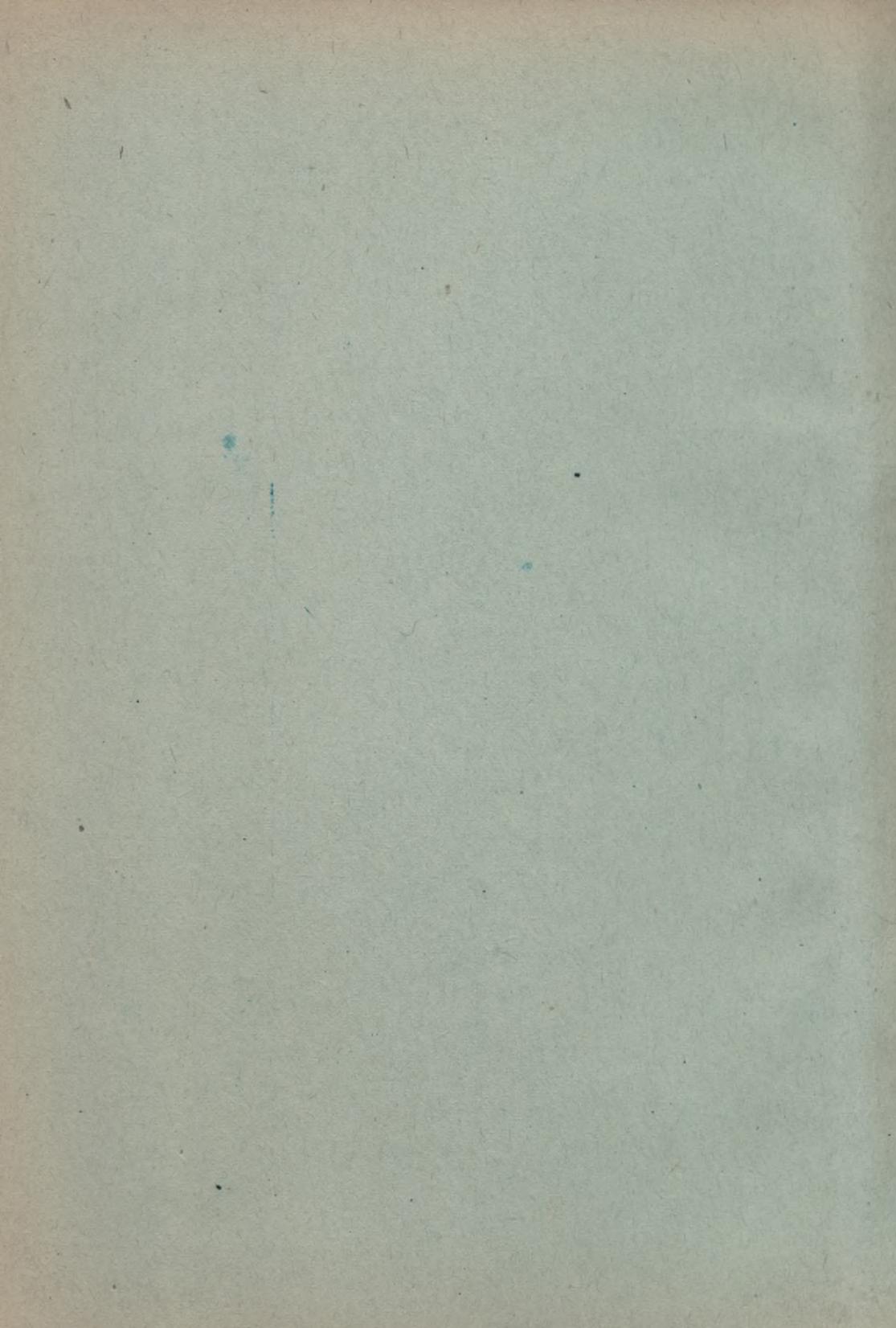


Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000305598



30/29

— Eisenbetonbau —

Rahmen und Gewölbe

Ein ausführliches Lehrbuch der allgemeinen Theorien

nebst

~~Anhang A: Die Elemente der höheren Mathematik
für den Bedarf des Statikers~~

und

~~Anhang B: Die Elemente der Einflußlinienlehre
für vollständige Konstruktionen~~

Mit vielen vollständig durchgeführten Zahlenbeispielen,
Abbildungen im Text und 2 Tafeln

Von

H. Schlüter

INŻ. I. STELLA SAWICKI
AUTOR. INŻYNIER CYWILNY
KONCES. BUDOWNICZY

Berlin

Verlag von Hermann Meußner

1914

INŻ. I. STELLA SAWI
AUTOR. INŻYNIER CYWILN
KONCES. BUDOWNICZY.

Eisenbetonbau

Rahmen und Gewölbe

— Eisenbetonbau — Rahmen und Gewölbe

Ein ausführliches Lehrbuch der allgemeinen Theorien
mit Anschlüssen an die Literatur,
insbesondere an das Handbuch für Eisenbetonbau und die Werke von
Prof. Müller-Breslau

nebst

~~Anhang A: Die Elemente der höheren Mathematik
für den Bedarf des Statikers~~

und

~~Anhang B: Die Elemente der Einflußlinienlehre für
vollwandige Konstruktionen.~~

Mit vielen vollständig durchgeführten Zahlenbeispielen,
277. Abbildungen im Text und 2 Tafeln

Von

H. Schlüter.

ИНЖ. И. СТЕЛЛА САВИЧ
АУТОР. ИНЖИНИЕР СЪВЪЛЕН
КОДЕС. БУДОВНИКЪ.

Berlin

Verlag von Hermann Meußner

1914

III.28.609



Alle Rechte vorbehalten,
auch das der Übersetzung in fremde Sprachen.

Druck der Universitäts-Buchdruckerei von Gustav Schade (Otto Francke)
in Berlin und Bernau.

Akc. Nr: K-410/8

Seinem ehemaligen Chef
Herrn Dr.-Ing. h. c. M. Koenen,
Baudirektor der Actien-Gesellschaft für Beton- und Monierbau,
gewidmet vom Verfasser.

Vorwort.

Die statische Unbestimmtheit wird immer mehr zu einer charakteristischen Eigentümlichkeit der Eisenbetonbauweise, das schnelle Umspringen mit ihr immer mehr zu einem Bedürfnis weiter Fachkreise, so daß schon mehrere Autoren daraus Anlaß genommen haben, spezielle Arbeiten über die biegungsfesten Stabzüge zu veröffentlichen — abgesehen von den fortlaufenden Neuerscheinungen in den Zeitschriften.

Viele, die sich — eigentlich nur im sicheren Besitze der Elementarkenntnisse der Statik — für den Eisenbetonbau spezialisiert haben, sehen sich im Laufe ihrer Praxis bald vor Aufgaben gestellt, die ihre Kräfte übersteigen, ohne daß sie mit Hilfe der umfangreichen Arbeiten unserer großen Statiker imstande wären, sich die sehr erwünschte Abrundung ihrer Fachbildung zu verschaffen, weil diese zuviel voraussetzen. Auch mancher vollkommen für sein Spezialfach vorbereitete jüngere Eisenbetoningenieur mußte sich bisher doch erst langsam zu einer gewissen Klarheit in der Anwendung des Gelernten auf die Aufgaben der Praxis hindurcharbeiten.

Die Folgen sind mechanische Anwendung unverstandener Formeln, die als letztes Hilfsmittel aus Taschenbüchern und Kalendern entnommen werden, und anschließend konstruktive Mißgriffe.

Diesem Übelstand möchte Verfasser mit seinem Buch abhelfen; eine sichere Beherrschung der in Frage kommenden Gesetze, die doch schließlich allen Abhandlungen zugrunde liegen, muß dem ernst Forschenden das Verständnis für die schwierigeren Aufgaben eröffnen, so daß er sich alle einschlägigen Arbeiten bald zunutze machen kann.

Verfasser bringt deswegen nach der Einleitung, die — zunächst in Kürze von den statisch bestimmten Bauwerken handelnd — die statische Unbestimmtheit an mehreren Beispielen bespricht und die Notwendigkeit der Kenntnis der elastischen Formänderungen zur Lösung derselben erörtert, im

VIII

Abschnitt I die Berechnungsverfahren auf Grund rechnerischer Ermittlung der Formänderungen und im

Abschnitt II die Berechnungsverfahren auf Grund zeichnerischer Ermittlung der Formänderungen.

Jeder Abschnitt beginnt mit einem Abriß der Elastizitätslehre und geht dann zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme über.

Im ersten Abschnitt bringt die Elastizitätslehre zunächst die Formänderungsberechnungen sowohl auf Grund elementarer Ableitungen wie mit Hilfe der Arbeitsgesetze. Es werden die Gleichungen für Formänderungsarbeit und Verschiebungsarbeit abgeleitet, und es wird schließlich nach dem einfachen Prinzip der virtuellen Verrückungen die Brauchbarmachung des Gesetzes der Verschiebungsarbeit für die Ermittlung von Formänderungen und statisch unbestimmten Größen bei den verschiedensten Fällen der Auflagerung gezeigt.

In der eigentlichen Rahmen- und Gewölbetheorie schließt Verfasser sich dann möglichst der Literatur an und hofft so dem Schüler die Fähigkeit zu vermitteln, sich auf dieser Grundlage selbständig weiterzubilden.

Ganz besonders werden die Anregungen befolgt, die Herr Prof. Robert Otzen in seinem Buche: „Praktische Winke zum Studium der Statik“ gegeben hat. Es soll also „Verminderung der Gedächtnisarbeit, Belebung der Verstandestätigkeit, Begreifen und Beherrschen der Gesetze das Ziel des Studierenden sein, nicht Auswendiglernen von Formeln und Gleichungen oder bequeme Zusammenstellung von Tatsachen ohne Begründung“. Nur die völlige Klarheit in der Ableitung ist geeignet, die Konstruktionsprinzipien für das Detail klar zur Erkenntnis zu bringen.

Die Bedürfnisse des Praktikers werden berücksichtigt durch die bis zu Ende durchgeführten Rechnungen und die steten Bemerkungen über die Brauchbarkeit dieses oder jenes Systems. Der Anschluß an das Handbuch für Eisenbetonbau ersparte die Angabe weiterer konstruktiver Einzelheiten.

Von dem Prinzip der Einflußliniengleichungen bei der Bestimmung der statisch unbestimmten Größen ist stets Gebrauch gemacht worden, und zwar sowohl bei der Rahmen- als auch bei der Gewölbeberechnung. Ebenso wurde auch die Deutung der Integrale und die damit verbundene große Abkürzungsmöglichkeit jeder Rechnung stets gezeigt.

Da es im übrigen gegenüber den sonstigen Voraussetzungen für die Anwendung der Elastizitätstheorie auf statisch unbestimmte Systeme des Eisenbetonbaues oft ungerechtfertigt erscheint, den Hauptsatz stets in vollständiger Form zu gebrauchen, so ist Verfasser darauf bedacht gewesen, nach Vorführung der vollständigen Ableitungen Kürzungen anzuwenden da, wo es angebracht erschien.

Für den Brückenbau ist eine sichere Kenntnis der statischen Verhältnisse gelenkloser Bögen unter den verschiedensten Einflüssen erforderlich; hier erläuterte Verfasser das seit langer Zeit bekannte und grundlegende Verfahren von Prof. Mörsch.

~~Den Abschnitt über die erforderlichen und ausreichenden Elemente der höheren Mathematik hat Verfasser hinzugefügt, um zu zeigen, mit wie wenig Kenntnissen aus diesem Gebiete man in den Aufgaben der Statik gemeinhin auskommt, und wie leicht die grundlegenden Rechnungsarten der Differential- und Integralrechnung auch von solchen zu verstehen sind, die sich vielleicht noch nicht damit beschäftigt haben. —~~

Auf den gegebenen Grundlagen hätten ohne große Mühe mehr Spezialfälle und die Lösung schwierigerer Aufgaben aufgebaut werden können; jedoch mußte sich Verfasser hierin aus Rücksicht auf den Umfang des Buches Beschränkung auflegen; insbesondere mag es einer weiteren Auflage überlassen bleiben, den II. Abschnitt über die zeichnerische Behandlung noch weiter auszubauen. Es ließen sich später auch noch zu den einzelnen Kapiteln Literaturnachweise über solche Arbeiten und Aufsätze anbringen, die für den Leser dieses Buches ohne weiteres verständlich sind. —

Ich möchte noch auf mein gleichzeitig erschienenenes Buch „Eisenbetonbau, Säule und Balken“¹⁾ hinweisen. Es soll dem Anfänger die grundlegenden Rechnungsarten des Eisenbetonbaues als Quelle für alle möglichen Anwendungsformen vorführen.

Zum Schluß spreche ich Herrn Robert Gsell, meinem früheren Assistenten, für seine verdienstvolle Hilfe meinen herzlichsten Dank aus.

Strelitz (Alt), im Juni 1913.

Hans Schlüter.

¹⁾ Ebenfalls im Verlage von Hermann Meußner, Berlin; Titel, Vorwort und Inhaltsverzeichnis desselben siehe am Schlusse dieses Bandes.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung.

Kapitel I. Gleichgewichtsbedingungen, Auflagerungsarten und Beispiele für statisch bestimmte Bauwerke	1
Gleichgewichtsbedingungen	1
Statisch bestimmte Bauwerke	3
Auflagerungsarten	4
Auflagerungsarten im Beton- und Eisenbetonbau	7
Beispiele für äußerlich statisch bestimmte Bauwerke	8
Der einfache Balken	8
Der einseitig eingespannte Träger	12
Der Dreigelenkbogen	13
Der Gerberträger	14
Kapitel II. Der Grad der statischen Bestimmtheit, Wahl des statisch bestimmten Hauptsystems und der statisch nicht bestimmbareren Größen	14
Kapitel III. Allgemeines über elastische Formänderungen	20

Abschnitt I.

Berechnungsverfahren auf Grund rechnerischer Ermittlung der Formänderungen.

Elastizitätslehre.

Kapitel IV. Formänderungsberechnungen auf Grund ele- mentarer Ableitungen	25
Die rechnerische Bestimmung der 3 Arten der elastischen Form- änderung mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes	25
Einleitung	25
Formänderung durch Längskräfte	25
Formänderung durch Querkräfte	27
Formänderung durch Biegung	28
Entwicklung der Formel für die Durchbiegung aus der elemen- tären Ableitung für den Krümmungsradius	31
Anwendung auf verschiedene Trägerarten	32
Bestimmung von Auflagerdrücken	36
Die Differentialgleichung der elastischen Linie	40
Anwendung auf verschiedene Trägerarten	41
Bestimmung von Auflagerdrücken	45
Vergleich zwischen Formänderung aus Biegung mit der infolge von Querkräften	47
Bedeutung der Durchbiegungsberechnungen für die Praxis	49

Kapitel V. Rechnerische Bestimmung der elastischen Formänderung mit Hilfe der Arbeitsgleichung	50
Begriff der Arbeit	50
Formänderungsarbeit	51
Formänderungsarbeit einer Längskraft	52
Formänderungsarbeit bei Biegung	55
Formänderungsarbeit einer Querkraft	57
Formänderungsarbeit beliebiger äußerer Kräfte in der Ebene eines Stabes	57
Verschiebungsarbeit	60
Das Prinzip der virtuellen Verrückungen	62
Grundgesetz der Verschiebungsarbeit	63
Brauchbarmachung des Gesetzes der Verschiebungsarbeit . .	67
Zusammenhang zwischen Verschiebungsarbeit und Formänderungsarbeit	68
Die rechnerische Bestimmung von Formänderungen mit Hilfe der allgemeinen Arbeitsgleichung	69
Kapitel VI. Allgemeines über statisch unbestimmte Bauwerke und die Ermittlung der statisch nicht bestimm- baren Größen	78
Allgemeines	78
Ermittlung der statisch nicht bestimm- baren Größen	78
Möglichkeiten für die linke Seite der Arbeitsgleichung, d. i. die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte:	84
Angriffspunkt starr	84
Angriffspunkt nachgiebig	85
Virtuelle Arbeit der Auflagergröße bei innerlich unbestimmten Bauwerken	85
Einzelne Spezialfälle	86
Das Temperaturglied der rechten Seite	87
Vollständige Arbeitsgleichung	88
Zusammenhang zwischen Formänderungsarbeit und dem auf dem Prinzip der virtuellen Verrückungen basierenden Hauptarbeitsgesetz (Castiglianoscher Satz)	89
Der Zweigelenkrahmen.	
Kapitel VII. Die Gleichung für den Schub bei gleich hohen Kämpfern	92
Kapitel VIII. Durchführung der Berechnung eines Zweigelenkrahmens mit direkter Benutzung der in Kap. VII abgeleiteten Integralformeln	97
Einfluß der Belastung	97
Einfluß der Temperatur	103
Einfluß der Lagernachgiebigkeit	104
Kapitel IX. Die geometrische Deutung der unter Kap. VII abgeleiteten Integralformeln	105

	Seite
Kapitel X. Beispiele mit Gebrauch der in Kap. IX gedeuteten Integralformeln	107
Der symmetrische Rahmen mit einfach gebrochenem Riegel und gleichmäßiger Last	107
Der unsymmetrische Rahmen mit verschiedener Belastung	110
Allgemeine Behandlung eines einfachen rechteckigen Rahmens mit wagerechter Belastung	114
Der einfache rechteckige Rahmen mit gleichmäßig verteilter wagerechter Belastung	118
Der einfache rechteckige Rahmen mit einseitigem Erddruck	119
Der unsymmetrische Rahmen mit Winddruck	123
Kapitel XI. Berechnung der Einflußliniengleichungen für den einfachen rechteckigen Rahmen ohne und mit Kragarmen	128
Einflußlinie für den Horizontalschub	128
Einflußlinien für die Biegemomente	131
Der rechteckige Zweigelenrahmen mit Kragarmen	132
Kapitel XII. Der Rahmen mit gebogenem (oder gebrochenem) Riegel ohne und mit Kragarmen	135
Ermittlung des Horizontalschubes für lotrechte Last mit Hilfe der gedeuteten Integrale	135
Berechnung der Einflußliniengleichung des Horizontalschubes bei lotrechter Last	137
Konstruktion der Einflußlinien für Biegemomente	142
Entwicklung einer Formel aus der allgemeinen Einflußgleichung	142
Ermittlung des Horizontalschubes bei Temperaturänderung	145
Einflußliniengleichungen für den bogenförmigen Rahmen mit Kragarmen bei lotrechter Last	145
Der Rahmen mit gebogenem Riegel bei seitlicher Belastung	150
Bildung einfacher Schlußformeln	150
Kapitel XIII. Der eigentliche Zweigelenbogen	157
Die Ermittlung des Horizontalschubes mit Hilfe der gedeuteten Integrale	157
Einflußliniengleichungen	158
Kapitel XIV. Der Zweigelenrahmen mit Zuggurt	159
Schlußformeln für parabolisch gebogenem Riegel	164
Kapitel XIV a. Der Zweigelenrahmen mit ungleich hohen Kämpfergelenken sowie der einstielige Rahmen	165
Kapitel XV. Anwendbarkeit des Zweigelenrahmens	168
Im Hochbau	168
Im Brückenbau	171
Der eingespannte Rahmen.	
Kapitel XVI. Der zweistielige Rahmen in völliger Einspannung	173
Ableitung der Bestimmungsgleichungen für die 3 statisch unbestimmten Größen	173
Abkürzung der Bestimmungsgleichungen	175

	Seite
Vollständigere Resultate mit Einschluß der Normalkräfte und des Temperaturgliedes	178
Deutung der vollständigeren Resultate	179
Berücksichtigung der Trägheitsmomente	180
Zwischenbetrachtung über die Wahl des statisch bestimmten Hauptsystems	182
Feststellung der Biegemomente	184
Berechnung der Einflußliniengleichungen bei lotrechter Be- lastung	186
Bestimmung der Momentennullpunkte in den Vertikalen	188
Kapitel XVII. Der eingespannte Rahmen mit Kragarmen	189
Kapitel XVIII. Der geschlossene oder kastenförmige Rahmen	190
Kapitel XIX. Zusammenhängendes Beispiel der Berechnung eines Durchlasses bei völliger Einspannung der Seiten- wände	191
Kapitel XX. Anwendbarkeit des eingespannten Rahmens.	200
Berechnung eines dreistieligen Rahmens mit statisch unbestimmtem Hauptsystem.	
Kapitel XXI.	
Einleitung	201
Lotrechte Belastung	202
Rahmen ohne Mittelstütze	202
Ermittlung des Stützendrucks X_b	203
Endgültige Momentenfläche	209
Wagerechte Belastung	210
Dimensionierung	216
Bogendächer.	
Kapitel XXII.	
Einleitung	218
Glatte Bogendächer:	
Flacher Zweigelenkbogen mit Zuggurt	219
Berücksichtigung ungleichmäßiger Erwärmung	219
Nähere Erläuterung der im Handbuch gegebenen Gleichungen	221
Einflußliniengleichungen für den Horizontalschub	226
Der flache gelenklose Bogen	228
Die Bestimmungsgleichungen der 3 statisch unbestimmten Größen	228
Nähere Erläuterung der im Handbuch gegebenen Gleichungen	230
Einflußliniengleichungen	235
Konstruktionseinzelheiten glatter Bogendächer	236
Bogendach mit überhöhtem Zuggurt	236
Bogendächer mit gesprengtem Zuggurt	238
Bogendach mit Kragarmen	239
Bogenbinderdächer:	
Allgemeines	239
Die statische Berechnung	240
Der gelenklose Bogenbinder in zeichnerischer Behandlung	240

Berechnung größerer eingespannter Brückengewölbe. (Einfacher und doch genauer Rechnungsgang nach Prof. Mörsch.)

Kapitel XXIII.

Einleitung und Voraussetzungen für die Berechnung	244
Entwurf	247
Berechnung nach Prof. Mörsch:	
1. Berechnung der 3 statisch unbestimmten Größen	250
2. Deutung der Integrale	251
3. Verwendung der Einflußlinien der 3 statisch unbestimmten Größen zur Bildung von Einflußlinien für die Kernpunktmente	252
4. Berücksichtigung der Formänderung des Gewölbes durch Eigengewicht	253
5. Berücksichtigung der Temperatur- und Schwindeneinflüsse	258
6. Allgemeine Schlußbemerkungen	261

Kapitel XXIV.

Vollständiges Beispiel der Berechnung einer gelenklosen Bogenbrücke mit graphischer Ermittlung der statisch unbestimmten Größen und direkter Benutzung derselben zur Bestimmung der Momente	262
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Abschnitt II.

Berechnungsverfahren auf Grund der zeichnerischen Ermittlung der Formänderungen.

Elastizitätslehre.

Allgemeines	281
Kapitel I. Die Biegungslinie als Seileck	281
Rechnerische Beziehungen	281
Zeichnerische Ermittlung nach Mohr	282
Kapitel II. Verschiebungspläne für Stabzüge	285
„Williot“-Plan	285
Das Stabzugverfahren bei gelenkig verbundenen Stäben	287
Der biegungsfeste Stabzug	288
Der biegungsfeste Stabzug mit zeichnerischer Ermittlung der Strecken ρ	293
Kapitel III. Die zeichnerische Ermittlung der Verschiebung vermittelt der w -Gewichte (andeutungsweise)	296
Kapitel IV. Der Maxwellsche Satz von der Gegenseitigkeit der Formänderungen	296
Kapitel V. Ermittlung der statisch unbestimmten Größen	298
Kapitel VI. Einflußlinien für statisch unbestimmte Größen	300
Kapitel VII. Zweifach statisch unbestimmte Bauwerke	302
Allgemeines	302
Einflußliniengleichung für die unbestimmten Größen und zeichnerische Lösung	303
Rechnerische Lösung	307

Mehrstielige Rahmen.

Kapitel VIII.

Einleitung	312
Zeichnerische Behandlung	313

Einleitung.

Kapitel I.

Gleichgewichtsbedingungen, Auflagerungsarten und Beispiele für äußerlich statisch bestimmte Bauwerke.

Gleichgewichtsbedingungen.

Für die Beurteilung der Wirkung einer Kraft sind maßgebend:

1. Ihre Größe (in kg oder t).
2. Ihre Richtung (wagerecht, lotrecht, schräg).
3. Die Lage ihres Angriffspunktes (Knotenpunkt eines Fachwerkes, Säule oder Auflager).

An ihrem Angriffspunkt ruft jede Kraft eine Gegenkraft wach, die ihr gleich sein muß an Größe, gleich an Richtung, aber entgegengesetzt im Sinn, sofern eine bewegende Wirkung auf den Punkt ausgeschlossen sein soll.

Jedes Bauwerk steht im Grunde genommen unter der Wirkung einer einzigen Kraft, die wir uns als Resultierende aller Lasten vorstellen können, und die Bedingung für den Ruhezustand des Bauwerkes ist, daß eine Gegenkraft — die Resultierende aller Reaktionen — diese in der oben angegebenen Weise aufhebt.

In der Statik hat es sich als praktisch erwiesen, an Stelle der Resultierenden selbst, stets mit deren lotrechten und wagerechten Seitenkräften zu arbeiten, weil dadurch eine bequeme Handhabe für die Feststellung von Richtung und Größe einer Kraft gegeben ist. —

So ist der einfache Balken nach Abb. 1 durch die nach Lage, Größe, Richtung und Sinn gegebene Kraft R belastet, und wir würden die bei diesem Belastungsfall auftretende resultierende Gegenkraft aus beiden Auflagern zusammen nach Lage, Größe, Richtung und Sinn ohne weiteres erhalten, wenn wir einfach R beibehielten, den Pfeil aber umkehrten.

Statt dessen geben wir aber K_1 und K_r an und von K_1 noch H und V , weil uns an der Kenntnis der Anteile jedes Auflagers an der Gesamtreaktion gelegen ist.

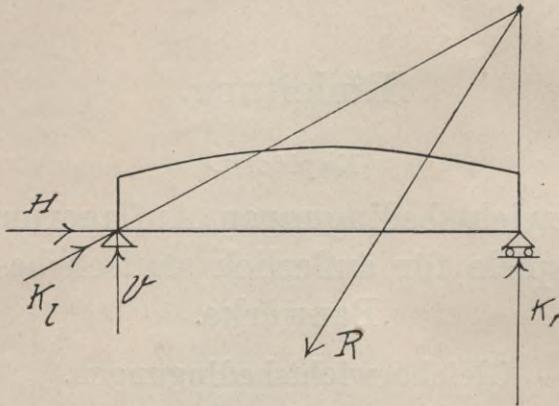


Abb. 1.

Würde die Resultierende von H , V und K_r sich nicht genau nach Lage, Größe und Richtung mit der Last R decken und umgekehrten Sinn haben, dann bliebe offenbar eine Kraftwirkung übrig, die das Gleichgewicht störte. Wir können hier 3 Fälle unterscheiden:

1. Die Gegenkraft entspricht nach Lage und Richtung der Last R , ohne ihre volle Größe zu erreichen: das Bauwerk wird in der Pfeilrichtung von R verschoben.

2. Die Gegenkraft entspricht nach Größe und Richtung der Last R , verläuft aber in einem gewissen Abstände parallel zu ihr: das Bauwerk wird gedreht.

3. Jede andere von 1 und 2 verschiedene Art der Gegenkraft ruft gleichzeitig Verschiebung und Verdrehung des Bauwerkes hervor.

Aus der Sicherheit gegen Verschiebung entsteht die Gleichgewichtsforderung, daß ein Kraftüberschuß in irgend einer Richtung nicht verbleiben darf; praktischerweise entstehen daraus 2 Gleichgewichtsbedingungen:

1. Summe aller lotrechten Kräfte gleich Null.
2. Summe aller wagerechten Kräfte gleich Null.

Aus der Sicherheit gegen Verdrehung entsteht die dritte Gleichgewichtsforderung, daß irgend ein Kräftepaar nicht verbleiben darf. Das ist aber bekanntlich erfüllt, wenn

3. die Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte bezogen auf einen beliebigen Punkt gleich Null ist.

Die letzte Bedingung hängt zusammen mit der Lage der Kräfte zueinander in der Ebene. Hätten wir im angegebenen Beispiel (Abb. 2) A den Wert 2000 und B den Wert 3000,

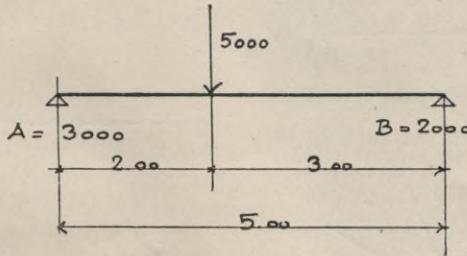


Abb. 2.

also umgekehrt, wie es richtig ist, zugeschrieben, so wäre wohl die erste Bedingung erfüllt: „Summe aller lotrechten Kräfte gleich Null“ (die zweite Bedingung kommt nicht in Frage), aber nicht die dritte Bedingung: „Summe aller drehenden Einflüsse gleich Null“; denn dies ist nur der Fall, wenn $A = 3000$ und $B = 2000$ ist. Alles in allem fordern die drei Gleichgewichtsbedingungen Σ aller Kraftwirkungen gleich Null.

Diese drei Bedingungen geben daher für die rechnerische Untersuchung drei Bestimmungsgleichungen, womit drei Unbekannte gefunden werden können. Wenn also bei einem Bauwerk die Lasten gegeben sind und somit der eine Teil der äußeren Kräfte, so kann der andere Teil der äußeren Kräfte, nämlich die Auflagerreaktionen, mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen gefunden werden, aber nur solange als auch nicht mehr als drei unbekannte Auflagergrößen vorhanden sind. Das ist z. B. der Fall bei einem einfachen Balken nach Abb. 1.

Statisch bestimmte Bauwerke.

Solche liegen vor, wenn die Auflagerkräfte sich ausschließlich mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen bestimmen lassen. Ferner ist noch die Bedingung vorhanden, daß jeder Bruchteil des Bauwerkes für sich ebenfalls mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen berechenbar bleibt, d. h. es müssen bei einem abgeschnittenen Teil die inneren Spannkkräfte,

welche nach der Trennung gewissermaßen als äußere Kräfte in Erscheinung treten, ebenfalls mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen bestimmbar sein. Wenn man sich nämlich bei einem

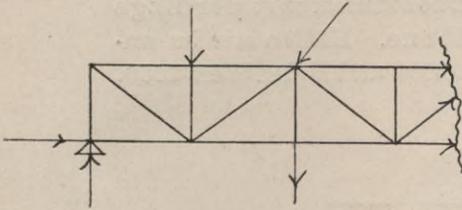


Abb. 3.

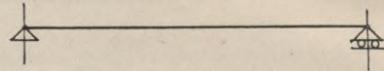
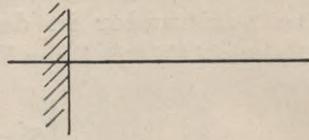


Abb. 4.

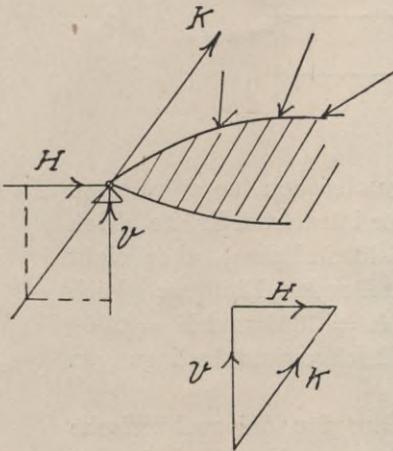


Abb. 6.

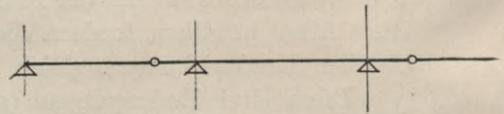
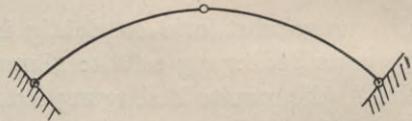


Abb. 5.

solchen abgeschnittenen Stück (Abb. 3) die Auflagerung nach der Schnittstelle hin verlegt denkt, dann können die dort anzubringenden Kräfte auch als Auflagerkräfte angesehen werden und alle übrigen als Belastung.

Zu unterscheiden haben wir noch einfache Bauwerke, die nur aus einem starren Körper bestehen, und mehrteilige Bauwerke, entstanden aus der gelenkartigen Verbindung einzelner einfacher Bauteile (Abb. 4 und 5).

Auflagerungsarten.

Beim festen Auflagergelenk (Abb. 6) liegt der Stützpunkt der Scheibe fest, und diese kann nur eine Drehung um den festen Punkt ausführen. Genau genommen müßte ein solches Gelenk mit Hilfe eines Gelenkbolzens gebildet werden. Der Auflagerdruck

geht durch den Drehpunkt der Scheibe, bekannt ist also seine Lage in der Ebene, unbekannt ist seine Richtung und Größe, sobald beliebige Kräfte die Scheibe in ihrer Ebene belasten. Es sind also noch 2 Unbekannte vorhanden: die beiden Komponenten. Man kann ein solches festes Auflagergelenk durch 2 starre Stäbe ersetzen, wodurch die Anzahl 2 der Unbekannten noch klarer zum Ausdruck kommt (Abb. 7).

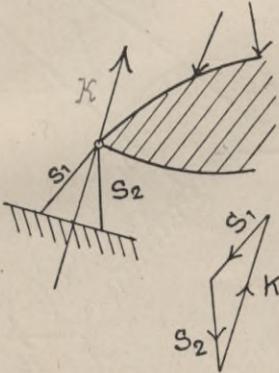


Abb. 7.

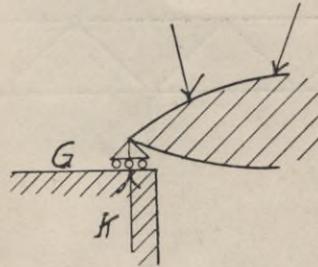


Abb. 8.

Beim **beweglichen Auflagergelenk** (Abb. 8) kann sich der Stützpunkt der Scheibe auf einer geraden Ebene bewegen. Eine wagerechte Komponente der Auflagerkraft würde also von einem beweglichen Auflagergelenk nicht auf die Unterstüttung übertragen werden können. Aufnehmbar bleibt daher nur eine zur Gleitebene senkrechte Kraft. Lage und Richtung derselben ist bekannt, unbekannt aber ihre Größe, so daß bei einem beweglichen Auflagergelenk nur eine Unbekannte vorhanden ist. Das bewegliche Auflager hat natürlich trotzdem den Zweck, eine seitliche Nachgiebigkeit zu ermöglichen, aber nicht, wie gesagt, infolge der Belastungskräfte, sondern infolge von Temperaturexpansionen des Konstruktionsteiles. Solche treten genau genommen bei jedem noch so kleinen Bauwerke auf. Bauwerke mit einem festen und einem beweglichen Auflager haben somit drei unbekannte Auflagerkräfte und sind mit Hilfe der 3 Gleichgewichtsbedingungen bestimmbar. Eine andere Form des beweglichen Lagers ist die Pendelstütze (Abb. 9), deren Drehung für den abgestüttzten Träger dieselbe Wirkung hat wie ein Rollenlager.

Beim **eingespannten Träger** (Abb. 10) geht die Kraftrichtung K nicht mehr durch einen bestimmten Punkt (Schwerpunkt des Einspannungsquerschnittes) der Auflagerung hindurch;

2 Unbekannte wären nur so lange vorhanden, als dies tatsächlich der Fall wäre.

Das Wesen der Einspannung besteht eben darin, daß eine Drehung des eingespannten Körpers wie bei dem festen Auflagergelenk nicht stattfinden kann.

Man kann sich eine Einspannung auch dadurch bewirkt denken, daß im Schwerpunkt des verspannten Querschnittes

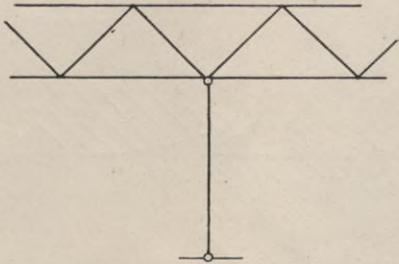


Abb. 9.

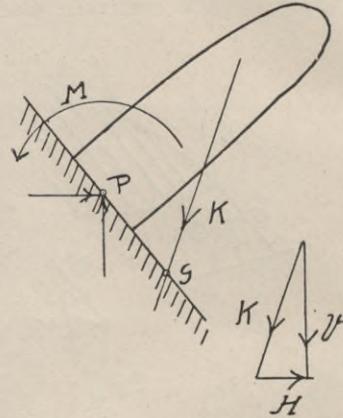


Abb. 10.

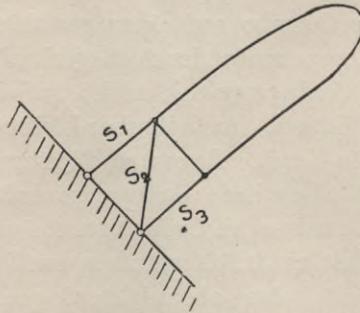


Abb. 11.

die Horizontal- und Vertikalkomponente der resultierenden Kraft und ein Moment M angreifen (Abb. 10). Für den Fall, daß der Punkt G mit P zusammenfällt, wird das Moment M gleich Null, d. h. der Träger kommt als eingespannter Träger nicht zur Geltung. Wir haben also an einer Einspannungsstelle 3 Unbekannte. Diese treten wieder klarer in Erscheinung, wenn wir uns die Einspannung durch 3 Stäbe bewerkstelligt denken (Abb. 11).

Auflagerungsarten im Beton- und Eisenbetonbau.

Als feste Auflagergelenke werden, wenn absolute Korrektheit in der Auflagerung ein dringendes Bedürfnis ist, namentlich

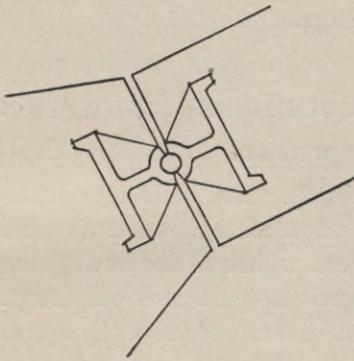


Abb. 12.

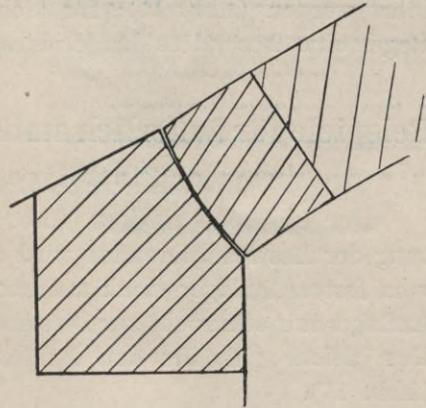


Abb. 13.

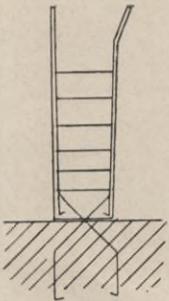


Abb. 14.

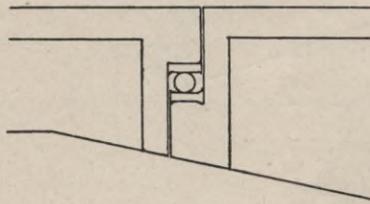


Abb. 15.

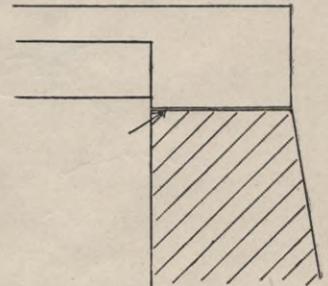


Abb. 16.

bei großen konzentrierten Drücken, Stahlgelenke verwendet, die auf einem Stahlbolzen drehbar sind (Abb. 12). In den Druckflächen zwischen Stahl und Beton wird der Beton oft mit 60 bis 100 kg/cm² beansprucht. Billiger sind die Betongelenksteine (Abb. 13), welche jedoch für große konzentrierte Drücke (bei großen Bogenrippen) nicht geeignet sind. Bei Aufstützung von Rahmenbindern usw. werden die festen Auflagergelenke meist nur unvollkommen ausgeführt. Die Anordnung der Eiseneinlagen muß hier den gelenkigen Charakter der Auflagerung zum Ausdruck bringen (Abb. 14). Bei großen Hallenbauten wird man die festen Auflager-

gelenke nicht in dieser unvollkommenen Form ausführen, sondern zu Bolzengelenken schreiten.

Das bewegliche Auflagergelenk kann ebenfalls je nach Erfordernis der Konstruktion mehr oder weniger korrekt ausgeführt werden (Abb. 15); für kleinere Bauwerke genügt in der Regel eine besonders hergerichtete Fuge. (Abb. 16.)

Beispiele für äußerlich statisch bestimmte Bauwerke.

a) Einteilige Bauwerke.

Der einfache Balken (Abb. 1 Seite 2). Bei beliebiger Richtung der Lastresultierenden wird eine wagerechte Seitenkraft stets vom festen Auflagergelenk aufgenommen, während das bewegliche Auflager nur senkrecht zur Gleitebene gerichteten Druck empfängt. Das gleiche gilt für den Balken mit überstehendem Kragarm (Abb. 17).

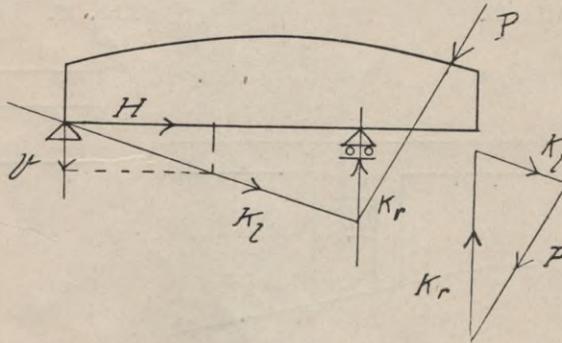


Abb. 17.

Es ist noch von Wichtigkeit, hier näher auf die Bestimmung des Maximalmomentes bei wandernder Last einzugehen.

Das in Frage kommende Gesetz ist im Anhang „Höhere Mathematik“ unter M in den Absätzen 27 und 28 eingehend erläutert. Es lautet:

„Das im Angriffspunkt einer wandernden Last jeweilig auftretende Biegemoment erreicht dann seinen Größtwerth, wenn diese Last (gehörig zu einer beweglichen Gruppe von Lasten mit bestimmten Abständen) und die Resultierende aller zurzeit auf dem Balken befindlichen Lasten symmetrisch zur Balkenmitte stehen.“

Sind nur Einzellasten innerhalb des beweglichen Lastenzuges vorhanden, so kann man nach diesem Gesetz augenblicklich sowohl das unter jeder Einzellast größtmögliche Biegemoment, als auch das unter all diesen Möglichkeiten für die Berechnung des Trägers maßgebende absolut größte Biegemoment (unter einer der der Resultierenden zunächst liegenden Einzellasten) bestimmen.

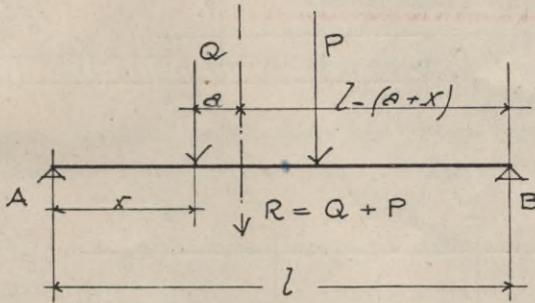


Abb. 18.

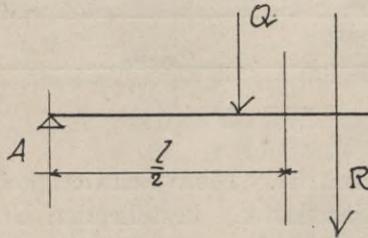


Abb. 19.

Da zwei ungleich große Lasten (durch eine Dampfwalze) bei Balkenbrücken sehr häufig in Frage kommen, so sei die Anwendung des Gesetzes auf diesen sehr einfachen Spezialfall noch besonders gezeigt.

Die Lasten seien Q und P in bestimmtem Abstand und mit bestimmter Lage der Mittelkraft R ; Q sei größer als P . Offenbar ist das größtmögliche Moment unter Q zu suchen (Abb. 18), und es tritt dort ein, wenn Q und R symmetrisch zur Balkenmitte stehen (Abb. 19), wenn also nach Abb. 18

$$x = \frac{l}{2} - \frac{a}{2} \text{ ist.}$$

Befindet sich innerhalb eines beweglichen Lastenzuges außer Einzellasten noch gleichmäßige Last, so trifft zwar

dieselbe Gesetzmäßigkeit zu, doch sind wir hier nicht in der Lage, die Resultierende des gerade auf dem Träger befindlichen Lastenzuges nach Größe und Lage (innerhalb des Lastenzuges) festzulegen, weil wir nicht wissen, wieviel von der gleichmäßigen Last sich in dem Augenblick auf dem Träger befindet, wo unter der gerade betrachteten Last das dort größt-

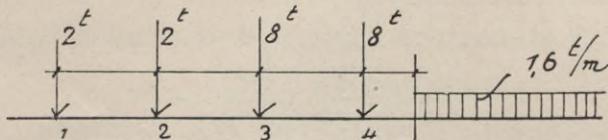


Abb. 20.

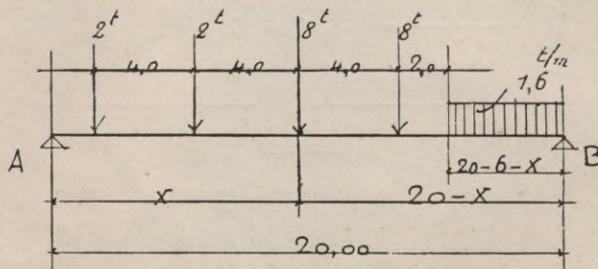


Abb. 21.

mögliche Moment auftritt. Diese Schwierigkeit kommt zu der (auch bei nur Einzellasten) bestehenden Ungewißheit hinzu, unter welcher Einzellast das absolut größte Moment zu suchen ist. In solchen Fällen sieht man am besten von allgemeinen Lösungen mit Buchstaben ab, sondern setzt gleich Zahlen ein und verfährt nach folgendem Beispiel:

Ein Lastenzug nach Abb. 20 fahre über eine Brücke von 20 m Spannweite.

Da wir, wie gesagt, von vornherein nicht wissen können, unter welcher Last das absolut größte Moment eintreten wird, so sind wir darauf angewiesen, einen Versuch zu machen und führen denselben für Last 3 durch.

Nach Abb. 21 ist dann

$$A = \left[2 \cdot 2t(20 - x + 6) + 2 \cdot 8t(20 - x - 2) + \frac{1,6t(14 - x)^2}{2} \right] \cdot \frac{1}{20}$$

$$\text{gibt } A = 27,45 - 2,12 x + 0,04 x^2$$

$$\text{und } M_x = A \cdot x - 2 t \cdot 4 - 2 t \cdot 8$$

$$\text{oder } M_x = 27,45 x - 2,12 x^2 + 0,04 x^3 - 24$$

$$\frac{dM_x}{dx} = 27,45 - 4,24 x + 0,12 x^2 = 0$$

$$\text{oder } x^2 - 35,3 x = -229$$

$$x_{1,2} = \frac{35,3}{2} \pm \sqrt{17,65^2 - 229}$$

$$x_1 = 26,75$$

$$x_2 = 8,55 \text{ m.}$$

Bei diesem x befinden sich — wie wir jetzt festzustellen haben — noch alle zuerst einbezogenen Lasten auf dem Träger (Abb. 22).

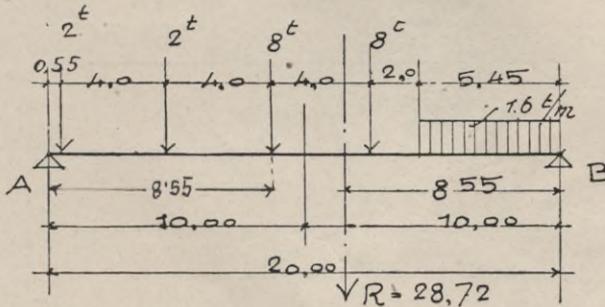


Abb. 22.

Wir erhalten:

$$M_x = 27,45 \cdot 8,55 - 2,12 \cdot 8,55^2 + 0,04 \cdot 8,55^3 - 24 = 80 \text{ mt,}$$

was wirklich ein Maximum ist, da der zweite Differentialquotient negativ wird:

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} = -4,24 + 0,24 x = -2,19$$

Die Resultierende aller Lasten hat vom rechten Auflager aus den Abstand

$$a = \frac{8,72 \cdot \frac{5,45}{2} + 8 \cdot (7,45 + 11,45) + 4 \cdot 17,45}{28,72} \sim 8,55 \text{ m,}$$

sodaß Last 3 und R symmetrisch zur Balkenmitte stehen.

1) Anhang höhere Mathematik, K, Abs. 23.

2) Desgl. I.

Beim Vergleich der Einzellasten mit der Streckenlast scheint uns aber ein noch größeres Moment auftreten zu können, wenn wir etwa die in Abb. 23 gegebene Anordnung betrachten. Hierfür wäre dieselbe Untersuchung noch einmal durchzuführen.

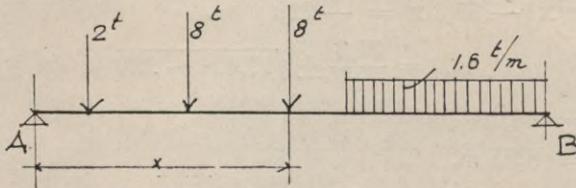


Abb. 23.

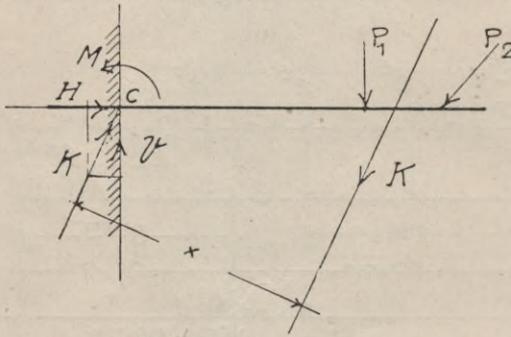


Abb. 24.

Berücksichtigt ist noch nicht das Eigengewicht des Balkens. Beträgt dieses z. B. 2 t per laufenden Meter, so ist das Moment in Balkenmitte

$$M_g = \frac{gl^2}{8} = \frac{2 \cdot 20^2}{8} = 100 \text{ mt,}$$

welches wir einfach addieren können. Die genaue Berechnung mit Einbeziehung des Eigengewichtes in die Differentiation bietet auch weiter keine Schwierigkeiten; ein merklicher Unterschied kommt dabei nicht mehr heraus.

Der einseitig eingespannte Träger (Freitträger Abb. 24). Alle äußeren Kräfte P_1, P_2, \dots (mit der Resultierenden K) erzeugen am Einspannungspunkt c einen gleich großen und gleich gerichteten Lagerdruck K . Für den Fall, daß die äußere Resultierende ihrer Richtung nach auf den Punkt c trifft, entsteht keine Beanspruchung des Einspannungsquerschnittes; derselbe

wirkt dann wie ein festes Auflagergelenk, dessen beide Unbekannten nunmehr H und V sind. In der Regel liegen aber diese beiden Resultierenden K nicht in einer Geraden, sondern haben einen Abstand x . Es entsteht also außerdem am Punkt c noch ein

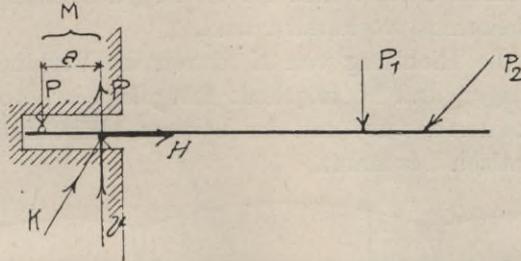


Abb. 25.

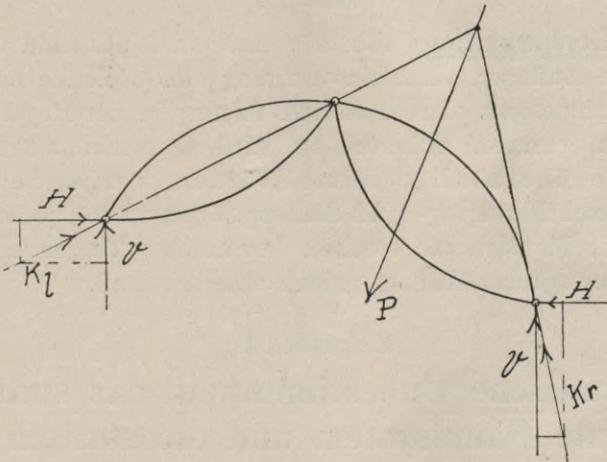


Abb. 26

Moment $K \cdot x = M$. Die Wirkung des Momentes kann man sich auch etwa nach Abb. 25 auslegen, wobei es freisteht, die Kraft P willkürlich anzunehmen und den zugehörigen Hebelarm a aufzusuchen oder umgekehrt zu verfahren.

Wir haben also beim eingespannten Träger 3 Unbekannte, H , V und M .

b) Mehrteilige Bauwerke.

Der Dreigelenkbogen (Abb. 26) besitzt zwei feste Auflagergelenke und ein bewegliches Mittelgelenk. Die Richtung von K_1 muß bei der angegebenen Belastung durch

den linken und mittleren Gelenkpunkt hindurchgehen, wenn eine Drehung der linken unbelasteten Scheibe gegen die rechte nicht eintreten soll. Damit ist auch die Richtung von K_r gegeben. An jedem Auflager ergeben sich nun 2 Unbekannte, nämlich Größe und Richtung des Kämpferdruckes, so daß 4 Unbekannte vorhanden sind.

Da aber die Richtung von K_1 durch die Verbindungsgerade zwischen Auflager und Mittelgelenk festgelegt ist, so scheidet eine Unbekannte aus, und das System bleibt mit nur 3 Unbekannten statisch bestimmt.

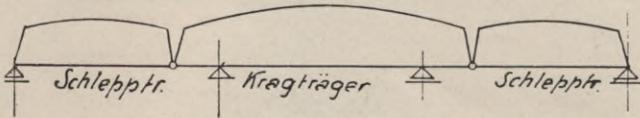


Abb. 27.

Der Gerberbalken (Abb. 27) hat ein festes und mehrere bewegliche Auflager. Auf eine Öffnung ohne Gelenke muß stets eine mit mindestens einem Gelenk folgen; in der Regel sind es zwei. Im ganzen müssen so viel Gelenke vorhanden sein, wie überzählige Mittelstützen vorhanden sind. Man unterscheidet Krag- und Schleppträger, wovon jeder, genau genommen, für sich als statisch bestimmter Träger ein festes und ein bewegliches Auflagergelenk erhalten muß.

Kapitel II.

Die statische Unbestimmtheit, das statisch bestimmte Hauptsystem und die statisch nicht bestimmbareren Größen.

Der Grad der statischen Unbestimmtheit.

Der in Abb. 28 dargestellte Rahmen, der mit beliebigen Kräften in seiner Ebene belastet sein soll, besitzt ein eingespanntes Auflager I, ein festes Auflagergelenk II und ein bewegliches Auflagergelenk III*). An jedem Auflager greifen die entsprechenden unbekanntes Auflagerreaktionen an, sodaß sich im ganzen 6 davon ergeben. Da nur 3 Gleichgewichtsbedingungen vorhanden sind, so ist das System also 3fach statisch unbestimmt. Der

*) Der Fall ist absichtlich ganz allgemein gewählt und hat keine praktische Bedeutung.

Rahmen nach Abb. 29 ist also nur einfach statisch unbestimmt. Wenn die statische Unbestimmtheit nur durch die Auflagerreaktionen bewirkt ist, wie in diesem Falle, so spricht man von einer **äußerlichen statischen Unbestimmtheit**; denn sind die Auflagerreaktionen bekannt, wobei wir unter Re-

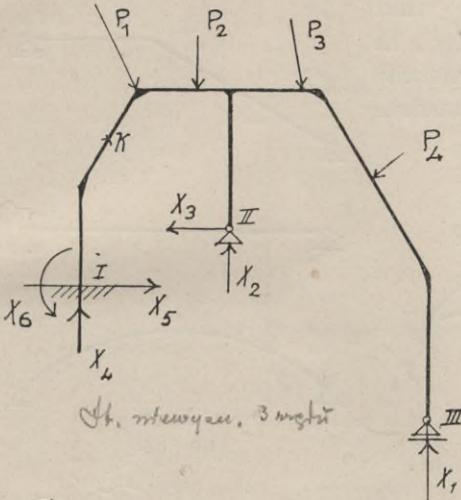


Abb. 28.

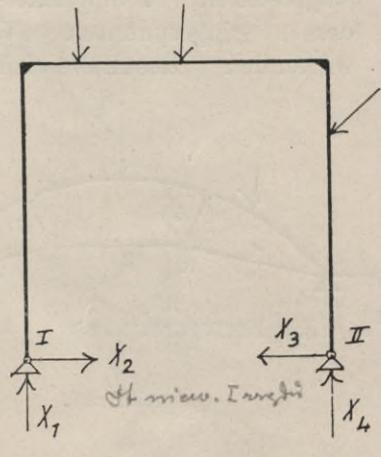


Abb. 29.

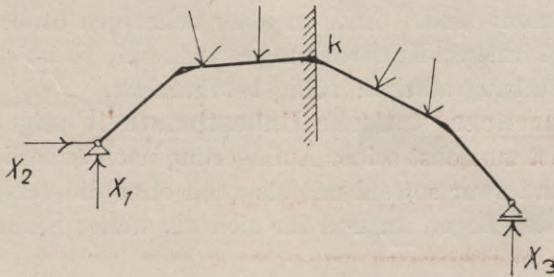


Abb. 30.

aktionen nicht nur einfache Kräfte, sondern auch Momente verstehen können, so ist für jeden beliebigen Querschnitt K des Stabzuges Längskraft, Querkraft und Biegemoment ohne weiteres bestimmbar. Diese 3 Kraftwirkungen treten nämlich in jedem biegungsfesten Stabzug auf im Gegensatz zu einem Fachwerk, dessen Stäbe nur reine

Normalspannungen erhalten, sofern sie nicht auch noch direkter Biegung ausgesetzt sind.

Zum Beweise brauchen wir nur an einen beliebigen einfachen Träger zu denken (Abb. 30); wir erkennen sofort, daß in jedem Querschnitt K der gleiche Fall vorliegt wie in Kapitel I, Auflagerungsarten, eingespannte Träger.

Anstatt der lotrechten und wagerechten Komponente der in dem eingespannten Querschnitt wirkenden Resultierenden suchen

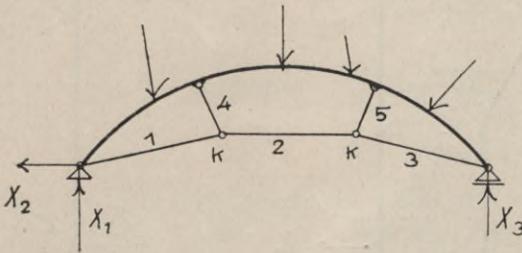


Abb. 31.

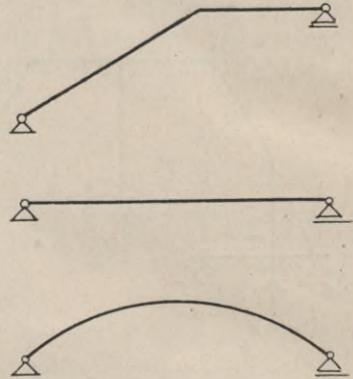


Abb. 32.

wir zweckmäßigerweise dort die Tangentiale und Normale zum Querschnitt, so daß die 3 Unbekannten an beliebiger Stelle eines biegungsfesten Stabzuges Längskraft, Querkraft und Biegemoment sind. Sind an einer beliebigen Stelle der Stabachse diese 3 inneren Kraftwirkungen bekannt, so ist damit auch der ganze Stabzug statisch völlig bestimmbar.

Die innerliche statische Unbestimmtheit zeigt Abb. 31. Der Träger ist zunächst seiner Auflagerung nach äußerlich statisch bestimmt, und zwar sowohl mit als auch ohne die verspannenden Stäbe, weil der Bogen an und für sich als steifer Stabzug durchlaufen soll.

Das System stellt also äußerlich genau so einen einfachen Balken dar wie einer der Träger in Abb. 32; nur hebt die gelenkig angeschlossene Verspannung die einfache Bestimmbarkeit im Innern auf. Danach ist der Träger weder als einfacher biegungsfester Stab noch als Fachwerk anzusehen, sondern als ein Mittelglied zwischen beiden. Offenbar genügt hier schon die Kenntnis der Spannkraft eines der unteren Stäbe, um alle übrigen und damit auch das ganze System völlig statisch bestimmt zu machen.

Die in den Stäben wirkenden Kräfte sind dann nämlich einfach als neu hinzukommende äußere Belastung an dem — dann auch innerlich statisch bestimmten — Balken anzusehen. Das System ist also innerlich einfach statisch unbestimmt.

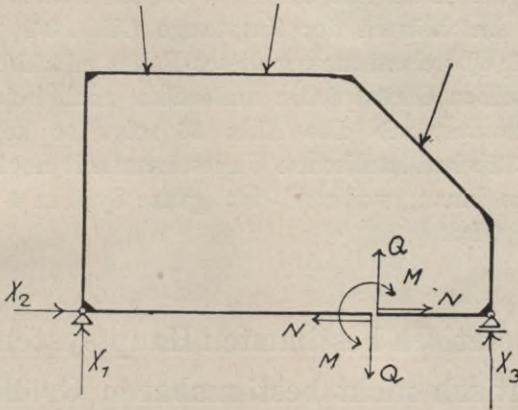


Abb. 33.

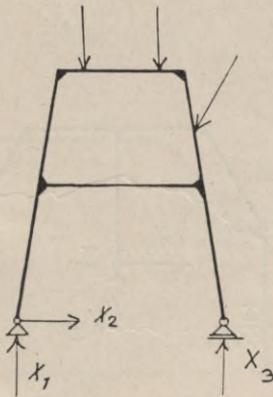


Abb. 34.

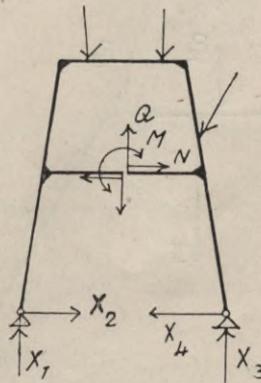


Abb. 35.

Derselbe Fall liegt vor, wenn die Zugstange ohne Sprengung ausgeführt wird, wobei die Hängestäbe keinen Systemzug erhalten, aber trotzdem meist zur Vermeidung allzu großer Durchbiegung der Zugstange beibehalten werden.

Abb. 33 zeigt einen vollständig geschlossenen Rahmen, der äußerlich statisch bestimmt ist, innerlich aber unbestimmt.

Der Rahmen ist seiner Natur nach ein biegungsfester Stabzug und unterscheidet sich von den vorhergehenden nur dadurch, daß er geschlossen ist, was an und für sich jedoch gleichgültig ist.

Der Rahmen ist also innerlich 3fach statisch unbestimmt.

Führen wir nach Art der Abb. 31 ein Portal aus, jedoch mit steifen Anschlüssen der Zugstange (Abb. 34), so erkennen wir sofort die Übereinstimmung dieses Falles mit Abb. 33. Bilden wir in demselben Gerüstpfeiler außerdem noch beide Lager als feste Gelenke aus, wie dies Abb. 35 zeigt, so kommt zu der innerlichen 3fachen statischen Unbestimmtheit noch eine äußerliche einfache hinzu, wodurch das ganze System 4fach statisch unbestimmt wird.

Wahl des statisch bestimmten Hauptsystems und der statisch nicht bestimmbar GröÙen.

Die Wahl des statisch bestimmten Hauptsystems erfolgt so, daß die überzähligen AuflagergröÙen entfernt werden.

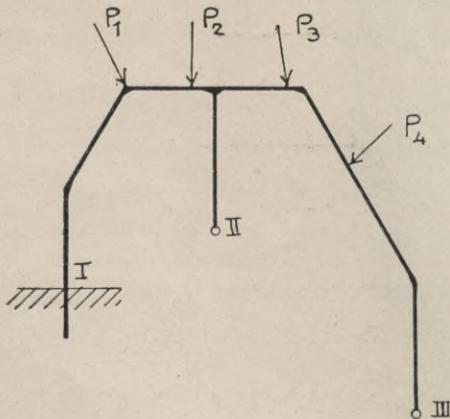


Abb. 36.

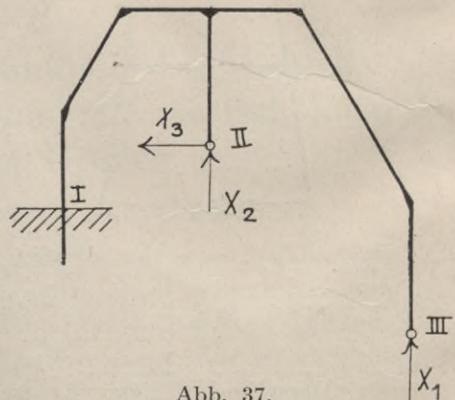


Abb. 37.

Für den Rahmen Abb. 28 könnten wir das statisch bestimmte Hauptsystem z. B. einfach dadurch herstellen, daß wir die Auflager II und III gänzlich entfernten. Wir erhalten dann einen beim Auflager I fest eingespannten einfachen Kragträger

und als unbestimmte Größen die Kräfte X_1 , X_2 und X_3 ¹⁾. Die Berechnung der wahren inneren Spannungen und wirklichen Auflagerreaktionen eines statisch unbestimmten Systems fußt nun auf der Betrachtung folgender gleichzeitig bestehender Belastungszustände:

1. Des statisch bestimmten Hauptsystems, belastet durch die äußeren Kräfte $P_1, P_2, P_3, P_4 \dots$ (Abb. 36).
2. Des statisch bestimmten Hauptsystems, belastet lediglich mit den überzähligen Größen X_1, X_2 und X_3 (Abb. 37).

Die Wahl des statisch bestimmten Hauptsystems ist beliebig.

Als solche kennen wir hauptsächlich den einfachen Kragträger und den einfachen Balken (mit einem festen und einem beweglichen Auflager). Ein System mit 2 oder 3 beweglichen Auflagern

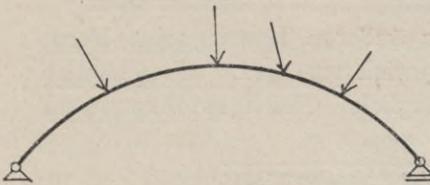


Abb. 38.

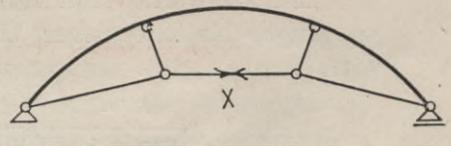


Abb. 39.

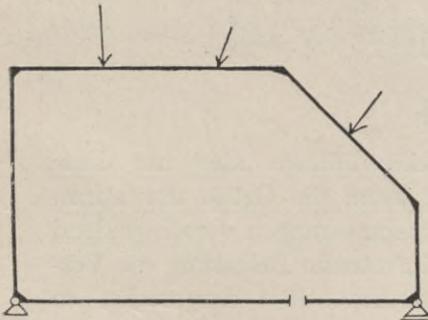


Abb. 40.

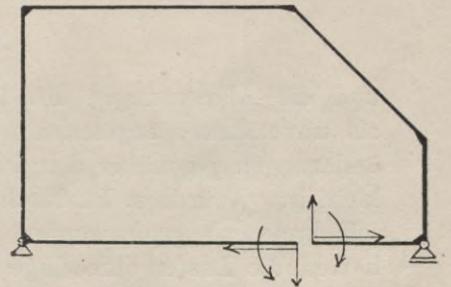


Abb. 41.

können wir also nicht als statisch bestimmtes Hauptsystem ansehen. Bei der Auswahl der zu entfernenden Größen wird man

¹⁾ An diesem Beispiel soll nur das Prinzip erläutert werden, weswegen es auch ganz allgemein gehalten ist; ob es zweckmäßig ist, in dem vorliegenden Falle in der angedeuteten Weise vorzugehen, sei vorläufig dahingestellt.

stets so vorgehen, daß das entstehende Hauptssystem die Rechnung möglichst einfach gestaltet. Es brauchen auch nicht immer ganze Auflager entfernt zu werden. So können wir z. B. den Rahmen Abb. 29 dadurch statisch bestimmt machen, daß wir aus einem der beiden festen Gelenke ein Rollenlager machen, sodaß ein einfacher Balken entsteht. Im System nach Abb. 31 wäre die innerlich statische Unbestimmtheit auszuschalten nach Abb. 38 und die Belastung mit X nach Abb. 39 vorzunehmen. Den Rahmen Abb. 33 führen wir durch einen Schnitt im unteren Riegel in das Hauptsystem Abb. 40 über; Abb. 41 zeigt dieses mit den überzähligen Größen belastet.

Kapitel III.

Allgemeines über elastische Formänderungen.

Ein Bauwerk verändert unter äußeren Lasten seine Form so lange, bis ein neuer Gleichgewichtszustand, also Ruhe eingetreten ist. Der ursprüngliche Gleichgewichtszustand

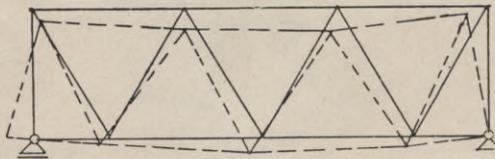


Abb. 42.

und die Abmessungen des Bauwerkes können also nur dann als unverändert angesehen werden, wenn die Größe der Formänderungen gegenüber den Bauwerksabmessungen verschwindend klein ist. Würde z. B. durch die eintretende Belastung die Verschiebung so groß werden wie in Abb. 42¹⁾ dargestellt, so hätten die Lasten ihre Lage geändert, und die Berechnung der Auflagerkräfte und des Gleichgewichtszustandes mit Hilfe der ersten Maße wäre hinfällig geworden. Bei normaler Belastung sind aber in Wirklichkeit die entstehenden Veränderungen so unbedeutend, daß die für das starr angenommene Bauwerk aufgestellten Gleichgewichtsberechnungen vor wie nach als richtig beibehalten werden können.

Diese Voraussetzung wird bei allen statischen Berechnungen gemacht. Trotzdem ist es erforderlich, die

Größe der elastischen Formänderungen zu kennen, und zwar aus folgenden Gründen:

1. Denkt man an eine Durchbiegung, so werden allerdings die rechnermäßigen Spannungen durch dieselbe in der Regel nur wenig beeinflusst. Es kann aber dadurch ein anderer Konstruktionsteil, der mit dem sich durchbiegenden verbunden ist, eine ganz neue, vielleicht sonst nicht berücksichtigte Beanspruchung erfahren (vgl. den Einfluß der einzelnen Balken einer Plattenbalkenbrücke aufeinander durch die Querträgerkonstruktion oder Versteifungen).

2. Sodann bietet uns die Kenntnis der elastischen Formänderung das einzige Hilfsmittel zur Untersuchung von Bauwerken, die sich nicht mehr mit Hilfe der 3 Gleichgewichtsbedingungen berechnen lassen.

Wir wollen nun die Elastizitätslehre, soweit sie für unser Gebiet erforderlich ist, von Grund auf mit ihren einzelnen Anwendungen auf die Berechnung von Durchbiegungen und Auflagergrößen, in elementarer und allgemeiner Behandlung, betrachten, bis wir schließlich zur Ableitung der Grundgesetze für die Berechnung statisch unbestimmter Systeme vorschreiten können. Man unterscheidet eine rechnerische und eine zeichnerische Behandlung dieses Stoffes, welche wir in den Abschnitten I und II besprechen.

¹⁾ In der Aufzählung der Abbildungen werden die Nummern 43 bis 55 überschlagen!

Abschnitt I.

**Berechnungsverfahren
auf Grund
rechnerischer Ermittlung der
Formänderungen.**

Elastizitätslehre.

Kapitel IV.

Formänderungsberechnungen auf Grund elementarer Ableitungen.

a) Die rechnerische Bestimmung der 3 Arten der elastischen Formänderung mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes.

Einleitung.

Wir unterscheiden 3 Arten der Formänderung:

1. Durch Längskräfte (kommt nur bei großen Abmessungen in Betracht).
2. Durch Querkräfte (in den meisten Fällen zu vernachlässigen).
3. Durch Biegemomente (meist sehr erheblich gegenüber 2).

Obgleich in den Formänderungen die Querkräfte allgemein vernachlässigt werden dürfen und zwar immer in den Fällen, wo die Querschnittsabmessungen gegenüber den Bauwerksabmessungen sehr klein sind, so muß man sich doch stets bewußt bleiben, daß sie tatsächlich vorhanden sind und von Fall zu Fall überlegen, ob die durch sie bewirkte Formänderung einen nennenswerten Betrag erreicht. Die rechnerische Ermittlung erfolgt hier auf Grund des Hookeschen Gesetzes, wonach die Dehnungen sich verhalten wie die Spannungen.

1. Formänderung durch Längskräfte.

Ein eingespannter prismatischer Stab (Abb. 56) sei in seiner Längsrichtung durch die Kraft P beansprucht. Infolge des Gleichgewichts zwischen den äußeren und inneren Kräften muß

$$P = \sigma \cdot F \text{ oder } \sigma = \frac{P}{F}$$

sein. Gleichzeitig und in gleichem Verhältnis mit der Spannung

*P = Kraft
F = Querschnitt
σ = Dehnung*

erfährt der Stab infolge seiner Elastizität eine Verlängerung Δl . Da nun diese naturgemäß sowohl von der Stablänge als auch von der Spannung abhängig ist, so folgt sie der Gleichung

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \sigma \text{ oder } \frac{\Delta l}{l} = \alpha \cdot \sigma.$$

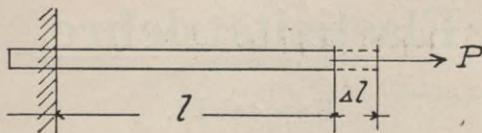


Abb. 56.

Hierin bedeutet α diejenige Verlängerung (Verkürzung), welche 1 cbcm, durch 1 kg beansprucht, erfährt; α wird allgemein als Dehnungszahl bezeichnet. Das Verhältnis ε zwischen der Verlängerung Δl und der ursprünglichen Länge l heißt Dehnung.

Also ist

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \alpha \cdot \sigma,$$

prawa Hooke'a

d. h. Dehnung = Dehnungszahl \times Spannung. Allgemein wird nun an Stelle der Dehnungszahl α ihr reziproker Wert

$\frac{1}{\alpha} = E$ (Elastizitätsmodul) genannt, sodaß die Dehnungsgleichung lautet:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \alpha \cdot \sigma.$$

$$\text{Für } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = 1 \text{ wird dann } \sigma = E,$$

d. h. ein Stab von 1 cm Länge würde durch eine Belastung von E kg um seine eigene Länge von 1 cm verlängert werden müssen. Die Spannung von der Größe $\sigma = E$ kann daher bei den für uns in Betracht kommenden Materialien nicht zur Wirklichkeit werden, hat also nur theoretischen Vergleichswert; in die Rechnung eingeführt, gilt E natürlich nur in Zusammenhang mit Spannungen unterhalb der Proportionalitätsgrenze.

Da mit größer werdendem α die Dehnbarkeit eines Materials zunimmt, so wäre die Bekanntgabe dieser Zahl zur Beurteilung der Elastizität desselben am zweckmäßigsten. Wird anstatt α

der reziproke Wert E angegeben, so beachte man stets, daß mit steigendem E die Elastizität abnimmt.

Betrachten wir weiter die Grundgleichung der Dehnung:

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma.$$

Für Holz und Eisen stellt diese Gleichung eine gerade Linie dar (Abb. 57). Für Stein und Beton ist der Elastizitätsmodul je nach dem Grade der Spannung verschieden; infolgedessen lautet das Gesetz der Dehnung hier

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma^m,$$

wobei m von der Art des Materiales abhängig und für Beton nach Versuchen von C. v. Bach gleich 1,1 bis 1,2 zu setzen ist.

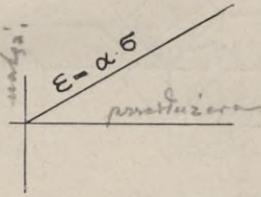


Abb. 57.

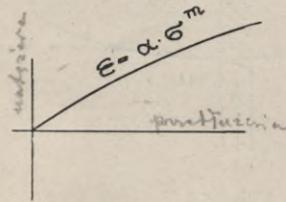


Abb. 58.

Beim Beton verhalten sich also die Dehnungen nicht wie die Spannungen. Abb. 58 stellt diese Gleichung bildlich dar, die Spannungen als Ordinaten und die Dehnungen als Abszissen aufgetragen.

2. Formänderung durch Querkräfte.

Zu unterscheiden ist direkte Abscherung (Abb. 59),

wobei die durchschnittliche Schubspannung $\tau = \frac{R}{F}$ ist, und Ab-

scherung in Zusammenhang mit Biegung, welches die Regel ist (Abb. 60). Außer der Formänderung durch die zwischen zwei um ein Maß l voneinander entfernt liegenden, sonst aber parallelen Querschnitten herrschende Biegung, deren Ursachen in den Normalspannungen liegt, tritt nämlich zwischen diesen noch eine Parallelverschiebung infolge der Querkräfte ein. Diese Formänderung wird gemessen durch den Verschiebungswinkel γ , um den sich zwei benachbarte Querschnitte F_1 und F_2 parallel gegeneinander verschieben. Nach dem Hookeschen Gesetz verhalten sich die Verschiebungswinkel γ wie die Schubspannungen τ dividiert durch die Gleitzahl G .

naprężenie ścisłe

*Dub i żelazo
Hariauwe*

*spółpraca
ści postaci*

zmotywność

also

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

G richtet sich nach dem Material. Die Belastung G kg würde die um 1 cm entfernten Nachbarquerschnitte eines Stabes von 1 cm^2 Querschnittsfläche um das Maß von 1 cm gegeneinander verschieben (Abb. 60). Insofern hat die Gleitzahl eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Elastizitätsmodul.

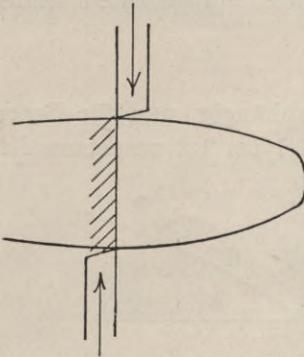


Abb. 59.

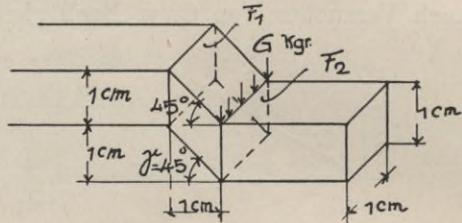


Abb. 60.

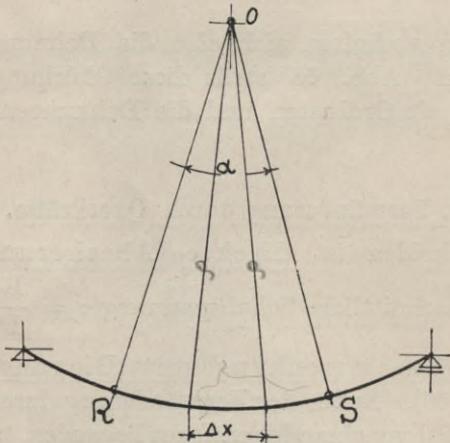


Abb. 61.

3. Formänderung durch Biegung.

Die neutrale Faser wird weder verlängert noch verkürzt, sondern nur gebogen und heißt elastische Linie. Wir betrachten den Teil RS (Abb. 61) irgend eines gebogenen Stabes und denken uns das sehr kleine Bogenstück Δx mit dem Zentriwinkel $\Delta\alpha$ herausgeschnitten (Abb. 62); der Krümmungsradius an dieser

*linia sp...
linia us...
at R...at c*

Stelle sei ρ . Wir können sodann die Fläche O E F als Kreissektor auffassen. Δx ist ein Differential der elastischen Linie und kann als solches als Bogenstück mit dem konstanten Radius ρ angesehen werden. Damit ist aber nicht gesagt, daß dieser Radius ρ

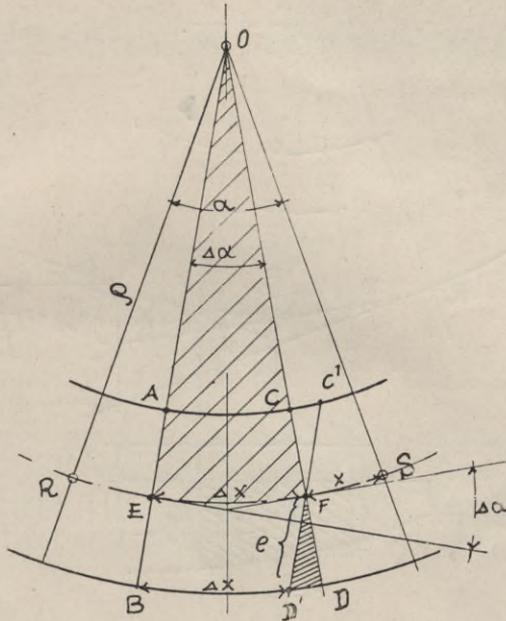


Abb. 62.

für alle Punkte der elastischen Linie Geltung haben soll, auch nicht zwischen R und S; im Gegenteil hat jedes Differential Δx seinen eigenen Radius ρ , so daß die Lage des Mittelpunktes O sich fortwährend ändert. Wäre das nicht der Fall, dann bestände kein Unterschied zwischen elastischer Linie und Kreisbogen.

$\Delta D' F D$ ähnlich $\Delta O E F$ (weil sehr klein),

also

$$D'D : EF = \Delta l : l = \varepsilon = \text{Dehnung von } \Delta x.$$

Nun ist

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

(vgl. Formänderung durch Längskräfte),

also

$$\frac{D'D}{EF} = \frac{\sigma}{E}.$$

Ferner ist

$$D'F = e \text{ und } \frac{e}{\rho} = \frac{D'D}{EF};$$

obiger Wert eingesetzt, gibt

$$\frac{e}{\rho} = \frac{\sigma}{E}.$$

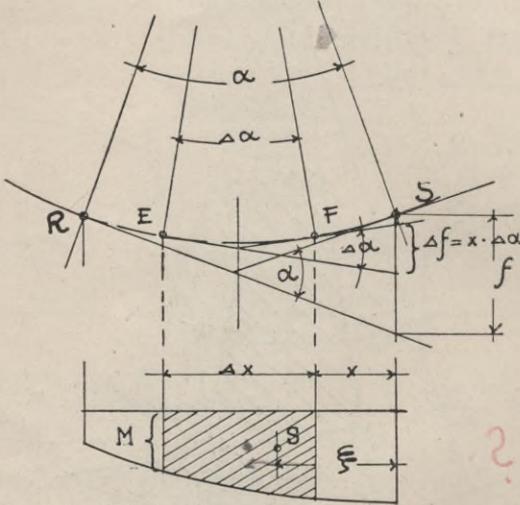


Abb. 63.

$$\text{Für } \sigma = \frac{M}{W} = \frac{M \cdot e}{J} \text{ ist}$$

$$\frac{e}{\rho} = \frac{M \cdot e}{J \cdot E} \text{ oder } \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot J},$$

woraus

$$e = \frac{E \cdot J}{M}.$$

Setzt man ferner in die Gleichung $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot J}$ den Wert

$$\Delta x = \Delta \alpha \cdot \rho, \text{ also } \rho = \frac{\Delta x}{\Delta \alpha} \text{ ein, so erhält man } \Delta \alpha = \frac{\Delta x}{\rho}$$

$$\Delta \alpha = \frac{M \cdot \Delta x}{E \cdot J}.$$

Für die ganze Strecke RS , die wir betrachtet haben, ist dann

$$\alpha = \frac{\sum M \cdot \Delta x}{E \cdot J}.$$

Zu dieser Formel können wir nun noch folgende Deutung finden:

$$\sum_{x=0}^{x=RS} M \cdot \Delta x = F.$$

F stellt die Momentenfläche des Trägers für den Teil R S dar (Abb. 63), also

$$\alpha = \frac{F}{E \cdot J}.$$

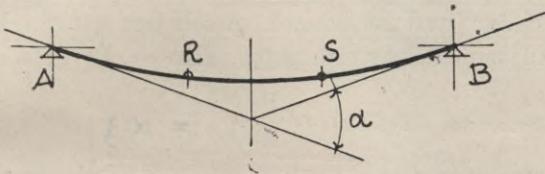


Abb. 64.

Betrachten wir nicht nur das Stück R S, sondern den ganzen Balken A B, so bedeutet also α den Winkel, um den sich die Endquerschnitte des Balkens, die vor der Durchbiegung parallel standen, gegeneinander geneigt haben (Abb. 64).

< H. 47-49 >

b) Entwicklung der Formel für die Durchbiegung aus der elementaren Ableitung für den Krümmungsradius.¹⁾

Wir betrachten zunächst wieder das Stück R S und ziehen durch S eine Lotrechte (Abb. 63). Von dieser Lotrechten ab gemessen, liege um das veränderliche Maß x entfernt ein zu x gehöriges Differential Δx . Dann ist das Stückchen, welches die Tangenten in F und E, d. i. in den Endpunkten des Differentials der elastischen Linie auf der Lotrechten abschneiden, $\Delta f = x \cdot \Delta \alpha$.

Da nun

$$\Delta \alpha = \frac{M \cdot \Delta x}{E \cdot J},$$

so ist

$$\Delta f = \frac{x \cdot M \cdot \Delta x}{E \cdot J}$$

¹⁾ Bearbeitet nach Keck-Hotopp, Elastizitätslehre, erster Teil. Helwing'sche Verlagsbuchhandlung, Hannover.

und

$$f = \frac{\Sigma M \cdot \Delta x \cdot x}{E \cdot J}$$

oder

$$f = \frac{1}{E \cdot J} \sum_{x=0}^{x=RS} M \cdot \Delta x \cdot x.$$

Der im Σ -Zeichen stehende Wert stellt die Summe der statischen Momente aller Flächenstreifen $M \cdot \Delta x$ in bezug auf den Punkt S dar und ist danach gleich der ganzen Fläche mal dem Abstand seines Schwerpunktes, also $= F \cdot \xi$; somit

$$\text{Streckenwert} \quad f = \frac{F \cdot \xi}{E \cdot J} = \alpha, 3$$

Mit Hilfe der Strecke f kann man Durchbiegungen von Trägern bestimmen. Bei der Durchführung der diesbezüglichen Berechnungen bedeutet die Strecke f das lotrechte Maß zwischen den Punkten, deren Abweichung voneinander gesucht wird. Die statischen Momente $F \cdot \xi$ sind dabei stets auf die Stelle zu beziehen, wo die Durchbiegung gemessen werden soll.

[NB.: Mit Hilfe der vorstehend erläuterten Grundzüge der Biegungslehre kann nach Art der im Abschnitt II unter dem Kapitel: „Der biegungsfeste Stabzug“ gegebenen Ableitungen leicht die bekannte Clapeyronsche Gleichung hergeleitet werden (vgl. Betonkalender, Abschnitt Statik der Baukonstruktionen).]

1. Anwendungen auf verschiedene Trägerarten.

1a) Freitragler mit einer Einzellast am Ende (Abb. 65).

$$\alpha = \frac{F}{E \cdot J} = \frac{P \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{E \cdot J} = \frac{P \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot J}$$

$$f = \frac{F \cdot \xi}{E \cdot J} = \frac{P \cdot l^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot J}$$

oder

$$\text{Streckenwert} \quad f = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J}$$

1b) Freitragler mit einer gleichmäßig verteilten Last (Abb. 66).

$$\alpha = \frac{q \cdot l^2}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot E \cdot J} = \frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot J}$$

$$f = \alpha \cdot \xi = \frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{3}{4} l$$

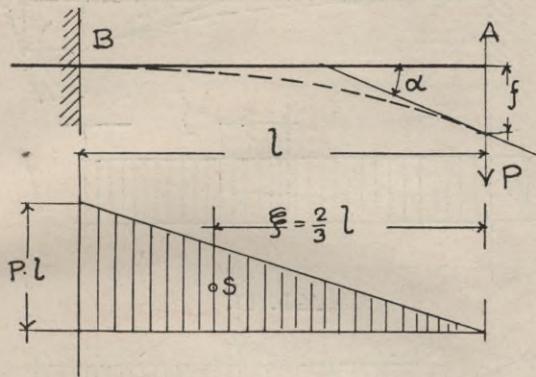


Abb. 65.

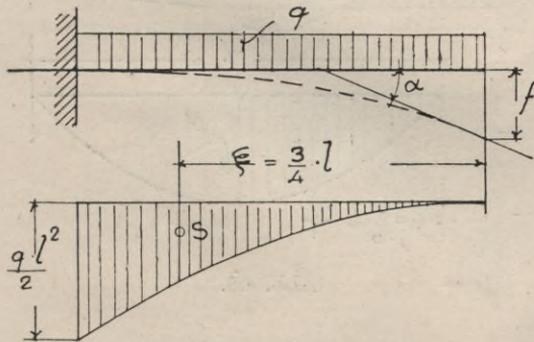


Abb. 66.

oder

$$f = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot J}$$

2) Freiträger belastet mit einem Moment (Abb. 67).

$$\alpha = \frac{M \cdot l}{E \cdot J}$$

$$f = \alpha \cdot \xi = \frac{M \cdot l}{E \cdot J} \cdot \frac{1}{2}$$

oder

$$f = \frac{M \cdot l^2}{2 E \cdot J}$$

2a) Träger auf 2 Stützen mit gleichmäßig verteilter Last (Abb. 68).

$$f = \frac{2}{3} \cdot \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{16} \frac{1}{EJ}$$

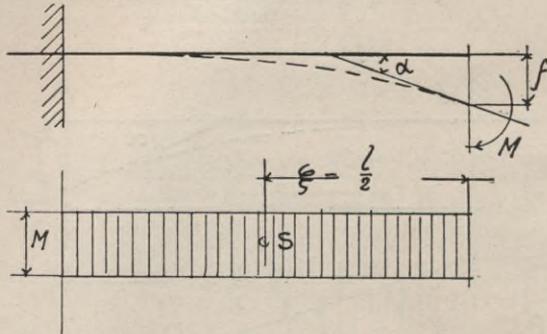


Abb. 67.

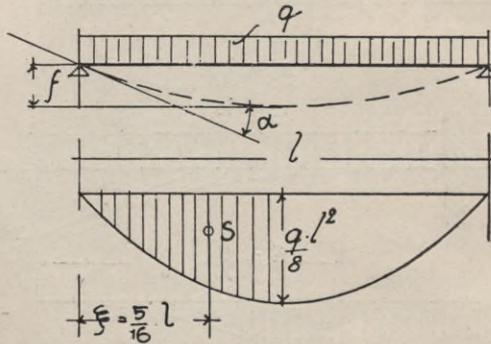


Abb. 68.

oder

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot J}$$

$$\alpha = \frac{ql^3}{24EJ}$$

2b) Träger auf 2 Stützen mit 2 symmetrisch liegenden Einzellasten (Abb. 69).

$$f = \frac{F \cdot \xi}{E \cdot J} = \frac{1}{E \cdot J} \left[P \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{P \cdot a^2}{2} \cdot \frac{a}{3} \right]^1$$

oder

$$f = \frac{P \cdot a}{24 \cdot E \cdot J} \cdot (3l^2 - 4a^2)$$

Das letzte Resultat dient zur Verallgemeinerung, wenn man sich die Durchbiegung in der Mitte aus 2 Teilen bestehend denkt,

¹⁾ Beachte hier und im Folgenden: Zahl 1 und Länge 1!

deren jeder durch eine der Lasten bewirkt ist. Es wäre also $f = 2 \cdot f'$.

2c) Allgemeiner Fall, wenn die Lasten beliebigen Abstand haben (Abb. 70).

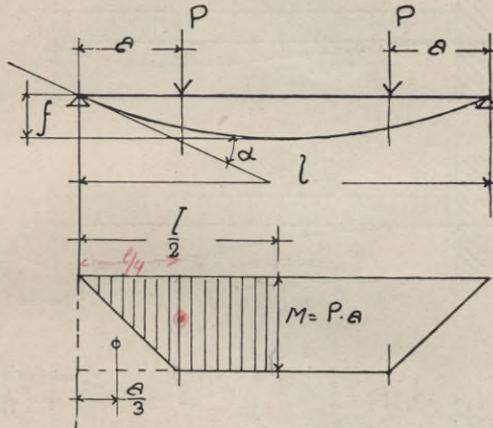


Abb. 69.

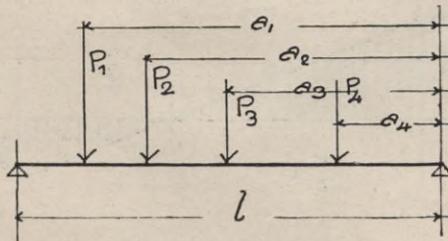


Abb. 70.

$$f = \frac{P_1 \cdot a_1}{48 \cdot E \cdot J} \cdot (3l^2 - 4a_1^2) + \frac{P_2 \cdot a_2}{48 \cdot E \cdot J} \cdot (3l^2 - 4a_2^2) + \frac{P_3 \cdot a_3}{48 \cdot E \cdot J} \cdot (3l^2 - 4a_3^2) + \dots$$

oder

$$f = \frac{l}{48 \cdot E \cdot J} \cdot \sum P \cdot a (3l^2 - 4a^2).$$

2d) Für eine Einzellast in der Mitte ist

$$f = \frac{P \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J}.$$

2. Bestimmung von Auflagerdrücken.

- 1) Träger an einem Ende eingespannt und am anderen Ende frei aufliegend (Abb. 71).

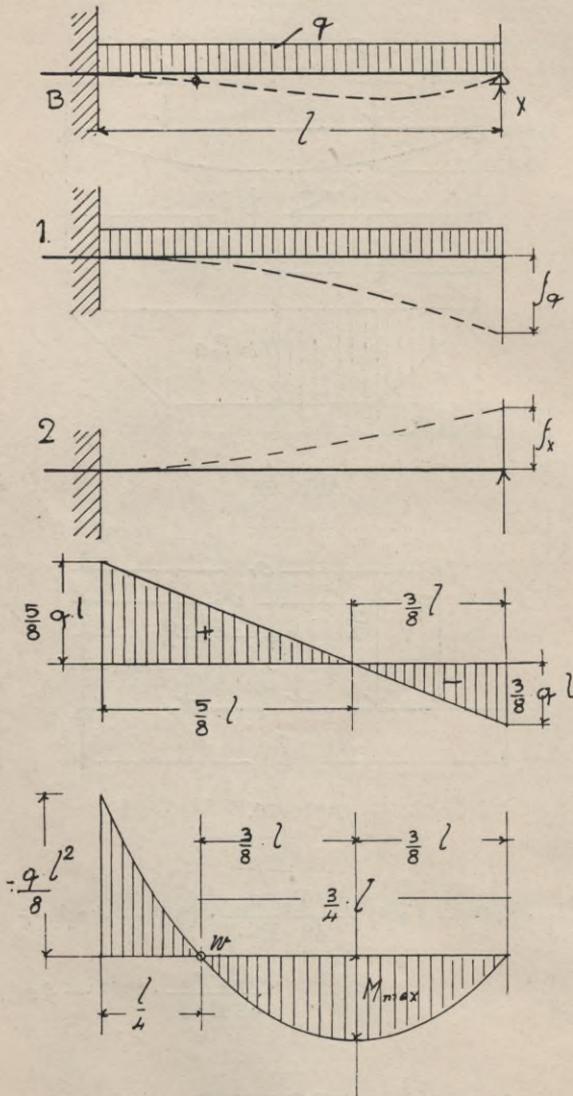


Abb. 71.

Man entfernt die statisch überzählige Größe X und erhält als statisch bestimmtes Hauptsystem einen einfachen Kragträger, den man 1. mit der äußeren Last und 2. mit der überzähligen

Größe allein zu belasten hat. Man stellt für jeden Fall die Durchbiegung fest und braucht dann nur noch diese beiden Durchbiegungen gleichzusetzen, da eine Senkung bei X ausgeschlossen sein soll.

Es ist:

$$f_q = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot J}$$

und

$$f_X = \frac{X \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J}$$

also

$$\frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot J} = \frac{X \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J}$$

woraus

$$X = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l$$

$$B + X = q \cdot l$$

$$B = q \cdot l - X$$

oder

$$B = q \cdot l - \frac{3}{8} \cdot q \cdot l$$

$$B = \frac{5}{8} \cdot q \cdot l$$

Ferner

$$-M_B - \frac{3}{8} q \cdot l \cdot l + q \cdot l \cdot \frac{1}{2} = 0$$

daraus

$$M_B = -\frac{q \cdot l^2}{8}$$

Das positive M_{\max} wird einfach vom Endauflager aus bestimmt.

