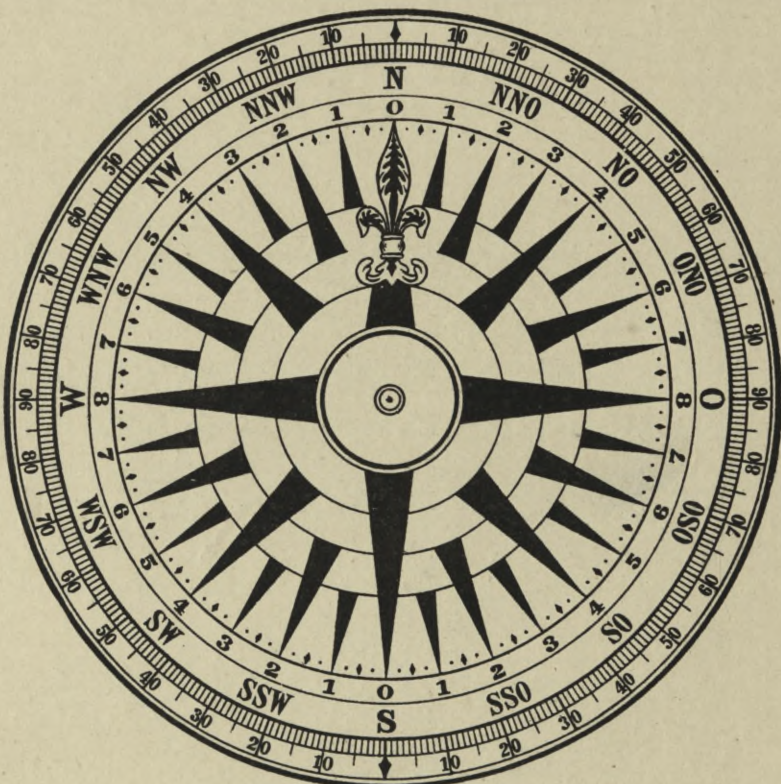
Arthur Breusing

Steuermannskunst

Sechste Auflage


N
NNW
NNO
NW
NO
WNW
ONO
W
O
WSW
OSO
SW
SO
SSW
SSO
S

[illegible]

172

Breusing's

Steuermannskunst.

Im Verein
mit
Dr. O. Fulst und Dr. H. Meldau

neu bearbeitet und herausgegeben
von

Dr. C. Schilling,
Direktor der Seefahrtschule in Bremen.

Sechste Auflage.

Leipzig.
Verlag von M. Heinsius Nachfolger.
1902.

Jest sygn pl

Druck von C. G. Röder in Leipzig. 17686. 01.

Vorwort der ersten bis fünften Auflage.

(1852—1890.)

Die Steuermannskunst lehrt die Anstellung der Beobachtungen und die Ausführung der Rechnungen, welche zur Bestimmung des in See erreichten Ortes und des über See einzuschlagenden Weges erforderlich sind. In früheren Zeiten beschränkte man sich darauf, den jungen Seeleuten lediglich die Vorschriften zur Ausübung zu geben; neuerdings hat man mehr und mehr das Bedürfnis gefühlt, durch gründlicheren Unterricht in den mathematischen und astronomischen Vorkenntnissen auch zur Einsicht in den Gegenstand zu führen. Mit besonderer Rücksicht auf dieses Bedürfnis und auf eine methodische Behandlung ist das vorliegende Lehrbuch geschrieben. Möchte es einigermaßen der aristotelischen Anforderung entsprechen, nur das Gehörige, alles Gehörige, und alles gehörig zu lehren.

A. Breusing.

Vorwort zur sechsten Auflage.

Bei der Herausgabe der vorliegenden sechsten Auflage von Breusing's Steuermannskunst hat sich unabweisbar das Bedürfnis nach einer neuen Bearbeitung dieses Lehrbuches herausgestellt. Wie sehr sich die Anschauungen über die Methoden der astronomischen Ortsbestimmung in der Nautik im Laufe der Jahre gewandelt haben, ergiebt sich vor allem aus der Bedeutung, die man der Verwendung der Standlinien zur Ortsbestimmung heute beimißt. Noch in der vierten Auflage der Steuermannskunst glaubte Breusing die Standlinien-Methode nach Sumner als „einen sehr sinnreichen, wenn auch für die Ausübung ziemlich wertlosen Gebrauch der Merkatorschen Karte“ bezeichnen zu müssen. Heute steht diese Methode infolge der Erleichterung durch bequeme Tafelwerke im Mittelpunkte des nautischen Interesses, und wenn sie auch kaum geeignet ist, die früheren Methoden der Ortsbestimmung ganz zu verdrängen, so ist sie doch als eins der wichtigsten Kapitel der nautischen Astronomie anzusehen. Auch die Kapitel über den Kompaß und die nautischen Instrumente weichen in grundlegender Weise von der bisherigen Darstellung ab und tragen den Bedürfnissen der praktischen Schiffahrt in erhöhtem Maße Rechnung.

Wenn in den Kapiteln der astronomischen Steuermannskunst die bisher gewählte Dreiteilung des Stoffes verlassen ist, so wird man diese Änderung im Interesse der Bequemlichkeit bei der Benutzung willkommen heißen.

Auch für diese Neubearbeitung des Buches ist der Gesichtspunkt maßgebend gewesen, daß die „Steuermannskunst“ kein umfassendes Handbuch der Navigation, sondern ein Lehrbuch sein soll, das dem Unterrichte in den Seefahrtschulen als Grundlage dienen soll, dabei aber in der Auswahl und Behandlung des Stoffes soweit geht, daß auch der Schiffsführer sich in ihm für alle Fragen der Navigation Rat holen kann.

Dem Herrn Staatssekretär des Reichs-Marine-Amtes sind die Herausgeber zu aufrichtigstem Danke verpflichtet, daß ihnen aus den bekannten durch die Nautische Abteilung des Reichs-Marine-Amtes veröffentlichten Werken, dem

„Lehrbuch der Navigation" und dem „Handbuch der Nautischen Instrumente" eine Reihe von Clichés zur Verfügung gestellt sind. Es sind dies aus dem Handbuche der Navigation die Figuren:

Band I, Nr. 26, Doppeltransporteur als Fig. 268,
Band I, Nr. 40, gewöhnliche Peilvorrichtung als Fig. 244,
Band I, Nr. 47, Thomson-Peilvorrichtung als Fig. 245,
Band II, Nr. 134, Chronometer-Unruhe als Fig. 267,

sowie aus dem Handbuche der Nautischen Instrumente die Figuren:

Nr. 39, 40, 41, Marine-Barometer als Fig. 272 a, b, c,
Nr. 42, 43, Holosterik-Barometer als Fig. 273 a, b.

Alle übrigen Figuren dieser Auflage sind neu gezeichnet; für ihre sorgfältige Ausführung, sowie für die schöne Ausstattung und Drucklegung des Buches gebührt dem Herrn Verleger Anerkennung und Dank.

Die im Lehrbuche angezogenen Nautischen Tafeln werden in neuer Bearbeitung und Drucklegung in siebenter Auflage im Frühjahre 1902 erscheinen. Zur Bequemlichkeit bei der Verwendung der von Herrn Behrmann herausgegebenen Tafeln sind diese in eckigen Klammern stets beigefügt.

Bremen, im Dezember 1901.

Prof. Dr. Schilling.

Inhalts-Verzeichnis.

Arithmetik.

Einleitung.

§ 1. Die **Mathematik** umfaßt zwei Gebiete, die Lehre von den Zahlen oder Arithmetik und die Raumlehre oder Geometrie.

Wenn man zwei Zahlen miteinander ihrer Größe nach vergleicht, so kann das Ergebnis der Vergleichung sein, entweder daß die Zahlen gleich (=) oder daß sie verschieden sind. Im letzteren Falle ist die erstere der Zahlen entweder größer (>) oder kleiner (<) als die zweite. Genau dasselbe gilt für die Vergleichung zweier Raumgrößen.

Die Arithmetik hat zur Grundlage das gewöhnliche Rechnen mit ganzen Zahlen und Brüchen. Eine ganze Zahl entsteht durch wiederholtes Setzen der Einheit. Einen Bruch, z. B. $^2/_3$, kann man sich dadurch entstanden denken, daß die Einheit zunächst in so viele Teile geteilt wird, wie der Nenner (3 im obigen Beispiel) angiebt, und daß von diesen Teilen so viele genommen werden sollen, wie der Zähler (2 im obigen Beispiel) beträgt. Man unterscheidet echte und unechte Brüche. Ein echter Bruch ist ein solcher, dessen Zähler kleiner ist als der Nenner, ein unechter Bruch ein solcher, dessen Zähler größer ist als der Nenner. Alle ganzen Zahlen kann man als unechte Brüche mit dem Nenner 1 auffassen (z. B. $7 = {}^7/_1$). Jeder unechte Bruch kann in eine gemischte Zahl verwandelt werden, z. B. $^7/_3 = 2\,^1/_3$. Die Werte aller echten Brüche sind zwischen Null (0) und Eins (1), die Werte aller unechten Brüche zwischen Eins und Unendlich groß (∞) enthalten. Den umgekehrten Wert einer Zahl erhält man, wenn man 1 durch die Zahl dividiert. Beispielsweise ist von 3 der umgekehrte Wert $\frac{1}{3}$, von $\frac{2}{5}$ der umgekehrte Wert $\frac{1}{^2/_5} = \frac{5}{2}$. Der umgekehrte Wert eines echten Bruches ist ein unechter Bruch; der umgekehrte Wert eines unechten Bruches ein echter Bruch.

Besondere Arten von Brüchen sind die Dezimalbrüche. Der Nenner eines Dezimalbruches ist eine der Zahlen 10, 100, 1000 u. s. w., er braucht nicht geschrieben zu werden, sondern der Wert jeder Ziffer des Zählers wird durch ihre Stelle hinter dem Dezimalstrich angegeben.

Man unterscheidet benannte Zahlen (5 Mark, 12 Meter, 7 Schiffe) und unbenannte Zahlen (5, 12, 7).

§ 2. Das elementare Rechnen umfaßt **vier Grundrechnungsarten,** welche hier unter Hinzufügung einiger Bemerkungen zusammengestellt werden sollen:

1. **Addition.** Beispiel: $4 + 7 = 11$ (gelesen: 4 plus 7 ist gleich 11). Die Zahlenverbindung $4 + 7$ nennt man eine Summe, 4 und 7 heißen die Summanden, 11 der Wert der Summe.

Es ist $4 + 7 = 7 + 4$, d. h. die Reihenfolge der Summanden ist gleichgültig, oder: man kann in beliebiger Reihenfolge addieren.

2. **Subtraktion.** Beispiel: $11 - 7 = 4$ (gelesen: 11 minus 7 ist gleich 4). Die Zahlenverbindung $11 - 7$ nennt man einen Unterschied (Differenz), 11 heißt der Minuend, 7 der Subtrahend, 4 der Wert des Unterschiedes oder der Differenz.

Man kann die Subtraktion auffassen als die Zerlegung einer gegebenen Summe (11) in zwei Summanden, von denen der eine (7) gegeben, der andere (4) gesucht ist.

Es ist: $25 + 17 - 17 = 25$
und ebenso $25 - 17 + 17 = 25$

d. h. Addition und Subtraktion heben sich bei gleicher Größe des Summanden und des Subtrahenden gegenseitig auf, sie sind entgegengesetzte Rechnungsarten.

3. **Multiplikation.** Beispiel: $5 . 7 = 35$ (gelesen: 5 mal 7 ist gleich 35). Die Zahlenverbindung $5 . 7$ nennt man ein Produkt, 5 und 7 die Faktoren, 35 ist der Wert des Produktes.

Man kann die Multiplikation ansehen als eine Addition mit lauter gleichen Summanden. Statt $7 + 7 + 7 + 7 + 7$ sagt man „5 mal 7“ und lernt die Werte derartiger Summen auswendig (Einmaleins). Im vorstehendem Beispiel heißt 7 der Multiplikand (die zu multiplizierende Zahl), 5 der Multiplikator. Der Multiplikand kann auch eine benannte Zahl sein, der Multiplikator dagegen muß eine unbenannte Zahl sein. Das Produkt ist dann eine mit dem Multiplikanden gleichbenannte Zahl. (Beispiel $5 . 7$ Mark $= 35$ Mark.)

Es ist $5 . 7 = 7 . 5$, d. h. die Reihenfolge der Faktoren ist gleichgültig, oder: man kann in beliebiger Reihenfolge multiplizieren.

4. **Division.** Beispiel: $35 : 7 = 5$ (gelesen: 35 durch 7 ist gleich 5). Die Zahlenverbindung $35 : 7$ nennt man einen Quotienten, 35 heißt der Dividend, 7 der Divisor und 5 der Wert des Quotienten.

Man kann die Division auffassen als die Zerlegung eines gegebenen Produktes (35) in zwei Faktoren, von denen der eine (7) gegeben, der andere (5) gesucht ist. Die Division ist hiernach die Umkehrung der Multiplikation. Ist der Multiplikand eine benannte Zahl, wie in dem obigen Beispiele ($5 . 7$ Mark $= 35$ Mark), so läßt die Aufgabe zwei Umkehrungen zu. Man kann nämlich entweder sagen $\frac{35 \text{ Mark}}{5} = 7$ Mark, d. h. der fünfte Teil von 35 Mark ist 7 Mark, oder $\frac{35 \text{ Mark}}{7 \text{ Mark}} = 5$, d. h. in 35 Mark sind 7 Mark fünfmal enthalten. Den Ausdruck $\frac{35 \text{ Mark}}{5}$ nennt man einen Quotienten, den Ausdruck $\frac{35 \text{ Mark}}{7 \text{ Mark}}$ dagegen ein Verhältnis.

Es ist: $15 . 3 : 3 = 15$
und ebenso $15 : 3 . 3 = 15$

d. h. Multiplikation und Division heben sich bei gleichen Größen des Multiplikators und des Divisors gegenseitig auf, sie sind entgegengesetzte Rechnungsarten.

Da die Division ganzer Zahlen nicht immer „aufgeht", d. h. wieder eine ganze Zahl ergiebt, so ist man dazu gekommen, eine neue Art von Zahlen, die Brüche, einzuführen. Man schreibt

$$5 : 7 = \frac{5}{7}; \quad 23 : 4 = \frac{23}{4} = 5^3/_4$$

Ein Bruch ist daher im Grunde nichts anderes als eine unausgeführte Division; der Bruchstrich ist völlig gleichbedeutend mit dem Zeichen : der Division.

Zu den im vorstehenden aufgezählten vier Grundrechnungsarten kommen in der Arithmetik noch drei weitere hinzu: das Potenzieren, das Radizieren und das Logarithmieren.

§ 3. Allgemeine Zahlen. Während das elementare Rechnen immer von vornherein seinen Aufgaben bestimmte Zahlen (wie 5; 37; $^2/_3$; 0,125 u. s. w.) zu Grunde legt, bedient man sich in der Arithmetik außerdem allgemeiner Zahlen und zwar entweder zur Bezeichnung solcher Größen, deren Werte vor der Hand noch unbekannt sind, oder von solchen, deren Werte zunächst noch unbestimmt gelassen werden sollen, für die man erst später bestimmte Zahlen einsetzen will. Für jede allgemeine Zahl, die man in eine Rechnung einführt, hat man selbstverständlich ein besonderes, wohl unterscheidbares Zeichen zu wählen; der Bequemlichkeit wegen bedient man sich dabei der Buchstaben, da diese für jedermann leicht zu schreiben und zu lesen sind. Es ist aber wohl festzuhalten, daß mit den Buchstaben nicht als solchen gerechnet wird, sondern daß man sich unter diesen Buchstaben Zahlen zu denken hat.

Mit Hülfe solcher allgemeinen Zahlzeichen lassen sich allgemeine Regeln und Gesetze, die für alle Zahlen, abgesehen von ihrem besonderen Werte, Geltung haben, sehr kurz und übersichtlich in Formeln darstellen. So sagt die Formel

$$a + b = b + a$$

genau dasselbe aus wie der Satz:

Die Reihenfolge der Summanden in einer Summe ist gleichgültig

oder die Formel

$$a . b = b . a$$

dasselbe wie der Satz:

Die Faktoren eines Produktes können vertauscht werden.

§ 4. **Die Regeln über die Multiplikation und Division der gemeinen Brüche** lassen sich in dieser Zeichensprache folgendermaßen darstellen:

$$\frac{a}{b}\cdot c = \frac{a\cdot c}{b},\ \text{d. h.}$$

Ein Bruch wird mit einer Zahl multipliziert, indem man den Zähler multipliziert.

$$\frac{a}{b}:c = \frac{a}{b\cdot c},\ \text{d. h.}$$

Ein Bruch wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Nenner multipliziert.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d},\ \text{d. h.}$$

Brüche werden miteinander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

$$a:\frac{b}{c} = a\cdot\frac{c}{b} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c},\ \text{d. h.}$$

Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit dem umgekehrten Werte multipliziert.

Weiter ist z. B. durch die Formel

$$\frac{a}{b}\cdot b = a$$

der Satz ausgedrückt: Wenn man einen Bruch mit seinem Nenner multipliziert, so erhält man den Zähler (Division und Multiplikation sind entgegengesetzte Rechnungsarten).

Unter dem umgekehrten Werte einer Zahl a versteht man den Bruch $\frac{1}{a}$

$$a\cdot\frac{1}{a} = 1$$

Umgekehrte Werte miteinander multipliziert geben 1.

Die Multiplikation irgend einer endlichen Zahl mit 0 giebt wieder 0; also

$$a\cdot 0 = 0$$

Es ist:

$$\frac{1}{0{,}1} = 10;\quad \frac{1}{0{,}01} = 100;\quad \frac{1}{0{,}001} = 1000\ \ldots\quad \frac{1}{0{,}000\,001} = 1\,000\,000$$

u. s. w. Wenn wir den Nenner eines Bruches, dessen Zähler unverändert bleibt, also z. B. $= 1$ ist, immer kleiner werden lassen, so wird der Wert des Bruches immer größer. Als Grenzwert wird man deshalb haben

$$\frac{1}{0} = \infty \ \text{(unendlich groß).}$$

§ 5. **Grundsätze.** Auch die unserem ganzen Denken und Schließen zu Grunde liegenden Wahrheiten, welche man als Grundsätze zu bezeichnen pflegt, lassen sich sinnbildlich durch die Zeichensprache der Arithmetik ausdrücken, weshalb sie hier ihren Platz finden mögen.

Neben einigen Sätzen allereinfachster Art, wie z. B. „Jede Größe ist sich selbst gleich" und „Das Ganze ist größer als jeder Teil von ihm" führt man gewöhnlich als **Grundsätze** die folgenden an:

1. Ist $a = c$ und
$b = c$

so ist $a = b$ d. h. Sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie unter einander gleich.

2. Ist $a = b$ und
$c = d$

so ist $a + c = b + d$ d. h. Gleiches zu Gleichem addiert, giebt Gleiches.

3. Ist $a = b$ und
$c = d$

so ist $a - c = b - d$ d. h. Gleiches von Gleichem subtrahiert, giebt Gleiches.

4. Ist $a = b$ und
$c = d$

so ist $a \,.\, c = b \,.\, d$ d. h. Gleiches mit Gleichem multipliziert, giebt Gleiches.

5. Ist $a = b$ und
$c = d$

so ist $a : c = b : d$

oder $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ d. h. Gleiches durch Gleiches dividiert, giebt Gleiches.

§ 6. Positive und negative Zahlen. Wenn in einer Differenz der Subtrahend **gleich** dem Minuenden ist, so hat die Differenz den Wert Null, z. B.

$$7 - 7 = 0; \quad a - a = 0$$

Damit eine Differenz auch dann noch einen Sinn habe, wenn der Subtrahend **größer** ist als der Minuend, sind wir zur Einführung von **Zahlen mit negativen Vorzeichen** genötigt. Wir setzen hierdurch fest, daß z. B. $5 - 7 = -2$; $3 - 4 = -1$ u. s. f. sein soll. Die mit dem Minus-Zeichen versehenen Zahlen nennt man **negative** und im Gegensatz dazu die ursprünglichen mit keinem oder dem Plus-Zeichen behafteten **positive Zahlen**; mit gemeinsamen Namen nennt man sie **algebraische Zahlen**. Das gegenseitige Verhalten von positiven und negativen Zahlen kann man sich an vielen Beispielen des täglichen Lebens klar machen. So geben 5 Mark Vermögen und 7 Mark Schulden zusammen 2 Mark Schulden; 12 Mark Gewinn und 17 Mark Verlust zusammen einen Verlust von 5 Mark. Ein Schlepper, der mit seinem Schleppzuge nur 3 Knoten Fahrt zu entwickeln vermag, würde gegen einen mit 4 Knoten Fahrt setzenden Strom dampfend eine Seemeile stündlich zurücktreiben, d. h. eine Fahrt von -1 Knoten haben.

Der Wert einer algebraischen Zahl ohne Rücksicht auf das Vorzeichen heißt der **absolute Wert** der Zahl. So hat $+7$ den absoluten Wert 7; -11 den absoluten Wert 11.

Zwei Zahlen von gleichem absoluten Werte, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen heißen **entgegengesetzte Größen**, z. B. $+7$ und -7; $-a$ und $+a$.

Entgegengesetzte Größen ergeben, wenn man sie addiert, den Wert Null

$$(+7)+(-7)=0; \quad (-a)+(+a)=0$$

Die vier Grundrechnungsarten.

§ 7. Die Vorzeichenregeln für das Rechnen mit algebraischen Zahlen sind die folgenden:

1. Addition. Haben die zu addierenden Zahlen gleiche Vorzeichen, so addiere man ihre absoluten Werte und gebe der Summe das gemeinsame Vorzeichen. Haben die zu addierenden Zahlen dagegen verschiedene Vorzeichen, so subtrahiere man ihre absoluten Werte und gebe dem Unterschiede das Vorzeichen der größeren Zahl.

$$\begin{array}{cccc} (+11) & (-11) & (+11) & (-11) \\ \underline{+(+\ 6)} & \underline{+(-\ 6)} & \underline{+(-\ 6)} & \underline{+(+\ 6)} \\ (+17) & (-17) & (+\ 5) & (-\ 5) \end{array}$$

Von der Richtigkeit dieser Regeln überzeugt man sich am leichtesten, indem man die Aufgaben in die Sprache des täglichen Lebens übersetzt und etwa an das Zusammenfügen von Vermögen und Schulden, von Gewinn und Verlust u. dgl. denkt.

2. Subtraktion. Eine algebraische Zahl wird subtrahiert, indem man ihren entgegengesetzten Wert addiert:

$$\begin{array}{cccc} (+11) & (-11) & (+\ 6) & (-\ 6) \\ \underline{-(+\ 6)} & \underline{-(-\ 6)} & \underline{-(+11)} & \underline{-(-11)} \\ (+\ 5) & (-\ 5) & (-\ 5) & (+\ 5) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} (+11) & (-11) & (+\ 6) & (-\ 6) \\ \underline{-(-\ 6)} & \underline{-(+\ 6)} & \underline{-(-11)} & \underline{-(+11)} \\ (+17) & (-17) & (+17) & (-17) \end{array}$$

Die Richtigkeit dieser Regel ergiebt sich daraus, daß Subtrahend und Differenz addiert wieder den Minuenden ergeben müssen.

3. Multiplikation. Bei gleichen Vorzeichen der Faktoren ist das Produkt positiv; bei ungleichen Vorzeichen der Faktoren ist das Produkt negativ.

$$+4 . +3 = +12 \qquad +4 . -3 = -12$$
$$-4 . -3 = +12 \qquad -4 . +3 = -12.$$

Fassen wir den ersten der Faktoren als den zu multiplizierenden auf, so kann nicht zweifelhaft sein, daß $+4$ dreimal als Summand gesetzt $+12$, ebenso

-4 dreimal als Summand gesetzt -12 ergiebt, womit die erste und letzte Gleichung begründet ist. Mit einer negativen Zahl multiplizieren kann aber nur heißen, daß mit der entsprechenden positiven zu multiplizieren und das Produkt im entgegengesetzten Sinne zu nehmen ist, worin die Begründung der zweiten und dritten Gleichung liegt.

4. Division. Bei gleichen Vorzeichen des Dividenden und Divisors ist der Quotient positiv, bei ungleichen Vorzeichen ist der Quotient negativ:

$$\frac{+12}{+3} = +4 \qquad \frac{+12}{-3} = -4$$

$$\frac{-12}{-3} = +4 \qquad \frac{-12}{+3} = -4$$

Die Richtigkeit dieser Regel ergiebt sich daraus, daß der Divisor mit dem Quotienten multipliziert wieder den Dividenden ergeben muß.

Anmerkung: Zwei Zahlen algebraisch addieren oder subtrahieren heißt, sie mit Rücksicht auf ihre Vorzeichen addieren oder subtrahieren. Eine algebraische Summe nennt man auch einen mehrgliederigen Ausdruck, er kann beliebig viele Summanden oder „Glieder" enthalten.

Wenn das Vorzeichen des ersten Gliedes $+$ ist, so läßt man es gewöhnlich weg. Ebenso darf man das Multiplikationszeichen (.) zwischen bestimmten Zahlen und Buchstaben oder zwischen Buchstaben weglassen. Die Ausrechnung bei mehrgliederigen Ausdrücken, z. B.

$$7 - 5 - 3 + 4 - 10$$

oder

$$3a - 2b + 5a - 8b - 6a$$

erfolgt dadurch, daß man zunächst zwei Zahlen algebraisch vereinigt, zu der Summe die dritte fügt und so fortfährt, bis alle Zahlen, soweit sich die Rechnung zahlenmäßig ausführen läßt, vereinigt sind. Die Reihenfolge der einzelnen algebraischen Additionen ist dabei gleichgültig. Man kann z. B. auch so verfahren, daß man zunächst alle positiven Glieder für sich und alle negativen Glieder für sich addiert und dann die Summe dieser mit der Summe jener algebraisch vereinigt.

Die Werte der oben als Beispiel angeführten Summen sind -7 und $2a - 10b$.

§ 8. Klammern. Mehrgliederige Ausdrücke, welche als Ganzes aufgefaßt und als solche irgend einer Rechnungsoperation unterworfen werden sollen, sind in Klammern einzuschließen.

Beabsichtigt man beispielsweise, die Summe $7 - 3 + 5$ von 20 zu subtrahieren, so hat man zu schreiben:

$$20 - (7 - 3 + 5)$$

und hat als Resultat $\quad 20 - 9 = 11$

Soll dieselbe Summe etwa mit der Zahl 4 multipiziert werden, so ist zu schreiben:

$$(7 - 3 + 5) . 4 = 9 . 4 = 36$$

Falls durch einen Bruchstrich die Zusammengehörigkeit der Glieder eines Ausdruckes hinreichend gekennzeichnet ist, so kann die Klammer weggelassen werden; sie wird in diesem Falle durch den Bruchstrich vertreten,

$$\text{z. B. } \frac{a+b}{c-d} \quad \text{statt} \quad \frac{(a+b)}{(c-d)}$$

sie muß aber gesetzt werden, sobald der Bruchstrich wegfällt,

$$\text{z. B.}\quad 5c \cdot \frac{a+b}{5} = c(a+b)$$

In den obigen Ausdrücken war es leicht, die Zahlen innerhalb der Klammer durch zahlenmäßiges Ausrechnen zu einer einzigen zu vereinigen, worauf dann die Klammer wegfallen konnte. Ist diese Ausrechnung wegen der vorkommenden allgemeinen Zahlen nicht möglich, so kann die Klammer durch Ausführung der mit der Klammergröße beabsichtigten Operation beseitigt oder, wie man sagt, aufgelöst werden.

Aus dem Begriff der einzelnen Rechnungsarten ergeben sich folgende

Regeln für das Auflösen der Klammern.

1. Steht ein Plus-Zeichen vor der Klammer, so kann diese einfach weggelassen werden:

$$a+(b+c)=a+b+c;\quad a+(b-c)=a+b-c$$

2. Steht ein Minus-Zeichen vor der Klammer, so erhalten bei der Auflösung alle in der Klammer stehenden Glieder das entgegengesetzte Vorzeichen:

$$a-(b+c)=a-b-c;\quad a-(b-c)=a-b+c$$

3. Steht ein Faktor neben der Klammer, so ist bei der Auflösung jedes in der Klammer stehende Glied mit diesem Faktor zu multiplizieren oder:

Eine Klammergröße wird mit einer Zahl multipliziert, indem man jedes einzelne Glied der Klammer multipliziert:

$$(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a;\quad a \cdot (b-c) = ab - ac$$

4. Steht ein Divisor hinter der Klammer, so ist bei der Auflösung jedes in der Klammer stehende Glied durch den Divisor zu dividieren, oder:

Eine Klammergröße wird durch eine Zahl dividiert, indem man jedes einzelne Glied der Klammer dividiert:

$$(a+b):c = \frac{a}{c}+\frac{b}{c} \qquad (a-b):c = \frac{a}{c}-\frac{b}{c}$$

Aus der für die Multiplikation einer Klammergröße mit einer Zahl geltenden Regel folgt noch:

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot(c+d) &= (a+b)\cdot c + (a+b)\cdot d \\ &= ac+bc+ad+bd \quad \text{d. h.:}\end{aligned}$$

Sollen zwei Klammergrößen miteinander multipliziert werden, so ist jedes Glied der einen Klammer mit jedem Gliede der anderen Klammer zu multiplizieren.

§ 9. Absonderung eines gemeinsamen Faktors. Haben die Summanden eines mehrgliederigen Ausdruckes einen Faktor gemeinschaftlich, so kann man diesen Faktor von den anderen absondern:

$$a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d = a \cdot (b+c-d)$$

Diese Formel ist eine unmittelbare Folge der in § 8 begründeten Formel:

$$a.(b+c-d)=a.b+a.c-a.d.$$

Beispiele:

$$6x+18y-12z=6(x+3y-2z)$$

$$8ar-6as+10at=2a.(4r-3s+5t)$$

$$ax+a=ax+a.1=a(x+1).$$

Unter Umständen gelingt es, durch wiederholtes Absondern von Faktoren einen gegebenen mehrgliederigen Ausdruck in das Produkt zweier Klammergrößen zu zerlegen.

Beispiele:

$$ax+ay+bx+by=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)\ (a+b)$$

$$6px-2qx-3py+qy=2x(3p-q)-y(3p-q)=(3p-q)\ (2x-y).$$

§ 10. Heben der Brüche. Da die Regeln über die Multiplikation und Division der Brüche schon oben (§ 4) Erwähnung gefunden haben, so seien an dieser Stelle nur noch einige Bemerkungen über das Heben oder Kürzen, das Erweitern, sowie über die Addition und Subtraktion der Brüche hinzugefügt.

Einen Bruch heben oder kürzen heißt, Zähler und Nenner des Bruches durch dieselbe Zahl dividieren.

Einen Bruch erweitern heißt, Zähler und Nenner des Bruches mit derselben Zahl multiplizieren.

Bei beiden Operationen bleibt der Wert des Bruches ungeändert.

Sind Zähler und Nenner des Bruches mehrgliederige Größen, so ist nicht zu vergessen, daß jedes einzelne Glied beim Heben zu dividieren oder zu multiplizieren ist. Am sichersten verfährt man so, daß man zuerst Zähler und Nenner durch Heraussetzen von Faktoren in Produkte zerlegt. Erst wenn dieses gelungen ist, hebt man die gleichen Faktoren im Zähler und Nenner weg.

Beispiele:

$$\frac{3ab-6ac}{9ax-18ay}=\frac{3a(b-2c)}{9a(x-2y)}=\frac{b-2c}{3(x-2y)}$$

$$\frac{7a-7b}{8a-8b}=\frac{7(a-b)}{8(a-b)}=\frac{7}{8}$$

$$\frac{3mmx-2mxx}{2mmx-3mxx}=\frac{mx(3m-2x)}{mx(2m-3x)}=\frac{3m-2x}{2m-3x}$$

§ 11. Addition und Subtraktion der Brüche. Brüche können nur addiert oder subtrahiert werden, wenn sie gleichnamig sind, d. h. wenn sie denselben Nenner haben.

Gleichnamige Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem man die Zähler addiert oder subtrahiert.

Beispiele:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x}-\frac{c}{x}=\frac{a+b-c}{x}$$

$$\frac{4x}{5}+\frac{6x}{5}=\frac{10x}{5}=2x$$

Um ungleichnamige Brüche zu addieren, hat man sie zunächst durch Erweitern gleichnamig zu machen (sie auf den Haupt- oder Generalnenner zu bringen).

Beispiele: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a.d}{b.d}+\frac{b.c}{b.d}=\frac{a.d+b.c}{b.d}$

$$\frac{2a}{5x}-\frac{3b}{7y}=\frac{14ay}{35xy}-\frac{15bx}{35xy}=\frac{14ay-15bx}{35xy}$$

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}=\frac{a-b}{(a+b).(a-b)}+\frac{a+b}{(a+b).(a-b)}=\frac{2a}{a.a-b.b}$$

Gleichungen.

§ 12. **Identische und Bestimmungsgleichungen.** Eine Gleichung entsteht, wenn zwei Ausdrücke für denselben Größenwert durch das Gleichheitszeichen verbunden werden. Eine Gleichung hat zwei Seiten, die man als rechte und linke bezeichnet.

Man unterscheidet zwei Arten von Gleichungen: identische (selbstverständliche) und algebraische oder Bestimmungsgleichungen.

Eine Gleichung heißt identisch, wenn die beiden Seiten entweder genau dieselben sind oder durch bloßes Umrechnen sich auseinander ableiten lassen.

Beispiele für solche identische Gleichungen sind:

$$7=7$$
$$2a+3b=3b+2a$$
$$7+3=2.5$$
$$(a+b).(c+d)=ac+bc+ad+bd$$

Alle bisher benutzten Formeln der Arithmetik sind identische Gleichungen. (Eine Gleichung wie etwa $9=11$ ist falsch oder widersinnig. Sie beweist, daß die Voraussetzung, welche auf diese Gleichung geführt hat, unrichtig ist.)

Eine identische Gleichung bleibt immer richtig, welche besonderen Werte auch immer für die darin enthaltenen allgemeinen Zahlen gesetzt werden mögen.

Die beiden Seiten einer Bestimmungsgleichung lassen sich nicht durch bloßes Umrechnen auseinander ableiten. Die Bestimmmungsgleichung bleibt nicht richtig für irgend beliebige Werte der darin enthaltenen allgemeinen Zahlen, sondern sie enthält mindestens eine allgemeine Größe, die sogenannte Unbekannte, welche gerade so bestimmt werden soll, daß die Gleichung zu einer identischen wird. Um die Umbekannte sofort kenntlich zu machen, bezeichnet man sie immer mit einem der letzten Buchstaben (x, y, z) des Alphabetes. Kommen andere allgemeine Zahlen a, b, c . . . in einer Gleichung vor, so sind diese als bekannte Größen anzusehen.

Eine ganz einfache Bestimmungsgleichung ist z. B.:

$$2.x=6$$

Der Wert $x=3$ und nur dieser Wert macht die Gleichung zu einer identischen ($2.3=6$). In einer einzelnen Bestimmungsgleichung darf nur eine einzige Unbekannte vorkommen. Sind mehrere unbekannte Größen vorhanden, so müssen ebensoviele Gleichungen gegeben sein, wie Unbekannte da sind.

Wir wollen hier nur Bestimmungsgleichungen mit einer Unbekannten behandeln.

Die Auffindung des Wertes der Unbekannten erfolgt durch die Auflösung der Gleichung. Die Probe für die Richtigkeit der Auflösung besteht dann darin, daß der für die Unbekannte gefundene Wert in die ursprüngliche Gleichung eingesetzt, diese zu einer identischen machen muß.

§ 13. Auflösung der Bestimmungsgleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten. Man sagt, daß eine Bestimmungsgleichung vom ersten Grade sei, wenn in ihr die Unbekannte nicht mit sich selbst multipliziert, (z. B. $x.x$ oder $x.x.x$), sondern nur mit bekannten Zahlen multipliziert (z. B. $5x$, ax) vorkommt.

Um eine Bestimmungsgleichung ersten Grades aufzulösen, hat man sie nach und nach so umzuformen, daß schließlich auf der einen Seite die Unbekannte allein und auf der anderen Seite nur bekannte Größen stehen. Die erwähnte Umformung hat immer nach dem Satze zu geschehen:

Wenn man mit beiden Seiten einer Gleichung dieselbe Rechenoperation vornimmt, so erhält man wieder eine richtige Gleichung (vergl. die Grundsätze § 5).

Ist z. B. $x + a = b$, so kann man auf beiden Seiten a subtrahieren

$$a = a$$

und erhält: $x = b - a$

Ist $x - a = b$, so kann man auf beiden Seiten a addieren

$$a = a$$

und erhält: $x = b + a$

Ist $a.x = b$, so kann man auf beiden Seiten durch a dividieren

$$a = a$$

und erhält: $x = \frac{b}{a}$

Ist $\frac{x}{a} = b$, so kann man auf beiden Seiten mit a multiplizieren

$$a = a$$

und erhält: $x = a.b$

Die in diesen Beispielen hervortretenden Regeln können wir so ausdrücken:

1. Ein Summand auf der einen Seite der Gleichung kann auf die andere Seite gesetzt werden als Subtrahend und umgekehrt.

2. Ein Faktor auf der einen Seite der Gleichung kann auf die andere Seite gesetzt werden als Divisor und umgekehrt.

Beispiele:

$$\begin{aligned} 3x + 4 &= 19 \\ 3x &= 19 - 4 \\ 3x &= 15 \\ x &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} ax - b &= c \\ ax &= c + b \\ x &= \frac{c+b}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 + 6x &= 13 + 16x \\ 8 - 13 &= 16x - 6x \\ -5 &= 10x \\ -\tfrac{1}{2} &= x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a - \frac{x}{m} &= b \\ a - b &= \frac{x}{m} \\ m(a - b) &= x \end{aligned}$$

Wenn Brüche in der Gleichung vorkommen, so kann man sie dadurch beseitigen, daß man beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert.

Beispiele:

$$\frac{3}{5}x - \frac{1}{3}x = 2$$
$$9x - 5x = 30$$
$$4x = 30$$
$$x = 7^1/_2$$

$$\frac{x-3}{7} - \frac{x-25}{5} = 4$$
$$5(x-3) - 7(x-25) = 140$$
$$5x - 15 - 7x + 175 = 140$$
$$-2x = -20$$
$$x = +10$$

Wenn in der Gleichung Buchstabengrößen a, b, c ... vorkommen, so ist es, nachdem alle x enthaltenden Glieder auf die eine Seite geschafft sind, meistens nötig, die Unbekannte durch Absondern von ihren Faktoren zu trennen.

Beispiele:

$$\frac{a+b}{x} - c = d - \frac{a-b}{x}$$
$$a + b - cx = dx - a + b$$
$$2a = cx + dx$$
$$2a = x(c+d)$$
$$\frac{2a}{c+d} = x$$

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{b}{a}$$
$$a(1-x) = b(1+x)$$
$$a - ax = b + bx$$
$$a - b = ax + bx$$
$$a - b = x(a+b)$$
$$\frac{a-b}{a+b} = x$$

§ 14. Verhältnisgleichungen.

Unter dem Verhältnis einer Größe a zu einer anderen b versteht man den Quotienten $a:b$ oder den Bruch $\frac{a}{b}$. Das Verhältnis „a zu b" giebt demnach an, wie oft die zweite Größe in der ersten enthalten ist. Die Zahl a heißt das Vorderglied, b das Hinterglied des Verhältnisses. Da das Verhältnis im Grunde nichts anderes ist als ein Bruch, so finden auch die Regeln über das Kürzen und Erweitern der Brüche Anwendung, d. h.:

Der Wert eines Verhältnisses bleibt ungeändert, wenn man beide Glieder mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert.

Beispiele: $24:36 = 2:3$ $\qquad 3^1/_2 : 5^1/_3 = 21:32$

$^2/_5 : ^3/_4 = 8:15$ $\qquad 6ab : 9ac = 2b : 3c$

Anmerkung: Die den echten Brüchen entsprechenden Verhältnisse nennt man steigende, z. B. $2:5 = ^2/_5$; die den unechten Brüchen entsprechenden Verhältnisse heißen fallende, z. B. $9:7 = ^9/_7 = 1^2/_7$.

Durch Gleichsetzung zweier Verhältnisse entsteht eine Verhältnisgleichung oder Proportion.

Die Verhältnisgleichung

$$a:b = c:d \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

wird gelesen: a verhält sich zu b, wie c zu d.

In der vorstehenden Verhältnisgleichung werden a und d die äußeren, b und c die inneren Glieder genannt.

Lehrsatz: In jeder Verhältnisgleichung ist das Produkt der inneren Glieder gleich dem Produkt der äußeren Glieder.

Beweis: Multipliziert man die Verhältnisgleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ mit dem Hauptnenner bd, so erhält man die Produktengleichung

$$a.d = b.c$$

Umgekehrt kann man aus zwei gleichen Produkten von je zwei Faktoren Verhältnisgleichungen herstellen, wenn man die Faktoren des einen Produktes zu äußeren und die Faktoren des anderen Produktes zu inneren Gliedern macht.

Aus der Produktengleichung

$$a.d = b.c$$

folgen die 8 Verhältnisgleichungen

$$\begin{array}{ll} a:b = c:d & b:a = d:c \\ a:c = b:d & b:d = a:c \\ d:b = c:a & c:a = d:b \\ d:c = b:a & c:d = a:b \end{array}$$

Da aus dem Bestehen irgend einer dieser Gleichungen immer die Richtigkeit aller übrigen folgt, so kann man für eine Verhältnisgleichung die Lehrsätze aussprechen:

Die inneren Glieder können vertauscht werden.

Die äußeren Glieder können vertauscht werden.

Man kann eine Verhältnisgleichung von rückwärts lesen u. a.

Ist in einer Verhältnisgleichung

$$a:b = c:x$$

eines der Glieder unbekannt, so setze man zunächst das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkte der inneren Glieder

$$a.x = b.c$$

und hat dann

$$x = \frac{b.c}{a}$$

Hieraus folgt die Rechenregel:

Jedes äußere Glied einer Verhältnisgleichung ist gleich dem Produkte der inneren Glieder dividiert durch das andere äußere.

Jedes innere Glied einer Verhältnisgleichung ist gleich dem Produkte der äußeren Glieder dividiert durch das andere innere.

Beispiele: $2:3 = 8:x$ $\qquad$ $8:x = 6:9$

$$x = \frac{3.8}{2} = \frac{24}{2} = 12 \qquad x = \frac{8.9}{6} = \frac{72}{6} = 12$$

$$24{,}3 : 37{,}1 = 16{,}5 : x$$

$$x = \frac{37{,}1 . 16{,}5}{24{,}3} = \frac{612{,}15}{24{,}3} = 25{,}191.$$

Anmerkung: Die Auflösung der Verhältnisgleichungen von der Form $a:x = x:b$ wird am Schlusse des § 19 behandelt.

Lehrsatz: Auf beiden Seiten einer Verhältnisgleichung kann man gleichzeitig in entsprechender Weise Summen und Differenzen aus den Gliedern bilden.

So folgen aus der Verhältnisgleichung

$$a:b = c:d,$$

die andern

$$1)\quad (a+b):b = (c+d):d$$

$$2)\quad (a-b):b = (c-d):d$$

$$3)\quad (a+b):(a-b) = (c+d):(c-d)$$

und andere mehr.

Beweis: Die Gleichung 1) ist richtig, wenn das Produkt ihrer äußeren Glieder gleich dem Produkte ihrer inneren Glieder, d. h. für die erste Gleichung

$$(a+b).d = b.(c+d) \quad \text{oder}$$

$$ad + bd = bc + bd \quad \text{oder}$$

$$ad = bc$$

ist. Diese Gleichung ist aber richtig als Produktengleichung der ursprünglichen Verhältnisgleichung. Ebenso lassen sich die Gleichungen 2) und 3) und andere entsprechend zu bildende Gleichungen beweisen.

Potenzen.

§ 15. **Erklärungen.** So wie das wiederholte Addieren desselben Summanden zu einer höheren Rechnungsart, dem Multiplizieren, so führt auch das wiederholte Multiplizieren desselben Faktors zu einer höheren Rechnungsart, dem Potenzieren; und wie man statt eines mehrmaligen Setzens desselben Summanden abgekürzt schreibt:

$$a + a + a = 3a,$$

so hat man auch bei dem mehrmaligen Auftreten desselben Faktors eine abgekürzte Schreibart eingeführt und setzt:

$$a.a.a = a^3, \text{ sprich: } a \text{ hoch drei.}$$

Man nennt a^3 eine Potenz. Eine Potenz ist ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren:

$$a^3 = a.a.a$$

Der Faktor a heißt der Grundfaktor, die Zahl 3 der Exponent der Potenz.

Eine Zahl a potenzieren heißt demnach, sie so oft als Faktor setzen, wie der Exponent (3) angiebt. Man nennt a^2 die zweite, a^3 die dritte, a^m die m^{te} Potenz von a. Die zweite Potenz einer Zahl heißt ihr „Quadrat“, die dritte Potenz ihr „Kubus“.

§ 16. Das Rechnen mit Potenzen.

1. Lehrsatz: Potenzen mit demselben Grundfaktor werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

Beweis: Multipliziert man z. B.

$$\begin{array}{l} a^3 = a \cdot a \cdot a \quad \text{mit} \\ a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a, \text{ so erhält man} \\ \hline a^3 \cdot a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^8 \end{array}$$

Dasselbe läßt sich ebenso für beliebige Werte der Exponenten beweisen.

2. Lehrsatz: Potenzen mit demselben Grundfaktor werden dividiert, indem man den Exponenten des Divisors von dem des Dividenden subtrahiert:

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

Beweis: Dividiert man z. B.

$$\begin{array}{l} a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \quad \text{durch} \\ a^3 = a \cdot a \cdot a \quad \text{so erhält man} \\ \hline \dfrac{a^5}{a^3} = \dfrac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a^2 \end{array}$$

Dasselbe läßt sich (solange der Exponent des Divisors kleiner ist, als der des Dividenden) für beliebige Werte der Exponenten beweisen. Die entsprechenden Fälle für $r = s$ und $r < s$ werden in § 20 behandelt.

3. Lehrsatz: Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden einzelnen Faktor potenziert:

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

Beweis: Es ist z. B.

$$(a \cdot b)^3 = a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b = a^3 \cdot b^3$$

Dasselbe läßt sich ebenso für jeden beliebigen Wert des Exponenten beweisen.

4. Lehrsatz: Ein Bruch (Quotient) wird potenziert, indem man Zähler und Nenner (Dividend und Divisor) potenziert:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Beweis: Es ist z. B.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$$

Dasselbe läßt sich ebenso für jeden beliebigen Wert des Exponenten beweisen.

5. Lehrsatz: Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert:

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

Beweis: Es ist z. B.

$$(a^3)^2 = a^3 . a^3 = a^6.$$

Dasselbe läßt sich ebenso für beliebige Werte der Exponenten beweisen.

Man kann die beiden Lehrsätze 3) und 4) umkehren und in der folgenden Fassung aussprechen.

6. Lehrsatz: **Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man die Grundfaktoren multipliziert:**

$$a^r . b^r = (a . b)^r$$

Beispiel: Statt in dem Produkt $5^2 . 8^2$ die Potenzen erst einzeln auszurechnen und dann zu multiplizieren, rechnet man viel bequemer $5^2 . 8^2 = (5 . 8)^2 = 40^2 = 1600$.

7. Lehrsatz: **Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man die Grundfaktoren dividiert:**

$$\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$

Beispiel: Statt in dem Quotienten $\frac{15^3}{5^3}$ die Potenzen auszurechnen und zu dividieren, rechnet man viel bequemer $\frac{15^3}{5^3} = \left(\frac{15}{5}\right)^3 = 3^3 = 27$.

Um eine Summe zu potenzieren, führt man die Potenzierungsaufgabe auf eine Multiplikation zurück und führt diese aus.

Beispiel:
$$\begin{aligned}(2a+3b)^3 &= (2a+3b).(2a+3b).(2a+3b)\\ &= (4a^2+6ab+6ab+9b^2).(2a+3b)\\ &= (4a^2+12ab+9b^2).(2a+3b)\\ &= 8a^3+24a^2b+18ab^2+12a^2b+36ab^2+27b^3\\ &= 8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3\end{aligned}$$

Besonders wichtig sind die Formeln:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

zu denen wir noch schreiben

$$(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$$

Wurzeln.

§ 17. **Erklärungen.** Das Radizieren oder Wurzelausziehen ist eine Umkehrung des Potenzierens. Wenn

$$a^r = Z \quad \text{oder in einem Beispiel} \quad 7^2 = 49$$

ist, so waren beim Potenzieren a und r (im Zahlenbeispiel: 7 und 2) die gegebenen Größen, der Wert Z (49) der Potenz gesucht. Beim Radizieren ist Z (49) und der Exponent r (2) gegeben, der Grundfaktor a (7) dagegen gesucht.

In unserem Zahlenbeispiel heißt das: Welche Zahl giebt zweimal als Faktor gesetzt 49? Die Antwort ist: 7. Man nennt dann 7 die zweite Wurzel aus 49 und schreibt

$$7 = \sqrt[2]{49}$$

Ebenso nennt man a die „r^{te} Wurzel aus Z", geschrieben

$$a = \sqrt[r]{Z}$$

Die unter dem Wurzelzeichen stehende Zahl heißt der **Radikand**, den Exponenten bezeichnet man als **Wurzelexponenten**. Die zweite Wurzel aus einer Zahl nennt man ihre Quadratwurzel, die dritte ihre Kubikwurzel. Die Quadratwurzel wird wegen ihres häufigen Vorkommens einfach mit $\sqrt{\ }$ bezeichnet.

Radizieren heißt nach Vorstehendem eine gegebene Zahl in so viele gleiche Faktoren zerlegen, wie der Exponent anzeigt.

Nach dieser Erklärung ist

$$\sqrt[r]{a^r} = a \quad \text{und}$$

$$(\sqrt[r]{Z})^r = Z, \text{ d. h.:}$$

Potenzieren und Radizieren heben sich gegenseitig auf, sie sind entgegengesetzte Rechnungsarten.

§ 18. Das Rechnen mit Wurzelgrößen.

1. Lehrsatz: **Ein Produkt wird radiziert, indem man jeden Faktor radiziert:**

$$\sqrt[r]{a \, . \, b} = \sqrt[r]{a} \, . \, \sqrt[r]{b}$$

Beweis: Potenziert man beide Seiten mit r, so erhält man

$$(\sqrt[r]{ab})^r = (\sqrt[r]{a} \, . \, \sqrt[r]{b})^r$$

oder $$ab = (\sqrt[r]{a})^r . (\sqrt[r]{b})^r$$

oder $$a \, . \, b = a \, . \, b$$

Da dieses eine identische Gleichung ist, so muß die ursprüngliche Gleichung richtig sein.

2. Lehrsatz: **Ein Bruch (Quotient) wird radiziert, indem man Zähler und Nenner (Dividend und Divisor) radiziert:**

$$\sqrt[r]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}}$$

Beweis: Potenziert man beide Seiten mit r, so erhält man

$$\left(\sqrt[r]{\frac{a}{b}}\right)^r = \left(\frac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}}\right)^r$$

oder $$\frac{a}{b} = \frac{(\sqrt[r]{a})^r}{(\sqrt[r]{b})^r}$$

oder $$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

Da dieses eine identische Gleichung ist, so muß die ursprüngliche Gleichung richtig sein.

3. Lehrsatz: Eine Potenz wird radiziert, indem man den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten dividiert:

$$\sqrt[r]{a^s} = a^{\frac{s}{r}}$$

Beweis: Potenziert man beide Seiten mit r, so erhält man

$$\left(\sqrt[r]{a^s}\right)^r = \left(a^{\frac{s}{r}}\right)^r$$

oder

$$a^s = a^{\frac{s}{r}\cdot r}$$

oder

$$a^s = a^s$$

Da dieses eine identische Gleichung ist, so muß die ursprüngliche Gleichung richtig sein.

Dieser Lehrsatz hat zunächst nur Sinn, wenn die Division $\frac{s}{r}$ aufgeht, z. B. $\sqrt[2]{a^6} = a^3$. Seine Allgemeingültigkeit wird in § 21 festgestellt.

4. Lehrsatz: Eine Wurzel wird radiziert, indem man die beiden Wurzelexponenten multipliziert:

$$\sqrt[r]{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[r.s]{a}$$

Beweis: Potenziert man beide Seiten zunächst mit r, so erhält man

$$\left(\sqrt[r]{\sqrt[s]{a}}\right)^r = \left(\sqrt[rs]{a}\right)^r$$

oder

$$\sqrt[s]{a} = \left(\sqrt[rs]{a}\right)^r$$

Durch Potenzieren mit s kommt

$$\left(\sqrt[s]{a}\right)^s = \left(\sqrt[rs]{a}\right)^{rs}$$

$$a = a$$

Da dieses eine identische Gleichung ist, so muß die ursprüngliche Gleichung richtig sein.

Man kann die beiden Lehrsätze 1) und 2) auch umkehren und in folgender Form aussprechen.

5. Lehrsatz: Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten werden multipliziert, indem man die Radikanden multipliziert:

$$\sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[r]{b} = \sqrt[r]{a \cdot b}$$

Beispiel: Statt in dem Produkt $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ die Wurzeln wirklich auszurechnen und zu multiplizieren, rechnet man viel bequemer $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$.

6. Lehrsatz: Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten werden dividiert, indem man die Radikanden dividiert:

$$\frac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}}=\sqrt[r]{\frac{a}{b}}$$

Beispiel: Statt in dem Quotienten $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ die Wurzeln auszurechnen und zu dividieren, rechnet man viel bequemer $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{18}{2}}=\sqrt{9}=3$

§ 19. Quadratwurzelausziehung aus Zahlen. Das Quadrat einer einziffrigen Zahl liegt zwischen $1^2=1$ und $10^2=100$, ist also ein- oder zweiziffrig; das Quadrat einer zweiziffrigen Zahl liegt zwischen $10^2=100$ und $100^2=10\,000$, ist also drei- oder vierziffrig. Ebenso ist das Quadrat einer dreiziffrigen Zahl fünf- oder sechsziffrig u. s. w.

Daher ist umgekehrt die Quadratwurzel aus einer ein- oder zweiziffrigen Zahl einziffrig, die Quadratwurzel aus einer drei- oder vierziffrigen Zahl zweiziffrig u. s. w. Man erhält daher die Anzahl der Ziffern einer Quadratwurzel, wenn man den Radikanden von rechts nach links in Gruppen von je zwei Ziffern teilt, und die Anzahl dieser Gruppen zählt, wobei eine etwa vorn übrig bleibende Ziffer als ganze Gruppe gerechnet wird.

Beispielsweise ist

$\sqrt{5\,29}$ zweiziffrig; $\sqrt{54\,76}$ zweiziffrig; $\sqrt{18\,66\,24}$ dreiziffrig u. s. f.

Das Rechnungsverfahren des Wurzelausziehens werde zunächst an einer drei- oder vierziffrigen Zahl erklärt. Die Wurzel hat in diesem Falle zwei Stellen, sie besteht aus einer Anzahl von Zehnern und einer Anzahl von Einern.

Die Anzahl a der Zehner finden wir, indem wir aus der Anzahl der Hunderter die größtmögliche ganzzahlige Wurzel ziehen. Nennen wir die einstweilen unbekannte Anzahl der Einer x, so muß sein

$$(a+x)^2=R$$

wenn R den Radikanden bedeutet, aus dem wir die Wurzel ziehen sollen. Führen wir das Quadrat aus, so erhalten wir

$$a^2+2\,a\,x+x^2=R$$
$$2\,a\,x+x^2=R-a^2$$

Um hieraus x zu finden, können wir zunächst x^2, das jedenfalls kleiner als $2\,a\,x$ ist, vernachlässigen. (Sollten wir etwa x zu groß nehmen, so würde sich das gleich herausstellen.)

Aus der Gleichung

$$2\,a\,x=R-a^2$$

findet man aber x, indem man den Rest $R-a^2$ durch $2\,a$ dividiert. Nachdem wir so x gefunden, haben wir nur noch nachzusehen, ob der

Rest außer $2ax$ auch noch x^2 enthält. Hiernach werden folgende Beispiele verständlich sein:

Beispiel: Ist $\sqrt{529}$ zu berechnen, so ist $R = 529$. Die Wurzel liegt jedenfalls zwischen 20 und 30 (denn es ist $20^2 = 400$, und $30^2 = 900$); wir werden deshalb $a = 20$ haben. Um die zu 20 hinzukommenden Einer zu finden, nennen wir sie zunächst x; dann muß sein

$$(20 + x)^2 = 529$$
$$400 + 40x + x^2 = 529$$
$$40x + x^2 = 529 - 400 = 129$$

oder, indem wir zunächst das x^2 vernachlässigen,

$$40x = 129$$
$$x = 3$$

In der That ist $23^2 = 529$.

Die praktische Ausführung der Rechnung kann nach folgendem Schema geschehen:

$$\begin{array}{r} \sqrt{5\,29} = \overset{a}{20} + \overset{x}{3} \\ 4\,00 \\ \hline 2a = 40\ /1\,29 \\ 2ax = 40 \,.\, 3 = 1\,20 \\ \hline 9 \\ x^2 = 3 \,.\, 3 = 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

oder unter Fortlassung überflüssiger Nullen

$$\begin{array}{r} \sqrt{5\,29} = 23 \\ 4 \\ \hline 4\ /1\,2 \\ 4 \,.\, 3 = 1\,2 \\ \hline 9 \\ 3 \,.\, 3 = 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

oder noch einfacher, indem man das Quadrat zugleich mit dem doppelten Produkt abzieht

$$\begin{array}{r} \sqrt{5\,29} = 23 \\ 4 \\ \hline 4\ /1\,29 \\ 43 \,.\, 3 = 1\,29 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ebenso:

$$\begin{array}{r} \sqrt{54\,76} = 74 \\ 49 \\ \hline 14\ /5\,76 \\ 144 \,.\, 4 = 5\,76 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{75\,69} = 87 \\ 64 \\ \hline 16\ /11\,69 \\ 167 \,.\, 7 = 11\,69 \\ \hline 0 \end{array}$$

Hat der Radikand mehr als 4, die Wurzel also mehr als 2 Ziffern, so setzt man das Verfahren fort, indem man die schon bestimmte Zahl als ein neues a ansieht und dazu die nachfolgende Ziffer als ein neues x sucht.

$$\begin{array}{r} \sqrt{7\,45\,29} = 273 \\ 4 \\ \hline 4\,/\,345 \\ 47 \,.\, 7 = 329 \\ \hline 54\,/\ 1629 \\ 543 \,.\, 3 = 1629 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{18\,66\,24} = 432 \\ 16 \\ \hline 8\,/\,266 \\ 83 \,.\, 3 = 249 \\ \hline 86\,/\ 1724 \\ 862 \,.\, 2 = 1724 \\ \hline 0 \end{array}$$

Bei Zahlen mit einem Dezimalstrich hat man beim Abteilen der Gruppen zu zweien vom Dezimalstrich anzufangen und nach links und rechts fortzuschreiten. Bleibt für die letzte Gruppe rechts nur eine Ziffer übrig, so hängt man noch eine 0 an. Geht die Rechnung nicht auf, so kann man an den Dezimalbruch beliebig viele Gruppen von je zwei Nullen angehängt denken und die Rechnung in derselben Weise beliebig weit fortsetzen; sie wird dann allerdings niemals aufgehen. Die Wurzel besteht in diesem Falle aus einem Dezimalbruch mit unendlich vielen Stellen. Man bezeichnet sie als eine **Irrationalzahl** und berechnet von den unendlich vielen Stellen so viele, wie der verlangte Genauigkeitsgrad der Rechnung erfordert.

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{13{,}76\,41} = 3{,}71 \\ & 9 \\ & 6\,/\,476 \\ 67\,.\,7 = & 469 \\ & 74\,/\,741 \\ 741\,.\,1 = & 741 \\ & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{5{,}7} = \sqrt{5{,}70\ldots} = 2{,}387\ldots \\ & 4 \\ & 4\,/\,170 \\ 43\,.\,3 = & 129 \\ & 46\,/\,4100 \\ 468\,.\,8 = & 3744 \\ & 476\,/\,35600 \\ 4767\,.\,7 = & 33369 \\ & 2231 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots \\ & 1 \\ & 2\,/\,100 \\ 24\,.\,4 = & 96 \\ & 28\,/\,400 \\ 281\,.\,1 = & 281 \\ & 282\,/\,11900 \\ 2824\,.\,4 = & 11296 \\ & 2828\,/\,60400 \\ 28282\,.\,2 = & 56564 \\ & 3836 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{10} = 3{,}16228\ldots \\ 9 \\ 61\,/\,100 \\ 61 \\ 626\,/\,3900 \\ 3756 \\ 6322\,/\,14400 \\ 12644 \\ 63242\,/\,175600 \\ 126484 \\ 63244\,/\,4911600 \end{array}$$

Durch einfaches Wurzelausziehen lassen sich Gleichungen von der Form

$$a : x = x : b$$

auflösen. Man nennt in diesem Falle x die **mittlere Proportionale** zwischen a und b.

$$\begin{aligned} 12 : x &= x : 48 \\ x^2 &= 12\,.\,48 = 576 \\ x &= \sqrt{576} = 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x : 5{,}29 &= 16 : x \\ x^2 &= 5{,}29\,.\,16 = 84{,}64 \\ x &= \sqrt{84{,}64} = 9{,}2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23{,}52 : x &= x : 17{,}44 \\ x^2 &= 23{,}52\,.\,17{,}44 = 410{,}1888 \\ x &= \sqrt{410{,}1888} = 20{,}253 \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise wie die Quadratwurzeln lassen sich auch Kubikwurzeln aus Zahlen ausziehen unter Zugrundelegung der Formel

$$(a + x)^3 = a^3 + 3\,a^2 x + 3\,a\,x^2 + x^3$$

Die vierte Wurzel zieht man am bequemsten dadurch aus, daß man zunächst die Quadratwurzel aus der Zahl auszieht, und aus dieser nochmals die Quadratwurzel nach der Formel

$$\sqrt[4]{a} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{a}}$$

Erweiterung des Potenzbegriffes.

§ 20. Der Exponent 0 und negative Exponenten. Die Regel für die Division zweier Potenzen war ausgedrückt durch die Formel

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

Diese Formel war zunächst nur gültig, solange $r > s$ ist. Wir wollen jetzt festsetzen, daß sie auch für $r = s$ gültig sein soll. In diesem Falle können wir im Exponenten des Nenners r für s einsetzen und erhalten demnach

$$\text{links } \frac{a^r}{a^r} = 1, \text{ während rechts } a^{r-r} = a^0$$

wird. Die obige Gleichung geht also über in die folgende

$$1 = a^0$$

Man erhält demnach den folgenden Satz:

Die nullte Potenz jeder Zahl hat den Wert 1:

$$\boldsymbol{a^0 = 1}$$

Wenn in der obigen Formel

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

r kleiner als s ist, so ergiebt die Subtraktion $r - s$ einen negativen Exponenten, z. B.:

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$$

Da andererseits

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}$$

ist, so erhält man folgenden Satz:

Eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich dem umgekehrten Werte der Potenz mit positivem Exponenten:

$$\boldsymbol{a^{-2} = \frac{1}{a^2} \qquad a^{-r} = \frac{1}{a^r}}$$

Beispiele:

$$7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}; \quad 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}; \quad 13^{-1} = \frac{1}{13^1} = \frac{1}{13}$$

$$5^0 = 1, \; \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}; \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{(\frac{3}{4})^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

$$\ldots 10^2 = 100; \; 10^1 = 10; \; 10^0 = 1; \; 10^{-1} = 0{,}1; \; 10^{-2} = 0{,}01 \ldots 10^{-4} = 0{,}0001 \ldots$$

§ 21. Bruchexponenten. Die Regel für die Radizierung einer Potenz war ausgedrückt durch die Formel

$$\sqrt[r]{a^s} = a^{\frac{s}{r}}$$

Diese Formel war zunächst nur gültig, solange die Division $\frac{s}{r}$ aufgeht, z. B. $\sqrt[3]{a^6} = a^2$. Verallgemeinern wir diese Regel für beliebige Werte der Exponenten s und r, so erhalten wir folgenden Satz:

Eine Potenz mit einem Bruchexponenten ist eine Wurzel, deren Exponent der Nenner ist, aus einer Potenz, deren Exponent der Zähler ist:

$$a^{\frac{s}{r}} = \sqrt[r]{a^s}$$

Durch diese Festsetzung ist eine wesentliche Erweiterung des Potenzbegriffes erzielt. Während nach der bisherigen Erklärung einer Potenz als eines Produktes aus lauter gleichen Faktoren der Exponent nur eine ganze Zahl sein konnte, hat es jetzt auch einen Sinn, z. B. von $25^{\frac{1}{2}}$ zu sprechen. Es ist nämlich

$$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{25^1} = \sqrt[2]{25} = 5;$$

ebenso ist $\quad 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$ u. s. f.

Weitere Beispiele:

$$\sqrt[2]{a^3} = a^{\frac{3}{2}} = a^{1,5}; \qquad \sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}} = a^{0,8}; \qquad \sqrt[3]{b} = b^{\frac{1}{3}} = b^{0,333\ldots}$$

$$343^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{343} = 7; \qquad 125^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{125^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}; \qquad 10^{0,75} = 10^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{1000};$$

$$10^{0,125} = 10^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{10}$$

Nach den Erklärungen des vorigen und des gegenwärtigen Paragraphen kann der Exponent einer Potenz jede beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl sein. Es läßt sich zeigen, daß für diesen verallgemeinerten Potenzbegriff sämtliche für das Rechnen mit Potenzen und Wurzeln aufgestellten Lehrsätze ihre Gültigkeit behalten.

Da die Potenzen von 10 für das Folgende von besonderer Wichtigkeit sind, so mögen hier noch einige derselben in geordneter Reihenfolge mit den Resultaten der Ausrechnung zusammengestellt werden. Man findet durch Quadratwurzelausziehungen:

$$\begin{aligned}
10^1 &= 10^{\frac{8}{8}} = 10 &&= 10\\
10^{0,875} &= 10^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{10^7} &&= 7,4990\\
10^{0,750} &= 10^{\frac{6}{8}} = \sqrt[4]{10^3} &&= 5,6234\\
10^{0,625} &= 10^{\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{10^5} &&= 4,2170\\
10^{0,500} &= 10^{\frac{4}{8}} = \sqrt[2]{10} &&= 3,1623\\
10^{0,375} &= 10^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{10^3} &&= 2,3714\\
10^{0,250} &= 10^{\frac{2}{8}} = \sqrt[4]{10} &&= 1,7783
\end{aligned}$$

$$10^{0{,}125} = 10^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{10} = 1{,}3335$$
$$10^{0} = = 1{,}0000$$
$$10^{-0{,}125} = 10^{-\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt[8]{10}} = 0{,}7499$$
$$10^{-0{,}250} = 10^{-\frac{2}{8}} = \frac{1}{\sqrt[4]{10}} = 0{,}5623 \quad \text{u. s. f.}$$

Diese Zahlenreihe veranschaulicht, wie einer stetigen Aufeinanderfolge von Werten des Exponenten eine stetige Aufeinanderfolge von Werten der Potenz entspricht.

Logarithmen.

§ 22. Begriff der Logarithmen. In der Gleichung $a^r = Z$ kann auch nach dem Exponenten r gefragt sein, mit dem man den gegebenen Grundfaktor a potenzieren muß, um einen gegebenen Wert Z der Potenz zu erhalten. Diese Umkehrung des Potenzierens wird für die Folge besonders wichtig, da die Exponenten, welche dann Logarithmen genannt werden, ein außerordentlich bequemes Rechnungshülfsmittel darstellen.

Für unsere Zwecke genügt es, wenn wir für a von vornherein einen bestimmten Wert, nämlich die Grundzahl 10 unseres Zahlensystems, einsetzen. In diesem Falle nennt man die Exponenten gemeine oder nach ihrem ersten Berechner Briggsche Logarithmen.

Der Logarithme einer Zahl Z ist der Exponent, mit dem man 10 potenzieren muß, um Z zu erhalten.

Wenn also $10^r = Z$ ist, so ist $r = \log Z$.

Man kann auch schreiben

$$\mathbf{10^{\log Z} = Z} \quad \text{und} \quad \mathbf{\log 10^r = r}$$

Nach dieser Erklärung ist:

$\log 10\,000$	$= 4$	denn	10^4	$= 10\,000$
$\log 1\,000$	$= 3$		10^3	$= 1\,000$
$\log 100$	$= 2$		10^2	$= 100$
$\log 10$	$= 1$		10^1	$= 10$
$\log 1$	$= 0$		10^0	$= 1$
$\log 0{,}1$	$= -1$		10^{-1}	$= 0{,}1$
$\log 0{,}01$	$= -2$		10^{-2}	$= 0{,}01$
$\log 0{,}001$	$= -3$		10^{-3}	$= 0{,}001$

Die Logarithmen aller Zahlen zwischen 1000 und 10 000, d. h. aller vierstelligen Zahlen, liegen zwischen 3 und 4, sie werden also gleich 3 plus einem echten Bruch sein. Diesen Bruch stellt man stets als Dezimalbruch dar und nennt ihn die Mantisse des Logarithmen. Man findet die Mantissen aus den Logarithmentafeln, in denen sie auf 7, 6, 5 oder 4 Dezimalstellen je nach dem gewünschten Genauigkeitsgrade angegeben sind. Für den nautischen

Gebrauch genügen fünfstellige, in den weitaus meisten Fällen sogar vierstellige Tafeln. Über die Berechnung dieser Tafeln siehe § 25.

Wir wollen die Mantisse einer Zahl Z mit derjenigen der 10mal so großen Zahl $10 \, . \, Z$ vergleichen.

Es sei $Z = 10^m$, dann ist $10 \, . \, Z = 10^{m+1}$

$log\, Z = m$ $\qquad log\, 10 \, . \, Z = m + 1$

der Logarithme von $10 \, . \, Z$, ist also um 1 größer als der von Z, die Mantisse muß also für beide Zahlen dieselbe sein. Darin liegt der

Lehrsatz: Alle Zahlen, die sich nur durch die Stellung des Dezimalstriches (oder durch angehängte Nullen) unterscheiden, haben dieselbe Mantisse.

So haben die Zahlen 18700; 1870; 187; 18,7; 1,87; 0,187; 0,0187 alle dieselbe Mantisse, nämlich 27184 (vergl. die Logarithmentafel).

Die vor dem Dezimalstrich des Logarithmen stehende Anzahl von Ganzen heißt die Kennziffer. Die Kennziffer aller vierstelligen Zahlen ist, wie wir schon oben sahen, gleich 3. Ebenso geht aus der obigen Übersicht hervor, daß alle zwischen 100 und 1000, also alle dreistelligen Zahlen die Kennziffer 2, alle zweistelligen Zahlen die Kennziffer 1 haben u. s. f. Die Kennziffer richtet sich also lediglich nach der Stellenzahl und zwar ist sie gleich dem Logarithmen des Wertes der Eins auf der Stelle höchsten Ranges (z. B. ist die Kennziffer des Logarithmen von 4768 gleich *log* 1000 oder gleich 3). Es stimmt das damit überein, daß, wie wir oben sahen, der Logarithme einer Zahl sich von dem der 10mal so großen nicht in der Mantisse, sondern nur in der Kennziffer und zwar um eine Einheit unterscheidet. In dem Gesagten liegt der

Lehrsatz: Die Kennziffer eines Logarithmen ist um 1 kleiner als die Stellenzahl vor dem Dezimalstrich.

Die Logarithmen der oben aufgeschriebenen Zahlen heißen infolgedessen:

$$
\begin{aligned}
log\, 18\,700 &= 4{,}27\,184 \\
log\, 1\,870 &= 3{,}27\,184 \\
log\, 187 &= 2{,}27\,184 \\
log\, 18{,}7 &= 1{,}27\,184 \\
log\, 1{,}87 &= 0{,}27\,184 \\
log\, 0{,}187 &= 0{,}27\,184 - 1 = 9{,}27\,184 - 10 \\
log\, 0{,}0187 &= 0{,}27\,184 - 2 = 8{,}27\,184 - 10
\end{aligned}
$$

Aus dieser Übersicht geht noch hervor der

Lehrsatz: Alle echten Brüche haben negative Kennziffern.

Am zweckmäßigsten verfährt man so, daß man dem Logarithmen eines echten Bruches allemal die negative Kennziffer —10 anhängt, und dann vorne vor dem Komma so viele Einheiten wieder hinzufügt, daß man die richtige negative Kennziffer erhält. Als Rechenregel kann man sich merken:

Die Kennziffer eines echten Dezimalbruches erhält man, wenn man die Anzahl der vor den geltenden Ziffern stehenden Nullen (die Null vor dem Komma mitgezählt) von 10 subtrahiert und zum Schluß —10 anhängt.

§ 23. Kologarithmen.

Erklärung: Unter dem Kologarithmen von Z versteht man den Logarithmen von $\frac{1}{Z}$

$$colog\, Z = log \frac{1}{Z}$$

Es sei wieder $log\, Z = m$

dann ist $Z = 10^m$

und $\frac{1}{Z} = \frac{1}{10^m} = 10^{-m}$

folglich $log \frac{1}{Z} = -m$

oder $colog\, Z = -m = -log\, Z$

Erklärung: Der Kologarithme einer Zahl ist gleich ihrem Logarithmen negativ genommen.

Da es nicht praktisch ist, mit Logarithmen mit negativem Vorzeichen zu rechnen, so wollen wir für die letzte Regel die folgende setzen:

Um den Kologarithmen einer Zahl zu finden, subtrahiere man ihren Logarithmen von

$$10{,}00\,000 - 10$$

So findet man z. B. den Kologarithmen von 187 in folgender Weise:

$$\begin{array}{rl} & 10{,}00\,000 - 10 \\ log\, 187 = & \underline{2{,}27\,184 } \\ colog\, 187 = & 7{,}72\,816 - 10 \end{array}$$

und den Kologarithmen von 0,0187 in folgender Weise:

$$\begin{array}{rl} & 10{,}00\,000 - 10 \\ log\, 0{,}0187 = & \underline{8{,}27\,184 - 10} \\ colog\, 0{,}0187 = & 1{,}72\,816 \end{array}$$

§ 24. Das Rechnen mit Logarithmen.

1. Lehrsatz: Der Logarithme eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen seiner Faktoren:

$$log\,(a\,.\,b) = log\, a + log\, b$$

Beweis: Es ist $(a\,.\,b) = a\,.\,b$

oder $10^{log\,(a\,.\,b)} = 10^{log\, a}\,.\,10^{log\, b} = 10^{log\, a + log\, b}$

$$log\,(a\,.\,b) = log\, a + log\, b$$

Um demnach zwei (oder beliebig viele) Zahlen zu multiplizieren, addiere man ihre Logarithmen. Dadurch findet man den Logarithmen des Produktes und hat zu diesem die zugehörige Zahl aufzuschlagen.

2. Lehrsatz: Der Logarithme eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen von Dividend und Divisor:

$$log \frac{a}{b} = log\, a - log\, b$$

Beweis ähnlich wie der des vorigen Satzes.

Wir machen von diesem Satze selten Gebrauch, da wir jede Division durch eine Zahl a in eine Multiplikation mit dem umgekehrten Werte $\frac{1}{a}$ verwandeln, zu welchem Zwecke wir die Kologarithmen verwenden.

3. Lehrsatz: Der Logarithme einer Potenz ist gleich dem Logarithmen des Grundfaktors, multipliziert mit dem Exponenten:

$$log\, a^r = r\, log\, a$$

Beweis: Es ist z. B.

$$log\, a^3 = log\,(a \,.\, a \,.\, a) = log\, a + log\, a + log\, a$$
$$log\, a^3 = 3 \,.\, log\, a$$

Dasselbe läßt sich ebenso für jeden beliebigen Wert des Exponenten beweisen.

Um demnach eine Zahl in eine beliebige Potenz zu erheben, hat man ihren Logarithmen mit dem Potenzexponenten zu multiplizieren und zu dem dadurch erhaltenen Logarithmen der Potenz die Zahl aufzuschlagen.

4. Lehrsatz: Der Logarithme einer Wurzel ist gleich dem Logarithmen des Radikanden, dividiert durch den Wurzelexponenten:

$$log \sqrt[r]{a} = \frac{1}{r} \,.\, log\, a$$

Beweis: Setzen wir etwa $\sqrt[r]{a} = b$, so ist $a = b^r$ und $log\, a = r\, log\, b$

Daher haben wir

$$log \sqrt[r]{a} = log\, b = \frac{1}{r}\, log\, a$$

Um demnach aus einer Zahl eine beliebige Wurzel zu ziehen, hat man nur den Logarithmen der Zahl durch den Wurzelexponenten zu dividieren und zu dem dadurch erhaltenen Logarithmen der Wurzel die Zahl aufzuschlagen.

Nach diesen Lehrsätzen wird beim Rechnen mit Logarithmen jede Multiplikation in eine Addition, jede Division in eine Subtraktion, jedes Potenzieren in eine Multiplikation, jedes Wurzelausziehen in eine Division verwandelt. Jede Rechnungsart wird also gleichsam auf die Rechnungsart des nächst niedrigen Ranges zurückgeführt. Die beiden Rechnungsarten untersten Ranges, die Addition und die Subtraktion, lassen sich nicht mit Hülfe von Logarithmen ausführen. Es ist daher sehr wichtig, in Ausdrücken, welche logarithmisch berechnet werden sollen, wenn irgend möglich, etwaige Summen- und

Unterschiedsformen (Plus- und Minus-Zeichen) durch vorheriges Umformen des Ausdruckes zu beseitigen. Wenn das nicht gelingt, so muß die logarithmische Rechnung vor und hinter den Plus- und Minus-Zeichen unterbrochen werden, die Zahlen müssen aufgeschlagen und diese addiert oder subtrahiert werden. Kommen in dem zu berechnenden Ausdrucke keine Plus- und Minus-Zeichen vor, so ist es erst am Schlusse der Rechnung, nachdem alle Multiplikationen, Divisionen, Potenzierungen und Radizierungen mit Hülfe der **Logarithmen** ausgeführt sind, nötig, wieder von dem Logarithmen zu der zugehörigen Zahl überzugehen, d. h. diese aufzuschlagen.

Beispiele für logarithmische Rechnungen.

Aufgabe 1: $13{,}42 \cdot 0{,}937 \cdot 0{,}04536$

$$\begin{array}{rl} 13{,}42 & log = 1{,}12\,775 \\ 0{,}937 & log = 9{,}97\,174 - 10 \\ 0{,}04536 & log = \underline{8{,}65\,667 - 10} \\ \text{Zahl} = 0{,}57038 & log = 9{,}75\,616 - 10 \end{array}$$

Aufgabe 2: $\dfrac{17{,}346 \cdot 2{,}4762}{19{,}02}$

$$\begin{array}{rl} 17{,}346 & log = 1{,}23\,920 \\ 2{,}4762 & log = 0{,}39\,379 \\ 19{,}02 & colog = \underline{8{,}72\,079} \\ \text{Zahl} = 2{,}2583 & log = 0{,}35\,378 \end{array}$$

Aufgabe 3: $3{,}6724^4$

$$\begin{array}{rl} 3{,}6724 & log = \underline{0{,}56\,495\,.\,4} \\ \text{Zahl} = 181{,}89 & log = 2{,}25\,980 \end{array}$$

Aufgabe 4: $\sqrt[3]{0{,}74615}$

$$\begin{array}{rl} 0{,}74615 & log = 9{,}87\,283 - 10 \\ & = \underline{29{,}87\,283 - 30 : 3} \\ \text{Zahl} = 0{,}90700 & log = 9{,}95\,761 - 10 \end{array}$$

Aufgabe 5: $0{,}674 \cdot \sqrt{\dfrac{32{,}615}{0{,}364}}$

$$\begin{array}{rl} 32{,}615 & log = 1{,}51\,342 \\ 0{,}364 & colog = \underline{0{,}43\,890} \\ & s = \underline{1{,}95\,232 : 2} \\ & q = 0{,}97\,616 \\ 0{,}674 & log = \underline{9{,}82\,866 - 10} \\ \text{Zahl} = 6{,}3800 & log = 0{,}80\,482 \end{array}$$

Aufgabe 6: $5\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\left(\dfrac{18{,}5}{4{,}3}\right)^2} = \dfrac{16}{3}\sqrt[3]{\left(\dfrac{18{,}5}{4{,}3}\right)^2}$

$$\begin{array}{rl} 18{,}5 & log = 1{,}26\,717 \\ 4{,}3 & colog = \underline{9{,}36\,653 - 10} \\ & s = 0{,}63\,370\,.\,2 \\ & p = \underline{1{,}26\,740 : 3} \\ & q = 0{,}42\,247 \\ 16 & log = 1{,}20\,412 \\ 3 & colog = \underline{9{,}52\,288} \\ \text{Zahl} = 14{,}108 & log = 1{,}14\,947 \end{array}$$

Aufgabe 7: Den Ausdruck $b = \sqrt{d^2 - a^2}$ zu berechnen für die Werte $d = 17{,}356$, $a = 12{,}634$.

Wir machen den gegebenen Ausdruck zuerst für die logarithmische Berechnung geeignet, indem wir ihn folgendermaßen umformen:

$$b = \sqrt{d^2 - a^2} = \sqrt{(d + a) . (d - a)}$$

$$\begin{array}{rll}
d = & 17{,}356 & \\
a = & \underline{12{,}634} & \\
d + a = & 29{,}990 & log = 1{,}47\,698 \\
d - a = & 4{,}722 & log = \underline{0{,}67\,413} \\
 & & s = \underline{2{,}15\,111 : 2} \\
b = & 11{,}900 & log = 1{,}07\,556
\end{array}$$

Aufgabe 8: Den Ausdruck

$$\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c}{a-b}}$$

zu berechnen für die Werte $a = 19{,}5$; $b = 12{,}7$; $c = 5{,}79$

$$\begin{array}{rll}
a = & 19{,}5 & \\
b = & \underline{12{,}7} & \\
a - b = & 6{,}8 & colog = 9{,}16\,749 \\
c = & 5{,}79 & log = \underline{0{,}76\,268} \\
 & & log = 9{,}93\,017 - 10 \\
 & & \quad = \underline{19{,}93\,017 - 20 : 2} \\
 & & q = 9{,}96\,509 - 10 \\
a = & 19{,}5 & log = 1{,}29\,003 \\
b = & 12{,}7 & colog = \underline{8{,}89\,620 - 10} \\
\text{Zahl} = & 1{,}4168 & log = 0{,}15\,132
\end{array}$$

Aufgabe 9: $(1{,}0342^5 + \sqrt[3]{1{,}7344})^4$

$$\begin{array}{rll}
1{,}0342 & log = \underline{0{,}01\,460 . 5} \\
\text{I. Zahl} = 1{,}1831 & log = 0{,}07\,300
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rll}
1{,}7344 & log = \underline{0\,23\,915 : 3} \\
\text{II. Zahl} = 1{,}2015 & log = 0{,}07\,972
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{I. Zahl} = 1{,}1831 & \\
\text{II. Zahl} = \underline{1{,}2015} & \\
\text{Summe} = 2{,}3846 & log = \underline{0{,}37\,742 . 4} \\
\text{Zahl} = 32{,}335 & log = 1{,}50\,968
\end{array}$$

Neben der gewöhnlichen Logarithmentafel (Taf. 2 der Sammlung) enthalten die nautischen Tafeln noch eine zweite, in welcher man zu einem in Graden, Bogenminuten und Bogensekunden oder Stunden, Zeitminuten und Zeitsekunden ausgedrückten Bogen von 0 bis 3° oder von 0 bis 3^{st} den Logarithmen der Sekundenzahl des betreffenden Bogens findet. Man nennt diesen Logarithmen des in Sekundenzahl ausgedrückten Bogens den *log. arcus.* Es ist z. B.

$$log\ arc\ 1^0\ 5'\ 12'' = log\ 3912'' = 3{,}5924$$

Diese Sondertafel, welche das fortwährende Verwandeln von Graden, Minuten, Sekunden oder Stunden, Minuten, Sekunden in Sekunden ersparen soll, findet z. B. Anwendung bei der folgenden Aufgabe.

Aufgabe 10: Wenn der Mond sich einem Sterne um $1^0\ 32'\ 27''$ in 3^{st} nähert, wieviel Zeit gebraucht er, um sich ihm um $0^0\ 45'\ 16''$ zu nähern?

Bezeichnet man die gesuchte Zeit mit x, so findet man x aus der Verhältnisgleichung:

$$1^0\ 32'\ 27'' : 0^0\ 45'\ 16'' = 3^{st} : x$$

$$\begin{array}{rl} 3^{st}\ 0^m\ \ 0^s & log\ arc = 4{,}0334 \\ 0^0\ 45'\ 16'' & log\ arc = 3{,}4339 \\ 1^0\ 32'\ 27'' & colog\ arc = \underline{6{,}2559 - 10} \\ x = 1^{st}\ 28^m\ 7^s & log\ arc = 3{,}7232 \end{array}$$

§ 25. **Die Berechnung der Logarithmen** kann auf folgende Weise geschehen.

Wenn man $10^{0,5} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ ausrechnet, so findet man

$$3{,}162\,2777 = 10^{0,5}$$

$$\text{also } log\ 3{,}162\,2777 = 0{,}500\,0000$$

Wenn man darauf aus $\sqrt{10}$ nochmals die Quadratwurzel auszieht, so findet man weiter

$$1{,}778\,2794 = 10^{0,25}$$

$$log\ 1{,}778\,2794 = 0{,}250\,0000$$

Indem man so mit Wurzelausziehungen fortfährt, erhält man die Logarithmen einer Reihe von Zahlen (der 2ten, 4ten, 8ten u. s. w. Wurzeln aus 10) nach folgender Übersicht:

$$\begin{array}{l} log\ 10{,}000\,0000 = 1{,}000\,0000 \\ log\ 3{,}162\,2777 = 0{,}500\,0000 \\ log\ 1{,}778\,2794 = 0{,}250\,0000 \\ log\ 1{,}333\,5214 = 0{,}125\,0000 \\ log\ 1{,}154\,7820 = 0{,}062\,5000 \\[4pt] log\ 1{,}074\,6078 = 0{,}031\,2500 \\ log\ 1{,}036\,6329 = 0{,}015\,6250 \\ log\ 1{,}018\,1517 = 0{,}007\,8125 \\ log\ 1{,}009\,0350 = 0{,}003\,9063 \\ log\ 1{,}004\,5074 = 0{,}001\,9531 \\[4pt] log\ 1{,}002\,2511 = 0{,}000\,9766 \\ log\ 1{,}001\,1249 = 0{,}000\,4883 \\ log\ 1{,}000\,5623 = 0{,}000\,2441 \\ log\ 1{,}000\,2811 = 0{,}000\,1221 \\ log\ 1{,}000\,1405 = 0{,}000\,0610 \\[4pt] log\ 1{,}000\,0703 = 0{,}000\,0305 \\ log\ 1{,}000\,0351 = 0{,}000\,0153 \\ log\ 1{,}000\,0176 = 0{,}000\,0076 \\ log\ 1{,}000\,0088 = 0{,}000\,0038 \\ log\ 1{,}000\,0044 = 0{,}000\,0019 \\[4pt] log\ 1{,}000\,0022 = 0{,}000\,0010 \\ log\ 1{,}000\,0011 = 0{,}000\,0005 \\ log\ 1{,}000\,0005 = 0{,}000\,0002 \\ log\ 1{,}000\,0003 = 0{,}000\,0001 \\ log\ 1{,}000\,0001 = 0{,}000\,0000 \end{array}$$

Aus diesen Logarithmen kann man sich dann den Logarithmen jeder beliebigen Zahl in folgender Weise ableiten.

Um den Logarithmen einer Zahl a zu erhalten, welche zwischen 1 und 10 liegt, sucht man in der vorstehenden Tafel die in der Zahl a enthaltene nächst kleinere Potenz von 10. Diese sei 10^α. Dividiert man nun a durch 10^α, so sei der Quotient b; dann ist:

$$\frac{a}{10^\alpha} = b; \quad \text{oder} \quad a = 10^\alpha . b$$

Weiter sucht man die in der Zahl b enthaltene nächst kleinere Potenz von $10 = 10^\beta$. Dividiert man nun b durch 10^β, so sei der Quotient c; dann ist:

$$\frac{b}{10^\beta} = c; \quad \text{oder} \quad b = 10^\beta . c$$

Wiederum sucht man die in der Zahl c enthaltene nächst kleinere Potenz von $10 = 10^\gamma$. Dividiert man nun c durch 10^γ, so sei der Quotient d; dann ist:

$$\frac{c}{10^\gamma} = d; \quad \text{oder} \quad c = 10^\gamma . d$$

Und dieses Verfahren setze man so lange fort, bis man zu einem Quotienten $10^0 = 1$ kommt, dann ist:

$$a = 10^\alpha . 10^\beta . 10^\gamma \ldots . 10^0 = 10^{\alpha+\beta+\gamma} \ldots .$$
$$\log a = \alpha + \beta + \gamma + \ldots .$$

Damit ist aber die vorliegende Aufgabe, die Berechnung des Logarithmen einer beliebigen Zahl, allgemein gelöst, denn jede Zahl kann durch Verschiebung des Dezimalstriches hinter die erste geltende Ziffer in eine Zahl verwandelt werden, welche zwischen 1 und 10 liegt, ohne daß die Mantisse, um deren Berechnung es sich hier allein handelt, dadurch geändert wird.

Beispiel. Wollte man den $\log 1852$ berechnen, so würde sich die Rechnung stellen wie folgt:

$$\frac{1{,}852}{1{,}77828} = 1{,}04146; \text{ oder } 1{,}852 = 10^{0{,}25000} . 1{,}04146$$
$$\frac{1{,}04146}{1{,}03663} = 1{,}00466; \text{ oder } 1{,}04146 = 10^{0{,}01563} . 1{,}00466$$
$$\frac{1{,}00466}{1{,}00451} = 1{,}00015; \text{ oder } 1{,}00466 = 10^{0{,}00195} . 1{,}00015$$
$$\frac{1{,}00015}{1{,}00014} = 1{,}00001; \text{ oder } 1{,}00015 = 10^{0{,}00006} . 10^{0{,}00000}$$
$$1{,}852 = 10^{0{,}25000} . 10^{0{,}01563} . 10^{0{,}00195} . 10^{0{,}00006} . 10^{0{,}00000}$$
$$= 10^{0{,}25000 + 0{,}01563 + 0{,}00195 + 0{,}00006}$$
$$= 10^{0{,}26764}$$
$$\log 1{,}852 = 0{,}26\,764$$
$$\log 1852 = 3{,}26\,764.$$

Ebene Geometrie oder Planimetrie.

§ 26. **Raumgrößen.** Die Geometrie behandelt die Eigenschaften räumlicher Gebilde. Die ebene Geometrie oder Planimetrie zieht nur ebene Figuren in den Kreis ihrer Betrachtung, während sich die räumliche Geometrie oder Stereometrie mit körperlichen Figuren beschäftigt.

Der unendliche Raum ist nach allen Richtungen ausgedehnt. Er hat drei Richtungsachsen, die wir als vorn und hinten, rechts und links, oben und unten zu bezeichnen pflegen.

Ein nach allen Seiten hin begrenztes Stück des Raumes nennt man einen Körper (z. B. einen Würfel). Jeder Körper hat eine dreifache Ausdehnung, nämlich in die Länge, Breite und Dicke (Höhe).

Der Körper wird begrenzt durch Flächen (der Würfel durch Quadrate). Jede Fläche hat nur eine zweifache Ausdehnung, nämlich in die Länge und Breite.

Die Fläche wird begrenzt durch Linien (das Quadrat durch gerade Linien). Die Linien haben nur eine einzige Ausdehnung, nämlich in die Länge.

Eine Linie wird begrenzt durch Punkte (die Endpunkte der geraden Linie). Der Punkt hat gar keine Ausdehnung.

Linien und Winkel.

§ 27. **Linien.** Linien sind entweder gerade oder krumm. Eine gerade Linie hat überall dieselbe Richtung, während sich die Richtung einer krummen Linie stetig ändert (Kreis).

Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten.

Um einen Punkt zu bezeichnen, benutzt man meist einen Buchstaben des großen lateinischen Alphabets. Um eine gerade Linie zu bezeichnen, setzt man entweder die Buchstaben der Endpunkte nebeneinander, oder man gebraucht einen Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets, der neben die Linie gesetzt wird.

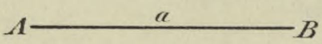


Fig. 1.

Die nebenstehende gerade Linie wird also entweder durch AB oder durch a bezeichnet.

Der Kreis ist eine in sich zurücklaufende Linie, deren sämtliche Punkte von einem innerhalb gelegenen festen Punkte — dem Mittelpunkte — überall gleichweit abstehen.

Die gerade Verbindungslinie eines Punktes der Kreislinie mit dem Mittelpunkte nennt man Halbmesser oder Radius.

Die Halbmesser desselben Kreises sind einander gleich.

Ein begrenztes Stück der Kreislinie nennt man einen Bogen.

Parallele Linien sind gerade Linien, die dieselbe Richtung haben, die sich also nicht schneiden, soweit man sie auch verlängern möge. Das Zeichen der Parallelität ist $\|$ z. B. $AB \| CD$.

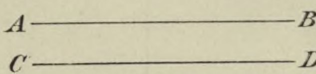


Fig. 2.

Durch einen Punkt läßt sich nur eine einzige Parallele zu einer geraden Linie ziehen.

§ 28. **Winkel.** Linien, die verschiedene Richtung haben, treffen sich, gehörig verlängert, in einem Punkte — dem Durchschnittspunkte — und bilden einen Winkel miteinander.

Unter einem Winkel versteht man die Richtungsverschiedenheit zweier gerader Linien.

Die beiden geraden Linien nennt man die Schenkel, ihren Durchschnittspunkt den Scheitelpunkt des Winkels.

Die Größe eines Winkels ist von der Länge seiner Schenkel unabhängig.

Ein Winkel wird entweder durch drei Buchstaben bezeichnet, indem man den Buchstaben am Scheitelpunkt in die Mitte setzt, BAC oder CAB; oder durch den Buchstaben am Scheitelpunkt allein mit vorgesetztem Winkelzeichen, $\sphericalangle A$ (gelesen: Winkel bei A); oder am bequemsten durch einen einzelnen Buchstaben, der in die Winkelöffnung gesetzt wird. Hierzu benutzt man meist die ersten Buchstaben des kleinen griechischen Alphabetes: α, β, γ, δ, ε, oder die letzten des kleinen lateinischen: v, w, x, y, z.

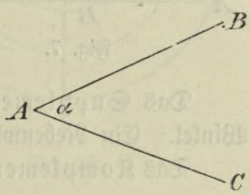


Fig. 3.

Man kann sich einen Winkel auch auf die Weise entstanden denken, daß sich eine gerade Linie AB um den festen Endpunkt B dreht. Durch diese Drehung wird die Linie AB in alle Richtungen gebracht, die durch B gelegt werden können; sie bildet also mit der ursprünglichen Lage AB nach und nach alle möglichen Winkel und die Größe der Drehung mißt die Größe des Winkels.

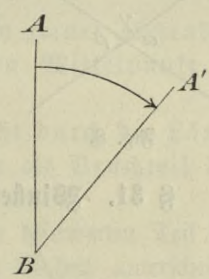


Fig. 4.

Eine Reihe von Winkeln haben einen besonderen Namen erhalten.

Ein gestreckter Winkel ist ein Winkel, dessen Schenkel in gerader Linie liegen, der also durch eine halbe Umdrehung gebildet wird; z. B. BAC in Fig. 5.

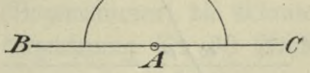


Fig. 5.

Ein rechter Winkel ist die Hälfte eines gestreckten; er wird also durch eine viertel Umdrehung gebildet; z. B. DAC in Fig. 6.

Zwei Linien, die einen rechten Winkel miteinander bilden, nennt man senkrecht zu einander. Die eine Linie nennt man ein Lot oder eine Senkrechte auf der anderen. Das Zeichen der senkrechten Lage zweier Linien ist $\perp$ z. B. $DA \perp BC$. Den Schnittpunkt des Lotes mit der anderen Linie nennt man den Fußpunkt des Lotes; z. B. Punkt A in Fig. 6.

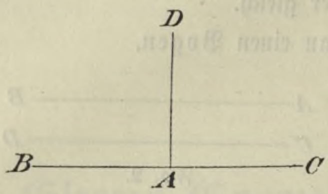


Fig. 6.

Ein spitzer Winkel ist ein Winkel, der kleiner als ein rechter Winkel ist; z. B. α in Fig. 7.

Ein stumpfer Winkel ist ein Winkel, der größer als ein rechter, aber kleiner als ein gestreckter ist; z. B. β in Fig. 7.

Spitze und stumpfe Winkel heißen mit gemeinschaftlichem Namen schiefe Winkel.

§ 29. **Nebenwinkel** sind solche Winkel, die einen Schenkel gemeinsam haben, und deren andere beiden Schenkel eine gerade Linie bilden.

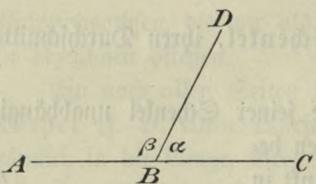


Fig. 7.

Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei rechten Winkeln.

Der Nebenwinkel eines rechten Winkels ist ebenfalls ein rechter Winkel.

Ein Winkel, der seinem Nebenwinkel gleich ist, ist ein rechter Winkel.

Zu gleichen Winkeln gehören gleiche Nebenwinkel.

Das Supplement eines Winkels ist seine Ergänzung zu einem gestreckten Winkel. Ein Nebenwinkel ist allemal das Supplement des andern.

Das Komplement eines Winkels ist seine Ergänzung zu einem rechten Winkel.

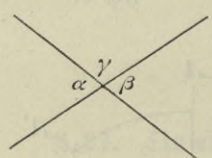


Fig. 8.

§ 30. **Scheitelwinkel.** Verlängert man beide Schenkel eines Winkels über den Scheitelpunkt hinaus, so heißt der Winkel zwischen diesen Verlängerungen der Scheitelwinkel des ursprünglichen, z. B. α und β.

Scheitelwinkel sind einander gleich.

Es folgt dies ohne weiteres daraus, daß sowohl α als auch β Nebenwinkel desselben Winkels γ sind.

§ 31. **Winkel an Parallelen.** Werden zwei parallele Linien von einer dritten geschnitten, so entstehen an jedem Schnittpunkte vier Winkel, die man zu Paaren zusammenzufassen pflegt.

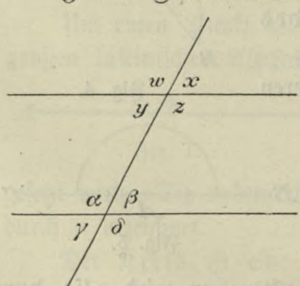


Fig. 9.

Winkel, die an derselben Seite der Parallelen und an derselben Seite der Durchschneidenden liegen, heißen Gegenwinkel: w und α; x und β; y und γ; z und δ.

Winkel, die beide innerhalb oder beide außerhalb der Parallelen und auf verschiedenen Seiten der Durchschneidenden liegen, heißen Wechselwinkel: y und β; z und α; w und δ; x und γ.

Lehrsatz: Werden zwei parallele Linien von einer dritten geschnitten, so sind sowohl die Gegenwinkel, als auch die Wechselwinkel einander gleich.

Die Richtigkeit dieser Behauptung leuchtet sofort ein, wenn man sich die vier Winkel α, β, γ, δ parallel mit sich verschoben denkt, bis ihr gemeinsamer Scheitelpunkt mit dem Scheitelpunkt der vier Winkel w, x, y, z zusammenfällt. Da die Parallelen dieselbe Richtung haben, so werden sich die Gegenwinkel gegenseitig decken, während die Wechselwinkel zu Scheitelwinkeln werden.

Es gilt auch die umgekehrte Behauptung.

Lehrsatz: Werden zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten, und sind ein Paar Gegenwinkel oder ein Paar Wechselwinkel einander gleich, so sind die Linien parallel.

§ 32. Winkelmaße. Man denke sich den Winkel durch die Drehung einer geraden Linie AC um den festen Punkt C gebildet. Nimmt man dann auf der Linie AC beliebige Punkte A, B, D an, so werden diese Punkte bei der Drehung je eine Kreislinie beschreiben. Nach Vollendung der ganzen Umdrehung wird von jedem Punkte eine ganze Kreislinie, nach Vollendung der halben Umdrehung eine halbe Kreislinie, nach Vollendung einer viertel Umdrehung eine viertel Kreislinie u. s. f. beschrieben sein. Jedem Bruchteile einer Umdrehung entspricht derselbe Bruchteil einer ganzen Kreislinie, ganz unabhängig von der Länge des Kreishalbmessers. Da nun die Drehung das Maß für den Winkel abgiebt, so gilt der Satz:

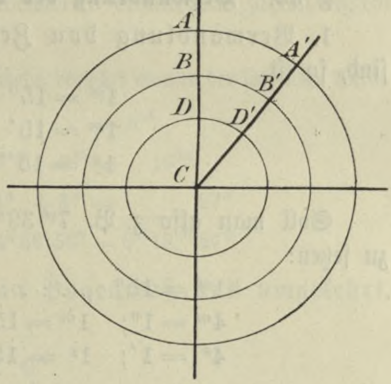


Fig. 10.

Ein Winkel wird gemessen durch den zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen eines beliebigen Kreises, dessen Mittelpunkt im Scheitelpunkte liegt.

Dabei ist indessen zu bemerken, daß der Winkel nicht durch die Länge des Bogens gemessen wird, sondern daß der Bogen immer als Bruchteil der ganzen Kreislinie aufgefaßt werden muß.

Um ein bequemeres Maß zu haben, führt man einen bestimmten Teil der ganzen Kreislinie als Einheit ein. Nach der Größe dieser Einheit unterscheidet man drei verschiedene Winkelmaße.

Beim Bogenmaß ist die Einheit der Grad, d. i. der 360ste Teil der ganzen Kreislinie. Er wird eingeteilt in 60 Minuten (Bogenminuten), die Minute wiederum in 60 Sekunden (Bogensekunden). Die Bezeichnung für 60 Grad 30 Minuten 15 Sekunden ist $60^0\ 30'\ 15''$.

Ein gestreckter Winkel beträgt demnach 180^0, ein rechter 90^0.

Beim Zeitmaß ist die Einheit die Stunde, d. i. der 24ste Teil der ganzen Kreislinie. Die Stunde hat 60 Minuten (Zeitminuten), die Minute

60 Sekunden (Zeitsekunden). Die Bezeichnung für 1 Stunde 1 Minute 1 Sekunde ist $1^{st}\ 1^{m}\ 1^{s}$.

Ein gestreckter Winkel beträgt demnach 12^{st}, ein rechter 6^{st}.

Beim Strichmaß, das beim Kompaß Verwendung findet, ist die Einheit der Strich, d. i. der 32ste Teil der ganzen Kreislinie; er ist durch fortgesetzte Zweiteilung der Kreislinie entstanden und wird seinerseits wieder in halbe und viertel Striche, seltener auch noch in achtel Striche eingeteilt. Die Bezeichnung für $3\frac{3}{4}$ Strich ist $3\frac{3}{4}^{str}$.

Ein gestreckter Winkel beträgt demnach 16^{str}, ein rechter 8^{str}.

Die vier Richtungen *N, S, O, W* nennt man die vier Hauptstriche, die in der Mitte zwischen ihnen gelegenen Richtungen *NO, SO, SW, NW* die Hauptzwischenstriche der Kompaßrose.

§ 33. Verwandlung der Winkelmaße ineinander.

1. Verwandlung von Zeitmaß in Bogenmaß. Da $24^{st} = 360^0$ sind, so ist

$$\begin{array}{ll} 1^{st} = 15^0 & 4^m = 1^0 \\ 1^m = 15' & 4^s = 1' \\ 1^s = 15'' & \end{array}$$

Soll man also z. B. $7^{st}\,39^m\,49^s$ in Bogenmaß verwandeln, so hat man zu setzen:

$$\begin{array}{lllr} 1^{st} = 15^0 & \ldots\ldots\ldots & \text{also}\ 7^{st} = & 105^0 \\ 4^m = 1^0; & 1^m = 15' \ldots & \text{also}\ 39^m = & 9^0 45' \\ 4^s = 1'; & 1^s = 15'' \ldots & \text{also}\ 49^s = & 12'15'' \\ \hline & & \text{demnach}\ 7^{st}\,39^m\,49^s = & 114^0 57' 15'' \end{array}$$

Die Verwandlung von Zeitmaß in Bogenmaß erfolgt also nach der folgenden Regel:

Man multipliziere die Stunden mit 15, und dividiere die Zeitminuten durch 4; die Summe der beiden so erhaltenen Zahlen ergiebt die Anzahl der Grade. — Den Rest der Zeitminuten multipliziere man mit 15 und dividiere die Zeitsekunden durch 4; die Summe der beiden so erhaltenen Zahlen ergiebt die Anzahl der Bogenminuten. — Den Rest der Zeitsekunden multipliziere man mit 15; man erhält dadurch die Bogensekunden.

Beispiel: Um $3^{st}\,45^m\,35^s$ in Bogenmaß zu verwandeln, verfährt man in der folgenden Weise:

$$\begin{array}{rll} 3 \cdot 15 + \underline{45 : 4} & = & 45^0 + 11^0 = 56^0 \\ \text{Rest} = 1 \cdot 15 + \underline{35 : 4} = & & 15' + 8' = 23' \\ \text{Rest} = 3 \cdot 15 = & & 45'' = 45'' \\ \hline & & 3^{st}\,45^m\,35^s = 56^0\,23'\,45'' \end{array}$$

2. Verwandlung von Bogenmaß in Zeitmaß. Es ist

$$\begin{array}{ll} 15^0 = 1^{st} & 1^0 = 4^m \\ 15' = 1^m & 1' = 4^s \\ 15'' = 1^s & \end{array}$$

Soll man also z. B. $64^0\,48'\,40''$ in Zeitmaß verwandeln, so hat man zu setzen

$$\begin{array}{ll} 15^0 = 1^{st};\ 1^0 = 4^m \ldots \text{also } 64^0 = & 4^{st}\,16^m \\ 15' = 1^m;\ 1' = 4^s \ldots \text{also } 48' = & \quad 3^m\,12^s \\ 15'' = 1^s \ldots\ldots\ldots \text{also } 40'' = & \qquad 3^s \ [\text{genauer } 2{,}7^s] \\ \text{demnach } 64^0\,48'\,40'' = & 4^{st}\,19^m\,15^s \end{array}$$

Die Verwandlung von Bogenmaß in Zeit erfolgt also nach der folgenden Regel:

Man dividiere die Grade durch 15; dadurch erhält man die Stunden. — Den Rest der Grade multipliziere man mit 4 und dividiere die Bogenminuten durch 15; die Summe der beiden so erhaltenen Zahlen ergiebt die Anzahl der Zeitminuten. — Den Rest der Bogenminuten multipliziere man mit 4 und dividiere die Bogensekunden durch 15; die Summe der beiden so erhaltenen Zahlen ergiebt die Anzahl der Zeitsekunden.

Beispiel: Um $124^0\,36'\,50''$ in Zeitmaß zu verwandeln, verfährt man in der folgenden Weise:

$$\begin{array}{l} 124:15 \ldots\ldots\ldots\ldots = 8^{st} \\ \text{Rest} = 4.4 + 36:15 \ldots = 16^m + 2^m = \quad 18^m \\ \text{Rest} = 6.4 + 50:15 = 24^s + 3^s = \qquad 27^s \\ 124^0\,36'\,50'' = 8^{st}\,18^m\,27^s \end{array}$$

3. Verwandlung von Strichmaß in Bogenmaß und umgekehrt. Da der rechte Winkel $8^{str} = 90^0$ ist, so ist

$$\begin{aligned} 1^{str} &= 11^0\,15'\ \ 0'' \\ \tfrac{1}{2}^{str} &= \ \ 5^0\,37'\,30'' \\ \tfrac{1}{4}^{str} &= \ \ 2^0\,48'\,45'' \end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Werte läßt sich die Verwandlung des einen Maßes in das andere bewerkstelligen. Gewöhnlich benutzt man aber zu dieser Verwandlung die Tafel 1.

§ 34. Winkel zwischen zwei Kompaßrichtungen. Neben der gewöhnlichen Bezeichnungsweise der Kompaßrichtung, die jedem Seemann geläufig ist, z. B. ONO, $SzO\tfrac{1}{2}O$, $W\tfrac{3}{4}N$, giebt es noch eine andere Bezeichnung, von der man in der Nautik sehr häufig Gebrauch macht. Die Bezeichnungsweise besteht darin, daß man den Richtungswinkel d. h. den Winkel, den die Kompaßrichtung mit dem Nord- bezw. dem Südstrich bildet (ausgedrückt in Strichen), zwischen die beiden Hauptstriche setzt, zwischen denen die Kompaßrichtung liegt. So ist z. B.

$$\begin{array}{rll} ONO = N6^{str}O & \text{oder einfach} & = N6O \\ SWzW\tfrac{1}{2}W = S5\tfrac{1}{2}^{str}W & \quad\text{"}\quad\ \text{"} & = S5\tfrac{1}{2}W \\ W\tfrac{3}{4}N = N7\tfrac{1}{4}^{str}W & \quad\text{"}\quad\ \text{"} & = N7\tfrac{1}{4}W \end{array}$$

Eine ähnliche Bezeichnungsweise wird notwendig, wenn die Richtung in Gradmaß angegeben werden soll, so bedeutet $N50^0O$ eine Richtung im nordöstlichen Viertel, die mit dem Nordstrich einen Winkel von 50^0 bildet.

Diese Bezeichnungsweise empfiehlt sich besonders beim Übergange von einer Kompaßrichtung auf eine andere, sowie bei der Bestimmung des Winkels zwischen zwei Kompaßrichtungen.

Bei Benutzung der soeben erörterten Bezeichnungsweise der Kompaßrichtungen mit Hülfe des Richtungswinkels ergeben sich für den Winkel zwischen zwei Kompaßrichtungen die folgenden Regeln:

1. Liegen die beiden Richtungen in demselben Viertel, so nimmt man den Unterschied der beiden Richtungswinkel.

2. Liegen die beiden Richtungen in benachbarten Vierteln auf beiden Seiten des Nord- oder Südstriches, so nimmt man die Summe der beiden Richtungswinkel.

3. Liegen die beiden Richtungen in benachbarten Vierteln auf beiden Seiten des Ost- oder Weststriches, so nimmt man das Supplement der Summe der beiden Richtungswinkel.

4. Liegen die beiden Richtungen in entgegengesetzten Vierteln, so nimmt man das Supplement des Unterschiedes der beiden Richtungswinkel.

Beispiele:

zu 1.	Winkel zwischen	$N3\,O$	und	$N7\,O$	$= 7^{str} - 3^{str}$	$= 4^{str}$
	„ „	$S12^\circ W$	und	$S42^\circ W$	$= 42^\circ - 12^\circ$	$= 30^\circ$
zu 2.	„ „	$N3\,O$	und	$N6\,W$	$= 3^{str} + 6^{str}$	$= 9^{str}$
	„ „	$S43^\circ O$	und	$S71^\circ W$	$= 71^\circ + 43^\circ$	$= 114^\circ$
zu 3.	„ „	$N4\,W$	und	$S6\,W$	$= 16^{str} - (4^{str} + 6^{str})$	$= 6^{str}$
	„ „	$S17^\circ O$	und	$N36^\circ O$	$= 180^\circ - (36^\circ + 17^\circ)$	$= 127^\circ$
zu 4.	„ „	$S2\,O$	und	$N7\,W$	$= 16^{str} - (7^{str} - 2^{str})$	$= 11^{str}$
	„ „	$N18^\circ W$	und	$S84^\circ O$	$= 180^\circ - (84^\circ - 18^\circ)$	$= 114^\circ$

Das Dreieck.

§ 35. Erklärungen. Ein Dreieck ist ein Teil der Ebene, der von drei geraden Linien begrenzt wird.

Die drei geraden Linien heißen Seiten, ihre Schnittpunkte nennt man Eckpunkte.

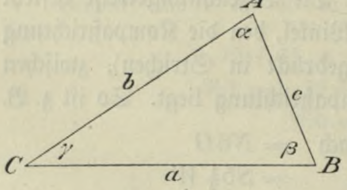


Fig. 11.

Man bezeichnet ein Dreieck gewöhnlich durch die drei an seinen Eckpunkten stehenden Buchstaben mit vorgesetztem $\triangle$, also $\triangle ABC$.

Die Seiten des Dreiecks werden gewöhnlich durch kleine lateinische Buchstaben bezeichnet, und zwar pflegt man die Seite, die dem Eckpunkte A gegenüberliegt, mit a, die B gegenüberliegt, mit b, die C gegenüberliegt, mit c zu bezeichnen. Die Winkel bezeichnet man entweder durch die an den Eckpunkten stehenden Buchstaben; $\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle C$ oder durch griechische Buchstaben, indem man $\measuredangle A = \alpha$, $\measuredangle B = \beta$, $\measuredangle C = \gamma$ setzt.

Einteilung der Dreiecke: Die Dreiecke werden entweder nach den Seiten oder nach den Winkeln eingeteilt.

a) nach den Seiten:

1. Gleichseitige Dreiecke sind Dreiecke, in denen alle Seiten einander gleich sind (*I*).

2. Gleichschenklige Dreiecke sind Dreiecke, in denen zwei Seiten einander gleich sind (*II*). Die gleichen Seiten heißen Schenkel, ihr Durchschnittspunkt Spitze, die dritte Seite Grundlinie.

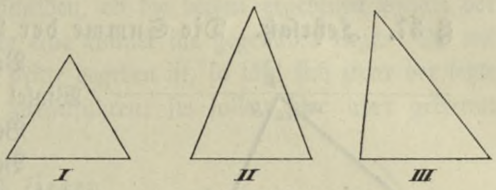


Fig. 12.

3. Ungleichseitige Dreiecke sind Dreiecke, in denen keine Seite der anderen gleich ist (*III*).

b) nach den Winkeln:

1. Spitzwinklige Dreiecke sind Dreiecke, in denen alle Winkel spitz sind (*I*).

2. Rechtwinklige Dreiecke sind Dreiecke, in denen ein Winkel ein rechter ist (*II*). Die dem rechten Winkel anliegenden Seiten heißen Katheten, die ihm gegenüberliegende Seite Hypotenuse.

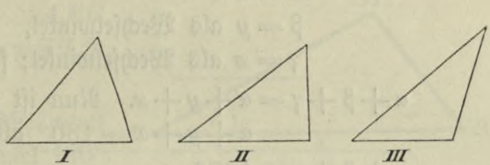


Fig. 13.

3. Stumpfwinklige Dreiecke sind Dreiecke, in denen ein Winkel stumpf ist (*III*).

§ 36. Außenwinkel. Unter dem Außenwinkel eines Dreiecks versteht man den Winkel, der entsteht, wenn man eine Seite des Dreiecks verlängert; z. B. ABD in Fig. 14.

Lehrsatz. Der Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden inneren Winkel, die nicht Nebenwinkel von ihm sind.

Voraussetzung: ABD ist Außenwinkel des $\triangle ABC$.

Behauptung: $ABD = \alpha + \gamma$.

Beweis: Zum Beweise ziehe man durch B die Parallele zu CA. Durch sie wird der Außenwinkel ABD in die beiden Teile x und y geteilt. Dann ist

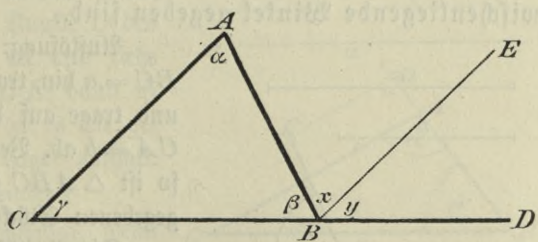


Fig. 14.

$x = \alpha$ als Wechselwinkel,

$y = \gamma$ als Gegenwinkel; folglich

$x + y = \alpha + \gamma$

Nun ist aber $x + y = ABD$; es ist also auch

$ABD = \alpha + \gamma$

Zusatz: Der Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als einer der beiden inneren Winkel, die nicht Nebenwinkel von ihm sind.

§ 37. Lehrsatz. Die Summe der Winkel im Dreieck ist 180°.

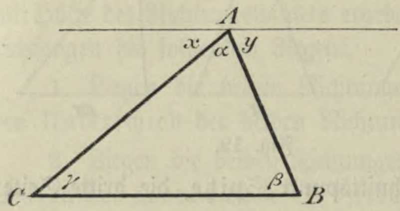


Fig. 15.

Voraussetzung: α, β und γ sind die Winkel eines Dreiecks.

Behauptung: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Beweis: Zum Beweise ziehe man durch A die Parallele zu BC. Sie bilde mit den Seiten des Dreiecks die Winkel x und y; dann ist

$$\alpha = \alpha$$
$$\beta = y \text{ als Wechselwinkel,}$$
$$\gamma = x \text{ als Wechselwinkel; folglich}$$
$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + y + x. \text{ Nun ist aber}$$
$$\alpha + y + x = 180^\circ \text{ als gestreckter Winkel; folglich}$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Zusätze: 1. Ein Dreieck kann nicht mehr als einen stumpfen oder einen rechten Winkel haben.

2. Durch zwei Winkel eines Dreiecks ist der dritte bestimmt, und zwar ist er das Supplement der Summe der beiden gegebenen Winkel.

Beispiel: Es ist $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 45^\circ$; wie groß ist γ?
$\alpha + \beta = 120^\circ$, also $\gamma = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

3. Im rechtwinkligen Dreieck ist der eine spitze Winkel das Komplement des andern.

Beispiel: Ist in einem rechtwinkligen Dreieck der eine Winkel 15°, so ist der andere $90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$.

§ 38. Dreieckskonstruktionen.

1. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn zwei Seiten und der zwischenliegende Winkel gegeben sind.

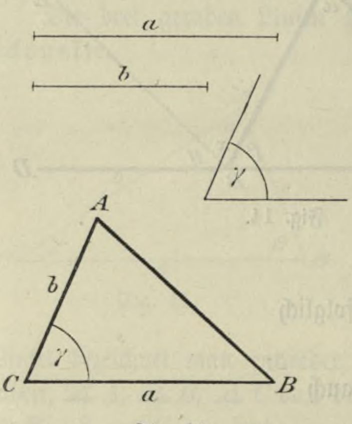


Fig. 16.

Auflösung: Man lege die gegebene Seite $BC = a$ hin, trage im Punkte C den Winkel γ an und trage auf dem freien Schenkel die Strecke $CA = b$ ab. Verbindet man schließlich A mit B, so ist $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck, da es die gegebenen Stücke in richtiger Lage enthält.

Die Auflösung ist immer möglich.

Aufgaben: 1. Ein Dreieck ABC zu zeichnen, in dem $AB = 4$ cm, $AC = 7$ cm, $\sphericalangle A = 75^\circ$ ist.

2. Ein Schiff steht W 9 Seemeilen von einem Leuchtturm. Darauf segelt es $NOzN$ 5 Seemeilen. Wie weit ist es jetzt von dem Leuchtturm entfernt?

3. Ein Schiff segelt NO 8 Seemeilen in einem Strome, der es 5 Seemeilen nach SSO versetzt. Was ist Kurs und Distanz über den Grund?

2. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn eine Seite und zwei Winkel gegeben sind.

Bei dieser Aufgabe ist zu unterscheiden, ob die beiden gegebenen Winkel der gegebenen Seite anliegen, oder ob der eine Winkel ihr gegenüber liegt. Da mit zwei Winkeln eines Dreiecks auch der dritte gegeben ist, so läßt sich zwar der letzte Fall ohne weiteres auf den ersten zurückführen; sie sollen hier aber getrennt behandelt werden.

I. Fall. Die beiden Winkel liegen der gegebenen Seite an.

Auflösung: Man lege die Seite $BC = a$ hin, trage im Punkte B den Winkel β und in C den Winkel γ an. Die freien Schenkel mögen sich in A schneiden, dann ist $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck, da es die gegebenen Stücke in richtiger Lage enthält.

Die Auflösung ist immer möglich, wenn die Summe der beiden gegebenen Winkel 180° nicht übersteigt.

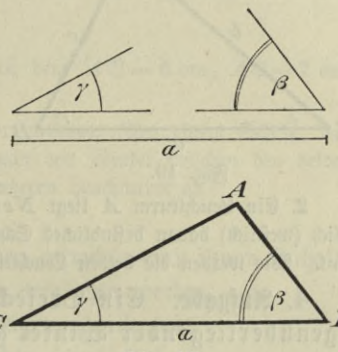


Fig. 17.

Aufgaben: 1. Ein Dreieck ABC zu zeichnen, in dem $AB = 9$ cm, $\sphericalangle A = 65^0$, $\sphericalangle B = 100^0$ ist.

2. Ein Leuchtturm A liegt N 6 Seemeilen von einem Leuchtturm B. Man peilt auf einem Schiffe den Leuchtturm A in $NO\frac{1}{2}N$, den Leuchtturm B in OzS. Wie groß sind die Abstände des Schiffes von den beiden Leuchttürmen? (Kreuzpeilung.)

3. Auf einem Schiffe peilt man einen Leuchtturm NO, segelt darauf $O\frac{1}{2}N$ 6 Seemeilen und peilt denselben Leuchtturm $NzW\frac{3}{4}W$. Wie groß sind die Abstände des Schiffes vom Leuchtturm bei den beiden Peilungen? (Doppelpeilung.)

II. Fall. Der eine Winkel liegt der gegebenen Seite gegenüber.

Auflösung: Man lege die Seite $BC = a$ hin, trage im Punkte B den Winkel β an, trage darauf in einem beliebigen Punkte D des freien Schenkels den Winkel α an und ziehe durch C die Parallele AC zu DE; dann ist $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck, da es die gegebenen Stücke in richtiger Lage enthält. ($\sphericalangle A = BDE = \alpha$ als Gegenwinkel.)

Die Auflösung ist immer möglich, wenn die Summe der beiden gegebenen Winkel 180° nicht übersteigt.

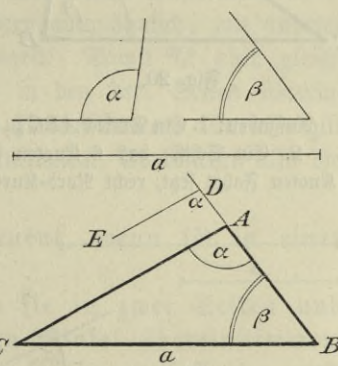


Fig. 18.

Aufgaben: 1. Ein Dreieck ABC zu zeichnen, in dem $AC = 10$ cm, $\sphericalangle B = 50^0$, $\sphericalangle C = 80^0$ ist.

2. Ein Leuchtturm A liegt $S 60^0 O$ 9 Seemeilen von einem Leuchtturm B. Man peilt A in $S 8^0 O$ und mißt den Winkel zwischen A und B gleich 85°. Wie groß sind die Abstände des Schiffes von beiden Leuchttürmen?

3. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn die drei Seiten gegeben sind.

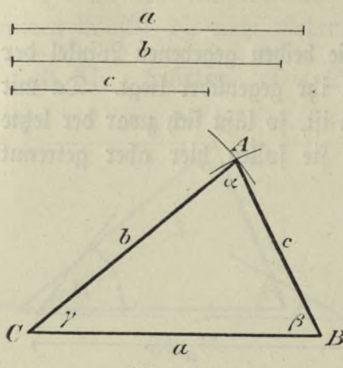


Fig. 19.

Auflösung: Man lege die Seite $BC = a$ hin und beschreibe um B als Mittelpunkt mit c als Halbmesser, sowie um C als Mittelpunkt mit b als Halbmesser je einen Kreisbogen, die sich in A schneiden mögen; dann ist $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck, da es alle Stücke in richtiger Lage enthält.

Die Auflösung ist immer möglich, wenn die Summe zweier Seiten größer ist als die dritte.

Aufgaben: 1. Ein Dreieck ABC zu zeichnen, in dem $AB = 8$ cm, $AC = 7$ cm, $BC = 6$ cm ist.

2. Ein Leuchtturm A liegt NzO 7 Seemeilen von einem anderen Leuchtturm B. Ein östlich (westlich) davon befindliches Schiff ist 5 Seemeilen von A und 8 Seemeilen von B entfernt. Wie werden die beiden Leuchttürme auf dem Schiffe gepeilt?

4. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel gegeben sind.

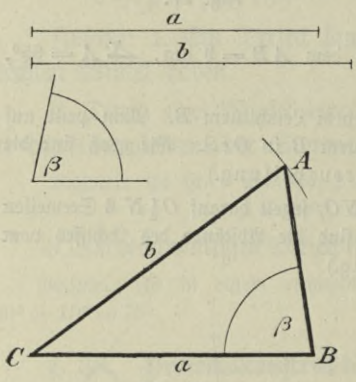


Fig. 20.

Hier sind zwei wesentlich voneinander verschiedene Fälle zu unterscheiden.

I. Fall. Der Winkel liegt der größeren Seite gegenüber.

Auflösung: Man lege die kleinere Seite $BC = a$ hin und trage im Punkte B den Winkel β an. Alsdann beschreibe man um C als Mittelpunkt mit der größeren Seite b als Halbmesser einen Kreisbogen, der den freien Schenkel des Winkels β in A schneide; dann ist $\triangle ABC$ das gesuchte, da es die gegebenen Stücke in richtiger Lage enthält.

Die Auflösung ist immer möglich.

Aufgaben: 1. Ein Dreieck ABC zu zeichnen, in dem $AB = 11$ cm, $AC = 8$ cm, $\sphericalangle C = 64^0$ ist.

2. Ein Schiff, das 6 Knoten Fahrt macht, soll in einem Strome, der nach NO mit 2 Knoten Fahrt setzt, recht Nord-Kurs gutmachen. Wie muß man steuern?

II. Fall. Der gegebene Winkel liegt der kleineren Seite gegenüber.

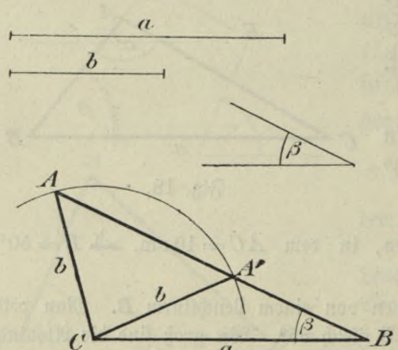


Fig. 21.

Auflösung: Man lege die größere Seite $BC = a$ hin und trage im Punkte B den Winkel β an. Alsdann beschreibe man um C als Mittelpunkt mit der kleineren Seite b als Halbmesser einen Kreisbogen, der den freien Schenkel des Winkels β in den beiden Punkten A und A' trifft; dann ist sowohl ABC als auch $A'BC$ ein den Forderungen der Aufgabe entsprechendes Dreieck, da sie beide die gegebenen Stücke in richtiger Lage enthalten.

Sind also von einem Dreieck zwei Seiten und der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben, so ist nicht nur ein Dreieck, sondern es sind zwei Dreiecke möglich. (Zweideutiger Fall.)

Es ist aber auch leicht einzusehen, daß nur ein einziges (und zwar rechtwinkliges) Dreieck möglich ist, wenn der Kreis um C den freien Schenkel des Winkels β nur berührt. Ist die kleinere Seite b noch kleiner, so wird der Kreis um C den freien Schenkel gar nicht mehr treffen, und in diesem Fall ist die Lösung der Aufgabe unmöglich.

Aufgaben: 1. Ein Dreieck ABC zu zeichnen, in dem $AB = 6$ cm, $AC = 7$ cm, $\sphericalangle C = 30^\circ$ ist.

2. Zwei Leuchttürme sind 4 Seemeilen von einander entfernt. Auf einem Schiffe, das 6 Seemeilen von dem einen Leuchtturm absteht, mißt man den Winkel zwischen den beiden Leuchttürmen 15°. Wie weit steht das Schiff von dem anderen Leuchtturm ab?

§ 39. Kongruenzsätze. Raumgrößen können entweder nach ihrem Inhalte oder nach ihrer Gestalt oder nach beiden zugleich verglichen werden.

Raumgrößen, die denselben Inhalt haben, heißen gleich (=).

Raumgrößen, die dieselbe Gestalt haben, heißen ähnlich (∼).

Raumgrößen, die denselben Inhalt und dieselbe Gestalt haben, heißen gleich und ähnlich, oder kongruent (≅).

In kongruenten Figuren sind die gleichliegenden Seiten und Winkel einander gleich; sie lassen sich daher so aufeinander legen, daß sie sich decken.

Es leuchtet ohne weiteres ein, daß die oben angegebenen Dreieckskonstruktionen bis auf die letzte (zwei Seiten und der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel) eindeutig sind. So stimmen — um ein Beispiel anzuführen — alle Dreiecke, die man aus denselben drei Seiten konstruiert, vollständig überein, sie sind nicht nur gleich, sondern auch ähnlich, mit anderen Worten, sie lassen sich alle zur Deckung bringen. Damit ist aber gleichzeitig der Satz erwiesen, daß zwei Dreiecke, die in den drei Seiten übereinstimmen, kongruent sind, also auch in den Winkeln übereinstimmen. Dasselbe gilt natürlich von den anderen Fällen der Dreieckskonstruktionen. Es bestehen also die folgenden vier wichtigen

Lehrsätze: 1. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei Winkeln übereinstimmen.

2. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

3. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem zwischenliegenden Winkel übereinstimmen.

4. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

Anmerkung: Aus der Gleichheit der Winkel allein folgt noch nicht die Kongruenz der Dreiecke. Denn abgesehen davon, daß die drei Winkel nur als zwei Bestimmungsstücke gelten können, weil durch zwei Winkel immer auch der dritte gegeben ist, braucht man nur durch einen beliebigen Punkt einer Dreiecksseite eine Parallele zu einer der beiden anderen Seiten zu ziehen, um zwei Dreiecke zu erhalten, die zwar gleiche Winkel, aber doch verschiedenen Inhalt haben. Unter den drei Stücken, die ein Dreieck bestimmen, muß also wenigstens eine Seite sein.

Zum Überfluß sollen im folgenden die oben angeführten Kongruenzsätze (wenn auch in anderer Reihenfolge) noch besonders bewiesen werden. Bei den beiden letzten dieser Beweise wird der im nächsten Paragraphen bewiesene Lehrsatz, daß die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks einander gleich sind, benutzt. Dieser Paragraph ist daher vorher durchzunehmen.

1. Kongruenzsatz: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei Winkeln übereinstimmen.

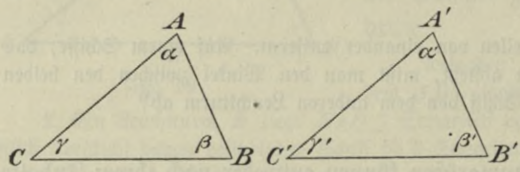


Fig. 22.

Voraussetzung: $BC = B'C'$
$\beta = \beta'$
$\gamma = \gamma'$

Behauptung: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

Beweis: Man lege das Dreieck $A'B'C'$ so auf das Dreieck ABC, daß die Seite $B'C'$ auf die Seite BC fällt; dann fällt auch $B'A'$ auf BA und $C'A'$ auf CA, weil $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$ ist. Die beiden Dreiecke decken sich demnach, sie sind also kongruent.

3. Kongruenzsatz: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem zwischenliegenden Winkel übereinstimmen.

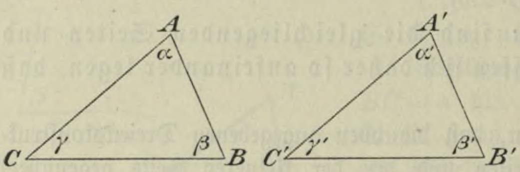


Fig. 23.

Voraussetzung: $BC = B'C'$
$AC = A'C'$
$\gamma = \gamma'$

Behauptung: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

Beweis: Man lege das Dreieck $A'B'C'$ so auf das Dreieck ABC, daß die Seite $B'C'$ auf die Seite BC fällt, dann fällt auch $C'A'$ auf CA, da $\gamma' = \gamma$ ist. Da aber $C'A' = CA$ ist, so fällt auch A' auf A. Die beiden Dreiecke decken sich demnach, sie sind also kongruent.

4. Kongruenzsatz: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

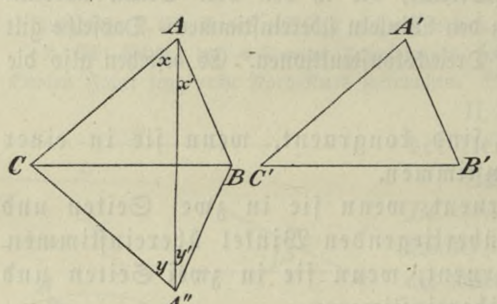


Fig. 24.

Voraussetzung:
$AB = A'B'$
$AC = A'C'$
$BC = B'C'$

Behauptung:
$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

Beweis: Man lege das Dreieck $A'B'C'$ so an das Dreieck ABC, daß $B'C'$ auf BC und A' nach A'' fällt. Verbindet man dann A mit A'', so sind die dadurch entstehenden Dreiecke ACA'' und ABA'' gleichschenklig und somit ist

$$\left.\begin{array}{l} x = y \\ x' = y' \end{array}\right\} \text{als Winkel an der Grundlinie}$$

$$x + x' = y + y'$$

oder $$CAB = CA''B.$$

Die beiden Dreiecke stimmen demnach in zwei Seiten und dem zwischenliegenden Winkel überein, sie sind also nach dem dritten Kongruenzsatz kongruent.

2. Kongruenzsatz: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Voraussetzung:

$$\left.\begin{matrix} AB = A'B' \\ BC = B'C' \end{matrix}\right\} BC > AB$$

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$$

Behauptung:

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

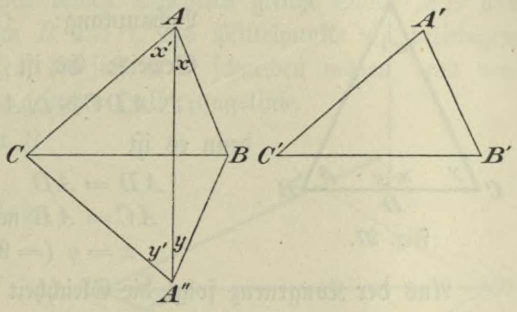


Fig. 25.

Beweis: Man lege das Dreieck $A'B'C'$ so an das Dreieck ABC, daß die Seite $B'C'$ auf die Seite BC und A' nach A'' fällt. Verbindet man dann A mit A'', so ist das dadurch entstehende Dreieck ABA'' gleichschenklig, also ist $x = y$, als Winkel an der Grundlinie. Da nun $BAC = BA''C$ ist, so muß auch $x' = y'$, somit also auch $AC = A''C$ sein. Die beiden Dreiecke stimmen also in den drei Seiten überein, sie sind also nach dem vierten Kongruenzsatz kongruent.

§ 40. Lehrsatz. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.

Voraussetzung: $AB = AC$

Behauptung: $\beta = \gamma$.

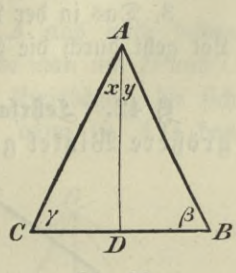


Fig. 26.

Beweis: Man denke sich den Winkel an der Spitze durch die Linie AD halbiert, dann ist

$\triangle ADB \cong \triangle ADC$ nach d. 3. Kongr.-Satz,

denn in den beiden Dreiecken ist

$AD = AD$

$AB = AC$ nach Voraussetzung,

$y = x$ nach Konstruktion,

Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit aller gleichliegenden Stücke, also ist auch

$$\beta = \gamma$$

Umkehrung: In jedem Dreieck liegen gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Zusätze: 1. Im gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel untereinander gleich, folglich jeder $= 60^0$.

2. Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so groß wie ein Winkel an der Grundlinie.

Aufgaben: Man sieht ein Feuer 4^{str} an Steuerbord voraus; nach 6 Seemeilen Segelung sieht man es quer ab. Wie groß ist jetzt die Entfernung des Schiffes vom Feuer?

Desgleichen, wenn man das Feuer 3^{str} voraus und nach 6 Seemeilen 6^{str} voraus erblickt?

§ 41. Lehrsatz. Das von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Grundlinie gefällte Lot halbiert die Grundlinie und den Winkel an der Spitze.

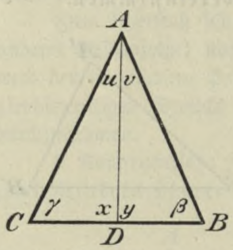


Fig. 27.

Voraussetzung: $AB = AC$; $AD \perp CB$

Behauptung: $CD = BD$; $u = v$

Beweis: Es ist

$\triangle ADC \cong \triangle ADB$ nach d. 2. Kongr.-Satz,

denn es ist

$AD = AD$

$AC = AB$ nach Voraussetzung,

$x = y$ $(= 90^0)$ nach Voraussetzung.

Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit aller gleichliegenden Stücke, also ist

$$CD = BD$$
$$u = v$$

Umkehrungen: 1. Die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks halbiert auch die Grundlinie und steht senkrecht auf ihr.

2. Die Verbindungslinie der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Grundlinie halbiert den Winkel an der Spitze und steht senkrecht auf der Grundlinie.

3. Das in der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks errichtete Lot geht durch die Spitze und halbiert den Winkel an der Spitze.

§ 42. Lehrsatz. In jedem Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

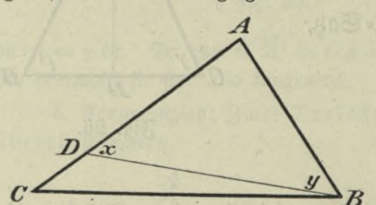


Fig. 28.

Voraussetzung: $AC > AB$

Behauptung: $ABC > ACB$

Beweis: Zum Beweise trage man die kleinere Seite AB von A aus auf der größeren Seite AC ab — bis D und verbinde B mit D, dann ist $\triangle ADB$ gleichschenklig, also

$x = y$ als Winkel an der Grundlinie.

Nun ist aber

$x > ACB$, als Außenwinkel

folglich ist auch

$y > ACB$

umsomehr also

$$ABC > ACB$$

Umkehrung: In jedem Dreieck liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber.

Zusätze: 1. Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse die größte Seite.

2. Von allen Linien, die man von einem Punkte nach einer geraden Linie ziehen kann, ist das Lot die kürzeste.

Fundamental-Aufgaben.

§ 43. Aufgabe. Einen Winkel zu halbieren.

Auflösung: Man trage auf den beiden Schenkeln gleiche Stücke AB und AC ab. Dann beschreibe man um B und C als Mittelpunkte mit beliebigem aber gleichem Halbmesser Kreisbögen, die sich in D schneiden mögen, und verbinde D mit A; dann ist AD die gesuchte Halbierungslinie.

Beweis: Man verbinde D mit B und C; dann ist

$\triangle DBA \cong \triangle DCA$ n. d. 4. Kongr.-Satz,

denn es ist

$AD = AD$

$AB = AC$ nach Konstruktion,

$DB = DC$ nach Konstruktion.

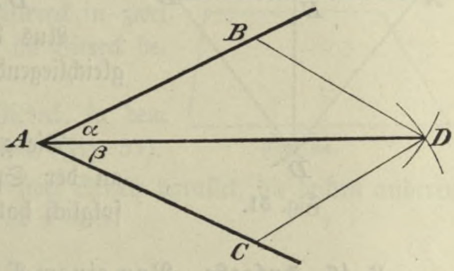


Fig. 29.

Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit aller gleichliegenden Stücke, also

$$\alpha = \beta$$

§ 44. Aufgabe. In einem Punkte einer geraden Linie ein Lot auf ihr zu errichten.

Auflösung: Man trage von dem gegebenen Punkte A aus nach beiden Seiten hin gleiche Stücke AB und AC ab. Dann beschreibe man um B und C als Mittelpunkte mit beliebigem aber gleichem Halbmesser Kreisbögen, die sich im Punkte D schneiden mögen, und verbinde D mit A, dann ist AD das gesuchte Lot.

Beweis: Man verbinde D mit B und C; dann ist

$\triangle DBA \cong \triangle DCA$ nach d. 4. Kongr.-Satz,

denn es ist

$AD = AD$

$AB = AC$ nach Konstruktion,

$DB = DC$ nach Konstruktion.

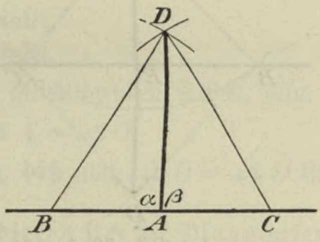


Fig. 30.

Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit aller gleichliegenden Stücke, also

$$\alpha = \beta$$

Sind die Nebenwinkel gleich, so ist jeder von ihnen 90°, also

$$DA \perp BC.$$

§ 45. Aufgabe. Eine begrenzte gerade Linie zu halbieren.

Auflösung: Man beschreibe um die Endpunkte A und B der gegebenen Strecke mit beliebigem aber gleichem Halbmesser nach beiden Seiten hin Kreisbögen, die sich in C und D schneiden mögen, und verbinde C mit D. Der

Schnittpunkt E dieser Linie mit der gegebenen Strecke ist der gesuchte Halbierungspunkt.

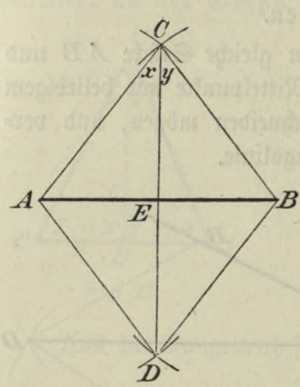


Fig. 31.

Beweis: Man verbinde C mit A und B, und D mit A und B; dann ist

$\triangle CAD \cong \triangle CBD$ nach d. 4. Kongr.-Satz,

denn es ist

$CD = CD$

$CA = CB$ nach Konstruktion,

$DA = DB$ nach Konstruktion.

Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit aller gleichliegenden Stücke, also

$$x = y$$

Die gerade Linie CE halbiert also den Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks ACB, folglich halbiert sie auch die Grundlinie.

§ 46. **Aufgabe.** Von einem Punkte außerhalb einer geraden Linie ein Lot auf sie zu fällen.

Auflösung: Man beschreibe um den gegebenen Punkt A mit beliebigem Halbmesser einen Kreisbogen, der die gegebene gerade Linie in den beiden Punkten B und C schneide. Alsdann beschreibe man um B und C als Mittelpunkte mit beliebigem aber gleichem Halbmesser Kreisbögen, die sich in D schneiden mögen, und verbinde A mit D; dann ist AD das gesuchte Lot.

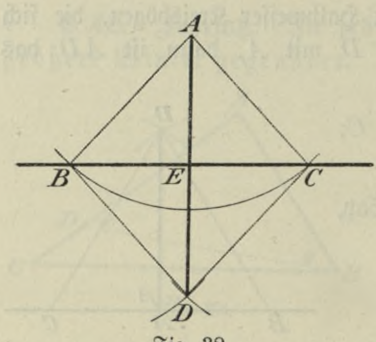


Fig. 32.

Beweis: Zum Beweise verbinde man A mit B und C, und D mit B und C; dann ist

$\triangle ABD \cong \triangle ACD$ nach d. 4. Kongr.-Satz,

denn es ist

$AD = AD$

$AB = AC$ nach Konstruktion,

$DB = DC$ nach Konstruktion.

Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit aller gleichliegenden Stücke, also

$$BAD = CAD$$

Die gerade Linie AE halbiert also den Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks BAC, folglich steht sie auch senkrecht auf der Grundlinie.

§ 47. **Aufgabe.** Durch einen Punkt außerhalb einer geraden Linie eine Parallele zu ihr zu ziehen.

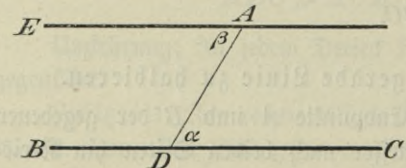


Fig. 33.

Auflösung: Man ziehe durch A eine beliebige gerade Linie, die die gegebene Linie BC in D schneidet, und trage den dadurch entstandenen Winkel α in A als Wechselwinkel an. Der freie Schenkel AE dieses Winkels ist die gesuchte Parallele.

Beweis: Nach Konstruktion ist $\alpha = \beta$. Wenn die Wechselwinkel gleich sind, so sind die Linien parallel, also $EA \parallel BC$.

Das Viereck.

§ 48. Erklärungen. Ein Viereck ist ein Teil der Ebene, der von vier geraden Linien begrenzt wird.

Die Verbindungslinie zweier nicht benachbarter Ecken nennt man Diagonale.

Durch eine Diagonale wird das Viereck in zwei Dreiecke zerlegt; die Summe der Winkel im Viereck beträgt also 360°.

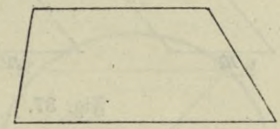


Fig. 34.

Ein Parallelogramm ist ein Viereck, in dem die gegenüberliegenden Seiten parallel sind (Fig. 37).

Ein Trapez ist ein Viereck, in dem zwei Seiten parallel, die beiden anderen aber nicht parallel sind (Fig. 34).

§ 49. Lehrsatz. Im Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten und die gegenüberliegenden Winkel einander gleich.

Voraussetzung: $AB \parallel DC$; $AD \parallel BC$.

Behauptung: $AB = DC$; $AD = BC$

$\sphericalangle A = \sphericalangle C$; $\sphericalangle B = \sphericalangle D$

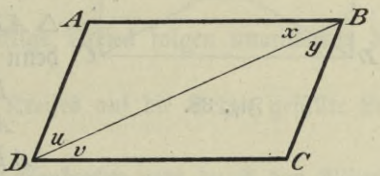


Fig. 35.

Beweis: Zum Beweise ziehe man eine Diagonale, z. B. BD, dann ist

$\triangle BAD \cong \triangle DCB$ nach d. 1. Kongr.-Satz, denn es ist

$BD = BD$

$x = v$ als Wechselwinkel,

$u = y$ als Wechselwinkel.

Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit aller gleichliegenden Stücke, also

$$AB = DC; \quad AD = BC; \quad \sphericalangle A = \sphericalangle C$$

Mit Hülfe der anderen Diagonale beweist man, daß auch $\sphericalangle B = \sphericalangle D$ ist.

§ 50. Lehrsatz. Im Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen gegenseitig.

Voraussetzung: $AB \parallel DC$; $AD \parallel BC$

Behauptung: $AE = CE$; $DE = BE$

Beweis: Es ist

$\triangle AED \cong \triangle CEB$ nach d. 1. Kongr.-Satz, denn es ist

$AD = CB$ als Gegenseiten im Parallelogr.

$x = u$ als Wechselwinkel,

$y = v$ als Wechselwinkel.

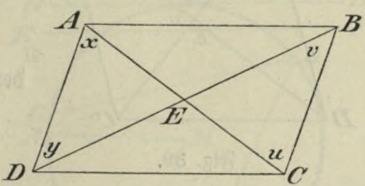


Fig. 36.

Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit aller gleichliegenden Stücke, also

$$AE = CE; \quad DE = BE$$

§ 51. Einteilung der Parallelogramme. Nach den Seiten teilt man die Parallelogramme ein in gleichseitige und ungleichseitige, nach den Winkeln in rechtwinklige und schiefwinklige.

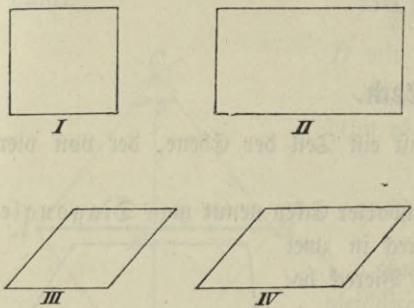


Fig. 37.

Ein Quadrat ist ein gleichseitiges rechtwinkliges Parallelogramm (I).

Ein Rechteck ist ein ungleichseitiges rechtwinkliges Parallelogramm (II).

Ein Rhombus ist ein gleichseitiges schiefwinkliges Parallelogramm (III).

Ein Rhomboid ist ein ungleichseitiges schiefwinkliges Parallelogramm (IV).

§ 52. Lehrsatz. Im rechtwinkligen Parallelogramm (Quadrat und Rechteck) sind die Diagonalen einander gleich.

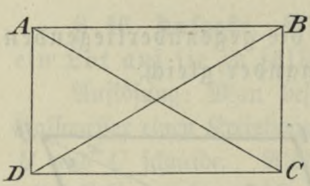


Fig. 38.

Voraussetzung: $ABCD$ ist ein rechtwinkliges Parallelogramm.

Behauptung: $AC = BD$

Beweis: Es ist

$\triangle ADC \cong \triangle BCD$ nach d. 3. Kongr.-Satz,

denn es ist

$DC = DC$

$AD = BC$ als Gegenseiten im Parallelogramm,

$ADC = BCD$ $(= 90^0)$, nach Voraussetzung.

Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit aller gleichliegenden Stücke, also

$$AC = BD$$

§ 53. Lehrsatz. Im gleichseitigen Parallelogramm (Quadrat und Rhombus) stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander und halbieren die Winkel.

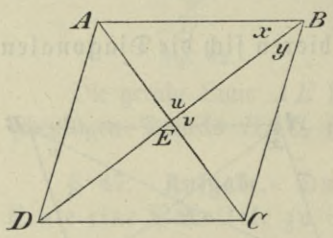


Fig. 39.

Voraussetzung: $ABCD$ ist ein gleichseitiges Parallelogramm.

Behauptung: $AC \perp BD$; $x = y$

Beweis: Es ist

$\triangle AEB \cong \triangle CEB$ nach d. 4. Kongr.-Satz,

denn es ist

$BE = BE$

$AB = CB$ nach Voraussetzung,

$AE = CE$, die Diagonalen halbieren sich.

Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit aller gleichliegenden Stücke, also

$$u = v = 90^0$$
$$x = y$$

Der Kreis.

§ 54. Erklärungen. Der Kreis ist eine in sich zurücklaufende Linie, deren sämtliche Punkte von einem innerhalb gelegenen festen Punkte — dem Mittelpunkte — überall gleich weit abstehen.

Die von einem Kreise oder einer Kreislinie eingeschlossene Fläche heißt Kreisfläche oder auch schlechtweg Kreis.

Im Gegensatz zur Kreisfläche nennt man die Kreislinie, die den Umfang des Kreises bildet, Umring oder Peripherie.

Die Verbindungslinie des Mittelpunktes mit einem Punkt des Umrings nennt man Halbmesser oder Radius (*MA*, Fig. 40). Die Halbmesser desselben Kreises sind einander gleich.

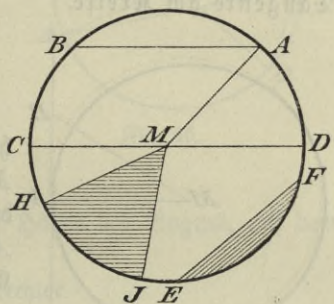


Fig. 40.

Die Verbindungslinie zweier Punkte des Umrings nennt man Sehne (*AB*). Eine Sehne ist um so größer, je kleiner ihr Abstand vom Mittelpunkte ist.

Eine Sehne, die durch den Mittelpunkt geht, heißt Durchmesser (*CD*).

Aus den Lehrsätzen über das gleichschenklige Dreieck folgen unmittelbar die folgenden

Lehrsätze: 1. Das vom Mittelpunkt des Kreises auf die Sehne gefällte Lot halbiert die Sehne.

2. Die auf der Sehne errichtete Mittel-Senkrechte geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Aufgabe: Zu einem gegebenen Kreis den Mittelpunkt zu finden.

Ein Teil der Kreisfläche, der von einer Sehne und einem Bogen begrenzt wird, heißt Kreisabschnitt (Fläche *EF*).

Ein Teil der Kreisfläche, der von zwei Halbmessern und einem Bogen begrenzt wird, heißt Kreisausschnitt oder Sektor (Fläche *HMJ*). — Ist ein Kreisausschnitt ein achtel Kreis, so heißt er Oktant, ist er ein sechstel Kreis, so heißt er Sextant, ist er ein viertel Kreis, so heißt er Quadrant. Jeder Durchmesser teilt den Kreis in zwei Halbkreise.

Ein Mittelpunktswinkel oder Centriwinkel ist ein Winkel, dessen Scheitelpunkt im Mittelpunkte des Kreises liegt, dessen Schenkel also Halbmesser sind (*AMB*, Fig. 41).

Nach dem, was in dem Abschnitt über die Winkelmessung (§ 32) gesagt ist, gilt der Satz:

Der Mittelpunktswinkel ist gleich dem Bogen, auf dem er steht.

Ein Umringswinkel oder Peripheriewinkel ist ein Winkel, dessen Scheitel-

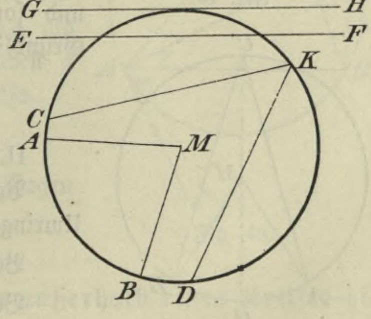


Fig. 41.

punkt in der Peripherie des Kreises liegt und dessen Schenkel Sehnen sind (CKD).

Eine Sekante ist eine gerade Linie, die den Kreis in zwei Punkten schneidet (EF).

Eine Tangente ist eine gerade Linie, die den Kreis nur in einem Punkte berührt (GH). Die Tangente giebt die Richtung des Kreises im Berührungspunkte an.

§ 55. Lehrsatz. Das Lot im Endpunkte eines Halbmessers ist Tangente am Kreise.

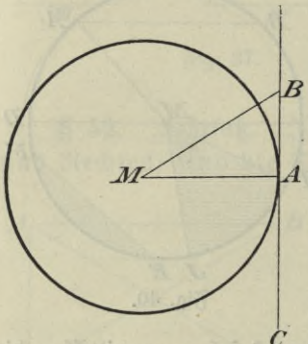


Fig. 42.

Voraussetzung: $BA \perp MA$

Behauptung: BA ist Tangente.

Beweis: Alle Punkte der geraden Linie BC haben von M einen größeren Abstand als A, da $MA \perp BC$ steht. Es müssen daher alle Punkte dieser Linie außerhalb des Kreises liegen, so daß A der einzige Punkt ist, den die Linie BC mit dem Kreise gemein hat. Sie ist also Tangente.

Aufgabe: Durch einen Punkt eines Kreises eine Tangente an den Kreis zu ziehen.

Auflösung: Man verbinde den gegebenen Punkt A mit dem Mittelpunkte M und errichte in A das Lot auf MA. Dieses Lot BC ist dann nach dem eben bewiesenen Satze die gesuchte Tangente.

§ 56. Lehrsatz. Der Umringswinkel ist halb so groß wie der Mittelpunktswinkel, der auf demselben Bogen steht.

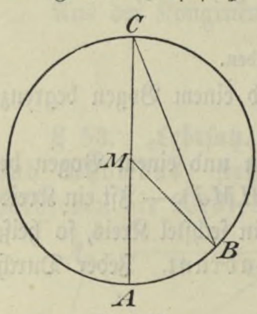


Fig. 43.

Es sind beim Beweise drei Fälle zu unterscheiden.

I. Fall (Fig. 43).

Voraussetzung: AMB ist Mittelpunktswinkel, ACB Umringswinkel.

Behauptung: $ACB = \frac{1}{2} AMB$

Beweis: Der Mittelpunktswinkel AMB ist Außenwinkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks BMC und somit doppelt so groß wie ein Winkel an der Grundlinie, also

$$AMB = 2\,ACB \text{ oder}$$
$$ACB = \tfrac{1}{2} AMB$$

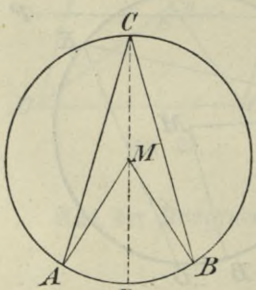


Fig. 44.

II. Fall (Fig. 44).

Voraussetzung: AMB ist Mittelpunktswinkel, ACB Umringswinkel.

Behauptung: $ACB = \frac{1}{2} AMB$

Beweis: Zum Beweise ziehe man durch C den Durchmesser CD; dann ist nach dem I. Fall:

$$\begin{array}{l} ACD = \frac{1}{2} AMD \\ BCD = \frac{1}{2} BMD; \text{ folglich} \\ \hline ACD + BCD = \frac{1}{2}(AMD + BMD) \text{ oder} \\ ACB = \frac{1}{2} AMB \end{array}$$

III. Fall (Fig. 45).

Voraussetzung: AMB ist Mittelpunktswinkel, ACB Umringswinkel.

Behauptung: $ACB = \frac{1}{2} AMB$

Beweis: Zum Beweise ziehe man durch C den Durchmesser CD; dann ist:

$$\begin{array}{l} BCD = \frac{1}{2} BMD \\ ACD = \frac{1}{2} AMD; \text{ folglich} \\ \hline BCD - ACD = \frac{1}{2}(BMD - AMD) \text{ oder} \\ ACB = \frac{1}{2} AMB \end{array}$$

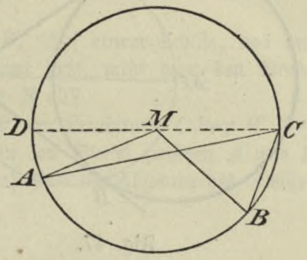


Fig. 45.

Zusätze: 1. Der Umringswinkel ist gleich der Hälfte des Bogens, auf dem er steht.

2. Der Umringswinkel im Halbkreis ist ein rechter.

3. Umringswinkel über demselben Bogen sind einander gleich.

Lehrsatz: Im Sehnenviereck (d. h. in einem Viereck, dessen Ecken auf dem Umringe eines Kreises liegen) ist die Summe der gegenüberliegenden Winkel gleich 180°.

Beweis: Die Winkel des Sehnenvierecks sind Umringswinkel. Da diese halb so groß sind, wie die Bögen, auf denen sie stehen (Zusatz 1), so muß die Summe zweier gegenüberliegender Winkel halb so groß wie der ganze Umfang, also gleich 180° sein.

§ 57. **Lehrsatz.** Der Winkel zwischen Sehne und Tangente (Sehnen-Tangentenwinkel) ist gleich dem Umringswinkel über der Sehne.

Voraussetzung: AC ist Tangente.

Behauptung: $\alpha = \delta$.

Beweis: Man ziehe durch A den Durchmesser AD und verbinde D mit B; dann ist sowohl DBA als auch DAC gleich 90° (warum?). Somit haben α und β denselben Komplementwinkel γ; es ist also

$\alpha = \beta$. Es ist aber auch

$\delta = \beta$ als Umringswinkel über demselben Bogen

also $\alpha = \delta$

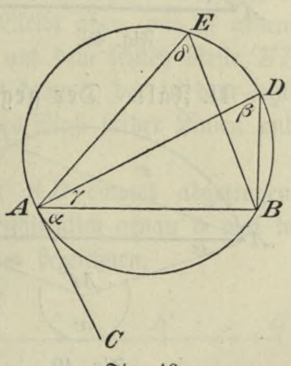


Fig. 46.

§ 58. **Aufgabe.** Von einem Punkte außerhalb eines Kreises die Tangenten an den Kreis zu ziehen.

Auflösung: Man verbinde den gegebenen Punkt A mit dem Mittelpunkte M, beschreibe über AM als Durchmesser einen Kreis, der den gegebenen Kreis in B und C schneide und verbinde A mit B und C. AB und AC sind die gesuchten Tangenten.

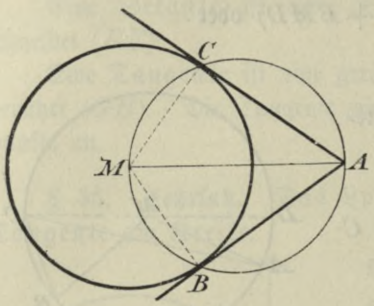


Fig. 47.

Beweis: Man verbinde M mit B und C; dann ist $MCA = MBA = 90^0$ als Umringswinkel im Halbkreis; folglich sind AC und BC Tangenten, denn das Lot im Endpunkte eines Halbmessers ist Tangente.

Zusatz: Die von einem Punkte aus an den Kreis gezogenen Tangenten sind einander gleich.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich aus der Kongruenz der beiden Dreiecke ACM und ABM.

§ 59. **Aufgabe.** Über einer gegebenen geraden Linie als Sehne einen Kreisbogen zu beschreiben, der einen gegebenen Winkel als Umringswinkel faßt.

Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden.

I. Fall. Der gegebene Winkel ist spitz (z. B. 50^0).

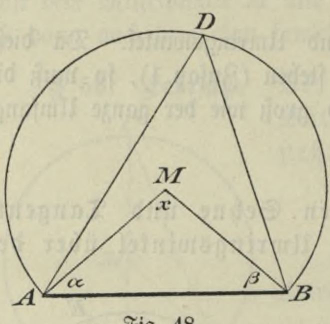


Fig. 48.

Auflösung: Man trage in den Endpunkten A und B der gegebenen geraden Linie nach der Seite, auf der der Kreisbogen liegen soll, das Komplement des gegebenen Winkels ($90^0 - 50^0 = 40^0$) an. Der Schnittpunkt M der beiden freien Schenkel ist der Mittelpunkt und MA bezw. MB der Halbmesser des gesuchten Kreises.

Beweis: Nach der Konstruktion ist $\alpha = 40^0$ und $\beta = 40^0$, also $\alpha + \beta = 80^0$ und somit $x = 100^0$; also der Umringswinkel im Bogen $ADB = 50^0$.

II. Fall. Der gegebene Winkel ist stumpf (z. B. 110^0).

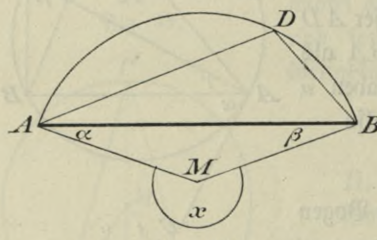


Fig. 49.

Auflösung: Man trage in den Endpunkten A und B der gegebenen geraden Linie nach der Seite, auf welcher der Bogen nicht liegen soll, den Überschuß des gegebenen Winkels über 90^0 ($110^0 - 90^0 = 20^0$) an. Der Schnittpunkt M der beiden freien Schenkel ist der Mittelpunkt und MA bezw. MB der Halbmesser des gesuchten Kreises.

Beweis: Nach der Konstruktion ist $\alpha = 20^0$ und $\beta = 20^0$, also $\alpha + \beta = 40^0$ und somit $AMB = 140^0$. Der überstumpfe Winkel x ist demnach 220^0, also der Umringswinkel im Bogen $ADB = 110^0$.

Anmerkung: Die Zeichnung kann auch in der Weise ausgeführt werden, daß man den betreffenden Winkel (Komplement oder Überschuß über 90°) nur an einem Endpunkte anträgt und außerdem die Mittelsenkrechte auf der Strecke errichtet. Der Beweis ist von dem obigen nicht wesentlich verschieden.

Aufgaben: 1. Zeichne über einer geraden Linie als Sehne einen Kreisbogen, der einen Winkel von 70° (125°) faßt.

2. Der Leuchtturm A liegt O 7 sm vom Leuchtturm B. Auf einem Schiffe, das drei Seemeilen vom Leuchtturm A entfernt ist und nördlich davon steht, mißt man den Winkel zwischen A und B gleich 64°. Wie weit steht das Schiff von B ab?

3. Der Leuchtturm A liegt SO 5 sm vom Leuchtturm B; der Leuchtturm C liegt W 7 sm von B. Auf einem südlich davon stehenden Schiffe mißt man den Winkel zwischen A und B gleich 40°, den Winkel zwischen B und C gleich 105°. Wie groß sind die Abstände des Schiffes von A, B und C? (Aufgabe der vier Punkte.)

Ähnlichkeit.

§ 60. **Erklärungen.** Man nennt Figuren ähnlich, wenn sie dieselbe Gestalt haben. Die Gestalt ist aber abhängig von den Winkeln und von den Verhältnissen der Seiten untereinander. Ein schiefwinkliges Parallelogramm ist einem Rechteck nicht ähnlich, wenn auch die Seiten in beiden gleich sind, aber ebenso wenig ein Rechteck einem Quadrate, obgleich das Rechteck dieselben Winkel hat wie das Quadrat.

Figuren sind ähnlich, wenn in ihnen die Winkel gleich und die Seiten verhältnisgleich sind.

Unter dem Verhältnis zweier Seiten versteht man das Verhältnis ihrer Maßzahlen. Um dieses Verhältnis ausdrücken zu können, muß man die beiden Seiten mit einem gemeinschaftlichen Maße messen.

Aufgabe: Das gemeinschaftliche Maß zweier Linien zu finden.

Auflösung: Man trage die kleinere Linie CD auf der größeren AB ab, so oft es geht. Bleibt kein Rest, so ist die kleinere ein gemeinschaftliches Maß beider. Bleibt aber ein Rest EB, wie in untenstehender Figur, so trage man diesen auf der kleineren Linie CD wiederum ab, so oft es geht. Bleibt hier kein Rest, so ist EB ein gemeinschaftliches Maß beider Linien. Bleibt aber, wie in untenstehender Figur, ein Rest FD, so muß man diesen auf dem letzten Reste EB wieder abtragen und so fort, bis man auf einen Rest kommt, der in dem letztvorhergehenden aufgeht. Dieser ist ein gemeinschaftliches Maß beider Linien und zwar das größtmögliche.

Es sei, wie in untenstehender Figur, CD auf AB einmal abgetragen, der Rest EB auf CD zweimal, und der Rest FD schließlich genau 5 mal in dem vorigen aufgegangen, so ist, wenn wir FD mit m bezeichnen,

$$\begin{aligned} FD &= m \\ EB &= 5m \\ CD &= 2EB + FD = 11m \\ AB &= CD + EB = 16m \end{aligned}$$

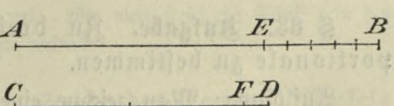


Fig. 50.

Es ist also m ein gemeinschaftliches Maß und $AB : CD = 16 : 11$

§ 61. Lehrsatz. Sind auf dem einen Schenkel eines Winkels gleiche Stücke abgetragen und durch die Teilpunkte Parallelen gelegt, so werden auf dem anderen Schenkel ebenfalls gleiche Stücke abgeschnitten.

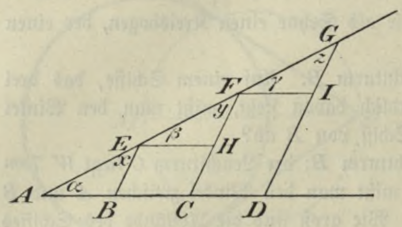


Fig. 51.

Voraussetzung: $AB = BC = CD$

$BE \parallel CF \parallel DG$

Behauptung: $AE = EF = FG$

Beweis: Zum Beweise ziehe man durch E und F die Parallelen zu AD; dann ist

$\triangle ABE \cong \triangle EHF \cong \triangle FIG$

nach dem 1. Kongr.-Satz, denn es ist

$AB = EH = FI$, da $EH = BC$ und $FI = CD$ ist,

$\alpha = \beta = \gamma$ als Gegenwinkel,

$x = y = z$ als Gegenwinkel.

Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit aller gleichliegenden Stücke, also

$$AE = EF = FG$$

§ 62. Lehrsatz (Proportionallehrsatz). Werden die Schenkel eines Winkels von zwei Parallelen geschnitten, so sind die abgeschnittenen Stücke verhältnisgleich.

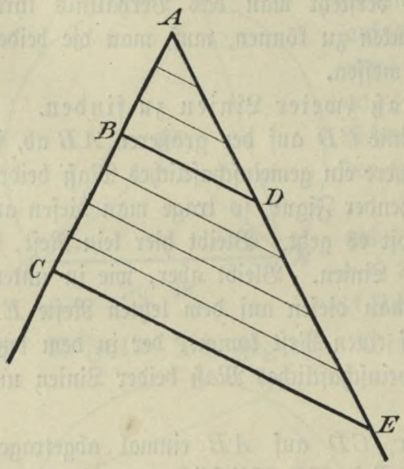


Fig. 52.

Voraussetzung: $BD \parallel CE$

Behauptung: $AB : AC = AD : AE$

Beweis: Man bestimme ein gemeinschaftliches Maß zwischen AB und AC. Es möge in AB 3 mal, in AC 7 mal enthalten sein. Dann lege man durch die Teilpunkte Parallele zu CE, dann wird hierdurch auch AD in 3, AE in 7 unter sich gleiche Teile geteilt. Es verhält sich also sowohl

$AB : AC = 3 : 7$

als auch $AD : AE = 3 : 7$

also $AB : AC = AD : AE$

Zusatz: Es gilt natürlich auch die Verhältnisgleichung

$$AB : BC = AD : DE$$

§ 63. Aufgabe. Zu drei gegebenen Strecken die vierte Proportionale zu bestimmen.

Auflösung: Man zeichne einen beliebigen Winkel und trage auf dem einen Schenkel die Strecken $AB = a$ und $BC = b$, und auf dem anderen Schenkel die Strecke $AD = c$ ab. Darauf verbinde man B mit D und ziehe durch C

die Parallele $CE \| BD$. DE ist dann die gesuchte vierte Proportionale.

Beweis: Nach dem Proportionallehrsatz ist

$$AB : BC = AD : DE$$

oder

$$a : b = c : x$$

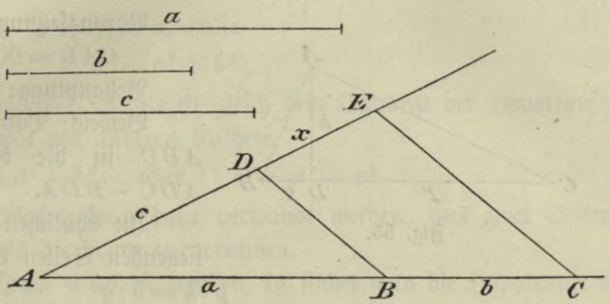


Fig. 53.

§ 64. **Lehrsatz** (Ähnlichkeitssatz). Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

Voraussetzung:
$\measuredangle A = \measuredangle A'$
$\measuredangle B = \measuredangle B'$

Behauptung:
$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Beweis: Man lege $\triangle A'B'C'$ so auf $\triangle ABC$, daß $\measuredangle A'$ auf $\measuredangle A$ fällt. $B'C'$ möge dabei die Lage von DE einnehmen. Dann ist $DE \| BC$, da die Gegenwinkel einander gleich sind; folglich nach dem Proportionallehrsatz

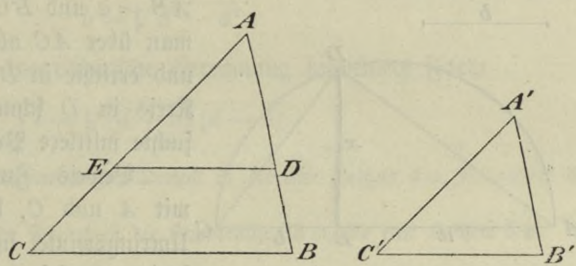


Fig. 54.

$$AD : AB = AE : AC$$

Ebenso läßt sich die Verhältnisgleichheit der übrigen Seiten nachweisen, indem man die beiden Dreiecke mit einem anderen Winkel aufeinander legt. Die Dreiecke sind also ähnlich.

Zusätze: 1. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem spitzen Winkel übereinstimmen.

2. Das von der Spitze des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse gefällte Lot teilt das Dreieck in zwei Dreiecke, die sowohl unter sich, wie auch dem ganzen ähnlich sind.

3. Zwei gleichschenklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in dem Winkel an der Spitze, oder in einem Winkel an der Grundlinie übereinstimmen.

Aufgaben: 1. Ein Turm wirft einen Schatten von 46 m, während gleichzeitig ein 2 m hoher senkrechter Stab einen Schatten von 1,2 m Länge wirft. Wie hoch ist der Turm?

2. Die beiden Feuer auf Süd-Foreland stehen 410 m voneinander. Das höhere Feuer ist 114 m, das niedrigere 88 m über dem Wasserspiegel. Wie weit steht ein Schiff von den Türmen in dem Punkte, wo die Feuer einander genau decken?

§ 65. **Lehrsatz.** Das Lot von der Spitze des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse ist die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse.

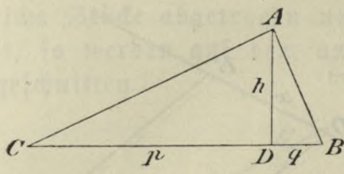


Fig. 55.

Voraussetzung:

$CAB = 90^0; \quad AD \perp CB$

Behauptung: $p:h = h:q$

Beweis: Das Lot AD teilt das Dreieck ABC in die beiden ähnlichen Dreiecke $ADC \sim BDA$.

In ähnlichen Dreiecken sind die gleichliegenden Seiten verhältnisgleich, also

$$p:h = h:q$$

Aufgabe: Zu zwei gegebenen Strecken die mittlere Proportionale zu bestimmen.

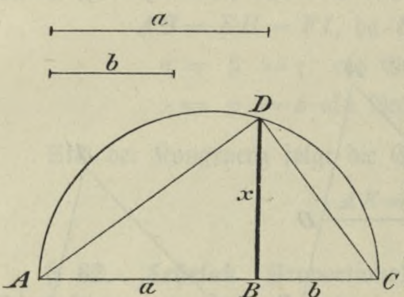


Fig. 56.

Auflösung: Auf einer beliebigen geraden Linie trage man die beiden gegebenen Strecken $AB = a$ und $BC = b$ ab. Darauf beschreibe man über AC als Durchmesser einen Kreis und errichte in B das Lot auf AC, das den Kreis in D schneide. $BD = x$ ist die gesuchte mittlere Proportionale.

Beweis: Zum Beweise verbinde man D mit A und C, dann ist $ADC = 90^0$ als Umringswinkel im Halbkreis, also nach dem soeben bewiesenen Lehrsatze x die mittlere Proportionale zwischen a und b.

Aufgabe: Zu zwei gegebenen Strecken a und b die dritte Proportionale ($a:b = b:x$) zu bestimmen.

§ 66. Lehrsatz (Pythagoreischer Lehrsatz). Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten.

Anmerkung: Unter dem Quadrat einer Seite ist das Quadrat ihrer Maßzahl zu verstehen. Das Quadrat einer Seite, deren Länge 5 ist, ist also 25. Diese Zahl stellt gleichzeitig den Inhalt des über der Seite 5 beschriebenen Quadrats vor (siehe § 71).

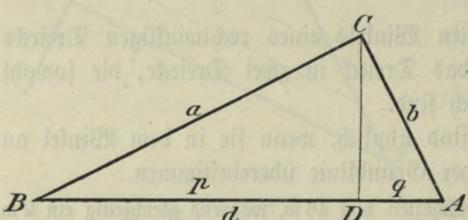


Fig. 57.

Voraussetzung: $ACB = 90^0$

Behauptung: $d^2 = a^2 + b^2$

Beweis: Zum Beweise fälle man von C das Lot auf AB. Die dadurch entstehenden Dreiecke sind dem ganzen Dreieck ähnlich, also

$$\triangle BDC \sim \triangle BCA$$
$$\triangle CDA \sim \triangle BCA$$

In ähnlichen Dreiecken sind die Seiten verhältnisgleich, also

$$d:a = a:p \text{ woraus folgt } dp = a^2$$

und $\quad d:b = b:q \quad$ " $\quad$ " $\quad dq = b^2$

Hieraus erhält man durch Addition $dp + dq = a^2 + b^2$

oder $\quad d(p + q) = a^2 + b^2$

Nun ist aber $(p+q)=d$, also

$$d^2=a^2+b^2$$

Zusatz: Das Quadrat einer Kathete ist gleich dem Quadrat der Hypotenuse, vermindert um das Quadrat der anderen Kathete.

$$a^2=d^2-b^2 \quad \text{oder} \quad b^2=d^2-a^2$$

Der pythagoreische Lehrsatz kann dazu verwandt werden, aus zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks die dritte zu berechnen.

Sind die beiden Katheten a und b gegeben, so findet man die Hypotenuse d nach der Formel

$$d=\sqrt{a^2+b^2}$$

Ist die Hypotenuse d und eine Kathete a gegeben, so findet man die andere Kathete b nach der Formel

$$b=\sqrt{d^2-a^2}$$

der man auch die für die logarithmische Berechnung bequemere Form

$$b=\sqrt{(d+a)(d-a)}$$

geben kann.

Aufgaben: 1. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die eine Kathete 4 m, die andere 3 m. Wie groß ist die Hypotenuse?

2. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse 13 m, die eine Kathete 5 m. Wie groß ist die andere Kathete?

3. Die Seite eines Quadrats ist 1 m lang. Wie groß ist die Diagonale?

4. Die Diagonale eines Quadrats ist 1 m lang. Wie groß sind die Seiten?

5. Ein Feuer A liegt W 6 Seemeilen von einem Feuer B. Man segelt von A 8 Seemeilen nach N. Wie groß ist die Entfernung von B?

6. Ein Schiff hat einen Leuchtturm quer ab in 3 Seemeilen Entfernung; es segelt noch 5 Seemeilen weiter. Wie weit ist es jetzt von dem Leuchtturm entfernt?

§ 67. Lehrsätze. 1. Zieht man von einem Punkte außerhalb eines Kreises zwei Sekanten durch den Kreis, so sind die abgeschnittenen Stücke verhältnisgleich, und zwar sind die Abschnitte der einen Sekante die äußeren, die der anderen die inneren Glieder einer Verhältnisgleichung.

Behauptung: $AB:AD=AE:AC$

Beweis: Zum Beweise verbinde man B mit E und D mit C; dann ist

$$\triangle ADC \sim \triangle ABE$$

denn es ist

$\alpha=\alpha$

$\beta=\gamma$ als Umringswinkel über demselben Bogen.

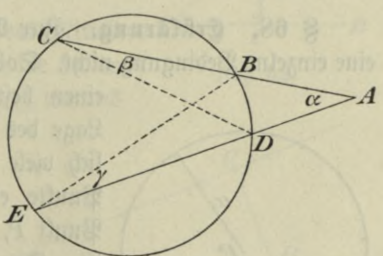


Fig. 58.

In ähnlichen Dreiecken sind die Seiten verhältnisgleich, also

$$AB:AD=AE:AC$$

2. Zieht man durch einen Punkt innerhalb eines Kreises zwei Sehnen, so sind die abgeschnittenen Stücke verhältnisgleich, und zwar

sind die Abschnitte der einen Sehne die äußeren, die Abschnitte der anderen die inneren Glieder einer Verhältnisgleichung.

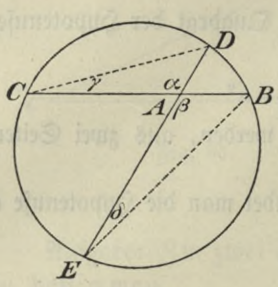


Fig. 59.

Behauptung: $AB:AD = AE:AC$.

Beweis: Zum Beweise verbinde man D mit C und B mit E; dann ist

$$\triangle ADC \sim \triangle ABE$$

denn es ist

$\alpha = \beta$ als Scheitelwinkel,

$\gamma = \delta$ als Umringswinkel über demselben Bogen.

In ähnlichen Dreiecken sind die Seiten verhältnisgleich, also

$$AB:AD = AE:AC$$

3. Zieht man von einem Punkte außerhalb eines Kreises eine Tangente und eine Sekante, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Sekante.

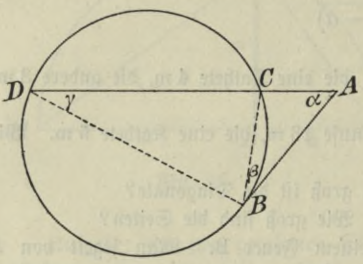


Fig. 60.

Behauptung: $AC:AB = AB:AD$.

Beweis: Zum Beweise verbinde man B mit C und D; dann ist

$$\triangle ACB \sim \triangle ABD$$

denn es ist

$\alpha = \alpha$

$\beta = \gamma$ als Sehnen-Tangentenwinkel.

In ähnlichen Dreiecken sind die Seiten verhältnisgleich, also

$$AC:AB = AB:AD$$

Aufgabe: Mit Hülfe dieses Satzes zu zwei gegebenen Strecken die mittlere Proportionale zu zeichnen.

Der geometrische Ort.

§ 68. **Erklärung.** Zur Bestimmung eines Punktes in der Ebene genügt eine einzelne Bedingung nicht. Soll z. B. ein Punkt von einem gegebenen Punkte P einen bestimmten Abstand a haben, so ist dadurch die Lage des Punktes nicht vollständig bestimmt, da unendlich viele Punkte dieser Bedingung genügen, nämlich alle Punkte eines Kreises, dessen Mittelpunkt der gegebene Punkt P, und dessen Halbmesser der gegebene Abstand a ist. Der Punkt muß dann bestimmt auf diesem Kreise liegen, und nur die Punkte dieses Kreises genügen der gestellten Bedingung.

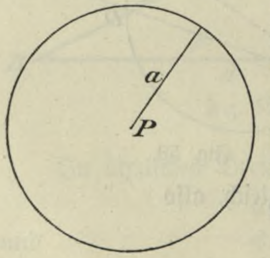


Fig. 61.

Eine derartige Linie, auf der ein zu bestimmender Punkt liegen muß, um einer bestimmten Bedingung zu genügen, heißt ein geometrischer Ort des Punktes.

Damit der Punkt bestimmt sei, müssen ihm mindestens zwei Bedingungen auferlegt werden. Jede Bedingung liefert einen geometrischen Ort des Punktes; er muß also in dem Schnittpunkte oder in einem der Schnittpunkte der beiden geometrischen Örter liegen.

In der gesamten Nautik spielen die geometrischen Örter eine wichtige Rolle, da man ganz allgemein den Ort des Schiffes durch zwei geometrische Örter auf der Erde bestimmt. Man nennt sie in diesem Falle Standlinien.

§ 69. Die wichtigsten und einfachsten geometrischen Örter sind die folgenden:

1. Der geometrische Ort eines Punktes, der in einer gegebenen Richtung von einem anderen Punkte liegt, ist die durch diesen Punkt in der gegebenen Richtung gezogene gerade Linie.

Dieser geometrische Ort findet in der Küstenschiffahrt ausgedehnte Anwendung. Jede Peilung (Richtungsbestimmung) einer bekannten Landmarke giebt für den Schiffsort eine Standlinie, nämlich eine gerade Linie, die von der Landmarke aus in der der Peilung entgegengesetzten Richtung gezogen wird. Peilt man z. B. ein Feuer NO, so muß das Schiff auf einer vom Feuer aus nach SW laufenden Linie stehen.

2. Der geometrische Ort eines Punktes, der von einem anderen Punkte einen bestimmten Abstand hat, ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt der gegebene Punkt, und dessen Halbmesser gleich dem gegebenen Abstand ist.

Dieser geometrische Ort liefert in Verbindung mit dem vorigen in der Küstenschiffahrt eine häufig benutzte Ortsbestimmung.

3. Der geometrische Ort eines Punktes, der von einer geraden Linie einen bestimmten Abstand hat, ist eine in diesem Abstande gezogene Parallele.

Aufgabe: Gegeben ist eine gerade Linie und ein Punkt außerhalb; es ist ein Punkt zu bestimmen, dessen Abstand von beiden 5 cm beträgt.

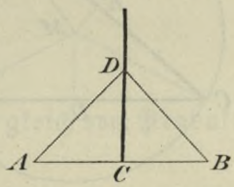


Fig. 62.

4. Der geometrische Ort für einen Punkt, der von zwei anderen Punkten A und B gleich weit entfernt ist, ist das in der Mitte von AB errichtete Lot (Mittellot oder Mittelsenkrechte).

Denn verbindet man irgend einen Punkt D des Mittellotes mit den Endpunkten A und B, so entstehen die beiden kongruenten Dreiecke $ACD \cong BCD$ (3. Kongr.-Satz), woraus die Gleichheit von AD und BD folgt.

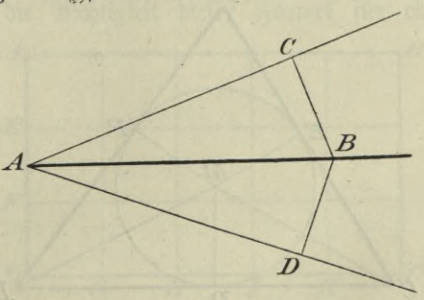


Fig. 63.

4a. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, der durch zwei gegebene Punkte A und B hindurchgeht, ist das in der Mitte von AB errichtete Lot.

5. Der geometrische Ort für einen Punkt, der von zwei gegebenen geraden Linien gleichweit entfernt ist, ist die Halbierungslinie

des von den beiden geraden Linien gebildeten Winkels (Winkelhalbierende).

Denn fällt man von irgend einem Punkte B der Winkelhalbierenden die Lote BC und BD auf die Schenkel (Fig. 63), so entstehen die beiden kongruenten Dreiecke $ABC \cong ABD$ (1. Kongr.-Satz), woraus die Gleichheit von BC und BD folgt.

5a. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, der zwei gegebene gerade Linien berührt, ist die Halbierungslinie des von beiden geraden Linien gebildeten Winkels.

6. Der geometrische Ort eines Punktes, von dem aus eine gegebene Strecke unter einem gegebenen Winkel erscheint, ist der Bogen eines Kreises, der den gegebenen Winkel als Umringswinkel über der gegebenen Strecke als Sehne faßt (siehe § 59).

Aufgaben: 1. Zwei Leuchttürme, die 6 Seemeilen voneinander entfernt sind, erscheinen unter einem Winkel von 42°. Die Entfernung von dem einen Leuchtturm beträgt 5 Seemeilen. Wie groß ist der Abstand vom zweiten?

2. A liegt von B N 10 Seemeilen, C liegt von B O 4 Seemeilen. Auf einem nordöstlich von B befindlichen Schiffe mißt man den Winkel zwischen A und B gleich 115° und den Winkel zwischen B und C gleich 74°. Wie groß sind die Abstände des Schiffes von A, B und C? (Aufgabe der vier Punkte.)

3. Ein Dreieck zu zeichnen aus einer Seite, dem gegenüberliegenden Winkel und der zu dieser Seite gehörigen Höhe.

§ 70. Aufgaben. Die beiden geometrischen Örter 4 und 5 führen zur Lösung folgender beiden Aufgaben:

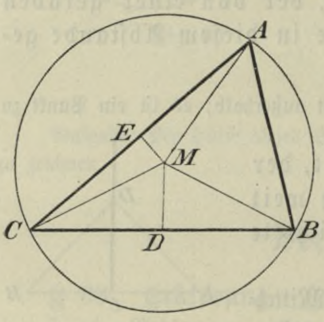


Fig. 64.

1. Aufgabe: Um ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung: Man errichte auf zwei Seiten z. B. AC und BC die Mittellote, die sich in M schneiden mögen; dann ist M der Mittelpunkt und MC der Halbmesser des gesuchten Kreises.

Beweis: Alle Punkte des Mittellotes haben von den Endpunkten der Seiten gleiche Abstände. Es ist also $AM = BM = CM$; der Kreis geht also durch die drei Eckpunkte des Dreiecks hindurch.

Zusatz: In jedem Dreieck schneiden sich die drei Mittellote in einem Punkte.

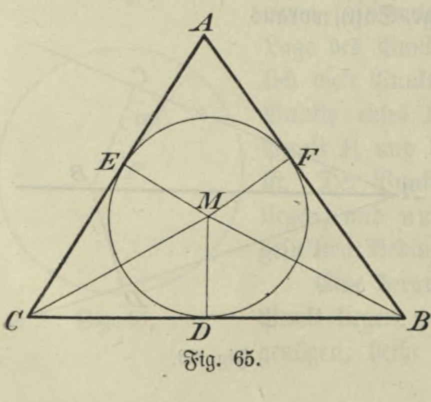


Fig. 65.

2. Aufgabe: In ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung: Man halbiere zwei Winkel, z. B. B und C. Die Halbierungslinien mögen sich in M schneiden; dann ist M der Mittelpunkt und das Lot MD der Halbmesser des einbeschriebenen Kreises.

Beweis: Alle Punkte der Winkelhalbierenden haben von den beiden

Schenkeln gleiche Abstände. Die von M auf die drei Seiten gefällten Lote MD, ME und MF müssen also einander gleich sein; folglich muß der mit MD als Halbmesser um M beschriebene Kreis durch E und F hindurchgehen, und die Seiten müssen Tangenten des Kreises sein, da sie senkrecht zum Halbmesser stehen.

Zusatz: In jedem Dreieck schneiden sich die drei Winkelhalbierenden in einem Punkte.

Den Schnittpunkt der drei Mittellote, sowie den Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden nennt man merkwürdige Punkte des Dreiecks. Es giebt deren noch mehrere.

Ohne Beweis sollen hier noch zwei andere Sätze über merkwürdige Punkte des Dreiecks angeführt werden.

1. In jedem Dreieck schneiden sich die drei Höhen in einem Punkte.

2. In jedem Dreieck schneiden sich die drei Mittellinien (Verbindungslinien der Mitte der Seiten mit den gegenüberliegenden Eckpunkten) in einem Punkte, dem Schwerpunkte des Dreiecks.

Berechnung geradliniger Figuren.

§ 71. Parallelogramm.

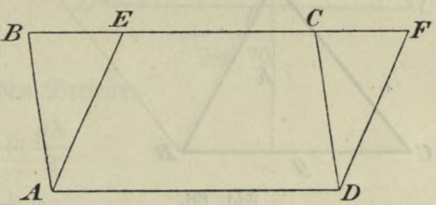


Fig. 66.

Lehrsatz: Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind inhaltgleich.

Voraussetzung: $ABCD$ und $AEFD$ haben gleiche Grundlinien und Höhen.

Behauptung: $ABCD = AEFD$.

Beweis: Es ist $AB = DC$ als Gegenseiten im Parallelogramm,
$ABE = DCF$ als Gegenwinkel,
$AEB = DFC$ als Gegenwinkel; folglich

$\triangle ABE \cong \triangle DCF$. Es ist ferner
$AECD = AECD$; folglich

$$AECD + ABE = AECD + DCF$$

oder $ABCD = AEFD$

Lehrsatz: Der Inhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus Grundlinie und Höhe:

$$I = g \cdot h$$

Beweis: Da Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen inhaltsgleich sind, so genügt es, wenn die Richtigkeit dieser Formel für ein Rechteck dargethan wird.

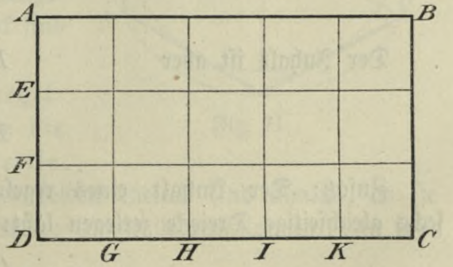


Fig. 67.

Die Grundlinie des Rechtecks möge etwa 5, die Höhe 3 Maßeinheiten (Meter) lang sein. Man trage die Maßeinheit auf zwei benachbarten Seiten ab und ziehe zunächst durch die Teilpunkte G, H, I und K Parallele zu DA. Durch sie wird das Rechteck in 5 unter sich kongruente Teilrechtecke zerlegt. Legt man dann auch durch die Teilpunkte E und F Parallele zu AB, dann wird jedes Teilrechteck in drei Quadrateinheiten zerlegt; folglich enthält das ganze Rechteck 5.3 Quadrateinheiten.

Was hier für ein Rechteck von den Seiten 5 und 3 bewiesen ist, läßt sich ebenso von allen anderen Rechtecken beweisen, also ist

$$I = g \cdot h$$

Zusatz: Der Inhalt eines Quadrats mit der Seite a ist

$$I = a^2$$

§ 72. Dreieck.

Lehrsatz: Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus Grundlinie und Höhe.

$$I = \frac{g \cdot h}{2}$$

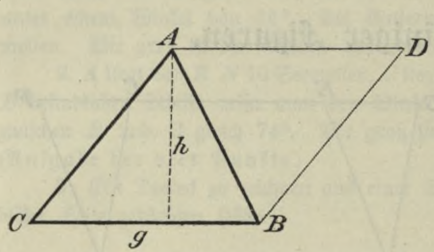


Fig. 68.

Beweis: Zieht man durch A und B Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten, so entsteht das Parallelogramm $CADB$, das doppelt so groß wie das gegebene Dreieck ist. Da der Inhalt dieses Parallelogramms $= g \cdot h$ ist, so ist der Inhalt des Dreiecks

$$I = \frac{g \cdot h}{2}.$$

Lehrsatz: Der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite a ist, ist:

$$I = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \sqrt{3}$$

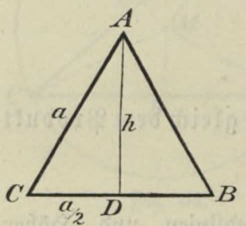


Fig. 69.

Beweis: Fällt man von A das Lot auf BC, so wird, da $CD = \frac{a}{2}$ ist

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Der Inhalt ist aber $I = \frac{a}{2} h$, also

$$I = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \sqrt{3}$$

Zusatz: Der Inhalt eines regelmäßigen Sechsecks ist, da es sich in sechs gleichseitige Dreiecke zerlegen läßt:

$$I = 6\left(\frac{a}{2}\right)^2 \sqrt{3}$$

Anmerkung: Die Berechnung des Inhalts eines **Dreiecks** aus den drei Seiten a, b und c erfolgt nach der Formel

$$I = \sqrt{\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2}-a\right)\left(\frac{s}{2}-b\right)\left(\frac{s}{2}-c\right)}, \quad \text{wo } s = a+b+c \text{ ist}$$

Diese Formel wird am bequemsten mit Hülfe der Trigonometrie abgeleitet (siehe § 109).

§ 73. Trapez.

Lehrsatz: **Der Inhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkt aus der Höhe und dem Mittel der beiden Grundlinien.**

$$I = h\frac{G+g}{2}$$

Beweis: Man ziehe eine Diagonale, z. B. BD; dann ist

$$\triangle BCD = \frac{Gh}{2}$$

$$\triangle DAB = \frac{gh}{2}$$

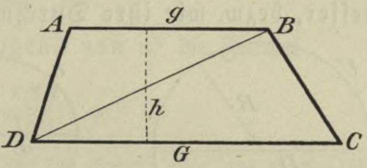


Fig. 70.

folglich das Trapez als Summe der beiden Dreiecke:

$$I = \frac{Gh}{2} + \frac{gh}{2}$$

$$I = h\frac{G+g}{2}$$

Umfang und Inhalt des Kreises.

§ 74. **Ein regelmäßiges Vieleck** ist ein Vieleck, in dem alle Seiten und Winkel einander gleich sind.

Jedem regelmäßigen Vieleck läßt sich ein Kreis einbeschreiben und umbeschreiben, deren Mittelpunkte zusammenfallen. Den Mittelpunkt dieser Kreise nennt man auch den Mittelpunkt des regelmäßigen Vielecks.

Verbindet man den Mittelpunkt mit den Ecken des Vielecks, so wird es dadurch in lauter unter sich kongruente Dreiecke — Bestimmungsdreiecke genannt — zerlegt. (Beim Sechseck sind diese Dreiecke gleichseitig.)

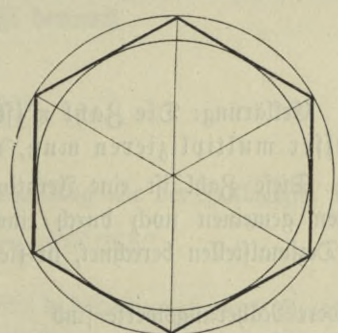


Fig. 71.

Lehrsatz: **Die Umfänge zweier regelmäßiger Vielecke verhalten sich wie die Halbmesser der umbeschriebenen Kreise.**

Beweis: Die Bestimmungsdreiecke der beiden Vielecke sind ähnlich, da sie gleichschenklig sind und in dem Winkel an der Spitze übereinstimmen. Es verhält sich also

$$S : s = R : r$$

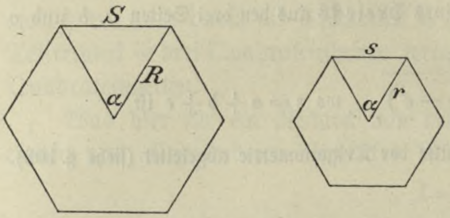


Fig. 72.

Haben die beiden Vielecke je n Seiten, so sind die Umfänge

$$U = nS \quad \text{bezw.} \quad u = ns$$

Aus der obigen Verhältnisgleichung folgt aber auch

$$nS : ns = R : r$$

also

$$U : u \;= R : r$$

§ 75. Der Umfang des Kreises. Der Kreis kann aufgefaßt werden als ein Vieleck mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten. Es gilt also auch der

Lehrsatz: Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie ihre Halbmesser, bezw. wie ihre Durchmesser.

