

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000300329

x
1240

VERÖFFENTLICHUNG
DES KÖNIGL. PREUSSISCHEN GEODÄTISCHEN INSTITUTES
UND
CENTRALBUREAUS DER INTERNATIONALEN ERDMESSUNG

BEITRÄGE

ZUR

THEORIE DES REVERSIONSPENDELS

VON

F. R. HELMERT

MIT EINER TAFEL



POTSDAM

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

1898



2121.

X
1240-



III 16700

ALLE RECHTE, EINSCHLISSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

Akc. Nr. 4054/50

Inhaltsverzeichnis.

I. Der Einfluss der Elasticität der Pendel bei absoluten Schwerebestimmungen.

	Seite
§ 1. Vorbemerkungen	1
§ 2. Das starre Pendel, Grundgleichungen	2
§ 3. Das elastische Pendel, Grundgleichung für die Biegung	3
§ 4. Längsdehnung	5
§ 5. Bewegung des elastischen Pendels	6
§ 6. Das Reversionspendel	8
§ 7. Gerader Stab	9
§ 8. Höhere Glieder der Entwicklung	10
§ 9. Näherungsformeln für das Reversionspendel	12
§ 10. Anwendung auf verschiedene Reversionspendel	14
§ 11. Das neue, stark biegsame Meterpendel des Geodätischen Institutes	15
§ 12. Bestimmung des Elasticitätsmoduls	28
§ 13. Schlußbemerkung	30

II. Vorversuche für die Bestimmung der Länge des mathematischen Sekundenpendels.

§ 1. Der Apparat	32
§ 2. Die Beobachtungen	33
§ 3. Die Schwingungsdauer	41
§ 4. Temperatur und Luftdichte	43
§ 5. Zeitbestimmungen	45
§ 6. Die Schwingungszeiten in Sternzeit	47
§ 7. Schneidenabstand	50
§ 8. Die Maßstäbe	52
§ 9. Ableitung der Endwerte	54

III. Verschiedene Beiträge zur Theorie.

§ 1. Vorbemerkungen	56
§ 2. Der Einfluss der umgebenden Luft	57
§ 3. Parallelismus der Schneiden	58
§ 4. Symmetrie der äußeren Form	60
§ 5. Abrollen der Schneide auf dem Lager	61
§ 6. Verschiebungen der Schneide und des Lagers: Vorbemerkungen	67
§ 7. Mitschwingen des Stativs und Untergrundes	70
§ 8. Das Wippen mit der Federwage	73
§ 9. Das Gleiten der Schneide auf dem Lager	76
§ 10. Einfluss des Schwingungsbogens auf die Schwingungsdauer	80
§ 11. Das Glissement	81
§ 12. Verschiedenartige kleine Bewegungen der Schneide	84
§ 13. Zusammenstellung der Grundformeln	85
§ 14. Reduktion der Schwingungsdauer auf gleiche Luftdichte	88
§ 15. Verkürzung des Maßstabes durch sein Gewicht	89
§ 16. Einfluss der Dehnung des Pendels	90
§ 17. Einfluss eines Höhengradienten der Temperatur	91

Verbesserungen.

S. 57, Z. 4 v. o. ist hinzuzufügen: Vergl. Teil II, S. 51 und 52.

S. 64, (16*). Unter dem Integralzeichen bedeutet $(x_0 + a)$ das arithmetische Mittel der beiden Werte für gleichgroße Elongationen Θ beiderseits der Vertikalen.

I. Der Einfluss der Elasticität der Pendel bei absoluten Schwerebestimmungen.

§ 1. **Vorbemerkungen.** Auf die Notwendigkeit der Berücksichtigung der elastischen Biegsamkeit der Pendelkörper bei der Theorie der Pendelbewegung hat wohl zuerst im Jahre 1884 C. S. PEIRCE hingewiesen¹⁾. Unabhängig hiervon wurde zehn Jahre später diese Notwendigkeit von Dr. KÜHNEN aus einem äußeren Anlasse aufs neue erkannt und darüber der Allgemeinen Konferenz der Internationalen Erdmessung im Oktober 1895 zu Berlin Mitteilung gemacht²⁾. Den Anlaß bot ein im Geodätischen Institut zu Potsdam gefundenes, stark abweichendes Ergebnis für die Länge des mathematischen Sekundenpendels, welches mit einem neuen Reversionspendel von bedeutender Biegsamkeit erhalten worden war³⁾. Wenn man auch fernerhin solche Pendelkörper wieder vermeiden wird, so ist es doch unerlässlich in allen Fällen den etwa noch verbleibenden Einfluss der Biegsamkeit zu schätzen, da derselbe bei den stärksten bekannten Pendelkörpern nicht ganz unmerklich ist und auch bei Neukonstruktionen kaum zum Verschwinden gebracht werden wird.

Eine strenge Theorie dürfte allerdings nicht durchführbar sein — keinesfalls dann, wenn längs der Pendelstange der Querschnitt, wie in der Regel, plötzliche Änderungen aufweist. Ich nehme hier von Haus aus die Voraussetzungen an, welcher sich die Technik bei der Biegungstheorie der Träger von konstantem Querschnitt bedient, wonach eine neutrale Faserschicht existiert, zu welcher der Querschnitt des Pendelkörpers bei der Biegung überall normal bleibt, ohne seine Form zu ändern. Die neutrale Faserschicht steht bei dem üblichen, zur Schwingungsebene symmetrischen Bau der Pendelkörper auf der Schwingungsebene normal und geht durch die Pendelschneide; im Ruhezustande können wir sie als vertikale Ebene annehmen⁴⁾.

1) C. S. PEIRCE. *Note on the effect of the flexure of a pendulum upon its period of oscillation.* (App. No. 16, Coast and Geodetic Survey, Report for 1884, Washington 1885.) Diese Untersuchung wurde 1896 von LORENZONI in Padua wieder aufgenommen in der Schrift: *L'effetto della flessione del pendolo sul tempo della sua oscillazione.* Indessen sind beide zu unrichtigen Ergebnissen gelangt; vergl. meinen Aufsatz: *Der Einfluss der Elasticität der Pendel bei absoluten Schwerebestimmungen*, A. N. 3430, Bd. 143, Sp. 349—354. Übrigens hat BESSEL in den „*Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels*“ (Abh. der Berliner Akademie d. Wiss. 1826, Math. Cl.) für die Bestimmung mittelst des Fadenpendels den Einfluss der Federkraft des Fadens auf seine Figur und die Schwingungszeit des Pendels in der II. Beilage theoretisch erörtert. Diese Abhandlung ist auch abgedruckt in den „*Abhandlungen von Fr. W. Bessel, herausgegeben von R. Engelmann*“ III. Leipzig, Engelmann, 1876. Ferner ist sie als Heft 7 von „*Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften*“ gesondert erschienen.

2) *Verhandlungen der vom 25. September bis 12. Oktober 1895 in Berlin abgehaltenen Elften Allgemeinen Konferenz der Internationalen Erdmessung.* 1896. Verlag von Georg Reimer in Berlin; S. 60.

3) Vergl. die Zeichnung auf der lithogr. Tafel.

4) Über das Verhältnis der strengen Theorie der Balkenbiegung zur oben erwähnten, in der Technik üblichen, vergl. A. E. H. LOVE, *A Treatise on the mathematical theory of elasticity*, Vol. I, Cambridge, 1892, Vorrede

Die Theorie der Pendelbewegung denke ich mir mittelst des *Prinzips von d'Alembert* auf ein statisches Problem zurückgeführt. Die Gleichgewichtsbedingungen für die verlorenen Kräfte sind anzusetzen sowohl für den ganzen Pendelkörper wie für einzelne Teile. Im ersteren Falle erhält man die Pendelbewegung, im zweiten die Formveränderungen. Da nun aber beide sich gegenseitig bedingen, so wird eine strenge Lösung verwickelt. (Vergl. weiterhin § 8, betr. ein dünnes stangenförmiges Pendel.) Indessen reicht für nicht sehr dünne Pendelkörper folgende Näherung aus.

Denkt man sich zunächst die Formveränderungen nur mit den verlorenen Kräften abgeleitet, welche der Bewegung des als starr angenommenen Pendelkörpers entsprechen, so werden die Verschiebungen der Teilchen gegen den starren Zustand einem gewissen Elasticitäts-Koeffizienten ε proportional sein. Hierdurch ändern sich die verlorenen Kräfte um Größen, die ε proportional sind und erneute Verschiebungen der Teilchen bedingen, die proportional ε^2 sein werden, aber für gewöhnlich vernachlässigt werden können. In der Regel muß man daher eine gute Annäherung erhalten, wenn man der Theorie der Pendelbewegung diejenige Gestalt des Pendels zu Grunde legt, die den am starren Pendel sich zeigenden verlorenen Kräften entspricht.

Zur Vereinfachung wird endlich noch vom Luftwiderstand abgesehen und Drehung um eine horizontale, feste mathematische Linie angenommen.

§ 2. **Das starre Pendel, Grundgleichungen.** Für das starre Pendel gilt bekanntlich, abgesehen von Störungen, die Differentialgleichung der Bewegung

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \Theta \quad \text{für } l = \frac{J}{Mh}, \quad (1)$$

wobei J das Trägheitsmoment des Pendels für die Drehungsaxe, M die Masse und h den Abstand des Schwerpunkts von der Drehungsaxe bezeichnet, ferner α die größte Elongation und Θ die Elongation zur Zeit t ist, und endlich g die Beschleunigung der Schwerkraft am Orte des Pendels bedeutet. l ist die Länge eines gleichschwingenden mathematischen Pendels.

Es sei für späteren Gebrauch bemerkt, daß aus (1) bekanntlich folgt

$$\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l} (\cos \Theta - \cos \alpha). \quad (2)$$

Behufs Ableitung der verlorenen Kräfte für die Biegungsbestimmung werde zunächst im Pendelkörper ein rechtwinkliges Koordinatensystem angenommen, dessen Anfangspunkt im Durchschnittspunkt O der Drehungsaxe mit der Schwingungsebene des Schwerpunktes G liegt. OG sei die positive x -Axe mit der Elongation Θ und OY rechtwinklig dazu, abnehmendem Θ entsprechend, die y -Axe. Nächst diesem, mit dem Pendelkörper beweglichen Axensystem werde ein festes System (x', y') angenommen, welches aus (x, y) durch Drehung um φ im Sinne wachsender Elongation hervorgeht, so daß die Elongation der x' -Axe $\Theta + \varphi$ ist. Die Drehungsaxe wird gemeinsame x -Axe beider Systeme.

Dann ist

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \quad y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

S. VII, Einleitung S. 32/33, ferner S. 179, 188 u. s. w. Hiernach wird man annehmen dürfen, daß die benutzte Näherung die Deformationen bei den üblichen Reversionspendeln auf einige Prozent richtig giebt, während allerdings die bei dem neuen Reversionspendel bestehenden Diskontinuitäten der Querschnittsform etwas größere Ungenauigkeiten wahrscheinlich machen. Doch ist, wie sich weiterhin zeigen wird, die Übereinstimmung zwischen dem theoretischen Ergebnis des Biegungseinflusses auf die Schwingungszeit und der Beobachtung immerhin eine befriedigende. Nach RIBIÈRE, *Sur la flexion des pièces épaisses* (C. R. t. CXXVI, 1898 1^{er} sem., p. 402) beginnt bei einem unendlich schmalen Balken der Fehler der gewöhnlichen Theorie recht merklich zu werden, wenn die Höhe größer als ein Zehntel der Länge ist.

Zweimalige Differentiation giebt, wenn wegen der festen Lage der x' -Axe $d\varphi/dt = -d\Theta/dt$ gesetzt und zum Schluß das feste System (x', y') mit der augenblicklichen Lage von (x, y) zusammenfallend, also φ gleich null angenommen wird:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 x'}{dt^2}\right)_0 &= +y \frac{d^2 \Theta}{dt^2} - x \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2, \\ \left(\frac{d^2 y'}{dt^2}\right)_0 &= -x \frac{d^2 \Theta}{dt^2} - y \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2. \end{aligned}$$

Diese Beschleunigungen geben mit dm multipliziert die wirksamen Kräfte des Massenteilchens parallel zu der x - und y -Axe; die bewegenden Kräfte sind aber bezw. $g \cos \Theta dm$ und $g \sin \Theta dm$. Mithin sind die bei der Bewegung von dm mit den Koordinaten x und y verlorenen Kräfte

$$\text{parallel zur } x\text{-Axe: } g \cos \Theta dm - \left(y \frac{d^2 \Theta}{dt^2} - x \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2\right) dm,$$

$$\text{parallel zur } y\text{-Axe: } g \sin \Theta dm + \left(x \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + y \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2\right) dm,$$

oder mittelst (1) und (2) auch

$$\text{parallel zur } x\text{-Axe: } \{l \cos \Theta + 2x (\cos \Theta - \cos \alpha) + y \sin \Theta\} \frac{g dm}{l}, \quad (3)$$

$$\text{parallel zur } y\text{-Axe: } \{(l - x) \sin \Theta + 2y (\cos \Theta - \cos \alpha)\} \frac{g dm}{l}. \quad (4)$$

§ 3. **Das elastische Pendel, Grundgleichung für die Biegung.** Der Pendelkörper sei, wie schon bemerkt, entsprechend den üblichen Konstruktionen zur xy -Ebene symmetrisch, und die x -Axe gehe bei ungebogenem Zustande des Pendelkörpers durch die Schwerpunkte aller Querschnitte. Da nun die verlorenen Kräfte nur parallel zur xy -Ebene wirken und sich symmetrisch zu derselben verteilen, so erfolgt die Biegung ohne Störung der Symmetrie zur xy -Ebene, und die neutrale Faserschicht wird eine zur xy -Ebene normale Cylinderfläche, deren Durchschnittslinie mit jener die Verbindungslinie der Schwerpunkte der Querschnitte ist. Die Ordinaten dieser Linie, der gebogenen Längsaxe des Pendelkörpers, mögen wie die y von der ungebogenen Axe OG aus gezählt und mit η bezeichnet werden.

Dann ist sehr nahe

$$\frac{d^2 \eta}{da^2} = \frac{\mathfrak{M}}{E \mathfrak{I}}, \quad (5)$$

worin \mathfrak{M} das Biegemoment der verlorenen Kräfte für den Punkt A der Längsaxe mit der Abscisse a , \mathfrak{I} das Trägheitsmoment des Querschnitts daselbst für eine Axe durch A parallel zur Drehungsaxe und E den Elasticitätsmodul des Pendelkörpers für Beanspruchung in der Längsrichtung bezeichnet.

Zur Berechnung von \mathfrak{M} sind für Punkte A unterhalb O , also mit positiver Abscisse, diejenigen verlorenen Kräfte heranzuziehen, welche auf Teilchen dm wirken mit $x \geq a$. Die Drehungsmomente sind positiv zu rechnen, wenn die Kraft eine Drehung um A von der positiven Seite der x -Axe nach der positiven Seite der y -Axe giebt.

Man kann auch die verlorenen Kräfte in dem anderen, oberen Teile des Pendelkörpers zur Berechnung von \mathfrak{M} benutzen, muß aber dann zunächst die feste Drehungsaxe durch zwei Widerstände parallel zu den Axen der x und y ersetzen, welche der Gesamtsumme der verlorenen Kräfte parallel zu diesen Axen das Gleichgewicht halten. Die negative Summe der Drehungsmomente ist wieder \mathfrak{M} .

Für Punkte A oberhalb O berechnet man \mathfrak{M} am bequemsten als negative Summe der Drehungsmomente für die verlorenen Kräfte an den Teilchen dm mit $x < a$.

Man hat nun als Hebelarm der verlorenen Kräfte (3) und für positiven Drehungssinn einzuführen $-y$, für (4) entsprechend $x - a$. Dann ist aus $(x - a) \cdot (4) - y \cdot (3)$ mit Rücksicht darauf, daß die x -Axe die Schwerpunkte der Querschnitte enthält und daher bereits für je zwei unendlich nahe Querschnitte $\int y dm$ oder $\mu \int y dx dy dz$, mit μ als Dichtigkeit oder spezifischem Gewicht, gleich null ist:

$$\mathfrak{M} = \frac{g}{l} \sin \Theta \left\{ \int (l - x)(x - a) dm - \int y^2 dm \right\}, \quad (6)$$

wobei für positive a die Integration von $x = a$ bis ans untere Ende des Pendelkörpers, für negative a von $x = a$ bis ans obere Ende zu bewirken ist.

Für $a = 0$ erhält man zwei Ausdrücke für \mathfrak{M} , deren Gleichsetzung zu der Bedingung

$$\int (l - x)x dm - \int y^2 dm = 0 \quad (7)$$

führt, worin die Integration vom oberen bis zum unteren Ende des Pendelkörpers zu erstrecken ist. Diese Gleichung ist aber nichts anderes als der Ausdruck dafür, daß die Summe der Drehungsmomente aller verlorenen Kräfte für die Drehungsaxe gleich null sein muß, wie es d'Alemberts Prinzip verlangt. In der That giebt (7) leicht $J = Mhl$, vergl. (1).

Indem wir (6) in (5) einführen, setzen wir noch

$$\int y^2 dm = \int \int \int \mu y^2 dx dy dz = \int \mu \mathfrak{T}' dx,$$

worin \mathfrak{T}' das Trägheitsmoment des Querschnitts mit der Abscisse x in demselben Sinne bezeichnet, wie früher \mathfrak{T} verstanden wurde. Dennoch macht sich eine Unterscheidung beider notwendig, weil bei \mathfrak{T}' alle Angriffspunkte verlorener Kräfte in Betracht kommen, bei \mathfrak{T} aber nur diejenigen Teile des Querschnitts, welche der Biegung Widerstand leisten. Es ist also $\mathfrak{T} \leq \mathfrak{T}'$, und zwar tritt der Fall $\mathfrak{T} < \mathfrak{T}'$ bei Reversionspendeln in der Gegend der Schneiden ein. Gleichung (5) giebt nun

$$\frac{d^2 \eta_0}{da^2} = \frac{g}{E \mathfrak{T}} \left\{ \int (x - a) dm - \frac{1}{l} \int x(x - a) dm - \frac{1}{l} \int \mu \mathfrak{T}' dx \right\} \quad (8)$$

für

$$\eta = \eta_0 \sin \Theta, \quad (9)$$

wobei die Integration von $x = a$ bis ans untere oder obere Ende des Pendelkörpers zu erstrecken ist, je nachdem a positiv oder negativ ist.

Es ist bemerkenswert, daß nach (8) nicht nur diejenigen Massen auf $d^2 \eta_0 / da^2$ bloß einen geringen Einfluß ausüben, welche in der Nähe der Drehungsaxe liegen, sondern auch diejenigen in der Nähe des Schwingungsmittelpunktes bei $x = l$. Denn hier heben die Anteile des ersten und zweiten Integrales einander auf, während im Falle $a = 0 = x$ beide Anteile einzeln verschwinden. Nun bleibt allerdings noch der Einfluß der betreffenden Massen auf \mathfrak{T} .

Nachdem man $d^2 \eta_0 / da^2$ hergeleitet hat, giebt eine erste Integration nach a von null bis x zunächst $d\eta_0 / dx$ und eine nochmalige η_0 . Setzt man

$$\beta_0 = B_0 + \int_0^x \frac{d^2 \eta_0}{da^2} da, \quad (10)$$

so ist $B_0 \sin \Theta$ mit der für (5) benutzten Vernachlässigung gleich dem Winkel, den in O die gebogene Längsaxe mit der Abscissenaxe einschließt.

Dann ist weiter mit Rücksicht darauf, daß in O η gleich null wird:

$$\eta_0 = \int_0^x \beta_0 dx. \quad (11)$$

Für die Integrationskonstante B_0 besteht nur die Bedingung, daß sie von der Größenordnung der β_0 sein muß; alsdann wird der Winkel $B_0 \sin \Theta$, welchen in O die gebogene Längsaxe mit der Abscissenaxe einschließt, hinreichend klein sein, um $d^2\eta/dx^2$ für den reciproken Krümmungsradius ρ der gebogenen Längsaxe nehmen zu können, wie es bei Aufstellung der Formel (5) geschieht. Im übrigen ist B_0 willkürlich. Am einfachsten ist es:

$$B_0 = 0 \quad (10^*)$$

zu setzen, d. h. die x -Axe tangential an die gebogene Längsaxe in O , dem Drehpunkt, zu legen.

Bei den Integrationen für β_0 und η_0 wird man den Elasticitätsmodul wohl immer für alle Querschnitte konstant annehmen. Er wird am besten aus einem statischen Biegungsversuche bestimmt (vergl. hierzu § 12), da die Angaben für E bei dem üblichen Material für Pendelkörper, Messing, stark variieren; sie gehen für mm und kg von 8500 bis 10800. Die Annahme 10000 dürfte bei starken Pendelkörpern immerhin ausreichen. Um diese Zahl auf das hier benutzte Maßsystem zu beziehen, ist zu bedenken, daß die bewegende Kraft am Massenteilchen dm gleich gdm oder $g \rho dx dy dz$ gesetzt wurde. Andererseits ist $1/10\,000$ die relative Verlängerung eines Stabes von 1 mm^2 Querschnitt für den Zug von 1 kg. Dieser Zug entspricht im hier benutzten Maßsystem $1\,000\,000\text{ g}$; für die Einheit der Kraft ist daher die relative Verlängerung der entsprechende Teil von $1/10\,000$, sodafs man zu setzen hat für Millimetermaß und vorbehältlich genauerer Bestimmung:

$$\frac{E}{g} = 10\,000 \cdot 1\,000\,000 = 10^{10}. \quad (12)$$

Nach (9) sind die Biegungsdeformationen proportional dem Sinus der Elongation. Bei der Entwicklung ist allerdings keine Rücksicht auf die Art und Weise genommen, wie das Pendel in Schwingung versetzt wird. Bringt man aber das Pendel etwa zu Anfange in die Elongation α , so tritt zunächst eine statische Biegung ein. Wird nun das Pendel der Schwingung überlassen, so treten an Stelle der statischen Kräfte die verlorenen Kräfte der Bewegung. Diesem sprungweisen Wechsel der Beanspruchung wird die Deformation nicht in gleicher Weise folgen; aber infolge der inneren Reibung wird der Anfangszustand bald überwunden werden.

§ 4. **Längsdehnung.** Zu der bisher angenommenen Drehung der Querschnitte, um Gerade durch ihre Schwerpunkte parallel zur Drehungsaxe O , tritt hauptsächlich noch eine Beanspruchung auf Parallelverschiebung, infolge der parallel zur x -Axe wirkenden verlorenen Kräfte (3), deren Summe für den einzelnen Querschnitt durch den Ausdruck gegeben ist:

$$\pm g \int \mu \left\{ \cos \Theta + \frac{2x}{l} (\cos \Theta - \cos \alpha) \right\} Q dx, \quad (13)$$

worin Q die Fläche des Querschnitts für die Abscisse x bezeichnet und die Integration von dem betreffenden Querschnitt ab entweder bis ans untere Ende des Pendels oder bis ans obere zu erstrecken ist. Wird dabei der feste Punkt O überschritten, so ist der Widerstand der Drehungsaxe mit in

Rechnung zu ziehen. Das positive Vorzeichen des Ausdruckes (13) entspricht der Resultante derjenigen Kräfte, deren Angriffspunkte unterhalb des Querschnitts liegen, das negative den Kräften mit oberhalb gelegenen Angriffspunkten.

Die Parallelverschiebung entsteht durch eine Längsdehnung, welche für das Stück des Pendelkörpers zwischen den Abscissen a und $a + da$ beträgt $R da / QE$, worin R der mit oberem Vorzeichen genommene Ausdruck (13) für die Integration von a bis ans untere Ende ist.

Hängt das Pendel ruhend in der vertikalen Lage, so ist anstatt (13) für R zu setzen $g \int \mu Q dx$. Sieht man von dieser Beanspruchung ab, so geht der Rest von R über in

$$2g \int \mu \left\{ \frac{2x}{l} \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right) - \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right\} Q dx. \quad (14)$$

Vergleicht man dies mit dem Ausdrucke von R für die Ruhelage, so zeigt sich, daß der durch (14) gegebene Teil der Längsdehnung von demjenigen in der Ruhelage nur ein Bruchteil von der Ordnung $\sin^2 \alpha$ sein wird. Solange nun die gesamte Längsdehnung in der Ruhelage, wie gewöhnlich, etwa 1 Mikron nicht übersteigt, kann man daher von dem Einfluß des Ausdruckes (14) absehen.

Die dem Ausdrucke von R für die Ruhelage entsprechende Längsdehnung kommt bei Reversionpendeln insofern in Betracht, als dadurch für schweres Gewicht unten und für schweres Gewicht oben eine kleine Verschiedenheit bedingt wird, die aber an dieser Stelle nicht weiter untersucht werden soll. (Vergl. hierzu Teil III, § 16.)

§ 5. Bewegung des elastischen Pendels. Um nun die Differentialgleichung der Bewegung des elastischen Pendels aufstellen zu können, ist es notwendig, die Ausdrücke für die verlorenen Kräfte genauer als bisher abzuleiten. Ein Massenteilchen, welches vor der Biegung die Koordinaten x, y und z hat, habe nachher die Koordinaten $x + u, y + v$ und z . Der Fußpunkt der Ordinate y geht mit der neutralen Faserschicht um η seitwärts, und da hier $d\eta/dx = \beta$ ist, der Querschnitt aber normal zur gebogenen Längsaxe bleibt, so ergibt sich, wenn entsprechend der Genauigkeit von (5) von dem kleinen Unterschied in der Länge der Abscissen für die gebogene Längsaxe und der Bogenlänge derselben abgesehen wird,

$$x + u = x - y \sin \beta, \quad y + v = \eta + y \cos \beta,$$

oder mit derselben Genauigkeit:

$$x + u = x - y\beta, \quad y + v = y + \eta. \quad (15)$$

Die Drehung der Querschnitte bewirkt, daß sie etwas vom Parallelismus abweichen, und daß das Volumen auf der einen Seite der neutralen Faserschicht zwischen zwei unendlich nahen Querschnitten zunimmt, auf der anderen Seite aber abnimmt. Indem man aber nach wie vor für dm die Bedeutung von $\mu dx dy dz$ beibehält, wird dem Umstand Rechnung getragen, daß die deformierten Volumenelemente ihre Masse nicht ändern.

Es werde nun wieder in der Schwingungsebene ein festes Axensystem angenommen: eine x' -Axe in der Elongation $\Theta + \varphi$ und eine y' -Axe rechtwinklig dazu im Sinne von abnehmendem Θ . Dann ist

$$\begin{aligned} x' &= (x - y\beta) \cos \varphi - (y + \eta) \sin \varphi, \\ y' &= (x - y\beta) \sin \varphi + (y + \eta) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (16)$$

Bei der Differentiation nach der Zeit t sind x und y als konstant anzusehen und $\beta = \beta_0 \sin \Theta$, $\eta = \eta_0 \sin \Theta$ zu setzen, worin β_0 und η_0 von t unabhängig sind. Ferner ist wegen der festen Lage der x' -Axe $d\varphi/dt = -d\Theta/dt$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}\frac{dx'}{dt} &= \{ + y' - [\eta_0 \sin \varphi + y\beta_0 \cos \varphi] \cos \Theta \} \frac{d\Theta}{dt}, \\ \frac{dy'}{dt} &= \{ - x' + [\eta_0 \cos \varphi - y\beta_0 \sin \varphi] \cos \Theta \} \frac{d\Theta}{dt}.\end{aligned}$$

Wird nach nochmaliger Differentiation $\varphi = 0$ gesetzt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\right)_0 &= \left\{ \begin{array}{l} (+ y + \eta_0 \sin \Theta - y\beta_0 \cos \Theta) \frac{d^2\Theta}{dt^2} \\ + (- x + 2\eta_0 \cos \Theta + 2y\beta_0 \sin \Theta) \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 \end{array} \right\}, \\ \left(\frac{d^2y'}{dt^2}\right)_0 &= \left\{ \begin{array}{l} (- x + \eta_0 \cos \Theta + y\beta_0 \sin \Theta) \frac{d^2\Theta}{dt^2} \\ + (- y - 2\eta_0 \sin \Theta + 2y\beta_0 \cos \Theta) \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 \end{array} \right\}.\end{aligned}\quad (17)$$

Für das Massenteilchen $dm = \mu dx dy dz$ sind nun die verlorenen Kräfte

$$\begin{array}{l} \text{parallel zur } x\text{-Axe: } \left\{ g \cos \Theta - \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\right)_0 \right\} dm \\ \text{parallel zur } y\text{-Axe: } \left\{ g \sin \Theta - \left(\frac{d^2y'}{dt^2}\right)_0 \right\} dm \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{mit den Hebelarmen} \\ \text{für gleichen Drehungssinn:} \\ - y - \eta_0 \sin \Theta \\ + x - y\beta_0 \sin \Theta. \end{array} \right. \quad (18)$$

Bildet man hiermit die Drehungsmomente, deren Summe für den ganzen Pendelkörper gleich null werden muß, so folgt mit Vernachlässigung derjenigen Glieder, welche in Bezug auf η_0 und β_0 von höherem als dem ersten Grade sind:

$$Mhl \frac{d^2\Theta}{dt^2} = -g \sin \Theta \left(Mh - \cos \Theta \int \eta_0 dm \right) + \left(\int x \eta_0 dm + \int y^2 \beta_0 dm \right) \left(\cos \Theta \frac{d^2\Theta}{dt^2} - \sin \Theta \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 \right). \quad (19)$$

Hierin sind η_0 und β_0 als Funktionen von x einzuführen und die Integrationen über den ganzen Pendelkörper zu erstrecken. Dabei ist gesetzt $\int (x^2 + y^2) dm = J = Mhl$ und $\int x dm = Mh$, vergl. (1); ferner ist beachtet, daß alle Integrale verschwinden, welche y in der ersten Potenz enthalten, wie schon früher bemerkt wurde (S. 4 o.).

In den kleinen Gliedern kann man von den Relationen (1) und (2) für den starren Pendelkörper Gebrauch machen. Dabei zeigt sich, daß der Einfluß von $(d\Theta/dt)^2$ sehr viel kleiner ist, als derjenige von $d^2\Theta/dt^2$, weil

$$\cos \Theta \frac{d^2\Theta}{dt^2} - \sin \Theta \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{l} \sin \Theta \{ \cos \Theta + 2(\cos \Theta - \cos \alpha) \}$$

wird und hierin $2(\cos \Theta - \cos \alpha)$ gegen $\cos \Theta$ ganz zurücktritt. Vernachlässigt man daher $(d\Theta/dt)^2$ und setzt entsprechend $\cos \Theta = 1$, so folgt

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \Theta \left\{ 1 - \frac{i_1 - i_2 - i_3}{Mh} \right\}, \quad (20)$$

worin gesetzt ist:

$$i_1 = \int \eta_0 dm, \quad i_2 = \frac{1}{l} \int x \eta_0 dm, \quad i_3 = \frac{1}{l} \int \mu \mathfrak{X}' \beta_0 dx. \quad (21)$$

Die Integration ist hierbei über den ganzen Pendelkörper zu erstrecken.

Die Gl. (20) gilt für jede Lage der x -Axe, wenn nur B_0 hinreichend klein ist. Versteht man aber unter η_0 und β_0 nur diejenigen Werte von η_0 und β_0 , welche $B_0 = 0$ entsprechen, so tritt rechter Hand

$$- \frac{g}{l} \sin \Theta \cdot 2B_0 (\cos \Theta - \cos \alpha)$$

hinzu, und dieses entspricht, wie es sein muß, völlig dem Übergang von Θ_0 zu $\Theta_0 + B_0 \sin \Theta_0$, dem Werte von Θ für ein beliebiges B_0 , wie die Substitution von $\Theta - B_0 \sin \Theta$ für Θ in (20) zeigt. Außerdem ist das Glied von der Ordnung der in (20) bereits vernachlässigten Glieder.

Zufolge der Differentialgleichungen (1) und (20) schwingt das elastische Pendel wie ein mathematisches Pendel, dessen Länge gleich

$$l' = l \left\{ 1 + \frac{i_1 - i_2 - i_3}{Mh} \right\} \quad (22)$$

und dessen Schwingungszeit gleich

$$T' = T \left\{ 1 + \frac{i_1 - i_2 - i_3}{2Mh} \right\} \quad (23)$$

ist, wenn $l = J/Mh$ und $T = \pi \sqrt{l/g}$ mathematische Länge und Schwingungszeit für den biegsamen Pendelkörper in starrem Zustande bezeichnen.

Wie bei Gleichung (8) ist auch bei (22) und (23) bemerkenswert, daß die Massen an der Drehungsaxe und am Schwingungsmittelpunkt auf $i_1 - i_2$ keinen Einfluß haben. Diese Massen wirken daher auf l' und T' hauptsächlich nur insoweit, als sie \mathfrak{X} und Mh beeinflussen.

§ 6. **Das Reversionspendel.** Für ein starres Reversionspendel seien T_1 und T_2 die Schwingungszeiten bei schwerem Gewicht unten und oben, h_1 und h_2 die entsprechenden Schwerpunktsabstände von der Drehungsaxe, $\Lambda = h_1 + h_2$ der Schneidenabstand, L die Länge des mathematischen Sekundenpendels; dann ist abgesehen von Störungen:

$$L = \frac{\Lambda}{\tau^2} \quad \text{mit} \quad \tau^2 = \frac{T_1^2 h_1 - T_2^2 h_2}{h_1 - h_2}. \quad (24)$$

Werden nun für ein elastisches Pendel die Schwingungszeiten T_1' und T_2' beobachtet, und sind T_1 und T_2 die Schwingungszeiten für dasselbe Pendel in starrem Zustande, so hat man nach (23) für die erste Lage des Pendels:

$$T_1'^2 - T_1^2 = T_1'^2 \cdot \frac{(i_1 - i_2 - i_3)_1}{Mh_1}$$

und für die zweite Lage:

$$T_2'^2 - T_2^2 = T_2'^2 \cdot \frac{(i_1 - i_2 - i_3)_2}{Mh_2}$$

Führt man diese Ausdrücke in die auf das elastische Pendel angewandten Gleichungen (24) ein:

$$L' = \frac{\Lambda}{\tau'^2} \quad \text{mit} \quad \tau'^2 = \frac{T_1'^2 h_1 - T_2'^2 h_2}{h_1 - h_2}, \quad (24^*)$$

so ergibt sich in hinreichender Annäherung:

$$L' = L \left\{ 1 - \frac{(i_1 - i_2 - i_3)_1 T_1'^2 - (i_1 - i_2 - i_3)_2 T_2'^2}{\tau'^2 (h_1 - h_2) M} \right\}. \quad (25)$$

§ 7. **Gerader Stab** von gleichmäßiger Stärke und der Länge λ , in dem einen Ende so aufgehängt, daß die Längsaxe die Drehungsaxe rechtwinklig schneidet. Der Querschnitt sei symmetrisch zur Schwingungsebene des Schwerpunkts, habe die Fläche Q und das Trägheitsmoment $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}'$ im früher angegebenen Sinne. Hier ist $dm = \mu Q dx$, $h = \frac{1}{2}\lambda$, $M = \mu Q \lambda$ und

$$l = \frac{2}{3}\lambda \left(1 + \frac{3\mathfrak{I}}{Q\lambda^2}\right),$$

indem das Trägheitsmoment des Stabes für die Drehungsaxe gleich wird

$$\mu \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz = \mu \left(\frac{1}{3} Q \lambda^3 + \mathfrak{I} \lambda\right)$$

und das statische Moment gleich $\frac{1}{2} \mu Q \lambda^2$.

Aus (8) folgt mit Vernachlässigung der zweiten Potenzen von $\mathfrak{I}/Q\lambda^2$ in der Klammer:

$$\frac{d^2 \eta_0}{da^2} = -\frac{\mu g Q}{4\lambda E \mathfrak{I}} \left\{ a\lambda^2 - 2a^2\lambda + a^3 + [a\lambda^2 - a^3] \frac{3\mathfrak{I}}{Q\lambda^2} + \dots \right\}.$$

Hiermit ist für die Abscisse x :

$$\begin{aligned} \beta_0 &= -\frac{\mu g Q}{4\lambda E \mathfrak{I}} \left\{ \frac{x^2\lambda^2}{2} - \frac{2x^3\lambda}{3} + \frac{x^4}{4} + \left[\frac{x^2\lambda^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right] \frac{3\mathfrak{I}}{Q\lambda^2} + \dots \right\}, \\ \eta_0 &= -\frac{\mu g Q}{4\lambda E \mathfrak{I}} \left\{ \frac{x^3\lambda^2}{6} - \frac{x^4\lambda}{6} + \frac{x^5}{20} + \left[\frac{x^3\lambda^2}{6} - \frac{x^5}{20} \right] \frac{3\mathfrak{I}}{Q\lambda^2} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Man bemerkt leicht, daß die Längsaxe sich stets konkav von der Nullpunktstangente ab nach außen biegt. Für $x = \lambda$ findet das Maximum von η_0 statt; es ist abgesehen von einem immer sehr kleinen Gliede gleich $-\mu g Q \lambda^4 / 80 E \mathfrak{I}$.

Nach (21) ist nun weiter:

$$\begin{aligned} i_1 &= -\frac{\mu^2 g Q^2}{4 E \mathfrak{I}} \left\{ \frac{\lambda^5}{60} + \frac{\mathfrak{I} \lambda^3}{10 Q} + \dots \right\}, \\ i_2 &= -\frac{\mu^2 g Q^2}{4 E \mathfrak{I}} \left\{ \frac{16 \lambda^6}{1260} + \frac{11 \mathfrak{I} \lambda^4}{140 Q} + \dots \right\}; \quad l = -\frac{\mu^2 g Q^2}{4 E \mathfrak{I}} \left\{ \frac{8 \lambda^5}{420} + \frac{17 \mathfrak{I} \lambda^3}{280 Q} + \dots \right\}, \\ i_3 &= -\frac{\mu^2 g Q^2}{4 E \mathfrak{I}} \left\{ \frac{3 \mathfrak{I} \lambda^3}{40 Q} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Mit $Mh = \frac{1}{2} \mu Q \lambda^2$ folgt nach (22) und (23):

$$\begin{aligned} l &= l \left\{ 1 + \frac{\mu g Q \lambda^3}{840 E \mathfrak{I}} \left(1 + \frac{15 \mathfrak{I}}{Q \lambda^2} + \dots \right) \right\}, \\ T' &= T \left\{ 1 + \frac{\mu g Q \lambda^3}{1680 E \mathfrak{I}} \left(1 + \frac{15 \mathfrak{I}}{Q \lambda^2} + \dots \right) \right\}. \end{aligned} \tag{26}$$

Das Glied $15 \mathfrak{I}/Q \lambda^2$ wird man mit Rücksicht auf die angewandten Vernachlässigungen weglassen, da seine Mitführung die wirkliche Genauigkeit der Berechnung nicht erhöht.

Ist der Querschnitt des Stabes ein Rechteck mit der Seite c normal zur Drehungsaxe, so ist $\mathfrak{I}/Q = c^2/12$ und daher nach (26)

$$l' = l \left(1 + \frac{\mu g \lambda^3}{70 E c^2} \right), \quad T' = T \left(1 + \frac{\mu g \lambda^3}{140 E c^2} \right). \tag{27}$$

Für einen Hohlcylinder mit d_1 und d_2 als äusserem und innerem Durchmesser ist $\mathfrak{I}/Q = (d_1^2 + d_2^2)/16$ und somit

$$v' = l \left(1 + \frac{2\mu g \lambda^3}{105 E (d_1^2 + d_2^2)} \right), \quad T' = T \left(1 + \frac{\mu g \lambda^3}{105 E (d_1^2 + d_2^2)} \right). \quad (28)$$

Bei einem quadratischen Messingstabe von $\Lambda = 1500$ mm Länge und $c = 10$ mm Seite, mit $\mu = 8,5$, wird die Schwingungszeit von etwa 1^s um nahezu $0^s,000205$ infolge der Elasticität verlängert, bei einem Rohre von gleicher Länge und nahezu gleichem Querschnitt mit $d_1 = 32$ mm und $d_2 = 31$ mm aber nur um $0^s,000014$.

Das Maximum von η_0 beträgt im ersten Falle 6,4 mm, im zweiten nur 0,43 mm; η_{\max} wird für 1 Grad Elongation daher bezw. nahezu 0,1 und 0,01 mm, bleibt somit noch ziemlich klein in beiden Fällen.

Durch Anwendung eines Doppel-T-Querschnitts oder dergleichen würden bei gleichem Materialaufwand sich noch erheblich günstigere Verhältnisse als durch ein Rohr erzielen lassen.

Nach den zu den Gleichungen (22) und (23) gemachten Bemerkungen wird die Anbringung einer körperlichen Schneide als Drehungsaxe und einer Linse im Schwingungsmittelpunkt wesentlich nur den Nenner Mh vergrössern und also den Biegungeffekt verkleinern, während die Form der gebogenen Längsaxe bestehen bleibt.

§ 8. **Höhere Glieder der Entwicklung.** In dem soeben betrachteten Falle eines Stabes mit rechteckigem Querschnitt bei $c = 10$ mm bleiben für kleine Elongationen die η so klein, dass die entwickelten Formeln voraussichtlich genügend genau sind; überdies wird man Stäbe von solcher Biegsamkeit doch vermeiden müssen, da ein Einfluss von $0^s,0002$ bei 1^s Schwingungszeit sich aus praktischen Gründen nicht scharf genug berechnen lässt. Würde man aber noch schwächere Stäbe nehmen, wie z. B. mit $c = 1$ mm, wobei η_{\max} für 1^0 Elongation sich schon auf etwa 1 cm stellt, so können die entwickelten Formeln keine Gültigkeit mehr beanspruchen.

Bei dem Versuche einer genaueren Formelentwicklung stößt man sofort auf Schwierigkeiten, wenn nicht einschränkende Annahmen über die Grösse der Biegung und den Betrag der Maximalelongation gemacht werden. Ich nehme an, dass η^2 gegen x^2 (wie es schon (5) verlangt) und $\sin^2 \alpha$ gegen 1 vernachlässigt werden dürfen. Dem letzteren entspricht die Annahme $\eta = \eta_0 \sin \Theta$, wenn zugleich vorausgesetzt wird, dass die bei der Einleitung der Pendelbewegung durch Verbiegungen entstehenden Eigenschwingungen des Pendels bereits durch Widerstände (besonders innere Reibung) absorbiert sind, was in der Regel den praktischen Verhältnissen bei Pendelbeobachtungen zu Schweremesszwecken entsprechen dürfte. In diesem Falle wird η , als Funktion von $\sin \Theta$ gedacht, $\sin^2 \Theta$ nicht enthalten wegen der Symmetrie der Bewegung beiderseits der Vertikalen, und da $\sin^3 \Theta$ vernachlässigt wird, bleibt $\eta = \eta_0 \sin \Theta$ als Näherungsrelation¹⁾.

1) Über den Einfluss der Wahl des Anfangszustandes vergl. bei BESSEL, *Untersuchungen*, II. Beilage, Art. 13. — Von dem Verlauf der Eigenschwingungen erhält man eine Vorstellung, wenn das an den Enden auf 2 Stützen horizontal aufgelegte Pendel in der Mitte etwas durchgebogen und dann sich überlassen wird. Näherungsweise ist die Anzahl der Schwingungen (hin und her) für 1^s gleich

$$\frac{\pi}{2\lambda^2} \sqrt{\frac{E\mathfrak{I}}{\mu Q}}$$

Z. B. für einen Cylinder von 16 mm Durchmesser und der Länge $\lambda = 1000$ mm, wobei $\mathfrak{I}/Q = 16$ ist, wird unter Annahme von $E = g \cdot 10^{10}$ für Messing die Schwingungszahl gleich 22. Bei den steifen Pendeln wird sie erheblich gröfser sein. Indessen ist nicht ohne weiteres zu sehen, ob nicht gewisse Verbiegungen langsamere Vibrationen erzeugen. Andererseits kann man durch geschickte Einleitung der Bewegung von Haus aus Verbiegungen fast ganz vermeiden.

Bei der Entwicklung der verlorenen Kräfte kann man nun wieder von den Gleichungen (16) bis (18) ausgehen, indem wieder wegen der Vernachlässigung von η^2 gegen x^2 die Längen auf der gebogenen Längsaxe von O ab gleich den Abscissen sind. Nur bei den Hebelarmen in (18) tritt für die Berechnung des Biegemomentes eine Änderung ein, indem die Hebelarme auf den Punkt A der gebogenen Längsaxe mit den Koordinaten a und η_a bezogen werden müssen. Entsprechend der letzten Bezeichnung der Ordinate sei η allgemein mit η_x für irgend eine Abscisse x bezeichnet. Unterscheidet man in gleicher Weise die zugehörigen η_0 , so werden anstatt der in (18) angegebenen Werte der Hebelarme die folgenden Ausdrücke anzuwenden sein:

$$\begin{aligned} & -y - (\eta_0)_x \sin \Theta + (\eta_0)_a \sin \Theta, \\ & + x - a - y\beta_0 \sin \Theta. \end{aligned}$$

Das hiermit berechnete \mathfrak{M} ist sodann in (5) einzutragen, wobei zugleich linker Hand die Substitution $\eta = \eta_0 \sin \Theta$ vorzunehmen ist. Die Integrationen sind von $x = a$ ab bis ans untere bezw. obere Ende des Pendelkörpers zu erstrecken.

Zu dieser Gleichung für $d^2\eta_0/d\alpha^2$ tritt noch die allgemeine Bewegungsgleichung, welche dem Falle $a = 0 = (\eta_0)_x$ mit $\mathfrak{M} = 0$ entspricht, wobei die Integrationen über den ganzen Pendelkörper zu erstrecken sind.