Die Querkraft ist bei $\frac{3}{8}l = 0$, also

$$M_{\max} = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{128} \cdot q \cdot l^2$$

Die Lage des Wendepunktes der elastischen Linie, gleichbedeutend mit dem 0-Punkt des Momentes, muß sich aus der Gleichung für einen beliebigen Abstand x ergeben

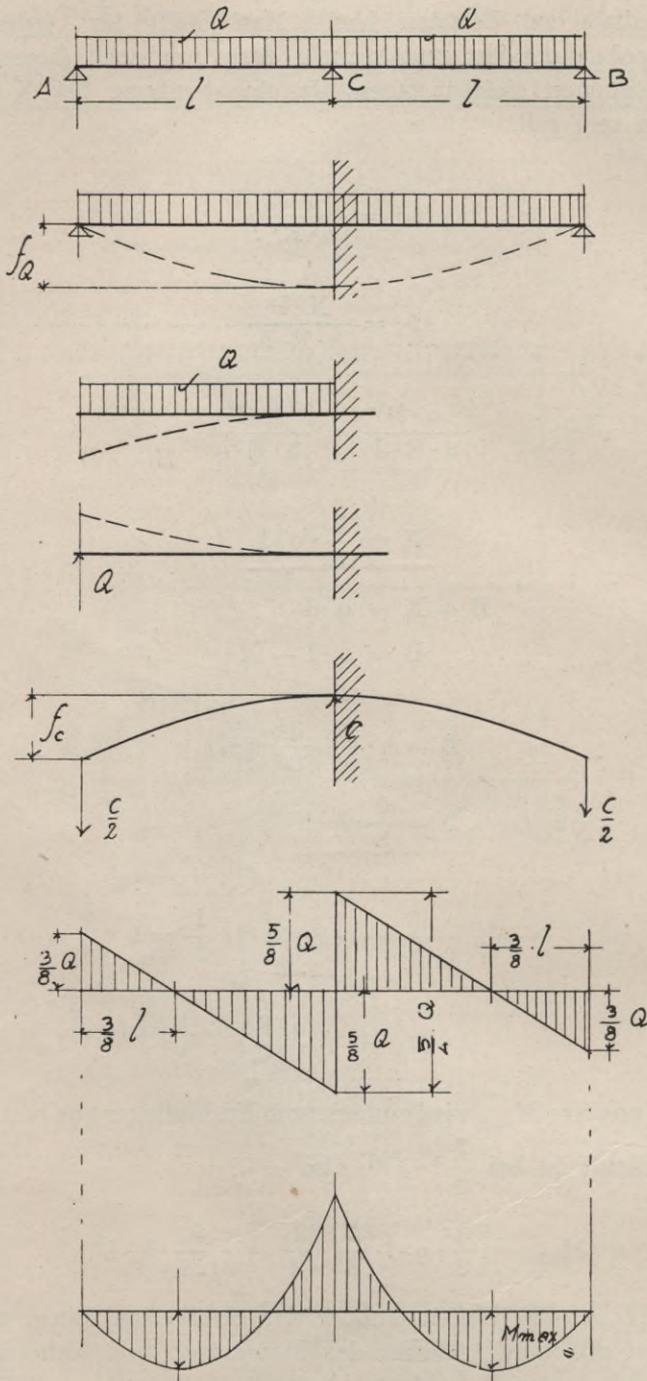


Abb. 72.

$$M_X = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} = 0$$

daraus

$$\underline{x = \frac{3}{4} l.}$$

2 Träger auf 3 Stützen (Abb. 72).

Zunächst denken wir uns die Mittelstütze entfernt und berechnen die Durchbiegung des so erhaltenen einfachen Trägers, wobei wir den Fall eines einseitig eingespannten Trägers zugrunde legen können.

Wir erhalten infolge der Reaktion Q nach oben

$$f_Q = \frac{Q \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J}$$

und nach unten infolge der gleichmäßigen Last q

$$f_q = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot J} = \frac{Q \cdot l^3}{8 \cdot E \cdot J}$$

Die Durchbiegung f wäre demnach

$$f = \frac{Q \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J} - \frac{Q \cdot l^3}{8 \cdot E \cdot J} = \frac{5}{24} \cdot \frac{Q \cdot l^3}{E \cdot J}$$

Da eine Mittelstütze vorhanden ist, so muß jetzt diese Durchbiegung f von der Mittelstütze C aufgehoben werden. Wir erhalten für die Kraft $\frac{C}{2}$ in bezug auf die Einspannung in der Mitte

$$f_c = \frac{C}{2} \cdot \frac{l^3}{3 \cdot E \cdot J} = \frac{C \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot J}$$

Es muß nun $f = f_c$ sein,
also

$$\frac{5}{24} \cdot \frac{Q \cdot l^3}{E \cdot J} = \frac{C \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot J}$$

daraus

$$\underline{C = \frac{5}{4} Q} \text{ und } \underline{A = B = \frac{3}{8} Q.}$$

Dasselbe Resultat hätten wir auch erreichen können mit Gebrauch der Formel für den Träger auf 2 Stützen bei gleichmäßiger Belastung bzw. einer Einzellast in der Mitte.

Die maximalen Feldmomente betragen

$$\underline{M_{\max} = \frac{3}{8} Q \cdot \frac{3}{8} l - \frac{3}{8} Q \cdot \frac{3}{16} l = \frac{9}{128} \cdot Q \cdot l.}$$

c) Die Differentialgleichung der elastischen Linie. ¹⁾

Diese gibt im allgemeinen dieselben Resultate. Was wir mit Hilfe der elementaren Ableitung für den Krümmungsradius aber noch nicht feststellen konnten, das war eine allgemeine Gleichung für die elastische Linie (Biegelinie) bei den verschiedenen Belastungsfällen. Da das Moment sich ständig ändert, so besagt die Gleichung für den Krümmungsradius

$$\rho = \frac{E \cdot J}{M},$$

daß auch der Radius ρ veränderlich ist und gewissermaßen jedes kleine Element der Biegelinie seinen eigenen Radius hat.

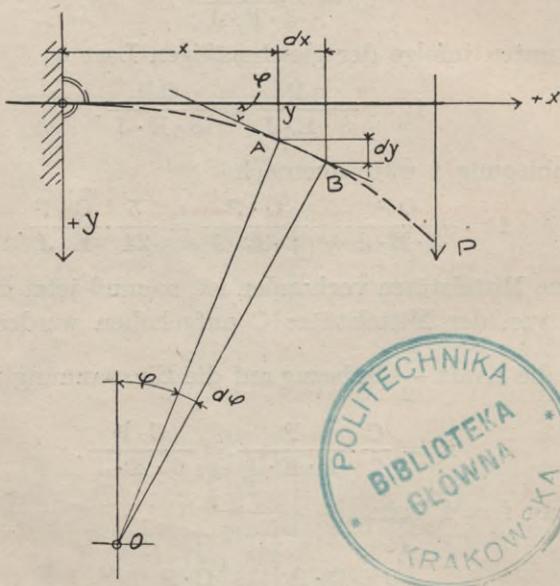


Abb. 73.

Abbildung 73 zeigt einen beliebig gestützten und beliebig belasteten Balken. Um die Ableitung zu vereinfachen, ist die Einspannung wagerecht angenommen und beziehen wir die Ordinaten auf ein Achsenkreuz, welches entsprechend einfach gewählt ist. Es ist nun das kleine Element des Bogenstückes

$$AB = \rho \cdot d\varphi$$

¹⁾ Bearbeitet nach Keck-Hotopp, Elastizitäts-Lehre, erster Teil.

und

$$\rho = \frac{AB}{d\varphi} = \frac{dx}{d(\tan\varphi)}$$

oder

$$\rho = \frac{dx}{d \frac{dy}{dx}}; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d \frac{dy}{dx}}{dx}$$

Die rechte Seite bedeutet weiter nichts als den 2. Differentialquotienten, also

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Früher erhielten wir das Resultat $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot J}$; damit lautet jetzt unsere Differentialgleichung der elastischen Linie.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot J}$$

1. Anwendung auf verschiedene Trägerarten.

α. Es soll für den in Abb. 74 dargestellten Belastungszustand die Gleichung der elastischen Linie, bezogen auf das angegebene Achsenkreuz, berechnet werden.

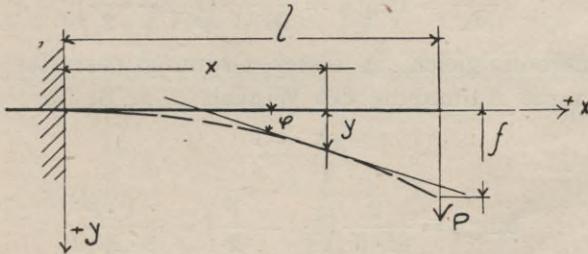


Abb. 74.

Wir greifen einen Punkt mit den Koordinaten x, y heraus und stellen für diesen die Differentialgleichung der elastischen Linie auf:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot J} = \frac{P \cdot (l - x)}{E \cdot J}$$

Um zu der Gleichung der Linie zu kommen, welche die gerade Beziehung zwischen x und y ausdrückt, müssen wir die Gleichung zweimal integrieren.

$$\text{Differentialgleichung } \frac{d \frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{P(1-x)}{E \cdot J}$$

oder

$$d \frac{dy}{dx} = \frac{P(1-x)}{E \cdot J} \cdot dx;$$

integriert

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{E \cdot J} \left(1 \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) + C$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{Steigung} = \text{tang } \varphi.$$

Wir können nun aus der folgenden Betrachtung die noch unbekanntene Konstante C gewinnen, welche vor der zweiten Integration festgestellt sein muß.

Für $x = 0$ ist auch $\text{tang } \varphi = 0$, also

$$0 = \frac{P}{E \cdot J} \cdot \left(1 \cdot 0 - \frac{0^2}{2} \right) + C$$

$$0 = 0 + C$$

daher

$$C = 0,$$

also endgültig

$$\frac{dy}{dx} = \text{tang } \varphi = \frac{P}{E \cdot J} \left(1 \cdot x - \frac{x^2}{2} \right).$$

Diese Differentialgleichung erster Ordnung gestattet für jedes beliebige x die Auffindung des Winkels φ , z. B. für

$$x = 1$$

ist

$$\text{tang } \varphi = \frac{P}{E \cdot J} \left(1 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} \right) = \frac{P \cdot 1^2}{2 \cdot E \cdot J}$$

(vgl. früheres Resultat).

Die zweite Integration liefert

$$\int dy = \int \frac{P}{E \cdot J} \cdot \left(1 \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) \cdot dx$$

$$y = \frac{P}{E \cdot J} \cdot \left(\frac{1 \cdot x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right) + C_1^1)$$

$$y = \frac{P \cdot x^2}{2 \cdot E \cdot J} \cdot \left(1 - \frac{x}{3} \right) + C_1.$$

¹⁾ Beachte hier und im Folgenden: Zahl 1 und Länge 1!

Auch hier können wir wieder mit Leichtigkeit die Konstante C_1 herausschaffen, denn wir wissen, daß für $x = 0$ auch $y = 0$ wird.

Also

$$0 = \frac{P \cdot 0^2}{2 \cdot E \cdot J} \cdot \left(1 - \frac{0}{3}\right) + C_1;$$

daher wird $C_1 = 0$ und unsere Schlußgleichung lautet

$$y = \frac{P \cdot x^2}{2 \cdot E \cdot J} \cdot \left(1 - \frac{x}{3}\right).$$

In ähnlicher Weise lassen sich die Konstanten stets feststellen. Für $x = l$ stellt y weiter nichts dar als die größte Durchbiegung f des Freitragers am Ende; also erhalten wir

$$f = \frac{P \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot J} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$f = \frac{P \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{2}{3} l = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J}$$

(vgl. früheres Resultat).

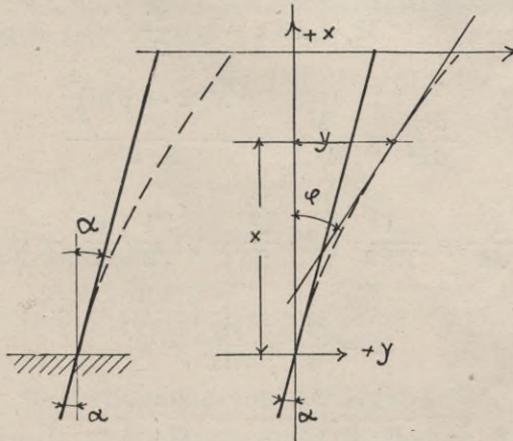


Abb. 75.

β. Für den unter einem bestimmten Winkel α eingespannten Stab (Abb. 75) ergibt sich analog zu α bezogen auf das angegebene Achsenkreuz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{E \cdot J} \left(1 \cdot x - \frac{x^2}{2}\right) + \text{tang } \alpha$$

und

$$y = \frac{P \cdot x^2}{2 E \cdot J} \cdot \left(1 - \frac{x}{3}\right) + \text{tang } \alpha \cdot x.$$

γ. Für den in Abb. 76 dargestellten Balken mit einer gleichförmigen Belastung p und einer Einzellast P in der Mitte ist die Gleichung der elastischen Linie in bezug auf das angegebene Achsenkreuz zu ermitteln.

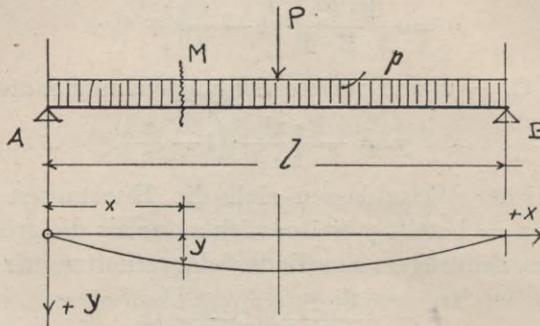


Abb. 76.

$$A = B = p \cdot \frac{l}{2} + \frac{P}{2}$$

$$M = A \cdot x - p \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot J} = \frac{A \cdot x - p \cdot \frac{x^2}{2}}{E \cdot J}$$

integriert

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left(A \cdot \frac{x^2}{2} - p \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right) + C$$

Für

$$x = \frac{l}{2} \text{ ist } \frac{dy}{dx} = 0$$

$$0 = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left(\frac{A \cdot l^2}{2 \cdot 4} - \frac{p \cdot l^3}{6 \cdot 8} \right) + C$$

$$0 = \frac{A \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot J} - \frac{p \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J} + C$$

$$C = \frac{p \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J} - \frac{A \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot J}$$

somit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left(A \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{p \cdot x^3}{6} \right) + \overbrace{\frac{p \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J} - \frac{A \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot J}}^C$$

usw.

Die Schlußgleichung lautet dann

$$y = \frac{P}{16 \cdot E \cdot J} \cdot \left(l^2 \cdot x - \frac{4x^3}{3} \right) + \frac{P}{48 \cdot E \cdot J} \cdot (2 \cdot l^3 \cdot x - 4 \cdot l \cdot x^3 + 2 \cdot x^4)$$

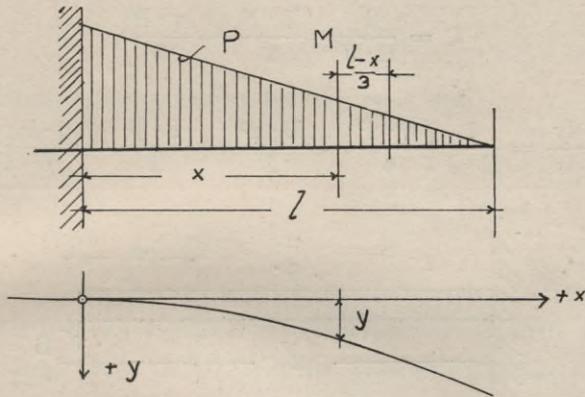


Abb. 77.

8. Für den in Abb. 77 dargestellten Kragbalken mit einer dreieckförmigen Last P ist

$$M_x = \frac{P \cdot (l-x)^2}{l^2} \cdot \frac{(l-x)}{3},$$

demnach

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P(l-x)^3}{3 \cdot l^2 \cdot E \cdot J}.$$

Es ergibt sich schließlich

$$y = \frac{Pl^3}{12EJ} \left[\frac{x}{l} + \frac{(l-x)^5}{5l^5} - \frac{1}{5} \right]$$

2. Bestimmung von Auflagerdrücken.

Der einseitig eingespannte und am andern Ende frei aufliegende Balken mit gleichmäßiger Belastung q (Abb. 78).

$$M_x = \frac{q \cdot x^2}{2} - B \cdot x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q \frac{x^2}{2} - B \cdot x}{E \cdot J}$$

integriert

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{E \cdot J} \left(\frac{q}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - B \cdot \frac{x^2}{2} \right) + C.$$

Für $x = l$ ist $\tan \varphi = 0$

$$0 = \frac{1}{E \cdot J} \left(\frac{q \cdot l^3}{6} - \frac{B \cdot l^2}{2} \right) + C,$$

daraus:

$$C = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left(\frac{B \cdot l^2}{2} - \frac{q \cdot l^3}{6} \right);$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{E \cdot J} \left(\frac{q \cdot x^3}{6} - \frac{B \cdot x^2}{2} + \frac{B \cdot l^2}{2} - \frac{q \cdot l^3}{6} \right).$$

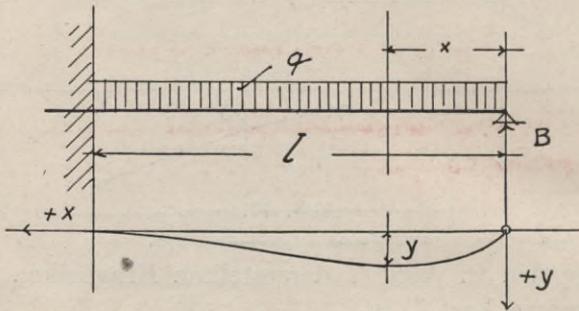


Abb. 78.

Weiter integriert

$$y = \frac{1}{E \cdot J} \left(\frac{q}{6} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{B}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{B \cdot l^2}{2} \cdot x - \frac{q \cdot l^3}{6} \cdot x \right) + C_1$$

$$y = \frac{1}{6 \cdot E \cdot J} \cdot \left(\frac{q}{4} \cdot x^4 - q \cdot l^3 \cdot x + 3 \cdot B \cdot l^2 \cdot x - B \cdot x^3 \right) + C_1.$$

Für $x = 0$ ist $y = 0$, somit

$$C_1 = 0.$$

Für $x = l$ ist $y = 0$, folglich

$$0 = \frac{1}{6 \cdot E \cdot J} \cdot \left(\frac{q}{4} \cdot l^4 - q \cdot l^4 + 3 \cdot B \cdot l^3 - B \cdot l^3 \right)$$

oder

$$0 = \frac{1}{6 \cdot E \cdot J} \cdot \left(\underbrace{-\frac{3}{4} \cdot q \cdot l^4}_{\text{kann nicht 0 sein}} + \underbrace{2 \cdot B \cdot l^3}_{\text{muß also = 0 sein}} \right);$$

folglich

$$2 \cdot B \cdot l^3 = \frac{3}{4} \cdot q \cdot l^4$$

daraus

$$B = \frac{3 \cdot q \cdot l^4}{4 \cdot 2 \cdot l^3}$$

oder

$$B = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l.$$

Die Endgleichung lautet mit $C_1 = 0$ und

$$B = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l$$

$$y = \frac{q \cdot l^4}{48 \cdot E \cdot J} \cdot \left(\frac{x}{l} - \frac{3 \cdot x^3}{l^3} + \frac{2 \cdot x^4}{l^4} \right).$$

d) Vergleich zwischen Formänderung aus Biegung mit der infolge von Querkräften.¹⁾

α. Ein Flußeisenstab von 100 cm^2 Querschnitt und 3 m Kraglänge werde an seinem freien Ende durch eine Einzellast

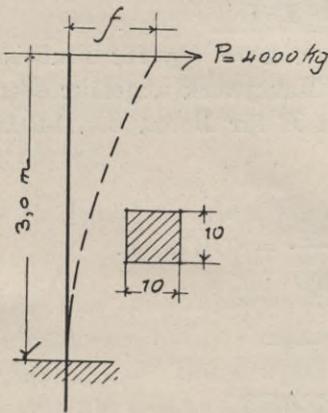


Abb. 79.

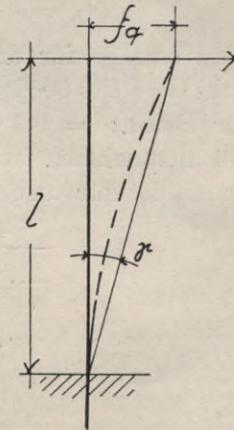


Abb. 80.

$P = 4000 \text{ kg}$ beansprucht (Abb. 79). Wie groß ist seine Durchbiegung f ?

$$f = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J} = \frac{4000 \cdot 300^3}{3 \cdot 215000 \cdot \frac{10 \cdot 10^3}{12}} = 20 \text{ cm.}$$

¹⁾ Bearbeitet nach Otzen, Praktische Winke zum Studium der Statik. — Kreydels Verlag, Wiesbaden.

Im Vergleich zu dieser Formänderung aus dem Biegemoment sei nun die Formänderung berechnet, welche lediglich durch die Querkraft bewirkt wird, also nur durch die Parallelverschiebung der Querschnitte gegeneinander (Abb. 80).

Nach Früherem (Seite 28) ist

$$\gamma = \frac{\tau}{G}; \text{ also } f_q = \gamma \cdot l$$

oder

$$f_q = \frac{\tau \cdot l}{G}.$$

Die Schubspannung ist ihrerseits:

$$\tau = \frac{P}{k \cdot F},$$

wobei k stets kleiner als 1 ist und sich nach der Querschnittsform richtet. Somit ergibt sich die Durchbiegung infolge der Querkraft zu

$$f_q = \frac{P \cdot l}{k \cdot F \cdot G}.$$

Nun beträgt für das Rechteck $k = \frac{5}{6}$, für Flußeisen die Gleitzahl $G = 830\,000 \text{ kg/cm}^2$ (für Mauerwerk ungefähr ebensoviel wie für Beton: $= 0,3 \cdot E$, wobei E für Beton von 140 000 bis 350 000 anzunehmen ist).

Damit ist für unseren Fall

$$f_q = \frac{4000 \cdot 300}{\frac{5}{6} \cdot 100 \cdot 830\,000} = 0,0173 \text{ cm}.$$

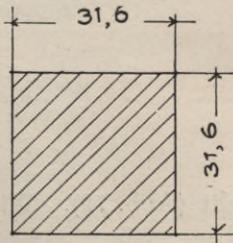


Abb. 81.

β . Es soll nun ein Betonpfeiler von 1000 cm^2 Querschnitt (Abb. 81) für dieselbe Belastung untersucht werden. Der Elastizitätsmodul des Betons sei zu $200\,000 \text{ kg/cm}^2$, also die Gleitzahl G zu $0,3 \cdot 200\,000 = 60\,000$ angenommen.

Dann erhalten wir infolge des Biegemomentes

$$f = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J} = \frac{4000 \cdot 300^3}{3 \cdot 200\,000 \cdot 83\,500} = 2,16 \text{ cm}$$

und infolge der Querkraft

$$f_q = \frac{P \cdot l}{k \cdot G \cdot F} = \frac{4000 \cdot 300}{\frac{5}{6} \cdot 60\,000 \cdot 1000} = 0,024 \text{ cm.}$$

Für den Flußeisenstab ist das Verhältnis

$$\frac{f_q}{f} = \frac{0,0173}{20} = \sim \frac{1}{1000}$$

und für den Betonfeiler

$$\frac{f_q}{f} = \frac{0,024}{2,16} = \sim \frac{1}{100}$$

Untersucht man nun noch einen dritten Fall, wobei der Querschnitt an Größe zunimmt, also das in der Biegelinie liegende Trägheitsmoment noch bedeutend größer wird, während in allen Fällen die Länge l die gleiche bleiben soll, so dürfte das Verhältnis $\frac{f_q}{f}$ schließlich zu $\frac{1}{1}$ werden, und in solchem Falle kann man natürlich die Formänderung infolge der Querkraft gegenüber der bei Biegung nicht mehr vernachlässigen.

e) Bedeutung der Durchbiegungsberechnungen für die Praxis.

Die hier gegebenen Beispiele für die Ermittlung von Durchbiegungen haben — abgesehen von ihrer vollen theoretischen Gültigkeit — im Rahmen dieses Buches hauptsächlich Bedeutung als notwendige Zwischenstufe für die weiteren Betrachtungen.

Gewiß können wir den hier eingeschlagenen Weg auch zur Berechnung der Durchbiegungen von Eisenbetonkonstruktionen benutzen; die Lösung solcher Aufgaben hat aber wenig praktischen Wert.

Nach Stadium II¹⁾ (wirkungslose Betonzugzone) müßte man bei der Aufstellung der Differentialgleichung der elastischen Linie von der Eisenanstrengung ausgehen, weil bei dieser Vor-

¹⁾ Vgl. Schlüter, „Eisenbetonbau Säule und Balken“ Seite 90.

aussetzung das elastische Verhalten des Eisens maßgebend für die Bestimmung von Durchbiegungsformeln ist¹⁾.

Die nach diesem Prinzip berechneten Durchbiegungen übertreffen jedoch die wirklich auftretenden um 150—200%. Das hat dahin geführt, Durchbiegungsformeln nach Stadium I (mitwirkende Betonzugzone) aufzustellen, wobei das Trägheitsmoment des gesamten, als homogen angesehenen, Querschnittes eingeführt wird. Aber auch in diesem Falle betrug nach den von Dipl.-Ing. Kaufmann angestellten Versuchen²⁾ die Differenz zwischen den errechneten und den tatsächlich gemessenen Werten der Durchbiegung noch immer 50—100%. Die Ursachen für diese bedeutenden Differenzen liegen — kurz gesagt — in der Monolithität der Eisenbetonkonstruktionen, den großen Auflagerflächen und der durch die Einbindung der Balken in das Mauerwerk bewirkten, oft nicht unbedeutenden Einspannung. Wir stehen hier vor einer sehr vorteilhaften Eigentümlichkeit der Eisenbetonkonstruktionen, da es sich in der Regel darum handelt, die Konstruktionshöhe auf ein Minimum zu beschränken, wobei also die Rücksicht auf Durchbiegung allein nicht von vornherein eine gewisse Minimalhöhe des Querschnitts unmöglich macht.

Von Interesse in dieser Frage ist noch ein Aufsatz von Michael Gombos im Heft III Beton und Eisen 1913: „Berechnung der Durchbiegungen kontinuierlicher Balkenträger.“

Kapitel V.

Rechnerische Bestimmung der elastischen Formänderung mit Hilfe der Arbeitsgleichung.

a) Begriff der Arbeit.

Arbeit ist Kraft mal Weg, positiv oder negativ, je nachdem Kraft und Weg die gleiche oder entgegengesetzte Richtung zueinander haben. Treten elastische Formänderungen ein, so müssen die äußeren und inneren Kräfte, die auf ein Bauwerk einwirken, einen Weg zurücklegen, also Arbeit leisten.

¹⁾ Dr.-Ing. W. Frank gibt in seinem Buch „Eisenbetonbau“ derartige Ableitungen, die ohne weiteres verständlich sind.

²⁾ Beton und Eisen 1912 Heft I.

b) Formänderungsarbeit.¹⁾ *приведение к равновесию*

Denkt man sich einen beliebigen elastischen Körper, z. B. einen Fachwerkträger, von äußeren unter sich im Gleichgewicht stehenden Kräften (Belastung und Reaktionen) ergriffen, so ändert derselbe seine Form solange, bis zwischen den äußeren Kräften und den durch die Formänderung wachgerufenen und sich ihr widersetzenen inneren Spannkraften Gleichgewicht entstanden ist. Bei der Bewegung der Knotenpunkte leisten also die äußeren Kräfte positive Arbeit, die inneren negative Arbeit. Weil eine Verschiebung des Knotenpunktes eintritt, wird beim Anwachsen der Belastung die positive Arbeit zunächst größer sein als die negative; der Überschuß zeigt sich in der Verschiebung. In dem Augenblicke aber, wo das Gleichgewicht eingetreten ist oder kurz vorher, sind positive und negative Arbeit in einem Zeiteilchen dt einander gleich groß und heben sich gegenseitig auf (vgl. Eisenbahnzug auf horizontaler Strecke nach Abstellung des Dampfes).

Ganz plötzliche Belastungen eines Bauwerkes, wobei die äußeren Kräfte gleich in voller Größe wirken, brauchen nun in der Regel nicht vorausgesetzt zu werden; es entstünden dadurch Vibrationen. Im Gegenteil kann man stets annehmen, daß die äußeren Kräfte von Null an allmählich anwachsen, und die im Inneren entstehenden Spannkraften stets gleichen Schritt damit halten, so daß positive und negative Arbeit während aller Zeiteilchen dt , die zum Anwachsen der Kraft gebraucht werden, einander gleich groß sind. Beim allmählichen Abnehmen der äußeren Kräfte verschwinden auch dann die inneren Kräfte wieder, und der Körper kehrt, wenn er völlig elastisch ist, wieder in seine ursprüngliche Form zurück. Bei diesem Vorgang nun leisten die inneren Kräfte die positive und die äußeren die negative Arbeit. Äußere Formänderungsarbeit, genannt A_a , innere Formänderungsarbeit, genannt A_i .

Wird also z. B. ein gerader Stab von einer auf seine Verlängerung gerichteten Längskraft ergriffen, so leistet diese während ihres allmählichen Anwachsens und des Eintretens der Verlängerung positive Formänderungsarbeit A_a , und die sich damit stets im Gleichgewicht befindlichen inneren Spannkraften leisten negative Formänderungsarbeit A_i . Nach dem Hookeschen Gesetz wachsen aber die inneren Spannkraften in

*равновесию
отстаивание
увеличение
отстаивание*

¹⁾ Bearbeitet nach Keck-Hotopp, Elastizitäts-Lehre zweiter Teil.

gleichem Verhältnis mit der Verlängerung und also auch in gleichem Verhältnis mit den äußeren Kräften. Die Formänderungsarbeit beider Kraftwirkungen ist also halb so groß, als wenn die beiden Kräfte gleich zu Anfang in ihrer Endgröße gewirkt hätten.

1. Formänderungsarbeit einer Längskraft.

Der Stab in Abb. 82 habe die Länge l und den Querschnitt F . Die angreifende Kraft K wachse von Null bis K . Die inneren Spannkkräfte seien in jedem Stadium = $\sigma \cdot F$; von der Quer-

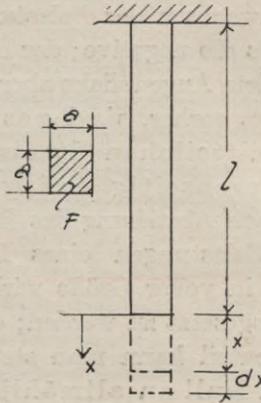


Abb. 82.

zusammenziehung sei abgesehen. In irgendeinem Augenblicke sei x die bis dahin eingetretene Längenänderung, σ_x die dazu gehörige innere Spannung und K_x die herrschende äußere Kraft. Dann ist zunächst stets:

$$F \cdot \sigma_x = K_x \dots \dots \dots 1)$$

Lassen wir jetzt eine weitere Längenänderung eintreten um dx , dann beträgt die innere Formänderungsarbeit für diese Verlängerung:

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft} \times \text{Weg}$$

$$dA_i = - F \cdot \sigma_x \cdot dx \dots \dots \dots 2)$$

und die äußere Formänderungsarbeit gleichzeitig

$$dA_a = + K_x \cdot dx \dots \dots \dots 3)$$

Innere Formänderungsarbeit.

Da

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} \cdot l,$$

so wird in unserem Falle

$$x = \frac{\sigma_x}{E} \cdot l$$

und

$$dx = \frac{d\sigma_x \cdot l}{E}$$

Diesen Wert für dx eingesetzt in Gleichung 2, gibt

$$dA_i = - F \cdot \sigma_x \cdot \frac{d\sigma_x \cdot l}{E} \dots \dots \dots 4)$$

Während nun die Spannung von Null bis σ anwächst, also σ_x schließlich zu σ wird, entsteht die innere Formänderungsarbeit

$$\int dA_i = - \frac{F \cdot l}{E} \int_0^{\sigma} \sigma_x \cdot d\sigma_x$$

$$A_i = - \frac{F \cdot l}{E} \cdot \frac{\sigma^2}{2} \dots \dots \dots 5)$$

Da $F \cdot l$ das Stabvolumen ist, so kann man daher auch schreiben

$$A_i = - \frac{V \cdot \sigma^2}{2 \cdot E} \dots \dots \dots 6)$$

Äußere Formänderungsarbeit.

Wir erhalten aus Gleichung 1

$$\sigma_x = \frac{K_x}{F}$$

und setzen diesen Wert ein in

$$x = \frac{\sigma_x \cdot l}{E},$$

womit

$$x = \frac{K_x}{F} \cdot \frac{l}{E} \dots \dots \dots 7)$$

also

$$dx = \frac{1}{F \cdot E} \cdot dK_x$$

Dies eingesetzt in Gleichung 3, gibt

$$dA_a = + K_x \cdot \frac{1}{F \cdot E} \cdot dK_x \dots \dots \dots 8)$$

Während nun die Kraft von Null bis K wächst, entsteht demnach die äußere Formänderungsarbeit

$$\int dA_a = + \frac{1}{F \cdot E} \int_0^K K_x \cdot dK_x$$

$$A_a = \frac{1}{F \cdot E} \cdot \frac{K^2}{2} \dots \dots \dots 9)$$

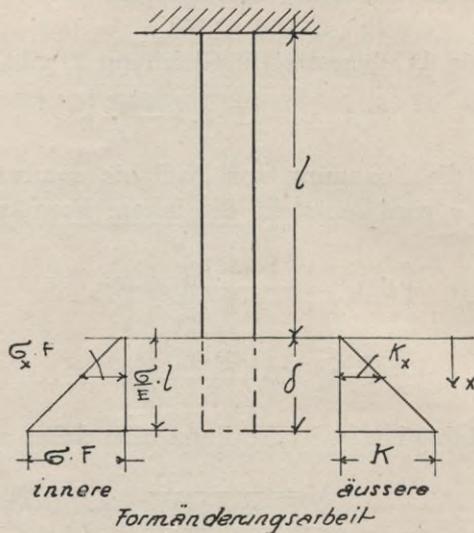


Abb. 83.

Bezeichnen wir nun den durch die Kraft K schließlich hervorgerufenen Größtwert der Verlängerung x mit δ , so ist nach Gleichung 7 mit $K_x = K$

$$\Delta l = x = \delta = \frac{K \cdot l}{F \cdot E}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\delta}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{K}{E \cdot F}.$$

Schreibt man nun für Gleichung 9

$$A_a = \frac{1}{2} K \cdot \frac{K \cdot l}{E \cdot F},$$

so folgt

$$A_a = \frac{1}{2} K \cdot \delta$$

oder

$$A_a = \frac{K \cdot \delta}{2} \dots \dots \dots 10)$$

Eine graphische Darstellung dieser Resultate gibt Abb. 83.

2. Formänderungsarbeit bei Biegung.

Das zuerst parallel begrenzte Stabelement dx (Abb. 84) hat nach der Biegung Keilform angenommen. dx soll ein Differential des gebogenen Stabes sein, welches seinerseits in eine Anzahl untergeordneter Differentiale, die als wagerechte Plättchen anzusehen sind, zerfällt. Ein solches Plättchen von der Höhe dz , der Länge dx

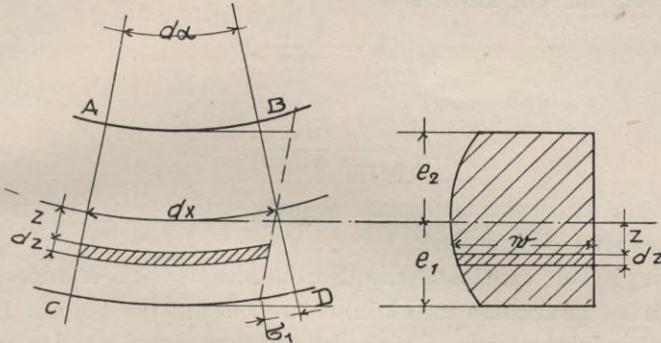


Abb. 84.

und der Breite w ist als Stab für sich anzusehen, der einer Verlängerung oder Verkürzung durch die gerade dort wirkende Spannung $\pm \sigma$ ausgesetzt ist. Auch hier muß man wieder annehmen, daß die als äußere Kraft anzusehende Spannung $\pm \sigma$ von 0 bis zu ihrer Endgröße wächst. Die Endgröße steht in Beziehung zur Randspannung σ_1 . Wir gebrauchen nun für die Aufstellung der Formänderungsarbeit, welche dieser kleine Körper bis zum Eintreten der endgültigen Spannung $\pm \sigma$ leistet, die Gleichung 6

$$A_i = -\frac{V \cdot \sigma^2}{2 \cdot E},$$

also hier

$$d dA_i = -\frac{(w \cdot dz \cdot dx) \cdot \sigma^2}{2 \cdot E}.$$

Mit

$$\sigma = \frac{\sigma_1 \cdot z}{e_1}$$

ist

$$d dA_i = -\frac{w \cdot dz \cdot dx}{2 \cdot E} \cdot \frac{\sigma_1^2 \cdot z^2}{e_1^2},$$

also für alle Plättchen des Stabelementes ABCD:

$$d A_i = - \frac{dx \cdot \sigma_1^2}{2 \cdot E \cdot e_1^2} \int_{-e_2}^{+e_1} z^2 dz \cdot w.$$

Das Integral bedeutet den allgemeinen Ausdruck für das Trägheitsmoment des betreffenden Querschnittes und wäre beispielsweise für ein Rechteck

$$J = \frac{b \cdot h^3}{12},$$

also

$$d A_i = - \frac{dx \cdot \sigma_1^2}{2 \cdot E \cdot e_1^2} \cdot J.$$

Dieser Ausdruck ist immer negativ, weil $(+\sigma_1)^2$ sowie $(-\sigma_1)^2$ stets positive Werte sind.

Wir haben zunächst die Formänderungsarbeit eines Stabelementes gewonnen und können nun damit die bei der Biegung des Stabes eintretende Gesamtformänderungsarbeit des ganzen Stabes daraus durch Integration bestimmen:

$$A_i = - \int_0^l \frac{dx \cdot \sigma_1^2}{2 \cdot E \cdot e_1^2} \cdot J.$$

Nun ist

$$\sigma_1 = \frac{M \cdot e_1}{J},$$

also

$$A_i = - \int_0^l \frac{dx \cdot M^2 \cdot e_1^2 \cdot J}{2 \cdot E \cdot e_1^2 \cdot J^2}$$

somit

$$A_i = - \int_0^l \frac{M^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J}.$$

Da in der Gleichung $\sigma_1 = \frac{M \cdot e_1}{J}$ gleichzeitig der allgemeine Ausdruck für die inneren Spannungen und äußeren Kräfte gegeben ist, so stellt das erreichte Resultat gleichzeitig auch die äußere Formänderungsarbeit dar, also

$$A_a = + \int_0^l \frac{M^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J}.$$

Nach früherer Ableitung ist der Winkel $d\alpha$, welcher das Keilstück einschließt,

$$d\alpha = \frac{M \cdot dx}{E \cdot J};$$

also können wir auch schreiben

$$A_a = + \int_0^l \frac{M \cdot d\alpha}{2},$$

worin vergleichsweise $\frac{M}{2}$ als mittlere arbeitende Kraft und $d\alpha$ als Arbeitsweg derselben angesehen werden kann.

3. Formänderungsarbeit einer Querkraft.

Analog dem Vorhergehenden ergibt sich

$$- A_i = A_a = \int_0^l \frac{Q^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot k \cdot F}$$

oder

$$- A_i = A_a = \frac{Q}{2} \cdot \delta q.$$

Ein näheres Eingehen auf diesen Fall ist wegen der Bedeutungslosigkeit der Querkräfte beim Gebrauch des Arbeitsgesetzes nicht erforderlich.

4. Formänderungsarbeit beliebiger äußerer Kräfte in der Ebene eines Stabes.

Denkt man sich von einem gebogenen Stab von der Länge l einen Teil abgeschnitten, so kann man die dadurch für den stehbleibenden Teil verloren gegangene Wirkung durch eine Gesamtergebnisierende R oder durch 3 Kraftwirkungen N , M , Q (N und Q im Schwerpunkt des Querschnittes angreifend) ersetzen (Abb. 85). Dann ist also

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M \cdot z}{J} + \frac{Q}{k \cdot F}.$$

An Hand dieser allgemeinen Spannungsgleichung können wir die Gesamtformänderungsarbeit für die Länge l wie folgt bestimmen:

1. Für die Längskraft N ist nach Gleichung 6 allgemein:

$$A_i = - \frac{F \cdot l \cdot \sigma^2}{E \cdot 2}$$

Diese Arbeit bezieht sich zunächst nur auf einen beliebigen geraden Stab von der Länge l ; wir besitzen innerhalb eines Elementes ds unzählige solcher Stäbe (eigentlich „Plättchen“) vom

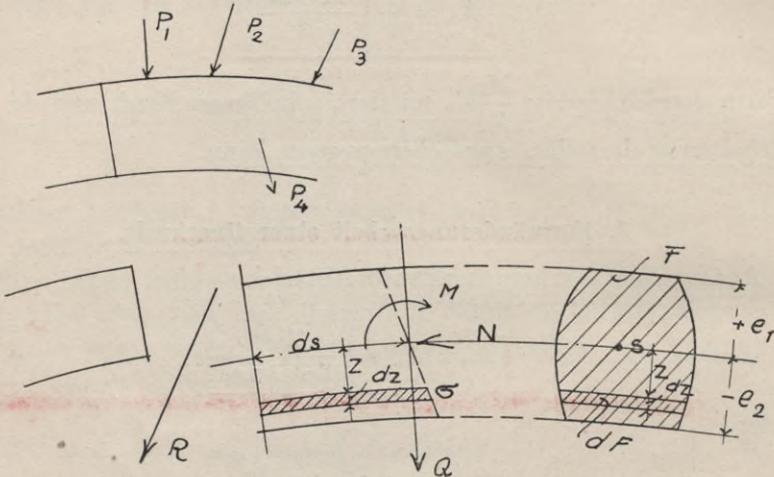


Abb. 85.

Querschnitt dF (Abb. 85) und haben daher erst für alle diese mit der konstanten Länge ds die Formänderungsarbeit zu bilden. Diese ist analog Gleichung 6

$$dA_i = - \frac{dF \cdot ds}{E} \int_{-e_2}^{+e_1} \frac{\sigma^2}{2}$$

und mit $\sigma = \frac{N}{F}$

$$dA_i = - \int_{-e_2}^{+e_1} \frac{N^2}{F^2} \cdot \frac{dF}{2} \cdot \frac{ds}{E}$$

Das Integral $\int_{-e_2}^{+e_1}$ kann sich hier natürlich nur auf dF beziehen, da ds zunächst konstant ist.

Also erhalten wir mit ausgeführter Integration:

$$dA_i = - \frac{N^2}{F^2} \cdot \frac{ds}{2 \cdot E} \cdot F = \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F}$$

woraus dann für die ganze Stablänge:

$$\underline{A_i = - \int_0^l \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F}}$$

2. Für das Biegemoment M hatten wir schon oben vollständig erhalten:

$$\underline{-A_i = A_a = \int_0^l \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F}}$$

3. Für die Querkraft Q ebenso:

$$\underline{-A_i = A_a = \int_0^l \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot k \cdot F}}$$

4. Also Gesamtformänderungsarbeit *całkowita praca odkształcenia*

$$\underline{A_a = -A_i = \int_0^l \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F} + \int_0^l \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J} + \int_0^l \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot k \cdot F}}$$

Um diese Formänderungsarbeit für die äußeren Kräfte an unserem Stabstück in der Form von Kraft \times Weg hervortreten zu lassen, berücksichtigen wir, daß

$$\underline{\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{F \cdot E}}, \text{ also } \underline{\Delta l = \frac{N}{F \cdot E} \cdot l}$$

ist und daß wir in diesem Falle für l in die allgemeine Gleichung das Differential ds einzusetzen haben, sodaß

$$\underline{\Delta ds = \frac{N}{F \cdot E} \cdot ds = \text{„Arbeitsweg“ der Kraft } N};$$

ebenso daß

$$\underline{\Delta d\alpha = \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} = \text{„Arbeitsweg“ des Momentes } M}$$

und

$$\underline{d \delta q = \frac{Q \cdot ds}{G \cdot k \cdot F} = \text{Arbeitsweg der Kraft } Q}.$$

Also erhalten wir

$$\underline{A_a = \int_0^l \frac{N \cdot \Delta ds}{2} + \int_0^l \frac{M \cdot \Delta d\alpha}{2} + \int_0^l \frac{Q \cdot d \delta q}{2}}$$

Ohne weitere Ableitung können wir — die Arbeitswege der einzelnen äußeren Kräfte P betrachtend — feststellen:

$$A_a = \frac{\sum P_n \cdot \delta_n}{2}$$

weil die Formänderungsarbeit der einzelnen Kräfte P_1, P_2 bis P_n gleich sein muß der Formänderungsarbeit ihrer Ersatzkräfte.

c) Verschiebungsarbeit.¹⁾ *Praca przemieszawania lub mo- presunięć, Praca możliwa*

Wirken gleichzeitig mehrere Kräfte auf einen Körper, so erzeugt jede für sich allein eine bestimmte Formänderung und leistet auch eine äußere Formänderungsarbeit, die gleich ist der inneren Formänderungsarbeit. Gleichzeitig leistet aber eine jede Kraft infolge der durch die anderen Kräfte stattfindenden

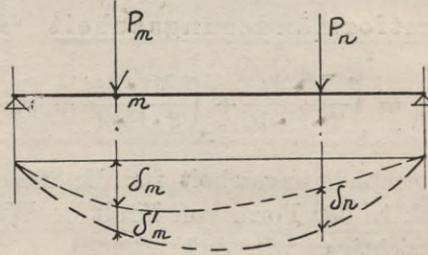


Abb. 86.

Formänderungen des Bauwerkes, also infolge einer von ihr selbst ganz unabhängigen Bewegungsursache ihres Angriffspunktes, eine weitere Arbeit. Diese Arbeit würde nun genau dieselbe sein, wenn die Bewegung des Angriffspunktes der Last durch irgendeine andere Ursache, etwa durch eine Verschiebung des ganzen Bauwerkes, veranlaßt worden wäre; daher nennt man sie Verschiebungsarbeit. Zu unterscheiden sind wieder äußere und innere Verschiebungsarbeit. Das Kennzeichen einer Verschiebungsarbeit ist demnach eine von der in ihrem Angriffspunkt verschobenen Kraft selbst völlig unabhängige Bewegungsursache.

Wirkt z. B. im Punkte m eines Balkens (Abb. 86) die Kraft P_m , so vollbringt sie dort die äußere Formänderungsarbeit

$$A_a = \frac{P_m \cdot \delta_m}{2}$$

¹⁾ Bearbeitet nach Otzen, Praktische Winke.

und es tritt danach Ruhezustand ein. Durch irgendeine andere Veranlassung, etwa eine zweite Last, eine Temperaturänderung oder eine Lageverschiebung oder dergleichen, werde nun der Balken aufs neue deformiert, wobei auch die erste Durchbiegung bei m sich um den Betrag δ'_m vergrößert. Dadurch tritt eine neue Arbeitsleistung der Kraft P_m ein, in dem sie den Weg δ'_m in voller Größe durchläuft und also die äußere Verschiebungsarbeit

$$A_v = P_m \cdot \delta'_m$$

leistet.

Auch jede andere Kraftwirkung (eine Längskraft, Querkraft oder ein Biegemoment) kann Formänderungs- und Verschiebungsarbeit leisten.

Zur Erläuterung der Verschiebungsarbeit einer inneren Kraft werde die Spannung in einem Fachwerkstab betrachtet.

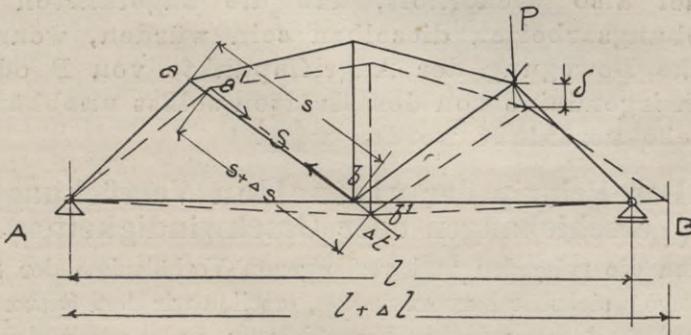


Abb. 87.

Ein Fachwerk sei durch eine Kraft P belastet (Abb. 87). Zunächst leistet dann natürlich die Kraft P die äußere Formänderungsarbeit $A_a = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \delta$, wobei der Weg δ die Projektion des Weges auf die Krafrichtung ist. Dann leistet aber auch die innere Spannkraft S eine Formänderungsarbeit. Tritt diese z. B. als Zugkraft auf, so wird sie den Stab von der Länge s um das Stück Δs verlängern und infolgedessen die innere Formänderungsarbeit

$$A_i = - \frac{S \cdot \Delta s}{2}$$

erzeugen.

Das — Zeichen deswegen, weil die Kraft entgegengesetzt zu ihrem Richtungssinn den Weg zurücklegt. Der Richtungssinn

der Kraft geht sofort klar hervor, wenn wir uns die Wirkung der inneren Spannkraft durch äußere Kräfte ersetzt denken, die an den Knotenpunkten angreifen. Dabei werden bei einer Zugspannkraft nämlich Kräfte anzubringen sein, die die beiden Knotenpunkte a und b in ihrem richtigen Abstand zusammenhalten, während wir andererseits wissen, daß die innere Zugspannkraft den Abstand zwischen diesen beiden Knotenpunkten in der Tat vergrößert. Erfährt nun jetzt das System noch eine Temperaturerhöhung, sodaß der Stab s nochmals, und zwar um Δt verlängert wird, also die Länge $s + \Delta s + \Delta t$ erhält, so leistet die Spannkraft S die innere Verschiebungsarbeit

$$A_v = -S \cdot \Delta t.$$

Diese Verschiebungsarbeit entstand hier durch eine weitere Verlängerung des Stabes; sie kann ebensogut durch eine Verschiebung des ganzen Bauwerkes hervorgerufen gedacht werden. Es sei also wiederholt, daß die angeführten Verschiebungsarbeiten dieselben sein würden, wenn die gleiche Bewegung der Angriffspunkte von P oder S durch irgendeine von den Kräften selbst unabhängige Ursache veranlaßt worden wäre.

d) Das Prinzip der virtuellen Verrückungen (Verschiebungen oder Geschwindigkeiten).¹⁾

Um die ruhenden und verborgenen Verhältnisse der Statik zu nötigen, sichtbar hervortreten, erteilen wir dem System eine virtuelle, d. h. gedachte Verschiebung, welche mit dem tatsächlichen Bewegungszustand des Systems (etwa infolge einer Formänderung) nichts zu tun haben soll, sondern eigens für den Zweck der statischen Untersuchung hervorgerufen gedacht wird. (In gewissem Grade können wir natürlich solche virtuelle Verschiebung als Schlußstadium einer Formänderungsarbeit auffassen, da ja bei einer Formänderung die zugehörigen Bewegungen von den einzelnen Kräften mit einer in dem letzten Zeitteilchen dt konstant anzunehmenden Größe zurückgelegt werden). Das Prinzip der virtuellen Verrückungen ermöglicht jedenfalls statische Untersuchungen ohne auf die Formänderungsarbeit dabei einzugehen.

Da die Bewegung gedacht ist, so braucht man auch nicht nach einer Kraft zu fragen, welche etwa von außen her zur Erzeu-

¹⁾ Abgekürzt: P. d. v. G.

zauwa pracy pomy,
bowazuj lub uos,
wyeh prostinnic

z morliwa pomy,
gabowana.

gung einer solchen Verschiebung erforderlich wäre. Will man sich zur Unterstützung der Anschauung eine solche Kraft vorstellen, so hätte man sie jedenfalls als unendlich klein und als für den Gleichgewichtszustand nicht in Betracht kommend anzusehen¹⁾.

Befindet sich nun ein starrer Körper unter der Wirkung mehrerer Kräfte im Gleichgewicht, und erteilt man ihm eine virtuelle Verrückung, welche natürlicherweise so vorzunehmen wäre, daß daraus ein Nutzen entsteht (womit zusammenhängt, daß die Verrückung den Umständen entsprechend überhaupt möglich ist), so ist dabei die Summe der Arbeit sämtlicher Kräfte und Momente gleich Null. Dabei sollen alle Bewegungen natürlich so klein sein, daß die Wirkungsart aller Kräfte und Momente auch nach der Verschiebung als unverändert gelten kann.

Um die virtuelle Arbeitsleistung der Kräfte herbeizuführen, ist es oft nötig, an einem Bauwerke gedachte Änderungen vorzunehmen. Damit z. B. bei einem vollwandigen Träger ein Moment in einem bestimmten Querschnitt eine virtuelle Arbeit leisten kann (Drehung des rechts vom Schnitt gelegenen Teils gegen den linken), denkt man sich in diesem Punkt ein Gelenk eingeschaltet. Oder damit eine Stabkraft in einem Fachwerk eine Arbeit leisten kann, denkt man sich den Stab durchschnitten.

Um nun das P. d. v. G. auf ein beliebiges Kräftesystem anwenden können, müssen wir uns das Grundgesetz der Verschiebungsarbeit allgemein ableiten, nachdem wir bisher die Verschiebungsarbeit nur an Hand von 2 Beispielen betrachtet haben.

e) Grundgesetz der Verschiebungsarbeit.²⁾

Allgemein: Gegeben ein Freiträger und am Ende desselben eine gedachte Kraft Q' (Abb. 88). Es erleide der Querschnitt m eine virtuelle Verschiebung, zusammengesetzt aus Längsbewegung, Querbewegung und Drehung. Die Folge davon wird sein, daß die Kraft Q' am Punkte i diese Bewegungen mitmacht; sie erzeugt dieselben aber nicht etwa. Es sollen

*Praxis politischer
wissenschaftlicher
wissenschaftlicher
wissenschaftlicher.*

¹⁾ Vgl. Abhandlung zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften von Moritz Canter, Teil: Rich. Lindt, Das P. d. v. G.

²⁾ Bearbeitet nach Otzen, Praktische Winke.

nun die drei virtuellen Arbeiten, welche durch diese Bewegung hervorgerufen werden, festgestellt werden.

1. Virtuelle Verschiebungsarbeit für die Längsbewegung.

Infolge der Längsbewegung von m nach m' um das Maß $d(\Delta s)$ bewegt sich auch der Punkt i und damit die Last Q' nach rechts (Abb. 88).

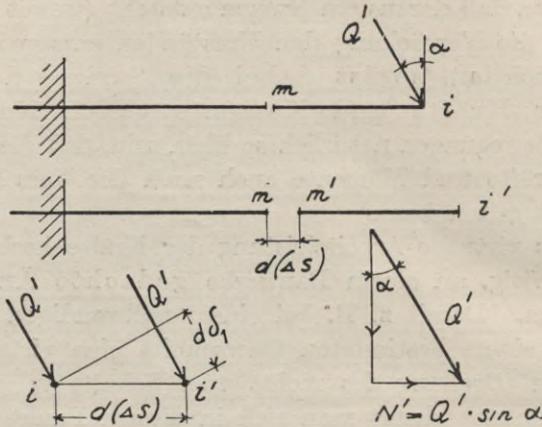


Abb. 88.

Die Arbeit, die Q' „leistet“, ist: Weg $d(\Delta s) \times$ Kraftkomponente von Q' in Richtung der Bewegung, also

$$A_v = d(\Delta s) \cdot Q' \cdot \sin \alpha = d(\Delta s) \cdot N',$$

oder auch Kraft $Q' \times$ Weg in der Krafrichtung, also

$$A_v = Q' \cdot d\delta_1;$$

demnach

$$A_{v1} = Q' d \delta_1 = N' \cdot d(\Delta s).$$

2. Verschiebungsarbeit für die Querbewegung.

Infolge der Querbewegung von m nach m' bewegt sich auch der Punkt i nach i' (Abb. 89) und die Arbeit, die Q' leistet, ist entweder Weg $d(\Delta v) \times$ Kraftkomponente von Q' in Richtung der Bewegung, also

$$A_v = d(\Delta v) \cdot Q' \cdot \cos \alpha = d(\Delta v) \cdot V',$$

oder auch Kraft $Q' \times$ Weg in der Kraftrichtung, also

$$A_v = Q' \cdot d\delta_2;$$

demnach

$$A_{v,q} = Q' \cdot \delta_2 = V' \cdot d(\Delta v).$$

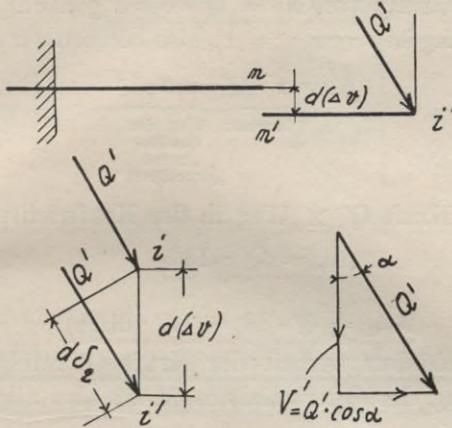


Abb. 89.

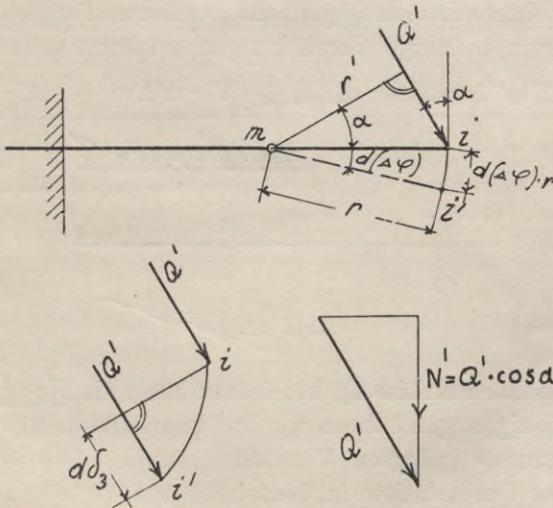


Abb. 90.

3. Verschiebungsarbeit für die Drehbewegung.

Infolge der Drehung um m , welche mit Hilfe eines angenommenen Gelenkes möglich ist und um den Winkel $d(\Delta \varphi)$ erfolgt (Abb. 90), ergibt sich wieder eine Verschiebungsarbeit von Q'

am Punkt $i = \text{Weg } d(\Delta\varphi) \cdot r \times \text{Kraftkomponente von } Q' \text{ in Richtung dieses Weges, also}$

$$A_v = d(\Delta\varphi) \cdot r \cdot Q' \cdot \cos \alpha,$$

wobei der Weg $d(\Delta\varphi) \cdot r$ wegen seiner Kleinheit als lotrecht, d. h. also in Richtung von $N' = Q' \cdot \cos \alpha$ gedacht werden kann. In dieser Gleichung ist $r \cdot \cos \alpha = r'$, also können wir auch schreiben

$$A_v = \underbrace{r' \cdot Q'}_{\text{Moment}} \cdot \underbrace{d(\Delta\varphi)}_{\substack{\text{Weg, den} \\ \text{das Mo-} \\ \text{ment} \\ \text{„durchläuft“}}}$$

Oder wir sagen Kraft $Q' \times \text{Weg}$ in der Kraftrichtung, also

$$A_v = Q' \cdot d\delta_3,$$

demnach

$$A_{vm} = Q' \cdot d\delta_3 = M' \cdot d(\Delta\varphi).$$

Die Gesamtverschiebungsarbeit der Kraft Q' infolge einer beliebigen Verrückung des Querschnittes m ist also allgemein:

$$A_v = \underbrace{Q' d\delta}_{\text{äußere}} = \underbrace{N' d(\Delta s) + V' \cdot d(\Delta v) + M' \cdot d(\Delta\varphi)}_{\text{innere}};$$

oder wenn mehrere Lasten Q' gedacht werden und zugleich mehrere Querschnitte m beliebige Verrückungen erfahren sollen:

$$A_v = \Sigma Q' \delta = \int N' \cdot d(\Delta s) + \int V' \cdot d(\Delta v) + \int M' \cdot d(\Delta\varphi).$$

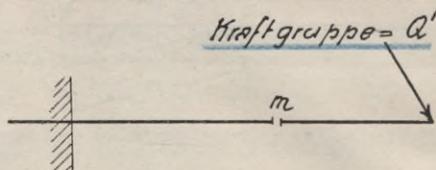


Abb. 91.

Die gedachten Kräfte Q' bezeichnet man als Kraftgruppe, die also beliebig angenommen werden kann (Abb. 91).

Die zugrunde gelegten Verrückungen des Querschnittes m oder mehrerer Querschnitte m , bestehend aus

Längsbewegung $d(\Delta s)$

Querbewegung $d(\Delta v)$

Drehbewegung $d(\Delta\varphi)$

und die daraus folgenden Verschiebungen von i $d\delta_1$, $d\delta_2$ und $d\delta_3$ der Angriffspunkte von Q' in deren Richtungen werden als Verschiebungsgruppe bezeichnet (Abb. 92).

Die Kraftgruppe ist jedenfalls unabhängig von der Verschiebungsgruppe; $d(\Delta s)$, $d(\Delta v)$ und $d(\Delta \varphi)$ können durch eine beliebige Ursache hervorgerufen gedacht werden.

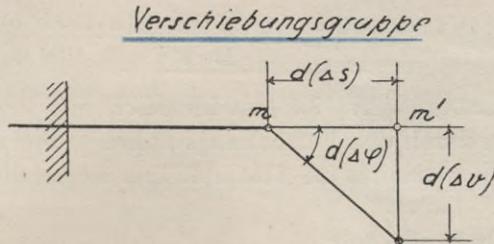


Abb. 92.

f) Brauchbarmachung des Gesetzes der Verschiebungsarbeit zur Ermittlung von Formänderungen.

Wir können nun anstatt der bisher willkürlich angenommenen Verschiebungsgruppe ebensogut eine solche annehmen, welche einem gegebenen Belastungszustande tatsächlich entspricht, um so das Gesetz in brauchbare Form zu bringen. Der springende Punkt bleibt aber nach wie vor der, daß dieser tatsächliche Belastungszustand in dem Augenblicke nicht zu bestehen braucht, wo man die damit verbundene Verschiebungsgruppe auf eine beliebige Kraftgruppe wirken läßt.

So gelangen wir später zur Auffindung statisch unbestimmter Größen lediglich dadurch, daß wir auf das statisch bestimmte Hauptsystem, belastet mit den unbekanntem Größen (vgl. Kap. II) als $\Sigma Q'$, die Verschiebungsgruppe des tatsächlichen Belastungszustandes anwenden (Kap. VI).

Zu dem oben angegebenen Zweck drücken wir nun die einzelnen Verschiebungen $d(\Delta s)$, $d(\Delta v)$, $d(\Delta \varphi)$ durch die ihnen zugrunde liegenden, zunächst bei beliebiger Belastung möglichen Längskräfte N , Querkräfte V und Momente M allgemein aus mit der Absicht, bei dem Gebrauch der auf diese Weise ausgedrückten Arbeitsgleichungen diesen N , V und M die für unser Ziel jeweils zweckmäßigen Werte beizumessen.

Nach dem Hookeschen Gesetz ist:

$$\varepsilon = \frac{\Delta s}{s} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{E \cdot F}; \Delta s = \frac{N}{E \cdot F} \cdot s,$$

also

$$d(\Delta s) = \frac{N \cdot ds}{E \cdot F}.$$

Die Formänderung $d(\Delta v)$ ist nun identisch mit $\gamma \cdot ds$; denn sie wird gemessen durch den Verrückungswinkel γ , um den sich zwei benachbarte Querschnitte im Abstände von ds parallel zueinander verschieben.

Wir erhalten also mit

$$\tau = \frac{Q}{k \cdot F} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{Q}{k \cdot F \cdot G};$$

$$d(\Delta v) = \frac{V \cdot ds}{k \cdot F \cdot G}.$$

$d(\Delta \varphi)$ wird genau entsprechend der Gleichung $\Delta d\alpha = \frac{M \cdot ds}{E \cdot J}$, die wir früher schon kennen gelernt haben:

$$d(\Delta \varphi) = \frac{M \cdot ds}{E \cdot J}.$$

Damit lautet die Arbeitsgleichung

$$\sum Q' \cdot \sigma = \int \frac{N' \cdot N}{E \cdot F} \cdot ds + \int \frac{V' \cdot V}{G \cdot k \cdot F} \cdot ds + \int \frac{M' \cdot M}{E \cdot J} \cdot ds.$$

Verschiebungsarbeit der Kraftgruppe = Verschiebungsarbeit der Verschiebungsgruppe (die inneren Verschiebungen durch deren ursächliche Kraftwirkungen ersetzt).

g) Zusammenhang zwischen Verschiebungs- und Formänderungsarbeit.

In dem Gesetz für die Verschiebungsarbeit hatten wir für die Kraftgruppe einen beliebigen Wert vorausgesetzt und ebenfalls die Verschiebungsgruppe durch äußere Kräfte von beliebiger Größe entstanden gedacht. Wir könnten nun, wie wir gesehen haben, den allgemeinen Ausdrücken der Kraftgruppe N' , V' und M' und der Verschiebungsgruppe N , V und M beliebige Werte beimesen, da ja in der allgemeinen Gleichung beide vollständig voneinander unabhängig waren.

Als Spezialfall können wir nun annehmen, daß die Kraftgruppe identisch ist mit der Verschiebungsgruppe. Dann wird $N' = N$, $V' = V$ und $M' = M$ und es folgt

$$\Sigma Q \cdot \delta = \int \frac{N^2 \cdot ds}{E \cdot F} + \int \frac{V^2 \cdot ds}{G \cdot k \cdot F} + \int \frac{M^2 \cdot ds}{E \cdot J}$$

Dieser Spezialfall der Verschiebungsarbeit gestattet einen Vergleich mit der Formänderungsarbeit, und wir erkennen daraus die Tatsache, daß die Verschiebungsarbeit das Doppelte ist von der Formänderungsarbeit; denn die Formänderungsarbeit lautet (44.59):

$$A_a = - A_l = \int \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F} + \int \frac{V^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot k \cdot F} + \int \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J}$$

h) Die rechnerische Bestimmung von Formänderungen mit Hilfe der allgemeinen Arbeitsgleichung.¹⁾

Die allgemeine Grundgleichung der Verschiebungsarbeit

$$\Sigma Q' \cdot \delta = \int \frac{N' \cdot N \cdot ds}{E \cdot F} + \int \frac{V' \cdot V \cdot ds}{G \cdot k \cdot F} + \int \frac{M' \cdot M \cdot ds}{E \cdot J}$$

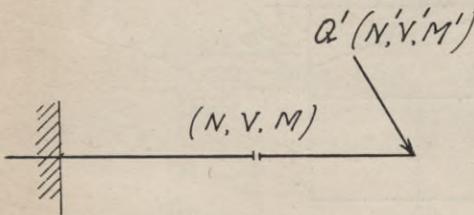


Abb. 93.

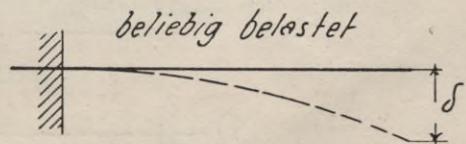


Abb. 94.

welche für den in Abb. 93 gegebenen Fall abgeleitet ist, aber selbstverständlich allgemeine Gültigkeit hat, kann wie folgt zur Bestimmung von Formänderungen und Durchbiegungen benutzt werden:

Die Verschiebung δ , welche z. B. der Endpunkt eines Freitragers (Abb. 94) infolge einer beliebigen Belastung desselben erleidet, sei die gesuchte Formänderung. Wenn wir nun diese Formänderung δ (als Maß gemessen) als fertige Verschiebung auffassen und allein als Resultat

¹⁾ Zugrunde liegt: Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, 4. Aufl. S. 150.

auf der linken Seite unserer Arbeitsgleichung erhalten wollen, so müssen wir einen Kunstgriff eintreten lassen, der darin besteht, daß wir für die Kraftgruppe $\Sigma Q'$ den Wert 1 wählen. Dann lautet die linke Seite $\Sigma Q' \cdot \delta = 1 \cdot \delta = \delta$. Diese „Kraftgruppe 1“ wird man natürlich am Orte und im Sinne der gesuchten Formänderung annehmen. Auf der rechten Seite der Gleichung muß man naturgemäß die zu dieser „Kraftgruppe 1“ gehörigen inneren Kräfte N' , V' und M' einsetzen; wir geben ihnen die besondere Bezeichnung N_a , V_a und M_a . Als Verschiebungsgruppe haben wir die für die vollendete Durchbiegung ursächliche, wirkliche Belastungsgruppe einzuführen, und somit lautet unsere Gleichung:

$$1 \cdot \delta = \int \frac{N_a \cdot N \cdot ds}{E \cdot F} + \int \frac{V_a \cdot V \cdot ds}{G \cdot k \cdot F} + \int \frac{M_a \cdot M \cdot ds}{E \cdot J}.$$

Anwendung auf verschiedene Trägerarten.

Beispiel 1. Zu berechnen sei die Durchbiegung δ_n des in Abb. 95 gegebenen Kragträgers mit gleichmäßiger Belastung q .

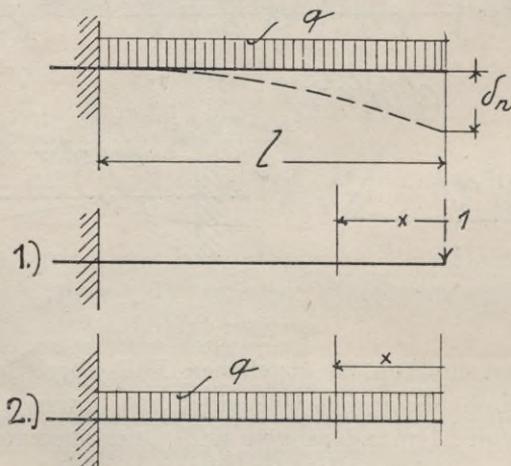


Abb. 95.

1. Kraftgruppe: Last 1 am Orte der gesuchten Formänderung.
Dazu gehörig als innere Wirkung $N_a = 0$; $V_a = 1$;
 $M_a = 1 \cdot x$.
2. Verschiebungsgruppe: Die Wirkungen der wirklichen Last
 $N = 0$; $V = q \cdot x$; $M = \frac{q \cdot x^2}{2}$.

Also lautet unsere Arbeitsgleichung:

$$1 \cdot \delta = \int_0^1 \frac{0 \cdot 0 \cdot dx}{E \cdot F} + \int_0^1 \frac{1 \cdot q \cdot x \cdot dx}{G \cdot k \cdot F} + \int_0^1 \frac{1 \cdot x \cdot q \cdot x^2 \cdot dx}{E \cdot J \cdot 2}$$

daraus

$$\delta = 0 + \frac{q \cdot l^2}{2 \cdot G \cdot k \cdot F} + \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot J}$$

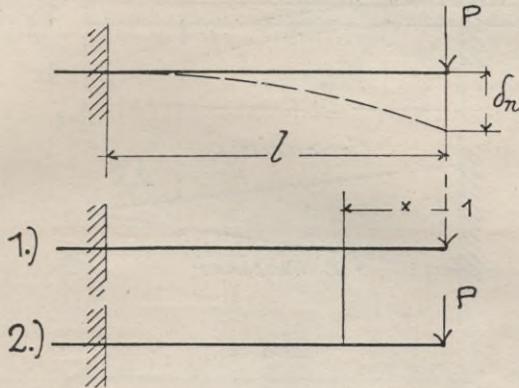


Abb. 96.

Beispiel 2. Freitragender mit Einzellast P am Ende (Abb. 96).

1. Kraftgruppe: Last 1 am Orte der gesuchten Durchbiegung.

Dazu die innere Wirkung $N_a = 0$; $V_a = 1$; $M_a = 1 \cdot x$.

2. Verschiebungsgruppe: Wirkliche Last $N = 0$; $V = P$;

$M = P \cdot x$.

Also

$$\delta = \int_0^1 0 + \int_0^1 \frac{1 \cdot P \cdot dx}{G \cdot k \cdot F} + \int_0^1 \frac{1 \cdot x \cdot P \cdot x \cdot dx}{E \cdot J}$$

$$\delta = 0 + \frac{P \cdot l}{G \cdot k \cdot F} + \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J}$$

(vgl. die früheren Resultate).

Der Gebrauch der Arbeitsgleichung zur Ermittlung von Formänderungen ist also dem Gebrauch der Differentialgleichung der elastischen Linie entschieden vorzuziehen und liefert sogar noch den Einfluß der Längs- und Querkräfte.

Beispiel 3. Freitragender gleichen Widerstandes gegen Biegung mit einer Einzellast P am Ende (Abb. 97).

Allgemein ist der Querschnitt $F = b \cdot \frac{x}{l} \cdot h$ und das wechselnde Trägheitsmoment $J = \frac{1}{12} \cdot b \cdot \frac{x}{l} \cdot h^3$.

1. Kraftgruppe wie vor = 1.
2. Verschiebungsgruppe ebenfalls wie vor.

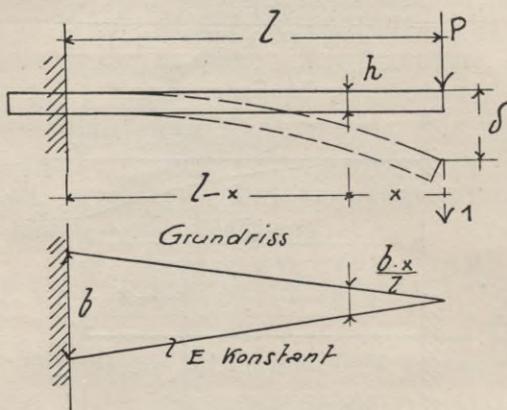


Abb. 97.

Also

$$\delta = \int_0^l \frac{1 \cdot P \cdot dx}{G \cdot k \cdot F} + \int_0^l \frac{1 \cdot x \cdot P \cdot x \cdot dx}{E \cdot \frac{1}{12} \cdot b \cdot \frac{x}{l} \cdot h^3}$$

$$\delta = \frac{P \cdot l}{G \cdot k \cdot b \cdot h} \cdot \int_0^l \frac{dx}{x} + \frac{12 \cdot P \cdot l}{E \cdot h^3} \cdot \int_0^l x \cdot dx$$

$$\delta = \frac{P \cdot l}{G \cdot k \cdot b \cdot h} \cdot \log. \text{ nat. } l + \frac{6 \cdot P \cdot l^3}{E \cdot b \cdot h^3}$$

Beispiel 4. Freitragender mit einer dreieckförmigen Last P bei konstantem E und J (Abb. 98).

1. Kraftgruppe wie vor.
2. Verschiebungsgruppe:

$$N = 0; \quad V = P \cdot \frac{x^2}{l^2}; \quad M = P \cdot \frac{x^2}{l^2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{P \cdot x^3}{3 \cdot l^2}$$

$$\delta = \int_0^l \frac{1 \cdot P \cdot \frac{x^2}{l^2} \cdot dx}{G \cdot k \cdot F} + \int_0^l \frac{1 \cdot x \cdot P \cdot \frac{x^3}{3 \cdot l^2} \cdot dx}{E \cdot J \cdot 3 \cdot l^2}$$

1) vgl. Anhang A Absatz 47.

$$\delta = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot G \cdot k \cdot F \cdot l^2} + \frac{P \cdot l^5}{E \cdot J \cdot 5 l^2 \cdot 3}$$

$$\delta = \frac{P \cdot l}{3 \cdot G \cdot k \cdot F} + \frac{P \cdot l^3}{E \cdot J \cdot 15}$$

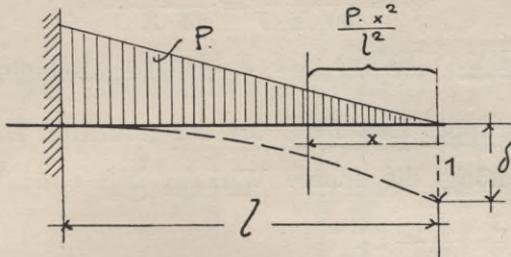


Abb. 98.

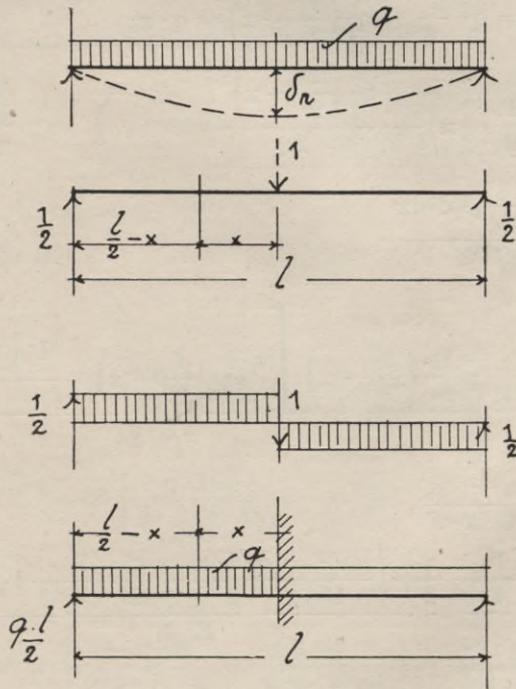


Abb. 99.

Nach dem Resultate der Differentialgleichung der elastischen Linie hätten wir bekommen mit (str. 45):

$$y = \frac{P \cdot l^3}{12 \cdot E \cdot J} \cdot \left(\frac{x}{l} + \frac{(l-x)^5}{5 l^5} - \frac{1}{5} \right)$$

(vgl. früher), für $y = \delta$ und $x = l$

$$\delta = \frac{P \cdot l^3}{12 \cdot E \cdot J} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{(1-l)^5}{5 l^5} - \frac{1}{5} \right)$$

$$\delta = \frac{P \cdot l^3 \cdot 4}{60 \cdot E \cdot J} = \frac{P \cdot l^3}{15 \cdot E \cdot J}$$

Beispiel 5. Balken auf 2 Stützen gleichmäßig belastet
(Abb. 99).

1. Lösung.

1. Kraftgruppe: Last l am Ort der gesuchten Durchbiegung;
dazugehörig die innere Wirkung $N_a = 0$; $V_a = \pm \frac{l}{2}$;

$$M_a = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right).$$

2. Verschiebungsgruppe:

$$N = 0; \quad V = q \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) = q \cdot x;$$

$$M = \frac{q \cdot l}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) - \frac{q \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right)^2}{2}$$

$$\delta_n = \pm \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\frac{1}{2} \cdot q \cdot x \cdot dx}{G \cdot k \cdot F}$$

$$+ \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) \cdot \left[\frac{q \cdot l}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) - \frac{q \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right)^2}{2} \right]}{E \cdot J} \cdot dx$$

$$\delta_n = \pm \frac{q \cdot l^2}{16 \cdot G \cdot k \cdot F}$$

$$+ \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{l}{4} - \frac{x}{2} \right) \cdot \left[\frac{q \cdot l^2}{4} - \frac{q \cdot l \cdot x}{2} - \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{l^2}{4} - l \cdot x + x^2 \right) \right]}{E \cdot J} \cdot dx$$

usw.

Als Schlußresultat erhalten wir $\delta_n = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{768 \cdot E \cdot J}$ und, da die Integration über 2 Hälften auszuführen ist, so wird

$$\delta_n = 2 \cdot \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{768 \cdot E \cdot J} = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot J}$$

(vgl. früheres Resultat). (Sk. 34)

2. Lösung (Abb. 100).

$$\delta_n = 2 \cdot \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\frac{1}{2} x \cdot \left(\frac{q \cdot l \cdot x}{2} - \frac{q \cdot x^2}{2} \right)}{E \cdot J} \cdot dx$$

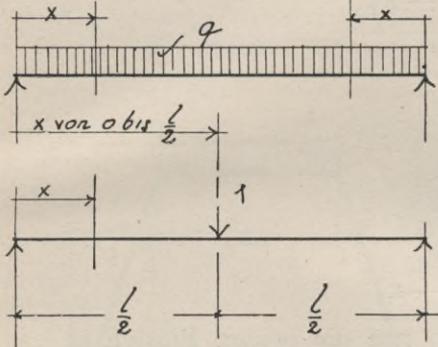


Abb. 100.

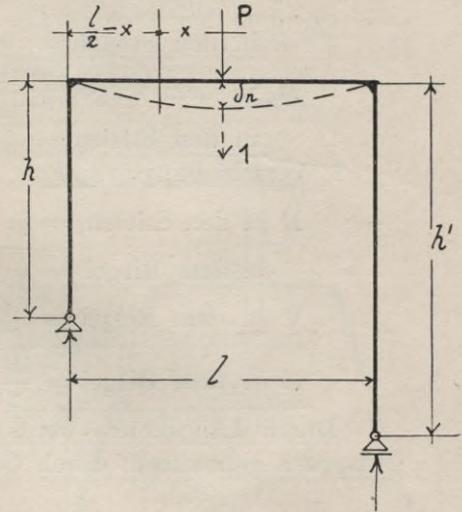


Abb. 101.

oder

$$\delta_n = 2 \cdot \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{q \cdot l \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot J} \cdot dx - 2 \cdot \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{q \cdot x^3}{4 \cdot E \cdot J} \cdot dx$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{q \cdot l \cdot l^3}{4 \cdot E \cdot J \cdot 24} - \frac{q}{4 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{l^4}{64} \right]$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{q \cdot l^4}{96 \cdot E \cdot J} - \frac{q \cdot l^4}{256 \cdot E \cdot J} \right]$$

$$\delta_n = 2 \cdot \left[\frac{4 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot J} - \frac{1,5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot J} \right] = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot J}$$

Beispiel 6. Es soll die Durchbiegung δ_n , von der Last P herrührend, in der Mitte des in Abb. 101 dargestellten Trägers berechnet werden.

Diese setzt sich zusammen aus der Durchbiegung des Riegels selbst und der Zusammendrückung der Stützen. Die Integrale sind demnach für alle 3 Stabteile zu bilden.

1. Kraftgruppe: Last 1 in der Mitte, dazu

$$N_a \text{ in den Stielen} = \text{je } \frac{1}{2}$$

$$\text{in dem Riegel} = 0$$

$$V_a \text{ in dem Riegel} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{in den Stielen} = 0$$

$$M_a \text{ in dem Riegel} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - x \right)$$

$$\text{in den Stielen} = 0.$$

2. Verschiebungsgruppe:

$$N \text{ in den Stielen} = \text{je } \frac{P}{2}$$

$$\text{in dem Riegel} = 0$$

$$V \text{ in dem Riegel} = \pm \frac{P}{2}$$

$$M \text{ in dem Riegel} = \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - x \right).$$

Durch Längskräfte werden also nur die beiden Pfosten in Anspruch genommen, durch Querkräfte nur der Riegel.

$$\delta_n = \int_0^{h(h')} \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{2} \cdot \frac{ds}{E \cdot F} \pm 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 \cdot P \cdot ds}{2 \cdot 2 \cdot G \cdot k \cdot F} + 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 \cdot \frac{P}{2} \cdot dx}{E \cdot J}$$

Für $h = h'$ angenommen, ist

$$\delta_n = 2 \cdot \frac{P}{4} \cdot \frac{h}{E \cdot F} \pm 2 \cdot \frac{P}{4 \cdot G \cdot k \cdot F} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{P}{4 \cdot E \cdot F} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{l^2}{4} - l \cdot x + x^2 \right) \cdot dx.$$

Aufgelöst gibt

$$\delta_n = \frac{P \cdot h}{2 \cdot E \cdot F} + 0 + \frac{P \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot F}. \quad (\text{p. 42. 35; 44})$$

Beispiel 7. Für einen ähnlichen einfachen Balken wie vor (Abb. 102) soll die Durchbiegung in der Mitte und zwar mit Vernachlässigung von N und V berechnet werden.

1. Kraftgruppe: Last 1 in der Mitte, dazu im Innern

$$M_a = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - x \right),$$

wobei es gleichgültig ist, auf welcher Seite vom Punkt i das x sich befindet.

2. Verschiebungsgruppe: Von 0 bis i

$$M = \frac{q \cdot b}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - x \right),$$

x veränderlich von 0 bis a ; ferner

$$M = \frac{q \cdot b}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - x \right) - \frac{q \cdot \left(\frac{b}{2} - x \right)^2}{2};$$

x veränderlich von a bis $\frac{1}{2}$.

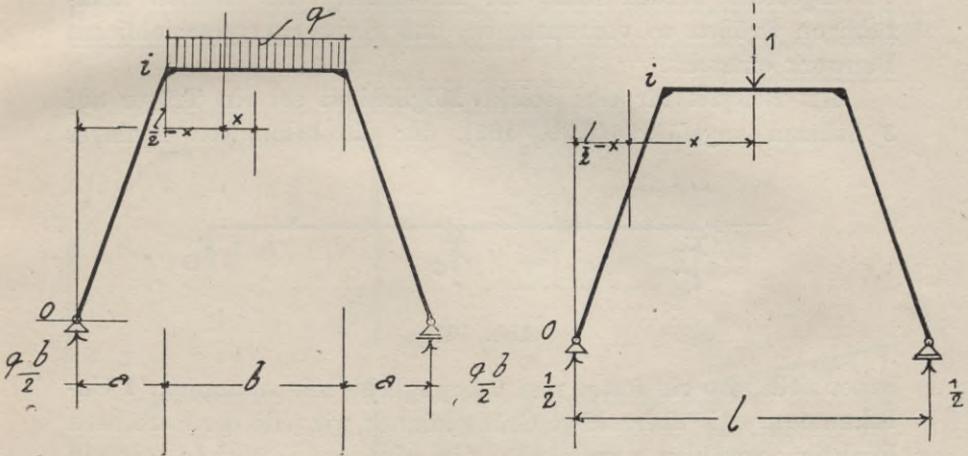


Abb. 102.

$$\delta_n = 2 \cdot \int_0^a \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - x \right) \cdot q \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - x \right) \cdot dx}{E \cdot J}$$

$$+ 2 \cdot \int_a^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - x \right) \cdot \left[\frac{q \cdot b}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - x \right) - \frac{q \cdot \left(\frac{b}{2} - x \right)^2}{2} \right] \cdot dx}{E \cdot J}$$

u. s. f.

Kapitel VI.

Allgemeines über statisch unbestimmte Bauwerke und die Ermittlung der statisch nicht bestimmbareren Größen X.

a) Allgemeines.

Zu Kapitel II sei noch bemerkt, daß es als selbstverständlich vorausgesetzt werden muß, die Entfernung der statisch überzähligen Größen so vorzunehmen, daß nicht ein verschiebliches Bauwerk entsteht.

Als Beispiel für eine solche Möglichkeit sei ein Träger auf 3 Stützen angeführt (Abb. 103), der die bekannten Auflager

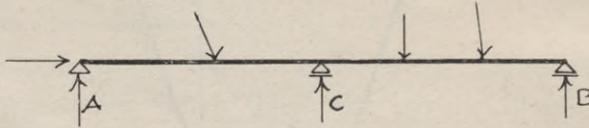


Abb. 103.

haben soll, also ein festes und 2 bewegliche mit zusammen 4 Unbekannten. Als überzählige Größe können wir jede der lotrechten Reaktionen wählen, nur nicht die eine wagerechte, da in diesem Falle aus dem festen Gelenk ein wagerecht bewegliches Auflager entstehen und das statisch bestimmte Hauptsystem unter dem Einfluß der Kräfte verschieblich werden würde.

b) Ermittlung der statisch nicht bestimmbareren Größen X. (Geometrische Erklärung.)

Die Figuren a und b des in Abb. 104 dargestellten Stabzuges zeigen uns das statisch bestimmte Hauptsystem einerseits belastet mit den äußeren Kräften und andererseits belastet mit den überzähligen Größen, hier X_a und X_b genannt.

Wie schon erläutert, muß ein statisch bestimmtes Hauptsystem, sofern es als einfacher Balken vorliegt, stets ein festes und ein bewegliches Auflager haben, oder es muß als Freitragler (Fig. a) am freien Ende freie Bewegungsmöglichkeit besitzen. Beim Dreigelenkbogen als Grundsystem liegt die freie Bewegungsmöglichkeit im Mittelgelenk. Die Veranlassung dafür, daß beim

vorliegenden System das Lager I nicht frei beweglich ist, ist das feste Auflagergelenk bzw. sind es die beiden dort wirkenden noch unbekanntnen Größen X_a und X_b oder deren Resultierende R .

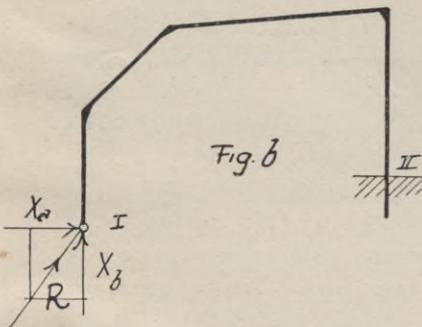
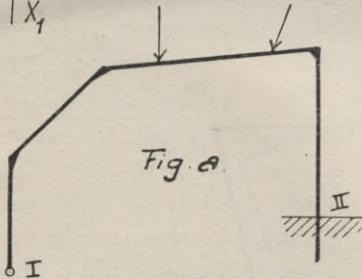
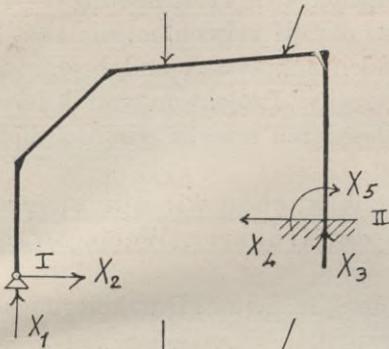


Abb. 104.

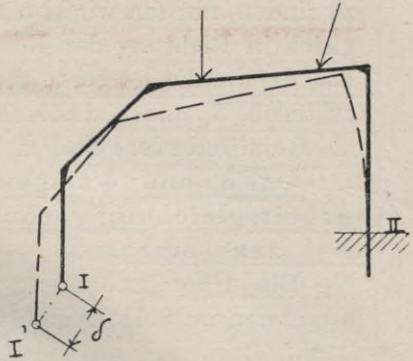


Abb. 105.

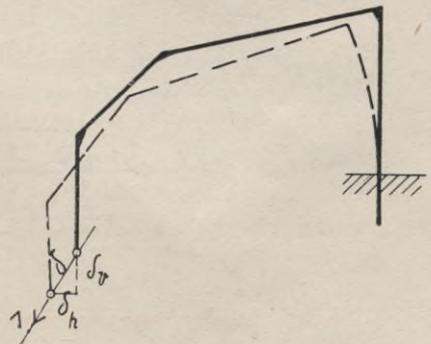


Abb. 106.

Das Vorhandensein der Resultierenden R oder ihrer beiden Komponenten X_a und X_b verhindert also eine Verschiebung des Punktes I. Diesen Vorgang kann man sich auch getrennt vorstellen.

1. Nach der Belastung gemäß Fig. a wird eine Verschiebung von Punkt I nach I' eintreten (Abb. 105), welche nichts anderes ist und nicht anders zu berechnen wäre als eine Durchbiegung δ nach den früheren Beispielen.

Gegenüber den bisher berechneten Fällen der Durchbiegung besteht hier nur der eine Unterschied, daß uns die Richtung von δ und somit auch die Richtung der anzubringenden Kraft 1 unbekannt ist. Um dennoch die Verschiebung $I-I'$ zu finden, müssen wir also zunächst darauf verzichten, die Last 1 gleich in Richtung der Resultierenden anzusetzen und begnügen uns damit, die lotrechte und wagerechte Projektion von δ festzustellen, δ_v und δ_h (Abb. 106). Hierdurch müssen wir natürlich als Resultierende δ finden.

Um δ_v und δ_h zu gewinnen, brauchen wir nur unsere Arbeitsgleichung genau nach der früheren Weise zweimal anzusetzen.

Die Übereinstimmung mit den früheren Durchbiegungsberechnungen möge Abb. 107 andeuten.

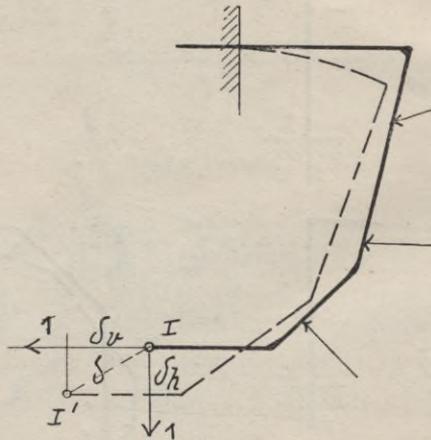


Abb. 107.

Wollten wir diese Aufgabe wirklich durchführen, so müßten wir analog unseren früheren Berechnungen hier sowohl für die eine als für die andere Last 1 Längskraft, Querkraft und Biegemoment für jeden Stabteil in einfacher Weise bestimmen und diese Werte jedesmal mit den für beide gleichen Wirkungen der Verschiebungsgruppe unter das Integral setzen. Man hätte sowohl für Längskraft, Querkraft als Biegemoment jedes Integral 4mal anzuschreiben, weil 4 Stabteile vorhanden sind. Läßt man diese 4-Teilung außer Betracht, so würden unsere beiden Gleichungen ganz allgemein lauten:

$$1. \quad 1 \cdot \delta_v = \int \frac{N_{av} \cdot N \cdot ds}{E \cdot F} + \int \frac{V_{av} \cdot V \cdot ds}{G \cdot k \cdot F} + \int \frac{M_{av} \cdot M \cdot ds}{E \cdot J}$$

daraus also δ_v

$$2. \quad 1 \cdot \delta_h = \int \frac{N_{ah} \cdot N \cdot ds}{E \cdot F} + \int \frac{V_{ah} \cdot V \cdot ds}{G \cdot k \cdot F} + \int \frac{M_{ah} \cdot M \cdot ds}{E \cdot J}$$

daraus also δ_h .

δ_v und δ_h zusammengesetzt ergeben dann δ , die Gesamtverschiebung von I.

Wenn man die Aufgabe nur für die Biegemomente durchführt, so hätte man für diese allein schon $2 \cdot 4 = 8$ Integrale aufzustellen.

2. Unter dem Einfluß der bei bestimmter äußerer Belastung sich einstellenden statisch unbestimmbaren Größen wird nun in jedem Augenblick, wo der freie Punkt I das Bestreben zeigt, sich im Sinne von δ zu verschieben, diese Verschiebung annulliert (wenigstens wollen wir vorläufig diesen einfachsten Fall annehmen). Die Resultierende von X_a und X_b (R) durchläuft also nicht den Weg δ , sondern den Weg O. Natürlich können wir uns diese Vorstellung auch so machen, daß nach Abb. 104 Fig. a zunächst eine tatsächliche Verschiebung erfolgt und nach Abb. 104 Fig. b die Rückschiebung durch die überzähligen Größen.

Beide Vorgänge zusammen betrachtet liefern uns die Möglichkeit, die Arbeitsgleichung so aufzustellen, daß wir die statisch unbestimmten Größen daraus gewinnen können. Mit dem Wege $\delta = 0$ lauten nämlich unsere linken Seiten der Gleichungen: $1 \cdot 0$. Zu diesen wirklichen Verschiebungswegen gehört natürlich im Innern des Systems die für beide Wege gleiche wirkliche Verschiebungsgruppe, welche sich nunmehr aus den Einflüssen der Belastung selbst und der statisch überzähligen Größen X_a und X_b gleichzeitig zusammensetzt. Um ein Beispiel zu geben, seien für die Längskraft N die Kräfte noch näher angegeben.

1. N auf die Verschiebung hin wirkend, genannt N_0 (Belastung).

2. Diesem N entgegenwirkend dasjenige N, das von der unbestimmten Größe R herrührt: N_R , so daß die wirkliche Verschiebungsgruppe lautet:

$$N = N_0 - N_R.$$

Für N_R können wir auch schreiben $N_{aR} \cdot R$, d. h. der Einfluß einer in Richtung der Kraft R wirkenden Kraft 1 ist mit R zu multiplizieren. N_{aR} ist also die Einheit zu N_R .