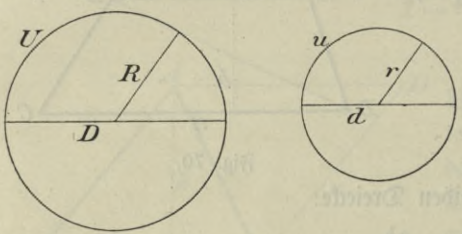


Fig. 73.

Bezeichnet man die Umfänge zweier Kreise mit U und u, die Halbmesser bezw. mit R und r, die Durchmesser mit D und d, so ist nach diesem Satze

$$U : u = R : r$$
$$U : u = D : d$$

Vertauscht man in der letzten Gleichung die inneren Glieder, so geht sie über in

$$U : D = u : d$$

Diese Formel lautet in Worten ausgedrückt:

Das Verhältnis des Umfanges eines Kreises zu seinem Durchmesser ist bei allen Kreisen dasselbe.

Man bezeichnet dieses konstante Verhältnis immer mit dem griechischen Buchstaben π. Es ist also in jedem Kreise

$$\frac{u}{d} = \pi$$

$$u = d\pi$$

Erklärung: Die Zahl π ist diejenige Zahl, mit der man den Durchmesser multiplizieren muß, um den Umfang zu erhalten.

Diese Zahl ist eine Irrationalzahl, d. h. eine Zahl, die sich weder durch einen gemeinen noch durch einen Dezimalbruch genau ausdrücken läßt. Auf 4 Dezimalstellen berechnet, ist sie

$$\boldsymbol{\pi = 3{,}1416}$$

andere Näherungswerte sind

$$\pi = \frac{22}{7} \text{ (Archimedes)}, \qquad \pi = \frac{355}{113} \text{ (Adrian Metius)}.$$

Eine Berechnung der Zahl π befindet sich am Schlusse dieses Kapitels.

Für die Berechnung des Umfangs eines Kreises hat man nach obigem die folgenden Formeln

$$\boldsymbol{u = d\pi} \qquad \text{oder} \qquad \boldsymbol{u = 2r\pi}$$

Aufgabe: Der mittlere Halbmesser der Erde beträgt 6366,7 km. Wie groß ist der Umfang der Erde?

Umgekehrt erhält man den Halbmesser bezw. Durchmesser aus dem Umfange des Kreises nach den Formeln

$$d = \frac{u}{\pi} \qquad r = \frac{u}{2\pi}$$

Aufgabe: Wie groß würde der mittlere Halbmesser der Erde sein, wenn ihr Umfang genau 40 000 km betrüge?

Die Länge eines Kreisbogens von einem Grad ist

$$\frac{u}{360} \text{ oder } \frac{2r\pi}{360}$$

also hat man zur Berechnung eines Kreisbogens von α^0 die Formel

$$b = \frac{2r\pi \cdot \alpha}{360} = \frac{r\pi\alpha}{180}$$

Aufgaben: 1. Der mittlere Erdhalbmesser ist 6 366 738 Meter. Wie lang ist eine Seemeile oder eine Minute des mittleren Erdumfangs?

2. Ein im Kreise herumdampfendes Schiff ändert bei 12 Knoten Fahrt in 5 Minuten seinen Kurs um 7 Strich. Wie groß ist der Halbmesser des Drehkreises?

Aus dem vorhergehenden wird es klar werden, welch ein Unterschied in der doppelten Auffassung der Kreislinie liegt, je nachdem man sie als Winkelgröße oder als Liniengröße betrachtet. Als Winkelgrößen sind alle Umfänge gleich, d. h. jeder stellt eine ganze Umdrehung dar; als Liniengrößen verhalten sich die Kreisumfänge wie ihre Halbmesser.

§ 76. Aufgabe. Wie groß ist, in Winkelmaß ausgedrückt, ein Bogen, der ebenso lang wie der Halbmesser ist?

Auflösung: Der ganze Kreis ist, in Winkelmaß ausgedrückt, gleich 360^0, mit dem Linienmaß gemessen gleich $2r\pi$. Es ist demnach

$$2r\pi = 360^0$$

$$\text{also} \quad r = \frac{360^0}{2\pi} = \frac{180^0}{\pi}$$

woraus man berechnet, daß der Bogen, der ebenso lang wie der Halbmesser ist,

$$57{,}30^0 \quad \text{oder} \quad 3437{,}75' \quad \text{oder} \quad 206\,265''$$

umfaßt.

Der Halbmesser ist somit 57,3 mal so groß wie das Linienmaß eines Grades, oder 3438 mal so groß wie das Linienmaß einer Bogenminute, oder 206 265 mal so groß wie das Linienmaß einer Bogensekunde. Da nun kleine Bogen als gerade Linien betrachtet werden dürfen, so bieten jene Werte ein Mittel, um Entfernungen durch Winkelmessung bekannter Längen zu bestimmen. Man bestimmt die Länge eines Grades, einer Minute oder einer Sekunde und erhält daraus durch Multiplikation mit 57,3 bezw. 3438 bezw. 206 265 die Entfernung.

Es möge das an einigen für die Praxis wichtigen Beispielen erläutert werden.

1. **Fernpeilung.** Der Kompaß eines verzeiteten Dampfers steht 100 Meter von dem Punkte, um den das Schiff schwait. Wie weit muß ein Turm entfernt sein, dessen Peilung sich beim Schwaien um höchstens einen halben Grad verschieben soll?

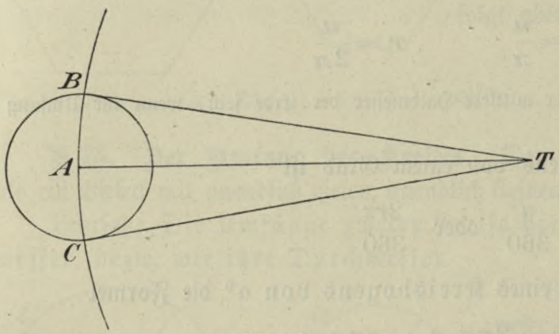


Fig. 74.

In nebenstehender Figur bedeute T den gepeilten Turm, A den Punkt, um den das Schiff schwait. Man denke sich dann um T mit TA als Halbmesser einen Kreis beschrieben, der den Drehkreis des Schiffes in B und C schneide, dann ist der Winkel BTC der Winkel, um den sich die Peilung beim Schwaien ändert. Dieser Winkel soll höchstens einen halben Grad betragen, also darf auch BC höchstens ein halber Grad des um T beschriebenen Kreises sein. Da nun $BC = 200$ Meter ist, so muß T soweit entfernt sein, daß $\frac{1}{2}^0$ des um T beschriebenen Kreises mindestens 200 Metern, 1^0 also 400 Metern entspricht. Da der Halbmesser aber 57,3 mal so lang ist wie die Liniengröße eines Grades, so ergiebt sich für die Entfernung des Turmes $400 \,.\, 57{,}3 = 22\,920$ Meter, oder da 1 Seemeile = 1852 Meter beträgt, 12,4 Seemeilen.

Wenn allgemein der Halbmesser des Schwingungskreises r Meter beträgt, so erhält man für die Entfernung eines sich zu Fernpeilungen eignenden Turmes

$$e = \frac{4r \,.\, 57{,}3}{1852} = \frac{229{,}2}{1852}\, r \text{ Seemeilen,}$$

wofür man mit genügender Genauigkeit setzen kann

$$e = \tfrac{1}{8}\, r \text{ Seemeilen}$$

2. **Höhenwinkel.** Man mißt den Höhenwinkel eines 50 Meter hohen Turmes gleich 20′. Wie weit war man von ihm entfernt?

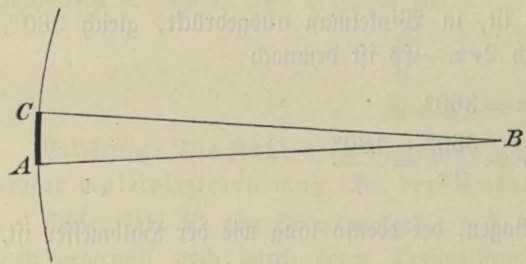


Fig. 75.

In nebenstehender Figur bedeute B den Beobachter, AC den Turm. Man denke sich um B mit BA als Halbmesser einen Kreis beschrieben. Da man wegen der Kleinheit von AC den Bogen als gerade Linie ansehen kann, so wird auf dem Kreise

$$20' = 50\, m$$

also $$1' = \frac{50}{20} = 2{,}5\, m$$

sein. Da aber der Halbmesser 3438 mal so groß ist wie die Liniengröße einer Minute, so ist die Entfernung $AB = 2{,}5 \,.\, 3438 = 8595$ Meter oder gleich 4,6 Seemeilen.

Ist allgemein der Höhenwinkel eines h Meter hohen Turmes n Minuten, so ist die Entfernung von dem Turme

$$e = \frac{h}{n} \cdot \frac{3438}{1852} \text{ Seemeilen,}$$

wofür man mit größter Annäherung setzen kann

$$e = \frac{h}{n} \cdot \frac{13}{7}$$

3. **Spiegelparallaxe.** Der große Spiegel des Sextanten steht gewöhnlich 5 Centimeter höher als der kleine. Wie weit muß ein Punkt entfernt sein, wenn die von ihm auf den großen und kleinen Spiegel fallenden Strahlen einen Winkel von höchstens 1″ bilden sollen?

Man denke sich wieder um den leuchtenden Punkt als Mittelpunkt einen Kreis durch den Sextanten in vertikaler Ebene gelegt, dann ist auf diesem Kreise

$$1'' = 0{,}05\ m$$

Der Halbmesser des Kreises oder die Entfernung des Punktes ist also $0{,}05 \,.\, 206\,265 = 10\,313$ Meter $= 5{,}6$ Seemeilen.

Gehen die Strahlen von einem Punkte aus, der 1 Seemeile entfernt ist, so bilden sie einen Winkel von 5,6″ miteinander.

§ 77. Der Inhalt des Kreises. Man denke sich den Kreis zunächst durch ein regelmäßiges Vieleck von sehr großer Seitenzahl (n) ersetzt. Der Inhalt dieses regelmäßigen Vielecks ist, wenn wir seine Seitenlänge gleich a und die Höhe des Bestimmungsdreiecks gleich h setzen,

$$J = \frac{nah}{2} = \frac{Uh}{2}$$

wo U den Umfang des Vielecks bedeutet.

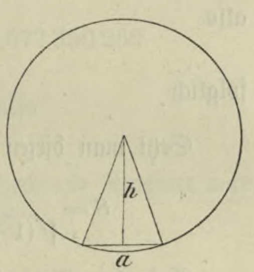


Fig. 76.

Geht man nun zum Kreise über, indem man die Seitenzahl immer größer werden läßt, so geht der Umfang U des Vielecks schließlich in den Umfang u des Kreises über. Gleichzeitig wird die Höhe h dem Halbmesser gleich werden. Man erhält also

$$J = \frac{u \,.\, r}{2} = \frac{2 r \pi \,.\, r}{2}$$

also als Formel für den Inhalt des Kreises

$$\boldsymbol{J = r^2 \pi}$$

und hieraus zur Berechnung des Halbmessers bezw. des Durchmessers

$$\boldsymbol{r = \sqrt{\frac{J}{\pi}}} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{d = 2\sqrt{\frac{J}{\pi}}}$$

Der Inhalt eines Kreisausschnittes (Sektors), dessen Mittelpunktswinkel α^0 beträgt, ergiebt sich aus der Formel

$$i = \frac{r^2 \pi \alpha}{360}$$

§ 78. Bestimmung der Zahl π. Im folgenden soll die Zahl π bis auf einen gewissen Grad von Genauigkeit berechnet werden. Da für diesen Zweck die Größe des zu Grunde zu legenden Kreises ganz gleichgültig ist, so kann man den Halbmesser dieses Kreises beliebig annehmen. Besonders einfach wird es sein, wenn man einen Kreis, dessen Durchmesser gleich 1, dessen Halbmesser also gleich $\frac{1}{2}$ ist, der Betrachtung zu Grunde legt, da der Umfang dieses Kreises unmittelbar die Zahl π ergiebt.

Bei den folgenden Untersuchungen ist also stets ein Kreis gebraucht, dessen Durchmesser gleich 1, dessen Halbmesser gleich $\frac{1}{2}$ ist.

Aufgabe: Aus der Seite des einbeschriebenen n-Ecks die Seite des umbeschriebenen n-Ecks zu berechnen.

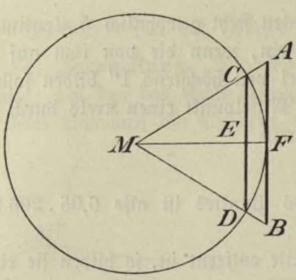


Fig. 77.

Auflösung: Es sei $AB = S$ die Seite des umbeschriebenen n-Ecks, dann ist $CD = s$ die Seite des einbeschriebenen. Verbindet man den Berührungspunkt F mit dem Mittelpunkte M, so ist $MF \perp AB$ und $MF \perp CD$; ferner ist

$$AF = \tfrac{1}{2} S, \quad CE = \tfrac{1}{2} s.$$

Somit ist

$$AB : CD = AF : CE = MF : ME$$

Da $MF = \frac{1}{2}$ ist, so folgt hieraus

$$S : s = \tfrac{1}{2} : ME \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

Nun ist aber

$$ME^2 = MC^2 - CE^2 = (MC + CE)\,(MC - CE) = \left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right)$$

also
$$ME^2 = \frac{(1+s)\,(1-s)}{4}$$

folglich
$$ME = \frac{\sqrt{(1+s)\,(1-s)}}{2}$$

Setzt man diesen Wert in die Verhältnisgleichung (I) ein, so erhält man

$$S = \frac{s}{\sqrt{(1+s)\,(1-s)}} = \frac{s\sqrt{(1+s)\,(1-s)}}{(1+s)\,(1-s)} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Aufgabe: Aus den Seiten des ein- und umbeschriebenen n-Ecks die Seite des einbeschriebenen $2n$-Ecks zu berechnen.

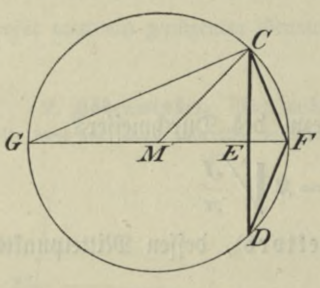


Fig. 78.

Auflösung: Es sei $CD = s$ die Seite des einbeschriebenen n-Ecks und der Durchmesser GF senkrecht auf CD, dann ist $CE = \frac{1}{2} s$ und CF die Seite des einbeschriebenen $2n$-Ecks. Verbindet man C mit G, so ist GCF ein rechter Winkel und

$$\triangle GCF \sim \triangle CEF,$$

also
$$GF : CF = CF : EF,$$

folglich
$$CF^2 = GF . EF,$$

Da $GF = 1$ ist, so folgt hieraus

$$CF^2 = EF = MF - ME$$

Nun ist $MF = \frac{1}{2}$ und nach der Verhältnisgleichung (I) in der vorigen Aufgabe, $ME = \frac{s}{2S}$; folglich

$$CF^2 = \frac{1}{2} - \frac{s}{2S} = \frac{S - s}{2S}$$

also
$$CF = \sqrt{\frac{S-s}{2S}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

Mit Hülfe dieser Formeln ist eine Berechnung der Zahl π möglich.

Der Umfang des umbeschriebenen Vielecks muß größer, dagegen der Umfang des einbeschriebenen Vielecks kleiner sein als der Kreisumfang.

Je größer man aber die Seitenzahl des ein- und umgeschriebenen Vielecks macht, desto mehr werden die Umfänge beider sich einander und dem zwischen ihnen liegenden Werte des Kreisumfangs nähern. Hat man die Seitenzahl so oft verdoppelt, daß die beiden Umfänge z. B. bis auf die vierte Dezimalstelle übereinstimmen, so muß dieser Wert auch den des Kreisumfangs bis zur vierten Dezimale genau geben, und durch fortgesetzte Verdoppelung der Seitenzahl kann man sich dem Werte des Kreisumfangs soweit nähern, wie es die Genauigkeit der Rechnung erfordert.

Der Einfachheit wegen berechnet man, wie schon erwähnt ist, den Kreisumfang für den Durchmesser gleich 1; und da die Seite des regelmäßigen Sechsecks gleich dem Halbmesser, also gleich 0,5 ist, so ist es das bequemste, wenn man, vom regelmäßigen Sechseck ausgehend, durch fortgesetzte Verdoppelung der Seitenzahl dem Werte des Kreisumfangs näher und näher zu kommen sucht.

Für die Seite S des umbeschriebenen Sechsecks hat man nach Formel (II)

$$S_6 = \frac{0{,}5}{\sqrt{1{,}5 \,.\, 0{,}5}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{0{,}75}} = \frac{0{,}5\sqrt{0{,}75}}{0{,}75} = 0{,}577\,350\,269$$

Der Umfang des umbeschriebenen Sechsecks ist also

$$U = 6\,S_6 = 3{,}464\,102$$

Mit Hülfe der Seiten des ein- und umbeschriebenen Sechsecks berechnet man nach Formel (III) die Seite des einbeschriebenen Zwölfecks.

$$s_{12} = \sqrt{\frac{S_6 - s_6}{2\,S_6}} = \sqrt{\frac{0{,}077\,350\,269}{1{,}154\,700\,538}} = 0{,}258\,819\,045$$

Für den Umfang des einbeschriebenen Zwölfecks hat man also

$$u = 12\,s_{12} = 3{,}105\,829$$

Fährt man in dieser Weise fort und bringt die berechneten Werte in eine Tafel, wo s die Seite und u den Umfang des einbeschriebenen, S die Seite und U den Umfang des umbeschriebenen Vielecks bedeutet, so erhält man:

Für das	s	S	u	U
6-eck	0,500 000 000	0,577 350 269	3,000 000	3,464 102
12-eck	0,258 819 045	0,267 949 192	3,105 829	3,215 390
24-eck	0,130 526 192	0,131 652 498	3,132 629	3,159 660
48-eck	0,065 403 129	0,065 543 463	3,139 350	3,146 086
96-eck	0,032 719 083	0,032 736 610	3,141 032	3,142 715
192-eck	0,016 361 732	0,016 363 922	3,141 452	3,141 873
384-eck	0,008 181 145	0,008 181 414	3,141 558	3,141 663
768-eck	0,004 090 604	0,004 090 638	3,141 584	3,141 610
1536-eck	0,002 045 306	0,002 045 311	3,141 590	3,141 597

Begnügt man sich mit einer Genauigkeit von 5 Dezimalstellen, so hat man für die Umfänge des ein- und umbeschriebenen 1536-ecks übereinstimmend 3,14159. Es muß also auch der zwischen beiden liegende Wert des Kreisumfangs bis zur fünften Dezimale genau gleich 3,14159 sein. Der Umfang des berechneten Kreises mit dem Durchmesser gleich 1 ist aber gleich π, also

$$\pi = 3{,}14159.$$

Räumliche Geometrie oder Stereometrie.

Linien und Ebenen im Raume.

§ 79. **Die Ebene.** Eine Ebene ist eine Fläche, in der man nach allen Richtungen hin gerade Linien ziehen kann. Verbindet man also zwei beliebige Punkte einer Ebene durch eine gerade Linie, so fällt diese gerade Linie in allen Punkten mit der Fläche zusammen.

Lehrsatz: Die Durchschnittslinie zweier Ebenen ist eine gerade Linie.

Beweis: Nimmt man in der Durchschnittslinie zwei beliebige Punkte an und verbindet sie durch eine gerade Linie, so muß diese Linie nach der Erklärung der Ebene sowohl in die eine wie in die andere Ebene fallen, also die Durchschnittslinie sein.

Durch zwei Punkte oder durch eine gerade Linie lassen sich unendlich viele Ebenen legen.

Nur eine einzige Ebene läßt sich legen

1. durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte;
2. durch eine gerade Linie und einen Punkt außerhalb;
3. durch zwei sich schneidende gerade Linien;
4. durch zwei parallele gerade Linien.

§ 80. **Gerade Linie und Ebene.** Eine gerade Linie läuft mit einer Ebene parallel, wenn sie die Ebene nicht trifft, soweit man sie auch verlängert.

Ist eine gerade Linie nicht parallel zu einer Ebene, und fällt sie auch nicht mit ihr zusammen, so schneidet sie die Ebene in einem Punkte.

Eine gerade Linie steht senkrecht auf einer Ebene, wenn sie mit allen durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen geraden Linien rechte Winkel bildet.

Steht eine gerade Linie nicht senkrecht auf einer Ebene, so sagt man, sie stehe schräg oder geneigt gegen sie.

Lehrsatz: Eine gerade Linie steht senkrecht auf einer Ebene, wenn sie mit zwei durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen geraden Linien rechte Winkel bildet.

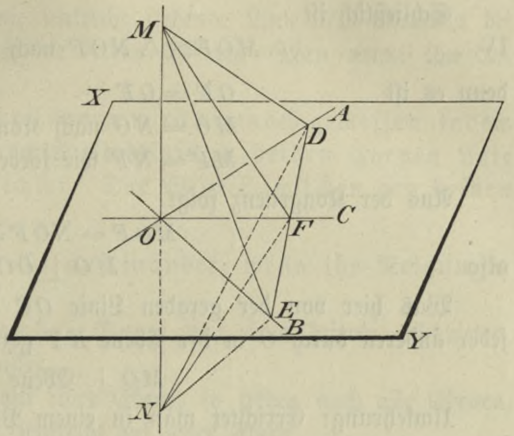


Fig. 79.

Voraussetzung:

$MO \perp OA$

$MO \perp OB$

Behauptung:

$MO \perp$ Ebene XY

Beweis: Der Beweis ist geführt, wenn nachgewiesen ist, daß MO mit allen durch O in der Ebene XY gezogenen Linien, z. B. mit OC, rechte Winkel bildet. Um dies zu beweisen, verlängere man MO über O hinaus und mache $NO = MO$. Darauf nehme man auf OA und OB je einen beliebigen Punkt D und E an und verbinde D mit E. Den Schnittpunkt dieser Linie mit der Linie OC nenne man F und verbinde schließlich die beiden Punkte M und N mit den drei Punkten D, E und F; dann ist

I. . . . $\triangle MOE \cong \triangle NOE$ und $\triangle MOD \cong \triangle NOD$ n. d. 3. Kongr.-Satz,

denn es ist

$OE = OE$	$OD = OD$
$OM = ON$ nach Konstr.	$OM = ON$ nach Konstr.
$MOE = NOE$ $(= 90^0)$	$MOD = NOD$ $(= 90^0)$

Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit aller gleichliegenden Stücke, also

$ME = NE$ und $MD = ND$

Ferner ist

II. . . . . $\triangle MED \cong \triangle NED$ n. d. 4. Kongr.-Satz,

denn es ist

$$ED = ED$$
$$\left.\begin{matrix} ME = NE \\ MD = ND \end{matrix}\right\} \text{ wie soeben bewiesen.}$$

Aus der Kongruenz folgt

$$MEF = NEF$$

Nunmehr ist

III. . . . . $\triangle MEF \cong \triangle NEF$ n. d. 3. Kongr.-Satz,

denn es ist

$$EF = EF$$
$$\left.\begin{matrix} ME = NE \\ MEF = NEF \end{matrix}\right\} \text{ wie oben bewiesen.}$$

Aus der Kongruenz folgt

$$MF = NF$$

Schließlich ist

IV. . . . . $\triangle MOF \cong \triangle NOF$ nach dem 4. Kongr.-Satz,

denn es ist $OF = OF$

$MO = NO$ nach Konstruktion,

$MF = NF$ wie soeben bewiesen.

Aus der Kongruenz folgt

$$MOF = NOF = 90^0$$

also

$$MO \perp OC$$

Was hier von der geraden Linie OC bewiesen ist, läßt sich ebenso von jeder anderen durch O in der Ebene XY gezogenen geraden Linie beweisen, also

$$MO \perp \text{Ebene } XY$$

Umkehrung: Errichtet man in einem Punkte einer geraden Linie beliebige Lote, so liegen alle diese Lote in einer Ebene. Oder:

Dreht sich ein rechtwinkliges Dreieck um eine Kathete, so beschreibt die andere Kathete eine Ebene.

Neigungswinkel einer geraden Linie gegen eine Ebene. Fällt man von einem Punkte A einer schräg gegen eine Ebene verlaufenden Linie ein Lot auf die Ebene XY und verbindet den Fußpunkt dieses Lotes B mit dem Fußpunkt C der schrägen Linie, so nennt man den Winkel ACB zwischen dieser Verbindungslinie und der gegebenen Linie den Neigungswinkel der geraden Linie gegen die Ebene.

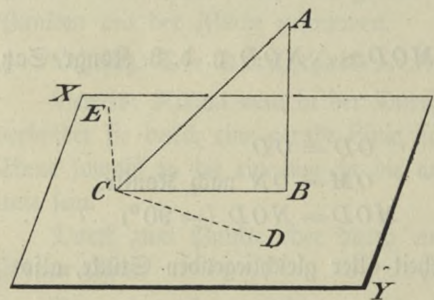


Fig. 80.

Legt man durch den Fußpunkt C in der Ebene verschiedene gerade Linien, so ist von allen Winkeln, die diese Linien mit der gegebenen bilden, der Neigungswinkel der kleinste, also z. B. $ACB < ACD$ und $ACB < ACE$.

§ 81. **Zwei Ebenen.** Ebenen sind parallel, wenn sie sich nie treffen, wie weit man sie auch verlängert.

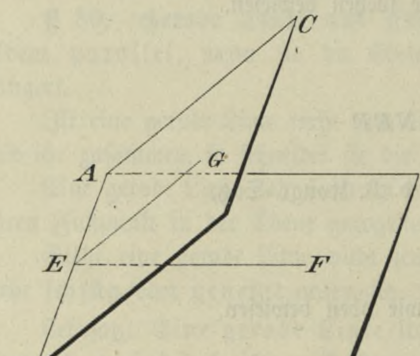


Fig. 81.

Ebenen, die nicht parallel sind, schneiden sich in einer geraden Linie und bilden einen Flächenwinkel, der in Bezug auf die Ebenen ganz dasselbe ist, was der geradlinige Winkel in Bezug auf zwei gerade Linien ist.

Man kann sich den Flächenwinkel dadurch entstanden denken, daß die eine Ebene aus ihrer Lage in die der anderen um die Durchschnittslinie als Drehungsachse der beiden Ebenen bewegt wird. Der Grad der Drehung dient als Maß für den Flächenwinkel.

Eine auf der Durchschnittslinie senkrecht stehende Linie FE beschreibt bei der Drehung denselben Winkel wie die beiden Ebenen. Man nennt ihn den Neigungswinkel der beiden Ebenen.

Der Neigungswinkel zweier Ebenen wird demnach gemessen, indem man in einem Punkte der Durchschnittslinie in beiden Ebenen Lote auf der Durchschnittslinie errichtet. Der Winkel zwischen den beiden Loten ist der Neigungswinkel.

Zwei Ebenen stehen senkrecht aufeinander, wenn ihr Neigungswinkel ein rechter Winkel ist.

Lehrsätze: 1. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind die Durchschnittslinien parallel.

2. Steht eine Linie senkrecht auf einer Ebene, so stehen auch alle Ebenen, die durch diese Linie gelegt werden, senkrecht auf jener Ebene.

3. Stehen zwei Ebenen senkrecht auf einer geraden Linie, so sind sie parallel.

Die Beweise dieser drei Sätze sind ohne Schwierigkeit aus den früheren Sätzen abzuleiten.

Lehrsatz: Fällt man von einem Punkte einer Ebene ein Lot auf eine andere Ebene und außerdem ein Lot auf die Durchschnittslinie der beiden Ebenen und verbindet die Fußpunkte dieser beiden Lote, so steht auch diese Verbindungslinie senkrecht auf der Durchschnittslinie.

Voraussetzung: $AB \perp$ Ebene MN

$AC \perp DE$

Behauptung: $BC \perp DE$

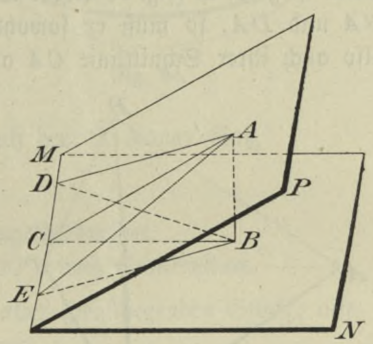


Fig. 82.

Beweis: Zum Beweise trage man auf der Durchschnittslinie von C aus nach beiden Seiten gleiche Stücke ab, $CD = CE$, und verbinde D und E sowohl mit A wie mit B; dann ist

I.... $\triangle ACD \cong \triangle ACE$ n. d. 3. Kongr.-Satz, denn es ist

$AC = AC$

$CD = CE$ nach Konstruktion,

$ACD = ACE$ $(= 90^0)$ nach Voraussetzung.

Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit aller gleichliegenden Stücke, also

$$AD = AE$$

Ferner ist

II. .... $\triangle ABD \cong \triangle ABE$ nach dem 2. Kongr.-Satz,

denn es ist

$AB = AB$

$AD = AE$ wie soeben bewiesen,

$ABD = ABE$ $(= 90^0)$ nach Voraussetzung.

Aus der Kongruenz folgt

$$BD = BE$$

Schließlich ist

III. . . . . $\triangle BCD \cong \triangle BCE$ nach dem 4. Kongr.-Satz,

denn es ist $BC = BC$

$BD = BE$ wie soeben bewiesen,

$CD = CE$ nach Konstruktion.

Aus der Kongruenz folgt

$$BCD = BCE = 90^0$$

also

$$BC \perp DE$$

§ 82. **Drei Ebenen. Räumliche Ecke.** Drei Ebenen können verschiedene Lage zu einander haben.

1. Sie können alle drei einander parallel sein, so daß sie sich gar nicht schneiden.

2. Zwei von ihnen sind parallel und werden von der dritten geschnitten. — Die beiden entstehenden Durchschnittslinien sind in diesem Falle parallel.

3. Alle drei Ebenen haben eine gemeinsame Durchschnittslinie.

4. Die Ebenen haben drei Durchschnittslinien, die einander parallel sind.

5. Die Ebenen haben drei nicht parallele Durchschnittslinien.

Im letzten Falle schneiden sich die drei Durchschnittslinien in einem Punkte. Denn ist z. B. in Fig. 83 A der Durchschnittspunkt der beiden Durchschnittslinien BA und DA, so muß er sowohl der Ebene CAD als auch der Ebene CAB, also auch ihrer Schnittlinie CA angehören.

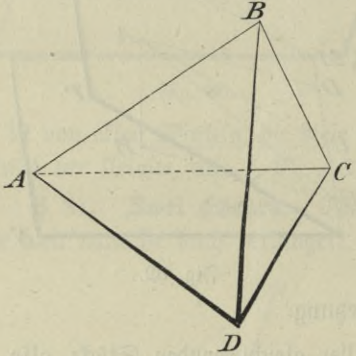


Fig. 83.

Erklärungen: Drei durch einen Punkt hindurchgehende Ebenen bilden eine dreiseitige körperliche Ecke.

Die Durchschnittslinien je zweier Ebenen einer solchen Ecke nennt man Kanten.

Den gemeinsamen Durchschnittspunkt der drei Ebenen nennt man Spitze.

Die Winkel, die zwei Kanten der Ecke miteinander bilden, heißen Seiten (Kantenwinkel) der Ecke.

Die Neigungswinkel zweier Ebenen der Ecke nennt man schlechtweg die Winkel der Ecke.

Die Kugel.

§ 83. **Erklärungen.** Eine Kugel ist eine krumme Fläche, deren sämtliche Punkte von einem innerhalb liegenden Punkte — dem Mittelpunkte — gleichen Abstand haben.

Im Gegensatz zu dem von einer Kugel begrenzten Körper, den man ebenfalls Kugel nennt, nennt man die begrenzende Fläche auch Kugeloberfläche.

Die gerade Verbindungslinie eines Punktes der Kugeloberfläche mit dem Mittelpunkt nennt man **Kugelhalbmesser**. — Alle Halbmesser derselben Kugel sind einander gleich.

Wird der Halbmesser über den Mittelpunkt hinaus nach der entgegengesetzten Seite der Kugeloberfläche verlängert, so entsteht ein **Kugeldurchmesser**. Alle Durchmesser derselben Kugel sind einander gleich.

Die Endpunkte eines Kugeldurchmessers nennt man **Gegenpunkte**.

§ 84. **Lehrsatz.** Kugel und Ebene schneiden sich in einem Kreise oder: Der ebene Kugelschnitt ist ein Kreis.

Voraussetzung: $ADBFE$ ist die Schnittfläche einer Kugel und einer Ebene.

Behauptung: $ADBFE$ ist ein Kreis.

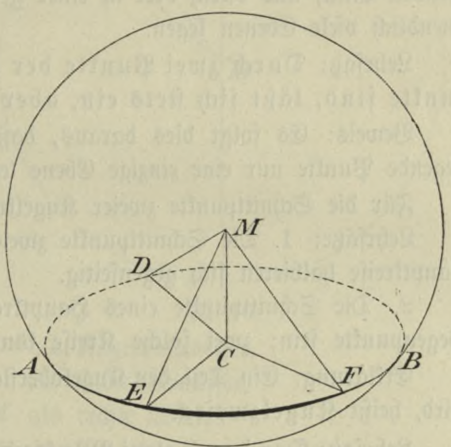


Fig. 84.

Beweis: Der Beweis ist geführt, wenn nachgewiesen ist, daß alle Punkte der Durchschnittslinie $ADBFE$ von einem innerhalb gelegenen Punkte gleichen Abstand haben. Um dies zu beweisen, fälle man vom Kugelmittelpunkte M das Lot MC auf die schneidende Ebene und verbinde beliebige Punkte der Schnittlinie, z. B. D, E und F sowohl mit M wie mit C; dann ist

$$\triangle MCD \cong \triangle MCE \cong \triangle MCF \text{ nach dem 2. Kongr.-Satz,}$$

denn es ist

$$MC = MC = MC$$
$$MD = ME = MF \text{ als Kugelhalbmesser,}$$
$$MCD = MCE = MCF \; (= 90^0) \text{ nach Konstruktion.}$$

Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit aller gleichliegenden Stücke; also

$$DC = EC = FC.$$

Was hier von den Punkten D, E und F bewiesen ist, läßt sich ebenso von allen übrigen Punkten der Durchschnittslinie beweisen; diese ist demnach ein Kreis.

Zusätze: 1. Das vom Kugelmittelpunkt auf einen Kugelschnitt gefällte Lot geht durch den Mittelpunkt des Kugelschnitts.

2. Das im Mittelpunkt eines Kugelschnitts errichtete Lot geht durch den Kugelmittelpunkt.

§ 85. **Haupt- und Nebenkreise.** Denkt man sich eine Kugel von verschiedenen Ebenen geschnitten, so sind die von diesen Ebenen ausgeschnittenen Kreise verschieden groß, und zwar sind die Kugelschnitte um so größer, je kleiner ihr Abstand vom Kugelmittelpunkt ist. Die größten Kreise werden ausgeschnitten, wenn der Kugelschnitt durch den Kugelmittelpunkt hindurchgeht.

Erklärungen: Unter einem größten Kreise oder einem Hauptkreise versteht man einen Kreis auf der Kugeloberfläche, dessen Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel hindurchgeht.

Unter einem kleineren Kreise oder einem Nebenkreise versteht man einen Kreis auf der Kugeloberfläche, dessen Ebene nicht durch den Mittelpunkt der Kugel hindurchgeht.

Lehrsatz: Durch zwei Gegenpunkte lassen sich unendlich viele größte Kreise legen.

Beweis: Die beiden Gegenpunkte liegen mit dem Mittelpunkt auf einer geraden Linie, und durch drei in einer geraden Linie liegenden Punkte lassen sich unendlich viele Ebenen legen.

Lehrsatz: Durch zwei Punkte der Kugeloberfläche, die nicht Gegenpunkte sind, läßt sich stets ein, aber auch nur ein größter Kreis legen.

Beweis: Es folgt dies daraus, daß sich durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte nur eine einzige Ebene legen läßt.

Für die Schnittpunkte zweier Kugelkreise gelten die folgenden

Lehrsätze: 1. Die Schnittpunkte zweier Hauptkreise sind Gegenpunkte; oder: Hauptkreise halbieren sich gegenseitig.

2. Die Schnittpunkte eines Hauptkreises mit einem Nebenkreise können nie Gegenpunkte sein; zwei solche Kreise können sich also nie gegenseitig halbieren.

Erklärung: Ein Teil der Kugeloberfläche, der von zwei Hauptbögen begrenzt wird, heißt Kugelzweieck.

Lehrsatz: Der durch zwei Punkte der Kugeloberfläche gelegte kleinere Bogen eines Hauptkreises (Hauptbogen) ist kürzer als ein durch die beiden Punkte gelegter Bogen eines Nebenkreises.

Beweis: Die beiden Kreise haben eine gemeinschaftliche Sehne, nämlich die gerade Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte A und B. Denkt man sich durch Drehung um diese gemeinschaftliche Sehne die beiden Kreise in eine Ebene gelegt, so muß der mit dem kleineren Halbmesser AC beschriebene Bogen ADB stärker gekrümmt sein, als der mit dem größeren Halbmesser AM beschriebene Bogen AEB; der weniger gekrümmte Bogen wird aber weniger von der geraden Linie AB abweichen, als der stärker gekrümmte Bogen, und demnach wird der Bogen des größten Kreises kürzer sein als der Bogen eines Nebenkreises.

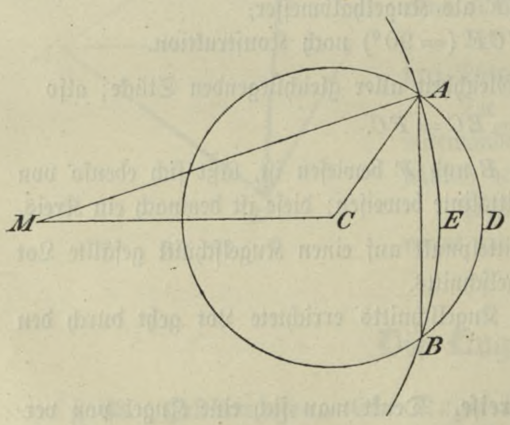


Fig. 85.

Erklärung: Den durch zwei Punkte der Kugeloberfläche gelegten Hauptbogen nennt man die sphärische Entfernung der beiden Punkte.

§ 86. Achse und Pole der Kugelkreise. Unter der **Achse** eines Kugelkreises versteht man den Kugeldurchmesser, der senkrecht auf der Ebene des Kugelkreises steht.

Die Endpunkte der Achse nennt man die **Pole** des Kugelkreises.

Lehrsatz: **Alle Punkte eines Kugelkreises haben gleiche sphärische Entfernung von den Polen des Kugelkreises.**

Voraussetzung: P ist Pol des Kugelkreises $ADBA$; PA, PD und PB sind Hauptbogen.

Behauptung: $PA = PD = PB$.

Beweis: Zum Beweise verbinde man die Punkte A, D und B sowohl mit dem Kugelmittelpunkte M, als auch mit dem Kreismittelpunkte C; dann ist

$$\triangle ACM \cong \triangle DCM \cong \triangle BCM$$

nach dem 2. Kongr.-Satz,

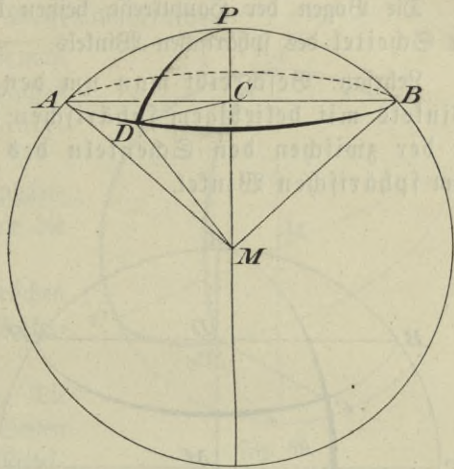


Fig. 86.

denn es ist

$AM = DM = BM$ als Kugelhalbmesser,

$AC = DC = BC$ als Kreishalbmesser,

$ACM = DCM = BCM$ als rechte Winkel.

Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit aller gleichliegenden Stücke, also

$$AMC = DMC = BMC$$

folglich auch, da der Mittelpunktswinkel gleich dem Bogen ist, auf dem er steht,

$$AP = DP = BP$$

Zusatz: Alle Punkte eines größten Kreises stehen 90^0 von den Polen des Kreises ab.

Man kann sich vorstellen, daß der Kreis ADB (Fig. 86) durch Umdrehung des Bogens PA entstanden sei. Man nennt daher den Pol eines Kugelkreises auch seinen **sphärischen Mittelpunkt**, und die sphärische Entfernung eines Punktes des Kugelkreises vom sphärischen Mittelpunkt den **sphärischen Halbmesser**.

§ 87. Der sphärische Winkel.

Erklärungen: Unter einem sphärischen Winkel versteht man die Verschiedenheit der Richtungen, welche zwei Hauptkreise in ihrem Durchschnittspunkte A haben. Da nun die Richtung eines Kreises durch die Tangente bestimmt wird, so erhält man den Winkel zwischen zwei Hauptkreisen, wenn man im Durchschnittspunkte die Tangenten AC und AD an sie legt. Da diese Tangenten auf dem Kugeldurchmesser, d. h. der Durch-

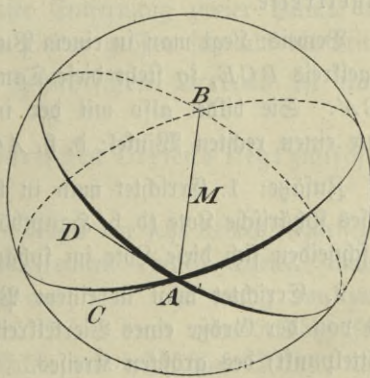


Fig. 87.

schnittslinie der Ebenen beider Kreise senkrecht stehen, so mißt der Winkel zwischen ihnen zugleich den Neigungswinkel zwischen den Ebenen der Hauptkreise. Der sphärische Winkel zweier Hauptkreise ist also dem Neigungswinkel ihrer Ebenen gleich.

Die Bogen der Hauptkreise heißen die Schenkel, ihr Durchschnittspunkt der Scheitel des sphärischen Winkels.

Lehrsatz: Beschreibt man um den Scheitelpunkt eines sphärischen Winkels mit beliebigem sphärischen Halbmesser einen Kugelkreis, so ist der zwischen den Schenkeln des Winkels liegende Bogen gleich dem sphärischen Winkel.

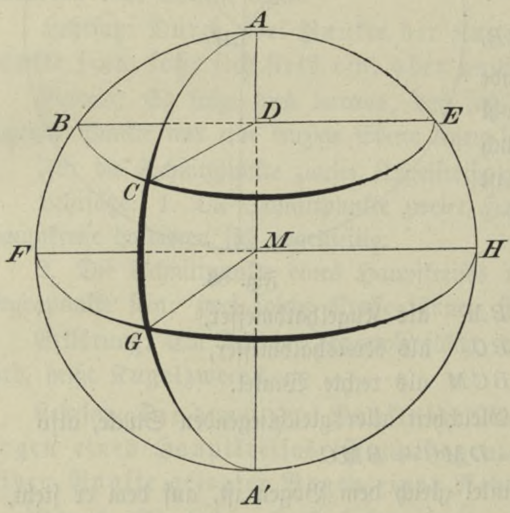


Fig. 88.

Voraussetzung: ABA' und ACA' sind größte Kreise; A ist der sphärische Mittelpunkt des Kreises BCE.

Behauptung:
Bogen $BC = BAC$.

Beweis: Der Durchmesser AA' ist Achse des Kreises BCE, steht also senkrecht auf der Ebene dieses Kreises, somit ist auch

$$CD \perp AA'$$
$$BD \perp AA'$$

Der Winkel BDC ist also der Neigungswinkel der Ebenen der beiden größten Kreise ABA' und ACA'; also nach dem Vorhergehenden

$$BDC = BAC$$

Nun ist aber $BDC =$ Bogen BC als Mittelpunktswinkel

also Bogen $BC = BAC$.

Lehrsatz: Die sphärischen Halbmesser stehen senkrecht auf dem Kugelkreise.

Beweis: Legt man in einem Punkte C (Fig. 88) die Tangente an den kleineren Kugelkreis BCE, so steht diese Tangente senkrecht zur Ebene des größten Kreises ACA'. Sie bildet also mit der im Punkte C an diesen Kreis gelegten Tangente einen rechten Winkel; d. h. AC steht senkrecht auf BCE.

Zusätze: 1. Errichtet man in beliebigen Punkten eines Haupt- oder Nebenkreises sphärische Lote (d. h. Hauptbögen, die mit dem Kreise rechte Winkel bilden), so schneiden sich diese Lote im sphärischen Mittelpunkte.

2. Errichtet man in einem Punkte eines größten Kreises ein sphärisches Lot von der Größe eines Viertelkreises, so ist der Endpunkt ein Pol (sphärischer Mittelpunkt) des größten Kreises.

Das sphärische Dreieck.

§ 88. **Erklärungen.** Ein sphärisches Dreieck ist ein von drei Hauptbogen begrenzter Teil der Kugeloberfläche.

Die begrenzenden Hauptbogen nennt man die Seiten, die sphärischen Winkel zwischen je zwei Hauptbogen schlechtweg die Winkel des sphärischen Dreiecks.

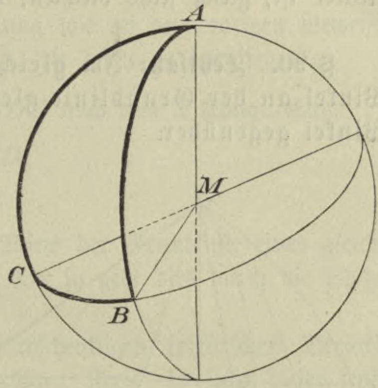


Fig. 89.

Die Bezeichnung der Stücke des sphärischen Dreiecks ist ganz entsprechend wie die der ebenen Dreiecke (siehe § 35).

Man pflegt die Seiten des sphärischen Dreiecks nicht in Linienmaß, sondern in Winkelmaß anzugeben.

Zugehörige räumliche Ecke. Die Ebenen der drei größten Kreise, die die Seiten des Dreiecks bilden, schneiden sich im Mittelpunkt der Kugel; sie bilden eine räumliche Ecke, deren Spitze der Mittelpunkt ist. Diese räumliche Ecke nennt man die dem sphärischen Dreieck zugehörige.

Zwischen sphärischem Dreieck und zugehöriger räumlicher Ecke bestehen folgende Beziehungen:

1. Die Seiten (Kantenwinkel) der Ecke sind gleich den Seiten des sphärischen Dreiecks ($AMB = AB = c$; $AMC = AC = b$; $BMC = BC = a$).

2. Die Winkel der Ecke sind gleich den Winkeln des sphärischen Dreiecks. Es ist also der Neigungswinkel der beiden Ebenen AMB und CMB gleich dem Winkel β, der Neigungswinkel der beiden Ebenen BMC und AMC gleich dem Winkel γ, und der Neigungswinkel der beiden Ebenen CMA und BMA gleich dem Winkel α.

§ 89. **Lehrsätze.** 1. Die Summe zweier Seiten eines sphärischen Dreiecks ist größer als die dritte.

Beweis: Der größte Kreis ist die kürzeste Entfernung zweier Punkte der Kugeloberfläche, also muß die Summe zweier Seiten größer sein als die dritte.

2. Die Summe der Seiten eines sphärischen Dreiecks ist stets kleiner als vier Rechte.

3. Die Summe der Winkel eines sphärischen Dreiecks liegt zwischen zwei Rechten und sechs Rechten.

Beweis: Man denke sich zunächst auf der Kugel ein sehr kleines sphärisches Dreieck, so wird sich dieses nur wenig von einem ebenen Dreieck unterscheiden. Die Summe der Winkel wird also auch nur sehr wenig von zwei Rechten verschieden sein, und die Summe der Seiten wird man beliebig klein machen können. Denkt man sich nun, die Ecken des sphärischen Dreiecks entfernten sich voneinander, so werden immer größere Dreiecke entstehen, und die

Summe der drei Seiten wird offenbar größer werden. Das größtmögliche sphärische Dreieck wird man vor sich haben, wenn die drei Eckpunkte in einen einzigen größten Kreis fallen, wenn also das ganze sphärische Dreieck in einen größten Kreis ausartet. In diesem Falle ist aber die Summe der Seiten gleich vier Rechten, und die Summe der Winkel, da jeder von ihnen ein gestreckter ist, gleich sechs Rechten, womit die Richtigkeit der Sätze dargethan ist.

§ 90. Lehrsatz: Im gleichschenkligen sphärischen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie gleich; oder: Gleichen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber.

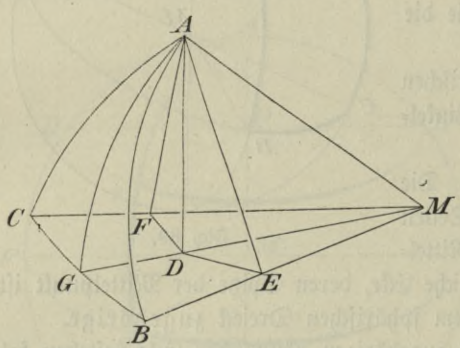


Fig. 90.

Voraussetzung: $AC = AB$

Behauptung: $\sphericalangle B = \sphericalangle C$

Beweis: Man denke sich die dem Dreieck ABC zugehörige räumliche Ecke konstruiert; dann ist $AMB = AMC$. Dann ziehe man

$AD \perp$ Ebene CMB

$AE \perp MB$

$AF \perp MC$

und verbinde D mit E und F; dann ist

$AED = \sphericalangle B$ und $AFD = \sphericalangle C$

Nun ist

I. . . . . . . $\triangle AEM \cong \triangle AFM$ nach dem 1. Kongr.-Satz,

denn es ist $AM = AM$

$AME = AMF$, da nach Voraussetzung $AB = AC$ ist,

$AEM = AFM$ $(= 90^0)$ nach Konstruktion.

Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit aller gleichliegenden Stücke, also

$$AE = AF$$

Ferner ist

II. . . . . $\triangle ADE \cong \triangle ADF$ nach dem 2. Kongr.-Satz,

denn es ist $AD = AD$

$AE = AF$, wie soeben bewiesen,

$ADE = ADF$ $(= 90^0)$ nach Konstruktion.

Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit aller gleichliegenden Stücke, also

$$AED = AFD$$

also auch $\sphericalangle B = \sphericalangle C$

Umkehrung: Gleichen Winkeln liegen gleiche Seiten gegenüber.

Beweis: Ähnlich dem vorhergehenden. Man beweist zuerst, daß

$$\triangle ADE \cong \triangle ADF$$

darauf, daß $\triangle AEM \cong \triangle AFM$

ist, woraus die Richtigkeit der Behauptung folgt.

Lehrsatz: Das aus der Spitze eines gleichschenkligen sphärischen Dreiecks auf die Grundlinie gefällte sphärische Lot halbiert die Grundlinie.

Voraussetzung (Fig. 90): $AB = AC$; $AG \perp CB$

Behauptung: $BG = CG$

Beweis: Man mache dieselbe Hülfszeichnung wie bei dem vorigen Beweise, dann fällt AD in die Ebene AGM und es ist, wie leicht zu beweisen,

$\triangle MDE \cong \triangle MDF$ nach dem 2. Kongr.-Satz,

folglich $EMD = FMD$

also auch $BG = CG$

Umkehrungen: 1. Errichtet man in der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen sphärischen Dreiecks ein sphärisches Lot, so geht dies durch die Spitze des Dreiecks.

2. Verbindet man die Spitze eines gleichschenkligen sphärischen Dreiecks mit der Mitte der Grundlinie durch einen größten Kreis, so steht dieser senkrecht auf der Grundlinie.

§ 91. Lehrsatz. Dem größeren Winkel liegt die größere Seite gegenüber.

Voraussetzung: $\sphericalangle A > \sphericalangle B$

Behauptung: $BC > AC$

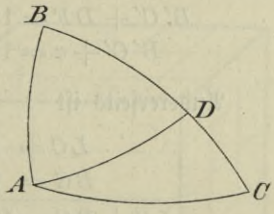


Fig. 91.

Beweis: Man lege an die Seite BA in A den Winkel $BAD = ABC$; dann ist, da gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüberliegen,

$$BD = AD$$

Addiert man auf beiden Seiten $DC = DC$

so folgt $BC = AD + DC$

Da die Summe zweier Seiten größer ist als die dritte, so ist

$$AD + DC > AC$$

also auch

$$BC > AC$$

Umkehrung: Der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber.

§ 92. Das Supplementardreieck.

Erklärung: Verlängert man die Schenkel eines jeden Winkels im sphärischen Dreieck ABC bis zu einem Viertelkreise, so daß also AD und AF, ferner BG und BH, und endlich CK und CL je gleich 90^0 sind, und legt durch D und F, ferner durch G und H, und endlich durch K und L Hauptkreise, so bilden diese ein neues sphärisches Dreieck $A'B'C'$, und es heißt sowohl $A'B'C'$ das Supplementardreieck vom ABC, als auch ABC das Supplementardreieck vom $A'B'C'$.

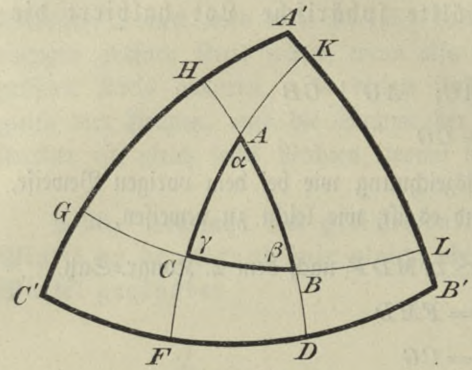


Fig. 92.

Daß auch ABC das Supplementardreieck von $A'B'C'$ ist, folgt daraus, daß dieselbe Konstruktion, wenn man von $A'B'C'$ ausgeht, auf ABC führt. Es sind nämlich die Winkel bei D, F, G, H, K, L sämtlich rechte Winkel, so daß nicht nur A der Pol des Kreises $B'C'$, sondern auch A' der Pol des Kreises LG, bezw. BC ist.

Lehrsatz: Die Winkel des sphärischen Dreiecks sind die Supplemente der entsprechenden Seiten des Supplementardreiecks, und umgekehrt die Seiten des sphärischen Dreiecks sind die Supplemente der entsprechenden Winkel des Supplementardreiecks.

Beweis: Es ist

$$\begin{array}{rl} B'F = 90^0, & \text{da } B' \text{ der Pol des Kreises } KF \text{ ist,} \\ C'D = 90^0, & \text{da } C' \text{ der Pol des Kreises } DH \text{ ist,} \\ \hline B'F + C'D = 180^0 & \text{oder} \\ B'C' + DF = 180^0 & \text{und da } DF = \alpha \text{ ist,} \\ B'C' + \alpha = 180^0 & \end{array}$$

Andererseits ist

$$\begin{array}{rl} LC = 90^0, & \text{da } C \text{ der Pol des Kreises } A'B' \text{ ist,} \\ BG = 90^0, & \text{da } B \text{ der Pol des Kreises } A'C' \text{ ist,} \\ \hline LC + BG = 180^0 & \text{oder} \\ LG + BC = 180^0 & \text{und da } LG = \alpha' \text{ ist,} \\ \alpha' + BC = 180^0 & \end{array}$$

Es ist also $B'C'$ das Supplement von α, und BC das Supplement von α'; und dasselbe läßt sich ebenso für die anderen Seiten und Winkel nachweisen.

Zusatz: Mit Hülfe dieses Satzes läßt sich aus der Eigenschaft des sphärischen Dreiecks, daß die Summe seiner Seiten zwischen 0 und 4 Rechten liegt, nachweisen, daß die Summe der Winkel zwischen 2 Rechten und 6 Rechten liegen muß.

Bezeichnet man die Seiten des sphärischen Dreiecks mit a, b, c, die Winkel des Supplementardreiecks mit α', β', γ', so liegt

$$a + b + c \text{ zwischen 0 und 4 Rechten.}$$

Es ist

$$(a + b + c) + (\alpha' + \beta' + \gamma') = 6 \text{ Rechten,}$$

also liegt

$$\alpha' + \beta' + \gamma' \text{ zwischen 6 Rechten und 2 Rechten.}$$

Körperberechnung.

§ 93. Das gerade Prisma.

Erklärungen: Ein Prisma ist ein Körper, der begrenzt wird durch zwei parallele kongruente Vielecke und durch soviele Parallelogramme, wie die Vielecke Seiten haben, deren Durchschnittslinien alle unter sich parallel sind.

Die Vielecke nennt man die Grundflächen, die Parallelogramme die Seitenflächen, die Schnittlinien der Seitenflächen mit den Grundflächen nennt man die Grundkanten, die Schnittlinien der Seitenflächen untereinander die Seitenkanten.

Ein gerades Prisma ist ein Prisma, bei dem die Seitenkanten senkrecht auf den Grundflächen stehen. In solchen Prismen sind die Seitenkanten gleich der Höhe des Prismas.

Ein gerades vierseitiges Prisma nennt man auch einen rechteckigen Körper, oder kurz einen Rechtecker.

Lehrsatz: Der Inhalt eines rechteckigen Körpers ist gleich dem Produkt aus Länge, Breite und Höhe oder gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe

$$K = l.b.H = G.H$$

Beweis: Die Kanten eines rechteckigen Körpers seien 3, 4 und 5 m lang Legt man durch die Teilpunkte Ebenen, die den anstoßenden Begrenzungsflächen parallel sind, so wird dadurch der ganze Körper in 3.4.5 Kubikeinheiten zerlegt, also

$$K = 3.4.5$$

Was hier von einem rechteckigen Körper mit den Kanten 3, 4 und 5 bewiesen ist, läßt sich von jedem anderen ebenso beweisen, also

$$K = l.b.H$$

oder da $l.b$ gleich der Grundfläche G ist

$$K = G.H$$

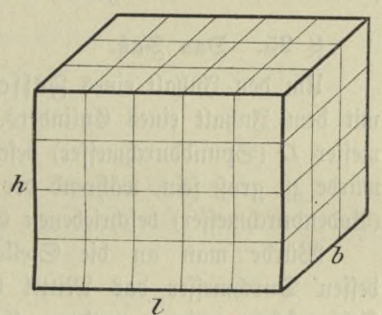


Fig. 93.

Lehrsatz: Der Inhalt eines Prismas ist gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe

$$K = G.H$$

Beweis: Man denke sich die Grundfläche des Prismas in ein Rechteck von gleichem Flächeninhalt verwandelt und über diesem Rechteck ein Prisma von derselben Höhe errichtet, dann muß der Inhalt der beiden Prismen offenbar einander gleich sein. Es ist also

$$K = G.H$$

So ist beispielsweise der Inhalt eines dreiseitigen Prismas,

a) wenn die Grundlinie g und die Höhe h der Grundfläche gegeben ist,

$$K = \frac{gh}{2} H$$

b) wenn die drei Seiten der Grundfläche gegeben sind,

$$K = H.\sqrt{\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2}-a\right)\left(\frac{s}{2}-b\right)\left(\frac{s}{2}-c\right)}, \text{ wo } s = a + b + c \text{ ist}$$

c) wenn die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck von der Seitenlänge a ist,

$$K = H.\left(\frac{a}{2}\right)^2 \sqrt{3}$$

§ 94. Der Cylinder.

Erklärung: Ein Cylinder ist ein Körper, der begrenzt wird durch zwei gleich große parallele Kreise und durch eine krumme Fläche, die entsteht, wenn eine gerade Linie senkrecht zu den Kreisen an den Umringen der beiden Kreise entlang gleitet.

Die Kreise nennt man Grundflächen, die andere Fläche Seitenfläche.

Lehrsatz: Der Inhalt eines Cylinders ist gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe

$$K = G.H = r^2 \pi H$$

Beweis: Da ein Cylinder aufgefaßt werden kann als ein Prisma, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten ist, so muß auch die Formel für den Inhalt des Prismas ohne weiteres für den Cylinder Gültigkeit haben.

§ 95. Das Faß.

Um den Inhalt eines Fasses zu bestimmen, vergleicht man ihn am besten mit dem Inhalt eines Cylinders. Der Inhalt eines mit dem größten Durchmesser D (Spunddurchmesser) beschriebenen Cylinders von der Länge des Fasses würde zu groß sein, während der Inhalt eines mit dem kleinsten Durchmesser d (Bodendurchmesser) beschriebenen Cylinders zu klein sein würde.

Würde man an die Stelle des Fasses einen Cylinder $LMNP$ setzen, dessen Durchmesser das Mittel der beiden Durchmesser wäre, so würde der Fehler schon geringer werden. Ein Blick auf die Figur lehrt indessen, daß auch dieser Cylinder zu klein ausfallen würde, da vom Bauche des Fasses mehr wegfällt, als an den Enden hinzukommt. Eine größere Genauigkeit erzielt man, wenn man den Durchmesser etwas größer macht, indem man z. B. statt des einfachen Mittels der beiden Durchmesser

$$\frac{D + d}{2}$$

das Mittel aus zwei größten und einem kleinsten Durchmesser nimmt

$$\frac{D + D + d}{3} = \frac{2D + d}{3}$$

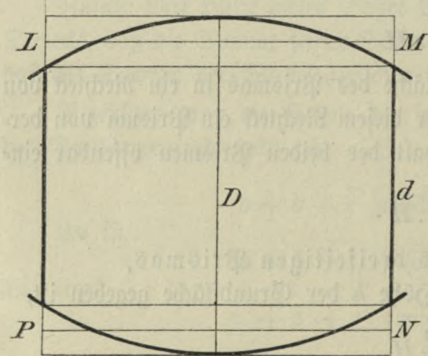


Fig. 94.

so daß der Halbmesser des Cylinders

$$r = \frac{2D + d}{6}$$

wird.

Der Inhalt des Fasses wird demnach, wenn l seine Länge bedeutet,

$$K = \left(\frac{2D + d}{6}\right)^2 \pi l$$

Selbstverständlich ist dies nur eine Näherungsformel.

Ebene Trigonometrie.

Trigonometrische Funktionen. Berechnung rechtwinkliger Dreiecke.

§ 96. Trigonometrische Funktionen. Die Trigonometrie löst die Aufgabe, aus drei gegebenen Stücken eines Dreiecks die übrigen durch Rechnung zu finden. Sie geht aus von der Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks.

Nach den Lehren der Planimetrie (§ 64) gilt der Satz: Alle rechtwinkligen Dreiecke, die einen spitzen Winkel gleich haben, sind einander ähnlich, haben also dieselben Seitenverhältnisse. Beispielsweise wird man in allen rechtwinkligen Dreiecken mit dem Winkel $\alpha = 30^0$ finden, daß die dem Winkel α gegenüberliegende Kathete a genau die Hälfte der Hypotenuse d ist, oder mit anderen Worten,

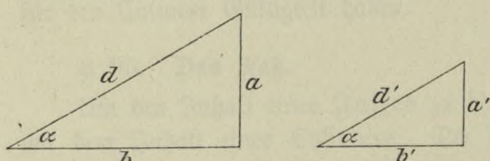


Fig. 95.

daß der Verhältnisquotient $\frac{a}{d} = \frac{a'}{d'}$ den Wert $\frac{1}{2}$ oder 0,5 besitzt. Dieser bestimmte Wert des Verhältnisses $\frac{a}{d}$ ist demnach dem rechtwinkligen Dreieck mit dem Winkel $\alpha = 30^0$, oder man kann auch sagen, dem Winkel $\alpha = 30^0$ selbst, eigentümlich. Ebenso haben die anderen Seitenverhältnisse $\frac{d}{b}$, $\frac{a}{b}$ u. s. w. für den genannten Winkel ganz bestimmte unveränderliche Werte, und es wird möglich sein, diese Werte der Seitenverhältnisse ein für alle Mal festzustellen.

Ermittelt man, von Grad zu Grad oder besser von Minute zu Minute fortschreitend, die Werte der genannten Seitenverhältnisse und stellt die erhaltenen Zahlen in Tafeln zusammen, so wird man bei der Berechnung rechtwinkliger Dreiecke die Seitenverhältnisse wieder diesen Tafeln entnehmen und zur Berechnung unbekannter Stücke aus bekannten mit Vorteil verwenden können.

Solche Tafeln nennt man trigonometrische. (Über die Berechnung trigonometrischer Tafeln siehe § 112.)

Zur bequemeren Bezeichnung hat man für die Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken folgende Namen eingeführt:

1. Unter dem Sinus eines Winkels α (geschrieben: $\sin \alpha$) versteht man das Verhältnis der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete a zur Hypotenuse d.

2. Unter dem Kosinus eines Winkels α (geschrieben: $\cos\alpha$) versteht man das Verhältnis der dem Winkel anliegenden Kathete b zur Hypotenuse d.

3. Unter der Tangente eines Winkels α (geschrieben: $\operatorname{tang}\alpha$) versteht man das Verhältnis der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete zu der anliegenden Kathete.

4. Unter der Kotangente eines Winkels α (geschrieben: $\operatorname{cotg}\alpha$) versteht man das Verhältnis der dem Winkel anliegenden Kathete zu der gegenüberliegenden Kathete.

5. Unter der Sekante eines Winkels α (geschrieben: $\sec\alpha$) versteht man das Verhältnis der Hypotenuse zu der dem Winkel anliegenden Kathete.

6. Unter der Kosekante eines Winkels α (geschrieben: $\operatorname{cosec}\alpha$) versteht man das Verhältnis der Hypotenuse zu der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete.

In der Bezeichnung der nebenstehenden Figur ist demnach

$$\sin\alpha = \frac{a}{d} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{d}$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a}{b} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sec\alpha = \frac{d}{b} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{d}{a}$$

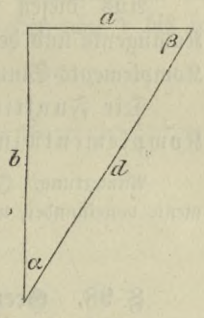


Fig. 96.

Vorstehende sechs Verhältnisse nennt man die trigonometrischen Funktionen des Winkels α.

Wie man aus der obigen Zusammenstellung sieht, gehören die sechs trigonometrischen Funktionen eines Winkels paarweise als Umkehrungen zusammen, und zwar sind jeweils

sin	und	*cosec*
cos	und	*sec*
tang	und	*cotg*

umgekehrte Werte voneinander.

Durch Umformung erhält man aus den obigen Gleichungen die folgenden:

$$a = d \cdot \sin\alpha \qquad b = d \cdot \cos\alpha$$

$$a = b \cdot \operatorname{tang}\alpha \qquad b = a \cdot \operatorname{cotg}\alpha$$

$$d = b \cdot \sec\alpha \qquad d = a \cdot \operatorname{cosec}\alpha$$

Nach diesen Gleichungen könnte man die Funktionen auch als Multiplikatoren erklären, indem man sagt:

Der Sinus ist die Zahl, mit der man die Hypotenuse multiplizieren muß, um die dem Winkel gegenüberliegende Kathete zu erhalten; u. s. f.

Aus beiden Erklärungen der trigonometrischen Funktionen geht hervor, daß sie unbenannte Zahlen sind.

Die Werte der sechs trigonometrischen Funktionen für die vollen Grade von 0^0 bis 90^0 sind in Tafel 4 zusammengestellt. Man nennt diese Werte auch im Gegensatz zu ihren Logarithmen die natürlichen Werte der Funktionen.

§ 97. Kofunktionen. Zwischen den Funktionen der beiden spitzen Winkel α und β eines rechtwinkligen Dreiecks finden die Beziehungen statt:

$$\sin\beta = \frac{b}{d} = \cos\alpha \qquad \cos\beta = \frac{a}{d} = \sin\alpha$$

$$\tang\beta = \frac{b}{a} = \cotg\alpha \qquad \cotg\beta = \frac{a}{b} = \tang\alpha$$

$$\sec\beta = \frac{d}{a} = \cosec\alpha \qquad \cosec\beta = \frac{d}{b} = \sec\alpha$$

oder wenn man $\beta = 90^0 - \alpha$ setzt:

$$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\tang(90^0 - \alpha) = \cotg\alpha \qquad \cotg(90^0 - \alpha) = \tang\alpha$$

$$\sec(90^0 - \alpha) = \cosec\alpha \qquad \cosec(90^0 - \alpha) = \sec\alpha$$

Aus diesen Gleichungen erklärt sich die Benennung des Kosinus, der Kotangente und der Kosekante als Kofunktionen; so ist Kosinus entstanden aus Komplements-Sinus, d. h. Sinus des Komplementwinkels.

Die Funktion eines Winkels ist daher gleich der Kofunktion des Komplementwinkels und umgekehrt.

Anmerkung. Ist der Winkel x kleiner als 45^0, so sind $45^0 + x$ und $45^0 - x$ Komplemente voneinander, und man hat folglich:

$$\sin(45^0 + x) = \cos(45^0 - x) \text{ u. s. w.}$$

§ 98. Grenzwerte und Verlauf der Funktionen. Da die Katheten immer kleiner sind als die Hypotenuse, so sind

1. die Sinus und Kosinus immer echte Brüche,
2. die Kosekanten und Sekanten immer unechte Brüche.

Dagegen sind

3. die Tangenten und Kotangenten entweder echte oder unechte Brüche.

Die trigonometrischen Funktionen eines Winkels α sind, wie schon erwähnt, unbenannte Zahlen. Man kann sich diese unbenannten Zahlen aber durch Linien veranschaulichen, wenn man die im Nenner stehende Seite als Einheit des Maßes annimmt. Macht man in einem rechtwinkligen Dreiecke z. B. die Hypotenuse $d = 1$ Meter, so stellen die Maßzahlen der Katheten a und b, in Metern gemessen, direkt den Sinus, beziehungsweise den Kosinus des Winkels α dar; macht man dagegen etwa die anliegende Kathete $b = 1$ Meter, so ist die Maßzahl von a die Tangente von α u. s. f.

1. Verlauf des Sinus und Kosinus.

Ist in Figur 97 $AB = 1$, so ist

$$BC = \sin\alpha \qquad AC = \cos\alpha$$

Stellt man sich nun vor, daß α, von dem Werte 0^0 beginnend, allmählich bis 90^0 wächst, so wird dabei die Senkrechte BC von 0 bis 1 wachsen, der Abschnitt AC dagegen von 1 bis 0 abnehmen; also:

Wenn der Winkel von 0° bis 90° wächst, so
wächst der Sinus von 0 bis 1,
nimmt der Kosinus ab von 1 bis 0.

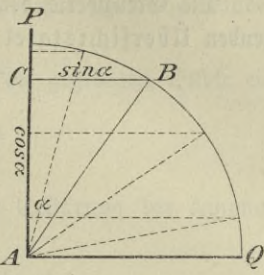


Fig. 97.

2. Verlauf der Tangente und Sekante.

Um den Verlauf der Tangente und Sekante zu veranschaulichen, macht man die anliegende Kathete gleich 1, indem man in C (Fig. 98) die Senkrechte errichtet. Trägt man dann α an AP an, so ist

$$BC = tang\,\alpha \qquad AB = sec\,\alpha$$

Stellt man sich wieder vor, daß α, von 0° beginnend, allmählich bis 90° wächst, so wird dabei BC von 0 bis ins Unendliche, AB aber von 1 bis ins Unendliche wachsen; also:

Wenn der Winkel von 0° bis 90° wächst, so

wächst die Tangente von 0 bis ∞,
wächst die Sekante von 1 bis ∞.

Für $\alpha = 45°$ ist das Dreieck gleichschenklig, also $tang\,45° = 1$, und es sind die Tangenten der Winkel unter 45° echte Brüche und die Tangenten der Winkel über 45° unechte Brüche.

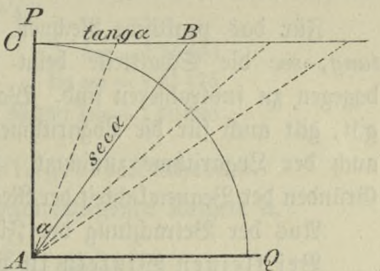


Fig. 98.

3. Verlauf der Kotangente und Kosekante.

Um auch den Verlauf der Kotangente und Kosekante zu veranschaulichen, errichtet man auf AQ (Fig. 99) in C die Senkrechte. Trägt man dann α wieder an AP an, so ist auch $ABC = \alpha$ und deshalb, da $AC = 1$ ist,

$$BC = cotg\,\alpha \qquad AB = cosec\,\alpha$$

Ist α unendlich klein, so wird B unendlich weit entfernt sein. Bei wachsendem α rückt B näher an C heran, für $\alpha = 90°$ fällt B mit C zusammen; also:

Wenn der Winkel von 0° bis 90° wächst, so

nimmt die Kotangente ab von ∞ bis 0,
nimmt die Kosekante ab von ∞ bis 1.

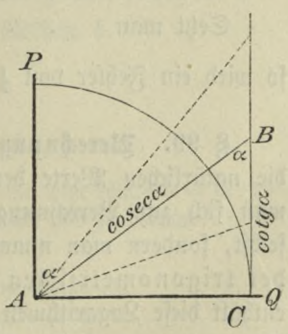


Fig. 99.

Die Grenzwerte der sechs Funktionen bei 0° und bei 90° sind in der folgenden Übersichtstafel zusammengestellt:

	0°	90°
sin	0	1
cos	1	0
tang	0	∞
cotg	∞	0
sec	1	∞
cosec	∞	1

Der Sinus, die Tangente und die Sekante wachsen mit wachsendem Winkel, die Kosekante, die Kotangente und der Kosinus nehmen mit wachsendem Winkel ab.

Für das praktische Rechnen folgt hieraus die wichtige Regel, daß bei *sin*, *tang*, *sec* die Schaltteile beim Einschalten zu addieren, bei *cos*, *cotg*, *cosec* dagegen zu subtrahieren sind. Was für die natürlichen Werte der Funktionen gilt, gilt auch für die Logarithmen der Funktionen, da ja mit wachsender Zahl auch der Logarithme zunimmt. Da wo man die Wahl hat, wird man aus Gründen der Bequemlichkeit der Rechnung gut thun, die Kofunktionen zu vermeiden.

Aus der Betrachtung der Fig. 97 erhellt noch der wichtige Satz:

Bei kleinen Winkeln ist der Sinus gleich dem Bogen des mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises, also wie dieser Bogen proportional dem Winkel selbst.

In der That fällt für kleine Winkel die Senkrechte BC merklich mit dem Bogen BP zusammen. Eine genauere Untersuchung zeigt, daß der Sinus bis nahe $\frac{1}{2}^\circ$ auf 6 Dezimalen, bis nahe 1° auf 5 Dezimalen und bis nahe 2° auf 4 Dezimalen mit dem Bogen übereinstimmt. Setzt man

$$sin\, p' = p \,.\, sin\, 1'$$

so wird ein Fehler von einer Bogenminute erst etwa bei $p = 420' = 7^\circ$ erreicht.

Setzt man $$sin\, x^0 = x \,.\, sin\, 1^\circ$$

so wird ein Fehler von $\frac{1}{2}^\circ$ erst bei etwa $x = 20^\circ$ erreicht.

§ 99. Berechnung rechtwinkliger ebener Dreiecke. Die Tafel 4 giebt die natürlichen Werte der Funktionen von Grad zu Grad. Meistens bedient man sich zur Berechnung von Dreiecken aber nicht der Werte der Funktionen selbst, sondern man nimmt Tafeln zur Hülfe, welche gleich die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen enthalten. Die Tafel 6 der Sammlung enthält diese Logarithmen der trigonometrischen Funktionen von Bogenminute zu Bogenminute (vgl. ihre Erklärung).

Ein rechtwinkliges Dreieck ist bestimmt, wenn von ihm zwei voneinander unabhängige Stücke gegeben sind.

Man hat die beiden Fälle zu unterscheiden, daß die gegebenen Stücke ein Winkel und eine Seite oder daß sie zwei Seiten sind.

I. Fall: Gegeben ein Winkel und eine Seite.

Die Lösung der Aufgabe liegt unmittelbar in der Erklärung der trigonometrischen Funktionen.

a) Gegeben der Winkel α und die Hypotenuse d.

Gesucht die Katheten a und b.

Es ist $\frac{a}{d} = \sin\alpha \qquad \frac{b}{d} = \cos\alpha$

also $a = d \,.\, \sin\alpha \qquad b = d \,.\, \cos\alpha$

Beispiel: Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben der eine spitze Winkel $\alpha = 49^0 15'$ und die Hypotenuse $d = 56{,}3$. Die fehlenden Stücke sind zu berechnen.

$\beta = 90^0 - \alpha = 40^0 45'$

$d = 56{,}3$	$\log = 1{,}75\,051$		$\log = 1{,}75\,051$
$\alpha = 49^0 15'$	$\log \sin = \underline{9{,}87\,942}$		$\log \cos = \underline{9{,}81\,475}$
$a = 42{,}651$	$\log = 1{,}62\,993$	$b = 36{,}750$	$\log = 1{,}56\,526$

b) Gegeben der Winkel α und die anliegende Kathete b.

Gesucht die Hypotenuse d und die gegenüberliegende Kathete a.

Es ist $\frac{d}{b} = \sec\alpha \qquad \frac{a}{b} = \operatorname{tang}\alpha$

also $d = b \,.\, \sec\alpha \qquad a = b \,.\, \operatorname{tang}\alpha$

Beispiel: Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben der eine spitze Winkel $\alpha = 37^0 47'$ und die anliegende Kathete $b = 112{,}8$. Die fehlenden Stücke sind zu berechnen.

$\beta = 90^0 - \alpha = 52^0 13'$

$b = 112{,}8$	$\log = 2{,}05\,231$		$\log = 2{,}05\,231$
$\alpha = 37^0 47'$	$\log \sec = \underline{0{,}10\,219}$		$\log \operatorname{tang} = \underline{9{,}88\,942}$
$d = 142{,}73$	$\log = 2{,}15\,450$	$a = 87{,}444$	$\log = 1{,}94\,173$

c) Gegeben der Winkel α und die gegenüberliegende Kathete a.

Gesucht die Hypotenuse d und die anliegende Kathete b.

Es ist $\frac{d}{a} = \operatorname{cosec}\alpha \qquad \frac{b}{a} = \operatorname{cotg}\alpha$

also $d = a \,.\, \operatorname{cosec}\alpha \qquad b = a \,.\, \operatorname{cotg}\alpha$

Beispiel: Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben der eine spitze Winkel $\alpha = 12^0 29'$ und die gegenüberliegende Kathete $a = 0{,}367$. Die fehlenden Stücke sind zu berechnen.

$\beta = 90^0 - \alpha = 77^0 31'$

$a = 0{,}367$	$\log = 9{,}56\,467$		$\log = 9{,}56\,467$
$\alpha = 12^0 39'$	$\log \operatorname{cosec} = \underline{0{,}65\,957}$		$\log \operatorname{cotg} = \underline{0{,}64\,889}$
$d = 1{,}6759$	$\log = 0{,}22\,424$	$b = 1{,}6352$	$\log = 0{,}21\,356$

II. Fall. Gegeben zwei Seiten.

Sind zwei Seiten gegeben, so kommt es zunächst darauf an, einen spitzen Winkel zu finden. Dann kann man die dritte Seite mit Hülfe dieses Winkels und einer der beiden gegebenen Seiten nach einem der drei vorhergehenden Fälle berechnen.

d) Gegeben die Hypotenuse d und die Kathete a.
Gesucht der Winkel α und die Kathete b.

$$\sin\alpha = \frac{a}{d} \qquad \frac{b}{d} = \cos\alpha$$

$$b = d \cdot \cos\alpha$$

Beispiel: Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben die Hypotenuse $d = 3$, die Kathete $a = 2$. Die fehlenden Stücke sind zu berechnen.

$a = 2$	$\log = 0{,}30\,103$		
$d = 3$	$\operatorname{colog} = 9{,}52\,288$		$\log = 0{,}47\,712$
$\alpha = 41^\circ\,48{,}6'$	$\log\sin = 9{,}82\,391$		$\log\cos = 9{,}87\,236$
$\beta = 48^\circ\,11{,}4'$		$b = 2{,}2361$	$\log = 0{,}34\,948$

e) Gegeben die Hypotenuse d und die Kathete b.
Gesucht der Winkel α und die Kathete a.

$$\sec\alpha = \frac{d}{b} \qquad \frac{a}{b} = \operatorname{tang}\alpha$$

$$a = b \cdot \operatorname{tang}\alpha$$

Beispiel: Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben die Hypotenuse $d = 0{,}75$, die Kathete $b = 0{,}46$. Die fehlenden Stücke sind zu berechnen.

$d = 0{,}75$	$\log = 9{,}87\,506$		
$b = 0{,}46$	$\operatorname{colog} = 0{,}33\,724$		$\log = 9{,}66\,276$
$\alpha = 52^\circ\,10{,}1'$	$\log\sec = 0{,}21\,230$		$\log\operatorname{tang} = 0{,}10\,983$
$\beta = 37^\circ\,49{,}9'$		$a = 0{,}59236$	$\log = 9{,}77\,259$

f) Gegeben die Katheten a und b.
Gesucht α und die Hypotenuse d.

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a}{b} \qquad \frac{d}{b} = \sec\alpha$$

$$d = b \cdot \sec\alpha$$

Beispiel: Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben die eine Kathete $a = 0{,}09$, die andere $b = 0{,}27$. Die fehlenden Stücke sind zu berechnen.

$a = 0{,}09$	$\log = 8{,}95\,424$		
$b = 0{,}27$	$\operatorname{colog} = 0{,}56\,864$		$\log = 9{,}43\,136$
$\alpha = 18^\circ\,26{,}1'$	$\log\operatorname{tang} = 9{,}52\,288$		$\log\sec = 0{,}02\,287$
$\beta = 71^\circ\,33{,}9'$		$d = 0{,}28460$	$\log = 9{,}45\,423$

Wegen des Überganges von dem Logarithmen einer trigonometrischen Funktion zu dem einer anderen vergleiche die Erklärung zu Tafel 6.

Man würde in den drei letzten Fällen auch ohne trigonometrische Rechnung die dritte Seite nach den Formeln (§ 66)

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a = \sqrt{d^2 - b^2} = \sqrt{(d+b).(d-b)}$$
$$b = \sqrt{d^2 - a^2} = \sqrt{(d+a).(d-a)}$$

unmittelbar bestimmen können.

§ 100. Beziehungen zwischen den Funktionen desselben Winkels. Wenn eine Funktion eines Winkels gegeben ist, so sind auch die übrigen fünf Funktionen des Winkels bestimmt. Es bestehen nämlich zwischen den Funktionen eines Winkels folgende Gleichungen:

1. . . . . $\boldsymbol{sin\,\alpha \,.\, cosec\,\alpha = 1}$

oder $sin\,\alpha = \frac{1}{cosec\,\alpha}$ $cosec\,\alpha = \frac{1}{sin\,\alpha}$

Beweis: Es ist

$$sin\,\alpha = \frac{a}{d}$$
$$cosec\,\alpha = \frac{d}{a}$$
$$sin\,\alpha \,.\, cosec\,\alpha = \frac{a}{d} \cdot \frac{d}{a} = 1$$

2. . . . . $\boldsymbol{cos\,\alpha \,.\, sec\,\alpha = 1}$

oder $cos\,\alpha = \frac{1}{sec\,\alpha}$ $sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}$

Beweis ähnlich dem der Formel 1.

3. . . . . $\boldsymbol{tang\,\alpha \,.\, cotg\,\alpha = 1}$

oder $tang\,\alpha = \frac{1}{cotg\,\alpha}$ $cotg\,\alpha = \frac{1}{tang\,\alpha}$.

Beweis ähnlich dem der Formel 1.

Diese drei Gleichungen drücken aus, daß die Funktionen $sin\,\alpha$ und $cosec\,\alpha$; $cos\,\alpha$ und $sec\,\alpha$; $tang\,\alpha$ und $cotg\,\alpha$ gegenseitig umgekehrte Werte voneinander sind.

4. . . . . $\boldsymbol{\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = tang\,\alpha}$

Beweis: Es ist

$$sin\,\alpha = \frac{a}{d}$$
$$cos\,\alpha = \frac{b}{d}$$
$$\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{a}{d} : \frac{b}{d} = \frac{a}{d} \cdot \frac{d}{b} = \frac{a}{b} = tang\,\alpha$$

Man kann diese Gleichung auch in der Form schreiben:

$$\sin\alpha \,.\, \sec\alpha = \tang\alpha$$

5. . . . . $$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cotg\alpha$$

Beweis ähnlich dem der Formel 4.

Man kann diese Gleichung auch in der Form schreiben:

$$\cos\alpha \,.\, \cosec\alpha = \cotg\alpha$$

Die unter 4. und 5. aufgeführten Gleichungen sind eine Folge davon, daß in einem Dreiecke durch zwei Seitenverhältnisse auch das dritte mit bestimmt ist.

6. . . . . $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

oder $$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \qquad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

Beweis: Nach dem pythagoreischen Lehrsatz ist

$$a^2 + b^2 = d^2$$

Dividiert man auf beiden Seiten durch d^2, so erhält man

$$\frac{a^2}{d^2} + \frac{b^2}{d^2} = \frac{d^2}{d^2}$$

oder (§ 15, Lehrsatz 7) $$\left(\frac{a}{d}\right)^2 + \left(\frac{b}{d}\right)^2 = 1$$

oder $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

7. . . . . $$\tang^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

Beweis: Man dividiere auf beiden Seiten der Gleichung $a^2 + b^2 = d^2$ durch b^2 und verfahre wie beim Beweise der Formel 6.

8. . . . . $$1 + \cotg^2\alpha = \cosec^2\alpha$$

Beweis: Man dividiere auf beiden Seiten der Gleichung $a^2 + b^2 = d^2$ durch a^2 und verfahre wie beim Beweise der Formel 6.

Die unter 6., 7. und 8. aufgeführten drei Gleichungen sind eine Folge des pythagoreischen Lehrsatzes.

Beispiele: 1. Es sei $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Wie groß sind die übrigen Funktionen desselben Winkels?

Lösung: Nach Formel 1. ist $\cosec\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{5}{3}$

Nach Formel 6. ist $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

Nach Formel 2. ist $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{5}{4}$

Lösung: Nach Formel 4. ist $tang\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$

Nach Formel 3. ist $cotg\,\alpha = \frac{1}{tang\,\alpha} = \frac{4}{3}$

2. Wenn man in einem gleichseitigen Dreieck eine Höhe fällt, so findet man, daß $sin\,30^0 = \frac{1}{2}$ ist. Wie groß sind die übrigen Funktionen dieses Winkels?

Lösung: $cosec\,30^0 = 2$; $cos\,30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $sec\,30^0 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$; $tang\,30^0 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$; $cotg\,30^0 = \sqrt{3}$.

3. Aus der Betrachtung des gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks geht hervor, daß $tang\,45^0 = 1$ ist. Wie groß sind die übrigen Funktionen dieses Winkels?

Lösung: $cotg\,45^0 = 1$; $sec^2\,45^0 = 1 + tang^2\,45^0 = 2$, also $sec\,45^0 = \sqrt{2}$; $cos\,45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $sin\,45^0 = tang\,45^0 . cos\,45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $cosec\,45^0 = \sqrt{2}$.

§ 101. Erweiterung des Begriffes der trigonometrischen Funktionen.

Die trigonometrischen Funktionen sind zunächst nur für spitze Winkel erklärt. Unter Heranziehung der in § 98 benutzten Darstellung der Funktionen als Liniengrößen ist es nicht schwer, die Erklärung auch auf stumpfe, überstumpfe und negative Winkel auszudehnen. Ergänzen wir die Figur 97 zu dem Zwecke in der Weise, daß wir zu dem in der Figur allein dargestellten ersten Quadranten noch die drei übrigen als zweiten, dritten und vierten Quadranten (rechtsherum gezählt) hinzufügen.

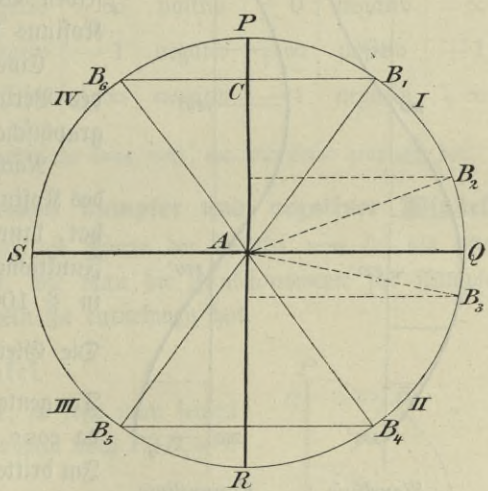


Fig. 100.

Wir hatten den Schenkel AB des Winkels α sich allmählich aus der Lage AP ($\alpha = 0^0$) bis in die Lage AQ ($\alpha = 90^0$) drehen lassen. Diese Drehung wollen wir jetzt über AQ hinaus fortgesetzt denken, indem wir immer von dem Endpunkte (B_1, B_2, B_3 ...) das Lot auf PR fällen. Unter dem Sinus des Winkels α wollen wir dann die jeweilige Länge dieses Lotes, unter dem Kosinus des Winkels α die Länge des von A aus gemessenen Abschnittes von PR verstehen, wobei wir noch festsetzen, daß die Linien als negativ gelten sollen, wenn ihre Richtung der im ersten Quadranten für sie stattfindenden entgegengesetzt ist.

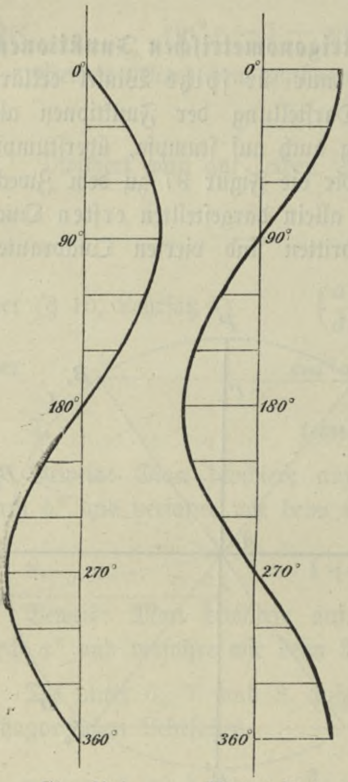
In der obigen Figur sind demnach die Richtungen von A nach P (nach oben) und von A nach Q (nach rechts) als positiv angenommen. Von A nach R (nach unten) oder von A nach S (nach links) gerichtete Strecken sind als negativ zu betrachten.

Lassen wir die Drehung selbst über 180° hinausgehen, bis der Schenkel *AB* sich schließlich ganz herumgedreht hat, so ist aus der Figur ohne weiteres folgendes klar:

Der **Sinus** wächst im ersten Quadranten von 0 bis 1, nimmt im zweiten Quadranten ab von 1 bis 0, wird im **dritten Quadranten negativ**, ist bei 270° gleich -1 und kehrt im vierten Quadranten (immer noch negativ) zur Null zurück.

Der **Kosinus** nimmt im ersten Quadranten ab von 1 bis 0, **wird im zweiten Quadranten negativ**, ist bei 180° gleich -1, geht dann im dritten Quadranten (immer noch negativ) zur Null zurück und wird im vierten Quadranten wieder positiv.

Um sich den Verlauf des Sinus bildlich zu veranschaulichen, denke man sich den Umring des Kreises *PQRS* in eine aufrechte Linie (Fig. 101) ausgestreckt. Man teile diese Linie, der Gradeinteilung des Kreises entsprechend, in 360 gleiche Teile. Dann trage man in den Teilpunkten die Werte des Sinus senkrecht zu der Linie auf, und zwar die positiven nach rechts, die negativen nach links. Verbindet man die Endpunkte der Senkrechten durch eine schlank ausgezogene Linie (Kurve genannt), so veranschaulicht diese den Verlauf des Sinus in den vier Quadranten. In derselben Weise ist in Fig. 101 der Verlauf des Kosinus dargestellt.



Sinuslinie *Kosinuslinie*
Fig. 101.

Eine derartige bildliche Veranschaulichung des Verlaufes einer Funktion nennt man eine graphische Darstellung.

Nachdem man die Begriffe des Sinus und des Kosinus auf die oben erörterte Art erweitert hat, kann man auch die Begriffe der übrigen Funktionen erweitern unter Zuhülfenahme der in § 100 aufgestellten Gleichungen 1 bis 5. Die Gleichung $tang\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$ zeigt, daß die Tangente im zweiten Quadranten negativ wird, da $cos\,\alpha$ negativ wird, $sin\,\alpha$ aber positiv bleibt. Im dritten Quadranten ist dagegen die Tangente positiv, da hier $sin\,\alpha$ und $cos\,\alpha$ beide negativ sind. Im vierten Quadranten wird die Tangente wieder negativ. Bei 0° und 180° geht die Tangente durch Null, bei 90° und 270° springt sie von $+\infty$ auf $-\infty$.

Da umgekehrte Werte stets dasselbe Zeichen haben, so gilt über das Negativwerden der Funktionen überhaupt folgende Regel:

Der Sinus und die Kosekante sind negativ im dritten und vierten, der Kosinus und die Sekante sind negativ im zweiten und dritten,

die Tangente und die Kotangente sind negativ im zweiten und vierten Quadranten, nach folgender schematischen Übersicht:

	I. Quadr.	II. Quadr.	III. Quadr.	IV. Quadr.
sin, cosec	$+$	$+$	$-$	$-$
cos, sec	$+$	$-$	$-$	$+$
tang, cotg	$+$	$-$	$+$	$-$

Aus den Grenzwerten des Sinus und des Kosinus ergeben sich vermittelst der Gleichungen 1 bis 5 in § 100 unter Berücksichtigung der Beziehungen $\frac{1}{1} = 1$; $\frac{1}{\infty} = 0$; $\frac{1}{0} = \infty$ die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Grenzwerte für alle sechs Funktionen:

	0^0	I	90^0	II	180^0	III	270^0	IV	360^0
sin	∓ 0	positiv	$+1$	positiv	± 0	negativ	-1	negativ	∓ 0
cos	$+1$	positiv	± 0	negativ	-1	negativ	∓ 0	positiv	$+1$
tang	∓ 0	positiv	$\pm\infty$	negativ	∓ 0	positiv	$\pm\infty$	negativ	∓ 0
cotg	$\mp\infty$	positiv	± 0	negativ	$\mp\infty$	positiv	± 0	negativ	$\mp\infty$
sec	$+1$	positiv	$\pm\infty$	negativ	-1	negativ	$\mp\infty$	positiv	$+1$
cosec	$\mp\infty$	positiv	$+1$	positiv	$\pm\infty$	negativ	-1	negativ	$\mp\infty$

Aufgabe: Stelle den Verlauf der Funktionen *tang, cotg*, *sec* und *cosec* graphisch dar.

§ 102. Werte der Funktionen stumpfer und negativer Winkel.

Da die trigonometrischen Tafeln nur die Werte der Winkel von 0^0 bis 90^0 enthalten, so ist noch zu untersuchen, wie man die Funktionswerte für stumpfe und negative Winkel aus diesen Tafeln zu entnehmen hat.

a) Stumpfe Winkel.

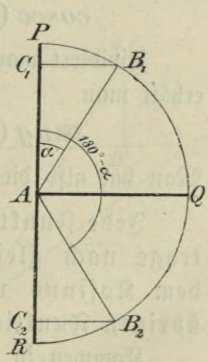


Fig. 102.

Ist PAB_2 ein stumpfer Winkel, so setze man seinen spitzen Nebenwinkel $RAB_2 = \alpha$. Trägt man noch $PAB_1 = \alpha$ an PA an, so ist

$$\triangle AB_2C_2 \cong \triangle AB_1C_1,$$

daher

$$C_2B_2 = C_1B_1; \quad AC_2 = -AC_1$$

deshalb

$$\sin PAB_2 = \sin PAB_1; \quad \cos PAB_2 = -\cos PAB_1$$

oder

$$\boldsymbol{\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha; \quad \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha}$$

Nimmt man auf beiden Seiten die umgekehrten Werte, so findet man:

$$\boldsymbol{cosec}\,(180^0 - \alpha) = \boldsymbol{cosec}\,\alpha \qquad \boldsymbol{sec}\,(180^0 - \alpha) = -\,\boldsymbol{sec}\,\alpha$$

Ferner erhält man durch Division der rechten und linken Seiten der obigen Gleichungen

$$\boldsymbol{tang}\,(180^0 - \alpha) = -\,\boldsymbol{tang}\,\alpha \qquad \boldsymbol{cotg}\,(180^0 - \alpha) = -\,\boldsymbol{cotg}\,\alpha$$

Die in diesen sechs Gleichungen ausgesprochene Regel kann man zusammenfassend so aussprechen:

Jede Funktion eines stumpfen Winkels ist ihrem absoluten Betrage nach gleich derselben Funktion des Supplementwinkels. Bei dem Sinus und der Kosekante ist das Vorzeichen plus, bei den übrigen Funktionen minus.

Da ein Winkel und sein Supplement denselben Sinus haben, so folgt umgekehrt, daß zu jedem (positiven) Sinuswert zwei Winkel gehören: ein spitzer Winkel und sein stumpfer Nebenwinkel.

Anmerkung: Ist x ein spitzer Winkel, so sind $90^0 + x$ und $90^0 - x$ Supplementwinkel, und man hat

$$sin\,(90^0 + x) = sin\,(90^0 - x) = cos\,x$$

$$cos\,(90^0 + x) = -\,cos\,(90^0 - x) = -\,sin\,x \text{ u. s. w.}$$

b) Negative Winkel.

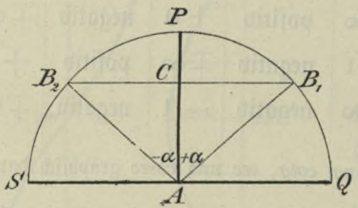


Fig. 103.

Ein negativer Winkel entsteht durch Drehung des Schenkels AB linksherum. Ist in der Figur $PAB_1 = +\alpha$ und $PAB_2 = -\alpha$, so ist

$$CB_1 = -\,CB_2; \quad AC = AC$$

deshalb

$$\boldsymbol{sin}\,(-\alpha) = -\,\boldsymbol{sin}\,\alpha \qquad \boldsymbol{cos}\,(-\alpha) = +\,\boldsymbol{cos}\,\alpha$$

Nimmt man auf beiden Seiten die umgekehrten Werte, so erhält man

$$\boldsymbol{cosec}\,(-\alpha) = -\,\boldsymbol{cosec}\,\alpha \qquad \boldsymbol{sec}\,(-\alpha) = +\,\boldsymbol{sec}\,\alpha$$

Dividiert man die beiden Seiten der obigen Gleichungen durch einander, so erhält man

$$\boldsymbol{tang}\,(-\alpha) = -\,\boldsymbol{tang}\,\alpha \qquad \boldsymbol{cotg}\,(-\alpha) = -\,\boldsymbol{cotg}\,\alpha$$

Man hat also die Regel:

Jede Funktion eines negativen Winkels ist ihrem absoluten Betrage nach gleich derselben Funktion des positiven Winkels. Bei dem Kosinus und der Sekante ist das Vorzeichen plus, bei den übrigen Funktionen minus.

Kommen in einer Rechnung Produkte von Funktionen stumpfer oder negativer Winkel vor, so hat man seine Aufmerksamkeit besonders auch auf das Vorzeichen des Produktes zu richten. Bei logarithmischen Rechnungen wendet man in solchen Fällen das Hülfsmittel an, daß man hinter die Logarithmen der mit negativen Zeichen behafteten Funktionen ein n schreibt. Eine gerade Anzahl solcher n ist alsdann das Zeichen für ein positives, eine ungerade Anzahl das Zeichen für ein negatives Produkt.

§ 103. Funktionen zweiteiliger Winkel. Wenn α und β zwei beliebige Winkel sind, so gelten für die Sinus und Kosinus der Summe und der Differenz dieser Winkel die im folgenden zusammengestellten und abgeleiteten Formeln.

1. . . $\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}$

Ableitung: Es sei in Fig. 104 $DMC = \alpha$ und $CMA = \beta$; dann ist $DMA = \alpha + \beta$. Man mache $MA = 1$ und ziehe $AB \perp MD$, $AC \perp MC$ und $CD \perp MD$. Dann ist $CAB = DMC = \alpha$, weil beide dasselbe Komplement ($BFM = CFA$) haben. Zieht man noch $CE \| DM$, so ist

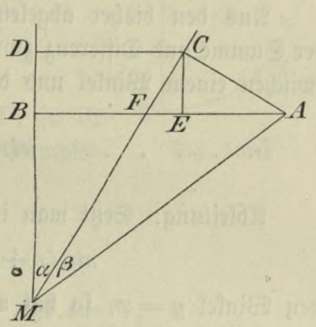


Fig. 104.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= BA \\ &= BE + EA \\ &= DC + EA \\ &= MC \cdot \sin\alpha + CA \cdot \cos\alpha \\ &= \cos\beta \cdot \sin\alpha + \sin\beta \cdot \cos\alpha \end{aligned}$$

oder $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

2. . . . $\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$

Ableitung: In der obigen Figur (Fig. 104) ist

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= MB \\ &= MD - DB \\ &= MD - CE \\ &= MC \cdot \cos\alpha - CA \cdot \sin\alpha \\ &= \cos\beta \cdot \cos\alpha - \sin\beta \cdot \sin\alpha \end{aligned}$$

oder $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

3. . . $\boldsymbol{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta}$

Ableitung: Es sei in Fig. 105 $BMC = \alpha$ und $CMA = \beta$; dann ist $BMA = \alpha - \beta$. Man mache $MA = 1$ und ziehe $AB \perp MB$, $AC \perp MC$ und $CD \perp MB$. Dann ist $ACD = BMC = \alpha$, weil beide dasselbe Komplement (DCM) haben. Zieht man noch $AE \| BM$, so ist

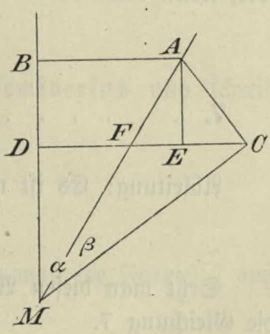


Fig. 105.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha-\beta) &= BA \\ &= DE \\ &= DC - CE \\ &= MC \cdot \sin\alpha - CA \cdot \cos\alpha \\ &= \cos\beta \cdot \sin\alpha - \sin\beta \cdot \cos\alpha \end{aligned}$$

oder $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$

4. . . . $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta + \sin\alpha \,.\, \sin\beta$

Ableitung: In der obigen Figur (Fig. 105) ist

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= MB \\ &= MD + DB \\ &= MD + EA \\ &= MC \,.\, \cos\alpha + CA \,.\, \sin\alpha \\ &= \cos\beta \,.\, \cos\alpha + \sin\beta \,.\, \sin\alpha \end{aligned}$$

oder $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta + \sin\alpha \,.\, \sin\beta$

Aus den bisher abgeleiteten vier Ausdrücken für den Sinus und Kosinus der Summe und Differenz **zweier Winkel** ergeben sich noch folgende Beziehungen zwischen einem Winkel und dem halben Winkel.

5. . . . . . . $\sin\alpha = 2 \,.\, \sin\frac{\alpha}{2} \,.\, \cos\frac{\alpha}{2}$

Ableitung: Setzt man in der Formel

$$\sin(x + y) = \sin x \,.\, \cos y + \cos x \,.\, \sin y$$

den Winkel $y = x$, so hat man

$$\sin 2x = 2 \,.\, \sin x \,.\, \cos x$$

Ist nun $2x = \alpha$, also $x = \alpha/_2$, so wird aus der vorstehenden Formel

$$\sin\alpha = 2 \,.\, \sin \alpha/_2 \,.\, \cos \alpha/_2$$

6. . . . . . . $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$

Ableitung: Setzt man in der Formel

$$\cos(x + y) = \cos x \,.\, \cos y - \sin x \,.\, \sin y$$

den Winkel $y = x$, so hat man

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

oder, wenn man $2x = \alpha$, also $x = \alpha/_2$ setzt,

$$\cos\alpha = \cos^2 \alpha/_2 - \sin^2 \alpha/_2$$

7. . . . . $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

Ableitung: Es ist nach § 100, Formel 6

$$\cos^2 \alpha/_2 = 1 - \sin^2 \alpha/_2$$

Setzt man diesen Wert für $\cos^2 \alpha/_2$ in die Gleichung 6 ein, so erhält man die Gleichung 7.

8. . . . . $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$

Ableitung: Es ist nach § 100, Formel 6

$$\sin^2 \alpha/_2 = 1 - \cos^2 \alpha/_2$$

Setzt man diesen Wert für $\sin^2 \alpha/_2$ in die Gleichung 6 ein, so erhält man die Gleichung 8.

Anmerkung: Die Formeln 5—8 lassen sich auch leicht unmittelbar aus der nebenstehenden Figur ableiten. Es sei AC der Durchmesser eines Kreises, der mit dem Halbmesser gleich 1 beschrieben ist, und $AMB = \alpha$; dann ist ACB als Umringswinkel gleich $\alpha/_2$, und im rechtwinkligen Dreieck ABC ist

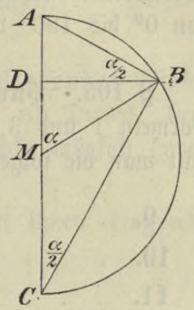


Fig. 106.

$$AB = AC . \sin \alpha/_2 = 2 \sin \alpha/_2$$
$$BC = AC . \cos \alpha/_2 = 2 \cos \alpha/_2$$

Fällt man nun von B auf AC das Lot BD, so ist $DBA = DCB = \alpha/_2$, weil beide Winkel dasselbe Komplement (DBC) haben, und man hat

$$\sin \alpha = BD = AB . \cos \alpha/_2$$

(5). . . $\sin \alpha = 2 \sin \alpha/_2 . \cos \alpha/_2$

$$\cos \alpha = MD = MA - AD = 1 - AB . \sin \alpha/_2$$

(7). . . $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha/_2$

$$\cos \alpha = MD = DC - MC = BC . \cos \alpha/_2 - 1$$

(8). . . $\cos \alpha = 2 \cos^2 \alpha/_2 - 1$

Durch Addition der Formeln (7) und (8) und Division durch 2 erhält man auch die Formel 6.

§ 104. Sinusversus und Semiversus.

Aus der Formel 7 folgt

$$2 \sin^2 \alpha/_2 = 1 - \cos \alpha$$

Dem Unterschiede $1 - \cos \alpha$ hat man den Namen Sinusversus gegeben, und zwar schreibt man

$$\operatorname{vers} \alpha = 1 - \cos \alpha$$

Es ist dann $2 \sin^2 \alpha/_2 = \operatorname{vers} \alpha$

$$\sin^2 \alpha/_2 = \tfrac{1}{2} \operatorname{vers} \alpha$$

Den halben Sinusversus bezeichnet man als Semiversus und schreibt dementsprechend

$$\operatorname{sem} \alpha = \tfrac{1}{2} \operatorname{vers} \alpha = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

und es ist $\sin^2 \alpha/_2 = \operatorname{sem} \alpha$

Unter Benutzung dieser neuen Bezeichnungen kann man die Formel 7 auch so schreiben

7a. . . . . $\boldsymbol{\cos \alpha = 1 - \operatorname{vers} \alpha}$

7b. . . . . $\boldsymbol{\cos \alpha = 1 - 2 \operatorname{sem} \alpha}$

In der Fig. 100 ist der Sinusversus durch die Linie PC dargestellt. Aus dieser Figur kann man über den Verlauf dieser neuen Funktion folgendes entnehmen: Bei $\alpha = 0^{\circ}$ ist $vers\,\alpha = 0$, bei wachsendem Winkel wächst der Sinusversus, bei 90° ist er $= 1$, er nimmt dann noch weiter zu, bis er bei 180° den Wert 2 erreicht. Entsprechend wächst der Semiversus für die Winkel von 0° bis 180° von 0 bis 1.

§ 105. Summen und Differenzen der Funktionen. Wenn man die Formeln 1 und 3, sowie 2 und 4 des § 103 addiert und subtrahiert, so erhält man die folgenden vier Gleichungen

9. . . . $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha.\cos\beta$

10. . . . $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha.\sin\beta$

11. . . . $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha.\cos\beta$

12. . . . $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha.\sin\beta$

Diese Gleichungen gelten für je zwei beliebige Winkel. Für die Winkel x und y lauten sie beispielsweise

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x.\cos y$$
$$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x.\sin y$$
$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x.\cos y$$
$$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x.\sin y$$

Setzt man in diesen Gleichungen

$$x+y=\alpha$$
$$x-y=\beta$$

also $2x=\alpha+\beta$ oder $x=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

$2y=\alpha-\beta$ oder $y=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$,

so erhält man aus ihnen die folgenden vier Formeln für die Summe und die Differenz zweier Sinus bezw. zweier Kosinus:

13. . . . $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

14. . . . $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

15. . . . $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

16. . . . $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$

In der letzten Formel ist das auf der rechten Seite der Gleichung 12. stehende Minuszeichen dadurch berücksichtigt, daß

$$-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)$$

gesetzt worden ist.

Berechnung schiefwinkliger ebener Dreiecke.

§ 106. Unterscheidung der möglichen Fälle. Ebenso wie bei der geometrischen Konstruktion schiefwinkliger Dreiecke (§ 38) sind bei ihrer trigonometrischen Berechnung die folgenden vier Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: Gegeben ist eine Seite und zwei Winkel.

2. Fall: Gegeben sind zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel. Liegt dieser der größeren Seite gegenüber, so giebt es nur ein Dreieck; liegt er aber der kleineren Seite gegenüber, so sind zwei Dreiecke möglich (zweideutiger Fall).

3. Fall: Gegeben sind zwei Seiten und der zwischen ihnen liegende Winkel.

4. Fall: Gegeben sind die drei Seiten.

Gesucht sind in allen Fällen die übrigen drei Stücke des Dreiecks.

In den folgenden Paragraphen sollen zunächst die zur Berechnung schiefwinkliger Dreiecke nötigen Formeln abgeleitet werden.

§ 107. Sinusregel. Der Berechnung schiefwinkliger ebener Dreiecke liegt der Satz zu Grunde:

Im ebenen Dreieck verhalten sich die Seiten zu einander wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

$$\boldsymbol{a : b = \sin\alpha : \sin\beta}$$
$$\boldsymbol{b : c = \sin\beta : \sin\gamma}$$
$$\boldsymbol{c : a = \sin\gamma : \sin\alpha}$$

Dieser Satz heißt der Sinussatz oder die Sinusregel für das ebene Dreieck. Um ihn zu beweisen, fälle man im Dreieck ABC von C die Höhe h auf AB.

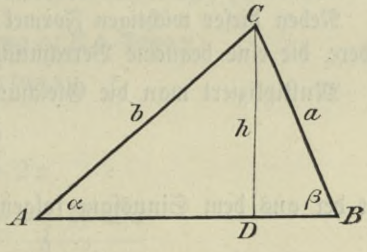


Fig. 107.

Dann ist
$$\sin\alpha = \frac{h}{b}$$
$$\sin\beta = \frac{h}{a}$$
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{h}{b} \cdot \frac{a}{h} = \frac{a}{b}$$
oder
$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta$$

Um die beiden anderen Formeln zu erhalten, fälle man von A bezw. B die Lote auf die gegenüberliegenden Seiten. Man kann auch sagen, daß mit der ersten gleichzeitig die beiden anderen Formeln bewiesen sind, denn im schiefwinkligen Dreieck sind alle Seiten und alle Winkel je unter sich gleichwertig.

Der Sinussatz ermöglicht unmittelbar die Berechnung der fehlenden Stücke des Dreiecks in den unter 1 und 2 aufgeführten Fällen der obigen Aufzählung, für die Fälle 3 und 4 ist dagegen eine Umgestaltung mit der Sinusregel vorzunehmen.

§ 108. Tangentenregel. Für den 3. Fall, d. h. wenn von dem Dreieck zwei Seiten und der zwischen ihnen liegende Winkel gegeben sind, kann man aus der Sinusregel den Satz ableiten:

Im ebenen Dreiecke verhält sich die Summe zweier Seiten zu ihrem Unterschiede, wie die Tangente der halben Summe der gegenüberliegenden Winkel zur Tangente ihres halben Unterschiedes:

$$(a+b):(a-b)=tang\,\frac{\alpha+\beta}{2}:tang\,\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$(b+c):(b-c)=tang\,\frac{\beta+\gamma}{2}:tang\,\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$(c+a):(c-a)=tang\,\frac{\gamma+\alpha}{2}:tang\,\frac{\gamma-\alpha}{2}$$

Dieser Satz heißt die Tangentenregel für das ebene Dreieck.

Ableitung: Aus der Verhältnisgleichung

$$a:b=sin\,\alpha:sin\,\beta$$

folgt die andere (siehe Arithmetik, § 14)

$$(a+b):(a-b)=(sin\,\alpha+sin\,\beta):(sin\,\alpha-sin\,\beta)$$

oder nach den Regeln für die Summe und Differenz zweier Sinus (§ 105, Formel 13 und 14)

$$(a+b):(a-b)=2\,sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,.\,cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta):2\,cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,.\,sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

Wenn man die Glieder des zweiten Verhältnisses durch das Produkt

$$2\,.\,cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,.\,cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

dividiert, so erhält man

$$(a+b):(a-b)=tang\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta):tang\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

Neben dieser wichtigen Formel ergeben sich aus dem Sinussatze noch einige andere, die eine bequeme Berechnung der dritten Seite des Dreiecks gestatten.

Multipliziert man die Gleichung

$$\frac{c}{b}=\frac{sin\,\gamma}{sin\,\beta}$$

mit der aus dem Sinussatze folgenden

$$\frac{b}{a+b}=\frac{sin\,\beta}{sin\,\alpha+sin\,\beta}$$

so erhält man

$$\frac{c}{a+b}=\frac{sin\,\gamma}{sin\,\alpha+sin\,\beta}=\frac{sin\,(180^0-\gamma)}{sin\,\alpha+sin\,\beta}=\frac{sin\,(\alpha+\beta)}{sin\,\alpha+sin\,\beta}\quad\text{(siehe § 102)}$$

oder durch Anwendung der Formel 5 in § 103 auf den Zähler und Formel 13 in § 105 auf den Nenner

$$\frac{c}{a+b}=\frac{2\,sin\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\,.\,cos\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{2\,sin\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\,.\,cos\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}=\frac{cos\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{cos\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

oder

$$c:(a+b)=cos\,\frac{\alpha+\beta}{2}:cos\,\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Ähnlich findet man

$$c:(a-b)=sin\frac{\alpha+\beta}{2}:sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Dieselben Formeln lassen sich auch auf geometrischem Wege ableiten. Man beschreibe zu dem Zwecke mit der kleineren Seite CA oder b (Fig. 108) als Halbmesser um C als Mittelpunkt einen Kreis, der die Seite BC oder a im Punkte E schneidet. Verlängert man nun die Seite BC über C hinaus, bis sie den Umring in D trifft, so sind die Halbmesser $CE=CD=CA=b$. Verbindet man D mit A, und zieht durch E die Linie EF parallel zu DA, so hat man

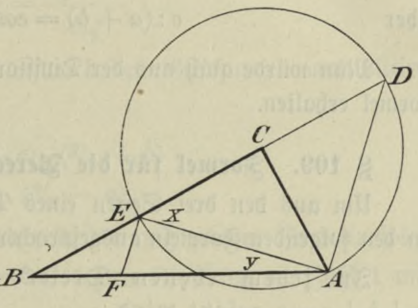


Fig. 108.

$$BD:BE=DA:EF$$

oder, da $\qquad BD=a+b \quad$ und $\quad BE=a-b$ ist

$$(a+b):(a-b)=DA:EF$$

Zieht man ferner EA, so entstehen die beiden rechtwinkligen Dreiecke EAD und AEF, und es ist, wenn $AED=x$ und $EAF=y$ gesetzt wird,

$$DA=EA.tang\,x$$
$$EF=EA.tang\,y$$

Werden diese Werte in die obige Verhältnisgleichung eingesetzt, so hat man

$$(a+b):(a-b)=EA.tang\,x:EA.tang\,y$$
$$(a+b):(a-b)=tang\,x:tang\,y$$

Es ist aber

im gleichschenkligen $\triangle ECA$ $\qquad 180^0-\gamma=2x$

und im $\triangle ABC$ $\qquad 180^0-\gamma=\alpha+\beta$, also

$$2x=\alpha+\beta \quad \text{oder} \quad x=\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

Ferner ist

$$y=\alpha-x=\alpha-\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

Setzt man auch diese Werte für x und y in die Verhältnisgleichung ein, so erhält man

$$(a+b):(a-b)=tang\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta):tang\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

Im $\triangle BEA$ hat man

$$BA:BE=sin\,BEA:sin\,BAE=sin\,x:sin\,y$$

oder $\quad c:(a-b)=sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta):sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$

Ferner ist im $\triangle BDA$

$$BA : BD = \sin BDA : \sin BAD$$
$$= \sin(90^0 - x) : \sin(90^0 + y) = \cos x : \cos y$$

oder $$c : (a + b) = \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) : \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

Man würde auch aus der Division dieser beiden Gleichungen die Tangentenformel erhalten.

§ 109. Formel für die Berechnung der Winkel aus den Seiten.

Um aus den drei Seiten eines Dreiecks seine Winkel zu berechnen, ist die in den folgenden Formeln ausgesprochene Umformung des Sinussatzes erforderlich:

In jedem ebenen Dreieck ist, wenn die Summe der Seiten $a + b + c = s$ gesetzt wird

$$\mathit{tang}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s/_2 - b)\,.\,(s/_2 - c)}{s/_2\,.\,(s/_2 - a)}}$$

$$\mathit{tang}\,\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s/_2 - c)\,.\,(s/_2 - a)}{s/_2\,.\,(s/_2 - b)}}$$

$$\mathit{tang}\,\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s/_2 - a)\,.\,(s/_2 - b)}{s/_2\,.\,(s/_2 - c)}}$$

Ableitung: Im vorigen Paragraphen war aus dem Sinussatze die Formel abgeleitet worden

$$c : (a + b) = \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) : \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

Daher ist nach § 14 auch

$$c : (a + b + c) = \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) : [\cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) + \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)]$$

oder

$$c : (a + b + c) = \cos(\alpha/_2 + \beta/_2) : [\cos(\alpha/_2 + \beta/_2) + \cos(\alpha/_2 - \beta/_2)]$$

oder nach Formel 2 in § 103 und 11 in § 105

$$\frac{c}{s} = \frac{\cos \alpha/_2\,.\,\cos \beta/_2 - \sin \alpha/_2\,.\,\sin \beta/_2}{2\,.\,\cos \alpha/_2\,.\,\cos \beta/_2}$$

Multipliziert man mit 2 und führt rechts die Division aus, so kommt

$$\frac{2c}{s} = 1 - \mathit{tang}\,\frac{\alpha}{2}\,.\,\mathit{tang}\,\frac{\beta}{2}$$

folglich

$$\mathit{tang}\,\frac{\alpha}{2}\,.\,\mathit{tang}\,\frac{\beta}{2} = 1 - \frac{2c}{s} = \frac{s - 2c}{s} = \frac{s/_2 - c}{s/_2}$$

Es ist also

$$\mathit{tang}\,\frac{\alpha}{2}\,.\,\mathit{tang}\,\frac{\beta}{2} = \frac{s/_2 - c}{s/_2}$$

und ebenso
$$tang\frac{\alpha}{2}\,.\,tang\frac{\gamma}{2}=\frac{s/_2-b}{s/_2}$$
und
$$tang\frac{\beta}{2}\,.\,tang\frac{\gamma}{2}=\frac{s/_2-a}{s/_2}$$

Folglich, wenn man die Seiten der ersten beiden Gleichungen multipliziert und durch die der dritten dividiert:
$$tang^2\frac{\alpha}{2}=\frac{(s/_2-c)\,.\,(s/_2-b)}{s/_2\,.\,(s/_2-a)}$$
woraus durch Quadratwurzelausziehung die erste der angegebenen Formeln folgt.

Zusatz: Addiert man zu beiden Seiten der letzten Gleichung die Zahl 1 und berücksichtigt, daß
$$tang^2\frac{\alpha}{2}+1=sec^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{cos^2\,\alpha/_2}$$
ist, so erhält man nach leichter Umformung
$$cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{s/_2\,.\,(s/_2-a)}{b\,.\,c}$$

In ähnlicher Weise leitet man ab
$$sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{(s/_2-b)\,.\,(s/_2-c)}{b\,.\,c}$$

Neben der Formelgruppe für die Tangenten der halben Winkel bestehen demnach die folgenden
$$sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s/_2-b).(s/_2-c)}{b\,.\,c}}\qquad cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s/_2\,.\,(s/_2-a)}{b\,.\,c}}$$
$$sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s/_2-c).(s/_2-a)}{c\,.\,a}}\qquad cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{s/_2\,.\,(s/_2-b)}{c\,.\,a}}$$
$$sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s/_2-a).(s/_2-b)}{a\,.\,b}}\qquad cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{s/_2\,.\,(s/_2-c)}{a\,.\,b}}$$

Dieselben drei Formelgruppen kann man auch auf folgende Weise ableiten:

Denkt man sich im $\triangle ABC$ (Fig. 109) aus jeder Dreiecksspitze ein Lot auf die gegenüberliegende Seite gefällt und drückt dann jede Seite durch die Summe ihrer Abschnitte aus, so erhält man
$$a=b\,.\,cos\,\gamma+c\,.\,cos\,\beta$$
$$b=c\,.\,cos\,\alpha+a\,.\,cos\,\gamma$$
$$c=a\,.\,cos\,\beta+b\,.\,cos\,\alpha$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit a, die zweite mit b und die dritte mit c, so wird
$$a^2=ab\,.\,cos\,\gamma+ac\,.\,cos\,\beta$$
$$b^2=bc\,.\,cos\,\alpha+ab\,.\,cos\,\gamma$$
$$c^2=ac\,.\,cos\,\beta+bc\,.\,cos\,\alpha$$

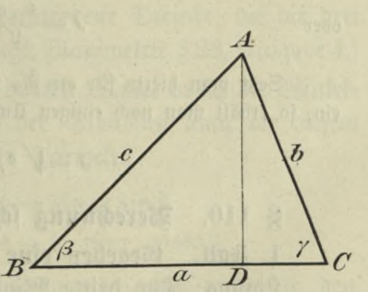


Fig. 109.

Wird von der Summe der beiden ersten Gleichungen die dritte subtrahiert, so hat man

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cdot \cos\gamma$$

Setzt man in dieser Gleichung nach Formel 8 in § 103

$$\cos\gamma = 2\cos^2 \gamma/_2 - 1$$

ein, so wird

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2 \cdot 2ab \cdot \cos^2 \gamma/_2 - 2 \cdot ab$$
$$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = 2 \cdot 2ab \cdot \cos^2 \gamma/_2$$
$$(a+b)^2 - c^2 = 2 \cdot 2ab \cdot \cos^2 \gamma/_2$$
$$(a+b+c) \cdot (a+b-c) = 2 \cdot 2ab \cdot \cos^2 \gamma/_2$$
$$ab \cdot \cos^2 \gamma/_2 = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}$$

Setzt man hierin

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c) = s/_2,$$

so wird

$$s/_2 - c = \tfrac{1}{2}(a+b+c) - c = \tfrac{1}{2}(a+b-c)$$

und man erhält schließlich

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s/_2 \cdot (s/_2 - c)}{a \cdot b}}$$

Setzt man in die obige Gleichung nach Formel 7 in § 103

$$\cos\gamma = 1 - 2\sin^2 \gamma/_2$$

ein, so ergiebt sich nach einer ähnlichen Entwicklung

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s/_2 - a) \cdot (s/_2 - b)}{a \cdot b}}$$

Dividiert man den Wert für $\sin \gamma/_2$ durch den Wert für $\cos \gamma/_2$, so hat man

$$\tang\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s/_2 - a) \cdot (s/_2 - b)}{s/_2 \cdot (s/_2 - c)}}$$

Anmerkung: Der Flächeninhalt J eines Dreiecks ist nach § 72 gleich der Hälfte des Produktes aus der Grundlinie und der Höhe, oder in der Bezeichnung der Fig. 109

$$J = \frac{BC \cdot AD}{2}$$

Da $AD = AB \cdot \sin\beta$ ist, so hat man auch

$$J = \frac{BC \cdot AB}{2} \cdot \sin\beta = \frac{a \cdot c}{2} \sin\beta$$

oder

$$J = \frac{a \cdot c}{2} \cdot 2\sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} = a \cdot c \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}$$

Setzt man hierin für $\sin \beta/_2$ und $\cos \beta/_2$ ihre Werte aus den Gleichungen auf Seite 109 ein, so erhält man nach einigen Umformungen

$$J = \sqrt{s/_2 \cdot (s/_2 - a) \cdot (s/_2 - b) \cdot (s/_2 - c)}$$

§ 110. Berechnung schiefwinkliger ebener Dreiecke.

1. Fall. Gegeben eine Seite und zwei Winkel.

Lösung: Der dritte Winkel ergiebt sich als das Supplement der Summe der beiden gegebenen Winkel. Zur Berechnung der Seiten benutzt man den

Sinussatz. Ist z. B. die Seite a gegeben, so findet man b und c nach den Formeln

$$b : a = \sin\beta : \sin\alpha \qquad c : a = \sin\gamma : \sin\alpha$$

aus denen folgt

$$b = a \,.\, \sin\beta \,.\, \operatorname{cosec}\alpha \qquad c = a \,.\, \sin\gamma \,.\, \operatorname{cosec}\alpha$$

Beispiel: Vom Dreieck ABC ist gegeben

$$BC = 25{,}6 \qquad \sphericalangle A = 73^\circ 14' \qquad \sphericalangle B = 51^\circ 39'.$$

Die fehlenden Stücke sind zu berechnen.

$$\begin{aligned} \alpha &= 73^\circ 14' \\ \beta &= 51^\circ 39' \\ \hline \alpha + \beta &= 124^\circ 53' \\ \gamma &= 55^\circ 7' \end{aligned}$$

$\alpha = 73^\circ 14'$	$\log \operatorname{cosec} = 0{,}01\,887$	$\alpha = 73^\circ 14'$	$\log \operatorname{cosec} = 0{,}01\,887$
$\beta = 51^\circ 39'$	$\log \sin = 9{,}89\,445$	$\gamma = 55^\circ 7'$	$\log \sin = 9{,}91\,398$
$a = 25{,}6$	$\log = 1{,}40\,824$	$a = 25{,}6$	$\log = 1{,}40\,824$
$b = 20{,}968$	$\log = 1{,}32\,156$	$c = 21{,}933$	$\log = 1{,}34\,109$

2. Fall. Gegeben zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel.

Lösung: Durch den Sinussatz findet man zunächst den anderen gegenüberliegenden Winkel. Sind z. B. die Seiten a und b und der Winkel α gegeben, so ist

$$\sin\beta : \sin\alpha = b : a$$

$$\sin\beta = \frac{b \,.\, \sin\alpha}{a}$$

Zu einem Sinus gehören aber immer zwei Winkel, nämlich außer dem spitzen Winkel, den man unmittelbar aus der Tafel nimmt, noch sein Supplement.

Man hat deshalb in diesem Falle immer zu überlegen, ob alle beide Werte für den Winkel β möglich sind oder nur der spitze.

Liegt der gegebene Winkel α der größeren von den gegebenen Seiten gegenüber, so kann für den berechneten Winkel β nur der spitze Winkel genommen werden, weil β kleiner sein muß als α.

Liegt der gegebene Winkel α aber der kleineren von den gegebenen Seiten gegenüber, so kann für β sowohl der spitze als auch der stumpfe Winkel genommen werden, und es giebt zwei verschiedene Dreiecke, die die drei gegebenen Stücke enthalten. (Zweideutiger Fall, vergl. Planimetrie § 28, Aufgabe 4.)

Nachdem β gefunden ist, berechnet man den dritten Winkel durch die Winkelsumme: $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. Schließlich liefert der Sinussatz auch die diesem dritten Winkel gegenüberliegende Seite c nach den Formeln:

$$c : a = \sin\gamma : \sin\alpha \quad \text{oder} \quad c : b = \sin\gamma : \sin\beta$$

$$c = a \,.\, \sin\gamma \,.\, \operatorname{cosec}\alpha \qquad c = b \,.\, \sin\gamma \,.\, \operatorname{cosec}\beta$$

Im zweideutigen Falle hat man dieselbe Rechnung auch noch für den stumpfen Winkel $\beta' = 180^\circ - \beta$ durchzuführen. (Vergl. das 2. Beispiel).

Beispiel: 1. Vom Dreieck ABC ist gegeben

$$BC = 17{,}35 \qquad AC = 9{,}64 \qquad \sphericalangle A = 104^\circ 30'.$$

Die fehlenden Stücke sind zu berechnen.

$a = 17{,}35$	$colog = 8{,}76\,070$	$\alpha = 104^\circ 30'$	$log\ cosec = 0{,}01\,406$
$b = 9{,}64$	$log = 0{,}98\,408$	$\gamma = 42^\circ 57{,}4'$	$log\ sin = 9{,}83\,343$
$\alpha = 104^\circ 30'$	$log\ sin = 9{,}98\,594$	$a = 17{,}35$	$log = 1{,}23\,930$
$\beta = 32^\circ 32{,}6'$	$log\ sin = 9{,}73\,072$	$c = 12{,}212$	$log = 1{,}08\,679$
$\alpha + \beta = 137^\circ\ 2{,}6'$			
$\gamma = 42^\circ 57{,}4'$			

Da der gegebene Winkel α der größeren Seite a gegenüberliegt, so ist der Fall eindeutig.

2. Vom Dreieck ABC ist gegeben

$$BC = 17{,}34 \qquad AC = 25{,}53 \qquad \sphericalangle A = 25^\circ 36'.$$

Die fehlenden Stücke sind zu berechnen.

$a = 17{,}34$	$colog = 8{,}76\,095$	$\beta = 39^\circ 30{,}4$	$log\ cosec = 0{,}19\,643$
$b = 25{,}53$	$log = 1{,}40\,705$	$\gamma = 114^\circ 53{,}6$	$log\ sin = 9{,}95\,765$
$\alpha = 25^\circ 36'$	$log\ sin = 9{,}63\,557$	$b = 25{,}53$	$log = 1{,}40\,705$
$\beta = 39^\circ 30{,}4$	$log\ sin = 9{,}80\,357$	$c = 36{,}403$	$log = 1{,}56\,113$
$\alpha + \beta = 65^\circ\ 6{,}4'$			
$\gamma = 114^\circ 53{,}6'$			
$\alpha = 25^\circ 36'$		$\beta' = 140^\circ 29{,}6'$	$log\ cosec = 0{,}19\,643$
$\beta' = 140^\circ 29{,}6'$		$\gamma' = 13^\circ 54{,}4'$	$log\ sin = 9{,}38\,082$
$\alpha + \beta' = 166^\circ\ 5{,}6'$		$b = 25{,}53$	$log = 1{,}40\,705$
$\gamma' = 13^\circ 54{,}4'$		$c' = 9{,}6450$	$log = 0{,}98\,430$

3. Fall. Gegeben zwei Seiten und der zwischen ihnen liegende Winkel.

Lösung: Sind z. B. die beiden Seiten a und b und der Winkel γ gegeben, so findet man zunächst durch die Winkelsumme des Dreiecks $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$ und daraus $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

Dann sind aber in der Verhältnisgleichung

$$(a + b) : (a - b) = tang\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) : tang\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

die drei ersten Glieder bekannt, und man kann demgemäß aus ihr $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ berechnen.

Kennt man aber sowohl die halbe Summe als auch die halbe Differenz der Winkel α und β, so findet man α und β selbst nach den Formeln:

$$\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \alpha/_2 + \beta/_2 = s/_2$$
$$\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \alpha/_2 - \beta/_2 = u/_2$$
$$\alpha = s/_2 + u/_2$$
$$\beta = s/_2 - u/_2$$

Man erhält also den größeren Winkel, wenn man den halben Unterschied zur halben Summe addiert; man erhält den kleineren Winkel, wenn man den halben Unterschied von der halben Summe subtrahiert.

Um negative Vorzeichen zu vermeiden, ist es praktisch, die größere der Seiten a und b in der Seitendifferenz voranzustellen, d. h. sie als Minuend zu nehmen.

Nachdem α und β bekannt sind, berechnet man die dritte Seite entweder nach der Sinusregel aus einer der beiden anderen Seiten, oder man bedient sich der Formel:

$$c:(a+b) = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) : \cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

Beispiel: Vom Dreieck ABC ist gegeben

$$BC = 176 \qquad AC = 125 \qquad \sphericalangle C = 77^\circ 34'.$$

Die fehlenden Stücke sind zu berechnen.

$$\gamma = 77^\circ 34'$$
$$\alpha+\beta = 102^\circ 26'$$
$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = 51^\circ 13'$$

$a = 176$			
$b = 125$			
$a+b = 301$		$colog = 7{,}52\,143$	$log = 2{,}47\,857$
$a-b = 51$		$log = 1{,}70\,757$	
$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) =$	$51^\circ 13'$	$log\,tang = 0{,}09\,499$	$log\cos = 9{,}79\,684$
$\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) =$	$11^\circ 54{,}4'$	$log\,tang = 9{,}32\,399$	$log\sec = 0{,}00\,945$
$\alpha =$	$63^\circ\ 7{,}4'$	$c = 192{,}69$	$log = 2{,}28\,486$
$\beta =$	$39^\circ 18{,}6'$		

4. Fall. Gegeben die drei Seiten.

Lösung: Die Tangenten der halben Winkel sind gegeben durch die Formeln:

$$tang\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s/_2-b).(s/_2-c)}{s/_2.(s/_2-a)}} \qquad tang\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s/_2-c).(s/_2-a)}{s/_2.(s/_2-b)}}$$

$$tang\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s/_2-a).(s/_2-b)}{s/_2.(s/_2-c)}}$$

Eine einfache Probe ist in diesem Falle dadurch gegeben, daß die Summe der drei berechneten Winkel $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$ sein muß.

Beispiel: Vom Dreieck ABC ist gegeben

$$BC = 0{,}56 \qquad AC = 0{,}87 \qquad AB = 0{,}74.$$

Die fehlenden Stücke sind zu berechnen.

$a = 0{,}56$			
$b = 0{,}87$			
$c = 0{,}74$			
$s = 2{,}17$			
$s/_2 = 1{,}085$	$colog = 9{,}96\,457$	$colog = 9{,}96\,457$	$colog = 9{,}96\,457$
$s/_2 - a = 0{,}525$	$colog = 0{,}27\,984$	$log = 9{,}72\,016$	$log = 9{,}72\,016$
$s/_2 - b = 0{,}215$	$log = 9{,}33\,244$	$colog = 0{,}66\,756$	$log = 9{,}33\,244$
$s/_2 - c = 0{,}345$	$log = 9{,}53\,782$	$log = 9{,}53\,782$	$colog = 0{,}46\,218$
	$s = 19{,}11\,467:2$	$s = 19{,}89\,011:2$	$s = 19{,}47\,935:2$
	$log\,tang = 9{,}55\,734$	$log\,tang = 9{,}94\,506$	$log\,tang = 9{,}73\,968$
	$\alpha/_2 = 19^\circ 50{,}6'$	$\beta/_2 = 41^\circ 23{,}1'$	$\gamma/_2 = 28^\circ 46{,}4'$
	$\alpha = 39^\circ 41{,}2'$	$\beta = 82^\circ 46{,}2'$	$\gamma = 57^\circ 32{,}8'$

Die Summe der berechneten drei Winkel ist in diesem Falle $= 180^\circ 0{,}2'$. Der Überschuß von $0{,}2'$ rührt von der Unsicherheit der letzten Dezimalstelle in den Logarithmen her.

Weitere Beispiele für die verschiedenen Fälle der Berechnung schiefwinkliger ebener Dreiecke bietet die folgende der Praxis entlehnte Aufgabe:

Die Richtung, in welcher die Schlüsseltonne vor der Weser vom Wangerooger Leuchtturme aus liegen soll, ist durch eine nördlich von dem letzteren stehende Bake bezeichnet, die von der Schlüsseltonne aus mit dem Leuchtturme in Linie sein muß. Nun liegt der Leuchtturm $S\,86^{0}22'\,O$ 17,4 Kabellängen vom Kirchturme auf Wangeroog, und der richtige Ort der Schlüsseltonne liegt 48,0 Kabellängen vom Leuchtturme und 52,0 Kabellängen vom Kirchturme. Wie peilt die Tonne von den Türmen, und wie groß muß der Barsemeister vom richtigen Orte der Schlüsseltonne aus den Winkel zwischen Leuchtturm und Kirchturm messen?

Um wieviel würde der Barsemeister die Schlüsseltonne verkehrt legen, wenn er zwar in der Richtung „Leuchtturm und Bake in Linie" segelte, aber zur Winkelmessung statt des Sextanten den Kompaß gebrauchte und nun infolge der mangelhaften Kompaßpeilungen den Winkel zwischen Kirchturm und Leuchtturm um einen Achtelstrich zu klein mäße?

Nach der Bekanntmachung des preußischen Admiralitätskommissariats in Oldenburg vom 6. Juni 1763 lag die Schlüsseltonne derzeit 52 Kabellängen vom Leuchtturme und 55 Kabellängen vom Kirchturme. Wie weit lag sie also damals von ihrem richtigen Orte?

Anhang.

§ 111. Aufgabe der vier Punkte.

Aufgabe: Drei Punkte A, B, C sind ihrer Lage nach bekannt; von einem vierten Punkte D mißt man die Winkel ADB und ADC. Gesucht ist die Lage des vierten Punktes D gegen A, B und C.

Bezeichnet man mit l (Fig. 110) die von D aus links gesehene Strecke AB, mit r die rechts gesehene Strecke AC, mit λ den Winkel ADB, unter welchem l, und mit ρ den Winkel ADC, unter welchem r von D aus erscheint, ferner mit α den Winkel BAC, mit x den Winkel ABD und mit y den Winkel ACD, so ist, da im Viereck die Winkelsumme vier Rechte beträgt,

$$x + y = 360^{0} - (\alpha + \lambda + \rho)$$

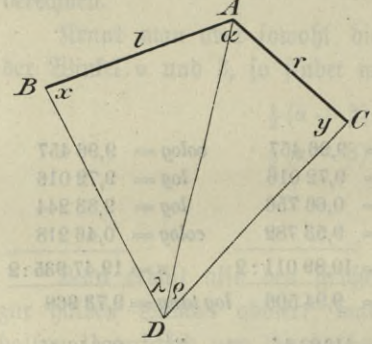


Fig. 110.

Das Ziel ist nun, außer $(x + y)$ auch $(x - y)$ zu berechnen. Dieses erreicht man folgendermaßen:

Nach dem Sinussatze ist

$$AD = \frac{r \,.\, \sin y}{\sin \rho} = \frac{l \,.\, \sin x}{\sin \lambda}$$

woraus folgt

$$\frac{\sin y}{\sin x} = \frac{l \,.\, \sin \rho}{r \,.\, \sin \lambda}$$

Berechnet man nun einen Hülfswinkel w, indem man

$$\frac{l \,.\, \sin \rho}{r \,.\, \sin \lambda} = \operatorname{tang} w$$

setzt, so wird

$$\frac{\sin y}{\sin x} = \operatorname{tang} w = \frac{\sin w}{\cos w}$$

oder

$$\frac{\sin y}{\sin x} = \frac{\sin w}{\sin(90^\circ - w)}$$

folglich auch

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\sin(90^\circ - w) - \sin w}{\sin(90^\circ - w) + \sin w}$$

oder unter Berücksichtigung der Formeln 13 und 14 in § 105

$$\frac{2 \cos \tfrac{1}{2}(x+y) \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(x-y)}{2 \sin \tfrac{1}{2}(x+y) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(x-y)} = \frac{2 \cos 45^\circ \,.\, \sin(45^\circ - w)}{2 \sin 45^\circ \,.\, \cos(45^\circ - w)}$$

Aus dieser Gleichung folgt, da $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$ ist, nach den Formeln 4 und 5 in § 100

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(x+y) \,.\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(x-y) = \operatorname{tang}(45^\circ - w)$$

Es ist daher

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(x-y) = \operatorname{tang}(45^\circ - w) \,.\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(x+y)$$

Beim Rechnen nach der vorstehenden Formel hat man zu berücksichtigen, daß beide Faktoren auf der rechten Seite negativ werden können; und zwar nach § 101 der erste Faktor, wenn $w > 45^\circ$ ist, der zweite Faktor, wenn $\tfrac{1}{2}(x+y) > 90^\circ$ wird. Ist nur einer dieser Faktoren negativ, also $\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(x-y)$ ebenfalls negativ, so ist der Wert $\tfrac{1}{2}(x-y)$ als negativer Winkel zu betrachten, x also kleiner als y. Die algebraische Summe von $\tfrac{1}{2}(x+y)$ und $\tfrac{1}{2}(x-y)$ ergiebt x, die algebraische Differenz dagegen y.

Nachdem x und y bekannt sind, ergeben sich die Entfernungen des Punktes D von A, B und C nach dem Sinussatz.

Beispiel: B liegt von A $SzO\tfrac{1}{2}O$ 7,6^{sm} entfernt; C liegt von A $NOzO$ 5,7^{sm} entfernt. Von einem östlich gelegenen Punkte D mißt man mit einem Sextanten den Winkel zwischen A und B gleich 66° 27′ und den Winkel zwischen A und C gleich 54° 10′. In welchen Peilungen hat man die Punkte A, B und C, und wie weit ist man von jedem entfernt?

$l =$ 7,6	$\log =$ 0,88 081	$\alpha =$ 106° 53′
$r =$ 5,7	$\operatorname{colog} =$ 9,24 413	$\lambda =$ 66° 27′
$\lambda =$ 66° 27′	$\log \operatorname{cosec} =$ 0,03 777	$\rho =$ 54° 10′
$\rho =$ 54° 10′	$\log \sin =$ 9,90 887	$s =$ 227° 30′
$w =$ 49° 42′	$\log \operatorname{tang} =$ 0,07 158	$x + y =$ 132° 30′
$45 - w = -$ 4° 42′	$\log \operatorname{tang} =$ 8,91 495 n	
$\tfrac{1}{2}(x+y) =$ 66° 15′	$\log \operatorname{tang} =$ 0,35 654	
$\tfrac{1}{2}(x+y) = -$ 10° 35′	$\log \operatorname{tang} =$ 9,27 149 n	
$x =$ 55° 40′		
$y =$ 76° 50′		

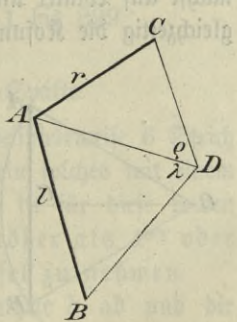


Fig. 111.

Danach ist die Peilung von B S 38,8° W
von C N 20,6° W
von A N 74,8° W

Die Entfernungen DA, DB und DC kann man jetzt nach der Sinusregel in den Dreiecken DAB und DAC berechnen und erhält

$$DA = 6{,}846^{sm} \qquad DB = 7{,}022^{sm} \qquad DC = 5{,}306^{sm}$$

Aufgabe: Der Kirchturm von Arbergen liegt $N\,73^0\,44'\,O$ 8980m von dem Kirchturm von Brinkum. Der Kirchturm von Huchtingen liegt $N\,38^0\,43'\,W$ 5072m von demjenigen von Brinkum. Vom Turme der Seefahrtschule in Bremen aus mißt man den Winkel zwischen den Türmen von Arbergen und Brinkum gleich $76^0\,4'$ und den Winkel zwischen den Türmen von Huchtingen und Brinkum gleich $55^0\,26'$. In welchen Peilungen und in welchen Entfernungen hat man die Türme?

Die Aufgabe der vier Punkte läßt sich durch Zeichnung in der Weise lösen, daß man über AB und AC (Fig. 110) als Sehnen nach § 59 diejenigen Kreisbögen zeichnet, die die Winkel λ bezw. ρ als Umringswinkel fassen. Der Schnittpunkt dieser beiden Kreisbögen ist der gesuchte Punkt D. Aus der geometrischen Konstruktion ist ohne weiteres klar, daß D um so schärfer bestimmt ist, je näher der Winkel, unter dem sich die beiden Kreisbögen schneiden, einem rechten kommt; daß D dagegen unbestimmt wird, wenn dieser Winkel gleich 0 wird, d. h. wenn die beiden Kreisbögen zusammenfallen. In diesem Falle sind A, B, C und D die Ecken eines Sehnenvierecks. Trigonometrisch drückt sich das Unbestimmtwerden von D dadurch aus, daß in dem erwähnten Falle $\alpha + \lambda + \rho = 180^0$ wird. Es ist dann nämlich auch $x + y = 180^0$ also $\sin x = \sin y$ und $\tang w = 1$, also $w = 45^0$ und $\tang\,(45^0 - w) = \tang\,0^0 = 0$, während $\tang \frac{1}{2}(x+y) = \tang\,90^0 = \infty$ wird. Demnach ist in dem fraglichen Falle

$$\tang \tfrac{1}{2}(x-y) = 0 \,.\, \infty$$

dieses ist aber ein unbestimmter Wert.

§ 112. Berechnung der trigonometrischen Funktionen. Im folgenden soll ein Weg angedeutet werden, auf dem es möglich sein würde, eine Tafel der trigonometrischen Funktionen zu berechnen, wenn auch die wirkliche Ausführung einer solchen Berechnung unnötig ist, da die trigonometrischen Tafeln fehlerfrei bis zu jeder für praktische Zwecke erforderlichen Genauigkeit berechnet vorliegen.

Zur Berechnung der Funktionen eines gegebenen Winkels reicht es hin, eine derselben zu finden, da aus einer Funktion leicht auch die übrigen nach den Gleichungen des § 100 berechnet werden können. Außerdem genügt es, sich zunächst auf Winkel unter 45^0 zu beschränken, da mit den Funktionen dieser Winkel gleichzeitig die Kofunktionen ihrer Komplemente bekannt sind.

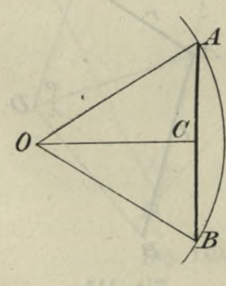


Fig. 112.

Der Gedankengang, der zur Lösung der vorliegenden Aufgabe führt, ist der folgende.

1. Für eine Reihe von Winkeln sind die Sinus unmittelbar auf Grund früherer Rechnungen angebbar. In der Planimetrie sind nämlich die Seiten einer Reihe dem Kreise einbeschriebener regelmäßiger Vielecke berechnet worden. Ist der Radius des Kreises gleich 1, und stellt AB (Fig. 112) die Seite eines regelmäßigen Vielecks vor, so ist, wie aus der Figur ersichtlich, die halbe Seite gleich dem Sinus des halben zur Seite gehörigen Mittelpunktswinkels.

Nach den in § 78 berechneten Werten findet man

aus dem regelmäßigen 6=eck	$\sin 30^0$	$= 0{,}500\,000$
" " " 12=eck	$\sin 15^0$	$= 0{,}258\,819$
" " " 24=eck	$\sin 7^0 30'$	$= 0{,}130\,526$
" " " 48=eck	$\sin 3^0 45'$	$= 0{,}065\,403$
" " " 96=eck	$\sin 1^0 52{,}5'$	$= 0{,}032\,719$
" " " 192=eck	$\sin 0^0 56{,}25'$	$= 0{,}016\,362$
" " " 384=eck	$\sin 0^0 28{,}125'$	$= 0{,}008\,181$

(Es sind dieses dieselben Zahlen wie die in § 78 angeführten unter Hinweglassung der letzten drei Dezimalen. Dort war der Halbmesser gleich $\frac{1}{2}$, hier ist er gleich 1, die halbe Sehne hat deshalb hier denselben Wert wie dort die ganze.)

Durch Berechnung anderer Reihen von regelmäßigen Vielecken (z. B. 4=eck, 8=eck u. s. w.) kann man für noch andere Reihen von Winkeln die Sinus ermitteln.

2. Bei kleinen Winkeln ist der Sinus gleich dem zugehörigen Bogen des mit dem Halbmesser gleich 1 beschriebenen Kreises (vgl. § 98). Da nun nach § 76 das Linienmaß einer Bogenminute gleich dem 3 437,75sten Teil des Halbmessers ist, so hat man

$$\sin 1' = \frac{1}{3\,437{,}75} = 0{,}000\,290\,888\,1$$

3. Endlich kann man sich der Formel für $\sin 2\alpha$ und für $\sin(\alpha + \beta)$ bedienen, um zwischen die schon bekannten Sinuswerte die zwischenliegenden Werte von Minute zu Minute einzuschalten, z. B.:

$$\sin 30^0 1' = \sin(30^0 + 1') = \sin 30^0 . \cos 1' + \cos 30^0 . \sin 1'$$
$$\sin 29^0 59' = \sin(30^0 - 1') = \sin 30^0 . \cos 1' - \cos 30^0 . \sin 1'$$

§ 113. Gradtafel und Strichtafel. Um zu zwei gegebenen Stücken eines rechtwinkligen Dreiecks die beiden anderen durch bloße Einsicht ausnehmen zu können, hat man Tafeln berechnet, die den Namen Gradtafel oder Strichtafel führen, je nachdem der Eingang auf einen Winkel lautet, der in Graden (Tafel 9) oder in Viertelstrichen (Tafel 10)*) gegeben ist.

Man findet in der Tafel zu jeder Hypotenuse d von 1 bis 299

die anliegende Kathete in der b=Spalte,

die gegenüberliegende Kathete in der a=Spalte.

Da ein rechtwinkliges Dreieck mit einem Winkel von beispielsweise 6 Strich bei derselben Hypotenuse dieselben Katheten besitzt, wie ein solches mit einem Winkel von 2 Strich, nur in vertauschter Anordnung, so ist für diese beiden Winkel nur eine Tafel nötig. Für einen Winkel, der größer als 4^{str} oder 45^0 ist, hat man den Eingang von unten in die Tafel zu nehmen.

Mit zunehmendem Winkel nimmt die anliegende Kathete b ab und die gegenüberliegende Kathete a zu. Bei einem Winkel unter 4^{str} oder 45^0 ist die

*) Behrmann, Naut. Taf., Tafel 1. und 2.

anliegende, bei einem Winkel über 4^{str} oder 45^0 ist die gegenüberliegende Kathete die größere, bei einem Winkel von 4^{str} oder 45^0 sind die Katheten einander gleich.

Die nächstliegende Benutzung der Grad- und Strichtafeln ist die zur Auflösung (Berechnung) rechtwinkliger Dreiecke.

Diese Auflösung ist der Natur der Sache nach in den meisten Fällen nur eine genäherte. Sie ist aber überall da am Platze, wo es mehr auf Zeitersparnis als auf große Genauigkeit ankommt.

1. Wenn von dem rechtwinkligen Dreieck ein Winkel und eine Seite gegeben ist, so geht man unter dem gegebenen Winkel mit der gegebenen Seite in die entsprechende Spalte ein und liest die gesuchten Seiten daneben in den anderen Spalten ab.

Den Dezimalstrich darf man gleichzeitig in allen drei Spalten um gleichviele Stellen nach rechts oder links rücken.

Beispiele:

Ist	$\alpha = 2^{str}$	$d = 7{,}5$	so erhält man	$b = 6{,}93$	$a = 2{,}87$
„	$\alpha = 54^0$	$d = 263$	„ „ „	$b = 154{,}6$	$a = 212{,}8$
„	$\alpha = 5\frac{1}{2}^{str}$	$b = 13{,}5$	„ „ „	$d = 28{,}6$	$a = 25{,}2$
„	$\alpha = 17^0$	$b = 2{,}64$	„ „ „	$d = 2{,}76$	$a = 0{,}81$
„	$\alpha = 43^0$	$a = 19{,}1$	„ „ „	$d = 28{,}0$	$b = 20{,}5$

2. Sind zwei Seiten gegeben, so können diese Seiten entweder die Hypotenuse und eine Kathete, oder es können die beiden Katheten sein.

a) Ist die Hypotenuse und eine Kathete gegeben, so geht man mit der Hypotenuse in die d-Spalte ein und sucht den Winkel, unter dem die gegebene Kathete dem Werte in der Tafel am nächsten kommt. Die andere Kathete findet man neben den gegebenen Werten.

Beispiele:

Ist	$d = 146$	$b = 113$	so erhält man	$\alpha = 3\frac{1}{2}^{str}$	$a = 92{,}6$
„	$d = 12{,}5$	$b = 5{,}3$	„ „ „	$\alpha = 65^0$	$a = 11{,}3$
„	$d = 2{,}95$	$a = 1{,}13$	„ „ „	$\alpha = 2^{str}$	$b = 2{,}73$
„	$d = 23$	$a = 22$	„ „ „	$\alpha = 73^0$	$b = 6{,}72$

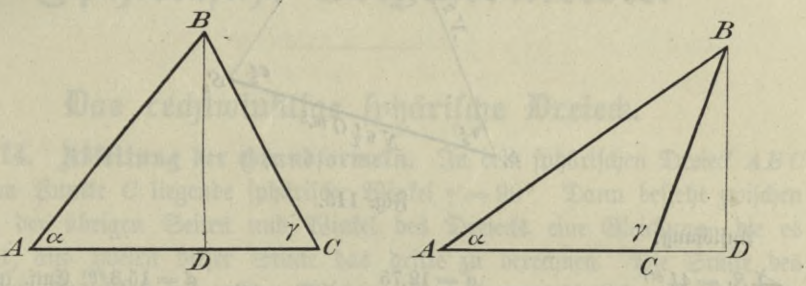
b) Sind die beiden Katheten gegeben, so geht man mit der größeren Kathete, ohne zunächst Rücksicht darauf zu nehmen, ob sie die anliegende oder gegenüberliegende ist, in die Mittelspalte ein und sucht den Winkel, unter dem der Wert in der dritten Spalte der gegebenen kleineren Kathete am nächsten kommt. Hat man diesen gefunden, so nimmt man den Winkel vom Kopfe der Tafel, wenn die größere Kathete die anliegende ist, und vom Fuße der Tafel, wenn die größere Kathete die gegenüberliegende ist. Die Hypotenuse findet man in der d-Spalte, und zwar ist sie mit der größeren Kathete auszunehmen.

Beispiele:

Ist	$b = 20{,}2$	$a = 8{,}4$	so erhält man	$\alpha = 2^{str}$	$d = 21{,}9$
„	$b = 63$	$a = 148$	„ „ „	$\alpha = 67^0$	$d = 161$
„	$b = 1{,}84$	$a = 0{,}39$	„ „ „	$\alpha = 12^0$	$d = 1{,}88$

Die Auflösung schiefwinkliger Dreiecke mit Hülfe der Grad- oder der Strichtafel wird dadurch ermöglicht, daß man das Dreieck durch eine geeignete Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Hier sei nur der eine Fall behandelt:

Von einem schiefwinkligen Dreieck ist eine Seite (etwa BC) und die Winkel bekannt. Es sollen die beiden anderen Seiten bestimmt werden.



a Fig. 113. b

Auflösung: Um die dem Winkel C gegenüberliegende Seite AB zu finden, denke man sich von B die Höhe BD auf AC gefällt (Fig. 113). Die Länge von BD im Dreieck CBD findet man, indem man unter γ in der Grad- oder der Strichtafel zu BC als Hypotenuse die gegenüberliegende Kathete abliest. Geht man dann unter dem Winkel α mit BD in die a-Spalte ein, so kann man die Seite AB als Hypotenuse des Dreiecks ABD aus der d-Spalte ablesen. In derselben Weise findet man die dem Winkel B gegenüberliegende Seite AC, indem man sich von C das Lot auf AB gefällt denkt.

Für einen stumpfen Winkel hat man beim Eingehen in die Grad- oder Strichtafel das Supplement zu nehmen.

Ist z. B. γ stumpf (Fig. 113b), so liegt die von B auf AC gefällte Höhe außerhalb des Dreiecks, man hat sie in dem Dreieck BCD zu bestimmen, dessen Winkel $BCD = 180^0 - \gamma = 16^{str} - \gamma$ ist.

Diese Art der Auflösung eines Dreiecks wendet man mit Vorteil bei Abstandsbestimmungen an, z. B. bei Kreuzpeilungen und Doppelpeilungen.

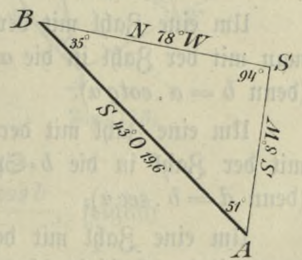


Fig. 114.

Beispiel 1. (Kreuzpeilung.) A liegt von B $S\ 43^0\ O$ $19{,}6^{sm}$ entfernt. Auf einem Schiffe S (Fig. 114) peilt man A in $S\ 8^0\ W$ und B in $N\ 78^0\ W$. Wie weit ist man von A und B entfernt?

Die Auflösung dieser Aufgabe ist aus folgendem Schema ersichtlich:

$\measuredangle A = 51^0$	$d = 19{,}6^{sm}$	$a = 15{,}23$	$\measuredangle S = 94^0$	$d = 15{,}3^{sm}$ von B
$\measuredangle B = 35^0$		$a = 11{,}24$		$d = 11{,}3^{sm}$ von A

Beispiel 2. (Doppelpeilung.) Ein Schiff in S_1 (Fig. 115) peilt das Feuer F *NNO*, segelt darauf *ONO*$\frac{1}{2}$*O* 16,5^{sm} bis S_2 und peilt F jetzt *NWzN*. Wie weit war das Schiff bei den Peilungen vom Feuer entfernt?

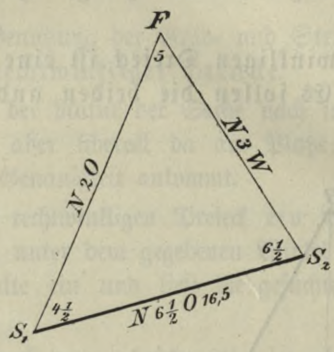


Fig. 115.

Auflösung:

$\sphericalangle S_1 = 4\frac{1}{2}^{str}$	$d = 16{,}5^{sm}$	$a = 12{,}75$	$\sphericalangle F = 5^{str}$	$d = 15{,}3^{sm}$ Entf. in S_2
$\sphericalangle S_2 = 6\frac{1}{2}^{str}$		$a = 15{,}79$		$d = 19{,}0^{sm}$ Entf. in S_1

Außer zur Auflösung rechtwinkliger und schiefwinkliger Dreiecke kann man die Grad- und Strichtafeln dazu benutzen, um gegebene Zahlen mit irgend einer der trigonometrischen Funktionen zu multiplizieren. Auf diese Weise kann man im Grunde alle trigonometrischen Rechnungen näherungsweise mit Hülfe der Grad- oder der Strichtafel ausführen.

Um eine gegebene Zahl mit dem Sinus eines Winkels zu multiplizieren, gehe man unter dem gegebenen Winkel mit der Zahl in die d-Spalte ein, und nehme den Wert aus der a-Spalte (denn $a = d \,.\, sin\, \alpha$).

Um eine Zahl mit dem Kosinus eines Winkels zu multiplizieren, gehe man mit der Zahl in die d-Spalte ein, und nehme den Wert aus der b-Spalte (denn $b = d \,.\, cos\, \alpha$).

Um eine Zahl mit der Tangente eines Winkels zu multiplizieren, gehe man mit der Zahl in die b-Spalte ein, und nehme den Wert aus der a-Spalte (denn $a = b \,.\, tang\, \alpha$).

Um eine Zahl mit der Kotangente eines Winkels zu multiplizieren, gehe man mit der Zahl in die a-Spalte ein und nehme den Wert aus der b-Spalte (denn $b = a \,.\, cotg\, \alpha$).

Um eine Zahl mit der Sekante eines Winkels zu multiplizieren, gehe man mit der Zahl in die b-Spalte ein und nehme den Wert aus der d-Spalte (denn $d = b \,.\, sec\, \alpha$).

Um eine Zahl mit der Kosekante eines Winkels zu multiplizieren, gehe man mit der Zahl in die a-Spalte ein und nehme den Wert aus der d-Spalte (denn $d = a \,.\, cosec\, \alpha$).

Sphärische Trigonometrie.

Das rechtwinklige sphärische Dreieck.

§ 114. Ableitung der Grundformeln. In dem sphärischen Dreieck ABC sei der am Punkte C liegende sphärische Winkel $\gamma = 90^0$. Dann besteht zwischen je dreien der übrigen Seiten und Winkel des Dreiecks eine Gleichung, die es ermöglicht, aus zweien dieser Stücke das dritte zu berechnen. Die Stücke des Dreiecks mit Ausschluß des rechten Winkels sind in der gewöhnlichen Bezeichnung, wie sie auch im ebenen Dreieck üblich ist:

$$a, \ b, \ c, \ \alpha, \ \beta$$

und aus diesen fünf Stücken lassen sich folgende Gruppen zu je dreien bilden:

1. $a\,b\,c$	2. $a\,c\,\alpha$	4. $b\,c\,\alpha$	6. $a\,b\,\alpha$	8. $a\,\alpha\,\beta$	10. $c\,\alpha\,\beta$
	3. $b\,c\,\beta$	5. $a\,c\,\beta$	7. $a\,b\,\beta$	9. $b\,\alpha\,\beta$	

Die zwischen den Gliedern einer jeden dieser Gruppen stattfindenden Gleichungen sollen jetzt aufgesucht werden.

Es sei ABC das sphärische Dreieck, O der Mittelpunkt der zugehörigen Kugel. Man fälle in der Ebene BOC von B auf OC die Senkrechte BD; ferner in der Ebene BOA von B auf OA die Senkrechte BE und verbinde D mit E. Dann ist auch $DE \perp OA$ (§ 81). Ferner ist BDE ein ebenes bei D rechtwinkliges Dreieck und der Winkel BED ist der Neigungswinkel der Ebenen OAC und OAB und als solcher gleich dem Winkel α des sphärischen Dreiecks. Aus der Figur ergeben sich dann unmittelbar die folgenden Beziehungen.

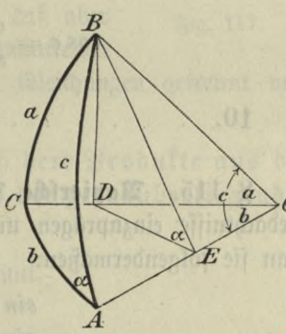


Fig. 116.

Es ist $\quad cos\, c = \dfrac{OE}{OB} = \dfrac{OD \,.\, cos\, b}{OB} = \dfrac{OB \,.\, cos\, a \,.\, cos\, b}{OB}$, folglich

$$\textbf{1.} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \boldsymbol{cos\, c = cos\, a \,.\, cos\, b}$$

Ferner ist $\quad sin\, \alpha = \dfrac{BD}{BE} = \dfrac{OB \,.\, sin\, a}{OB \,.\, sin\, c}$, folglich

2. . . . $\sin \alpha = \dfrac{\sin a}{\sin c}$; entsprechend 3. . . . $\sin \beta = \dfrac{\sin b}{\sin c}$

Ferner ist $$\cos \alpha = \frac{ED}{EB} = \frac{OE \, . \, tang\, b}{OE \, . \, tang\, c}, \text{ folglich}$$

4. . . . $\cos \alpha = \dfrac{tang\, b}{tang\, c}$; entsprechend 5. . . $\cos \beta = \dfrac{tang\, a}{tang\, c}$

Ferner ist $$tang\, \alpha = \frac{DB}{DE} = \frac{OD \, . \, tang\, a}{OD \, . \, \sin b}, \text{ folglich}$$

6. . . $tang\, \alpha = \dfrac{tang\, a}{\sin b}$; entsprechend 7. . $tang\, \beta = \dfrac{tang\, b}{\sin a}$

Aus der Formel 4. $\cos \alpha = \dfrac{tang\, b}{tang\, c}$, folgt

$$\cos \alpha = \frac{\sin b}{\cos b} \cdot \frac{\cos c}{\sin c} = \frac{\sin b}{\sin c} \cdot \frac{\cos c}{\cos b}$$

oder unter Benutzung der Formeln 3. und 1.

8. $\cos \alpha = \sin \beta \, . \, \cos a$; entsprechend 9. . $\cos \beta = \sin \alpha \, . \, \cos b$

Endlich folgt aus der Formel 1. $\cos c = \cos a \, . \, \cos b$, indem man für $\cos a$ und $\cos b$ ihre aus den Formeln 8. und 9. folgenden Werte einsetzt

$$\cos c = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \text{ oder}$$

10. . . . . . . $\cos c = cotg\, \alpha \, . \, cotg\, \beta$

§ 115. Napiersche Regel. Um die Gleichungen 1. bis 10. besser dem Gedächtnisse einzuprägen und beim Rechnen stets gegenwärtig zu haben, ordne man sie folgendermaßen:

$\sin b = \sin c \, . \, \sin \beta$	nach	3.
$\sin a = \sin c \, . \, \sin \alpha$	„	2.
$\cos c = \cos a \, . \, \cos b$	„	1.
$\cos \alpha = \cos a \, . \, \sin \beta$	„	8.
$\cos \beta = \cos b \, . \, \sin \alpha$	„	9.
$\sin b = tang\, a \, . \, cotg\, \alpha$	„	6.
$\sin a = tang\, b \, . \, cotg\, \beta$	„	7.
$\cos c = cotg\, \alpha \, . \, cotg\, \beta$	„	10.
$\cos \alpha = tang\, b \, . \, cotg\, c$	„	4.
$\cos \beta = tang\, a \, . \, cotg\, c$	„	5.

Setzt man in diese Gleichungen statt der Katheten ihre Komplemente ein und bezeichnet diese durch dieselben, zur Unterscheidung nur mit einem $'$ versehenen Buchstaben, so nehmen die zehn Gleichungen die folgende sehr übersichtliche Gestalt an

$$\cos b' = \sin c \,.\, \sin \beta$$
$$\cos a' = \sin c \,.\, \sin \alpha$$
$$\cos c = \sin a' \,.\, \sin b'$$
$$\cos \alpha = \sin a' \,.\, \sin \beta$$
$$\cos \beta = \sin b' \,.\, \sin \alpha$$

$$\cos b' = \operatorname{cotg} a' \,.\, \operatorname{cotg} \alpha$$
$$\cos a' = \operatorname{cotg} b' \,.\, \operatorname{cotg} \beta$$
$$\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \,.\, \operatorname{cotg} \beta$$
$$\cos \alpha = \operatorname{cotg} b' \,.\, \operatorname{cotg} c$$
$$\cos \beta = \operatorname{cotg} a' \,.\, \operatorname{cotg} c$$

Die große Regelmäßigkeit dieser Gleichungen springt in die Augen. Die rechte Seite der fünf ersten Gleichungen wird durch ein Produkt zweier Sinus, die rechte Seite der fünf letzten durch ein Produkt zweier Kotangenten gebildet; auf der linken Seite kommt nur der Kosinus vor. Stellt man die fünf in diesen Gleichungen vorkommenden Stücke so auf einem Kreise zusammen, wie sie im Dreiecke aneinander grenzen (Fig. 117), so sieht man leicht, daß für sämtliche zehn Gleichungen das Stück der linken Seite mitten zwischen den beiden Stücken der rechten Seite liegt, daß aber die drei Stücke in den fünf letzten Gleichungen unmittelbar nebeneinander, die drei Stücke in den fünf ersten Gleichungen getrennt voneinander liegen. Daraus folgt die Regel:

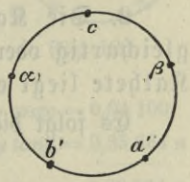


Fig. 117.

Der Kosinus eines Mittelstückes ist gleich dem Produkte aus den Kotangenten der anliegenden oder den Sinus der gegenüberliegenden Stücke.

Diese Regel wird die Napiersche Regel genannt.

§ 116. **Berechnung rechtwinkliger sphärischer Dreiecke.** Um mit Hülfe der Napierschen Regel aus zwei Stücken eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks ein drittes Stück zu berechnen, macht man zunächst keinen Unterschied zwischen gegebenen und gesuchten Stücken, sondern setzt die Gleichung zwischen den drei Stücken an, je nachdem sie anliegend oder getrennt sind. In diese führt man unter Anwendung der Kofunktionen die Katheten selbst wieder ein und löst dann die Gleichung nach der Unbekannten auf.

Beim Rechnen hat man besonders zu beachten, daß die Kosinus, Sekanten, Tangenten und Kotangenten stumpfer Winkel negativ sind, und daß umgekehrt zu einem negativen Werte dieser Funktionen nicht der unmittelbar aufgeschlagene spitze Winkel, sondern das stumpfe Supplement dieses aufgeschlagenen Winkels gehört (vgl. § 102).

Die Sinus und Kosekanten stumpfer Winkel sind dagegen positiv und zwar gleich derselben Funktion ihres spitzen Supplements.

Wenn ein Winkel durch seinen Sinus bestimmt wird, so kann man deshalb nicht unmittelbar aus dem Vorzeichen wissen, ob der spitze Winkel oder sein stumpfes Supplement zu nehmen ist. Man muß in diesem Falle die folgenden Regeln zur Hülfe nehmen:

1. Zu gleichartigen Katheten gehört eine spitze Hypotenuse und zu ungleichartigen Katheten gehört eine stumpfe Hypotenuse oder: Im rechtwinkligen sphärischen Dreieck ist entweder gar keine Seite oder es sind zwei Seiten stumpf.

Diese Regel kann man sich geometrisch an der Kugel klar machen; man kann sie aber auch daraus folgern, daß im rechtwinkligen Dreieck

$$\cos c = \cos a \,.\, \cos b$$

ist. Wenn a und b gleichartig sind, so haben nämlich $\cos a$ und $\cos b$ gleiche Vorzeichen, $\cos c$ ist also positiv oder c ein spitzer Winkel und umgekehrt.

Ferner gilt die Regel:

2. Die Kathete und der gegenüberliegende Winkel sind stets gleichartig oder: Einer spitzen Kathete liegt ein spitzer, einer stumpfen Kathete liegt ein stumpfer Winkel gegenüber.

Es folgt dies trigonometrisch aus den Gleichungen

$$\cos \alpha = \cos a \,.\, \sin \beta$$
$$\cos \beta = \cos b \,.\, \sin \alpha$$

Da $\sin \beta$ immer positiv ist (überstumpfe Winkel kommen hier nicht in Betracht), so haben $\cos \alpha$ und $\cos a$ immer dasselbe Zeichen, d. h. α und a sind entweder beide spitz oder beide stumpf. Dasselbe gilt nach der zweiten Gleichung von β und b.

In der rechtwinkligen sphärischen Trigonometrie giebt es einen zweideutigen Fall, nämlich den, wenn ein Winkel und die ihm gegenüberliegende Kathete gegeben sind. In der That, verlängert man in dem sphärischen Dreieck ABC die Kathete AC und die Hypotenuse AB (Fig. 118), so schneiden sich die Verlängerungen im Gegenpunkte A' der Kugel und zwar unter demselben Winkel α. Das rechtwinklige Dreieck $A'BC$ hat also denselben Winkel α und dieselbe gegenüberliegende Kathete a wie das Dreieck ABC. $A'B$ ist das Supplement von AB, ebenso $A'C$ dasjenige von AC und endlich $A'BC$ dasjenige von ABC (vgl. Beispiel 4).

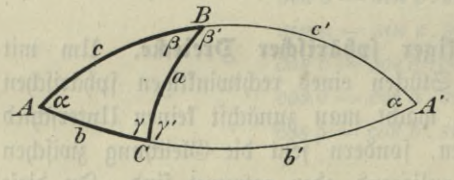


Fig. 118.

Beispiele: 1. Gegeben die Hypotenuse und eine Kathete.

Von einem sphärischen Dreieck ABC ist gegeben

$AB = 59^0\,25'$ $\quad AC = 131^0\,16'$ $\quad \measuredangle\, C = 90^0$.

Die fehlenden Stücke sind zu berechnen.

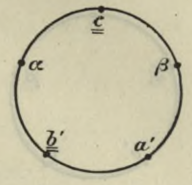


Fig. 119.

$\cos\alpha = \operatorname{cotg} b' \,.\, \operatorname{cotg} c$ $\quad \cos b' = \sin c \,.\, \sin\beta$ $\quad \cos c = \sin a' \,.\, \sin b'$

$\cos\alpha = \operatorname{tang} b \,.\, \operatorname{cotg} c$ $\quad \sin b = \sin c \,.\, \sin\beta$ $\quad \cos c = \cos a \,.\, \cos b$

$\sec\alpha = \operatorname{cotg} b \,.\, \operatorname{tang} c$ $\quad \sin\beta = \sin b \,.\, \operatorname{cosec} c$ $\quad \sec a = \cos b \,.\, \sec c$

$b = 131^0\,16'$	$\log \operatorname{cotg} = 9{,}94\,324\; n$	$\log \sin = 9{,}87\,601$	$\log \cos = 9{,}81\,926\; n$
$c = 59^0\,25'$	$\log \operatorname{tang} = 0{,}22\,841$	$\log \operatorname{cosec} = 0{,}06\,505$	$\log \sec = 0{,}29\,346$
	$\log \sec = 0{,}17\,165\; n$	$\log \sin = 9{,}94\,106$	$\log \sec = 0{,}11\,272\; n$
	$\alpha = 132^0\,20{,}4'$	$\beta = 119^0\,10{,}9'$	$a = 140^0\,28{,}8'$

Anmerkung: α und a sind stumpf, weil ihre Sekanten negativ sind; β ist stumpf, weil b stumpf ist (Regel 2).

2. Gegeben die beiden Katheten.

Von einem sphärischen Dreieck ABC ist gegeben:

$AC = 114^0\,30{,}4'$ $\quad AB = 113^0\,44{,}7'$ $\quad \measuredangle\, A = 90^0$

Die fehlenden Stücke sind zu berechnen.

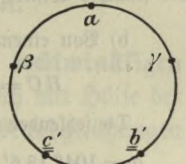


Fig. 120.

$\cos a = \sin b' \,.\, \sin c'$ $\quad \cos c' = \operatorname{cotg} b' \,.\, \operatorname{cotg}\beta$ $\quad \cos b' = \operatorname{cotg} c' \,.\, \operatorname{cotg}\gamma$

$\cos a = \cos b \,.\, \cos c$ $\quad \sin c = \operatorname{tang} b \,.\, \operatorname{cotg}\beta$ $\quad \sin b = \operatorname{tang} c \,.\, \operatorname{cotg}\gamma$

$\sec a = \sec b \,.\, \sec c$ $\quad \operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang} b \,.\, \operatorname{cosec} c$ $\quad \operatorname{tang}\gamma = \operatorname{cosec} b \,.\, \operatorname{tang} c$

$b = 114^0\,30{,}4'$	$\log \sec = 0{,}38\,216\; n$	$\log \operatorname{tang} = 0{,}34\,116\; n$	$\log \operatorname{cosec} = 0{,}04\,100$
$c = 113^0\,44{,}7'$	$\log \sec = 0{,}39\,506\; n$	$\log \operatorname{cosec} = 0{,}03\,841$	$\log \operatorname{tang} = 0{,}35\,664\; n$
	$\log \sec = 0{,}77\,722$	$\log \operatorname{tang} = 0{,}37\,957\; n$	$\log \operatorname{tang} = 0{,}39\,764\; n$
	$a = 80^0\,23{,}1$	$\beta = 112^0\,39{,}0'$	$\gamma = 111^0\,48{,}9'$

Anmerkung: a ist spitz, weil seine Sekante positiv ist; β und γ sind stumpf, weil ihre Tangenten negativ sind.

3. Gegeben die Hypotenuse und ein Winkel.

Von einem sphärischen Dreieck ABC ist gegeben:

$AC = 153^0\,27'$ $\quad \measuredangle\, A = 51^0\,3'$ $\quad \measuredangle\, B = 90^0$

Die fehlenden Stücke sind zu berechnen.

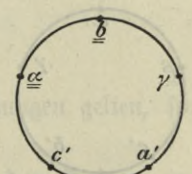


Fig. 121.

$\cos a' = \sin b \,.\, \sin\alpha$ $\quad \cos\alpha = \operatorname{cotg} b \,.\, \operatorname{cotg} c'$ $\quad \cos b = \operatorname{cotg}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\gamma$

$\sin a = \sin b \,.\, \sin\alpha$ $\quad \cos\alpha = \operatorname{cotg} b \,.\, \operatorname{tang} c$ $\quad \operatorname{tang}\gamma = \sec b \,.\, \operatorname{cotg}\alpha$

$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} b \,.\, \cos\alpha$

$b = 153^0\,27'$	$\log \sin = 9{,}65\,029$	$\log \operatorname{tang} = 9{,}69\,868\; n$	$\log \sec = 0{,}04\,840\; n$
$\alpha = 51^0\;\;3'$	$\log \sin = 9{,}89\,081$	$\log \cos = 9{,}79\,840$	$\log \operatorname{cotg} = 9{,}90\,759$
	$\log \sin = 9{,}54\,110$	$\log \operatorname{tang} = 9{,}49\,708\; n$	$\log \operatorname{tang} = 9{,}95\,599\; n$
	$a = 20^0\,20{,}5'$	$c = 162^0\,33{,}7'$	$\gamma = 137^0\,53{,}9'$

Anmerkung: a ist spitz, weil α spitz ist (Regel 2); c und γ sind stumpf, weil ihre Tangenten negativ sind.

4. Gegeben eine Kathete und der gegenüberliegende Winkel. (Zweideutiger Fall.)

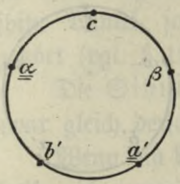


Fig. 122.

a) Von einem sphärischen Dreieck ABC ist gegeben:

$$BC = 37^0\,50{,}4' \qquad \sphericalangle A = 58^0\,41{,}8' \qquad \sphericalangle C = 90^0$$

Die fehlenden Stücke sind zu berechnen.

$\cos a' = \sin c \,.\, \sin\alpha$	$\cos b' = \operatorname{cotg} a' \,.\, \operatorname{cotg}\alpha$	$\cos\alpha = \sin a' \,.\, \sin\beta$
$\sin a = \sin c \,.\, \sin\alpha$	$\sin b = \operatorname{tang} a \,.\, \operatorname{cotg}\alpha$	$\cos\alpha = \cos a \,.\, \sin\beta$
$\sin c = \sin a \,.\, \operatorname{cosec}\alpha$		$\sin\beta = \sec a \,.\, \cos\alpha$

$a = 37^0\,50{,}4'$	$\log\sin = 9{,}78\,778$	$\log\operatorname{tang} = 9{,}89\,030$	$\log\sec = 0{,}10\,252$
$\alpha = 58^0\,41{,}8'$	$\log\operatorname{cosec} = 0{,}06\,833$	$\log\operatorname{cotg} = 9{,}78\,397$	$\log\cos = 9{,}71\,564$
	$\log\sin = 9{,}85\,611$	$\log\sin = 9{,}67\,427$	$\log\sin = 9{,}81\,816$
	$c = 45^0\,53{,}3'$	$b = 28^0\,11{,}3'$	$\beta = 41^0\;8{,}4'$
	$c' = 134^0\;6{,}7'$	$b' = 151^0\,48{,}7'$	$\beta' = 138^0\,51{,}6'$

Anmerkung: Da die gegebene Kathete spitz ist, so gehört nach Regel 1 zu dem spitzen Werte der Hypotenuse c eine spitze Kathete b, also auch nach Regel 2 der spitze Winkel β; dagegen gehört zu dem stumpfen Werte der Hypothenuse c' die stumpfe Kathete b', also auch der stumpfe Winkel β'.

b) Von einem sphärischen Dreieck ist gegeben:

$$BC = 104^0\,13{,}6' \qquad \sphericalangle A = 98^0\,16{,}4' \qquad \sphericalangle C = 90^0$$

Die fehlenden Stücke sind zu berechnen. Berechnung nach den Formeln des vorigen Beispiels.

$a = 104^0\,13{,}6'$	$\log\sin = 9{,}98\,647$	$\log\operatorname{tang} = 0{,}59\,596\,n$	$\log\sec = 0{,}60\,949\,n$
$\alpha = 98^0\,16{,}4'$	$\log\operatorname{cosec} = 0{,}00\,454$	$\log\operatorname{cotg} = 9{,}16\,259\,n$	$\log\cos = 9{,}15\,805\,n$
	$\log\sin = 9{,}99\,101$	$\log\sin = 9{,}75\,855$	$\log\sin = 9{,}76\,754$
	$c = 78^0\,23{,}0'$	$b = 145^0\;0{,}2'$	$\beta = 144^0\;9{,}6'$
	$c' = 101^0\,37{,}0'$	$b' = 34^0\,59{,}8'$	$\beta' = 35^0\,50{,}4'$

Anmerkung: Da in diesem Falle die gegebene Kathete stumpf ist, so gehört hier zu der spitzen Hypotenuse c die stumpfe Kathete b und der stumpfe Winkel β, dagegen zu der stumpfen Hypotenuse c' die spitze Kathete b' und der spitze Winkel β'.

5. Gegeben eine Kathete und der anliegende Winkel.

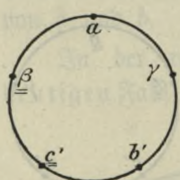


Fig. 123.

Von einem sphärischen Dreieck ABC ist gegeben:

$$AB = 132^0\,0{,}6' \qquad \sphericalangle B = 98^0\,49{,}5' \qquad \sphericalangle A = 90^0$$

Die fehlenden Stücke sind zu berechnen.

$\cos\beta = \operatorname{cotg} a \,.\, \operatorname{cotg} c'$	$\cos c' = \operatorname{cotg} b' \,.\, \operatorname{cotg}\beta$	$\cos\gamma = \sin c' \,.\, \sin\beta$
$\cos\beta = \operatorname{cotg} a \,.\, \operatorname{tang} c$	$\sin c = \operatorname{tang} b \,.\, \operatorname{cotg}\beta$	$\cos\gamma = \cos c \,.\, \sin\beta$
$\operatorname{tang} a = \operatorname{tang} c \,.\, \sec\beta$	$\operatorname{tang} b = \sin c \,.\, \operatorname{tang}\beta$	$\sec\gamma = \sec c \,.\, \operatorname{cosec}\beta$

$c = 132^0\;0{,}6'$	$\log\operatorname{tang} = 0{,}04\,541\,n$	$\log\sin = 9{,}87\,100$	$\log\sec = 0{,}17\,441\,n$
$\beta = 98^0\,49{,}5'$	$\log\sec = 0{,}81\,412\,n$	$\log\operatorname{tang} = 0{,}80\,896\,n$	$\log\operatorname{cosec} = 0{,}00\,517$
	$\log\operatorname{tang} = 0{,}85\,953$	$\log\operatorname{tang} = 0{,}67\,996\,n$	$\log\sec = 0{,}17\,958\,n$
	$a = 82^0\,7{,}9'$	$b = 101^0\,48{,}1'$	$\gamma = 131^0\,24{,}1'$

Anmerkung: a ist spitz, weil seine Tangente positiv ist; b ist stumpf, weil seine Tangente negativ ist; γ ist stumpf, weil seine Sekante negativ ist.

6. Gegeben die beiden Winkel.

Von einem sphärischen Dreieck ABC ist gegeben:

$$\measuredangle A = 58^0\,35{,}2' \qquad \measuredangle B = 105^0\,11{,}4' \qquad \measuredangle C = 90^0$$

Die fehlenden Stücke sind zu berechnen.

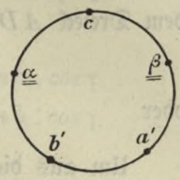


Fig. 124.

$\cos c = \operatorname{cotg}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\beta$	$\cos\beta = \sin b' \,.\, \sin\alpha$	$\cos\alpha = \sin a' \,.\, \sin\beta$
$\sec c = \operatorname{tang}\alpha \,.\, \operatorname{tang}\beta$	$\cos\beta = \cos b \,.\, \sin\alpha$	$\cos\alpha = \cos a \,.\, \sin\beta$
	$\sec b = \sin\alpha \,.\, \sec\beta$	$\sec a = \sec\alpha \,.\, \sin\beta$

$\alpha = 58^0\,35{,}2'$	$\log\operatorname{tang} = 0{,}21\,416$	$\log\sin = 9{,}93\,116$	$\log\sec = 0{,}28\,299$
$\beta = 105^0\,11{,}4'$	$\log\operatorname{tang} = 0{,}56\,622\,n$	$\log\sec = 0{,}58\,167\,n$	$\log\sin = 9{,}98\,455$
	$\log\sec = 0{,}78\,038\,n$	$\log\sec = 0{,}51\,283\,n$	$\log\sec = 0{,}26\,754$
	$c = 99^0\,32{,}7'$	$b = 107^0\,52{,}8'$	$a = 57^0\,18{,}7'$

Anmerkung: c und b sind stumpf, weil ihre Sekanten negativ sind; a ist spitz, weil seine Sekante positiv ist.

Das schiefwinklige sphärische Dreieck.

§ 117. Ableitung der Grundformeln mit Hülfe der rechtwinkligen Trigonometrie. Zur Auflösung schiefwinkliger Dreiecke lassen sich mit Hülfe der Formeln für die rechtwinklige Trigonometrie die folgenden Grundgleichungen ableiten.

Es sei ABC ein schiefwinkliges sphärisches Dreieck. Man fälle von A das sphärische Lot $AD = h$ auf BC, so ist nach § 114 Formel 2 und 3

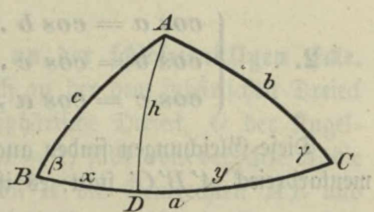


Fig. 125.

$$\sin\beta = \frac{\sin h}{\sin c}$$

$$\sin\gamma = \frac{\sin h}{\sin b}$$

folglich $$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\sin h}{\sin c} \cdot \frac{\sin b}{\sin h} = \frac{\sin b}{\sin c}$$

oder $$\sin b : \sin c = \sin\beta : \sin\gamma$$

Da auch für die anderen Seitenpaare entsprechende Gleichungen gelten, so hat man den Satz:

Im sphärischen Dreieck verhalten sich die Sinus der Seiten zu einander, wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

$$1. \;\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} \sin a : \sin b = \sin\alpha : \sin\beta \\ \sin b : \sin c = \sin\beta : \sin\gamma \\ \sin c : \sin a = \sin\gamma : \sin\alpha \end{array}\right.$$

Man nennt diese Formeln den Sinussatz oder die Sinusregel für das sphärische Dreieck.

Bezeichnet man ferner die Abschnitte der Seite BC mit x und y, so ist in dem Dreieck ADB

$$\cos c = \cos h \,.\, \cos x$$

oder

$$\cos c = \cos h \,.\, \cos (a - y)$$

Um aus dieser Gleichung h zu beseitigen, setzt man, wie sich aus $\triangle\, ADC$ ergiebt

$$\cos h = \frac{\cos b}{\cos y}$$

und erhält

$$\cos c = \frac{\cos b}{\cos y} \cos (a - y)$$

$$\cos c = \frac{\cos b}{\cos y} (\cos a \,.\, \cos y + \sin a \,.\, \sin y)$$

$$\cos c = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \cos b \,.\, \tan y$$

Es ist aber im Dreieck ADC nach § 114 Formel 4

$$\tan y = \tan b \,.\, \cos \gamma$$

also

$$\cos c = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \cos b \,.\, \tan b \,.\, \cos \gamma$$

oder

$$\cos c = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos \gamma$$

Man hat demnach die Formelgruppe

$$2. \;.\;.\; \begin{cases} \boldsymbol{\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos \alpha} \\ \boldsymbol{\cos b = \cos c \,.\, \cos a + \sin c \,.\, \sin a \,.\, \cos \beta} \\ \boldsymbol{\cos c = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos \gamma} \end{cases}$$

Diese Gleichungen finden auch an dem zum Dreieck ABC gehörigen Supplementardreieck $A'B'C'$ statt; es ist z. B.

$$\cos c' = \cos a' \,.\, \cos b' + \sin a' \,.\, \sin b' \,.\, \cos \gamma'$$

Setzt man in diese Gleichung die Werte $c' = 180^0 - \gamma$, $a' = 180^0 - \alpha$, $b' = 180^0 - \beta$ und $\gamma' = 180^0 - c$ ein, so erhält man

$$-\cos \gamma = \cos \alpha \,.\, \cos \beta - \sin \alpha \,.\, \sin \beta \,.\, \cos c$$

oder

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \,.\, \cos \beta + \sin \alpha \,.\, \sin \beta \,.\, \cos c$$

Man hat demnach auch die Formelgruppe

$$3. \;.\;.\;.\;.\; \begin{cases} \cos \alpha = -\cos \beta \,.\, \cos \gamma + \sin \beta \,.\, \sin \gamma \,.\, \cos a \\ \cos \beta = -\cos \gamma \,.\, \cos \alpha + \sin \gamma \,.\, \sin \alpha \,.\, \cos b \\ \cos \gamma = -\cos \alpha \,.\, \cos \beta + \sin \alpha \,.\, \sin \beta \,.\, \cos c \end{cases}$$

Wenn man in die dritte der obigen Gleichungen 2. den Wert für $\cos a$ aus der ersten der Gleichungen 2. einsetzt, so erhält man

$$\cos c = (\cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos \alpha) \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos \gamma$$

$$\cos c = \cos c \,.\, \cos^2 b + \sin b \,.\, \cos b \,.\, \sin c \,.\, \cos \alpha + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos \gamma$$

oder indem man das erste Glied von der rechten Seite auf die linke hinüberbringt und $\cos c$ heraussetzt

$$\cos c\,(1 - \cos^2 b) = \sin b \,.\, \cos b \,.\, \sin c \,.\, \cos \alpha + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos \gamma$$
$$\cos c \,.\, \sin^2 b = \sin b \,.\, \cos b \,.\, \sin c \,.\, \cos \alpha + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos \gamma$$

oder wenn man auf beiden Seiten durch $\sin c \,.\, \sin b$ dividiert

$$\cot g\, c \,.\, \sin b = \cos b \,.\, \cos \alpha + \frac{\sin a}{\sin c} \,.\, \cos \gamma$$

Es ist aber
$$\frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

also
$$\cot g\, c \,.\, \sin b = \cos b \,.\, \cos \alpha + \sin \alpha \,.\, \cot g\, \gamma$$

und man hat daher die Formelgruppe

$$4. \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \cot g\, a \,.\, \sin c = \cos c \,.\, \cos \beta + \sin \beta \,.\, \cot g\, \alpha \\ \cot g\, a \,.\, \sin b = \cos b \,.\, \cos \gamma + \sin \gamma \,.\, \cot g\, \alpha \\ \cot g\, b \,.\, \sin a = \cos a \,.\, \cos \gamma + \sin \gamma \,.\, \cot g\, \beta \\ \cot g\, b \,.\, \sin c = \cos c \,.\, \cos \alpha + \sin \alpha \,.\, \cot g\, \beta \\ \cot g\, c \,.\, \sin b = \cos b \,.\, \cos \alpha + \sin \alpha \,.\, \cot g\, \gamma \\ \cot g\, c \,.\, \sin a = \cos a \,.\, \cos \beta + \sin \beta \,.\, \cot g\, \gamma \end{array} \right.$$

§ 118. Ableitung der Grundformeln an der schiefwinkligen Ecke. Die Formelgruppen 1., 2. und 4. lassen sich auch an der dem sphärischen Dreieck zugehörigen Ecke ablesen. Es sei ABC das sphärische Dreieck, O der Kugelmittelpunkt. Setzt man den Kugelhalbmesser $OA = 1$, fällt von der Ecke A die Senkrechte AD auf die Grundebene, ferner von A die Senkrechten AE und AF auf die Kanten OB und OC und verbindet E und F mit D, so sind nach § 81 DE und DF beziehungsweise senkrecht zu OB und OC. AED ist mithin gleich β, AFD gleich γ, und man hat

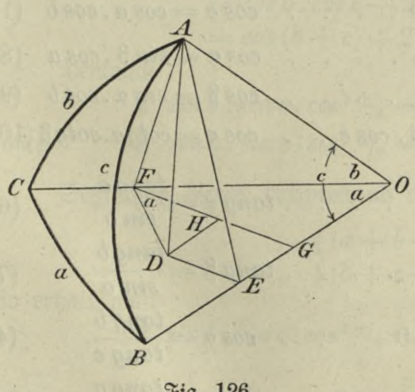


Fig. 126.

$$\sin \beta = \frac{AD}{AE}$$
$$\sin \gamma = \frac{AD}{AF}$$
$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{AD}{AE} \cdot \frac{AF}{AD} = \frac{AF}{AE} = \frac{\sin b}{\sin c}$$

Fällt man ferner von F die Senkrechte FG auf OB und zieht durch D die Parallele DH zu BO, so ist

$$DFH = COB = a,$$

weil beide dasselbe Komplement OFG haben.

Es ist dann

$$\begin{aligned} \cos c &= OE = OG + GE \\ &= OG + HD \\ &= OF \, . \cos a + FD \, . \sin a \\ &= \cos b \, . \cos a + AF \, . \cos\gamma \, . \sin a \\ &= \cos b \, . \cos a + \sin b \, . \cos\gamma \, . \sin a \\ \cos c &= \cos a \, . \cos b + \sin a \, . \sin b \, . \cos\gamma \end{aligned}$$

Ferner erhält man

$$\begin{aligned} FG &= FH + DE \\ OF \, . \sin a &= FD \, . \cos a + AE \, . \cos\beta \\ \cos b \, . \sin a &= AF \, . \cos\gamma \, . \cos a + \sin c \, . \cos\beta \\ \cos b \, . \sin a &= \sin b \, . \cos a \, . \cos\gamma + \sin c \, . \cos\beta \end{aligned}$$

oder wenn man durch $\sin b$ dividiert und im letzten Glied $\frac{\sin c}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$ setzt:

$$\cot g\, b \, . \sin a = \cos a \, . \cos\gamma + \sin\gamma \, . \cot g\,\beta$$

Dieses ist aber eine der Formeln 4. in § 117. Aus ihr folgen die andern durch geeignete Vertauschung der Buchstaben.

§ 119. Die Formeln der rechtwinkligen sphärischen Trigonometrie (§ 114, Formeln 1. bis 10.) kann man aus denjenigen der schiefwinkligen sphärischen Trigonometrie dadurch ableiten, daß man in allen Formeln der Gruppen 1. bis 4., in denen der Winkel γ vorkommt, $\gamma = 90^0$, also $\sin\gamma = 1$, $\cos\gamma = 0$ und $\cot g\,\gamma = 0$ setzt:

$$1. \left\{ \begin{array}{lll} \sin b : \sin c = \sin\beta : 1 \;\; \ldots\ldots & \sin\beta = \dfrac{\sin b}{\sin c} & (3) \\ \sin c : \sin a = 1 : \sin\alpha \;\; \ldots\ldots & \sin\alpha = \dfrac{\sin a}{\sin c} & (2) \end{array} \right.$$

$$2. \quad \cos c = \cos a \, . \cos b + \sin a \, . \sin b \, . 0 \;\; \ldots \quad \cos c = \cos a \, . \cos b \quad (1)$$

$$3. \left\{ \begin{array}{lll} \cos\alpha = -\cos\beta \, . 0 + \sin\beta \, . 1 \, . \cos a \;\; \ldots & \cos\alpha = \sin\beta \, . \cos a & (8) \\ \cos\beta = -0 \, . \cos\alpha + 1 \, . \sin\alpha \, . \cos b \;\; \ldots & \cos\beta = \sin\alpha \, . \cos b & (9) \\ 0 = -\cos\alpha \, . \cos\beta + \sin\alpha \, . \sin\beta \, . \cos c \;\; \ldots & \cos c = \cot g\,\alpha \, . \cot g\,\beta & (10) \end{array} \right.$$

$$4. \left\{ \begin{array}{lll} \cot g\, a \, . \sin b = \cos b \, . 0 + 1 \, . \cot g\,\alpha \;\; \ldots & \operatorname{tang}\alpha = \dfrac{\operatorname{tang} a}{\sin b} & (6) \\ \cot g\, b \, . \sin a = \cos a \, . 0 + 1 \, . \cot g\,\beta \;\; \ldots & \operatorname{tang}\beta = \dfrac{\operatorname{tang} b}{\sin a} & (7) \\ \cot g\, c \, . \sin b = \cos b \, . \cos\alpha + \sin\alpha \, . 0 \;\; \ldots & \cos\alpha = \dfrac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} c} & (4) \\ \cot g\, c \, . \sin a = \cos a \, . \cos\beta + \sin\beta \, . 0 \;\; \ldots & \cos\beta = \dfrac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} c} & (5) \end{array} \right.$$

§ 120. Umformung der Grundgleichungen. Formeln zur Berechnung der Winkel aus den drei Seiten. Die in § 117 abgeleiteten Formeln genügen, um aus drei Stücken eines sphärischen Dreiecks die übrigen zu berechnen. Die Formeln sind jedoch außer der Sinusregel für logarithmische Rechnung noch nicht geeignet, da Additions- und Subtraktionszeichen in ihnen vorkommen.