So ergeben sich folgende Gleichungen, in denen die Integrationsgrenzen der Einfachheit halber wie bei einem in dem oberen Ende aufgehängten Stabe von der Länge λ und nur für die Variable x angesetzt wurden, und noch relativ kleine Glieder mit y^2 vernachlässigt sind:

$$\frac{d^2\eta_0}{d\alpha^2} = \frac{g}{lE\mathfrak{E}} \left\{ \int_a^\lambda (l-x)(x-a) dm - \int_a^\lambda (l-x+a)\eta_0 dm + l\eta_0 \int_a^\lambda dm \right\}, \quad (29)$$

$$l' = \left(Mhl - \int_0^\lambda x\eta_0 dm \right) : \left(Mh - \int_0^\lambda \eta_0 dm \right), \quad l' \frac{d^2\Theta}{dt^2} = -g \sin \Theta. \quad (30)$$

Hierbei ist unter dem Integralzeichen η_0 als Funktion von x zu verstehen. Ist η_0 gegen l' klein, also bei einem Sekundenpendel höchstens einige Millimeter, so folgt aus (30) entsprechend (22):

$$l' = l \left\{ 1 + \frac{1}{Mhl} \int_0^\lambda (l-x)\eta_0 dm \right\},$$

mit einem Fehler von höchstens einigen Millionteln von l . Zugleich genügt dann die frühere Berechnungsweise von $d^2\eta_0/d\alpha^2$ mit Vernachlässigung von η_0 und Einführung von $l' = l$, wie eine genauere, hier übergangene Betrachtung des Einflusses von $l' - l$ und η_0 auf den Ausdruck (29) für $d^2\eta_0/d\alpha^2$ leicht zeigt, wenn man den einfachen Fall eines gleichstarken Stabes beibehält.

Aus den Formeln (29) und (30) läßt sich auch erkennen, daß der Einfluß der Biegsamkeit durch eine am Ende eines Stabes befindliche Masse (Linse) um so mehr herabgedrückt wird, je kleiner die Masse des Stabes gegen diese Masse ist. Legt man nämlich in diesem Falle die x -Axe so, daß sie durch die Mitte der Linse hindurchgeht, so ist η_0 für diesen Hauptteil der Masse wesentlich verschwindend, und die Integrale in (29) und (30) hängen nur noch von der geringeren Stabmasse ab. Bei einem Fadenpendel kann sich daher l' von l nur sehr wenig unterscheiden, wie auch η_0 nur sehr kleine Beträge erlangen kann.

§ 9. **Näherungsformeln für das Reversionspendel.** Die meisten Reversionspendel haben annähernd die Form einer gleichmäßig starken Röhre oder eines solchen Stabes mit je einem Gewicht an den beiden Enden. Bei der Berechnung des Einflusses der elastischen Biegung reicht es nun aus, in den Formeln (8) und (22) die Glieder mit \mathfrak{X}' bzw. i_3 wegzulassen. Dieses zeigte sich schon beim Falle des einfachen Stabes; ich fand es auch bestätigt bei der Behandlung des sehr biegsamen neueren Reversionspendels des Geodätischen Instituts sowie überdies durch eine besondere Untersuchung¹⁾. Es ist aber nicht nötig dies hier auszuführen. Zur weiteren Vereinfachung sei noch angenommen, dass die Ausdehnung der Gewichte an den Enden längs der Abscissenaxe klein sei und somit die Gewichte als Massenpunkte behandelt werden können. Es wird hierdurch allerdings auch die Steifigkeit des Pendels an den Enden zu gering geschätzt; indessen macht dies wenig aus, weil es eben die Enden betrifft.

Das so idealisierte Reversionspendel hat daher die Form einer physischen, gleichstarken Linie mit zwei Massenpunkten, M_1 und M_2 , die von den betreffenden Schneiden nach aussen zu in den Abständen e_1 und e_2 liegen mögen, während die Linie erst im Abstände e von den beiden Schneiden endet, deren Entfernung Λ sei. Ich nehme noch an, dass die Schwingungszeiten um beide Schneiden bis auf etwa 0,001 ihres Wertes gleichgroß seien. Dann giebt (25) in Bezug auf die Länge des mathematischen Sekundenpendels:

$$L' = L \left(1 - \frac{(i_1 - i_2)_1 - (i_1 - i_2)_2}{(h_1 - h_2)M} \right), \quad (31)$$

mit

$$i_1 = \int_{-e}^{\Lambda+e} \eta_0 dm, \quad i_2 = \frac{1}{\Lambda} \int_{-e}^{\Lambda+e} x \eta_0 dm, \quad (32)$$

vergl. (21), und (8) geht über in

$$\frac{d^2 \eta_0}{da^2} = \frac{g}{E \mathfrak{X}} \left\{ \int_a^{\Lambda+e} (x-a) dm - \frac{1}{\Lambda} \int_a^{\Lambda+e} x(x-a) dm \right\}. \quad (33)$$

Die Integrale sind von a bis $\Lambda + e$ oder bis $-e$ zu erstrecken, je nachdem $a \geq 0$ ist.

Zwischen den 9 Größen M , M_1 , M_2 , h_1 , h_2 , e , e_1 , e_2 und Λ finden drei Bedingungsgleichungen statt, welche hier zunächst angegeben werden mögen, wobei angenommen wird, dass M_1 und h_1 , M_2 und h_2 je auf derselben Seite liegen. Erstens ergibt sich aus der Gleichung „ $\Lambda =$ Trägheitsmoment: statisches Moment“ die Bedingung:

$$6 M_2 (\Lambda + e_2) e_2 + 6 M_1 (\Lambda + e_1) e_1 = \mu Q (\Lambda + 2e) (\Lambda^2 - 2e\Lambda - 2e^2), \quad (34)$$

wobei Q den Stangenquerschnitt, μ die Dichtigkeit der Stangenmasse bezeichnet. Ferner hat man für die Schwerpunktslage die zwei Bedingungen:

$$\begin{aligned} M(h_1 - h_2) &= M_2(\Lambda + 2e_2) - M_1(\Lambda + 2e_1), \\ h_1 + h_2 &= \Lambda. \end{aligned} \quad (35)$$

Außerdem möge für die Gesamtmasse M die Relation vermerkt werden:

$$M = M_1 + M_2 + \mu Q (\Lambda + 2e). \quad (36)$$

1) Dies heißt also, dass überhaupt eine geringe Neigung der Querschnitte gegen die x -Axe von der Ordnung β wenig ausmacht.

Setzt man nunmehr in (33) die obere Integralgrenze gleich $\Lambda + e$ und nimmt $dm = \mu Q dx$ für die Stange, bei $x = \Lambda + e_2$ aber wegen des daselbst befindlichen Gewichts $dm = +M_2$, so daß also M_1 oben, M_2 unten gedacht wird, so folgt für $a > 0$:

$$\frac{d^2 \eta_0}{da^2} = \frac{\mu g Q}{6 \Lambda E \mathfrak{E}} \left\{ \Lambda^3 - 3\Lambda^2 a - 3\Lambda(e^2 - a^2) + 3e^2 a - 2e^3 - a^3 - \frac{6M_2}{\mu Q} (\Lambda + e_2 - a)e_2 \right\}; \quad (37)$$

dagegen ist mit der obern Grenze $-e$ und mit $dm = -M_1$ (negativ wegen des Ganges der Integration) bei $x = -e_1$, für $a < 0$:

$$\frac{d^2 \eta_0}{da^2} = \frac{\mu g Q}{6 \Lambda E \mathfrak{E}} \left\{ 3\Lambda(e + a)^2 + 3e^2 a + 2e^3 - a^3 + \frac{6M_1}{\mu Q} (\Lambda + e_1)(e_1 + a) \right\}. \quad (38)$$

Es sei fernerhin zur Abkürzung gesetzt:

$$\frac{\mu g Q}{6 \Lambda E \mathfrak{E}} = F, \quad \frac{6M_1}{\mu Q} = M_1', \quad \frac{6M_2}{\mu Q} = M_2'. \quad (39)$$

Zweimalige Integration nach a von null bis x giebt nun, wenn zugleich nach Potenzen von x geordnet wird:

$x > 0$, M_2 unten, M_1 oben:

$$\eta_0 = F \left\{ -\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{4}x^4\Lambda - \frac{1}{2}x^3(\Lambda^2 - e^2) + \frac{1}{2}x^2(\Lambda^3 - 3\Lambda e^2 - 2e^3) - \frac{1}{2}M_2'(\Lambda + e_2)e_2x^2 + \frac{1}{6}M_2'e_2x^3 \right\}; \quad (40)$$

$x < 0$, M_2 und M_1 wie vorher:

$$\eta_0 = F \left\{ -\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{4}x^4\Lambda + \frac{1}{2}x^3(2\Lambda e + e^2) + \frac{1}{2}x^2(3\Lambda e^2 + 2e^3) + \frac{1}{2}M_1'(\Lambda + e_1)e_1x^2 + \frac{1}{6}M_1'(\Lambda + e_1)x^3 \right\}.$$

Diese Ausdrücke für η_0 zeigen, daß η am oberen Ende immer von der Vertikalen durch die Drehungsaxe ab gerichtet ist, daß dagegen am untern Ende dieses nur bei schwerem Gewicht unten, nicht aber bei leichtem Gewicht unten stattfindet. Die Längsaxe wird sonach bei schwerem Gewicht unten S-Form haben, bei leichtem Gewicht unten jedoch wesentlich konvex nach außen gekrümmt sein.

Bei der Bildung von $i_1 - i_2$ nach (32) ist von $x = -e$ bis 0 der 2. Ausdruck (40), von $x = 0$ bis $\Lambda + e$ der 1. Ausdruck anzuwenden; ferner ist $dm = \mu Q dx$ für die Stange und gleich $+M_1$ bei $x = -e_1$, gleich $+M_2$ bei $x = \Lambda + e_2$ zu setzen. Es ergibt sich dann für M_2 unten, M_1 oben:

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 &= \frac{F\mu Q}{\Lambda} \times \\ &+ \Lambda(\Lambda + e)^3 \left\{ -\frac{(\Lambda + e)^3}{120} + \frac{\Lambda(\Lambda + e)^2}{20} - \frac{(\Lambda + e)(\Lambda^2 - e^2)}{8} + \frac{\Lambda^3 - 3\Lambda e^2 - 2e^3}{6} - \frac{M_2'}{6}(\Lambda + e_2)e_2 + \frac{M_2'}{24}(\Lambda + e)e_2 \right\} \\ &- (\Lambda + e)^4 \left\{ -\frac{(\Lambda + e)^3}{140} + \frac{\Lambda(\Lambda + e)^2}{24} - \frac{(\Lambda + e)(\Lambda^2 - e^2)}{10} + \frac{\Lambda^3 - 3\Lambda e^2 - 2e^3}{8} - \frac{M_2'}{8}(\Lambda + e_2)e_2 + \frac{M_2'}{30}(\Lambda + e)e_2 \right\} \\ &- \Lambda e^3 \left\{ -\frac{e^3}{120} - \frac{\Lambda e^2}{20} + \frac{2\Lambda e^2 + e^3}{8} - \frac{3\Lambda e^2 + 2e^3}{6} - \frac{M_1'}{6}(\Lambda + e_1)e_1 + \frac{M_1'}{24}(\Lambda + e_1)e \right\} \\ &- e^4 \left\{ -\frac{e^3}{140} - \frac{\Lambda e^2}{24} + \frac{2\Lambda e^2 + e^3}{10} - \frac{3\Lambda e^2 + 2e^3}{8} - \frac{M_1'}{8}(\Lambda + e_1)e_1 + \frac{M_1'}{30}(\Lambda + e_1)e \right\} \\ &- \frac{1}{6}M_2'(\Lambda + e_2)^2 e_2 \left\{ -\frac{(\Lambda + e_2)^3}{20} + \frac{\Lambda(\Lambda + e_2)^2}{4} - \frac{(\Lambda + e_2)(\Lambda^2 - e^2)}{2} + \frac{\Lambda^3 - 3\Lambda e^2 - 2e^3}{2} - \frac{M_2'}{3}(\Lambda + e_2)e_2 \right\} \\ &+ \frac{1}{6}M_1'(\Lambda + e_1)^2 e_1 \left\{ +\frac{e_1^3}{20} + \frac{\Lambda e_1^2}{4} - \frac{2\Lambda e + e^2}{2}e_1 + \frac{3\Lambda e^2 + 2e^3}{2} + \frac{M_1'}{3}(\Lambda + e_1)e_1 \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

Dieser Ausdruck für $i_1 - i_2$ würde in Betracht kommen, wenn es sich darum handelte für jede Lage des Reversionspendels einzeln den Effekt der Biegsamkeit auszuwerten. Ich gehe darauf nicht weiter ein.

Für die Anwendung auf (31) aber hat man sich $i_1 - i_2$ nochmals mit Vertauschung von M_1' und M_2' hingeschrieben zu denken und beide Ausdrücke von einander abzuziehen, wobei sich alle von M_1' und M_2' ganz freien Glieder aufheben. Nimmt man dann Rücksicht auf die Relationen (34), (35) und (39), so folgt aus (31) unter der Annahme $e_2 = e_1$:

$$L' = L \left\{ 1 + \frac{\mu g Q}{180 E \mathfrak{X}} \left[\frac{(\Lambda^2 - e_1^2)(2\Lambda + e_1)e_1}{\Lambda} \right] \right\}, \quad (42)$$

wobei genau genommen in der eckigen Klammer noch hinzuzufügen ist der Ausdruck

$$- (e - e_1)^3 \frac{5\Lambda(3e + 5e_1) + 2(6e^2 + 3ee_1 + 11e_1^2)}{2\Lambda(\Lambda + 2e_1)},$$

welcher jedoch im Maximum kaum 10% des Hauptglieds ergeben dürfte und mit Rücksicht auf andere Vernachlässigungen außer Betracht bleiben kann.

Es soll hier noch erwähnt werden, daß die Massen der Schneiden und die zu ihrer Befestigung dienenden Teile, sowie die erforderlichen Ausschnitte der Stange, insoweit sie nicht \mathfrak{X} etwa wesentlich ändern, auf L' keinen erheblichen Einfluss ausüben, erstens weil der Einfluss auf die Unterschiede $i_1 - i_2$ in (31) gering ist (wie schon früher erwähnt) und zweitens, weil der Nenner $(h_1 - h_2)M$ für den Übergang auf (42) aus der Relation (35) entnommen wurde, deren rechte Seite von den betreffenden Massen unabhängig ist, da sie an beiden Schneiden gleichen Betrag haben. Es gelten überhaupt alle in diesem Abschnitt entwickelten Relationen mit Ausnahme von (36) auch streng für ein Reversionspendel von der eingangs erwähnten idealen Form, wenn noch an beiden Schneiden gleichgroße Massen hinzutreten, die aber auf die Drehungsachsen konzentriert gedacht werden.

§ 10. Anwendung auf verschiedene Reversionspendel. Es mögen nunmehr nach Gleichung (42) die Biegungseffekte einiger, bei absoluten Bestimmungen benutzter Reversionspendel näherungsweise ermittelt werden.

Bei dem neuen, stark biegsamen Reversionspendel des Geodätischen Institutes kann die Formel nur eine ganz rohe Annäherung geben, da der Querschnitt der Stange außerordentlich wechselnd ist. Dies zeigt sich namentlich in \mathfrak{X} , welches zwischen 131 und 66 160 liegt. Im Mittel ist $1/\mathfrak{X} = 0,001$ und $Q = 190$. Mit $\mu = 8,5$, $E/g = 10^{10}$, $\Lambda = 1000$ und $e_1 = 144$, $e = 160$ folgt $L' = 1,00027 L$. Die genauere Auswertung weiterhin wird zeigen, daß dies den Einfluss der Biegung noch zu gering giebt.

Das Viertelmeterpendel, welches zu dem Apparat des Geodätischen Institutes gehört, ist sehr steif. Der Querschnitt ist indessen auch etwas wechselnd; doch dürfte mit den Mittelwerten $1/\mathfrak{X} = 0,00013$ und $Q = 600$ bei $\Lambda = 250$ und $e_1 = 48$, $e = 72$ der nahezu richtige Wert in $L' = 1,000002 L$ erhalten werden.

Das ältere, steife Meterpendel des Geodätischen Institutes hat $\Lambda = 1000$ und $e_1 = 79$, $e = 113$. Die Stange besteht wesentlich aus einem Rohre von 43 mm äußerem und 39,9 mm innerem Durchmesser, hat also 1,55 Wandstärke. Hiermit ist $Q/\mathfrak{X} = 0,0046$. Reichlich 1 Decimeter lange, meist 26 mm breite Rohrausschnitte bei den Schneiden vermindern \mathfrak{X} um etwa 11%. Der Unterschied von $L' - L$, welchen Gleichung (42) zu $+ 0,0000036 L$ ergiebt, wird sich mit Rücksicht hierauf etwas erhöhen; es genügt zu setzen: $L' = 1,000004 L$.

Diese Relation gilt auch für das Meterpendel des Herrn Professors LORENZONI sowie für das leichte und das schwere Meterpendel der österreichischen Gradmessungskommission (VON OPPOLZER), an welchen ich selbst die erforderlichen Abmessungen machen konnte, Dank der gütigen leihweisen Überlassung der Pendel an das Geodätische Institut. Es ist

	Λ rund	e	e_1	d_1	d_2	Ausschnittsbreite meistens
beim italienischen Pendel	1000	125	98	44	40,3	26
„ leichten österr. Pendel	1000	116	91	41,2	39,2	26
„ schweren „ „	1000	117	83,5	43,4	39,9	26.

Bei dem französischen Meterpendel des Herrn Oberstlieutenants DEFFORGES ist Λ rund 1000, e rund 250, $e_1 = e_2$ bei $M_1 = 0$ abgeleitet aus den Angaben über h_1 und h_2 mittelst der Gleichung (35) unter plausiblen Annahmen über die Lagerung der Masse M_2 rund 170, $d_1 = 30$, $d_2 = 24^1$). Ausschnitte kommen nicht in Betracht, da sie klein sind und durch Verstärkungen kompensiert erscheinen. Es folgt $L' = 1,000018 L$.

Nun wird aber von Herrn DEFFORGES die Länge des mathematischen Sekundenpendels nicht aus den Beobachtungen am Meterpendel allein abgeleitet, sondern es wird noch ein Halbmeterpendel zugezogen und gesetzt, vergl. Teil III, § 13 (F):

$$L = (\Lambda_1 - \Lambda_{1/2}) : (\tau_1^2 - \tau_{1/2}^2),$$

worin die Indices 1 und $1/2$ sich auf die Pendel von 1 und $1/2$ m Länge beziehen. Hieraus folgt mit einer für den vorliegenden Zweck ausreichenden Annäherung

$$L' - L = 2(L' - L)_1 - (L' - L)_{1/2}.$$

$2(L' - L)_1$ ist $L \cdot 0,000036$; $(L' - L)_{1/2}$ für das Halbmeterpendel wird nach Gleichung (42) etwa $1/8$ bis $1/4$ von $(L' - L)_1$ sein — Genauer läßt sich aus den Angaben des Mémorials leider nicht ermitteln. Man wird daher rund $L' = 1,000030 L$ annehmen können.

Hiernach ist ausreichend Grund zu der Annahme vorhanden, daß der Unterschied in den Bestimmungen der Länge des mathematischen Sekundenpendels in PARIS und WIEN, reduciert nach den relativen Messungen des Herrn Oberst v. STERNECK auf Wien, im Betrage von $+0,000037$ m im Sinne DEFFORGES — VON OPPOLZER, hauptsächlich auf die Elasticität der französischen Pendel zurückzuführen ist²⁾. Nach obigen Ermittlungen erklärt dieselbe $+0,000030 - 0,000004 = +0,000026$ m. Zu einer definitiven Feststellung der Zahlen würde eine genauere Kenntnis der französischen Pendel gehören, namentlich auch der Art und Weise, wie die Endgewichte M_1 und M_2 mit der rohrförmigen Stange verbunden sind und an deren Biegungen teilnehmen.

§ 11. Das neue, stark biegsame Meterpendel des Geodätischen Institutes. Hier mußte behufs genauerer Auswertung des Biegungeffektes zu mechanischen Quadraturen der Integrale in den Formeln geschritten werden. Da bei diesem Pendel die Schwingungszeiten um beide Axen sehr nahe gleich sind, kann in (8) $l = \Lambda = 1000$, dem Schneidenabstand, genommen werden. In dieser Formel wurde ferner $dm = \mu dv$ und

1) DEFFORGES, *Observations du pendule*. (Mémorial du Dépôt général de la Guerre, t. XV. Paris 1894), p. 26 28, 113. — Eine der Gl. (34) entsprechende Relation ist wegen ungenauer Kenntnis der Massenverteilung und der Dimensionen überhaupt nicht brauchbar.

2) Vergl. DEFFORGES a. a. O. p. 121 und v. STERNECK, *Relative Schwerebestimmungen, ausgeführt im Jahre 1893*. (Mitthlg. d. k. u. k. militär-geogr. Inst., XIII. Wien 1894), S. 41.

$$\frac{\mu}{8} \left(1 - \frac{x}{1000}\right) dv = dv' \quad (43)$$

gesetzt, sowie vorläufig nach (12) $E/g = 10^{10}$ eingeführt. Damit folgt für $a > 0$:

$$\frac{d^2 \eta_0}{da^2} = \frac{8}{10^{10} \cdot \mathfrak{X}} \left\{ \sum_a^{1160} (x - a) dv' - \frac{1}{1000} \sum_a^{1160} \mathfrak{X}' dx \right\}$$

und für $a < 0$:

$$\frac{d^2 \eta_0}{da^2} = \frac{8}{10^{10} \cdot \mathfrak{X}} \left\{ \sum_{-160}^a (a - x) dv' + \frac{1}{1000} \sum_{-160}^a \mathfrak{X}' dx \right\} \quad (44)$$

Im folgenden geben 2 Tabellen einen Auszug der successiven Rechnungsergebnisse für schweres Gewicht unten und für schweres Gewicht oben¹⁾. Die ganze Länge ist in Abschnitte von 10 zu 10 mm geteilt, die so klein sind, daß die mechanische Quadratur in einfachster Weise bewirkt werden konnte; x geht von -160 bis $+1160$. Für diese Abschnitte giebt die Tabelle dv und daneben die dv' . Es sei bemerkt, daß in der Nähe der Schneiden die zu ihrer Befestigung dienenden Rahmen um 1,5 mm derart verschoben gedacht wurden, daß die Schneiden in die eine Begrenzungsebene des großen Querstückes fallen. Diese vereinfachende Annahme kann wegen der Nähe der Schneiden, und weil \mathfrak{X} nicht geändert wird, nichts Erhebliches geben. Das spezifische Gewicht μ wurde nach Maßgabe von Wägungen und von Abmessungen der Dimensionen des schweren und leichten Gewichts anfangs zu 8,0 angenommen und in diesem Betrage von $x = 0$ bis -160 und von 1000 bis 1160 für die Messingteile beibehalten; aber für $x = 0$ bis 1000 aus noch anzugebenden Gründen auf 8,209 erhöht. Bei den wenigen Teilen, die nicht von Messing sind, insbesondere bei den Prismen, wurde dv auf $\mu = 8$ reduciert.

Aus den dv' wurden durch Multiplikation mit den mittleren x der Centimeterabschnitte (also $-155, -145, \dots$ bezw. $-1155, -1145, \dots$) die Produkte $x dv'$ und dann die successiven Summen $\Sigma x dv'$ von beiden Enden her bis zum Abscissennullpunkt gebildet; ferner wurden ebenso die successiven Summen $\Sigma dv'$ und ihre Produkte mit der jedesmaligen Endabszisse a (also $-150, -140, \dots$ bezw. $-1150, -1140, \dots$) berechnet. Dies gab zunächst die Summen $\Sigma (x - a) dv'$ für (44).

Hierzu waren noch die Glieder mit \mathfrak{X}' hinzuzufügen. Diese Größe ist bei schwerem Gewicht unten von $x = -160$ bis -120 abschnittsweise 4, 1, 1 und 3 Hunderttausend; von $x = -1120$ bis -1160 bezw. 5, 20, 20 und 20 Hunderttausend, dazwischen aber im Durchschnitt nur etwa 5000. Dieser letzte Wert wurde nicht berücksichtigt, da er sich in den Werten der 4. Rubrik $\Sigma/1000$, das sind die Werte der Klammerausdrücke in (44), dividiert durch 1000, nur bis zu etwa 5 Einheiten aufsummiert. Die \mathfrak{X}' an den Enden summieren sich auch nur bis zu 65 bezw. 9 Einheiten auf, erlangen somit ebenfalls wenig Einfluss.

Die Werte von $\Sigma/1000$ in der 4. Rubrik bei $x = 0$ mußten von beiden Enden her gleich groß erhalten werden. Anfangs war dies nicht der Fall, weshalb von $x = 0$ bis 1000 μ von 8,0 auf 8,209 erhöht wurde. Damit ergab sich bei schwerem Gewicht unten volle Übereinstimmung, bei schwerem Gewicht oben ein Unterschied von 4 Einheiten, der einfach durch Mittelbildung ausgeglichen wurde, da er nicht in Betracht kommt.

1) Die Ausführlichkeit des Auszugs rechtfertigt sich u. a. im Hinblick auf die mögliche Wiederholung der Rechnung für ein 2. Exemplar des langen Pendels, das nach Japan geliefert wurde.

Schweres Gewicht unten.

Tabelle 1.

x	dv	dv'	$\frac{\Sigma}{1000}$	\mathfrak{I}	$\frac{10^{10}}{8} \cdot \frac{d^2 \eta_0}{da^2}$	$\frac{10^7}{8} \cdot \beta_0$	$\frac{10^4}{8} \cdot \eta_0$	$\frac{10}{8} \eta_0 dv'$	$\frac{1}{80} \mathfrak{I}' \beta_0$
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
- 160			0		0	- 742	+ 66,1		
- 150	10 000	+ 11 550	+ 61	130 000	0	- 742	+ 58,7	+ 720,7	- 3,0
- 140	3 600	+ 4 122	+ 199		1	- 742	+ 51,3	+ 226,6	- 1,0
- 130	3 600	+ 4 086	+ 377		3	- 742	+ 43,8	+ 194,3	- 1,0
- 120	7 800	+ 8 775	+ 622		131	+ 4 748	- 718	+ 36,5	+ 352,7
- 110	422	+ 471	+ 910	152	+ 5 987	- 665	+ 29,6	+ 15,6	0,0
- 100	454	+ 502	+ 1 202	175	+ 6 869	- 600	+ 23,3	+ 13,3	0,0
- 90	486	+ 532	+ 1 501	201	+ 7 468	- 529	+ 17,7	+ 10,9	0,0
- 80	520	+ 564	+ 1 804	230	+ 7 843	- 452	+ 12,8	+ 8,6	0,0
- 70	556	+ 598	+ 2 113	261	+ 8 096	- 372	+ 8,6	+ 6,4	0,0
- 60	592	+ 630	+ 2 428	296	+ 8 203	- 291	+ 5,3	+ 4,4	0,0
- 50	629	+ 664	+ 2 750	334	+ 8 234	- 209	+ 2,8	+ 2,7	0,0
- 40	668	+ 698	+ 3 078	375	+ 8 208	- 127	+ 1,1	+ 1,4	0,0
- 30	707	+ 732	+ 3 414	420	+ 8 129	- 45	+ 0,3	+ 0,5	0,0
- 20	4 000	+ 4 100	+ 3 775	66 160	+ 57	- 4	+ 0,0	+ 0,7	0,0
- 10	4 800	+ 4 872	+ 4 179	17 900	+ 232	- 2	+ 0,0	+ 0,1	0,0
0	4 500	+ 4 523	+ 4 631	17 900	+ 259	0	0	0,0	0,0
+ 10	13 000	+ 13 273	+ 3 923	17 900	+ 218	+ 2	+ 0,0	+ 0,1	0,0
+ 20	900	+ 910	+ 3 285	17 900	+ 183	+ 4	+ 0,0	0,0	0,0
+ 30	900	+ 901	+ 2 658	17 900	+ 148	+ 6	+ 0,1	+ 0,1	0,0
+ 40	900	+ 892	+ 2 039	17 900	+ 113	+ 7	+ 0,2	+ 0,1	0,0
+ 50	900	+ 882	+ 1 429	17 900	+ 79	+ 8	+ 0,2	+ 0,2	0,0
+ 60	3 700	+ 3 588	+ 841	3 137	+ 268	+ 10	+ 0,3	+ 1,0	0,0
+ 70	1 300	+ 1 248	+ 278	952	+ 292	+ 13	+ 0,4	+ 0,5	0,0
+ 80	1 116	+ 1 059	- 274	1 028	- 267	+ 13	+ 0,6	+ 0,5	0,0
+ 90	1 158	+ 1 088	- 816	1 105	- 738	+ 8	+ 0,7	+ 0,7	0,0
+ 100	1 200	+ 1 114	- 1 346	1 187	- 1 134	- 1	+ 0,7	+ 0,8	0,0
+ 110	1 243	+ 1 141	- 1 865	1 273	- 1 465	- 14	+ 0,7	+ 0,8	0,0
	1 286	+ 1 168					+ 0,6	+ 0,6	0,0

x	dv	dv'	$\frac{\Sigma}{1000}$	\mathcal{E}	$\frac{10^{10}}{8} \cdot \frac{d^2 \eta_0}{da^2}$	$\frac{10^7}{8} \cdot \beta_0$	$\frac{10^4}{8} \cdot \eta_0$	$\frac{10}{8} \eta_0 dv'$	$\frac{1}{80} \mathcal{E}' \beta_0$
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
+ 120			- 2 373	1 364	- 1 740	- 30	+ 0,4		
+ 130	1 331	+ 1 195	- 2 869	1 459	- 1 966	- 49	+ 0,0	+ 0,3	0,0
+ 140	1 377	+ 1 222	- 3 354	1 559	- 2 151	- 70	- 0,6	- 0,3	0,0
+ 150	1 423	+ 1 249	- 3 825	1 664	- 2 299	- 92	- 1,4	- 1,2	0,0
+ 160	1 470	+ 1 274	- 4 283	1 775	- 2 413	- 115	- 2,4	- 2,4	0,0
+ 170	1 517	+ 1 300	- 4 729	1 891	- 2 501	- 140	- 3,7	- 4,0	0,0
+ 180	1 566	+ 1 326	- 5 162	2 013	- 2 564	- 165	- 5,2	- 5,9	0,0
+ 190	1 616	+ 1 351	- 5 582	2 140	- 2 608	- 191	- 7,0	- 8,3	0,0
+ 200	1 665	+ 1 375	- 5 988	2 273	- 2 634	- 217	- 9,0	- 11,0	0,0
+ 210	1 715	+ 1 399	- 6 379	2 413	- 2 644	- 244	- 11,4	- 14,3	0,0
+ 220	1 767	+ 1 423	- 6 756	2 559	- 2 640	- 270	- 13,9	- 18,0	0,0
+ 230	1 819	+ 1 447	- 7 119	2 711	- 2 626	- 296	- 16,8	- 22,2	0,0
+ 240	1 872	+ 1 469	- 7 469	2 870	- 2 602	- 323	- 19,8	- 26,9	0,0
+ 250	1 927	+ 1 493	- 7 802	3 036	- 2 570	- 348	- 23,2	- 32,1	0,0
+ 260	1 981	+ 1 515	- 8 120	3 217	- 2 524	- 374	- 26,8	- 37,9	0,0
+ 270	2 011	+ 1 517	- 8 426	3 217	- 2 619	- 400	- 30,7	- 43,6	0,0
+ 280	2 011	+ 1 496	- 8 714	3 217	- 2 709	- 426	- 34,8	- 49,0	0,0
+ 290	2 011	+ 1 476	- 8 988	3 217	- 2 794	- 454	- 39,2	- 54,6	0,0
+ 300	2 011	+ 1 455	- 9 246	3 217	- 2 874	- 482	- 43,9	- 60,5	0,0
+ 310	2 011	+ 1 434	- 9 491	3 217	- 2 950	- 511	- 48,9	- 66,5	0,0
+ 320	2 011	+ 1 414	- 9 722	3 217	- 3 022	- 541	- 54,1	- 72,8	0,0
+ 330	2 011	+ 1 392	- 9 938	3 217	- 3 089	- 572	- 59,7	- 79,2	0,0
+ 340	2 011	+ 1 372	- 10 141	3 217	- 3 152	- 603	- 65,6	- 85,9	0,0
+ 350	2 011	+ 1 351	- 10 330	3 217	- 3 211	- 635	- 71,7	- 92,8	0,0
+ 360	2 011	+ 1 331	- 10 505	3 217	- 3 265	- 667	- 78,3	- 99,8	0,0
+ 370	2 011	+ 1 310	- 10 667	3 217	- 3 316	- 700	- 85,1	- 107,0	0,0
+ 380	2 011	+ 1 290	- 10 817	3 217	- 3 362	- 733	- 92,3	- 114,4	0,0
+ 390	2 011	+ 1 269	- 10 953	3 217	- 3 405	- 767	- 99,8	- 121,8	0,0
+ 400	2 011	+ 1 249	- 11 077	3 217	- 3 443	- 801	- 107,6	- 129,5	0,0
+ 410	2 011	+ 1 228	- 11 189	3 217	- 3 478	- 836	- 115,8	- 137,2	0,0
+ 420	2 011	+ 1 207	- 11 289	3 217	- 3 509	- 871	- 124,3	- 144,9	0,0
	2 011	+ 1 186						- 152,7	0,0

x	dv	dv'	$\frac{\Sigma}{1000}$	\mathcal{I}	$\frac{10^{10}}{8} \cdot \frac{d^2 \eta_0}{da^2}$	$\frac{10^7}{8} \cdot \beta_0$	$\frac{10^4}{8} \cdot \eta_0$	$\frac{10}{8} \eta_0 dv'$	$\frac{1}{80} \mathcal{I}' \beta_0$
I.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
+ 430			- 11 375	3 217	- 3 536	- 906	- 133,2		
+ 440	2 011	+ 1 166	- 11 451	3 217	- 3 560	- 942	- 142,5	- 160,7	0,0
+ 450	2 011	+ 1 145	- 11 516	3 217	- 3 580	- 977	- 152,0	- 168,6	0,0
+ 460	2 011	+ 1 125	- 11 570	3 217	- 3 597	- 1 013	- 162,0	- 176,7	0,0
+ 470	2 011	+ 1 104	- 11 611	3 217	- 3 609	- 1 049	- 172,3	- 184,5	0,0
+ 480	2 011	+ 1 084	- 11 641	3 217	- 3 619	- 1 085	- 183,0	- 192,6	0,0
+ 490	2 011	+ 1 063	- 11 661	3 217	- 3 625	- 1 122	- 194,0	- 200,4	0,0
+ 500	2 011	+ 1 043	- 11 671	3 217	- 3 628	- 1 158	- 205,4	- 208,3	0,0
+ 510	2 011	+ 1 021	- 11 669	3 217	- 3 627	- 1 194	- 217,2	- 215,7	0,0
+ 520	2 011	+ 1 000	- 11 658	3 217	- 3 624	- 1 230	- 229,3	- 223,2	0,0
+ 530	2 011	+ 980	- 11 638	3 217	- 3 618	- 1 267	- 241,8	- 230,8	0,0
+ 540	2 011	+ 959	- 11 607	3 217	- 3 608	- 1 303	- 254,6	- 238,0	0,0
+ 550	2 011	+ 939	- 11 567	3 217	- 3 596	- 1 339	- 267,8	- 245,3	0,0
+ 560	2 011	+ 918	- 11 519	3 217	- 3 581	- 1 375	- 281,4	- 252,1	0,0
+ 570	2 011	+ 898	- 11 460	3 217	- 3 562	- 1 410	- 295,3	- 259,0	0,0
+ 580	2 011	+ 877	- 11 392	3 217	- 3 541	- 1 446	- 309,6	- 265,3	0,0
+ 590	2 011	+ 857	- 11 316	3 217	- 3 518	- 1 481	- 324,3	- 271,6	0,0
+ 600	2 011	+ 835	- 11 232	3 217	- 3 491	- 1 516	- 339,2	- 277,0	0,0
+ 610	2 011	+ 815	- 11 138	3 217	- 3 462	- 1 551	- 354,6	- 282,7	0,0
+ 620	2 011	+ 794	- 11 038	3 217	- 3 431	- 1 586	- 370,3	- 287,8	0,0
+ 630	2 011	+ 774	- 10 930	3 217	- 3 398	- 1 620	- 386,3	- 292,8	- 0,1
+ 640	2 011	+ 753	- 10 814	3 217	- 3 362	- 1 653	- 402,7	- 297,0	- 0,1
+ 650	2 011	+ 733	- 10 690	3 217	- 3 323	- 1 687	- 419,4	- 301,3	- 0,1
+ 660	2 011	+ 712	- 10 560	3 217	- 3 283	- 1 720	- 436,4	- 304,6	- 0,1
+ 670	2 011	+ 692	- 10 422	3 217	- 3 240	- 1 753	- 453,8	- 308,0	- 0,1
+ 680	2 011	+ 671	- 10 277	3 217	- 3 195	- 1 785	- 471,4	- 310,4	- 0,1
+ 690	2 011	+ 650	- 10 126	3 217	- 3 148	- 1 816	- 489,4	- 312,3	- 0,1
+ 700	2 011	+ 629	- 9 969	3 217	- 3 099	- 1 848	- 507,8	- 313,6	- 0,1
+ 710	2 011	+ 608	- 9 805	3 217	- 3 048	- 1 878	- 526,4	- 314,4	- 0,1
+ 720	2 011	+ 588	- 9 635	3 217	- 2 995	- 1 909	- 545,3	- 315,1	- 0,1
+ 730	2 011	+ 567	- 9 460	3 217	- 2 941	- 1 938	- 564,6	- 314,7	- 0,1
	2 011	+ 547						- 314,2	- 0,1

x	dv	dv'	$\frac{\Sigma}{1000}$	\mathfrak{E}	$\frac{10^{10}}{8} \cdot \frac{d^3 \eta_0}{da^3}$	$\frac{10^7}{8} \cdot \beta_0$	$\frac{10^4}{8} \cdot \eta_0$	$\frac{10}{8} \eta_0 dv'$	$\frac{1}{80} \mathfrak{E}' \beta_0$
I.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
+ 740			- 9 279	3 217	- 2 884	- 1 967	- 584,1		
+ 750	1 981	+ 518	- 9 092	3 036	- 2 995	- 1 997	- 603,9	- 307,7	- 0,1
+ 760	1 927	+ 484	- 8 900	2 870	- 3 101	- 2 027	- 624,0	- 297,2	- 0,1
+ 770	1 872	+ 451	- 8 705	2 711	- 3 211	- 2 059	- 644,5	- 286,0	- 0,1
+ 780	1 819	+ 420	- 8 505	2 559	- 3 324	- 2 092	- 665,2	- 275,0	- 0,1
+ 790	1 767	+ 390	- 8 299	2 413	- 3 439	- 2 125	- 686,3	- 263,5	- 0,1
+ 800	1 715	+ 361	- 8 091	2 273	- 3 560	- 2 160	- 707,7	- 251,6	- 0,1
+ 810	1 665	+ 333	- 7 880	2 140	- 3 682	- 2 197	- 729,5	- 239,3	0,0
+ 820	1 616	+ 307	- 7 666	2 013	- 3 808	- 2 234	- 751,7	- 227,4	0,0
+ 830	1 566	+ 281	- 7 447	1 891	- 3 938	- 2 273	- 774,2	- 214,4	0,0
+ 840	1 517	+ 257	- 7 227	1 775	- 4 072	- 2 313	- 797,1	- 201,9	0,0
+ 850	1 470	+ 234	- 7 004	1 664	- 4 209	- 2 354	- 820,5	- 189,3	0,0
+ 860	1 423	+ 211	- 6 779	1 559	- 4 348	- 2 397	- 844,2	- 175,6	0,0
+ 870	1 377	+ 191	- 6 551	1 459	- 4 490	- 2 441	- 868,4	- 163,6	0,0
+ 880	1 331	+ 170	- 6 322	1 364	- 4 635	- 2 487	- 893,0	- 149,7	0,0
+ 890	1 286	+ 152	- 6 091	1 273	- 4 785	- 2 534	- 918,2	- 137,7	0,0
+ 900	1 243	+ 134	- 5 859	1 187	- 4 936	- 2 582	- 943,7	- 124,7	0,0
+ 910	1 200	+ 117	- 5 625	1 105	- 5 090	- 2 633	- 969,8	- 111,9	0,0
+ 920	1 158	+ 101	- 5 392	1 028	- 5 245	- 2 684	- 996,4	- 99,3	0,0
+ 930	1 116	+ 86	- 5 157	952	- 5 417	- 2 738	- 1 023,5	- 86,9	0,0
+ 940	1 300	+ 87	- 4 920	3 137	- 1 568	- 2 773	- 1 051,1	- 90,2	0,0
+ 950	3 700	+ 209	- 4 683	17 900	- 262	- 2 782	- 1 078,8	- 222,6	- 0,3
+ 960	900	+ 42	- 4 443	17 900	- 248	- 2 784	- 1 106,7	- 45,9	- 0,5
+ 970	900	+ 33	- 4 204	17 900	- 235	- 2 787	- 1 134,5	- 37,0	- 0,5
+ 980	900	+ 24	- 3 964	17 900	- 221	- 2 789	- 1 162,4	- 27,6	- 0,5
+ 990	900	+ 14	- 3 725	17 900	- 208	- 2 791	- 1 190,3	- 16,5	- 0,5
+ 1 000	13 000	+ 67	- 3 484	17 900	- 195	- 2 793	- 1 218,2	- 80,7	- 0,5
+ 1 010	4 500	- 23	- 3 244	17 900	- 181	- 2 795	- 1 246,1	+ 28,3	- 0,5
+ 1 020	4 800	- 72	- 3 004	66 160	- 45	- 2 796	- 1 274,1	+ 90,7	- 1,2
+ 1 030	4 000	- 100	- 2 764	420	- 6 581	- 2 829	- 1 302,2	+ 128,8	- 0,9
+ 1 040	707	- 25	- 2 525	375	- 6 733	- 2 896	- 1 330,9	+ 32,9	0,0
	668	- 30						+ 40,4	0,0

x	dv	dv'	$\frac{\Sigma}{1000}$	\mathfrak{Z}	$\frac{10^{10}}{8} \cdot \frac{d^2 \eta_0}{da^2}$	$\frac{10^7}{8} \cdot \beta_0$	$\frac{10^4}{8} \cdot \eta_0$	$\frac{10}{8} \eta_0 dv'$	$\frac{1}{80} \mathfrak{Z}' \beta_0$
I.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
+ 1 050			- 2 288	334	- 6 850	- 2 964	- 1 360,2		
+ 1 060	629	- 35	- 2 050	296	- 6 926	- 3 033	- 1 390,1	+ 48,1	0,0
+ 1 070	592	- 38	- 1 812	261	- 6 943	- 3 102	- 1 420,8	+ 53,4	0,0
+ 1 080	556	- 42	- 1 575	230	- 6 848	- 3 171	- 1 452,2	+ 60,3	0,0
+ 1 090	520	- 44	- 1 338	201	- 6 657	- 3 238	- 1 484,2	+ 64,6	0,0
+ 1 100	486	- 46	- 1 103	175	- 6 303	- 3 303	- 1 516,9	+ 69,0	0,0
+ 1 110	454	- 48	- 867	152	- 5 704	- 3 363	- 1 550,3	+ 73,6	0,0
+ 1 120	422	- 49	- 631	131	- 4 817	- 3 416	- 1 584,2	+ 76,8	0,0
+ 1 130	13 000	- 1 625	- 399	} 2010600	0	- 3 440	- 1 618,4	+ 2 602,1	- 17,1
+ 1 140	50 300	- 6 791	- 194		0	- 3 440	- 1 652,8	+ 11 107,6	- 68,3
+ 1 150	50 300	- 7 294	- 59		0	- 3 440	- 1 687,2	+ 12 181,2	- 68,3
+ 1 160	50 300	- 7 797	0		- 3 440	- 1 721,6	+ 13 289,4	- 68,3	
Summen:	423 394	+ 124 860						+ 27 353,2	- 236,4

Schweres Gewicht oben.

