Dr. Jng. Arthur Lederer Rud. Wolle Analytische Ermittelung und Anwendung von Einflußlinien

0

Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W.







Analytische Ermittelung und Anwendung von Einflußlinien

einiger im Eisenbetonbau häufig vorkommender statisch unbestimmter Träger

Von

Dr. Ing. Arthur Lederer

Herausgegeben von

Rud. Wolle, Cementbaugeschäft, Leipzig





XXX

Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W.

KRAKÓW * Olitechniczna 2152 51 Ake. Nr.

Vorwort.

Vorliegende Abhandlung bezweckt, dem Konstrukteur eine genaue Handhabe für die so häufig in der Praxis des Eisenbetonbaues vorkommenden Sonderfälle des durchgehenden Trägers, wie sie auch in den preußischen amtlichen Vorschriften vom Mai 1907 und in den österreichischen Vorschriften vom Dezember 1907 vorgesehen sind, zu bieten.

Der eingeschlagene Weg ist rein analytisch, und sämtliche wichtigen Resultate sind in Tabellenform beigefügt.

Eine rechnerische allgemeine Ermittelung der Einflußlinien eines kontinuierlichen Trägers mit *n* ungleichen Feldern soll demnächst an anderer Stelle folgen.

Zu besonderem Danke fühlt sich der Verfasser Herrn *Rud. Wolle* in Leipzig verpflichtet, der in jeglicher Hinsicht das Zustandekommen der Abhandlung förderte.

Leipzig, im April 1908.

Der Verfasser.

Druckfehlerberichtigung.

Seite	2	Zeile	4	v. u.	lie	s:	$M_1 = \frac{-Ppp'(l+p)}{4l^2}$	stat	t:	$M = \frac{Ppp'(l+p)}{4l^2}$
n	5	77	5	v. u.	, 17	:	$x = \pm 1 \sqrt{(\frac{5\mu}{4} - 1)\frac{4}{3\mu}}$	l "	:	$x = \pm \sqrt{\left(\frac{5\mu}{4} - 1\right)} \frac{4}{3\mu} l$
37	6	"	13	v. o.		:	am linken	"	:	am rechten
n	7	17	13	v. o.	, 11	:	$y = \frac{-\mu x' (l^2 - x'^2)}{4 l^2}$	"	:	$y = \frac{\mu x' (l^2 - x'^2)}{4 l^2}$
11	20	77	6	v. o.	. 11	:	$\max T^p_{\max} = \frac{7}{16} pl$	"	:	$\max T^p_{\max} = - \frac{7}{16} pl$
"	25	77	11	v. u.	,	:	(5)	77	:	(15)
"	28	77	8	v. o	. 11	:	$\mu \geq \frac{15}{19}$.	"	:	$\mu \leq \frac{15}{19}$

Analytische Ermittelung und Anwendung von Einflußlinien einiger im Eisenbetonbau häufig vorkommender statisch unbestimmter Träger.

Die Anwendung der Einflußlinien hat sich bereits in allen Gebieten der Statik eine hervorragende Stellung erobert. Der Grund hierfür liegt in der Übersichtlichkeit und leichten Bestimmung der ungünstigen Laststellungen.

Die Einflußlinien statisch bestimmter Systeme bestehen aus einfachen Geraden, die graphisch leicht ermittelt werden können, bei statisch unbestimmten Systemen jedoch sind die Einflußlinien Kurven höherer Ordnung und ihre Ermittelung geschieht graphisch mit Hilfe von Biegelinien und Anwendung des Satzes von den virtuellen Verschiebungen.

Nachdem aber ein graphisches Verfahren nie den Genauigkeitsgrad eines rein analytischen Verfahrens erreichen kann und nachdem weiter die graphische Ermittelung von Einflußlinien ziemlich zeitraubend ist, wird es sich empfehlen, für gewisse spezielle Fälle diese Linien analytisch abzuleiten und ihren Verlauf durch analytische Formeln festzustellen.

Im nachfolgenden werden die Einflußlinien der statisch unbestimmbaren Größen, der Biegungsmomente, Stützenreaktionen und Querkräfte einiger im Eisenbetonbau häufig vorkommender Träger analytisch ermittelt.*)

Das analytische Verfahren besitzt den Vorzug einer äußersten Genauigkeit, indem es die Einflußlinien in Form von mathematischen Gleichungen bietet; handelt es sich dann um den Einfluß einer Einzellast, so kann die Ordinate leicht bestimmt werden, handelt es sich um den Einfluß einer gleichförmig verteilten Last, so kann ebenso genau die Einflußfläche mit Hilfe der Integration in den sich ergebenden Grenzen ermittelt werden. Ist der Verlauf dieser Linien unter Zugrundelegung eines Allgemeinfalles festgelegt, so erscheinen die Ordinaten nur als lineare Funktionen der Spannweite und die Berechnung gestaltet sich äußerst einfach und genau. Zum Schluß sollen als praktischer Behelf diese ermittelten Resultate in Tabellenform folgen.

Für eine vorläufige Berechnung genügt es die Ordinaten aus den aufgezeichneten Linien abzugreifen oder die Flächen mit Hilfe des Planimeters zu bestimmen; genauer vorgehend kann man die Ordinaten durch Interpolation

Lederer, Einflußlinien.

^{*)} Die Anwendbarkeit der Resultate, die auf Berechnung mit konstantem EJ(E = Elasti-zitätskoeffizient, J = Trägheitsmoment) beruhen, wurden in vielen Artikeln, besonders in "Beton und Eisen" erörtert. Speziell für kontinuierliche Träger siehe u. a.: Prof. Max Foerster: "Das Material und die statische Berechnung der Eisenbetonbauten, Leipzig 1907."

zwischen 2 nächstliegende in der Tabelle berechnete Werte, die Flächen dann mit Hilfe der Simpsonschen Regel bestimmen; in letzterem Falle wird es sich jedoch mehr empfehlen, die Integration durchzuführen, da diese bei der einfachen Form $\int x^n dx$ auch nicht länger dauert.

A. Der kontinuierliche Träger mit zwei gleichen Öffnungen.

Es wird unter Annahme eines konstanten EJ nur der Einfluß der beweglichen Last ermittelt, somit beachten wir keine Stützensenkung; ein Auflager ist fest, die anderen sind beweglich. Dieser Träger ist einfach statisch unbestimmt, und wir können zur Bestimmung des als statisch unbestimmbare Größe einzuführenden Stützenmomentes M_1 , die allgemeine Arbeitsgleichung benützen; da jedoch die Clapeyronsche Dreimomentengleichung bereits eine Spezifizierung der erwähnten Arbeitsgleichung ist, führt sie uns hier rasch zum Ziele.

Sind l_r und l_{r+1} zwei Nachbarfelder eines kontinuierlichen Trägers, dann lautet die Dreimomentengleichung

$$M_{r-1}l_r+2M_r(l_r+l_{r+1})+M_{r+1}l_{r+1}+\frac{\Im l_r}{l_r}+\frac{\Im l_{r+1}}{l_{r+1}}=0,$$

$$\begin{array}{c|c} & & & & \\ \hline & & & \\ \hline a_{\tau-4} & & & \\ \hline M_{\tau-4} & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ Fig. 1 \end{array}$$

$$\frac{\mathfrak{N}_n}{6} = \int Mx \, dx \, ,$$

Für eine Einzellast gilt bekanntlich



wobei
$$\frac{\Im tr}{6}$$
 das statische Moment
der "einfachen Momentenfläche"
auf die linke, $\frac{\Re' r}{6}$ das auf die
rechte Stütze bedeutet. (Siehe
Fig. 1.)

$$\frac{n^{r_{n}}}{6} = \int M(l-x) \, dx \, .$$

$$\mathfrak{N} = Ppp'(l+p)$$
$$\mathfrak{N}' = Ppp'(l+p')$$

mit Bezeichnungen aus Fig. 2.

Für den Träger mit 2 Öffnungen können wir die Clapeyron-

sche Gleichung einmal aufschreiben. Setzen wir in unserem Fall
$$M_{r-1} = M_0 = M_{r+1} = M_2 = 0$$

$$M_r = M_1$$
$$l_r = l_{r+1} = l,$$

dann lautet obige Gleichung $4M_1l + \frac{\mathfrak{N}_1}{l} + \frac{\mathfrak{N}'_2}{l} = 0$.

Befindet sich die Last im ersten Felde, dann ist



gesetzt, die Entfernungen p, p' = l - p, als variabel, dann kommen wir zur Gleichung der Einflußlinie des Stützenmomentes im 1. Felde.

- 2 -

$$p = x, \qquad p' = l - x$$

$$y = \frac{-x(l^2 - x^2)}{4 l^2} \cdots \cdots \cdots (1).$$

Wäre die Last im 2. Felde, dann erzeugt sie infolge der Symmetrie dasselbe Stützenmoment wie in dem symmetrisch gelegenen Querschnitt des 1. Feldes aufgestellt, es genügt somit, nur den Verlauf der Einflußlinien im 1. Felde zu bestimmen.

Die Gleichung (1) ist bekanntlich die Gleichung einer kubischen Parabel.

Einflußlinie des Stützenmomentes M₁.

Die im vorausgegangenen ermittelte Gleichung

$$y = \frac{-x(l^2 - x^2)}{4l^2}$$

gestattet noch weitere Untersuchungen in Bezug auf statisch wichtige Größen.

a) Belastungsscheiden. Belastungsscheiden sind jene Querschnitte, wo eine beliebige Kraft als Beitrag zu der untersuchten Größe, hier M_1 , Null liefert. Die Bedingung ist somit y=0; aus (1)

$$0 = \frac{-x(x^2 - l^2)}{4l^2}$$

Diese kubische Gleichung liefert 3 Wurzeln:

$$\begin{array}{l} x = 0, \\ x = l, \\ x = -l, \end{array}$$

wovon nur die ersten beiden von statischer Bedeutung sind; sie bedeuten, daß das ganze 1. Feld (und somit auch das symmetrische zweite) negative Beiträge zum Stützenmoment liefert, d. h. eine jede Last nur negative Stützenmomente erzeugt. Denn es ist $0 \le x \le l$ und somit

 $y \leq 0$.

b) Maximum. Wir sprechen von einem Maximum, trotzdem es sich um negative Werte handelt und der zweite Differentialquotient uns ein mathematisches Minimum angibt, indem wir nur an die absolute Größe des M_1 denken.



schnitt $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ zur Aufstellung gelangen. Die konstruktive Ermittelung dieses Querschnittes ist aus Fig. 4 ohne weiteres ersichtlich.

c) Wendepunkte der Kurve. Diese sind beim zeichnerischen Auftragen wichtig. Die bekannte mathematische Bedingung für einen einfachen Wende-



Der Wendepunkt ist am linken Auflager.

Der gesamte Verlauf der Einflußlinie ist aus Fig. 5 ersichtlich.

Von 0,10 l zu 0,10 l sind die Ordinaten in der betreffenden Tabelle angeführt.

Einflußlinien des Biegungsmomentes M in einem beliebigen Querschnitte µl des 1. Feldes.

Gegeben sei ein Querschnitt µl im 1. Felde, gesucht wird seine Einflußlinie. Befindet sich der Querschnitt im 2. Felde, dann ist seine Einflußlinie das

Fig. 6.