Es sollen jetzt aus den Formeln 2. des § 117 eine Reihe von Gleichungen abgeleitet werden, die eine logarithmische Berechnung der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks ermöglichen.

Es ist nach der ersten dieser Formeln

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos \alpha,$$ also nach § 103, Formel 7.

$$\begin{aligned} &= \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, (1 - 2 \,.\, \sin^2 {}^{\alpha}/_{2}) \\ &= \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c - 2 \,.\, \sin b \,.\, \sin c \,.\, \sin^2 {}^{\alpha}/_{2} \\ &= \cos (b - c) - 2 \,.\, \sin b \,.\, \sin c \,.\, \sin^2 {}^{\alpha}/_{2} \end{aligned}$$

Demnach

$$2 \,.\, \sin b \,.\, \sin c \,.\, \sin^2 {}^{\alpha}/_{2} = \cos (b - c) - \cos a$$

oder

$$2 \,.\, \sin b \,.\, \sin c \,.\, \sin^2 {}^{\alpha}/_{2} = 2 \,.\, \sin \tfrac{1}{2} (a + b - c) \,.\, \sin \tfrac{1}{2} (a - b + c)$$

Setzt man

$$a + b + c = s$$

so ist

$$\tfrac{1}{2} (a - b + c) = {}^{s}/_{2} - b$$
$$\tfrac{1}{2} (a + b - c) = {}^{s}/_{2} - c$$

Setzt man diese Werte in die obige Gleichung ein, so erhält man:

$$2 \,.\, \sin b \,.\, \sin c \,.\, \sin^2 {}^{\alpha}/_{2} = 2 \,.\, \sin ({}^{s}/_{2} - b) \,.\, \sin ({}^{s}/_{2} - c)$$

oder

$$\sin^2 {}^{\alpha}/_{2} = \frac{\sin ({}^{s}/_{2} - b) \,.\, \sin ({}^{s}/_{2} - c)}{\sin b \,.\, \sin c}$$

In ähnlicher Weise kann man einen Wert für $\cos^2 {}^{\alpha}/_{2}$ ableiten.

Es ist: $\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos \alpha$, also nach § 103, Formel 8.

$$\begin{aligned} &= \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, (2 \,.\, \cos^2 {}^{\alpha}/_{2} - 1) \\ &= \cos b \,.\, \cos c + 2 \,.\, \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos^2 {}^{\alpha}/_{2} - \sin b \,.\, \sin c \\ &= \cos (b + c) + 2 \,.\, \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos^2 {}^{\alpha}/_{2} \end{aligned}$$

Demnach

$$2 \,.\, \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos^2 {}^{\alpha}/_{2} = \cos a - \cos (b + c)$$

oder

$$2 \,.\, \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos^2 {}^{\alpha}/_{2} = 2 \,.\, \sin \tfrac{1}{2} (a + b + c) \,.\, \sin \tfrac{1}{2} (b + c - a)$$

Setzt man hierin, entsprechend wie oben

$$\tfrac{1}{2} (a + b + c) = {}^{s}/_{2}$$
$$\tfrac{1}{2} (b + c - a) = {}^{s}/_{2} - a$$

so erhält man

$$2 \,.\, \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos^2 {}^{\alpha}/_{2} = 2 \,.\, \sin {}^{s}/_{2} \,.\, \sin ({}^{s}/_{2} - a)$$

oder

$$\cos^2 {}^{\alpha}/_{2} = \frac{\sin {}^{s}/_{2} \,.\, \sin ({}^{s}/_{2} - a)}{\sin b \,.\, \sin c}$$

Aus diesen für $sin^2\, ^{\alpha}/_2$ und $cos^2\, ^{\alpha}/_2$ abgeleiteten Gleichungen folgt durch Division

$$tang^2\, ^{\alpha}/_2 = \frac{sin\,(^s/_2 - b)\,.\,sin\,(^s/_2 - c)}{sin\, ^s/_2\,.\,sin\,(^s/_2 - a)}$$

Zieht man aus den für $sin^2\, ^{\alpha}/_2$, $cos^2\, ^{\alpha}/_2$, $tang^2\, ^{\alpha}/_2$ abgeleiteten Werten die Wurzel, so hat man die Formeln

$$1.\quad . \;.\quad sin\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{sin\,(^s/_2 - b)\,.\,sin\,(^s/_2 - c)}{sin\,b\,.\,sin\,c}}$$

$$2.\quad . \;.\quad cos\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{sin\, ^s/_2\,.\,sin\,(^s/_2 - a)}{sin\,b\,.\,sin\,c}}$$

$$3.\quad . \;.\quad tang\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{sin\,(^s/_2 - b)\,.\,sin\,(^s/_2 - c)}{sin\, ^s/_2\,.\,sin\,(^s/_2 - a)}}$$

Entsprechende Formeln gelten für die beiden anderen Winkel des Dreiecks.

§ 121. Die Gaußischen und Napierschen Gleichungen. Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist:

$$1.\quad sin\, ^{\alpha}/_2 = \sqrt{\frac{sin\,(^s/_2 - b)\,.\,sin\,(^s/_2 - c)}{sin\,b\,.\,sin\,c}}$$

$$2.\quad sin\, ^{\beta}/_2 = \sqrt{\frac{sin\,(^s/_2 - c)\,.\,sin\,(^s/_2 - a)}{sin\,c\,.\,sin\,a}}$$

$$3.\quad sin\, ^{\gamma}/_2 = \sqrt{\frac{sin\,(^s/_2 - a)\,.\,sin\,(^s/_2 - b)}{sin\,a\,.\,sin\,b}}$$

$$4.\quad cos\, ^{\alpha}/_2 = \sqrt{\frac{sin\, ^s/_2\,.\,sin\,(^s/_2 - a)}{sin\,b\,.\,sin\,c}}$$

$$5.\quad cos\, ^{\beta}/_2 = \sqrt{\frac{sin\, ^s/_2\,.\,sin\,(^s/_2 - b)}{sin\,c\,.\,sin\,a}}$$

$$6.\quad cos\, ^{\gamma}/_2 = \sqrt{\frac{sin\, ^s/_2\,.\,sin\,(^s/_2 - c)}{sin\,a\,.\,sin\,b}}$$

Durch Multiplikation der Gleichungen 1. und 5. erhält man

$$sin\, ^{\alpha}/_2\,.\,cos\, ^{\beta}/_2 = \sqrt{\frac{sin^2\,(^s/_2 - b)\,.\,sin\,(^s/_2 - c)\,.\,sin\, ^s/_2}{sin\,a\,.\,sin\,b\,.\,sin^2\,c}}$$

$$= \frac{sin\,(^s/_2 - b)}{sin\,c}\sqrt{\frac{sin\, ^s/_2\,.\,sin\,(^s/_2 - c)}{sin\,a\,.\,sin\,b}}$$

oder nach Gleichung 6.

$$sin\, ^{\alpha}/_2\,.\,cos\, ^{\beta}/_2 = \frac{sin\,(^s/_2 - b)\,.\,cos\, ^{\gamma}/_2}{sin\,c}$$

In ähnlicher Weise erhält man durch Multiplikation der Gleichungen 4. und 2.

$$\cos {}^{\alpha}/_2 \,.\, \sin {}^{\beta}/_2 = \frac{\sin ({}^{s}/_2 - a) \,.\, \cos {}^{\gamma}/_2}{\sin c}$$

ferner durch Multiplikation der Gleichungen 4. und 5.

$$\cos {}^{\alpha}/_2 \,.\, \cos {}^{\beta}/_2 = \frac{\sin {}^{s}/_2 \,.\, \sin {}^{\gamma}/_2}{\sin c}$$

und endlich durch Multiplikation der Gleichungen 1. und 2.

$$\sin {}^{\alpha}/_2 \,.\, \sin {}^{\beta}/_2 = \frac{\sin ({}^{s}/_2 - c) \,.\, \sin {}^{\gamma}/_2}{\sin c}$$

Nun ist nach den vier ersten Formeln des § 103

$$7.\quad \sin \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) = \sin {}^{\alpha}/_2 \,.\, \cos {}^{\beta}/_2 + \cos {}^{\alpha}/_2 \,.\, \sin {}^{\beta}/_2$$

$$8.\quad \sin \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) = \sin {}^{\alpha}/_2 \,.\, \cos {}^{\beta}/_2 - \cos {}^{\alpha}/_2 \,.\, \sin {}^{\beta}/_2$$

$$9.\quad \cos \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) = \cos {}^{\alpha}/_2 \,.\, \cos {}^{\beta}/_2 - \sin {}^{\alpha}/_2 \,.\, \sin {}^{\beta}/_2$$

$$10.\quad \cos \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) = \cos {}^{\alpha}/_2 \,.\, \cos {}^{\beta}/_2 + \sin {}^{\alpha}/_2 \,.\, \sin {}^{\beta}/_2$$

Setzt man hierin auf der rechten Seite für die Produkte die soeben gefundenen Werte ein, so geht die erste der Gleichungen über in

$$\sin \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) = \frac{\cos {}^{\gamma}/_2}{\sin c} \left[\sin ({}^{s}/_2 - b) + \sin ({}^{s}/_2 - a)\right]$$

oder
$$\sin \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) \,.\, \sin c = \cos {}^{\gamma}/_2 \left[\sin ({}^{s}/_2 - b) + \sin ({}^{s}/_2 - a)\right]$$

Setzt man auf der linken Seite nach § 103, Formel 5.

$$\sin c = 2 \sin {}^{c}/_2 \,.\, \cos {}^{c}/_2$$

und auf der rechten Seite nach § 105, Formel 13.

$$\sin({}^{s}/_2 - b) + \sin({}^{s}/_2 - a) = 2 \sin \frac{({}^{s}/_2 - b) + ({}^{s}/_2 - a)}{2} \,.\, \cos \frac{({}^{s}/_2 - b) - ({}^{s}/_2 - a)}{2}$$
$$= 2 \sin {}^{c}/_2 \,.\, \cos \tfrac{1}{2} (a - b)$$

so erhält man $\sin \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) \,.\, 2 \sin {}^{c}/_2 \,.\, \cos {}^{c}/_2 = \cos {}^{\gamma}/_2 \,.\, 2 \sin {}^{c}/_2 \,.\, \cos \tfrac{1}{2} (a - b)$

oder
$$\sin \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) \,.\, \cos {}^{c}/_2 = \cos {}^{\gamma}/_2 \,.\, \cos \tfrac{1}{2} (a - b)$$

Verfährt man in gleicher Weise mit den Formeln 8., 9. und 10. unter Berücksichtigung der Formeln 14., 15. und 16. des § 105, so erhält man drei entsprechende Gleichungen, die zusammen mit jener die **Gaußischen Gleichungen** heißen.

Es sind die folgenden:

$$11.\quad \sin \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) \,.\, \cos {}^{c}/_2 = \cos {}^{\gamma}/_2 \,.\, \cos \tfrac{1}{2} (a - b)$$

$$12.\quad \sin \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) \,.\, \sin {}^{c}/_2 = \cos {}^{\gamma}/_2 \,.\, \sin \tfrac{1}{2} (a - b)$$

$$13.\quad \cos \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) \,.\, \cos {}^{c}/_2 = \sin {}^{\gamma}/_2 \,.\, \cos \tfrac{1}{2} (a + b)$$

$$14.\quad \cos \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) \,.\, \sin {}^{c}/_2 = \sin {}^{\gamma}/_2 \,.\, \sin \tfrac{1}{2} (a + b)$$

Wenn man die Gaußischen Formeln nach folgendem Schema:

(14):(13) (12):(11) (11):(13) (12):(14)

durch einander dividiert, so erhält man die folgenden vier Gleichungen:

$$15.\quad tang\,\frac{c}{2} : tang\,\frac{a+b}{2} = cos\,\frac{\alpha+\beta}{2} : cos\,\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$16.\quad tang\,\frac{c}{2} : tang\,\frac{a-b}{2} = sin\,\frac{\alpha+\beta}{2} : sin\,\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$17.\quad cotg\,\frac{\gamma}{2} : tang\,\frac{\alpha+\beta}{2} = cos\,\frac{a+b}{2} : cos\,\frac{a-b}{2}$$

$$18.\quad cotg\,\frac{\gamma}{2} : tang\,\frac{\alpha-\beta}{2} = sin\,\frac{a+b}{2} : sin\,\frac{a-b}{2}$$

Diese Formeln heißen die Napierschen Gleichungen.

Dividiert man die Gleichung 16. durch die Gleichung 15., so erhält man

$$19.\quad tang\,\tfrac{1}{2}(a+b) : tang\,\tfrac{1}{2}(a-b) = tang\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) : tang\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

Anmerkung. Die letzte Formel, welche der Tangentenformel der ebenen Trigonometrie entspricht, kann auch unmittelbar aus der Sinusregel für das sphärische Dreieck abgeleitet werden:

$$sin\,a : sin\,b = sin\,\alpha : sin\,\beta$$

$$(sin\,a + sin\,b) : (sin\,a - sin\,b) = (sin\,\alpha + sin\,\beta) : (sin\,\alpha - sin\,\beta)$$

$$2\,sin\,\tfrac{1}{2}(a+b)\,.\,cos\,\tfrac{1}{2}(a-b) : 2\,cos\,\tfrac{1}{2}(a+b)\,.\,sin\,\tfrac{1}{2}(a-b)$$
$$= 2\,sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,.\,cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) : 2\,cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,.\,sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

oder wenn man die Glieder des links stehenden Verhältnisses durch $2\,cos\,\tfrac{1}{2}(a+b)\,.\,cos\,\tfrac{1}{2}(a-b)$, die des rechts stehenden durch $2\,cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,.\,cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$ dividiert:

$$tang\,\tfrac{1}{2}(a+b) : tang\,\tfrac{1}{2}(a-b) = tang\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) : tang\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

§ 122. Berechnung schiefwinkliger sphärischer Dreiecke. Bei der Berechnung schiefwinkliger sphärischer Dreiecke sind sechs Fälle zu unterscheiden. Es können von dem Dreieck gegeben sein:

1. die drei Seiten,
2. zwei Seiten und der zwischen ihnen liegende Winkel,
3. zwei Winkel und die zwischen ihnen liegende Seite,
4. zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel,
5. zwei Winkel und eine gegenüberliegende Seite,
6. die drei Winkel.

Wenn man aus diesen Stücken die fehlenden drei Stücke des Dreiecks berechnet hat, so kann man in allen Fällen zur Probe auf die Richtigkeit der Rechnung die Sinusregel heranziehen. Nach dieser muß sein:

$$\frac{sin\,a}{sin\,\alpha} = \frac{sin\,b}{sin\,\beta} = \frac{sin\,c}{sin\,\gamma}$$

oder $$\sin a \cdot \operatorname{cosec} \alpha = \sin b \cdot \operatorname{cosec} \beta = \sin c \cdot \operatorname{cosec} \gamma$$

oder durch Übergang zu den Logarithmen

$$\log \sin a + \log \operatorname{cosec} \alpha = \log \sin b + \log \operatorname{cosec} \beta = \log \sin c + \log \operatorname{cosec} \gamma$$

1. Fall. Gegeben die drei Seiten.

Auflösung nach den Formeln:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s/_2 - b)\cdot\sin(s/_2 - c)}{\sin s/_2 \cdot \sin(s/_2 - a)}}\,;\quad \tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s/_2 - c)\cdot\sin(s/_2 - a)}{\sin s/_2 \cdot \sin(s/_2 - b)}}$$

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s/_2 - a)\cdot\sin(s/_2 - b)}{\sin s/_2 \cdot \sin(s/_2 - c)}}$$

Beispiel: Von einem sphärischen Dreieck ABC ist gegeben:

$BC = 46^0\,22{,}4'$ $AC = 108^0\,59{,}3'$ $AB = 76^0\,31{,}3'$

Die fehlenden Stücke sind zu berechnen.

$a = 46^0\,22{,}4'$
$b = 108^0\,59{,}3'$
$c = 76^0\,31{,}3'$
$s = 231^0\,53{,}0'$

$s/_2 = 115^0\,56{,}5'$	$\log\operatorname{cosec} = 0{,}04\,612$		$\log\operatorname{cosec} = 0{,}04\,612$		$\log\operatorname{cosec} = 0{,}04\,612$
$s/_2 - a = 69^0\,34{,}1'$	$\log\operatorname{cosec} = 0{,}02\,822$		$\log\sin = 9{,}97\,178$		$\log\sin = 9{,}97\,178$
$s/_2 - b = 6^0\,57{,}2'$	$\log\sin = 9{,}08\,301$		$\log\operatorname{cosec} = 0{,}91\,699$		$\log\sin = 9{,}08\,301$
$s/_2 - c = 39^0\,25{,}2'$	$\log\sin = 9{,}80\,277$		$\log\sin = 9{,}80\,277$		$\log\operatorname{cosec} = 0{,}19\,723$
	$s = 18{,}96\,012 : 2$		$s = 0{,}73\,766 : 2$		$s = 19{,}29\,814 : 2$
	$\log\tan = 9{,}48\,006$		$\log\tan = 0{,}36\,883$		$\log\tan = 9{,}64\,907$
	$\alpha/_2 = 16^0\,48{,}4'$		$\beta/_2 = 66^0\,50{,}5'$		$\gamma/_2 = 24^0\,1{,}4'$
	$\alpha = 33^0\,36{,}8'$		$\beta = 133^0\,41{,}0'$		$\gamma = 48^0\,2{,}8'$
Probe:	$\log\sin a = 9{,}85\,965$		$\log\sin b = 9{,}97\,570$		$\log\sin c = 9{,}98\,787$
	$\log\operatorname{cosec}\alpha = 0{,}25\,682$		$\log\operatorname{cosec}\beta = 0{,}14\,076$		$\log\operatorname{cosec}\gamma = 0{,}12\,861$
	$0{,}11\,647$		$0{,}11\,646$		$0{,}11\,648$

2. Fall. Gegeben zwei Seiten und der zwischen ihnen liegende Winkel.

Sind z. B. die beiden Seiten a und b und der Winkel γ gegeben, so erfolgt die Auflösung nach den Formeln:

$$\cot \gamma/_2 : \tan\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \cos\tfrac{1}{2}(a+b) : \cos\tfrac{1}{2}(a-b)$$
$$\cot \gamma/_2 : \tan\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \sin\tfrac{1}{2}(a+b) : \sin\tfrac{1}{2}(a-b)$$
$$\tan c/_2 : \tan\tfrac{1}{2}(a - b) = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) : \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

aus denen folgt:

$$\tan\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \cot\gamma/_2 \cdot \sec\tfrac{1}{2}(a+b)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(a-b)$$
$$\tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \cot\gamma/_2 \cdot \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}(a+b)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(a-b)$$
$$\tan c/_2 = \tan\tfrac{1}{2}(a-b)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

Ist $(a - b)$ klein, so ist es vorzuziehen, die dritte Seite c nach der Formel zu berechnen:

$$\tan c/_2 = \tan\tfrac{1}{2}(a+b)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot\sec\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

Diese Formel ist nicht anwendbar, wenn $\frac{1}{2}(a+b)$ nahe gleich 90^0 ist.

Beispiel: Von einem sphärischen Dreieck ABC ist gegeben:

$$BC = 99^0\,4{,}9' \qquad AC = 60^0\,34{,}7' \qquad \sphericalangle C = 69^0\,32{,}2'$$

Die fehlenden Stücke sind zu berechnen.

$\gamma/_2 = 34^0\,46{,}1'$	$log\ cotg = 0{,}15\,851$	$log\ cotg = 0{,}15\,851$	
$\frac{1}{2}(a+b) = 79^0\,49{,}8'$	$log\ sec = 0{,}75\,309$	$log\ cosec = 0{,}00\,688$	
$\frac{1}{2}(a-b) = 19^0\,15{,}1'$	$log\ cos = 9{,}97\,501$	$log\ sin = 9{,}51\,815$	$log\ tang = 9{,}54\,313$
$\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 82^0\,36{,}1'$	$log\ tang = 0{,}88\,661$		$log\ sin = 9{,}99\,637$
$\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = 25^0\,45{,}6'$		$log\ tang = 9{,}68\,354$	$log\ cosec = 0{,}36\,191$
$\alpha = 108^0\,21{,}7'$		$c/_2 = 38^0\,33{,}1'$	$log\ tang = 9{,}90\,141$
$\beta = 56^0\,50{,}5'$		$c = 77^0\ 6{,}2'$	

Probe:	$log\ sin\ a = 9{,}99\,452$	$log\ sin\ b = 9{,}94\,003$	$log\ sin\ c = 9{,}98\,891$
	$log\ cosec\ \alpha = 0{,}02\,269$	$log\ cosec\ \beta = 0{,}07\,719$	$log\ cosec\ \gamma = 0{,}02\,831$
	$0{,}01\,721$	$0{,}01\,722$	$0{,}01\,722$

3. Fall. Gegeben zwei Winkel und die zwischen ihnen liegende Seite.

Sind z. B. die beiden Winkel α und β und die Seite c gegeben, so erfolgt die Auflösung nach den Formeln:

$$tang\,c/_2 : tang\,\tfrac{1}{2}(a+b) = cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) : cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$
$$tang\,c/_2 : tang\,\tfrac{1}{2}(a-b) = sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) : sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$
$$cotg\,\gamma/_2 : tang\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = sin\,\tfrac{1}{2}(a+b) : sin\,\tfrac{1}{2}(a-b)$$

aus denen folgt:

$$tang\,\tfrac{1}{2}(a+b) = tang\,c/_2 \,.\, sec\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \,.\, cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$
$$tang\,\tfrac{1}{2}(a-b) = tang\,c/_2 \,.\, cosec\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \,.\, sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$
$$cotg\,\gamma/_2 = tang\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) \,.\, sin\,\tfrac{1}{2}(a+b) \,.\, cosec\,\tfrac{1}{2}(a-b)$$

oder

$$tang\,\gamma/_2 = cotg\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) \,.\, cosec\,\tfrac{1}{2}(a+b) \,.\, sin\,\tfrac{1}{2}(a-b)$$

Ist $(\alpha-\beta)$ klein, so ist es vorzuziehen, den dritten Winkel γ nach der Formel zu berechnen:

$$tang\,\gamma/_2 = cotg\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \,.\, sec\,\tfrac{1}{2}(a+b) \,.\, cos\,\tfrac{1}{2}(a-b)$$

Diese Formel ist nicht anwendbar, wenn $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ nahe gleich 90^0 ist.

Beispiel: Von einem sphärischen Dreieck ABC ist gegeben:

$$\sphericalangle A = 88^0\,20{,}7' \qquad \sphericalangle B = 62^0\,12{,}9' \qquad AB = 47^0\,20{,}8'$$

Die fehlenden Stücke sind zu berechnen.

$c/_2 = 23^0\,40{,}4'$	$log\ tang = 9{,}64\,189$	$log\ tang = 9{,}64\,189$	
$\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 75^0\,16{,}8'$	$log\ sec = 0{,}59\,500$	$log\ cosec = 0{,}01\,450$	
$\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = 13^0\ 3{,}9'$	$log\ cos = 9{,}98\,861$	$log\ sin = 9{,}35\,422$	$log\ cotg = 0{,}63\,440$
$\frac{1}{2}(a+b) = 59^0\,14{,}9'$	$log\ tang = 0{,}22\,550$		$log\ cosec = 0{,}06\,581$
$\frac{1}{2}(a-b) = 5^0\,51{,}0'$		$log\ tang = 9{,}01\,061$	$log\ sin = 9{,}00\,834$
$a = 65^0\ 5{,}9'$		$\gamma/_2 = 27^0\,4{,}4'$	$log\ tang = 9{,}70\,855$
$b = 53^0\,23{,}9'$		$\gamma = 54^0\,8{,}8'$	

Probe:	$log\ sin\ a = 9{,}95\,762$	$log\ sin\ b = 9{,}90\,461$	$log\ sin\ c = 9{,}86\,657$
	$log\ cosec\ \alpha = 0{,}00\,018$	$log\ cosec\ \beta = 0{,}05\,321$	$log\ cosec\ \gamma = 0{,}09\,124$
	$9{,}95\,780$	$9{,}95\,782$	$9{,}95\,781$

4. Fall. Gegeben zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel.

Sind z. B. die beiden Seiten a und b und der Winkel α gegeben, so wird zunächst der andere gegenüberliegende Winkel nach der Sinusregel gefunden:

$$\sin\beta : \sin\alpha = \sin b : \sin a$$
$$\sin\beta = \sin\alpha \,.\, \sin b \,.\, \operatorname{cosec} a$$

Da β durch den Sinus bestimmt wird, so ist zunächst noch zweifelhaft, ob man den spitzen Winkel oder seinen stumpfen Nebenwinkel zu nehmen hat. Die Entscheidung zwischen beiden ist auf Grund des Satzes zu treffen (§ 91):

Der größeren Seite im sphärischen Dreieck liegt der größere Winkel gegenüber.

Genügen sowohl der spitze als auch der stumpfe Winkel dieser Bedingung, so ist der Fall zweideutig.

Die Berechnung der dritten Seite und des dritten Winkels erfolgen nach den Formeln:

$$\operatorname{tang} {}^{c}/_{2} : \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b) = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) : \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$
$$\operatorname{cotg} {}^{\gamma}/_{2} : \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \sin\tfrac{1}{2}(a+b) : \sin\tfrac{1}{2}(a-b)$$

aus denen folgt:

$$\operatorname{tang} {}^{c}/_{2} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b) \,.\, \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \,.\, \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$
$$\operatorname{cotg} {}^{\gamma}/_{2} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) \,.\, \sin\tfrac{1}{2}(a+b) \,.\, \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}(a-b)$$

oder
$$\operatorname{tang} {}^{\gamma}/_{2} = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) \,.\, \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}(a+b) \,.\, \sin\tfrac{1}{2}(a-b)$$

Für die Berechnung der dritten Seite bezw. des dritten Winkels findet auch hier das in den Anmerkungen zum 2. und 3. Fall gesagte Anwendung.

Beispiel: Von einem sphärischen Dreieck ist gegeben:

$$BC = 76^0\,7{,}9' \qquad AC = 139^0\,40{,}2' \qquad \sphericalangle A = 85^0\,40{,}3'$$

Die fehlenden Stücke sind zu berechnen.

$$\begin{aligned} a &= 76^0\ 7{,}9' & \log\operatorname{cosec} &= 0{,}01\,285\\ b &= 139^0\,40{,}2' & \log\sin &= 9{,}81\,103\\ \alpha &= 85^0\,40{,}3' & \log\sin &= \underline{9{,}99\,876}\\ & & \log\sin\beta &= 9{,}82\,264 \end{aligned}$$

$$\beta = \begin{cases} 41^0\,39{,}6' \text{ (unmöglich)}\\ 138^0\,20{,}4' \end{cases}$$

Von diesen Werten ist nur der zweite möglich, da β größer als α sein muß (weil $b > a$).

$$\begin{aligned} b &= 139^0\,40{,}2' & \beta &= 138^0\,20{,}4'\\ a &= \underline{76^0\ 7{,}9'} & \alpha &= \underline{85^0\,40{,}3'}\\ b+a &= 215^0\,48{,}1' & \beta+\alpha &= 224^0\ 0{,}7'\\ \tfrac{1}{2}(b+a) &= 107^0\,54{,}1' & \tfrac{1}{2}(\beta+\alpha) &= 112^0\ 0{,}4'\\ \tfrac{1}{2}(b-a) &= 31^0\,46{,}1' & \tfrac{1}{2}(\beta-\alpha) &= 26^0\,20{,}0' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(b-a) &= 31^0\,46{,}1' & \log\operatorname{tang} &= 9{,}79\,188 & \tfrac{1}{2}(\beta-\alpha) &= 26^0\,20{,}0' & \log\operatorname{cotg} &= 0{,}30\,543\\ \tfrac{1}{2}(\beta+\alpha) &= 112^0\ 0{,}4' & \log\sin &= 9{,}96\,715 & \tfrac{1}{2}(b+a) &= 107^0\,54{,}1' & \log\operatorname{cosec} &= 0{,}02\,155\\ \tfrac{1}{2}(\beta-\alpha) &= 26^0\,20{,}0' & \log\operatorname{cosec} &= \underline{0{,}35\,302} & \tfrac{1}{2}(b-a) &= 31^0\,46{,}1' & \log\sin &= \underline{9{,}72\,139}\\ {}^{c}/_{2} &= 52^0\,18{,}7' & \log\operatorname{tang} &= 0{,}11\,205 & {}^{\gamma}/_{2} &= 48^0\,11{,}0' & \log\operatorname{tang} &= 0{,}04\,837\\ c &= 104^0\,37{,}4' & & & \gamma &= 96^0\,22{,}0' & & \end{aligned}$$

Probe:

$\log\sin a = 0{,}98\,715$	$\log\sin b = 9{,}81\,103$	$\log\sin c = 9{,}98\,570$
$\log\operatorname{cosec}\alpha = 0{,}00\,124$	$\log\operatorname{cosec}\beta = 0{,}17\,737$	$\log\operatorname{cosec}\gamma = 0{,}00\,269$
$9{,}98\,839$	$9{,}98\,840$	$9{,}98\,839$

5. Fall. Gegeben zwei Winkel und eine gegenüberliegende Seite.

Sind z. B. die beiden Winkel α und β und die Seite c gegeben, so wird zunächst die andere gegenüberliegende Seite nach der Sinusregel gefunden:

$$\sin b : \sin a = \sin\beta : \sin\alpha$$

$$\sin b = \sin a \,.\, \sin\beta \,.\, \operatorname{cosec}\alpha$$

Die Unterscheidung der möglichen Werte und die Berechnung der dritten Seite und des dritten Winkels erfolgt ganz ebenso wie im vorigen Fall.

Beispiel: Von einem sphärischen Dreieck ABC ist gegeben

$$\measuredangle A = 62^0\,39{,}4' \qquad \measuredangle B = 87^0\,40{,}9' \qquad BC = 48^0\,19{,}7'$$

Die fehlenden Stücke sind zu berechnen.

$$\begin{aligned}
\alpha &= 62^0\,39{,}4' & \log\operatorname{cosec} &= 0{,}05\,146\\
\beta &= 87^0\,40{,}9' & \log\sin &= 9{,}99\,964\\
a &= 48^0\,19{,}7' & \log\sin &= 9{,}87\,330\\
& & \log\sin b &= 9{,}92\,440
\end{aligned}$$

$$b = \begin{cases} 57^0\;\;9{,}9' = b \\ 122^0\,50{,}1' = b' \end{cases}$$

Da beide Werte größer als a sind, so sind beide möglich.

$\beta = 87^0\,40{,}9'$	$b = 57^0\;\;9{,}9'$	$b' = 122^0\,50{,}1'$
$\alpha = 62^0\,39{,}4'$	$a = 48^0\,19{,}7'$	$a = 48^0\,19{,}7'$
$\beta + \alpha = 150^0\,20{,}3'$	$b + a = 105^0\,29{,}6'$	$b' + a = 171^0\;\;9{,}8'$
$\frac{1}{2}(\beta + \alpha) = 75^0\,10{,}2'$	$\frac{1}{2}(b + a) = 52^0\,44{,}8'$	$\frac{1}{2}(b' + a) = 85^0\,34{,}9'$
$\frac{1}{2}(\beta - \alpha) = 12^0\,30{,}7'$	$\frac{1}{2}(b - a) = 4^0\,25{,}1'$	$\frac{1}{2}(b' - a) = 37^0\,15{,}2'$

$\frac{1}{2}(b - a) = 4^0\,25{,}1'$	$\log\operatorname{tang} = 8{,}88\,800$	$\frac{1}{2}(\beta - \alpha) = 12^0\,30{,}7'$	$\log\operatorname{cotg} = 0{,}65\,383$
$\frac{1}{2}(\beta + \alpha) = 75^0\,10{,}2'$	$\log\sin = 9{,}98\,529$	$\frac{1}{2}(b + a) = 52^0\,44{,}8'$	$\log\operatorname{cosec} = 0{,}09\,911$
$\frac{1}{2}(\beta - \alpha) = 12^0\,30{,}7'$	$\log\operatorname{cosec} = 0{,}66\,426$	$\frac{1}{2}(b - a) = 4^0\,25{,}1'$	$\log\sin = 8{,}88\,670$
$c/_2 = 19^0\,1{,}4'$	$\log\operatorname{tang} = 9{,}53\,755$	$\gamma/_2 = 23^0\,33{,}9'$	$\log\operatorname{tang} = 9{,}63\,964$
$c = 38^0\,2{,}8'$		$\gamma = 47^0\;\;7{,}8'$	

$\frac{1}{2}(b' - a) = 37^0\,15{,}2'$	$\log\operatorname{tang} = 9{,}88\,110$	$\frac{1}{2}(\beta - \alpha) = 12^0\,30{,}7'$	$\log\operatorname{cotg} = 0{,}65\,383$
$\frac{1}{2}(\beta + \alpha) = 75^0\,10{,}2'$	$\log\sin = 9{,}98\,529$	$\frac{1}{2}(b' + a) = 85^0\,34{,}9'$	$\log\operatorname{cosec} = 0{,}00\,129$
$\frac{1}{2}(\beta - \alpha) = 12^0\,30{,}7'$	$\log\operatorname{cosec} = 0{,}66\,426$	$\frac{1}{2}(b' - a) = 37^0\,15{,}2'$	$\log\sin = 9{,}78\,200$
$c'/_2 = 73^0\,34{,}9'$	$\log\operatorname{tang} = 0{,}53\,065$	$\gamma'/_2 = 69^0\,55{,}4'$	$\log\operatorname{tang} = 0{,}43\,712$
$c' = 147^0\;\;9{,}8'$		$\gamma' = 139^0\,50{,}8'$	

Probe:

$\log\sin a = 9{,}87\,330$	$\log\sin b = 9{,}92\,440$
$\log\operatorname{cosec}\alpha = 0{,}05\,146$	$\log\operatorname{cosec}\beta = 0{,}00\,036$
$9{,}92\,476$	$9{,}92\,476$
$\log\sin c = 9{,}78\,980$	$\log\sin c' = 9{,}73\,420$
$\log\operatorname{cosec}\gamma = 0{,}13\,495$	$\log\operatorname{cosec}\gamma' = 0{,}19\,055$
$9{,}92\,475$	$9{,}92\,475$

6. Fall. Gegeben die drei Winkel.

Auflösung: Man berechnet zunächst die drei Seiten des Supplementardreiecks

$$a' = 180^0 - \alpha \qquad b' = 180^0 - \beta \qquad c' = 180^0 - \gamma$$

Aus diesen Seiten findet man nach dem 1. Fall die Winkel α', β', γ' des Supplementardreiecks, aus denen man dann die Seiten des ursprünglichen Dreiecks

$$a = 180^0 - \alpha' \qquad b = 180^0 - \beta' \qquad c = 180^0 - \gamma'$$

berechnet.

Beispiel: Von einem sphärischen Dreieck ABC ist gegeben:

$$\measuredangle A = 69^0\,18' \qquad \measuredangle B = 112^0\,26' \qquad \measuredangle C = 82^0\,50'$$

Die fehlenden Stücke sind zu berechnen.

Es ist: $a' = 110^0\,42'$ $\quad b' = 67^0\,34'$ $\quad c' = 97^0\,10'$

$a' = 110^0\,42'$
$b' = 67^0\,34'$
$c' = 97^0\,10'$
$s = 275^0\,26'$

$s/2 = 137^0\ 43'$	$\log cosec =$	0,17 212	$\log cosec =$	0,17 212	$\log cosec =$	0,17 212
$s/2 - a' = 27^0\ 1'$	$\log cosec =$	0,34 271	$\log sin =$	9,65 729	$\log sin =$	9,65 729
$s/2 - b' = 70^0\ 9'$	$\log sin =$	9,97 340	$\log cosec =$	0,02 660	$\log sin =$	9,97 340
$s/2 - c' = 40^0\ 33'$	$\log sin =$	9,81 299	$\log sin =$	9,81 299	$\log cosec =$	0,18 701
	$s =$	0,30 122 : 2	$s =$	19,66 900 : 2	$s =$	19,98 982 : 2
	$\log tang =$	0,15 061	$\log tang =$	9,83 450	$\log tang =$	9,99 491
	$\alpha'/2 =$	$54^0\,44{,}5'$	$\beta'/2 =$	$34^0\,20{,}3'$	$\gamma'/2 =$	$44^0\,39{,}8'$
	$\alpha' =$	$109^0\,29{,}0'$	$\beta' =$	$68^0\,40{,}6'$	$\gamma' =$	$89^0\,19{,}6'$
	$a =$	$70^0\,31{,}0'$	$b =$	$111^0\,19{,}4'$	$c =$	$90^0\,40{,}4'$

Probe:	$\log sin\, a =$	0,97 439	$\log sin\, b =$	9,96 920	$\log sin\, c =$	9,99 997
	$\log cosec\, \alpha =$	0,02 898	$\log cosec\, \beta =$	0,03 418	$\log cosec\, \gamma =$	0,00 341
		0,00 337		0,00 338		0,00 338

Geographische Steuermannskunst.

Besteckrechnung.

§ 123. Gestalt der Erde. Breite und Länge. Die Gestalt der Erde ist so nahe die einer Kugel, daß sie in der Steuermannskunst ohne erhebliche Fehler als solche betrachtet werden darf.

Die Erde dreht sich von West nach Ost um sich selbst.

Unter Erdachse versteht man denjenigen Durchmesser der Erde, um den ihre Drehung stattfindet. Die Endpunkte der Erdachse werden Erdpole genannt; man unterscheidet sie als den Nordpol und den Südpol der Erde (P und P', Fig. 127).

Der Äquator der Erde (Gleicher, Linie) ist derjenige größte Kreis der Erdoberfläche, dessen Ebene senkrecht zur Erdachse steht (EQ). Der Äquator teilt die Erde in die nördliche und südliche Halbkugel.

Meridiane (Mittagslinien) nennt man die größten Kreise der Erde, die durch die Pole gehen.

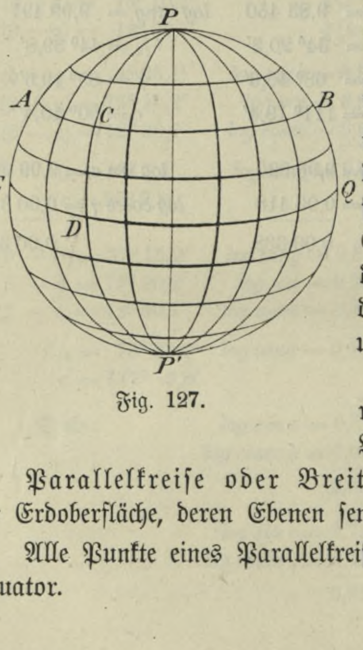


Fig. 127.

Eigentlich ist ein Meridian nur die vom Nordpol zum Südpol gehende Hälfte eines solchen größten Kreises. Alle Meridiane sind zunächst untereinander gleichwertig. Um die Meridiane zu zählen bezeichnet man einen von ihnen als Anfangs- oder Nullmeridian. In der Nautik wird als Anfangsmeridian heute fast allgemein der Meridian der Greenwicher Sternwarte angenommen. Der Anfangsmeridian zusammen mit seiner Verlängerung über die Pole hinaus teilt die Erde in die östliche und westliche Erdhalbkugel.

Der Äquator schneidet sämtliche Meridiane rechtwinklig und teilt jeden in zwei gleiche Bogen von je 90^0.

Parallelkreise oder Breitenparallele nennt man die Nebenkreise der Erdoberfläche, deren Ebenen senkrecht zur Erdachse stehen (AB).

Alle Punkte eines Parallelkreises haben dieselbe sphärische Entfernung vom Äquator.

Durch die Meridiane und die Parallelkreise wird die Erdoberfläche mit einem Netze von Linien überzogen, die sich in jedem Punkte rechtwinklig schneiden.

Die Lage eines Punktes auf der Erdoberfläche wird durch seine Breite und Länge bestimmt.

Die geographische Breite eines Ortes ist sein Winkelabstand vom Äquator, oder der Bogen des Meridians vom Äquator bis zum Orte (*CD*).

Sie erhält den Namen Nord oder Süd, je nachdem der Ort auf der nördlichen oder der südlichen Halbkugel liegt. Man zählt sie vom Äquator anfangend nach Nord und Süd von 0° bis 90°.

Die Breite soll im folgenden mit dem Buchstaben φ bezeichnet werden.

Alle Punkte eines Parallelkreises haben dieselbe Breite, weshalb die Parallelkreise auch Breitenparallele genannt werden. Durch jeden Ort kann man sich einen Breitenparallel gelegt denken. Orte, die Ost oder West voneinander liegen, liegen auf demselben Breitenparallele.

Die Breite bestimmt den Breitenparallel, auf dem ein Ort liegt.

Die geographische Länge eines Ortes ist der sphärische Winkel am Pol zwischen dem Anfangsmeridian und dem Meridian des Ortes (*APC*, wenn *PAP'* den Anfangsmeridian darstellt) oder der Bogen eines Breitenparallels oder des Äquators vom Anfangsmeridian bis zum Meridian des Ortes (*AC* oder *ED*).

Sie erhält den Namen Ost oder West, je nachdem der Ort auf der östlichen oder der westlichen Erdhälfte liegt. Man zählt sie vom Nullmeridian anfangend nach Ost und West von 0° bis 180°.

Die Länge soll im folgenden mit dem Buchstaben λ bezeichnet werden.

Alle Orte, die auf demselben Meridiane liegen, haben dieselbe Länge. Durch jeden Ort kann man sich einen Meridian gelegt denken. Orte, die Nord oder Süd voneinander liegen, liegen auf demselben Meridiane.

Die Länge bestimmt den Meridian, auf dem der Ort liegt.

Breite und Länge bestimmen die Lage eines Ortes auf der Erdoberfläche vollständig (als Durchschnitt eines Breitenparallels mit einem Meridian). Man bezeichnet sie als die Koordinaten eines Punktes auf der Erdoberfläche.

Der Breitenunterschied zweier Orte ist der Bogen irgend eines Meridians zwischen den Breitenparallelen der beiden Orte. Er erhält seinen Namen (*N* oder *S*) von der Richtung vom Abfahrtsort nach dem Bestimmungsort.

Der Breitenunterschied soll im folgenden mit *b* bezeichnet werden.

Aus den Breiten zweier Orte *A* und *B* findet man die Größe des Breitenunterschiedes, indem man ihren algebraischen Unterschied berechnet, also gleichnamige Breiten subtrahiert, ungleichnamige addiert.

Beispiele:

Segelt man von	15° 10′ *N*	nach	17° 25′ *N*,	so ist der Breitenunterschied	$b = 2^\circ\,15'\,N$
„ „ „	15° 10′ *N*	„	12° 6′ *N*,	„ „ „ „	$b = 3^\circ\,4'\,S$
„ „ „	53° 0′ *S*	„	57° 30′ *S*,	„ „ „ „	$b = 4^\circ\,30'\,S$
„ „ „	53° 0′ *S*	„	52° 30′ *S*,	„ „ „ „	$b = 0^\circ\,30'\,N$
„ „ „	2° 10′ *N*	„	3° 45′ *S*,	„ „ „ „	$b = 5^\circ\,55'\,S$
„ „ „	3° 25′ *S*	„	0° 10′ *N*,	„ „ „ „	$b = 3^\circ\,35'\,N$

Aus der Breite des Abfahrtsortes und dem Breitenunterschiede findet man die Breite des Bestimmungsortes, indem man den Breitenunterschied zu der verlassenen Breite algebraisch addiert, also zu ihr addiert, wenn er gleichnamig ist, und von ihr subtrahiert, wenn er ungleichnamig ist.

Beispiele:

Von	48° 40′ *N*	segelt man	1° 17′ *N*,	dann ist die erreichte Breite	49° 57′ *N*
„	55° 35′ *N*	„ „	2° 30′ *S*,	„ „ „ „ „	53° 5′ *N*
„	17° 8′ *S*	„ „	1° 45′ *S*,	„ „ „ „ „	18° 53′ *S*
„	28° 10′ *S*	„ „	5° 10′ *N*,	„ „ „ „ „	23° 0′ *S*
„	2° 41′ *N*	„ „	6° 0′ *S*,	„ „ „ „ „	3° 19′ *S*
„	0° 18′ *S*	„ „	0° 24′ *N*,	„ „ „ „ „	0° 6′ *N*

Der **Längenunterschied** zweier Orte ist der Bogen irgend eines Parallelkreises zwischen den Meridianen der beiden Orte. Er erhält seinen Namen (*O* oder *W*) von der Richtung vom Abfahrtsorte nach dem Bestimmungsorte.

Der Längenunterschied soll im folgenden mit *l* bezeichnet werden.

Aus den Längen zweier Orte *A* und *B* findet man die Größe des Längenunterschiedes, indem man ihren algebraischen Unterschied berechnet, also gleichnamige Längen subtrahiert, ungleichnamige addiert. Wird bei der Addition der Längenunterschied größer als 180°, so muß man ihn von 360° abziehen; in diesem Falle wird der Meridian von 180° geschnitten.

Beispiele:

Segelt man von	47° 35′ *O*	nach	48° 50′ *O*,	so ist der Längenunterschied	$l =$ 1° 15′ *O*
„ „ „	47° 35′ *O*	„	46° 30′ *O*,	„ „ „ „	$l =$ 1° 5′ *W*
„ „ „	18° 20′ *W*	„	29° 33′ *W*,	„ „ „ „	$l =$ 11° 13′ *W*
„ „ „	18° 20′ *W*	„	18° 5′ *W*,	„ „ „ „	$l =$ 0° 15′ *O*
„ „ „	1° 13′ *O*	„	0° 17′ *W*,	„ „ „ „	$l =$ 1° 30′ *W*
„ „ „	3° 24′ *W*	„	8° 10′ *O*,	„ „ „ „	$l =$ 11° 34′ *O*
„ „ „	179° 30′ *O*	„	178° 10′ *W*,	„ „ „ „	$l =$ 2° 20′ *O*
„ „ „	122° 30′ *W*	„	140° 0′ *O*,	„ „ „ „	$l =$ 97° 30′ *W*

Aus der Länge des Abfahrtsortes und dem Längenunterschiede findet man die Länge des Bestimmungsortes, indem man den Längenunterschied zu der verlassenen Länge algebraisch addiert, also zu ihr addiert, wenn er gleichnamig ist, und von ihr subtrahiert, wenn er ungleichnamig ist.

Wird im ersteren Falle die erreichte Länge größer als 180°, so subtrahiert man sie von 360° und giebt dem Reste den entgegengesetzten Namen.

Beispiele:

Von	29° 30′ *O*	segelt man	2° 10′ *O*,	dann ist die erreichte Länge	31° 40′ *O*
„	48° 25′ *O*	„ „	5° 5′ *W*,	„ „ „ „ „	43° 20′ *O*
„	16° 46′ *W*	„ „	0° 16′ *W*,	„ „ „ „ „	17° 2′ *W*
„	90° 8′ *W*	„ „	10° 30′ *O*,	„ „ „ „ „	79° 38′ *W*
„	1° 18′ *O*	„ „	2° 0′ *W*,	„ „ „ „ „	0° 42′ *W*
„	2° 50′ *W*	„ „	5° 14′ *O*,	„ „ „ „ „	2° 24′ *O*
„	179° 30′ *O*	„ „	3° 30′ *O*,	„ „ „ „ „	177° 0′ *W*
„	168° 40′ *W*	„ „	20° 40′ *W*,	„ „ „ „ „	170° 40′ *O*

§ 124. Seemeile. Als Maß für Entfernungen auf der Erdoberfläche hat man in der Nautik die Seemeile eingeführt, und zwar hat man sie der bequemen Rechnung wegen gleich dem Linienmaße einer Bogenminute auf einem größten Kreise der Erdkugel gewählt.

In Wirklichkeit ist die Erde keine genaue Kugel, sondern sie ist an den Polen abgeplattet. Infolgedessen sind nicht alle Umfänge der Erde einander gleich, vielmehr hat der Äquator den größten, die Meridiane den kleinsten Umfang. Für die Genauigkeit der Rechnungen der geographischen Steuermannskunst genügt es jedoch, die Erde als eine Kugel anzusehen, deren Halbmesser gleich dem Mittel aus dem Halbmesser des Äquators und der halben Erdachse ist. Der Umfang dieser Kugel soll der mittlere Erdumfang genannt werden. Da der ganze Kreisumfang $360 . 60 = 21\,600$ Bogenminuten enthält, so hat man hiernach die Erklärung:

Die Seemeile ist die Länge einer Minute des mittleren Erdumfangs, oder der 21 600ste Teil des mittleren Erdumfangs.

Um die Seemeile in Metern auszudrücken, muß man den mittleren Erdhalbmesser, in Metern ausgedrückt, kennen. Nach den Untersuchungen des Astronomen Bessel ist

die halbe Erdachse	$= 6\,356\,079$ m
der Äquatorhalbmesser	$= 6\,377\,397$ m
woraus ein Unterschied von	$21\,318$ m
und ein mittlerer Halbmesser	$= 6\,366\,738$ m folgt.

Aus dem Unterschied der beiden Halbmesser ergiebt sich, beiläufig bemerkt, für die Abplattung, d. h. für das Verhältnis dieses Unterschiedes zum Äquatorhalbmesser ein Wert von nahe $\frac{1}{300}$.

Aus dem mittleren Halbmesser berechnet man die Länge der Seemeile

$$1^{sm} = \frac{2 . 6\,366\,738 . \pi}{360 . 60} \text{ m} = 1852 \text{ m}.$$

Die Seemeile wird eingeteilt in 10 nautische Kabellängen, jede abgerundet zu 185 m. Von allen Kulturvölkern sind nur die Engländer bei dem alten Fußmaß stehen geblieben. In englischem Maß ist 1 Seemeile $= 6076\frac{1}{4}$ Fuß engl.

Würde man die Bogenminute des Äquators als Seemeile gewählt haben, so würde sie um 3 m größer, nämlich zu 1855 m, ausgefallen sein.

Man muß sich wohl hüten, die Seemeile mit der englischen Meile zu verwechseln, die gesetzlich zu 1760 Yards = 5280 engl. Fuß festgesetzt ist, so daß 60 Seemeilen sehr nahe gleich 69 engl. Meilen sind. Soll die Seemeile den Namen eines Volkes tragen, so muß sie „italienische“ genannt werden, da die Italiener seit den ältesten Zeiten 60 Meilen auf den Grad gerechnet haben. Die englische League ist gleich 3 Seemeilen, und die alte deutsche Meile gleich 4 Seemeilen.

§ 125. Abweitung. Aus der Erklärung der Seemeile folgt unmittelbar: Jede auf einem Meridian der Erde zurückgelegte Seemeile ist einem gutgemachten Breitenunterschiede von 1′ gleich; und umgekehrt: Um auf einem Meridian segelnd, die Breite um 1′ zu verändern, hat man 1 Seemeile zurückzulegen.

Ferner: Jede auf dem Äquator der Erde zurückgelegte Seemeile ist einem gutgemachten Längenunterschied von 1′ gleich; und umgekehrt: Um auf dem Äquator segelnd die Länge um 1′ zu verändern, hat man 1 Seemeile zurückzulegen.

Da die Breitenparallele als Nebenkreise kürzer sind als der Äquator, so ist von vornherein klar, daß man beim Segeln auf einem Parallelkreise mit einer Seemeile Distanz mehr als 1′ Längenunterschied gutmacht, und daß man umgekehrt weniger als 1 Seemeile zurückzulegen hat, um die Länge um 1′ zu verändern. Derselbe Bogen eines Parallelkreises enthält eine geringere Anzahl Seemeilen als Minuten Längenunterschied.

Ein Stück des Parallelkreises ausgedrückt in Seemeilen bezeichnet man als Abweitung. Die Abweitung soll im folgenden mit a bezeichnet werden.

Um zu untersuchen, in welchem Verhältnis für irgend einen Breitenparallel die Abweitung zum Längenunterschiede steht, hat man zunächst die Länge des ganzen Breitenparallels aus der bekannten Länge des Äquators (21 600 Seemeilen) zu berechnen.

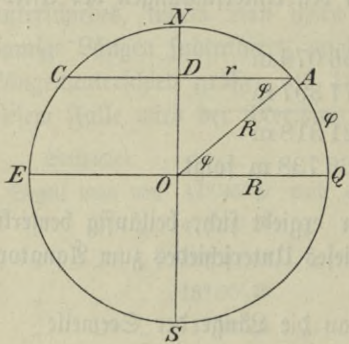


Fig. 128.

Man denke sich zu dem Zwecke die Erde längs eines Meridians durchschnitten. In der Schnittebene liegt dann die Erdachse NS, ferner der Schnitt mit der Äquatorebene EQ, sowie derjenige mit der Ebene des Breitenparallels CA. Man bezeichnet den Bogen QA als die zum Breitenparallel gehörige Breite mit φ, $OQ = OA$ als den Erdhalbmesser mit R, DA als den Halbmesser des Breitenparallels mit r. Dann ist $DAO = AOQ = \varphi$, und man hat im Dreieck ADO:

$$r = R \cdot \cos\varphi$$

Multipliziert man auf beiden Seiten der Gleichung mit 2π, so erhält man

$$2\,r\,\pi = 2\,R\,\pi \cdot \cos\varphi$$

oder, wenn man mit u den Umfang des Breitenparallels und mit U den Umfang des Äquators bezeichnet:

$$u = U \cdot \cos\varphi$$

oder

$$u = 21\,600 \cdot \cos\varphi \text{ Seemeilen, d. h.}$$

Der Umfang des Breitenparallels ist gleich dem Äquatorumfang, multipliziert mit dem Kosinus der Breite.

Aus dem Umfang des ganzen Breitenparallels erhält man die Länge einer Bogenminute durch Division durch 21 600. Demnach ist auf dem Breitenparallel mit der Breite φ

das Längenmaß einer Längenminute $= \dfrac{21\,600 \cdot \cos\varphi}{21\,600} = \cos\varphi$ Seemeilen, also

das Längenmaß von l Längenminuten $= l \cdot \cos\varphi$ Seemeilen.

Dieses Längenmaß bezeichnet man aber als Abweitung a. Mithin

$$a = l \cdot \cos \varphi$$

woraus dann weiter folgt

$$l = a \cdot \sec \varphi$$

in Worten:

Der Zahlenwert der Abweitung in Seemeilen ist gleich dem Zahlenwert des Längenunterschiedes in Minuten multipliziert mit dem Kosinus der Breite.

Der Zahlenwert des Längenunterschiedes in Minuten ist gleich dem Zahlenwert der Abweitung in Seemeilen multipliziert mit der Sekante der Breite.

Um bei der Verwandlung der Seemeilen Abweitung in Minuten Längenunterschied und umgekehrt die logarithmische Rechnung zu ersparen, hat man die Tafel 13 *) berechnet; man vergleiche deren Erklärung.

Beispiele: 1. Wieviel Seemeilen beträgt ein Bogen von 1° 15′ auf dem Breitenparallele von 37°?

$l = 75$	$\log = 1{,}87\,506$
$\varphi = 37^\circ$	$\log \cos = 9{,}90\,235$
$a = 59{,}9$	$\log = 1{,}77\,741$

Auf dem Breitenparallele von 37° ist demnach ein Bogen von $75' = 59{,}9^{sm}$, mithin das Verhältnis des Zahlenwertes der Abweitung zum Zahlenwerte des Längenunterschiedes nahe wie 4 : 5.

2. Wieviel Minuten Längenunterschied sind 60 Seemeilen auf dem Breitenparallele von 48°?

$a = 60$	$\log = 1{,}77\,815$
$\varphi = 48^\circ$	$\log \sec = 0{,}17\,449$
$l = 89{,}7$	$\log = 1{,}95\,264$

Auf dem Breitenparallele von 48° ist demnach ein Bogen von $60^{sm} = 89{,}7' = 1^\circ 30'$, mithin das Verhältnis des Zahlenwertes der Abweitung zum Zahlenwerte des Längenunterschiedes nahe wie 2 : 3.

3. Auf welchem Breitenparallele ist $1^{sm} = 2'$?

Aus den obigen Gleichungen folgt zur Berechnung von φ die Gleichung

$$\sec \varphi = \frac{l}{a}$$

$l = 2$	$\log = 0{,}30\,103$
$a = 1$	$\operatorname{colog} = 0{,}00\,000$
$\varphi = 60^\circ$	$\log \sec = 0{,}30\,103$

Auf dem Breitenparallele von 60° ist demnach das Verhältnis des Zahlenwertes der Abweitung zum Zahlenwerte des Längenunterschiedes genau wie 1 : 2.

§ 126. Aufgaben der Besteckrechnung. Die Besteckrechnung hat es mit der Lösung folgender zwei Aufgaben zu thun.

I. Gegeben ist die Breite und Länge eines Ortes *A*, sowie Kurs und Distanz nach einem zweiten Orte *B*. Gesucht ist die Breite und Länge von *B*.

*) Behrmann, Nautische Tafeln, Tafel 3. und 4.

II. Gegeben sind die Breiten und Längen zweier Orte *A* und *B*. Gesucht ist der Kurs und die Distanz von *A* nach *B*.

Bezüglich der Benennungen ist von vornherein folgendes klar:

Sind Kurs und Distanz gegeben, so giebt ein nördlicher oder südlicher Kurs nördlichen oder südlichen Breitenunterschied, ein östlicher oder westlicher Kurs östlichen oder westlichen Längenunterschied. Sind umgekehrt zwei Breiten und zwei Längen gegeben, so ist der Kurs nördlich oder südlich, jenachdem der Breitenunterschied nördlich oder südlich ist, und östlich oder westlich, jenachdem der Längenunterschied östlich oder westlich ist.

§ 127. Lösung für die einfachsten Fälle.

a) Segeln auf einem Meridian.

Wenn ein Schiff auf einem Meridiane segelt, so liegt die Lösung der beiden Aufgaben der Besteckrechnung auf der Hand.

Wenn bei der ersten Aufgabe der Kurs *N* oder *S* ist, so bleibt die Länge ungeändert und die gutgemachten Seemeilen müssen als ebensoviele Minuten Breitenunterschied in Rechnung gebracht werden.

Beispiel: Von Terschellinger Bank Feuerschiff ($53^0\,27'$ *N* und $4^0\,52'$ *O*) steuert ein Dampfer *N* 170 Seemeilen. Auf welcher Breite und Länge befindet er sich?

Abfahrtsort:	$\varphi = 53^0\,27'\,N$	$\lambda = 4^0\,52'\,O$
	$b = 2^0\,50'\,N$	$l = 0'$
Erreichter Schiffsort:	$\varphi = 56^0\,17'\,N$	$\lambda = 4^0\,52'\,O$

Liegen umgekehrt zwei Orte *A* und *B* auf demselben Meridiane, so ist der Kurs von *A* nach *B* entweder *N* oder *S*, und der Breitenunterschied in Minuten giebt unmittelbar die Distanz in Seemeilen.

Beispiel: Welches ist der Kurs und die Distanz von $50^0\,0'\,S$ und $54^0\,57'\,W$ nach Maldonado (La Plata) ($34^0\,58'\,S$ und $54^0\,57'\,W$)?

Abfahrtsort:	$\varphi = 50^0\;\;0'\,S$	$\lambda = 54^0\,57'\,W$
Bestimmungsort:	$\varphi = 34^0\,58'\,S$	$\lambda = 54^0\,57'\,W$
	$b = 15^0\;\;2'\,N$	$l = 0'$

Da $15^0\,2' = 902'$ sind, so ist der Kurs und die Distanz *N* 902 Seemeilen.

b) Segeln auf einem Parallelkreise.

Befindet sich das Schiff auf dem Äquator und steuert recht *O* oder recht *W*, so wird nur die Länge verändert, und zwar ist für jede gutgemachte Seemeile eine Minute Längenunterschied zu rechnen. Das Umgekehrte findet bei der zweiten Aufgabe der Besteckrechnung statt.

Steuert ein Schiff, das sich in irgend einer Breite befindet, recht *O* oder *W*, so bleibt seine Breite ungeändert, die gesegelte Distanz stellt gutgemachte Abweitung dar und ist als solche durch Multiplikation mit der Sekante der Breite in Längenunterschied zu verwandeln.

Beispiel 1. Von $54^0\,21'\,N$ und $7^0\,16'\,O$ segelt ein Schiff *W* 60 Seemeilen.

Abfahrtsort:	$\varphi = 54^0\,21'\,N$	$\lambda = 7^0\,16'\,O$	$a = 60$	$log = 1{,}7782$
	$b = 0'$	$l = 1^0\,43'\,W$	$\varphi = 54^0\,21'$	$log\,sec = 0{,}2345$
Erreichter Ort:	$\varphi = 54^0\,21'\,N$	$\lambda = 5^0\,33'\,O$	$l = 103$	$log = 2{,}0127$

Beispiel 2. Von $56^0 15' N$ und $4^0 0' O$ segelt ein Schiff nacheinander die folgenden Kurse und Distanzen: W 50^{sm}, N 120^{sm}, O 50^{sm}. In welcher Breite und Länge ist es angekommen?

Bei der ersten Segelung bleibt die Breite unverändert, der Längenunterschied ist $l = 50 \,.\, sec\, 56^0 15' = 90' \,W$. Am Ende der ersten Segelung ist demnach der Schiffsort

$$\varphi = 56^0 15' N \qquad \lambda = 2^0 30' O$$

Bei der zweiten Segelung wird nur die Breite geändert, und zwar um $120' = 2^0$, folglich ist an ihrem Schlusse der Schiffsort

$$\varphi = 58^0 15' N \qquad \lambda = 2^0 30' O$$

Bei der dritten Segelung wird nur die Länge verändert, und zwar um $l = 50 \,.\, sec\, 58^0 15' = 95' \,O$, so daß der schließliche Schiffsort ist

$$\varphi = 58^0 15' N \qquad \lambda = 4^0 5' O$$

Man ist also über den Meridian der verlassenen Länge um $5'$ hinausgekommen, und zwar aus dem Grunde, weil die 50^{sm} O in höherer Breite abgelaufen sind, als die 50^{sm} W.

Liegen die Orte A und B auf demselben Breitenparallel, so ist der Kurs von A nach B entweder O oder W. Der Längenunterschied der beiden Orte ist durch Multiplikation mit dem Kosinus der Breite in Abweitung zu verwandeln. Diese Abweitung stellt dann die Distanz zwischen A und B dar.

Beispiel: Welches ist der Kurs und die Distanz von $57^0 9' N$ und $3^0 25' O$ nach Aberdeen ($57^0 9' N$ und $2^0 4' W$)?

Abfahrtsort:	$\varphi = 57^0 9' N$	$\lambda = 3^0 25' O$	$l = 329$	$log = 2{,}5172$
Bestimmungsort:	$\varphi = 57^0 9' N$	$\lambda = 2^0\ 4' W$	$\varphi = 57^0 9'$	$log\, cos = 9{,}7344$
	$b = 0'$	$l = 5^0 29' W$	$a = 178{,}5$	$log = 2{,}2516$
		$= 329'$		

Der Kurs und die Distanz sind W 178,5 Seemeilen.

§ 128. Loxodrome.

Ist der Kurs eines Schiffes recht N oder recht S, so nähert sich das Schiff geradeswegs entweder dem Nordpol oder dem Südpol.

Ist der Kurs eines Schiffes recht O oder recht W, so segelt man auf einem Parallelkreise und behält denselben Abstand von den beiden Polen.

Segelt man auf einem Zwischenstriche, so entfernt man sich sowohl vom Breitenparallele, als auch vom Meridiane, oder man verändert gleichzeitig seine Breite und seine Länge.

Steuert man, beispielsweise vom Äquator ausgehend, fortgesetzt NO-Kurs, so wird man mit jeder Seemeile in nördlichere Breite und östlichere Länge kommen. Man wird infolgedessen eine Linie auf der Erdkugel beschreiben, die spiralförmig vom Äquator nach dem Nordpole aufsteigt und sich schließlich in unendlich vielen Windungen um ihn herumlegt. Man nennt diese Linie eine Loxodrome oder schieflaufende Linie. Dasselbe gilt für jeden Kurs in den beiden nördlichen Vierteln und ebenso für jeden Kurs in den beiden südlichen Vierteln, nur daß in letzterem Falle der Südpol an die Stelle des Nordpols tritt.

Unter Loxodromen versteht man Linien auf der Erdoberfläche, die alle Meridiane unter demselben Winkel schneiden.

Den Winkel zwischen dem Meridian und der Loxodrome nennt man ihren Kurswinkel. Er soll im folgenden mit α bezeichnet werden.

Die Meridiane können als Loxodromen vom Kurswinkel $\alpha = 0$ aufgefaßt werden.

Der Äquator und die Breitenparallele können als Loxodromen vom Kurswinkel $\alpha = 90^0 = 8^{str}$ aufgefaßt werden.

In allen Fällen, in denen der Kurswinkel von 0^0 und 90^0 verschieden ist, ist die Loxodrome weder ein Haupt- noch ein Nebenkreis, sondern eine Linie doppelter Krümmung, d. h. eine Linie, deren Punkte nicht in einer Ebene liegen.

§ 129. Das Kursdreieck. Von einem Punkte A aus hat man unter einem Kurswinkel α eine Distanz $AB = d$ zurückgelegt. Die Aufgabe ist, zu untersuchen, welchen Breitenunterschied b und welche Abweitung a man durch diese Segelung gutgemacht hat.

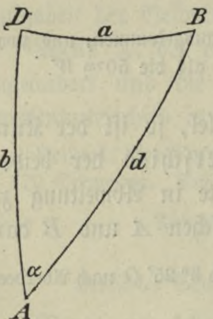


Fig. 129.

Man lege durch A einen Meridian und durch B einen Breitenparallel; diese Kreisbögen mögen sich in D schneiden.

Die dadurch auf der Erdoberfläche entstehende Figur wird begrenzt

1. durch den Bogen AD eines größten Kreises (des Meridians),
2. durch den Bogen DB eines Nebenkreises (des Breitenparalleles),
3. durch den Bogen AB der Loxodrome.

Ist zunächst die zurückgelegte Distanz nur wenige Seemeilen, so ist das Dreieck ADB als ein ebenes rechtwinkliges Dreieck anzusehen, und man hat daher

$$b = d . \cos\alpha \qquad a = d . \sin\alpha$$

Ist dagegen die Distanz groß, so darf man die Figur auf der Erdoberfläche nicht mehr als ebenes Dreieck ansehen, ebensowenig ist sie ein sphärisches Dreieck. Man kann sich aber in diesem Falle die Distanz in eine beliebige Anzahl (n) kleiner Stücke zerlegt denken, deren jedes die Länge d' hat. Durch den Anfangspunkt jedes Stückes ziehe man einen Meridian, durch den Endpunkt einen Breitenparallel. Dann stellt jedes d' die Hypotenuse eines kleinen rechtwinkligen Dreiecks mit demselben Kurswinkel α dar, das als eben betrachtet werden darf. Bezeichnen b' und a' die Katheten eines solchen kleinen Dreiecks, so ist

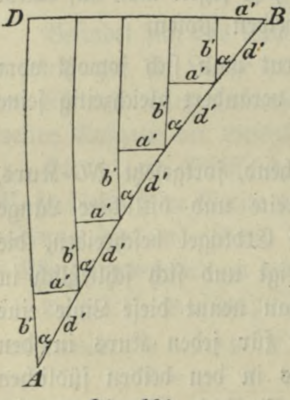


Fig. 130.

$$b' = d' . \cos\alpha \qquad a' = d' . \sin\alpha$$

Daher auch, indem man auf beiden Seiten mit der Anzahl n multipliziert

$$n . b' = n . d' . \cos\alpha \qquad n . a' = n . d' . \sin\alpha$$

oder $\qquad b = d . \cos\alpha \qquad a = d . \sin\alpha$

Hierin bezeichnet b die Summe der auf der Segelung gutgemachten Breitenunterschiede oder den gesamten Breitenunterschied; er wird in der Figur durch AD dargestellt. Andererseits bedeutet a die Summe der sämtlichen während der Segelung gutgemachten Abweitungen, d. h. die Summe der Abweitungen in den kleinen Dreiecken. Diese Abweitungen sind nicht auf demselben Breitenparallel gutgemacht, ihre Summe ist auch nicht gleich dem Stück DB; und es ist daher zu untersuchen, wie man die Verwandlung dieser Abweitungen in Längenunterschiede auszuführen hat. Die Untersuchung dieser Frage wird den Gegenstand des folgenden Paragraphen bilden. Das Ergebnis des gegenwärtigen besteht, um es nochmal zusammenzufassen, darin, daß gezeigt wurde:

Die Summe der auf einem Kurse gutgemachten Breitenunterschiede und die Summe der auf dem Kurse gutgemachten Abweitungen sind nach den Formeln zu berechnen

$$b = d . \cos \alpha \qquad a = d . \sin \alpha$$

d. h. sie sind in genau derselben Weise zu berechnen, wie die Katheten eines ebenen rechtwinkligen Dreiecks mit dem Winkel α und der Hypotenuse d.

Dieses ebene Dreieck nennt man das Kursdreieck.

Erklärung: Unter Kursdreieck versteht man ein ebenes rechtwinkliges Dreieck, das als Winkel den Kurswinkel der Loxodrome und als Hypotenuse die Distanz besitzt.

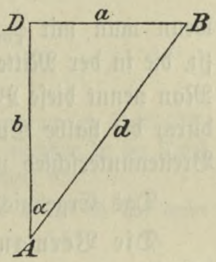


Fig. 131.

Zur Auflösung des Kursdreiecks bedient man sich auf See stets der Grad- oder der Strichtafel.

Zusatz: Die vorstehende Betrachtung ist die einzig zulässige, wenn man vom Kursdreieck einen klaren Begriff bekommen will. Auf der Kugel ist ein solches gar nicht vorhanden; es läßt sich nur in der Ebene und zwar dadurch bilden, daß man die krumme Kurslinie als gerade Linie zeichnet und sie in unendlich viele, unendlich kleine Teile zerlegt denkt. Zu jedem dieser Teile gehört dann ein unendlich kleines Kursdreieck, und es ist im strengsten Sinne richtig, daß sich die beiden Katheten des Kursdreiecks für die ganze Fahrt aus der Summe aller der unendlich vielen, unendlich kleinen Katheten dieser kleinsten Kursdreiecke zusammensetzen.

§ 130. Mittelbreite. Im vorigen Paragraphen stellt a die im Laufe der Segelung gutgemachte Gesamtabweitung, d. h. die Summe der Abweitungen in den kleinen Dreiecken dar. Um den Gesamtlängenunterschied zu finden, müßte man jede dieser kleinen Teilabweitungen (a') mit der Sekante ihrer Breite multiplizieren und die so gefundenen Teillängenunterschiede addieren.

Nennt man die Breiten, auf denen die einzelnen Teilabweitungen liegen, der Reihe nach φ_1, φ_2, φ_3 .... φ_n, so haben die zu jenen Teilabweitungen gehörigen Längenunterschiede die Werte:

$$l_1 = a' . \sec \varphi_1$$
$$l_2 = a' . \sec \varphi_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$l_n = a' . \sec \varphi_n$$

Die Summe dieser Teillängenunterschiede ist der gesamte gutgemachte Längenunterschied.

Stellt man sich vor, daß etwa A die kleinere, B die größere Breite hat, so sind die φ_1, φ_2 ... φ_n eine stetig um dieselbe Größe (nämlich b') wachsende Reihe von Winkeln. Unter der Annahme, daß bei diesem Wachsen auch der Wert der Sekante gleichmäßig wächst, ist demnach auch die Reihe der l_1, l_2 ... l_n eine Reihe gleichmäßig wachsender Zahlen. Statt der Summe einer solchen Reihe von Zahlen kann man aber immer den mittleren Wert, multipliziert mit der Anzahl der Summanden setzen. Danach kann man den gesamten Längenunterschied setzen

$$l = n . a' . \sec \varphi_m$$

oder

$$l = a . \sec \varphi_m$$

wenn man mit φ_m die mittlere der Breiten φ_1, φ_2 ... φ_n oder, was dasselbe ist, die in der Mitte zwischen den Breiten von A und B liegende Breite bezeichnet. Man nennt diese Breite die Mittelbreite von A und B und erhält sie entweder durch die halbe Summe der beiden Breiten, oder dadurch, daß man den halben Breitenunterschied von der größeren subtrahiert oder zu der kleineren addiert.

Das Ergebnis der Untersuchung ist demnach

Die Verwandlung von Abweitung in Längenunterschied hat für die Mittelbreite zu geschehen, nach der Formel

$$\boldsymbol{l = a . \sec \varphi_m}$$

Da die obige Annahme, daß der Wert der Sekante gleichmäßig mit dem Winkel wächst, besonders für große Winkel, nicht streng richtig ist, so ist die Rechnung nach Mittelbreite nicht absolut genau; doch genügt sie für fast alle Fälle der Praxis. Das Verfahren der Mittelbreite ist nicht anwendbar, wenn die Distanz den Äquator schneidet, weil die Reihe der l_1, l_2 ... l_n in diesem Falle bis zu einem gewissen Wert ab- und dann wieder zunimmt. Bei nicht allzugroßem Breitenunterschiede, wie sie für die in einem Etmal zurückgelegte Distanzen vorkommen, kann man am Äquator den Längenunterschied einfach gleich der Abweitung setzen. Sollte man es mit sehr bedeutenden Breitenunterschieden zu thun haben, so ist das später zu besprechende Verfahren der vergrößerten Breite anzuwenden.

§ 131. Besteckrechnung nach Mittelbreite.

1. Aufgabe: Gegeben ist die Breite und Länge eines Ortes A sowie Kurs und Distanz nach einem anderen Orte B. Gesucht wird die Breite und Länge von B.

Lösung: 1. Mit Hülfe der Grad- oder der Strichtafel zerlegt man die Distanz in Breitenunterschied und Abweitung.

2. Durch Anbringung des Breitenunterschiedes an die verlassene Breite erhält man die erreichte Breite.

3. Darauf bestimmt man die Mittelbreite.

4. Für den Parallel der Mittelbreite verwandelt man die Abweitung in Längenunterschied nach der Formel

$$l = a \,.\, sec\, \varphi_m$$

5. Durch Anbringung dieses Längenunterschiedes an die verlassene Länge erhält man die erreichte Länge.

Beispiel 1. Von $54^0\,43'\,N$ und $4^0\,10'\,O$ hat ein Schiff $NOzN\,125^{sm}$ gesegelt. Auf welcher Breite und Länge befindet es sich?

Kurs: $N3O$	$d = 125^{sm}$	$b = 103{,}9^{sm}\,N$	$a = 69{,}4^{sm}\,O$	
Verlassener Ort:	$\varphi = 54^0\,43'\,N$	$\lambda = 4^0\,10'\,O$	$\varphi_m = 55^0\,35'$	$log\,sec = 0{,}2478$
	$b = 1^0\,44'\,N$	$l = 2^0\;\;3'\,O$	$a = 69{,}4$	$log = 1{,}8414$
Erreichter Ort:	$\varphi = 56^0\,27'\,N$	$\lambda = 6^0\,13'\,O$	$l = 122{,}8$	$log = 2{,}0892$
	$\frac{1}{2}b = 0^0\,52'$			
	$\varphi_m = 55^0\,35'$			

Der erreichte Schiffsort liegt auf:

$56^0\,27'\,N$ und $6^0\,13'\,O$.

Anmerkung: Die logarithmische Rechnung hätte man durch die Benutzung der Tafel 13*) ersparen können. Man rundet in diesem Falle die Mittelbreite auf den nächsten in der Tafel enthaltenen Wert der Breite ab, wie dies im folgenden Beispiele geschehen ist.

Beispiel 2. Von Terschellinger Bank Feuerschiff ($53^0\,27'\,N$ und $4^0\,52'\,O$) hat man $SWzW\frac{1}{2}W\,87^{sm}$ zurückgelegt. Auf welcher Breite und Länge befindet man sich?

Kurs: $S5\frac{1}{2}W$	$d = 87^{sm}$	$b = 41{,}0^{sm}\,S$	$a = 76{,}7^{sm}\,W$
Verlassener Ort:	$\varphi = 53^0\,27'\,N$	$\lambda = 4^0\,52'\,O$	$\varphi_m = 53^0\,0'$
	$b = 41'\,S$	$l = 2^0\;\;8'\,W$	$70^{sm} = 116{,}3'$
Erreichter Ort:	$\varphi = 52^0\,46'\,N$	$\lambda = 2^0\,44'\,O$	$6^{sm} = 10{,}0'$
	$\frac{1}{2}b = 21'$		$0{,}7^{sm} = 1{,}2'$
	$\varphi_m = 53^0\;\;7'$		$l = 127{,}5'$

Der Schiffsort liegt auf

$52^0\,46'\,N$ und $2^0\,44'\,O$

2. Aufgabe: Gegeben sind die Breiten und Längen zweier Orte A und B. Gesucht wird der Kurs und die Distanz von A nach B.

Lösung: 1. Man berechnet zunächst den Breitenunterschied und den Längenunterschied der gegebenen Orte.

2. Darauf bestimmt man die Mittelbreite.

---

*) Behrmann, Nautische Tafeln, Tafel 3.

3. Für den Parallel der Mittelbreite verwandelt man den Längenunterschied in Abweitung nach der Formel

$$a = l \,.\, \cos \varphi_m$$

4. Aus den beiden Katheten a und b des Kursdreiecks, die jetzt bekannt sind, berechnet man den Kurswinkel α nach der Formel

$$\tang \alpha = \frac{a}{b}$$

5. Endlich findet man die Distanz nach der Formel

$$d = b \,.\, \sec \alpha \qquad \text{oder} \qquad d = a \,.\, \operatorname{cosec} \alpha$$

Beispiel 1: Welches ist der Kurs und die Distanz von 46° 24′ *N* und 8° 45′ *W* nach Quessant (48° 28′ *N* und 5° 8′ *W*)?

Abfahrtsort:	$\varphi = 46^0\,24'\,N$	$\lambda = 8^0\,45'\,W$	
Bestimmungsort:	$\varphi = 48^0\,28'\,N$	$\lambda = 5^0\,\;8'\,W$	
	$b = \;\;2^0\;\;4'\,N$	$l = 3^0\,37'\,O$	
	$\frac{1}{2}b = \;\;1^0\;\;2'$		
	$\varphi_m = 47^0\,26'$	$\log \cos = 9{,}8302$	
	$l = 217'$	$\log = 2{,}3365$	
	$a = 146{,}8$	$\log = 2{,}1667$	
	$b = 124'$	$\operatorname{colog} = 7{,}9066$	$\log = 2{,}0934$
	$\alpha = 49^0\,49'$	$\log \tang = 0{,}0733$	$\log \sec = 0{,}1903$
		$d = 192{,}2$	$\log = 2{,}2837$

Man hat demnach zu steuern:

$$N\,49{,}8^0\,O \quad \text{oder} \quad NO\tfrac{1}{2}O\;192^{sm}$$

Bei dieser Rechnung ist es offenbar überflüssig, zum Logarithmen der Abweitung die Zahl aufzuschlagen. Eine weitere kleine Abkürzung der Rechnung läßt sich dadurch herbeiführen, daß man in der obigen Formel für $\tang \alpha$ den Wert a durch den Ausdruck $l \,.\, \cos \varphi_m$ ersetzt, also zur Berechnung von Kurs und Distanz die Formeln verwendet:

$$\tang \alpha = \frac{l \,.\, \cos \varphi_m}{b} \qquad d = b \,.\, \sec \alpha$$

Die Verwandlung des Längenunterschiedes in Abweitung kann auch mit Hülfe der Gradtafel ausgeführt werden, indem man unter der Mittelbreite, die man zu diesem Zweck auf ganze Grade abgerundet hat, mit dem Längenunterschied in die d-Spalte eingeht und den Wert aus der b-Spalte entnimmt. Auch läßt sich diese Verwandlung mit Hülfe der Tafel 13 bewerkstelligen, indem man unter der Mittelbreite mit dem Längenunterschied in die Tafel eingeht, und die Abweitung dem Kopf der Tafel entnimmt.*)

Den letzten Teil der Aufgabe, die Bestimmung von Kurs und Distanz aus Breitenunterschied und Abweitung, kann man mit Hülfe der Grad- oder der Strichtafel dadurch lösen, daß man zusieht, unter welchem Strich oder Grad Breiten-

---

*) Tafel 4 in Behrmanns Nautischen Tafeln dient zur Verwandlung des Längenunterschiedes in Abweitung.

unterschied und Abweitung am besten zusammenstimmen; die Distanz findet man dann unmittelbar in der d-Spalte.

Beispiel: In welcher Richtung und Entfernung liegt Borkum Riff Feuerschiff ($53^0\,49'\,N$ und $6^0\,18'\,O$) von dem hohen Feuerturm auf Borkum ($53^0\,35'\,N$ und $6^0\,40'\,O$)?

Borkum Feuerturm:	$\varphi = 53^0\,35'\,N$	$\lambda = 6^0\,40'\,O$
Borkum Riff Feuerschiff:	$\varphi = 53^0\,49'\,N$	$\lambda = 6^0\,18'\,O$
	$b = 0^0\,14'\,N$	$l = 0^0\,22'\,W$
	$\frac{1}{2}b = 0^0\;\;7'$	
	$\varphi_m = 53^0\,42'$	Die Gradtafel giebt $a = 13^{sm}\,W$

Zu $b = 14$ und $a = 13$ gehört nach der Gradtafel der Kurswinkel $\alpha = 43^0$ und die Distanz $d = 19{,}1$.

Das Feuerschiff liegt also von dem Feuerturm

$$N\,43^0\;W\,19{,}1^{sm}$$

§ 132. **Messung der Distanz.** Die zurückgelegte Distanz findet man aus der Fahrt des Schiffes durch Multiplikation mit der in Stunden ausgedrückten Dauer der Segelung.

Die Fahrt des Schiffes wird in Knoten angegeben; man versteht darunter die Anzahl der in einer Stunde zurückgelegten Seemeilen.

Die Fahrt des Schiffes wird mit der Logge gemessen, von der es verschiedene Arten giebt. Mit der gewöhnlichen Logge, der Riegelungslogge und der Patentlogge bestimmt man die Fahrt des Schiffes durchs Wasser, während die nur in flachem Wasser anwendbare Grundlogge die Fahrt über den Grund angeben soll.

Über die Einrichtung und den Gebrauch dieser Fahrtmesser wird ebenso wie über die an ihre Angaben etwa anzubringenden Berichtigungen das Nötige in dem Abschnitt über die nautischen Instrumente gesagt werden.

§ 133. **Die Beschickung des Kompaßkurses.** Zur Ausführung der Besteckrechnung muß außer der zurückgelegten Distanz der Kurs des Schiffes bekannt sein.

Das Instrument zur Bestimmung des Kurses ist der Kompaß. Seine Einrichtung und seine Behandlung an Bord der Schiffe wird in dem Abschnitt über die nautischen Instrumente ausführlich besprochen werden.

Der Steuerstrich am Kompaßkessel giebt die Richtung der Kiellinie, die Kielrichtung, des Schiffes an.

Den Winkel zwischen der Kielrichtung und dem Nord- oder Südstrich der Rose nennt man den Kompaßkurs.

Den Winkel zwischen dem Wege des Schiffes und der Richtung des Meridians nennt man den wahren Kurs.

An den Kompaßkurs sind verschiedene Beschickungen anzubringen, um aus ihm den wahren Kurs abzuleiten.

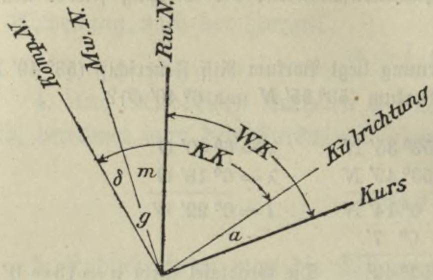


Fig. 132.

Erstens fällt die Kurslinie des Schiffes, d. h. die Linie, in der das Schiff in Wirklichkeit hingeht, nicht immer mit der Richtung seines Kieles zusammen, sondern das Schiff erleidet durch den seitlichen Winddruck eine Abtrift von der durch die Kiellinie angezeigten Richtung (a in Fig. 132).

Zweitens fällt die Nordrichtung der Rose nicht mit der Richtung des Meridians zusammen, sondern bildet damit einen Winkel, den man die Gesamtmißweisung nennt (g in Fig. 132).

Die Gesamtmißweisung ist die Summe zweier Teile:

a) der reinen Mißweisung (Ortsmißweisung, Deklination) (m in Fig. 132).

b) der Ablenkung durch das Schiffseisen (Deviation) (δ in Fig. 132).

Die verschiedenen Beschickungen des Kompaßkurses sollen in den folgenden Paragraphen gesondert betrachtet werden. Man beginnt dabei am zweckmäßigsten mit der reinen Mißweisung.

§ 134. Reine Mißweisung. Es werde zunächst ein hölzernes Schiff vorausgesetzt, auf dem keine den Kompaß merklich beeinflussenden Eisenmassen vorhanden sind. Auch auf einem solchen Schiffe zeigt die Kompaßnadel nicht genau nach Nord, sondern sie weicht davon um einen gewissen Winkel nach Osten oder Westen ab. Dieser Winkel heißt die an der betreffenden Stelle der Erde herrschende Mißweisung oder Deklination (Ortsmißweisung, reine Mißweisung).

Im Gegensatz zum Erdmeridian, den man auch den geographischen Meridian nennt, versteht man unter dem magnetischen Meridian eines Ortes die Richtung, in die sich eine horizontal frei bewegliche Magnetnadel einstellt, sofern sie nicht durch äußere Kräfte gestört wird. Man hat mit Benutzung dieses Ausdruckes die Erklärung:

Die Mißweisung ist der Winkel zwischen dem geographischen und dem magnetischen Meridian eines Ortes.

Man giebt der Mißweisung den Namen Ost, wenn die magnetische Nordrichtung östlich von der wahren Nordrichtung, den Namen West, wenn sie westlich davon liegt.

Sind auf einem eisenfreien Schiffe mehrere Kompasse nicht zu nahe bei einander aufgestellt, so sind die Nordsüdlinien aller dieser Kompasse einander parallel. Alle Rosen zeigen, wie man sagt, nach magnetisch oder mißweisend Nord, sie bilden deshalb mit der wahren Nordrichtung, d. h. dem Erdmeridiane, alle denselben Winkel, nämlich die an der betreffenden Stelle der Erdoberfläche herrschende Mißweisung. Dasselbe gilt von den Kompassen verschiedener eisenfreien Schiffe, wenn sie sich nahe bei einander befinden. An verschiedenen Stellen der Erdoberfläche ist die Mißweisung aber verschieden groß. Es giebt große Gebiete östlicher Mißweisung und andere westlicher Mißweisung. Man findet die Mißweisung auf den Seekarten verzeichnet oder entnimmt sie aus Segelanweisungen oder besonders für die ganze Erde entworfenen Mißweisungskarten. Weiteres über Mißweisung siehe in dem Abschnitt über die nautischen Instrumente.

Den an der mißweisenden Rose abgelesenen Kurs nennt man den mißweisenden oder magnetischen Kurs des Schiffes.

Um aus dem magnetischen Kurse den rechtweisenden Kurs zu finden, hat man an jenen die Mißweisung anzubringen. Der Sinn, in welchem dieses zu geschehen hat, ergiebt sich aus der folgenden Überlegung:

Man denke sich die Rose aus ihrer magnetischen Lage künstlich in die rechtweisende Lage gedreht. Hat die Rose *O*-Mißweisung, so ist sie dabei gegen die Sonne (links herum) zu drehen; die im Raume fest bleibende Kurslinie verschiebt sich infolgedessen auf der Rosenteilung mit der Sonne. Denkt man sich demgemäß den mißweisenden und den rechtweisenden Kurs auf ein und dieselbe Rose eingezeichnet, so erscheint bei *O*-Mißweisung der rechtweisende Kurs rechts herum oder mit der Sonne gegen den mißweisenden verschoben.

Hat die Rose dagegen *W*-Mißweisung, so findet das entgegengesetzte statt, der rechtweisende Kurs erscheint links herum oder gegen die Sonne gegen den mißweisenden verschoben. Das Ergebnis dieser Überlegung ist demnach die Regel:

Um einen mißweisenden (magnetischen) Kurs in den entsprechenden rechtweisenden zu verwandeln, hat man

östliche Mißweisung mit der Sonne (rechts herum)

westliche Mißweisung gegen die Sonne (links herum)

anzubringen.

Um von dem rechtweisenden auf den mißweisenden Kurs zurückzugehen, hat man umgekehrt zu verfahren.

Was hier von der Verwandlung der Kurse angegeben wurde, überträgt sich ohne weiteres auch auf die Verwandlung der Kompaßpeilungen in rechtweisende Peilungen.

Beispiele:

Mißw. Kurs	Ortsmißw.	Rechtw. Kurs	Mißw. Kurs	Ortsmißw.	Rechtw. Kurs
NO	1 *O*	*N* 5 *O*	*S* 73° *W*	15° *W*	*S* 58° *W*
WNW	2 *O*	*N* 4 *W*	*SSO*	$1\frac{1}{2}$ *W*	*S* $3\frac{1}{2}$ *O*
NOzO	$1\frac{1}{2}$ *W*	*N* $3\frac{1}{2}$ *O*	*N* $\frac{3}{4}$ *O*	2 *W*	*N* $1\frac{1}{4}$ *W*
SW $\frac{1}{2}$ *W*	1 *W*	*S* $3\frac{1}{2}$ *W*	*SzO*	$3\frac{1}{2}$ *O*	*S* $2\frac{1}{2}$ *W*
N $\frac{1}{2}$ *W*	$\frac{3}{4}$ *W*	*N* $1\frac{1}{4}$ *W*	*OzN*	3 *O*	*S* 6 *O*
S 34° *O*	10° *O*	*S* 24° *O*	*W*	$1\frac{3}{4}$ *O*	*N* $6\frac{1}{4}$ *W*

§ 135. Örtliche Ablenkung. Seitdem das Eisen für den Bau und die Ausrüstung der Schiffe eine so hervorragende Bedeutung gewonnen hat, ist man an Bord fast aller Seeschiffe gezwungen, mit einer Ablenkung der Kompaßnadel durch das Schiffseisen zu rechnen. Man nennt diese Ablenkung eine örtliche, da sie je nach dem Orte verschieden ist, an dem der Kompaß an Bord aufgestellt ist. Die örtliche Ablenkung wird auch Deviation genannt.

Die Ablenkung der Kompaßnadel durch das Eisen des Schiffes wird später in dem Abschnitte über die nautischen Instrumente ausführlicher behandelt werden. Hier genügt es, einige wichtige Eigentümlichkeiten der Kompaßdeviation hervorzuheben:

Unter Ablenkung oder Deviation versteht man den Winkel zwischen dem magnetischen Meridian des Schiffsortes und der Nordrichtung der Kompaßrose.

Kompasse, die an verschiedenen Stellen eines eisernen Schiffes aufgestellt sind, zeigen im allgemeinen ganz verschiedene Ablenkungen. Dasselbe gilt von den Kompassen verschiedener Schiffe an demselben Orte.

Die Einwirkung des Schiffseisens auf die Kompaßnadel ist ganz verschieden, je nach der Lage, welche die Eisenmassen des Schiffes gegen die Kompaßnadel einnehmen. Daraus folgt:

Die Ablenkung oder Deviation des Schiffskompasses ist abhängig von dem Kurse, den das Schiff anliegt.

Man kann die Ablenkung in der Weise berücksichtigen, daß man sich eine Tafel anfertigt, die für jeden gesteuerten Kompaßkurs die für diesen Kurs stattfindende Ablenkung zu entnehmen gestattet. Eine solche Tafel wird Ablenkungstafel oder Deviationstabelle genannt. Eine bestimmte Ablenkungstafel gilt natürlich nur für das bestimmte Schiff und nur für den bestimmten Kompaß an dem Orte, für den sie beobachtet worden war.

Um von dem am Kompaß abgelesenen Kurse zum mißweisenden oder magnetischen Kurse überzugehen, hat man an jenen die Ablenkung genau in derselben Weise anzubringen, wie man die Mißweisung an den mißweisenden Kurs anzubringen hat, um ihn rechtweisend zu machen, also östliche Ablenkung mit der Sonne (rechts herum), westliche gegen die Sonne (links herum).

Man kann auch unmittelbar vom Kompaßkurs zum rechtweisenden Kurs übergehen, indem man an jenen die Gesamtmißweisung, d. h. die algebraische Summe von Mißweisung und Ablenkung auf einmal anträgt und zwar ebenfalls in derselben Weise wie oben, nämlich östliche Gesamtmißweisung mit der Sonne, westliche gegen die Sonne.

Beim Übergange vom mißweisenden oder vom rechtweisenden Kurse zum Kompaßkurse hat man umgekehrt zu verfahren.

Die für das Anbringen der Beschickungen des Kompaßkurses geltenden Regeln lassen sich schematisch folgendermaßen darstellen:

Kompaßkurs — mißweisender Kurs — rechtweisender Kurs

örtliche Ablenkung — reine Mißweisung

Gesamtmißweisung.

In der Pfeilrichtung . . . . . { „Ost“ mit der Sonne, „West“ gegen die Sonne.

Gegen die Pfeilrichtung . . . . { „Ost“ gegen die Sonne, „West“ mit der Sonne.

Nach denselben Regeln wie die Kurse sind die am Kompaß gemachten Peilungen zu berichtigen. Die Ablenkung ist für den während der Peilung anliegenden Kurs der Ablenkungstafel zu entnehmen.

§ 136. Abtrift. Da das Schiff sich nicht immer in der Richtung des Kieles fortbewegt, sondern durch einen seitlichen Wind mehr oder minder davon abgetrieben wird, so bedarf der Kurs noch einer Berichtigung wegen Abtrift.

Die Größe der Abtrift findet man durch Schätzung des Winkels, den das Kielwasser mit der Richtung des Kieles macht. Sie wird stets in Strichmaß, und zwar auf Viertelstriche, angegeben.

Abtrift über Steuerbord ändert den Kurs in dem Sinne „mit der Sonne“ oder nach rechts, wogegen Abtrift über Backbord ihn in dem Sinne „gegen die Sonne“ oder nach links ändert. Das heißt aber nichts anderes, als daß eine Abtrift über Steuerbord dieselbe Wirkung hat, als wäre eine östliche Mißweisung vorhanden, Abtrift über Backbord dagegen dieselbe Wirkung wie eine westliche Mißweisung. Es ist demnach das bequemste, auch der Abtrift einen Namen zu geben und zwar *O* wenn der Wind von Backbord, *W* wenn er von Steuerbord einkommt. Die so mit einem Namen versehene Abtrift ist dann gerade wie eine Mißweisung zu behandeln. Man kann sie mit der örtlichen Ablenkung und der reinen Mißweisung zu einer Gesamtberichtigung des Kompaßkurses vereinigen, die man in dem oben angegebenen Sinne anzubringen hat.

Beispiele:

Wind	Kompaßkurs	Abtrift	Reine Mißweisung	Örtliche Ablenkung	Gesamtberichtigung	Wahrer Kurs
N	ONO	$1\frac{3}{4}\,O$	$1\frac{1}{2}\,W$	$\frac{1}{2}\,O$	$\frac{3}{4}\,O$	$N6\frac{3}{4}\,O$
WNW	$SW\frac{1}{2}S$	$1\frac{1}{2}\,W$	$25^\circ\,W$	$\frac{1}{4}\,W$	$4\,W$	$S\frac{1}{2}\,O$
SSW	$NWzW\frac{1}{2}\,W$	$2\frac{1}{4}\,O$	$2\frac{1}{2}\,O$	$5^\circ\,W$	$4\frac{1}{4}\,O$	$N1\frac{1}{4}\,W$
SW	$SSO\frac{1}{2}\,O$	$\frac{3}{4}\,W$	$19^\circ\,W$	$1^\circ\,O$	$2\frac{1}{4}\,W$	$S4\frac{3}{4}\,O$
S	$N59^\circ\,W$	—	$14^\circ\,W$	$7^\circ\,W$	$21^\circ\,W$	$N80^\circ\,W$

Anmerkung: Wenn man nach Strichen rechnen will und die reine Mißweisung und die örtliche Ablenkung beide in Graden angegeben sind, so vereinigt man sie zweckmäßig zuerst zur Gesamtmißweisung und verwandelt erst diese in Strichmaß.

§ 137. Aufmachung des Etmals. Auf See hat man von Mittag zu Mittag aus der verlassenen Breite und Länge mit Hülfe der gesegelten Kurse und Distanzen die erreichte Breite und Länge zu berechnen. Man nennt diese Rechnung die Aufmachung des Etmals; der auf diese Weise gefundene Schiffsort heißt der Schiffsort nach Besteck oder nach Loggerechnung.

Die letzten sechs Paragraphen enthalten alles, was zur Aufmachung des Etmals erforderlich ist. Hat man, wie es meist der Fall ist, mehrere verschiedene Kurse während des Etmals gesteuert, so hat man zunächst jeden dieser Kurse in den wahren Kurs zu verwandeln. Dann kann man die mit jedem einzelnen Kurse gutgemachten Breitenunterschiede und Längenunterschiede, und aus diesen den im Etmal gutgemachten Gesamtbreitenunterschied und Gesamtlängenunterschied berechnen. Durch Anbringung an die verlassene Breite und Länge erhält man den erreichten Schiffsort. Das hier beschriebene Verfahren nennt man das Aufmachen des Etmals nach Einzelkursen. Aus dem folgenden Beispiele wird klar, wie man durch Aufstellung einer Tafel die Rechnung abkürzen kann.

Beispiel. Vom 70° 0′ *N* und 22° 0′ *O* segelt ein Schiff folgende wahre Kurse und Distanzen:

NNW 13^{sm}, *NNO* 52^{sm}, *NOzO* 46^{sm}, *O* 30^{sm}, *OSO* 33^{sm}.

Welche Breite und Länge hat es erreicht?

Wahre Kurse	Distanzen	Breitenunt.		Abweitung		Erreichte Breiten	Mittelbreiten	Längenunterschied	
		N	*S*	*O*	*W*			*O*	*W*
						70° 0,0′			
NNW	13	12,0			5,0	70° 12,0′	70° 6′		14,7
NNO	52	48,0		19,9		71° 0,0′	70° 36′	59,9	
NOzO	46	25,6		38,2		71° 25,6′	71° 13′	118,6	
O	30			30,0		71° 25,6′	71° 26′	94,2	
OSO	33		12,6	30,5		71° 13,0′	71° 19′	95,2	
		85,6	12,6					367,9	14,7
		12,6						14,7	

Gesamtbreitenunt. $= 73{,}0' = 1^\circ 13'$ *N* Gesamtlängenunt. $= 353{,}2' = 5^\circ 53'$ *O*

Verlassener Ort:	$\varphi = 70^\circ\ 0'\,N$	$\lambda = 22^\circ\ 0'\,O$
	$b = 1^\circ 13'\,N$	$l = 5^\circ 53'\,O$
erreichter Ort:	$\varphi = 71^\circ 13'\,N$	$\lambda = 27^\circ 53'\,O$

§ 138. **Koppelkurs.** Eine ganz bedeutende Abkürzung der Rechnung erzielt man bei der Aufmachung des Etmals dadurch, daß man nicht jede einzelne Abweitung für sich in Längenunterschied verwandelt, sondern sofort die Abweitungen gegeneinander aufrechnet und sich auf diese Weise neben dem Gesamtbreitenunterschiede eine Gesamtabweitung sucht. Man führt dann die Rechnung weiter, als wenn im ganzen Etmal nur ein einziger, nämlich der durch den Gesamtbreitenunterschied und die Gesamtabweitung bestimmte Gesamtkurs gesegelt wäre. Die gesegelten Einzelkurse werden, wie man sagt, zu diesem Gesamtkurs gekoppelt, wodurch die ganze Rechnung den Namen Koppelkurs bekommen hat. Das Koppeln der Abweitungen ist zwar kein streng richtiges Verfahren, wie sich aus dem Beispiele auf Seite 147 ergiebt; indessen sind die Fehler im allgemeinen so gering, daß sie nicht ins Gewicht fallen.

Die praktische Anlage der Rechnung ist aus den folgenden Beispielen ersichtlich.

Beispiele: 1. Von $48^0\,12'\,N$ und $10^0\,12'\,W$ segelt ein Schiff bei $1\frac{3}{4}^{str}\,W$ Mißweisung, wie im Schema angegeben. In welcher Breite und Länge ist es angekommen?

Wind	Komp. Kurs	Abtr.	Mißw.	örtl. A.	Ges. Ber.	Wahrer Kurs	Dist.	N	S	O	W
O	SSO	$1\,O$	$1\frac{3}{4}\,W$	$\frac{1}{4}\,O$	$\frac{1}{2}\,W$	$S2\frac{1}{2}\,O$	16		14,1	7,5	
O	$NzO\frac{1}{4}\,O$	$\frac{3}{4}\,W$	"	$\frac{1}{2}\,W$	$3\,W$	$N1\frac{3}{4}\,W$	27	25,4			9,1
OzN	$SOzS$	$\frac{1}{2}\,O$	"	$\frac{1}{2}\,O$	$\frac{3}{4}\,W$	$S3\frac{3}{4}\,O$	28		20,7	18,8	
O	NNO	$\frac{3}{4}\,W$	"	$\frac{1}{4}\,W$	$2\frac{3}{4}\,W$	$N\frac{3}{4}\,W$	20	19,8			2,9
OSO	$NO\frac{1}{4}\,O$	$\frac{3}{4}\,W$	"	—	$2\frac{1}{2}\,W$	$N1\frac{3}{4}\,O$	17	16,0		5,7	
O	$SSO\frac{1}{2}\,O$	$\frac{3}{4}\,O$	"	$\frac{1}{4}\,O$	$\frac{3}{4}\,W$	$S3\frac{1}{4}\,O$	20		16,1	11,9	
								61,2	50,9	43,9	12,0
								50,9		12,0	

$b = 10{,}3'\,N \quad a = 31{,}9\,O$

Verlassener Ort: $\varphi = 48^0\,12'\,N \quad \lambda = 10^0\,12'\,W$

$b = 10'\,N \quad l = 48'\,O$

erreichter Ort: $\varphi = 48^0\,22'\,N \quad \lambda = 9^0\,24'\,W$

$\varphi_m = 48^0\,17'$

$\varphi_m = 48^0\,17' \quad log\,sec = 0{,}1769$

$a = 31{,}9 \quad log = 1{,}5038$

$l = 47{,}9' \quad log = 1{,}6807$

Anstatt den Längenunterschied logarithmisch zu berechnen, kann man ihn auch nach Tafel 13*) bestimmen, wie es in dem folgenden Beispiele geschehen ist.

2. Von $40^0\,5'\,N$ und $72^0\,13'\,W$ steuert ein Dampfer bei südöstlichem Wind wie unten angegeben. In welche Breite und Länge ist er gekommen?

Wind	Komp. Kurs	Abtr.	Mißw.	örtl. A.	Ges. Ber.	Wahrer Kurs	Dist.	N	S	O	W
SO	$S70^0\,O$	—	$9^0\,W$	$8^0\,O$	$1^0\,W$	$S71^0\,O$	50		16,3	47,3	
"	$N67^0\,O$	—	$10^0\,W$	$6^0\,O$	$4^0\,W$	$N63^0\,O$	65	29,5		57,9	
"	$S47^0\,O$	—	$11^0\,W$	$8^0\,O$	$3^0\,W$	$S50^0\,O$	20		12,9	15,3	
"	$S87^0\,O$	—	$12^0\,W$	$7^0\,O$	$5^0\,W$	$N88^0\,O$	75	2,6		75,0	
"	$N75^0\,O$	—	$13^0\,W$	$6^0\,O$	$7^0\,W$	$N68^0\,O$	42	15,7		38,9	
								47,8	29,2	234,4	
								29,2			

$b = 18{,}6\,N \quad a = 234{,}4\,O$

Verlassener Ort: $\varphi = 40^0\;\;5'\,N \quad \lambda = 72^0\,13'\,W$

$b = 19'\,N \quad l = 5^0\;\;8'\,O$

erreichter Ort: $\varphi = 40^0\,24'\,N \quad \lambda = 67^0\;\;5'\,W$

$\varphi_m = 40^0\,14'$

$100^{sm} = 131{,}2'$

$100^{sm} = 131{,}2'$

$30^{sm} = 39{,}4'$

$4^{sm} = 5{,}3'$

$0{,}4^{sm} = 0{,}5'$

$l = 307{,}6'$

Verläßt man die Küste, um die hohe See zu gewinnen, so benutzt man einen dazu geeigneten Punkt des Landes, um durch Peilung und Abstandsbestimmung den Ort des Schiffes festzulegen. Man könnte eine derartige Peilung unmittelbar mit dem Koppelkurs verbinden, indem man die entgegengesetzte Peilung als Kurs, den Abstand als Distanz und den gepeilten Punkt als Abfahrtsort betrachtete. Dieses Verfahren ist indessen nicht üblich; man bestimmt vielmehr vermittelst der im nächsten Kapitel erörterten Methoden den Schiffsort durch Zeichnung in der Karte und legt den so gefundenen **Besteckpunkt** der Loggerechnung als Anfangspunkt zu Grunde.

*) Behrmann, Nautische Tafeln, Tafel 3.

§ 139. Die Zuverlässigkeit der Loggerechnung. Bei der Ermittelung des Schiffsortes durch die Loggerechnung wird man auf Fehler im Resultate gefaßt sein müssen, die ihren Grund haben

1. in Fehlern in den bei der Rechnung angewandten wahren Kursen,
2. in Fehlern in den geloggten Distanzen,
3. in unbekannten Stromversetzungen,
4. darin, daß das Rechnungsverfahren nach Mittelbreite und das Koppeln der Abweitungen nicht streng richtig sind.

1. Kursfehler entstehen einerseits durch ungenaues Steuern, andererseits durch Ungenauigkeiten in der gebrauchten Mißweisung, der Deviation und der Abtrift. Sie werden um so geringer sein, je sorgfältiger gesteuert wird und je öfter die Mißweisung des Kompasses kontrolliert und je sorgfältiger die Abtrift geschätzt wird. Die Kursfehler sind erklärlicherweise bei einem Segelschiffe erheblicher als bei einem Dampfer, zumal wenn das Segelschiff dicht beim Winde steuert, in welchem Falle man nur von einem mittleren anliegenden Kurse reden kann. Auch bei sorgfältiger Navigierung muß ein Dampfer auf Fehler im wahren Kurse bis zu $\frac{1}{4}^{str}$; ein Segelschiff auf solche bis zu $\frac{1}{2}^{str}$ rechnen. Das bedeutet aber, daß infolge des Kursfehlers nach 100^{sm} gelaufener Distanz die Stellung eines Dampfers von 5^{sm} rechts bis 5^{sm} links von dem berechneten Schiffsort, die Stellung eines Segelschiffes von 10^{sm} auf der einen bis 10^{sm} auf der anderen Seite unsicher ist.

2. Distanzfehler hat man bei allen Loggeapparaten im Betrage von mindestens 4—5 % zu erwarten; sie sind wie die Kursfehler sehr viel größer bei schlechtem Wetter und Seegang als bei schlichtem Wasser. Auch bezüglich dieses Fehlers sind die Segelschiffe erheblich ungünstiger gestellt als die Dampfer. Man kann im Mittel annehmen, daß infolge der Distanzfehler nach 100^{sm} gelaufener Distanz der Schiffsort in der Richtung des Kurses um etwa 5^{sm} unsicher ist, so daß man infolge von Kurs- und Distanzfehlern damit zu rechnen hat, daß nach 100^{sm} Segelung der wahre Schiffsort in einem Fehlerrechteck liegt, das den berechneten Schiffsort zur Mitte hat und dessen in der Kursrichtung liegende Seite 10^{sm}, dessen quer zur Kursrichtung liegende Seite bei einem Dampfer 10^{sm}, bei einem Segelschiffe 20^{sm} lang ist.

3. Zu der Unsicherheit infolge von Kurs- und Distanzfehlern kommen dann noch Stromversetzungen. Nun giebt es zwar von den meisten Meeresteilen Stromkarten, aus denen man den während der Segelung wirkenden Strom entnehmen könnte, um ihn dann an die gesegelten Kurse anzukoppeln. Die in den Karten enthaltenen Angaben sind jedoch nur als allgemeine Mittelwerte anzusehen, von denen unter Umständen erhebliche Abweichungen stattfinden können. Man verzichtet deshalb in der Praxis darauf, eine so unsichere Größe wie den Strom in die Rechnung mit aufzunehmen, berechnet vielmehr den Schiffsort zunächst auf Grund der gesegelten Distanzen allein, um dann schätzungsweise die mögliche Wirkung des Stromes an diesen berechneten Ort anfügen zu können.

4. Gegenüber den unter 1. bis 3. aufgeführten Fehlern fallen die unter 4. genannten Ungenauigkeiten der Rechnung nicht ins Gewicht.

§ 140. Karten. So lange ein Schiff in der Nähe der Küste segelt, pflegt die Aufmachung des Bestecks nicht durch Rechnung, sondern durch Zeichnung der gesegelten Kurse und Distanzen in der Seekarte zu geschehen.

Unter einer Karte versteht man die bildliche Darstellung der ganzen oder eines Teils der Erdoberfläche. Erstreckt sie sich über große Teile der Erde, so muß ein kleiner Maßstab angewendet werden, und das Bild kann nur im allgemeinen auf Genauigkeit Anspruch machen. Solche Karten nennt man Generalkarten. Wird aber nur ein kleines Gebiet nach einem großen Maßstabe dargestellt, so kann auch das Kleinere, das Einzelne hervorgehoben werden; solche Karten heißen Spezialkarten. Wird endlich eine Stadt oder ein Hafen abgebildet, so nennt man diese Darstellung einen Plan. Jenachdem das Land oder die See den Hauptzweck der Darstellung bildet, unterscheidet man Land- und Seekarten. Die Generalkarten unter den letzteren pflegt man Übersegler zu nennen.

Ihrem Zweck entsprechend müssen die Seekarten alles das enthalten, was an natürlichen und künstlichen Merkmalen für den Schiffsführer zur Bestimmung seines Schiffsortes und zur Feststellung des einzuschlagenden Kurses dienlich sein kann.

Sie haben deshalb nicht bloß Rücksicht zu nehmen auf die Gestaltung der Küste, sondern auch auf die Beschaffenheit des Meeresbodens, das flache oder steile Abfallen oder Aufsteigen desselben und die dadurch bedingten Untiefen, Sände und Klippen, auf die erdigen Bestandteile des Grundes, auf die Richtung der Strömungen und den Eintritt der Gezeiten, ferner auf Leuchtfeuer, auf Landmarken und schwimmende Seezeichen, die Gefahren, wichtige Richtungen oder das Fahrwasser anzuzeigen bestimmt sind.

Die einfachste Art der Karten sind die Pläne, z. B. Pläne von Häfen, Buchten, Rheden und dergl. Bei einem Plan ist, wie das schon in dem Namen liegt, der dargestellte Teil der Erdoberfläche so klein, daß er als völlig eben angesehen werden darf. Das auf dem Plane dargestellte Bild ist der Wirklichkeit vollständig ähnlich: alle Winkel sind dieselben, die Längen sind alle in demselben Verhältnis verkürzt (1:15000, 1:20000 u. s. w., wie es auf dem Plane selbst meist angegeben ist).

Sobald das darzustellende Stück der Erdoberfläche eine größere Ausdehnung hat, ist es unmöglich, von ihm ein Bild nach den einfachen Regeln der Ähnlichkeit in der Ebene zu entwerfen. Die Kugeloberfläche ist eine krumme Fläche, die sich nicht in eine Ebene abrollen oder abwickeln läßt, wie das z. B. mit einem Cylindermantel oder mit einer Kegelfläche der Fall ist. Nur auf eine Kugel würde sich die Erdoberfläche oder ein größerer Teil derselben ähnlich darstellen lassen, auf einer solchen zu arbeiten würde aber höchst unbequem, wenn nicht praktisch unmöglich sein.

Es ist Sache der Kartenentwurfslehre (Kartenprojektion), diese Verzerrungen auf ein möglichst geringes Maß zu beschränken. Man hat eine große Zahl verschiedener Entwurfsarten (Projektionen) erfunden, wovon man sich beim Durchblättern irgend eines geographischen Atlasses leicht überzeugen kann. Alle diese Karten sind nach mathematischen Gesetzen entworfen, jede kann aber nur bestimmten Anforderungen genügen. So giebt es Karten, in denen die Flächeninhalte der einzelnen Länder und Meeresteile in ihrem richtigen gegenseitigen Verhältnisse dargestellt sind (flächentreue Karten), andere, bei denen das Bild überall dieselben Winkel aufweist wie die Wirklichkeit (winkeltreu, in den kleinsten Teilen ähnlich), wieder andere, in denen dem größten Kreise als der kürzesten Verbindungslinie zweier Punkte der Erdoberfläche in der Karte eine gerade Linie entspricht (geradwegig) u. dgl. m.

Bei jedem Kartenentwurfe hat man seine Aufmerksamkeit zunächst nur auf die Abbildung des durch die Meridiane und Breitenparallele gebildeten Gradnetzes der Erde zu richten. Nachdem dieses Gradnetz in die Ebene übertragen ist, kann man leicht die hervorragenden Punkte der Küstenlinien nach Breite und Länge eintragen, die zwischenliegenden Umrisse möglichst genau ergänzen und überhaupt das Bild so weit ausführen, wie es für den Zweck der Karte nötig ist.

Die Forderungen, die der Seemann an seine Karte zu stellen hat, sind

1. daß der Kurslinie des Schiffes (Loxodrome) in der Karte eine gerade Linie entspricht,

2. daß der Kurswinkel in der Karte derselbe ist, wie auf der Erdoberfläche und

3. daß sich die Distanzen in der Karte leicht messen und absetzen lassen.

Diesen drei Anforderungen werden in der vollkommensten Weise gerecht die Karten nach Merkators Entwurf (Merkators Projektion).

Der Erfinder dieses Kartenentwurfes Gerhard Kremer, genannt Merkator, wurde am 5. März 1512 von deutschen Eltern während eines Besuches derselben im flandrischen Städtchen Rupelmonde geboren und starb den 2. Dezember 1594 zu Duisburg, wo er die letzten 42 Lebensjahre gewohnt hat. Daselbst erschien auch im August 1569 die große Weltkarte zum Gebrauche der Seefahrer in der von ihm erfundenen und nach ihm genannten Projektion. Auf dieser Karte hat er nicht nur das Gesetz, nach dem sie entworfen ist, klar und deutlich ausgesprochen, sondern auch eine vollständige Gebrauchsanweisung gegeben. Etwa 30 Jahre später berechnete dann der Engländer Wright die erste Tafel der vergrößerten Breite.

§ 141. Merkators Projektion. Den Merkatorschen Gradnetzentwurf kann man unmittelbar aus den oben für eine Seekarte aufgestellten Forderungen ableiten. Aus denselben ergiebt sich nämlich:

1. Alle Meridiane müssen als eine besondere Art von Loxodromen in der Seekarte gerade Linien und zu einander parallel sein.

2. Der Äquator und alle Breitenparallele müssen ebenfalls als eine besondere Art von Loxodromen in der Seekarte gerade Linien werden.

3. Damit der Kurswinkel in der Karte ungeändert bleibt, muß die Schar der Breitenparallele senkrecht zu den Meridianen sein. Die Breitenparallele müssen deshalb ebenso wie die Meridiane je unter sich parallel sein.

Ein Gradnetz, das zunächst den hier aufgestellten Forderungen genügt, kann man in folgender Weise erhalten. Man denke sich die Oberfläche des Globus mit einer ausdehnbaren Schicht überdeckt, auf welcher etwa von Grad zu Grad die Breitenparallele und die Meridiane ausgezogen sind. Die Schicht werde etwa längs des 180° Meridians von Pol zu Pol durchschnitten. Auch die übrigen Meridiane werden von den Polen beginnend eingeschnitten und zwar bis nahe an den Äquator. Die so zerschnittene Schicht denke man jetzt vom Globus heruntergenommen und in die Ebene gelegt und zwar so, daß der Äquator in eine von links nach rechts laufende grade Linie ausgestreckt wird. Man hat auf diese Weise noch keine Karte, sondern nur eine Reihe nebeneinander liegender Kugelzweiecke erhalten, wie das durch die schematische Figur 133a veranschaulicht wird. Um nun eine zusammenhängende Karte zu erhalten, denke

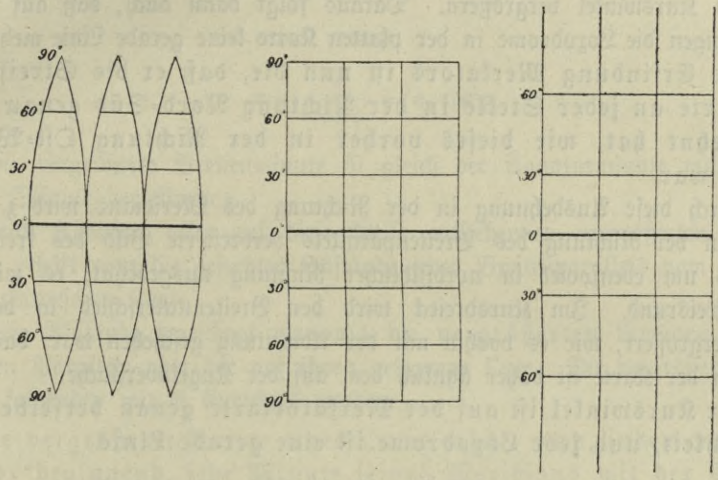


Fig. 133.

man sich jeden Streifen in die Breite gezogen und zwar an jeder Stelle so viel, daß die Ränder parallel werden.

Sind auf diese Weise die Ränder jedes Streifens parallel gemacht, so schließen die einzelnen Streifen ihrer ganzen Länge nach aneinander (Fig. 133b), und es ist möglich, ein zusammenhängendes Bild von See und Land darauf zu entwerfen. Das bis jetzt erhaltene Gradnetz ist dasjenige der **Plattkarte**.

Plattkarten sind jahrhundertelang von den Seefahrern benutzt worden. Auf ihnen sind ebenso wie auf den Merkatorkarten Meridiane und Breitenparallele zwei Scharen sich gegenseitig rechtwinklig schneidender Geraden. Das unterscheidende Merkmal der Plattkarten ist, daß auf ihnen nicht nur die Meridiane sondern auch die *Breitenparallele in gleichen Abständen* aufeinander folgen.

Das oben beschriebene Plattkartennetz ist auf den Äquator begründet, seine Maschen sind sämtlich kongruente Quadrate, für höhere Breiten begründete man die Plattkarten auf den mittleren Breitenparallel des darzustellenden Gebietes (z. B. der Nordsee, des Mittelmeeres u. s. w.), indem man das für diesen Breitenparallel gültige Verhältnis des Linienmaßes der Längenminute zu dem der Breitenminute dem Netz zu Grunde legte. Die Maschen des Netzes sind dann sämtlich kongruente Rechtecke, deren Seiten in dem eben genannten Verhältnis zu einander stehen.

Die oben konstruierte Plattkarte erfüllt noch nicht alle an eine Seekarte zu stellende Anforderungen. Zunächst liefert sie mit Ausnahme der Äquatorgegend ein verzerrtes Weltbild. Beispielsweise erscheint ein kleines kreisrundes Eiland der Erde auf der Karte nicht als Kreis, sondern in der Richtung Ost-West ausgedehnt und zwar um so mehr in je höherer Breite die Insel gelegen ist. Dieselbe Verzerrung erleidet, was für den Seemann noch wichtiger ist, jedes auf der Erde gedachte kleine Kursdreieck. Da die dem Kurswinkel gegenüberliegende Kathete vergrößert wird, die anliegende dagegen dieselbe bleibt, so wird der Kurswinkel in der Karte größer als er auf der Erde ist. Nur am Äquator würde man den Kurswinkel in seiner richtigen Größe an den Meridian antragen dürfen, in je höhere Breiten man käme, desto mehr müßte man den Kurswinkel vergrößern. Daraus folgt dann auch, daß auf größere Erstreckungen die Loxodrome in der platten Karte keine gerade Linie mehr bleibt.

Die Erfindung Merkators ist nun die, daß er die Streifen der Plattkarte an jeder Stelle in der Richtung Nord-Süd genau ebenso ausgedehnt hat, wie dieses vorher in der Richtung Ost-West geschehen war.

Durch diese Ausdehnung in der Richtung des Meridians wird z. B. das vorher in der Richtung des Breitenparallels verbreiterte Bild des kreisrunden Eilandes um ebensoviel in nordsüdlicher Richtung ausgedehnt; es wird also wieder kreisrund. Im Kursdreieck wird der Breitenunterschied in demselben Maße vergrößert, wie es vorhin mit der Abweitung geschehen war: das Kursdreieck in der Karte ist daher ähnlich dem auf der Kugeloberfläche.

Der Kurswinkel ist auf der Merkatorkarte genau derselbe wie in Wirklichkeit, und jede Loxodrome ist eine gerade Linie.

§ 142. Vergrößerte Breite. Im vorigen Paragraphen war der zur Merkatorschen Karte führende Gedankengang mehr im allgemeinen dargelegt. Es soll jetzt noch eine genauere Vorstellung von den Rechnungen entwickelt werden, die auszuführen sind, um die Entfernung eines jeden Breitenparallels der Karte vom Äquator zu finden.

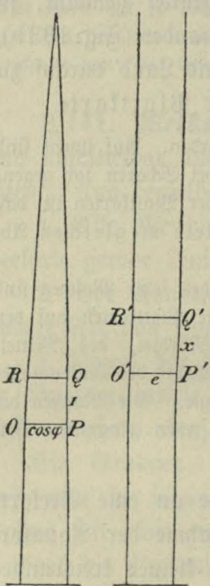


Fig. 134.

Man denke sich auf dem Globus die Meridiane wie die Breitenparallele von Minute zu Minute ausgezogen. Das Netz der Merkatorkarte ist alsdann bestimmt, sobald das zwischen zwei benachbarten Meridianen gelegene Kugelzweieck in die Ebene abgebildet ist, denn die Bilder aller übrigen Kugelzweiecke werden sich als kongruente Streifen neben den zuerst gezeichneten legen.

Es sei in Fig. 134a die nördliche Hälfte eines zwischen benachbarten Meridianen gelegenen Kugelzweiecks dargestellt. Durch die Breitenparallele wird das Kugelzweieck in Figuren geteilt, die man ihrer Kleinheit wegen als ebene rechtwinklige Parallelogramme betrachten darf; unmittelbar am Äquator sind diese Parallelogramme Quadrate, mit wachsender Breite werden sie Rechtecke und zwar um so länger gestreckt, je höher die Breite ist. Es sei $OPQR$ ein solches Rechteck. Seine Seiten sind:

rechts und links 1^{sm},

oben und unten $\cos\varphi^{sm}$,

wo φ die Mittelbreite des betreffenden Rechtecks bedeutet.

Das entsprechende Rechteck in der Merkatorkarte sei $O'P'Q'R'$. Die obere und untere Seite dieses Rechtecks soll die Länge einer Äquatorminute e haben. Seine aufrechtstehende Seite $O'R'$ oder $P'Q'$ werde die vergrößerte Breitenminute genannt. Da das Rechteck $O'P'Q'R'$ der Karte, dem Rechteck $OPQR$ auf dem Globus ähnlich sein soll, so findet man die Länge x der vergrößerten Breitenminute aus der Verhältnisgleichung

$$x : e = 1 : \cos\varphi$$

$$x = \frac{e}{\cos\varphi} = e \,.\, \sec\varphi$$

d. h., die vergrößerte Breitenminute ist gleich der Äquatorminute multipliziert mit der Sekante der Breite.

Durch Addition aller auf diese Weise entstehenden vergrößerten Breitenminuten erhält man die gesuchten Abstände jedes Breitenparallels vom Äquator der Merkatorschen Karte.

Diese Abstände bezeichnet man als die vergrößerten Breiten der betreffenden Parallele oder der auf ihnen gelegenen Orte. Die vergrößerte Breite soll im folgenden mit Φ bezeichnet werden.

Die vergrößerte Breite eines Ortes erhält man, indem man vom Äquator beginnend, jede Minute seines Meridians mit der Sekante der zu dieser Minute gehörenden Mittelbreite multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert.

Um z. B. die vergrößerte Breite für 50^0 zu finden, hätte man den Wert der folgenden Summe von 3000 Summanden zu berechnen.

$$1' \,.\, \sec 0^0\, \tfrac{1}{2}' + 1' \,.\, \sec 0^0\, 1\tfrac{1}{2}' + 1' \,.\, \sec 0^0\, 2\tfrac{1}{2}' + \,.\,.\,.\,.\,.\, + 1' \,.\, \sec 49^0\, 59\tfrac{1}{2}'$$

Einen Näherungswert würde man schon bekommen, wenn man die Meridianbogen nur von Grad zu Grad durch Multiplikation mit $\sec\varphi$ vergrößerte, also den Wert der folgenden aus 50 Summanden bestehenden Summe bestimmte.

$$60' \,.\, \sec \tfrac{1}{2}^0 + 60' \,.\, \sec 1\tfrac{1}{2}^0 + \,.\,.\,.\,.\,.\, + 60' \,.\, \sec 49\tfrac{1}{2}^0$$

Zum Gebrauch beim Zeichnen Merkatorscher Karten, sowie für die im nächsten Paragraphen zu besprechende Lösung der Aufgaben der Besteckrechnung nach vergrößerter Breite, findet man die vergrößerten Breiten aus der Tafel 14.*)

Unter dem vergrößerten Breitenunterschied zweier Orte versteht man den Unterschied ihrer vergrößerten Breiten. Man findet ihn in genau derselben Weise aus den vergrößerten Breiten, wie den wahren Breitenunterschied aus den wahren Breiten. Er soll im folgenden mit B bezeichnet werden.

§ 143. Zeichnen von Merkatorkarten. Bevor der Gebrauch der Seekarten erläutert wird, soll die Konstruktion derartiger Karten an einigen Beispielen gezeigt werden.

---

*) Behrmann, Nautische Tafeln, Tafel 6.

Zum Verständnis des Baues der Karte, auf das es hier allein ankommt, ist es hinreichend, nur das Gradnetz zu entwerfen; die Eintragung der Küstenlinien, Inseln, Wassertiefen u. s. w. ist Sache des Kartenzeichners.

Aufgabe 1: Ein Merkatorsches Netz für die ganze Erdoberfläche (Weltkarte) zu entwerfen. Ein Äquator- oder Längengrad soll = 1 mm sein.

Über die Mitte eines Blattes Papier zeichne man den Äquator 360 mm lang und teile ihn in einzelne Centimeter ein. In den Teilpunkten werden Senkrechte errichtet; die mittelste dieser Senkrechten soll den Greenwicher Meridian darstellen, man bezeichne ihn mit 0°. Nach rechts hat man dann die Meridiane 10° *O*, 20° *O* ..... 180° *O*; nach links 10° *W*, 20° *W* ..... 180° *W*. Jetzt trage man auf den Meridianen 180° *O* und 180° *W* die Breitenskale auf und zwar die Skale für die nördliche Breite nach oben, die für die südliche Breite nach unten. Nach der Tafel der vergrößerten Breiten hat man die Breitenparallele von

10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°

beziehungsweise in folgenden Entfernungen vom Äquator zu zeichnen

10,1	20,4	31,5	43,7	57,9	75,5	99,4 mm.

Die Zahlen der Tafel 14 sind hier durch 60 zu dividieren, da eine Äquatorminute gleich $\frac{1}{60}$ mm genommen war. Die Resultate sind auf eine Dezimale abgerundet.

Verbindet man die entsprechenden Punkte der Breitenskalen miteinander, so stellen die Verbindungslinien die Breitenparallele vor.

Auch wenn man nur Teile der Erdoberfläche in Merkatorkarten darstellen will, richtet man es wenn irgend möglich so ein, daß die beiden seitlichen Ränder der Karte von Meridianen, der obere und der untere Rand von Breitenparallelen gebildet werden.

Aufgabe 2: Das Merkatorsche Netz für eine Karte vom südlichen Teile der Nordsee und zwar von 50° *N* bis 56° *N* und von 2° *W* bis 10° *O* zu zeichnen. Ein Längengrad soll die Größe von 3 cm = 30 mm haben, eine Längenminute also gleich $\frac{1}{2}$ mm sein.

Der untere Rand der Karte wird 12 . 30 = 360 mm lang. Man teilt ihn in die einzelnen Grade zu je 30 mm und errichtet in den Teilpunkten die Senkrechten, welche die Meridiane der Karte von Grad zu Grad darstellen. Auf den Meridianen von 2° *W* und 10° *O* trägt man die Breitenskale auf. Man erhält diese, indem man für die in der Karte darzustellenden Breiten die vergrößerten Breitenunterschiede gegen den niedrigsten Breitenparallel (50°) berechnet. Es ist

$\Phi\,51^0 - \Phi\,50^0 =$ 94,3	Längenminuten	=	47,2 mm
$\Phi\,52^0 - \Phi\,50^0 =$ 190,7	„	=	95,4 mm
$\Phi\,53^0 - \Phi\,50^0 =$ 289,3	„	=	144,7 mm
$\Phi\,54^0 - \Phi\,50^0 =$ 390,1	„	=	195,1 mm
$\Phi\,55^0 - \Phi\,50^0 =$ 493,5	„	=	246,8 mm
$\Phi\,56^0 - \Phi\,50^0 =$ 599,4	„	=	299,7 mm

Man hätte auch die Unterschiede zwischen je zwei aufeinander folgenden Breitenparallelen nehmen können, aber es ist vorzuziehen, immer wieder von dem niedrigsten Parallele auszugehen, da sich im andern Falle jeder Fehler beim Absetzen auf alle folgenden Teilpunkte überträgt, und sich so die unvermeidlichen kleinen Fehler leicht häufen.

Die entsprechenden Punkte der auf den Randmeridianen der Karte aufgetragenen Breitenskalen verbindet man durch gerade Linien, die die Breitenparallele der Karte darstellen. Eine genauere Einteilung der Längen- und der Breitenskalen, z. B. von 2 zu 2 Minuten, bietet keine Schwierigkeit; auf den Längenskalen (unterer und oberer Rand) sind zu diesem Zwecke Teile von je 1 mm abzutragen, die Teilpunkte auf den Breitenskalen (seitliche Ränder) könnte man, ähnlich wie das oben geschehen ist, durch die vergrößerten Breitenunterschiede berechnen. Meist genügt es jedoch, jeden einzelnen Grad der Breite gleichmäßig in die gewünschte Anzahl von Bruchteilen einzuteilen.

§ 144. Lösung der beiden Aufgaben der Besteckrechnung durch Zeichnen des vergrößerten Kursdreiecks. Die beiden Aufgaben der Besteckrechnung lassen sich mit Hülfe des Netzes der Merkatorschen Karte in folgender Weise lösen:

Um die erste Aufgabe der Besteckrechnung zu lösen, trage man den Abfahrtsort A in die Karte ein, lege in A an den Meridian den Kurswinkel α an, trage auf der Kurslinie die Seemeilen der Distanz als ebensoviele Äquator- oder Längenminuten ab und fälle von dem Endpunkte B die Senkrechte BD auf den Meridian. Das dadurch entstehende rechtwinklige Dreieck ist das schon in § 129 erklärte Kursdreieck; es soll im folgenden als das wahre Kursdreieck bezeichnet werden. Die dem Winkel α anliegende Kathete AD dieses Dreiecks (gemessen am Längenminutenmaßstab) ist der wahre Breitenunterschied b, während BD die Abweitung a darstellt. Man zähle jetzt am Meridianrande der Karte, von der Breite von A ausgehend, ebensoviele vergrößerte Breitenminuten ab, wie b wahre Breitenminuten enthält. Dadurch bekommt man den vergrößerten Breitenunterschied. Trägt man diesen von A aus auf dem Meridian ab bis D' und zieht durch D' die Parallele zu DB, verlängert außerdem AB bis zum Schnitt mit der Parallelen in B', so stellt $D'B'$, am unteren Rande gemessen, den Längenunterschied dar. Der Punkt B' ist der erreichte Ort in der Merkatorkarte.

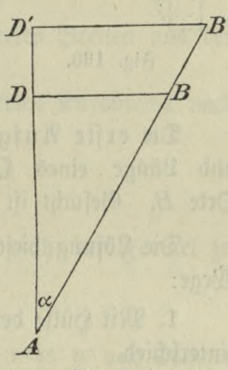


Fig. 135.

Das Dreieck $AD'B'$ wird das vergrößerte Kursdreieck genannt. Es hat denselben Kurswinkel wie das wahre Kursdreieck; seine Katheten sind: der Längenunterschied $l = D'B'$ und der vergrößerte Breitenunterschied $B = AD'$.

Um die zweite Aufgabe der Besteckrechnung mit Hülfe des Netzes der Merkatorkarte zu lösen, trage man die beiden gegebenen Orte in das Netz der Merkatorkarte ein und nenne den Abfahrtsort A, den Bestimmungsort B'. Man verbinde A mit B', ziehe durch A den Meridian, durch B' den Breitenparallel.

Diese Linien schneiden sich in D'. Dann ist $AB'D'$ das vergrößerte Kursdreieck, dessen Winkel $D'AB'$ gleich dem gesuchten Kurswinkel α ist. Man bestimme jetzt die Anzahl der vergrößerten Breitenminuten, welche AD' enthält. Ebensoviele „wahre Breitenminuten" trage man nach dem Längenminutenmaßstab von A aus auf AD' ab und findet dadurch D. Zieht man noch DB parallel zu $D'B'$, so ist AB, auf dem Längenminutenmaßstab gemessen, gleich der wahren Distanz.

§ 145. Besteckrechnung nach vergrößerter Breite. Dieselben Operationen, die im vorigen Paragraphen durch Zeichnung in der Merkatorschen Karte gelöst wurden, lassen sich auch, statt durch Zeichnung, durch eine einfache Rechnung ausführen.

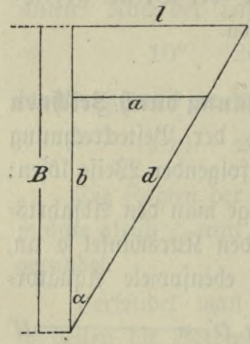


Fig. 136.

Aus der Ähnlichkeit des vergrößerten mit dem wahren Kursdreieck ergeben sich die Verhältnisgleichungen

$$l : a = B : b$$
$$l : B = a : b$$

die dazu dienen können, aus drei bekannten Gliedern das vierte zu berechnen.

Zur Berechnung des Kurswinkels hat man im vergrößerten Kursdreieck

$$tang\,\alpha = \frac{l}{B}$$

woraus folgt $\quad l = B . tang\,\alpha.$

Die erste Aufgabe der Besteckrechnung lautet: Gegeben ist die Breite und Länge eines Ortes A, sowie Kurs und Distanz nach einem zweiten Orte B. Gesucht ist die Breite und Länge von B.

Die Lösung dieser Aufgabe nach vergrößerter Breite geschieht auf folgendem Wege:

1. Mit Hülfe der Grad- oder der Strichtafel findet man den wahren Breitenunterschied.

2. Man bringt diesen an die verlassene Breite an und findet dadurch die erreichte Breite.

3. Zu der verlassenen und der erreichten Breite nimmt man die vergrößerten Breiten aus der Tafel und berechnet aus diesen den vergrößerten Breitenunterschied B, wie man aus den wahren Breiten den wahren Breitenunterschied berechnet.

4. Darauf erhält man den Längenunterschied im vergrößerten Kursdreieck nach der Formel

$$l = B . tang\,\alpha$$

5. Endlich bringt man den Längenunterschied an die verlassene Länge an und findet dadurch die erreichte Länge.

Beispiel: Von $54^\circ 43' N$ und $4^\circ 10' O$ segelt ein Schiff $NOzN$ 125^{sm}, auf welcher Breite und Länge befindet es sich?

Kurs: $N3O$ $\quad d = 125^{sm}$ $\quad b = 103{,}9^{sm}$

Verl. Ort:	$\varphi = 54^\circ 43' N$	$\Phi = 3938{,}4$	$\lambda = 4^\circ 10' O$	$B = 184{,}1$	$log = 2{,}2651$
	$b = \ \ 1^\circ 44' N$		$l = 2^\circ \ \ 3' O$	$\alpha = 3^{str}$	$log\ tang = 9{,}8246$
Err. Ort:	$\varphi = 56^\circ 27' N$	$\Phi = 4122{,}5$	$\lambda = 6^\circ 13' O$	$l = 123$	$log = 2{,}0900$
		$B = \ 184{,}1$			

Der erreichte Schiffsort liegt auf $56^\circ 27' N$ und $6^\circ 13' O$ (vgl. § 131, Beispiel 1).

Anmerkung: Die Multiplikation mit $tang\ \alpha$ kann man selbstverständlich auch mit der Strichtafel ausführen, indem man unter dem Kurswinkel in die b-Spalte eingeht und den zugehörigen Wert aus der a-Spalte nimmt.

Besondere Bedeutung hat das Rechnen nach vergrößerter Breite für die zweite Aufgabe der Besteckrechnung, da es sich in dieser Aufgabe unter Umständen um große Breitenunterschiede handelt, bei denen die Methode der Mittelbreite versagt.

Die zweite Aufgabe der Besteckrechnung lautet: Gegeben sind die Breiten und Längen zweier Orte A und B. Gesucht ist der Kurs und die Distanz von A nach B.

Die Lösung dieser Aufgabe nach vergrößerter Breite geschieht auf folgendem Wege:

1. Man berechnet den Breitenunterschied b und den Längenunterschied l der gegebenen Orte.

2. Zu den Breiten der Orte nimmt man die vergrößerten Breiten aus der Tafel und findet den vergrößerten Breitenunterschied B.

3. Darauf berechnet man den Kurswinkel im vergrößerten Kursdreieck nach der Formel

$$tang\ \alpha = \frac{l}{B}$$

4. Schließlich ist die Distanz im wahren Kursdreieck nach der Formel zu berechnen

$$d = b \,.\, sec\ \alpha$$

Beispiele: 1. Welches ist Kurs und Distanz von $46^\circ 24' N$ und $8^\circ 45' W$ nach Quessant ($48^\circ 28' N$ und $5^\circ 8' W$)?

Abfahrtsort:	$\varphi = 46^\circ 24' N$	$\Phi = 3150{,}2\,N$	$\lambda = 8^\circ 45' W$
Bestimmungsort:	$\varphi = 48^\circ 28' N$	$\Phi = 3333{,}6\,N$	$\lambda = 5^\circ \ \ 8' W$
	$b = \ \ 2^\circ \ \ 4' N$	$B = \ \ 183{,}4\,N$	$l = 3^\circ 37' O$

$l = 217'$	$log = 2{,}3365$	
$B = 183{,}4$	$colog = 7{,}7366$	
$\alpha = 49^\circ 48'$	$log\ tang = 0{,}0731$	$log\ sec = 0{,}1901$
$b = 124$		$log = 2{,}0934$
	$d = 192{,}1$	$log = 2{,}2835$

Der Kurs und die Distanz sind demnach

$N 49{,}8^\circ O$ oder $NO\tfrac{1}{2}O$ 192^{sm}

Anmerkung: Auch in diesem Falle kann man sich, wenn es nur auf eine genäherte Lösung ankommt, der Grad- oder der Strichtafel bedienen. Man hat in der Strichtafel mit dem vergrößerten Breitenunterschiede in die *b*-Spalte und mit dem Längenunterschiede in die *a*-Spalte einzugehen, und erhält den Kurswinkel da, wo sie einander am nächsten kommen. Unter demselben Striche, aber neben dem wahren Breitenunterschiede, nimmt man die Distanz aus.

2. Welches ist der Kurs und die Distanz von Fernando do Noronha ($3^0\,50'\,S$ und $32^0\,25'\,W$) nach St. Vincent ($16^0\,55'\,N$ und $25^0\,1'\,W$)?

Abfahrtsort:	$\varphi = 3^0\,50'\,S$	$\Phi = 230{,}2\,S$	$\lambda = 32^0\,25'\,W$
Bestimmungsort:	$\varphi = 16^0\,55'\,N$	$\Phi = 1030{,}1\,N$	$\lambda = 25^0\ 1'\,W$
	$b = 20^0\,45'\,N$	$B = 1260{,}3\,N$	$l = 7^0\,24'\,O$
	$= 1245'$		$= 444'$

$l = 444$	$log = 2{,}6474$	
$B = 1260{,}3$	$colog = 6{,}8995$	
$\alpha = 19^0\,24'$	$log\ tang = 9{,}5469$	$log\ sec = 0{,}0254$
$b = 1245$		$log = 3{,}0952$
	$d = 1320$	$log = 3{,}1206$

Der Kurs und die Distanz sind demnach

$N\,19{,}4^0\ O\ 1320^{sm}$

Die Rechnung nach vergrößerter Breite ist dem Verfahren nach Mittelbreite gegenüber ein mathematisch genaues Verfahren. Sie versagt indessen in dem Falle, wo der Kurswinkel nahe 90^0, der wahre und der vergrößerte Breitenunterschied also sehr klein sind, weil in diesem Falle die Berechnung der übrigen Seiten der Kursdreiecke aus diesen kleinen anliegenden Katheten unsicher wird und bei der geringsten Änderung im Kurswinkel bei der ersten Aufgabe einen wesentlich anderen Längenunterschied oder bei der zweiten Aufgabe eine wesentlich andere Distanz ergiebt. Dieses ist gerade derjenige Fall, in dem die Rechnung nach Mittelbreite wegen des nur kleinen Breitenunterschiedes die genauesten Ergebnisse liefert.

§ 146. **Praktischer Gebrauch der Seekarte.** Aus der Entstehungsweise der Merkatorschen Karte ist klar, daß diese Karte einen mit der Breite wachsenden Maßstab besitzt. Am Äquator ist eine Seemeile genau gleich der Äquatorminute. Da nun aber auf der Breite φ das Kartenbild sowohl in ost-westlicher wie in nord-südlicher Richtung im Verhältnis $1 : sec\,\varphi$ ausgedehnt ist, so ist für diese Breite eine Seemeile gleich der Äquatorminute multipliziert mit $sec\,\varphi$, das heißt aber:

Auf der Merkatorkarte ist die Seemeile gleich der in gleicher Breite gelegenen vergrößerten Breitenminute.

Wenn man demnach in der Merkatorkarte eine Distanz messen soll, so ist streng genommen für jedes kleine Stück der Distanz die mit ihm in gleicher Breite gelegene vergrößerte Breitenminute als Maß für die Seemeile in Anwendung zu bringen.

In der Praxis genügt es, den Mittelwert dieser langsam sich ändernden Längeneinheit zu benutzen.

Daraus ergeben sich für das Messen gesuchter und das Absetzen gegebener Distanzen in der Seekarte die folgenden Regeln:

1. Um die Distanz zwischen zwei gegebenen Punkten A und B der Karte zu messen, sucht man auf der Breitenskale die Mittelbreite zwischen A und B. Hierauf trägt man die Distanz mit dem Zirkel auf der Breitenskale so ab, daß ihre Mitte mit jener Mittelbreite zusammenfällt. Die Anzahl der zwischen den Zirkelspitzen enthaltenen Breitenminuten ist gleich der gesuchten Anzahl Seemeilen der Distanz.

Ist die zu messende Distanz groß, so zerlegt man sie in kleinere Stücke und mißt jedes einzelne Stück in der soeben angegebenen Weise am Orte der Mittelbreite.

2. Um auf einer Kurslinie von dem gegebenen Punkte A aus eine gegebene Distanz abzusetzen, schätzt man zunächst die Lage des zu erreichenden Ortes B und danach die Mittelbreite von A und B. Von dieser Mittelbreite aus trägt man je die halbe Distanz als Minuten Breitenunterschied nach oben und nach unten auf dem Meridianrande ab, nimmt den Abstand zwischen beiden Breiten zwischen die Schenkel des Zirkels und setzt ihn als Distanz vom gegebenen Orte aus auf der Kurslinie ab. Ergiebt sich die erste Schätzung der Mittelbreite als sehr verfehlt, so muß man auf Grund der genaueren Mittelbreite das Verfahren wiederholen.

Ist die ganze Distanz zu groß, um zwischen die Schenkel des Zirkels gefaßt zu werden, so trägt man einen Bruchteil der Distanz in der eben angegebenen Weise so oft ab, bis die ganze Distanz abgetragen ist.

Über das Ablesen gesuchter und das Eintragen gegebener Kurse in die Karte sei hier nur folgendes angeführt.

Um einen Kurs rechtweisend abzulesen, hat man den Winkel zwischen der Kurslinie und irgend einem Meridian zu messen.

Um einen Kurs rechtweisend in die Karte einzutragen, hat man den Kurswinkel an den Meridian des Abfahrtsortes anzulegen.

Damit man gesuchte Kurse auch mißweisend oder magnetisch aus der Karte ablesen oder mißweisend gegebene Kurse in sie direkt eintragen kann, sind auf der Karte an mehreren Stellen Strichrosen in mißweisender Lage eingezeichnet. Von diesen Rosen ist immer diejenige zu benutzen, die dem in Frage stehenden Kurse am nächsten liegt. Da die Mißweisung sich im Laufe der Zeit ändert, so ist bei Benutzung dieser mißweisenden Rosen streng darauf zu achten, daß die Karten von neuer Ausgabe sind.

Auf den vom Reichs-Marine-Amt herausgegebenen Seekarten sind auch Rosen in rechtweisender Lage in Gradteilung angegeben, mit deren Hülfe sich rechtweisende Kurse und Peilungen bequem abtragen lassen.

Gesteuerte Kompaßkurse sind vor dem Eintragen in die Karte durch Anbringung der Ablenkung in mißweisende Kurse oder durch Anbringung der Gesamtmißweisung in rechtweisende Kurse zu verwandeln.

Küstenschiffahrt.

§ 147. Terrestrische Standlinien. Solange das Schiff sich in der Nähe der Küste befindet, erfolgt die Bestimmung des Schiffs-ortes auf Grund der in der Seekarte verzeichneten Tiefenangaben, Landmarken und schwimmenden Seezeichen unter Benutzung des Lotes, der Logge, des Kompasses, der Peilscheibe und des Sextanten.

Zur Bestimmung des Schiffsortes sind stets zwei Beobachtungen erforderlich. Eine einzelne Beobachtung liefert nur eine Linie, auf der sich das Schiff befindet. Wenn man z. B. eine Bake mißweisend *NO* peilt, so weiß man, daß das Schiff auf derjenigen geraden Linie steht, welche in der Richtung mißweisend *SW* von jener Bake aus gezogen wird; oder wenn man den Abstand von einem Feuerturm zu 4 Seemeilen bestimmt hat, so weiß man, daß das Schiff auf dem mit 4 Seemeilen Halbmesser um den Feuerturm beschriebenen Kreise steht. Eine derartige Linie ist ein geometrischer Ort für das Schiff (vergl. Geom., § 68), man nennt sie in der Navigation eine Standlinie und zwar eine terrestrische im Gegensatz zu den später zu besprechenden astronomisch bestimmten Standlinien.

Terrestrische Standlinien für den Schiffsort erhält man vornehmlich

1. durch Lotungen,
2. durch Peilungen in Sicht befindlicher Marken,
3. durch Abstandsbestimmungen,
4. durch Messungen von Horizontalwinkeln.

In den folgenden Paragraphen sollen zunächst die einzelnen Standlinien besprochen und sodann (§ 153) die Verbindung zweier Standlinien zur Bestimmung des Schiffsortes behandelt werden.

§ 148. Lotungen, Linien gleicher Wassertiefe. Lotungen oder Bestimmungen der Wassertiefe sind in Gewässern von nicht über 200 m Tiefe ein wichtiges Hülfsmittel der Schiffsführung und zwar nicht nur zur Vermeidung einer unmittelbar drohenden Gefahr, sondern auch zur Ermittelung des Schiffsortes. Über die Genauigkeit, mit der ein Meeresteil oder ein Küstengewässer ausgelotet ist, giebt die Seekarte selbst Auskunft durch die größere oder geringere Menge der in ihr enthaltenen Tiefenangaben. Die leeren Stellen der Karte sind nicht ausgelotet, man darf nur dann tiefes Wasser auf ihnen voraussetzen, wenn rings herum in nicht zu großer Entfernung solches vorhanden ist. Unter Wasser befindliche Felsen oder Korallenbänke verraten ihre Anwesenheit bei Seegang leichter als bei glattem Wasser.

Zur Ortsbestimmung können Lotungen in dem Falle verwendet werden, daß in der Nähe des Schiffsortes ein regelmäßiges Ansteigen oder Abfallen des Meeresgrundes stattfindet, nicht aber da, wo wechselnde Tiefen in der Karte bunt durcheinander liegen und natürlich ebensowenig in Meeresteilen mit völlig gleicher Wassertiefe. Um den Verlauf der Wassertiefen in der Karte besser übersehen zu können, sind darin in gewissen Abständen Linien gleicher Wassertiefen (Tiefengleichen) eingezeichnet. So findet man in deutschen Karten gewöhnlich die Fünfmeter-, die Zehnmeter-, die Zwanzigmeterlinien u. s. w., in englischen Karten die entsprechenden Fadenlinien eingetragen. Auf diese Linien hat man beim Aufsuchen von Wassertiefen in der Karte ganz besonders sein Augenmerk zu richten, mehr als auf die einzelne in der Karte verzeichnete Tiefenangabe, ebenso wie man sich nie auf einen einzelnen Lotwurf verlassen, sondern deren mehrere zu Rate ziehen wird (über Reihenlotungen siehe § 153 am Schluß). Zwischen den ausgezogenen Linien gleicher Wassertiefe kann man sich noch die zwischenliegenden Punkte gleicher Wassertiefe durch Linien verbunden denken. Durch die Lotung erhält man die ihr entsprechende Linie gleicher Wassertiefe als Standlinie für das Schiff.

Außer den Tiefenangaben ist an vielen Stellen der Seekarte auch die Bodenbeschaffenheit eingetragen, so daß man unter Umständen durch die an der Lotspeise haftende Grundprobe wichtige Aufschlüsse über den Schiffsort erhalten kann. Die in Seekarten verzeichneten Wassertiefen beziehen sich in der Regel auf das mittlere Niedrigwasser bei Springzeit (französische Karten geben die Wassertiefe für das niedrigste beobachtete Niedrigwasser, amerikanische für das Mittel aus allen Niedrigwassern). Sind Lotungen zu anderen Zeiten als derjenigen des Niedrigwassers gemacht, so sind sie auf Niedrigwasser zu beschicken, bevor man mit ihnen in die Karte eingeht. Diese Beschickung auf Niedrigwasser wird in dem Kapitel über die Berechnung der Hochwasserzeit behandelt werden.

§ 149. **Peilungen.** Das Wort „Peilung“ hat die allgemeine Bedeutung von Messung. So spricht man von Grundpeilungen oder Tiefenpeilungen, Strompeilungen u. s. w. Hier sollen jedoch, wenn von Peilungen schlechtweg die Rede ist, darunter Kompaßpeilungen verstanden werden, d. h. die Bestimmung des Kompaßstriches, auf dem ein Gegenstand, vom Beobachter aus gesehen, erscheint.

Jede Peilung einer bekannten Landmarke ergiebt für den Schiffsort als Standlinie die gerade Linie, die man von der Landmarke aus in der der Peilung entgegengesetzten Richtung zieht. Hat der zum Peilen benutzte Kompaß Ablenkung, so ist ihr Betrag für den beim Peilen anliegenden Kurs der Steuertafel zu entnehmen und an die Kompaßpeilung anzubringen. Die auf diese Weise erhaltene mißweisende Peilung ist unter Benutzung der nächstgelegenen mißweisenden Rose in entgegengesetzter Richtung durch den gepeilten Punkt zu legen. Man kann die Peilung auch durch Anbringung der Gesamtmißweisung rechtweisend machen und als solche in entgegengesetzter Richtung durch den gepeilten Punkt legen.

Sind vom Schiffe aus mehrere zum Peilen geeignete Punkte sichtbar, so verdienen die dem Schiffe näheren den Vorzug vor den entfernteren, denn der Fehler im Schiffsort, der durch einen Fehler in der Peilung hervorgebracht wird, wächst im Verhältnis der Entfernung.

§ 150. **Abstand.** Wenn der Abstand oder die Entfernung von einer Landmarke bekannt ist, so steht das Schiff auf dem Kreise, der mit dem bekannten Abstand um die Landmarke beschrieben werden kann.

Zur Bestimmung des Abstandes benutzt man auf See eine der folgenden Methoden.

1. Schätzung. Eine bloße Schätzung des Abstandes ist nur zulässig bei kleinen Entfernungen und nach Erlangung einer hinreichenden Übung. Bei größeren Entfernungen und ungewöhnlichem Zustande der Atmosphäre ist man in seiner Schätzung leicht Täuschungen ausgesetzt, die erwiesenermaßen in jedem Jahre eine Reihe von Unglücksfällen im Gefolge haben.

2. Geschwindigkeit des Schalles. Gelegentlich können Distanzen durch die Geschwindigkeit des Schalles gemessen werden, indem man die Anzahl Sekunden zählt, die zwischen dem Blitz und dem Knall eines Kanonenschusses, dem Aufsteigen der Dampfwolke und dem Ankommen des Tones bei einer Dampfpfeife u. dgl. m. verfließen. Der Schall legt in einer Sekunde 333 m zurück. Nach Möglichkeit ist die Wirkung des Windes mit in Rücksicht zu ziehen. Ausgeglichen wird sie, wenn gegenseitig von beiden Punkten aus die Distanz durch die Schallgeschwindigkeit gemessen werden kann.

3. Leuchtfeuer in der Kimm. Wegen der Kugelgestalt der Erde vermag ein Leuchtfeuer auch bei der größten Lichtstärke nur einen Teil der Erdoberfläche zu bescheinen. Der Halbmesser dieses Beleuchtungskreises ergiebt sich aus der folgenden Betrachtung.

Es sei M der Erdmittelpunkt, R der Halbmesser der Erde, h die Höhe des Feuers BA über dem Meeresspiegel. Dann ist die Grenze des Erleuchtungsgebietes der Kreis, in dem die von A an die Erdoberfläche gezogenen Tangenten AC die Erde berühren. Nach dem pythagoreischen Lehrsatze ist

$$AC^2 = (R+h)^2 - R^2$$
$$AC^2 = R^2 + 2Rh + h^2 - R^2$$
$$= 2Rh + h^2$$
$$= h(2R+h)$$

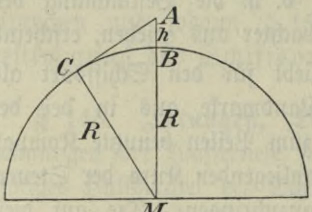


Fig. 137.

Da h gegenüber R sehr klein ist, so kann man das h als Summand neben $2R$ vernachlässigen und schreiben

$$AC^2 = h \cdot 2R$$
$$AC = \sqrt{2R} \cdot \sqrt{h}$$

Nun ist $R = 6366738$ m, daher $\sqrt{2R} = 3568{,}4$ m und somit

$$AC = 3568{,}4 \cdot \sqrt{h} \text{ Meter, oder in Seemeilen ausgedrückt}$$

$$AC = \frac{3568{,}4}{1852} \cdot \sqrt{h} = 1{,}927 \cdot \sqrt{h} \text{ Seemeilen.}$$

Durch die irdische Strahlenbrechung wird bewirkt, daß noch Strahlen in das Auge des Beobachters gelangen, die von Punkten jenseits C ausgehen, daß also der thatsächliche Beleuchtungskreis noch ein Stück größer ist als der geometrisch nach den Dimensionen der Erde berechnete. Man nimmt allgemein an, daß diese Vergrößerung des Beleuchtungskreises $\frac{1}{13}$ des obigen Wertes betrage. Dann hat man für die gesuchte Entfernung

$$E = AC + \tfrac{1}{13} AC$$
$$= 1{,}927 \,.\, \sqrt{h} + 0{,}148 \,.\, \sqrt{h}$$
$$= 2{,}075 \,.\, \sqrt{h}$$

wo E in Seemeilen, h in Metern ausgedrückt ist. Dieselbe Formel giebt offenbar die Entfernung an, bis zu der ein in A befindliches Auge die Erdoberfläche übersehen kann; man nennt deshalb E auch die Entfernung der scheinbaren Kimm. Wie die Formel zeigt, wächst diese Entfernung wie die Quadratwurzel aus der Höhe. Nach der obigen Formel ist die Tafel 15*) berechnet.

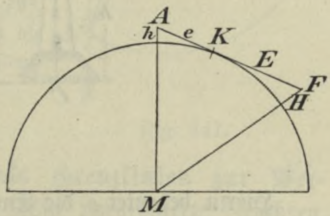


Fig. 138.

Wenn ein Feuer von der Höhe H in der Kimm erscheint oder verschwindet, so ist seine Entfernung gleich der Summe des Halbmessers des Erleuchtungskreises für die Höhe H, und der für die Augeshöhe h des Beobachters stattfindende Entfernung der scheinbaren Kimm, wie dies durch die Fig. 138 veranschaulicht wird.

Beispiel: Das 70,1 m hohe Feuer von Lizard erscheint bei 8 m Augeshöhe in der Kimm. Wie weit ist man davon entfernt?

Die Tafel 15*) giebt für die Feuerhöhe 70,1 m	die Entfernung	$E = 17{,}4^{sm}$
„ die Augeshöhe 8 m	„ „	$e = 5{,}9^{sm}$
Demnach ist der Abstand vom Feuer:		$23{,}3^{sm}$

Die in den Leuchtfeuerverzeichnissen angegebenen Leuchtfeuerhöhen beziehen sich auf den Hochwasserspiegel. Bei niedrigeren Wasserständen ist das Feuer weiter sichtbar. In Meeresteilen, in denen ein bedeutender Hub der Gezeit stattfindet, kann der hieraus entspringende Unterschied in den Sichtweiten des Feuers mehrere Seemeilen betragen.

In den Leuchtfeuerverzeichnissen und Segelanweisungen findet man meist außer der Höhe des Feuers auch seine Sichtweite und zwar für eine mittlere Augeshöhe (5 m, 15 englische Fuß) angegeben. Ebenso sind in vielen Seekarten für alle größeren Feuer die Feuerkreise für dieselbe mittlere Augeshöhe eingezeichnet. In manchen Fällen ist die wirkliche Sichtweite des Feuers kleiner als die nach der obigen Formel berechnete, weil die Stärke des gezeigten Lichtes nicht ausreicht, um den der Höhe des Feuers entsprechenden Bereich der Erdkugel zu beleuchten (vergl z. B. die Feuer von Hanö, Heisterneſt u. a. m. Das Feuer von Callao befindet sich in einer Höhe von 288 m und hat nur eine Sichtweite von 12^{sm}).

Die Genauigkeit der Abstandsbestimmung durch die Beobachtung des Erscheinens oder Verschwindens eines Feuers in der Kimm ist in außerordentlichem Grade von dem Zustande der Atmosphäre abhängig. Bei schwülem, windstillem Wetter, ferner bei großen Temperaturdifferenzen zwischen Luft und Wasser können ganz überraschende Vergrößerungen, gelegentlich auch Verringerungen der Sichtweite vorkommen. Die Beobachtung setzt natürlich eine klare Kimm voraus.

---

*) Behrmann, Nautische Tafeln, Tafel 5.

4. Höhenwinkel (Vertikalwinkel). Erscheint ein h Meter hoher Gegenstand unter einem Winkel von n Minuten, so ist die Entfernung des Beobachters von dem Gegenstande durch die Formel gegeben:

$$e = \frac{h}{n} \cdot \frac{13}{7} \quad \text{(vergl. Geometrie § 76, zweites Beispiel)}$$

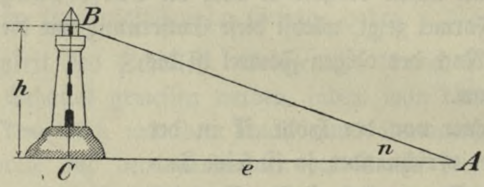


Fig. 139.

Hierin bedeutet e die Entfernung ausgedrückt in Seemeilen, h die Höhe des Gegenstandes in Metern, n die Anzahl der Bogenminuten des Höhenwinkels.

Beispiel: Man mißt den Höhenwinkel des 68,5 m hohen Leuchtturmes auf Helgoland vom Schiffe aus gleich $1^0 10'$. Wie weit ist man von dem Turme enfernt?

Hier ist $h = 68{,}5\,\text{m},\ n = 70'$; daher

$$e = \frac{68{,}5}{70} \cdot \frac{13}{7} = 1{,}8^{sm}$$

Um von der Indexberichtigung unabhängig zu sein, mißt man den Höhenwinkel am besten vor- und rückwärts, indem man einmal die Spitze des direkt gesehenen Bildes mit dem Fuß des doppelt gespiegelten und sodann den Fuß des direkt gesehenen Bildes mit der Spitze des doppelt gespiegelten zur Deckung bringt. Die halbe algebraische Differenz der Ablesungen ist der gesuchte Winkel (vergl. den Abschnitt über die nautischen Instrumente).

Als Höhe von Feuertürmen, Bergen, Kaps u. s. w. findet man in den Leuchtfeuerverzeichnissen und Segelanweisungen im allgemeinen die Höhe über dem Hochwasserspiegel angegeben. Man hat in diesem Falle den Winkel zwischen der Spitze des betreffenden Gegenstandes und der Wasserlinie zu messen.

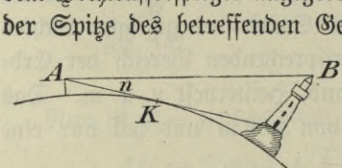


Fig. 140.

Die obige Formel gilt nur für den Fall, daß diese Wasserlinie diesseits des Kimm liegt. Sie ist nicht mehr anwendbar in dem in Fig. 140 dargestellten Falle, wo der Fuß des Gegenstandes durch die davor gelegene Kimm verdeckt wird.

§ 151. Horizontalwinkel. Sind zwei Landmarken A und B vom Schiffe aus sichtbar, so kann man den Horizontalwinkel messen, unter dem diese Punkte vom Schiffe aus gesehen erscheinen. Die aus der Beobachtung folgende Standlinie für das Schiff ist der Kreisbogen, der über AB als Sehne den gemessenen Winkel als Umringswinkel faßt.

Den Mittelpunkt dieses Kreisbogens findet man, indem man das Komplement des gemessenen Winkels in A und B an die Verbindungslinie AB nach der Seite, auf der das Schiff steht, anträgt. Ist der gemessene Winkel größer als 90°, so ist sein Überschuß über 90° nach der entgegengesetzten Seite an AB anzutragen. (Vergl. Geometrie, § 59.)

Beispiel: Von einem Schiffe aus mißt man den Winkel zwischen Pentland Skerries Feuerturm und Noß Head gleich 79°. Der diesem Horizontalwinkel entsprechende Kreisbogen soll in die Karte eingetragen werden. (Pentland Skerris Feuerturm liegt von Noß Head rechtweisend $N\,17^{\circ}\,O$ $13{,}4^{sm}$ entfernt.)

Der gesuchte Kreis ist der in Fig. 141 dargestellte.

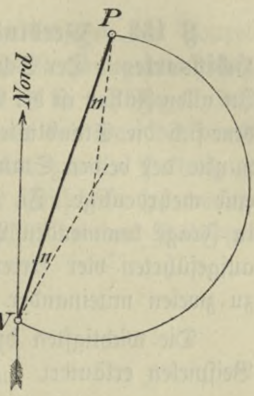


Fig. 141.

§ 152. Die terrestrischen Standlinien als Grenzlinien zur Vermeidung von Gefahren. Um irgend welche der Küste vorgelagerte Gefahren, wie Sandbänke, Felsen u. dergl. zu vermeiden, muß in den Segelanweisungen in geeigneter Weise eine Grenze bezeichnet werden, die das Schiff nicht überschreiten darf, ohne in Gefahr zu geraten. Diese Grenze wird angegeben

1. durch Bezeichnung der Meter- oder Fadenlinie, die das Schiff nicht überschreiten darf,

2. durch Angabe einer Peilungslinie, die das Schiff nicht überschreiten darf; z. B.: Um von den Royal-Sovereign-Shoals frei zu bleiben, bringe man Beachy-Head nicht westlich von $NWzW$, bis man 10^{sm} östlich davon steht.

3. Sind Untiefen einem Gegenstande von bekannter Höhe vorgelagert, so kann man einen Grenzwert für den Höhenwinkel angeben, der nicht überschritten werden darf, wenn das Schiff außerhalb eines die Untiefen umschließenden Kreises bleiben soll, der seinen Mittelpunkt in jenem Gegenstande hat; z. B.: Um von dem Elbogen-Sand frei zu bleiben, lasse man den Höhenwinkel des North-Foreland-Feuerturms (des Turmes selbst) nicht größer als 10′ werden.

4. Sind in der Nähe von Untiefen zwei Gegenstände in Sicht, so kann man sich unter Umständen mit Vorteil des horizontalen Gefahrwinkels bedienen, um die Untiefen zu vermeiden. Man legt in der Karte durch die beiden Punkte einen Kreisbogen, der sämtliche Untiefen einschließt. Um den Mittelpunkt dieses Kreises leichter finden zu können, errichtet man auf der Verbindungslinie AB die Mittelsenkrechte, wie dies in Figur 142 veranschaulicht ist. Der Umringswinkel ACB dieses Bogens wird als Gefahrwinkel bezeichnet. Bei der Annäherung an die Untiefen mißt man mit einem Sextanten den Horizontalwinkel zwischen den beiden Punkten A und B. Wenn man dafür sorgt, daß dieser Winkel nicht größer wird, als jener Gefahrwinkel (52° im Beispiel der Figur 142), so ist man sicher, daß man außerhalb des gezeichneten Kreises und damit frei von den von ihm umschlossenen Untiefen bleibt.

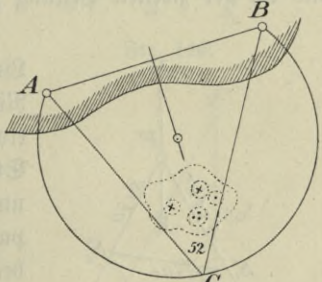


Fig. 142.

§ 153. Verbindung von zwei Standlinien zur Bestimmung des Schiffsortes. Der Schiffsort ist bestimmt als Schnittpunkt von zwei Standlinien. In allen Fällen ist die Bestimmung eine um so schärfere, je näher der Winkel, unter dem sich die Standlinien schneiden, einem rechten kommt. Sind mehrere Schnittpunkte der beiden Standlinien vorhanden, so ist die Bestimmung des Schiffsortes eine mehrdeutige. In den meisten Fällen wird man in der Lage sein, unter den in Frage kommenden Punkten den richtigen auszuwählen. Man kann die oben aufgeführten vier Arten von terrestrischen Standlinien in mannigfaltiger Weise zu zweien miteinander verbinden.

Die wichtigsten dieser Verbindungen sind im folgenden aufgezählt und an Beispielen erläutert.

1. **Peilung und Lotung.** Man lege eine gerade Linie entgegengesetzt der Peilung durch den gepeilten Ort und suche auf ihr die gelotete Wassertiefe auf.

2. **Peilung und Entfernung.** Man lege eine gerade Linie entgegengesetzt der Peilung durch den gepeilten Ort und trage darauf die Entfernung ab.

3. **Kreuzpeilung.** (Gleichzeitige Peilung zweier Punkte.)

Aufgabe: Man peilt Wolf-Rock rechtweisend $NW\frac{3}{4}W$ und Lizard rechtweisend $NO\frac{1}{4}N$. Hiernach ist der Schiffsort zu bestimmen.

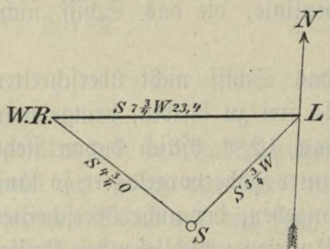


Fig. 143.

Auflösung: (Fig. 143) Wolf-Rock liegt von Lizard $W\frac{1}{4}S$ 23,4^{sm} entfernt. Man lege durch Wolf-Rock und Lizard je eine Linie in der der Peilung entgegengesetzten Richtung, also durch Wolf-Rock nach $SO\frac{3}{4}O$ und durch Lizard nach $SW\frac{1}{4}S$. Der Schnittpunkt dieser Linien ist der gesuchte Schiffsort.

4. **Doppelpeilung.** (Zweimalige Peilung desselben Punktes.)

Aufgabe: Man peilt ein Feuer $NNO\frac{1}{2}O$, segelt darauf OzN 6^{sm} und peilt nun dasselbe Feuer $NNW\frac{1}{2}W$. Hiernach den Schiffsort bei der ersten und bei der zweiten Peilung zu bestimmen.

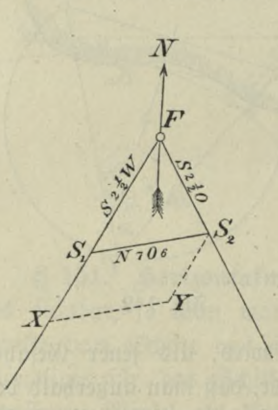


Fig. 144.

Auflösung: Man lege durch das Feuer zwei Linien in den den beiden Peilungen entgegengesetzten Richtungen, also nach $SSW\frac{1}{2}W$ und $SSO\frac{1}{2}O$. Darauf trage man in einem beliebigen Punkte X der ersten Standlinie die gesegelte Strecke $XY = OzN$ 6^{sm} an und ziehe durch Y die Parallele zu XF. Ihr Schnittpunkt S_2 mit der zweiten Standlinie ist der Schiffsort bei der zweiten Peilung. Zieht man durch S_2 die Parallele zu XY, so erhält man als Schnittpunkt dieser Linie mit der ersten Standlinie, den Schiffsort S_1 bei der ersten Peilung.

Doppelpeilungen finden zumal auf Dampfern beim Entlangsteuern an einer Küste die ausgedehnteste

Verwendung. Man hat deshalb versucht, das jedesmalige Absetzen der Doppelpeilung in der Karte zu vermeiden und durch eine kleine Rechnung oder durch eine Tafel den Abstand bei der zweiten Peilung, auf den es in der Regel allein ankommt, zu finden. Die Tafel 11 giebt die Zahl an, mit der man die durchlaufene Distanz multiplizieren muß, um den Abstand bei der zweiten Peilung zu erhalten. Am bequemsten ist es, die Peilungen an einer Peilscheibe zu machen. Es ist dabei nur scharf darauf zu achten, daß das Schiff bei den Peilungen genau Kurs anliegt.

Beispiel: Bei 12 Knoten Fahrt peilte man ein Feuer
um $9^u\ 15^m$ an Steuerbord 50^0 von vorn
um $9^u\ 35^m$ an Steuerbord 80^0 von vorn.

Wie weit war man bei der zweiten Peilung von dem Feuer entfernt?

Lösung: Die Tafel 11 giebt für einen Winkel zwischen Kurs und erster Peilung von 50^0 und einen Winkel zwischen Kurs und zweiter Peilung von 80^0 den Faktor 1,53.

Da in der Zwischenzeit von 20 Minuten 4^{sm} zurückgelegt sind, so ist der Abstand bei der zweiten Peilung

$$d = 4 \,.\, 1{,}53 = 6{,}1 \text{ Seemeilen.}$$

Wenn der Winkel zwischen der Kursrichtung und der zweiten Peilung doppelt so groß ist, wie der Winkel zwischen der Kursrichtung und der ersten Peilung, so ist der Abstand bei der zweiten Peilung gleich der zwischen den Peilungen zurückgelegten Distanz; so ist in Fig. 145 der Abstand $FS_2 = S_1 S_2$, da das Dreieck $S_1 S_2 F$ gleichschenklig ist.

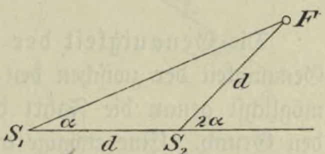


Fig. 145.

Ist insbesondere der Winkel zwischen der Kurslinie und der ersten Peilung 4^{str}, der Winkel zwischen der Kurslinie und der zweiten Peilung 8^{str}, so ist die inzwischen gesegelte Distanz gleich dem Abstand, in dem man das gepeilte Objekt passiert (Fig. 146). Diese einfachste Art der Abstandsbestimmung heißt Vierstrichpeilung.

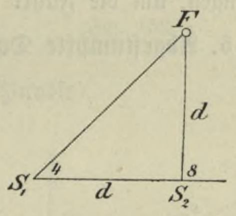


Fig. 146.

Peilt man einen Punkt zuerst $63\frac{1}{2}^0$ vom Kurs und dann, wenn er querab ist, so ist der Abstand beim Passieren doppelt so groß wie die inzwischen gesegelte Distanz. In diesem Falle ist nämlich (Fig. 147) $FS_2 = S_1\,S_2 \,.\, tang\ 63\frac{1}{2}^0$ und da $tang\,63\frac{1}{2}^0 = 2$ ist, $FS_2 = 2 \,.\, S_1\,S_2$. Die Zahl derartiger in der Praxis bequemer Regeln läßt sich leicht noch vergrößern.

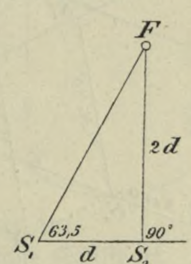


Fig. 147.

In manchen Fällen ist es von Bedeutung schon vorher zu wissen, in welchem Abstande man ein Feuer passieren wird, insbesondere dann, wenn Gefahr vorhanden ist, das gepeilte Feuer durch Nebel oder dickes Wetter bald wieder aus Sicht zu verlieren. In diesem Falle kann man sich einer Regel wie der folgenden bedienen:

Peilt man ein Objekt $26\frac{1}{2}^0$ und 45^0 vom Kurs, so ist die inzwischen gesegelte Distanz gleich dem Abstand, in dem man das Objekt passieren wird.

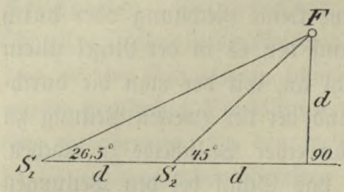


Fig. 148.

Die Tafel 12 enthält eine große Reihe von Winkelpaaren, für die das Gleiche stattfindet, d. h. für welche die zwischen den Peilungen gesegelte Distanz gleich dem Abstand beim Passieren ist. Diese ist nach der Formel berechnet worden:

$$cotg\,\beta = cotg\,\alpha - 1.$$

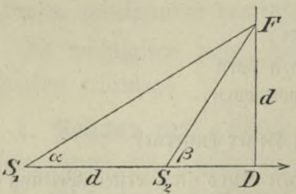


Fig. 149.

Hierin bezeichnet α den beliebig anzunehmenden Winkel zwischen Kurs und erster Peilung, β den zugehörigen Winkel zwischen Kurs und zweiter Peilung. Die Begründung der Formel ergiebt sich aus Fig. 149. Es ist nämlich

$$\text{im } \triangle\, FDS_1 \;.\;.\;.\; d = (d + S_2D)\,.\,tang\,\alpha$$
$$\text{im } \triangle\, FDS_2 \;.\;.\;.\; d = S_2D\,.\,tang\,\beta$$

Setzt man die aus beiden Gleichungen für S_2D folgenden Werte einander gleich, so erhält man

$$cotg\,\alpha - 1 = cotg\,\beta.$$

Die Genauigkeit der Doppelpeilungen hängt in erster Linie von der Genauigkeit der zwischen den Peilungen gesegelten Distanz ab. Man hat daher möglichst genau die Fahrt des Schiffes festzustellen und zwar die Fahrt über den Grund. Eine etwaige an Ort und Stelle laufende Strömung ist nach den im nächsten Kapitel zu erörternden Regeln an die Fahrt durch das Wasser anzubringen, um die Fahrt über den Grund zu erhalten.

5. Abgestumpfte Doppelpeilung.

Aufgabe: Man peilt ein Feuer A $N65^0\,W$, segelt darauf $S\,11^0\,W$ $7{,}2^{sm}$ und peilt nun ein anderes Feuer B, das $S\,8^0\,O$ $11{,}4^{sm}$ von A liegt, in $S\,68^0\,W$. Hiernach ist der Schiffsort bei der ersten und bei der zweiten Peilung zu bestimmen.

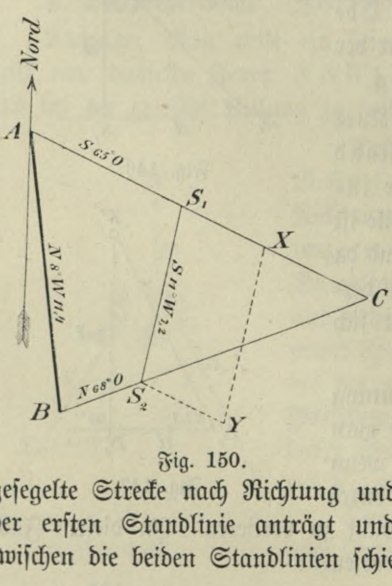


Fig. 150.

Auflösung: Man lege durch das Feuer A (Fig. 150) eine Linie in der der ersten Peilung entgegengesetzten Richtung, also nach $S\,65^0\,O$ und durch das Feuer B eine Linie in der der zweiten Peilung entgegengesetzten Richtung, also nach $N\,68^0\,O$. Man verfährt dann genau so wie bei einer gewöhnlichen Doppelpeilung, indem man die gesegelte Strecke nach Richtung und Größe zunächst in irgend einem Punkte X der ersten Standlinie anträgt und sie dann vermittelst der Parallelen YS_2 zwischen die beiden Standlinien schiebt.

6. Peilung und Horizontalwinkel.

Aufgabe: B liegt $N 77^0 O$ $6{,}8^{sm}$ von A. Man peilt A in $N 33^0 W$ und mißt gleichzeitig den Winkel zwischen A und B gleich 64^0. Hiernach ist der Schiffsort zu bestimmen.

Auflösung: Man lege durch A (Fig. 151) eine Linie in der der Peilung entgegengesetzten Richtung, also nach $S 33^0 O$, trage in irgend einem Punkte dieser Standlinie den Winkel AXY gleich dem gemessenen Winkel von 64^0 an und ziehe durch B die Parallele zu XY. Diese Parallele schneidet die erste Standlinie im gesuchten Schiffsorte S.

Diese Ortsbestimmung ist einer Kreuzpeilung vorzuziehen, wenn der Winkel ASB klein ist.

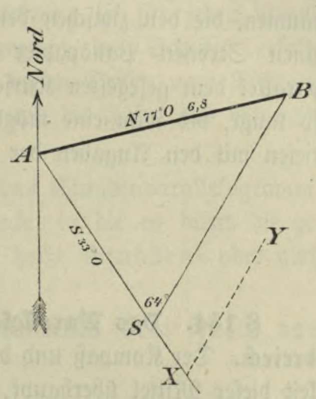


Fig. 151.

7. Horizontalwinkel und Abstand.

Aufgabe: Eine Bake B liegt $NWzW$ $7{,}5^{sm}$ von einem Leuchtturm L. Südwestlich davon mißt man den Winkel zwischen den beiden Punkten gleich 70^0 und bestimmt den Abstand des Schiffes von L zu $4{,}2^{sm}$. Hiernach ist der Schiffsort zu bestimmen.

Auflösung: Man beschreibe über der Linie BL nach § 59 den Kreisbogen, der einen Winkel von 70^0 faßt. Ferner beschreibt man um den Ort des Leuchtturmes einen Kreisbogen mit $4{,}2^{sm}$ Halbmesser; dieser Kreisbogen schneidet jenen Kreis im gesuchten Schiffsort.

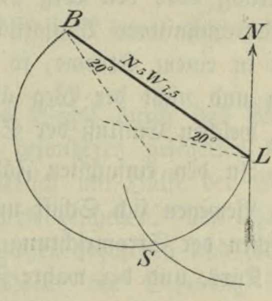


Fig. 152.

8. Zwei Horizontalwinkel (Aufgabe der vier Punkte).

Aufgabe: A liegt von B WzS 5^{sm}, C liegt von B OSO 6^{sm} entfernt. Südlich stehend mißt man den Winkel zwischen A und B gleich 53^0 und den Winkel zwischen B und C gleich 64^0. Hiernach ist der Schiffsort zu bestimmen.

Auflösung: Man beschreibe nach § 59 über AB und BC Kreisbögen, die als Umringswinkel die gemessenen Winkel von 53^0 bezw. 64^0 fassen.

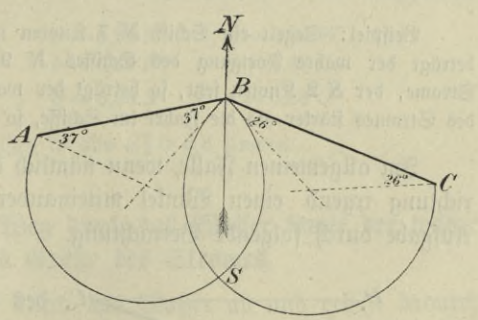


Fig. 153.

Der Schnittpunkt S der beiden Kreisbogen ist der gesuchte Schiffsort. (Lösung dieser Aufgabe durch Rechnung, siehe § 111; eine für die Praxis bequeme Lösung mit Hülfe eines Zeichenapparates, der Doppelalhidade oder des Doppeltransporteurs, folgt in dem Kapitel über die nautischen Instrumente.)

9. Reihenlotungen.

Hierher kann man auch das Verfahren rechnen, den Schiffsort durch eine Reihe von Lotungen, die auf bekanntem Kurse in bekannten Abständen von einander gemacht sind, zu bestimmen. Man trägt die gefundenen Wassertiefen in Zwischenräumen, die den zwischen den Lotungen zurückgelegten Distanzen entsprechen, auf einen Streifen Pauspapier auf und verschiebt den so vorbereiteten Streifen parallel dem gesegelten Kurse in der Nähe des Schiffsortes nach Loggerechnung so lange, bis man eine möglichst gute Übereinstimmung der gefundenen Wassertiefen mit den Angaben der Karte gefunden hat.

Stromschiffahrt.

§ 154. Das Parallelogramm der Geschwindigkeiten und das Stundendreieck. Der Kompaß und die Logge geben, ganz abgesehen von der Unzulänglichkeit dieser Mittel überhaupt, dem Seemanne nur Aufschluß über den Weg, den sein Schiff „durch das Wasser“ macht; bestimmen also die wahre Ortsveränderung oder den Weg „über den Grund“ nur unter der Voraussetzung, daß die durchschnittene Wasserfläche selbst ohne Bewegung ist. Segelt das Schiff aber in einem Strome, so ist sein Weg durch das Wasser nur der scheinbare Weg und nicht der Weg über den Grund oder der wahre Weg, und es fragt sich, welchen Einfluß der Strom auf die Bewegung des Schiffes ausübt.

In den einfachsten Fällen liegt die Lösung dieser Aufgabe auf der Hand.

Bewegen sich Schiff und Wasser in derselben Richtung oder ist der Winkel zwischen der Stromrichtung und dem Kurse gleich 0^0, so ändert der Strom nicht den Kurs, und der wahre Fortgang ist die Summe beider Bewegungen.

Bewegen sich Schiff und Wasser in gerade entgegengesetzter Richtung, oder ist der Winkel zwischen der Stromrichtung und dem Kurse gleich 180^0 oder 16^{str}, so ändert der Strom nicht den Kurs, und der wahre Fortgang ist der Unterschied beider Bewegungen.

Beispiel: Segelt ein Schiff N 7 Knoten in einem Strome, der N 2 Knoten setzt, so beträgt der wahre Fortgang des Schiffes N 9 Knoten. Segelt das Schiff aber in einem Strome, der S 2 Knoten setzt, so beträgt der wahre Fortgang N 5 Knoten. Wäre die Trift des Stromes stärker als die Fahrt im Schiffe, so würde es zurück- und nicht voraus gehen.

Im allgemeinen Falle, wenn nämlich der Kurs des Schiffes und die Stromrichtung irgend einen Winkel miteinander bilden, ergiebt sich die Lösung der Aufgabe durch folgende Betrachtung.

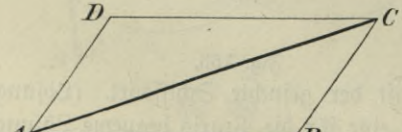


Fig. 154.

In Figur 154 möge AB die Fahrt des Schiffes, AD die Fahrt des Stromes nach Richtung und Größe darstellen. Um die Ortsveränderung zu finden, die das Schiff unter der gleichzeitigen Einwirkung dieser beiden Geschwindigkeiten erfährt, kann man sich vorstellen, daß sie nacheinander je eine Stunde wirksam sind. Die Segelung an sich würde das Schiff in einer Stunde von A nach B bringen, der Strom würde es dann von B nach C führen. Man kann sich auch umgekehrt denken, daß zuerst der Strom in einer Stunde das Schiff von A nach D bringt, worauf dann die Segelung es in einer Stunde von D nach C führt. Dieselbe Betrachtung ist für jeden Bruchteil der Stunde zulässig. Die thatsächliche Bewegung des Schiffes erfolgt demnach auf der Diagonale des Parallelogrammes, dessen Seiten nach Richtung und Größe die Fahrt des Schiffes durchs Wasser und die Fahrt des Stromes darstellen.

Das so gezeichnete Parallelogramm nennt man das Stundenparallelogramm; es wird bestimmt durch eins der kongruenten Dreiecke, in die es durch die gezogene Diagonale geteilt wird. Ein solches Dreieck heißt Stunden- oder auch Stromdreieck.

Für die Praxis haben die im folgenden behandelten drei Fälle von Stromaufgaben Bedeutung.

§ 155. Die Aufgaben der Stromschiffahrt.

1. Aufgabe. Gegeben ist der Weg durchs Wasser sowie der Strom. Gesucht wird der wahre Weg.

Die Lösung erfolgt einfach durch Koppeln des Weges durch das Wasser und des Stromes, den man gleichsam als einen besonderen gesegelten Kurs ansehen kann. Das Koppeln kann entweder rechnerisch mit Hülfe der Grad- oder der Strichtafel oder durch Zeichnung in der Karte geschehen. Im letzteren Falle hat man zunächst die Segelung durch das Wasser abzusetzen und sodann an den Endpunkt dieser Segelung den für die Dauer der Segelung stattgehabten Strom nach Richtung und Größe anzutragen.

Beispiel: Ein Schiff segelt mißweisend $SSW\frac{1}{2}W$ mit 6 Knoten Fahrt in einem Strome, der rechtweisend OzS 1,5^{sm} stündlich setzt. Mißweisung 2^{str} W. Welches ist der rechtweisende Kurs und die Fahrt über den Grund?

Segelung rechtw.	$S\frac{1}{2}W$	6	$b = 5{,}97\ S$	$a = 0{,}59\ W$
Strom rechtw.	$S7O$	1,5	$b = 0{,}29\ S$	$a = 1{,}47\ O$
			$b = 6{,}26\ S$	$a = 0{,}88\ O$

Der rechtweisende wahre Weg des Schiffes ist also $S\frac{3}{4}O$ 6,3 Knoten.

2. Aufgabe. Gegeben ist der Weg durch das Wasser sowie der wahre Weg. Gesucht ist die Richtung und Größe des Stromes.

Auflösung: Man setzt den Weg durch das Wasser ab und erhält dadurch den scheinbaren Schiffsort. In derselben Weise liefert der Weg über den Grund den wahren Schiffsort. Die Strecke vom scheinbaren zum wahren Schiffsort stellt nach Richtung und Größe die Strom- oder Besteckversetzung dar. Rechnerisch findet man sie dadurch, daß man den entgegengesetzten Weg durch das Wasser und den wahren Weg koppelt.

Beispiel: Ein Schiff legt nach der Grundlogge mißweisend $S\frac{3}{4}O$ 4,2 ^{sm} stündlich, nach der gewöhnlichen Logge SSO 5,3 ^{sm} stündlich zurück. Welcher Strom läuft an Ort und Stelle?

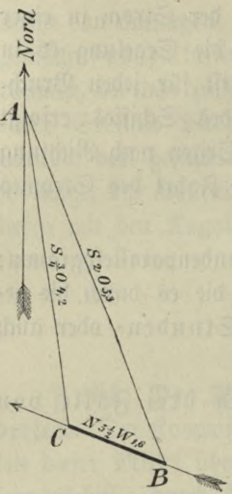


Fig. 155.

Lösung durch Zeichnung siehe Fig. 155.

Lösung durch Rechnung:

Entgegenges. scheinb. Weg	$N2W$	5,3	$b = 4{,}90\,N$	$a = 2{,}03\,W$
Wahrer Weg	$S\frac{3}{4}O$	4,2	$b = 4{,}15\,S$	$a = 0{,}62\,O$
			$b = 0{,}75\,N$	$a = 1{,}41\,W$

Der Strom setzt also mißw. $NWzW\frac{1}{2}W$ 1,6 Knoten.

Statt des wahren Weges ist in vielen Fällen der wahre Schiffsort am Schlusse der Segelung gegeben. Man kann dann entweder zunächst den wahren Weg ausrechnen und wieder nach der oben gegebenen Regel verfahren, oder man sucht zuerst den scheinbaren Schiffsort und berechnet alsdann den Strom als die Strecke von ihm zum wahren Schiffsort. Das letztere Verfahren ist das in der Praxis zumeist angewandte. Es wird durch folgendes Beispiel erläutert:

Beispiel. Ein Schiff befindet sich mittags nach astronomischer Beobachtung auf 54° 2′ N und 2° 31′ O. Man segelt bis zum nächsten Mittage bei 17° W Mißweisung und 6° O Ablenkung $NO\frac{1}{2}O$ 153 ^{sm} und findet dann seinen Schiffsort nach astronomischer Beobachtung auf 56° 10′ N und 5° 5′ O. Welche Besteckversetzung hat man gehabt?

Rechtw. Kurs	$N3\frac{1}{2}O$ 153	$b = 118{,}3$	$a = 97{,}1$
		$\varphi_m = 55^0$	$l = 169$
Verlassener Ort:	$\varphi = 54^0\ 2'\,N$	$\lambda = 2^0\,31'\,O$	
	$b = 1^0\,58'\,N$	$l = 2^0\,49'\,O$	
Schiffsort nach Loggerrechnung	$\varphi = 56^0\ 0'\,N$	$\lambda = 5^0\,20'\,O$	
„ nach astronom. Beob.	$\varphi = 56^0\,10'\,N$	$\lambda = 5^0\ 5'\,O$	
	$b = 10'\,N$	$l = 15'\,W$	$a = 8{,}6\,W$
Besteckversetzung:	rechtw. $NW\frac{1}{2}N$ 13 ^{sm}		

3. Aufgabe. Gegeben ist der Strom nach Richtung und Fahrt (Trift), der Kurs, den das Schiff über den Grund gutmachen soll, sowie die Fahrt des Schiffes durchs Wasser. Gesucht ist der zu steuernde Kurs und die Fahrt über den Grund.

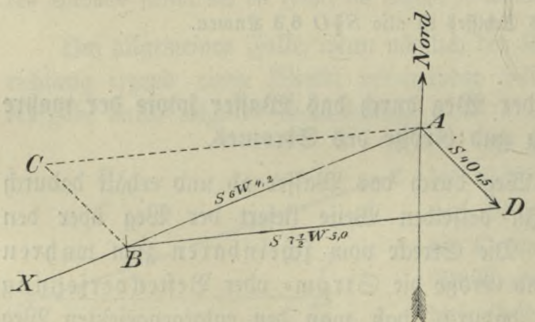


Fig. 156.

Auflösung: In diesem Falle ist das Stundendreieck zu zeichnen aus der Seite AD (Fig. 156), die den Strom darstellt, dem Winkel DAX zwischen dem Strom und der Richtung des beabsichtigten Kurses, sowie der diesem Winkel gegenüberliegenden Seite BD, die die Fahrt des Schiffes darstellt (zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel).

Man trägt (Fig. 156) vom Abfahrtsort A die Richtung des beabsichtigten Kurses, sowie den Strom nach seiner Richtung und Fahrt ab. Beschreibe um den Endpunkt D des Stromes mit der Fahrt des Schiffes einen Kreisbogen, der die Richtung AX des beabsichtigten Kurses in B schneidet. Die Verbindungslinie DB giebt den zu steuernden Kurs an. Man kann das Parallelogramm der Geschwindigkeiten vervollständigen, indem man durch A die Parallele zu BD und durch B die Parallele zu AD zieht.

Beispiel: Ein Schiff will mißweisend $SWzW$ 34^{sm} über den Grund segeln in einem Strome, der rechtweisend SO 1,5 Knoten setzt. Die Fahrt des Schiffes durch das Wasser ist 5 Knoten; die Mißweisung beträgt 1^{str} O. Welches ist der zu steuernde rechtweisende und mißweisende Kurs sowie die Fahrt über den Grund? Wie lange Zeit gebraucht man zum Zurücklegen der 34^{sm} über den Grund und welche Distanz hat man durchs Wasser zu segeln?

In der Zeichnung (Fig. 156) stellt AX die Richtung dar, in der das Schiff zu segeln beabsichtigt (rechtw. $S6W$); AD ist der Strom (rechtw. $S4O$). Der um D mit 5^{sm} Halbmesser beschriebene Kreis trifft AX in B; dann giebt DB die einzuschlagende Richtung an. Der zu steuernde Kurs ist nach der Figur rechtweisend $W\frac{1}{2}S$, mißweisend $WSW\frac{1}{2}W$. Die Fahrt über den Grund (AB) findet man zu 4,2 Knoten. Demnach ist die Dauer der Segelung $34 : 4{,}2 = 8$ Stunden, und die durch das Wasser zu segelnde Distanz $8 \cdot 5^{sm} = 40^{sm}$.

Segeln im größten Kreise.

§ 156. Größter Kreis und Loxodrome. Die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte der Erdoberfläche ist der Bogen des durch sie gelegten größten Kreises (vergl. Stereometrie, § 85).

Der durch die Punkte A und B gelegte größte Kreis fällt aber nur dann mit der die Punkte verbindenden Loxodrome zusammen, wenn A und B entweder auf demselben Meridian oder beide auf dem Äquator liegen. In allen anderen Fällen stellt der Bogen der Loxodrome nicht die kürzeste Verbindungslinie zwischen dem Punkte A und B dar.

Der Unterschied der auf dem größten Kreise zwischen zwei Orten zurückzulegenden Distanz gegen die auf der Loxodrome zu segelnden ist gering bei kleinen Distanzen, ferner wenn die Orte nahe Nord-Süd voneinander oder beide in der Nähe des Äquators liegen. Bei großen Distanzen jedoch, besonders wenn die Orte einen größeren Längenunterschied haben und in mittleren oder hohen Breiten liegen, kann sich der Unterschied auf Hunderte von Seemeilen belaufen, sodaß es sich verlohnt, statt der Loxodrome den größten Kreis als Weg für das Schiff zu wählen.

Die Aufgabe, von einem Punkte A nach einem anderen Punkte B im größten Kreise zu segeln, ist gelöst, wenn man

1. die Größe des zwischen A und B liegenden Hauptbogens, d. h. die zu segelnde Distanz ermittelt hat und

2. imstande ist, anzugeben, welcher Kurs in jedem Punkte des Hauptbogens zu steuern ist, um das Schiff auf ihm zu halten.

Es ist von vornherein klar, daß der zu steuernde Kurs beim Segeln auf dem Hauptbogen einer steten Änderung unterworfen ist; denn ein größter Kreis der Erde (mit Ausnahme des Äquators) schneidet die verschiedenen Meridiane unter verschiedenen Winkeln.

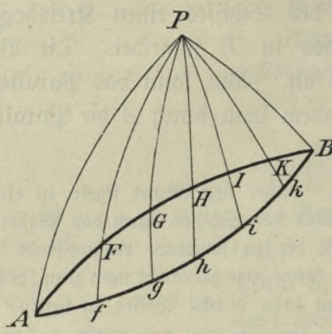


Fig. 157.

In Fig. 157 soll $AfghikB$ den die Punkte A und B verbindenden loxodromischen Bogen, $AFGHIKB$ dagegen den Hauptbogen zwischen A und B darstellen. Der Kurswinkel der Loxodrome ist auf dem ganzen Bogen derselbe ($\sphericalangle f = \sphericalangle g = \sphericalangle h = \sphericalangle i = \sphericalangle k$); auf dem Hauptbogen ändert der Kurswinkel stetig seine Größe. In der Merkatorschen Karte, in der ja die Meridiane parallele Gerade sind, erscheint die Loxodrome in eine gerade Linie ausgestreckt (Fig. 158), der Hauptbogen dagegen wird zu einer krummen Linie, die, wenn die Breiten gleichnamig sind, stets auf der dem Pole zugewendeten Seite der Loxodrome liegt.

