hohlen Halbkugeln, als der zunächst darunter liegende Ring Ventile hat, so dafs diese Körbe den darunter liegenden Ventilen zur Hubbegrenzung dienen können. Die Körbe für den vierten Ring, welcher die oberste Ventilreihe enthält, sind an einer besonderen Scheibe angebracht, welche als fünftes Glied dieses Systems den Deckel bildet, gegen welchen die Prefsschraube des Ventiltopfdeckels unmittelbar wirkt. Wären die Körbe oben vollkommen geschlossen, so würden die Ventilkugeln, wenn sie einmal gehoben sind, sich in denselben festsaugen, indem der von unten nach oben gerichtete Wasserdruck das Schliefsen der Ventile verhindern würde. Um dies zu vermeiden, ist jeder einzelne halbkugelförmige Korb in seinem Scheitel mit einem Schlitz durchbrochen, durch welchen das Wasser, wenn die Ventile sich schliefsen sollen, auf diese wirken, und sie zudrücken kann. Diese Anordnung hat denselben Sinn, wie die Durchbrechung der Ventilschalen in Fig. 1 auf Taf. 44 (vergl. § 154. S. 513).

Entlastete Ventile im Allgemeinen.

§ 161. Ueber die Bedeutung der entlasteten Ventile ist bereits in § 157 (S. 523) gesprochen worden. Bei den gewöhnlichen Ventilen (Ventilen mit Pressung) ist der Druck, welcher entweder auf Oeffnen oder Schliefsen der Ventile wirkt, proportional dem Querschnitt der Ventilöffnung; bei den entlasteten Ventilen kommt es dagegen darauf an, den Druck, welcher auf Oeffnen oder Schliefsen der Ventile wirkt, unabhängig von der Gröfse der Durchflufsöffnung zu machen, so dafs derselbe entweder gleich Null wird (vollständig entlastete Ventile) oder wenigstens einen beabsichtigten Werth nicht überschreiten soll (unvollständig entlastete Ventile). Dies wird erreicht, wenn man entweder dem Ventil eine der früheren entgegengesetzte Form giebt, so nämlich, dafs die Durchflufsöffnung beweglich gemacht wird und der von dem Druck der Flüssigkeit belastete Ventilkörper ruhend bleibt, oder indem man den Druck, welcher auf den Ventilkörper wirkt, dadurch ein Gleichgewicht hält, dafs man den Ventilkörper so konstruirt, dafs er gleichzeitig durch einen anderen in entgegengesetzter Richtung wirkenden Druck balancirt wird. Nach diesen beiden Prinzipien könnten wir die entlasteten Ventile eintheilen in:

a) in entlastete Ventile mit beweglicher Durchflufsöffnung, auch (wegen der hierbei nöthig werdenden Dichtung) Ventile mit Packung genannt (Taf. 47. Fig. 1),

b) entlastete Ventile mit Gegendruck.

Der Gegendruck, welcher bei der unter b angeführten Art von Ventilen so wirkt, dafs er den auf das Ventil wirkenden Druck der Flüssigkeit ganz oder theilweise aufhebt, kann wieder in verschiedener Weise zur Wirkung gebracht werden. Nach dieser Verschiedenheit kann man die Ventile mit Gegendruck wieder in vier Gruppen theilen:

1) Ventile mit Gegengewichten; bei diesen wird der auf das Ventil wirkende Druck durch Gegengewichte oder durch die entgegengesetzt wirkende Spannung von Federn im Gleichgewicht gehalten. Von der Art sind z. B. die als Sicherheitsventile bekannten Anordnungen, von welchen wir auf Taf. 46 in Fig. 1. 2 und 6 und auf Taf. 50 in Fig. 4 und 5 bereits Beispiele gegeben und in § 159 und 160 erörtert haben. Diese Gruppe haben wir daher hier nicht nochmals zu behandeln.

2) Doppelventile, welche so eingerichtet sind, dafs man zwei Ventile mit einander dergestalt verbindet, dafs der Druck der Flüssigkeit das eine Ventil zu öffnen, das andere zu schliefsen strebt (Taf. 47. Fig. 2).

3) Glocken oder Kronenventile, eine Anordnung des ganzen Ventils so, dafs es zwei Schliefsflächen bekommt, und dafs der Druck der Flüssigkeit auf den Ventilkörper nach allen Richtungen gleich grofs, oder doch nach einer Richtung nur wenig überwiegend wird (Taf. 47. Fig. 3. 4. 5. Taf. 50. Fig. 6).

4) Ventile mit Entlastungskolben, bei diesen Ventilen ordnet man einen Kolben an, welcher den Druck der Flüssigkeit in entgegengesetzter Richtung auf das Ventil überträgt. Beispiele von derartigen Anordnungen kommen besonders bei den sogenannten Hochdruckventilen vor und sind unter anderen auf Taf. 42 in Fig. 15. 16. 17 mitgetheilt.

Ventile mit Packung und Doppelventile.

Taf. 47. Fig. 1. § 162. Taf. 47. Fig. 1 zeigt ein Ventil mit beweglicher Durchflufsöffnung (Ventil mit Packung) im Vertikaldurchschnitt und in $\frac{1}{4}$ der *natürlichen Gröfse*. Der Ventilkörper, d. h. der bewegliche Theil des Ventils, bildet eine Röhre von Bronze, welche auf dem in das gufseiserne Ventilgehäuse von unten eingeschraubten, einen abgestumpften Kegel mit konvexer Oberfläche darstellenden Ventilsitz von Bronze aufgeschliffen ist. Die Mantelfläche der cylindrischen Ventilröhre ist mit einer Packung wie bei einer Stopfbuchse umgeben, welche Packung auf einem nach innen vorspringenden Rande des Ventilgehäuses ruht, und durch einen übergelegten Ring, auf welchen vier Prefsschrauben wirken, angezogen werden kann. Die Ventilröhre hängt an einer schmiedeeisernen Stange, welche in einer nabenförmigen Verstärkung, die im Innern der Röhre von drei Armen getragen wird, befestigt ist. Wenn der innere Raum der Röhre und des Ventilgehäuses mit einer unter Druck befindliche Flüssigkeit erfüllt ist, und das Ventil ist geschlossen, so kann die Flüssigkeit nicht nach dem Seitenrohr links gelangen, so lange die Stopfbuchse und der Ventilschlufs dichthalten. Soll das Ventil geöffnet werden, so mufs die Reibung in der Stopfbuchse und aufserdem der Druck der Flüssigkeit auf die Projektion der Ringfläche überwunden werden, welche zwischen der äufseren Peripherie der äufseren Mantelfläche und der inneren Peripherie der schliefsenden Fläche des Ventils enthalten ist. Es ist also der zum Oeffnen des Ventils erforderliche Druck gegen ein gewöhnliches Kegelventil, dessen kleinster Durchmesser gleich dem kleinsten Durchmesser dieses Ventils ist, um den Betrag geringer, welcher auf die Kreisfläche wirkt, die von der inneren Peripherie der schliefsenden Fläche eingeschlossen wird; denn dieser Druck bleibt beim Oeffnen des Ventils hier auf dem eingeschraubten Ventilsitz *ruhen*. — *Im Boden der Höhlung* des Ventilsitzes ist zum Ablassen des in der *Höhlung* sich ansammelnden Wassers eine mit Muttergewinde versehene Oeffnung, in welche ein Rohr mit Hahnstück eingeschraubt werden kann.

Doppelventile.

Taf. 47. Fig. 2 zeigt ein Doppel-Kegelventil mit theilweiser Entlastung. Fig. 2a ist ein Vertikalschnitt nach der Linie *ab* in Fig. 2b und Fig. 2b ist ein Horizontalschnitt nach der Linie *cd* in Fig. 2a; beide Figuren sind in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Ein gufseiserner Ventiltopf, in welchen seitwärts durch eine rechteckige Oeffnung (in Fig. 2a sichtbar) die Flüssigkeit (Dampf) *eintritt*, ist oben und unten *durch* einen Deckel geschlossen, und im Innern mit einem cylindrischen Gehäuse versehen, das mit den Wänden des Ventiltopfs aus einem Stück gegossen ist, und aus welchem seitlich ein Ausflufsrohr die Flüssigkeit abführen kann. *Dieses* Gehäuse ist oben und unten offen, und die Flüssigkeit, welche *in* den Ventiltopf eintritt, kann sowohl rings um die Wandungen des Gehäuses circuliren, als auch in das Innere des Gehäuses gelangen und abfliefsen; letzteres aber nur, wenn die Oeffnungen des Gehäuses oben und unten frei sind. Soll der Ausflufs der Flüssigkeit unterbrochen werden, so schliefst man diese beiden Oeffnungen durch Ventile. Es sind hier Kegelventile von Bronze angeordnet, der Ventilsitz für jedes Ventil besteht in einem konisch ausgebohrten Ringe, indessen sind die beiden Ventilsitze durch vier *Stiele* verbunden, nämlich so, dafs sie mit diesen Stielen ein einziges *Gufsstück* von Bronze bilden. Ebenso bilden die beiden Ventile ein zusammenhängendes Stück, indem sie durch eine cylindrische Mutterstange mit einander fest verbunden sind. Die Führung der beiden Ventile *erfolgt* unten dadurch, dafs das untere Ventil mit einem Stiel versehen ist, der sich in einer Buchse bewegen kann, welche von dem mit dem Ventilsitz Taf. 47. Fig. 2.

zusammengegossenen Stege getragen wird; oben dagegen wird die Führung der Ventile durch die Stange bewirkt, welche zugleich zur Bewegung der Ventile bestimmt ist, und welche in einer nabenförmigen Verstärkung auf der oberen Fläche des oberen Ventils befestigt, mittelst einer Stopfbuchse durch den oberen Deckel des Ventiltopfes hindurch geführt ist. Der kleinste Durchmesser des oberen Ventilsitzes mufs ein wenig gröfser sein, als der gröfste Durchmesser des unteren Ventilkörpers, damit man von oben her das untere Ventil *hindurchbringen*, und in seinen Sitz einlegen kann. Das obere Ventil, auf welches *die in* dem Ventiltopf befindliche Flüssigkeit so wirkt, dafs sie dasselbe in seinen Sitz hineinprefst, hat folglich einen gröfseren Durchmesser als das untere Ventil, auf welches die Flüssigkeit hebend wirkt, so dafs sie dasselbe zu öffnen strebt. Die Drucke der Flüssigkeit auf die beiden Ventile finden hiernach in entgegengesetzter Richtung statt, und würden sich vollständig aufheben (im Gleichgewicht halten), wenn die beiden gedrückten Ventile genau gleich grofs wären; da nun aber das obere Ventil gröfser ist, als das untere, so bleibt ein Ueberdruck auf Schlufs der beiden Ventile bestehen, welcher proportionel ist der Projektion der Ringfläche, welche durch den kleinsten Durchmesser des unteren Ventilsitzes und dem *gröfsten Durchmesser* des oberen Ventilsitzes gegeben ist.