Somit erhalten wir:

$$N = N_0 - N_{aR} \cdot R.$$

Führt man jetzt anstatt R deren Komponenten X_a und X_b ein, und nennt man den Einfluß von $X_a = 1$ gleich N_a und den Einfluß von $X_b = 1$ gleich N_b , so lautet dieselbe Verschiebungsgruppe:

$$N = N_0 - (N_a \cdot X_a + N_b \cdot X_b).$$

Die linken Seiten lauten:

$$1. \quad 1 \cdot \delta_v = 1 \cdot 0$$

$$2. \quad 1 \cdot \delta_h = 1 \cdot 0.$$

Sowohl bei der Aufstellung von I als auch von II muß, da jedesmal der Weg = 0 wurde, im Innern ein und dieselbe Verschiebungsgruppe tätig gewesen sein, nämlich das soeben angegebene

$$N = N_0 - (N_a \cdot X_a + N_b \cdot X_b).$$

Wir wissen, daß die Größen X_a und X_b entgegengesetzt zu unseren Lasten 1 wirken, welche wir für die Anwendung der Arbeitsgleichungen benötigen. Unser Ansatz der Arbeitsgleichung bezieht sich also auf den Zustand $X_a = -1$ und $X_b = -1$.

Unsere Gleichungen lauten nunmehr:

$$1. \quad 1 \cdot 0 = \int \frac{N_a \cdot (N_0 - N_a \cdot X_a - N_b \cdot X_b) \cdot ds}{E \cdot F}$$

$$+ \int \frac{V_a \cdot (V_0 - V_a \cdot X_a - V_b \cdot X_b) \cdot ds}{G \cdot k \cdot F}$$

$$+ \int \frac{M_a \cdot (M_0 - M_a \cdot X_a - M_b \cdot X_b) \cdot ds}{E \cdot J}$$

$$2. \quad 1 \cdot 0 = \int \frac{N_b \cdot (N_0 - N_a \cdot X_a - N_b \cdot X_b) \cdot ds}{E \cdot F} + \int \frac{V_b \cdot (V_0 - V_a \cdot X_a - V_b \cdot X_b) \cdot ds}{G \cdot k \cdot F}$$

$$+ \int \frac{M_b \cdot (M_0 - M_a \cdot X_a - M_b \cdot X_b) \cdot ds}{E \cdot J}$$

Die Arbeitsgleichung muß also so oft aufgestellt werden, als Unbekannte vorhanden sind.

Bemerkung: Bildet man von dem Ausdruck M die partielle Ableitung nach X_b , so erhält man

$$\frac{\partial M}{\partial X_b} = -M_b.$$

Man kann also für die Werte, welche auf die Zahl 1 Bezug haben (M_b , V_b und N_b und natürlich auch ebenso M_a , V_a und N_a), die partiellen Differentialquotienten der wirklichen Verschiebungsgruppe nach den gleichnamigen statisch unbestimmten Größen einsetzen, also z. B.

$$\int \frac{M_b \cdot (M_0 - M_a \cdot X_a - M_b \cdot X_b) \cdot ds}{E \cdot J} = - \int \frac{\partial M}{\partial X_b} \cdot \frac{(M_0 - M_a \cdot X_a - M_b \cdot X_b) \cdot ds}{E \cdot J}$$

Die Arbeitsgleichung gestattet nun in ganz einfacher Weise die Berechnung zunächst einfach statisch unbestimmter Systeme; bei mehrfacher Unbestimmtheit müssen darauf jeweilig noch andere Lösungsformen aufgebaut werden, da sonst die Integrale zu schwer lösbar sind. Im allgemeinen aber sind in diesen Gleichungen außer den überzähligen Größen keine anderen Unbekannten mehr enthalten, und diese selbst treten auch nur im 1. Grade auf.

Schlußbetrachtung zur Arbeitsgleichung.

Wir wollen uns darüber klar sein, daß wir zur Ermittlung der statisch unbestimmten Größen mit vollständiger Umgehung der Feststellung irgendeiner tatsächlichen Formänderung gelangt sind, eben nur durch die geschickte Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen. Wollte man nun die unbestimmten Größen nicht auf diese Weise finden, so müßte man sie aus den Formänderungen berechnen, was folgendermaßen vor sich gehen würde (vgl. Abschnitt II, Kap. V):

Für das statisch bestimmte Hauptsystem wird die Verschiebung an der Stelle berechnet, wo später die unbestimmte Größe angreifen soll. Dies geschieht, wie bekannt, mittels der Arbeitsgleichung oder mittels eines noch später zu betrachtenden zeichnerischen Verfahrens (Konstruktion der Biegelinie, Stabzugverfahren usw.). Sodann hätte man mit Hilfe desselben Verfahrens für eine Kraft = 1 entgegengesetzt zur Richtung der gefundenen Verschiebung die Rückschiebung festzustellen. Nun erhält man durch Division der Rückschiebung in die erste Ver-

1) Vgl. Anhang höhere Mathematik, Absatz 11.

schiebung ganz einfach die überzählige Größe selbst. So betrage z. B. bei einem Hauptsystem (Abb. 108) die wagerechte Verschiebung, festgestellt durch die Arbeitsgleichung, 6 cm, die

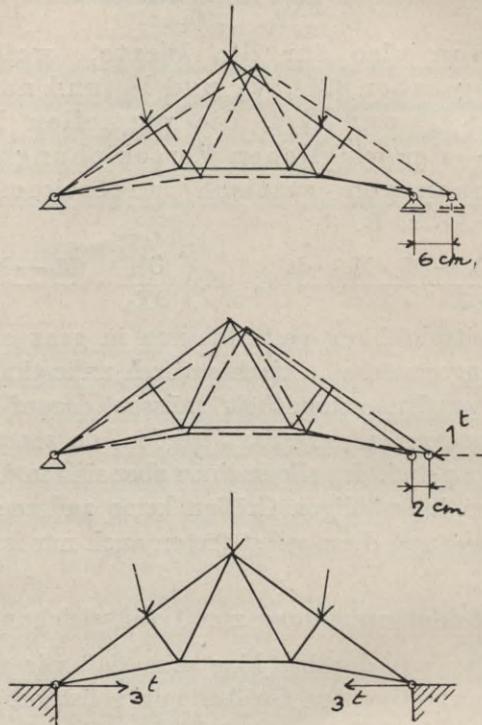


Abb. 108.

Rückschiebung infolge der Kraft 1 an derselben Stelle 2 cm, folglich wäre die in diesem einfach statisch unbestimmten System vorhandene Horizontalkraft $X_a = \frac{6}{2} = 3 \text{ t}$.

c) Möglichkeiten für die linke Seite der Gleichung.

Es sind folgende 3 Fälle möglich, ohne daß die rechte Seite sich irgendwie ändert:

1. Der Angriffspunkt der überzähligen Größen ist starr (wie bei unserer Ableitung zuerst angenommen). In solchen Fällen sagt man: Die statisch unbestimmten Größen machen die Formänderungsarbeit (für uns rechnerisch Ver-

schiebungsarbeit) zu einem Minimum. Man spricht daher vom „Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit“.

2. Die statisch unbestimmten Größen können nicht bis zur vollen Gegengröße gegen die Verschiebungskräfte anwachsen, um jede Bewegung δ aufzuheben. Dieser Fall tritt ein, wenn das Lager, wogegen sich die unbestimmten Größen stützen, und dem sie erst ihre Entstehung verdanken, nicht starr ist. So ist etwa das Mauerwerk als Auflager nachgiebig, zusammendrückbar, oder der ganze Pfeiler dreht sich. Es steht nun auf der linken Seite nicht mehr $l \cdot 0$, sondern $l \cdot \delta_n$, worin δ_n gewissermaßen den Bewegungsrest von Hin- und Rückschiebung bedeutet. Eine solche Verschiebung kann man, wenn sie befürchtet werden muß, von vornherein schätzen, oder sie ist schon durch irgendwelche Umstände gegeben. Hier kann man natürlich nicht sagen, daß ein Minimum der Formänderungsarbeit vorliegt.

3. Die überzählige Größe ist keine Lagerkraft, wenn innerlich unbestimmte Systeme vorliegen, sondern etwa die Spannkraft einer Zugstange eines Zweigelenkbogens oder Rahmens. Unsere

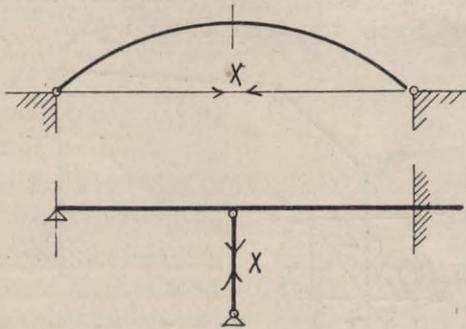


Abb. 109.

Betrachtung bezüglich der Beweglichkeit ihres Angriffspunktes können wir in solchem Falle naturgemäß nicht auf einen äußeren Lagerpunkt anwenden. Wir müssen vielmehr zusehen, welchen Weg die statisch unbestimmte Größe im Innern durchläuft, und erkennen, daß dieser von der Elastizität desjenigen Teiles abhängig ist, in welchem sie wirkt, sodaß daher der Weg von der statisch unbestimmten Größe selbst direkt abhängig ist (Abb. 109).

Die Arbeitssumme muß über das ganze Bauwerk, also auch über den mit der unbestimmten Größe

*Pravo najmanje
pracy at Rrabate*

Pravo ushigiti

beanspruchten Stab ausgedehnt werden. Unter Voraussetzungen, wo stets mit einem elastischen Wege Δ_s zu rechnen ist, könnte man nur dann von einem Minimum der Formänderungsarbeit sprechen, wenn die elastischen Dehnungen im X-Stabe verschwindend klein sind. Damit dies nun eintritt, ist man bei der Konstruktion darauf bedacht, die X-Stäbe so stark zu dimensionieren, daß eine elastische Dehnung sogut wie ausgeschlossen ist. So wird man beispielsweise eine Zugstange besser mit 600 bis 700 kg/cm² beanspruchen als mit 1000 kg/cm². Bei solcher Praxis kann man auch hier überall von einem Minimum der Formänderungsarbeit sprechen. Bei Zulassung einer hohen Beanspruchung wäre entschieden mit einer elastischen Dehnung Δ_s zu rechnen.

Während also bei äußerlich statisch unbestimmten Bauwerken die linke Seite als eine Funktion der Auflager anzusehen ist, insofern der Weg, den die Last = 1 durchläuft, von der mehr oder weniger großen Nachgiebigkeit derselben abhängig ist, so können wir sagen: Bei innerlich statisch unbestimmten Systemen ist die linke Seite eine Funktion der statisch unbestimmten Größen selbst und wir haben mit Hinweis auf einen Stab zu schreiben $1 \cdot \Delta_s$.

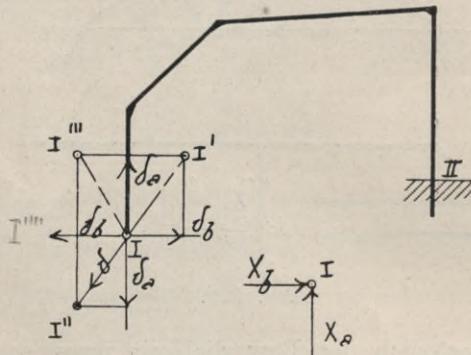


Abb. 110.

4. Einzelne Spezialfälle. Das Auflager II des in Abb. 110 gegebenen Systems sei vollständig unveränderlich. Für das Auflager I betrachten wir nun verschiedene Bewegungszustände, wobei X_b immer nach rechts, und X_a immer nach oben wirkend vorausgesetzt sei.

1. Bewegung von I nach I'. Es betragen dann die Arbeiten der Auflagerkräfte, welche bei der Bewegung entstanden sind,

mit anderen Worten die linken Seiten der Arbeitsgleichung, für den Zustand $X_a = 1 = +1 \cdot \delta_a$ und für den Zustand $X_b = 1 = +1 \cdot \delta_b$, wobei δ_a und δ_b die Projektionen von δ auf die Kraft-richtung sind.

2. Bewegung von I nach I''. Die Wege δ_a und δ_b müssen nunmehr als — eingeführt werden, da die Bewegung im umgekehrten Sinne der Kräfte I vollendet wird. Wir haben also für $X_a = 1 = -1 \cdot \delta_a$ und für $X_b = 1 = -1 \cdot \delta_b$.

3. Bewegt sich der Punkt I nach I''', so haben wir entsprechend dem Vorhergehenden für $X_a = 1 = +1 \cdot \delta_a$ und für $X_b = 1 = -1 \cdot \delta_b$.

4. Bewegt sich I nach I'''' nur wagerecht, so haben wir für $X_a = 1 = +1 \cdot 0 = 0$ und für $X_b = 1 = -1 \cdot \delta = -\delta$.

5. Wäre I vollständig unverrückbar, so wäre für beide Zustände die linke Seite = 0.

Betrachten wir ferner den in Abb. 111 dargestellten Rahmen, der 3 fach statisch unbestimmt ist. Ist Lager II unbeweglich und auch das Lager I nur wagerecht verschieblich, so lautet die linke Seite für alle 3 Gleichungen:

$1 \cdot 0$. Im allgemeinen nennt man die linke Seite L' , d. h. virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für die einzelnen Zustände $X_a = 1$, $X_b = 1$, $X_c = 1$ usw.

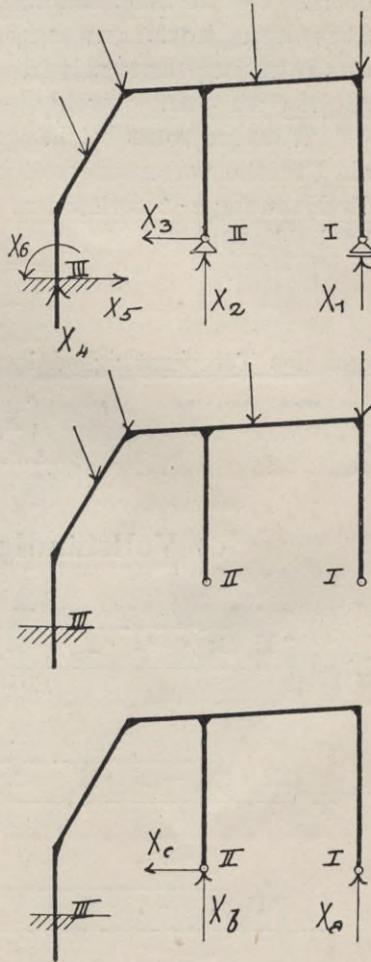


Abb. 111.

d) Das Temperaturglied der rechten Seite.

Es bezeichne ε den linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten für 1°C Änderung der Temperatur gegenüber dem Wärmezustand bei der Aufstellung des Bauwerkes. Er ist + *коэффициент температурного расширения.*

bei Erhöhung und — bei Erniedrigung der Temperatur. Der Wärmeausdehnungskoeffizient ε und die Temperatur t können ebenso wie der Elastizitätsmodul E häufig als über längere Strecken konstant angenommen werden. Die Wärmeausdehnung hat mit den im System tätigen Kräften nichts zu tun, obwohl sie selbst gewisse Spannungen erzeugt.

Während sonst bei Längenänderung $d(\Delta s)$ eine Längskraft N als Ursache vorauszusetzen war, so ist hier anstatt derselben die Dehnung $\varepsilon \cdot t$ vorhanden. Unser Integral bezüglich der Längskräfte lautete

$$\int \frac{N_a \cdot N \cdot ds}{E \cdot F}$$

und das Temperaturglied lautet daher entsprechend

$$\int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds.$$

Wiederholung eigene Nr. 219 - 221.

e) Vollständige Arbeitsgleichung.

$$L' = \int \frac{M_a \cdot \overbrace{(M_o - M_a \cdot X_a - M_b \cdot X_b - \dots)}^M}{E \cdot J} \cdot ds$$

Nr. 145.

$$+ \int \frac{N_a \cdot \overbrace{(N_o - N_a \cdot X_a - N_b \cdot X_b - \dots)}^N}{E \cdot F} \cdot ds$$

$$+ \int \frac{V_a \cdot \overbrace{(V_o - V_a \cdot X_a - V_b \cdot X_b - \dots)}^V}{G \cdot k \cdot F} \cdot ds + \int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds.$$

Bezeichnen wir die mit der wirklichen Verschiebungsgruppe in Zusammenhang stehenden Faktoren unter dem Integral einfach mit M , N , V und vernachlässigen wir den Einfluß der Querkräfte, so lautet unsere Gleichung

$$L' = \int \frac{M_a \cdot M \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{N_a \cdot N \cdot ds}{E \cdot F} + \int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds$$

wird meist auch
noch vernach-
lässigt.

wird nur bei
sehr genauer
Berechnung
berücksichtigt.

Einfluss der Längskraft Querkräfte auf die statisch unbestimmten Größen ist bei Rahmen gleich größer als bei Bogen. Ist die statisch unbestimmte Größe des Rahmens als der ohne Berücksichtigung der Längs- und Querkräfte. Der Einfluss

Nach Einführungen des Dr. Pösch ist bei der Berechnung insbesondere von vorgespannten Rahmenkonstruktionen nicht statthaft die Längskräfte noch weniger Querkräfte an geschlossenen, denn sie sind größer als bei Bogenträgern mit sehr kleinen Stützverhältnissen. 89

Die Anwendung dieses Arbeitsgesetzes, aufgebaut auf dem einfachen Prinzip der virtuellen Verrückungen, gestattet also die Berechnung von statisch unbestimmten Größen mit Umgehung der Berechnung der wirklichen Formänderung und ist immer praktisch bei Bauwerken, deren Form geradlinig oder nach einfachen Gesetzen berechenbar ist und deren Material dem Hookeschen Gesetz folgt, besonders bei ruhender oder gesetzmäßig fortschreitender Belastung.

f) Zusammenhang zwischen Formänderungsarbeit und dem auf dem Prinzip der virtuellen Verrückungen basierenden Hauptarbeitsgesetz (Castiglianoscher Satz).

Es genügt, wenn wir die beabsichtigten Erläuterungen für einen Teil der Formänderungsarbeit, z. B. für Biegung, geben.

Die Formänderungsarbeit beträgt

$$A = \int \frac{M^2 ds}{2 E J}.$$

Die Formänderungsarbeit bezieht sich zunächst auf alle an einem Bauwerk wirkenden Kräfte, Belastungen und Reaktionen bzw. auch andererseits auf die inneren Spannungen.

Leiten wir den Ausdruck nach irgend einer der in M enthaltenen Größen (beispielsweise nach einer der statisch unbestimmten Größen X) ab, so erhalten wir zunächst

$$\frac{\partial A}{\partial M} = \int \frac{2 \cdot M \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J}$$

und dann

$$\frac{\partial A}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} = \frac{\partial A}{\partial X} = \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} \cdot \frac{\partial M}{\partial X}$$

Für $\frac{\partial M}{\partial X}$ können wir, wie früher gezeigt, M' oder M_a setzen also

$$\frac{\partial A}{\partial X} = \int \frac{M \cdot M' \cdot ds}{E \cdot J}$$

Die rechte Seite stimmt überein mit unserem auf Grund des Prinzips der virtuellen Verrückungen abgeleiteten Arbeitsgesetz.

Der Schluß ist, daß auch die linken Seiten gleich sind; wir erhalten also

$$L' = \frac{\partial A}{\partial X}$$

d. h. die virtuelle Arbeit einer der statisch un-
bestimmten Größen bzw. die elastische Verschiebung
des Angriffspunktes dieser Größe ist gleich der ersten
Abgeleiteten der wirklichen Formänderungsarbeit
nach der betreffenden Größe.

Der hier ausgesprochene Satz ist von Alberto Castigliano zuerst nachgewiesen worden und wird nach ihm benannt.

Unser auf Grund des Prinzips der virtuellen Verrückungen abgeleitetes Arbeitsgesetz entspricht also genau dem Castiglianosenen Satze.

Inwiefern der Hauptsatz dazu geeignet sein soll, Bestimmungsgleichungen für die statisch unbestimmten Größen zu liefern, und zwar mit Berücksichtigung der verschiedenartigen Beschaffenheit der Auflager, an welchen sie angreifen, oder der elastischen Nachgiebigkeit der Konstruktionsglieder, in welchen innerlich statisch unbestimmte Größen wirken, das zeigt die zuerst gegebene Ableitung auf Grund des Prinzips der virtuellen Verrückungen viel klarer als die von Castigliano gegebene Ableitung ausgehend von der Formänderungsarbeit.

Vielfach wird von der Formänderungsarbeit bzw. der Abgeleiteten derselben nach einer der gesuchten unbestimmten Größen ausgegangen, weshalb auf diesen Zusammenhang hier hingewiesen sein möge.

Es sei nochmals der Meinung vorgebeugt, als hätten wir es bei der Anwendung des Hauptsatzes mit der tatsächlichen Formänderungsarbeit zu tun; auch in der von Castigliano gegebenen Form der Abgeleiteten der Formänderungsarbeit haben wir es lediglich mit einer Verschiebungsarbeit, und sogar meist nur gedachten (virtuellen) Verschiebungsarbeit zu tun; denn die Abgeleitete der Formänderungsarbeit nach irgendeiner der statisch unbestimmten Größen ist weiter nichts als die Verschiebungsarbeit der Kraft 1, welche diese am Orte der gesuchten Durchbiegung oder am Angriffspunkt der statisch unbestimmten Größe infolge des Weges δ leistet, welcher bei Anwendung des Gesetzes zur Ermittlung von Durchbiegungen der gesuchte Wert selbst ist, bei Anwendung des Gesetzes zur Ermittlung statisch unbestimmter Größen aber gegeben ist und zwar als elastische Verlängerung oder Verkürzung eines Stabes oder als elastische Nachgiebigkeit der Auflager. In diesem letzten Falle wird δ , wenn völlige

Starrheit der Auflager vorliegt, zu Null, so daß

$$L' = 1 \cdot \delta = \frac{\partial A}{\partial X} = 0$$

wird.

$\frac{\partial M}{\partial X}$ ist also auch weiter nichts als die Momentwirkung einer Last = 1 auf das System, welche am Orte und im Richtungssinn von X angreift.

Der Zweigelenkrahmen.

Kapitel VII.

Die Gleichung für den Schub bei gleich hohen Kämpfern¹⁾.

Bei dem in Abb. 112 dargestellten Rahmen mit einer beliebigen Belastung treten die 4 unbekanntene Auflagerkräfte X_1 , X_2 , X_3 und X_4 auf.

Wir machen jetzt, wie in Fig. a ersichtlich, das eine Lager wagerecht beweglich und erhalten damit das statisch bestimmte Hauptsystem mit der äußeren Belastung und die dazugehörigen, auf einfache Weise bestimmbar Auflagerreaktionen. Fig. b zeigt nun dasselbe Hauptsystem, aber allein mit der unbestimmten Größe belastet, dem Horizontalschub am beweglich gemachten Lager I, genannt X_a .

Natürlich gehört zu den einzelnen Belastungen, bevor wir an die Berechnung herangehen können, die Feststellung der dazugehörigen Auflagerreaktionen. Da die Gelenke I und II gleich hoch liegen sollen, so haben wir nach Fig. b beim Lager II nur die eine wagerechte Auflagerreaktion zu verzeichnen, welche ebenfalls = X_a ist. Würden die Gelenke nicht auf gleicher Höhe gelegen haben, so wären die Auflagerreaktionen nach Abb. 113 entstanden.

Es sind also zunächst gemäß Fig. a die Auflagerreaktionen A_0 , B_0 und C_0 für den Belastungszustand P_1 , P_2 , P_3 bis P_n nach den bekannten Regeln der Statik zu berechnen, bevor man zur Bestimmung der Biegemomente übergehen kann. Genau so hat man für Fig. b zunächst die Auflagerreaktionen zu bestimmen.

Damit die Aufgabe allgemein gelöst wird, wollen wir gleich annehmen, daß für den statisch unbestimmten Zustand nach

¹⁾ Vergleiche auch: Müller-Breslau, Die neueren Methoden; 4. Aufl., S. 116, und Handbuch für Eisenbetonbau, 1. Aufl., Band IV, Teil 1, S. 494.

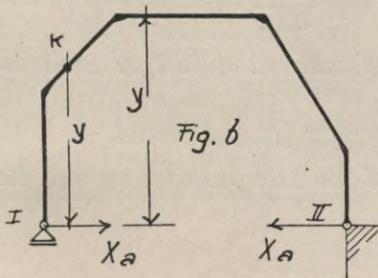
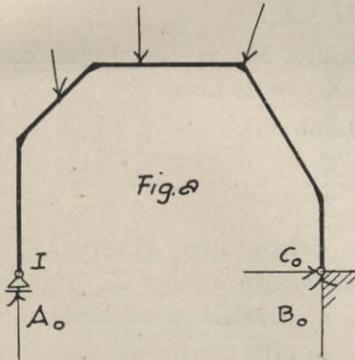
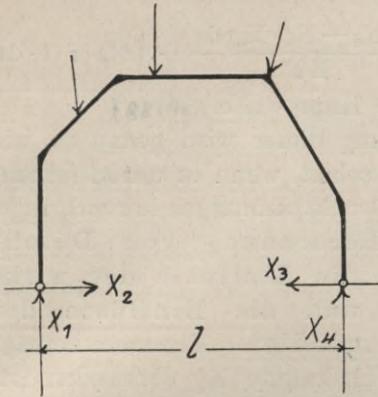


Abb. 112.

vollzogener Belastung das Lager I eine kleine Verschiebung nach außen erlitten haben möge. Wir stehen also vor einer kleinen Vergrößerung der Spannweite. Es kommt nicht darauf an, an welchem Lager sie eintritt, sondern daß sie über-

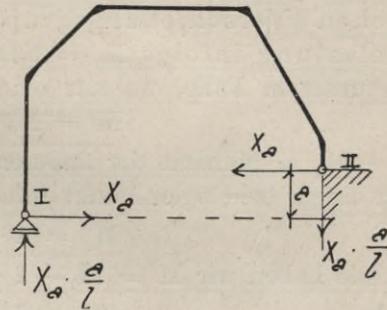


Abb. 113.

haupt eintritt. Wir können sie uns mit derselben Wirkung auch am rechten Lager vorstellen oder geteilt an beiden. Jedenfalls lautet die linke Seite unserer Gleichung, wenn wir dieselbe jetzt nach Fig. b mit $X_a = 1$ aufstellen,

$$L' = -1 \cdot \Delta l,$$

weil die Last 1 entgegengesetzt zu ihrer Richtung verschoben wird (vgl. Kap. VI, c) Möglichkeiten für die linke Seite).

Es folgt nun die Bestimmung der rechten Seite der Gleichung:

$$L' = \int \frac{M_a \cdot M \cdot ds}{EJ} + \int \frac{N_a \cdot N \cdot ds}{EF} + \int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds^1)$$

¹⁾ Gegenüber derselben Gleichung im genannten Handbuch, Seite 494, fehlt hier noch das Glied zur Berücksichtigung einer ungleich-

für diesen Fall also:

$$L' = \int \frac{M_a (M_0 - M_a \cdot X_a) ds}{E J} + \int \frac{N_a (N_0 - N_a \cdot X_a) ds}{E F} + \int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds.$$

(Ableitung siehe Kap. VI, e.) (44.22)

Momente. Bei der Aufstellung dieser wird genau so wie früher ein Moment als positiv angesehen, wenn es unten (innen) Zugspannungen und oben (außen) Druckspannungen hervorbringt. Genau so wie früher bei Berechnung von Durchbiegungen haben wir sodann die Einflüsse der wirklichen Verschiebungsgruppe und die Einflüsse der Belastung infolge $X_a = 1$ festzustellen. Allgemein beträgt in unserem Falle, wo nur eine Unbekannte X_a vorhanden ist,

$$M = M_0 - M_a \cdot X_a.$$

M_0 = Moment der äußeren Kräfte, M_a = Biegemoment an einem beliebigen Punkt infolge $X_a = 1$, also

$$M_a = 1 \cdot y \text{ (Abb. b);}$$

somit haben wir $M = M_0 - 1 \cdot y \cdot X_a$

oder

$$M = M_0 - X_a \cdot y.$$

In dieser Gleichung kommt es richtig zum Ausdruck, daß, wie es der Augenschein lehrt, die Momente infolge X_a negativer Natur sind. Für die Belastung $X_a = 1$ allein wäre also

$$M_a = -1 \cdot y = -y \left(\text{vergl. } \frac{\partial M}{\partial X_a} = -y \right).$$

Längskräfte. Die wahre Längskraft an beliebiger Stelle ist allgemein

$$N = N_0 - N_a \cdot X_a.$$

N_a = Einfluß von $X_a = 1$ auf die Längskräfte, an und für sich = $1 \cdot \cos \alpha$ (Abb. 114); also

$$N = N_0 - 1 \cdot \cos \alpha \cdot X_a$$

oder

$$N = N_0 - X_a \cdot \cos \alpha.$$

Für den Belastungszustand $X_a = 1$ ist

$$N_a = -1 \cdot \cos \alpha = -\cos \alpha \left(\text{vgl. } \frac{\partial N}{\partial X_a} = -\cos \alpha \right).$$

Querkräfte vernachlässigen wir.

Temperaturglied. Hierin haben wir nur für N_a den Wert $-\cos \alpha$ einzuführen.

mäßigen Erwärmung, auf die wir, entsprechend ihrer Bedeutung, erst später eingehen (S. 219 u. f.).

Unsere ganze Gleichung lautet somit

$$L' = -\Delta l = \int \frac{(M_o - X_a \cdot y) \cdot (-y) \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{(N_o - X_a \cdot \cos \alpha) \cdot (-\cos \alpha) \cdot ds}{E \cdot F} + \int \varepsilon \cdot t \cdot (-\cos \alpha) \cdot ds,$$

ausmultipliziert

$$-\Delta l = -\int \frac{M_o \cdot y \cdot ds}{E \cdot J} + X_a \cdot \int \frac{y^2 \cdot ds}{E \cdot J} - \int \frac{N_o \cdot \cos \alpha \cdot ds}{E \cdot F} + X_a \cdot \int \frac{\cos^2 \alpha \cdot ds}{E \cdot F} - \varepsilon \int t \cdot \cos \alpha \cdot ds.$$

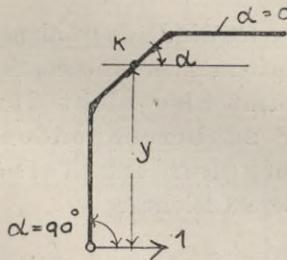


Abb. 114.

Innerhalb der einzelnen Stabstücke, über welche zu integrieren ist, dürfen wir E und J als konstant voraussetzen, so daß diese Bezeichnungen vor die Integralzeichen treten.

Um E fortzuschaffen, multiplizieren wir dann die ganze Gleichung mit E ; außerdem erweitern wir dieselbe noch mit einem mittleren Trägheitsmoment (J_m ¹⁾, wodurch sich ein weiterer Vorteil zeigen wird:

$$-\Delta l \cdot E \cdot J_m = -\int M_o \cdot y \cdot ds \cdot \frac{J_m}{J} + X_a \cdot \int y^2 \cdot ds \cdot \frac{J_m}{J} - \int N_o \cdot \cos \alpha \cdot \frac{J_m}{F} + X_a \int \cos^2 \alpha \cdot ds \cdot \frac{J_m}{F} - \varepsilon \int t \cdot \cos \alpha \cdot ds \cdot E \cdot J_m.$$

Die Glieder mit X_a abgesondert:

$$X_a \left[\int y^2 \cdot ds \cdot \frac{J_m}{J} + \int \cos^2 \alpha \cdot ds \cdot \frac{J_m}{F} \right] = \int M_o \cdot y \cdot ds \cdot \frac{J_m}{J} + \int N_o \cdot \cos \alpha \cdot ds \cdot \frac{J_m}{F} + \varepsilon \cdot E \cdot J_m \int t \cdot \cos \alpha \cdot ds - \Delta l \cdot E \cdot J_m,$$

¹⁾ Wird in Müller-Breslau J_c genannt.

daraus

$$X_a = \frac{\int M_o \cdot y \cdot ds \cdot \frac{J_m}{J} + \int N_o \cdot \cos \alpha \cdot ds \cdot \frac{J_m}{F} + \varepsilon \cdot E \cdot J_m \int t \cdot \cos \alpha \cdot ds - \Delta l \cdot E \cdot J_m}{\int y^2 \cdot ds \cdot \frac{J_m}{J} + \int \cos^2 \alpha \cdot ds \cdot \frac{J_m}{F}}$$

Der Einfluß des 2. Zählergliedes und des 2. Nennergliedes ist außerordentlich gering und höchstens bei flachen Bögen von einiger Bedeutung; diese Glieder stellen uns nämlich den Einfluß der Normalkräfte dar, auf deren Mitberücksichtigung wir erst später zurückkommen werden¹⁾). Das Verhältnis von $\frac{J_m}{J}$ nennen wir v . Dasselbe wird, wenn wir J_m so wählen, daß es den am meisten vorkommenden Trägheitsmomenten entspricht, für viele Stabteile = 1. Es kommt also nicht darauf an, die Trägheitsmomente der zu berechnenden Stabteile vorher zu kennen, sondern nur ihr Verhältnis zueinander.

Somit lautet unsere Gleichung

$$X_a = H = \frac{\int M_o \cdot y \cdot v \cdot ds + \varepsilon \cdot E \cdot J_m \int t \cdot \cos \alpha \cdot ds - E \cdot J_m \cdot \Delta l}{\int y^2 \cdot v \cdot ds}$$

In beiden Gleichungen hängen die Nennergrößen nur von der Form des Bauwerkes ab und haben also nichts zu tun mit den Einflüssen der Belastungen, welche wir im Zähler vorfinden. Der Zähler enthält nacheinander den Einfluß der Belastung im statisch bestimmten Hauptsystem, dann den Einfluß einer Temperaturveränderung, schließlich den Einfluß einer horizontalen Lagernachgiebigkeit. Je nach dem Grad der Genauigkeit, welchen wir wählen, haben wir es nun in der Hand, den Schub zu bestimmen; jeder Einfluß ist getrennt auszurechnen.

Bei gewöhnlichen Projektarbeiten genügt vollständig der Einfluß der Belastung mit der Gleichung

$$X_a = H = \frac{\int M_o \cdot y \cdot v \cdot ds}{\int y^2 \cdot v \cdot ds}$$

¹⁾ Seite 219 u. f.

Kapitel VIII.

Durchführung der Berechnung eines Zweigelenkrahmens mit direkter Benutzung der im Kap. VII abgeleiteten Integralformeln (Rechnerische Auswertung der Integrale)¹⁾.

Einfluß der Belastung.

1. Zu ermitteln sei der von der Belastung herrührende Horizontalschub H_p des in Abb. 115 dargestellten Rahmens.

Das Trägheitsmoment J_r des Riegels sei n mal so groß als das Trägheitsmoment J_s der Stiele.

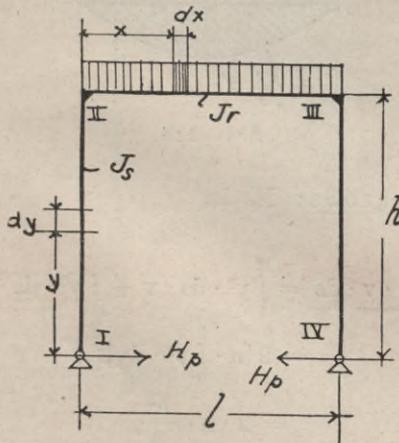


Abb. 115.

Allgemein ist

$$H_p = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot v \cdot ds}{\int y^2 \cdot v \cdot ds}$$

Die Integrale sind für jeden Rahmenteil auszuwerten, also für 2 Stiele und 1 Riegel. Zunächst müssen wir uns klar darüber werden, welchen Wert v für jeden dieser 3 Stabteile hat.

Es war $v = \frac{J_m}{J}$, worin J_m ein beliebig gewähltes und J je das Trägheitsmoment des betreffenden Rahmenteiles selbst sein sollte.

¹⁾ Literatur, vergl. Kap. VII.

Wir wählen hier $J_m = J_r$; dann ist für den Riegel

$$\underline{v} = \frac{J_r}{J_r} = \underline{1},$$

für die Stiele

$$\underline{v} = \frac{J_r}{J_s} = \underline{n}.$$

Auflösung der Integrale: Es muß sowohl für das Nennerglied als auch für das Zählerglied die Auswertung für 3 Stabteile erfolgen.

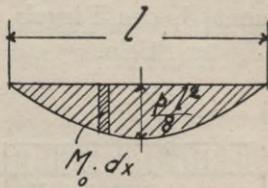


Abb 116.

2) Nennerformgröße: Es ist für die Stiele

$$\begin{aligned} \int y^2 \cdot v \cdot ds &= \int_I y^2 \cdot ds \cdot v + \int_{III} y^2 \cdot ds \cdot v \\ &= 2 \left[n \cdot \int_0^h y^2 \cdot dy \right] \\ &= \underline{2 \cdot n \cdot \frac{h^3}{3}}, \end{aligned}$$

für den Riegel

$$\int y^2 \cdot v \cdot ds = \int_{II} y^2 \cdot v \cdot ds = 1 \cdot y^2 \int_0^1 dx = \underline{1 \cdot h^2 \cdot 1}.$$

Also Nennergröße

$$\int y^2 \cdot v \cdot ds = \underline{2 \cdot n \cdot \frac{h^3}{3} + h^2 \cdot 1}.$$

3) Zählergröße: Da für die Stiele ein M_0 nicht vorhanden ist, so werden auch die Integrale für die Stiele = 0.

Für das statisch bestimmte Hauptsystem (den einfachen Balken) ist die von der Belastung herrührende Momentenfläche eine Parabel mit der Pfeilhöhe $\frac{p \cdot l^2}{8}$ und der Länge l (Abb. 116). Die Momentenfläche hat also dieselbe Form wie bei einem ein-

fachen Balken ohne Stiele. Es liefert also nur der Riegel einen Beitrag zum Zählerintegral.

$$\int M_0 \cdot y \cdot ds \cdot v = \int_{II}^{III} M_0 \cdot y \cdot ds \cdot v = 1 \cdot h \cdot \int_0^l M_0 \cdot dx:$$

Das Integral $\int_0^l M_0 \cdot dx$ bedeutet weiter nichts als den Inhalt der Momentenfläche.

Also Zählergröße

$$= h \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{p \cdot l^2}{8} \cdot 1 = \frac{p \cdot l^3 \cdot h}{12}$$

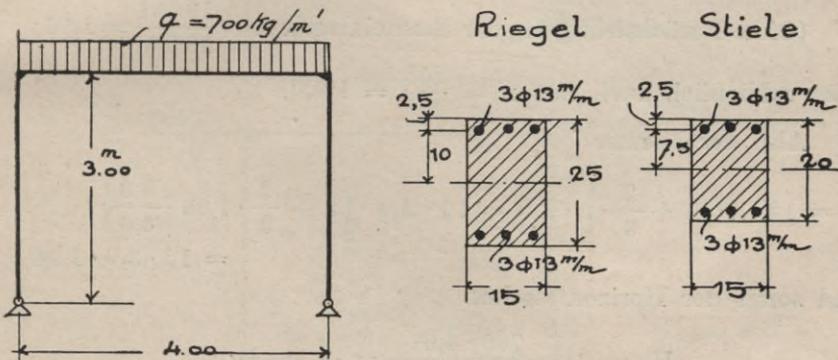


Abb 117.

Der Schub beträgt demnach

$$H_p = + \frac{p \cdot l^3 \cdot h}{12} \cdot \frac{h^3}{2 \cdot n \cdot \frac{h^3}{3} + h^2 \cdot l}$$

oder

$$H_p = + \frac{p \cdot l^2}{12 \cdot h \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l}\right)}$$

Das +-Zeichen bestätigt unsere erste Annahme, daß der Schub nach innen gerichtet ist.

2. Unter Annahme der in Abb. 117 gegebenen Abmessungen seien nunmehr die auftretenden Spannungen zu untersuchen.

Zunächst haben wir für den vorliegenden Fall n auszurechnen, da die Abmessungen bereits gegeben sind. Liegen die Abmessungen noch nicht vor, so ist n (bezw. v) zunächst zu schätzen.

Es beträgt

$$\begin{aligned} \underline{J_r} &= \frac{1}{12} \cdot 15 \cdot 25^3 + 2 \cdot 15 \cdot 4 \cdot 10^3 \\ &= 19\,531 + 12\,000 = 31\,531 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{J_s} &= \frac{1}{12} \cdot 15 \cdot 20^3 + 2 \cdot 15 \cdot 4 \cdot 7,5^2 \\ &= 10\,000 + 6\,750 = 16\,750 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

also

$$\underline{n} = \frac{J_r}{J_s} = \frac{31\,531}{16\,750} = 1,88.$$

(Ohne Berücksichtigung der Eiseneinlagen $n = \frac{19\,531}{10\,000} = 1,95$;

oder schließlich auch nur $n = \frac{25^3}{20^3} = 1,95$).

Also der Nenner

$$\begin{aligned} N &= 12 \cdot h \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l}\right) = 12 \cdot 3,0 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 1,88 \cdot \frac{3,0}{4,0}\right) \\ &= 12 \cdot 3,0 \cdot 1,94 \end{aligned}$$

und somit der Horizontalschub

$$\underline{H_p} = + \frac{700 \cdot 4,0^2}{12 \cdot 3,0 \cdot 1,94} = + 161 \text{ kg.}$$

Nachdem somit alle Auflagerkräfte bekannt sind, können wir den Momentenverlauf aufzeichnen.

M_0 in Balkenmitte beträgt

$$\underline{M_0} = \frac{0,700 \cdot 4,0^2}{8} = 1,40 \text{ mt.}$$

Für die Stiele ist $M_0 = 0$, sodaß zunächst Fig. a in Abb. 118 entsteht.

Einfluß des Horizontalschubes (Fig. b).

Für die Stiele

$M_{\max} = -H \cdot h = -161 \cdot 3,0 = -0,483 \text{ mt}$, abnehmend bis auf 0 im Gelenkpunkt.

Über den Riegel pflanzt sich das Moment $-0,483$ gleichmäßig fort, da für jeden Punkt desselben die Höhe h konstant ist. Die Zusammenfügung beider Flächen ergibt die wahre Momentenfläche Fig. c.

Zu berechnen bzw. nachzuprüfen wäre nun der Mittelquerschnitt des Riegels für das Moment $+0,917 \text{ mt}$.

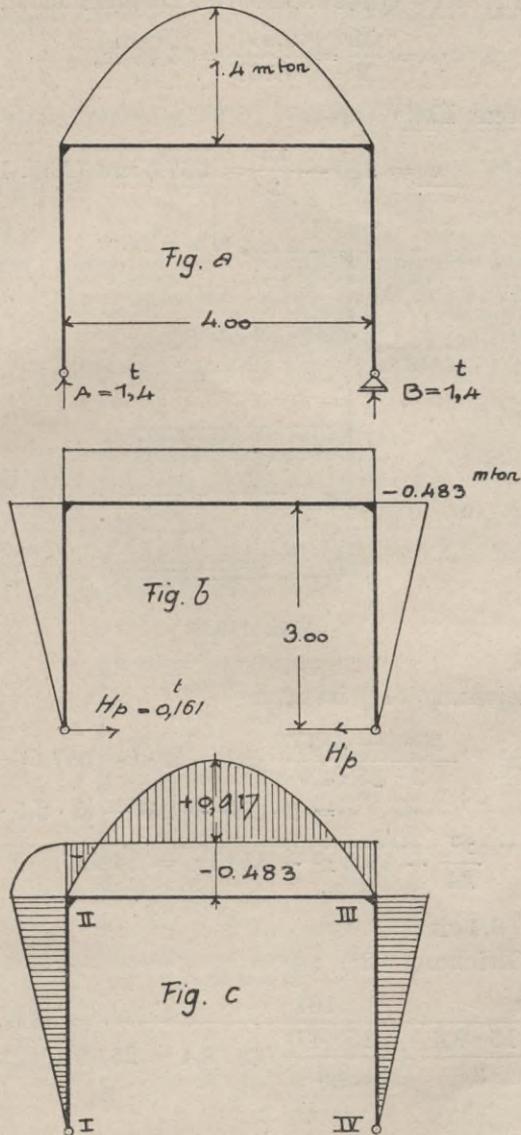


Abb. 118.

Es liegt ein Fall exzentrischen Druckes vor; und zwar ist die in dem Riegel tätige Normalkraft aus den Reaktionen zu berechnen und beträgt hier lediglich 161 kg. Die Exzentrizität, welche bei unsymmetrischen Querschnitten vom

Schwerpunkt des Querschnittes aus zu messen ist, beträgt

$$p = \frac{M}{N} = \frac{0,917}{0,161} = 5,70 \text{ m,}$$

sodaß in diesem Falle

$$e = 570 - \frac{25}{2} = 557,5 \text{ cm (Abb. 119).}$$

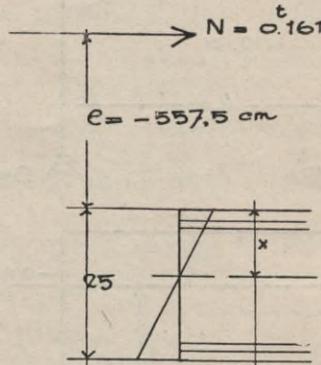


Abb. 119.

Nach Gleichung 61¹⁾ ist nun

$$\begin{aligned} \frac{15}{6 \cdot 15 \cdot 4,0} \cdot x^3 - \frac{15 \cdot (-557,5)}{2 \cdot 15 \cdot 4,0} \cdot x^2 - [2 \cdot (-557,5) - 25] \cdot x \\ = 2 \cdot 2,5^2 + 25^2 - (2 \cdot 2,5 - 557,5) \cdot 25 \\ \frac{x^3}{24} + 69,6 x^2 + 1140 x = 14\,437, \end{aligned}$$

woraus $x = 8,4 \text{ cm}$;

somit nach Gleichung 62¹⁾ (*vorw. Kersten I str. 164 neu. 6*)

$$\underline{\sigma_b} = \frac{161}{\frac{15 \cdot 8,4}{2} + \frac{15 \cdot 4,0}{8,4} \cdot (2 \cdot 8,4 - 25)} = \underline{36,6 \text{ kg/cm}^2}$$

und

$$\underline{\sigma_e} = 36,6 \cdot \frac{15 \cdot (22,5 - 8,4)}{8,4} = \underline{920 \text{ kg/cm}^2}. \text{ (Kersten I str. 164 neu. 8)}$$

Prüft man die Spannungen nur für einfache Biegung nach, so erhält man, da ein Fall doppelter Armierung vorliegt,

¹⁾ Im Buch Schlüter: „Eisenbetonbau: Säule und Balken“, Verlag von Herm. Meußner, Berlin. *von Kersten für Eisenbetonbau I str. 243 neu. 79*

für x nach Gleichung 48¹⁾ (Porzellan-Keramik I S. 163 Form. 5)

$$\underline{x} = -\frac{15 \cdot 8,0}{15} + \sqrt{8^2 + 8 \cdot 25} = \underline{8,2 \text{ cm}}$$

und für σ_b nach Gleichung 50¹⁾ (Keramik I S. 164 Form. 6)

$$\underline{\sigma_b} = \frac{91700}{\frac{15 \cdot 8,2}{2} \left(22,5 - \frac{8,2}{3} \right) + 15 \cdot 4 \cdot \frac{5,7}{8,2} \cdot 20} = \underline{44,6 \text{ kg/cm}^2}.$$

Die zuerst aufgestellten Trägheitsmomente beziehen sich auf den vollen Querschnitt, also mit Berücksichtigung des Betons in der Zugzone. Dies ist eine Vereinfachung, die man sich bei Rahmenberechnungen gestattet.

Einfluß der Temperatur.

3. Es soll nun für den Rahmen (Abb. 120) der Horizontal Schub H_t abgeleitet werden, und zwar für den Fall, daß die Temperatur im Riegel t_r °C und in den Stielen t_s °C gegenüber der Temperatur bei der Herstellung beträgt.

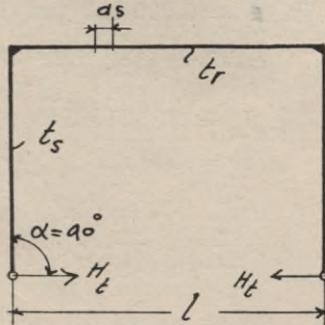


Abb. 120.

Allgemein ist

$$H_t = \frac{\varepsilon \cdot E \cdot J_m \int t \cdot \cos \alpha \cdot ds}{\int y^2 \cdot ds \cdot \nu}$$

Das Nennerglied ist nach Beispiel 1

$$\underline{N} = 2 \cdot n \cdot \frac{h^3}{3} + h^2 \cdot l = h^2 \cdot l \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l} \right).$$

Das Zählerglied ist wieder für die einzelnen Stabteile zu deuten.

¹⁾ Im soeben angeführtem Buch.

Für die Stiele ist $\cos \alpha = \cos 90^\circ = 0$; diese liefern also keine Beiträge zum Zählerintegral. Für den Riegel ist $\cos \alpha = \cos 0 = 1$ und daher

$$\int t \cdot \cos \alpha \cdot ds = t_r \cdot l \cdot \int_0^l ds = \underline{t_r \cdot l}.$$

Somit lautet unsere Gleichung

$$H_t = \frac{\varepsilon \cdot E \cdot J_r \cdot t_r \cdot l}{h^2 \cdot l \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l} \right)}$$

oder

$$\underline{H_t} = \frac{\varepsilon \cdot E \cdot J_r \cdot t_r}{h^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l} \right)}.$$

Bei Temperaturzunahme ist erklärlicherweise H_t nach innen gerichtet, also +, bei Temperaturabnahme nach außen, also —.

4. Für den vorliegenden Fall sei die Größe des Horizontal-schubes für einen Temperaturunterschied von $\pm 30^\circ \text{ C}$ zu ermitteln.

Für Eisenbeton ist $\varepsilon = 0,000\ 013$ pro 1° C ,

$$E = \text{rd. } 140\ 000 \text{ kg/cm}^2.$$

Ferner war

$$\underline{J_r} = 31\ 531 \text{ cm}^4,$$

$$\underline{h} = 300 \text{ cm}$$

und

$$1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l} = 1,94.$$

Demnach

$$\underline{H_t} = \frac{0,000\ 013 \cdot 140\ 000 \cdot 31\ 531 \cdot (\pm 30^\circ)}{300^2 \cdot 1,94} = \underline{\pm 10 \text{ kg.}}$$

Dieser Einfluß kann also die ausschlaggebenden Momente entweder vergrößern oder verringern; allgemein ist H_t für Zweigelenrahmen von nur geringer Bedeutung.

Einfluß der Lagernachgiebigkeit.

5. Zum Schluß sei noch der Einfluß einer zu erwartenden Lagernachgiebigkeit, die zu $\Delta l = 0,5 \text{ cm}$ angenommen werden soll, untersucht.

Allgemein ist

$$\underline{H_{\Delta l}} = - \frac{E \cdot J_m \cdot \Delta l}{\int y^2 \cdot v \cdot ds}$$

1. Beitrag zum Nennerglied.

Da v konstant ist, so bedeutet $\int y^2 \cdot ds$ wie ersichtlich das Trägheitsmoment des Rahmenachsenstückes s bezogen auf die durch die Auflagergelenke gehende Achse; es ergibt sich in einfacher Weise zu

$$J = \frac{s}{3} \cdot (H^2 + H \cdot h + h^2)^{1)}$$

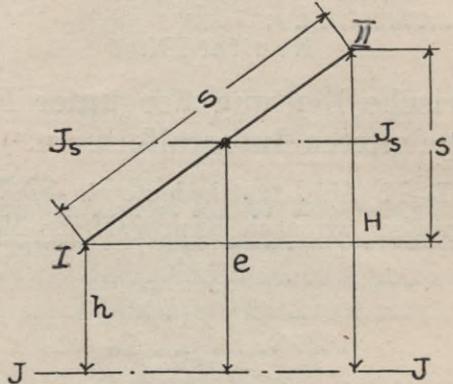


Abb. 122.

aus $J = J_s + s \cdot e^2$ nach Abb. 122, wenn man für J_s als Ergebnis einer einfachen Integration $\frac{s \cdot s'^2}{12}$ setzt. Demnach

$$\int_I^{II} y^2 \cdot v \cdot ds = \frac{v \cdot s}{3} \cdot (H^2 + H \cdot h + h^2).$$

2. Beitrag zum ersten Zählerglied.

Mit Ausschcheidung von v bedeutet $M_0 \cdot ds$ ein Differential der Fläche F_0 und y den Abstand des auf die Rahmenachse projizierten Schwerpunktes dieses Elementes von der Auflagergelenkwagerechten. Das Integral bedeutet somit: Inhalt der ganzen Fläche $F_0 \times$ Abstand f ihres auf die Rahmenachse projizierten Schwerpunktes von der Gelenkachse, also

$$\int_I^{II} M_0 \cdot y \cdot ds \cdot v = v \cdot F_0 \cdot f.$$

1) Vergleiche Müller-Breslau, Die neueren Methoden, S. 126.

2) Ableitung siehe Anhang A, Nr. 33 und 34.

3. Beitrag zur Temperaturgröße.

Mit t konstant verbleibt nur die Deutung $\int \cos \alpha \cdot ds$; wir erkennen darin die Horizontalprojektion s' unseres Rahmenachsenstückes s (s' aus Abb. 121), also:

$$\int_I^{\text{II}} t \cdot \cos \alpha \cdot ds = t \cdot s'.$$

Da nun ein beliebiger Rahmen aus mehreren Stücken I II zusammengesetzt ist, so erhalten wir allgemein

$$H = \frac{\sum v \cdot F_o \cdot f + \varepsilon \cdot E \cdot J_m \sum t \cdot s' - E \cdot J_m \cdot \Delta l}{\sum \left[\frac{v \cdot s}{3} \cdot (H^2 + H \cdot h + h^2) \right]}.$$

Während Kapitel VIII einen Weg zeigt, wie man die Gleichung für den Horizontalschub analytisch aufzulösen hat, gibt Kapitel IX ein allgemeines Resultat für die geometrische Auflösung. Das Resultat von Kapitel IX verdient gegenüber dem in Kapitel VIII den Vorzug, weil es — allgemein gehalten — keinen bestimmten Stabzug voraussetzt.

Kapitel X.

Beispiele mit Gebrauch der in Kap. IX gedeuteten Integralformeln.

Beispiel 1. Der symmetrische Rahmen mit einfach gebrochenem Riegel.

Für den in Abb. 123 dargestellten Rahmen sei der Horizontalschub H_p , herrührend von einer gleichmäßigen Belastung von 300 kg. per lfd. m Horizontalprojektion, zu ermitteln.

Das J_r des Riegels sei von vornherein zweimal so groß als das J_s der Stiele angenommen.

Wählen wir $J_m = J_r$, dann ist für den Riegel

$$\underline{v} = \frac{J_m}{J} = \frac{J_r}{J_r} = 1$$

und für die Stiele

$$\underline{v} = \frac{J_m}{J} = \frac{J_r}{J_s} = 2.$$

Wir bilden zunächst die Nennergröße. Da der Rahmen symmetrisch ist, so brauchen wir die Rechnung nur für eine Hälfte durchzuführen.

Allgemein

$$\text{Nenner} = \Sigma \left[\frac{v \cdot s}{3} \cdot (H^2 + H \cdot h + h^2) \right]$$

also

$$N = 2 \cdot \left[\overbrace{\frac{2 \cdot 3,2}{3} (3,2^2 + 3,2 \cdot 0 + 0^2)}^{\text{Stiel}} + \overbrace{\frac{1 \cdot 5,73}{3} \cdot (5,6^2 + 5,6 \cdot 3,2 + 3,2^2)}^{\text{Riegelhälfte}} \right] = 271,4 \text{ m}^3.$$

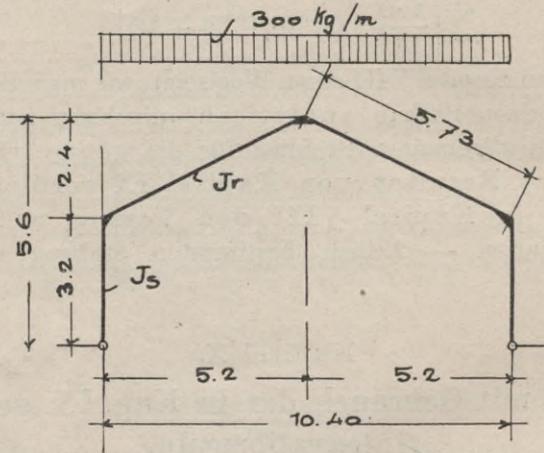


Abb. 123.

Zählerglied: Allgemein $\Sigma v \cdot F_0 \cdot f$.

Dazu ist erst die M_0 -Fläche für das statisch bestimmte Hauptsystem mit der Parabelhöhe $\frac{0,3 \cdot 10,4^2}{8} = 4$ mt aufzuzeichnen und auf die Rahmenachse zu übertragen (Abb. 124, a), wobei die einzelnen Ordinaten der Momentenfläche ihren Wert beibehalten, während aus der Länge 5,2 m bis Rahmenmitte schräg gemessen 5,73 m wird. Somit wird für jede Hälfte

$$F_0 = + \left(\frac{2}{3} \cdot 5,2 \cdot 4,0 \right) \cdot \frac{5,73}{5,2} = + 15,3 \text{ t m}^2$$

und das zugehörige $f = 3,2 + \frac{5}{8} \cdot 2,4 = 4,7$ m.

Also im ganzen $\Sigma v \cdot F_0 \cdot f = 2 \cdot 15,3 \cdot 4,7 = 144 \text{ t m}^3$ und

$$H_p = + \frac{144}{271,4} = + 0,53 \text{ t}.$$

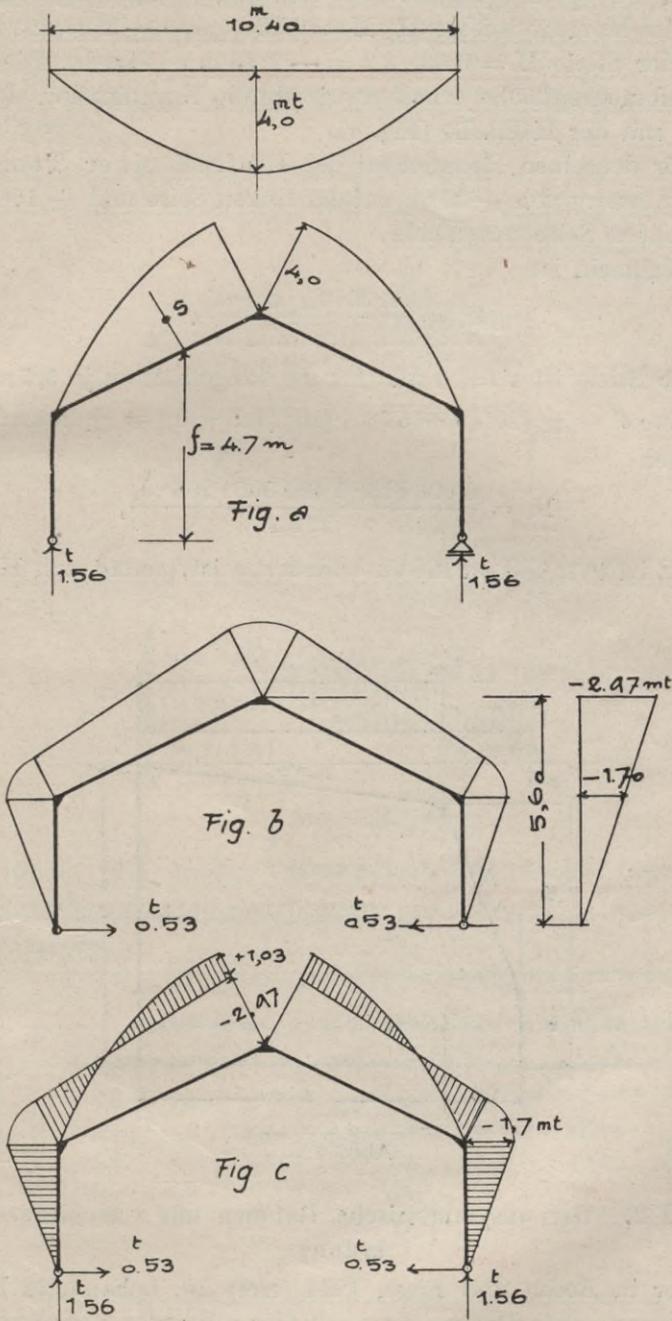


Abb 124.

Im Firstpunkt des statisch bestimmten Hauptsystems beträgt das Moment infolge H_p $M = 0,53 \cdot 5,6 = -2,97 \text{ m t}$ und in Höhe der Stiele $M = 0,53 \cdot 3,2 = -1,70 \text{ m t}$ (Fig. b). Die wirkliche Momentenfläche erhalten wir durch Kombination der M_0 -Fläche mit der H -Fläche (Fig. c).

Für denselben Rahmen sei der Einfluß einer Temperaturänderung von $\pm 30^\circ \text{ C}$ auf der linken Seite und $\pm 10^\circ \text{ C}$ auf der rechten Seite untersucht.

Allgemein ist

$$H_t = \frac{\varepsilon \cdot E \cdot J_m \cdot \Sigma t \cdot s'}{N}$$

Für die Stiele ist $s' = 0$ und für die Riegelhälften je 5,2 m, also

$$\Sigma t \cdot s' = \pm [30^\circ (0 + 5,2) + 10^\circ (5,2 + 0)] = \pm 208 \text{ m}^\circ.$$

Demnach

$$H_t = \frac{0,000\,013 \cdot 1\,400\,000 \cdot 208 \cdot J_r}{271,4},$$

worin E in t^0/m^2 , J_r in m^4 auszudrücken ist, sodaß sich H_t in t^0 ergibt.

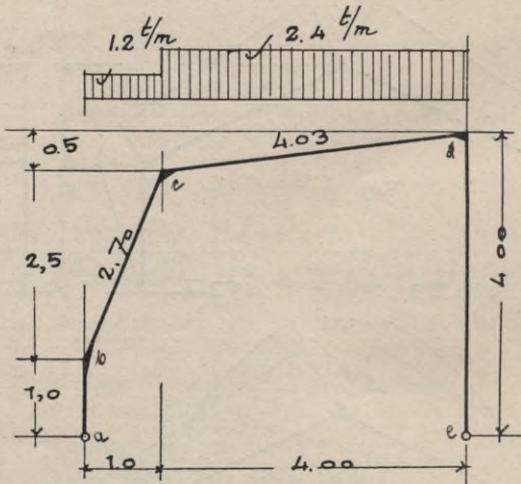


Abb. 125.

Beispiel 2. Der asymmetrische Rahmen mit verschiedener Belastung.

Der in Beton und Eisen 1911, Heft 10, behandelte beiderseits eingespannte Dachrahmen soll hier unter der Annahme einer gelenkartigen Auflagerung (Abb. 125) und unter der verein-

fachenden Annahme gleicher Trägheitsmomente für alle Stabstücke, ohne Einfluß von Temperatur und Lagerverschiebung, berechnet werden.

Wir wählen $J_m = J$, dann ist für alle Stabteile $v = 1$.
Allgemein

$$H = \frac{\sum v \cdot F_0 \cdot f}{\sum \left[\frac{v \cdot s}{3} \cdot (H^2 + H \cdot h + h^2) \right]}$$

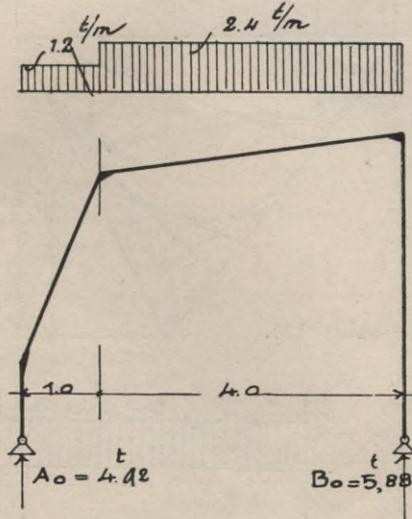


Abb. 126.

Man findet die beiden Bruchglieder am besten mit Hilfe der folgenden Zusammenstellungen.

Nennerglied:

Stab	v	s	H	h	H^2	$H \cdot h$	h^2	$\frac{\alpha}{H^2 + H \cdot h + h^2}$	$s \cdot \alpha$
ab	1	1,0	1,0	0	1,0	0	0	1	1,0
bc	1	2,70	3,5	1,0	12,25	3,5	1	16,75	45,20
cd	1	4,03	4,0	3,5	16	14	12,25	42,25	170
de	1	4,0	4,0	0	16	0	0	16	64

3. Nenner = 280,20

also

$$N = \frac{280,20}{3} = 93,5 \text{ tm}^2.$$

Zählerglied:

Das statisch bestimmte Hauptsystem ist wieder ein einfacher Balken von der Spannweite 5 m (Abb. 126). Die Auflagerreaktionen betragen

$$A_0 = \frac{2,4 \cdot 4,0 \cdot 2,0 + 1,2 \cdot 4,5}{5,0} = 4,92 \text{ t}$$

$$B_0 = 2,4 \cdot 4,0 + 1,2 \cdot 1,0 - 4,92 = 5,88 \text{ t.}$$

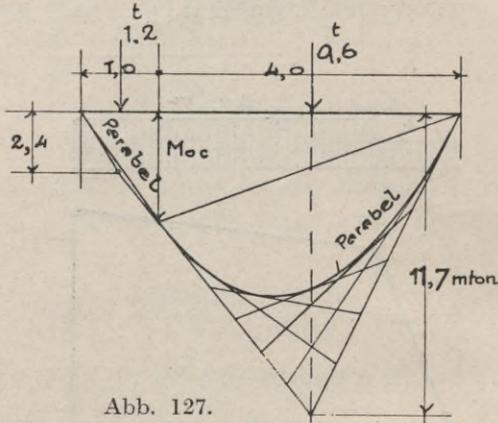


Abb. 127.

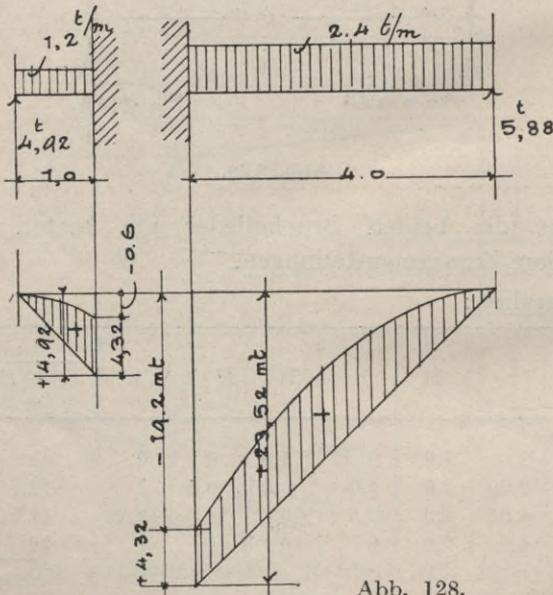


Abb. 128.

Für diesen wird nun die Momentenfläche aufgetragen, was in bekannter Weise durch Substituierung von Einzellasten für die Streckenlasten erfolgt (siehe Abb. 127). Die so gewonnene Momen-

tenfläche wäre auf den geknickten Riegel zu übertragen. Bei der weiteren Arbeit begegnet man nun Schwierigkeiten, da die Teilstücke der Momentenfläche sowie die Abstände f unbequem zu berechnen sind. Man schlägt deshalb folgenden Weg ein:

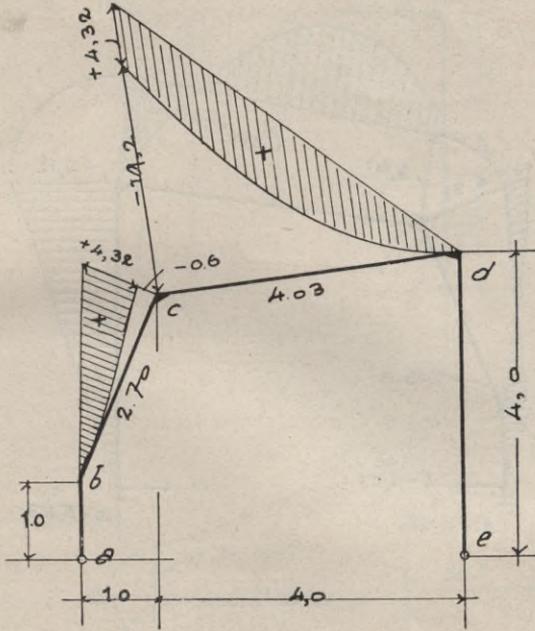


Abb. 129.

Nach Abb. 129:

Stab	v	F_0	f	$v \cdot F_0 \cdot f$
ab	1	0	0	0
bc	1	$+\frac{1}{2} \cdot 2,70 \cdot 4,92 = +6,63$	$1,0 + 2,5 \cdot \frac{2}{3} = 2,67 \text{ m}$	$+17,70$
		$-\frac{1}{3} \cdot 2,70 \cdot 0,60 = -0,54$	$1,0 + 2,5 \cdot \frac{3}{4} = 2,88 \text{ ,,}$	$-1,55$
cd	1	$+\frac{1}{2} \cdot 4,03 \cdot 23,52 = +47,4$	$3,5 + \frac{0,5}{3} = 3,67 \text{ ,,}$	$+174,00$
		$-\frac{1}{3} \cdot 4,03 \cdot 19,2 = -25,8$	$3,5 + \frac{0,5}{4} = 3,63 \text{ ,,}$	$-93,00$
de	1	0	0	0
$\Sigma v \cdot F_0 \cdot f = +96,15$				

also

$$\underline{H} = \frac{\Sigma v \cdot F_0 \cdot f}{\text{Nenner}} = \frac{96,15}{93,5} = +1,03 \text{ t.}$$



Die durch diesen Horizontalschub erzeugte Momentenfläche ist nun mit der ursprünglichen M_0 -Fläche zu kombinieren, genau so, wie dies in vorigem Beispiel getrennt vorgeführt wurde. Abb. 130 zeigt die endgültige Momentenfläche.

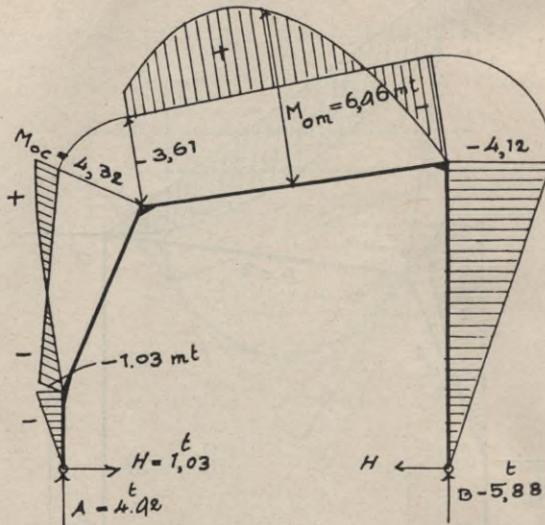


Abb. 130.

Beispiel 3. Allgemeine Behandlung eines einfachen rechteckigen Rahmens mit wagerechter Belastung.

Es sei eine Einzellast in beliebiger Lage angenommen (Abb. 131). Das Trägheitsmoment des Riegels sei n mal so groß als dasjenige der Stiele. Wählen wir $J_m = J_r$, dann ist für den Riegel

$$\underline{v} = \frac{J_m}{J} = \frac{J_r}{J_r} = \underline{1},$$

für die Stiele

$$\underline{v} = \frac{J_m}{J} = \frac{J_r}{J_s} = \underline{n}.$$

Wir nehmen das bewegliche Auflagergelenk auf der belasteten Seite an.

Reaktionen und Momentenflächen des statisch bestimmten Hauptsystems zeigt Abb. 132.

Reaktionen: Beim festen Auflager wagerecht W ; für beide als Gegenwirkung zu dem Moment $W \cdot y$ die lotrechten Reaktionen $\mp \frac{W \cdot y}{l}$.

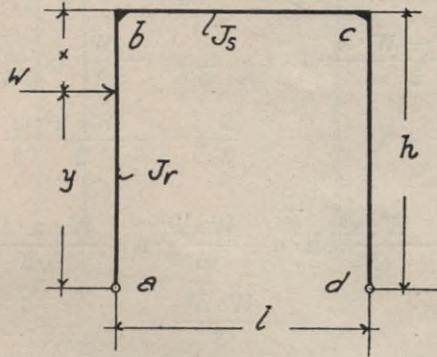


Abb. 131.

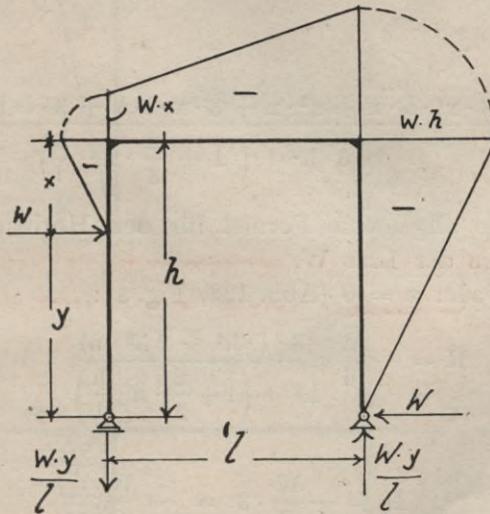


Abb. 132.

Als Nennerglied für diese rechteckige Form erhielten wir schon früher

$$N = h^2 \cdot l \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l} \right).$$

Zählerglied:

Stab	v	F_0	f	$v \cdot F_0 \cdot f$
ab	n	$-\frac{1}{2} \cdot x \cdot W \cdot x = -\frac{W \cdot x^2}{2}$	$h - \frac{x}{3}$	$-W \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \left(h - \frac{x}{3}\right) \cdot n$
bc	1	$-\frac{W \cdot x + W \cdot h}{2} \cdot 1$	h	$-\frac{W}{2} \cdot (x + h) \cdot 1 \cdot h \cdot 1$
cd	n	$-\frac{W \cdot h^2}{2}$	$\frac{2}{3} h$	$-\frac{W \cdot h^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot h \cdot n = -\frac{W \cdot h^3}{3} \cdot n$

$$\underline{\underline{\Sigma v \cdot F_0 \cdot f}} = -\frac{W \cdot x^2}{2} \cdot h \cdot n + \frac{W \cdot x^3}{6} \cdot n - \frac{W \cdot x \cdot 1 \cdot h}{2} - \frac{W \cdot 1 \cdot h^2}{2} - \frac{W \cdot h^3}{3} \cdot n$$

(Generalnenner = 6)

$$= -\frac{W}{6} \cdot (3 \cdot x^2 \cdot h \cdot n - x^3 \cdot n + 3 \cdot x \cdot 1 \cdot h + 3 \cdot 1 \cdot h^2 + 2 \cdot h^3 \cdot n).$$

Demnach

$$\underline{\underline{H}} = -\frac{W \cdot (3 \cdot x^2 \cdot h \cdot n - x^3 \cdot n + 3 \cdot x \cdot 1 \cdot h + 3 \cdot 1 \cdot h^2 + 2 \cdot h^3 \cdot n)}{6 \cdot h^2 \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l}\right)}$$

Das wäre eine allgemeine Formel für den Horizontalschub bei beliebiger Lage der Last W.

Spezialfall: $x = 0$ (Abb. 133, Fig. a):

$$\underline{\underline{H}} = -\frac{W}{6} \cdot \frac{(3 \cdot 1 \cdot h^2 + 2 \cdot h^3 \cdot n)}{h^2 \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l}\right)}$$

woraus

$$\underline{\underline{H}} = -\frac{W}{6} \cdot 3 = -\frac{W}{2}.$$

Das —-Zeichen deutet an, daß der Schub nach außen gerichtet ist, also positive Momente erzeugt (Fig. b). Nach algebraischer Addition beider Momentenflächen sowie der Auflagergrößen erhält man dann Fig. c.

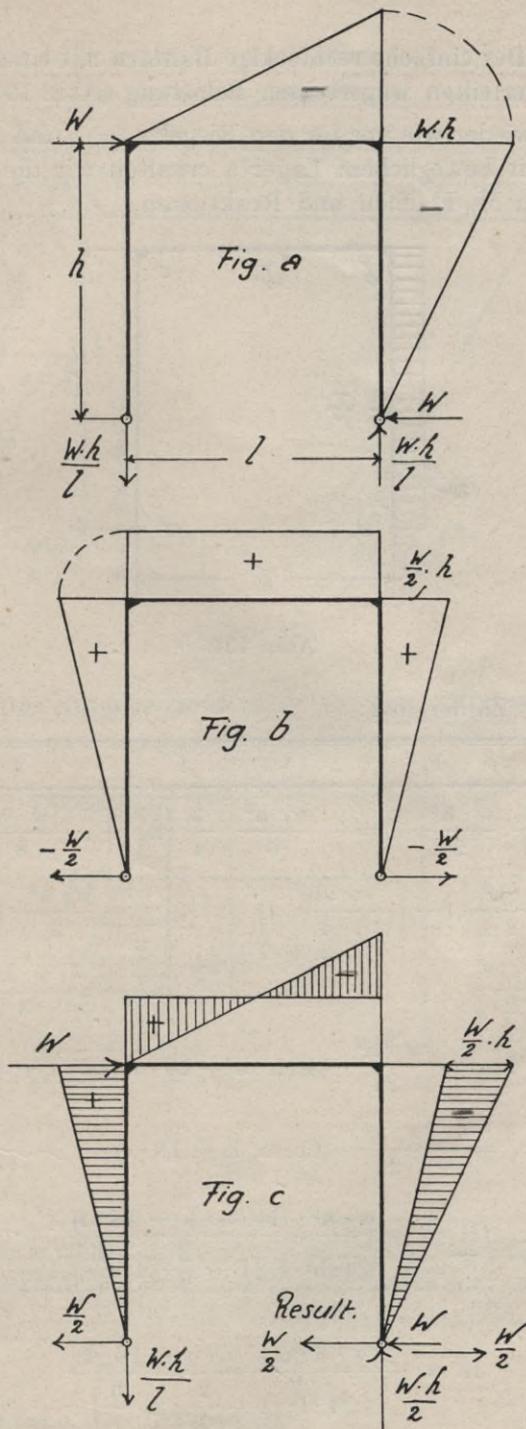


Abb. 133.

Beispiel 4. Der einfache rechteckige Rahmen mit einer gleichmäßig verteilten wagerechten Belastung (Abb. 134).

Es sei wieder wie vor für den Riegel $v = 1$ und für die Stiele $v = n$. Mit beweglichem Lager a erhalten wir die in Abb. 135 dargestellten M_0 -Flächen und Reaktionen.

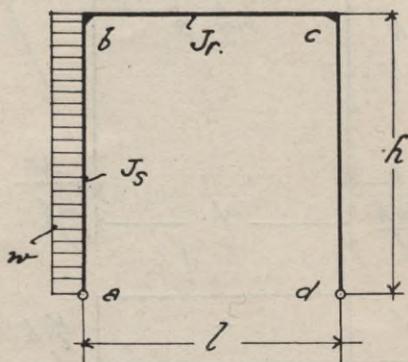


Abb. 134.

Zählerglied:

Stab	v	F_0	f	$v \cdot F_0 \cdot f$
ab	n	$-\frac{1}{3} \cdot \frac{w \cdot h^2}{2} \cdot h = -\frac{w \cdot h^3}{6}$	$\frac{3}{4} \cdot h$	$-n \cdot \frac{w \cdot h^4}{8}$
bc	1	$-\frac{w \cdot h^2}{2} \cdot l + \left(-\frac{w \cdot h^2}{4} \cdot l\right)$	h	$-\frac{w \cdot h^3}{2} \cdot l - \frac{w \cdot h^3}{4} \cdot l$
cd	n	$-\frac{w \cdot h^3}{2}$	$\frac{2}{3} \cdot h$	$-n \cdot \frac{w \cdot h^4}{3}$

$$\underline{\Sigma v \cdot F_0 \cdot f} = -\frac{w \cdot h^3}{24} \cdot (3 \cdot n \cdot h + 12 \cdot l + 6 \cdot l + 8 \cdot n \cdot h)$$

$$= -\frac{w \cdot h^3}{24} \cdot (11 \cdot n \cdot h + 18 \cdot l)$$

somit

$$\underline{H} = -\frac{w \cdot h^3 \cdot (11 \cdot n \cdot h + 18 \cdot l)}{24 \cdot h^2 \cdot l \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l}\right)}$$

oder

$$\underline{H} = -\frac{w \cdot h \cdot (11 \cdot n \cdot h + 18 \cdot l)}{24 \cdot l \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l}\right)}$$

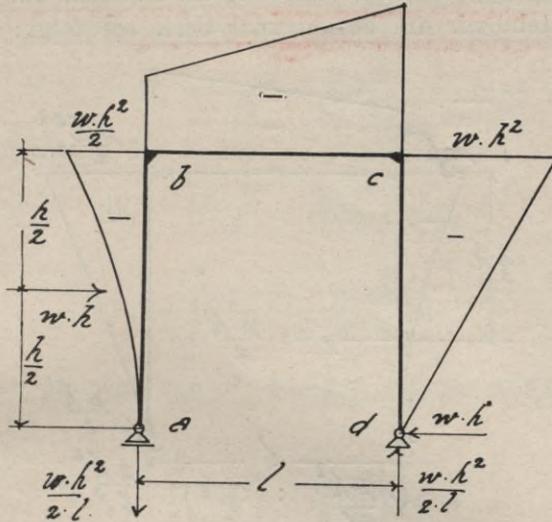


Abb. 135.

**Beispiel 5. Der einfache rechteckige Rahmen mit einseitigem Erd-
druck (Abb. 136).**

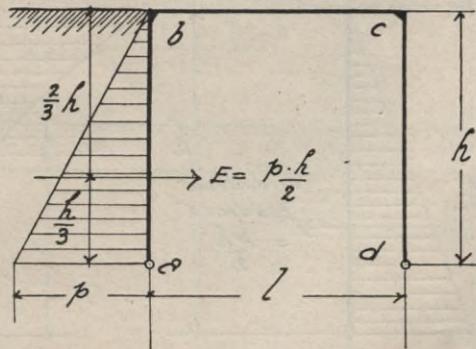


Abb. 136.

Die M_0 -Momente und Auflagergrößen für das statisch bestimmte Hauptsystem sind in Abb. 137 dargestellt. Es sei wieder für die Stiele $\nu = n$ und für den Riegel $\nu = 1$, also Nennergröße

$$\underline{N} = h^2 \cdot l \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l} \right).$$

Bestimmung der Zählergröße:

Den Einfluß der Seitenbelastung des Pfostens auf das Zählerglied ermitteln wir am besten analytisch wie folgt:

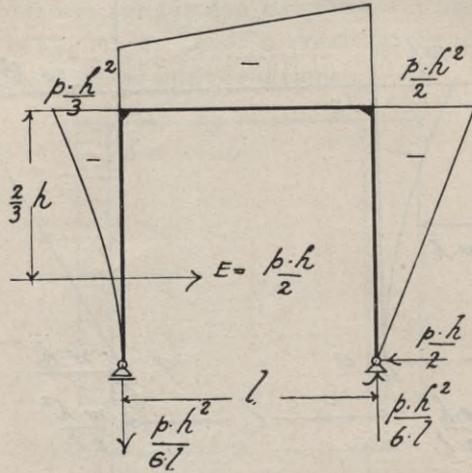


Abb. 137 .

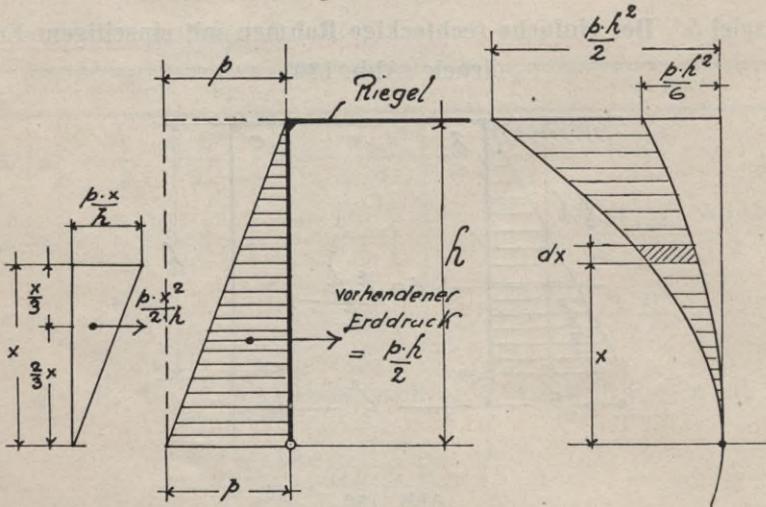


Abb. 138.

Wir nehmen zunächst den Erddruck über den ganzen Pfosten konstant an (Abb. 138), wobei sich die Momentenfläche als Parabel ergibt; dann subtrahieren wir die von dem ergänzenden Erddruck-

1) für $\frac{ph}{1}$ lies $\frac{ph}{2}$

dreieck hervorgerufene kubische Parabelfläche und erhalten die in Abb. 138 schraffierte M_0 -Fläche. Das Moment an beliebiger Stelle x ist

$$M_x = \frac{p \cdot x^2}{2} - \frac{p \cdot x^3}{6 \cdot h}$$

und das Differential der F_0 -Fläche

$$dF_0 = \left(\frac{p \cdot x^2}{2} - \frac{p \cdot x^3}{6 \cdot h} \right) \cdot dx$$

also

$$F_0 = \int_0^h \left(\frac{p \cdot x^2}{2} - \frac{p \cdot x^3}{6 \cdot h} \right) dx.$$

Das statische Moment von F_0 bezogen auf die Auflagergelenkwagerechte ist

$$\begin{aligned} F_0 \cdot f &= \int_0^h \left(\frac{p \cdot x^2}{2} - \frac{p \cdot x^3}{6 \cdot h} \right) dx \cdot x \\ &= \frac{p}{2} \cdot \int_0^h x^3 \cdot dx - \frac{p}{6 \cdot h} \cdot \int_0^h x^4 dx \\ &= \frac{p \cdot h^4}{8} - \frac{p \cdot h^4}{30} \\ F_0 \cdot f &= \frac{11 \cdot p \cdot h^4}{120}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

Stab	v	F_0	f	$v \cdot f \cdot F_0$
ab	n			$-\frac{11 \cdot p \cdot h^4}{120} \cdot n$
bc	1	$-\frac{5}{12} \cdot p \cdot h^2 \cdot 1$	h	$-\frac{5}{12} \cdot p \cdot h^3 \cdot 1$
cd	n	$-\frac{p \cdot h^3}{4}$	$\frac{2}{3} \cdot h$	$-\frac{p}{6} \cdot h^4 \cdot n$

$$\Sigma v \cdot F_0 \cdot f = -\frac{1}{6} \cdot p \cdot h^3 \cdot 1 \left(\frac{11 \cdot h \cdot n}{20 \cdot 1} + \frac{5}{2} + \frac{h \cdot n}{1} \right).$$

Demnach

$$H = -\frac{p \cdot h \cdot \left(\frac{11 \cdot h \cdot n}{20 \cdot 1} + \frac{5}{2} + \frac{h \cdot n}{1} \right)}{6 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{1} \right)}$$

oder

$$\underline{H} = - \frac{p \cdot h \cdot \left(\frac{31}{20} \cdot \frac{h \cdot n}{l} + \frac{5}{2} \right)}{6 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l} \right)}$$

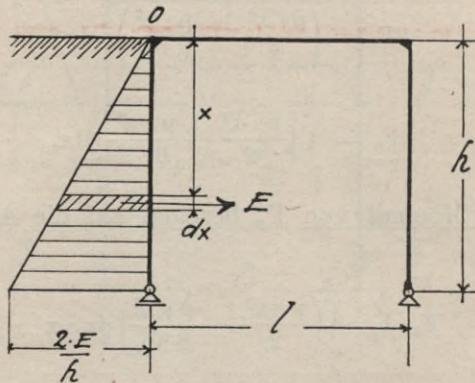


Abb. 139.

• Zu dieser Gleichung können wir auch auf die Weise gelangen, daß wir in die allgemeine Gleichung (Beispiel 3) für W ein Differential des Erddruckes (siehe Abb. 139)

$$dE = \left(\frac{2E}{h} \cdot \frac{x}{h} \right) \cdot dx$$

einsetzen und dann die Gleichung zwischen den Grenzen von 0 und h integrieren, also

$$\begin{aligned} \underline{H} &= - \int_0^h \left[\frac{2 \cdot E \cdot x}{6 \cdot h^2} \cdot \frac{(3 \cdot x^2 \cdot h \cdot n + 3 \cdot x \cdot h \cdot l + 3 \cdot l \cdot h^2 + 2 \cdot h^3 \cdot n - x^3 \cdot n)}{h^2 \cdot l \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l} \right)} \right] \cdot dx \\ &= - \frac{2E}{6 \cdot h^4 \cdot l \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l} \right)} \cdot \left[\frac{3 \cdot h^4 \cdot h \cdot n}{4} + \frac{3 \cdot h^3 \cdot h \cdot l}{3} + \frac{3 \cdot l \cdot h^2 \cdot h^2}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2 \cdot h^2 \cdot h^3 \cdot n}{2} - \frac{h^5 \cdot n}{5} \right] \\ &= - \frac{2 \cdot E}{6 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l} \right)} \cdot \left[\frac{3 \cdot h \cdot n}{4 \cdot l} + 1 + \frac{3}{2} + \frac{h \cdot n}{l} - \frac{h \cdot n}{5 \cdot l} \right] \end{aligned}$$

oder

$$H = - \frac{2 \cdot E}{6 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{l}\right)} \cdot \left[\frac{31}{20} \cdot \frac{h \cdot n}{l} + \frac{5}{2} \right]$$

Beispiel 6. Der unsymmetrische Rahmen mit Winddruck.

Der in Beispiel 2 berechnete Dachrahmen soll nun für einen horizontalen Winddruck von 150 kg/m^2 untersucht werden. Die

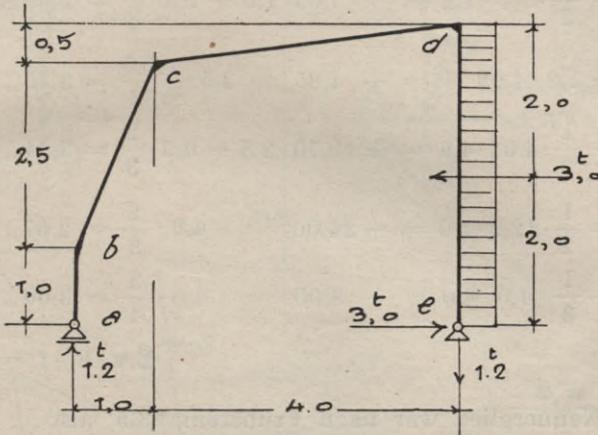


Abb. 140.

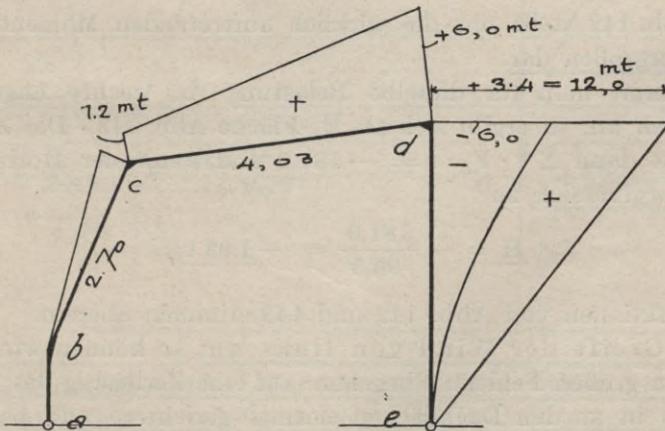


Abb. 141.

Binderentfernung betrage 5 m, somit der Gesamwinddruck auf jede Seite = $4,0 \cdot 5,0 \cdot 150 = 3000 \text{ kg}$.

1. Wind von rechts (Abb. 140). Es ist hierbei gleichgültig, welches Auflager als beweglich gewählt wird. Erwählt man dafür das linke, so ergeben sich die in Abb. 140 angegebenen Reaktionen und die in Abb. 141 dargestellten M_0 -Flächen.

Zählerglied:

Stab	v	F_0	f	$v \cdot F_0 \cdot f$
ab	1	0	0	0
bc	1	$+\frac{1}{2} \cdot 2,7 \cdot 1,2 = + 1,63$	$1,0 + 2,5 \cdot \frac{2}{3} = 2,67 \text{ m}$	$+ 4,32$
cd	1	$+\frac{1}{2} \cdot 4,03 \cdot 4,8 = + 9,70$	$3,5 + 0,5 \cdot \frac{2}{3} = 3,84 \text{ ,,}$	$+ 37,4$
		$+ 1,2 \cdot 4,03 = + 4,85$	$3,5 + \frac{0,5}{2} = 3,75 \text{ ,,}$	$+ 18,2$
de	1	$+\frac{1}{2} \cdot 12,0 \cdot 4,0 = + 24,00$	$4,0 \cdot \frac{2}{3} = 2,67 \text{ ,,}$	$+ 64,0$
		$-\frac{1}{3} \cdot 4,0 \cdot 6,0 = - 8,00$	$4,0 \cdot \frac{3}{4} = 3,00 \text{ ,,}$	$- 24,0$
$\Sigma v \cdot F_0 \cdot f = + 99,92$				

Das Nennerglied war nach Früherem 93,5, also

$$H = \frac{99,92}{93,5} = + 1,07 \text{ t.}$$

Abb. 142 stellt uns die wirklich auftretenden Momente und Auflagergrößen dar.

Nimmt man für dieselbe Belastung das rechte Lager als beweglich an, so ergibt sich als M_0 -Fläche Abb. 143. Das Zählerglied ist dann $\Sigma v \cdot F_0 \cdot f = - 181,0$ und somit der Horizontal-schub ergibt sich zu

$$H = - \frac{181,0}{93,5} = - 1,93 \text{ t;}$$

die Reaktionen von Abb. 142 und 143 stimmen überein.

2. Greift der Wind von links an, so können wir, ohne einen zu großen Fehler zu begehen, auf eine Zerlegung des Winddruckes in zu den Dachflächen normal gerichtete und parallele Komponenten praktischerweise verzichten. Wir arbeiten also mit einem wagerechten Winddruck w auf eine lotrechte Wand von der Firsthöhe Abb. 144. Der Gesamtdruck beträgt somit wieder (um bei demselben Beispiel zu bleiben) $W = 0,75 \cdot 4 = 3 \text{ t.}$

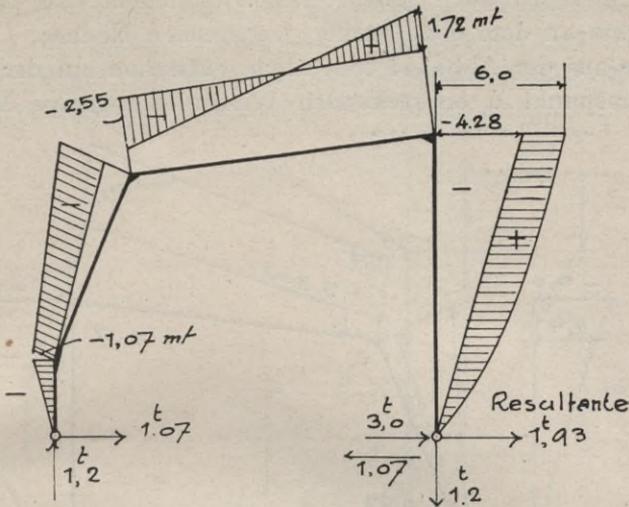


Abb. 142.

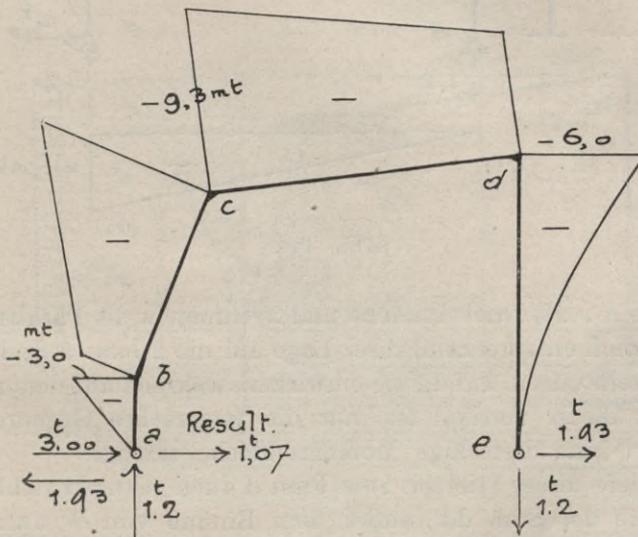


Abb. 143.