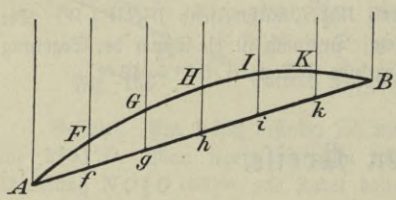


Fig. 158.

Diese Eigenschaft des Hauptbogens ist insofern von Wichtigkeit, als davon mitunter die Wahl abhängt, über welchen Bug ein Schiff gelegt werden soll. Wäre z. B. der Winkel zwischen der Loxodrome und dem Hauptbogen größer als zwei Strich, und der Wind wehte aus der dem loxodromischen Kurse gerade entgegengesetzten Richtung, so würde das Schiff auf dem Hauptbogen bei sechs Strich am Winde über dem richtigen Buge nicht einmal vier Strich von dem geraden Wege zum Bestimmungsorte abliegen, während es über dem andern Buge mehr als acht Striche von dem geraden Wege abstehen, sich also thatsächlich vom Bestimmungsorte entfernen würde. In der That erlaubt nur die Niederlegung des größten Kreises auf die Karte dem Seemanne ein sicheres Urteil darüber, inwiefern ein Wind ihm günstig oder widrig ist.

Die Praxis des Segelns im größten Kreise besteht nun darin, daß man für eine Reihe von Meridianen die Breiten ausrechnet, in denen sie von dem Hauptbogen geschnitten werden, daß man darauf die so berechneten Punkte in die Merkatorkarte einträgt und durch eine schlank ausgezogene Linie verbindet. Es genügt dann, von Zeit zu Zeit den Kurs entsprechend dem von dieser Linie angegebenen Kurswinkel zu ändern.

§ 157. Berechnung der Distanz, des Anfangs- und des Endkurses.

Die nächsten für die Bestimmung des größten Kreises zwischen A und B (Fig. 159) vorzunehmenden Rechnungen bestehen in der Ermittelung der Distanz und des Anfangs- und Endkurses. Es ist dieses eine Aufgabe der schiefwinkligen sphärischen Trigonometrie.

Der die Orte A und B verbindende Hauptbogen schließt mit den Meridianen von A und B ein sphärisches Dreieck ein, dessen eine Ecke im Pole liegt, und von dem zwei Seiten und der zwischenliegende Winkel gegeben sind. Der Winkel am Pole ist nämlich der Längenunterschied zwischen den beiden Orten, die anliegenden Seiten *PA* und *PB* sind die Breitenkomplemente oder Poldistanzen von *A* und *B*. Die zu berechnende dritte Seite ist die zu segelnde Distanz, und zwar ist für jede Bogenminute der Seite eine Seemeile zu rechnen. Der Winkel beim Abfahrtsorte *A* giebt den Kurs an, mit dem das Schiff die Reise anzutreten hat, der Winkel beim Bestimmungsorte *B* den Kurs, mit dem es im Bestimmungsorte ankommt.

Im folgenden bezeichne γ den Längenunterschied, a und b die Poldistanzen oder Breitenkomplemente der Orte *A* und *B*.

Bei gleichnamigen Breiten sind beide Breiten von 90° zu subtrahieren, bei ungleichnamigen Breiten ist die eine von 90° zu subtrahieren, die andere zu 90° zu addieren; und zwar empfiehlt es sich, die größere Breite von 90° zu subtrahieren und die kleinere Breite zu 90° zu addieren, damit die Summe der Poldistanzen kleiner als 180° bleibe.

Die Berechnung der Winkel α und β und der dritten Seite c erfolgt dann nach dem zweiten Fall der Berechnung sphärischer Dreiecke (§ 122) vermittelst der Formeln:

$$cotg\, \gamma/_2 : tang\, \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = cos\, \tfrac{1}{2}(a+b) : cos\, \tfrac{1}{2}(a-b)$$

$$cotg\, \gamma/_2 : tang\, \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = sin\, \tfrac{1}{2}(a+b) : sin\, \tfrac{1}{2}(a-b)$$

$$tang\, c/_2 : tang\, \tfrac{1}{2}(a-b) = sin\, \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) : sin\, \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

aus denen folgt:

$$tang\, \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = cotg\, \gamma/_2 \,.\, sec\, \tfrac{1}{2}(a+b) \,.\, cos\, \tfrac{1}{2}(a-b)$$

$$tang\, \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = cotg\, \gamma/_2 \,.\, cosec\, \tfrac{1}{2}(a+b) \,.\, sin\, \tfrac{1}{2}(a-b) \,.$$

$$tang\, c/_2 = tang\, \tfrac{1}{2}(a-b) \,.\, sin\, \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \,.\, cosec\, \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

Zur Berechnung der Distanz c kann man sich auch statt der letzten Formel der folgenden bedienen:

$$tang\, c/_2 = tang\, \tfrac{1}{2}(a+b) \,.\, cos\, \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \,.\, sec\, \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

Im allgemeinen sind beide angegebenen Formeln zur Berechnung von $c/_2$ anwendbar. Die erstere giebt jedoch ungenaue Resultate, wenn $(a-b)$ sehr klein ist, in diesem Falle wähle man deshalb die zweite; die zweite Formel dagegen giebt ungenaue Resultate, wenn $(a+b)$ nahe gleich 90° ist, in diesem Falle wähle man deshalb die erste.

Die Kurswinkel rechnen von dem mit der größeren Breite gleichnamigen Pole, und zwar liegt der kleinere Kurswinkel an dem Orte auf niedrigerer Breite, der größere an dem Orte auf höherer Breite, einerlei, ob dieselben gleichnamig oder ungleichnamig sind. Von einem stumpfen Kurswinkel hat man das Supplement zu nehmen und dies von dem entgegengesetzten Pole zu rechnen; indes wird im folgenden, wo von den Kurswinkeln die Rede ist, immer der Winkel des Dreiecks gemeint sein, auch wenn er stumpf ist.

Beispiel: Den Hauptbogen von San Francisco nach Jedo zu berechnen.

Auflösung.

San Francisco:	$\varphi = 37^\circ\,50'\,N$	$\lambda = 122^\circ\,30'\,W$
Jedo:	$\varphi = 35^\circ\,40'\,N$	$\lambda = 140^\circ\;\;0'\,O$
In diesem Falle ist	$b = 52^\circ 10'$	$\gamma = 97^\circ\,30'$
	$a = 54^\circ 20'$	$\gamma/_2 = 48^\circ\,45'$
	$a + b = 106^\circ\,30'$	
	$\frac{1}{2}(a+b) = 53^\circ\,15'$	
	$\frac{1}{2}(a-b) = 1^\circ\;\;5'$	

$\gamma/_2 = 48^\circ\,45'$	$log\,cotg = 9{,}94\,299$	$log\,cotg = 9{,}94\,299$	
$\frac{1}{2}(a+b) = 53^\circ\,15'$	$log\,sec = 0{,}22\,306$	$log\,cosec = 0{,}09\,623$	$log\,tang = 0{,}12\,683$
$\frac{1}{2}(a-b) = 1^\circ\;\;5'$	$log\,cos = 9{,}99\,992$	$log\,sin = 8{,}27\,661$	
$\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 55^\circ\,41'$	$log\,tang = 0{,}16\,597$		$log\,cos = 9{,}75\,110$
$\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = 1^\circ 11'$		$log\,tang = 8{,}31\,583$	$log\,sec = 0{,}00\,009$
$\alpha = 56^\circ\,52'$		$c/_2 = 37^\circ 3'$	$log\,tang = 9{,}87\,802$
$\beta = 54^\circ\,30'$		$c = 74^\circ 6'$	
		$= 4446'$	

Man verläßt demnach San Francisco mit dem Kurse $N\,56{,}9^\circ\,W$ ($N\,W z\,W$) und erreicht Jedo mit dem Kurse $S\,54{,}5^\circ\,W$ ($SW\frac{3}{4}W$). Die zu segelnde Distanz beträgt 4446 Seemeilen.

Zum Vergleich dieser Distanz mit der in der Loxodrome zu segelnden Distanz hat man nach vergrößerter Breite:

San Francisco:	$\varphi = 37^\circ\,50'\,N$	$\Phi = 2455{,}6$	$\lambda = 122^\circ\,30'\,W$
Jedo:	$\varphi = 35^\circ\,40'\,N$	$\Phi = 2293{,}3$	$\lambda = 140^\circ\;\;0'\,O$
	$b = 2^\circ\,10'$	$B = 162{,}3$	$l = 97^\circ\,30'$
	$= 130'$		$= 5850'$

$l = 5850$	$log = 3{,}76\,72$	
$B = 162{,}3$	$colog = 7{,}78\,97$	
$\alpha = 88^\circ\,25'$	$log\,tang = 1{,}55\,69$	$log\,sec = 1{,}55\,71$
$b = 130$		$log = 2{,}11\,39$
	$d = 4688\,sm$	$log = 3{,}67\,10$

Kurs und Distanz in der Loxodrome sind demnach $S\,88{,}4^\circ\,W$ ($W\frac{1}{4}S$) 4688 Seemeilen. Auf dem Hauptbogen werden somit 242 Seemeilen gespart.

§ 158. Berechnung des Scheitels. Nachdem durch die Auflösung des Dreiecks APB die Distanz, sowie der Anfangs- und Endkurswinkel bestimmt sind, müssen noch die Breiten der Schnittpunkte des Hauptbogens mit einer Reihe zwischen A und B gelegener Meridiane berechnet werden.

Denkt man sich den Hauptbogen zwischen A und B zum größten Kreise vervollständigt, so schneidet dieser, da alle größten Kreise einander halbieren, den Äquator in zwei Punkten, die um 180° Längenunterschied voneinander entfernt sind. Mitten zwischen diesen Durchschnittspunkten, d. h. 90° von jedem entfernt, liegen die beiden Punkte des größten Kreises, in deren einem er seine höchste nördliche und in deren anderem er seine höchste südliche Breite erreicht. In diesen Punkten muß seine Richtung offenbar Ost-West sein, so daß die durch diese Punkte gezogene Meridiane auf dem größten Kreise senkrecht stehen. Man nennt diese ausgezeichneten Punkte die Scheitel des größten Kreises;

sie sind vorzugsweise wichtig, wenn man den Bogen eines größten Kreises mit Hülfe der Breiten und Längen in die Merkatorsche Karte eintragen will.

Ist der Kurswinkel an beiden Orten spitz, so muß offenbar der Scheitel des Hauptbogens zwischen den Meridianen der Orte liegen oder in die zu segelnde Distanz selbst fallen. In diesem Falle wird nämlich auf Nordbreite der eine Kurs nordöstlich, der andere nordwestlich; dagegen auf Südbreite der eine Kurs südöstlich und der andere südwestlich sein, und ein allmählicher Übergang von dem einen zu dem andern ist nur durch einen Ost- oder West-Kurs möglich. Ist aber einer der beiden Kurswinkel stumpf, so fällt der Scheitel außerhalb des zu segelnden Hauptbogens zur Seite des stumpfen Winkels.

Im folgenden soll mit φ_0 die Breite, mit λ_0 die Länge des Scheitels bezeichnet werden.

Zur Berechnung von φ_0 und λ_0 geht man am besten von dem Orte mit der kleineren Breite und dem an diesem Orte gelegenen kleineren Kurswinkel aus. In dem zwischen diesem Orte, dem Pole P und dem Scheitel V des Hauptbogens (siehe Fig. 159) gelegenen rechtwinklig sphärischen Dreieck leitet man mit Hülfe der Napierschen Regel ab:

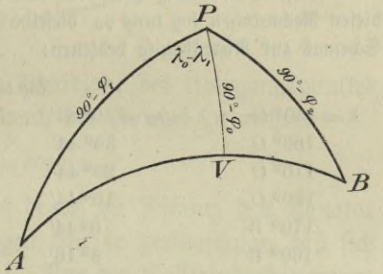


Fig. 159.

$$cos\,\varphi_0 = cos\,\varphi_1 \,.\, sin\,\alpha_1$$
$$tang\,(\lambda_0 - \lambda_1) = cosec\,\varphi_1 \,.\, cotg\,\alpha_1$$

Hierin bedeutet φ_1 die kleinere Breite, α_1 den kleineren Kurswinkel; $(\lambda_0 - \lambda_1)$ ist der Längenunterschied des Ortes mit der kleineren Breite und des Scheitels. Derselbe ist an die Länge jenes Ortes in der Richtung nach dem Orte mit der größeren Breite anzubringen.

Im obigen Beispiele gestaltet sich die Berechnung des Scheitels folgendermaßen.

Die kleinere Breite ist $\varphi_1 = 35^0\,40'$, der zugehörige kleinere Kurswinkel $\alpha_1 = \beta = 54^0\,30'$. Man hat also

$\varphi_1 = 35^0\,40'$	$log\,cos = 9{,}90\,98$	$log\,cosec = 0{,}23\,43$
$\alpha_1 = 54^0\,30'$	$log\,sin = 9{,}91\,07$	$log\,cotg = 9{,}85\,33$
$\varphi_0 = 48^0\,35'$	$log\,cos = 9{,}82\,05$	$log\,tang = 0{,}08\,76$
		$\lambda_0 - \lambda_1 = 50^0\,44'$

Der Scheitel liegt demnach auf

$$\varphi_0 = 48^0\,35'\,N$$

und $$\lambda_0 = 140^0\,0'\,O + 50^0\,44'\,O = 190^0\,44'\,O = 169^0\,16'\,W$$

§ 159. Berechnung beliebig vieler Punkte des Hauptbogens. Nachdem man die Breite φ_0 und die Länge λ_0 des Scheitels V gefunden hat, ist es leicht, die Breiten zu bestimmen, in denen beliebige zwischen A und B gelegene Meridiane von dem Hauptbogen geschnitten werden. Man wählt dazu je nach dem Maßstabe der Karte die darauf ausgezogenen Meridiane, etwa jeden fünften oder zehnten vollen Längengrad.

Es sei λ die Länge des Meridians, für den man den Schnittpunkt berechnen will, φ die zu berechnende Breite dieses Schnittpunktes, so hat man nach der Napierschen Regel:

$$tang\,\varphi = tang\,\varphi_0 \,.\, cos\,(\lambda - \lambda_0)$$

Um in obigem Beispiele die Breite zu berechnen, in dem etwa der Meridian von 150° *O*-Länge vom Hauptbogen geschnitten wird, hat man $\varphi_0 = 48^0\,35'$, $\lambda - \lambda_0 = 150^0\,O - 169^0\,16'\,W = 40^0\,44'$, also:

$$\begin{array}{rl} \varphi_0 = 48^0\,35' & log\,tang = 0{,}05\,45 \\ \lambda - \lambda_0 = \underline{40^0\,44'} & log\,cos = \underline{9{,}87\,95} \\ \varphi = 40^0\,41' & log\,tang = 9{,}93\,40 \end{array}$$

Der Meridian von 150° *O*-Länge wird demnach in der Breite $\varphi = 40^0\,41'\,N$ geschnitten.

Dieselbe Rechnung hat man etwa für jeden zehnten Meridian auszuführen. Da in allen diesen Rechnungen $log\,tang\,\varphi_0$ dieselbe Zahl bleibt, so kann man sich etwa des folgenden Schemas zur Ausführung bedienen:

		$log\,tang\,\varphi_0 = 0{,}05\,45$	Summe $= log\,tang\,\varphi$	
$\lambda = 150^0\,O$	$\lambda - \lambda_0 = 40^0\,44'$	$log\,cos = 9{,}87\,95$	.... 9,93 40	$\varphi = 40^0\,40'\,N$
$160^0\,O$	$30^0\,44'$	$= 9{,}93\,43$	.... 9,98 88	$= 44^0\,16'$
$170^0\,O$	$20^0\,44'$	$= 9{,}97\,09$	.... 0,02 54	$= 46^0\,41'$
$180^0\,O$	$10^0\,44'$	$= 9{,}99\,23$	.... 0,04 68	$= 48^0\;\;5'$
$170^0\,W$	$0^0\,44'$	$= 0{,}00\,00$	.... 0,05 45	$= 48^0\,35'$
$160^0\,W$	$9^0\,16'$	$= 9{,}99\,43$	.... 0,04 88	$= 48^0\,13'$
$150^0\,W$	$19^0\,16'$	$= 9{,}97\,50$	.... 0,02 95	$= 46^0\,57'$
$140^0\,W$	$29^0\,16'$	$= 9{,}94\,07$	.... 9,99 52	$= 44^0\,41'$
$130^0\,W$	$39^0\,16'$	$= 9{,}88\,89$	.... 9,94 34	$= 41^0\,17'$

Die so berechneten Punkte hat man in die Karte einzutragen und durch eine schlank ausgezogene Kurve zu verbinden. Den jeweils anzulegenden rechtweisenden Kurs erhält man dann als den Winkel, den die Tangente der Kurve gegen den Meridian bildet.

Man hat die trigonometrische Berechnung des Hauptbogens durch besondere Arten von Karten überflüssig zu machen gesucht, besonders durch Karten, auf denen jeder größte Kugelkreis durch eine gerade Linie dargestellt wird. Solche Karten heißen geradwegige oder orthodromische. Man verwendet diese Karten jedoch nicht als eigentliche Segelkarten, sondern benutzt sie nur dazu, die Schnittpunkte des Hauptbogens mit einer Reihe von Meridianen aus ihnen abzulesen, um diese Punkte dann in eine Merkatorkarte zu übertragen. Die bekanntesten dieser orthodromischen Karten sind die vom Hydrographischen Amte in Washington herausgegebenen gnonomischen Karten.

§ 160. Berechnung des Übergangspunktes. Sind die Breiten des Abfahrts- und des Bestimmungsortes ungleichnamig, so schneidet der Hauptbogen den Äquator, und es empfiehlt sich in diesem Falle, statt des Scheitels die Länge des Übergangspunktes zu berechnen, in dem der Schnitt des Hauptbogens mit dem Äquator erfolgt. Es sei *U* (Fig. 160) der Übergangspunkt. Bezeichnet man seine Länge mit λ_u, so ist in dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck *AEU* nach der Napierschen Regel

$$tang\,(\lambda_u - \lambda_1) = sin\,\varphi_1 \,.\, tang\,\alpha_1$$

Hierin bezeichnen φ_1 und λ_1 wieder die Koordinaten des Punktes mit der kleineren Breite, α_1 den an diesem Punkte liegenden Kurswinkel. Der Längenunterschied $(\lambda_u - \lambda_1)$ ist an den Meridian dieses Ortes in der Richtung nach dem Orte mit der größeren Breite anzubringen.

Den Kurswinkel α_u im Übergangspunkte findet man nach der Napierschen Regel durch die Formel

$$sin\ \alpha_u = cos\ \varphi_1 \,.\, sin\ \alpha_1$$

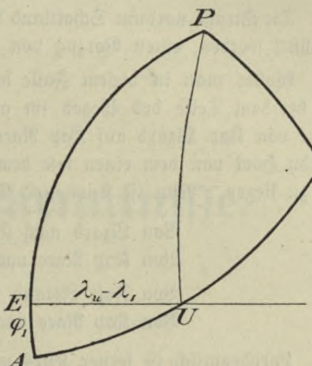


Fig. 160.

Hat man für den Übergangspunkt die Länge und den Kurswinkel berechnet, so benutzt man ihn gerade wie bei gleichnamigen Breiten den Scheitel, um die Breiten zu berechnen, auf denen der Hauptbogen die übrigen Meridiane schneidet. Man sucht den Längenunterschied zwischen dem Meridiane des Übergangspunktes und dem fraglichen Meridiane, und hat dann nach der Formel zu rechnen

$$tang\ \varphi = sin\ (\lambda - \lambda_u) \,.\, cotg\ \alpha_u$$

Übrigens ist in allen praktischen Fällen, in denen die Distanz den Äquator schneidet, die Wegverkürzung auf dem Hauptbogen eine so geringfügige, daß sich seine Berechnung und Einhaltung nicht verlohnt. Nur der Vollständigkeit wegen sind die Formeln zur Berechnung des Übergangspunktes angegeben.

§ 161. Vergleich der Schiffswege von der Weser nach Newyork.

Für die deutsche transatlantische Schiffahrt ist kein Platz von größerer Wichtigkeit als Newyork, und es mag deshalb nicht ungeeignet erscheinen, wenn wir diese Gelegenheit wahrnehmen, die beiden dahin führenden Straßen durch den Kanal oder nordum Schottland in Bezug auf die Länge des Weges mit einander zu vergleichen. Zu dem Ende wollen wir Kurs und Distanz zwischen den nachstehenden Punkten berechnen, denen der Vorzug vor willkürlich auf Seehöhe angenommenen Punkten gegeben ist, wenn auch der Kurs nicht immer frei vom Lande liegt. Allerdings erscheint auf diese Weise die Straße durch den Kanal etwas kürzer als in Wirklichkeit, während der Unterschied für die Fahrt nordum Schottland nicht von Erheblichkeit ist, da man einesteils Fair Island nördlich lassen wird, und anderenteils der Kurs auf Sandy Hook innerhalb weniger Minuten derselbe ist wie auf Kap Race. Die fraglichen Punkte sind:

Wangeroog	auf	53° 48′ N	und	7° 52′ O
Kykduin	„	52° 57′ N	„	4° 44′ O
Südforeland	„	51° 8′ N	„	1° 22′ O
Lizard	„	49° 58′ N	„	5° 12′ W
Fair Island	„	59° 33′ N	„	1° 38′ W
Sandy Hook	„	40° 28′ N	„	74° 1′ W
Kap Race	„	46° 40′ N	„	53° 7′ W

Nun sind loxodromisch nach vergrößerten Breiten die Kurse und Distanzen von:

Wangeroog nach Kykduin	S 65° 33′ W	123,2 sm
Kykduin nach Südforeland	S 48° 44′ W	165,2 sm
Südforeland nach Lizard	S 74° 23′ W	260,0 sm
Lizard nach Sardyhook	S 78° 52′ W	2953,0 sm
Von Wangeroog durch den Kanal nach Sandyhook		3501,4 sm

Wangeroog nach Fair Island . . .	$N\,42^0\ 10'\,W$	465,5 *sm*
Fair Island nach Sandyhook . . .	$S\,67^0\ 20'\,W$	2971,0 *sm*
Von Wangeroog nordum Schottland nach Sandyhook		3436,5 *sm*

Die Straße nordum Schottland hat also vor der durch den Kanal, wenn beide loxodromisch gerechnet werden, einen Vorzug von 65 *sm*.

Wollte man in diesem Falle das Segeln im größten Kreise anwenden, so würde dies nur bei dem Teile des Weges im atlantischen Ozean geschehen können. Es wären dies die Kurse von Kap Lizard auf Kap Race und von Fair Island auf Kap Race, da der Kurs auf Sandy Hook von dem einen wie dem andern Punkte zu weit nördlich läuft, um Neufundland frei zu liegen. Nun ist Kurs und Distanz auf dem Hauptbogen:

Von Lizard nach Kap Race. . . .	$N\,77^0\ 12'\,W$	1889 *sm*
Von Kap Race nach Lizard. . . .	$N\,66^0\ 4'\,O$	
Von Fair Island nach Kap Race	$N\,89^0\ 59'\,W$	1948 *sm*
Von Kap Race nach Fair Island	$N\,47^0\ 36'\,O$	

Loxodromisch ist ferner Kurs und Distanz:

Von Kap Race nach Sandyhook . $S\,67^0\ 42'\,W$ 980,1 *sm*

Vergleicht man danach die beiden Straßen miteinander, so ergiebt sich der Weg:

Von Wangeroog nach Lizard loxodromisch	548,4 *sm*
Von Lizard nach Kap Race im Hauptbogen . . .	1889,0 *sm*
Von Kap Race nach Sandyhook loxodromisch . .	980,1 *sm*
Für die Straße durch den Kanal	3417,5 *sm*
Von Wangeroog nach Fair Island loxodromisch	465,5 *sm*
Von Fair Island nach Kap Race im Hauptbogen	1948,0 *sm*
Von Kap Race nach Sandyhook loxodromisch . .	980,1 *sm*
Für die Straße nordum Schottland	3393,6 *sm*

Also auch bei dem Segeln im größten Kreise würde der Weg von der Weser nach Newyork nordum Schottland der kürzere sein, ein Vorteil, der sich für alle aus der Ostsee nach Nordamerika bestimmten Schiffe noch ungleich günstiger stellt.

Astronomische Vorkenntnisse.

Koordinaten.

§ 162. **Himmelskugel. Scheinbare und wirkliche Bewegung.** Die für nautische Beobachtungen in Betracht kommenden Gestirne sind die Sonne, der Mond, die Planeten und die Fixsterne. Die Fixsterne haben ihren Namen davon, daß sie am Himmel gleichsam feststehen, indem sie ihre gegenseitige Lage zu einander unverändert beibehalten. Obwohl sie in Wirklichkeit sehr verschiedene Entfernungen von der Erde haben, so kann man doch die Vorstellung zu Grunde legen, sie befänden sich alle auf einer mit sehr großem (unendlich großem) Halbmesser um den Mittelpunkt der Erde beschriebenen Kugel, die man die Himmelskugel nennt.

Die Sonne, der Mond und die Planeten verändern unter den Fixsternen mehr oder weniger schnell ihren Ort. Von dieser Bewegung, die in einem späteren Kapitel behandelt wird, soll hier vorläufig abgesehen werden.

Die Drehung der Erde von West nach Ost bewirkt eine scheinbare Drehung der Himmelskugel von Ost nach West. Für die Betrachtungen der nautischen Astronomie ist es aber ganz gleichgültig, ob die wirklichen oder die scheinbaren Bewegungen zu Grunde gelegt werden, da die einen ein Bild der anderen sind. Im folgenden ist daher, weil es anschaulicher ist, stets von der scheinbaren Bewegung der Himmelskugel um die Erde gesprochen worden, als ob sie wirklich bestände.

§ 163. **Hauptkreise.** Als Grundlage für die Bestimmung eines Gestirnsortes an der Himmelskugel dienen die folgenden Richtungen und Kreise:

Weltachse. Unter der Weltachse versteht man den Durchmesser, um den sich die Himmelskugel dreht; sie ist daher die verlängerte Erdachse (*PP'* in Fig. 161). Die Endpunkte der Weltachse nennt man Pole (Himmelspole). Man unterscheidet einen Nordpol und einen Südpol. Der oberhalb des Horizontes gelegene heißt der obere Pol (*P*), der unterhalb gelegene der untere Pol (*P'*). Der obere Pol ist immer der mit der Breite des Beobachtungsortes gleichnamige, also auf Nordbreite der Nordpol, auf Südbreite der Südpol.

Lot oder Vertikale. Unter dem Lot oder der Vertikalen versteht man eine durch den Beobachtungsort in der Richtung der Schwerkraft gezogene gerade

Linie (ZZ'). Betrachtet man, wie es in der Nautik üblich ist, die Erde nicht als abgeplattet, sondern als wirkliche Kugel, so geht das Lot durch den Mittelpunkt der Erde; es ist also der verlängerte durch den Beobachtungsort gelegte

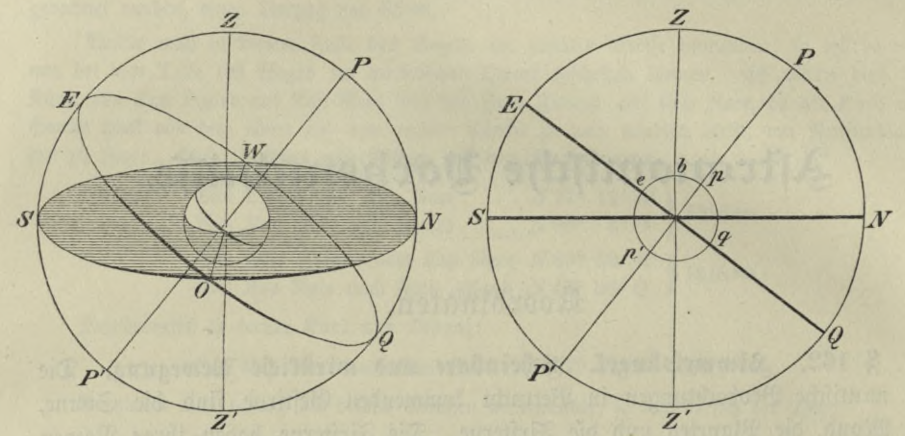


Fig. 161.

Erddurchmesser. Die Punkte, in denen das Lot die Himmelskugel trifft, nennt man Zenit und Nadir, und zwar heißt der über dem Beobachter befindliche Punkt Zenit oder Scheitelpunkt (Z), der andere Nadir oder Fußpunkt (Z').

Himmels-Meridian. Unter dem Himmels-Meridian versteht man den größten Kreis der Himmelskugel, der durch die Pole sowie durch Zenit und Nadir hindurchgeht ($ZPZ'P'$). Die Ebene des Himmels-Meridians schneidet die Erde im Meridian des Beobachtungsortes. Der Halbkreis vom oberen Pol durch das Zenit zum unteren Pol heißt der obere Meridian (PZP'), der Halbkreis vom oberen Pol durch den Nadir zum unteren Pol dagegen der untere Meridian ($PZ'P'$).

Himmels-Äquator. Unter dem Himmels-Äquator versteht man den größten Kreis der Himmelskugel, dessen Ebene senkrecht zur Weltachse steht ($EOQW$). Alle Punkte des Äquators stehen 90° von den Polen ab. Die Ebene des Himmels-Äquators schneidet die Erde im Erd-Äquator.

Wahrer Horizont. Unter dem wahren Horizont versteht man den größten Kreis der Himmelskugel, dessen Ebene senkrecht zum Lot steht ($NOSW$). Alle Punkte des wahren Horizontes stehen 90° von Zenit und Nadir ab.

Meridian und wahrer Horizont schneiden sich im Nord- und Südpunkte (N und S); Äquator und wahrer Horizont schneiden sich im Ost- und Westpunkte (O und W).

Der Bogen EZ des Himmels-Meridians vom Äquator bis zum Zenit ist gleich der geographischen Breite eb des Beobachtungsortes, da beide zu demselben Mittelpunktswinkel gehören. Auch die Bogen NP, QZ' und SP' sind gleich der Breite, während die Bogen SE, ZP, NQ, und $Z'P'$ gleich dem Breitenkomplemente sind.

Aufgabe: Zeichne die Hauptrichtungen (Weltachse und Lot) sowie die Hauptkreise (Meridian, Äquator und wahren Horizont) a) für einen Ort auf 30° N-Breite, b) für einen Ort auf 65° S-Breite, c) für einen Ort des Äquators, d) für den Nordpol.

§ 164. Abweichung und Gerade Aufsteigung. Wie man sich die Erde mit zwei Systemen von Kreisen (Meridianen und Breitenparallelen) überzogen denkt, um mit ihrer Hülfe einen Ort auf der Erde unzweideutig zu bestimmen, so denkt man sich auch an der Himmelskugel ganz entsprechende Kreise gezogen. Die Bestimmung eines Punktes an der Himmelskugel geschieht dann mit Hülfe zweier Koordinaten, die der geographischen Breite und Länge auf der Erde durchaus entsprechen.

Den Meridianen auf der Erde entsprechen an der Himmelskugel die

Stundenkreise. Unter Stundenkreisen versteht man größte Kreise der Himmelskugel, die durch die Pole hindurchgehen, deren Ebenen also durch die Himmelsachse hindurchgehen, z. B. PSP' in Fig. 162.

Den Breitenparallelen auf der Erde entsprechen an der Himmelskugel die

Abweichungsparallele. Unter Abweichungsparallelen versteht man Nebenkreise, deren Ebenen senkrecht zur Weltachse stehen, die also mit dem Äquator parallel laufen, z. B. $ACSBG$. Stundenkreise und Abweichungsparallele schneiden sich unter rechten Winkeln, so daß die Himmelskugel durch die Schar der Stundenkreise und Abweichungsparallele mit einem Netz von lauter rechteckigen Maschen überzogen ist.

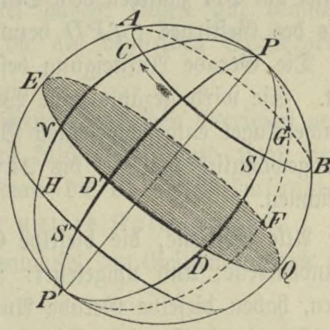


Fig. 162.

Der geographischen Breite auf der Erde entspricht an der Himmelskugel die

Abweichung. Unter der Abweichung oder der Deklination eines Gestirnes versteht man seinen Winkelabstand vom Äquator; oder den Bogen seines Stundenkreises vom Äquator bis zum Gestirn (DS bezw. $D'S'$).

Die Abweichung bestimmt den Abweichungsparallel, auf dem das Gestirn steht. Sie wird gezählt vom Äquator nach Nord und Süd von 0^0 bis 90^0. Man pflegt sie mit dem Buchstaben δ zu bezeichnen.

Alle Gestirne, die dieselbe Abweichung haben, liegen auf demselben Abweichungsparallel, und umgekehrt: Alle Gestirne, die auf demselben Abweichungsparallel liegen, haben dieselbe Abweichung.

In der Astronomie benutzt man häufig statt der Abweichung die

Poldistanz. Unter der Poldistanz eines Gestirnes versteht man seinen Winkelabstand vom oberen Pol; oder den Bogen des Stundenkreises vom oberen Pol bis zum Gestirn (PS bezw. PS'). Sie soll im folgenden mit dem Buchstaben p bezeichnet werden.

Ist die Abweichung eines Gestirnes gleichnamig mit der Breite des Beobachtungsortes, so steht das Gestirn oberhalb des Äquators und es ist

$$p = 90^0 - \delta$$

Ist aber die Abweichung ungleichnamig mit der Breite, so steht das Gestirn unterhalb des Äquators, und es ist

$$p = 90^0 + \delta$$

Rechnet man die Abweichung als positiv, wenn sie gleichnamig, als negativ, wenn sie ungleichnamig mit der Breite ist, so gilt jederzeit die Formel

$$p = 90^0 - \delta$$

Unter dieser Annahme ist also die Poldistanz stets das Komplement der Abweichung.

Um die der geographischen Länge auf der Erde entsprechende Koordinate für die Himmelskugel zu erhalten, hat man zunächst ebenso wie man auf der Erde einen Meridian als Anfangsmeridian gewählt hat, auch unter den Stundenkreisen einen als den Anfangs- oder Nullstundenkreis auszuwählen. Man nimmt dazu den Stundenkreis des Widderpunktes $\vee$, d. i. des Punktes, in dem der Mittelpunkt der Sonne zu Frühlingsanfang (21. März) steht (siehe § 178).

Die der geographischen Länge entsprechende Koordinate nennt man die

Gerade Aufsteigung. Unter der Geraden Aufsteigung oder der Rectascension eines Gestirnes versteht man den Bogen des Äquators vom Widderpunkt bis zum Stundenkreise des Gestirnes ($\vee D$ bezw. $\vee D'$); oder den sphärischen Winkel am Pol zwischen dem Stundenkreise des Widderpunktes und dem Stundenkreise des Gestirnes ($\vee PD$ bezw. $\vee PD'$).

Die Gerade Aufsteigung bestimmt den Stundenkreis, auf dem das Gestirn steht. Sie wird gezählt vom Widderpunkte in dem der täglichen Bewegung der Himmelskugel entgegengesetzten Sinne (also von West nach Ost) von 0^0 bis 360^0 oder gewöhnlich von 0^{st} bis 24^{st}. Man pflegt sie mit dem Buchstaben α zu bezeichnen.

Alle Gestirne, die dieselbe Gerade Aufsteigung haben, liegen auf demselben Stundenkreise; und umgekehrt: Alle Gestirne, die auf demselben Stundenkreise liegen, haben dieselbe Gerade Aufsteigung.

Stundenkreise und Abweichungsparallele werden bei diesem Koordinatensysteme als fest an der Himmelskugel betrachtet. Sie nehmen also an der täglichen Bewegung der Himmelskugel teil. Ein Fixstern, der keine Eigenbewegung hat, bleibt also immer auf demselben Abweichungsparallele und demselben Stundenkreise; er ändert seine Abweichung und Gerade Aufsteigung nicht. (Kleine Änderungen dieser Koordinaten werden später in § 192 erklärt werden.)

§ 165. Abweichung und Stundenwinkel. Man kann sich aber auch Parallelkreise zum Äquator und größte Kreise durch die Pole denken, die als fest mit der Erde verbunden zu betrachten sind, die also nicht an der täglichen Bewegung der Himmelskugel teilnehmen, sondern stillstehen. Die beiden Scharen dieser Kreise bilden gewissermaßen ein Gerüst im Innern der Himmelskugel, über das die ganze Himmelskugel bei ihrer täglichen Drehung hingleitet. Man nennt diese Kreise ebenfalls Abweichungsparallele und Stundenkreise. Zu den letzteren gehört offenbar der Meridian, der nichts anderes ist als der Stundenkreis, der durch das Zenit geht.

Bei der Bewegung der Himmelskugel bleibt ein Fixstern auf demselben Abweichungsparallele, der auch hier durch die im vorigen Paragraphen erklärte Abweichung bestimmt wird, aber nicht auf demselben Stundenkreise. Der

Stundenkreis, auf dem sich ein Gestirn zu einer gewissen Zeit befindet, wird bestimmt durch den

Stundenwinkel. Unter dem Stundenwinkel eines Gestirnes versteht man den Bogen des Äquators vom oberen Meridian bis zum Stundenkreise des Gestirnes, oder den sphärischen Winkel am Pol zwischen dem Meridian und dem Stundenkreise des Gestirnes.

Der Stundenwinkel wird gezählt vom oberen Meridian im Sinne der täglichen Bewegung der Himmelskugel (also nach West) von 0^{st} bis 24^{st}. Man pflegt ihn mit dem Buchstaben t zu bezeichnen. In Fig. 162 wird der Stundenwinkel des Gestirnes G durch den Bogen EF oder durch den sphärischen Winkel EPF dargestellt.

Gelegentlich zählt man den Stundenwinkel auch vom oberen Meridian nach Ost und West von 0^{st} bis 12^{st}; man muß dann aber immer die Bezeichnung „östlicher" oder „westlicher" Stundenwinkel hinzufügen.

Der Stundenwinkel ist auch gleich dem Bogen, den ein Gestirn seit seinem letzten Durchgang durch den oberen Meridian zurückgelegt hat.

Alle Gestirne, die denselben Stundenwinkel haben, liegen auf demselben Stundenkreise; und umgekehrt: Alle Gestirne, die auf demselben Stundenkreise liegen, haben denselben Stundenwinkel.

Kulmination. Den Durchgang eines Gestirnes durch den Meridian nennt man seine Kulmination (man sagt: das Gestirn kulminiert), und zwar nennt man den Durchgang durch den oberen Meridian die obere Kulmination, den Durchgang durch den unteren Meridian die untere Kulmination.

In der oberen Kulmination ist der Stundenwinkel des Gestirnes gleich 0^{st}, in der unteren Kulmination ist er gleich 12^{st}.

Sechsuhrkreis. Unter dem Sechsuhrkreise versteht man den Stundenkreis, der senkrecht zum Meridian steht. Er schneidet den Horizont im Ost- und Westpunkte. Steht ein Gestirn im westlichen Sechsuhrkreise, so ist sein Stundenwinkel gleich 6^{st}, steht es im östlichen Sechsuhrkreise, so ist der Stundenwinkel gleich 18^{st}.

Nach § 163 ist der Bogen EZ (Fig. 161) vom Zenit bis zum Äquator gleich der Breite. Diese wichtige Thatsache läßt sich jetzt kurz so ausdrücken: Die Abweichung des Zenits ist nach Größe und Namen gleich der Breite des Beobachtungsortes.

Verschiedene Orte haben verschiedene Meridiane, also sind auch an verschiedenen Orten die Stundenwinkel ein und desselben Gestirnes verschieden; und zwar ist der Unterschied der beiden Stundenwinkel gleich dem Längenunterschiede der beiden Orte.

§ 166. Höhe und Azimut. Während sich die eben besprochenen Koordinatensysteme auf den Äquator als Grundkreis beziehen, legt man bei dem jetzt zu behandelnden System der Höhe und des Azimutes den wahren Horizont zu Grunde. Man denkt sich an der Himmelskugel die folgenden Kreise:

Vertikalkreise. Unter Vertikalkreisen oder kurz Vertikalen versteht man größte Kreise der Himmelskugel, die durch Zenit und Nadir hindurchgehen, deren Ebenen also durch das Lot hindurchgehen, z. B. $ZGDZ'$ in Fig. 163.

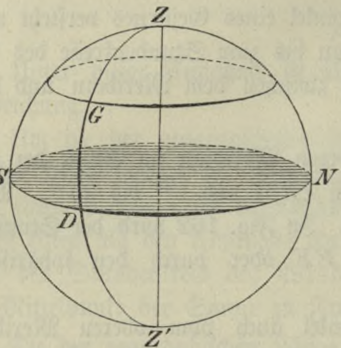


Fig. 163.

Zu ihnen gehört offenbar auch der Meridian, der nichts anderes ist als der durch den Pol hindurchgehende Vertikalkreis.

Erster Vertikal. Den Vertikalkreis, der senkrecht zum Meridian steht, nennt man den ersten Vertikal. Er schneidet den Horizont im Ost- und Westpunkte.

Höhenparallele. Unter Höhenparallelen versteht man Nebenkreise, deren Ebenen senkrecht zum Lot stehen, die also parallel dem wahren Horizont sind.

Vertikalkreise und Höhenparallele schneiden sich unter rechten Winkeln, so daß die Himmelskugel durch die Schar der Vertikalkreise und Höhenparallele ebenfalls mit einem Netz von rechteckigen Maschen überzogen ist.

Diese Kreise werden durch folgende Koordinaten bestimmt: Der Höhenparallel, auf dem das Gestirn steht, wird bestimmt durch die

Höhe. Unter der Höhe eines Gestirnes versteht man seinen Winkelabstand vom wahren Horizont; oder den Bogen des Vertikalkreises vom wahren Horizont bis zum Gestirn (DG).

Die Höhe wird gezählt vom wahren Horizont bis zum Zenit von 0^0 bis 90^0. Ein Gestirn, das unter dem Horizont steht, hat eine negative Höhe. Man pflegt die Höhe durch den Buchstaben h zu bezeichnen.

Alle Gestirne, die dieselbe Höhe haben, liegen auf demselben Höhenparallel; und umgekehrt: Alle Gestirne, die auf demselben Höhenparallel liegen, haben dieselbe Höhe.

Zenitdistanz. Unter der Zenitdistanz eines Gestirnes versteht man seinen Winkelabstand vom Zenit; oder den Bogen des Vertikalkreises vom Zenit bis zum Gestirn. Sie soll mit dem Buchstaben z bezeichnet werden.

Die Zenitdistanz ist das Komplement der Höhe

$$z = 90^0 - h$$

Nadirdistanz. Unter der Nadirdistanz eines Gestirnes versteht man seinen Winkelabstand vom Nadir; oder den Bogen des Vertikalkreises vom Nadir bis zum Gestirn. Bezeichnet man die Nadirdistanz mit dem Buchstaben n, so ist

$$n = 90^0 + h$$

Der Vertikalkreis, auf dem ein Gestirn steht, wird bestimmt durch das

Azimut. Unter dem Azimut eines Gestirnes versteht man den Bogen des wahren Horizontes vom Meridian bis zum Vertikalkreise des Gestirnes, oder den sphärischen Winkel am Zenit zwischen dem Meridian und dem Vertikalkreise des Gestirnes (Bogen ND bezw. Winkel NZD).

Das Azimut wird gezählt von dem durch den oberen Pol gehenden Bogen des Meridians (also auf Nordbreite von Nord, auf Südbreite von Süd) nach Ost und West von 0^0 bis 180^0; für die Rechnung bequem, aber noch wenig eingeführt ist die Zählung des Azimutes vom Nordpunkte rechts herum von 0^0 bis 360^0. Das Azimut soll durch den Buchstaben a bezeichnet werden.

Auf dem Kompaß, mit dem man die Azimute mißt, pflegt man das Azimut von Nord oder Süd nach Ost und West von 0^0 bis 90^0 zu zählen.

Alle Gestirne, die dasselbe Azimut haben, liegen auf demselben Vertikalkreise; und umgekehrt: Alle Gestirne, die auf demselben Vertikalkreise liegen, haben dasselbe Azimut.

Vertikalkreise und Höhenparallele sind als fest mit dem Beobachter verbunden zu betrachten; sie nehmen also nicht an der Umdrehung der Himmelskugel teil. Höhe und Azimut sind daher einer steten Änderung unterworfen.

Verändert der Beobachter auf der Erde seinen Ort, so ändert sich die Lage des Zenits und somit des wahren Horizontes entsprechend; es müssen also auch an verschiedenen Orten sowohl die Höhe als auch das Azimut verschieden sein.

Polhöhe. Unter der Polhöhe versteht man den Bogen des Meridians vom Horizont bis zum Pol. (Bogen NP, Fig. 164.)

Die Polhöhe ist gleich der Breite des Beobachtungsortes, denn es ist $NP = EZ$, weil beide dasselbe Komplement ZP haben. Da nach § 163 EZ gleich der Breite ist, so ist auch die Polhöhe NP gleich der Breite.

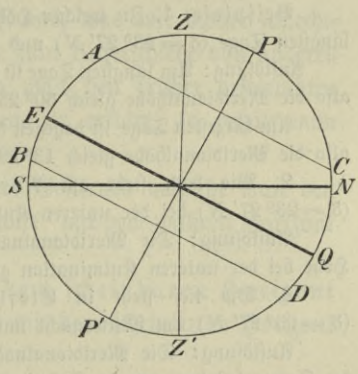


Fig. 164.

Der Bogen ZP des Meridians zwischen Pol und Zenit ist gleich dem Komplement der Breite, man nennt ihn das Breitenkomplement. Es soll durch den Buchstaben b bezeichnet werden.

Äquatorhöhe. Unter der Äquatorhöhe versteht man den Bogen des Meridians vom Horizont bis zum Äquator (Bogen SE, Fig. 164).

Die Äquatorhöhe ist gleich dem Komplement der Breite.

Wenn ein Gestirn im Horizont steht, so ist seine Höhe gleich 0^0 und man sagt: das Gestirn geht auf oder unter. Seine größte Höhe erreicht das Gestirn in der oberen Kulmination. Die zu dieser Höhe (Meridionalhöhe) gehörige Zenitdistanz nennt man Meridionalzenitdistanz; sie ist die kleinste Zenitdistanz, die das Gestirn bei der täglichen Bewegung erreicht. Sie soll im folgenden mit z_0 bezeichnet werden.

Ist die Abweichung eines Gestirnes (A) gleichnamig mit der Breite, so ist die Meridionalzenitdistanz bei der oberen Kulmination

$$z_0 = ZA = ZE - EA = \varphi - \delta$$

Ist dagegen die Abweichung eines Gestirnes (B) ungleichnamig mit der Breite, so ist sie

$$z_0 = ZB = ZE + EB = \varphi + \delta$$

Rechnet man die Abweichung wieder als positiv, wenn sie gleichnamig, als negativ, wenn sie ungleichnamig mit der Breite ist, so gilt allgemein die Formel

$$z_0 = \varphi - \delta$$

Bei der unteren Kulmination erreicht das Gestirn seinen tiefsten Stand. Man pflegt in diesem Falle nicht mit der Zenitdistanz, sondern mit der Nadirdistanz (Meridionalnadirdistanz) des Gestirnes zu rechnen. Sie soll im folgenden mit n_0 bezeichnet werden.

Ist die Abweichung eines Gestirnes (C) gleichnamig mit der Breite, so ist die Meridionalnadirdistanz bei der unteren Kulmination

$$n_0 = Z'C = Z'Q + QC = \varphi + \delta$$

Ist dagegen die Abweichung eines Gestirnes (D) ungleichnamig mit der Breite, so ist sie

$$n_0 = Z'D = Z'Q - QD = \varphi - \delta$$

Macht man wieder die frühere Festsetzung über das Vorzeichen der Abweichung, so ist allgemein

$$n_0 = \varphi + \delta$$

Beispiele: 1. In welcher Höhe kulminiert in Bremen ($\varphi = 53^0\,4'\,N$) die Sonne am längsten Tage ($\delta = 23^0\,27'\,N$) und am kürzesten Tage ($\delta = 23^0\,27'\,S$)?

Auflösung: Am längsten Tage ist die Meridionalzenitdistanz gleich $53^0\,4' - 23^0\,27' = 29^0\,37'$, also die Meridionalhöhe gleich $60^0\,23'$.

Am kürzesten Tage ist dagegen die Meridionalzenitdistanz gleich $53^0\,4' + 23^0\,27' = 76^0\,31'$, also die Meridionalhöhe gleich $13^0\,29'$.

2. Wie hoch steht am Nordkap ($\varphi = 71^0\,10'\,N$) die Sonne am längsten Tage ($\delta = 23^0\,27'\,N$) bei der unteren Kulmination?

Auflösung: Die Meridionalnadirdistanz ist gleich $71^0\,10' + 23^0\,27' = 94^0\,37'$, also die Höhe bei der unteren Kulmination gleich $4^0\,37'$.

3. Wie tief steht in Elsfleth ($\varphi = 53^0\,14'\,N$) die Sonne am längsten Tage ($\delta = 23^0\,27'\,N$) um Mitternacht unter dem Horizont?

Auflösung: Die Meridionalnadirdistanz ist gleich $53^0\,14' + 23^0\,27' = 76^0\,41'$, also steht die Sonne bei der unteren Kulmination $13^0\,19'$ unter dem Horizont.

§ 167. Das sphärisch-astronomische Grunddreieck. Wird ein Gestirn durch einen Vertikal mit dem Zenit und durch einen Stundenkreis mit dem Pole verbunden, so entsteht in Verbindung mit dem das Zenit und den Pol verbindenden Bogen des Meridians das wichtige Dreieck ZPS, das sehr vielen Rechnungen in der sphärischen Astronomie zu grunde liegt, und das man deshalb das sphärisch-astronomische Grunddreieck nennt.

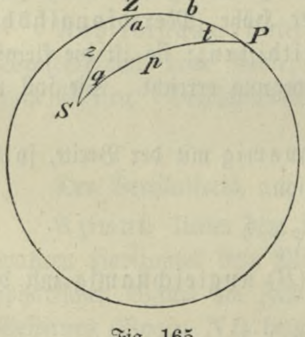


Fig. 165.

Die Seiten dieses Dreiecks heißen

PZ = Breitenkomplement (b)
ZS = Zenitdistanz (z)
PS = Poldistanz (p).

Ferner heißt

$\sphericalangle Z$ = Azimut (a)
$\sphericalangle P$ = Stundenwinkel (t)
$\sphericalangle S$ = parallaktischer Winkel (q).

Durch die Umdrehung der Himmelskugel erleiden das Breitenkomplement und die Poldistanz keine Änderung, wohl aber die Zenitdistanz und sämtliche Winkel.

Höhenbeschickung.

§ 168. Wahrer und scheinbarer Horizont. Unter dem wahren Horizont versteht man nicht nur, wie oben angegeben, den größten Kreis der Himmelskugel, dessen Ebene senkrecht zum Lot steht, sondern auch diese Ebene selbst nach der folgenden Erklärung:

Unter dem wahren Horizont versteht man die durch den Mittelpunkt der Erde senkrecht zum Lot gelegte Ebene (CH in Fig. 166).

Von ihm ist zu unterscheiden der

Scheinbare Horizont. Unter dem scheinbaren Horizont versteht man die durch das Auge des Beobachters senkrecht zum Lot gelegte Ebene (BH').

Entsprechend diesen beiden Horizonten unterscheidet man auch zwei Höhen, die Höhe über dem wahren und die Höhe über dem scheinbaren Horizont.

Die Höhe über dem wahren Horizont ist das, was wir bisher schlechtweg „Höhe" genannt haben. Sie soll in der Folge zum Unterschiede von anderen Höhen die wahre Höhe genannt werden. Wenn man den früher gebrauchten Ausdruck „Winkelabstand vom Horizont" etwas genauer erklärt, so erhält man die folgende Erklärung für die

Wahre Höhe. Unter der wahren Höhe eines Gestirnes versteht man den Winkel, den die gerade Linie: „Gestirn—Erdmittelpunkt" mit dem wahren Horizont bildet (SCH).

Dagegen versteht man unter der Höhe über dem scheinbaren Horizont den Winkel, den die gerade Linie: „Gestirn—Auge" mit dem scheinbaren Horizont bildet (SBH').

§ 169. Verschub oder Parallaxe. Die Höhe über dem scheinbaren Horizont stimmt im allgemeinen nicht mit der wahren Höhe überein. In Fig. 166 bedeute S ein Gestirn, CH den wahren, BH' den scheinbaren Horizont, dann ist $SCH = h$ die wahre Höhe, $SBH' = h'$ die scheinbare Höhe des Gestirns. Da $BH' \parallel CH$ ist, so ist auch $SDH' = h$ (Gegenwinkel), und da dieser Winkel der Außenwinkel des $\triangle\, DBS$ ist, so ist

$$h = h' + P$$

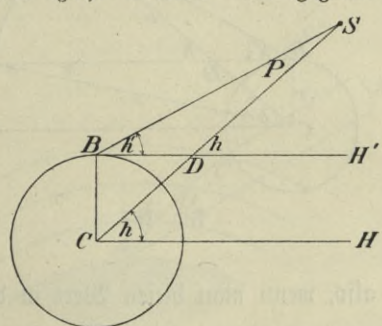


Fig. 166.

Die wahre Höhe ist also größer als die Höhe über dem scheinbaren Horizont, und zwar um den Betrag des Winkels P. Diesen Winkel nennt man

Verschub oder Parallaxe. Unter dem Verschube oder der Parallaxe eines Gestirnes versteht man den Winkel, den die gerade Linie: „Gestirn—Auge" mit der geraden Linie: „Gestirn—Erdmittelpunkt" bildet.

Die Größe des Verschubes ist abhängig:

1. von der Entfernung des Gestirnes,

2. von der Höhe des Gestirnes.

Je weiter ein Gestirn von der Erde entfernt ist, um so kleiner ist sein Verschub. Der Verschub der Fixsterne, deren Entfernung als unendlich groß angesehen werden kann, kann gleich Null gesetzt werden. (Für sie sind die Linien BS und CS parallel.)

Je höher ein Gestirn steht, um so kleiner ist sein Verschub. Steht das Gestirn im Zenit, so ist der Verschub gleich Null; er hat seinen größten Wert, wenn das Gestirn im scheinbaren Horizont steht. Diesen größten Wert nennt man Horizontalverschub (Horizontalparallaxe), während man im Gegensatz hierzu den Verschub, wenn das Gestirn über dem Horizont steht, als Höhenverschub (Höhenparallaxe) bezeichnet.

Um den Höhenverschub zu erhalten, muß man den Horizontalverschub mit dem Kosinus der Höhe über dem scheinbaren Horizont multiplizieren

$$P = \pi \,.\, cos\, h'$$

Ableitung: In Fig. 167 bedeute S den Ort eines Gestirnes bei einer wahren Höhe gleich h, S' den Ort desselben Gestirnes im scheinbaren Horizont, dann stellt

$BSC = P$ den Höhenverschub

$BS'C = \pi$ den Horizontalverschub

des Gestirnes dar.

Bezeichnet man die Entfernung des Gestirnes vom Erdmittelpunkt SC bezw. $S'C$ mit e, den Halbmesser BC der Erde mit r, so ist im Dreieck CBS:

$$e : r = sin\,(90^0 + h') : sin\, P$$

oder da

$$sin\,(90^0 + h') = cos\, h'$$

ist $$e : r = cos\, h' : sin\, P$$

woraus folgt

$$sin\, P = \frac{r}{e} \cdot cos\, h'$$

Nun ist aber im rechtwinkligen Dreieck CBS'

$$\frac{r}{e} = sin\, \pi$$

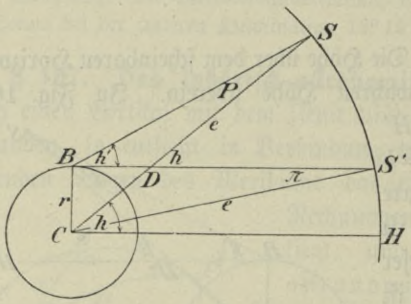


Fig. 167.

also, wenn man diesen Wert in die letzte Gleichung einsetzt,

$$sin\, P = sin\, \pi \,.\, cos\, h'$$

Da sowohl P als auch π stets kleine Winkel sind, so kann man setzen (siehe § 98, am Schluß)

$$sin\, P = P \,.\, sin\, 1'' \qquad sin\, \pi = \pi \,.\, sin\, 1''$$

Setzt man diese Werte in die letzte Gleichung ein, so wird

$$P . \sin 1'' = \pi . \sin 1'' . \cos h'$$

also

$$P = \pi . \cos h'$$

Die Größe des Horizontalverschubes der Sonne, des Mondes und der Planeten findet man im Jahrbuch angegeben. Er beträgt für die Sonne 8″ bis 9″, für den Mond 54′ bis 61′, im Mittel 57′ und für die Planeten 1″ bis 32″.

Die Tafel 18.*) ermöglicht eine bequeme Bestimmung des Höhenverschubes der Planeten und der Sonne aus ihrem Horizontalverschube.

Der im Jahrbuch angegebene Horizontalverschub gilt für einen Beobachter am Äquator. Da die Erde an den Polen abgeplattet ist, so wird der Erdhalbmesser mit zunehmender Breite kleiner. Folglich wird auch der Horizontalverschub kleiner, wie aus der obigen Formel $\sin \pi = \frac{r}{e}$ hervorgeht. Diese Verminderung des Verschubes, die nur beim Monde einige Sekunden beträgt, findet man in Tafel 24.**)

Anmerkung. Wie Figur 167 lehrt, ist der Horizontalverschub $BS'C$ eines Gestirnes auch gleich dem Winkel, unter dem der Halbmesser der Erde, vom Mittelpunkte bis zu einem Randpunkte gemessen, einem Beobachter auf dem Gestirne erscheint.

§ 170. Strahlenbrechung oder Refraktion. Tritt ein Lichtstrahl von einem dünneren Mittel in ein dichteres Mittel über oder umgekehrt, so wird er gebrochen, d. h. seine Richtung erleidet an der Grenzfläche der beiden Mittel eine Änderung. Beim Übertritt von einem dünneren in ein dichteres Mittel wird der Strahl nach dem Einfallslote hin, beim Übertritt von einem dichteren in ein dünneres Mittel wird er vom Einfallslote weg gebrochen. (Näheres über dieses physikalische Gesetz siehe in dem Abschnitt über die nautischen Instrumente.)

Auch der von einem Gestirne kommende Lichtstrahl erleidet auf seinem Wege durch die Atmosphäre der Erde eine Brechung und zwar nicht nur an der Grenze der Atmosphäre, sondern auch innerhalb derselben, da die Dichtigkeit der Atmosphäre in den unteren Schichten größer ist, als in den oberen. Denkt man sich zunächst die Atmosphäre aus mehreren konzentrischen Schichten derart zusammengesetzt, daß die Dichtigkeit innerhalb ein und derselben Schicht dieselbe ist, daß sie aber von Schicht zu Schicht nach unten hin größer wird, so würde ein von dem Gestirne ausgehender Lichtstrahl nicht auf dem direkten Wege SB in das Auge des Beobachters gelangen, sondern auf der gebrochenen Linie $SCDEB$.

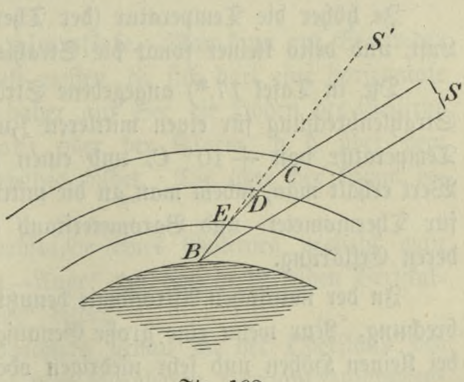


Fig. 168.

*) Behrmann, Nautische Tafeln, Tafel 45. und 46.
**) Behrmann, Nautische Tafeln, Tafel 51.

Da man aber den Ort eines Gegenstandes nach der Richtung beurteilt, aus der seine Strahlen ins Auge gelangen, so sieht man das Gestirn nicht da, wo es wirklich steht, sondern etwas höher, nämlich in S'. Den Ort, in dem das Gestirn infolge der Strahlenbrechung zu stehen scheint, nennt man seinen scheinbaren Ort.

In Wirklichkeit ändert sich nun die Dichtigkeit nicht wie bisher angenommen, sprungweise, sondern allmählich. Der Weg des Lichtstrahls innerhalb der Lufthülle wird infolgedessen keine gebrochene, sondern eine krumme Linie werden. An der Thatsache, daß das Gestirn höher erscheint, als es in Wirklichkeit steht, wird aber nichts geändert. Den Winkel $S'BS$, um den das Gestirn höher zu stehen scheint, als es in Wirklichkeit steht, nennt man

Astronomische Strahlenbrechung. Unter der astronomischen Strahlenbrechung oder der Refraktion versteht man den Winkel am Auge, den der durch Brechung in der Lufthülle gekrümmte Lichtstrahl: „Gestirn—Auge“ mit der geraden Linie: „Gestirn—Auge“ bildet.

Die Strahlenbrechung ist abhängig

1. von der Höhe des Gestirnes,
2. von der Dichte der Atmosphäre.

Steht das Gestirn im Zenit, so trifft der vom Gestirn kommende Lichtstrahl die einzelnen Schichten der Lufthülle senkrecht und der Strahl geht ungebrochen hindurch, d. h. die Strahlenbrechung ist Null. Je näher das Gestirn dem Horizont steht, um so schräger fallen die Strahlen auf und um so größer ist die Strahlenbrechung. Steht das Gestirn im Horizont, so ist die Strahlenbrechung am größten (etwa 35′). Da alle Gestirne außerhalb der Lufthülle stehen, so ist die astronomische Strahlenbrechung für alle Gestirne dieselbe. Sie soll im folgendem mit R bezeichnet werden.

Je höher der Luftdruck (Barometerstand) ist, desto dichter ist die Luft, und desto größer somit die Strahlenbrechung.

Je höher die Temperatur (der Thermometerstand) ist, desto dünner ist die Luft, und desto kleiner somit die Strahlenbrechung.

Die in Tafel 17.*) angegebene Strahlenbrechung ist die mittlere, d. h. die Strahlenbrechung für einen mittleren Zustand der Atmosphäre, nämlich für eine Temperatur von $+10^{0}$ C. und einen Luftdruck von 760 mm. Den genauen Wert erhält man, indem man an die mittlere Strahlenbrechung die Berichtigungen für Thermometer- und Barometerstand aus Tafel 21.**) anbringt. Vergleiche deren Erklärung.

In der nautischen Astronomie benutzt man meist nur die mittlere Strahlenbrechung. Nur wenn eine große Genauigkeit verlangt wird, muß man besonders bei kleinen Höhen und sehr niedrigen oder sehr hohen Werten des Thermometer- und Barometerstandes die Berichtigungen aus Tafel 21. anbringen.

---

*) Behrmann, Nautische Tafeln, Tafel 41.

**) Behrmann, Nautische Tafeln, Tafel 42.

§ 171. Beschickung der scheinbaren Höhe zur wahren. Zu den bisher behandelten beiden Höhen — der wahren Höhe und der Höhe über dem scheinbaren Horizont — gesellt sich jetzt noch die

Scheinbare Höhe. Unter der scheinbaren Höhe eines Gestirnes versteht man den Winkel, den der Lichtstrahl: „Gestirn—Auge" mit dem scheinbaren Horizont bildet.

Um die scheinbare Höhe zur wahren zu beschicken, muß man

1. die Strahlenbrechung subtrahieren,
2. den Verschub addieren.

Bringt man an die scheinbare Höhe nur die Strahlenbrechung an, so erhält man die wahre Höhe über dem scheinbaren Horizont, und aus dieser erhält man durch Anbringung des Verschubes die wahre Höhe.

Gewöhnlich vereinigt man aber die beiden Beschickungen zu einer Gesamtbeschickung. Da bei allen Gestirnen mit Ausnahme des Mondes die Strahlenbrechung größer ist als der Verschub, so muß man im allgemeinen den Betrag: „Strahlenbrechung minus Verschub" von der scheinbaren Höhe subtrahieren. Dagegen muß man beim Monde den Betrag: „Verschub minus Strahlenbrechung" zur scheinbaren Höhe addieren.

Für den Mond findet man den Gesamtbetrag: „Verschub minus Strahlenbrechung" in Tafel 25.*)

Da bei Fixsternen der Verschub gleich Null ist, so erhält man bei ihnen die wahre Höhe, indem man nur die Strahlenbrechung von der scheinbaren Höhe subtrahiert.

Beispiel: Die scheinbare Höhe der Venus ist 26° 12′ 20″, der Horizontalverschub ergiebt sich aus dem Jahrbuch zu 12″. Wie groß ist die wahre Höhe?

Scheinbare Höhe	$= 26^\circ 12' 20''$	oder	
Taf. 17. [41.]**) R	$= -\ \ 1' 58''$		
wahre Höhe ü. d. scheinb. Hor.	$= 26^\circ 10' 22''$	h'	$= 26^\circ 12' 20''$
Taf. 18. [46.] P	$= +\ \ 11''$	$R-P$	$= -\ \ 1' 47''$
wahre Höhe	$= 26^\circ 10' 33''$	h	$= 26^\circ 10' 33''$

Weitere Beispiele findet man im § 174.

§ 172. Kimm. Kimmabstand. Kimmtiefe. Man kann auf See weder wahre Höhen noch scheinbare Höhen direkt messen, da sich dort eine horizontale Ebene nicht festlegen läßt. Man mißt daher auf See die Höhen der Gestirne über dem natürlichen Meereshorizont oder der Kimm, d. h. über dem Kreise, der die Begrenzung des Gesichtsfeldes bildet. Die über der Kimm beobachtete Höhe nennt man

Kimmabstand. Unter dem Kimmabstande eines Gestirnes versteht man den Winkel, den der Lichtstrahl: „Gestirn—Auge" mit dem in derselben Vertikalebene gelegenen Lichtstrahl: „Kimm—Auge" bildet.

Befände sich das Auge eines Beobachters genau an der Oberfläche des Wassers, so würde für ihn die Kimm mit dem scheinbaren Horizont zusammen-

*) Behrmann, Nautische Tafeln, Tafel 56.

**) Die eingeklammerten Zahlen geben die Nummern der entsprechenden Tafeln in Behrmanns Nautischen Tafeln an.

fallen. Je höher aber der Beobachter steht, einen um so größeren Teil der Erdoberfläche übersieht er, und um so tiefer neigt sich sein Gesichtskreis unter den scheinbaren Horizont. Diese Senkung des natürlichen Horizontes unter den scheinbaren nennt man

Kimmtiefe. Unter der Kimmtiefe versteht man den Winkel, den der Lichtstrahl: „Kimm—Auge" mit dem scheinbaren Horizont bildet.

Die Kimmtiefe muß von dem Kimmabstande subtrahiert werden, um die scheinbare Höhe zu erhalten.

Die Größe der Kimmtiefe ist abhängig

1. von der Augeshöhe des Beobachters,

2. von dem Unterschiede der Temperatur des Wassers und der Temperatur der Luft.

Berechnung der Kimmtiefe. Ist in nebenstehender Figur A das Auge des Beobachters, AH der scheinbare Horizont, AC eine Tangente an die Erdoberfläche also die gerade Verbindungslinie des Auges mit einem Punkte der Kimm und M der Mittelpunkt der Erde, so stellt $HAC = k_0$ die Kimmtiefe ohne Berücksichtigung der Strahlenbrechung dar.

Alsdann ist auch $AMC = k_0$ weil beide dasselbe Komplement CAM haben; und somit muß auch Bogen $BC = k_0$ sein, d. h. die Entfernung BC, oder, was sehr angenähert dasselbe ist AC, ist ebenso viele Seemeilen lang wie die Kimmtiefe Minuten hat. Nun ist wie in § 150, Nr. 3 abgeleitet ist

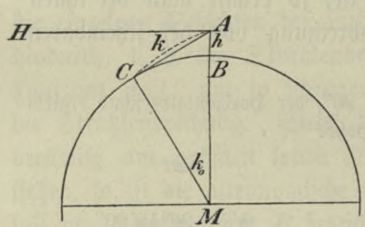


Fig. 169.

$$AC = \sqrt{2R} \cdot \sqrt{h}$$
$$= 1{,}927' . \sqrt{h}$$

Es ist also auch

$$k_0 = 1{,}927 . \sqrt{h}$$

Durch diese Formel würde die Kimmtiefe bestimmt sein, wenn der Lichtstrahl von der Kimm zum Auge mit der geraden Linie CA zusammenfiele. Das thut er indessen nicht, weil der Lichtstrahl auf seinem Wege durch Luft von verschiedener Dichtigkeit hindurch geht. Da nun der Strahl im allgemeinen auf seinem Wege von C nach A von dichterer in dünnere Luft übertritt, so wird er in einem nach unten hohlen Bogen ins Auge gelangen (in der Figur durch eine punktierte Linie angegeben). Die Kimmtiefe wird also im allgemeinen kleiner sein, als die nach der obigen Formel berechnete. Man nimmt gewöhnlich an, daß die wirkliche Kimmtiefe im Mittel um $\frac{1}{13}$ kleiner ist, als die Kimmtiefe, die sich ohne Berücksichtigung der Strahlenbrechung ergiebt. Unter dieser Annahme erhält man zur Berechnung der Kimmtiefe die Formel

$$k = 1{,}779 . \sqrt{h}$$

nach der die in Tafel 16.*) angegebene mittlere Kimmtiefe berechnet worden ist.

*) Behrmann, Nautische Tafeln, Tafel 43 A.

Genauigkeit der Kimmtiefe. Die der Tafel 16. entnommene mittlere Kimmtiefe darf indessen nur als ein Näherungswert der wirklichen Kimmtiefe betrachtet werden. Durch Beobachtungen, die von der österreichischen Marine im Roten Meer und im Golf von Triest angestellt sind, ist unzweifelhaft festgestellt worden, daß die Größe der Kimmtiefe in hohem Maße von dem Temperaturunterschiede zwischen Luft und Wasser abhängig ist. Es ist das auch leicht erklärlich. Ist das Wasser kälter als die Luft, so lagern sich unmittelbar über dem Wasser kältere also dichtere Luftschichten. Infolge dessen wird der Lichtstrahl mehr von seinem geraden Wege abgelenkt, als wenn die Temperatur die gleiche wäre. Die irdische Strahlenbrechung ist somit größer, die Kimmtiefe also kleiner. Das Umgekehrte findet statt, wenn das Wasser wärmer als die Luft ist.

Um einen genaueren Wert der Kimmtiefe zu erhalten, muß man an die in Tafel 16. enthaltene mittlere Kimmtiefe, die nur dann richtig ist, wenn Luft und Wasser gleich warm sind, eine Berichtigung anbringen. Diese Berichtigung, die einerseits von dem Temperaturunterschiede zwischen Luft und Wasser, andererseits von der Augeshöhe abhängig ist, findet man in Tafel 20. Man erkennt aus den Werten dieser Tafel, daß sich die Kimmtiefe für jeden Grad des Temperaturunterschiedes um 0,3′ bis 0,4′ ändert.

Aber selbst dann, wenn die Kimmtiefe mit Hülfe der Tafel 20. berichtigt worden ist, darf sie keineswegs als unbedingt richtig angesehen werden; man muß auch dann noch bei ihr auf Fehler bis zu einer Minute gefaßt sein.

Außerordentlich fehlerhaft kann sie bei windstillem Wetter werden. Die Tafel 20. hat nämlich nur Gültigkeit, wenn ein frischer Wind von mindestens der Stärke 3 der Beaufortschen Skala die Luft gut durchmischt. Wenn das nicht der Fall ist, so steigert sich die Größe des Fehlers ganz erheblich; so hat man bei einer solchen Gelegenheit einmal einen Fehler von ungefähr 10′ in der Kimmtiefe beobachtet.

§ 173. Halbmesser. Einzelne Gestirne erscheinen uns als kreisförmige Scheiben. Um genaue Höhenmessungen anstellen zu können, ist man gezwungen, die Höhe eines Randpunktes und zwar entweder des Unterrandes oder des Oberrandes zu beobachten. Da nun alle Messungen auf den Mittelpunkt der Gestirne bezogen werden, so muß man die Randhöhe noch zur Mittelpunktshöhe beschicken. Dies geschieht durch den

Wahren Halbmesser. Unter dem wahren Halbmesser versteht man den Winkel, den die gerade Linie: „Gestirnsmittelpunkt—Erdmittelpunkt“ mit der geraden Linie: „Gestirnsrand — Erdmittelpunkt“ bildet.

Um die wahre Mittelpunktshöhe zu erhalten, muß man den wahren Halbmesser

zur wahren Unterrandshöhe addieren,
von der wahren Oberrandshöhe subtrahieren.

Die Größe des Halbmessers hängt nicht allein von der Größe des Gestirnes sondern auch von seiner Entfernung ab; er ist am größten, wenn sich das Gestirn in der Erdnähe befindet, dagegen am kleinsten, wenn es in der Erdferne ist. Die Halbmesser von Sonne und Mond sind rund 16′; ihre genaue Größe findet man im Jahrbuche. Der Halbmesser der Planeten beträgt nur wenige Sekunden und wird in der nautischen Astronomie gewöhnlich nicht berücksichtigt, da im allgemeinen die Vergrößerung der bei der Beobachtung benutzten Fernrohre zu gering ist, um die Planeten als Scheiben erkennen zu lassen.

Scheinbarer Halbmesser. Unter dem scheinbaren Halbmesser versteht man den Halbmesser, wie er einem Beobachter auf der Erdoberfläche erscheint, also den Winkel, den die gerade Linie: „Gestirnsmittelpunkt — Auge“ mit der geraden Linie: „Gestirnsrand — Auge“ bildet.

Da die Entfernung des Gestirnes vom Beobachter kleiner ist als seine Entfernung vom Erdmittelpunkte, so ist der scheinbare Halbmesser größer als der wahre Halbmesser, und zwar ist dieser Unterschied um so größer, je höher das Gestirn steht. Der Unterschied der beiden Halbmesser ist nur beim Monde eine merkliche Größe; er findet sich in Tafel 23.*) Der scheinbare Mondhalbmesser wird nur bei den Mondbistanzen verwendet.

Verkürzung des Halbmessers durch die Strahlenbrechung. Da bei niedrigem Stande der Sonne oder des Mondes ein Punkt des Unterrandes durch die Strahlenbrechung höher gehoben wird als ein Punkt des Oberrandes, so erscheint der vertikale Durchmesser dieser Gestirne kürzer als der horizontale, die Gestirne erscheinen also nicht mehr als kreisförmige, sondern als ovale Scheiben. Diese durch die Strahlenbrechung hervorgerufene Verkürzung des scheinbaren Halbmessers ist in Tafel 22.**) angegeben.

§ 174. Beschickung eines Kimmabstandes zur wahren Höhe. Um einen beobachteten Kimmabstand zur wahren Höhe zu beschicken, hat man zunächst an den auf dem Instrumente abgelesenen Winkel die Indexberichtigung, d. h. den Fehler des bei der Messung verwendeten Sextanten anzubringen, wodurch man erst die wirkliche Größe des Kimmabstandes erhält. Durch Subtraktion der Kimmtiefe, und zwar am besten der nach Tafel 20. berichtigten Kimmtiefe, erhält man hieraus die scheinbare Höhe, und hieraus durch Anbringung von Strahlenbrechung und Verschub die wahre Höhe. Schließlich bringt man bei Sonne und Mond noch den wahren Halbmesser an, um von der Randhöhe zur Mittelpunktshöhe überzugehen.

Außer, wie eben angegeben, durch Einzelbeschickungen lassen sich die Kimmabstände auch noch durch die in den Tafeln 47. bis 50.***) angegebenen Gesamtbeschickungen in die wahren Höhen verwandeln. Diese Tafeln enthalten die algebraische Summe der Einzelbeschickungen.

Hat man die Höhen mit Hülfe der Gesamtbeschickung gefunden, so berücksichtigt man den Einfluß, den der Temperaturunterschied zwischen Luft und Wasser auf die Kimmtiefe ausübt, indem man die Berichtigung aus Tafel 20. nachträglich an die beschickte Höhe anbringt und zwar mit entgegengesetztem Zeichen, also bei kälterem Wasser mit dem Plus-Zeichen, bei wärmerem Wasser mit dem Minus-Zeichen.

*) Behrmann, Nautische Tafeln, Taf. 47.

**) Behrmann, Nautische Tafeln, Taf. 48.

***) Behrmann, Nautische Tafeln, Taf. 60. und 61.

Die Beschickung der Kimmabstände der verschiedenen Gestirne soll jetzt besonders behandelt werden. Dabei sind die folgenden Bezeichnungen gebraucht:

$\underline{\ast}$	bedeutet Kimmabstand	eines Fixsternes,
$\underline{\odot}$	„ „	des Sonnenunterrandes,
$\overline{\odot}$	„ „	des Sonnenoberrandes,
$\underline{☾}$	„ „	des Mondunterrandes,
$\overline{☾}$	„ „	des Mondoberrandes,
♀	„ „	der Venus, } Planeten
♂	„ „	des Mars, } Planeten
♃	„ „	des Jupiter, } Planeten
♄	„ „	des Saturn, } Planeten
$\ast h$, $\overline{☾}h$, $☾h$	„	wahre Höhe des Fixsternes, des Mondoberrandes, des Mondmittelpunktes,
$\ast h'$, $\underline{\odot}h'$, $\odot h'$	„	scheinbare Höhe des Sternes, des Sonnenunterrandes, des Sonnenmittelpunktes,
k	„	Kimmtiefe,
R	„	Strahlenbrechung,
P	„	Höhenverschub,
ρ	„	Halbmesser,
G. B.	„	Gesamtbeschickung,
Idb.	„	Indexberichtigung,
A. H.	„	Augeshöhe.

1. Fixstern.

Da bei einem Fixsterne der Verschub gleich Null ist, so ist

$$\ast h = \underline{\ast} - k - R$$

Beispiel: Man beobachtet:

Sirius $\underline{\ast} = 35^\circ 22' 10''$; Idb. $= +\ 1' 20''$; A. H. $= 4{,}5$ m.

Wie groß ist die wahre Höhe?

Einzelbeschickungen.

Beobachteter	$\underline{\ast} = 35^\circ 22' 10''$
	Idb. $= +\ \ 1' 20''$
	$\underline{\ast} = 35^\circ 23{,}5'$
Tafel 16. [43.]*) . .	$k = -\ \ 3{,}8'$
	$\ast h' = 35^\circ 19{,}7'$
Tafel 17. [41.] . . .	$R = -\ \ 1{,}4'$
	$\ast h = 35^\circ 18{,}3'$

Gesamtbeschickung.

Beobachteter	$\underline{\ast} = 35^\circ 22' 10''$
	Idb. $= +\ \ 1' 20''$
	$\underline{\ast} = 35^\circ 23{,}5'$
Tafel 49. [60.] . .	G. B. $= -\ \ 5{,}1'$
	$\ast h = 35^\circ 18{,}4'$

Ist bei der Beobachtung die Wassertemperatur gleich $+ 19^\circ$ C., die Lufttemperatur gleich $+ 25^\circ$ C., so bringt man entweder statt der mittleren Kimmtiefe die mit Hülfe der Tafel 20. berichtigte Kimmtiefe $k = 3{,}8' - 2{,}1' = 1{,}7'$ an, oder man fügt zu der in der obigen Weise beschickten Höhe eine Berichtigung gleich $+ 2{,}1'$ hinzu, also

angenäherte	$\ast h = 35^\circ 18{,}4'$
Tafel 20. . . .	Ber. $= +\ \ 2{,}1'$
	$\ast h = 35^\circ 20{,}5'$

*) Die in [ ] eingeschlossenen Zahlen geben die entsprechenden Tafelnummern in Behrmanns Nautischen Tafeln an.

2. Planet.

$$♂\,h = \underline{♂} - k - R + P$$

Beispiel: Man beobachtet

$$\underline{♂} = 21°17'30''; \quad \text{Jdb.} = -1'10''; \quad \text{A. H.} = 5{,}5\,\text{m}.$$

Aus dem Jahrbuche ergiebt sich der Horizontalverschub $\pi = 18''$. Wie groß ist die wahre Höhe?

Einzelbeschickungen.

Beobachteter	$\underline{♂}$ =	21° 17′ 30″
	Jdb. =	− 1′ 10″
	$\underline{♂}$ =	21° 16,3′
Tafel 16. [43.] …	k =	− 4,2′
	$♂\,h'$ =	21° 12,1′
Tafel 17. [41.] …	R =	− 2,5′
	=	21° 9,6′
Tafel 18. [46.] …	P =	+ 0,3′
	$♂\,h$ =	21° 9,9′

Gesamtbeschickung.

Beobachteter	$\underline{♂}$ =	21° 17′ 30″
	Jdb. =	− 1′ 10″
	$\underline{♂}$ =	21° 16,3′
Tafel 49. [60.] . .	G. B. =	− 6,3′
	$♂\,h$ =	21° 10,0′

Ist bei der Beobachtung die Wassertemperatur gleich + 6° C., die Lufttemperatur gleich + 13° C., so ist

Tafel 16. u. 20. $k = 4{,}2' - 2{,}4' = 1{,}8'$

	angenäherte $♂\,h$ =	21° 10,0′
Tafel 20. . . .	Ber. =	+ 2,4′
	$♂\,h$ =	21° 12,4′

3. Sonnenunterrand.

$$\odot\,h = \underline{\odot} - k - R + P + \rho$$

Beispiel: Man beobachtet am 15. März

$$\underline{\odot} = 42°24'10''; \quad \text{Jdb.} = +2'30''; \quad \text{A. H.} = 5\,\text{m}.$$

Wie groß ist die wahre Mittelpunktshöhe?

Einzelbeschickungen.

Beobachteter	$\underline{\odot}$ =	42° 24′ 10″
	Jdb. =	+ 2′ 30″
	$\underline{\odot}$ =	42° 26,7′
Tafel 16. [43.] . . .	k =	− 4,0′
	$\underline{\odot}\,h'$ =	42° 22,7′
Tafel 17. [41.] . . .	R =	− 1,1′
	=	42° 21,6′
Tafel 18. [45.] . . .	P =	+ 0,1′
	$\underline{\odot}\,h$ =	42° 21,7′
Jahrbuch	ρ =	+ 16,1′
	$\odot\,h$ =	42° 37,8′

Gesamtbeschickung.

Beobachteter	$\underline{\odot}$ =	42° 24′ 10″
	Jdb. =	+ 2′ 30″
	$\underline{\odot}$ =	42° 26,7′
Tafel 50. [61.]	G. B. =	+ 11,2′
	$\odot\,h$ =	42° 37,9′

Anmerkung. Ist der Kimmabstand kleiner als 3°, so muß man Einzelbeschickungen anbringen, da Tafel 50. die Gesamtbeschickung für so kleine Kimmabstände nicht enthält.

Ist bei der Beobachtung die Wassertemperatur gleich + 20° C., die Lufttemperatur gleich + 16° C., so ist

Tafel 16. u. 20. . . . $k = 4{,}0' + 1{,}4' = 5{,}4'$

	angenäherte $\odot\,h$ =	42° 37,8′
Tafel 20.	Ber. =	− 1,4′
	$\odot\,h$ =	42° 36,4′

4. Sonnenoberrand.

$$\odot h = \bar{\odot} - k - R + P - \rho$$

Eine besondere Tafel der Gesamtbeschickung für den Kimmabstand des Sonnenoberrandes enthalten die Nautischen Tafeln nicht. Man kann diese Gesamtbeschickung aber aus der Tafel 49. mit entnehmen, indem man zu der aus der Tafel entnommenen Gesamtbeschickung für den Unterrand (ohne die monatliche Berichtigung) die am Fuße der Tafel angegebene Zusatzberichtigung für den Kimmabstand des Sonnenoberrandes hinzufügt.

Beispiel: Man beobachtet am 23. Februar

$$\bar{\odot} = 11^\circ 19' 40''; \quad \text{Jdb.} = -0' 25''; \quad \text{A. H.} = 7\,\text{m}.$$

Wie groß ist die wahre Mittelpunktshöhe?

Einzelbeschickungen.

	Beobachteter $\bar{\odot}$	$= 11^\circ 19' 40''$
	Jdb.	$= -\ \ 0' 25''$
	$\bar{\odot}$	$= 11^\circ 19,3'$
Tafel 16. [43.] ...	k	$= -\ \ 4,7'$
	$\bar{\odot} h'$	$= 11^\circ 14,6'$
Tafel 17. [41.] ...	R	$= -\ \ 4,8'$
		$= 11^\circ\ 9,8'$
Tafel 18. [45.] ...	P	$= +\ \ 0,1'$
	$\bar{\odot} h$	$= 11^\circ\ 9,9'$
Jahrbuch	ρ	$= -\ 16,2'$
	$\odot h$	$= 10^\circ 53,7'$

Gesamtbeschickung.

	Beobachteter $\bar{\odot}$	$= 11^\circ 19' 40''$
	Jdb.	$= -\ \ 0' 25''$
	$\bar{\odot}$	$= 11^\circ 19,3'$
Tafel 50. [61.]	G. B.	$= -\ 25,5'$
	$\odot h$	$= 10^\circ 53,8'$

Sind die Temperaturen von Wasser und Luft verschieden, so verfährt man wie bei den vorigen Beispielen.

5. Mondunterrand.

$$\text{☾}\, h = \underline{\text{☾}} - k + (P - R) + \rho$$

Beim Monde bringt man Verschub und Strahlenbrechung nicht einzeln an, sondern addiert direkt zur scheinbaren Höhe den aus Tafel 25. [56.] zu entnehmenden Betrag von $P - R$.

Beispiel: Man beobachtet

$$\underline{\text{☾}} = 75^\circ 48' 10''; \quad \text{Jdb.} = -4' 40''; \quad \text{A. H.} = 10\,\text{m}.$$

Aus dem Jahrbuche ergiebt sich der Horizontalverschub $\pi = 54' 49''$, der Halbmesser $\rho = 14' 58''$. Wie groß ist die wahre Mittelpunktshöhe?

Einzelbeschickungen.

	Beobachteter $\underline{\text{☾}}$	$= 75^\circ 48' 10''$
	Jdb.	$= -\ \ 4' 40''$
	$\underline{\text{☾}}$	$= 75^\circ 43,5'$
Tafel 16. [43.] ...	k	$= -\ \ 5,6'$
	$\underline{\text{☾}}\, h'$	$= 75^\circ 37,9'$
Tafel 25. [56.]	$P - R$	$= +\ 13,3'$
	$\underline{\text{☾}}\, h$	$= 75^\circ 51,2'$
	ρ	$= +\ 15,0'$
	$\text{☾}\, h$	$= 76^\circ\ 6,2'$

Gesamtbeschickung.

	Beobachteter $\underline{\text{☾}}$	$= 75^\circ 48' 10''$
	Jdb.	$= -\ \ 4' 40''$
	$\underline{\text{☾}}$	$= 75^\circ 43,5'$
Tafel 47. ...	G. B.	$= +\ 22,8'$
	$\text{☾}\, h$	$= 76^\circ\ 6,3'$

Sind die Temperaturen von Wasser und Luft verschieden, so verfährt man wie oben.

6. Mondoberrand.

$$☾ h = \overline{☾} - k + (P - R) - \rho$$

Beispiel: Man beobachtet

$$\overline{☾} = 52^\circ 41' 30''; \quad \text{Jdb.} = +0' 20''; \quad \text{A. H.} = 7{,}5\,\text{m}.$$

Aus dem Jahrbuche ergiebt sich der Horizontalverschub $\pi = 58' 23''$, der Halbmesser $\rho = 15' 56''$. Wie groß ist die wahre Mittelpunktshöhe?

Einzelbeschickungen.

	Beobachteter $\overline{☾}$	$= 52^\circ 41' 30''$
	Jdb.	$= +\ \ 0' 20''$
	$\overline{☾}$	$= 52^\circ 41{,}8'$
Tafel 16. [43.] . . .	k	$= -\ \ 4{,}9'$
	$\overline{☾} h'$	$= 52^\circ 36{,}9'$
Tafel 25. [56.]	$P - R$	$= +\ 34{,}7'$
	$\overline{☾} h$	$= 53^\circ 11{,}6'$
	ρ	$= -\ 15{,}9'$
	$☾ h$	$= 52^\circ 55{,}7'$

Gesamtbeschickung.

	Beobachteter $\overline{☾}$	$= 52^\circ 41' 30''$
	Jdb.	$= +\ \ 0' 20''$
	$\overline{☾}$	$= 52^\circ 41{,}8'$
Tafel 48.	G. B.	$= +\ 13{,}9'$
	$☾ h$	$= 52^\circ 55{,}7'$

Sind die Temperaturen von Wasser und Luft verschieden, so verfährt man wie oben.

§ 175. Beobachtungen über dem künstlichen Horizont. Am Lande, wo der natürliche Horizont durch Häuser, Berge u. s. w. verdeckt wird, beobachtet man über einem *künstlichen Horizont*, d. h. einer genau horizontal gestellten Spiegelebene.

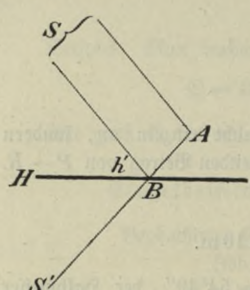


Fig. 170.

Die Beobachtung wird in der Weise angestellt, daß man den Winkel zwischen dem Gestirne und seinem Spiegelbilde mißt. Da nach dem Spiegelungsgesetz $S'BH = SBH$ ist, so ist der so gemessene Winkel die *doppelte scheinbare Höhe* des Gestirnes.

Um die doppelte scheinbare Höhe zur wahren Höhe zu beschicken, bringe man zunächst an den abgelesenen Winkel die durch den Fehler des Instrumentes hervorgerufene Indexberichtigung an. Die so berichtigte doppelte scheinbare Höhe dividiere man durch 2, wodurch man die scheinbare Höhe des Gestirnes, bezw. des Gestirnsrandes erhält. Diese scheinbare Höhe wird in der oben angegebenen Weise durch Anbringung von Strahlenbrechung, Verschub und Halbmesser in die wahre Höhe verwandelt.

Auch findet man in den Tafeln 47. bis 50., wenn man in sie mit der Augeshöhe 0 m eingeht, die an die scheinbare Höhe anzubringende Gesamtbeschickung zur wahren Höhe.

Beispiel 1. *Fixstern.* Man beobachtet

$$2 * h' = 65^\circ 12' 10''; \quad \text{Jdb.} = -1' 0''.$$

Wie groß ist die wahre Höhe?

	Beob.	$2 \ast h' = 65^\circ 12' 10''$
	Jdb.	$= -\quad 1'\ 0''$
		$2 \ast h' = 65^\circ 11{,}2' : 2$
		$\ast h' = 32^\circ 35{,}6'$
Tafel 17. [41.]	R*)	$= -\quad 1{,}5'$
		$\ast h = 32^\circ 34{,}1'$

*) Derselbe Wert von R findet sich auch in Tafel 49. für die Augeshöhe 0 m als Gesamtbeschickung zur wahren Höhe.

Beispiel 2. Sonne. Am 13. Juni beobachtet man

$$2\,\underline{\odot}\,h' = 25^\circ 42' 30'';\quad \text{Jdb.} = +\,0' 20''.$$

Wie groß ist die wahre Mittelpunktshöhe?

Einzelbeschickungen.

	Beob.	$2\,\underline{\odot}\,h' = 25^\circ 42' 30''$
	Jdb.	$= +\quad 0' 20''$
		$2\,\underline{\odot}\,h' = 25^\circ 42{,}8' : 2$
		$\underline{\odot}\,h' = 12^\circ 51{,}4'$
Tafel 17. [41.] . . .	R	$= -\quad 4{,}1'$
		$= 12^\circ 47{,}3'$
Tafel 18. [45.] . . .	P	$= +\quad 0{,}1'$
		$\underline{\odot}\,h = 12^\circ 47{,}4'$
	ρ	$= +\quad 15{,}8'$
		$\odot\,h = 13^\circ\ 3{,}2'$

Gesamtbeschickung.

	Beob.	$2\,\underline{\odot}\,h' = 25^\circ 42' 30''$
	Jdb.	$= +\quad 0' 20'$
		$2\,\underline{\odot}\,h' = 25^\circ 42{,}8' : 2$
		$\underline{\odot}\,h' = 12^\circ 51{,}4'$
Tafel 50'. [61.]	G. B.	$= +\ 11{,}8'$
		$\odot\,h = 13^\circ\ 3{,}2'$

Beispiel 3. Mond. Man beobachtet

$$2\,\underline{☾}\,h' = 18^\circ 47' 0'';\quad \text{Jdb.} = -\,10''.$$

Aus dem Jahrbuche ergiebt sich der Horizontalverschub $\pi = 58' 33''$, der Halbmesser $\rho = 15' 59''$.

Wie groß ist die wahre Mittelpunktshöhe?

Einzelbeschickungen.

	Beobachtete	$2\,\underline{☾}\,h' = 18^\circ 47'\ 0''$
	Jdb.	$= -\quad 10''$
		$2\,\underline{☾}\,h' = 18^\circ 46{,}8' : 2$
		$\underline{☾}\,h' = \ 9^\circ 23{,}4'$
Tafel 25. [56.]	$P - R$	$= +\ 52{,}2'$
		$\underline{☾}\,h = 10^\circ 15{,}6'$
	ρ	$= -\ 16{,}0'$
		$☾\,h = \ 9^\circ 59{,}6'$

Gesamtbeschickung.

	Beobachtete	$2\,\underline{☾}\,h' = 18^\circ 47' 0''$
	Jdb.	$= -\quad 10''$
		$2\,\underline{☾}\,h' = 18^\circ 46{,}8' : 2$
		$\underline{☾}\,h' = \ 9^\circ 23{,}4'$
Tafel 48. . .	G. B.	$= \quad 36{,}3'$
		$☾\,h = \ 9^\circ 59{,}7'$

§ 176. Genauigkeit der Höhenbeobachtungen. Die aus beobachteten Kimmabständen oder doppelten scheinbaren Höhen abgeleiteten wahren Höhen der Gestirne sind stets mit unvermeidlichen Fehlern behaftet, und zwar rühren diese Fehler her

1. von Ungenauigkeiten bei den Beobachtungen und
2. von Ungenauigkeiten bei den Beschickungen.

Die Ungenauigkeiten bei den Beobachtungen haben ihren Grund

1. in den Fehlern des Spiegelinstrumentes;

2. in eigentlichen Beobachtungsfehlern, indem Gestirn und Kimm bei der Beobachtung nicht genau zur Berührung gebracht werden;

3. in Ablesefehlern.

Diese Fehler sind, wenn die Beobachtung von einem geschickten Beobachter mit einem tadellosen Instrumente bei gut sichtbarer Kimm gemacht worden sind, im allgemeinen nicht groß. Allerdings stehen die Beobachtungen verschiedener Gestirne auf verschiedener Stufe. Die großen, als Scheiben erscheinenden Gestirne, die Sonne und der Mond, lassen sich im allgemeinen genauer beobachten als die Fixsterne und Planeten, die nur als leuchtende Punkte erscheinen, und deren Berührung mit der Kimm infolgedessen leicht fehlerhaft beobachtet wird.

Eine große Rolle bei der Genauigkeit der Beobachtung spielt die Deutlichkeit der Kimm. In dunkler mondloser Nacht ist die Kimm nicht zu erkennen, so daß man überhaupt keine Kimmabstände mehr beobachten kann. Fixstern- und Planetenhöhen lassen sich daher entweder nur bei Mondschein, oder während der Zeit der Morgen- und Abenddämmerung beobachten. Die Beobachtungen während der Dämmerung, wenn sich die dunkle Kimm scharf gegen den helleren Himmel abhebt, verdienen im allgemeinen den Vorzug. Bei Sonnenbeobachtungen, die im allgemeinen die genauesten sind, ist die Kimm bei niedrigem Stande der Sonne sehr hell erleuchtet und hebt sich nicht deutlich gegen den ebenfalls hellen Himmel ab; bei kleineren Sonnenhöhen ist daher ein Beobachtungsfehler leichter möglich als bei großen. Bei diesiger, unklarer Luft, erscheint die Kimm verwaschen, wodurch ziemlich bedeutende Fehler in den Kimmabständen entstehen können. Oft ist aber in diesem Falle die Grenze des Gesichtsfeldes gar nicht die Kimm, sondern diese ist von Nebel verdeckt. In einem solchen Falle ist ein Beobachten natürlich unmöglich.

Die Ungenauigkeiten bei den Beschickungen beschränken sich, da nennenswerte Fehler bei dem Verschube und dem Halbmesser nicht vorkommen, auf die Ungenauigkeiten in der Strahlenbrechung und in der Kimmtiefe.

Man pflegt bei Kimmabständen nur die mittlere Strahlenbrechung zu berücksichtigen. Der dadurch entstehende Fehler ist um so größer, je kleiner die Höhen sind. Bei Höhen unter 5° kann der Fehler, zumal bei sehr hoher oder sehr niedriger Temperatur, ziemlich bedeutend werden, wie ein Blick in Tafel 21. lehrt. Derartige kleine Höhen pflegt man daher in der nautischen Astronomie möglichst zu vermeiden. Ist man aber auf kleine Höhen angewiesen, so sollte man die mittlere Strahlenbrechung für Temperatur und Luftdruck berichtigen.

Bedeutender als der Fehler in der Strahlenbrechung ist der Fehler in der Kimmtiefe. Durch das Schlingern und Stampfen des Schiffes ist eine genaue Bestimmung der Augeshöhe im Augenblick der Beobachtung unmöglich. Nimmt man die Unsicherheit in der Augeshöhe bei bewegtem Wasser zu rund einem Meter an, so folgt daraus schon je nach der Augeshöhe eine Unsicherheit in der Kimmtiefe und damit in der wahren Höhe des Gestirnes von 0,3′ bis 0,5′.

Diese Unsicherheit wird bei grober See gelegentlich noch dadurch wesentlich erhöht, daß die Kimm durch hohe Wellen verdeckt ist, so daß man nicht über der eigentlichen Kimm, sondern über einer falschen Kimm beobachtet. Die Kimmabstände werden in diesem Falle zu klein gemessen.

Es ist bisher noch nicht gebräuchlich, den Einfluß des Temperaturunterschiedes zwischen Luft und Wasser bei der Kimmtiefe zu berücksichtigen. Man sollte aber fortan diesen Einfluß nicht unbeachtet lassen, da man dadurch die Fehler in der Höhe wesentlich verringern kann. Zumal in der Nähe des Landes, wo einerseits das Bedürfnis nach genauen Höhenbeobachtungen besonders groß ist, andererseits aber auch die Temperaturunterschiede zwischen Luft und Wasser recht bedeutend sein können, sollte man nie die mittlere, sondern stets nur die mit Hülfe der Tafel 20. berichtigte Kimmtiefe anbringen. Auch dann muß man noch auf einen Fehler von einer Minute rechnen. Ist der Einfluß des Temperaturunterschiedes nicht berücksichtigt, so kann indessen der Fehler auf fünf Minuten und mehr wachsen.

Man wird nach diesen Überlegungen keine Beobachtung für unbedingt fehlerfrei halten dürfen. Da es besser ist, diesen Fehler zu überschätzen als zu unterschätzen, so rechne man bei jeder Beobachtung auf die folgenden Fehler.

Ist die Kimm deutlich und scharf begrenzt und hat man bei der Kimmtiefe den Einfluß des Temperaturunterschiedes zwischen Luft und Wasser berücksichtigt, so rechne man mit einem Fehler von 1′ bis 2′.

Ist unter denselben Umständen die Kimm weniger gut, so sei man auf einen Fehler von etwa 3′ gefaßt.

Ist dagegen der Einfluß des Temperaturunterschiedes auf die Kimmtiefe nicht berücksichtigt, so rechne man bei guter Kimm auf einen Fehler von 4′, bei weniger guter Kimm auf einen Fehler von 5′.

Es braucht wohl nicht besonders hervorgehoben zu werden, daß nicht jede Beobachtung mit diesen Fehlern behaftet ist, daß sehr häufig der Fehler bedeutend kleiner ist. Auf der andern Seite muß aber auch mit der Möglichkeit gerechnet werden, daß der Höhenfehler nicht unerheblich größer als die angegebenen Werte ist. Auf einen derartigen außerordentlich großen Fehler wird man besonders bei windstillem Wetter gefaßt sein müssen, wenn die Temperatur der Luft erheblich von der Temperatur des Wassers verschieden ist.

Einen Teil der Höhenfehler kann man ziemlich unschädlich machen, wenn man statt einer Beobachtung mehrere macht und aus ihnen das Mittel nimmt. Auf diese Weise heben sich die veränderlichen Fehler, d. h. solche, die manchmal positiv manchmal negativ sind, mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit gegenseitig auf. Beobachtungsfehler, Ablesefehler und die aus der Unsicherheit der Augeshöhe herrührenden Kimmtiefenfehler lassen sich somit, wenn auch nicht ganz, so doch zum Teil vermeiden. Dagegen werden sich die konstanten Fehler, zu denen die Instrumentenfehler, die Fehler in der Strahlenbrechung und die Fehler in der Kimmtiefe, die ihren Ursprung in dem Temperaturunterschiede zwischen Luft und Wasser haben, unverändert auch in dem Mittel mehrerer Beobachtungen finden. Da diese Fehler aber im allgemeinen die größeren sind, so wird der Vorteil, den eine Beobachtungsreihe einer einzelnen Beobachtung gegenüber bietet, leicht überschätzt.

Anders liegen die Verhältnisse bei Beobachtungen über dem künstlichen Horizont, bei denen die Kimmtiefenfehler von vorn herein in Wegfall kommen. Hier sind Reihenbeobachtungen am Platze; und mit ihrer Hülfe läßt sich von einem geschickten Beobachter mit einem guten Instrumente eine Genauigkeit bis auf Bruchteile einer Bogenminute, die allen Anforderungen in vollem Maße genügt, erreichen.

In betreff der Reihenbeobachtungen vergleiche auch § 194.

Bewegung der Gestirne.

§ 177. Tägliche Bewegung. Bei der täglichen Bewegung der Himmelskugel bewegen sich die Gestirne auf ihrem Abweichungsparallel.

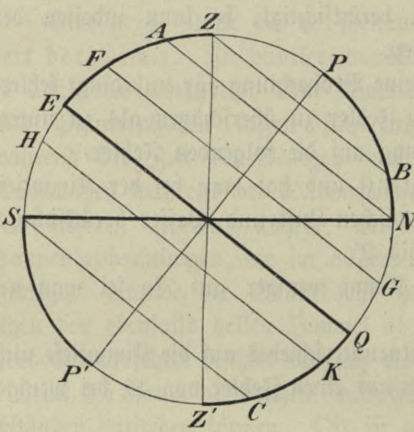


Fig. 171.

Wenn dieser Abweichungsparallel den Horizont schneidet, so gehen die Gestirne auf und unter; im anderen Falle sind sie entweder immer über, oder immer unter dem Horizont.

In nebenstehender Meridianfigur bedeutet *NS* den Horizont, *EQ* den Äquator, *ZZ′* sowohl das Lot als auch den ersten Vertikal, *PP′* sowohl die Weltachse als auch den Sechsuhrkreis, *SC*, *HK*, *FG*, *AN* und *ZB* sind Abweichungsparallele. Die in der Figur fett ausgezogenen Bögen *EZ*, *PN*, *QZ′* und *P′S* sind gleich der Breite des Beobachtungsortes, die anderen, also *SE*, *ZP*, *NQ* und *Z′P′* dagegen gleich dem Breitenkomplement.

Unter Berücksichtigung dieser Thatsachen lassen sich ohne weiteres die folgenden Eigentümlichkeiten der verschiedenen Gestirne aus der Figur ablesen.

a) in betreff des Auf- und Unterganges:

1. Alle Gestirne, deren Abweichung kleiner als das Breitenkomplement ist, gehen auf und unter. (Es sind dies alle Gestirne innerhalb der Zone *ANCS*.)

2. Alle Gestirne, deren Abweichung gleichnamig mit der Breite und größer als das Breitenkomplement ist, bleiben immer oberhalb des Horizontes, sind also selbst in der unteren Kulmination zu beobachten. (Alle Gestirne der Zone *APN*.)

3. Alle Gestirne, deren Abweichung ungleichnamig mit der Breite und größer als das Breitenkomplement ist, bleiben immer unterhalb des Horizontes. (Alle Gestirne der Zone *SP′C*.)

b) in betreff des Meridiandurchganges:

1. Alle Gestirne, deren Abweichung ungleichnamig mit der Breite und kleiner als das Breitenkomplement ist, kulminieren zwischen Horizont und Äquator. (Alle Gestirne der Zone *EQCS*.)

2. Alle Gestirne, deren Abweichung gleichnamig mit der Breite und kleiner als die Breite ist, kulminieren zwischen Äquator und Zenit. (Alle Gestirne der Zone *ZBQE*.)

3. Alle Gestirne, deren Abweichung gleichnamig mit der Breite und größer als die Breite ist, kulminieren zwischen Zenit und Pol. (Alle Gestirne der Zone *ZPB*.)

4. Ein Gestirn kulminiert im Zenit, wenn seine Abweichung gleichnamig mit der Breite und gleich der Breite ist.

c) in betreff des Durchganges durch den Sechsuhrkreis und den ersten Vertikal.

1. Alle Gestirne, deren Abweichung größer als die Breite ist, schneiden den ersten Vertikal nicht.

2. Alle Gestirne, deren Abweichung gleichnamig mit der Breite und kleiner als die Breite ist, schneiden den Sechsuhrkreis und den ersten Vertikal oberhalb des Horizontes, und zwar nach ihrem Aufgang zuerst den Sechsuhrkreis darauf den ersten Vertikal und vor ihrem Untergang zuerst den ersten Vertikal und darauf den Sechsuhrkreis.

3. Gestirne, deren Abweichung ungleichnamig mit der Breite ist, schneiden den Sechsuhrkreis und den ersten Vertikal unterhalb des Horizontes.

Tag- und Nachtbogen. Unter dem Tagbogen eines Gestirnes versteht man den Bogen seines Abweichungsparallels, der oberhalb des wahren Horizontes liegt. Der unterhalb des Horizontes liegende Bogen heißt Nachtbogen.

Die Größe des Tag- und Nachtbogens ist abhängig von der Breite und von der Abweichung. Der Tagbogen ist gleich dem Nachtbogen, wenn entweder die Breite oder die Abweichung gleich Null ist. Für einen Beobachter auf dem Äquator haben also alle Gestirne einen Tagbogen von 12^{st} und einen Nachtbogen von 12^{st}. Für einen Beobachter außerhalb des Äquators hat aber nur ein auf dem Himmelsäquator stehendes Gestirn diese Eigenschaft; bei allen anderen Gestirnen sind Tag- und Nachtbogen verschieden groß, und zwar ist der Tagbogen der größere, wenn Breite und Abweichung gleichnamig sind; dagegen ist der Nachtbogen der größere, wenn Breite und Abweichung ungleichnamig sind.

Ein Gestirn, dessen Abweichung gleich Null ist, geht im Ostpunkte auf und im Westpunkte unter. Hat es nördliche Abweichung, so geht es nördlich, hat es südliche Abweichung, so geht es südlich von diesen Punkten auf und unter. Die genaue Lage des Auf- und Untergangspunktes wird bestimmt durch die

Amplitude. Unter der Amplitude eines Gestirnes versteht man den Bogen des Horizontes vom Ostpunkte bis zum Aufgangspunkte oder vom Westpunkte bis zum Untergangspunkte. Jenen nennt man auch die Morgenweite, diesen die Abendweite.

Die Amplitude wird gezählt vom Ost- und Westpunkte nach Nord und Süd von 0° bis 90°, z. B. $O\,12^\circ N$.

Während einer ganzen Umdrehung der Himmelskugel ändert sich in der Regel das Azimut der Gestirne um 360°. Nur die Gestirne, die zwischen Zenit und Pol kulminieren, deren Abweichung also gleichnamig mit der Breite und größer als die Breite ist, und die, wie wir gesehen haben, den ersten Vertikal nicht schneiden, verhalten sich anders. Bei der unteren Kulmination ist ihr Azimut Null, darauf wächst es, erreicht einen größten Wert (der aber kleiner als 90^0 ist), nimmt wieder ab, um bei der oberen Kulmination wieder den Wert Null anzunehmen. Auf der westlichen Seite des Meridians wiederholt sich darauf dasselbe. Den größten Wert des Azimutes nennt man die

Größte Ausweichung. Unter der Größten Ausweichung versteht man den sphärischen Winkel am Zenit zwischen dem Meridian und demjenigen Vertikal, der den Abweichungsparallel des Gestirnes berührt.

Steht das Gestirn in der größten Ausweichung, so steht sein Stundenkreis senkrecht auf seinem Vertikalkreise; der parallaktische Winkel ist also gleich 90^0.

§ 178. Eigenbewegung der Sonne. Während die Fixsterne nur der täglichen Bewegung der Himmelskugel folgen, ihre gegenseitige Lage zu einander aber unverändert beibehalten, beobachtet man bei der Sonne, dem Monde und den Planeten außer der täglichen Bewegung von Ost nach West noch eine eigene Bewegung an der Himmelskugel, wodurch ihre Lage zu den übrigen Sternen einer steten Änderung unterworfen ist. Diese Ortsveränderung ist besonders augenfällig beim Monde, läßt sich aber auch bei den Planeten leicht feststellen. Bei der Sonne erkennt man die eigene Bewegung daran, daß die Sterne, die kurz vor Sonnenaufgang am östlichen Himmel in der Nähe der Sonne wahrzunehmen sind, nicht immer dieselben sind. Diese Sterne werden schon nach einigen Tagen oder Wochen wesentlich höher stehen und andere Sterne werden in der Nähe der Sonne zu finden sein. Wir schließen daraus, daß die Sonne sich in einer der täglichen Bewegung der Himmelskugel entgegengesetzten Richtung, also von West nach Ost an der Himmelskugel bewegt. Man nennt diese Bewegungsrichtung, bei der die Gerade Aufsteigung stetig wächst, die rechtläufige; die entgegengesetzte Richtung d. h. die im Sinne der täglichen Bewegung, die eine Abnahme der Geraden Aufsteigung zur Folge hat, dagegen die rückläufige.

Die Sonne kulminiert aber in verschiedenen Zeiten des Jahres in verschiedener Höhe, und daraus kann man schließen, daß sich die Sonne nicht in rein west-östlicher Richtung an der Himmelskugel bewegt, sondern daß sie daneben auch eine nord-südliche Bewegung hat. Mit anderen Worten, die Sonne ändert nicht nur ihre Gerade Aufsteigung, sondern auch ihre Abweichung.

Würde man den Ort der Sonne nach Gerader Aufsteigung und Abweichung täglich genau bestimmen, und die so ermittelten Sonnenörter auf einen Himmelsglobus auftragen, so würde man finden, daß alle diese Orte auf einem größten Kreise liegen. Diesen größten Kreis, auf dem sich die Sonne bewegt, nennt man Ekliptik.

Die Zeit, die die Sonne zu einem einmaligen Durchlaufen der Ekliptik gebraucht, nennt man ein Jahr. Seine Dauer beträgt in runder Zahl $365\frac{1}{4}$ Tage, genauer 365,2422 Tage = 365 Tage $5^{st}\ 48^m\ 48^s$.

Die Ekliptik schneidet den Äquator in zwei Punkten, im **Widderpunkte** und im **Wagepunkte**, oder im **Frühlingspunkte** und **Herbstpunkte**. Steht die Sonne in diesen Punkten, so ist Tag und Nacht auf der ganzen Erde gleich. Man nennt diese Punkte daher auch **Nachtgleichenpunkte** oder **Äquinoktialpunkte**.

Ekliptik und Äquator schneiden sich unter einem Winkel von rund $23\frac{1}{2}^0$. Diesen Winkel nennt man die **Schiefe der Ekliptik**.

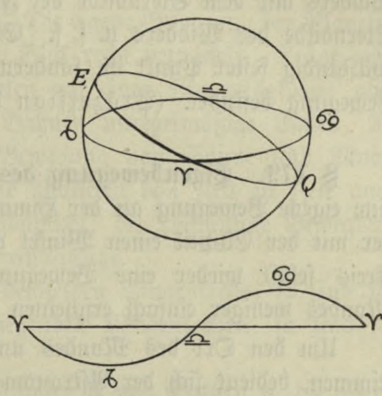


Fig. 172.

Die Punkte der Ekliptik, die den größten Abstand vom Äquator haben, heißen **Sonnenwendepunkte** oder **Solstitialpunkte**. Sie sind vom Widderpunkte und vom Wagepunkte je 90^0 entfernt, und in ihnen erreicht die Abweichung der Sonne ihren größten Wert von ebenfalls rund $23\frac{1}{2}^0$.

Die Sonne steht am 21. März im Widderpunkte, ihre Abweichung ist also Null. Darauf tritt sie auf die nördliche Halbkugel über, ihre Abweichung wird größer, erst schnell, dann langsamer. Am 21. Juni erreicht sie im Wendepunkte des Krebses ihren nördlichsten Punkt. Ihre Abweichung ist dann gleich $23\frac{1}{2}^0$ *N.* Jetzt wendet sie sich wieder nach Süden, die nördliche Abweichung wird kleiner, erst langsam, dann schneller. Am 23. September hat die Sonne den Äquator wieder erreicht, und zwar im Wagepunkte. Sie geht nunmehr auf die südliche Halbkugel über; die südliche Abweichung wächst. Am 21. Dezember erreicht sie im Wendepunkte des Steinbocks ihren größten Wert von $23\frac{1}{2}^0$ *S.* Nunmehr wendet sie sich wieder nach Norden, die südliche Abweichung wird kleiner, am 21. März tritt sie wieder in den Widderpunkt, und hat damit ihren Umlauf vollendet.

Die Sonne beschreibt demnach den nördlichen Halbkreis ihrer Bahn in der Zeit vom 21. März bis zum 23. September, also in etwa 187 Tagen, dagegen den südlichen Halbkreis in der Zeit vom 23. September bis zum 21. März, also in etwa 178 Tagen. Die Bewegung der Sonne in ihrer Bahn ist daher keine gleichförmige, sie ist in unserem Sommer langsamer als in unserem Winter.

Man hat die Ekliptik in 12 gleiche Teile zu je 30^0 geteilt, die man Himmelszeichen nennt. Jedes Zeichen hat seinen Namen von einem Sternbilde erhalten, und da diese Sternbilder vorzugsweise nach Tieren genannt werden, so hat man den Gürtel, der sich mehrere Grade breit auf beiden Seiten der Ekliptik hinzieht, den **Tierkreis** oder **Zodiakus** genannt. Die Zeichen sind im Sinne der rechtläufigen Bewegung die folgenden

1. Widder ♈	2. Stier ♉	3. Zwillinge ♊
4. Krebs ♋	5. Löwe ♌	6. Jungfrau ♍
7. Wage ♎	8. Skorpion ♏	9. Schütz ♐
10. Steinbock ♑	11. Wassermann ♒	12. Fische ♓

Heutigentags fallen die Himmelszeichen nicht mehr mit den gleichnamigen Sternbildern zusammen, sondern es deckt sich ungefähr das Himmelszeichen des Widders mit dem Sternbilde der Fische, das Himmelszeichen des Stiers mit dem Sternbilde des Widders u. s. f. Es rührt dies daher, daß der Widderpunkt kein vollständig fester Punkt ist, sondern auf der Ekliptik sich langsam in rückläufiger Bewegung befindet. (Präzession der Nachtgleichen.) Vergl. § 192.

§ 179. Eigenbewegung des Mondes. Der Mond hat wie die Sonne eine eigene Bewegung an der Himmelskugel; sie erfolgt in einem größten Kreise, der mit der Ekliptik einen Winkel von angenähert 5° bildet. Jedoch hat dieser Kreis selbst wieder eine Bewegung, wodurch die Bewegungsverhältnisse des Mondes weniger einfach erscheinen als die der Sonne.

Um den Ort des Mondes und der Planeten an der Himmelskugel zu bestimmen, bedient sich der Astronom außer den in § 164 bis § 166 besprochenen Koordinatensystemen noch eines anderen, nämlich des der astronomischen Breite und Länge. Die Grundebene dieses Koordinatensystems ist die Ekliptik. Die größten Kreise durch die Pole der Ekliptik nennt man Längenkreise, die parallel der Ekliptik laufenden Nebenkreise Breitenparallele. Unter der astronomischen Breite versteht man den Abstand eines Gestirnes von der Ekliptik, unter der astronomischen Länge den Bogen der Ekliptik vom Widderpunkte bis zum Längenkreise des Gestirnes. In der nautischen Astronomie findet dieses Koordinatensystem keine Verwendung.

Der Mond erhält sein Licht von der Sonne. Steht er mit der Sonne auf demselben Längenkreise (d. h. haben beide Gestirne dieselbe astronomische Länge), so kehrt er uns seine unbeleuchtete Seite zu — wir haben Neumond. Stehen Sonne und Mond auf entgegengesetzten Längenkreisen (d. h. ist ihr Längenunterschied gleich 180°), so ist Vollmond. Bilden die Stundenkreise von Sonne und Mond einen Winkel von 90° (d. h. ist ihr Längenunterschied gleich 90° oder 270°), so ist der Mond in seinem ersten bezw. seinem letzten Viertel.

Die Bewegung des Mondes ist wie die der Sonne stets rechtläufig, seine Gerade Aufsteigung nimmt also jederzeit zu. Daneben verändert sich auch seine Abweichung, und zwar kann diese gelegentlich zwischen den Werten $28\frac{1}{2}°$ N und $28\frac{1}{2}°$ S schwanken. Die Zeit, die der Mond zu einem ganzen Umlauf gebraucht, heißt Monat. Man unterscheidet zwei verschiedene Monate, nämlich

1. Siderischer Monat. Unter einem siderischen Monat versteht man die Zeit, die der Mond zu einem Umlauf an der Himmelskugel und zwar von einem Längenkreise bis zurück zu diesem Längenkreise gebraucht; oder, was dasselbe ist, die Zeit, die der Mond gebraucht, um seine astronomische Länge um 360° zu verändern. — Die Dauer des siderischen Monats beträgt rund $27\frac{1}{3}$ Tage.

2. Synodischer Monat. Unter einem synodischen Monat versteht man die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Neumonden, also die Zeit, die der Mond gebraucht, um vom Längenkreise der Sonne bis wieder zum Längenkreise der Sonne zu gelangen. — Die Dauer des synodischen Monats beträgt rund $29\frac{1}{2}$ Tage.

Der synodische Monat ist länger als der siderische, weil auch die Sonne während des Mondumlaufes nach Osten vorgerückt ist.

§ 180. **Eigenbewegung der Planeten.** Die eigene Bewegung der Planeten an der Himmelskugel erscheint auf den ersten Blick recht verwickelt. Trägt man etwa von Tag zu Tag den Ort eines Planeten auf einen Himmelsglobus oder eine Himmelskarte auf, so erhält man als Bahnen unregelmäßige Linien, die nicht selten Schleifen bilden. Während die Bewegung von Sonne und Mond stets in rechtläufigem Sinne erfolgt, sind die Planeten von Zeit zu Zeit auch rückläufig, so daß ihre Gerade Aufsteigung abnimmt; die rückläufige Bewegung ist aber immer wesentlich langsamer als die rechtläufige.

Steht ein Planet mit der Sonne auf demselben Längenkreise, so sind sie in Konjunktion, stehen sie auf gegenüberliegenden Längenkreisen, so sind sie in Opposition.

Die vier Planeten Venus ♀, Mars ♂, Jupiter ♃ und Saturn ♄, die allein für die Nautik von Bedeutung sind, beiben stets in der Nähe der Ekliptik. Über die wirkliche Bewegung der Planeten vergleiche § 189.

Die Zeit.

§ 181. **Sterntag. Wahrer und mittlerer Sonnentag.** — Die tägliche Drehung der Himmelskugel ist die regelmäßigste Bewegung, die wir kennen. Sie ist daher die Grundlage unserer Zeitrechnung. Die Zeit einer einmaligen Umdrehung der Himmelskugel, also die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden oberen Kulminationen eines Fixsternes nennt man einen Sterntag.

Man teilt den Sterntag in 24 Stunden, jede Stunde in 60 Minuten und jede Minute in 60 Sekunden ein und nennt dieses Zeitmaß Sternzeit. Sie findet nur Anwendung in der Astronomie, nicht im bürgerlichen Leben. Eine Stunde Sternzeit ist also nicht der Zeitraum, den man gewöhnlich „Stunde" nennt. Dieses im bürgerlichen Leben gebrauchte Zeitmaß ist aus der Bewegung der Sonne hergeleitet; seine Grundlage ist der Sonnentag, d. h. die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden oberen Kulminationen der Sonne.

Der Sonnentag ist länger als der Sterntag, wie aus der folgenden Überlegung hervorgeht: Kulminiert heute die Sonne gleichzeitig mit einem Fixsterne, stehen also beide Gestirne auf demselben Stundenkreise, so wird morgen, wenn der Fixstern wieder kulminiert, die Sonne nicht im Meridian stehen, da sie mittlerweile ihren Ort an der Himmelskugel verändert hat, und zwar wird sie, da ihre Bewegung in dem der täglichen Bewegung der Himmelskugel entgegengesetzten Sinne erfolgt, den Meridian noch nicht erreicht haben. Sie wird also später als der Fixstern kulminieren, der Sonnentag ist demnach länger als der Sterntag.

Indessen eignet sich der Sonnentag nicht so ohne weiteres als Maß für die Zeit, denn die einzelnen Sonnentage sind keineswegs untereinander gleich lang, sie sind bald kürzer, bald länger. Der Grund hierfür liegt darin, daß sich die Sonne nicht mit gleichförmiger Geschwindigkeit in ihrer Bahn bewegt und daß ferner die Bewegung nicht auf dem Äquator oder einem Abweichungsparallel, sondern auf der gegen den Äquator geneigten Ekliptik erfolgt, wodurch selbst bei gleichförmiger Bewegung eine ungleichförmige tägliche Änderung der Geraden Aufsteigung, also Tage von verschiedener Dauer hervorgerufen würden.

Will man daher die tägliche Bewegung der Sonne zur Grundlage der Zeitrechnung machen — und man ist im bürgerlichen Leben dazu gezwungen — so muß man an die Stelle des wahren Sonnentages, dessen Dauer in verschiedenen Jahreszeiten verschieden ist, einen Sonnentag von mittlerer Dauer setzen und diesen als Maß für die Zeit verwenden. Zur Bestimmung dieses Tages dient die

Mittlere Sonne. Unter der mittleren Sonne versteht man eine gedachte Sonne, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf dem Äquator in rechtläufigem Sinne bewegt, und zwar mit einer solchen Geschwindigkeit, daß sie zu einem ganzen Umlauf dieselbe Zeit gebraucht wie die wahre Sonne, nämlich genau ein Jahr.

Die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden oberen Kulminationen dieser mittleren Sonne nennt man einen mittleren Sonnentag.

Da die mittlere Sonne zu einem vollen Umlauf an der Himmelskugel etwas mehr als 360 Tage gebraucht, so legt sie täglich eine Strecke von etwas weniger als einem Grad oder vier Zeitminuten zurück. Der mittlere Sonnentag ist also rund 4 Minuten länger als der Sterntag. Vergleiche auch § 186.

Man teilt den mittleren Sonnentag in 24 Stunden, jede Stunde wieder in 60 Minuten und jede Minute in 60 Sekunden ein und nennt dieses Zeitmaß mittlere Zeit.

§ 182. Mittlere Zeit. Wahre Zeit. Zeitgleichung. Das Wort „Zeit" gebraucht man in doppelter Bedeutung; man versteht darunter entweder eine Zeitdauer oder einen Zeitpunkt. Im Deutschen werden diese beiden Bedeutungen auch in der Sprache unterschieden; so sagt man z. B., wenn man eine Zeitdauer ausdrücken will, 3 Stunden, dagegen, wenn man einen Zeitpunkt ausdrücken will, 3 Uhr.

Um eine Zeitdauer zu messen, bedient man sich der beiden im vorigen Paragraphen besprochenen Zeitmaße, der mittleren Zeit und der Sternzeit.

Einen Zeitpunkt bestimmt man auf drei verschiedene Weisen, nämlich entweder durch die mittlere Zeit, oder durch die wahre Zeit, oder durch die Sternzeit.

Mittlere Zeit: Unter der mittleren Zeit versteht man den Stundenwinkel der mittleren Sonne; oder die Zeit, die seit der letzten oberen Kulmination der mittleren Sonne verflossen ist.

Wahre Zeit: Unter der wahren Zeit versteht man den Stundenwinkel der wahren Sonne.

Sternzeit: Unter der Sternzeit versteht man den Stundenwinkel des Widderpunktes.

Die letztere wird in § 186 ausführlich besprochen werden; hier soll nur die mittlere und die wahre Zeit behandelt werden.

Wahre Zeit und mittlere Zeit sind im allgemeinen etwas voneinander verschieden. Zur Verwandlung der einen in die andere dient die

Zeitgleichung: Unter der Zeitgleichung versteht man den Unterschied der wahren Zeit und der mittleren Zeit; oder den Bogen des Äquators von der mittleren Sonne bis zum Stundenkreise der wahren Sonne; oder den Unterschied der Geraden Aufsteigung der wahren und der mittleren Sonne.

Der Zeitgleichung giebt man das Zeichen, mit dem sie an die wahre Zeit angebracht werden muß, um mittlere Zeit zu erhalten. Man pflegt die Zeitgleichung mit dem Buchstaben e zu bezeichnen; ihr größter Wert ist rund 17 Minuten.

Für den Übergang von der wahren Zeit zur mittleren und umgekehrt gelten die folgenden Regeln.

Man erhält die mittlere Zeit, wenn man an die wahre Zeit die Zeitgleichung mit ihrem Zeichen anbringt.

Man erhält die wahre Zeit, wenn man an die mittlere Zeit die Zeitgleichung mit entgegengesetztem Zeichen anbringt.

§ 183. Bürgerliche und astronomische Zeit. Im bürgerlichen Leben rechnet man den Tag von der unteren Kulmination der mittleren Sonne bis zur nächsten untern Kulmination (von Mitternacht zu Mitternacht) und teilt diese Zeit in zweimal zwölf Stunden ein, so daß man bei Zeitangaben, um Eindeutigkeit zu erzielen, gezwungen ist, hinzuzufügen, ob vormittägige oder nachmittägige Zeit gemeint ist. Unter der vormittägigen Zeit versteht man dabei die Zeit von Mitternacht bis Mittag, unter nachmittägiger die von Mittag bis Mitternacht.

Der astronomische Tag beginnt zur Zeit der oberen Kulmination der mittleren Sonne, also mittags. Man zählt die Stunden dieses Tages von 0^{st} bis 24^{st}, so daß die Hinzufügung der Wörter „vormittags" und „nachmittags" überflüssig wird. Die Zeit von 12 Uhr bis 24 Uhr ist vormittägige Zeit.

Der astronomische Tag ist 12 Stunden hinter dem bürgerlichen zurück, so daß nur von Mittag bis Mitternacht das Datum und die Stunden dieselben sind. Bei Angabe einer Zeit zwischen Mittag und 1^u nachmittags sowie zwischen Mitternacht und 1^u vormittags soll im folgenden zur Bezeichnung der letztverflossenen vollen Stunde nicht der im täglichen Leben übliche Ausdruck „12 Uhr", sondern „0 Uhr" gebraucht werden, z. B. $0^u\ 20^m$ nachm. statt $12^u\ 20^m$ nachm. und $0^u\ 35^m$ vorm. statt $12^u\ 35^m$ vorm. Nach dieser Festsetzung hat man für die Verwandlung der bürgerlichen Zeit in astronomische die folgende Regel:

Ist die Zeit nachmittags, so sind astronomische und bürgerliche Zeit gleichlautend.

Ist die Zeit vormittags, so addiert man zur bürgerlichen Zeit 12 Stunden und setzt das Datum des vorhergehenden Tages.

So ist z. B.:

$3^u\ 12^m$ nachm. d. 3. April bürgerliche Zeit = $3^u\ 12^m$ d. 3. April astronomische Zeit
$3^u\ 12^m$ vorm. d. 3. April „ „ = $15^u\ 12^m$ d. 2. April „ „

§ 184. Ortszeit. Greenwicher Zeit. Mittel-Europäische Zeit. Da der Tag mit dem Augenblicke der oberen Kulmination der Sonne beginnt, so folgt, daß zwei Orte, die nicht auf demselben Meridiane liegen, verschiedene Tagesanfänge, also auch verschiedene Zeit haben.

Die Zeit östlicher gelegener Orte ist gegen die Zeit westlicher gelegener Orte voraus und zwar ist der Unterschied der beiden Zeiten gleich dem Längenunterschiede der beiden Orte.

Von besonderer Bedeutung ist neben der Zeit des Beobachtungsortes — der Ortszeit oder der Schiffszeit — die Zeit des Anfangsmeridians d. h. die Greenwicher Zeit.

Um Ortszeit in Greenwicher Zeit zu verwandeln, addiere man, wenn man auf Westlänge ist, den aus der Länge erhaltenen Zeitunterschied zur Ortszeit; ist man dagegen auf Ostlänge, so subtrahiere man ihn.

Um dagegen aus der Greenwicher Zeit die Ortszeit abzuleiten, addiere man den Zeitunterschied für Ostlänge und subtrahiere ihn für Westlänge.

Erhält man bei dieser Addition eine Zeit, die größer als 24 Stunden ist, so subtrahiere man 24 Stunden und setze das Datum des folgenden Tages. Ist der zu subtrahierende Zeitunterschied größer als die Zeit, so vermehre man vor der Subtraktion diese Zeit um 24 Stunden und setze das Datum des vorhergehenden Tages.

In Deutschland und den meisten mitteleuropäischen Ländern bedient man sich im bürgerlichen Leben nicht mehr wie früher der mittleren Ortszeit, die für verschiedene Orte verschieden ist, sondern benutzt im ganzen Lande dieselbe Einheitszeit, nämlich die Zeit des Meridians von $15^0\,O$. Diese Zeit, die man Mittel-Europäische Zeit (M. E. Z.) nennt, ist also genau 1 Stunde gegen mittlere Greenwicher Zeit voraus. Der Unterschied zwischen mittlerer Ortszeit und Mittel-Europäischer Zeit ist gleich dem in Zeit verwandelten Längenunterschiede zwischen dem Ortsmeridian und dem Meridian von $15^0\,O$; und zwar ist die Ortszeit die größere, wenn die Länge des Ortes größer als $15^0\,O$ ist, während im anderen Falle die Mittel-Europäische Zeit die größere ist.

§ 185. Verwandlung der Zeiten. Eine in der nautischen Astronomie häufig wiederkehrende Aufgabe ist der Übergang von einer Zeit zu einer anderen. Nach den Erörterungen der letzten Paragraphen bietet die Lösung dieser Aufgabe keinerlei Schwierigkeiten mehr.

Im folgenden sind die vorkommenden Fälle behandelt. Dabei sind die folgenden Abkürzungen gebraucht.

M. O. Z.	bedeutet	Mittlere Ortszeit
W. O. Z.	„	Wahre Ortszeit
M. G. Z.	„	Mittlere Greenwicher Zeit
W. G. Z.	„	Wahre Greenwicher Zeit
M. E. Z.	„	Mittel-Europäische Zeit.

1. **Mittlere Ortszeit in Mittlere Greenwicher Zeit, bezw. Wahre Ortszeit in Wahre Greenwicher Zeit zu verwandeln.**

Regel: Auf Westlänge addiere, auf Ostlänge subtrahiere den Zeitunterschied (den in Zeit verwandelten Längenunterschied).

Beispiele.

Auf 86° 10′ O ist die M. O. Z. = $7^u 48^m 56^s$ nachm. den 3. Febr.

Welche M. G. Z. folgt hieraus?

Astr. M. O. Z. = $7^u\ 48^m\ 56^s$ den 3. Febr.
Z. U. = $-5^{st}\ 44^m\ 40^s$
M. G. Z. = $2^u\ \ 4^m\ 16^s$ den 3. Febr.

Auf 126° 13,5′ W ist die W. O. Z. = $9^u 26^m 11^s$ vorm. den 12. Dez.

Welche W. G. Z. folgt hieraus?

Astr. W. O. Z. = $21^u\ 26^m\ 11^s$ den 11. Dez.
Z. U. = $+8^{st}\ 24^m\ 54^s$
W. G. Z. = $29^u\ 51^m\ \ 5^s$ den 11. Dez.
= $5^u\ 51^m\ \ 5^s$ den 12. Dez.

2. **Mittlere Greenwicher Zeit in Mittlere Ortszeit, bezw. Wahre Greenwicher Zeit in Wahre Ortszeit zu verwandeln.**

Regel: Auf Westlänge subtrahiere, auf Ostlänge addiere den Zeitunterschied (den in Zeit verwandelten Längenunterschied).

Auf 97° 10′ W ist die M. G. Z. = $2^u 14^m 8^s$ nachm. den 9. Mai.

Welche M. O. Z. folgt hieraus?

Astr. M. G. Z. = $2^u\ 14^m\ \ 8^s$ den 9. Mai
Z. U. = $-6^{st}\ 28^m\ 40^s$
M. O. Z. = $19^u\ 45^m\ 28^s$ den 8. Mai.

Auf 58° 46,5′ O ist die W. G. Z. = $11^u 12^m 49^s$ vorm. den 13. Sept.

Welche W. O. Z. folgt hieraus?

Astr. W. G. Z. = $23^u\ 12^m\ 49^s$ den 12. Sept.
Z. U. = $+3^{st}\ 55^m\ \ 6^s$
W. O. Z. = $27^u\ \ 7^m\ 55^s$ den 12. Sept.
= $3^u\ \ 7^m\ 55^s$ den 13. Sept.

3. **Wahre Ortszeit in Mittlere Ortszeit, bezw. Wahre Greenwicher Zeit in Mittlere Greenwicher Zeit zu verwandeln.**

Regel: Bringe die Zeitgleichung mit ihrem Zeichen an.

Es ist die W. O. Z. = $10^u 13^m 16^s$ nachm. den 2. Jan.

Welche M. O. Z. folgt hieraus, wenn sich aus dem Jahrbuche für die Zeitgleichung der Wert $+ 4^m 5^s$ ergiebt?

Astr. W. O. Z. = $10^u\ 13^m\ 16^s$ den 2. Jan.
e = $+\ \ 4^m\ \ 5^s$
M. O. Z. = $10^u\ 17^m\ 21^s$ den 2. Jan.

Es ist die W. G. Z. = $10^u\ 12^m\ 48^s$ vorm. den 20. Nov.

Welche M. G. Z. folgt hieraus, wenn sich aus dem Jahrbuche für die Zeitgleichung der Wert $- 14^m 16^s$ ergiebt?

Astr. W. G. Z. = $22^u\ 12^m\ 48^s$ den 19. Nov.
e = $-\ 14^m\ 16^s$
M. G. Z. = $21^u\ 58^m\ 32^s$ den 19. Nov.

Anmerkung. Um die Zeitgleichung aus dem Jahrbuche entnehmen zu können, muß man — wenigstens angenähert — auch die M. G. Z. bestimmen.

4. **Mittlere Ortszeit in Wahre Ortszeit, bezw. Mittlere Greenwicher Zeit in Wahre Greenwicher Zeit zu verwandeln.**

Regel: Bringe die Zeitgleichung mit entgegengesetztem Zeichen an.

Es ist die M. O. Z. = $5^u 19^m 8^s$ vorm. den 24. Sept.

Welche W. O. Z. folgt hieraus, wenn sich aus dem Jahrbuche für die Zeitgleichung der Wert $- 7^m 50^s$ ergiebt?

Es ist die M. G. Z. = $0^u 9^m 48^s$ nachm. den 1. Dez.

Welche W. G. Z. folgt hieraus, wenn sich aus dem Jahrbuche für die Zeitgleichung der Wert $- 11^m 12^s$ ergiebt?

Astr. M. O. Z. = $17^u 19^m \ 8^s$ den 23 Sept.
entg. $e = + \ 7^m 50^s$
W. O. Z. = $17^u 26^m 58^s$ den 23. Sept.

Astr. M. G. Z. = $0^u \ 9^m 48^s$ den 1. Dez.
entg. $e = + 11^m 12^s$
W. G. Z. = $0^u 21^m \ 0^s$ den 1. Dez.

Anmerkung. Um die Zeitgleichung aus dem Jahrbuche entnehmen zu können, muß man — wenigstens angenähert — auch die M. G. Z. bestimmen.

5. **Mittlere Greenwicher Zeit in Wahre Ortszeit zu verwandeln.**

Regel: Verwandle die M. G. Z. durch Anbringung des Zeitunterschiedes in M. O. Z. (Regel 2.) und diese durch Anbringung der entgegengesetzten Zeitgleichung in W. O. Z. (Regel 4.).

Auf $84^0 11' W$ ist die M. G. Z = $3^u 12^m 37^s$ nachm. den 17. Okt. 1903.
Welche W. O. Z. folgt hieraus?

Astr. M. G. Z. = $3^u 12^m 37^s$ den 17. Okt. . . . Hierfür ergiebt sich aus dem Jahrbuche $e = - 14^m 25^s$
Z. U. = $- 5^{st} 36^m 44^s$
M. O. Z. = $21^u 35^m 53^s$ den 16. Okt.
entg. $e = + 14^m 25^s$
W. O. Z. = $21^u 50^m 18^s$ den 16. Okt.

6. **Wahre Ortszeit in Mittlere Greenwicher Zeit zu verwandeln.**

Regel: Verwandle die W. O. Z. durch Anbringung des Zeitunterschiedes in W. G. Z. (Regel 1.), und diese durch Anbringung der Zeitgleichung in M. G. Z. (Regel 3.). — Um die Zeitgleichung genau aus dem Jahrbuche entnehmen zu können, muß man die M. G. Z. erst angenähert bestimmen.

Auf $129^0 50' W$ ist die W. O. Z. = $9^u 28^m 0^s$ vorm. den 12. März 1903.
Welche M. G. Z. folgt hieraus?

Astr. W. O. Z. = $21^u 28^m \ 0^s$ den 11. März
Z. U. = $+ 8^{st} 39^m 20^s$
W. G. Z. = $6^u \ 7^m 20^s$ den 12. März
$e = + 10^m \ 6^s$
M. G. Z. = $6^u 17^m 26^s$ den 12. März.

ang. W. G. Z. = $6^u \ 7^m$ den 12. März
ang. $e = + 10^m$
ang. M. G. Z. = $6^u 17^m$ den 12. März.
Hierfür ergiebt sich aus dem Jahrbuche $e = + 10^m 6^s$

7. **Mittel-Europäische Zeit in Mittlere Ortszeit zu verwandeln.**

Regel: Subtrahiere von der M. E. Z. 1^{st} und verwandle die dadurch erhaltene M. G. Z. durch Anbringung des Zeitunterschiedes in M. O. Z. (Regel 2.)

Auf $8^0 48' O$ ist die M. E. Z. = $5^u 30^m 0^s$ nachm. den 2. Juli.
Welche M. O. Z. folgt hieraus?

M. E. Z. = $5^u 30^m \ 0^s$ den 2. Juli
$- 1^{st}$
M. G. Z. = $4^u 30^m \ 0^s$
Z. U. = $+ 35^m 12^s$
M. O. Z. = $5^u \ 5^m 12^s$ den 2. Juli.

8. **Mittlere Ortszeit in Mittel-Europäische Zeit zu verwandeln.**

Regel: Verwandle die M. O. Z. durch Anbringung des Zeitunterschiedes in M. G. Z. (Regel 1.) und addiere 1^{st}.

Auf $8^0 48'$ O ist die M. O. Z. = $1^u 7^m 52^s$ nachm. den 3. Aug. Welche M. E. Z. folgt hieraus?

$$
\begin{aligned}
\text{Astr. M. O. Z.} &= 1^u\ 7^m 52^s \text{ den 3. Aug.}\\
\text{Z. U.} &= -\ 35^m 12^s\\
\hline
\text{M. G. Z.} &= 0^u\ 32^m 40^s \text{ den 3. Aug.}\\
&+ 1^{st}\\
\hline
\text{M. E. Z.} &= 1^u\ 32^m 40^s \text{ den 3. Aug.}
\end{aligned}
$$

§ 186. Sternzeit. Den Sterntag, d. h. die Zeit einer einmaligen Umdrehung der Himmelskugel, teilt man wie den Sonnentag in 24 Stunden (1 Stunde = 60 Minuten, 1 Minute = 60 Sekunden) ein. Diese Stunden, Minuten und Sekunden unterscheidet man von den aus der Bewegung der Sonne hergeleiteten durch die Hinzufügung des Wortes „Sternzeit", z. B. $3^{st} 12^m 14^s$ Sternzeit.

Da die Bewegung der Sonne an der Himmelskugel in dem der täglichen Bewegung der Himmelskugel entgegengesetzten Sinne erfolgt, so muß der Sterntag kürzer als der Sonnentag sein. Hat die Sonne einen ganzen Umlauf an der Himmelskugel vollendet, so muß ein Fixstern gerade einmal mehr kulminiert haben als die Sonne, d. h. ein Jahr, dessen Dauer 365,2422 mittlere Sonnentage beträgt, muß 366,2422 Sterntage enthalten.

Hieraus folgt, daß ein Sterntag gleich $\frac{365,2422}{366,2422}$ mittleren Sonnentagen, daß dagegen ein mittlerer Sonnentag gleich $\frac{366,2422}{365,2422}$ Sterntagen ist. Wenn man diese beiden Brüche ausrechnet, so erhält man

$$
\begin{aligned}
&1 \text{ mittlerer Sonnentag} &&= 24^{st}\ 3^m\ 56{,}6^s \text{ Sternzeit}\\
&1^{st} \text{ mittlere Zeit} &&= \quad 1^{st}\ 0^m\ 9{,}9^s \quad ''\\
&1^m \quad '' \quad '' &&= \qquad 1^m\ 0{,}2^s \quad ''
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&1 \text{ Sterntag} &&= 23^{st} 56^m\ 4{,}1^s \text{ mittlere Zeit}\\
&1^{st} \text{ Sternzeit} &&= \ 0^{st} 59^m 50{,}2^s \quad '' \quad ''\\
&1^m \quad '' &&= \qquad 0^m 59{,}8^s \quad '' \quad ''
\end{aligned}
$$

so daß für einunddieselbe Zeitdauer der Zahlenwert in Sternzeit etwas größer ist als der Zahlenwert in Sonnenzeit. Um die eine Zeitangabe in die andere zu verwandeln, muß man von der Sternzeit etwas subtrahieren, zur mittleren Zeit dagegen etwas addieren. Tafel 28.*) dient zur Verwandlung der mittleren Zeit in Sternzeit; sie darf auch umgekehrt zur Verwandlung der Sternzeit in mittlere Zeit verwandt werden. Vergleiche deren Erklärung.

Den Anfang eines Sterntages hat man nicht auf den Zeitpunkt gelegt, wo ein Fixstern, sondern wo der Widderpunkt kulminiert. Es ist dadurch die Möglichkeit gegeben, auch einen Zeitpunkt nach Sternzeit zu bestimmen. In diesem Sinne ist Sternzeit gleichbedeutend mit dem Stundenwinkel des Widderpunktes. (Vergl. § 182.) Sie ist also gleich dem Bogen des Äquators vom oberen Meridian bis zum Widderpunkte, vom Meridian nach West gerechnet;

*) Behrmann, Nautische Tafeln, Tafel 28.

oder auch gleich der Anzahl Stunden, Minuten und Sekunden Sternzeit, die seit der letzten oberen Kulmination des Widderpunktes verflossen sind. Die Sternzeit wird wie der Stundenwinkel von 0^{st} bis 24^{st} gezählt. Man kann die Sternzeit auch als die Gerade Aufsteigung des Meridians auffassen.

Im Augenblicke der oberen Kulmination eines Gestirnes ist die Sternzeit der Geraden Aufsteigung dieses Gestirnes gleich. Die im Jahrbuche angegebene Sternzeit im mittleren Greenwicher Mittage eines jeden Tages stellt demnach gleichzeitig die Gerade Aufsteigung der mittleren Sonne dar.

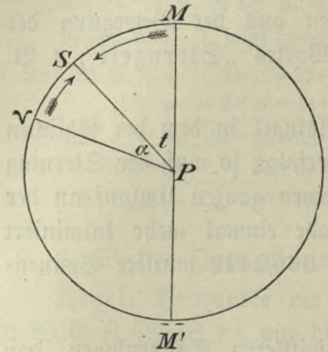


Fig. 173.

Die nebenstehende Figur stellt die Himmelskugel dar, wie sie einem Beobachter erscheint, der sich im Südpol des Himmels befindet. Es bedeutet P den Nordpol, MM' den Meridian, $MS \vee M'$ den Äquator, PS den Stundenkreis eines Gestirnes, $P \vee$ den Stundenkreis des Widderpunktes. Alsdann ist

$MS = t$ der Stundenwinkel des Gestirnes,
$\vee S = \alpha$ die Gerade Aufsteigung des Gestirnes,
$M \vee$ die Sternzeit.

Aus dieser Figur folgen dann unmittelbar die beiden Sätze.

Addiert man zum Stundenwinkel eines Gestirnes seine Gerade Aufsteigung, so erhält man die Sternzeit. Wird dabei die Summe größer als 24 Stunden, so sind 24 Stunden zu subtrahieren.

Subtrahiert man von der Sternzeit die Gerade Aufsteigung eines Gestirnes, so erhält man seinen Stundenwinkel. Ist die Gerade Aufsteigung größer als die Sternzeit, so sind zu dieser zunächst 24 Stunden zu addieren.

§ 187. Übergang vom Stundenwinkel eines Gestirnes zum Stundenwinkel eines anderen Gestirnes. Aus den am Schlusse des vorigen Paragraphen angegebenen Sätzen ergiebt sich ohne weiteres das Verfahren, von dem Stundenwinkel eines Gestirnes A zum Stundenwinkel eines Gestirnes B überzugehen.

Man addiert zum Stundenwinkel des Gestirnes A seine Gerade Aufsteigung und erhält dadurch die Sternzeit. Von dieser Sternzeit subtrahiert man die Gerade Aufsteigung des Gestirnes B, und erhält damit den Stundenwinkel dieses Gestirnes B.

Es kommen von dieser Art in der nautischen Astronomie vornehmlich folgende beiden Aufgaben vor:

1. Aus dem Stundenwinkel eines Gestirnes die mittlere Ortszeit abzuleiten.

Da die mittlere Ortszeit der Stundenwinkel der mittleren Sonne ($m\odot t$) ist, so findet man sie nach der oben angegebenen Regel aus der Formel

$$\text{M. O. Z.} = {*}t + {*}\alpha - m\odot\alpha$$

Beispiel: Am 29. März 1903 findet man den Stundenwinkel des Regulus gleich $21^{st}\,48^m\,39^s$. Welches ist die mittlere Ortszeit, wenn die Gerade Aufsteigung des Regulus gleich $10^{st}\,3^m\,14^s$ und die Gerade Aufsteigung der mittleren Sonne gleich $0^{st}\,23^m\,3^s$ ist?

$$\begin{aligned} {*}t &= 21^{st}\,48^m\,39^s \\ {*}\alpha &= \underline{10^{st}\;\;3^m\,14^s} \\ \text{Sternzeit} &= 31^u\,51^m\,53^s \\ &= \;\;7^u\,51^m\,53^s \\ m\odot\alpha &= \underline{\;0^{st}\,23^m\;\;3^s} \\ \text{M. O. Z.} &= \;\;7^u\,28^m\,50^s \text{ den 29. März.} \end{aligned}$$

2. Aus der mittleren Ortszeit den Stundenwinkel eines Gestirnes abzuleiten.

Der Stundenwinkel ergiebt sich aus der Formel

$${*}t = \text{M. O. Z.} + m\odot\alpha - {*}\alpha$$

Beispiel: Welches ist am 10. April 1903 vormittags $1^u\,40^m\,0^s$ mittlere Ortszeit der Stundenwinkel des Antares, wenn die Gerade Aufsteigung der mittleren Sonne gleich $1^{st}\,12^m\,11^s$ und die Gerade Aufsteigung des Antares gleich $16^{st}\,23^m\,30^s$ ist?

$$\begin{aligned} \text{Astr. M. O. Z.} &= 13^u\,40^m\;\;0^s \\ m\odot\alpha &= \underline{\;\;1^{st}\,12^m\,11^s} \\ \text{Sternzeit} &= 14^u\,52^m\,11^s \\ {*}\alpha &= \underline{16^{st}\,23^m\,30^s} \\ {*}t &= 22^{st}\,28^m\,41^s \end{aligned}$$

§ 188. Zeit der Kulmination. Da der Stundenwinkel eines Gestirnes bei seiner oberen Kulmination gleich 0^{st} ist, so ist die Sternzeit der Kulmination gleich der Geraden Aufsteigung des Gestirnes. Um diese Sternzeit in mittlere Zeit zu verwandeln, muß man nach dem vorigen Paragraphen die Gerade Aufsteigung der mittleren Sonne von ihr subtrahieren. Man hat also die Regel:

Um die mittlere Zeit der oberen Kulmination eines Gestirnes zu finden, subtrahiere man die Gerade Aufsteigung der mittleren Sonne von der Geraden Aufsteigung des betreffenden Gestirnes.

Da der Stundenwinkel bei der unteren Kulmination gleich 12^{st} ist, so ergiebt sich die folgende Regel.

Um die mittlere Zeit der unteren Kulmination eines Gestirnes zu finden, subtrahiere man die Gerade Aufsteigung der mittleren Sonne von der um 12 Stunden vermehrten Geraden Aufsteigung des betreffenden Gestirnes.

Die mittlere Ortszeit der oberen Kulmination der Sonne findet man bequemer, indem man die Zeitgleichung mit ihrem Zeichen an die wahre Zeit der oberen Kulmination, nämlich $0^u\,0^m\,0^s$ anbringt, während man die mittlere Ortszeit der unteren Kulmination findet, indem man die Zeitgleichung an die wahre Zeit der unteren Kulmination, nämlich $12^u\,0^m\,0^s$ anbringt.

Will man die genaue Kulminationszeit haben, so muß man sie erst angenähert kennen, um aus ihr die mittlere Greenwicher Zeit berechnen und für diese aus dem Jahrbuche die genauen Werte der Geraden Aufsteigungen bezw. der Zeitgleichung entnehmen zu können. Indessen ist die auf Sekunden genaue Kenntnis der Kulminationszeit eines Gestirnes in der nautischen Astronomie nie erforderlich.

Die genäherte mittlere Ortszeit der Kulmination der Sonne, des Mondes und der Planeten läßt sich am einfachsten aus der im Jahrbuche enthaltenen „Mittleren Ortszeit des Meridiandurchgangs in Greenwich" (Seite II bezw. XI und XII eines jeden Monats) ableiten. Zur Bestimmung der Kulminationszeit eines Fixsternes muß man dagegen stets den Unterschied der Geraden Aufsteigung des Gestirnes und der Geraden Aufsteigung der mittleren Sonne bilden.

Fixsterne. Die angenäherte mittlere Ortszeit der oberen Kulmination eines Fixsternes erhält man, indem man die Gerade Aufsteigung der mittleren Sonne, wie sie für den nächstliegenden Greenwicher Mittag dem Jahrbuche entnommen wird (ohne einzuschalten) von der Geraden Aufsteigung des betreffenden Fixsterns subtrahiert.

Die genaue mittlere Ortszeit der oberen Kulmination erhält man, indem man aus der angenäherten die mittlere Greenwicher Zeit ableitet, für diese den genauen Wert der Geraden Aufsteigung der mittleren Sonne bestimmt und damit die Rechnung wiederholt.

Mitten zwischen zwei obere Kulminationen eines Fixsternes fällt seine untere Kulmination. Da nun der Sterntag, in mittlerer Zeit ausgedrückt, eine Dauer von $23^{st}\,56^{m}\,4^{s}$ hat, so erhält man die Zeit der unteren Kulmination aus der Zeit der oberen Kulmination, indem man einen halben Sterntag, d. i. $11^{st}\,58^{m}\,2^{s}$ addiert oder subtrahiert.

Beispiel: Wann tritt nach mittlerer Ortszeit am 19. Juli 1903 auf 74°50′ *W* Capella in die obere und in die untere Kulmination?

a) Angenäherte Lösung:

19. Juli . . . . $* \alpha = 5^{st}\,10^{m}$

„ „ . . . $m \odot \alpha = 7^{st}\,44^{m}$

M. O. Z. der ob. Kulm. $= 21^{u}\,26^{m}$ den 18. Juli $= 9^{u}\,26^{m}$ vorm. den 19. Juli

$+ \frac{1}{2}$ Sterntag $= 11^{st}\,58^{m}$

M. O. Z. der unt. Kulm. $= 9^{u}\,24^{m}$ den 19. Juli $= 9^{u}\,24^{m}$ nachm. den 19. Juli.

b) Genaue Lösung:

Angen. M. O. Z. der ob. Kulm. $= 21^{u}\,26^{m}$ den 18. Juli

Z. U. $= +\,4^{st}\,59^{m}$

M. G. Z. $= 2^{u}\,25^{m}$ den 19. Juli.

Hierfür ergiebt sich aus dem Jahrbuche:

$* \alpha = 5^{st}\,9^{m}\,33^{s}$

$m \odot \alpha = 7^{st}\,44^{m}\,49^{s}$

M. O. Z. der ob. Kulm. $= 21^{u}\,24^{m}\,44^{s}$ den 18. Juli $= 9^{u}\,24^{m}\,44^{s}$ vorm. den 19. Juli

$+ \frac{1}{2}$ Sterntag $= 11^{st}\,58^{m}\,2^{s}$

M. O. Z. der unt. Kulm. $= 9^{u}\,22^{m}\,46^{s}$ den 19. Juli $= 9^{u}\,22^{m}\,46^{s}$ nachm. den 19. Juli.

Da ein Sterntag kürzer als ein mittlerer Sonnentag ist, so kann es vorkommen, daß an einem Tage zwei obere oder zwei untere Kulminationen stattfinden. Tritt z. B. ein Gestirn kurz nach Mitternacht in seine obere Kulmination, so wird es das nächste Mal kurz vor Mitternacht, also noch an demselben bürgerlichen Tage kulminieren; etwas Entsprechendes tritt ein, wenn eine untere Kulmination kurz nach Mitternacht stattfindet.

Beispiel: Wann tritt nach mittlerer Ortszeit am 22. Februar 1903 auf 10^0 *O* Regulus in seine obere und in seine untere Kulmination?

22. Februar . . . $✳\alpha = 10^{st}\ 3^m$
„ „ . . $m\odot\alpha = 22^{st}\ 5^m$
Angen. M. O. Z. der ob. Kulm. $= 11^u\,58^m$ den 22. Febr.
Z. U. $= -\ 40^m$
M. G. Z. $= 11^u\,18^m$ den 22. Febr.

Hierfür ergiebt sich aus dem Jahrbuch:

$✳\alpha = 10^{st}\ 3^m\,15^s$
$m\odot\alpha = 22^{st}\ 6^m\,43^s$
M. O. Z. d. ob. Kulm. $= 11^u\ 56^m\,32^s$ den 22. Febr. $= 11^u\,56^m\,32^s$ nachm. den 22. Febr.

$-\frac{1}{2}$ Sterntag $= 11^{st}\,58^m\ 2^s$
M. O. Z. d. unt. Kulm. $= 23^u\ 58^m\,30^s$ den 21. Febr. $= 11^u\,58^m\,30^s$ vorm. den 22. Febr.

$-\frac{1}{2}$ Sterntag $= 11^{st}\,58^m\ 2^s$
M. O. Z. d. ob. Kulm. $= 12^u\ 0^m\,28^s$ den 21. Febr. $= 0^u\,0^m\,28^s$ vorm. den 22. Febr.

Es finden also an diesem Tage zwei obere Kulminationen des Regulus statt.

Sonne. Will man die Zeit der oberen Kulmination der Sonne nur angenähert wissen (auf die Minute), so kann man die im Jahrbuch auf Seite II eines jeden Monats angegebene Mittlere Ortszeit des Meridiandurchganges in Greenwich direkt als die mittlere Ortszeit des Meridiandurchganges am Orte der Beobachtung auffassen. Hieraus erhält man dann die mittlere Ortszeit der unteren Kulmination, indem man 12^{st} addiert oder subtrahiert.

Will man die genaue Zeit der oberen Kulmination haben, so muß man noch eine Berichtigung für die Länge des Beobachtungsortes anbringen, die man erhält, indem man die im Jahrbuche angegebene Änderung für 1^0 Länge mit der Anzahl der Längengrade multipliziert. Hierbei ist zu beachten, daß man auf Westlänge zwischen der Kulminationszeit des betreffenden und des nächstfolgenden Tages, daß man aber auf Ostlänge zwischen der Kulminationszeit des betreffenden und des nächstvorhergehenden Tages einschalten muß.

Die mittlere Zeit der unteren Kulmination erhält man aus der mittleren Zeit der oberen Kulmination, indem man einen halben wahren Sonnentag addiert, bezw. subtrahiert. Die Länge des wahren Sonnentages erhält man durch Subtraktion zweier aufeinander folgender Kulminationszeiten.

Beispiel 1. Wann tritt nach mittlerer Ortszeit am 8. Juli 1903 auf 48° *W* die Sonne in ihre obere und in ihre untere Kulmination?

M. O. Z. d. Kulm. in Greenw. = $0^u\,4^m\,39^s$
$0{,}026^s \cdot 48 =$ $+\;1^s$

M. O. Z. d. ob. Kulm. = $0^u\,4^m\,40^s$ den 8. Juli = $0^u\,4^m\,40^s$ nachm. den 8. Juli
$-\frac{1}{2}$ Sonnentag = $12^{st}\,0^m\;\;5^s$

M. O. Z. d. unt. Kulm. = $12^u\,4^m\,35^s$ den 8. Juli = $0^u\,4^m\,35^s$ vorm. den 8. Juli.

Beispiel 2. Wann tritt nach mittlerer Ortszeit am 2. November 1903 auf 102° 10′ *O* die Sonne in ihre obere und in ihre untere Kulmination?

M. O. Z. d. Kulm. in Greenw. = $23^u\,43^m\,41^s$
$0{,}005^s \cdot 102 =$ $+\;1^s$

M. O. Z. d. ob. Kulm. = $23^u\,43^m\,42^s$ den 1. Nov. = $11^u\,43^m\,42^s$ vorm. den 2. Nov.
$+\frac{1}{2}$ Sonnentag = $11^{st}\,59^m\,59^s$

M. O. Z. d. unt. Kulm. = $11^u\,43^m\,41^s$ den 2. Nov. = $11^u\,43^m\,41^s$ nachm. den 2. Nov.

Mond. Die angenäherte mittlere Ortszeit der oberen Kulmination des Mondes erhält man aus der im Jahrbuche auf Seite II eines jeden Monats angegebenen mittleren Ortszeit des Meridiandurchganges in Greenwich durch Anbringung einer Berichtigung für die Länge. Diese Berichtigung erhält man, indem man die im Jahrbuche angegebene Änderung für 1° Länge mit der Anzahl der Längengrade multipliziert. Befindet man sich auf Westlänge, so ist zwischen der Kulminationszeit des betreffenden und des nächstfolgenden Tages einzuschalten, die Schaltteile sind dann zu addieren. Befindet man sich aber auf Ostlänge, so ist zwischen der Kulminationszeit des betreffenden und des nächstvorhergehenden Tages einzuschalten, die Schaltteile sind dann zu subtrahieren. Dabei ist zu beachten, daß im Jahrbuche astronomische Zeit angewendet wird. Ist also die im Jahrbuche angegebene Kulminationszeit größer als 12^{st}, so fällt die Kulmination auf den Vormittag des folgenden Tages. In einem solchen Falle hat man daher aus dem Jahrbuche die Kulminationszeit für das vorhergehende Datum zu nehmen.

Aus der so gefundenen Zeit der oberen Kulmination findet man die Zeit der unteren Kulmination, indem man den nächstfolgenden halben Mondestag addiert, bezw. den nächstvorhergehenden halben Mondestag subtrahiert. Die Länge des halben Mondestages erhält man durch Subtraktion zweier aufeinander folgenden Kulminationszeiten.

Um aus diesen angenäherten Kulminationszeiten die genauen zu bestimmen, leitet man für beide Kulminationen unabhängig voneinander die zugehörigen mittleren Greenwicher Zeiten ab und entnimmt hierfür dem Jahrbuche die Gerade Aufsteigung des Mondes und die Gerade Aufsteigung der mittleren Sonne und verfährt nach der oben angegebenen Hauptregel.

Beispiel: Wann tritt nach mittlerer Ortszeit der Mond am 6. Juli 1903 auf 74° 40′ *W* in seine obere und in seine untere Kulmination?

a) Angenäherte Lösung.

M. O. Z. d. Kulm. in Greenw. = $9^u\,51{,}2^m$ den 6. Juli
$0{,}134^s \cdot 74{,}7 =$ $+\;10{,}0^m$

M. O. Z. d. ob. Kulm. = $10^u\;\;1{,}2^m$ den 6. Juli = $10^u\;\;1{,}2^m$ nachm. den 6. Juli
$-\frac{1}{2}$ Mondestag = $12^u\,24{,}2^m$

M. O. Z. d. unt. Kulm. = $21^u\,37{,}0^m$ den 5. Juli = $9^u\;\;37{,}0^m$ vorm. den 6. Juli.

b) Genaue Lösung.

Hieraus findet man auf folgende Weise die genauen Zeiten

a) obere Kulmination	b) untere Kulmination
M. O. Z. = $10^u\ 1^m$ den 6. Juli	M. O. Z. = $21^u\ 37^m$ den 6. Juli
Z. U. = $+4^{st}\ 59^m$	Z. U. = $+4^{st}\ 59^m$
M. G. Z. = $15^u\ 0^m$ den 6. Juli.	M. G. Z. = $2^u\ 36^m$ den 6. Juli.
Hierfür: ☾ $\alpha = 16^{st}\ 56^m\ 51^s$	Hierfür: $12^{st} +$ ☾ $\alpha = 28^{st}\ 30^m\ 38^s$
$m \odot \alpha = 6^{st}\ 55^m\ 38^s$	$m \odot \alpha = 6^{st}\ 53^m\ 36^s$
M. O. Z. d. ob. Kulm. = $10^u\ 1^m\ 13^s$	M. O. Z. d. unt. Kulm. = $21^u\ 37^m\ 2^s$
= $10^u\ 1^m\ 13^s$ nachm. den 6. Juli.	= $9^u\ 37^m\ 2^s$ vorm. den 6. Juli.

Da der Mondestag im Durchschnitt 50 Minuten länger als der Sonnentag ist, so fällt, wenn eine obere Kulmination nahe dem Mittage des betreffenden Tages stattfindet, die vorhergehende untere Kulmination noch auf den vorhergehenden bürgerlichen Tag, die folgende untere Kulmination schon auf den folgenden bürgerlichen Tag. An dem betreffenden bürgerlichen Tage findet demnach keine untere Kulmination statt. Entsprechend kann der Fall eintreten, daß an einem Tage nur eine untere Kulmination nahe dem Mittage, aber keine obere Kulmination stattfindet.

Beispiel 1. Wann tritt nach mittlerer Ortszeit am 20. Oktober 1903 auf $8^0\ 48'$ *O* der Mond in seine obere und in seine untere Kulmination?

M. O. Z. d. Kulm. in Greenw. = $23^u\ 39{,}6^m$ den 19. Okt.

$0{,}143^s \,.\, 8{,}8 = -\ \ 1{,}3^m$

M. O. Z. d. ob. Kulm. = $23^u\ 38{,}3^m$ den 19. Okt. = $11^u\ 38{,}3^m$ vorm. den 20. Okt.

$\mp \frac{1}{2}$ Mondestag = $12^{st}\ 25{,}8^m$

M. O. Z. d. unt. Kulm. = $\begin{cases} 11^u\ 12{,}5^m \text{ den 19. Okt.} = 11^u\ 12{,}5^m \text{ nachm. den 19. Okt.} \\ 12^u\ \ 4{,}1^m \text{ den 20. Okt.} = 0^u\ \ 4{,}1^m \text{ vorm. den 21. Okt.} \end{cases}$

Am 20. Oktober findet also eine untere Kulmination des Mondes nicht statt.

Beispiel 2. Wann tritt nach mittlerer Ortszeit am 7. August auf $144^0\ 10'$ *W* der Mond in seine obere und in seine untere Kulmination.

M. O. Z. d. Kulm. in Greenw. = $11^u\ 44{,}1^m$ den 7. Aug.

$0{,}124^s \,.\, 144{,}2 = +\ \ 17{,}9^m$

M. O. Z. d. ob. Kulm. = $12^u\ \ 2{,}0^m$ den 7. Aug. = $0^u\ \ 2{,}0^m$ vorm. den 8. Aug.

$-\frac{1}{2}$ Mondestag = $12^{st}\ 22{,}8^m$

M. O. Z. d. unt. Kulm. = $23^u\ 39{,}2^m$ den 6. Aug. = $11^u\ 39{,}2^m$ vorm. den 7. Aug.

$-\frac{1}{2}$ Mondestag = $12^{st}\ 22{,}8^m$

M. O. Z. d. ob. Kulm. = $11^u\ 16{,}4^m$ den 6. Aug. = $11^u\ 16{,}4^m$ nachm. den 6. Aug.

Am 7. August findet also eine obere Kulmination des Mondes nicht statt.

Planeten. Da sich die Kulminationszeit der Planeten von einem zum anderen Tage nur um wenige Minuten ändert, so genügt meist die im Jahrbuche auf Seite XI und XII eines jeden Monats angegebene mittlere Ortszeit des Meridiandurchganges in Greenwich auch für andere Orte. Legt man Wert auf größere Genauigkeit, so kann man ebenso verfahren wie beim Monde, nur muß man sich hier die Änderung für 1° Länge erst berechnen, indem man die tägliche Änderung durch 360 dividiert.

Beispiel: Wann tritt nach mittlerer Ortszeit am 15. Juli 1903 auf 104° *O* der Jupiter in seine obere und in seine untere Kulmination?

M. O. Z. d. Kulm. in Greenw. $= 16^u\ 10{,}2^m$ den 14. Juli

$\frac{4 \cdot 104}{360} = + \quad 1{,}2^m$

M. O. Z. d. ob. Kulm. $= 16^u\ 11{,}4^m$ den 14. Juli $= 4^u\ 11{,}4^m$ vorm. den 15. Juli

$+\frac{1}{2}$ Jupitertag $= 11^{st}\ 58{,}0^m$

M. O. Z. d. unt. Kulm. $= \ 4^u\ \ 9{,}4^m$ den 15. Juli $= 4^u\ \ 9{,}4^m$ nachm. den 15. Juli.

Auf Sekunden genau erhält man hieraus die Kulminationszeiten mit Hülfe der Geraden Aufsteigungen des Jupiter und der mittleren Sonne genau wie beim Monde.

a) Obere Kulmination.

M. O. Z. $= 16^u\ 11^m$ den 14. Juli
Z. U. $= -6^{st}\ 56^m$
M. G. Z. $= 9^u\ 15^m$ den 14. Juli.

Hierfür:

$♃\ \alpha = 23^{st}\ 37^m\ 31^s$
$m \odot \alpha = 7^{st}\ 26^m\ 14^s$
M. O. Z. d. o. Kulm. $= 16^u\ 11^m\ 17^s$ den 14. Juli
$= 4^u\ 11^m\ 17^s$ vorm. den 15. Juli.

b) Untere Kulmination.

M. O. Z. $= 4^u\ 9^m$ den 15. Juli
Z. U. $= -6^{st}\ 56^m$
M. G. Z. $= 21^u\ 13^m$ den 14. Juli.

Hierfür:

$+12^{st}$
$♃\ \alpha = 23^{st}\ 37^m\ 31^s$
$m \odot \alpha = 7^{st}\ 28^m\ 11^s$
M. O. Z. d. u. Kulm. $= 4^u\ 9^m\ 20^s$ den 15. Juli
$= 4^u\ 9^m\ 20^s$ nachm. den 15. Juli.

Der Planetentag ist meist kürzer als 24 Stunden mittlere Zeit. Wie bei den Fixsternen so können auch in diesem Falle an einem Tage zwei untere oder zwei obere Kulminationen stattfinden. Finden zwei obere Kulminationen in Greenwich statt, so sind sie beide im Jahrbuche angegeben; z. B. bei der Venus am 14. September.

Ist der Planet rechtläufig und ist die tägliche Änderung seiner Geraden Aufsteigung größer als die tägliche Änderung der Geraden Aufsteigung der mittleren Sonne, so ist der Planetentag länger als ein mittlerer Sonnentag und in diesem Falle kann es eintreten, daß an einem Tage die obere oder die untere Kulmination nicht stattfindet.

Das Planetensystem.

§ 189. Bewegung der Planeten. Die Keplerschen Gesetze. Um die bisher ausschließlich behandelten scheinbaren Bewegungen der Sonne, des Mondes und der Planeten verstehen zu können, ist es nötig, auch die thatsächlichen Bewegungen dieser Gestirne in den Kreis unserer Betrachtungen zu ziehen.

Die Sonne, die während eines Jahres einen vollen Umlauf an der Himmelskugel zu vollbringen scheint, steht in Wirklichkeit fest; sie ist ein Fixstern, der wie die übrigen Fixsterne in eigenem Lichte erstrahlt, und nur deshalb größer und glänzender erscheint, weil er uns bedeutend näher ist als jene.

Die Planeten dagegen sind dunkle kugelförmige Körper wie die Erde, die selbst ein Planet ist; sie erhalten ihr Licht von der Sonne. Sie stehen nicht fest, sondern bewegen sich in geschlossenen, nur wenig von der Kreisgestalt abweichenden Bahnen um die Sonne. Einschließlich der Erde kennt man jetzt acht große und eine große Anzahl kleiner Planeten (Planetoiden oder Asteroiden). Die großen Planeten in der Reihenfolge ihrer Entfernung von der Sonne heißen: Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun.

Die Bewegung der Planeten in geschlossenen Bahnen kommt zustande durch die Anziehungskraft der Sonne (Attraktion, Gravitation) in Verbindung mit einer den Planeten innewohnenden Geschwindigkeit. Die Gesetze, nach denen die Bewegung der Planeten um die Sonne erfolgt, sind auf Grund sorgfältiger Beobachtungen zuerst von dem Astronomen Kepler aufgestellt worden. Sie werden daher die Keplerschen Gesetze genannt; es sind die folgenden:

1. Keplersches Gesetz: Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht.

Eine Ellipse ist eine geschlossene krumme Linie von der Beschaffenheit, daß die Summe der Entfernungen jedes ihrer Punkte von zwei im Innern gelegenen festen Punkten, den Brennpunkten, dieselbe ist. — Sind S und T die Brennpunkte der Ellipse (Fig. 174), so ist also

$$PS + PT = P'S + P'T$$

Man nennt die Linie AB die große Axe, die Linie CD die kleine Axe. Bei den Planetenbahnen ist im allgemeinen die kleine Axe nur wenig von der großen Axe verschieden, so daß die Bahn nur wenig von der Kreisgestalt abweicht.

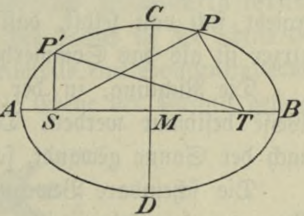


Fig. 174.

2. Keplersches Gesetz. (Flächensatz.) Der Leitstrahl des Planeten (Verbindungslinie von Sonne und Planet) beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Die Bedeutung dieses Satzes wird durch die nebenstehende Figur erläutert. Legt der Planet innerhalb eines gewissen Zeitraumes (etwa eines Monats) den Bogen AB seiner Bahn zurück, so legt er, wenn er bis C gelangt ist, in demselben Zeitraume nur den Bogen CD zurück, derart, daß die Fläche SCD gleich der Fläche SAB ist.

Ist der Planet in E, so ist er in Sonnennähe (Perihel), ist er in F, so ist er in Sonnenferne (Aphel). In der Sonnennähe hat der Planet die größte, in der Sonnenferne die kleinste Geschwindigkeit.

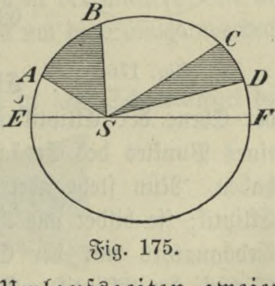


Fig. 175.

3. Keplersches Gesetz. Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne.

Mit Hülfe dieses Satzes läßt sich die mittlere Entfernung eines Planeten von der Sonne berechnen, wenn seine Umlaufszeit bekannt ist. Ist u die Umlaufszeit der Erde, e die Entfernung der Erde von der Sonne, U die beobachtete Umlaufszeit eines anderen Planeten, so findet man dessen Entfernung E von der Sonne durch die Formel

$$u^2 : U^2 = e^3 : E^3$$

$$E = \sqrt[3]{\frac{e^3\, U^2}{u^2}} = e \,.\, \sqrt[3]{\frac{U^2}{u^2}}$$

§ 190. Die Bewegung der Erde um die Sonne. Die Bewegung der Erde richtet sich nach den allgemeinen für die Planeten gültigen Gesetzen. Sie bewegt sich in einer nur wenig von der Kreisgestalt abweichenden Ellipse um die Sonne, die in einem Brennpunkte dieser Ellipse steht. Die Umlaufszeit beträgt rund $365\frac{1}{4}$ Tage, die mittlere Entfernung 80 Millionen Seemeilen oder etwa 150 Millionen Kilometer. Im nördlichen Winter ist die Erde in der Sonnennähe, im nördlichen Sommer in der Sonnenferne, was man schon daran erkennen kann, daß der Halbmesser der Sonne im Winter seinen größten, im Sommer seinen kleinsten Wert hat. Da sich nach dem zweiten Keplerschen Gesetze die Erde in der Sonnennähe schneller bewegt als in der Sonnenferne, so ergiebt sich von selbst, daß das Winterhalbjahr (für die nördliche Halbkugel) kürzer ist als das Sommerhalbjahr. (Vergleiche § 178.)

Die Richtung, in der die Erde ihre Bahn durchläuft, kann in folgender Weise bestimmt werden: Denkt man sich auf dem Nordpol stehend das Gesicht nach der Sonne gewandt, so bewegt sich die Erde in ihrer Bahn nach rechts.

Die scheinbare Bewegung der Sonne in der Ekliptik ist eine Folge der Bewegung der Erde in ihrer Bahn. In nebenstehender Figur stelle S die Sonne, $E_1\,E_2\,E_3$ die Erde in verschiedenen Punkten ihrer Bahn dar. Der große Kreis versinnbildliche die Himmelskugel. Ist die Erde in E_1, so scheint die Sonne im Punkte S_1 zu stehen. Ist die Erde in ihrer Bahn nach E_2 gekommen, so scheint die Sonne in S_2 zu stehen u. s. f. Man sieht sofort, daß bei einem einmaligen Umlauf der Erde, die Sonne ebenfalls einen Umlauf an der Himmelskugel zu vollführen scheint. Die Ebene, in der die Erdbahn liegt, ist die Ebene der Ekliptik.

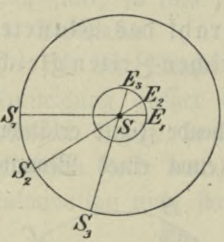


Fig. 176.

Wenn die Erdachse senkrecht auf der Ebene der Ekliptik stände, so würde die Ebene des Erdäquators mit der Ebene der Ekliptik zusammenfallen, und die Sonne würde stets im Zenit eines Punktes des Erdäquators stehen, sie würde also stets die Abweichung Null haben. Nun steht aber in Wirklichkeit die Erdachse schief gegen die Ebene der Ekliptik; sie bildet mit ihr einen Winkel von etwa $66\frac{1}{2}^0$, so daß die Ebene des Erdäquators mit der Ebene der Ekliptik einen Winkel von etwa $23\frac{1}{2}^0$ bildet (Schiefe der Ekliptik). Die Erdachse bleibt sich bei dem Umlauf der Erde um die Sonne stets parallel. Hieraus erklärt sich ohne weiteres die Änderung der Abweichung der Sonne und damit der Jahreszeiten.

Wie aus nebenstehender Figur ersichtlich ist, steht am 21. Dezember die Sonne im Zenit eines Punktes auf $23\frac{1}{2}^0$ *S*, sie hat also eine Abweichung von $23\frac{1}{2}^0$ *S*. Am 21. Juni hat sie dagegen eine Abweichung von $23\frac{1}{2}^0$ *N*, während ihre Abweichung am 21. März und am 23. September gleich Null ist. Im (nördlichen) Winterhalbjahr ist der Südpol, im Sommerhalbjahr der Nordpol von der Sonne beschienen.

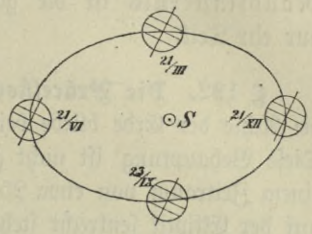


Fig. 177.

§ 191. Bewegung des Mondes. Sonnen- und Mondfinsternisse. Der Mond bewegt sich um die Erde in einer von der Kreisgestalt nur wenig abweichenden Ellipse, in deren einem Brennpunkte die Erde steht. Die Umlaufszeit beträgt etwa $27\frac{1}{3}$ Tage, seine mittlere Entfernung von der Erde ist angenähert sechzigmal so groß wie der Halbmesser der Erde. Während des Umlaufs dreht er sich einmal um seine Axe, so daß er der Erde stets dieselbe Seite zukehrt. Die Ebene seiner Bahn bildet mit der Ebene der Ekliptik einen Winkel von ungefähr 5^0. Infolgedessen kann die Abweichung des Mondes zwischen den Grenzen $28\frac{1}{2}^0$ *N* und $28\frac{1}{2}^0$ *S* liegen.

Tritt der Mond auf seinem Wege um die Erde zwischen Sonne und Erde, so daß sein Schatten auf die Erde fällt, so entsteht eine Sonnenfinsternis. Sie kann nur bei Neumond entstehen. Würde sich der Mond in der Ebene der Ekliptik um die Erde bewegen, so würde bei jedem Neumond eine Sonnenfinsternis zu beobachten sein. Da aber seine Bahn gegen die Ebene der Ekliptik geneigt

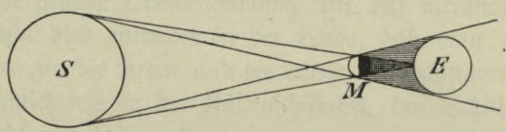


Fig. 178.

ist, so haben wir nur dann eine Sonnenfinsternis, wenn zur Zeit des Neumondes der Mond gerade die Ekliptik passiert.

Man unterscheidet drei Arten der Sonnenfinsternis. Bei einer totalen Sonnenfinsternis ist die ganze Sonnenscheibe durch den Mond verdeckt; bei einer partiellen Sonnenfinsternis ist nur ein Teil der Sonnenscheibe verdeckt und bei einer ringförmigen Sonnenfinsternis ist der mittlere Teil der Sonnenscheibe verdeckt, während ein schmaler Rand rings um die Sonne unverdeckt bleibt.

Tritt der Mond auf seinem Wege um die Erde in den Schattenkegel der

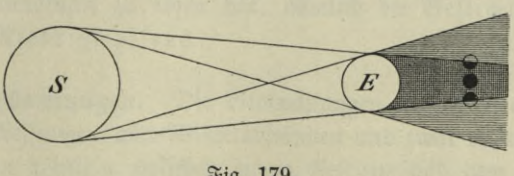


Fig. 179.

Erde, so entsteht eine Mondfinsternis. Sie kann nur bei Vollmond vorkommen und zwar nur dann, wenn der Mond zu dieser Zeit gerade die Ekliptik passiert.

Man unterscheidet zwei Arten der Mondfinsternisse. Bei einer totalen Mondfinsternis ist die ganze Mondscheibe verfinstert, bei einer partiellen nur ein Teil.

§ 192. Die Präcession der Nachtgleichen. Es war oben gesagt worden, die Achse der Erde bliebe bei ihrer Bewegung um die Sonne sich stets parallel. Diese Behauptung ist nicht ganz richtig. Die Achse beschreibt in Wirklichkeit in einem Zeitraum von etwa 25000 Jahren (platonisches Jahr) einen Kegel um die auf der Ekliptik senkrecht stehende Richtung. Die Folge hiervon ist, daß der Pol der Himmelskugel kein absolut fester Punkt ist, sondern daß er in jenem Zeitraum einen Kreis an der Himmelskugel beschreibt. Der jetzige Nordstern wird nicht immer Polarstern bleiben; in etwa 10000 Jahren wird der Pol z. B. dicht bei dem Sterne Wega im Sternbild der Leyer stehen. Eine andere Folge hiervon ist, daß der Widderpunkt auf der Ekliptik in 25000 Jahren einen einmaligen Umlauf vollführt und zwar im rückläufigen Sinne. Diese Bewegung des Widderpunktes nennt man die Präcession der Nachtgleichen. Infolge dieser Präcession liegt jetzt der Widderpunkt nicht mehr wie vor 2000 Jahren im Sternbild des Widders, sondern im Sternbild der Fische (vergl. § 178). Die Änderung der Abweichung und der Geraden Aufsteigung der Fixsterne ist ebenfalls auf diese Ursache zurückzuführen.

Astronomische Steuermannskunst.

Einleitung.

§ 193. Aufgaben der astronomischen Steuermannskunst. Die wichtigste Aufgabe der astronomischen Steuermannskunst ist die astronomische Ortsbestimmung auf See. Mit Hülfe der geographischen Steuermannskunst läßt sich zwar die Breite und die Länge des Schiffsortes bestimmen; indessen ist diese Bestimmung, zumal nach einer längeren Reise, so wenig zuverlässig, daß man mit ihr allein auf See nicht wohl auskommen kann. Solange das Schiff in der Nähe der Küste ist, lassen sich die Fehler der Besteckrechnung dadurch unschädlich machen, daß man von Zeit zu Zeit durch Peilungen bekannter Landpunkte und Seezeichen den Ort des Schiffes neu bestimmt. Auf hoher See dagegen läßt sich eine genaue Ortsbestimmung nur auf astronomischem Wege erreichen. Es geschieht dies entweder in der Weise, daß man auf Grund astronomischer Beobachtungen die Breite und die Länge des Schiffsortes direkt berechnet, oder daß man, ähnlich wie in der Küstenschiffahrt, den Schiffsort als Schnittpunkt zweier Standlinien bestimmt.

Neben dem Sextanten ist das wichtigste Instrument, das bei der astronomischen Bestimmung des Schiffsortes gebraucht wird, das Chronometer, eine sehr genau gehende Uhr. Da die Genauigkeit der Ortsbestimmung hauptsächlich von der Genauigkeit der Angaben des Chronometers abhängt, so ist eine fortwährende Kontrolle unerläßlich. Diese Chronometerkontrolle ist eine zweite Aufgabe der astronomischen Steuermannskunst.

Eine dritte bildet die Kontrolle des Kompasses, nämlich die Bestimmung der Mißweisung und der örtlichen Ablenkung.

Von geringerer Bedeutung ist schließlich eine vierte Aufgabe, die die astronomische Steuermannskunst zu lösen hat, nämlich die Bestimmung der Zeit des Hoch- und Niedrigwassers.

§ 194. Beobachtungen. Die Beobachtungen der astronomischen Steuermannskunst sind Messungen von Winkelabständen und zwar entweder von Kimmabständen oder von Winkeln zwischen einem Gestirne und dem Monde (Monddistanzen). Am Lande macht man auch Höhenbeobachtungen über dem künstlichen Horizonte.

Bei den meisten Beobachtungen ist die Kenntnis der Zeit erforderlich; man muß daher die Uhrzeit im Augenblicke der Beobachtung ablesen und zugleich mit der Winkelmessung anmerken. Ist ein Chronometer an Bord, so sollte stets nach diesem beobachtet werden. Nur bei einigen Aufgaben, bei denen eine genaue Kenntnis der Zeit nicht erforderlich ist, ist auch eine Beobachtung nach der Schiffsuhr, die nach wahrer Ortszeit gestellt wird, zulässig.

Zu jeder Beobachtung sind im allgemeinen zwei Beobachter erforderlich oder wenigstens erwünscht, einer, der die Winkelmessung ausführt, und einer, der die Zeit abliest. Der Beobachter, der die Winkelmessung macht, giebt den Augenblick der Messung dem Beobachter an der Uhr durch Zuruf („fest" oder „stop") kund, worauf dieser die Zeit abliest und die ganze Beobachtung anmerkt.

Das Chronometer darf niemals zum Beobachten auf Deck geholt werden, sondern muß stets an seinem Orte verbleiben, da der häufige Transport an Deck wahrscheinlich Fehler in seinen Angaben zur Folge haben würde. Will man eine Beobachtungsuhr an Deck haben, so muß man nach einer Uhr (Handuhr) beobachten, die man vorher oder nachher mit dem Chronometer vergleicht. Es geschieht dies entweder in der Weise, daß man den Unterschied zwischen der Handuhrzeit und der Chronometerzeit bestimmt, und diesen Unterschied an die Uhrzeit der Beobachtung anbringt (Beispiel 1.), oder indem man die zwischen der Beobachtung und der Vergleichung der Uhren verflossene Zeit zu der Chronometerzeit im Augenblick der Vergleichung addiert oder von ihr subtrahiert, je nachdem die Vergleichung vor oder nach der Beobachtung gemacht worden ist. Macht man die Vergleichung nachher, so läßt es sich stets so einrichten, daß die anzubringende Zwischenzeit eine volle Anzahl von Minuten beträgt. (Beispiel 2.)

Beispiel 1. Eine Handuhr zeigt $3^u\ 26^m\ 18^s$, als das Chronometer $3^u\ 26^m\ 0^s$ zeigt. Nach dieser Uhr macht man eine Beobachtung um $3^u\ 29^m\ 52^s$. Welches ist die entsprechende Chronometerzeit?

Aus der Vergleichung der beiden Uhren ergiebt sich, daß man 18^s von den Angaben der Handuhr subtrahieren muß, um Chronometerzeit zu erhalten; die Chronometerzeit der Beobachtung ist also

$$3^u\ 29^m\ 34^s$$

Beispiel 2. Nach einer Handuhr macht man eine Beobachtung um $3^u\ 27^m\ 48^s$. Bei der bald darauf angestellten Vergleichung mit dem Chronometer ergiebt sich

Handuhr: $3^u\ 29^m\ 48^s$

Chronometer: $7^u\ 51^m\ 32^s$

Welches ist die Chronometerzeit der Beobachtung?

Die Beobachtung ist genau 2^m vor der Vergleichung gemacht, somit ist die Chronometerzeit der Beobachtung

$$7^u\ 49^m\ 32^s$$

Ist eine sehr genaue Kenntnis der Zeit erforderlich, so ist es zweckmäßig, die Vergleichung der Uhren in nahe gleichen Zeiträumen vor und nach der Beobachtung vorzunehmen und das Mittel aus den so gefundenen Berichtigungen an die Uhrzeit anzubringen.

Beispiel: Man macht nach einer Handuhr eine Beobachtung um $6^u\,17^m\,48^s$. Die Vergleichung der Handuhr mit dem Chronometer ergiebt:

	vorher	nachher
Handuhr:	$6^u\,8^m\;\;0^s$	$6^u\,27^m\;\;0^s$
Chronometer:	$6^u\,8^m\,12^s$	$6^u\,27^m\,14^s$

Welches ist die Chronometerzeit der Beobachtung?

Die Berichtigung der Handuhrzeit auf Chronometerzeit ist vorher $+\,12^s$, nachher $+\,14^s$, also im Mittel $+\,13^s$. Die Chronometerzeit der Beobachtung ist demnach

$$6^u\,18^m\,1^s$$

Um die unvermeidlichen Beobachtungsfehler auszugleichen, empfiehlt es sich in vielen Fällen, an Stelle einer einzigen eine Reihe von Beobachtungen anzustellen. Aller Wahrscheinlichkeit nach werden die Fehler der einzelnen Beobachtungen nicht immer nach derselben, sondern nach verschiedenen Seiten vom wahren Werte abweichen. Beobachtet man eine Reihe von Kimmabständen oder Monddistanzen, so werden wahrscheinlich einige zu groß, andere zu klein gemessen werden. Ein großer Teil dieser Fehler wird sich daher aufheben, wenn man das **Mittel aus mehreren Beobachtungen** nimmt, d. h. die Summe der gemessenen Winkel durch ihre Anzahl dividiert. Es sei hierbei aber ausdrücklich betont, daß man auf diese Weise nur die eigentlichen Beobachtungsfehler ausgleicht, aber nicht die Fehler, die ihre Ursache etwa in der Ungenauigkeit der Höhenbeschickung (vergl. § 176) oder in Fehlern des Instrumentes haben, da sämtliche gemessenen Winkel mit diesen Fehlern behaftet sind.

Da innerhalb einer kurzen Zeit die Änderung der Höhe eines Gestirnes als angenähert gleichförmig betrachtet werden darf, so entspricht auch innerhalb dieser Zeit dem mittleren Werte der Kimmabstände angenähert der mittlere Wert der Beobachtungszeiten. Ein nennenswerter Fehler kann nur dann auftreten, wenn sich die Beobachtungen über eine zu lange Zeit erstrecken. Die als zulässig zu erachtende Dauer der Beobachtungen ist verschieden nach dem Stande der Gestirne. Steht ein Gestirn in der Nähe des ersten Vertikals, wo die Höhenänderung am gleichförmigsten ist, so ist das Mitteln der Beobachtungen noch bei einer Beobachtungsdauer von 10 Minuten unbedenklich gestattet. Je näher das Gestirn dem Meridiane steht, um so kürzer muß die Beobachtungsdauer sein, und in unmittelbarer Nähe des Meridians sollte man überhaupt von dem Mitteln der Beobachtungen Abstand nehmen.

Beispiele: Es soll das Mittel aus folgenden Beobachtungen genommen werden:

Chr. Z. =	$7^u\,48^m\,42^s$	$\underline{✱} = 26^0\,48'$
	$7^u\,49^m\,30^s$	$26^0\,56'$
	$7^u\,49^m\,57^s$	$27^0\;\;1'$
$s =$	$23^u\,28^m\;\;9^s$	$80^0\,45' : 3$
Mittel:	$7^u\,49^m\,23^s$	$\underline{✱} = 26^0\,55'$

Chr. Z. =	$10^u\;\;8^m\;\;3^s$	$\underline{\odot} = 10^0\,23'\,15''$
	$10^u\;\;9^m\,56^s$	$9^0\,59'\;\;0''$
	$10^u\,11^m\,50^s$	$9^0\,34'\,30''$
	$10^u\,13^m\,40^s$	$9^0\,10'\,15''$
	$10^u\,15^m\,30^s$	$8^0\,46'\,15''$
$s =$	$50^u\,58^m\,59^s$	$47^0\,53'\,15'' : 5$
Mittel:	$10^u\,11^m\,48^s$	$\underline{\odot} = \;9^0\,34'\,39''$

§ 195. Grundformeln der sphärischen Astronomie. Fast allen Berechnungen der sphärischen Astronomie liegt das in § 167 erklärte sphärisch astronomische Grunddreieck zu Grunde. Dieses Dreieck hat die Seiten:

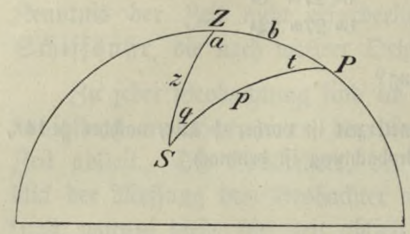


Fig. 180.

z = Zenitdistanz,
p = Poldistanz,
b = Breitenkomplement;

und die Winkel:

t = Stundenwinkel,
a = Azimut,
q = parallaktischer Winkel.

Zwischen den Seiten und Winkeln dieses Dreiecks bestehen die folgenden Formeln (vergleiche § 117, die Formelgruppen 1., 2. und 4.):

$$\sin z : \sin p = \sin t : \sin a$$
$$\sin p : \sin b = \sin a : \sin q$$
$$\sin b : \sin z = \sin q : \sin t$$

$$\cos z = \cos b \,.\, \cos p + \sin b \,.\, \sin p \,.\, \cos t$$
$$\cos p = \cos b \,.\, \cos z + \sin b \,.\, \sin z \,.\, \cos a$$
$$\cos b = \cos z \,.\, \cos p + \sin z \,.\, \sin p \,.\, \cos q$$

$$\operatorname{cotg} b \,.\, \sin p = \cos p \,.\, \cos t + \sin t \,.\, \operatorname{cotg} q$$
$$\operatorname{cotg} b \,.\, \sin z = \cos z \,.\, \cos a + \sin a \,.\, \operatorname{cotg} q$$
$$\operatorname{cotg} z \,.\, \sin b = \cos b \,.\, \cos a + \sin a \,.\, \operatorname{cotg} t$$
$$\operatorname{cotg} z \,.\, \sin p = \cos p \,.\, \cos q + \sin q \,.\, \operatorname{cotg} t$$
$$\operatorname{cotg} p \,.\, \sin z = \cos z \,.\, \cos q + \sin q \,.\, \operatorname{cotg} a$$
$$\operatorname{cotg} p \,.\, \sin b = \cos b \,.\, \cos t + \sin t \,.\, \operatorname{cotg} a$$

Bezeichnet man mit h die Höhe, mit δ die Abweichung und mit φ die Breite, so ist

$$z = 90^0 - h$$
$$p = 90^0 - \delta$$
$$b = 90^0 - \varphi$$

und die obigen Gleichungen lassen sich in folgender Form darstellen:

1. $\cos h : \cos \delta = \sin t : \sin a$
2. $\cos \delta : \cos \varphi = \sin a : \sin q$
3. $\cos \varphi : \cos h = \sin q : \sin t$

4. $\sin h = \sin \varphi \,.\, \sin \delta + \cos \varphi \,.\, \cos \delta \,.\, \cos t$
5. $\sin \delta = \sin \varphi \,.\, \sin h + \cos \varphi \,.\, \cos h \,.\, \cos a$
6. $\sin \varphi = \sin h \,.\, \sin \delta + \cos h \,.\, \cos \delta \,.\, \cos q$

$$\begin{array}{rl} 7. & tang\,\varphi\,.\cos\delta = \sin\delta\,.\cos t + \sin t\,.\cotg q \\ 8. & tang\,\varphi\,.\cos h = \sin h\,.\cos a + \sin a\,.\cotg q \\ 9. & tang\,h\,.\cos\varphi = \sin\varphi\,.\cos a + \sin a\,.\cotg t \\ 10. & tang\,h\,.\cos\delta = \sin\delta\,.\cos q + \sin q\,.\cotg t \\ 11. & tang\,\delta\,.\cos h = \sin h\,.\cos q + \sin q\,.\cotg a \\ 12. & tang\,\delta\,.\cos\varphi = \sin\varphi\,.\cos t + \sin t\,.\cotg a \end{array}$$

Um diesen Gleichungen allgemeine Gültigkeit zu verleihen, treffen wir die folgende schon bei früherer Gelegenheit gemachte Festsetzung:

1. Die Breite ist stets positiv.

2. Die Abweichung ist positiv, wenn sie gleichnamig mit der Breite ist; sie ist negativ, wenn sie ungleichnamig mit der Breite ist.

3. Die Höhe über dem Horizonte ist positiv, die Höhe unter dem Horizonte ist negativ.

Meridianbreiten.

§ 196. Mittagsbreite. Der Bogen des Meridians vom Äquator bis zum Zenit, d. h. die Abweichung des Zenits ist nach Größe und Namen gleich der Breite (vergl. § 163). Die Breitenbestimmungen beruhen daher auf der Bestimmung dieses oder eines ihm gleichen Bogens ($Z'Q$ bezw. NP, Fig. 181).

Die einfachste Breitenbestimmung läßt sich mit Hülfe der Höhe eines Gestirnes im Meridian (Meridionalhöhe) ausführen. Steht das Gestirn bei der Beobachtung in seiner oberen Kulmination, so soll die Breitenbestimmung als Mittagsbreite, steht es in der unteren Kulmination, so soll sie als Mitternachtsbreite bezeichnet werden. Diese Namen sind der Sonne als dem Hauptbeobachtungsgestirne entlehnt.

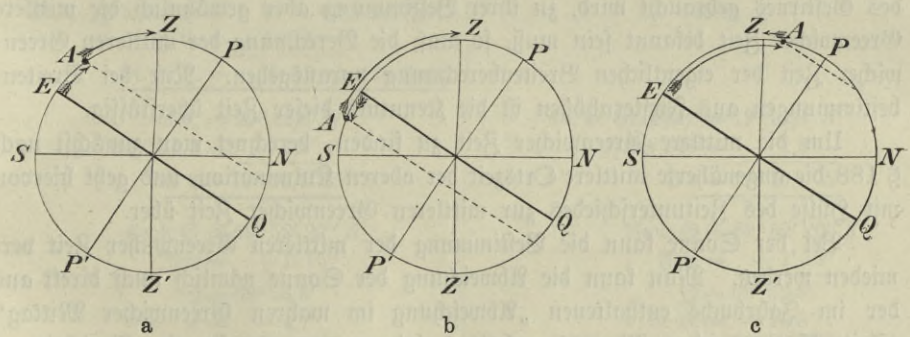


Fig. 181.