Tabelle 2.

x	dv	dv'	$\frac{\Sigma}{1000}$	\mathfrak{Z}	$\frac{10^{10}}{8} \cdot \frac{d^2 \eta_0}{da^2}$	$\frac{10^7}{8} \cdot \beta_0$	$\frac{10^4}{8} \cdot \eta_0$	$\frac{10}{8} \eta_0 dv'$	$\frac{1}{80} \mathfrak{Z}' \beta_0$
I.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
- 160			0	} 2010600	0	- 4 913	+ 432,7	+ 23 714	- 98
- 150	50 300	+ 58 097	+ 310		0	- 4 913	+ 383,6	+ 20 679	- 98
- 140	50 300	+ 57 594	+ 1 199		1	- 4 913	+ 334,5	+ 17 694	- 98
- 130	50 300	+ 57 091	+ 2 661		1	- 4 913	+ 285,4	+ 3 820	- 24
- 120	13 000	+ 14 625	+ 4 467	131	+ 34 099	- 4 742	+ 237,1	+ 101	0
- 110	422	+ 471	+ 6 343	152	+ 41 730	- 4 363	+ 191,6	+ 86	0
- 100	454	+ 502	+ 8 225	175	+ 47 000	- 3 919	+ 150,1	+ 70	0
- 90	486	+ 532	+ 10 112	201	+ 50 308	- 3 433	+ 113,4	+ 55	0
- 80	520	+ 564	+ 12 004	230	+ 52 191	- 2 920	+ 81,6	+ 41	0
- 70	556	+ 598	+ 13 902	261	+ 53 264	- 2 393	+ 55,1	+ 28	0
- 60	592	+ 630	+ 15 806	296	+ 53 399	- 1 860	+ 33,8	+ 17	0
- 50	629	+ 664	+ 17 717	334	+ 53 045	- 1 328	+ 17,9	+ 8	0
	668	+ 698							

x	dv	dv'	$\frac{\Sigma}{1000}$	\mathcal{E}	$\frac{10^{10}}{8} \cdot \frac{d^2 \eta_0}{da^2}$	$\frac{10^7}{8} \cdot \beta_0$	$\frac{10^4}{8} \cdot \eta_0$	$\frac{10}{8} \eta_0 dv'$	$\frac{1}{80} \mathcal{E}' \beta_0$
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
+ 580			— 64	3 217	— 20	+ 2 489	+ 1 048,3		
+ 590	2 011	+ 857	— 188	3 217	— 58	+ 2 488	+ 1 073,2	+ 909	0
+ 600	2 011	+ 835	— 303	3 217	— 94	+ 2 487	+ 1 098,1	+ 907	0
+ 610	2 011	+ 815	— 410	3 217	— 127	+ 2 486	+ 1 123,0	+ 905	0
+ 620	2 011	+ 794	— 508	3 217	— 158	+ 2 485	+ 1 147,8	+ 901	0
+ 630	2 011	+ 774	— 599	3 217	— 186	+ 2 483	+ 1 172,7	+ 898	0
+ 640	2 011	+ 753	— 682	3 217	— 212	+ 2 481	+ 1 197,5	+ 892	0
+ 650	2 011	+ 733	— 760	3 217	— 236	+ 2 479	+ 1 222,3	+ 887	0
+ 660	2 011	+ 712	— 830	3 217	— 258	+ 2 477	+ 1 247,1	+ 879	0
+ 670	2 011	+ 692	— 892	3 217	— 277	+ 2 474	+ 1 271,8	+ 872	0
+ 680	2 011	+ 671	— 946	3 217	— 294	+ 2 471	+ 1 296,5	+ 862	0
+ 690	2 011	+ 650	— 995	3 217	— 309	+ 2 468	+ 1 321,2	+ 851	0
+ 700	2 011	+ 629	— 1 037	3 217	— 322	+ 2 465	+ 1 345,9	+ 839	0
+ 710	2 011	+ 608	— 1 073	3 217	— 334	+ 2 462	+ 1 370,5	+ 826	0
+ 720	2 011	+ 588	— 1 103	3 217	— 343	+ 2 462	+ 1 395,1	+ 813	0
+ 730	2 011	+ 567	— 1 128	3 217	— 351	+ 2 458	+ 1 419,7	+ 798	0
+ 740	2 011	+ 547	— 1 146	3 217	— 356	+ 2 455	+ 1 444,2	+ 783	0
+ 750	1 981	+ 518	— 1 159	3 036	— 382	+ 2 451	+ 1 468,7	+ 754	0
+ 760	1 927	+ 484	— 1 166	2 870	— 406	+ 2 447	+ 1 493,2	+ 717	0
+ 770	1 872	+ 451	— 1 171	2 711	— 432	+ 2 444	+ 1 517,6	+ 679	0
+ 780	1 819	+ 420	— 1 171	2 559	— 458	+ 2 439	+ 1 542,0	+ 643	0
+ 790	1 767	+ 390	— 1 171	2 413	— 483	+ 2 435	+ 1 566,3	+ 606	0
+ 800	1 715	+ 361	— 1 166	2 273	— 509	+ 2 430	+ 1 590,6	+ 570	0
+ 810	1 665	+ 333	— 1 157	2 273	— 509	+ 2 425	+ 1 590,6	+ 534	0
+ 820	1 616	+ 307	— 1 146	2 140	— 536	+ 2 420	+ 1 614,8	+ 499	0
+ 830	1 566	+ 281	— 1 130	2 013	— 561	+ 2 415	+ 1 639,0	+ 464	0
+ 840	1 517	+ 257	— 1 113	1 891	— 589	+ 2 409	+ 1 663,1	+ 431	0
+ 850	1 470	+ 234	— 1 092	1 775	— 615	+ 2 403	+ 1 687,1	+ 398	0
+ 860	1 423	+ 211	— 1 069	1 664	— 642	+ 2 396	+ 1 711,1	+ 364	0
+ 870	1 377	+ 191	— 1 043	1 559	— 669	+ 2 390	+ 1 735,1	+ 334	0
+ 880	1 331	+ 170	— 1 015	1 459	— 696	+ 2 383	+ 1 758,9	+ 301	0
+ 880	1 286	+ 152	— 987	1 364	— 724	+ 2 376	+ 1 782,7	+ 273	0

x	dv	dv'	$\frac{\Sigma}{1000}$	\mathfrak{I}	$\frac{10^{10}}{8} \cdot \frac{d^2 \eta_0}{da^2}$	$\frac{10^7}{8} \cdot \beta_0$	$\frac{10^4}{8} \cdot \eta_0$	$\frac{10}{8} \eta_0 dv'$	$\frac{10}{8} \mathfrak{I}' \beta_0$
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
+ 890			- 955	1 273	- 750	+ 2 369	+ 1 806,4		
+ 900	1 243	+ 134	- 922	1 187	- 777	+ 2 361	+ 1 830,1	+ 244	0
+ 910	1 200	+ 117	- 889	1 105	- 805	+ 2 353	+ 1 853,7	+ 215	0
+ 920	1 158	+ 101	- 854	1 028	- 831	+ 2 345	+ 1 877,1	+ 188	0
+ 930	1 116	+ 86	- 819	952	- 860	+ 2 336	+ 1 900,6	+ 162	0
+ 940	1 300	+ 87	- 782	3 137	- 249	+ 2 331	+ 1 923,9	+ 166	0
+ 950	3 700	+ 209	- 744	17 900	- 42	+ 2 329	+ 1 947,2	+ 405	0
+ 960	900	+ 42	- 705	17 900	- 39	+ 2 329	+ 1 970,5	+ 82	0
+ 970	900	+ 33	- 665	17 900	- 37	+ 2 329	+ 1 993,8	+ 65	0
+ 980	900	+ 24	- 625	17 900	- 35	+ 2 328	+ 2 017,1	+ 48	0
+ 990	900	+ 14	- 585	17 900	- 33	+ 2 328	+ 2 040,3	+ 28	0
+ 1 000	13 000	+ 67	- 541	17 900	- 30	+ 2 328	+ 2 063,6	+ 137	0
+ 1 010	4 500	- 23	- 504	17 900	- 28	+ 2 327	+ 2 086,9	+ 48	0
+ 1 020	4 800	- 72	- 464	66 160	- 7	+ 2 327	+ 2 110,2	- 151	+ 1
+ 1 030	4 000	- 100	- 424	420	- 1 010	+ 2 322	+ 2 133,4	- 212	+ 1
+ 1 040	707	- 25	- 385	420	- 1 010	+ 2 322	+ 2 133,4	- 54	0
+ 1 040	668	- 30	- 385	375	- 1 027	+ 2 312	+ 2 156,6	- 65	0
+ 1 050	629	- 35	- 347	334	- 1 039	+ 2 302	+ 2 179,6	- 65	0
+ 1 060	629	- 35	- 309	296	- 1 044	+ 2 291	+ 2 202,6	- 77	0
+ 1 070	592	- 38	- 272	261	- 1 042	+ 2 281	+ 2 225,5	- 84	0
+ 1 080	556	- 42	- 234	230	- 1 017	+ 2 270	+ 2 248,2	- 94	0
+ 1 080	520	- 44	- 234	230	- 1 017	+ 2 270	+ 2 248,2	- 99	0
+ 1 090	486	- 46	- 197	201	- 980	+ 2 260	+ 2 270,9	- 105	0
+ 1 100	454	- 48	- 161	175	- 920	+ 2 251	+ 2 293,4	- 111	0
+ 1 110	454	- 48	- 125	152	- 822	+ 2 242	+ 2 315,9	- 111	0
+ 1 110	422	- 49	- 125	152	- 822	+ 2 242	+ 2 315,9	- 114	0
+ 1 120	7 800	- 975	- 89	131	- 679	+ 2 235	+ 2 338,3	- 2 291	+ 7
+ 1 130	3 600	- 486	- 58	130 000	0	+ 2 231	+ 2 360,6	- 1 153	+ 3
+ 1 140	3 600	- 522	- 35		0	+ 2 231	+ 2 382,9	- 1 250	+ 3
+ 1 150	10 000	- 1 550	- 16		0	+ 2 231	+ 2 405,2	- 3 745	+ 9
+ 1 160			0		0	+ 2 231	+ 2 427,6		
Summen:	423 394	+ 303 708						+ 106 788	- 294

Die Bedingung, welche hiermit (S. 16 u.) erfüllt wird, entspricht der Gl. (7), also auch der Gleichung „1000 = Trägheitsmoment/stat. Moment des Pendels“ für beide Drehungsaxen. Genügt somit das Zahlenmaterial für die $\bar{d}v$ und $\bar{d}v'$ der Bedingung des Reversionspendels so gut wie genau, so sind im übrigen doch einige Abweichungen vom thatsächlichen Zustand vorhanden, die z. T. auf Ungenauigkeiten der linearen Abmessung der Dimensionen, z. T. auf unrichtigen Annahmen über die Massen in der Nähe der Drehungsaxen und über μ beruhen. Diese Abweichungen, welche ich bestehen liefs, da ich sie nicht für allzu wichtig hielt, müssen hier mitgeteilt werden, wobei zugleich einige ergänzende Angaben gemacht werden sollen.

Das schwere Gewicht wiegt ohne seine Stange von 111 mm Länge, die an ihrem Ende das zur Befestigung dienende Schraubengewinde trägt, 1,308 kg, das leichte Gewicht entsprechend 0,197 kg, jede der beiden Stangen 0,080 kg. Mit $\mu = 8,0$ paßt dies zu den Abmessungen; nur die beiden Stangen werden einige Gramm zu leicht erhalten. Das leichte Gewicht hat innen eine 5 mm starke Säule, die nach der Schneide zu etwas verstärkt ist; die Wanddicke des Körpers des leichten Gewichts beträgt etwa 1,5 mm.

$\Sigma \bar{d}v = 423\,394$, wovon auf den Teil von $x = 0$ bis 1000 der Betrag von 197 826 kommt. Mit bezw. $\mu = 8,0$ und 8,209 für die äusseren und inneren Teile giebt dies 3,43 kg, anstatt 3,59 nach Wägung (Gewicht in der Luft). Eine Erhöhung aller μ um etwa 4% zur Beseitigung dieses Unterschiedes war unzulässig, denn sie würde das schwere Gewicht um 52 Gramm zu groß eingeführt haben. Wahrscheinlich ist μ nur für die Stangen um etwa 0,2 gröfser als 8,2; etwa die Hälfte des fehlenden Gesamtgewichts beruht sodann auf Unterschätzung der Massen in der Nähe der Drehungsaxen, wie eine Revision zeigte. Übrigens fand sich nachträglich, dafs die Gewichtscylinder an den Enden nicht (wie in der Rechnung angenommen) 32,5 mm Länge, sondern nur 31,8 haben, so dafs ihr μ auch auf 8,2 steigt.

Betrachtet man die Definitionsgleichung (43) für $\bar{d}v'$ und erwägt, dafs die beiden x eines bestimmten Elementes $\bar{d}v$ für beide Pendellagen sich zu $\Lambda = 1000$ ergänzen, so bemerkt man sogleich, dafs die Relation besteht

$$\sum \frac{\mu}{8} \bar{d}v = \sum \bar{d}v_1' + \sum \bar{d}v_2', \quad (45)$$

worin die Indices die beiden Pendellagen anzeigen. Diese Rechenkontrolle ist genügend erfüllt, denn man hat in der That nahezu

$$423\,394 + \frac{0,209}{8} \cdot 197\,826 = 124\,860 + 303\,708, \quad \text{oder} \quad 428\,562 = 428\,568.$$

Aus den $\bar{d}v'$ kann man nun auch die Abstände h des Schwerpunktes von den Schneiden berechnen. Es ist $Mh = \Sigma x \bar{d}m$ oder $h = \Sigma \mu x \bar{d}v / \Sigma \mu \bar{d}v$. Hieraus folgt

$$h_1 = 1000 \frac{\Sigma \bar{d}v_2'}{\Sigma \bar{d}v_1' + \Sigma \bar{d}v_2'} = 705,$$

$$h_2 = 1000 \frac{\Sigma \bar{d}v_1'}{\Sigma \bar{d}v_1' + \Sigma \bar{d}v_2'} = 295.$$

Die richtigen Werte sind 700 und 300, mit denen sich noch das Nachstehende ergibt. Bildet man die statischen Momente der vier äufsersten $\bar{d}v$ mit den Hebelarmen 655, 645, 635 und 625 in Bezug auf die Mitte der Stange für beide Enden des Pendels und setzt ihren Unterschied mal 2×8 gleich $400 M$, so folgt einerseits $1431 \cdot 10^6$, andererseits in genügender Übereinstimmung $1436 \cdot 10^6$, wenn für M 3,59 kg genommen wird. Da nun nach den Annahmen der Rechnung $\Sigma \mu \bar{d}v$ nur 3,43 giebt, so kann man sich zur Herbeiführung des richtigen Wertes von M je 0,08 kg an den beiden Schneiden

beigefügt denken. Das ändert im übrigen nichts Wesentliches. Immerhin ist diese Annahme nicht ganz zutreffend, da sie zu viel Masse an die Schneiden verlegt.

Die 5. Rubrik giebt die für die Biegung in Betracht kommenden Werte des Trägheitsmoments \mathfrak{I} für Schwerpunktsaxen parallel zu den Schneiden.

Die 6. Rubrik enthält die aus der 4. und 5. Rubrik nach Maßgabe der Formeln (44) folgenden Werte von $d^2\eta_0/da^2$ mal $10^{10}/8$. Aus den Werten [6] der 6. Rubrik folgt daher der Krümmungsradius ϱ an irgend einer Stelle gleich

$$\varrho = \frac{1\,250\,000\,000}{[6] \sin \Theta} \text{ in mm.} \quad (46)$$

Bei schwerem Gewicht unten ist für $\sin \Theta = 0,01$ der Absolutwert von $\varrho \geq 15$ km; bei schwerem Gewicht oben ist $\varrho \geq 2,3$ km.

In leicht ersichtlicher Weise sind die nächsten beiden Rubriken aus der sechsten abgeleitet. Wegen der sprungweisen Änderung von $d^2\eta_0/da^2$ an einigen Stellen entstehen durch das gewählte einfache Integrationsverfahren gewisse Fehler, die durch Weiterteilung des Intervalls von 10 mm an diesen Stellen hätten vermieden werden können. Doch sind auch so die Fehler nicht bedenklich und kaum größer als die durch die sprungweise Querschnittsänderung bedingte Ungenauigkeit der Formeln. Aus den Werten [7] der 7. Rubrik folgt

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{[7]}{1\,250\,000}; \quad \beta = \beta_0 \sin \Theta, \\ \beta \text{ in Sek.} &= \frac{[7]}{6,060} \sin \Theta. \end{aligned} \quad (47)$$

Ferner ist mittelst der 8. Rubrik:

$$\eta = \frac{8[8]}{10\,000} \sin \Theta \text{ in mm.} \quad (48)$$

Nach (21) hat man weiter mit Rücksicht auf (43):

$$i_1 - i_2 - i_3 = 8 \left\{ \sum \eta_0 dv' - \frac{1}{1000} \sum \frac{\mu}{8} \mathfrak{I}' \beta_0 dx \right\}, \quad (49)$$

wobei die Summierungen über den ganzen Pendelkörper zu erstrecken sind. Die 9. und 10. Rubrik enthalten für die einzelnen Centimeterabteilungen die Produkte $\frac{10}{8} \eta_0 dv'$ und $\frac{1}{80} \mathfrak{I}' \beta_0$, wobei für schweres Gewicht unten überflüssigerweise Zehntel mitgenommen sind, die bei schwerem Gewicht oben wegeblieben. Es wird für schweres Gewicht unten:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 8 \left\{ \frac{8}{10} \cdot 27\,353,2 + \frac{80}{1000} \cdot 2364 \right\} = 6,4 \cdot 27\,590;$$

für schweres Gewicht oben:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 8 \left\{ \frac{8}{10} \cdot 106\,788 + \frac{80}{1000} \cdot 2940 \right\} = 6,4 \cdot 107\,082.$$

Nach Gleichung (23) folgt nun hieraus mit $T = 1^s,0028$ M. Z., wenn $M = 3,428 \cdot 10^6$, $h_1 = 705$, $h_2 = 295$ angenommen wird, für

$$\begin{aligned} \text{schweres Gewicht unten: } T'_1 - T_1 &= + 0^s,000036,6, \\ \text{,, ,, oben: } T'_2 - T_2 &= + 0^s,000339,8. \end{aligned} \quad (50)$$

Da nun bei der Berechnung von L nach den Formeln (24) $h_1 = 700$ und $h_2 = 300$ gesetzt ist, so ist jetzt weiter mit $\tau = 1,0028$:

$$L' - L = - \frac{1000}{\tau^4} \cdot \frac{14(T'_1 - T_1) - 6(T'_2 - T_2)}{4} = + 0,377 \text{ mm.}$$

Diesem Betrage von $L' - L$ haftet eine gewisse Unsicherheit schon allein aus dem Grunde an, daß die zugehörigen Werte von M , h_1 und h_2 nicht genau der Wirklichkeit entsprechen. Denkt man sich, wie S. 26 u. ausgeführt, die Masse von 3,43 kg durch Beifügung von je 0,08 kg an beiden Schneiden auf 3,59 erhöht, so wird $h_1 = 700$, $h_2 = 300$, $M = 3,59 \cdot 10^6$ und Formel (25) giebt

$$L' - L = - \frac{1000}{\pi^2} \cdot \frac{6,4(27\,590 - 107\,082)}{400 \cdot 3,59 \cdot 10^6} = + 0,352 \text{ mm.}$$

Wenn man jedoch die Masse einfach dadurch erhöht, daß man überall μ durch Multiplikation mit $3,59/3,43$ vergrößert, wodurch freilich die Massen M_1 und M_2 etwas zu groß werden, so geht der zuerst berechnete Wert von $L' - L$ über in $+ 0,377 \cdot 3,59/3,43 = + 0,395$.

Welche Verbesserung an $+ 0,377$ anzubringen ist, dürfte ohne eine sorgfältige Neumessung aller Dimensionen und der Dichtigkeiten schwer zu sagen sein. Diese Revision mußte ich auf spätere Zeit verschieben.

Wie weiterhin angegeben wird, ist der zur Berechnung verwendete Wert $E/g = 10^{10}$ etwas zu klein. Direkte Messungen gaben $10,3 \cdot 10^9$. Damit folgt

$$L' - L = + 0,366 \text{ mm,}$$

bei welchem Betrage ich stehen geblieben bin.

Diesem Ergebnis haftet ein mittlerer Fehler von ungefähr $\pm 0,015$ mm an, wovon der größere Teil auf die Unsicherheit der Rechnungselemente (mit Ausnahme des auf noch nicht 1% unsicheren Wertes von E) kommt. Kleinere Beträge von je etwa 2% liefern die ungenaue Berücksichtigung der Querschnittsdiskontinuitäten und des Zustandes der beiden Stellen, wo die Endgewichte angeschraubt sind, sowie die Abweichung der Theorie von der Strenge überhaupt. Auf die Begründung dieser Schätzungen gehe ich nicht weiter ein; dieselben sind auf der Basis der bisher gegebenen Darlegungen erfolgt; für den Einfluss der Schraubenstellen sind die nachstehenden Biegungsversuche zu vergleichen.

§ 12. **Bestimmung des Elasticitätsmoduls.** Um E für das biegsame Meterpendel zu bestimmen, wurden statische Biegungsversuche angestellt, wobei das Pendel nahezu horizontal auf zwei Stützen symmetrisch zur Mitte lag und durch ein kleines Gewicht, welches in der Mitte aufgehängt wurde, zeitweise eine Durchbiegung erhielt. Für die Berechnung wurde die Axe des unbelasteten Pendels als horizontale Gerade angenommen und die Formel (5) zu Grunde gelegt.

Infolge der Symmetrie zur Mitte bei den vorstehend angegebenen Umständen ist bei gleich hohen Stützen die gebogene Längsaxe in der Mitte horizontal. Die x -Axe wurde an dieser Stelle tangential zur gebogenen Längsaxe gelegt und x für die links liegende Pendelschneide gleich null angenommen. Mit Zählung der η nach unten wird dann $d^2\eta/dx^2$ negativ, da das statische Moment der biegenden Kräfte negativ ausfällt. Diese letzten sind die Belastung P in der Mitte und die Widerstände beider Stützen im Betrage von $-\frac{1}{2}P$. Für Querschnitte mit der Abscisse x zwischen der linken Stütze mit der Abscisse a und der Mitte bei $x = 500$ hat man dann

$$2E \frac{d^2\eta}{dx^2} = - P \frac{x-a}{x}. \quad (51)$$

Hieraus wurde durch mechanische Quadratur $\beta = d\eta/dx$ in ähnlicher Weise wie β_0 in Tabelle 1 und 2 hergeleitet. Tabelle 3 giebt die Werte von $2E\beta$, wobei $a = -120$ und $P = 0,1$ kg gesetzt ist.¹⁾

1) Die Tabellen 1—3 hat der Bureaugehülfe Obst nach meiner Anleitung berechnet.

Statische Durchbiegung des neuen Meterpendels

bei 0,1 kg Belastung.

Tabelle 3.

x	$2E\beta$	x	$2E\beta$	x	$2E\beta$	x	$2E\beta$	x	$2E\beta$
- 120	8,457	+ 10	6,901	+ 140	5,345	+ 270	3,552	+ 400	1,692
- 110	8,392	+ 20	6,893	+ 150	5,183	+ 280	3,427	+ 410	1,527
- 100	8,277	+ 30	6,885	+ 160	5,025	+ 290	3,300	+ 420	1,359
- 90	8,128	+ 40	6,876	+ 170	4,872	+ 300	3,169	+ 430	1,188
- 80	7,954	+ 50	6,866	+ 180	4,722	+ 310	3,035	+ 440	1,014
- 70	7,763	+ 60	6,809	+ 190	4,578	+ 320	2,899	+ 450	0,837
- 60	7,560	+ 70	6,609	+ 200	4,437	+ 330	2,759	+ 460	0,656
- 50	7,350	+ 80	6,415	+ 210	4,300	+ 340	2,616	+ 470	0,473
- 40	7,137	+ 90	6,225	+ 220	4,167	+ 350	2,469	+ 480	0,286
- 30	6,923	+ 100	6,039	+ 230	4,038	+ 360	2,320	+ 490	0,096
- 20	6,921	+ 110	5,859	+ 240	3,913	+ 370	2,168	+ 500	
- 10	6,915	+ 120	5,683	+ 250	3,791	+ 380	2,012	Summe:	285,009
0	6,908	+ 130	5,512	+ 260	3,673	+ 390	1,854		

Durch einfache Summierung ergibt sich sodann nach Multiplikation mit $dx = 10$ mm der Wert des Produkts aus $2E$ und der Durchbiegung H in der Mitte, und da H gemessen wird, berechnet sich hiernach E aus der Formel

$$E = \frac{2850}{2H} = \frac{1425}{H}. \quad (52)$$

Dieser Formel entsprechend wurden an drei Tagen Versuche gemacht; sodann wurden die Stützen auf $x = -40$ und $+1040$ verschoben und mit $P = 0,2$ kg an zwei Tagen Versuche angestellt. Aus den zur Herleitung der Tabelle 3 nötigen Zahlenreihen liefs sich leicht die entsprechend abgeänderte Formel für E gewinnen:

$$E = \frac{1783}{H}. \quad (53)$$

Bei den Versuchen standen die Stützen auf 2 Steinfeilern; eine über dieselben gelegte Bohle trug ein horizontal gerichtetes Mikroskop zur Beobachtung der Durchbiegung. Da bei eintretender Belastung sich möglicherweise die Stützen oder die Stange auf den Stützen etwas verschoben, wurden Punkte der Stange nahe den Stützen durch ein zweites und drittes, auf den Steinfeilern aufgestelltes Mikroskop beobachtet. Selbstverständlich reducierte ich diese Beobachtungen wegen des Umstandes, dafs die Hilfspunkte sich infolge ihres Abstandes von den Stützen bei eintretender Durchbiegung etwas verschieben mußten. Hierbei wurde β an den Stützen gleich $1/2440$ bzw. $1/1440$ angenommen.

Die Beobachtungen begannen bei unbelastetem Zustand; dann wurde belastet und abgelesen, sowie nach etwa 4 Minuten nochmals abgelesen, hierauf entlastet und wieder abgelesen. Eine elastische

Nachwirkung konnte bei diesen geringen Zeitunterschieden nicht wahrgenommen werden; einige größere Fehler sind zweifellos durch die Aufstellung des mittleren Mikroskops auf der hölzernen Bohle entstanden, welche sich verzog. Vom dritten Versuche an suchte ich diesem Einfluss dadurch möglichst zu begegnen, dass die beiden zusammengehörigen Ablesungen des mittleren Mikroskops dicht hintereinander bewirkt wurden.

Statische Durchbiegung H.

1897	1	2	3	4	Mittel	E	Gewicht	Mittel
22.1.	0,1344	.	0,1307	0,1396	0,1349	10560	$\frac{1}{3}$	} $E = 10230$ bei 1240 mm
25.1.	0,1504	0,1369	0,1424	0,1403	0,1425	10000	$\frac{1}{2}$	
28.1.	0,1401	0,1382	0,1428	0,1393	0,1401	10170	1	} Länge,
26.1.	0,1685	0,1745	0,1736	0,1740	0,1727	10320	1	} $E = 10330$ bei 1080 mm.
27.1.	0,1732	0,1725	0,1734	0,1710	0,1725	10340	1	

Die 2. bis 5. Rubrik geben H in mm bei abwechselnder Belastung und Entlastung; nur am 22.1. ist der Versuch 2 bei Entlastung unterblieben. Am 25.1. ist E vielleicht deshalb zu klein, weil die Endgewichte nicht ganz so fest wie gewöhnlich angeschraubt worden waren (ich hatte es an diesem Tage nicht selbst besorgt). Die Ergebnisse des 1. und 2. Tages sind zum Endresultat nur mit halbem Gewicht zugezogen, einesteils wegen der eben erwähnten Umstände und andernteils wegen unvollkommener Messung überhaupt. Aus den inneren Abweichungen der einzelnen Ergebnisse an den verschiedenen Tagen folgen nachstehende mittlere Fehler der Tageswerte E :

$$\pm 190 \quad \pm 210 \quad \pm 72 \quad \pm 103 \quad \pm 40.$$

Hiernach würden die ersten beiden Tageswerte nur etwa das Gewicht $\frac{1}{3}$ der drei letzten zu erhalten haben; es schien mir jedoch ratsam, ihren Einfluss durch Annahme von $\frac{1}{2}$ nicht allzusehr abzuschwächen.

Mit den m. F. der Tagesresultate folgt $E = 10230$ mit dem m. F. ± 80 und $E = 10330$ mit ± 55 . Hiernach ist der Unterschied beider Ergebnisse nicht als reell erwiesen. Mit den Gewichten 1 und 2 vereinigt, folgt abgerundet das Gesamtergebnis:

$$E = 10300 \pm 45.$$

Dies gilt für mm und kg. Der Übergang zu dem entsprechenden Werte von E/g im anderen Maßsystem ist bei Gleichung (12) in § 3, S. 5, besprochen.

Würde man dem Unterschied der beiden Werte von E bei 1240 und 1080 mm Auflagerungslänge zwischen den Stützen Realität zuschreiben, so liefse sich daraus eine schwache Knickung $\delta\beta$ an den beiden Schraubenstellen herleiten, die nicht ohne merkbaren Einfluss auf das Ergebnis für $L' - L$, S. 28, sein würde, besonders unter Voraussetzung einer Art von Schlotterung. Da indessen bei sorgsamem Anschrauben der Gewichte eine Schlotterung ausgeschlossen erscheint, so wurde von der Einführung eines $\delta\beta$ bei der Berechnung des Biegungeffektes $L' - L$ abgesehen und die Möglichkeit einer Knickung nur bei der Genauigkeitsschätzung des mittleren Fehlers desselben (S. 28) berücksichtigt.

§ 13. **Schlussbemerkung.** Wie im zweiten Teile dieser Arbeit mitgeteilt werden wird, ergab sich L' aus dem neuen biegsamen Meterpendel zu 994,626 mm, während das Viertelmeterpendel 994,255 ergab. Hierbei ist zwar das Mitschwingen des Stativs, aber noch nicht die Elasticität des Pendelkörpers berücksichtigt. Nach dem Vorhergehenden ist deshalb um $-0,366$ mm bzw. um $-0,002$ mm zu verbessern, womit 994,260 mm bzw. 994,253 mm als Ergebnis hervorgehen. Dies kann als be-

friedigend betrachtet werden. Bei Ableitung von L aus beiden Pendeln nach der Methode von DEFFORGES folgt $(4 \cdot 994,260 - 994,253) : (4 - 1) = 994,262$ mm (oder etwas genauer 994,263 nach Teil II, § 9).

Die Übertragung von Wien her, nach VON OPPOLZERS Bestimmung, giebt nach v. STERNECKS Ermittlung für Potsdam 994,254, nach KÜHNEN 994,251 mm; in beiden Fällen ist VON OPPOLZERS Wert um $-0,004$ mm wegen der Elasticität seines Pendels verbessert.

Die Übertragung der Bestimmung für Paris nach DEFFORGES auf Wien durch v. STERNECK und von Wien auf Potsdam mit der Mittelzahl aus v. STERNECKS und KÜHNENS Bestimmung ergibt 994,264 mm, wobei DEFFORGES' Wert um $-0,030$ mm verbessert worden ist.

Hiernach dürfte die Korrektion wegen der Elasticität der Pendel den Erfahrungen entsprechen. Wenn sie den auffallend kleinen Wert nicht erklärt, den LORENZONI in Padua fand, so dürfte dies nicht dagegen sprechen, da vorläufige Ermittlungen in Potsdam mit LORENZONIS Pendel keine auffallenden Abweichungen zeigten.

II. Vorversuche für die Bestimmung der Länge des mathematischen Sekundenpendels.

§ 1. **Der Apparat.** Das Geodätische Institut besitzt bereits seit dem Jahre 1869 einen älteren Reversionspendel-Apparat von A. REPSOLD & SÖHNE mit einem Meterpendel.¹⁾ Hiermit wurden bis zum Jahre 1871 Messungen auf 10 Stationen angestellt; dann führten hervortretende Unsicherheiten zu einer Unterbrechung, die infolge verschiedener Hindernisse eine längere Dauer annahm.²⁾ Bei der Errichtung des Dienstgebäudes des Instituts auf dem Telegraphenberg bei Potsdam wurde für Pendelmessungen ein besonderer Raum vorgesehen, der sogenannte Pendelsaal.³⁾ Derselbe kann mit Gas von unten her geheizt werden, dergestalt, daß die warme Luft zuerst den Fußboden von unten bespült, dann in den Wänden aufsteigt und auch aussen an der Decke hinstreichen kann. Die Zuführung frischer Außenluft ist in verschiedener Weise, namentlich durch Kanäle von oben her, ermöglicht. Auf diese Weise wird der in geheizten Räumen meist vorhandene, für Pendelmessungen schädliche Höhengradient der Temperatur der Luft sehr vermindert, und es kann eine bemerkenswerte Konstanz der Lufttemperatur erzielt werden.

Zur Aufstellung der Apparate treten an vier Stellen des Fußbodens Steinpfeiler hervor, die auf einem sehr starken, mit dem Gebäude verbundenen Fundament errichtet sind und den Fußboden isoliert durchschneiden. Für absolute Pendelmessungen ist namentlich ein Doppelpfeiler vorgesehen, der eine feste Brücke von Eisen trägt. An dieser Brücke befindet sich eine Konsole mit einem Achatstück, das zur Aufhängung der Pendel eine horizontale Ebene darbietet. Damit bei eingehängtem Pendel diese Ebene wirklich horizontal war, wurde es nötig, das Nivellement der Ebene mit der Setzlibelle bei einer dem Pendelgewicht entsprechenden Belastung der Konsole auszuführen.

Um die Wärmestrahlung des Pfeilers gegen die Pendel zu vermindern, sind die inneren Seitenflächen der beiden Hälften des Pfeilers, zwischen denen die Pendel hängen, mit Holz verkleidet. Außerdem befindet sich außerhalb der Verkleidung in 1 cm Abstand eine mit Staniol beklebte Leinwand; die Luft kann dazwischen durchstreichen. Das gemeinsame Fundament der beiden Pfeilerhälften, welches in Höhe des Fußbodens abschließt, ist zwischen jenen auch mit Holz bedeckt. Zwei Thüren mit Leinwandfüllung und Staniolüberzug vollenden die seitliche Begrenzung des Luftraums

1) C. BRUHNS, *Astronomisch-geodätische Arbeiten im Jahre 1870.* (Publikation des Königl. Preufs. Geodät. Instituts.) Leipzig, Engelmann, 1871; S. 109 u. f.

C. BRUHNS und TH. ALBRECHT, *Astr.-geodät. Arbeiten für die europäische Gradmessung im Königreich Sachsen,* III. Abt., Berlin, Stankiewicz, 1885; S. 311 u. f.

2) *Übersicht der Arbeiten des Königl. Geodät. Instituts unter Generallt. BAEYER.* (Publikation des Königl. Preufs. Geodät. Instituts.) Berlin, 1886; S. 16. (Nicht im Buchhandel.)

3) F. R. HELMERT, *Das Königlich Preussische Geodätische Institut.* Berlin, Mayer & Müller, 1890; S. 42 u. f.

zwischen den Pfeilerhälften, während eine große Haube aus einem prismatischen Holzgestell mit entsprechender Leinwandverkleidung oben Schutz giebt.

Die Bestimmung der Länge des mathematischen Sekundenpendels sollte nach der von DEFFORGES zuerst bei Reversionspendeln benutzten Differenzenmethode (die BESSEL bei dem Fadenpendel eingeführt hatte) erfolgen. Zu dem Zwecke konstruierten die Herren REPSOLD auf meinen Wunsch zwei neue Pendel von gleichem Gewicht und mit den Schneidenabständen von 1 m und $\frac{1}{4}$ m. Da zugleich von der Anwendung von Hohlzylindern abgesehen werden sollte, um die gesamte Oberfläche leichter übersehen zu können, geschah es, daß das lange Pendel zu biegsam wurde, während das kurze eine befriedigende Steifigkeit erhielt. Um bei dem kleinen Pendel die erforderliche Masse unterzubringen, mußte in seiner Mitte eine cylindrische Verstärkung angebracht werden. Vergl. die Figuren auf der lithographierten Tafel.

Selbstverständlich schlangen bei den Messungen beide neuen Pendel nach einander auf denselben Schneiden. Der Wunsch, daß auch das ältere, erheblich schwerere Pendel auf derselben Konsole und mit denselben Schneiden schwingen könne, blieb unerfüllt, wird aber bei neuen Messungen befriedigt werden. Zunächst konnte bei den hier mitgeteilten Messungen nur das neue Pendelpaar benutzt werden.

Zur Temperaturbestimmung für diese Pendel dienten zwei in 58 cm Höhenunterschied an einer 16 mm starken Messingstange angebrachte (mit den Kugeln eingelassene) Thermometer. Die Stange wurde im Pendelschrank nahe bei dem schwingenden Pendel befestigt. Für das lange Pendel kam das Mittel der Angaben beider Thermometer, für das kurze nur die Angabe des oberen zur Anwendung.

Zum Zwecke der Messung des Schneidenabstandes wurde das Dreibein des älteren Apparates mit den bezüglichen Einrichtungen als Vertikalkomparator beibehalten. Auch der Maßstab wurde versuchsweise beibehalten, jedoch ohne Benutzung des in ihm befindlichen Metallthermometers, das schon 1872 als veränderlich erkannt worden war und neuerdings ebenfalls nicht befriedigte. Der Maßstab wird aus einer Messingröhre gebildet, die im Innern in 1 m Abstand Ansätze hat mit Teilflächen, welche genau in der Rohraxe liegen. Für die Anwendung des kleinen Pendels erhielt der Maßstab einen dritten Ansatz in $\frac{1}{4}$ m Abstand von dem einen der beiden andern.

Leider bewährte sich der Maßstab nicht, wohl infolge von Klemmungen, die das nicht beseitigte Metallthermometer herbeiführte. Die Kaiserliche Normalaichungskommission, welche nach Beendigung der Versuche um die Bestimmung des Maßstabes gebeten wurde, deckte eine starke Variabilität der Länge für gleiche Temperaturen nach vorhergehenden Schwankungen der Temperatur auf, und ich fand diese Variabilität durch Vergleichen mit einem neuen, einwandfreien Maßstab im Vertikalkomparator bestätigt.

Hierdurch ist in das Endergebnis der Versuche eine Unsicherheit gekommen, die nur dadurch an Bedeutung zurücktritt, daß die durch die elastische Biegung des langen Pendels hervorgebrachte Unsicherheit von gleicher Ordnung ist. Überhaupt war von Haus aus das Ganze als Vorversuch gedacht, sonst wäre auch eine größere Anzahl von Messungen erfolgt.

Bei den endgültigen Messungen wird außer verschiedenen, schon berührten Übelständen auch Mängeln des Komparators abgeholfen werden, die jetzt in der Beleuchtung und in dem Schutz gegen Wärmestrahlung auftreten.

§ 2. Die Beobachtungen. In den Tabellen 4 und 5 sind die Ergebnisse der Beobachtungen und Messungen niedergelegt, wozu im folgenden eine größere Anzahl Erläuterungen und Bemerkungen gegeben werden.

Beobachtungen mit dem neuen

1894 März	Schweres Gew.	Firma	c Koinci- denzen- intervall	p Gewicht von c	M^2 Mittl. Fehlerqu. einer Koincid.	Stangentemp.		Temp. d. Zimmers		Stündl. Temp.-Gang	
						o.	u.	o.	u.	Stange	Zimmer
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Halbsekunden-											
6.	u.	o. W.	84 ^s ,088	432	0,696 : 2	14 ^o ,85	14 ^o ,78	—	15 ^o ,35	+ 0 ^o ,18	± 0 ^o ,35
„	o.	u. W.	84, 119	„	0,231 : 2	15, 19	15, 14	—	15, 95	0, 00	± 0, 25
7.	o.	u. E.	83, 913	„	0,036 : 2	16, 80	16, 75	—	17, 31	0, 00	— 0, 20
„	u.	o. E.	83, 914	„	0,291 : 2	16, 78	16, 73	—	17, 60	0, 00	— 0, 20
6.	u.	o. W.	84, 119	432	2,221 : 2	14, 94	14, 90	—	15, 60	+ 0, 18	± 0, 35
„	o.	u. W.	84, 188	32	0,085 : 3	15, 19	15, 14	—	15, 88	0, 00	± 0, 25
„	o.	u. E.	84, 168	432	0,371 : 2	15, 24	15, 18	—	15, 73	± 0, 05	± 0, 20
„	u.	o. E.	84, 175	432	0,140 : 2	15, 31	15, 25	—	15, 83	„	„
			Gewichte umgeschraubt								
			Längenmessungen								
15.	u.	u. W.	84, 151	867	0,127 : 2	16, 22	16, 22	16,45	16, 08	— 0, 03	— 0, 13
„	o.	o. W.	84, 008	192	0,027 : 2	16, 20	16, 18	16,28	15, 94	0, 00	+ 0, 60
„	o.	o. E.	84, 098	192	0,022 : 2	16, 27	16, 24	16,70	16, 36	+ 0, 05	+ 0, 20
„	u.	u. E.	84, 128	768	0,101 : 2	16, 41	16, 39	16,66	16, 32	0, 00	+ 0, 40
15.	u.	u. W.	84, 248	867	0,112 : 2	16, 20	16, 18	16,32	16, 03	— 0, 03	— 0, 13
„	o.	o. W.	84, 160	192	0,102 : 2	16, 20	16, 18	16,49	16, 20	0, 00	+ 0, 60
„	o.	o. E.	84, 141	192	0,542 : 2	16, 26	16, 22	16,59	16, 27	+ 0, 05	+ 0, 20
„	u.	u. E.	84, 286	768	0,312 : 2	16, 05	15, 98	16,13	15, 75	— 0, 14	+ 1, 50

Die Schneiden sind in jedem der beiden Pendel unverwechselt geblieben: die Schneide mit dem Punktzeichen . war in der Fassung mit der Bezeichnung „Firma“, diejenige mit . in der andern Fassung; beide Punktzeichen lagen auf der Seite der „Firma“. Die Vertauschung der Schneiden wurde ersetzt durch Vertauschung des leichten und schweren Gewichts. Hiermit erzielt man nicht nur dasselbe, sondern erhält sogar noch fast volle Sicherheit, daß die einzelne Schneide immer mit denselben Punkten auf der horizontalen Lagerfläche liegt. Denn wenn die Fassungen der Schneiden ein wenig schief zur Längsaxe der Pendel sind, kann nach der Vertauschung die einzelne Schneide von dem Lager anders berührt werden.

Reversionspendelapparat von Repsold.

Tabelle 4.

α Ausschlag in der Mitte	B_0 Luftdruck in mm	Dunst- druck in mm	Schwingungs- dauer in Uhrzeitsek.	Red. für α	Red. auf 16 ^o	Red. auf Stern- zeit	T in Sternzeit	τ in Sternzeit	Mittelwert in Sternzeit in mittl. Zeit
13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.
22,3	744,3	7,2	0 ^s ,5029908	— 13	+ 53	+ 139	0 ^s ,5030087		
21,2	742,5	„	897	— 12	+ 37	„	061	0 ^s ,5030117	
23,3	738,9	„	971	— 14	— 37	+ 140	060	0 ^s ,5030088	0, 5016354
21,9	738,3	„	971	— 13	— 38	„	060	0, 5030060	
7,0	743,8	7,2	0, 5029897	— 1	+ 49	+ 139	0, 5030084		
9,1	742,0	„	872	— 2	+ 37	„	046	0, 5030127	
7,4	741,3	„	879	— 1	+ 35	+ 140	053	0, 5030084	0, 5016350
8,1	740,8	„	877	— 2	+ 32	„	047	0, 5030040	
25,4	743,6	7,6	0, 5029886	— 17	— 10	+ 157	0, 5030016		
21,6	743,4	„	936	— 12	— 9	+ 157	072	0, 5029952	
23,6	743,0	„	905	— 15	— 12	+ 158	036	0, 5029974	0, 5016240
24,8	742,9	„	894	— 16	— 19	+ 159	018	0, 5029997	
8,0	743,5	7,6	0, 5029851	— 2	— 9	+ 157	0, 5029997		
7,6	743,3	„	882	— 2	— 9	+ 158	30029	0, 5029960	
7,9	743,1	„	890	— 2	— 12	+ 158	30034	0, 5029954	0, 5016220
7,9	742,9	„	838	— 2	— 2	+ 160	29994	0, 5029948	

Die Schwingungsbeobachtungen sind immer auf einander folgend, oder doch an demselben Tage, bei schwerem Gewicht unten und oben bzw. oben und unten angestellt, so daß der Unterschied der Luftdichtigkeiten für beide Fälle als unerheblich anzusehen ist. Meist folgen sich überdies die beiden Kombinationen ($u.o$) und ($o.u$) unmittelbar zeitlich, womit im Mittel für unten und für oben die Gleichheit der Luftdichten noch besser gewahrt wird, Tab. 4, Rubrik 1, 2, 7—10 und 14. Beim Übergang von der einen zur andern Kombination wurden die Pendel um die Vertikale gedreht, sodafs die „Firma“ die Lage gegen die Himmelsrichtung wechselte, Rubrik 3.