Machen wir das linke Lager wagrecht beweglich, so entstehen an den Auflagern A und B die lotrechten Reaktionen

$$\mp \cdot \frac{W \cdot c}{l} = \frac{3 \cdot 2,0}{5,0} = 1,2 \text{ t.}$$

und am festen Lager B die wagerechte Reaktion $W = 3 \text{ t.}$

Nehmen wir auch gleiche Trägheitsmomente an, so ändert sich nichts an dem eben vorher gewonnenen Nenner.

Wie aus der Abb. 144 ersichtlich, entstehen auf der sich bis zum Firstpunkt d erstreckenden Windseite negative Momente,

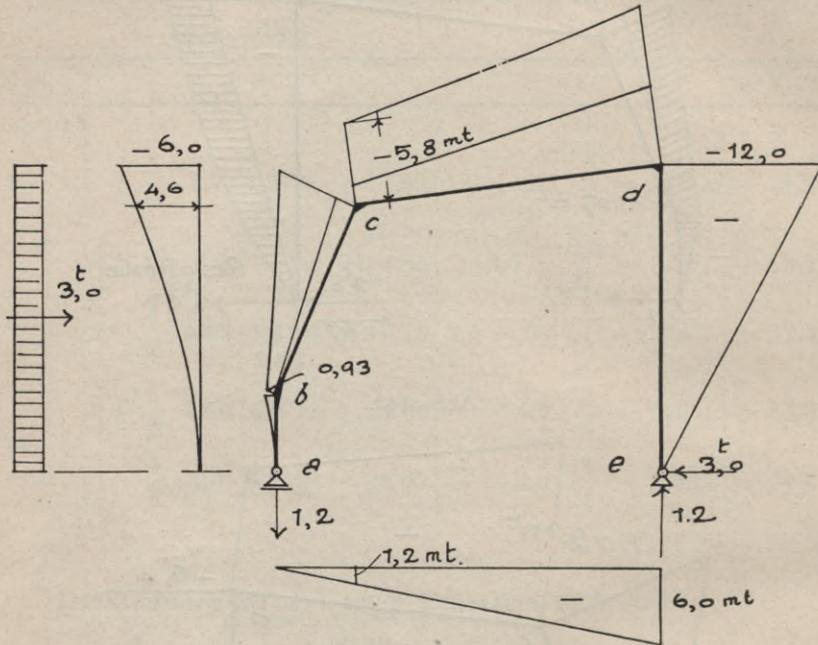


Abb. 144.

1) infolge $A \downarrow$ als Dreiecksfläche und 2) infolge w als Parabelfläche, die natürlich entsprechend ihrer Lage auf die 2 bzw. 3 Stabstücke abzuwickeln wären, auf die sie einwirken, während auf dem rechten Stiel, da dieser vertikal ist, nur die wagerechte Gegenreaktion $W = 3t$ eine dreieckige Momentenfläche erzeugt.

↪ Verliefe dieser Stiel bis zum First d auch geknickt (Abb. 145), so erhielte der Stab dd' außer dem Einfluß von W auch noch den von $B \uparrow$.

Zur Bildung des Zählergliedes betrachten wir am einfachsten den Einfluß jeder Kraftwirkung, links und rechts vom Firstpunkt, getrennt.

Der Einfluß der Reaktionen an sich bietet dabei nichts Neues. Die Übertragung der linken, bis zum Firstpunkt in Betracht kommenden Parabelfläche auf die drei Stabstücke bietet auch keine Schwierigkeiten, ebenso nicht die Bestimmung der jeweils

auf einem Stabstück ruhenden Teilfläche. Bekanntlich ist der Inhalt der schrägliegenden Flächen gleich dem der Vertikalprojektion multipliziert mit dem Verhältnis von wirklicher Stablänge zu seiner (Vertikal-)Projektion (Abb. 146).

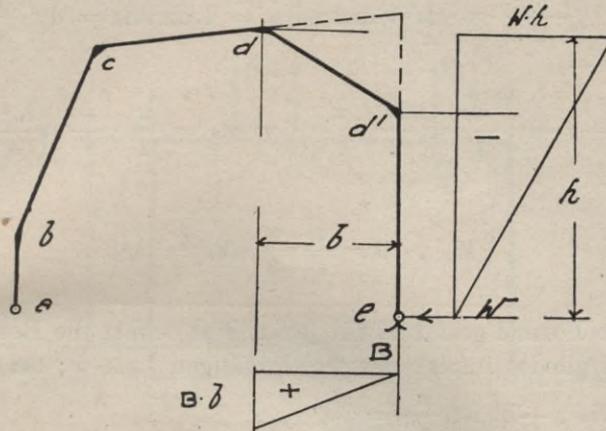


Abb. 145.

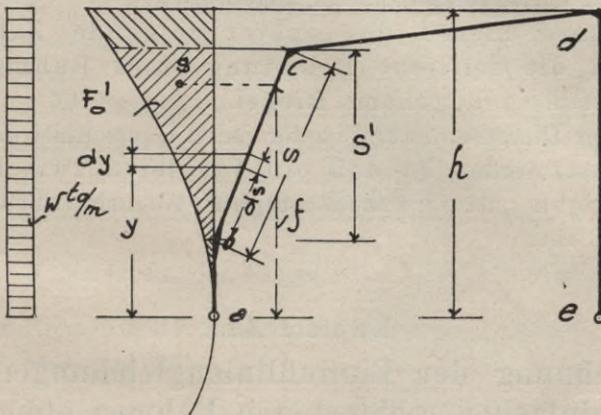


Abb. 146.

Also

$$F_0 \text{ (auf } s) = F_0' \cdot \frac{s}{s'}$$

Die Bestimmung des Schwerpunktes zu der direkt (durch Differenz zweier Parabelabschnitte) ausgerechneten Fläche F_0' bzw. F_0 bereitet jedoch einige Umstände.

Man erhält das für jedes Stabstück entstehende $F_0 \cdot f$ einfacher durch direkte Auflösung des Integrals

$\int M_0 \cdot y \cdot ds \cdot v$. Für das Stabstück bc ergibt sich mit allgemein

$$M_0 = \frac{w \cdot y^2}{2}$$

$$\int_{y=h_b}^{y=h_c} \frac{w \cdot y^2}{2} \cdot y \cdot ds \cdot v \text{ und mit } v = 1 \text{ und } ds = dy \cdot \frac{s}{s'}$$

$$\int_{h_b}^{h_c} \frac{w \cdot y^2}{2} \cdot y \cdot dy \cdot \frac{s}{s'} = \frac{w}{2} \cdot \frac{s}{s'} \cdot \int_{h_b}^{h_c} y^3 \cdot ds = \frac{w}{2} \cdot \frac{s}{s'} \cdot \left(\frac{h_c^4}{4} - \frac{h_b^4}{4} \right)$$

$$\int_{h_b}^{h_c} M_0 \cdot y \cdot ds = \frac{s}{s'} \cdot \frac{w}{8} \cdot (h_c^4 - h_b^4).$$

Diese Formel gestattet für jeden Stab sofort die Bestimmung des Zählergliedes infolge der gleichmäßigen Last w ; bei Vertikalstäben, wie $a-b$, ist $\frac{s}{s'} = 1$.

Zum Schluß erfolgt die Addition der Einflüsse aller auf das Zählerglied einwirkenden Lasten algebraisch.

Beachte hierzu das später folgende Zahlenbeispiel für die seitliche Belastung eines Rahmens mit parabolisch gebogenem Riegel.

Bei der Dimensionierung ist für jeden Querschnitt das größte Moment festzustellen, so daß ein Vergleich zwischen der linksseitigen und rechtsseitigen Windbelastung anzustellen ist.

Kapitel XI.

Berechnung der Einflußliniengleichungen für den einfachen rechteckigen Rahmen ohne und mit Kragarmen.¹⁾

Berechnung der Einflußlinien für den Horizontalschub bei lot-rechter Belastung.

(Als Vorstudium Anhang Einflußlinienlehre.)

Einflußlinien gewinnen wir bekanntlich, wenn wir eine Last $P = 1$ über den Träger wandern lassen, in jedem Punkt (vielleicht von $\frac{1}{10}l$ zu $\frac{1}{10}l$) die bestimmte statische Größe (hier den Schub)

¹⁾ Vgl. Müller-Breslau, Die neueren Methoden, 4. Aufl. S. 129 u. f.

ausrechnen und als Ordinate unter der betreffenden Laststellung auftragen. Da sich der Schub bei mehreren Lasten stets als die Summe der Schübe der einzelnen Lasten für sich darstellen läßt, so nehmen wir zunächst 2, und zwar symmetrische, Lasten 1 an (Abb. 147).

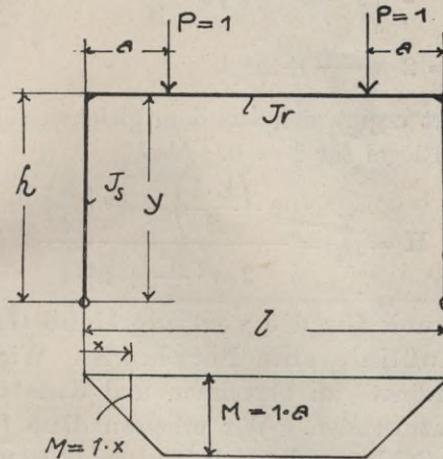


Abb. 147.

Zählerglied:

$$Z = \int M_0 \cdot y \, ds \cdot v.$$

Ist das Trägheitsmoment des Riegels $J_r = \frac{1}{n} \cdot J_s$ und wählt

man $J_m = J_r$, so ist für den Riegel $v = 1$, für die Stiele $v = \frac{1}{n}$.

Da nur der Riegel für das Zählerglied in Betracht kommt, so haben wir mit $v = 1$ und mit $y = h$

$$\int M_0 \cdot y \cdot ds = 2 \left[\int_0^a 1 \cdot x \cdot h \cdot dx + \int_a^{\frac{l}{2}} 1 \cdot a \cdot h \cdot dx \right].$$

Die Multiplikation mit 2 hebt sich sofort weg, da das Resultat durch 2 zu dividieren ist. Daher

$$Z = h \int_0^a x \cdot dx + a \cdot h \int_a^{\frac{l}{2}} dx = \frac{h \cdot a^2}{2} + a \cdot h \cdot \frac{l}{2} - a^2 \cdot h$$

$$Z = \frac{a \cdot h \cdot l}{2} - \frac{h \cdot a^2}{2} = a \left(\frac{h \cdot l}{2} \right) - a^2 \left(\frac{h}{2} \right).$$

Dasselbe Resultat hätte sich auch sofort aus der gleichen Ableitung für den Rahmen mit bogenförmigem Riegel ergeben (Kapitel XII), wenn wir $f = 0$ setzen.

$$\begin{aligned} \text{Nenner } \underline{N} &= \int y^2 \cdot ds \cdot v \\ &= 2 \cdot \int_0^h y^2 \cdot dy \cdot v + \int_0^1 y^2 \cdot ds \cdot v \\ \underline{N} &= 2 \cdot v \cdot \frac{h^3}{3} + h^2 \cdot 1 \end{aligned}$$

Auch dieser Wert ergibt sich aus dem gleichen für den Rahmen mit gebogenem Riegel für $f = 0$. Also

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}}{\underline{N}} = \frac{a \cdot \left(\frac{h \cdot 1}{2}\right) - a^2 \cdot \left(\frac{h}{2}\right)}{2 \cdot v \cdot \frac{h^3}{3} + h^2 \cdot 1}$$

Der Ausdruck für die veränderliche Größe a zeigt, daß die Einflußlinie eine Parabel ist. Wir brauchen also nur die Mittelordinate zu berechnen und dann die bekannte Konstruktion anzuwenden. Wir erhalten diese für $a = 0,5 \cdot l$ (Abb. 148). Mit Zahlen ergibt sich für $l = 11,80 \text{ m}$, $h = 5,12 \text{ m}$,

$$v \text{ für die Stiele} = \frac{1}{1,5} \text{ und } a = \frac{1}{2} = \frac{11,80}{2} :$$

$$\underline{H}_{0,51} = \frac{\frac{11,8}{2} \left(\frac{5,12 \cdot 11,80}{2}\right) - \left(\frac{11,80}{2}\right)^2 \cdot \frac{5,12}{2}}{2 \cdot \frac{1}{1,5} \cdot \frac{5,12^3}{3} + 5,12^2 \cdot 11,80} = \underline{0,242.}$$

$$\text{Der Inhalt der Fläche beträgt } \underline{F} = 11,80 \cdot 0,242 \cdot \frac{2}{3} = \underline{+1,905 \text{ m.}}$$

Die Bezeichnung ist m, weil die Ordinaten keine Benennung haben.

$$\text{Der Horizontalschub für volle Belastung beträgt somit bei } p = 2 \text{ t/m} \quad \underline{H_p} = \underline{+1,905 \cdot 2,0 = 3,81 \text{ t.}}$$

(Bei den gleichen Abmessungen, aber gebogenem Riegel mit der Pfeilhöhe $f = 1,12 \text{ m}$ ergibt sich der Inhalt der Einflußfläche um etwas geringer zu $F = 1,78 \text{ m}$; vgl. später Kapitel XII.)

Vergleichsweise erhalten wir nach der früher abgeleiteten Formel für gleichmäßige Last direkt

$$\underline{H_p} = \frac{p \cdot l^2}{12 \cdot h \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{h}{1}\right)} = \frac{2,0 \cdot 11,80^2}{12 \cdot 5,12 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1,5} \cdot \frac{5,12}{11,80}\right)} = \underline{3,81 \text{ t.}}$$

↓
= v

Einflußlinien für die Biegemomente.

Die Einflußlinie für den Horizontalschub (Abb. 148) kann dazu benutzt werden, Einflußlinien für die Biegemomente an beliebigen Punkten des Riegels zu konstruieren.

Für einen beliebigen Punkt K des Riegels (Abb. 149) ist

$$\underline{M_K = M_0 - H \cdot h.}$$

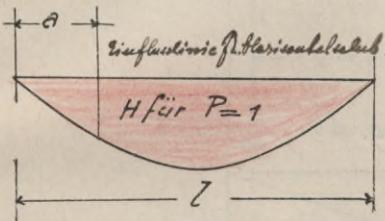


Abb. 148.

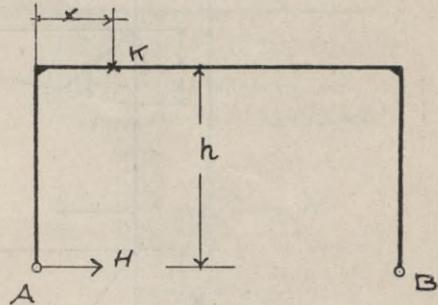


Abb. 149.

Wir gelangen zu einer einfachen Konstruktion, wenn wir die ganze Gleichung durch h dividieren:

$$\underline{\frac{M_K}{h} = \frac{M_0}{h} - H}$$

$$\underline{M_K = h \left(\frac{M_0}{h} - H \right).}$$

M_0 ist das Moment des einfachen Balkens AB, für welches die Einflußfläche nach Abb. 150 Fig. a gewonnen werden würde (in direkter Abhängigkeit von x). Durch Auftragen von $\frac{x}{h}$ gewinnen wir sofort die Einflußfläche für $\frac{M_0}{h}$ (Fig. b). Zu dieser

haben wir dann die Einflußfläche für H algebraisch zu addieren, um die endgültige Einflußfläche, deren Multiplikator $\mu = h$ ist, zu erhalten (Fig. c).

Besonders bei Rahmenbrücken dürften solche für mehrere Punkte K sehr schnell konstruierbare Einflußlinien von Nutzen sein, da es sich dort um bewegliche Lasten handelt, weniger aber bei Dachkonstruktionen.

Bei Benutzung der Einflußflächen hüte man sich vor Fehlern in der Ausrechnung der Flächeninhalte der einzelnen

positiven oder negativen Teile. Man werde sich darüber klar, was 1 cm^2 der auf der Zeichnung dargestellten Fläche auf Grund

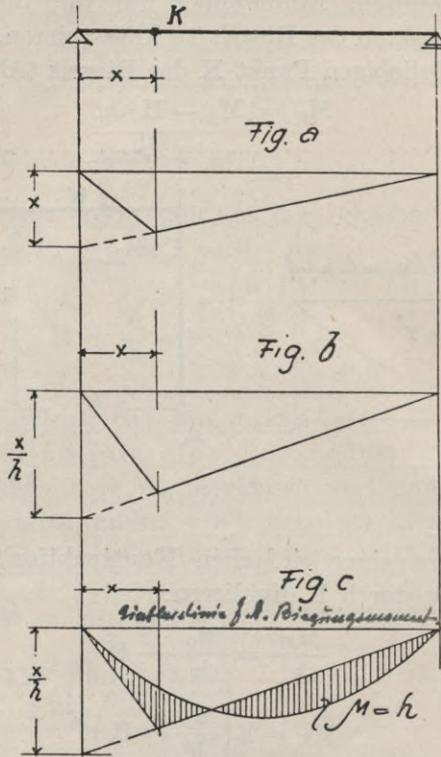


Abb. 150.

der angewendeten Längen- und Ordinatenmaßstäbe bedeutet; man braucht dann nur die berechneten Flächeninhalte mit der Last für 1 m zu multiplizieren, sofern überhaupt eine gleichmäßige Belastung vorliegt.

Der rechteckige Zweigelenrahmen mit Kragarmen.

Zunächst ist klar, daß die Kragarme an sich vollständig unabhängig vom eigentlichen Rahmen als einfache Kragträger berechenbar sind; daher liefern sie auch, weil sie unabhängig vom eigentlichen Rahmen sind, keinen Einfluß auf das Nennerglied. Für das Zählerglied kommen die Kragarme jedoch in Betracht, denn sie liefern ein Spannungsmoment, welches sich über den zu dem Rahmen gehörigen Riegel fortpflanzt und mit

negativer Momentenfläche für das statisch bestimmte Hauptsystem, den einfachen Kragbalken, auch einen negativen Horizontalschub (nach außen) erzeugt (Abb. 151).

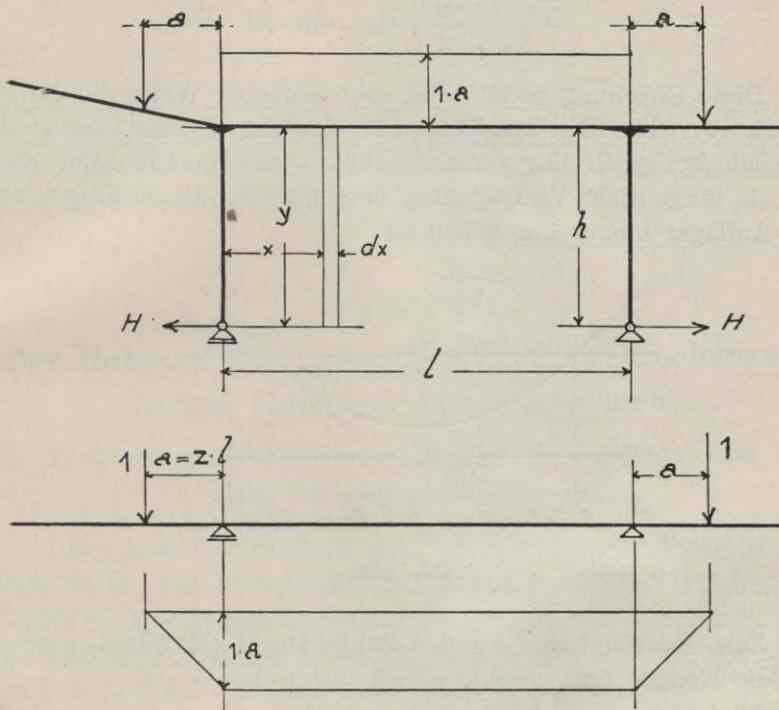


Abb. 151.

∞ Zur Berechnung von Einflußordinaten für diesen negativen Horizontalschub belasten wir die Kragarme, deren Form und Richtung gleichgültig ist, mit zwei symmetrischen Lasten $P = 1$, so daß der für das Zählerglied in Frage kommende Riegel das negative Moment $M_0 = -1 \cdot a$ erhält. Also

$Z = \int M_0 \cdot y \cdot ds \cdot v$; mit der gleichen Annahme wie vor ($J_m = J_r$, also $v = 1$) wird bei Division durch 2

$$Z = - \frac{1}{2} \int_0^a y \cdot dx.$$

Das Integral bedeutet den Inhalt der vom Rahmen umschlossenen Fläche, also

$$Z = - \frac{a \cdot h \cdot l}{2}.$$

Somit wird mit dem gleichen Nenner wie vor

$$H = - \frac{\frac{a \cdot h \cdot l}{2}}{\frac{2}{3} v \cdot h^3 + h^2 \cdot l}.$$

Diese Gleichung gestattet in sehr einfacher Weise die Konstruktion der Einflußlinie für die Kragarme. Sie stellt nämlich bezüglich des veränderlichen a eine gerade Linie dar, die als tangentielle Verlängerung der mittleren Einflußlinie über die Auflager hinaus anzusehen ist.

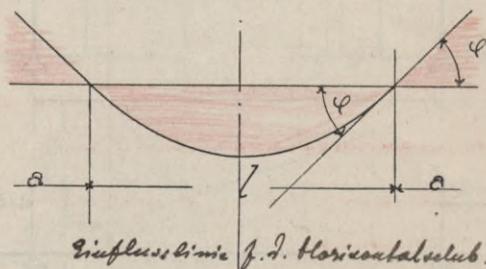


Abb. 152.

Zum Beweise leiten wir den Zähler für H (Mittelteil) nach a ab (die Nenner sind gleich).

Allgemein:

$$\frac{dZ}{da} = \frac{h \cdot l}{2} - a \cdot h,$$

im Speziellen für $a = 0$ (also am Auflagerpunkt)

$$\frac{dZ}{da} = \frac{h \cdot l}{2} = \text{tg } \varphi$$

(Abb. 152). $\text{tg } \varphi$ ist aber weiter nichts als der zu a gehörige Koeffizient des Zählers für das H der Kragarme. Also

$$H = - \frac{a \cdot \text{tg } \varphi}{N}$$

(mit $\text{tg } \varphi$ für $a = 0$).

Da die Einflußlinien der Kragarme, wie wir gesehen haben, gerade Linien sind, so brauchen wir nur noch einen Punkt derselben in einem beliebigen Abstände a zu berechnen und wählen dazu praktischerweise auf jeder Seite je den größten Ab-

stand a (ohne von der Gleichung mit $\operatorname{tg} \varphi$ Gebrauch zu machen) mit Benutzung der ersten Gleichung

$$\underline{H} = - \frac{\frac{a \cdot h \cdot l}{2}}{\frac{2}{3} \cdot v \cdot h^3 + h^2 \cdot l}.$$

Es erübrigt sich hierzu ein Beispiel, da für den gleichen Fall bei dem Rahmen mit gebogenem Riegel ein solches gegeben ist.

Kapitel XII.

Der Rahmen mit gebogenem (oder gebrochenem) Riegel ohne und mit Kragarmen.

Die Ermittlung des Horizontalschubes für lotrechte Last mit Hilfe der gedeuteten Integrale.

Diese kann genau so erfolgen wie in einem der Beispiele des Kapitels X; nur haben wir den gebogenen Riegel dabei in eine Anzahl als gerade anzusehende Teilstücke zu zerlegen, wobei man am besten die Teilstücke alle gleich lang macht (Abb. 153). Die Form des Bogens ist dabei gleichgültig; in der Regel liegt ein Kreisbogen vor, dessen Länge zwecks Zerlegung in eine Anzahl gleicher Stücke leicht berechenbar ist. Flache parabolische Bögen kann man zwecks Vermeidung der Rektifikation einer Parabel ebenfalls als Kreisbogen betrachten. Man kann auch die Teilstücklänge aus der Zeichnung herausmessen.

Nach Einteilung des Bogens lotet man die Teilpunkte herunter auf die für den einfachen Balken gezeichnete Momentenfläche und überträgt die dort getroffenen Momentordinaten auf die Bogenteilstücke (Abb. 154). Das Weitere, die Bildung des Nenners und die Berücksichtigung des Wechsels im Trägheitsmoment (auch innerhalb des Bogens), ist dann genau so wie früher.

Die Abb. 153 und 154 veranschaulichen das Gesagte für den Fall einer gleichmäßigen Belastung. Zur Vereinfachung kann dabei die zu einem Teilstück gehörige Fläche F_0 als Trapez berechnet und der Schwerpunkt desselben in der Mitte des Teilstückes angenommen werden; nur bei den beiden Endteilstücken ist der Schwerpunkt auf $\frac{2}{3}$ der Teilstücklänge von den Stielen aus an-

zunehmen. Damit sind die Abstände f zeichnerisch oder (bei geforderter größerer Genauigkeit) auch analytisch leicht bestimmbar.

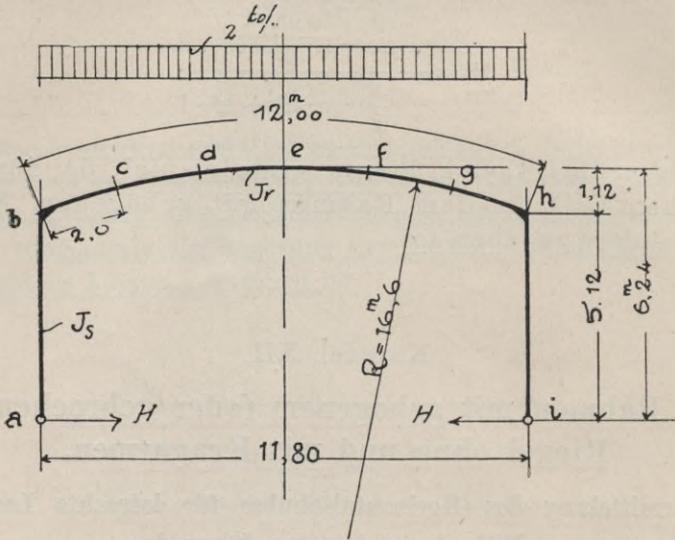


Abb. 153.

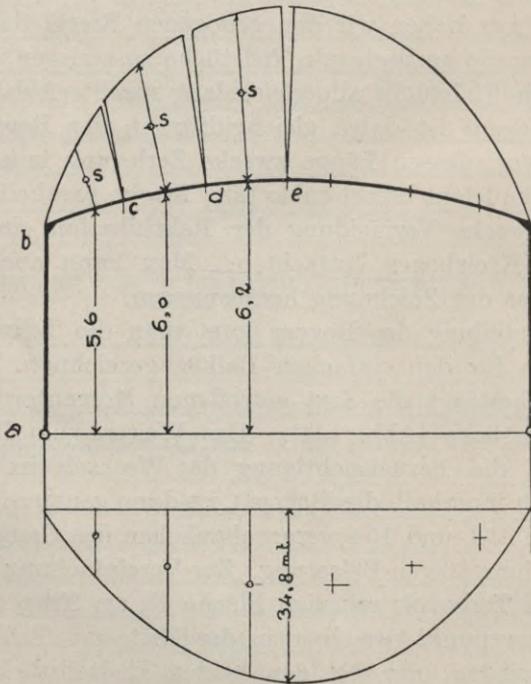


Abb. 154.

Berechnung der Einflußliniengleichung des Horizontalschubes bei lotrechter Last.

Mit Hilfe des soeben beschriebenen Verfahrens kann man selbstverständlich auch Einflußlinien für den Horizontalschub und anschließend daran Einflußlinien für das Biegemoment in irgendeinem Punkte konstruieren; man hat hierbei auch die Möglichkeit, einen Wechsel im Trägheitsmoment zu berücksichtigen.

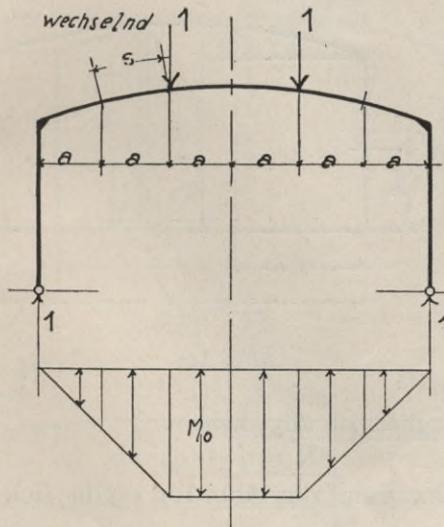


Abb. 155.

Man teile hierzu den Bogen oder besser die Spannweite in eine Anzahl gleicher Stücke ein und belaste nacheinander zwei symmetrische Punkte mit je Last 1 (Abb. 155). Für jede angenommene Laststellung erhält man so ein bestimmtes Zählerglied, wobei man dasselbe nur für die Symmetriehälfte festzustellen braucht, da die Einflußlinie für nur eine wandernde Last 1 zu konstruieren ist; der Nenner bleibt immer gleich.

Die gewonnenen Werte H werden als Ordinaten unter den jeweiligen Laststellungen aufgetragen. Hat man die H -Linie, so können leicht mit Hilfe derselben die Einflußlinien für die Biegemomente an beliebigen Punkten konstruiert werden. Vergleiche hierzu auch das Folgende.

Die Berechnung der Einflußlinie für den Horizontalschub ohne Berücksichtigung des im Bogen verän-

derlichen Trägheitsmomentes erfolgt am besten analytisch unter Zugrundelegung eines parabolischen Bogens, welcher natürlich auch für flache Kreisbogen stets substituiert werden kann. Es sei das Trägheitsmoment des Bogens durchweg $\frac{1}{n}$ -mal so groß als das der Stiele; wählen wir dann $J_m = J_b$, dann ist für den Bogen $v = 1$, sodaß v aus dem Zählerglied verschwindet, für die Stiele $v = \frac{J_b}{J_s} = \frac{1}{n}$.

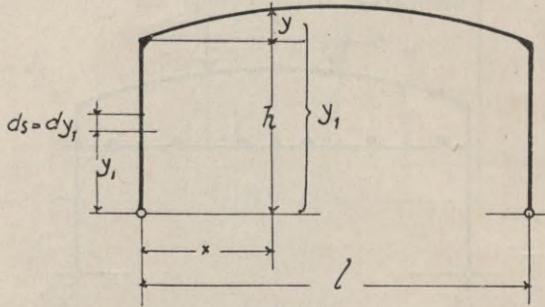


Abb. 156.

Das Nennerglied ist allgemein

$$N = \int y^2 \cdot ds \cdot v.$$

Mit den Bezeichnungen von Abb. 156 ergibt sich

$$N = \int_0^h \frac{y_1^2 \cdot dy_1 \cdot v}{\text{Stiele}} + \int_0^1 \frac{y_1^2 \cdot dx}{\text{Riegel}}$$

wobei wir zur Vereinfachung bei dem Riegel $ds = dx$ gesetzt haben.

Das erste Integral liefert ohne weiteres für 2 Stiele $2 \cdot v \cdot \frac{h^3}{3}$.

Fügt man zu dem zweiten Integral den konstanten Faktor $\frac{1}{2}$ hinzu (sodaß das Resultat später wieder mit 2 zu multiplizieren ist), schreibt also dafür

$$\int_0^1 \frac{y_1 \cdot dx}{df} \cdot \frac{y_1}{2},$$

so erscheint dieser Ausdruck in der angegebenen Anordnung sofort als das statische Moment der von der Rahmenachse umschlossenen

Fläche bezogen auf die Gelenkachse, und es ergibt sich nach Abb. 157

$$\int_0^l y_1 \cdot dx \cdot \frac{y_1}{2} = \underbrace{\frac{2}{3} \cdot l \cdot f \cdot \left(h + \frac{2}{5} f \right)}_{\text{Parabelabschnitt}} + \underbrace{\frac{l \cdot h^2}{2}}_{\text{Rechteck}}$$

Somit beträgt der Nenner

$$N = 2 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot l \cdot f \cdot h + \frac{4}{15} \cdot l \cdot f^2 + \frac{l \cdot h^2}{2} + \frac{v \cdot h^3}{3} \right]$$

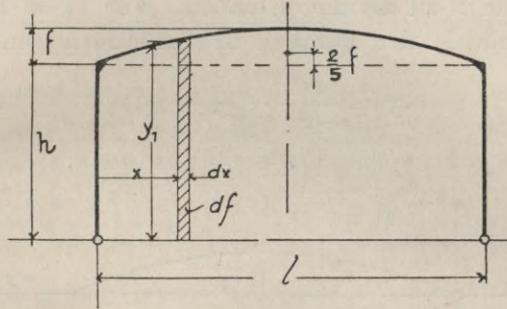


Abb. 157.

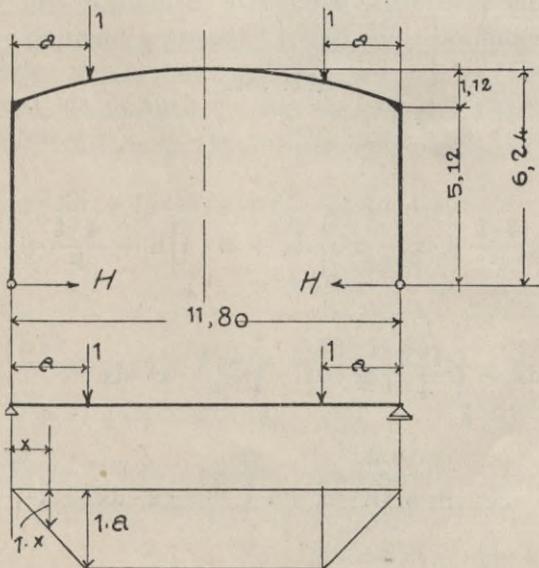


Abb. 158.

Entsprechend kann der Nenner für jede andere Form des Riegels bzw. des ganzen Rahmens leicht gebildet werden.

Zur Bildung des Zählergliedes für eine beliebig gestellte Last 1 auf dem Riegel arbeiten wir zunächst wieder mit 2 symmetrischen Lasten 1 (Abb. 158) und erhalten für 2 Symmetriehälften:

$$\underline{Z} = \int M_0 \cdot y_1 \cdot dx = 2 \cdot \left[\int_0^a 1 \cdot x \cdot y_1 dx + \int_a^{\frac{l}{2}} 1 \cdot a \cdot y_1 \cdot dx \right].$$

Die Multiplikation mit 2 hebt sich sofort weg, da wir ja das Resultat durch 2 zu dividieren haben. Für $y_1 = h + y$ haben wir die Gleichung der Parabel zu berücksichtigen (Abb. 159):

$$\underline{y} = \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot (l \cdot x - x^2).$$

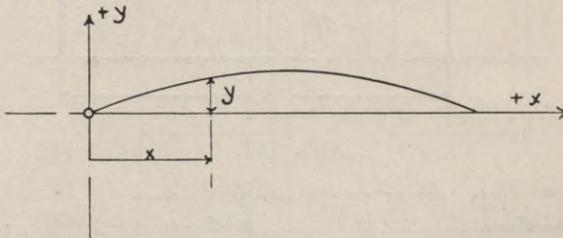


Abb. 159.

Damit wird

$$\underline{Z} = \int_0^a x \left[h + \frac{4 \cdot f}{l^2} (l \cdot x - x^2) \right] dx + a \cdot \int_a^{0,5l} \left[h + \frac{4 \cdot f}{l^2} (l \cdot x - x^2) \right] dx$$

$$\underline{Z} = \int_0^a x \cdot h \cdot dx + \int_0^a \frac{4 \cdot f}{l} \cdot x^2 \cdot dx - \int_0^a \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot x^3 \cdot dx$$

$$+ a \int_a^{0,5l} h \cdot dx + a \cdot \int_a^{0,5l} \frac{4 \cdot f}{l} \cdot x \cdot dx - a \cdot \int_a^{0,5l} \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot x^2 \cdot dx$$

$$\underline{Z} = h \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{4 \cdot f}{l} \cdot \frac{a^3}{3} - \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot \frac{a^4}{4} + a \cdot h \left(\frac{l}{2} - a \right)$$

$$+ \frac{a \cdot 4 \cdot f}{l} \cdot \left(\frac{l^2}{8} - \frac{a^2}{2} \right) - \frac{a \cdot 4 \cdot f}{l^2} \cdot \left(\frac{l^3}{24} - \frac{a^3}{3} \right)$$

$$= \frac{h \cdot a^2}{2} + \frac{4}{3} \frac{f \cdot a^3}{1} - \frac{f \cdot a^4}{l^2} + \frac{a \cdot h \cdot l}{2} - a^2 \cdot h + \frac{a \cdot f \cdot l}{2}$$

$$- \frac{2 \cdot f \cdot a^3}{1} - \frac{f \cdot l \cdot a}{6} + \frac{4}{3} \frac{f \cdot a^4}{l^2}$$

$$\underline{Z} = - \frac{h \cdot a^2}{2} - \frac{2}{3} \cdot f \cdot \frac{a^3}{1} + \frac{f \cdot a^4}{3 \cdot l^2} + \frac{a \cdot f \cdot l}{3} + \frac{a \cdot h \cdot l}{2}$$

Nach Potenzen des veränderlichen a geordnet

$$\underline{Z} = a \cdot \left(\frac{f \cdot l}{3} + \frac{h \cdot l}{2} \right) - a^2 \cdot \left(\frac{h}{2} \right) - a^3 \cdot \left(\frac{2 \cdot f}{3 \cdot l} \right) + a^4 \cdot \left(\frac{f}{3 \cdot l^2} \right)$$

Da es darauf ankommt, eine Gleichung zu erhalten, mit welcher man in kurzer Zeit möglichst viele Ordinaten der Einflußlinie berechnen kann, so führen wir noch ein für $a = z \cdot l$

$$\underline{Z} = z \cdot \left(\frac{f \cdot l^2}{3} + \frac{h \cdot l^2}{2} \right) - z^2 \cdot \left(\frac{h \cdot l^2}{2} \right) - z^3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot f \cdot l^2 \right) + z^4 \cdot \left(\frac{f \cdot l^2}{3} \right)$$

$$\underline{Z} = \frac{f \cdot l^2}{3} \cdot (z + z^4 - 2 \cdot z^3) + \frac{h \cdot l^2}{2} (z - z^2).$$

Die vor den Klammern stehenden Ausdrücke sind für einen bestimmten Rahmen konstant, sodaß die Einflußordinaten für mehrere Werte von z sehr schnell mit dieser Gleichung berechenbar sind, da ja auch der Nenner (wie stets) konstant bleibt.

So erhalten wir z. B. für den Rahmen Abb. 158

$$\underline{N} = 2 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot 11,80 \cdot 1,12 \cdot 5,12 + \frac{4}{15} \cdot 11,80 \cdot 1,12^2 \right. \\ \left. + 11,8 \cdot \frac{5,12^2}{2} + \frac{5,12^3}{1,5 \cdot 3} \right] = \underline{\text{rd. 466}}$$

$$\underline{Z} = \frac{1,12 \cdot 11,8^2}{3} (z + z^4 - 2 z^3) + \frac{5,12 \cdot 11,80^2}{2} (z - z^2)$$

$$= 52 \cdot (z + z^4 - 2 z^3) + 356 \cdot (z - z^2).$$

Für mehrere Werte z erhält man also

z	Z	N	Ordinate $H = \frac{Z}{N}$
0,1	37,10	466	0,0795
0,2	66,65	466	0,1430
0,3	88,10	466	0,189
0,4	104,30	466	0,224
0,5	105,23	466	0,226

Damit ergibt sich die in Abb. 160 dargestellte Einflußfläche. Der Flächeninhalt derselben berechnet sich nach der Simpson'schen Regel zu

$$F_h = 2 \cdot \frac{1,18}{3} \cdot \left(1 \cdot 0 + 4 \cdot 0,0795 + 2 \cdot 0,143 + 4 \cdot 0,189 + 2 \cdot 0,224 + 4 \cdot \frac{0,226}{2} \right) = 1,78$$

Bei Vollbelastung mit 2 t pro laufenden Meter beträgt mithin der Horizontalschub

$$H_p = 1,78 \text{ m} \cdot 2 \text{ t/m} = 3,56 \text{ t.}$$

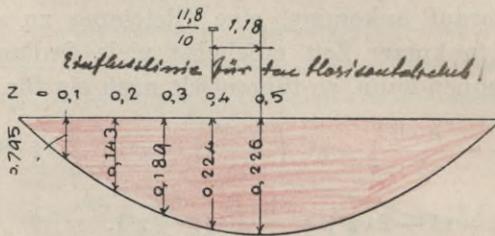


Abb. 160.

Die Einflußlinie kann natürlich für ganz beliebige Lasten P ebenfalls gebraucht werden; also für z. B. $P = 5 \text{ t}$ in 0,31 ist $H = 0,189 \cdot 5 = 0,945 \text{ t}$.

Konstruktion der Einflußlinien für Biegemomente.

Für die angegebenen Abmessungen seien nun noch die Einflußlinien für die Biegemomente in den Punkten 0,1, 0,3 und 0,51 gezeichnet (Abb. 161). (Die Konstruktion vgl. Kapitel XI.)

Die Zeichnung solcher Einflußlinien dürfte sich bei Dachbindern besonders dann empfehlen, wenn die Belastung durch einzelne Pfetten erfolgt und unter Trennung von Eigengewicht und Nutzlast die größten Momente gesucht werden. Besonderen Wert haben die Einflußlinien, wenn der Rahmen Kragarme besitzt (s. später).

Entwicklung einer Formel aus der allgemeinen Einflußgleichung.

Für den Fall einer totalen gleichmäßigen Belastung wird eine einfache Formel zur Bestimmung von H erwünscht sein. Man kann diese in einfacher Weise aus dem oben

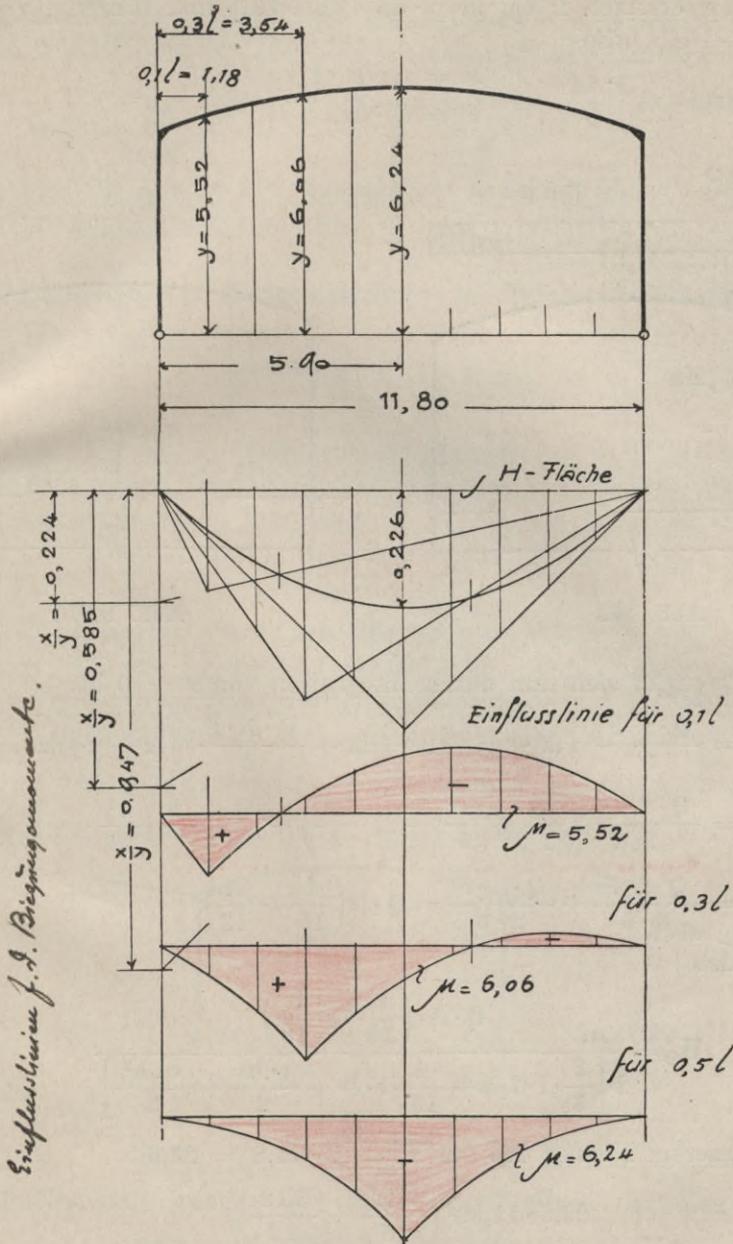


Abb. 161.

angegebenen Zähler gewinnen (der Nenner ist konstant), da dieser die Wirkung einer Last $P = 1$ darstellt.

Wir ersetzen P durch $p \cdot da$ (Abb. 162) und führen für $da = dz \cdot l$ ein, also

$$P = p \cdot dz \cdot l$$

oder

$$P = Q \cdot dz.$$

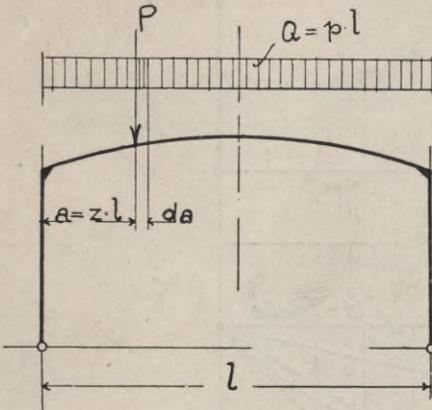


Abb. 162.

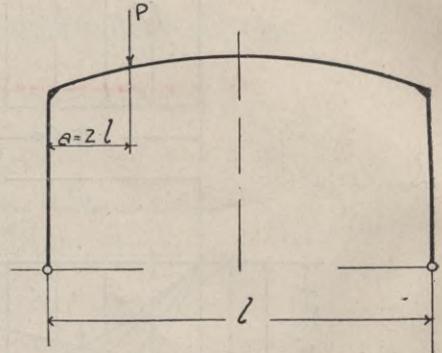


Abb. 163.

Es ergibt sich nun durch Integration von $z = 0$ bis 1

$$\begin{aligned} Z &= \frac{Q \cdot f \cdot l^2}{3} \cdot \int_0^1 (z + z^4 - 2z^3) dz + \frac{Q \cdot h \cdot l^2}{2} \cdot \int_0^1 (z - z^2) dz \\ Z &= \frac{Q \cdot f \cdot l^2}{3} \cdot \left(\frac{1^2}{2} + \frac{1^5}{5} - 2 \cdot \frac{1^4}{4} \right) + \frac{Q \cdot h \cdot l^2}{2} \cdot \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) \\ &= \frac{Q \cdot f \cdot l^2}{3 \cdot 5} + \frac{Q \cdot h \cdot l^2}{2 \cdot 6} = Q \cdot l^2 \left(\frac{f}{15} + \frac{h}{12} \right). \end{aligned}$$

Also

$$H_Q = \frac{Q \cdot l^2 \cdot \left(\frac{f}{15} + \frac{h}{12} \right)}{2 \left[\frac{2}{3} \cdot l \cdot f \cdot h + \frac{4}{15} \cdot l \cdot f^2 + \frac{1 \cdot h^2}{2} + \frac{v \cdot h^3}{3} \right]}$$

Mit unserem Nenner 466 und $Q = 2 \cdot 11,8 = 23,6 \text{ t}$

$$H_Q = \frac{23,6 \cdot 11,80^2 \left(\frac{1,12}{15} + \frac{5,12}{12} \right)}{466} = \underline{3,56 \text{ t.}}$$

Das Resultat deckt sich mit dem oben gewonnenen.

Den Einfluß einer Einzellast P an irgendeiner Stelle des Bogens (Abb. 163) erhält man natürlich

jederzeit, bei Bedarf auch ohne vorherige Konstruktion der Einflußlinie, aus

$$H_P = P \cdot \frac{Z}{N} = \frac{P \cdot \left[\frac{f \cdot l^2}{3} (z + z^4 - 2z^3) + \frac{h \cdot l^2}{2} (z - z^2) \right]}{N}$$

H_Q für Vollast oder für Eigengewicht kann mit H_P je nach Bedarf zusammengesetzt werden.

Ermittlung des Horizontalschubes bei Temperaturänderung.

Wir erhalten einfach

$$H_t = \frac{\varepsilon \cdot E \cdot J_b \cdot (\pm t) \Sigma s'}{N}$$

Mit $\Sigma s' = 1 = 11,80$ und beispielsweise $J_b = 0,008 \text{ m}^4$, das mit dem vollen Rechteckquerschnitt und mit Berücksichtigung der Eiseneinlagen zu berechnen ist, ferner mit $\pm t = 25^\circ \text{ C}$ wird

$$H_t = \frac{0,000\,013\,7 \cdot 1\,430\,000 \cdot 0,008 (\pm 25) \cdot 11,8}{466} = \pm 0,1 \text{ t.}$$

E ist hierbei ebenso wie alle anderen Werte in t/m^2 einzuführen: $143\,000 \text{ kg/cm}^2 = 1\,430\,000 \text{ t/m}^2$. Der Einfluß von H_t wäre also hier sehr gering; er ist besonders abhängig von der Größe des Trägheitsmomentes und nimmt bei kleiner werdendem Verhältnis von $\frac{h}{l}$ bedeutend zu, wird also in diesem Sinne für einen reinen Zweigelenbogen (ohne Stiele) zu einem Größtwert.

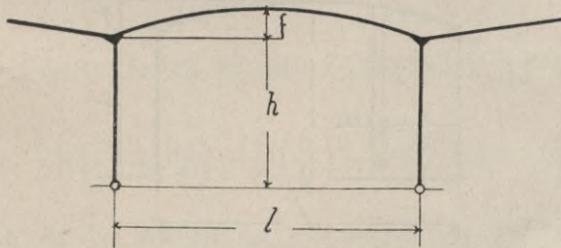


Abb. 164.

Einflußliniengleichungen für den bogenförmigen Rahmen mit Kragarmen (Abb. 164).

Allgemein gilt zunächst das im Kapitel XI über den rechteckigen Rahmen mit Kragarmen Gesagte.

Stellen wir das statisch bestimmte Hauptsystem her, und belasten wir zwecks Errechnung von Einflußlinien den so

entstehenden Kragbalken wieder mit 2 symmetrischen Lasten 1 (Abb. 165), so erhält der dem Rahmen angehörige Teil dieses einfachen Kragbalkens, nämlich der gebogene Riegel, das gleichmäßige Moment $M_0 = -1 \cdot a = -a$.

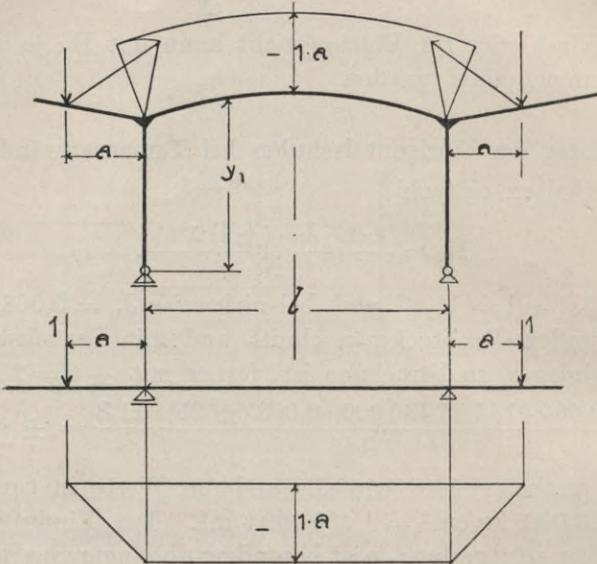


Abb. 165.

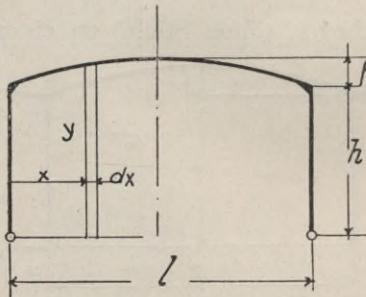


Abb. 166.

Also $Z = \int M_0 \cdot y_1 \cdot ds \cdot v$; mit $ds = dx$ und $v = 1$ (vgl. obige Annahme, daß $J_m = J_r$) wird bei Division durch 2

$$\underline{Z} = -\frac{a}{2} \cdot \int_a^l y_1 \cdot dx.$$

Das Integral bedeutet den Inhalt der vom Rahmen umschlossenen Fläche, also ist nach Abb. 166

$$\underline{Z} = -\frac{a}{2} \cdot \left(h \cdot l + \frac{2}{3} \cdot l \cdot f \right)$$

und

$$\underline{H} = \frac{Z}{N} = \frac{-a \cdot \left(h \cdot l + \frac{2}{3} \cdot l \cdot f \right) \cdot \frac{1}{2}}{2 \left[\frac{2}{3} \cdot l \cdot f \cdot h + \frac{4}{15} \cdot l \cdot f^2 + \frac{l \cdot h^2}{2} + \frac{v \cdot h^3}{3} \right]}$$

Diese Gleichung gestattet in sehr einfacher Weise die Konstruktion der Einflußlinie für die Kragarme. Sie stellt wieder, wie beim einfachen rechteckigen Rahmen, bezüglich des veränderlichen a eine gerade Linie dar, die als tangentielle Verlängerung der mittleren Einflußlinie über die Auflager hinaus anzusehen ist.

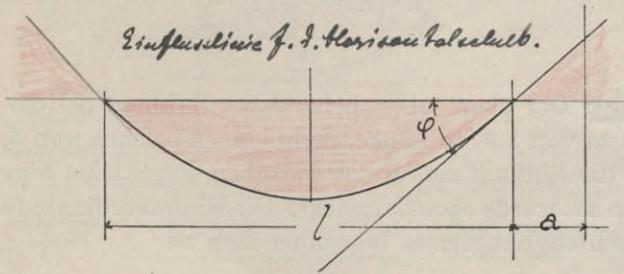


Abb. 167.

☞ Zum Beweise leiten wir den Zähler für H (Mittelteil) in der Form

$$\underline{Z} = a \left(\frac{f l}{3} + \frac{h l}{2} \right) - a^2 \left(\frac{h}{2} \right) - a^3 \left(\frac{2 f}{3 l} \right) + a^4 \left(\frac{f}{3 l^2} \right)$$

nach a ab (da wir uns um den für beide H gleichen Nenner nicht zu kümmern brauchen) und erhalten allgemein

$$\underline{\frac{dZ}{da}} = \frac{f \cdot l}{3} + \frac{h \cdot l}{2} - a \cdot h - a^2 \cdot \frac{2 \cdot f}{l} + \frac{4 \cdot a^3 \cdot f}{3 \cdot l^2},$$

im Speziellen für $a = 0$ (im Auflagerpunkt)

$$\underline{\frac{dZ}{da}} = \frac{f \cdot l}{3} + \frac{h \cdot l}{2} = \underline{\underline{\text{tg } \varphi}} \text{ (Abb. 167).}$$

$\operatorname{tg} \varphi$ ist aber weiter nichts als der zu a gehörige Koeffizient des Zählers für das H der Kragarme; nämlich

$$-a \left(h \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot f \right) \cdot \frac{1}{2} = -a \cdot \left(\frac{h \cdot 1}{2} + \frac{f \cdot 1}{3} \right) = -a \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Wir können also ganz allgemeinschreiben: Die Einflußordinaten für die Kragarme berechnen sich nach der Gleichung

$$\underline{H = - \frac{a \cdot \operatorname{tg} \varphi_{\text{für } a = 0}}{N}}$$

Da die Einflußlinien, wie wir gesehen haben, gerade Linien sind, so brauchen wir nur noch einen Punkt derselben im beliebigen Abstände a zu berechnen und wählen dazu praktischerweise auf jeder Seite je den größten Abstand a (ohne von der Gleichung mit $\operatorname{tg} \varphi$ Gebrauch zu machen) mit Benutzung der ersten Gleichung

$$H = - \frac{a \cdot \left(h1 + \frac{2}{3} 1f \right) \cdot \frac{1}{2}}{N_1}$$

Beispiel: Der oben schon behandelte Rahmen besitze links einen Kragarm von 3,50 m Länge, rechts einen solchen von 5,50 m Länge. Wie die Einflußlinie für den zwischen den Stielen liegenden Teil zu finden ist, wurde oben dargelegt. Die Einflußordinate für das Ende des rechten Kragarmes berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \underline{H} &= - \frac{5,5 \cdot \left(5,12 \cdot 11,80 + \frac{2}{3} 11,8 \cdot 1,12 \right) \cdot \frac{1}{2}}{466} \\ &= - \frac{5,5 \cdot \frac{69,3}{2}}{466} = - \underline{0,408}, \end{aligned}$$

also für das Ende des linken Kragarmes

$$\underline{H} = - 0,408 \cdot \frac{3,5}{5,5} = - \underline{0,26}.$$

Damit ist in Abb. 168 die vollständige Einflußlinie aufgetragen. Mit Hilfe derselben können die Einflußlinien für die Biegemomente in beliebigen Punkten K des bogenförmigen Rahmenteiltes konstruiert werden, was in Abb. 168 für die Punkte 0,1, 0,3 und 0,5 l durchgeführt ist.

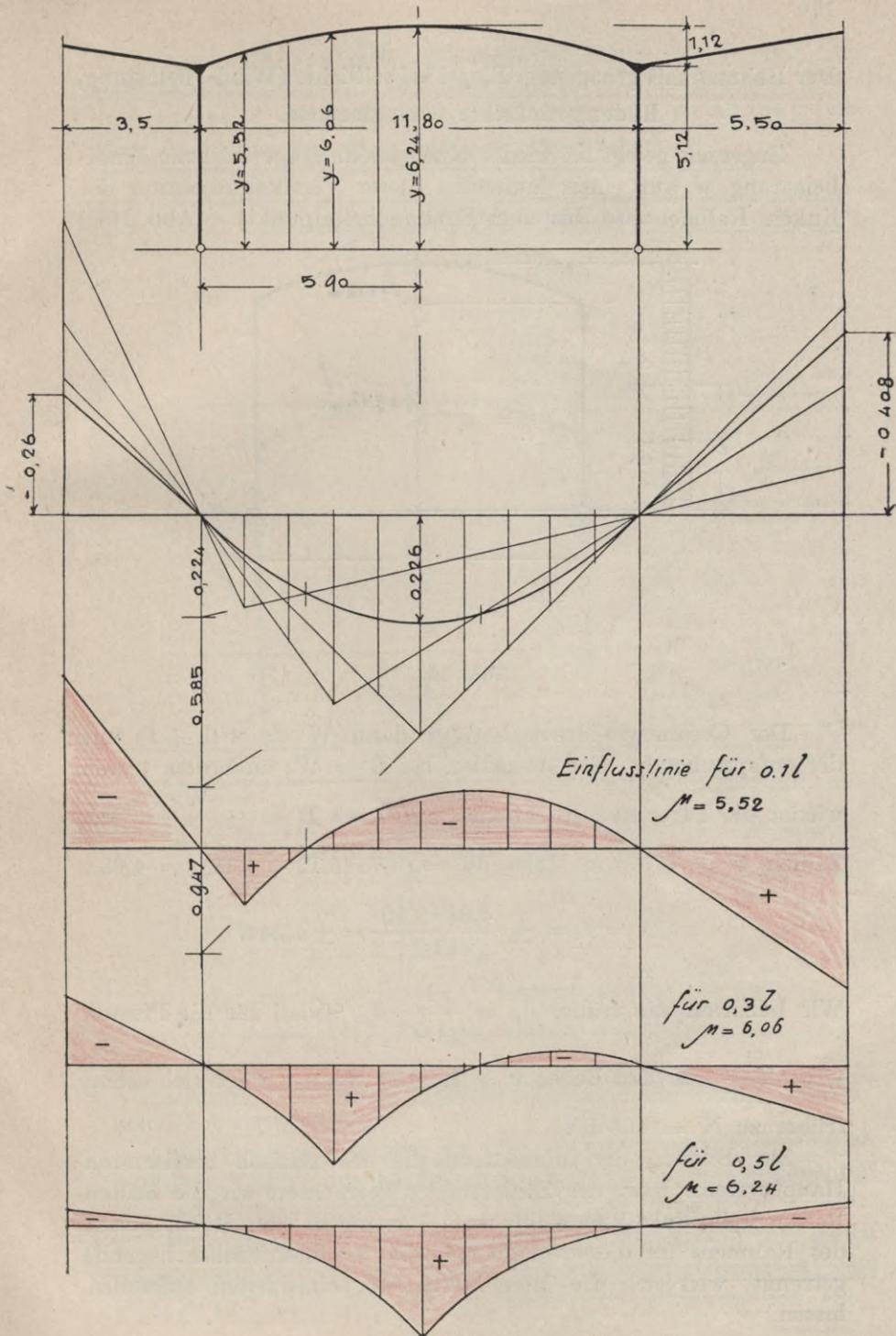


Abb. 168.

Der Rahmen mit gebogenem Riegel bei seitlicher (Wind-)Belastung,
Bildung einfacher Schlußformeln.

Zugrunde gelegt sei wieder eine gleichmäßige seitliche Windbelastung w auf einen laufenden Meter Vertikalprojektion der linken Rahmenseite bis zum First (Scheitelpunkt). (Abb. 169.)

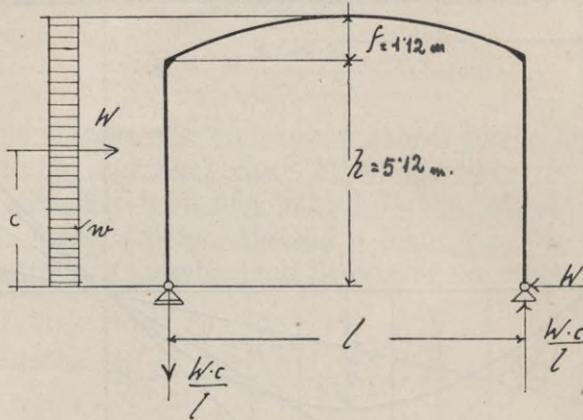


Abb. 169.

Der Gesamtwinddruck beträgt dann $W = w(h + f)$ mit der entsprechenden Gegenreaktion bei $B = W$; außerdem treten wieder die lotrechten Reaktionen auf $A = B = \pm \frac{W \cdot c}{l}$. Mit Zahlen $w = 0,75$ t/m Höhe, $W = 0,75(5,12 + 1,12) = 4,68$ t

$$A = B = \pm \frac{4,68 \cdot 3,12}{11,8} = \pm 1,24 \text{ t.}$$

Wir behalten wie früher $J_b = \frac{1}{1,5} \cdot J_s$, sodaß für die Pfosten

$v = \frac{1}{1,5}$, für den Bogen $v = 1$. Der Nenner ergab sich schon früher zu $N = 466 \text{ m}^3$.

Zur Bildung der Momentenfläche des statisch bestimmten Hauptsystems bzw. des Zählergliedes betrachten wir die beiden Rahmentteile links und rechts vom Firstpunkt oder Höchstpunkt des Rahmens (in diesem Falle auf der Symmetrieachse liegend) getrennt, weil sich die Momente so am einfachsten aufstellen lassen.

Die Momente würden sich ungefähr nach der in Abb. 170 gezeigten Schaulinie auf die Rahmenachse übertragen; die Eckmomente bei d und b sind also nicht gleich groß, sodaß die ganze Momentenfläche auf dem Bogen unsymmetrisch ist.

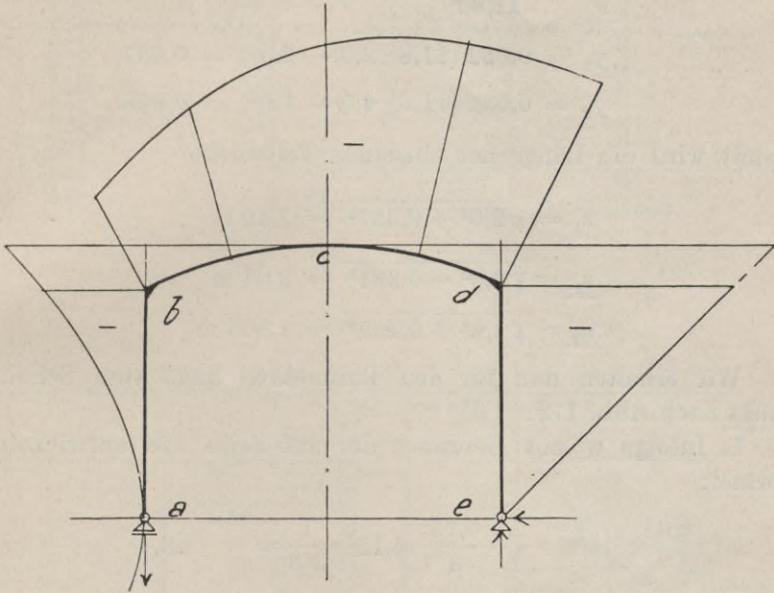


Abb. 170.

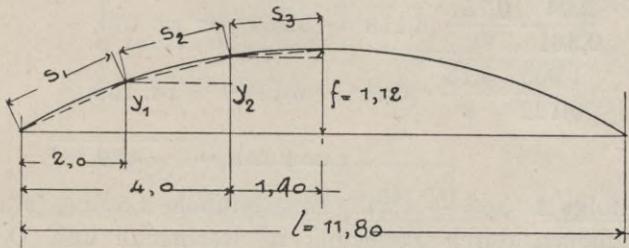


Abb. 171.

Die beiden Stiele bereiten bei der Bildung des Zählergliedes keine Schwierigkeiten.

Für den Bogen müssen wir aber erst ein Polygon substituieren und dann Teil b c mit den linken Kräften, Teil c d mit den rechten Kräften untersuchen.

Wir teilen die halbe Spannweite in eine Anzahl (ev. gleich langer) Stücke und berechnen die zugehörigen Ordinaten. Es ergeben sich nach Abb. 171 allgemein

$$y = \frac{4f}{l^2} (l \cdot x - x^2)$$

mit

$$\frac{4f}{l^2} = \frac{4 \cdot 1,12}{11,80^2} \stackrel{\text{rd.}}{=} 0,032$$

$$y_1 = 0,032 (11,8 \cdot 2,0 - 2,0^2) = 0,637$$

$$y_2 = 0,032 (11,8 \cdot 4,0 - 4,0^2) = 0,998$$

Damit wird die Länge der einzelnen Teilstücke

$$s_1 = \sqrt{2,0^2 + 0,637^2} \stackrel{\text{rd.}}{=} 2,10 \text{ m}$$

$$s_2 = \sqrt{2,0^2 + 0,361^2} \stackrel{\text{rd.}}{=} 2,04 \text{ m}$$

$$s_3 = \sqrt{1,9^2 + 0,122^2} = 1,905 \text{ m}$$

d) Wir erhalten nun für den Rahmenteil links vom Scheitelpunkt nach Abb. 172:

1. Infolge w mit Gebrauch der auf Seite 128 entwickelten Formel:

$$\int_0^{2,1} y \, ds = \frac{1}{1} \cdot \frac{0,75}{8} \cdot 5,12^4 \cdot \frac{1}{1,5} = 43, -$$

$$\frac{2,1}{0,637} \cdot \frac{0,75}{8} \cdot (5,757^4 - 5,12^4) = 128, -$$

$$\frac{2,04}{0,361} \cdot \frac{0,75}{8} \cdot (6,118^4 - 5,757^4) = \text{rd. } 159, -$$

$$\frac{1,905}{0,122} \cdot \frac{0,75}{8} \cdot (6,24^4 - 6,118^4) = \text{rd. } 169, -$$

$$\text{zusammen} = \overline{\quad\quad\quad} = -499 \text{ tm}^3.$$

2. Infolge A $\downarrow = -1,24$. Eine einfache Lösung (außer der sonst möglichen durch Zerlegung in Rechtecke und Dreiecke) ergibt sich nach Abb. 173 wie folgt:

$$\text{Mit } M_0 = A \cdot x \text{ ist } \int M_0 \cdot y \cdot ds \cdot v \text{ für } v = 1 \text{ und } ds = \frac{s_1}{s} \cdot dx$$

$$\int M_0 \cdot y \cdot ds = A \cdot \frac{s_1}{s} \cdot \int x \cdot y_1 \, dx.$$

Das Integral stellt offenbar, für jedes Teilstück gedeutet, das statische Moment der unter demselben liegenden Fläche bezogen auf die Wirkungsgerade von A dar. So erhalten wir für Einfluß A

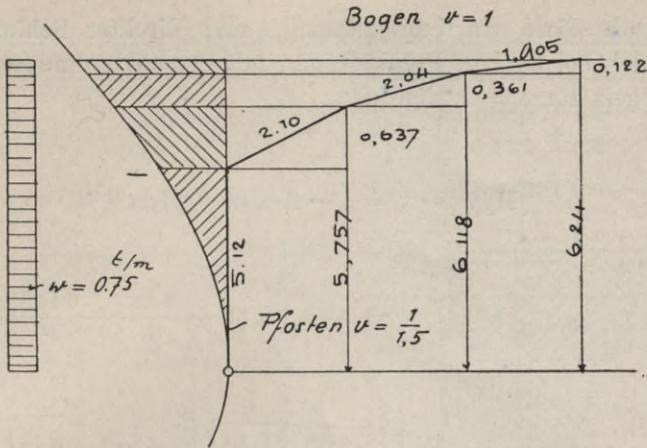


Abb. 172.

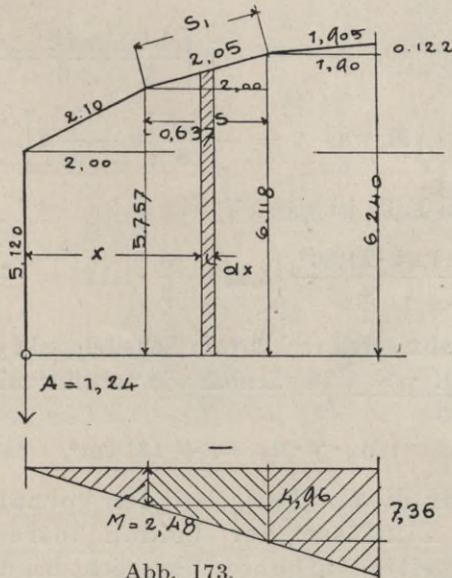


Abb. 173.

$$\begin{aligned}
 \int M_0 \cdot y \cdot ds &= -1,24 \cdot \left[\frac{2,10}{2,0} \cdot \left(5,12 \cdot 2,0 \cdot 1,0 + \frac{2,0 \cdot 0,637}{2} \cdot 1,33 \right) \right. \\
 &+ \frac{2,04}{2,0} \cdot \left(5,757 \cdot 2,0 \cdot 3,0 + \frac{2,0 \cdot 0,361}{2} \cdot 3,33 \right) \\
 &\quad \left. + \frac{1,905}{1,90} \cdot \left(6,118 \cdot 1,90 \cdot 4,95 + \frac{1,90 \cdot 0,122}{2} \cdot 5,27 \right) \right] \\
 &= -1,24 \cdot [11,65 + 35,9 + 58,21] \\
 &= -1,24 \cdot 105,66 = -\underline{\underline{rd. 131 \text{ t m}^3}}.
 \end{aligned}$$

~ Noch eine andere Lösung mit direkter Schlußformel ergibt sich bei flachen Parabelbögen mit $ds = dx$ ohne Zerlegung des Riegels für $v = 1$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{1}{2}} M_0 y ds \cdot v &= \int_0^{\frac{1}{2}} -A \cdot x (h + y) dx \\
 &= -A \int_0^{\frac{1}{2}} x \left(h + \frac{4fx}{l} - \frac{4fx^2}{l^2} \right) dx \\
 &= -A \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{hx^2}{2} + \frac{4fx^3}{3l} - \frac{4fx^4}{4l^2} \right] \\
 &= -A \left[\frac{hl^2}{8} + \frac{fl^2}{6} - \frac{fl^2}{16} \right] \\
 \int M_0 y ds \cdot v &= -\frac{Al^2}{8} \left[h + \frac{5}{6} f \right].
 \end{aligned}$$

In unserem Falle ist danach

$$Z = -\frac{1,24 \cdot 11,80^2}{8} \left(5,12 + \frac{5}{6} \cdot 1,12 \right) = -131 \text{ tm}^3.$$

③ Für den Rahmenteil rechts vom Scheitelpunkt erhalten wir:
 1. Infolge $B \uparrow = 1,24$ offenbar wie vor, nur mit umgekehrtem Vorzeichen, also

$$\int M_0 \cdot y \cdot ds = +131 \text{ tm}^3,$$

sodaß sich für diesen Fall (bei der vorhandenen Symmetrie) die Einflüsse der beiden lotrechten Reaktionen gegenseitig aufheben (aber nicht bei der Zeichnung der Momentenfläche).

2. Infolge $W = 4,68 \text{ t}$ ergibt sich allgemein nach Abb. 174

$$M_0 \cdot y_1 \cdot ds \cdot v \text{ mit } M_0 = W \cdot y_1 \text{ und } ds = dy_1 \cdot \frac{s_1}{s'_1}$$

$$\int M_0 \cdot y_1 \cdot ds \cdot v = W \cdot v \cdot \frac{s_1}{s'_1} \cdot \int y_1^2 \cdot dy_1.$$

Das Integral ist für jedes Stabstück leicht zu deuten.
 Wir erhalten mit Zahlen

$$\int M_0 \cdot y_1 \cdot ds \cdot v = -4,68 \cdot \left[\frac{1}{1,5} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{5,12^3}{3} + 1 \cdot \frac{2,10}{0,637} \cdot \left(\frac{5,757^3}{3} - \frac{5,12^3}{3} \right) + 1 \cdot \frac{2,04}{0,361} \cdot \left(\frac{6,12^3}{3} - \frac{5,757^3}{3} \right) + 1 \cdot \frac{1,905}{0,122} \cdot \left(\frac{6,24^3}{3} - \frac{6,12^3}{3} \right) \right]$$

$$= -4,68 [29,8 + 62,8 + 71,4 + 73] = -4,68 \cdot 237 = -1110 \text{ tm}^3.$$

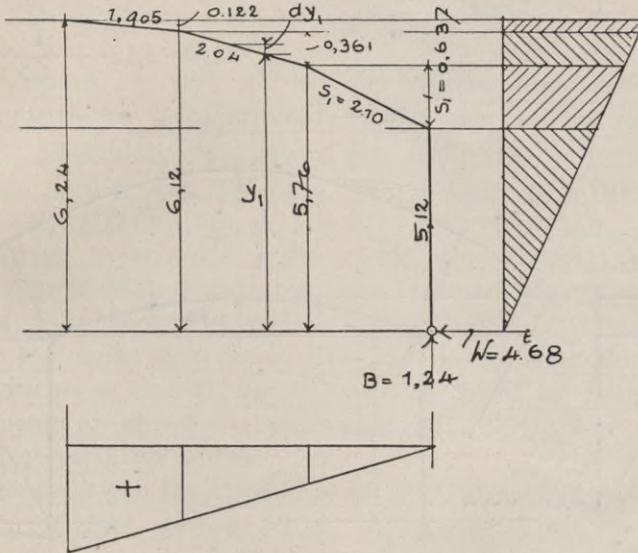


Abb. 174.

~ Auch für diesen Fall kann man zu einer **Schlussformel** gelangen ohne Zerlegung des Riegels, wenn ein flacher parabolischer Bogen vorliegt.

Es wird

$$Z = \int M_0 y_1 ds \quad v \text{ mit } M_0 = W \cdot y_1 = W(h + y) \text{ und } ds = dx$$

für $v = 1$

für den Riegel

$$Z = W \int_0^{\frac{1}{2}} (h + y)^2 dx = W \left[h^2 \int_0^{\frac{1}{2}} dx + 2h \int_0^{\frac{1}{2}} y dx + \int_0^{\frac{1}{2}} y^2 dx \right]$$

$$= W \left[h^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} h f l + \frac{4}{15} f^2 \cdot l \right]$$

für den Stiel

$$Z = W \cdot \frac{v \cdot h^3}{3};$$

also insgesamt

$$\int M_0 y_1 ds \cdot v = -W \left[\frac{h^2 l}{2} + \frac{2}{3} h f l + \frac{4}{15} l f^2 + \frac{v h^3}{3} \right];$$

also hier

$$\begin{aligned} &= -4,68 \left[\frac{5,12^2 \cdot 11,80}{2} + \frac{2}{3} 5,12 \cdot 1,12 \cdot 11,80 + \right. \\ &\quad \left. \frac{4}{15} \cdot 11,80 \cdot 1,12^2 + \frac{1}{1,5} \cdot \frac{5,12^3}{3} \right] \\ &= \text{rd. } -1092 \text{ tm}^3. \end{aligned}$$

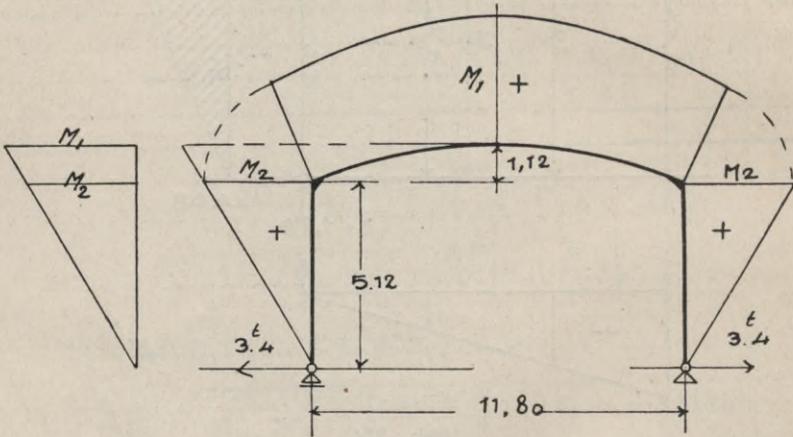


Abb. 175.

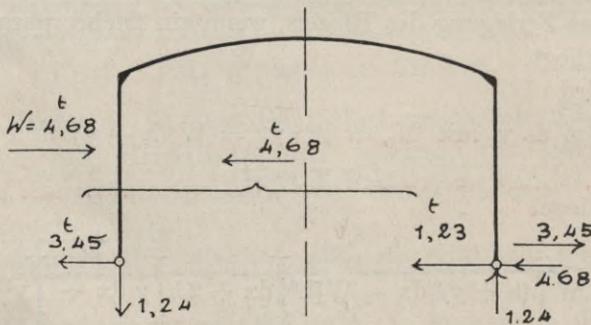


Abb. 176.

NB.: Es sei bemerkt, daß den beiden hier gegebenen Schlußformeln eine gewisse Unkorrektheit insofern anhaftet, als für ds zur Vereinfachung dx gesetzt wurde. Der Fehler ist jedoch un-

bedeutend, wie das Beispiel zeigt; man könnte die Resultate korrigieren durch Multiplikation mit dem Verhältnis von abgewickelter Bogenlänge zur Projektion derselben.

Der Zähler beträgt somit insgesamt

$$Z = -499 - 131 + 131 - 1110 = -1609 \text{ tm}^3 \text{ und}$$

$$H_w = \frac{Z}{N} = -\frac{1609}{466} = -3,45 \text{ t.}$$

Interessant ist, daß wir bei der Bildung des Zählergliedes für symmetrische Rahmen den Einfluß der beiden entgegengesetzten lotrechten Reaktionen gar nicht zu berücksichtigen brauchen, wenn wir die verschiedenen Einflüsse für jede Symmetriehälfte gesondert berechnen. Dadurch entsteht eine wesentliche Abkürzung der Arbeit, von der man in den meisten Fällen Gebrauch machen können wird, da die meisten Rahmen symmetrisch sind.

Mit H_w ergibt sich die in Abb. 175 dargestellte Momentenfläche, welche zu der M_0 -Fläche, die mit Hilfe der Berechnung der Momente an einzelnen Punkten schnell aufgezeichnet werden kann, algebraisch zu addieren ist.

Die endgültigen Reaktionen zeigt Abb. 176, so daß das Lager vor dem Winde den größten Druck erhält.

Hat der Rahmen noch Kragarme, so behandle man ihn genau ebenso wie hier angegeben; die Kragarme ändern ja im Prinzip nichts an der Lösung.

Kapitel XIII.

Der eigentliche Zweigelenkbogen (Abb. 177).

Die Ermittlung des Horizontalschubes mit Hilfe der gedeuteten Integrale.

Hierfür behalten die für den Bogen mit Stielen angegebenen Andeutungen volle Geltung. Die Zerlegung des Bogens in einzelne Stücke bietet dabei Gelegenheit, einen etwaigen Wechsel im Trägheitsmoment bequem zu berücksichtigen. Auch die Berechnung der Einflußlinie für den Horizontalschub mit Berücksichtigung eines nach den Auflagern hin zunehmenden Trägheitsmomentes kann in derselben Weise wie beim Bogen mit Stielen erfolgen.

Man pflegt indessen meist ein konstantes Trägheitsmoment anzunehmen, und da empfiehlt sich für alle Fälle der Belastung (ob ruhend oder beweglich) das nachfolgende sehr einfache Verfahren für die Gewinnung einzelner Einflußordinaten oder der ganzen Einflußlinie selbst.

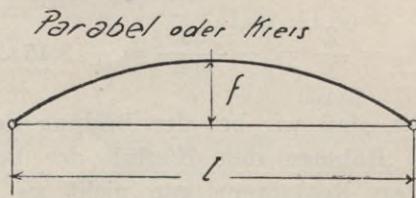


Abb. 177.

Auf die Berücksichtigung der Normalkräfte, welche beim flachen Zweigelenkbogen einige Bedeutung haben, werde an dieser Stelle noch verzichtet (vg. später Bogendächer).

Ableitung der Einflußliniengleichungen.

Wir können die grundlegenden Formeln in einfacher Weise aus denen für den Bogen mit Stielen herleiten, indem wir $h = 0$ setzen (Abb. 178).

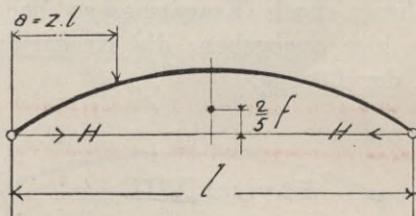


Abb. 178.

So wird der Nenner

$$N = \int_0^l y^2 \cdot ds \cdot v \text{ mit } v = 1 = 2 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot l \cdot f \cdot \frac{2}{5} \cdot f \right]$$

$$N = \frac{8}{15} \cdot l \cdot f^2,$$

der Zähler

$$Z = \frac{f \cdot l^2}{3} (z + z^4 - 2z^3).$$

Also

$$H = \frac{\frac{fl^2}{3} \cdot (z + z^4 - 2z^3)}{\frac{8}{15} \cdot l \cdot f^2}$$

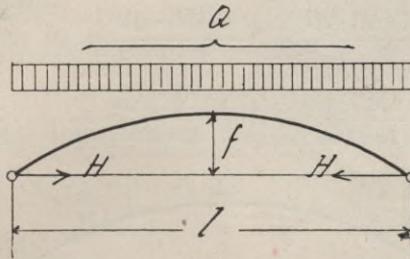


Abb. 179.

Bei voller Belastung mit Q (Abb. 179) wird

$$Z = \frac{Q \cdot f \cdot l^2}{3 \cdot 5}; \text{ also}$$

$$H = \frac{Q \cdot f \cdot l^2}{15} \cdot \frac{15}{8 \cdot l \cdot f^2} = \frac{Q \cdot l}{8 \cdot f}$$

Kapitel XIV.

Der Zweigelenrahmen mit Zuggurt und gebogenem oder gebrochenem Riegel.¹⁾

Zweigelenrahmen mit Vertikalpfosten erhalten öfter noch eine besondere Verankerung des Riegels, namentlich wenn dieser bogenförmig ausgebildet ist. Der Anschluß der dazu erforderlichen Zugstangen an die Pfosten kann in jedem Falle als gelenkig vorausgesetzt werden, gleich ob die Anker freiliegen oder einbetoniert sind. Ein solches System mit beliebig geformtem Riegel (Abb. 180) erhält durch die Zugstange noch eine innerliche statische Unbestimmtheit hinzu, so daß es zweifach statisch unbestimmt ist.

Werden die Auflager als unverschieblich angenommen, während die Punkte C und D entsprechend der elastischen Verlängerung

¹⁾ Nach Handbuch für Eisenbetonbau 1. Aufl. Band IV, Teil 1 S. 503.

der Zugstange vom Querschnitt F_0 und Elastizitätsmodul E_0 (für Eisen) um das Maß

$$\Delta l = \frac{X_2 \cdot l}{E_0 \cdot F_0}$$

ausweichen, so gelten folgende beiden Arbeitsgleichungen

$$L' = \int \frac{M \cdot M' \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{N \cdot N' \cdot ds}{E \cdot F} = 0$$

$$L'' = \int \frac{M \cdot M'' \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{N \cdot N'' \cdot ds}{E \cdot F} = - \frac{X_2 \cdot l}{E_0 \cdot F_0}$$

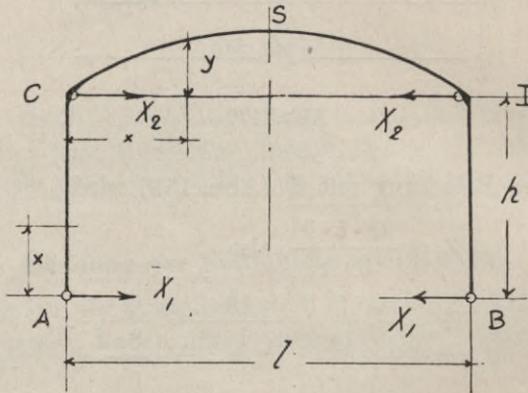


Abb. 180.

Es sind also in diesem Beispiel einmal die Normalkräfte berücksichtigt, während Temperatureinflüsse ausgeschlossen sein sollen. Bei lotrechter Belastung beträgt das wahre Biegemoment

in den Säulen $M = -X_1 \cdot x$

$$M' = -x$$

$$M'' = 0, \text{ d. h. } X_2 \text{ beeinflusst die Stiele nicht,}$$

in dem Riegel $M = M_0 - X_1(h + y) - X_2 \cdot y$

$$M' = -(h + y)$$

$$M'' = -y;$$

ⓑ) die wahre Längskraft

in den Säulen $N = -A$

$$N' = 0$$

$$N'' = 0,$$

in dem Riegel $N = -(X_1 + X_2)$ (angenähert)

$$\underline{N' = -1}$$

$$\underline{N'' = -1.}$$

Aufstellung der Integrale.

Wir betrachten am besten Säulen und Riegel getrennt und stellen je die Einflüsse von L' und L'' auf dieselben fest.

I. Die Säulen.

Mit den oben angegebenen Werten ergibt sich

$$\underline{L' = \int_0^h \frac{(-X_1 \cdot x) \cdot (-x) \cdot dx}{E \cdot J_s} + \int \frac{(-A) \cdot 0 \cdot dx}{E \cdot F} = 0.}$$

Das erste Integral wäre zu nehmen für die beiden Pfosten A C und B D in den Grenzen von 0 bis h und ergibt, da beide gleich,

$$\underline{L' = + 2 \cdot \frac{X_1 \cdot h^3}{3 E \cdot J_s} = 0.}$$

Das zweite Integral ergibt Null. Ebenso ergibt für die Pfosten

$$\underline{L'' = 0,}$$

da X_2 die Stiele im fertigen System nicht mehr beeinflussen kann (s. o.).

II. Der Riegel.

Mit den oben ermittelten einzelnen Werten wird

$$\underline{L' = \int \frac{[M_0 - X_1 \cdot (h + y) - X_2 \cdot y] \cdot [-(h + y)] \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{-(X_1 + X_2) \cdot (-1) \cdot ds}{E \cdot F} = 0}$$

$$\underline{L'' = \int \frac{[M_0 - X_1 \cdot (h + y) - X_2 \cdot y] \cdot (-y) \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{-(X_1 + X_2) \cdot (-1) \cdot ds}{E \cdot F} = - \frac{X_2 \cdot l}{E_0 \cdot F_0} .}$$

Diese beiden Gleichungen mögen zunächst weiter aufgelöst werden.

Wir erhalten

$$\underline{L' = - \int \frac{M_0 \cdot (h + y) \cdot ds}{E \cdot J} + X_1 \cdot \int \frac{(h + y)^2 \cdot ds}{E \cdot J} + X_2 \cdot \int \frac{(h + y) \cdot y \cdot ds}{E \cdot J} + X_1 \cdot \int \frac{ds}{E \cdot F} + X_2 \cdot \int \frac{ds}{E \cdot F} = 0.}$$

$$L'' = - \int \frac{M_0 \cdot y \cdot ds}{E \cdot J} + X_1 \cdot \int \frac{(h + y) \cdot y \cdot ds}{E \cdot J} + X_2 \cdot \int \frac{y^2 \cdot ds}{E \cdot J} \\ + X_1 \cdot \int \frac{ds}{E \cdot F} + X_2 \cdot \int \frac{ds}{E \cdot F} = - \frac{X_2 \cdot l}{E_0 \cdot F_0}$$

Deutung der Integrale.

Die noch zu deutenden Integrale beziehen sich also sämtlich auf den Bogen bzw. den Riegel. Wir nehmen zur Vereinfachung an, daß außer E auch F und J konstant sind, können also diese Ausdrücke vor die Integralzeichen rücken und erhalten mit der weiteren Vereinfachung $ds = dx$

$$\int_0^1 \frac{(h + y)^2 \cdot dx}{E \cdot J} = \frac{h^2 \cdot l}{E \cdot J} + \frac{2 \cdot h}{E \cdot J} \cdot \int_0^1 y \cdot dx + \frac{1}{E \cdot J} \cdot \int_0^1 y^2 \cdot dx.$$

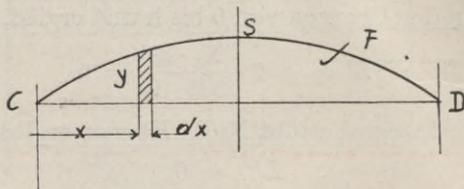


Abb. 180 a.

$\int_0^1 y \cdot dx$ bedeutet den Inhalt der Fläche C S D = \mathfrak{F} (Abb. 180a).

$\int_0^1 y^2 \cdot dx$ bedeutet 2 mal das statische Moment der Fläche C S D in bezug auf C D = $2 \cdot \mathfrak{S}$; also

$$\int_0^1 \frac{(h + y)^2 \cdot dx}{E \cdot J} = \frac{1}{E \cdot J} \cdot (h^2 \cdot l + 2 \cdot h \cdot \mathfrak{F} + 2 \cdot \mathfrak{S}).$$

Ebenso einfach ergibt sich

$$\int_0^1 \frac{(h + y) \cdot y \cdot dx}{E \cdot J} = \frac{1}{E \cdot J} \cdot (h \cdot \mathfrak{F} + 2 \cdot \mathfrak{S})$$

$$\int_0^1 \frac{ds}{E \cdot F} = \frac{l}{E \cdot F}$$

$$\int_0^1 \frac{M_0 \cdot (h + y) \cdot dx}{E \cdot J} = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left[h \cdot \int_0^1 M_0 \cdot dx + \int_0^1 M_0 \cdot y \cdot dx \right]$$

Zusammenstellung der beiden Bestimmungsgleichungen
für X_1 und X_2 .

$$\begin{aligned}
 L' &= \frac{2 \cdot X_1 \cdot h^3}{3 E \cdot J_s} - \frac{1}{E \cdot J} \left[h \cdot \int_0^1 M_0 \cdot dx + \int_0^1 M_0 \cdot y \cdot dx \right] + \frac{X_1}{E \cdot J} \\
 &\quad \cdot (h^2 \cdot 1 + 2 \cdot h \cdot \bar{\gamma} + 2 \cdot \bar{\epsilon}) \\
 &\quad + \frac{X_2}{E J} (h \cdot \bar{\gamma} + 2 \cdot \bar{\epsilon}) + \frac{X_1 \cdot 1}{E \cdot F} + \frac{X_2 \cdot 1}{E \cdot F} = 0 \\
 L'' &= - \frac{1}{E \cdot J} \int_0^1 M_0 \cdot y \cdot dx + \frac{X_1}{E \cdot J} \cdot (h \cdot \bar{\gamma} + 2 \cdot \bar{\epsilon}) + \frac{X_2}{E \cdot J} \cdot 2 \cdot \bar{\epsilon} \\
 &\quad + \frac{X_1 \cdot 1}{E \cdot F} + \frac{X_2 \cdot 1}{E \cdot F} = - \frac{X_2 \cdot 1}{E_0 \cdot F_0}.
 \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit $E \cdot J_s$ und ordnet die Glieder, so erhält man

$$\begin{aligned}
 L' &= X_1 \cdot \left[\frac{2h^3}{3} + \frac{J_s}{J} (h^2 \cdot 1 + 2 \cdot h \cdot \bar{\gamma} + 2 \cdot \bar{\epsilon}) + \frac{1 \cdot J_s}{F} \right] \\
 &\quad + X_2 \cdot \left[\frac{J_s}{J} (h \cdot \bar{\gamma} + 2 \cdot \bar{\epsilon}) + 1 \cdot \frac{J_s}{F} \right] \\
 &\quad - \frac{J_s}{J} \cdot \left[h \cdot \int_0^1 M_0 \cdot dx + \int_0^1 M_0 \cdot y \cdot dx \right] = 0. \\
 L'' &= X_1 \cdot \left[\frac{J_s}{J} (h \cdot \bar{\gamma} + 2 \cdot \bar{\epsilon}) + \frac{J_s}{F} \cdot 1 \right] \\
 &\quad + X_2 \cdot \left[\frac{J_s}{J} \cdot 2 \cdot \bar{\epsilon} + \frac{J_s}{F} \cdot 1 + \frac{1 \cdot E \cdot J_s}{E_0 \cdot F_0} \right] \\
 &\quad - \frac{J_s}{J} \int_0^1 M_0 \cdot y \cdot dx = 0.
 \end{aligned}$$

Diese Bestimmungsgleichungen lassen sich höchstens noch für einen bestimmten Fall der Rahmenform weiter vereinfachen. Alle Glieder, ausgenommen die mit M_0 , sind Formgrößen, also unabhängig von der Belastung. Für eine bestimmte Belastung des Riegels oder zur Bildung von Einflußlinien lassen sich die noch enthaltenen Integrale sehr leicht nach den früheren Verfahren auflösen.

Sämtliche Bezeichnungen außer h und J_s beziehen sich auf den Riegel (E_0 und F_0 natürlich auf die Zugstange).

Schlußformeln für parabolisch gebogenen Riegel.

Für einen Rahmen mit parabolischem (oder flachem kreisförmigen) Riegel lassen sich die beiden Bestimmungsgleichungen für eine Einzellast P (für Einflußlinien $P = 1$) im Abstände $a = z \cdot l$ (Abb. 180 b) noch wie folgt deuten.

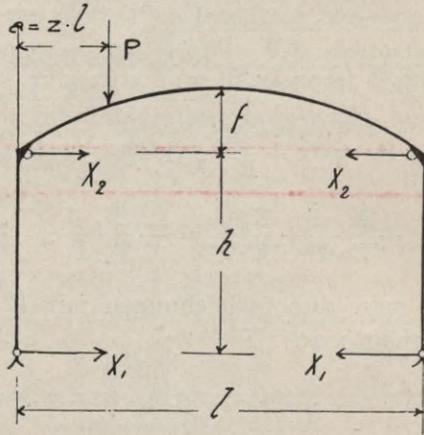


Abb. 180 b.

Mit $\frac{J_s}{J} = v$ wird

$$\begin{aligned}
 \underline{L'} = 0 &= X_1 \cdot \left[\frac{2 \cdot h^3}{3} + v \left(h^2 \cdot l + \frac{4}{3} h \cdot l \cdot f + \frac{8}{15} \cdot l \cdot f^2 \right) + l \cdot \frac{J_s}{F} \right] \\
 &+ X_2 \cdot \left[v \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot h \cdot l \cdot f + \frac{8}{15} \cdot l \cdot f^2 \right) + l \cdot \frac{J_s}{F} \right] \\
 &- v P \cdot \left[f \cdot \frac{l^2}{3} (z + z^4 - 2 \cdot z^3) + \frac{h \cdot l^2}{2} \cdot (z - z^2) \right] \\
 \underline{L''} = 0 &= X_1 \cdot \left[v \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot h \cdot l \cdot f + \frac{8}{15} \cdot l f^2 + \frac{J_s}{F} \cdot l \right) \right. \\
 &+ X_2 \cdot \left[v \cdot \frac{8}{15} \cdot l \cdot f^2 + \frac{J_s}{F} \cdot l + \frac{l \cdot E \cdot J_s}{E_0 \cdot F_0} \right] \\
 &- v \cdot P \cdot \left[\frac{f \cdot l^2}{3} \cdot (z + z^4 - 2 \cdot z^3) \right].
 \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen bedeuten die zu X gehörigen Klammerwerte die Formgrößen, die zu P gehörigen die Belastungsgrößen. Da die Formgrößen konstant sind, so ist es leicht, für verschiedene Werte von z durch Einsetzung die Einflußlinien

von X_1 und X_2 zu finden, welche dann für alle Belastungsfälle bequem angewandt werden können.