Um aus einer Höhe im oberen Meridian die Abweichung des Zenits (EZ) und damit die Breite zu bestimmen, kann man, wo auch das Gestirn kulminiert (siehe Fig. 181 a, b und c) in der Weise verfahren, daß man zunächst vom Äquator zum Gestirn (von E nach A) und darauf vom Gestirn zum Zenit (von A nach Z) geht, d. h. daß man zur Abweichung des Gestirnes die Meridionalzenitdistanz und zwar in der Richtung „vom Gestirn nach dem Zenit" hinzufügt. Diese Richtung ist N, wenn das Gestirn über dem Südhorizont, sie ist S, wenn es über dem Nordhorizont beobachtet ist.

Wir treffen daher die Festsetzung.

Der Meridionalzenitdistanz ist der entgegengesetzte Name des Horizontes zu geben, über dem das Gestirn beobachtet ist.

Alsdann erfolgt die Breitenbestimmung nach der einfachen Regel:

Die Breite ist gleich der algebraischen Summe der Abweichung und der Meridionalzenitdistanz eines Gestirnes

$$\varphi = \delta + z_0$$

§ 197. Beobachtung. Um eine Meridionalhöhe zu beobachten, bringt man schon vor der Kulmination mit dem Spiegelinstrumente Gestirn und Kimm zur Berührung und erhält — fortwährend beobachtend — diese Berührung aufrecht, bis man ein deutliches Sinken des Gestirnes wahrnimmt. Die auf diese Weise beobachtete Höhe ist mindestens sehr angenähert die Meridionalhöhe. Vergleiche § 201.

Um die Dauer der Beobachtung nach Möglichkeit abzukürzen, empfiehlt es sich, zumal beim Monde, sowie bei den Fixsternen und Planeten, die angenäherte Kulminationszeit vorher zu berechnen.

Man kann bei der Beobachtung der Meridionalhöhe eines Gestirnes auch in der Weise verfahren, daß man sich die Kulminationszeit genau berechnet und zu dieser Zeit, unbekümmert um das Steigen und Fallen des Gestirnes, die Beobachtung macht. Diese Art des Beobachtens ist besonders bei Meridionalhöhen des Mondes angebracht, da beim Monde wegen der schnellen Änderung der Abweichung die Meridionalhöhe nicht immer die größte Höhe ist.

§ 198. Berechnung. Da bei der Berechnung der Breite die Abweichung des Gestirnes gebraucht wird, zu ihrer Bestimmung aber gewöhnlich die mittlere Greenwicher Zeit bekannt sein muß, so muß die Berechnung der mittleren Greenwicher Zeit der eigentlichen Breitenberechnung vorausgehen. Nur bei Breitenbestimmungen aus Fixsternhöhen ist die Kenntnis dieser Zeit überflüssig.

Um die mittlere Greenwicher Zeit zu finden, berechnet man zunächst nach § 188 die angenäherte mittlere Ortszeit der oberen Kulmination, und geht hiervon mit Hülfe des Zeitunterschiedes zur mittleren Greenwicher Zeit über.

Bei der Sonne kann die Bestimmung der mittleren Greenwicher Zeit vermieden werden. Man kann die Abweichung der Sonne nämlich auch direkt aus der im Jahrbuche enthaltenen „Abweichung im wahren Greenwicher Mittag" (Seite II eines jeden Monats) erhalten, indem man an sie eine Berichtigung für Länge anbringt. Diese Berichtigung erhält man, indem man die im Jahrbuche angegebene „Änderung für 1° Länge" mit der Anzahl der Längengrade multipliziert. Das Zeichen, mit dem diese Berichtigung anzubringen ist, ist für Westlänge im Jahrbuche angegeben; auf Ostlänge ist das entgegengesetzte Zeichen anzuwenden.

Über die Beschickung des beobachteten Kimmabstandes zur wahren Höhe vergleiche § 174.

Beispiele: 1. **Fixstern.** Am 10. Oktober 1903, nach Besteck auf $53^0\,50'\,N$ und $3^0\,20'\,O$, beobachtet man

Sirius $\underline{*} = 19^0\,30'$ im Süd-Meridian;

Jdb. $= +2'\,0''$; A. H. $= 6$ m.

Welche Breite folgt hieraus?

Im Nautischen Jahrbuche (S. 233) findet man

Sirius $\delta = 16^0\,34{,}9'\,S$.

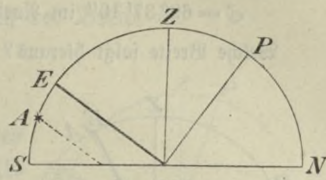


Fig. 182.

$$\begin{aligned}
\text{Beob. } \underline{*} &= 19^0\,30'\,0''\,S \\
\text{Jdb.} &= +2'\,0'' \\
\underline{*} &= 19^0\,32{,}0' \\
k &= -4{,}4' \\
h' &= 19^0\,27{,}6' \\
R &= -2{,}7' \\
h &= 19^0\,24{,}9'\,S \\
90^0 - h = z_0 &= 70^0\,35{,}1'\,N \\
\delta &= 16^0\,34{,}9'\,S \\
\varphi &= 54^0\;\;0{,}2'\,N
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
\text{Beob. } \underline{*} &= 19^0\,30'\,0''\,S \\
\text{Jdb.} &= +2'\,0'' \\
\underline{*} &= 19^0\,32{,}0' \\
\text{G. B.} &= -7{,}1' \\
h &= 19^0\,24{,}9'\,S \\
90^0 - h = z_0 &= 70^0\,35{,}1'\,N \\
\delta &= 16^0\,34{,}9'\,S \\
\varphi &= 54^0\;\;0{,}2'\,N
\end{aligned}$$

2. **Sonne.** Am 28. Juli 1903, nach Besteck auf $39^0\,13'\,N$ und $48^0\,13'\,W$, beobachtet man

$\underline{\odot} = 69^0\,52'\,20''$ im Süd-Meridian;

Jdb. $= +1'\,15''$; A. H. $= 7$ m.

Welche Breite folgt hieraus?

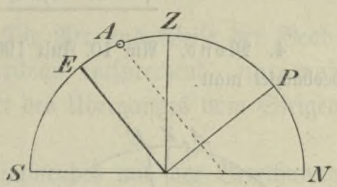


Fig. 183.

$$\begin{aligned}
\text{M. O. Z. d. Kulm.} &= 0^u\;6^m \text{ den 28. Juli} \\
\text{Z. U.} &= +3^{st}\,13^m \\
\text{M. G. Z.} &= 3^u\,19^m \text{ den 28. Juli}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\odot\,\delta_0 &= 19^0\,12{,}6'\,N \\
0{,}57'\,.\,3{,}3 &= -1{,}9' \\
\odot\,\delta &= 19^0\,10{,}7'\,N
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Beob. } \underline{\odot} &= 69^0\,52'\,20''\,S \\
\text{Jdb.} &= +1'\,15'' \\
\underline{\odot} &= 69^0\,53{,}6' \\
k &= -4{,}7' \\
\odot\,h' &= 69^0\,48{,}9' \\
R - P &= -0{,}3' \\
\odot\,h &= 69^0\,48{,}6' \\
\rho &= +15{,}8' \\
h &= 70^0\;\;4{,}4'\,S \\
90^0 - h = z_0 &= 19^0\,55{,}6'\,N \\
\delta &= 19^0\,10{,}7'\,N \\
\varphi &= 39^0\;\;6{,}3'\,N
\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
\delta \text{ i. w. Gr. Mitt.} &= 19^0\,12{,}6'\,N \\
0{,}038'\,.\,48 &= -1{,}8' \\
\odot\,\delta &= 19^0\,10{,}8'\,N
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Beob. } \underline{\odot} &= 69^0\,52'\,20''\,S \\
\text{Jdb.} &= +1'\,15'' \\
\underline{\odot} &= 69^0\,53{,}6' \\
\text{G. B.} &= +10{,}8' \\
h &= 70^0\;\;4{,}4'\,S \\
90^0 - h = z_0 &= 19^0\,55{,}6'\,N \\
\delta &= 19^0\,10{,}8'\,N \\
\varphi &= 39^0\;\;6{,}4'\,N
\end{aligned}$$

3. Planet. Am 1. Juni 1903 nachmittags, nach Besteck auf 26° 58′ S und 26° 11′ W, beobachtet man

♂ = 62° 37′ 10″ im Nord-Meridian; Idb. = — 0′ 20″; A. H. = 12 m.

Welche Breite folgt hieraus?

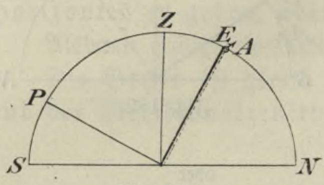


Fig. 184.

M. O. Z. d. Kulm. = $7^u 26^m$ den 1. Juni
Z. U. = + $1^{st} 45^m$
M. G. Z. = $9^u 11^m$ den 1. Juni

♂ δ_0 = 0° 24,9′ N
0,32′ . 9,2 = — 2,9′
♂ δ = 0° 22,0′ N; ♂ π = 10″

Beob. ♂ = 62° 37′ 10″ N
Idb. = — 0′ 20″
♂ = 62° 36,8′
k = — 6,2′
♂ h' = 62° 30,6′
$R - P$ = — 0,4′
h = 62° 30,2′ N
$90° - h = z_0$ = 27° 29,8′ S
δ = 0° 22,0′ N
φ = 27° 7,8′ S

oder:

Beob. ♂ = 62° 37′ 10″ N
Idb. = — 0′ 20″
♂ = 62° 36,8′
G. B. = — 6,6′
h = 62° 30,2′ N
$90° - h = z_0$ = 27° 29,8′ S
δ = 0° 22,0′ N
φ = 27° 7,8′ S

4. Mond. Am 10. Juli 1903 vormittags, nach Besteck auf 7° 24′ S und 134° 10′ W, beobachtet man

$\overline{☾}$ = 81° 4′ 40″ im Süd-Meridian;

Idb. = + 0′ 10″; A. H. = 10 m.

Welche Breite folgt hieraus?

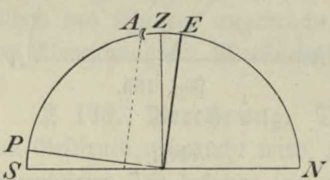


Fig. 185.

M. O. Z. d. Kulm. in Gr. = $12^u 14,7^m$ den 9. Juli
$0,128^m . 134$ = + $17,2^m$
M. O. Z. = $12^u 32^m$ den 9. Juli
Z. U. = + $8^{st} 57^m$
M. G. Z. = $21^u 29^m$ den 9. Juli.

☾ δ um 21^u = 16° 32,5′ S
0,074′ . 29 — 2,1′
☾ δ = 16° 30,4′ S; ☾ ρ = 14′ 44″; ☾ π = 53′ 58″

Beob. $\overline{☾}$ = 81° 4′ 40″ S
Idb. = + 0′ 10″
$\overline{☾}$ = 81° 4,8′
k = — 5,6′
$\overline{☾} h'$ = 80° 59,2′
$P - R$ = + 8,3′
$\overline{☾} h$ = 81° 7,5′
ρ = — 14,7′
h = 80° 52,8′ S
$90° - h = z_0$ = 9° 7,2′ N
δ = 16° 30,4′ S
φ = 7° 23,2′ S

oder:

Beob. $\overline{☾}$ = 81° 4′ 40″ S
Idb. = + 0′ 10″
$\overline{☾}$ = 81° 4,8′
G. B. = — 12,0′
h = 80° 52,8′ S
$90° - h = z_0$ = 9° 7,2′ N
δ = 16° 30,4′ S
φ = 7° 23,2′ S

§ 199. Mitternachtsbreite. Um aus der Höhe eines Gestirnes im unteren Meridian die Breite zu bestimmen, berechnet man die Größe des Bogens $Z'Q$, der, wie der Scheitelbogen ZE, gleich der Breite ist.

Es ist

$$Z'Q = Z'A - QA$$

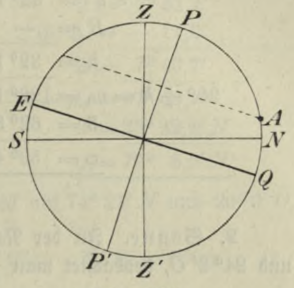


Fig. 186.

Da ein Gestirn nur dann in der unteren Kulmination zu beobachten ist, wenn Breite und Abweichung gleichnamig sind, so sind hier verschiedene Fälle nicht zu unterscheiden.

Es gilt demnach die folgende Regel:

Die Breite ist gleich dem Unterschiede der Meridionalnadirdistanz und der Abweichung eines Gestirnes

$$\varphi = n_0 - \delta$$

Sie ist stets gleichnamig mit der Abweichung.

Da die Sonne, der Mond und die Planeten nur auf hohen Breiten in der unteren Kulmination beobachtet werden können, so ist diese Art der Breitenbestimmung auf See von geringer Bedeutung.

§ 200. Beobachtung und Berechnung. Die Art und Weise der Beobachtung ist ganz der einer Höhe im oberen Meridian entsprechend, nur muß hier der Übergang vom Fallen zum Steigen anstatt des Überganges vom Steigen zum Fallen beobachtet werden.

Auch die Berechnung hat sehr viel Übereinstimmendes mit der Berechnung der Mittagsbreite. Bei allen Gestirnen außer bei den Fixsternen ist die mittlere Greenwicher Zeit zu bestimmen. Diese erhält man aus der mittleren Ortszeit der unteren Kulmination. Bei der Sonne und den Planeten erhält man diese Kulminationszeit genau genug, wenn man 12 Stunden zu der Zeit der oberen Kulmination addiert, bezw. davon subtrahiert. Beim Monde muß man etwas genauer verfahren und einen halben Mondestag addieren bezw. subtrahieren. Vergleiche § 188.

Beispiele: 1. Fixstern. Am 9. Dezember 1903, nach Besteck auf 59° 40′ S und 62° 19′ W, beobachtet man

α Crucis $\underline{\ast}$ = 32° 22′ 20″ im unteren Meridian;

Jdb. = — 2′20″; A. H. = 5 m.

Welche Breite folgt hieraus?

Im Nautischen Jahrbuche (S. 236) findet man

α Crucis δ = 62° 33,7′ S.

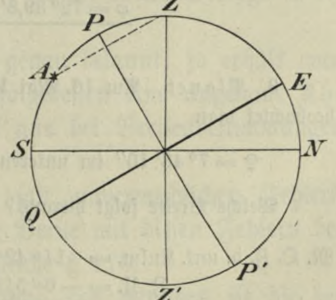


Fig. 187.

$$\begin{aligned} \text{Beob. } \underline{*} &= 32^0\,22'\,20'' \\ \text{Jdb.} &= \underline{-\quad 2'\,20''} \\ \underline{*} &= 32^0\,20{,}0' \\ k &= \underline{-\quad 4{,}0'} \\ * h' &= 32^0\,16{,}0' \\ R &= \underline{-\quad 1{,}5'} \\ h &= 32^0\,14{,}5' \\ 90^0 + h = n_0 &= 122^0\,14{,}5' \\ \delta &= \underline{62^0\,33{,}7'\,S} \\ \varphi &= \underline{\underline{59^0\,40{,}8'\,S}} \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} \text{Beob. } \underline{*} &= 32^0\,22'\,20'' \\ \text{Jdb.} &= \underline{-\quad 2'\,20''} \\ \underline{*} &= 32^0\,20{,}0' \\ \text{G. B.} &= \underline{-\quad 5{,}6'} \\ h &= 32^0\,14{,}4' \\ 90^0 + h = n_0 &= 122^0\,14{,}4' \\ \delta &= \underline{62^0\,33{,}7'\,S} \\ \varphi &= \underline{\underline{59^0\,40{,}7'\,S}} \end{aligned}$$

2. Sonne. In der Nacht vom 1. auf den 2. Juli 1903, nach Besteck auf $72^0\,32'\,N$ und $24^0\,2'\,O$, beobachtet man

$\underline{\odot} = 5^0\,47'\,50''$ im unteren Meridian;

Jdb. $= -2'\,10''$; A. H. $= 5$ m.

Welche Breite folgt hieraus?

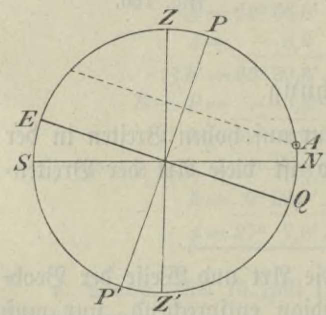


Fig. 188.

M. O. Z. d. unt. Kulm. $= 12^u\ 3^m$ den 1. Juli
Z. U. $= -1^{st}\,36^m$
M. G. Z. $= 10^u\,27^m$ den 1. Juli.

$$\begin{aligned} \odot\,\delta_0 &= 23^0\,10{,}7'\,N \\ 0{,}16'\,.\,10{,}5 &= \underline{-\quad 1{,}7'} \\ \odot\,\delta &= 23^0\quad 9{,}0'\,N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Beob. } \underline{\odot} &= 5^0\,47'\,50'' \\ \text{Jdb.} &= \underline{-\quad 2'\,10''} \\ \underline{\odot} &= 5^0\,45{,}7' \\ k &= \underline{-\quad 4{,}0'} \\ \odot\,h' &= 5^0\,41{,}7' \\ R-P &= \underline{-\quad 8{,}7'} \\ \odot\,h &= 5^0\,33{,}0' \\ \rho &= \underline{+\ 15{,}8'} \\ h &= 5^0\,48{,}8' \\ 90^0 + h = n_0 &= 95^0\,48{,}8' \\ \delta &= \underline{23^0\quad 9{,}0'\,N} \\ \varphi &= \underline{\underline{72^0\,39{,}8'\,N}} \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} \text{Beob. } \underline{\odot} &= 5^0\,47'\,50'' \\ \text{Jdb.} &= \underline{-\quad 2'\,10''} \\ \underline{\odot} &= 5^0\,45{,}7' \\ \text{G. B.} &= \underline{+\quad 3{,}1'} \\ h &= 5^0\,48{,}8' \\ 90^0 + h = n_0 &= 95^0\,48{,}8' \\ \delta &= \underline{23^0\quad 9{,}0'\,N} \\ \varphi &= \underline{\underline{72^0\,39{,}8'\,N}} \end{aligned}$$

3. Planet. Am 16. Mai 1903 vormittags, nach Besteck auf $72^0\,14'\,N$ und $12^0\,48'\,O$, beobachtet man

$\underline{♀} = 7^0\,48'\,10''$ im unteren Meridian; Jdb. $= +3'\,30''$; A. H. $= 6$ m.

Welche Breite folgt hieraus?

M. O. Z. d. unt. Kulm. $= 14^u\,42^m$ den 15. Mai
Z. U. $= -0^{st}\,51^m$
M. G. Z. $= 13^u\,51^m$ den 15. Mai.

$$\begin{aligned} ♀\,\delta_0 &= 25^0\,32{,}4'\,N \\ 0{,}00'\,.\,13{,}9 &= \underline{\quad 0{,}0'} \\ ♀\,\delta &= \underline{25^0\,32{,}4'\,N}; \quad ♀\,\pi = 8'' \end{aligned}$$

Beob. ♀ = 7° 48′ 10″
Jdb. = + 3′ 30″
♀ = 7° 51,7′
k = — 4,4′
♀h' = 7° 47,3′
$R - P$ = — 6,6′
h = 7° 40,7′
$90° + h = n_0$ = 97° 40,7′
δ = 25° 32,4′ N
φ = 72° 8,3′ N

oder:

Beob. ♀ = 7° 48′ 10″
Jdb. = + 3′ 30″
♀ = 7° 51,7′
G. B. = — 11,0′
h = 7° 40,7′
$90° + h = n_0$ = 97° 40,7′
δ = 25° 32,4′ N
φ = 72° 8,3′ N

4. Mond. Am 11. Januar 1903 vormittags, nach Besteck auf 74° 21′ N und 20° 0′ O, beobachtet man

☾̄ = 2° 49′ 10″ im unteren Meridian; Jdb. = — 2′ 0″; A. H. = 10 m.

Welche Breite folgt hieraus?

M. O. Z. d. ob. Kulm. in Gr. = 10ᵘ 25,5ᵐ den 11. Jan.
0,172ᵐ . 20 = — 3,4ᵐ
M. O. Z. d. ob. K. = 10ᵘ 22ᵐ den 11. Jan.
— ½ Mondestag = 12ˢᵗ 31ᵐ
M. O. Z. d. unt. K. = 21ᵘ 51ᵐ den 10. Jan.
Z. U. = — 1ˢᵗ 20ᵐ
M. G. Z. = 20ᵘ 31ᵐ den 10. Jan.

☾ δ um 20ᵘ = 18° 41,9′ N
0,025′ . 31 = + 0,8′
☾ δ = 18° 42,7′ N
☾ ρ = 16′ 38″
☾ π = 60′ 55″

Beob. ☾̄ = 2° 49′ 10″
Jdb. = — 2′ 0″
☾̄ = 2° 47,2′
k = — 5,6′
☾̄h' = 2° 41,6′
$P - R$ = + 45,5′
☾̄h = 3° 27,1′
ρ = — 16,6′
h = 3° 10,5′
$90° + h = n_0$ = 93° 10,5′
δ = 18° 42,7′ N
φ = 74° 27,8′ N

oder:

Beob. ☾̄ = 2° 49′ 10″
Jdb. = — 2′ 0″
☾̄ = 2° 47,2′
G. B. = + 23,3′
h = 3° 10,5′
$90° + h = n_0$ = 93° 10,5′
δ = 18° 42,7′ N
φ = 74° 27,8′ N

§ 201. Genauigkeit der Meridianbreiten. Die aus einer Meridionalhöhe abgeleitete Breite ist nur dann richtig, wenn die beobachtete Höhe und die zur Berechnung benutzte Abweichung fehlerlos sind. Ein Fehler in der Höhe sowie ein Fehler in der Abweichung geht mit seinem vollen Betrage in die Breite ein.

Ist die Länge des Beobachtungsortes nicht genau bekannt, so erhält man eine ungenaue mittlere Greenwicher Zeit und infolgedessen eine ungenaue Abweichung. Der hierdurch entstehende Fehler ist nur bei Breitenbestimmungen aus Mondhöhen fühlbar.

Da alle Höhenbeobachtungen auf See mit unvermeidlichen Fehlern behaftet sind, so ist auch die aus ihnen berechnete Breite mit diesen Fehlern behaftet. Über die Größe dieser Ungenauigkeit vergleiche § 176.

Wegen der schnellen Änderung der Abweichung des Mondes ist die beobachtete größte Höhe des Mondes nicht immer die Meridionalhöhe. Die aus dieser größten Höhe abgeleitete Breite ist daher fehlerhaft. Innerhalb der für die Schiffahrt hauptsächlich in Betracht kommenden Breiten (von 60° *N* bis 60° *S*) ist dieser Fehler stets kleiner als eine Minute, also unbedenklich. Auf höheren Breiten kann er aber mehrere Minuten betragen, und dort würde es sich daher empfehlen, nicht die größte Höhe sondern die Höhe zu der vorher-berechneten Zeit der Kulmination zu beobachten. Vergleiche § 197.

Auf einem Schiffe, das seine Breite schnell ändert, ist ebenfalls die größte Höhe eines Gestirnes nicht die Meridionalhöhe. Fährt man dem Gestirne entgegen, so wird die größte Höhe nach der Kulmination, auf entgegengesetztem Kurse vor der Kulmination beobachtet. Die unter diesen Umständen aus einer größten Höhe berechnete Breite ist daher ebenfalls fehlerhaft. Auch dieser Fehler ist innerhalb der für die Schiffahrt hauptsächlich in Betracht kommenden Breiten im allgemeinen unbedenklich zu vernachlässigen, da er z. B. auf einem mit 15 Knoten Fahrt *N* oder *S* fahrenden Dampfer zwischen 60° *N* und 60° *S* eine Minute nicht überschreiten kann, meist aber wesentlich kleiner ist. Ist die Geschwindigkeit des Schiffes größer, so wächst dieser Fehler allerdings ziemlich schnell. Bei 24 Knoten Fahrt würde man z. B. auf Nord- oder Südkurs, wenn man sich auf 60° *N* befände, die Breite nahezu 2,5′ falsch erhalten, während der Fehler bei einer Fahrt von 30 Knoten unter denselben Umständen etwa 4′ betragen würde.

Zeitbestimmung aus Einzelhöhen.

§ 202. **Methode.** Die Kenntnis der Zeit ist in der nautischen Astronomie von der größten Bedeutung. Da sich die mittlere wie die wahre Ortszeit aus dem Stundenwinkel eines Gestirnes bestimmen läßt, so stützt sich die astronomische Bestimmung der Zeit auf die Bestimmung des Stundenwinkels. Nun kann zwar der Stundenwinkel nicht unmittelbar beobachtet werden, doch läßt er sich aus der Höhe des Gestirnes, wenn die Breite des Beobachtungsortes und die Abweichung des Gestirnes bekannt sind, berechnen.

Im sphärisch-astronomischen Grunddreieck stellt der Winkel am Pol den Stundenwinkel (t) des Gestirnes dar. Unter der oben gemachten Voraussetzung, daß Breite, Abweichung und Höhe bekannt sind, sind auch die drei Seiten des sphärisch-astronomischen Grunddreiecks, nämlich das Breitenkomplement, die Poldistanz und die Zenitdistanz bekannt. Aus ihnen ergiebt sich der Stundenwinkel vermittelst der Formel (§ 195):

$$\cos z = \cos b \,.\, \cos p + \sin b \,.\, \sin p \,.\, \cos t$$
$$\cos z = \sin \varphi \,.\, \sin \delta + \cos \varphi \,.\, \cos \delta \,.\, \cos t$$

Um diese Formel für die logarithmische Berechnung bequem zu machen, setzt man nach § 104, Formel 7b

$$\cos t = 1 - 2 \,.\, sem\, t$$

und erhält

$$\cos z = \sin \varphi \,.\, \sin \delta + \cos \varphi \,.\, \cos \delta \,.\, (1 - 2 \,.\, sem\, t)$$
$$\cos z = \sin \varphi \,.\, \sin \delta + \cos \varphi \,.\, \cos \delta - 2 \,.\, sem\, t \,.\, \cos \varphi \,.\, \cos \delta$$

Nach § 103, Formel 4 ist $sin\,\varphi\,.\,sin\,\delta + cos\,\varphi\,.\,cos\,\delta = cos\,(\varphi - \delta)$ also

$$cos\,z = cos\,(\varphi - \delta) - 2\,.\,sem\,t\,.\,cos\,\varphi\,.\,cos\,\delta$$

Nun ist $(\varphi - \delta)$ die Meridionalzenitdistanz z_0 des Gestirnes; man kann demnach schreiben

$$cos\,z = cos\,z_0 - 2\,.\,sem\,t\,.\,cos\,\varphi\,.\,cos\,\delta$$

also

$$2\,.\,sem\,t\,.\,cos\,\varphi\,.\,cos\,\delta = cos\,z_0 - cos\,z$$

Unter Berücksichtigung der Formel 16. des § 105, folgt hieraus

$$2\,.\,sem\,t\,.\,cos\,\varphi\,.\,cos\,\delta = 2\,.\,sin\,\frac{z + z_0}{2}\cdot sin\,\frac{z - z_0}{2}$$

$$\boldsymbol{sem\,t = sec\,\varphi\,.\,sec\,\delta\,.\,sin\,\frac{z + z_0}{2}\cdot sin\,\frac{z - z_0}{2}}$$

Hat man eine Höhe der Sonne beobachtet, so hat man mit dem hieraus berechneten Stundenwinkel zugleich auch die wahre Ortszeit gefunden, aus der man durch Anbringung der Zeitgleichung die mittlere Ortszeit erhält. Hat man dagegen ein anderes Gestirn beobachtet, so bestimmt man zunächst aus dem berechneten Stundenwinkel durch Addition der Geraden Aufsteigung desselben Gestirnes die Sternzeit, und hieraus durch Subtraktion der Geraden Aufsteigung der mittleren Sonne die mittlere Ortszeit.

Will man die mittlere Greenwicher Zeit bestimmen, so muß man an die gefundene mittlere Ortszeit noch die in Zeit verwandelte Länge als Zeitunterschied anbringen.

Die Mittel-Europäische Zeit erhält man aus der mittleren Greenwicher Zeit, indem man 1 Stunde von ihr subtrahiert.

§ 203. Berechnung. Um aus einer Höhenbeobachtung der Sonne oder eines anderen Gestirnes die Zeit zu berechnen, verfährt man wie folgt.

1. Man bestimmt die angenäherte mittlere Greenwicher Zeit der Beobachtung.

2. Für diese Zeit entnimmt man die Werte aus dem Jahrbuche, und zwar:
   a) bei der Sonne: Abweichung der Sonne und Zeitgleichung,
   b) bei einem anderen Gestirne: Gerade Aufsteigung der mittleren Sonne, Gerade Aufsteigung des Gestirnes und Abweichung des Gestirnes.

3. Hierauf beschickt man den Kimmabstand bezw. die über dem künstlichen Horizonte gemessene doppelte scheinbare Höhe zur wahren Mittelpunktshöhe.

4. Mit Hülfe der so gefundenen Werte berechnet man den Stundenwinkel nach der oben angegebenen Formel. Dabei ist das Folgende zu beachten:

Die Meridionalzenitdistanz z_0 ist gleich der algebraischen Differenz der Breite und der Abweichung; sind also Breite und Abweichung gleichnamig, so sind ihre absoluten Beträge zu subtrahieren, sind dagegen Breite und Abweichung ungleichnamig, so sind ihre absoluten Beträge zu addieren.

In der Tafel der Logarithmen des Semiversus muß man den Stundenwinkel von dem oberen Eingange nehmen, wenn das Gestirn bei der Beobachtung westlich vom Meridian, dagegen von dem untern Eingange, wenn es östlich davon stand.

5. Schließlich bestimmt man die Zeit nach den im vorigen Paragraphen gegebenen Regeln.

Beispiele: 1. Sonne. Am 24. Mai 1903 vormittags beobachtet man auf der Terrasse der Seefahrtschule in Bremen (53° 4′ *N* und 8° 48′ *O*) nach einer Uhr, die angenähert Mittel-Europäische Zeit zeigt, über einem künstlichen Horizonte die folgende doppelte scheinbare Höhe des Sonnenunterrandes

Uhrzeit $= 6^u\,48^m$ $2\,\odot h' = 39^0\,48'\,10''$; Idb. $= +\,1'\,25''$

Welches war hiernach a) die wahre Ortszeit, b) die mittlere Ortszeit, c) die mittlere Greenwicher Zeit, d) die Mittel-Europäische Zeit der Beobachtung?

Astr. M. E. Z. =	$18^u\,48^m$ den 23. Mai
Z. U. =	$-\,1^{st}\;0^m$
M. G. Z. =	$17^u\,48^m$ den 23. Mai.

$\odot\,\delta_0 = 20^0\,21{,}2'\,N$	$e_0 = -\,3^m\,32^s$	
$0{,}48'\,.\,17{,}8 = -\quad 8{,}5'$	$0{,}2^s\,.\,17{,}8 = -\quad 4^s$	
$\odot\,\delta = 20^0\,32{,}7'\,N$	$e = -\,3^m\,28^s$	$\odot\,\rho = 15'\,49''$

Beob. $2\,\odot h' = 39^0\,48'\,10''$	$\varphi = 53^0\;4{,}0'\,N$ $\quad log\;sec = 0{,}22\,121$
Idb. $= +\;1'\,25''$	$\delta = 20^0\,32{,}7'\,N$ $\quad log\;sec = 0{,}02\,854$
$2\,\odot h' = 39^0\,49'\,35'' : 2$	$z_0 = 32^0\,31{,}3'$
$\odot h' = 19^0\,54'\,48''$	$z = 69^0\,51{,}9'$
$R - P = -\;2'\,32''$	$s = 102^0\,23{,}2'$
$\odot h = 19^0\,52'\,16''$	$s/_2 = 51^0\,11{,}6'$ $\quad log\;sin = 9{,}89\,169$
$\rho\,\odot = +\,15'\,49''$	$u/_2 = 18^0\,40{,}3'$ $\quad log\;sin = 9{,}50\,534$
$h = 20^0\;8'\;5''$	$t = 18^{st}\,26^m\,0^s$ $\quad log\;sem = 9{,}64\,678$

W. O. Z. =	$18^u\,26^m\;0^s$
$e =$	$-\;3^m\,28^s$
M. O. Z. =	$18^u\,22^m\,32^s$
Z. U. =	$-\;35^m\,12^s$
M. G. Z. =	$17^u\,47^m\,20^s$
Z. U. =	$+\,1^{st}\;0^m\;0^s$
M. E. Z. =	$18^u\,47^m\,20^s$

2. Fixstern. Am 29. September 1903 vormittags in der Morgendämmerung, auf 54° 27′ *N* und 18° 46′ *O* beobachtet man nach einem Chronometer, das angenähert mittlere Greenwicher Zeit zeigt, den folgenden Kimmabstand des Regulus östlich vom Meridian

Uhrzeit $= 4^u\,5^m$ $\ast = 25^0\,6'\,10''$; Idb. $= -\,2'\,30''$; A. H. = 5 m

Welches war hiernach a) die mittlere Ortszeit, b) die wahre Ortszeit.

Astr. M. G. Z. $= 16^u\,5^m$ den 28. Sept.

$m\,\odot\,\alpha_0 = 12^{st}\,24^m\,21^s$	$e = -\,9^m\,13^s$	
$+\;2^m\,39^s$		
$m\,\odot\,\alpha = 12^{st}\,27^m\;0^s$	$\ast\,\alpha = 10^{st}\,3^m\,14^s$	$\ast\,\delta = 12^0\,26{,}3'\,N$

$$\begin{array}{rl} \text{Beob.} \ast = & 25^{0}\ 6'\ 10'' \\ \text{Jdb.} = & -\ \ 2'\ 30'' \\ \hline \ast = & 25^{0}\ 3'\ 40'' \\ = & 25^{0}\ 3{,}7' \\ \text{G. B.} = & -\ \ 6{,}1' \\ \hline h = & 24^{0}\ 57{,}6' \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} \varphi = & 54^{0}\ 27{,}0'\ N & log\ sec = 0{,}23\ 552 \\ \delta = & 12^{0}\ 26{,}3'\ N & log\ sec = 0{,}01\ 032 \\ \hline z_0 = & 42^{0}\ 0{,}7' & \\ z = & 65^{0}\ 2{,}4' & \\ \hline s = & 107^{0}\ 3{,}1' & \\ \hline s/_2 = & 53^{0}\ 31{,}6' & log\ sin = 9{,}90\ 533 \\ u/_2 = & 11^{0}\ 30{,}8' & log\ sin = 9{,}30\ 016 \\ \hline t = & 19^{st}\ 43^{m}\ 2^{s} & log\ sem = 9{,}45\ 133 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \ast\, t = & 19^{st}\ 43^{m}\ \ 2^{s} \\ \ast\, \alpha = & 10^{st}\ \ 3^{m}\ 14^{s} \\ \hline \text{St. Z.} = & 29^{u}\ 46^{m}\ 16^{s} \\ m \odot \alpha = & 12^{st}\ 27^{m}\ \ 0^{s} \\ \hline \text{M. O. Z.} = & 17^{u}\ 19^{m}\ 16^{s} \\ \text{entg. } e = & +\ \ \ 9^{m}\ 13^{s} \\ \hline \text{W. O. Z.} = & 17^{u}\ 28^{m}\ 29^{s} \end{array}$$

Anmerkung: Die Berechnung der Zeit aus einer Planeten- oder einer Mondhöhe ist bis auf das Ausnehmen der Größen aus dem Jahrbuche und auf die Beschickung der Höhe genau dieselbe wie die Zeitbestimmung aus einer Fixsternhöhe.

§ 204. Genauigkeit der Zeitbestimmung. Sind die bei der Berechnung des Stundenwinkels benutzten Werte der Höhe, der Breite und der Abweichung fehlerhaft, so wird auch der aus ihnen berechnete Stundenwinkel fehlerhaft sein. Es soll im folgenden untersucht werden, wie groß die Fehler im Stundenwinkel sind, die durch Fehler in der Höhe, in der Breite und in der Abweichung hervorgerufen werden.

Bei dieser Ableitung bedienen wir uns des folgenden Satzes, der zunächst bewiesen werden soll.

Versteht man unter $\varDelta\alpha$ einen kleinen Winkel, so ist angenähert

a) . . . . . $sin\ (\alpha + \varDelta\alpha) = sin\,\alpha + \varDelta\alpha\,.\,sin\,1'\,.\,cos\,\alpha$

b) . . . . . $cos\ (\alpha + \varDelta\alpha) = cos\,\alpha - \varDelta\alpha\,.\,sin\,1'\,.\,sin\,\alpha$

Nach § 103, Formel 1. und 2. ist nämlich

$$sin\ (\alpha + \varDelta\alpha) = sin\,\alpha\,.\,cos\,\varDelta\alpha + cos\,\alpha\,.\,sin\,\varDelta\alpha$$

$$cos\ (\alpha + \varDelta\alpha) = cos\,\alpha\,.\,cos\,\varDelta\alpha - sin\,\alpha\,.\,sin\,\varDelta\alpha$$

Da nun $\varDelta\alpha$ ein kleiner Winkel ist, so darf man angenähert setzen (vergl. § 98)

$$sin\,\varDelta\alpha = \varDelta\alpha\,.\,sin\,1' \qquad cos\,\varDelta\alpha = 1$$

Die beiden letzten Gleichungen gehen somit über in die unter a) und b) angeführten Gleichungen.

1. Einfluß eines Fehlers in der Höhe auf den Stundenwinkel.

Aus der Höhe h findet man den Stundenwinkel t nach der Formel

$$sin\,h = sin\,\varphi\,.\,sin\,\delta + cos\,\varphi\,.\,cos\,\delta\,.\,cos\,t$$

Benutzt man bei der Berechnung eine von h etwas verschiedene Höhe $(h + \varDelta h)$, so erhält man auch einen von t verschiedenen Stundenwinkel $(t + \varDelta t)$ aus der Gleichung

$$\sin(h + \varDelta h) = \sin\varphi \,.\, \sin\delta - \cos\varphi \,.\, \cos\delta \,.\, \cos(t + \varDelta t)$$

Subtrahiert man die erste Gleichung von der zweiten, so erhält man

$$\sin(h + \varDelta h) - \sin h = \cos\varphi \,.\, \cos\delta \,.\, [\cos(t + \varDelta t) - \cos t]$$

oder mit Rücksicht auf die Formeln a) und b)

$$\varDelta h \,.\, \sin 1' \,.\, \cos h = -\varDelta t \,.\, \sin 1' \,.\, \sin t \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\delta$$

Dividiert man beide Seiten dieser Gleichung durch $\sin 1'$ und setzt auf der rechten Seite nach § 195, Formel 1.

$$\sin t \,.\, \cos\delta = \cos h \,.\, \sin a$$

so erhält man

$$\varDelta h \,.\, \cos h = -\varDelta t \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos h \,.\, \sin a$$

also

$$1. \quad \ldots\ldots \quad \boldsymbol{\varDelta t = -\varDelta h \,.\, \mathrm{cosec}\, a \,.\, \sec\varphi}$$

Ist $\varDelta h$ in Bogenminuten ausgedrückt, so erhält man durch diese Formel auch $\varDelta t$ in Bogenminuten. Um $\varDelta t$ in Zeitsekunden zu erhalten, muß man den so gefundenen Wert noch mit 4 multiplizieren.

Eine andere Ableitung dieser Formel findet sich in dem Kapitel über die Standlinien, § 250.

Da die Kosekante ihren kleinsten Wert 1 für einen Winkel von 90° annimmt, so folgt aus Gleichung 1:

Ein Höhenfehler macht sich am wenigsten im Stundenwinkel fühlbar, wenn das Azimut des Gestirnes bei der Beobachtung gleich 90° ist, d. h. wenn das Gestirn im ersten Vertikal steht. Je weiter das Gestirn vom ersten Vertikal entfernt steht, um so größer ist der Einfluß eines Höhenfehlers auf den Stundenwinkel.

Da $\sec\varphi$ mit wachsender Breite größer wird, so folgt ferner aus der Gleichung 1:

Auf höheren Breiten ist der Einfluß eines Höhenfehlers auf den Stundenwinkel größer als auf niederen Breiten.

Um eine Zeitbestimmung möglichst frei von den Fehlern der Höhenbeobachtung zu machen, empfiehlt es sich zwei Gestirnshöhen, die eine östlich, die andere westlich vom Meridian zu messen und zwar derart, daß die Azimute und möglichst auch die Höhen bei beiden Beobachtungen angenähert gleich sind. Haben beide Höhen denselben Fehler, so ist die aus der einen Höhe berechnete Zeit um ebensoviel zu groß, wie die aus der anderen Höhe berechnete Zeit zu klein ist. Das Mittel aus den so bestimmten Zeiten ist dann fehlerfrei.

2. Einfluß eines Fehlers in der Breite auf den Stundenwinkel.

Setzt man in die Formel für den Stundenwinkel

$$\sin h = \sin \varphi \,.\, \sin \delta + \cos \varphi \,.\, \cos \delta \,.\, \cos t$$

statt φ den Wert $(\varphi + \varDelta\varphi)$, so erhält man statt des Stundenwinkels t einen anderen $(t + \varDelta t)$ und es ist

$$\sin h = \sin(\varphi + \varDelta\varphi) \,.\, \sin \delta + \cos(\varphi + \varDelta\varphi) \,.\, \cos \delta \,.\, \cos(t + \varDelta t)$$

Subtrahiert man die erste Gleichung von der zweiten, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 = \quad & \sin \delta \,.\, [\sin(\varphi + \varDelta\varphi) - \sin \varphi] \\ & + \cos \delta \,.\, [\cos(\varphi + \varDelta\varphi) \,.\, \cos(t + \varDelta t) - \cos \varphi \,.\, \cos t] \end{aligned}$$

Das Produkt $\cos(\varphi + \varDelta\varphi) \,.\, \cos(t + \varDelta t)$ wird mit Berücksichtigung der Formel b) gleich

$$(\cos \varphi - \varDelta\varphi \,.\, \sin 1' \,.\, \sin \varphi) \,.\, (\cos t - \varDelta t \,.\, \sin 1' \,.\, \sin t)$$

oder gleich

$$\begin{aligned} \cos \varphi \,.\, \cos t - \varDelta\varphi \,.\, \sin 1' \,.\, \sin \varphi \,.\, \cos t - \varDelta t \,.\, \sin 1' \,.\, \cos \varphi \,.\, \sin t \\ + \varDelta\varphi \,.\, \varDelta t \,.\, \sin^2 1' \,.\, \sin \varphi \,.\, \sin t \end{aligned}$$

wo das letzte Glied $\varDelta\varphi \,.\, \varDelta t \,.\, \sin^2 1' \,.\, \sin \varphi \,.\, \sin t$ seiner Kleinheit wegen zu vernachlässigen ist.

Setzt man diesen Wert in die obige Gleichung ein und berücksichtigt für das erste Glied die Formel a), so erhält man

$$0 = \varDelta\varphi \,.\, \sin 1' \,.\, \cos \varphi \,.\, \sin \delta + \cos \delta \,.\, (-\varDelta\varphi \,.\, \sin 1' \,.\, \sin \varphi \,.\, \cos t - \varDelta t \,.\, \sin 1' \,.\, \cos \varphi \,.\, \sin t)$$

oder wenn man die Klammer auflöst und beide Seiten der Gleichung durch $\sin 1'$ dividiert.

$$0 = \varDelta\varphi \,.\, \cos \varphi \,.\, \sin \delta - \varDelta\varphi \,.\, \sin \varphi \,.\, \cos \delta \,.\, \cos t - \varDelta t \,.\, \cos \varphi \,.\, \cos \delta \,.\, \sin t$$

$$0 = \varDelta\varphi \,.\, (\cos \varphi \,.\, \sin \delta - \sin \varphi \,.\, \cos \delta \,.\, \cos t) - \varDelta t \,.\, \cos \varphi \,.\, \cos \delta \,.\, \sin t$$

also

$$\varDelta t = \varDelta\varphi \,.\, \frac{\cos \varphi \,.\, \sin \delta - \sin \varphi \,.\, \cos \delta \,.\, \cos t}{\cos \varphi \,.\, \cos \delta \,.\, \sin t}$$

oder

$$\textbf{2a} \quad . \; . \quad \varDelta t = \varDelta\varphi \,.\, \left(\frac{\operatorname{tang} \delta}{\sin t} - \frac{\operatorname{tang} \varphi}{\operatorname{tang} t} \right)$$

Der Klammerausdruck in dieser Formel ist, wie sich aus § 195, Formel 12. ergiebt, gleich $\operatorname{cotg} a \,.\, \sec \varphi$. Es ist also auch

$$\textbf{2b} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \varDelta t = \varDelta\varphi \,.\, \operatorname{cotg} a \,.\, \sec \varphi$$

Ist $\varDelta\varphi$ in Bogenminuten ausgedrückt, so erhält man durch diese Formeln auch $\varDelta t$ in Bogenminuten. Um $\varDelta t$ in Zeitsekunden zu erhalten, muß man den so gefundenen Wert noch mit 4 multiplizieren.

Eine einfachere Ableitung derselben Formel findet sich in dem Kapitel über die Standlinien, § 250.

Da $cotg\, 90^0 = 0$ ist, so folgt aus Gleichung 2b:

Steht das Gestirn bei der Beobachtung im ersten Vertikal, so ist ein Fehler in der Breite ohne Einfluß auf den Stundenwinkel. Je weiter das Gestirn vom ersten Vertikal entfernt ist, um so größer ist der Einfluß eines Breitenfehlers auf die Länge.

Da $sec\, \varphi$ mit wachsender Breite größer wird, so folgt ferner aus der Gleichung 2b:

Auf höheren Breiten ist der Einfluß eines Breitenfehlers auf den Stundenwinkel größer als auf niederen Breiten.

Bei zwei östlich und westlich vom Meridian in gleichen Azimuten beobachteten Gestirnshöhen, ist der Fehler im Stundenwinkel, der von einem Breitenfehler herrührt, entgegengesetzt gleich, so daß das Mittel fehlerfrei ist.

3. Einfluß eines Fehlers in der Abweichung auf den Stundenwinkel.

In genau derselben Weise, wie soeben der Fehler im Stundenwinkel bestimmt ist, der einem Fehler in der Breite entspricht, bestimmt man auch den Fehler im Stundenwinkel, der einem Fehler in der Abweichung entspricht. Man findet die beiden Formeln

$$3a \quad \ldots\ldots \quad \Delta t = \Delta \delta \,.\left(\frac{tang\, \varphi}{sin\, t} - \frac{tang\, \delta}{tang\, t}\right)$$

$$3b \quad \ldots\ldots \quad \Delta t = \Delta \delta \,.\, cotg\, q \,.\, sec\, \delta$$

Aus diesen beiden Formeln leiten wir die Sätze ab:

Ist bei der Beobachtung der parallaktische Winkel gleich 90^0, so ist ein Fehler in der Abweichung ohne Einfluß auf den Stundenwinkel. Je mehr der parallaktische Winkel von 90^0 abweicht, um so größer ist der Einfluß eines Abweichungsfehlers auf den Stundenwinkel.

Je größer die Abweichung ist, um so größer ist auch der Einfluß eines Abweichungsfehlers auf den Stundenwinkel.

Da die Abweichung aus dem Jahrbuche mit großer Genauigkeit zu entnehmen ist, so ist die Fehlergleichung 3. von geringerer Bedeutung als die Fehlergleichungen 1. und 2.; sie wird aber später bei der Mittagsbestimmung aus gleichen Sonnenhöhen Verwendung finden.

§ 205. Besondere Fälle.

1. Zeit des Auf- und Unterganges. Beim Auf- und Untergange ist die Höhe des Gestirnes gleich Null, seine Zenitdistanz also gleich 90^0. Da $cos\, 90^0 = 0$ ist, so nimmt die oben angegebene Grundgleichung

$$cos\, z = sin\, \varphi \,.\, sin\, \delta + cos\, \varphi \,.\, cos\, \delta \,.\, cos\, t$$

die Form an

$$0 = sin\, \varphi \,.\, sin\, \delta + cos\, \varphi \,.\, cos\, \delta \,.\, cos\, t$$

woraus folgt

$$cos\, t = -\, tang\, \varphi \,.\, tang\, \delta$$

Nach dieser Formel läßt sich der Stundenwinkel eines Gestirnes beim Auf- bezw. beim Untergange, oder der halbe Tagbogen des Gestirnes berechnen. Aus ihm findet man die mittlere Ortszeit des Auf- und Unterganges in der in § 202 angegebenen Weise. Die Tafel 36.*) enthält die halben Tag- bezw. Nachtbogen, und somit für die Sonne die wahre Zeit des Auf- und Unterganges. Vergleiche die Erklärung der Tafel.

Die auf diese Weise abgeleitete Zeit ist die Zeit des wahren Auf- oder Unterganges, d. h. des Durchganges des Gestirnsmittelpunktes durch den wahren Horizont.

Will man die Zeit des Durchganges des Oberrandes durch die Kimm berechnen, so thut man am besten, die gewöhnliche Stundenwinkel-Formel zu benutzen, indem man in sie diejenige Zenitdistanz einsetzt, die einem Kimmabstande des Oberrandes gleich Null entspricht. Wenn dem Kimmabstande Null eine negative Höhe entspricht, so wird die Zenitdistanz größer als 90°.

2. **Stundenwinkel im ersten Vertikal.** Steht das Gestirn im ersten Vertikal, so ist sein Azimut $a = 90^0$. Die Formel 1. des § 195

$$\cos h : \cos \delta = \sin t : \sin a$$

wird somit, da $\sin 90^0 = 1$ ist

$$\cos h : \cos \delta = \sin t : 1$$
$$\sin t = \cos h \,.\, \sec \delta$$

3. **Stundenwinkel in der größten Ausweichung.** Steht das Gestirn in der größten Ausweichung, so ist der parallaktische Winkel $q = 90^0$. (Vergl § 177.) Die Formel 3. des § 195

$$\cos \varphi : \cos h = \sin q : \sin t$$

wird somit

$$\cos \varphi : \cos h = 1 : \sin t$$
$$\sin t = \cos h \,.\, \sec \varphi$$

Der Stundenwinkel eines Gestirnes im ersten Vertikal bezw. in der größten Ausweichung findet sich in Tafel 34.**)

Bestimmung von Stand und Gang.

§ 206. **Stand und Gang des Chronometers.** Zur Ausrüstung eines jeden Schiffes, das eine große Reise machen soll, gehört wenigstens ein Chronometer, d. h. eine genau gehende, die Zeit des ersten Meridians (mittlere Greenwicher Zeit) anzeigende Uhr, da die Kenntnis dieser Zeit zur Bestimmung der geographischen Länge des Schiffsortes nötig ist.

Es ist nicht erforderlich, daß eine Seeuhr jederzeit vollkommen genau die mittlere Greenwicher Zeit zeigt. Den Unterschied zwischen der Chronometerzeit und der mittleren Greenwicher Zeit nennt man den Stand des Chronometers;

*) Behrmann, Nautische Tafeln, Tafel 31.

**) Behrmann, Nautische Tafeln, Tafel 30.

und zwar nennt man ihn *vor*, wenn die Chronometerzeit größer, man nennt ihn *nach*, wenn die Chronometerzeit kleiner als die mittlere Greenwicher Zeit ist.

Ist der Stand vor, so muß er von der Chronometerzeit subtrahiert werden, ist er nach, so muß er zu ihr addiert werden, um mittlere Greenwicher Zeit zu erhalten.

Ein Chronometer zeigt während eines Tages nicht immer genau $24^{st}\ 0^m\ 0^s$ an. Die Anzahl Sekunden, die es mehr oder weniger zeigt, nennt man seinen *Gang*. Zeigt es mehr an, so ist sein Gang *gewinnend*, zeigt es weniger an, so ist sein Gang *verlierend*. Infolge des Ganges ist der Stand des Chronometers veränderlich.

Ist der Stand des Chronometers für einen bestimmten Zeitpunkt, sowie sein täglicher Gang bekannt, so kann man den Stand für einen späteren Zeitpunkt berechnen. Man bezeichne zu diesem Zwecke den Stand, *wenn er vor ist mit minus, wenn er nach ist mit plus; ferner den gewinnenden Gang mit minus, den verlierenden Gang mit plus.* Multipliziert man dann den täglichen Gang mit der Anzahl der verflossenen Tage und addiert die so gefundene „Berichtigung für Gang“ algebraisch (d. h. mit Rücksicht auf das Vorzeichen) zu dem gegebenen Stande, so erhält man den gesuchten Stand für den späteren Zeitpunkt.

Beispiel 1. Ein Chronometer, dessen Stand am 11. August mittags $2^m\ 9^s$ vor, und dessen täglicher Gang $2{,}9^s$ verlierend war, zeigt am 6. September vormittags $6^u\ 7^m\ 16^s$. Welche mittlere Greenwicher Zeit ergiebt sich aus dieser Uhrzeit?

Astron. Chron. Zeit	$= 18^u\ 7^m\ 16^s$ den 5. Sept.	Std. am 11. Aug..	$= -\ 2^m\ \ 9^s$
für Gg. bericht. Std.	$= -\ \ 0^m\ 54^s$	Ber. f. Gg. $(2{,}9^s \cdot 25{,}8)$	$= +\ 1^m\ 15^s$
M. G. Z.	$= 18^u\ 6^m\ 22^s$ den 5. Sept.	für Gg. bericht. Std.	$= -\ 0^m\ 54^s$

Beispiel 2. Ein Chronometer, dessen Stand am 1. März mittags $2^m\ 36^s$ nach und dessen täglicher Gg. $3{,}2^s$ verlierend war, zeigt am 10. März nachmittags $7^u\ 49^m\ 6^s$. Welche mittlere Greenwicher Zeit ergiebt sich aus dieser Uhrzeit?

Astr. Chr. Z.	$= 7^u\ 49^m\ 6^s$ den 10. März	Std. am 1. März	$= +\ 2^m\ 36^s$
für Gg. bericht. Std.	$= +\ \ 3^m\ 6^s$	Ber. f. Gg. $(3{,}2^s \cdot 9{,}3)$	$= +\ \ \ 30^s$
M. G. Z.	$= 7^u\ 52^m\ 12^s$ den 10. März.	für Gg. bericht. Std.	$= +\ 3^m\ \ 6^s$

Um diese Rechnung nicht täglich anstellen zu müssen, bringt man, von der letzten Standbestimmung ausgehend, fortgesetzt an den Stand des vorhergehenden Mittages den täglichen Gang an, und trägt die so gefundenen Stände für jeden mittleren Greenwicher Mittag am Rande des nautischen Jahrbuches neben das Datum des betreffenden Tages ein.

Zur *Bestimmung des Ganges des Chronometers* ist die Kenntnis des Standes für zwei verschiedene Zeitpunkte erforderlich. Je größer die Zwischenzeit ist, um so genauer läßt sich der Gang bestimmen. Führt man wieder die oben angegebene Zeichenregel ein (Stand vor: minus; Stand nach: plus; Gang gewinnend: minus; Gang verlierend: plus), so erfolgt die Bestimmung des täglichen Ganges nach folgender einfachen Regel:

Man subtrahiere den ersten Stand vom zweiten (oder was dasselbe ist, man addiere den entgegengesetzten ersten Stand zum zweiten) und dividiere den Unterschied (die Summe) durch die Anzahl der zwischen den beiden Standbestimmungen verflossenen Tage.

Beispiel 1. Im mittleren Greenwicher Mittage des 12. September war der Stand des Chronometers $0^m\ 38^s$ vor, und im mittleren Greenwicher Mittage des 28. September war der Stand $0^m\ 58^s$ vor. Welchen Gang hatte das Chronometer?

Zweiter Stand: am 28. Sept.	$= -0^m\ 58^s$
entg. erster Stand: am 12. Sept.	$= +0^m\ 38^s$
Gang in 16 Tagen	$= -0^m\ 20^s$
tägl. Gang	$= 1{,}25^s$ gewinnend.

Beispiel 2. Im mittleren Greenwicher Mittag des 12. September war der Stand des Chronometers $0^m\ 38^s$ vor und am 22. Oktober um $3^u\ 48^m$ nachmittags war der Stand 0^m 58 nach. Welchen Gang hatte das Chronometer?

Zweiter Stand: am 22. Okt. $3{,}8^u$	$= +0^m\ 58^s$
entg. erster Stand: am 12. Sept. 0^u	$= +0^m\ 38^s$
Gang in 40,2 Tagen	$= +\ \ 96^s$
tägl. Gang	$= 2{,}4^s$ verlierend.

§ 207. Veränderlichkeit des Ganges. Chronometerkontrolle. Während eines längeren Landaufenthaltes sollte man der Bestimmung des Standes und des Ganges der Chronometer die größte Sorgfalt widmen. Wo es angängig ist, sollte man die Chronometer einem Chronometermacher oder einem Chronometer-Observatorium zur Bestimmung des Standes und des Ganges übergeben. Hat man hierzu keine Gelegenheit, so muß man Stand und Gang selbst bestimmen, und zwar entweder mit Hülfe von Zeitsignalen (vergleiche den nächsten Paragraphen) oder mit Hülfe astronomischer Beobachtungen (§ 209).

Dieser vor Beginn der Reise ermittelte Gang wird nun während der Reise nicht immer derselbe bleiben. Verschiedene Einflüsse, in erster Linie die Temperatur, bewirken eine Veränderung des Ganges. Der Stand, den man mit Hülfe des am Lande bestimmten Ganges berechnet hat, kann infolgedessen schon nach einiger Zeit merklich von dem wirklichen Stande abweichen. Der unbekannte Fehler ist im allgemeinen um so größer, je längere Zeit seit der letzten Standbestimmung verstrichen ist. Man muß daher jede Gelegenheit, den Stand und damit den Gang des Chronometers von neuem zu bestimmen, wahrnehmen. Einem Dampfer bietet sich in den meisten Häfen Gelegenheit, den Stand des Chronometers zu kontrollieren; auf Segelschiffen, die lange Reisen machen, bietet sich seltener Gelegenheit zur Chronometerkontrolle; die Fehler in der mittleren Greenwicher Zeit werden daher hier auch viel bedeutender sein.

Dem Seefahrer stehen im allgemeinen folgende vier Methoden zur Bestimmung des Chronometerstandes zur Verfügung.

1. mit Hülfe von Zeitsignalen (§ 208),

2. mit Hülfe einer Zeitbestimmung aus einer Gestirnshöhe bei bekannter Breite und Länge des Beobachtungsortes (§ 209),

3. mit Hülfe von Monddistanzen (§ 262—§ 269),

4. mit Hülfe von gleichen Sonnenhöhen (§ 270—§ 274).

§ 208. Bestimmung des Chronometerstandes mit Hülfe von Zeitsignalen. In einer Reihe von Häfen mit großem Schiffsverkehr, hat man Zeitsignalstationen errichtet. Das Nautische Jahrbuch enthält in der Tafel 22. ein Verzeichnis aller derartigen Stationen nebst der Angabe ihrer Beschaffenheit und der mittleren Greenwicher Zeit, um die das Signal abgegeben wird. Die häufigste Form der Zeitsignale ist der Zeitball (Zeitcylinder, Zeitscheibe). An vielen Orten wird auch zu einer bestimmten Zeit ein Kanonenschuß abgefeuert.

Die Bestimmung des Standes erfolgt in der Weise, daß man die Zeit des Chronometers im Augenblicke der Abgabe des Signals abliest und mit der mittleren Greenwicher Zeit der Abgabe des Signals vergleicht. Am genauesten wird diese Zeitbestimmung, wenn das Chronometer einen solchen Platz hat, daß die Beobachtung von einer einzigen Person, die das Signal beobachtet und gleichzeitig die Chronometerzeit abliest, gemacht werden kann. Bei der Beobachtung blickt die Person ununterbrochen nach der Signalstation und zählt nach dem Ticken des Chronometers die Sekunden, bis das Signal gegeben wird. Kann man vom Chronometer aus das Signal nicht sehen, so nehme man das Chronometer nicht von seinem Orte weg, sondern mache die Standbestimmung mit zwei Beobachtern, von denen der eine das Zeitsignal, der andere das Chronometer beobachtet. Der erste Beobachter thut dem zweiten die Abgabe des Signals durch Zuruf (stop) kund. Bei dieser Art der Beobachtung vergeht eine kurze Zeit, bis der Beobachter von der Abgabe des Signals benachrichtigt ist. Man muß also eine kleine (negative) Berichtigung an die abgelesene Chronometerzeit anbringen, bevor man den Stand bestimmt. Die Größe dieser Berichtigung, die bei verschiedenen Beobachtern verschieden ist, und die zwischen 1 und 3 Sekunden schwanken dürfte, ist für den S t a n d des Chronometers ohne Bedeutung. Da man aber auch gleichzeitig den G a n g bestimmen muß, so sollten bei diesen Standbestimmungen immer dieselben Beobachter genommen werden. Da der Fehler bei denselben Beobachtern immer nahezu derselbe ist, so wird sich trotz der falschen Stände ein richtiger Gang ergeben.

Ein einzelner Beobachter kann die Beobachtung auch mit Hülfe einer Taschenuhr machen, indem er die Uhrzeit der Signalabgabe abliest, und die Uhr mit dem Chronometer vergleicht.

Beispiel. Man beobachtet das Fallen eines Zeitballes, der um $0^u\ 0^m\ 0^s$ M. G. Z. fällt, nach einer Taschenuhr um $8^u\ 47^m\ 28^s$. Bei der darauf folgenden Vergleichung der Taschenuhr und des Chronometers zeigt die Taschenuhr $8^u\ 49^m\ 28^s$, das Chronometer $11^u\ 53^m\ 17^s$. Welchen Stand hat das Chronometer?

Das Fallen des Zeitballs ist genau 2^m vor der Vergleichung der Uhren beobachtet worden, also ist bei der Abgabe des Signals

$$\begin{array}{rl} \text{die M. G. Z.} = & 0^u\ \ 0^m\ \ 0^s \\ \text{die Chr. Z.} = & \underline{11^u\ 51^m\ 17^s} \\ \text{Stand} = & \ \ 8^m\ 43^s \text{ nach} \end{array}$$

Bei Schallsignalen (Kanonenschüssen) muß man die Entfernung des Schiffes von der Signalstation berücksichtigen. Da der Schall in einer Sekunde einen Weg von etwa 333 Metern durchläuft, so ist vor der Vergleichung für jede 333 Meter

Entfernung eine Berichtigung von -1^s, für jede Seemeile also eine solche von $-5{,}5^s$ an die abgelesene Chronometerzeit anzubringen.

Genauere Resultate erreicht man bei dieser Art der Signale, wenn man nach einer Handuhr den Augenblick des Aufblitzens des Schusses beobachtet und daraus den Stand des Chronometers in der eben angegebenen Weise bestimmt.

§ 209. Bestimmung des Chronometerstandes aus einer Gestirnshöhe. Ist die Breite und Länge eines Ortes mit hinreichender Genauigkeit bekannt, so kann man an diesem Orte den Chronometerstand bestimmen, indem man aus einer Gestirnshöhe in der Nähe des ersten Vertikals die mittlere Ortszeit und daraus mit Hülfe der bekannten Länge die mittlere Greenwicher Zeit bestimmt. Durch Vergleichung dieser Zeit mit der bei der Beobachtung abgelesenen Chronometerzeit ergiebt sich der Stand des Chronometers.

Diese Methode läßt sich auf See zur Anwendung bringen, wenn man in Sicht von Küstenpunkten ist, deren Länge genau bekannt ist. Durch Peilungen und Abstandsbestimmungen wird zunächst der Schiffsort so genau wie möglich bestimmt, was zur Erreichung eines sicheren Resultates notwendig ist. Der weitere Gang der Rechnung wird durch die folgenden beiden Beispiele erläutert.

Beispiel 1. Sonne. Am 8. August 1903 vormittags peilt man Bishop Rock ($49^0\,52{,}5'\,N$ und $6^0\,27{,}0'\,W$) rechtweisend $N\,10^{sm}$ ab; gleichzeitig macht man nach einem Chronometer, dessen angenäherter Stand 35^m vor gegen M. G. Z. ist, die folgenden Beobachtungen

Chr. Z. $= 7^u\,59^m\;\;8^s$	$\underline{\odot} = 20^0\,56'\,10''$		
$7^u\,59^m\,46^s$	$21^0\;\;2'\;\;0''$	Idb. $= +\,0'\,50''$;	A. H. $= 8$ m.
$8^u\;\;0^m\,18^s$	$21^0\;\;6'\,30''$		

Welcher Stand des Chronometers ergiebt sich hieraus? Im mittleren Greenwicher Mittage des 24. Juli ist der Stand $33^m\,37^s$ vor gewesen. Welchen mittleren Gang hat das Chronometer in der Zwischenzeit gehabt?

Bishop Rock:	$\varphi = 49^0\,52{,}5'\,N$	$\lambda = 6^0\,27{,}0'\,W$
entg. Plg. $S\,10^{sm}$	$b = \quad 10{,}0'\,S$	$l = \quad 0{,}0'$
Schiffsort:	$\varphi = 49^0\,42{,}5'\,N$	$\lambda = 6^0\,27{,}0'\,W$

Mittel der Beobachtungen: Chr. Z. $= 7^u\,59^m\,44^s$ $\underline{\odot} = 21^0\,1'\,33''$

Astr. Chr. Z. $= 19^u\,59^m\,44^s$ den 7. Aug.
Std. $= -\,35^m$
M. G. Z. $= 19^u\,25^m$ den 7. Aug.

$\odot\,\delta_0 = 16^0\,41{,}6'\,N$	$e_0 = +\,5^m\,43^s$
$0{,}69'\,.\,19{,}4 = -\,13{,}4'$	$0{,}3^s\,.\,19{,}4 = -\;\;6^s$
$\odot\,\delta = 16^0\,28{,}2'\,N$	$e = +\,5^m\,37^s$

	$\varphi = 49^0\,42{,}5'\,N$ *log sec* $= 0{,}18\,932$
	$\delta = 16^0\,28{,}2'\,N$ *log sec* $= 0{,}01\,820$
Beob. $\underline{\odot} = 21^0\;\;1'\,33''$	$z_0 = 33^0\,14{,}3'$
Idb. $= +\;\;0'\,50''$	$z = 68^0\,49{,}2'$
$\underline{\odot} = 21^0\;\;2'\,23''$	$s = 102^0\;\;3{,}5'$
$= 21^0\;\;2{,}4'$	$s/2 = 51^0\;\;1{,}8'$ *log sin* $= 9{,}89\,069$
G. B. $= +\;\;8{,}4'$	$u/2 = 17^0\,47{,}4'$ *log sin* $= 9{,}48\,506$
$h = 21^0\,10{,}8'$	$t = 18^{st}\,54^m\,6^s$ *log sem* $= 9{,}58\,327$

W. O. Z. = $18^u\ 54^m\ 6^s$
e = + $5^m\ 37^s$

M. O. Z. = $18^u\ 59^m\ 43^s$
Z. U. = + $25^m\ 48^s$

M. G. Z. = $19^u\ 25^m\ 31^s$ den 7. Aug.
Chr. Z. = $19^u\ 59^m\ 44^s$

Stand = $0^{st}\ 34^m\ 13^s$ vor gegen M. G. Z.

Stand um $19{,}4^u$ den 7. Aug. = $-34^m\ 13^s$
entg. Stand um $0{,}0^u$ den 24. Juli = $+33^m\ 37^s$

Gang in 14,8 Tg. = $-\ 0^m\ 36^s$
tägl. Gang = $2{,}4^s$ gewinnend.

Beispiel 2. Fixstern. Am 24. September 1903 nachmittags beobachtet man in Dar es Salam ($6^0\ 47{,}7'\ S$ und $39^0\ 20{,}3\ O$) nach einem Chronometer, dessen Stand angenähert 9^m nach gegen M. G. Z. ist, über einem künstlichen Horizont die folgenden doppelten scheinbaren Höhen des Antares westlich vom Meridian

Chr. Z. = $4^u\ 28^m\ 49^s$	$2 * h' = 84^0\ 58'\ 0''$	
$4^u\ 29^m\ 41^s$	$85^0\ 24'\ 50''$	Idb. = $-1'\ 5''$
$4^u\ 30^m\ 27^s$	$85^0\ 47'\ 20''$	

Welcher Stand des Chronometers ergiebt sich hieraus? Im mittleren Greenwicher Mittage des 1. Sept. ist der Stand des Chronometers $8^m\ 17^s$ nach gewesen. Welchen mittleren Gang hat das Chronometer in der Zwischenzeit gehabt?

Mittel der Beobachtungen: Chr. Z. = $4^u\ 29^m\ 39^s$ $2 * h' = 85^0\ 23'\ 23''$

Astr. Chr. Z. = $4^u\ 30^m$ den 24. Sept.
Std. = + 9^m

M. G. Z. = $4^u\ 39^m$ den 24. Sept.

$m \odot \alpha_0 = 12^{st}\ 8^m\ 34^s$
$+\ 0^m\ 46^s$
$m \odot \alpha = 12^{st}\ 9^m\ 20^s$ $* \alpha = 16^{st}\ 23^m\ 30^s$ $* \delta = 26^0\ 13{,}0'\ S$

Beob. $2 * h' = 85^0\ 23'\ 23''$
Idb. = $-\ 1'\ 5''$
$2 * h' = 85^0\ 22'\ 18'' : 2$
$* h' = 42^0\ 41'\ 9''$
$R = -\ 1'\ 3''$
$h = 42^0\ 40'\ 6''$
$h = 42^0\ 40{,}1'$

$\varphi = 6^0\ 47{,}7'\ S$ $log\ sec = 0{,}00\ 306$
$\delta = 26^0\ 13{,}0'\ S$ $log\ sec = 0{,}04\ 714$
$z_0 = 19^0\ 25{,}3'$
$z = 47^0\ 19{,}9'$
$s = 66^0\ 45{,}2'$
$s/_2 = 33^0\ 22{,}6'$ $log\ sin = 9{,}74\ 047$
$u/_2 = 13^0\ 57{,}3'$ $log\ sin = 9{,}38\ 230$
$t = 3^{st}\ 1^m\ 36^s$ $log\ sem = 9{,}17\ 297$

$* t = 3^{st}\ 1^m\ 36^s$
$* \alpha = 16^{st}\ 23^m\ 30^s$

St. Z. = $19^u\ 25^m\ 6^s$
$m \odot \alpha = 12^{st}\ 9^m\ 20^s$

M. O. Z. = $7^u\ 15^m\ 46^s$
Z. U. = $2^{st}\ 37^m\ 21^s$

M. G. Z. = $4^u\ 38^m\ 25^s$ den 24. Sept.
Chr. Z. = $4^u\ 29^m\ 39^s$

Stand = $0^{st}\ 8^m\ 46^s$ nach gegen M. G. Z.

Stand um $4{,}6^u$ den 24. Sept. $= + 8^m\ 46^s$
entg. Stand um $0{,}0^u$ den 1. Sept. $= - 8^m\ 17^s$
Gang in 23,2 Tg. $= +\ 29^s$
tägl. Gang $= 1{,}3^s$ verlierend.

§ 210. Genauigkeit der Standbestimmung aus einer Gestirnshöhe. Bei dem im vorigen Paragraphen erörterten Verfahren kann ein Fehler in der mittleren Greenwicher Zeit und damit im Stande des Chronometers entstehen

1. durch einen Fehler in der beobachteten Höhe,
2. durch einen Fehler in der Breite des Beobachtungsortes,
3. durch einen Fehler in der Länge des Beobachtungsortes.

Ein nennenswerter Fehler in der Abweichung, der Zeitgleichung und der Geraden Aufsteigung läßt sich bei dieser Methode, nötigenfalls durch Wiederholung der Rechnung mit dem gefundenen Stande, stets vermeiden.

Die durch Fehler in der Höhe und in der Breite hervorgerufenen Fehler im Stundenwinkel und somit im Stande sind in § 204 ausführlich behandelt worden. Um diese Fehler möglichst klein zu machen, sollte man zu Standbestimmungen nur Höhen im ersten Vertikal oder in dessen unmittelbarer Nähe verwenden.

Wie groß der Fehler im Stundenwinkel und damit im Stande werden kann, wenn das Gestirn zu weit vom ersten Vertikal entfernt steht, zeigt folgendes Beispiel.

In der Nähe von Kap Horn ($\varphi = 56^\circ S$) versuchte man im Winter mit Hülfe einer Sonnenhöhe den Stand des Chronometers zu bestimmen. Da die Sonne beim Aufgange ein Azimut von etwa 45° Grad hatte, so konnte man erst eine anscheinend verwendbare Höhe beobachten, als das Azimut der Sonne etwa 30° betrug. Die Luft war klar, die Kimm gut, der Einfluß des Temperaturunterschiedes zwischen Luft und Wasser, der ungefähr $10^\circ C$ betrug, war nicht berücksichtigt. Infolgedessen war die aus der Beobachtung abgeleitete Sonnenhöhe um etwa 4′ falsch. Der aus dieser ungenauen Höhe abgeleitete Stundenwinkel war infolgedessen um den Betrag $4 \,.\, cosec\ 30^\circ \,.\, sec\ 56^\circ = 14'$ oder um 56^s ungenau; um ebensoviel also auch der hieraus abgeleitete Stand.

War auch die Breite des Beobachtungsortes falsch, so mußte sich im Stundenwinkel ein weiterer Fehler einstellen, und zwar ergiebt sich aus der in § 204 abgeleiteten Formel, daß jede Minute Breitenfehler einen Fehler im Stande von 12^s zur Folge hat. Die Beobachtung war also trotz klarer Luft und guter Kimm für eine Chronometerkontrolle ungeeignet; um ein gutes Resultat zu erzielen, hätte man in diesem Falle ein anderes Gestirn in günstigerem Azimute beobachten müssen.

Ein Fehler in der Länge des Beobachtungsortes geht mit seinem vollen Betrage in die mittlere Greenwicher Zeit und somit in den Stand ein (einer Minute Längenfehler entsprechen vier Sekunden Standfehler).

Man erkennt hieraus, daß die Bestimmung der Länge des Beobachtungsortes mit großer Sorgfalt geschehen muß. Auf die Breite kommt es bei Beobachtungen im ersten Vertikal oder in dessen Nähe — und andere sind unbedingt zu vermeiden — weniger an.

Es ist daher bei der Bestimmung des Schiffsortes aus Peilungen von Küstenpunkten besonders darauf zu achten, daß, wenn das Schiff nördlich oder südlich von diesen Punkten steht, die Peilungen recht genau, daß dagegen, wenn das Schiff östlich oder westlich von ihnen steht, die Abstände recht genau sind.

§ 211. Bestimmung der wahren Ortszeit nach der „Schiffsuhr". Während das Chronometer zur Bestimmung der Greenwicher Zeit dient, dient die Schiffsuhr zur Bestimmung der Ortszeit. Diese Uhr, an deren Werk keine hohen Ansprüche gestellt zu werden brauchen, ist gewöhnlich so angebracht, daß sie vom Deck oder von der Kommandobrücke aus zu sehen ist. Man stellt sie nicht wie die Uhren am Lande nach mittlerer, sondern nach wahrer Ortszeit. Es geschieht dies auf Grund einer astronomischen Beobachtung, indem man (gewöhnlich in Verbindung mit der im nächsten Kapitel zu besprechenden Chronometerlänge) die Uhrzeit bei der Beobachtung mit der aus der Beobachtung abgeleiteten wahren Ortszeit vergleicht.

Beispiel. Man hat vormittags eine Sonnenhöhe beobachtet.

Man berechnet aus ihr (nach § 203) den Stundenwinkel =	$20^u\ 2^m$
Bei der Beobachtung zeigte die Schiffsuhr	$20^u\ 6^m$
also war der Stand der Uhr gegen W. O. Z. =	4^m vor

Die Uhr mußte also, um wahre Ortszeit zu zeigen, 4^m zurückgestellt werden.

Eine so gestellte Uhr zeigt weiterhin nur dann wirklich die wahre Ortszeit, wenn das Schiff auf demselben Meridiane bleibt. Sobald aber das Schiff seine Länge ändert, ändert sich auch seine Ortszeit; die Angaben der Uhr sind also nicht mehr richtig. Soll demnach die Uhr die Zeit richtig angeben, so muß sie von Zeit zu Zeit richtig gestellt werden. Es ist Gebrauch, dieses wenigstens einmal täglich, bei großen Längenänderungen aber zweimal oder noch öfter zu thun.

Auf diese Weise giebt die Uhr die Ortszeit wohl genau genug an, um danach das Leben und den Dienst an Bord zu regeln; wird aber eine genauere Kenntnis der wahren Ortszeit verlangt, so muß man an die abgelesene Uhrzeit noch eine Berichtigung für den seit der letzten Standbestimmung gutgemachten Längenunterschied anbringen.

Diese Berichtigung für Längenänderung ist gleich dem in Zeit verwandelten gutgemachten Längenunterschied; sie wird addiert, wenn man nach Osten, sie wird subtrahiert, wenn man nach Westen segelt.

Beispiel 1. Vormittags 8^u findet man den Stand der Schiffsuhr gleich $6{,}5^m$ nach gegen wahre Ortszeit. Man segelt darauf $1^\circ 10'$ *O* und macht nach der Uhr um $1^u\ 11{,}8^m$ nachmittags eine Beobachtung. Welches ist die wahre Ortszeit der Beobachtung?

Uhrzeit =	$1^u\ 11{,}8^m$
Std. g. W. O. Z. =	$+\ 6{,}5^m$
Ber. f. Lg.-Änd. =	$+\ 4{,}7^m$
W. O. Z. =	$1^u\ 23{,}0^m$

Beispiel 2. Auf $56^\circ 10'$ *N* und $4^\circ 25'$ *O* findet man nachmittags 4^u den Stand der Schiffsuhr gegen wahre Ortszeit gleich $13{,}8^m$ vor. Darauf segelt man rechtweisend *WNW* 34^{sm} und macht nach der Uhr um $9^u\ 32{,}5^m$ nachmittags eine Beobachtung. Welches ist die wahre Ortszeit bei der Beobachtung?

Für *N* 6 *W* 34^{sm} ist $b = 13'$ *N*, $a = 31{,}4^{sm}$ *W*, mit Hülfe der Mittelbreite $\varphi_m = 56^\circ 17'$ ergiebt sich hieraus $l = 57'$ *W*.

Uhrzeit =		$9^u\ 32{,}5^m$
Std. g. W. O. Z. =	$-\ 13{,}8^m$	$\left.\right\} = -\ 17{,}6^m$
Ber. f. Lg.-Änd. =	$-\ 3{,}8^m$	
W. O. Z. =		$9^u\ 14{,}9^m$

Chronometerlänge.

§ 212. Allgemeines Prinzip der Längenbestimmung. Da der Unterschied zwischen der mittleren Ortszeit des Schiffes und der entsprechenden mittleren Greenwicher Zeit gleich der Länge des Schiffsortes ist (vergl. § 184), so bestimmt man die Länge stets in der Weise, daß man den Unterschied zwischen der mittleren Ortszeit und der entsprechenden mittleren Greenwicher Zeit bildet und diesen Zeitunterschied in Bogenmaß verwandelt.

Die mittlere Greenwicher Zeit erhält man in den meisten Fällen durch das Chronometer. Ist kein Chronometer an Bord, oder ist das Chronometer in Unordnung geraten oder unbrauchbar geworden, so nimmt man die mittlere Greenwicher Zeit von einer beliebigen anderen Uhr, deren Stand gegen diese Zeit man durch astronomische Beobachtungen (Monddistanzen) bestimmt hat (vergleiche § 267). Man kann allerdings mit der Bestimmung der mittleren Greenwicher Zeit durch Monddistanzen eine Bestimmung der Ortszeit derartig verbinden, daß man die Länge ganz ohne Uhr findet. Sieht man von diesem wenig gebräuchlichen Verfahren ab, so sind alle Längenbestimmungen wesentlich übereinstimmend, indem man stets die Ortszeit aus einer astronomischen Beobachtung ableitet (nach § 203), die mittlere Greenwicher Zeit aber durch eine Uhr erhält.

Bei der Bestimmung des Zeitunterschiedes und der Länge ist folgendes zu beachten:

1. Beide Zeiten sind astronomisch zu rechnen.
2. Haben beide Zeiten dasselbe Datum, so subtrahiert man die kleinere von der größeren.
3. Haben beide Zeiten verschiedenes Datum, so ist die Zeit, deren Datum voraus ist, zunächst durch Addition von 24 Stunden auf das Datum des vorhergehenden Tages zu bringen, und erst dann ist die kleinere Zeit von der größeren zu subtrahieren.
4. Die Länge ist Ost, wenn die mittlere Ortszeit größer als die mittlere Greenwicher Zeit ist; sie ist West, wenn die mittlere Ortszeit kleiner als die mittlere Greenwicher Zeit ist.

§ 213. Berechnung der Chronometerlänge. Zur Berechnung der Länge mit Hülfe des Chronometers ist die Beobachtung einer Gestirnshöhe und eine gleichzeitige Ablesung der Zeit eines Chronometers, dessen Stand gegen mittlere Greenwicher Zeit bekannt ist, erforderlich. Die Beobachtung kann auch nach einer beliebigen anderen Uhr (Handuhr, Beobachtungsuhr) gemacht werden, die vor oder nach der Beobachtung mit dem Chronometer verglichen wird (vergl. 194).

Da die Längenbestimmung nach dem Vorhergehenden zum wesentlichsten Teile aus einer Zeitbestimmung besteht, so stimmt die Rechnung auch bis auf den Schluß mit der in § 203 angegebenen Berechnung der Zeit überein. Sie muß den folgenden Weg einschlagen:

1. Man bestimmt die genaue mittlere Greenwicher Zeit.
2. Für diese Zeit entnimmt man die Werte aus dem Jahrbuche und zwar

a) bei der Sonne: die Abweichung der Sonne und die Zeitgleichung;
b) bei anderen Gestirnen: die Gerade Aufsteigung der mittleren Sonne, die Gerade Aufsteigung des Gestirnes und die Abweichung des Gestirnes.

3. Hierauf beschickt man den Kimmabstand zur wahren Mittelpunktshöhe.
4. Aus den so gefundenen Werten berechnet man den Stundenwinkel.
5. Vom Stundenwinkel geht man über zur mittleren Ortszeit und zwar
   a) bei der Sonne: durch Anbringen der Zeitgleichung;
   b) bei den anderen Gestirnen: durch Addition der Geraden Aufsteigung des Gestirnes und Subtraktion der Geraden Aufsteigung der mittleren Sonne.
6. Man bestimmt die Länge aus dem Unterschiede der mittleren Ortszeit und der mittleren Greenwicher Zeit nach der am Ende des vorigen Paragraphen gegebenen Regel.

Beispiel 1. Sonne. Am 6. Mai 1903 vormittags, nach Besteck auf $50^{\circ}\,16'\,N$ und $39^{\circ}\,48'\,W$, beobachtet man nach einem Chronometer, dessen Stand $23^m\,27^s$ vor gegen M. G. Z. ist

Chr. Z. $= 10^u\,27^m\,16^s$ $\quad \underline{\odot} = 26^{\circ}\,7'\,20''$ $\quad$ Idb. $= +\,1'\,50''$ $\quad$ A. H. $= 6$ m

Welche Länge folgt hieraus?

Astr. Chr. Z. $= 22^u\,27^m\,16^s$ den 5. Mai
Std. $= -\,23^m\,27^s$
M. G. Z. $= 22^u\;3^m\,49^s$ den 5. Mai.

$\odot\,\delta_0 = 15^{\circ}\,59{,}5'\,N$ $\qquad e_0 = -\,3^m\,19^s$
$0{,}72' \cdot 22{,}1 \quad +\,15{,}9'$ $\qquad 0{,}2^s \cdot 22{,}1 = +\;4^s$
$\odot\,\delta = 16^{\circ}\,15{,}4'\,N$ $\qquad e = -\,3^m\,23^s$

	$\varphi = 50^{\circ}\,16{,}0'\,N$	$\log sec = 0{,}19\,435$
	$\delta = 16^{\circ}\,15{,}4'\,N$	$\log sec = 0{,}01\,772$
Beob. $\underline{\odot} = 26^{\circ}\;7'\,20''$	$z_0 = 34^{\circ}\;0{,}6'$	
Idb. $= +\;1'\,50''$	$z = 63^{\circ}\,41{,}2'$	
$\underline{\odot} = 26^{\circ}\;9'\,10''$	$s = 97^{\circ}\,41{,}8'$	
$= 26^{\circ}\;9{,}2'$	$s/_2 = 48^{\circ}\,50{,}9'$	$\log sin = 9{,}87\,678$
G. B. $= +\;9{,}6'$	$u/_2 = 14^{\circ}\,50{,}3'$	$\log sin = 9{,}40\,839$
$h = 26^{\circ}\,18{,}8'$	$t = 19^{st}\,27^m\,15^s$	$\log sem = 9{,}49\,724$

W. O. Z. $= 19^u\,27^m\,15^s$
$e = -\;3^m\,23^s$
M. O. Z. $= 19^u\,23^m\,52^s$ den 5. Mai
M. G. Z. $= 22^u\;3^m\,49^s$ den 5. Mai
Z. U. $= 2^{st}\,39^m\,57^s$
Länge $= 39^{\circ}\,59{,}3'\,W$

Beispiel 2. Planet. Am 27. Dezember 1903 nachmittags, nach Besteck auf $10^{\circ}\,48'\,N$ und $137^{\circ}\,49'\,W$, beobachtet man nach einem Chronometer, dessen Stand $0^m\,14^s$ vor gegen M. G. Z. ist, den folgenden Kimmabstand des Mars westlich vom Meridian

Chr. Z. $= 3^u\,29^m\,18^s$ $\quad \underline{♂} = 28^{\circ}\,37'$ $\quad$ Idb. $= +\,2'$ $\quad$ A. H. $= 6$ m.

Welche Länge folgt hieraus?

Astr. Chr. Z. = $15^u\,29^m\,18^s$ den 27. Dez.
Std. = — $0^m\,14^s$
M. G. Z. = $15^u\,29^m\,4^s$ den 27. Dez.

$m\odot\,\alpha_0 = 18^{st}\,19^m\,10^s$	$♂\,\alpha_0 = 20^{st}\,58^m\,28^s$	$♂\,\delta_0 = 18^\circ\,24{,}2'\,S$
$+\;2^m\,33^s$	$7{,}9^s \,.\, 15{,}5 = +\;2^m\;\,2^s$	$0{,}57' \,.\, 15{,}5 = -\;8{,}8'$
$m\odot\,\alpha = 18^{st}\,21^m\,43^s$	$♂\,\alpha = 21^{st}\;\,0^m\,30^s$	$♂\,\delta = 18^\circ 15{,}4'\,S \quad \pi = 4''$

	$\varphi = 10^\circ\,48'\,N$	$\log sec = 0{,}00\,776$
	$\delta = 18^\circ\,15'\,S$	$\log sec = 0{,}02\,241$
	$z_0 = 29^\circ\;\,3'$	
Beob. ∡ $= 28^\circ\,37'$	$z = 61^\circ\,27'$	
Jdb. $= +\;2'$	$s = 90^\circ\,30'$	
∡ $= 28^\circ\,39'$	$s/_2 = 45^\circ\,15'$	$\log sin = 9{,}85\,137$
G. B. $= -\;6'$	$u/_2 = 16^\circ\,12'$	$\log sin = 9{,}44\,559$
$h = 28^\circ\,33'$	$t = 3^{st}\,39^m\,32^s$	$\log sem = 9{,}32\,713$

$♂\,t = \;\;3^{st}\,39^m\,32^s$
$♂\,\alpha = 21^{st}\;\,0^m\,30^s$
St. Z. $= 24^u\,40^m\;\,2^s$
$m\odot\,\alpha = 18^{st}\,21^m\,43^s$
M. O. Z. $= \;\;6^u\,18^m\,19^s$ den 27. Dez.
M. G. Z. $= 15^u\,29^m\;\,4^s$ den 27. Dez.
Z. U. $= \;\;9^{st}\,10^m\,45^s$
Länge $= 137^\circ\,41'\,W$

§ 214. **Das gewöhnliche astronomische Mittagsbesteck.** Man pflegt an Bord auf hoher See mindestens einmal des Tags nämlich für den wahren Ortsmittag den Schiffsort genau zu bestimmen und zwar auf Grund der Loggerechnung sowie auf Grund von astronomischen Beobachtungen. Wenn das Wetter für die Anstellung astronomischer Beobachtungen günstig ist, so geschieht die astronomische Ortsbestimmung mit Hülfe zweier Beobachtungen und zwar einer Höhe im Meridian und einer Höhe im ersten Vertikal oder dessen Nähe. Die Berechnung besteht also aus einer Mittagsbreite und einer Chronometerlänge. Es wird in den seltensten Fällen möglich sein, beide Beobachtungen gleichzeitig, oder doch so schnell hintereinander zu machen, daß sie als an demselben Orte angestellt betrachtet werden können. Es ist daher mit Hülfe der Loggerechnung einerseits aus der Mittagsbreite die Breite bei der anderen Beobachtung und aus der hieraus berechneten Länge die Länge im Mittage abzuleiten. Zur Bestimmung der Länge kann sowohl eine vormittägige wie auch eine nachmittägige Beobachtung benutzt werden.

Man schlägt bei der Berechnung den folgenden Weg ein:

1. Man berechnet zuerst die Mittagsbreite;
2. Darauf bestimmt man die Breite des Schiffsortes bei der anderen Beobachtung aus dem zwischen den beiden Beobachtungen zurückgelegten Wege;
3. Mit dieser Breite berechnet man die Chronometerlänge;
4. Endlich bestimmt man die Länge im Mittage aus dem zwischen den beiden Beobachtungen zurückgelegten Wege.

Beispiel 1. Längenbestimmung vormittags. Am 25. Oktober 1903 vormittags beobachtet man nach einem Chronometer, dessen Stand $14^m\ 18^s$ nach gegen M. G. Z. ist:

Chr. Z. $= 9^u\ 31^m\ 23^s$ $\underline{\odot} = 16^0\ 55'$ Jdb. $= -2'$ A. H. $= 7$ m

Darauf segelt man bis zum Mittage rechtweisend $NzO\tfrac{1}{2}O$ 21 Seemeilen und beobachtet nun:

$\underline{\odot} = 44^0\ 36'$ im Süd-Meridian Jdb. $= +1'$ A. H. $= 7$ m

Auf welcher Breite und Länge befindet sich das Schiff mittags, und wie ist es versetzt, wenn der Schiffsort nach Loggerechnung $33^0\ 18'\ N$ und $30^0\ 31'\ W$ ist?

Berechnung der Breite.

M. O. Z. $= 23^u\ 44^m$ den 24. Okt.
Z. U. $= +\ 2^{st}\ 2^m$
M. G. Z. $= 1^u\ 46^m$ den 25. Okt.

$\odot\ \delta_0 = 11^0\ 47{,}5'\ S$
$0{,}86' \cdot 1{,}8 = +\ 1{,}5'$
$\odot\ \delta = 11^0\ 49{,}0'\ S$

Beob. $\underline{\odot} = 44^0\ 36'\ S$
Jdb. $= +\ 1'$
$\underline{\odot} = 44^0\ 37'$
G. B. $= +\ 10{,}5'$
$h = 44^0\ 47{,}5'\ S$
$z_0 = 45^0\ 12{,}5'\ N$
$\delta = 11^0\ 49{,}0'\ S$
Breite mittags $= 33^0\ 23{,}5'\ N$

Berechnung der Länge.
Zwischen den beiden Beobachtungen ist gutgemacht.

$N1\tfrac{1}{2}O\ 21^{sm}$: $b = 20{,}1'\ N$ $a = 6{,}1^{sm}\ O$ $l = 7{,}3'\ O$

Breite mittags $= 33^0\ 23{,}5'\ N$
entg. $b = 20{,}1'\ S$
Breite bei der ersten Beobachtung $= 33^0\ 3'\ N$

Astr. Chr. Z. $= 21^u\ 31^m\ 23^s$ den 24. Okt.
Std. $= +\ 14^m\ 18^s$
M. G. Z. $= 21^u\ 45^m\ 41^s$ den 24. Okt.

$\odot\ \delta_0 = 11^0\ 26{,}5'\ S$
$0{,}87' \cdot 21{,}8 = +\ 19{,}0'$
$\odot\ \delta = 11^0\ 45{,}5'\ S$

$e_0 = -\ 15^m\ 36^s$
$0{,}3^s \cdot 21{,}8 = +\ 7^s$
$e = -\ 15^m\ 43^s$

Beob. $\underline{\odot} = 16^0\ 55'$
Jdb. $= -\ 2'$
$\underline{\odot} = 16^0\ 53'$
G. B. $= +\ 8'$
$h = 17^0\ 1'$

$\varphi = 33^0\ 3'\ N$ $log\ sec = 0{,}07\,665$
$\delta = 11^0\ 46'\ S$ $log\ sec = 0{,}00\,922$
$z_0 = 44^0\ 49'$
$z = 72^0\ 59'$
$s = 117^0\ 48'$
$s/_2 = 58^0\ 54'$ $log\ sin = 9{,}93\,261$
$u/_2 = 14^0\ 5'$ $log\ sin = 9{,}38\,620$
$t = 19^{st}\ 57^m\ 56^s$ $log\ sem = 9{,}40\,468$

$$
\begin{aligned}
\text{W. O. Z.} &= 19^u\ 57^m\ 56^s \\
c &= -\ 15^m\ 43^s \\
\hline
\text{M. O. Z.} &= 19^u\ 42^m\ 13^s \text{ den 24. Okt.} \\
\text{M. G. Z.} &= 21^u\ 45^m\ 41^s \text{ den 24. Okt.} \\
\hline
\text{Z. U.} &= 2^{st}\ 3^m\ 28^s \\
\text{Länge b. d. Beob.} &= 30^0\ 52'\ W \\
l &= 7'\ O \\
\hline
\text{Länge mittags} &= 30^0\ 45'\ W
\end{aligned}
$$

Schiffsort nach Loggerechnung:	$\varphi = 33^0\,18'\,N$	$\lambda = 30^0\,31'\,W$
„ „ astr. Beob.:	$\varphi = 33^0\,23'\,N$	$\lambda = 30^0\,45'\,W$
	$b = 5'\,N$	$l = 14'\,W$
		$a = 12^{sm}\,W$

Besteckversetzung: $N\,6\,W\,13^{sm}$.

Beispiel 2. Längenbestimmung nachmittags. Am 15. November 1903 mittags, nach Besteck auf $13^0\,25'\,S$ und $95^0\,36'\,O$, beobachtet man

$\underline{\odot} = 84^0\,56'\,30''$ im Süd-Meridian Jdb. $= +\,1'\,30''$ A. H. = 6 m.

Darauf segelt man rechtweisend $S\,W\,z\,W$ 8 Seemeilen und beobachtet nun nach einem Chronometer, dessen Stand $1^m\,58^s$ nach gegen M. G. Z. ist, die folgende Mondhöhe westlich vom Meridian

Chr. Z. $= 6^u\,42^m\,13^s$ $\underline{☾} = 22^0\,3'\,50''$ Jdb. $= +\,1'\,30''$ A. H. = 6 m.

Auf welcher Breite und Länge befindet sich das Schiff mittags und welches ist die Besteckversetzung?

Berechnung der Breite.

$$
\begin{aligned}
\text{M. O. Z.} &= 23^u\ 45^m \text{ den 14. Nov.} \\
\text{Z. U.} &= -\ 6^{st}\ 22^m \\
\hline
\text{M. G. Z.} &= 17^u\ 23^m \text{ den 14. Nov.}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\odot\,\delta_0 &= 17^0\ 59{,}9'\ S \\
0{,}66'\,.\,17{,}4 &= +\ 11{,}5' \\
\hline
\odot\,\delta &= 18^0\ 11{,}4'\ S
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Beob. } \underline{\odot} &= 84^0\ 56'\ 30''\ S \\
\text{Jdb.} &= +\ 1'\ 30'' \\
\hline
\underline{\odot} &= 84^0\ 58{,}0' \\
\text{G. B.} &= +\,11{,}8' \\
\hline
h &= 85^0\ \ 9{,}8'\ S \\
z &= 4^0\ 50{,}2'\ N \\
\delta &= 18^0\ 11{,}4'\ S \\
\hline
\text{Breite mittags} &= 13^0\ 21'\ S
\end{aligned}
$$

Berechnung der Länge.

Zwischen den beiden Beobachtungen ist gutgemacht

$S\,5\,W\ 8^{sm}$: $b = 4{,}4'\,S$ $a = 6{,}7^{sm}\,W$ $l = 6{,}9'\,W$

$$
\begin{aligned}
\text{Breite mittags} &= 13^0\ 21'\ S \\
b &= 4'\ S \\
\hline
\text{Breite bei der zweiten Beobachtung} &= 13^0\ 25'\ S
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Astr. Chr. Z.} &= 18^u\ 42^m\ 13^s \text{ den 14. Nov.} \\
\text{Std.} &= +\ 1^m\ 58^s \\
\hline
\text{M. G. Z.} &= 18^u\ 44^m\ 11^s \text{ den 14. Nov.}
\end{aligned}
$$

$m\odot\alpha_0 = 15^{st}\,29^m\,39^s$ ☾ α um $18^u = 12^{st}\,8^m\,4^s$ ☾ δ um $18^u = 1^\circ\,14{,}2'\,S$

$+\;3^m\,5^s$ $2{,}19^s . 44 = +\,1^m\,36^s$ $0{,}181' . 44 = +\,8{,}0'$

$m\odot\alpha = 15^{st}\,32^m\,44^s$ ☾ $\alpha = 12^{st}\,9^m\,40^s$ ☾ $\delta = 1^\circ\,22{,}2'\,S$ ☾ $\pi = 58'\,28''$

	$\varphi = 13^\circ\,25'\,S$	$\log sec = 0{,}01\,202$
	$\delta = 1^\circ\,22'\,S$	$\log sec = 0{,}00\,012$
	$z_0 = 12^\circ\,3'$	
Beob. ☾̄ $= 22^\circ\,3'\,50''$	$z = 67^\circ\,23'$	
Idb. $= +\,1'\,30''$	$s = 79^\circ\,26'$	
☾̄ $= 22^\circ\,5{,}3'$	$s/_2 = 39^\circ\,43'$	$\log sin = 9{,}80\,550$
G. V. $= +\,31{,}7'$	$u/_2 = 27^\circ\,40'$	$\log sin = 9{,}66\,682$
$h = 22^\circ\,37{,}0'$	$t = 4^{st}\,28^m\,14^s$	$\log sem = 9{,}48\,446$

☾ $t = 4^{st}\,28^m\,14^s$
☾ $\alpha = 12^{st}\,9^m\,40^s$
St. Z. $= 16^u\,37^m\,54^s$
$m\odot\alpha = 15^{st}\,32^m\,44^s$
M. O. Z. $= 1^u\,5^m\,10^s$ den 15. Nov.
M. G. Z. $= 18^u\,44^m\,11^s$ den 14. Nov.
Z. U. $= 6^{st}\,20^m\,59^s$
Länge b. d. Beob. $= 95^\circ\,15'\,O$
entg. $l = 7'\,O$
Länge mittags $= 95^\circ\,22'\,O$

Schiffsort nach Loggerechnung: $\varphi = 13^\circ\,25'\,S$ $\lambda = 95^\circ\,36'\,O$
Schiffsort nach astr. Beob.: $\varphi = 13^\circ\,21'\,S$ $\lambda = 95^\circ\,22'\,O$
$b = 4'\,N$ $l = 14'\,W$
$a = 14^{sm}\,W$

Besteckversetzung $= N\,6\tfrac{1}{2}\,W\,15^{sm}$.

§ 215. Genauigkeit der Längenbestimmung durch Chronometer.

Bei der Längenbestimmung kann ein Fehler in der Länge entweder durch einen Fehler in der mittleren Ortszeit oder durch einen Fehler in der mittleren Greenwicher Zeit entstehen, und zwar gehen diese Fehler mit ihrem vollen Betrage in die Länge ein.

Auf langen Reisen ist wegen des ungleichförmigen Ganges des Chronometers die mittlere Greenwicher Zeit im allgemeinen mit dem größeren Fehler behaftet. Bei mittelmäßigen Chronometern, wie man sie gewöhnlich auf Segelschiffen findet, sind nach längerer Reisezeit Fehler von einer Minute in der mittleren Greenwicher Zeit selbst bei sorgfältiger Chronometerkontrolle etwas gewöhnliches. Bei ungenügender Chronometerkontrolle steigert sich dieser Fehler garnicht selten bis auf 3 bis 4 Minuten. Ein vorsichtiger Schiffsführer sollte daher am Schlusse einer langen Reise stets mit der Möglichkeit rechnen, daß seine Länge, je nach den Umständen, 30 bis 60 Minuten ungenau ist. Er sollte keine Gelegenheit unbenutzt vorübergehen lassen, vor dem Ansegeln des Landes die Genauigkeit seines Chronometers zu prüfen.

Die durch Fehler in der Höhe und in der Breite hervorgerufenen Fehler im Stundenwinkel und somit in der Länge sind in § 204 ausführlich behandelt worden. Um diese Fehler möglichst klein zu machen, verwende man, wenn irgend möglich, zur Längenbestimmung nur Höhen im ersten Vertikal oder in dessen Nähe.

Bei Längenbestimmungen aus Mondhöhen kann ein Fehler von einer bis zwei Minuten gelegentlich dadurch entstehen, daß infolge eines Fehlers in der mittleren Greenwicher Zeit, die Abweichung und die Gerade Aufsteigung des Mondes fehlerhaft aus dem Jahrbuche entnommen werden.

Beispiel. Während einer Winterreise auf hohen Breiten (60° *N*) bestimmte ein Schiffsführer seine Länge ausschließlich aus Sonnenhöhen. Die Zuverlässigkeit dieser Bestimmungen soll untersucht werden.

Auf 60° *N*-Breite geht die Sonne, wenn ihre Abweichung über 20° *S* beträgt, zwischen *SO* und *SOzS* auf und zwischen *SW* und *SWzS* unter. Da man ganz kleine Höhen, wegen der Unsicherheit in der Strahlenbrechung zur Zeitbestimmung nicht verwenden darf, so wird man nur Beobachtungen in sehr kleinem Azimut (höchstens 25°) gebrauchen können. Gerade im Winter sind aber die aus Kimmabständen abgeleiteten Höhen mit großen Fehlern behaftet. Ist der Einfluß des Temperaturunterschiedes zwischen Luft und Wasser nicht mit berücksichtigt, so wird man sehr oft eine um 3 Minuten oder mehr fehlerhafte Höhe bekommen. Nimmt man außerdem einen Breitenfehler von 5 Minuten an, so ergeben sich aus den Fehlergleichungen

$$\Delta\lambda = \Delta h \,.\, cosec\, a \,.\, sec\, \varphi \qquad \Delta\lambda = \Delta\varphi \,.\, cotg\, a \,.\, sec\, \varphi$$

die folgenden Fehler

$$\Delta\lambda = 14{,}2' \quad \text{und} \quad \Delta\lambda = 21{,}5'$$

Da beide Fehler nach derselben Seite fallen können, so wird man mit der Möglichkeit rechnen müssen, daß die auf solche Weise bestimmte Länge allein infolge eines möglichen Fehlers im Stundenwinkel um 36 Minuten fehlerhaft ist. Das bedeutet aber, daß die gewöhnliche Längenbestimmung mit Hülfe der Sonne so gut wie wertlos ist. Es kann daher für eine derartige Reise nicht genug empfohlen werden, neben der Sonne auch andere Gestirne zu beobachten, insbesondere solche in der Nähe des ersten Vertikals, die eine sichere Längenbestimmung zulassen.

§ 216. Längenänderung (Pagelsche Berichtigung). Aus der Fehlergleichung (§ 204).

$$\Delta\lambda = \Delta\varphi \,.\left(\frac{tang\,\delta}{sin\,t} - \frac{tang\,\varphi}{tang\,t}\right) = \Delta\varphi \,.\, cotg\, a \,.\, sec\,\varphi$$

folgt, daß die Änderung in der Länge, die einer Änderung in der Breite von einer Minute entspricht, gegeben ist durch den Ausdruck

$$p = \frac{tang\,\delta}{sin\,t} - \frac{tang\,\varphi}{tang\,t} = cotg\, a \,.\, sec\,\varphi$$

Dieser Ausdruck soll schlechtweg die Längenänderung heißen. Man nennt ihn auch wohl die Pagelsche Berichtigung, weil Pagel, ein französischer Seeoffizier, in der Mitte des vorigen Jahrhunderts von dieser Größe zuerst zur Bestimmung des Schiffsortes ausgedehnten Gebrauch gemacht hat.

Die Längenänderung kann der Tafel 38*) entnommen werden, und zwar entweder als algebraische Summe der den Tafeln *A* und *B* entnommenen Werte oder unmittelbar aus Tafel *C*. Vergleiche die Erklärung der Tafel.

---

*) Behrmann, Nautische Tafeln, Tafel 33.

Diese Tafel giebt daher auch Aufschluß, ob eine Längenbestimmung Vertrauen verdient oder nicht; ist die Längenänderung groß, so ist auf einen großen Fehler in der Länge zu rechnen. Multipliziert man die Längenänderung mit dem Fehler der Breite, so erhält man den Fehler der Länge.

Den Fehler in der Länge, der einem Höhenfehler von 1′ entspricht, findet man in Tafel 42.

Ist die Beobachtung in der Nähe des ersten Vertikals zum Zweck der Längenbestimmung vormittags gemacht worden, so wartet man nicht immer mit der Berechnung bis zum Mittage, sondern berechnet häufig daraus sofort die Länge, indem man als Breite diejenige wählt, die sich mit Hülfe der Loggerechnung aus der am vorhergehenden Tage gemachten Breitenbestimmung herleiten läßt. Da die so bestimmte Breite in den meisten Fällen mit einem mehr oder weniger großen Fehler behaftet ist, so ist die damit berechnete Länge nur dann richtig, wenn das Gestirn bei der Beobachtung genau im ersten Vertikal gestanden hat. War dies aber nicht der Fall, so muß man mittags, wenn die Breite bestimmt ist, die Rechnung wiederholen.

Eine Wiederholung der Rechnung läßt sich vermeiden, indem man den Fehler der bei der Berechnung benutzten Breite bestimmt, diesen Breitenfehler mit der der Tafel 38. [33.] entnommenen Längenänderung multipliziert, und die so gewonnene Längenberichtigung an die vormittags berechnete Länge anbringt.

Den Namen der Längenberichtigung findet man nach folgender Regel:

Man schreibe den Quadranten, in dem das Azimut des Gestirnes bei der Beobachtung lag, hin, z. B. . . . . *S* *O*

Darunter schreibe man den entgegengesetzten Quadranten, also . . . . *N* *W*

Darauf zeichne man, ausgehend von dem Namen der Breitenberichtigung, einen Pfeil in der Richtung der Diagonale. Dieser Pfeil zeigt auf den Namen der Längenberichtigung. War also die Breitenberichtigung *N*, d. h. war die Breite in Wirklichkeit nördlicher, als die zu der Berechnung benutzte, so hat die Längenberichtigung den Namen Ost.

Die Richtigkeit dieser Regel wird sich später bei der Betrachtung der Standlinien ergeben.

Beispiel: Man beobachtet vormittags eine Sonnenhöhe und berechnet daraus mit Hülfe der aus der Loggerechnung entnommenen Breite $\varphi = 40^0\,12'\,S$ die Länge $\lambda = 46^0\,48'\,O$; das rechtweisende Azimut der Sonne bei der Beobachtung ist $N\,58^0\,O$. Mittags findet man, daß das Schiff 12′ nördlicher steht als das Besteck. Welches ist die richtige Länge bei der Beobachtung?

Aus Taf. 38. [33.] findet man $p = 0{,}82$, also $\varDelta\lambda = 12 \,.\, 0{,}82 = 9{,}8'\,W$

N *O*

S *W*

$$\begin{aligned} \text{Berechnete Länge} &= 46^0\,48'\,O \\ \varDelta\lambda &= 10'\,W \\ \hline \text{richtige Länge} &= 46^0\,38'\,O \end{aligned}$$

Nebenmeridianbreite.

§ 217. Wesen der Nebenmeridianbreite. Wie sich zu Längenbestimmungen nicht nur Höhen im ersten Vertikal, sondern auch Höhen in dessen Nähe eignen, so läßt sich auch die Breite, wenn die Länge bekannt ist, nicht nur aus Höhen im Meridian, sondern auch aus Höhen in der Nähe des Meridians bestimmen. Es ist dabei einerlei, ob die Höhen in der Nähe des oberen oder in der Nähe des unteren Meridians beobachtet sind. Dieser Art der Breitenbestimmung hat man die Bezeichnung Nebenmeridianbreite beigelegt. Man spricht von einer Nebenmittagsbreite, wenn das Gestirn bei der Beobachtung in der Nähe des oberen Meridians steht, von einer Nebenmitternachtsbreite, wenn es in der Nähe des unteren Meridians steht.

Ist die mittlere Greenwicher Zeit der Höhenbeobachtung bekannt, so läßt sich aus ihr mit Hülfe der als bekannt vorausgesetzten Länge der Stundenwinkel des Gestirnes bestimmen. Da im sphärisch-astronomischen Grunddreieck außer dem Stundenwinkel t auch die Zenitdistanz z und die Poldistanz p bekannt sind, so läßt sich daraus das Breitenkomplement b berechnen. Fällt man von S das Lot SA auf den Meridian, so erhält man das Breitenkomplement durch die Auflösung zweier rechtwinkliger Dreiecke, und zwar hat man zu seiner Bestimmung die folgenden Gleichungen

$$tang\, PA = cos\, t\, .\, tang\, p$$
$$sec\, ZA = cos\, p\, .\, sec\, PA\, .\, cosec\, h$$
$$b = PA - ZA$$

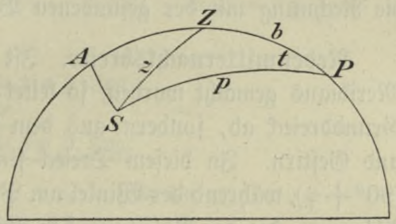


Fig. 189.

Von dieser direkten Methode der Breitenbestimmung wird indessen, da die Berechnung etwas unbequem ist, selten Gebrauch gemacht, man bedient sich gewöhnlich einer indirekten Methode, indem man die aus der Loggerechnung angenähert bekannte Breite bei der Berechnung der wahren Breite mit benutzt.

Das Verfahren ist das folgende: Mit der angenähert bekannten Breite berechnet man den Unterschied der gemessenen Zenitdistanz und der Meridionalzenitdistanz. Mit anderen Worten man berechnet, wie viel das Gestirn bis zu seiner Kulmination noch steigt, bezw. wieviel es seit seiner Kulmination schon gesunken ist. Diese Größe subtrahiert man von der gemessenen Zenitdistanz und erhält die Meridionalzenitdistanz, aus der man in der bekannten Weise durch algebraische Addition der Abweichung die Breite erhält.

§ 218. Ableitung der Formeln.

Nebenmittagsbreite. Ist das Gestirn in der Nähe des oberen Meridians beobachtet, so läßt sich zur Berechnung des Unterschiedes der Zenitdistanz und der Meridionalzenitdistanz unmittelbar die in § 202 abgeleitete Formel für den Stundenwinkel

$$sem\, t = sec\, \varphi\, .\, sec\, \delta\, .\, sin\, \frac{z + z_0}{2}\, .\, sin\, \frac{z - z_0}{2}$$

verwenden. Aus ihr folgt nämlich, wenn man für $z - z_0$ die Bezeichnung u einführt

1. . . . . $$\sin\frac{u}{2} = sem\, t \cdot \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot cosec\,\frac{z + z_0}{2}$$

Da in der Nähe des Meridians u sehr klein, also z_0 nur sehr wenig von z verschieden ist, so darf man in dieser Formel z_0 durch z ersetzen.

Man erhält dann, da $cosec\, z = sec\, h$ ist,

1a. . . . . $$\sin\frac{u}{2} = sem\, t \cdot \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot sec\, h$$

Mit dem gleichen Rechte könnte man in der Formel 1. auch z durch z_0 ersetzen und erhielte dann die wenig gebräuchliche Formel

1b. . . . . $$\sin{}^{u}/_{2} = sem\, t \cdot \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot cosec\,(\varphi - \delta)$$

Um aus diesen Formeln den Unterschied der beiden Zenitdistanzen mit genügender Genauigkeit zu berechnen, ist nur die Kenntnis einer angenäherten Breite erforderlich. Ist zwischen der bei der Berechnung benutzten und der gefundenen Breite ein beträchtlicher Unterschied vorhanden, so wiederholt man die Rechnung mit der gefundenen Breite.

Nebenmitternachtsbreite. Ist die Beobachtung in der Nähe des unteren Meridians gemacht worden, so leitet man die Formel nicht aus dem gewöhnlichen Grunddreieck ab, sondern aus dem Dreieck mit den Ecken: Nadir, oberer Pol und Gestirn. In diesem Dreieck sind die Seiten: Nadirdistanz, Poldistanz und $(90^0 + \varphi)$, während der Winkel am Pol $t' = (12^{st} - t)$, bezw. $= (t - 12^{st})$ ist. Eine Ableitung, die der Ableitung der obigen Formel vollkommen entspricht, giebt als Formel für den Unterschied (u) der Nadirdistanz und der Meridionalnadirdistanz

2. . . . $$\sin\frac{u}{2} = sem\,(12^{st} - t) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot cosec\,\frac{n + n_0}{2}$$

oder, wenn man wieder n_0 durch n ersetzt und $cosec\, n = sec\, h$ setzt:

2a. . . . $$\sin\frac{u}{2} = sem\,(12^{st} - t) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot sec\, h$$

Wie bei den Formeln 1. und 1a. erhält man auch bei diesen Formeln u mit genügender Genauigkeit, wenn man eine nur angenäherte Breite bei der Berechnung benutzt.

§ 219. Berechnung der Nebenmittagsbreite. Bei der Berechnung einer Nebenmittagsbreite schlägt man den folgenden Weg ein:

1. Man bestimmt die genaue mittlere Greenwicher Zeit aus der beobachteten Chronometerzeit.

2. Für diese Zeit entnimmt man die Werte aus dem Jahrbuche und zwar
   a) bei der Sonne: Abweichung und Zeitgleichung;
   b) bei anderen Gestirnen: Gerade Aufsteigung der mittleren Sonne, Gerade Aufsteigung des Gestirnes und die Abweichung des Gestirnes.

3. Hierauf berechnet man aus der mittleren Greenwicher Zeit die mittlere Ortszeit und geht von ihr zum Stundenwinkel des Gestirnes über.

4. Darauf beschickt man den Kimmabstand zur wahren Höhe.

5. Mit Hülfe der so gefundenen Werte berechnet man den Unterschied der Zenitdistanz und Meridionalzenitdistanz nach Formel 1. oder 1a. des vorigen Paragraphen.

6. Durch Subtraktion des soeben bestimmten Unterschiedes von der Zenitdistanz erhält man die Meridionalzenitdistanz, der man den entgegengesetzten Namen des Horizontes giebt, über den das Gestirn beobachtet ist. (Vergl. § 196.)

7. Aus dieser bestimmt man die Breite durch algebraische Addition der Abweichung des Gestirnes.

Sollte die berechnete Breite von der angenommenen erheblich abweichen, so muß die Rechnung auf Grund der gefundenen Breite wiederholt werden.

Die so gefundene Breite, die selbstverständlich für den Ort der Beobachtung gilt, ist zumeist noch durch Anbringung des kleinen Breitenunterschiedes auf den Schiffsmittag zu beschicken.

Beispiel 1. Sonne. Am 9. August 1903 vormittags, nach Besteck auf 53° 42′ N und 26° 44′ W, beobachtet man nach einem Chronometer, dessen Stand $2^m\,13^s$ nach gegen M. G. Z. ist, den folgenden Kimmabstand der Sonne:

Chr. Z. = $1^u\,30^m\,41^s$ $\underline{\odot} = 52^\circ\,9{,}0'$; Idb. = $+\,0{,}6'$; A. H. = 7 m.

Welche Breite folgt hieraus?

Astr. Chr. Z. = $1^u\,30^m\,41^s$ den 9. Aug.
Std. = $+\;\;2^m\,13^s$
M. G. Z. = $1^u\,32^m\,54^s$ den 9. Aug.

$\odot\,\delta_0 = 16^\circ\,8{,}1'\,N$
$0{,}72'\,.\,1{,}5 = -\;1{,}1'$
$\odot\,\delta = 16^\circ\,7{,}0'\,N$

$e_0 = +\,5^m\,28^s$
$0{,}3^s\,.\,1{,}5 = \;0^s$
$e = +\,5^m\,28^s$

M. G. Z. = $1^u\,32^m\,54^s$
Z. U. = $-\,1^{st}\,46^m\,56^s$
M. O. Z. = $23^u\,45^m\,58^s$
entg. $e = -\;5^m\,28^s$
$\odot t = 23^{st}\,40^m\,30^s$

Beob. $\underline{\odot} = 52^\circ\;9{,}0'$
Idb. = $+\;0{,}6'$
$\underline{\odot} = 52^\circ\;9{,}6'$
G. B. = $+\,10{,}4'$
$h = 52^\circ\,20{,}0'$

nach Formel 1.

$t = 23^{st}\,40^m\,30^s$ $\log sem = 7{,}25\,74$
$\varphi = 53^\circ\,42'\,N$ $\log\cos = 9{,}77\,23$
$\delta = 16^\circ\;\;7'\,N$ $\log\cos = 9{,}98\,26$
$z_0 = 37^\circ\,35'$
$z = 37^\circ\,40'$
$s/_2 = 37^\circ\,38'$ $\log cosec = 0{,}21\,42$
$u/_2 = \;\;5{,}8'$ $\log\sin = 7{,}22\,65$
$u = 11{,}6'$

nach Formel 1a.

$t = 23^{st}\,40^m\,30^s$ $\log sem = 7{,}25\,74$
$\varphi = 53^\circ\,42'$ $\log\cos = 9{,}77\,23$
$\delta = 16^\circ\;\;7'$ $\log\cos = 9{,}98\,26$
$h = 52^\circ\,20'$ $\log\sec = 0{,}21\,39$
$u/_2 = \;\;5{,}8'$ $\log\sin = 7{,}22\,62$
$u = 11{,}6'$

$z = 37^\circ\,40{,}0'$
$u = -\;11{,}6'$
$z_0 = 37^\circ\,28{,}4'\,N$
$\delta = 16^\circ\;\;7{,}0'\,N$
$\varphi = 53^\circ\,35{,}4'\,N$

Beispiel 2. Fixstern. Am 17. November 1903 vormittags, nach Besteck auf 50° 24′ *S* und 40° 12′ *W*, beobachtet man nach einem Chronometer, dessen Stand $10^m\,4^s$ vor gegen M. G. Z. ist, den folgenden Kimmabstand der Beteigeuze:

$$\text{Chr. Z.} = 5^u\,15^m\,51^s \qquad \underline{\ast} = 32^0\,14'; \qquad \text{Jdb.} = -2'; \qquad \text{A. H.} = 5\text{ m.}$$

Welche Breite folgt hieraus?

$$\begin{array}{rl} \text{Astr. Chr. Z.} = & 17^u\,15^m\,51^s \text{ den 16. November} \\ \text{Std.} = & -\;10^m\;\;4^s \\ \hline \text{M. G. Z.} = & 17^u\;\;5^m\,47^s \text{ den 16. November} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} m \odot \alpha_0 = & 15^{st}\,37^m\,32^s \\ & +\;\;2^m\,48^s \\ \hline m \odot \alpha = & 15^{st}\,40^m\,20^s \end{array} \qquad \ast\,\alpha = 5^{st}\,49^m\,59^s \qquad \ast\,\delta = 7^0\,23{,}3'\,N$$

$$\begin{array}{rl} \text{M. G. Z.} = & 17^u\;\;5^m\,47^s \\ \text{Z. U.} = & -\,2^{st}\,40^m\,48^s \\ \hline \text{M. O. Z.} = & 14^u\,24^m\,59^s \\ m \odot \alpha = & 15^{st}\,40^m\,20^s \\ \hline \text{St. Z.} = & 6^u\;\;5^m\,19^s \\ \ast\,\alpha = & 5^{st}\,49^m\,59^s \\ \hline \ast\,t = & 0^{st}\,15^m\,20^s \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Beob. } \underline{\ast} = & 32^0\,14{,}0' \\ \text{Jdb.} = & -\;\;2{,}0' \\ \hline \underline{\ast} = & 32^0\,12{,}0' \\ \text{G. B.} = & -\;\;5{,}6' \\ \hline h = & 32^0\;\;6{,}4' \end{array}$$

nach Formel 1.

$$\begin{array}{ll} t = 0^{st}\,15^m\,20^s & \log sem = 7{,}04\,87 \\ \varphi = 50^0\,24'\,S & \log cos = 9{,}80\,44 \\ \delta = \;\;7^0\,23'\,N & \log cos = 9{,}99\,64 \\ \hline z_0 = 57^0\,47' & \\ z = 57^0\,54' & \\ \hline s/_2 = 57^0\,50' & \log cosec = 0{,}07\,24 \\ u/_2 = 2{,}9' & \log sin = 6{,}92\,19 \\ u = 5{,}8' & \end{array}$$

nach Formel 1a.

$$\begin{array}{ll} t = 0^{st}\,15^m\,20^s & \log sem = 7{,}04\,87 \\ \varphi = 50^0\,24' & \log cos = 9{,}80\,44 \\ \delta = \;\;7^0\,23' & \log cos = 9{,}99\,64 \\ h = 32^0\;\;6' & \log sec = 0{,}07\,21 \\ u/_2 = 2{,}9' & \log sin = 6{,}92\,16 \\ u = 5{,}8' & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} z = & 57^0\,53{,}6' \\ u = & -\;\;\;5{,}8' \\ \hline z_0 = & 57^0\,47{,}8'\,S \\ \delta = & \;\;7^0\,23{,}3'\,N \\ \hline \varphi = & 50^0\,24{,}5'\,S \end{array}$$

Nebenmittagsbreiten aus Planeten- und aus Mondhöhen unterscheiden sich von dem letzten Beispiel nur dadurch, daß man die Gerade Aufsteigung und die Abweichung dieser Gestirne einschalten muß.

§ 220. Berechnung der Nebenmitternachtsbreite. Bei der Berechnung einer Nebenmitternachtsbreite verfährt man gerade so wie bei einer Nebenmittagsbreite, nur berechnet man statt des Unterschiedes der Zenitdistanzen den Unterschied der Nadirdistanzen nach der Formel 2. oder 2a. des § 218. Durch Subtraktion dieses Unterschiedes von der Nadirdistanz erhält man die Meridionalnadirdistanz und hieraus durch Subtraktion der Abweichung die Breite.

Beispiel 1. Sonne. In der Nacht vom 11. zum 12. Juli 1903, nach Besteck auf $73^\circ\,12'\,N$ und $10^\circ\,53'\,O$, beobachtet man nach einem Chronometer, dessen Stand $3^m 59^s$ nach gegen M. G. Z. ist, den folgenden Kimmabstand der Sonne nahe dem unteren Meridian:

$$\text{Chr. Z.} = 10^u\,47^m\,10^s \qquad \underline{\odot} = 5^\circ\,26'; \qquad \text{Idb.} = -1'; \qquad \text{A. H.} = 6\,\text{m}.$$

Welche Breite folgt hieraus?

$$\begin{aligned} \text{Astr. Chr. Z.} &= 10^u\,47^m\,10^s \text{ den 11. Juli} \\ \text{Std.} &= +\ \ 3^m\,59^s \\ \text{M. G. Z.} &= 10^u\,51^m\ \ 9^s \text{ den 11. Juli} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \odot\,\delta_0 &= 22^\circ\,14{,}4'\,N \\ 0{,}33'\,.\,10{,}9 &= -\ 3{,}6' \\ \odot\,\delta &= 22^\circ\,10{,}8'\,N \end{aligned} \qquad \begin{aligned} e_0 &= +\,5^m\,6^s \\ 0{,}3^s\,.\,10{,}9 &= +\ \ 3^s \\ e &= +\,5^m\,9^s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{M. G. Z.} &= 10^u\,51^m\ \ 9^s \\ \text{Z. U.} &= +\ 43^m\,32^s \\ \text{M. O. Z.} &= 11^u\,34^m\,41^s \\ \text{entg. } e &= -\ \ 5^m\ \ 9^s \\ \odot\,t &= 11^{st}\,29^m\,32^s \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{Beob. } \underline{\odot} &= 5^\circ\,26' \\ \text{Idb.} &= -\ 1' \\ \underline{\odot} &= 5^\circ\,25' \\ \text{G. B.} &= +\ 2' \\ h &= 5^\circ\,27' \end{aligned}$$

nach Formel 2.

$$\begin{aligned} 12^{st} - t &= 0^{st}\,30^m\,28^s & \log sem &= 7{,}64\,46 \\ \varphi &= 73^\circ\,12' & \log cos &= 9{,}46\,09 \\ \delta &= 22^\circ\,11' & \log cos &= 9{,}96\,66 \\ n_0 &= 95^\circ\,23' & & \\ n &= 95^\circ\,27' & & \\ s/2 &= 95^\circ\,25' & \log cosec &= 0{,}00\,19 \\ u/2 &= 4{,}1' & \log sin &= 7{,}07\,40 \\ u &= 8{,}2' & & \end{aligned}$$

nach Formel 2a.

$$\begin{aligned} 12^{st} - t &= 0^{st}\,30^m\,28^s & \log sem &= 7{,}64\,46 \\ \varphi &= 73^\circ\,12' & \log cos &= 9{,}46\,09 \\ \delta &= 22^\circ\,11' & \log cos &= 9{,}96\,66 \\ h &= 5^\circ\,27' & \log sec &= 0{,}00\,20 \\ u/2 &= 4{,}1' & \log sin &= 7{,}07\,41 \\ u &= 8{,}2' & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= 95^\circ\,27' \\ u &= -\ 8' \\ n_0 &= 95^\circ\,19' \\ \delta &= 22^\circ\,11'\,N \\ \varphi &= 73^\circ\ \ 8'\,N \end{aligned}$$

Beispiel 2. Fixstern. Am 17. Oktober vormittags, nach Besteck auf $61^\circ\,0'\,N$ und $3^\circ\,43'\,O$, beobachtet man nach einem Chronometer, dessen Stand $0^m\,30^s$ nach gegen M. G. Z. ist, den folgenden Kimmabstand der Wega in der Nähe des unteren Meridians:

$$\text{Chr. Z.} = 4^u\,55^m\,2^s \qquad \underline{*} = 9^\circ\,56'; \qquad \text{Idb.} = 0; \qquad \text{A. H.} = 6\,\text{m}.$$

Welche Breite folgt hieraus?

$$\begin{aligned} \text{Astr. Chr. Z.} &= 16^u\,55^m\ \ 2^s \text{ den 16. Oktober} \\ \text{Std.} &= +\ \ 0^m\,30^s \\ \text{M. G. Z.} &= 16^u\,55^m\,32^s \text{ den 16. Oktober} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\odot\alpha_0 &= 13^{st}\,35^m\,19^s \\ &= +\quad 2^m\,47^s \\ \hline m\odot\alpha &= 13^{st}\,38^m\,\;6^s \end{aligned} \qquad \ast\,\alpha = 18^{st}\,33^m\,41^s \qquad \ast\,\delta = 38^0\,42'\,N$$

$$\begin{aligned} \text{M. G. Z.} &= 16^u\,55^m\,32^s \\ \text{Z. U.} &= +\;14^m\,52^s \\ \text{M. O. Z.} &= 17^u\,10^m\,24^s \\ m\odot\alpha &= 13^{st}\,38^m\,\;6^s \\ \text{St. Z.} &= 30^u\,48^m\,30^s \\ \ast\,\alpha &= 18^{st}\,33^m\,41^s \\ \ast\,t &= 12^{st}\,14^m\,49^s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Beob. } \ast &= 9^0\,56' \\ \text{Jdb.} &= \quad 0' \\ \ast &= 9^0\,56' \\ \text{G. B.} &= -10' \\ h &= 9^0\,46' \end{aligned}$$

nach Formel 2.

$$\begin{aligned} t - 12^{st} &= 0^{st}\,14^m\,49^s & \log sem &= 7{,}01\,89 \\ \varphi &= 61^0\;\;0' & \log cos &= 9{,}68\,56 \\ \delta &= 38^0\,42' & \log cos &= 9{,}89\,23 \\ n_0 &= 99^0\,42' & & \\ n &= 99^0\,46' & & \\ s/_2 &= 99^0\,44' & \log cosec &= 0{,}00\,63 \\ u/_2 &= 1{,}4' & \log sin &= 6{,}60\,31 \\ u &= 2{,}8' & & \end{aligned}$$

nach Formel 2a.

$$\begin{aligned} t - 12^{st} &= 0^{st}\,14^m\,49^s & \log sem &= 7{,}01\,89 \\ \varphi &= 61^0\;\;0' & \log cos &= 9{,}68\,56 \\ \delta &= 38^0\,42' & \log cos &= 9{,}89\,23 \\ h &= \;\;9^0\,46' & \log sec &= 0{,}00\,63 \\ u/_2 &= 1{,}4' & \log sin &= 6{,}60\,31 \\ u &= 2{,}8' & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= 99^0\,46' \\ u &= -\;\;3' \\ n_0 &= 99^0\,43' \\ \delta &= 38^0\,42'\,N \\ \varphi &= 61^0\;\;1'\,N \end{aligned}$$

§ 221. **Die Genauigkeit der Breitenbestimmung.** Den Fehler in der Breite, der einem Fehler im Stundenwinkel, oder, was dasselbe ist, einem Fehler in der Länge entspricht, findet man, indem man die Formel 2b. des § 204

$$\varDelta t = \varDelta\varphi \,.\, cotg\, a \,.\, sec\,\varphi$$

nach $\varDelta\varphi$ auflöst. Man erhält

$$1. \;\ldots\ldots\; \varDelta\varphi = \varDelta t \,.\, tang\, a \,.\, cos\,\varphi$$

Um nach dieser Formel $\varDelta\varphi$ in Bogenminuten zu erhalten, muß man auch $\varDelta t$ in Bogenminuten ausdrücken. Ist also der Fehler im Stundenwinkel in Zeitsekunden gegeben, so muß man diese zunächst durch 4 dividieren.

Den Fehler in der Breite $\varDelta\varphi$, der einem Fehler in der Höhe $\varDelta h$ entspricht, erhält man, wenn man die Gleichung

$$sin\,h = sin\,\varphi \,.\, sin\,\delta + cos\,\varphi \,.\, cos\,\delta \,.\, cos\,t$$

von der Gleichung

$$sin\,(h + \varDelta h) = sin\,(\varphi + \varDelta\varphi) \,.\, sin\,\delta + cos\,(\varphi + \varDelta\varphi) \,.\, cos\,\delta \,.\, cos\,t$$

subtrahiert und entsprechend wie im § 204 verfährt. Unter Anwendung der Formel 12. des § 195 erhält man

$$2. \quad \ldots\ldots \quad \Delta\varphi = \Delta h . \sec a$$

Aus diesen Gleichungen folgt, daß sich Höhen im Meridian am besten zu Breitenbestimmungen eignen, denn bei solchen Höhen haben Längenfehler gar keinen und Höhenfehler den kleinsten Einfluß auf die Breite. Je weiter das Gestirn vom Meridian entfernt ist, um so ungenauer wird die Breitenbestimmung. Auf hohen Breiten macht sich ein Fehler im Stundenwinkel weniger fühlbar als auf niedrigen Breiten.

Ein Fehler im Stande des Chronometers ist ohne Einfluß auf die Breite, da er durch die nach demselben Chronometer bestimmte Länge wieder aufgehoben wird.

Soll bei der Nebenmittagsbreite ein Fehler im Stundenwinkel von 1^m (= 15′) nicht mehr als 2′ Fehler in Breite ergeben, so darf der Stundenwinkel (östlich oder westlich) die in Tafel 43*) angegebenen Werte nicht überschreiten. Über die Berechnung dieser Tafel vergleiche ihre Erklärung. Dem Gedächtnisse wird sich folgende einfache Regel, bei der die Grenzen für den Stundenwinkel einer Nebenmittagsbreite freilich etwas weiter gezogen sind, leicht einprägen:

Die Anzahl Minuten des Stundenwinkels darf nicht größer sein als die Anzahl Grade der Meridionalzenithdistanz (φ—δ).

So darf beispielsweise für eine Meridionalhöhe von 70° der Stundenwinkel nicht größer als 20^m sein.

Von einem Fehler im Stundenwinkel einer Nebenmeridianbreite kann man sich dadurch frei machen, daß man ungefähr gleiche Höhen vor und nach der Kulmination beobachtet. Das Mittel der beiden berechneten Breiten — nachdem jede auf den Mittag beschickt ist — wird die richtige Breite sein.

§ 222. Verwendbarkeit der Nebenmeridianbreite. Das in den vorhergehenden Paragraphen entwickelte Verfahren der Nebenmeridianbreite ist nur dann anwendbar, wenn vorher oder nachher eine gute Zeitbestimmung gemacht werden konnte. Ist nämlich lange Zeit vorher oder nachher keine gute Zeitbestimmung gemacht worden, so ist die Länge und somit der Stundenwinkel unsicher, so daß auch die Breitenbestimmung unzuverlässig ist.

Hat man aber kurz vorher oder nachher eine Beobachtung im ersten Vertikal gemacht, so hat man durch sie eine genaue Kenntnis der Länge erworben, da ja in diesem Falle die Bestimmung der Länge von einem Fehler in der Breite unabhängig ist. Die Nebenmeridianbreite ergiebt also in diesem Falle unmittelbar die richtige Breite.

Ist die zweite Höhe aber nicht im ersten Vertikal oder wenigstens in dessen unmittelbarer Nähe gemacht, so ist die Längenbestimmung infolge der

*) Behrmann, Nautische Tafeln, Tafel 19.

fehlerhaften Breite mehr oder weniger ungenau, und infolgedessen ergiebt auch die Nebenmittagsbreite ein fehlerhaftes Resultat. Um auch in diesem Falle eine genauere Breite und Länge zu erhalten, müßte man auf Grund der soeben bestimmten Breite die Länge von neuem berechnen und darauf mit dieser berichtigten Länge die Breitenbestimmung wiederholen. Ja es könnte sogar vorkommen, daß man die ganze Berechnung — sowohl der Länge als der Breite — zum dritten Male wiederholen müßte.

In einem solchen Falle ist es vorzuziehen, die beiden Beobachtungen zu einer „Aufgabe der zwei Höhen" zu vereinigen und Breite und Länge daraus zu berechnen, wie in § 251 bis § 259 ausführlich auseinandergesetzt ist.

Nordsternbreiten.

§ 223. Methode der Nordsternbreite. Stände der Nordstern genau im Pol, so würde die Höhe des Nordsterns gleich der Polhöhe und damit gleich der Breite sein. Nun steht aber der Nordstern ungefähr $1\frac{1}{2}^0$ vom Pole ab; es muß daher an seine Höhe noch eine Berichtigung angebracht werden, um die Polhöhe zu erhalten. Diese Berichtigung soll im folgenden abgeleitet werden.

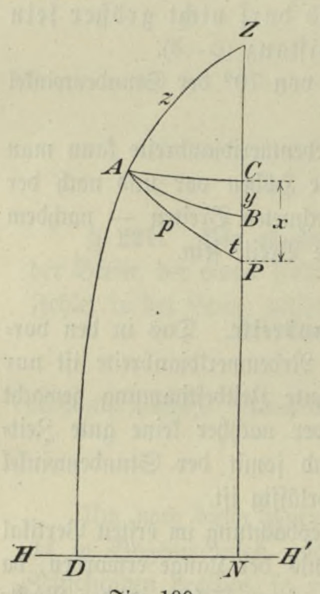


Fig. 190.

In nebenstehender Figur bedeute Z das Zenit, HH' den Horizont, ZN den Meridian, P den Pol und A den Nordstern, dann ist PA der Stundenkreis des Nordsterns, also $ZPA = t$ sein Stundenwinkel und $PA = p$ seine Poldistanz.

Man beschreibe nun um Z mit der Zenitdistanz $ZA = z$ einen Kreisbogen, der den Meridian im Punkte B schneide, dann ist auch $ZB = z$. Darauf fälle man von A das Lot AC auf den Meridian und bezeichne den Bogen CB mit y, den Bogen CP mit x; dann ist

$$\varphi = NP = NB - BP$$

oder da $NB = h$ und $BP = x - y$ ist

$$\varphi = h - (x - y)$$
$$\varphi = h - x + y$$

Betrachtet man das rechtwinklige Dreieck PCA wegen seiner Kleinheit als ein ebenes, so kann man setzen

$$x = p \, . \cos t$$

also

$$1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varphi = h - p \, . \cos t + y$$

Nun ist in dem rechtwinkligen Dreieck ZCA

$$\cos AC = \frac{\cos z}{\cos ZC} = \frac{\cos z}{\cos(z-y)}$$

und in dem rechtwinkligen Dreieck PCA

$$\cos AC = \frac{\cos p}{\cos x}$$

Setzt man die beiden Werte für $\cos AC$ einander gleich, so erhält man

$$\frac{\cos z}{\cos(z-y)} = \frac{\cos p}{\cos x}$$

Hieraus folgt nach § 14

$$\frac{\cos(z-y)-\cos z}{\cos(z-y)+\cos z} = \frac{\cos x - \cos p}{\cos x + \cos p}$$

also nach § 105, Formel 15. und 16.

$$\frac{2 . \sin(z-\tfrac{1}{2}y) . \sin\tfrac{1}{2}y}{2 . \cos(z-\tfrac{1}{2}y) . \cos\tfrac{1}{2}y} = \frac{2 . \sin\tfrac{1}{2}(p+x) . \sin\tfrac{1}{2}(p-x)}{2 . \cos\tfrac{1}{2}(p+x) . \cos\tfrac{1}{2}(p-x)}$$

oder

$$\operatorname{tang}(z-\tfrac{1}{2}y) . \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}y = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(p+x) . \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(p-x)$$

Statt der Tangenten kleiner Winkel darf man, ohne einen nennenswerten Fehler zu begehen, die Sinus setzen. Da ferner y stets eine sehr kleine Größe ist, so ist es auch gestattet, $\operatorname{tang}(z-\frac{1}{2}y)$ durch $\operatorname{tang} z$ oder $\operatorname{cotg} h$ zu ersetzen. Man erhält dann

$$\operatorname{cotg} h . \sin\tfrac{1}{2}y = \sin\tfrac{1}{2}(p+x) . \sin\tfrac{1}{2}(p-x)$$

oder nach § 98

$$\operatorname{cotg} h . \tfrac{1}{2}y . \sin 1' = \tfrac{1}{2}(p+x) . \sin 1' . \tfrac{1}{2}(p-x) . \sin 1'$$

also $$y = \tfrac{1}{2}(p^2 - x^2) . \operatorname{tang} h . \sin 1'$$

Nun ist, wie oben abgeleitet

$$x = p . \cos t$$

also $$p^2 - x^2 = p^2 - p^2 . \cos^2 t = p^2(1-\cos^2 t) = p^2 . \sin^2 t$$

somit $$y = \tfrac{1}{2}p^2 . \sin^2 t . \operatorname{tang} h . \sin 1'$$

Setzt man diesen Wert von y in die Gleichung 1. ein, so erhält man

$$\boldsymbol{\varphi = h - p . \cos t + \tfrac{1}{2}p^2 . \sin^2 t . \operatorname{tang} h . \sin 1'}$$

als Formel zur Berechnung der Breite aus einer Nordsternhöhe.

Zur bequemeren Berechnung der Breite nach dieser Formel dient die Tafel 2. des Nautischen Jahrbuches. Diese Tafel enthält drei Berichtigungen, die an die wahre Höhe des Nordsternes anzubringen sind, um die Breite zu erhalten.

Die erste Berichtigung enthält im wesentlichen den Wert

$$I = -p . \cos t$$

Als Eingang zu dieser Tafel ist nicht der Stundenwinkel, sondern die Sternzeit gewählt, was angängig ist, da der Stundenwinkel gleich dem Unterschiede der Sternzeit und der Geraden Aufsteigung ist, und die letztere sich im Laufe eines Jahres so wenig ändert, daß man sie als konstant ansehen darf, ohne einen merklichen Fehler zu erhalten.

Mit dem Werte $-p \cos t$ hat man noch den Wert von

$$\tfrac{1}{2} p^2 . \sin^2 t . \operatorname{tang} h . \sin 1'$$

für eine Höhe $h = 60^0$ vereinigt, so daß der Gesamtwert der ersten Berichtigung

$$I = -p \cos t + \tfrac{1}{2} p^2 . \sin^2 t . \operatorname{tang} 60^0 . \sin 1'$$

ist.

Die zweite Berichtigung ist dann

$$\begin{aligned} II &= \tfrac{1}{2} p^2 . \sin^2 t . \operatorname{tang} h . \sin 1' - \tfrac{1}{2} p^2 . \sin t . \operatorname{tang} 60^0 . \sin 1' \\ &= \tfrac{1}{2} p^2 . \sin^2 t . \sin 1' (\operatorname{tang} h - \operatorname{tang} 60^0) \end{aligned}$$

gesetzt; sie ist positiv, wenn die Höhe größer als 60^0 ist, sie ist negativ, wenn die Höhe kleiner als 60^0 ist.

Bildet man die Summe

$$h + I + II$$

so erhält man nach der obigen Formel die Breite.

Eine dritte Berichtigung ist nötig, weil bei der Berechnung der ersten und zweiten Berichtigung ein mittlerer Wert der Poldistanz und der Geraden Aufsteigung zu Grunde gelegt ist, während sich in Wirklichkeit diese Werte im Laufe eines Jahres ändern. Die Mittelwerte sind so gewählt, daß die dritte Berichtigung möglichst klein wird.

Auf See genügt es stets, nur die erste Berichtigung an die Nordsternhöhe anzubringen, da hierbei der Fehler, wenn die Breite 65^0 nicht übersteigt, nie größer als $1'$ werden kann.

§ 224. **Berechnung.** Bei der Berechnung einer Nordsternbreite hat man folgendermaßen zu verfahren:

1. Man bestimmt die mittlere Greenwicher Zeit der Beobachtung.

2. Für diese Zeit entnimmt man dem Jahrbuche die Gerade Aufsteigung der mittleren bezw. der wahren Sonne.

3. Durch Addition dieser Geraden Aufsteigung zur mittleren bezw. zur wahren Ortszeit erhält man die Sternzeit.

4. Man beschickt den beobachteten Kimmabstand zur wahren Höhe.

5. An die so ermittelte wahre Höhe bringt man die Berichtigungen an aus Tafel 2. des Nautischen Jahrbuches und zwar im allgemeinen nur die erste Berichtigung; nur wenn man eine große Genauigkeit erzielen will, berücksichtigt man auch die zweite und die dritte Berichtigung.

Beispiel 1. Genäherte Lösung. Am 14. Juli 1903 nachmittags, nach Besteck auf $40^0\,52'\,N$ und $26^0\,14'\,W$, beobachtet man nach der Schiffsuhr, deren Stand 5^m vor gegen W. O. Z. ist, den folgenden Kimmabstand des Nordsterns:

U. Z. $= 8^u\,24^m$ $\quad \underline{\ast} = 40^0\,12'$; $\quad$ Jdb. $= +\,2'$; $\quad$ A. H. $= 12$ m.

Welche Breite folgt hieraus?

Astr. U. Z. =	$8^u\,24^m$	
Std. =	$-\;\;5^m$	
W. O. Z. =	$8^u\,19^m$	den 14. Juli
e =	$+\;\;6^m$	
M. O. Z. =	$8^u\,25^m$	
Z. U. =	$+\,1^{st}\,45^m$	
M. G. Z. =	$10^u\,10^m$	den 14. Juli

$m \odot \alpha_0$ =	$7^{st}\,24^m\,43^s$
	$+\;\;1^m\,40^s$
$m \odot \alpha$ =	$7^{st}\,26^m$
M. O. Z. =	$8^u\,25^m$
St. Z. =	$15^u\,51^m$

Beob. $\underline{\ast}$ =	$40^0\,12'$
Jdb. =	$+\;\;2'$
$\underline{\ast}$ =	$40^0\,14'$
G. B. =	$-\;\;7'$
h =	$40^0\;\;7'$
I. Ber. =	$+\;58'$
φ =	$41^0\;\;5'\,N$

Beispiel 2. Genaue Lösung. Am 24. November 1903 vormittags, nach Besteck auf $50^0\,41\,N$ und $44^0\,52'\,W$, beobachtet man nach einem Chronometer, dessen Stand $12^m\,47^s$ nach gegen M. G. Z. ist, den folgenden Kimmabstand des Nordsterns:

Chr. Z. $= 9^u\,31^m\,10^s$ $\quad \underline{\ast} = 49^0\,42'\,30''$; $\quad$ Jdb. $= +\,1'\,20''$; $\quad$ A. H. $= 10$ m.

Welche Breite folgt hieraus?

Astr. Chr. Z. =	$21^u\,31^m\,10^s$	den 23. Nov.
Std. =	$+\;\;12^m\,47^s$	
M. G. Z. =	$21^u\,43^m\,57^s$	den 23. Nov.
Z. U. =	$-\,2^{st}\,59^m\,28^s$	
M. O. Z. =	$18^u\,44^m\,29^s$	

$m \odot \alpha_0$ =	$16^{st}\;\;5^m\;\;8^s$
	$+\;\;3^m\,34^s$
$m \odot \alpha$ =	$16^{st}\;\;8^m\,42^s$
M. O. Z. =	$18^{st}\,44^m\,29^s$
St. Z. =	$10^{st}\,53^m\,11^s$

Beob. $\underline{\ast}$ =	$49^0\,42'\,30''$
Jdb. =	$+\;\;1'\,20''$
$\underline{\ast}$ =	$49^0\,43{,}8'$
G. B. =	$-\;\;6{,}5'$
h =	$49^0\,37{,}3'$
I. Ber. =	$+\;57{,}3'$
II. Ber. =	$-\;\;0{,}2'$
III. Ber. =	$+\;\;0{,}0'$
φ =	$50^0\,34{,}4'\,N$

Azimut.

§ 225. Allgemeines. Die Kenntnis des Azimutes eines Gestirnes ist einerseits bei der Bestimmung der Mißweisung des Kompasses, andererseits bei der astronomischen Ortsbestimmung durch Standlinien von Bedeutung.

Aus dem sphärisch-astronomischen Grunddreieck läßt sich das Azimut, d. h. der Winkel am Zenit berechnen, wenn drei andere Stücke dieses Dreieckes bekannt sind. Je nachdem man die einen oder die anderen Stücke als bekannt voraussetzt, unterscheidet man folgende drei Fälle:

1. **Höhen-Azimut**: Bestimmung des Azimutes aus Breite, Abweichung und Höhe;

2. **Zeit-Azimut**: Bestimmung des Azimutes aus Breite, Abweichung und Stundenwinkel;

3. **Höhen-Zeit-Azimut**: Bestimmung des Azimutes aus Abweichung, Höhe und Stundenwinkel.

Als besonderer Fall des Höhen-Azimutes stellt sich die Bestimmung des **Azimutes beim Auf- und Untergange** bezw. der **Amplitude** dar.

§ 226. Das Höhen-Azimut. Ist die Breite, die Abweichung und die Höhe des Gestirnes bekannt, so sind die drei Seiten des sphärisch-astronomischen Grunddreieckes gegeben, und man hat zur Bestimmung des Azimutes nach § 195 die Formel

$$\cos p = \cos b \,.\, \cos z + \sin b \,.\, \sin z \,.\, \cos a$$

oder

$$\cos p = \sin \varphi \,.\, \sin h + \cos \varphi \,.\, \cos h \,.\, \cos a$$

Durch Einsetzen von

$$\cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1$$

erhält man hieraus

$$\cos p = \sin \varphi \,.\, \sin h + \cos \varphi \,.\, \cos h \,.\, (2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1)$$

$$\cos p = \sin \varphi \,.\, \sin h + 2 \cos \varphi \,.\, \cos h \,.\, \cos^2 \frac{a}{2} - \cos \varphi \,.\, \cos h$$

$$\cos p = 2 \cos \varphi \,.\, \cos h \,.\, \cos^2 \frac{a}{2} - (\cos \varphi \,.\, \cos h - \sin \varphi \,.\, \sin h)$$

oder nach § 105, Formel 2.

$$\cos p = 2 \cos \varphi \,.\, \cos h \,.\, \cos^2 \frac{a}{2} - \cos (\varphi + h)$$

also

$$2 \cos \varphi \,.\, \cos h \,.\, \cos^2 \frac{a}{2} = \cos p + \cos (\varphi + h)$$

woraus unter Berücksichtigung der Formel 15. des § 105 folgt

$$2 \cos \varphi \,.\, \cos h \,.\, \cos^2 \frac{a}{2} = 2 \cos \frac{p + (\varphi + h)}{2} \,.\, \cos \frac{p - (\varphi + h)}{2}$$

und somit

$$\boldsymbol{\cos^2 \frac{a}{2} = \sec \varphi \,.\, \sec h \,.\, \cos \frac{p + (\varphi + h)}{2} \,.\, \cos \frac{p - (\varphi + h)}{2}}$$

Zur Bestimmung des Azimutes aus $\log \cos^2 {}^a\!/_2$ bedient man sich der Tafel 8.

Bei der Berechnung eines Höhen-Azimutes verfährt man wie folgt:

1. Man bestimmt die Abweichung des Gestirnes. (Bei der Sonne, dem Monde und den Planeten ist hierzu die Kenntnis der angenäherten Greenwicher Zeit erforderlich.)

2. Darauf beschickt man den Kimmabstand zur wahren Höhe.

3. Mit den so gefundenen Werten berechnet man das Azimut nach der oben abgeleiteten Formel. Dabei ist zu bemerken, daß p gleich der algebraischen Differenz $(90^0 - \delta)$ ist. Sind demnach φ und δ gleichnamig, so ist der absolute Wert von δ von 90^0 zu subtrahieren, sind sie ungleichnamig, so ist der absolute Wert von δ zu 90^0 zu addieren.

Das so berechnete Azimut zählt vom oberen, also von dem mit der Breite gleichnamigen Pol; es rechnet nach Ost, wenn das Gestirn steigt (bei der Sonne vormittags), es rechnet nach West, wenn das Gestirn sinkt (bei der Sonne nachmittags).

In der Nähe des Meridians ist eine Azimutbestimmung aus der Höhe nicht zulässig, da einer kleinen Höhenänderung eine große Änderung im Azimute entspricht.

Beispiel: Fixstern. Am 9. November 1903, nach Besteck auf $51^0\,2'\,N$ und $11^0\,12'\,W$, beobachtet man östlich vom Meridian

Sirius $\underline{\ast} = 12^0\,40'$; Jdb. $= 0$; A. H. $= 5$ m.

Welches Azimut folgt hieraus?

Aus dem Jahrbuche entnimmt man

$$\ast\ \delta = 16^0\,35'\,S$$

Da φ und δ ungleichnamig sind, so ist

$$p = 90^0 + \delta = 106^0\,35'$$

	$\varphi = 51^0\ 2'$ $\quad log\,sec = 0{,}20\,14$
Beob. $\underline{\ast} = 12^0\,40'$	$h = 12^0\,32'$ $\quad log\,sec = 0{,}01\,05$
Jdb. $= 0'$	$\varphi + h = 63^0\,34'$
$\underline{\ast} = 12^0\,40'$	$p = 106^0\,35'$
G. B. $= -\ 8'$	$s = 170^0\ 9'$
$h = 12^0\,32'$	$s/_2 = 85^0\ 5'$ $\quad log\,cos = 8{,}93\,30$
	$u/_2 = 21^0\,30'$ $\quad log\,cos = 9{,}96\,87$
	$a = 137{,}8^0$ $\quad log\,cos^2\,{}^a/_2 = 9{,}11\,36$

Das Azimut ist also

$$N\,137{,}8^0\,O = S\,42{,}2^0\,O$$

Ein Beispiel eines Höhen-Azimutes der Sonne findet man in § 233.

Anmerkung. In dem sphärischen Dreiecke zwischen Zenit, unterem Pol und Gestirn findet man durch eine den oben gegebenen Ableitungen für den Stundenwinkel und das Azimut entsprechende Entwickelung die Formel

$$sem\,a = sec\,\varphi\,.\,sec\,h\,.\,sin\,\frac{(90^0+\delta)-(h+\varphi)}{2}\,.\,sin\,\frac{(90^0+\delta)+(h+\varphi)}{2}$$

Da
$$\frac{(90^0+\delta)-(h+\varphi)}{2} = \frac{z-(\varphi-\delta)}{2}$$

und
$$\frac{(90^0+\delta)+(h+\varphi)}{2} = \frac{z-(\varphi-\delta)}{2} + h + \varphi \text{ ist,}$$

so hat man zur Berechnung des Azimutes auch die in Verbindung mit der Berechnung des Stundenwinkels bequeme Formel

$$sem\,a = sec\,\varphi\,.\,sec\,h\,.\,sin\,\frac{u}{2}\,.\,sin\,(h+\varphi+\frac{u}{2})$$

Hierin bedeutet $u/_2$ den bei der Berechnung des Stundenwinkels gebrauchten halben Unterschied. Das Azimut zählt vom ungleichnamigen Pole. Man kann das Azimut aus der Tafel des Logarithmen Semiversus entnehmen, hat dabei nur das zunächst in Zeitmaß erhaltene Azimut in Bogenmaß zu verwandeln.

Beispiel. Um für das erste Beispiel des Paragraphen 213 das Azimut der Sonne zu finden, hat man

$\varphi = 50^0\,16'\,N$	$log\,sec = 0{,}19\,44$*
$h = 26^0\,19'$	$log\,sec = 0{,}04\,75$
$u/_2 = 14^0\,50'$	$log\,sin = 9{,}40\,84$*
$s = 91^0\,25$	$log\,sin = 9{,}99\,99$
$5^{st}\,35^m\,36^s$	$log\,sem = 9{,}65\,02$
$a = S\,83{,}9^0\,O$	

Die mit einem * bezeichneten Logarithmen können unmittelbar dem Stundenwinkelformular entnommen werden.

§ 227. Das Azimut beim Auf- und Untergange. Amplitude. Ein Gestirn hat beim wahren Auf- und Untergange, d. h. bei seinem Durchgange durch den wahren Horizont eine Zenitdistanz von 90°. Die im vorigen Paragraphen angegebene Formel zur Azimutbestimmung

$$\cos p = \cos b \,.\, \cos z + \sin b \,.\, \sin z \,.\, \cos a$$

geht demnach, da $\cos 90^0 = 0$ und $\sin 90^0 = 1$ ist, über in

$$\cos p = \sin b \,.\, \cos a$$

Ersetzt man hierin b und p durch ihre Komplemente φ und δ, so erhält man

$$\sin \delta = \cos \varphi \,.\, \cos a$$

und hieraus

$$\boldsymbol{\cos a = \sec \varphi \,.\, \sin \delta}$$

als Formel für das Azimut beim Auf- und Untergange.

In dieser Formel ist $\sin \delta$ positiv, wenn φ und δ gleichnamig sind, dagegen negativ, wenn φ und δ ungleichnamig sind. Da $\sec \varphi$ stets positiv ist, so folgt, daß das Azimut im ersten Falle spitz, im zweiten Falle stumpf ist. Versteht man unter a immer nur das spitze Azimut, so rechnet dieses also von dem mit der Abweichung gleichnamigen Pole.

Da die Amplitude (A) das Komplement des Azimutes beim Auf- und Untergange ist, so erhält man sie durch die Formel

$$\sin A = \sec \varphi \,.\, \sin \delta$$

Da beim Monde der Verschub größer ist als die Strahlenbrechung, so ist dieses Gestirn bei seinem wahren Auf- und Untergange überhaupt nicht zu sehen; es steht dann unter der Kimm.

Die hellen Fixsterne und Planeten sind in der Nähe der Kimm selten hell genug, um erkannt zu werden, so daß eigentlich nur die Sonne beim wahren Auf- und Untergange beobachtet werden kann. Der Auf- und Untergang der Sonne fällt aber nicht mit dem Durchgange ihres Mittelpunktes durch die Kimm zusammen, sondern die Sonne geht erst dann auf, d. h. steht erst dann im wahren Horizonte, wenn der Mittelpunkt um den Betrag der Kimmtiefe und Strahlenbrechung über der Kimm steht. Für eine mittlere Augeshöhe von

5 Metern muß man also den Augenblick wählen, wo der Unterrand sich 20 Minuten oder zwei Drittel des Sonnendurchmessers über der Kimm befindet.

Um das Azimut der Sonne beim wahren Auf- und Untergange, oder ihre Amplitude zu berechnen, verfährt man wie folgt:

1. Aus der in Tafel 36. [31.] enthaltenen wahren Ortszeit des Auf- oder Unterganges leitet man die mittlere Greenwicher Zeit ab.

2. Für diese Zeit entnimmt man dem Jahrbuche die Abweichung der Sonne.

3. Aus den so gefundenen Werten berechnet man das Azimut bezw. die Amplitude nach der oben abgeleiteten Formel.

Das so berechnete Azimut zählt von dem mit der Abweichung **gleichnamigen** Pol; es rechnet nach Ost beim Aufgange, nach West beim Untergange.

Beispiel. In welchem Azimut geht am 12. November 1903 auf $49^0\,10'\,N$ und $6^0\,15'\,W$ die Sonne auf?

$$
\begin{array}{rll}
\text{Tafel 36. Astr. W. O. Z.} & = 19^u\,22^m \text{ den 11. Nov.} & \\
e & = \underline{-\ 16^m} & \odot\,\delta_0 = 17^0\,10{,}7'\,S \\
\text{M. O. Z.} & = 19^u\ \ 6^m & 0{,}70'\,.\,19{,}5 = \underline{+\ 13{,}7'} \\
\text{Z. U.} & = \underline{+\,25^m} & \underline{\odot\,\delta = 17^0\,24{,}4'\,S} \\
\text{M. G. Z.} & = 19^u\ 31^m \text{ den 11. Nov.} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\varphi = 49^0\,10' & log\,sec = 0{,}18\,45 \\
\delta = 17^0\,24' & log\,sin = \underline{9{,}47\,57} \\
\underline{a = 62^0\,47'} & log\,cos = 9{,}66\,02
\end{array}
$$

Das Azimut beim Aufgange ist also

$$S\,62{,}8^0\,O.$$

§ 228. Das Zeit-Azimut. Um aus der Breite, der Abweichung und dem Stundenwinkel das Azimut zu berechnen, bedient man sich, da vom sphärisch-astronomischen Grunddreieck zwei Seiten (p und b) und der zwischen ihnen liegende Winkel (t) gegeben sind, direkt der Formeln für den zweiten Fall der schiefwinkligen sphärischen Trigonometrie. (Vergl. § 122.)

$$\boldsymbol{cotg\,\frac{t}{2} : tang\,\frac{a+q}{2} = cos\,\frac{p+b}{2} : cos\,\frac{p-b}{2}}$$

$$\boldsymbol{cotg\,\frac{t}{2} : tang\,\frac{a-q}{2} = sin\,\frac{p+b}{2} : sin\,\frac{p-b}{2}}$$

woraus die Gleichungen folgen

$$tang\,\frac{a+q}{2} = cotg\,\frac{t}{2}\,.\,sec\,\frac{p+b}{2}\,.\,cos\,\frac{p-b}{2}$$

$$tang\,\frac{a-q}{2} = cotg\,\frac{t}{2}\,.\,cosec\,\frac{p+b}{2}\,.\,sin\,\frac{p-b}{2}$$

Ist p größer als b, so ist das Azimut gleich der Summe der beiden berechneten Winkel $\frac{1}{2}(a+q)$ und $\frac{1}{2}(a-q)$; ist aber p kleiner als b, so ist das Azimut gleich dem Unterschiede dieser beiden Winkel.

Um ein Zeitazimut zu berechnen, verfährt man folgendermaßen:

1. Man bestimmt die mittlere Greenwicher Zeit.
2. Für diese Zeit entnimmt man die Werte aus dem Jahrbuche und zwar:
   a) bei der Sonne: Abweichung und Zeitgleichung;
   b) bei einem anderen Gestirne: Gerade Aufsteigung der mittleren Sonne, Gerade Aufsteigung des Gestirnes und Abweichung des Gestirnes.

3. Hierauf bestimmt man den Stundenwinkel des Gestirnes (bei der Sonne die wahre Ortszeit). Ist der Stundenwinkel größer als 12^{st}, so ist er von 24^{st} zu subtrahieren.

4. Nachdem man aus der Breite und der Abweichung das Breitenkomplement und die Poldistanz abgeleitet hat, berechnet man das Azimut nach den obigen Formeln.

Das so berechnete Azimut zählt vom oberen, also von dem mit der Breite gleichnamigen Pol; es rechnet nach Ost, wenn der Stundenwinkel größer als 12^{st}, es rechnet nach West, wenn der Stundenwinkel kleiner als 12^{st} ist.

Beispiel 1. In welchem Azimut steht die Sonne am 3. September 1903 vormittags auf $38^0\,6'\,N$ und $4^0\,0'\,O$, wenn ein Chronometer, dessen Stand $12^m\,2^s$ vor gegen M. G. Z. ist, $10^u\,18^m\,2^s$ zeigt?

$$\begin{array}{rl}
\text{Astr. Chr. Z.} = & 22^u\ 18^m\,2^s \text{ den 2. Sept.} \\
\text{Std.} = & -\ \ \underline{12^m\,2^s} \\
\text{M. G. Z.} = & 22^u\ \ 6^m\,0^s \text{ den 2. Sept.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl@{\qquad\qquad}rl}
\odot\ \delta_0 = & 8^0\,15{,}8'\,N & e_0 = & -\ 0^m\ 4^s \\
0{,}91'\,.\,22{,}1 = & \underline{-\ 20{,}1'} & 0{,}8^s\,.\,22{,}1 = & \underline{+\ 18^s} \\
\odot\ \delta = & 7^0\,55{,}7'\,N & e = & -\ 0^m\,22^s
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl@{\qquad\qquad}rl}
\text{M. G. Z.} = & 22^u\ \ 6^m\ \ 0^s & p = & 82^0\ \ 4' \\
\text{Z. U.} = & \underline{+\ 16^m\ \ 0^s} & b = & \underline{51^0\,54'} \\
\text{M. O. Z.} = & 22^u\ 22^m\ \ 0^s & p+b = & 133^0\,58' \\
\text{entg. } e = & \underline{+\ \ 0^m\,22^s} & \frac{1}{2}(p+b) = & 66^0\,59' \\
\odot\ t = & 22^{st}\,22^m\,22^s & \frac{1}{2}(p-b) = & 15^0\ \ 5' \\
= & 1^{st}\,37^m\,38^s\ O & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl@{\qquad}rl@{\qquad}rl}
t/_2 = & 0^{st}\ 48^m\,49^s & log\ cotg = & 0{,}66\,513 & log\ cotg = & 0{,}66\,513 \\
\frac{1}{2}(p+b) = & 66^0\,59' & log\ sec = & 0{,}40\,782 & log\ cosec = & 0{,}03\,603 \\
\frac{1}{2}(p-b) = & 15^0\ \ 5' & log\ cos = & \underline{9{,}98\,477} & log\ sin = & \underline{9{,}41\,535} \\
\frac{1}{2}(a+q) = & 85^0\ \ 0' & log\ tang = & 1{,}05\,772 & & \\
\frac{1}{2}(a-q) = & \underline{52^0\,36'} & & & log\ tang = & 0{,}11\,651 \\
a = & 137^0\,36' & & & &
\end{array}$$

Das Azimut ist also

$$N\,137{,}6^0\,O = S\,42{,}4^0\,O$$

Beispiel 2. In welchem Azimut steht α Crucis am 25. Juni 1903 nachmittags auf $10^0\,42'\,S$ und $28^0\,19'\,W$, wenn eine Uhr, deren Stand $3^m\,4^s$ nach gegen M. O. Z. ist, $9^u\,4^m\,0^s$ zeigt?

$$\begin{array}{rl}
\text{Astr. U. Z.} = & 9^u\ \ 4^m\ \ 0^s \text{ den 25. Juni} \\
\text{Std.} = & \underline{+\ \ 3^m\ \ 4^s} \\
\text{M. O. Z.} = & 9^u\ \ 7^m\ \ 4^s \\
\text{Z. U.} = & \underline{+\,1^{st}\,53^m\,16^s} \\
\text{M. G. Z.} = & 11^u\ \ 0^m\,20^s \text{ den 25. Juni.}
\end{array}$$

$$m \odot \alpha_0 = 6^{st}\ 9^m 48^s$$
$$+\ 1^m 48^s$$

$m \odot \alpha = 6^{st}\ 11^m 36^s$	$* \alpha = 12^{st}\ 21^m 15^s$	$* \delta = 62^0\ 34{,}2'\ S$

M. O. Z. $= 9^u\ 7^m\ 4^s$	$b = 79^0 18'$
$m \odot \alpha = 6^{st}\ 11^m 36^s$	$p = 27^0 26'$
St. Z. $= 15^u\ 18^m 40^s$	$b + p = 106^0 44'$
$* \alpha = 12^{st}\ 21^m 15^s$	$\frac{1}{2}(b+p) = 53^0 22'$
$* t = 2^{st}\ 57^m 25^s$	$\frac{1}{2}(b-p) = 25^0 56'$

$t/_2 = 1^{st}\ 28^m 43^s$	$log\ cotg = 0{,}38\ 96$	$log\ cotg = 0{,}38\ 96$
$\frac{1}{2}(b+p) = 53^0 22'$	$log\ sec = 0{,}22\ 42$	$log\ cosec = 0{,}09\ 56$
$\frac{1}{2}(b-p) = 25^0 56'$	$log\ cos = 9{,}95\ 39$	$log\ sin = 9{,}64\ 08$
$\frac{1}{2}(q+a) = 74^0 52'$	$log\ tang = 0{,}56\ 77$	
$\frac{1}{2}(q-a) = 53^0 12'$		$log\ tang = 0{,}12\ 60$
$a = 21^0 40'$		

Das Azimut ist also

$$S\ 21{,}7^0\ W$$

Anmerkung: Ist $\frac{1}{2}(p+b) > 90^0$, so ist $sec\ \frac{1}{2}(p+b)$ negativ, es wird also auch $tang\ \frac{1}{2}(a+q)$ negativ, also $\frac{1}{2}(a+q)$ stumpf.

§ 229. Das Höhen-Zeit-Azimut. Ist die Abweichung, die Höhe und die Zeit, also im sphärisch-astronomischen Grunddreieck die Poldistanz, die Zenitdistanz und der Stundenwinkel bekannt, so findet man das Azimut direkt nach der Sinusregel:

$$sin\ a : sin\ t = sin\ p : sin\ z$$

Wenn man für p und z ihre Komplemente δ und h einsetzt, so erhält man

$$sin\ a : sin\ t = cos\ \delta : cos\ h$$

oder

$$\boldsymbol{sin\ a = sin\ t \cdot cos\ \delta \cdot sec\ h}$$

Um ein Höhen-Zeit-Azimut zu berechnen, verfährt man folgendermaßen:

1. Man bestimmt die mittlere Greenwicher Zeit.
2. Für diese Zeit entnimmt man die Werte aus dem Jahrbuche und zwar
   a) bei der Sonne: Abweichung und Zeitgleichung,
   b) bei einem anderen Gestirne: Gerade Aufsteigung der mittleren Sonne, Gerade Aufsteigung des Gestirnes und Abweichung des Gestirnes.
3. Hierauf bestimmt man den Stundenwinkel des Gestirnes (bei der Sonne: die wahre Ortszeit).
4. Darauf beschickt man den Kimmabstand zur wahren Mittelpunktshöhe.
5. Mit den so gefundenen Werten berechnet man das Azimut nach der obigen Formel.

Über die Benennung des Azimutes herrscht bei Benutzung dieser Formel Zweideutigkeit. Da nämlich das Azimut durch den Sinus bestimmt wird, so läßt sich nicht entscheiden, ob es spitz oder stumpf ist. Ist das Azimut einigermaßen von 90° verschieden, so lehrt der Augenschein, ob das spitze oder das stumpfe Azimut, oder mit anderen Worten, ob das spitze Azimut vom oberen oder unteren Pol zu nehmen ist. Auch läßt sich aus der Tafel 34. [28.] erkennen, auf welcher Seite des ersten Vertikals das Gestirn bei der Beobachtung gestanden hat. Sind die Breite und die Abweichung ungleichnamig, so zählt das Azimut selbstverständlich vom unteren Pol.

Beispiel. Am 29. Dezember 1903 nachmittags, auf $54^0 42' N$ und $7^0 11' O$, macht man nach einem Chronometer, das mittlere Greenwicher Zeit zeigt, die folgende Beobachtung:

Chr. Z. $= 1^u\ 57^m 48^s$ $\underline{\odot} = 6^0\ 0'$;   Jdb. $= +\ 2'$;   A. H. $= 6$ m.

Welches Azimut folgt hieraus?

Astr. M. G. Z. $= 1^u\ 57^m 48^s$ den 29. Dez.

$\odot\ \delta_0 = 23^0\ 17{,}0'\ S$	$e_0 = +\ 1^m 44^s$
$0{,}14' . 2{,}0 = -\ \ 0{,}3'$	$1{,}2^s . 2{,}0 = \ \ +\ \ 2^s$
$\odot\ \delta = 23^0\ 16{,}7'\ S$	$e = +\ 1^m 46^s$
M. G. Z. $= 1^u\ 57^m 48^s$	Beob. $\underline{\odot} = 6^0\ 0'$
Z. U. $= +\ 28^m 44^s$	Jdb. $= +\ 2'$
M. O. Z. $= 2^u\ 26^m 32^s$	$\underline{\odot} = 6^0\ 2'$
entg. $e = -\ \ 1^m 46^s$	G. B. $= +\ 3'$
$\odot\ t = 2^{st} 24^m 46^s$	$h = 6^0\ 5'$

$t = 2^{st} 24^m 46^s$	$log\ sin = 9{,}77\ 12$
$\delta = 23^0\ 17'$	$log\ cos = 9{,}96\ 31$
$h = \ 6^0\ \ 5'$	$log\ sec = 0{,}00\ 25$
$a = 33^0\ \ 4'$	$log\ sin = 9{,}73\ 68$

Das Azimut ist also

$S\ 33{,}1^0\ W.$

§ 230. Azimuttafeln. Zur schnellen Ermittelung des Azimutes der Gestirne hat man besondere Tafeln, die Azimuttafeln, berechnet. Die meisten dieser Tafeln enthalten Zeit-Azimute, dienen also zur Bestimmung des Azimutes aus Breite, Abweichung und Stundenwinkel; nur die Tafel von Weyer (Kurze Azimuttafel für alle Deklinationen, Stundenwinkel und Höhen der Gestirne auf beliebigen Breiten. Hamburg 1890) dient zur Bestimmung des Höhen-Zeit-Azimutes.

Unter den Azimuttafeln kann man zwei große Gruppen unterscheiden: solche, die für bestimmte Werte von Breite, Abweichung und Stundenwinkel das Azimut unmittelbar ergeben, und solche, durch die die Berechnung des Azimutes wesentlich vereinfacht wird.

Unter den ersteren sind die Tafeln von Burdwood und Davis (Sun's true bearing or azimuth-tables for intervals of four minutes between the parallels of lat. 30^0 and 60^0 incl. [0^0 and 30^0], London) neben denen von Labrosse (Tables des Azimuts du Soleil) die bekanntesten. Sie enthalten die Azimute (auf Minuten genau) für jeden vollen Grad der Breite, jeden vollen Grad der Abweichung und jede vierte Minute des Stundenwinkels. Von geringerem Umfange, aber nicht weniger bequem ist die Azimuttafel von Ebsen (Azimuttabellen, enthaltend die wahren Richtungen der Sonne für Zeitintervalle von 10 Minuten zwischen den Breitenparallelen von 70^0 Nord bis 70^0 Süd, Hamburg), die die Azimute auf zehntel Grade für jeden vollen Grad der Breite und der Abweichung, aber für jede zehnte Minute des Stundenwinkels enthält.

Ein Beispiel einer Azimuttafel der zweiten Art, die die Azimute mittels einer kleinen Rechnung ergiebt, ist Tafel 38*) der Nautischen Tafeln. Diese Tafel ermöglicht eine schnelle Bestimmung des Azimutes nach der Formel

$$cotg\,a = cos\,\varphi \,.\left(\frac{tang\,\delta}{sin\,t} - \frac{tang\,\varphi}{tang\,t}\right)$$

die sich aus der Formel 12. des § 195

$$tang\,\delta \,.\, cos\,\varphi = sin\,\varphi \,.\, cos\,t + sin\,t \,.\, cotg\,a$$

durch Auflösung nach $cotg\,a$ ergiebt.

Die Tafel 38. besteht aus den drei Tafeln A, B und C, und zwar enthält die Tafel A den Wert

$$A = -\frac{tang\,\varphi}{tang\,t}$$

die Tafel B den Wert

$$B = +\frac{tang\,\delta}{sin\,t}$$

und die Tafel C den Wert

$$C = A + B = cotg\,a \,.\, sec\,\varphi$$

Man findet somit das Azimut, indem man mit den Werten t, φ und δ aus den Tafeln A und B die entsprechenden Werte entnimmt, die algebraische Summe dieser Werte unter der Breite des Beobachtungsortes in der Tafel C aufsucht und das Azimut dem Kopfe der Tafel entnimmt.

Beispiel 1 (siehe § 228, Beispiel 1). Es ist das Azimut zu bestimmen aus

$\varphi = 38^0\,6'\,N$ $\quad\delta = 7^0\,56'\,N$ $\quad t = 1^{st}\,37^m\,38^s$

Tafel A und B ergeben

$$A = -1{,}71$$
$$B = +0{,}34$$
$$A + B = -1{,}37$$

Hieraus ergiebt Tafel C

$$a = S\,43^0\,O.$$

Beispiel 2 (siehe § 228, Beispiel 2). Es ist das Azimut zu bestimmen aus

$\varphi = 10^0\,42'\,S$ $\quad\delta = 62^0\,34'\,S$ $\quad t = 2^{st}\,57^m\,25^s$

Tafeln A und B ergeben

$$A = -0{,}20$$
$$B = +2{,}75$$
$$A + B = +2{,}55$$

Hieraus ergiebt Tafel C

$$a = S\,22^0\,W.$$

Ähnlich wie diese Tafel ist die Azimuttafel von Fulst (Azimut-Tafel. Tafel zur Bestimmung des Azimutes aus Breite, Abweichung und Stunden-

*) Behrmann, Nautische Tafeln, Tafel 33.

winkel, Bremen 1898) eingerichtet. Mit ihr berechnet man in ganz entsprechender Weise das Azimut nach der Formel

$$cotg\, a = cosec\, t \,.\, (cos\, \varphi \,.\, tang\, \delta - sin\, \varphi \,.\, cos\, t)$$

die sich durch eine einfache Umformung aus der eben angeführten Formel ergiebt.

Dagegen beruht die Tafel von Randermann (Nautische Tafeln mit Gebrauchs-Anweisungen und Beispielen in deutscher und englischer Sprache. Bremerhaven 1898) auf einem wesentlich anderen Prinzip. Sie enthält die Auflösung der beiden rechtwinkligen sphärischen Dreiecke, die man erhält, wenn man im astronomischen Grunddreieck das Lot vom Gestirn auf den Meridian fällt. Aus dieser Tafel enthält man das Azimut durch ein zweimaliges Eingehen.

Bestimmung der Mißweisung durch Azimute.

§ 231. **Prinzip der Mißweisungsbestimmungen.** Die Gesamtmißweisung eines Kompasses bestimmt man durch Vergleichung einer am Kompaß abgelesenen Richtung mit der entsprechenden rechtweisenden Richtung. Ist z. B. die rechtweisende Richtung eines sichtbaren irdischen Gegenstandes, etwa eines Leuchtturmes, bekannt, so läßt sich die Mißweisung bestimmen, indem man den Leuchtturm am Kompaß peilt und diese Peilung mit der bekannten rechtweisenden Richtung vergleicht. In derselben Weise läßt sich die Mißweisung ermitteln, indem man die Kompaßpeilung eines Gestirnes mit seinem Azimut, das man berechnet oder einer Tafel entnommen hat, vergleicht.

Kompaßpeilung und rechtweisende Richtung (Azimut) stellen nur verschiedene Namen ein und derselben Richtung dar. Denkt man sich aber beide Richtungen auf ein und dieselbe Strichrose eingezeichnet, wie dies in § 134 ausführlich erörtert ist, so stellen sie wegen ihres verschiedenen Namens zwei verschiedene Richtungen dar, und der Winkel zwischen diesen beiden Richtungen ist gleich der Mißweisung des Kompasses. Da bei östlicher Mißweisung die rechtweisende Richtung rechts, bei westlicher Mißweisung links von der Kompaßpeilung liegt (vergl. § 134), so findet man den Namen der Mißweisung nach folgender Regel:

Muß man, um von der Kompaßrichtung zur rechtweisenden Richtung zu gelangen, mit der Sonne (rechts) herumgehen, so ist die Mißweisung Ost, muß man gegen die Sonne (links) herumgehen, so ist die Mißweisung West.

Die auf diese Weise bestimmte Mißweisung ist die Gesamtmißweisung. Um aus ihr die örtliche Ablenkung zu bestimmen, muß man die Orts-Mißweisung von ihr algebraisch subtrahieren; dieses geschieht in der Weise, daß man die Orts-Mißweisung mit entgegengesetztem Namen zur Gesamtmißweisung hinzufügt.

Die Größe der Orts-Mißweisung ist einer neuen Seekarte oder einer Isogonen-Karte zu entnehmen.

Beispiel 1. Ein Gestirn, dessen rechtweisende Peilung (Azimut) $S\,79^0\,O$ ist, wird $S\,64^0\,O$ am Kompaß gepeilt. Die Orts-Mißweisung ist $19^0\,W$. Welche Gesamtmißweisung und welche Ablenkung hat der Kompaß für den anliegenden Kurs?

Peilung =	$S\,64^0\,O$
Azimut =	$S\,79^0\,O$
Ges.-Mw. =	$15^0\,W$
entg. Orts-Mw. =	$19^0\,O$
Abl. =	$4^0\,O$

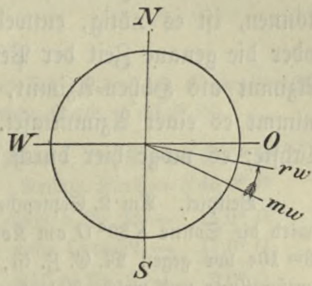


Fig. 191.

Beispiel 2. Ein Gestirn, dessen rechtweisendes Azimut $S\,40^0\,W$ ist, wird $S\,18^0\,W$ am Kompaß gepeilt. Die Orts-Mißweisung ist $14^0\,O$. Welche Gesamtmißweisung und welche Ablenkung hat der Kompaß für den anliegenden Kurs?

Peilung =	$S\,18^0\,W$
Azimut =	$S\,40^0\,W$
Ges.-Mw. =	$22^0\,O$
entg. Orts-Mw. =	$14^0\,W$
Abl. =	$8^0\,O$

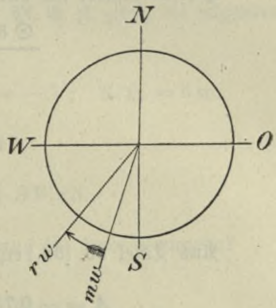


Fig. 192.

§ 232. Beobachtung und Berechnung. Will man die Mißweisung durch das Azimut eines Gestirnes bestimmen, so hat man das Gestirn zu peilen. Es geschieht dies entweder direkt mit Hülfe der auf dem Normalkompaß angebrachten Peilvorrichtung oder mit Hülfe einer mit dem Schiffe fest verbundenen Peilscheibe, auf der man den Winkel ablieſt, den die Richtung des Gestirnes mit der Kielrichtung bildet. Da die Peilung sehr hoch stehender Gestirne nicht nur schwierig, sondern auch in den meisten Fällen ungenau ist, so sind Peilungen bei Höhen über 60^0 zu vermeiden. Bei der Peilung ist sorgfältig darauf zu achten, daß der Peilapparat horizontal hängt, da sonst eine fehlerhafte Peilung erhalten wird. Der dadurch entstehende Fehler ist um so größer, je höher das Gestirn steht. Beim Peilen mit der Peilscheibe ist der anliegende Kurs im Augenblicke der Peilung genau abzulesen, da jeder Fehler in der Ablesung mit seinem vollen Betrage in die Mißweisung übergeht. Bei klarem Himmel läßt sich die Sonne am bequemsten mit Hülfe des Sonnenstiftes, eines im Mittelpunkte des Kompaß-Deckels oder der Peilscheibe senkrecht befestigten Stiftes, peilen, indem man die Richtung des Schattens dieses Stiftes bestimmt. Dabei ist mit Sorgfalt darauf zu achten, daß der Stift gerade ist und senkrecht steht. Ob er brauchbar ist, kann man am besten erkennen, wenn man ihn um seine Längsachse dreht; bleibt dabei die Spitze in Ruhe, so ist der Stift gut, beschreibt die Spitze aber einen Kreis, so ist der Stift verbogen.

Um das Azimut des Gestirnes im Augenblicke der Peilung bestimmen zu können, ist es nötig, entweder gleichzeitig die Höhe des Gestirnes zu beobachten oder die genaue Zeit der Peilung abzulesen. Im ersten Falle berechnet man das Azimut als Höhen-Azimut, im zweiten Falle als Zeit-Azimut, oder man entnimmt es einer Azimuttafel. Das letzte Verfahren ist bei weitem das gebräuchlichste; es möge hier durch ein Beispiel erläutert werden.

Beispiel. Am 2. September 1903 vormittags, nach Besteck auf $48^\circ 4' N$ und $50^\circ 10' W$, wird die Sonne $S\,39^\circ\,O$ am Kompaß gepeilt; gleichzeitig zeigt das Chronometer, dessen Stand $3^m\,10^s$ vor gegen M. G. Z. ist, $11^u\,40^m\,28^s$. Ortsmißweisung $= 32^\circ\,W$. Welche Gesamtmißweisung und welche Ablenkung folgt hieraus?

Astr. Chr. Z. $= 23^u\,40^m\,28^s$ den 1. Sept.
Std. $= -\ 3^m\,10^s$
M. G. Z. $= 23^u\,37^m\,18^s$ den 1. Sept.

Hierfür ergiebt sich aus dem Jahrbuche

$\odot\,\delta = 8^\circ 16' N$ $\qquad e = -\ 0^m\ 4^s$

M. G. Z. $= 23^u\,37^m\,18$
Z. U. $= -\,3^{st}\,20^m\,40^s$
M. O. Z. $= 20^u\,16^m\,38^s$
entg. $e = +\ 0^m\ 4^s$
$\odot\,t = 20^{st}\,16^m\,42^s$

Aus Tafel 38. [33.] ergiebt sich

$A = -\,0{,}75$
$B = +\,0{,}18$
$C = -\,0{,}57$
$a = S\,69^\circ\,O$

Peilung $= S\,39^\circ\,O$
$a = S\,69^\circ\,O$
Ges.-Mw. $= 30^\circ\,W$
entg. Orts-Mw. $= 32^\circ\,O$
Abl. $= 2^\circ\,O$

§ 233. Gleichzeitige Bestimmung der Mißweisung mehrerer Kompasse. Will man gleichzeitig die Mißweisung mehrerer oder aller Kompasse an Bord bestimmen, so geschieht dies am bequemsten in der Weise, daß man das Gestirn nur an einem Kompaß — dem Normalkompaß oder Regelkompaß — peilt, und an allen Kompassen, einschließlich des Normalkompasses, den im Augenblicke der Peilung anliegenden Kurs abliest.

Man bestimmt alsdann zunächst die Gesamtmißweisung des Normalkompasses, wie dies in den vorigen Paragraphen erläutert worden ist. Mit Hülfe dieser Gesamtmißweisung verwandelt man den am Normalkompaß abgelesenen Kurs in den rechtweisenden Kurs. Durch Vergleichung der an den übrigen Kompassen abgelesenen Kurse mit dem so gefundenen rechtweisenden Kurse erhält man die Mißweisung der übrigen Kompasse.

Beispiel 1. Ein Gestirn, dessen Azimut $N\,58{,}0^\circ\,O$ ist, wird am Normalkompaß $N\,78{,}0^\circ\,O$ gepeilt, während das Schiff $S\,66^\circ\,W$ am Normalkompaß, $WSW\frac{1}{8}W$ am Steuerkompaß, und $S\,61{,}0^\circ\,W$ am Brückenkompaß anliegt. Welche Gesamtmißweisung und welche Ablenkung haben die drei Kompasse, wenn die Orts-Mißweisung $17^\circ\,W$ beträgt?

$$\begin{array}{rl} \text{Peilung} = & N\,78{,}0^\circ\,O \\ \text{Azimut} = & N\,58{,}0^\circ\,O \\ \hline \text{Ges.-Mw. d. N. K.} = & 20{,}0^\circ\,W \\ \text{entg. Orts-Mw.} = & 17{,}0^\circ\,O \\ \hline \text{Abl. d. N. K.} = & 3{,}0^\circ\,W \end{array}$$

Bringt man die 20,0° *W* = Mißweisung des Normalkompasses an den am Normalkompaß abgelesenen Kurs *S* 66° *W* an, so erhält man den rechtweisenden Kurs: *S* 46,0° *W*.

$$\begin{array}{rl} \text{Kurs a. St. K.} = & S\,68{,}9^\circ\,W \\ \text{Rechtw. Kurs} = & S\,46{,}0^\circ\,W \\ \hline \text{Ges.-Mw. d. St. K.} = & 22{,}9^\circ\,W \\ \text{entg. Orts-Mw.} = & 17{,}0^\circ\,O \\ \hline \text{Abl. d. St. K.} = & 5{,}9^\circ\,W \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Kurs a. Br. K.} = & S\,61{,}0^\circ\,W \\ \text{Rechtw. Kurs} = & S\,46{,}0^\circ\,W \\ \hline \text{Ges.-Mw. d. Br. K.} = & 15{,}0^\circ\,W \\ \text{entg. Orts-M.} = & 17{,}0^\circ\,O \\ \hline \text{Abl. d. Br. K.} = & 2{,}0^\circ\,O \end{array}$$

Wie in einem solchen Fall die gesamte Rechnung einzurichten ist, soll an dem folgenden Beispiele gezeigt werden.

Beispiel 2. Höhen-Azimut. Am 2. Februar 1903 vormittags, nach Besteck auf 38° 31′ *N* und 60° 0′ *W*, werden nach einem Chronometer, das angenähert M. G. Z. zeigt, die folgenden Beobachtungen gemacht

Chr. Z. = $1^u\,44^m$ $\underline{\odot} = 24^\circ\,51'$; $\Phi = S\,16^\circ\,O$; Jdb. = — 1′; A. H. = 6 m.

Die Orts-Mißweisung beträgt 17° *W*. Das Schiff liegt an:

am Peilkompaß *S* 24° *W*, am Steuerkompaß *S W z S*.

Welche Gesamtmißweisung und welche Ablenkung folgt hieraus für beide Kompasse?

M. G. Z. = $1^u\,44^m$ den 2. Febr.

Hierfür ergiebt sich aus dem Jahrbuche

$\odot\,\delta = 17^\circ\,3'\,S$ also $p = 107^\circ\,3'$

$$\begin{array}{rl} \text{Beob. } \underline{\odot} = & 24^\circ\,51' \\ \text{Jdb.} = & -\ \ 1' \\ \hline \underline{\odot} = & 24^\circ\,50' \\ \text{G. B.} = & +\ 10' \\ \hline h = & 25^\circ\ \ 0' \end{array} \qquad \begin{array}{rll} \varphi = & 38^\circ\,31' & \log sec = 0{,}10\,66 \\ h = & 25^\circ\ \ 0' & \log sec = 0{,}04\,27 \\ \hline \varphi + h = & 63^\circ\,31' & \\ p = & 107^\circ\ \ 3' & \\ \hline s = & 170^\circ\,34' & \\ \hline s/_2 = & 85^\circ\,17' & \log cos = 8{,}91\,50 \\ u/_2 = & 21^\circ\,46' & \log cos = 9{,}96\,79 \\ \hline a = & 141{,}7^\circ & \log cos^2 a/_2 = 9{,}03\,22 \\ a = & N\,141{,}7^\circ\,O = S\,38{,}3^\circ\,O & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \Phi = & S\,16{,}0^\circ\,O \\ a = & S\,38{,}3^\circ\,O \\ \hline \text{Ges.-Mw. d. P. K.} = & 22{,}3^\circ\,W\ [\text{entg. O.-Mw.} = 17{,}0^\circ\,O]\ \text{Abl. d. P. K.} = 5{,}3^\circ\,W \\ \text{Kurs a. P. K.} = & S\,24{,}0^\circ\,W \\ \hline \text{rw. K.} = & S\ \ 1{,}7^\circ\,W \\ \text{Kurs a. St. K.} = & S\,33{,}8^\circ\,W \\ \hline \text{Ges.-Mw. d. St. K.} = & 32{,}1^\circ\,W\ [\text{entg. O.-Mw.} = 17{,}0^\circ\,O]\ \text{Abl. d. St. K.} = 15{,}1^\circ\,W \end{array}$$

Höhe.

§ 234. Ableitung der Formel. Bei verschiedenen Aufgaben der nautischen Astronomie ist es nötig, die wahre Höhe eines Gestirnes zu berechnen. Dabei wird immer die Breite, die Abweichung und der Stundenwinkel als bekannt vorausgesetzt. Im sphärisch-astronomischen Grunddreieck sind also zwei Seiten (b und p) und der zwischenliegende Winkel (t) bekannt. Aus ihnen ist die dem Winkel gegenüberliegende Seite (z) zu berechnen.

Es geschieht dies mittels der Formel 4. des § 195

$$\sin h = \sin\varphi \,.\, \sin\delta + \cos\varphi \,.\, \cos\delta \,.\, \cos t$$

Setzt man hierin nach § 104, Formel 7b.

$$\cos t = 1 - 2\, sem\, t$$

so wird

$$\sin h = \sin\varphi \,.\, \sin\delta + \cos\varphi \,.\, \cos\delta \,.\, (1 - 2\, sem\, t)$$

$$\sin h = \sin\varphi \,.\, \sin\delta + \cos\varphi \,.\, \cos\delta - 2\, sem\, t \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\delta$$

Nun ist nach § 103, Formel 4.

$$\cos\varphi \,.\, \cos\delta + \sin\varphi \,.\, \sin\delta = \cos(\varphi - \delta) = \cos z_0$$

also

$$\sin h = \cos z_0 - 2\, sem\, t \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\delta$$

Multipliziert man das letzte Glied dieser Gleichung mit $\cos z_0 \,.\, \sec z_0$, wodurch sein Wert, da $\cos z_0 \,.\, \sec z_0 = 1$ ist, nicht geändert wird, so erhält man

$$\sin h = \cos z_0 - 2\, sem\, t \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\delta \,.\, \cos z_0 \,.\, \sec z_0$$

oder

$$\sin h = \cos z_0 \,.\, [1 - 2\, sem\, t \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\delta \,.\, \sec z_0]$$

Setzt man nun

$$1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \boldsymbol{sem\, x = sem\, t \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\delta \,.\, \sec z_0}$$

so wird $\sin h = \cos z_0 \,.\, [1 - 2\, sem\, x]$

also da $1 - 2\, sem\, x = \cos x$ ist

$$2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \boldsymbol{\sin h = \cos z_0 \,.\, \cos x}$$

Mit Hülfe der Gleichungen 1. und 2. läßt sich die Berechnung der Höhe ausführen.

§ 235. Berechnung. Die Berechnung einer Gestirnshöhe hat folgenden Weg einzuschlagen.

1. Man bestimmt die mittlere Greenwicher Zeit.
2. Für diese Zeit entnimmt man die Werte aus dem Jahrbuche und zwar
   a) bei der Sonne: Abweichung und Zeitgleichung,
   b) bei den übrigen Gestirnen: Gerade Aufsteigung der mittleren Sonne, Gerade Aufsteigung des Gestirnes und Abweichung des Gestirnes.
3. Hierauf bestimmt man den Stundenwinkel des Gestirnes (bei der Sonne: die wahre Ortszeit).

4. Aus den so gefundenen Werten berechnet man die Höhe nach den oben abgeleiteten Formeln 1. und 2. Die darin vorkommende Meridionalzenitdistanz z_0 ist gleich der algebraischen Differenz der Breite und der Abweichung; sind also Breite und Abweichung gleichnamig, so sind ihre absoluten Beträge zu subtrahieren, sind dagegen Breite und Abweichung ungleichnamig, so sind ihre absoluten Beträge zu addieren.

Beispiel 1. Sonne. Welches ist am 2. Mai 1903 nachmittags, nach Besteck auf $47^0\,25'\,N$ und $22^0\,35'\,W$, die wahre Mittelpunktshöhe der Sonne, wenn ein Chronometer, dessen Stand $3^m\,17^s$ nach gegen M. G. Z. ist, $5^u\,30^m\,20^s$ zeigt?

$$\begin{aligned} \text{Astr. Chr. Z.} &= 5^u\,30^m\,20^s \text{ den 2. Mai}\\ \text{Std.} &= +\ \ 3^m\,17^s\\ \hline \text{M. G. Z.} &= 5^u\,33^m\,37^s \text{ den 2. Mai} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \odot\,\delta_0 &= 15^0\ \ 6{,}3'\,N\\ 0{,}75'\,.\,5{,}6 &= \ +4{,}2'\\ \hline \odot\,\delta &= 15^0\,10{,}5'\,N \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} e_0 &= -\,2^m\,59^s\\ 0{,}3^s\ 5{,}6 &= \ \ +\ 2^s\\ \hline e &= -\,3^m\ \ 1^s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{M. G. Z.} &= \ \ 5^u\ 33^m\,37^s\\ \text{Z. U.} &= -\,1^{st}\,30^m\,20^s\\ \hline \text{M. O. Z.} &= \ \ 4^u\ \ 3^m\,17^s\\ \text{entg. } e &= \ \ +\ \ 3^m\ \ 1^s\\ \hline \odot\,t &= \ \ 4^{st}\ \ 6^m\,18^s \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} t = 4^{st}\,6^m\,18^s & \log sem = 9{,}41\,830 & \\ \varphi = 47^0\,25'\,N & \log cos = 9{,}83\,037 & \\ \delta = 15^0\,11'\,N & \log cos = 9{,}98\,457 & \\ \hline z_0 = 32^0\,14' & \log sec = 0{,}07\,269 & \log cos = 9{,}92\,731\\ x = 3^{st}\,33^m\,49^s & \log sem = 9{,}30\,593 & \log cos = 9{,}77\,490\\ \odot\,h = 30^0\,15' & & \log sin = 9{,}70\,221 \end{array}$$

Beispiel 2. Mond. Welches ist am 24. April 1903 vormittags, nach Besteck auf $39^0\,15'\,S$ und $16^0\,30'\,O$, die wahre Mittelpunktshöhe des Mondes, wenn eine Uhr, deren Stand $2^m\,0^s$ vor gegen M. O. Z. ist, $5^u\,23^m\,2^s$ zeigt?

$$\begin{aligned} \text{Astr. U. Z.} &= 17^u\ 23^m\,2^s \text{ den 23. April}\\ \text{Std.} &= \ -\ \ \ 2^m\,0^s\\ \hline \text{M. O. Z.} &= 17^u\ 21^m\,2^s\\ \text{Z. U.} &= \ \ 1^{st}\ \ 6^m\\ \hline \text{M. G. Z.} &= 16^u\ 15^m \text{ den 23. April.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\,\odot\,\alpha_0 &= 2^{st}\,1^m\,25^s\\ &\ \ \ +2^m\,40^s\\ \hline m\,\odot\,\alpha &= 2^{st}\,4^m\ \ 5^s \end{aligned} \qquad \begin{aligned} ☾\,\alpha \text{ um } 16^u &= 23^{st}\,22^m\,45^s\\ 2{,}02^s\,.\,15 &= \quad\ +\ 30^s\\ \hline ☾\,\alpha &= 23^{st}\,23^m\,15^s \end{aligned} \qquad \begin{aligned} ☾\,\delta \text{ um } 16^u &= 1^0\,35{,}0'\,S\\ 0{,}168'\,.\,15 &= -\,2{,}5'\\ \hline ☾\,\delta &= 1^0\,32{,}5'\,S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{M. O. Z.} &= 17^u\ 21^m\ \ 2^s\\ m\,\odot\,\alpha &= \ \ 2^{st}\ \ 4^m\ \ 5^s\\ \hline \text{St. Z.} &= 19^u\ 25^m\ \ 7^s\\ ☾\,\alpha &= 23^{st}\,23^m\,15^s\\ \hline ☾\,t &= 20^{st}\ \ 1^m\,52^s \end{aligned}$$

$t = 20^{st}\,1^m\,52^s$	$log\,sem = 9{,}39\,178$	
$\varphi = 39^0\,15'\,S$	$log\,cos = 9{,}88\,896$	
$\delta = 1^0\,33'\,S$	$log\,cos = 9{,}99\,984$	
$z_0 = 37^0\,42'$	$log\,sec = 0{,}10\,170$	$log\,cos = 9{,}89\,830$
$x = 3^{st}\,55^m\,17^s$	$log\,sem = 9{,}38\,228$	$log\,cos = 9{,}71\,414$
$☾ h = 24^0\,11'$		$log\,sin = 9{,}61\,244$

§ 236. Besondere Fälle.