Spiegelbild der für den sym-sich dann.

Bedeutet ab ein Feld eines beliebigen kontinuierlichen Trägers M_b , M_a die Stützenmomente, dann gilt bekanntlich

$$M = \mathfrak{M} + \frac{M_b a + M_a b}{l}$$
, (siehe Fig. 6),

wobei M das Moment des frei aufliegenden Trägers bedeutet.

In unserem Falle

 $M_b = M_1$, $M_a = 0$, $a = \mu l$, $b = (1 - \mu) l$, so daß $M = \mathfrak{M} + \mu M_1$.

Es entsteht somit die Einflußlinie durch Addition der Ordinaten der Einflußlinie des einfachen Trägers und der µfachen Ordinaten des Stützenmomentes.

1. Verlauf der Kurve im 1. Felde.

Die Einflußlinie des frei aufliegenden Trägers besteht aus den bekannten 2 Geraden.



Setzen wir P=1, gelangen wir zu den Gleichungen der Einflußlinie. Diese besteht infolge der zweifachen Werte von \mathfrak{M} aus 2 Asten, dem links von μl und dem rechts von μl verlaufenden.

 α) Linker Ast.

Nach vorher ermittelten Beziehungen zwischen M, \mathfrak{M} und M_1 lautet die Gleichung

$$y = x \left(1 - \frac{5\mu}{4}\right) + \frac{\mu}{4t^2} x^3 \cdots (4)$$

Gleichung (4) gibt wieder eine kubische Parabel an.

a) Belastungsscheiden. Bedingung y=0.

Aus Gleichung (4) für y=0 ist eine Wurzel x=0, sodann verbleibt noch die rein quadratische Gleichung

$$1 - \frac{5\mu}{4} + \frac{\mu}{4l^2} x^2 = 0$$
,

woraus

$$x_0 = \frac{2l}{\sqrt{\mu}} \sqrt{\frac{5\mu}{4} - 1} \cdots \cdots \cdots (5),$$

die negative Wurzel hat keinen statischen Wert.

Die Gleichung (5) gibt die Lage der Belastungsscheide an. Soll diese einen statischen Wert haben, so muß

real sein, somit

 $1/\frac{5\mu}{4}-1$ $\frac{5\mu}{4} \ge 1$ $\mu \geq \frac{4}{5}$.

Die Bedingung $\mu \ge \frac{4}{5}$ drückt folgendes aus: Befindet sich ein Querschnitt zwischen 0 und $\frac{4}{5}l$, dann gibt es keine Belastungsscheide, das ganze 1. Feld ist zu dem Biegungsmomente des betreffenden Querschnittes positiv beitragend, ist jedoch der Querschnitt zwischen $\frac{4}{5}l$ und l, dann existiert eine Belastungsscheide, deren Lage durch Gleichung (5) gegeben ist. Die Grenze zwischen diesen beiden Querschnittsgattungen ist bekanntlich der rechte Festpunkt des 1. Feldes und somit haben wir seine Lage zu $\frac{4}{5}l$ ermittelt.

b) Maximum.

Die Bedingung für das mathematische Maximum resp. Minimum ist

$$\frac{dy}{dx}=0.$$

Aus (4)

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{5\mu}{4} + \frac{3\mu}{4l^2} x^2 = 0,$$

woraus

$$x = \pm \sqrt{\left(\frac{5\mu}{4} - 1\right)} \frac{4}{3\mu} l \cdots (6)$$

Das mathematische Maximum $\left(\frac{d^2 y}{dx^2} < 0\right)$ hat hier keinen Wert von statischer Bedeutung. Die maximale positive Ordinate der Einflußlinie entsteht im Querschnitte selbst, d. i. im Schnittpunkte beider Kurvenäste. Nennen wir sie y_{max} zum Unterschiede vom mathematischen Maximum (max y). Es ist somit für $x = \mu l$

$$y_{\max} = \mu l \left(1 - \frac{5\mu}{4} \right) + \frac{\mu^4 l}{4} \cdots \cdots \cdots (7).$$

Befindet sich jedoch der Querschnitt hinter $\frac{4}{5}l$, dann liefert (6) ein mathematisches Minimum.

$$x_{\min y} = \sqrt{\left(\frac{5\mu}{4}-1\right)\frac{4}{3\mu}}l \cdots (6),$$

die größte Ordinate des negativen Teiles der Einflußlinie. Es muß aus (6) damit x einen realen Wert hat, $\mu > \frac{4}{5}$, welche Bedingung wir schon früher hatten.

Bei dem betreffenden Querschnitte in den Tabellen ist auch das min y angegeben.

c) Wendepunkt.

Bedingung:
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3\mu}{4l^2} + 2x = 0$$

 $x = 0$.

der Wendepunkt ist somit am rechten Auflager.

β) Rechter Ast der Einflußlinie im 1. Felde. Hier gilt $\mathfrak{M} = P(l-x)\mu$ und somit die Gleichung der Einflußlinie

$$y = \frac{\mu}{4 l^2} (4 l^3 - 5 l^2 x + x^3) \cdots \cdots (8).$$

a) Belastungsscheiden.

Bedingung y = 0.

Wir gelangen zur kubischen Gleichung:

 $x^{3}-5l^{2}x+4l^{3}=0.$

Eine Wurzel ist, wie aus der Entstehung der Kurve folgt, x = l. Keine der beiden anderen Wurzeln hat statischen Wert; wir gelangen nur aus der Gleichung des linken Astes zum rechten Festpunkt, der linke fällt mit der linken Stütze zusammen; der rechte Einflußlinienast liefert somit keine Belastungsscheide.

b) Maximum. Auch hier liefert uns der erste Differentialquotient der Gleichung (8) keinen Wert von statischer Bedeutung, es ist somit wieder y_{max} bei $x = \mu l$.

Durch Einsetzen für $x = \mu l$ in (8) kommen wir wieder zu Gleichung (7).

Die beiden Kurven haben somit über dem Querschnitt einen gemeinsamen Punkt, jedoch berühren sie sich nicht in jenem Punkte, denn die Tangente der linken Kurve hat den Richtungswinkel φ_1 , wobei

tg
$$q_1 = 1 - \frac{5}{4}\mu + \frac{3\mu^3}{4}$$
,

wie aus dem ersten Differentialquotienten der Gleichung (4) folgert.

Die Tangente der rechten Kurve in μl hat den Richtungswinkel φ_2 , wobei

tg
$$\varphi_2 = \frac{\mu}{4} (3 \, \mu^2 - 5)$$
,

wie aus dem ersten Differentialquotienten der Gleichung (8) folgert, und somit tg $\varphi_1 = tg \varphi_2 + 1$.

Der Schnittwinkel beider Kurven ist dann

$$\alpha = \varphi_2 - \varphi_1.$$

c) Wendepunkte.

Es ist keiner im statisch wichtigen Teile der Kurve vorhanden.

2. Verlauf der Einflußlinie im 2. Felde.

Wir hatten oben die Gleichung

$$M = \mathfrak{M} + \mu M_1.$$

Befindet sich die Last P im zweiten Felde (siehe Fig. 8), dann erzeugt sie im Querschnitte μl des einfachen Balkens $\overline{a_0 a_1}$ das Moment $\mathfrak{M} = 0$ und es ist somit

$$M = \mu M_{1}$$
und mit Hilfe der Gleichung (1)
$$y = \frac{\mu x^{\prime}(l^{2} - x^{\prime 2})}{4 l^{2}} \cdots (1 a), \quad \alpha_{\circ}$$
worin $x^{\prime} = l - x$ gesetzt
wurde, anstatt x , da der
$$Fig. 8.$$

Verlauf der M_1 -Einflußlinie im 2. Felde zum 1. symmetrisch ist, und wir müssen somit von der Stütze a_3 nach links ausgehen.

Es ist auch mit Hilfe von (3)

$$\max y = -\frac{\mu}{6\sqrt{3}}l \quad \cdots \quad (3a) \qquad \text{bei} \quad \underline{x' = \frac{l}{\sqrt{3}}} \quad \cdots \quad (2a).$$

Nachdem M_1 stets negativ ist, ist auch $M = \mu M_1$ im 2. Felde negativ und somit das ganze 2. Feld zu einem Biegungsmomente des 1. Feldes negativ beitragend.

n

Der ganze Verlauf der Einflußlinie gestaltet sich nun folgendermaßen:

a) Befindet sich der untersuchte Querschnitt zwischen a_0 und ϱ (rechter Festpunkt), dann ist das 1. Feld ganz positiv beitragend, das 2. negativ beitragend, und es ergeben sich für $\max_{\min M}^{\max M}$ die in Fig. 9 angegebenen Belastungssche-Die schwerste Last men. kommt für max M in µl usw., nach bekanntem Verfahren. b) Befindet sich der Querschnitt zwischen g und

 a_1 , dann liefert (5) eine





Fig. 10.

Belastungsscheide und es ist der den Querschnitt μl enthaltende Teil des 1. Feldes positiv, der andere negativ beitragend. Das 2. Feld ist ganz negativ beitragend. Die Belastungsschemen ergeben sich wieder aus Betrachtung der Einflußlinie. (S. Fig. 10.) Für einen Querschnitt

im 2. Felde ist, wie bereits erwähnt, das Spiegelbild der für den symmetrisch gelegenen Querschnitt des 1. Feldes bestimmten Einflußlinie in Erwägung zu ziehen.

Der gefährliche Querschnitt.

8

Das absolut größte Moment wird in den meisten Belastungsfällen das negative Stützenmoment sein. Ist diese Tatsache für die Dimensionierung eines homogenen Querschnittes oft ausreichend, so ist dies bei Eisenbetonkonstruktionen keineswegs der Fall. Hier wird die Dimensionierung aus ökonomischen Rücksichten nach dem maximalen positiven Moment erfolgen, die Armatur wird dann dem Verlaufe der Momente entsprechend weiter durchgebildet. Es wurde weiter oben bewiesen, daß das größte Moment von einer Einzellast entsteht, wenn sich diese im Querschnitte selbst befindet, die maximale Ordinate der Einflußlinie lieferte uns die Gleichung (7)

$$y_{\max} = \mu l \left(1 - \frac{5\mu}{4}\right) + \frac{\mu^4 l}{4}.$$

Die Gleichung (7) gibt als geometrischen Ort der maximalen Einflußlinienordinaten eine biquadratische Parabel an. Für den gefährlichen Querschnitt erreicht y_{max} sein Maximum.

Für max ymax muß

$$\frac{dy_{\text{max}}}{d\mu} = 0$$
$$0 = \mu^3 - \frac{5}{2}\mu + 1$$

Durch Auflösung der kubischen Gleichung gelangen wir zu

 $\mu_{\max} y_{\max} = 0,432 \cdots (10)$

und

$$\max y_{\max} = 0,2074 \, l \, \cdots \, (10 \, a)$$
.

Die Kurve (7) verläuft vom linken Auflager zu 0,432 l, die konkave Seite der +X-Achse zuwendend, erreicht hier ihren Kulminationspunkt, verläuft weiter konkav bis $\sqrt{\frac{5}{6}}l$, wo sie einen Wendepunkt besitzt, von hier aus wendet sie der +X-Achse ihre konvexe Seite zu und schneidet sie wieder bei x = l; weitere 2 Schnittpunkte sind ohne statische Bedeutung.