Bei seitlicher Belastung betrachte man die Zugstange als nicht vorhanden, so daß der Fall nach einem früher gegebenen Beispiel behandelt werden kann.

Kapitel XIV a.

Der Zweigelenkrahmen mit ungleich hohen Kämpfergelenken sowie der einstielige Rahmen.

Für solche Systeme gelten sinngemäß genau dieselben Ableitungen wie beim Rahmen mit gleich hohen Kämpfern (Kapitel VII).

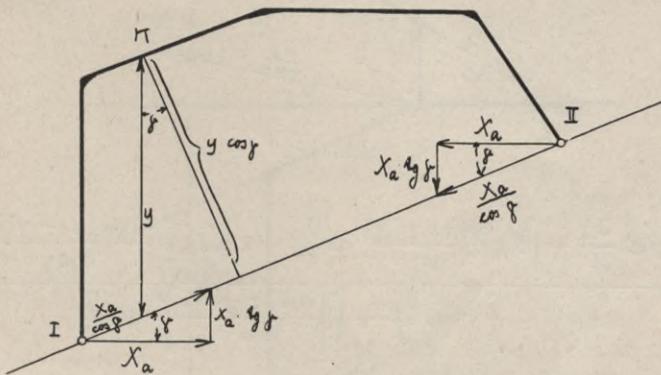


Abb. 181.

Die Ordinaten y beziehen sich hier auf den lotrechten Abstand irgendeines Punktes der Rahmenachse von der Verbindungsgeraden der Gelenke.

Momente (Abb. 181). Für irgendeinen Punkt ist

$$M_k = M_0 - \frac{X_a}{\cos \gamma} \cdot y \cdot \cos \gamma = M_0 - X_a \cdot y$$

$$M_a = \frac{\partial M_k}{\partial X_a} = -y.$$

Längskräfte. Nach Abb. 182 ist die obere Längskraft in K, wenn α wieder den Neigungswinkel der Rahmenachse gegen die Horizontale darstellt:

$$N_k = N_0 - \frac{X_a}{\cos \gamma} \cdot \cos(\alpha - \gamma)$$

$$N_a = \frac{\partial N_k}{\partial X_a} = - \frac{\cos(\alpha - \gamma)}{\cos \gamma}$$

Querkräfte Q vernachlässigen wir.

Temperaturglied

$$N_a = - \frac{\cos(\alpha - \gamma)}{\cos \gamma}$$

Somit lautet unsere ganze Gleichung (vgl. Kap. VII)

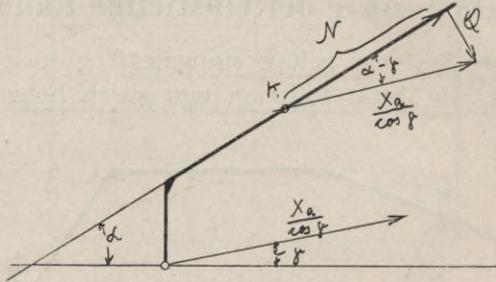


Abb. 182.

$$X_a = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot ds \frac{J_m}{J} + \int N_0 \frac{\cos(\alpha - \gamma)}{\cos \gamma} ds \frac{J_m}{F} + \epsilon E J_m \int t \cdot \frac{\cos(\alpha - \gamma)}{\cos \gamma} ds - \Delta l E \cdot J_m}{\int y^2 ds \frac{J_m}{J} + \int \left[\frac{\cos(\alpha - \gamma)}{\cos \gamma} \right]^2 ds \frac{J_m}{F}}$$

und mit Weglassung des Einflusses der Normalkräfte entsprechend

$$X_a = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot v \cdot ds + \epsilon E \cdot J_m \int t \cdot \frac{\cos(\alpha - \gamma)}{\cos \gamma} \cdot ds - E \cdot J_m \cdot \Delta l}{\int y^2 \cdot v \cdot ds}$$

Schließlich für die gewöhnlichen Fälle auch ausreichend

$$X_a = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot v \cdot ds}{\int y^2 \cdot v \cdot ds},$$

welche Gleichung sich also nur soweit von der gleichlautenden Schlußformel in Kapitel VII unterscheidet, als die Ordinaten y sich auf die schiefe Gelenkachse beziehen.

Im übrigen besteht aber absolut kein Unterschied in der Bildung des Nenners gegenüber der in Kapitel IX vorgeführten Lösungsform.

Es ist auch hier

$$\int y^2 \cdot v \cdot ds = \frac{v \cdot s}{3} (H^2 + H \cdot h + h^2),$$

wobei sich H und h auf die Abstände der Endpunkte der Stabstücke von der schrägen Gelenkachse beziehen

Ebenso ist

$$\int M_0 \cdot y \cdot ds \cdot v = v \cdot F_0 \cdot f,$$

wobei f wieder den Abstand des auf die Rahmenachse projizierten Schwerpunktes der M_0 -Fläche von der schrägen Gelenkachse bedeutet.

Schlußbemerkungen.

Wird in den Gleichungen bei Berücksichtigung der Normalkräfte Winkel $\gamma = 0$, so erhalten wir:

$$\frac{\cos(\alpha - 0)}{\cos 0} = \frac{\cos \alpha}{1} = \cos \alpha,$$

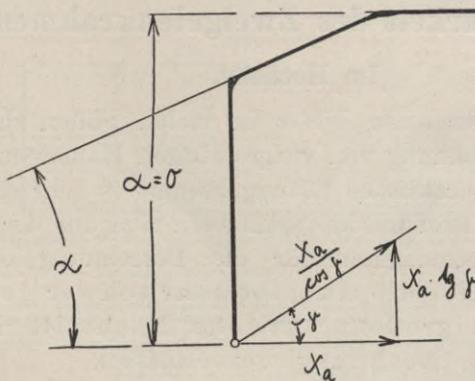


Abb. 182 a.

und der Fall ist zurückgeführt auf den Rahmen mit gleich hohen Kämpfergelenken.

Wird in den Gleichungen mit horizontalem Riegel Winkel $\alpha = 0$, so ist (Abb. 182a)

$$\frac{\cos(0 - \gamma)}{\cos \gamma} = -\frac{\cos \gamma}{\cos \gamma} = -1,$$

d. h. es hat auf solche Stabstücke nur die Horizontalkomponente des schrägen Schubes = X_a Einfluß, während die Ver-

¹⁾ Vgl. Anhang Löh. Mathematik, Absatz 34.

tikalkomponente $X_a \cdot \tan \gamma$ keine Normalkraft liefert (denn sie ist lediglich Querkraft, abgesehen von den Kräften im Hauptsystem).

Einstielige Rahmen.

Hiermit kommen wir zu den Rahmen, die überhaupt nur einen lotrechten Stiel und einen durchweg wagerechten Riegel (eventuell mit Kragarm) besitzen. Rückt nämlich das Lager II höher derartig, daß man von einem Stiel dort nicht mehr sprechen kann, dann ergeben sich die sogenannten einstieligen Rahmen, für welche wir uns nähere Einzelheiten mit dem Hinweis auf einen Aufsatz: „Beitrag zur Berechnung steifer Rahmenkonstruktionen“ in „Beton und Eisen“ 1913, Heft IV, ersparen können, der verschiedene Spezialfälle behandelt und dem Leser ohne weiteres verständlich sein wird.

Kapitel XV.

Anwendbarkeit des Zweigelenkrahmens.

Im Hochbau.

Der Zweigelenkrahmen bietet in vielen Fällen das Mittel zur einfachen Berechnung von vielgestaltigen Hallen- und Dachbindern. Für die praktische Lösung kommt es sehr darauf an, welche Annahmen man macht, wenn man sich aus der Projektzeichnung die Systemfiguren für die Berechnung entnimmt. Man kann sich hier die Aufgabe sehr schwer gestalten, aber auch ohne große praktische Nachteile Erleichterungen in der Rechnung verschaffen.

Fassen wir z. B. in Abb. 183 Fig. 1 das ganze System ABCDEFGH als einen einzigen zusammenhängenden Rahmen auf, so erforderte dieser eine sehr zeitraubende und weitläufige Berechnung, zu der in der Praxis keine Zeit vorhanden ist. Wählen wir aber ABCD als einfachen Zweigelenkrahmen, welcher die mittelbar und unmittelbar auf ihn entfallenden Eigengewichts-, Wind- und Schneelasten (insbesondere auch die horizontale Windkomponente, die als Einzellast von dem gelenkartig angeschlossenen geraden Binderbalken übertragen wird) aufzunehmen hat, so vereinfacht sich die ganze Berechnung wesentlich.

Natürlich hängt die Form des Binders (Rahmens) von der Wahl des Grundsystems ab. Nimmt man den ganzen Rahmen

als ein Stück an, so werden zum Schluß alle 4 Pfosten ziemlich gleich stark werden und an den Punkten CDEF werden mäßige Einspannungsquerschnitte auftreten. Geht man aber nach dem

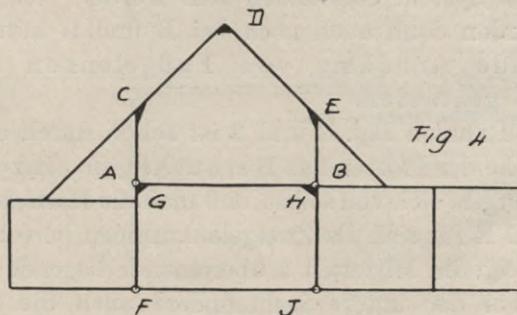
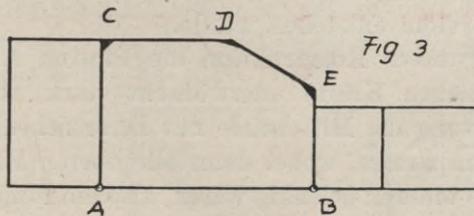
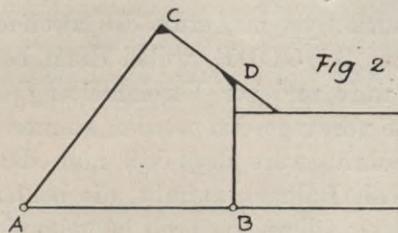
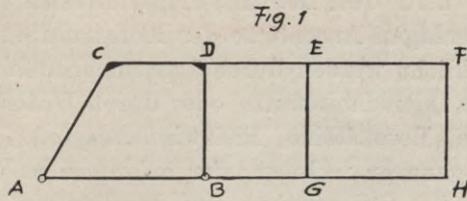


Abb. 183.

oben gemachten Vorschlag vor, so wird der Zweigelenkrahmen ABCD als schwere Konstruktion augenfällig hervortreten, während die anliegenden Säulen und Balken als einfache leichte Konstruktionen erscheinen.

Als Zweigelenkrahmen hätten auch ebensogut der mittlere oder rechte Bauteil aufgefaßt werden können. Die Entscheidung hierüber hängt außer von statischen Gründen von der zu erzielenden Wirkung und den Raumverhältnissen ab. Jedenfalls müssen die gelenkigen Anschlüsse der Konstruktionen nach Möglichkeit verwirklicht werden durch Zusammenziehung der Eisenlagen in die Querschnittmitte oder durch Unterbrechung derselben (Gelenke, Betonsteine, Bleizwischenlagen).

Will man genauer rechnen oder erfordern es die Raumverhältnisse, daß die Querschnitte des Binders an den Punkten ABCD möglichst beschränkt werden, so käme es zur Wahl eines anderen grundlegenden Systems, etwa des zweifach statisch unbestimmten Rahmens ABGCDE, wobei dann bei E eine steife Ecke anzunehmen wäre und zur Vereinfachung die Mittelstütze DB als Pendelstütze vorausgesetzt werden könnte.

Ein weiterer Schritt wäre der, daß man das Bauwerk der ganzen Breite nach als Rahmen auffaßt, die beiden Mittelstützen aber als Pendelstützen ausführt, wodurch, bei gelenkiger Auflagerung in A und H und steifen Ecken bei C und F, ein dreifach statisch unbestimmtes System entstehen würde.

Werden bei dieser Konstruktion die Pfosten AC und FH infolge der seitlichen Kräfte unerwünscht stark, so muß man zu ihrer Entlastung die Mittelstiele mit heranziehen, d. h. diese bei D und E einspannen, wobei dann alle oberen Knotenpunkte eingespannt, alle unteren gelenkig wären, also ein fünffach statisch unbestimmtes System entstanden sein würde. Wagerechte Reaktionen würden dann auch noch bei B und G auftreten. Die erleichternde Annahme von Fußgelenken kann man sich meist gestatten.

Bei den Rahmen Fig. 2 und 3 ist schon durch die sehr verschiedene Höhe der Pfosten das Herausheben einzelner Teile geboten. Es ergibt sich von selbst, daß man die Hallenteile ABCD bzw. ABCDE für sich als Zweigelenkrahmen berechnet.

Fig. 4 zeigt im Mittelteil 2 übereinanderliegende Zweigelenkrahmen, wobei der untere insbesondere auch die wagerechten Reaktionen des oberen aufzunehmen hat.

Im allgemeinen verfährt man bei der Berechnung am besten so, daß man für lotrechte Belastung durch Eigengewicht und Schnee und für wagerechte Belastung von links oder rechts je eine besondere Untersuchung durchführt und bei den einzelnen Querschnitten zum Schluß die ungünstigsten Zusammen-

stellungen macht. In der Querschnittsbemessung ist die balkenverbindende Platte mit zu berücksichtigen, sofern sie nicht gegenüber dem Rahmenquerschnitt zu schwach wird, was in der Regel bei Dachrahmen der Fall ist.

Die Querschnitte und Trägheitsmomente wechseln sehr stark, weil die Platte, sobald sie auf der Zugseite liegt, als unwirksam anzusehen ist. Man rechnet deshalb in den meisten Fällen mit einem rechteckigen Querschnitt. In der Wahl des Verhältnisses der Trägheitsmomente zueinander genügt es bei gleichbleibender Breite, ohne Rücksicht auf die Eiseneinlagen das Verhältnis zwischen den dritten Potenzen der Querschnittshöhen zugrunde zu legen. Erlaubt man sich weniger Genauigkeit, so kann man überhaupt ein gleichbleibendes J annehmen. Siehe ferner Handbuch für Eisenbetonbau, 2. Auflage, Band IV.

Im Brückenbau.

Wichtig sind noch einige Bemerkungen über den einfachen rechteckigen Rahmen als Brückenhauptträger. Es handelt sich bei der Berechnung solcher Rahmenbrücken zunächst darum, ob das grundlegende System als gelenkig oder eingespannt aufgelagert anzusehen ist (Abb. 184).

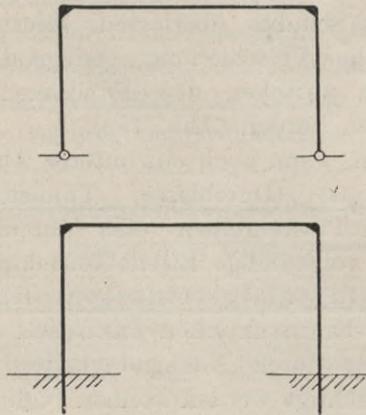


Abb. 184.

In der Regel liegt in der Art der beabsichtigten Ausführung weder der eine noch der andere Grenzfall bedingt vor, sondern ein Mittelding zwischen beiden. Während sich bei Dachbindern das eine oder andere System klarer zum Ausdruck bringen läßt, rechtfertigen die größeren Dimensionen der Pfosten von Rahmen-

brücken ungleich schwerer die Annahme von Fußgelenken, ohne daß man andererseits mangels genügender Größe der Fundamente von völliger Einspannung sprechen könnte. Wird einer der beiden Grenzfälle durch konstruktive Maßnahmen nicht sicher gewährleistet, so bedeutet dies eine Abweichung der Berechnung von der Wirklichkeit, die viel schwerer ins Gewicht fällt als irgendeine andere vereinfachende Annahme, und die man durch reichlichere Bemessung wieder auszugleichen bemüht sein muß.

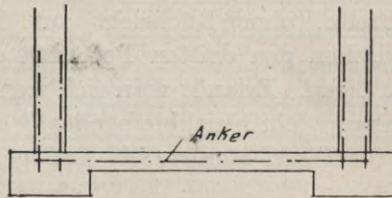


Abb. 185.

Bei Dachbindern wird der Horizontalschub in der Regel durch die nächstliegende Decke aufgenommen werden können. Bei Hallenbindern und Rahmenbrücken, die in direkter Verbindung mit dem Erdreich stehen, kann man den Fundamenten die Aufnahme des Schubes überlassen, sofern sie groß genug und gegen seitliche Verschiebung genügend gesichert sind; andernfalls müssen zwischen den Fundamenten einbetonierte Zuganker vorgesehen werden (Abb. 185).

Besonders dann, wenn auch ein unterer Abschluß erwünscht oder erforderlich ist (Durchlässe, Tunnelbauten, Kanäle), werden die beiden Pfostenreihen (oder durchlaufenden Seitenwände) durch eine vollständige Eisenbetonsohlplatte miteinander verbunden, so daß ringsum geschlossene Rahmen entstehen, die als sehr solide Konstruktionen anzusehen sind, weil sie als geschlossene Kästen durch Nachgiebigkeiten des Baugrundes nicht mehr beeinträchtigt werden können (vgl. später).

Konstruktive Grundlagen bei der Bemessung von Rahmenbrücken bleiben folgende:

Den Brückenbalken (Riegel) bemesse man nach dem größten auftretenden Biegemoment für den Fall, daß seitlicher Erddruck nicht vorhanden ist. Die Ecken zwischen Riegel und Pfosten erhalten ihre Größtmomente beim Vorhandensein von lotrechter und wagerechter Belastung zugleich.

Die Wirtschaftlichkeit einer Rahmenbrücke hängt vor allem von dem Einspannungsgrade ab. Je steifer die Pfosten gegenüber den Balken sind, d. h. je höher das Verhältnis von $\frac{J_s}{J_r}$ und je niedriger die Pfosten, umso wirkungsvoller wird die beabsichtigte Ermäßigung des Balkenmomentes ausfallen. Das gilt beim Zweigelenkrahmen und in erhöhtem Maße auch beim eingespannten Rahmen. So stehen sich Wirtschaftlichkeit und Berechnungsgrundlagen einander widersprechend gegenüber; denn je stärker die Pfosten ausgeführt werden, umso weniger kann man noch von gelenkiger Auflagerung sprechen, und umso größer müssen bei Einspannung die Fundamente ausfallen (vgl. auch Handbuch für Eisenbetonbau, 2. Auflage, Band VI, Brückenbau, S. 232 u. f.).

Der eingespannte Rahmen.

Kapitel XVI.

Der zweistielige symmetrische Rahmen in völliger Einspannung.¹⁾

Bemerkung: Nach den hier gegebenen allgemeinen Erläuterungen dürften dem Leser die im Handbuch für Eisenbetonbau weiter entwickelten Spezialfälle (1. Auflage, Band IV, Teil I, Dachbauten) ohne weiteres verständlich sein.

Ableitung der Bestimmungsgleichungen für die drei statisch unbestimmten Größen.

An dem statisch bestimmten Hauptssystem, dem einfachen Kragträger (Abb. 186), wirken die 3 unbestimmten Größen X, Y, Z, zu deren Bestimmung uns die grundlegende Gleichung zur Verfügung steht:

$$L' = \int \frac{M_a \cdot M \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{N_a \cdot N \cdot ds}{E \cdot F} + \int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds$$

¹⁾ Bei fehlender Symmetrie beachte die leicht verständlichen Auseinandersetzungen unter der Überschrift „Unsymmetrischer Bogen“ in Prof. Mörschs „Berechnung von eingespannten Gewölben“, Sonderabdruck der Schweizerischen Bauzeitung 1906, Nr. 7 u. 8, auch abgedruckt im Betonkalender.

oder

$$L' \cdot E = \int \frac{M_a \cdot M \cdot ds}{J} + \int \frac{N_a \cdot N \cdot ds}{F} + E \int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds.$$

Allgemein ist

$$M = M_0 - M_a \cdot X - M_b \cdot Y + M_c \cdot Z$$

$$N = N_0 - N_a \cdot X - N_b \cdot Y;$$

eingesetzt gibt

$$L' \cdot E = \int \frac{M_a \cdot (M_0 - M_a \cdot X - M_b \cdot Y + M_c \cdot Z) \cdot ds}{J} + \int \frac{N_a \cdot (N_0 - N_a \cdot X - N_b \cdot Y) \cdot ds}{F} + E \int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds.$$

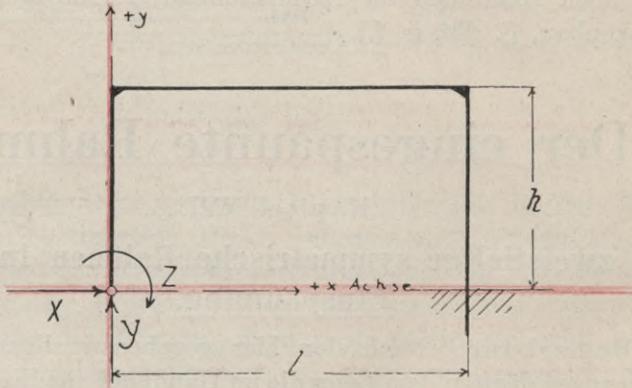


Abb. 186.

Es ist nun mit Bezugnahme auf unser Achsenkreuz

$$M_a \text{ für } X = 1 = 1 \cdot y = y$$

$$M_b \text{ „ } Y = 1 = 1 \cdot x = x$$

$$M_c \text{ „ } Z = 1 = 1$$

$$N_a \text{ „ } X = 1 = \cos \alpha \text{ (}\alpha\text{-Neigung zur x-Achse)}$$

$$N_b \text{ „ } Y = 1 = \cos \beta \text{ (}\beta\text{-Neigung zur y-Achse)}$$

eingesetzt gibt

I. für $X = 1$

$$L' \cdot E = \int \frac{y}{J} \cdot (M_0 - y \cdot X - x \cdot Y + 1 \cdot Z) \cdot ds + \int \frac{\cos \alpha}{F} \cdot (N_0 - \cos \alpha \cdot X - \cos \beta \cdot Y) \cdot ds + E \int \cos \alpha \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds$$

II. für $Y = 1$

$$\begin{aligned} \underline{L' \cdot E} &= \int \frac{x}{J} \cdot (M_0 - y \cdot X - x \cdot Y + 1 \cdot Z) \cdot ds \\ &+ \int \frac{\cos \beta}{F} \cdot (N_0 - \cos \alpha \cdot X - \cos \beta \cdot Y) \cdot ds + E \cdot \int \cos \beta \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds \end{aligned}$$

III. für $Z = 1$

$$\underline{L' \cdot E} = \int \frac{1}{J} \cdot (M_0 - y \cdot X - x \cdot Y + 1 \cdot Z) ds + 0 + 0$$

Aus diesen 3 Bestimmungsgleichungen die statisch unbestimmten Größen zu finden, erforderte zunächst die Auflösung jeder einzelnen Gleichung und führte deshalb zu großen Schwierigkeiten. Es soll darum hier ein Verfahren gezeigt werden, welches eine wesentliche Vereinfachung enthält.

Abkürzung der Bestimmungsgleichungen (durchgeführt für konstantes E und J)¹⁾

Die Ableitungen werden wir nur für die ersten Glieder der 3 Bestimmungsgleichungen ausführen, welche zu diesem Zwecke nachfolgend noch einmal für konstantes J und E aufgeführt sind.

$$\text{I. } 0 = \int y \cdot (M_0 - y \cdot X - x \cdot Y + Z) \cdot ds$$

$$\text{II. } 0 = \int x \cdot (M_0 - y \cdot X - x \cdot Y + Z) \cdot ds$$

$$\text{III. } 0 = \int 1 \cdot (M_0 - y \cdot X - x \cdot Y + Z) \cdot ds.$$

Soll sich — jede Gleichung für sich aufgelöst — der Reihe nach X, Y, Z ohne weiteres ergeben, so müßten die unterstrichenen Werte zu 0 werden. Wir wollen untersuchen, wann dies eintritt.

$$\begin{aligned} \text{I a. } &\int y \cdot x \cdot Y \cdot ds = 0 \text{ und } \int y \cdot Z \cdot ds = 0, \\ &\text{d. h., da Y und Z nicht } = 0 \text{ sein können, so folgt} \\ &\int y \cdot x \cdot ds = 0 \text{ und } \int y \cdot ds = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II a. } &\int x \cdot y \cdot X \cdot ds = 0 \text{ und } \int x \cdot Z \cdot ds = 0, \\ &\text{d. h.} \\ &X \cdot \int x \cdot y \cdot ds = 0 \text{ und } Z \cdot \int x \cdot ds = 0, \\ &\text{so daß neu hinzukommt} \\ &\int x \cdot ds = 0. \end{aligned}$$

¹⁾ Müller-Breslau, Neuere Methoden 4. Aufl. S. 123. Mörsch, Berechnung von eingespannten Gewölben, Schweizerische Bauzeitung 1906 Nr. 7 u. 8, auch Sonderabdruck oder Betonkalender.

$$\text{III a. } \int y \cdot X \cdot ds = 0 \text{ und } \int x \cdot Y \cdot ds = 0,$$

d. h.

$$X \cdot \int y \cdot ds = 0 \text{ und } Y \cdot \int x \cdot ds = 0.$$

Es müßten also zu 0 werden:

$$\int x \cdot y \cdot ds$$

$$\int y ds$$

und $\int x \cdot ds.$

Legen wir nun das Achsenkreuz nicht in den Angriffspunkt der bisherigen 3 statisch unbestimmten Größen, sondern in den Schwerpunkt des Systems (Abb. 187), so sind diese 3 Bedingungen erfüllt. Denn $\int x \cdot y \cdot ds$ stellt dann das Zentrifugal-

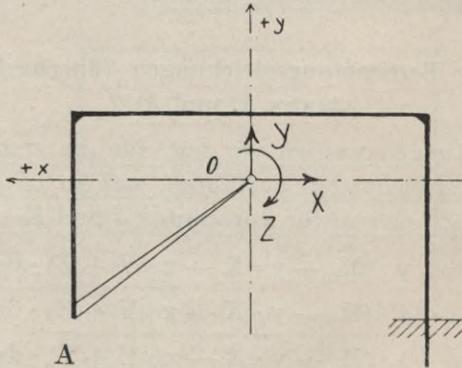


Abb. 187.

moment des Stabzuges für das x-y-Kreuz dar und ist in der Tat für den Schwerpunkt desselben $= 0$, $\int y \cdot ds$ und $\int x \cdot ds$ stellen die statischen Momente des Stabzuges bezogen auf die x- und y-Achse dar, sind also dann ebenfalls $= 0$. Der Rahmen ist also dann nicht mehr A, sondern in O eingespannt zu denken, so daß noch ein neuer Stab AO hinzukommt und Punkt A sich nicht mehr von irgend einem anderen Punkte auf der Rahmenachse unterscheidet.

Durch die willkürliche Hinzufügung eines neuen Stabes A0 würde nun das zugrundeliegende System gewiß geändert werden, wenn es uns nicht möglich wäre, die Wirkung der vollen Einspannung bei A trotzdem in der Rechnung zum Ausdruck zu bringen. Das geschieht einfach dadurch, daß Stab A0 als starr (unelastisch) angenommen wird. Er unterliegt dann nicht wie die anderen

Stäbe dem Gesetze der Formänderung, sondern ersetzt gewissermaßen die einspannende Wirkung des Auflagers bei A und überträgt die Wirkung der an dem neuen „Auflager 0“ angreifenden 3 statisch unbestimmten Größen — ebenfalls X, Y und Z genannt — direkt auf den Rahmen.

Die am Punkt 0 angreifenden 3 Größen X, Y und Z können nach dem Dargelegten an sich nicht identisch sein mit den ursprünglich am Auflager A wirkend gedachten Größen. Trotzdem bedingt der Gleichgewichtszustand, daß X und Y am Punkte 0 dem X und Y am Punkte A genau entsprechen, weil sie sich durch den Stab A0 von 0 nach A übertragen. Dagegen ist Z in A — genannt Z_A — verschieden von dem Z in 0, genannt Z₀.

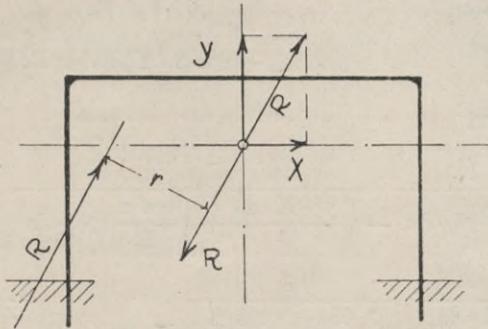


Abb. 188.

Die Bestimmungsgleichungen für die 3 am neuen „Auflager 0“ angreifenden statisch unbestimmten Größen lauten also:

$$\begin{aligned} \text{I. } 0 &= \int y \cdot (M_0 - y \cdot X) \cdot ds \\ \text{II. } 0 &= \int x \cdot (M_0 - x \cdot Y) \cdot ds \\ \text{III. } 0 &= \int 1 \cdot (M_0 + Z) \cdot ds. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir sofort

$$\underline{X} = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot ds}{\int y^2 \cdot ds}; \quad \underline{Y} = \frac{\int M_0 \cdot x \cdot ds}{\int x^2 \cdot ds}; \quad \underline{Z} = - \frac{\int M_0 \cdot ds}{\int ds}.$$

Es sei noch bemerkt: Anstelle der in A vorhandenen 3 Größen X, Y und Z können wir uns auch deren Ersatzkraft R nach Abb. 188 dort wirkend denken. Bringen wir uns jetzt im Schwerpunkt des Systems 2 gleichgroße entgegengesetzt gerichtete Kräfte R parallel zu R an, so bildet die untere mit der Auflagerkraft das positive Moment M = R · r. Die obere läßt sich nach den beiden Richtungen in die Komponenten X und Y zerlegen.

Die 3 gewonnenen Gleichungen für X, Y, Z können schon sehr wohl als Grundlage für unsere statischen Berechnungen dienen.

Vollständigere Resultate mit Einschluß der Normalkräfte und des Temperaturliedes.

Wir führen die ganze Arbeit nur einmal durch, und zwar für Gleichung I (aus dem ersten Absatz) und beachten die soeben gewonnene Abkürzung:

$$\underline{I' \cdot L' \cdot E} = \int \frac{y}{J} \cdot (M_0 - y \cdot X) \cdot ds + \int \frac{\cos \alpha}{F} \cdot (N_0 - \cos \alpha \cdot X - \cos \beta \cdot Y) ds + E \cdot \int \cos \alpha \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds$$

ausmultipliziert

$$\underline{L' \cdot E} = \overbrace{\int \frac{y}{J} \cdot M_0 \cdot ds}^1 - \overbrace{\int \frac{y^2 \cdot X \cdot ds}{J}}^2 + \overbrace{\int \frac{\cos \alpha}{F} \cdot N_0 \cdot ds}^3 - \overbrace{\int \frac{\cos^2 \alpha \cdot X \cdot ds}{F}}^4 - \overbrace{\int \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{F} \cdot Y \cdot ds}^5 + \overbrace{E \cdot \int \cos \alpha \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds}^6$$

Diese 6 Integrale sind für sich in bezug auf jeden vorhandenen Stab zu bewerten. Für einen rechteckigen Rahmen ergibt sich:

1. bleibt nur für den mittleren Teil, sofern nur lotrechte Belastung vorliegt: bei wagerechter Belastung jedoch auch für die Stiele.
2. bleibt für alle Stäbe;
3. wird für die Stiele = 0, da $\cos \alpha$ für $90^\circ = 0$ ist, und für den Riegel = 0, weil $N_0 = 0$ ist;
4. wird für die Stiele = 0, da $\cos \alpha = 0$, bleibt jedoch für den Riegel bestehen = $\frac{X \cdot l}{F}$;
5. wird für die Stiele = 0, da $\cos \alpha = 0$, und für den Riegel = 0, da $\cos \beta = 0$;
6. wird für die Stiele = 0, da $\cos \alpha = 0$, und für den Riegel = $E \cdot \varepsilon \cdot t \cdot l$.

Nummehr lautet unsere Gleichung

$$\underline{L' \cdot E} = \int \frac{M_0 \cdot y \cdot ds}{J} - \int \frac{y^2 \cdot X \cdot ds}{J} - \int \frac{\cos^2 \alpha \cdot X \cdot ds}{F} + E \int \cos \alpha \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds.$$

Für $L' \cdot E = 0$ (unverschiebliche Auflager) wird

$$\int \frac{M_0 \cdot y \cdot ds}{J} + E \int \cos \alpha \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds = X \cdot \left[\int \frac{y^2 \cdot ds}{J} + \int \frac{\cos^2 \alpha \cdot ds}{F} \right]$$

woraus

$$X = \frac{\int \frac{M_0 \cdot y \cdot ds}{J} + E \cdot \varepsilon \cdot t \cdot l}{\int \frac{y^2 \cdot ds}{J} + \frac{1}{F_r}}$$

In gleicher Weise würden wir erhalten aus Gleichung II (erster Absatz)

$$\text{II}' \quad Y = \frac{\int \frac{M_0 \cdot x \cdot ds}{J}}{\int \frac{x^2 \cdot ds}{J} + \frac{2 \cdot h}{F_s}}$$

und aus III (erster Absatz)

$$\text{III}' \quad Z = - \frac{\int \frac{M_0 \cdot ds}{J}}{\int \frac{ds}{J}}$$

Deutung der vollständigeren Resultate.

Der Koordinatenmittelpunkt bedeutet den Schwerpunkt des mit $\frac{1}{J}$ belasteten Stabzuges und x und y dessen Hauptachsen.

Zählergrößen: $\int \frac{M_0 \cdot y \cdot ds}{J}$ bedeutet das statische Moment der auf der Rahmenachse liegenden Momentenfläche $\frac{M_0}{J}$ in bezug auf die x -Achse. Wir bezeichnen es nach früheren Ausdrücken mit

$$\frac{F_0 \cdot f_x}{J} = S_x.$$

Ebenso erhalten wir

$$\int \frac{M_0 \cdot x \cdot ds}{J} = \frac{F_0 \cdot f_y}{J} = S_y$$

$$\text{und } \frac{M_0 \cdot ds}{J} = \text{Inhalt der Momentenfläche} = \frac{F_0}{J} = S.$$

Nennergrößen: $\int \frac{y^2 \cdot ds}{J}$ bedeutet das Trägheitsmoment des Stabzuges bezogen auf die x-Achse, nach Früherem also:

$$\sum \frac{s}{3 \cdot J} \cdot (H^2 + H \cdot h + h^2) = T_x,$$

ebenso

$$\int \frac{x^2 \cdot ds}{J} = T_y$$

$$\text{und } \int \frac{ds}{J} = T = \text{Länge des Stabzuges.}$$

Wir erhalten also

$$\underline{X} = \frac{S_x + E \cdot \varepsilon \cdot t \cdot l}{T_x + \frac{l}{F_r}}; \underline{Y} = \frac{S_y}{T_y + \frac{2 \cdot h}{F_s}}; \underline{Z} = -\frac{S}{T}.$$

Diese einfachen Gleichungen gestatten, bei Annahme eines gleichen Trägheitsmomentes für alle Stäbe, in einfacher Weise die Berechnung der statisch unbestimmten Größen und enthalten also die Berücksichtigung der Normalkräfte und Temperatureinflüsse.

Berücksichtigung der Trägheitsmomente.

Für größere Bauwerke wird es erforderlich sein, das zwischen Riegel und Pfosten verschieden große Trägheitsmoment zu berücksichtigen, und wir erhalten¹⁾, wenn J_r das Trägheitsmoment des Riegels bedeutet, für die Zählerglieder bei lotrechter Belastung

$$\int \frac{M_0 \cdot y \cdot ds}{J} = \frac{F_0 \cdot f_x}{J} = S_x = \frac{1}{J_r} \cdot \int_c^D M_0 \cdot y \cdot dx = \frac{1}{J_r} \cdot \varepsilon_x$$

$$\int \frac{M_0 \cdot x \cdot ds}{J} = \frac{F_0 \cdot f_y}{J} = S_y = \frac{1}{J_r} \cdot \int_c^D M_0 \cdot x \cdot dx = \frac{1}{J_r} \cdot \varepsilon_y.$$

Diese beiden Integrale sind also nur für den Riegel ausgelegt, weil an lotrechte Belastung gedacht ist; bei wagerechter Belastung wären sie sinngemäß für die Stiele auszulegen.

¹⁾ Gleiche Bezeichnungen gewählt wie in Saliger, „Der Eisenbetonbau in Theorie und Konstruktion“.

Ferner

$$\int \frac{M_0 \cdot ds}{J} = \frac{F_0}{J} = S = \frac{1}{J_r} \int M_0 \cdot dx = \frac{1}{J_r} \cdot \mathcal{E}.$$

Es bedeuten \mathcal{E}_x und \mathcal{E}_y die statischen Momente der auf dem Stabzug liegenden M_0 -Fläche in bezug auf die x - und y -Achse.

\mathcal{E} bedeutet den Inhalt der auf dem Stabzug liegenden M_0 -Fläche.

Ebenso erhalten wir für die Nennerglieder in bezug auf Riegel und Stiele (J_r und J_s):

$$\int \frac{y^2 \cdot ds}{J} = T_x = \frac{1}{J_r} \int_C^D y^2 \cdot dx + \frac{2}{J_s} \int_A^C y^2 \cdot dy = \frac{1}{J_r} \cdot \left(\mathcal{I}_{rx} + 2 \cdot \frac{J_r}{J_s} \cdot \mathcal{I}_{sx} \right)$$

\mathcal{I}_{rx} bedeutet das Trägheitsmoment des Riegels und \mathcal{I}_{sx} das Trägheitsmoment der Vertikalstäbe in bezug auf die x -Achse.

Ebenso erhält man

$$\int \frac{x^2 \cdot ds}{J} = T_y = \frac{1}{J_r} \cdot \left(\mathcal{I}_{ry} + 2 \cdot \frac{J_r}{J_s} \cdot \mathcal{I}_{sy} \right),$$

worin \mathcal{I}_{ry} das Trägheitsmoment des Riegels und \mathcal{I}_{sy} das Trägheitsmoment der beiden lotrechten Stäbe in bezug auf die y -Achse bedeutet. Ferner

$$\int \frac{ds}{J} = T = \frac{1}{J_r} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{J_r}{J_s} \cdot h \right).$$

Dieses letzte Glied bedeutet die (mit dem Trägheitsmoment ausgedrückte) Länge des Stabzuges.

Die angedeuteten statischen Momente und Trägheitsmomente können rechnerisch oder zeichnerisch bestimmt werden. Wir erhalten also mit diesen Ausdrücken:

$$X = \frac{\mathcal{E}_x + E \cdot \varepsilon \cdot t \cdot l}{\mathcal{I}_{rx} + 2 \cdot \frac{J_r}{J_s} \cdot \mathcal{I}_{sx} + \frac{J_r}{F_s} \cdot l}$$

$$Y = \frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{I}_{ry} + 2 \cdot \frac{J_r}{J_s} \cdot \mathcal{I}_{sy} + 2 \cdot \frac{J_r}{F_s} \cdot h}$$

$$Z = - \frac{\mathcal{E}}{1 + 2 \cdot \frac{J_r}{J_s} \cdot h}$$

In den weitaus meisten Fällen genügt es mit den zuerst gefundenen Gleichungen



$$X = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot ds}{\int y^2 \cdot ds}; \quad Y = \frac{\int M_0 \cdot x \cdot ds}{\int x^2 \cdot ds}; \quad Z = - \frac{\int M_0 \cdot ds}{\int ds}$$

in ihrer Weiterausbildung

$$X = \frac{S_x}{T_x}; \quad Y = \frac{S_y}{T_y}; \quad Z = - \frac{S}{T}$$

zu rechnen; wobei Normalkräfte und Temperatureinflüsse vernachlässigt sind und durchweg konstantes Trägheitsmoment vorausgesetzt werden kann.

Zwischenbetrachtung über die Wahl des statisch bestimmten Hauptsystems und der sich dabei ergebenden Reaktionen.

Bei einem Zweigelenrahmen mit lotrechter Belastung (Abb. 189) ist die unbestimmte Größe ein Horizontalschub, so daß die für das M_0 -System gebildeten Reaktionen A_0 und B_0 davon nicht beeinflußt werden können und deshalb in dem fertigen Rahmen mit derselben Größe auftreten wie im M_0 -System.

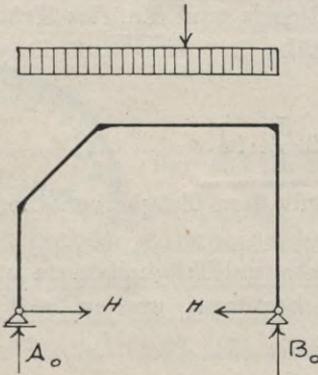


Abb. 189.

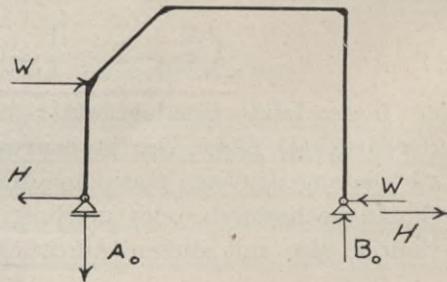


Abb. 189 a.

Bei dem Zweigelenrahmen mit wagerechter Belastung (Abb. 189a) tritt betreffs der lotrechten Reaktionen dasselbe ein, da diese wieder außerhalb des Einflußbereichs des hinzukommenden H liegen. Die im M_0 -System vorhandene einzige wagerechte Reaktion W erleidet aber durch das hinzukommende H eine Veränderung, sie wird nämlich um H kleiner.

Schon hieraus ist ersichtlich, daß diejenigen Reaktionen des M_0 -Systems, welche im späteren Einflußbereich der überzähligen Größen liegen, sich ändern müssen.

Wir kommen nun auf den eingespannten Rahmen zurück.

α) Für lotrechte Belastung empfiehlt es sich, den einfachen Balken als statisch bestimmtes Hauptsystem zugrunde zu legen (Abb. 190). Im fertigen System werden sich dabei die Reaktionen A_0 und B_0 gemäß den

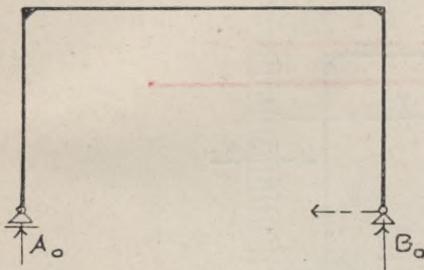


Abb. 190.

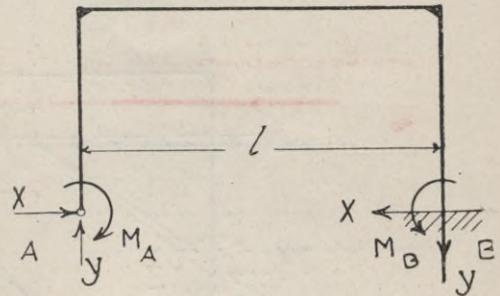


Abb. 190 a.

vorhergehenden Betrachtungen ändern müssen, weil die Verschiedenheit der Momente M_A und M_B nicht ohne Einfluß auf die lotrechten Reaktionen sein kann (vgl. Bestimmung der Teilreaktionen bei der Clapeyronschen Gleichung). Wir betrachten am besten für sich den Einfluß der Kräfte, welche bei A und B den Reaktionen des einfachen Balkens hinzuzufügen sind, damit die wirkliche Stützung entsteht. Diese Kräfte, X, Y und M_A genannt, müssen natürlich für sich mit dem Auflager B im Gleichgewicht stehen, und wir erhalten deswegen dort entgegengesetzt Y, X und das Biegemoment M_B (Abb. 190a). Zwischen M_A und M_B muß die Gleichgewichtsbedingung bestehen

$$M_A + Y \cdot l - M_B = 0,$$

d. h. $Y \cdot l = M_B - M_A$, wobei die Verschiedenheit der Momente die Entstehung der Zusatzkraft Y zu A_0 bzw. B_0 klar zeigt.

Im fertigen System ist dann:

$$\begin{aligned} A &= A_0 + Y; & B &= B_0 - Y \\ H_A &= X; & H_B &= H_0 - X. \end{aligned}$$

Die Bestimmung dieser 3 Zusatzkräfte X , Y und M_A kann natürlich am besten auf die vorher angegebene Weise mit Verlegung des Koordinatenanfangspunktes nach dem Schwerpunkt des Systems erfolgen, wobei diese Verschiebung für das Moment M_A die Einführung des Momentes Z erfordert in der Weise, daß

$$M_A = Z - X \cdot y - Y \cdot x$$

wird.

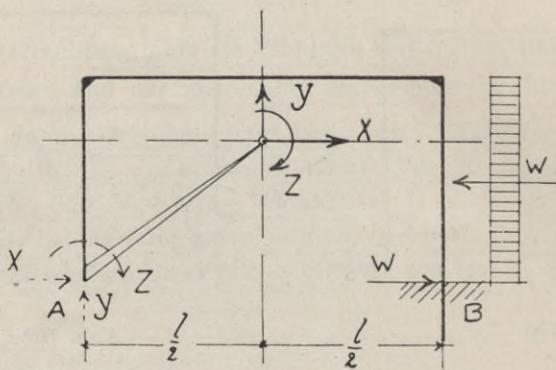


Abb. 191.

Bei seitlicher Belastung empfiehlt sich als statisch bestimmtes Hauptsystem der einfache Kragträger (Abb. 191). An dem rechten Auflager des Hauptsystems herrscht dann nur die Reaktion W und das Einspannungsmoment M_0 , während für diesen Zustand die 3 statisch unbestimmten Größen X , Y und Z in einfacher Weise wie oben angegeben zu ermitteln sind.

Feststellung der Biegemomente.

An einer beliebigen Stelle x/y des Rahmens herrscht das Moment (Abb. 192 und 192a)

$$M = M_0 - X \cdot y - Y \cdot x + Z,$$

wobei auf die Vorzeichen der Koordinaten x und y zu achten ist. Während die statisch unbestimmten Größen X und Y an und für sich (als Zahlenwerte) stets positiv anzunehmen sind, hat die dritte Größe Z aber an und für sich (als Zahlenwert) bei lot-rechter Belastung das Vorzeichen minus, bei seitlicher Belastung das Vorzeichen plus (vgl. folgendes Beispiel). M_0 bedeutet stets das an der betreffenden betrachteten Stelle gerade herrschende

Moment des zugrundeliegenden statisch bestimmten Hauptsystems.
Es ist empfehlenswert, bei der Bestimmung der
Biegemomente an verschiedenen Stellen stets nur

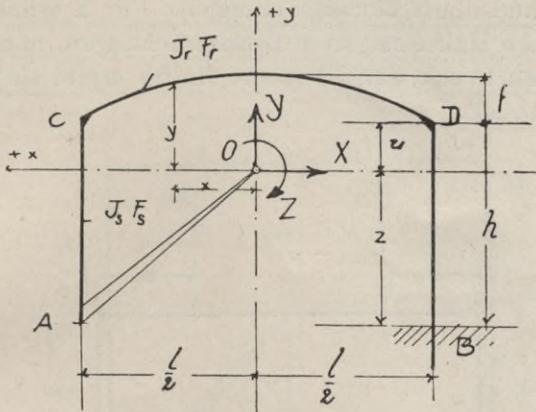


Abb. 192.

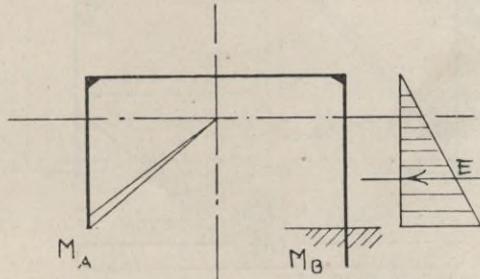


Abb. 192 a.

von dieser einen Formel Gebrauch zu machen und dabei auf die Vorzeichen in der angegebenen Weise zu achten. Es werden nämlich verschiedentlich auch fertige Formeln für besondere Punkte (Auflager A und B, Eckpunkte C und D) angegeben, worin die Vorzeichen der Koordinaten x und y bzw. u , z , $\frac{1}{2}$ durchweg als plus anzunehmen sind, d. h. nur die Zahlenwerte derselben einzusetzen sind, weil die Vorzeichen schon Berücksichtigung gefunden haben.¹⁾

¹⁾ Vgl. Handbuch für Eisenbetonbau.

Es ist ersichtlich, daß die von links nach rechts wirkende Kraft X im Teile unterhalb der x -Achse positive Biegemomente mit Druckspannung an der äußeren und Zugspannung an der inneren Leibung erzeugt, im Teile oberhalb der x -Achse dagegen außen Zug- und innen Druckspannungen. Für Y erhalten wir für die ganze linke Hälfte negative Beanspruchungen, nämlich außen Zug und innen Druck, für die rechte Hälfte ergibt sie innen Zug und außen Druck.

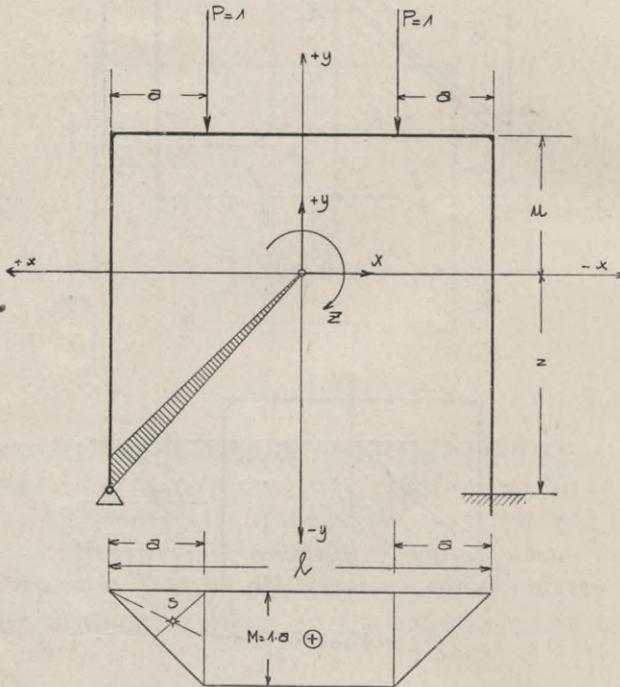


Abb. 193.

Berechnung der Einflußliniengleichungen bei lotrechter Belastung.

Diese erfolgt in ganz ähnlicher Weise, wie für den Zweigelenkrahmen in Kapitel XI gezeigt wurde.

Wir gehen von den auf S. 182 erhaltenen einfachen Schlußgleichungen aus:

$$X = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot ds}{\int y^2 \cdot ds} = \frac{S_x}{T_x}$$

$$Y = \frac{\int M_0 \cdot x \cdot ds}{\int x^2 ds} = \frac{S_y}{T_y}$$

$$Z = - \frac{\int M_0 \cdot ds}{\int ds} = - \frac{S}{T}$$

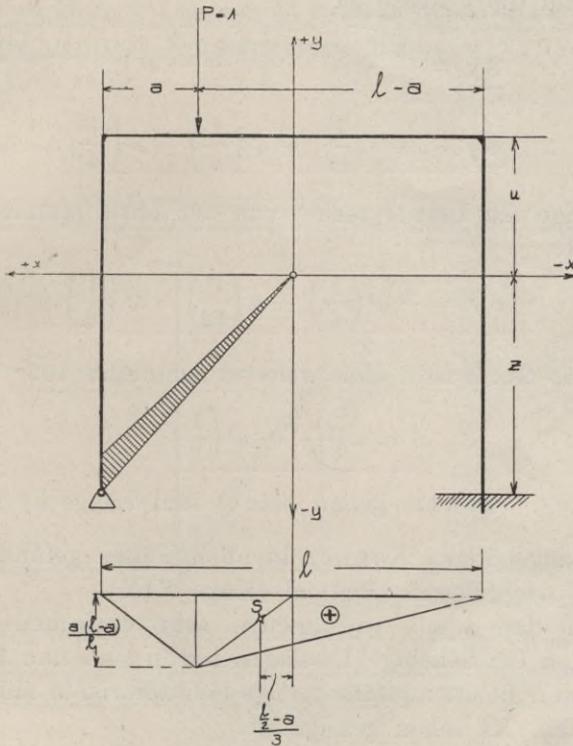


Abb. 194.

Wir erhalten ohne weiteres nach S. 129 für den Zähler von X nach Abb. 193 mit der darunter gezeichneten Momentenfläche des einfachen Balkens auf 2 Stützen:

$$S_x = + a \left(\frac{ul}{2} \right) - a^2 \left(\frac{u}{2} \right)$$

Neu müssen wir ableiten den Zähler von Y.

Während sich die Ordinaten für den Schub X genau analog dem Ergebnis beim Zweigelenkrahmen berechnen ließen (für 2 symmetrische Lasten 1), dürfen wir dieses Verfahren zur Bestimmung von Y nicht anwenden, da es sich hier um lotrechte Reaktionen handelt; wir arbeiten hier von Anfang an mit nur einer Last 1 und erhalten nach Abb. 194, solange die Last links

von der Mitte wandert, S_y als das statische Moment der Dreiecksfläche

$$\frac{1}{2} l \cdot \frac{a(1-a)}{1} = \frac{a(1-a)}{2}$$

bezogen auf die y -Achse zu

$$S_y = \frac{a(1-a)}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - a \right);$$

$$S_y = + a \left(\frac{l^2}{12} \right) + a^3 \left(\frac{1}{6} \right) - a^2 \left(\frac{1}{4} \right).$$

Solange die Last l rechts von der Mitte wandert, ist entsprechend:

$$S_y = + a^2 \left(\frac{1}{4} \right) - a \left(\frac{l^2}{12} \right) - a^3 \left(\frac{1}{6} \right).$$

Der Zähler von Z wird ohne weiteres nach Abb. 193

$$S = a \left(\frac{1}{2} \right) - a^2 \left(\frac{1}{2} \right).$$

(Beachte genau Zahl 1 und Länge 1.)

Wie die zugehörigen Nenner in allen Fällen gefunden werden, zeigt das nachfolgende Beispiel (Kap. XIX).

Nach den somit gewonnenen sehr einfachen Ordinaten-gleichungen für beliebige Lastlagen lassen sich nun für die verschiedensten Belastungsfälle fertige Schlußformeln aufstellen, wie das in Kap. XI schon gezeigt ist.

Bestimmung der Momenten-Nullpunkte in den Vertikalen.

Die Kenntnis dieser Punkte erleichtert wesentlich die Übersicht über den Verlauf der Biegemomente bei vertikaler Belastung; der eingespannte Rahmen wird nämlich dadurch auf einen einfachen Zweigelenrahmen zurückgeführt, der auf gleich hohen oder ungleich hohen Stielen ruht. Die Verbindungslinie der Momentennullpunkte (bzw. der ideellen Gelenke in den Stielen) durchschneidet die y -Achse in $\frac{h}{3}$ von der Einspannungsebene.

Der Leser wird das darüber im Handbuch IV, 1. Aufl., Teil 1, S. 508 und 509 Gegebene ohne weiteres verstehen und sich zunutze machen können.

вспомогательная
линия
соединения
нулевых моментов

Kapitel XVII.

Der eingespannte Rahmen mit Kragarmen.

Die Ableitung der Einflußliniengleichungen für eine auf den Kragarmen wandernde Last erfolgt in ähnlicher Weise wie für den Zweigelenkrahmen mit Kragarmen (vgl. Kapitel XI, S. 133 und Kapitel XII, S. 145).

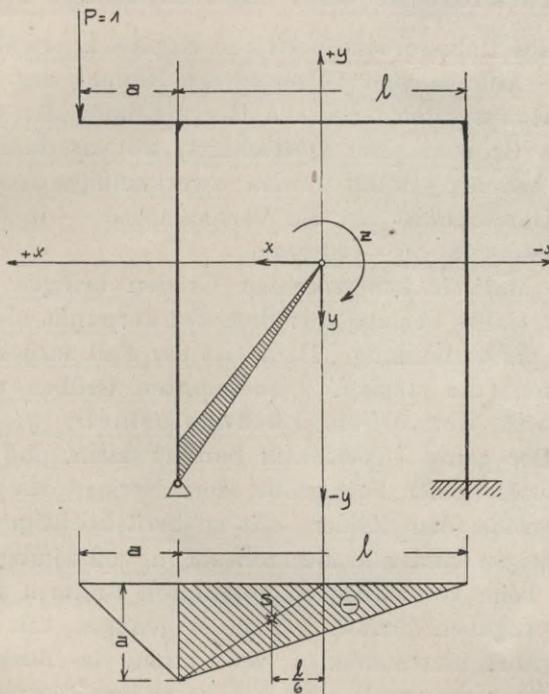


Abb. 195.

Demnach ist bei wagerechtem Riegel (vgl. Abb. 193)

$$S_x = -a \left(\frac{u \cdot l}{2} \right)$$

und S_y nach Abb. 195

$$S_y = -\frac{1}{2} l \cdot a \cdot \frac{1}{6}$$

$$S_y = -a \left(\frac{l^2}{12} \right)$$

und schließlich $S = -a \left(\frac{l}{2} \right)$.

Die Einflußlinien sind demnach bezüglich des veränderlichen a wieder gerade Linien, und insbesondere stellt sich die Einflußlinie für X wieder heraus als tangentiale geradlinige Verlängerung der Einflußlinie für X zwischen den Stielen.

Kapitel XVIII.

Der geschlossene oder kastenförmige Rahmen.

Derartige Rahmen sind bereits in Kapitel II erwähnt worden. (Abb. 33). Abb. 40 und 41 zeigen die Bildung des statisch bestimmten Hauptsystems und die Hervorhebung der statisch unbestimmten Größen. Der Querschnitt, wo wir durchschneiden, kann ganz beliebig gewählt werden; zweckmäßigerweise wird man aber den Durchschnitt auf die Vertikalachse — in den unteren oder den oberen Riegel — verlegen.

Die 3 statisch unbestimmten Größen bringen wir wieder durch eine starre Scheibe mit dem Schwerpunkt des ganzen Rahmens in Verbindung. Damit ist der Fall zurückgeführt auf den früheren; die statisch unbestimmten Größen werden also genau nach denselben Lösungsformeln wie früher gefunden. Der ganze Unterschied besteht darin, daß der untere Riegel, sowohl in der Formgröße (dem Nenner) als auch in der Belastungsgröße (dem Zähler), mit zu berücksichtigen ist.

Im übrigen sind alle Betrachtungen vollständig sinngemäß mit denen beim vollständig eingespannten Rahmen auszuführen.

Diese Angaben dürften dem Leser genügen, um sich in derartige Aufgaben hineinzufinden; der Umfang des Buches gestattet zurzeit leider nicht, auch noch auf besondere Beispiele hier einzugehen.

Kapitel XIX.

Zusammenhängendes Beispiel der Berechnung eines Durchlasses bei völliger Einspannung der Seitenwände (Abb. 196).

Belastungsannahmen:

Für die obere Platte Erdschüttung und eine Nutzlast von 2400 kg/m^2 (Eisenbahnzüge); für die Seitenwände Erddruck und Nutzlast. Bei den Wänden werde eine einseitige Belastung nicht

berücksichtigt. Der Böschungswinkel φ betrage 38° und das Gewicht der Erde $\gamma = 1600 \text{ kg/m}^3$. Die Seitenwände seien in der für diesen Zweck hinreichend stark zu konstruierenden Sohlplatte fest eingespannt.

Belastungen: a) Decke:

Nutzlast	=	2400 kg/m ²
Erdschüttung $1600 \cdot 3,00$	=	4800 „
Platte $22 \cdot 24$	=	528 „
		7728 kg/m ²

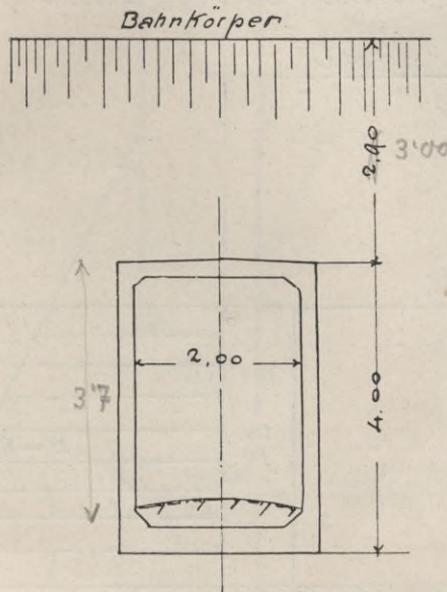


Abb. 196.

b) Seitenwände

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\gamma}{2} \cdot h^2 \cdot \tan^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi^0}{2} \right) = \frac{1,6}{2} \cdot 8,2^2 \cdot \tan^2 \left(45^\circ - \frac{38^\circ}{2} \right) = 12,80 \text{ t} \\
 &\quad - 12,80 \cdot \left(\frac{4,5}{8,2} \right)^2 = 3,86 \text{ t} \\
 \hline
 E &= 8,94 \text{ t}
 \end{aligned}$$

Der Abstand x von unten bis zur Erddruckresultierenden beträgt somit

$$x = \frac{12,8 \cdot \frac{8,2}{3} - 3,86 \left(\frac{4,5}{3} + 3,70 \right)}{8,94} = 1,67 \text{ m (Abb. 197)}$$

M₀-Systeme und statisch unbestimmte Größen.a) Infolge lotrechter Belastung (Abb. 198).

$$\underline{A_0} = \underline{B_0} = 7728 \cdot \frac{2,2}{2} = 8500 \text{ kg}$$

$$\underline{M_0} = \frac{p \cdot l^2}{8} = \frac{7728 \cdot 2,2^2}{8} = 4675,44 \text{ kgm}$$

$$\underline{F_0} = \frac{2}{3} \cdot 4675,44 \cdot 2,2 = 6863,98 \text{ kgm}^2$$

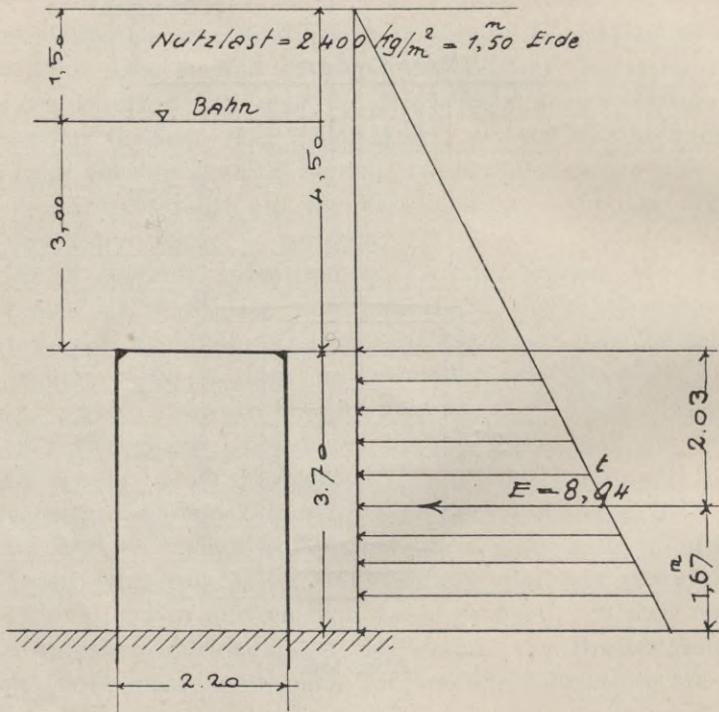


Abb. 197.

Lage der x-Achse

$$\underline{a} = \frac{2 \cdot 3,70 \cdot 1,85 + 2,2 \cdot 3,70}{9,6} = 2,274 \text{ m}$$

$$\underline{b} = 3,70 - 2,274 = 1,426 \text{ m.}$$

Die y-Achse ist identisch mit der Mittelachse. Damit erhalten wir

$$\underline{S_x} = F_0 \cdot f_x = 6863,98 \cdot 1,426 = 9810 \text{ kgm}^3$$

$$\underline{S_y} = F_0 \cdot f_y = 0$$

$$\underline{T_x} = \int y^2 \cdot ds = 2,2 \cdot 1,426^2 + \frac{2}{3} \cdot (2,274^3 + 1,426^3) = 14,25 \text{ cm}^3,$$

oder auch nach der bekannten Formel $\Sigma v \cdot \frac{s}{3} \cdot (H^2 + H \cdot h + h^2)$

$$= \frac{1 \cdot 2,274}{3} \cdot 2,274^2 \cdot 2 + \frac{1,426}{3} \cdot 1,426^2 \cdot 2 + \frac{2,2}{3} \cdot 1,426^2 \cdot 3 = 14,25 \text{ cm}^3.$$

$$T_y = \int x^2 \cdot ds = 3,7 \cdot 1,1^2 \cdot 2 + \frac{2,2^3}{12} = 9,85 \text{ m}^3.$$

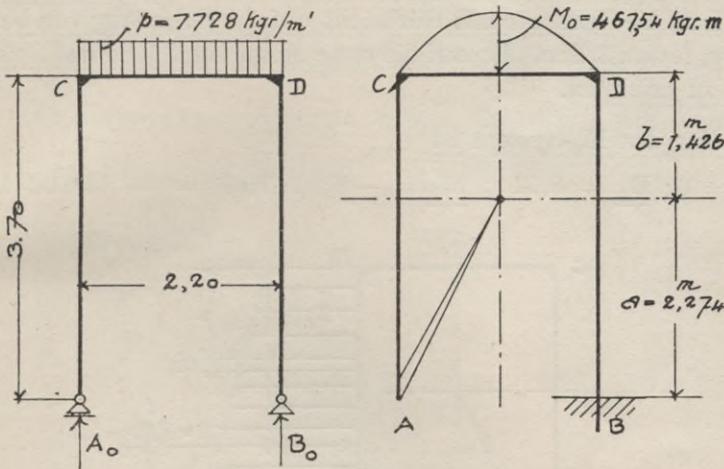


Abb. 198.

Demnach

$$X = \frac{S_x}{T_x} = \frac{9810}{14,25} = + 687 \text{ kg}$$

$$Y = \frac{S_y}{T_y} = 0$$

$$Z = -\frac{S}{T} = -\frac{6863,98}{9,6} = - 715 \text{ kgm.}$$

Mit den im Handbuch für Eisenbetonbau, Bd. IV, 1. Teil, S. 509, für diesen Spezialfall abgeleiteten Formeln lotrechter Belastung eines rechteckigen eingespannten Rahmens ergibt sich

$$X = \frac{g \cdot l^2}{8 \cdot s \cdot \left(1 + \frac{k}{2}\right)}, \text{ worin } k = \frac{s}{l}$$

$$X = \frac{7728 \cdot 2,2^2}{8 \cdot 3,7 \cdot \left(1 + \frac{3,7}{2 \cdot 2,2}\right)} = + 687 \text{ kg,}$$

$Y = 0$ und

$$Z = - \frac{g \cdot l^2}{12 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{s}{l}\right)} = - \frac{7728 \cdot 2,2^2}{12 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{3,7}{2,2}\right)} = - 715 \text{ kgm.}$$

b) Infolge der seitlichen Belastung (Abb. 199). Der Erddruck wirke zunächst nur auf einer Seite. Am Schluß haben wir dann die Momente mit Rücksicht auf die Belastung von beiden Seiten festzustellen, also auf die erste Momentenfläche das Spiegelbild zu zeichnen.

Für das M_0 -System ist

$$\underline{A_0 = 0}; \underline{B_0 = 8,94 \text{ t}}; \underline{M_B = - 8,94 \cdot 1,67 = - 14 \cdot 960 \text{ kgm.}}$$

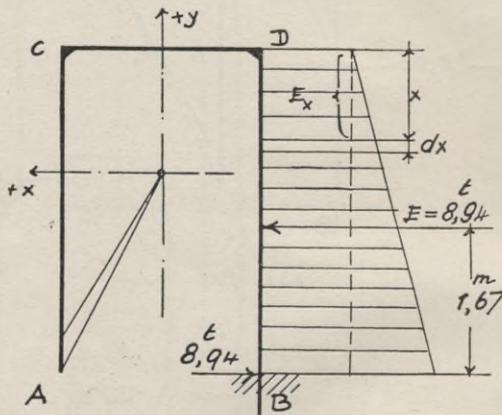


Abb. 199.

Zwecks Ermittlung der Momentenfläche und ihres Schwerpunktsabstandes von der x -Achse zerlegen wir uns die Trapezfläche und erhalten dann (Ab. 199):

Für das Rechteck

$$E_x = E \cdot \frac{x}{h}; \quad M_x = E \cdot \frac{x}{h} \cdot \frac{x}{2}$$

$$M_x \cdot dx = \frac{E \cdot x^2}{2 \cdot h} \cdot dx;$$

Momentenfläche

$$F_{01} = \frac{E}{2 \cdot h} \cdot \int_0^h x^2 \cdot dx = \frac{E \cdot h^2}{6}$$

Ebenso für das Dreieck

$$\underline{E_x = E \cdot \frac{x^2}{h^2}; M_x = \frac{E \cdot x^2}{h^2} \cdot \frac{x}{3}}$$

$$\underline{M_x \cdot dx = \frac{E \cdot x^3}{3 \cdot h^2} \cdot dx;}$$

Momentenfläche

$$\underline{F_{02} = \frac{E}{3 \cdot h^2} \cdot \int_0^h x^3 \cdot dx = \frac{E \cdot h^2}{12}}$$

Schwerpunktsabstände dieser Flächen von oben:

Für das Rechteck (Parabel): $\frac{2}{3} h$ (Abb. 201).

Für das Dreieck:

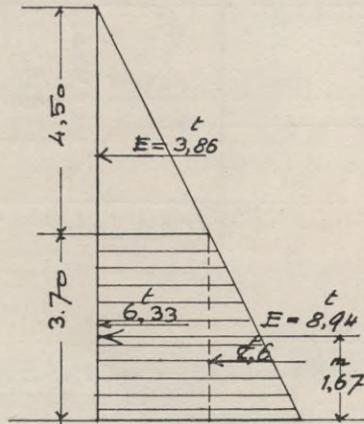


Abb. 200.

Statisches Moment der Fläche in bezug auf die Oberkante

$$\int_0^h \frac{E \cdot x^3}{3 \cdot h^2} \cdot dx \cdot x = \frac{E}{3 \cdot h^2} \cdot \int_0^h x^4 \cdot dx = \frac{E \cdot h^3}{15}$$

Dieses muß sein = Fläche \times Schwerpunktsabstand a:

$$\frac{E \cdot h^3}{15} = a \cdot \frac{E \cdot h^2}{12},$$

$$\text{woraus } \underline{a = \frac{12}{E \cdot h^2} \cdot \frac{E \cdot h^3}{15} = \frac{4}{5} \cdot h} \text{ (Abb. 201).}$$

Nach Abb. 200 beträgt nun der Erddruck der Dreiecksfläche

$$\underline{E = 3,86 \cdot \frac{3,70^2}{4,50^2} = 2,61 \text{ t}}$$

somit die durch ihn hervorgerufene Momentenfläche

$$F_{02} = \frac{E \cdot h^2}{12} = \frac{2,61 \cdot 3,7^2}{12} = 2,98 \text{ tm}^2.$$

Der Erddruck der Rechtecksfläche beträgt

$$E = 8,94 - 2,61 = 6,33 \text{ t}$$

und somit die Momentenfläche

$$F_{01} = \frac{E \cdot h^2}{6} = \frac{6,33 \cdot 3,7^2}{6} = 14,45 \text{ tm}^2.$$

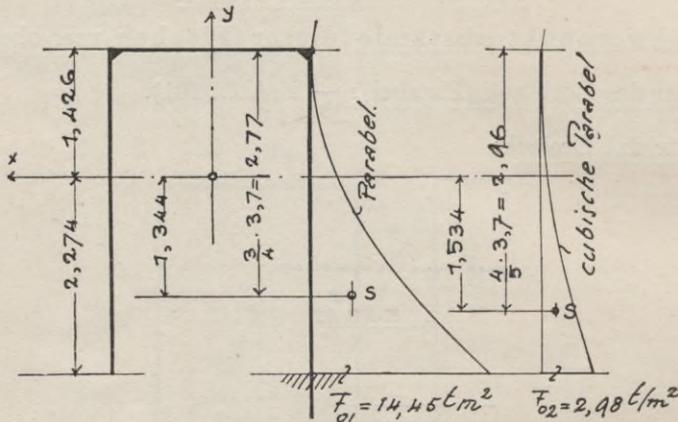


Abb. 201.

Gesamtmomentenfläche:

$$F_0 = F_{01} + F_{02} = -(2,98 + 14,45) = -17,43 \text{ tm}^2 = -17\,430 \text{ kgm}^2.$$

Mit den in Abb. 201 eingetragenen Abständen f_x wird dann:

$$S_x = F_0 \cdot f_x = -2,98 \cdot (-1,534) - 14,45 \cdot (-13,44) = +23,97 = 23\,970 \text{ kgm}^3$$

$$S_y = F_0 \cdot f_y = -17\,430 \cdot (-1,1) = +19,173 = 19\,173 \text{ kgm}^3.$$

Resultate:

$$X = \frac{S_x}{T_x} = \frac{23\,970}{14,25} = +1680 \text{ kg}$$

$$Y = \frac{S_y}{T_y} = \frac{19\,173}{9,85} = +1950 \text{ kg}$$

$$Z = -\frac{S}{T} = -\frac{-17430}{9,6} = +1820 \text{ kgm}.$$

Bestimmung der Momente. Die allgemeine, früher schon angegebene Grundgleichung für das Biegemoment an irgend-einer Stelle $x y$ ist

$$M = M_0 - X \cdot y - Y \cdot x + Z.$$

Für lotrechte Belastung:

$$\begin{aligned} M_A &= M_0 - X \cdot y - Y \cdot x + Z \\ &= 0 - 687 \cdot (-2,274) - 0 + (-715) = + 845 \text{ kgm} \end{aligned}$$

oder laut spezieller Gleichung (vgl. Handbuch):

$$\begin{aligned} M_A &= X \cdot z - Y \cdot \frac{1}{2} + Z \\ &= 687 \cdot 2,274 - 0 + (-715) = + 845 \text{ kgm.} \end{aligned}$$

$$M_B = M_A + Y \cdot l = 845 + 0 = + 845 \text{ kgm.}$$

$$\begin{aligned} M_C &= M_0 - X \cdot u - Y \cdot \frac{1}{2} + Z \\ &= 0 - 687 \cdot 1,426 - 0 + (-715) = - 1694,66 \text{ kgm.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_D &= M_0 - X \cdot u - Y \cdot \frac{1}{2} + Z \\ &= 0 - 687 \cdot 1,426 - 0 + (-715) = - 1694,66 \text{ kgm.} \end{aligned}$$

Für wagerechte Belastung:

$$\begin{aligned} M_A &= M_0 - X \cdot y - Y \cdot x + Z \\ &= 0 - 1680 \cdot (-2,274) - 1950 \cdot 1,1 + 1820 = + 3500 \text{ kgm.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_B &= M_0 - X \cdot z - Y \cdot \frac{1}{2} + Z \\ &= - 14\,960 - 1680 \cdot (-2,274) - 1950 \cdot (-1,1) + 1820 \\ &= - 7200 \text{ kgm.} \end{aligned}$$

Da nun gleichzeitig auf beiden Seiten der Erddruck wirkt,
so sind die endgültigen Momente

$$M_A = M_B = + 3500 - 7200 = - 3700 \text{ kgm.}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} M_C &= M_0 - X \cdot u - Y \cdot \frac{1}{2} + Z \\ &= 0 - 1680 \cdot 1,426 - 1950 \cdot 1,1 + 1820 = - 2720 \text{ kgm.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_D &= M_0 - X \cdot u - Y \cdot \frac{1}{2} + Z \\ &= 0 - 1680 \cdot 1,426 - 1950 \cdot (-1,1) + 1820 = + 1560 \text{ kgm.} \end{aligned}$$

also

$$M_C = M_D = - 2720 + 1560 = - 1160 \text{ kgm.}$$

Es betragen somit die endgültigen Eckmomente, da die lot-
rechte und wagerechte Belastung gleichzeitig vorhanden ist:

$$M_A = M_B = - 3700 + 845 = - 2855 \text{ kgm,}$$

$$M_C = M_D = - 1160 - 1694,66 = - 2854,66 \text{ kgm.}$$

Auftragung der endgültigen Momentenfläche.

Hierbei müssen wir uns daran erinnern, daß in die Momente $M_A = M_B$ schon das M_0 -Moment der wagerechten Belastung einbezogen ist. Wir wollen deshalb für M_A und M_B das M_0 -Moment wieder zuzählen, um lediglich dasjenige Moment zu erhalten, welches von den unbestimmten Größen herrührt.

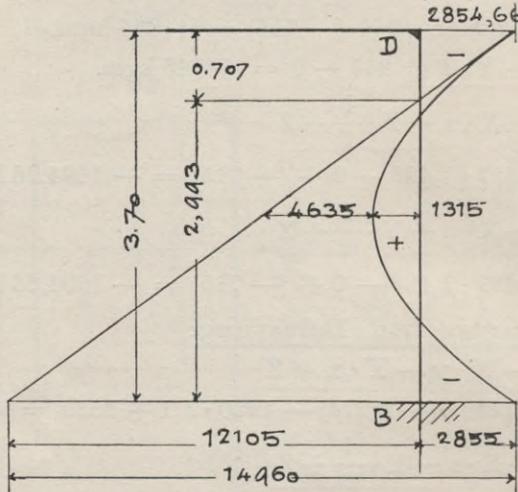


Abb. 202.

Dann wird

$$\underline{M_A = M_B} = -2855 + 14960 = +12105 \text{ kgm.}$$

Die M_0 -Fläche mit dem Größtmoment von 14960 kgm an der Einspannstelle ist nun zu der Momentenfläche, herrührend von den unbestimmten Größen, algebraisch zu addieren, d. h. wir haben die M_0 -Fläche an die schräge Linie (Abb. 202) anzutragen. Die M_0 -Momentenflächen der Decken- und Bodenplatte sind gewöhnliche Parabelflächen.

Deckenplatte:

$$\underline{M_0} = \frac{7728 \cdot 2,2^2}{8} = 4675,44 \text{ kgm.}$$

Bodenplatte: Hierbei ist erst die Baugrundbelastung festzustellen.

Das Gewicht der Deckenplatte, Wände, Aufschüttung und Nutzlast betrage per lfd. m Durchlaß = 24000 kg. Dieses Gewicht beansprucht die Bodenplatte, welche dasselbe gleichmäßig auf den Baugrund übertragen soll, auf Biegung, wobei das Eigengewicht

der Platte selbst für die Biegung herausfällt. Nehmen wir noch an, daß ein Wasserüberdruck von 0,50 m oberhalb der Bodenplatte, dem Grundwasserspiegel entsprechend, hinzukommt, so ergibt das noch $500 \cdot 2,44 = 1220$ kg; mithin Gesamtgewicht = 25 220 kg, wovon auf die Systembreite

$$25\,220 \cdot \frac{2,2}{2,44} = 22\,800 \text{ kg}$$

entfallen. Somit

$$M_0 = \frac{22\,800 \cdot 2,2}{8} = 6270 \text{ kgm.}$$

Diese M_0 -Momente mit den Eckmomenten vereinigt, gibt als Schlußresultat Abb. 203.

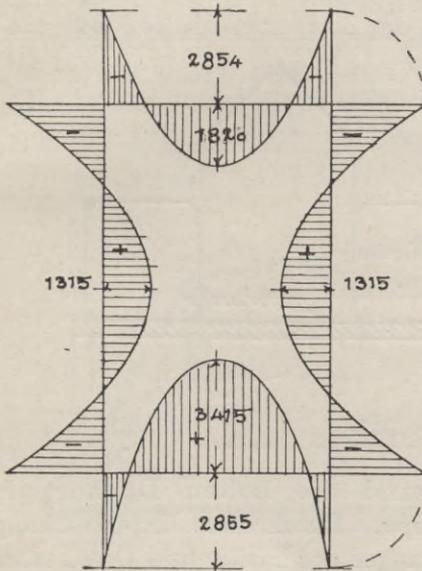


Abb. 203.

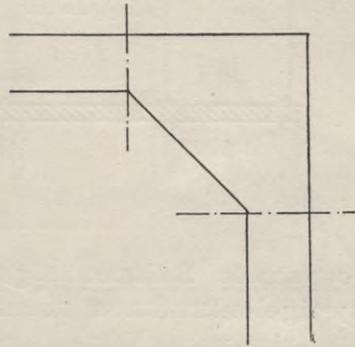


Abb. 204.

Die Dimensionierung des Rahmens hat mit dem in den Grundlagen¹⁾ gegebenen Verfahren für exzentrischen Druck zu erfolgen. An den Ecken empfiehlt sich in der Regel eine gute Verstärkung. Berechnet werden in der Nähe derselben nur die beiden in Abb. 204 angegebenen Querschnitte.

Wir haben hier die starre Einspannung voraussetzenden Ableitungen des eingespannten Rahmens verwandt. Die Bedingung wird annähernd erfüllt, wenn das Trägheitsmoment der Bodenplatte im Verhältnis zu denen der Wände und Decke reichlich groß ist (genau genommen soll $J_u \infty$ sein).

¹⁾ Schlüter, „Eisenbetonbau: Säule und Balken“ i. Verlage von Herm. Meußner-Berlin.

Kapitel XX.

Anwendbarkeit des eingespannten Rahmens.

Bei der in Abb. 205 dargestellten Konstruktion würde es verfehlt sein, als Träger der Stabilität die großen Hauptbinder zu wählen derart, daß sie etwa in der Kellerdecke eingespannt und an den Stellen der jetzigen Gelenke nur durch Riegel ausgesteift würden. Das Gebotene ist hier, die Zwischenbinder als ein-

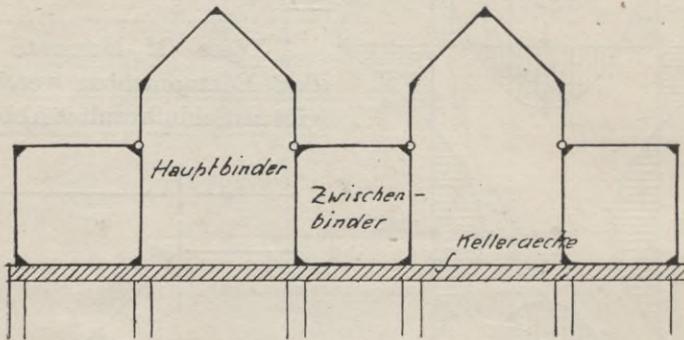


Abb. 205.

gespannte Rahmenträger und die hohen Dächer als Zweigelenkrahmen auszuführen. Durch diese Unterbrechung werden zu ungeschickte Abmessungen der Pfeiler und Dachbinder vermieden, die besonders ins Gewicht fallenden Windkräfte aber auf die in ihren Abmessungen verhältnismäßig kleinen rechteckigen Zwischenbinder übertragen, so daß die Stabilität des ganzen Gebäudes hauptsächlich auf deren Festigkeit und Steifigkeit beruht. Es leuchtet ein, daß es stets vorteilhaft sein muß, als Träger der Stabilität möglichst die kleinsten in einem Gebäude entwickelbaren Systeme zu wählen. Ein großer Vorteil ist ferner die Klarheit in der Berücksichtigung der Temperaturunterschiede, welche durch die Abtrennung des besonderen Temperatureinflüssen ausgesetzten Konstruktionsteils ermöglicht ist. Außerdem bietet die praktische Arbeitseinteilung, welche bei der Herstellung möglich ist, noch einen recht erheblichen Vorteil.

Wie schon im Kapitel XV hervorgehoben wurde, spielt in der Wirtschaftlichkeit eines eingespannten Rahmens der Einspannungsgrad eine wesentliche Rolle, so daß hier auf die dortigen Äußerungen noch einmal hingewiesen sein möge.

Kapitel XXI.

Berechnung eines dreistieligen Dachrahmens mit statisch unbestimmtem Hauptsystem (zweifach unbestimmt).

Einleitung.

Das System Abb. 206 soll als Rahmen mit 2 Fußgelenken bei A und B und einer Pendelstütze bei C ausgebildet werden. Als statisch unbestimmte Größen werden der Horizontalschub X_a und der Druck auf die Pendelstütze X_b eingeführt. Die Reaktionen P_1 bis P_4 der Pfetten ergeben einschließlich Eigengewicht des

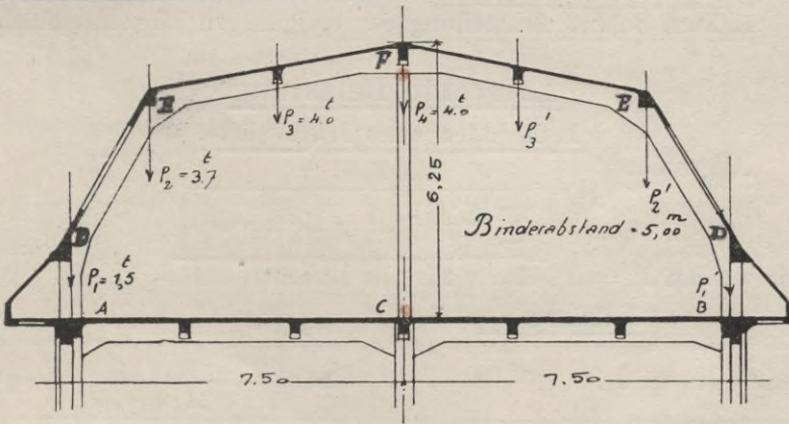


Abb. 206.

Rahmens nach überschlägiger Berechnung die in Abb. 206 eingeschriebenen Größen. Die Lasten P_1 und P_4 beanspruchen nur die Stützen A, B und C auf Druck und kommen also für die Rahmenberechnung nicht in Frage, da die Normalkräfte unberücksichtigt bleiben sollen (wohlgemerkt für den Rahmen an sich).

Die Berechnung des Rahmens ist so ausgeführt, daß das zweifach unbestimmte System zunächst auf ein einfach unbestimmtes zurückgeführt, und dieses dann zur Ermittlung von X_b als Hauptsystem angesehen wurde (sogenanntes Verfahren mit statisch unbestimmtem Hauptsystem).

Es mag hier gleich der ev. Meinung entgegengetreten werden, als könnte man beim Vorhandensein mehrerer statisch unbestimmter Größen eine nach der anderen ausrechnen. Das ist

unmöglich, da in jeder einzelnen Bestimmungsgleichung alle unbestimmten Größen zugleich auftreten. Das hier angegebene Verfahren hat mit dieser irrtümlichen Auffassung nichts zu tun; es eignet sich eigentlich auch nur für den Rahmen mit einer Mittelstütze. Die Berechnung könnte auch noch auf eine andere Weise erfolgen, welche besonders für mehrstielige Rahmen im Abschnitt II gegeben wird.

Die Berechnung erfolgt in folgenden 3 Abschnitten:

1. Bestimmung von X_a infolge der Lasten P_2 und P_3 für den Rahmen ohne Mittelstütze und der Momente hierfür.
2. Ermittlung von X_b .
3. Berechnung der endgültigen Größe von X_a und der lotrechten Auflagerreaktionen A und B im fertig zweifach unbestimmten System.
4. Zum Schluß Aufstellung der endgültigen Momentenfläche.

Lotrechte Belastung.

1. Rahmen ohne Mittelstütze.

Allgemein

$$H = \frac{\sum F_0 \cdot f \cdot v}{\sum \left[\frac{v \cdot s}{3} \cdot (H^2 + H \cdot h + h^2) \right]}$$

wir wählen $J_r = J_s$, also v für alle Rahmenteile = 1.

Nennergröße:

Stab	v	s	H	h	H ²	h ²	$\frac{\varphi}{H^2 + H \cdot h + h^2}$	s · φ
AD	1	1,5	1,5	0	2,25	0	2,25	3,38
DE	1	4,0	5,0	1,5	25,0	2,25	34,75	139,00
EF	1	5,6	6,0	5,0	36,0	25,0	91,0	509,00

$$\text{somit } N = \frac{2 \cdot 651,38}{3} = 434 \text{ m}^3.$$

651,38

3

Zählergröße:

Stab	v	F_0	f	$v \cdot F_0 \cdot f$
AD	1	0	0	
DE	1	$\frac{1}{2} \cdot 4,0 \cdot 15,4 = 30,8$	$1,5 + 3,5 \cdot \frac{2}{3} = 3,83$	118
EF	1	$15,4 \cdot 2,8 = 43,2$	5,25	226
		$26,4 \cdot 2,8 = 74,0$	5,75	425
		$\frac{11 \cdot 2,8}{2} = 15,4$	$5,00 + 0,50 \cdot \frac{2}{3} = 5,33$	82

$$\text{somit } \sum F_0 \cdot f \cdot v = 2 \cdot 851 = 1702 \text{ tm}^3.$$

851

woraus

$$X_a = \frac{\int \frac{M_a \cdot M_0 \cdot ds}{E \cdot J}}{\int \frac{M_a^2 \cdot ds}{E \cdot J}}$$

oder auch mit E und J konstant

$$X_a = \frac{\int M_a \cdot M_0 \cdot ds}{\int M_a^2 \cdot ds}$$

Oder wir setzen von vornherein

$$M = M_0 - X_a \cdot y \text{ und } M_a = -y \quad \left(\frac{dM}{dX_a} = -y \right)$$

und erhielten damit

$$0 = \int \frac{(-y) \cdot (M_0 - X_a \cdot y) \cdot ds}{E \cdot J}$$

$$0 = - \int \frac{M_0 \cdot y \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{X_a \cdot y^2 \cdot ds}{E \cdot J}$$

Für konstantes E und multipliziert mit J_m , wobei $\frac{J_m}{J} = v$,

erhielten wir:

$$0 \cdot E \cdot J_m = - \int v \cdot M_0 \cdot y \cdot ds + X_a \cdot \int v \cdot y^2 \cdot ds,$$

woraus

$$X_a = H = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot ds \cdot v}{\int y^2 \cdot v \cdot ds} = \frac{\Sigma F_0 \cdot f \cdot v}{\Sigma \frac{v \cdot s}{3} \cdot (H^2 + H \cdot h + h^2)}$$

Mit diesen Formeln haben wir bisher den Zweigelenkrahmen behandelt, und wir betrachten von nun ab die zuletzt gewonnene Momentenfläche als M_0 -Fläche. Somit erhalten wir ganz analog wie vorher

$$0 = \int \frac{M_b \cdot M \cdot ds}{E \cdot J} = \int \frac{M_b \cdot (M_0 - M_b \cdot X_b) \cdot ds}{E \cdot J}$$

$$0 = \int \frac{M_b \cdot M_0 \cdot ds}{E \cdot J} - X_b \cdot \int \frac{M_b^2 \cdot ds}{E \cdot J}$$

und daraus

$$X_b = \frac{\int \frac{M_b \cdot M_0 \cdot ds}{E \cdot J}}{\int \frac{M_b^2 \cdot ds}{E \cdot J}} \text{ oder auch } = \frac{\int M_b \cdot M_0 \cdot ds}{\int M_b^2 \cdot ds}$$

Es ist nun nicht möglich, für diese Gleichung von X_b in ähnlicher Weise eine geometrisch gedeutete Schlußformel zu finden wie für X_a ; wir müssen vielmehr die Integrale der letzten Formel aufs neue auswerten und zum Schluß bedenken, daß das wirkliche Moment

$$M = M_0 - M_b \cdot X_b$$

beträgt, und daß auch die wirkliche Auflagerreaktion

$$A = A_0 - A_b \cdot X_b$$

und schließlich der wirkliche Schub

$$H = H_0 - H_b \cdot X_b$$

wird.

M_b , A_b und X_b beziehen sich in diesen Gleichungen auf den Zustand $X_b = -1$.

Der Nenner dürfte keine Schwierigkeiten bieten.

b) Belastung mit $X_b = -1$.

Wir belasten jetzt das System mit $X_b = -1$, wodurch + -Momentenflächen entstehen, und in der Gleichung $M = M_0 - M_b \cdot X_b$ das zweite Glied auf der rechten Seite sich tatsächlich abzieht, was dem Sinne entspricht, daß die Momente infolge der Mittelstütze verringert werden.

Schreibt man die Gleichung $M = M_0 + M_b \cdot X_b$, so bedeutet das + -Zeichen algebraisch eine Subtraktion, und wir müßten, um praktisch dasselbe Resultat zu erreichen, die Fläche für $X_b = +1$ zeichnen, was negative Momente ergeben würde.

Wir erhalten (Abb. 208):

$$A_b = B_b = \frac{1}{2}; M_D = 0;$$

$$M_E = + \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,0 \text{ mt};$$

$$M_F = + \frac{1}{2} \cdot 7,5 = 3,75 \text{ mt};$$

$$F_{01} = + \frac{1}{2} \cdot 4,0 \cdot 1,0 = 2 \text{ tm}^2;$$

$$F_{02} = + 1 \cdot 5,6 = 5,6 \text{ tm}^2;$$

$$F_{03} = + \frac{1}{2} \cdot 5,6 \cdot 2,75 = 7,7 \text{ tm}^2;$$

$$f_{01} = 1,50 + \frac{2}{3} \cdot 3,50 = 3,83 \text{ m};$$

$$f_{02} = 5,50 \text{ m}; \quad f_{03} = 5,0 + \frac{2}{3} \cdot 1 = 5,66 \text{ m}.$$

$\Sigma F_0 \cdot f = 2 \cdot (2,0 \cdot 3,83 + 5,6 \cdot 5,5 + 7,7 \cdot 5,66) = 163,92 \text{ tm}^3$,
somit

$$X_{a1} = \frac{163,92}{434} = + 0,378 \text{ t}.$$

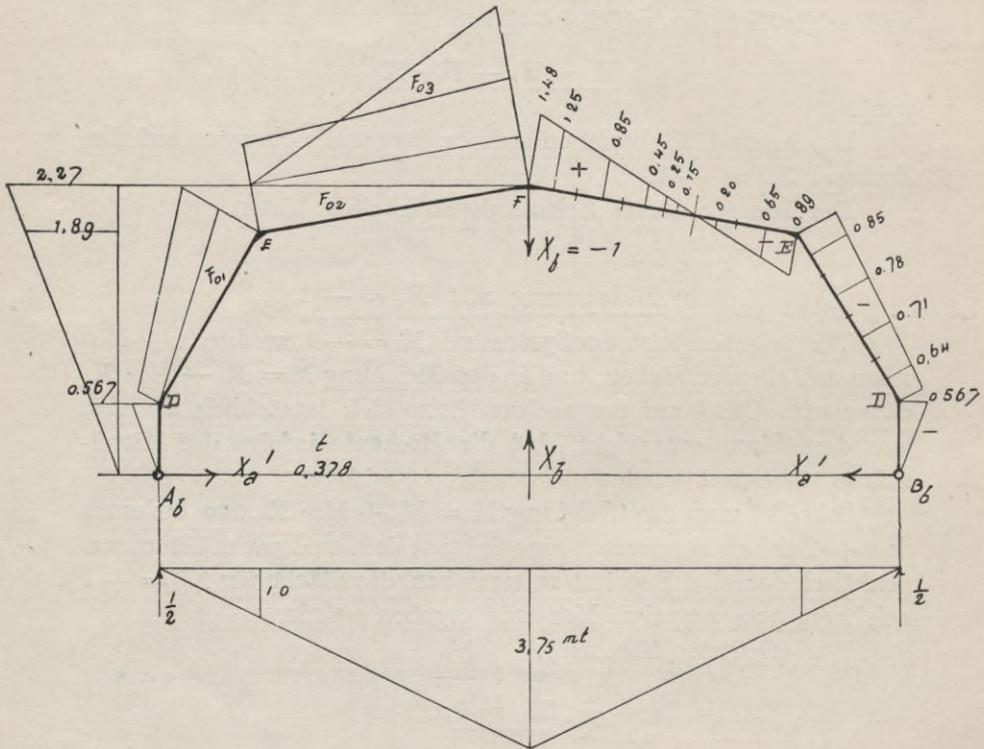


Abb. 208.