1. Höhe eines Gestirnes im Sechsuhrkreis. Steht ein Gestirn im Sechsuhrkreise, so ist sein Stundenwinkel $t = 90^0$; die Formel 4. des § 195

$$sin\,h = sin\,\varphi\,.\,sin\,\delta + cos\,\varphi\,.\,cos\,\delta\,.\,cos\,t$$

geht somit, da $cos\,90^0 = 0$ ist, über in

$$1. \ldots\ldots\ldots\quad sin\,h = sin\,\varphi\,.\,sin\,\delta$$

2. Höhe eines Gestirnes im ersten Vertikal. Steht ein Gestirn im ersten Vertikal, so ist sein Azimut $a = 90^0$, die Formel 5. des § 195

$$sin\,\delta = sin\,\varphi\,.\,sin\,h + cos\,\varphi\,.\,cos\,h\,.\,cos\,a$$

geht somit, da $cos\,90^0 = 0$ ist, über in

$$sin\,\delta = sin\,\varphi\,.\,sin\,h$$

woraus zur Berechnung der Höhe die Formel folgt

$$2. \ldots\ldots\ldots\quad sin\,h = cosec\,\varphi\,.\,sin\,\delta$$

3. Höhe eines Gestirnes in der Größten Ausweichung. Steht ein Gestirn in der Größten Ausweichung, so ist der parallaktische Winkel $q = 90^0$; die Formel 6. des § 195

$$sin\,\varphi = sin\,h\,.\,sin\,\delta + cos\,h\,.\,cos\,\delta\,.\,cos\,q$$

geht somit, da $cos\;90^0 = 0$ ist, über in

$$sin\,\varphi = sin\,h\,.\,sin\,\delta$$

woraus zur Berechnung der Höhe die Formel folgt

$$3. \ldots\ldots\ldots\quad sin\,h = sin\,\varphi\,.\,cosec\,\delta$$

Nach der Formel 2. bezw. 3. ist die Tafel 35*) berechnet.

Standlinien.

§ 237. Geschichtliches.

Die astronomische Standlinie, die im folgenden Abschnitt behandelt wird, ist eines der wichtigsten astronomischen Hülfsmittel des Seemannes. Ihre Kenntnis verdanken wir dem amerikanischen Kapitän Thomas H. Sumner, der durch einen Zufall auf sie aufmerksam wurde. Er erzählt darüber in seinem 1843 erschienenen Buche: A new and accurate method of finding a ship's position at sea by projection on Mercator's chart folgendermaßen:

*) Behrmann, Nautische Tafeln, Tafel 29.

„Am 25. November 1837 hatten wir Charleston S. C. verlassen, um nach Greenock zu segeln. Eine Reihe heftiger Stürme aus Westen versprach eine schnelle Überfahrt. Nachdem wir aber die Azoren passiert hatten, hatten wir vorwiegend südlichen Wind bei dickem, unsichtigem Wetter. Seit dem Passieren des Meridians von 21° *W* war bis dicht unter Land keine astronomische Beobachtung gelungen, dagegen wurde aus Lotungen vermutet, daß sich das Schiff am Rande der „Gründe" befinde. Das Wetter war unfreundlicher als bisher und sehr dick, der Wind noch immer südlich. Um Mitternacht des 17. Dezember befanden wir uns nach Loggerechnung etwa 40 Meilen von Tuscar Feuer; der Wind holte nach rechtweisend *SO*, so daß die irische Küste Lehküste wurde. Das Schiff wurde dicht an den Wind gehalten und verschiedentlich gewendet, um den Schiffsort bis zum Tagesanbruch so wenig wie möglich zu verändern. Als am anderen Morgen nichts in Sicht war, wurde das Schiff bei heftigem bis stürmischem Winde unter kleinen Segeln auf *ONO*-Kurs gelegt. Ungefähr um 10^u vormittags wurde eine Sonnenhöhe beobachtet und die Chronometerzeit notiert. Da wir aber einen so weiten Weg ohne astronomische Beobachtung zurückgelegt hatten, so konnte offenbar die Breite nach Loggerechnung leicht fehlerhaft und unzuverlässig sein."

„Unter Benutzung dieser Breite bei der Berechnung der Chronometerlänge wurde gefunden, daß das Schiff 15′ östlich von seinem nach Loggerechnung bestimmten Orte stand, was auf 52° Breite 9 Seemeilen sind. Dies schien ganz leidlich mit der Loggerechnung zu stimmen. Da ich aber im Zweifel über meine Breite war, wurde die Rechnung mit einer um 10′ nördlicheren Breite wiederholt, und es ergab sich, daß der Schiffsort *ONO* 27 Seemeilen von dem zuerst gefundenen Orte ablag. Die Rechnung wurde daher mit einer um 20′ nördlich von der Koppelkurs-Breite angenommenen Breite wiederholt und es wurde hierdurch das Schiff noch weitere 27 Seemeilen nach *ONO* versetzt; und ich bemerkte, daß diese drei Orte in einer nach Smalls Feuer führenden Richtung lagen. Es wurde mir dadurch plötzlich klar, daß man an den drei berechneten Punkten sowie bei Smalls Feuer und auf dem Schiffe in demselben Augenblicke dieselbe Sonnenhöhe gehabt hatte, und es folgte daraus, daß Smalls Feuer *ONO* peilen mußte, wenn das Chronometer richtig ging. Von der Richtigkeit dieser Thatsache überzeugt, ließ ich das Schiff bei dem noch anhaltenden *SO*-Wind auf seinem Kurse *ONO* liegen und in weniger als einer Stunde wurde Smalls Feuer in der Peilung *ONO*$\frac{1}{2}$*O* dicht beim Schiff gesichtet."

„Die Breite nach Loggerechnung war 8 Meilen fehlerhaft, und wenn die Chronometerlänge mit dieser Breite berechnet wäre, so würde der Schiffsort um $31\frac{1}{2}'$ zu weit westlich und um 8 Meilen zu weit südlich bestimmt worden sein."

„Hieraus ist ersichtlich, daß eine Beobachtung, die zu irgend einer Tageszeit in beliebigem Azimut angestellt worden ist, praktisch nutzbar gemacht werden kann, sofern man sich nur auf sein Chronometer verlassen kann."

Sumner gab in dem oben genannten Buche bereits eine vollständige Theorie der von ihm gefundenen Standlinie. Viele Jahre sind indessen vergangen, bevor man auf See allgemeinen Gebrauch von diesem wichtigen Hülfsmittel machte;

es ist erst der neuesten Zeit vorbehalten gewesen, seiner Entdeckung, die besonders von französischen Gelehrten weiter durchgebildet wurde, den Platz anzuweisen, der ihr gebührt, nämlich an der Spitze der gesamten astronomischen Ortsbestimmung auf See.

§ 238. Der Zenitalpunkt. Eine gerade Linie, die den Mittelpunkt eines Gestirnes mit dem Mittelpunkte der Erde verbindet, schneidet die Erdoberfläche in einem Punkte, in dessen Zenit das Gestirn steht. Man nennt daher diesen Punkt den Zenitalpunkt des Gestirnes.

Da die Abweichung eines im Zenit kulminierenden Gestirnes gleich und gleichnamig mit der Breite ist (§ 177), so ist die Breite des Zenitalpunktes gleich der Abweichung des Gestirnes.

Steht das Gestirn im Zenit eines Ortes, so kulminiert es. Man findet also die Länge des Zenitalpunktes für irgend eine mittlere Greenwicher Zeit, indem man die mittlere Ortszeit der Kulmination des Gestirnes (vergl. § 188) mit der mittleren Greenwicher Zeit vergleicht.

Beispiel 1. Auf welcher Breite und Länge befindet sich der Zenitalpunkt der Sonne am 24. Februar 1903 nachmittags um $4^u\ 17^m\ 0^s$ nach mittlerer Greenwicher Zeit?

M. G. Z. = $4^u\ 17^m\ 0^s$ den 24. Febr.

$\odot\,\delta_0 = 9^0\,47{,}2'\ S$
$0{,}92'.4{,}3 = -\ 4{,}0'$
$\odot\,\delta = 9^0\,43{,}2'\ S$

$e_0 = +\ 13^m\ 32^s$
$0{,}4^s.4{,}3 = -\ 2^s$
$e = +\ 13^m\ 30^s$

W. O. Z = $0^u\ 0^m\ 0^s$
$e = +\ 13^m\ 30^s$
M. O. Z. = $0^u\ 13^m\ 30^s$
M. G. Z. = $4^u\ 17^m\ 0^s$
Z. U. = $4^{st}\ 3^m\ 30^s$
$\lambda = 60^0\ 52{,}5'\ W$

(Die Länge ist W, da die M. G. Z. größer als die M. O. Z. ist.)

Der Zenitalpunkt liegt somit auf $9^0\,43{,}2'\ S$ und $60^0\ 52{,}5'\ W$.

Beispiel 2. Auf welcher Breite und Länge befindet sich der Zenitalpunkt des Mondes am 7. November 1903 vormittags um $5^u\ 48^m\ 12^s$ nach mittlerer Greenwicher Zeit?

M. G. Z. = $17^u\ 48^m\ 12^s$ den 6. Nov.

$m\odot\alpha_0 = 14^{st}\,58^m\ 6^s$
$+\ 2^m\,55^s$
$m\odot\alpha = 15^{st}\ 1^m\ 1^s$

$☾\,\alpha$ um $17^{st} = 4^u\ 31^m\ 47^s$
$2{,}43^s.48{,}2 = +\ 1^m\ 57^s$
$☾\,\alpha = 4^{st}\,33^m\ 44^s$

$☾\,\delta$ um $17^u = 17^0\,15{,}2'\ N$
$0{,}062'.48{,}2 = +\ 3{,}0'$
$☾\,\delta = 17^0\,18{,}2'\ N$

$☾\,t = 0^{st}\ 0^m\ 0^s$
$☾\,\alpha = 4^{st}\,33^m\,44^s$
St. Z. = $4^u\ 33^m\ 44^s$
$m\odot\alpha = 15^{st}\ 1^m\ 1^s$
M. O. Z. = $13^u\ 32^m\ 43^s$ den 6. Nov.
M. G. Z. = $17^u\ 48^m\ 12^s$ den 6. Nov.
Z. U. = $4^{st}\,15^m\ 29^s$
$\lambda = 63^0\ 52{,}3'\ W$

(Die Länge ist W, da die M. G. Z. größer als die M. O. Z. ist.)

Der Zenitalpunkt liegt somit auf $17^0\,18{,}2'\ N$ und $63^0\,52{,}3'\ W$.

§ 239. Der Höhenkreis. In nebenstehender Figur bedeute S den Ort eines Gestirnes, also S' den Zenitalpunkt, B den Beobachtungsort, also Z das Zenit. Dann ist die Zenitdistanz ZS gleich dem Abstande BS' des Beobachtungsortes vom Zenitalpunkte.

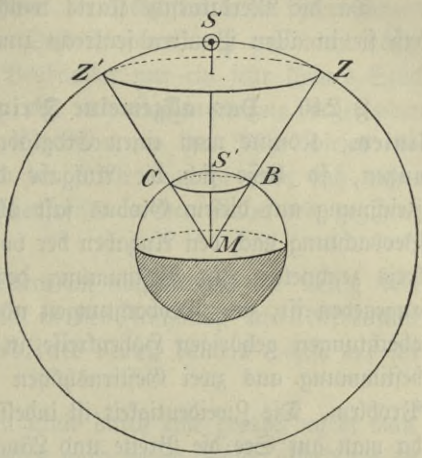


Fig. 193.

Denkt man sich um den Zenitalpunkt S' mit dem sphärischen Halbmesser $S'B$ einen Kreis beschrieben, so liegen die Zenite aller Punkte dieses Kreises auf einem Kreise, dessen sphärischer Halbmesser gleich der Zenitdistanz SZ ist. In allen Punkten des Kreises BC beobachtet man somit die gleiche Zenitdistanz, also auch die gleiche Höhe des Gestirnes, und zwar ist die Zenitdistanz gleich dem Halbmesser BS'. Innerhalb des Kreises ist die Zenitdistanz kleiner, die Höhe also größer; außerhalb des Kreises ist die Zenitdistanz größer, die Höhe also kleiner.

Es gilt also der folgende Satz:

Alle Punkte der Erdoberfläche, in denen in einem bestimmten Augenblicke dieselbe Höhe eines Gestirnes beobachtet wird, liegen auf einem Kreise, dessen sphärischer Mittelpunkt der Zenitalpunkt und dessen Halbmesser gleich der Zenitdistanz ist. Dieser Kreis soll Höhenkreis oder Höhengleiche heißen.

Es folgt hieraus unmittelbar, daß sich aus einer einzelnen Höhenbeobachtung niemals der Schiffsort selbst, sondern immer nur eine Linie, auf der der Schiffsort liegen muß (nämlich jener Höhenkreis), bestimmen läßt. Zur Bestimmung des Schiffsortes sind daher stets zwei Höhen erforderlich, und zwar ergiebt sich in diesem Falle der Schiffsort als Schnittpunkt der beiden zu den Höhen gehörigen Höhenkreise.

Die Höhenkreise sind im allgemeinen Nebenkreise; je größer die Höhe des Gestirnes ist, um so kleiner ist der Höhenkreis. Wenn das Gestirn im Horizont steht, so ist der zugehörige Höhenkreis ein größter Kreis.

Der sphärische Halbmesser BS' des Höhenkreises hat im Punkte B dieselbe Richtung wie das Azimut des Gestirnes. Da aber der Kreis senkrecht zum Halbmesser steht, so folgt:

Der Höhenkreis ist in jedem Punkte senkrecht zum Azimut des Gestirnes.

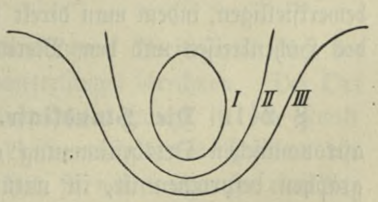


Fig. 194.

In der Seekarte (Merkatorschen Karte) hat die dem Höhenkreise entsprechende Kurve nicht mehr die Gestalt eines Kreises. Schließt der Höhenkreis den Pol aus, so hat die entsprechende Höhenkurve eine ovale Form, wie sie die Kurve I in nebenstehender Figur aufweist. Die Kurve II stellt dagegen einen durch den Pol hindurchgehenden, die Kurve *III* einen den Pol einschließenden Höhenkreis dar.

Da die Merkatorsche Karte winkeltreu ist, so gilt auch für diese Kurven, daß sie in allen Punkten senkrecht zum Azimut des Gestirnes stehen.

§ 240. Das allgemeine Prinzip der Ortsbestimmung durch Standlinien. Könnte man einen Erdglobus von genügend großem Durchmesser benutzen, so ließe sich die Aufgabe der astronomischen Ortsbestimmung durch Zeichnung auf diesem Globus fast ohne Rechnung lösen, indem man zu jeder Beobachtung nach den Angaben der vorigen Paragraphen den zugehörigen Höhenkreis zeichnete. Zur Bestimmung des Schiffsortes sind, wie auch schon oben angegeben ist, zwei Beobachtungen nötig. Da sich aber die zu den beiden Beobachtungen gehörigen Höhenkreise in zwei Punkten schneiden, so ist die Ortsbestimmung aus zwei Gestirnshöhen kein eindeutiges, sondern ein zweideutiges Problem. Die Zweideutigkeit ist indessen für die Praxis von geringer Bedeutung, da man auf See die Breite und Länge des Beobachtungsortes schon angenähert kennt, so daß die Entscheidung, welcher von den Schnittpunkten der beiden Höhenkreise den Schiffsort darstellt, nicht schwer fallen kann.

Ist nur eine einzige Höhen-Beobachtung angestellt, so läßt sich daraus unter der Voraussetzung, daß die Breite bekannt ist, die Länge, und unter der Voraussetzung, daß die Länge bekannt ist, die Breite des Beobachtungsortes bestimmen.

Die Bestimmung der Länge aus der als bekannt vorausgesetzten Breite (Chronometerlänge) würde durch Zeichnung auf dem Globus in der Weise ausgeführt werden, daß man außer dem Höhenkreise den der angenommenen Breite entsprechenden Breitenparallel zeichnete. Der eine der beiden Schnittpunkte der beiden Kreise stellt den Schiffsort dar, und zwar entspricht der eine von ihnen einer vormittägigen, der andere einer nachmittägigen Höhen-Beobachtung.

Eine Breitenbestimmung aus einer Gestirnshöhe unter Voraussetzung einer bekannten Länge (Mittags- und Nebenmittagsbreite) wird ganz entsprechend ausgeführt, indem man die Schnittpunkte des Höhenkreises mit dem der Länge entsprechenden Meridian bestimmt. Steht das Gestirn bei der Beobachtung südlich, so ist der nördlich vom Zenitalpunkte gelegene Schnittpunkt der Schiffsort; steht das Gestirn dagegen nördlich, so ist es der südlich vom Zenitalpunkt gelegene Schnittpunkt. Bei der Mittagsbreite ist eine Kenntnis der Länge zur Bestimmung der Breite überhaupt nicht erforderlich. In diesem Falle stellt der nördlichste bezw. der südlichste Punkt des Höhenkreises den Schiffsort dar.

Auch eine graphische Bestimmung des Azimutes ließe sich auf diese Weise bewerkstelligen, indem man direkt den Winkel zwischen dem sphärischen Halbmesser des Höhenkreises und dem Meridian des Ortes bestimmte.

§ 241. Die Standlinie. Eine graphische Lösung der Aufgaben der astronomischen Ortsbestimmung auf einem Globus, wie sie im vorigen Paragraphen besprochen ist, ist natürlich praktisch unausführbar, da man, um den erforderlichen Grad von Genauigkeit zu erreichen, einen sehr großen Globus verwenden müßte; es läßt sich indessen ohne große Mühe die Zeichnung auf dem Globus durch eine Zeichnung auf der Karte ersetzen. Allerdings muß man in diesem Falle von vornherein darauf verzichten, die Höhenkurve in ihrer ganzen Ausdehnung in die Karte einzuzeichnen. Das ist aber auch gar nicht nötig, denn von dem Höhenkreise interessiert den Beobachter nur ein sehr kleines Stück in der Nähe des gegißten, d. h. des sich aus der Loggerechnung ergebenden Schiffsortes, da ja jedenfalls der wahre Schiffsort in der Nähe dieses gegißten liegen muß. Bei einer Zeichnung in der Karte begnügt man sich daher stets damit, nur ein kleines Stück des Höhenkreises in der Nähe des gegißten Schiffsortes zu zeichnen.

Da ein derartiges kleines Stück der Kurve im allgemeinen nur wenig von einer geraden Linie abweicht, so ersetzt man in der Zeichnung das Kurvenstück durch eine gerade Linie, die man die Standlinie nennt, da das Schiff auf ihr stehen muß.

Durch diese Ersetzung einer gekrümmten Linie durch eine gerade begeht man natürlich einen Fehler. In den meisten Fällen wird dieser Fehler allerdings so klein sein, daß man ihn vernachlässigen kann. Nur wenn man ein verhältnismäßig großes Stück der Kurve durch eine gerade Linie ersetzt, wird der Fehler eine nennenswerte Größe haben. Dieses ist besonders dann der Fall, wenn die beobachtete Höhe sehr groß, die Zenitdistanz also und damit der sphärische Halbmesser des Höhenkreises sehr klein wird.

Sehr große Höhen sind daher nur mit Vorsicht zur Bestimmung von Standlinien zu verwenden. Höhen über 85° benutzt man am besten gar nicht mehr dazu, es sei denn, daß man nur ein sehr kleines Stück des Höhenkreises zu zeichnen braucht.

§ 242. Methoden zur Bestimmung der Standlinie. Zur Bestimmung einer Standlinie schlägt man zwei verschiedene Wege ein. Entweder man bestimmt zwei Punkte des Höhenkreises und verbindet diese durch eine gerade Linie, oder man bestimmt nur einen einzigen Punkt, gleichzeitig aber auch die Richtung des Höhenkreises in diesem Punkte (senkrecht zum Azimut des Gestirnes), und zieht dann durch den Punkt in der gefundenen Richtung eine gerade Linie. Im ersten Falle ist die gezeichnete Standlinie eine Sehne, im zweiten Falle eine Tangente des Höhenkreises. Man spricht daher von einer Sehnenkonstruktion und von einer Tangentenkonstruktion.

Bei beiden Konstruktionen hat man die Aufgabe zu lösen, einen bezw. zwei Punkte der Standlinie zu bestimmen. Auch bei der Berechnung dieser Punkte unterscheidet man verschiedene Methoden.

Erstens kann man mit einer beliebig angenommenen Breite aus der beobachteten Höhe des Gestirnes die Länge (Chronometerlänge) berechnen. Der Ort mit der angenommenen Breite und der daraus berechneten Länge ist ein Punkt des Höhenkreises. Da man bei dieser Art der Bestimmung eines Punktes der Standlinie eine Längenberechnung durchzuführen hat, so nennt man sie eine Bestimmung nach der Längenmethode.

Zweitens kann man aus der beobachteten Höhe mit einer beliebig angenommenen Länge die Breite berechnen (Nebenmittagsbreite). Der Ort mit der angenommenen Länge und der daraus berechneten Breite ist ebenfalls ein Punkt der Standlinie. Man nennt diese Art der Rechnung die **Breitenmethode**.

Neben diesen beiden giebt es noch eine dritte Methode, einen Punkt der Standlinie zu bestimmen, bei der man die Höhe des Gestirnes berechnen muß, und die man daher die **Höhenmethode** nennt. Eine Erklärung dieser Methode findet sich weiter unten in § 245.

Die Richtung der Standlinie ist, wie schon erwähnt, senkrecht zum Azimut des Gestirnes; mit dem Azimut des Gestirnes ist daher auch die Richtung der Standlinie gegeben. Das Azimut bestimmt man entweder aus der Kompaßpeilung des Gestirnes durch Anbringung der Gesamtmißweisung oder durch Berechnung oder mit Hülfe einer Azimuttafel.

§ 243. Die Längenmethode. Ist die Beobachtung nicht in unmittelbarer Nähe des Meridians angestellt, so kann man sich zur Bestimmung der Standlinie der **Längenmethode** bedienen; und zwar läßt sie sich verwenden, einerlei ob man die Standlinie durch zwei Punkte, d. h. nach der Sehnenkonstruktion, oder durch einen Punkt und die Richtung, d. h. nach der Tangentenkonstruktion, bestimmen will.

Will man sich der **Sehnenkonstruktion** bedienen, so berechnet man aus der beobachteten Höhe zu zwei verschiedenen Breiten, die der gegißten Breite benachbart sind, die zugehörigen Längen (Chronometerlängen), trägt die so gefundenen Punkte in die Karte ein und verbindet sie durch eine gerade Linie.

Bei der **Tangentenkonstruktion** berechnet man aus der beobachteten Höhe zu der gegißten Breite die Länge, trägt den so gefundenen Punkt in die Karte ein, berechnet alsdann das Azimut des Gestirnes und zieht durch den eingetragenen Punkt eine gerade Linie senkrecht zum Azimut.

Beispiel 1. **Sehnenkonstruktion.** (Historisches Beispiel von Sumner.) Am 17. Dezember 1837 vormittags, nach Besteck auf 51° 37′ *N* und 6° 39′ *W*, beobachtete Sumner nach einem Chronometer, das M. G. Z. zeigte, den folgenden Kimmabstand des Sonnen-Unterrandes

$$\text{Chr. Z.} = 10^u\,47^m\,13^s \quad \underline{\odot} = 12^\circ\,2'; \quad \text{Idb.} = 0; \quad \text{A. H.} = 5\,\text{m}.$$

Die Standlinie ist zu zeichnen.

$$\underline{\text{M. G. Z.} = 22^u\,47^m\,13^s \text{ den 16. Dez.}}$$

Hierfür ergab sich

$$\underline{\odot\,\delta = 23^\circ\,23'\,S} \qquad \underline{e = -3^m\,37^s}$$

$$\begin{aligned} \underline{\odot} &= 12^\circ\ \ 2' \\ \text{G. B.} &= \underline{+\ \ 8'} \\ \underline{h} &\underline{= 12^\circ\,10'} \end{aligned}$$

$\varphi_1 = 51^0\,37'\,N$ $\quad log\,sec = 0{,}20\,696$	$\varphi_2 = 51^0\,47'\,N$ $\quad log\,sec = 0{,}20\,856$
$\delta = 23^0\,23'\,S$ $\quad log\,sec = 0{,}03\,722$	$\delta = 23^0\,23'\,S$ $\quad log\,sec = 0{,}03\,722$
$z_0 = 75^0\,\;0'$	$z_0 = 75^0\,10'$
$z = 77^0\,50'$	$z = 77^0\,50'$
$s = 152^0\,50'$	$s = 153^0\,\;0'$
$s/_2 = 76^0\,25'$ $\quad log\,sin = 0{,}98\,768$	$s/_2 = 76^0\,30'$ $\quad log\,sin = 9{,}98\,783$
$u/_2 = 1^0\,25'$ $\quad log\,sin = 8{,}39\,310$	$u/_2 = 1^0\,20'$ $\quad log\,sin = 8{,}36\,678$
$t = 22^u\,25^m\,12^s$ $\quad log\,sem = 8{,}62\,496$	$t = 22^s\,27^m\,53^s$ $\quad log\,sem = 8{,}60\,039$
W. O. Z. $= 22^u\,25^m\,12^s$	W. O. Z $= 22^u\,27^m\,53^s$
$e = -\;\;3^m\,37^s$	$e = -\;\;3^m\,37^s$
M. O. Z. $= 22^u\,21^m\,35^s$ den 16. Dez.	M. O. Z. $= 22^u\,24^m\,16^s$ den 16. Dez.
M. G. Z. $= 22^u\,47^m\,13^s$ den 16. Dez.	M. G. Z. $= 22^u\,47^m\,13^s$ den 16. Dez.
Z. U. $= 0^{st}\,25^m\,38^s$	Z. U. $= 0^{st}\,22^m\,57^s$
$\lambda_1 = 6^0\,24'\,W$	$\lambda_2 = 5^0\,44'\,W$

Die Standlinie ist also die gerade Verbindungslinie der beiden Punkte

$$\varphi_1 = 51^0\,37'\,N \qquad \lambda_1 = 6^0\,24'\,W$$
$$\varphi_2 = 51^0\,47'\,N \qquad \lambda_2 = 5^0\,44'\,W$$

Aufgabe: Die Standlinie ist hiernach in die Karte einzuzeichnen.

Beispiel 2. Tangentenkonstruktion. Am 22. März 1903 nachmittags, nach Besteck auf $55^0\,12'\,N$ und $5^0\,45'\,O$, beobachtet man nach einem Chronometer, dessen Stand $16^m\,18^s$ vor gegen M. G. Z. ist, den folgenden Kimmabstand der Venus westlich vom Meridian

Chr. Z. $= 7^u\,10^m\,23^s$ $\quad$ ♀̱ $= 13^0\,16'$; $\quad$ Jdb. $= -1'$; $\quad$ A. H. $= 10$ m.

Die Standlinie ist zu bestimmen.

Astr. Chr. Z. $= 7^u\,10^m\,23^s$ den 22. März
Std. $= -\;16^m\,18^s$
M. G. Z. $= 6^u\,54^m\;\;5^s$ den 22. März

$m\odot\alpha_0 = 23^{st}\,55^m\,15^s$	♀ $\alpha_0 = 1^{st}\,42^m\,45^s$	♀ $\delta_0 = 10^0\,20{,}8'\,N$
$+\,1^m\;\;8^s$	$11{,}5^s \,.\, 6{,}9 = +\,1^m\,19^s$	$1{,}20' \,.\, 6{,}9 = +\,8{,}3'$
$m\odot\alpha = 23^{st}\,56^m\,23^s$	♀ $\alpha = 1^{st}\,44^m\;\;4^s$	♀ $\delta = 10^0\,29{,}1'\,N$

Beob. ♀̱ $= 13^0\,16'$	$\varphi = 55^0\,12'\,N$ $\quad log\,sec = 0{,}24\,358$
Jdb. $= -\;\;1'$	$\delta = 10^0\,29'\,N$ $\quad log\,sec = 0{,}00\,731$
♀̱ $= 13^0\,15'$	$z_0 = 44^0\,43'$
G. B. $= -\;10'$	$z = 76^0\,55'$
$h = 13^0\;\;5'$	$s = 121^0\,38'$
	$s/_2 = 60^0\,49'$ $\quad log\,sin = 9{,}94\,105$
	$u/_2 = 16^0\;\;6'$ $\quad log\,sin = 9{,}44\,297$
	$t = 5^{st}\,28^m\,28^s$ $\quad log\,sem = 9{,}63\,491$

$$\begin{aligned}
♀\, t &= 5^{st}\,28^m\,28^s \\
♀\, \alpha &= 1^{st}\,44^m\,\ \,4^s \\
\text{St. Z.} &= 7^u\,12^m\,32^s \\
m \odot \alpha &= 23^{st}\,56^m\,23^s \\
\text{M. O. Z.} &= 7^u\,16^m\,\ \,9^s \text{ den 22. März} \\
\text{M. G. Z.} &= 6^u\,54^m\,\ \,5^s \text{ den 22. März} \\
\text{Z. U.} &= 0^{st}\,22^m\,\ \,4^s \\
\lambda &= 5^0\,31'\,O
\end{aligned}$$

Das Azimut entnimmt man der Tafel 38. [33.] mit den Werten

$$\begin{aligned}
t &= 5^{st}\,28{,}5^m \\
\varphi &= 55^0\,12'\,N \\
\delta &= 10^0\,29'\,N \\
A &= -\,0{,}20 \\
B &= +\,0{,}18 \\
C &= -\,0{,}02 \\
a &= S\,89^0\,W
\end{aligned}$$

Die Standlinie geht also durch den Punkt

$$\varphi = 55^0\,12'\,N \qquad \lambda = 5^0\,31'\,O$$

senkrecht zur Richtung $S\,89^0\,W$; ihre eigene Richtung ist somit $N\,1^0\,W$.

Aufgabe: Die Standlinie ist hiernach in die Karte einzuzeichnen.

§ 244. Die Breitenmethode. Hat man eine Höhe in der Nähe des Meridians beobachtet, so läßt sich die Längenmethode zur Bestimmung der Standlinie nicht mehr anwenden. In diesem Falle ist die Breitenmethode am Platze.

Will man sich hierbei der Sehnenkonstruktion bedienen, so berechnet man aus der beobachteten Höhe mit zwei verschiedenen Längen, die der gegißten Länge benachbart sind, die zugehörigen Breiten (Nebenmittagsbreiten), zeichnet die so gefundenen Punkte in die Karte ein und verbindet sie durch eine gerade Linie.

Bei der Tangentenkonstruktion berechnet man aus der beobachteten Höhe mit der gegißten Länge die zugehörige Breite (Nebenmittagsbreite), zeichnet den so gefundenen Punkt in die Karte ein und zieht durch ihn eine gerade Linie senkrecht zum Azimut des Gestirnes.

Beispiel 1. Sehnenkonstruktion. Am 2. September 1903 vormittags, nach Besteck auf $54^0\,59'\,N$ und $3^0\,17'\,O$, beobachtet man nach einem Chronometer, dessen Stand $4^m\,19^s$ nach gegen M. G. Z. ist, den folgenden Kimmabstand der Sonne

$$\text{Chr. Z.} = 11^u\,24^m\,17^s \quad \underline{\odot} = 42^0\,50'; \quad \text{Idb.} = +\,2'; \quad \text{A. H.} = 7\text{ m.}$$

Die Standlinie ist zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
\text{Astr. Chr. Z.} &= 23^u\,24^m\,17^s \text{ den 1. Sept.} \\
\text{Std.} &= \ \ +\,4^m\,19^s \\
\text{M. G. Z.} &= 23^u\,28^m\,36^s \text{ den 1. Sept.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\odot\,\delta_0 &= 8^0\,37{,}5'\,N & e_0 &= +\,0^m\,14^s \\
0{,}90'\,.\,23{,}5 &= -\ \ 21{,}2' & 0{,}8^s\,.\,23{,}5 &= \ \ -\,18^s \\
\odot\,\delta &= 8^0\,16{,}3'\,N & e &= -\,0^m\ \ 4^s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{Beob.}\ \underline{\odot} &= 42^0\,50' \\
\text{Jdb.} &= \underline{+\,2'} \\
\underline{\odot} &= 42^0\,52' \\
\text{G. B.} &= \underline{+\,10{,}3'} \\
h &= \underline{43^0\ \ 2{,}3'}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{M. G. Z.} &= 23^u\,28^m\,36^s \\
(\lambda_1 = 3^0\,0')\quad \text{Z. U.} &= \underline{+\,12^m\ \ 0^s} \\
\text{M. O. Z.} &= 23^u\,40^m\,36^s \\
\text{entg. } e &= \underline{+\,0^m\ \ 4^s} \\
\odot\, t &= \underline{23^{st}\,40^m\,40^s}
\end{aligned}
$$

$t = 23^{st}\,40^m\,40^s$	$\log sem = 7{,}24\,99$
$\varphi = 54^0\,59'$	$\log cos = 9{,}75\,88$
$\delta = 8^0\,16'$	$\log cos = 9{,}99\,55$
$h = 43^0\ \ 2'$	$\log sec = 0{,}13\,61$
$u/_2 = 4{,}7'$	$\log sin = 7{,}14\,03$
$u = 9{,}4'$	

$$
\begin{aligned}
z &= 46^0\,57{,}7' \\
u &= \underline{-\,9{,}4'} \\
z_0 &= 46^0\,48{,}3'\,N \\
\delta &= \underline{8^0\,16{,}3'\,N} \\
\varphi_1 &= \underline{55^0\ \ 4{,}6'\,N}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{M. G. Z.} &= 23^u\,28^m\,36^s \\
(\lambda_2 = 3^0\,30')\quad \text{Z. U.} &= \underline{+\,14^m\ \ 0^s} \\
\text{M. O. Z.} &= 23^u\,42^m\,36^s \\
\text{entg. } e &= \underline{+\,0^m\ \ 4^s} \\
\odot\, t &= \underline{23^{st}\,42^m\,40^s}
\end{aligned}
$$

$t = 23^{st}\,42^m\,40^s$	$\log sem = 7{,}15\,51$
$\varphi = 54^0\,59'$	$\log cos = 9{,}75\,88$
$\delta = 8^0\,16'$	$\log cos = 9{,}99\,55$
$h = 43^0\ \ 2'$	$\log sec = 0{,}13\,61$
$u/_2 = 3{,}8'$	$\log sin = 7{,}04\,55$
$u = 7{,}6'$	

$$
\begin{aligned}
z &= 46^0\,57{,}7' \\
u &= \underline{-\,7{,}6'} \\
z_0 &= 46^0\,50{,}1'\,N \\
\delta &= \underline{8^0\,16{,}3'\,N} \\
\varphi_2 &= \underline{55^0\ \ 6{,}4'\,N}
\end{aligned}
$$

Die Standlinie ist somit die gerade Verbindungslinie der beiden Punkte

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= 55^0\,4{,}6'\,N & \lambda_1 &= 3^0\ \ 0'\,O \\
\varphi_2 &= 55^0\,6{,}4'\,N & \lambda_2 &= 3^0\,30'\,O
\end{aligned}
$$

Aufgabe: Die Standlinie ist hiernach in die Karte einzuzeichnen.

Beispiel 2. **Tangentenkonstruktion.** Am 31. Januar 1903 nachmittags, nach Besteck auf $55^0\,50'\,N$ und $17^0\,28'\,O$, beobachtet man nach einem Chronometer, dessen Stand $1^m\,25^s$ vor gegen M. G. Z. ist, den folgenden Kimmabstand der Sonne

$$\text{Chr. Z.} = 11^u\,37^m\,13^s \quad \underline{\odot} = 16^0\,18'; \quad \text{Jdb.} = +\,1'; \quad \text{A. H.} = 4\,\text{m}.$$

Die Standlinie ist zu bestimmen.

$$
\begin{aligned}
\text{Astr. Chr. Z.} &= 23^u\,37^m\,13^s \text{ den 30. Jan.} \\
\text{Std.} &= \underline{-\qquad 1^m\,25^s} \\
\text{M. G. Z.} &= \underline{23^u\,35^m\,48^s \text{ den 30. Jan.}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\odot\,\delta_0 &= 17^0\,53{,}9'\,S & e_0 &= +\,13^m\,20^s \\
0{,}68'\,.\,23{,}6 &= \underline{-\ \ 16{,}0'} & 0{,}4^s\,.\,23{,}6 &= \underline{+\ \ 9^s} \\
\odot\,\delta &= \underline{17^0\,37{,}9'\,S} & e &= \underline{+\,13^m\,29^s}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{M. G. Z.} &= 23^u\,35^m\,48^s \\
(\lambda = 17^0\,28')\quad \text{Z. U.} &= \underline{1^{st}\ \ 9^m\,52^s} \\
\text{M. O. Z.} &= 0^u\,45^m\,40^s \\
\text{entg. } e &= \underline{-\ \ 13^m\,29^s} \\
\odot\, t &= \underline{0^{st}\,32^m\,11^s}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} \text{Beob.}\ \underline{\odot} &= 16^\circ\, 18' \\ \text{Idb.} &= \ \ +1' \\ \underline{\odot} &= 16^\circ\, 19' \\ \text{G. B.} &= \ \ +9{,}6' \\ h &= 16^\circ\, 28{,}6' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= 0^{st}\, 32^m\, 11^s & \log sem &= 7{,}69\,21 \\ \varphi &= 55^\circ\, 50' & \log cos &= 9{,}74\,94 \\ \delta &= 17^\circ\, 38' & \log cos &= 9{,}97\,91 \\ h &= 16^\circ\, 29' & \log sec &= 0{,}01\,82 \\ u/_2 &= \ \ 9{,}4' & \log sin &= 7{,}43\,88 \\ u &= 18{,}8' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= 73^\circ\, 31{,}4' \\ u &= -\ 18{,}8' \\ z_0 &= 73^\circ\, 12{,}6'\, N \\ \delta &= 17^\circ\, 37{,}9'\, S \\ \varphi &= 55^\circ\, 35'\, N \end{aligned}$$

Das Azimut findet man mit Hülfe der Tafel 40.

$$0{,}25^\circ \,.\, 32 = 8^\circ$$

also

$$a = S\, 8^\circ\, W$$

Die Standlinie geht also durch den Punkt

$$\varphi = 55^\circ\, 35'\, N \qquad \lambda = 17^\circ\, 28'\, O$$

rechtwinklig zur Richtung $S\,8^\circ\,W$; ihre eigene Richtung ist also $N\,82^\circ\,W$.

Aufgabe: Die Standlinie ist hiernach in die Karte einzuzeichnen.

§ 245. **Die Höhenmethode.** Bei der Bestimmung der Standlinie nach den beiden bisher behandelten Methoden, der Längenmethode und der Breitenmethode, wird es als Übelstand empfunden, daß man je nach dem Azimut des beobachteten Gestirnes die Methode wechseln muß, da Beobachtungen in der Nähe des Meridians für die Längenmethode, und Beobachtungen in größeren Azimuten als etwa 20° für die Breitenmethode nicht verwendbar sind. Die im folgenden zu behandelnde Höhenmethode ist von diesem Übelstande frei; sie ist stets anwendbar, in welchem Azimut das Gestirn auch beobachtet sein möge.

Berechnet man für den gegißten Schiffsort die wahre Zenitdistanz des Gestirnes im Augenblicke der Beobachtung, so hat man damit, da der Halbmesser des Höhenkreises gleich der Zenitdistanz ist, auch die Entfernung des gegißten Schiffsortes vom Zenitalpunkte gefunden. Andererseits giebt die aus der Beobachtung abgeleitete wahre Zenitdistanz die Entfernung des wahren Schiffsortes vom Zenitalpunkte an.

Stimmt die berechnete Zenitdistanz, oder was auf dasselbe hinauskommt, die berechnete Höhe mit der beobachteten überein, so ist das ein Zeichen dafür, daß der wahre Schiffsort dieselbe Entfernung vom Zenitalpunkte hat wie der gegißte Schiffsort; die Standlinie muß also durch den gegißten Schiffsort hindurchgehen.

Ist die beobachtete Zenitdistanz kleiner als die berechnete, die beobachtete Höhe also größer als die berechnete, so liegt der wahre Schiffsort dem Zenitalpunkte näher; ist dagegen die beobachtete Zenitdistanz größer, die beobachtete Höhe also kleiner als die berechnete, so liegt der wahre Schiffsort entfernter vom Zenitalpunkte.

Der Abstand des gegißten Schiffsortes von der Standlinie ist gleich dem Unterschiede der beobachteten und der berechneten Höhe. Man gelangt somit zu einem Punkte der Standlinie, wenn man um den Betrag dieses Höhenunterschiedes ($1' = 1^{sm}$) in der Richtung des Azimutes oder in entgegengesetzter Richtung fortschreitet. Durch den so gefundenen Punkt zeichnet man die Standlinie senkrecht zum Azimut.

Es ergiebt sich hieraus das folgende Verfahren zur Bestimmung der Standlinie:

1. Man berechnet für den gegißten Schiffsort die wahre Höhe des Gestirnes im Augenblicke der Beobachtung.

2. Darauf subtrahiert man die so berechnete Höhe h_r von der aus der Beobachtung abgeleiteten wahren Höhe h_o. Der auf diese Weise erhaltene Höhenunterschied $\Delta h = h_o - h_r$ ist demnach positiv, wenn $h_o > h_r$, dagegen negativ, wenn $h_o < h_r$ ist.

3. Man zeichnet den gegißten Schiffsort in die Karte ein, und zieht durch diesen Punkt, wenn der Höhenunterschied positiv ist, eine Linie in der Richtung des Azimutes; wenn dagegen der Höhenunterschied negativ ist, eine Linie in entgegengesetzter Richtung.

4. Auf dieser Linie trägt man den Höhenunterschied ab ($1' = 1^{sm}$).

5. Durch den so gefundenen Punkt zieht man eine Senkrechte zu der vorher gezeichneten Linie. Diese Linie ist die Standlinie.

Anmerkung: Eine Bestimmung der Standlinie nach der Sehnenmethode mittels eines dem obigen entsprechenden Verfahrens ist ungebräuchlich.

Beispiel 1. Am 5. Mai 1903 vormittags, nach Besteck auf $49^0 15' N$ und $5^0 37' W$, beobachtet man nach einem Chronometer, dessen Stand $11^m 52^s$ vor gegen M. G. Z. ist, den folgenden Kimmabstand der Sonne

$$\text{Chr. Z.} = 10^u\, 29^m\, 48^s \quad \underline{\odot} = 48^0\, 37'; \quad \text{Jdb.} = +3'; \quad \text{A. H.} = 6\,\text{m}.$$

Die Standlinie ist zu zeichnen.

$$\begin{aligned} \text{Astr. Chr. Z.} &= 22^u\, 29^m\, 48^s \text{ den 4. Mai} \\ \text{Std.} &= -\quad 11^m\, 52^s \\ \hline \text{M. G. Z.} &= 22^u\, 17^m\, 56^s \text{ den 4. Mai} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \odot\, \delta_0 &= 15^0\, 42{,}0'\, N \\ 0{,}73' \,.\, 22{,}3 &= +16{,}3' \\ \hline \odot\, \delta &= 15^0\, 58{,}3'\, N \end{aligned} \qquad \begin{aligned} e_0 &= -3^m\, 13^s \\ 0{,}3^s \,.\, 22{,}3 &= \quad +6^s \\ \hline e &= -3^m\, 19^s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{M. G. Z.} &= 22^u\, 17^m\, 56^s \\ \text{Z. U.} &= -\quad 22^m\, 28^s \\ \hline \text{M. O. Z.} &= 21^u\, 55^m\, 28^s \\ \text{entg. } e &= +\quad 3^m\, 19^s \\ \hline \odot\, t &= 21^{st}\, 58^m\, 47^s \end{aligned}$$

$t = 21^{st}\, 58^m\, 47^s$	$\log sem = 8{,}83\,455$	
$\varphi = 49^0\, 15'\, N$	$\log cos = 9{,}81\,475$	
$\delta = 15^0\, 58'\, N$	$\log cos = 9{,}98\,291$	
$z_0 = 33^0\, 17'$	$\log sec = 0{,}07\,781$	$\log cos = 9{,}92\,219$
$x = 1^{st}\, 44^m\, 43^s$	$\log sem = 8{,}71\,002$	$\log cos = 9{,}95\,298$
	$h_r = 48^0\, 36'$	$\log sin = 9{,}87\,517$

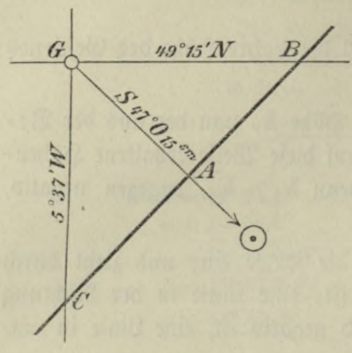


Fig. 195.

$$\begin{aligned} \text{Beob. } \underline{\odot} &= 48^0\,37' \\ \text{Idb.} &= +\;\;3' \\ \underline{\odot} &= 48^0\,40' \\ \text{G. B.} &= +\,11' \\ h_o &= 48^0\,51' \\ h_r &= 48^0\,36' \\ h_0 - h_r = \varDelta h &= +\,15' \end{aligned}$$

Aus Tafel 38. [33.] ergiebt sich für

$$\begin{aligned} t &= 21^{st}\,58^m\,47^s \\ \varphi &= 49^0\,15'\,N \\ \delta &= 15^0\,58'\,N \\ A &= -1{,}99 \\ B &= +0{,}57 \\ C &= -1{,}42 \\ a &= S\,47^0\,O \end{aligned}$$

Um die Standlinie zu zeichnen, trage man in die Karte den gegißten Schiffsort G ($49^0\,15'\,N$ und $5^0\,37'\,W$) ein, ziehe von ihm aus eine Linie $G\odot$ in der Richtung $S\,47^0\,O$, trage auf dieser Linie 15^{sm} ab bis A und ziehe durch A das Lot zu $G\odot$. Dieses Lot BC ist die gesuchte Standlinie.

Beispiel 2. Am 1. Dezember 1903 nachmittags, nach Besteck auf $55^0 48'\,N$ und $6^0\,2'\,O$, beobachtet man nach einem Chronometer, dessen Stand $7^m\,3^s$ nach gegen M. G. Z. ist, den folgenden Kimmabstand des Mondes

$$\text{Chr. Z.} = 5^u\,23^m\,49^s \qquad \underline{☾} = 28^0\,10'; \qquad \text{Idb.} = -\,1'; \qquad \text{A. H.} = 9\text{ m.}$$

Die Standlinie ist zu bestimmen.

$$\begin{aligned} \text{Astr. Chr. Z.} &= 5^u\,23^m\,49^s \text{ den 1. Dez.} \\ \text{Std.} &= +\;\;7^m\;\;3^s \\ \text{M. G. Z.} &= 5^u\,30^m\,52^s \text{ den 1. Dez.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\odot\alpha_0 &= 16^{st}\,36^m\,40^s & ☾\alpha \text{ um } 5^u &= 1^{st}\,52^m\;\;5^s & ☾\delta \text{ um } 5^u &= 9^0\,16{,}0'\,N \\ &+\;\;0^m\,54^s & 2{,}15^s\,.\,31 &= +\;\;1^m\;\;7^s & 0{,}151'\,.\,31 &= +\,4{,}7' \\ m\odot\alpha &= 16^{st}\,37^m\,34^s & ☾\alpha &= 1^{st}\,53^m\,12^s & ☾\delta &= 9^0\,20{,}7'\,N & ☾\pi &= 57'\,9'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{M. G. Z.} &= \;\;5^u\,30^m\,52^s \\ \text{Z. U.} &= +\,24^m\;\;8^s \\ \text{M. O. Z.} &= \;\;5^u\,55^m\;\;0^s \\ m\odot\alpha &= 16^{st}\,37^m\,34^s \\ \text{St. Z.} &= 22^u\,32^m\,34^s \\ ☾\alpha &= \;\;1^{st}\,53^m\,12^s \\ ☾t &= 20^{st}\,39^m\,22^s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ☾\,t &= 20^{st}\,39^m\,22^s & log\,sem &= 9{,}25\,447 \\ \varphi &= 55^0\,48'\,N & log\,cos &= 9{,}74\,980 \\ \delta &= \;\;9^0\,21'\,N & log\,cos &= 9{,}99\,419 \\ z_0 &= 46^0\,27' & log\,sec &= 0{,}16\,179 & log\,cos &= 9{,}83\,821 \\ x &= 2^{st}\,58^m\,49^s & log\,sem &= 9{,}16\,025 & log\,cos &= 9{,}85\,175 \\ & & h_r &= 29^0\,19' & log\,sin &= 9{,}68\,996 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Beob. } \underline{☾} = & 28^\circ\,10' \\ \text{Idx.} = & -\quad 1' \\ \hline ☾ = & 28^\circ\;\;9' \\ \text{G. V.} = & +\;59' \\ \hline h_o = & 29^\circ\;\;8' \\ h_r = & 29^\circ\,19' \\ \hline h_o - h_r = \Delta h = & -\;11' \end{array}$$

Aus Tafel 38. [33.] ergiebt sich für

$$\begin{array}{l} t = 20^{st}\,39^m\,22^s \\ \varphi = 55^\circ\,48'\,N \\ \delta = \;\;9^\circ\,21'\,N \\ A = -1{,}23 \\ B = +0{,}22 \\ \hline C = -1{,}01 \\ a = S\,60^\circ\,O \end{array}$$

Um die Standlinie zu zeichnen, trage man in die Karte den gegißten Schiffsort G ($55^\circ\,48'\,N$ und $6^\circ\,2'\,O$) ein, ziehe von ihm aus, da Δh negativ ist, in der dem Mondazimut entgegengesetzten Richtung ($N\,60^\circ\,W$) eine gerade Linie, trage auf dieser 11^{sm} ab bis A und ziehe durch A die Senkrechte zu $G☾$. Dieses Lot CB ist die gesuchte Standlinie.

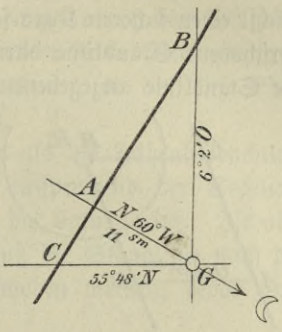


Fig. 196.

§ 246. **Verschiebung der Standlinie mit der Segelung.** Es ist auf See häufig erwünscht, eine Standlinie nicht nur für den Augenblick der Beobachtung, sondern für einen späteren, unter Umständen auch für einen früheren Zeitpunkt zu haben. Handelt es sich um einen späteren Zeitpunkt, so hat man die ganze Standlinie in der Richtung der Segelung um ihren Betrag zu verschieben. Zu dem Zwecke trägt man von einem beliebigen Punkte A der Standlinie I Kurs und Distanz AB ab und zieht durch B die Parallele zu I. Es ist klar, daß, wenn man sich vor der Segelung in einem Punkte der Linie I befand, man sich nach der Segelung in einem Punkte der Linie II befinden muß. Ergiebt sich z. B., daß S der wahre Schiffsort ist, so findet man den Schiffsort bei der Beobachtung, indem man durch S die Parallele zu BA legt. Der Schnittpunkt C dieser Linie mit der Standlinie I ist dann der Beobachtungsort.

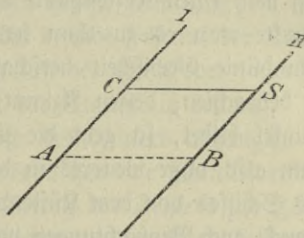


Fig. 197.

Will man eine Standlinie für einen Zeitpunkt vor der Beobachtung haben, so hat man die Standlinie in der dem gesegelten Kurse entgegengesetzten Richtung parallel mit sich zu verschieben.

§ 247. **Verwendung einer einzelnen Standlinie.** Zur Bestimmung des Schiffsortes ist eine einzelne Beobachtung nicht ausreichend. In der Nähe der Küste kann indessen gelegentlich auch eine einzelne Beobachtung, d. h. die aus dieser Beobachtung abgeleitete Standlinie der Schiffsführung wertvolle Dienste leisten, so besonders in den folgenden drei Fällen:

1. Richtung eines Ansegelungspunktes. Geht eine Standlinie, gehörig verlängert, durch ein auf der Karte angegebenes Leuchtfeuer oder einen anderen wichtigen Küstenpunkt, so wird man, wenn man den durch die Standlinie angegebenen Kurs verfolgt, diesen Punkt in Sicht bekommen. Hiervon machte z. B. Sumner Gebrauch, vergleiche § 237. Geht die Standlinie nicht direkt

durch den Punkt hindurch, so kann man in der Weise verfahren, daß man zunächst einen sicheren Kurs seitwärts einschlägt, bis die dieser Segelung entsprechend verschobene Standlinie durch den Punkt hindurchgeht, und erst dann den durch die Standlinie angegebenen Kurs verfolgt.

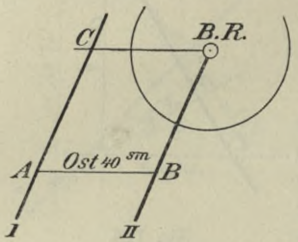


Fig. 198.

Beispiel. Man will beim Ansegeln des Kanals Bishop Rock in Sicht laufen. Südwestlich der Scilly-Inseln gelingt eine Beobachtung. Die aus dieser Beobachtung abgeleitete Standlinie *I* schneidet den Breitenparallel von Bishop Rock 40 Seemeilen westlich von diesem Punkte. Um dann Bishop Rock sicher in Sicht zu bekommen, segelt man zunächst Ost 40 Seemeilen. Das Schiff befindet sich dann auf der durch Bishop Rock hindurchgehenden Standlinie *II*. Den durch diese Linie angegebenen Kurs verfolgend, muß man Bishop Rock recht voraus in Sicht bekommen. Vorausgesetzt wird dabei, daß einerseits die Höhe, andererseits der Stand des Chronometers richtig, und daß keine Strömung vorhanden ist.

2. Name eines gesichteten Küstenpunktes. Es kommt nicht selten vor, daß man einen Küstenpunkt in Sicht bekommt, ohne daß man weiß, mit welchem Punkte man es zu thun hat. Unter diesen Umständen kann gelegentlich eine Standlinie Gewißheit verschaffen. Hat man nämlich Gelegenheit ein Gestirn zu beobachten, dessen Azimut mit der Peilung des Küstenpunktes einen rechten Winkel bildet, so geht die Standlinie durch den Küstenpunkt hindurch; dieser kann also ohne weiteres in der Karte aufgefunden werden. Ist die Entfernung des Schiffes von dem Küstenpunkte einigermaßen bekannt, so kann man zu diesem Zwecke auch Beobachtungen von Gestirnen benutzen, deren Azimut mit der Peilung des Küstenpunktes einen von 90^0 etwas verschiedenen Winkel bildet.

3. Kurs parallel der Küste. Verläuft eine Standlinie parallel der Küste durch tiefes Fahrwasser, so giebt die einzelne Standlinie einen sicheren Kurs für das Schiff an, wenn auch der Schiffsort selbst nicht bekannt ist. Beobachtet man z. B. im Englischen Kanal ein Gestirn etwa in der Peilung *S z O* (bei der Sonne eine vormittägige Nebenmittagsbreite), so wird die Standlinie in der Richtung *O z N*, also ungefähr der englischen Küste parallel laufen. Führt die so gezeichnete Standlinie immer frei von Land, so kann man den durch sie angegebenen Kurs verfolgen, ohne eine Gefahr für das Schiff befürchten zu müssen.

§ 248. Eine Standlinie in Verbindung mit einer Peilung oder Lotung. Hat man gleichzeitig mit der Beobachtung einen bekannten Küstenpunkt gepeilt, so ist dadurch der Schiffsort bestimmt als Schnittpunkt der aus der Beobachtung folgenden astronomischen Standlinie mit der aus der Peilung folgenden terrestrischen Standlinie. Sind die beiden Beobachtungen nicht gleichzeitig gemacht, so verschiebt man die erste Standlinie — einerlei ob dies die astronomische oder die terrestrische ist — um den Betrag der in der Zwischenzeit zurückgelegten Distanz in der Richtung des gesegelten Kurses parallel mit sich selbst. Der Schnittpunkt dieser so verschobenen Standlinie mit der aus der späteren Beobachtung folgenden Standlinie ist der Schiffsort bei der zweiten Beobachtung.

Ist gleichzeitig mit der Beobachtung des Gestirnes gelotet worden, so läßt sich auch daraus, wenn sich die Wassertiefe schnell genug ändert, der Schiffsort wenigstens angenähert bestimmen. Man wird in diesem Falle stets gut thun, statt der einzelnen Lotung eine Reihenlotung vorzunehmen, da auf diese Weise der Schiffsort mit größerer Sicherheit festgelegt wird.

Ist die Lotung nicht gleichzeitig, sondern später als die Höhenbeobachtung gemacht, so verschiebt man zunächst die Standlinie entsprechend der Segelung und sucht dann auf der so verschobenen Standlinie die Lotung auf. Ist aber die Lotung vor der Höhenbeobachtung gemacht, so muß die Standlinie nach der dem gesegelten Kurse entgegengesetzten Richtung verschoben werden, bevor man auf ihr die Lotung aufsucht.

§ 249. Die Ungenauigkeiten der Standlinie. 1. Ein Fehler in der beobachteten Höhe hat eine Parallelverschiebung der Standlinie in der Richtung des Azimutes um den Betrag des Höhenfehlers zur Folge, was ohne weiteres ersichtlich ist, wenn man die Standlinie nach der Höhenmethode bestimmt. Da man nun bei jeder Höhenmessung auf einen Fehler gefaßt sein muß, so kann man nicht mit Bestimmtheit behaupten, der Schiffsort befinde sich auf der Standlinie selbst, sondern man kann nur behaupten, daß sich der Schiffsort innerhalb eines Streifens befindet, der sich zu beiden Seiten der Standlinie erstreckt. Die Breite dieses Streifens ist von der möglichen Größe des Fehlers abhängig.

2. Ein Fehler im Stande des Chronometers hat eine Parallelverschiebung der Standlinie nach Ost oder West um den Betrag des Fehlers zur Folge. Es leuchtet dies sofort ein, wenn man an die Bestimmung der Standlinie nach der Längenmethode denkt. Ist die für Stand berichtigte Chronometerzeit der Greenwicher Zeit voraus, so erhält man eine Standlinie, die westlich von der wahren Standlinie liegt; ist die für Stand berichtigte Chronometerzeit aber gegen die Greenwicher Zeit zurück, so erhält man eine Standlinie, die östlich von der wahren Standlinie liegt.

3. Ein Fehler im Azimut bewirkt, wenn die Standlinie als Tangente gezeichnet wird, eine Drehung der Standlinie um den Betrag des Fehlers. Benutzt man eine Peilung des Gestirnes, so wird infolge eines Beobachtungsfehlers, einer Ungenauigkeit in der Ortsmißweisung, sowie einer Ungenauigkeit in der örtlichen Ablenkung leicht ein Fehler bis zu einem viertel Strich entstehen können. Es empfiehlt sich daher, da die Berechnung des Azimutes zu zeitraubend sein würde, das Azimut einer Azimuttafel zu entnehmen. Bei genauem Einschalten würde man auf diese Weise das Azimut ohne nennenswerten Fehler erhalten, so daß nur noch die Fehler der Zeichnung, die bei Benutzung eines guten Transporteurs kleiner als ein halber Grad sein werden, in Frage kommen. Nimmt man aber das Azimut nur nach Sicht auf ganze Grade aus der Tafel, so wird der Fehler im Azimut einschließlich des Fehlers der Zeichnung, auf 1^{0} bis $1\frac{1}{2}{}^{0}$ zu schätzen sein. Praktisch ist aber selbst ein so großer Fehler nur von geringer Bedeutung, denn selbst, wenn der Schiffsort 30 Seemeilen von dem durch Rechnung bestimmten Punkte der Standlinie entfernt sein sollte, so würde er durch diesen Fehler nur um 0,5 bis 0,7 Seemeilen ungenau erhalten werden, während ein Azimutfehler

von einem viertel Strich den Schiffsort unter derselben Voraussetzung um 1,5 Seemeilen ungenau ergeben würde.

Man erkennt hieraus ohne weiteres, daß geringe Fehler in der Breite und Länge bei der Bestimmung des Azimutes ohne Bedeutung sind.

4. Die Ersetzung der in Wirklichkeit gekrümmten Standlinie durch eine gerade hat eine Ungenauigkeit zur Folge, die um so größer ist, je größer die Höhe des Gestirnes, je kleiner also der Halbmesser des Höhenkreises ist. Die Ungenauigkeit des Schiffsortes wächst ebenfalls mit seiner Entfernung von dem durch Rechnung bestimmten Punkte der Standlinie. Je größer die Entfernung von diesem Punkte ist, um so größer ist auch der Fehler. Sieht man von Höhen über 85° ab, so ist auch dieser Fehler praktisch ohne Bedeutung, denn 30 Seemeilen von dem durch Rechnung gefundenen Punkte der Standlinie beträgt die Abweichung der geraden Linie von dem Höhenkreise, bei einer Höhe von 60° nur etwa $0{,}25^{sm}$, bei einer Höhe von 70° nur etwa $0{,}4^{sm}$, bei einer Höhe von 80° erst $0{,}75^{sm}$, und bei einer Höhe von 85° noch nicht mehr als $1{,}5^{sm}$. Entfernt man sich allerdings noch weiter von dem durch Rechnung bestimmten Punkte, so nimmt der Fehler sehr schnell zu. Die angeführten Zahlen gelten für den Fall, daß die Standlinie als Tangente gezeichnet ist; für die Sehnenkonstruktion ist der Fehler nicht größer.

5. Bei der Benutzung der Höhenmethode macht man noch dadurch einen Fehler, daß man beim Einzeichnen in die Karte den Höhenunterschied, der streng genommen auf einem größten Kreise abgesetzt werden müßte, auf einer geraden Linie, also in Wirklichkeit auf einer Loxodrome abträgt.

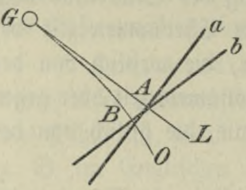


Fig. 199.

Stellt in Fig. 199 G den gegißten Schiffsort, GL die Loxodrome in der Richtung des Azimutes, GO den entsprechenden Bogen eines größten Kreises (also ein Stück des sphärischen Halbmessers des Höhenkreises) dar, so müßte man eigentlich den Höhenunterschied auf GO abtragen, z. B. bis B und durch B die Senkrechte b zu dem Bogen ziehen. Statt dessen trägt man den Höhenunterschied auf GL ab bis A und zieht die Senkrechte a zu GL. Der hierdurch entstehende Fehler kommt im wesentlichen darauf hinaus, daß man eine nicht vollkommen genaue Richtung der Standlinie erhält. Man würde diesen Fehler vermeiden, wenn man zur Bestimmung des Azimutes nicht die Breite und Länge des gegißten Schiffsortes, sondern des Punktes B benutzte. Praktisch ist indessen dieser Fehler ohne Bedeutung. Er ist gleichbedeutend mit dem unter 3. erwähnten Fehler der Standlinie durch ein fehlerhaftes Azimut infolge Benutzung einer ungenauen Breite und Länge.

§ 250. Die Fehlergleichungen für die Längen- und Breitenbestimmungen. Mit Hülfe der Standlinien lassen sich die in den früheren Paragraphen (§ 204 und § 221) angegebenen „Fehlergleichungen“ in einfacher und leicht verständlicher Weise ableiten. Unter Fehlergleichungen versteht man Gleichungen, durch die angegeben wird, wie sich Fehler in den Bestimmungsstücken in dem Resultate einer Rechnung fühlbar machen. Für den Seemann sind besonders die folgenden vier Fälle von Bedeutung:

1. Einfluß eines Breitenfehlers auf die Länge. Die Linie SL sei die zu der Höhenbeobachtung gehörige Standlinie. Berechnet man aus der beobachteten Höhe mit Hülfe der Breite φ_1 die Länge, so erhält man den Schiffsort A. Würde man dagegen bei der Berechnung eine andere Breite benutzen, z. B. φ_2, so würde man den Punkt B als Schiffsort erhalten. Zieht man nun $BC \perp AC$, so stellt BC den Fehler in der Breite, AC den entsprechenden Fehler in der Länge dar.

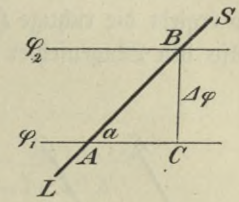


Fig. 200.

Da die Standlinie mit dem Azimute des Gestirnes einen rechten Winkel bildet, so ist der Winkel, den sie mit dem Breitenparallel bildet, gleich dem Azimute des Gestirnes; $BAC = a$.

Nun ist

$$AC = BC \,.\, cotg\, a = \Delta\varphi \,.\, cotg\, a$$

Da $\Delta\varphi$ in Minuten des größten Kreises, also in Seemeilen ausgedrückt ist, so erhält man aus dieser Gleichung auch AC in Seemeilen. Um den Fehler in der Länge ($\Delta\lambda$) in Bogenmaß zu erhalten, muß man daher AC noch mit der Sekante der Breite multiplizieren

$$\Delta\lambda = AC \,.\, sec\,\varphi$$

also
$$\Delta\lambda = \Delta\varphi \,.\, cotg\, a \,.\, sec\,\varphi$$

Da die Bestimmung der Länge auf die Bestimmung des Stundenwinkels hinauskommt, so wird der Fehler im Stundenwinkel, in Bogenminuten gemessen, ebenso groß sein, wie der entsprechende Fehler in der Länge, also

$$\Delta t = \Delta\varphi \,.\, cotg\, a \,.\, sec\,\varphi \text{ in Bogenminuten}$$
$$= 4 \,.\, \Delta\varphi \,.\, cotg\, a \,.\, sec\,\varphi \text{ in Zeitsekunden}$$

2. Einfluß eines Längenfehlers auf die Breite. Die Linie SL stelle wiederum die Standlinie dar. Mit der richtigen Länge λ_1 würde sich aus der Beobachtung der Punkt A, mit der fehlerhaften Länge λ_2 dagegen der Punkt B ergeben. Dem Längenfehler BC entspricht also der Breitenfehler AC, und da $ABC = a$ ist, so ist

$$\Delta\varphi = BC \,.\, tang\, a$$

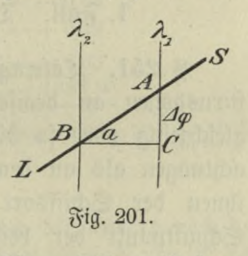


Fig. 201.

Um $\Delta\varphi$ in Minuten des größten Kreises, also in Seemeilen zu erhalten, muß BC auch in Seemeilen ausgedrückt werden. Dies geschieht, indem man die Minuten Längenfehler mit dem Cosinus der Breite multipliziert

$$BC = \Delta\lambda \,.\, cos\,\varphi$$

also
$$\Delta\varphi = \Delta\lambda \,.\, tang\, a \,.\, cos\,\varphi.$$

3. Einfluß eines Höhenfehlers auf die Länge. Es stelle SL die zu der fehlerfreien, $S'L'$ die zu der fehlerhaften Höhe gehörige Standlinie dar. Die beiden sind nach dem vorigen Paragraphen parallel, und ihr senkrechter Abstand AC ist gleich dem Höhenfehler Δh.

Berechnet man mit der als fehlerfrei vorausgesetzten Breite φ die Länge, so ergiebt die richtige Höhe den Punkt A, die ungenaue den Punkt B. AB stellt also den Längenfehler dar, der dem Höhenfehler $\Delta h = AC$ entspricht, und es ist

$$AB = \Delta h . cosec\, a$$

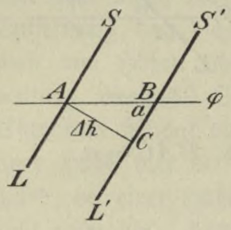


Fig. 202.

Nun ist aber, in Längenminuten ausgedrückt,

$$\Delta \lambda = AB . sec\, \varphi$$

also

$$\Delta \lambda = \Delta h . cosec\, a . sec\, \varphi$$

Somit ist auch der Fehler im Stundenwinkel

$$\Delta t = \Delta h . cosec\, a . sec\, \varphi \text{ in Bogenminuten}$$
$$= 4 . \Delta h . cosec\, a . sec\, \varphi \text{ in Zeitsekunden.}$$

4. Einfluß eines Höhenfehlers auf die Breite. Es stelle wiederum SL die zur fehlerfreien, $S'L'$ die zur fehlerhaften Höhe gehörige Standlinie dar, so daß $AC = \Delta h$ ist.

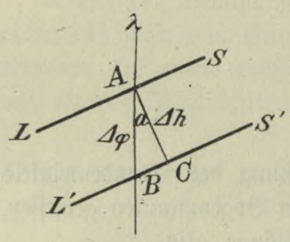


Fig. 203.

Mit der als fehlerfrei vorausgesetzten Länge, ergiebt die richtige Höhe den Punkt A, die unrichtige den Punkt B. $AB = \Delta \varphi$ ist also der dem Höhenfehler Δh entsprechende Breitenfehler, und es ergiebt sich unmittelbar

$$\Delta \varphi = \Delta h . sec\, a$$

Aufgabe der zwei Höhen.

1. Fall. Die Höhen sind an demselben Orte beobachtet.

§ 251. Lösung durch Standlinien in der Karte. Hat man zwei Gestirnshöhen an demselben Orte, also auf See während der Fahrt entweder gleichzeitig oder so dicht hinter einander beobachtet, daß man die beiden Beobachtungen als an demselben Orte angestellt betrachten kann, so läßt sich aus ihnen der Schiffsort bestimmen, und zwar ergiebt sich der Schiffsort als Schnittpunkt der beiden zu den Höhenbeobachtungen gehörigen Standlinien, so daß sich die Aufgabe mit den im vorigen Kapitel angegebenen Hülfsmitteln lösen läßt.

Welcher Methode man sich zur Bestimmung der Standlinien bedient, ist gleichgültig. Um den Gang der Rechnung zu zeigen, sind die folgenden Beispiele nach verschiedenen Methoden gelöst worden.

Beispiel 1. Beide Standlinien nach der Längenmethode. Am 10. Februar 1903 nachmittags, nach Besteck auf $55^0\,10'\,N$ und $6^0\,42'\,O$, macht man nach einem Chronometer, das $3^m\,11^s$ gegen M. G. Z. vor ist, die folgende Beobachtung

$$\text{Chr. Z.} = 5^u\,45^m\,57^s \begin{cases} \text{Sirius } \underline{✳} = 7^0\,45' \text{ östl. v. Mer.} \\ \text{Markab } \underline{✳} = 25^0\,20' \text{ westl. v. Mer.} \end{cases} \quad \text{Idb.} = 0;\ \text{A. H.} = 7\text{m}.$$

Auf welcher Breite und Länge befindet man sich?

$$\begin{aligned} \text{Astr. Chr. Z.} &= 5^u\,45^m\,57^s \text{ den 10. Febr.} \\ \text{Std.} &= -\ \ 3^m\,11^s \\ \text{M. G. Z.} &= 5^u\,42^m\,46^s \text{ den 10. Febr.} \end{aligned}$$

Hierfür ergiebt sich aus dem Jahrbuche

$m\odot\,\alpha = 21^{st}\,18^m\,29^s$ Sirius $\alpha = 6^{st}\,40^m\,54^s$ Markab $\alpha = 22^{st}\,59^m\,55^s$

$\delta = 16^0\,35'\,S$ $\delta = 14^0\,41'\,N$

Sirius.

$$\begin{aligned} \underline{✳} &= 7^0\,45' \\ \text{G. V.} &= -\ 11' \\ h &= 7^0\,34' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= 55^0\,10'\,N & log\,sec &= 0{,}24\,322 \\ \delta &= 16^0\,35'\,S & log\,sec &= 0{,}01\,845 \\ z_0 &= 71^0\,45' \\ z &= 82^0\,26' \\ s &= 154^0\,11' \\ s/_2 &= 77^0\ \ 6' & log\,sin &= 9{,}98\,890 \\ u/_2 &= 5^0\,20' & log\,sin &= 8{,}96\,825 \\ t &= 20^{st}\,47^m\,57^s & log\,sem &= 9{,}21\,882 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ✳\,t &= 20^{st}\,47^m\,57^s \\ ✳\,\alpha &= 6^{st}\,40^m\,54^s \\ \text{St. Z.} &= 27^u\,28^m\,51^s \\ m\odot\,\alpha &= 21^{st}\,18^m\,29^s \\ \text{M. O. Z.} &= 6^u\,10^m\,22^s \text{ den 10. Febr.} \\ \text{M. G. Z.} &= 5^u\,42^m\,46^s \text{ den 10. Febr.} \\ \text{Z. U.} &= 0\ \ 27^m\,36^s \\ \lambda_1 &= 6^0\,54'\,O \end{aligned}$$

Aus Tafel 38. [33.] ergiebt sich

$$\begin{aligned} A &= -1{,}30 \\ B &= -0{,}40 \\ C &= -1{,}70 \\ a_1 &= S\,46^0\,O \end{aligned}$$

Markab.

$$\begin{aligned} \underline{✳} &= 25^0\,20' \\ \text{G. V.} &= -\ 7' \\ h &= 25^0\,13' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= 55^0\,10'\,N & log\,sec &= 0{,}24\,322 \\ \delta &= 14^0\,41'\,N & log\,sec &= 0{,}01\,442 \\ z_0 &= 40^0\,29' \\ z &= 64^0\,47' \\ s &= 105^0\,16' \\ s/_2 &= 52^0\,38' & log\,sin &= 9{,}90\,024 \\ u/_2 &= 12^0\ \ 9' & log\,sin &= 9{,}32\,319 \\ t &= 4^{st}\,27^m\,3^s & log\,sem &= 9{,}48\,107 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ✳\,t &= 4^{st}\,27^m\ \ 3^s \\ ✳\,\alpha &= 22^{st}\,59^m\,55^s \\ \text{St. Z.} &= 27^u\,26^m\,58^s \\ m\odot\,\alpha &= 21^{st}\,18^m\,29^s \\ \text{M. O. Z.} &= 6^u\ \ 8^m\,29^s \text{ den 10. Febr.} \\ \text{M. G. Z.} &= 5^u\,42^m\,46^s \text{ den 10. Febr.} \\ \text{Z. U.} &= 0^{st}\,25^m\,43^s \\ \lambda_2 &= 6^0\,26'\,O \end{aligned}$$

Aus Tafel 38. [33.] ergiebt sich

$$\begin{aligned} A &= -0{,}62 \\ B &= +0{,}29 \\ C &= -0{,}33 \\ a_2 &= S\,79^0\,W \end{aligned}$$

Aufgabe: Hiernach sind die beiden Standlinien in die Karte einzuzeichnen und die Breite und Länge des Schiffsortes zu bestimmen.

Man vergleiche auch § 252, Nr. 3 und § 254.

Beispiel 2. Eine Standlinie nach der Längenmethode, die andere nach der Breitenmethode. Am 28. Oktober 1903 nachmittags, nach Besteck auf $55^0\,40'\,N$ und $18^0\,3'\,O$, macht man nach einem Chronometer, dessen Stand $2^m\,41^s$ nach gegen M. G. Z. ist, die folgenden Beobachtungen dicht hinter einander

$$\left.\begin{aligned} \text{Chr. Z.} = 5^u\,50^m\,48^s \quad & \underline{☾} = 18^0\,32' \text{ in der Nähe des Mer.} \\ 5^u\,52^m\,42^s \quad & \text{Wega } \underline{✳} = 56^0\ \ 7' \text{ westl. vom Mer.} \end{aligned}\right\} \ \text{Idb.} = 0;\quad \text{A. H.} = 6\text{m}$$

Auf welcher Breite und Länge befindet man sich?

Man berechnet sich zunächst mit der gegißten Länge aus der Mondhöhe die Breite, darauf mit der so berechneten Breite aus der Wegahöhe die Länge:

Mond.

Astr. Chr. Z. = $5^u\ 50^m\ 48^s$ den 28. Okt.
Std. = $+\ 2^m\ 41^s$
M. G. Z. = $5^u\ 53^m\ 29^s$ den 28. Okt.

Hierfür ergiebt sich

$m\odot\alpha = 14^{st}\ 23^m\ 35^s$
☾ $\alpha = 20^{st}\ 38^m\ 24^s$
☾ $\delta = 13^0\ 53'\ S$
☾ $\pi = 54'\ 14''$

M. G. Z. = $5^u\ 53^m\ 29^s$
Z. U. = $+\ 1^{st}\ 12^m\ 12^s$
M. O. Z. = $7^u\ 5^m\ 41^s$
$m\odot\alpha = 14^{st}\ 23^m\ 35^s$
St. Z. = $21^u\ 29^m\ 16^s$
☾ $\alpha = 20^{st}\ 38^m\ 24^s$
☾ $t = 0^{st}\ 50^m\ 52^s$

☾ $= 18^0\ 32'$
G. B. = $+\ 59'$
$h = 19^0\ 31'$

$t = 0^{st}\ 50^m\ 52^s$	$log\ sem = 8{,}08\ 87$
$\varphi = 55^0\ 40'$	$log\ cos = 9{,}75\ 13$
$\delta = 13^0\ 53'$	$log\ cos = 9{,}98\ 71$
$h = 19^0\ 31'$	$log\ sec = 0{,}02\ 57$
$u/_2 = 24{,}5'$	$log\ sin = 7{,}85\ 28$
$u = 49{,}0'$	

$z = 70^0\ 29'$
$u = -49'$
$z_0 = 69^0\ 40'\ N$
$\delta = 13^0\ 53'\ S$
$\varphi_1 = 55^0\ 47'\ N$

Aus Tafel 40. ergiebt sich

$a_1 = S\ 13^0\ W$

Wega.

Astr. Chr. Z. = $5^u\ 52^m\ 42^s$ den 28. Okt.
Std. = $+\ 2^m\ 41^s$
M. G. Z. = $5^u\ 55^m\ 23^s$ den 28. Okt.

Hierfür ergiebt sich

$m\odot\alpha = 14^{st}\ 23^m\ 35^s$
$\ast\ \alpha = 18^{st}\ 33^m\ 40^s$
$\ast\ \delta = 38^0\ 42'\ N$

$\underline{\ast} = 56^0\ 7'$
G. B. = $-\ 5'$
$h = 56^0\ 2'$

$\varphi_1 = 55^0\ 47'\ N$	$log\ sec = 0{,}25\ 001$
$\delta = 38^0\ 42'\ N$	$log\ sec = 0{,}10\ 767$
$z_0 = 17^0\ 5'$	
$z = 33^0\ 58'$	
$s = 51^0\ 3'$	
$s/_2 = 25^0\ 32'$	$log\ sin = 9{,}63\ 451$
$u/_2 = 8^0\ 26'$	$log\ sin = 9{,}16\ 631$
$t = 2^{st}\ 58^m\ 26^s$	$log\ sem = 9{,}15\ 850$

$\ast\ t = 2^{st}\ 58^m\ 26^s$
$\ast\ \alpha = 18^{st}\ 33^m\ 40^s$
St. Z. = $21^u\ 32^m\ 6^s$
$m\odot\alpha = 14^{st}\ 23^m\ 35^s$
M. O. Z. = $7^u\ 8^m\ 31^s$ den 28. Okt.
M. G. Z. = $5^u\ 55^m\ 23^s$ den 28. Okt.
Z. U. = $1^{st}\ 13^m\ 8^s$
$\lambda_2 = 18^0\ 17'\ O$

Aus Tafel 38. [33.] ergiebt sich

$A = -1{,}49$
$B = +1{,}14$
$C = -0{,}35$
$a_2 = S\ 79^0\ W$

Aufgabe: Hiernach sind die beiden Standlinien in die Karte einzuzeichnen und die Breite und Länge des Schiffsortes zu bestimmen.

Man vergleiche auch § 252, Nr. 4 und § 255.

Beispiel 3. **Beide Standlinien nach der Höhenmethode.** Am 19. Januar 1903 auf $48^0\ 58'\ N$ und $6^0\ 12'\ W$ macht man nach einem Chronometer, dessen Stand $8^m\ 21^s$ vor gegen M. G. Z. ist, die folgenden Beobachtungen

$$\begin{matrix} \text{Chr. Z.} = 9^u\ 29^m\ 39^s & \underline{\text{☾}} = 14^0\ \ 9' \\ \text{Chr. Z.} = 9^u\ 31^m\ \ 1^s & \underline{\odot} = \ 8^0\ 27' \end{matrix} \Bigg\}\quad \text{Jdb.} = 0;\qquad \text{A. H.} = 12\ \text{m.}$$

Auf welcher Breite und Länge befindet man sich?

Mond.

Astr. Chr. Z. $= 21^u\ 29^m\ 39^s$ den 18. Jan.
Std. $= -\quad 8^m\ 21^s$

M. G. Z. $= 21^u\ 21^m\ 18^s$ den 18. Jan.
Z. U. $= -\ 24^m\ 48^s$

M. O. Z. $= 20^u\ 56^m\ 30^s$
$m \odot \alpha = 19^{st}\ 50^m\ 22^s$

St. Z. $= 16^u\ 46^m\ 52^s$
$☾\ \alpha = 12^{st}\ 55^m\ 21^s$

$☾\ t = 3^{st}\ 51^m\ 31^s$

Hierfür ergiebt sich
$m \odot \alpha = 19^{st}\ 50^m\ 22^s$

$☾\ \alpha = 12^{st}\ 55^m\ 21^s$
$☾\ \delta = 6^0\ 22'\ S$
$☾\ \pi = 56'\ 54''$

$t = 3^{st}\ 51^m\ 31^s$	$log\ sem = 9{,}36\ 949$	
$\varphi = 48^0\ 58'\ N$	$log\ cos = 9{,}81\ 723$	
$\delta = 6^0\ 22'\ S$	$log\ cos = 9{,}99\ 731$	
$z_0 = 55^0\ 20'$	$log\ sec = 0{,}24\ 504$	$log\ cos = 9{,}75\ 496$
$x = 4^{st}\ 9^m\ 43^s$	$log\ sem = 9{,}42\ 907$	$log\ cos = 9{,}66\ 537$
	$h_r = 15^0\ 16'$	$log\ sin = 9{,}42\ 033$

$☾ = 14^0\ \ 9'$
G. V. $= +\ 1^0\ \ 1'$
$h_o = 15^0\ 10'$
$h_r = 15^0\ 16'$
$h_o - h_r = \varDelta h_1 = -\ 6'$

Tafel 38. [33.]: $A = -0{,}72$
$B = -0{,}13$
$C = -0{,}85$

$a_1 = S\ 61^0\ W$

Sonne.

Astr. Chr. Z. $= 21^u\ 31^m\ \ 1^s$ den 18. Jan.
Std. $= -\quad 8^m\ 21^s$

M. G. Z. $= 21^u\ 22^m\ 40^s$ den 18. Jan.
Z. U. $= -\ 24^m\ 48^s$

M. O. Z. $= 20^u\ 57^m\ 52^s$
entg. $e = -\ 10^m\ 35^s$

$\odot\ t = 20^{st}\ 47^m\ 17^s$

Hierfür ergiebt sich

$\odot\ \delta = 20^0\ 33'\ S$
$e = +\ 10^m\ 35^s$

$t = 20^{st}\ 47^m\ 17^s$	$log\ sem = 9{,}22\ 167$	
$\varphi = 48^0\ 58'\ N$	$log\ cos = 9{,}81\ 723$	
$\delta = 20^0\ 33'\ S$	$log\ cos = 9{,}97\ 145$	
$z_0 = 69^0\ 31'$	$log\ sec = 0{,}45\ 601$	$log\ cos = 9{,}54\ 399$
$x = 4^{st}\ 22^m\ 0^s$	$log\ sem = 9{,}46\ 636$	$log\ cos = 9{,}61\ 773$
	$h_r = 8^0\ 21'$	$log\ sin = 9{,}16\ 172$

$\odot = 8^0\ 27'$
G. V. $= +\ 4'$
$h_o = 8^0\ 31'$
$h_r = 8^0\ 21'$
$h_o - h_r = \varDelta h_2 = +\ 10'$

Tafel 38. [33.]: $A = -1{,}04$
$B = -0{,}51$
$C = -1{,}55$

$a_2 = S\ 45^0\ O$

Aufgabe: Hiernach sind die beiden Standlinien zu zeichnen und die Breite und Länge des Schiffsortes zu bestimmen.

Man vergleiche auch § 252, Nr. 1 und § 253.

§ 252. Lösung durch Standlinien außerhalb der Karte. In der Nähe der Küste, da, wo Karten größeren Maßstabes zur Verfügung stehen, wird man den Schiffsort stets durch eine Zeichnung in der Karte, wie sie im vorigen Paragraphen angegeben ist, bestimmen; denn in diesem Falle kommt es weniger auf die Breite und Länge des Schiffsortes, als auf seine Lage zur Küste an.

Hat man, wie es auf offener See gewöhnlich der Fall ist, keine Karte größeren Maßstabes zur Verfügung, so kann man sich in der Weise helfen, daß man für die Umgebung des Schiffsortes ein Kartennetz größeren Maßstabes selbst anfertigt und in dieses Netz die Standlinien einzeichnet. Diese Mehrarbeit wird unnötig, wenn man sich der von verschiedenen Seiten in den Handel gebrachten Kartennetze größeren Maßstabes zum Einzeichnen der Standlinien bedient. Aus diesen Netzen läßt sich die Breite und Länge in genau derselben Weise ablesen, wie aus den Karten.

Sie sind indessen ziemlich überflüssig, da sich die Bestimmung des Schiffsortes fast ebenso bequem durchführen läßt, indem man die Standlinien auf beliebiges Papier zeichnet. Wie dies am einfachsten auszuführen ist, soll im folgenden an der Hand der im vorigen Paragraphen durchgeführten Beispiele gezeigt werden.

1. Beide Standlinien sind nach der Höhenmethode bestimmt (§ 251, Beispiel 3.). Durch einen beliebigen Punkt G, der den gegißten Schiffsort ($48^0 58' N$ und $6^0 12' W$) darstellt, zieht man eine senkrechte, den Meridian darstellende, und eine wagerechte, den Breitenparallel darstellende gerade Linie. Darauf zeichnet man die Standlinie genau wie in der Karte (siehe § 245), indem man für die Seemeile ein beliebiges Maß einführt, z. B. $1^{sm} = 1$ cm. Der Schnittpunkt S der beiden Standlinien stellt den Schiffsort dar. Nun ziehe man durch S den Meridian SC, dann stellt CS die an die gegißte Breite, GC die an die gegißte Länge anzubringende Berichtigung dar. Werden diese beiden Strecken mit dem oben angegebenen Maße gemessen, so erhält man sowohl CS als GC in Seemeilen. Die Längenberichtigung GC ist also, bevor sie an die gegißte Länge angebracht wird, zunächst nach Tafel 13. [3.] in Längenminuten zu verwandeln. Der Name der Breiten- und Längenberichtigung ist aus der Figur zu entnehmen.

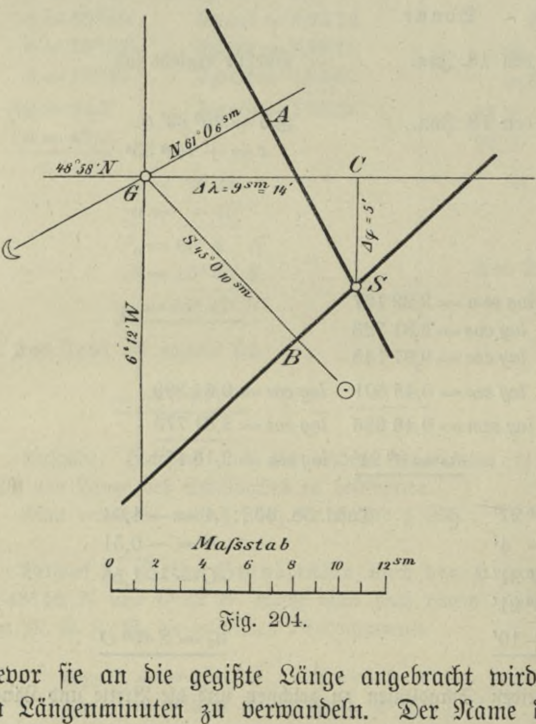


Fig. 204.

Im vorliegenden Falle ist

die Breitenberichtigung $\Delta\varphi = 5'\,S$

die Längenberichtigung $\Delta\lambda = 9^{sm} = 14'\,O$

Der wahre Schiffsort ist also

$\varphi = 48^0\,53'\,N \qquad \lambda = 5^0\,58'\,W.$

2. **Beide Standlinien sind nach der Breitenmethode bestimmt.** Dieser Fall wird in der Praxis selten vorkommen, da man die Breitenmethode nur anzuwenden pflegt, wenn sich die Höhenbeobachtung zu einer Nebenmittagsbreite eignet. Sind hierzu aber beide Höhen geeignet, so wird selten der Azimutalunterschied für eine Aufgabe der zwei Höhen groß genug sein. Es ist daher im vorigen Paragraphen auch kein derartiges Beispiel gegeben worden. Das Verfahren ist das folgende: Nachdem man mit der gegißten Länge λ aus beiden Höhen die Breiten φ_1 und φ_2 bestimmt hat, bildet man den Unterschied dieser beiden Breiten $(\varphi_1 - \varphi_2)$. Alsdann zieht man eine senkrechte, den gegißten Meridian darstellende gerade Linie und bestimmt auf ihr zwei Punkte A und B, deren Abstand gleich dem gefundenen Breitenunterschiede $(\varphi_1 - \varphi_2)$ ist (Maßstab beliebig, etwa $1^{sm} = 1$ cm). Durch diese beiden Punkte zieht man genau wie in der Karte die entsprechenden Standlinien senkrecht zum Azimut der Gestirne. Der Schnittpunkt S dieser beiden Linien stellt den Schiffsort dar. Zieht man dann $SC \perp AB$, so ist AC die an die Breite von A und BC die an die Breite von B anzubringende Berichtigung, während CS, nachdem man die Seemeilen in Minuten verwandelt hat, die an die gemeinsame (gegißte) Länge λ anzubringende Berichtigung ist. Der Name dieser Berichtigungen ist der Figur zu entnehmen.

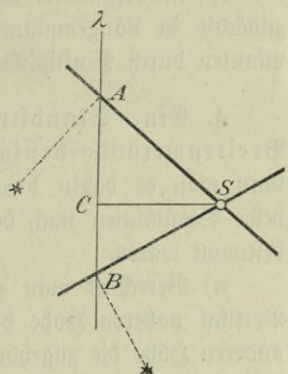


Fig. 205.

3. **Beide Standlinien sind nach der Längenmethode bestimmt** (§ 251, Beispiel 1.). Die Zeichnung wird in ähnlicher Weise wie bei der Breitenmethode angefertigt. Nachdem man mit der gegißten Breite aus beiden Höhen die Längen λ_1 und λ_2 (in dem obigen Beispiele $6^0\,54'\,O$ und $6^0\,26'\,O$) bestimmt hat, bildet man den Unterschied dieser beiden Längen und verwandelt ihn in Abweitung $(\lambda_1 - \lambda_2 = 28' = 16^{sm})$. Alsdann zieht man eine wagerechte, den gegißten Breitenparallel $(\varphi = 55^0\,10'\,N)$ darstellende gerade Linie und bestimmt auf ihr zwei Punkte A und B,

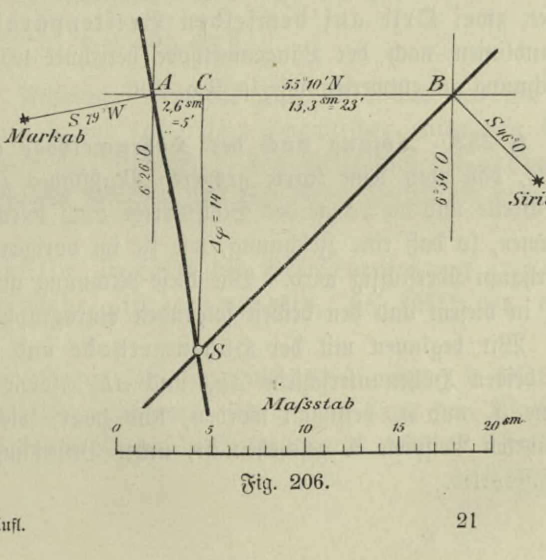


Fig. 206.

deren Abstand gleich der gefundenen Abweitung (16^{sm}) ist. Durch diese beiden Punkte zieht man die entsprechenden Standlinien senkrecht zu den Azimuten der Gestirne. Der Schnittpunkt S dieser beiden Linien stellt den Schiffsort dar. Zieht man nun $SC \perp AB$, so ist CS die an die gegißte Breite anzubringende Berichtigung, während AC, in Längenunterschied verwandelt, die an die Länge von A, und BC, in Längenunterschied verwandelt, die an die Länge von B anzubringende Berichtigung darstellt.

Die Namen der Berichtigungen ergeben sich aus der Figur.

Im vorliegenden Falle ist die Breitenberichtigung gleich $14' S$, die an die Länge von A anzubringende Berichtigung ist $2{,}6^{sm} = 5' O$. Der wahre Schiffsort ist also

$$\varphi = 54^0\,56'\,N \qquad \lambda = 6^0\,31'\,O.$$

Man kann in diesem Falle statt für die Seemeile auch für die Längenminute ein bestimmtes Maß einführen, erhält dann aber die Breitenberichtigung zunächst in Längenminuten ausgedrückt und muß die Anzahl dieser Längenminuten durch Multiplikation mit $\cos\varphi$ in Seemeilen verwandeln.

4. Eine Standlinie ist nach der Längenmethode, eine nach der Breitenmethode bestimmt. Durch eine geeignete Anordnung der Rechnung kann man es dahin bringen, daß die Zeichnung dieselbe ist, als ob entweder beide Standlinien nach der Längenmethode oder beide nach der Breitenmethode bestimmt wären.

a) Berechnet man zunächst mit der gegißten Breite φ aus der dem ersten Vertikal näheren Höhe die Länge λ_1 und darauf mit dieser Länge aus der anderen Höhe die zugehörige Breite φ_2, so hat man zur Bestimmung der Standlinien zwei Orte auf demselben Meridian, genau so als ob beide Standlinien nach der Breitenmethode bestimmt wären; dementsprechend ist die Zeichnung zu entwerfen wie in Fig. 205.

b) Berechnet man aber zunächst mit der gegißten Länge λ aus der dem Meridian näheren Höhe die Breite φ_1 und darauf mit dieser Breite aus der anderen Höhe die zugehörige Länge λ_2, so hat man zur Bestimmung der Standlinien zwei Orte auf demselben Breitenparallel, genau so als ob beide Standlinien nach der Längenmethode berechnet wären; dementsprechend ist die Zeichnung zu entwerfen wie in Fig. 206.

§ 253. **Lösung nach der Höhenmethode ohne Zeichnung.** In dem Falle, daß man keine Karte größeren Maßstabes zur Verfügung hat, läßt sich die Breite und die Länge des Schiffsortes auch durch eine einfache Rechnung bestimmen, so daß eine Zeichnung, wie sie im vorigen Paragraphen angegeben ist, überhaupt überflüssig wird. Wie diese Rechnung am bequemsten einzurichten ist, soll in diesem und den beiden folgenden Paragraphen behandelt werden.

Wir beginnen mit der Höhenmethode und nehmen an, es seien bereits die beiden Höhenunterschiede Δh_1 und Δh_2, sowie die Azimute der beiden Gestirne a_1 und a_2 bestimmt worden, und zwar, wie es in dem in § 251 durchgeführten Beispiele 3. geschehen ist, unter Benutzung ein und desselben gegißten Schiffsortes.

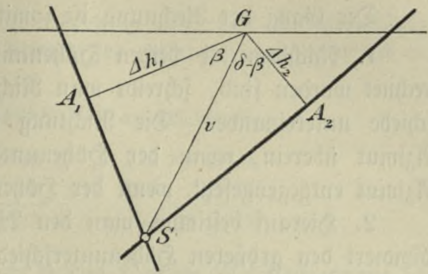


Fig. 207.

Die nebenstehende Figur stelle die zugehörige Zeichnung dar. G sei der gegißte Schiffsort, GA_1 der größere, GA_2 der kleinere Höhenunterschied, A_1S und A_2S die beiden Standlinien, also S der wahre Schiffsort. Alsdann stellt GS nach Richtung und Größe die Besteckversetzung dar.

Diese Besteckversetzung ist zu bestimmen. Zu dem Zwecke soll die Größe von $GS = v$, sowie der Winkel $A_1GS = \beta$, den die Besteckversetzung mit dem größeren Höhenunterschiede bildet, berechnet werden.

Bezeichnet man den Winkel zwischen den beiden Höhenunterschieden A_1GA_2 mit δ, so wird $SGA_2 = \delta - \beta$, und es ist

$$\Delta h_2 = v \cdot \cos(\delta - \beta)$$
$$\Delta h_1 = v \cdot \cos\beta$$

folglich

$$\frac{\Delta h_2}{\Delta h_1} = \frac{\cos(\delta-\beta)}{\cos\beta} = \frac{\cos\delta \cdot \cos\beta + \sin\delta \cdot \sin\beta}{\cos\beta}$$

$$\frac{\Delta h_2}{\Delta h_1} = \cos\delta + \sin\delta \cdot \operatorname{tang}\beta$$

also

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\frac{\Delta h_2}{\Delta h_1} - \cos\delta}{\sin\delta}$$

1. . . . . $\operatorname{tang}\beta = \frac{\Delta h_2}{\Delta h_1} \cdot \operatorname{cosec}\delta - \operatorname{cotg}\delta$

Ist nach dieser Gleichung der Winkel β bestimmt, so findet man die Größe der Besteckversetzung v aus der Gleichung

2. . . . . $v = \Delta h_1 \cdot \sec\beta$

Zur Erleichterung der Rechnung dient die Tafel 39., aus der sich der Winkel β mit den Eingängen δ und $(\Delta h_1 : \Delta h_2)$ unmittelbar entnehmen läßt. (In der Tafel ist im Gegensatz zu Gleichung 1. das Verhältnis des größeren zum kleineren Höhenunterschiede gewählt, weil sich dieses Verhältnis bequemer bilden läßt.)

Ist der Winkel β positiv, so fällt die Besteckversetzung zwischen die beiden Höhenunterschiede, ist er negativ, so fällt sie nach außerhalb.

Die Größe der Besteckversetzung läßt sich, wie aus Gleichung 2. folgt, in einfacher Weise aus der Gradtafel entnehmen, indem man unter dem Winkel β mit dem größeren Höhenunterschiede in die b-Spalte eingeht und den Wert aus der d-Spalte entnimmt.

Der Gang der Rechnung ist somit der folgende:

1. Nachdem die beiden Höhenunterschiede, sowie die beiden Azimute berechnet worden sind, schreibt man Richtung und Größe der beiden Höhenunterschiede untereinander. Die Richtung des Höhenunterschiedes stimmt mit dem Azimut überein, wenn der Höhenunterschied positiv ist, sie ist dagegen dem Azimut entgegengesetzt, wenn der Höhenunterschied negativ ist.

2. Hierauf bestimmt man den Winkel zwischen den beiden Richtungen und dividiert den größeren Höhenunterschied durch den kleineren.

3. Mit diesen beiden Größen entnimmt man der Tafel 39. den Winkel β und bringt ihn an die Richtung des größeren Höhenunterschiedes an, und zwar, wenn er positiv ist, in der Richtung nach dem kleineren Höhenunterschiede, wenn er dagegen negativ ist, nach der entgegengesetzten Richtung. Die so bestimmte Richtung ist die Richtung der Besteckversetzung.

4. Mit dem Winkel β und dem größeren Höhenunterschiede entnimmt man der Gradtafel durch Übergang von der b-Spalte in die d-Spalte die Größe der Besteckversetzung v.

5. Die so gefundene Besteckversetzung bringt man an den gegißten Schiffsort an; das Resultat ist der wahre Schiffsort.

Beispiel 1. Bei der Lösung einer Aufgabe der zwei Höhen nach der Höhenmethode hat man gefunden

$$\varDelta h_1 = -13'; \quad a_1 = S\,24^\circ\,O \quad \text{und} \quad \varDelta h_2 = -6'; \quad a_2 = S\,52^\circ\,W.$$

Der bei der Berechnung benutzte gegißte Schiffsort ist $48^\circ\,11'\,N$ und $26^\circ\,19'\,W$. Welche Breite und Länge des Schiffsortes folgt hieraus?

$$\text{Richtung und Größe der Höhenunterschiede} \begin{cases} \varDelta h_1 : N\,24^\circ\,W \;.\;.\;.\; 13' \\ \varDelta h_2 : N\,52^\circ\,O \;.\;.\;.\; 6' \end{cases}$$

$$\delta = 76^\circ; \frac{\varDelta h_1}{\varDelta h_2} = 2{,}2$$

Für diese Werte ergiebt Tafel 39.: $\beta = +12^\circ$; während man aus der Gradtafel unter $\beta = 12^\circ$ mit $\varDelta h_1 = 13$, die Größe der Besteckversetzung $v = 13{,}3^{sm}$ findet.

Da der Winkel β positiv ist, so liegt die Besteckversetzung zwischen den beiden Höhenunterschieden, und er ist dementsprechend an die Richtung des größeren Höhenunterschiedes ($N\,24^\circ\,W$) anzubringen. Die Besteckversetzung ist hiernach

$N\,12^\circ\,W\,13{,}3^{sm}$	$b = 13{,}0^{sm}\,N$	$a = 2{,}8^{sm}\,W$
Gegißter Schiffsort:	$\varphi = 48^\circ\,11'\,N$	$\lambda = 26^\circ\,19'\,W$
	$b = 13'\,N$	$l = 4'\,W$
Wahrer Schiffsort:	$\varphi = 48^\circ\,24'\,N$	$\lambda = 26^\circ\,23'\,W$

Beispiel 2. Bei einer anderen Aufgabe ist der gegißte Schiffsort $38^\circ\,49'\,S$ und $70^\circ\,42'\,O$, und es ist gefunden worden:

$$\varDelta h_1 = +19'; \quad a_1 = N\,68^\circ\,O \quad \text{und} \quad \varDelta h_2 = -4'; \quad a_2 = S\,12^\circ\,W.$$

Der wahre Schiffsort ist zu bestimmen.

$$\text{Richtung und Größe der Höhenunterschiede} \begin{cases} \varDelta h_1 : N\,68^\circ\,O \;.\;.\;.\;.\; 19' \\ \varDelta h_2 : N\,12^\circ\,O \;.\;.\;.\;.\; 4' \end{cases}$$

$$\delta = 56^\circ; \frac{\varDelta h_1}{\varDelta h_2} = 4{,}8$$

Hieraus ergiebt sich nach Tafel 39.: $\beta = -23^\circ$ und hieraus in Verbindung mit $\varDelta h_1 = 19$ aus der Gradtafel $v = 20{,}6^{sm}$.

Da der Winkel β negativ ist, so liegt die Besteckversetzung außerhalb der beiden Höhenunterschiede, und er ist dementsprechend an die Richtung des größeren Höhenunterschiedes anzubringen. Die Besteckversetzung ist hiernach

$S\,89^0\,O\ 20{,}6^{sm}$	$b = 0{,}4^{sm}\,S$	$a = 20{,}6^{sm}\,O$
Gegißter Schiffsort:	$\varphi = 38^0\,49'\,S$	$\lambda = 70^0\,42'\,O$
	$b = \quad 0$	$l = \quad 26'\,O$
Wahrer Schiffsort:	$\varphi = 38^0\,49'\,S$	$\lambda = 71^0\ \ 8'\,O$

Beispiel 3. Für das in § 251 durchgeführte Beispiel 3. würde die Schlußrechnung folgendermaßen lauten:

$$\Delta h_1 : S\,45^0\,O \ldots\ldots 10' \qquad \beta = +18^0; \quad v = 11^{sm}$$
$$\Delta h_2 : N\,61^0\,O \ldots\ldots 6' \qquad \text{Besteckversetzung: } S\,63^0\,O\ 10{,}5^{sm}$$
$$\delta = 74^0; \quad \frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} = 1{,}7 \qquad b = 4{,}8^{sm}\,S \quad a = 9{,}4^{sm}\,O$$

Gegißter Schiffsort:	$\varphi = 48^0\,58'\,N$	$\lambda = 6^0\,12'\,W$
	$b = \quad 5'\,S$	$l = \quad 14'\,O$
Wahrer Schiffsort:	$\varphi = 48^0\,53'\,N$	$\lambda = 5^0\,58'\,W$

§ 254. Lösung nach der Längenmethode ohne Zeichnung (Pagelsches Verfahren). Wie bei der Lösung durch Zeichnung berechnet man zunächst mit der gegißten Breite aus den beiden Beobachtungen die zugehörigen Längen λ_1 und λ_2, sowie die entsprechenden Azimute a_1 und a_2.

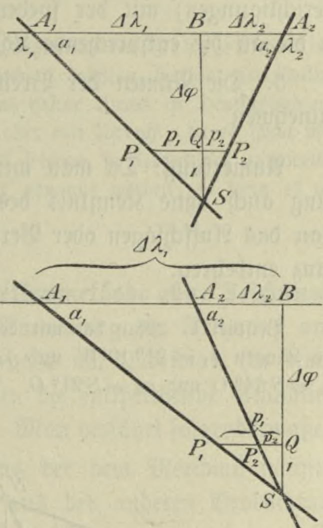


Fig. 208.

Die nebenstehende Figur stelle die zugehörige Zeichnung dar. Die Linie $A_1\,A_2$ sei der gegißte Breitenparallel, A_1 habe die Länge λ_1, A_2 die Länge λ_2, $A_1\,S$ und $A_2\,S$ seien die Standlinien, sodaß S den Schiffsort darstellt. Zieht man dann $SB \perp A_1A_2$, so ist $BS = \Delta\varphi$ die an die gegißte Breite anzubringende Berichtigung, während $A_1B = \Delta\lambda_1$ die an die Länge λ_1, $A_2B = \Delta\lambda_2$ die an die Länge λ_2 anzubringende Berichtigung darstellt.

Denkt man sich auf SB die Strecke SQ gleich einer Breitenminute abgetragen und zieht durch Q die Parallele zu A_1A_2, so stellen $P_1Q = p_1$ und $P_2Q = p_2$ die zu den beiden Beobachtungen gehörenden Längenänderungen (Pagelschen Berichtigungen; siehe § 216) dar.

Liegen die beiden Azimute in benachbarten Kompaßvierteln, so ist P_1P_2 gleich der Summe $p_1 + p_2$; liegen die Azimute dagegen in demselben oder in entgegengesetzten Kompaßvierteln, so ist P_1P_2 gleich dem Unterschiede $p_1 - p_2$. In beiden Fällen gilt die Verhältnisgleichung

$$A_1A_2 : P_1P_2 = SB : SQ$$

oder

$$(\lambda_1 - \lambda_2) : (p_1 \mp p_2) = \Delta\varphi : 1$$

also
$$\varDelta\varphi = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{p_1 \mp p_2}$$

Aus dieser Formel läßt sich die Breitenberichtigung, und mit ihr aus einer der Formeln
$$\varDelta\lambda_1 = p_1 \cdot \varDelta\varphi \qquad \varDelta\lambda_2 = p_2 \cdot \varDelta\varphi$$
die Längenberichtigung bestimmen.

Der Gang der Rechnung ist demnach der folgende:

1. Nachdem man aus den beiden Beobachtungen mit der gegißten Breite die Längen λ_1 und λ_2 nebst den Azimuten a_1 und a_2 berechnet hat, bildet man den Unterschied der beiden Längen.

2. Mit der Breite und den Azimuten entnimmt man der Tafel 38. [33.] die entsprechenden Längenänderungen (Pagelsche Berichtigungen) p_1 und p_2. Man subtrahiert sie, wenn die Azimute in demselben oder gegenüberliegenden Vierteln liegen, man addiert sie hingegen, wenn die Azimute in benachbarten Vierteln liegen.

3. Den Unterschied der Längen dividiert man durch den Unterschied (bezw. die Summe) der Längenänderungen. Das Resultat ist die Breitenberichtigung.

4. Man multipliziert die kleinere der beiden Längenänderungen (Pagelschen Berichtigungen) mit der soeben gefundenen Breitenberichtigung. Das Resultat ist die an die entsprechende Länge anzubringende Längenänderung.

5. Die Namen der Breiten- und Längenberichtigung sind einer Skizze zu entnehmen.

Anmerkung: Da man mit Hülfe der Tafel 38. A und B die Längenänderung auch ohne Kenntnis des Azimutes finden kann (vergl. § 216), so kann man das Aufschlagen oder Berechnen des Azimutes bei dieser Art der Berechnung ganz entbehren.

Beispiel 1. Man hat mit der gegißten Breite $41^0\,10'\,N$ aus zwei beobachteten Höhen die Längen $\lambda_1 = 21^0\,10'\,W$ und $\lambda_2 = 21^0\,24'\,W$ berechnet; die entsprechenden Azimute sind $a_1 = S\,64^0\,O$ und $a_2 = S\,21^0\,O$. Welcher Schiffsort folgt hieraus?

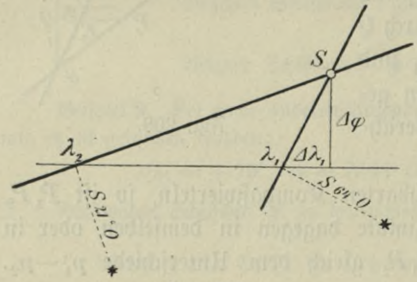


Fig. 209.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 21^0\,10'\,W \qquad a_1 = S\,64^0\,O \qquad p_1 = 0{,}65 \\ \lambda_2 &= 21^0\,24'\,W \qquad a_2 = S\,21^0\,O \qquad p_2 = 3{,}45 \\ \lambda_2 - \lambda_1 &= \quad 14' \qquad\qquad\qquad\qquad p_2 - p_1 = 2{,}8 \end{aligned}$$

somit $\varDelta\varphi = 14' : 2{,}8 = 5'\,N$

$\varDelta\lambda_1 = 5' \cdot 0{,}65 = 3'\,O$

$$\begin{aligned} \varphi &= 41^0\,10'\,N \qquad & \lambda_1 &= 21^0\,10'\,W \\ b &= \quad\;\; 5'\,N & l &= \quad\;\; 3'\,O \\ \text{Schiffsort: } \varphi &= 41^0\,15'\,N & \lambda &= 21^0\;\;7'\,W \end{aligned}$$

Beispiel 2. Mit der gegißten Breite $42^0\,0'\,S$ hat man aus zwei gleichzeitigen Höhenbeobachtungen die Längen $\lambda_1 = 38^0\,45'\,O$ und $\lambda_2 = 38^0\,4'\,O$ berechnet, während die Azimute $a_1 = N\,42^0\,O$ und $a_2 = N\,54^0\,W$ gefunden sind. Welcher Schiffsort folgt hieraus?

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 38^0\,45'\,O & a_1 = N\,42^0\,O & p_1 = 1{,}49 \\ \lambda_2 = 38^0\;\;4'\,O & a_2 = N\,54^0\,W & p_2 = 0{,}98 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = \;\;41' & & p_1 + p_2 = 2{,}5 \end{array}$$

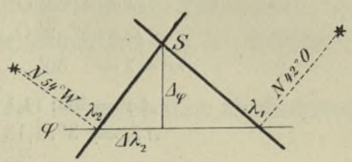


Fig. 210.

somit

$$\varDelta\varphi = 41' : 2{,}5 \;\; = 16'\,N$$
$$\varDelta\lambda_2 = 16' \,.\, 0{,}98 = 16'\,O$$

$$\begin{array}{ll} \varphi = 42^0\;\;0'\,S & \lambda_2 = 38^0\;\;4'\,O \\ b = \;\;\;\;16'\,N & l = \;\;\;\;16'\,O \\ \text{Schiffsort: } \varphi = 41^0\,44'\,S & \lambda = 38^0\,20'\,O \end{array}$$

Beispiel 3. Für das in § 251 durchgeführte Beispiel 1. würde die Schlußrechnung folgendermaßen lauten:

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 6^0\,54'\,O & a_1 = S\,46^0\,O & p_1 = 1{,}68 \\ \lambda_2 = 6^0\,26'\,O & a_2 = S\,79^0\,W & p_2 = 0{,}34 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = \;\;28' & & p_1 + p_2 = 2{,}02 \end{array}$$

somit

$$\varDelta\varphi = 28' : 2{,}0 \;\; = 14'\,S$$
$$\varDelta\lambda_2 = 14' \,.\, 0{,}34 = \;\;5'\,O$$

$$\begin{array}{ll} \varphi = 55^0\,10'\,N & \lambda_2 = 6^0\,26'\,O \\ b = \;\;\;\;14'\,S & l = \;\;\;\;5'\,O \\ \text{Schiffsort: } \varphi = 54^0\,56'\,N & \lambda = 6^0\,31'\,O \end{array}$$

Anmerkung: Das soeben erörterte Verfahren wird gelegentlich das Johnsonsche Verfahren genannt, da es durch eine kleine Schrift des Engländers Johnson, betitelt: On finding the latitude and longitude in cloudy weather and at other times in Deutschland und England bekannt geworden ist. Es führt diesen Namen aber mit Unrecht, da es schon viele Jahre vorher von dem Franzosen Pagel angegeben und seitdem in Frankreich angewendet worden ist. Soll das Verfahren also nach einem Manne genannt werden, so kann es nur das Pagelsche heißen.

§ 255. Lösung nach der Längen- und Breitenmethode ohne Zeichnung.

Das Pagelsche Verfahren läßt sich bei geeigneter Anordnung der Rechnung auch dann noch anwenden, wenn die eine Höhe sehr nahe am Meridian (in einem Azimut kleiner als 20°) beobachtet ist, obwohl dann die entsprechende Standlinie nicht nach der Längenmethode berechnet werden kann. Man verfährt folgendermaßen:

Mit der gegißten Länge λ berechnet man aus der dem Meridian nächsten Höhe die Breite φ_1, und mit dieser Breite φ_1 aus der anderen Beobachtung die Länge λ_2. Gleichzeitig bestimmt man die beiden Azimute a_1 und a_2. Da man jetzt zur Bestimmung der Standlinien ebenfalls zwei Punkte mit derselben Breite φ_1 hat, so kann man genau so verfahren, wie im vorigen Paragraphen angegeben ist.

Beispiel 1. Nach Besteck auf $55^0\,10'\,N$ und $4^0\,32'\,O$ beobachtet man gleichzeitig zwei Gestirnshöhen. Aus der einen berechnet man, da das Gestirn sehr nahe beim Meridian gestanden hat, mit der angenommenen Länge $\lambda = 4^0\,32'\,O$ die Breite und findet $\varphi_1 = 55^0\,16'\,N$. Das Azimut ist $a_1 = S\,10^0\,O$. Darauf berechnet man mit dieser Breite $55^0\,16'\,N$ aus der anderen Höhe die Länge und findet $\lambda_2 = 5^0\,2'\,O$. Das Azimut ist $S\,57^0\,W$. Auf welcher Breite und Länge befindet man sich?

$$\begin{array}{lll} \lambda = 4^0\,32'\,O & a_1 = S\,10^0\,O & p_1 = 10{,}0 \\ \lambda_2 = 5^0\ \ 2'\,O & a_2 = S\,57^0\,W & p_2 = \ \ 1{,}13 \\ \lambda_2 - \lambda = \quad 30' & & p_1 + p_2 = 11{,}1 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varDelta\varphi = 30' : 11{,}1 = 3'\,N \\ \varDelta\lambda_2 = \ 3' \,.\, 1{,}13 = 3'\,W \end{array}\right\}$$ Die Namen ergeben sich aus einer Skizze.

$$\begin{array}{ll} \varphi_1 = 55^0\,16'\,N & \lambda_2 = 5^0\ \ 2'\,O \\ b = \qquad 3'\,N & l = \qquad 3'\,W \\ \text{Schiffsort: } \varphi = 55^0\,19'\,N & \lambda = 4^0\,59'\,O \end{array}$$

Beispiel 2. Für das in § 251 durchgeführte Beispiel 2. würde die Schlußrechnung folgendermaßen lauten:

$$\begin{array}{lll} \lambda = 18^0\ \ 3'\,O & a_1 = S\,13^0\,W & p_1 = 7{,}75 \\ \lambda_2 = 18^0\,17'\,O & a_2 = S\,79^0\,W & p_2 = 0{,}35 \\ \lambda_2 - \lambda = \quad 14' & & p_1 - p_2 = 7{,}4 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varDelta\varphi = 14' : 7{,}4 = 2'\,S \\ \varDelta\lambda_2 = 2' \,.\, 0{,}35 = 1'\,O \end{array}\right\}$$ Die Namen ergeben sich aus einer Skizze.

$$\begin{array}{ll} \varphi_1 = 55^0\,47'\,N & \lambda_2 = 18^0\,17'\,O \\ b = \qquad 2'\,S & l = \qquad 1'\,O \\ \text{Schiffsort: } \varphi = 55^0\,45'\,N & \lambda = 18^0\,18'\,O \end{array}$$

2. Fall. Die Höhen sind an verschiedenen Orten beobachtet.

§ 256. Höhenmethode. Sind die beiden Beobachtungen, aus denen der Schiffsort bestimmt werden soll, nicht an demselben Orte gemacht worden, so muß man die zu der ersten Beobachtung gehörige Standlinie entsprechend der in der Zwischenzeit ausgeführten Segelung verschieben. Der Schnittpunkt dieser so verschobenen Standlinie mit der zu der zweiten Höhe gehörigen Standlinie ist der Schiffsort bei der zweiten Beobachtung.

Es sei G_1 der gegißte Schiffsort bei der ersten Beobachtung, G_1A nach Richtung und Größe der berechnete Höhenunterschied $\varDelta h_1$, und I die zugehörige Standlinie. AB stelle den zwischen den beiden Beobachtungen zurückgelegten Weg des Schiffes dar, dann muß das Schiff bei der zweiten Beobachtung auf der Linie I' stehen. Trägt man die Segelung AB auch an G_1 an, so erhält man in G_2 den gegißten Schiffsort bei der zweiten Beobachtung, und es ist $G_2B = G_1A$, also gleich dem vorhin berechneten Höhenunterschiede. Hätte man also diesen Höhenunterschied im Punkte G_2 angetragen und durch den Endpunkt das Lot gelegt, so würde man unmittelbar die verschobene Standlinie erhalten haben, wodurch alle punktierten Linien überflüssig geworden

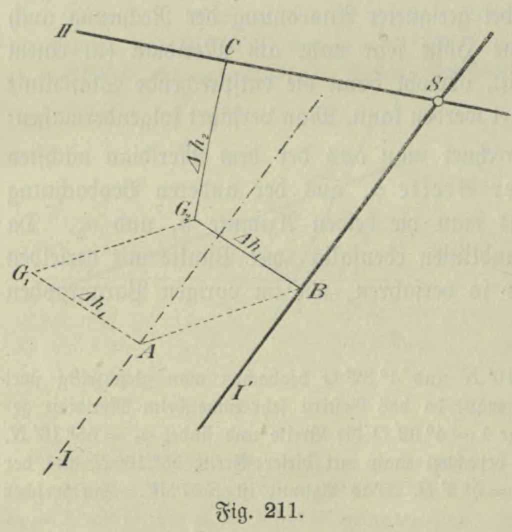


Fig. 211.

wären. Ist nun G_2C der aus der zweiten Beobachtung abgeleitete Höhenunterschied Δh_2 und II die zugehörige Standlinie, so ist der Schnittpunkt S der Schiffsort.

Man hat also folgendermaßen zu verfahren:

1. Man berechnet für den gegißten Schiffsort bei der ersten Beobachtung G_1 den Höhenunterschied Δh_1 und das Azimut a_1.

2. Man bestimmt den gegißten Schiffsort bei der zweiten Beobachtung G_2, indem man an G_1 den zwischen den beiden Beobachtungen zurückgelegten Weg anbringt.

3. Für den so bestimmten Ort G_2 berechnet man aus der zweiten Beobachtung den Höhenunterschied Δh_2 und das Azimut a_2.

4. Darauf zeichnet man die Standlinien, als ob beide Höhen am Orte G_2 beobachtet wären. Die Zeichnung läßt sich nach § 253 auch durch eine Rechnung ersetzen.

Beispiel. Am 3. April 1903 nachmittags, nach Besteck auf $56^0 42' N$ und $5^0 48' O$, beobachtet man nach einem Chronometer, dessen Stand $4^m 42^s$ nach gegen M. G. Z. ist, den folgenden Kimmabstand der Sonne

Chr. Z. $= 3^u\, 42^m\, 49^s$ $\underline{\odot} = 19^0\, 12'\, 30''$; Idb. $= 0$; A. H. $= 7$ m.

Nachdem man darauf rechtweisend $S\, 42^0\, O\, 16^{sm}$ zurückgelegt hat, beobachtet man nach demselben Chronometer den folgenden Kimmabstand des Mondes

Chr. Z. $= 6^u\, 10^m\, 17^s$ $\underline{☾} = 46^0\, 36'\, 0''$; Idb. $= 0$; A. H. $= 7$ m.

Auf welcher Breite und Länge befindet man sich bei der zweiten Beobachtung?

Sonne.

Astr. Chr. Z. $=$	$3^u\, 42^m\, 49^s$	den 3. April	Hierfür ergiebt sich
Std. $=$	$+\, 4^m\, 42^s$		
M. G. Z. $=$	$3^u\, 47^m\, 31^s$	den 3. April	$\odot\ \delta = 5^0\, 2'\, N$
Z. U. $=$	$+\, 23^m\, 12^s$		$e = +\, 3^m\, 36^s$
M. O. Z. $=$	$4^u\, 10^m\, 43^s$		
entg. $e =$	$-\, 3^m\, 36^s$		
$\odot\ t =$	$4^{st}\ 7^m\ 7^s$		

$t = 4^{st}\, 7^m\, 7^s$	$log\ sem = 9{,}42\,089$	
$\varphi = 56^0\, 42'\, N$	$log\ cos = 9{,}73\,959$	
$\delta = 5^0\ \ 2'\, N$	$log\ cos = 9{,}99\,832$	
$z_0 = 51^0\, 40'$	$log\ sec = 0{,}20\,744$	$log\ cos = 9{,}79\,256$
$x = 3^{st}\, 50^m\, 34^s$	$log\ sem = 9{,}36\,624$	$log\ cos = 9{,}72\,843$
	$h_r = 19^0\, 23'$	$log\ sin = 9{,}52\,099$

$\underline{\odot} = 19^0\, 12{,}5'$	Tafel 38. [33.]
G. B. $= +\, 8{,}7'$	$A = -\, 0{,}82$
$h_o = 19^0\, 21'$	$B = +\, 0{,}10$
$h_r = 19^0\, 23'$	$C = -\, 0{,}72$
$\Delta h_1 = -\, 2'$	$a_1 = S\, 68^0\, W$

Gegißter Schiffsort bei der ersten Beobachtung:	$\varphi = 56^0\, 42'\, N$	$\lambda = 5^0\, 48'\, O$
$S\, 42^0\, O\, 16^{sm}$:	$b = 12'\, S$	$l = 19'\, O$
gegißter Schiffsort bei der zweiten Beobachtung:	$\varphi = 56^0\, 30'\, N$	$\lambda = 6^0\ \ 7'\, O$

Mond.

Astr. Chr. Z. $= 6^u\ 10^m\ 17^s$ den 3. April
Std. $= +\ \ 4^m\ 42^s$
M. G. Z. $= 6^u\ 14^m\ 59^s$ den 3. April
Z. U. $= +\ 24^m\ 28^s$
M. O. Z. $= 6^u\ 39^m\ 27^s$
$m \odot \alpha = 0^{st}\ 43^m\ 36^s$
St. Z. $= 7^u\ 23^m\ \ 3^s$
$☾\ \alpha = 5^{st}\ 40^m\ 47^s$
$☾\ t = 1^{st}\ 42^m\ 16^s$

Hierfür ergiebt sich
$m \odot \alpha = 0^{st}\ 43^m\ 36^s$
$☾\ \alpha = 5^{st}\ 40^m\ 47^s$
$☾\ \delta = 18^0\ 25'\ N$
$☾\ \pi = 59'\ 7''$

$t = 1^{st}\ 42^m\ 16^s$	$\log sem = 8{,}68\ 983$	
$\varphi = 56^0\ 30'\ N$	$\log cos = 9{,}74\ 189$	
$\delta = 18^0\ 25'\ N$	$\log cos = 9{,}97\ 717$	
$z_0 = 38^0\ \ 5'$	$\log sec = 0{,}10\ 396$	$\log cos = 9{,}89\ 604$
$x = 1^{st}\ 23^m\ 11^s$	$\log sem = 8{,}51\ 285$	$\log cos = 9{,}97\ 073$
	$h_r = 47^0\ 23'$	$\log sin = 9{,}86\ 677$

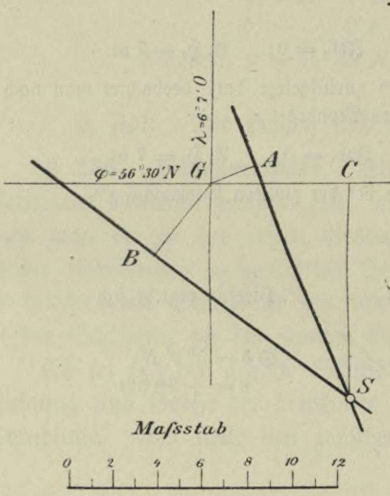


Fig. 212.

$☾ = 46^0\ 36{,}0'$
G. B. $= +\ 51{,}4'$
$h_0 = 47^0\ 27'$
$h_r = 47^0\ 23'$
$\Delta h_2 = \ \ +4'$

Tafel 38. [33.]
$A = -3{,}2$
$B = +0{,}8$
$C = -2{,}4$
$a_2 = S\ 37^0\ W$

Δh_1: $S\ 37^0\ W$ . . . . 4′
Δh_2: $N\ 68^0\ O$ . . . . 2′
$\delta = 149^0$; $\Delta h_1 : \Delta h_2 = 2{,}0$

$\beta = +69^0$ $\quad v = 11^{sm}$
Besteckversetzung: $S\ 32^0\ O\ 11^{sm}$
$b = 9{,}3^{sm}\ S$ $\quad a = 5{,}8^{sm}\ O$

Gegißter Schiffsort bei der zweiten Beobachtung: $\varphi = 56^0\ 30'\ N$ $\quad \lambda = 6^0\ \ 7'\ O$
$b = \ \ \ 9'\ S$ $\quad l = \ \ 10'\ O$
Wahrer Schiffsort: $\varphi = 56^0\ 21'\ N$ $\quad \lambda = 6^0\ 17'\ O$

§ 257. Längenmethode. Man verfährt bei Benutzung dieser Methode am besten in der folgenden Weise.

1. Mit der gegißten Breite φ berechnet man aus der ersten Beobachtung die Länge λ_1 und das Azimut a_1.

2. An den so gefundenen Ort φ, λ_1 bringt man den zwischen den beiden Beobachtungen zurückgelegten Weg an. Die Breite des auf diese Weise erhaltenen Ortes sei φ', seine Länge λ'_1.

3. Mit der so gefundenen Breite φ' berechnet man aus der zweiten Beobachtung die Länge λ_2 und das Azimut a_2.

4. Darauf zeichnet man die Standlinien, als ob beide Beobachtungen an einem Orte mit der gegißten Breite φ' gemacht wären. (Die in der Figur punktierten Linien braucht man nicht mit zu zeichnen.)

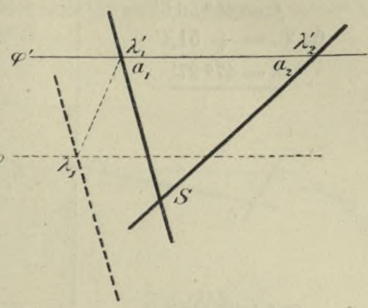


Fig. 213.

Die Zeichnung läßt sich nach § 254 auch durch eine Rechnung ersetzen. In diesem Falle braucht man die Azimute nicht zu bestimmen, da sich die Längenänderungen nach Tafel 38. A und B auch ohne die Azimute finden lassen.

Beispiel. Die im vorigen Paragraphen gegebene Aufgabe soll nach der Längenmethode berechnet werden:

Sonne.

Astr. Chr.. Z. $= 3^u\ 42^m\ 49^s$ den 3. April
Std. $= +\ 4^m\ 42^s$
M. G. Z. $= 3^u\ 47^m\ 31^s$ den 3. April

Hierfür ergiebt sich
$\odot\ \delta = 5^0\ 2'\ N$
$e = +\ 3^m\ 36^s$

$\underline{\odot} = 19^0\ 12{,}5'$
G. B. $= +\ 8{,}7'$
$h = 19^0\ 21'$

$\varphi = 56^0\ 42'\ N$ $\quad log\ sec = 0{,}26\ 041$
$\delta = 5^0\ 2'\ N$ $\quad log\ sec = 0{,}00\ 168$
$z_0 = 51^0\ 40'$
$z = 70^0\ 39'$
$s = 122^0\ 19'$
$s/_2 = 61^0\ 10'$ $\quad log\ sin = 9{,}94\ 252$
$u/_2 = 9^0\ 29'$ $\quad log\ sin = 9{,}21\ 685$
$\odot\ t = 4^{st}\ 7^m\ 18^s$ $\quad log\ sem = 9{,}42\ 146$

Tafel 38. [33.]
$A = -\ 0{,}82$
$B = +\ 0{,}10$
$p_1 = C = -\ 0{,}72$
$a_1 = S\ 68^0\ W$

W. O. Z. $= 4^u\ 7^m\ 18^s$
$e = +\ 3^m\ 36^s$
M. O. Z. $= 4^u\ 10^m\ 54^s$ den 3. April
M. G. Z. $= 3^u\ 47^m\ 31^s$ den 3. April
Z. U. $= 0^{st}\ 23^m\ 23^s$
$\lambda_1 = 5^0\ 51'\ O$

$\varphi = 56^0\ 42'\ N$
$S\ 42^0\ O\ 16^{sm}\ b = 12'\ S$
$\varphi' = 56^0\ 30'\ N$

$\lambda_1 = 5^0\ 51'\ O$
$l = 19'\ O$
$\lambda'_1 = 6^0\ 10'\ O$

Mond.

Astr. Chr. Z. $= 6^u\ 10^m\ 17^s$ den 3. April
Std. $= +\ 4^m\ 42^s$
M. G. Z. $= 6^u\ 14^m\ 59^s$ den 3. April

Hierfür ergiebt sich
$m\ \odot\ \alpha = 0^{st}\ 43^m\ 36^s$
☾ $\alpha = 5^{st}\ 40^m\ 47$
☾ $\delta = 18^0\ 25'\ N$
☾ $\pi = 59'\ 7''$

$$\begin{aligned} ☾ &= 46^0\,36{,}0' \\ \text{G. B.} &= +\,51{,}4' \\ \hline h &= 47^0\,27' \end{aligned}$$

Tafel 38. [33.]

$$\begin{aligned} A &= -\,3{,}2 \\ B &= +\,0{,}8 \\ \hline p_2 = C &= -\,2{,}4 \\ a_2 &= S\,37^0\,W \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi' &= 56^0\,30'\,N & \log\sec &= 0{,}25\,811 \\ \delta &= 18^0\,25'\,N & \log\sec &= 0{,}02\,283 \\ z_0 &= 38^0\ \ 5' \\ z &= 42^0\,33' \\ s &= 80^0\,38' \\ s/_2 &= 40^0\,19' & \log\sin &= 9{,}81\,091 \\ u/_2 &= \ \ 2^0\,14' & \log\sin &= 8{,}59\,072 \\ ☾\,t &= 1^{st}\,41^m\,24^s & \log\mathrm{sem} &= 8{,}68\,257 \\ ☾\,\alpha &= 5^{st}\,40^m\,47^s \\ \text{St. Z.} &= 7^u\,22^m\,11^s \\ m\odot\alpha &= 0^{st}\,43^m\,36^s \\ \text{M. O. Z.} &= 6^u\,38^m\,35^s & &\text{den 3. April} \\ \text{M. G. Z.} &= 6^u\,14^m\,59^s & &\text{den 3. April} \\ \text{Z. U.} &= 0^u\,23^m\,36^s \\ \lambda_2 &= \quad 5^0\ 54'\,O \end{aligned}$$

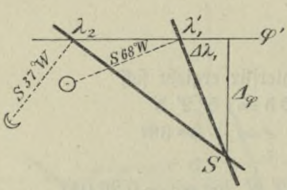


Fig. 214.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 6^0\,10'\,O & a_1 &= S\,68^0\,W & p_1 &= 0{,}7 \\ \lambda_2 &= 5^0\,54'\,O & a_2 &= S\,37^0\,W & p_2 &= 2{,}4 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= \quad 16' & & & p_2 - p_1 &= 1{,}7 \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned} \Delta\varphi' &= 16' : 1{,}7 = 9'\,S \\ \Delta\lambda_1 &= \ \ 9' \,.\, 0{,}7 = 6'\,O \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi' &= 56^0\,30'\,N & \lambda'_1 &= 6^0\,10'\,O \\ b &= \qquad 9'\,S & l &= \qquad 6'\,O \\ \text{Wahrer Schiffsort}\ \varphi &= 56^0\,21'\,N & \lambda &= 6^0\,16'\,O \end{aligned}$$

§ 258. Breiten- und Längenmethode.

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Die erste Höhe ist in der Nähe des Meridians, die zweite in größerem Azimut beobachtet.

1. Mit der gegißten Länge λ berechnet man aus der ersten Beobachtung die Breite φ_1 und das Azimut a_1.

2. An den so gefundenen Ort φ_1, λ bringt man den zwischen den beiden Beobachtungen zurückgelegten Weg an. Die Breite des auf diese Weise erhaltenen Ortes sei φ'_1, seine Länge λ'.

3. Mit der so gefundenen Breite φ'_1 berechnet man aus der zweiten Beobachtung die Länge λ_2 und das Azimut a_2.

4. Darauf zeichnet man die beiden Standlinien, als ob beide Beobachtungen an einem Orte mit der gegißten Breite φ'_1 gemacht wären. Die Zeichnung läßt sich, genau wie im vorigen Paragraphen, durch eine Rechnung ersetzen.

Beispiel. Kurz nach Mittag beobachtet man eine Sonnenhöhe und berechnet aus ihr mit der angenommenen Länge $\lambda = 5^0\,10'\,O$ die Breite $\varphi_1 = 57^0\,48'\,N$ und das Azimut $a_1 = S\,10^0\,W$.

Hierauf segelt man rechtweisend $NzO\ 15^{sm}$. Man findet also

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 57^0\,48'\,N & \lambda &= 5^0\,10'\,O \\ NzO\,15^{sm} : b &= \qquad 15'\,N & l &= \qquad 5'\,O \\ \varphi'_1 &= 58^0\ \ 3'\,N & \lambda' &= 5^0\,15'\,O \end{aligned}$$

Nun beobachtet man eine Mondhöhe und berechnet aus ihr mit der Breite $\varphi'_1 = 58^0\,3'\,N$ die Länge $\lambda_2 = 5^0\,34'\,O$ und das Azimut $a_2 = S\,62^0\,O$.

Alsdann ist

$$\begin{array}{rlrlrl} \lambda' &= 5^0\,15'\,O & a_1 &= S\,10^0\,W & p_1 &= 10{,}7 \\ \lambda_2 &= 5^0\,34'\,O & a_2 &= S\,62^0\,O & p_2 &= \underline{\ 1{,}0} \\ \lambda_2 - \lambda' &= \quad 19' & & & p_1 + p_2 &= 11{,}7 \end{array}$$

somit
$$\begin{aligned} \varDelta\varphi'_1 &= 19' : 11{,}7 = 2'\,S \\ \varDelta\lambda_2 &= \ 2' \,.\ 1{,}0 = 2'\,W \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lrlrl} & \varphi'_1 &= 58^0\,3'\,N & \lambda_2 &= 5^0\,34'\,O \\ & b &= \quad 2'\,S & l &= \quad 2'\,W \\ \underline{\text{Wahrer Schiffsort:}} & \varphi &= 58^0\,1'\,N & \lambda &= 5^0\,32'\,O \end{array}$$

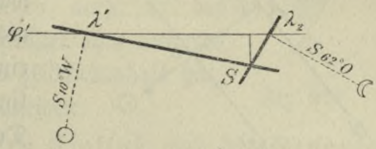


Fig. 215.

b) Die erste Höhe ist in größerem Azimut, die zweite in der Nähe des Meridians beobachtet.

1. Mit der gegißten Breite φ berechnet man aus der ersten Beobachtung die Länge λ_1 und das Azimut a_1.

2. An den so gefundenen Ort φ, λ_1 bringt man den zwischen den beiden Beobachtungen zurückgelegten Weg an. Die Breite des auf diese Weise erhaltenen Ortes sei φ', seine Länge λ'_1.

3. Mit der so gefundenen Länge λ'_1 berechnet man aus der zweiten Beobachtung die Breite φ_2 und das Azimut a_2.

4. Darauf zeichnet man die beiden Standlinien, als ob beide Beobachtungen an einem Orte mit der gegißten Länge λ'_1 gemacht wären.

Beispiel. Man beobachtet vormittags eine Fixsternhöhe und berechnet aus ihr mit der angenommenen Breite $\varphi = 48^0\,10'\,N$ die Länge $\lambda_1 = 8^0\,12'\,W$ und das Azimut $a_1 = N\,59^0\,W$.

Hierauf segelt man rechtweisend $ONO\,20^{sm}$; man findet also

$$\begin{array}{rlrl} \varphi &= 48^0\,10'\,N & \lambda_1 &= 8^0\,12'\,W \\ N6O\,20^{sm} : b &= \quad 18'\,N & l &= \quad 12'\,O \\ \varphi' &= 48^0\,28'\,N & \lambda'_1 &= 8^0\ \ 0'\,W \end{array}$$

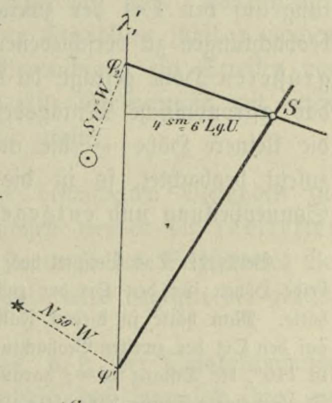
Nun beobachtet man eine Sonnenhöhe und berechnet aus ihr mit der Länge $\lambda'_1 = 8^0\,0'\,W$ die Breite $\varphi_2 = 48^0\,36'\,N$ und das Azimut $a_2 = S\,17^0\,W$.

Aus der nebenstehenden Zeichnung entnimmt man

$$\varDelta\varphi_2 = 1'\,S \qquad \varDelta\lambda'_1 = 6'\,O$$

also

$$\begin{array}{lrlrl} & \varphi_2 &= 48^0\,36'\,N & \lambda'_1 &= 8^0\ \ 0'\,W \\ & \varDelta\varphi &= \quad 1'\,S & \varDelta\lambda'_1 &= \quad 6'\,O \\ \underline{\text{Wahrer Schiffsort:}} & \varphi &= 48^0\,35'\,N & \lambda &= 7^0\,54'\,W \end{array}$$



Sm = 0,5 cm

Fig. 216.

§ 259. Beschickung einer Höhenbeobachtung auf einen anderen Ort.

Die Ortsbestimmung aus zwei an verschiedenen Orten beobachteten Gestirnshöhen läßt sich auch in der Weise in die Aufgabe der Ortsbestimmung aus zwei an demselben Orte beobachteten Höhen überführen, daß man die eine Höhe auf den Ort der zweiten beschickt. Dies geschieht in der folgenden Weise:

Im Punkte A habe man eine Gestirnshöhe gemessen, $A\odot$ sei das Azimut, MN die zugehörige Standlinie. Es soll untersucht werden, wie hoch ein Beobachter in B in demselben Augenblicke das Gestirn beobachtet haben würde, wenn Kurs und Distanz von A nach B als bekannt vorausgesetzt wird. Legt man durch B eine Parallele zu MN, so ist dieses die Standlinie, die zu der in B beobachteten Höhe gehört. Der Unterschied zwischen der in A und der in B beobachteten Höhe ist also gleich der Strecke AC. Bezeichnet man den Winkel $BA\odot$, den die Peilung des Gestirnes mit dem Kurse AB bildet mit α, so ist der Unterschied der beiden Höhen

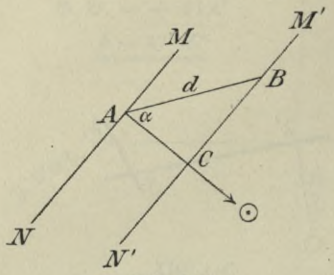


Fig. 217.

$$AC = AB \, . \cos \alpha$$

Um also eine an einem Orte A beobachtete Gestirnshöhe auf einen Ort B zu beschicken, geht man unter dem Winkel α, den die Peilung des Gestirnes mit dem Kurse von A nach B bildet, in die Grad- oder Strichtafel ein und zwar mit der Distanz AB in die d-Spalte und entnimmt die Höhenbeschickung aus der b-Spalte. Ist der Winkel α spitz, so ist die Beschickung zu addieren, ist er dagegen stumpf, so geht man mit dem Supplemente in die Grad- oder Strichtafel ein, und die Beschickung ist zu subtrahieren.

Bei der Lösung der Aufgabe der zwei Höhen kann man hiervon Gebrauch machen, indem man die eine Höhe auf den Ort der anderen beschickt, und nun unter Benutzung dieser Höhen die Aufgabe löst, als ob beide Beobachtungen an demselben Orte gemacht wären. Man wird natürlich gewöhnlich die erste Beobachtung auf den Ort der zweiten beschicken. Handelt es sich um zwei Sonnenbeobachtungen zu verschiedenen Zeiten, so wird oft nach dem Schiffsort bei der größeren Höhe gefragt, da diese dem Mittage näher ist, und man von hier aus das astronomische Mittagsbesteck bequemer findet. Ist in einem solchen Falle die kleinere Höhe — die auf den Ort der größeren beschickt werden soll — zuletzt beobachtet, so ist die Ortsbeschickung mit Hülfe des Winkels zwischen Sonnenpeilung und entgegengesetztem Kurse zu bestimmen.

Beispiel: Das Beispiel des § 256 hätte man auch in der Weise lösen können, daß man beide Höhen für den Ort der zweiten Beobachtung $\varphi = 56^\circ\,30' N$ und $\lambda = 6^\circ\,7'\,O$ berechnet hätte. Man hätte in diesem Falle vor der Bildung des Höhenunterschiedes die Sonnenhöhe auf den Ort der zweiten Beobachtung beschicken müssen. Der Winkel zwischen Kurs und Peilung ist 110°, die Distanz 16^{sm}; daraus ergiebt sich die Ortsbeschickung der Sonnenhöhe $= -5{,}5'$. Die berechnete Sonnenhöhe hätte also anstatt von $19^\circ\,21'$, von $19^\circ\,15{,}5'$ subtrahiert werden müssen.

§ 260. Zuverlässigkeit der Ortsbestimmung aus zwei Höhen. Die Betrachtung der Standlinien erlaubt in klarer und anschaulicher Weise zu übersehen, welchen Einfluß Fehler in den Höhenmessungen, auf die man ja auf See stets gefaßt sein muß, auf den berechneten Schiffsort ausüben. Es ist in § 249 gezeigt worden, daß man infolge der unvermeidlichen Beobachtungsfehler nicht mit Sicherheit eine Linie angeben kann, auf der das Schiff steht, sondern daß man an die Stelle der Linie einen Streifen setzen muß, dessen Breite von der Größe des möglichen Fehlers abhängig ist. Aus zwei Gestirnshöhen wird man daher nicht mit Sicherheit den Schiffsort selbst, sondern ein Parallelogramm erhalten, innerhalb dessen der Schiffsort liegen muß; in der Figur 218. das Parallelogramm *ABCD*. Es leuchtet ohne weiteres ein, daß dieses Parallelogramm den kleinsten Flächeninhalt hat, wenn die Standlinien sich rechtwinklig durchschneiden.

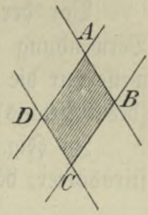


Fig. 218.

Höhenfehler haben also den kleinsten Einfluß auf die Genauigkeit der Ortsbestimmung, wenn der Azimutalunterschied der beiden Gestirne 90° beträgt.

In welchen Azimuten im übrigen die Gestirne beobachtet werden, ist für die Genauigkeit gleichgültig. Steht das eine Gestirn bei der Beobachtung im Meridian, das andere im ersten Vertikal, so ist, wie aus der Figur hervorgeht, sowohl der Breitenfehler wie auch der Längenfehler kleiner, als wenn die Azimute der Gestirne andere, etwa $S\,45^0\,O$ und $S\,45^0\,W$, gewesen wären, denn in dem einen Falle sind diese Fehler gleich der Seite des Quadrates, in dem anderen gleich der Diagonale. Die Ungenauigkeit in der Ortsbestimmung ist aber in beiden Fällen dieselbe, da die beiden Quadrate inhaltgleich sind.

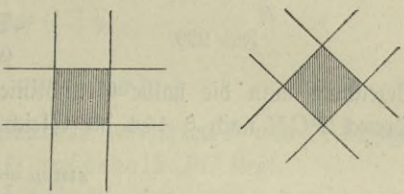


Fig. 219.

Sind die beiden Beobachtungen nicht an demselben Orte gemacht worden, so wird die Ortsbestimmung natürlich noch dadurch fehlerhafter werden, daß Kurs und Distanz von einem Orte zum anderen fehlerhaft sind. Da sich diese Fehler ebenfalls durch eine Parallelverschiebung der Standlinie fühlbar machen, so wird ihre Wirkung die sein, daß der ersten Beobachtung ein Streifen von größerer Breite entspricht, genau so, als ob die erste Beobachtung mit einem größeren Höhenfehler behaftet gewesen wäre als die zweite.

§ 261. **Außenmittagsbreite.** Die bisher behandelten Methoden zur Bestimmung des Schiffsortes aus zwei Gestirnshöhen werden die indirekten Methoden genannt, da bei ihnen die angenäherte Kenntnis des Schiffsortes Bedingung ist. Bei der direkten Lösung dieser Aufgabe wird dagegen der gegißte Schiffsort nicht benutzt.

Die direkte Lösung des allgemeinen Falles, d. h. der Ortsbestimmung aus zwei beliebigen Gestirnshöhen, ist so umständlich, daß man sich ihrer auf See nicht bedient. In dem besonderen Falle jedoch, daß die Abweichung der beiden beobachteten Gestirne dieselbe ist, ist die Lösung der Aufgabe ziemlich einfach. Dieser Fall liegt vor, wenn man denselben Fixstern zweimal beobachtet; man kann sich der Methode aber auch bedienen bei der Ortsbestimmung aus zwei Sonnenhöhen oder zwei Planetenhöhen, obwohl dann wegen der Änderung der Abweichung die Bedingung der gleichen Abweichung nur angenähert erfüllt ist.

Vor der Erfindung Sumners war diese Methode die einzige, die auf See Verwendung fand. Man nennt sie **Außenmittagsbreite**, da man vorzugsweise nur die Breite bestimmt und keine Beobachtung in der Nähe des Meridians (des Mittags) gemacht sein muß. Sie soll im folgenden behandelt werden.

In Fig. 220 bedeute P den Pol, Z das Zenit, A und B die beiden Gestirnsörter, dann stellen PA und PB die als gleich vorausgesetzten Poldistanzen (p), ZA und ZB die beiden Zenitdistanzen (z und z') dar. Der Winkel APB ist der Winkel zwischen den Stundenkreisen, er ist gleich dem Unterschiede der Stundenwinkel, bei der Sonne also gleich der Zwischenzeit zwischen beiden Beobachtungen; er soll mit τ bezeichnet werden.

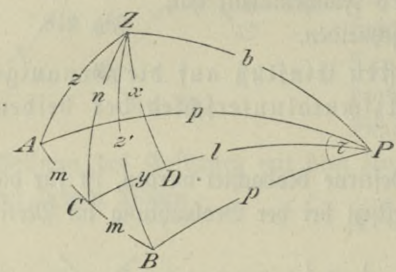


Fig. 220.

Man fälle von P das Lot l auf AB. Dieses Lot halbiert den Winkel τ und die Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks APB. Bezeichnet man die halbe Grundlinie mit m, so folgen aus dem rechtwinkligen Dreieck PCB nach § 114 die Gleichungen

$$\sin m = \sin p \,.\, \sin \tau/_2$$

und

$$\cos p = \cos l \,.\, \cos m$$

Setzt man in diesen Gleichungen $p = 90^\circ - \delta$ und löst sie nach m bezw. l auf, so erhält man

$$1. \;.\;.\;.\;.\;.\; \mathbf{cosec}\, m = \mathbf{cosec}\, \tau/_2 \,.\, \mathbf{sec}\, \delta$$

$$2. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \mathbf{sec}\, l = \mathbf{cosec}\, \delta \,.\, \mathbf{cos}\, m$$

Verbindet man nun C mit Z und bezeichnet CZ mit n, so wird

$$\cos z = \cos m \,.\, \cos n + \sin m \,.\, \sin n \,.\, \cos ACZ$$

und

$$\cos z' = \cos m \,.\, \cos n + \sin m \,.\, \sin n \,.\, \cos BCZ$$

Da $ACZ + BCZ = 180^\circ$ ist, so ist $\cos BCZ = -\cos ACZ$. Berücksichtigt man dies und setzt außerdem $\cos ACZ = \sin PCZ$, $z = 90^\circ - h$ und $z' = 90^\circ - h'$, so gehen die beiden Gleichungen über in

$$\sin h = \cos m \,.\, \cos n + \sin m \,.\, \sin n \,.\, \sin PCZ$$

$$\sin h' = \cos m \,.\, \cos n - \sin m \,.\, \sin n \,.\, \sin PCZ$$

Hieraus erhält man durch Addition bezw. Subtraktion

$$\sin h + \sin h' = 2 \cos m \,.\, \cos n$$

$$\sin h - \sin h' = 2 \sin m \,.\, \sin n \,.\, \sin PCZ$$

oder nach § 105, Formel 13. und 14.

$$\sin \tfrac{1}{2}(h + h') \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(h - h') = \cos m \,.\, \cos n$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(h + h') \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(h - h') = \sin m \,.\, \sin n \,.\, \sin PCZ$$

Fällt man nun von Z das Lot x auf PC und nennt den Abschnitt $CD = y$, so hat man in dem rechtwinkligen Dreieck ZDC:

$$\cos n = \cos x \,.\, \cos y$$

und

$$\sin x = \sin n \,.\, \sin PCZ$$

Setzt man diese Werte in die letzten Gleichungen ein, so wird

$$\sin \tfrac{1}{2}(h + h') \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(h - h') = \cos m \,.\, \cos x \,.\, \cos y$$
$$\cos \tfrac{1}{2}(h + h') \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(h - h') = \sin m \,.\, \sin x$$

und somit

3. . $\boldsymbol{\sin x = \operatorname{cosec} m \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(h + h') \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(h - h')}$

4. . $\boldsymbol{\sec y = \cos m \,.\, \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}(h + h') \,.\, \sec \tfrac{1}{2}(h - h') \,.\, \cos x}$

Endlich ergiebt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck ZDP

$$\cos b = \cos x \,.\, \cos (l \mp y)$$

oder

5. . . . . . $\boldsymbol{\sin \varphi = \cos x \,.\, \cos (l \mp y)}$

wo das obere Zeichen gilt, wenn der Fußpunkt D zwischen P und C, dagegen das untere Zeichen, wenn der Fußpunkt D außerhalb PC liegt.

Um den Stundenwinkel zu berechnen, hat man aus demselben Dreieck, wenn man den Winkel ZPC, d. h. den mittleren Stundenwinkel (bei der Sonne die Mittelzeit) mit T bezeichnet

6. . . . . . . $\boldsymbol{\sin T = \sec \varphi \,.\, \sin x}$

Die Summe des so berechneten mittleren Stundenwinkels T und der halben Zwischenzeit $\tau/_2$ giebt den Stundenwinkel bei der zweiten Beobachtung, ihr Unterschied den Stundenwinkel bei der ersten Beobachtung.

Um hiernach die Breite und die Länge des Schiffsortes aus zwei Sonnenhöhen zu berechnen, verfährt man folgendermaßen:

1. Man bestimmt die mittlere Greenwicher Zeit, und zwar gewöhnlich die der zweiten Höhe.

2. Für diese Zeit entnimmt man dem Jahrbuche die Abweichung der Sonne und die Zeitgleichung.

3. Darauf berechnet man die Zwischenzeit τ zwischen den beiden Beobachtungen.

4. Hiernach beschickt man beide Kimmabstände zu wahren Mittelpunktshöhen und bildet ihre halbe Summe und ihren halben Unterschied. Sind die Beobachtungen nicht an demselben Orte gemacht worden, so muß man vorher nach § 259 die erste Höhe auf den Ort der zweiten beschicken.

5. Mit den so gefundenen Werten berechnet man die Breite nach den oben abgeleiteten Formeln 1. bis 5. Hierbei ist zu bemerken:

a) Das Lot l ist stets gleichartig mit der Poldistanz; sind demnach Breite und Abweichung ungleichnamig, so ist l stumpf; es ist also das Supplement des Tafelwinkels zu nehmen.

b) In Formel 5. ist das untere Zeichen nur dann zu setzen, wenn Breite und Abweichung gleichnamig sind, und gleichzeitig die Breite kleiner als die Abweichung ist.

6. Um die Länge zu bestimmen, berechnet man zunächst nach Formel 6. die Mittelzeit *T*. Ist die zuerst beobachtete Höhe die größere, so ist die Mittelzeit nachmittags, ist die zuerst beobachtete Höhe dagegen die kleinere, so ist die Mittelzeit vormittags; man hat im letzteren Falle den nach Formel 6. bestimmten Winkel von 24^{st} zu subtrahieren.

7. Zur Mittelzeit addiert man die halbe Zwischenzeit und erhält dadurch den Stundenwinkel, d. h. die wahre Ortszeit der zweiten Beobachtung.

8. Hieraus erhält man durch Anbringung der Zeitgleichung die mittlere Ortszeit und aus ihr durch Vergleichung mit der entsprechenden mittleren Greenwicher Zeit die Länge.

Hat man statt der Sonne einen Fixstern zweimal beobachtet, so muß man, um den Winkel τ zu erhalten, die Zwischenzeit der Beobachtungen in Sternzeit verwandeln. Ferner ist die Berechnung der Länge entsprechend § 187 folgendermaßen zu ändern. Indem man zum mittleren Stundenwinkel *T* die halbe Zwischenzeit addiert, erhält man den Stundenwinkel des Gestirnes bei der zweiten Beobachtung. Aus ihm findet man die mittlere Ortszeit, indem man die Gerade Aufsteigung des Gestirnes addiert und von der Summe, d. h. der Sternzeit, die Gerade Aufsteigung der mittleren Sonne subtrahiert.

Beispiel. Am 11. Oktober 1903, nach Besteck auf $15^0\,10'\,N$ und $30^0\,52'\,W$, macht man nach einem Chronometer, dessen Stand $10^m\,37^s$ nach gegen M. G. Z. ist, die folgende Beobachtung

Chr. Z. $= 10^u\,30^m\,10^s$ $\underline{\odot} = 37^0\,36'$; $\Phi = SO\,\frac{3}{4}\,O$; Idb. $= 0$; A. H. $= 5$ m.

Darauf segelt man nach demselben Kompaß $ONO\,\frac{1}{4}\,O$ mit 6,5 Knoten Fahrt und macht nun die folgende Beobachtung:

Chr. Z. $= 2^u\,49^m\,26^s$ $\underline{\odot} = 62^0\,12'$; Idb. $= 0$; A. H. $= 5$ m.

Auf welcher Breite und Länge befindet man sich bei der zweiten Beobachtung?

Astr. Chr. Z. $= 2^u\,49^m\,26^s$ den 11. Okt.
Std. $= +\,10^m\,37^s$
M. G. Z. $= 3^u\;\;0^m\;\;3^s$ den 11. Okt.

$\odot\delta_0 = 6^0\,40{,}6'\,S$
$0{,}95'\,.\,3{,}0 = +\,2{,}9'$
$\odot\delta = 6^0\,43{,}5'\,S$

$e_0 = -\,12^m\,58^s$
$0{,}6^s\,.\,3{,}0 = +\,2^s$
$e = -\,13^m\;\;0^s$

2. Chr. Z. $= 26^u\,49^m\,26^s$
1. Chr. Z. $= 22^u\,30^m\,10^s$
$\tau = 4^{st}\,19^m\,16^s$

Gesegelte Distanz $= 6{,}5^{sm}\,.\,4{,}3 = 28^{sm}$
Winkel zwischen Kurs und Peilung $= 5^{str}$
Ortsbeschickung $= +\,15{,}6'$

$\underline{\odot} = 37^0\,36'$
G. B. $= +\,11{,}0'$
$= 37^0\,47{,}0'$
Ortsbeschickung $= +\,15{,}6'$
$h' = 38^0\;\;2{,}6'$

$\underline{\odot} = 62^0\,12'$
G. B. $= +\,11{,}6'$
$h = 62^0\,23{,}6'$
$h' = 38^0\;\;2{,}6'$
$s = 100^0\,26{,}2'$
$s/_2 = 50^0\,13{,}1'$
$u/_2 = 12^0\,10{,}5'$

$\tau/2 = 2^{st}\,9^m\,38^s$	$log\ cosec = 0{,}27\,088$		
$\delta = 6^0\,44'$	$log\ sec = 0{,}00\,301$		$log\ cosec = 0{,}93\,089$
m	$log\ cosec = 0{,}27\,389$	$log\ cos = 9{,}92\,767$	$log\ cos = 9{,}92\,767$
$s/2 = 50^0\,13'$	$log\ cos = 9{,}80\,610$	$log\ cosec = 0{,}11\,437$	
$u/2 = 12^0\,11'$	$log\ sin = 9{,}32\,437$	$log\ sec = 0{,}00\,989$	
x	$log\ sin = 9{,}40\,436$	$log\ cos = 9{,}98\,555$	
$y = 23^0\,28'$		$log\ sec = 0{,}03\,748$	
$l = 97^0\,58'$			$log\ sec = 0{,}85\,856$
$l - y = 74^0\,30'$	$log\ cos = 9{,}42\,690$		
x	$log\ cos = 9{,}98\,555$	$log\ sin = 9{,}40\,436$	
$\varphi = 14^0\,59'$	$log\ sin = 9{,}41\,245$	$log\ sec = 0{,}01\,502$	
	$T = 22^u\,59^m\,5^s$	$log\ sin = 9{,}41\,938$	
$\tau/2 =$	$2^{st}\,9^m\,38^s$		
W. O. Z. =	$1^u\,8^m\,43^s$		
$e =$	$-\,13^m\,0^s$		
M. O. Z. =	$0^u\,55^m\,43^s$ den 11. Okt.		
M. G. Z. =	$3^u\,0^m\,3^s$ den 11. Okt.		
Z. U. =	$2^{st}\,4^m\,20^s$		
	$\lambda = 31^0\,5'\,W$		

Das Schiff steht also auf $14^0\,59'\,N$ und $31^0\,5'\,W$.

Monddistanzen.

§ 262. Wesen der Methode. Der Mond hat eine so schnelle eigene Bewegung an der Himmelskugel, daß sich daraus die Zeit des ersten Meridians, d. i. die mittlere Greenwicher Zeit, bestimmen läßt. Der Mond gebraucht zu einem Umlauf an der Himmelskugel etwas über 27 Tage (siehe § 191), so daß er täglich einen Bogen von ungefähr 13^0 zurücklegt. In einer Stunde ändert er seinen Ort also um etwas mehr als $\frac{1}{2}^0$, in einer Minute um etwas mehr als $\frac{1}{2}'$ und in einer Sekunde um etwas mehr als $\frac{1}{2}''$. Entsprechend ändert sich auch die Entfernung des Mondes von einem in der Nähe seiner Bahn befindlichen Sterne.

Nun sind im Jahrbuche von 3 zu 3 Stunden für mittlere Greenwicher Zeit die Entfernungen des Mondes von gewissen Gestirnen angegeben, nämlich von der Sonne, den vier hellen Planeten und neun Fixsternen, die in der Nähe der Mondbahn liegen. Man nennt die Entfernungen des Mondes von diesen Gestirnen Monddistanzen, und es leuchtet ein, daß, wenn man die Größe einer Monddistanz durch eine Beobachtung ermittelt hat, man die mittlere Greenwicher Zeit der Beobachtung daraus bestimmen kann.

Die im Jahrbuche angegebenen Monddistanzen sind die wahren Distanzen, d. h. die Distanzen, wie sie einem Beobachter im Erdmittelpunkte erscheinen würden. Die von einem Punkte der Erdoberfläche beobachtete Distanz stimmt mit dieser wahren Distanz nicht überein, da von der Erdoberfläche aus gesehen der Mond und die Gestirne an einem anderen Orte zu stehen scheinen, als vom Erdmittelpunkte aus gesehen. Um somit aus einer gemessenen Monddistanz die mittlere Greenwicher Zeit ableiten zu können, muß man zunächst die beobachtete Distanz zur wahren Distanz beschicken.

Die Mondbistanzen dienen nicht unmittelbar zur Bestimmung der Länge, sondern nur zur Bestimmung der mittleren Greenwicher Zeit. Zur Bestimmung der Länge gehört daneben noch die genaue Kenntnis der mittleren Ortszeit, die man auf See nur durch eine Höhenbeobachtung in der Nähe des ersten Vertikals erhalten kann.

Hat man ein Chronometer an Bord, so benutzt man die Mondbistanzen ausschließlich zur Kontrolle des Standes des Chronometers. Hat man kein Chronometer an Bord, oder ist das Chronometer unbrauchbar geworden, so ist man zur Längenbestimmung auf Mondbistanzen in Verbindung mit Zeitbestimmungen angewiesen. Hierbei kann man auf zwei verschiedene Weisen verfahren. Entweder man bestimmt mit Hülfe einer Mondbistanz den Stand einer Uhr gegen mittlere Greenwicher Zeit und beobachtet darauf nach dieser Uhr eine Höhe, aus der man die Ortszeit ableitet; oder man bestimmt zunächst mit Hülfe einer Höhenbeobachtung den Stand einer Uhr gegen mittlere Ortszeit und beobachtet darauf nach dieser Uhr eine Mondbistanz. Das erste Verfahren verdient den Vorzug, da bei dem zweiten auf die Änderung des Standes der Uhr gegen mittlere Ortszeit infolge der Ortsveränderung Rücksicht genommen werden muß.

§ 263. **Beschickung der beobachteten Distanz zur wahren.** Die im Jahrbuche angegebenen Distanzen beziehen sich auf die Mittelpunkte der Gestirne. Beobachten lassen sich aber nur die Distanzen von Rand zu Rand, so daß an diese gemessenen Distanzen zunächst die Halbmesser der Gestirne angebracht werden müssen, um die scheinbaren Distanzen der Mittelpunkte zu erhalten.

Der Mond kehrt der Sonne stets die erleuchtete Seite zu; man kann daher zwischen Mond und Sonne nur die Distanz der zugewandten Ränder messen, und man erhält hieraus die scheinbare Mittelpunktsdistanz, indem man Sonnen- und Mondhalbmesser zu der beobachteten Randdistanz addiert. Bei der Distanz des Mondes von einem anderen Gestirne ist der Halbmesser des Mondes zu addieren, wenn der Mond dem Gestirne den beleuchteten Rand zukehrt, dagegen ist der Halbmesser des Mondes zu subtrahieren, wenn der Mond dem Gestirne den unbeleuchteten Rand zukehrt. Der Halbmesser der Planeten wird nicht in Rechnung gebracht, da man in den gewöhnlichen Instrumenten-Fernrohren die Planeten nicht als Scheibe sieht.

Da einem Beobachter auf der Erdoberfläche der Mond größer erscheint, als einem Beobachter im Erdmittelpunkte, so ist der dem Jahrbuche entnommene wahre Mondhalbmesser, bevor er an die Distanz angebracht wird, durch Addition der Vergrößerung aus Tafel 23.*) in den scheinbaren Halbmesser zu verwandeln. Standen Sonne oder Mond bei der Beobachtung sehr niedrig, so ist auch die in Tafel 22.**) enthaltene Verkürzung des Halbmessers durch die Strahlenbrechung zu berücksichtigen.

---

*) Behrmann, Nautische Tafeln, Tafel 47.

**) Behrmann, Nautische Tafeln, Tafel 48.

Hat man durch Anbringung der Halbmesser die scheinbare Mittelpunktsdistanz gefunden, so erübrigt noch die Beschickung dieser Distanz zur wahren. Wie diese Beschickung zu bewerkstelligen ist, soll im folgenden abgeleitet werden. Wir setzen dabei eine Distanz zwischen Sonne und Mond voraus; es sei dabei aber gleich im voraus bemerkt, daß alles hier gesagte auch von der Distanz zwischen dem Monde und einem anderen Gestirne gilt.

In Figur 221. bedeute Z das Zenit, M den scheinbaren, m den wahren Mondort, S den scheinbaren und s den wahren Sonnenort. Da beim Monde der Verschub größer als die Strahlenbrechung ist, so liegt der wahre Mondort oberhalb des scheinbaren. Dagegen liegt der wahre Sonnenort, da der Verschub der Sonne kleiner als die Strahlenbrechung ist, unterhalb des scheinbaren.

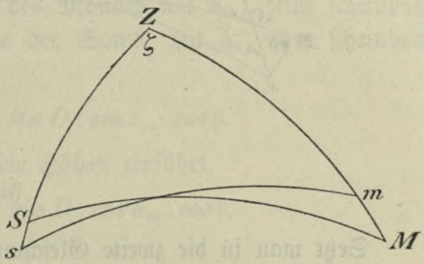


Fig. 221.

Das Stück $p = Mm$ ist „Mondverschub minus Strahlenbrechung", das Stück $r = Ss$ „Strahlenbrechung minus Sonnenverschub". Der Bogen SM stellt die scheinbare Distanz D, der Bogen sm die wahre Distanz d dar.

Die scheinbaren und somit die wahren Höhen von Sonne und Mond werden als bekannt vorausgesetzt, alsdann würde man in der folgenden Weise von der scheinbaren Distanz zur wahren übergehen können. Aus dem Dreieck SZM, dessen drei Seiten — die scheinbaren Zenitdistanzen und die scheinbare Distanz — bekannt sind, berechnet man den Winkel am Zenit. Mit diesem Winkel sind in dem Dreieck sZm zwei Seiten, nämlich die wahren Zenitdistanzen, und der zwischenliegende Winkel bekannt, so daß man daraus die wahre Distanz berechnen kann.

Diese direkte Methode leidet an dem Übelstande, daß sie, da auf Sekunden gerechnet werden muß, mindestens sechsstellige Logarithmen und somit eine weitläufige Rechnung erfordert. Der Seemann zieht deshalb die indirekten Methoden vor, die den Unterschied der scheinbaren und wahren Distanz geben, und von diesen verdient die folgende, nach dem Spanier Mendoza y Rios genannte, die meiste Empfehlung.

Man verbinde (Fig. 222.) den wahren Mondort m mit dem scheinbaren Sonnenort S und ziehe $mA \perp SM$ und $sB \perp mS$. Dann kann man wegen der Kleinheit von mA und sB die rechtwinkligen Dreiecke ASm und Bms, ohne dabei einen großen Fehler zu begehen, auch als gleichschenklig auffassen. (Der Fehler, der auf diese Weise gemacht wird, wird nachträglich verbessert werden.) Es ist also

$$Sm = SA = SM - MA$$

und
$$sm = Bm = Sm + SB$$

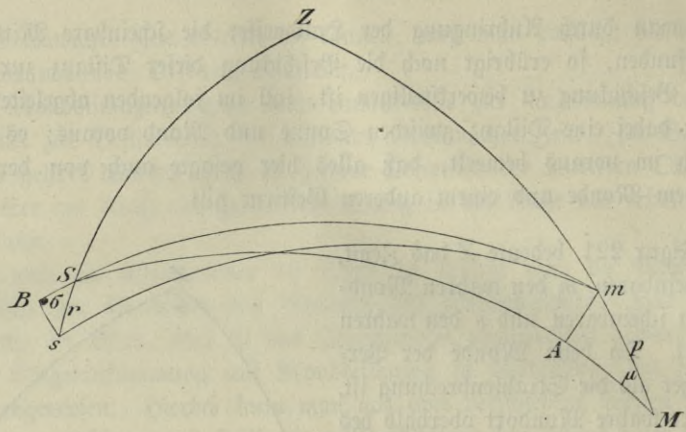


Fig. 222.

Setzt man in die zweite Gleichung für die Größe Sm ihren Wert aus der ersten Gleichung ein, so erhält man

$$sm = SM - MA + SB$$

oder, wenn man für die wahre Distanz sm die Bezeichnung d und für die scheinbare Distanz die Bezeichnung D einführt

$$d = D - MA + SB$$

Da man die rechtwinkligen Dreiecke MAm und SBs wegen der Kleinheit ihrer Seiten als eben betrachten kann, so ist, wenn der Winkel ZMS mit μ und der Winkel BSs mit σ bezeichnet wird

$$MA = p \cdot cos\,\mu \qquad SB = r \cdot cos\,\sigma$$

also

$$d = D - p \cdot cos\,\mu + r \cdot cos\,\sigma$$

Setzt man hierin

$$cos\,\mu = 1 - 2\,sem\,\mu \qquad cos\,\sigma = 1 - 2\,sem\,\sigma$$

so wird

$$d = D - p \cdot (1 - 2\,sem\,\mu) + r \cdot (1 - 2\,sem\,\sigma)$$
$$d = D - p + 2p \cdot sem\,\mu + r - 2\,r \cdot sem\,\sigma$$

oder, wenn man noch

$$2p \cdot sem\,\mu = I \text{ (erste Berichtigung)}$$
$$2r \cdot sem\,\sigma = II \text{ (zweite Berichtigung)}$$

setzt

$$d = D + (r + I) - (p + II)$$

Um den Fehler auszugleichen, der dadurch entstanden ist, daß die rechtwinkligen Dreiecke ASm und Bms als gleichschenklig angesehen sind, muß an die durch die obige Gleichung bestimmte Distanz noch eine dritte Berichtigung III angebracht werden, so daß man erhält

1. . . . . . . $\boldsymbol{d = D + (r + I + III) - (p + II)}$

Zur Berechnung der ersten und zweiten Berichtigung ist die Kenntnis der Winkel μ und σ erforderlich. Der Winkel μ ist im Dreieck MZS, dessen Seiten die scheinbaren Zenitdistanzen und die scheinbare Mondbdistanz sind, der Winkel bei M. Der Winkel σ ist zwar nicht ganz genau gleich dem in demselben Dreieck liegenden Winkel bei S (dieser ist um den Winkel MSm kleiner). Man macht aber keinen großen Fehler, wenn man statt σ den Winkel ZSM nimmt.

Bezeichnet man die scheinbare Höhe des Mondes mit h_m, seine scheinbare Zenitdistanz mit z_m, die scheinbare Höhe der Sonne mit h_s, ihre scheinbare Zenitdistanz mit z_s, so ist

$$\cos z_s = \cos D \,.\, \cos z_m + \sin D \,.\, \sin z_m \,.\, \cos \mu$$

oder, wenn man statt der Zenitdistanzen die Höhen einführt,

$$\sin h_s = \cos D \,.\, \sin h_m + \sin D \,.\, \cos h_m \,.\, \cos \mu$$

Hierin setze man $\cos \mu = 1 - 2\, sem\, \mu$

$$\sin h_s = \cos D \,.\, \sin h_m + \sin D \,.\, \cos h_m \,.\, (1 - 2\, sem\, \mu)$$
$$\sin h_s = \cos D \,.\, \sin h_m + \sin D \,.\, \cos h_m - 2\, sem\, \mu \,.\, \sin D \,.\, \cos h_m$$
$$\sin h_s = \sin (D + h_m) - 2\, sem\, \mu \,.\, \sin D \,.\, \cos h_m$$
$$2\, sem\, \mu \,.\, \sin D \,.\, \cos h_m = \sin (D + h_m) - \sin h_s$$
$$2\, sem\, \mu \,.\, \sin D \,.\, \cos h_m = 2 \cos \frac{D + h_m + h_s}{2} \,.\, \sin \frac{D + h_m - h_s}{2}$$

Setzt man $D + h_m + h_s = s$, so wird $\frac{D + h_m - h_s}{2} = {}^s/_2 - h_s$, und die letzte Gleichung nimmt die Gestalt an

$$sem\, \mu \,.\, \sin D \,.\, \cos h_m = \cos {}^s/_2 \,.\, \sin ({}^s/_2 - h_s)$$

also

$$sem\, \mu = \sec h_m \,.\, \operatorname{cosec} D \,.\, \cos {}^s/_2 \,.\, \sin ({}^s/_2 - h_s)$$

In ganz entsprechender Weise erhält man zur Berechnung des Winkels σ die Formel

$$sem\, \sigma = \sec h_s \,.\, \operatorname{cosec} D \,.\, \cos {}^s/_2 \,.\, \sin ({}^s/_2 - h_m)$$

Setzt man diese Werte in die Ausdrücke für die erste und zweite Berichtigung ein, so erhält man

$$2. \ldots \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{I = 2p \,.\, \sec h_m \,.\, \operatorname{cosec} D \,.\, \cos {}^s/_2 \,.\, \sin ({}^s/_2 - h_s)} \\ \boldsymbol{II = 2r \,.\, \sec h_s \,.\, \operatorname{cosec} D \,.\, \cos {}^s/_2 \,.\, \sin ({}^s/_2 - h_m)} \end{array} \right.$$

Um nach dieser Formel I und II zu berechnen, müßte man zunächst p und r in Sekunden verwandeln. Die Formeln würden dann auch I und II in Sekunden ergeben, die wieder in Minuten zu verwandeln wären. Diese Verwandlungen werden überflüssig, wenn man sich der in Tafel 3. enthaltenen Logarithmen der Sekundenzahl eines Bogens (log arc) bei der Berechnung bedient. (Vergleiche § 24 und die Erklärung der Tafel.)

Es verbleibt nun nur noch die Bestimmung der dritten Berichtigung.

Die Figur 223. stellt den hier allein in Betracht kommenden Teil der vorigen Figur dar. mA sei wie oben das Lot auf SM. Man trage nun Sm auf SM ab bis C, so daß mSC ein gleichschenkliges Dreieck ist, dann ist AC die dritte Berichtigung, die mit x bezeichnet werden soll.

Es möge nun $Sm = SC$ mit v, und MA mit q bezeichnet werden, dann ist im rechtwinkligen sphärischen Dreieck mAS

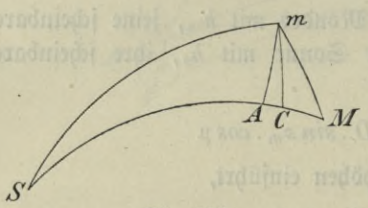


Fig. 223.

$$\cos mA = \frac{\cos Sm}{\cos SA} = \frac{\cos v}{\cos (v - x)}$$

und im Dreieck mAM

$$\cos mA = \frac{\cos mM}{\cos AM} = \frac{\cos p}{\cos q}$$

also
$$\frac{\cos v}{\cos (v-x)} = \frac{\cos p}{\cos q}$$

Hieraus folgt nach § 14

$$\frac{\cos (v - x) - \cos v}{\cos (v - x) + \cos v} = \frac{\cos q - \cos p}{\cos q + \cos p}$$

$$\frac{2 \sin \frac{2v - x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{2v - x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}}{2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}}$$

$$\operatorname{tang}\left(v - \frac{x}{2}\right) \cdot \operatorname{tang} \frac{x}{2} = \operatorname{tang} \frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{tang} \frac{p-q}{2}$$

Berücksichtigt man, daß die Tangente kleiner Winkel proportional dem Bogen ist, so kann man die obige Gleichung, wenn man gleichzeitig die Größe $(v - x/_2)$ durch die angenähert gleiche scheinbare Distanz D ersetzt, in der Form schreiben

$$\operatorname{tang} D \cdot \frac{x}{2} \cdot \operatorname{tang} 1'' = \frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{tang} 1'' \cdot \frac{p-q}{2} \cdot \operatorname{tang} 1''$$

$$x = \frac{(p+q) \cdot (p-q) \cdot \operatorname{cotg} D \cdot \operatorname{tang} 1''}{2}$$

$$x = \frac{(p^2 - q^2) \cdot \operatorname{cotg} D \cdot \operatorname{tang} 1''}{2}$$

$$x = \frac{p^2 \cdot \operatorname{cotg} D \cdot \operatorname{tang} 1''}{2} - \frac{q^2 \cdot \operatorname{cotg} D \cdot \operatorname{tang} 1''}{2}$$

Nun ist

$$q = p \cdot \cos \mu = p - 2p \cdot \operatorname{sem} \mu = p - I$$

also, wenn man wieder statt x die Bezeichnung III einführt

$$3. \quad . \quad . \quad \mathrm{III} = \frac{p^2 \cdot \operatorname{cotg} D \cdot \operatorname{tang} 1''}{2} - \frac{(p - I)^2 \cdot \operatorname{cotg} D \cdot \operatorname{tang} 1''}{2}$$

Zur bequemeren Bestimmung der dritten Berichtigung dient die Tafel 26.*), in die man zunächst mit p, darauf mit $(p-I)$ eingeht. Der Unterschied der so gefundenen Werte ist die dritte Berichtigung.

Da die Kotangente eines stumpfen Winkels negativ und $(p-I)$ stets kleiner als p ist, so folgt: Die dritte Berichtigung ist positiv, wenn die Distanz kleiner als 90° ist, sie ist negativ, wenn die Distanz größer als 90° ist.

Es müßten streng genommen, noch eine Reihe anderer Berichtigungen an die Distanz angebracht werden, z. B. eine Berichtigung, weil das rechtwinklige Dreieck Bms als gleichschenklig angesehen worden ist, eine andere, weil statt des Winkels σ zur Berechnung der zweiten Berichtigung der Winkel ZSM genommen ist. Will man ferner bei der Berechnung auf die Abplattung der Erde Rücksicht nehmen, so kann dieses ebenfalls durch ein paar weitere Berichtigungen geschehen. Diese Berichtigungen sind aber besonders in den Fällen, die sich vornehmlich zur Beobachtung eignen, so klein, daß man sie schicklicherweise ganz vernachlässigt.

§ 264. Bestimmung der mittleren Greenwicher Zeit aus der wahren Distanz. Hat man die scheinbare Distanz zur wahren beschickt, so hat man aus ihr die mittlere Greenwicher Zeit zu bestimmen. Im Jahrbuche sind die wahren Distanzen von 3 zu 3 Stunden mittlerer Greenwicher Zeit angegeben. Man sucht unter diesen die beiden Distanzen aus, zwischen denen an dem entsprechenden Tage die berechnete wahre Distanz d liegt. Es mögen dieses, um ein Beispiel zu geben, die für 6 Uhr und 9 Uhr berechneten Distanzen d_6 und d_9 sein. Dann ist klar, daß die mittlere Greenwicher Zeit zwischen 6 Uhr und 9 Uhr fallen muß. Nimmt man zunächst an, die Änderung der Distanzen ginge vollkommen gleichförmig vor sich, so läßt sich, wenn man den Unterschied $d_9 - d_6$ mit U, den Unterschied $d - d_6$ mit u bezeichnet, die Zeit x, die seit 6 Uhr verflossen ist, aus der Verhältnisgleichung bestimmen

$$U : u = 3^{st} : x$$

also

$$x = \frac{3^{st}}{U} \cdot u$$

Zur bequemeren Auswertung dieses Bruches ist im Jahrbuche der Wert von

$$log\, arc \frac{3^{st}}{U}$$

unter dem Namen Proportionallogarithme (abgekürzt *Pr. Lg.*) schon angegeben, so daß man zu ihm nur noch den $log\, arc\, u$ zu addieren braucht, um den $log\, arc$ der Zeit, die seit 6 Uhr verflossen ist, zu erhalten. Addiert man die so gefundene Zwischenzeit x zu der Zeit der nächstvorhergehenden Distanz, also in diesem Falle zu 6 Uhr, so erhält man die mittlere Greenwicher Zeit.

---

*) Behrmann, Nautische Tafeln, Tafel 55.

Der Raumersparnis wegen ist im Jahrbuche die Kennziffer 0 der Proportionallogarithmen (deren Werte immer ungefähr gleich *log* 2 sind), weggelassen; sie ist daher jedesmal hinzuzufügen.

Die auf diese Weise gefundene Zeit bedarf aber noch einer kleinen Berichtigung, da sich die Distanzen nicht, wie oben angenommen, gleichförmig ändern. Daß die Änderung der Distanzen wirklich ungleichförmig ist, erkennt man schon äußerlich daran, daß sich die Proportionallogarithmen im allgemeinen ändern, was seinen Grund in einer Änderung des Unterschiedes zweier benachbarten Tafeldistanzen hat.

Es leuchtet ein, daß ein Fußgänger, der eine gewisse Wegesstrecke in drei Stunden geht, die Hälfte dieses Weges nur dann in anderthalb Stunden vollendet, wenn er in der ersten Zeithälfte gerade so rasch geht wie in der zweiten oder in gleichen Zeiten gleiche Wege macht. Geht er dagegen im Anfange langsamer und nach und nach rascher, oder beschleunigt er seine Bewegung allmählich, so werden nach Vollendung der ersten Wegeshälfte mehr als anderthalb Stunden verflossen sein, so daß man zu der durch einfache Einschaltung erhaltenen Zeit noch etwas zu addieren hat, um die wirklich verflossene Zeit zu erhalten. Geht er aber im Anfange rascher, und nach und nach langsamer, oder verzögert er seine Bewegung, so werden nach Vollendung der ersten Wegeshälfte noch keine anderthalb Stunden verflossen sein, so daß man von der durch einfache Einschaltung erhaltenen Zeit noch etwas zu subtrahieren hat.

Ist die Bewegung des Mondes eine beschleunigte, so zeigt sich dies dadurch, daß die Unterschiede der Monddistanzen zunehmen, die Proportionallogarithmen also abnehmen; ist dagegen die Bewegung des Mondes eine verzögerte, so nehmen die Unterschiede der Monddistanzen ab, also die Proportionallogarithmen zu.

Im ersten Falle muß man also zu der in der oben angegebenen Weise bestimmten Greenwicher Zeit eine Berichtigung addieren, im zweiten Falle eine Berichtigung davon subtrahieren. Die Größe dieser Berichtigung findet man in Tafel 27.*), in die man mit dem Unterschiede zweier auf einander folgender Proportionallogarithmen und mit der Zwischenzeit eingeht.

Um aus der wahren Distanz die mittlere Greenwicher Zeit zu bestimmen, verfährt man demnach wie folgt:

1. Man sucht im Jahrbuche die nächstvorhergehende Distanz, also, wenn die Distanzen wachsen, die nächst kleinere, wenn die Distanzen abnehmen, die nächst größere.

2. Man bestimmt den Unterschied dieser und der gegebenen Distanz und addiert den *log arc* dieses Unterschiedes zu dem im Jahrbuche angegebenen Proportionallogarithmen. Die Summe ist der *log arc* der Zwischenzeit.

3. Man addiert die Zwischenzeit zu der Zeit der nächst vorhergehenden Distanz.

4. An die so erhaltene angenäherte mittlere Greenwicher Zeit bringt man die Berichtigung für zweiten Unterschied aus Tafel 27. [54.] an.

*) Behrmann, Nautische Tafeln, Tafel 54.

Beispiel 1. Am 1. Juli 1903 ungefähr um 7^u M. G. Z. beobachtet man eine Distanz zwischen Sonne und Mond, aus der sich die wahre Distanz $d = 89^\circ\,5'\,47''$ ergiebt. Welche mittlere Greenwicher Zeit folgt hieraus?

$d =$	$89^\circ\ 5'\ 47''$		
$d_6 =$	$88^\circ\ 25'\ 53''$	$log\ prop =$	0,28 65 (+ 16)
$u =$	$0^\circ\ 39'\ 54''$	$log\ arc =$	3,37 91
$x =$	$1^{st}\ 17^m\ 10^s$	$log\ arc =$	3,66 56
+	$6^u\ 0^m\ 0^s$		
ang. M. G. Z. =	$7^u\ 17^m\ 10^s$ den 1. Juli		
Tafel 27. [54.] Ver. =	$-\ 5^s$		
M. G. Z. =	$7^u\ 17^m\ 5^s$ den 1. Juli.		

Beispiel 2. Am 24. Mai 1903 vormittags beobachtet man eine Distanz zwischen Sonne und Mond, aus der sich die wahre Distanz $d = 36^\circ\,41'\,0''$ ergiebt. Welche mittlere Greenwicher Zeit folgt hieraus?

$d =$	$36^\circ\ 41'\ 0''$		
$d_{15} =$	$37^\circ\ 16'\ 55''$	$log\ prop =$	0,27 97 (— 16)
$u =$	$0^\circ\ 35'\ 55''$	$log\ arc =$	3,33 34
$x =$	$1^{st}\ 8^m\ 23^s$	$log\ arc =$	3,61 31
+	$15^u\ 0^m\ 0^s$		
ang. M. G. Z. =	$16^u\ 8^m\ 23^s$ den 23. Mai		
Tafel 27. [54.] Ver. =	$+\ 5^s$		
M. G. Z. =	$16^u\ 8^m\ 28^s$ den 23. Mai.		

§ 265. Beobachtung der Monddistanzen. Zur Beschickung einer scheinbaren Distanz zur wahren ist die Kenntnis der scheinbaren Höhen des Mondes und des Distanzgestirnes erforderlich. Danach wären zu einer vollständigen Distanzbeobachtung drei Beobachter erforderlich; einer, der geübteste, für die Distanz und die beiden anderen für die gleichzeitigen Beobachtungen der Kimmabstände, wozu noch ein vierter käme, um die Uhrzeit abzulesen. Es läßt sich jedoch auch mit einer geringeren Anzahl von Beobachtern, selbst mit einem einzelnen auskommen.

1. Drei Beobachter. Nachdem alle drei Beobachter ihre Instrumente angenähert eingestellt haben, deutet der Beobachter der Distanz, wenn er zum genauen Einstellen fertig ist, seinen Gehülfen durch das Wort „Achtung" an, daß sie von nun an das Gestirn mit der Kimm in Berührung zu halten haben. In dem Augenblicke des Einstellens ruft er „stop", worauf alle ablesen und die Beobachtung aufschreiben. Sind auf diese Weise etwa 5 Beobachtungen gemacht, so nimmt man aus ihnen das Mittel, und betrachtet dieses als gemachte Beobachtung. Die Dauer der ganzen Beobachtungsreihe soll einen Zeitraum von 10 Minuten nicht überschreiten.

2. Zwei Beobachter. Sind weniger als drei Beobachter da, so kann man sich auf doppelte Weise helfen. Der geübteste Beobachter mißt wieder die Distanz, der andere beobachtet entweder gleichzeitig mit den Distanzen nur die Kimmabstände desjenigen Gestirnes, das am nächsten beim ersten Vertikal steht, oder er beobachtet vor und nach den Distanzbeobachtungen je einen Kimmabstand des einen Gestirnes und gleichzeitig mit den Distanzen die Kimmabstände des anderen Gestirnes.

Im ersten Falle, wo man nur den Kimmabstand eines Gestirnes gemessen hat, berechnet man aus diesem die Zeit, und für diese Zeit die wahre Höhe des anderen Gestirnes, von der man darauf zur scheinbaren Höhe übergeht.

Im zweiten Falle, wo ein Kimmabstand gleichzeitig, der andere vor- und nachher beobachtet worden ist, schaltet man, nachdem man das Mittel aus den Distanzbeobachtungen, den entsprechenden Uhrzeiten und den gleichzeitig beobachteten Kimmabständen genommen hat, den zweiten Kimmabstand ein. Ist zwischen der Höhenbeobachtung vorher und der Höhenbeobachtung nachher eine Zeit T, zwischen der Höhenbeobachtung vorher und der Mittelzeit der Distanzbeobachtungen die Zeit t verflossen, und ist der Unterschied der beiden Höhen u, so findet man die Höhenänderung x, die an die erste Höhe angebracht werden muß, aus der Verhältnisgleichung

$$T : t = u : x$$

Der Wert x ist zu addieren, wenn die Höhe größer wird, er ist zu subtrahieren, wenn die Höhe kleiner wird.

Beispiel. Man hat die folgenden Beobachtungen gemacht.

Uhrzeit $= 2^u\,46^m\,24^s$	$\underline{\odot} = 46^0\,54'$		
$2^u\,47^m\,18^s$		$\overline{☾} = 27^0\,49'$	$\odot ☾ = 70^0\,48'\,10''$
$48^m\;\;2^s$		$27^0\,57'$	$48'\,30''$
$49^m\;\;0^s$		$28^0\;\;7'$	$49'\;\;0''$
$2^u\,50^m\,11^s$	$\underline{\odot} = 46^0\,16'$		

Das Mittel der Distanzbeobachtungen ist

Uhrzeit $= 2^u\,48^m\;7^s$ $\quad \overline{☾} = 27^0\,58'$ $\quad \odot ☾ = 70^0\,48'\,33''$

Die Einschaltung des Kimmabstandes der Sonne geschieht in folgender Weise:

$2^u\,46^m\,24^s$	$2^u\,46^m\,24^s$		$46^0\,54'$
$2^u\,50^m\,11^s$	$2^u\,48^m\;\;7^s$		$46^0\,16'$
$3^m\,47^s$	$1^m\,43^s$	$=$	$38' : x$

also

$$x = \frac{38 \,.\, 103}{227} = 17'$$

Da die Sonne sinkt, so sind die 17′ von $46^0\,54'$ zu subtrahieren, und man erhält also für die mittlere Zeit der Distanzbeobachtungen $\underline{\odot} = 46^0\,37'$, so daß man die folgenden zusammengehörigen Werte bekommt

Uhrzeit $= 2^u\,48^m\,7^s$ $\quad \underline{\odot} = 46^0\,37'$ $\quad \overline{☾} = 27^0\,58'$ $\quad \odot ☾ = 70^0\,48'\,33''$

3. Ein Beobachter. Ist nur ein einziger Beobachter vorhanden, so kann man auf drei verschiedene Weisen verfahren.

Ist die Ortszeit genau genug bekannt, so braucht man gar keinen Kimmabstand zu beobachten, da man beide wahre Höhen berechnen und aus ihnen die scheinbaren Höhen ableiten kann.

Man kann aber auch den Kimmabstand eines Gestirnes vorher und nachher beobachten. Dann läßt sich aus ihm die Zeit bestimmen, mit deren Hülfe man die wahre Höhe des anderen Gestirnes berechnet.

Schließlich kann man die Kimmabstände beider Gestirne vorher und nachher beobachten und dann einschalten. Das Gestirn, das am nächsten beim ersten Vertikal steht, sollte zuerst und zuletzt genommen werden, da sich dessen Höhe während einer längeren Zeit am gleichmäßigsten ändert. Das Einschalten geschieht in der oben angegebenen Weise.

Beispiel. Man hat die folgenden Beobachtungen gemacht:

Uhrzeit = $9^u\ 54^m\ 9^s$	$\underline{\odot} = 44^0\ 14'$			
$9^u\ 55^m\ 40^s$		$\underline{☾} = 66^0\ 1'$		
$9^u\ 58^m\ 14^s$			$☽\vert\odot = 30^0\ 40'\ 0''$	
$9^u\ 59^m\ 49^s$	$9^u\ 59^m\ 48^s$		$30^0\ 39'\ 15''$	$30^0\ 39'\ 15''$
$10^u\ 1^m\ 21^s$			$30^0\ 38'\ 30''$	
$10^u\ 3^m\ 56^s$		$\underline{☾} = 64^0\ 29'$		
$10^u\ 5^m\ 29^s$	$\underline{\odot} = 46^0\ 4'$			

Zum Einschalten hat man folgende Verhältnisgleichungen

$\odot$

$$11^m\,20^s : 5^m\,39^s = 1^0\,50' : x \qquad x = \frac{110 \,.\, 339}{680} = +\,55'$$

☾

$$8^m\,16^s : 4^m\,8^s = 1^0\,32' : x \qquad x = \frac{92 \,.\, 248}{496} = -\,46'$$

Bringt man diese Beträge an die zuerst beobachteten Kimmabstände an, so erhält man die folgenden zusammengehörigen Werte

Uhrzeit = $9^u\ 59^m\ 48^s$ $\underline{\odot} = 45^0\ 9'$ $\underline{☾} = 65^0\ 15'$ $☽|\odot = 30^0\ 39'\ 15''$

§ 266. Die scheinbaren Höhen. Bei der Beschickung der Monddistanzen werden die scheinbaren Höhen gebraucht. Man erhält diese entweder aus den gleichzeitig mit der Distanz beobachteten, bezw. aus den für die Zeit der Distanzbeobachtungen eingeschalteten Kimmabständen, oder wenn keine Kimmabstände beobachtet sind, aus den berechneten wahren Höhen.

Um vom Kimmabstande zur scheinbaren Höhe überzugehen, bringt man bei einem Fixsterne oder einem Planeten nur die Kimmtiefe, bei der Sonne und dem Monde außerdem auch den Halbmesser an. Beide Größen werden dabei auf ganze Minuten abgerundet, da eine größere Genauigkeit der wahren Höhen nicht erforderlich ist.

Hat man doppelte scheinbare Höhen über dem künstlichen Horizont beobachtet, so erhält man nach Division durch 2 direkt die scheinbaren Höhen. Bei Fixsternen und Planeten ist also nichts mehr anzubringen, bei der Sonne und dem Monde nur der Halbmesser.

2. Die Höhen sind berechnet. Die berechneten Höhen sind stets die wahren Mittelpunktshöhen. Um aus ihnen die scheinbaren Mittelpunktshöhen zu erhalten, bringt man Verschub und Strahlenbrechung mit entgegengesetztem Zeichen, also den Verschub mit dem Minuszeichen, die Strahlenbrechung mit dem Pluszeichen an. Da man auch diese Beschickungen auf ganze Minuten abrundet, so darf man sie aus den entsprechenden Tafeln mit der wahren Höhe an Stelle der scheinbaren Höhe ausnehmen. Da der Verschub der Sonne

und der Planeten sehr klein ist, so kann man ihn hierbei ganz vernachlässigen. Um also die wahre Höhe zur scheinbaren zu beschicken, bringt man an

bei der **Sonne**, den **Planeten** und den **Fixsternen**: die Strahlenbrechung mit dem Pluszeichen,

beim **Monde**: Verschub minus Strahlenbrechung (aus Tafel 25. [56.]) mit dem Minuszeichen.

§ 267. Die Größen *p* und *r*. Die Größe *p* ist die Beschickung der scheinbaren Höhe des Mondes zur wahren, sie ist also der Betrag: „Verschub minus Strahlenbrechung". Man entnimmt sie der Tafel 25. [56.].

Die Größe *r* ist die Beschickung der scheinbaren Höhe des Distanzgestirnes zur wahren; sie ist also

bei den **Fixsternen**: gleich der Strahlenbrechung (Tafel 17. [41.]),

bei der **Sonne** und den **Planeten**: gleich dem Betrage: „Strahlenbrechung minus Verschub" (Tafel 17. [41.] und 18. [45. bezw. 46.]).