Glocken- oder Kronenventile.

§ 163. Die Glocken- oder Kronenventile bilden zur Zeit die passendste Form für die Entlastung der Ventile, welche die übrigen Konstruktionen nach und nach ganz verdrängen wird. Wir haben daher von jenen Konstruktionen in den Tafeln nur je ein Beispiel mitgetheilt, während wir vier verschiedene Anordnungen für die Glockenventile geben, nämlich Taf. 47. Fig. 3. 4 und 5, und Taf. 50. Fig. 6.

Taf. 47. Fig. 3. Taf. 47. Fig. 3 zeigt ein vollständig *entlastetes* Glockenventil mit scharfen Schliefsflächen. *Fig.* 3a ist die Ansicht des geschlossenen Ventils, Fig. 3b eine obere Ansicht desselben und Fig. 3a ein Horizontalschnitt nach der Linie *ef* in Fig. 3b; sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Das Ventil hat, wie alle Glockenventile, zwei Schliefsflächen. Der Ventilsitz wird geleitet durch eine ringförmige

Scheibe, welche oben einen Rand in Form eines konvexen Kegels hat, durch welchen die untere Schlufsfläche dargestellt wird; an die innere Mantelfläche der Scheibe schliefsen sich vier angegossene Arme an, welche, die obere Fläche der Scheibe weit überragend, oben durch eine Scheibe in Form einer Vase, die mit den Armen und dem unteren Ringe in einem Stück gegossen ist, mit einander zusammenhängen, und aufserdem sich in der Mitte dieser Scheibe zu einer nabenförmigen Verstärkung vereinigen. Die innere, vasenförmige Erweiterung dieser Scheibe trägt in der Mitte einen ringförmigen cylindrischen Rand, dessen innere Mantelfläche dem Ventilkörper zur Führung dienen soll, indem dieser mit einer nabenförmigen Verstärkung, welche ebenfalls durch vier Arme mit dem oberen Rande der Ventilglocke zusammenhängt, sich in diesen cylindrischen Rand einsenkt, und genau passend eingedreht ist. In der Mitte des Ventilsitzes ist ein schmiedeeiserner Bolzen angebracht, welcher den Zweck hat, den Ventilsitz auf dem Boden des (hier nicht gezeichneten) Ventiltopfes zu befestigen. Das obere Ende dieses Bolzens ist mit einer Schraubenmutter versehen, und damit man dieselbe, nach Fortnahme des Ventilkörpers bequem anziehen könne, ist, wie man aus Fig. 3c sieht, noch ein Bronzering über den Bolzen geschoben, welcher sich auf den Boden der vasenförmigen Scheibe aufstellt, und so hoch ist, dafs die Mutter über den ringförmigen Rand in der Mitte dieser Scheibe frei hervorragt. Die Peripherie der vasenförmigen Scheibe bildet die obere schliefsende Fläche des Ventilsitzes; sie ist scharf cylindrisch bearbeitet, so dafs die schliefsende Fläche so schmal als möglich (nur ein Kreis) werde. Der Ventilkörper von Bronze besteht aus einem cylindrischen Gefäfs (der Glocke), dessen innere Höhlung einen wesentlich gröfseren Durchmesser hat, als die schliefsenden Flächen des Ventilsitzes, und welches oben und unten in cylindrische Ränder übergeht, deren innere Höhlung von geringerem Durchmesser ist, als die Höhlung des Gefäfses selbst. Der untere cylindrische Rand der Glocke ist mit seiner inneren Mantelfläche so ausgebohrt, dafs er genau den Durchmesser der oberen schliefsenden Fläche des Ventilsitzes hat, und indem er die vier Arme des Ventilsitzes, welche an ihrem Umfange genau auf denselben Durchmesser abgedreht sind, umfafst, dient er bei dem Spiel des Ventils zur Führung des unteren Theiles desselben. Der obere cylindrische Rand der Glocke hat einen etwas kleineren Durchmesser, er ist mit vier Armen versehen, welche sich in ihrer Mitte, zu einer nabenförmigen Verstärkung vereinigen, welche nicht allein, wie oben beschrieben, zur Führung des oberen Theils des Ventils dient, sondern auch die schmiedeeiserne Stange aufnimmt, durch welche der Ventilkörper bewegt werden soll. Die schliefsenden Flächen des Ventilkörpers sind folgendermaafsen angeordnet. Die untere schliefsende Fläche besteht in dem schneidenförmig zugeschärften Rande des unteren cylindrischen Glockenrandes, welcher genau den Durchmesser der oberen schliefsenden Fläche des Ventilsitzes hat, und sich auf den konvexen Kegelrand der unteren schliefsenden Fläche des Ventilsitzes auflegt, dagegen ist die obere schliefsende Fläche des Ventilkörpers dadurch hergestellt, dafs die innere Mantelfläche der Glocke, da wo die Erweiterung derselben in den oberen cylindrischen Rand übergeht, konisch abgeschrägt ist, so dafs dieser Konus genau die schneidenförmige Peripherie der oberen vasenartigen Scheibe des Ventilsitzes deckt. Hierdurch nun ist erreicht, dafs die oberen und unteren schliefsenden Flächen ganz genau gleichen Durchmesser haben, und dafs folglich — die höher gespannte Flüssigkeit mag sich aufserhalb des Ventilkörpers befinden, und beim Heben desselben nach innen strömen, oder umgekehrt, die höher gespannte Flüssigkeit mag sich im Innern des Ventils befinden, und beim Heben der Glocke durch die beiden entstehenden Oeffnungen nach aufsen strömen — der Druck der Flüssigkeit auf die beiden schliefsenden Flächen bei geschlossenem Ventil sich vollständig aufhebt.

Taf. 47. Fig. 4. Taf. 47. Fig. 4 zeigt eine etwas abgeänderte Konstruktion, welche ein unvollständig entlastetes Kegelventil mit konischen Schliefsflächen darstellt. Fig. 4a ist ein Vertikalschnitt nach der Linie *gh* in Fig. 4c, wogegen Fig. 4b eine Ansicht des Ventilsitzes nach abgenommener Glocke, und Fig. 4c ein Horizontalschnitt nach der Linie *ik* in Fig. 4e ist; alle drei Figuren sind in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Das Ventil und der Ventilsitz sind von Bronze; der Ventilsitz stellt eine ringförmige Scheibe dar, über welcher sich ein mehrfach abgetreppter oben durch eine horizontale Decke abgeschlossener Aufbau, im Allgemeinen von cylindrischer Form erhebt. Da wo dieser Aufbau unten in die ringförmige Platte übergeht, ist der Fufs desselben durch einen konvexen Konus gebildet, welcher die untere Schliefsfläche des Ventilsitzes bildet; dagegen ist oben, wo der Mantel des cylindrischen Aufbaues an die Deckplatte desselben sich anschliefst, der Rand derselben in Form eines konvexen Konus abgedreht, und bildet die obere schliefsende Fläche. Der Mantel dieses Aufbaues ist mit vier Durchbrechungen versehen, durch welche die Flüssigkeit in die innere Höhlung desselben einströmen, resp. aus dieser hinausströmen kann, wenn das Ventil geöffnet ist. Der Ventilkörper oder die Glocke hat in ihrer Form grofse Aehnlichkeit mit der in Fig. 3 dargestellten, und soeben beschriebenen, doch unterscheidet sie sich von jener dadurch, dafs der untere Rand, welcher die untere Schliefsfläche der Glocke bildet, nicht wie dort schneidenartig, sondern konisch abgedreht ist, passend auf den Fufs des Ventilsitzes, dafs ferner der obere konkave Konus der Glocke, welcher sich auf den konvexen Konus am Rande der oberen Decke des Ventilsitzes auflegt, einen geringeren Durchmesser hat, als der untere Konus, wodurch ein Ueberdruck der Flüssigkeit auf das Ventil erfolgt, welcher proportional ist der Projektion der von der kleinsten Peripherie der oberen und von der gröfsten Peripherie der unteren schliefsenden Fläche eingeschlossenen Ringfläche. Je nachdem die höher gespannte Flüssigkeit im Innern des Ventils, oder aufserhalb des Ventilkörpers sich befindet, wirkt dieser Ueberdruck auf Oeffnen oder Schliefsen des Ventils. Die Führung des Ventils ist eine weniger vollkommene als bei der vorigen Konstruktion, da dieselbe nur durch den unteren cylindrischen Rand der Glocke bewirkt wird, welcher auf die Mantelfläche des unteren, stärkeren Theils des cylindrischen Aufbaues, aufgeschliffen ist. Der obere cylindrische Ansatz der Glocke enthält einen Querarm (Steg), in dessen Mitte eine Verstärkung ist, um die Stange zur Bewegung, resp. Belastung des Ventils einschrauben zu können.