Zu jeder Beobachtung mit großer Amplitude, Rubrik 13, wurde meistens unmittelbar

1894 März	Schweres Gew.	Firma	c Koinci- denzen- intervall	p Gewicht von c	M ² Mittl. Fehlerqu. einer Koincid.	Stangentemp.		Temp. d. Zimmers		Stündl. Temp.-Gang	
						o.	u.	o.	u.	Stange	Zimmer
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Sekunden-											
16.	u.	o. W.	182 ^s ,629	179	0,020 : 2	15 ^o ,88	15,085	16 ^o ,79	16 ^o ,03	+ 0 ^o ,19	± 0 ^o ,13
"	o.	u. W.	182,098	80	0,072 : 1	16,35	16,32	17,13	16,30	+ 0,10	+ 0,35
19.	o.	u. E.	181,659	80	0,004 : 1	17,14	17,12	17,67	17,30	+ 0,09	+ 0,25
"	u.	o. E.	182,163	336	0,099 : 3	17,02	17,01	17,20	17,00	+ 0,16	+ 0,73
16.	u.	o. W.	182,556	161	0,787 : 2	16,02	15,99	16,86	16,13	+ 0,19	± 0,13
"	o.	u. W.	182,108	80	0,040 : 1	16,40	16,37	17,35	16,50	+ 0,10	+ 0,35
19.	o.	u. E.	181,778	80	0,002 : 1	17,19	17,19	17,77	17,48	+ 0,09	+ 0,25
"	u.	o. E.	182,215	224	0,053 : 2	17,16	17,14	17,88	17,60	+ 0,16	+ 0,73
		Gewichte umge- schraubt	Längenmessungen								
21.	u.	u. W.	181,703	224	0,337 : 2	18,41	18,38	19,10	18,70	0,00	- 0,30
"	o.	o. W.	181,170	80	0,099 : 1	18,39	18,37	18,68	18,40	+ 0,04	+ 0,30
"	o.	o. E.	181,148	80	0,032 : 1	18,58	18,56	18,88	18,55	± 0,03	+ 0,20
"	u.	u. E.	181,771	224	0,060 : 2	18,16	18,13	18,25	18,03	+ 0,07	+ 0,50
21.	u.	u. W.	181,806	304	1,471 : 3	18,40	18,39	18,75	18,50	0,00	- 0,30
"	o.	o. W.	181,290	80	0,131 : 1	18,41	18,40	18,85	18,55	+ 0,04	+ 0,30
"	o.	o. E.	181,223	80	0,032 : 1	18,57	18,55	18,98	18,65	± 0,03	+ 0,20
"	u.	u. E.	181,882	249	0,205 : 2	18,24	18,22	18,70	18,23	+ 0,07	+ 0,50

hinterher eine Beobachtung mit kleiner Amplitude hinzugefügt. In dieser Beziehung ist jedoch in Tab. 4 von der chronologischen Folge aus leicht ersichtlichem Grunde abgewichen; man erkennt aber z. B. an dem Gange der Reduktionen auf Sternzeit leicht die Reihenfolge der Messungen, Rubrik 19.

Als Beobachter wirkte, mit einer Ausnahme am 6. März bei der ersten Schwingungsdauerbestimmung, immer Herr Dr. SCHUMANN. Bei der genannten Anfangsreihe beobachtete auch ich einen Teil der Koincidenzen.

Die Koincidenzen wurden mit einem Koincidenzenapparat nach der Methode v. STERNECKS erhalten; die Pendel tragen zu dem Zwecke der Anwendbarkeit dieser Methode in der Nähe jeder Schneide zwei entgegengesetzt gerichtete Spiegel, um Koincidenzen ohne Versetzung des Apparats bei jeder Pendellage erhalten zu können. Als Koincidenzenuhr diente die Pendeluhr STRASSER & ROHDE Nr. 101, welche erst in einem Nebenraum, für die Beobachtungen vom 15. März ab aber im Pendel-

α Ausschlag in der Mitte	B ₀ Luftdruck in mm	Dunst- druck in mm	Schwingungs- dauer in Uhrzeitsek.	Red. für α	Red. auf 16 ^o	Red. auf Stern- zeit	T in Sternzeit	τ in Sternzeit	Mittelwert in Sternzeit in Mittl. Zeit
13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.
23',6	744,1	7,3	1 ^s ,0055057	- 30	+ 13	+ 336	1 ^s ,0055376		
23,0	744,3	7,3	219	- 28	- 30	+ 338	499	1 ^s ,0055283	
21,5	759,8	7,2	352	- 25	- 103	+ 325	549		1 ^s ,0055280 1,0027825
24,5	758,3	7,2	199	- 32	- 92	+ 319	394	277	
6,9	744,3	7,3	1,0055078	- 3	- 1	+ 337	1,0055411		
7,2	744,3	7,3	216	- 3	- 35	+ 338	516	1,0055332	
7,4	759,5	7,2	317	- 3	- 108	+ 325	531		1,0055312 1,0027857
7,5	758,3	7,2	182	- 3	- 104	+ 319	394	292	
23,3	759,5	Jedenfalls wie am 19. und 16.	1,0055339	- 29	- 217	+ 319	1,0055412		
20,6	759,4		503	- 23	- 216	+ 313	577	1,0055288	
21,3	759,2		510	- 24	- 234	+ 309	561		1,0055282 1,0027827
22,8	758,5		319	- 28	- 195	+ 302	398	276	
7,4	759,5		1,0055308	- 3	- 217	+ 318	1,0055406		
7,1	759,3	466	- 3	- 218	+ 312	557	1,0055293		
7,4	759,0	487	- 3	- 233	+ 308	559			1,0055270 1,0027815
7,7	758,7	285	- 3	- 203	+ 302	381	247		

saale selbst sich befand. Die Uhr schließt die elektrische Leitung, welche durch den Koincidenzenapparat geführt ist, alle 2 Sekunden; die Stromöffnung erfolgt so, daß diese 2 Sekunden ungleich geteilt werden und somit Schluß- und Öffnungsblitz im Koincidenzenapparat sich nicht stören. Beobachtet wurde der Öffnungsblitz.

Vor Beginn wurde der Faden des Koincidenzenfernrohrs stets genau auf den Blitz in der Ruhelage des Pendels gestellt. Eine Abweichung macht sich unangenehm geltend bei der Vergleichung der Koincidenzen bei Aufgang und Niedergang; dieselben zeigen eine Verschiebung gegen einander, die mit abnehmender Amplitude wächst. Wenn nun auch bei der endgültigen Rechnung durch Mittelung auf einander folgender Koincidenzen kein nennenswerter Fehler bleibt, so ist doch bei der vorläufigen Rechnung die Verschiebung unbequem.

Ergebnisse der

1894 März	Beobachter	Schweres Gewicht	Beleuchtung der Schneiden	Scheinbarer Abstand mm		Temp. des	
						Pendels	Mafsstabes
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	
Halbsekunden-							
10.	SCHUMANN	oben	dunkel	250,1734	1835	16°,68	16°,54
			hell	1781	1810	16,80	16,68
12.	"	unten	dunkel	250,1789	1778	16,22	16,06
			hell	1780	1818	15,75	15,63
Gewichte umgeschraubt							
13.	HELMERT	unten	dunkel	250,1749	1814	15,45	15,34
			hell	1655	1665	15,55	15,47
14.	"	oben	dunkel	250,1804	1840	17,96	17,86
			hell	1697	1688	18,01	17,90
Sekunden-							
20.	HELMERT	unten	dunkel	1000,0313	0321	17,92	17,92
			hell	0123	0090	17,75	17,75
20.	"	oben	dunkel	1000,0381	0367	18,57	18,57
			hell	0208	0159	18,45	18,45
Gewichte umgeschraubt							
20.	SCHUMANN	unten	dunkel	1000,0278	0269	18,04	18,04
			hell	0289	0305	18,13	18,13
20.	"	oben	dunkel	1000,0188	0217	17,35	17,35
			hell	0232	0219	17,53	17,53

Beim Halbsekundenpendel wurden am 6. und 7. März die 6 Anfangskoincidenzen Nr. 0 bis 5 und sodann die 6 Schlussskoincidenzen Nr. 12 bis 17 bei rund 84^s Koincidenzenintervall beobachtet. Die 6 Unterschiede Nr. 12—0, 13—1, .. 17—5 ergaben dann im Mittel und nach Division mit 12 die in der Rubrik 4 aufgeführten Werte eines Koincidenzenintervalls in Uhrzeitsekunden. Das Gewicht der Bestimmung wurde gleich $12^2 \cdot 6/2 = 432$ gesetzt, Rubrik 5. Zur Bildung des mittleren Fehlerquadrats der Gewichtseinheit wurden aus bekannten Gründen nicht die 6 Abweichungen vom Mittel unmittelbar herangezogen, sondern nur die 3 Mittelwerte je zweier auf einander folgender Abweichungen, Rubrik 6; das Gewicht 2 entspricht also dem arithmetischen Mittel zweier auf einander folgenden Koincidenzen (Mittel aus Auf- und Niedergang) und die Gewichtseinheit der einfachen Koincidenz (befreit von den systematischen Einflüssen der Aufstellung des Koincidenzenapparats).

Längenmessungen.

Tabelle 5.

Mittlerer Abstand mm	Temp. des		Mittlerer Abstand mm	Temp. des		Abstand in wahren mm
	Pendels	Mafsstabes		Pendels	Mafsstabes	
8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
Pendel.						
250,1790	16°,74	16°,61	250,1790	16°,36	16°,23	250,1876
250,1791	15,98	15,85				
250,1721	15,50	15,41	250,1739	16,70	16,64	250,1843
250,1757	17,91	17,88				
Pendel.						
1000,0212	17,84	17,84	1000,0245	18,18	18,18	1000,2073
1000,0279	18,51	18,51				
1000,0285	18,09	18,09	1000,0250	17,77	17,77	1000,2000
1000,0214	17,44	17,44				

Bei einer der Bestimmungen am 6. März mußte die Berechnung etwas modifiziert werden, da durch Öffnen des Pendelschranks inmitten der Reihe eine Störung des Pendelganges entstanden war¹⁾; hier konnten nur die Anfangs- und Schlussskoincidenzen für sich benutzt werden, was das Gewicht der Ergebnisse sehr vermindert hat.

Vom 15. März ab wurden die Pausen zwischen den sechs ersten und sechs letzten Koincidenzen bei schwerem Pendelgewicht unten größer genommen als bei schwerem Gewicht oben (in die Pausen fielen etwa 10 bzw. 2 Koincidenzen). Hierdurch ergab sich für den ersten Fall etwa die doppelte

1) Dies geschah behufs Ablesung der Thermometer, was dann vom 15. März ab als bedenklich aufgegeben wurde, da weitere Versuche die Empfindlichkeit des schwingenden Pendels gegen das Thüröffnen bestätigten.

Genauigkeit wie für den letzten, entsprechend dem Umstande, daß bei der Kombination der Ergebnisse zu Endwerten die Abstände des Schwerpunkts von den Schneiden für die Quadrate der Schwingungszeiten als Faktoren auftreten, die bezw. annähernd im Verhältnis 2:1 stehen. (Vergl. weiterhin § 6.) Das Verfahren hatte zugleich den Vorteil, die einander entsprechenden Amplitudengrenzen bei beiden Lagen des schweren Gewichts der Gleichheit nahe zu bringen.

Wegen der Größe des Koincidenzenintervalls von 3 Minuten beim Sekundenpendel fiel die Pause zwischen Anfangs- und Schlufkoincidenzen weg; z. B. bei schwerem Gewicht oben wurden nun immer die Koincidenzen Nr. 0 bis 9 beobachtet, bei unten Nr. 0 bis 13 oder annähernd so. Anstatt nun wieder wie beim Halbskundenpendel zu rechnen, wurden die Differenzen der Mittel 0.1 und 8.9, 2.3 und 6.7 bezw. 0.1 und 12.13, 2.3 und 10.11, 4.5 und 8.9 gebildet und daraus die Koincidenzendauer abgeleitet. Die Gewichte der Ergebnisse sind $8^2 + 4^2 = 80$ bezw. $12^2 + 8^2 + 4^2 = 224$ anstatt 72 bezw. 192. Es tritt also eine geringe Steigerung der Gewichte ein. Dasselbe hätte auch bei dem Halbskundenpendel erzielt werden können (z. B. anstatt $p = 432$ wäre erhalten worden 464 und anstatt 768 800). Jedoch schien es nicht nötig, deshalb die Rechnung zu wiederholen.

Streng ist ja auch das zweite Verfahren nicht. In erster Linie setzt es ebenso wie das erste voraus, daß während der Dauer der Koincidenzenreihe der UHrgang keinen merkbaren Schwankungen unterliegt, und daß daher Fehler lediglich durch zufällige Einflüsse bei der Entstehung und Beobachtung der Koincidenzen hervorgerufen werden. Unter dieser Voraussetzung müßten nun zur Vorbereitung der strengen Ausgleichung zuerst die Koincidenzen auf Amplitude null und konstante Temperatur reduciert werden¹⁾.

Ein Versuch zeigte jedoch, daß infolge des geringen Betrages der Ausschläge und wegen der nur kleinen, innerhalb einer Reihe als wesentlich der Zeit proportional zu betrachtenden Temperaturänderungen, es nicht erforderlich war, diese Reduktionen anzubringen, wenn darauf verzichtet wurde, für M^2 den sichersten Wert zu erhalten. Das zweite Verfahren giebt das der Amplitude in der Mitte der Reihe und der mittleren Temperatur entsprechende Koincidenzenintervall mit einer so kleinen Abweichung gegenüber der Strenge, daß die Schwingungsdauer selbst bei den größeren Amplituden erst in der 7. Decimalstelle um etwa 1 Einheit beeinflusst wird; M^2 wird wegen der paarweisen Kombination der Beobachtungen zwar mit vermindertem Gewicht erhalten, aber doch nur wenig systematisch gefälscht, da durch die Art der Kombination die Einflüsse der Amplitude nahezu herausfallen.

Das beim Halbskundenpendel angewandte erste Verfahren genügt daselbst zwar völlig bezüglich des berechneten Wertes des Koincidenzenintervalls; aber M^2 wird für die größeren Amplituden merklich stärker als beim zweiten Verfahren beeinflusst, und es ist daher bei ferneren definitiven Beobachtungsreihen besser dieses zu benutzen. In Tab. 4 sind im Durchschnitt die M^2 beim Halbskundenpendel für die größeren Amplituden etwas zu groß.

Bildet man Mittelwerte, so ergibt sich für das mittlere Fehlerquadrat M^2 einer Koincidenz:

Halbskundenpendel:

große Amplituden		kleine Amplituden	
schw. Gew. u.	schw. Gew. o.	schw. Gew. u.	schw. Gew. o.
$\frac{1,215}{8} = 0,152$	$\frac{0,316}{8} = 0,040$	$\frac{2,785}{8} = 0,348$	$\frac{1,100}{9} = 0,122;$

1) BESSEL, *Untersuchungen*, Art. 12. Vergl. auch CARL VON ORFF, *Bestimmung der Länge des einfachen Sekundenpendels auf der Sternwarte zu Bogenhausen*. (Abh. d. k. bayer. Akademie d. Wiss. II, Kl., 14. Bd. III. Abt.) München, 1883, in Kommission bei G. Franz; S. 78 u. f.

Sekundenpendel:

grofse Amplituden		kleine Amplituden	
schw. Gew. u.	schw. Gew. o.	schw. Gew. u.	schw. Gew. o.
$\frac{0,516}{9} = 0,057$	$\frac{0,207}{4} = 0,052$	$\frac{2,516}{9} = 0,280$	$\frac{0,205}{4} = 0,051.$

Wenn es scheint, dafs M^2 bei schwerem Gewicht unten gröfser ist, als bei schwerem Gewicht oben, so kann dies an der Qualität der Spiegel liegen, die mehr oder weniger zu wünschen übrig liefs. Ebenso kann die beim Sekundenpendel im Durchschnitt bemerkbare Verminderung der Werte von M^2 im Vergleich zum Halbsekundenpendel auf die seit dem 19. März benutzte kleinere Spaltbreite im Koincidenzenapparat zurückgeführt werden.

Im Mittel genügt es einstweilen zu setzen

$$\begin{aligned} \text{für grofse Amplituden: } M &= \pm 0^s,28 \\ \text{„ kleine „ : } M &= \pm 0,47. \end{aligned} \tag{1}$$

Anfangs wurde der Einfluss der Spiegelqualität nicht gleich erkannt, bis am 16. März der eine Spiegel am langen Pendel so schlechte Bilder gab, dafs nichts Genaueres zu erzielen war, weshalb er umgeschliffen werden mußte. Die Koincidenzen am 19. und 21. März sind dann sämtlich bei guten Bildern erhalten, mit Ausnahme der ersten Reihen am 21. März für „Firma“ u. W., wo die Bilder noch schlecht waren. In den M^2 ist denn auch dies sehr deutlich ausgesprochen. Vorstehende Mittelwerte der M dürften daher bei guten Bildern bedeutend verkleinert werden.

§ 3. Die Schwingungsdauer. Zur Ergänzung und im Anschluß an das Vorstehende mögen zunächst einige Bemerkungen zu den Rubriken 13, 16 und 17 der Tab. 4 folgen.

Die Skala des Koincidenzenapparats war in Doppelmillimeter geteilt und 3,41 m entfernt von dem wirksamen Pendelspiegel. Es konnte hiernach ohne weiteres zur Reduktion der in Skalenteilen gemessenen Pendelausschläge $1'' = 1'$ gesetzt werden.

Die in der Rubrik 13 angegebenen Ausschläge entsprechen genau der Mitte der beobachteten Koincidenzenreihe. Abgelesen sind immer die Ausschläge vor Beginn, inmitten und am Schlusse der Reihe mit Angabe der Zeiten. Der inmitten abgelesene Wert wurde nötigenfalls genau für die Zeit der Mitte verbessert. Außerdem wurde stets geprüft, ob er innerhalb der Beobachtungsfehler mit dem Mittel aus Anfangs- und Endausschlag stimmte, weil dies ein Kriterium des ungestörten Verlaufes der Pendelschwingungen ist. Bei dieser Prüfung mußte natürlich, wenigstens für die gröfseren Ausschläge, beachtet werden, dafs die Abnahme der Logarithmen der Ausschläge proportional der Zeit erfolgt. Für natürliche Logarithmen und Zeitählung in Minuten ist der bezügliche Koeffizient angenähert bei dem

Halbsekundenpendel:

schweres Gew.	
u.	o.
0,012	0,022

Sekundenpendel:

schweres Gew.	
u.	o.
0,010	0,022.

Diese Zahlen stehen für jedes Pendel im umgekehrten Verhältnis der Abstände des Schwerpunktes von der Drehungsaxe, wie es die Theorie verlangt¹⁾.

1) C. S. PEIRCE, *Measurements of gravity at initial stations in America and Europe*. (App. No. 15, Coast and Geodetic Survey, Report for 1876, Washington 1879); p. 32.

Helmert, Beiträge zur Theorie des Reversionspendels.

Die Unterschiede $\Delta\alpha$ der extremen Ausschläge waren bezw. durchschnittlich in Minuten:

Halbsekundenpendel:

schweres Gew.	
u.	o.
8	12
3	4

Sekundenpendel:

schweres Gew.	
u.	o.
10	15
3	5,

wobei die oberen Zahlen für die großen Ausschläge, [die unteren für die kleinen gelten. Da es zur Elimination der Form der Schneiden zweckmäßig ist, die $\Delta\alpha$ für schweres Gewicht unten und oben möglichst gleich zu machen, so hätte die Anzahl der beobachteten Koincidenzen bei schwerem Gewicht unten noch vermehrt, bei schwerem Gewicht oben noch vermindert werden sollen. Es dürften zwar die geringen Unterschiede der $\Delta\alpha$ belanglos sein; dennoch würde ich bei neuen Beobachtungsreihen an der strengen Gleichheit der $\Delta\alpha$ für beide Gewichtslagen festhalten, da dies auch für die Genauigkeit von τ nicht ungünstig ist (s. später § 6, S. 48). Ist nun α_m der Ausschlag in der Mitte, so hat man für dessen Abweichung gegen das arithmetische Mittel des Anfangs- und Endausschlages angenähert:

$$\alpha_m - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = - \frac{(\Delta\alpha)^2}{8\alpha_m}; \quad (2)$$

das giebt z. B. für $\Delta\alpha = 15$ und $\alpha_m = 23$ den Betrag $-1,2$.

Die Reduktion einer einzelnen Schwingung von der Dauer T auf die Amplitude null wegen des Ausschlags α ist bekanntlich in hinreichender Annäherung gleich $-\alpha^2 T/16$ für α als Arcus, und daher für α in Minuten mit Beachtung der speziellen Werte von T für das

Halbsekundenpendel:

$$-2,66 \left(\frac{\alpha'}{10}\right)^2 \quad \text{Einh. d. 7. Dec.-Stelle.}$$

Sekundenpendel:

$$-5,32 \left(\frac{\alpha'}{10}\right)^2. \quad (3)$$

Bezieht sich T nicht auf eine einzelne Schwingung, sondern auf eine Reihe solcher, wobei α von α_1 bis α_2 abnimmt, und ist α_m der Wert von α in der Mitte, so genügt es im vorstehenden für α^2 nach Simpsons Regel zu setzen

$$\frac{1}{6} (\alpha_1^2 + 4\alpha_m^2 + \alpha_2^2).$$

Beachtet man aber die oben gegebene Näherungsrelation zwischen α_m und $\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$, so findet sich, daß man in den vorliegenden Fällen für α einfach

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_m + \alpha_2}{3}$$

setzen darf. Solange also die Ausschläge $1/2^0$ nicht überschreiten, wie im Falle der vorliegenden Beobachtungen, kann die Reduktion auf Amplitude null mit dem arithmetischen Mittel der drei Ausschläge α_1 , α_m und α_2 erfolgen. Die hierbei stattfindende gleichmäßige Benutzung der drei Werte ist auch in Bezug auf die Kompensation zufälliger Beobachtungsfehler günstig.

Es wurde aber trotzdem einfach mit α_m gerechnet (nach vorheriger Prüfung des Zusammenstimmens der drei beobachteten α), weil infolge der Mitbenutzung von Zwischenkoincidenzen bei der Ausgleichung der Koincidenzreihe die mittlere Amplitude einen verstärkten Einfluß erlangt. Da nun weder die Benutzung des arithmetischen Mittels noch die von α_m genau richtig ist, es sich aber nur um Fehler handelt, die selbst beim Sekundenpendel 1 Einheit der 7. Decimalstelle in T

nicht wesentlich überschreiten, so war es bequemer mit α_m zu rechnen, weil die Amplituden für den genauen Anfang und Schluß erst noch zu interpolieren gewesen wären.

Die Schwingungsdauer T in Uhrzeitsekunden wurde aus dem Koincidenzenintervall c nach den bekannten Formeln berechnet:

Halbsekundenpendel:

$$T = \frac{c}{2c-1}$$

Sekundenpendel:

$$T = \frac{c}{c-1}, \quad (4)$$

mit Berücksichtigung des Umstandes, daß in beiden Fällen die Pendelschwingung länger als $\frac{1}{2}$ bzw. 1 Sekunde der Uhr dauerte. Diese Formeln gelten, wie unmittelbar ersichtlich, für c als ganze Zahl. Sie wurden auch noch benutzt für $c = n + 2\nu$, wo ν ein echter Bruch und n eine ganze gerade Zahl ist. Hierzu wurde ν in bekannter Weise dadurch geschätzt, daß man die Stellung zweier (bei Benutzung der Uhr Str. & R. No. 101) im Intervall von 2^s aufeinanderfolgenden Blitze am Faden des Koincidenzenfernrohres beobachtete, die den Faden einschlossen. Beispielsweise ist nun für das Sekundenpendel in Bezug auf den vorangehenden Blitz, wenn zu Anfang ein Blitz gerade am Faden vorausgesetzt wird:

$$nU = (n - 1 - \delta_1)P,$$

worin U die Uhrzeitsekunden, P die Pendelschläge und δ_1 einen echten Bruch bedeutet, der der kleinen Ausweichung des Pendels aus der Ruhelage bei dem n^{ten} Blitz nach dem Anfangsblitz proportional ist.

Der folgende Blitz giebt

$$(n + 2)U = (n + 1 + \delta_2)P;$$

aus der Beobachtung der Fadenstellung zwischen den beiden Blitzen folgt mit Rücksicht auf die Kleinheit von δ_1 und δ_2 genau genug $\nu = \delta_1 : (\delta_1 + \delta_2)$.

Der Unterschied der ersten beiden Gleichungen giebt nun $\delta_1 + \delta_2$ und die dritte damit $P\delta_1 = 2\nu(U - P)$; sodann folgt aus der ersten Gleichung

$$(n + 2\nu)U = (n - 1 + 2\nu)P, \quad \text{d. h. } cU = (c - 1)P,$$

oder die Dauer T eines Pendelschlags in Uhrzeitsekunden ist $c : (c - 1)$, was zu beweisen war. Zugleich ist genügend ersichtlich, daß die allgemeinen Formeln zur Berechnung von T aus c auch für Werte von c gelten, die in üblicher Weise als unechte Brüche ermittelt werden.

Es sei hier noch bemerkt, daß die folgenden differentialen Beziehungen bestehen:

$$\begin{array}{ll} \text{Halbsekundenpendel:} & dT = -358dc \quad \text{Einh. d. 7. Dec.-Stelle in } T, \\ \text{Sekundenpendel:} & dT = -305dc \quad \text{'' '' '' '' '' ''} \end{array} \quad (5)$$

§ 4. **Temperatur und Luftdichte.** Die beiden in $\frac{1}{5}^0$ geteilten Thermometer, welche in eine Messingstange eingelassen zur Temperaturbestimmung für die Pendel dienten, vergl. S. 33 und Tab. 4, Rubrik 7 und 8, wurden auf ihre Korrekturen durch Vergleichen mit anderen, geprüften Thermometern untersucht.

Im Mai 1897 wurden in den Pendelschrank, in gleiche Höhe mit diesen beiden Stangenthermometern, zwei innerhalb der Jahre 1893 bis 1896 von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt geprüfte, in $\frac{1}{5}^0$ geteilte Thermometer gebracht, und ihre Kugeln in Messingklötzchen eingeschlossen, um annähernd die gleichen Verhältnisse wie bei der Stange zu schaffen. Vergleichen

an 8 Tagen bei $13^{\circ},8$ bis $17^{\circ},4$ ergaben für das obere Stangenthermometer die Korrektur $-0^{\circ},01$, für das untere $0^{\circ},00$.

Gelegentlich der später zu besprechenden Maßstabvergleichen von Ende Mai bis Anfang Juli 1897, bei denen die Stange im Vertikalkomparator neben dem neuen Maßstab hing, dessen beide Thermometer nahezu die Höhe der entsprechenden Stangenthermometer hatten und im Jahre 1895 von der Kaiserlichen Normalaichungskommission geprüft worden waren, fand sich aus 48 Vergleichen an 17 Tagen für beide Stangenthermometer die Korrektur $0^{\circ},00$. Demgemäß sind die Ablesungen an den Thermometern der Stange, Rubrik 7 und 8, ohne Korrektur zur Verwendung gelangt.

Eine geringe Unsicherheit bleibt insofern, als die Pendelmessungen im März 1894, also drei Jahre früher stattfanden. Indessen ist der Pendelapparat schon Anfang Oktober 1893 ins Institut gelangt, die Thermometer der Stange waren also im März 1894 nicht mehr ganz neu. Spätere Veränderungen derselben sind also nicht wahrscheinlich; sie sind es um so weniger, als die Korrekturen den Betrag null haben.

Die Kugeln der Zimmerthermometer, Rubrik 9 und 10, hingen $\frac{2}{3}$ und 3 m über dem Boden an einem Gestell frei im Pendelsaal. Das untere Thermometer hat bei den in Betracht kommenden Temperaturen die Korrektur $+0^{\circ},1$, das obere stimmt bei gleicher Lage mit dem untern überein. Die Tabelle 4 giebt die unkorrigierten Ablesungen, weil diese für den beabsichtigten Zweck genügen.

Sämtliche Thermometer wurden zu Anfang und zu Ende der Koincidenzenreihe abgelesen (zeitweise auch in der Mitte), und hieraus unter Zusammenfassung der Ablesungen für je zwei aufeinanderfolgende Reihen der in den Rubriken 11 und 12 angegebene stündliche Temperaturgang hergeleitet.

Es zeigt sich die Abschließung des Pendelraumes sehr günstig, indem die Wärmeschwankung darin viel geringer als im Zimmer ist, wo dem Einfluß der Körperwärme der Beobachter durch Öffnen der Ventilationskanäle entgegengearbeitet werden mußte, was fortwährende Aufmerksamkeit erheischte. Auch der Höhengradient im Pendelschrank ist weit kleiner als im Zimmer; da sich die Abstände o.—u. im Pendelschrank und im Zimmer wie $0,58 : 2,33$ verhalten, sind die Unterschiede o.—u. nach Rubrik 7 und 8 mit $\frac{1}{4}$ von den entsprechenden nach Rubrik 9 und 10 zu vergleichen.

Der Luftdruck B_0 , Rubrik 14, reduziert auf Quecksilbersäule von 0° , wurde mit einem Aneroidbarometer mit bekannter Reduktionsformel gemessen, die relative Luftfeuchtigkeit mit einem Koppeschen Haarhygrometer. Hieraus berechneten sich die Dunstdrucke in Quecksilbersäule, Rubrik 15. Die relative Feuchtigkeit betrug im Mittel etwa 55% , die absolute war fast konstant.

Bekanntlich kommen bei den Bestimmungen mit dem Reversionspendel Druck, Temperatur und Feuchtigkeit der Luft im Pendelraum nur insofern in Betracht, als sie für die Schwingungsbeobachtungen bei schwerem Gewicht unten und oben eine verschiedene Dichtigkeit der Luft bedingen. Wegen der Hohlräume der Pendel, welche ein Nichtzusammenfallen des Massen- und Volumenschwerpunkts bedingen, ist der Einfluß auf T stärker als bei Uhrpendeln. Bei einem Sekundenuhrpendel giebt die Druckänderung $dB_0 = +1$ mm ebenso wie die Temperaturänderung $dT = -\frac{1}{3}^{\circ}$ rund $dT = +1,5$ Einh. d. 7. St.; aus den Angaben von DEFFORGES folgt dagegen für sein Sekundenpendel rund das Doppelte bei schwerem Gewicht unten und das Dreifache bei schwerem Gewicht oben¹⁾. Etwas geringer scheint der Einfluß im vorliegenden Falle zu sein; doch ist Genaueres nicht zu erkennen, da nur die Messungen vom 6. und 7. März zusammen, sowie diejenigen vom 16. mit denen vom 19. März einen Schluß auf die Größe des Einflusses gestatten und auch dabei die Beobachtungsfehler noch zu stark eingehen.

1) *Observations du pendule*, p. 61.

Der Einfluss der geringen Unterschiede für B_0 und für T bei schwerem Gewicht unten und oben auf die Endwerte τ , Rubrik 21, ist jedenfalls sehr klein. Denn bildet man Mittelwerte für jede Gruppe und stellt die Werte für B_0 und T bei schwerem Gewicht unten und oben unter einander, so folgt nachstehende Übersicht. Die T sind in Ermangelung von besseren Werten aus Rubrik 10 entnommen:

Halbsekundenpendel		Sekundenpendel	
B_0	T	B_0	T
{ 741,3	16,38 }	{ 751,2	16,52 }
{ 740,7	16,63 }	{ 752,1	16,80 }
{ 742,3	15,72 }	{ 751,3	16,86 }
{ 741,7	15,81 }	{ 751,9	16,99 }
{ 743,3	16,20 }	{ 759,0	18,37 }
{ 743,2	16,15 }	{ 759,3	18,48 }
{ 743,2	15,89 }	{ 759,1	18,37 }
{ 743,2	16,24 }	{ 759,2	18,60 }

Die Unterschiede der B_0 und T für beide Gewichtslagen wirken annähernd auf τ so, wie entsprechende Änderungen bei schwerem Gewicht oben. Der Einfluss der Dichtigkeitsunterschiede ist im Mittel nur rund ± 1 Einh. der 7. Decimalstelle und erreicht nur ein Mal den Betrag von zwei Einheiten.

In Rubrik 18 ist die Reduktion der Schwingungszeiten auf 16° Temperatur der Pendel in Einheiten der 7. Decimalstelle angegeben. Beim Halbsekundenpendel wurde mit $+ 46$ für 1° Temperaturüberschuss, beim Sekundenpendel mit $+ 91$ gerechnet. Da die Schwingungsbeobachtungen bis auf ungefähr $\frac{1}{2}^\circ$ bei denselben Temperaturen wie die Messung der Schneidenabstände im Komparator angestellt sind, so kommt auf einen Fehler von 1 bis 2 Einheiten in diesen Koeffizienten nichts weiter an; grösser wird der Fehler nicht sein. Durch die Übereinstimmung der Temperaturen sind in einfacher Weise alle Weitläufigkeiten und Bedenken beseitigt, die mit der Bestimmung der Koeffizienten aus Beobachtung oder Berechnung verbunden sind.

Die Mitteltemperaturen sind beim Halbsekundenpendel nach Tab. 4, Rubrik 7 und Tab. 5, Rubrik 6:

Schwingungsbeobachtung:		Längenmessung:
gr. Ampl. $16^\circ,09$	kl. Ampl. $15^\circ,67$	$16^\circ,53$

und beim Sekundenpendel entsprechend nach Tab. 4, Rubrik 7 und 8 und Tab. 5, Rubrik 6:

$17^\circ,48$	$17^\circ,54$	$17^\circ,98.$
---------------	---------------	----------------

§ 5. **Zeitbestimmungen.** Zur Bestimmung des Ganges von STRASSER & ROHDE Nr. 101 führte Herr Dr. SCHUMANN an 5 Tagen Zeitbestimmungen aus. Dieselben wurden zunächst auf die im Uhrenkeller befindlichen beiden Uhren STRASSER & ROHDE No. 95 und DENCKER No. 28 übertragen und von hier aus durch tägliche Vergleichen gegen Mittag auf die erstgenannte Uhr, alles chronographisch. Die Ergebnisse waren folgende, vergl. die Tabellen 6 und 7; alle Korrekturen sind Reduktionen auf Sternzeit, das Datum ist bürgerlich:

Tabelle 6.

März 1894		Uhrkorrektion		Gang für 24 ^h St. Z.		B_0 in mm
		STR. & R. 95	D. 28	Nr. 95	Nr. 28	
1.	5 ^h 26 ^m St. Z.	+ 2 ^m 22 ^s ,55	- 6 ^s ,53	+ 0 ^s ,004	+ 0 ^s ,322	751,5
9.	9 43 „	+ 2 22, 58	- 3, 61	+ 0, 025	+ 0, 345	747,0
18.	7 15 „	+ 2 22, 80	- 0, 56	+ 0, 157	+ 0, 540	760,8
29.	9 3 „	+ 2 24, 53	+ 5, 38	- 0, 005	+ 0, 558	757,3
31.	9 3 „	+ 2 24, 52	+ 6, 49			

Tabelle 7.

März 1894		STR. & R. 101			B_0 in mm
		Korr.	Tägl. Gang	Verb. Gang	
5.	20 ^h 23 ^m U. Z.	+ 48 ^s ,85			
7.	22 47 „	+ 54, 15	+ 2 ^s ,53	+ 2 ^s ,41	741,5
14.	23 30 „	- 1, 06 (+ 15)	+ 2, 67	+ 2, 63	743,8
15.	19 50 „	+ 1, 19 (+ 15)	+ 2, 83	+ 2, 79	743,5
16.	20 8 „	+ 4, 06 (+ 15)	+ 2, 93	+ 2, 93	746,8
17.	23 45 „	+ 7, 43 (- 10)	+ 2, 77	+ 2, 87	755,1
18.	22 50 „	+ 10, 09 (- 8)	+ 2, 83	+ 2, 90	760,0
19.	20 0 „	+ 12, 60 (- 1)	+ 2, 81	+ 2, 78	758,3
20.	20 17 „	+ 15, 44 (+ 14)	+ 2, 94	+ 2, 92	759,1
21.	20 22 „	+ 18, 38 (+ 9)	+ 2, 69	+ 2, 66	758,3
21.	6 48 „	+ 19, 55 (+ 10)			

Die angegebenen mittleren reducierten Barometerstände B_0 sind nach den Veröffentlichungen des benachbarten Meteorologischen Centralobservatoriums angesetzt; im einzelnen passen die im Pendelsaal beobachteten B_0 gut zu den Angaben des Centralobservatoriums. Der Gang der beiden Hauptuhren, besonders von D. 28, ist befriedigend, wenn man nächst einer geringen, der Zeit proportionalen Änderung den Einfluss der Variationen von B_0 beachtet. Genau läßt sich letzterer aus dem hier vorliegenden Material nicht herleiten, wonach er kaum + 0^s,010 für + 1 mm im täglichen Uhgange betrüge. Er ist nach neueren Ermittlungen für beide Uhren + 0^s,014. Für STR. & R. 101 ist

mir nichts bekannt. Im folgenden habe ich für alle 3 Uhren denselben Wert $+ 0^s,012$ angenommen. Es sei noch bemerkt, daß im März 1894 die Temperatur im Uhrenkeller mittags bis auf $\pm 1^0$ maximale Schwankung gleichblieb; die tägliche Schwankung ist einige Bruchteile des Grades.

Die Uhrkorrekturen der Tabelle 7 sind durch Vergleichung mit den beiden Hauptuhren gewonnen, wobei deren Stände einfach interpoliert wurden. In Klammer sind die Unterschiede der beiden Ergebnisse in Hundertstelsekunden beigefügt. Die täglichen Gänge sind die Änderungen der Uhrkorrekturen für $24^h 3^m 56^s$ Sternzeit. Nimmt man gleichen Einfluß des Luftdrucks bei allen 3 Uhren an, so gelten diese Gänge für die mittleren Barometerstände der ersten der beiden Tabellen; durch Reduktion mit $+ 0^s,012$ für $+ 1$ mm wurden sie auf die mittleren B_0 der letzten Tabelle reduciert. Zwischen dem 5. und 7. März gilt B_0 im Mittel für die Beobachtungszeiten; für die großen Amplituden ist B_0 noch 1 mm kleiner, für die kleinen 1 mm größer; die Gänge sind also $+ 2^s,40$ bzw. $+ 2^s,42$. Vom 14. März ab sind die B_0 Tagesmittel, die zugleich auf Bruchteile mm den B_0 der Beobachtungszeiten entsprechen. Die verbesserten Gänge vom 14.—21. März wurden graphisch so ausgeglichen, daß die Tagesmittel möglichst erhalten blieben; der Kurve sind folgende Gänge für die Beobachtungszeiten entnommen; links stehen die Gänge für die großen Amplituden, rechts diejenigen für die kleinen:

	+	+		+	+		+	+
März 15.	2 ^s ,69	2 ^s ,70	16.	2 ^s ,89	2 ^s ,90	21.	2 ^s ,75	2 ^s ,74
	2,71	2,72		2,91	2,91		2,69	2,68
	2,72	2,72	19.	2,80	2,79		2,66	2,65
	2,73	2,75		2,75	2,75		2,61	2,61.

Mit diesen Gängen für $86\ 636^s$ Sternzeit sind nun die in Tab. 4, Rubrik 19, angegebenen Reduktionen der Schwingungszeiten auf Sternzeit berechnet worden.

§ 6. Die Schwingungszeiten in Sternzeit, welche aus der Zusammenfassung der Angaben in den Rubriken 16—19, Tab. 4, hervorgehen, zeigt Rubrik 20. Diese Werte sind nun paarweise zu den Werten τ der Rubrik 21 kombiniert, wobei die Formel in Betracht kommt:

$$\tau = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{h_1 - h_2} h_2, \quad (6)$$

worin T_1 und T_2 die Schwingungszeiten, h_1 und h_2 die Schwerpunktsabstände von der Drehungsaxe für schweres Gewicht unten bzw. oben bezeichnen.

Die Messungen für die Schwerpunktslage mit dem bekannten Hilfsapparat ergaben, wenn als 1. Position diejenige bezeichnet wird, wo das schwere Gewicht und die „Firma“ auf entgegengesetzten Seiten liegen, als 2. Position diejenige, wo beide auf derselben Seite liegen:

		mm	mm	mm	
Halbsekundenpendel:	1. Position	$h_1 = 163,21$	$h_2 = 86,97$	$h_1 - h_2 = 76,24$	$\frac{h_2}{h_1 - h_2} = 1,141$
	2. „	163,02	87,17	75,85	1,149
Sekundenpendel:	1. „	699,22	300,80	398,42	0,755
	2. „	700,00	300,02	399,98	0,750.

Für den mittleren Fehler eines Wertes τ in Rubrik 21, insoweit er von den mittleren Fehlern der Koincidenzenbeobachtung abhängt, ergibt sich nach (1), (5) und (6) in Einh. der 7. Decimalstelle:

ungünstig ist das Ergebnis, wenn die $\Delta\tau$ der zusammengehörigen großen und kleinen Amplituden gebildet werden, wobei ein systematischer Einfluß der Schneidenabstumpfung in erheblichem Maße nicht hervortritt, so daß man auch diese $\Delta\tau$ als zufälliger Natur betrachten kann. Aus dem Durchschnitt der Quadrate der acht Unterschiede $\Delta\tau$ folgt die mittlere Differenz gleich ± 28 , während sie nach den oben angegebenen mittleren Fehlern gleich ± 26 sein müßte. Hier ist die Vergrößerung nur das 1,1-fache.

Einen geringen Betrag der Vergrößerung geben auch die Unterschiede der T , Rubrik 20, welche zu den paarweise bei gleicher Gewichtslage angestellten Beobachtungen derselben Gruppe gehören. Nach der Genauigkeit der Koincidenzen würde der m. F. eines T nicht ganz ± 11 sein; die ΔT geben aber nahezu ± 16 , wobei jedoch für die ersten beiden Gruppen jedes Pendels noch erhebliche Dichtigkeitsunterschiede der Luft eingehen. Werden diese in plausibler Weise berücksichtigt, so sinkt der m. F. eines T aus den ΔT auf ± 14 herab. Die Vergrößerung ist somit 1,3-fach.

Die Differenzen ΔT für große und kleine Amplituden geben den m. F. eines T gleich ± 13 , welcher Betrag sich durch Rücksichtnahme auf schematische Einflüsse, die aber nur wenig sicher hervortreten, auf etwa ± 12 vermindert. Die Vergrößerung des m. Fehlers ist hier wieder nur 1,1-fach, wie bei Herleitung aus den $\Delta\tau$ für große und kleine Amplituden. Dieser besonders geringe Betrag beruht wohl darauf, daß die T für große und kleine Amplituden meist unmittelbar hintereinander beobachtet sind und daß somit in den Unterschieden gewisse Schwankungen des Uhranges und Fehler der Temperaturbestimmung zurücktreten, die bei weiter voneinander abliegenden Beobachtungen fühlbarer werden.

Die Erscheinung, daß bei den beiden anderen Arten der Berechnung der Vergrößerungsfaktor die voneinander abweichenden Werte 1,8 und 1,3 hat, beruht lediglich auf dem Rechnungsverfahren infolge des Umstandes, daß in τ die Fehler von T für schweres Gewicht unten und oben mit verschiedenen Faktoren eingehen. Nach den Koincidenzen wird die Genauigkeit der T im ersten Falle wesentlich größer als im letzten, so daß der m. F. der τ mit Rücksicht auf die erwähnten Faktoren kleiner wird, als bei der Einführung eines und desselben durchschnittlichen m. F. für beide Arten von T . Dieser ist ± 11 und würde für τ den m. F. ± 24 anstatt ± 18 geben. Der Betrag ± 24 steht aber zu ± 32 auch im Verhältnis 1 : 1,3.

Untersucht man die ΔT nach Rubrik 20 auf ihre relative Größe für schweres Gewicht unten und oben, so findet man keinen wesentlichen Unterschied, mag man die ΔT für gleiche Gewichtslagen bilden oder für große und kleine Amplituden. In der That müssen nach dem Vorigen in den Werten T , Rubrik 20, die Fehler des Uhranges und der Temperatur ungefähr gleichen Einfluß wie die Fehler der Koincidenzen äußern und dadurch deren ungleiche Wirkung für beide Gewichtslagen etwas ausgleichen.

Der hohe Betrag des m. F. von ± 32 Einh. d. 7. St. in τ , Rubrik 21, dürfte alle Fehlerinflüsse genügend berücksichtigen. Setzt man nach Maßgabe dieses Wertes für die Mittelwerte in Rubrik 22 den m. F. gleich ± 23 und für nochmalige paarweise Mittelung der Werte, welche den beiden Lagen der Gewichte zu den Schneiden entsprechen, den m. F. gleich ± 16 Einh. d. 7. St., so ist auch dieser Betrag noch ausreichend, um verschiedene kleine, mehr oder weniger konstant wirkende Einflüsse mit zu umfassen.

In dieser Beziehung ist namentlich der Fehler der Zeitbestimmungen für die Hauptuhren zu erwähnen, bei dem als günstiger Umstand wirkt, daß bei jedem Pendel drei Zeitbestimmungen in die Reduktion der Beobachtungen eingehen.

Auch die Änderungsgeschwindigkeit der Temperatur, die in einigen Fällen sehr merklich ist,

gehört hierher, da sie wenigstens beim Sekundenpendel auch im Gesamtmittel nicht ganz wirkungslos ist. Doch dürfte der Einfluss daselbst etwa 5 Einh. d. 7. St. nicht überschreiten.

Die letzte Rubrik der Tabelle 4 giebt Mittelwerte der zusammengehörigen τ sowohl in Sternzeit wie in mittlerer Zeit, letztere mit der Relation berechnet:

$$1^s \text{ St. Z.} = 0^s,99726957 \text{ M. Z.}$$

§ 7. **Schneidenabstand.** Die Messungen der Entfernung der Schneiden, Tabelle 5, sind je zur Hälfte von Dr. SCHUMANN und von mir ausgeführt worden. Hierbei wurden mit den Mikroskopen die obere und sogleich auch die untere Schneide je zweimal mit den Kreuzfäden \times eingestellt, dann nach Verdrehung des Mikroskopträgers ein oberer und ein unterer Strich des Mafsstabes zweimal, und dann nochmals die Pendelschneiden wie zuerst. Hierauf wurde der Mikroskopträger um etwa $\frac{1}{2}$ Rev. der Mikrometerschrauben in Höhe verstellt und die Operation in ganz gleicher Weise wiederholt. Der Gang der Mikrometerschrauben wurde jeden Tag durch besondere Messungen an einem Mafsstabintervall ermittelt. Das Ergebnis der beiden Vergleichen ist in Rubrik 5 für jeden Fall durch zwei nebeneinander stehende Zahlen dargestellt.