Also infolge der Belastung $X_b = -1$ entstehen die lotrechten Reaktionen $+\frac{1}{2}$ und der Horizontalschub $X_{a1} = +0,378$ t, ferner die Momente

$$M_D = -0,378 \cdot 1,5 = -0,567 \text{ mt}$$

$$M_E = -0,378 \cdot 5,0 = -1,89 \text{ ,,}$$

$$M_F = -0,378 \cdot 6,0 = -2,27 \text{ ,,}$$

Die resultierende Momentenfläche für diesen Belastungszustand ist auf der rechten Seite des Stabzuges (Abb. 208) aufgetragen.

c) Auswertung der Bestimmungsgleichung.

Nach diesen zwei Schritten haben wir nun die oben gegebene Bestimmungsgleichung

$$X_b = \frac{\int M_0 \cdot M_b \cdot ds}{\int M_b^2 \cdot ds}$$

auszuwerten.

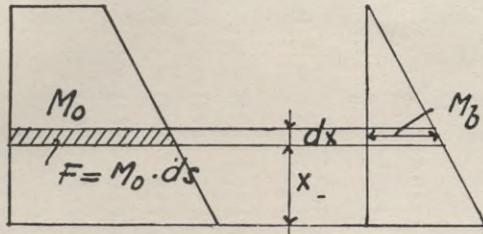


Abb. 209.

Die unter dem Integral stehenden Momente M_0 des statisch unbestimmten Hauptsystems und M_b desselben für die Belastung $X_b = -1$ haben wir in den vorhergehenden Schritten gewonnen. Der Zähler der Gleichung besagt nun, daß die Summe aus allen Produkten $M_0 \cdot M_b \cdot ds$ gebildet werden soll. Angenähert bedeutet das:

Es soll die Summe aller Produkte gebildet werden aus einerseits einem Flächenstreifen $M_0 \cdot ds$ und andererseits dem in demselben Flächenelement wirkenden M_b (Abb. 209). Diese Arbeit geschieht in der nachfolgenden Tabelle (S. 208) nach der Formel

$$X_b = \frac{\sum M_0 \cdot M_b \cdot \Delta x}{\sum M_b^2 \cdot \Delta x},$$

welche eine Annäherung zu der obigen Formel darstellt, und wobei man die zugehörigen Δx entsprechend der Einteilung nimmt, die wir in Abb. 207 durch die Buchstaben F, O, N, M, L, K, E, J, H, G, D gekennzeichnet haben. Natürlich führt man überall dort, wo eine Integration keine Schwierigkeiten macht, diese durch.

Nach der Tabelle ergibt sich:

$$X_b = \frac{27,31}{5,445} = \text{rd. } 5,0 \text{ t.}$$

Stab	s, in m	M_0	M_b	$\int M_0 \cdot M_b \cdot dx$	$\int M_b^2 \cdot dx$
Δ 1 BD	1,50	$M_x = -5,85 \cdot \frac{x}{1,5}$	$M_x = -0,567 \cdot \frac{x}{1,5}$	$+ \int_0^{1,5} \frac{5,85 \cdot x}{1,50} \cdot \frac{0,567 \cdot x}{1,50} \cdot dx$ $= + \frac{5,85 \cdot 0,567}{1,50^2} \cdot \int_0^{1,5} x^2 \cdot dx$ $= 1,475 \cdot \frac{1,5^3}{3} = + 1,66 = 0,1425 \cdot \frac{1,5^3}{3} = + 0,161$	$+ \int_0^{1,5} \left(\frac{0,567}{1,5} \right)^2 \cdot x^2 \cdot dx$ $= + \frac{0,567^2}{1,5^2} \cdot \int_0^{1,5} x^2 \cdot dx$
Δ 2 DG	1,0	- 5,7	- 0,64	$1 \cdot (-5,7) \cdot (-0,64) = + 3,65$	$1 \cdot (-0,64)^2 = + 0,410$
Δ 3 GH	1,0	- 5,2	- 0,71	$1 \cdot (-5,2) \cdot (-0,71) = + 3,70$	$1 \cdot (-0,71)^2 = + 0,505$
Δ 4 HJ	1,0	- 4,7	- 0,78	$1 \cdot (-4,7) \cdot (-0,78) = + 3,66$	$1 \cdot (-0,78)^2 = + 0,608$
Δ 5 JE	1,0	- 4,2	- 0,85	$1 \cdot (-4,2) \cdot (-0,85) = + 3,57$	$1 \cdot (-0,85)^2 = + 0,722$
Δ 6 EK	1,3	- 2,0	- 0,65	$1,3 \cdot (-2,0) \cdot (-0,65) = + 1,69$	$1,3 \cdot (-0,65)^2 = + 0,548$
Δ 7 KL	0,90	+ 1,5	- 0,20	$0,9 \cdot 1,5 \cdot (-0,20) = - 0,27$	$0,9 \cdot (-0,2)^2 = + 0,036$
Δ 8 LM	0,60	+ 4,0	+ 0,15	$0,6 \cdot 4,0 \cdot 0,15 = + 0,36$	$0,6 \cdot 0,15^2 = + 0,013$
Δ 6 MN	0,80	+ 4,7	+ 0,45	$0,8 \cdot 4,7 \cdot 0,45 = + 1,69$	$0,8 \cdot 0,45^2 = + 0,162$
Δ 10 NO	1,0	+ 4,0	+ 0,85	$1,0 \cdot 4,0 \cdot 0,85 = + 3,48$	$1,0 \cdot 0,85^2 = + 0,720$
Δ 11 OF	1,0	+ 3,3	+ 1,25	$1,0 \cdot 3,3 \cdot 1,25 = + 4,12$	$1,0 \cdot 1,25^2 = + 1,560$
				$\int M_0 \cdot M_b \cdot dx = + 27,31$	$\int M_b^2 \cdot dx = + 5,445$

3. Endgültige Größe von X_a und der lotrechten Auflagerreaktionen A u. B (vgl. Abb. 210).

Mit diesem Stützendruck X_b ergeben sich alle endgültigen Größen, die ja, wie bekannt, nicht nur von X_a , sondern auch von X_b abhängen, wie folgt:

$$\underline{X_a} = 3,9 - 0,378 \cdot 5,0 = + \underline{2,0 \text{ t.}}$$

$$\underline{A} = \underline{B} = 7,70 - \frac{1}{2} \cdot 5,0 = \underline{5,2 \text{ t.}}$$

Das Minuszeichen deswegen, weil der Stützendruck X_b die umgekehrten Reaktionen hervorrufen muß wie die Belastung.

$$\underline{M_D} = - 5,85 - (- 0,567 \cdot 5,0) = - 3,0 \text{ mt}$$

$$\underline{M_E} = - 4,0 - (- 0,89 \cdot 5,0) = + 0,45 \text{ ,,}$$

$$\underline{M_M} = + 5,0 - (0,25 \cdot 5,0) = + 3,75 \text{ ,,}$$

$$\underline{M_F} = + 3,0 - (1,48 \cdot 5,0) = - 4,40 \text{ ,,}$$

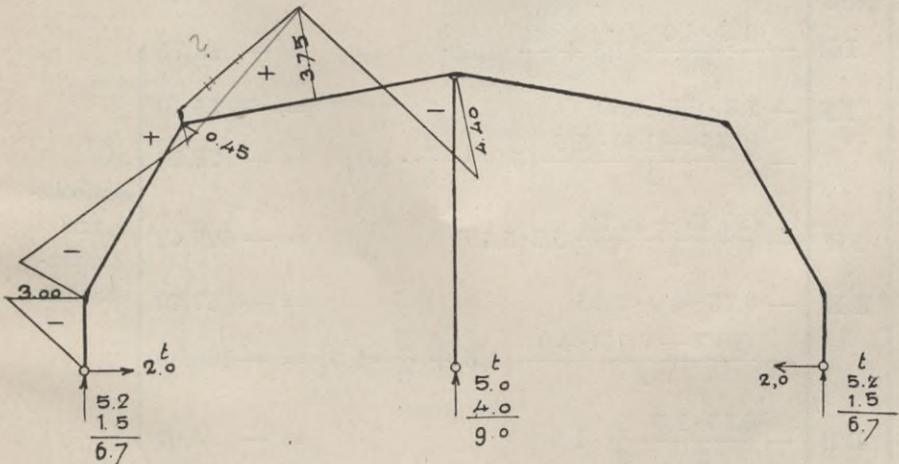


Abb. 210.

4. Endgültige Momentenfläche.

In Abb. 210 sind die endgültigen Reaktionen und Momentenflächen für die lotrechte Belastung dargestellt. Wir können jetzt zur Probe für einen beliebigen Punkt der Rahmenachse die Momentengleichung links oder rechts vom Schnitt aufstellen und müssen das soeben erhaltene Moment herausbekommen. Es ergibt sich für Punkt F:

$$\underline{M_F} = 5,2 \cdot 7,5 - 3,7 \cdot 5,5 - 4,0 \cdot 2,75 - 2,0 \cdot 6,0 = - 4,4 \text{ mt.}$$

Wagerechte Belastung.

Wagerechter Winddruck von 150 kg/m² bei 5 m Binderentfernung. Abb. 211 stellt die M_0 -Fläche für den Rahmen ohne Mittelstütze dar.

Der Nenner bleibt wie vor $N = 434 \text{ m}^3$.

Bildung des Zählergliedes:

Stab				
AD	$-\frac{0,75}{8} \cdot (1,5^4 - 0,0^4) \cdot \frac{1,0}{1,0}$	$= -$	$0,47$	} Parabelstücke
DE	$-\frac{0,75}{8} \cdot (5,0^4 - 1,5^4) \cdot \frac{4,0}{3,5}$	$= -$	$66,40$	
EF	$-\frac{0,75}{8} \cdot (6,0^4 - 5,0^4) \cdot \frac{5,6}{1,0}$	$= -$	$352,00$	
Stab				
DE	$-\frac{1,8 \cdot 4,0}{2} \cdot \left(1,5 + \frac{2}{3} \cdot 3,50\right)$	$= -$	$13,75$	} Dreiecks- und Trapezflächen
EF	$-\frac{6,75 - 1,8}{2} \cdot 5,6 \cdot 5,50$	$= -$	$55,40$	
	$-\frac{(6,75 - 1,8) \cdot 5,6}{2} \cdot \left(5,0 + \frac{2}{3} \cdot 1,0\right)$	$= -$	$78,20$	
FE'	$-\frac{(20,25 + 20,7)}{2} \cdot 5,6 \cdot 5,49$	$= -$	$629,42$	
E'D'	$-\frac{20,7 - 6,75}{2} \cdot 4,0 \cdot 3,25$	$= -$	$87,70$	
	$-\frac{(20,7 - 6,75) \cdot 4,0}{2} \cdot \left(1,5 + \frac{2}{3} \cdot 3,5\right)$	$= -$	$106,80$	
D'B	$-\frac{6,75 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5$	$= -$	$5,07$	
			$\Sigma F_0 \cdot f \cdot v = -$	$1395,51 \text{ tm}^3$

Demnach

$$\underline{H_w} = - \frac{1395,51}{434} = - 3,22 \text{ t.}$$

(NB.: Weiter gerechnet wird mit dem Wert $H_w = - 3,15 \text{ t}$, welchen zuerst eine Berechnung vermittels Rechenschieber ergeben hatte.)

In Abb. 212 ist die hiermit erhaltene Momentenfläche mit der M_0 -Fläche kombiniert und in Abb. 213 in einem größeren Maßstab auf die Rahmenachse übertragen.

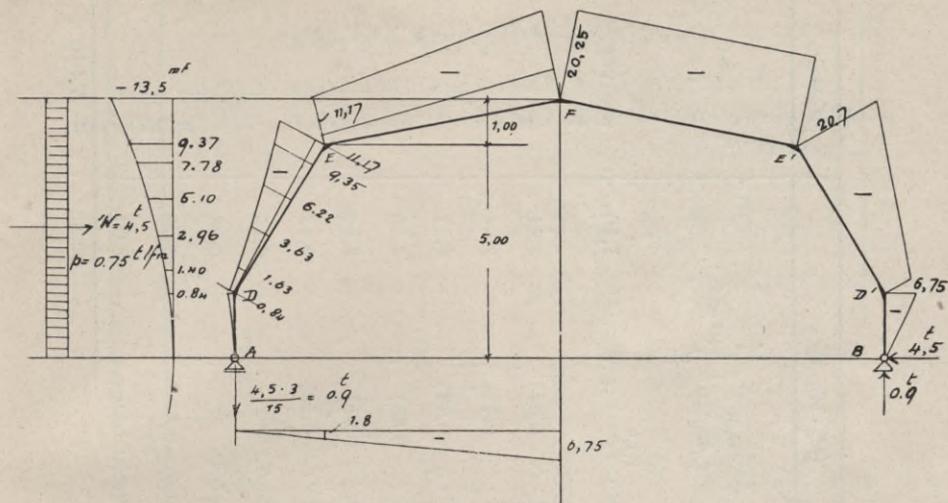


Abb. 211.

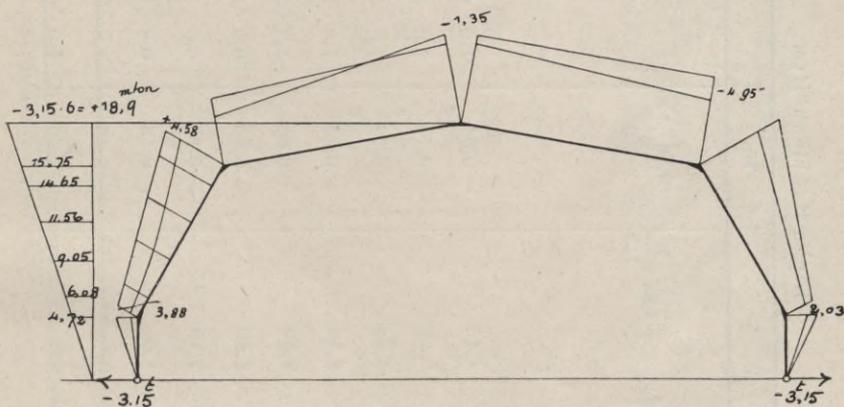


Abb. 212.

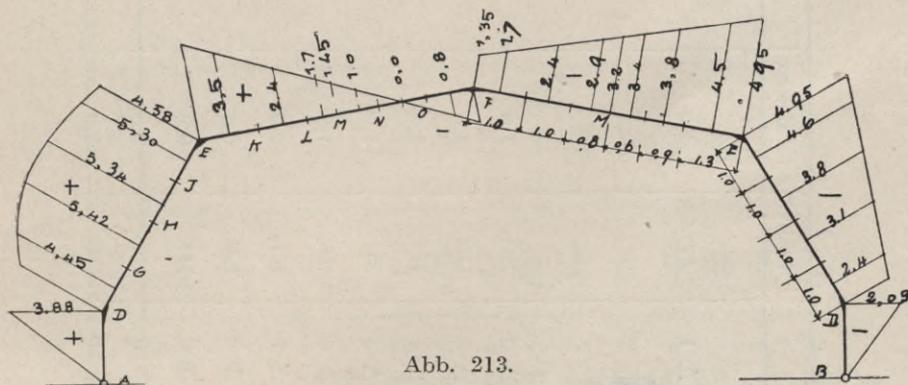


Abb. 213.

Linke Rahmehälfte.

	Stab	s in Metern	M_0	M_b	$\int M_0 \cdot M_b \cdot dx$	$\int M_b^2 \cdot dx$
Δ 1	AD	1,5	$M_x = + 3,88 \cdot \frac{x}{1,5}$	$\frac{0,567 \cdot x}{1,5}$	$-\frac{3,88 \cdot 0,567}{1,5^2} \cdot \int_0^{1,5} x^2 \cdot dx$	
Δ 2	DG	1,0	+ 4,45	- 0,64	$= - 0,98 \cdot \frac{1,5^3}{3} \dots = - 1,10$	wie vor
Δ 3	GH	1,0	+ 5,42	- 0,71	$1,0 \cdot 4,45 \cdot (- 0,64) \dots = - 2,84$	
Δ 4	HJ	1,0	+ 5,34	- 0,78	$1,0 \cdot 5,42 \cdot (- 0,71) \dots = - 3,84$	
Δ 5	JE	1,0	+ 5,30	- 0,85	$1,0 \cdot 5,34 \cdot (- 0,78) \dots = - 4,17$	
Δ 6	EK	1,3	+ 3,50	- 0,65	$1,0 \cdot 5,3 \cdot (- 0,85) \dots = - 4,50$	
Δ 7	KL	0,9	+ 2,40	- 0,20	$1,3 \cdot 3,5 \cdot (- 0,65) \dots = - 2,95$	
Δ 8	LM	0,6	+ 1,70	+ 0,15	$0,9 \cdot 2,40 \cdot (- 0,20) \dots = - 0,43$	
Δ 9	MN	0,8	+ 1,0	+ 0,45	$0,6 \cdot 1,70 \cdot 0,15 \dots = + 0,15$	
Δ 10	NO	1,0	$\pm 0,0$	+ 0,85	$0,8 \cdot 1,0 \cdot 0,45 \dots = + 0,36$	
Δ 11	OF	1,0	- 0,8	+ 1,25	$1,0 \cdot (\pm 0,0) \cdot 0,85 \dots = \pm 0,00$	
					$1,0 \cdot (- 0,8) \cdot 1,25 \dots = - 1,00$	
					- 20,32	+ 5,445

Rechte Rahmenhälfte

	Stab	s in Meter	M ₀	M _b	$\int M_0 \cdot M_b \cdot dx$	$\int M_b^2 \cdot dx$
Δ 1	BD'	1,5	$M_x = -2,03 \cdot \frac{x}{1,5}$	$\frac{0,567 \cdot x}{1,5}$	$+ \frac{2,03 \cdot 0,567}{1,5^2} \int_0^{1,5} x^2 \cdot dx$	
					$= + 0,51 \cdot \frac{1,5^3}{3}$	wie vor
Δ 2	D'G'	1,0	- 2,4	- 0,64	$1,0 \cdot (-2,4) \cdot (-0,64) = + 1,53$	
Δ 3	G'H'	1,0	- 3,1	- 0,71	$1,0 \cdot (-3,1) \cdot (-0,71) = + 2,20$	
Δ 4	H'J'	1,0	- 3,8	- 0,78	$1,0 \cdot (-3,8) \cdot (-0,78) = + 2,96$	
Δ 5	J'E'	1,0	- 4,6	- 0,85	$1,0 \cdot (-4,6) \cdot (-0,85) = + 3,91$	
Δ 6	E'K'	1,3	- 4,5	- 0,65	$1,3 \cdot (-4,5) \cdot (-0,65) = + 3,80$	
Δ 7	K'L'	0,9	- 3,8	- 0,20	$0,9 \cdot (-3,8) \cdot (-0,20) = + 0,68$	
Δ 8	L'M'	0,6	- 3,4	+ 0,15	$0,6 \cdot (-3,4) \cdot 0,15 = - 0,30$	
Δ 9	M'N'	0,8	- 2,9	+ 0,45	$0,8 \cdot (-2,9) \cdot 0,45 = - 1,04$	
Δ 10	N'O'	1,0	- 2,4	+ 0,85	$1,0 \cdot (-2,4) \cdot 0,85 = - 2,04$	
Δ 11	O'F	1,0	- 1,7	+ 1,25	$1,0 \cdot (-1,7) \cdot 1,25 = - 2,12$	
					$+ 10,15$	$+ 5,445$

Diese Momentenfläche betrachten wir nun wieder als M_0 -Fläche zur Bestimmung von X_b nach der Gleichung

$$X_b = \frac{\int M_0 \cdot M_b \cdot ds}{\int M_b^2 \cdot ds}$$

$\int M_b^2 \cdot ds$ wurde in der vorhergehenden Tabelle schon berechnet und ergab $+ 5,445$.

Bildung des Zählergliedes (NB.: Man wird sich die Rechnung wesentlich abkürzen können, wenn man die Anzahl der Teilstücke geringer annimmt; allerdings leidet darunter die Genauigkeit):

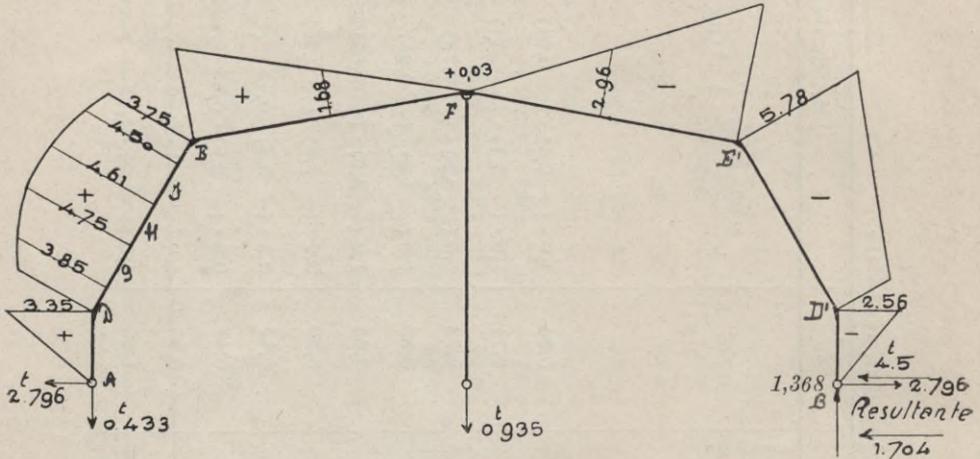


Abb. 214.

Somit

$$\int M_0 \cdot M_b \cdot dx = -20,32 + 10,15 = -10,17$$

$$\int M_b^2 \cdot dx = +5,445 + 5,445 = +10,890,$$

und wir erhalten für

$$X_{bw} = \frac{-10,17}{10,89} = -0,935 \text{ t.}$$

Hiermit ergeben sich folgende endgültigen Größen (Abb. 214):

$$X_{aw} = -3,15 - [0,378 \cdot (-0,935)] = -2,796 \text{ t}$$

$$X_{bw} = 4,50 - 2,796 = -1,704 \text{ t}$$

$$A_w = -0,90 - \frac{1}{2} \cdot (-0,935) = -0,433 \text{ t}$$

$$B_w = +0,90 - \frac{1}{2} \cdot (-0,935) = +1,368 \text{ t,}$$

so daß die rechte Reaktion $+ 1,368 \text{ t}$ der linken und mittleren mit $-0,433 - 0,935 = -1,368$ das Gleichgewicht hält.

$$\begin{aligned}
 M_D &= + 3,88 - (-0,567) (-0,935) = + 3,35 \text{ mt} \\
 M_{D'} &= - 2,03 - (-0,567) \cdot (-0,935) = - 2,56 \text{ ,,} \\
 M_E &= + 4,58 - (-0,89) (-0,935) = + 3,75 \text{ ,,} \\
 M_{E'} &= - 4,95 - (-0,89) (-0,935) = - 5,78 \text{ ,,} \\
 M_M &= + 1,45 - 0,25 \cdot (-0,935) = + 1,68 \text{ ,,} \\
 M_{M'} &= - 3,2 - 0,25 \cdot (-0,935) = - 2,96 \text{ ,,} \\
 M_F &= - 1,35 - 1,48 \cdot (-0,935) = + 0,03 \text{ ,,} \\
 M_{DG} &= + 4,45 - (-0,64) \cdot (-0,935) = + 3,85 \text{ ,,} \\
 M_{GH} &= + 5,42 - (-0,71) \cdot (-0,935) = + 4,75 \text{ ,,} \\
 M_{HI} &= + 5,34 - (-0,78) \cdot (-0,935) = + 4,61 \text{ ,,} \\
 M_{JE} &= + 5,30 - (-0,85) \cdot (-0,935) = + 4,50 \text{ ,,}
 \end{aligned}$$

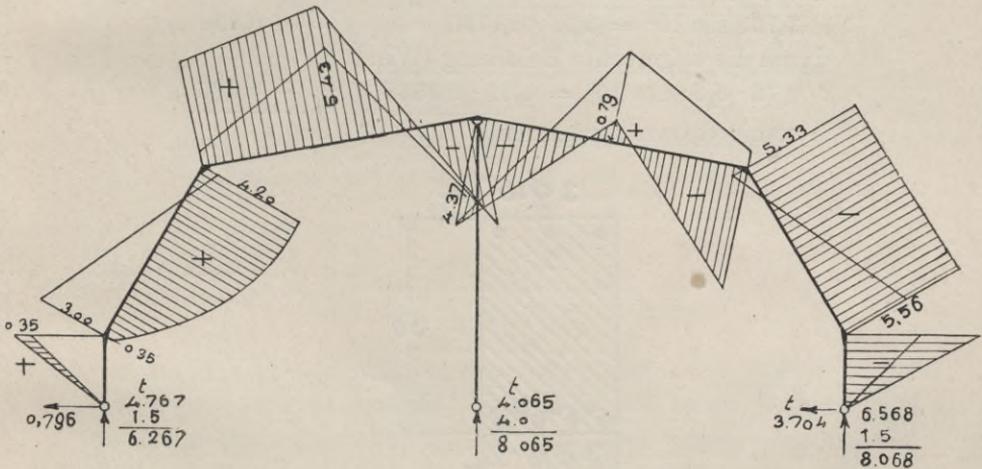


Abb. 215.

Die Richtigkeit der Rechnung wird erprobt durch eine Nachrechnung der Momente lediglich mit den Reaktionen und direkten Lasten; so wird z. B.:

$$M_E = + 2,796 \cdot 5,0 - 0,433 \cdot 2,0 - 0,75 \cdot \frac{5,0^2}{2} \cong 3,75 \text{ tm}$$

$$M_{E'} = - 1,704 \cdot 5,0 + 1,368 \cdot 2,0 = - 5,78 \text{ mt}$$

$$M_F \text{ (von rechts)} = - 1,704 \cdot 5,0 + 1,368 \cdot 7,50 \cong + 0,03 \text{ mt.}$$

In Abb. 214 sind diese Größen dargestellt und in Abb. 215 mit den durch die lotrechte Belastung hervorgerufenen kombiniert.

Dimensionierung.

a) Für den Riegel EF bzw. E'F tritt das größte Biegemoment im Punkte M (unter der Einzellast) auf und beträgt + 5,43 mt. Um die in diesem Querschnitt auftretende Normalkraft zu erhalten, müssen wir alle vor diesem Schnitt wirkenden Kräfte in die Längs- und Querrichtung des betreffenden Stabes zerlegen (Längs- und Querkraft).

Wir erhalten:

durch die Reaktion A

$$4,767 \cdot \sin 10^\circ = 4,767 \cdot 0,1736 = + 0,825 \text{ t}$$

durch den Horizontalschub H

$$0,796 \cdot \cos 10^\circ = 0,796 \cdot 0,9848 = - 0,785 \text{ ,,}$$

durch die lotrechte Belastung P_2

$$3,75 \cdot \sin 10^\circ = 3,75 \cdot 0,1736 = - 0,650 \text{ ,,}$$

durch die wagerechte Belastung (Wind)

$$0,75 \cdot 5,5 \cdot \cos 10^\circ = 4,12 \cdot 0,9848 = + 4,060 \text{ ,,}$$

$$\text{somit Gesamtnormaldruck } N = + 3,450 \text{ t}$$

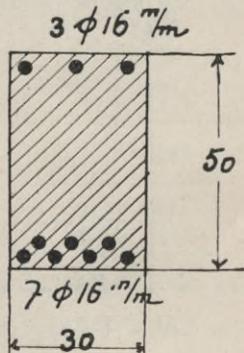


Abb. 216.

Exzentrizität

$$p = \frac{M}{N} = \frac{5,43}{3,450} = 1,57 \text{ m.}$$

Da nun je nach Art der Belastung auch auf der Außenseite des Riegels Zug auftreten kann, so ist eine doppelte Armierung erforderlich. Zugrunde gelegt sei der in Abb. 216 gegebene Querschnitt mit 7 ϕ 16 mm auf der Innen- und 3 ϕ 16 mm auf der Außenseite.

x berechnet sich nach der kubischen Gleichung¹⁾ zu rund 20,3 cm, somit

¹⁾ Schlüter, Eisenbetonbau Säule und Balken, Kap. XVI.

$$\underline{\sigma_b} = \frac{3450}{\frac{30 \cdot 20,3}{2} + 15 \cdot 6,03 \cdot \frac{16,3}{20,3} - 15 \cdot 14,07 \cdot \frac{25,7}{20,3}} = 31,5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\underline{\sigma_e} = 15 \cdot 31,5 \cdot \frac{25,7}{20,3} = 600 \text{ kg/cm}^2$$

$$\underline{\sigma_e'} = 15 \cdot 31,5 \cdot \frac{16,3}{20,3} = 380 \text{ kg/cm}^2.$$

b) Für den Riegel DE bzw. D'E' beträgt das größte Biegemoment — 5,56 mt, und zwar direkt auf der Ecke. Nun werden aber in der Regel diese Ecken immer etwas verstärkt, weshalb wir hier den eigentlichen Riegelquerschnitt im Abstand von 80—100 cm von der Ecke entfernt der Berechnung zugrunde legen; das Moment beträgt dort rund — 5,5 mt.

Als Normaldruck für diesen Rahmenteil ergibt sich:

durch die Reaktion B

$$6,568 \cdot \sin 60^\circ = 6,568 \cdot 0,866 = + 5,75 \text{ t}$$

durch den Horizontalschub H

$$3,704 \cdot \cos 60^\circ = 3,704 \cdot 0,5 = + 1,85 \text{ ,,}$$

$$\underline{\text{Gesamt-N}} = + 7,60 \text{ t}$$

Exzentrizität

$$p = \frac{M}{N} = \frac{5,50}{7,60} = 0,725 \text{ m.}$$

Da das größte positive Biegemoment für diesen Riegel den Wert + 4,5 mt erreicht, so wählen wir unter Beibehaltung desselben Betonquerschnittes wie oben beide Eiseneinlagen gleich groß, also $f_e = f_e' = 7 \text{ } \ominus \text{ } 16 \text{ mm.}$ x beträgt rund 20,2 cm, demnach

$$\underline{\sigma_b} = \frac{7600}{\frac{30 \cdot 20,2}{2} + \frac{15 \cdot 14,07}{20,2} \cdot (40,4 - 50)} = 38 \text{ kg/cm}^2$$

$$\underline{\sigma_e} = 15 \cdot 38 \cdot \frac{25,8}{20,2} = 730 \text{ kg/cm}^2$$

$$\underline{\sigma_e'} = 15 \cdot 38 \cdot \frac{16,2}{20,2} = 456 \text{ kg/cm}^2.$$

c) Für die Pfosten AD bzw. BD' beträgt das größte Biegemoment im Abstand von 50 cm vom Punkte D' etwa — 3,6 mt und der Normaldruck $N = + 8,068 \text{ t.}$ Praktischerweise wählen wir denselben Querschnitt wie für den Riegel. Zum Schlusse wären dann noch die Schub- und Haftspannungen für die einzelnen Rahmentteile zu untersuchen.

d) **Pendelstütze:** Der größte Druck beträgt 9,0 t, und zwar ohne Windbelastung (siehe Abb. 210). Als Querschnitt sei gewählt 25/25 cm und 4 \oplus 16 mm, $f_e = 8,04 \text{ cm}^2$

$$\sigma_b = \frac{9000}{25 \cdot 25 + 15 \cdot 8,04} = 12 \text{ kg/cm}^2$$

$$J_{\text{erf.}} = \frac{s \cdot P \cdot l^2}{\pi^2 \cdot E} = \frac{10 \cdot 9000 \cdot 600^2}{10 \cdot 140\,000} = 23\,200 \text{ cm}^4$$

$$J_{\text{vorh.}} = \frac{25^4}{12} + 15 \cdot 8,04 \cdot 10^2 = 55\,550 \text{ cm}^4.$$

e) **Der Horizontalschub** wird durch die unter dem Rahmen befindlichen Deckenbalken aufgenommen und diese müssen daher eine entsprechend verstärkte Eiseneinlage erhalten. Empfehlenswert ist es auch, einige Eisen direkt in die Deckenplatte zu verlegen und diese strahlenförmig anzuordnen. Ein klares Bild über die Verteilung und Aufbiegungen der Eisen sowie über die einzelnen Details gibt Tafel I.

Kapitel XXII.

Bogendächer.¹⁾

Einleitung.

Das Kapitel hat hauptsächlich den Zweck, dem Leser den engen Zusammenhang des im Handbuch für Eisenbetonbau, Bd. IV, 1. Teil, 1. Aufl. gegebenen Abschnittes über Bogendächer mit den Ergebnissen der vorausgegangenen Kapitel darzulegen. Es ist das Wichtigste hervorgehoben mit den notwendigen Ergänzungen. Das Kapitel mag besonders dazu angetan sein, zu zeigen, daß man bei Bogendächern praktischerweise eine allzugenaue Berechnung entbehren kann.

Es handelt sich in der Regel um Bauwerke mit aufgenommenem Schub, da man den aufstrebenden Wänden keine Horizontalbelastung zumuten kann. Die Bögen sind mit ihren Auflagern entweder fest verbunden (bei ganzen Eisenbetonbauten), oder ruhen nur einfach auf den Wänden auf (Unterbau im Mauerwerk). Zu unterscheiden sind Zweigelenkbogen und eingespannte Bogen. Letztere kommen mehr bei ganzen Eisenbetonbauten in Betracht.

¹⁾ Vgl. auch Müller-Breslau, Graphische Statik Band II, 2. Abteilung S. 503.

Dreigelenkbogen werden selten ausgeführt, aber zur Vereinfachung oft der Berechnung zugrunde gelegt. Das Scheitelgelenk kann auch in der Betonkonstruktion durch Einziehen der Eisen zum Ausdruck gebracht werden (Abb. 217).

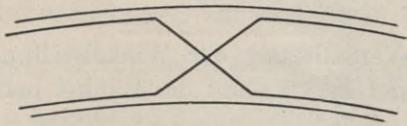


Abb. 217.

Abgesehen von dem Gesagten:

Einteilung in glatte Bogendächer mit steifen oder schlaffen Eiseneinlagen und in Rippenbogendächer.

Dreigelenkbogendächer.

Vgl. Handbuch für Eisenbetonbau, Bd. IV, 1. Teil, 1. Aufl., S. 423. Durchführung der Berechnung für volle und einseitige Belastung.

A. Glatte Bogendächer.

Der flache Zweigelenkbogen mit Zuggurt.

In Kapitel VII hatten wir Formeln für den Schub eines beliebig geformten Zweigelenkrahmens abgeleitet, und zwar unterschieden wir 3 Schubanteile: infolge Belastung, Temperaturänderung und Lagerverschieblichkeit. Den Einfluß der Normal- und Querkkräfte hatten wir im Laufe der Rechnung als unbedeutend vernachlässigt. Der Ausschluß der Normalkräfte bei der Bestimmung der statisch unbestimmten Größen wird nun aber bei Zweigelenkrahmen, die infolge Wegfallens der Stiele schließlich zu Zweigelenkbogen geworden sind, nicht mehr zulässig sein, wenn wir einen ganz genauen Nachweis liefern wollen. Wir müssen also die Normalkräfte wieder in die Grundgleichung einbeziehen.

Als neues Glied unserer Arbeitsgleichung tritt noch die

Berücksichtigung ungleichmäßiger Erwärmung

des Gewölbes zwischen Ober- und Unterkante hinzu.

Es bedeute ds ein kleines Bogenelement (Abb. 218), welches unter dem Einfluß ungleichmäßiger Temperatur die obere Länge λ_o und die untere Länge λ_u angenommen haben möge. Ist die obere Temperatur um Δt größer als die untere, so ergibt sich die Mehrverlängerung der oberen Faser zu:

$$\lambda = ds \cdot \varepsilon \cdot \Delta t.$$

λ ruft also eine Veränderung der Winkelstellung der einzelnen Elemente zueinander hervor, und die Winkel betragen

$$d(\Delta\varphi) = \frac{ds \cdot \varepsilon \cdot \Delta t}{h}.$$

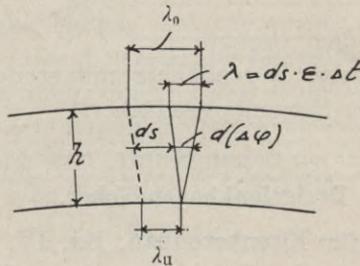


Abb. 218.

Dieser Winkel $d(\Delta\varphi)$ bedeutet also die wirkliche äußere Veranlassung für das Zustandekommen einer weiteren Verdrehung des Querschnittes, genau so wie früher in der Ableitung für die Grundgleichung das im Stabe wirkende wirkliche Biegemoment wirksam gedacht war. Wir erhielten früher mit

$$d(\Delta\varphi) = \frac{M \cdot ds}{E \cdot J}:$$

$$\int \frac{M_a \cdot M \cdot ds}{E \cdot J},$$

erhalten also sinngemäß für das Temperaturglied:

$$\int \frac{M_a \cdot \varepsilon \cdot \Delta t \cdot ds}{h}.$$

Es lautet nun die vollständige Gleichung:

$$L' = \int \frac{M_a \cdot M \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{N_a \cdot N \cdot ds}{E \cdot F} + \int \frac{M_a \cdot \varepsilon \cdot \Delta t \cdot ds}{h} + \int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds$$

(vgl. Handbuch IV, 1. Teil, 1. Aufl., S. 426).

Hierin bedeutet:

L' = virtuelle Arbeit der Auflagerkraft, bei Verlängerung = negativ. Nach Früherem $L' = -1 \cdot \Delta l = -\Delta l$, d. h.

die gedachte Kraft 1 durchläuft den wirklichen Weg entgegengesetzt zu ihrem Richtungssinn. Dieser Weg Δl entsteht nun: 1. durch die elastische Verlängerung der Zugstange infolge der einwirkenden Kraft H, 2. infolge der Temperaturausdehnung der Zugstange selbst. Wir erhalten somit

$$L' = - \Delta l = - \frac{H \cdot l}{E_0 \cdot F_0} - \varepsilon_0 \cdot t_0 \cdot l.$$

Der Index 0 bezieht sich lediglich auf die Zugstange.

ε = Wärmeausdehnungszahl des Bogens.

t = Temperaturzunahme im Bogen.

Δt = Temperaturunterschied zwischen der oberen und unteren Faser des Bogens.

Nähere Erläuterung der im Handbuch IV gegebenen Gleichungen.

Aus der allgemeinen Arbeitsgleichung ergibt sich

$$H = \frac{\overbrace{\int \frac{M_0 \cdot y \cdot dx}{E \cdot J}}^1 - \overbrace{\varepsilon_0 \cdot t_0 \cdot l_0}^2 + \overbrace{\int \frac{\varepsilon \cdot \Delta t}{h} \cdot y \cdot dx}^3 + \overbrace{\int \varepsilon \cdot t \cdot dx}^4}{\underbrace{\int \frac{y^2 \cdot dx}{E \cdot J}}_5 + \underbrace{\int \frac{dx}{E \cdot F}}_6 + \underbrace{\frac{l}{E_0 \cdot F_0}}_7}$$

Es bedeuten die Nennergrößen:

5 = Einfluß der Form des Bogens,

6 = Einfluß der Normalkräfte,

7 = Einfluß der elastischen Nachgiebigkeit der Zugstange.

Während diese 3 Nennergrößen bei genaueren Berechnungen stets zu berücksichtigen sind, können wir mit Hilfe derselben den Horizontalschub aus 4 verschiedenen Anlässen darstellen, entsprechend den 4 Zählergliedern:

1 = Einfluß der eigentlichen Belastung (statisch bestimmtes Hauptsystem, einfacher Balken),

2 = Einfluß einer Temperaturzu- oder -abnahme in der Zugstange,

3 = Einfluß ungleichmäßiger Erwärmung,

4 = Einfluß gleichmäßiger Erwärmung des Bogens.

Der aus der Belastung des Gewölbes allein sich ergebende Horizontalschub ist somit durch $\frac{\text{Zählerglied 1}}{\text{ganzen Nenner}}$ dargestellt.

Es ist nun für Bogendächer die Annahme eines konstanten E , F und J zulässig, und wir erhalten deshalb nach Herausheben von $E \cdot J$ im Zähler und Nenner und Kürzung dieses Faktors und ferner mit $\int dx = l$

$$H = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot dx}{\int y^2 \cdot dx + \frac{J}{F} \cdot l + \frac{E \cdot J}{E_0 \cdot F_0} \cdot l}$$

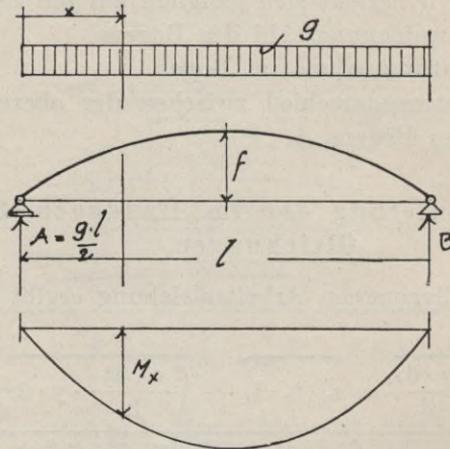


Abb. 219.

a) Für eine gleichmäßige Belastung g

(Abb. 219) ist das Moment an beliebiger Stelle des einfachen Balkens

$$M_x = \frac{g \cdot l}{2} \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2};$$

somit ergibt sich das Zählerglied zu

$$\int_0^l \left(\frac{g \cdot l}{2} \cdot x \right) \cdot y \cdot dx - \int_0^l \left(\frac{g \cdot x^2}{2} \right) \cdot y \cdot dx$$

oder

$$\frac{g \cdot l}{2} \cdot \int_0^l \underbrace{x \cdot y \cdot dx}_{\text{stat. Mom.}} - \frac{g}{2} \cdot \int_0^l x^2 \cdot y \cdot dx.$$

Wählt man nun noch die Bogenachse parabolisch nach der Gleichung $y = \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot (l \cdot x - x^2)$ (Abb. 220), so folgt

$$\int_0^l M_0 \cdot y \cdot dx = \frac{g \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l \cdot f \cdot \frac{1}{2} - \frac{g}{2} \cdot \int_0^l x^2 \cdot \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot (l - x) \cdot dx$$

$$+ \frac{g}{2} \cdot \int_0^l x^2 \cdot \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot (x^2) \cdot dx$$

$$= \frac{g \cdot l^3 \cdot f}{6} - \frac{g}{2} \cdot \frac{4f}{l^2} \cdot l \cdot \frac{l^4}{4} + \frac{g}{2} \cdot \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot \frac{l^5}{5}$$

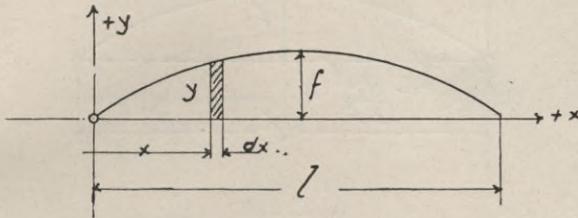


Abb. 220.

und mit dem Generalnenner 30

$$\int_0^l M_0 \cdot y \cdot dx = \frac{g \cdot f \cdot l^3}{15};$$

ebenso das erste Nennerglied

$$\int_0^l y^2 \cdot dx = 2 \cdot \mathcal{C}$$

(vgl. Kapitel XIV), nach Abb. 221

$$= 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot l \cdot f \cdot \frac{2}{5} \cdot f = \frac{8}{15} \cdot l f^2$$

und so ergibt sich schließlich

$$H_g = \frac{\frac{g \cdot f \cdot l^3}{15}}{\frac{8}{15} \cdot l \cdot f^2 + \frac{J}{F} \cdot l + \frac{E \cdot J}{E_0 \cdot F_0} \cdot l}$$

gehoben und mit $E_0 : E = n$

$$H_g = \frac{g \cdot l^2}{8 \cdot f} \cdot \frac{1}{1 + \frac{15}{8 \cdot f^2} \cdot \frac{J}{F} \left(1 + \frac{F}{n \cdot F_0}\right)}$$

$$H_g = \frac{g \cdot l^2}{8 \cdot f} \cdot \lambda.$$

Wie im Handbuch gezeigt wird, liegt für die in der Regel vorkommenden Werte von l und f der Koeffizient λ ganz nahe bei 1, so daß

$$\underline{H_g = \frac{g \cdot l^2}{8 \cdot f}}$$

(vgl. früher).

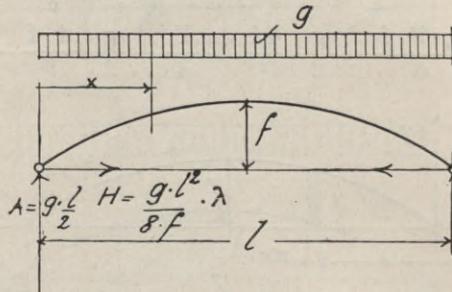


Abb. 221.

Das Biegemoment infolge gleichmäßiger Belastung (Abb. 221) ist allgemein

$$\begin{aligned} \underline{M_g} &= \frac{g \cdot l}{2} \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2} - \frac{g \cdot l^2}{8 \cdot f} \cdot \lambda \cdot \overbrace{\frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot (1 \cdot x - x^2)}^y \\ &= \frac{g \cdot l}{2} \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2} - \frac{g}{2} \cdot \lambda \cdot (1 \cdot x - x^2) \\ &= \frac{g}{2} \cdot (1 \cdot x - x^2) - \frac{g}{2} \cdot (1 \cdot x - x^2) \cdot \lambda \\ &= \frac{g}{2} \cdot (1 \cdot x - x^2) \cdot (1 - \lambda) \end{aligned}$$

Bildet man den Differentialquotienten

$$\frac{dM_g}{dx} = \frac{g}{2} \cdot (1 - \lambda) \cdot (1 - 2x)$$

und setzt diesen = 0, so folgt

$$1 = 2x, \text{ also } \underline{x = \frac{1}{2}}$$

d. h. das größte Moment liegt in der Mitte, was nach Früherem als bekannt vorauszusetzen war, und es beträgt:

$$\begin{aligned} \text{Scheitelmoment: } \underline{M_g^S} &= \frac{g}{2} \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1^2}{4}\right) \cdot (1 - \lambda) \\ &= \underline{\frac{g \cdot l^2}{8} \cdot (1 - \lambda)}. \end{aligned}$$

ist also an sich nahezu = 0, da $\lambda \cong 1$.

Im Bogenviertel beträgt das Moment — ebenso abgeleitet —

$$M_g = \frac{3}{32} \cdot g \cdot l^2 \cdot (1 - \lambda),$$

ist also noch etwas geringer als im Scheitel.

Man braucht demnach, wenn man λ überhaupt = 1 setzt, die Momente infolge Eigengewicht an keiner Stelle zu berücksichtigen und beachte nur

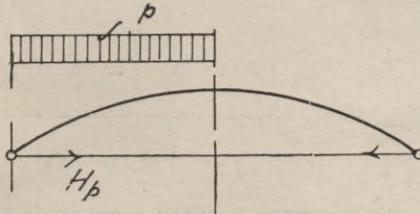


Abb. 222.

b) die halbseitige Belastung mit Nutzlast

(Abb. 222).

Diese liefert, wie leicht verständlich sein wird,

$$H_{\frac{p}{2}} = \frac{p \cdot l^2}{16 \cdot f} \cdot \lambda,$$

und es entsteht das größte bzw. das kleinste Biegemoment in $\frac{1}{4}$, was sich in derselben Weise wie vor leicht ableiten läßt.

Die Momente betragen auf der belasteten Seite

$$\max M_{\frac{p}{2}} = + \frac{4 - 3\lambda}{64} \cdot p \cdot l^2$$

und auf der unbelasteten Seite

$$\max M_{\frac{p}{2}} = - \frac{3\lambda - 2}{64} \cdot p \cdot l^2.$$

Da λ stets nur wenig mehr als 1 beträgt, so kann man hierfür ohne weiteres schreiben

$$\max M_{\frac{p}{2}} = \sim \pm \frac{p \cdot l^2}{64}.$$

Das Scheitelmoment beträgt

$$M_{\frac{p}{2}}^S = + (1 - \lambda) \cdot \frac{p \cdot l^2}{16}.$$

Weitere Berücksichtigungen etwa halbseitiger oder ganzseitiger parabolischer Belastung infolge Stärkerwerden des Bogens nach den Auflagern zu siehe Handbuch.

c) Temperaturzunahme.

Im Bogen t und im Zuggurt t_0 Grad, ferner $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Wie die erste allgemeine Gleichung für H zeigt, ist der Einfluß einer gleichmäßigen Temperaturzunahme im Bogen positiv für H , während der Einfluß einer gleichmäßigen Erwärmung der Zugstange um t_0 Grad negativ für H ist. Es erscheinen also diese beiden Einflüsse in entgegengesetzter Wirkung, und wir erhalten allgemein

$$\underline{H_{t-t_0}} = \frac{\int_0^l \varepsilon \cdot t \cdot dx - \varepsilon_0 \cdot t_0 \cdot l}{\int_0^l \frac{y^2 \cdot dx}{E \cdot J} + \int_0^l \frac{dx}{E \cdot F} + \frac{l}{E_0 \cdot F_0}},$$

für $\varepsilon = \varepsilon_0$, und mit dem schon oben aufgelösten Nenner

$$\underline{H_{t-t_0}} = \frac{\varepsilon \cdot l \cdot (t - t_0)}{\frac{8}{15} \frac{f^2 \cdot l}{E \cdot J} + \frac{l}{E \cdot F} + \frac{l}{E_0 \cdot F_0}}.$$

Nach weiterer Umformung erhält man schließlich

$$\underline{H_{t-t_0}} = \lambda \cdot \frac{15}{8} \cdot \frac{E \cdot J}{f^2} \cdot \varepsilon \cdot (t - t_0).$$

Das größte Temperaturmoment tritt bei gleichmäßiger sowohl wie bei ungleichmäßiger Erwärmung im Scheitel auf.

Die weiteren Angaben darüber siehe Handbuch IV, S. 430.

Zum ganzen Kapitel vgl. noch besonders die Tabelle für den flachen Zweigelenkbogen, Handbuch IV, S. 431. Anschließend daran sind auch noch einige Angaben über den Zweigelenkbogen mit Zuggurt gemacht.

Die Einflußlinien für den Horizontalschub des Zweigelenkbogens¹⁾.

Die Ordinaten sind nach der Gleichung $H = \frac{3}{4} \cdot \frac{a \cdot b}{f \cdot l} \cdot \lambda \cdot l$ zu berechnen, wobei $P = 1$ (Abb. 223),

$$\underline{\lambda} \text{ wie früher} = \frac{1}{1 + \frac{15}{8 \cdot f^2} \cdot \frac{J}{F} \cdot \left(1 + \frac{F}{n \cdot F_0}\right)}.$$

Hat man nur wenige verschiedene Laststellungen P , so kann man auch die Zeichnung der Einflußlinie entbehren. Wird der

¹⁾ Nach Müller-Breslau, die neueren Methoden, 4. Aufl., S. 191.

Einfluß von λ vernachlässigt, so erhalten wir H ebenso groß wie für den Dreigelenkbogen.

Beispiel: Ein Wölbdach mit dem Binderquerschnitt Abb. 224 erhalte die in Abb. 225 angedeutete Belastung

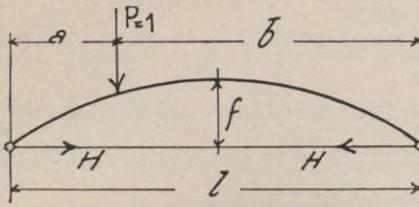


Abb. 223.

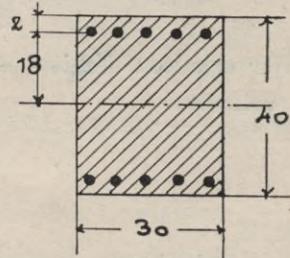


Abb. 224.

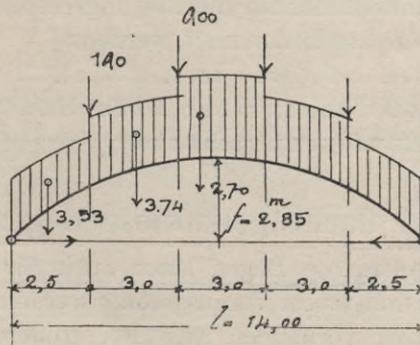


Abb. 225.

$$F = 30 \cdot 40 + 10 \cdot 1,767 \cdot 15 = 1465 \text{ cm}^2$$

$$J = \frac{30 \cdot 40^3}{12} + 15 \cdot 17,67 \cdot 18^2 = 246\,000 \text{ cm}^4$$

$$\frac{J}{F} = \frac{246\,000}{1465} = 168 \text{ cm}^2.$$

Dann ist

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{15}{8 \cdot 285^2} \cdot 168 \left(1 + \frac{1465}{15 \cdot 19,64}\right)} = \frac{1}{1,0232},$$

wobei eine Zugstange von 50 mm $\varnothing = 19,64 \text{ cm}^2$ Querschnitt gewählt wurde,

$$H = \frac{3}{4} \cdot \frac{a \cdot b}{f \cdot l} \cdot P \cdot \frac{1}{1,0232}$$

vereinfacht

$$H = P \cdot \frac{3 \cdot a(14 - a)}{4 \cdot 285 \cdot 14} \cdot \frac{1}{1,0232}$$

oder

$$H = \frac{P \cdot a \cdot (14 - a)}{54,3}$$

Wir erhalten somit

$$H = \frac{2}{54,3} \cdot (3530 \cdot 1,25 \cdot 12,75 + 190 \cdot 2,5 \cdot 11,5 + 3740 \cdot 4,0 \cdot 10,0 \\ + 900 \cdot 5,5 \cdot 8,5 + 2700 \cdot 6,25 \cdot 7,75) \\ H = 14\,150 \text{ kg.}$$

Besonderen Vorteil bietet diese Rechnung bei unsymmetrischer Belastung. Mit Hilfe der H-Linie (für $P = 1$) können dann auch leicht die Einflußlinien für die Biegemomente in bestimmten Punkten der Achse konstruiert werden.

Zu beachten ist, wie wenig sich λ von 1 unterscheidet, so daß der einfache Berechnungsgang nach Kap. XIII vollauf genügt hätte.

Der flache gelenklose Bogen.

Der flache gelenklose Bogen kann auch für Dachkonstruktionen nur als Grundsystem vorausgesetzt werden, wenn wirklich völlige Einspannung vorhanden ist. Bei größeren Spannweiten ist die Annahme einer Einspannung in den Traufbalken unrichtig, besonders wenn diese ihrerseits wieder weit gespannt sind, also einer Drehung unterliegen.

Die Bestimmungsgleichungen der 3 statisch unbestimmten Größen.

Der gelenklose Bogen ist zunächst kein anderes statisches Gebilde als der früher behandelte eingepannte Rahmen (Kap. XVI). Bei flachen Bogendächern sind aber in der allgemeinen Arbeitsgleichung, wie beim flachen Zweigelenkbogen schon gezeigt wurde, noch besonders die Normalkräfte, Nachgiebigkeit der Zugstange, gleichmäßige und ungleichmäßige Erwärmung des Gewölbes zu berücksichtigen. Die allgemeine Arbeitsgleichung lautet demnach genau so wie beim Zweigelenkrahmen:

$$L' = \int \frac{M_a \cdot M \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{N_a \cdot N \cdot ds}{E \cdot F} + \int \frac{M_a \cdot \epsilon \Delta t \cdot ds}{h} + \int N_a \cdot \epsilon \cdot t \cdot ds.$$

Alles, was beim eingespannten Rahmen gesagt worden ist, hat hier dieselbe Gültigkeit. Wir haben nur neu die oben ange-deuteten Einflüsse zu berücksichtigen, und es lautet damit die Arbeitsgleichung

$$L' = -X \cdot \frac{1}{E_0 \cdot F_0} - \varepsilon_0 \cdot t_0 \cdot l = - \int \frac{M_0 \cdot x}{E \cdot J} \cdot ds + X \cdot \int \frac{y^2 \cdot ds}{E \cdot J} \\ + Y \cdot \int \frac{x \cdot y \cdot ds}{E \cdot J} - Z \cdot \int \frac{y \cdot ds}{E \cdot J} + X \cdot \int \frac{ds}{E \cdot F} - \int \varepsilon \cdot t \cdot ds - \int \frac{\varepsilon \cdot \Delta t}{h} \cdot y \cdot ds.$$

In gleicher Weise lassen sich die beiden noch fehlenden Gleichungen L'' und L''' anschreiben.

Bezeichnet 0 den Schwerpunkt des mit den Gewichten $\frac{1}{E \cdot J}$ belastet gedachten Bogens (Abb. 226), so werden nach Früherem die Glieder

$$\int \frac{x \cdot y \cdot ds}{E \cdot J}, \int \frac{x \cdot ds}{E \cdot J}, \int \frac{y \cdot ds}{E \cdot J}$$

wieder = 0, und wir erhalten unter der zulässigen Annahme (für Bogendächer) eines konstanten mittleren E und J , wodurch dann der Angriffspunkt der 3 Kräfte identisch mit dem Schwerpunkt der Bogenachse wird, wie früher:

$$\underline{X} = \frac{\int \frac{M_0 \cdot y \cdot ds}{E \cdot J} - \varepsilon_0 \cdot t_0 \cdot l + \int \varepsilon \cdot t \cdot ds}{\int \frac{y^2 \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{ds}{E \cdot F} + \frac{1}{E_0 \cdot F_0}} \\ \underline{Y} = \frac{\int \frac{M_0 \cdot y \cdot ds}{E \cdot J}}{\int \frac{x^2 \cdot ds}{E \cdot J}} \\ \underline{Z} = - \frac{\int \frac{M_0 \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{\varepsilon \cdot \Delta t \cdot ds}{h}}{\int \frac{ds}{E \cdot J}}.$$

Wenn wir es nun zum Ausdruck bringen, daß E und J , F , t und Δt konstant sind, dann lauten diese Gleichungen:

$$\underline{X} = \frac{\int M_0 \cdot y \cdot ds - E \cdot J \cdot \varepsilon_0 \cdot t_0 \cdot l + E \cdot J \cdot \varepsilon \cdot t \cdot \int ds}{\int y^2 \cdot ds + \frac{J}{F} \int ds + \frac{E \cdot J}{E_0 \cdot F_0} \cdot l}$$

$$Y = \frac{\int M_0 \cdot x \cdot ds}{\int x^2 \cdot ds}$$

$$Z = - \frac{\int M_0 \cdot ds + \epsilon E \cdot J \cdot \Delta t \cdot \int \frac{ds}{h}}{\int ds}$$

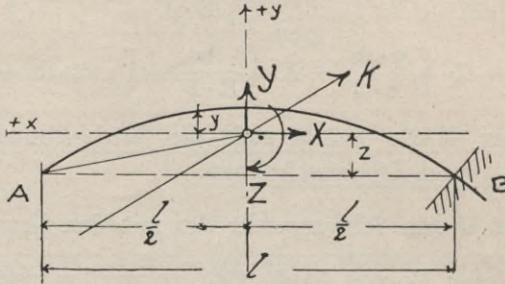


Abb. 226.

Nähere Erläuterung der im Handbuch gegebenen Gleichungen.

Wir erhalten nun für eine parabolische Bogenachse genau genug (vgl. auch die betr. Angaben im Handbuch S. 434):

$$z = \frac{2}{3} \cdot f, \quad y = \frac{f}{3 \cdot l^2} \cdot (l^2 - 12 \cdot x^2), \quad ds = dx.$$

Hiermit sind die Nennergrößen

$$\begin{array}{r}
 + \frac{1}{2} \\
 \int y^2 \cdot dx = \frac{4}{45} \cdot f^2 \cdot l, \\
 - \frac{1}{2}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 + \frac{1}{2} \\
 \int x^2 \cdot dx = \frac{l^3}{12}, \\
 - \frac{1}{2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 + \frac{1}{2} \\
 \int dx = l, \\
 - \frac{1}{2}
 \end{array}$$

a) Bei gleichmäßig verteilter halbseitiger Belastung

(betrifft also das erste Zählerglied) ist allgemein das Moment des statisch bestimmten Hauptsystems (des einfachen Balkens auf 2 Stützen) für die belastete Seite

$$M_0 = \frac{3 \cdot p \cdot l}{8} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) - \frac{p}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right)^2 = \frac{p}{8} \cdot \left(\frac{l^2}{2} + l \cdot x - 4x^2 \right),$$

somit

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\frac{1}{2}} \underline{M_0 \cdot y \cdot dx} &= \int_0^{+\frac{1}{2}} \frac{p}{8} \cdot \left(\frac{l^2}{2} + l \cdot x - 4x^2 \right) \cdot \frac{f}{3 \cdot l^2} \cdot \left(l^2 - 12 \cdot x^2 \right) \cdot dx \\
 &= \int_0^{+\frac{1}{2}} \frac{f \cdot p \cdot l^2}{48} \cdot dx + \int_0^{+\frac{1}{2}} \frac{f \cdot p \cdot x \cdot l}{24} \cdot dx - \int_0^{+\frac{1}{2}} \frac{f \cdot p \cdot x^2}{6} \cdot dx \\
 &+ \int_0^{+\frac{1}{2}} \frac{f \cdot p}{48} \cdot 12 \cdot x^2 \cdot dx - \int_0^{+\frac{1}{2}} \frac{f \cdot p \cdot x}{24 \cdot l} \cdot 12 \cdot x^2 \cdot dx + \int_0^{+\frac{1}{2}} \frac{f \cdot p \cdot x^2}{6 \cdot l^2} \cdot 12 \cdot x^2 \cdot dx \\
 &= \frac{f \cdot p \cdot l^2}{48} \cdot \frac{1}{2} + \frac{f \cdot p \cdot l}{24} \cdot \frac{l^2}{8} - \frac{f \cdot p}{6} \cdot \frac{l^3}{24} - \frac{f \cdot p}{4} \cdot \frac{l^3}{24} - \frac{f \cdot p}{2 \cdot l} \cdot \frac{l^4}{64} \\
 &+ \frac{f \cdot p \cdot 2}{l^2} \cdot \frac{l^5}{160}
 \end{aligned}$$

und mit dem Generalnenner 576

$$\int_0^{+\frac{1}{2}} \underline{M_0 \cdot y \cdot dx} = \frac{17 \cdot p \cdot f \cdot l^3}{24 \cdot 240}$$

Für die unbelastete Seite ist

$$\underline{M_0} = \frac{p \cdot l}{8} \cdot \left(\frac{1}{2} + x \right) - 0$$

+, da x nach rechts = - ,

oder

$$\underline{M_0} = \frac{p \cdot l}{16} \cdot (1 + 2x)$$

somit

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{1}{2}}^0 \underline{M_0 \cdot y \cdot dx} &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left(\frac{p \cdot l^2}{16} + \frac{p \cdot l \cdot x}{8} \right) \cdot \frac{f}{3 \cdot l^2} \cdot (l^2 - 12 \cdot x^2) \cdot dx \\
 &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{p \cdot f \cdot l^2}{48} \cdot dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{p \cdot x \cdot f \cdot l}{24} \cdot dx - \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{p \cdot f}{48} \cdot 12 \cdot x^2 \cdot dx \\
 &- \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{p \cdot x \cdot f}{24 l} \cdot 12 \cdot x^2 \cdot dx
 \end{aligned}$$

$$= \frac{p \cdot f \cdot l^2}{48} \cdot \frac{1}{2} - \frac{p \cdot f \cdot l}{24} \cdot \frac{l^2}{8} - \frac{p \cdot f}{4} \cdot \frac{l^3}{24} + \frac{p \cdot f}{2 \cdot 1} \cdot \frac{l^4}{64}$$

und mit dem Generalnenner 384

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 M_0 \cdot y \cdot dx = \frac{p \cdot f \cdot l^3}{8 \cdot 48}$$

Insgesamt also

$$\int M_0 \cdot y \cdot dx = \int_0^{+\frac{1}{2}} M_0 \cdot y \cdot dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 M_0 \cdot y \cdot dx = \frac{p \cdot f \cdot l^3}{180}$$

Hiermit erhalten wir den Horizontalschub

$$\begin{aligned} X_{\frac{p}{2}} &= \frac{\frac{p \cdot f \cdot l^3}{180}}{\frac{4}{45} \cdot f^2 \cdot l + \frac{J}{F} \cdot l + \frac{E \cdot J}{E_0 \cdot F_0} \cdot l} \\ &= \frac{p \cdot f \cdot l^2}{180 \left[\frac{4}{45} \cdot f^2 + \frac{J}{F} + \frac{E \cdot J}{E_0 \cdot F_0} \right]} \\ &= \frac{p \cdot f \cdot l^2}{180 \cdot \frac{4 \cdot f^2}{45} \cdot \left[1 + \frac{J \cdot 45}{F \cdot 4 \cdot f^2} + \frac{E \cdot J}{E_0 \cdot F_0} \cdot \frac{45}{4 \cdot f^2} \right]} \\ &= \frac{p \cdot l^2}{16 f \cdot \left[1 + \frac{45}{4 \cdot f^2} \cdot \frac{J}{F} \cdot \left(1 + \frac{E \cdot J}{E_0 \cdot F_0} \cdot \frac{F}{J} \right) \right]} \\ &= \frac{p \cdot l^2}{16 \cdot f} \cdot \frac{1}{1 + \frac{45}{4 \cdot f^2} \cdot \frac{J}{F} \cdot \left(1 + \frac{F}{n \cdot F_0} \right)} \end{aligned}$$

$$X_{\frac{p}{2}} = \frac{p \cdot l^2}{16 \cdot f} \cdot \lambda_1$$

Als Näherungswert ergibt sich nach Handbuch

$$\lambda_1 = 1 - \frac{9}{4} \cdot \frac{\left(\frac{2}{1} + 0 \cdot 1 \right)^2}{f}$$

Dieser Wert beträgt für $f = 1,12$ und $l = 11,80$ m:

$$\lambda_1 = 1 - \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{2}{11,8} + 0,1 \right)^2 \cdot \frac{1}{1,12}$$

$$\lambda_1 = 1 - \text{rd. } 0,15 = 0,85.$$

Der Horizontalschub vermindert sich also beim eingespannten Bogen um etwa 15% gegenüber dem Zweigelenk- und Dreigelenkbogen.

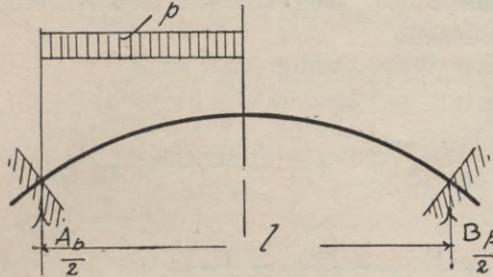


Abb. 227.

Um zu dem Wert von Y zu gelangen, erhalten wir

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} M_0 \cdot x \cdot dx = \int_0^{+\frac{1}{2}} M_0 \cdot x \cdot dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 M_0 \cdot x \cdot dx$$

$$= \int_0^{+\frac{1}{2}} \frac{p}{8} \cdot \left(\frac{l^2}{2} + l \cdot x - 4x^2 \right) \cdot x \cdot dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left(\frac{p \cdot l^2}{16} + \frac{p \cdot l \cdot x}{8} \right) \cdot x \cdot dx$$

$$= \frac{p \cdot l^2}{16} \cdot \frac{l^2}{8} + \frac{p \cdot l}{8} \cdot \frac{l^3}{24} - \frac{p}{2} \cdot \frac{l^4}{64} - \frac{p \cdot l^2}{16} \cdot \frac{l^2}{8} + \frac{p \cdot l}{8} \cdot \frac{l^3}{24}$$

$$= \frac{p \cdot l^4}{192} - \frac{p \cdot l^4}{384} = + \frac{p \cdot l^4}{384},$$

somit

$$Y_{\frac{p}{2}} = \frac{\frac{p \cdot l^4}{384}}{\frac{l^3}{12}} = \frac{p \cdot l}{32}.$$

Damit wird der linke auf der Lastseite liegende Auflagerdruck (Abb. 227)

$$A_{\frac{p}{2}} = \frac{p \cdot l}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{p \cdot l}{32} = \frac{13}{32} \cdot p \cdot l;$$

und infolgedessen als Rest

$$\underline{B_{\frac{p}{2}} = \frac{3}{32} \cdot p \cdot l.}$$

Beim eingespannten Träger ergeben sich also die lotrechten Reaktionen wesentlich anders als beim einfachen Balken; bei gleichmäßiger Belastung über die ganze Länge kann natürlich eine Verschiebung der Lastverteilung durch die Einspannung nicht mehr eintreten.

∞ In ähnlicher Weise gelangt man zu Z

$$\begin{aligned} \int M_0 \cdot dx &= \int_0^{+\frac{1}{2}} \frac{p}{8} \left(\frac{l^2}{2} + l \cdot x - 4x^2 \right) \cdot dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{p \cdot l}{16} \cdot (l + 2x) \cdot dx \\ &= \frac{5 \cdot p \cdot l^3}{192} + \frac{p \cdot l^3}{64} = \frac{p \cdot l^3}{24} \end{aligned}$$

$$\underline{Z_{\frac{p}{2}} = -\frac{p \cdot l^2}{24}.}$$

2 Das Einspannungsmoment auf der Lastseite ist

$$\underline{M_{\frac{p}{2}}^A = + X_{\frac{p}{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot f - Y_{\frac{p}{2}} \cdot \frac{1}{2} + Z_{\frac{p}{2}} = \frac{p \cdot l^2}{24} \cdot \left(\lambda_1 - \frac{11}{8} \right).}$$

Das Einspannungsmoment bei B beträgt

$$\underline{M_{\frac{p}{2}}^B = + X_{\frac{p}{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot f + Y_{\frac{p}{2}} \cdot \frac{1}{2} + Z_{\frac{p}{2}} = \frac{p \cdot l^2}{24} \cdot \left(\lambda_1 - \frac{5}{8} \right).}$$

Für $\lambda_1 = 1$, was, wie wir oben gesehen haben, allerdings nicht zutrifft, wäre:

$$\underline{M_{\frac{p}{2}}^A = -\frac{p \cdot l^2}{64} \text{ und } M_{\frac{p}{2}}^B = +\frac{p \cdot l^2}{64}.}$$

Setzt man in die allgemeinen Momentengleichungen die Werte für M_0 , X , Y und Z ein, so erhält man zunächst das größte Moment

auf der Lastseite bei $x = \frac{3}{16} \cdot l$ zu

$$\underline{\max M_{\frac{p}{2}} = \left(1 - \frac{37}{64} \cdot \lambda_1 \right) \cdot \frac{p \cdot l^2}{48},}$$

das gibt für $\lambda_1 = 1$ (s. o.)

$$\underline{\max M_{\frac{p}{2}} = \frac{9}{1024} \cdot p \cdot l^2}$$

(vgl. die einfache Ermittlung im Handbuch). Ferner erhält man auf der unbelasteten Seite ebenso für $x = -\frac{3}{16} \cdot l$

$$\max M_{\frac{p}{2}} = \left(1 - \frac{37}{10} \cdot \lambda_1\right) \cdot \frac{5}{1536} \cdot p \cdot l^2;$$

für $\lambda_1 = 1$ ist

$$\max M_{\frac{p}{2}} = -\frac{9}{1024} \cdot p \cdot l^2.$$

Im Scheitel $\left(x = 0 \text{ und } y = \frac{f}{3}\right)$ beträgt das Moment

$$M_{\frac{p}{2}}^s = \frac{p \cdot l^2}{48} \cdot (1 - \lambda_1).$$

b) Für volle, gleichmäßig verteilte Belastung mit g

(Abb. 228) siehe die Angaben im Handbuch S. 436.

(Einseitige oder parabolische Belastung vgl. Handbuch.)

Für gleichmäßige Temperaturzunahme sowie für Temperaturdifferenz siehe die Angaben im Handbuch S. 438 und 440.

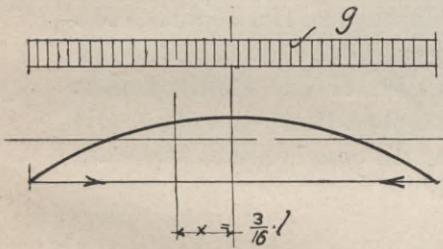


Abb. 228.

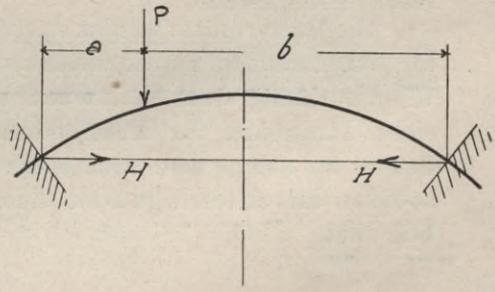


Abb. 229.

Einflußliniengleichungen.

Zur Bildung von Einflußlinien gebrauche man in bezug auf Abb. 229

$$H = \frac{15}{4} \cdot P \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{f \cdot l^3} \cdot \lambda_1$$

$$A = \frac{P \cdot (1 + 2 \cdot a) \cdot b^2}{l^3}; B = \frac{P \cdot (1 + 2 \cdot b) \cdot a^2}{l^3}$$

$$M_A = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{l^3} \cdot \left(1 - \frac{5}{2} \cdot a \cdot \lambda_1\right)$$

$$\underline{M_B} = \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{l^3} \left(1 - \frac{5}{2} \cdot b \cdot \lambda_1 \right)$$

$$\underline{\lambda_1} = \frac{1}{1 + \frac{45}{4f^2} \cdot \frac{J}{F} \cdot \left(1 + \frac{F}{n \cdot F_0} \right)}$$

(Beachte genau Zahl 1 und Länge l.)

Konstruktionseinzelheiten glatter Bogendächer.

Ausführung meistens als Zweigelenk- oder eingespannte Bögen. Der Grad der Einspannung hängt von der Bauart der Auflager ab. Vollständige Einspannung muß, wenn in Rechnung gestellt, auch genügend gewährleistet sein. An den Kämpfern können positive und negative Momente auftreten, so daß in der Regel dort zwei Eiseneinlagen nötig sind; dasselbe trifft zu im Bogenviertel. Nach dem Scheitel hin treten meistens aber nur positive Momente auf, so daß es genügt, die doppelte Eiseneinlage bis $\frac{1}{4}$ zu ziehen, und zwischen den Vierteln nur eine untere anzuordnen.

Die Querschnitte werden nach den größten Biegemomenten für exzentrischen Druck bemessen (durch den Horizontalschub). Über vorläufig dem Entwurf zugrundezulegende Größen siehe Handbuch für Eisenbetonbau, Bd. IV, 1. Aufl., Tabelle S. 442, an welche sich auch einige Angaben über Gewölbe mit steifen Eiseneinlagen anschließen, die ohne weiteres verständlich sind.

Bogendach mit höhergelegtem (überhöhtem) Zuggurt.

Architektonisch erscheint die freiliegende Zugstange oft unerwünscht, so daß man es vorzieht, eine reguläre Unterdecke in ihrer Ebene anzuordnen. Man gewinnt natürlich an Raum, wenn man den Zuggurt und damit die ganze Unterdecke zwischen höher im Gewölbe liegenden Punkten C D (Abb. 230) anordnet. Es hat dann keinen Wert mehr, den Bogen im ganzen noch als Zweigelenkbogen zu betrachten, und etwa den bei A und B noch bestehenden Schub von den stützenden Wänden aufnehmen zu lassen. Man betrachte dann den ganzen Bogen als einfachen Balken

(also ein bewegliches Lager) und betrachte das System als einfach innerlich statisch unbestimmt. AC und BD werden dann lediglich Teilstücke des einfachen Balkens AB, dessen Mo-

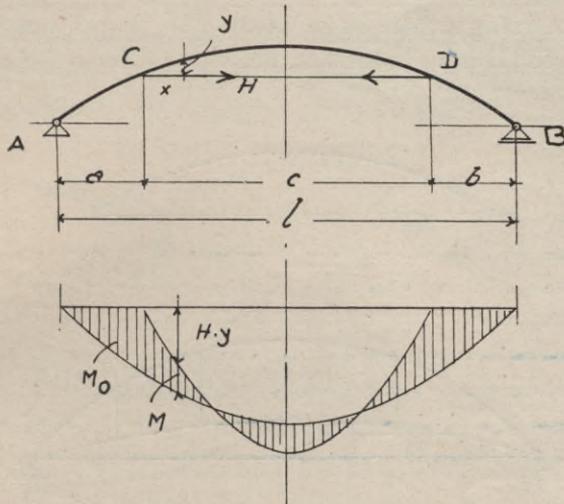


Abb. 230.

mentenfläche bei gleichmäßiger Belastung parabolisch geformt ist. Erst für den Teil CD gelten die nach den einleitenden Kapiteln ohne weiteres verständlichen Beziehungen.

$$\underline{M = M_0 - H \cdot y; N = -H}$$

$$\underline{M'} = \frac{\partial M}{\partial H} = -y$$

$$\underline{N'} = \frac{\partial N}{\partial H} = -1$$

Damit ergibt sich bei Vernachlässigung des Temperatureinflusses:

$$\underline{H} = \frac{\int_{x=0}^{x=c} M_0 \cdot y \cdot dx}{\int_{x=0}^{x=c} y^2 \cdot dx + \frac{J}{F} \cdot c \left(1 + \frac{E}{E_0} \cdot \frac{F}{F_0} \right)}$$

(siehe Handbuch S. 444).

Für größere Räume nicht mehr ausführbar, deshalb:

Bogendächer mit gesprengtem Zuggurt.

Bei den einfachen Bogenformen mit geradem Zuggurt und 2 festen Auflagergelenken (Abb. 231) wurde empfohlen, die Zugstange reichlich zu bemessen, um eine seitliche Beanspruchung

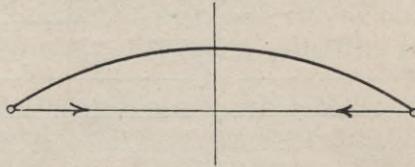


Abb. 231.

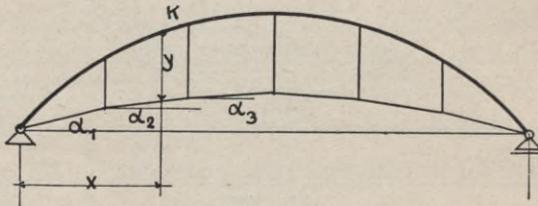


Abb. 232.

der stützenden Wände zu vermeiden; höhere Ausnutzung der Zugstange erforderte jedenfalls gewisse Bewegungsmöglichkeit zwischen Bogenauflager und Wand (Gleitfugen). Die völlige Freilassung eines Auflagers durch Anbringung von Rollen oder dgl. gestattet dann höchste Ausnutzung der Verankerung und ungehinderte Durchbiegung des Binders; gleichzeitig geht das System dem Namen nach von einem einfach äußerlich unbestimmten zu einem einfach innerlich unbestimmten über.

Im vorliegenden Fall (Abb. 232) dürfte mit einer größeren elastischen Durchsenkung und damit einer größeren seitlichen Bewegung von vornherein zu rechnen sein. Das Biegemoment an irgendeiner Stelle K ist

$$M = M_0 - H \cdot y.$$

Die Berechnung von H erfolgt ebenso wie bei überhöhtem Zuggurt. Die Zugkräfte in den Gurtgliedern sind

$$H \cdot \sec \alpha_1; \quad H \cdot \sec \alpha_2 \text{ usw.},$$

und jene in den Aufhängestäben

$$H \cdot (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2); \quad H \cdot (\tan \alpha_2 - \tan \alpha_3)$$

und $H \cdot 2 \tan \alpha_3$ (siehe Handbuch S. 445).

Die Ausbildung der Zuggurte und Kämpfer siehe Handbuch S. 443 und 445.

Bogendach mit Kragarm (Abb. 233).

Dies wird am besten mit Hilfe des in Kapitel XII gegebenen Verfahrens (also mit Vernachlässigung der Normalkräfte) mit Einflußlinien berechnet, da es doch darauf ankommt, für mehrere

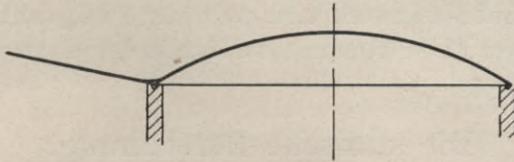


Abb. 233.

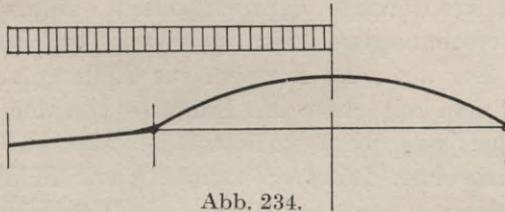


Abb. 234.

Punkte die möglichen positiven bzw. negativen Maximalmomente festzustellen, sofern eine gerechte Verteilung der Eiseneinlagen (je nach Einfluß des mehr oder weniger langen Kragarmes oder zweier Kragarme) erreicht werden soll. Für die Bemessung der Zugstange ist der Bogen voll zu belasten, während der Kragarm entlastet bleibt. Ferner ist der Belastungsfall Abb. 234 zu untersuchen. Die Zugstange bemesse man so stark, daß ihre elastische Dehnung vernachlässigt werden kann.

B. Bogenbinderdächer.

Allgemeines.

Ebenso wie bei zu weitgespannten einfachen Platten eine Plattenbalkendecke vorzuziehen ist, so wird bei weit gespannten Gewölben, wo unter Umständen größere Exzentrizitäten auftreten, besser ein Rippenbogensystem ausgeführt, wobei die Zugseisen in den Rippen vereinigt sind. Die Ausführung ist also bei größeren Nutzlasten und Spannweiten oder statisch ungünstigen Gewölbeformen angebracht.

Je nachdem ein solcher Bogenbinder durch positives oder negatives Biegemoment beansprucht wird, ist der statisch wirk-same Querschnitt T-förmig oder einfach rechteckig. Die dünne Platte, welche zwischen den Bogenrippen verläuft, kann als durch-laufender oder als in den Bogenrippen eingespannter Träger be-trachtet werden. Die Statik betreffend gilt dasselbe wie bei den glatten Bogendächern, nur erscheint hier die Berechnung als Dreigelenkbogen noch weniger gerechtfertigt. Bei Auflagerung auf Mauerwerk wird meist der Zweigelenkrahmen und bei kompletten Eisenbetonkonstruktionen der eingespannte Rah-men zugrunde gelegt.

Die statische Berechnung.

Soweit es sich um gleichmäßige Belastung und um para-bolische oder kreisförmige Formen handelt, können alle vorher gegebenen Berechnungsmethoden gebraucht werden; besonders wichtig sind hier auch die Formeln zur Bildung von Einfluß-linien, weil man mit ihnen die Einflüsse von den hier oft auf-tretenden Einzellasten bequem feststellen kann (beachte auch hier die einfachen Lösungen von Kap. XIII).

Zur Berechnung von λ und λ_1 wird die Wahl eines bestimmten mittleren Querschnittes vor der Untersuchung vorgenommen werden müssen, wobei man nur den reinen Stegquerschnitt berücksichtigt (die für glatte Bogendächer angegebenen Nähe-rungsformeln für λ und λ_1 können hier nicht gebraucht werden).

Weicht die Bogenachse von der Parabel oder dem flachen Kreis, für welche unsere Ableitungen galten, ab, so muß man den Bogen in einzelne als gerade Stäbe anzusehende Stücke zerlegen und die Integrale durch Summierung analytisch oder graphisch bestimmen. Es kann hierbei die Veränderlichkeit des Querschnittes bequem berücksichtigt werden (vgl. Kapitel XII). E kann all-gemein als konstant angenommen werden.

Der gelenklose Bogenbinder in zeichnerischer Behandlung.

Wir erhalten entsprechend unseren früheren Ableitungen (S. 929):

$$X = \frac{\int \frac{M_0 \cdot y \cdot ds}{J} - \varepsilon_0 \cdot E \cdot l \cdot t_0 + \varepsilon \cdot E \cdot t \cdot \int ds}{\int \frac{y^2 \cdot ds}{J} + \int \frac{ds}{F} + \frac{E \cdot l}{E_0 \cdot F_0}}$$

$$Y = \frac{\int \frac{M_0 \cdot x \cdot ds}{J}}{\int \frac{x^2 \cdot ds}{J}}$$

$$Z = - \frac{\int \frac{M_0 \cdot ds}{J} + \varepsilon \cdot E \cdot \Delta t \cdot \frac{ds}{h}}{\int \frac{ds}{J}}$$

Das zweite Zählerglied von X bezieht sich auf den Einfluß einer Zugstange, die erforderlich ist, wenn die Aufnahme des Schubes nicht durch Widerlager gewährleistet ist.

Die im Handbuch IV S. 465 gegebene Auflösung dieser Gleichungen sei mit entsprechenden Erläuterungen hier wieder gegeben.

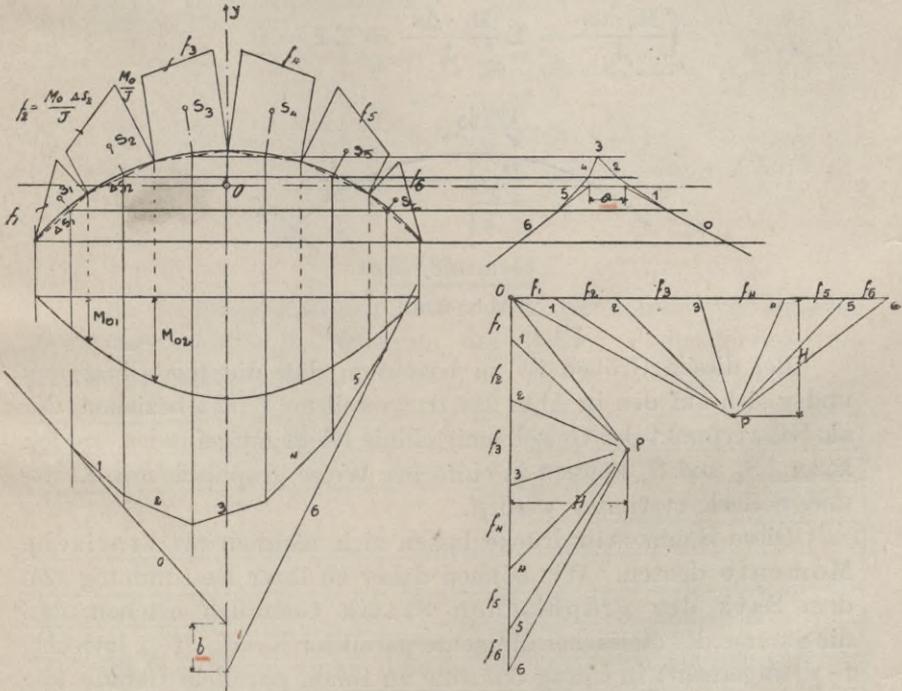


Abb. 235.

Zählerglieder.

Man zeichnet die für das statisch bestimmte Hauptsystem, den einfachen Balken, sich ergebende Momentenfläche (Abb. 235), teilt den Bogen in eine Anzahl geradlinige Stücke Δs und trägt

in den Endpunkten derselben senkrecht zur Bogenachse die zugehörigen $\frac{M_0}{J}$ auf. Die so entstehenden einzelnen Flächen $\frac{M_0 \cdot \Delta s}{J}$ seien mit f_1, f_2, f_3 usw. bezeichnet, und wir erhalten für

$$\int \frac{M_0 \cdot y \cdot ds}{J} = \Sigma \frac{\overbrace{M_0 \cdot \Delta s}^{f_1, f_2, \dots}}{J} \cdot y = \Sigma f \cdot y = \underline{S_x}.$$

In den Endflächen entstehen Dreiecke, so daß die auf die Stabachse projizierten Schwerpunkte derselben auf $\frac{2}{3}$ der Länge der unteren Stabstücke liegen. Bei allen mittleren Stäben kann man den Schwerpunkt in der Mitte der Stabstücke annehmen. Ebenso erhält man

$$\int \frac{M_0 \cdot x \cdot ds}{J} = \Sigma \frac{M_0 \cdot \Delta s}{J} \cdot x = \Sigma f \cdot x = \underline{S_y}$$

$$\int \frac{M_0 \cdot ds}{J} = \Sigma \frac{M_0 \cdot \Delta s}{J} = \Sigma f = \underline{S}.$$

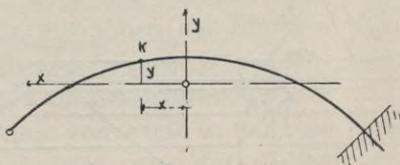


Abb. 236.

Bei diesen Größen ist zu beachten, daß die Koordinaten x und y sich auf den in Abb. 236 dargestellten Punkt beziehen, der als Schwerpunkt der Gewölbemittellinie leicht aufgefunden werden kann. S_x und S_y können in einfacher Weise graphisch mit Kraft- und Seileck bestimmt werden.

Diese Summenausdrücke lassen sich nämlich als statische Momente deuten. Wir können daher zu ihrer Bestimmung von dem Satz der graphischen Statik Gebrauch machen, daß die Summe der statischen Momente paralleler Kräfte ($f \cdot x$ lotrecht, $f \cdot y$ wagerecht) in bezug auf eine zu ihnen parallele Gerade (die vertikale Schwerachse bzw. die wagerechte Schwerachse) gleich ist dem zwischen die beiden letzten Seilpolygonseiten fallenden Stück (b bzw. a) der betreffenden Geraden multipliziert mit der Polweite (H).

Es ist also

$$\underline{S_x = H \cdot a; S_y = H \cdot b.}$$

Nennerglieder.

Diese lassen sich in derselben Weise ausdrücken. Es bedeutet

$$\int \frac{y^2 \cdot ds}{J} = \Sigma \left(\frac{\Delta s}{J} \cdot y^2 \right) = \Sigma (t_x) = \underline{T_x} =$$

Trägheitsmoment aller Bogenstrecken $\frac{\Delta s}{J}$ in bezug auf die x-Achse,

$$\int \frac{x^2 \cdot ds}{J} = \Sigma \left(\frac{\Delta s}{J} \cdot x^2 \right) = \Sigma (t_y) = \underline{T_y} =$$

dsgl. in bezug auf die y-Achse.

$\int ds = \Sigma \Delta s = s =$ Länge aller Stücke Δs zusammen. Die graphische Ermittlung dieser Größen ergibt sich ebenso wie vor; der oben erwähnte Satz aus der graphischen Statik läßt sich gleichwohl auch bei der Deutung von Trägheitsmomenten verwenden.

Ferner sei noch bezeichnet

$$\int \frac{ds}{F} = \Sigma \frac{\Delta s}{F} = \underline{s_1}$$

$$\int \frac{ds}{h} = \Sigma \frac{\Delta s}{h} = \underline{s_2}$$

$$\int \frac{ds}{J} = \Sigma \frac{\Delta s}{J} = \underline{s_3}$$

Schlußformeln.

Die Schlußgleichungen lauten nun, wenn man den linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten des Betons ε gleich dem des Eisens ε_0 setzt,

$$\underline{X} = \frac{S_x + \varepsilon \cdot E \cdot l (t - t_0)}{T_x + s_1 + \frac{E \cdot l}{E_0 \cdot F_0}}$$

$$\underline{Y} = \frac{S_y}{T_y}$$

$$\underline{Z} = - \frac{S + \varepsilon \cdot E \cdot s_2 \cdot \Delta t}{s_3}$$

Die hier vorgeführte Berechnung hat große Ähnlichkeit mit der im folgenden Kapitel XX eingehend besprochenen Behandlung größerer Brückengewölbe.

Der Zweigelenkbogen kann genau in derselben Weise, wenn es erforderlich sein sollte, behandelt werden.

Die wagerechte Belastung durch Wind wird bei genauen Berechnungen dann durchgeführt, wenn es sich um hohe gewölbte Dächer handelt. Vgl. Weiteres darüber Handbuch S. 466.

Berechnung größerer ein- gespannter Brückengewölbe.

I. Einleitung und Voraussetzungen für die Berechnung.

Während für kleinere gelenklose Brückengewölbe, bis etwa zu 20 m Spannweite hin, das einfache Stützlinienverfahren eine hinreichende Grundlage für die Bemessung darstellt, müssen größere Eisenbetongewölbe (schon bis 100 m Spannweite ausgeführt) einer sehr sorgsamem Überprüfung unterzogen werden.

Von vornherein machen wir die Voraussetzung, daß der Baugrund völlig unnachgibig oder doch zum mindesten auf beiden Gründungsseiten gleich zusammendrückbar ist, so daß ein gleichmäßiges Setzen auf beiden Seiten nur einer geringen Vertikalverschiebung des ganzen Bauwerks entspricht. Wir rechnen also bezüglich der wagerechten Abstützung mit einer absolut zuverlässigen gleichmäßigen Bodenbeschaffenheit. Wenn wir überhaupt von einer Nachgibigkeit in vertikaler Richtung sprechen, so meinen wir damit nur jene elastische Zusammendrückung, die jeder Körper unter dem Einfluß eines Druckes erleidet. Zum Teil wird diese elastische Pressung schon beim Stampfen der Widerlager durch die mechanische Gewalt des Stampfens und durch das Gewicht der Betonmassen selbst vollzogen. Die endgültige elastische Zusammenpressung wird erst nach dem Ausrüsten des eigentlichen tragenden Gewölbes erreicht; gerade dieser Rest sollte also, wenn auch nicht völlig gleich Null, so doch unbedingt auf beiden Seiten gleich groß sein.

Die zweite Anforderung ist, daß seitliche Nachgibigkeit des Baugrundes unmöglich ist. Sie dürfte meistens auch gar nicht in Frage kommen, da man selbst bei sehr flachen Brücken bestrebt ist, die Endresultierende mit Hilfe des Gewichtes der Widerlager möglichst senkrecht zur mehr oder weniger geneigten Bausohle zu erhalten. Schließlich soll ein Drehen der Widerlager ausgeschlossen sein.

Wir machen also die Voraussetzung völliger Starrheit derjenigen Körper, in welche sich das Gewölbe einspannen soll.

Selbstverständlich gestattet die Statik die Berücksichtigung unstarrer Auflager auch bei eingespannten Gewölben.

Denken wir an hohe Talbrücken mit schlanken Mittelpfeilern, die durch in sie eingespannte Gewölbe miteinander verbunden sind, so erscheint beim Herüberfahren eines Eisenbahnzuges eine Drehung der Pfeilerköpfe unvermeidlich, da die hohen Pfeiler bei einseitiger Belastung durch den Schubüberschuß die mit der auftretenden Biegung und Querbeanspruchung bewirkte seitliche Verdrängung notwendig erleiden müssen (lotrechte Nachgibigkeit der Pfeilerfundamente selbst ausgeschlossen).

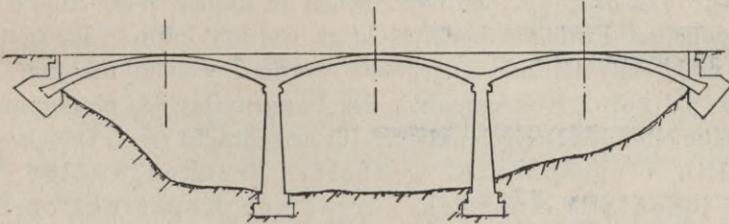


Abb. 237.

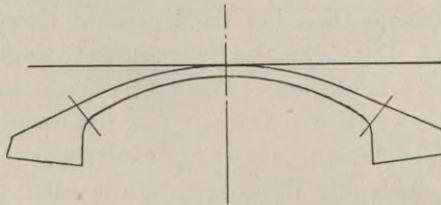


Abb. 238.

Während also bei einem Bauwerke nach Abbildung 237 die Pfeilerelastizität unbedingt berücksichtigt werden muß, und der Konstrukteur darauf angewiesen ist und imstande sein muß, eine derartige etwas komplizierte Berechnung durchzuführen, fehlen andererseits auch nicht die erforderlichen Voraussetzungen für diese Berechnung, da die elastische Nachgibigkeit der Pfeiler nach der Formänderungslehre verhältnismäßig leicht berechenbar ist. Im Rahmen dieses Buches soll nicht auf derartige Fälle eingegangen werden. — Wollten wir bei gewöhnlichen, zwischen niedrigen Widerlagern verspannten Gewölben (Abb. 238) ein seitliches Nachgeben der Widerlager infolge Drehung derselben berücksichtigen, so könnte bei dem Fehlen elastisch nach-

giebiger Konstruktionsteile zwischen Gewölbe und Gründung auch nur wieder die Nachgiebigkeit des Baugrundes als Veranlassung dazu gedacht werden, die, wie gesagt, keineswegs einwandfrei feststellbar ist. Da nun die Berücksichtigung einer Nachgiebigkeit der Widerlager die Berechnung erschwert, und auch keine sicheren Grundlagen dafür vorhanden sind, ein Mißgriff hierin aber die ganze Berechnung völlig fragwürdig machen würde, so setzen wir absolute Starrheit der Widerlager voraus, wie das auch Prof. Mörsch, dessen Theorie wir hier vorführen wollen, in seiner Ableitung „Berechnung von eingespannten Gewölben“ getan hat.