Taf. 47. Fig. 5 giebt den Vertikalschnitt eines unvollständig entlasteten Glockenventils mit ebenen Schliefsungsflächen, und mit eisernem Ventilsitz; (die Glocke ist von Bronze) in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse. Dieses Ventil ist vorzugsweise für Wasser bestimmt; es ist in geöffneter Stellung gezeichnet, und hat, wie das in Fig. 3 gezeichnete Ventil, eine untere und eine obere Führung. Der Ventilsitz hat in seiner allgemeinen Konstruktion Aehnlichkeit mit der Anordnung in Fig. 3, welche oben beschrieben worden ist, nur unterscheidet sich die hier gewählte Anordnung von jener dadurch, dafs der cylindrische Aufsatz auf dem Boden der oberen vasenartigen Deckscheibe, durch welchen die obere Führung bewirkt werden soll, hier höher ist, von der Nabe, welche in der oberen Oeffnung der Glocke mit vier Armen befestigt ist, umfafst wird, und oben mit einer Scheibe Taf. 47. Fig. 5.

bedeckt ist, welche als Hubbegrenzung des Ventils dient, da dies Ventil als selbstthätiges (S. 518) dienen soll. Die Befestigung dieser Scheibe erfolgt durch einen schmiedeeisernen Bolzen. Die untere Führung des Ventils erfolgt an den vier Armen, welche die vasenartige Scheibe tragen, und auf welche die cylindrische Höhlung der Glocke genau aufgepafst ist. Die schliefsenden Flächen des Ventilsitzes bestehen aus ebenen Ringen von Bronze, *die in Nuthen eingelegt sind*, welche in der unteren und oberen Scheibe des Ventilsitzes *angebracht sind. Diese* Ringe lassen sich, wenn sie schadhaft werden, leicht erneuern, ohne den ganzen Ventilsitz zu verwerfen. Die Ventilglocke hat eine gegen die Konstruktionen in Fig. 3 und in Fig. 4 wesentlich abgeänderte Form; sie besteht in einem cylindrischen Ringe, der äufserlich mit vier Verstärkungsrippen versehen ist, und welcher oben einen eingebogenen Rand hat. An diesen Rand setzen sich die vier Arme, welche die Nabe tragen, durch welche das Ventil die obere Führung erhält, zugleich dient die untere Fläche dieses Randes als obere Schliefsfläche der Glocke; die untere Schliefsfläche derselben ist durch die Grundfläche des cylindrischen Glockenringes gegeben. Der Ueberdruck, welcher von unten nach oben auf Oeffnen des Ventils wirkt, ist proportional der Projektion der Ringfläche, welche zwischen der *inneren Peripherie* des Glockenmantels und der inneren Peripherie des oberen eingebogenen Randes der Glocke enthalten ist.

Eine wesentlich andere Form des Ventilkörpers für ein Glockenventil zeigt Taf. 50. Fig. 6; während nämlich bei den bisher beschriebenen Anordnungen, der Ventilkörper eine Glocke bildete, die den Ventilsitz umschlofs, ist bei der hier gezeichneten Anordnung das Umgekehrte der Fall; der Ventilsitz nämlich umschliefst als Glocke den Ventilkörper. Diese Konstruktion zeigt Fig. 6a in der ganzen Zusammenstellung als obere Ansicht, Fig. 6b aber als Vertikalsschnitt nach der Linie *lm* in Fig. 6a; beide Figuren in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Gröfse. Das hier gezeichnete Ventil ist als Sicherheitsventil für einen Dampfkessel *konstruirt*; es hat daher einen Ueberdruck von unten nach oben, und wird von aufsen mit Hilfe einer schmiedeeisernen Stange, welche sich auf die Mitte des Ventilkörpers stellt, belastet. Der Ventilsitz ist durch fünf schmiedeeiserne Schrauben auf dem Dampfkessel festgeschraubt; er besteht aus einem cylindrischen Ringe, aufsen zur Befestigung mit einem Flansch versehen, und oben mit einem eingebogenen

Rande endigend. Dieser Rand ist an seiner inneren Mantelfläche konisch ausgebohrt, und bildet die obere schliefsende Fläche des Ventilsitzes, während die untere schliefsende Fläche durch den konisch abgedrehten Rand einer Scheibe dargestellt wird, welche von vier Armen im Innern des, den Ventilsitz bildenden, cylindrischen Ringes getragen wird. Diese Arme vereinigen sich in der Mitte zu einer nabenförmigen, cylindrisch ausgebohrten und mit einem Boden versehenen Verstärkung, welche zur Führung des Ventils dient. Der Ventilkörper ist ein vasenartig gestalteter, oben und unten offener Ring, dessen oberer Rand von gröfserem Durchmesser als der untere zu einem konvexen Kegel abgedreht ist, und auf die obere schliefsende Fläche des Ventilsitzes pafst, während der untere Rand zu einem konkaven Kegel ausgebohrt ist, und auf die untere schliefsende Fläche des Ventilsitzes sich aufsetzt. Auch der Ventilkörper hat im Innern vier zu einer nabenförmigen Verstärkung vereinigte Arme, und zwar pafst die Verlängerung dieser Nabe in die Höhlung der Nabe des Ventilsitzes, und führt das Ventil, wenn dasselbe spielt, indem sie in diesem gleitend sich verschiebt. Die Belastungsstange setzt sich mit ihrer unteren Spitze in eine kleine Vertiefung des Bodens der Nabe des Ventilkörpers. Der Ueberdruck des Dampfes, welcher auf Oeffnen des Ventils wirkt, ist proportinal der Projektion der Ringfläche, welche von der inneren Peripherie der oberen schliefsenden Fläche, und von der äufseren Peripherie der unteren schliefsenden Fläche begrenzt ist.

[Der Reihenfolge wegen schieben wir hier das Inhalts-Verzeichnifs der Figuren auf Taf. 48 ein.

Taf. 48. Fig. 1 ist ein Taucherkolben mit Leder-Liderung, welcher in § 149 S. 481 beschrieben worden ist. Taf. 48. Fig. 1.

Taf. 48. Fig. 2 ist ein massiver Kolben mit Metall-Liderung, dessen Beschreibung in § 152. S. 499 gegeben worden ist. Taf. 48. Fig. 2.

Taf. 48. Fig. 3 ist ein Kolben mit Metall-Liderung von einem Dampfhammer aus der Fabrik von F. Wöhlert in Berlin, dessen in § 152. S. 499 Erwähnung geschah. Taf. 48. Fig. 3.

Taf. 48. Fig. 4 zeigt einen grofsen Dampfkolben von 28 Zoll Durchmesser von einer Dampfmaschine auf der Königshütte, welcher in § 152. S. 500 erläutert worden ist. Taf. 48. Fig. 4.

Taf. 48. Fig. 5 ist ein Lokomotivkolben von 16 Zoll Durchmesser mit Metall-Liderung, dessen Erklärung in § 152. S. 501 mitgetheilt wurde. Taf. 48. Fig. 5.

Taf. 48. Fig. 6. Taf. 48. Fig. 6 zeigt einen von Mathern konstruirten Dampfkolben mit einem Liderungsringe, dessen Beschreibung in § 152. S. 502 nachzulesen ist.

Taf. 48. Fig. 7. Taf. 48. Fig. 7 ist ein Trichterkolben mit Ledertrichter, welcher in § 153. S. 505 erklärt worden ist.

Taf. 48. Fig. 8. Taf. 48. Fig. 8 stellt einen Ventilkolben mit Hanf-Liderung dar, dessen Erklärung in § 154. S. 508 zu finden ist.]

Hochdruckventile für den Ausfluſs aus Wasserleitungen mit Entlastungskolben und mit Mechanismus.

§ 164. Die Ventile mit Entlastungskolben (§ 161) kommen häufig als Ausfluſsventile aus Röhren für Wasserleitungen vor, wenn das Wasser unter hohem Druck steht, und man gleichwohl eine mäſsige Ausfluſsgeschwindigkeit haben will. Hier kommt es darauf an, nicht nur das Ventil behutsam zu öffnen, sondern auch die Stellung des geöffneten Ventils möglichst genau reguliren zu können, um stets nur eine kleine Durchfluſsöffnung herstellen zu können; endlich muſs hier noch das Oeffnen und Schlieſsen des Ventils möglichst leicht erfolgen, und daher ist es nöthig, entweder einen Mechanismus anzuwenden, *durch welchen der Druck der* Wassersäule, welche auf dem Ventil lastet, leicht überwunden werden kann, oder diesen Druck im Gleichgewicht zu halten dadurch, daſs man denselben durch einen Gegenkolben ausgleicht. In den Tafeln sind fünf Beispiele für die Konstruktion solcher, sogenannten Hochdruckventile gegeben, deren drei, welche nach dem letztgenannten Prinzip mit eine Vorrichtung zur Entlastung des Ventils versehen sind (Taf. 42. Fig. 15. 16. 17), und zwei, welche ohne Entlastung mit einer mechanischen Vorrichtung zum Oeffnen und Schlieſsen eingerichtet sind (Taf. 42. Fig. 14 und Taf. 49. Fig. 1).

Hochdruckventile mit Entlastungskolben.

Taf. 42. Fig. 15 zeigt ein Hochdruckventil mit Entlastungskolben nach einer Konstruktion von Lambert im Vertikalschnitt und in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Gröſse. Die Ausfluſsmündung wird durch eine Lederscheibe geschlossen, auf welche der Druck des Wassers öffnend wirkt, und welche sich nach unten hin öffnen kann.

Mit dieser steht ein kleiner Kolben, aus einem Lederstulp bestehend, durch eine vertikale Stange in Verbindung. Das zufliefsende Wasser drückt sowohl auf die Scheibe, welche das Ventil bildet, als auf den Kolben, dessen Querschnitt gleich, oder wenig gröfser ist, als der Querschnitt der Ausflufsöffnung. Da nun der Wasserdruck den Stulpkolben nach oben, die Ventilscheibe aber nach unten drückt, so halten sich diese beiden Pressungen im Gleichgewicht, und es ist zur Bewegung des Ventils nur eine geringe Kraft erforderlich. Diese wird durch einen einarmigen Hebel, welcher durch eine Hülse am Kopfe der Verbindungsstange des Stulpkolbens mit dem Ventil, geht, an das Ventil übertragen. Diese Konstruktion wird häufig angewandt, um Wasser-Reservoirs, welche durch eine Wasserleitung gespeist werden, in konstantem Niveau zu erhalten. Man verbindet nämlich mit dem Ende des Hebels eine hohle Kugel, welche auf der Oberfläche des Wasserspiegels in dem Reservoir schwimmt; sinkt der Wasserspiegel, so sinkt die Kugel und mit ihr das Hebelende nieder, und das Ventil wird niedergedrückt und geöffnet; sobald der Wasserspiegel wieder die erforderliche Höhe erreicht hat, steigt die Kugel und somit das Ventil, welches nun den Ausflufs sperrt.