Der gefährliche Querschnitt für $\min M$ ist der des Stützenmomentes und wurde bereits ermittelt.

Einflußlinien der Stützenwiderstände.

Sind l_r , l_{r+1} 2 Nachbarfelder eines beliebigen kontinuierlichen Trägers, dann ist die Reaktion A_r gegeben durch die Beziehung

 $A_r = -T_r + T'_r$, wo T_r die Querkraft des kontinuierlichen Trägers unendlich nahe nach links von a_r und T'_r , nach rechts von a_r bedeutet. (Siehe Fig. 11.)

Für die Querkraft des kontinuierlichen Trägers haben wir die Beziehung



 $T=\mathfrak{T}+\frac{M_b-M_a}{l},$

wo \mathfrak{Z} die Querkraft des einfachen Trägers \overline{ab} , M_b , M_a die Stützenmomente des betreffenden Feldes bedeuten. (Siehe Fig. 12.)

Somit ist

$$T_{r} = -\mathfrak{B}_{r} + \frac{M_{r} - M_{r-1}}{l_{r}} \qquad \underbrace{M_{a}}_{\uparrow a} \qquad \underbrace{\sqrt{\frac{q}{r}}}_{\downarrow f} \qquad \underbrace{M_{b}}_{\downarrow b}}_{\downarrow f}$$
$$T_{r} = \mathfrak{A}_{r+1} + \frac{M_{r+1} - M_{r}}{l_{r+1}} \qquad \underbrace{M_{a}}_{\uparrow a} \qquad \underbrace{\sqrt{\frac{q}{r}}}_{\downarrow f} \qquad \underbrace{M_{b}}_{\downarrow f}$$
Fig. 12.

und

$$A_{r} = \mathfrak{B}_{r} + \mathfrak{A}_{r+1} + \frac{M_{r+1}}{l_{r+1}} + \frac{M_{r-1}}{l_{r}} - M^{r} \left(\frac{1}{l_{r}} + \frac{1}{l_{r+1}}\right) \cdots \cdots \cdots (11)$$

worin **A**, **B** die Stützendrucke der einfachen Träger bedeuten. Für den kontinuierlichen Träger mit 2 gleichen Feldern ist

 $l_r = l_{r+1} = l.$

Einflußlinie des linken Auflagerdruckes A_0 .

Hierbei ist

$$-T_r = 0,$$

$$T_r = \mathfrak{A}_0 + \frac{M_1}{l}$$

wo \mathfrak{A}_0 der linke Auflagerdruck des einfachen Trägers ist (siehe Fig. 13) und somit $T_{0,0}$

ta.

R.

$$A_0 = \mathfrak{A}_0 + \frac{M_1}{l}$$

Die Ordinaten der Einflußlinie entstehen wieder durch Addition der Einflußlinienordinaten des einfachen

Trägers und der durch l dividierten Ordinaten der M_1 -Einflußlinie.

1. Verlauf der Kurve im 1. Felde.

Befindet sich eine Last im 1. Felde, so erzeugt sie am einfachen Träger $\overline{a_0 a_1}$ die Auflagerreaktion

Fig. 13.

a.

az

$$\mathfrak{A}_0 = P \frac{l-x}{l}$$

(siehe Fig. 14),

somit mit Hilfe von (1) und unter Einsetzen P=1 die Gleichung der Einflußlinie:



 $y = \frac{x^3 - 5 l^2 x + 4 l^3}{4 l^3} \cdots$ (12), (12) ist die Gleichung einer kubischen Parabel.

a) Belastungsscheiden. v = 0; statischen Wert hat

Es ist somit die Gleichung der Ao-Einflußlinie im

bereits erwähnten Gründen

 $\frac{-x'(l^2-x'^2)}{4 l^3}$

nur die Wurzel x = l, es trägt somit das ganze 1. Feld zu A_0 positiv bei. b) Maximum. Die mathematischen Kulminationspunkte haben keine

statische Bedeutung; den Höchstwert erreicht y somit bei x=0.

Für x=0,

2. Verlauf der Kurve im 2. Felde.

Befindet sich die Last P im 2. Felde, dann erzeugt sie im einfachen (siehe Fig. 15), $2l_0 = 0$ Träger $\overline{a_0 a_1}$ $A_0 = \frac{M_1}{I}$.

daher

(13) $\cdots v =$

gesetzt wurde.

· · (14)



Fig. 15.

 $\max v =$

Es ist weiter

bei

1+=xoul

a

$$x' = \frac{l}{\sqrt{3}} = l - x.$$

1

613

Bestimmen wir noch die Tangenten der beiden Kurven bei a_1 . Durch Differentiierung von (12)

tg
$$q_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 5l^2}{4l^3}$$
 und für $x = 1$ tg $q_1 = -\frac{1}{2l}$.
+ Durch Differentiierung von (13) unter Einsetzen
 $x' = l - x$
 a_1
 $max R_0$
 $min R_0$
Fig. 16.
 $tg q_2 = -\frac{2l^2 - 6lx + 3x^2}{4l^3}$
und für $x = 0$
 $tg q_2 = -\frac{1}{2l}$.
Nachdem die Richtungen
 $der + X$ -Achsen in beiden
Feldern dieselben und $q_1 = q_2$,
haben die beiden Kurven in a_1
eine gemeinsame Tangente.

Der ganze Verlauf der A_0 -Einflußlinie ist aus Fig. 16 ersichtlich.

Aus der Einflußlinie ergeben sich ohne weiteres die Belastungsschemen. Die Einflußlinie des Auflagerdruckes A_2 ist das Spiegelbild der A_0 -Einflußlinie.

Einflußlinie des Stützendruckes A1.



1. Verlauf der Kurve im 1. Felde.

Befindet sich die Last P im 1. Felde, so erzeugt sie einen Stützendruck \mathfrak{B}_0 des einfachen Trägers $\overline{a_0 a_1}$, dessen Einflußlinie durch die Gleichung



unter Benutzung der Gleichung (1) lautet dann die Gleichung der A_1 -Einflußlinie

 $y = \frac{3 l^2 x - x^3}{2 l^3} \cdots \cdots \cdots \cdots (15).$

a) Belastungsscheiden.

y=0; statischen Wert hat nur die Wurzel x=0.

Es trägt somit das ganze 1. Feld positiv bei und somit auch das 2. Feld, da die Einflußlinie im 2. Felde das Spiegelbild derjenigen im 1. ist (es ist nämlich im 2. Felde $A_1 = \mathfrak{A}_1 - \frac{2M_1}{l}$, die \mathfrak{A}_1 -Einflußlinie ist das Spiegelbild der \mathfrak{B}_0 -Einflußlinie, von M_1 wurde dies bereits öfters erwähnt).

b) Maximum.

 $\frac{dy}{dx} = \frac{3l^2 - 3x^2}{2l^3} = 0,$

 $x_{\max y} = l$, $\max y = 1$. Es ist bei x = l das max y = 1ein mathematisches Maximum, die Kurve besitzt dort eine horizontale Tangente.

Der ganze Verlauf der A_1 -Einflußlinie gestaltet sich nach Fig. 19. — A_1 kann nicht entstehen, es gibt nur ein Belastungsschema für **max** A_1 .



Einflußlinie der Querkraft in einem beliebigen Querschnitte des 1. Feldes.

Wie bereits früher angeführt wurde, ist die Querkraft eines kontinuierlichen Trägers im Felde ab durch die Beziehung



 $T=\mathfrak{T}+rac{M_b-M_a}{l}$, b (siehe Fig. 20), wo \mathfrak{T} die Querkraft des einfachen Balkens \overline{ab} , M_b und M_a die Stützenmomente des kontinuierlichen Trägers bedeuten.

Für den Träger auf 3 Stützen mit gleichen Feldweiten gilt für einen Querschnitt des 1. Feldes

$$M_b = M_1$$
, $M_a = M_0 = 0$,

so daß

$$T = \mathfrak{T} + \frac{M_1}{I}$$

Die Einflußlinie entsteht somit durch Addition der Ordinaten der T-Einflußlinie und der $\frac{M_1}{I}$ - Einflußkurve.

1. Verlauf der Einflußlinie im 1. Felde.

Befindet sich eine Last P im 1. Felde, so erzeugt sie in einem Querschnitte dieses Feldes, das als frei aufliegender Träger betrachtet wird, die Querkraft S, deren Einflußlinie aus 2 bekannten Geraden besteht.



Fig. 21.

von µl (siehe Fig. 21),

und für P = 1 unter Benutzung der Gleichung (1) die Gleichung der Einflußlinie

$$y = \frac{x^3 - 5 l^2 x}{4 l^3} \cdots$$
links von μl
$$y = \frac{4 l^3 - 5 l^2 x + x^3}{4 l^3} \cdots$$
rechts von μ

a) Linker Ast der Kurve. Es gilt hier die Gleichung:

$$y = \frac{x^3 - 5 l^2 x}{4 l^3} \cdots \cdots \cdots (16).$$

Den Höchstwert erreicht y bei $x = \mu l$

$$y_{\min} = \frac{\mu^3 - 5 \,\mu}{4} \quad \cdots \quad \cdots \quad (17),$$

wir schrieben y_{\min} , da der Wert negativ ist und die Gleichung nur negative Werte liefert; es ist nämlich

 $0 \le \mu \le 1$

und für ein positives y muß

d. i.

$$\mu^{3} - 5\mu \geq 0$$
$$\mu \geq +\sqrt{5},$$

was keinen statischen Wert hat.

Für $\mu = 1$ ist das größte

$$y_{\min} = -1$$

d. i. die größte Ordinate der negativ genommenen A_1 -Einflußlinie.

 β) Rechter Ast der Kurve.

Die Gleichung lautet

$$y = \frac{4 l^3 - 5 l^2 x + x^3}{4 l^3} \cdots \cdots \cdots (12).$$

Es ist dies die Gleichung der A_0 -Einflußlinie, was auch zu erwarten war, da

$$T = A_0 - \Sigma_0^{\mu l} P$$

und da sich die Kraft P = 1 hinter μl befindet,

$$T = A_0$$
.

Der größte Wert

$$y_{\max}$$
 für $x = \mu l$
 $y_{\max} = \frac{\mu^3 - 5\mu + 4}{4} \cdots \cdots \cdots (18).$

Im Querschnitt μl besitzt somit die Einflußlinie 2 Ordinaten, von denen der Wert (18) einem unendlich nahen Querschnitte rechts und der Wert (17) einem unendlich nahen Querschnitte links angehört.

Es ist weiter durch Vergleich von (17) und (18)

$$y_{\max} + (-y_{\min}) = 1$$
,

wie beim freiaufliegenden Träger.

Für den Querschnitt $\mu = 0$ kommen wir zu

 $y_{\rm max} = 1$,

der größten Ordinate der A₀-Einflußlinie.

2. Verlauf der Kurve im 2. Felde.

Befindet sich die Last P=1 im 2. Felde, so erzeugt sie im Querschnitte μl des als freiaufliegend betrachteten Feldes $\overline{a_0 a_1}$, die Querkraft $\mathfrak{T}=0$,





 $T = \frac{M_1}{I} = A_0$.

es ist somit

Wir kommen somit zur Kurve (13).

(Fig. 22.)