In Bezug auf diesen Messungsvorgang sei noch bemerkt, dafs sich bei der Schneide eine gröfsere Anzahl von Einstellungen empfahl als bei dem Mafsstabe wegen der gröfseren Unsicherheit im ersten Falle. Bei aufeinanderfolgenden Doppelvergleichen wurden im allgemeinen kleine willkürliche Höhenverstellungen des Mikroskopträgers vorgenommen.

Die Beleuchtung erfolgte für den Mafsstab am 10. und 12. März durch elektrische Lämpchen; da diese aber zu viel Hitze gaben, später durch die üblichen Öllampen mit Linse, welche wenigstens $\frac{3}{4}$ m abstanden und den Mafsstab kaum beeinflufsten. Das Licht wurde übrigens dem letzteren nicht direkt zugesandt, sondern durch Vermittelung der an den gerade abgeschnittenen Mikroskopenden angebrachten weifsen Illuminatoren.

Für die Schneiden wurde stets nur Lampenlicht benutzt, welches bei „dunkel“ in der Richtung der horizontalen Mikroskopaxen zunächst auf Pauspapier fiel und so den Hintergrund der dunkel erscheinenden Schneiden gut erleuchtete. Bei „hell“ war mittelst eines sehr kleinen, unter 28° zur Horizontalen geneigten Spiegels, der von unten bzw. von oben Licht auf die Schneide warf, die Schneide beleuchtet; sie zeigte dabei eine etwa 50μ (Mikron) breite, besonders nach der Abstumpfung zu hellleuchtende Fläche auf dunklem Grunde.

Die Einstellungen bei „dunkel“ und „hell“ ergaben systematische Unterschiede, die am 14. März durch besondere Messungsreihen am kleinen Pendel festgestellt wurden. Das Ergebnis derselben war folgendes, in mm:

		Gemittelte Ablesung		H.—S.
		H.	S.	
oben:	<i>d.</i>	0,2497	0,2482	+ 0,0015
	<i>h.</i>	0,2401	0,2424	— 0,0023
	<i>d. — h.</i> =	+ 0,0096	+ 0,0058	— 0,0004
unten:	<i>d.</i>	0,2003	0,2076	— 0,0073
	<i>h.</i>	0,2063	0,2038	+ 0,0025
	<i>d. — h.</i> =	— 0,0060	+ 0,0038	— 0,0024.

In die gemessene Länge geht $d.-h.$ mit den Werten $+0,0156$ bei H. und $+0,0020$ bei S. ein. Die Tabelle 5 gibt aber bezw. $+0,0126$ und $-0,0013$ beim Halbsekundenpendel und $+0,0201$ und $-0,0023$ beim Sekundenpendel. Der Unterschied beruht wohl hauptsächlich auf Temperaturschwankungen, die bei den Längenmessungen eingehen, bei der Versuchsreihe am 14. März aber durch die Anordnung der Messungen größtenteils unschädlich gemacht waren.

Gegen das Verfahren der Elimination des Einflusses der Irradiation bei der Einstellung der Schneiden durch Messung bei den beiden Beleuchtungen „dunkel“ und „hell“ derselben, hat sich zuerst VON OPPOLZER gewandt, wenn es sich, wie im vorliegenden Falle, um Achatschneiden handelt¹⁾. Er schätzt den bei heller Schneide infolge der Abstumpfung entstehenden Messungsfehler bei den Schneiden seines Apparats auf 20μ und empfiehlt, nur bei dunkler Schneide mit geeigneter Vorkehrung zur Vermeidung des Irradiationseinflusses zu messen. Nach den im Geodätischen Institute vorliegenden Erfahrungen ist dieser Fehler jedenfalls für verschiedene Schneiden im allgemeinen sehr verschieden groß.

LORENZONI hat im Anschluß an OPPOLZER auch nur bei dunklen Schneiden unter Anwendung besonderer Einrichtungen gemessen²⁾. Auch DEFFORGES beobachtete nur dunkle Schneiden, ohne sich jedoch weiter über die in Betracht kommenden Verhältnisse auszusprechen (*Observations du pendule*, p. 97).

Indessen giebt die Beschaffenheit der beiden Achatschneiden im vorliegenden Falle keinen Anlaß zur Befürchtung eines starken Auftretens der von OPPOLZER bemerkten Fehlerquelle. Die Schneidenabschliffe werden nämlich gebildet von 3 Paaren von Ebenen, welche Winkel in sich von etwa 80° , 100° und 120° einschließen. Die Breite der Ebenen ist etwa $8\frac{1}{2}$ mm, $\frac{1}{3}$ mm und $\frac{1}{10}$ mm. Die letzten Flächen von $\frac{1}{10}$ mm Breite, die „ 120° -Flächen“, sind getrennt durch eine Abstumpfung von etwa 18μ Breite. Um alles dies zu erkennen, wurden zunächst die Schneiden mit dem Rücken horizontal unter ein vertikal gestelltes Mikroskop gebracht und von beiden Seiten her durch Lampen beleuchtet, deren Höhenlage successive gesteigert wurde.

Behufs genauerer Untersuchungen wurde später (da sich ein Reflexionsgoniometer wegen der Schmalheit der Flächen als unpraktikabel erwies) auf Vorschlag von Dr. KÜHNEN die Schneide unter dem Mikroskop drehbar eingerichtet; an einem Teilkreis konnte die Stellung für hellste Spiegelung des Lichts einer Lampe abgelesen werden. Da zeigte sich der Reflex der Abstumpfung in der Nähe der 120° -Flächen breit, dagegen in dem mittleren, etwa 4μ breiten Teile sehr fein. Von dem Winkel von 60° , welchen die Randnormalen des Abstumpfungsquerschnitts mit einander einschließen, kommt etwa die Hälfte auf den mittleren Teil, dessen Krümmungsradius sehr klein, weit kleiner als die Abstumpfungsbreite, sein dürfte. Inwieweit es möglich sein wird, aus der Reflexbreite und ihrer seitlichen Verschiebung bei den Drehungen einen Schluß auf den Krümmungsradius zu machen, soll noch untersucht werden.

Übrigens haben keineswegs alle Schneiden diese Form. Von zwei neuen, noch unbenutzten, hatte zwar die eine annähernd eine solche, die andere aber eine schmale Abstumpfung von 3μ mit einem Reflex von konstanter Breite, der unregelmäßig verteilte helle Stellen zeigte³⁾.

1) VON OPPOLZER, *Bericht über die Bestimmung der Schwere u. s. w.* (Verhandlungen der 7. Allgemeinen Konf. d. Europäischen Gradmessung in Rom 1883, Berlin, G. Reimer, 1884, Ann. VIa); S. 12.

2) LORENZONI, *Relazione sulle esperienze istituite nel R. Osservatorio astr. di Padova per determinare la lunghezza del pendolo semplice a secondi etc.* Roma, 1888; p. 96. Durch eine besondere Einrichtung wurde die Schwärze der Schneide in Grau gemildert.

3) Über die Form der Schneiden seiner Apparate hat DEFFORGES eingehende Studien angestellt; vergl. die Abhandlung: *Sur la loi du décroissement de l'amplitude d'un pendule* (Verhandlung der Permanenten Kommission der Internationalen Erdmessung, 1890, zu Freiburg i. B., S. 26, 27 u. 169—180). Aus der Abnahme der Amplituden schließt

Wurden die im Pendel eingesetzten Schneiden im Komparator bei hellem Grunde auch selbst beleuchtet, so blieb am Rande nur eine feine graue Linie von kaum ein paar Mikron Breite, während die dem Auge zugewandte 120° -Fläche hell leuchtete, besonders nach der Abstumpfung zu. Den geometrischen Abmessungen nach müßten die beobachteten Breiten etwa bezw. 3 und 50μ sein, was den Wahrnehmungen entspricht. (Von den 3μ muß ein Teil noch beleuchtet sein.) Die Erscheinung, welche OPPOLZER beobachtete, war so nicht zu sehen, wohl aber, wenn bei der unteren Schneide (wo es zugänglich war) das zur Verfügung stehende Beleuchtungsprisma des österreichischen Apparates eingesetzt wurde. Da dessen Reflexionsebene etwa 45° Neigung hat, erschienen nun die sonst hellen Flächen dunkel, und die dem Auge zugewandte 100° -Fläche war hell. Hier gab es nun sogar einen etwa 50μ breiten dunklen Streifen, anstatt des von OPPOLZER bemerkten 20μ breiten. Wenn er dasselbe Prisma benutzt hat, so war also die Spiegelneigung nicht genügend parallel zu den letzten Facetten der Schneiden.

Die von mir bemerkte feine, graue Linie kann sehr gut mit den Parallelfäden der Mikroskope eingestellt werden, und es würde sich fragen, ob sie nicht das beste Einstellungsobjekt an den Schneiden selbst bildet. Ihre Benutzung würde zugleich die Irradiation vermeiden lassen, deren starker Einfluß sich sehr gut zeigte, wenn durch geeignete Blendung (was bei der oberen Schneide leicht zu erzeugen ist) gleichzeitig im Gesichtsfeld verschiedene Teile der Schneide auf dunklem und auf hellem Grunde sichtbar gemacht wurden¹⁾.

Es sei hier noch bemerkt, daß die Geradheit der äußersten Schneidenkanten, insoweit diese sich bei hängenden Pendeln von der Seite gesehen darstellen, dadurch für beide Schneiden summarisch geprüft wurde, daß man beide einander entgegengerichtet möglichst nahe zusammenbrachte und sodann ihren Abstand mikroskopisch an verschiedenen Stellen ermittelte. Die Ergebnisse paßten im allgemeinen der ganzen Länge von 6 cm nach zu der Hypothese der Geradheit bis auf 0,1 bis $0,2 \mu$ Abweichungen; nur in den letzten 2 Millimetern an einer Seite gab es Abweichungen bis zu 3μ im Sinne einer Konvexität, die ganz unschädlich sind.

Bei den Messungen ist auf den Umstand geachtet, daß man an den eingestellten Schneiden mangels einer Teilung nicht den Gang der Mikrometerschrauben bestimmen kann. Ist jedoch der Komparator gut justiert und sorgt man dafür, daß die Schneiden in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheinen (deutlich werden sie ja so wie so sein), so ist der mögliche Fehler unerheblich.

§ 8. **Die Maßstäbe.** Die Längeneinheit der Tabelle 5, Rubrik 5, 8 und 11, ist der Meter des benutzten Maßstabes. Es ist dieses, wie schon bemerkt, der mit Rücksicht auf die Messung von $\frac{1}{4}$ m abgeänderte Stab von 1869. Um die Beziehung zu richtigen Metern kennen zu lernen, verglich ich den Stab mit einem von der Firma A. REPSOLD & SÖHNE neuerdings gefertigten Pendelmaßstab von H-förmigem Querschnitt, für welchen die Kaiserliche Normalaichungskommission die Gleichung ermittelte:

$$1 \text{ m des neuen Stabes} = 1^m - 251^{\mu},79 + 18^{\mu},486 T + 0^{\mu},00902 T^2. \quad (9)$$

er, daß die Abstumpfung, auf welcher die Schneide rollt, facettiert ist, und er glaubt, daß er diese Facetten bei doppelseitiger Beleuchtung mit 1200-facher Vergrößerung gesehen habe. Wie dieses zu machen ist, weiß ich nicht, da die Facetten doch nur eine Breite von der Ordnung $0,1 \mu$ haben und Winkel von der Ordnung von $10'$ einschließen können, so daß optische Täuschungen leicht eintreten. Mir scheint, daß wenigstens bei REPSOLD'schen Schneiden nach der Art der Herstellung an eine eigentliche Facettierung der Abstumpfung nicht zu denken ist; bei gleichmäßig beschaffenem Material müßte die Abstumpfung wohl cylindrisch sein; die Diskontinuitäten in der Abnahme von α erklären sich durch einzelne Hervorragungen.

1) Über einen andern Vorschlag von OPPOLZERs zur Ausführung der Längenmessung vergl. seinen Bericht, S. 12 und 13.

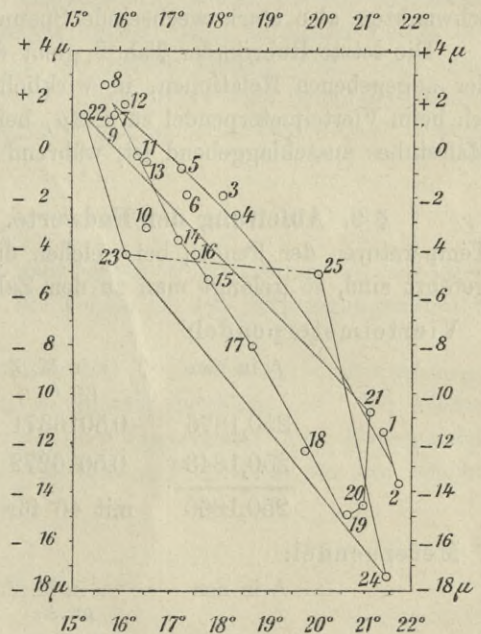
Die Thermometer des neuen Pendelmaßstabes wurden von der Kaiserl. Normalaichungskommission in vertikaler Lage geprüft, während der Maßstab selbst nur in horizontaler Lage untersucht ist, so daß für den Gebrauch in vertikaler Lage zur rechten Seite von (9) eine kleine Korrektur tritt, die noch zu ermitteln sein wird (vergl. Teil III, § 15).

An einem Vormittag oder Nachmittag wurde immer nur eine Vergleichung vorgenommen. Der Vertikalkomparator stand dabei im Pendelsaal. Es erwies sich zweckmäßig, der Reihe nach auf dem alten, dem neuen und nochmals auf dem alten Stab je zweimal hintereinander unten und oben je einen und denselben Strich einzustellen. Der Gang der Mikrometerschrauben wurde durch besondere Messungen an den den Strichen benachbarten Zehntelmillimeter-Intervallen, deren Korrekturen von der genannten Kommission bestimmt waren, ermittelt.

Die folgende Tabelle und die graphische Darstellung geben die unmittelbar gemessenen Unterschiede der Länge von 1,0001 m des neuen und 1 m des alten Stabes, unter Annahme gleicher Temperatur für beide. Nach den Vergleichungen Nr. 1 bis 13 schien nur eine, jedoch auffällige Differenz der Ausdehnungskoeffizienten beider Stäbe zu bestehen; allerdings zeigte Nr. 10 eine starke Abweichung, die aber zweifellos ihren Grund darin hat, daß $\frac{5}{4}$ Stunden vor der Vergleichung der Mechaniker an dem neuen Stab einen Handgriff befestigte, wobei der Stab erwärmt worden sein dürfte. Aber das Ergebnis von Nr. 14 bis 19 zeigt, daß zwischen Nr. 13 und 14 eine sprunghafte Änderung, wahrscheinlich des alten Stabes, vor sich gegangen sein muß.

Alter Pendelmaßstab — Neuer Pendelmaßstab, 1 m.

Nr.	Temper.	Unterschied in μ	Nr.	Temper.	Unterschied in μ
1	21 ⁰ ,40	— 11,5	13	16 ⁰ ,53	— 0,6
2	21,74	— 13,6	14	17,19	— 3,7
3	18,09	— 1,9	15	17,83	— 5,3
4	18,36	— 2,7	16	17,58	— 4,3
5	17,24	— 0,8	17	18,76	— 8,0
6	17,39	— 1,9	18	19,81	— 12,3
7	15,88	+ 1,4	19	20,71	— 14,9
8	15,67	+ 2,6	20	21,01	— 14,5
9	15,79	+ 1,1	21	21,18	— 10,7
10	16,55	— 3,2	22	15,27	+ 1,4
11	16,37	— 0,3	23	16,19	— 4,3
12	16,06	+ 1,9	24	21,58	— 17,4
13	16,53	— 0,6	25	20,02	— 5,1



Am Schlusse von Nr. 19 klopfte ich schwach an den alten Stab, was indessen nach Maßgabe einer sofort erfolgten Ablesung sowie der Vergleichung Nr. 20 wenig Änderung gab. Stärkeres Klopfen nach Beendigung von Nr. 20 gab für Nr. 21 einen stark abweichenden Wert. Endlich wurde noch vor Ausführung von Nr. 23 und Nr. 25 tüchtig geklopft. Das Klopfen löst augenscheinlich gewisse Spannungen (Reibungen) aus, die im alten Maßstab bei Temperaturänderungen wahrscheinlich durch das noch in dem Stab sitzende Metallthermometer entstehen; der Unterschied der

Ausdehnungskoeffizienten beider Stäbe verschwindet dann fast ganz, wie die Lage von Nr. 23 und 25 in der graphischen Darstellung zeigt.

Als Ergebnis habe ich angesetzt, daß bei $17^{\circ},51$ bis $17^{\circ},98$, den Mitteltemperaturen der Schwingungsbeobachtungen und Längenmessungen bei den Beobachtungen am Sekundenpendel, die Beziehung besteht:

$$1 \text{ m am alten Stab} = 1 \text{ m am neuen Stab} + 100^{\mu} - 4^{\mu},5. \quad (10)$$

Es ist sehr wohl möglich, daß bei der Anwendung dieser Gleichung auf die Pendelmessungen selbst im Mittel ein Fehler von mehreren μ bleibt. Den mittleren Fehler schätze ich aber auf nicht über $\pm 3\mu$.

Den Viertelmeter des alten Stabes habe ich zweimal mit jedem der beiden Viertelmeter des neuen Stabes im Vertikalkomparator verglichen und erhielt nach Anbringung der inneren Teilungsfehler bis auf kleine Bruchteile von μ übereinstimmende Resultate. Mit Rücksicht auf (9) folgt für $16^{\circ},43$ (d. i. nach Rubrik 13 der Tab. 5 die mittlere Temperatur des Maßstabes bei den Beobachtungen des Viertelmeterpendels):

$$\text{Viertelmeter des alten Stabes} = 0^m,2500095. \quad (11)$$

Geklopft wurde auch zweimal; würde man nur die entsprechenden Ergebnisse anwenden, so würde statt (11) $0,2500106 \text{ m}$ folgen. Wegen des Einflusses der zufälligen Fehler halte ich die Annahme (11) für besser; auch ist zu bedenken, daß die Vergleichstemperaturen nur zwischen $16^{\circ},8$ und $17^{\circ},9$ schwankten, also stark wechselnde Spannungen kaum anzunehmen sind.

Die letzte Rubrik der Tab. 5 giebt den Abstand der Pendelschneiden, ausgedrückt mit Benutzung der angegebenen Relationen, in wirklichen Millimetern. Den mittleren Fehler dieser Werte nehme ich beim Viertelmeterpendel zu $\pm 2\mu$, beim Meterpendel zu $\pm 3\mu$ an, wobei die Unsicherheit des alten Maßstabes ausschlaggebend ist, während die Beobachtungsfehler mehr zurücktreten.

§ 9. **Ableitung der Endwerte.** Reduciert man die τ der Rubrik 22, Tab. 4, auf diejenigen Temperaturen der Pendel, bei welchen die entsprechenden Längenmessungen, Rubrik 14, Tab. 5, ausgeführt sind, so gelangt man zu den Zahlen der nachstehenden Zusammenstellung:

Viertelmeterpendel:

Λ in mm	τ in M. Z. Sek. gr. A. kl. A.	bei	Mittl. τ	$\Lambda : \tau^2$ in mm
250,1876	0,5016371 6367	$16^{\circ},36$	0,5016369	994,2299
250,1843	0,5016272 6252	16, 70	0,5016262	994,2592
<u>250,1860</u>	mit 46 für 1° red.		<u>0,5016316</u>	<u>994,2446</u>

Meterpendel:

Λ in mm	τ in M. Z. Sek. gr. A. kl. A.	bei	Mittl. τ	$\Lambda : \tau^2$ in mm
1000,2073	1,0028023 8055	$18^{\circ},18$	1,0028039	994,6218
<u>1000,2000</u>	1,0027988 7976	17, 77	<u>1,0027982</u>	<u>994,6259</u>
1000,2037	mit 91 für 1° red.		1,0028011	994,6238.

Die Biegungskorrektion ist bezw. nach S. 14 u. 28 gleich -2^{μ} und -366^{μ} ; die Korrektion wegen Mitschwingens des Stativs wird später (Teil III, § 8) nach den betreffenden Beobachtungen zu $+10^{\mu}$ und $+2^{\mu},5$ berechnet. Damit werden die Werte für $\Lambda : \tau^2$ in mm:

	Viertelmeterpendel $L_{1/4}$	Meterpendel L_1
I.	994,2379	994,2583
II.	994,2672	994,2624
Mittel	<u>994,2526</u>	<u>994,2603</u>

Die I. und II. Werte entsprechen bei beiden Pendeln der gleichen Kombination der Schneiden in Bezug auf den Schwerpunkt.

Für die beiden gleich schweren Pendel kann man nun mit Beachtung der Werte für $h_1 - h_2$ nach S. 47 ansetzen (vergl. auch Teil III, § 13):

$$\begin{aligned}
 L &= 994,2379 \left(1 + \frac{\beta + \delta}{250} + \frac{\Delta\gamma}{76} \right) + v_1 \\
 L &= 994,2672 \left(1 + \frac{\beta + \delta}{250} - \frac{\Delta\gamma}{76} \right) + v_2 \\
 L &= 994,2583 \left(1 + \frac{\beta + \delta}{1000} + \frac{\Delta\gamma}{399} \right) + v_3 \\
 L &= 994,2624 \left(1 + \frac{\beta + \delta}{1000} - \frac{\Delta\gamma}{399} \right) + v_4,
 \end{aligned} \tag{12}$$

worin L die endgültige Länge des mathematischen Sekundenpendels bezeichnet und $\beta + \delta$ und $\Delta\gamma$ von dem konstanten Fehler der Längenmessung und von der Schneidenform, sowie von den elastischen Kräften an der Auflagerungsstelle herrühren, die v aber Verbesserungen wegen zufälliger Fehler bedeuten. Die beiden ersten Gleichungen geben $1000 \Delta\gamma = 1,12$, die beiden letzten $0,82$. Legt man den ersten das Gewicht $\frac{1}{4}$ der letzten bei, so folgt $\Delta\gamma = 0,0011$; dieser Wert wird jedenfalls nahezu der beste sein. Es wird nun $\beta + \delta = +0,0026$, $L = 994,2629$ und $v_1 = +0^a,1$, $v_2 = -0^a,2$, $v_3 = -0^a,8$, $v_4 = +0^a,7$.

Als Ergebnis folgt somit

$$L = 994,263 \text{ mm.} \tag{13}$$

Die Sicherheit dieses Wertes kann nicht nach der zufällig sehr guten Übereinstimmung der vier Gleichungen für L beurteilt werden. Man muß hierzu auf die Fehler in den Schwingungszeiten τ und in den Schneidenabständen Λ zurückgehen.

Der m. F. eines einzelnen τ ist nach S. 49 zu ± 23 Einh. der 7. Decimalstelle anzunehmen; im Mittel für große und kleine Amplituden würde $\pm 23/\sqrt{2}$ zu günstig geschätzt sein. Ich nehme ± 18 an. Der m. F. eines Λ wurde S. 54 zu $\pm 2\mu$ bzw. $\pm 3\mu$ fürs Viertelmeter- und Meterpendel angenommen. Dies gibt für die beiden ersten Gleichungen (12) den m. F. $\pm 11\mu$, für die beiden letzten $\pm 5\mu$ und für das Endergebnis

$$\pm \sqrt{\frac{5^2 \cdot \frac{16}{9} + 11^2 \cdot \frac{1}{9}}{2}}, \text{ d. i. } \pm 5\mu.$$

Hierzu treten noch $\pm 15 \times \frac{4}{3} = \pm 20\mu$ m. F. wegen der Unsicherheit in der Berechnung des Biegungseinflusses für das lange Pendel, außerdem kleine, bisher nicht in Rechnung gezogene Einflüsse verschiedener Dehnung der Pendelkörper bei den beiden Lagen des schweren Gewichtes (vergl. Teil III, § 16), sowie der Einfluß der Dehnung des neuen Maßstabes bei seiner Benutzung in vertikaler Stellung.

Im Ganzen haftet somit an dem Werte (13) für L etwa ein mittlerer Fehler von rund

$$\pm 0,020 \text{ mm.} \tag{13*}$$

III. Verschiedene Beiträge zur Theorie.

§ 1. **Vorbemerkungen.** Es ist allgemein bekannt, daß das Reversionspendel den hohen Grad seiner Vollkommenheit als Messinstrument durch die von BESSEL eingeführten Verbesserungen der Theorie und Konstruktion erlangt hat. Er zeigte namentlich, daß in der Formel für die Schwingungszeit nicht nur beim statischen Moment der schwingenden Masse der Auftrieb der Luft zu berücksichtigen sei, wie es schon vor ihm geschehen, sondern daß auch beim Trägheitsmoment der mitgeführten Luftmenge Rechnung getragen werden müsse. Er zeigte dann weiter, daß die Einwirkung der Luft vollständig beseitigt werden kann, wenn die äußere Figur des Pendels völlig symmetrisch zu beiden Schneiden ist (sowie zur gemeinsamen Vertikalebene beider Schneiden). Er lehrte ferner den Einfluß der Schneidenfigur genauer als bisher kennen und lehrte ihn durch Schneidenvertauschung zu eliminieren. Endlich untersuchte er auch den Einfluß der kleinen Bewegungen der Schneide auf der Unterlage. Seine auf das Reversionspendel bezüglichen Ausführungen sind in den Art. 24—31 seiner „*Untersuchungen*“ enthalten, wozu noch wegen weiterer Ausführungen verschiedene Beilagen treten (besonders VI, IX und X) und, wegen der allgemeinen Theorie, Art. 13.

Oberst DEFFORGES war es vorbehalten, durch Einführung der von BESSEL schon beim Gebrauch des Fadenpendels angewandten Differenzenmethode eine weitere wesentliche Vervollkommnung zu erzielen, indem er zwei Pendel von gleichem Gewicht aber von verschiedener Länge und mit denselben Schneiden benutzte. Hierdurch werden die konstanten Fehler der Längenmessung und der Einfluß der Bewegung der Schneide auf der Unterlage, sowie der Einfluß der Bewegung der Unterlage selbst vollständig eliminiert. DEFFORGES zeigte auch, daß durch Vertauschung des schweren und leichten Gewichts der Einfluß einer etwa vorhandenen Unsymmetrie in der Beschaffenheit der Pendeloberfläche auf das Endergebnis beseitigt werden kann, wenn die Gewichte im Innern eines äußeren Mantels des Pendels angebracht werden.

Bei meinen Versuchen habe ich die Methode von DEFFORGES bezüglich der Anwendung zweier Pendel von gleichem Gewicht angenommen und deren Längenunterschied möglichst groß gestaltet, um die Genauigkeit des Endergebnisses zu erhöhen. Weiterhin kam dann die Berücksichtigung des Einflusses der Biegung des Pendelkörpers hinzu. Versuche über die Einwirkung der erdmagnetischen Kraft, die schon BESSEL für nötig hielt, sind auf meine Veranlassung auch angestellt worden und haben gezeigt (wie nach einer mir mündlich von HELMHOLTZ erteilten Auskunft zu erwarten war), daß diese Einwirkung auf die Länge des mathematischen Sekundenpendels nicht von Belang sein kann und sich nur allenfalls in der Dämpfung der Schwingungen äußern wird. (Näheres hierüber soll an anderer Stelle mitgeteilt werden.)

Im folgenden kam es mir darauf an, die Formeln für den Gebrauch zusammenzustellen und die Theorie in einigen Punkten zu erörtern, u. a. hinsichtlich der Lage der Schneiden gegen die drei Hauptträgheitsachsen des Pendels und gegen die Vertikale, in welcher Beziehung (wie mir scheint) wenigstens in deutscher Sprache eine Lücke in den bekannten Veröffentlichungen besteht. Außerdem

habe ich das Wippen behandelt und die Ansichten über das Gleiten der Schneide auf der Unterlage beleuchtet und in möglichst vollständiger Weise bei der Aufstellung der Endformeln berücksichtigt. Endlich habe ich mehrere kleine Korrekturen abgeleitet, und ich glaube in Bezug auf die Längenmessung an Achatschneiden eine Aufklärung erzielt zu haben.

§ 2. **Der Einfluss der umgebenden Luft.** Für ein physisches Pendel, das in der Luft um eine geradlinige, horizontale, scharfe Schneide schwingt, ist die äquivalente mathematische Länge

$$l' = \frac{J_0 + Mh^2 + M_l K}{Mh - M_l h_l} = l \left\{ 1 + \frac{M_l}{M} \left(1 + \frac{M_l h_l}{M h} \right) \frac{K + h_l l}{h l} + \dots \right\}, \quad (1)$$

worin M die Masse, J_0 das Trägheitsmoment für eine zur Drehungsaxe parallele Gerade durch den Schwerpunkt, h der Abstand des Schwerpunkts von der Drehungsaxe, M_l die Masse der verdrängten Luft und h_l der Abstand des Volumenschwerpunkts von der Drehungsaxe, endlich K eine von der Figur des Pendels (sowie ein wenig vom Ausschlag α) abhängige Gröfse ist. Bei der Ableitung des zweiten Ausdrucks wurde $J_0 + Mh^2 = Mhl$ gesetzt.

Die Ableitung des Zusatzgliedes $M_l K$ in Art. 13 seiner „*Untersuchungen*“ ist BESSEL nicht ganz einwandfrei gelungen. Es stammt in der Ausgangsgleichung für die lebendige Kraft des Systems her von $\int v^2 dm'$, wo v die Geschwindigkeit eines Luftteilchens dm' ist und die Integration über die bewegte Luftmasse ausgedehnt werden mufs. Er setzt nun dies Integral proportional m' , welches Symbol weiterhin aber (ebenso wie schon vorher) auf die Masse der verdrängten Luft bezogen wird, so dafs es unbestimmt bleibt, ob BESSEL dabei nicht eine Verwechslung untergelaufen ist. Wenn trotzdem allgemein die neue Formel für l' angenommen wird, so liegt dies daran, dafs schon BESSEL selbst ihre praktische Brauchbarkeit durch Versuche erwiesen hat. Ausserdem kommt bei der Theorie des Reversionspendels unter gewissen Voraussetzungen über die Schwingungen auf die Gestalt des Zusatzgliedes nichts an.

In dieser Hinsicht ist es auch nicht von Bedeutung, dafs die Abtrennung des Faktors M_l nicht ganz korrekt ist, indem DEFFORGES in Anlehnung an die Theorie von STOKES keine einfache Proportionalität mit der Dichtigkeit der Luft fand (*Observations du pendule*, p. 8, 9, 61).

BESSEL setzt bei seiner Entwicklung voraus, dafs die äufsere Figur des Pendels symmetrisch zu der Ebene durch Schneide und Schwerpunkt sei. Da dies wohl immer genügend erfüllt sein wird, ist die Frage nach dem Einfluss einer Abweichung von der Symmetrie von geringer Bedeutung.

Für ein Reversionspendel seien nun die auf Amplitude null reducierten Schwingungszeiten bei schwerem Gewicht unten und oben gleich T_1' bzw. T_2' ; dann ist nach (1) wegen $l' = \frac{g}{\pi^2} T'^2 = T'^2 L$:

$$T_1'^2 L (Mh_1 - M_l h_l) = J_0 + Mh_1^2 + M_l K \quad (2)$$

und

$$T_2'^2 L (Mh_2 - M_l h_l) = J_0 + Mh_2^2 + M_l K.$$

Damit diese beiden Gleichungen zusammen bestehen können, müssen vor allem beide Schneiden parallele Gerade sein, weil sonst die beiden J_0 verschiedene Werte annehmen können; ferner mufs die äufsere Figur derartige Symmetrie besitzen, dafs das Umhängen in den Schneiden an der äufseren Erscheinung nichts ändert. Dazu gehört, dafs sowohl der Massenschwerpunkt wie der Volumenschwerpunkt in der gemeinsamen Ebene beider Schneiden liegt, und dass bei hängendem Pendel eine Horizontalebene durch den Volumenschwerpunkt Symmetrieebene der Figur ist.

Auch die Oberflächenbeschaffenheit mufs an dieser letzten Symmetrie teilnehmen. Endlich wird gleiche Luftbeschaffenheit und gleiche Temperatur des Pendels sowie annähernd gleicher Aus-

schlag für die zu beiden Gleichungen gehörenden Beobachtungen vorausgesetzt. Von der ungleichen Dehnung infolge der verschiedenen Lage der Gewichte in beiden Fällen wird vorerst abgesehen (vergl. § 16).

Aus (2) folgt durch Elimination von $J_0 + M_i K$, wenn gesetzt wird

$$h_1 + h_2 = \Lambda \quad \text{und} \quad \frac{T_1'^2 h_1 - T_2'^2 h_2}{h_1 - h_2} = \tau'^2, \quad (3)$$

dafs

$$L = \frac{\Lambda}{\tau'^2} \left\{ 1 + \frac{T_1'^2 - T_2'^2}{\tau'^2} \frac{h_1}{h_1 - h_2} \frac{M_i}{M} \right\}. \quad (4)$$

Meistens sind T_1' und T_2' so nahe einander gleich, dafs das zweite Glied völlig bedeutungslos ist. Kann man aber

$$L = \frac{\Lambda}{\tau'^2} \quad (4^*)$$

setzen, so genügt auch die aus (3) folgende Näherungsformel:

$$\tau' = T_1' + \frac{T_1' - T_2'}{h_1 - h_2} h_2. \quad (3^*)$$

Andernfalls muß überhaupt von (4) Gebrauch gemacht werden, was indessen erst nötig wird, wenn T_1' und T_2' um mehr als $\frac{1}{5000}$ ihres Wertes voneinander abweichen. Λ ist der Schneidenabstand, da zufolge der Voraussetzungen h_1 und h_2 eine gerade Linie bilden.

Aus den (2) folgt noch:

$$2(J_0 + M_i K) = (T_1'^2 h_1 + T_2'^2 h_2) M L - (T_1'^2 + T_2'^2) M_i h_i L - M(h_1^2 + h_2^2). \quad (5)$$

Ist nun nahezu $T_1' = T_2' = \tau'$ und also $L = \Lambda : \tau'^2$, so folgt daraus

$$J_0 + M_i K = M h_1 h_2 - M_i h_i \Lambda. \quad (5^*)$$

Diese Gleichung ist aber nicht so genau wie (4*) und selbst bei geringen Ungleichheiten von T_1' und T_2' nur als Näherungsformel aufzufassen.

Wird die strenge Gleichheit der Werte $J_0 + M_i K$ für beide Gleichungen (2) nicht erfüllt, bleibt aber genügend genau $\Lambda = h_1 + h_2$, so tritt rechter Hand in der Gleichung (4) für L der Ausdruck

$$+ \frac{(J_0 + M_i K)_1 - (J_0 + M_i K)_2}{\tau'^2 \cdot M(h_1 - h_2)}$$

hinzu, wofür, wenn mit Benutzung von (5*) im Nenner $J_0 = M h_1 h_2$ angenommen wird, näherungsweise gesetzt werden kann:

$$+ L \cdot \frac{(J_0 + M_i K)_1 - (J_0 + M_i K)_2}{J_0} \cdot \frac{h_1 h_2}{h_1^2 - h_2^2}. \quad (6)$$

Es ist nun keineswegs ohne weiteres klar, dafs dieser Ausdruck ein so hinreichend kleiner Bruchteil von L ist, um ihn vernachlässigen zu können. Die Differenz $(J_0)_1 - (J_0)_2$ darf zu dem Zwecke ein Milliontel von J_0 nicht überschreiten, ebensowenig wie $(M_i K)_1 - (M_i K)_2$. Für ersteres ist zu untersuchen, welche Abweichung vom Parallelismus der beiden Schneiden zulässig ist, für letzteres, welche Abweichung von der Symmetrie der Pendelfigur. Hierzu gehe ich im folgenden über.

§ 3. **Parallelismus der Schneiden.** Um den Quotienten $\{(J_0)_1 - (J_0)_2\} : J_0$, welcher infolge des nicht hinreichend genauen Parallelismus der Schneiden von Bedeutung werden kann, zu schätzen, nehme ich die drei Hauptträgheitsachsen des Pendels als Koordinatenachsen für x , y und z , und zwar soll

die x -Axe der Längsaxe des Pendels, die z -Axe der Schneidenrichtung annähernd entsprechen¹⁾. Sind nun A, B, C die entsprechenden Hauptträgheitsmomente und α, β, γ die Neigungswinkel einer der beiden Schneiden gegen die Koordinatenachsen, so ist das Trägheitsmoment für eine Axe durch den Schwerpunkt parallel zu dieser Schneide

$$J_0 = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma.$$

Der Natur der Sache nach ist A viel kleiner als B und C , die nahezu gleich sein werden, besonders bei den Repsoldschen Pendeln, welche, abgesehen von den Schneiden und den zur Montierung derselben dienenden Teilen, Rotationskörper sind. Außerdem sind bei einiger Sorgfalt der Herstellung die Winkel

$$\alpha - 90^\circ = \alpha' \quad \text{und} \quad \beta - 90^\circ = \beta'$$

kleine Winkel. Da nun noch $\cos^2 \gamma = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$ ist, so folgt

$$J_0 = C - (C - A) \sin^2 \alpha' - (C - B) \sin^2 \beta'.$$

Die Anwendung dieser Gleichung auf beide Schneiden, wobei an J_0, α' und β' die Indices 1 und 2 anzubringen sind, führt zu

$$(J_0)_1 - (J_0)_2 = (C - A) (\sin^2 \alpha'_2 - \sin^2 \alpha'_1) + (C - B) (\sin^2 \beta'_2 - \sin^2 \beta'_1).$$

Da bei hängendem Pendel die x -Axe sehr nahe vertikal ist, so kann man

$$\alpha'_2 - \alpha'_1 = \nu, \tag{7}$$

der Differenz der Neigungen beider Schneiden gegen die Horizontale setzen. Ebenso kann man

$$\beta'_2 - \beta'_1 = \kappa, \tag{8}$$

dem Kreuzungswinkel der Schneiden, d. i. ihrem Zwischenwinkel von oben gesehen, setzen.

Da im Nenner des Quotienten die Annahme $J_0 = C$ genügt, wird somit in hinreichender Annäherung

$$\frac{(J_0)_1 - (J_0)_2}{J_0} = \frac{C - A}{C} \sin 2\alpha'_m \sin \nu + \frac{C - B}{C} \sin 2\beta'_m \sin \kappa, \tag{9}$$

worin α'_m und β'_m die Mittelwerte von beiden α' bezw. β' bezeichnen.

Über den Betrag von $2\alpha'_m$ orientiert eine Umhängung des Pendels, bei welcher die „Firma“ einmal vorn, einmal hinten ist, und bei welcher am unteren Ende des Pendels beobachtet wird, ob durch das Umhängen eine Verschiebung in der Vertikalebene der Schneide eintritt. Ist eine solche nicht da, so steht die in dieser Ebene vom untern Ende nach der Schneide gezogene Mittellinie normal auf der Schneide, eine Abweichung aber charakterisiert $2\alpha'_m$, vorausgesetzt, daß diese Mittellinie den Schwerpunkt genau durchschneidet.

Bestehen Bedenken in dieser Hinsicht, so muß das Pendel möglichst nahe der Mitte der Schneide auf einer passenden Queraxe aufgehängt werden, wobei dann wieder die Lage des untern Pendelendes zu beobachten sein wird. Als Queraxe wurden die seitlichen Zapfen an den Schneidenhaltern benutzt, auf welchen das Pendel zunächst ruht, wenn es eingehängt wird. Die Zapfen befinden sich bis auf Zehntelmillimeter in der Mitte der Schneidenfassungen und der Schneiden selbst.

1) VON OPPOLZER streift in seinem *Bericht* von 1883, S. 9 und 45, die Theorie der Axenfehler des Pendels und weist auf LUBBOCK'S Aufsatz: *On the pendulum* (Phil. Transact. 1830, I, p. 201—208) hin, worin zum ersten Male eine mathematische Entwicklung dafür gegeben ist.

Eine solche hat auch LORENZONI in seinen *Relazione* von 1888, p. 105—112; es scheint aber, daß man im allgemeinen derartige Erwägungen zu sehr vernachlässigt hat.

Die Versuche der ersten Art am neuen Pendelapparat des Geodätischen Institutes ergaben beim kleinen Pendel 0,3 mm, beim langen 0,7 mm Ausschlag; die der zweiten Art bzw. 0,4 und 0,5 mm. Somit darf man wohl annehmen, daß beim langen Pendel $\sin 2\alpha'_m$ höchstens etwa vom Betrage $\frac{1}{500}$ ist, beim kurzen Pendel etwa $\frac{1}{250}$. Da nun $(C - A) : C$ sehr nahe gleich eins ist, muß ν in dem ungünstigeren Falle des kurzen Pendels kleiner als 50'' sein, damit das erste Glied rechter Hand in (9) ein Milliontel nicht erreicht. Beim langen Pendel genügt $\nu < 100''$.

Um ν zu ermitteln, wurde das Lager nivelliert, das Pendel eingehängt und auf die untere Schneide eine kleine Röhrenlibelle mit Fußplatte und Querniveau gebracht. Außerdem wurde festgestellt, daß die Pendel durch ihr Gewicht die Konsole des Komparators um etwa 7'' neigen. Selbstverständlich wurde die Längsrichtung der Libelle möglichst genau in die Schneidenrichtung gebracht. Für die bei den vorliegenden Pendelmessungen benutzte Anordnung der Schneiden zur „Firma“ fand sich $\nu = 2/3$ Min. für beide Pendel. Bei anderen Anordnungen ist ν kleiner und nur etwa 0,2. Zufälligerweise war gerade die ungünstigste Kombination gewählt worden. Zum Glück ist auch bei ihr ν noch klein genug.

Jedenfalls überschreitet das erste Glied rechter Hand in (9) für beide Pendel den Betrag von ein Milliontel nicht. Es bleibt nun noch zu zeigen, daß das zweite Glied ebenfalls unter ein Milliontel bleiben wird. Allerdings ist κ erheblich größer als ν . Dies ergab sich sowohl durch Visieren längs der innern Flächen der Schneidenhalter nach einer etwa 15 m entfernten Wand bei vertikaler Pendelhaltung, wie durch Nivellieren mittelst einer Libelle bei horizontal aufgelegtem Pendel. Für das kurze Pendel ist hiernach $\sin \kappa$ nahezu $\frac{1}{170}$, für das lange Pendel etwas kleiner, etwa $\frac{1}{250}$.

Hierbei ist angenommen, daß beide Schneiden in die Mitten ihrer Fassungen gebracht werden. Unter dieser Annahme kann nun $2\beta'_m$ kaum 1° , $\sin 2\beta'_m$ also rund kaum $\frac{1}{60}$ erreichen; denn man wird sogar annehmen dürfen, daß die Hauptaxe C eine zu den Richtungen beider Schneiden annähernd mittlere Lage hat, wenn das Pendelmaterial einigermaßen homogen ist und die Schneidenhalter nahezu symmetrisch zu den Hauptebenen bearbeitet sind. Voraussichtlich beträgt daher $2\beta'_m$ nur Zehntelgrade; da jedoch hierbei einige Unsicherheit bleibt, habe ich 1° angesetzt, was auf alle Fälle ausreichen dürfte.

Um nun eine Vorstellung von dem Betrage von $(C - B) : C$ zu gewinnen, ist zu beachten, daß $C - B$ hauptsächlich von den beiden starken rechteckigen Rahmen bedingt wird, welche sich nahe an den beiden Schneiden befinden. Eine leichte Schätzung zeigt, daß $(C - B) : C$ den Betrag von $\frac{1}{100}$ nicht entfernt erreicht, und daß daher unter Annahme der vorher festgestellten Werte von $\sin \kappa$ und $\sin 2\beta'_m$ das zweite Glied rechter Hand kleiner als ein Milliontel bleibt.

Dieses letzte Verhalten würde fraglich sein für den Fall, daß die Schneiden in den Haltern zwar annähernd parallel, aber nicht in die Mitte derselben, sondern schief eingesetzt würden, was wegen starken Spielraumes möglich ist. Alsdann könnte $\sin 2\beta'_m$ auf $\frac{1}{14}$ steigen.

§ 4. **Symmetrie der äußeren Form.** Nächst genügendem Parallelismus der Schneiden ist für ein gutes Reversionspendel eine solche Symmetrie der äußern Form in Bezug auf die Aufhängung an beiden Schneiden erforderlich, daß man $\Lambda = h_1 + h_2$ und $\{(M_t K)_1 - (M_t K)_2\} : J_0$ in (6) kleiner als ein Milliontel annehmen darf.

Für den Ansatz $\Lambda = h_1 + h_2$ ist es erforderlich, daß beide Schneiden genügend vertikal unter einander hängen; ist außerdem ν kleiner als $1'$ und das belastete Lager bis auf wenige Sekunden horizontal, wie bei meinen Versuchen, so gilt die Relation. Über das Bestehen der ersten Bedingung klärte der schon früher besprochene Umhängungsversuch mit Verwechslung der Lage der „Firma“ gegen die Himmelsrichtung auf; außerdem würde eine Abweichung im berichtigten Vertikalkomparator

fühlbar geworden sein, falls nur die Teilstrichebenen am oberen und unteren Ende des Maßstabes vertikal über einander liegen, was durch die Bearbeitung bis auf wenige Zehntelmillimeter gesichert ist.

Ist die Abweichung am unteren Ende, reduciert auf den Abstand Λ der unteren Schneide von der oberen, beim Umhängen $2e$ und ist das schwere Gewicht oben (bei welcher Lage die Abweichung am größten wird), so tritt an Stelle der Gleichung $h_1 + h_2 = \Lambda$ die Näherungsrelation:

$$h_1 + h_2 = \Lambda \left\{ 1 + \frac{h_2}{2h_1} \left(\frac{e}{\Lambda} \right)^2 \right\}. \quad (10)$$

Beim kurzen Pendel genügt es, wenn $2e$ den Betrag von 1 mm nicht überschreitet; er betrug aber nur Zehntelmillimeter und war nicht sicher zu erkennen; beim langen Pendel betrug $2e$ anscheinend nur 0,1 mm, war also jedenfalls genügend klein.