Taf. 42. Fig. 16 ist ein entlastetes Hochdruckventil, im Vertikalschnitt und in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Gröfse. Es hat denselben Zweck, wie das vorhin beschriebene in Fig. 15 dargestellte, und unterscheidet sich von diesem dadurch, dafs das Ventil selbst durch eine elastische Kautschuckscheibe gebildet wird, welche an ihrem Rande ringsherum festgeklemmt ist. Das Ventil ist in geöffneter Stellung gezeichnet; die Durchflufsöffnung ist hier vertikal, folglich bewegt sich der Entlastungskolben in einem kleinen horizontalen Cylinder, und auch die Verbindungsstange ist horizontal. Das ausfliefsende Wasser gelangt zuerst durch die Ventilöffnung in ein davor liegendes Ventilgehäuse, und aus diesem erst durch eine Seitenöffnung in das vertikal abfallende Ausflufsrohr; der Hebel, welcher, wie bei der vorigen Konstruktion, mit einer Schwimmkugel versehen ist, ist hier ein Winkelhebel. Durch die vielfachen Biegungen, welche das Wasser zu passiren hat, wird die Ausflufsgeschwindigkeit wesentlich vermindert. Noch ist zu bemerken, dafs, wenn das Ventil einmal geöffnet ist, die Kautschuckscheibe dem Wasserdruck eine viel gröfsere Oberfläche darbietet, als bei geschlossenem Ventil; der hierdurch vermehrte Druck, welcher das Ventil offen hält, wird zwar zum Theil durch die Elasticität der Kautschuckscheibe aufgehoben, indessen bewirkt er doch, dafs erst ein ziemlich starker Auftrieb der schwimmenden Kugel wirksam werden mufs, bevor sich das Ventil schliefst.

Taf. 42. Fig. 17 zeigt den Vertikalschnitt eines entlasteten Hochdruckventils in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Gröfse. Das Ausflufsventil ist hier ein Kegelventil, welches sich nach unten öffnet, dasselbe wird durch einen Stiel geführt, der durch eine nabenförmige Verstärkung des im Ausflufsrohr angebrachten Steges geht. Ueber dem Ventil befindet sich nicht ein eigentlicher Entlastungskolben, sondern eine Kautschuckscheibe, welche an ihrem Rande ringsum festgeklemmt ist, und welche mittelst einer vertikalen Stange, die mit dem Ventil in einem Stück gegossen ist, mit diesem zusammenhängt. Der Querschnitt der Scheibe, auf welchem der Wasserdruck in entgegengesetzter Richtung, als auf das Ventil wirkt, ist etwas gröfser, als die Ventilfläche, so dafs ein Ueberdruck auf Schliefsen des Ventils wirksam ist; dieser Ueberdruck wird noch vermehrt durch eine kleine Spiralfeder, welche in eine buchsenförmige Verlängerung des Gehäuses, in welchem die Kautschuckscheibe liegt, eingesetzt ist, die Verlängerung der Stange umgiebt, und oben durch einen auf die Stange aufgeschraubten Knopf gespannt wird. Will man das Ventil öffnen, so drückt man mit dem Daumen auf den Knopf, und drückt so das Ventil nieder; der Ausflufs währt nur so lange, als dieser Druck ausgeübt wird, hört der Druck auf, so wirken die Spannung der Feder und der Wasserdruck auf die Kautschuckscheibe sofort wieder auf Schliefsen des Ventils.

Hochdruckventile mit Mechanismus.

Taf. 42. Fig. 17 zeigt ein Abschlufsventil für ein Ausflufsrohr und zwar Fig. 14a den Vertikalschnitt, Fig. 14b die obere Ansicht des Hebels, welcher hier als Bewegungs-Mechanismus dient; beide in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Gröfse. Das Ventil ist ein Kegelventil, welches eine vertikale Durchflufsöffnung verschliefsen kann; hier ist es in geöffneter Stellung gezeichnet. Das Ventil sitzt an einem langen cylindrischen Stiele, welcher horizontal ist, und vorn und hinten geführt wird. Die Führung vorn erfolgt in einer cylindrischen Bohrung des Ansatzrohrs, durch welches der letzte Ausflufs erfolgt, und welches auch den Ventilsitz enthält; die Führung hinten erfolgt in einer Buchse, welche von einem Stege getragen wird, welcher im Zuflufsrohr von der Röhrenleitung liegt. Das Ansatzrohr mit dem Ventile werden an das Zuflufsrohr angeschraubt. Zur Bewegung des Ventils dient eine kleine horizontale Axe, welche in einer Ausbauchung des Ansatzrohrs unterhalb des Ventilstieles liegt, mit einem kleinen vertikalen Arm in einen Schlitz dieses Stieles eingreift, ihre Lager in den Wandungen des Ansatzrohres findet, und aufserhalb dieser Wandungen eine Gabel trägt, deren Schenkel sich über dem Ansatzrohr zu einem Hebel in Form einer Handhabe vereinigen. Der Ausflufs findet so lange statt, als man den Hebel in der Position erhält, welche in Fig. 14a gezeichnet ist; läfst man den Hebel los, so drückt der Wasserdruck das Ventil in seinen Sitz, und der Ausflufs wird gehemmt.

Taf. 49. Fig. 1 zeigt ein Ausflufsventil für die Berliner Wasserleitung nach einer Konstruktion von R. R. Werner in Berlin, dessen Mechanismus in einer Schraube mit Kurbelrädchen besteht. Fig. 1a ist die obere Ansicht, Fig. 1b ein Vertikalschnitt nach der Linie *ab* in Fig. 1b; beide Figuren sind in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Das Zuflufsrohr der Röhrenleitung ist durch eine vertikale Wand von dem Ausflufsrohr, mit dem es übrigens in einem Stück gegossen ist, geschieden, und kommunizirt mit demselben nur durch eine horizontale Oeffnung im oberen Theil des Rohrstückes, welches sich hier schalenartig erweitert. Diese Erweiterung ist durch einen Deckel verschlossen, und nimmt eine horizontale Kautschuckscheibe auf, welche sich über die, zwischen dem Zuflufsrohr und dem Ausflufsrohr bestehende Verbindungsöffnung legt, wenn der Ausflufs gesperrt werden soll, und welche durch diesen Deckel an ihrem Rande ringsum festgeklemmt ist; über der Kautschuckscheibe liegt eine Bronzeplatte, welche in einer Höhlung des Deckels ihre Führung findet, und durch deren Niederdrücken die Kautschuckscheibe auf die Oeffnung geprefst werden kann; die Stellung in der Zeichnung ist diejenige, bei welcher die Durchflufsöffnung am weitesten frei gemacht ist. Um die Platte und die Kautschuckscheibe niederzudrücken, ist eine vertikale Prefsschraube angeordnet, deren Mutter in den Deckel eingeschnitten ist, die oben mit einem Kurbelrädchen zur Drehung versehen ist, und die mit ihrer unteren Spitze auf die Platte wirkt. Schraubt man die Schraube nieder, so schliefst sich die Oeffnung, dreht man die Schraube wieder zurück, so wird die Oeffnung frei, indem theils die Elasticität der Kautschuckscheibe, theils der Wasserdruck die Platte heben, und sie mit der Spitze der Prefsschraube in Berührung erhalten. Taf. 49. Fig. 1.

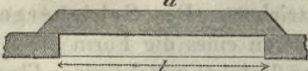
2. Schieber.

Eigenthümlichkeiten der Schieber. — Beispiele ausgeführter Schieber.

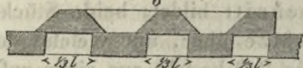
§ 165. In § 156 ist als das Charakteristische der Schieber bereits angegeben worden, dafs sie das Oeffnen und Schliefsen der Durchflufsöffnungen *dadurch* bewirken, dafs sie sich gleitend über die Oeffnung hinschieben. *Jeder Schieber* hat daher eine Bahn, auf welcher diese Bewegung erfolgt, und *diese Bahn mufs neben* der Oeffnung noch ausgedehnt genug sein, um den Schieber, wenn er von der Oeffnung zurückgezogen ist, aufnehmen zu können. Deshalb erfordern die Schieber gewöhnlich eine gröfsere räumliche Ausdehnung als die Ventile, wenigstens nach der Ebene der Durchflufsöffnung hin, auch können die schliefsenden Flächen nicht wie zuweilen bei den Ventilen, z. B. bei den Klappventilen aus einem weichen und elastischen Material bestehen, sondern müssen stets aus Eisen, Bronze, oder einem anderen Metall hergestellt werden, welches der Abnutzung gehörig widersteht, und welches in der schliefsenden Fuge so genau bearbeitet werden kann, dafs es dicht schliefst. Die Schieber werden fast immer so angeordnet, dafs sie von der Flüssigkeit gegen die *Oeffnung geprefst werden*; bei der Bewegung des Schiebers ist dann nur ein Druck zu überwinden, welcher der Reibung entspricht, die von der Pressung der Flüssigkeit gegen den Schieber auf der Bahn des letzteren entsteht.