Es ist schließlich der ganze Verlauf dieser Kurve aus Fig. 23 ersichtlich. Aus dieser Einflußlinie ergeben sich sodann die beigefügten Belastungsschemen.



Fig. 23.

Handelt es sich um einen Querschnitt μl des 2. Feldes, dann genügt es, den symmetrisch gelegenen Querschnitt des 1. Feldes zu betrachten und das



Fig. 24.

Spiegelbild seiner Querkraft-Einflußlinie und Belastungsschemen anzuwenden, wobei jedoch die Vorzeichen verwechselt werden müssen nach dem in Fig. 24 veranschaulichten Schema.

Für die Berechnung der Momente und Querkräfte bei gleichmäßig verteilter Last dienen die Winklerschen Tabellen. Wir wollen jedoch einheitlich mit vorausgegangenem uns auch hier damit befassen.

An Stelle der Einflußlinienordinaten tritt nun die Einflußfläche, das ist die zwischen Einflußlinie und X-Achse gelegene Fläche.

Ist F irgendeine Belastungsfläche, J eine Einflußlinie, dann ist $M = \int_{p}^{x_2} dx \cdot y$

(Fig. 25); wir nehmen allgemein p als variabel, also keine gleichmäßig verteilte Last.

Graphisch können wir dann M bestimmen, wenn auch p rechnerisch als Funktion von x nicht gegeben ist. Wir betrachten $p \cdot dx$ als Kräfte und es ist dann M das statische Moment der Kräfte $p \cdot dx$, in Entfernungen y angreifend, zur X-Achse.

Wollen wir nun M rechnerisch bestimmen, muß

p = f(x)

gegeben sein.

Dann ist

$$M = \int_{x}^{x_{1}} f(x) y \cdot dx$$

und nachdem aus der Gleichung der Einflußlinie

 $y = \varphi(x)$

ist, f(x) y = F(x) wieder irgendeine Funktion von x, so daß schließlich

$$M = \int_{x_1}^{x_2} F(x) \, dx \, .$$

Ist nun p =**konst.**, d. h. handelt es sich um eine gleichförmig verteilte Last, dann ist

$$M = p \int_{x_1}^{x_2} y \, dx,$$

wobei y dx ein Element der Einflußfläche und $\int_{x}^{x_2}$ daher die Einflußfläche in den betreffenden Grenzen bedeutet.

Es ist nun das Verfahren mit Einflußlinien auch hier sehr einfach und wird besonders bei ungleichmäßig verteilter zusammenhängender Last (z. B. Dreieckbelastung) unumgänglich sein.

Für gleichförmig verteilte Belastung werden oft graphisch die Kurven der maximalen und minimalen Biegungsmomente, sowie der maximalen und minimalen



Querkräfte bestimmt. Wir wollen in unserem Falle auch zu diesen Linien analytisch gelangen, wodurch dann ihre Aufzeichnung besonders einfach sich gestalten wird.

- 16 -

Die Werte der maximalen Biegungsmomente.

Befindet sich ein Querschnitt im 1. Felde, so hat seine Einflußlinie, falls er zwischen 0 und $\varrho_1(\frac{4}{5}l)$ liegt, den in Fig. 26 angegebenen Verlauf.



Um **max** *M* zu erzielen, belasten wir somit das 1. Feld voll. Nun ist

$$\max M = p \int_{0}^{l} y \, dx$$

Die Fläche $\int y dx$ besteht

aus 2 Teilen: von **0** bis µ*l* ist als obere Begrenzung der linke Ast der Einflußlinie, von µ*l* bis *l* der rechte Ast Aⁿ der Einflußlinie, somit mit Hilfe der Formeln (4) und (8)

$$F_{1} = \int_{0}^{\mu_{I}} \left[x \left(1 - \frac{5\mu}{4} \right) + \frac{\mu}{4 l^{2}} x^{3} \right] dx$$

Fig. 26.

$$F_2 = \int_{\frac{\mu}{4}}^{\frac{5}{4}} \frac{\mu}{l^2} (4 l^3 - 5 l^2 x + x^3) dx$$

und nach Durchführung der Integration

$$\underline{\max M_{\mu_l}^p = p l^2 \left[\frac{7}{16} \mu - \frac{\mu^2}{2} \right]} \cdots \cdots \cdots (19).$$

Durch Einsetzen $\mu = 0,1, 0,2 \cdots 0,8$ erhalten wir die Werte der Winklerschen Tabellen.

Größtes Maximum.

S

Die Gleichung (19) gibt als **max** M-Kurve zwischen a_0 und ϱ_1 eine quadratische Parabel an. Das größte Maximum oder maximum maximorum M erhalten wir bei

$$\frac{d \max M}{a \mu} = 0.$$

Es ist hier max M als abhängig Variable der unabhängig Variablen μ aufgefaßt. Aus (19) ergibt sich durch Differentiierung

omit

$$0 = p l^{2} [\frac{\tau}{16} - \mu],$$

$$\mu = \frac{\tau}{16}$$

$$\underline{x_{\max} \max M} = \frac{\tau}{16} l \cdots \cdots (20)$$
and
$$\max \max M = \frac{4.9}{16} p l^{2} \cdots \cdots (21)$$

Befindet sich jedoch der Querschnitt μl zwischen $\varrho_1(\frac{4}{5}l)$ und $a_1(l)$, dann liefert der linke Ast der Einflußlinie eine Belastungsscheide, deren Lage durch Gleichung (5) gegeben ist.

Nennen wir ihre Entfernung von

$$a_0 \cdots vl$$
,

dann ist

$$v l = \frac{2l}{\sqrt{\mu}} \sqrt{\frac{5\mu}{4} - 1}$$

 $\frac{4,5}{4} - 1 = 1/\frac{5}{9}$

Um nun max M zu erzielen, belasten wir nach Fig. 27. Es ist dann

$$F_{1} = \int_{\nu l}^{\mu_{l}} \left[x \left(1 - \frac{5\mu}{4} \right) + \frac{\mu}{4l^{2}} x^{3} \right] dx = l^{2} \left(\mu^{2} - \nu^{2} \right) \left[\frac{1}{2} - \frac{5\mu}{8} + \frac{\mu}{16} \left(\mu^{2} + \nu^{2} \right) \right]$$

weiter ist wie vor

$$F_{2} = \int_{\mu_{l}}^{l} \int_{l}^{\frac{\mu}{4}} \frac{\mu^{2}}{4} \left[4l^{3} - 5l^{2}x + x^{3} \right] dx = \frac{\mu^{2}}{4} \left[\frac{7}{4} - 4\mu + \frac{5}{2}\mu^{2} - \frac{\mu^{4}}{4} \right].$$

Nun ist

$$\max M = p \left(F_1 + F_2 \right)$$
$$\mu = 0.9$$

z. B.

dann ist

$$F_{1} = l^{2} (0,81 - 0,555) \left[0,5 - 0,5625 + \frac{0,9}{16} (0,81 + 0,555) \right]$$

$$F_{2} = l^{2} \cdot 0,225 \left[1,75 - 3,6 + 2,025 - 0,164025 \right]$$

$$F_{1} + F_{2} = 0,00611 l^{2},$$

und

und

welchen Wert wir auch in den erwähnten Tabellen finden. Für $\mu = 1$ ist $\nu = 1$, $M = M_1 = 0$, es kann M_1 nicht positiv werden, wie wir bereits früher schon sahen.

Die Werte der minimalen Biegungsmomente.

Befindet sich der Querschnitt μl zwischen a_0 und ϱ_1 , so belasten wir, um min M zu erzielen, das Feld $\overline{a_1 a_2}$ voll (Fig. 28].

Es ist dann mit Hilfe von (1 a)

$$M = p \int_{0}^{l} y \, dx = p \frac{\mu}{4 l^2} \int_{l}^{0} x' \, (l^2 - x'^2) \, dx'$$

dx' = -dx

das Vorzeichen +, da

min
$$M^p_{\mu l} = -p \frac{\mu l^2}{16} \cdots \cdots \cdots (22)$$

2

Lederer, Einflußlinien.

Gleichung (22) ist die Gleichung einer Geraden, wie sich auch bekanntlich die **min** M-Kurve zwischen a_0 und ϱ_1 ergibt.

Befindet sich jedoch der Querschnitt zwischen ϱ_1 und a_1 , so müssen wir nebst dem Felde $\overline{a_1 a_2}$ noch im 1. Felde von a_0 bis zur Belastungsscheide belasten. (Fig. 29.)

Es ist nun

 $\min M = p \left(F_1 + F_2 \right).$

 F_1 ist wie vor

$$F_1 = -\frac{\mu l^2}{16}$$

und F_2 unter Zuhilfenahme von (4)

$$\frac{F_2 = \int_{0}^{\nu_1} \left[x \left(1 - \frac{5\mu}{4} \right) + \frac{\mu}{4l^2} x^3 \right] dx}{x^3 \left[x \left(1 - \frac{5\mu}{4} \right) + \frac{\mu}{4l^2} x^3 \right] dx}$$

$$= l^{2} \left[\left(1 - \frac{5\mu}{4} \right)^{\frac{\nu^{2}}{2}} + \frac{\mu\nu^{4}}{16} \right] \cdot (23)$$

Für
$$\mu = 1$$
 ist $\nu = 1$, und ist $F_1 = -\frac{l^2}{16}$, $F_2 = -\frac{l^2}{16}$, so daß
 $\underline{\min M} = \max (-M_1)^p = -\frac{p \, l^2}{8} \cdots \cdots \cdots (24)$,

ein bekannter Wert.

Moment bei gleichmäßig verteilter Last über den ganzen Träger.

Auch für diese gleichförmige Belastung finden wir Werte in Tabellen, bei ungleichmäßiger Verteilung der zusammenhängenden Belastung kann wieder, wie bereits angeführt, vorgegangen werden. Es sind die Flächenintegrale über beide Felder zu erstrecken, dann gibt es keinen Unterschied in der Lage der Querschnitte.

Es ist

$$M^g = g(F_1 + F_2 + F_3).$$

(Fig. 30.)

$$F_{1} = \int_{0}^{\mu} \left[x \left(1 - \frac{5\mu}{4} \right) + \frac{\mu}{4l^{2}} x^{3} \right] dx$$

$$F_{2} = \int_{\mu}^{l} \frac{4}{4l^{2}} \left[4l^{3} - 5l^{2}x + x^{3} \right] dx$$

$$F_{3} = \frac{\mu}{4l^{2}} \int_{0}^{0} x' \left(l^{2} - x'^{2} \right) dx'$$

19

so daB

$$\underline{M^{g} = g l^{2} \left[\frac{3}{8} \mu - \frac{\mu^{2}}{2} \right]} \cdots \cdots \cdots (25).$$

Setzen wir anstatt

 $g \cdots p$,

dann ist

$$M^{p} = p l^{2} \left[\frac{3}{8} \mu - \frac{\mu^{2}}{2} \right] = \max M^{p}$$
$$+ \min M^{p},$$

was auch sein muß, da sich die beiden Belastungsschemen ergänzen.

Durch Einsetzen $\mu = 1$ $M_1^g = -\frac{g l^2}{8} \cdots \cdots \cdots (26)$

im Einklange mit (24), da auch dort voll belastet war.

Formel (25) liefert uns wieder die Werte der Tabellen und gibt als *M*^g-Kurve eine quadratische Parabel an.