Es möge hier noch bemerkt werden, daß das belastete Lager bei den im II. Teile besprochenen Schwingungsbeobachtungen in der Richtung der Schneide 12° Neigung hatte, was aber in keiner Beziehung einen nennenswerten Fehler geben kann. (In der Querrichtung war das Lager auch genügend horizontal).

Was nun den Quotienten $\{(M_i K)_1 - (M_i K)_2\} / J_0$ anlangt, so verschwindet derselbe vollständig, wenn die Beobachtungen bei vertauschten Gewichten wiederholt werden und die Gewichtsvertauschung wie bei DEFFORGES im Innern des Pendelmantels erfolgt. Nicht ganz so günstig ist die im vorliegenden Falle befolgte Methode, daß die Gewichtskörper an den Enden des Pendelkörpers angeschraubt sind und durch Umschrauben vertauscht werden müssen. Abmessungen zeigten jedoch, daß bei dem kurzen Pendel die äußeren Figuren der Gewichtskörper kaum um 0,1 mm in den Dimensionen von einander abweichen; beim langen Pendel scheinen zwar die Stangen der Gewichtscylinder sowie deren Durchmesser um 0,1 bis 0,2 mm verschieden zu sein, indessen hat dies auch noch keinen schädlichen Einfluß. Die Oberflächenbeschaffenheit der Gewichtskörper ist als genügend gleich zu erachten.

Bei den Beobachtungen an REPSOLDSchen Pendeln mit hohlen Rohren sind wohl in der Regel die Gewichte nicht vertauscht worden. Da aber diese hohlen Rohre eine Luftmenge nach Maßgabe ihres äußeren Durchmessers bewegen, so kann hier der in Rede stehende Quotient bei sehr kleinen Unregelmäßigkeiten der Form des Pendels merklich werden.

Nehmen wir für ein Sekundenpendel $M = 6$ kg, $h_1 = 6,83$ cm, $h_2 = 3,17$ cm; ferner sei der äußere Rohrdurchmesser 0,43, die ganze Rohrlänge 12,26, der Mittelpunktsabstand der Gewichte von den Schneiden 0,8, ihr Durchmesser 1,15 und ihre Höhe (in Richtung der Rohrxaxe) 0,34 cm. Dann ist das Trägheitsmoment des der äußeren Begrenzung des Pendels entsprechenden Luftmasse in Bezug auf eine Schneide rund $\frac{1}{1000}$ von J_0 . Da nun nach den Beobachtungen an massiven Pendeln $M_i K$ von der Ordnung des Trägheitsmoments der Luftmasse ist, welche der äußeren Begrenzung des Pendels entspricht — annähernd können wir beide gleich groß nehmen — so würde somit im jetzt besprochenen Falle $M_i K / J_0$ etwa $\frac{1}{1000}$ sein.

Der Unterschied der beiden Werte dieses Quotienten für beide Lagen des schweren Gewichts kann nun allein schon durch Ungleichheiten des Rohrdurchmessers von 0,1 mm recht wohl auf 5 Milliontel steigen, was ebenso vielen Bruchteilen Fehler in L entsprechen würde.

Hiernach wird es geboten sein, bei gegebenen Pendeln mit *nicht* vertauschbaren Gewichten dieser Fehlerquelle Beachtung zu schenken, neue Pendel aber immer mit vertauschbaren Gewichten auszurüsten. (Es hat sich übrigens herausgestellt, daß auch bei den Repsoldschen Pendeln mit hohlen Rohren die Gewichtsvertauschung möglich ist).

§ 5. **Abrollen der Schneide auf dem Lager.** Den Einfluß der Abstumpfung der Schneiden hat bekanntlich BESSEL in den Art. 25—27 und der Beilage IX seiner „*Untersuchungen*“

eingehend behandelt und nachgewiesen, daß beim Reversionspendel der Einfluß auf das Ergebnis für L im Mittel aus Beobachtungen verschwindet, bei denen die Schwingungen für schweres Gewicht unten und oben um jede der beiden Schneiden erfolgen.

Für die Schwingungen um die einzelne Schneide ist nach ihm die durch die Abstumpfung gestörte mathematische Länge

$$l' = l \left(1 - \frac{bq}{h} \right), \quad (11)$$

worin bezeichnet l die ungestörte mathematische Länge für ideelle Schwingungen um den Scheitel der Schneide, der sich in der Ruhelage senkrecht über dem Schwerpunkte im Abstände h befindet, b die Breite der Abstumpfung und q einen von deren Form abhängigen Koeffizienten. Die Entwicklung dieses Ausdruckes erfolgt unter der Voraussetzung, daß die Schneide von einem stetig gebogenen Cylindermantel begrenzt wird, dessen Querschnitt ein Kegelschnitt ist, der in der Ruhelage von der horizontalen Auflagefläche im Scheitel berührt wird. Der Ausdruck gilt auch noch für eine ebene, im Ruhezustande horizontale Abstumpfung, wie man natürlich auch direkt nachweisen kann. Außerdem kann man aus BESSELS Entwicklungen entnehmen, daß beim Reversionspendel die Elimination des Einflusses der Abstumpfung auf L durch Schneidenvertauschung nicht an eine besondere Form der Schneide geknüpft ist, sondern so gut wie allgemein stattfindet. Dieses soll hier in etwas modificierter Darstellung gezeigt werden, immer unter Annahme stetiger Biegung des die Schneide begrenzenden Cylindermantels, oder anders gesagt: unter der Voraussetzung, daß die Schneide nicht facettiert ist, also der Cylindermantel keine ebenen Streifen hat. Von der umgebenden Luft wird abgesehen, da der Einfluß der durch sie bewirkten Dämpfung der Schwingungen auf die Abwicklung nicht wesentlich ist.

Um eine Integration zu sparen, kann man nun mit BESSEL vom Prinzip der lebendigen Kraft ausgehen, welches unter der gemachten Voraussetzung gilt; darnach muß sein $\frac{1}{2} \int v^2 dm = V + \text{const.}$, worin v die Geschwindigkeit des Massenteilchens dm bezeichnet, die Integration über das Pendel erstreckt werden muß und V das Potential der Schwerkraft ist. Zunächst soll jedoch von diesem Prinzip kein Gebrauch gemacht werden.

Ich setze die Schneide vorerst als starr, die Auflagefläche als eine horizontale Ebene voraus. Der Anfangspunkt O eines festen, rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen x -Axe vertikal und dessen y -Axe horizontal in der Schwingungsebene des Schwerpunkts G liege, sei im Scheitel der Schneide bei der Ruhelage des Pendels. Dagegen seien die Koordinaten dieses Scheitels O'' bei der Elongation Θ der Linie $O''G$ gleich x_0 und y_0 . Dann ist für das Teilchen dm mit dem Abstand r von O'' in der Neigung $\Theta + \varphi$ gegen die x -Axe:

$$x = x_0 + r \cos(\Theta + \varphi), \quad y = y_0 + r \sin(\Theta + \varphi).$$

Also ist

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d^2 x_0}{dt^2} - r \cos(\Theta + \varphi) \left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2 - r \sin(\Theta + \varphi) \frac{d^2 \Theta}{dt^2}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{d^2 y_0}{dt^2} - r \sin(\Theta + \varphi) \left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2 + r \cos(\Theta + \varphi) \frac{d^2 \Theta}{dt^2}. \end{aligned}$$

Die vertikalen und horizontalen Komponenten der verlorenen Kraft am Teilchen dm sind ferner bzw. gleich

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} &\left(g - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) dm \text{ mit dem Hebelarm } + y - y_0 \\ &- \frac{d^2 y}{dt^2} dm \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad - x \end{aligned} \right\} \text{für gleichen Drehungssinn,}$$

wobei als Drehungsaxe die Berührungslinie O' der Schneide mit der horizontalen Unterlagsebene angenommen ist, deren Ordinate mit y_0' bezeichnet wurde. Durch diese Annahme verschwindet der Einfluß der Reaktion der Unterlage, insofern sie den Hebelarm null hat. Weiterhin ist zu beachten, daß die folgenden drei Relationen bestehen:

$$\int r \sin \varphi \, dm = 0, \quad \int r \cos \varphi \, dm = Mh, \quad \int r^2 \, dm = Mhl,$$

wobei die Integrationen sich auf den ganzen Pendelkörper beziehen und l die ungestörte mathematische Länge bei Drehung im luftleeren Raum um die Axe O bezeichnet.

Die Summe der Drehungsmomente wird damit gleich dem Produkte aus Mh in den Ausdruck:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\Theta}{dt^2} (l + x_0 \cos \Theta + (y_0 - y_0') \sin \Theta) - \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 (x_0 \sin \Theta - (y_0 - y_0') \cos \Theta) \\ & - \frac{d^2x_0}{dt^2} \left(\sin \Theta + \frac{y_0 - y_0'}{h}\right) + \frac{d^2y_0}{dt^2} \left(\cos \Theta + \frac{x_0}{h}\right) + g \sin \Theta + g \frac{y_0 - y_0'}{h}. \end{aligned}$$

Dies muß gleich null sein.

Sind die Koordinaten des Punktes O' in Bezug auf GO'' als Abscissenaxe und O'' als Anfang gleich ξ und η , so ist

$$\begin{aligned} x_0 &= \xi \cos \Theta - \eta \sin \Theta & \xi &= x_0 \cos \Theta + (y_0 - y_0') \sin \Theta \\ y_0 - y_0' &= \xi \sin \Theta + \eta \cos \Theta & \eta &= -x_0 \sin \Theta + (y_0 - y_0') \cos \Theta \\ \xi^2 + \eta^2 &= x_0^2 + (y_0 - y_0')^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Wickelt sich das Bogenelement $d\sigma$ des Schneidenquerschnitts ab, so wird

$$\begin{aligned} d\xi &= d\sigma \sin \Theta & d\eta &= d\sigma \cos \Theta & dy_0' &= -d\sigma \\ dx_0 &= -(y_0 - y_0') d\Theta & dy_0 &= x_0 d\Theta; \end{aligned} \quad (12^*)$$

ferner

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = -(y_0 - y_0') \frac{d^2\Theta}{dt^2} - \frac{d(y_0 - y_0')}{d\Theta} \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2, \quad \frac{d^2y_0}{dt^2} = x_0 \frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{dx_0}{d\Theta} \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2.$$

Damit giebt die gleich null gesetzte Summe der Drehungsmomente:

$$\left(l + \frac{2\xi h + \xi^2 + \eta^2}{h}\right) \frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{d(2\xi h + \xi^2 + \eta^2)}{2h d\Theta} \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 + g \left(\sin \Theta - \frac{dx_0}{h d\Theta}\right) = 0, \quad (13)$$

woraus nach Multiplikation mit $d\Theta/dt$ durch Integration folgt:

$$\left(l + \frac{2\xi h + \xi^2 + \eta^2}{h}\right) \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 = 2g \left(\cos \Theta + \frac{x_0}{h}\right) + \text{const.} \quad (14)$$

Zu diesem Ergebnis gelangt man rascher, wenn von der lebendigen Kraft ausgegangen und beachtet wird, daß der Berührungspunkt O' in der Momentanaxe der Drehbewegung liegt. Die lebendige Kraft wird:

$$\frac{1}{2} \int v^2 \, dm = \frac{1}{2} \{Mhl + 2Mh\xi + M(\xi^2 + \eta^2)\} \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2$$

und das Potential der Schwerkraft $V = gM(h \cos \Theta + x_0) + \text{const.}$ Die Gleichsetzung giebt unmittelbar (14). Es ist aber nützlich, auch die vorausgehende Entwicklung zu beachten, da sie von Haus aus als Voraussetzung der Gültigkeit zeigt, daß der Abstumpfungscylinder keine ebenen Streifen haben darf, weil dann bei unendlich kleinem Δt endliche $\Delta \sigma$ einträten.

Linker Hand in (14) kann man $\xi^2 + \eta^2$ vernachlässigen, dann das Glied mit ξ nach rechts nehmen und für $(d\Theta/dt)^2$ die Beziehung der ungestörten Bewegung einführen. Geht die Schwingung

von $-\alpha_1$ bis $+\alpha_2$, so wird an den Grenzen $d\Theta/dt = \text{null}$; ist daselbst x_0 gleich $-a_1$ bzw. $-a_2$, so folgt einerseits

$$\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l} \left\{ (\cos \Theta - \cos \alpha_1) \left(1 - \frac{2\xi}{l}\right) + \frac{x_0 + a_1}{h} \right\},$$

andererseits

$$\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l} \left\{ (\cos \Theta - \cos \alpha_2) \left(1 - \frac{2\xi}{l}\right) + \frac{x_0 + a_2}{h} \right\}.$$

Die erste Gleichung wird man für $\Theta = -\alpha_1$ bis 0, die zweite für $\Theta = 0$ bis $+\alpha_2$ anwenden. Wenn nun $(x_0 + a_1)/h(\cos \Theta - \cos \alpha_1)$ eine kleine Größe ist, deren Quadrat vernachlässigt werden darf, so giebt die erste Gleichung:

$$\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l} (\cos \Theta - \cos \alpha_1) \left\{ 1 - \frac{2\xi}{l} + \frac{x_0 + a_1}{h(\cos \Theta - \cos \alpha_1)} \right\},$$

worin neben der Eins kleine Brüche stehen; es ist dann ausreichend genau bei wachsendem Θ von $-\alpha_1$ bis 0:

$$dt = \frac{d\Theta}{\sqrt{\cos \Theta - \cos \alpha_1}} \cdot \sqrt{\frac{l}{2g}} \left\{ 1 + \frac{\xi}{l} - \frac{x_0 + a_1}{2h(\cos \Theta - \cos \alpha_1)} \right\},$$

und entsprechend mit a_2 und α_2 für Θ von 0 bis $+\alpha_2$.

Dafs $(x_0 + a)/h(\cos \Theta - \cos \alpha)$ eine sehr kleine Größe ist, zeigt sich wie folgt. Nach (12) ist

$$x_0 + a = \xi \cos \Theta - \xi_a \cos \alpha - \eta \sin \Theta + \eta_a \sin \alpha,$$

worin ξ_a und η_a sich auf a beziehen. Nun ist $\xi_a > \xi$, $\eta_a > \eta$, daher

$$x_0 + a < \xi_a(\cos \Theta - \cos \alpha) + \eta(\sin \alpha - \sin \Theta) + (\eta_a - \eta) \sin \alpha.$$

Aus $d\eta = d\sigma \cos \Theta = \rho \cos \Theta d\Theta$ folgt $\eta_a - \eta = \rho_m(\sin \alpha - \sin \Theta)$, worin ρ_m ein gewisser mittlerer Krümmungsradius des Schneidenquerschnitts von Θ bis α ist. Nunmehr ergibt sich leicht

$$\frac{x_0 + a}{h(\cos \Theta - \cos \alpha)} < \frac{\xi_a}{h} + \frac{\eta}{h} \cot \frac{\alpha + \Theta}{2} + \frac{2\rho_m}{h},$$

womit der Nachweis erbracht ist, vorausgesetzt, dafs der Querschnitt keine geraden Stellen, also der die Schneide begrenzende Cylinder keine ebenen Streifen hat.

Bezeichnet man $(\alpha_1 + \alpha_2)/2$ mit α und setzt für ungestörte Schwingungen um den Punkt O mit dem Ausschlag α die Dauer

$$T_\alpha = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{d\Theta}{\sqrt{\cos \Theta - \cos \alpha}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} + \dots\right),$$

so ist nun die gestörte Schwingungsdauer in ausreichender Annäherung mit $T = \pi \sqrt{l/g}$ gleich:

$$T'_\alpha = T \left\{ \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} + \dots\right) + \frac{1}{\pi l \sqrt{2}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\xi d\Theta}{\sqrt{\cos \Theta - \cos \alpha}} - \frac{1}{2\pi h \sqrt{2}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{(x_0 + a) d\Theta}{\sqrt{\cos \Theta - \cos \alpha}} \right\}. \quad (16^*)$$

Ist die Abstumpfung nach einem Kreiscylinder vom Radius ρ erfolgt, so wird

$$x_0 = \rho(\cos \Theta - 1), \quad y_0 = \rho(\sin \Theta - \Theta), \quad \xi = \rho(1 - \cos \Theta), \quad \eta = \rho \sin \Theta.$$

Es folgt alsdann

$$T'_\alpha = T \left\{ 1 + \frac{\alpha^2}{16} + \frac{\rho \alpha^2}{4l} - \frac{\rho}{2h} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right) + \dots \right\} = T_\alpha \left\{ 1 - \frac{\rho}{2h} + \frac{\rho \alpha^2}{4l} + \dots \right\}^1 \quad (17)$$

1) Aus BESSELS Endformeln folgt das in $\rho \alpha^2/h$ multiplizierte Glied anders; es ist aber da ein Rechenfehler vorgekommen.

und also mit Vernachlässigung immer sehr kleiner Glieder, die gestörte mathematische Länge

$$l' = l \left\{ 1 - \frac{\varrho}{h} \right\}. \quad (17^*)$$

Es möge noch bemerkt werden, daß die Gl. (13) in diesem Falle übergeht in:

$$\left\{ l + 2\varrho \left(1 + \frac{\varrho}{h} \right) (1 - \cos \Theta) \right\} \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \varrho \left(1 + \frac{\varrho}{h} \right) \sin \Theta \left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2 + g \left(1 + \frac{\varrho}{h} \right) \sin \Theta = 0,$$

deren erstes Integral ist:

$$\frac{1}{2} \left\{ l + 2\varrho \left(1 + \frac{\varrho}{h} \right) (1 - \cos \Theta) \right\} \left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2 = g \left(1 + \frac{\varrho}{h} \right) \cos \Theta + \text{const.},$$

womit (17) und (17*) bestätigt werden.

Nimmt man ferner an, daß der Krümmungsradius ϱ im Schneidenquerschnitt an einer Stelle, wo die Normale mit GO'' den Winkel φ einschließt, sich in die Reihe

$$\varrho = \varrho_0 + \varrho_1 \varphi + \varrho_2 \varphi^2 + \dots \quad (18)$$

entwickeln lasse, so wird $\xi = \int_0^\Theta \varrho \sin \varphi d\varphi$, $\eta = \int_0^\Theta \varrho \cos \varphi d\varphi$ und

$$x_0 = \varrho_0 (\cos \Theta - 1) - \frac{1}{6} \varrho_1 \Theta^3 - \frac{1}{12} \varrho_2 \Theta^4 - \dots$$

Nach Gl. (16*) tritt daher zu dem T_α' für den Kreiscylinder vom Radius ϱ_0 , indem das Glied mit ϱ_1 verschwindet, noch das Glied hinzu:

$$+ T \cdot \frac{\varrho_2}{24\pi h \sqrt{2}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\Theta^4 - \alpha^4}{\sqrt{\cos \Theta - \cos \alpha}} d\Theta, \text{ d. i. sehr nahe } - T \cdot \frac{\varrho_2 \alpha^2}{8h}.$$

Fügt man dies in (17) rechter Hand hinzu, so folgt dann

$$l' = l \left\{ 1 - \frac{\varrho_0}{h} + \frac{\varrho_0 \alpha^2}{2l} - \frac{\varrho_2 \alpha^2}{4h} + (\alpha^4) + \dots \right\}. \quad (18^*)$$

Es tritt also jetzt in den Ausdrücken für T_α' und l' eine Reihe von Gliedern mit geraden Potenzen von α auf.

Ist die Abstumpfung eine Ebene, die in der Ruhelage horizontal liegt und zu beiden Seiten der Schwerpunktsvertikalen die Breite $b/2$ hat, so ist von $\Theta = -\alpha_1$ bis 0

$$x_0 = + \frac{b}{2} \sin \Theta, \quad y_0 = + \frac{b}{2} (1 - \cos \Theta), \quad \xi = 0,$$

von $\Theta = 0$ bis $+\alpha_2$:

$$x_0 = - \frac{b}{2} \sin \Theta, \quad y_0 = - \frac{b}{2} (1 - \cos \Theta), \quad \xi = 0,$$

und es wird

$$l' = l \left\{ 1 - \frac{2b}{\pi h \alpha} \right\}. \quad (19)$$

Diesen Ausdruck hat BESSEL für die ebene Abstumpfung als Grenzfall einer Abstumpfung mit flach-elliptischem Querschnitt abgeleitet; direkt sind seine Formeln darauf aber nicht anwendbar. Genau genommen ist auch die vorstehende Entwicklung nicht einwandfrei, weil bei einer absolut ebenen Abstumpfung in dem Augenblick, wo das Pendel durch die Vertikale schwingt, ein Aufschlagen auf das Lager erfolgt, was einen Verlust an lebendiger Kraft erzeugt. Jedoch erkennt man die Gültig-

keit von (19) leicht für den Niedergang und Aufgang des Pendels einzeln. Die ebene Abstumpfung würde übrigens einen enormen Einfluß haben, selbst wenn die Breite b nur $0^{\mu},1$ betrüge. Nimmt man, wie bei meinen Messungen, $\alpha = 8'$ und $24'$, also $1/\alpha = 400$ und 134 , so gäbe das bei dem kleinen Pendel einen Unterschied bei schwerem Gewicht oben von rund $l/5000$ in l' , bei dem großen Pendel hiervon immer noch den vierten Teil.

Denkt man sich für ein Reversionspendel nach (16*) die Ausdrücke $T_1'^2$ und $T_2'^2$ entsprechend den Schwingungen bei schwerem Gewicht unten und oben gebildet, und daraus

$$\tau'^2 = (T_1'^2 h_1 - T_2'^2 h_2) : (h_1 - h_2)$$

nach Gl. (3), S. 58, hergeleitet, so ist ersichtlich, daß bei gleicher Schneidenform die von x_0 abhängenden Störungen in τ'^2 verschwinden, wenn gleiche Ausschläge α für beide Gewichtslagen benutzt wurden. Die sehr kleinen Glieder, welche von ξ abhängen, verschwinden allerdings nicht. Aber sie sind bei kleinen Amplituden an sich unmerklich; außerdem verschwinden sie genau bei der Kombination von Beobachtungen an einem langen und einem kurzen Pendel mit denselben Schneiden, insbesondere also auch bei dem Verfahren von DEFFORGES (wo die Pendel außerdem gleiches Gewicht haben).

Die bisher über die Gestalt und Starrheit der Schneide und des Lagers gemachten Voraussetzungen werden in aller Strenge nicht zutreffen. Was zunächst die Ebenheit der Lagerfläche anbelangt, so mag man dieselbe immerhin prüfen, was u. a. geschehen kann durch Auflegen der anderweit auf ihre Geradheit geprüften Schneide aufs Lager und Beobachten der sich etwa zwischen Schneide und Lager zeigenden Lichtlinie (vergl. VON OPPOLZERS *Bericht*, S. 12). Außerdem aber läßt sich erwarten, daß die Reversion mit Schneidenvertauschung auch unter Umständen eine Unebenheit der Lagerfläche eliminiert. Wenn die letzte nämlich die Gestalt einer stetig gebogenen Cylinderfläche hat, so gilt Gl. (14) ohne weiteres, ebenso aber auch Gl. (16*), weil $(x_0 + a)/(\cos \Theta - \cos \alpha)$ wieder eine sehr kleine Größe sein wird, wie dabei vorausgesetzt ist. Damit die Elimination wirklich stattfindet, müßte die Schneide bei beiden Gewichtslagen auf derselben Stelle des Lagers aufliegen. Dies wird im Einzelfalle allerdings kaum zu erreichen sein. Da jedoch die Beobachtungen mehrfach wiederholt werden, wird wenigstens im Mittel der Bedingung annähernd genügt werden. Zustatten kommt hier noch die große Vollkommenheit, mit der ebene Flächen hergestellt werden können.

Die Schneide wird von der bisher angenommenen Cylinderform (stetig gebogen, aber ohne ebene Stellen, doch darf ϱ diskontinuierlich wechseln), besonders im Falle der Verwendung von Achat, durch die Anwesenheit zahlreicher, sehr kleiner Hervorragungen abweichen. Man kann sich zunächst denken, daß die Schneide auf zwei solchen ruht und schwingt, bis eine andere Hervorragung das Lager trifft und mit einer der beiden andern die Drehungsaxe bildet, u. s. f. Damit hätte man ungefähr dasselbe, als wenn die cylindrische Schneide durch Ebenen facettiert wäre; nur würden noch kleine laterale Schwankungen der Schwingungsebene stattfinden, die aber ganz unschädlich sind, da sie nur in der zweiten Potenz einwirken werden. Weit bedenklicher würde die facettenartige Beschaffenheit sein.

Allein dieselbe kommt wahrscheinlich nur gemildert zur Geltung. Die Schneide und das Lager sind elastisch und drücken sich ineinander ein; die Berührung erfolgt also in einer gewissen Breite, und dieser Eindruck verschiebt sich bei der Abwälzung. Der undeformierte Teil der Schneide wird nun im großen und ganzen dieselben Bewegungen machen, als rollte die starre Schneide ab; aber die plötzlichen Übergänge von einer Drehungsaxe zur andern durch successives Berühren der Hervorragungen der Schneide mit dem Lager fallen fort. Ganz einflußlos werden die Unregelmäßigkeiten der Schneide zwar nicht sein, wie die Beobachtung des Ganges der Abnahme der Amplituden mit der Zeit lehrt; denn es hat sich wiederholt in dieser Abnahme eine geringe Diskontinuität gezeigt.

Aber man wird doch erwarten dürfen, daß durch die Deformation die Wirkung der Unregelmäßigkeiten insoweit ausgeglichen wird, um die Gl. (16*) als zu Recht bestehend ansehen zu können.

Da für die Lage des in den mathematischen Betrachtungen auftretenden Punktes O'' , des Scheitels der Schneide im Querschnitt, der undeformierte Teil der Schneide maßgebend ist, so muß man sich also den letzteren zur ursprünglichen Gestalt ergänzt denken, um O'' für diese Betrachtungen zu erhalten. Dies ist praktisch insofern wichtig, als die Längenmessung des Schneidenabstands von den mittleren, undeformierten Schneideteilen, die auf den Ausschnitt des Lagers treffen, ausgeht. Einer Korrektur wegen Zusammendrückens der Schneide bedarf es also nicht, vorausgesetzt, daß die unbelastete Schneide hinlänglich gerade ist.

Damit die Elimination der Schneidenform wirklich erzielt werden kann, ist zu prüfen, ob die Widerlagsflächen der beiden Schneidenhalter in der Richtung quer zu den Schneiden bis auf einige Minuten parallel sind. Denn sonst wird ein und dieselbe Schneide bei schwerem Gewicht unten und oben an verschiedenen Stellen von der Lagerfläche berührt werden. Ist dann nicht zugleich die Krümmung des Schneidenquerschnitts kreisförmig, so ist die Elimination der Schneidenform ganz illusorisch. Bei mehreren REPSOLDSchen Pendeln fand sich indessen der erforderliche Parallelismus bis auf wenige Minuten vor, vermutlich, weil die Herstellung der betreffenden Flächen auf der Drehbank erfolgt.

In dieser Hinsicht ist aber doch die Gewichtsvertauschung durch Umschrauben besser als die Umwechslung der Schneiden. Denn dann ist jene Prüfung überflüssig, insoweit wenigstens als man nur ein Pendel in Betracht zieht. Sie wird nur wieder nötig, wenn man wünscht, daß bei dem langen und bei dem kurzen Pendel dieselben Stellen der Schneiden auf dem Lager zur Wirkung kommen. Man muß dann sogar die Prüfung dahin ausdehnen, ob die Widerlagsflächen bei ruhig hängendem Pendel bis auf einige Minuten horizontal sind.

§ 6. Verschiebungen der Schneide und des Lagers: Vorbemerkungen. Schon BESSEL machte die Wahrnehmung, daß die Bewegung der Schneide auf dem Lager nicht lediglich ein Abrollen ist, sondern daß noch Verschiebungen stattfinden. Er hat dieselben sehr eingehend studiert und nimmt an, daß es sich dabei nicht um ein Überwinden der gewöhnlichen Reibung handelt, sondern um das Nachgeben gegen einen gewissen Widerstand der Unterlage, den diese dem Abrollen entgegensetzt (Art. 30). Denn die Verschiebungen erfolgen nicht in dem Sinne des Überwindens der gewöhnlichen, gleitenden Reibung.

Neuerdings hat DEFFORGES diese Schneidenbewegung als „glissement“ beschrieben. Er nimmt an, daß die Schneide teilweise rollt, teilweise aber gleitet wie ein Zapfen in seinem Lager (*Observations du pendule*, p. 14 u. 15). Geometrisch kommt es auf dasselbe hinaus, ob man vollständiges Abrollen und einfaches horizontales Zurückgleiten annimmt oder teilweises Abrollen und teilweises Drehen wie beim Lagerzapfen, solange das Zurückgleiten nicht größer ist, als das volle Abrollen. Physikalisch aber werden die Erklärungen beider Erscheinungen verschieden ausfallen.

Nicht berücksichtigt hat bekanntlich BESSEL die elastische Bewegung der ganzen Aufstellung der Konsole, des „Stativs“, die durch die Pendelbewegung entsteht. Die Möglichkeit einer solchen Bewegung war ihm sicher nicht unbekannt, nur nahm er wohl an, daß man ebenso wie bei astronomischen Uhren auf eine äußerst solide Aufstellung Bedacht nähme. Die Stabilität des Aufhängerahmens seines Fadenpendels untersuchte er mittelst des von HARDY erfundenen und schon von KATER benutzten, auf die Pendelschwingungen abgestimmten *Noddy* (Art. 3). Jedenfalls hat er auf gleiche Art auch die Festigkeit der Konsole geprüft, die bei den Versuchen mit dem Reversionspendel

im Gebrauch war, obwohl er es nicht ausdrücklich hervorhebt. Später vergafs man aber dieses, und so kam es, dafs PEIRCE 1875 die elastische Stativbewegung nochmals entdecken konnte, angeregt durch einen Hinweis von General BAEYER¹). Allerdings zeigte sich doch auch, dafs selbst die festesten Aufstellungen kaum frei vom Mitschwingen sind.

Neuerdings hat SCHIÖTZ sehr eingehend den Einfluss von Bodenerschütterungen auf die Schwingungszeit und im Zusammenhange damit überhaupt den Einfluss der Schneidenbewegung auf die Schwingungszeit, die Schneide als Linie gedacht, behandelt²). Er fand, wie bereits früher PEIRCE (*On the flexure etc.*, p. 84), dafs die vertikale Elasticität der Unterlage einen verschwindenden Einfluss hat.

In den Entwicklungen auf S. 62 mögen daher jetzt unter y_0 aufser einer Bewegung durch Abwicklung auch eine Bewegung des Scheitels O'' durch Gleitung sowie eine gemeinsame elastische Bewegung mit der Unterlage zusammen verstanden werden, während x_0 nur auf die Bewegung durch Abwicklung sich beziehen soll.

Ist nun η_0 derjenige Teil von y_0 , der nicht von der Abwicklung herrührt, so tritt, wie der Ausdruck für die Drehungsmomente zeigt, linker Hand zu (13) hinzu $d^2\eta_0/dt^2$, abgesehen vom Faktor $(\cos \Theta + x_0/h)$, den man durch 1 ersetzen kann. Um die Glieder, welche von der Abwicklung herrühren, anzudeuten, werde das Hauptglied für den einfachen Fall des Kreiscylinders mit eingeführt, vergl. (18). Dann folgt mit grofser Annäherung:

$$l \frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{d^2\eta_0}{dt^2} + g \left(1 + \frac{e}{h}\right) \sin \Theta = 0. \quad (20)$$

Diese Gleichung reicht aber, abgesehen von der durch Annahme des Kreiscylinders eingeführten Annäherung, noch nicht aus zur Darstellung der Beobachtungen. Es ist vielmehr notwendig, noch ein Drehungsmoment D der an der Schneide wirksamen Reaktionen des Lagermaterials zu berücksichtigen, das bei weniger harten Materialien besonders wirksam sein wird, und das dadurch entsteht, dafs die Schneide das Lager nicht nur in einer geraden Linie berührt, sondern in einer schmalen Fläche.

Zu weiterer Vervollständigung kann man linker Hand noch das Glied $2l\kappa d\Theta/dt$ hinzufügen, durch welches die Dämpfung der Schwingungen des Pendels infolge der Reibung an der Luft genügend berücksichtigt wird³). Der Koeffizient κ ist umgekehrt proportional h . Denn da das Drehungsmoment der Luftreibung von der inneren Massenverteilung des Pendels unabhängig ist, mufs nach der Division der Gleichung mit Mh in dem in Rede stehenden Gliede h implicite im Nenner auftreten, was mit den Erfahrungen übereinstimmt (vergl. die Bemerkungen zu λ S. 71 und 41).

Indem hiermit angenommen wird, dafs die Bewegung des Pendels in der Luft erfolgt, mufs man jetzt unter l den Wert l' nach (1), S. 57, verstehen, wobei das statische Moment des Pendels in $Mh - M_i h_i$, seine Masse in $M - M_i$ übergeht.

Mit diesen Ergänzungen erhält man anstatt (20) die vollständigere Bewegungsgleichung:

$$l \frac{d^2\Theta}{dt^2} + 2l\kappa \frac{d\Theta}{dt} + \frac{d^2\eta_0}{dt^2} + g \left(1 + \frac{e}{h}\right) \sin \Theta + \frac{D}{Mh} = 0, \quad (21)$$

wobei der Nenner von D genauer $Mh - M_i h_i$ lauten würde.

1) C. S. PEIRCE, *On the flexure of pendulum supports*. (App. No. 14, Coast and Geodetic Survey, Report for 1881); p. 2. Vergl. über das Noddy auch daselbst S. 69, sowie die Abhandlung: *On the use of the Noddy for measuring the amplitude of swaying in a pendulum support* (App. No. 15, C. a. G. S., R. for 1884).

2) O. E. SCHIÖTZ, *Resultate der im Sommer 1893 in dem nördlichsten Teile Norwegens ausgeführten Pendelbeobachtungen nebst einer Untersuchung über den Einfluss von Bodenerschütterungen auf die Schwingungszeit e. P.* Kristiania, Jakob Dybword, 1894.

3) SCHIÖTZ, a. a. O. S. 18—21.

Die Summen der horizontalen und der vertikalen Komponenten der bei der Pendelbewegung verlorenen Kräfte müssen durch den Widerstand, den die Schneide auf der Unterlage erfährt, aufgehoben werden. Der Vertikaldruck auf das Lager ist in der Hauptsache gleich

$$M \left\{ g + h \sin \Theta \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + h \cos \Theta \left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2 \right\}, \text{ d. i. sehr nahe } Mg \left\{ 1 + (\alpha^2 - 2\Theta^2) \frac{h}{l} \right\}. \quad (22)$$

Der Horizontaldruck ist wesentlich gleich

$$H_1 = M \left\{ h \left(\left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2 \sin \Theta - \frac{d^2 \Theta}{dt^2} \cos \Theta - 2\kappa' \frac{d\Theta}{dt} \right) - \frac{d^2 \eta_0}{dt^2} \right\}, \text{ d. i. sehr nahe } Mg \frac{h}{l} \Theta. \quad (23)$$

Vom Auftrieb der Luft ist hierbei abgesehen, ebenso wie vom Einfluß der Abstumpfung der Schneide, der jedenfalls bei den hier gemachten Voraussetzungen über deren Form ganz verschwindend ist (u. a. bei H_1 von der 3. Ordnung in Bezug auf Θ). κ' wird im allgemeinen von κ in (21) etwas verschieden sein.

Die horizontale Reaktion des elastischen „Stativs“ kann man, wenn zur Zeit t die Verschiebung der Konsole im Sinne eines y den Betrag σ hat, gleichsetzen

$$H_2 = -\varepsilon \sigma - \gamma M_\sigma \frac{d^2 \sigma}{dt^2} - 2\kappa_\sigma M_\sigma \frac{d\sigma}{dt}. \quad (23^*)$$

Hierin bezeichnet ε einen Elasticitätskoeffizienten, M_σ die Masse des Stativs (insoweit sie bewegt wird) und γ ebenso wie κ_σ einen von der Konstitution des Stativs abhängigen Koeffizienten (echten Bruch). Das letzte Glied rechter Hand entspricht den Reibungseinflüssen (SCHIÖTZ, a. a. O.).

Die Summe aller Horizontaldrucke muß verschwinden; also ist

$$H_1 + H_2 = 0. \quad (24)$$

Zur vollständigen Lösung der Aufgabe muß zu den Gleichungen (21) und (24) noch eine Gleichung treten, woraus die Beziehung zwischen η_0 und σ hervorgeht.

Wären Schneide und Lager ganz starr, so würde in der Hauptsache nur ein Abrollen der ersten stattfinden, falls die Reibung zum Zusammenhalten beider genüge, was man für gewöhnlich annehmen darf; dann wäre $\eta_0 = \sigma$. Dieser Fall wird im nächsten § behandelt werden. Da beide elastisch sind, so deformieren sie sich bei Übertragung des Druckes von der Schneide auf das Lager. Die ideelle Fläche, auf der die Abwicklung der undeformiert und etwas idealisiert gedachten Schneide stattfindet, sinkt etwas tiefer (vergl. den vorhergehenden §, S. 66), und der Schneidenkörper verschiebt sich infolge des Horizontaldrucks der Schneide um eine Größe u auf dem Lager, so daß $\eta_0 - \sigma = u$ wird. Diese Verschiebung muß proportional dem übertragenen Drucke H_1 sein: es sind ähnliche Verhältnisse wie bei Übertragung eines Druckes oder Zuges durch ein Federdynamometer auf einen widerstehenden Körper. Bezeichnet nun ε' einen gewissen Elasticitätskoeffizienten des Lagermaterials, so wird also anzusetzen sein für die gegen H_1 wirkende elastische Reaktion H_3 des Lagermaterials:

$$H_1 + H_3 = 0; \quad H_3 = -\varepsilon'(\eta_0 - \sigma) = -\varepsilon' u. \quad (25)$$

Hiernach wäre mit Rücksicht auf (23) u sehr nahe proportional Θ , nämlich angenähert

$$u = \frac{Mgh}{\varepsilon' l} \Theta. \quad (25^*)$$

(Ein von $d^2 u / dt^2$ abhängiges Glied ist in H_3 als unerheblich weggelassen; in Bezug auf den Übergang zu (25*) ist die analoge Entwicklung für σ in dem nächsten Paragraphen zu vergleichen).

In dieser Auffassung ist die Verschiebung u der Schneide auf dem Lager keinerlei Art von Gleitbewegung, sondern eine Verschiebung kleinster Teile, ohne Aufhebung des Zusammenhanges von Schneide und Lager.

Selbstverständlich sind damit eigentliche Gleitbewegungen durch besondere Umstände, namentlich Erschütterungen des Bodens, nicht ausgeschlossen.

Aber auch abgesehen davon, entspricht doch die oben definierte Verschiebung u den Beobachtungen BESSELS, die weiterhin besprochen werden sollen, in einem Punkte nicht. Darnach würde u weniger vom Horizontaldruck als vom Vertikaldruck der Schneide aufs Lager abhängen müssen, so dafs an Stelle von (25*) eine Beziehung der Form

$$u = fMg\Theta \quad (25\ddagger)$$

tritt, worin f ein von h/l freier Koeffizient ist. Infolge der hierbei vorauszusetzenden Wirksamkeit des Vertikaldrucks an den schiefen Randflächen des von der Schneide im Lager verursachten Ein-drucks (vergl. weiterhin § 9 und 11) müssen zu H_1 und H_2 gleich grofse, entgegengesetzt gerichtete Zusätze treten, die nicht näher bekannt sind.

Es wird gut sein, beide Fälle von u als möglich bei der Aufstellung der Endformel zu berücksichtigen.

§ 7. **Mitschwingen des Stativs und Untergrundes.** Bewegt sich die Schneide nur durch Abrollen auf dem Lager, welches aber die elastische Verschiebung σ in der Richtung der y -Axe erleidet, und wird das Drehungsmoment D der störenden Kräfte an der Schneide sowie Θ^3 vernachlässigt, so geben die Gleichungen (21) und (24):

$$l \frac{d^2\Theta}{dt^2} + 2l\kappa \frac{d\Theta}{dt} + \frac{d^2\sigma}{dt^2} + g \left(1 + \frac{e}{h}\right) \Theta = 0, \quad (26)$$

$$h \frac{d^2\Theta}{dt^2} + 2h\kappa' \frac{d\Theta}{dt} + \left(1 + \gamma \frac{M_\sigma}{M}\right) \frac{d^2\sigma}{dt^2} + 2\kappa_\sigma \frac{M_\sigma}{M} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\varepsilon}{M} \sigma = 0. \quad (27)$$

In der letzten Gleichung sind das erste und letzte Glied die Hauptglieder; nimmt man entsprechend der ungestörten Bewegung $d^2\Theta/dt^2 = -g\Theta/l$, so folgt angenähert

$$\sigma = \frac{Mgh}{\varepsilon l} \Theta, \quad (28)$$

und es wird aus (26) angenähert richtig:

$$l \left(1 + \frac{Mgh}{\varepsilon l^2}\right) \frac{d^2\Theta}{dt^2} + 2l\kappa \frac{d\Theta}{dt} + g \left(1 + \frac{e}{h}\right) \Theta = 0. \quad (29)$$

Mit der Bedingung, dafs für $t=0$ auch $d\Theta/dt=0$ ist, ergiebt sich durch Integration

$$\Theta = \alpha_0 e^{-\lambda t} \cos \left(\nu t - \frac{\lambda}{\nu}\right) \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{\kappa}{1 + \frac{Mgh}{\varepsilon l^2}}, \quad \nu^2 = \frac{g \left(1 + \frac{e}{h}\right)}{l \left(1 + \frac{Mgh}{\varepsilon l^2}\right)} - \lambda^2. \quad (30)$$

Dies zeigt, dafs die Konsole infolge des vom Pendel ausgeübten Horizontaldrucks H_1 , Gleichung (23), nach derselben Seite ausweicht, wie das untere Pendelgewicht, und dafs mit unwesentlichen Vernachlässigungen die durch das Mitschwingen der Unterlage allein gestörte mathematische Länge ist

$$l' = l \left(1 + \frac{Mgh}{\varepsilon l^2}\right). \quad (31)$$

1) Zuerst von C. S. PEIRCE entwickelt in der Abhandlung: *De l'influence de la flexibilité du trépied sur l'oscillation du pendule à reversion* in den „Verhandlungen d. 5. Allgem. Konf. d. Europäischen Gradmessung zu Stuttgart 1877“; S. 172—177. Auch in „Coast and Geodetic Survey, Report for 1881“, App. No. 14—17, p. 71—73; (vergl. auch die Anm. 1, S. 68). Das Stativmitschwingen wies PEIRCE bereits 1875 durch Versuche in Genf nach, 1876 in Paris und Berlin, (a. a. O. S. 4).

Da $Mg : \varepsilon$ die Verschiebung der Konsole unter dem horizontalen Drucke Mg ist, so kann man auch sagen, daß $l' - l$ gleich ist der Verschiebung der Konsole unter einem Drucke gleich dem Pendelgewicht, mal h/l .

Der Ausdruck (30) für ν^2 zeigt noch, daß die Störung durch Abrollen der Schneide sich im wesentlichen zur Störung durch Mitschwingen addiert; die Dämpfung durch \varkappa hat überhaupt auf l' keinen nennenswerten Einfluß¹⁾.

An diesen Resultaten ändert sich nichts von Bedeutung, wenn man die Annäherung für σ und Θ einen Schritt weitertreibt. Schreibt man (27) mit Rücksicht auf (26) unter Annahme von $\varkappa = \varkappa'$ (was hier genügt) in der Form

$$\left(1 - \frac{h}{l} + \gamma \frac{M_\sigma}{M}\right) \frac{d^2 \sigma}{dt^2} + 2 \varkappa_\sigma \frac{M_\sigma}{M} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\varepsilon}{M} \sigma = \frac{g(h+e)}{l} \Theta,$$

so wird mit Beachtung des Umstandes, daß zur Zeit $t=0$ auch $d\sigma/dt=0$ sein wird, unter Vernachlässigung von Gliedern mit ε^{-2} :

$$\sigma = \frac{Mg(h+e)}{\varepsilon l} \Theta + a_\sigma e^{-\lambda_\sigma t} \cos\left(\nu_\sigma t - \frac{\lambda_\sigma}{\nu_\sigma}\right)$$

mit

$$\lambda_\sigma = \frac{\varkappa_\sigma M_\sigma}{M\left(1 - \frac{h}{l}\right) + \gamma M_\sigma} \quad \text{und} \quad \nu_\sigma^2 = \frac{\varepsilon}{M\left(1 - \frac{h}{l}\right) + \gamma M_\sigma} - \lambda_\sigma^2. \quad (32)$$

Zur Zeit $t=0$ ist nach Gl. (30) die Elongation $\Theta = \alpha_0 \cos \frac{\lambda}{\nu}$, d. i. sehr nahe α_0 . Hiermit bestimmt sich die in (32) auftretende Konstante a_σ , wobei aber zu beachten ist, daß vor Beginn der Pendelbewegung, solange das Pendel in der Elongation α_0 erhalten wurde, statische Verhältnisse obwalten. Für den Ruhezustand möge das Pendel durch einen Anschlag im Abstände l_a von der Schneide festgehalten werden. Ist der Gegendruck G des Anschlags normal zur Längsrichtung des Pendels und der Horizontaldruck des Pendels auf die Konsole gleich H , so ist angenähert $G + H = 0$ und $G l_a = Mgh \alpha_0$. Dem Drucke $H = -Mgh \alpha_0 / l_a$ entspricht ein $\sigma = -Mgh \alpha_0 / \varepsilon l_a$, welches in (32) für σ im Falle $t=0$ einzusetzen ist, womit sich (unter Vernachlässigung von ϱ) die Konstante a_σ wie folgt bestimmt

$$a_\sigma = - \frac{Mgh}{\varepsilon l} \left(1 + \frac{l}{l_a}\right) \alpha_0. \quad (33)$$

PEIRCE setzt, was mir unrichtig erscheint (Verhandlungen in Stuttgart 1877, S. 176), für $t=0$ einfach dynamisch $\sigma = +Mgh \alpha_0 / \varepsilon l$. Infolge dessen ist bei ihm a_σ positiv und viel kleiner, nämlich gleich $+M^2 g^2 h \alpha_0 / \varepsilon^2 l^2$. Allerdings wird das Glied mit a_σ wegen der als bedeutend anzunehmenden Dämpfung auch bei (32) bald seinen Einfluß verlieren.