Bei Durchgangsöffnungen von beträchtlicher Ausdehnung, müfste man den Schieber, um die Oeffnung frei zu machen, um die ganze Länge derselben verschieben; dies ist ein Uebelstand, theils wegen der Länge der Bahn, welche zur Bewegung des Schiebers erforderlich ist, theils wegen des Arbeitsverlustes, welcher entsteht, indem man den Druck, welcher zur Bewegung des Schiebers dient, einen weiten Weg bewegt, theils endlich wegen der Zeitdauer, welche in diesem Falle das Oeffnen und Schliefsen des Schiebers in Anspruch nimmt. Man hat daher auf Mittel gedacht, den Schieber so zu konstruiren, dafs derselbe bei geringer Verschiebung eine möglichst grofse Durchgangsöffnung frei macht.

Die ebengenannte Aufgabe wird gelöst, wenn man die Durchgangsöffnung der Flüssigkeit in eine Anzahl von Oeffnungen zerlegt, welche jede eine geringere Länge haben, doch so, dafs der Gesammtquerschnitt ungeändert bleibt. Die neben-a



b



benstehenden Holzschnitte erläutern dies. Bei *a* ist die Oeffnung ungetheilt, ihre Länge sei *l*, ihre Breite *b*, ihr Flächeninhalt ist also *lb*; will man denselben für den Durchgang der Flüssigkeit frei machen, so mufs man den Schieber um den Weg *l* zurückschieben. In dem Holzschnitt *b* dagegen ist die Durchflufsöffnung in drei einzelne Oeffnungen zerlegt, deren jede dieselbe Breite *b* hat, wie vorhin, aber nur eine Länge gleich $\frac{1}{3}\,l$ besitzt; der Querschnitt sämmtlicher Oeffnungen ist daher $3 \,.\, \frac{1}{3}\,l \,.\, b = lb$, d. h. eben so grofs, wie vorhin; man sieht aber, dafs, wenn man dem Schieber die angegebene durchbrochene Form giebt, man denselben nur um den Weg $\frac{1}{3}\,l$ zurückzuschieben braucht, um alle drei Oeffnungen gleichzeitig frei zu machen, und dadurch wieder eine eben so grofse freie Durchflufsöffnung zu erzielen, wie bei der Konstruktion in *a* durch Verschiebung um den Weg *l* erhalten wurde. Wenn man also allgemein die Durchflufsöffnung in *n* Oeffnungen zerlegt, deren jede die Breite *b* hat, so wird durch Verschiebung des Schiebers um *a* eine Ausflufsöffnug frei, deren Querschnitt gleich:

$$n \,.\, a \,.\, b$$

ist.

Eine sehr ausgedehnte Anwendung finden die Schhieber bei der Steuerung der Dampfmaschinen. Da jedoch die hierbei vorkommenden Konstruktionen wesentlich durch die Art der beabsichtigten Dampfvertheilung bedingt werden, und erst durch das Verständnifs derselben, selbst verständlich werden, so ist hier füglich nicht näher auf die Steuerungsschieber einzugehen. Dagegen sind auf Taf. 49 in Fig. 2 und 3 zwei Anordnungen für Absperrschieber gegeben, welche häufig zur Anwendung kommen, und von allgemeinerem Interesse sind.

Taf. 49. Fig. 2 zeigt einen Schieber, welcher von R. R. Werner für die Wasserleitung in Berlin konstruirt worden ist, und welcher in verschiedenen Dimensionen für verschiedene Röhrendurchmesser in der Fabrik von M. Webers in Berlin ausgeführt wird. Fig. 2a ist eine Vorder-Ansicht der vollständig zusammengestellten Konstruktion nach der Richtung der Axe der Röhrenleitung, Fig. 2b ist ein Vertikalschnitt nach der Linie *cd* in Fig. 2c, Taf. 49. Fig. 2.

wogegen Fig. 2c ein Horizontalschnitt nach der Linie *ef* in Fig. 2b ist. Fig. 2d giebt eine Vorder-Ansicht des Schiebers, und Fig. 2e eine obere Ansicht desselben; sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{8}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Das Schiebergehäuse besteht aus zwei Gufsstücken, deren eines die Form _|‾‾|_ im Querschnitt hat, während das andere flach ist, mittelst eines Flansches an das erste angeschraubt wird, und so mit diesem vereint einen Kasten von rechteckigem Querschnitt bildet; beide Stücke gehen unten in röhrenförmige Ansätze über, um welche der Flansch herumläuft. Der Schieber (Fig. 2d) *besteht aus einer* gufseisernen Scheibe, welche zu beiden Seiten kreisförmige vorstehende Ränder hat, und welche sich nach oben hin zu einer rechtwinkligen Umbiegung verlängert. In diesem umgebogenen Theil befindet sich ein Ausschnitt mit Nuthen, in welchen von vorn eine messingne Mutter mit zwei Ohren so eingeschoben ist, dafs sie einigen Spielraum in dem Ausschnitt besitzt. Diese Mutter, in Verbindung mit einer Schraube aus Bronze mit flachem Gewinde, dient zur Bewegung des Schiebers, nämlich so: die Schraube stützt sich unten mit ihrem zapfenförmigen Ende auf eine kleine Spur, die auf dem Boden des viereckigen Gehäuses angegossen ist; oben hat die Schraube einen Bund, und stützt sich mit diesem unter den Deckel, mit welchem *das Gehäuse verschlossen ist, so* dafs die Schraube zwar sich drehen kann, aber an einer geradlinigen Verschiebung gehindert ist, da nun andererseits die in den Ausschnitt des Schiebers eingelegte Mutter sich nicht drehen kann, so wird bei Drehung der Schraube die Mutter und mit ihr der Schieber, gehoben oder gesenkt. Um die Schraube drehen zu können, ist dieselbe in ihrer oberen Verlängerung durch den Deckel des Gehäuses mittelst einer Stopfbuchse durchgeführt, und endigt in einem viereckigen Kopf, welcher zur Aufnahme eines Schraubenschlüssels oder eines Schraubenziehers bestimmt ist. Die Scheibe, welche den Schieber bildet, ist nicht durchweg von gleicher Dicke, sie ist vielmehr von oben nach unten hin keilförmig zugeschärft; eine ähnliche Form hat die Schieberbahn, so dafs durch Anpressen der Schraube, der Schieber wie ein *Keil in* seinen Sitz hineingeprefst wird, und von beiden Seiten *dichte* Fugen giebt. Um ein Festrosten des Schiebers zu verhindern, sind sowohl die schliefsenden Flächen des Schiebers, als die schliefsenden Flächen des Schiebersitzes, mit messingnen Ringen belegt, welche durch eine Menge kleiner Schräubchen (hier 21, siehe Fig. 2d) mit versenkten Köpfen festgehalten werden, und deren Oberflächen genau bearbeitet sind.

Taf. 49. Fig. 3 zeigt einen Absperrschieber, welcher bei einer Lokomotive als Regulatorschieber den Zugang des Dampfes zu dem Rohr, welches aus dem Kessel nach den Cylindern führt, absperren und öffnen kann. Der Schieber ist durchbrochen und nach dem oben (S. 555) erläuterten System konstruirt, welches den Zweck hat, bei geringer Bewegung des Schiebers sofort eine grofse Durchgangsöffnung zu erzielen. Fig. 3a giebt die Vorder-Ansicht des Schiebers, Fig. 3b einen Horizontalschnitt nach der Linie *gh* in Fig. 3a; beide Figuren sind in $\frac{1}{10}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Der Schieber und dessen Bahn sind vertikal, beide von Messing; der Schieber bewegt sich zwischen Leisten, zwichen die er von unten her auf den Grath eingeschoben ist; die Zugstange, welche mit einem Gelenk an das in Fig. 3a sichtbare Auge im tiefstens Punkt des Schiebers angreift, ist in der Zeichnung fortgelassen. Der Schieber ist in geschlossenem Zustande gezeichnet; deshalb erscheinen die drei Durchbrechungen der Schieberbahn, welche die Durchflufsöffnungen bilden, in der Zeichnung nur punktirt, wogegen die Durchbrechungen des Schiebers sichtbar sind. Hinter den Einflufsöffnungen in der *vertikalen* Schieberbahn wölbt sich das Leitungsrohr zu einem vertikal abwärts gerichteten Rohrstück, an dessen Flansch die Fortsetzung der horizontalen Rohrleitung sich mittelst eines Kniestückes anschliefst.

Taf. 49. Fig. 3.

3. Hähne.

Anordnung und Eigenthümlichkeiten der Hähne.

§ 166. Das Charakteristische der Hähne (§ 156) besteht darin, dafs das Oeffnen und Schliefsen der Durchflufsöffnungen durch die Drehung des beweglichen Theils um eine Axe erfolgt, welche mit der zu verschliefsenden Oeffnung gewöhnlich parallel, oder fast parallel ist. Die Hahnverschlüsse bestehen gewöhnlich aus folgenden Theilen:

1) dem Hahnsitz,
2) dem Hahnkörper,
3) der Spannvorrichtung,
4) der Vorrichtung zum Drehen des Hahnkörpers.

1) Der Hahnsitz.

Der Hahnsitz ist gewöhnlich ein hohler Kegel, in der Regel von Bronze, dessen Axe mit der Axe zusammenfällt, um welche der Hahnkörper gedreht wird. In diesen Kegel münden die Röhren, welche durch den Hahnverschlufs geöffnet, oder geschlossen werden sollen, so dafs sich Rohransätze bilden, welche mit Flanschen oder mit Schraubengewinden versehen sind, die zur Befestigung des ganzen Systems (des *Hahnstückes*) an der Röhrenleitung dienen. Häufig liegt das Hahnstück so, dafs sich an alle diese Rohrstücke (Wege) Fortsetzungen der Röhrenleitungen anschliefsen; dann wird der Hahn ein **Durchflufshahn** genannt (Taf. 49. Fig. 4. 7. 9. 10. 11. 12); oft jedoch hört das eine Rohrstück, oder der eine Weg unmittelbar hinter dem Hahnsitz auf, und die Flüssigkeit, welche den Hahn passirt ist, fliefst hier aus; ein solcher Hahn heifst ein **Ausflufshahn** oder **Auslafshahn.**

Die Anzahl der Wege, welche in den Hahnsitz münden ist mindestens zwei, und solcher Hahn heifst ein **einfacher Hahn,** wenn dagegen in den Hahnsitz drei oder vier Wege münden, so heifst der Hahn ein **„Dreiweghahn"** oder ein **„Vierweghahn".** Taf. 49. Fig. 4. 5. 6. 7. 8. 9 sind Beispiele von einfachen Hähnen, Fig. 10 und 11 sind Dreiweghähne, und Fig. 12 ist ein Vierweghahn.