Sind die angegebenen Voraussetzungen nicht erfüllt, so empfiehlt sich meist die Ausführung eines Dreigelenkbogens, der bekanntlich in keiner Weise durch die angegebenen Einflüsse beeinträchtigt werden kann. Es können hier nicht alle Gründe angegeben werden, welche für den Fall einwandfreier Beschaffenheit des Baugrundes das eingespannte Gewölbe oder den Dreigelenkbogen für angebracht erscheinen lassen.

Ein eingespanntes größeres Brückengewölbe bedarf jedenfalls einer sehr sorgsamten Konstruktion und Ausführung. Es muß die Deformation durch die Normalkräfte und der Einfluß der Temperatur und Schwindung (namentlich bei freiliegenden Gewölben) festgestellt werden. Das Trägheitsmoment zeigt einen beständigen — oft recht erheblichen — Wechsel, ebenso auch die ständige Last, so daß, wenn auch die früher für einen eingespannten Rahmen abgeleiteten Grundgleichungen maßgebend bleiben, diese doch mit Berücksichtigung aller genannten Umstände wesentlich anderer Lösung bedürfen. Es ist noch folgendes im allgemeinen vorzuschicken:

Versuche haben erwiesen, daß sich Beton als Wölbmaterial innerhalb der üblichen Beanspruchungen hinreichend elastisch verhält; wir können daher die Gesetze der Elastizitätslehre auch bei Gewölben zur vollen Anwendung bringen. Wir dürfen auch von der großen Vereinfachung Gebrauch machen, die sich durch die Annahme eines konstanten Elastizitätsmoduls ergibt, weil innerhalb der üblichen Spannungsgrenzen Proportionalität zwischen Spannung und Dehnung gesichert ist. Noch ein anderer Umstand bleibt zu beachten: Eisenbetongewölbe werden ja hauptsächlich dann ausgeführt, wenn große Exzentrizitäten und damit auch Zugspannungen vorauszusehen sind. Nun soll nach den Vorschriften die Mitwirkung des

Betons in der Zugzone ausgeschlossen werden (Stadium II), auch in Fällen exzentrischen Druckes, wie sie hier vorliegen. Bei solcher Berechnung ist das Trägheitsmoment von der jeweiligen Lage der Nulllinie direkt abhängig, doch stellt es sich als Unmöglichkeit heraus, den auf diese Weise eintretenden Wechsel des Trägheitsmomentes von vornherein zu berücksichtigen; schließlich ist es auch keine Notwendigkeit, denn — soweit nicht gerade erhebliche Exzentrizitäten vorliegen — ergibt die Spannungsberechnung nach Stadium I oder Stadium II (namentlich bei $n = 10$) wenig Unterschied¹⁾. Es wird daher bezüglich des Trägheitsmomentes stets mit dem vollen Eisenbetonquerschnitt gerechnet.

II. Entwurf.

Die Berechnungsverfahren für eingespannte Gewölbe sind ihrer Natur nach Nachprüfungsverfahren; es ist also wichtig, einiges über den Entwurf selbst zu sagen.

Die Brücke ist zunächst frei zu entwerfen, wobei ein gesundes statisches Gefühl von vornherein zwischen den einzelnen Möglichkeiten das Vorteilhafteste auszuwählen hat. Die Gewölbemittellinie soll dann mit der Stützlinie für Eigengewicht, d. h. für gesamte ständige Last einschließlich Aufbauten (durch die Mitten der Scheitel- und Kämpferfugen), zusammenfallen im Gegensatz zu Dreigelenkbögen, wo die günstigste Bogenachse näherungsweise mit einer für das Eigengewicht + der halben gleichmäßig verteilten Verkehrslast gezeichneten Stützlinie zusammenfallen soll. Auf Grund der ersten Entwurfsskizze wird eine Gewichtsberechnung angefertigt und die Drucklinie gezeichnet. Die so gefundene Drucklinie wird dann als neue Bogenachse zugrunde gelegt und mit den verbesserten Gewichten eine zweite Drucklinie gezeichnet. In der Regel fällt schon jetzt Drucklinie und Bogenachse zusammen; wenn nicht annähernd, dann muß der Vorgang noch einmal wiederholt werden. Man kann die Bogenachse schließlich auch analytisch festlegen und mit Hilfe der verbesserten Gewichte die Ordinaten der Stützlinie (als Abstände von einer Wagerechten durch Scheitel-

¹⁾ Vergleiche auch hierüber den Abschnitt über exzentrischen Druck und über das Kernpunktverfahren in der Gewölberechnung in Schlüter: „Eisenbetonbau: Säule und Balken“, Verlag von Herm. Meußner-Berlin.

mitte) genau einrechnen (vgl. Gmündertobelbrücke von Prof. Mörsch, Sonderabdruck der Schweizerischen Bauzeitung). Eine direkte mathematische Bestimmung der Mittellinie ist bei den meist angewendeten Sparräumen und Entlastungsbögen im Aufbau nicht möglich. Das zweite Seilpolygon liefert schon ziemlich genau die in den einzelnen Ge-

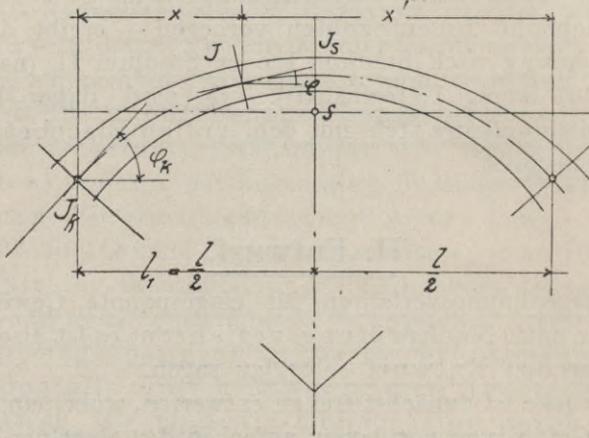


Abb. 239.

wölbefugen auftretenden Drücke, so daß man damit imstande ist, (je nach dem zur Verfügung stehenden Material) die Querschnitte zu bestimmen. Gelenklose Bögen werden stets so entworfen, daß ihr Trägheitsmoment J vom Scheitel (J_s) gegen die Kämpfer (J_k) stetig zunimmt, so daß die Querschnitte möglichst entsprechend der Druckzunahme zunehmen, und in allen Teilen des Gewölbes gleich hohe Spannungen auftreten. Im allgemeinen sind diese Bedingungen erfüllt, wenn die Vertikalprojektion aller Radial-schnitte konstant bleibt. Dr.-Ing. Max Ritter gibt in seinem Buch¹⁾ ein Gesetz über die Querschnittszunahme in der Form

$$\frac{J_s}{J \cdot \cos \varphi} = 1 - (1 - n) \cdot \frac{(l_1 - x)^2}{l_1^2},$$

worin

$$n = \frac{J_s}{J_k \cdot \cos \varphi_k}$$

(Abb. 239), welches sich eng an die praktischen Verhältnisse anlehnt und beim Kreisbogen sogar genau mit der oben angegebenen allgemein gebräuchlichen Annahme deckt.

¹⁾ „Beiträge zur Theorie und Berechnung der vollwandigen Bogen-träger ohne Scheitelgelenk.“ Willh. Ernst u. Sohn, Berlin.

Die Annahme der Scheitelstärke als Ausgangspunkt der Bemessung erfolgt unter Zugrundelegung des aus dem verbesserten Seilpolygon gewonnenen Horizontalschubes mit entsprechender Erhöhung desselben für Verkehrslast und mit Berücksichtigung der zu erwartenden Materialfestigkeit, wobei man an einen Überschuß für die zu erwartende Biegung zu denken hat und im allgemeinen einen etwas höheren Sicherheitsgrad als bei Decken annimmt.

In vielen Fällen gelangt man zu den zugrunde zu legenden Stärken auch durch Vergleich des Entwurfs mit anderen ausgeführten Bauwerken, über welche ja weitgehende Aufzeichnungen vorliegen. Dieser Weg ist in der Praxis sehr beliebt.

Schließlich sei noch ein Bemessungsverfahren von Prof. Mörsch erwähnt, welches im Betonkalender unter dem betreffenden Kapitel aufgeführt ist; es setzt jedoch den Spezialfall gleichmäßiger Überschüttung des Gewölbes bis zur Fahrbahn voraus.

Es sei noch der Ansicht vorgebeugt, als liege der Sicherheitsgrad eines eingespannten Eisenbetongewölbes in einer überreichlichen Bemessung. Im Gegenteil ist klar, daß die Elastizität mit der Stärke abnimmt. Geringe Nachgiebigkeiten im Baugrund, Temperaturschwankungen oder Schwinderscheinungen wird ein schlankes, biegsames Gewölbe leichter ertragen können als die starre Masse eines schwer gehaltenen Gewölbes.

Alle besprochenen Umstände müssen beim Vorentwurf reiflich erwogen werden, damit die nachfolgende genaue Überprüfung nach der Elastizitätstheorie möglichst gleich bei der ersten Berechnung die gewünschten und auch zulässigen Resultate der Spannungen zeitigt, und eine Wiederholung der zeitraubenden Rechnung auf Grund verbesserter Annahmen möglichst erspart bleibt.

III. Die Berechnung nach Prof. Mörsch.

Es sei nun auf das von Prof. Mörsch¹⁾ gegebene grundlegende und bisher am meisten verbreitete Verfahren näher eingegangen²⁾.

¹⁾ „Berechnung von eingespannten Gewölben“, Sonderabdruck der Schweizerischen Bauzeitung (auch auszugsweise wiedergegeben im Betonkalender).

²⁾ Dr. techn. Robert Schönhöfer gibt in seinem Buche „Statische Untersuchung von Bogen- und Wölbtragwerken“ auf denselben Voraus-

Im großen und ganzen sind in der Berechnung folgende Abschnitte zu unterscheiden.

1. Berechnung der drei statisch unbestimmten Größen H, V und M, welche sich in nichts von den gleichnamigen Größen des in Kapitel XVI behandelten eingespannten Rahmens und des in Kapitel XXII, Seite 240, erläuterten eingespannten Gewölbes als Dachkonstruktion unterscheiden. Die betreffenden Bestimmungsgleichungen lauten also nach Sonderabdruck Seite 2 (mit den Bezeichnungen von Prof. Mörsch, der für unseren bisherigen Buchstaben t den Buchstaben τ und für unser ε den Buchstaben α gebraucht):

$$X = H = \frac{\int \frac{M_0 \cdot y \cdot ds}{J} + E \cdot \alpha \cdot \tau \cdot l}{\int \frac{y^2 ds}{J} + \int \frac{ds}{F}},$$

wobei gegen die angezogene Stelle aus Kapitel XXII der Einfluß der Zugstange herausfällt;

$$Y = V = \frac{\int \frac{M_0 ds}{J} \cdot x}{\int \frac{x^2 ds}{J}}$$

$$Z = M = - \frac{\int \frac{M_0 \cdot ds}{J}}{\int \frac{ds}{J}},$$

wobei gegen früher der Einfluß ungleichmäßiger Erwärmung zunächst weggelassen ist.

Zu den Darlegungen auf Seite 1 des Sonderabdruckes sei noch bemerkt, daß es sich auch hier wie bei allen früheren Berechnungen nicht um die tatsächliche Berücksichtigung einer Formänderung handelt, sondern lediglich um die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen, wobei, wie wir wissen, die unbestimmten Größen mit Umgehung der Berechnung der Formänderungen gefunden werden. Der Kämpferquerschnitt wird — zur Wiederholung — in jeder Beziehung als starr vorausgesetzt.

setzungen wie Mörsch neuerdings ein ebenfalls bequem anwendbares Verfahren, daß den Lesern nach Studium dieses Kapitels ohne weiteres verständlich sein wird; es läßt sich auch auf Rahmen mit stark wechselndem Trägheitsmoment anwenden.

2. Die Deutung der Integrale und danach die Aufstellung neuer Gleichungen für H, V und M, wonach für eine wandernde Last 1 sowohl die analytische als auch die graphische Berechnung der Einflußordinaten gezeigt wird mit Hilfe der sogenannten w-Gewichte, $dw = \frac{ds}{J} ds$ bzw. $w = \frac{s}{J}$. In diesem Abschnitt liegt der wesentliche Unterschied zu den früheren Berechnungen, insofern der ständige Wechsel des Trägheitsmomentes berücksichtigt wird¹⁾. Führt man nämlich in die oben angegebenen 3 Bestimmungen für $\frac{ds}{J}$ die Bezeichnung dw ein (von Prof. Mörsch auf Seite 2 des Sonderabdruckes als elastisches Gewicht bezeichnet, womit man sich die Bogenachse belastet zu denken hat), so lauten sie

$$H = \frac{\int M_0 dw y + E \cdot \alpha \cdot \tau \cdot l}{\int dw y^2 + \int \frac{ds}{F}}$$

$$V = \frac{\int M_0 \cdot dw \cdot x}{\int dw \cdot x^2}$$

$$M = - \frac{\int M_0 \cdot dw}{\int dw}$$

Zieht man endlich nicht die Differentiale dw , sondern endliche Teilstücke der Bogenachse in Betracht, setzt also anstatt dw die Gewichte $w = \frac{s}{J}$, wobei s ein solches Teilstück bedeutet, so ist bei vorläufiger Weglassung des Temperaturgliedes im Zähler von H:

$$H = \frac{\Sigma M_0 \cdot w \cdot y}{\Sigma w \cdot y \cdot y + \Sigma \frac{s}{F}} = \frac{\Sigma M_0 \cdot w_y}{\Sigma y \cdot w_y + \Sigma \frac{s}{F}}$$

¹⁾ Vergleiche das schon genannte Buch Dr.-Ing. Max Ritter, Beiträge . . . Seite 12 kürzeres Verfahren, wenn Gesetzmäßigkeit der Gewölbeform vorliegt.

$$V = \frac{\sum M_0 \cdot w \cdot x}{\sum w \cdot x \cdot x} = \frac{\sum M_0 \cdot w_x}{\sum x \cdot w_x},$$

$$M = - \frac{\sum M_0 \cdot w}{\sum w};$$

wobei also für $w \cdot y$ zur Abkürzung einfach w_y und für $w \cdot x$ einfach w_x gesetzt ist (vgl. Sonderabdruck S. 3).

Die weitere Deutung der so umgeformten Bestimmungsgleichungen und die daran anschließende Benutzung derselben zur zeichnerischen Ermittlung der Einflußlinien für H , V und M wird später in einem ausführlichen Beispiel gezeigt werden. Liegt danach H , V und M dann für einen bestimmten Belastungsfall fest, und bezeichnet M_0 das Moment für einen bestimmten Punkt (x, y) des Freitragers, so ist der wahre Wert seines Momentes für das dreifach statisch unbestimmte System gegeben durch die Gleichung

$$M_k = M_0 + M - H \cdot y_k - V \cdot x;$$

wobei auf die Vorzeichen von x und y zu achten ist.

3. Die Verwendung der gewonnenen Einflußlinien für H , V und M zur Bildung von Einflußlinien für Kernpunkt-momente nach der Gleichung

$$M_k = M_0 + M - H \cdot y_k - V \cdot x.$$

Über die Zweckmäßigkeit derartiger Einflußlinien (die bekanntlich für eine wandernde Last 1 zu berechnen sind) sei folgendes erwähnt:

Bei gewissen Bauwerken mit geringerer Verkehrslast kennt man die ungünstigsten Laststellungen, die im Scheitel, Kämpfer

und in $\frac{1}{4}$ die größten Momente erzeugen, im voraus, und man kann

sich deswegen die Berechnung der Einflußlinien für die Kernpunkt-momente ersparen und die ermittelten Einflußlinien für H , V und M direkt benutzen.

Bei größeren Bauwerken und verhältnismäßig auch größeren, sich über große Längen verteilenden Verkehrslasten (Eisenbahnbrücken) wird man aber zur Konstruktion der Einflußlinien für die Kernpunkt-momente schreiten müssen, um die maximalen Einflüsse der Verkehrslast etwas genauer zu erhalten, sich aber in der Regel auch auf einige Querschnitte dabei beschränken können.

Bei Gewölben, die durch Pfeiler belastet sind, wird man natürlich nur für die Querschnitte, wo die Pfeiler aufstehen,

die Einflußlinien für die Kernpunktmente konstruieren und zum Schluß beachten, daß die Einflußlinien von Pfeiler zu Pfeiler geradlinig verlaufen (vgl. auch Abh. Mörsch, S. 4 links).

Im folgenden Beispiel wird auch die Ausrechnung einer Einflußlinie für ein Kernpunktmoment gezeigt werden.

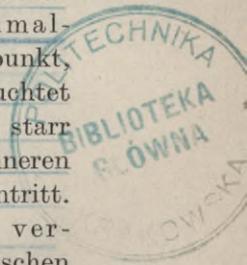
4. Die Berücksichtigung der Formänderung des Gewölbes, der wichtigste Abschnitt in der Abhandlung.

Wir haben die Bogenmittellinie mit der Drucklinie für Eigengewicht zusammenfallend vorausgesetzt, so daß theoretisch durch Eigengewicht nur reine Druckspannungen erzeugt werden müßten. Durch die erheblichen Normalkräfte (namentlich bei flachen Gewölben) tritt nun aber beim Ausrüsten des Gewölbes eine Verkürzung der Bogenachse ein, so daß diese sich nicht mehr mit der Drucklinie deckt und Biegungsspannungen hervorgerufen werden.

Die Drucklinie nimmt also innerhalb des Gewölbes infolge der Senkung desselben eine andere Lage an, da die Verkürzung der Bogenachse die Deckung der Mittellinie und der Stützzlinie ausschließt. Es stellt sich nämlich eine sogenannte Minimalstützzlinie ein, die im Kämpfer durch den unteren Drittpunkt, im Scheitel durch den oberen Drittpunkt verläuft. Es leuchtet ein, daß infolgedessen am Kämpfer, der an und für sich starr bleibt, eine Vermehrung der Druckspannungen an der inneren Leibung, im Scheitel eine solche an der äußeren Leibung eintritt.

Während sich die Senkung in keinem Falle vermeiden läßt, wäre die dadurch hervorgerufene Differenz zwischen Bogenachse und Drucklinie dadurch abwendbar, daß in Scheitel- und Kämpfermitte provisorische Gelenke ausgeführt werden, welche nach der Setzung des Gewölbes und völliger Aufbringung der ständigen Last nach geraumer Zeit wieder zu vergießen wären. In diesem Falle dürften Biegungsspannungen infolge Eigengewicht völlig ausgeschlossen werden können. In der Tat gibt es eine derartige Ausführung, und zwar bei der Stubenrauchbrücke über die Spree zwischen Nieder- und Oberschöneweide (siehe Handbuch f. E., Band VI). Wenn auch derartige Gelenke sich entsprechend ihrer vorübergehenden Aufgabe konstruieren lassen, so bedeuten sie doch immerhin eine wesentliche Verteuerung des Bauwerkes, wie sie die bleibenden Gelenke in Stahl oder Beton bei förmlichen Dreigelenkbogenbrücken in erhöhtem Maße bewirken.

1) Ableitung Anhang, Einflußlinienlehre, Absatz 7.



Man zieht es demgegenüber vor, von vornherein mit den durch das Eigengewicht allein schon hervorgerufenen recht erheblichen und unvermeidlichen Biegungsspannungen zu rechnen.

Selbstverständlich würde auch eine Überhöhung des Gewölbes gegenüber der beabsichtigten Form die Verschiebung zwischen Drucklinie und Bogenachse nicht verschwinden lassen, sondern höchstens zur Innehaltung einer genauen Höhenordinate des Gewölbescheitels dienen können. Es ist eine natürliche Erscheinung, daß sich bei dem frei werdenden Gewölbe eine Minimalstützlinie einstellt. Wir finden damit die alte Stützlinientheorie bestätigt, wonach man ein Gewölbe als stabil betrachtet, wenn eine Minimalstützlinie für Vollbelastung (durch den oberen Drittelpunkt des Scheitels und durch die unteren Drittelpunkte der Kämpfer oder der Bruchfugen) möglich ist.

Der Abschnitt lehrt also, daß die im Schwerpunkt des Kämpferquerschnittes angreifenden Reaktionen H_s und V_s , welche der mit der Bogenmittellinie zusammenfallend gedachten Stützlinie für Eigengewicht entsprechen, nicht die richtigen Auflagerkräfte des eingespannten Bogens bei Eigengewicht sein können, denn wir zeichnen diese Stützlinie ja durch die Mitten der Kämpfer und Scheitelfugen, während sie sich in Wirklichkeit gegen diese verschiebt. Wir können aber gewiß die aus der Stützlinie für Eigengewicht gewinnbaren theoretisch überall gleichmäßigen Pressungen beibehalten, wenn wir die durch die Verschiebung der Stützlinie eintretenden Biegungsspannungen hierzu addieren. Diese Trennung ist auch in den ursächlichen Kräften durchzuführen: während H_s und V_s — in der Mitte der Kämpferfuge angreifend — oder deren Resultierende die Veranlassung für die überall gleichmäßigen Pressungen sind, werden im Schwerpunkt des Systems (der bekanntlich mit dem Auflager in starrer Verbindung gedacht ist) drei Ergänzungskräfte H_e , V_e und M_e wirkend gedacht, die als Ursache für die eintretenden Biegungsbeanspruchungen anzusehen sind (vgl. Abhandlung Mörsch, Seite 4). Prof. Mörsch zeigt, daß bei den gemachten Voraussetzungen V_e und M_e zu Null werden, so daß nur H_e als eigentliche Ursache der Biegungsspannungen auftritt, also ein Zusatzschub (der seinem Vorzeichen nach minus wird, vgl. später). Hieraus folgt ohne weiteres, daß wir die unter 2 und 3 erwähnten Einfluß-

linien nicht zur Berechnung des Einflusses des Eigengewichtes benutzen können; es würden sich damit die Biegemomente überall zu Null ergeben müssen, da ja die Einflußlinien sich lediglich auf die starr gedachte Form des Gewölbes beziehen und die Mittellinie des Gewölbes nach der Stützlinie für Eigengewicht geformt vorliegen soll. Die Eigengewichtsbeanspruchungen werden also nach der mit der Bogenmittellinie zusammenfallenden Stützlinie (reiner Druck) festzustellen und die infolge der zusätzlichen Kraft H auftretenden Biegungsspannungen besonders zu berechnen sein; schließlich sind Normalspannungen und Biegungsspannungen zu addieren.

Die unter 2 und 3 angezogenen Einflußlinien verbleiben also lediglich für die Berücksichtigung der Verkehrslasten, die gegenüber dem Eigengewicht eine weitere merkliche Verkürzung der Bogenachse unmöglich bewirken können, so daß die eingerechneten Einflußordinaten für diese volle Gültigkeit besitzen (abgesehen von der durch die Formänderung bei Verkehrslast gegenüber Eigengewicht neu hinzukommenden verhältnismäßig unbedeutenden Änderung der Koordinaten der Achsenelemente).

Der reguläre Berechnungsgang, namentlich größerer Wölbbrücken, wird demnach folgender sein:

Das Gewölbe wird nach dem Verlauf der Stützlinie für ständige Last durch die Mitten der Scheitel- und Kämpferfugen geformt. Mit Hilfe der überall zentrischen Drucklinie wird dann die gleichmäßige Beanspruchung für die gesamte ständige Last nach der Gleichung

$$\sigma_0 = \sigma_u = \frac{P}{F}$$

berechnet.

Diese Berechnung liefert auch graphisch oder analytisch (siehe Gmündertobelbrücke) die Größe des Horizontalschubes H_s . Mit H_s wird dann der Ergänzungsschub H_e berechnet,

$$H_e = - \frac{H_s \cdot \int \frac{ds}{F}}{\int \frac{y^2 ds}{J} + \int \frac{ds \cdot \cos^2 \varphi}{F}}$$

wobei die einzelnen Integrale aus der Berechnung der statisch

unbestimmten Größen H , V und M her schon bekannt sind (siehe die Ableitung von H_e , Abhandlung Mörsch, Seite 5).

Demnach

$$H_e = - \frac{H_s \cdot \sum \frac{s}{F}}{\sum w \cdot y^2 + \sum \frac{s}{F}}$$

Wir stehen hier das erste Mal vor der Bestimmungsgleichung einer statisch unbestimmten Größe, die auf der rechten Seite eine (in diesem Falle mit Hilfe des Stützlinienverfahrens) vorausberechnete Kraft (H_s) als Faktor enthält. Die Gleichung ist eben aus der wirklichen Berücksichtigung der tatsächlich eintretenden Deformierung (Zusammenpressung

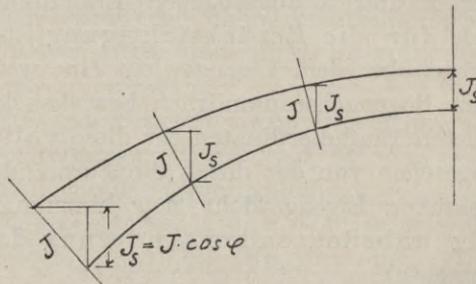


Abb. 240.

des Gewölbes) entstanden. Da H_e negativ ist, so erzeugt es im Bogenteil unterhalb der x -Achse negative Biegemomente mit Druckspannungen an der inneren Leibung und Zugspannungen im Gewölberücken, im Bogenteil oberhalb der x -Achse dagegen Druckspannungen am Gewölberücken und Zugspannungen an der inneren Leibung (vgl. Abhandlung Mörsch, Seite 5). Durch H_e tritt also die beschriebene Verschiebung der Drucklinie ein, so zwar, daß sich die ursprüngliche Drucklinie mit der verbesserten auf der x -Achse schneidet; denn in dem Punkt der Gewölbeachse, welcher auf die x -Achse fällt, muß das Biegemoment infolge H_e zu Null werden.

Abgesehen von einer nach der oben angegebenen Weise möglichen genauen Berechnung von H_e gibt Schaechterle¹⁾ folgende Annäherungsformeln dafür an:

¹⁾ „Beiträge zur Theorie und Berechnung der elastischen Bogen, Bogenstellungen und mehrstieligen Rahmen.“ — W. Ernst u. Sohn.

Für parabolische Gewölbeachse und $J \cdot \cos \varphi = J_s$ (Abb. 240) wird mit der Scheitelstärke ds und der Stichhöhe f

$$H_e = - \frac{15}{16} \left(\frac{ds}{f} \right)^2 \cdot H_s.$$

Liegt H_e fest, so berechnen sich die dadurch bedingten Randspannungen sehr einfach aus den Kernmomenten zu

$$\sigma_o = + \frac{H_e \cdot y_{ku}}{w}, \quad \sigma_u = - \frac{H_e \cdot y_{ko}}{w}; \quad 1)$$

(vgl. Abhandlung Mörsch, Seite 5), so daß aus Normal- und Biegungsspannungen zusammen die Gesamtspannungen infolge ständiger Last feststellbar sind (siehe Abhandlung Mörsch, Tabelle Seite 5 mit dem nachfolgenden Absatz).

[Die provisorischen Gelenke können natürlich gegebenenfalls auch dazu benutzt werden, einen anfänglichen Spannungszustand zu erzeugen in der Weise, daß dadurch den später auftretenden Spannungen durch Nutzlast und Temperaturerniedrigung von vornherein entgegen gearbeitet wird.]

Nach Schaechterle erhält man auch näherungsweise das durch H_e hervorgerufene Biegemoment unter den gleichen Voraussetzungen wie vor im Scheitel zu

$$M = + \frac{5}{16} \cdot \frac{ds^2}{f} \cdot H_s,$$

im Kämpfer zu

$$M = - \frac{5}{8} \cdot \frac{ds^2}{f} \cdot H_s,$$

im Kämpfer also den doppelten Betrag des Scheitelmomentes. Die entsprechenden Spannungen folgen mit $H_s = \sigma_s \cdot F_s$ für den Scheitel aus

$$\sigma = \pm \frac{15}{8} \cdot \frac{ds}{f} \cdot \sigma_s$$

und für die Kämpfer aus

$$\sigma = \mp \frac{15}{4} \cdot \frac{d_k'}{f} \cdot \sigma_s,$$

wobei d_k' die Vertikalprojektion der Kämpferstärke bedeutet

1) Berechnung der Randspannungen mit Hilfe der Kernpunkte, siehe das Kapitel: Das Kernpunktverfahren in der Gewölberechnung in Schlüter „Eisenbetonbau: Säule u. Balken“. Verlag von Herm. Meußner-Berlin.

(Abb. 241). Zu diesen Spannungen wären also die Normalspannungen zu addieren.

Sind nunmehr die Spannungen infolge Eigengewicht festgelegt, so folgt mit Benutzung der Einflußlinien für H , V und M die Feststellung der durch Verkehrslast hervorgerufenen Biegemomente, schließlich die zugehörige Spannungsermittlung.

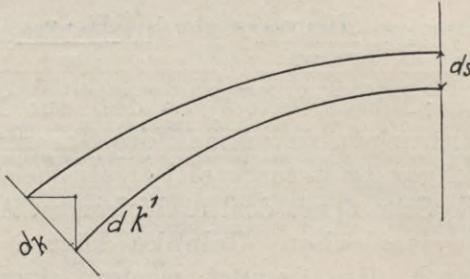


Abb. 241.

5. Berücksichtigung der Temperatur- und Schwindeinflüsse. (Vgl. hierzu die schweizerischen Vorschriften Artikel 5.)

Die einzige, durch gleichmäßige Temperatureinflüsse hervorgerufene, statisch unbekannt GröÙe ist — wie schon unter Abschnitt 4 in den Formeln gezeigt — der Horizontalschub. Der Temperaturschub ist also für sich

$$H = \frac{E \cdot \alpha \cdot \tau \cdot l}{\int dw \cdot y^2 + \int \frac{ds}{F}} = \frac{E \cdot \alpha \cdot \tau \cdot l}{\Sigma \frac{s}{J} \cdot y^2 + \Sigma \frac{s}{F}}$$

vgl. Abhandlung Mörsch, Seite 6). (Bezüglich der von Prof. Mörsch weiter besprochenen ungleichmäßigen Erwärmung des Gewölbes und der damit zusammenhängenden Beanspruchungen sei auf den betreffenden Abschnitt des Sonderabdruckes Mörsch, Seite 6 verwiesen.)

Der lineare Wärmeausdehnungskoeffizient beträgt etwa $\alpha = \epsilon = 0,000012$.

Da das Schwinden dieselben Folgen zeitigt, wie eine Wärmeschwankung, so kann es durch die gleiche Rechnung berücksichtigt werden, die für Temperatur gilt. Das Schwindmaß beträgt 0,00025; es entspräche das einer Temperaturerniedrigung

von $t = \frac{0,00025}{0,000012} = 20^\circ \text{C}$. Es wäre aber nicht gerechtfertigt, das

Schwinden als Ursache für Biegungsspannungen mit einem so

hohen Beträge zu berücksichtigen, weil es sich kurz nach dem Abbinden des Betons vollzieht und infolge der stückweisen Betonierung des Gewölbes (die mit Rücksicht auf möglichst gleichzeitige und allmähliche Belastung des Lehrgerüsts bei allen größeren Gewölben erfolgt), nur sehr wenig zur Wirkung gelangen kann. Man kann daher von der Berücksichtigung von Schwindspannungen absehen, wenn ein Gewölbe in einzelnen Lamellen betoniert wird.

Artikel 5 der schweizerischen Vorschriften bemerkt hierzu: „Bei Berücksichtigung dieser Einflüsse dürfen die zulässigen Spannungen für Temperatur allein um 20%, für Temperatur und Schwinden um 50% überschritten werden, wobei als äußerste Grenze die Eisenspannung von 1500 kg/cm² und die Betonspannung von 70 kg/cm² einzuhalten sind.

Es verbleibt also nur die Berücksichtigung der Temperaturschwankungen. Allgemein können diese sich nur dann bemerkbar machen, wenn es sich um langandauernde Frost- oder Hitzeperioden (mittlere Monatstemperaturen) handelt. Denn nur dann kann die zu einer Längenänderung erforderliche Umtemperierung des Gewölbes bis ins Innere hinein eintreten. Der Grad der Beeinflussung hängt natürlich auch mit von der Stärke des Gewölbes ab. Schwächere Gewölbe (Eisenbetongewölbe) werden schneller umtemperiert werden können als stärkere (Betongewölbe). Da ferner allgemein Biegemomente um so eher zu Zugspannungen führen können, je geringer die gleichzeitig auftretenden Normalkräfte sind, so werden leicht gehaltene oben freie Eisenbetongewölbe bei Wärmeschwankungen bedeutend mehr auf Zug beansprucht werden können als gleich weit gespannte überschüttete Gewölbe, welche ohnehin gegen das Eindringen der Lufttemperatur besser geschützt sind. Ebenso verhält es sich mit der Wirkung der Verkehrslast bei leichten oder schweren Gewölben. Andererseits muß auch noch bedacht werden, daß der Einfluß der Verkehrslast umsomehr in die Wagschale fällt, je kleiner die Spannweite ist (je kleiner nämlich die Normalkräfte sind).

Im Verhältnis zu den durch die Verkehrslast hervorgerufenen Biegungsspannungen werden also die Temperaturspannungen um so mehr bei der Bemessung berücksichtigt werden müssen, je kleiner die Spannweite und je leichter die Konstruktion gehalten ist.

Genau so wie die eintretende Verkürzung der Bogenachse bei abnehmendem Pfeilverhältnis ein Anwachsen des Zusatzschubes H_e

mit sich bringt und damit auch größere Eigengewichtsbiegungsspannungen, genau so wird ferner auch der Einfluß der Temperatur bei flachen Gewölben stärker ins Gewicht fallen.

Die Biegungsspannungen infolge Eigengewichts- und Temperaturerniedrigung wurzeln eben beide in der gleichen Ursache, in der Verkürzung der Bogenachse; und mit einer Temperaturverminderung ist, wenn wir von Wärmeschwankungen sprechen, im wesentlichen zu rechnen, da die meisten Gewölbe in den Sommermonaten hergestellt werden.

Dr.-Ing. K. W. Schaechterle bemerkt in seinem oben angezogenen Buch über diesen Zusammenhang, daß die Verkürzung der Bogenachse infolge der Normalkräfte im großen Durchschnitt

$\frac{1}{10000}$ beträgt, und daß eine solche Verkürzung bei einer Temperaturerniedrigung um 10° C ebenfalls eintreten würde.

Erfährt also das Gewölbe nach seiner Aufstellung eine Temperaturerhöhung um 10° C, so würden dadurch die durch Eigengewicht bedingten Biegungsspannungen wieder aufgehoben werden, und die Drucklinie deckte sich wieder mit der Bogenachse. Folgt dann noch eine Erhöhung um weitere 10° C, so erhalten wir das zugehörige Resultat an Biegungsspannungen, wenn wir die für die Verkürzung infolge Eigengewicht festgestellten Biegungsspannungen bezüglich ihrer Wirkungslage im Querschnitt einfach umkehren.

Die Eigengewichtsbiegungsspannungen werden also, wenn die Aufstellungstemperatur bestehen bleibt, gleich nach dem Ausrüsten voll auftreten. Beträgt nun die Aufstellungstemperatur $+10^{\circ}$ C, so werden sich die Biegungsspannungen infolge Eigengewicht gewissermaßen wieder wegheben, wenn die Temperatur nach dem Ausrüsten auf 20° C steigt und längere Zeit so anhält; sie würden jedoch eine Verdoppelung erfahren, wenn das Thermometer für längere Zeit bis auf 0° und eine Verdreifachung, wenn es bis auf -10° C herabginge usw. Wenn dann später im Sommer wieder 20° C Wärme erreicht werden, so würden alle Biegungsspannungen, abgesehen von der Verkehrslast, wieder gleich Null werden.

Nun können wir bei mitteldeutschem Klima im allgemeinen mit Maximaltemperaturen von $+25^{\circ}$ C und -15° C rechnen.

Ferner können wir, wenn nicht außerordentliche Verhältnisse die Herstellung des Gewölbes bei schon niedriger Frühlings- oder Herbsttemperatur erfordern, die Innentemperatur des Bauwerkes

bei der Herstellung zu etwa $+ 10^{\circ}$ bis 15° C voraussetzen (allzu großen Wärmeeinflüssen bis etwa 25° C muß ein frisch betoniertes Gewölbe sowieso durch Abdecken und Feuchthalten entzogen werden). Wir haben unter diesen Umständen dann nur außer den Eigengewichtseinflüssen noch mit einer Temperaturerniedrigung von

$$+ 10 \text{ bis } - 15 = 25^{\circ} \text{ C}$$

oder $+ 15 \text{ bis } - 15 = 30^{\circ} \text{ C}$

zu rechnen.

Eine Temperaturerhöhung auf 20 bis 25° C können wir außer acht lassen, denn diese würde nur die Eigengewichtsbiegungsspannungen wieder aufheben.

Die Temperaturausdehnungskoeffizienten bzw. Verkürzungskoeffizienten betragen

für Beton etwa 0,000 009,

für Eisenbeton etwa 0,00 0012.

Die Elastizitätsmodule betragen

für Beton etwa 130—180 000 kg/cm²,

für Eisenbeton etwa 200—250 000 kg/cm²

(siehe Schaechterle).

6. Allgemeine Schlußbemerkungen.

Nach diesen Erläuterungen dürften die Gesichtspunkte, die beim Gebrauch der Gewölbetheorie zu beobachten sind, klar gestellt sein. Im allgemeinen ist noch hinzuzufügen, daß, wenn es überhaupt angezeigt erscheint, Eisenbetonkonstruktionen nach Stadium I zu berechnen, dies bei eingespannten Gewölben in erster Linie gefordert werden kann. Wir haben im Rahmen unserer Betrachtung absolut starre Widerlager vorausgesetzt; ganz ausgeschlossen ist es jedoch wohl nie, daß, wenn auch nicht gerade eine lotrechte, so doch eine geringe wagerechte Nachgiebigkeit der Widerlager in Frage kommt; mindestens kann ein elastisches Ausweichen derselben vermutet werden. Dieses würde in demselben Sinne wie Eigengewicht, Temperaturerniedrigung und Schwinden wirken und die entsprechenden Zugspannungen unten am Scheitel und oben an den Kämpfern noch weiter erhöhen, so daß bei den immer vorauszusetzenden ungünstigsten Verhältnissen die Beanspruchung der Zug-eisen sich so weit der Streckgrenze nähern könnte, daß Zugrisse im Beton auftreten. Man wird also die ungünstigst beanspruchten Querschnitte auch unter der Annahme nachprüfen müssen, daß der Beton an der Aufnahme der Zugkräfte voll beteiligt

ist, wie es die „vorläufigen Bestimmungen für das Entwerfen und die Ausführung von Ingenieurbauten in Eisenbeton im Bezirke der Eisenbahndirektion Berlin“ (siehe Betonkalender) verlangen.

Nur bei weit gespannten armierten Brücken kann hin und wieder die Rücksicht auf Druckspannungen für die Bemessung der Querschnitte allein maßgebend sein. Man unterscheidet demnach Z-Gewölbe und D-Gewölbe. Was über die Eigenarten der nach dieser Unterscheidung möglichen Ausführungsformen zu sagen ist, möge im Schaechterle, S. 19 usw. nachgelesen werden.

Ein vollständiges Beispiel für die Durchführung der Berechnung einer eingespannten Bogenbrücke mit Berücksichtigung aller im Vorstehenden näher besprochenen Umstände hat uns Prof. Mörsch in der Beschreibung der „Gmündertobelbrücke bei Teufen im Kanton Appenzell“ gegeben (Sonderabdruck der Schweizerischen Bauzeitung), so daß wir dieselbe in jeder Beziehung als Muster hinstellen können. Da dort die analytische Einrechnung der Einflußlinien für die statisch unbestimmten Größen und auch die Momentenbestimmung mit Hilfe der besonders eingerechneten Einflußlinien für die Kernpunktmente erfolgt ist, so führen wir im folgenden noch ein anderes Beispiel vor, welches die namentlich für kleinere Bauwerke empfehlenswerte graphische Ermittlung der 3 Einflußlinien für H , V und M und die direkte Benutzung derselben bei der Bestimmung der Momente zeigen soll.

Kapitel XXIV.

Vollständiges Beispiel der Berechnung einer gelenklosen Bogenbrücke mit graphischer Ermittlung der statisch unbestimmten Größen H , V und M und direkter Benutzung derselben zur Bestimmung der Momente.

An Hand der Tafel II soll die genaue Nachprüfung der Spannungen einer gelenklosen Bogenbrücke von 21,0 m lichter Weite erläutert werden, deren hauptsächlichste Abmessungen mehreren ähnlich ausgeführten, wegen ihrer Kleinheit von den

ausführenden Firmen weniger genau berechneten Bauwerken einer Bahnstrecke entnommen sind. Die Belastung der Brücke besteht aus Überschüttung einschließlich Pflasterung von im Mittel $1,8 \text{ t/m}^3$; ferner beträgt das Gewicht

des Eisenbetons $2,4 \text{ t/m}^3$;

des Betons $2,2 \text{ t/m}^3$.

Die Verkehrsbelastung besteht aus einer 20 t-Dampfwalze und 400 kg/m^2 -Menschengedränge.

1. Bestimmung der Gewölbeform.

Wir führen die ganze Berechnung für einen Streifen von 1 m Breite durch und legen zunächst nach der unter Abschnitt II besprochenen Weise die genaue Mittellinie des Gewölbes nach der Stützzlinie für ständige Last fest¹⁾. Da wir so wie so für die Ermittlung der statisch unbestimmten Größen später die Einteilung in eine Anzahl Teilstücke benötigen, so können wir die nämliche Einteilung in Lamellen auch gleich bei der jetzt zuerst vorzunehmenden Feststellung der Lamellenlasten benutzen. Wir wählen $2 \cdot 11 = 22$ gleiche Teile von der Länge $s = 1,00 \text{ m}$ (nötig ist es nicht, daß die Teile gleiche Länge haben).

Nachdem wir die Stützzlinie graphisch mit der Bogenmittellinie in Übereinstimmung gebracht haben, betragen die einzelnen Lamellengewichte:

Gewichtsstreifen für ständige Last.

$$G_1 = 1,0 \cdot 0,70 \cdot 2,4 + 0,67 \cdot 3,75 \cdot 1,8 = 5,6 \text{ t}$$

$$G_2 = 1,0 \cdot 0,64 \cdot 2,4 + 0,75 \cdot 2,65 \cdot 1,8 = 5,11$$

$$G_3 = 1,0 \cdot 0,59 \cdot 2,4 + 0,82 \cdot 2,15 \cdot 1,8 = 4,59$$

$$G_4 = 1,0 \cdot 0,53 \cdot 2,4 + 0,86 \cdot 1,70 \cdot 1,8 = 3,90$$

$$G_5 = 1,0 \cdot 0,49 \cdot 2,4 + 0,92 \cdot 1,35 \cdot 1,8 = 3,41$$

$$G_6 = 1,0 \cdot 0,44 \cdot 2,4 + 0,94 \cdot 1,05 \cdot 1,8 = 2,83$$

$$G_7 = 1,0 \cdot 0,40 \cdot 2,4 + 0,96 \cdot 0,80 \cdot 1,8 = 2,34$$

$$G_8 = 1,0 \cdot 0,38 \cdot 2,4 + 0,97 \cdot 0,60 \cdot 1,8 = 1,96$$

$$G_9 = 1,0 \cdot 0,36 \cdot 2,4 + 0,98 \cdot 0,45 \cdot 1,8 = 1,66$$

$$G_{10} = 1,0 \cdot 0,355 \cdot 2,4 + 0,99 \cdot 0,37 \cdot 1,8 = 1,51$$

$$G_{11} = 1,0 \cdot 0,35 \cdot 2,4 + 1,00 \cdot 0,35 \cdot 1,8 = 1,47$$

$$\frac{1}{2} \Sigma G = 34,38 \text{ t}$$

¹⁾ Mit dieser Grundlage weichen wir von der Nachprüfung der vorliegenden Gewölbe insofern ab, als es nicht feststeht, daß ihre Mittellinien nach den Stützzlinien für die ständige Last geformt worden sind. Es ist also leicht möglich, daß die nachfolgend berechneten Spannungen in Wirklichkeit wesentlich überschritten werden.

Die für den Entwurf nötigen mehreren Kräftepläne und Stützlinsen bis zur Gewinnung der definitiven Form und der definitive Kräfteplan sind auf Tafel II nicht wieder gegeben.

In den drei Querschnitten, welche wir hauptsächlich untersuchen wollen: im Scheitel, im Kämpfer und in $\frac{1}{4}$ (nur links) betragen nach dem Kräfteplan die zugehörigen Normaldrücke, Querschnitte und gleichmäßigen Druckspannungen (wenn die Querschnitte aus der später folgenden Zusammenstellung entnommen werden):

	Normaldruck t^0	Querschnitt in m^2	Spannung $\frac{N}{F}$ in kg/cm^2
Scheitel	$H_s = 29,0$	0,359 054	8,1
Kämpfer	34,8	0,709 054	4,9
$\frac{1}{4}$ (Fuge V)	30,3	0,429 054	7,05

Diese Pressungen erscheinen uns zunächst recht niedrig; es mag ein weniger gutes Material verwendet worden sein. Zu beachten bleibt aber, daß bei kleineren Bauwerken die Einflüsse der Verkehrslasten mehr ins Gewicht fallen als bei größeren, so daß wir erst nach Feststellung der Gesamtspannungen ein Urteil über die ausgeführten Stärken abgeben können. Bei größeren Bauwerken pflegt man jedenfalls mit der Grundspannung höher hinauf zu gehen (zu etwa $15 kg/cm^2$) und auch dafür zu sorgen, daß diese in allen Fugen möglichst gleich ausfällt.

Bevor wir nun H_e feststellen können, um damit die Eigen gewichtsbiegungsspannungen festzulegen, müssen wir zunächst schreiten zur Konstruktion der

2. Einflußlinien der statisch unbestimmten Größen für H, V und M.

a) Festlegung des Achsenkreuzes.

Wir messen die mittleren Höhen der einzelnen Lamellen des Gewölbes heraus und bestimmen damit die Querschnitte, Trägheitsmomente und elastischen Gewichte $w = \frac{s}{J}$ in folgender Zusammenstellung (und zwar nur für eine Symmetriehälfte):

Das Gewölbe hat oben und unten durchweg je 10 Rundeisen 8 mm erhalten mit dem Querschnitt von je 5,03 cm², zusammen also 10,06 cm².

Mit $n = 10$ (nach den Bestimmungen der Eisenbahndirektion Berlin, s. Betonkalender) beträgt der ideelle Querschnitt der Eiseneinlage in m² ausgedrückt

$$(10 - 1) \cdot 10,06 = 90,54 \text{ cm}^2 = 0,009054 \text{ m}^2.$$

Teilstück	Mittlere Höhe in m	Mittlerer Eisenbetonquerschnitt in m ²	Mittleres Trägheitsmoment m ⁴	Elastische Gewichte $w = \frac{s}{J}$
		$h \cdot b + (n-1) \cdot (f_e + f_e')$	$\frac{b \cdot h^3}{12} + (f_e + f_e') \cdot (n-1) \cdot \left(\frac{h}{2} - a\right)^2$	
1	0,70	0,709 054	0,029 539 66	34
2	0,64	0,649 054	0,022 633 28	44
3	0,59	0,599 054	0,017 774 95	56
4	0,53	0,539 054	0,012 927 93	77
5	0,49	0,499 054	0,010 242 30	98
6	0,44	0,449 054	0,007 442 95	134
7	0,40	0,409 054	0,005 610 61	179
8	0,38	0,389 054	0,004 819 16	208
9	0,36	0,369 054	0,004 105 52	244
10	0,355	0,364 054	0,003 938 80	254
11	0,35	0,359 054	0,003 776 63	265

$$\frac{1}{2} \Sigma w = 1593$$

Hieran schließen wir die graphische Ermittlung des Schwerpunktes 0 der elastischen Gewichte w mit Hilfe des Kräfteplanes 1 und des zugehörigen Seilpolygons 1', was mit großer Genauigkeit auszuführen ist. In dem Kräfteplan 1 sind die einzelnen Gewichte w der Reihe nach aufgetragen worden. Nach Annahme eines be-

w_{y1}	=	— 34 (3,55 — 0,64)	=	— 98,94
w_{y2}	=	— 44 (2,865 — 0,64)	=	— 97,90
w_{y3}	=	— 56 (2,27 — 0,64)	=	— 91,28
w_{y4}	=	— 77 (1,75 — 0,64)	=	— 85,47
w_{y5}	=	— 98 (1,30 — 0,64)	=	— 64,68
w_{y6}	=	— 134 (0,94 — 0,64)	=	— 40,20 — 478,47 = Σ —
w_{y7}	=	179 (0,64 — 0,625)	=	2,685
w_{y8}	=	208 (0,64 — 0,375)	=	55,120
w_{y9}	=	244 (0,64 — 0,200)	=	107,36
w_{y10}	=	254 (0,64 — 0,075)	=	143,51
w_{y11}	=	265 · 0,64	=	169,60 + 478,47 = Σ +

liebigen Poles kann die Seillinie Fig. 1' gezeichnet werden. Die senkrechte Schwerachse fällt mit der y-Achse zusammen, da ein symmetrisches Gewölbe vorliegt.

Es folgt nun die Ermittlung der statischen Momente $w \cdot y = w_y$ gemäß den Anforderungen des Abschnittes III unter Nr. 2, was ohne weiteres graphisch ausführbar ist, aber wegen größerer Genauigkeit in vorstehender Zusammenstellung noch analytisch nachgeprüft wird.

Die Teilsummen entgegengesetzten Vorzeichens müssen gleichgroß sein.

b) Ermittlung der Nenner.

Nennergröße von H.

$$H = \frac{\Sigma M_0 \cdot w_y}{\Sigma y \cdot w_y + \Sigma \frac{s}{F}}$$

Das erste Nennerglied $\Sigma y \cdot w_y$ läßt sich darstellen als das statische Moment der w-Gewichte bezogen auf die x-Achse und wird gefunden mit Kraftpolygon 2 und Seilpolygon 2' (vgl. Mörsch, Seite 3 linke Spalte). Im Kraftpolygon 2 sind die einzelnen w-Gewichte dem Vorzeichen nach aufgetragen. Wir finden nun

$$\Sigma y \cdot w_y = n_y \cdot h_y \text{ aus Polygon 2 bzw. 2' zu } 4,25 \cdot 500 = 2125.$$

Das zweite Nennerglied $\Sigma \frac{s}{F}$ ergibt sich aus folgender Aufstellung:

$$\frac{s}{F_1} = 1,0 : 0,709\ 054 = 1,413$$

$$\frac{s}{F_2} = 1,0 : 0,649\ 054 = 1,541$$

$$\frac{s}{F_3} = 1,0 : 0,599\ 054 = 1,669$$

$$\frac{s}{F_4} = 1,0 : 0,539\ 054 = 1,855$$

$$\frac{s}{F_5} = 1,0 : 0,499\ 054 = 2,044$$

$$\frac{s}{F_6} = 1,0 : 0,449\ 054 = 2,227$$

$$\frac{s}{F_7} = 1,0 : 0,409\ 054 = 2,445$$

$$\frac{s}{F_8} = 1,0 : 0,389\ 054 = 2,570$$

$$\frac{s}{F_9} = 1,0 : 0,369\ 054 = 2,710$$

$$\frac{s}{F_{10}} = 1,0 : 0,364\ 054 = 2,747$$

$$\frac{s}{F_{11}} = 1,0 : 0,359\ 054 = 2,785$$

$$\frac{1}{2} \sum \frac{s}{F} = 23,966$$

$$\sum \frac{s}{F} = 47,932$$

Die Nennergröße von

$$V = \frac{\sum M_0 \cdot w_x}{\sum x \cdot w_x}$$

wird genau in derselben Weise gebildet.

Also zunächst Bildung der statischen Momente $w \cdot x = w_x$

$$w_{x1} = 34 \cdot 9,545 = 324,53$$

$$w_{x2} = 44 \cdot 8,825 = 388,30$$

$$w_{x3} = 56 \cdot 8,045 = 450,52$$

$$w_{x4} = 77 \cdot 7,215 = 555,55$$

$$w_{x5} = 98 \cdot 6,305 = 617,89$$

$$w_{x6} = 134 \cdot 5,375 = 720,25$$

$$w_{x7} = 179 \cdot 4,425 = 792,07$$

$$w_{x8} = 208 \cdot 3,465 = 720,72$$

$$w_{x9} = 244 \cdot 2,485 = 606,34$$

$$w_{x10} = 254 \cdot 1,495 = 379,73$$

$$w_{x11} = 265 \cdot 0,500 = 132,50$$

$$\hline 5688,40$$

Hierzu ist Kraftpolygon 3 und Seilpolygon 3' gezeichnet. Mit Hilfe dieser Pläne erhalten wir $\sum x \cdot w_x = n_x \cdot h_x = 11,96 \cdot 5000 = 59\ 800$ (siehe Tafel II).

Den Nenner der dritten Gleichung

$$M = - \frac{\sum M_0 \cdot w}{\sum w}$$

haben wir in der ersten Aufstellung schon bestimmt.

c) Ermittlung der Zähler und vollständige Einflußliniengleichungen für H, V und M.

Siehe zunächst die ohne weiteres verständliche Erklärung dazu mit der Angabe über die rechnerische Auflösung Abhandlung Mörsch (S. 3 linke Spalte), wo auch die Erläuterung der graphischen Behandlung gegeben ist.

Für den Zähler von H oder für $\Sigma M_0 \cdot w =$

$$-\frac{1}{2} \sum_a w_y (a - x)$$

ist das Kräftepolygon Fig. 4 mit derselben Polweite h_y wie in Fig. 2 gezeichnet worden, nur um 90° nach links gedreht.

Das zugehörige Seilpolygon ist Fig. 4'. Wir gewinnen nunmehr den Zähler durch die unter der Last P liegende Ordinate b multipliziert mit h_y ; es wird also nun H vollständig

$$H = \frac{b \cdot h_y}{n_y \cdot h_y + \Sigma \frac{s}{F}} = \frac{b}{n_y + \frac{1}{h_y} \cdot \Sigma \frac{s}{F}}$$

In der letzten Form können wir das Seilpolygon 4' als **Einflußlinie des Horizontalschubes H** auffassen, so daß derselbe jedesmal gefunden wird durch Heraussuchen der Ordinate b und Division derselben durch ein und denselben Nenner.

In unserem Falle ist für den Nenner

$$n_y \dots \dots \dots = 4,250\ 000$$

$$\frac{1}{h_y} \cdot \Sigma \frac{s}{F} = \frac{47,932}{500} = \frac{0,095\ 864}{4,345\ 864}$$

Demnach ist jetzt stets

$$H = \frac{b}{4,345\ 864} = b \cdot \mu = b \cdot 0,23.$$

Zähler von V oder

$$\Sigma M_0 \cdot w_x = -\frac{1}{2} \sum_a w_x (a - x).$$

Hierzu können wir das schon gezeichnete Kräftepolygon 3 und das Seilpolygon 3' benutzen und erhalten genau so wie vor

$$V = \frac{b \cdot h_x}{n_x \cdot h_x} = \frac{b}{n_x}.$$

Das Seilpolygon 3' ist also zugleich die Einflußlinie für V; wir erhalten in unserem Falle für

$$V = \frac{b}{n_x} = \frac{b}{11,96} = b \cdot \mu = b \cdot 0,0836.$$

Zähler von M oder

$$-\sum M_0 \cdot w = + \sum_a \frac{1}{2} w \cdot (a - x).$$

Dieser wird aus dem Kräftepolygon 5 und dem Seilpolygon 5' gewonnen. Machen wir $h = \sum w$, was dem Nenner entspricht, so ist

$$M = \frac{b \cdot \sum \bar{w}}{\sum w} = b,$$

d. h. Seilpolygon 5' stellt uns die Einflußlinie von M dar, und zwar haben wir nur die Länge b unmittelbar herauszumessen.

Nachdem so die Einflußlinien für H, V und M gewonnen sind, können wir später damit die Einflüsse der Verkehrslast auf die Biegemomente feststellen.

3. Die Biegungsspannungen infolge Eigengewichtes.

Es ist

$$\begin{aligned} H_e &= - \frac{H_s \cdot \sum \frac{s}{F}}{\sum w \cdot y^2 + \sum \frac{s}{F}} \quad (\text{vergl. III, 4}) \\ &= - \frac{29\,000 \cdot 47,93}{2125 + 47,93} = - 640 \text{ kg.} \end{aligned}$$

H_e erzeugt, wie erläutert, im Bogenteil unterhalb der x-Achse Druckspannungen an der inneren Leibung und Zugspannungen an der oberen Leibung, im Bogenteil oberhalb der x-Achse Druckspannungen im Gewölberücken und Zugspannungen an der inneren Leibung. Es ist besser, sich bei der Bestimmung der Zusatzspannungen hierüber klar zu sein, als auf die Vorzeichen zu achten.

NB. Die Randspannungen infolge H_e ergaben sich vollständig nach den auf S. 257 angegebenen Gleichungen $\sigma_0 = + \frac{H_e \cdot y_{ku}}{w}$, $\sigma_u = - \frac{H_e \cdot y_{ko}}{w}$; beziehen wir die Ordinaten y nicht auf Kernpunkte, sondern auf die Mittelpunkte der Querschnitte, so wären die Spannungen nach der Gleichung σ_0 od. $\sigma_u = \frac{H_e}{F} \pm \frac{H_e \cdot y}{w}$ zu ermitteln. Wir haben hier der Einfachheit halber von der Feststellung der Kernweiten zunächst abge-

sehen und berechnen die Spannungen nach der letzten Gleichung mit Vernachlässigung der in diesen Falle sehr geringen Werte $\frac{H_e}{F}$.

Wir erhalten am Kämpfer mit $y = 330$ cm und

$$w = \frac{J}{a} = \frac{2953966}{35} = 84400 \text{ cm}^3$$

(70 cm Stärke)

die Biegungsspannungen für den homogenen Querschnitt zu

$$\sigma_0 = \frac{H_e \cdot y}{W} = \frac{640 \cdot 330}{84400} = 2,5 \text{ kg/cm}^2 \text{ Zug,}$$

$$\sigma_0 = \frac{H_e \cdot y}{W} = \frac{640 \cdot 330}{84400} = 2,5 \text{ kg/cm}^2 \text{ Druck;}$$

in $\frac{1}{4}$ mit $y = 11$ cm (unterhalb der x-Achse) und $W = \text{rd. } 31000 \text{ cm}^3$

(Stärke in Fuge V 42,0 cm).

$$\sigma_0 \text{ bzw. } \sigma_u = \frac{640 \cdot 11}{31000} = 0,23 \text{ kg/cm}^2 \text{ Zug bzw. Druck;}$$

im Scheitel mit $y = 64$ cm, $W = \text{rd. } 21500 \text{ cm}^3$

(Stärke 35 cm),

$$\sigma_0 = \frac{640 \cdot 64}{21500} = 1,9 \text{ kg/cm}^2 \text{ Druck,}$$

$$\sigma_u = \frac{640 \cdot 64}{21500} = 1,9 \text{ kg/cm}^2 \text{ Zug.}$$

Die Gesamtspannung infolge Eigengewicht wird also:

	Kämpfer	$\frac{1}{4}$	Scheitel
σ_0	$4,9 - 2,5 = 2,4$	$7,05 - 0,23 = 6,82$	$8,1 + 1,9 = 10$
σ_u	$4,9 + 2,5 = 7,4$	$7,05 + 0,23 = 7,28$	$8,1 - 1,9 = 6,2$

und zwar durchweg Druck.

4. Die Biegungsspannungen infolge der Verkehrslasten¹⁾.

a) Einseitige Verkehrslast.

Dampfwalze mit Vorderrad in $\frac{1}{4}$, im übrigen auf der Gewölbehälfte Menschengedränge. Die Walzenlasten werden je auf 2 La-

¹⁾ Ebenfalls mit Vernachlässigung der gegenüber dem Eigengewicht sehr geringen Normalspannungen gemäß dem NB. des vorigen Abschnittes.

mellen verteilt, obgleich in Wirklichkeit eine weitere Verteilung eintritt.

Lamellenlasten.

Es betragen somit die Lamellenlasten auf der linken belasteten Seite:

$$\begin{aligned}
 G_1 & 0,67 \cdot 0,40 = 0,268 \text{ t} \\
 G_2 & \dots \dots \dots = 0 \quad ,, \\
 G_3 & \frac{1,60}{2} \dots = 0,80 \quad ,, \\
 G_4 & \frac{1,60}{2} \dots = 0,80 \quad ,, \\
 G_5 & \dots \dots \dots = 0 \quad ,, \\
 G_6 & \frac{2,65}{2} \dots = 1,325 \quad ,, \\
 G_7 & \frac{2,65}{2} \dots = 1,325 \quad ,, \\
 G_8 & 0,97 \cdot 0,40 = 0,388 \quad ,, \\
 G_9 & 0,98 \cdot 0,40 = 0,392 \quad ,, \\
 G_{10} & 0,99 \cdot 0,40 = 0,395 \quad ,, \\
 G_{11} & 1,00 \cdot 0,40 = 0,400 \quad ,, \\
 & \text{zusammen} = 6,093 \text{ rd. } 6,1 \text{ t.}
 \end{aligned}$$

Statisch unbestimmte Größen für diesen Belastungszustand.

$$\begin{aligned}
 H &= 0,23 [0,268 \cdot 0 + 0 \cdot 0,15 + 0,8 \cdot 0,45 + 0,8 \cdot 0,944 + 0 \cdot 1,60 \\
 &+ 1,325 \cdot 2,42 + 1,325 \cdot 3,33 + 0,388 \cdot 4,23 + 0,392 \cdot 5,05 \\
 &+ 0,395 \cdot 5,65 + 0,40 \cdot 6,0 + 0 + 0 + \dots] = 3,9 \text{ t;}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_L &= 0,0836 [0,268 \cdot 11,96 + 0 \cdot 11,91 + 0,8 \cdot 11,79 + 0,8 \cdot 11,62 \\
 &+ 0 \cdot 11,31 + 1,325 \cdot 10,88 + 1,325 \cdot 10,29 + 0,388 \cdot 9,56 \\
 &+ 0,392 \cdot 8,66 + 0,395 \cdot 7,62 + 0,40 \cdot 6,56 + 0 + 0 + \dots] \\
 &= 5,25 \text{ t;}
 \end{aligned}$$

$$V_R = 6,1 - 5,25 = 0,85 \text{ t;}$$

$$\begin{aligned}
 M_L &= 0,268 \cdot 9,55 + 0 \cdot 8,85 + 0,8 \cdot 8,10 + 0,8 \cdot 7,30 + 0 \cdot 6,45 \\
 &+ 1,325 \cdot 5,60 + 1,325 \cdot 4,80 + 0,388 \cdot 4,00 + 0,392 \cdot 3,30 \\
 &+ 0,395 \cdot 2,60 + 0,40 \cdot 2,0 + 0 + 0 + \dots = + 33,29 \text{ t.}
 \end{aligned}$$

Die Einflußlinie für M_R ist das Spiegelbild der M_L -Linie.

$$\begin{aligned}
 M_R &= 0,40 \cdot 1,53 + 0,395 \cdot 1,10 + 0,392 \cdot 0,78 + 0,388 \cdot 0,53 \\
 &+ 1,325 \cdot 0,35 + 1,325 \cdot 0,22 + 0 \cdot 0,124 + 0,8 \cdot 0,06 \\
 &+ 0,8 \cdot 0,02 + 0 \cdot 0,01 + 0,268 \cdot 0 = 2,374 \text{ tm.}
 \end{aligned}$$

Berechnung der Biegemomente und Spannungen.

Linker Kämpferquerschnitt.

$$x = + 9,86; \quad y = - 3,30;$$

$$\begin{aligned} M_{KL} &= M_0 + M - H \cdot y - V \cdot x \\ &= 0 + 33,29 + 3,9 \cdot 3,3 - 5,25 \cdot 9,86 = - 5,58 \text{ tm.} \end{aligned}$$

Spannungen:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{558\,000}{84\,400} = 6,6 \text{ kg/cm}^2,$$

und zwar als Zug oben, als Druck unten.

Rechter Kämpferquerschnitt.

$$\begin{aligned} M_{KR} &= M_0 + M - Hy - V_x \\ &= 0 + 2,374 + 3,9 \cdot 3,3 - 0,85 \cdot 9,86 = + 6,86 \text{ tm.} \end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{686\,000}{84\,400} = 8,12 \text{ kg/cm}^2$$

(Zug unten, Druck oben).

Scheitel.

$$M = M_0 + M - H \cdot y - V_x.$$

Hier haben wir erst das M_0 -Moment zu bestimmen.

$$\begin{aligned} M_0 &= - (0,268 \cdot 9,545 + 0 + 0,8 \cdot 8,045 + 0,8 \cdot 7,215 + 0 \\ &\quad + 1,325 \cdot 5,375 + 1,325 \cdot 4,425 + 0,388 \cdot 3,465 + 0,39 \cdot 2,485 \\ &\quad + 0,395 \cdot 1,495 + 0,40 \cdot 0,5) = - 30,85 \text{ tm.} \end{aligned}$$

$$H = 3,9 \text{ t}, \quad V_L = 5,25 \text{ t}, \quad M_L = + 33,29 \text{ tm.}$$

Dann wird mit $y = + 0,64$ und $x = 0$

$$M_S = - 30,85 + 33,29 - 3,9 \cdot 0,64 - 0 = - 0,06 \text{ tm};$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{6\,000}{21\,500} = 0,28 \text{ kg/cm}^2$$

(Zug oben, Druck unten).

Querschnitt in $\frac{1}{4}$ (links).

$$\begin{aligned} M_0 &= - [0,27 (9,545 - 4,93) + 0 (8,825 - 4,93) + 0,8 (8,045 \\ &\quad - 4,93) + 0,8 (7,25 - 4,93) + 0 (6,305 - 4,93) + 1,325 \\ &\quad (5,375 - 4,93)] = - 6,16 \text{ tm.} \end{aligned}$$

$$H = 3,9 \text{ t}, \quad V_L = 5,25, \quad M_L = 33,29.$$

Damit wird, mit $y = -0,11$ und $x = +4,93$,
 $M = -6,16 + 33,29 + 3,9 \cdot 0,11 - 5,25 \cdot 4,93 = +1,66 \text{ tm}$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{166\,000}{31\,000} = 5,35 \text{ kg/cm}^2$$

(oben Druck, unten Zug).

b) Volle Belastung.

Dampfwalze mit dem Vorderrad im Scheitel des Gewölbes, im übrigen über das ganze Gewölbe, Verkehrslast vorn 400 kg/m^2 .

Lamellenlasten.

	Linke Hälfte:	Rechte Hälfte:	
	$G_1 \quad 0,67 \cdot 0,40 = 0,268$	G_{11} Walze = 2,090	
	$G_2 \quad 0,75 \cdot 0,40 = 0,300$	$G_{10} \quad 0,98 \cdot 0,40 = 0,392$	
	$G_3 \quad 0,82 \cdot 0,40 = 0,328$	$G_9 \quad 0,98 \cdot 0,40 = 0,392$	
	$G_4 \quad 0,86 \cdot 0,40 = 0,344$	$G_8 \quad 0,97 \cdot 0,40 = 0,388$	
	$G_5 \quad 0,92 \cdot 0,40 = 0,368$	$G_7 \quad 0,96 \cdot 0,40 = 0,384$	
	$G_6 \quad 0,94 \cdot 0,40 = 0,376$	$G_6 \quad 0,94 \cdot 0,40 = 0,376$	
	$G_7 \quad 0,96 \cdot 0,40 = 0,384$	$G_5 \quad 0,92 \cdot 0,40 = 0,368$	
Walze	{	$G_8 \quad \frac{3,15}{2} \quad . \quad = 1,58$	$G_4 \quad 0,86 \cdot 0,40 = 0,344$
		$G_9 \quad \frac{3,15}{2} \quad . \quad = 1,58$	$G_3 \quad 0,82 \cdot 0,40 = 0,328$
		$G_{10} \quad . \quad . \quad = 0$	$G_2 \quad 0,75 \cdot 0,40 = 0,300$
		$G_{11} \quad \frac{4,18}{2} \quad . \quad = 2,09$	$G_1 \quad 0,67 \cdot 0,40 = 0,268$
	$7,618 \text{ t}$	$5,630 \text{ t}$	

Zusammen $7,618 + 5,630 = 13,248 \text{ t} = \text{rd. } 13,25 \text{ t}$.

Da wir also längere Strecken mit der gleichmäßigen Last von $0,4 \text{ t/m}$ zu belasten haben, so dürfte es sich wohl empfehlen, ~~von der im Anhang „Die Elemente der Einflußlinienlehre“ erklärten Lösung Gebrauch zu machen~~, und — anstatt die kleinen Teilsummen zu bilden — den Flächeninhalt der Einflußfläche durch Substitution gradliniger Figuren zu ersetzen, und denselben mit der Last pro laufenden Meter zu multiplizieren.

Indessen sei hier zunächst davon abgesehen, damit der Gebrauch der Einflußlinien klar hervorgeht.

Statisch unbestimmte Größen für diesen Belastungszustand.

$$\begin{aligned}
 H &= 0,23 [0,268 \cdot 2 \cdot 0 + 0,30 \cdot 2 \cdot 0,15 + 0,33 \cdot 2 \cdot 0,45 \\
 &\quad + 0,34 \cdot 2 \cdot 0,94 + 0,37 \cdot 2 \cdot 1,60 + 0,38 \cdot 2 \cdot 2,42 \\
 &\quad + 0,38 \cdot 2 \cdot 3,33 + (1,58 + 0,388) \cdot 4,23 + (1,58 \\
 &\quad + 0,39) \cdot 5,05 + (0 + 0,392) \cdot 5,65 + 2,09 \cdot 2 \cdot 6,0] \\
 &= 0,23 \cdot 52,17 = \mathbf{12 \text{ t}};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_L &= 0,0836 [0,27 \cdot 11,96 + 0,30 \cdot 11,91 + 0,33 \cdot 11,79 \\
 &\quad + 0,34 \cdot 11,62 + 0,37 \cdot 11,31 + 0,38 \cdot 10,88 + 0,38 \cdot 10,29 \\
 &\quad + 1,58 \cdot 9,56 + 1,58 \cdot 8,66 + 0 + 2,09 \cdot 6,56 + 2,09 \cdot 5,4 \\
 &\quad + 0,40 \cdot 4,34 + 0,39 \cdot 3,30 + 0,39 \cdot 2,40 + 0,38 \cdot 1,67 \\
 &\quad + 0,376 \cdot 1,08 + 0,37 \cdot 0,65 + 0,34 \cdot 0,34 + 0,33 \cdot 0,17 \\
 &\quad + 0,3 \cdot 0,05 + 0,27 \cdot 0] = 0,0836 \cdot 86,093 = \mathbf{7,3 \text{ t}};
 \end{aligned}$$

$$V_R = 13,25 \div 7,30 = 5,95 \text{ t};$$

$$\begin{aligned}
 M_L &= 0,27 \cdot 9,55 + 0,30 \cdot 8,85 + 0,33 \cdot 8,10 + 0,34 \cdot 7,30 \\
 &\quad + 0,37 \cdot 6,45 + 0,38 \cdot 5,60 + 0,38 \cdot 4,80 + 1,58 \cdot 4,0 \\
 &\quad + 1,58 \cdot 3,30 + 0 + 2,09 \cdot 2 + 2,09 \cdot 1,53 + 0,40 \cdot 1,10 \\
 &\quad + 0,39 \cdot 0,78 + 0,39 \cdot 0,53 + 0,38 \cdot 0,35 + 0,376 \cdot 0,22 \\
 &\quad + 0,37 \cdot 0,12 + 0,34 \cdot 0,06 + 0,33 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,01 \\
 &\quad + 0,27 \cdot 0 = + \mathbf{36,87 \text{ tm}};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_R &= 0,27 \cdot 9,55 + 0,30 \cdot 8,85 + 0,33 \cdot 8,10 + 0,34 \cdot 7,30 \\
 &\quad + 0,37 \cdot 6,45 + 0,38 \cdot 5,6 + 0,38 \cdot 4,80 + 0,39 \cdot 4,00 \\
 &\quad + 0,39 \cdot 3,30 + 0,40 \cdot 2,60 + 2,09 \cdot 2,0 + 2,09 \cdot 1,53 + 0 \\
 &\quad + 1,58 \cdot 0,78 + 1,58 \cdot 0,53 + 0,38 \cdot 0,35 + 0,38 \cdot 0,22 \\
 &\quad + 0,37 \cdot 0,12 + 0,34 \cdot 0,06 + 0,33 \cdot 0,02 + 0,30 \cdot 0,01 \\
 &\quad + 0,27 \cdot 0 = + \mathbf{30,32 \text{ tm}}.
 \end{aligned}$$

Berechnung der Biegemomente und Spannungen.

Linker Kämpferquerschnitt.

$$M_{KL} = 0 + 36,87 + 12,0 \cdot 3,3 - 7,3 \cdot 9,86 = + \mathbf{4,47 \text{ tm}}.$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{447\,000}{84\,400} = \mathbf{5,3 \text{ kg/cm}^2}$$

(oben Druck, unten Zug).

Rechter Kämpferquerschnitt.

$$M = 0 + 30,32 + 12,0 \cdot 3,3 - 5,95 \cdot 9,86 = + \mathbf{11,12 \text{ tm}}.$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{1\,112\,000}{84\,400} = \mathbf{13,2 \text{ kg/cm}^2}$$

(oben Druck, unten Zug).

Scheitelquerschnitt.

$$x = 0, y = + 0,64.$$

$$\begin{aligned} M_0 = & - (0,27 \cdot 9,545 + 0,30 \cdot 8,825 + 0,33 \cdot 8,045 + 0,34 \cdot 7,215 \\ & + 0,37 \cdot 6,305 + 0,38 \cdot 5,375 + 0,38 \cdot 4,425 + 1,58 \cdot 3,465 \\ & + 1,58 \cdot 2,485 + 0 + 2,09 \cdot 0,5) = - 26,85 \text{ tm}; \end{aligned}$$

$$M = 36,87, H = 12 \text{ t}, V_2 = 7,3 \text{ t};$$

$$M_s = - 26,85 + 36,87 - 12 \cdot 0,64 - 0 = + 2,32 \text{ tm};$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{232\,000}{21\,500} = 10,8 \text{ kg/cm}^2$$

(oben Druck unten Zug).

Querschnitt in $\frac{1}{4}$ (links).

$$x = \pm \frac{9,86}{2} = 4,93. y = - 0,11.$$

$$\begin{aligned} M_0 = & - [0,27 (9,545 - 4,93) + 0,30 (8,825 - 4,93) \\ & + 0,33 (8,045 - 4,93) + 0,34 (7,25 - 4,93) \\ & + 0,37 (6,305 - 4,93) + 0,38 (5,375 - 4,93) = - 4,89 \text{ tm}; \end{aligned}$$

$$M_{\frac{1}{4}} = - 4,89 + 36,87 + 12 \cdot 0,11 - 7,3 \cdot 4,93 = - 2,70 \text{ tm};$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{270\,000}{31\,000} = 8,7 \text{ kg/cm}^2$$

(oben Zug, unten Druck).

5. Temperaturspannungen.

Infolge eines Temperaturunterschiedes von $\tau = \pm 30^\circ \text{C}$ wird mit

$$\alpha = 0,000012 \text{ und } E = 2\,000\,000 \text{ tm}^2$$

$$H_\tau = \pm \frac{E \cdot \alpha \cdot \tau \cdot l}{\Sigma w \cdot y^2 + \Sigma \frac{s}{F}}$$

$$= \pm \frac{2\,000\,000 \cdot 0,000012 \cdot 30 \cdot 19,72}{2125 + 47,93} = \pm 0,065 \text{ t} = 65 \text{ kg}.$$

Die zugehörigen Spannungen ergeben sich genau so wie bei H_e zu

$$\text{am Kämpfer} = \pm \frac{65 \cdot 330}{84\,400} = \pm 0,254 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{in } \frac{l}{4} = \pm \frac{65 \cdot 11}{31\,000} = \pm 0,023 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{im Scheitel} = \pm \frac{65 \cdot 64}{21\,500} = \pm 0,193 \text{ „}$$

Die Temperatureinflüsse machen sich also bei solchen kleinen Gewölben nur sehr wenig bemerkbar.

6. Zusammenstellung und Schlußbemerkungen.

	Linker Kämpfer	Rechter Kämpfer	Scheitel	$\frac{l}{4}$ (links)
Eigen-Gewicht	$\sigma_0 = 2,4$ Druck	2,4 Druck	10 Druck	6,82 Druck
	$\sigma_u = 7,4$ Druck	7,4 Druck	6,2 Druck	7,28 Druck
Einseitige Last links	$\sigma_0 = 6,6$ Zug	8,12 Druck	0,28 Zug	5,35 Druck
	$\sigma_u = 6,6$ Druck	8,12 Zug	0,28 Druck	5,35 Zug
Volle Belastung	$\sigma_0 = 5,3$ Druck	13,2 Druck	10,8 Druck	8,70 Zug
	$\sigma_u = 5,3$ Zug	13,2 Zug	10,8 Zug	8,70 Druck
Temperatur	$\pm 0,254$	$\pm 0,254$	$\pm 0,193$	$\pm 0,023$

Mögliche Maximalspannungen:

$\sigma_0 =$	7,95 Dr.	15,85 Druck	20,99 Druck	12,19 Druck
	4,45 Zug	2,15 Druck	9,63 Druck	1,9 Zug
$\sigma_u =$	4,25 Dr.	7,65 Druck	6,67 Druck	16,0 Druck
	1,85 Dr.	6,50 Zug	3,79 Zug	1,91 Druck

Selbstverständlich können die Spannungen, die für die linke Kämpferfuge ermittelt sind, auch in der rechten auftreten.

Das Gewölbe erscheint demnach — abgesehen von anderen etwa nicht berücksichtigten ungünstigen Einflüssen, wozu auch bei solchen in einem Stück hergestellten kleinen Gewölben die **Schwindung** gehört — bei normalen Verhältnissen reichlich stark bemessen, besonders nach den Kämpfern zu.

Wir haben hier alle Spannungen für die homogenen Querschnitte berechnet; bei Ausschaltung der Zugzonen dürften die Druckspannungen sich im allgemeinen noch erhöhen.

Will man die Nachprüfung auch noch in dieser Weise durchführen, so wären für die einzelnen Belastungsfälle die zugehörigen Normalkräfte zu bestimmen und mit Hilfe der Momente die Exzentrizitäten aufzusuchen¹⁾.

¹⁾ Vergl. Näheres hierüber im Kapitel über exzentrischen Druck in Schlütern, „Eisenbetonbau: Säule und Balken“ — Meußner-Berlin.

Wendet man das Kernpunktverfahren bei der Bestimmung der Momente an, so wären alle Ordinaten einfach auf die Kernpunkte der betreffenden Gewölbequerschnitte zu beziehen (ev. auch die Abszissen), anstatt, wie hier gezeigt, auf die Mittelpunkte derselben¹⁾.

Schließlich kann man auch noch — anstatt mit den einzelnen Einflußlinien für H , V und M zu arbeiten — direkt benutzbare Einflußlinien für die Momente berechnen, und zwar auch entweder für die Mittelpunkte der Querschnitte oder für die Kernpunkte.

7. Einflußlinien für die Kernpunktmomente.

Die Gewinnung der Einflußordinaten für die Kernpunktmomente M_{k0} und M_{ku} in $\frac{1}{4}$ unseres Beispiels zeigt die nachfolgende Zahlentafel.

Die grundlegende Gleichung für die wandernde Last 1 lautet

$$M_k = M_0 + M - H \cdot y_k - V \cdot x_k.$$

Zu bemerken ist dabei, daß diese Aufstellung als Muster mit dem höchsten Grade der Genauigkeit ausgeführt ist, indem auch die radiale Lage der Kernpunkte bei den Abszissen berücksichtigt ist. In den meisten praktisch vorliegenden Fällen genügt es vollständig, die beiden Kernpunkte eines Querschnittes einfach vertikal übereinander liegend anzunehmen. Dadurch wird

$$x_{k0} = x_{ku}$$

und

$$M_{0k0} = M_{0ku};$$

ferner

$$V \cdot x_{k0} = V \cdot x_{ku},$$

und die Einrechnung der Ordinaten vereinfacht sich entsprechend.

¹⁾ Vergl. Näheres darüber im Kapitel „Das Kernpunktverfahren in der Gewölbeberechnung in dem gleichen, S. 276 unten angegebenen Buche..“

Abschnitt II.

**Berechnungsverfahren auf
Grund zeichnerischer Er-
mittlung der Formänderungen.**

Elastizitätslehre.

Allgemeines.

Der Ersatz der rechnerischen Ermittlung der Formänderung durch die zeichnerische und die sich damit ergebende Berechnung statisch unbestimmter Systeme ist immer dann am Platze, wenn der Querschnitt des Bauwerkes sich stark ändert, wenn keine Symmetrie vorhanden ist, und wenn die rechnerische Arbeit zu große Schwierigkeiten bereiten würde; besonders mehrstielige Rahmen erfordern zeichnerische Behandlung. Nachfolgend werden in einzelnen Abschnitten die zur zeichnerischen Berechnung unbestimmter Systeme erforderlichen allgemeinen Grundlagen kurz erläutert.

Kapitel I.

Die Biegungslinie als Seileck.

Für den Träger Abb. 242 ist das Moment

$$M = A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2};$$

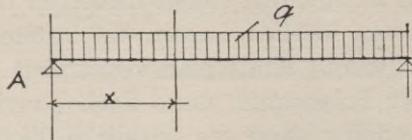


Abb. 242.

die erste Ableitung

$$\frac{dM}{dx} = A - qx = \text{der Querkraft};$$

die zweite Ableitung

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q.$$

Andererseits lautet die Differentialgleichung der elastischen Biegelinie

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E J}$$

Daraus geht hervor, daß wir die Biegelinie genau so auffinden können wie eine Momentenlinie (nämlich mittels Kraft- und Seileck), wenn wir den Träger nicht mit q , sondern mit $\frac{M}{E J}$ belastet denken.

Zeichnerische Lösung nach Mohr¹⁾. (Satz vom doppelten Seilpolygon.)

Nach Abschnitt I, Kapitel IV, Abs. 3 ist die Formänderung aus Biegung

$$\Delta \alpha = \frac{M \cdot \Delta x}{E \cdot J}$$

Den Winkel $\Delta \alpha$ erhalten wir durch Auftragen von $M \cdot \Delta x$ als Bogenstück zu dem Radius $E \cdot J$ und daher auch die Formänderung in dem Element Δx des Trägers durch Parallele zu diesen Radialstrahlen (Abb. 243).

Durch die Aneinanderreihung aller ideellen Lasten $M \cdot \Delta x$ (als Kräftezug) und die Konstruktion einer dazugehörigen Seilinie (Momentenlinie) mit dem Polabstand $E \cdot J$ kann daher die Biegelinie gewonnen werden.

Man nennt die Biegelinie das zweite Seilpolygon, weil man in der Regel zunächst mit den Lasten des Trägers die Momentenlinie aus Kraft- und Seileck entwirft, diese Momentenfläche dann in kleine Streifen zerlegt, den Inhalt derselben berechnet ($M \cdot \Delta x$) und nun mit diesen ideellen Lasten ein zweites Seilpolygon zu einem zweiten (ideellen) Kräfteplan konstruiert.

Je größer der Polabstand, umso flacher verläuft bekanntlich das Seilpolygon, daher auch die wirkliche Biegelinie sehr flach verläuft, weil der Pol $E \cdot J$ sehr groß ist. Er ist sogar so groß, daß man ihn durch irgend einen kleineren Wert (w) ersetzen muß, um die Aufgabe überhaupt durchführen zu können. Dadurch erscheint auch die Biegelinie vergrößert.

Bei dieser Arbeit kommen 3 konstante Größen zur Verwendung, die Polweite H des ersten Kräfteplans, die Basis a als

¹⁾ Vgl. Ritter-Culmann, Graphische Statik, III. Teil, Kap. I. Müller-Breslau, Graphische Statik, Band II, 1. Abs., § 3.

Maßstab für die Flächeninhalte $M \cdot \Delta x$ und die Polweite w des zweiten „Kräfteplans“, welche in der praktischen Durchführung für $E \cdot J$ gewählt wird. Nennt man die Ordinaten der Momentenfläche y , so können wir in unserer vorigen Gleichung

$$\Delta\alpha = \frac{M \cdot \Delta x}{E \cdot J},$$

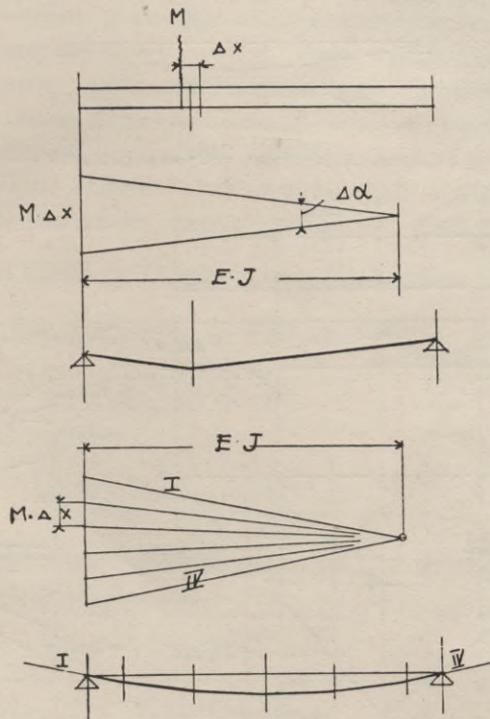


Abb. 243.

welche als Grundlage zur Gewinnung der einzelnen Winkel $\Delta\alpha$ oder der Form der Biegelinie zu betrachten ist, für den Zähler

$$\frac{y \cdot \Delta x}{a}$$

schreiben. Führen wir für $E \cdot J$ den Wert w ein, so ergibt sich

$$\Delta\alpha = \frac{\frac{y \cdot \Delta x}{a}}{w}$$

Diese Gleichung ist insofern richtig, als $\Delta\alpha$ der wirkliche Winkel wird, wenn $w = E \cdot J$ wird. Genau so wie mit $\Delta\alpha$ verhält es sich mit den Ordinaten der Biegelinie.

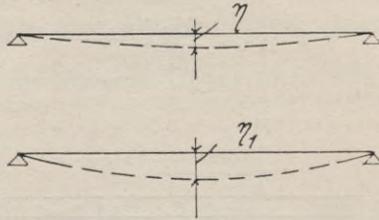


Abb. 244.

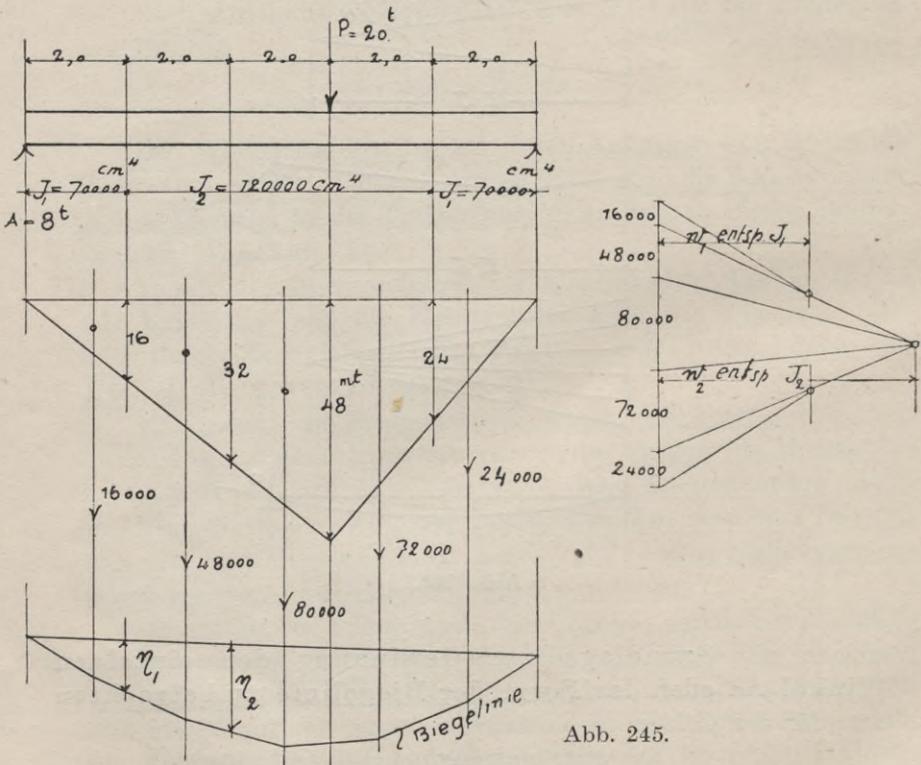


Abb. 245.

Nennt man diese für den wirklichen Zustand η und die in der mit Hilfe des zweiten Seilpolygons gefundenen verzerrten Durchbiegungslinie η_1 (Abb. 244), so verhält sich

$$\frac{\eta}{\eta_1} = \frac{w}{E \cdot J}$$

Bei verschiedenem Trägheitsmoment wende man dasselbe Verfahren an und wähle im Verhältnis der verschiedenen Trägheitsmomente auch die Polweiten w im zweiten Seilpolygon verschieden zueinander.

Beispiel. Der Balken Abb. 245 sei durch eine Einzellast $P = 20 \text{ t}$ belastet. Nachdem die Momentenfläche mittels des Kräfteplans (in diesem Falle einfacher ohne denselben) aufgezeichnet ist, teile man sie entsprechend den durch den Wechsel im Trägheitsmoment gekennzeichneten Abschnitten in mehrere Teile ein und berechne deren Inhalte. Diese werden dann zu einem zweiten „Kräftezug“ aneinander gereiht, wonach zunächst für den mittleren Teil unter Annahme eines beliebigen Polabstandes w_2 die Seilstrahlen zu zeichnen sind. Für das linke und rechte Trägerstück muß nun eine andere Polweite w_1 gewählt werden, bei deren Bestimmung es nunmehr darauf ankommt, daß sich verhält $\frac{w_1}{w_2} = \frac{J_1}{J_2}$. Die wirkliche Durchbiegung irgend eines Punktes, beispielsweise bei der Ordinate η_1 , beträgt dann

$$\eta = \eta_1 \cdot \frac{w_1}{E \cdot J_1},$$

entsprechend bei η_2

$$\eta = \eta_2 \cdot \frac{w_2}{E \cdot J_2}$$

(praktische Angaben siehe in Beispielen bei Ritter, auch in einem hier später folgendem Beispiel.)

Kapitel II.

Verschiebungspläne für Stabzüge.

α) Williot-Plan als Vorbetrachtung¹⁾.

Für ein Fachwerk beträgt die elastische Längenänderung der Stäbe $\Delta s = \frac{S \cdot s}{E \cdot F}$. Die Stäbe mögen gelenkige Anschlüsse haben. Wenn alle Längen Δs berechnet sind, kann man die Knotenpunktverschiebung auf folgende Art finden.

¹⁾ Vgl. Müller-Breslau, Graphische Statik, Band II, 1. Abtl., § 1. Keck-Hotopp, Elastizitäts-Lehre, zweiter Teil, S. 342.

Gesucht sei die Verschiebung eines Punktes c , der mit 2 Punkten a und b , deren Verschiebungen $a - a'$ und $b - b'$ bekannt sind, durch 2 Stäbe verbunden ist (Abb. 246). Die Längenänderung von s_1 sei Δs_1 als Verkürzung, von s_2 Δs_2 als Verlängerung. Die Lösung geschieht in folgenden 3 Schritten:

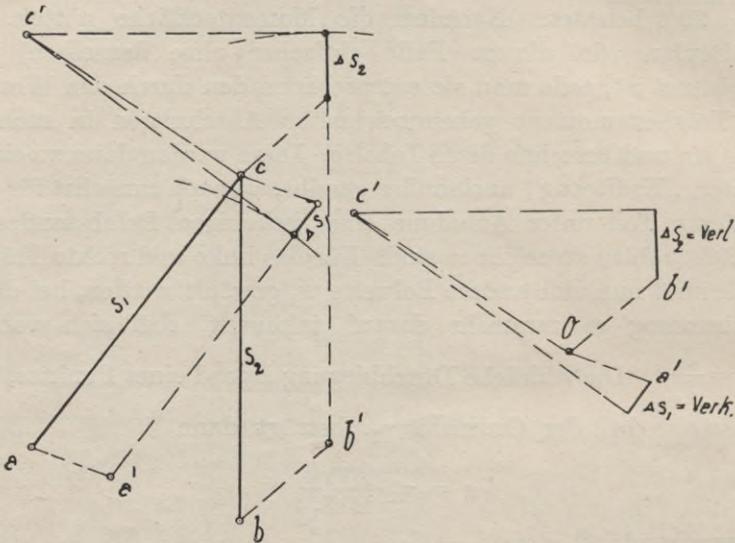


Abb. 246.

1. Man denkt sich die Verbindung in c gelöst und verschiebt die beiden Stäbe parallel zu sich derart, daß die Anfänge von a nach a' und von b nach b' gelangen.
2. Antragen der Längenänderungen.
3. Nun denkt man sich die Stäbe um ihre neuen Angriffspunkte a' und b' solange gedreht, bis ihre beiden Enden in einem neuen Punkte c' zusammenfallen.

Da nun aber die Drehbewegungen verschwindend klein sind, so genügt es, die Kreisbögen durch in den Endpunkten der Stäbe errichtete Lote zu ersetzen, deren Schnittpunkt dann den neuen Punkt c' angibt. Die Strecke $c-c'$ ist dann absolut genommen die gesuchte Verschiebung des Punktes c . Diese Verschiebungsfigur wird nun nicht direkt in das Fachwerkssystem eingetragen, sondern als besonderer Verschiebungsplan von einem Polpunkt O aus, der mit c identisch zu denken ist, für alle Knotenpunkte hintereinander aufgetragen. *plan perspektivisch*

Es liegt nicht in der Absicht dieser Arbeit, auf dieses Verfahren näher einzugehen.

β) Das Stabzugverfahren bei gelenkig miteinander verbundenen Stäben¹⁾.

Die Verschiebungen der Knotenpunkte werden hier aufgefaßt als Drehbewegungen um einen Punkt, der seine Lage ändert (Ober- oder Untergurt eines Fachwerkträgers).

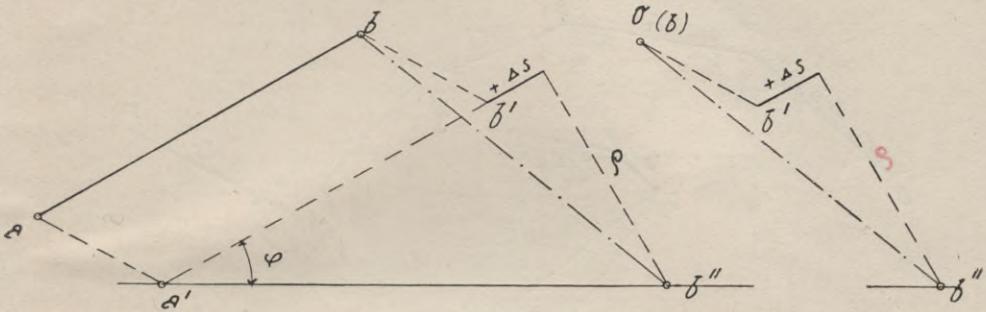


Abb. 247.

Gegeben sei ein Stab und seine Längenänderung Δs . Sein Anfangspunkt habe sich von a nach a' bewegt, während er selbst eine Drehbewegung um den Punkt a mit dem Winkel φ ausgeführt habe. Punkt a gelangt nach a' , b nach b' . Hier ist die Verlängerung Δs anzutragen und der ganze Stab um den Winkel φ zu drehen, wobei wieder der Kreisbogen durch ein Lot ersetzt werden kann. $b - b''$ ist dann die wirkliche Verschiebung (Abb. 247). Wir brauchen für die Polfigur außer der bekannt vorauszusetzenden Verschiebung des Anfangspunktes wieder die Verlängerung bzw. Verkürzung Δs des Stabes und das Lot ρ .

$\rho = (s + \Delta s) \varphi$ (als Kreisbogen) oder, da Δs im Verhältnis zu s sehr klein ist, $\rho = s \cdot \varphi$.

Anwendung auf einen Stabzug (Abb. 248).