Ist die Distanz bei einem von dem mittleren sehr abweichenden Thermometer- oder Barometerstande beobachtet, so hat die Anwendung der **mittleren** Strahlenbrechung bei kleinen Höhen einen bedeutenden Fehler in *p* und *r* und damit in der wahren Distanz zur Folge. In diesem Falle hat man an *p* und *r* die Berichtigung für Thermometer- und Barometerstand aus Tafel 21. [42.] anzubringen. Da in dieser Tafel den Berichtigungen das Zeichen gegeben ist, mit dem sie an die Strahlenbrechung angebracht werden müssen, so sind sie an *r*, da dieses „Strahlenbrechung minus Verschub" ist, mit dem in der Tafel angegebenen Zeichen anzubringen; bei *p* aber, das „Verschub minus Strahlenbrechung" ist, sind sie, da einer Vergrößerung der Strahlenbrechung eine Verkleinerung von *p* entspricht, mit **entgegengesetztem** Zeichen anzubringen.

Beispiel. Gleichzeitig mit einer Monddistanz beobachtet man

$\underline{\odot} = 15^0\,54'$ $\quad \underline{☾} = 6^0\,26'$ $\quad$ Jdb. $= +\,2'$ $\quad$ A. H. $= 9$ m

Thermometerstand $= -\,3^0$ C $\quad$ Barometerstand $= 750$ mm.

Aus dem Jahrbuche hat man gefunden $\odot\,\rho = 16'\,6''$; ☾ $\rho = 14'\,51''$; ☾ $\pi = 54'\,22''$. Welche scheinbaren Höhen und welche Werte von *p* und *r* folgen hieraus?

	Ber. $\underline{\odot} = 15^0\,56'$		Ber. $\underline{☾} = 6^0\,28'$
	$k = -\;5'$		$k = -\;5'$
	$\odot\,\rho = +\,16'$		☾ $\rho = -\,15'$
	scheinb. $h_s = 16^0\;7'$		scheinb. $h_m = 6^0\;8'$
Taf. 17. [41.] . . .	$R = 3'\,19''$	Taf. 25. [56.] . .	$P{-}R = 45'\,16''$
Taf. 18. [45.] . . .	$-P = -\,8''$		$+\,22''$
Taf. 21. [42.] .	Th.-Ber. $= +\,9''$		$+\;9''$
	Bar.-Ber. $= -\,3''$	Taf. 21. [42.] .	Th.-Ber. $= -\,26''$
	$\underline{\underline{r = 3'\,17''}}$		Bar.-Ber. $= +\;7''$
			$\underline{\underline{p = 45'\,28''}}$

§ 268. Vollständige Berechnung der Monddistanz. Um aus einer Monddistanzbeobachtung die mittlere Greenwicher Zeit zu berechnen, schlägt man den folgenden Weg ein:

1. Man bestimmt die mittlere Greenwicher Zeit aus der Uhrzeit der Beobachtung.

2. Mit dieser Zeit entnimmt man die Werte aus dem Jahrbuche, und zwar stets den Halbmesser und den Horizontalverschub des Mondes, außerdem, wenn das Distanzgestirn die Sonne ist, den Halbmesser der Sonne, wenn es ein Planet ist, den Horizontalverschub des Planeten. An den Halbmesser des Mondes ist die Vergrößerung aus Tafel 23. [47.] anzubringen.

3. Darauf beschickt man die Kimmabstände bezw. die berechneten wahren Höhen zu scheinbaren Höhen (siehe § 266).

4. Hierauf berechnet man die Höhenbeschickungen r und p (siehe § 267).

5. Alsdann berechnet man die scheinbare Distanz. Bei Distanzen zwischen Sonne und Mond addiert man zu der Randdistanz den Sonnenhalbmesser und den vergrößerten Mondhalbmesser. Bei der Distanz zwischen dem Monde und einem anderen Gestirne addiert man den vergrößerten Mondhalbmesser, wenn die Distanz vom zugewandten Rande, subtrahiert ihn, wenn die Distanz vom abgewandten Rande beobachtet ist.

6. Darauf berechnet man die erste, zweite und dritte Berichtigung nach den Formeln 2. und 3. des § 263.

7. Mit ihrer Hülfe bestimmt man die wahre Distanz nach Formel 1. des § 263.

8. Schließlich berechnet man die mittlere Greenwicher Zeit aus der wahren Distanz (siehe § 264).

Soll der Stand des Chronometers oder einer anderen Uhr gegen mittlere Greenwicher Zeit bestimmt werden, so vergleicht man die so berechnete Greenwicher Zeit mit der bei der Beobachtung abgelesenen Uhrzeit. Soll die Länge bestimmt werden, so vergleicht man sie mit der mittleren Ortszeit.

Beispiel 1. Die Kimmabstände sind gleichzeitig mit der Distanz beobachtet. Am 2. Mai 1903 nachmittags, nach Besteck auf $47^0 25' N$ und $22^0 35' W$, macht man nach einem Chronometer, dessen Stand etwa 10^m vor gegen M. G. Z. ist, die folgenden Beobachtungen

$$\text{Chr. Z.} = 5^u\,40^m\,37^s \quad \underline{\odot} = 30^0\,7' \quad \overline{☾} = 57^0\,59' \quad \odot☾ = 68^0\,41'\,10''$$

Idb. für die Höhen = — 3′, für die Distanz = + 2′ 10″; A. H. = 5 m.

Welcher Stand des Chronometers folgt hieraus?

$$\begin{aligned} \text{Astr. Chr. Z.} &= 5^u\,41^m \text{ den 2. Mai} \\ \text{Std.} &= -10^m \\ \hline \text{M. G. Z.} &= 5^u\,31^m \text{ den 2. Mai} \end{aligned}$$

$\odot\rho = 15'\,54''$	$☾\rho = 16'\,15''\;(+14'')$	$☾\pi = 59'\,33''$
Beob. $\underline{\odot} = 30^0\;7'$	Beob. $\overline{☾} = 57^0\,59'$	Beob. $\odot\vert☾ = 68^0\,41'\,10''$
Idb. = — 3′	Idb. = — 3′	Idb. = + 2′ 10″
$\underline{\odot} = 30^0\;4'$	$\overline{☾} = 57^0\,56'$	$\odot\vert☾ = 68^0\,43'\,20''$
$k = -\;4'$	$k = -\;4'$	$\odot\rho = 15'\,54''$
$\odot\rho = +\;16'$	$\odot\rho = -\;16'$	vergr. $☾\rho = 16'\,29''$
$h_s = 30^0\,16'$	$h_m = 57^0\,36'$	$D = 69^0\,15'\,43''$
	$P - R = 31'\;6''$	
$R = 1'\,39''$	$+\;18''$	
$-P = -\;8''$	$-\;5''$	
$r = 1'\,31''$	$p = 31'\,19''$	

$h_s = 30^\circ 16'$		$\log \sec = 0{,}06\,36$
$h_m = 57^\circ 36'$	$\log \sec = 0{,}27\,10$	
$D = 69^\circ 16'$	$\log \operatorname{cosec} = 0{,}02\,91$	$\log \operatorname{cosec} = 0{,}02\,91$
$s = 157^\circ\ 8'$		
$s/2 = 78^\circ 34'$	$\log \cos = 9{,}29\,72$	$\log \cos = 9{,}29\,72$
$s/2 - h_s = 48^\circ 18'$	$\log \sin = 9{,}87\,31$	
$s/2 - h_m = 20^\circ 58'$		$\log \sin = 9{,}55\,37$
$p = 31'\,19''$	$\log arc = 3{,}27\,39$	
$r = 1'\,31''$		$\log arc = 1{,}95\,90$
	$\log 2 = 0{,}30\,10$	$\log 2 = 0{,}30\,10$
$I = 18'\,30''$	$\log arc = 3{,}04\,53$	$\log arc = 1{,}20\,36$
$p = 31'\,19''$	Taf. 26. [55.]: $+3''$	$II = 0'\,16''$
$p - I = 13'$	Taf. 26. [55.]: $+1''$	
	$III = +2''$	

$r = 1'\,31''$	$p = 31'\,19''$
$I = 18'\,30''$	$II = 0'\,16''$
$III = +\ 2''$	neg. Ver. $= -31'\,35''$
pos. Ver. $= 20'\ 3''$	pos. Ver. $= +20'\ 3''$
	Ges. Ver. $= -11'\,32''$

$D =$	$69^\circ\ 15'\ 43''$	
G. V. $=$	$-\ 11'\ 32''$	
$d =$	$69^\circ\ 4'\ 11''$	
$d_3 =$	$67^\circ\ 42'\ 1''$	$\log prop = 0{,}25\,51\ (+4)$
$u =$	$1^\circ\ 22'\ 10''$	$\log arc = 3{,}69\,28$
$x =$	$2^{st}\,27^m\,50^s$	$\log arc = 3{,}94\,79$
$+$	3^u	
ang. M. G. Z. $=$	$5^u\,27^m\,50^s$	
Taf. 27. [54.] Ver. $=$	$-\ 1^s$	
M. G. Z. $=$	$5^u\,27^m\,49^s$ den 2. Mai	
Chr. Z. $=$	$5^u\,40^m\,37^s$ den 2. Mai	
Stand $=$	$12^m\,48^s$ vor.	

Beispiel 2. Die Kimmabstände beider Gestirne sind vor und nach der Distanz beobachtet. Am 14. Oktober 1903 vormittags, nach Besteck auf $10^\circ 45'\,N$ und $90^\circ 15'\,O$, macht man nach einem Chronometer, das angenähert M. G. Z. zeigt, die folgenden Beobachtungen

Chr. Z. $= 11^u\ 8^m\,54^s$ ♀ $= 23^\circ\,17'$		
$11^u\ 9^m\,41^s$	☾ $= 75^\circ\,31'$	
$11^u\,10^m\,20^s$		☽ | ♀ nächster Rand $= 54^\circ\,13'\,30''$
$11^u\,10^m\,54^s$	☾ $= 75^\circ\,48'$	
$11^u\,11^m\,49^s$ ♀ $= 24^\circ\,0'$		

Idb. für die Höhen $= +3'$, für die Distanz $= -1'\,15''$; A. H. $= 6$ m.

Welcher Stand des Chronometers folgt hieraus?

♀	☾
$2^m\,55^s : 1^m\,26^s = 43' : x$	$1^m\,13^s : 39^s = 17' : x$
$x = +\,21'$	$x = +\,9'$

Mittel: Chr. Z. $= 11^u\,10^m\,20^s$ $\underline{♀} = 23^0\,38'$ $\underline{☾} = 75^0\,40'$ ☽|♀ $= 54^0\,13'\,30''$

M. G. Z. $= 11^u\,10^m$ den 13. Okt.

♀ $\pi = 24''$	☾ $\rho = 16'\,9''\;(+\,16'')$	☾ $\pi = 59'\,10''$
Beob. $\underline{♀} = 23^0\,38'$	Beob. $\underline{☾} = 75^0\,40'$	Beob. ☽|♀ $= 54^0\,13'\,30''$
Idb. $= +\,3'$	Idb. $= +\,3'$	Idb. $= -\,1'\,15''$
$\underline{♀} = 23^0\,41'$	$\underline{☾} = 75^0\,43'$	☽|♀ $= 54^0\,12'\,15''$
$k = -\,4'$	$k = -\,4'$	vergr. ☾ $\rho = +\,16'\,25''$
$h_s = 23^0\,37'$	☾ $\rho = +\,16'$	$D = 54^0\,28'\,40''$
	$h_m = 75^0\,55'$	

	$P - R = 14'\,12''$
$R = 2'\,12''$	$+\,3''$
$-P = -\,22''$	$-\,5''$
$r = 1'\,50''$	$p = 14'\,10''$

$h_s = 23^0\,37'$		*log sec* $= 0{,}03\,80$
$h_m = 75^0\,55'$	*log sec* $= 0{,}61\,38$	
$D = 54^0\,29'$	*log cosec* $= 0{,}08\,94$	*log cosec* $= 0{,}08\,94$
$s = 154^0\;1$		
$s/2 = 77^0\;1'$	*log cos* $= 9{,}35\,15$	*log cos* $= 9{,}35\,15$
$s/2 - h_s = 53^0\,24'$	*log sin* $= 9{,}90\,46$	
$s/2 - h_m = 1^0\;6'$		*log sin* $= 8{,}28\,32$
$p = 14'\,10''$	*log arc* $= 2{,}92\,94$	
$r = 1'\,50''$		*log arc* $= 2{,}04\,14$
	log 2 $= 0{,}30\,10$	*log* 2 $= 0{,}30\,10$
$I = 25'\,48''$	*log arc* $= 3{,}18\,97$	*log arc* $= 0{,}10\,45$
$p = 14'\,10''$	Taf. 26. [55.]: $+\,1''$	$II = 0'\,1''$
$p - I = 12'$	Taf. 26. [55.]: $+\,1''$	
	$III = 0''$	

$r = 1'\,50''$	$p = 14'\,10''$
$I = 25'\,48''$	$II = 0'\;1''$
$III = 0''$	neg. Ver. $= -\,14'\,11''$
pos. Ver. $= 27'\,38''$	pos. Ver. $= +\,27'\,38''$
	Ges. Ver. $= +\,13'\,27''$

$D =$	$54^0\ 28'\ 40''$	
G. V. $=$	$+\ 13'\ 27''$	
$d =$	$54^0\ 42'\ 7''$	
$d_9 =$	$55^0\ 57'\ 33''$	*log prop* $= 0{,}23\ 73\ (-4)$
$u =$	$1^0\ 15'\ 26''$	*log arc* $= 3{,}65\ 57$
$x =$	$2^{st}\ 10^m 16^s$	*log arc* $= 3{,}89\ 30$
	$+\ 9^u$	
ang. M. G. Z. $=$	$11^u\ 10^m 16^s$	
Taf. 27. [54.] Ver. $=$	$+\ 1^s$	
M. G. Z. $=$	$11^u\ 10^m 17^s$	den 13. Okt.
Chr. Z. $=$	$11^u\ 10^m 20^s$	den 13. Okt.
Stand $=$	$0^m\ 3^s$	vor.

Beispiel 3. **Beide Höhen berechnet.** Am 24. April 1903 vormittags, nach Besteck auf $39^0\ 15'\ S$ und $16^0\ 30'\ O$, beobachtet man nach einer Uhr, die $5^m 10^s$ vor gegen M. O. Z. ist,

U. Z. $= 5^u\ 26^m\ 12^s$ Antares ✳☽| entf. Rand $= 103^0\ 42'\ 45''$; Jdx. $= -\ 0'\ 40''$

Durch Rechnung hat man für den Zeitpunkt der Distanzbeobachtung die wahre Höhe des Antares gleich $50^0\ 6'$ und die wahre Mittelpunktshöhe des Mondes gleich $24^0\ 11'$ gefunden. Auf welcher Länge befindet man sich?

Astr. U. Z. $=$	$17^u\ 26^m\ 12^s$	den 23. April
Std. $=$	$-\ 5^m\ 10^s$	
M. O. Z. $=$	$17^u\ 21^m\ 2^s$	den 23. April
Z. U. $=$	$-\ 1^{st}\ 6^m$	
M. G. Z. $=$	$16^u\ 15^m$	den 23. April

☾$\rho = 15'\ 21''\ (+\ 6'')$
☾$\pi = 56'\ 13''$

✳$h = 50^0\ 6'$	☾$h = 24^0\ 11'$	Beob. ✳☽| $= 103^0\ 42'\ 45''$
$R = +\ 1'$	$P - R = -\ 49'$	Jdx. $= -\ 0'\ 40''$
$h_s = 50^0\ 7'$	$h_m = 23^0\ 22'$	✳☽| $= 103^0\ 42'\ 5''$
		vergr. ☾$\rho = -\ 15'\ 27''$
	$P - R = 49'\ 12''$	$D = 103^0\ 26'\ 38''$
	$+\ 12''$	
	$-\ 1''$	
$r = 0'\ 49''$	$p = 49'\ 23''$	

$h_s =$	$50^0\ 7'$		*log sec* $= 0{,}19\ 30$
$h_m =$	$23^0\ 22'$	*log sec* $= 0{,}03\ 72$	
$D =$	$103^0\ 27'$	*log cosec* $= 0{,}01\ 21$	*log cosec* $= 0{,}01\ 21$
$s =$	$176^0\ 56'$		
$s/_2 =$	$88^0\ 28'$	*log cos* $= 8{,}42\ 75$	*log cos* $= 8{,}42\ 75$
$s/_2 - h_s =$	$38^0\ 21'$	*log sin* $= 9{,}79\ 27$	
$s/_2 - h_m =$	$65^0\ 6'$		*log sin* $= 9{,}95\ 76$
$p =$	$49'\ 23''$	*log arc* $= 3{,}47\ 17$	
$r =$	$0'\ 49''$		*log arc* $= 1{,}69\ 02$
		log 2 $= 0{,}30\ 10$	*log* 2 $= 0{,}30\ 10$
$I =$	$1'\ 50''$	*log arc* $= 2{,}04\ 22$	*log arc* $= 0{,}58\ 14$
$p =$	$49'\ 23''$	Taf. 26. [55.]: $-\ 5''$	$II = 0'\ 4''$
$p - I =$	$48'$	Taf. 26. [55.]: $-\ 5''$	
		$III = 0''$	

$r = 0' 49''$	$p = 49' 23''$
$I = 1' 50''$	$II = 0' 4''$
$III = 0''$	neg. Ber. $= - 49' 27''$
pos. Ber. $= 2' 39''$	pos. Ber. $= + 2' 39''$
	Ges. Ber. $= - 46' 48''$

$D =$	$103^0\ 26'\ 38''$	
G. B. $=$	$-\ 46'\ 48''$	
$d =$	$102^0\ 39'\ 50''$	
$d_{15} =$	$102^0\ 0'\ 43''$	$log\ prop = 0{,}27\ 87\ (-15)$
$u =$	$0^0\ 39'\ 7''$	$log\ arc = 3{,}37\ 05$
$x =$	$1^{st}\ 14^m\ 19^s$	$log\ arc = 3{,}64\ 92$
	$+ 15^u$	
ang. M. G. Z. $=$	$16^u\ 14^m\ 19^s$	
Taf. 27. [54.] Ver. $=$	$+ 5^s$	
M. G. Z. $=$	$16^u\ 14^m\ 24^s$	den 23. April
M. O. Z. $=$	$17^u\ 21^m\ 2^s$	den 23. April
Z. U. $=$	$1^{st}\ 6^m\ 38^s$	
Länge $=$	$16^0\ 40'\ O$	

Beispiel 4. **Berechnung der Länge ohne Uhr.** Am 14. Dezember 1903 vormittags um etwa 8 Uhr, nach Besteck auf $26^0\ 30'\ S$ und $30^0\ 10'\ W$, macht man die folgenden Beobachtungen

$$\underline{\odot} = 39^0\ 20' \qquad \overline{☾} = 72^0\ 21' \qquad \odot | ☾ = 52^0\ 17'\ 10''$$

Idb. für die Höhen $= -2'$, für die Distanz $= + 1'\ 40''$; A. H. $= 4$ m.

Auf welcher Länge befindet man sich?

Ang. M. O. Z. $=$	$20^u\ 0^m$	den 13. Dez.
Z. U. $=$	$+ 2^{st}\ 1^m$	
M. G. Z. $=$	$22^u\ 1^m$	den 13. Dez.

$\odot \delta = 23^0\ 10'\ S$ $\qquad$ $e = - 5^m\ 42^s$

Beob. $\underline{\odot} = 39^0\ 20'$	$\varphi = 26^0\ 30'\ S$	$log\ sec = 0{,}04\ 821$
Idb. $= -\ 2'$	$\delta = 23^0\ 10'\ S$	$log\ sec = 0{,}03\ 651$
$\underline{\odot} = 39^0\ 18'$	$z_0 = 3^0\ 20'$	
G. B. $= +\ 12'$	$z = 50^0\ 30'$	
$h = 39^0\ 30'$	$s = 53^0\ 50'$	
	$s/_2 = 26^0\ 55'$	$log\ sin = 9{,}65\ 580$
	$u/_2 = 23^0\ 35'$	$log\ sin = 9{,}60\ 215$
	$\odot\, t = 20^{st}\ 16^m\ 9^s$	$log\ sem = 9{,}34\ 267$

W. O. Z. $=$	$20^u\ 16^m\ 9^s$	
$e =$	$-\ 5^m\ 42^s$	
M. O. Z. $=$	$20^u\ 10^m\ 27^s$	den 13. Dez.
Z. U. $=$	$2^{st}\ 1^m$	
M. G. Z. $=$	$22^u\ 11^m$	den 13. Dez.

$\odot\rho = 16'\,16''$	$☾\rho = 15'\,38''\ (+\,15'')$	$☾\pi = 57'\,17''$
Beob. $\underline{\odot} = 39^0\,20'$	Beob. $\overline{☾} = 72^0\,21'$	Beob. $\odot\vert☾ = 52^0\,17'\,10''$
Jdb. $= \quad -\ 2'$	Jdb. $= \quad -\ 2'$	Jdb. $= \ +\ 1'\,40''$
$\underline{\odot} = 39^0\,18'$	$\overline{☾} = 72^0\,19'$	$\odot\,☾ = 52^0\,18'\,50''$
$k = -\ 4'$	$k = -\ 4'$	$\odot\rho = 16'\,16''$
$\odot\rho = +\ 16'$	$☾\rho = -\ 16'$	vergr. $☾\rho = 15'\,53''$
$h_s = 39^0\,30'$	$h_m = 71^0\,59'$	$D = 52^0\,50'\,59''$

	$P - R = 17'\,28''$
$R = 1'\,10''$	$+\ 5''$
$-P = -\ 7''$	$-\ 8''$
$r = 1'\ 3''$	$p = 17'\,25''$

$h_s = 39^0\,30'$		*log sec* $= 0{,}11\,26$
$h_m = 71^0\,59'$	*log sec* $= 0{,}50\,96$	
$D = 52^0\,51'$	*log cosec* $= 0{,}09\,85$	*log cosec* $= 0{,}09\,85$
$s = 164^0\,20'$		
$s/2 = 82^0\,10'$	*log cos* $= 9{,}13\,45$	*log cos* $= 9{,}13\,45$
$s/2 - h_s = 42^0\,40'$	*log sin* $= 9{,}83\,11$	
$s/2 - h_m = 10^0\,11'$		*log sin* $= 9{,}24\,75$
$p = 17'\,25''$	*log arc* $= 3{,}01\,91$	
$r = 1'\ 3''$		*log arc* $= 1{,}79\,93$
	log 2 $= 0{,}30\,10$	*log* 2 $= 0{,}30\,10$
$I = 13'\ 3''$	*log arc* $= 2{,}89\,38$	*log arc* $= 0{,}69\,34$
$p = 17'\,25''$	Taf. 26. [55.]: $= +\ 2''$	$II = 0'\,5''$
$p - I = 4'$	Taf. 26. [55.]: $= +\ 0''$	
	$III = +\ 2''$	

$r = 1'\,3''$	$p = 17'\,25''$
$I = 13'\,3''$	$II = 0'\ 5''$
$III = +\,2''$	neg. Ber. $= -\ 17'\,30''$
pos. Ber. $= 14'\,8''$	pos. Ber. $= +\ 14'\ 8''$
	Ges. Ber. $= -\ 3'\,22''$

$D =$	$52^0\ 50'\ 59''$	
G. B. $=$	$-\ 3'\ 22''$	
$d =$	$52^0\ 47'\ 37''$	
$d_{21} =$	$53^0\ 23'\ 33''$	*log prop* $= 0{,}29\,50\ (+\,11)$
$u =$	$0^0\ 35'\ 56''$	*log arc* $= 3{,}33\,36$
$x =$	$1^{st}\,10^m\,52^s$	*log arc* $= 3{,}62\,86$
	$+\,21^u$	
ang. M. G. Z. $=$	$22^u\ 10^m\,52^s$	
Taf. 27. [54.] Ber. $=$	$-\ 4^s$	
M. G. Z. $=$	$22^u\ 10^m\,48^s$	den 13. Dez.
M. O. Z. $=$	$20^u\ 10^m\,27^s$	den 13. Dez.
Z. U. $=$	$2^{st}\ 0^m\,21^s$	
Länge $=$	$30^0\ \ 5'\ W$	

§ 269. Besondere Fälle der Monddistanzen. Steht der Mond und das Distanzgestirn auf demselben oder auf entgegengesetzten Vertikalen, so ist die Beschickung der scheinbaren Distanz erheblich einfacher, als im allgemeinen Falle. Diese natürlich selten vorkommenden Sonderfälle sollen daher besonders behandelt werden.

1. Beide Gestirne stehen in demselben Vertikal. In diesem Falle liegen auch die beiden wahren Örter in demselben Vertikal und die ganze Beschickung erstreckt sich auf die Addition bezw. Subtraktion von r und p.

Hier sind zwei Fälle möglich.

a) Die Mondhöhe ist die größere. In diesem Falle ist

$$h_s + D - h_m = 0 \quad \text{d. h.} \quad s/_2 - h_m = 0$$

Wie aus der Figur 224, in der wie oben die scheinbaren Örter durch die großen, die wahren Örter durch die kleinen Buchstaben bezeichnet sind, folgt, ist in diesem Falle

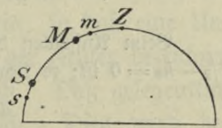


Fig. 224.

(1) . . . . $d = D + p + r$

b) Die Mondhöhe ist die kleinere. In diesem Falle ist

$$h_m + D - h_s = 0 \quad \text{d. h.} \quad s/_2 - h_s = 0$$

und es ist, wie aus der Figur 225 hervorgeht,

(2) . . . . $d = D - p - r$

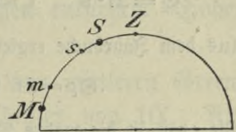


Fig. 225.

2. Die beiden Gestirne stehen in gegenüberliegenden Vertikalen. In diesem Falle ist

$$h_s + h_m + D = 0 \quad \text{d. h.} \quad s/_2 = 180^0$$

und es ist, wie aus der Figur 226 hervorgeht,

(3) . . . . $d = D - p + r$

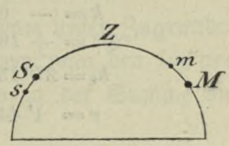


Fig. 226.

Beispiel 1. Man macht folgende Beobachtungen

$\underline{☉} = 10^0\,10'$ $\underline{☾} = 74^0\,48'$ ☉|☾ $= 64^0\,6'\,20''$; Jdb. $= 0$; A. H. $= 12$m.

Aus dem Jahrbuche ergiebt sich

☉ρ $= 15'\,49''$ ☾ρ $= 16'\,4''\,(+15'')$ ☾π $= 58'\,50''$

Wie groß ist die wahre Distanz?

$\underline{☉} = 10^0\,10'$	$\underline{☾} = 74^0\,48'$	☉|☾ $= 64^0\ \ 6'\,20''$
$k = -\ \ 6'$	$k = -\ \ 6'$	☉ρ $= 15'\,49''$
☉ρ $= +\,16'$	☾ρ $= +\,16'$	vergr. ☾ρ $= 16'\,19''$
$h_s = 10^0\,20'$	$h_m = 74^0\,58'$	$D = 64^0\,38'\,28''$
$r = 5'\ \ 0''$	$p = 15'\ \ 0''$	

Beim Aufstellen des Formulars zur Berechnung der Berichtigungen findet man, daß $s/_2 - h_m = 0$ ist; es liegt hier also der Fall 1a) vor, und es ist nach Formel (1)

$$d = 64^0\,38'\,28'' + 15'\,0'' + 5'\,0'' = \underline{64^0\,58'\,28''}$$

Beispiel 2. Man macht folgende Beobachtungen

$\underline{*} = 71^{0}\,39'$ $\overline{☾} = 12^{0}\,19'$ $*|☾ = 59^{0}\,20'\,10''$; Idb. = 0; A. H. = 8 m.

Aus dem Jahrbuche ergiebt sich

$$☾\rho = 15'\,33''\,(+\,3'') \qquad ☾\pi = 56'\,59''$$

Wie groß ist die wahre Distanz?

$\underline{*} = 71^{0}\,39'$	$\overline{☾} = 12^{0}\,19'$	$*|☾ = 59^{0}\,20'\,10''$
$k = -\ \ 5'$	$k = -\ \ 5'$	vergr. $☾\rho = +\,15'\,36''$
$h_s = 71^{0}\,34'$	$☾\rho = -\,16'$	$D = 59^{0}\,35'\,46''$
	$h_m = 11^{0}\,58'$	
$r = 0'\,20''$	$p = 51'\,19''$	

Beim Aufstellen des Formulars zur Berechnung der Berichtigungen findet man, daß $s/_2 - h_s = 0$ ist; es liegt also der Fall 1b) vor, und es ist nach Formel (2)

$$d = 59^{0}\,35'\,46'' - 51'\,19'' - 0'\,20'' = \underline{58^{0}\,44'\,7''}$$

Beispiel 3. Man macht folgende Beobachtungen

$\underline{☉} = 27^{0}\,5'$ $\underline{☾} = 51^{0}\,50'$ $☉|☾ = 100^{0}\,12'\,14''$; Idb. = 0; A. H. = 10 m.

Aus dem Jahrbuche ergiebt sich

$$☉\rho = 16'\,0'' \qquad ☾\rho = 16'\,11''\,(+\,13'') \qquad ☾\pi = 59'\,19''$$

Wie groß ist die wahre Distanz?

$\underline{☉} = 27^{0}\ \ 5'$	$\underline{☾} = 51^{0}\,50'$	$☉|☾ = 100^{0}\,12'\,14''$
$k = -\ \ 6'$	$k = -\ \ 6'$	$☉\rho = 16'\ \ 0''$
$☉\rho = +\,16'$	$☉\rho = +\,16'$	vergr. $☾\rho = 16'\,24''$
$h_s = 27^{0}\,15'$	$h_m = 52^{0}\ \ 0'$	$D = 100^{0}\,44'\,38''$
$r = 1'\,44''$	$p = 35'\,47''$	

Beim Aufstellen des Formulars zur Berechnung der Berichtigungen findet man, daß $s = 180^{0}$ ist; es liegt also der Fall 2 vor, und es ist nach Formel (3)

$$d = 100^{0}\,44'\,38'' - 35'\,47'' + 1'\,44'' = \underline{100^{0}\,10'\,35''}$$

§ 270. Genauigkeit der Zeitbestimmung durch Monddistanzen. Ein Fehler in der wahren Distanz hat natürlich einen Fehler in der mittleren Greenwicher Zeit zur Folge, und zwar ist dieser Fehler um so größer, je langsamer die Distanzänderung vor sich geht. Es ist schon früher gezeigt worden, daß ein Distanzfehler von einer Bogensekunde ungefähr einen Zeitfehler von 2 Zeitsekunden zur Folge hat, genauer findet man den Zeitfehler, der einem Distanzfehler von 1″ entspricht, wenn man zu dem Proportionallogarithmen die Zahl aufschlägt, denn der Proportionallogarithme ist der Logarithme der Anzahl Zeitsekunden, in der sich die Distanz um 1″ ändert. Für die Zeitbestimmung wird also ein kleiner Proportionallogarithme — der einer schnellen Distanzänderung entspricht — günstiger sein als ein großer.

Fehler in der wahren Distanz entstehen zum größten Teile aus Fehlern bei der Beobachtung der Distanz. Diese Beobachtungsfehler gehen mit ihrem vollen

Betrage in die wahre Distanz ein. Die Beobachtungen sind daher mit der größten Vorsicht anzustellen; besondere Aufmerksamkeit ist dem Indexfehler zu schenken, er ist vor und nach der Beobachtung zu bestimmen. Nur mit einem tadellosen Instrumente lassen sich brauchbare Monddistanzbeobachtungen anstellen. Hat das Instrument einen Excentrizitätsfehler, so sind die Ablesungen dafür zu berichtigen. Wenn irgend angängig, beobachte man stets eine Reihe von mehreren Distanzen und nehme aus ihnen das Mittel. Aber selbst, wenn man alle diese Vorsichtsmaßregeln anwendet, beträgt doch auf See die Unsicherheit bei Distanzen zwischen dem Monde und der Sonne etwa 20″, bei Distanzen zwischen dem Monde und einem anderen Gestirne etwa 30″.

Gegenüber diesem Fehler sind die durch ungenaue Höhen oder durch die Ungenauigkeit der Rechnung hervorgerufenen Fehler nur klein, so daß eine Ungenauigkeit von 20″ bezw. 30″ in der wahren Distanz als der Fehler bezeichnet werden kann, mit dem ein geübter Beobachter rechnen muß. Daß gelegentlich auch größere Fehler vorkommen können, ist selbstverständlich. Dies wird besonders dann der Fall sein, wenn entweder starke Bewegungen des Schiffes die Beobachtung sehr erschweren, oder wenn die Höhen der Gestirne sehr klein sind, da in diesem Falle leicht große Fehler in den Beschickungen entstehen. Höhen unter 10° sind daher nach Möglichkeit zu vermeiden.

Einem Fehler von 20″ entspricht durchschnittlich in der mittleren Greenwicher Zeit ein Fehler von 40^s, also in der Länge ein Fehler von 10′. Auf einen so großen Fehler sollte man daher, wenn man den Stand des Chronometers mit Hülfe von Monddistanzen bestimmt hat, mindestens rechnen.

Den genaueren Wert des Fehlers in der Zeit, den man unter Zugrundelegung eines Distanzfehlers zu erwarten hat, findet man, indem man den *log arc* dieses Fehlers zu dem Proportionallogarithmen addiert, und zu der Summe die Zahl aufschlägt.

Beispiel. Ein wie großer Zeit- bezw. Längenfehler entspricht einem Distanzfehler von 20″, wenn der Proportionallogarithme = 0,2600 ist?

$$\begin{array}{rr} log\,prop = & 0{,}2600 \\ 20''\ log\,arc = & 1{,}3010 \\ \hline \text{Zeitfehler} = 36^s\ log\,arc = & 1{,}5610 \\ \text{Längenfehler} = 9' & \end{array}$$

Die Fehler der Beobachtung sind teils zufällige, teils konstante. Die zufälligen Fehler, die bald nach der einen, bald nach der anderen Seite fallen, werden sich, wenn man eine größere Reihe von Beobachtungen nimmt, zum großen Teil aufheben. Aber auch die konstanten Fehler lassen sich zum Teil aufheben, wenn man zu den Beobachtungen Distanzgestirne bald östlich bald westlich vom Monde wählt. Eine zu groß gemessene Distanz ergiebt in dem einen Falle eine zu große, in dem anderen Falle eine um ebensoviel zu kleine Zeit. Bestimmt man daher aus beiden Beobachtungen den Stand einer Uhr und nimmt das Mittel aus den beiden so bestimmten Ständen, so macht man sich zum großen Teil von dem Einfluß des konstanten Fehlers frei.

Ist man auf die Bestimmung der Zeit durch Monddistanzen angewiesen, so kann man gute Resultate nur erwarten, wenn man sich nicht darauf beschränkt, gelegentlich einmal eine Beobachtung zu machen, sondern wenn man keine Gelegenheit zu einer guten Monddistanzbeobachtung unbenutzt vorübergehen läßt. Auf diese Weise wird man nicht nur eine große Fertigkeit im Beobachten von Monddistanzen erwerben, sondern man wird auch die meisten Fehler ausgleichen können.

Gleiche Sonnenhöhen.

§ 271. **Grundlagen der Methode.** Beobachtet man vor und nach der Kulmination gleiche Höhen der Sonne nebst den zugehörigen Zeiten einer Uhr, so läßt sich daraus eine besonders genaue Bestimmung der Zeit und zwar der Uhrzeit des Meridiandurchganges der Sonne ableiten. Diese im folgenden behandelte Methode dient ausschließlich dem Zwecke der Standbestimmung des Chronometers.

Wenn sich die Abweichung der Sonne nicht änderte, so würden zu den gleichen Höhen vormittags und nachmittags auch gleiche Stundenwinkel der Sonne — der eine nach Osten, der andere nach Westen gezählt — gehören, und somit würde der Stundenwinkel bei der Beobachtung gleich der halben Zwischenzeit zwischen den beiden Beobachtungen sein.

Ist die Uhrzeit der ersten Beobachtung U_1, die Uhrzeit der zweiten Beobachtung U_2, so ist die Zwischenzeit

$$\tau = U_2 - U_1$$

und somit der Stundenwinkel der nachmittägigen oder der östliche Stundenwinkel der vormittägigen Beobachtung

$$t = \frac{\tau}{2} = \frac{U_2 - U_1}{2}$$

Die Kulmination der Sonne fällt in diesem Falle genau in die Mitte zwischen die beiden Beobachtungen, die Uhrzeit des Meridiandurchganges ist somit

$$U_m = U_1 + \frac{\tau}{2} = \frac{U_1 + U_2}{2}$$

d. h. gleich dem Mittel der beiden Uhrzeiten.

Die Vergleichung dieser so bestimmten Uhrzeit mit der genau berechneten Zeit der Kulmination giebt den Stand der Uhr.

Diese Bestimmung der Uhrzeit des Meridiandurchganges der Sonne oder der Uhrzeit des wahren Ortsmittages ist, da sie auf der Voraussetzung einer unveränderten Abweichung beruht, nur anwendbar, wenn die Sonne in der Nähe der Wendepunkte steht, also am 21. Juni und 21. Dezember.

Anmerkung: Aus gleichen Fixsternhöhen östlich und westlich vom Meridian läßt sich in der eben angedeuteten Weise die Uhrzeit der Kulmination und daraus der Stand der Uhr ableiten. Das Verfahren wird ohne weiteres aus dem folgenden Beispiel klar werden.

Beispiel. Am 4. Januar 1903 nachmittags beobachtet man auf $6^{0} 46' O$ Länge nach einem Chronometer, dessen Stand gegen M. G. Z. ungefähr 7^m nach ist, um $6^u 17^m 10^s$ und um $11^u 48^m 42^s$ gleiche Höhen des Aldebaran. Der genaue Stand des Chronometers ist zu bestimmen.

1. U. Z.	=	$6^u\ 17^m\ 10^s$
2. U. Z.	=	$11^u\ 48^m\ 42^s$
s	=	$18^u\ 5^m\ 52^s$ /:2
U. Z. d. Kulm.	=	$9^u\ 2^m\ 56^s$ den 4. Jan.
angen. Std.	=	$+\ 7^m$
ang. M. G. Z.	=	$9^u\ 10^m$ den 4. Jan.

Hierfür ergiebt sich aus dem Jahrbuch

$*\alpha$	=	$4^u\ 30^m\ 23^s$
$m \odot \alpha$	=	$18^{st}\ 53^m\ 11^s$
M. O. Z. d. Kulm.	=	$9^u\ 37^m\ 12^s$
Z. U.	=	$-\ 27^m\ 4^s$
M. G. Z. d. Kulm.	=	$9^u\ 10^m\ 8^s$
U. Z. d. Kulm.	=	$9^u\ 2^m\ 56^s$
Stand	=	$7^m\ 12^s$ nach gegen M. G. Z.

Vergleiche die Bestimmung der Kulminationszeit § 188.

Ist aber die Abweichung bei den beiden Beobachtungen nicht dieselbe, wie es bei der Sonne fast immer der Fall ist, so gehört zu den gleichen Höhen vormittags und nachmittags nicht derselbe Stundenwinkel, folglich fällt auch die Mittelzeit der Beobachtungen nicht mit der Uhrzeit des wahren Ortsmittages zusammen. Indessen ist der Unterschied zwischen der Mittelzeit und der Zeit des wahren Ortsmittages stets nur gering, man pflegt daher die letztere zu bestimmen, indem man eine Berichtigung an die Mittelzeit anbringt. Wie diese Berichtigung zu bestimmen ist, soll im folgenden Paragraphen abgeleitet werden.

§ 272. Ableitung der Formel. Bezeichnet man die Uhrzeit der vormittägigen Beobachtung mit U_v, die Uhrzeit der nachmittägigen Beobachtung mit U_n, die Uhrzeit des Meridiandurchganges mit U, so ist, wenn t_v den zur vormittägigen Beobachtung gehörigen östlichen Stundenwinkel, t_n den zur nachmittägigen Beobachtung gehörigen westlichen Stundenwinkel bedeutet

$$U = U_v + t_v$$

$$U = U_n - t_n,$$ also wenn man addiert

$$2\,U = U_v + U_n - (t_n - t_v)$$

somit

$$U = \frac{U_v + U_n}{2} - \frac{t_n - t_v}{2}$$

oder, wenn man noch für die Mittelzeit $\left(\frac{U_v + U_n}{2}\right)$ die Bezeichnung U_m, und für den Unterschied der beiden Stundenwinkel, der immer nur klein ist, die Bezeichnung Δt einführt

$$1. \ldots\ldots\ldots \quad U = U_m - \frac{\varDelta t}{2}$$

Es kommt nun darauf an, die Größe $\varDelta t$ zu bestimmen.

Aus der Gleichung $\varDelta t = t_n - t_v$ folgt

$$t_n = t_v + \varDelta t$$

Wenn die Abweichung bei beiden Beobachtungen dieselbe wäre, so wäre $t_n = t_v$ also $\varDelta t = 0$. $\varDelta t$ ist also die Änderung des Stundenwinkels, die der in der Zwischenzeit erfolgten Änderung der Abweichung entspricht.

Nun ist in § 204 gezeigt worden, daß die Änderung $\varDelta t$ im Stundenwinkel, die einer Änderung $\varDelta \delta$ der Abweichung entspricht, gegeben ist durch den Ausdruck

$$\varDelta t = \varDelta \delta . \left(\frac{tang\,\varphi}{sin\,t} - \frac{tang\,\delta}{tang\,t}\right) \text{ in Bogenminuten}$$

Für den Fall, daß es sich um die Beobachtung gleicher Sonnenhöhen handelt, ist t sehr angenähert gleich der halben Zwischenzeit, so daß man in dieser Gleichung t durch $\tau/_2$ ersetzen kann. Ist $\varDelta \delta$ in Bogenminuten gegeben, so würde man auch $\varDelta t$ in Bogenminuten erhalten. Man muß also, um $\varDelta t$ in Zeitsekunden zu bekommen, noch mit 4 multiplizieren. Also

$$\varDelta t = 4 . \varDelta \delta . \left(\frac{tang\,\varphi}{sin\,\tau/_2} - \frac{tang\,\delta}{tang\,\tau/_2}\right) \text{ in Zeitsekunden}$$

Bezeichnet man die stündliche Änderung der Abweichung mit d, und wie bisher die Zwischenzeit mit τ, so ist

$$\varDelta \delta = \tau . d$$

also

$$\varDelta t = 4 . \tau . d . \left(\frac{tang\,\varphi}{sin\,\tau/_2} - \frac{tang\,\delta}{tang\,\tau/_2}\right)$$

Setzt man schließlich diesen Wert in die Gleichung 1. ein, so erhält man zur Bestimmung der Uhrzeit im wahren Ortsmittage die Formel

$$U = U_m - 2 . \tau . d . \left(\frac{tang\,\varphi}{sin\,\tau/_2} - \frac{tang\,\delta}{tang\,\tau/_2}\right)$$

oder

$$2. \ldots \quad U = U_m + 2 . \tau . d \left(\frac{tang\,\delta}{tang\,\tau/_2} - \frac{tang\,\varphi}{sin\,\tau/_2}\right)$$

oder, wenn man

$$\frac{tang\,\delta}{tang\,\tau/_2} = A \qquad - \frac{tang\,\varphi}{sin\,\tau/_2} = B$$

setzt,

$$3. \ldots\ldots\ldots \quad \boldsymbol{U = U_m + 2 . \tau . d . (A + B)}$$

Die Werte von A und B lassen sich unmittelbar der Tafel 38. [33.] entnehmen, und zwar der Wert A, indem man in die Tafel A mit der halben Zwischenzeit und der Abweichung (an Stelle des Stundenwinkels und der Breite) eingeht;

und der Wert B, indem man in die Tafel B mit der halben Zwischenzeit und der Breite (an Stelle des Stundenwinkels und der Abweichung) eingeht.

In betreff der Vorzeichen ist folgendes zu bemerken:

Die stündliche Änderung der Abweichung d ist positiv, wenn sich die Sonne dem oberen Pole nähert; sie ist negativ, wenn sie sich von ihm entfernt.

Der Wert A ist positiv, wenn die Abweichung gleichnamig mit der Breite, er ist negativ, wenn die Abweichung ungleichnamig mit der Breite ist. Hierbei ist aber Voraussetzung, daß die Zwischenzeit kleiner als 12^{st} ist. Im anderen Falle hat A das entgegengesetzte Zeichen.

Der Wert B ist stets negativ.

§ 273. Beobachtung. Da die vormittägige und die nachmittägige Beobachtung an demselben Orte gemacht werden müssen, so ist eine Standbestimmung durch gleiche Sonnenhöhen fast ausschließlich im Hafen möglich. Man bedient sich daher in den meisten Fällen zur Beobachtung eines künstlichen Horizontes. Es ist dies auch dann zu empfehlen, wenn eine Beobachtung über der Kimm möglich ist, da infolge der Unsicherheit der Kimmtiefe gute Resultate mit Kimmabständen nicht zu erwarten sind.

Der Wert dieser Zeitbestimmung beruht vornehmlich darauf, daß sie unabhängig von allen konstanten Fehlern ist, so daß sich auch noch beim Gebrauche eines mangelhaften Instrumentes ein gutes Resultat erzielen läßt. Ob ein Fehler in der Beobachtung gemacht wird, ist gleichgültig, wenn nur nachmittags derselbe gemacht wird wie vormittags.

Da man sich nur ungern mit einer einzigen Beobachtung begnügt, so beobachtet man vormittags die beiden Zeiten, wo die Oberränder ineinander und die Unterränder auseinander gehen, und ohne an der Einstellung des Instrumentes etwas zu ändern (um Ablesefehler zu vermeiden), nachmittags die Zeiten, wo in umgekehrter Reihenfolge die Unterränder ineinander und die Oberränder auseinander gehen. Wünscht man eine noch größere Reihe von Beobachtungen zu nehmen, so empfiehlt es sich, mehrere Instrumente zu benutzen, anstatt daß man die Einstellung des Instrumentes verändert.

§ 274. Berechnung gleicher Sonnenhöhen. Um mit Hülfe gleicher Sonnenhöhen den Stand eines Chronometers zu bestimmen, verfährt man, wie folgt:

1. Man bestimmt die halbe Zwischenzeit und die Mittelzeit aus den Uhrzeiten der vormittägigen und der nachmittägigen Beobachtung. Hat man mehrere Beobachtungen hinter einander gemacht, so bestimmt man die Mittelzeit aus jedem zusammengehörigen Paare von Beobachtungen und nimmt nachher das Mittel dieser Mittelzeiten. Die Zwischenzeit wird genau genug, wenn man die Zwischenzeit der ersten vormittägigen und der ersten nachmittägigen bezw. der letzten vormittägigen und der letzten nachmittägigen Beobachtungen nimmt.

2. Dann bestimmt man die angenäherte mittlere Greenwicher Zeit des wahren Ortsmittages.

3. Mit Hülfe dieser Zeit entnimmt man dem Jahrbuche die Abweichung der Sonne nebst ihrer stündlichen Änderung, sowie die Zeitgleichung.

4. Hierauf berechnet man die Mittagsverbesserung nach § 272.

5. Durch Anbringen der Mittagsverbesserung an die Mittelzeit erhält man die Uhrzeit im wahren Ortsmittage.

6. Hierauf bestimmt man die genaue mittlere Greenwicher Zeit der Sonnenkulmination.

7. Durch Vergleichen der Uhrzeit mit der mittleren Greenwicher Zeit erhält man den Stand.

Beispiel 1. Am 17. Juli 1903 werden in Bremen (53° 4′ N und 8° 47,5′ O) nach einem Chronometer, dessen Stand etwa 1^m nach ist, um

vorm. $8^u\ 29^m\ 10^s$ und nachm. $2^u\ 33^m\ 4^s$

gleiche Sonnenhöhen beobachtet. Welcher genaue Stand des Chronometers folgt hieraus?

2. Chr. Z. = $26^u\ 33^m\ 4^s$	1. Chr. Z. = $20^u\ 29^m\ 10^s$
1. Chr. Z. = $20^u\ 29^m\ 10^s$	2. Chr. Z. = $26^u\ 33^m\ 4^s$
$\tau = 6^{st}\ 3^m\ 54^s$	$U_m = 23^u\ 31^m\ 7^s$
$\tau/_2 = 3^{st}\ 1^m\ 57^s$	

Ang. Chr. Z. d. Kulm. (U_m) = $23^u\ 31^m$ den 16. Juli
Std. = $+\ 1^m$
ang. M. G. Z. = $23^u\ 32^m$ den 16. Juli.

Hierfür ergiebt sich aus dem Jahrbuche

$\odot\delta = 21°\ 22'\ N$ $\quad d = -0{,}41'$ $\quad e = +\ 5^m 49^s$

Taf. 38. [33.]: $A = +\ 0{,}38$	W. O. Z. d. Kulm. = $0^u\ 0^m\ 0^s$
$B = -\ 1{,}86$	$e = +\ 5^m\ 49^s$
$A + B = -\ 1{,}48$	M. O. Z. d. Kulm. = $0^u\ 5^m\ 49^s$
$\times 2 . \tau . d = -\ 4{,}96$	Z. U. = $-\ 0^{st}\ 35^m\ 10^s$
Ver. = $+\ 7^s$	M. G. Z. d. Kulm. = $23^u\ 30^m\ 39^s$
$U_m = 23^u\ 31^m\ 7^s$	Chr. Z. d. Kulm. = $23^u\ 31^m\ 14^s$
Chr. Z. d. Kulm. = $23^u\ 31^m\ 14^s$	Stand = $0^{st}\ 0^m\ 35^s$ vor geg. M. G. Z.

Beispiel 2. Am 7. August 1903 beobachtet man in Elsfleth (53° 14,4′ N und 8° 27,8′ O) nach einem Chronometer, dessen Stand ungefähr 2^m nach ist, zu den unten folgenden Zeiten gleiche Sonnenhöhen. Welchen Stand hat das Chronometer?

vormittags	nachmittags	Mittelzeiten
$9^u\ 30^m\ 12^s$	$1^u\ 30^m\ 0^s$	$23^u\ 30^m\ 6{,}0^s$
$30^m\ 40^s$	$29^m\ 32^s$	$23^u\ 30^m\ 6{,}0^s$
$31^m\ 35^s$	$28^m\ 38^s$	$23^u\ 30^m\ 6{,}5^s$
$32^m\ 3^s$	$28^m\ 8^s$	$23^u\ 30^m\ 5{,}5^s$
		$24{,}0 : 4$
$\tau = 3^{st}\ 57^m\ 57^s$		
$\tau/_2 = 1^{st}\ 58^m\ 58^s$		$U_m = 23^u\ 30^m\ 6{,}0^s$

Ang. Chr. Z. d. Kulm. (U_m) = $23^u\ 30^m$ den 6. Aug.
Std. = $+\ 2^m$
ang. M. G. Z. = $23^u\ 32^m$ den 6. Aug.

Hierfür ergiebt sich aus dem Jahrbuche

$\odot\delta = 16^{\circ}\,41'\,N$ $\quad d = -0{,}69 \quad$ $e = +\,5^{m}\,43^{s}$

Taf. 38. [33.]: A =	$+\ 0{,}54$	W. O. Z. d. Kulm. =	$0^{u}\ 0^{m}\ 0^{s}$
B =	$-\ 2{,}73$	e =	$+\ 5^{m}\ 43^{s}$
$A + B$ =	$-\ 2{,}19$	M. O. Z. d. Kulm. =	$0^{u}\ 5^{m}\ 43^{s}$
$\times 2 \cdot \tau \cdot d$ =	$-\ 5{,}52$	Z. U. =	$-0\ 33^{m}\ 51^{s}$
Ver. =	$+\ 12{,}1^{s}$	M. G. Z. d. Kulm. =	$23^{u}\ 31^{m}\ 52^{s}$
U_m =	$23^{u}\ 30^{m}\ 6{,}0^{s}$	Chr. Z. d. Kulm. =	$23^{u}\ 30^{m}\ 18^{s}$
Chr. Z. d. Kulm. =	$23^{u}\ 30^{m}\ 18^{s}$	Stand =	$0^{st}\ 1^{m}\ 34^{s}$ nachgeg. M.G.Z.

§ 275. Genauigkeit der Zeitbestimmung durch gleiche Sonnenhöhen.

Wie direkt aus den Werten der Tafel 38. [33.] ersichtlich ist, kann ein kleiner Fehler in der Breite, der Abweichung oder der Zwischenzeit keinen merklichen Einfluß auf die Mittagsverbesserung ausüben. Ein Fehler in der Mittagsverbesserung kann aber durch zwei Ursachen entstehen.

1. Der Wert $(A + B)$ kann, zumal wenn nicht mit großer Sorgfalt eingeschaltet wird, leicht um ein bis zwei Zehntel falsch der Tafel entnommen werden. Da die stündliche Änderung bis zu 1′ groß werden kann, so folgt für die Mittagsberichtigung ein möglicher Fehler von einigen Zehntel Sekunden.

2. Als stündliche Änderung ist im Jahrbuch die mittlere stündliche Änderung während eines Tages angegeben. Die mittlere stündliche Änderung während der Zwischenzeit der Beobachtungen, die man eigentlich benutzen müßte, kann um etwas über ein hundertstel Sekunde von der im Jahrbuche angegebenen stündlichen Änderung abweichen. Besonders ist dies der Fall, wenn die stündliche Änderung klein ist. Auf diese Weise kann ein Fehler in der Mittagsverbesserung von etwa $0{,}5^{s}$ entstehen.

Der Gesamtfehler der Mittagsverbesserung ist also stets kleiner als eine Sekunde.

Von Einfluß auf die Genauigkeit des Resultates sind ferner die Fehler der Beobachtung. Da es auf die Größe der Höhe gar nicht ankommt, sondern nur darauf, daß die nachmittägige der vormittägigen gleich ist, so folgt, daß konstante Fehler bei beiden Beobachtungen die Genauigkeit des Resultates nicht beeinträchtigen können.

Hat man bei beiden Beobachtungen an der Einstellung des Instrumentes nichts geändert, so liegt die einzige Fehlerquelle in der Beobachtung der Berührung der Sonnenränder. Je schneller die Sonne ihre Höhe ändert, um so genauer läßt sich der Zeitpunkt der Berührung feststellen, um so kleiner wird demnach der Fehler in der Zeit sein. Die günstigste Zeit für die Beobachtung gleicher Sonnenhöhen ist also, wenn die Sonne im ersten Vertikal steht.

Die Beobachtung gleicher Sonnenhöhen erfordert übrigens, wenn man wirklich Nutzen aus dieser Methode ziehen will, große Sorgfalt und Aufmerksamkeit.

Gezeiten.

§ 276. Beschreibung der Gezeitenerscheinungen. Unter Gezeiten (Tiden) versteht man das regelmäßige Heben und Senken des Wasserspiegels, das innerhalb eines Tages gewöhnlich zweimal zu beobachten ist. Den höchsten Wasserstand nennt man Hochwasser, den niedrigsten Niedrigwasser. Die Zeit des Steigens des Wassers, also die Zeit von Niedrigwasser bis Hochwasser heißt Flut, die Zeit des Sinkens, also die Zeit von Hochwasser bis Niedrigwasser Ebbe. Die mittlere Dauer sowohl der Ebbe, wie auch der Flut beträgt 6^{st} 12^{m}, so daß sich die ganze Erscheinung in einem mittleren Zeitraume von 12^{st} 25^{m} wiederholt. Den Unterschied zwischen dem niedrigsten und dem höchsten Wasserstande nennt man den Hub der Gezeit, auch Fluthöhe oder Flutwechsel; er ist an verschiedenen Orten der Erde sehr verschieden.

Schon früh hat man einen Zusammenhang zwischen der Zeit des Hoch- und des Niedrigwassers und der Zeit der Mondkulmination erkannt. An den Tagen des Neu- und des Vollmondes tritt das Hochwasser stets eine ganz bestimmte Zeit nach der Kulmination des Mondes ein; diese Zeit, die für verschiedene Orte verschieden ist, nennt man die Hafenzeit. Die Zeit zwischen der Mondkulmination und dem nächsten Hochwasser ist auch an den übrigen Tagen wenigstens angenähert gleich der Hafenzeit; ihre Abweichung von der Hafenzeit nennt man, da sich diese Abweichung nach Verlauf eines halben Monats wiederholt, die halbmonatliche Ungleichheit.

Auch in der Höhe des Hubes läßt sich eine halbmonatliche Periode beobachten. Das höchste Hochwasser und das niedrigste Niedrigwasser findet gewöhnlich 1 bis 2½ Tage nach dem Neu- und nach dem Vollmonde statt; man nennt diese Gezeiten Springzeiten oder Springfluten. Den kleinsten Hub, also das niedrigste Hochwasser und das höchste Niedrigwasser beobachtet man gewöhnlich 1 bis 2½ Tage nach dem ersten und dem letzten Viertel des Mondes; man nennt diese Gezeiten taube Gezeiten oder Nippfluten.

Außer der halbmonatlichen unterscheidet man noch eine tägliche Ungleichheit in der Zeit und im Hube. Die beiden an einem Tage stattfindenden Hochwasser sind im allgemeinen nicht allein der Höhe nach verschieden, sondern es zeigen sich auch Unregelmäßigkeiten in der Zeit des Eintrittes des Hoch- und des Niedrigwassers, indem die Zwischenzeit zwischen dem vormittägigen und dem nachmittägigen Hochwasser bald kürzer bald länger ist, als die Zeit zwischen dem nachmittägigen und dem folgenden vormittägigen Hochwasser. An manchen Orten der Erde tritt die eine Gezeit so sehr gegen die andere Gezeit zurück, daß man scheinbar jeden Tag nur ein Hoch- und ein Niedrigwasser hat.

Die Gezeiten zeigen oft, veranlaßt durch örtliche Verhältnisse, einen anderen Verlauf wie soeben angegeben. Besonders in die Augen fallend ist der außerordentlich große Hub (bis zu 15 m) an einzelnen Stellen der Erde. Man beobachtet diese Erscheinung hauptsächlich dort, wo die Flutwelle in einen langen, an seinem oberen Ende geschlossenen Meeresarm eintritt, wie z. B. im Bristol-Kanal.

In Flußmündungen pflegen Ebbe und Flut von ungleicher Dauer zu sein, und zwar ist stets die Flut von kürzerer Dauer als die Ebbe; diese Erscheinung ist veranlaßt durch den Gegenstau des Flusses. In vielen Flüssen setzt die Flut so plötzlich ein, daß es zu einer **Flutbrandung** kommt. Man versteht darunter eine hohe Gezeitenwelle, die brandend den Fluß hinaufläuft. Oft kommen mehrere Flutbrandungen hinter einander, bis das Wasser seinen höchsten Stand erreicht hat.

In einzelnen Flußläufen beobachtet man mehrere Hoch- und Niedrigwasser während einer Tide; gewöhnlich ist ein Hochwasser das höchste und dies wird dann als das eigentliche Hochwasser betrachtet.

§ 277. Erklärung der Gezeiten. Die Gezeiten entstehen durch die Anziehung, die der Mond und die Sonne auf das Wasser der Ozeane ausübt. Nach einem zuerst von dem englischen Gelehrten Newton aufgefundenen Gesetze (Newtonsches Gravitationsgesetz) übt ein Himmelskörper auf einen anderen eine Anziehungskraft aus, die proportional dem Produkte der Massen der beiden Himmelskörper und umgekehrt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung ist. Infolgedessen wirkt z. B. die Anziehungskraft des Mondes M auf die Erde im Punkte A stärker als im Mittelpunkte E und hier stärker als im Punkte B. Denkt man sich die Erde ganz mit Wasser bedeckt, so werden sich infolge dieser

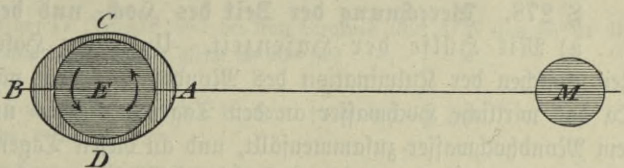


Fig. 227.

verschiedenen Anziehung zwei Anschwellungen bilden, die eine an der dem Monde zugewandten, die andere an der dem Monde abgewandten Seite; auf der einen Seite, weil das Wasser von dem festen Erdkerne weggezogen wird, auf der anderen Seite, weil der feste Erdkern von dem Wasser weggezogen wird. In den Punkten A und B ist Hochwasser, in den Punkten C und D Niedrigwasser.

Hiernach müßte stets die Zeit des Hochwassers mit der Zeit der oberen und der unteren Kulmination zusammenfallen. Dies entspricht indessen nicht der Wirklichkeit; infolge anderweitiger Einflüsse, wie örtlicher Widerstände, kommt es, daß das Hochwasser an den Küsten zu einer anderen bestimmten Zeit eintritt.

Hinge das Hochwasser nur von der Kulmination des Mondes ab, so müßte die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Hochwassern genau einen halben Mondestag, im Mittel also $12^{st}\,25^{m}$ betragen. In Wirklichkeit setzt sich aber das Hochwasser aus zweien zusammen, deren eines von der Sonne und deren anderes vom Monde herrührt. Da zwischen zwei Sonnenhochwassern eine Zwischenzeit von nur 12^{st} liegt und sich infolgedessen die Kulminationszeiten beider Gestirne gegen einander verschieben, so fallen an verschiedenen Tagen verschiedene Phasen der beiden Gezeiten zusammen. Zu den Zeiten des Neu- und Vollmondes fällt das Hochwasser des Mondes mit dem Hochwasser der Sonne zusammen, und es entsteht ein hohes Hochwasser, eine Springzeit; zur Zeit des ersten und des letzten Viertels fällt aber das Hochwasser des Mondes mit dem Niedrigwasser der Sonne zusammen, und es entsteht ein niedriges Hochwasser, eine taube Gezeit.

Eine Folge der Überlagerung dieser beiden Gezeiten ist es auch daß das eigentliche Hochwasser nicht immer mit dem Mondhochwasser zusammenfällt, sondern daß es bald früher, bald später als dieses eintritt. Die Beschleunigung bezw. Verzögerung des eigentlichen Hochwassers gegen das Mondhochwasser nennt man die halbmonatliche Ungleichheit; ihre Größe läßt sich aus der Größe der Mond- und der Sonnengezeit berechnen. An den Tagen des Neu- und des Vollmondes fällt das wirkliche Hochwasser mit dem Mondhochwasser zusammen.

Eine tägliche Ungleichheit der Gezeiten ist zu beobachten, wenn die Abweichung des Mondes von Null verschieden ist. Diejenigen Orte, die den Mond im Zenit bezw. im Nadir haben, haben nach der eben angegebenen Theorie das höchste Hochwasser. Hat nun z. B. der Mond nördliche Abweichung, so hat man auf Nordbreite zur Zeit der oberen Kulmination ein hohes Hochwasser, während das nächste Hochwasser, das zur Zeit der unteren Kulmination stattfindet, nur niedrig ist.

§ 278. Berechnung der Zeit des Hoch- und des Niedrigwassers.

a) Mit Hülfe der Hafenzeit. Unter der Hafenzeit versteht man die Zeit zwischen der Kulmination des Mondes und dem nächsten Mondhochwasser. Da das wirkliche Hochwasser an den Tagen des Neu- und des Vollmondes mit dem Mondhochwasser zusammenfällt, und an diesen Tagen der Mond im Mittage kulminiert, so kann man die Hafenzeit auch erklären als die wahre Ortszeit des am Tage des Neu- oder des Vollmondes nach-Mittag eintretenden ersten Hochwassers. Die Hafenzeit ist für denselben Ort stets dieselbe, ist aber für verschiedene Orte verschieden; man findet sie in Gezeitentafeln, Seekarten, Segelanweisungen und Leuchtfeuerverzeichnissen angegeben.

Um mit Hülfe der Hafenzeit die Zeit des Hochwassers zu bestimmen, kann man folgendermaßen verfahren: Man bestimmt nach § 188 die mittlere Ortszeit der Mondkulmination, und addiert dazu die Hafenzeit, die Summe ist die Zeit des Mondhochwassers. Hieraus findet man die Zeit des eigentlichen Hochwassers, indem man die halbmonatliche Ungleichheit anbringt. Diese Rechnung wird noch abgekürzt, wenn man sich der Tafel 18. des Nautischen Jahrbuches bedient. Diese Tafel enthält die Summe der Kulminationszeit des Mondes und der halbmonatlichen Ungleichheit, so daß man ohne weiteres die Zeit des Hochwassers erhält, wenn man zu der Tafelzeit die Hafenzeit addiert.

Dabei ist folgendes zu beachten:

1. Die für die halbmonatliche Ungleichheit verbesserte Kulminationszeit des Mondes wird genau so bestimmt, wie die gewöhnliche angenäherte Kulminationszeit des Mondes (vergleiche § 188, Seite 232).

2. Wird die Summe dieser Zeit und der Hafenzeit größer als 12^{st}, so fällt das Hochwasser auf den nächstfolgenden Tag; die Rechnung ist in diesem Falle mit dem vorhergehenden Datum-zu wiederholen (Beispiel 2).

3. Das zweite Hochwasser desselben Tages findet man durch Addition eines halben Mondestages. Da eine große Genauigkeit nicht erforderlich ist, genügt es stets, den halben Mondestag gleich $12{,}4^{st}$ zu setzen.

4. Die Zeit des Niedrigwassers erhält man durch Addition oder Subtraktion eines viertel Mondestages, der stets gleich $6{,}2^{st}$ gesetzt werden kann.

5. Wie eine Mondkulmination, so kann auch ein Hochwasser oder ein Niedrigwasser an gewissen Tagen ausfallen.

Beispiel 1. Wann ist am 1. Juli 1903 in Vigo ($42^\circ 15' N$ und $8^\circ 41' W$) Hoch- und Niedrigwasser, wenn die Hafenzeit gleich $3^{st}\ 15^m$ ist?

Naut. Jahrb. Tafel 18: Ver. Kulm.-Z. i. Gr. = $4^u\ 49^m$ den 1. Juli
$0{,}16^m \cdot 8{,}7 = +\ 1^m$
ber. Kulm.-Z. am Orte = $4^u\ 50^m$ den 1. Juli
Hf. Z. = $3^{st}\ 15^m$
= $8^u\ 5^m$ den 1. Juli
H. W. = $8{,}1^u$ nachm. ($-\ 6{,}2^{st}$) N. W. = $1{,}9^u$ nachm.
$-\ {}^1/_2$ Mondestag = $12{,}4^{st}$
H. W. = $7{,}7^u$ vorm. ($-\ 6{,}2^{st}$) N. W. = $1{,}5^u$ vorm.

Beispiel 2. Wann ist am 11. Januar 1903 bei Kap Virgines ($52^\circ 20' S$ und $68^\circ 21' W$) Hoch- und Niedrigwasser, wenn die Hafenzeit gleich $8^{st}\ 30^m$ ist?

Ver.-Kulm.-Z. i. Gr. = $9^u\ 30^m$ den 10. Jan. (nicht den 11. Jan.)
$0{,}18^m \cdot 68 = +\ 12^m$
ber. Kulm.-Z. am Orte = $9^u\ 42^m$ den 10. Jan.
Hf. Z. = $8^{st}\ 30^m$
= $18^u\ 12^m$ den 10. Jan.
H. W. = $6{,}2^u$ vorm. ($-\ 6{,}2^{st}$) N. W. = $0{,}0^u$ vorm.
$+\ {}^1/_2$ Mondestag = $12{,}4^{st}$
H. W. = $6{,}6^u$ nachm. ($-\ 6{,}2^{st}$) N. W. = $0{,}4^u$ nachm.

Beispiel 3. Wann ist am 8. September 1903 in Newhaven ($50^\circ 47' N$ und $0^\circ 4' O$) Hoch- und Niedrigwasser, wenn die Hafenzeit gleich $11^{st}\ 50^m$ ist?

Ver. Kulm.-Z. i. Gr. = $12^u\ 30^m$ den 7. Sept.
$0{,}09^m \cdot 0 = 0^m$
ber. Kulm.-Z. am Orte = $12^u\ 30^m$ den 7. Sept.
Hf. Z. = $11^{st}\ 50^m$
= $0^u\ 20^m$ den 8. Sept.
H. W. = $0{,}3^u$ nachm. ($+\ 6{,}2^{st}$) N. W. = $6{,}5^u$ nachm.
$-\ {}^1/_2$ Mondestag = $12{,}4^{st}$ $-\ 12{,}4^{st}$
(H. W. = $11{,}9^u$ nachm. den 7. Sept.) N. W. = $6{,}1^u$ vorm.
Vormittags findet kein H. W. statt.

Hat die Ebbe eine längere Dauer als die Flut, so ist das bei der Berechnung des Niedrigwassers zu berücksichtigen. Tritt z. B. an einem Orte das Niedrigwasser $7{,}0^{st}$ nach dem Hochwasser ein, so ist, um die Zeit des Niedrigwassers zu erhalten, entweder $7{,}0^{st}$ zur Zeit des Hochwassers zu addieren, oder $12{,}4^{st} - 7{,}0^{st} = 5{,}4^{st}$ von ihr zu subtrahieren.

Beispiel. Wann ist am 21. Dezember 1903 in Cuxhaven (53° 52′ N und 8° 43′ O) Hoch- und Niedrigwasser, wenn die Hafenzeit $0^u\ 49^m$ beträgt, und wenn das Niedrigwasser 6,9 Stunden nach dem Hochwasser stattfindet?

Ber. Kulm.-Z. i. Gr. =	$1^u\ 33^m$ den 21. Dez.		
$0{,}09^m \cdot 9$ =	$-\ 1^m$		
ber. Kulm.-Z. am Orte =	$1^u\ 32^m$ den 21. Dez.		
Hf. Z. =	$0^{st}\ 49^m$		
=	$2^u\ 21^m$ den 21. Dez.		
H. W. =	$2{,}4^u$ nachm.	$(+\ 6{,}9^{st})$	N. W. = $9{,}3^u$ nachm.
— $^1/_2$ Mondestag =	$12{,}4^{st}$		
H. W. =	$2{,}0^u$ vorm.	$(+\ 6{,}9^{st})$	N. W. = $8{,}9^u$ vorm.

b) Mit Hülfe der Gezeitentafel. Die Tafel 19a des Nautischen Jahrbuches enthält unmittelbar die mittleren Ortszeiten des Hoch- und des Niedrigwassers in Cuxhaven für jeden Tag des Jahres. Aus der dieser Tafel entnommenen Zeit des Hochwassers in Cuxhaven kann man die Hochwasserzeiten der wichtigsten Punkte der deutschen Nordseeküste mit Hülfe der Tafel 19b ableiten, indem man an die gefundenen Zeiten die Berichtigung aus dieser Tafel anbringt. Ebenso kann man aus der in Tafel 20a enthaltenen Hochwasserzeit an der London-Brücke die Hochwasserzeiten der wichtigsten Punkte der niederländischen, belgischen, französischen und britischen Küste mit Hülfe der Tafel 20b ableiten. Die vom Reichsmarineamt jährlich herausgegebenen Gezeiten-Tafeln enthalten unmittelbar die Zeiten des Hoch- und des Niedrigwassers für alle wichtigen Punkte der deutschen Küste und für eine Reihe ausländischer Küstenpunkte.

Beispiel 1. Wann ist am 19. März 1903 in Elsfleth Hoch- und Niedrigwasser?

Nautisches Jahrbuch Tafel 19a ergiebt

H. W. in Cuxhaven:	$4^u\ 24^m$ vorm.	und	$4^u\ 41^m$ nachm.
Tafel 19b Nr. 41:	$+\ 1^{st}\ 48^m$		$+\ 1^{st}\ 48^m$
H. W. in Elsfleth:	$6{,}2^u$ vorm.	und	$6{,}5^u$ nachm.
N. W. in Elsfleth: $(-\ 6{,}2^{st})$	$0{,}0^u$ vorm.		$0{,}3^u$ nachm.

Beispiel 2. Wann ist am 30. April 1903 in Dünkirchen Hoch- und Niedrigwasser?

Nautisches Jahrbuch Tafel 20a ergiebt

H. W. an der London-Brücke:	$3^u\ 31^m$ vorm.	und	$3^u\ 52^m$ nachm.
Tafel 20b:	$-\ 1^{st}\ 50^m$		$-\ 1^{st}\ 50^m$
H. W. in Dünkirchen:	$1{,}7^u$ vorm.	und	$2{,}0^u$ nachm.
N. W. in Dünkirchen:	$7{,}9^u$ vorm.	und	$8{,}2^u$ nachm.

§ 279. **Beschickung einer Lotung auf Niedrigwasser.** Die in den Seekarten verzeichneten Wassertiefen beziehen sich in der Regel auf das mittlere Niedrigwasser bei Springzeit (vergl. § 148). Will man daher eine gelotete Wassertiefe mit den Angaben der Karte vergleichen, so hat man, zumal wenn der Hub der Gezeit bedeutend ist, die Lotung zunächst auf den Wasserspiegel bei Niedrigwasser zu beschicken.

In offener See liegt zwischen Hoch- und Niedrigwasser eine Zeit von reichlich 6 Stunden. Wenn das Steigen und Sinken des Wasserspiegels gleichmäßig erfolgte, so würde in jeder Stunde, die zwischen der Lotung und dem nächsten Niedrigwasser liegt, $\frac{1}{6}$ des Hubes zu subtrahieren sein. Die Höhe des Wasserspiegels ändert sich indessen nicht gleichförmig; in der ersten Stunde nach Hochwasser ist das Fallen des Wassers gering, in der zweiten schon stärker, in der dritten und vierten am stärksten, nimmt in der fünften wieder ab und ist in der sechsten wiederum ganz gering. Ebenso ist es mit dem Steigen vom Niedrigwasser bis zum Hochwasser.

Theoretische Betrachtungen wie angestellte Beobachtungen haben übereinstimmend ergeben, daß das Wasser in der ersten Stunde nach Hochwasser etwa um $\frac{1}{16}$, in den beiden ersten Stunden um $\frac{1}{4}$, in den drei ersten Stunden um $\frac{1}{2}$, in den vier ersten Stunden um $\frac{3}{4}$, und in den fünf ersten Stunden, d. h. bis eine Stunde vor Niedrigwasser, um $\frac{15}{16}$ des ganzen Hubes fällt, und daß das Steigen nach Niedrigwasser in derselben Weise erfolgt.

Um daher eine Lotung auf Niedrigwasser zu beschicken, verfahre man nach folgender Regel:

Man bestimme die Zeit zwischen der Lotung und dem nächsten Hochwasser; ist diese Zwischenzeit

0^{st}	so subtrahiere man den ganzen Hub					
1^{st}	„	„	„	$\frac{15}{16}$	des	Hubes
2^{st}	„	„	„	$\frac{3}{4}$	„	„
3^{st}	„	„	„	$\frac{1}{2}$	„	„
4^{st}	„	„	„	$\frac{1}{4}$	„	„
5^{st}	„	„	„	$\frac{1}{16}$	„	„

von der geloteten Wassertiefe; ist die Zwischenzeit größer als 5^{st}, so ist ein Beschicken der geloteten Wassertiefe nicht nötig.

Ist die Zeit zwischen Hoch- und Niedrigwasser, wie es in den Flüssen gewöhnlich der Fall ist, kleiner oder größer als 6^{st}, so ist die soeben angegebene Beschickung entsprechend zu ändern.

Zur Bestimmung der Beschickung auf Niedrigwasser dient die Tafel 21. des Nautischen Jahrbuches, die diese Beschickung für eine Dauer der Ebbe bezw. der Flut von 4 bis 8 Stunden und für einen Hub von 1 bis 12 m enthält.

Beispiel 1. In der Nähe von Helgoland ($54^0\,11'\,N$ und $7^0\,53'\,O$, Hafenzeit $= 11^{st}\,48^m$) lotet man am 17. September 1903 nachmittags um $4\frac{1}{2}$ Uhr 14 m. Welches ist die Wassertiefe, die mit den Kartenangaben verglichen werden muß, wenn der Hub 3 m beträgt?

Ber. Kulm.-Z. i. Gr. $= 20^u\,20^m$ den 16. Sept.
$0{,}20^m \cdot 8 = \underline{\;-\;2^m}$
ber. Kulm.-Z. am Orte $= 20^u\,18^m$ den 16. Sept.
Hf. Z. $= \underline{11^{st}\,48^m}$
H. W. $= 8^u\;6^m$ nachm. den 17. Sept.
Z. d. Lotg. $= \underline{4^u\,30^m}$ nachm. den 17. Sept. Lotg. $=$ 14 m
Zw.-Z. $= 3^{st}\,36^m$: Taf. 21. d. Naut. Jahrb.: Besch. $= \underline{-\;1\text{ m}}$
Lotg. b. N. W. $=$ 13 m

Beispiel 2. Bei Bremerhaven (53° 33′ N und 8° 34′ O, Hafenzeit = $1^{st}\,18^{m}$, Hub = 3,3 m) lotet man am 30. April 1903 vormittags $11\frac{3}{4}$ Uhr 10 m. Das Niedrigwasser tritt 7 Stunden nach Hochwasser ein. Welche Tiefe hat man dort bei Niedrigwasser?

Ber. Kulm.-Z. i. Gr. =	$2^{u}\ 9^{m}$	den 30. April
$0{,}13^{m}.\,9$ =	$-\ 1^{m}$	
ber. Kulm.-Z. am Orte =	$2^{u}\ 8^{m}$	den 30. April
Hf. Z. =	$1^{st}\,18^{m}$	
H. W. =	$3^{u}\ 26^{m}$	nachm. den 30. April
$-\ {}^{1}/_{2}$ Mondestag =	$12^{st}\,24^{m}$	
H. W. =	$3^{u}\ 2^{m}$	vorm. den 30. April

Nächstes H. W. =	$3^{u}\ 26^{m}$ nachm.			
Z. d. Lotg. =	$11^{u}\ 45^{m}$ vorm.		Lotg. =	10 m
Zw.-Z. =	$3^{st}\,41^{m}$.		Besch. =	— 0 m *)
			Lotg. d. N. W. =	10 m

*) Da die Lotung vor Hochwasser, also während der Flut gemacht ist, so ist in die Tafel 21. des Nautischen Jahrbuches mit der Zwischenzeit in die Spalte 5^{st} (= $12^{st} - 7^{st}$) einzugehen.

Der Kompaß an Bord eiserner Schiffe.

Bestimmung der Ablenkung.

§ 280. **Einleitung.** Die Lehre von der Ablenkung der Kompasse an Bord eiserner Schiffe ist im neunzehnten Jahrhundert infolge der fast ausschließlichen Verwendung des Eisens als Baumaterial der Schiffe zu einem der wichtigsten Kapitel der nautischen Wissenschaft geworden; es ist daher berechtigt, daß ihr ein besonderer Abschnitt in diesem Lehrbuche der Steuermannskunst gewidmet wird.

Lange Zeit hat man sich bemüht, die Störungen des Kompasses durch den Schiffsmagnetismus vermittelst Kompensationsvorrichtungen vollständig zu beseitigen. Diese Kompensationsvorrichtungen, welche zuerst von dem englischen Astronomen Airy, dem langjährigen Leiter der Greenwicher Sternwarte, angegeben worden sind, bestehen in verschiedenen Magneten und weichen Eisenmassen, die in der Nähe des Kompasses angebracht werden. Leider sind alle Versuche, den Kompaß durch Anwendung solcher mechanischer Hülfsmittel völlig fehlerfrei zu machen und zu erhalten, an der Schwierigkeit der vorliegenden Aufgabe gescheitert. Die Kompensationsvorrichtungen erlauben nur, die Größe der Ablenkungen in gewisse Grenzen einzuschließen, die übrigbleibenden Beträge müssen aufs sorgfältigste beobachtet und bei der Navigierung des Schiffes in Rechnung gezogen werden.

Von der Kompensation der Kompasse wird weiter unten die Rede sein. Hier wird zunächst ein Kompaß vorausgesetzt, der entweder von Natur keine übermäßige (20^0 überschreitende) Ablenkung hat, oder dessen Ablenkung doch durch Kompensation in diesen Bereich zurückgeführt ist.

Um die Ablenkungen des Kompasses kennen zu lernen, wird es das Einfachste sein, das Schiff herumzuschwaien und die Ablenkungen von Strich zu Strich zu beobachten. Die wichtigsten für die Bestimmung der Ablenkung üblichen Beobachtungsmethoden sollen im folgenden beschrieben werden.

§ 281. **Beobachtungsmethoden zur Bestimmung der Ablenkung.**
1. Fernpeilungen. Man peilt einen entfernten Punkt, dessen magnetische Peilung bekannt ist. Damit die Peilung beim Schwaien keinen nennenswerten Verschub erleidet (höchstens einen halben Grad), muß die Entfernung des gepeilten Gegenstandes mindestens etwa das hundertfache des Durchmessers des Schwaiungskreises betragen, oder wenn r der Halbmesser des Schwaiungs-

kreises in Metern ist, so muß die Entfernung mindestens gleich $\frac{1}{8}\, r$ Seemeilen sein (vergl. § 76, Beispiel 1.).

Stimmen die Kompaßpeilungen beim Schwaien untereinander und mit der magnetischen Peilung überein, so ist keine Ablenkung vorhanden. Andernfalls schreibt man in eine Tafel zu jedem Kompaßkurse, den das Schiff anliegt, die Kompaßpeilung und die daraus durch Vergleich mit der magnetischen Peilung gefundene Ablenkung. Muß man vom Namen der Kompaßpeilung zum Namen der magnetischen Peilung mit der Sonne herumgehen, so erhält die Ablenkung den Namen Ost, im entgegengesetzten Falle den Namen West. Ost-Ablenkung kennzeichnet man auch durch das Pluszeichen, West-Ablenkung durch das Minuszeichen.

Die magnetische Peilung erhält man entweder aus der Karte, nachdem man darin den Schiffsort mit möglichster Genauigkeit durch Peilungen oder durch die Aufgabe der vier Punkte festgelegt hat, oder durch einen Kompaß, den man an Land bringen und frei von magnetischen Einflüssen in der Verbindungslinie des Schwaiungspunktes mit dem gepeilten Punkte aufstellen läßt. Läßt sich keine dieser Bestimmungen der magnetischen Peilung genau genug ausführen, so muß man als magnetische Richtung das arithmetische Mittel der Kompaßpeilungen für sämtliche 32 oder für jeden zweiten oder für jeden vierten Strich nehmen. Dieses Mittel kann freilich unter Umständen mit einem konstanten Fehler behaftet sein (vergl. § 297).

Beispiel 1. Auf einer Gezeitreede vor Anker liegend, peilt man einen 10^{sm} entfernten Leuchtturm, dessen magnetische Peilung $N\,83^\circ\,O$ ist, in den verschiedenen Lagen des Schiffes folgendermaßen am Kompaß:

Magnetische Peilung: $N\,83^\circ\,O$

Kurs am Peilkompaß	Peilung am Kompaß	Ablenkung	Kurs am Peilkompaß	Peilung am Kompaß	Ablenkung
N	*N* 83° *O*	0°	*S*	*N* 83° *O*	0°
NNO	*N* 81° *O*	2° *O*	*SSW*	*N* 85° *O*	2° *W*
NO	*N* 79° *O*	4° *O*	*SW*	*N* 86° *O*	3° *W*
ONO	*N* 78° *O*	5° *O*	*WSW*	*N* 88° *O*	5° *W*
O	*N* 78° *O*	5° *O*	*W*	*N* 89° *O*	6° *W*
OSO	*N* 78° *O*	5° *O*	*WNW*	*N* 88° *O*	5° *W*
SO	*N* 80° *O*	3° *O*	*NW*	*N* 87° *O*	4° *W*
SSO	*N* 81° *O*	2° *O*	*NNW*	*N* 85° *O*	2° *W*

In den folgenden Beispielen sind nur die Beobachtungen für die Haupt- und die Hauptzwischenstriche angegeben.

Beispiel 2. Ein Dampfer peilt, auf der Weser vor Anker liegend, den Kirchturm von Imsum, dessen magnetische Peilung $N\,4^\circ\,W$ ist, wie folgt:

Magnetische Peilung: $N\,4^\circ\,W$

Kurs a. K.	Peilung a. K.	Ablenkung	Kurs a. K.	Peilung a. K.	Ablenkung
N	*N* 1° *W*	3° *W*	*S*	*N* 5° *W*	1° *O*
NO	*N* 15° *W*	11° *O*	*SW*	*N* 1° *W*	3° *W*
O	*N* 17° *W*	13° *O*	*W*	*N* 7° *O*	11° *W*
SO	*N* 10° *W*	6° *O*	*NW*	*N* 10° *O*	14° *W*

Beispiel 3. Ein anderer Dampfer peilt von derselben Stelle aus den Kirchturm von Geestendorf, dessen magnetische Peilung *S* 82° *O* ist, wie folgt:

Magnetische Peilung: *S* 82° *O*

Kurs a. K.	Peilung a. K.	Ablenkung	Kurs a. K.	Peilung a. K.	Ablenkung
N	*S* 84° *O*	2° *O*	*S*	*S* 79° *O*	3° *W*
NO	*N* 80° *O*	18° *O*	*SW*	*S* 72° *O*	10° *W*
O	*N* 79° *O*	19° *O*	*W*	*S* 64° *O*	18° *W*
SO	*S* 89° *O*	7° *O*	*NW*	*S* 67° *O*	15° *W*

2. Gegenseitige Peilungen. Ein anderes Verfahren, die Ablenkung eines Kompasses zu bestimmen, besteht darin, daß man einen Kompaß in eisenfreier Umgebung am Lande aufstellt und dann bei jeder Lage des Schiffes gleichzeitig von Bord aus den Kompaß an Land und von Land aus den Kompaß an Bord peilt. Giebt man dem am Landkompasse abgelesenen Striche den entgegengesetzten Namen, so ist der Unterschied zwischen diesem und dem am Bordkompasse abgelesenen Striche die Ablenkung für den Kurs, den das Schiff während der Peilung anliegt.

Durch ein Signal, das von Bord aus dem Beobachter am Lande, etwa durch plötzliches Dippen einer Flagge, gegeben wird, läßt sich die Gleichzeitigkeit beider Peilungen ermöglichen. Um diese nachträglich prüfen zu können, merken beide Beobachter die Zeit der Peilungen nach zwei vorher gleich gestellten Uhren an.

Uhrzeiten	Kurs am Bordkompaß	Gleichzeitige Peilungen		Ablenkung des Bordkompasses
		Ablesung am Bordkompaß	Ablesung am Landkompaß	
9ᵘ 10ᵐ vorm.	*N*	*S* 38° *O*	*N* 41° *W*	3° *W*
9ᵘ 12ᵐ „	*NzO*	*S* 42° *O*	*N* 42° *W*	0°
9ᵘ 14ᵐ „	*NNO*	*S* 47° *O*	*N* 44° *W*	3° *O*
9ᵘ 16ᵐ „	*NOzN*	*S* 52° *O*	*N* 44° *W*	8° *O*
9ᵘ 18ᵐ „	*NO*	*S* 58° *O*	*N* 45° *W*	13° *O*
9ᵘ 20ᵐ „	*NOzO*	*S* 63° *O*	*N* 46° *W*	17° *O*

Und so weiter für jeden Kompaßstrich.

3. Deckpeilungen und Peilungen gegenüberliegender Orte. Steuert ein Schiff auf einem Revier oder längs einer Küste, so bietet sich öfters Gelegenheit, durch Deckpeilungen die Ablenkung für den anliegenden Kurs zu ermitteln. Man peilt zwei Objekte, Türme, Baken, Mühlen u. s. w. in dem Augenblicke, wenn sie sich vom Schiffe aus gesehen in Deckung befinden. Kennt man die magnetische Peilung der Verbindungslinie, etwa aus einer Spezialkarte oder einer Segelanweisung, so giebt der Vergleich der Kompaßpeilung mit dieser magnetischen Peilung die Ablenkung für den gesteuerten Kurs. Wenn der Kurs des Schiffes zwischen den beiden Objekten hindurchführt, wie es häufig vorkommt, wenn man

auf einem Flusse fährt, so läßt sich der Augenblick, in dem das Schiff die Verbindungslinie schneidet, mit Hülfe eines kleinen Apparates, des Prismenkreuzes, bestimmen (vergl. Handbuch der Nautischen Instrumente § 146). Peilt man im Augenblicke des Passierens der Verbindungslinie das eine oder das andere der Objekte, so giebt der Vergleich dieser Peilung mit der bekannten magnetischen Richtung der Verbindungslinie die Ablenkung für den gesteuerten Kurs.

Beispiel. Die Elbe hinuntersteuernd peilt man auf *NW*-Kurs Vorstel und Jork in Linie *S* 61° *W* am Kompaß. Da die magnetische Peilung *S* 54,8° *W* ist, so hat der Kompaß auf *NW*-Kurs 6,2° *W* Ablenkung.

Da man bei Deckpeilungen den Vorteil hat, von der Entfernung der gepeilten Punkte unabhängig zu sein und demgemäß auch näher gelegene Gegenstände benutzen zu können, was namentlich bei unsichtigem Wetter von Bedeutung ist, so hat z. B. die Kaiserliche Marine besondere Vorkehrungen für diese Art der Deviationsbestimmung getroffen. So sind in Kiel und Wilhelmshaven zu diesem Zwecke eine Anzahl Baken errichtet, deren Deckpeilungen mit bestimmten Kirchtürmen sich seewärts über ein Gebiet erstrecken, auf dem ein Schiff bequem im Kreise drehen kann.

4. Peilungen eines Gestirnes. Das für den Seemann weitaus wichtigste Mittel, die Ablenkung seines Kompasses zu finden, besteht in der Peilung von Gestirnen, deren wahres Azimut er zu bestimmen imstande ist. Durch den Vergleich der Peilung mit dem wahren Azimut erhält man zunächst die Gesamtmißweisung des Peilkompasses, aus der man durch Addition der entgegengesetzten reinen Mißweisung die Ablenkung für den anliegenden Kurs ableitet (vergl. § 231). Dieses Verfahren ist auf hoher See das allein anwendbare, aber auch in Sicht des Landes und auf Flußläufen ist es in vielen Fällen das bequemste.

Beispiel. Für den Normalkompaß des Dampfers „Malabar" wurden auf 12° 30′ *N* und 44° 0′ *O* die folgenden Werte gefunden. Die Ortsmißweisung betrug 4° *W*.

Kurs am Kompaß	Wahre Ortszeit	Kompaßpeilung der Sonne	Wahres Azimut	Gesamtmißweisung	Entgeg. Ortsmißweisung	Ablenkung
NW	6ᵘ 17ᵐ Vm.	*S* 59° *O*	*S* 68° *O*	9° *W*	4° *O*	5° *W*
N	6ᵘ 20ᵐ „	*S* 64° *O*	*S* 68° *O*	4° *W*		0°
NO	6ᵘ 23ᵐ „	*S* 69° *O*	*S* 67° *O*	2° *O*		6° *O*
O	6ᵘ 26ᵐ „	*S* 63° *O*	*S* 67° *O*	4° *W*		0°
SO	6ᵘ 30ᵐ „	*S* 56° *O*	*S* 67° *O*	11° *W*		7° *W*
S	6ᵘ 33ᵐ „	*S* 60° *O*	*S* 67° *O*	7° *W*		3° *W*
SW	6ᵘ 36ᵐ „	*S* 66° *O*	*S* 67° *O*	1° *W*		3° *O*
W	6ᵘ 40ᵐ „	*S* 61° *O*	*S* 66° *O*	5° *W*		1° *W*

§ 282. Deviationskurven. Napiersches Diagramm. Beim Schwaien eines Schiffes zum Zwecke der Deviationsbestimmung läßt es sich nicht immer ermöglichen, daß das Schiff bei der Beobachtung jedesmal gerade auf einem vollen Kompaßstriche liegt. Die Beobachtung erfolgt alsdann so, daß ein

Beobachter in kurzen Zwischenräumen, ungefähr von Strich zu Strich, Peilungen nimmt, während ein anderer die gleichzeitig anliegenden Kurse abliest. Es handelt sich dann darum, aus den gemachten Beobachtungen die Ablenkung für die vollen Kompaßstriche durch Einschalten zu finden. Man bedient sich dazu allgemein der Lösung durch Zeichnung oder graphischen Darstellung. Man denke sich den Rand der Kompaßrose mit ihrer Grad- und Stricheinteilung in eine aufrechte gerade Linie ausgestreckt. Auf dieser Linie, die man die Achse nennt, trage man in jedem Punkte, in dem beobachtet war, die gefundene Ablenkung senkrecht zu dieser Achse nach irgend einem den Ablenkungswerten angepaßten Maßstabe auf, und zwar östliche Ablenkungen nach rechts, westliche Ablenkungen nach links. Verbindet man alsdann die Endpunkte der so aufgetragenen Strecken durch eine schlank ausgezogene Linie, so stellt diese den Verlauf der Deviation dar. Man nennt sie die Ablenkungskurve und kann aus ihr leicht die für die vollen Kompaßstriche geltenden Werte durch Nachmessen entnehmen. Außerdem kann man durch Beobachtungsstörungen ausgefallene Ablenkungswerte ergänzen. Die graphische Darstellung des Verlaufes der Ablenkung bietet zugleich das denkbar bequemste Mittel, um etwaige Beobachtungsfehler zu erkennen und auszumerzen. Dies geschieht beim Ausziehen der Kurve dadurch, daß man an solchen Stellen, an denen die Punkte ersichtlich nicht regelmäßig auf einander folgen, die ausspringenden Punkte außerhalb, die einspringenden Punkte innerhalb der zu ziehenden Linie läßt.

In der nebenstehenden Figur 228 sind die in der nachfolgenden Tabelle angegebenen, an Bord des Dampfers „Pfalz" gemachten Beobachtungen graphisch dargestellt und beim Zeichnen der Kurve ausgeglichen. In der Praxis zeichnet man selbstverständlich die Figur mindestens in doppelter Größe. Den Maßstab für das Abtragen der Ablenkungen kann man beliebig wählen; er ist von dem der Rosenteilung unabhängig.

Ablenkungskurve für die „Pfalz".

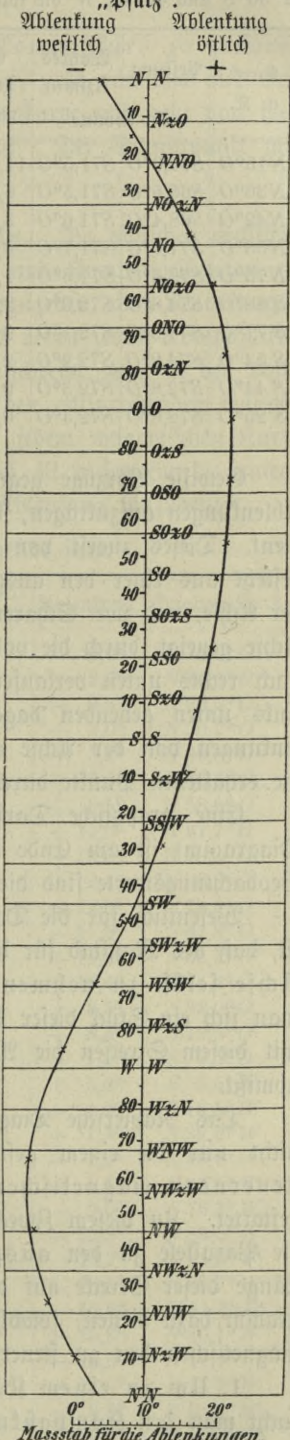


Fig. 228.

Für den Brückenkompaß des Dampfers „Pfalz" wurden am 23. November 1893 auf 22° 30′ *S* und 40° 45′ *W* die folgenden Werte gefunden. Die Ortsmißweisung betrug 9° *W*.

Kurs a. K.	Peilung der Sonne	Wahres Azimut der Sonne	Gesamtmißw.	Ablenkung	Kurs a. K.	Peilung der Sonne	Wahres Azimut der Sonne	Gesamtmißw.	Ablenkung
*N*15°*O*	*S*60,0°*O*	*S*71,5°*O*	11,5°*W*	− 2,5°	*S* 8°*O*	*S*70,5°*O*	*S*72,5°*O*	2,0°*W*	+ 7,0°
*N*30°*O*	*S*65,5°*O*	*S*71,5°*O*	6,0°*W*	+ 3,0°	*S* 9°*W*	*S*69,2°*O*	*S*72,7°*O*	3,5°*W*	+ 5,5°
*N*42°*O*	*S*68,4°*O*	*S*71,6°*O*	3,2°*W*	+ 5,8°	*S* 29°*W*	*S*66,8°*O*	*S*72,8°*O*	6,0°*W*	+ 3,0°
*N*56°*O*	*S*71,7°*O*	*S*71,7°*O*	0,0°	+ 9,0°	*S* 50°*W*	*S*61,7°*O*	*S*73,0°*O*	11,3°*W*	− 2,3°
*N*75°*O*	*S*73,6°*O*	*S*71,8°*O*	1,8°*O*	+10,8°	*S* 66°*W*	*S*57,5°*O*	*S*73,0°*O*	15,5°*W*	− 6,5°
S 88°*O*	*S*74,8°*O*	*S*72,0°*O*	2,8°*O*	+11,8°	*S* 85°*W*	*S*53,1°*O*	*S*73,1°*O*	20,0°*W*	−11,0°
S 71°*O*	*S*74,6°*O*	*S*72,1°*O*	2,5°*O*	+11,5°	*N*65°*W*	*S*48,7°*O*	*S*73,2°*O*	24,5°*W*	−15,5°
S 54°*O*	*S*74,2°*O*	*S*72,2°*O*	2,0°*O*	+11,0°	*N*46°*W*	*S*49,3°*O*	*S*73,3°*O*	24,0°*W*	−15,0°
S 44°*O*	*S*72,8°*O*	*S*72,3°*O*	0,5°*O*	+ 9,5°	*N*25°*W*	*S*51,1°*O*	*S*73,4°*O*	22,3°*W*	−13,3°
S 25°*O*	*S*72,6°*O*	*S*72,4°*O*	0,2°*O*	+ 9,2°	*N*10°*W*	*S*55,0°*O*	*S*73,5°*O*	18,5°*W*	− 9,5°

Gewisse Vorzüge gegenüber der soeben beschriebenen einfachsten Art, die Ablenkungen aufzutragen, hat eine andere, die sich des Napierschen Netzes bedient. Dieses zuerst von dem englischen Ingenieur Napier angewandte Netz besteht aus einer den ausgestreckten Rand der Rosenteilung darstellenden Linie, der Achse, und zwei Scharen von Linien, die je unter einem Winkel von 60° zur Achse geneigt, durch die vollen Kompaßstriche gezogen sind. Die von links oben nach rechts unten verlaufenden Linien sind punktiert, die von rechts oben nach links unten gehenden dagegen ausgezogen. In dieses Netz werden die Ablenkungen von der Achse aus auf den punktierten Linien abgetragen, und die erhaltenen Punkte durch eine schlank ausgezogene Kurve verbunden.

Eine graphische Darstellung in einem Napierschen Netze (Napiersches Diagramm) ist am Ende dieses Buches angehängt. Die zu Grunde liegenden Beobachtungswerte sind die oben verzeichneten, an Bord der „Pfalz" erhaltenen.

Wesentlich für die Darstellung der Ablenkung in einem Napierschen Netze ist, daß als Maßstab für das Abtragen der Ablenkungen die Gradteilung der Achse selbst zu nehmen ist. Man verfährt deshalb am bequemsten so, daß man sich ein Stück dieser Teilung auf einen kurzen Papierstreifen überträgt und mit diesem Streifen die Ablenkungswerte parallel zu den punktierten Linien abmißt.

Das Napiersche Diagramm hat vor allen Dingen den Vorteil, daß es nicht nur die einem gesteuerten Kompaßkurse, sondern auch die einem zu steuernden magnetischen Kurse entsprechende Ablenkung zu entnehmen gestattet. Zu diesem Zwecke hat man nur durch den betreffenden Strichnamen die Parallele zu den ausgezogenen Linien bis zur Kurve zu ziehen und die Länge dieser Strecke auf der Gradteilung abzulesen. Außerdem kann das Diagramm dazu dienen, sowohl zum Kompaßkurs den magnetischen, als auch zum magnetischen den zu steuernden Kompaßkurs zu finden nach folgenden Regeln:

1. Um zu einem Kompaßkurse den magnetischen Kurs zu finden, sucht man den Kompaßkurs an der Achse auf, zieht von ihm aus eine Linie parallel mit der punktierten Linie bis zur Kurve und geht von hier parallel

mit der ausgezogenen Linie zur Achse zurück. Der Schnittpunkt mit der aufrechten Linie ist der magnetische Kurs.

2. Um zu einem magnetischen Kurse den Kompaßkurs zu finden, sucht man den magnetischen Kurs an der Achse auf, zieht von ihm aus eine Linie parallel mit der ausgezogenen Linie bis zur Kurve und geht von hier parallel mit der punktierten Linie zur Achse zurück. Der Schnittpunkt mit der Achse ist der Kompaßkurs.

§ 283. Ablenkungstabellen und Steuertafeln. Im täglichen Schiffsgebrauch bedient man sich, um von Kompaßkursen und Kompaßpeilungen zu magnetischen Kursen und Peilungen und umgekehrt überzugehen, einer Ablenkungs- und Steuertafel. Diese enthält als wichtigstes Element neben jedem Kompaßkurs die zugehörige Ablenkung. Der Bequemlichkeit wegen schreibt man in der vollständigen Steuertafel noch neben jeden Kompaßkurs den entsprechenden magnetischen Kurs. Zwei weitere Spalten ermöglichen, zu jedem magnetischen Kurse den Kompaßkurs abzulesen. In der folgenden Tafel ist außerdem die einem magnetischen Kurse für diesen Kompaß entsprechende Ablenkung hinzugefügt.

Die Steuertafel für die „Pfalz“ würde folgende sein:

Kompaß-Kurs		Ablenkung	Magnetischer Kurs	Magnetischer Kurs	Ablenkung	Kompaß-Kurs
N	0°	— 6,5°	*N* 6,5° *W*	*N*	— 5,0°	*N* 5,0° *O*
NzO	11,3°	— 3,0°	*N* 8,3° *O*	*NzO*	— 2,7°	*N* 14,0° *O*
NNO	22,5°	+ 0,5°	*N* 23,0° *O*	*NNO*	— 0,0°	*N* 22,5° *O*
NOzN	33,7°	+ 3,8°	*N* 37,5° *O*	*NOzN*	+ 3,0°	*N* 30,7° *O*
NO	45,0°	+ 6,6°	*N* 51,6° *O*	*NO*	+ 5,2°	*N* 39,8° *O*
NOzO	56,3°	+ 8,9°	*N* 65,2° *O*	*NOzO*	+ 7,5°	*N* 48,8° *O*
ONO	67,5°	+ 10,6°	*N* 78,1° *O*	*ONO*	+ 9,5°	*N* 58,0° *O*
OzN	78,7°	+ 11,6°	*S* 89,7° *O*	*OzN*	+ 11,0°	*N* 67,7° *O*
O	90°	+ 12,0°	*S* 78,0° *O*	*O*	+ 12,0°	*N* 78,0° *O*
OzS	78,7°	+ 12,0°	*S* 66,7° *O*	*OzS*	+ 12,4°	*N* 88,9° *O*
OSO	67,5°	+ 11,6°	*S* 55,9° *O*	*OSO*	+ 12,0°	*S* 79,5° *O*
SOzO	56,3°	+ 11,0°	*S* 45,3° *O*	*SOzO*	+ 11,5°	*S* 67,8° *O*
SO	45,0°	+ 10,4°	*S* 34,6° *O*	*SO*	+ 11,5°	*S* 56,5° *O*
SOzS	33,7°	+ 9,6°	*S* 24,1° *O*	*SOzS*	+ 10,6°	*S* 44,3° *O*
SSO	22,5°	+ 8,7°	*S* 13,8° *O*	*SSO*	+ 9,5°	*S* 32,0° *O*
SzO	11,3°	+ 7,6°	*S* 3,7° *O*	*SzO*	+ 8,5°	*S* 19,8° *O*
S	0°	+ 6,5°	*S* 6,5° *W*	*S*	+ 7,5°	*S* 7,5° *O*
SzW	11,3°	+ 5,2°	*S* 16,5° *W*	*SzW*	+ 5,8°	*S* 5,5° *W*
SSW	22,5°	+ 3,3°	*S* 25,8° *W*	*SSW*	+ 4,0°	*S* 18,5° *W*
SWzS	33,7°	+ 2,1°	*S* 35,8° *W*	*SWzS*	+ 1,5°	*S* 32,2° *W*
SW	45,0°	— 1,2°	*S* 43,8° *W*	*SW*	— 1,2°	*S* 46,2° *W*
SWzW	56,3°	— 3,9°	*S* 52,4° *W*	*SWzW*	— 5,2°	*S* 61,5° *W*
WSW	67,5°	— 6,7°	*S* 60,8° *W*	*WSW*	— 9,0°	*S* 76,5° *W*
WzS	78,7°	— 9,4°	*S* 69,3° *W*	*WzS*	— 12,3°	*N* 89,0° *W*
W	90°	— 12,0°	*S* 78,0° *W*	*W*	— 14,7°	*N* 75,3° *W*
WzN	78,7°	— 14,2°	*S* 87,1° *W*	*WzN*	— 16,0°	*N* 62,7° *W*
WNW	67,5°	— 15,5°	*N* 83,0° *W*	*WNW*	— 16,2°	*N* 51,3° *W*
NWzW	56,3°	— 16,1°	*N* 72,4° *W*	*NWzW*	— 15,6°	*N* 40,7° *W*
NW	45,0°	— 15,8°	*N* 60,8° *W*	*NW*	— 14,0°	*N* 31,0° *W*
NWzN	33,7°	— 14,6°	*N* 48,3° *W*	*NWzN*	— 12,0°	*N* 21,7° *W*
NNW	22,5°	— 12,5°	*N* 35,0° *W*	*NNW*	— 9,5°	*N* 13,0° *W*
NzW	11,3°	— 9,8°	*N* 21,1° *W*	*NzW*	— 7,2°	*N* 4,1° *W*
N	0°	— 6,5°	*N* 6,5° *W*	*N*	— 5,0°	*N* 5,0° *O*

Die den Kompaßkursen entsprechenden Ablenkungen können der Figur 228 oder dem Napierschen Diagramme entnommen werden, während man die den magnetischen Kursen entsprechenden am bequemsten dem Napierschen Diagramme entnimmt, indem man die Stücke mißt, die die Ablenkungskurve von den ausgezogenen Linien abschneidet. Man kann aber auch die Verwandlung der Kurse unmittelbar mit Hülfe des Napierschen Diagrammes nach den Regeln 1. und 2. des vorigen Paragraphen vornehmen.

§ 284. **Änderung der Deviation. Notwendigkeit einer Theorie.** Die nach den vorstehenden Anweisungen hergestellte Ablenkungstafel hat ohne weiteres nur Gültigkeit für den Fall, daß das Schiff aufrecht auf ebenem Kiele liegt, wie es bei Beobachtung der Tafelwerte vorausgesetzt war. Die Änderung, die in der Ablenkung eintritt, wenn das Schiff überhellt oder gekrängt wird, heißt Hellungs- oder Krängungsfehler.

Wenn die Ablenkung des Kompasses eines eisernen Schiffes überall auf der Erde und für die Lebensdauer des Schiffes genau dieselbe bliebe, so könnte man sich damit begnügen, die Deviation einmal festzustellen, um dann die beobachtete Ablenkungstafel bei der Navigierung des Schiffes stets heranzuziehen. Thatsächlich liegt aber die Sache nicht so. Mit der Veränderung des Ortes auf der Erdoberfläche treten auch Änderungen in der Ablenkung ein und die beobachtete Ablenkungskurve gilt deshalb genau nur für den Ort, an dem sie beobachtet worden war. Außerdem ändert sich der magnetische Zustand des Schiffes und deshalb auch die Ablenkung, wenn das Schiff längere Zeit auf demselben Kurse liegt. Die Änderungen, denen die Ablenkung ausgesetzt ist, machen es nötig, daß auch der Seefahrer einen Einblick in die Wirksamkeit der magnetischen vom Schiffe auf den Kompaß ausgeübten Kräfte gewinne; denn nur dadurch ist er in den Stand gesetzt, über die unter gegebenen Umständen zu erwartenden Änderungen sich ein Urteil bilden zu können. Außerdem giebt die Theorie des Schiffsmagnetismus die Mittel an die Hand, aus einer kleinen Anzahl von Beobachtungen die Deviationen auf allen Kursen zu berechnen. Endlich ist ein Verständnis der Kompensationsvorrichtungen nur möglich auf Grund einer verständigen Vorstellung über die Wirkungsweise der vom Schiffe auf den Kompaß ausgeübten magnetischen Kräfte.

Im folgenden sollen, bevor vom eigentlichen Schiffsmagnetismus die Rede ist, die magnetischen Grunderscheinungen sowie der Magnetismus der Erde, soweit ihre Kenntnis hier notwendig ist, behandelt werden.

Grundgesetze des Magnetismus.

§ 285. **Magnetische Grunderscheinungen.** Gewisse Eisenerze (Magneteisenstein) haben die Eigenschaft, Eisen anzuziehen und festzuhalten. Man nennt sie natürliche Magnete und die ihnen innewohnende Eigenschaft Magnetismus. Künstliche Magnete werden aus Stahl hergestellt in Form von geraden oder hufeisenförmig gebogenen Stäben (Magnetnadeln, Stabmagnete, Hufeisenmagnete).

Bestreut man einen Magneten mit Eisenfeilspänen, so erkennt man, daß die Anziehung der Eisenteilchen nahe an den Enden des Magnetstabes am stärksten ist, daß sie dagegen in der Mitte verschwindet.

Die Punkte der stärksten Anziehung nennt man die Pole; die Stelle, wo der Magnet keine Anziehung äußert, heißt seine neutrale Zone.

Um von den Kräften, die ein Magnet in seiner Umgebung ausübt, eine Vorstellung zu bekommen, bedecke man ihn mit einer Glasplatte und streue darauf Eisenfeilspäne. Die Eisenteilchen ordnen sich dann, besonders wenn man die Scheibe etwas klopft, in ganz bestimmten Linien, die man als die Kraftlinien des Magneten bezeichnet. Alle Kraftlinien verlaufen von einem Pole des Magneten zum anderen; die Kraftlinie giebt an jeder Stelle die Richtung der an dieser Stelle ausgeübten magnetischen Kraft an (siehe Fig. 229).

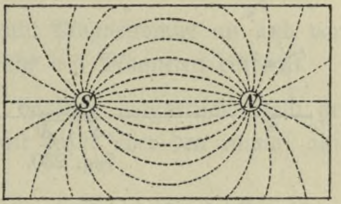


Fig. 229.

Den Raum um einen Magneten, innerhalb dessen sich seine magnetische Wirkung zu erkennen giebt, bezeichnet man als sein magnetisches Feld. Die magnetische Wirkung erfolgt ungehindert durch jeden Stoff, wie Holz, Papier, Glas oder irgend welche Metalle, mit Ausnahme des Eisens. So hätte man bei dem oben beschriebenen Versuche statt der Glasscheibe ebensogut ein dünnes Holzbrett, einen Pappdeckel, ein Messingblech oder dgl. verwenden können und hätte genau dasselbe Bild von dem Kraftlinienverlauf erhalten. Wesentlich anders würde die Erscheinung erst ausfallen bei Verwendung einer eisernen Platte.

Allgemein ist die Eigenschaft bekannt, daß ein horizontal frei beweglicher Magnetstab auf der Erde eine bestimmte im allgemeinen nord-südliche Richtung annimmt. Das hierbei nach Norden strebende Ende des Stabes oder der Nadel heißt das Nordende (Nordpol), das nach Süden gerichtete Ende das Südende (Südpol) des Magneten. Man pflegt das Nordende durch rote, das Südende durch blaue Farbe kenntlich zu machen und bezeichnet die beiden Pole auch als den roten und den blauen Pol des Magneten.

§ 286. Wechselwirkung von Magnetpolen und Magneten. Durch Versuche mit zwei Magneten, von denen man den einen drehbar aufhängt, findet man das folgende erste Grundgesetz des Magnetismus:

Gleichnamige Pole stoßen einander ab, ungleichnamige Pole ziehen einander an.

Ein besonders wichtiger Fall der Wechselwirkung zweier Magnete aufeinander ist der folgende. Es sei SN ein größerer Magnet, sn eine sehr kleine Magnetnadel, die sich in einer verhältnismäßig großen Entfernung vom Mittelpunkte des Magneten befindet. Um die Richtung der von SN auf die Nadel ausgeübten Kraft zu finden, hat man sich nur zu überlegen, in welcher Richtung der Nordpol der Nadel getrieben wird, da der Südpol eine genau entgegengesetzt gerichtete Kraft erfährt. Die Ruhelagen, in denen sich die Nadel sn an den verschiedenen Stellen einstellt, sind aus der Fig. 230 ersichtlich. Denkt man sich den Halbkreis um den festgehaltenen Magneten SN um 360° im Raume gedreht, so hat man ein Bild der räumlichen Kraftverteilung um den stabförmigen Magneten SN. Von besonderer Bedeutung ist unter den verschiedenen Lagen diejenige, wo sich die Nadel querab von der Mitte des Magneten, gleichsam in seiner Äquatorialzone befindet. Hier sucht SN die Nadel parallel mit sich mit entgegengesetzt gerichteten Polen zu stellen. Die auf die Nadel ausgeübte Kraft ist dabei rings um SN herum für die gleiche Entfernung genau dieselbe. Dieser Umstand findet Anwendung bei der Anbringung von Magneten zur Kompensation des Kompasses.

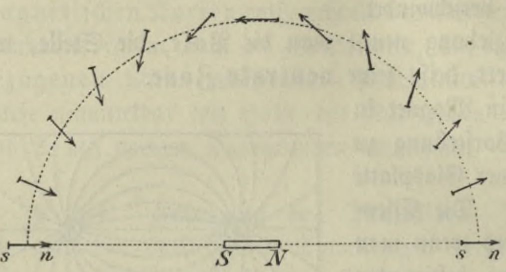


Fig. 230.

§ 287. **Magnetische Verteilung oder Induktion.** Wird ein gewöhnlicher unmagnetischer Eisenstab mit seinem einen Ende mit dem Pole eines Magneten in Berührung gebracht, so zeigt sich, daß das andere Ende Eisenfeilspäne anzieht. Durch die Berührung mit dem Magnetpole ist demnach das vorher unmagnetische Eisen magnetisch geworden, und zwar erweist sich das dem Magnetpole zugewandte Ende als ungleichnamig, das abgewandte Ende als mit dem Magnetpole gleichnamig magnetisch. Man bezeichnet diese Erscheinung als magnetische Verteilung oder Induktion; den entstandenen Magnetismus nennt man induzierten. Induktion tritt nicht nur bei Berührung auf, sondern auch schon dann, wenn man das Eisen nur in den Wirkungsbereich eines Magneten bringt.

Als ein zweites Grundgesetz des Magnetismus kann man deshalb das folgende aufstellen:

In jedem Eisen, das sich im Wirkungsbereiche eines Magneten befindet, wird Magnetismus induziert, und zwar sind den induzierenden Polen ungleichnamige Pole zugewandt.

Man ist durch diese Erscheinung zu der Annahme veranlaßt, daß sich auch im unmagnetisierten Eisen beide Arten des Magnetismus, aber in einem gebundenen Zustande befinden, so daß sie sich gegenseitig aufheben oder neutralisieren, sich also unwirksam nach außen zeigen, daß dagegen unter dem Einflusse eines genäherten Magneten durch Anziehung des ungleichartigen und Abstoßung des gleichartigen Magnetismus, eine Scheidung beider Arten stattfindet, wodurch sie nach außen wirksam werden.

Die Anziehung, die ein Stück Eisen durch einen Magneten erfährt, ist nach den Erscheinungen der Induktion so zu erklären, daß zunächst in dem Eisen eine Trennung der beiden Magnetismen stattfindet, das Eisen also zu einem Magneten gemacht wird, worauf dann die Anziehung nach dem ersten Grundgesetze erfolgt. Die Induktion spielt auch in dem in § 285 beschriebenen Versuche, die Kraftlinien eines Magneten sichtbar zu machen, eine wichtige Rolle. Die kleinen Eisenfeilspäne werden nämlich durch Induktion zu kleinen Magneten und stellen sich als solche in die Richtung der an Ort und Stelle stattfindenden Kraft ein. (Vergleiche auch Fig. 230, die die Richtung der Kraft im Umkreise der beiden Pole *S* und *N* erkennen läßt.)

Verschiedene Eisensorten zeigen der magnetischen Induktion gegenüber ein verschiedenes Verhalten:

Weiches (ausgeglühtes) Eisen nimmt leicht Magnetismus an und verliert ihn sofort wieder, wenn man es aus der Nähe des Magneten entfernt.

Gehärtetes Eisen oder Stahl zeigt, in dasselbe magnetische Feld gebracht, viel weniger induzierten Magnetismus, hält dafür aber den einmal aufgenommenen Magnetismus dauernd fest.

Man nennt deshalb den in weichem Eisen erzeugten Magnetismus flüchtigen oder transienten, im Gegensatz zu dem in gehärtetem Stahle vorhandenen festen oder permanenten Magnetismus.

Das in der Praxis gebrauchte Eisen ist meist weder glasharter Stahl noch vollständig weich, es kommen vielmehr alle möglichen Zwischenstufen vor. Jedes Eisen zeigt dabei ein genau seinem Härtegrade entsprechendes magnetisches Verhalten. Ein halbhartes Eisen nimmt den Magnetismus nicht so schnell auf wie ganz weiches Eisen; wenn er aber entstanden ist, so verschwindet er nur allmählich und nur zum Teil wieder. Den mit der Zeit verschwindenden Teil nennt man halbfesten oder remanenten Magnetismus.

Der Vorgang der magnetischen Verteilung wird außerordentlich begünstigt, wenn das der Induktion unterworfene Eisen Erschütterungen durch Klopfen, Hämmern und dgl. ausgesetzt ist. Solche Erschütterungen sind für das Entstehen des induzierten Magnetismus um so nötiger, je härter das benutzte Eisen ist.

Erdmagnetismus.

§ 288. **Die erdmagnetischen Elemente.** Die Thatsache, daß eine Magnetnadel an den verschiedenen Punkten der Erdoberfläche eine ganz bestimmte Richtung annimmt, nötigt zu der Annahme, daß die Erdkugel selbst als ein großer natürlicher Magnet anzusehen ist. Die Richtung und Größe der an irgend einem Punkte der Erdoberfläche ausgeübten erdmagnetischen Kraft wird in folgender Weise angegeben.

Als magnetischen Meridian eines Ortes bezeichnet man die Vertikalebene, in der sich eine horizontal frei bewegliche Magnetnadel an diesem Orte einstellt.

Der Winkel, den der magnetische Meridian eines Ortes mit dem geographischen Meridiane einschließt, heißt Mißweisung oder Deklination (englisch variation).

Zur übersichtlichen Darstellung der an verschiedenen Punkten der Erde vorhandenen Mißweisung verbindet man in einer Karte die Punkte, in denen gleiche Mißweisung herrscht, untereinander durch Linien. Diese Linien werden

Linien gleicher Mißweisung oder Isogonen genannt. Eine Weltkarte der Linien gleicher Mißweisung ist den Nautischen Tafeln angehängt. Im größten Teile des atlantischen und des indischen Ozeans ist die Mißweisung westlich, im großen Ozean östlich mit Ausschluß eines die Ostküste Asiens beherrschenden Gebietes westlicher Mißweisung. Die Gebiete westlicher und östlicher Mißweisung werden durch die Linien ohne Mißweisung von einander getrennt.

Stellt man eine Magnetnadel, die um eine wagerechte durch ihren Schwerpunkt gehende Achse drehbar ist, so auf, daß ihre Drehungsebene in den magnetischen Meridian fällt, so stellt sich diese Nadel an jedem Punkte der Erde in eine ganz bestimmte, gegen die Horizontalebene geneigte Richtung ein, die man als die Inklinationsrichtung bezeichnet.

Unter Inklination oder magnetischer Neigung versteht man den Winkel, den eine völlig frei in ihrem Schwerpunkte aufgehängte Magnetnadel mit der Horizontalebene bildet.

Verbindet man in einer Karte die Punkte mit gleicher magnetischer Neigung miteinander, so entstehen Linien gleicher Inklination oder Isoklinen. Die Verbindungslinie derjenigen Punkte der Erdoberfläche, in denen die Neigung gleich Null ist, in denen also die Inklinationsnadel eine genau wagerechte Lage annimmt, nennt man den magnetischen Äquator. Der magnetische Äquator verläuft in der Nähe des geographischen Äquators. Auf der nördlichen Seite des magnetischen Äquators ist das Nordende (der rote Pol), auf der südlichen Seite das Südende (der blaue Pol) der Inklinationsnadel nach unten gerichtet. Mit der Entfernung vom magnetischen Äquator nimmt die Neigung der Nadel zu, bis sie in den magnetischen Polen der Erde = 90° wird, d. h. die Nadel senkrecht steht. Den magnetischen Nordpol der Erde hat man sich mit Südmagnetismus, den Südpol dagegen mit Nordmagnetismus behaftet zu denken.

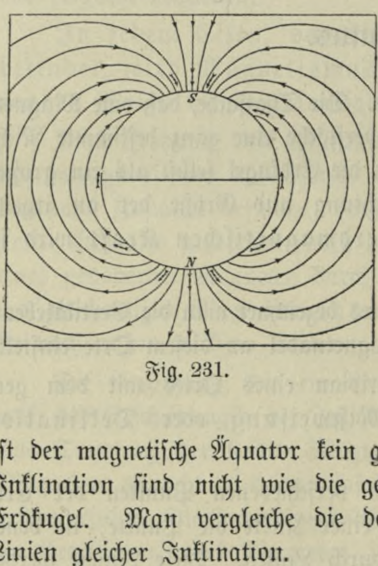


Fig. 231.

Die verschiedenen Neigungen, welche die Inklinationsnadel auf der Erdoberfläche gegen die Horizontale annimmt, werden veranschaulicht durch die Figur 231, welche die Kraftverteilung um eine gleichförmig magnetisierte Kugel darstellt. Thatsächlich weist allerdings die magnetische Kraftverteilung auf der Erdoberfläche nicht eine solche geometrische Regelmäßigkeit auf, wie sie die Figur darbietet. Die magnetischen Pole der Erde sind keine genauen Gegenpunkte, da der Nordpol gegenwärtig auf etwa 70° N und 98° W und der Südpol auf 73° S und 146° O liegt. Ebenso ist der magnetische Äquator kein genauer größter Kreis und die Linien gleicher Inklination sind nicht wie die geographischen Breitenparallele Nebenkreise der Erdkugel. Man vergleiche die den Nautischen Tafeln angehängte Karte der Linien gleicher Inklination.

Die Gesamtkraft des Erdmagnetismus an irgend einem Orte ist wirksam in der Inklinationsrichtung. Man kann diese Gesamt- oder Totalkraft nach dem Parallelogramm der Kräfte in zwei Seitenkräfte oder Komponenten zerlegt denken, von denen

die Horizontalkraft H horizontal in die Richtung des magnetischen Meridians fällt, während

die Vertikalkraft V senkrecht nach unten gerichtet ist.

Ist die Inklination J eines Ortes bekannt, so kann man aus irgend einer der Kräfte T, H und V die beiden andern berechnen. Nach den Regeln der rechtwinkligen Trigonometrie ist z. B.

$$V = H.\,tang\,J$$

$$T = H.\,sec\,J$$

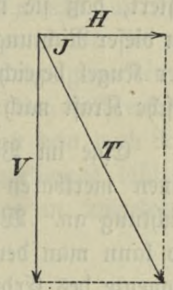


Fig. 232.

Für die deutschen Küstengegenden, in denen $J = 68°$ ist, erhält man z. B. wenn man $H = 1$ annimmt, daß die Vertikalkraft 2,48 mal, die Totalkraft 2,67 mal so groß ist wie die horizontale.

Durch Beobachtung der Schwingungsdauer einer und derselben horizontalen Magnetnadel an verschiedenen Orten ist es möglich, die an diesen Orten stattfindenden Horizontalkräfte H zu vergleichen und sie alle durch dasselbe Kraftmaß auszudrücken, indem man als Einheit des Kraftmaßes entweder die Horizontalkraft an einem bestimmten Orte z. B. in Greenwich oder Hamburg annimmt, oder eine in der Physik gebrauchte, nämlich die Gaußische Einheit zu Grunde legt. Den Nautischen Tafeln ist eine Karte der Linien gleicher magnetischer Horizontalkraft angehängt (vergl. deren Erklärung).

Von den beiden Komponenten der erdmagnetischen Kraft ist die Horizontalkraft die wichtigste, da von ihr die Richtkraft des Kompasses abhängig ist. An den magnetischen Polen, in denen die Horizontalkraft gleich Null ist, verliert jeder Kompaß seine Einstellungsfähigkeit. Die Horizontalkraft hat im allgemeinen ihren größten Wert in der Nähe des magnetischen Äquators.

Gegen die Wirkungen der Vertikalkraft, die das Bestreben hat, die Horizontalnadel zu kippen, wird die Kompaßrose dadurch unempfindlich gemacht, daß man den Aufhängepunkt recht hoch über dem Schwerpunkte der Nadel anbringt. An älteren Rosen sowie an einzelnen Magnetnadeln, die für Beobachtungen in sehr verschiedenen magnetischen Breiten gebraucht werden sollen, ist ein kleines Laufgewicht aus Messing oder Neusilber vorhanden, mit dem man für jede Breite die horizontale Lage leicht herstellen kann.

Die Mißweisung, die Inklination und die Stärke der erdmagnetischen Kraft sind kleinen täglichen Schwankungen und langsamen Änderungen im Laufe der Zeit unterworfen. Für den Seemann sind nur die langsamen Änderungen der Mißweisung von Bedeutung. Sie machen es nötig, ein Schiff ständig mit neuen Mißweisungskarten sowie mit neuen Seekarten auszurüsten.

§ 289. Induktion durch den Erdmagnetismus. Der Erdmagnetismus wirkt nicht nur richtend auf die Magnetnadel, er wirkt auch induzierend auf alles auf der Erde befindliche Eisen. Man kann diese Induktion fast an jeder vertikalen oder horizontalen Eisenstange, sowie an jedem eisernen Schiffskörper leicht durch eine Magnetnadel nachweisen.

Einige besonders einfache und grundlegende Fälle der erdmagnetischen Induktion sollen hier beschrieben werden. Das den Versuchen zu Grunde liegende Eisen sei als vollkommen weiches vorausgesetzt.

Eine Kugel aus weichem Eisen wird durch den Erdmagnetismus so magnetisiert, daß sie in der Inklinationsrichtung eine magnetische Achse erhält. Der zu dieser Richtung senkrechte größte Kugelkreis könnte als der magnetische Äquator der Kugel bezeichnet werden; er zeigt keinen Magnetismus, während die magnetische Kraft nach den Endpunkten der magnetischen Achse zunimmt.

Eine im Verhältnis zu ihrer Länge sehr dünne eiserne Stange nimmt einen merkbaren Betrag von induziertem Magnetismus nur in ihrer Längsrichtung an. Wenn es sich um Induktion durch den Erdmagnetismus handelt, so kann man den induzierten Magnetismus der Stange proportional der Komponente des Erdmagnetismus setzen, welche in die Richtung der Stange fällt.

Eine Stange von weichem Eisen wird demnach am stärksten magnetisch, wenn man sie in die Inklinationsrichtung hält. In jeder zur Inklinationsrichtung senkrechten Lage bleibt die Stange unmagnetisch.

Auf eine vertikal gehaltene Stange wirkt die Vertikalkraft verteilend. Am magnetischen Äquator ist die Vertikalstange unmagnetisch, weil hier die Vertikalkraft gleich Null ist, auf nordmagnetischer Breite ist unten ein Nordpol (rot), auf südmagnetischer Breite ist unten ein Südpol (blau) vorhanden.

Bei einer horizontalen Stange hängt die Magnetisierung ab von der Lage der Stange gegen den magnetischen Meridian. Am stärksten ist die Magnetisierung, wenn die Stange in die Richtung des magnetischen Meridians fällt. Dreht man sie, von dieser Lage ausgehend, horizontal im Kreise langsam herum, so wird die Magnetisierung zunächst immer schwächer, bis sie in ostwestlicher Lage der Stange ganz verschwindet. Darauf wechseln die Pole, die Magnetisierung wird wieder stärker, bis die Stange wieder im Meridian liegt und hier die Magnetisierung am stärksten ist. Geht die Drehung noch weiter, so wiederholen sich dieselben Vorgänge. Während einer vollen Umdrehung wechseln demnach die Pole einer Stange zweimal ihr Zeichen.

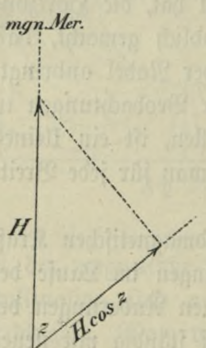


Fig. 233.

Oben war gesagt, daß bei der Induktion durch den Erdmagnetismus die Magnetisierung einer weichen Eisenstange proportional der in die Richtung der Stange fallenden Komponente der erdmagnetischen Kraft gesetzt werden könne. Die Verhältniszahl ist abhängig von der Länge und dem Querschnitte der Stange, sowie von der Weichheit des Eisens, aus dem die Stange hergestellt ist. Bezeichnet man sie mit k, so ist die Magnetisierung

für die in die Inklinationsrichtung gehaltene Stange gleich $k \,.\, T$
für die vertikal gehaltene Stange gleich $k \,.\, V$
für die horizontal im magnetischen Meridian liegende Stange gleich $k \,.\, H$
und endlich für die horizontal unter irgend einem Winkel z gegen den Meridian liegende Stange gleich $k \,.\, H \,.\, \cos z$ (siehe Fig. 233).

Begünstigt man die Induktion dadurch, daß man das benutzte Eisen heftigen Erschütterungen aussetzt, so kann man unter der Einwirkung des Erdmagnetismus auch in gewöhnlichem halbharten Eisen und Stahl starken induzierten Magnetismus hervorrufen und zwar einen Magnetismus, der zum großen Teile wegen der Härte des Eisens fest wird und haften bleibt. Hält man eine gewöhnliche schmiedeeiserne Stange in irgend eine Lage, die nicht gerade senkrecht zur Inklinationsrichtung ist und schlägt sie einigemal mit einem Hammer an, so wird man stets finden, daß die Stange zu einem dauernden Magneten geworden ist. Der Nordpol entsteht auf nordmagnetischer Breite immer an dem während des Versuches nach Nord und unten, auf südmagnetischer Breite an dem nach Nord und oben gelegenen Ende der Stange. Der entstandene Magnetismus läßt sich wieder beseitigen oder auch umkehren, wenn man die Stange in umgekehrter Lage kräftigen Erschütterungen aussetzt.

Schiffsmagnetismus.

§ 290. Magnetische Wirkungen des eisernen Schiffskörpers. Fester Schiffsmagnetismus. Der Körper eines eisernen Schiffes übt eine magnetische Wirkung auf den Kompaß dadurch aus, daß in ihm durch den Erdmagnetismus magnetische Pole induziert werden. Man kann diese Pole als feste Pole und flüchtige Pole unterscheiden. Außer diesen beiden Arten kommen allerdings auch noch Pole vor, welche man halbfeste nennt. Es ist zweckmäßig, diese letztere Art zunächst aus dem Spiele zu lassen und sich zu denken, daß das Eisen des Schiffes teils als hartes Eisen den einmal aufgenommenen Magnetismus dauernd festhält, teils als weiches Eisen ihn beim Aufhören der induzierenden Ursache sofort wieder aufgiebt.

Daß im Rumpfe eines eisernen Schiffes feste Pole vorkommen, ist zuerst im Jahre 1835 entdeckt und bewiesen worden. Später hat man dann gefunden, daß der feste Magnetismus eines Schiffes vor allem aus der Zeit des Baues herrührt, und daß der magnetische Charakter, den das Schiff Zeit seines Lebens bewahrt, in erster Linie vom Baukurse, d. h. von der Lage abhängig ist, die das auf Stapel liegende Schiff gegen die Richtung des magnetischen Meridians einnahm. Da die Induktion während des Baues sehr durch das Hämmern und Nieten am Schiffskörper begünstigt wird, so entsteht in diesem ein großer Betrag von induziertem Magnetismus, von dem je nach dem Härtegrade des Baumaterials ein größerer oder geringerer Teil als fester Magnetismus stets im Schiffe zurückbleibt.

Die nachstehenden Figuren veranschaulichen die magnetische Verteilung, die im Schiffsrumpfe entsteht, wenn das Schiff bei einer Inklination von etwa 70° mit dem Kopfe nach den magnetischen Hauptstrichen gebaut wird. Fällt der

Baukurs des Schiffes nicht gerade mit einem magnetischen Hauptstriche zusammen, so ist auch die Verteilung des Magnetismus in seinem Rumpfe ein Mittelding zwischen den gezeichneten Fällen.

Als allgemeine Regel kann man die aussprechen, daß das Nordende der Nadel stets von dem Teile des Schiffes angezogen wird, der während des Baues nach Süden lag. Die Gültigkeit dieser Regel folgt einfach daraus, daß nach Süden immer ein Südpol (blau) entsteht, welcher das Nordende (rot) der Nadel anzieht.

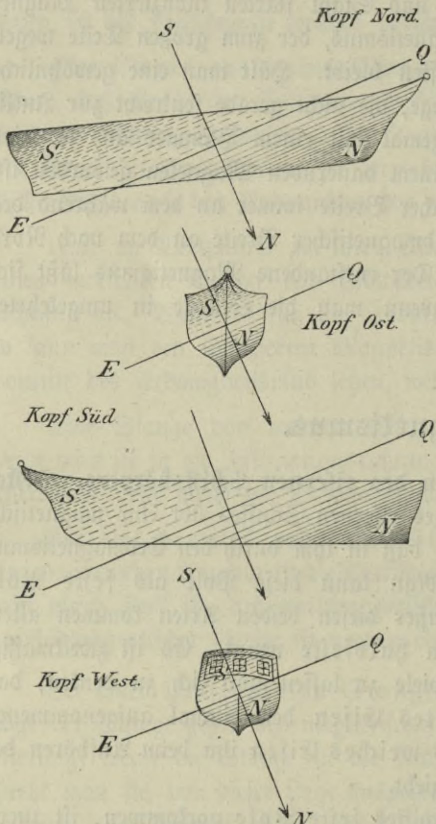


Fig. 234.

Es kann hier gleich die Frage aufgeworfen werden, welcher Baukurs für das spätere magnetische Verhalten des Schiffes der günstigste ist. In dieser Beziehung hat man gefunden, daß die Lage im Meridian oder in dessen Nähe der *O*- oder *W*-Lage vorzuziehen ist, weil der in der Querschiffsrichtung induzierte Magnetismus viel stärkeren Veränderungen unterworfen ist als der Längsschiffsmagnetismus. Als die günstigsten Punkte zur Aufstellung des Kompasses müssen im allgemeinen die neutralen Zonen angesehen werden, in denen die Linie EQ der Figuren das Deck des Schiffes schneidet. Übrigens gehört ein großer Teil des beim Bau vom Schiffskörper aufgenommenen Magnetismus in die Klasse des halbfesten Magnetismus. Das allmähliche Verschwinden dieses Teiles wird deshalb während der ersten Reisen des Schiffes stetige Änderungen in der Ablenkung zur Folge haben und dadurch eine erhöhte Sorgfalt in der Kontrolle der Kompasse nötig machen. Um den Vorgang der Abschüttelung des halbfesten Magnetismus zu beschleunigen, ist es dringend anzuraten, daß das Schiff nach dem Stapellauf, wenn irgend möglich, auf den dem Baukurse entgegengesetzten Kurs gelegt wird und in dieser Lage seine weitere Ausrüstung (Decksbauten, Masten, Maschinen u. s. w.) erhält.

§ 291. Der flüchtige Schiffsmagnetismus. Außer dem festen Schiffsmagnetismus, dessen Entstehung in die Bauperiode des Schiffes fällt, macht sich an Bord stets auch die Wirkung flüchtiger Pole bemerkbar. Man versteht darunter diejenigen Pole, die in dem Schiffskörper oder seinen eisernen Ausrüstungsgegenständen als weichen Eisenmassen unmittelbar durch den Erdmagnetismus hervorgerufen werden, und die wieder verschwinden oder sich ändern, sobald die induzierenden Kräfte verschwinden oder eine andere Richtung bekommen. Da diese flüchtigen Pole abhängig sind von der Lage des Schiffes gegen die Inklinationsrichtung, so sind sie nicht nur veränderlich mit der magnetischen Breite, sondern auch abhängig von dem Kurse, den das Schiff anliegt.

Die auf den ersten Blick sehr verwickelte Aufgabe, die Wirkung des flüchtigen Magnetismus auf den Kompaß zu ermitteln, läßt sich dadurch außerordentlich vereinfachen, daß man alles an Bord befindliche Eisen in zwei große Klassen teilt, nämlich in vertikales und in horizontales Eisen. Sofern ein eiserner Bestandteil des Schiffes vertikal und horizontal ausgedehnt ist, wie etwa ein eisernes Querschott, liefert er zur einen wie zur anderen Klasse seinen Beitrag.

Da das vertikale Eisen während einer Rundschwaiung seine Magnetisierung nicht ändert, so kann die von ihm auf den Kompaß ausgeübte magnetische Kraft, solange das Schiff in derselben magnetischen Breite bleibt, als von einem unveränderten Pole ausgehend angesehen werden. Beispielsweise übt ein vor dem Kompasse stehender eiserner Mast in nordmagnetischer Breite mit seinem unteren Ende genau dieselbe Wirkung auf den Kompaß aus, als wenn vor dem Kompaß ein fester Nordpol (rot) vorhanden wäre. Bei Veränderung der magnetischen Breite stellt sich allerdings eine wesentliche Verschiedenheit heraus. Auf dem magnetischen Äquator ist die magnetische Wirkung des Mastes verschwunden, während auf südmagnetischer Breite das untere Ende des Mastes wirkt, als wäre vor dem Kompaß ein fester Südpol (blau) vorhanden.

Ganz ähnliche Wirkungen übt ein eiserner hinter dem Kompaß befindlicher Ruderpfosten mit seinem oberen Ende aus.

Das horizontale Eisen dagegen wechselt während einer Rundschwaiung zweimal seine Pole. Ein eiserner Decksbalken z. B. ist auf den Kursen magnetisch N und magnetisch S unmagnetisch, da er senkrecht zum magnetischen Meridiane liegt, während er seine stärkste Magnetisierung zeigt, wenn er im magnetischen Meridiane, das Schiff also auf magnetisch O- oder W-Kurs liegt.

Wegen dieses Wechsels der Pole im horizontalen weichen Eisen während einer Rundschwaiung ist von vornherein zu vermuten, daß dieses Eisen eine ganz andersartig mit dem Kurswinkel sich ändernde Ablenkung zur Folge hat, wie die festen Pole und der flüchtige Magnetismus des vertikalen weichen Eisens.

Aufgabe des Folgenden wird es zunächst sein, die von den drei Ursachen der Deviation, nämlich

1. dem festen Schiffsmagnetismus,
2. dem flüchtigen Magnetismus des vertikalen Eisens,
3. dem flüchtigen Magnetismus des horizontalen Eisens

hervorgebrachten Ablenkungen in ihrer Abhängigkeit vom Kompaßkurse zu untersuchen.

Hierbei soll zunächst das Schiff als aufrecht auf ebenem Kiele liegend und der Kompaß in der Mittschiffslinie aufgestellt vorausgesetzt werden.

§ 292. Halbkreisige Ablenkung durch den festen Schiffsmagnetismus. Ein magnetischer Pol, der sich irgendwo im Schiffe befindet, wirkt sowohl auf den Nordpol wie auf den Südpol der Kompaßnadel. Die Stärke der Wirkung hängt ab von der Entfernung des Poles von den Enden der Nadel. Setzt man voraus, daß die Länge der Nadel im Vergleiche zu dieser Entfernung verschwindend klein ist, so erfährt der Südpol den entgegengesetzt gleichen Antrieb wie der Nordpol der Nadel. Dasselbe gilt von der vom Erdmagnetismus auf die Nadel ausgeübten Kraft. Deshalb genügt es, nur die auf den Nordpol der Nadel wirkenden Kräfte zu betrachten. Unter dieser Voraussetzung wird dann ein (blauer) Südpol im Schiffe schlechtweg ein anziehender, ein (roter) Nordpol im Schiffe ein abstoßender Pol genannt werden dürfen.

Für die Wirkung eines Schiffspoles auf den Kompaß gelten die folgenden allgemeinen Grundsätze:

Ein Pol, der in der Richtung der Kompaßnadel liegt, kann keine Ablenkung hervorbringen; seine Wirkung besteht lediglich darin, daß er die Richtkraft der Nadel verstärkt oder schwächt (siehe § 294). Eine Ablenkung entsteht erst, wenn der Schiffspol bei der Drehung des Schiffes seitlich von der Nadel zu liegen kommt, und zwar sucht ein anziehender Pol die Nadel nach derselben Seite zu ziehen, auf der er selbst liegt, während ein abstoßender Pol das Nordende der Nadel nach der entgegengesetzten Seite abstößt. Die Ablenkung ist am größten, wenn der Pol querab von der abgelenkten Nadel liegt.

Daraus folgt für die Wirkung fester Schiffspole:

Ein Längsschiffspol (Pol vor dem Kompaß) erzeugt auf N- und S-Kurs keine, auf O- und W-Kurs die größten Ablenkungen. Letztere sind untereinander entgegengesetzt gleich. Man bezeichnet die Ablenkung auf O-Kurs mit dem Buchstaben B; dieser Wert B bekommt das Pluszeichen, wenn auf O-Kurs östliche Ablenkung, dagegen das Minuszeichen, wenn auf O-Kurs westliche Ablenkung stattfindet. B ist auch gleich der entgegengesetzten Ablenkung auf W-Kurs.

Ein Querschiffspol (Pol querab vom Kompaß) erzeugt auf O- und W-Kurs keine, auf N- und S-Kurs die größten Ablenkungen. Letztere sind untereinander entgegengesetzt gleich. Man bezeichnet die Ablenkung auf N-Kurs mit dem Buchstaben C; dieser Wert C bekommt das Pluszeichen, wenn auf N-Kurs östliche Ablenkung, dagegen das Minuszeichen, wenn auf N-Kurs westliche Ablenkung vorhanden ist. C ist auch gleich der entgegengesetzten Ablenkung auf S-Kurs.

Sind die Ablenkungen B und C bekannt, so läßt sich aus ihnen leicht die für irgend einen Kurs geltende Ablenkung nach folgendem Satze berechnen:

Die durch eine magnetische Längsschiffskraft hervorgebrachte Ablenkung ist gleich $B . \sin z$.

Die durch eine magnetische Querschiffskraft hervorgebrachte Ablenkung ist gleich $C . \cos z$.

Hierin bedeutet z den Kompaßkurs; B die Ablenkung auf O-Kurs oder die entgegengesetzte Ablenkung auf W-Kurs; C die Ablenkung auf N-Kurs oder die entgegengesetzte Ablenkung auf S-Kurs.

Ein einfacher Beweis für diese Behauptung ergiebt sich aus folgender Betrachtung. Es sei (Fig. 235) M der Kompaßort, MN die Richtung des magnetischen Meridians. In dieser Richtung wirkt die Horizontalkraft H des Erdmagnetismus. Es sei ferner MK die Kielrichtung des Schiffes.

a) Wirkung einer Längsschiffskraft. Es möge zunächst in der Längsschiffsrichtung eine magnetische Kraft von der Größe P vorhanden sein. Diese soll als positiv gerechnet werden, wenn sie das Nordende der Nadel nach vorn zieht, wenn sich also vor dem Kompaß ein Südpol (blau) befindet. Man trage P auf MK ab und setze H und P nach dem Parallelogramm der Kräfte zu einer Gesamtkraft MR zusammen. In die Richtung dieser Gesamtkraft MR stellt sich die Kompaßnadel ein. Demnach stellt der Winkel $NMR = \delta_1$ die durch P hervorgerufene Ablenkung dar. Ferner ist der Winkel RMK als Winkel zwischen dem Nordstrich der Rose und der Kielrichtung der Kompaßkurswinkel z.

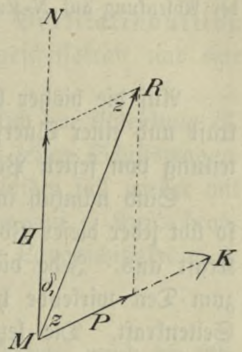


Fig. 235.

Nach der Sinusregel hat man

$$\frac{\sin \delta_1}{\sin z} = \frac{P}{H}$$

also $$\sin \delta_1 = \frac{P}{H} \cdot \sin z$$

Ist die Ablenkung nicht größer als 20°, so kann man mit hinreichender Annäherung setzen $\sin \delta_1 = \delta_1 \cdot \sin 1^0$ (siehe § 98) und erhält

$$\delta_1 \cdot \sin 1^0 = \frac{P}{H} \cdot \sin z$$

$$\delta_1 = \frac{P}{H \cdot \sin 1^0} \cdot \sin z$$

Für O-Kurs ist $z = 90^0$ also $\sin z = 1$. Bezeichnet man die auf diesem Kurse stattfindende Ablenkung mit B, so ist demnach

$$B = \frac{P}{H \cdot \sin 1^0} \cdot 1$$

Der in der obigen Formel für δ_1 vor $\sin z$ stehende Faktor hat also die Bedeutung der Ablenkung auf O-Kurs, und man kann auch schreiben

$$\delta_1 = B \cdot \sin z$$

b) Wirkung einer Querschiffskraft. Es möge zweitens am Kompaßorte M (Fig. 236) eine magnetische Querschiffskraft von der Größe Q vorhanden sein. Diese soll als positiv gerechnet werden, wenn sie das Nordende der Nadel nach Steuerbord zieht, wenn sich also an Steuerbord ein Südpol (blau) befindet. Die Kraft Q setzt sich dann wieder mit der Horizontalkraft H nach dem Kräfteparallelogramm zusammen zu der Gesamtkraft MR. Nennt man die durch Q hervorgebrachte Ablenkung δ_2, so hat man nach dem Sinussatz

$$\frac{\sin \delta_2}{\sin (90^0 + z)} = \frac{Q}{H}$$

also $$\sin \delta_2 = \frac{Q}{H} \cdot \sin (90^0 + z) = \frac{Q}{H} \cdot \cos z$$

Ist die Ablenkung nicht größer als 20°, so kann man $\sin \delta_2 = \delta_2 \cdot \sin 1^0$ setzen und erhält

$$\delta_2 \cdot \sin 1^0 = \frac{Q}{H} \cdot \cos z$$

$$\delta_2 = \frac{Q}{H \cdot \sin 1^0} \cdot \cos z$$

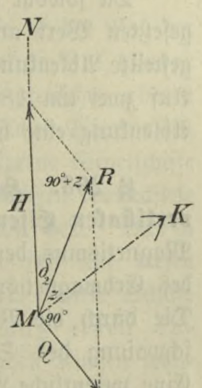


Fig. 236.

Für N-Kurs ist $z = 0$ also $\cos z = 1$. Bezeichnet man die auf diesem Kurse stattfindende Ablenkung mit C, so ist

$$C = \frac{Q}{H \cdot \sin 1^0} \cdot 1$$

Der in der obigen Formel für δ_2 vor $\cos z$ stehende Faktor hat also die Bedeutung der Ablenkung auf N-Kurs, und man kann auch schreiben

$$\delta_2 = C \cdot \cos z$$

Auf die bisher betrachteten einfachsten Fälle einer magnetischen Längsschiffskraft und einer Querschiffskraft läßt sich der allgemeine Fall irgend welcher Verteilung von festen Polen im Schiffe ohne weiteres zurückführen.

Sind nämlich im Schiffskörper irgend welche feste Magnetpole vorhanden, so übt jeder dieser Pole am Kompaßorte eine bestimmte anziehende oder abstoßende Kraft aus. Jede dieser Kräfte kann man sich zerlegt denken in eine parallel zum Deck wirkende horizontale und eine senkrecht zum Deck wirkende vertikale Seitenkraft. Die letztere dieser Teilkräfte kommt für die Ablenkung nicht in Betracht, solange das Schiff aufrecht auf ebenem Kiele liegt.

Die parallel zum Deck wirkende Teilkraft aber kann wieder zerlegt gedacht werden in eine längsschiffs nach vorn und eine querschiffs nach Steuerbord gerichtete Komponente, von denen jede positiv oder negativ, d. h. anziehend oder abstoßend sein kann. Indem man die von den verschiedenen Polen herrührenden Längsschiffskräfte und ebenso die von ihnen herrührenden Querschiffskräfte je mit Rücksicht auf die Vorzeichen addiert, hat man es schließlich nur mit einer Längsschiffskraft P und mit einer Querschiffskraft Q zu thun. P wird sich auf dem Kompaßkurs O durch die dort stattfindende Ablenkung B, Q dagegen auf N-Kurs durch die dort stattfindende Ablenkung C zu erkennen geben. Mit Hülfe dieser beiden Größen, die man gewöhnlich in Gradmaß ausdrückt, kann man für irgend einen Kurs die vom gesamten festen Schiffsmagnetismus herrührende Ablenkung nach der Formel

$$\delta = \boldsymbol{B \cdot \sin z + C \cdot \cos z}$$

berechnen.

Da sowohl $\sin z$ als auch $\cos z$ auf entgegengesetzten Kursen den entgegengesetzten Wert annehmen, so hat die ganze durch die vorstehende Formel dargestellte Ablenkung auf entgegengesetzten Kursen den entgegengesetzt gleichen Wert. Auf zwei um 180° verschiedenen Kursen wird sie gleich Null. Man nennt diese Ablenkung eine halbkreisige oder semicirculare.

§ 293. Halbkreisige Ablenkung durch flüchtigen Magnetismus im vertikalen Eisen. Der Kompaß auf hölzernen Schiffen. Auch der flüchtige Magnetismus, der in den vertikalen Eisenmassen des Schiffes durch die Vertikalkraft des Erdmagnetismus induziert wird, ruft eine halbkreisige Ablenkung hervor. Die durch die Vertikalkraft erregten Pole bleiben nämlich während der Rundschwaiung des Schiffes ungeändert, genau so, als wenn sie feste Pole wären. Eine wesentliche Änderung tritt erst ein, wenn das Schiff seine magnetische Breite erheblich ändert; hiervon wird später die Rede sein. Die Wirkung der in den verschiedenen weichen Eisenmassen durch die Vertikalinduktion hervorgerufenen Pole kann man sich, ebenso wie früher die Wirkung der festen Pole, in eine Gesamtkraft vereinigt denken. Da die vertikalen Eisenmassen entweder in der Mitschiffsebene selbst stehen oder doch symmetrisch zu ihr verteilt sind, so fällt die Gesamtkraft in die Mitschiffsebene; sie läßt sich also ersetzen durch die Wirkung eines in der Mittschiffsebene liegenden Poles, der als der Pol der Vertikalinduktion bezeichnet werden soll. Seine Wirkung kann in eine Längsschiffskraft und eine senkrecht zum Deck wirkende Kraft zerlegt werden.

Der Pol der Vertikalinduktion bewirke auf O-Kurs für sich eine Ablenkung B'. Dieser Wert B' soll mit dem von der Längsschiffskraft des festen Schiffsmagnetismus herrührenden B zusammengefaßt, und die Summe beider soll wieder mit dem Buchstaben B bezeichnet werden. B bedeutet dann die auf O-Kurs beobachtete Gesamtablenkung; es hat zwei Ursachen, nämlich die Längsschiffskräfte

1. des festen Schiffsmagnetismus,
2. des Poles der Vertikalinduktion.

Eine Trennung der beiden Bestandteile von B ist nur möglich, wenn die Ablenkung auf O- oder W-Kurs an Orten mit erheblich verschiedener Vertikalkraft beobachtet worden ist (vergl. § 300).

Nennt man die Längsschiffskraft des Poles der Vertikalinduktion P', so ist die dieser Kraft entsprechende Ablenkung

$$\delta' = \frac{P'}{H \cdot \sin 1^{0}} \cdot \sin z \quad \text{und dementsprechend} \quad B' = \frac{P'}{H \cdot \sin 1^{0}}$$

Die Kraft P' ist proportional der Vertikalkraft V des Erdmagnetismus, also etwa $P' = c \cdot V$ und es ist

$$B' = \frac{c \cdot V}{H \cdot \sin 1^{0}}$$

und da $V = H \cdot tang\, J$ ist,

$$B' = \frac{c}{\sin 1^{0}} \cdot tang\, J$$

Für das gesamte B hat man also die Formel

$$B = \frac{1}{\sin 1^{0}} \left(\frac{P}{H} + c \cdot tang\, J \right) \quad \text{(vergl. § 296).}$$

Für die Brückenkompasse der heutigen eisernen Dampfschiffe ist der Pol der Vertikalinduktion fast ausnahmslos auf Nordbreite ein anziehender Pol hinter dem Kompaß, herrührend von den auf dieser Breite südmagnetischen oberen Enden (blauen Polen) der größtenteils hinter dem Kompaß befindlichen Eisenmassen des Schiffes. Gerade das entgegengesetzte Verhalten zeigen hölzerne Segelschiffe mit dem Kompaß auf dem erhöhten Achterdeck. Die auf diesen Schiffen beobachtete Ablenkung rührt meist lediglich vom Pole der Vertikalinduktion her. Die in Betracht kommenden eisernen Ausrüstungsgegenstände befinden sich auf diesen Schiffen größtenteils vor dem Kompaß und niedriger als dieser. Diese Schiffe zeigen deshalb auf nordmagnetischer Breite vor dem Kompaß einen anziehenden Pol, also auf östlichen Kursen östliche, auf westlichen Kursen westliche Ablenkung. Auf südmagnetischer Breite finden die entgegengesetzten Ablenkungen statt.

Diese Eigentümlichkeit wurde zuerst von Flinders erkannt und ausgesprochen. Sie ist ohne Zweifel auch die Ursache der früher bei den Seeleuten der Nordsee allgemein verbreiteten Ansicht, daß „der Südwall zieht". Eine Nichtberücksichtigung der oben beschriebenen Deviation hat nämlich sowohl auf östlichen wie auf westlichen Kursen eine südliche Versetzung des Schiffes zur Folge. In der That zieht der Südpol am Kopfe des Schiffes auf östlichen Kursen das Nord der Rose nach Ost, auf westlichen Kursen nach West herum, und das Schiff wird in demselben Sinne versetzt werden, in dem die Rose abgelenkt ist. Da sich im englischen Kanal die Schiffe unter der englischen Küste halten, so bewirkt dort die östliche Ablenkung glücklicherweise eine Versetzung von Land ab. Hielten sich die Schiffe unter der französischen statt unter der englischen Küste, so würde durch die örtliche Ablenkung in den Zeiten, in denen sich die Seefahrer noch nicht an deren Berücksichtigung gewöhnt hatten, sicher noch viel mehr Unglück geschehen sein.

§ 294. Störungen in der Richtkraft bei großer halbkreisiger Deviation. Eine Längsschiffskraft bringt auf den Kompaßkursen N und S keine Ablenkung der Nadel hervor, da sie in der Richtung der Nadel wirkt. Sie hat jedoch auf diesen Kursen eine Veränderung der Richtkraft des Kompasses zur Folge. Ein anziehender Pol vor dem Kompaß erzeugt auf N-Kurs eine Verstärkung, auf S-Kurs dagegen eine Schwächung der Richtkraft, während ein abstoßender Pol vor dem Kompaß die entgegengesetzte Wirkung hat. In ähnlicher Weise verändert die Querschiffskraft die Richtkraft der Rose auf O- und W-Kurs. Allgemein kann man sagen, daß, wenn auf zwei entgegengesetzten Kursen große halbkreisige Ablenkung vorhanden ist, auf den dazu senkrecht gelegenen Kursen die Richtkraft der Rose stark verändert ist und zwar derart, daß sie auf dem einen Kurse um denselben Betrag verstärkt ist, um den sie auf dem anderen Kurse verringert ist.

Derartige Veränderungen der Richtkraft werden, wenn sie beträchtlich sind, noch unangenehmer in dem Verhalten des Kompasses empfunden als die ihnen entsprechenden Ablenkungen. Bei geschwächter Richtkraft fängt die Rose leicht an zu laufen, wodurch der Kompaß für die Innehaltung des Kurses ganz untauglich wird. Aber auch eine starke Vergrößerung der Richtkraft auf einem Kurse kann einen ungünstigen Einfluß auf das Steuern ausüben; der anziehende Pol zieht die Rose mit herum oder mit anderen Worten, der Kompaß folgt dem Schiffe, er ist „träge"; der Mann am Ruder, wenn es sich um einen Steuerkompaß handelt, meint gut zu steuern, während das Schiff thatsächlich Schlangenlinien um den beabsichtigten Kurs beschreibt.

Ist auf einem Kurse die Richtkraft durch feste Schiffspole verstärkt, so fällt das Schiff in der Nähe dieses Kurses am Kompaß kleinere Winkel ab als in Wirklichkeit; das Schiff zieht die Rose mit. Ist dagegen die Richtkraft auf einem Kurse geschwächt, so fällt das Schiff in der Nähe dieses Kurses am Kompaß größere Winkel ab als in Wirklichkeit; die Rose wird nach der entgegengesetzten Seite abgestoßen.

§ 295. Wirkung der Horizontalinduktion. Viertelkreisige Ablenkung. Die Horizontalkraft des Erdmagnetismus induziert in den Eisenmassen des Schiffes magnetische Pole, die während einer Rundschwaiung zweimal ihr Zeichen wechseln und dadurch eine Ablenkung hervorrufen, die einen viermaligen

Zeichenwechsel aufweist und deshalb viertelkreisige Ablenkung oder quadrantale Deviation genannt wird.

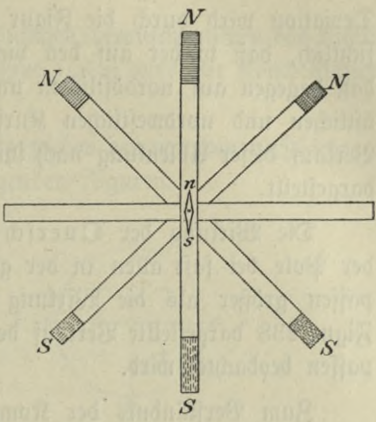


Fig. 237.

Man denke sich den Kompaß über der Mitte einer starken längsschiffs liegenden eisernen Stange aufgestellt (Fig. 237). Wenn das Schiff auf magnetisch *N*- oder *S*-Kurs liegt, so wird keine Ablenkung erzeugt, da die Pole in der Richtung der Nadel liegen; ebensowenig entsteht eine Ablenkung, wenn das Schiff *O* oder *W* anliegt, da die Stange in dieser Lage unmagnetisch ist. Liegt dagegen das Schiff auf nordöstlichen oder südwestlichen Kursen, so stößt beidemal das nordmagnetische Ende der Stange das Nordende der Nadel nach Westen, liegt das Schiff dagegen auf südöstlichen oder nordwestlichen Kursen, so erfolgt in derselben Weise eine Abstoßung nach Osten. Die Nullstellen und Vorzeichen der durch die Längsschiffsstange erzeugten Ablenkung sind die in der Fig. 240b angegebenen.

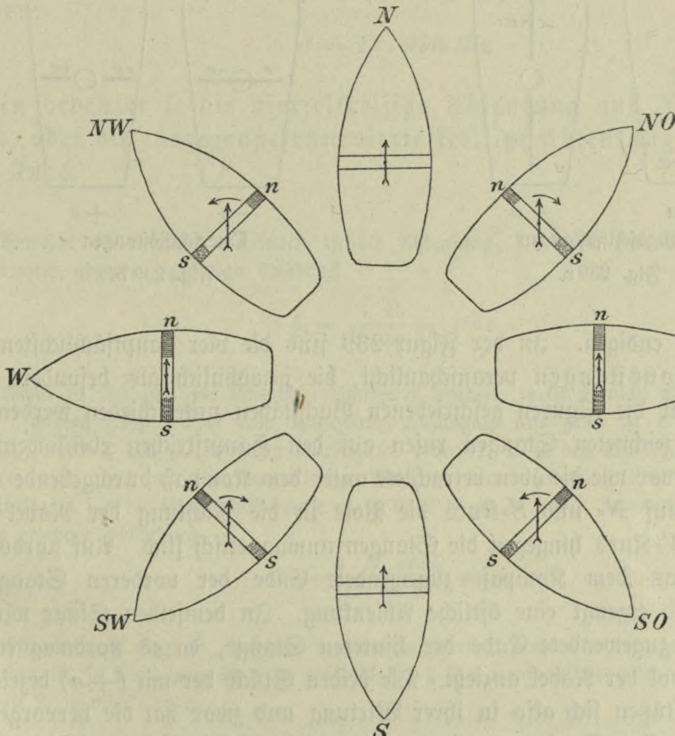


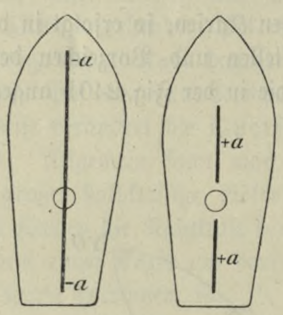
Fig. 238.

Eine unterhalb des Kompasses querschiffs liegende Eisenstange, z. B. ein Decksbalken, hat eine ähnliche Ablenkung zur Folge, nur ist ihr Vorzeichen in allen Quadranten das entgegengesetzte. Das Zustandekommen dieser viertelkreisigen

Deviation wird durch die Figur 238 veranschaulicht. Aus dieser Figur ist ersichtlich, daß wieder auf den vier Hauptstrichen die Ablenkung gleich Null ist, daß dagegen auf nordöstlichen und südwestlichen Kursen *O*-Ablenkung, auf südöstlichen und nordwestlichen Kursen dagegen *W*-Ablenkung erzeugt wird. Der Verlauf dieser Ablenkung nach ihren Nullstellen und Vorzeichen ist in Fig. 240a dargestellt.

Die Wirkung der Querschiffsinduktion ist wegen der größeren Nähe der Pole bei fast allen in der gewöhnlichen Höhe über Deck aufgestellten Kompassen größer als die Wirkung der Längsschiffsinduktion, so daß der in Figur 238 dargestellte Verlauf der viertelkreisigen Ablenkung bei fast allen Kompassen beobachtet wird.

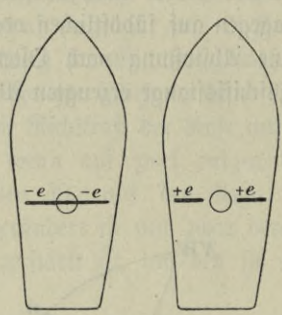
Zum Verständnis der Kompensation der viertelkreisigen Ablenkung ist es erwünscht, auch die Wirkung von Stangen zu betrachten, die vor oder hinter



— *a* + *a*

Längsschiffsstangen

Fig. 239a.



— *e* + *e*

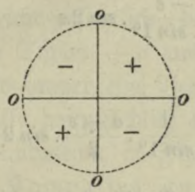
Querschiffsstangen

Fig. 239b.

dem Kompasse endigen. In der Figur 239 sind die vier hauptsächlichsten Arten von Induktionsstangen veranschaulicht, die gewöhnlich als besondere Typen durch die unter die Figuren geschriebenen Buchstaben unterschieden werden. Die mit (+ *v*) bezeichneten Stangen rufen auf den Hauptstrichen ebensowenig eine Ablenkung hervor wie die oben betrachtete unter dem Kompaß durchgehende (— *a*)-Stange, da auf *N*- und *S*-Kurs die Pole in die Richtung der Nadel fallen, auf *O*- und *W*-Kurs hingegen die Stangen unmagnetisch sind. Auf nordöstlichen Kursen ist das dem Kompaß zugewendete Ende der vorderen Stange südmagnetisch und erzeugt eine östliche Ablenkung. In demselben Sinne wirkt das dem Kompaß zugewendete Ende der hinteren Stange, da es nordmagnetisch ist und den Südpol der Nadel anzieht. Die beiden Stücke der mit (+ *a*) bezeichneten Stange unterstützen sich also in ihrer Wirkung und zwar hat die hervorgebrachte Ablenkung in allen Quadranten das entgegengesetzte Vorzeichen wie die von der (— *a*)-Stange und dasselbe Vorzeichen wie die von der (— *e*)-Stange erzeugte Ablenkung. Die auf beiden Seiten des Kompasses liegenden (+ *e*)-Stangen bringen, wie man sich leicht überzeugt, Ablenkungen mit demselben Vorzeichen wie die (— *a*)-Stangen und entgegengesetzte wie die (+ *a*)- und die (— *e*)-Stangen hervor.

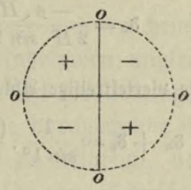
Die mit $(-a)$ und $(-e)$ bezeichneten Stangen veranschaulichen das Schiff nach seiner Längs- und Quererstreckung, der Typus $(+e)$ wird zur Kompensation der viertelkreisigen Ablenkung benutzt.

Eine Übersicht über die Nullstellen und Vorzeichen der von den verschiedenen Stangen erzeugten Ablenkungen geben die folgenden Figuren.



längsschiffs unterbrochen $(+a)$
querschiffs durchgehend $(-e)$

Fig. 240a.



längsschiffs durchgehend $(-a)$
querschiffs unterbrochen $(+e)$

Fig. 240b.

Die viertelkreisige Ablenkung kann durch die Formel dargestellt werden:

$$\boldsymbol{\delta = D \, . \, sin \, 2z}$$

Hierin bedeutet D die viertelkreisige Ablenkung auf NO- oder SW-Kurs, oder die entgegengesetzte viertelkreisige Ablenkung auf SO- oder NW-Kurs.

Beweis: Wie früher abgeleitet, ist die Ablenkung, die durch eine Längsschiffskraft P erzeugt wird, gegeben durch den Ausdruck

$$\delta_1 = \frac{P}{H \, . \, sin \, 1^0} \, . \, sin \, z$$

Wenn es sich um eine Längsschiffsstange a handelt, so ist P nicht mehr eine konstante Größe, sondern selbst wieder vom Kurswinkel abhängig, und zwar ist P proportional mit $H \, . \, cos \, \zeta$, wenn ζ den magnetischen Kurswinkel bedeutet, d. h. den Winkel, den die Kiellinie (oder die a-Stange) mit dem magnetischen Meridian bildet (vergl. § 289). Nennt man die Verhältniszahl für die Längsschiffsstange a, so ist $P = a \, . \, H \, . \, cos \, \zeta$; demnach die durch die a-Stange erzeugte Ablenkung

$$\delta_a = \frac{a \, . \, H \, . \, cos \, \zeta}{H \, . \, sin \, 1^0} \, . \, sin \, z$$

Nimmt man nun an, daß der magnetische Kurs ζ nicht sehr von dem Kompaßkurse z verschieden ist, so kann man in dieser Formel für ζ den Kompaßkurs z setzen. Erweitert man noch mit 2, so erhält man

$$\delta_a = \frac{a \, . \, H}{2 H \, . \, sin \, 1^0} \, . \, 2 \, . \, sin \, z \, . \, cos \, z = \frac{a}{2 \, . \, sin \, 1^0} \, . \, sin \, 2z$$

Eine Querschiffskraft Q erzeugt nach dem früheren die Ablenkung

$$\delta_2 = \frac{Q}{H \, . \, sin \, 1^0} \, . \, cos \, z$$

Wenn es sich um eine Querschiffsstange e handelt, so ist Q nicht konstant, sondern proportional mit $H \cdot cos\,(90^0 + \zeta)$ oder mit $-H \cdot sin\,\zeta$. Nennt man die Verhältniszahl e, so ist $Q = -e \cdot H \cdot sin\,\zeta$; also die durch die e-Stange erzeugte Ablenkung

$$\delta_e = \frac{-e \cdot H \cdot sin\,\zeta}{H \cdot sin\,1^0} \cdot cos\,z$$

oder unter derselben Voraussetzung wie oben

$$\delta_e = \frac{-e \cdot H}{2H \cdot sin\,1^0} \cdot 2\,sin\,z \cdot cos\,z = \frac{-e}{2 \cdot sin\,1^0} \cdot sin\,2z$$

Die gesamte viertelkreisige Ablenkung ist also

$$\delta_a + \delta_e = \frac{1}{sin\,1^0} \cdot \frac{(a-e) \cdot H}{2H} \cdot sin\,2z = \frac{1}{sin\,1^0} \cdot \frac{a-e}{2} \cdot sin\,2z$$

Für NO-Kurs ist $z = 45^0$, $2z = 90^0$, $sin\,2z = 1$. Bezeichnet man die auf NO-Kurs durch die Horizontalinduktion in den Stangen a und e erzeugte Ablenkung mit D, so ist demnach

$$D = \frac{1}{sin\,1^0} \cdot \frac{(a-e) \cdot H}{2H} \cdot 1 = \frac{1}{sin\,1^0} \cdot \frac{a-e}{2} \quad \text{(vergl. § 296)}$$

Für irgend einen Kurs hat man dann die Deviation

$$\delta_a + \delta_e = D \cdot sin\,2z.$$

Wenn außer der viertelkreisigen noch eine halbkreisige Ablenkung vorhanden ist, so findet man das D am besten dadurch, daß man die auf NO- und SW-Kurs beobachteten Ablenkungen mit Rücksicht auf ihr Zeichen addiert und die Summe durch 2 dividiert. Bei der Addition hebt sich nämlich die halbkreisige Ablenkung gegenseitig auf, weil diese auf den entgegengesetzten Kursen entgegengesetzt gleiche Werte hat, und man bekommt die doppelte auf NO- und SW-Kurs stattfindende viertelkreisige Ablenkung, d. h. den doppelten Wert von D.

Bei fast allen Kompassen ist, wie schon oben erwähnt, wegen des Überwiegens der Querschiffsinduktion die Größe D positiv.

Unsymmetrisch angeordnetes horizontales weiches Eisen bewirkt, daß außer der durch $D \cdot sin\,2z$ dargestellten noch eine weitere viertelkreisige Ablenkung auftritt, die auf den Hauptzwischenstrichen gleich Null ist und auf den Hauptstrichen ihre größten Werte annimmt. Sie kann durch die Formel

$$\delta = E \cdot cos\,2z$$

dargestellt werden und kommt besonders in Frage bei Kompassen, die nicht in der Mittschiffsebene aufgestellt sind. In diesem Falle entsteht außerdem auch eine für alle Kurse gleichbleibende oder konstante Ablenkung, die man mit dem Buchstaben A bezeichnet.

§ 296. Schwächung der Richtkraft durch das horizontale weiche Eisen des Schiffes. Eine unter dem Kompasse durchgehende horizontale Stange von weichem Eisen hat in allen Lagen — mit Ausnahme von der O-W-Lage, wo sie unmagnetisch ist — eine Schwächung der Richtkraft der Kompaßnadel zur Folge. In der That entsteht immer an dem nach Norden gewandten Ende ein (roter) Nordpol, an dem nach Süden gewandten Ende ein (blauer) Südpol.

Es stehen sich daher stets gleichnamige Pole gegenüber, so daß eine Schwächung der Richtkraft die Folge ist, und zwar gilt dieses gleichmäßig für Längsschiffs- und für Querschiffsstangen.

Alle unter dem Kompaß durchgehenden horizontalen weichen Eisenmassen (Stangen vom Typus $-a$ und $-e$) bewirken eine Schwächung der Richtkraft des Kompasses.

Es ist leicht ersichtlich, daß die beim Kompaß unterbrochenen horizontalen Stangen vom Typus $+a$ und $+e$ stets den Nadelpolen ungleichnamige Pole zuwenden, also immer eine Verstärkung der Richtkraft hervorbringen. Da jedoch auf dem Schiffe hauptsächlich unter dem Kompasse durchgehende Eisenmassen für die Horizontalinduktion in Frage kommen, so ist es erklärlich, daß die Richtkraft eines Kompasses an Bord eines eisernen Schiffes im Mittel stets geringer ist als die Richtkraft desselben Kompasses an Land.

Von der Schwächung der Richtkraft einer Magnetnadel durch eine darunter gelagerte Masse weichen Eisens giebt folgende Anordnung eine anschauliche Vorstellung. Der Kompaß sei über der Mitte einer horizontalen kreisförmigen Platte von weichem Eisen aufgestellt. In der Platte wird durch die Horizontalkraft des Erdmagnetismus Magnetismus induziert. Die Achse der Magnetisierung fällt in die Richtung des magnetischen Meridians, und zwar so, daß dem Nordpole der Nadel ein Nordpol der Platte und dem Südpole der Nadel ein Südpol der Platte gegenübersteht (Fig. 241). An diesen Verhältnissen ändert sich nichts, wenn man auch die Platte um ihren Mittelpunkt herum dreht, da ihre Pole im Meridiane liegen bleiben. Eine derartige kreisförmige Platte hat daher eine gleichmäßige Schwächung der Richtkraft des darüber stehenden Kompasses zur Folge, ohne daß sie dabei zu irgend welchen Ablenkungen Anlaß giebt.

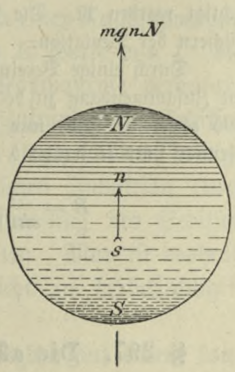


Fig. 241.

In ähnlicher Weise wird auch an Bord eines eisernen Schiffes die Richtkraft des Kompasses durch die Horizontalinduktion im weichen Eisen vermindert, allerdings nicht auf allen Kursen in demselben Grade, sondern auf O- und W-Kurs wegen der größeren Nähe der in der Querschiffsrichtung induzierten Pole im allgemeinen mehr als auf N- und S-Kurs. Die mittlere Richtkraft nach magnetisch Nord erhält man, wenn man die auf den 32 Kompaßstrichen stattfindenden Richtkräfte addiert und die Summe durch 32 dividiert, oder indem man das Mittel aus den Richtkräften auf den vier Hauptstrichen nimmt. Man bezeichnet in der Deviationslehre mit dem Buchstaben λ das Verhältnis der mittleren an Bord nach magnetisch Nord wirkenden Kraft zu der an Ort und Stelle am Lande herrschenden Horizontalkraft des Erdmagnetismus. Man kann dann sagen, daß die Nadel an Bord nicht durch die Horizontalkraft H, sondern durch $\lambda . H$ in den magnetischen Meridian gezogen werde. An Bord der Kauffahrteischiffe hat λ gewöhnlich einen Wert von 0,8 bis 0,9; das besagt also, daß an Bord dieser Schiffe die

Richtkraft nur 8 bis 9 Zehntel von derjenigen am Lande ist. Für Kompasse in den Panzertürmen der Kriegsschiffe ist oft der Wert von λ nicht größer als 0,3.

Im allgemeinen ist ein Kompaßort um so ungünstiger, je kleiner für ihn der Koeffizient λ ausfällt.

Die mittlere an Bord nach magnetisch Nord wirkende Kraft ist auch gleich dem Mittel der Kräfte, die auf den magnetischen Kursen N, S, O und W nach magnetisch Nord wirksam sind. Bezeichnet man die gesamte vom festen Magnetismus und vom Pole der Vertikalinduktion herrührende Längsschiffskraft mit P, so ist nach magnetisch Nord wirksam:

auf magnetisch N-Kurs . . . $H + a \,.\, H + P$
auf magnetisch S-Kurs . . . $H + a \,.\, H - P$
auf magnetisch O-Kurs . . . $H + e \,.\, H + Q$
auf magnetisch W-Kurs . . . $H + e \,.\, H - Q$

Das Mittel dieser Kräfte ist

$$\frac{1}{4} \cdot \left(4H + 2a \,.\, H + 2e \,.\, H\right) = \left(1 + \frac{a+e}{2}\right) . H$$

Die oben mit λ bezeichnete Größe hat demnach den Wert

$$\lambda = 1 + \frac{a+e}{2}$$

In den oben gegebenen Ableitungen für die verschiedenen Bestandteile der Ablenkung ist insofern eine Ungenauigkeit vorhanden, als überall als Richtkraft nach magnetisch Nord die Horizontalkraft H angenommen, also die Änderung der Richtkraft mit dem Kurse nicht berücksichtigt worden ist. Die Ableitung der genauen Deviationsformel findet man in den Lehrbüchern der Deviation.

Durch einige Vereinfachungen geht die genaue Formel in die im nächsten Paragraphen im Zusammenhang zu betrachtende Formel über, deren einzelne Bestandteile in § 292, 293 und 295 abgeleitet sind, nur ist in den früher abgeleiteten Werten der Größen B, C und D im Nenner statt H immer $\lambda \,.\, H$ zu schreiben, so daß man hat

$$B = \frac{1}{\sin 1^0} \cdot \left(\frac{P}{\lambda \,.\, H} + \frac{c}{\lambda} \operatorname{tang} J\right) \qquad C = \frac{1}{\sin 1^0} \cdot \frac{Q}{\lambda \,.\, H}$$

$$D = \frac{1}{\sin 1^0} \cdot \frac{a-e}{2\lambda}$$

§ 297. **Die allgemeine Ablenkungsformel.** Nach dem Vorhergehenden giebt eine magnetische Längsschiffskraft zu einer Ablenkung $B \,.\, \sin z$, eine Querschiffskraft zu einer Ablenkung $C \,.\, \cos z$, ferner die Horizontalinduktion im weichen Eisen zu einer Ablenkung $D \,.\, \sin 2z$ Veranlassung. Unsymmetrisch verteiltes horizontales Eisen erzeugt ferner, wie am Schluß des § 295 erwähnt worden ist, eine konstante Ablenkung A und gleichzeitig eine viertelkreisige Ablenkung, die durch den Ausdruck $E \,.\, \cos 2z$ dargestellt werden kann.

Wirken die verschiedenen ablenkenden Ursachen gleichzeitig und beträgt die Gesamtablenkung nicht über 20°, so läßt sie sich als Summe der Einzelablenkungen darstellen nach der Formel:

$$\delta = A + B \,.\, \sin z + C \,.\, \cos z + D \,.\, \sin 2z + E \,.\, \cos 2z$$

In dieser Formel bedeutet z den Kompaßkurswinkel. Er wird von Nord über Ost von 0^{str} bis 32^{str} gezählt. Ein $+\delta$ bedeutet östliche, ein $-\delta$ westliche Ablenkung. Die Größen A, B, C, D und E werden in Graden ausgedrückt und heißen die Deviationskoeffizienten des Kompasses.

A nennt man die konstante, d. h. für alle Kurse gleiche Ablenkung,
$B.\sin z + C.\cos z$ heißt die halbkreisige oder semicirkulare Ablenkung,
$D.\sin 2z + E.\cos 2z$ heißt die viertelkreisige oder quadrantale Ablenkung.

Ist der Kompaß in der Mittschiffsebene aufgestellt und sind keine störenden unsymmetrisch verteilten Eisenmassen vorhanden, so sind A und E gleich Null. Die Deviationsformel beschränkt sich in diesem Falle auf die drei Glieder:

$$\delta = \boldsymbol{B}.\sin z + \boldsymbol{C}.\cos z + \boldsymbol{D}.\sin 2z$$

Die Ursachen der Deviationskoeffizienten sind die folgenden:

B rührt her von der Längsschiffskraft des festen Schiffsmagnetismus und vom Pole der Vertikalinduktion

C rührt her von der Querschiffskraft des festen Schiffsmagnetismus. [Nur bei Vorhandensein unsymmetrischer vertikaler Eisenmassen würde auch C von der Vertikalinduktion abhängen.]

D entsteht durch die Horizontalinduktion in den weichen Eisenmassen des Schiffes.

Über die Koeffizienten A und E ist folgendes zu bemerken: Wenn bei mittschiffs gut aufgestellten Kompassen häufig aus den während einer Rundschwaiung beobachteten Ablenkungswerten für die Koeffizienten A und E Werte von 1^0 bis 2^0 folgen, so kann dies durch das Nachschleppen der Kompaßrose veranlaßt sein; meist liegt es aber daran, daß der magnetische Zustand des Schiffes hinsichtlich der Horizontalinduktion nicht der augenblicklichen Lage, sondern infolge einer gewissen Trägheit des Eisens gegenüber der magnetischen Induktion einer etwas früheren Lage entspricht. Bei entgegengesetzter Schwaiung des Schiffes würde man die entgegengesetzten Werte für A und E erhalten. Man ist deshalb berechtigt, derartige beobachtete Beträge des A und E nicht zu berücksichtigen (vergl. die Schlußbemerkungen des § 301).

Nicht selten beruht ein vermeintlich beobachtetes A lediglich auf einem konstanten Fehler in den Beobachtungs- oder Rechnungsgrößen. Wendet man z. B. bei der Ablenkungsbestimmung durch Azimute eine unrichtige Ortsmißweisung an, oder ist bei Fernpeilungen die rein mißweisende Peilung ungenau, oder hat bei gegenseitigen Peilungen der Landkompaß einen Fehler, so erhält man alle Ablenkungen um denselben Betrag fehlerhaft, und ein vermeintliches A ist die Folge. Die Ablenkungskurve wird dann um den gemachten Fehler nach der einen oder der anderen Seite verschoben.

Ein thatsächlicher Wert des Koeffizienten A kann darin seinen Grund haben, daß die Nord-Südlinie der Rosenteilung nicht in die magnetische Achse der Rose fällt (Index- oder Kollimationsfehler der Rose, siehe § 306).

A und E können aus magnetischen Ursachen nur durch unsymmetrisch zum Kompaß liegendes horizontales weiches Eisen entstehen. Sie entstehen dann meistens gleichzeitig.

Eine Übersicht über die auf den 32 Kompaßstrichen stattfindenden Ablenkungen gewährt die folgende Übersichtstafel.

z	$\delta = A$	$+ B . \sin z$	$+ C . \cos z$	$+ D . \sin 2z$	$+ E . \cos 2z$
N	$\delta = A$		$+ C$		$+ E$
NzO	$\delta = A$	$+ B . \sin 1^{str}$	$+ C . \cos 1^{str}$	$+ D . \sin 2^{str}$	$+ E . \cos 2^{str}$
NNO	$\delta = A$	$+ B . \sin 2^{str}$	$+ C . \cos 2^{str}$	$+ D . \sin 4^{str}$	$+ E . \cos 4^{str}$
$NOzN$	$\delta = A$	$+ B . \sin 3^{str}$	$+ C . \cos 3^{str}$	$+ D . \sin 6^{str}$	$+ E . \cos 6^{str}$
NO	$\delta = A$	$+ B . \sin 4^{str}$	$+ C . \cos 4^{str}$	$+ D$	
$NOzO$	$\delta = A$	$+ B . \sin 5^{str}$	$+ C . \cos 5^{str}$	$+ D . \sin 6^{str}$	$- E . \cos 6^{str}$
ONO	$\delta = A$	$+ B . \sin 6^{str}$	$+ C . \cos 6^{str}$	$+ D . \sin 4^{str}$	$- E . \cos 4^{str}$
OzN	$\delta = A$	$+ B . \sin 7^{str}$	$+ C . \cos 7^{str}$	$+ D . \sin 2^{str}$	$- E . \cos 2^{str}$
O	$\delta = A$	$+ B$			$- E$
OzS	$\delta = A$	$+ B . \sin 7^{str}$	$- C . \cos 7^{str}$	$- D . \sin 2^{str}$	$- E . \cos 2^{str}$
OSO	$\delta = A$	$+ B . \sin 6^{str}$	$- C . \cos 6^{str}$	$- D . \sin 4^{str}$	$- E . \cos 4^{str}$
$SOzO$	$\delta = A$	$+ B . \sin 5^{str}$	$- C . \cos 5^{str}$	$- D . \sin 6^{str}$	$- E . \cos 6^{str}$
SO	$\delta = A$	$+ B . \sin 4^{str}$	$- C . \cos 4^{str}$	$- D$	
$SOzS$	$\delta = A$	$+ B . \sin 3^{str}$	$- C . \cos 3^{str}$	$- D . \sin 6^{str}$	$+ E . \cos 6^{str}$
SSO	$\delta = A$	$+ B . \sin 2^{str}$	$- C . \cos 2^{str}$	$- D . \sin 4^{str}$	$+ E . \cos 4^{str}$
SzO	$\delta = A$	$+ B . \sin 1^{str}$	$- C . \cos 1^{str}$	$- D . \sin 2^{str}$	$+ E . \cos 2^{str}$
S	$\delta = A$		$- C$		$+ E$
SzW	$\delta = A$	$- B . \sin 1^{str}$	$- C . \cos 1^{str}$	$+ D . \sin 2^{str}$	$+ E . \cos 2^{str}$
SSW	$\delta = A$	$- B . \sin 2^{str}$	$- C . \cos 2^{str}$	$+ D . \sin 4^{str}$	$+ E . \cos 4^{str}$
$SWzS$	$\delta = A$	$- B . \sin 3^{str}$	$- C . \cos 3^{str}$	$+ D . \sin 6^{str}$	$+ E . \cos 6^{str}$
SW	$\delta = A$	$- B . \sin 4^{str}$	$- C . \cos 4^{str}$	$+ D$	
$SWzW$	$\delta = A$	$- B . \sin 5^{str}$	$- C . \cos 5^{str}$	$+ D . \sin 6^{str}$	$- E . \cos 6^{str}$
WSW	$\delta = A$	$- B . \sin 6^{str}$	$- C . \cos 6^{str}$	$+ D . \sin 4^{str}$	$- E . \cos 4^{str}$
WzS	$\delta = A$	$- B . \sin 7^{str}$	$- C . \cos 7^{str}$	$+ D . \sin 2^{str}$	$- E . \cos 2^{str}$
W	$\delta = A$	$- B$			$- E$
WzN	$\delta = A$	$- B . \sin 7^{str}$	$+ C . \cos 7^{str}$	$- D . \sin 2^{str}$	$- E . \cos 2^{str}$
WNW	$\delta = A$	$- B . \sin 6^{str}$	$+ C . \cos 6^{str}$	$- D . \sin 4^{str}$	$- E . \cos 4^{str}$
$NWzW$	$\delta = A$	$- B . \sin 5^{str}$	$+ C . \cos 5^{str}$	$- D . \sin 6^{str}$	$- E . \cos 6^{str}$
NW	$\delta = A$	$- B . \sin 4^{str}$	$+ C . \cos 4^{str}$	$- D$	
$NWzN$	$\delta = A$	$- B . \sin 3^{str}$	$+ C . \cos 3^{str}$	$- D . \sin 6^{str}$	$+ E . \cos 6^{str}$
NNW	$\delta = A$	$- B . \sin 2^{str}$	$+ C . \cos 2^{str}$	$- D . \sin 4^{str}$	$+ E . \cos 4^{str}$
NzW	$\delta = A$	$- B . \sin 1^{str}$	$+ C . \cos 1^{str}$	$- D . \sin 2^{str}$	$+ E . \cos 2^{str}$

§ 298. Berechnung der Deviationskoeffizienten aus gegebenen Beobachtungen. Zur Berechnung der fünf Ablenkungskoeffizienten sind fünf Beobachtungen hinreichend. Die einfachste Rechnung erhält man, wenn die Beobachtungen auf den vier Hauptstrichen und einem der Hauptzwischenstriche gemacht sind. Aus den auf den Hauptstrichen beobachteten Ablenkungen berechnet man A, B, C und E nach den unten gegebenen Regeln. Dann findet man D, indem man den Unterschied der auf dem Hauptzwischenstriche beobachteten Ablenkung und der für diesen Strich berechneten konstanten und halbkreisigen Ablenkung bildet und gehörige Rücksicht auf das Vorzeichen nimmt. Einen zuverlässigeren Wert für D erhält man, wenn man die Ablenkungen auf allen vier Hauptzwischenstrichen beobachtet und D unabhängig von den schon gefundenen Werten von A, B und C nach der unten gegebenen Regel bestimmt.

Nach der obigen Übersichtstafel ist

$$\begin{array}{ll} \delta_N = A + C + E & \delta_O = A + B - E \\ \delta_S = A - C + E & \delta_W = A - B - E \\ \hline \delta_N - \delta_S = 2C & \delta_O - \delta_W = 2B \\ \delta_N + \delta_S = 2A + 2E & \delta_O + \delta_W = 2A - 2E \end{array}$$

Daraus folgt weiter

$$(\delta_N + \delta_S) + (\delta_O + \delta_W) = 4A$$
$$(\delta_N + \delta_S) - (\delta_O + \delta_W) = 4E$$

Nach der obigen Übersichtstafel ist ferner

$$\delta_{NO} = A + B \,.\, \sin 4^{str} + C \,.\, \cos 4^{str} + D$$
$$\delta_{SW} = A - B \,.\, \sin 4^{str} - C \,.\, \cos 4^{str} + D$$

folglich $\delta_{NO} + \delta_{SW} = 2A \qquad + 2D$

$$\delta_{SO} = A + B \,.\, \sin 4^{str} - C \,.\, \cos 4^{str} - D$$
$$\delta_{NW} = A - B \,.\, \sin 4^{str} + C \,.\, \cos 4^{str} - D$$

folglich $\delta_{SO} + \delta_{NW} = 2A \qquad - 2D$

Es ist also

$$(\delta_{NO} + \delta_{SW}) - (\delta_{SO} + \delta_{NW}) = 4D$$

Aus diesen Gleichungen folgen zur Berechnung der Ablenkungskoeffizienten die Regeln:

A ist das arithmetische Mittel aus den Ablenkungen auf den vier Hauptstrichen

$$A = \frac{(\delta_N + \delta_S) + (\delta_O + \delta_W)}{4}$$

B erhält man, indem man die Ablenkung auf *O*-Kurs und die entgegengesetzte Ablenkung auf *W*-Kurs addiert und die Summe durch 2 dividiert

$$B = \frac{\delta_O - \delta_W}{2}$$

C erhält man, indem man die Ablenkung auf *N*-Kurs und die entgegengesetzte Ablenkung auf *S*-Kurs addiert und die Summe durch 2 dividiert

$$C = \frac{\delta_N - \delta_S}{2}$$

D erhält man, indem man die Ablenkungen auf *NO*- und *SW*-Kurs und die entgegengesetzten Ablenkungen auf *SO*- und *NW*-Kurs addiert und die Summe durch 4 dividiert

$$D = \frac{(\delta_{NO} + \delta_{SW}) - (\delta_{SO} + \delta_{NW})}{4}$$

E erhält man, indem man die Ablenkungen auf *N*- und *S*-Kurs und die entgegengesetzten Ablenkungen auf *O*- und *W*-Kurs addiert und die Summe durch 4 dividiert

$$E = \frac{(\delta_N + \delta_S) - (\delta_O + \delta_W)}{4}$$

Sind A und E zu vernachlässigen, so ist

B die Ablenkung auf *O*-Kurs oder die entgegengesetzte Ablenkung auf *W*-Kurs,

C die Ablenkung auf *N*-Kurs oder die entgegengesetzte Ablenkung auf *S*-Kurs.

Beispiel 1. Für den Regelkompaß eines eisernen Schiffes werden während einer Rundschwaiung die in nebenstehender Tabelle verzeichneten Ablenkungen beobachtet. Welche Werte der Ablenkungskoeffizienten folgen aus diesen Beobachtungen?

Kompaß-Kurs	δ
N	2° *W*
NO	7° *O*
O	7° *O*
SO	3° *O*
S	5° *O*
SW	3° *O*
W	6° *W*
NW	9° *W*

$$\begin{array}{rl} \delta_N + \delta_S & = +3^0 \\ \delta_O + \delta_W & = +1^0 \\ s & = +4^0 : 4 \\ A & = +1^0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \delta_N + \delta_S & = +3^0 \\ \text{entg.}\ (\delta_O + \delta_W) & = -1^0 \\ s & = +2^0 : 4 \\ E & = +0{,}5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \delta_O & = +\ 7^0 \\ \text{entg.}\ \delta_W & = +\ 6^0 \\ s & = +13^0 : 2 \\ B & = +\ 6{,}5^0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \delta_N & = -2^0 \\ \text{entg.}\ \delta_S & = -5^0 \\ s & = -7^0 : 2 \\ C & = -3{,}5^0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \delta_{NO} + \delta_{SW} & = +10^0 \\ \text{entg.}\ (\delta_{SO} + \delta_{NW}) & = +\ 6^0 \\ s & = +16^0 : 4 \\ D & = +\ 4^0 \end{array}$$

Beispiel 2. An Bord des Dampfers „Prinzregent Luitpold" beobachtete man, während das Schiff langsam im Kreise links herumdampfte, die nebenstehend verzeichneten Ablenkungen. Welche Werte der Ablenkungskoeffizienten folgen aus diesen Beobachtungen?

Kompaß-Kurs	δ
N	+ 12°
NO	+ 14°
O	+ 3°
SO	− 8°
S	− 8°
SW	− 3°
W	− 1°
NW	+ 3°

$$\begin{array}{rl} \delta_N + \delta_S & = +4^0 \\ \delta_O + \delta_W & = +2^0 \\ s & = +6^0 : 4 \\ A & = +1{,}5^0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \delta_N + \delta_S & = +4^0 \\ \text{entg.}\ (\delta_O + \delta_W) & = -2^0 \\ s & = +2^0 : 4 \\ E & = +0{,}5^0 \end{array}$$

Bezüglich der für *A* und *E* gefundenen Werte siehe die Schlußbemerkung in § 301.

$$\begin{array}{rl} \delta_O & = +3^0 \\ \text{entg.}\ \delta_W & = +1^0 \\ s & = +4^0 : 2 \\ B & = +2^0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \delta_N & = +12^0 \\ \text{entg.}\ \delta_S & = +\ 8^0 \\ s & = +20^0 : 2 \\ C & = +10^0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \delta_{NO} + \delta_{SW} & = +11^0 \\ \text{entg.}\ (\delta_{SO} + \delta_{NW}) & = +\ 5^0 \\ s & = +16^0 : 4 \\ D & = +\ 4^0 \end{array}$$

Beispiel 3. Zur genauen Ablenkungsbestimmung wurde das Schiff „Eros" auf 53,5° N und 8,5° O rechts herum und links herum geschwungen. Die nebenstehenden Ablenkungen sind die Mittelwerte aus den beiden auf dem betreffenden Kompaßkurse gemachten Beobachtungen. Welche Werte der Ablenkungskoeffizienten folgen daraus?

Kompaß-Kurs	δ
N	6° W
NO	10° O
O	13,5° O
SO	9° O
S	7° O
SW	2° O
W	10,5° W
NW	17° W

$$\begin{aligned} \delta_N + \delta_S &= +1^\circ \\ \delta_O + \delta_W &= +3^\circ \\ s &= +4^\circ : 4 \\ A &= +1^\circ \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \delta_N + \delta_S &= +1^\circ \\ \text{entg.}(\delta_O + \delta_W) &= -3^\circ \\ s &= -2^\circ : 4 \\ E &= -0{,}5^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_O &= +13{,}5^\circ \\ \text{entg. } \delta_W &= +10{,}5^\circ \\ s &= +24{,}0^\circ : 2 \\ B &= +12{,}0^\circ \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \delta_N &= -\ 6^\circ \\ \text{entg. } \delta_S &= -\ 7^\circ \\ s &= -13^\circ : 2 \\ C &= -\ 6{,}5^\circ \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \delta_{NO} + \delta_{SW} &= +12^\circ \\ \text{entg. } (\delta_{SO} + \delta_{NW}) &= +\ 8^\circ \\ s &= +20^\circ : 4 \\ D &= +\ 5^\circ \end{aligned}$$

Aufgabe: Berechne die Koeffizienten aus den in den Beispielen des § 281 angegebenen Beobachtungswerten.

§ 299. Berechnung der Ablenkung aus den Koeffizienten. Sind die fünf Koeffizienten der Ablenkungsformel bestimmt worden, so kann man die Ablenkung für alle Kompaßstriche berechnen, indem man in der Ablenkungsformel dem Kurswinkel z nacheinander die Werte 0^{str}, 1^{str}, 2^{str} u. s w. bis 31^{str} giebt.

Zur Berechnung der Produkte $B \,.\, sin\, z$, $C \,.\, cos\, z$, $D \,.\, sin\, 2z$ und $E \,.\, cos\, 2z$ kann man sich in bekannter Weise der Strichtafel bedienen (vergl. § 113). Noch bequemer lassen sich die Werte dieser Produkte mit Hülfe der Tafel 46. bestimmen (vergleiche ihre Erklärung). Da sich die Werte des Sinus und des Kosinus ihrem absoluten Betrage nach in jedem Quadranten wiederholen, so sind in dieser Tafel nur die Kurswinkel von 0^{str} bis 8^{str} enthalten.