Die Richtungen der Hahnwege fallen entweder in dieselbe gerade Linie, oder sie bilden Winkel mit einander; danach heifst der Hahn entweder ein **grader Hahn** oder ein **Winkelhahn** (Taf. 49. Fig. 4. 5. 6 sind grade Hähne, Fig. 7. 8. 9 sind einfache Winkelhähne). Die Hähne mit mehreren Wegen sind immer Winkelhähne, doch ordnet man die Wege gewöhnlich so, dafs die Axen in ein und dieselbe Ebene fallen.

Bei Winkelhähnen kann die Drehaxe des Hahnes entweder in derselben Ebene liegen, in welcher die Axen der Wege liegen (Taf. 49. Fig. 7. 8. 9) oder sie kann normal zu dieser Ebene sein (Fig. 10. 11. 12).

2. Der Hahnkörper.

Der Hahnkörper ist ein konvexer Kegel, welcher genau in die Höhlung des Hahnsitzes pafst. Die Neigung der Seiten des Kegels gegen seine Axe ist gewöhnlich nur sehr gering; sie beträgt in der Regel nicht mehr als 3 bis 5 Grad, seltener bis $7\frac{1}{2}$ Grad;

der gröfste Durchmesser des Hahnkörpers ist daher um $2 . \text{tang.}\,\alpha . h$ gröfser als der kleinste Durchmesser desselben, wenn h den Abstand der beiden Kreise, in welchen diese Durchmesser liegen und α jenen Neigungswinkel bezeichnet.

Ist $d_{\prime}$ der kleinste, $d_{\prime\prime}$ der gröfste Durchmesser des Hahnes, so ist folglich

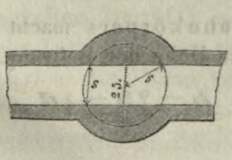
$$d_{\prime\prime} = d_{\prime} + 2\,\text{tang.}\,\alpha . h$$

das ist für einen Winkel α

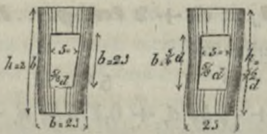
$$\begin{array}{llll} \alpha = & 3^{0} & 5^{0} & 7\tfrac{1}{2}^{0} \\ d_{\prime\prime} = & d_{\prime} + \frac{1}{10} h; & d_{\prime} + 0{,}175\,h; & d_{\prime} + 0{,}263\,h. \end{array}$$

Die Flüssigkeit bewegt sich, wenn der Hahn geöffnet ist, durch den Hahnkörper hindurch, und dieser mufs daher mit einem *Durchflufskanal* versehen sein. Dieser Durchflufskanal heifst die **Bohrung des Hahnes.** Die Bohrung des Hahnes ist entweder gradlinig oder krumm, sie mufs wenigstens so viele Mündungen in der Mantelfläche des Hahnkörpers haben, als Wege des Hahnsitzes gleichzeitig in Verbindung treten sollen.

Die Bohrung des Hahnes ist bei kleineren Hähnen gewöhnlich cylindrisch, bei gröfseren Hähnen rechteckig oder länglich rund. Wenn der Hahn geöffnet ist, so soll die Bohrung des Hahnes den *Durchflufsquerschnitt* nicht verengen. Es mufs daher der Querschnitt der Durchflufsöffnung mindestens so grofs sein, als der Querschnitt der Rohrleitung. Bei cylindrischen Bohrungen ist folglich der Durchmesser der Bohrung gleich dem lichten Durchmesser der Rohrleitung zu machen. Will man nun bei einem graden Hahn noch neben der Bohrung Wandstärke genug behalten und auch eine genügende Schlufsfläche erzielen, so darf die Mündung der Bohrung nicht breiter sein, als etwa der sechste Theil der Peripherie des Hahnes. Daraus folgt, dafs der Durchmesser des Hahnes, da wo die geringste Wandstärke des Hahnkörpers bleibt, doppelt so grofs zu machen ist, als die Sehne, welche die Mündung der Bohrung abschneidet. Bezeichnet in nebenstehendem Holzschnitt s die Sehne, so ist $2s$ der Durchmesser des Hahnkörkörpers.



Bei weiten Röhren würde man bei Anwendung cylindrischer Bohrungen auf diese Weise sehr grofse Hahndurchmesser bekommen; das sucht man zu vermeiden, theils weil die Konstruktion selbst zu plump ausfallen würde, theils auch, weil die *Reibung* in dem Hahnsitz bei grofsen Hahndurchmessern ein erhebliches stati-



sches Moment erlangt, und die Bewegung des Hahnes erschwert wird. Man wendet dann trapezförmige, rechteckige oder länglich runde Bohrungen an. Bezeichnet:

s die mittlere Breite der Bohrung,
b die lichte Höhe derselben,
d den Durchmesser der cylindrischen Röhrenleitung,

so mufs nach dem Obigen sein:

$$\tfrac{1}{4}\pi d^2 = s \,.\, b = 0{,}785\, d^2.$$

Gewöhnlich macht man *b* doppelt so grofs als *s*, so dafs man hat:

$$b = 2s,$$

folglich

$$2s^2 = 0{,}785\, d^2$$

$$s = 0{,}626\, d,$$

man nimmt dafür

$$s = \tfrac{5}{8} d;\; b = \tfrac{5}{4} d.$$

Zuweilen rundet man die obere und untere Begrenzung der Hahnbohrung ab, und dann kann man die Kreissegmente, durch welche diese Abrundungen bewirkt werden, dem *Querschnitt* noch hinzusetzen.

Die Höhe des Hahnkörpers macht man gewöhnlich etwa doppelt so hoch, als die Höhe der Bohrung, also

$$h = 2b = \tfrac{5}{2} d.$$

3. Die Spannvorrichtung.

Die Spannvorrichtung hat den Zweck, den Hahnkörper schliefsend in den Hahnsitz hineinzupressen. Gewöhnlich bedient man sich dazu der Schrauben, meist in der Weise, wie Taf. 49. Fig. 4. 5. 6. 10. 11 zeigen, dafs der Hahnkörper an seiner Spitze in einen viereckigen Zapfen, den „Vierkant", übergeht, auf diesen ist eine Scheibe gesteckt, welche sich gegen den unteren Rand des Hahnsitzes *stützt, und gegen* welche eine Schraubenmutter wirkt, die auf den verlängerten und mit einem Schraubengewinde versehenen Vierkant aufgezogen ist. Durch Anziehen der Schraubenmutter wird der Hahn in seinen *Sitz geprefst*. Der Zweck des Vierkant ist, zu bewirken, dafs die Unterlagscheibe sich mit dem Hahnkörper gemeinschaftlich drehe, so dafs bei der Bewegung des Hahnes beim Oeffnen und Schliefsen keine relative Bewegung zwischen der Mutter und ihrer Unterlage erfolgen kann; durch eine solche Bewegung würde die Spannschraube unbeabsichtigter Weise angezogen oder gelöst werden. Man kann natürlich die Unterlagsscheibe auch durch jede andere Konstruktion, welche zweckmäfsig erscheint, mit dem Hahnkörper kuppeln.

Wenn die *Spannvorrichtung nicht* unten anzubringen ist, so ordnet man sie oben an, wie dies die Fig. 7 und 9 auf Taf. 49 als Beispiele zeigen.

4. Die Vorrichtung zum Drehen des Hahnkörpers.

Zum Drehen des Hahnkörpers bedient man sich im Allgemeinen ähnlicher Vorrichtungen, wie zum Anziehen der Schraubenköpfe und Schraubenmuttern, wovon im ersten Theil dieses Werkes gehandelt worden ist. Der Hahnkörper hat daher in seiner Axe gewöhnlich eine Verlängerung, auf welche man einen Schraubenschlüssel, einen Schraubenzieher, oder sonst einen Hebel oder eine Kurbel aufstecken kann. Zuweilen sind, namentlich bei kleinen Hähnen, diese Vorrichtungen zum Drehen mit dem Hahnkörper fest verbunden, oder mit demselben aus einem Stück gegossen. Wenn die Hähne heifse Flüssigkeiten, Dampf, u. s. w. absperren sollen, so nehmen sie oft eine hohe Temperatur an, und wenn in diesem Falle die Vorrichtung zum Drehen des Hahns von Metall und mit demselben in fester Verbindung wäre, so würde sie sich mit erhitzen, und man würde beim Anfassen sich die Finger verbrennen. Für solche Fälle versieht man den Hahn mit hölzernen Handhaben oder umgiebt die Handhabe mit einem schlechten Leiter (vergl. Fig. 6 auf Taf. 39).

Wenn die Handhabe zum Oeffnen des Hahnes nicht an dem Hahnkörper befestigt ist, so mufs man von Aufsen durch einen Strich, welcher in den Kopf des Hahnkörpers eingefeilt wird, erkennbar machen, ob der Hahn geöffnet oder geschlossen ist. Man feilt diesen Strich gewöhnlich nach der Richtung der Axe der Bohrung des Hahnes, so dafs, wenn der Hahn so steht, dafs der Strich mit der Richtung der Wege des Hahnsitzes zusammenfällt, der Hahn geöffnet ist. Hat man an dem Hahnkörper eine feste Handhabe, so stellt man die Längenrichtung derselben so, dafs sie der Richtung der Axe der Bohrung entspricht, so dafs wenn diese Handhabe mit der Richtung der Wege des Hahnsitzes zusammenfällt, der Hahn geöffnet ist. Diese Anordnung gilt als Gewohnheitsregel sowohl in Deutschland, als in England; die Franzosen befolgen oft ein entgegengesetztes Verfahren, und stellen die Handhabe und den Feilstrich um 90 Grad gegen unsere Anordnung herum, so dafs dieselben normal zur Axe der Bohrung stehen.