Stab 1—4 erhalte Zug, Stab 5 Druck. Um die elastische Veränderung des ganzen Systems kennen zu lernen, müssen wir die einzelnen Δs der Stäbe s und $\Delta \vartheta$ der Randwinkel ϑ feststellen, also die elastischen Veränderungen, die sich aus der Formänderung der Dreiecke des Fachwerks bezüglich ihrer Seitenlängen und Winkel berechnen lassen. Ferner müssen wir noch, um den Verschiebungsplan zeichnen zu können, zunächst irgend einen Punkt und die Richtung eines Stabes als fest (undrehbar) annehmen. Hierzu sei der Punkt 0 und der

¹⁾ Müller-Breslau, II. 1. § 2.

Stab s_1 gewählt. Der Pol 0 fällt also mit $0'$ zusammen, d. h. der Punkt 0 ist fest. Von diesem Pol haben wir zunächst die Verlängerung Δs_1 in Richtung des Stabes s_1 aufzutragen. Da wir nun die Richtung des Stabes s_1 als fest angenommen haben, so stellt $0' - 1'$ ohne weiteres die bei dieser Voraussetzung

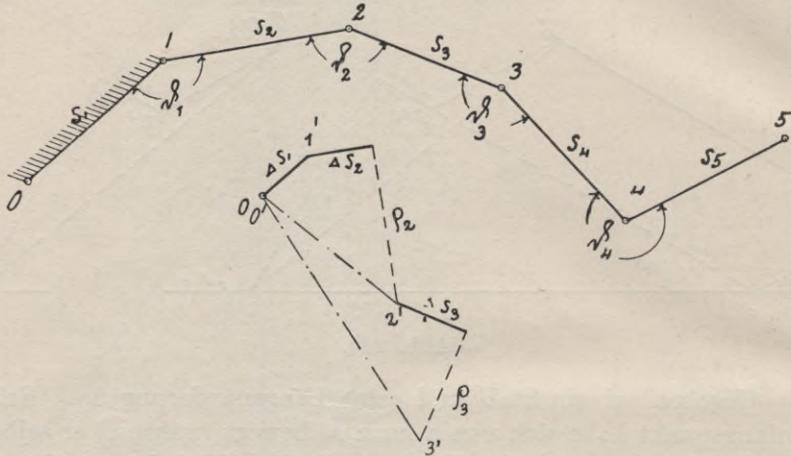


Abb. 248.

eintretende Verschiebung des Punktes 1 dar. Sodann ist Δs_2 von $1'$ aus nach rechts parallel zu s_2 aufzutragen, im Endpunkte das Lot ρ_2 zu errichten, und wir erhalten Punkt $2'$; ρ_2 ist nach Vorhergehendem $= s_2 \cdot \Delta \vartheta_1$. Weiter ist dann Δs_3 anzutragen, im Endpunkte das Lot ρ_3 zu errichten, und wir erhalten den Punkt $3'$, wobei $\rho_3 = s_3 \cdot (\Delta \vartheta_1 + \Delta \vartheta_2)$. Da jedesmal die Verschiebung eines Punktes abhängig ist von der Verschiebung des vorhergehenden, so erhalten wir die wirklichen Verschiebungen eines jeden Punktes als die Polstrahlen $0 - 1'$, $0 - 2'$, $0 - 3'$ usf.

Auch dieser Abschnitt ist als Vorbereitung für das Folgende gedacht, so daß es nicht erforderlich ist, auf die Einzelheiten der praktischen Durchführung, die mehr bei Fachwerken interessiert, näher einzugehen.

γ) Der biegungsfeste Stabzug¹⁾.

Als Vorbetrachtung werde erinnert an die Berechnung von Durchbiegungen nach dem Gesetz (Abschnitt I, Kap. IV, S. 31 u. f.)

¹⁾ Nach Müller-Breslau, Graphische Statik, Band II, 2. Teil, § 27 vereinfacht zusammengestellt.

$$f = \frac{F \cdot \xi}{E \cdot J};$$

war z. B. für einen Balken mit einer Einzellast in der Mitte (Abb. 249),

$$f = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{P \cdot l}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{E \cdot J} = \frac{P \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J}.$$

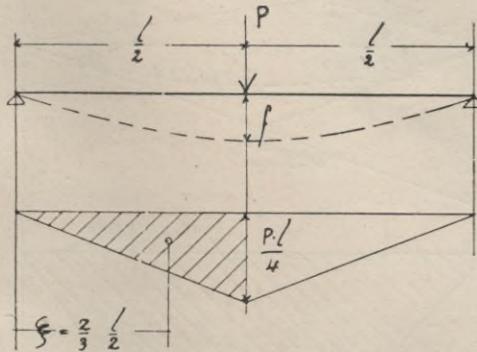


Abb. 249.

Dasselbe wollen wir nun auf einen durchlaufenden Träger anwenden, aber nicht zur Berechnung der Durchbiegung, sondern zur Berechnung der Verdrehung der Endquerschnitte. Hierzu denken wir uns ein beliebiges Feld herausgeschnitten, das, nur um eine Annahme zu machen, mit 2 Einzellasten belastet sei (Abb. 250). Die Abweichung der Tangente (δ_1) wird nun nach demselben oben erwähnten Prinzip berechnet, nur daß wir die Tangente diesmal nicht an die Mitte der Biegelinie anlegen, sondern an ihre Richtung am Stützpunkt. Mit Hilfe von δ_1 ist dann leicht der Winkel α_2 zu finden.

Da nun auf den Balken nicht nur eine M_0 -Fläche, sondern auch 2 negative Stützenmomentflächen (als Dreiecke zu denken) wirken, so erhalten wir

$$\delta_1 = \frac{M_0 \cdot \xi_1 + M_1 \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \frac{l_1}{3} + \frac{M_2 \cdot l_1}{2} \cdot l_1 \cdot \frac{2}{3}}{E \cdot J}$$

$$= \frac{M_0 \cdot \xi_1 + \frac{M_1 \cdot l_1^2}{6} + 2 \cdot \frac{M_2 \cdot l_1^2}{6}}{E \cdot J}$$

und somit (δ_1 als Bogen mit dem Radius l_1 betrachtet):

$$\alpha_2 = \frac{\delta_1}{l_1} = \frac{M_0 \cdot \xi_1}{l_1 \cdot E \cdot J} + \frac{M_1 \cdot l_1}{6 \cdot E \cdot J} + \frac{2 \cdot M_2 \cdot l_1}{6 \cdot E \cdot J}$$

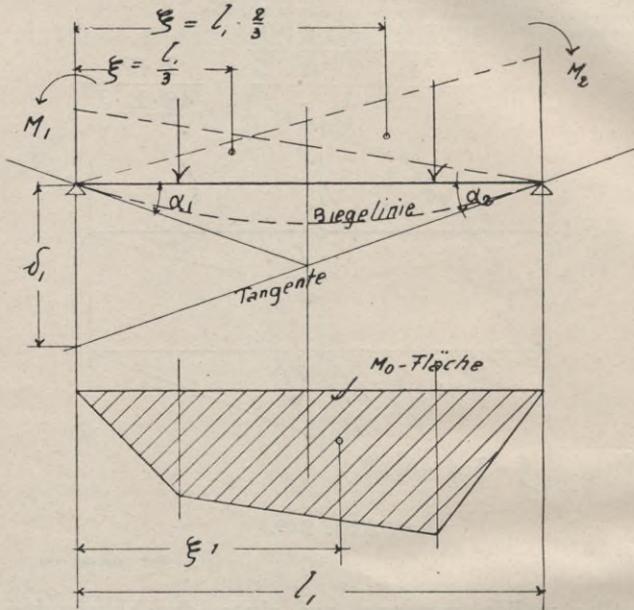


Abb. 250.



Abb. 251.

Nun können wir zur Zeichnung des Verschiebungsplanes für einen biegefesten Stabzug übergehen; denn bei einem solchen haben wir es ja mit Eckmomenten zu tun. Wir setzen noch voraus, daß zwischen 2 Stützpunkten keine direkte Belastung und Biegung eintritt, sodaß das Glied mit M_0 bei der Winkelbestimmung wegfällt.

Beim Fachwerk mit gelenkigen Anschlüssen bekommen wir die Winkeländerungen aus den Längenänderungen der einzelnen Dreiecksstäbe. Beim biegefesten Stabzug (Abb. 251) ändern sich die Winkel aber in anderer Weise. Da die Ecken steif sind,

so ändern sich die eigentlichen Winkel nicht, sondern die Verschiebung kommt durch die Verbiegung innerhalb der einzelnen Stabstücke zustande, wobei die Längenänderung aus den Normalkräften noch hinzukommt.

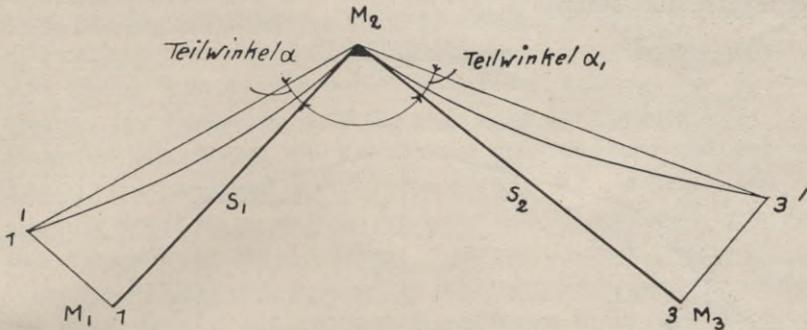


Abb. 252.

Um nun, von einem Eckpunkt ausgehend, die Lage des nächstfolgenden zu erhalten, müssen wir mit der ideellen Winkeländerung, welche aus den beiden Teilwinkeln α und α_1 besteht, rechnen. Umgekehrt können wir, wenn die Verschiebung eines Punktes vorliegt (von 3 nach 3'), durch Division dieses Maßes durch die Stablänge die Winkeländerung bestimmen. Es wäre z. B. nach Abb. 252

$$\alpha_1 = \frac{\frac{M_3 \cdot s_2}{2 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{s_2}{3} + \frac{M_2 \cdot s_2}{2 \cdot E \cdot J} \cdot \frac{2}{3} \cdot s_2}{s_2 \cdot E \cdot J}$$

$$= \frac{\frac{M_3 \cdot s_2}{2} \cdot \frac{s_2}{3} + \frac{M_2 \cdot s_2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot s_2}{s_2}$$

und ebenso

$$\alpha = \frac{\frac{M_1 \cdot s_1}{2} \cdot \frac{s_1}{3} + \frac{M_2 \cdot s_1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot s_1}{s_1}$$

Die gesamte Winkeländerung, welche wir hierbei ohne Feststellung der wirklichen Verschiebungen gefunden haben, ist gleich der Summe der beiden Teilwinkel $\alpha + \alpha_1$; denn in den Gleichungen sind lediglich die uns bekannten Eckmomente und die Stablängen enthalten.

Als Beispiel sei gegeben ein Stabzug (Abb. 253), welcher als Zweigelenbogen ausgeführt werden soll. Das statisch bestimmte Hauptsystem ist mit $H = 1$ zu belasten, daher die Längskraft an beliebiger Stelle $= 1 \cdot \cos \varphi$. Die einzelnen Längenänderungen der Stäbe sind somit

$$\Delta s = \frac{1 \cdot \cos \varphi \cdot s}{E \cdot F}$$

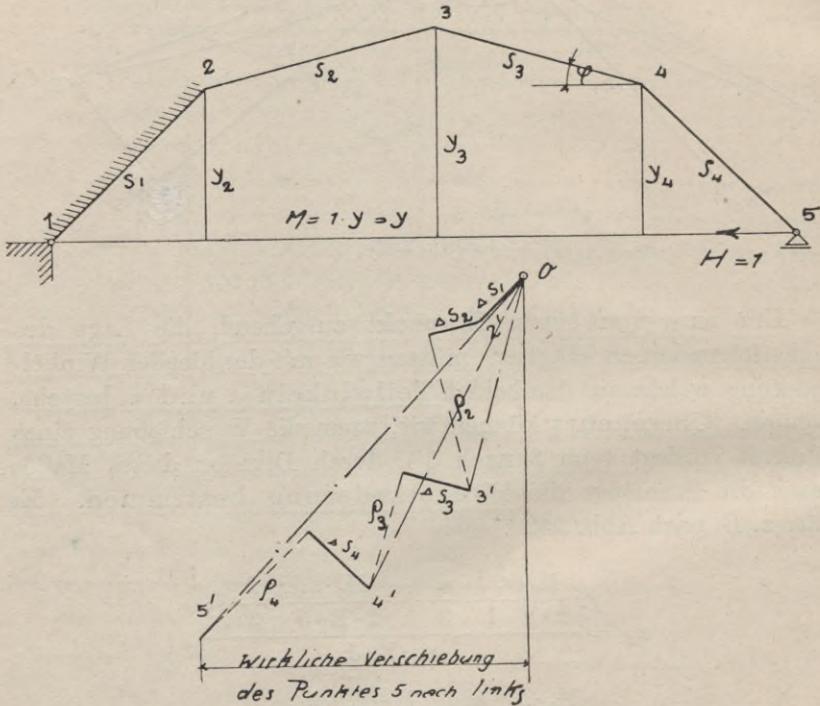


Abb. 253.

Allgemein lauten dann die Gleichungen für die Winkeländerungen, wenn wir die Momente durch die Ordinaten y ausdrücken, E und J konstant setzen und bedenken, daß an jedem Punkt die Gesamtwinkeländerung sich aus den beiden Teilwinkeln zusammensetzt, beispielsweise für den Punkt 3:

$$\alpha_1 = \frac{y_4 \cdot s_3}{6} + \frac{y_3 \cdot s_3}{3},$$

$$\alpha = \frac{y_2 \cdot s_2}{6} + \frac{y_3 \cdot s_2}{3}.$$

Gesamtwinkeländerung an dem Punkt 3: $\Delta\vartheta_3 = \alpha + \alpha_1$. Nachdem auch die Δs berechnet sind, können wir den Verschiebungsplan aufzeichnen, wobei wir wieder den Punkt 1 und die Richtung des Stabes s_1 als fest (undrehbar) annehmen wollen. Vom Pol $0 = 1'$ haben wir zunächst die Verkürzung Δs_1 anzutragen, wodurch schon der Punkt $2'$ festliegt. Sodann haben wir die Verkürzung Δs_2 und das zur Winkeländerung $\Delta\vartheta_2$ (gleich Summe der beiden Teilwinkel) gehörige Lot ρ_2 anzutragen. Der Endpunkt stellt die neue Lage des Punktes 3 dar = $3'$. Dann ist anzutragen die Verkürzung Δs_3 und das dazugehörige Lot ρ_3 , entsprechend der Winkeländerung $\Delta\vartheta_2 + \Delta\vartheta_3$. Die Antragung der Lote ρ muß so erfolgen, daß sie sich mit dem Sinn der Veränderung deckt. Dieser wird verständlich, wenn wir uns erinnern, daß der Stab s_1 in seiner Richtung festliegen soll, während die Kraft $H = 1$ auf das System am freien Ende einwirkt, wobei wir uns das Rollenlager zuerst wegzudenken haben. Die Punkte 3, 4 und 5 werden sich in diesem Falle anscheinend nach unten bewegen, doch fällt dieser Entscheidung kein besonderes Gewicht bei. Zum Schluß hätten wir zu überlegen, daß der Punkt 5 sich ja eigentlich weder nach unten noch nach oben bewegen kann, sondern auf der wagerechten Auflagerfläche gleitet. Wir heben damit gewissermaßen die erst nötige Festhaltung des Stabes 1 wieder auf, da dieser bei der elastischen Veränderung eine Drehung um den Auflagerpunkt 1 vollzieht, während der Punkt 5 wagerecht nach links wandert. Die wirkliche Verschiebung stellt sich also als die Horizontalprojektion der gefundenen dar. Ebenso sind die Verschiebungen der einzelnen Punkte in wagerechtem Sinne die Horizontalprojektionen der Strahlen $0 - 2'$, $0 - 3'$, $0 - 4'$.

Besonders einfach wird das Verfahren erst, wenn man die Lote ρ zeichnerisch direkt findet, anstatt sie auszurechnen.

δ) Der biegungsfeste Stabzug mit zeichnerischer¹⁾ Ermittlung der Strecken ρ .

Es liege ein Stabzug 0, 1, 2 bis 8 vor (Abb. 254). Da irgendein fester Punkt angenommen werden muß, wollen wir den Stabzug bei 4 eingespannt denken. Er sei irgendwie belastet, wodurch

¹⁾ Literatur siehe unter γ Seite 288.

wir dann in den Knotenpunkten 0 — 8 bestimmte Momente $\pm M$ erhalten. Nun strecken wir den Stabzug in eine gerade Linie aus und tragen an den einzelnen Knotenpunkten die bekannten Eckmomente ihrem Vorzeichen nach auf. Sodann zeichnen wir für diesen geraden Stabzug die Biegelinie (nach dem in Kapitel I angegebenen Verfahren), wodurch wir in der dargestellten Weise die Maße ρ unmittelbar erhalten.

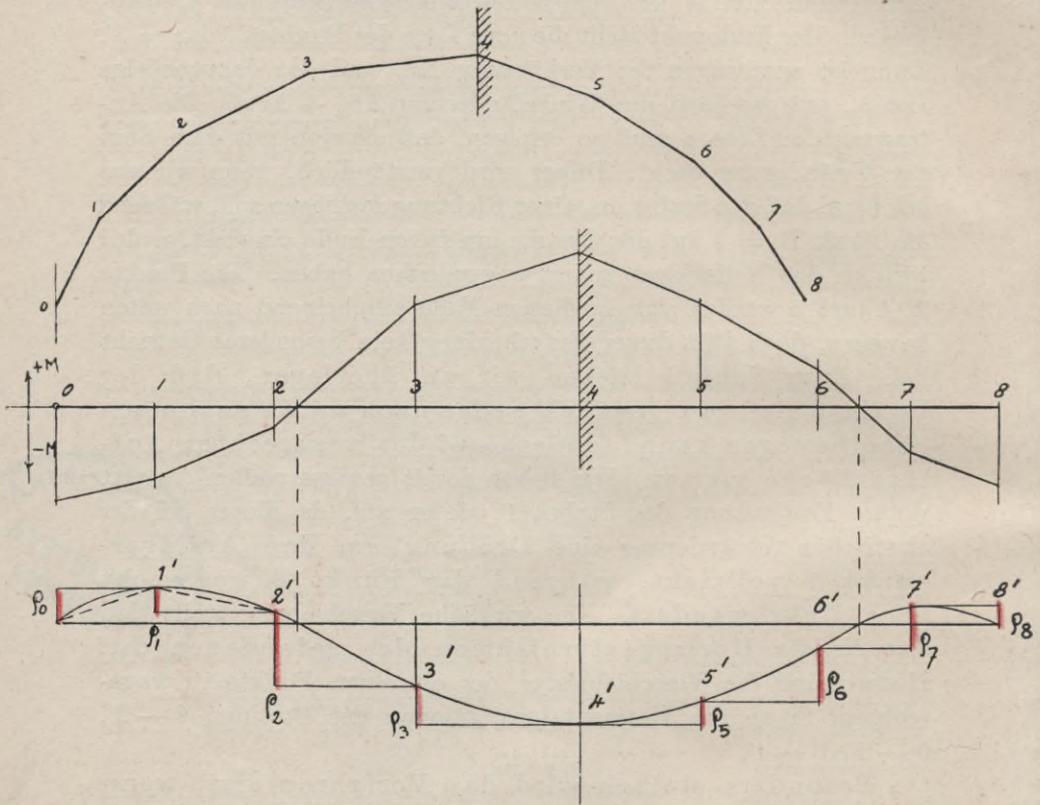


Abb. 254.

Beweis: Die Winkel, welche die Verbindungsgeraden der Punkte 0' — 1', 1' — 2' usf. mit der wagerechten geraden Stabachse einschließen, stimmen mit den durch Rechnung gefundenen Winkeln überein, und es geben deshalb die Unterschiede zwischen den aufeinanderfolgenden Punkten 0', 1' bis 8' die Strecken ρ unmittelbar (und zwar gleich ihrem positiven oder negativen Vorzeichen nach) an.

Beispiel: Es soll für den in Abb. 255 gegebenen Zweigelenkbogen die Verschiebung für $X_a = 1$ ermittelt werden. Da Symmetrie vorhanden ist, wählen wir als festen Punkt die Mitte und denken uns dort den Stabzug eingespannt; den Biegemomenten

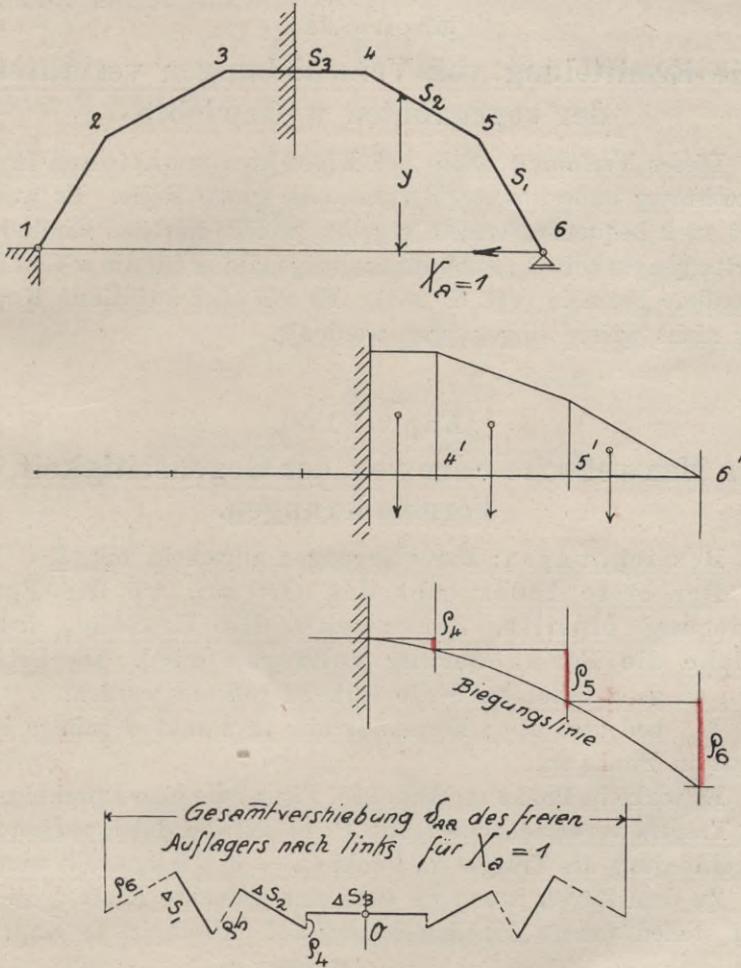


Abb. 255.

entsprechen dann die Ordinaten y . Sodann zeichne man die Biegelinie nach Kapitel I und messe die Maße ρ heraus. Nun kann zum Schluß der Verschiebungsplan sehr schnell gezeichnet werden, wobei wir von einem Punkte 0, der identisch mit dem Einspannungsquerschnitt zu denken ist, ausgehen. Hier tragen wir zu-

nächst die Verkürzung des halben Stabes $s_3 = \Delta s_3$ auf und reihen unter 90° und in demselben Maßstabe ρ_4 an. Ebenso folgt Δs_2 und ρ_5 bzw. Δs_1 und ρ_6 . Für die linke Seite gilt dasselbe.

Kapitel III.

Die Ermittlung von Verschiebungen vermittelt der sogenannten w-Gewichte.

Dieses Verfahren spielt bei Eisenkonstruktionen in der Berechnung unbestimmter Systeme eine große Rolle. Es werden dort auch bequeme Formeln gegeben, welche nur den Einfluß der Gurtungen enthalten. Auch für Stabzüge gibt es für die w-Gewichte besondere Formeln (vgl. S. 251). Es soll aber auf dieses Kapitel hier nicht weiter eingegangen werden¹⁾.

Kapitel IV²⁾.

Der Maxwell'sche Satz von der Gegenseitigkeit der Formänderungen.

Bezeichnungen: Durchbiegungen allgemein mit δ .

Der erste Index gibt den Ort an, wo die Formänderung eintritt, der zweite die Ursache, durch welche die Formänderung vollzogen wird. Die Ursache kann an ganz beliebiger Stelle wirkend gedacht werden.

δ_{am} bedeutet also: Formänderung in Punkt a infolge einer Kraft in Punkt m.

Es wirke in Punkt m (Abb. 256, Fig. a) die eine Durchbiegung des Trägers verursachende Kraft P; es soll die dabei auftretende Durchbiegung des Trägers im Punkte a = δ_{am} festgestellt werden.

Zu dem Zweck lassen wir dort eine gedachte Kraft Q wirken und stellen unsere Arbeitsgleichung auf (Abschnitt I, Kap. V):

$$Q \cdot \delta_{am} = \int \frac{M_Q \cdot M_P \cdot ds}{E \cdot J}$$

¹⁾ Näheres darüber, wie überhaupt über die Verwertung der vorstehend besprochenen Abschnitte im Eisenbau und bei Fachwerken bietet in leicht verständlicher Form Schwengler, „Die Elastizitätslehre und der Eisenbau“, Verlag Hittenkofer-Strelitz.

²⁾ Als Grundlage für die Bearbeitung der Kapitel IV bis VII diente Otzen: „Praktische Winke zum Studium der Statik“, Kneidels Verlag, Wiesbaden.

Kehren wir jetzt die Aufgabe um. Es wirke im Punkte a die Kraft Q jetzt als Ursache (Fig. b), und es sei die dabei im Punkte m auftretende Senkung δ_{ma} zu ermitteln.

Wir lassen im Punkte m eine gedachte Kraft P wirken und stellen die Arbeitsgleichung auf

$$P \cdot \delta_{ma} = \int \frac{M_P \cdot M_Q \cdot ds}{E \cdot J}$$

Mit $P = Q$ wird auch $\delta_{am} = \delta_{ma}$.

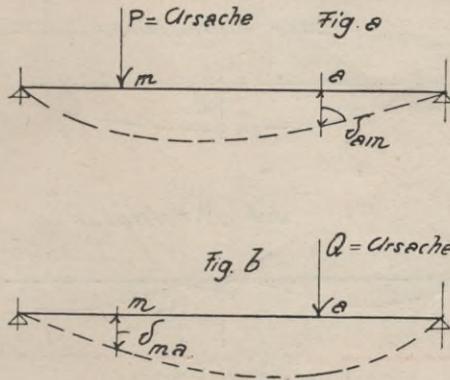


Abb. 256.

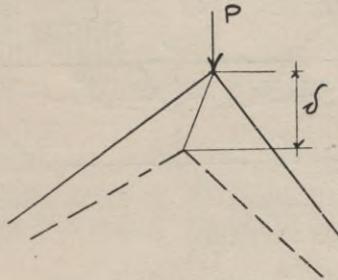


Abb. 257.

Der Satz lautet in Worten:

Die Durchbiegung des Punktes a infolge einer Last in m ist ebensogroß wie die Durchbiegung des Punktes m, wenn die gleiche Last in a wirkt.

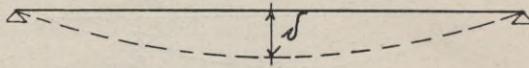
Vorausgesetzt haben wir nur, daß nicht die wirklichen Verschiebungen gemessen werden, sondern deren Projektionen in der Kraftrichtung, was in unserem Beispiel weniger, wohl aber bei Fachwerken (Abb. 257) zu beachten ist.

Kapitel V.

Ermittlung der statisch unbestimmten Größen X.

Für den Zustand des statisch bestimmten Hauptsystems wird das Bauwerk Formänderungen annehmen, deren Feststellung entweder rechnerisch nach dem im Abschnitt I gegebenen Verfahren oder zeichnerisch nach dem in den vorhergehenden Kapiteln

ohne Mittelstütze



mit Mittelstütze

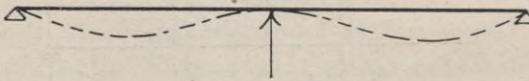


Abb. 258.

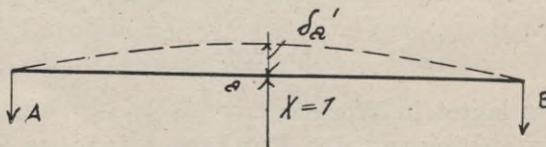
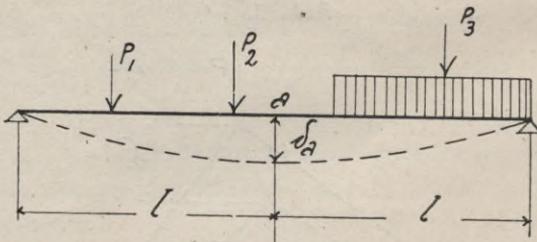


Abb. 259.

gegebenen Verfahren erfolgen kann. Die Punkte, an denen im fertigen Zustande die statisch unbestimmten Größen X angreifen, werden also ebenfalls Lageveränderungen erleiden, die beim Bauwerke wirklich nicht eintreten können, da die Formänderungen

an den Wirkungsstellen der überzähligen Auflagergrößen von diesen ganz oder teilweise verhindert werden (Abb. 258). Die Größe X kann nun wie folgt gefunden werden.

Gegeben sei ein Träger auf 3 Stützen mit beliebiger Belastung (Abb. 259). Beim statisch bestimmten Hauptsystem (Träger ohne Mittelstütze) verschiebt sich unter den gegebenen Lasten der Punkt a um δ_a und unter der Last $X = 1$ um δ_a' im entgegengesetzten Sinne.

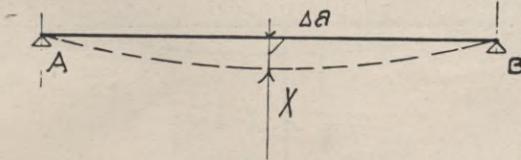


Abb. 260.

Wirkt nun nicht $X = 1$, sondern das wirkliche X in voller Größe, so ist die Rückverschiebung $X \cdot \delta_a'$. Beide Verschiebungen nacheinander eingetreten gedacht, sind gleich der endgültigen Verschiebung des Punktes a am Bauwerk.

Wir haben es hier wieder mit 3 Möglichkeiten zu tun¹⁾.

1. Die endgültige Verschiebung kann Null sein (die statisch unbestimmte Größe macht die sogen. Formänderungsarbeit zu einem Minimum), wobei sich ergibt

$$X = \frac{\delta_a}{\delta_a'} \quad (\text{starres Auflager}).$$

2. Die Rückschiebung durch die unbestimmte Größe (als zweiter Arbeitsvorgang gedacht) ist nicht so groß wie die Verschiebung infolge der Belastung. Es bleibt somit eine elastischer Rest:

$$\Delta a = \delta_a - X \cdot \delta_a',$$

demnach

$$X = \frac{\delta_a - \Delta a}{\delta_a'} \quad (\text{nachgiebiges, von } X \text{ unabhängiges Auflager,}$$

Abb. 260).

3. Es verbleibt wieder ein Rest Δa in der Durchbiegung (Abb. 261), der infolge der elastischen Verkürzung der Stütze selbst bei sonst starren Widerlagern eintritt (ein ähnlicher Fall

¹⁾ Vgl. Abschnitt I, Kap. VI: Möglichkeiten für die linke Seite der Arbeitgleichung.

kann auch bei einem Bogen mit Zugband eintreten). Die elastische Verkürzung

$$\Delta a = \delta_a - X \cdot \delta_a'$$

steht diesmal in Abhängigkeit von X und läßt sich genau berechnen; sie ist nämlich

$$\Delta a = \frac{X \cdot h}{E \cdot F};$$

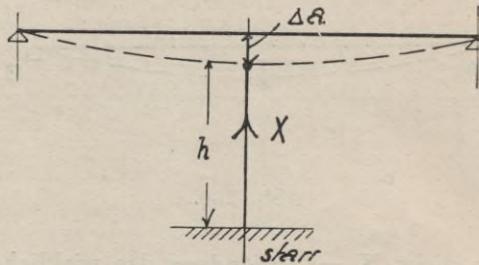


Abb. 261.

also

$$\frac{X \cdot h}{E \cdot F} + X \cdot \delta_a' = \delta_a,$$

woraus

$$X = \frac{\delta_a}{\delta_a' + \frac{h}{E \cdot F}}$$

(nachgiebiges von X abhängiges Auflager).

Kapitel VI.

Einflußlinien für ^{einfache} statisch unbestimmte Größen.

Unsere Aufgabe ist, für eine wandernde Last $P = 1$ die zu jeder möglichen Laststellung gehörige Größe des statisch unbestimmten X zu finden. Bei irgend einer Laststellung von $P = 1$ müßten wir, um das zugehörige X zu erhalten, zunächst die Mittelstütze entfernen und feststellen, wieviel sich der Träger am Angriffspunkte von X gesenkt hat; diese Durchsenkung ($\delta_{a,m}$) hätten wir dann durch das Maß, um welches $X = 1$ den Träger nach oben zurückschiebt ($\delta_{a,a}$), zu dividieren und schließlich den so erhaltenen Be-

trag $X = \frac{\delta_{am}}{\delta_{aa}}$ unter der betreffenden Laststellung von $P = 1$ als Ordinate aufzutragen.

☞ Diese Arbeit können wir uns wesentlich abkürzen. Soll nämlich X stets $= \delta_{am}$ sein, versehen mit dem Reduktionsfaktor $\frac{1}{\delta_{aa}}$, und betrachten wir Abb. 262, Fig. 2, so erkennen wir, daß diese δ_{am} durch die Biegelinie für $X = 1$ schon gegeben sind, denn es ist unter jeder Laststellung das aus dieser Biegelinie heraus gemessene δ_{ma} infolge des Maxwellschen Satzes gleich δ_{am} , welches in Fig. 1 gesucht wird.

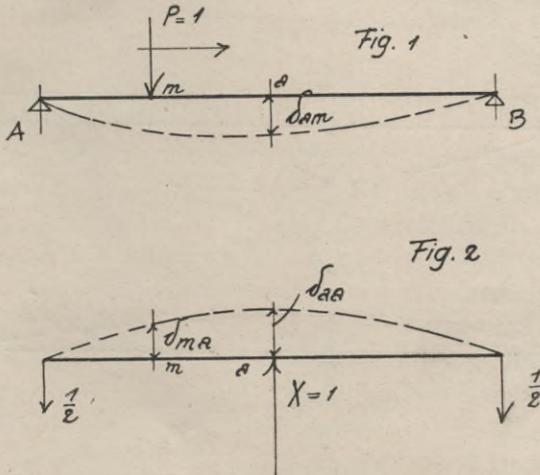


Abb. 262.

Die Biegelinie für $X = 1$ ist also gleichzeitig die Einflußlinie für die Größe X mit dem

$$\text{Reduktionsfaktor } \mu = \frac{1}{\delta_{aa}}.$$

Wie man nun solche Biegelinien zeichnerisch findet, ist in Kapitel I dargelegt worden.

Für irgendeine Laststellung von $P = 1$ (m) wäre somit nach Abb. 262 Fig. 2

$$X = \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}},$$

ein Wert, der offenbar größer ist als bei geradliniger Lastverteilung nach Aufhebung der Kontinuität in a .

Kapitel VII.

Zweifach statisch unbestimmte Bauwerke.

Allgemeines.

Beispiel: Balken auf 4 Stützen (Abb. 263).

Wir stellen das statisch bestimmte Hauptsystem durch Entfernung der beiden Mittelstützen C und D her und nennen diese

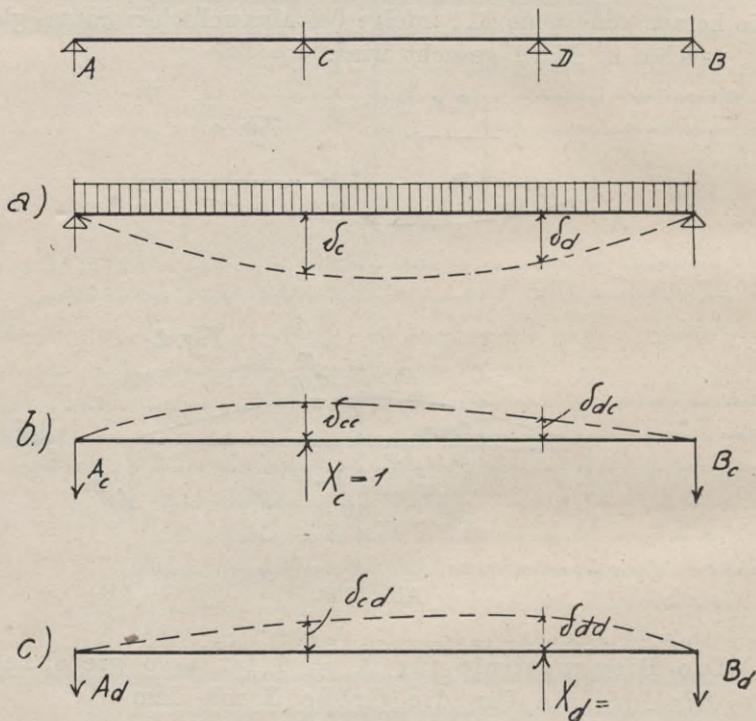


Abb. 263.

beiden unbestimmten Größen X_c und X_d . Der Träger sei gleichmäßig belastet. Fig. a zeigt die Biegelinie des statisch bestimmten Hauptsystems,

Fig. b die für $X_c = 1$ und

Fig. c die für $X_d = 1$.

Nehmen wir unverschiebliche Auflager an, dann ist

1. $\delta_c - X_c \cdot \delta_{cc} - X_d \cdot \delta_{cd} = 0,$
2. $\delta_d - X_c \cdot \delta_{dc} - X_d \cdot \delta_{dd} = 0.$

Diese Gleichungen sind lediglich Ausdrücke für Verschiebungen, die in sich = 0 sein sollen; so sei beispielsweise $\delta_c = 3 \text{ cm}$, $X_c \cdot \delta_{cc} = 2 \text{ cm}$ und $X_d \cdot \delta_{cd} = 1 \text{ cm}$. Die Biegelinien in Fig. b und c geben bekanntlich nur die elastischen Verschiebungen an, welche für die unbestimmten Größen 1 eintreten. Sollen also die in Fig. a angegebenen wirklichen Verschiebungen, z. B. δ_c , von X_c und X_d aufgehoben werden, so sind die für die Lasten 1 gewonnenen Werte der Verschiebungen mit X_c bzw. X_d (also den wirklichen statisch unbestimmten Größen) multipliziert von δ_c in Abzug zu bringen, wobei, wenn die Auflager starr sind, kein Rest bleiben darf.

Es können hier wieder für jede Gleichung die drei Fälle unterschieden werden, welche früher schon erläutert worden sind (Kap. V), also

1. Das Auflager ist starr.
2. Das Auflager ist nachgiebig.
3. Zwischen dem starren Auflager und dem Träger ist ein zusammendrückbarer oder dehnbarer Stab vorhanden.

Die Ausdrücke für diese Bedingungen würden dann die rechten Seiten der obigen Gleichungen darstellen, wo jetzt Null steht. Unsere Gleichungen sind also im besten Sinne des Wortes Deformationsgleichungen, d. h. die unbestimmten Größen werden schließlich nach ihrer Trennung von den anderen Werten als Ausdrücke zwischen Maßen gefunden, die vorher erst berechnet sein müssen. Für unseren Träger haben wir also 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten, X_c und X_d , und können daraus diese berechnen, nachdem vorher die Durchbiegungen δ zeichnerisch oder rechnerisch gefunden worden sind.

Einflußliniengleichung für die statisch unbestimmten Größen und zeichnerische Lösung.

Für unser Beispiel, Träger auf 4 Stützen, ziehen wir bei der vorher nötigen Bestimmung der Durchbiegungen die zeichnerische Lösungsform vor und erhalten dabei gleichzeitig auch die Einflußlinien für die Stützendrucke bei C und D. Wir konstruieren hier nur die Einflußlinie für den Stützendruck C.

Unter Annahme der Lasteinheit = 1 an beliebiger Stelle m des Balkens (Abb. 264) entstehen in den Punkten c und d des

statisch bestimmten Hauptsystems die Durchbiegungen δ_{cm} und δ_{dm} , wofür hier keine besondere Figur gezeichnet wurde. Wir haben nun nach den vorhergehenden allgemeinen Gleichungen

1. $\delta_{cm} - X_c \cdot \delta_{cc} - X_d \cdot \delta_{cd} = 0$,
2. $\delta_{dm} - X_c \cdot \delta_{dc} - X_d \cdot \delta_{dd} = 0$.

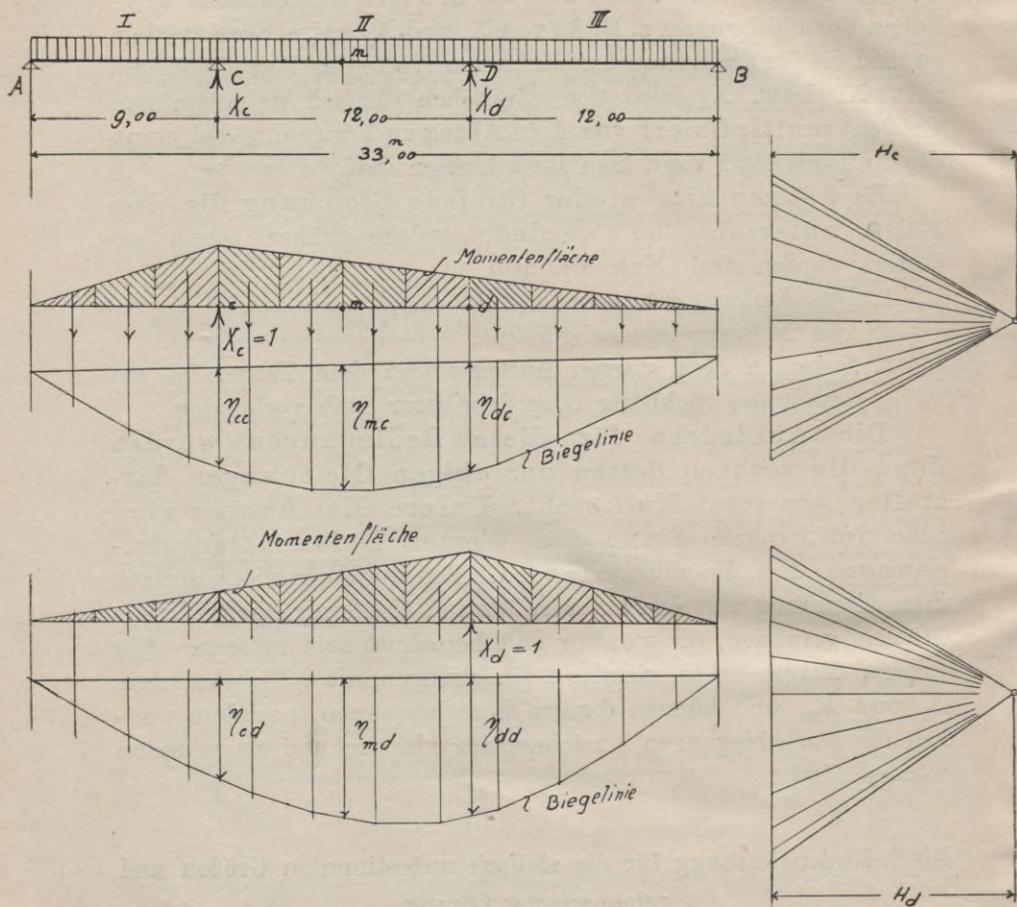


Abb. 264.

Nach Maxwell ist

$$\delta_{cm} = \delta_{mc}, \quad \delta_{dm} = \delta_{md},$$

sodaß keine besonderen Biegelinien für die wandernden Lasten 1 im statisch bestimmten Hauptsystem erforderlich sind. So erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} 1. \quad & \underline{\delta_{mc} - X_c \cdot \delta_{cc} - X_d \cdot \delta_{cd} = 0}, \\ 2. \quad & \underline{\delta_{md} - X_c \cdot \delta_{dc} - X_d \cdot \delta_{dd} = 0}, \end{aligned}$$

und daraus folgt durch Einsetzung

$$X_c = \frac{\delta_{md} \cdot \underline{\delta_{cd}} - \underline{\delta_{mc}} \cdot \delta_{dd}}{\delta_{dc} \cdot \underline{\delta_{cd}} - \underline{\delta_{cc}} \cdot \delta_{dd}}.$$

In dieser Gleichung sind die unterstrichenen Ausdrücke die durch $X_c = 1$ hervorgerufenen Durchbiegungen an den Punkten m, d und c des statisch bestimmten Hauptsystems; man findet sie aus der Biegelinie für $X_c = 1$ (vgl. Abb. 264), wenn man die Ordinaten η , welche dieselben in vergrößerten Maßen darstellen, mit der Polweite H_c multipliziert, also

$$\begin{aligned} \delta_{mc} &= H_c \cdot \eta_{mc} \\ \delta_{dc} &= H_c \cdot \eta_{dc} = \underline{\delta_{cd}} \\ \delta_{cc} &= H_c \cdot \eta_{cc}. \end{aligned}$$

Aus demselben Grunde sind

$\left. \begin{array}{l} \delta_{md} \\ \delta_{dd} \\ \delta_{cd} \end{array} \right\}$ die durch $X_d = 1$ hervorgerufenen Durchbiegungen der Punkte m, d und c, die wir ebenso aus Abb. 264 erhalten zu

$$\begin{aligned} \delta_{md} &= H_d \cdot \eta_{md} \\ \delta_{dd} &= H_d \cdot \eta_{dd} \\ \delta_{cd} &= H_d \cdot \eta_{cd} = H_c \cdot \eta_{dc}. \end{aligned}$$

Diese Werte in obige Gleichung eingesetzt gibt

$$X_c = \frac{H_d \cdot \eta_{md} \cdot H_c \cdot \eta_{dc} - H_c \cdot \eta_{mc} \cdot H_d \cdot \eta_{dd}}{H_c \cdot \eta_{dc} \cdot H_d \cdot \eta_{cd} - H_c \cdot \eta_{cc} \cdot H_d \cdot \eta_{dd}}$$

oder

$$X_c = \frac{\underline{\eta_{dc}} \cdot \eta_{md} - \eta_{mc} \cdot \underline{\eta_{dd}}}{\underline{\eta_{dc}} \cdot \eta_{cd} - \eta_{cc} \cdot \underline{\eta_{dd}}}$$

Würde es uns nun noch gelingen, $\eta_{dc} = \eta_{dd}$ zu machen, d. h. würden wir die zunächst beliebige Polweite H_c so wählen, daß $\eta_{dc} = \eta_{dd}$ wird, so lautet die Gleichung nach Kürzung:

$$X_c = \frac{\underline{\eta_{md}} - \eta_{mc}}{\eta_{cd} - \underline{\eta_{cc}}}.$$

Unsere Einflußfläche für X wäre dann lediglich die Differenzfläche zwischen 2 Biegelinien. Wir schreiben noch dafür

$$X_c = \frac{\eta'_m}{\eta'_c}.$$

Das können wir in der Tat erreichen; denn es wird $\eta_{dc} = \eta_{dd}$, wenn wir die beiden Seilpolygone so zeichnen, daß sie sich unter dem Punkt d kreuzen, was wie folgt zu erreichen ist. Wir behalten die in Abb. 264 gezeichnete Seillinie für $X_d = 1$ bei und zeichnen die für $X_c = 1$ nicht mit der beliebigen Polweite H_c , sondern mit der besonders zu konstruierenden Polweite H_c' . In Abb. 265 ist diese Konstruktion nach bekannten Gesetzen vorgenommen.

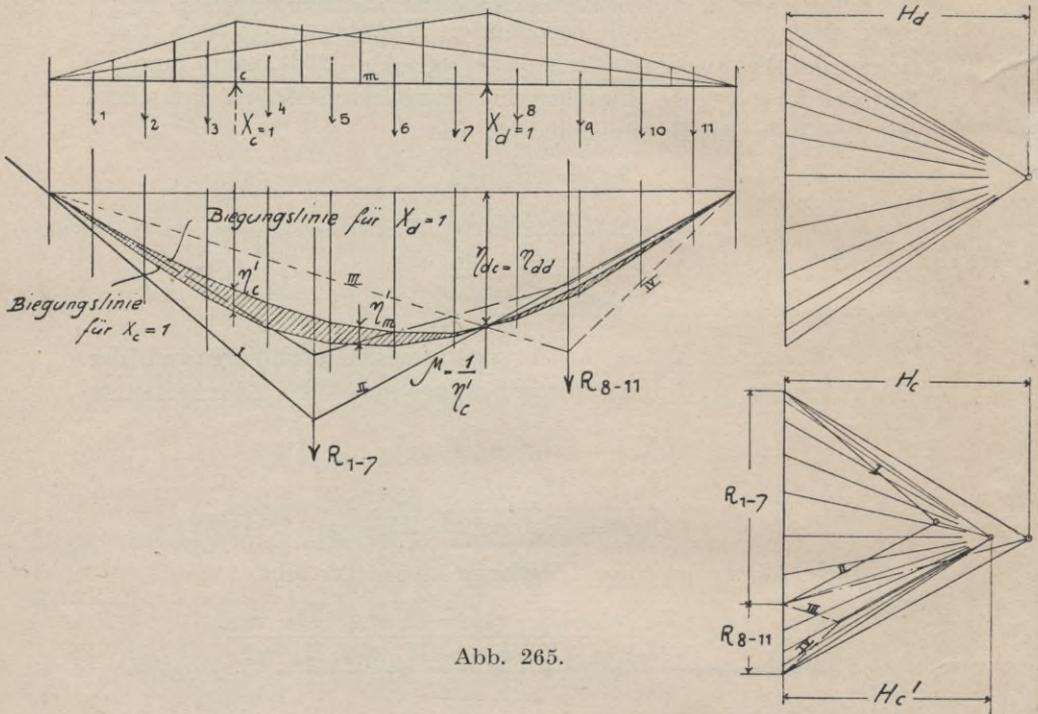


Abb. 265.

Die schraffierte Fläche stellt nun die Einflußfläche für den Stützendruck C dar. Ihr Reduktionsfaktor ist

$$u = \frac{1}{\eta'_c}$$

η'_m soll die Ordinate für einen beliebigen Punkt m andeuten.

Bei der Konstruktion ist folgendes zu beachten:

Für den Maßstab maßgebliche Polweite ist nur H_d , da H_c' danach gefunden wird. An und für sich ist H_d beliebig. Genau so können wir auch die Einflußfläche für den Stützendruck D finden.

Rechnerische Lösung derselben Aufgabe mit Hilfe der Arbeitsgleichung.

Es soll hier gezeigt werden, daß die zeichnerische Lösung wegen ihrer Kürze den Vorzug verdient.

Die Stützpunkte seien starr, und wir erhalten, da 2 statisch unbestimmte Größen vorhanden sind, folgende 2 Arbeitsgleichungen:

$$1. \int \frac{M_c \cdot M \cdot ds}{E \cdot J} = 0,$$

$$2. \int \frac{M_d \cdot M \cdot ds}{E \cdot J} = 0.$$

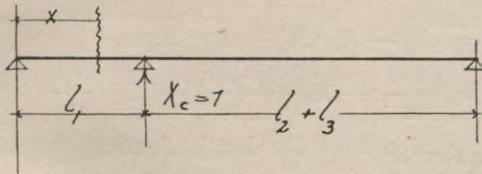


Abb. 266.

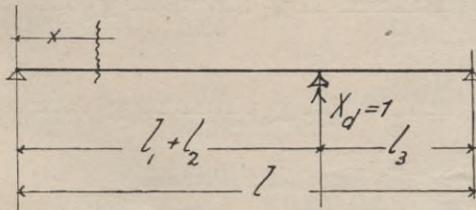


Abb. 267.

Wie für jedes statisch unbestimmte System, so ist auch hier

$$M = M_0 - M_c \cdot X_c - M_d \cdot X_d \text{ und}$$

$$A = A_0 - A_c \cdot X_c - A_d \cdot X_d$$

für den Zustand für den Zustand

$$X_c = 1$$

$$X_d = 1.$$

Nach Abb. 266 ist

$$M_c = -1 \cdot \frac{l_2 + l_3}{l_1} \cdot x$$

und nach Abb. 267

$$M_d = -1 \cdot \frac{l_3}{l_1} \cdot x.$$

Aus Früherem wissen wir, daß

$$M_c = \frac{\partial M}{\partial X_c} \text{ und } M_d = \frac{\partial M}{\partial X_d},$$

wobei man die Größen M_c und M_d zuerst nicht zu bestimmen braucht, sondern als partielle Ableitungen von M findet. Wir wollen hier einmal so vorgehen, dann lauten die beiden Gleichungen:

$$1. \int \frac{M}{E \cdot J} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_c} \cdot ds = 0,$$

$$2. \int \frac{M}{E \cdot J} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_d} \cdot ds = 0.$$

Bei der Ausrechnung der Integrale sind die Beiträge derselben für die Öffnungen I, II und III gesondert zu untersuchen. Um jeweils M berechnen zu können, brauchen wir die Reaktionen A und B .

$$\begin{aligned} A &= A_0 - A_c \cdot X_c - A_d \cdot X_d \\ &= \frac{q \cdot l}{2} - X_c \cdot \frac{l_2 + l_3}{l} - X_d \cdot \frac{l_3}{l}. \end{aligned}$$

Als Belastung seien 3,0 t für den laufenden Meter Balken angenommen, somit

$$A = \frac{3,0 \cdot 33,0}{2} - X_c \cdot \frac{24,0}{33,0} - X_d \cdot \frac{12,0}{33,0}$$

und

$$B = \frac{3,0 \cdot 33,0}{2} - X_c \cdot \frac{9,0}{33,0} - X_d \cdot \frac{21,0}{33,0}.$$

I. Öffnung

$$\begin{aligned} M &= A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = \frac{3,0 \cdot 33,0}{2} \cdot x - X_c \cdot \frac{24,0}{33,0} \cdot x - X_d \cdot \frac{12,0}{33,0} \cdot x \\ &\quad - \frac{3,0 \cdot x^2}{2} \end{aligned}$$

$$= 49,5 \cdot x - X_c \cdot 0,73 \cdot x - X_d \cdot 0,36 \cdot x - 1,5 x^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial X_c} = - \frac{24,0}{33,0} \cdot x = -0,73 \cdot x$$

$$\frac{\partial M}{\partial X_d} = - \frac{12,0}{33,0} \cdot x = -0,36 \cdot x.$$

Demnach

$$\begin{aligned} &\int_0^{l_1} \frac{M}{E \cdot J} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_c} \cdot dx \\ &= \int_0^{l_1} \frac{(49,5 \cdot x - X_c \cdot 0,73 \cdot x - X_d \cdot 0,36 \cdot x - 1,5x^2) \cdot (-0,73 \cdot x)}{E \cdot J_1} \cdot dx \end{aligned}$$

1) Vgl. Anhang A, Absatz D, S. 331.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{E \cdot J_1} \cdot \left[- \int_0^{9,0} 36 \cdot x^2 \cdot dx + X_c \cdot \int_0^{9,0} 0,53 \cdot x^2 \cdot dx \right. \\
 &\qquad\qquad\qquad \left. + X_d \cdot \int_0^{9,0} 0,265 x^2 \cdot dx + \int_0^{9,0} 1,09 x^3 \cdot dx \right] \\
 &= \frac{1}{E \cdot J_1} \cdot [- 36 \cdot 243 + X_c \cdot 0,53 \cdot 243 + X_d \cdot 0,265 \cdot 243 + 1,09 \cdot 1640] \\
 &= \frac{1}{E \cdot J_1} \cdot [+ X_c \cdot 129 + X_d \cdot 64,5 - 6669].
 \end{aligned}$$

Ebenso ist

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{l_1} \frac{M}{E \cdot J} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_d} \cdot dx \\
 &= \int_0^{9,0} \frac{(49,5 \cdot x - X_c \cdot 0,73 \cdot x - X_d \cdot 0,36 \cdot x - 1,5 \cdot x^2) \cdot (-0,36 \cdot x)}{E \cdot J_1} \cdot dx
 \end{aligned}$$

also gleich der Hälfte wie vor

$$= \frac{1}{E \cdot J_1} \cdot [+ X_c \cdot 64,5 + X_d \cdot 32,25 - 3334,5].$$

II. Öffnung.

Nach Abb. 268 ist

$$\underline{M} = A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} + X_c (x - l_1)$$

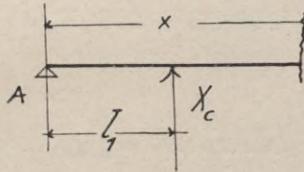


Abb. 268.

$$\begin{aligned}
 &= 49,5 \cdot x - X_c \cdot 0,73 \cdot x - X_d \cdot 0,36 \cdot x - 1,5 \cdot x^2 + X_c \cdot x - X_c \cdot 9,0 \\
 &= 49,5 \cdot x + X_c \cdot 0,27 \cdot x - X_c \cdot 9,0 - X_d \cdot 0,36 \cdot x - 1,5 x^2
 \end{aligned}$$

$$\underline{\frac{\partial M}{\partial X_c}} = + 0,27 \cdot x - 9,0$$

$$\underline{\frac{\partial M}{\partial X_d}} = - 0,36 \cdot x.$$

Demnach

$$\begin{aligned}
 \int_{l_1}^{l_1+l_2} \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_c} \cdot dx &= \frac{1}{E \cdot J_2} \cdot \int_{9,0}^{21,0} (49,5 \cdot x + X_c \cdot 0,27 \cdot x - X_c \cdot 9,0 \\
 &\quad - X_d \cdot 0,36 x - 1,5 x^2) \cdot (0,27 \cdot x - 9,0) \cdot dx \\
 &= \frac{1}{E \cdot J_2} \cdot \left[+ \int_{9,0}^{21,0} 13,35 \cdot x^2 \cdot dx + X_c \cdot \int_{9,0}^{21,0} 0,073 \cdot x^2 \cdot dx \right. \\
 &\quad - X_c \cdot \int_9^{21} 2,43 \cdot x \cdot dx - X_d \cdot \int_9^{21} 0,097 \cdot x^2 \cdot dx - \int_9^{21} 0,405 \cdot x^3 \cdot dx \\
 &\quad - \int_9^{21} 446 \cdot x \cdot dx - X_c \cdot \int_9^{21} 2,43 \cdot x \cdot dx + X_c \cdot \int_9^{21} 81 \cdot dx \\
 &\quad \left. + X_d \cdot \int_9^{21} 3,24 \cdot x \cdot dx + \int_9^{21} 13,5 \cdot x^2 \cdot dx \right] \\
 &= \frac{1}{E \cdot J_2} \cdot \left[\frac{13,35}{3} (21^3 - 9^3) + X_c \cdot \frac{0,07}{3} \cdot (21^3 - 9^3) - X_c \cdot \frac{2,43}{2} \cdot (21^2 \right. \\
 &\quad - 9^2) - X_d \cdot \frac{0,097}{3} \cdot (21^3 - 9^3) - \frac{0,405}{4} \cdot (21^4 - 9^4) - \frac{446}{2} \cdot (21^2 - 9^2) \\
 &\quad - X_c \cdot \frac{2,43}{2} \cdot (21^2 - 9^2) + X_c \cdot 81 \cdot (21 - 9) + X_d \cdot \frac{3,24}{2} \cdot (21^2 - 9^2) \\
 &\quad \left. + \frac{13,5}{3} \cdot (21^3 - 9^3) \right] \\
 &= \frac{1}{E \cdot J_2} \cdot [38\,000 + X_c \cdot 208 - X_c \cdot 438 - X_d \cdot 275 - 19\,000 \\
 &\quad - 80\,200 - X_c \cdot 438 + X_c \cdot 972 + X_d \cdot 583 + 38\,400] \\
 &= \frac{1}{E \cdot J_2} \cdot [-22\,800 + 304 \cdot X_c + 308 \cdot X_d].
 \end{aligned}$$

Ebenso erhält man

$$\int_{l_1}^{l_1+l_2} \frac{M}{E \cdot J} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_d} \cdot dx = \frac{1}{E \cdot J_2} \cdot [-25\,800 + 308 X_c + 378 X_d].$$

III. Öffnung.

$$\underline{M} = B \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = 49,5 x - X_c \cdot 0,273 \cdot x - X_d \cdot 0,64 \cdot x - 1,5 x^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial X_c} = -0,273 \cdot x$$

$$\frac{\partial M}{\partial X_d} = -0,64 x$$

$$\int_0^a \frac{M}{E \cdot J} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_c} \cdot dx = \frac{1}{E \cdot J_3} \cdot \int_0^{l_3=12,0} (49,5 x - X_c \cdot 0,273 x - X_d \cdot 0,64 x - 1,5 x^2) \cdot (-0,273 \cdot x) \cdot dx$$

aufgelöst

$$= \frac{1}{E \cdot J_3} \cdot [X_c \cdot 42,6 + X_d \cdot 101 - 5665].$$

Ferner

$$\int_0^{l_3} \frac{M}{E \cdot J} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_d} dx = \frac{1}{E \cdot J_3} \cdot [X_c \cdot 101 + X_d \cdot 236 - 13\,200].$$

Die Bestimmungsgleichungen für X_c und X_d gehen somit über in

$$\begin{aligned} 1. \quad & \int \frac{M}{E \cdot J} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_c} \cdot dx = 0 = X_c \cdot \left(\frac{129}{E \cdot J_1} + \frac{304}{E \cdot J_2} + \frac{42,6}{E \cdot J_3} \right) \\ & + X_d \cdot \left(\frac{64,5}{E \cdot J_1} + \frac{308}{E \cdot J_2} + \frac{101}{E \cdot J_3} \right) - \left(\frac{6669}{E \cdot J_1} + \frac{22800}{E \cdot J_2} + \frac{5665}{E \cdot J_3} \right) \\ 2. \quad & \int \frac{M}{E \cdot J} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_d} \cdot dx = 0 = X_c \cdot \left(\frac{64,5}{E \cdot J_1} + \frac{308}{E \cdot J_2} + \frac{101}{E \cdot J_3} \right) \\ & + X_d \cdot \left(\frac{32,25}{E \cdot J_1} + \frac{378}{E \cdot J_2} + \frac{236}{E \cdot J_3} \right) - \left(\frac{3334,5}{E \cdot J_1} + \frac{25\,800}{E \cdot J_2} + \frac{13\,200}{E \cdot J_3} \right) \end{aligned}$$

oder bei gleichem J für alle Öffnungen

$$\begin{aligned} 1. \quad & X_c \cdot 475,6 + X_d \cdot 473,5 = 35\,134 \\ \text{oder} \quad & X_c + X_d \cdot 0,995 = \text{rd. } 74; \\ 2. \quad & X_c \cdot 473,5 + X_d \cdot 646,25 = 423\,345 \\ \text{oder} \quad & X_c + X_d \cdot 1,36 = 89,5. \end{aligned}$$

1 von 2 subtrahiert

$$\begin{aligned} 0,365 X_d &= 15,5 \\ X_d &= 42,5 \text{ t} \\ X_c &= 74 - 42,5 = 31,5 \text{ t}. \end{aligned}$$

Wie wir hieraus ersehen, kann die Anwendung der Arbeitsgleichung schon vom zweifach statisch unbestimmten System ab zu ganz erheblicher Rechenarbeit führen.

Mehrstielige Rahmen¹⁾.

Kapitel VIII.

Einleitung.

Bei starren Angriffspunkten hatten wir gefunden in Kapitel V

$$X = \frac{\delta_a}{\delta'_a} \text{ (Kap. V) oder } X = \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}} \text{ (Kap. VI).}$$

(Für δ_{ma} können wir auch δ_{am} setzen.)

Bei bekannter, von X unabhängiger Bewegung des Auflagerpunktes war (Kap. V)

$$X = \frac{\delta_a - \Delta a}{\delta'_a}.$$

Hierfür können nun auch wegen der Gleichheit der obigen Gleichungen schreiben:

$$X = \frac{\delta_{am} - \Delta a}{\delta_{aa}}$$

woraus dann:

$$X \cdot \delta_{aa} = \delta_{am} - \Delta a$$

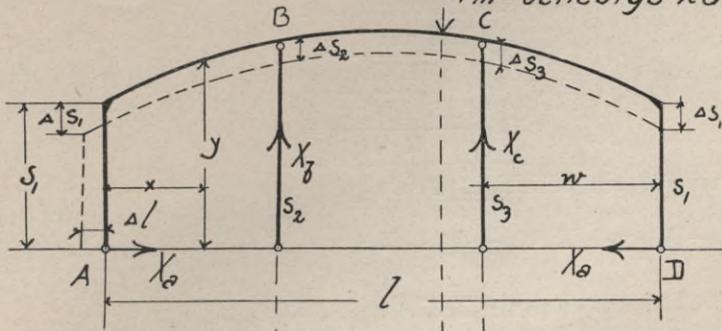
δ_{aa} und δ_{am} bezogen sich auf die Ordinaten der Biegelinie für den Zustand $X = 1$ und $P = 1$, während Δa die Auflagerverschiebung war.

Dies als Vorbetrachtung zu der nachfolgenden allgemeinen Ableitung für mehrstielige Rahmen.

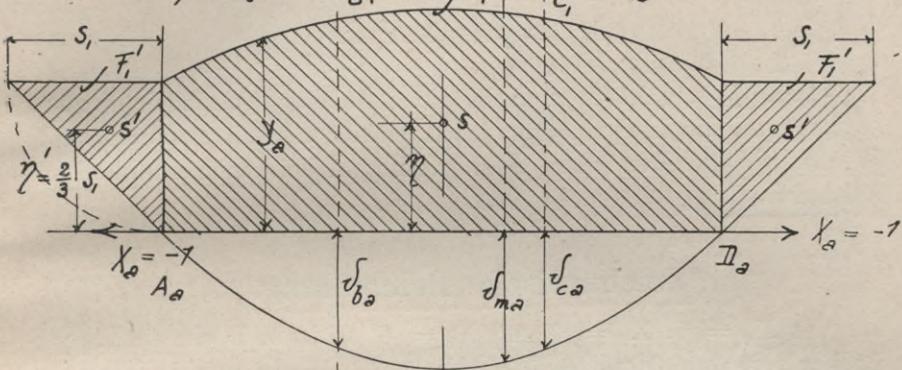
Der mehrstielige Rahmen wird unter der Annahme von Fußgelenken in den Endstützen und von Pendelstützen in der Mitte berechnet. Diesen Voraussetzungen muß natürlich bei der Ausführung in der Praxis möglichst entsprochen werden. Wir betrachten zunächst nochmals die rechnerische Lösung. Die grundlegenden Arbeitsgleichungen lauten ohne Berücksichtigung von Lagerverschiebung und Temperatur und mit Weglassung der Normalkräfte für das in Abb. 269 dargestellte dreifach statisch unbestimmte System

¹⁾ Der betreffende Abschnitt im Handbuch für Eisenbetonbau Band IV, 1. Teil Seite 516 wird hier eingehender erläutert.

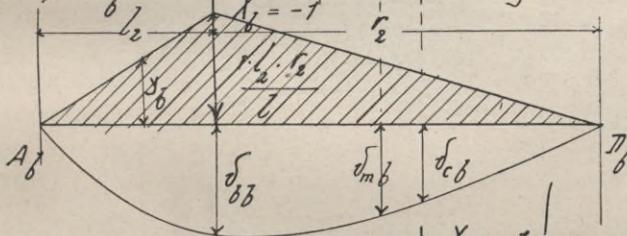
$P_m = \text{beliebige Laststellung.}$



Zustand für $X_a = -1$ Fig. a



Zustand für $X_b = -1$ Fig. b



Zustand für $X_c = -1$ Fig. c

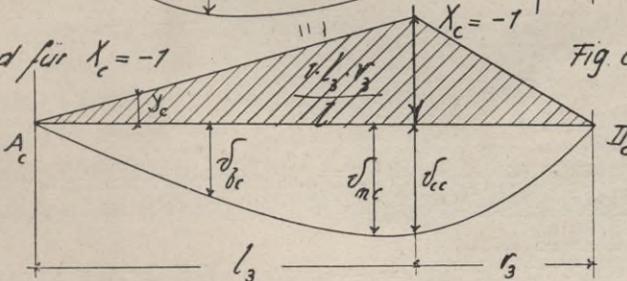


Abb. 269.

$$1. \int \frac{M_a \cdot M \cdot ds}{E \cdot J} = 0$$

$$2. \int \frac{M_b \cdot M \cdot ds}{E \cdot J} = 0$$

$$3. \int \frac{M_c \cdot M \cdot ds}{E \cdot J} = 0.$$

Hierin ist für ein beliebiges Feld

$$M = M_0 - X_a \cdot y + X_b \cdot (x - l_2) + X_c \cdot (x - l_3) - \frac{1}{l} \cdot (X_b \cdot r_2 + X_c \cdot r_3) \cdot x$$

$$M_a = -y$$

$$M_b = x - l_2 - \frac{r_2 \cdot x}{l}$$

$$M_c = x - l_3 - \frac{r_3 \cdot x}{l}.$$

Diese Werte hätte man in die 3 Arbeitsgleichungen einzusetzen, und die Integrale für jeden einzelnen Stab auszuwerten. Wie wir aber gesehen haben, erfordert diese Arbeit einen erheblichen Zeitaufwand.

Zeichnerische Behandlung.

Ist $X_a = 0$, $X_b = 0$ und $X_c = 0$, so ist AD ein einfacher Balken mit dem Moment M_0 (Abb. 270). Wirkt nun an diesem statisch bestimmten Hauptsystem die Größe $X_a = -1$, so ist

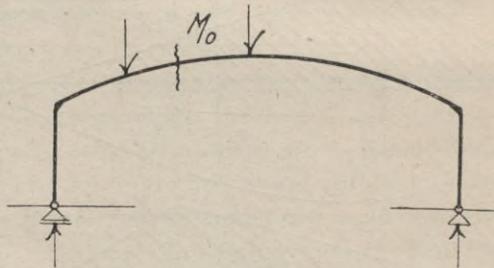


Abb. 270.

das Biegemoment $M_a = 1 \cdot y = y$. Die zugehörige Momentenfläche der beiden Stiele (F_1') und der Riegel (F_1) ist in Abb. 269 Fig. a dargestellt.

Für den Zustand $X_b = -1$ zeigt Fig. b die zugehörige Momentenfläche des statisch bestimmten Hauptsystems mit der

Dreieckshöhe

$$\frac{1 \cdot l_2 \cdot r_2}{1},$$

und schließlich für den Zustand $X_c = -1$ zeigt Fig. c die Momentenfläche mit der Dreieckshöhe

$$\frac{1 \cdot l_3 \cdot r_3}{1}.$$

Die zugehörigen Momente für die 3 Flächen in beliebigem Abstand x vom Auflager sind y_a , y_b und y_c , und das wirkliche Biegemoment an einer beliebigen Stelle $x y$ ist

$$M = M_0 - X_a \cdot y_a - X_b \cdot y_b - X_c \cdot y_c.$$

Wir verfahren nun wieder nach Kapitel VII und betrachten die so gewonnenen Momentenflächen der statisch unbestimmten Größen in den Zuständen $= 1$ als Belastungsflächen des einfachen Balkens A D, teilen sie in eine Anzahl Flächenstreifen ein und zeichnen nach dem Mohrschen Verfahren vom doppelten Seilpolygon die zugehörigen Biegelinien, wie dieselben unterhalb der Momentenflächen angegeben sind. Für Fig. a ist dabei zu bemerken, daß die beiden Dreiecksflächen nicht in Frage kommen können. Wir erhalten somit die Verschiebungen des Angriffspunktes der beliebigen Last P_m und der Angriffspunkte der beiden Mittelstützen B und C

in Fig. a δ_{ma} , δ_{ba} u. δ_{ca} infolge $X_a = -1$

in Fig. b δ_{mb} , δ_{bb} u. δ_{cb} infolge $X_b = -1$

in Fig. c δ_{mc} , δ_{bc} u. δ_{cc} infolge $X_c = -1$.

Die Arbeit, welche nun entsteht, wenn die Belastung des Systems bestimmte Wege durchläuft, muß gleich sein der Arbeit sämtlicher entgegenwirkenden Größen (also der der Reaktionen). Man gelangt hierbei zu einer besonders übersichtlichen Ermittlung der statisch nicht bestimmbareren Größen auf folgende Weise¹⁾:

Man rechne die unbestimmten Größen X zunächst zu den auf den statisch bestimmten Balken wirkenden äußeren Lasten. Die Angriffspunkte dieser Lasten X durchlaufen die Wege δ_a , δ_b , δ_c . Wir nehmen diese Wege wieder auf die linke Seite und schreiben analog wie früher:

$$\delta_a = \Sigma P_m \cdot \delta_{am} - X_a \cdot \delta_{aa} - X_b \cdot \delta_{ab} - X_c \cdot \delta_{ac} - \dots + \delta_{at} + \delta_{aw}$$

$$\delta_b = \Sigma P_m \cdot \delta_{bm} - X_a \cdot \delta_{ba} - X_b \cdot \delta_{bb} - X_c \cdot \delta_{bc} - \dots + \delta_{bt} + \delta_{bw}$$

$$\delta_c = \Sigma P_m \cdot \delta_{cm} - X_a \cdot \delta_{ca} - X_b \cdot \delta_{cb} - X_c \cdot \delta_{cc} - \dots + \delta_{ct} + \delta_{cw}.$$

¹⁾ Vgl. Müller-Breslau, Neuere Methoden, 4. Aufl., S. 209.

Diese Gleichungen sind vollständig gleichartig mit den früheren Arbeitsgleichungen (in Abschnitt I), nur daß anstatt der inneren Kräfte hier die ursächlichen äußeren Verschiebungen eingesetzt sind (Abschnitt I, Kap. VI).

Es bezeichnet also darin, wenn wir die Erklärung nur für δ_a geben,

- δ_{am} den Einfluß der Ursache $P_m = 1$ auf den Weg δ_a ,
- δ_{aa} den Einfluß der Ursache $X_a = -1$ auf den Weg δ_a ,
- δ_{ab} den Einfluß der Ursache $X_b = -1$ auf den Weg δ_a ,
- δ_{ac} den Einfluß der Ursache $X_c = -1$ auf den Weg δ_a ,
- δ_{at} den Einfluß von Temperaturänderungen auf den Weg δ_a und
- δ_{aw} den Einfluß von Verschiebungen der Stützpunkte des statisch bestimmten Hauptsystems auf den Weg δ_a (in der Regel = 0).

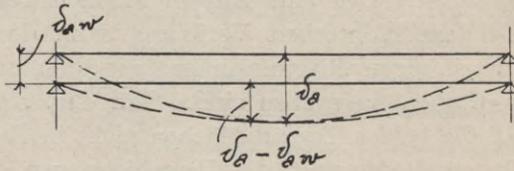


Abb. 271.

Hierzu sei noch bemerkt:

Nimmt man in den Gleichungen δ_{aw} nach links, so zieht es sich von δ_a ab: ein natürlicher Vorgang; denn wenn die Auflager an und für sich nachgeben, so ist eben der Weg, den $X_a = -1$ durchläuft, nicht δ_a , sondern $\delta_a - \delta_{aw}$ (Abb. 271). Im ganzen bleibt immer zu berücksichtigen, daß nach dem Maxwell'schen Satze die Buchstaben eines Doppelzeigers miteinander vertauschbar also sind,

$$\delta_{am} = \delta_{ma}, \delta_{bm} = \delta_{mb} \text{ usw.},$$

und es sind also daher die Beiwerte der Belastungen P_m durch die für $X_a = -1$ und $X_b = -1$ usw. gegebenen Verschiebungspläne oder Biegelungslinien völlig bestimmt.

Im Handbuch für Eisenbetonbau sind diese Gleichungen in der folgenden Anordnung wiedergegeben:

$$E \cdot J \cdot (\delta_{at} + \delta_{aw} - \delta_a) + \sum P_m \cdot \delta_{am} = X_a \cdot \delta_{aa} + X_b \cdot \delta_{ab} + X_c \cdot \delta_{ac}$$

ebenso

$$E \cdot J \cdot (\delta_{bt} + \delta_{bw} - \delta_b) + \sum P_m \cdot \delta_{bm} = X_a \cdot \delta_{ba} + X_b \cdot \delta_{bb} + X_c \cdot \delta_{bc}$$

und

$$E \cdot J \cdot (\delta_{ct} + \delta_{cw} - \delta_c) + \sum P_m \cdot \delta_{cm} = X_a \cdot \delta_{ca} + X_b \cdot \delta_{cb} + X_c \cdot \delta_{cc}$$

Vergleichen wir die gewonnenen Bestimmungsgleichungen für die 3 statisch unbestimmten Größen mit der in der Einleitung erwähnten kurzen Gleichung

$$X \cdot \delta_{aa} = \delta_{am} - \Delta a,$$

so weichen sie im Prinzip in keiner Weise davon ab.

Anstatt des einen Gliedes $X \cdot \delta_{aa}$ haben wir hier 3 Glieder, da auf der rechten Seite noch X_b und X_c hinzukommen; anstatt δ_{am} , welches eigentlich lautet $1 \cdot \delta_{am}$, da es sich um eine Einflußlinie handelte, haben wir $\Sigma P_m \cdot \delta_{am}$, weil die Gleichung eine wirkliche Beziehung zwischen den einzelnen durch die wirklichen Kräfte hervorgerufenen äußeren Deformationen darstellt.

Ebenso stehen die noch vorhandenen mit $E \cdot J$ multiplizierten Glieder in Beziehung zu Δa unserer einfachen Gleichung, drücken also eine restliche Verschiebung der 3 Auflager aus, weil wir diese im allgemeinen hier nicht als starr voraussetzen wollen.

Im einzelnen bedeuten:

$\delta_{at} = \varepsilon \cdot t \cdot l =$ Temperaturausdehnung über die ganze Spannweite;

$\delta_{bt} = -\varepsilon \cdot t \cdot (h_2 - h_1) =$ Temperaturausdehnung der Differenz der beiden Stützenlängen für die Stütze B;

$\delta_{ct} = -\varepsilon \cdot t \cdot (h_3 - h_1)$ desgleichen für die Stütze C.

$\delta_a = \Delta l =$ Spannweitenverlängerung

$\delta_b = -(\Delta h_2 - \Delta h_1)$

$\delta_c = -(\Delta h_3 - \Delta h_1).$

Alle diese Einflüsse müssen mit $E \cdot J$ multipliziert auftreten, da alle anderen Ausdrücke δ in diesen Gleichungen die $E \cdot J$ -fachen Werte der Durchbiegungen darstellen sollen. —

Wir nehmen nun zum Schluß die Lager als vollständig starr an und lassen die Temperaturänderung außer acht, somit lauten unsere Gleichungen

$$\Sigma P_m \cdot \delta_{am} = X_a \cdot \delta_{aa} + X_b \cdot \delta_{ab} + X_c \cdot \delta_{ac}$$

$$\Sigma P_m \cdot \delta_{bm} = X_a \cdot \delta_{ba} + X_b \cdot \delta_{bb} + X_c \cdot \delta_{bc}$$

$$\Sigma P_m \cdot \delta_{cm} = X_a \cdot \delta_{ca} + X_b \cdot \delta_{cb} + X_c \cdot \delta_{cc},$$

womit wir in die Behandlung der einzelnen Fälle eintreten können.

δ_{bb} und δ_{cc} können direkt aus den Biegelinien entnommen werden, aber nicht so ohne weiteres δ_{aa} . Dasselbe ergibt sich rechnerisch zu

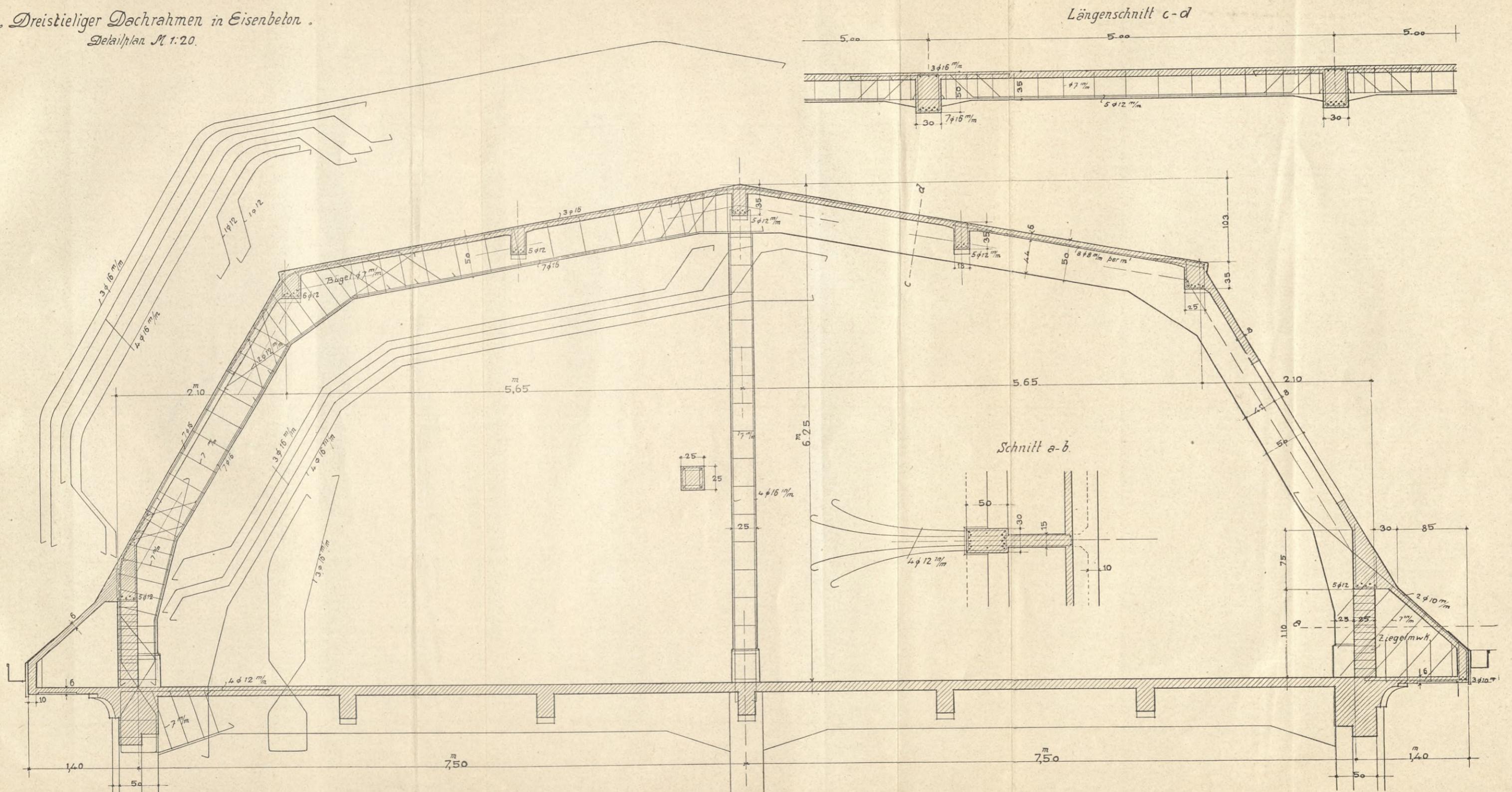
$$\delta_{aa} = \int y_a^2 \cdot ds = 2 \int y_a \cdot ds \cdot \frac{y_a}{2} = 2 F_1 \cdot \eta + 2 F_1' \cdot \eta' \cdot \frac{J_r}{J_s}.$$

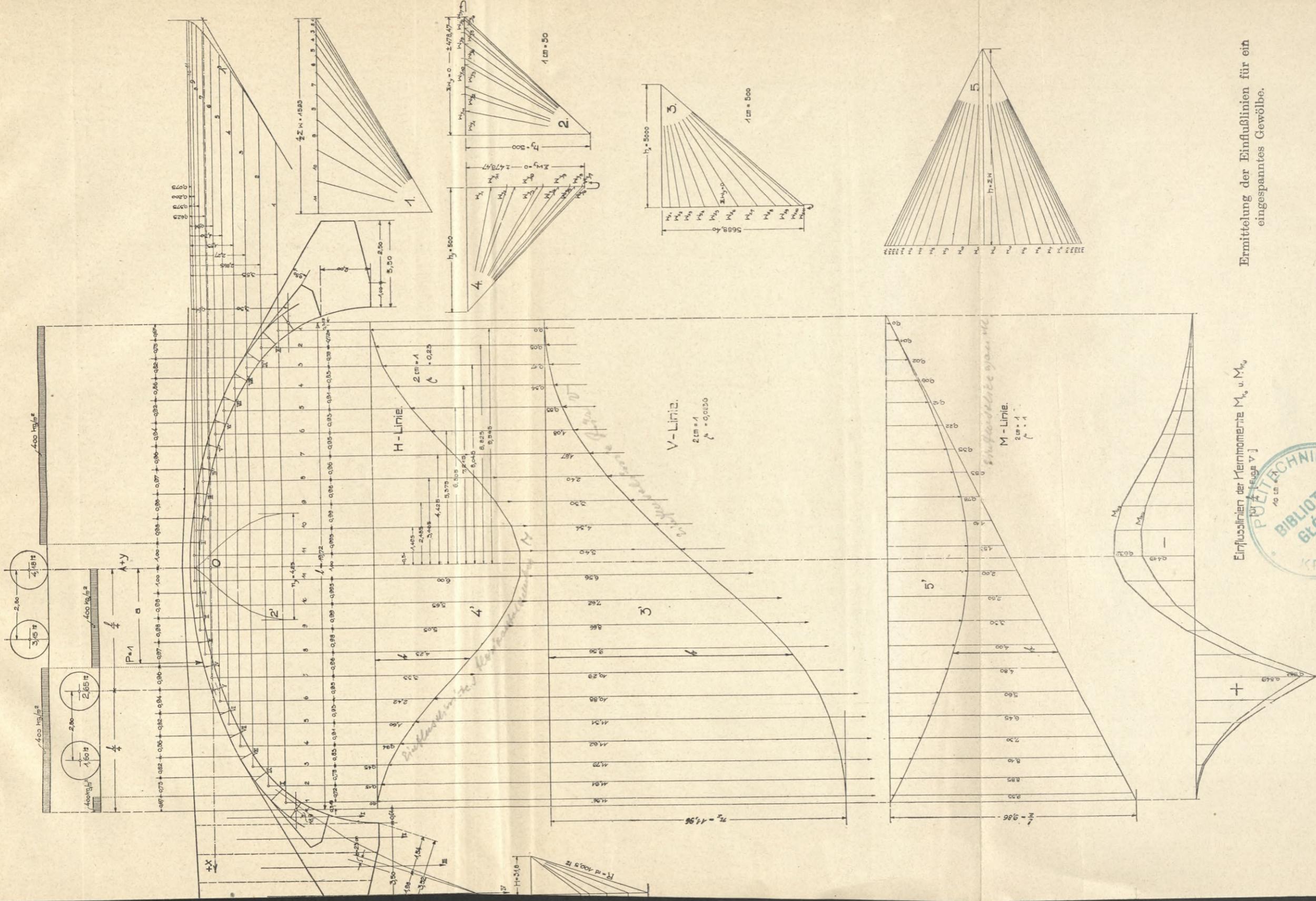
Die Ausdrücke $\Sigma P_m \cdot \delta_m$ lassen sich ebenfalls aus den Ordinaten der Biegelinien berechnen, oder auch aus den Beziehungen

$$\begin{aligned}\Sigma P_m \cdot \delta_{ma} &= \int M_0 \cdot y_a \cdot dx \\ \Sigma P_m \cdot \delta_{mb} &= \int M_0 \cdot y_b \cdot dx \\ \Sigma P_m \cdot \delta_{mc} &= \int M_0 \cdot y_c \cdot dx.\end{aligned}$$

Nach diesen Ausführungen kann auf die für verschiedene Spezialfälle mehrstieliger Rahmen gefundenen einfachen Schlußresultate im Handbuch hingewiesen werden.

Dreistieliger Dachrahmen in Eisenbeton.
Detailplan M. 1:20.

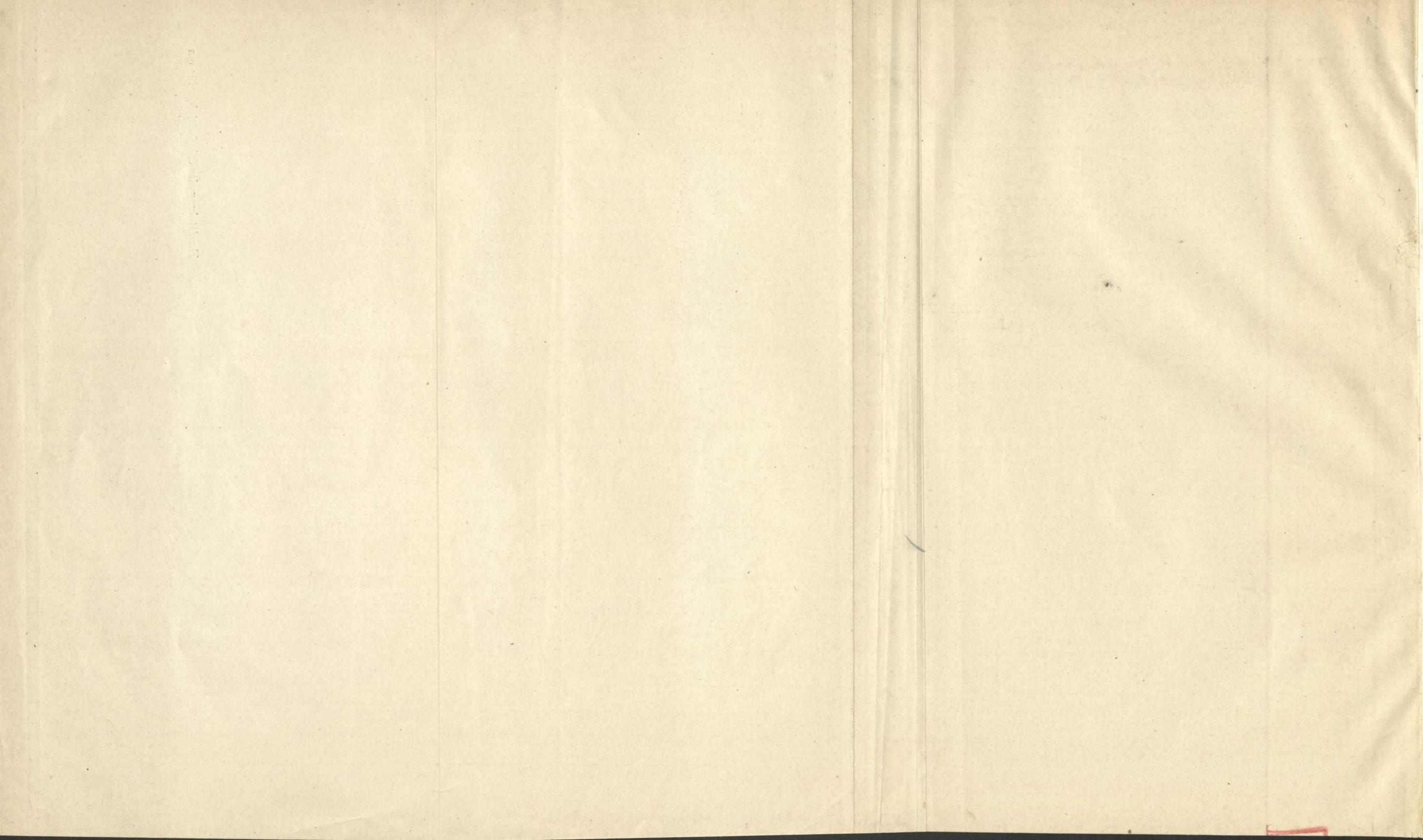




Einflusslinien der Kernmomente M_k u. M_{ky} und Auflagerkräfte V_j



Ermittlung der Einflusslinien für ein eingespanntes Gewölbe.



Verlag von Hermann Metz

In gleichem Format und Ausstattung

Kdn. Zsm. 480/55 20.000

Eisenbetonbau Säule und Balken

Eine Ausführliche Darlegung der grundlegenden Rechnungsarten des praktischen Eisenbetonbaues in Verbindung mit den neuesten Versuchsergebnissen

zur

Förderung des Verständnisses für die Detailbearbeitung

nebst einem

besonderen Bericht über die bisherigen Versuchsergebnisse an längsarmierten und umschnürten Säulen.

Mit 169 Abbildungen und 7 Tafeln im Text
sowie zwei Anhängen.

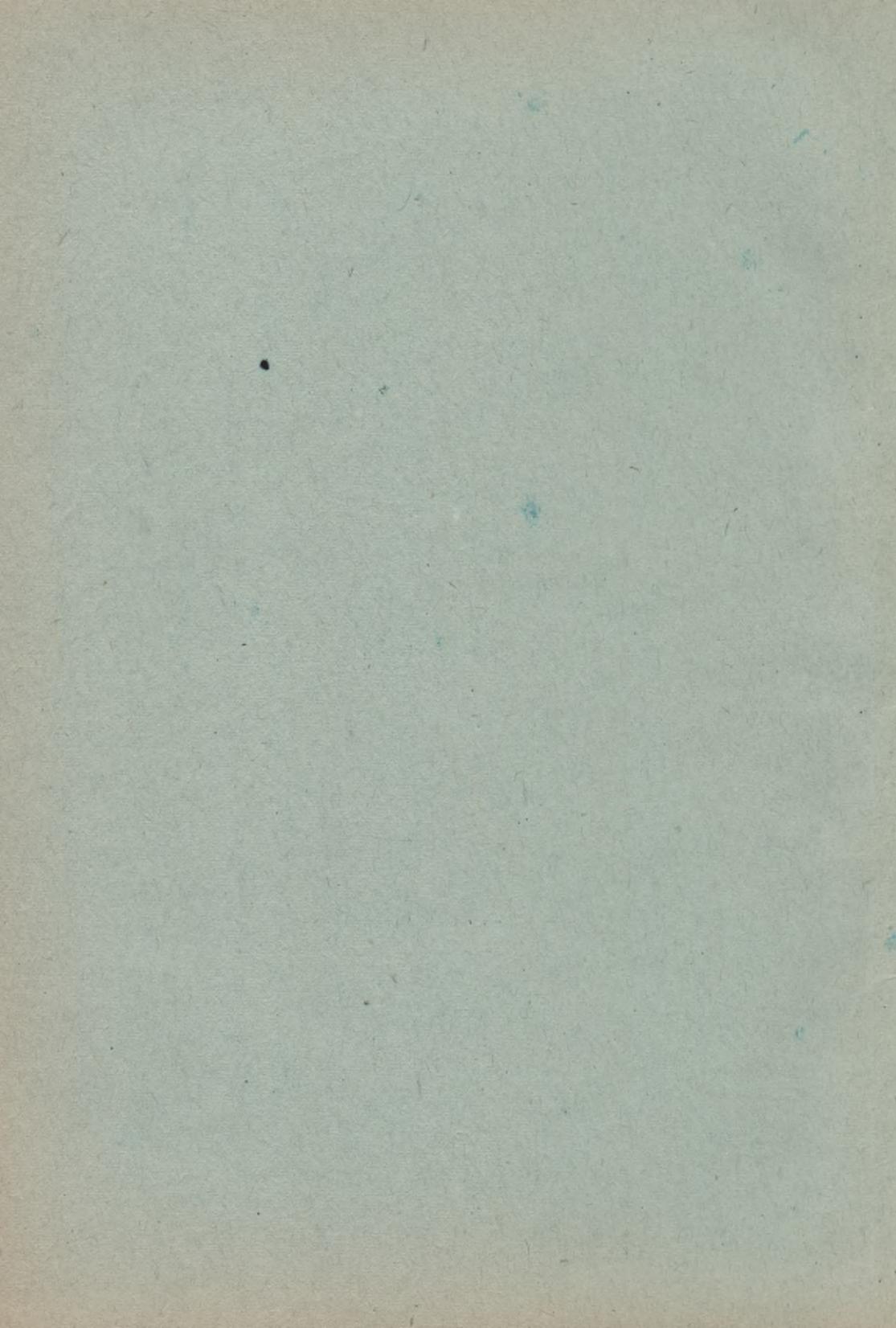
Von

H. Schlüter.

Geheftet Preis 7,— M. Gebunden Preis 8,— M.

Ganz besonders ist Wert gelegt auf das Verständnis der Gesetzmäßigkeit bei der Ableitung der Formeln, wobei jedesmal typische Beispiele hinzugefügt sind, während auf Anhäufung bequem nachahmbarer Zahlenbeispiele absichtlich verzichtet wird. Dagegen sind keine Tabellen gegeben, da sie überall zu finden sind, und weil Anfänger Tabellen überhaupt nicht benutzen sollten.

Besonders ausführlich ist das Gebiet der Schubspannungen und schiefen Hauptspannungen behandelt, da gerade hier oft viel gesündigt wird und unverständene Formeln angewendet werden.





BIBLIOTEKA GŁÓWNA



28609

PK 349/83 - 100 000 egz.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000305598