Indem man in diese Tafel einerseits mit dem Kurswinkel, andererseits mit den Koeffizienten B, C, D und E eingeht, erhält man aus der Tafel die absoluten Werte der obigen Produkte. Die Vorzeichen in den verschiedenen Quadranten sind zu wählen, wie in den folgenden Figuren angedeutet ist (vergl. § 101).

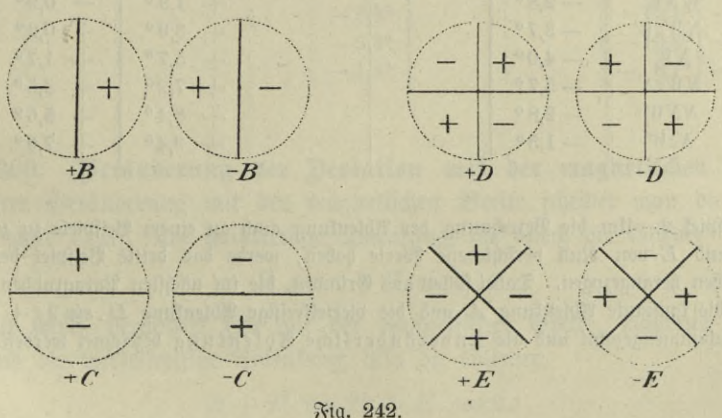


Fig. 242.

Beispiel 1. Aus den in § 298, Beispiel 2, berechneten Werten der Ablenkungskoeffizienten soll die Ablenkung für die 32 Kompaßstriche bestimmt werden, indem dabei A und E aus dem am Schlusse von § 301 angegebenen Grunde gleich Null gesetzt werden.

Dampfer „Prinzregent Luitpold" $B = +2°$, $C = +10°$, $D = +4°$

Kompaß-Kurs	*I.* Viertelkr. Ablenkung $D \cdot \sin 2z$	*II.* Halbkreisige Ablenkung $B \cdot \sin z$	$C \cdot \cos z$	insgesamt	δ $I + II$
N	0,0°	0,0°	+ 10,0°	+ 10,0°	+ 10,0°
NzO	+ 1,5°	+ 0,4°	+ 9,8°	+ 10,2°	+ 11,7°
NNO	+ 2,8°	+ 0,8°	+ 9,2°	+ 10,0°	+ 12,8°
NOzN	+ 3,7°	+ 1,1°	+ 8,3°	+ 9,4°	+ 13,1°
NO	+ 4,0°	+ 1,4°	+ 7,1°	+ 8,5°	+ 12,5°
NOzO	+ 3,7°	+ 1,7°	+ 5,6°	+ 7,3°	+ 11,0°
ONO	+ 2,8°	+ 1,9°	+ 3,8°	+ 5,7°	+ 8,5°
OzN	+ 1,5°	+ 2,0°	+ 2,0°	+ 4,0°	+ 5,5°
O	0,0°	+ 2,0°	0,0°	+ 2,0°	+ 2,0°
OzS	− 1,5°	+ 2,0°	− 2,0°	0,0°	− 1,5°
OSO	− 2,8°	+ 1,9°	− 3,8°	− 1,9°	− 4,7°
SOzO	− 3,7°	+ 1,7°	− 5,6°	− 3,9°	− 7,6°
SO	− 4,0°	+ 1,4°	− 7,1°	− 5,7°	− 9,7°
SOzS	− 3,7°	+ 1,1°	− 8,3°	− 7,2°	− 10,9°
SSO	− 2,8°	+ 0,8°	− 9,2°	− 8,4°	− 11,2°
SzO	− 1,5°	+ 0,4°	− 9,8°	− 9,4°	− 10,9°
S	0,0°			− 10,0°	− 10,0°
SzW	+ 1,5°			− 10,2°	− 8,7°
SSW	+ 2,8°			− 10,0°	− 7,2°
SWzS	+ 3,7°	Die entgegen-		− 9,4°	− 5,7°
SW	+ 4,0°	gesetzten Werte wie		− 8,5°	− 4,5°
SWzW	+ 3,7°	im östlichen Halbkreise		− 7,3°	− 3,6°
WSW	+ 2,8°			− 5,7°	− 2,9°
WzS	+ 1,5°			− 4,0°	− 2,5°
W	0,0°			− 2,0°	− 2,0°
WzN	− 1,5°			0,0°	− 1,5°
WNW	− 2,8°			+ 1,9°	− 0,9°
NWzW	− 3,7°			+ 3,9°	+ 0,2°
NW	− 4,0°			+ 5,7°	+ 1,7°
NWzN	− 3,7°			+ 7,2°	+ 3,5°
NNW	− 2,8°			+ 8,4°	+ 5,6°
NzW	− 1,5°			+ 9,4°	+ 7,9°

Beispiel 2. Um die Berechnung der Ablenkung auch an einem Beispiele zu zeigen, bei dem A und E von Null verschiedene Werte haben, werde das dritte Beispiel des vorigen Paragraphen herangezogen. Dabei sollen aus Gründen, die im nächsten Paragraphen dargelegt werden, die konstante Ablenkung A und die viertelkreisige Ablenkung $D \cdot \sin 2z + E \cdot \cos 2z$ vorweg zusammengezählt und als unveränderliche Ablenkung bezeichnet werden.

Schiff „Eros“ ($\varphi = 53{,}5^0\,N$ und $\lambda = 8{,}5^0\,O$)

$\boldsymbol{A} = +1^0$, $\boldsymbol{B} = +12^0$, $\boldsymbol{C} = -6{,}5^0$, $\boldsymbol{D} = +5^0$, $\boldsymbol{E} = -0{,}5^0$.

Kompaß-Kurs	*I.* Unveränderliche Ablenkung				*II.* Veränderliche Ablenkung			δ
	A 1	*D.sin* 2*z* 2	*E.cos* 2*z* 3	insgesamt (1+2+3)	*B.sin z* 4	*C.cos z* 5	insgesamt (4+5)	*I* + *II*
N	+ 1°	0,0°	— 0,5°	+ 0,5°	0,0°	— 6,5°	— 6,5°	— 6,0°
NzO	+ 1°	+ 1,9°	— 0,5°	+ 2,4°	+ 2,3°	— 6,4°	— 4,1°	— 1,7°
NNO	+ 1°	+ 3,5°	— 0,4°	+ 4,1°	+ 4,6°	— 6,0°	— 1,4°	+ 2,7°
NOzN	+ 1°	+ 4,6°	— 0,2°	+ 5,4°	+ 6,7°	— 5,4°	+ 1,3°	+ 6,7°
NO	+ 1°	+ 5,0°	0,0°	+ 6,0°	+ 8,5°	— 4,6°	+ 3,9°	+ 9,9°
NOzO	+ 1°	+ 4,6°	+ 0,2°	+ 5,8°	+ 10,0°	— 3,6°	+ 6,4°	+ 12,2°
ONO	+ 1°	+ 3,5°	+ 0,4°	+ 4,9°	+ 11,1°	— 2,5°	+ 8,6°	+ 13,5°
OzN	+ 1°	+ 1,9°	+ 0,5°	+ 3,4°	+ 11,8°	— 1,3°	+ 10,5°	+ 13,9°
O	+ 1°	0,0°	+ 0,5°	+ 1,5°	+ 12,0°	0,0°	+ 12,0°	+ 13,5°
OzS	+ 1°	— 1,9°	+ 0,5°	— 0,4°	+ 11,8°	+ 1,3°	+ 13,1°	+ 12,7°
OSO	+ 1°	— 3,5°	+ 0,4°	— 2,1°	+ 11,1°	+ 2,5°	+ 13,6°	+ 11,5°
SOzO	+ 1°	— 4,6°	+ 0,2°	— 3,4°	+ 10,0°	+ 3,6°	+ 13,6°	+ 10,2°
SO	+ 1°	— 5,0°	0,0°	— 4,0°	+ 8,5°	+ 4,6°	+ 13,1°	+ 9,1°
SOzS	+ 1°	— 4,6°	— 0,2°	— 3,8°	+ 6,7°	+ 5,4°	+ 12,1°	+ 8,3°
SSO	+ 1°	— 3,5°	— 0,4°	— 2,9°	+ 4,6°	+ 6,0°	+ 10,6°	+ 7,7°
SzO	+ 1°	— 1,9°	— 0,5°	— 1,4°	+ 2,3°	+ 6,4°	+ 8,7°	+ 7,3°
S				+ 0,5°			+ 6,5°	+ 7,0°
SzW	Dieselben Werte wie im östlichen Halbkreise			+ 2,4°	Die entgegengesetzten Werte wie im östlichen Halbkreise		+ 4,1°	+ 6,5°
SSW				+ 4,1°			+ 1,4°	+ 5,5°
SWzS				+ 5,4°			— 1,3°	+ 4,1°
SW				+ 6,0°			— 3,9°	+ 2,1°
SWzW				+ 5,8°			— 6,4°	— 0,6°
WSW				+ 4,9°			— 8,6°	— 3,7°
WzS				+ 3,4°			— 10,5°	— 7,1°
W				+ 1,5°			— 12,0°	— 10,5°
WzN				— 0,4°			— 13,1°	— 13,5°
WNW				— 2,1°			— 13,6°	— 15,7°
NWzW				— 3,4°			— 13,6°	— 17,0°
NW				— 4,0°			— 13,1°	— 17,1°
NWzN				— 3,8°			— 12,1°	— 15,9°
NNW				— 2,9°			— 10,6°	— 13,5°
NzW				— 1,4°			— 8,7°	— 10,1°

§ 300. Veränderung der Deviation mit der magnetischen Breite.

Nach ihrer Veränderung mit der magnetischen Breite scheidet man die Ablenkung in zwei Teile. Die halbkreisige Ablenkung, die durch die Glieder

$$B \, . \, sin\, z + C \, . \, cos\, z$$

dargestellt wird, verändert sich mit der magnetischen Breite, während die konstante und die viertelkreisige Ablenkung, also die Glieder

$$A + D \, . \, sin\, 2z + E \, . \, cos\, 2z$$

die wichtige Eigenschaft besitzen, für alle Punkte der Erdoberfläche denselben Wert beizubehalten.

Die Ablenkung einer Kompaßrose durch einen Magnetpol ist um so größer, je stärker der ablenkende Pol, und um so kleiner, je größer die Horizontalkraft des Erdmagnetismus ist. Sobald deshalb bei Veränderung der magnetischen Breite entweder die Stärke der Schiffspole oder die Horizontalkraft des Erdmagnetismus eine Änderung erfahren, muß auch die Ablenkung eine andere werden, es sei denn, daß beide, die Stärke des ablenkenden Poles und die Horizontalkraft, in demselben Verhältnisse zu- oder abnehmen.

Letzteres findet nun gerade für die viertelkreisige Ablenkung statt; denn die Ursache der viertelkreisigen Ablenkung, nämlich der induzierte Magnetismus des horizontalen weichen Eisens, ist selbst proportional der Horizontalkraft des Erdmagnetismus. Die ablenkenden Pole nehmen also bei Annäherung an den magnetischen Äquator in demselben Verhältnisse zu und bei Annäherung an die magnetischen Pole in demselben Verhältnisse ab, wie die Richtkraft der Rose. Das eben Gesagte findet auch Anwendung auf ein wirkliches A, d. h. ein solches, das zusammen mit E seinen Grund in unsymmetrischem horizontalen Eisen hat. Sofern das A von einem Indexfehler der Rose herrührt, bleibt es natürlich ebenfalls in allen Breiten dasselbe.

Die konstante und die viertelkreisige Ablenkung oder die Glieder

$$A + D \,.\, sin\, 2\, z + E \,.\, cos\, 2\, z$$

bezeichnet man daher als den unveränderlichen Teil der Ablenkung.

Bei der in § 295 gegebenen Ableitung für das Glied $D \,.\, sin\, 2\, z$ der Deviationsformel spricht sich die Unabhängigkeit des D von der magnetischen Breite darin aus, daß sich der Wert der Horizontalkraft H im Zähler und Nenner der Ausdrücke

$$\delta_a = \frac{a \,.\, H}{2\lambda \,.\, H \,.\, sin\, 1^0} \,.\, sin\, 2\, z \qquad \delta_e = \frac{-\, e \,.\, H}{2\lambda \,.\, H \,.\, sin\, 1^0} \,.\, sin\, 2\, z$$

gegeneinander aufhebt.

Die halbkreisige Ablenkung oder die Glieder

$$B \,.\, sin\, z + C \,.\, cos\, z$$

bezeichnet man als den veränderlichen Teil der Ablenkung.

Die Ursachen der halbkreisigen Deviation sind der feste Schiffsmagnetismus und der Pol der Vertikalinduktion. Bei einer Ortsveränderung des Schiffes bleiben die festen Pole als ablenkende Ursachen ungeändert, die Richtkraft der Nadel ändert sich jedoch; infolgedessen ändert sich die durch den festen Schiffsmagnetismus hervorgerufene Ablenkung, und zwar ist sie in Gegenden mit großer Horizontalkraft, also in der Nähe des magnetischen Äquators, kleiner als in den europäischen Gewässern; in hohen magnetischen Breiten wächst die Ablenkung wegen der Kleinheit der Richtkraft stark an. So wird beispielsweise ein fester Pol, der an der deutschen Nordseeküste 6° Deviation erzeugt, in der Nähe des magnetischen Äquators, wo H ungefähr doppelt so groß ist, nur 3°, am Nordkap oder an der Mündung des St Lorenzstromes, wo H ungefähr nur zweidrittel so groß ist als an der deutschen Nordseeküste, 9° Ablenkung hervorbringen.

Der Pol der Vertikalinduktion ist selbst abhängig von der magnetischen Breite und zwar ist seine Stärke proportional der erdmagnetischen Vertikalkraft, also im allgemeinen um so größer, je kleiner die Horizontalkraft ist. Da die Vertikalinduktion bei mittschiffs aufgestellten Kompassen nur auf B Einfluß hat, so hat man in diesem Koeffizienten die größten Veränderungen zu erwarten. Für Brückenkompasse ändert sich B bei südlicher Breitenänderung fast stets nach der positiven Seite. Es ist dieses eine Folge davon, daß für solche Kompasse der Pol der Vertikalinduktion auf N-Breite ein anziehender Pol hinter dem Kompaß ist (siehe § 293), der ein $-B'$ erzeugt. Dieses $-B'$ verschwindet auf dem magnetischen Äquator und wird auf südmagnetischer Breite zu einem $+B'$.

Nach der Schlußbemerkung in § 296 ist

$$B = \frac{1}{sin\,1^0}\left(\frac{P}{\lambda\,.\,H} + \frac{c}{\lambda}\,.\,tang\,J\right) \qquad C = \frac{1}{sin\,1^0}\,.\,\frac{Q}{\lambda\,.\,H}$$

In diesen Formeln ist die Abhängigkeit der durch die Längs- und Querschiffskräfte P und Q des festen Magnetismus erzeugten Deviation von der magnetischen Breite dadurch ausgedrückt, daß H im Nenner steht. Der von der Vertikalinduktion herrührende Bestandteil des B ändert sich, wie der obige Wert für B lehrt, proportional der Tangente der Inklination. Durch Beobachtungen in verschiedenen magnetischen Breiten lassen sich die beiden Bestandteile des B trennen, d. h. die Größen $\frac{P}{\lambda}$ und $\frac{c}{\lambda}$ bestimmen.

Um der Veränderung der Ablenkung mit der magnetischen Breite Rechnung zu tragen, hat man B und C nach erheblichen Breitenänderungen neu zu bestimmen. Dazu genügt es, das Schiff auf zwei benachbarte Hauptstriche zu legen und die Ablenkung für diese Striche zu bestimmen. Die beobachtete Ablenkung, vermindert um die für den betreffenden Kurs gültige unveränderliche Ablenkung, giebt das für die neue Breite zu benutzende B oder C. Die Neuberechnung der Gesamtablenkung macht danach keine Schwierigkeit. Sie werde durch folgendes Beispiel erläutert.

Beispiel: An Bord des „Eros“ (siehe § 298 Beispiel 3. und § 299 Beispiel 2.) beobachtete man nahe Kap Horn auf S-Kurs 5° O-Ablenkung, auf W-Kurs 15,5° W-Ablenkung. Welches sind die neuen Werte des B und C, und welche Ablenkungen gelten für die übrigen Kurse?

Auf S-Kurs hat man $+0{,}5^0$ unveränderliche Ablenkung; da $+5^0$ beobachtet wurden, so kommen auf die halbkreisige Ablenkung $+4{,}5^0$ und es ist das neue C gleich $-4{,}5^0$. Auf W-Kurs hat man $+1{,}5^0$ unveränderliche Ablenkung, da $-15{,}5^0$ beobachtet wurden, so kommen auf die halbkreisige Ablenkung -17^0 und es ist das neue B gleich $+17^0$. Danach berechnet man die Ablenkung, wie dies in der Tabelle der folgenden Seite geschehen ist.

Anmerkung: Man kann auch so verfahren, daß man die Veränderungen des B und des C berechnet. Bezeichnet man diese mit (B) und (C), so ist im vorliegenden Falle $(B) = +5^0$; $(C) = +2^0$. Bringt man an die früher beobachtete Gesamtablenkung die Verbesserung $(B)\,.\,sin\,z + (C)\,.\,cos\,z$ an, so erhält man dieselben Werte wie bei dem zuerst beschriebenen Verfahren.

Schiff „Eros" ($\varphi = 56^0\,20'\,S$ und $\lambda = 67^0\,W$)

Unveränderliche Ablenkung wie Seite 407; $B = +17^0$, $C = -4{,}5^0$

Kompaß-Kurs	I. Unveränderliche Ablenkung 1	II. Veränderliche Ablenkung $B . \sin z$ 2	$C . \cos z$ 3	insgesamt (2+3)	δ $I+II$
N	+ 0,5°	0,0°	— 4,5°	— 4,5°	— 4,0°
NzO	+ 2,4°	+ 3,3°	— 4,4°	— 1,1°	+ 1,3°
NNO	+ 4,1°	+ 6,5°	— 4,2°	+ 2,3°	+ 6,4°
NOzN	+ 5,4°	+ 9,4°	— 3,7°	+ 5,7°	+ 11,1°
NO	+ 6,0°	+ 12,0°	— 3,2°	+ 8,8°	+ 14,8°
NOzO	+ 5,8°	+ 14,1°	— 2,5°	+ 11,6°	+ 17,4°
ONO	+ 4,9°	+ 15,7°	— 1,7°	+ 14,0°	+ 18,9°
OzN	+ 3,4°	+ 16,7°	— 0,9°	+ 15,8°	+ 19,2°
O	+ 1,5°	+ 17,0°	0,0°	+ 17,0°	+ 18,5°
OzS	— 0,4°	+ 16,7°	+ 0,9°	+ 17,6°	+ 17,2°
OSO	— 2,1°	+ 15,7°	+ 1,7°	+ 17,4°	+ 15,3°
SOzO	— 3,4°	+ 14,1°	+ 2,5°	+ 16,6°	+ 13,2°
SO	— 4,0°	+ 12,0°	+ 3,2°	+ 15,2°	+ 11,2°
SOzS	— 3,8°	+ 9,4°	+ 3,7°	+ 13,1°	+ 9,3°
SSO	— 2,9°	+ 6,5°	+ 4,2°	+ 10,7°	+ 7,8°
SzO	— 1,4°	+ 3,3°	+ 4,4°	+ 7,7°	+ 6,3°
S	+ 0,5°			+ 4,5°	+ 5,0°
SzW	+ 2,4°			+ 1,1°	+ 3,5°
SSW	+ 4,1°			— 2,3°	+ 1,8°
SWzS	+ 5,4°	Die entgegengesetzten		— 5,7°	— 0,3°
SW	+ 6,0°	Werte wie im östlichen		— 8,8°	— 2,8°
SWzW	+ 5,8°	Halbkreise		— 11,6°	— 5,8°
WSW	+ 4,9°			— 14,0°	— 9,1°
WzS	+ 3,4°			— 15,8°	— 12,4°
W	+ 1,5°			— 17,0°	— 15,5°
WzN	— 0,4°			— 17,6°	— 18,0°
WNW	— 2,1°			— 17,4°	— 19,5°
NWzW	— 3,4°			— 16,6°	— 20,0°
NW	— 4,0°			— 15,2°	— 19,2°
NWzN	— 3,8°			— 13,1°	— 16,9°
NNW	— 2,9°			— 10,7°	— 13,6°
NzW	— 1,4°			— 7,7°	— 9,1°

§ 301. Veränderung der Deviation durch den halbfesten Magnetismus. Bisher war die Voraussetzung gemacht worden, daß alles für die Ablenkung in Frage kommende Eisen des Schiffes entweder als vollständig hart oder als vollständig weich betrachtet werden dürfe, sodaß man es nur mit festem und flüchtigem Magnetismus zu thun habe. In der Praxis macht sich aber neben diesen beiden Arten des Magnetismus immer in größerem oder geringerem Grade auch halbfester (remanenter) Magnetismus bemerkbar. Der Betrag des auf einem Kurse aufgenommenen halbfesten Magnetismus ist abhängig von der Zeit, die das Schiff auf dem Kurse lag, von den Erschütterungen, denen es in dieser Zeit ausgesetzt war, ferner von der größeren oder geringeren Härte des Schiffseisens, sowie von der mehr oder weniger günstigen Beschaffenheit des Kompaßortes. Da das Entstehen und Verschwinden des halbfesten Magnetismus von so mannigfachen Verhältnissen beeinflußt wird, so ist es schwierig, seinen Betrag zahlenmäßig festzustellen und in Rechnung zu bringen; es ist vielmehr Aufgabe der Schiffsführung, nach den früher an Bord des Schiffes gemachten Erfahrungen die Größe der unter gegebenen Verhältnissen zu erwartenden Ablenkung durch halbfesten Magnetismus zu schätzen und bei der Wahl des zu steuernden Kurses zu berücksichtigen.

Wenn nicht über den absoluten Betrag, so lassen sich doch über den Sinn, in dem die Ablenkungen durch halbfesten Magnetismus in den wichtigsten Fällen der Praxis stattfinden, einige allgemein gültige Regeln aufstellen.

Wenn ein Schiff längere Zeit auf demselben Kurse liegt, so bildet sich auf der nach Süden gekehrten Seite des Schiffes ein anziehender Pol (vergl. § 290). Dieser Pol erzeugt, solange das Schiff auf dem Kurse liegen bleibt, keine Ablenkung, da er in der Richtung der Nadel liegt. Ändert das Schiff aber seinen Kurs nach rechts, so kommt der Pol auf die linke Seite der Nadel und zieht sie nach links und umgekehrt. Man hat deshalb stets in dem Halbkreise, der rechts von dem gesteuerten Kurse liegt, westliche, in dem links gelegenen Halbkreise östliche Ablenkung infolge des auf jenem Kurse aufgenommenen Magnetismus zu erwarten.

Transatlantische Dampfer haben, wenn sie auf der Ausreise auf westlichen Kursen gelegen haben, bei der Ankunft in Newyork auf den dort zu steuernden nördlichen Kursen (rechter Halbkreis) mit neu entstandener westlicher Ablenkung zu rechnen. Auf der Heimreise liegen sie auf östlichen Kursen, sie werden deshalb beim Einlaufen in Southampton River (linker Halbkreis) östliche Ablenkung durch halbfesten Magnetismus haben. Ein Schiff, das von Süden kommend in den englischen Kanal einläuft (rechter Halbkreis), hat infolge des auf dem vorher gesteuerten Nordkurse aufgenommenen halbfesten Magnetismus westliche Ablenkung zu erwarten.

Bei Nichtberücksichtigung der hier besprochenen Ablenkung wird das Schiff nach der Seite versetzt, nach der die Rose durch den aufgenommenen halbfesten Magnetismus gedreht ist, diese Drehung erfolgt aber nach dem obigen stets vom neuen Kurse nach dem alten. Daher hat man die Regel:

Hat ein Schiff längere Zeit denselben Kurs gesteuert und nimmt nun eine Kursänderung vor, so wird es bei Nichtberücksichtigung der Veränderung der Ablenkung auf dem neuen Kurse in der Richtung nach dem alten Kurse zu versetzt.

In den Koeffizienten äußert sich der halbfeste Magnetismus in der Weise, daß durch längeres Liegen auf N-Kurs ein $-B$, auf S-Kurs ein $+B$, auf O-Kurs ein $+C$, auf W-Kurs ein $-C$ entsteht.

Wegen des halbfesten Magnetismus ist große Vorsicht bei der Kompensation der Kompasse und der Aufstellung der Deviationstabelle erforderlich. Hat das Schiff vor der Kompensation oder der Deviationsbestimmung lange Zeit auf demselben Kurse gelegen, so kompensiert man halbfeste Pole mit oder bekommt die Wirkung solcher Pole mit in die Deviationstabelle. Durch das allmähliche Verschwinden dieser halbfesten Pole nach Antritt der Reise wird dann die entgegengesetzte Wirkung erzielt wie im vorhin besprochenen Falle; man wird sich vom alten Kurse (dem Kurse, den das Schiff lange angelegen hatte) weg versetzt finden.

Der halbfeste Magnetismus macht sich bei der Rundschwaiung der Schiffe zum Zwecke der Ablenkungsbestimmung in der Weise bemerkbar, daß man um 1^0 bis 2^0 verschiedene Werte der A und E erhält, je nachdem das Schiff rechts oder links herumgeschwungen ist. Die Drehung rechts herum ergiebt ein $-A$ und $-E$, die Drehung links herum ein $+A$ und $+E$, wenn A und E thatsächlich den Wert Null haben. Ist ein Schiff zum Zwecke der Deviationsbestimmung nur einseitig herumgeschwungen, so wird man deshalb beobachtete Werte der Koeffizienten A und E in Betrage von 1^0 bis 2^0, sofern sie das der Drehungsrichtung entsprechende Vorzeichen haben, mit Recht unberücksichtigt lassen.

§ 302. **Krängungsfehler.** Bisher war das Schiff aufrecht auf ebenem Kiele liegend vorausgesetzt worden. Beim Überneigen des Schiffes nach der einen oder der anderen Seite entsteht eine Änderung in der bisher betrachteten Ablenkung, die man als Krängungsfehler bezeichnet.

Die Hauptursachen, die zur Entstehung eines Krängungsfehlers Veranlassung geben, sind die im folgenden unter 1. und 2. angegebenen.

1. Ein magnetischer Pol unter dem Kompaß kommt beim Überkrängen des Schiffes seitlich zu liegen und verursacht somit eine Ablenkung. Es handelt sich hierbei

a) um die senkrecht zum Deck gerichtete Komponente des festen Schiffsmagnetismus (siehe § 292).

b) um die senkrecht zum Deck gerichtete Komponente des Poles der Vertikalinduktion.

Beispielsweise ist für einen Kompaß auf dem Achterdeck eines Schiffes, das auf N-Kurs gebaut ist (siehe Fig. 234), eine senkrecht zum Deck nach unten anziehende magnetische Kraft vorhanden Legt sich das Schiff nach Steuerbord über, so kommt der anziehende Pol auf die Backbordseite des Kompasses zu liegen, und es erfolgt demgemäß eine Ablenkung nach Luv. Ein abstoßender Pol unter dem Kompaß verursacht entsprechend eine Ablenkung nach Leh. Wenn es sich wie hier um einen dauernden Pol handelt, so bleibt das Vorzeichen der Ablenkung in allen Breiten dasselbe. Ein eiserner Mast in der Nähe des Kompasses giebt dagegen durch seinen (flüchtigen) induzierten Magnetismus auf nordmagnetischer Breite einen abstoßenden, auf südmagnetischer Breite dagegen einen anziehenden Pol unter dem Kompaß, und deshalb im ersten Falle einen Krängungsfehler nach Leh, im zweiten Falle einen solchen nach Luv. Umgekehrte Wirkung würden unter dem Kompasse befindliche Deckstützen und ein eisernes Querschott hinsichtlich seiner vertikalen Ausdehnung haben.

2. Durch die Krängung werden vorher horizontale Eisenmassen, z. B. die Decksbalken, gegen den Horizont geneigt und daher der Induktion durch die Vertikalkraft ausgesetzt. Das luvwärts befindliche Ende eines Decksbalkens erhält auf nordmagnetischer Breite immer durch die Vertikalkraft einen anziehenden (blauen) Pol, das leewärts befindliche einen abstoßenden (roten); die Folge ist eine Anziehung nach Luv. Auf südmagnetischer Breite ist es umgekehrt.

In allen diesen Fällen entsteht beim Überliegen des Schiffes eine neue Querschiffskraft. Eine solche erzeugt aber nach dem früheren eine Ablenkung, die proportional dem Kosinus des Kurswinkels ist. Demgemäß ist der Krängungsfehler am größten auf *N*- und *S*-Kurs. In der That wirkt auf diesen Kursen die durch die Krängung entstehende Querschiffskraft recht seitlich auf die Nadel; auf *O*- und *W*-Kurs verschwindet dagegen der Krängungsfehler, da die durch die Krängung entstandene Kraft in der Richtung der Nadel wirkt, also nur die Richtkraft zu verändern im stande ist.

Die Änderung, die in der Ablenkung entsteht, wenn das Schiff auf *N*-Kurs liegend um 1^0 nach Steuerbord überliegt, bezeichnet man als Krängungskoeffizient K. Dieser erhält das Pluszeichen, wenn das Nordende der Nadel nach Luv gezogen, das Minuszeichen, wenn es nach Lee abgestoßen wird. Für eine Neigung von i^0 nach Steuerbord hat man auf *N*-Kurs dann den Krängungsfehler $K . i$; für irgend einen Kurs ist der Krängungsfehler $K . i . \cos z$.

Wie oben schon angedeutet, ist der Krängungsfehler aus mehreren Gründen abhängig von der magnetischen Breite.

Die Erfahrung hat gelehrt, daß auf nordmagnetischer Breite bei der weitaus größten Zahl der Schiffe das Nordende der Nadel luvwärts angezogen (K positiv), auf südmagnetischer Breite leewärts abgestoßen wird (K negativ). Der Hauptgrund für dieses Verhalten ist darin zu suchen, daß auf nordmagnetischer Breite die erhöhte Seite des Schiffes durch die Vertikalkraft anziehend (blau) magnetisch, auf südmagnetischer Breite dagegen abstoßend (rot) magnetisch wird.

Um die Krängungsdeviation wenigstens angenähert in Rechnung ziehen zu können, beobachte man die Ablenkung bei gekrängtem und bei aufrecht liegendem Schiffe möglichst auf *N*- oder *S*-Kurs. Wenn das Schiff bei der ersten Beobachtung um irgend eine Anzahl von Graden überlag, so erhält man den Krängungskoeffizienten, indem man die beobachtete Krängungsdeviation durch die Anzahl der Grade des Krängungswinkels dividiert.

Hat man z. B. bei einer Krängung von 10^0 nach Backbord auf *N*-Kurs 17^0 *O*-Ablenkung gefunden, während man weiß, daß bei aufrechtem Schiffe auf diesem Kurse 12^0 *O*-Ablenkung vorhanden ist, so kommt auf den Krängungsfehler $17^0 O - 12^0 O = 5^0 O$. Das bedeutet aber eine Ablenkung nach Luv von $0{,}5^0$ für jeden Grad der Krängung. Es ist in diesem Falle $K = + 0{,}5^0$, d. h. für jeden Grad, den das Schiff überliegt, wird das Nordende der Rose einen halben Grad nach Luv gezogen.

Konnte man nicht auf *N*- oder *S*-Kurs selbst, sondern nur in der Nähe dieser Kurse beobachten, so hat man die gefundene Krängungsdeviation mit der

Sekante des Kurswinkels zu multiplizieren, um daraus die Krängungsablenkung auf N-Kurs abzuleiten.

Nachdem man den Krängungskoeffizienten kennen gelernt hat, ist es leicht, den Krängungsfehler für irgend eine Krängung und irgend einen Kurs zu berechnen nach der oben angegebenen Formel

$$\text{Krängungsablenkung} = K \cdot i \cdot \cos z$$

Es ist zweckmäßig, aus dieser Formel nur den absoluten Betrag der Krängungsdeviation zu berechnen; das Vorzeichen findet man leicht, indem man sich überlegt, ob eine Anziehung nach Luv oder eine Abstoßung nach Leh stattfindet. Ist beispielsweise der Krängungskoeffizient $K = +0{,}5^0$, so hat man etwa auf NO-Kurs bei 12^0 Krängung nach Steuerbord eine Krängungsablenkung im absoluten Betrage von $0{,}5^0 \cdot 12 \cdot \cos 4^{str} = 4{,}2^0$. Da bei positivem Krängungskoeffizienten eine Anziehung nach Luv stattfindet, so ist die Krängungsablenkung $4{,}2^0$ W. Auf SSO-Kurs würde man bei demselben Werte des Krängungskoeffizienten und einer Krängung von 8^0 nach Steuerbord eine Krängungsablenkung im absoluten Betrage von $0{,}5^0 \cdot 8 \cdot \cos 2^{str} = 3{,}7^0$ haben. Da Anziehung nach Luv erfolgt, so ist die Krängungsdeviation $3{,}7^0$ O.

Zum Messen der Krängung oder Hellung dient ein Klinometer oder Neigungsmesser. Dieser besteht aus einem Halbkreise, der von der Mitte aus nach beiden Seiten von 0^0 bis 90^0 geteilt ist, und dessen Durchmesser bei aufrechter Lage des Schiffes horizontal ist, so daß ein im Mittelpunkte befestigtes Lot auf 0^0 einsteht. Er wird querschiffs so befestigt, daß das Lot frei spielen kann.

Liegt das Schiff nicht ruhig nach einer Seite über, sondern schlingert, so werden die den Krängungsfehler verursachenden Kräfte (ausgenommen wieder auf den Kursen O und W) bald nach der einen, bald nach der anderen Seite wirken, so daß es nicht ausbleiben kann, daß der Kompaß ins Laufen gerät und dadurch für die Navigierung des Schiffes unbrauchbar wird. Dies wird besonders der Fall sein, wenn die Schwingungsdauer des Schiffes gleich der Schwingungsdauer der Kompaßrose ist. Aus diesem Grunde ist der Kompensation des Krängungsfehlers besondere Sorgfalt zu widmen.

§ 303. Einfluß elektrischer Anlagen. Eine neue Quelle für Kompaßstörungen ist durch die Einführung elektrischer Anlagen an Bord der Schiffe geschaffen worden. Maschinen zur Erzeugung elektrischer Kraft (Dynamomaschinen) und mit Elektrizität betriebene Maschinen (Elektromotoren) können zunächst unmittelbar vermöge des starken von ihnen erzeugten magnetischen Feldes Ablenkungen des Kompasses hervorrufen. Die Gefahr derartiger direkter Einwirkungen ist für verschiedene Arten der Dynamomaschinen sehr verschieden. Bei neueren Maschinen ist das äußere magnetische Feld sehr beschränkt, doch wird man gut thun, auf alle Fälle eine Entfernung von 10 Metern vom Kompaß zu fordern.

Wenn Dynamomaschinen oder Elektromotoren nahe an Eisenmassen stehen, die sich bis in die Nähe des Kompasses erstrecken (etwa ein Querschott), so ist es möglich, daß durch Induktion in diesen Eisenmassen die magnetische Wirkung der Maschine bis zum Kompaß fortgeleitet wird. Hierauf ist bei der Aufstellung der elektrischen Kraftmaschinen Rücksicht zu nehmen.

Die Hauptursache von Kompaßstörungen durch elektrische Anlagen ist in der ablenkenden Wirkung zu suchen, welche in der Nähe des Kompasses vorbeigehende stromführende Leitungen auf den Kompaß ausüben. Glücklicherweise ist es möglich, diese Wirkungen dadurch zu beseitigen, daß man die Rückleitung des elektrischen Stromes nicht durch den Schiffskörper, sondern durch ein Kabel erfolgen läßt, das unmittelbar neben die Hinleitung verlegt ist. In diesem Falle heben die von beiden Leitungen auf den Kompaß ausgeübten ablenkenden Kräfte einander auf. Da eine elektrische Einzelleitung, selbst wenn sie 4 bis 5 Meter vom Kompaß entfernt liegt, bei starkem Strome Ablenkungen von mehreren Graden erzeugen kann, so sollte auf keinem Schiffe der Schiffskörper zur Rückleitung benutzt werden.

Auf Schiffen mit elektrischen Anlagen pflegt man auch die Kompasse durch elektrische Glühlampen zu beleuchten, die soweit abgeblendet werden, daß sie nur die nächste Umgebung des Steuerstriches beleuchten. Für die Peilscheiben benutzt man kleine Glühlampen, die durch einen Druck auf einen Knopf nur zum Ablesen der Einstellung für kurze Zeit aufleuchten. Um Einwirkungen des die Lampe speisenden Stromes auf den Kompaß zu verhindern, sind die Hin- und die Rückleitung, gut voneinander isoliert, zu einem Strange zusammengedreht.

Kompensation der Kompasse.

§ 304. Notwendigkeit und allgemeine Grundsätze der Kompensation. Eine beträchtliche Ablenkung des Schiffskompasses ist nach verschiedenen Seiten hin als ein großer Übelstand zu betrachten.

Zunächst ist dieselbe unbequem und unter Umständen, besonders wenn das Schiff auf engem Fahrwasser unter Lotsenführung steuert, nicht ohne Gefahren. Dann sind große Ablenkungen geeignet, die Anschauung des Seemannes in Bezug auf die Winkelbewegungen des Schiffes bei Kursänderungen zu verwirren (vergl. § 294). Ferner liegt ein großer Übelstand darin, daß im allgemeinen bei großen Ablenkungen auch große Änderungen dieser Ablenkungen mit der magnetischen Breite zu erwarten sind (vergl. § 300). Des weiteren sind mit großen Ablenkungen auch immer erhebliche Störungen in der Richtkraft des Kompasses verbunden (vergl. § 294 und § 296). Endlich giebt ein nicht kompensierter Krängungsfehler zum Unruhigwerden der Rose Veranlassung.

Die Kompensation hat demgemäß den Zweck, die Ablenkungen nach Möglichkeit zu beseitigen und gleichzeitig die Richtkräfte auf den verschiedenen Kursen auszugleichen.

Um der störenden Einwirkung einer magnetischen Kraft auf den Kompaß zu begegnen, hat man eine andere magnetische Kraft von derselben Größe im entgegengesetzten Sinne auf die Nadel wirken zu lassen.

Feste Pole im Schiffe können nur durch permanente Magnete, flüchtige Pole im weichen Eisen können nur durch flüchtige Pole in anderen zum

Zwecke der Kompensation angebrachten weichen Eisenmassen aufgehoben werden. Insbesondere gilt das letztere, wenn die Kompensation für alle magnetischen Breiten richtig bleiben soll.

Die Mittel, die man zur Berichtigung eines Kompasses in Anwendung bringt, sind die folgenden:

1. feste Magnete und zwar
   a) Längsschiffsmagnete zur Kompensation der Längsschiffskraft des festen Schiffsmagnetismus oder des ihr entsprechenden Teiles des Koeffizienten B;
   b) Querschiffsmagnete zur Kompensation der Querschiffskraft des festen Schiffsmagnetismus oder des Koeffizienten C;
2. die Flindersstange, d. h. eine mittschiffs senkrecht zum Deck stehende weiche Eisenstange zur Kompensation des Poles der Vertikalinduktion oder des ihr entsprechenden Teiles des Koeffizienten B;
3. weiche Eisenmassen in Kompaßhöhe seitwärts vom Kompaß zur Kompensation des Hauptteiles der viertelkreisigen Ablenkung oder des Koeffizienten D;
4. der Krängungsmagnet, d. h. ein permanenter Magnet, der senkrecht zum Deck genau unter der Kompaßmitte befestigt ist.

Die Koeffizienten A und E bleiben auf Kauffahrteischiffen in der Regel unkompensiert.

§ 305. Ausführung der Kompensation.

1. Kompensation der Koeffizienten B und C. Die Längsschiffsmagnete müssen mit ihrer Mitte genau querab vom Kompaß liegen, weil sie andernfalls für sich einen Krängungsfehler erzeugen würden. Die Querschiffsmagnete müssen aus demselben Grunde mit ihrer Mitte genau in der Mittschiffslinie liegen. Im übrigen ist für die Wirksamkeit der Magneten außer ihrer eigenen magnetischen Kraft nur ihre Entfernung von der Kompaßmitte maßgebend (vergl. § 286), ohne Einfluß ist, ob sie an Steuerbord oder Backbord angebracht, ob sie an Deck oder seitlich am Kompaßhause festgeschraubt oder in besonderen längs- und querschiffs gebohrten Löchern desselben untergebracht sind.

Die Kompensationsmagnete dürfen dem Kompaß nicht zu nahe liegen; der Abstand eines Magneten von der Rosenmitte sollte mindestens das doppelte seiner eigenen Länge sein.

Die gesonderte Kompensation des Poles der Vertikalinduktion durch die Flindersstange kann erspart werden für Schiffe, die auf ihren Reisen keine erheblichen Änderungen der magnetischen Breite zu erwarten haben. Der Pol der Vertikalinduktion kann auf solchen Schiffen ebenso wie ein fester Pol angesehen werden und als solcher zusammen mit dem festen Schiffsmagnetismus durch die festen Magnete und zwar durch die Längsschiffsmagnete kompensiert werden.

Die Kompensation geschieht dann folgendermaßen:

B wird kompensiert, indem man das Schiff auf magnetisch O- oder W-Kurs legt und die Längsschiffsmagnete so verlegt, daß das Schiff auch am Kompaß O oder W anliegt.

> C wird kompensiert, indem man das Schiff auf magnetisch N- oder S-Kurs legt und die Querschiffsmagnete so verlegt, daß das Schiff auch am Kompaß N oder S anliegt.

Bei der Kompensation auf N- oder S-Kurs ist darauf zu achten, daß das Schiff keine Schlagseite hat.

Wenn der Pol der Vertikalinduktion gleichzeitig mit der festen Längsschiffskraft durch feste Magnete kompensiert ist, so hat man auf Schiffen, die auf ihren Reisen große Breitenänderungen erfahren, erhebliche Änderungen im Koeffizienten B, also in den Ablenkungen auf O- und W-Kurs zu erwarten. Waren z. B. vor der Weser auf O-Kurs -25^0 Ablenkung vorhanden, von denen aber -15^0 auf den Pol der Vertikalinduktion kamen, so wird, wenn man die ganzen 25^0 durch feste Magnete kompensiert, auf dem magnetischen Äquator auf O-Kurs eine Ablenkung von $+15^0$ und auf einer der unsrigen gleichen südmagnetischen Breite eine Ablenkung von $+30^0$ erscheinen.

Zur richtigen Anbringung der Flindersstange ist allerdings Geschick erforderlich. Die Trennung der vom festen Längsschiffsmagnetismus und vom Pole der Vertikalinduktion herrührenden Wirkungen ist nur möglich, nachdem Beobachtungen auf erheblich verschiedenen magnetischen Breiten, am besten auch solche auf dem magnetischen Äquator vorliegen. Dort ist der Pol der Vertikalinduktion unwirksam, man ist also in der Lage, die Längsschiffskomponente des festen Schiffsmagnetismus für sich zu kompensieren. Beispielsweise haben nach Ostasien bestimmte Dampfer dazu Gelegenheit auf der Reise von Aden nach Bombay, welche Strecke ungefähr mit dem magnetischen Äquator zusammenfällt. Vorsicht ist dabei nur geboten wegen des möglicherweise im Roten Meere aufgenommenen halbfesten Magnetismus. Die Beobachtung ist deshalb erst nach einer Reihe von Tagen zu machen und wenn möglich auf der Rückreise zu wiederholen. Die bei der Rückkunft des Schiffes erscheinende Ablenkung auf O- oder W-Kurs ist dann durch die Flindersstange zu beseitigen.

Wenn das Schiff nach Orten mit schwächerer Vertikalkraft geht, so kompensiere man ein neu auftretendes B'' durch Verlegung der Längsschiffsmagnete; wenn das Schiff nach Orten mit größerer Vertikalkraft geht, durch Verstärkung oder Schwächung der Flindersstange.

Da der Pol der Vertikalinduktion bei eisernen Schiffen fast immer auf nordmagnetischer Breite ein anziehender Pol hinter dem Kompaß ist (siehe § 293), so haben fast alle Schiffe die Flindersstange vor dem Kompaß, mit ihrem oberen Ende in der Höhe der Rose befestigt. Damit sie keinen Krängungsfehler erzeugt, soll ihr oberes Ende einige Centimeter über die Rosenebene hervorragen.

2. Kompensation des Koeffizienten D. Zur Kompensation der viertelkreisigen Ablenkung benutzt man Kugeln oder Cylinder aus weichem Eisen, auch wohl Kästen mit eisernen Ketten. Die Kompensation geschieht auf einem der Hauptzwischenstriche, nachdem die halbkreisige Ablenkung beseitigt ist. Die eisernen Cylinder oder Kugeln sind dem Kompaß so weit zu nähern, bis auch die viertelkreisige Ablenkung verschwunden ist. Natürlich muß sehr darauf geachtet werden,

daß die Kugeln oder Cylinder nicht etwa eigenen Magnetismus besitzen. Bei den früher vielfach benutzten eisernen Ketten konnte man die Ausgleichung dadurch herstellen, daß man mehr oder weniger Kette in den Kettenkasten hineinthat.

Die Anbringung der Kugeln kann auch nach einer Tabelle geschehen, aus der man für jede Kugelgröße und Entfernung die erzielte Wirkung ersehen kann. In diesem Falle hat man vor der Kompensation D durch Beobachtung auf den vier Hauptzwischenstrichen zu bestimmen.

Bei Kompassen mit langen kräftigen Magnetnadeln, wie sie bei Fluidkompassen verwandt werden, sollen die seitlichen weichen Eisenmassen mindestens zweidrittel des Rosendurchmessers vom Rande der Rose entfernt bleiben, da sonst Unregelmäßigkeiten in der Wirkung (achtelkreisige Deviation) auftreten können.

Die Anbringung weicher Eisenmassen seitwärts vom Kompaß hat außer der Kompensation des D den Vorzug, daß diese D-Korrektoren gleichzeitig den einen

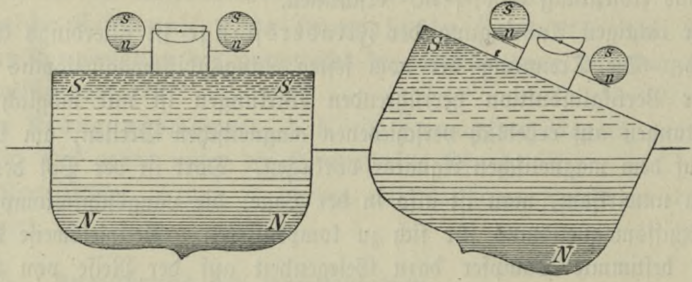


Fig. 243.

Teil des Krängungsfehlers (siehe § 302, Nr. 2) kompensieren und zwar für alle magnetischen Breiten, wie dies hinreichend durch die Figur 243 erläutert wird. Diese Figur ist für nordmagnetische Breite gezeichnet, auf südmagnetischer Breite finden überall die entgegengesetzten Namen Anwendung.

Die Mittelpunkte der D-Korrektoren sollen sich genau in der Höhe der Rosenmagnete befinden.

3. **Kompensation des Krängungsfehlers.** Da der Krängungsfehler auf nordmagnetischer Breite fast durchgehends nach Luv erfolgt, so wird in der Regel der Krängungsmagnet mit seinem (roten) Nordpole nach oben einzusetzen sein. Da der Krängungsfehler von der magnetischen Breite abhängig ist, so wird es im Laufe einer Reise mit erheblicher Breitenänderung nötig werden, die Stellung dieses Magneten zu ändern, ihn auf südmagnetischer Breite gegebenenfalls selbst umzukehren. Äußerlich erkennt man eine falsche Kompensation des Krängungsfehlers daran, daß die Rose bei schlingerndem Schiffe besonders auf N- und S-Kursen unruhig wird. Durch Versuche bestimme man die Stellung des Krängungsmagneten, bei der die Rose am stetigsten liegt. Die frühere Lage des Magneten hat man sich unter allen Umständen zu merken und im Tagebuche oder dem besonderen Kompaßjournal aufzuschreiben.

Die Kompensation des Krängungsfehlers ist auch im Hafen möglich, ohne das Schiff zu krängen, und zwar unter Zuhülfenahme der von **Thomson** angegebenen Vertikalkraftwage. Diese besteht aus einer Inklinationsnadel, die durch ein kleines Übergewicht auf der einen Seite so beschwert wird, daß sie an eisenfreiem Orte horizontal schwebt. Während das Schiff auf *O*- oder *W*-Kurs liegt, wird dieses Instrument im Kompaßkessel, aus dem zuvor die Rose entfernt ist, an die Stelle gehalten, wo sich sonst die Nadeln befinden, und zwar so orientiert, daß die Inklinationsnadel im magnetischen Meridiane schwingt. Stellt die Nadel sich nicht horizontal ein, so ist am Kompaßorte eine störende Vertikalkraft vorhanden. Durch Höher- oder Tieferstellung des Krängungsmagneten wird diese Kraft dann aufgehoben.

Bei der Ausführung der Kompensation handelt es sich oft darum, das Schiff auf einen bestimmten magnetischen Kurs zu legen. Man bedient sich dazu einer Peilscheibe. Bei Beobachtungen auf hoher See — nur von diesen soll hier die Rede sein — hat man als Peilobjekte nur die Gestirne. Man stelle eine Uhr auf wahre Ortszeit, nehme das Azimut eines in bequemer Peilhöhe stehenden Gestirnes im voraus für die Zeit, in der man beobachten will, aus einer Azimuttafel etwa für jede vierte Minute und verwandle dieses Azimut durch Anbringung der reinen Mißweisung in die magnetische Peilung, die man dann hinter die betreffenden Uhrzeiten schreibt. Man stellt dann die Diopter der Peilscheibe so zur Kiellinie fest, daß, wenn das Gestirn im Peilapparat erscheint, das Schiff den beabsichtigten magnetischen Kurs anliegt. Wäre z. B. die magnetische Peilung der Sonne für die Zeit der Beobachtung $S\,65^0\,W$ gefunden, so würde man für *N*-Kurs die Diopter der Peilscheibe auf 65^0 a. B. B. von achter, für *O*-Kurs 25^0 a. St. B. von achter, für *S*-Kurs 65^0 a. St. B. von vorne und für *W*-Kurs 25^0 a. B. B. von vorne festzustellen haben.

Man läßt das Schiff zur Zeit der Beobachtung dann so lange drehen, bis das Gestirn im Peilapparat erscheint, was natürlich immer durch einen besonderen Beobachter festzustellen ist. Im Verlaufe der Zeit hat dieser die Diopter der Änderung des Azimutes entsprechend langsam zu verschieben.

Der Schiffsführer soll nur in dem Falle an der Kompensation seiner Kompasse etwas ändern, wenn durch das mangelhafte Verhalten des Kompasses erhebliche Schwierigkeiten für die Schiffsführung entstehen und wenn er den Grund dieses mangelhaften Verhaltens erkannt zu haben glaubt. Insbesondere gilt dies natürlich für den Regelkompaß. Vor Beginn einer Änderung hat man die alte Lage der Kompensationsmagnete festzustellen und aufzuschreiben, damit man erforderlichen Falles im stande ist, den alten Zustand wieder herzustellen.

Häufiger, als eine Änderung an der Kompensation des Regelkompasses wird eine solche am Steuerkompaß nötig sein, schon aus dem Grunde, weil dieser meist einen viel ungünstigeren Standort hat. Insbesondere ist für den Steuerkompaß eine Änderung der Kompensation nötig, wenn er auf dem zu steuernden Kurse stark geschwächte Richtkraft hat und deshalb anfängt zu laufen. Dabei hat man sich insbesondere vor einer Überkompensation zu hüten, weil auch eine durch die Schiffspole verstärkte Richtkraft ungünstig auf das Steuern einwirkt. Am besten ist es, wenn die Richtkraft auf allen Kursen möglichst ausgeglichen ist, und dies ist dann der Fall, wenn man die Ablenkungen möglichst beseitigt hat.

Der Kompaß.

§ 306. Grundbedingungen für die Konstruktion des Kompasses. Die Hauptforderung, die an einen guten Schiffskompaß gestellt werden muß, ist die, daß die Rose sich genau in die Richtung der horizontalen auf sie wirkenden magnetischen Kräfte einstelle, und daß sie trotz aller Bewegungen des Schiffes ruhig bleibe, mögen diese Bewegungen in Kursänderungen, in Stampf- und Schlingerbewegungen oder in Erschütterungen durch den Seegang oder die Maschine bestehen.

Diese Forderung schließt die folgenden ein:

1. Die Rose muß genau kreisrund und mit fehlerfreier Teilung versehen sein; der Aufhängepunkt muß mit dem Mittelpunkte der Kreisteilung zusammenfallen. Die magnetische Achse der Rose muß der Nord-Südlinie des Rosenblattes parallel sein. Die Rose muß genau über dem Mittelpunkte des kreisförmigen Kompaßkessels aufgehängt sein. Die durch die Pinne und den Steuerstrich gelegte Vertikalebene muß der Kiellinie parallel sein.
2. Die Rose muß empfindlich sein, d. h. sich an allen Orten genau in die Richtung der magnetischen Gesamtkraft einstellen.
3. Die Rose darf nicht laufen, d. h. sie darf nicht um die Gleichgewichtslage hin- und herschwingen (Ruhe der Rose).
4. Die Rose muß in allen Gegenden, in die das Schiff kommt, ihre horizontale Lage behalten.

Die Erfüllung dieser vier Forderungen ist nur durch das Zusammenwirken einer Reihe von mechanischen und magnetischen Eigenschaften der Rose zu erreichen.

Wenn die Magnete nicht genau parallel der Nord-Südlinie der Rosenteilung angeordnet sind, so sagt man, die Rose habe einen Kollimationsfehler (Indexfehler). Es sind in diesem Falle alle an der Rose abgelesenen Kurse und Peilungen um den Kollimationsfehler falsch. Der Kollimationsfehler wird am einfachsten erkannt durch Vergleich mit einer Normalrose.

Um die Rose möglichst den Bewegungen des Schiffes zu entziehen, schließt man sie in einen Kompaßkessel ein und hängt diesen in Kreuzringen auf (Kardanische Aufhängung). Die Zapfen dieser Kreuzringe müssen sich, ohne seitlich zu schlottern, leicht in ihren Lagern drehen. Zur Verringerung der Reibung ersetzt man heutzutage die runden Zapfen durch stumpfe Schneiden. Der Kompaßkessel selbst besteht aus starkem Messing oder Rotguß; am Boden ist er beschwert. Der Glasdeckel des Kessels soll genau horizontal liegen. In der Mitte des kreisrunden Kessels soll sich der Stift befinden, der die Rose zu tragen bestimmt ist, und zwar soll die Spitze des Stiftes (der Pinne) mit dem Schnittpunkte der Verbindungslinien der Kreuzzapfen, in denen der Kessel aufgehängt ist, zusammenfallen. Das Rosenblatt soll bei vollständig freier Bewegung mit seinem Rande in jedem Punkte gleich nahe an der Wand des Kessels spielen. Der Zwischenraum zwischen dem Rosenrande und der Kesselwandung soll nicht zu groß sein, damit nicht durch Verschiebung der Gesichtslinie Ablesungsfehler hervorgerufen werden. Es ist darauf zu halten, daß der Kessel vom Mechaniker mit zwei sich gerade gegenüberliegenden Steuerstrichen versehen wird, da man nur auf diese Weise selbst in der Lage ist, die genaue Centrierung der Rose prüfen zu können.

Die Rose ruht mit einem aus Rubin, Spinell oder Saphir hergestellten Hütchen auf der Pinne, d. h. dem in eine feine Stahl- oder Iridiumspitze auslaufenden Rosenträger. Von der Beschaffenheit der Pinne und des Hütchens hängt in erster Linie die genaue Einstellung der Rose und damit die Brauchbarkeit des Kompasses ab. Zwischen der Pinne und dem Hütchen findet stets eine gewisse Reibung statt. Hauptaufgabe bei der Konstruktion der Rose ist es, diese Reibung auf ein möglichst geringes Maß zu beschränken.

In erster Linie wird das erreicht durch gute Beschaffenheit von Stein und Pinne, in zweiter Linie durch ein möglichst geringes Gewicht der Rose. Die Höhlung des Steines muß auf alle Fälle glatt poliert sein. Je geringer das Gewicht der Rose, desto kleiner ist einerseits die entstehende Reibung, desto feiner darf andererseits die Pinne angeschliffen sein, ohne daß ein Einbohren der Spitze in das Hütchen bei Erschütterungen des Schiffskörpers zu befürchten wäre.

Aus diesen Gründen hat man nach dem Vorgange des englischen Physikers W. Thomson (Lord Kelvin) bei allen neueren Rosenkonstruktionen auf die Leichtigkeit der Rose den größten Wert gelegt.

Eine große Leichtigkeit der Rose birgt nun aber die Gefahr in sich, daß die Rose leicht unruhig wird, daß sie jedem kleinen Anstoße, mag er nun von Erschütterungen im Schiffe oder von einem Krängungsfehler herrühren, sofort folgt und herumfliegt. Aus diesem Grunde gerade glaubte man früher schwere Rosen anwenden zu müssen, um so schwerere, je heftiger die Schiffsbewegungen waren (Sturmrosen). Demgegenüber ist es das große Verdienst W. Thomsons, gezeigt zu haben, daß man auch bei leichten Rosen Ruhe erzielen kann und zwar dadurch, daß man die Massen möglichst aus dem Mittelpunkte weg an den Rand der Rose rückt. Auf diese Weise erreicht man, daß die Schwingungsdauer der Rose trotz ihres kleinen Gewichtes eine große wird. Unter der Schwingungsdauer versteht man die Zeit, welche die Rose gebraucht, um einmal hin und zurück zu schwingen.

Für eine genaue Einstellungsfähigkeit der Rose ist es selbstverständlich wünschenswert, daß ihre magnetische Kraft eine möglichst große sei. Statt einer einzigen schweren Magnetnadel verwendet man deshalb heute durchweg mehrere kleinere, die man parallel mit dem Nord-Südstriche unter dem Rosenblatte befestigt. Mehreren solchen kleinen Nadeln vermag man insgesamt eine viel größere magnetische Kraft zu erteilen, als einer einzelnen von gleichem Gewichte. Die Verwendung von mehreren Nadeln hat außerdem noch zwei wichtige Gründe für sich. Durch geeignete Anordnung der Nadeln kann man nämlich einerseits das Wackeln der Scheibe verhüten, das bei Verwendung einer einzelnen Nadel leicht eintritt, andererseits kann man durch diese Anordnung die Störungen des regelmäßigen Verlaufes der Ablenkung vermeiden, die bei Verwendung einer einzigen Nadel dann entstehen, wenn man mit den Kompensationsmagneten zu nahe an den Kompaß herankommt.

Beiläufig sei hier noch erwähnt, daß ein Kompaßkessel mit starken Messing- oder noch besser mit starken Kupferwandungen einen günstigen Einfluß auf die Ruhe der Kompaßrose ausübt. Durch die Magnetnadeln werden, sobald sie in Schwingung geraten, in der Kesselwandung elektrische Ströme erregt, die in allen Fällen das Bestreben haben, jene Schwingungen aufzuheben. Man bezeichnet diese Erscheinung als Dämpfung, sie beeinträchtigt die Genauigkeit der Einstellung in keiner Weise.

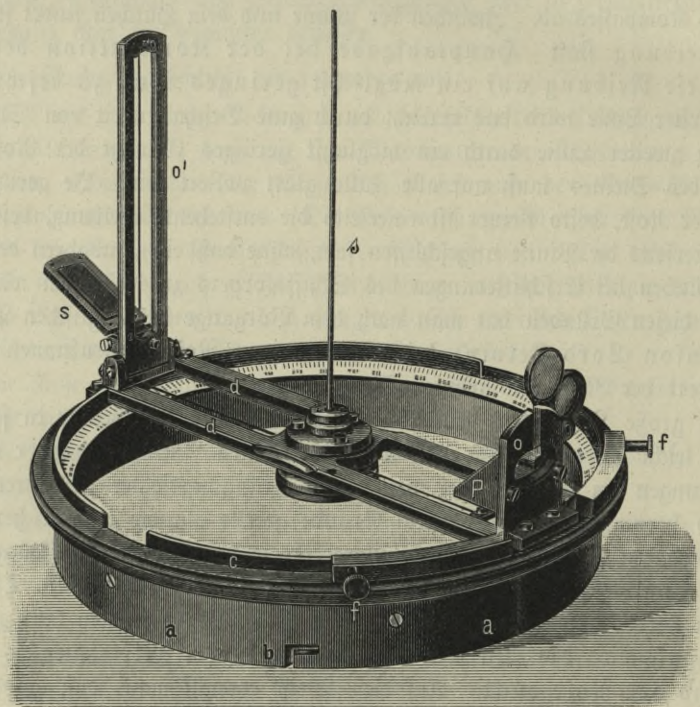


Fig. 244.

§ 307. Verschiedene Arten von Kompassen. Nach den verschiedenen Zwecken, denen die Kompasse an Bord eines Schiffes dienen, unterscheidet man Steuerkompasse und Normal- oder Regelkompasse.

Der Regel- oder Normalkompaß ist für die Schiffsführung allein maßgebend. An ihm wird das Schiff auf den beabsichtigten Kurs gelegt, und nach ihm schreibt man andererseits die während jeder Wache gesteuerten Kompaßkurse an, die der Besteckrechnung zu Grunde gelegt werden. Der Regelkompaß ist stets mit einer Peilvorrichtung versehen, einmal um mit ihrer Hülfe Peilungen von Landmarken nehmen, dann aber auch, um bei jeder günstigen Gelegenheit durch Azimutbeobachtungen von Gestirnen die Ablenkung des Kompasses feststellen zu können. Es sind eine ganze Reihe verschiedener Peilvorrichtungen im Gebrauch. Die einfachsten bestehen aus einem auf den Rand des Kompaßdeckels aufsetzbaren Ringe, der an gegenüberliegenden Endpunkten eines

Durchmessers zwei senkrechte Messingplatten trägt, von denen die eine, das Objektivdiopter, einen breiten Ausschnitt mit einem vertikalen Visierfaden besitzt, während die andere, das Okulardiopter, mit einem feinen Schlitz versehen ist. Andere Peilvorrichtungen besitzen ein Rohr mit Vertikalfaden am Objektivende und mit einer engen Öffnung am Okularende.

Die in Figur 244 abgebildete Peilvorrichtung besitzt am Objektivdiopter noch einen kleinen, um eine horizontale Achse drehbaren Spiegel S, vermittels dessen man die Strahlen eines hochstehenden Gestirnes horizontal nach dem Okulardiopter reflektieren kann. Außerdem ist am Okulardiopter ein dreiseitiges rechtwinkliges

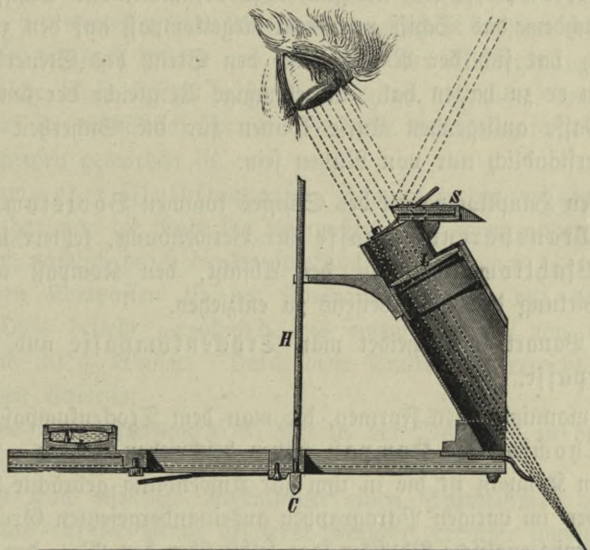


Fig. 245.

winkliges Prisma P mit einer seiner Kathetenflächen befestigt. Die Hypotenusenfläche dieses Prismas wirkt als Spiegel und läßt den Beobachter die Rosenteilung zugleich mit dem zu peilenden Gegenstande sehen. Sonnenpeilungen kann man auch mit Hülfe des genau zentrierten und genau senkrechten Schattenstiftes (siehe Fig. 244) unmittelbar auf der darunter befindlichen Kompaßrose ablesen.

Die in Figur 245 abgebildete Peilvorrichtung ist von Thomson erfunden und zwar zu dem Zwecke, ein sicheres Peilen auch bei Anwesenheit der Quadrantalkugeln zu ermöglichen. Man sieht in diesen Peilapparat von oben hinein und erblickt das Bild des zu peilenden Gegenstandes in dem um eine horizontale Achse drehbaren Spiegel S in derselben Richtung, wie die durch die Linse L gesehene Rosenteilung. Der Apparat wird mit der Spitze C in eine kleine Vertiefung in der Mitte des Kompaßdeckels aufgesetzt. Die kleine Dosenlibelle N läßt die horizontale Stellung des Apparates erkennen.

Außer den Peilvorrichtungen, die auf den Kompaßkessel aufgesetzt werden und die Peilungsrichtung unmittelbar auf der Rose abzulesen gestatten, sind oft noch seitlich auf der Brücke aufgestellte Peilscheiben vorhanden, um auch

Gegenstände, die vom Orte des Regelkompasses aus durch Aufbauten des Schiffes verdeckt werden, peilen zu können. In ihrer einfachsten Gestalt besteht die Peilscheibe aus einer kreisförmigen, mit einer Gradteilung versehenen Metallscheibe, die in Kreuzringen aufgehängt ist und durch ein unter ihr angebrachtes Gewicht in horizontaler Lage gehalten wird. Die Verbindungslinie der Nullpunkte der Teilung liegt parallel zu der Längsschiffslinie. Um den Mittelpunkt der Kreisteilung ist ein Peilapparat drehbar, dessen Stellung gegen die Längsschiffsrichtung, also gegen den am Kompaß abgelesenen Kurs, an zwei gegenüberliegenden Indexstrichen abgelesen werden kann.

Die Steuerkompasse sind lediglich dazu bestimmt, das Schiff nach ihnen zu steuern. Nachdem das Schiff nach dem Regelkompaß auf den zu steuernden Kurs gelegt ist, hat sich der Rudersmann den Strich des Steuerkompasses zu merken, auf den er zu halten hat. Regelmäßige Vergleiche der am Regel- und am Steuerkompasse anliegenden Kurse können für die Sicherheit der Schiffsführung selbstverständlich nur von Nutzen sein.

Außer diesen Hauptkompassen des Schiffes kommen Bootskompasse, sowie Hänge- oder Transparentkompasse zur Verwendung, letztere besonders als Mast- oder Pfahlkompasse mit der Absicht, den Kompaß möglichst der magnetischen Wirkung des Schiffseisens zu entziehen.

Nach der Bauart unterscheidet man Trockenkompasse und Fluid- oder Schwimmkompasse.

Von den mannigfaltigen Formen, die man dem Trockenkompaß gegeben hat, soll hier der Thomsonsche Kompaß näher beschrieben werden. Das Wesentlichste an diesem Kompaß ist die in ihm zur Anwendung gebrachte Rose. Diese ist ganz nach den im vorigen Paragraphen auseinandergesetzten Grundsätzen konstruiert. Der große englische Physiker sagt selbst über den Weg, der ihn zu seiner Erfindung führte: „Ich kam zu dem Schlusse, daß die Ruhe des Kompasses auf See nicht durch ein großes Gewicht der Rose, sondern nur durch Vergrößerung der Schwingungsdauer erreicht werden könne. Nur soweit als durch die Gewichtsvermehrung die Schwingungsdauer verlängert wird, tritt mit ihr mehr Ruhe ein, während im übrigen die Vermehrung der Reibung in jeder Weise nachteilig ist." Durch jahrelange Versuche im Laboratorium und auf seiner Yacht fand Thomson, daß eine Rose, um ruhig zu sein, nicht mehr Gewicht zu haben braucht als erforderlich ist, um ihr den nötigen Halt zu geben, wenn man nur dieses Gewicht, soweit es irgend möglich ist, an den äußeren Rand verlegt.

Diesen Grundsätzen entsprechend, besteht das Gerippe der Thomsonschen Rose aus einem Aluminiumringe, von dem in gleichmäßigen Zwischenräumen 32 Seidenfäden nach einer im Mittelpunkte befindlichen kleinen Aluminiumscheibe gespannt sind. Das Rosenblatt ist aus Papier, imprägnierter Leinwand oder Seide gefertigt; der mittlere Teil ist herausgeschnitten, und es ist nur so viel stehen geblieben, als für eine deutliche Einteilung nach Strichen und Graden nötig ist. Damit sich das Rosenblatt nicht wirft, ist es mit radialen Einschnitten versehen. Die mittlere Scheibe wird in den Rand eines Hütchens gelegt, das mit einer Edelsteinkuppe versehen ist und mit ihr auf einer sehr feinen Stahl- oder Iridiumpinne ruht. Das Magnetsystem der Rose besteht aus 8 kleinen 5 bis 8 cm langen Nadeln, die durch Seidenfäden unter sich und mit dem Gestell der Rose verbunden sind.

Der auf Schneiden ruhende Kompaßkessel ist mit einem Doppelboden versehen, dessen Raum zur Mäßigung der Schlingerbewegungen des Kessels mit Ricinusöl nahezu ausgefüllt ist. In die Aufhängevorrichtung ist ein elastischer Ring zur Verminderung der Stöße eingeschaltet.

Das zum Thomsonschen Kompaß gehörige Kompaßhaus ist mit Vorrichtungen zur Anbringung von festen Längsschiffs-, Querschiffs- und Krängungsmagneten versehen. Ferner können auf seitlichen Trägern Kugeln aus weichem Eisen zur Kompensation der viertelkreisigen Ablenkung angebracht werden, während eine an der Vorderseite befestigte Büchse zur Aufnahme der Flindersstange bestimmt ist. Die Thomsonsche Rose besitzt so große Vorzüge gegenüber den älteren Konstruktionen, daß sie vorbildlich für alle seit ihrer Erfindung (1878) konstruierten Trockenkompaßrosen geworden ist.

Schwimm- oder Fluidkompasse. Schon vor der Erfindung der Thomsonschen Rose hat man die Ruhe der Kompaßrose auf einem anderen Wege zu erreichen versucht, nämlich durch die Konstruktion der Schwimm- oder Fluidkompasse.

Bei diesen Kompassen ist der Kompaßkessel ganz mit einer Flüssigkeit ausgefüllt. Diese besteht gewöhnlich aus einem Gemisch von 80 % Alkohol (Spiritus) und 20 % Wasser. Durch diese Anordnung erreicht man folgende sehr wesentlichen Vorteile:

1. Da die Rose gezwungen ist, sich in der Flüssigkeit zu drehen, so sind ihre Bewegungen sehr viel ruhiger.
2. Indem man mit dem Rosenkörper einen Schwimmer verbindet, kann man das auf die Pinne drückende Gewicht der Rose soweit aufheben, wie man nur will. Deshalb kann man auch beliebig schwere, also auch beliebig starke Magnetsysteme in Anwendung bringen.
3. Der Kompaßkessel, die Flüssigkeit und die Rose bilden den Erschütterungen des Schiffskörpers gegenüber gleichsam ein Ganzes. Die Rose wird deshalb durch diese Erschütterungen viel weniger beeinflußt werden.

Diesen Vorzügen des Schwimmkompasses stehen einige Nachteile gegenüber, die aber durch eine sorgfältige Konstruktion vermieden werden können.

Zunächst ist durch eine besondere Vorrichtung am Kompaßkessel der starken Ausdehnung des Alkohols mit der Temperatur Rechnung zu tragen. Am besten geschieht dieses durch einen Doppelboden. Der obere der beiden Böden ist in der Mitte durchbohrt und trägt an einer kurzen Röhre eine Wellblechkapsel, in welche die Füllflüssigkeit bei ihrer Ausdehnung eintreten kann.

Bei schnellen Drehungen des Schiffes hat die Flüssigkeit das Bestreben, die Rose mit herumzunehmen. Das dadurch entstehende Mitschleppen der Rose kann jedoch durch eine recht große Kraft der Magneten so gering gemacht werden, daß es praktisch nicht mehr in Betracht kommt.

Bei der Kompensation der viertelkreisigen Ablenkung durch weiche Eisenmassen werden in den letzteren durch die starken Magnete des Fluidkompasses leicht eigene Pole erzeugt. Dadurch können Unregelmäßigkeiten im Verlaufe der

Ablenkung entstehen. Es ist deshalb in solchen Fällen, wo man einen größeren Betrag der viertelkreisigen Ablenkung zu kompensieren hat, Vorsicht geboten.

Die Schwimmkompasse eignen sich ihrer Natur nach besonders dort zur Aufstellung an Bord, wo durch die Schraube oder sonstwie starke Erschütterung des Schiffskörpers verursacht werden und wo Kompasse mit Trockenrosen daher schnellem Verderben ausgesetzt sind.

§ 308. Prüfung der Kompasse an Bord. Die vollständige Prüfung eines Kompasses, insbesondere die Untersuchung der Rose auf ihre magnetische Kraft, ihre Schwingungsdauer, ihr Gewicht und auf das Verhältnis, in dem diese Größen zu einander stehen, ist Sache besonders dazu berufener Personen oder Institute, beispielsweise der Abteilung II der Deutschen Seewarte in Hamburg. Für den Seefahrer kommen als die wichtigsten Dinge, auf die er nach Aufstellung des Kompasses an Bord zu achten hat, die folgenden in Betracht.

1. Aufhängung. Es ist darauf zu achten, daß sich der Kompaßkessel frei und leicht in der Kreuzzapfenaufhängung bewegen kann, ohne bei der Bewegung des Schiffes hin und her zu stoßen. Die obere Glasplatte des Kessels muß in der Ruhelage genau horizontal sein.

2. Steuerstrich. Man hat sich davon zu überzeugen, daß der Steuerstrich von der Kompaßmitte aus genau in der Längsschiffslinie liegt oder besser, daß die Verbindungslinie der beiden Steuerstriche genau der Kiellinie parallel ist. Die Prüfung geschieht bei einem mittschiffs aufgestellten Kompaß, indem man eine Peilvorrichtung aufsetzt und irgend einen möglichst weit entfernten Punkt der Mittschiffslinie peilt; der Steuerstrich muß dann genau in die vertikale Peilungsebene fallen. Eine zweite Methode ist die, daß man zwei von der Mittellinie des Schiffes rechtwinklig nach beiden Seiten gleichweit entfernte Punkte am Kompaß peilt; genau in der Mitte zwischen diesen beiden Ablesungen muß sich der Steuerstrich befinden.

3. Centrierung. Der Rand der Rose muß in allen ihren Lagen gleichweit vom Kesselrande entfernt sein. Um dieses zu untersuchen, nimmt man den Kessel aus der Aufhängevorrichtung heraus, setzt ihn auf einen Tisch und dreht ihn langsam herum. Sind zwei Steuerstriche vorhanden, so müssen sie immer genau entgegengesetzte Kurse an der Rose anzeigen.

4. Peilvorrichtungen. Sein besonderes Augenmerk hat man auf die gute Beschaffenheit der Peilvorrichtung zu richten. Auch hier ist die Anbringung von zwei sich gegenüberstehenden Indexstrichen zu empfehlen. Die Centrierung der Peilvorrichtung prüft man, indem man in verschiedenen Stellungen Ablesungen sowohl an der Rosenteilung, wie an der des Kesselrandes macht und zwar auf beiden Seiten der Diopter. Die beiden Ablesungen müssen in allen Fällen um 180^{0} verschieden sein. Die Diopter selbst müssen genau lotrecht stehen, wenn der Kessel sich in seiner horizontalen Gleichgewichtslage befindet. Beim Peilen muß man sich sehr davor hüten, den Kompaßkessel oder die Peilscheibe durch Auflegen der Hände zu kippen und festzuhalten.

Um zu untersuchen, ob der benutzte Schattenstift gerade ist, dreht man ihn während des Peilens um seine Achse und sieht zu, ob der Schatten dabei keine Verschiebung erleidet.

5. Einstellungsfähigkeit. Um die Empfindlichkeit des Kompasses zu prüfen, lenkt man die Rose durch einen Magneten oder ein Stück Eisen um etwa 30° ab und beobachtet die Schwingungen, die sie um ihre Gleichgewichtslage ausführt. Die Schwingungsbögen müssen bei Trockenkompassen langsam und stetig bis zu unmerklich kleinen Werten abnehmen, worauf die Rose genau, das heißt mindestens auf 0,2°—0,3°, dieselbe Ruhelage eingenommen haben muß, die sie vorher hatte. Bleibt die Rose plötzlich stehen, so sind Stein und Pinne zu untersuchen sowie nachzusehen, ob etwa am Rande der Rose Fasern haften, die an der Kesselwand schleifen. Zur Untersuchung des Steines taste man mit einer spitzen Nadel vorsichtig seine Höhlung ab. Die geringste dabei verspürbare Rauheit macht den Stein unbrauchbar. Außer in den eben erwähnten Fehlern kann die rasche Abnahme der Schwingungsbögen und die mangelhafte Einstellungsfähigkeit der Rose in einer zu geringen magnetischen Kraft ihren Grund haben. Bei Schwimmkompassen nehmen die Schwingungsbögen naturgemäß rasch ab, trotz dieser schnellen Abnahme aber muß die Rose sich mit großer Genauigkeit in die früher beobachtete Gleichgewichtslage wieder einstellen.

§ 309. Aufstellung der Kompasse an Bord. Für das Verhalten der Kompasse an Bord eines eisernen Schiffes ist die Wahl des Aufstellungsplatzes von hervorragender Bedeutung. Es muß deshalb wenigstens für den Regelkompaß auf einen günstigen Platz schon beim Bau des Schiffes Rücksicht genommen werden. Der Platz für den Regelkompaß muß selbstverständlich leicht zugänglich sein, er muß eine möglichst freie Rundsicht zum Peilen erlauben, vor allen Dingen aber sollte er so gewählt werden, daß er in magnetischer Hinsicht ein möglichst günstiger ist. Nichts wäre verkehrter, als sich darauf zu verlassen, daß die größten Ablenkungen nachher durch die Kompensation beseitigt werden könnten.

Die Nachteile, die mit einem ungünstigen Kompaßorte verbunden sein können, sind hauptsächlich

1. eine sehr verminderte mittlere Richtkraft;
2. bedeutende Beträge des von der Vertikalinduktion herrührenden, mit der Breite stark veränderlichen Bestandteiles des B und vielleicht auch des C;
3. große und deshalb durch halbfesten Magnetismus stark veränderliche Werte des B und des C;
4. ein übermäßiger Betrag des Krängungsfehlers.

Da bei eisernen Schiffen, wenn der Baukurs nicht gerade Ost oder West war, die magnetische Wirkung an den Enden am stärksten ist, so ist die Aufstellung des Regelkompasses fern von den Enden des Schiffes im allgemeinen die beste.

Um der Verminderung der mittleren Richtkraft nach Möglichkeit vorzubeugen, ist die Nähe horizontaler oder geneigter Eisenmassen — Decksbalken, Schotten, Geländerstangen, eiserner Decks, eiserner Deckshäuser u. s. w. — zu vermeiden. Um den Wirkungen der Vertikalinduktion und ihren mit der Breite stark veränderlichen Ablenkungen aus dem Wege zu gehen, hat man auf eine gehörige Entfernung des Kompasses von vertikalen Eisenmassen — Schotten, Deckstützen, Ventilatoren, Schornsteinen, Masten, Kränen, eisernen Deckshäusern u. s. w. — zu bringen.

Auf diese Weise wird man auch am sichersten die durch keine Kompensation zu beseitigenden Störungen durch halbfesten Magnetismus auf ein ungefährliches Maß beschränken.

Beiläufig sei hier bemerkt, daß magnetische Störungen des Kompasses durch Deckshäuser u. dergl. vermieden werden, wenn man diese Aufbauten aus 25prozentigem Nickelstahl herstellt. Dieses Material, das allerdings erheblich teuerer ist, als gewöhnlicher Stahl, zeigt merkwürdigerweise keine magnetischen Wirkungen.

Daß der Regelkompaß in der Mittschiffsebene aufzustellen ist, sowie daß sich in seiner Nähe keine unsymmetrischen Eisenmassen befinden dürfen, ist nach dem, was in § 297 über die Entstehung der Koeffizienten A und E gesagt ist, selbstverständlich.

Im allgemeinen muß das Bestreben dahin gerichtet sein, den Regelkompaß an einen Platz zu stellen, der möglichst frei von dem Einflusse einzelner größerer Eisenmassen ist, so daß das Schiff vorwiegend nur in seiner Gesamtheit als magnetischer Körper auf den Kompaß wirken kann. Nähere Ausführungen dieser Grundsätze in ihrer Anwendung auf verschiedene Schiffsgattungen sehe man in den „Instruktionen der Deutschen Seewarte über die Behandlung der Deviation der Kompasse an Bord eiserner Schiffe".

Die im vorstehenden aufgestellten Gesichtspunkte sind besonders für die Wahl eines Platzes für den Regelkompaß maßgebend. Der Platz für den Steuerkompaß ist durch die örtlichen Verhältnisse in der Nähe des Rudergeschirrs bestimmt. Nach Möglichkeit wird man die oben gegebenen Vorschriften natürlich auch für den Steuerkompaß berücksichtigen.

Nautische Instrumente.

Die Spiegelinstrumente.

§ 310. Einleitung. Das Verständnis der Einrichtung und der Wirkungsweise der Spiegelinstrumente setzt einige Vorkenntnisse aus der Lehre vom Lichte oder der Optik voraus.

Das Licht pflanzt sich im Raume in geraden Linien fort, die man Lichtstrahlen nennt. Körper, die von sich selbst sichtbar sind, d. h. Lichtstrahlen aussenden, werden selbstleuchtende Körper genannt. Solche selbstleuchtende Körper sind die Sonne, die Fixsterne, Flammen, glühendes Metall u. a. Die meisten Körper sind von Natur dunkel, d. h. sie werden erst sichtbar, wenn Lichtstrahlen von einem selbstleuchtenden Körper auf sie fallen und von ihnen zurückgeworfen werden.

Körper, die den Lichtstrahlen den ungehinderten Durchgang gestatten, heißen durchsichtige Körper. Einen vollkommen durchsichtigen Körper würde man nicht sehen können. Selbst die Luft ist in dickeren Schichten nicht als vollkommen durchsichtig zu betrachten (Bläue des Himmels). Ein Körper, der den Gang der Lichtstrahlen vollständig aufhält, wie Holz, Metall u. a., wird undurchsichtig genannt. Zwischen durchsichtigen und undurchsichtigen Körpern stehen die durchscheinenden, wie Milchglas u. a.

§ 311. Spiegelung oder Reflexion des Lichtes. Fallen Lichtstrahlen auf die Oberfläche eines undurchsichtigen Körpers, so müssen sie, da sie ins Innere des Körpers nicht einzudringen vermögen, in den Außenraum zurückgeworfen werden. Gewöhnlich geschieht diese Zurückwerfung unregelmäßig, d. h. jeder Punkt des Körpers sendet die auf ihn treffenden Strahlen nach allen möglichen Richtungen zurück und wird uns dadurch sichtbar.

Ist die Oberfläche des von Lichtstrahlen getroffenen Körpers aber so glatt und eben, daß alle in einer Richtung auf sie treffenden Lichtstrahlen nach ein und derselben Richtung zurückgeworfen werden, so nennt man die Fläche eine Spiegelfläche.

Als Spiegelflächen benutzt man meist Metallflächen. Die im gewöhnlichen Leben und auch an nautischen Instrumenten benutzten Glasspiegel sind auf ihrer Rückseite mit einer aus Quecksilber und Zinn bestehenden Metallschicht überzogen. Diese Metallschicht ist die eigentliche spiegelnde Fläche, der die Glasplatte nur den nötigen Halt und Schutz gewährt.

Fällt ein Lichtstrahl SA (Fig. 246) auf eine Fläche MN, so nennt man die im Einfallspunkte A errichtete Senkrechte LA das Einfallslot, SA heißt der einfallende Strahl und die durch LA und SA gelegte Ebene die Einfallsebene. Diese ist, da sie durch das Lot LA geht, immer senkrecht zur Spiegelfläche. Den Winkel SAL nennt man Einfallswinkel, den Winkel $S'AL$ Reflexionswinkel.

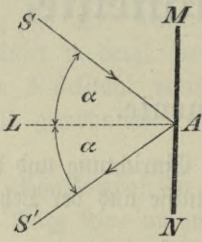


Fig. 246.

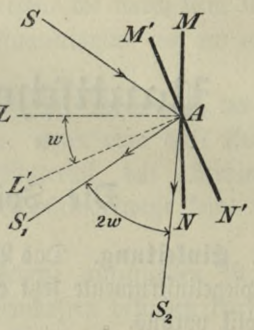


Fig. 247.

Die Grundgesetze der Spiegelung lauten:

1. Der zurückgeworfene oder reflektierte Strahl liegt auch in der Einfallsebene.

2. Der Reflexionswinkel ist gleich dem Einfallswinkel.

Wird der Spiegel MN um eine durch A gehende Achse, die senkrecht zur Einfallsebene steht, um einen Winkel w gedreht, so wird der Einfallswinkel um w vergrößert. Dasselbe geschieht nach dem Spiegelungsgesetze auch mit dem Ausfallswinkel. Der zwischen dem einfallenden und dem reflektierten Strahle liegende Winkel ändert sich also um $2w$, d. h.

Wird der Spiegel um einen beliebigen Winkel gedreht, so dreht sich der reflektierte Strahl um den doppelten Winkel.

§ 312. Bilder in ebenen Spiegeln. Man unterscheidet ebene oder Planspiegel und gekrümmte Spiegel. Kugelförmig und parabolisch geschliffene Hohlspiegel finden vielfache Verwendung in der Beleuchtungstechnik der Feuertürme. Wir beschränken unsere Betrachtungen hier jedoch auf ebene Spiegel, da sie allein an nautischen Instrumenten Verwendung finden.

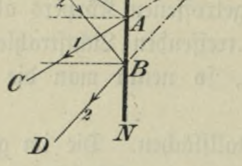


Fig. 248.

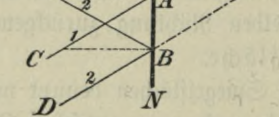


Fig. 249.

Es sei MN (Fig. 248) eine spiegelnde Fläche, L ein leuchtender Punkt. Der von L aus auf den Punkt A fallende Strahl LA wird nach dem Spiegelungsgesetze in der Richtung AC zurückgeworfen, ebenso der Strahl LB in der Richtung BD. Für den Beobachter scheint es, als ob die Strahlen AC und BD von einem Punkte L' ausgingen, er sieht deshalb das Bild des Punktes L in L', und zwar liegt L' symmetrisch zu L in Bezug auf die Spiegelfläche MN, d. h. LL' steht senkrecht auf MN und wird durch MN halbiert. Ist der Punkt L sehr weit entfernt (Fig. 249), so daß die von ihm ausgehenden Strahlen als parallel angesehen werden können, so sind die Strahlen auch nach der Reflexion parallel, man sieht das Bild von L in der Richtung nach L'.

§ 313. Brechung der Lichtstrahlen. Der Satz von der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes gilt nur so lange, wie der Lichtstrahl sich in demselben gleichförmigen Körper oder, wie man auch sagt, in demselben gleichförmigen Mittel fortpflanzt. Tritt ein Lichtstrahl von einem Mittel in ein anderes, z. B. von Luft in Wasser oder von Luft in Glas, so erleidet er an der Grenzfläche eine Brechung, d. h. er verändert in dem Übergangspunkte seine Richtung.

Den Winkel zwischen dem einfallenden Strahle und dem Einfallslote nennt man wieder den Einfallswinkel, den Winkel zwischen dem gebrochenen Strahle und dem Einfallslote den Brechungswinkel. Diese beiden Winkel sind nicht gleich; man nennt das Mittel, in dem der größere der beiden Winkel liegt, das optisch dünnere, das andere das optisch dichtere. In der Figur 250 stellt das unterhalb der Grenzfläche MN liegende das dichtere Mittel, etwa Wasser oder Glas, dar, während oberhalb MN das dünnere Mittel, etwa Luft, zu denken ist. Dann ist der Winkel α im dünneren Mittel größer, als der Winkel β im dichteren Mittel, einerlei, ob der Strahl vom dünneren in das dichtere oder vom dichteren in das dünnere Mittel übertritt.

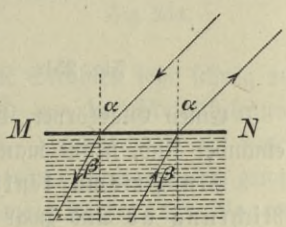


Fig. 250.

Die Grundgesetze der Brechung lauten:

1. Der gebrochene Strahl liegt auch in der Einfallsebene.

2. Beim Übergange aus einem optisch dünneren in ein dichteres Mittel wird der Lichtstrahl nach dem Einfallslote zu, beim Übergang von einem dichteren in ein dünneres Mittel vom Einfallslote weg gebrochen.

3. Die Brechung ist um so stärker, je schräger die Lichtstrahlen auf die Trennungsfläche auffallen. Bei senkrechtem Einfall der Strahlen ist die Brechung Null.

Anmerkung. Zwischen dem Einfallswinkel und dem Brechungswinkel besteht folgende einfache Beziehung. Bezeichnet α den Einfallswinkel, β den Brechungswinkel, so ist

$$\sin\beta = n \, . \sin\alpha$$

wo n eine für die beiden Mittel charakteristische Zahl bedeutet und der Brechungskoeffizient heißt.

Der Wert des Brechungskoeffizienten ist z. B.

für den Übergang von Luft in Wasser gleich $\frac{3}{4}$,
für den Übergang von Wasser in Luft gleich $\frac{4}{3}$,
für den Übergang von Luft in Glas gleich $\frac{2}{3}$,
für den Übergang von Glas in Luft gleich $\frac{3}{2}$.

Die Strahlenbrechung läßt den Boden eines mit Wasser gefüllten Gefäßes sowie alle in dem Wasser befindlichen Gegenstände höher erscheinen als sie in Wirklichkeit sind; ein ins Wasser gehaltener Stock erscheint aufwärts geknickt und anderes mehr.

§ 314. Gang eines Lichtstrahles durch planparallele und durch prismatische Glasplatten. Eine planparallele Glasplatte ist eine solche, deren Grenzflächen vollkommen eben geschliffen und parallel zu einander sind. Trifft ein Lichtstrahl auf eine derartige Glasplatte, so wird er an der Vorderfläche nach dem Einfallslote hin gebrochen, auf der Rückfläche jedoch um denselben Winkel vom Einfallslote weg gebrochen (siehe Fig. 251), daraus folgt aber:

Strahlen, die auf eine planparallele Glasplatte treffen, treten parallel zur Einfallsrichtung wieder aus.

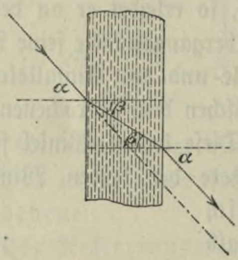


Fig. 251.

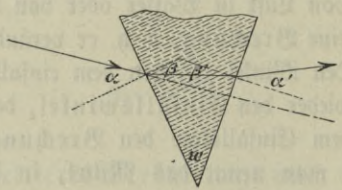


Fig. 252.

Einen Glaskörper, dessen Begrenzungsflächen eben aber nicht parallel zu einander sind, nennt man ein Glasprisma.

Ein Prisma lenkt einen hindurchgehenden Lichtstrahl von seiner Richtung ab und zwar immer nach der stumpfen Seite des Prismas und um so mehr, je größer der brechende Winkel des Prismas (w in der Fig. 252) ist.

Für dasselbe Prisma ist die Ablenkung am kleinsten, wenn der Strahl im Glaskörper senkrecht zur Halbierungslinie des Winkels w verläuft. Man nennt diesen Durchgang der Strahlen den symmetrischen.

Ähnliche Erscheinungen wie die soeben besprochenen finden statt, wenn die Glasplatte eines Glasspiegels entweder planparallel oder prismatisch geschliffen ist. Sind die Grenzflächen der Glasplatte genau parallel, so findet die Reflexion an dem ganzen aus Glas und Metallbelegung bestehenden Spiegel so statt, als ob gar kein Glas vorhanden wäre. Es sind nämlich bei parallelen Grenzflächen des Glases die Einfallslote seiner Vorder- und Rückseite einander parallel. Der auf das Glas fallende Strahl AB (Fig. 253) wird bei seinem Eintritt in das Glas nach dem Einfallslote hin gebrochen, dann durchsetzt er die Platte, bei C findet die Reflexion statt, und an der Vorderfläche des Glases in D wird der Strahl in derselben Weise vom Einfallslote weg gebrochen, wie er bei B zum Lote hin gebrochen worden war.

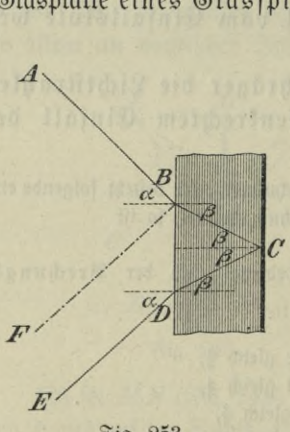


Fig. 253.

Zu dem soeben beschriebenen Vorgange ist noch folgendes zu bemerken. Nicht das ganze in der Richtung AB auf den Spiegel fallende Licht dringt in das Glas ein, ein Teil wird schon an der Vorderfläche bei B reflektiert. Die beiden reflektierten Strahlen DE und BF sind einander parallel. Fällt ein ganzes Bündel paralleler Strahlen auf den Spiegel, etwa die von einem weit entfernten Gegenstande ausgehenden Strahlen, so sind demnach alle von der Vorderfläche und von der Rückfläche reflektierten Strahlen einander parallel. Das bedeutet aber, daß man von dem entfernten Gegenstande nur ein Bild in der Richtung der reflektierten Strahlen sieht.

Ist dagegen die Glasplatte prismatisch, so trifft der Strahl nach seiner Reflexion die Vorderfläche des Glases unter einem anderen Winkel, als er sie verlassen hatte, der Strahl erhält also eine andere Richtung, als er sie bei Abwesenheit des Glases durch einfache Reflexion an der Metallschicht erhalten haben würde (Fig. 254). Auch sind die von der Vorder- und von der Rückfläche reflektierten Strahlen einander nicht parallel, und zwar ist die Abweichung um so größer, je schräger die einfallenden Strahlen den Spiegel treffen. Betrachtet man in einem solchen Spiegel das Bild eines weit entfernten Gegenstandes, so sieht man deshalb, besonders wenn man die Strahlen sehr schräg auf den Spiegel fallen läßt, zwei Bilder, ein Hauptbild von der Metallbelegung und ein Nebenbild von der Vorderfläche des Glases. Hierdurch ist ein gutes Mittel gegeben, um zu erkennen, ob die Grenzflächen eines Spiegelglases genau parallel sind. Wenn man Strahlen von einem weit entfernten Gegenstand sehr schräg auf den Spiegel fallen läßt, so darf sich nur ein reflektiertes Bild zeigen.

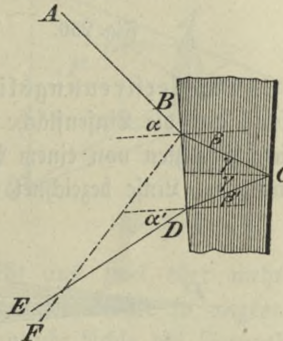


Fig. 254.

§ 315. **Linsen.** Zur Unterstützung des Auges werden an nautischen Instrumenten vielfach Lupen und Fernrohre benutzt, über deren Arten und Gebrauch hier deshalb einige Erläuterungen gegeben werden sollen. Beide Instrumente sind aus Glaslinsen zusammengesetzt. Unter einer Linse versteht man in der Optik einen durch zwei Kugelflächen oder durch eine Kugelfläche und eine Ebene begrenzten Glaskörper. Die Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte heißt die Achse der Linse. Die beiden in den Figuren 255 unter 1 und 2 dargestellten Linsenarten, die in der Mitte dicker sind als am Rande, werden Sammellinsen, die in den Figuren 255 unter 3 und 4 dargestellten, die am Rande dicker sind als in der Mitte, werden Zerstreuungslinsen genannt.

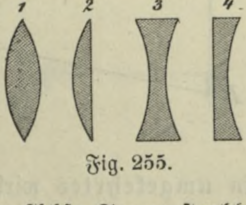


Fig. 255.

Läßt man auf eine Sammellinse parallel zu ihrer Achse Sonnenstrahlen fallen, so werden diese Strahlen durch die Linse in einem Punkte vereinigt; dieser Punkt heißt der Brennpunkt der Linse (Punkt F in Fig. 256). Kehrt man die Linse um, so bleibt der Vereinigungspunkt der Strahlen nahezu an derselben

Stelle. Die Linse hat demnach zwei Brennpunkte in gleichen Abständen zu beiden Seiten. Die Entfernung jedes Brennpunktes von der Linsenfläche heißt die Brennweite der Linse.

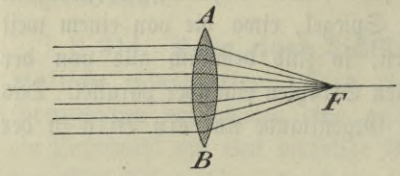


Fig. 256.

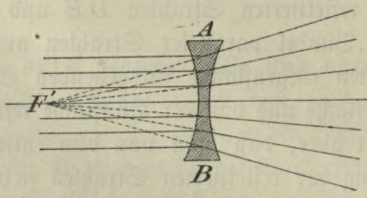


Fig. 257.

Die Zerstreuungslinsen haben die Eigenschaft, ein Bündel parallel zur Achse auf die Linsenfläche fallender Lichtstrahlen so zu zerstreuen, als kämen diese Strahlen von einem Punkte der Achse, den man ebenfalls als einen Brennpunkt der Linse bezeichnet (siehe Fig. 257)

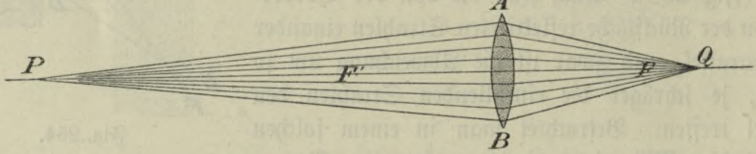


Fig. 258.

Fallen auf eine Sammellinse Strahlen, die von einem Punkte P der Achse ausgehen, wie es in der Figur 258 dargestellt ist, so werden auch diese Strahlen in einem Punkte Q hinter der Linse vereinigt. Dasselbe gilt auch von Strahlen, die von einem in der Nähe der Achse liegenden Punkte ausgehen. Rückt der Punkt P eine kleine Strecke nach oben, so bewegt sich der Bildpunkt Q nach unten und zwar so, daß beide Punkte stets auf einer durch den Mittelpunkt der Linse gezogenen Linie bleiben. Hierdurch wird die Haupteigenschaft einer Sammellinse verständlich, nämlich die, daß sie von einem entfernten Gegenstande

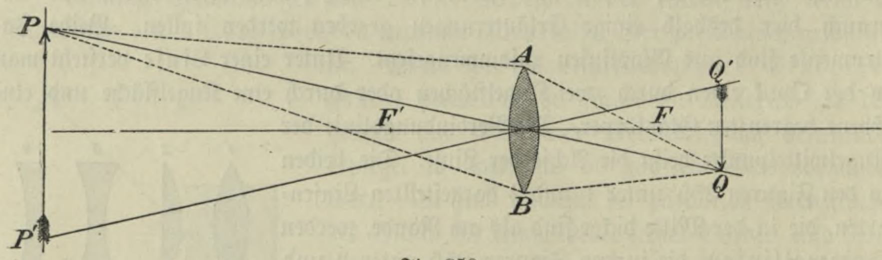


Fig. 259.

ein umgekehrtes wirkliches Bild erzeugt, wie dies durch die Figur 259 veranschaulicht wird. Die von der Spitze P des gezeichneten Gegenstandes ausgehenden Strahlen vereinigen sich in Q hinter der Linse wieder, ebenso die von P' ausgehenden in Q'. Die Bilder der zwischen P und P' liegenden Punkte fallen zwischen Q und Q', so daß der ganze Gegenstand PP' das Bild QQ'

liefert. Je weiter der Gegenstand PP' entfernt ist, um so näher liegt das Bild QQ' dem Brennpunkte F' und um so kleiner ist es. Rückt PP' von links heran, so entfernt sich QQ' nach rechts, indem es größer und größer wird. Ist PP' im Brennpunkte F' angekommen, so treten die von seinen einzelnen Punkten kommenden Strahlen parallel aus, und es entsteht deshalb kein Bild mehr.

Für einen zwischen der Linse und dem Brennpunkte F' befindlichen Gegenstand wirkt die Sammellinse als Lupe oder Vergrößerungsglas, wie dies durch die Figur 260 erläutert wird. Die von den Enden P und P' des zu betrachtenden Gegenstandes kommenden Strahlen werden durch die Linse in ihrer Richtung so verändert, daß sie von Q beziehungsweise von Q' zu kommen scheinen. Das in O befindliche Auge sieht daher von dem Gegenstande PP' ein vergrößertes aufrechtes Bild QQ'.

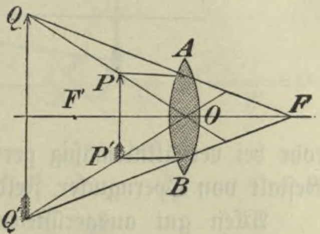


Fig. 260.

§ 316. **Fernrohre.** Jedes Fernrohr besteht aus zwei oder mehreren Linsen, die in einer meist metallenen, innen geschwärzten Röhre so angeordnet sind, daß ihre Achsen in dieselbe gerade Linie, die optische Achse des Fernrohres, zusammenfallen.

Die hauptsächlichsten bei einem Fernrohre zur Verwendung kommenden Linsen unterscheidet man als die Objektiv- und die Okularlinse. Jene ist die dem zu betrachtenden Gegenstande, diese die dem Auge zugewandte.

Es giebt drei wesentlich von einander verschiedene Arten von Fernrohren, nämlich:

1. das astronomische oder Keplersche Fernrohr,
2. das terrestrische Fernrohr,
3. das Galileische Fernrohr.

Das astronomische Fernrohr ist von Kepler erfunden worden. Es hat als Objektiv eine Sammellinse AB, die von dem zu betrachtenden Gegenstande PP' ein umgekehrtes wirkliches Bild QQ' erzeugt (siehe Fig. 261). Dieses Bild wird mit dem als Lupe wirkenden Okular betrachtet und erscheint so als das vergrößerte umgekehrte Bild RR'.

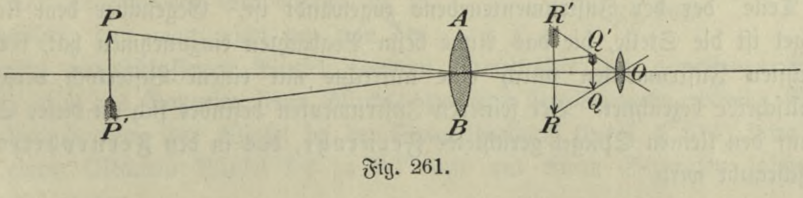


Fig. 261.

Die Einrichtung des terrestrischen Fernrohres kann man sich so erklären, daß das Bild QQ' der Figur 261 nicht unmittelbar betrachtet, sondern zunächst durch eine zwischengeschaltete, in der Mitte des Rohres befindliche Linse nochmals umgekehrt wird, so daß es dem Auge wieder als aufrechtes Bild erscheint.

Das Galileische Fernrohr besteht wie das astronomische im wesentlichen aus zwei Linsen. Auch bei ihm ist das Objektiv eine Sammellinse. Man läßt jedoch das oben mit QQ' bezeichnete Bild gar nicht zu stande kommen, sondern fängt die Strahlen schon vor ihrer Vereinigung durch eine Zerstreuungslinse auf und erhält unmittelbar ein aufrechtes Bild (siehe Fig. 262). Da das Galileische Fern-

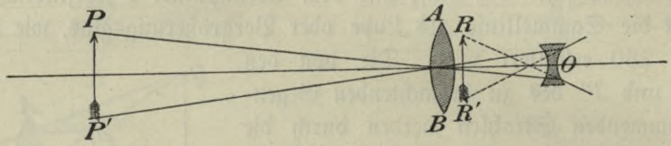


Fig. 262.

rohr bei verhältnismäßig geringer Länge aufrechte Bilder liefert, so findet es in Gestalt von Operngucker, Feldstecher, Nachtglas u. s. w. ausgedehnte Verwendung.

Allen gut ausgerüsteten Spiegelinstrumenten ist für feine Winkelmessungen ein astronomisches, für rohere Messungen ein kleines Galileisches Fernrohr beigegeben (vergl. § 320). Terrestrische Fernrohre werden nicht an Spiegelinstrumenten, wohl aber sonst vielfach an Bord zum Erkennen weit entfernter Gegenstände benutzt.

§ 317. Oktanten und Sextanten. Zur Messung von Winkeln bedient man sich auf See des Oktanten oder des Sextanten. Diese beiden Instrumente werden auch unter dem gemeinsamen Namen Spiegelinstrumente zusammengefaßt.

Die wesentlichen Bestandteile dieser Spiegelinstrumente sind die folgenden.

Der Instrumentenkörper ist ein festes, aus Metall (Messing, Rotguß, Aluminium, Magnalium) verfertigtes Gestell in Form eines Kreisausschnittes, der beim Oktanten einen Mittelpunktswinkel von etwas über 45°, beim Sextanten einen solchen von etwas über 60° besitzt. Um den Mittelpunkt des Kreisausschnittes ist eine Regel drehbar, die man die Alhidade nennt. Die Stellung der Alhidade kann an einer auf dem Bogen des Kreisausschnittes angebrachten Gradteilung abgelesen werden. Über dem Drehpunkte der Alhidade steht senkrecht zur Ebene des Instrumentenkörpers der große Spiegel. Ferner ist am Instrumentenkörper, ebenfalls senkrecht zu seiner Ebene, der kleine Spiegel angebracht. Das Glas dieses Spiegels ist nur zur Hälfte belegt, und zwar in dem Teile, der der Instrumentenebene zugewandt ist. Gegenüber dem kleinen Spiegel ist die Stelle, die das Auge beim Beobachten einzunehmen hat, bei den einfachsten Instrumenten durch eine aufrechte mit einem Visierloch versehene Metallscheibe bezeichnet. Bei feineren Instrumenten befindet sich an dieser Stelle ein auf den kleinen Spiegel gerichtetes Fernrohr, das in den Fernrohrträger eingeschraubt wird.

§ 318. Winkelmessung mittels des Spiegelinstrumentes. Um mittels eines Spiegelinstrumentes den Winkel zu messen, unter dem zwei Punkte P und Q vom Beobachter aus erscheinen, hat man das Instrument so zu halten, daß die Instrumentenebene in die durch das Auge O und die Punkte P und Q

gelegte Ebene fällt. Durch den unbelegten Teil des kleinen Spiegels sieht man nach dem einen der Punkte P direkt hin und stellt dann durch Drehung der Alhidade den großen Spiegel so, daß der von dem anderen Punkte Q kommende Strahl durch Spiegelung an dem großen und darauf an dem kleinen Spiegel in dieselbe Richtung geworfen wird, die der von P kommende Strahl besitzt. Hat man auf diese Weise das doppelt gespiegelte Bild von Q mit dem direkt gesehenen Bilde von P genau zur Deckung gebracht, so ist der zwischen den Linien PK und QG gelegene Winkel $PWQ = \beta$ doppelt so groß wie der von den beiden Spiegeln eingeschlossene Winkel α. In der That ist (siehe Fig. 263)

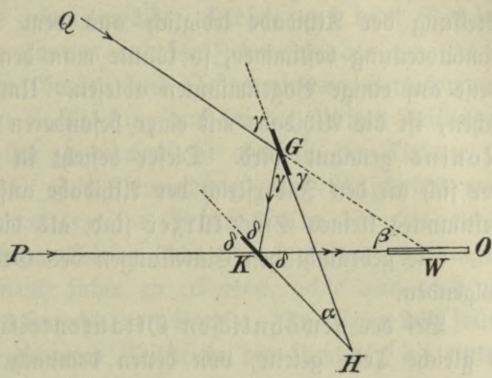


Fig. 263.

$$\delta = \alpha + \gamma \text{ als Außenwinkel am } \Delta KGH$$
$$\text{also auch } 2\delta = 2\alpha + 2\gamma$$
$$\text{Ferner ist } 2\delta = \beta + 2\gamma \text{ als Außenwinkel am } \Delta KGW$$
$$\text{folglich } \beta + 2\gamma = 2\alpha + 2\gamma$$
$$\beta = 2\alpha$$

Die Lichtstrahlen, die von einem weit entfernten Gegenstande, z. B. einem Gestirne, oder einem mehr als eine Seemeile entfernten Turme oder der Kimm durch den unbelegten Teil des kleinen Spiegels und auf den großen Spiegel fallen, kann man als parallel ansehen. Bringt man also das doppelt gespiegelte Bild eines solchen Gegenstandes mit seinem direkt gesehenen Bilde zur Deckung, so ist $\beta = 0$, und infolgedessen muß auch $\alpha = 0$, d. h. die Spiegel müssen parallel gestellt sein. In diesem Falle sollte die Alhidade auf Null der Teilung stehen.

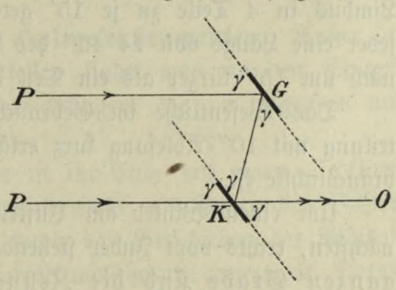


Fig. 264.

Die Teilung des Gradbogens ist so ausgeführt, daß man nicht den von den Spiegeln eingeschlossenen Winkel, sondern unmittelbar den gemessenen Winkel selbst, also das Doppelte jenes Winkels zwischen den Spiegeln abliest. Wegen der Verdoppelung der Winkel bei der Spiegeldrehung (vergl. § 311) kann man mit einem Oktanten Winkel bis zu 90° und mit einem Sextanten solche bis zu 120° messen.

§ 319. Die Ablesevorrichtung. Der geteilte Kreisbogen der Instrumente wird Gradbogen oder Limbus genannt. Er ist in Grade und je nach der Art der Instrumente in 3, 4 oder 6 Unterteile jedes Grades eingeteilt. Ein auf der Alhidade angebrachter Strich giebt die Stellung der Alhidade auf dem geteilten Kreise an. Dieser Strich ist durch eine *0* oder durch ein rautenförmiges Zeichen kenntlich gemacht und wird der Index genannt. Wollte man die Stellung der Alhidade lediglich aus dem Stande des Indexstriches auf der Limbusteilung bestimmen, so könnte man den gemessenen Winkel nur schätzungsweise auf einige Bogenminuten ablesen. Um eine genauere Ablesung zu ermöglichen, ist die Alhidade mit einer besonderen Ablesevorrichtung versehen, die der Nonius genannt wird. Dieser besteht in einem kleinen geteilten Kreisbogen, der sich an den Indexstrich der Alhidade anschließt, und dessen Teile je um ein bestimmtes kleines Stück kürzer sind, als die Teile des Gradbogens.

Die gebräuchlichen Einteilungen des Gradbogens und des Nonius sind die folgenden.

Bei der gewöhnlichen Oktantenteilung ist jeder Grad des Limbus in 3 gleiche Teile geteilt, von denen demnach jeder 20′ mißt. Der Nonius hat 20 Teile, von denen aber jeder nur eine Länge von 19′ des Limbus besitzt; ein Teil des Nonius ist demnach um 1′ kürzer als ein Teil des Limbus. Die Ablesung erfolgt auf ganze Minuten. Bei manchen Instrumenten hat der Nonius 40 Teile, von denen jeder gleich $19\frac{1}{2}'$ des Gradbogens ist. Bei diesen Instrumenten kann man auf halbe Minuten ablesen.

Bei der Sextantenteilung mit 10″-Ablesung ist jeder Grad des Limbus in 6 Teile zu je 10′ geteilt. Der Nonius hat 60 Teile, von denen jeder eine Länge von 9′ 50″ des Limbus besitzt; ein Teil des Nonius ist demnach um 10″ kürzer als ein Teil des Limbus. Die Ablesung erfolgt auf 10″.

An vielen Instrumenten ist ein Noniusteil nicht gleich 9′ 50″, sondern gleich 19′ 50″ des Gradbogens gemacht. Die Ablesung ist dieselbe wie im vorigen Falle.

Bei der Sextantenteilung mit 15″-Ablesung ist jeder Grad des Limbus in 4 Teile zu je 15′ geteilt. Der Nonius hat 60 Teile, von denen jeder eine Länge von 14′ 45″ des Limbus besitzt; ein Teil des Nonius ist demnach um 15″ kürzer als ein Teil des Limbus. Die Ablesung erfolgt auf 15″.

Das Wesentliche im Gebrauche des Nonius soll hier an der Sextantenteilung mit 10″-Ablesung kurz erläutert werden, weil diese Teilung jetzt die gebräuchlichste ist.

Um einen Winkel am Instrumente abzulesen, bestimme man zuerst den nächsten, rechts vom Index stehenden Teilstrich des Gradbogens; er giebt die ganzen Grade und die Zehnerminuten. Steht der Index des Nonius zufällig gerade auf einem Teilstriche des Gradbogens, so ist die Ablesung mit der Angabe dieses Teilstriches erledigt. Fällt aber nicht der Index, sondern etwa der erste Teilstrich links von ihm mit einem Teilstriche des Gradbogens zusammen, so kommen zu dem vorher abgelesenen Wert noch 10″ hinzu; denn da ein Teil des Nonius 10″ kürzer ist als ein Teil des Limbus, so steht in dem angenommenen Falle der Index 10″ links von dem zuerst abgelesenen Striche des Limbus. Fällt der zweite Strich links vom Index mit einem Strich des Limbus zusammen, so steht der Index selbst 20″ von dem zuerst abgelesenen Limbusstriche u. s. w. Fällt der sechste Strich links vom Index mit einem Striche des Limbus zusammen, so kommen zu den Graden und Zehnerminuten noch

10″.6 = 1′; beim zwölften Striche noch 2′ u. s. w. hinzu. Der 6te, 12te, 18te u. s. w. Strich ist deshalb mit 1′, 2′, 3′ u. s. w. bezeichnet. Um den eingestellten Winkel abzulesen, hat man deshalb nachzusehen, welcher Strich des Nonius am genauesten mit einem Teilstriche des Limbus zusammenfällt. Dieser auf dem Nonius abgelesene Strich giebt die Einerminuten und die Zehnersekunden an, die zu den auf dem Limbus abgelesenen Graden und Zehnerminuten hinzukommen.

In ganz ähnlicher Weise erfolgt die Ablesung auch bei den übrigen Teilungen.

Um ein genaues Ablesen möglich zu machen, ist oberhalb der Teilung an einem Arme eine Lupe angebracht. Zur Vermeidung eines Verschubes muß der abzulesende Strich genau mitten im Gesichtsfelde der Lupe gehalten werden. Das Auge ist beim Ablesen dicht über die Lupe zu bringen.

Um den abzulesenden Noniusstrich sicher zu erkennen, achte man auch auf die Stellung der rechts und links benachbarten Striche. In Figur 265 sollen die oberhalb der geraden Linie gezeichneten Teilstriche den Limbus, die unterhalb gezeichneten den Nonius andeuten. Es ist dann nicht nur auf den mit a bezeichneten Teilstrich, sondern insbesondere auch auf die Abstände von b und b' von den entsprechenden Limbusstrichen Acht zu geben. Um diese Vergleiche auch an den Enden des Nonius anstellen zu können, sind zu den eigentlichen Noniusstrichen noch einige Vorstriche diesseits vom Indexstriche und jenseits vom letzten Striche hinzugefügt. Die Teilung des Limbus ist noch einige Grade über den Nullpunkt rückwärts fortgesetzt. Dieser Teil des Limbus heißt der Vorbogen. Beim Ablesen auf dem Vorbogen hat man sowohl den Limbusstrich wie auch den Noniusstrich von links nach rechts abzulesen. Die Praxis des Ablesens sowie der Gebrauch des Instrumentes überhaupt lassen sich natürlich nur durch fleißige Übung mit dem Instrumente in der Hand erlernen.

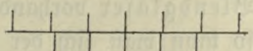


Fig. 265.

§ 320. Hülfsvorrichtungen an den Spiegelinstrumenten. Außer den in § 317 aufgezählten wesentlichen Bestandteilen findet man an den Spiegelinstrumenten noch eine Reihe von Hülfsvorrichtungen, die im folgenden aufgezählt und kurz beschrieben werden sollen.

Zur genauen Einstellung der Alhidade ist ihr Ende mit einem Schlittenapparate verbunden, der durch eine Klemmschraube am Bogen des Instrumentenkörpers festgesetzt werden kann. Ist durch das Verschieben der Alhidade eine rohe Deckung der Bilder erzielt, so wird diese Klemmschraube angezogen. Darauf erfolgt die Feineinstellung durch eine Schraube, die in der Richtung der Tangente des Instrumentenbogens die Alhidade mit dem Schlittenapparate verbindet. Diese Schraube wird die Feinschraube oder Mikrometerschraube genannt.

Die Spiegelinstrumente sind meist mit mehreren Fernrohren zur Unterstützung des Auges ausgestattet. Für alle feineren Messungen, z. B. Monddistanzen und Sonnenhöhen über dem künstlichen Horizonte, ist das astronomische Fernrohr anzuwenden. Dieses Fernrohr vergrößert im allgemeinen sechs- bis zehnmal. Da man mit bloßem Auge einen Gegenstand noch zu unterscheiden vermag, dessen Gesichtswinkel nicht kleiner als eine Minute ist, so kann man mit Unterstützung des Fernrohres unter günstigen Umständen bis auf 10 bis 6 Sekunden genau einstellen.

Für die gewöhnliche Messung von Kimmabständen genügt das Galileische Fernrohr, das den meisten Instrumenten beigegeben ist. Besitzt dieses Fernrohr ein großes Objektiv, so nennt man es Nachtglas, weil es nach Sonnenuntergang zu Beobachtungen über der sonst nur undeutlich erkennbaren Kimm geeignet ist.

Rohere Messungen, bei denen es auf einige Minuten nicht ankommt, können mit dem Durchseh- oder Diopterrohr angestellt werden.

Die Fernrohre werden eingeschraubt in den Fernrohrträger. Dieser erlaubt bei den besseren Instrumenten, das Fernrohr tiefer (näher der Instrumentenebene) und höher zu stellen. Bei Tieferstellung des Rohres erhält man mehr Licht vom belegten Teile des kleinen Spiegels, also vom doppelt gespiegelten Bilde, dieses Bild wird demnach deutlicher; bei Höherstellung wird das direkt gesehene Bild deutlicher.

Zur Abblendung zu heller Bilder sind vor dem kleinen Spiegel, sowie zwischen dem großen und dem kleinen Spiegel eine Reihe verschieden starker Blendgläser vorhanden. Erfordern beide Bilder eine gleich starke Abblendung, so kann man sich der Okularblende bedienen, eines kleinen gefärbten Glases, das vor das Okular des Fernrohres geschraubt wird.

§ 321. Indexberichtigung. Wenn die beiden Spiegel des Instrumentes parallel stehen, so sollte der Index auf den Nullpunkt der Gradteilung zeigen. Da diese Forderung gewöhnlich nicht genau erfüllt ist, so erfordert der am Instrumente abgelesene Winkel meist eine Berichtigung, die man als die Indexberichtigung oder Indexkorrektion bezeichnet.

Das einfachste Verfahren, die Indexberichtigung zu bestimmen, besteht darin, daß man eine weit entfernte, scharf begrenzte Kante, etwa die Kimm, mit sich selbst zur Deckung bringt. Dadurch sind die Spiegel parallel zu einander gestellt. Die Stelle des Gradbogens, auf die jetzt der Index zeigt, ist der wahre Nullpunkt. Liegt er rechts vom Nullpunkte der Teilung, d. h. auf dem Vorbogen, so wird jeder Winkel um den zwischenliegenden Betrag zu klein abgelesen; die Indexberichtigung erhält also das Pluszeichen. Liegt dagegen der wahre Nullpunkt links vom Nullpunkte der Teilung, d. h. auf dem Hauptbogen, so wird jeder Winkel um den angezeigten Betrag zu groß abgelesen; die Indexberichtigung erhält also das Minuszeichen. Die für die Parallelstellung der Spiegel benutzte Kante muß so weit entfernt sein, daß die auf den großen und kleinen Spiegel fallenden Strahlen als parallel angesehen werden können, oder, wie man auch sagt, daß kein nennenswerter Spiegelverschub vorhanden ist. Dies ist dann der Fall, wenn die Kante mindestens eine Seemeile entfernt ist (siehe § 76, Beispiel 3.). Benutzt man eine zu nahe Kante, so ist die erhaltene Indexberichtigung falsch nach der positiven Seite.

Eine größere Genauigkeit gewährt die folgende Methode zur Bestimmung des Indexfehlers.

Man bringe den Rand des doppelt gespiegelten Sonnenbildes mit dem Rande des direkt gesehenen Sonnenbildes zunächst auf der einen Seite in scharfe äußere Berührung und lese die Einstellung ab. Darauf schraube man das doppelt gespiegelte Bild durch das direkt gesehene durch, stelle auf der anderen Seite die scharfe Berührung her und lese wieder ab. Erteilt man der Ablesung auf dem Vorbogen das Pluszeichen, der Ablesung auf dem Hauptbogen das Minuszeichen, so ist die halbe algebraische Summe der Ablesungen die Indexberichtigung.

Der halbe algebraische Unterschied der Ablesungen ist gleich dem Sonnendurchmesser, vorausgesetzt, daß die Bilder beim Durchschrauben genau durcheinander gingen (vergl. § 324). Wenn man den genauen Wert des Sonnenhalbmessers aus dem Jahrbuche nimmt, so kann man sich demnach von der Genauigkeit der gemachten Einstellungen überzeugen.

Bei der Beobachtung ist ganz besonders auf gleiche Helligkeit der Sonnenbilder zu achten. Man erreicht sie durch passende Auswahl der Blenden, sowie durch Höher- oder Tieferstellen des Fernrohres. Wenn die Sonne niedrig steht, so ist es geboten, das Instrument horizontal zu halten, da der vertikale, nicht aber der horizontale Sonnendurchmesser durch die Strahlenbrechung verkürzt erscheint.

Beispiele.

1. Beobachtet am 15. März ($\odot \rho = 16' 6''$)

Vorbogen:	$+ 34' 20''$		
Hauptbogen:	$- 30' 10''$		
algebraische Summe:	$+ 4' 10''$	Indexberichtigung	$= + 2' 5''$
algebraischer Unterschied:	$64' 30''$	Durchmesser der Sonne beobachtet:	$32' 15''$
		nach dem Jahrbuche:	$32' 12''$

2. Beobachtet am 1. Juli ($\odot \rho = 15' 45''$)

Vorbogen:	$+ 24' 15''$		
Hauptbogen:	$- 38' 30''$		
algebraische Summe:	$- 14' 15''$	Indexberichtigung	$= - 7' 8''$
algebraischer Unterschied:	$62' 45''$	Durchmesser der Sonne beobachtet:	$31' 23''$
		nach dem Jahrbuche:	$31' 30''$

3. Beobachtet am 1. Januar ($\odot \rho = 16' 18''$)

Vorbogen:	$+ 70' 30''$		
Hauptbogen:	$+ 5' 20''$		
algebraische Summe:	$+ 75' 50''$	Indexberichtigung	$= + 37' 55''$
algebraischer Unterschied:	$65' 10''$	Durchmesser der Sonne beobachtet:	$32' 35''$
		nach dem Jahrbuche:	$32' 36''$

Anmerkung: Will man die Höhe eines irdischen Gegenstandes, z. B. den Höhenwinkel eines Leuchtturmes messen, so verfährt man gerade wie beim Messen des Sonnendurchmessers. Man bringt zunächst die Spitze des gespiegelten Gegenstandes mit dem Fuße des direkt gesehenen und darauf den Fuß des gespiegelten mit der Spitze des direkt gesehenen Gegenstandes in Berührung, dann giebt der halbe algebraische Unterschied der Ablesungen den Höhenwinkel (vergl. § 150, 4).

Zur Beseitigung des Indexfehlers ist gewöhnlich an der Fassung des kleinen Spiegels seitwärts eine kleine Schraube angebracht, die erlaubt, den Spiegel um eine senkrecht zur Instrumentenebene stehende Achse etwas zu schwenken. Es ist jedoch nicht anzuraten, diese Schraube selbst zu benutzen, weil mit dem Anziehen und Lockern derselben meistens gleichzeitig die senkrechte Stellung des Spiegels beeinflußt wird. Die Indexberichtigung ist von Zeit zu Zeit neu zu bestimmen, da sie, besonders bei starker Erwärmung oder Abkühlung des Instrumentenkörpers, kleinen Schwankungen unterworfen ist.

§ 322. Fehler der Spiegelinstrumente. Außer dem Indexfehler, der durch das Anbringen der Indexberichtigung an jedem gemessenen Winkel unschädlich gemacht wird, kann ein Spiegelinstrument noch eine Reihe anderer wirklicher Fehler haben, die darin bestehen, daß eine der folgenden sieben Forderungen, die an ein Spiegelinstrument gestellt werden müssen, nicht erfüllt ist.

1. Der große Spiegel muß senkrecht zur Ebene des Instrumentes stehen.
2. Der kleine Spiegel muß senkrecht zur Ebene des Instrumentes stehen.
3. Die Fernrohrachse muß der Instrumentenebene parallel sein.
4. Die Teilungen des Gradbogens und des Nonius müssen tadelfrei sein.
5. Die Spiegelgläser müssen planparallel geschliffen sein.
6. Die Blendgläser müssen planparallel geschliffen sein.
7. Der Drehpunkt der Alhidade muß genau mit dem Mittelpunkte der Teilung des Gradbogens zusammenfallen.

Die Erfüllung der unter 1., 2. und 3. aufgeführten Forderungen läßt sich durch Korrektionsschrauben, die an den Spiegeln und dem Fernrohrträger angebracht sind, erreichen, wogegen Fehler in der Teilung, schlechte Beschaffenheit der Spiegel und Blendgläser und Fehler in der Centrierung der Alhidade entweder gar nicht oder nur durch Ersatz der fehlerhaften Stücke durch fehlerfreie beseitigt werden können.

Die Untersuchung des Instrumentes auf seine etwaigen Fehler bildet den Gegenstand der folgenden Paragraphen.

§ 323. Die Stellung des großen Spiegels. Um zu untersuchen, ob der große Spiegel rechtwinklig auf der Ebene des Instrumentes steht, stelle man den Index etwa auf die Mitte des Limbus und sehe nach, ob der Gradbogen mit seinem Bilde im großen Spiegel eine ungebrochene Fortsetzung bildet. Ist dies der Fall, so steht der große Spiegel rechtwinklig zur Instrumentenebene. Ist das Spiegelbild des Gradbogens aufwärts gebrochen, so neigt der große Spiegel vorüber; ist es abwärts gebrochen, so neigt er rücküber.

Die Stellung des großen Spiegels läßt sich berichtigen entweder durch eine kleine, in der Mitte der oberen Kante von hinten auf den Spiegel drückende Schraube oder dadurch, daß die den Rahmen des Spiegels festhaltenden Schrauben eine geringe Verstellung dieses Rahmens selbst ermöglichen.

§ 324. Die Stellung des kleinen Spiegels. Der kleine Spiegel wird nicht für sich senkrecht zur Ebene des Instrumentes gestellt. Es ist nicht nur bequemer und genauer ausführbar, sondern auch besser, ihn bei der wahren Nullstellung der Alhidade parallel dem großen Spiegel zu stellen, nachdem dieser senkrecht zur Instrumentenebene gestellt ist. Die parallele Stellung der Spiegel kann man sehr scharf erkennen, wenn man das Spiegelbild der Sonne, eines Fixsternes oder eines anderen weit entfernten Gegenstandes mit dem direkt gesehenen Bilde zur Deckung zu bringen sucht. Gehen die Bilder bei der Nullstellung der Alhidade genau durcheinander hindurch, so steht der kleine Spiegel parallel dem großen, geht aber das Spiegelbild an dem direkt gesehenen vorbei, so ist die Stellung des kleinen Spiegels fehlerhaft. Hält man das Instrument bei der Beobachtung horizontal mit dem Handgriffe nach unten, so steht der kleine Spiegel vorüber geneigt, wenn das Spiegelbild oberhalb des direkt gesehenen hingeht, dagegen rücküber geneigt, wenn es unterhalb vorbeigeht.

Auf See kann man auch die folgende Probe anstellen. Man halte das Instrument zunächst senkrecht und bringe durch Verschiebung der Alhidade die Kimm mit ihrem Spiegelbilde genau zur Deckung. Dann drehe man das Instrument um die Gesichtslinie als Drehungsachse um etwa 45° rechts herum. Bleibt dabei die Kimm in Deckung, so steht der kleine Spiegel gut. Erhöht sich aber das doppelt gespiegelte Bild der Kimm über das direkt gesehene, so ist der kleine Spiegel vorüber, im entgegengesetzten Falle rücküber geneigt.

Wenn die Spiegel des Instrumentes nicht parallel stehen, so sind einerseits sehr kleine, andererseits sehr große Winkel mit merkbaren Fehlern behaftet. Winkelmessungen unter 1° und über 120° sind deshalb möglichst zu vermeiden.

Die Berichtigung der Stellung des kleinen Spiegels erfolgt entweder durch eine Schraube, die in der Mitte der oberen Kante von hinten gegen den Spiegel drückt oder durch Schrauben, die das Fußgestell des kleinen Spiegels festhalten und gleichzeitig erlauben, es um eine der Instrumentenebene parallele Achse zu kippen.

§ 325. Stellung des Fernrohres. Die Achse des Fernrohres muß parallel der Instrumentenebene sein, weil sonst, besonders bei großen Winkeln, ein erheblicher Fehler in der Messung entsteht. Zur Untersuchung der Fernrohrstellung bedient man sich am besten zweier gleich hohen Diopter. Es sind das zwei gleich große Messingblechplatten, die jede im rechten Winkel geknickt sind, sodaß die eine Hälfte als Grundfläche dient, während die andere aufrecht steht. Das eine Diopter hat in dem aufrechten Blatte ein Visierloch, das andere in genau gleicher Höhe in einem Ausschnitte einen horizontal gespannten Faden. Zur Untersuchung der Fernrohrstellung legt man das Instrument horizontal auf eine feste Unterlage und stellt die Diopter auf den Gradbogen und zwar so, daß ihre Verbindungslinie parallel dem Fernrohre ist. Dann visiert man mit den Dioptern nach einer nicht zu nahen Wand und läßt an dieser einen horizontalen Strich machen. Darauf stellt man das Rohr auf deutliches Sehen dieses Striches ein, schraubt es ein, ohne am Instrumente zu rücken, und stellt die Fäden des Okulars parallel zur Instrumentenebene. Sieht man dann den Strich in der Mitte zwischen den Parallelfäden, so ist die Achse des Fernrohres parallel mit der Ebene des Instrumentes.

Eine andere Methode zur Prüfung der Fernrohrstellung, die keine besonderen Hülfsmittel erfordert, ist die folgende. Als Vorbereitung schraube man das astronomische Fernrohr ein und drehe das Okular so, daß zwei Fäden parallel zur Ebene des Instrumentes sind. Dann messe man mit dem Instrumente einen großen Winkel, etwa eine Mondbistanz von 100° bis 120°, und zwar stelle man die Berührung zunächst her am unteren, der Instrumentenebene näheren Faden. Läßt man nun die beiden Bilder an den anderen Faden rücken, so muß die Berührung der Bilder hier eine ebenso scharfe sein. Trennen sich die Bilder, so ist das Objektivende des Fernrohres der Instrumentenebene abgeneigt; greifen sie übereinander, so ist es der Instrumentenebene zugeneigt.

Eine fehlerhafte Stellung des Fernrohres fällt bei kleinen Winkeln wenig ins Gewicht, sie ist aber beträchtlich bei großen Winkeln, und zwar sind die abgelesenen Winkel stets zu groß. Beispielsweise ist der Fehler bei einer Neigung des Rohres um 30′ für einen Winkel von 60° gleich 9″, für einen Winkel von 120° dagegen schon gleich 27″. Bei genauen Messungen, z. B. bei Mondbistanzen, ist sehr darauf zu achten, daß die Berührung in der Mitte des Gesichtsfeldes hergestellt wird, zumal wenn der zu messende Winkel groß ist. Um die Mitte des Gesichtsfeldes kenntlich zu machen, ist im Okular das Fadennetz ausgespannt, dessen Fäden schon mehrfach erwähnt wurden.

Zur Berichtigung der Fernrohrstellung ist entweder die ganze, den Fernrohrträger haltende Büchse zum Kippen eingerichtet, oder das Fernrohr wird durch einen Ring gehalten, dessen Stellung gegen den Fernrohrträger durch Schrauben berichtigt werden kann.

§ 326. Teilung des Gradbogens und des Nonius. Trotzdem die Teilmaschinen zur Zeit sehr vollkommen sind, findet man selbst unter den neuen in den Handel gebrachten Instrumenten zuweilen auf dem Limbus und Nonius Teilungen, die sehr viel zu wünschen übrig lassen. Zur Untersuchung der Limbusteilung stellt man den Nullstrich des Nonius zunächst auf den Nullstrich des Gradbogens ein und sieht zu, ob der letzte Teilstrich des Nonius wieder mit einem Teilstriche des Gradbogens genau zusammenfällt. Diese Untersuchung wiederholt man über den ganzen Gradbogen in kurzen Zwischenräumen. Ist bei allen Einstellungen dieselbe Abweichung vorhanden, so ist der Limbus zwar richtig geteilt, der Nonius ist jedoch nicht in der richtigen Entfernung vom Mittelpunkte der Teilung angebracht. Da nämlich die Teilstriche nicht untereinander parallel sind, sondern alle nach dem Mittelpunkte der Teilung zusammenlaufen, so erscheint der Nonius, wenn er zu weit nach innen angebracht ist, zu lang, und wenn er zu weit nach außen angebracht ist, zu kurz. Einem solchen Übelstande würde ein tüchtiger Mechaniker durch Verschiebung des Nonius abhelfen können. Wenn dagegen die Abweichungen des letzten Noniusstriches von dem entsprechenden Limbusstriche nach Größe und Vorzeichen wechseln, so ist das ein Zeichen für Fehler in der Teilung des Limbus.

Etwaige Fehler in der Teilung des Nonius bemerkt man, nachdem die Teilung des Limbus als gut erkannt ist, dadurch, daß bei irgend einer Stellung des Nonius das Zusammen- und Wiederauseinanderrücken der aufeinander folgenden Noniusstriche mit den Limbusstrichen nicht gleichmäßig, sondern sprungweise geschieht. Man kann die Noniusteilung auch dadurch prüfen, daß man nacheinander sämtliche Teile des Nonius mit demselben Teile des Limbus vergleicht.

Es braucht wohl kaum besonders erwähnt zu werden, daß Fehler in der Teilung des Limbus oder des Nonius das Instrument für genaue Messungen untauglich machen.

§ 327. Beschaffenheit der Spiegel. Die Flächen der Gläser sind eben geschliffen, wenn das Bild eines hellen, scharf begrenzten Gegenstandes darin auch bei sehr schrägem Auffallen der Lichtstrahlen ohne Verzerrung scharf begrenzt erscheint.

Sind die beiden Grenzflächen des Spiegels einander nicht parallel, so nennt man den Spiegel prismatisch. Nach § 314 verursacht ein prismatischer Spiegel eine Ablenkung des zurückgeworfenen Strahles, also beim Instrumente eine fehlerhafte Winkelmessung.

Der entstehende Fehler ist um so größer, je schräger die Lichtstrahlen auf den Spiegel fallen. Da nun die Strahlen des doppelt gespiegelten Bildes um so schräger auf den großen Spiegel fallen, je größer der zu messende Winkel ist, so wächst der von einer prismatischen Gestalt dieses Spiegels herrührende Fehler mit der Größe des zu messenden Winkels. Eine Neigung der Grenzflächen von 1′ verursacht z. B. bei einem Winkel von 70° einen Fehler von 1′, bei einem gemessenen Winkel von 120° schon einen Fehler von 6′.

Eine Untersuchung der Parallelität der Grenzflächen des großen Spiegels kann man in folgender Weise anstellen. Man mißt mit dem Instrumente einen großen Winkel, dreht darauf den Spiegel in seiner Fassung um 180° und mißt denselben Winkel wieder. Stimmen die Ablesungen nicht überein, so ist das Mittel der beiden Messungen der richtige Winkel und ihr halber Unterschied der von der prismatischen Gestalt herrührende Fehler für diesen Winkel.

Von den amtlichen Untersuchungsstellen zur Prüfung von Spiegelinstrumenten, z. B. der Deutschen Seewarte, wird die Untersuchung des großen Spiegels in folgender Weise ausgeführt. Man läßt Strahlen von einer weit entfernten Lichtquelle unter sehr spitzem Winkel auf den Spiegel fallen und betrachtet die reflektierten Strahlen mit Hülfe eines Fernrohres. Dann müssen die von der Vorder- und der Rückfläche des Glases herrührenden Bilder genau zusammenfallen; eine Trennung der Bilder zeigt eine prismatische Gestalt des Glases an.

Auf den kleinen Spiegel fallen die Strahlen immer unter demselben Winkel, nämlich in der Richtung vom großen Spiegel her. Der aus einer prismatischen Gestalt dieses Spiegels folgende Fehler ist demnach konstant, d. h. für alle gemessenen Winkel der gleiche. Er wird deshalb durch die Indexberichtigung schon mit in Rechnung gezogen.

§ 328. Beschaffenheit der Blendgläser. Sind die Blendgläser nicht parallel geschliffen, so werden die hindurchgehenden Strahlen von ihrer geraden Richtung abgelenkt. Der dadurch hervorgerufene Fehler ist aber, weil die Strahlen stets unter demselben Winkel auffallen, für ein gegebenes Glas konstant, d. h. für alle Winkel derselbe. Lassen sich die farbigen Gläser mit ihrer Fassung oder in ihrer Fassung um 180° drehen, so kann man die Gläser leicht prüfen. Man bringt unter Benutzung zweier dunklen Gläser das direkt gesehene und das doppelt gespiegelte Sonnenbild zur Berührung. Darauf kehrt man nacheinander die Gläser um und sieht jedesmal nach, ob die Berührung ebenso scharf geblieben ist. Ist dieses der Fall, so sind die Blenden gut. Im anderen Falle stellt man mit beiden Lagen jeder Blende eine scharfe Berührung her und liest beidemal ab; der halbe Unterschied der Ablesungen ist der Fehler des umgedrehten Glases. Sind die Blendgläser nicht umzukehren, so bestimmt man zunächst den Indexfehler, ohne sie zu benutzen, und zwar am besten an der Sonne unter Zuhülfenahme der Okularblende. (Von einem etwaigen prismatischen Fehler dieser Blende ist man unabhängig, weil sowohl der doppelt gespiegelte, wie auch der direkt gesehene Strahl durch dieses Glas hindurchgehen müssen.) Dann führt man weitere Bestimmungen des Indexfehlers mit Benutzung der Vorschlagblenden aus, indem man für die dunklen Gläser die Sonnenbilder, für die hellen Gläser die Bilder des Vollmondes in beiderseitige Berührung bringt. Wenn alle diese Beobachtungen denselben Wert für die Indexberichtigung ergeben, so kann man annehmen, daß die Blenden vom Instrumentenmacher sorgfältig ausgewählt sind. Fehlerhafte Blendgläser sind durch bessere zu ersetzen.

§ 329. Excentrizitätsfehler. Das Maß für die Größe eines zu bestimmenden Winkels ist die bei der Messung vorzunehmende Alhidadendrehung, die Ablesung erfolgt jedoch auf dem Gradbogen. Die Ablesung ergiebt demnach nur dann den richtigen Winkel, wenn der Drehpunkt der Alhidade genau mit dem Mittelpunkte der Kreisteilung zusammenfällt. Der Fehler, der entsteht, wenn diese Forderung nicht erfüllt ist, wird der Excentrizitätsfehler genannt. Ist in nebenstehender Figur M der Mittelpunkt des Gradbogens, so wird der Winkel AMB durch den Bogen AB gemessen. Ist nun D der Mittelpunkt des Zapfens, um den sich der große Spiegel dreht, also MD die Excentrizität, so wird durch Bewegung der Alhidade von A nach B in Wirklichkeit der Winkel ADB beschrieben, während man den Winkel AMB abliest. Für jeden gemessenen Winkel ist der Unterschied des von der Alhidade beschriebenen Winkels vom abgelesenen ein anderer, d. h. der von der Excentrizität herrührende Fehler ändert sich mit der Größe des gemessenen Winkels. Eine Excentrizität von 0,1 mm würde bei einem Winkel von 120° unter Umständen einen Fehler von mehr als 3′ in der Messung zur Folge haben.

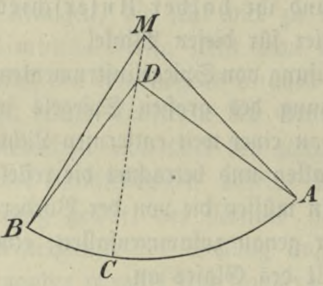


Fig. 266.

Zur Erkennung eines Excentrizitätsfehlers ist man auf die Nachmessung genau bekannter Winkel mittels des Instrumentes angewiesen. Solche bekannten Winkel können bestehen in Sterndistanzen oder Monddistanzen bei bekannter mittlerer Greenwicher Zeit oder in Winkeln zwischen irdischen Gegenständen, die genau mit guten Instrumenten, am besten mit Vollkreisen, nachgemessen sind. Ein Vollkreis ist ein dem Sextanten ähnliches Spiegelinstrument, nur umfaßt die Kreisteilung den ganzen Kreis, indem sie vom Nullpunkte aus nach jeder Seite von 0° bis 180° geht. Die Ablesung erfolgt an zwei sich diametral gegenüberstehenden Nonien. Das Mittel dieser beiden Ablesungen ist frei von einer etwaigen Excentrizität des Instrumentes.

Die Bestimmung der Berichtigung für Excentrizität ist nicht Sache des

Seemannes. Um so mehr muß ihm aber empfohlen werden, sein Instrument auf der Deutschen Seewarte untersuchen zu lassen. Die geringen dafür zu zahlenden Gebühren stehen in gar keinem Verhältnis zu dem erlangten Vorteil. Vor allem mache man beim Ankauf eines Instrumentes die Beibringung eines amtlichen Zeugnisses zur Bedingung des Kaufes. Die von der Seewarte für Spiegelinstrumente ausgestellten Zeugnisse enthalten außer Urteilen über die Beschaffenheit der Teilung, der Spiegel und der Blendgläser eine Tabelle, aus der man die Größe des etwa vorhandenen Excentrizitätsfehlers zusammen mit dem etwaigen von einer prismatischen Gestalt des großen Spiegels herrührenden Fehler für jeden gemessenen Winkel entnehmen kann.

Anmerkung. Das Spiegelinstrument wurde um das Jahr 1730 von dem Engländer John Hadley und gleichzeitig von dem Amerikaner Thomas Godfrey in Philadelphia erfunden. In früherer Zeit bedienten sich die Seefahrer zur Höhenmessung besonders des Gradstocks oder Jakobstabes.

Das Chronometer.

§ 330. Die Temperaturkompensation des Chronometers. Die hauptsächlichste Eigenschaft eines Chronometers (Zeitmessers) gegenüber einer gewöhnlichen Uhr ist die Temperaturkompensation seiner Unruhe. Die Unruhe einer gewöhnlichen Uhr besteht aus einem kleinen Schwungrade, das aus einem einzigen Metall (Messing) hergestellt ist. Eine solche Unruhe schwingt langsamer bei höherer als bei niedriger Temperatur, weil dann die Spiralfeder, welche die Unruhe in Schwingung erhält, eine geringere Elastizität besitzt, und das Rädchen selbst durch die Temperaturerhöhung eine Vergrößerung seines Umfanges erfährt. Nur ein geringer Teil der Gangverzögerung hängt von der letztern Ursache ab; ungefähr $^{12}/_{13}$ kommt auf die Verminderung der Elastizität der Spiralfeder. Bei der für Temperaturunterschiede kompensierten Unruhe besteht der Rand des Rädchens aus zwei verschiedenen Metallen, nämlich aus einem außen befindlichen Messing- und einem innen befindlichen Stahlreifen. Der Rand ist in zwei gleiche Teile zerschnitten, die je an einer einzigen Speiche befestigt sind (siehe Fig. 267). An den beiden Halbkreisen sind an geeigneten Stellen Gewichte befestigt. Da sich Messing bei Erwärmung mehr ausdehnt als Stahl, so krümmen sich bei Erhöhung der Temperatur die Halbkreise mit den Gewichten einwärts. Die Stellung der Gewichte muß nun genau so ausprobiert werden, daß durch die Verkleinerung des Rades bei Temperaturerhöhung die sonst eintretende Gangverzögerung aufgehoben wird.

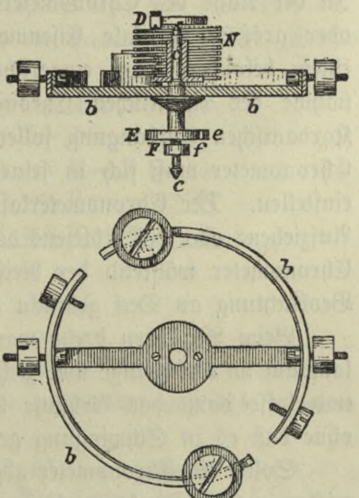


Fig. 267.

Die Temperaturkompensation eines Chronometers kann leider keine vollkommene, d. h. für jede Temperatur gültige sein und zwar aus dem Grunde, weil die Änderung der Elastizität der Spiralfeder, die nach dem Gesagten die Hauptursache der

Gangänderung ist, nicht gleichmäßig mit steigender Temperatur erfolgt. Man ist daher genötigt, die Kompensation entweder für eine mittlere Temperatur (meist 15° C.) einzurichten, oder die Kompensationsgewichte so einzustellen, daß das Chronometer bei zwei passend gewählten Temperaturen etwa bei 0° und bei 30° die gleichen Gänge zeigt. Um die Abweichungen des Ganges bei anderen Temperaturen zu berücksichtigen, muß das Chronometer zunächst auf einem Chronometerobservatorium, z. B. auf dem der Deutschen Seewarte, längere Zeit hindurch bei verschiedenen Temperaturen untersucht werden. Aus den gemachten Beobachtungen wird alsdann eine Gangformel abgeleitet, aus der man für jede Temperatur den Gang berechnen kann. Anweisung zu dieser Rechnung geben die von der Seewarte herausgegebenen Chronometerjournale.

§ 331. Behandlung des Chronometers. Es ist wohl selbstverständlich, daß eine Uhr, die in 24 Stunden nicht um Bruchteile einer Sekunde von ihrem regelmäßigen Gange abweichen soll, die allersorgfältigste Behandlung erfordert. Die hauptsächlichsten Vorschriften über diese Behandlung sind die folgenden.

Bei einem etwaigen Transporte ist das Chronometer immer erst durch den dazu bestimmten Arretierhebel in seiner Aufhängung festzusetzen. Beim Transporte ist vor allen Dingen darauf zu achten, daß das Instrument keine schnelle Drehung um die vertikale Achse erfährt. Es muß sorgfältig am Riemen getragen und darf nicht hart hingesetzt werden. Bei Außerachtlassung dieser Vorsichtsmaßregeln kann sich der Gang dauernd um mehrere Sekunden täglich ändern.

An Bord wird das Chronometer an einem Platze aufbewahrt, wo es möglichst wenig den Bewegungen des Schiffes und den Erschütterungen durch die Maschine, die Schraube, Gangspille u. dgl. ausgesetzt ist. Sehr wichtig ist, daß der Aufbewahrungsraum trocken und von möglichst gleichmäßiger Temperatur ist. In der Nähe des Chronometers dürfen sich keine Magnete, Dynamomaschinen oder größere vertikale Eisenmassen befinden. Die Aufbewahrung geschieht in einem besonders dazu eingerichteten Kasten, der mit weichen Stoffen zur Aufnahme des eigentlichen Chronometerkastens ausgefüttert ist. Die Achsen der Kardanischen Aufhängung sollen sich längsschiffs und querschiffs befinden. Das Chronometer muß sich in seiner Aufhängung leicht und frei genau horizontal einstellen. Der Chronometerkasten ist stets nur für kurze Zeit zum Zweck des Aufziehens oder des Ablesens der Chronometerzeit zu öffnen. Niemals darf das Chronometer während der Reise aus diesem Kasten herausgenommen und zur Beobachtung an Deck gebracht werden.

Beim Aufziehen drehe man das Chronometergehäuse mit der linken Hand langsam im Kreuzringe um, ziehe die Uhr vorsichtig nach links drehend ganz auf, und lasse dann das Gehäuse langsam in seine horizontale Lage zurückgleiten, ohne daß es in Schwingung gerät.

Sollte ein Chronometer abgelaufen sein, so daß man gezwungen ist, es selbst wieder in Gang zu setzen, so vermeide man, den Zeiger zu stellen, sondern warte, bis die vom Chronometer angezeigte Zeit annähernd erreicht ist. Man ziehe das Chronometer vorher auf und erteile ihm, um es in Gang zu setzen, eine sanfte drehende Bewegung hin und zurück um die Mitte des Zifferblattes als

Mittelpunkt. Sollte das Chronometer zum zweiten Male stehen bleiben, so ist es nicht wieder aufzuziehen und in Gang zu setzen, da es wahrscheinlich durch weiteres Gehen starken Schaden erleiden würde.

Ein Chronometer ist, auch wenn es noch nicht selbst durch unregelmäßigen Gang daran erinnert, mindestens alle drei Jahre von einem Chronometermacher — nicht von einem Uhrmacher — am besten von seinem Verfertiger selbst zu reinigen.

§ 332. Zwei oder drei Chronometer an Bord. Hat man zwei Chronometer an Bord, so ist es wünschenswert, bei jeder zum Zwecke der Längenbestimmung beobachteten Höhe die nach jedem der beiden Chronometer aus der Beobachtung folgende Länge zu wissen. Man könnte deshalb so verfahren, daß man die Zeit der Beobachtung an beiden Chronometern durch je einen Gehülfen ablesen ließe. Da dies aber unbequem ist, so verfährt man am besten so, daß man täglich zu bestimmter Zeit — etwa nach dem Aufziehen oder mittags — die beiden Chronometer vergleicht. Dann braucht man immer nur nach dem einen Chronometer A zu beobachten und kann durch den fortlaufend bekannten Unterschied von A und B zu jeder an A abgelesenen Beobachtungszeit die gleichzeitig vom zweiten Chronometer B angezeigte Zeit hinschreiben.

Erst auf diese Weise wird man die beiden Chronometer voll ausnutzen und eine viel größere Sicherheit in der Längenbestimmung erzielen, als durch nur gelegentliche Vergleichungen der beiden Uhren.

Beispiel 1. Von den beiden an Bord befindlichen Chronometern A und B ist an einem Beobachtungstage

die Standberichtigung von $A = -\ \ 4^m\ 6^s$
die Standberichtigung von $B = -14^m\ 25^s$

Nach der täglichen Vergleichung ist B $10^m\ 17^s$ vor A, also $B - A = +10^m\ 17^s$.

Aufgabe: Nach dem Chronometer A ist um $3^u\ 5^m\ 16^s$ eine Beobachtung gemacht. Welches ist die M. G. Z. nach jedem der Chronometer?

Chr. Z. nach $A = 3^u\ 5^m\ 16^s$	Chr. Z. nach $A = 3^u\ \ 5^m\ 16^s$
	$B - A = +10^m\ 17^s$
	Chr. Z. nach $B = 3^u\ 15^m\ 33^s$
Std. von $A = -4^m\ \ 6^s$	Std. von $B = -14^m\ 25^s$
M. G. Z. nach $A = 3^u\ 1^m\ 10^s$	M. G. Z. nach $B = 3^u\ \ 1^m\ \ 8^s$

Beispiel 2. Ebenso:

Standberichtigung von $A = -\ 1^m\ 30^s$
Standberichtigung von $B = +\ 4^m\ \ 2^s$

Nach der täglichen Vergleichung ist B $5^m\ 18^s$ nach A, also $B - A = -\ 5^m\ 18$.

Aufgabe: Nach dem Chronometer A ist um $8^u\ 3^m\ 18^s$ eine Beobachtung gemacht. Welches ist die M. G. Z. nach jedem der Chronometer?

Chr. Z. nach $A = 8^u\ 3^m\ 18^s$	Chr. Z. nach $A = 8^u\ \ 3^m\ 18^s$
	$B - A = -\ \ 5^m\ 18^s$
	Chr. Z. nach $B = 7^u\ 58^m\ \ 0^s$
Std. von $A = -\ 1^m\ 30^s$	Std. von $B = +\ \ 4^m\ \ 2^s$
M. G. Z. nach $A = 8^u\ 1^m\ 48^s$	M. G. Z. nach $B = 8^u\ \ 2^m\ \ 2^s$

Sind die beiden Chronometer von gleicher Güte, so wird es das Geratenste sein, das Mittel der nach *A* und der nach *B* bestimmten mittleren Greenwicher Zeiten als die richtige M. G. Z. anzusehen. Hat man dagegen Grund, den Angaben des einen der beiden Chronometer erheblich grösseres Gewicht beizumessen, so lege man die Angaben dieses Chronometers allein der Längenbestimmung zu Grunde, und betrachte das zweite Chronometer nur als eine Kontrolluhr für das erste.

Große Vorzüge für die Sicherheit der Längenbestimmung haben drei an Bord befindliche Chronometer, weil sie sich gegenseitig kontrollieren. Wenn nämlich nur zwei Chronometer an Bord sind, und es zeigt sich in den von ihnen abgeleiteten mittleren Greenwicher Zeiten eine Abweichung, so weiß man immer noch nicht, welches Chronometer zu der Abweichung Veranlassung giebt. Führt man dagegen bei drei Chronometern in derselben Weise, wie oben für zwei angegeben, tägliche Vergleichungen aus, so erkennt man bei einer etwa auftretenden Unregelmäßigkeit im Gange eines der Chronometer das fehlerhafte Instrument dadurch, daß von den drei Differenzen *B—A*, *C—A*, *C—B* die beiden unregelmäßig werden, an denen das fehlerhafte Instrument beteiligt ist. Werden z. B. die Differenzen *B—A* und *C—B* unregelmäßig, so ist *B* als das verdächtige Instrument anzusehen.

Über die Kontrolle des Chronometerstandes ist im § 207 bis § 210 das Nötige gesagt. Sie ist um so wichtiger, als die Chronometer auf See gewöhnlich einen etwas anderen Gang haben, als an Land. Der Seegang unterscheidet sich von dem Landgange in manchen Fällen bis zum Betrage von einer ganzen Sekunde, und zwar ist er gewöhnlich verlangsamt, so daß ein Zurückbleiben des Chronometers gegen die mit Hülfe des Landganges abgeleitete Zeit stattfindet.

Die Logge.

§ 333. Gewöhnliche Logge und Riegelungslogge. Die gewöhnliche Logge besteht aus dem Loggescheit und der Loggeleine. Jenes ist ein dünnes hölzernes Brett in Gestalt eines rechtwinkligen Kreisausschnittes, in dessen eingekerbte Bogenkante ein Bleistreifen eingelassen ist, der so schwer sein muß, daß das Loggescheit aufrecht im Wasser steht und bis zur oberen Ecke eintaucht. Durch Löcher in den Ecken gehen die Spreiten einer Hahnenpfote. Die beiden unteren Spreiten sind an dem Ende eines kleinen hölzernen Zapfens befestigt, die obere wird von der Loggeleine selbst gebildet. An diese ist, dem Abstande des Zapfens vom Loggescheit entsprechend, ein hölzerner Hohlkegel genäht, in den vor dem Loggen der Zapfen gesteckt wird. Soll das Loggescheit nach dem Loggen wieder eingeholt werden, so genügt ein Ruck an der Loggeleine, um den Zapfen aus dem Hohlkegel zu ziehen; dann legt sich das Scheit flach und bietet dem Einholen keinen Widerstand. Damit das Loggescheit frei vom Sog des Kielwassers kommt, läßt man, ehe die Knotenteilung beginnt, ein Stück Leine auslaufen, welches der Vorläufer heißt und je nach der Länge des Schiffes 20 bis 40 Meter beträgt. Das Ende des Vorläufers, an dem die Knotenteilung beginnt, wird durch ein Merk bezeichnet. Im übrigen ist die Handhabung der Logge jedem Seemanne bekannt.

Die Logge soll durch die Anzahl der ausgelaufenen Knoten angeben, wieviel Seemeilen das Schiff in einer Stunde zurücklegt. Ließe man die Logge eine ganze Stunde laufen, so müßten auch für jede Seemeile Fahrt 1852 Meter auslaufen. Da sich dies nun nicht durchführen läßt, so nimmt man für das Loggeglas einen Bruchteil der Stunde; dann muß die Knotenlänge denselben Bruchteil der Seemeile enthalten, den das Loggeglas in Bezug auf die Stunde angiebt. Für ein Minutenglas müßte der 60ste Teil und für ein Sekundenglas der 3600ste Teil der Seemeile auslaufen.

Da eine Seemeile 1852 m enthält, so müßte demnach für ein Sekundenglas die Knotenlänge gleich

$$\frac{1852\,\text{m}}{3600} = 0{,}514\,\text{m}$$

sein. Diese Zahl 0,514 m nennt man die Sekundenknotenlänge oder Meridiantertie.

Da das Loggescheit etwas im Wasser mitgeschleppt wird, so läuft etwas weniger Leine aus, als eigentlich auslaufen sollte, und aus diesem Grunde ist Gefahr vorhanden, daß man die gelaufene Distanz unterschätzt, was unter allen Umständen vermieden werden muß. Man verkürzt deshalb die oben berechnete genaue Sekundenknotenlänge etwas, indem man als verkürzte Sekundenknotenlänge 0,5 m annimmt. Diese Zahl entspricht einer „Loggemeile" von 1800 m; ihre Verkürzung gegen die wirkliche Seemeile beträgt $\frac{1}{36}$.

Zur Berechnung der Knotenlänge für irgend eine Laufdauer des Glases hat man dann die Regel: Für jede Sekunde, die das Glas läuft, ist ein halbes Meter zu rechnen. So ist z. B. für ein 14=Sekunden=Glas die Knotenlänge gleich 7 m zu nehmen.

Die Riegelungslogge kann dazu dienen, bei Tage die Fahrt des Schiffes ohne Loggescheit und Leine zu messen. Auf beiden Riegelungen mißt man eine Strecke gleich einer passenden Anzahl unverkürzter Sekundenknotenlängen ab. Wirft man dann vor dem Anfangspunkte luvwärts vom Schiffe ein Stück Holz über Bord und zählt die Sekunden, die dieser schwimmende Körper gebraucht, um vom Anfangs= bis zum Endpunkte zu gelangen, so erhält man die Fahrt, indem man die Anzahl der abgemessenen Sekundenknotenlängen durch die Sekundenzahl dividiert. Die Riegelungslogge ist nur bei kleiner Fahrt anwendbar. Bei Fahrten unter fünf Knoten kann man aber bei sorgfältiger Handhabung bessere Resultate mit ihr erzielen als mit der gewöhnlichen Logge.

§ 334. Patentloggen. Die Patentloggen besitzen eine Flügelwelle oder Schraube, die vom Schiffe nachgeschleppt und deren Umdrehungszahl durch ein Räderwerk auf Zeiger übertragen wird. Aus der Stellung der Zeiger kann man unmittelbar die Anzahl der seit der letzten Ablesung gutgemachten Seemeilen ablesen. Die Zählung geht gewöhnlich bis 100 Seemeilen. Ein erster Zeiger zeigt die Zehntel, ein zweiter die Einer und ein dritter die Zehner der zurückgelegten Seemeilen an. Während man mit der gewöhnlichen Logge nur von Zeit zu Zeit die Fahrt des Schiffes mißt, läßt man die Patentlogge immer in Thätigkeit und mißt mit ihr direkt die Distanz. Man unterscheidet Decksloggen und Loggen mit nachgeschlepptem Zählwerk. Für beide wendet man eigens dazu gefertigte runde, geklöppelte Hanfleinen an. Die Schleppleine soll, um die Schraube aus dem Sog des Kielwassers zu bringen, eine Länge von 60 bis 100 m haben, je nach der Größe des Schiffes und der Höhe des Hecks. Die Deckslogge hat gegenüber der Logge mit nachgeschlepptem Zählwerk die Vorteile, daß zum Ablesen der Zeigerstellung kein Einholen erforderlich ist, und daß das Räderwerk nicht den Angriffen des Seewassers, sowie dem Verschmutzen durch Schlacken- und Ascheteile ausgesetzt ist. Dem steht allerdings auch ein gewichtiger Nachteil gegenüber, nämlich der, daß die lange Schleppleine die Drehungen der Flügelwelle mitmachen muß. Bei verschiedener Länge der Schleppleine und bei verschiedener Art des Seeganges erfährt die Leine im Wasser einen verschiedenen, ihrer Drehung entgegenwirkenden Reibungswiderstand, wodurch Fehler in die Distanzmessung kommen müssen. Von allen Patentloggen kann man brauchbare Resultate nur dann erwarten, wenn man den Mechanismus der Logge gehörig in Ordnung hält und sehr sorgfältig handhabt. Öfteres Reinigen und Ölen der beweglichen Teile ist unbedingt erforderlich.

Es ist zweckmäßig zur Schonung der Logge, sie im offenen Ozean nicht zu benutzen, sondern sie erst in Thätigkeit zu setzen, wenn man die Küste ansegelt. Die Zuverlässigkeit der Patentloggen ist am größten bei mittleren Geschwindigkeiten; bei Fahrten unter 3 Knoten werden die Angaben unbrauchbar, wahrscheinlich weil die Logge zu tief einsinkt und nicht mehr horizontal durchs Wasser geschleppt wird. Bei mittlerer Geschwindigkeit darf man von einer in gutem Stande befindlichen Patentlogge bis auf 5 % richtige Angaben erwarten. Bei Geschwindigkeiten über 16 Knoten ist die Patentlogge nicht mehr anwendbar, weil die Schraube aus dem Wasser herausspringt und auch die stärkste Schleppleine reißt. Auf Dampfern ist es üblich, die Fahrt aus der Umdrehungszahl der Schraube während einer Minute zu bestimmen. Nachdem für ein Schiff eine Reihe von Beobachtungen über die Abhängigkeit der Fahrt von dieser Umdrehungszahl vorliegt, gewährt diese Methode hinreichende Genauigkeit.

Die Thomsonsche Lotmaschine.

§ 335. Prinzip und Gebrauch der Thomsonschen Lotmaschine. W. Thomson (Lord Kelvin) hat als Erster Klaviersaitendraht statt Hanfleinen für Lotungen in Anwendung gebracht. Bei der von Thomson für Navigationszwecke konstruierten Lotmaschine wird die Wassertiefe nicht nach der Länge des ausgelaufenen Drahtes gemessen, sondern nach dem Wasserdrucke, der am Schiffsorte am Meeresgrunde herrscht. Da die Wassertiefe diesem Drucke proportional ist, so ist es möglich, jene aus diesem zu finden.

Zur Messung des am Meeresboden herrschenden Wasserdruckes wird mit dem Lot eine oben geschlossene Glasröhre hinabgelassen. Der Druck des Wassers preßt die in der Röhre befindliche Luft zusammen, indem es selbst von unten in die Röhre hineindringt. Um nach dem Wiederaufholen des Lotes sehen zu können, bis zu welcher Stelle das Wasser am Meeresgrunde in die Röhre eingedrungen war, ist sie innen mit einem roten Belag von chromsaurem Silber versehen. Dieser wird durch das Seewasser, soweit es in die Röhre eindringt, gelb gefärbt. Aus der Höhe der Entfärbung findet man an einem beigegebenen Maßstabe unmittelbar die Wassertiefe in Metern oder Faden.

Wenn der den Lotröhren beigegebene Maßstab verloren gegangen sein sollte, so kann man die Tiefen auch an einem gewöhnlichen Millimetermaßstabe abmessen. Das Volumen der eingeschlossenen Luft nimmt bei gleicher Temperatur in demselben Verhältnisse ab, wie der Druck wächst, sodaß das Produkt aus Volumen und Druck konstant bleibt (Mariottesches Gesetz). Ist q der Querschnitt, l die Länge der Röhre, x die Länge des nicht entfärbten Belages, so ist das Volumen der eingeschlossenen Luft außerhalb des Wassers $q.l$, am Meeresgrunde dagegen $q.x$. Außerhalb des Wassers steht diese Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre, der für mittleren Barometerstand sehr nahe gleich dem einer Seewassersäule von 10 m gesetzt werden kann, am Meeresgrunde dagegen unter dem Drucke einer Wassersäule von $h + 10$ m, wenn h die Wassertiefe bedeutet. Es muß demnach sein:

$$q.l.10 = q.x.(h+10)$$

oder

$$10.l = x.h + 10.x$$

$$h.x = 10(l - x)$$

$$h = 10\left(\frac{l}{x} - 1\right)$$

Ist beispielsweise in einer 610 mm langen Röhre ein Stück von 115 mm unentfärbt geblieben, so hat man

$$610:115 = 5{,}3; \qquad h = 10.(5{,}3 - 1) = 43\text{ m}$$

Für die gebräuchlichste Länge der Röhren von 2 englischen Fuß oder 610 mm kann man die Tiefe auch der nachstehenden kleinen Tafel entnehmen, die nach der Formel

$$x = \frac{10}{10+h}.l$$

berechnet ist. Diese Formel folgt aus der obigen Gleichung, wenn man sie nach x auflöst.

Für 610 mm Röhrenlänge.

Wassertiefe	unentfärbt	Wassertiefe	unentfärbt	Wassertiefe	unentfärbt	Wassertiefe	unentfärbt
10 m	305 mm	24 m	179 mm	38 m	127 mm	70 m	76 mm
12 m	277 mm	26 m	169 mm	40 m	122 mm	75 m	72 mm
14 m	254 mm	28 m	161 mm	45 m	111 mm	80 m	68 mm
16 m	235 mm	30 m	153 mm	50 m	102 mm	85 m	64 mm
18 m	218 mm	32 m	145 mm	55 m	94 mm	90 m	61 mm
20 m	203 mm	34 m	139 mm	60 m	87 mm	95 m	58 mm
22 m	191 mm	36 m	133 mm	65 m	81 mm	100 m	55 mm

Da bei der Tiefenbestimmung durch die Thomsonsche Lotröhre vorausgesetzt werden muß, daß die Temperatur der die Röhre erfüllenden Luft vor der Lotung und am Meeresgrunde dieselbe ist, so ist es gut, die Röhre vor Beginn der

Lotung eine Zeit lang umgekehrt in frisch an Bord geholtes Seewasser zu tauchen, damit die Luft die Wassertemperatur annimmt.

Beim Wiederheraufkommen der Röhre hat man streng darauf zu achten, daß sie stets vertikal mit dem offenen Ende nach unten gehalten wird, weil sonst das in der Röhre haften gebliebene Seewasser weiter nach der geschlossenen Seite fließen und die Belegung weiter entfärben könnte. Man würde dann eine zu große Wassertiefe ablesen.

Der Lotdraht der Thomsonschen Lotmaschine ist auf einer schmalen Metalltrommel aufgewickelt, die in sehr praktischer Weise mit einer Bremsvorrichtung und Handeln zum Wiedereinwinden des Drahtes versehen ist. Zwischen dem etwa 10 kg schweren Lote und dem Stahldraht ist als Vorläufer eine Hanfleine eingeschaltet, an die eine Messinghülse zur Aufnahme der gläsernen Lotröhre angebunden ist.

Der Hauptvorzug der Thomsonschen Lotmaschine ist, daß man, ohne stoppen zu müssen, Tiefen bis 180 m loten kann. Aus diesem Grunde gewinnt die Maschine besonders auf Dampfern immer mehr an Verbreitung.

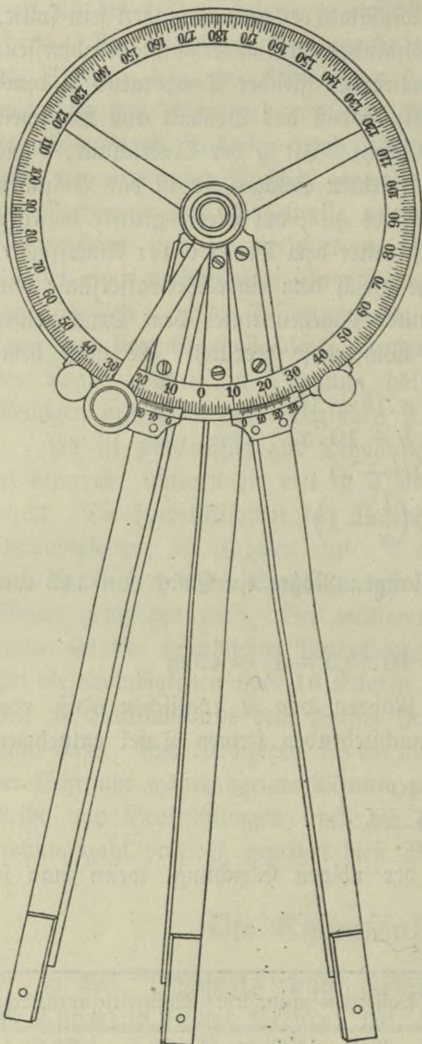


Fig. 268.

Der Doppeltransporteur.

§ 336. Beschreibung und Gebrauch des Doppeltransporteurs. Der Doppeltransporteur besteht aus einem geteilten Metallkreise, von dessen Mittelpunkte drei Lineale auslaufen (Fig. 268). Jedes dieser Lineale hat eine abgeschrägte Kante, und diese drei Kanten schneiden sich genau im Mittelpunkte des geteilten Kreises. Das mittlere der Lineale ist mit dem Kreise fest verbunden. Die beiden anderen sind um den Mittelpunkt des Kreises drehbar und können an seinem Umfange durch Klemmstücke mit Schrauben festgestellt werden. Der Nullpunkt der Kreisteilung fällt mit der abgeschrägten Kante des mittleren Lineals zusammen; von hier geht die Teilung nach jeder Seite von 0° bis 180°. Bei feineren Instrumenten können die Schenkel vermittelst Nonien und Lupe auf Bogenminuten eingestellt werden.

Die Mitte des Kreises ist durch ein auf Marienglas geritztes Kreuz bezeichnet. Außerdem kann an dieser Stelle eine Büchse mit einem Federstift eingesetzt werden. Beim Niederdrücken dieses Stiftes wird der Mittelpunkt des Kreises durch einen feinen Stich in der Karte markiert.

Der Doppeltransporteur ist zu einer bequemen, schnellen und sicheren Lösung der Aufgabe der vier Punkte in der Karte geeignet. Sind vom Schiffe aus drei in der Karte verzeichnete Marken *A*, *B* und *C* in Sicht, so mißt man mit dem Sextanten zwei der Winkel, unter denen sie erscheinen, etwa den Winkel zwischen *A* und *B* und den Winkel zwischen *B* und *C*. Diese beiden Winkel stellt man am Doppeltransporteur ein und verschiebt nun das Instrument auf der Karte so lange, bis die drei vom Mittelpunkte auslaufenden Kanten der Lineale durch die entsprechenden Punkte *A*, *B* und *C* hindurchgehen. Der Mittelpunkt des Kreises giebt dann den Schiffsort an. Bei einiger Übung gelingt eine verhältnismäßig recht genaue Bestimmung des Schiffsortes auf diese Weise sehr schnell.

Insbesondere in der Nähe einer Küste, der Sandbänke oder Felsriffe vorgelagert sind, wird deshalb das Instrument ein wertvolles Hülfsmittel für die Schiffsführung sein. Wenn es in diesem Falle auf schnelle Ortsbestimmungen ankommt, so lasse man die beiden Winkel von zwei Beobachtern nehmen, während man selbst oder ein dritter Gehülfe die gemessenen Winkel am Doppeltransporteur einstellt und den Schiffsort in der oben beschriebenen Weise in der Karte aufsucht.

In Ermangelung eines Doppeltransporteurs kann man sich eines Bogens Pauspapier bedienen, auf dem man in einem beliebigen Punkte die beiden gemessenen Winkel mittels eines gewöhnlichen Transporteurs aufzeichnet. Das Verschieben auf der Karte geschieht in derselben Weise wie mit Hülfe des Doppeltransporteurs.

Das Thermometer und das Barometer.

§ 337. Das Thermometer. Zur Bestimmung der Temperatur oder des Wärmegrades verwendet man Thermometer. Jede Temperaturbestimmung mittels eines Thermometers beruht auf der bekannten Thatsache, daß die Wärme die Körper ausdehnt. Am gebräuchlichsten sind die Quecksilberthermometer. Ein solches besteht aus einer sehr engen, überall gleich weiten Glasröhre, deren eines Ende zu einem kugel- oder zylinderförmigen weiten Gefäß aufgeblasen, und deren anderes Ende zugeschmolzen ist. Das Gefäß und ein Teil der Röhre ist mit Quecksilber gefüllt, während der übrige Teil der Röhre luftleer ist. Bei Erhöhung der Temperatur dehnt sich das Quecksilber aus, und der in der Röhre befindliche Quecksilberfaden wird infolgedessen länger. Die Röhre ist mit einer Skale versehen, an der man den Stand des Quecksilbers und damit die Temperatur abzulesen vermag. Neben Quecksilberthermometern verwendet man vielfach auch Weingeistthermometer.

Es sind drei verschiedene Skalen für die Temperaturmessung im Gebrauch. Nach Celsius und Réaumur erhält man einen festen Punkt dadurch, daß man das Thermometer in schmelzendes Eis taucht; diesen sogenannten Eis- oder Gefrierpunkt bezeichnen beide mit 0°. Einen zweiten festen Punkt bekommt man, indem man das Thermometer bei einem Barometerstande von 760 mm in reines kochendes Wasser taucht; dieser Punkt heißt der Siedepunkt.

Celsius teilte die Strecke zwischen Eispunkt und Siedepunkt in 100, Réaumur dieselbe Strecke in 80 gleiche Teile. Man spricht demgemäß auch vom 100 teiligen und vom 80 teiligen Thermometer. Nur das erstere wird für wissenschaftliche Untersuchungen gebraucht. Um Réaumurgrade in Celsiusgrade umzuwandeln, hat man mit $\frac{5}{4}$ zu multiplizieren.

Fahrenheit bezeichnet den Eispunkt mit 32°, den Siedepunkt mit 212°, er teilt dementsprechend den Zwischenraum zwischen diesen beiden Grundpunkten in 180° gleiche Teile, und es sind 9° Fahrenheit = 5° Celsius = 4° Réaumur.

Um Fahrenheitgrade in Celsiusgrade zu verwandeln, hat man von ihrer Zahl 32 zu subtrahieren und den Rest mit $\frac{5}{9}$ zu multiplizieren.

Am bequemsten bedient man sich zur Verwandlung der Tafel 21*) der Nautischen Tafeln oder der Tafel 5 des Nautischen Jahrbuches.

Maximum- und Minimumthermometer sind solche, die nicht nur den Stand der augenblicklichen Temperatur erkennen lassen, sondern auch den höchsten bezw. den niedrigsten Stand anzeigen, den die Temperatur während eines gewissen Zeitraumes z. B. eines Tages gehabt hat. Die Einrichtung dieser Instrumente ist meist die, daß der Quecksilberfaden ein kleines aus Glas oder Stahldraht verfertigtes Stäbchen vor sich herschiebt, das dann beim Zurückgehen des Fadens liegen bleibt; bei Weingeistthermometern, die horizontal aufgestellt werden, schwimmt im Flüssigkeitsfaden ein Glasstäbchen, das vom Ende des Fadens mitgenommen wird und dann liegen bleibt. Nachdem die Ablesung gemacht ist, wird das Stäbchen durch Neigen des Thermometers und sanftes Klopfen an das Ende des Fadens zurückgeführt. Bei Stahlstäbchen bedient man sich dazu mit Vorteil eines kleinen Magneten.

Sehr wichtig für die Messung der Lufttemperatur ist die Aufstellung der Thermometer. Sie müssen vor Regen und gegen direkte Sonnenstrahlen, außerdem aber auch gegen reflektierte oder strahlende Wärme vom Deck oder anderen in der Nähe befindlichen Gegenständen geschützt sein. Gleichzeitig muß die Luft einen möglichst freien Zutritt haben. Am besten schließt man Thermometer zur Bestimmung der Lufttemperatur in einen weißen Blechkasten mit jalousienartig durchbrochenen Wänden ein, der seinerseits in einem ähnlich gebauten Holzkasten aufgehängt ist.

Ein Metallthermometer enthält einen Metallring, der aus einem inneren Kupfer- und einem äußeren Stahlreifen zusammengesetzt ist. Dieser Ring ist an einer Stelle aufgeschnitten und mit seiner Mitte in einem Gehäuse befestigt. Bei Temperaturerhöhung entfernen sich die beiden Enden infolge der verschiedenen Ausdehnung der beiden Metalle von einander, bei Temperaturerniedrigung nähern sie sich einander. Die Bewegung der Enden wird durch ein Hebelwerk auf einen Zeiger übertragen, der auf einer Skale die Temperatur abzulesen gestattet. Diese Skale ist durch Vergleich mit einem Quecksilberthermometer geteilt.

§ 338. Das Barometer. Eine etwa 80 cm lange, an einem Ende geschlossene Glasröhre werde vollständig mit Quecksilber gefüllt. Man verschließe das offene Ende mit dem Finger und lasse es in eine Schale mit Quecksilber tauchen, indem

*) Behrmann, Nautische Tafeln, Tafel 38 und 39.

man die Röhre aufrecht hält. Wenn man jetzt den Finger entfernt, so sieht man das Quecksilber in der Glasröhre herunterfallen, aber nur bis zu einer ganz bestimmten Höhe. Eine Quecksilbersäule von etwa 76 cm Höhe bleibt in der Glasröhre stehen. Man nennt dieses Experiment den Torricellischen Versuch und erklärt ihn folgendermaßen.

Die Erde ist von der etwa 70 Kilometer dicken Lufthülle oder Atmosphäre umgeben. Die Luft besitzt wie alle irdischen Körper ein gewisses Gewicht. (Durch Versuche hat man gefunden, daß ein Liter Luft an der Erdoberfläche ungefähr $1^1/_4$ Gramm wiegt.) Das Gewicht der über jedem Punkte der Erdoberfläche lastenden Luftsäule übt einen ganz erheblichen Druck auf jeden auf der Erde befindlichen Körper aus. Dieser Druck kommt uns für gewöhnlich nicht zum Bewußtsein, da er auf uns wie auf alle übrigen Körper allseitig wirkt. Im Torricellischen Versuche wird jedoch dem Luftdruck Gelegenheit gegeben, auch äußerlich in die Erscheinung zu treten und zwar dadurch, daß er nur auf die untere Seite der in der Glasröhre eingeschlossenen Quecksilbersäule wirken kann. Denn von dem oberen Ende der Quecksilbersäule wird er dadurch fern gehalten, daß die Glasröhre oben zugeschmolzen ist. Der obere Teil der Röhre zwischen dem Quecksilber und dem zugeschmolzenen Ende ist luftleer und wird die Torricellische Leere genannt.

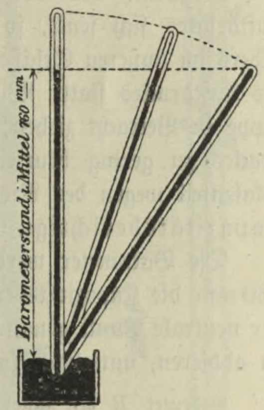


Fig. 269.

Man hat sich demnach den Torricellischen Versuch so zu erklären, daß der auf die freie Oberfläche des Quecksilbers im Gefäße wirkende Luftdruck das Quecksilber in der Röhre soweit hinauftreibt, bis der Druck der Quecksilbersäule dem Luftdrucke das Gleichgewicht hält.

Das spezifische Gewicht des Quecksilbers ist gleich 13,6. Nimmt man daher an, daß der Querschnitt der Röhre gleich einem Quadratzentimeter ist, so ist das Gewicht der vom Luftdruck getragenen Quecksilbersäule $76 \cdot 13{,}6\,g = 1033\,g$. Der Druck der Luft auf einen Quadratzentimeter ist mithin rund 1 kg; diesen Druck bezeichnet man deshalb als den Druck einer Atmosphäre.

Neigt man die Röhre, so bleibt die Kuppe des Quecksilbers genau in der wagerechten Linie, in der sie zu Anfang lag (siehe Fig. 269). In der Röhre selbst steigt demnach das Quecksilber; wenn das Ende der Röhre in die Horizontale gelangt ist, so schlägt das Quecksilber oben an.

Bei längerer Beobachtung findet man, daß das Quecksilber in der Glasröhre beim Torricellischen Versuche nicht immer genau dieselbe Höhe beibehält. Eine Torricellische Röhre, die so eingerichtet ist, daß man mit ihr die Veränderungen des Luftdruckes bequem und sicher verfolgen kann, wird Barometer genannt.

Soll ein Barometer nicht nur dazu dienen, die Schwankungen des Luftdruckes anzuzeigen, sondern den Luftdruck selbst zu messen, so muß es eine ganze Reihe von Bedingungen erfüllen, von denen die wichtigsten die folgenden sind:

1. Der Raum über dem Quecksilber muß vollkommen luftleer sein; sonst wird der Barometerstand zu niedrig abgelesen.

2. Das Quecksilber muß chemisch rein sein; es darf keine Verunreinigungen an Blei, Zink und anderen Metallen enthalten, da diese das spezifische Gewicht beeinflussen.

3. Das Instrument muß sich bei der Ablesung in vertikaler Stellung befinden.

4. Die Barometerröhre muß am oberen Ende der Quecksilbersäule möglichst weit sein, da das Quecksilber sonst infolge der Haarröhrchen- oder Kapillarerscheinung zu niedrig steht. Erst bei einem inneren Durchmesser der Röhre von 24 mm ist die Erniedrigung der Quecksilberkuppe infolge der Kapillarerscheinung geringer als 0,01 mm. Bei Normalbarometern wendet man deshalb Röhren von mindestens 24 mm Durchmesser an. Bei engeren Röhren muß, wenn dem Kapillaritätsfehler nicht durch besondere Konstruktion des Barometers Rechnung getragen ist, eine positive Berichtigung an den abgelesenen Stand angebracht werden.

5. Wenn das obere Niveau der Quecksilbersäule bei Erniedrigung des Luftdruckes sich senkt, so wird damit zugleich ein geringes Steigen des Quecksilbers im äußeren Gefäße verbunden sein. Das Umgekehrte findet bei Erhöhung des Luftdruckes statt. Würde man nur die Schwankungen der oberen Quecksilberkuppe in Betracht ziehen, so würde man demnach die Schwankungen des Luftdruckes zu gering beurteilen. Die Berichtigung, die an den oben abgelesenen Skalenteil wegen der Niveauänderung im unteren Gefäße anzubringen ist, wird Kapazitätsberichtigung genannt.

Die Barometer werden gewöhnlich so eingerichtet, daß für den Skalenteil 760 mm die Kapazitätsberichtigung gleich Null ist. Dieser Skalenteil wird dann der neutrale Punkt genannt. Oberhalb dieses Punktes ist die Kapazitätsberichtigung zu addieren, unterhalb zu subtrahieren.

Bedeutet R den inneren Halbmesser des Gefäßes und ρ den äußeren Halbmesser der Barometerröhre, so ist der Inhalt der freien Oberfläche des Quecksilbers im Gefäße gleich $R^2 . \pi - \rho^2 . \pi$. Ist ferner r der innere Halbmesser der Röhre oben an der Quecksilberkuppe, so ist $r^2\pi$ der Inhalt des Röhrenquerschnittes und die Kapazitätsberichtigung beträgt

$$c = \frac{r^2\pi}{R^2\pi - \rho^2\pi} = \frac{r^2}{R^2 - \rho^2}$$

Ist ferner b die direkte Ablesung, b' die für Kapazitätsberichtigung verbesserte und n die Ablesung für den neutralen Punkt, so ist

$$b' = b + c\,(b - n),\ \text{wenn } b \text{ oberhalb } n \text{ liegt und}$$
$$b' = b - c\,(n - b),\ \text{wenn } b \text{ unterhalb } n \text{ liegt.}$$

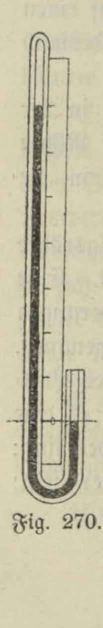


Fig. 270.

Zur Vermeidung der unter 4. und 5. genannten Berichtigungen hat man verschiedene Arten von Barometern ersonnen. Hier sei zunächst das Heberbarometer erwähnt. Beim Heberbarometer ist im Gegensatz zu dem bisher besprochenen Gefäßbarometer das untere zur Aufnahme des Quecksilbers bestimmte Gefäß dadurch entbehrlich gemacht, daß die Barometerröhre U-förmig umgebogen ist. Ist die Röhre im kürzeren Schenkel ebenso weit wie im längeren, so sind die Kapillarwirkungen an der unteren und der oberen Kuppe gleich und heben sich deshalb gegenseitig auf. Zur Bestimmung der Höhe des Barometerstandes liest man oben und unten ab und addiert oder subtrahie die Ablesungen, je nachdem der Nullpunkt zwischen den Kuppen oder außerhalb derselben liegt. Ist die Teilung verschiebbar, so kann man auch den Nullpunkt auf die untere Kuppe einstellen und darauf die Höhe an der oberen Kuppe ablesen.

Das **Marinebarometer** ist ein in Kreuzringen aufgehängtes Gefäßbarometer. Die Barometerröhre hat in ihrem Hauptteile zwischen e und c (siehe Fig. 271b) einen Durchmesser von 0,5 mm, oberhalb e erweitert sie sich zu 8 mm Durchmesser. Sie ist mit einer **Butenschen Luftfalle** versehen, die den Zweck hat, das Eindringen von Luft in die Torricellische Leere zu verhindern. Diese Luftfalle besteht aus einer Erweiterung des unteren Teiles der Barometerröhre, in die der obere Teil der Röhre mit einer fein ausgezogenen Spitze hineinragt, wie dies durch die Figur 271c angedeutet wird. Wenn Luft aus dem Gefäße zwischen dem Quecksilber und der Röhrenwandung emporsteigen sollte, so fängt sie sich in dem mit rr bezeichneten Raume. Bei vielen Barometern ist noch eine besondere haarförmige Einengung der Röhre vorhanden. Die Verengerungen der Röhre haben den Zweck, die durch die Schiffsbewegungen hervorgerufenen Schwankungen (das Pumpen) des Quecksilbers zu verhüten. Sie bewirken andererseits allerdings, daß das Quecksilber nur langsam den Schwankungen des Luftdruckes folgt oder, wie man auch sagt, daß das Barometer träge wird. Die Ablesung an der Skale erfolgt mit Hülfe eines Nonius, dessen Nullstrich mit der Unterkante eines durch Zahnradtrieb auf- und abschiebbaren Ringes zusammenfällt. Bei der Ablesung ist zur Vermeidung eines Verschubes gut darauf zu achten, daß beim Einstellen die Vorderkante des Ringes, die Quecksilberkuppe und die Hinterkante des Ringes in einer Ebene mit dem Auge sind.

Der Kapazitätsberichtigung ist beim Marinebarometer, wie auch bei einer Reihe anderer Barometer dadurch Rechnung getragen, daß die Skalenteile entsprechend dem Verhältnisse des oberen Durchmessers der Quecksilbersäule zum Durchmesser des Gefäßes verkürzt sind. Nimmt man etwa an, daß das Quecksilber, wenn es in der Röhre 20 mm steigt,

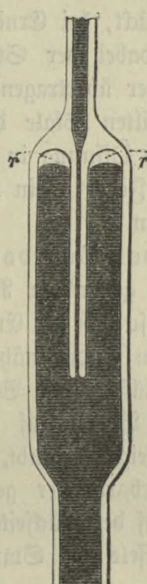


Fig. 271c.

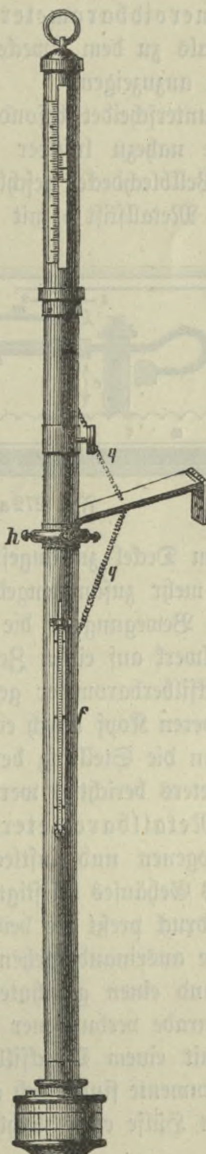


Fig. 271a.

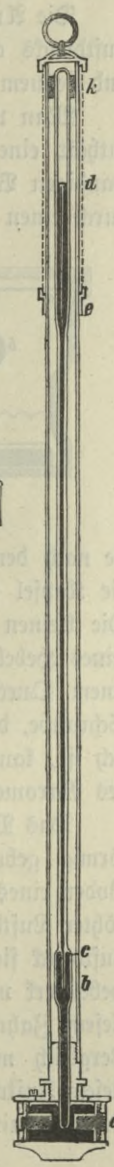


Fig. 271b.

im Gefäß um 1 mm fällt, so ist der wirkliche Unterschied im Luftdruck 21 mm. Die Teilung ist also so anzufertigen, daß auf jene 20 mm nicht 20, sondern 21 Teile der Skale kommen.

Marinebarometer, die zu genauen Messungen benutzt werden sollen, sind von Zeit zu Zeit in der ganzen Ausdehnung ihrer Skale mit Normalbarometern zu vergleichen. Die etwa beobachteten kleinen Abweichungen werden in eine Tabelle zusammengestellt. (Wegen der weiteren an genaue Luftdruckmessungen anzubringenden Berichtigungen siehe Handbuch der Nautischen Instrumente § 17. u. f.)

Die Aneroidbarometer sind weniger geeignet zu genauen Messungen des Luftdrucks als zu dem Zwecke, die Schwankungen des Luftdruckes schnell und bequem anzuzeigen.

Man unterscheidet besonders zwei Arten. Das Holosteric von Naudet enthält eine nahezu luftleer gemachte Metallkapsel *a*, die durch einen dünnwandigen Wellblechdeckel geschlossen ist (siehe Fig. 272). Eine Metallfeder *b* ist durch einen Metallstift *c* mit dem Wellblechdeckel verbunden und zwar so, daß

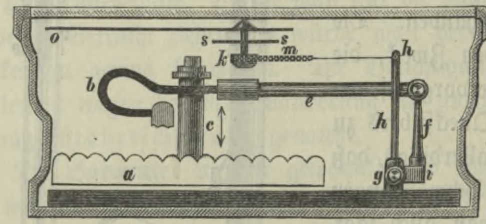


Fig. 272a.

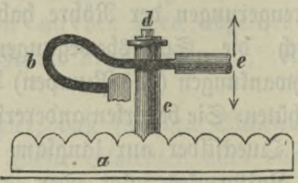


Fig. 272b.

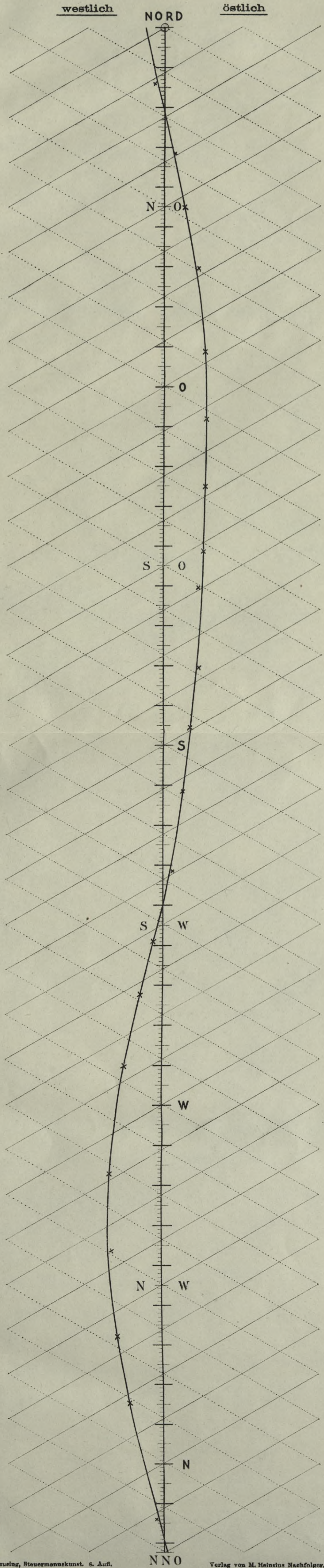
sie nach dem Deckel zu angespannt wird. Bei Erhöhung des Luftdruckes wird die Kapsel mehr zusammengedrückt, bei Erniedrigung dehnt sie sich wieder aus. Die kleinen Bewegungen, die dabei der Stift *c* ausführt, werden durch ein feines Hebelwerk auf einen Zeiger übertragen, der auf einer durch Vergleich mit einem Quecksilberbarometer geteilten Skale den Luftdruck anzeigt. Durch eine Schraube, deren Kopf durch eine Öffnung in der Rückseite des Gehäuses zugänglich ist, kann die Stellung der Feder *b* ein wenig verändert und so der Stand des Barometers berichtigt werden.

Das Metallbarometer von Bourdon besteht aus einer elastischen kreisförmig gebogenen und luftleer gemachten Röhre. Sie ist in ihrer Mitte am Boden eines Gehäuses befestigt, so daß die Enden sich frei bewegen können. Erhöhter Luftdruck preßt die beiden Enden näher aneinander, während erniedrigter Luftdruck sie auseinandergehen läßt. Die Bewegung der Enden wird durch ein Hebelwerk und einen gezahnten Bogen auf ein Zahnrad übertragen. Ein mit diesem Zahnrade verbundener Zeiger erlaubt, den Barometerstand auf der durch Vergleich mit einem Quecksilberbarometer geteilten Skale abzulesen. Auch bei diesem Instrumente findet sich auf der Rückseite des Gehäuses eine Öffnung, durch die man mit Hülfe eines Schlüssels den Stand des Zeigers berichtigen kann.

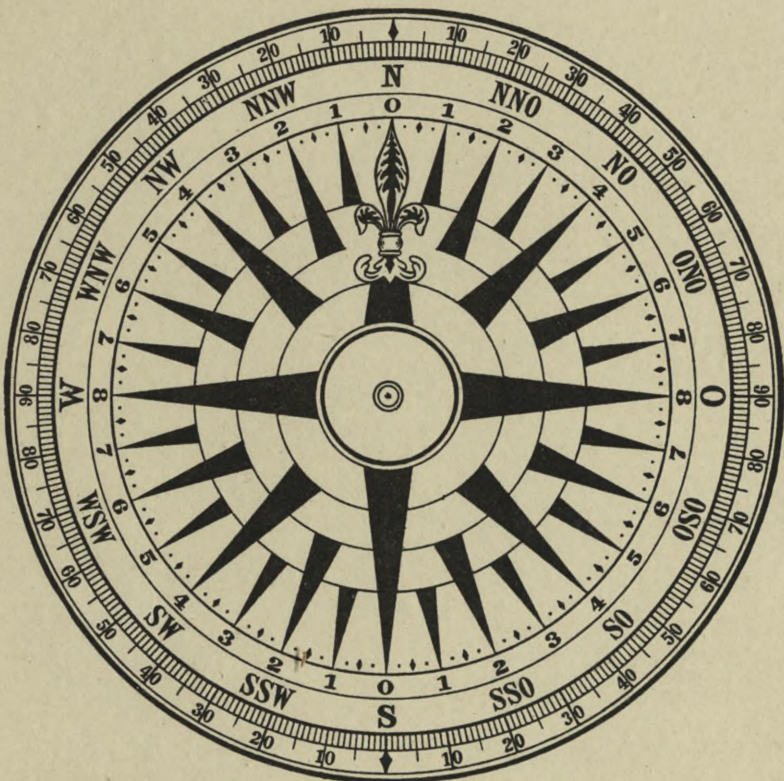
Ablenkungskurve des Brückenkompasses

an Bord des Dampfschiffes „Pfalz“

beobachtet auf 22° 30′ S und 40° 45′ W am 22. Nov. 1893.



Verlag von M. Heinsius Nachfolger, Leipzig.


N
NNO
NO
ONO
O
OSO
SO
SSO
S
SSW
SW
WSW
W
WNW
NW
NNW