Die Hähne haben im Allgemeinen den Vorzug, dafs sie in der Regel entlastete Verschlüsse darstellen, bei welchen also nicht der Druck der Flüssigkeit zu überwinden ist, wenn sie bewegt werden sollen, dagegen müssen sie durch die Spannvorrichtungen in ihren Sitz geprefst werden, und es ist die Reibung, welche aus dieser Spannung hervorgeht, beim Drehen des Hahnes zu überwinden. Diese Reibung ist oft nicht unbeträchtlich und man mufs daher zuweilen besondere Maschinerien (Räderwerk) zur Anwendung bringen. Die Reibung aber erzeugt auch eine Abnutzung und dadurch eine Formveränderung der schliefsenden Flächen, welche keineswegs gleichmäfsig erfolgt. Dadurch werden die Hähne so leicht undicht, und man sucht sie zu vermeiden, wo der Verschlufs sehr häufig oder gar kontinuirlich wechselnd bewirkt werden soll. Bei erhöhten Temperaturen dehnt sich der Hahnsitz und der Hahnkörper aus; dadurch werden sie oft so scharf ineinandergeprefst, dafs man den Hahnkörper gar nicht oder nur mit grofser Anstrengung drehen kann; man mufs, um dies zu verhüten, den Hahnkörper vor der Erwärmung nur lose in den Hahnsitz stecken, damit er erst durch die Ausdehnung den vollen Schlufs erhält, allein hierdurch entsteht wieder der Uebelstand, dafs der Hahn bei der Abkühlung nicht mehr dicht hält.

Die Hahnverschlüsse sind übrigens die einzigen Verschlüsse, durch welche man mehr als zwei Wege zugleich, oder in verschiedenen Kombinationen in Zusammenhang bringen kann, was durch die Ventile so wenig, als durch die gewöhnlichen Schieber zu erreichen ist, indem diese stets nur die Kommunikation zweier Wege vermitteln.

Verschiedene Konstruktionen von Hähnen.

§ 167. Auf Tafel 49 sind neun verschiedene Hahnkonstruktionen dargestellt, darunter drei grade Hähne (Fig. 4. 5. 6), drei Winkelhähne (Fig. 7. 8. 9) und drei Hähne mit mehr als zwei Wegen (Fig. 10. 11. 12).

Grade Hähne.

Taf. 49. Fig. 4 zeigt einen, der Form nach von Redtenbacher angegebenen graden Durchflufshahn mit rechteckiger, oben und unten abgerundeter Bohrung. Fig. 4a ist eine Ansicht des Hahnstückes in ganzer Zusammenstellung, Fig. 4b ist ein Längenschnitt nach der Linie *no* in Fig. 4d, dagegen Fig. 4c ein Querschnitt nach der Linie *ik* in Fig. 4a und Fig. 4d ein Horizontalschnitt nach der Linie *lm* in Fig. 4b; endlich ist in Fig. 4e eine Ansicht der Unterlagscheibe, welche auf dem Vierkant des Hahnes sitzt. Sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Der Hahnkörper hat eine rechteckige, oben abgerundete Bohrung, und oben einen vierkantigen Kopf zum Aufsetzen eines Schraubenschlüssels oder dergl. zum Drehen des Hahnes. Die Hahnwege gehen aus dem kreisförmigen Querschnitt, welchen sie noch da besitzen, wo das Hahnstück mittelst der Flanschen in die Rohrleitung eingefugt ist, allmählich in die Querschnittsform der Bohrung über, wobei der Flächeninhalt des Durchflufsquerschnittes überall ungeändert bleibt. Taf. 49. Fig. 4.

Taf. 49. Fig. 5 stellt einen Auslafshahn dar, und zwar Fig. 5a den zusammengestellten Hahn in der Ansicht, wobei die Stellung des Hahnes so gewählt ist, dafs der Ausflufs geöffnet ist; Fig. 5b aber zeigt den Hahn um 90 Grad gedreht, wobei der Ausflufs gesperrt ist, der Hahnsitz erscheint in diese Figur im Durchschnitt. Beide Figuren sind in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Die Handhabe zum Drehen des Hahnes ist hier mit dem Taf. 49. Fig. 5.

Hahnkörper in einem Stück gegossen; das Hahnstück wird mittelst eines Flansches an der Röhrenleitung befestigt.

Taf. 49. Fig. 6. Taf. 49. Fig. 6 ist ein kleiner Hahn mit cylindrischer Bohrung, wie er als Probirhahn für Dampfkessel vorkommt. Fig. 6a ist eine Vorderansicht des Hahnstücks mit dem Hahn, in beiden Ansichten ist der Hahn in geschlossener Stellung gezeichnet; Fig. 6c ist ein Vertikalschnitt, in welchem der Hahn in geöffneter Stellung dargestellt ist. Fig. 6d endlich ist eine Ansicht des herausgenommenen Hahnstücks. Der Hahn ist ein Ausflufshahn; das Hahnstück wird mittelst eines *Schraubengewindes* an eine Rohrleitung, oder an die Wand eines Reservoirs (Dampfkessels) angeschraubt. Die Kurbel zur Drehung des Hahnes ist auf den Kopf desselben aufgesteckt, durch ein Schräubchen befestigt, und mit einem hölzernen Handgriff versehen.

Winkelhähne.

Taf 49. Fig. 7. Taf. 49. Fig. 7 ist ein Durchflufshahn für den Fall, wo die Richtungen der beiden Wege des Hahnstückes einen rechten Winkel mit einander bilden. Fig. 7a ist die Ansicht der zusammengestellten Konstruktion, Fig. 7b ist ein Vertikalschnitt, und Fig. 7c zeigt die Kurbel zur *Bewegung des Hahns in der* oberen Ansicht; sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Der Hahnkörper ist hier im Innern hohl; der vertikale Hahnweg mündet in die untere Oeffnung dieser Höhlung, der horizontale Hahnweg kommunizirt, bei geöffnetem Hahn mit der innern Höhlung durch eine rechteckige, oben und unten abgerundete Oeffnung, deren Dimensionen nach den Bestimmungen des vorigen Paragraphen festzustellen sind; der innere Durchmesser der Höhlung ist in der Mitte der Höhe jener Oeffnung gleich dem Durchmesser der zuführenden Rohrleitung zu machen. Der horizontale Hahnweg ist ähnlich gestaltet, wie in Fig. 4 auf Taf 49, indem der kreisförmige Querschnitt, ohne Aenderung seines Flächeninhaltes allmählich in die Form des Querschnitts der Hahnöffnung übergeht. Die Spannvorrichtung für den Hahn liegt hier oben; der Vierkant des Hahnes ist dabei zugleich benutzt, um die Kurbel aufzustecken, durch welche der Hahn bewegt werden soll, und die Schraubenmutter, welche zum Anziehen des Hahnkörpers dient, hält auch zugleich die Kurbel fest. Das Hahnstück wird mittelst Flanschen in die Rohrleitung eingeschaltet; die Flüssigkeit, welche abgesperrt werden soll, kann entweder in dem horizontalen oder in dem vertikalen Hahnwege, und den mit diesen zusammenhängenden Theilen der Leitung sich befinden; in letzterem Falle wird der Druck der Flüssigkeit darauf wirken, den Hahn in seinen Sitz zu pressen, und der Hahn ist dann kein entlasteter Verschlufs. Auch diese Hahnform ist wie Fig. 4 nach Angaben von Redtenbacher.

Ein sehr gefährlicher Feind der Hahnverschlüsse ist der Sand. Ist das durchfliefsende Wasser sandig, so kommt sehr bald der Sand zwischen Hahnkörper und Hahnsitz, und bewirkt nicht nur Undichtigkeit der *schliefsenden* Fugen, sondern auch schnelle Abnutzung derselben. Für solche Fälle, und namentlich als Abschlufshahn für die Röhren von Wasserleitungen, ganz in dem Sinne der Anordnungen in § 164 ist die auf Taf. 49 in Fig. 8 dargestellte Konstruktion brauchbar.

Taf. 49. Fig. 8 giebt einen Ausflufshahn für Wasserleitungen nach einer Konstruktion von Remison in Glaskow. Der Ausflufs erfolgt durch den Hebel, welcher zur Bewegung des Hahnes dient. Fig. 8a ist ein Vertikalschnitt der ganzen Konstruktion; Fig. 8b ein Querschnitt des Hahnkörpers nach der Linie pq in Fig. 8a, und Fig. 8c ist ein Horizontalschnitt nach der Linie rs in Fig. 8a; sämmtliche Figuren sind in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Die Konstruktion ist eigentlich eine Kombination zwischen einem Hahn und einem Ventil. Der konische, mit seiner Axe horizontal liegende Hahnsitz hat in seiner Mitte ein vertikal abwärts gehendes Mundstück, welches sich unten zu einem Flansch verbreitet, und auf das vertikal aufwärtssteigende Rohr der Wasserleitung aufgeschraubt ist, wobei die Dichtung durch eine Kautschuckscheibe erfolgt. Die Mündung des in dieses Hahnstück eintretenden Wasserleitungsrohrs kann durch ein Scheibenventil geschlossen werden, welches aus Kautschuck oder Lederscheiben gebildet ist, die an der Basis eines Metallkegels befestigt werden. In Fig. 8a ist das Ventil geöffnet dargestellt, und in Fig. 8a ist es anschaulich gemacht, wie der Metallkegel des Ventils durch zwei Vorsprünge im Innern des Hahn-Mundstückes geführt wird. Ist das Ventil geöffnet, so gelangt das Wasser in den eigentlichen Hahnsitz, und aus diesem durch eine Bohrung, die zuerst in der Axe des Hahnes liegt, dann aber in den Hebel, und zuletzt in eine Umbiegung des Hebels übergeht, welche, bei geöffnetem Hahn, vertikal abwärts gerichtet ist, und durch welche das Wasser ausfliefsen kann. Der Wasserdruck der Röhrenleitung wirkt auf Oeffnen des

Ventils, kann das Ventil dem Wasserdruck nachgeben, so öffnet es sich ohne äufsere Hilfe; um es aber zu schliefsen und geschlossen zu erhalten, mufs der Wasserdruck überwunden werden. Um dies zu bewirken ist der Hahnkörper, da wo er mit dem Ventil zusammentrifft, excentrisch gestaltet (vergl. Fig. 8b), so dafs, wenn die flache Seite dieses excentrischen Theils nach unten gerichtet ist, das Ventil sich durch den Wasserdruck öffnen kann (diese Stellung zeigt Fig. 8a und 8b), wenn dagegen der Hahnkörper herum gedreht wird, so dafs der *äufsere Theil* des Excentriks nach unten kommt, so wird durch denselben *das Ventil in seinen Sitz* geprefst, und so der Durchgang des Wassers gesperrt. Man sieht, dafs der dichte Verschlufs des unter hohem Druck stehenden Wassers hier nicht durch den Hahn, sondern durch das Ventil erfolgt; der Hahn hat nur das Wasser abzuschliefsen, welches die Ventilöffnung passirt ist, braucht also viel weniger scharf in seinen Sitz geprefst zu werden, als wenn er den Abschlufs des Wassers unmittelbar zu bewirken hätte.