Für $M^g = 0$ erhalten wir aus (25) beim linken Auflager und bei $\frac{3}{4}l$ Wendepunkte der Biegelinie.

Für $\mu = \frac{3}{8}$ resultiert

Werte der maximalen Querkräfte.

Um max T zu erzielen, belasten wir wie in Fig. 31 angedeutet.

Es ist nun

 $\max T = p F_1$

(F_1 ist ausgedrückt in Längenmetern, da die Ordinaten Zahlen sind; somit ist max T = m > kg/m = kg).

2*

20

Unter Benutzung der Gleichung (12)

$$F_1 = \int_{\mu_l}^{l} \frac{4l^3 - 5l^2x + x^3}{4l^3} dx$$

und somit

$$\max T^{p} = \frac{pl}{4} \left[\frac{7}{4} - 4\mu + \frac{5}{2}\mu^{2} - \frac{\mu^{4}}{4} \right] \cdots \cdots \cdots (27).$$

Für $\mu = 1$ max $T = 0.$
Für $\mu = 0$ max $T^{p}_{\max} = -\frac{7}{16}pl = \max A^{p}_{0} \cdots \cdots (28).$

wie auch aus (12) zu berechnen ist.

Gleichung (27) gibt als max T-Kurve eine biquadratische Parabel an.

Werte der minimalen Querkräfte.

Um min T zu erzielen, belasten wir nach Fig. 32. min $T^p = p(F_1 + F_2)$ und mit Hilfe der Gleichungen (16) und (13)

Für $\mu = 1$

$$\min T^p = -\frac{10}{16} p l = -\max \frac{A_1}{2},$$

wo x' = l - x, dx' = -dxund somit nach Durchführung

so daß

$$\max A_1^p = \frac{5}{4} p l \cdots \cdots (30),$$

wie sich auch aus (15) mittelst Integration ergibt.

Für $\mu = 0$

$$\underline{\min A_0^p = -\frac{pl}{16}} \cdots \cdots \cdots (31).$$

Gleichung (29) gibt wieder eine biquadratische Parabel an und liefert ihre Ordinaten.

Querkräfte bei gleichmäßig verteilter Last über den ganzen Träger. Mit Bezeichnung der Flächen aus Fig. 33 ist

$$T^{g} = g \left[\int_{0}^{\frac{\mu}{2^{3}}} \frac{1}{4l^{3}} dx + \int_{\mu}^{l} \int_{l}^{\frac{\mu}{4}l^{3}} \frac{1}{4l^{3}} dx + \frac{1}{4l^{3}} \int_{l}^{0} x' (l^{2} - x'^{2}) dx' \right]$$

 $T^g = g(F_1 + F_2 + F_3)$

$$\underline{T^g = \frac{gl}{8} [3-8\mu]} \cdots \cdots (32).$$

Für $\mu = 0$

$$A_0^g = \frac{3}{8}gl \cdots (33),$$

wie wir auch aus (12) bestimmen können.

Für $\mu = 1$

$$T^{g} = -\frac{A_{1}^{g}}{2} = -\frac{5}{8}gl$$
$$A_{1}^{g} = -\frac{5}{4}gl \cdots \cdots (34),$$

wie man auch aus (15) berechnen kann.

Gleichung (32) gibt als T^g -Linie eine Gerade an, welche die X-Achse bei $\frac{3}{2}l$ schneidet, wo dann auch **max** M^g eintritt.

Es ist weiter

$$A_0^g + A_1^g + A_2^g = 2gl,$$

wie auch die Gleichgewichtsbedingung der senkrechten Kräfte erfordert. F_{a} F_{a} F_{a} F_{a} a_{a} F_{a} a_{a} F_{a} f_{a

Handelt es sich um einen Querschnitt des 2. Feldes, ge-

nügt es, den symmetrisch gelegenen Querschnitt des 1. Feldes zu betrachten und nach dem bereits erwähnten Grundsatze, verschieden, je nachdem, ob es sich um ein Moment oder um eine Querkraft handelt, vorzugehen.

В.

Der kontinuierliche Träger mit 2 ungleichen Feldern.

Wir gehen wieder von der Clapeyronschen Gleichung aus, wie sie weiter oben angeführt wurde.

In unserem Falle ist einzusetzen:

$$M_{r-1} = M_0 = M_{r+1} = M_2 = 0$$

 $M_r = M_1$
 $l_r = l_1, \qquad l_{r+1} = l_2.$

Befindet sich die Last im 1. Felde, dann ist wieder

$$\frac{\mathfrak{N}_{1}}{l_{1}} = \frac{Pp\left(\lambda_{1}l - p\right)\left(\lambda_{1}l + p\right)}{\lambda_{1}l}, \qquad \mathfrak{N}'_{2} = 0$$

und somit

$$M_1 = \frac{-Pp(\lambda_1^2 l^2 - p^2)}{2\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2) l^2}.$$

Befindet sich die Last im 2. Felde, dann ist $\mathfrak{N}_1 = 0$

$$\frac{\mathfrak{N}_{2}}{l_{2}} = \frac{Pp\left(\lambda_{2}l - p\right)\left(2\lambda_{2}l - p\right)}{\lambda_{3}l}$$

und hierauf

$$M_{1} = \frac{-Pp (2 \lambda_{2}^{2} l^{2} - 3 \lambda_{2} lp + p^{2})}{2 \lambda_{2} (\lambda_{1} + \lambda_{2}) l^{2}}.$$

Setzen wir nun die Last P=1, und p=x als veränderlich, dann kommen wir zur Gleichung der Einflußlinie des Stützenmomentes M_1

$$\frac{y = \frac{-x (\lambda_1^2 l^2 - x^2)}{2 \lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_2) l^2} \cdots \cdots (1) \text{ im 1. Felde.}}{y = \frac{-x (2 \lambda_2^2 l^2 - 3 \lambda_2 lx + x^2)}{2 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) l^2} \cdots (2) \text{ im 2. Felde}}$$

Durch Einsetzen $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ kämen wir zur Formel (1) des Trägers mit gleichen Feldern.

23

Aus den Formeln (1), (2), die wieder kubische Parabeln angeben, können wir, ähnlich wie früher vorgehend, die Einflußlinien sämtlicher Werte ableiten. Es wird sich aber empfehlen, dies erst im speziellen Falle, wo λ_1 , λ_2 durch bequeme Zahlen ausgedrückt werden, zu tun.

C.

Der kontinuierliche Träger mit 3 gleichen Öffnungen.

Unter denselben Voraussetzungen, wie beim Träger auf 3 Stützen, schreiben wir auch hier die Clapeyronsche Gleichung auf.

 a_0 a_1 a_2 a_3 l Fig. 35.

Der Träger ist zweifach statisch unbestimmt und es läßt sich die Dreimomentengleichung zweimal aufschreiben.

$$M_0 l + 4 M_1 l + M_2 l + \frac{\Re_1}{l} + \frac{\Re_2}{l} = 0$$

$$M_1 l + 4 M_2 l + M_3 l + \frac{\Re_2}{\eta} + \frac{\Re_3}{\eta} = 0.$$

Nachdem infolge der Auflagerung $M_0 = M_3 = 0$, folgt

$$4 M_1 l + M_2 l + \frac{\mathfrak{N}_1}{l} + \frac{\mathfrak{N}_2}{l} = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{M_1l + 4M_2l + \frac{3t_2}{l} + \frac{3t_3}{i} = 0}{(b)}$$

Ist eine Last im 1. Felde, dann ist

$$\frac{\mathfrak{N}_1}{l} = \frac{Ppp'(l+p)}{l}, \qquad \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_3' = 0$$

und die Gleichungen (a) (b) lauten

(a')
$$4 M_1 l + M_2 l + \frac{P_p p'(l+p)}{l} = 0$$

(b') $M_1 l + 4 M_2 l = 0$.
(b') $M_2 = -\frac{M_1}{4}$

Aus (b')

und durch Einsetzen dieses Wertes in (a')

$$M_{1} = -\frac{4 P p p^{i} (l+p)}{15 l^{2}} , M_{2} = +\frac{P p p^{i} (l+p)}{15 l^{2}}$$

Für die Last P=1, p=x, p'=l-x als variabel, ist dann die Gleichung der Einflußlinien der Stützenmomente im 1. Felde

$$\frac{y = -\frac{4 x (l^2 - x^2)}{15 l^2}}{y = +\frac{x (l^2 - x^2)}{15 l^2}} \cdots \cdots \cdots (1) \text{ die Einflußlinie des Momentes } M_1,$$

25 -

Befindet sich eine Last im 2. Felde, so ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_1 &= \mathfrak{N}'_3 = 0\\ \mathfrak{N}_2 &= Ppp'(l+p)\\ \mathfrak{N}'_3 &= Ppp'(l+p') \end{aligned}$$

und somit lauten dann die Gleichungen (a), (b)

(a'')
$$4 M_1 l + M_2 l + \frac{Ppp'(l+p')}{l} = 0$$

(b")
$$M_1 l + 4 M_2 l + \frac{Ppp'(l+p)}{l} = 0$$
,

woraus wieder durch Auflösungen der Gleichungen (a"), (b")

$$\frac{M_1 = \frac{-Ppp'}{15 l^2} (7 l - 5 p)}{M_2 = \frac{-Ppp'}{15 l^2} (2 l + 5 p)}$$

und für

$$P = 1, p = x, p' = l - x,$$

die Gleichungen der Einflußlinien der Stützenmomente im 2. Felde.

Für
$$M_1$$

 $y = -\frac{1}{15 l^2} (7 l^2 x - 12 l x^2 + 5 x^3) \cdots (3).$
Für M_2
 $y = -\frac{1}{15 l^2} (7 l^2 x' - 12 l x'^2 + 5 x'^3) \cdots (4).$

Es ist im 2. Felde die M_2 -Einflußlinie das Spiegelbild der M_1 -Einflußlinie, ebenso wird im 3. Felde die M_2 -Einflußlinie das Spiegelbild der M_1 -Einflußlinie im 1. Felde sein, somit die Gleichung

$$y = -\frac{4 x' (l^2 - x'^2)}{15 l^2} \cdots \cdots \cdots (6)$$

haben und die M_1 -Einflußlinie hier das Spiegelbild der M_2 -Einflußlinie im 1. Felde sein, somit die Gleichung

$$y = \frac{+x^{\prime}(l^{2} - x^{\prime 2})}{15 l^{2}}$$

= $\frac{1}{15 l^{2}} (2 l^{2} x - 3 l x^{2} + x^{3}) \cdots (15)$

besitzen.

Es genügt somit nach vorausgegangenem, nur die Gleichungen und den Verlauf der M_1 -Einflußlinie zu bestimmen, da die M_2 -Einflußlinie ein Spiegelbild der ersteren ist.

Einflußlinie des Stützenmomentes M₁.

Wir gelangten zu den Formeln (1), (3), (5); nun wollen wir uns näher mit ihnen befassen.

1. Verlauf der Einflußlinie im 1. Felde.

$$\underline{y = -\frac{4}{15 l^2} x (l^2 - x^2)} \cdots \cdots \cdots (1).$$

Die Gleichung (1) gibt wieder eine kubische Parabel an.