Würde man den Ausdruck σ aus (32) in (26) einführen, so ergäbe sich für Θ im wesentlichen der Ausdruck (30) mit einem Zusatz gleich dem zweiten Teile von σ in (32) mal $(-1/l)$. Die Amplitude des zweiten Teiles von Θ würde daher nach (33) gleich der des ersten Teiles mal dem sehr kleinen Bruch $Mgh/\varepsilon l^2$, d. i. nach (31) $(l' - l)/l$; ferner würde seine Periodendauer im Vergleich zu der des ersten Teiles von der Ordnung $\sqrt{(l' - l)/l}$, also auch noch sehr klein²⁾.

1) λT . Mod. ist das in der Physik gebräuchliche logarithmische Dekrement. Vergl. dazu S. 41 u., wo die Werte von λ für die Pendel des neuen Pendelapparats des G. J. angegeben sind.

2) Vergl. auch SCHÖRZ, *Resultate*, 1893, S. 21—24, sowie die Abhandlung von C. S. PEIRCE, *On the influence of internal friction upon the correction of the length of the seconds pendulum for the flexibility of the support.* (App.

Selbst abgesehen von der raschen Dämpfung des zweiten Teiles von σ in (32), der vom Anfangszustand abhängt, wird derselbe also Θ nicht wesentlich beeinflussen, für welches daher der Ausdruck (30) genügt. Die Störung der Schwingungsdauer kann man, selbst bei großen Genauigkeitsansprüchen, nach (31) bemessen, wenn die Schwingungsdauer nicht auf die einzelne Schwingung, sondern auf das Mittel einer größeren Anzahl, etwa 1000, bezogen wird.

Wenn nach diesen Entwicklungen ein geringes Mitschwingen der Unterlage unbedenklich erscheint, zumal es, wie noch gezeigt werden wird, nach der Methode von DEFFORGES eliminiert werden kann, so scheint es doch, daß mitunter Steinpfeiler unelastische Mitschwingungen ausführen, die zu Bedenken Anlaß geben. Solche besondere Verhältnisse wurden bei einem, aus großen Blöcken aufgebauten Pfeiler im Geodätischen Institut bemerkt.

Zunächst stellte Herr Dr. SCHUMANN durch Wippen u. a. fest, daß die Elasticität in zwei entgegengesetzten Richtungen ungleiche Beträge hatte, die durch excentrische Belastung des Pfeilers erheblich vermindert werden konnten. Bei diesem Pfeiler scheint die Auflagerung der Grundfläche für eine Hälfte sicherer als für die andere zu sein. Er scheint deshalb den Pendelbewegungen mit kleinen Kippbewegungen zu folgen, die aber wohl nur bei gewissen Beträgen der elastischen Verschiebungen der Konsole auftreten. In ganz roher Annäherung könnten solche Kippbewegungen durch ein Glied in σ mit derselben Periode wie bei Θ dargestellt werden; also mit Rücksicht auf den Ausdruck für den Horizontaldruck (23) wieder durch einen Ausdruck der Form (28). Von einer Dämpfung ist bei den Kippbewegungen keine Rede, und da sie nicht dem Elasticitätsgesetz folgen, so unterliegt ihre sachgemäße Berücksichtigung Schwierigkeiten. In der That ergaben sich auf dem erwähnten Pfeiler bei gewissen Messungen grobe Mißstimmigkeiten.

Hält man an der Formel (31) fest und wendet sie aufs Reversionspendel an, so ergibt sich die gestörte mathematische Länge L' des Sekundenpendels gleich

$$L' = L \left(1 - \frac{Mg}{\varepsilon \Lambda} \right). \quad 1) \quad (34)$$

Man findet dies leicht durch Beachtung der aus

$$L = \frac{\Lambda}{\tau^2} = \frac{\Lambda(h_1 - h_2)}{T_1^2 h_1 - T_2^2 h_2}$$

folgenden Differentialformel:

$$\frac{\delta L}{L} = \frac{\delta \Lambda}{\Lambda} - \frac{h_1 \delta l_1 - h_2 \delta l_2}{\Lambda(h_1 - h_2)}, \quad (35)$$

in welcher jetzt $\delta \Lambda = 0$ und $\delta l = l' - l$ zu setzen ist.

Um den Einfluß des Stativmitschwingens zu eliminieren, wurde vielfach die Anwendung eines zweiten Pendels mit gleichem Werte Λ , aber halber Masse, angewandt. Besser ist auch hier

No. 14—17, C. a. G. S., R. for 1881, p. 81). An beiden Orten sind die Gleichungen strenger integriert; aber es zeigt sich, daß κ_σ die Schwingungsdauer, abgesehen von höheren Gliedern, nicht beeinflusst. Über die Wirkung des Anfangszustands spricht sich PEIRCE S. 83 aus.

Hier zeigt auch PEIRCE in der Note: *On the effect of the vertical elasticity of a pendulum support*, daß dieser keinen nennenswerten Betrag in der Schwingungsdauer hat.

1) PEIRCE, Verhandlungen in Stuttgart 1877, S. 177.

das Verfahren von DEFFORGES, zwei Pendel mit gleicher Masse, aber verschiedener Länge anzuwenden, weil sich dabei zugleich mehrere andere Fehler wegheben; vergl. hierüber weiterhin. Ob dieses Verfahren auch geeignet ist, bei Kippbewegungen eliminierend zu wirken, habe ich noch nicht untersucht. Notwendig dürfte dann wohl sein, daß für beide Pendel h_1/h_2 und die α gleich sind, damit die Horizontaldrucke der Schneide auf die Unterlage gleich groß werden.

§ 8. Das Wippen mit der Federwage. Von den verschiedenen Methoden, die wegen Mitschwingens des Stativs erforderliche Korrektion der beobachteten Schwingungszeiten sowie der Länge L des mathematischen Sekundenpendels zu bestimmen, will ich hier nur das Wippverfahren mit der Federwage behandeln, weil es trotz seiner Ungenauigkeit eine Anwendbarkeit insofern gestattet, als ja die Methode von DEFFORGES einen etwa unberücksichtigt gebliebenen Rest des Mitschwingens eliminiert¹⁾. Günstig war bei den Beobachtungen, welche im II. Teil beschrieben sind, der Umstand, daß der Pfeiler direkt in der Höhe der Konsole gewippt werden konnte; unter Benutzung eines besonderen Hülfspendels konnte sogar unmittelbar die Konsole selbst gewippt werden.

Durch das Wippen erhält in Gl. (26) σ einen vorgeschriebenen Wert. Ich nehme an:

$$\sigma = \frac{1}{2} \sigma_1 (1 - \cos \nu_x t) \pm \frac{1}{2} \sigma_2 (1 - \cos 2\nu_x t). \quad (36)$$

Das erste Glied entspricht einem gleichmäßigen Rhythmus beim Hin- und Hergange; das zweite Glied soll eine Ungleichmäßigkeit zum Ausdruck bringen, wobei $+$ für den Hingang, $-$ für den Hergang gilt. Die Größe ν_x soll eigentlich dem ν für die Pendelbewegung nach (26) mit $\sigma = 0$, also nach Gl. (30) für $\varepsilon = \infty$ entsprechen. Einer Abweichung des ν_x von diesem Werte ν entspricht ein Verfehlen der richtigen Periode des Wippens. Mit

$$\frac{d^2 \sigma}{dt^2} = \frac{1}{2} \sigma_1 \nu_x^2 \cos \nu_x t \pm 2 \sigma_2 \nu_x^2 \cos 2\nu_x t$$

ergiebt (26) unter Vernachlässigung von ϱ und κ , wenn zunächst $\nu_x^2 = \nu^2 = g/l$ gesetzt wird:

$$\Theta = -\frac{\sigma_1}{4l} \nu t \sin \nu t - \frac{2\sigma_2}{3l} [(4n-1) \cos \nu t \mp \cos 2\nu t] \quad \begin{array}{l} - \text{Hingang; } 2n = 1 \ 3 \ 5 \ \dots \\ + \text{Hergang; } 2n = 2 \ 4 \ 6 \ \dots \end{array} \quad (37)$$

Daß der Einfluß von kleinen Werten ϱ verschwindend ist, leuchtet sofort ein; schwieriger ist es den Einfluß von κ zu erkennen. Zu dem Zwecke habe ich eine Integration von (26) mit Beibehaltung von κ ausgeführt (wobei auch gleich eine Verschiedenheit von ν_x und ν angenommen wurde). Dabei zeigte sich, daß wenigstens für die beim Wippen allein in Betracht kommenden geringen Anzahlen n (etwa < 20) und für die hier zur Rechnung genügende Genauigkeit von 1% κ zu vernachlässigen ist. Die Gl. (37) ergiebt Θ und $d\Theta/dt$ gleich null für $t = 0$; für $\nu t = \pi, 2\pi$ u. s. f. zeigen die Werte stetigen Übergang aus dem Hin- in den Hergang und umgekehrt.

Um zur Kenntnis der Elasticität der Unterlage zu gelangen, beobachtet man die positiven und negativen Maxima von Θ ; dieselben werden bei mäfsigen Werten von σ_2/σ_1 immer nahezu bei $\nu t = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}$ u. s. f. eintreten. Zur Gewinnung eines Überblicks habe ich für $\sigma_2 = 0,15\sigma_1$, und $\nu t = 18\pi$ bis 20π die folgenden Werte von Θ nach (37) berechnet:

1) R. SCHUMANN. *Eine Methode, bei Schweremessungen mit einem schwingenden Pendel den Einfluß des Mitschwingens der Unterlage zu bestimmen.* A. N. 3353, Bd. 140, Sp. 257 (1896).

Helmert, Beiträge zur Theorie des Reversionspendels.

νt	$2n$	1. Glied	2. Glied σ_1 / l mal	Θ	
18π	19	0	-3,6	-3,6	
$18\frac{1}{4}\pi$	19	+10,1	-2,6	+7,5	Max. +14,8
$18\frac{1}{2}\pi$	19	+14,5	-0,1	+14,4	
$18\frac{3}{4}\pi$	19	+10,4	+2,6	+13,0	
19π	19	0	+3,8	+3,8	
	20				
$19\frac{1}{4}\pi$	20	-10,7	+2,8	-7,9	Max. -15,7.
$19\frac{1}{2}\pi$	20	-15,3	+0,1	-15,2	
$19\frac{3}{4}\pi$	20	-11,0	-2,8	-13,8	
20π	20	0	-4,0	-4,0	

Dies zeigt, daß man bei Werten von σ_2/σ_1 im Betrage von etwa 0,1 oder weniger die Maxima α von Θ , absolut genommen, nahe gleich

$$\alpha = \frac{4n-1}{4} \frac{\pi\sigma_1}{2l} \quad (38)$$

annehmen darf. Nun ist Masse \times Beschleunigung = $\varepsilon\sigma$; vergl. S. 69—71. Wird mit W Kilogramm gewippt, d. h. wird z. B. beim ersten Stofs für $\nu t = 0$ bis π der Druck bis auf W Kilogramm gesteigert¹⁾, so gehört zum Druck Wg ein Wert von σ nach (36) gleich σ_1 . Also ist

$$Wg = \varepsilon\sigma_1 \quad (39)$$

und mittelst (38):

$$\frac{Mgh}{\varepsilon l^2} = \frac{Mh}{Wl} \frac{4\alpha}{4n-1} \frac{2}{\pi} \quad (40)$$

Diese Formel kommt in Betracht, wenn mit dem Pendel selbst gewippt wird, für welches die Schwingungsdauer bestimmt werden soll. Sie gibt nach (31) direkt den Einfluß der Elasticität der Unterlage in der Form $(l' - l)/l$.

Die Korrektur für die Länge des Sekundenpendels ist, vergl. (34):

$$+ \frac{M}{W} \frac{4\alpha}{4n-1} \frac{2}{\pi} L. \quad (41)$$

Ist das Wipp-Pendel ein anderes als dasjenige Pendel, für welches der Einfluß der Elasticität der Unterlage bestimmt werden soll, und bezeichnet l_w die mathematische Länge des Wipp-Pendels, so wird anstatt (40) und (41) erhalten:

$$\frac{Mgh}{\varepsilon l^2} = \frac{Mhl_w}{Wl^2} \frac{4\alpha}{4n-1} \frac{2}{\pi} \quad (40^*)$$

und

$$+ \frac{M}{W} \frac{4\alpha}{4n-1} \frac{2}{\pi} \frac{l_w}{l} L. \quad (41^*)$$

Für die im II. Teil beschriebenen Pendelbeobachtungen wurde am 6. Mai 1895 mit dem kurzen und langen Pendel gewippt, sowie am 18. Mai 1897 mit einem Viertelmeterhülfpendingel ($T = 0,5090$)

1) So lange $\sigma_2 < \frac{1}{4} \sigma_1$, ist der größte Wert von σ zugleich der Endwert bei $\nu t = \pi$.

von solcher Konstruktion, dafs das Dynamometer direkt an der Konsole angesetzt werden konnte. Es wurden immer 10 Stöße ausgeführt, so dafs $2n = 20$ ist. Die Ergebnisse sind:

6. Mai 1895	Beob.	W	α''	$\alpha'' l_W / W \Lambda$	(Für $\Lambda = 1/4$)
Am Pfeiler					
Viertel- meterpdl.	H.	7	48	6,9	Mittel 7,1 Korr. in L + $8^{\mu},0$
	S.	3,2	27	8,4	
	S.	3	18	6,0	
Meterpdl.					
Meterpdl.	S.	4,7	12	10,0	Mittel 5,7 + $6^{\mu},5$.
	H.	8	6	3,0	
	S.	6	6	4,0	

Das schwere Gewicht war beim 1. und 2. Versuch oben, sonst unten.

18. Mai 1897					
Hülfspdl. Am Pfeiler	S.	7,3	45	6,2	Mittel 6,3 + $7^{\mu},2$
	S.	9,8	63	6,4	
An der Konsole	S.	6,3	50(?)	7,9	Mittel 8,6 + $9^{\mu},7$.
	S.	7,2	63	8,7	
	S.	9,4	86	9,1	

1897 gelangen mir selbst keine verlässlichen Beobachtungen, da ich den Sekundentakt nicht traf. Beim Meterpendel war es überhaupt schwierig, den Zweisekundentakt zu treffen.

Die Korrekturen beziehen sich auf L aus dem Viertelmeterpendel, wofür ich rund $+ 10^{\mu}$ angenommen habe; fürs Meterpendel ist somit $+ 2^{\mu},5$ anzusetzen.

Um den Einfluss des Rhythmus noch in anderer Weise zu erkennen, wurden zwei extreme, einschließende Fälle behandelt:

Nimmt man momentane Stöße, welche die Konsole um σ_1 im Takte $2T$ bewegen, also mit Hin- und Hergang im Intervall T , so wird der Ausschlag α am Schlusse des n^{ten} Stofses gleich $2n\sigma_1/l$.

Nimmt man dagegen an, dafs σ beim Hingang in der Zeit T bis zum Betrage σ_1 gleichmäfsig anwächst und beim Hergang ebenso abnimmt, so wird

$$\Theta = (4n - 1)\sigma_1 \sin vt : \pi l$$

und der maximale Ausschlag α absolut genommen gleich $(4n - 1)\sigma_1 : \pi l$.

Im Vergleich mit α nach (38) sind jetzt die α gröfser im Verhältnis $\frac{4n}{4n-1} \cdot 4/\pi$ bzw. kleiner im Verhältnis $8/\pi^2$; entsprechend treten zu (40) bis (41*) die Faktoren

$$\frac{4n-1}{4n} \frac{\pi}{4} = 0,79 \frac{4n-1}{4n} \text{ bzw. } \frac{\pi^2}{8} = 1,23.$$

Diese Extreme werden niemals erreicht werden.

Nach den vorhergehenden Betrachtungen ist der Einfluss des Rhythmus beim Wippen nicht sehr grofs. Gröfser ist in der Regel der Einfluss eines fehlerhaften Taktes, d. h. einer Abweichung des ν_x von ν . Diese erkennt man aber daran, dafs α nicht mehr annähernd proportional n , vergl. (38), wächst.

Integriert man (26) unter Annahme von $\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{1}{2} \sigma_1 \nu_x^2 \cos \nu_x t$, also mit Vernachlässigung von σ_2 , ϱ und α , so folgt:

$$\Theta = \frac{\sigma_1}{2l} \frac{\nu_x^2}{\nu^2 - \nu_x^2} (\cos \nu t - \cos \nu_x t); \quad \nu^2 = \frac{g}{l}. \quad (42)$$

Hieraus ergibt sich auch

$$\Theta = -\frac{\sigma_1}{4l} \frac{4\nu_x^2}{\nu^2 - \nu_x^2} \sin \frac{\nu + \nu_x}{2} t \sin \frac{\nu - \nu_x}{2} t, \quad (42^*)$$

woraus man leicht das erste Glied von (37) rechter Hand für $\nu = \nu_x$ ableitet. Für kleine Werte von $\frac{1}{2}(\nu - \nu_x)t$ weichen, abgesehen von σ_2 , beide Formeln nicht erheblich von einander ab und die Maxima α folgen angenähert (38), nehmen also zu wie die Zahlen der Reihe 1, 3, 5 u. s. f. Im allgemeinen ist jedoch angenähert das Maximum

$$\alpha = \frac{4n-1}{4} \frac{\pi \sigma_1}{2l} \left(\sin \frac{\nu - \nu_x}{2} t : \arccos \frac{\nu - \nu_x}{2} t \right). \quad (43)$$

Dementsprechend tritt in (40) his (41*) noch zu den Ausdrücken mit α der Faktor hinzu

$$\frac{\arccos \varphi}{\sin \varphi} \text{ mit } \varphi = \frac{1}{2}(\nu - \nu_x)t = \left(1 - \frac{\nu_x}{\nu}\right) \cdot \frac{(4n-1)\pi}{4}.$$

Bei dem Hülfspendel war $T = 0^s,509$, also mit einer Halbssekundenuhr $1 - \nu_x/\nu = -1/56$ und das Koincidenzenintervall gleich 28^s . Mit $n = 56$ Stößen, also nach 56^s , würde das Hülfspendel zur Ruhe zurückkehren, mit $n = 28$ einen größten Wert von α annehmen. Für $n = 10$ ist $\arccos \varphi / \sin \varphi$, bei φ nahezu gleich 30° , als genügend gleich 1 anzusehen.

§ 9. Das Gleiten der Schneide auf dem Lager. In Bezug auf die theoretische Behandlung der Verschiebung u der Schneide auf dem Lager gehen die Theorien noch sehr auseinander. Von größter Bedeutung für jede Theorie müssen aber selbstverständlich die Ergebnisse der Beobachtungen, besonders derjenigen von BESSEL sein, welche durch weitere Beobachtungen von THIESEN und WILSING eine wertvolle Ergänzung gefunden haben. Aus den ersten folgen nachstehende Hauptsätze, denen ich die Bemerkung vorausschicke, daß BESSEL mit einem Reversionspendel experimentierte, dessen Schwerpunktsabstände 305 und 136 par. Linien in runder Zahl betragen (Art. 26). Die Schneiden waren von Stahl mit nahezu rechtwinkligem Schnitt.

Nach BESSEL (Art. 30) sind die kleinen Bewegungen der Schneide proportional den Schwingungswinkeln und gleichgerichtet der Bewegung des unteren Pendelkörpers. Die Ausdehnung der Bewegung ist für beide Lagen des schweren Gewichts gleich, also unabhängig von der Größe des Schwerpunktsabstandes. Das Maximum der Geschwindigkeit findet beim Durchgang des Pendels durch die Vertikale statt. Verschiedene Unterlagen gaben verschiedene Beträge für die Bewegung: Messing mehr als Achat, Glas und Stahl; Messingdraht noch mehr als Messing. Die Amplituden nehmen bei Messing und den harten Unterlagen in ungefähr gleichem Grade ab, bei Messingdraht aber rascher. Die Schwingungszeit nimmt ab mit der Verminderung der Härte der Unterlage; sie ist bei Messingdraht am kleinsten und beträgt hier um so weniger, je kleiner die Amplituden sind.

BESSEL nimmt hiernach an, daß eine dem Abrollen entgegenwirkende Kraft vorhanden ist, die die Bewegung der Schneide verursacht, und die hauptsächlich durch den Eindruck der Schneide in die Unterlage entsteht, wohingegen die Deformation der Schneide allein nicht zur Erklärung ausreichte, da sonst verschiedene Unterlagen gleiche Bewegungen geben müßten.

Bei Aufstellung der Theorie macht er zwei Annahmen. Erstens, daß sich das Pendel (unter Voraussetzung einer mathematischen Schneide) nicht um die Schärfe der Schneide in O drehe, sondern sich so bewege, daß die Vertikale durch O von der Schwerpunktslinie GO'' (oder GO' , da O' und O'' zusammenfallen) stets ein und dieselbe Strecke δh abschneide (die bei BESSEL h genannt ist). Zweitens, daß eine das Gleiten bewirkende horizontale Widerstandskraft Q bestehe, die von der Form sei:

$$Q = Mg \{ a_0 + a_1 \delta h \sin \Theta + a_2 \delta h^2 \sin^2 \Theta + \dots \}. \quad (44)$$

(Der Faktor Mg bzw. g fehlt bei BESSEL, ist aber in Wirklichkeit als vorhanden angenommen.) Er findet dann mittelst des Prinzips der lebendigen Kraft die gestörte mathematische Länge

$$l' = l + 2\delta h - a_1 \frac{l\delta h^2}{h} + \text{Glieder mit } a_3 \sin^2 \alpha, a_5 \sin^4 \alpha \text{ u. s. f.} \quad (45)$$

Bei dieser Entwicklung scheint mir noch unbeachtet, daß δh und Q zusammenhängen. Da nun in BESSELS Entwicklung Q sich keineswegs nur aufs Gleiten bezieht, sondern überhaupt eine neue Horizontalkraft bedeutet, die positiv ist für die Richtung abnehmender y , so muß $H_1 = Q$ sein, wo H_1 aus (23) zu entnehmen ist. Mit Vernachlässigung der kleinen, in $d\Theta/dt$ und $(d\Theta/dt)^2$ multiplizierten Glieder ergibt sich somit unter Substitution von $\eta_0 = u$:

$$-M \left(h \cos \Theta \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \frac{d^2 u}{dt^2} \right) = Q.$$

Nimmt man ferner mit BESSEL $u = \delta h \sin \Theta$ und setzt $d^2 \Theta / dt^2 = -g \sin \Theta / l$, so folgt in ausreichender Annäherung

$$Q = -M(h + \delta h) \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = +Mg \frac{h + \delta h}{l} \Theta.$$

Es verschwinden daher im Ausdrucke (44) die Koeffizienten a_0, a_2 u. s. f., und $a_1 \delta h$ wird gleich $(h + \delta h)/l$, womit l' aus (45) übergeht in:

$$l' = l + \delta h - \frac{\delta h^2}{h}, \text{ d. i. wesentlich } l + \delta h. \quad 1)$$

Dieser letzte Ausdruck folgt auch unmittelbar aus Gl. (21) für $D = 0$ und $\eta_0 = u = \delta h \sin \Theta$, sowie mit Vernachlässigung kleiner, hier unerheblicher Glieder.

Da nun also $a_1 \delta h$ wesentlich gleich h/l ist, so liefert BESSELS Theorie, wie mir scheint, doch das schon durch (25*) ausgedrückte Ergebnis, daß nämlich u und δh proportional dem Schwerpunktsabstand h sind, was aber, wie bemerkt, BESSELS Beobachtungen widerspricht. Leider führt BESSEL keine spezielleren Zahlen an, und bei der Unsicherheit dieser Art Messungen wäre es immerhin möglich, daß die Beobachtungen der Proportionalität von u mit h nicht widersprechen. Hält man jedoch daran fest, daß u und δh nicht proportional h sein sollen, so muß man u auf den Vertikaldruck der Schneide, der wesentlich gleich Mg ist, zurückführen, (vergl. § 6, S. 70). Man kann sich dann etwa denken, daß die Schneide, welche beim Abrollen den einen Rand des im Lager gebildeten Eindrucks niederdrücken muß, dabei momentan abrutscht. Abgesehen hiervon ist bei kleinen Θ , also für gewöhnlich, an Rutschungen oder Gleiten nicht zu denken, da die von dem Vertikaldruck erzeugte Reibung den Horizontaldruck $Mgh \sin \Theta / l$ weit überwiegt. Wenn sich aber in

1) Das Glied $\delta h^2/h$ fällt überhaupt fort, wenn man bei BESSEL, X. Beilage, in der weiteren Entwicklung von (1) nicht h^2 bei der Ausrechnung von $(s+h)^2$ vernachlässigt.

Daß man auf $l' = l + \delta h$ kommt, und daß δh proportional h ist, zeigte schon 1887 LORENZONI in seiner Schrift: *Sulla equazione differenziale del moto di un pendolo fisico* (Atti del R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti, t. V), p. 29.

der erörterten Weise momentan eine hinreichend groÙe horizontale Komponente von Mg bildet, so kann die Reibung überwunden werden. (Um eine elastische Wirkung dieser Komponenten kann es sich nicht handeln, da eine solche von Θ unabhängig ist.) Die immer nur in äufserst kleinen Zeiträumen stattfindenden Abrutschungen du werden für gleiche Drehungen $d\Theta$ als gleich anzunehmen sein und durch Anhäufung ein u proportional $Mg\Theta$ bilden, vergl. (25†). Es folgt nämlich aus $du = fMg \cdot d\Theta$ durch Integration bei passender, plausibler Wahl der Konstanten $u = fMg\Theta$. Der kleine Einfluß von $Mgh \sin \Theta$, der mit Θ das Zeichen wechselt, fällt in dem ganzen Betrage von u für $\Theta = -\alpha$ bis $+\alpha$ heraus. Ich bemerke übrigens, daß die Erfahrungen bei Erschütterungen sich ungezwungener mit der ersten als mit der zweiten Hypothese über die Entstehung der hier betrachteten kleinen Bewegungen verbinden lassen (siehe weiterhin).

Nimmt man nun nach (21) mit $D = 0$ und $\eta_0 = u = \delta h \cdot \Theta$ einfach $l = l + \delta h$, so widerspricht dies noch denjenigen BESSELSchen Beobachtungsergebnissen, nach denen zunehmendes δh und abnehmendes l' zusammentreffen. Er fand nämlich für dasselbe Pendel (Art. 29):

$$(l' - l)_{\text{Achat}} - (l' - l)_{\text{Messing}} = \begin{cases} + 0,0309 \text{ par. Linien, schw. Gew. u.} \\ + 0,0566 \text{ „ „ „ „ „ o.} \end{cases};$$

dagegen war aus den Bewegungen u abgeleitet (bei beiden Gewichtslagen):

$$\delta h_{\text{Achat}} - \delta h_{\text{Messing}} = 0,0012 - 0,0095 = - 0,0083 \text{ par. Linien.}$$

So unsicher diese Zahlen sein mögen: der Gegensatz der Vorzeichen ist gewiß. Da nun mit BESSELS berichtigter Formel für l' eine plausible Deutung der Beobachtungsergebnisse nicht zu erzielen ist, muß man versuchen, eine hiezu geeignete Formel auf anderem Wege zu gewinnen.

Dies kann aber durch Einführung eines passenden Ausdruckes für das Drehungsmoment D der störenden Kräfte in Gl. (21) geschehen. Ich setze darin

$$D = Mg \{ D_0 + D_1 \sin \Theta + D_2 \sin^2 \Theta + D_3 \sin^3 \Theta + \dots \} \quad (46)$$

und nehme ferner $\eta_0 = u = \delta h \cdot \Theta$. Dann folgt

$$(l + \delta h) \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + 2l\kappa \frac{d\Theta}{dt} + g \left(1 + \frac{e_0}{h} + \frac{D_1}{h} \right) \sin \Theta + \frac{g}{h} (D_0 + D_2 \sin^2 \Theta + D_3 \sin^3 \Theta + \dots) = 0, \quad (47)$$

wobei noch ϱ mit dem Index null versehen ist. Denn macht man die Voraussetzung (18), S. 65, über die Abstumpfung, so tritt das Glied ϱ_0/h wie in (47) auf. Außerdem kann man sich die aus der Abweichung von der Kreisform ergebenden Glieder $\frac{1}{2} \varrho_1 \Theta^2$, $\frac{1}{3} \varrho_2 \Theta^3$ in $D_2 \sin^2 \Theta$, $D_3 \sin^3 \Theta$ mit eingeschlossen denken.

Die Glieder mit κ und D_0 , D_2 , D_4 u. s. f. beeinflussen die Schwingungszeiten aber aus bekannten Gründen bei den gewöhnlichen Fällen großer Beträge von h nur wenig, da sie erst in zweiter Ordnung eingehen. Reduciert man (47) entsprechend und nimmt für $D_3 \sin^3 \Theta$ einfach $D_3 \Theta^3$ so folgt

$$(l + \delta h) \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + g \left(1 + \frac{e_0}{h} + \frac{D_1}{h} \right) \sin \Theta + \frac{g}{h} \{ D_3 \Theta^3 + (D_5) + \dots \} = 0. \quad (47^*)$$

Nach Multiplikation mit $d\Theta/dt$ ergibt die Integration

$$\frac{1}{2} (l + \delta h) \left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2 = g \left(1 + \frac{e_0}{h} + \frac{D_1}{h} \right) (\cos \Theta - \cos \alpha) + \frac{g}{4h} \{ D_3 (\alpha^4 - \Theta^4) + (D_5) + \dots \}. \quad (48)$$

Abgesehen von D_3 , D_5 u. s. f. folgt hiernach die gestörte mathematische Länge gleich

$$l'_0 = l \frac{1 + \frac{\delta h}{l}}{1 + \frac{e_0}{h} + \frac{D_1}{h^2}} = l \left\{ 1 + \frac{\delta h}{l} - \frac{e_0}{h} - \frac{D_1}{h} \right\}. \quad (49)$$

Die Form rechter Hand gilt, so lange h groß ist. Der Einfluss der Glieder mit D_3 , D_5 u. s. f. ermittelt sich wie in § 5, S. 64 u. 65 der Einfluss von x_0 . Mit Benutzung des Ausdrucks l'_0 nach (49) wird die gestörte Schwingungszeit gleich

$$T_{\alpha'} = \pi \sqrt{\frac{l'_0}{g}} \left\{ 1 + \frac{\alpha^2}{16} - \frac{D_3}{8\pi(h + e_0 + D_1)\sqrt{2}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{(\alpha^4 - \Theta^4) d\Theta}{\sqrt{\cos \Theta - \cos \alpha^3}} + (D_5) + \dots \right\},$$

oder

$$T_{\alpha'} = \pi \sqrt{\frac{l'_0}{g}} \left\{ 1 + \frac{\alpha^2}{16} - \frac{3D_3\alpha^2}{8(h + e_0 + D_1)} + (D_5) + \dots \right\}. \quad (50)$$

Zu dem gewöhnlichen Einfluss von α^2 tritt somit noch ein neuer, der auch nach geraden Potenzen von α fortschreitet.

Wendet man auf (49) die Beobachtungsergebnisse BESSELS an und setzt $h = 305$ und 136 mit $l = 441$ für schweres Gewicht unten bzw. oben, so folgt (für par. Linien) einerseits:

$$\frac{441}{305} \{ (\varrho_0 + D_1)_{\text{Messing}} - (\varrho_0 + D_1)_{\text{Achat}} \} = + 0,0309 + 0,0083$$

und andererseits:

$$\frac{441}{136} \{ (\varrho_0 + D_1)_{\text{Messing}} - (\varrho_0 + D_1)_{\text{Achat}} \} = + 0,0566 + 0,0083.$$

Unter der zulässigen Annahme der Gleichheit der ϱ_0 für Messing- und Achatlager wird

$$D_{1 \text{ Messing}} - D_{1 \text{ Achat}} = + 0,027 \text{ bzw. } 0,020 \text{ par. Lin.}$$

Der Unterschied der Ergebnisse für beide Gewichtslagen kann sehr wohl auf Beobachtungsfehlern beruhen; er kann aber auch ganz oder zum Teil reell sein, da die horizontale Druckkraft H_1 der Schneide selbst den Faktor h/l enthält. Bei der Unkenntnis über die Entstehung der Wechselwirkung von Schneide und Lager muss man daher mit der Möglichkeit rechnen, daß die Koeffizienten des störenden Drehungsmoments D in (46) sich aus je einem Teil mit h und ohne h zusammensetzen. Unter der Voraussetzung einer linearen Kombination beider Teile, würde in (49) D_1/h auch ein von h freies Glied mit D_1/l geben, das durch die Reversion des Pendels nicht ebenso wie ϱ_0 eliminiert wird, sondern wie $\delta h/l$ erhalten bleibt.

Setzt man insbesondere

$$D_1 = D_1' - \frac{h}{l} \delta h^{(3)},$$

worin D_1' frei von h ist und der negative Teil den Anteil der horizontalen Reaktion $-Mgh \sin \Theta/l$ am störenden Drehungsmoment D unter der Voraussetzung vorstellt, daß diese Reaktion in der Höhe $\delta h^{(3)}$ über dem ideellen Berührungspunkt O' hinwegführt, so zerfällt in (49) D_1/h in $(D_1'/h) - (\delta h^{(3)}/l)$.

Denkt man sich zugleich δh in zwei Teile zerlegt, die den beiden Relationen (25*) und (25†) entsprechen, setzt also

$$\delta h = \frac{h}{l} \delta h^{(1)} + \delta h^{(2)},$$

so folgt aus (49):

$$l'_0 = l \left\{ 1 + \frac{h \delta h^{(1)}}{l^2} + \frac{\delta h^{(2)} + \delta h^{(3)}}{l} - \frac{e_0 + D_1'}{h} \right\}. \quad (49^*)$$

Hierzu gehört die gestörte Länge des mathematischen Sekundenpendels

$$L' = L \left\{ 1 - \frac{\delta h^{(1)} + \delta h^{(2)} + \delta h^{(3)}}{\Lambda} \right\}.$$

Diese Formel läßt erkennen, daß die Anwendung zweier Pendel gleicher Masse, aber verschiedener Länge, nach DEFFORGES' Prinzip die δh verschiedener Provenienz gleichmäßig eliminiert¹⁾.

§ 10. **Einfluss des Schwingungsbogens auf die Schwingungsdauer.** Den mit dem Ausschlag α veränderlichen Einfluss der Elasticität des Lagers (und der Schneidenform), vergl. Gl. (50), fand BESSEL bei Messingdraht als Unterlage stark ausgeprägt und zwar in dem Sinne einer gleichzeitigen Abnahme von α und T_α' , siehe Art. 29. Neuerdings hat auch SOKOLOFF diese Abnahme gefunden²⁾. Er benutzte Halbmeterpendel mit Schneiden und Lager von Achat.

Auch THIESEN (1886) und WILSING (1887) hatten diese Erscheinung bei Pendeln wahrgenommen, für welche der Schwerpunktsabstand h von der Schneide nur Bruchteile eines Millimeters betrug — THIESEN bei einer Wage mit T von 14^s bis 21^s und α von etwa 120' bis 20', WILSING bei einem doppelarmigen, nahezu symmetrischen Pendel für Attraktionsbestimmungen mit T von 1^m bis 3^m und α von etwa 80' bis 7³⁾. Wie Gl. (50) zeigt, müssen die Glieder mit D_3 , D_5 u. s. f. wegen des kleinen Nenners $h + e_0 + D_1$ einen enormen Einfluss erlangen, was auch der Fall war.

THIESEN verglich die Unterschiede von T_α' bei verschiedenen α mit einem in α^2 multiplizierten Ausdruck, entsprechend dem Gliede mit D_3 in (50). Er fand die Darstellung noch nicht befriedigend und erklärt, daß drei Glieder mit verschiedenen Potenzen von α zur Darstellung nötig seien.

WILSING fand dementsprechend einen Ausdruck mit α^2 und α^4 noch nicht ausreichend. Besonders bemerkenswert erscheint, daß nach seinen Beobachtungen der Einfluss der in Rede stehenden Glieder der Theorie entsprechend umgekehrt proportional dem Trägheitsmoment des Pendels ist. Bei der Kleinheit von h werden die Koeffizienten D_3 , D_5 u. s. f. in (50) frei von dem Einfluss des h sein und für dieselbe Schneide nur noch von der Masse M abhängen. Der Unterschied von T_α' und T_0' nach Gl. (50) kann daher, abgesehen von dem gewöhnlichen Reduktionsgliede $\alpha^2/16$, gesetzt werden gleich

$$f(M, \alpha^2) T_0' : (h + e_0 + D_1),$$

worin f ein Funktionszeichen bedeutet. Nun folgt aber aus (49) mit Vernachlässigung von $\delta h/l$, daß $h + e_0 + D_1 = Mhl/Ml_0'$. Hierin kann man das Trägheitsmoment Mhl wegen der Kleinheit von h durch J_0 ersetzen, vergl. S. 57; ferner ist $l_0' = gT_0'^2/\pi^2$, mithin wird der Ausdruck für den Einfluss von α^2 gleich

$$\frac{Mg}{\pi^2} \frac{f(M, \alpha^2)}{J_0} T_0'^3. \quad (51)$$

1) Eine interessante Aufgabe ist es zweifellos, die elastischen Kräfte, welche das Moment D erzeugen, wirklich aufzusuchen, wobei von der Arbeit von HEINRICH HERTZ: *Über die Berührung fester elastischer Körper* (Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 92, 1882) auszugehen sein wird.

2) *Matériaux pour servir à l'étude de la répartition de la force de la pesanteur en Russie*. St. Petersburg, 1892. (Aus den Mittlgn. d. kais. russ. geogr. Ges.; russisch, mit franz. Auszug); S. 202 u. 175.

3) THIESEN, *Études sur la balance*. (Travaux et Mémoires du Bureau International des Poids et Mesures, t. V.)

WILSING, *Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde* u. s. w. (Publikation des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam) 1. u. 2. Abhdlg., 1887 und 1889. Vergl. auch Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss. zu Berlin, 1887, April 21, und besonders A. N. 2867, Bd. 120, S. 161 (1888).

Nach *A. N.* Nr. 2867 ergab sich bei gleichem M für das Verhältnis der Faktoren von $T_0'^3$ in drei Fällen annähernd $1 : 1,35 : 1,99$, während für $1/J_0$ die Relation $1 : 1,36 : 1,78$ bestand. Genauer noch fand sich die Proportionalität mit $T_0'^3$ bestätigt.

WILSING erhielt bei derselben Schneide die Einflüsse bei einem Lager von weichem Stahl etwa dreimal so groß wie bei Achat und hartem Stahl, also wachsend — wie schon BESSEL beobachtete — mit zunehmender Weichheit der Unterlage.

Werden die Ergebnisse WILSINGS für $T = 1^s$ extrapoliert, so folgt (1. Abh., S. 77) der in Rede stehende Einfluss bei

$$\begin{array}{cccccc} \alpha = 15' & 30' & 45' & 60' & & \text{(Achatschneide und Achatlager)} \\ \text{gleich} + 8 & + 14 & + 18 & + 21 & & \text{Einheiten der 7. Decimalstelle.} \end{array}$$

Übrigens bedürfen diese Werte noch des Faktors $(l-h)/l$. Da nämlich in (51) J_0 an Stelle von Mhl steht, was nur bei kleinen Werten von h zulässig ist, so muß im allgemeinen noch mit $J_0/Mhl = (l-h)/l$ multipliziert werden.

Weit größere Beträge als WILSING erhielt SOKOLOFF direkt bei den Halbmeterpendeln. Der Unterschied des Einflusses ist hier u. a. für $60'$ und $30'$ Amplitude α gleich 53 und 99 Einh. d. 7. Decimalstelle für schweres Gewicht unten bzw. oben, bei annähernd $2/1$ als Verhältnis h_1/h_2 . Ein Einfluss des Pendelgewichts (2 kg und 1 kg) war nicht zu erkennen. SOKOLOFF nimmt als Erklärung die Beschaffenheit des Materials und die Form der Schneiden an, da andere Ursachen ausgeschlossen scheinen.

Bei der Diskussion derartiger Pendelschwingungen mit sehr kleinen Schwerpunktabständen h dürfte überdies eine Berücksichtigung der Störungen 2. Ordnung unerlässlich sein¹⁾, während bei gewöhnlichen Pendeln (mit großen h) nur die 1. Ordnung Bedeutung hat, und somit alle Störungen einzeln behandelt werden können.

Man wird für den Fall sehr kleiner h in (47) besser mit h multiplizieren und kann mit Vernachlässigung von δh gegen l und von Mh^2 gegen Mhl setzen:

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + 2\alpha \frac{d\Theta}{dt} + \frac{Mg(h + \varrho_0 + D_1)}{J_0} \sin \Theta + \frac{Mg}{J_0} (D_0 + D_2 \sin^2 \Theta + D_3 \sin^3 \Theta + \dots) = 0. \quad (52)$$

(Hier kann man $\sin \Theta$ auch durch Θ ersetzen, was nur die Bedeutung der D verändert.) In dieser Gleichung hat das in $\sin \Theta$ multiplizierte Glied sein früheres Übergewicht fast ganz verloren; doch wird es dasselbe insoweit behalten müssen, daß eine pendelartige Bewegung, entsprechend den Beobachtungen, entsteht.

§ 11. Das Glissement. DEFFORGES nimmt an, daß bei der Drehung der Linie GO'' um $d\Theta$ in dem Zeitdifferential dt teilweise Abrollen, teilweise Gleiten wie in einem Zapfenlager, stattfindet, wobei sich beide Anteile wie $m : n$ verhalten, mit $m + n = 1$. Seine Fundamentalgleichung lautet (*Observations du pendule*, p. 15):

$$\{(h + n\varrho)^2 + k^2\} \frac{d^2\Theta}{dt^2} + g(h + \varrho) \sin \Theta = 0,$$

wobei die Abstumpfung der Schneide nach einem Kreise vom Radius ϱ vorausgesetzt ist und Mk^2 das Trägheitsmoment $J_0 = Mh(l-h)$ bezeichnet, während $M\{(h + n\varrho)^2 + k^2\}$ das Trägheitsmoment

1) Vergl. THIESEN, *Theorie der pendelartigen Schwingungen*. (Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss. zu Berlin, 1889, März 28.) Dasselbst wird in einem Beispiel noch ein von $(d\Theta/dt)^2$ abhängiges Störungsglied mitgenommen.

für die momentane Drehungsaxe im Abstände $h + n\rho$ vom Schwerpunkte ist. Hieraus folgt als gestörte mathematische Länge ohne weiteres mit geringer Vernachlässigung:

$$l' = l \left(1 - \frac{\rho}{h} + \frac{2n\rho}{l} \right).$$

Dies Ergebnis würde zwar mit BESSELS Theorie übereinstimmen, da $n\rho = \delta h$ ist; trotzdem scheint es mir wie diese unhaltbar, indem die Reaktion des Lagers gegen den Horizontaldruck der Schneide nicht beachtet ist. Da dieser letzte nach Gl. (23) mit hier hinreichender Genauigkeit gleich $Mgh \sin \Theta / l$ ist, so folgt nach dem Prinzip der lebendigen Kraft, indem das Potential der Reaktion gleich $-Mg \frac{h}{l} \int (\sin \Theta \cdot n\rho d\Theta)$ wird:

$$\frac{1}{2} \{ (h + n\rho)^2 + k^2 \} \left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2 - g \left(h + \rho + n\rho \frac{h}{l} \right) \cos \Theta = \text{const.}$$

Man erkennt also, daß vorher das Moment $(Mgh \sin \Theta / l) n\rho$ weggeblieben ist. Damit aber folgt

$$l' = l \left(1 - \frac{\rho}{h} + \frac{n\rho}{l} \right) = l \left(1 - \frac{\rho}{h} + \frac{\delta h}{l} \right),$$

was mit Gl. (49), abgesehen von der elastischen Reaktion, übereinstimmt.

Ein Zweifel an diesem Resultat würde sich ergeben, wenn man den Fall $n = 1$, d. h. nur Zapfendrehung, annehmen wollte. Denn dann dreht sich das Pendel um die Axe des Kreiscylinders, der die Schneide ersetzt, und man bekommt richtig die Fundamentalgleichung von DEFFORGES mit $n = 1$; allerdings nur unter der Voraussetzung, daß die horizontale Reaktion des kreisförmigen Lagers durch die Axe des Kreiscylinders führt. Diese Voraussetzung wäre aber bekanntlich ganz unzutreffend¹.