Taf. 49. Fig. 9. Taf. 49. Fig. 9 zeigt einen Winkelhahn als Durchflufshahn, welcher von William Penn in Greenwich als Pumpenhahn für eine Schiffsdampfmaschine von 35 Pferdekraft, konstruirt worden ist. Fig. 9a giebt eine Ansicht des Hahnes von oben, Fig. 9b ist ein Vertikalschnitt *nach der Linie tu in Fig. 9a*; beide Figuren *sind in* $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Der Hahn vermittelt, wie der in Fig. 7 dargestellte, die Kommunikation zweier Röhren, welche einen rechten Winkel bilden; die hier gewählte Anordnung unterscheidet sich jedoch von der in Fig. 7 dargestellten dadurch, dafs hier der hohle Hahnkörper mit seinem kleineren Durchmesser dem vertikalen Wege zugekehrt ist, während in Fig. 7 der gröfsere Durchmesser der Hahnhöhlung der vertikalen Leitung zugewandt ist. Durch diese hier getroffene Einrichtung erzielt man zwar den Vortheil, dafs man den Hahnkörper, behufs Reparatur oder Untersuchung, aus dem Hahnsitz herausnehmen kann, ohne das ganze Hahnstück aus dem Zusammenhange mit der Rohrleitung zu trennen, wie die Konstruktion in *Fig.* 7 dies bedingt; allein es wird andererseits hier die *Spannvorrichtung* komplizirter, welche nun von dem *gröfseren* Durchmesser des Hahnes aus bewirkt werden *mufs*. Fig. 9a zeigt, dafs hier, um den Hahnkörper in seinen *Sitz* zu pressen, eine schmiedeeiserne Platte (Halseisen), welche in Fig. 9b im Durchschnitt erscheint, über einen Ansatz an der oberen Verlängerung des Hahn körpers gesteckt ist, so dafs sie die Drehung des Hahnes nicht hindert. Diese Platte kann durch zwei Schraubenbolzen, welche durch angegossene Lappen des Hahnsitzes gesteckt sind, angezogen werden, und prefst so den Hahn in seinen Sitz nieder. Zu bemerken ist noch, dafs wenn die unter Druck stehende Flüssigkeit sich in dem vertikalen Rohr befindet, der Hahn einen vertikal aufwärts gerichteten Druck auszuhalten hat, welcher das Bestreben hat, ihn aus seinem Sitz herauszuheben. Die Spannschrauben müssen dann diesen Druck auch noch überwinden.

Hähne mit mehreren Wegen.

Taf. 49. Fig. 10 ist ein Dreiweghahn, welcher für die Bedingung konstruirt ist, dafs stets nur zwei Wege von den dreien, aber beliebig welche, mit einander in Verbindung gesetzt werden sollen. Fig. 10a giebt einen Vertikalschnitt nach der Linie xy in Fig. 10b, und Fig. 10b ist ein Horizontalschnitt nach der Linie vw in Fig. 10a; beide Figuren sind in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Bezeichnen wir die drei Wege des Hahnes mit den Nummern 1. 2. 3, so sollen folgende Kommunikationen stattfinden: Taf. 49. Fig. 10.

1 . 2,
1 . 3,
2 . 3.

Die Kommunikation 1 . 2 entspricht der Stellung; welche Fig. 10b darstellt; wird der Hahn um 120 Grad nach rechts gedreht, so entsteht die Kommunikation 1 . 3, und wenn der Hahn aus der in Fig. 10b gezeichneten Stellung um 120 Grad nach links gedreht wird, so entsteht die Kommunikation 2 . 3. Will man gar keine Kommunikation, so ist der Hahn aus der Stellung der Fig. 10b um 60 Grad nach links oder nach rechts zu drehen.

Taf. 49. Fig. 11 stellt einen Dreiweghahn dar, welcher für die Bedingung konstruirt ist, dafs man nicht nur beliebige zwei von den drei Wegen mit einander in Kommunikation setzen, sondern auch die Kommunikation aller dreier Wege herstellen oder sperren könne. Fig. 11a giebt die Ansicht, Fig. 11b den Horizontalschnitt nach der Linie za in Fig. 11a; beide Figuren sind in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröfse gezeichnet. Bezeichnen wir wieder die Hahnwege mit den Nummern 1. 2. 3, so sind folgende Kommunikationen herzustellen: Taf. 49. Fig. 11.

1 . 2,
1 . 3,
2 . 3,
1 . 2 . 3.

Die Stellung in Fig. 11b giebt die Kommunikation 1 . 2; dreht man den Hahn aus dieser Stellung um 90 Grad nach links, so entsteht die Kommunikation 1 . 3; dreht man dagegen den Hahn aus der in Fig. 11b gezeichneten Stellung um 90 Grad nach rechts, so entsteht die Stellung 2 . 3. Will man die Kommunikation 1. 2. 3 haben, so hat man den Hahn aus der in Fig. 11b gezeichneten Stellung um 180 Grad herumzudrehen. Die in Fig. 11b punktirte Stellung, welche einer Drehung des Hahnes um 45 Grad aus der gezeichneten Stellung entspricht, giebt den Verschlufs sämmtlicher drei Oeffnungen an.

Taf. 49. Fig. 12. Taf. 49. Fig. 12 ist ein Vierweghahn oder Leupoldischer Hahn im Horizontalschnitt und in $\frac{1}{6}$ der natürlichen Gröfse. Die Aufgabe, welche bei dieser Hahnkonstruktion zu erfüllen ist, besteht in folgendem: Von den vier Wegen des Hahnes dürfen niemals zwei gegenüber liegende kommuniciren, dagegen sollen je zwei benachbarte Wege, beliebig, welche in Kommunikation gesetzt werden, doch so, dafs stets je zwei Paare dieser Wege gleichzeitig in Kommunikation stehen. Hieraus entspringen folgende Zusammenstellungen:

1 . 2 und gleichzeitig 3 . 4,
1 . 4 - - 2 . 3.

Die Stellung in der Zeichnung giebt die zuerst genannte Kommunikation, und wenn man den Hahnkörper aus dieser Stellung um 90 Grad dreht, so entsteht die zweite Anordnung, welche in der Zeichnung punktirt ist.

Ergänzungstafel.

§ 168. Taf. 50 der beigefügten Zeichnungen enthält als Ergänzungstafel verschiedene Konstruktionen, welche auf den betreffenden Tafeln, wo sie des Zusammenhanges wegen eigentlich hingehörten, nicht Platz finden konnten. Es ist hier der Ordnung und des Zusammenhanges wegen nöthig, den Inhalt der Figuren der Taf. 50 kurz zusammenzustellen, und den Nachweis beizufügen, wo dieselben erklärt sind.

Taf. 50. Fig. 1. Taf. 50. Fig. 1 ist eine Steinbuchse mit hölzernen Futtern aus den Königl. Mühlen zu Berlin, welche in § 138. S. 424 beschrieben worden ist.

Taf. 50. Fig. 2. Taf. 50. Fig. 2 ist ein Gebläsekolben mit Leder-Liderung von der Hörder-Hütte in Westphalen, dessen Beschreibung in § 151. S. 487 zu finden ist.

Taf. 50. Fig. 3 ist der Vertikalschnitt eines Zapfenlagers, dessen Ansicht in Fig. 2a auf Taf. 45 gegeben ist, und welches in § 152 beschrieben worden ist; es ist das Axlager der Kurbelwelle des Schraubendampfschiffes „Prinz Constantin", welches zwischen Rostock und St. Petersburg fährt. Taf. 50. Fig. 3.

Taf. 50. Fig. 4 ist ein Ventilgehäuse mit zwei Sicherheitsventilen für einen Lokomotivkessel. Die Ventile haben ringförmige Querschnitte, und sind in § 159. S. 530 beschrieben worden. Taf. 50. Fig. 4.

Taf. 50. Fig. 5 ist ein von Fenton konstruirtes Kugelventil als Sicherheitsventil mit Hebelbelastung, welches in § 160. S. 538 unter den Kugelventilen erläutert worden ist. Taf. 50. Fig. 5.

Taf. 50. Fig. 6 stellt ein Glockenventil dar, welches gleichfalls als Sicherheitsventil benutzt werden kann, und welches in § 163 auf S. 548 erklärt worden ist. Taf. 50. Fig. 6.

Taf. 50. Fig. 7 ist ein von Perneaux erfundenes kleines Kautschuckventil, welches unter den Klappventilen in § 158. S. 524 beschrieben worden ist. Taf. 50. Fig. 7.

Gedruckt bei A. W. Schade in Berlin, Grünstr. 18.