26 -

y=0

 $x=0, \quad x=\pm l.$

a) Belastungsscheiden.

Die Bedingung ist

aus (1)

 $0 \le x \le l, x(l^2 - x^2) \ge 0.$ Weiter ist für Es ist somit das ganze 1. Feld negativ beitragend zum Stützenmomente M_1 .

b) Maximum.

 $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{15l^2} (l^2 - 3x^2) = 0$ $x_{\max y} = \frac{l}{\sqrt{3}} \cdots \cdots \cdots (7)$ und $\max y = \frac{-8}{45\sqrt{3}} l \cdots \cdots (8).$

2. Verlauf der Einflußlinie im 2. Felde.

$$y = -\frac{1}{15 l^2} (7 l^2 x - 12 l x^2 + 5 x^3) \cdots (3).$$

a) Belastungsscheiden.

Der Bedingung y=0 entsprechen aus (3) die Wurzeln x=0, x=l und ohne statische Bedeutung $x = \frac{7}{5}l$.

Nachdem
$$x(x-l)(x-\frac{7}{5}l) \ge 0$$

ist, ist auch das ganze 2. Feld zum Stützenmomente M_1 negativ beitragend. b) Maximum.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{15 l^2} (7 l^2 - 24 lx + 15 x^2) = 0.$$

Statischen Wert hat die Wurzel

$$\underline{x_{\max y} = 0,38367 \, l \, \cdots \, (9)}_{\max y = -0,080112 \, l \, \cdots \, (10).}$$

und

woraus

 x_i

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{1}{15 l^2} (-24 l + 30 x),$$

= $\frac{4}{5} l \cdots \cdots \cdots (11), \quad y_i = 0,032 l.$

3. Verlauf der Einflußlinie im 3. Felde.

Es ist hier $M_1 = \frac{-M_2}{n}$ und die M_2 -Einflußlinie ist da das Spiegelbild von a. 0,3842 max(-M max(+M

 M_1 im 1. Felde, somit gibt es für M_2 nur negative Werte, und für M_1 nur positive; es ist das ganze 3. Feld positiv beitragend zum Stützenmomente M_1 .

Die Gleichung lautet:

$$y = +\frac{1}{15 l^2} (2 l^2 x - 3 l x^2 + x^3)$$

Es ist
max $y = \frac{2}{1000} l \cdots (12)$

451/3

Fig. 36.

$$x' = l - x = \frac{l}{\sqrt{3}} \cdots \cdots (12 a).$$

Der ganze Verlauf der Einflußlinie für M_1 gestaltet sich wie aus Fig. 36 ersichtlich.

27 -

Aus der Einflußlinie ergeben sich auch ohne weiteres die Belastungsschemen.

Die Einflußlinie für M_2 und auch die Belastungsschemen sind, wie schon angeführt wurde, Spiegelbilder derer von M_1 .

Einflußlinie des Biegungsmomentes im beliebigen Querschnitte μl des 1. Feldes.

Wie beim Träger auf 3 Stützen angeführt wurde, ist das Biegungsmoment in einem Querschnitte des kontinuierlichen Trägers

$$M=\mathfrak{M}+\frac{M_ba+M_ab}{l},$$

wo M das Biegungsmoment in demselben Querschnitte des betreffenden Feldes ist, wenn dieses Feld als einfacher Balken aufgefaßt wird.

 M_b ist das rechte, M_a das linke Stützenmoment des Feldes \overline{ab} . (Siehe Fig. 37.)

In unserem Falle ist $M_b = M_1$, $M_a = M_0 = 0$, $a = \mu l$. Somit ist weiter $M = \mathfrak{M} + \mu M_1 \cdots \cdots \cdots \cdots (13)$.

Es entsteht die Einflußlinie durch Addition der Ordinaten der \mathfrak{M} -Einflußlinie und der μ fachen Werte der M_1 -Einflußlinie.

1. Verlauf der Kurve im 1. Felde.

Befindet sich die Last P im 1. Felde, so erzeugt sie im Querschnitte μl des einfachen Trägers $\overline{a_0 a_1}$ das Moment

wenn sie sich links von μl befindet. (Siehe Fig. 38.)

Somit besteht wieder die Einflußlinie aus 2 Ästen, die wir unter Zuhilfenahme der Formel (1) für die M_1 -Einflußlinie bestimmen.

a) Linker Ast.

Durch Addition der Werte aus (a), wobei P=1 gesetzt wird, und aus (1) bekommen wir die Gleichung

$$y = \frac{4 \,\mu \, x^3 + (15 - 19 \,\mu) \, l^2 x}{15 \, l^2} \quad \cdots \qquad (14).$$

Untersuchen wir wieder diese Gleichung nach statisch wichtigen Werten.

bei

- 28

v = 0

a) Belastungscheiden.

Bedingung

aus (14) ist eine Wurzel $x_1 = 0$, sodann

$$\underline{x = \pm \sqrt{\frac{19\,\mu - 15}{4\,\mu} \cdot l}} \cdots \cdots \cdots (15).$$

Statischen Wert hat nur eine positive und reale Wurzel; damit (15) keinen imaginären Wert liefert, muß

$$\frac{\frac{19\,\mu - 15}{4\,\mu}}{\underline{\mu} \leq \frac{15}{19}}.$$

Die letzte Ungleichheit drückt nun folgendes aus: Befindet sich ein Querschnitt zwischen 0 und $\frac{1}{9}l$ des 1. Feldes, so trägt das ganze 1. Feld zu seinem Moment positiv bei, befindet sich jedoch der Querschnitt zwischen $\frac{1}{9}l$ und l. dann besteht eine Belastungsscheide, deren Lage durch Formel (15) gegeben wird. Die Grenze zwischen diesen beiden Querschnittsgattungen bildet der rechte Festpunkt des 1. Feldes, dessen Lage wir somit zu $\frac{1}{19}l$ festgestellt haben.

Maximum.

Die Bedingung des mathematischen Maximums oder Minimums ist

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12\,\mu x^2 + (15 - 19\,\mu)\,l^2}{15\,l^2} = 0$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{19\,\mu - 15}{12\,\mu} \cdot l \,\cdots \,(16)}.$$

Das mathematische Maximum (die negative Wurzel) hat hier keine statische Bedeutung, es entsteht y_{max} im Querschnitte selbst, d. i. im Schnittpunkte beider Kurvenäste.

Für

$$x = \mu l$$

$$y_{\text{max}} = \frac{\mu l}{15} (4 \,\mu^3 - 19 \,\mu + 15) \cdots \cdots (17).$$

Ist jedoch $\mu > \frac{15}{19}$, dann liefert (16) ein mathematisches Minimum, die größte negative Ordinate des unter der *X*-Achse verlaufenden Teiles der Einflußlinie.

$$x_{\min y} = \sqrt{\frac{19 \,\mu - 15}{12 \,\mu}} \cdot l \quad \cdots \quad (16).$$

Beim betreffenden Querschnitt in den Tabellen ist auch diese minimale Ordinate angegeben.

 β) Rechter Ast der Einflußlinie im 1. Felde.

Unter Zuhilfenahme der Werte aus (b) und (1) erhalten wir die Gleichung einer kubischen Parabel.

$$y = \frac{4 \,\mu x^3 - 19 \,\mu l^2 x + 15 \,\mu l^3}{15 \,l^2} \,\cdots \cdots \,(18).$$
29 ---

a) Belastungsscheiden.

$$y = 0.$$

Nachdem eine Wurzel aus (18) x = l, bekommen wir durch Division mit (x - l)

 $0 = 4 \,\mu x^2 + 4 \,\mu l x - 15 \,\mu l^2.$

Diese Gleichung liefert keinen statischen Wert, somit keine Belastungsscheide.

Wir gelangen nur aus der Gleichung des linken Astes zur Lage des rechten Festpunktes, der linke Festpunkt fällt mit dem linken Stützpunkt zusammen.

Maximum.

 y_{max} ist bereits bestimmt durch Formel (18).

Die Kurven schneiden sich bei $x = \mu l$, $y = y_{max}$, was wir ähnlich wie beim Träger auf 3 Stützen nachweisen können.

2. Verlauf der Einflußlinie im 2. Felde.

Befindet sich eine Last P im 2. Felde (Fig. 39), so erzeugt sie im Querschnitte μl des freiaufliegenden Trägers $\overline{a_0 a_1}$ das Moment

 $\mathfrak{M}=0.$

Gleichung (13) lautet sodann

 $M = \mu M_1$,

somit unter Benutzung der Formel (3)

 $y = -\frac{\mu}{15l^2} (7l^2x - 12lx^2)$

 $+5x^{3}$ (19).

Diese Kurve entsteht aus der M_1 -Einflußlinie im 2. Felde durch Multiplikation der Ordinatenwerte mit μ ; es ist somit

$$\max y = -\mu \cdot 0,080112 \, l \quad \cdots \quad (20)$$

bei

da

$$x = 0,38367 l$$
 (9).

Das ganze 2. Feld ist, da für M_1 , also auch $\mu M_1 = M$, für das Moment M negativ beitragend.

In $x_i = \frac{4}{5}l$ besitzt die Kurve einen Wendepunkt, dessen Ordinate

 $y_i = 0,032 \,\mu l$ ist.

3. Verlauf der Einflußlinie im 3. Felde.

Auch hier gilt

 $M = \mu M_1$, (Fig. 40.) $\mathfrak{M}=0.$ P





a

as

as

Die Gleichung der Einflußlinie unter Zuhilfenahme der Formel (5) lautet:

$$y = \frac{\frac{\mu}{15 l^2} (2 l^2 x - 31 x^2 + x^3) \cdots (21)}{\max y = \frac{2 \mu}{45 \sqrt{3}} l \cdots (22)}$$

Es ist

$$\frac{1}{x' = l - x = \frac{l}{\sqrt{3}}} \cdots \cdots \cdots (12 a)$$

bei

Der ganze Verlauf der Einflußlinie des Biegungsmomentes eines Querschnittes im 1. Felde ist nun folgender:





a) Befindet sich der Querschnitt zwischen a_0 und $\varrho_1\left(\frac{15}{19}l\right)$, dann ist das erste Feld positiv beitragend und es ergeben sich die in Fig. 41 angeführten Belastungsschemen für $\max_{\min}^{\max} M$.



Fig. 42.

b) Befindet sich jedoch der Querschnitt zwischen ϱ_1 und a_1 , dann liefert Gleichung (15) eine Belastungsscheide und es ändern sich unter Berücksichtigung der positiven und negativen Einflußflächen auch die Belastungsschemen (Fig. 42).

Gefährlicher Querschnitt des 1. Feldes.

Als gefährlichen Querschnitt bezeichnen wir wieder den des positiven Maximums aus bereits erwähnten Gründen. Die maximale Ordinate der Einflußlinie liefert uns Gleichung (17)

$$y_{\max} = \frac{\mu l}{15} (4 \, \mu^3 - 19 \, \mu + 15) \cdots (17).$$

Der geometrische Ort der Kurvenspitzen ist eine biquadratische Parabel. Suchen wir nun das Maximum dieser y_{max} -Werte, dann muß

$$\frac{d y_{\text{max}}}{d \mu} = 0$$

$$\frac{d y_{\text{max}}}{d \mu} = l(\frac{16}{15} \mu^3 - \frac{38}{15} \mu + 1) = 0,$$

somit

$$16 \,\mu^3 - 38 \,\mu + 15 = 0$$
.