Aber auch abgesehen vom Falle $n = 1$ wird doch in thatsächlichen Verhältnissen, wie schon S. 79 bemerkt, die Reaktion $-Mgh \sin \Theta / l$ nicht um $n\rho = \delta h$ von der Momentanaxe abstehen, sondern ihr etwas näher liegen. Setzt man also bei der Bildung des Potentials der Reaktion $\delta h - \delta h^{(3)}$ an Stelle von $n\rho$, so führt die zuletzt mitgeteilte Rechnung unmittelbar zu der Formel (49*) für l' , abgesehen von D_1' . An Stelle von $2n\rho$ oder $2\delta h$ in dem Ausdruck für l' von DEFFORGES tritt also $\delta h + \delta h^{(3)}$, wobei im allgemeinen anzunehmen ist, daß δh und $\delta h^{(3)}$ verschieden sind.

Wie dem auch sei: die Hauptsache ist, daß die Elimination des Einflusses des Gleitens jedenfalls mittelst Beobachtungen an verschiedenen langen Pendeln von gleichem Gewicht möglich erscheint. Dazu ist erforderlich, daß der Koeffizient n bzw. δh und $\delta h^{(3)}$ für gleiches Pendelgewicht dieselbe Größe haben. Nach den *Observations*, p. 21 u. 16²), ist n in der That proportional dem Gewicht (und überdies für beide Schneiden gleich, was aber wegen deren Vertauschung unwesentlich ist). Außerdem ist das Gleiten proportional der Amplitude, wie auch BESSEL fand. Sein Betrag war nach direkten Ermittlungen gleich $0^{\alpha,2}$ bei einem Meterpendel von 5 kg Gewicht, bei $30'$ Amplitude α .

Es wird jedenfalls nützlich sein, durch direkte Beobachtungen zu prüfen, ob das lange und das kurze Pendel (gleichen Gewichts) bei gleichem Ausschlag α denselben Gleitungsbetrag $\alpha \delta h$ zeigen,

1) Der Fall $n = 1$ würde sich durch eine starke Dämpfung der Amplituden verraten, die durch die gleitende Reibung erzeugt werden müßte, die ja größer ist als die rollende Reibung. Ohne gleitende Reibung geht es aber nicht ab, wenn erst gar kein Rollen mehr stattfindet. Nur solange das Gleiten ein kleiner Bruchteil des Rollens ist (n klein), kann man sich denken, daß gleitende Reibung nicht in Betracht kommt.

2) Vergl. auch die Note von DEFFORGES: *De la nature de la rotation du couteau d'un pendule sur son plan de suspension* in den C. R. 1892, t. CXV, p. 29.

ob also δh in beiden Fällen gleichen Wert hat. (Bei $\delta h^{(8)}$ ist das an sich wahrscheinlich.) Man hat auch mehrfach die Lage der Momentanaxe durch mikroskopische Beobachtung der äußersten Querschnitte der Schneidenkörper direkt zu ermitteln versucht, also eine direkte Messung von δh angestrebt¹⁾. Wenn dies gelingt, so führt das zu einer Prüfung der Gleichheit der δh für beide Pendel.

An dieser Stelle möge auch die Frage erörtert werden, wie sich der Einfluss des Gleitens gestalten würde, falls die Verschiebung u nicht durch $\delta h \cdot \Theta$ dargestellt wird, womit $du/dt = \delta h \cdot d\Theta/dt$ folgt, sondern durch eine solche Funktion, das zu setzen ist:

$$du/dt = \mp c(d\Theta/dt)^2 \quad \begin{array}{l} - \text{für negative } d\Theta/dt \text{ (Hingang)} \\ + \text{für positive } d\Theta/dt \text{ (Hergang)}, \end{array}$$

unter c eine positive Konstante verstanden. Man findet dann näherungsweise (und abgesehen von c^2) für den Hingang:

$$\Theta = \alpha \cos \nu t + \frac{c\alpha^2\nu}{3l} (2 \sin \nu t - \sin 2\nu t) \quad \text{mit} \quad \nu = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Vereinfacht man nämlich Gl. (21) in

$$l \frac{d^2\Theta}{dt^2} + g\Theta + \frac{d^2u}{dt^2} = 0$$

und setzt, mit Rücksicht auf den Näherungswert $\alpha \cos \nu t$ von Θ , für d^2u/dt^2 den Ausdruck ein $-2c\alpha^2\nu^3 \cos \nu t \sin \nu t$, so wird

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \nu^2\Theta - \frac{2c}{l}\alpha^2\nu^3 \cos \nu t \sin \nu t = 0,$$

woraus sofort der für Θ angegebene Ausdruck hervorgeht.

Nun ist $d\Theta/dt$ gleich null für $t=0$ und für $\nu t = \pi + 4c\alpha\nu/3l$. Die Schwingungsdauer vergrößert sich daher um $T \cdot 4c\alpha\nu/3\pi l$. Die Höhenverschiebung δh der Momentanaxe wird veränderlich, indem $\delta h = du/d\Theta = -cd\Theta/dt$ ist. Ihr Maximum δh_0 findet bei der vertikalen Pendelstellung statt und ist gleich $c\alpha\nu$, womit die Vergrößerung der Schwingungsdauer auch gleich $T \cdot 4\delta h_0/3\pi l$ wird. Die gesamte Horizontalverschiebung der Schneide beträgt für eine Schwingung $c\alpha^2\nu\pi/2$. Hiernach würde ein derartiges Gleiten von dem bisher vorausgesetzten wohl leicht zu unterscheiden sein.

DEFFORGES bemerkt²⁾, das durch häufige Benutzung das Lager von Achat eine 10^μ breite, $0^\mu,5$ tiefe Rille bekommen habe. Für die Korrektur von L findet er aus der Kombination der Werte für ein Meter- und Halbmeterpendel (*Observations du pendule*, p. 117) 55^μ für das erste und 110^μ für das letzte; auch zwei andere Pendel von geringerem Gewicht und $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{4}$ m Länge geben entsprechende Beträge, so das die Theorie eine gewisse Bestätigung erfährt.

Wenn man die von mir berechnete Korrektur wegen der elastischen Biegung der Pendelkörper anbringt, die L bei dem Meterpendel um 18^μ vermindert, für die Halbmeter- und Viertelmeterpendel aber von mir ziemlich unsicher zu 3^μ und null geschätzt wurde (S. 15), so folgt die Korrektur wegen Gleitens, die aus dem Ergebnis aller Stationen abgeleitet ist und sich für zwei Schneidenpaare fast gleich ergibt, etwas kleiner. Es wird nämlich (nach *Observations du pendule*, p. 114—117, Station Rivesaltes) in Mikron:

1) LORENZONI, *Nuovo esame delle condizioni del supporto nelle esperienze fatte a Padova nel 1885—86 etc.* (Atti del R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti, t. V. 1892/93.) Im Auszug in den *Verhandlungen der Permanenten Kommission d. I. E. in Innsbruck*, 1894, S. 222—224.

2) DEFFORGES, *De l'influence du glissement dans la rotation du couteau sur la durée d'oscillation d'un pendule réversible.* (Comptes-Rendus des séances de la Commission permanente de l'Association géodésique internationale, réunie à Florence, 1891, p. 156.)

	Gew. in kg	Λ/τ^2	Korrigiert für Biegung	Korrektion f. Gleiten	Korrigiert f. Gleiten	Korrigiert f. Gleiten u. Mitschw.
Pendel I	5,2	993372.8	355	+ 42	993397	993400
„ II	„	316.3	313	+ 84	397	403
„ III	3,2	357.9	355	+ 52	407	411
„ IV	2,3	332.3	332	+ 74	406	411.

In der letzten Kolumne habe ich noch die Verbesserung fürs Mitschwingen angebracht (nach *Observations du pendule*, p. 115), die vorher nicht dabei ist, die aber an der guten Übereinstimmung nichts ändert.

In den *Observations* macht DEFFORGES keine Angaben über den Betrag des Gleitens; die oben aufgeführte Zahl von $0^{\mu}2$ bei $\alpha = 30'$ ist den *C. R. de l'Ac. des Sc.* entnommen und wird auch in den *Florentiner Verhandlungen der Perm. Kommission der I. E.*, S. 158, mitgeteilt. Ob die $0^{\mu}2$ für $30'$ Pendelausschlag zu rechnen sind, oder vielleicht für die ganze Amplitude $2\alpha = 60'$, ist unklar. Selbst im ersteren Falle wird δh nur $0,2 \times 3438/30 = 23^{\mu}$ anstatt 42. Es wären daher 19^{μ} auf $\delta h^{(3)}$ und auf konstante Fehler der Längenmessung zu rechnen.

LORENZONI fand die Summe von δh für beide Schneiden bei seinem Sekundenpendel durch direkte Messung (vergl. *Nuovo esame*) nach Abzug des Einflusses des Mitschwingens nur gleich $4 - 3 = 1^{\mu}$, mit einem m. F. von etwa $\pm 3^{\mu}$.

§ 12. **Verschiedenartige kleine Bewegungen der Schneide.** SCHIÖTZ wurde durch eine an invariablen STERNECKSchen Pendeln gemachte Erfahrung auf den Einfluß des Gleitens hingeführt. Er bemerkte (*Resultate*, 1893, S. 6—8), daß Erschütterungen durch Strafsenverkehr und Wind die Schwingungsdauer recht merklich verkleinerten (rund $\frac{1}{100000}$) und suchte durch sehr eingehende Betrachtungen die Wirkung der Erschütterungen theoretisch zu verfolgen. Er findet (a. a. O. S. 35), daß periodische Erschütterungen des Bodens die beobachtete Wirkung nicht hervorbringen. Er nimmt daher an (S. 39), daß infolge der Erschütterungen die Reibung wiederholt momentan überwunden wird und nun ruckweise Gleiten eintritt, wodurch sich das Mitschwingen des Stativs vermindert, indem der Horizontal Schub H_1 Gl. (23) zeitweise nicht zur Wirkung kommt. Für die durch Mitschwingen und Gleiten gestörte mathematische Länge folgt dann (a. a. O. S. 40, Gl. XXIV), im Anschluß an die Bezeichnungen von Gl. (31):

$$l' = l \left\{ 1 + [1 - k] \frac{Mgh}{\varepsilon l^2} \right\}, \quad (53)$$

worin k einen positiven, echten Bruch bezeichnet. Damit wäre allerdings die bezügliche Erfahrung über die Wirkung von Bodenerschütterungen erklärt.

SCHIÖTZ zieht diese Betrachtung auch zur Erklärung des Umstandes heran, daß BARRAQUER das Mitschwingen bei Achatschneiden um 2% geringer fand als bei Stahlschneiden, und meint, daß erstere wegen geringerer Reibung leichter gleiten müßten als letztere¹⁾.

In beiden Fällen handelt es sich um größeres Mitschwingen; bei BARRAQUER ist Mg/ε sogar $0,0002$ m, also die Ausladung σ bei $\alpha = 30'$ von der Größenordnung 1^{μ} . Bei SCHIÖTZ wird σ allerdings nur etwa $0^{\mu}1$ betragen haben, bei demselben Wert von α . Bei DEFFORGES beträgt das entsprechende σ nur etwa $0^{\mu}01$ und bei BESSEL wohl noch weit weniger. Die von diesen beiden

1) BARRAQUERS Untersuchung ist ausführlich enthalten in der Abhandlung: *Determinacion experimental de la intensidad de la fuerza de gravedad en Madrid*. (Memorias del Instituto geografico y estadistico, t. VIII, Madrid 1889, p. 411.)

Beobachtern wahrgenommenen Bewegungen der Schneide auf dem Lager von einigen Zehntelmikron sind also viel größer als σ , und sie sind auch ganz anderer Natur als die Gleiterscheinungen bei SCHIÖTZ. Denn während jene Gleitbewegungen immer gleiches Vorzeichen mit $d\Theta/dt$ haben, müssen diese das Vorzeichen mit Θ wechseln, weil σ , ebenso wie der Horizontaldruck, proportional Θ ist und bei Unterbrechungen der Wirksamkeit des letzten sich immer, absolut genommen, verkleinert.

Undenkbar ist es nicht, daß in einem gegebenen Falle beide Bewegungsarten der Schneide auf dem Lager sich kombinieren. Vielleicht ist dies sogar oft der Fall. Denn eine Erscheinung läßt sich so am besten deuten, die PLANTAMOUR, PEIRCE und DEFFORGES beobachtet haben¹⁾:

Es ist dies der Unterschied des Wertes für die Konstante des Mitschwingens Mg/ε aus der Wirkung eines statischen Druckes Mg und aus der dynamischen Wirkung von Mg als schwingendem Pendel. Im ersteren Falle ergibt sich rund 10% mehr. DEFFORGES glaubt, daß der Unterschied infolge des „glissement“ entstehe, wobei sich die Konsole dem von der Schneide ausgeübten Mitnehmen entziehe. Allein dies paßt nur auf die eine Hälfte der Bewegung von $\Theta = -\alpha$ bis $+\alpha$. Auch ist das „glissement“ zu groß. Da überdies doch die Schneide (nach der Voraussetzung) in der Rille bleibt, so überträgt sie den ganzen Horizontaldruck. Mir scheint, daß bei diesen kleinen Bewegungen der Zusammenhang von Schneide und Lager nicht so gestört wird, um den besprochenen Unterschied erklären zu können: sind die Bewegungen rein elastischer Natur, (25*), so ist der Zusammenhang ohne Unterbrechung vorhanden; sind es Gleitungen im vertieften Lager, (25†), so giebt dieses, wie schon bemerkt, den Druck unverändert weiter. Wenn berücksichtigt wird, daß infolge der unvollkommenen Elastizität der Pfeiler und des Untergrundes bei den statischen Messungen starke Nachwirkungen entstehen (PLANTAMOUR, *Rech. exp.*, p. 9), so ist der Unterschied auch erklärlich. Manchmal kann es auch von Bedeutung sein, daß bei statischen Messungen meist nur nach einer Seite verschoben wird, bei den Pendelbewegungen aber nach zwei.

Eine Hauptsache ist wohl, absolute Pendelmessungen, wie man es jetzt thut, auf festen Unterlagen und bei ruhigen Bodenverhältnissen anzustellen, um diese Einflüsse unschädlich zu machen.

§ 13. Zusammenstellung der Grundformeln. Die beobachteten Schwingungszeiten T' sind zunächst auf unendlich kleine Ausschläge mit

$$- T' \cdot \frac{\alpha^2}{16}, \quad \alpha \text{ in Bogenmaß}, \quad (\text{A})$$

zu reducieren, welche Formel immer ausreicht, da erst bei Ausschlägen von $3\frac{1}{2}^\circ$ ab die höheren Glieder die 7. Decimalstelle von T' (für $T' = 1^s$) beeinflussen.

Im folgenden sind unter T_1' und T_2' die nach (A) reducierten Schwingungszeiten des Reversionspendels für schweres Gewicht *unten* und *oben* verstanden, und es wird angenommen, daß Luftdichte und Pendeltemperatur für beide Fälle gleich groß seien. Über die eventuelle Reduktion auf gleiche Luftdichte vergl. weiterhin § 14.

1) E. PLANTAMOUR, *Recherches expérimentales sur le mouvement simultané d'un pendule et de ses supports*. (Verhandlungen der 5. Allgem. Konf. d. Europäischen Gradmessung zu Stuttgart 1877); S. 9, 48 u. 49.

C. S. PEIRCE, *On the flexure of pendulum supports*. (App. No. 14, C. a. G. S.; R. for 1881); p. 69.

DEFFORGES, *Observations du pendule*, p. 19. Vergl. auch *Verhandlungen der Perm. Komm. d. I. E. in Nizza*, 1887, Ann. V^e, S. 4—7.

Während PEIRCE glaubt, aus den Untersuchungen schließen zu müssen, daß bei guter Aufstellung der Konsole kein wesentlicher Unterschied des statischen und dynamischen Wertes bestehe und der richtige Wert inmitten beider, mehr nach dem dynamischen Wert zu liege, glaubt DEFFORGES aus seinen Versuchen erkannt zu haben, daß der statische Wert anzuwenden sei.

Man kann nun die im vorhergehenden betrachteten Störungseinflüsse auf die mathematische Länge l des Pendels wie folgt zusammenfassen:

$$l' = l \left\{ 1 + \frac{\beta}{l} + \frac{\gamma}{h} + \frac{h\delta}{l^2} \right\}. \quad (\text{B})$$

Hierin ist

$$\beta = \delta h^{(2)} + \delta h^{(3)}; \quad (54)$$

$\delta h^{(2)}$ entsteht durch den Vertikaldruck und $\delta h^{(3)}$ durch den Horizontaldruck der Schneide aufs Lager, vergl. S. 79 und 80.

Ferner ist

$$\gamma = \frac{M_l}{M} \left(\frac{K}{l} + \frac{l}{2} \right) - (bq), \quad (55)$$

wobei das erste Glied vom Auftrieb und dem Mitschwingen der Luft herrührt, während (bq) in Erweiterung des BESSELSchen Symbols bq , siehe Gl. (11), S. 62, eine Reihe Einflüsse der Schneidenfigur beim Abrollen und der elastischen Wechselwirkung von Schneide und Lager umfaßt. (bq) ist stark von α^2 beeinflusst, K vielleicht ein wenig. Unter der Voraussetzung, daß sich der Krümmungsradius ϱ der Schneidenabstumpfung nach Potenzen von Θ entwickeln läßt, ist nach (49), (49*) und (50):

$$(bq) = \varrho_0 + D_1' + \frac{3}{4} D_3 \alpha^2 + (\alpha^4) + \dots \quad (55^*)$$

Dabei bezeichnet ϱ_0 den Krümmungsradius, der für $\alpha = 0$ in Betracht kommt; D_1' , D_3 u. s. w. sind Einflüsse des Vertikaldrucks und, abgesehen von D_1' , auch der Schneidenfigur. (Das kleine Glied mit ξ in (16*), S. 64, ist nicht weiter berücksichtigt; es giebt genau genommen einen mit α^2 veränderlichen Koeffizienten β .)

Endlich ist

$$\delta = \frac{Mg}{\varepsilon} + \delta h^{(1)}, \quad (56)$$

herrührend vom Mitschwingen der ganzen Unterlage, des „Stativs“, bzw. von den kleinen elastischen Verschiebungen kleinster Teile des Lagers durch den Horizontaldruck der Schneide, vergl. (25*) und (31). Den ersten Teil von δ , der dem Mitschwingen des Stativs entspricht, kann man mehr oder weniger genau direkt ermitteln und in Rechnung bringen (vergl. § 8, S. 73).

Bei der Anwendung von (B) auf ein nahezu richtiges Reversionspendel kann man in den Störungsgliedern $l = \Lambda$, dem Schneidenabstand, setzen. Für die gestörten Schwingungszeiten, die den beiden Gewichtslagen entsprechen, wird:

$$\begin{aligned} T_1'^2 &= T_1^2 \left\{ 1 + \frac{\beta_a}{\Lambda} + \frac{\gamma_a}{h_1} + \frac{h_1 \delta_a}{\Lambda^2} \right\}, & \text{schw. Gew. u.,} \\ T_2'^2 &= T_2^2 \left\{ 1 + \frac{\beta_b}{\Lambda} + \frac{\gamma_b}{h_2} + \frac{h_2 \delta_b}{\Lambda^2} \right\}, & \text{,, ,, o.,} \end{aligned} \quad (57)$$

wo die Indices a und b die Schneide, um welche die Schwingungen erfolgen, angeben. Ist nun

$$\tau'^2 = \frac{T_1'^2 h_1 - T_2'^2 h_2}{h_1 - h_2}, \quad \tau^2 = \frac{T_1^2 h_1 - T_2^2 h_2}{h_1 - h_2} \quad (58)$$

und der Schneidenabstand gleich Λ_{ab} gemessen, so ist bekanntlich die mathematische Länge des Sekundenpendels

$$L = \frac{\Lambda_{ab}}{\tau^2}. \quad (58^*)$$

Vergl. auch die Gleichungen (3), (4), (3*) und (4*), S. 58, deren letzte unter der Annahme, daß $T_1' - T_2'$ sehr klein ist, anstatt (58) zur Berechnung von τ' dienen kann:

$$\tau' = T_1' + \frac{T_1' - T_2'}{h_1 - h_2} h_2. \quad (C)$$

Vertauscht man die Schneiden oder schraubt die Gewichte um, so ergeben sich die Gleichungen (57) mit Vertauschung der Indices a und b . Unterscheidet man die Ergebnisse für τ' und Λ durch die Indices ab und ba , so folgt mit Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung:

$$\begin{aligned} \tau'_{ab}{}^2 &= \tau_{ab}^2 \left\{ 1 + \frac{\beta_a h_1 - \beta_b h_2}{\Lambda(h_1 - h_2)} + \frac{\gamma_a - \gamma_b}{h_1 - h_2} + \frac{h_1^2 \delta_a - h_2^2 \delta_b}{\Lambda^2(h_1 - h_2)} \right\} \\ \tau'_{ba}{}^2 &= \tau_{ba}^2 \left\{ 1 + \frac{\beta_b h_1 - \beta_a h_2}{\Lambda(h_1 - h_2)} + \frac{\gamma_b - \gamma_a}{h_1 - h_2} + \frac{h_1^2 \delta_b - h_2^2 \delta_a}{\Lambda^2(h_1 - h_2)} \right\} \\ L &= \frac{\Lambda_{ab}}{\tau_{ab}^2} = \frac{\Lambda_{ba}}{\tau_{ba}^2}. \end{aligned} \quad (59)$$

Damit ergibt sich endlich ebenso genau für das Mittel beider τ'^2 , wenn Λ das Mittel von Λ_{ab} und Λ_{ba} vorstellt:

$$\tau'^2 = \frac{\tau'_{ab}{}^2 + \tau'_{ba}{}^2}{2} = \frac{\Lambda}{L} \left\{ 1 + \frac{\beta_a + \beta_b + \delta_a + \delta_b}{\Lambda} \right\}. \quad (D)$$

Wendet man mit DEFFORRES 2 Pendel gleichen Gewichts mit denselben Schneiden an, so werden die Glieder $\beta_a, \beta_b, \delta_a, \delta_b$ als in beiden Fällen übereinstimmend zu betrachten sein. Unterscheidet man hier die τ' und Λ durch die Indices I und II, so folgt, wenn gesetzt wird

$$L_I = \frac{\Lambda_I}{\tau_I'^2} \quad \text{und} \quad L_{II} = \frac{\Lambda_{II}}{\tau_{II}'^2}, \quad (E)$$

$$L = \frac{\Lambda_I - \Lambda_{II}}{\tau_I'^2 - \tau_{II}'^2} = L_I + (L_I - L_{II}) \frac{\Lambda_{II}}{\Lambda_I - \Lambda_{II}}. \quad (F)$$

Sind m_I und m_{II} die mittleren zufälligen Fehler in L_I und L_{II} , so ist für L der m. F. gleich

$$m_L = \pm \sqrt{\left(\frac{\Lambda_I}{\Lambda_I - \Lambda_{II}} \right)^2 m_I^2 + \left(\frac{\Lambda_{II}}{\Lambda_I - \Lambda_{II}} \right)^2 m_{II}^2}, \quad (60)$$

woraus man erkennt, daß es gut ist, das kurze Pendel möglichst klein zu machen. Die Kombination von 1 m und $\frac{1}{4}$ m ist rund $\frac{5}{3}$ mal so genau, als diejenige von 1 m und $\frac{1}{2}$ m.

Bei Pendeln verschiedenen Gewichts, aber mit denselben Schneiden, kann man annähernd die β und δ in (D) proportional dem Gewicht annehmen; aus den beiden Gleichungen (D) läßt sich L dann ebenfalls herleiten, aber der konstante Fehler in Λ bleibt im Resultat mehr oder weniger enthalten.

Aus den beiden Werten von τ'^2 für beide Pendel kann man auch die Summe $\beta_a + \beta_b + \delta_a + \delta_b$ ableiten. Größeres Interesse bietet es, dabei schon auf die Gleichungen (59) zurückzugehen. Man hat dann unter einigen vereinfachenden Voraussetzungen für beide Pendel zusammengenommen 4 Gleichungen für L und 2 Koeffizienten, also eine Prüfung. Ich setze dabei gleichschwere Pendel voraus. Für $\beta_a = \beta_b = \beta$ und $\delta_a = \delta_b = \delta$ geben die Gleichungen (59):

$$L = \frac{\Lambda_{ab}}{\tau_{ab}^2} \left\{ 1 + \frac{\beta + \delta}{\Lambda} + \frac{\gamma_a - \gamma_b}{h_1 - h_2} \right\}$$

und

$$L = \frac{\Lambda_{ba}}{\tau_{ba}^2} \left\{ 1 + \frac{\beta + \delta}{\Lambda} - \frac{\gamma_a - \gamma_b}{h_1 - h_2} \right\},$$

(61)

welche Gleichungen für beide Pendel gelten, und die Unbekannten L , $\beta + \delta$ und $\gamma_a - \gamma_b$ zu ermitteln gestatten. Es ist zu bemerken, daß infolge der Voraussetzung gleicher Luftdichte für die Schwingungen in beiden Gewichtslagen, $\gamma_a - \gamma_b$ nur von (bq) , vergl. (55), abhängt, also von der Schneidform, Elasticität und α^2 . Deshalb ist $\gamma_a - \gamma_b$ dieselbe Größe für beide Pendel auch bei verschiedener Luftdichte während der Beobachtungen an den beiden Pendeln.

Geht man auf die Gl. (57) zurück, so hat man für 2 Pendel 8 Gleichungen. Es empfiehlt sich dann folgende Umformung: Da die Pendel nahezu richtige Reversionspendel sind, kann man $J_0 = Mh_1h_2 + Mi_0$ setzen, wo i_0 sehr klein ist; dann wird z. B.

$$T_1^2 = \frac{\pi^2 Mh_1l_1}{g Mh_1} = \frac{\pi^2 Mh_1^2 + Mh_1h_2 + Mi_0}{g Mh_1} = \frac{\pi^2}{g} \Lambda \left(1 + \frac{i_0}{\Lambda h_1} \right).$$

(62)

Dies kann man in die erste Gl. (57) einführen (natürlicherweise nicht mit Weglassung von i_0 , wie es wohl geschehen ist). Nunmehr folgt anstatt (57):

$$L = \frac{\Lambda_{ab}}{T_1'^2} \left\{ 1 + \frac{\beta_a}{\Lambda} + \frac{\gamma_a}{h_1} + \frac{i_0}{\Lambda h_1} + \frac{h_1 \delta_a}{\Lambda^2} \right\}, \quad \text{schw. Gew. u.},$$

$$L = \frac{\Lambda_{ba}}{T_2'^2} \left\{ 1 + \frac{\beta_b}{\Lambda} + \frac{\gamma_b}{h_2} + \frac{i_0}{\Lambda h_2} + \frac{h_2 \delta_b}{\Lambda^2} \right\}, \quad \text{,, ,, o.}$$

(63)

Bei Vertauschung der Schneiden oder Umschrauben der Gewichte tritt an Stelle von Λ_{ab} die Größe Λ_{ba} ; alles andere bleibt, nur müssen die speziellen Werte von T_1' und T_2' eingesetzt werden. Allerdings wird i_0 sich etwas ändern, da mit den stattfindenden Massenumlagerungen J_0 sich mehr oder weniger ändern wird. Nimmt man aber an, daß in beiden Fällen i_0 verschieden ist, so hat die Aufstellung der Gleichungen (63) keinen Wert, da sie doch paarweise kombiniert werden müssen, um i_0 zu eliminieren, womit man zu (61) zurückgelangt.

In den nächsten Abschnitten werden aufser der Reduktion der T' auf gleiche Luftdichte einige Korrekturen des Ergebnisses für L schätzungsweise entwickelt; aufserdem ist noch Teil I, § 9 (42), wegen angenäherter Berechnung derjenigen Korrektur zu vergleichen, die wegen der Elasticität des Pendelkörpers erforderlich wird.

§ 14. Reduktion der Schwingungsdauer auf gleiche Luftdichte. Bei Ungleichheiten der Luftdichte für die Beobachtungen in beiden Lagen des schweren Gewichts kann unter Umständen eine Reduktion auf mittlere Luftdichte erforderlich werden, wozu die notwendigen Koeffizienten durch Beobachtungen bei extremen Luftverhältnissen ermittelt werden müssen. Für den mathematischen Zusammenhang reicht es aus, dabei von der BESSELSchen Formel für l' , vergl. (1), S. 57, auszugehen. Darnach ist

$$T'^2 = \frac{\pi^2}{g} \frac{J_0 + Mh^2}{Mh} \left(1 + \frac{\Lambda \Gamma}{h} \right) \quad \text{mit} \quad \Gamma = \frac{M_I}{M} \left(\frac{K}{\Lambda^2} + \frac{1}{2} \right),$$

(64)

wobei im Ausdrucke für Γ einige zulässige Vernachlässigungen eingeführt wurden. $K/h\Lambda$ entspricht

dem BESSELSchen k . Die Größe Γ hat für schweres Gewicht unten und oben wegen der symmetrischen Form des Reversionspendels denselben Wert.

Für kleine Änderungen der Luftdichte D kann man setzen:

$$dT' = T' \frac{\Delta d\Gamma}{2h} = \frac{P}{h} dD,$$

unter P einen gewissen, für beide Gewichtslagen übereinstimmenden Koeffizienten verstanden. Für die beiden Gewichtslagen einzeln wird nun:

$$dT'_1 = \frac{P}{h_1} dD \quad \text{und} \quad dT'_2 = \frac{P}{h_2} dD. \quad (65)$$

Nimmt man die Luftdichte D gleich 1 für 760 mm Luftdruck und 0° Temperatur, so ist

$$D = \frac{B - \frac{3}{8} \vartheta}{760(1 + 0,003665 T)} \quad (66)$$

mit B als Luftdruck und ϑ als Dunstdruck, beide in mm, und mit T als Lufttemperatur.

Durch Beobachtungen bei verschiedener Luftdichte D ergeben sich zusammengehörige Werte von dT'_1 bzw. dT'_2 und dD , und daraus P .

Ausgedehnte Beobachtungsreihen für bis zu null abnehmende Werte D giebt schon PEIRCE (*Measurements of gravity at initial stations*, p. 72—73, Beobachtungen von FARQUHAR); später hat DEFFORGES (*Observations du pendule*, p. 57—61) solche angestellt. Beide legen in Anlehnung an STOKES' Theorie für die Zunahme von T' von $D=0$ bis etwa 1 die Interpolationsformel zu Grunde:

$$\delta T' = T(AD + B\sqrt{D}); \quad (67)$$

A und B sind Koeffizienten, die zu h im umgekehrten Verhältnis stehen.

PEIRCE fand für ein gewöhnliches REPSOLDSches Pendel, mit $h_1 : h_2 = 7 : 3$, in abgerundeten Zahlen (red. auf $D=1$): $A = 0,00030$ und $B = 0,00005$ für $h/\Lambda = 0,7$. Aus (64) und (67) folgt aber

$$\frac{K}{\Lambda^2} = -\frac{1}{2} + \frac{2Mh}{M_1\Lambda}(AD + B\sqrt{D}),$$

woraus mit den angegebenen Werten sowie mit $M/M_1 = 6600$ wegen $\Lambda = 1$ als Wert von K für $D = 1$ hervorgeht: $K = 2,7$.

§ 15. Verkürzung des Maßstabes durch sein Gewicht. Der zum Pendelapparat des Geodätischen Instituts gehörige Maßstab ist bei horizontaler Lage mit dem Normalmeter verglichen und wird beim Gebrauch in vertikaler Lage unten gestützt. Hierdurch entsteht eine scheinbare Vergrößerung des gemessenen Schneidenabstandes Λ , indem die Maßstablängen durch den Druck der oberhalb liegenden Massen sich verkürzen.

Man findet leicht, daß die Länge Λ so verkürzt wird, als wirkte darauf, konstanten Maßstabquerschnitt zwischen den beiden, zur Vergleichung benutzten Teilstrichen vorausgesetzt, die oberhalb deren Mitte befindliche Masse. Wird das Gewicht der Teile über dem oberen Strich durch ein ideelles Stück Maßstab vom Querschnitt Q und der Länge e ausgedrückt, ist ferner μ das Gewicht der Volumeneinheit des Maßstabes, so ist die gesamte Belastung, welche auf Verkürzung von Λ wirkt, gleich $\mu Q(e + \frac{1}{2}\Lambda)$. Die Verkürzung ist daher $\mu(e + \frac{1}{2}\Lambda)\Lambda/E$, worin E den Elastizitätsmodul

bezeichnet. Derselbe ist in diesem und dem folgenden Paragraphen wie in § 12, Teil I, zu verstehen. Die Verbesserung von L wird gleich

$$-\frac{\mu \left(e + \frac{1}{2} \Lambda \right)}{E} L. \quad (68)$$

Mit $E = 10000$ für kg und mm, $\mu = 8,5/10^6$, $e =$ rund 50, folgt für $\Lambda = 1000$ die Verbesserung $-0^{\alpha},47$, für $\Lambda = 250$ aber $-0^{\alpha},15$, was im Endwert nach Formel (F), S. 87, die Verbesserung $-0^{\alpha},6$ ergibt.

§ 16. **Einfluss der Dehnung des Pendels.** Der Zustand des Pendels ist bei schwerem Gewicht unten ein anderer als bei schwerem Gewicht oben, da in beiden Fällen Dehnungen (und Zusammendrückungen) in verschiedener Weise auftreten. (Vergl. auch Teil I, § 4.) Es ändern sich infolge dessen Trägheitsmoment und statisches Moment verschieden. Sei im Anschluß an die Differentialformel (35), S. 72:

$$\delta l_1 = \frac{M h_1 \Lambda + Z_1}{M h_1 + N_1} - \Lambda, \quad \delta l_2 = \frac{M h_2 \Lambda + Z_2}{M h_2 + N_2} - \Lambda,$$

wobei Z und N Zuwachse des Trägheitsmoments bzw. statischen Moments infolge der Dehnung sind, und ohne Dehnung das Reversionspendel als „vollkommen“ angenommen ist. Dann wird

$$\frac{\delta L}{L} = \frac{\delta \Lambda}{\Lambda} + \frac{(N_1 - N_2) \Lambda - (Z_1 - Z_2)}{\Lambda M (h_1 - h_2)}. \quad (69)$$

Die obere Schneide sei der Anfang vertikaler Abscissen, positiv nach unten. In der ersten Lage des Pendels seien die Gewichte M_1 und M_2 bzw. oben und unten, und der Schwerpunktsabstand h_1 oben. Alle Massen können genau genug für jeden Querschnitt auf die Axe verschoben gedacht werden. Dann ist

$$Z = 2 \int x \delta x dm, \quad N = \int \delta x dm;$$

hierbei sind die Integrationen vom oberen Ende mit der Abscisse $-e$ bis zum unteren Ende mit der Abscisse $\Lambda + e$ zu erstrecken. Für die Stange ist $dm = \mu Q dx$ mit Q als Querschnitt und μ als Gewicht der Volumeneinheit. Zu M_1 und M_2 , welche Massen je auf einen Punkt kondensiert gedacht werden, gehören für die 1. Lage die Abscissen $-e_1$ und $\Lambda + e_1$; für die 2. Lage ist es umgekehrt.

Unterscheidet man für beide Lagen die δx für dieselbe Abscisse mittelst der Indices 1 und 2, so ist einleuchtend, daß auf $\delta x_1 - \delta x_2$ nur $M_2 - M_1$ wirkt, und zwar ist allgemein, wenn Q zur Abscisse a gehört:

$$\delta x_1 - \delta x_2 = \frac{M_2 - M_1}{E} \int_0^x \frac{da}{Q}.$$

Bezeichnet man ferner für $x = \Lambda + e_1$ die Werte von δx_1 und δx_2 bzw. mit δu_1 und δu_2 , sowie für $x = -e_1$ die Werte von δx_1 und δx_2 mit δo_1 bzw. δo_2 , so wird:

$$Z_1 - Z_2 = 2\mu \frac{M_2 - M_1}{E} \int_{-e}^{\Lambda+e} Q dx \int_0^x \frac{da}{Q} + 2(\Lambda + e_1)(M_2 \delta u_1 - M_1 \delta u_2) - 2e_1(M_1 \delta o_1 - M_2 \delta o_2),$$

$$N_1 - N_2 = \mu \frac{M_2 - M_1}{E} \int_{-e}^{\Lambda+e} Q dx \int_0^x \frac{da}{Q} + (M_2 \delta u_1 - M_1 \delta u_2) + (M_1 \delta o_1 - M_2 \delta o_2).$$

Damit folgt

$$(N_1 - N_2)\Lambda - (Z_1 - Z_2) = (M_2 - M_1)(\Lambda + 2e_1) \left\{ \frac{\mu i}{E(\Lambda + 2e_1)} - (\delta\Lambda_s + 2\delta o_s) - (M_1 + M_2)(\delta\Lambda' + 2\delta o') \right\},$$

wobei folgende Beziehungen und Relationen eingeführt sind:

$$i = \int_{-e}^{\Lambda+e} Q(\Lambda - 2x) dx \int_0^x \frac{da}{Q}, \quad \delta u_1 = \delta\Lambda_1 + \delta o_2, \quad \delta u_2 = \delta\Lambda_2 + \delta o_1,$$

$$\delta\Lambda_1 = \delta\Lambda_s + M_2 \delta\Lambda', \quad \delta\Lambda_2 = \delta\Lambda_s + M_1 \delta\Lambda',$$

$$\delta o_1 = \delta o_s + M_1 \delta o', \quad \delta o_2 = \delta o_s + M_2 \delta o'.$$

Hierin bezeichnet der Index s eine Dehnung (bezw. Zusammendrückung) durch das Stangengewicht allein, der obere Strich eine solche durch die Masse 1 am Ende der Strecke.

$\delta\Lambda$ für Gl. (69) wird das arithmetische Mittel von $\delta\Lambda_1$ und $\delta\Lambda_2$, wenn mit dem Mittelwert des Schneidenabstands in beiden Gewichtslagen gerechnet wird. Beachtet man noch, daß

$$M(h_1 - h_2) = (M_2 - M_1)(\Lambda + 2e_1),$$

so folgt nun aus (69):

$$\delta L \frac{\Lambda}{L} = -\delta\Lambda + \left\{ \delta\Lambda_s - 2(\delta o_s + [M_1 + M_2]\delta o') + \frac{\mu i}{E(\Lambda + 2e_1)} \right\}.$$

$\delta\Lambda$ könnte man direkt aus dem Unterschied der Schneidenabstände für horizontale und vertikale Lage des Pendels (letztere im Mittel der beiden Gewichtslagen) ableiten; den Wert der geschlungenen Klammer muß man schätzen. Für konstanten Querschnitt Q und $e = e_1$ ist

$$\delta\Lambda_s = \frac{\mu\Lambda(\Lambda + 2e)}{2E}, \quad \delta o_s = \frac{\mu e^2}{2E}, \quad \delta o' = \frac{e}{EQ}, \quad i = -\frac{1}{6}(\Lambda + 2e)^3;$$

aufserdem nach Teil I, § 9, (34) und (36):

$$6(M_1 + M_2)(\Lambda + e)e = \mu Q(\Lambda + 2e)(\Lambda^2 - 2\Lambda e - 2e^2); \quad M_1 + M_2 = M - \mu Q(\Lambda + 2e).$$

Dies giebt endlich als Verbesserung $-\delta L$ der mathematischen Länge L' des Sekundenpendels infolge der Dehnung des Pendels, bei konstantem Querschnitt seiner Stange, den Ausdruck:

$$+ \frac{L}{\Lambda} \left\{ \delta\Lambda - \frac{2Me^2(2\Lambda^2 + \Lambda e - 3e^2)}{EQ(\Lambda + 2e)(\Lambda^2 + 4\Lambda e + 5e^2)} \right\}. \quad (70)$$

Der erste Teil ist das Hauptglied; bei konstantem Querschnitt ergibt er allein die Verbesserung von L' gleich

$$+ \frac{ML}{2EQ}. \quad (70^*)$$

Bei dem neuen Meterpendel des Geodätischen Instituts ist für kg und mm: $M = 3,59$, $Q = 190$, $\mu = 8,5/10^6$, $e_1 = 144$, womit die Verbesserung wird $+0^{\mu},95 - 0^{\mu},06$. Beim Viertelmeterpendel ist $Q = 600$, $e_1 = 48$ und die Verbesserung gleich $+0^{\mu},95 - 0^{\mu},02$. Der Endwert aus Formel (F), S. 87, wird daher die Verbesserung $+0^{\mu},9$ zu erhalten haben.

§ 17. **Einfluß eines Höhengradienten der Temperatur.** Die Temperatur des Pendels werde für den Augenblick mit u bezeichnet, und es sei für die Tiefe x unter der oberen Schneide

$$u = u_m + \left(x - \frac{\Lambda}{2}\right) u' = u_0 + u'x;$$

u_m ist die mittlere Temperatur T des Pendels.

Ein Massenelement dm im Abstand x von der oberen Schneide erleidet infolge des Unterschieds $u - u_m$, wenn mit A der Ausdehnungskoeffizient des Pendels bezeichnet wird, die Verschiebung

$$\delta x = \frac{1}{2} Ax(x - \Lambda)u',$$

indem die mittlere Temperatur der Strecke x gleich $\frac{1}{2}(x - \Lambda)u'$ ist.

Für die Formel (69) des vorigen Paragraphen wird nun unabhängig von der Stangenform $\delta\Lambda = 0$ und (die Masse der Querschnitte immer auf die Abscissenaxe konzentriert gedacht):

$$Z_1 - Z_2 = Au'(M_2 - M_1)(\Lambda + 2e_1)(\Lambda + e_1)e_1,$$

während $N_1 - N_2$ verschwindet.

Damit folgt als Verbesserung von L' wegen des Temperaturgradienten $u' = -T'$:

$$-AT'L \frac{(\Lambda + e_1)e_1}{\Lambda}, \quad (71)$$

worin T' nun die Temperaturzunahme nach oben für die Längeneinheit ist.

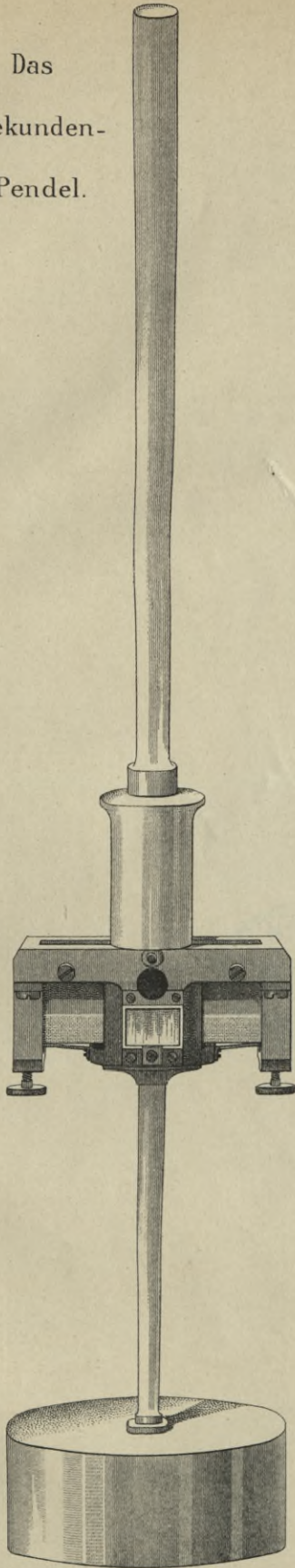
Diese Formel, bei deren Ableitung über die Gestalt der Pendelstange keine Annahme gemacht ist und nur die Pendelgewichte als Punkte betrachtet sind, sowie jeder Stangenquerschnitt auf seinen Schwerpunkt reduciert wurde, kann recht wohl als allgemein gültig betrachtet werden¹⁾.

Für das Meterpendel wird die Verbesserung bei $0,1^\circ$ für 1 m gleich $-0'',30$, beim Viertelmeterpendel $-0'',09$ und in L aus Formel (F) gleich $-0'',37$.

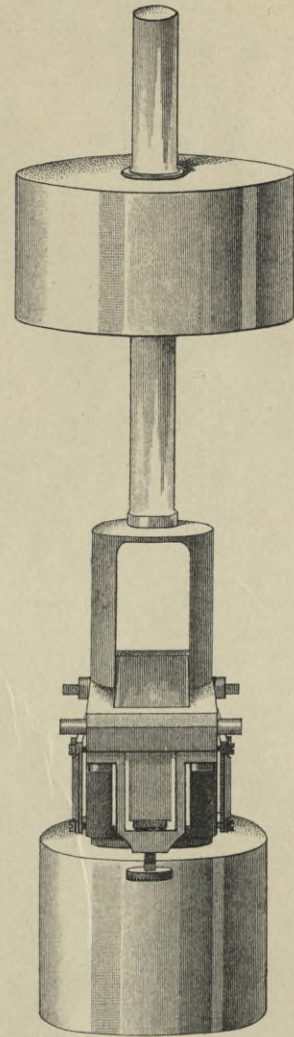
1) Auf anderem Wege entwickelt C. S. PEIRCE die Störung für T in jeder der beiden Lagen des Pendels; aus diesen Formeln kommt man ebenfalls zu (71). Vergl. die Abhandlung: *On the effect of unequal temperature upon a reversible pendulum* (C. a. G. S., R. for 1885, App. No. 17, p. 509).



Das
Sekunden-
Pendel.



Das
Halbsekunden-Pendel.



$\frac{1}{2}$ der natürl. Grösse.



12 Sy. 1711

5. 61

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

III 16700
L. inw.

Druk. U. J. Zam. 356. 10.000.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000300329