Durch Auflösung dieser kubischen Gleichung gelangen wir zum Werte

$$\mu_{\max} y_{\max} = 0,4277 \, l \, \cdots \, (23)$$

und

$$\max y_{\max} = 0,205 \, l \, \cdots \, (24)$$
.

ao an an an

Fig. 43.

0,42771 ist der gefährliche Querschnitt für eine bewegliche Einzellast.

Einflußlinie des Biegungsmomentes im beliebigen Querschnitte μl des 2. Feldes.

Die Beziehung

$$M = \mathfrak{M} + \frac{M a + M_a b}{l}$$

läßt sich hier ausdrücken, wenn wir $M_a = M_1$, $M_b = M_2$, $a = \mu l$, $b = (1 - \mu) l$ setzen (Fig. 43).

$$M = \mathfrak{M} + M_2 \mu + M_1 (1 - \mu)$$
.....(25).

Die Einflußlinie der M-

Werte entsteht somit durch Addition von 3 Ordinaten, nämlich der \mathfrak{M} -Einflußlinienordinaten, der μ fachen M_2 -Einflußlinienordinaten und der $(1 - \mu)$ fachen M_1 -Einflußlinienordinaten.

1. Verlauf der Kurve im 1. Felde.





Weiter ist bekanntlich im 1. Felde $M_2 = -\frac{M_1}{4}$. so daß

$$M = M_1 \left(1 - \frac{5\mu}{4} \right)$$

und folglich mit Hilfe der Gleichung der Einflußlinie für M_1 im 1. Felde (1), die Einflußlinie für M im 1. Felde durch die Gleichung

$$\underline{y = \frac{5\mu - 4}{15\,l^2} x \left(l^2 - x^2 \right)} \quad \cdots \quad (26)$$

gegeben ist.

a) Belastungsscheiden.

Bedingung:

aus (26) muß für

 $\begin{array}{c} y = 0 \\ x = 0 \quad \text{oder} \quad x = l \end{array}$

v = 0

sein, somit verläuft zwischen a_0 und a_1 die Einflußlinie auf einer Seite der X-Achse, so daß entweder das ganze 1. Feld positiv oder negativ zum Biegungsmomente M eines Querschnittes μl des 2. Feldes beiträgt.

Es wird somit auch einen Querschnitt geben, in dem eine beliebige Belastung des 1. Feldes das Moment M=0 erzeugt; bekanntlich ist dies der rechte Festpunkt des 2. Feldes.

Die Bedingung für den Festpunkt ist somit

$$\frac{5\mu-4}{15l^2}[l^2x-x^3]=0$$
,

wobei nun aber x weder 0 noch l ist; daraus folgt dann, daß

$$5\mu - 4 = 0$$
$$\mu = \frac{4}{5}$$

Somit haben wir die Lage des rechten Festpunktes des 2. Feldes zu $\frac{4}{5}l$ ermittelt. Wir werden zu derselben Lage mit Hilfe der Einflußlinie bezw. ihres



linken Astes im 2. Felde gelangen müssen. Ist nun $\mu < \frac{4}{5}$, dann liefert (26) nur negative Werte, das 1. Feld trägt negativ bei; ist $\mu > \frac{4}{5}$, dann liefert (26) nur positive Werte, das ganze 1. Feld trägt positiv bei zum Momente *M* im Querschnitte μl des 2. Feldes.

Es besteht somit der Einfluß des 1. Feldes auf das Biegungsmoment der

Querschnitte des 2. Feldes aus einer Schar von Kurven, die sich zueinander so verhalten, wie die Projektionen der M_1 -Einflußkurve auf Ebenen, deren Winkel mit der M_1 -Einflußkurvenebene $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots$ sind. Hierbei ist $\cos \varepsilon = (1 - \frac{5}{4}\mu)$ (Fig. 45).

- 32

Für den Querschnitt $\mu = \frac{4}{5}$ ist $\cos \varepsilon = 0$, $\varepsilon = 90^{\circ}$. Somit degeneriert sich die Kurve zu einer horizontalen Geraden. Wird $\mu > \frac{4}{5}$, geht die Kurve auf die positive Seite der X-Achse über und es ist das ganze 1. Feld zum Momente M positiv beitragend. Den Höchstwert erreichen die Kurvenordinaten bei $\mu = 1$, $\cos \varepsilon = -\frac{1}{4}$, somit $M = -\frac{M_1}{4} = M_2$, was auch sein muß, da $\mu = 1$ den Stützpunkt a_2 bedeutet. b) Maximum. Dies wird dort eintreten, wo M_1 -Maximum ist; das ist bekanntlich bei $\frac{1}{\sqrt{3}}$, wie auch aus dem 1. Differentialquotienten der Gleichung (26) folgert. $\max y = \frac{5\mu - 4}{15} \frac{2}{3\sqrt{3}} l \cdots (27).$ Es ist 2. Verlauf der Einflußlinie im 2. Felde. Nach (25) $M = \mathfrak{M} + M_2 \mu + M_1 (1 - \mu).$ Es ist nun wieder $\mathfrak{M} = \frac{P(l-x)}{l} \mu l$ für Lasten rechts von μl , und \mathfrak{a}_{o} $\mathfrak{M} = \frac{Px}{l} (1-\mu) l$ $\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \mathfrak{A}_{o}$ an für Lasten links von µl (Fig. 46). Die Einflußlinie für M_1 ist gegeben durch (3), M_2 , , , (4). Die Einflußlinie für M bekommen wir durch Einsetzen P=1in die Ausdrücke für \mathfrak{M} ; hierauf sind die Werte nach (25) zu addieren. Es besteht somit die Einflußlinie im 2. Felde wieder aus 2 Ästen. α) Linker Ast der Einflußlinie im 2. Felde. Die Gleichung lautet $y = \frac{(8-10\,\mu)\,l^2x + (12-15\,\mu)\,lx^2 + 5\,(2\,\mu-1)\,x^3}{15\,l^2} \cdots \cdots \cdots (28)\,.$ a) Belastungsscheiden. Bedingung y = 0. . Eine Wurzel aus (28), wenn $\mu = 0$, ist x = 0. Die Lage der Belastungsscheide $x = \frac{15\mu - 12 + \sqrt{625\,\mu^2 - 880\,\mu + 304}}{10\,(2\,\mu - 1)} \quad \dots \quad (29).$

Die Gleichung (29) liefert eine reale Wurzel, wenn $\mu > \frac{4}{5}l$. Wir kommen somit wieder zur Lage des Festpunktes, die wir schon aus dem Verlaufe der Einflußlinie im 1. Feld bestimmt hatten.

b) Maximum.

Die maximale positive Ordinate ist bei $x = \mu l$ im Schnittpunkte mit dem rechten Ast.

$$y_{\max} = \frac{8 \,\mu + 2 \,\mu^2 - 20 \,\mu^3 + 10 \,\mu^4}{15} \, \mathcal{L} \cdots \cdots \cdots (30) \,.$$

Lederer. Einflußlinien.

Die Bedingung des mathematischen Maximums resp. Minimums lautet:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$
(8-10 µ) l²+2(12-15 µ) lx+15(2 µ-1) x²=0,

woraus

$$x_{\min y} = \frac{2(15 \,\mu - 12) + 1/980 \,\mu^2 - 1544 \,\mu + 608}{30 \,(2 \,\mu - 1)} \quad \cdots \quad (30 \text{ a}).$$

Ist $\mu > \frac{4}{5}$, dann verläuft ein Teil der Einflußlinie unterhalb der X-Achse und Gleichung (30 a) liefert den Querschnitt des mathematischen Minimums. In den Tabellen sind bei den betreffenden Querschnitten auch die minimalen Ordinaten angegeben.

c) Wendepunkt.

Für $\mu > \frac{4}{5}$ hat der linke Ast einen Wendepunkt bei

$$x_i = \frac{4-5\mu}{5-10\mu} \cdot l.$$

 β) Rechter Ast der Einflußlinie im 2. Felde.

Aus (25) mit Hilfe von (3), (4) und (25) resultiert die Gleichung

$$y = \frac{15 \, \mu l^3 - (10 \, \mu + 7) \, l^2 x - (15 \, \mu - 12) \, l x^2 + 5 \, (2 \, \mu - 1) \, x^3}{15 \, l^2} \, \cdots \cdots \, (31).$$

a) Die Belastungsscheiden ergeben sich wieder für y=0.

Aus (31) mit y=0 ist 1. $x_1=l$

und nach Division durch (x - l)

 $5 x^{2} (2 \mu - 1) + (7 - 5 \mu) lx - 15 \mu l^{2} = 0.$

Diese Gleichung liefert Werte, welche denen aus (29) symmetrisch entsprechen. Reale Werte sind bei $x < \frac{1}{5}l$ d. i. der linke Festpunkt des 2. Feldes, wie wir bereits aus der Symmetrie schließen konnten. Wir gelangen zur Lage dieses Festpunktes auch aus dem Verlaufe der Einflußlinie im 3. Felde, wo

$$M = M_2 \frac{5\mu}{\mu}$$
$$M = 0.$$

und für $\mu = \frac{1}{2}$

Wir brauchen jedoch den weiteren Verlauf der Kurve im 3. Felde nicht zu untersuchen; der Einfluß des 3. Feldes besteht aus einer Kurvenschar, die das Spiegelbild jener des 1. Feldes ist.

b) Maximum.

Gleichung (31) liefert wieder für $x = \mu l$

 $y_{\rm max}$ wie in (30).

Ist $\mu < \frac{1}{5}$, dann gibt es ein mathematisches Minimum; um dessen Lage festzustellen, genügt es, aus Gleichung (30 a) für den Querschnitt $(1 - \mu) \cdots x_{\min y}$ zu bestimmen und zu diesem Querschnitte den symmetrisch gelegenen zu nehmen, die Ordinate ist dieselbe wie bei $(1 - \mu)l$ zwischen ϱ_{2} und a_{2} .

c) Wendepunkt.

Auch hier können wir vom symmetrisch gelegenen Querschnitte ausgehen und zu dessen Wendepunkt wird der gesuchte nach der Trägermitte symmetrisch sein.

3. Verlauf der Kurve im 3. Felde.

Es wurde bereits gesagt, daß man das Spiegelbild der Einflußlinie im 1. Felde des nach der Trägermitte zum Querschnitte μl symmetrischen Querschnittes nehmen kann; zur Vervollständigung werde jedoch die Gleichung auch selbständig angeführt.

$$y = -\frac{1-5\mu}{15 l^2} (-2 l^2 x + 3 l x^2 - x^3) \cdots (32)$$

max $y = -\frac{1-5\mu}{15} \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdots (33)$, bei $x' = \frac{l}{\sqrt{3}}$.

Wenn wir nun alle Resultate zusammenfassen, dann sehen wir, daß die 2 Festpunkte das 2. Trägerfeld in 3 Teile einteilen.

a) Befindet sich ein Querschnitt zwischen den beiden Festpunkten, dann hat seine Einflußlinie den in Fig. 47 angedeuteten Verlauf.

Das 2. Feld ist ganz positiv beitragend, das 1. und 3. Feld ist negativ beitragend.

Aus dieser Betrachtung ergeben sich dann die beigefügten Belastungsschemen.

Befindet sich der Querschnitt zwischen ϱ_2 und a_2 , dann liefert die Gleichung (29) eine Belastungsscheide. Das 1. Feld ist ganz positiv beitragend, das 2. Feld von a_1 bis zur Belastungsscheide negativ, von hier aus bis a_2 positiv beitragend, das 3. Feld



3*

ist ganz negativ beitragend. Aus dieser Erwägung ergeben sich wieder die beigefügten Belastungsschemen für $\min_{\min}^{\max} M$. (Fig. 48.)



35

Befindet sich ein Querschnitt zwischen λ_2 und a_1 , dann kann man das Spiegelbild der Einflußlinie des symmetrisch zwischen ϱ_2 und a_2 gelegenen Querschnittes betrachten. Es seien der Übersicht halber auch hier die Einflußlinie und Belastungsschemen ohne weitere Erklärung beigefügt.



Fig. 49.

Für die Festpunkte schließlich ergeben sich die Bilder 50 und 51. Sämtliche Kurven sind kubische Parabeln mit Ausnahme der beiden Aste im 2. Felde des Querschnittes 0,5 *l* des 2. Feldes, welche quadratische Parabeln sind.

Linker Festpunkt 2.



Fig. 50.

Rechter Festpunkt ϱ_2 .

az

Fig. 51.

Gefährlicher Querschnitt des 2. Feldes.

Unter gefährlichem Querschnitte verstehen wir wieder den Querschnitt des größten positiven Momentes aus bereits erwähnten Gründen.

Die maximale Ordinate der Influenzlinie eines Querschnittes befindet sich in diesem Querschnitte als Ordinate des Schnittpunktes beider Kurvenäste in diesem Felde. Sie ist durch die Gleichung (30) gegeben.

$$y_{\max} = \frac{8\,\mu + 2\,\mu^2 - 20\,\mu^3 + 10\,\mu^4}{15}\,l \,\cdots \,(30).$$

Die Gleichung (30) als Kurvengleichung aufgefaßt gibt als geometrischen Ort der y_{max} eine biquadratische Parabel an. Wird μ als unabhängig Variable aufgefaßt, dann muß für

 $\frac{max y_{max}}{d \mu} = 0,$

somit durch Differentiierung von (30)

$$3+4\mu-60\mu^2+40\mu^3=0$$
,

woraus

$$\mu_{\max} y_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \cdots \cdot \cdot \cdot \cdot (34)$$

und

$$\max y_{\max} = \frac{7}{40} l = 0,175 l \cdots \cdots (35).$$

Einflußlinie des Biegungsmomentes eines Querschnittes μl im 3. Felde.

Die Einflußlinie ist das Spiegelbild der Einflußlinie des Querschnittes $(1-\mu)l$ des 1. Feldes.

37

Einflußlinien der Stützenwiderstände.

Die Einflußlinien der Stützenwiderstände ermitteln wir ähnlich, wie dies beim Träger auf 3 Stützen geschah.

Wir hatten für 2 Felder eines beliebigen kontinuierlichen Trägers die

Beziehungen 1++1 $A_r = -T_r + T'_r$ (Fig. 52.) Weiter war: 1.atta 1ar and Arta RT-A AT $T_r = \mathfrak{T} + \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r}$ Le T+1 Orma Le+ = $-\mathfrak{B}_r + \frac{M_r - M_{r-1}}{I_r}$ Fig. 52.

$$T'_r = \mathfrak{T} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}} = \mathfrak{U}_{r+1} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}}$$

und somit

$$A_{r} = \mathfrak{A}_{r+1} + \mathfrak{B}_{r} + \frac{M_{r+1}}{l_{r+1}} + \frac{M_{r-1}}{l_{r}} - M_{r} \left(\frac{1}{l_{r}} + \frac{1}{l_{r+1}}\right) \cdots \cdots \cdots (I),$$

wo die Bedeutung der Bezeichnungen bereits früher angegeben wurde.

Einflußlinie des Auflagerdruckes A_0 .



so daß

$$A_0 = \mathfrak{A}_1 + \frac{M_1}{l} \cdots \cdots \cdots (36).$$

Die A_0 -Einflußlinie entsteht somit durch Addition der \mathfrak{A}_1 -Einflußlinienordinaten und der durch l dividierten Werte der M_1 -Einflußlinienordinaten.

Verlauf der Ao-Einflußlinie im 1. Felde.

Befindet sich eine Last P im 1. Felde, dann erzeugt sie im freiaufliegenden Träger $\overline{a_0 a_1}$

 $\mathfrak{A}_1 = P \frac{l-x}{l}$ (Fig. 54). tao a ag. az Die M_1 - Einflußlinie im UL1 Ly 1. Felde liefert uns Gleichung Ao (1), die 21,-Einflußlinie bekom-Fig. 54. men wir durch Einsetzen P=1.Sodann ist die Gleichung der A_0 -Einflußlinie durch Einsetzen in (36) $y = \frac{4 x^3 - 19 l^2 x + 15 l^3}{15 l^3} \cdots (37).$

Nachdem M_1 im 1. Felde negative Beiträge hat, wird $A_0 < \mathfrak{U}_1$, es erleidet der Auflagerdruck des einfachen Balkens infolge der Kontinuität eine Herabminderung. Gleichung (37) ist die Gleichung einer kubischen Parabel, die wir wieder untersuchen wollen.

a) Belastungsscheiden.

y=0, es muß x=l sein.

Die anderen Wurzeln sind ohne statische Bedeutung.

Somit trägt das ganze 1. Feld zum Auflagerdruck A_0 positiv bei, da $(x-l)\left(x-\frac{3l}{2}\right)\left(x+\frac{5l}{2}\right) \ge 0$ ist,

für

 $0 \leq x \leq l$.

b) Maximum.

Den Höchstwert erreicht y bei x=0

 $\underline{y_{\max}=1} \cdots \cdots (38).$

Verlauf der A_0 -Einflußlinie im 2. Felde.

Befindet sich eine Last P im 2. Felde (Fig. 55), so erzeugt sie im einfachen Balken $\overline{a_0 a_1}$ den Auflagerdruck $\mathfrak{A}_1 = 0$.

Es lautet dann die Gleichung (36)

 $A_0 = \frac{M_1}{I}$.



Unter Benutzung der Gleichung (3), die uns die M_1 -

Einflußlinie im 2. Felde angibt, folgt dann die Gleichung der A0-Einflußlinie zu

$$y = -\frac{1}{15 l^3} (7 l^2 x - 12 l x^2 + 5 x^3) \cdots (39).$$

Da die M_1 -Einflußlinie im 2. Felde nur negative Ordinaten besitzt, wird das ganze 2. Feld auch für den Auflagerdruck A_0 negativ beitragend sein.

Es ist weiter mit Rücksicht auf (10)

$$\max y = -0,080112 \cdots \cdots (40)$$

bei

 $\underline{x_{\max y}} = 0,38367 \, l \, \cdots \cdots \, (9)$

und unter Berücksichtigung der Formel (11) hat die Einflußlinie einen Wendepunkt bei $\underline{x_i = \frac{4}{5} l} \cdots \cdots (11)$, wobei $\underline{y_i = 0.032}$.

Verlauf der A_0 -Einflußlinie im 3. Felde.

Eine Last im 3. Felde (Fig. 56) erzeugt ebenfalls

$$\mathfrak{A}_0=0$$
,

so daß auch hier

 $A_0 = \frac{M_1}{I}$

und unter Zuhilfenahme der Formel (5) kommen wir zur Gleichung der Einflußlinie





$$y = +\frac{1}{15 l^3} (2 l^2 x - 3 l x^2 + x^3) \cdots (41).$$

Da die M_1 -Einflußlinie im 3. Felde nur positive Ordinaten aufweist, ist auch das ganze 3. Feld für den Auflagerdruck Ao positiv beitragend.

Unter Berücksichtigung der Formel (12)

$$\max y = \frac{2}{45\sqrt{3}} \cdots \cdots (42), \qquad \text{bei } l - x = \frac{l}{\sqrt{3}}.$$

Der Gesamtverlauf der A_0 -Einflußlinie ergibt sich dann wie aus Fig. 57 ersichtlich.



Fig. 57.

schemen für $\max_{\min}^{\max} A_0$.

Zu bemerken wäre noch, daß wie bei den Einflußlinien der Stützenwiderstände und Querkräfte des Trägers auf 3 Stützen, so auch hier die Ordinaten der Einflußlinie Zahlen bedeuten, so ist dann z. B. im Maßstabe der Ordinaten 1 = 5 cm. Nachdem die Kräfte in Gewichtsmaßen eingeführt werden, kg, t, erhalten wir auch A_0 in kg oder t. Handelt es sich um eine zusammenhängende Be-

lastung, dann ist der Inhalt der Einflußfläche $\int y dx$, wobei x in m, y in Zahlen ist, somit F = m, cm usw.

und nachdem die Belastung p = kg/m

$$A_0 = m \text{ kg/m} = \text{kg}$$

Einflußlinie des Stützenwiderstandes A₁.

In die allgemeine Formel (I) müssen wir nun folgende Werte einsetzen (siehe Fig. 58):



so daß nun

$$A_1 = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2 + \frac{M_2}{l} - \frac{2M_1}{l} \cdots \cdots \cdots (43)$$

Es wären somit für einzelne Felder die \mathfrak{B}_{1} -, \mathfrak{A}_{2} -, $\frac{M_{2}}{I}$ - und $\frac{2M_{1}}{I}$ - Einflußlinien zu bestimmen und ihre Ordinaten zu addieren.

Die M_2 - und M_1 -Einflußlinien sind bereits bestimmt, somit auch die $\frac{M_2}{L}$ - und $\frac{2M_1}{L}$ - Einflußlinien.

1. Verlauf der A_1 -Einflußlinie im 1. Felde.

Befindet sich die Last P im 1. Felde (Fig. 59), so erzeugt sie im einfachen Träger $\overline{a_0 a_1}$ den Auflagerdruck

 $\mathfrak{B}_{1} = \frac{P_{x}}{l}$ im einfachen Träger $\overline{a_{1} a_{2}} \cdots$ $\mathfrak{A}_{2} = 0,$ und da hier $M_{2} = -\frac{M_{1}}{4},$ ist schließlich $A_{1} = Px - \frac{9M_{1}}{4}.$ Fig. 59.

Die M_1 -Einflußlinie liefert Gleichung (1), weiter ist für die Einflußlinie P=1, somit die Gleichung der A_1 -Einflußlinie

$$y = \frac{8 \, l^2 x - 3 \, x^3}{5 \, l^3} \, \cdots \, (44) \, .$$

 $x_{\max y} = \frac{2}{3}\sqrt{2} l \cdots (45)$

 $\underline{\max y} = \frac{32\sqrt{2}}{45} \cdots \cdots \cdots (46).$

Die Gleichung (44) ist die einer kubischen Parabel, die wir ähnlich wie die anderen untersuchen.

 $\frac{dy}{dx} = \frac{8l^2 - 9x^2}{5l^3} = 0,$

a) Belastungsscheiden.

Für y=0 muß x=0oder $8l^2-3x^2=0$, was aber keine statische Bedeutung hat.

b) Maximum.

hieraus

und

Für x = l ist

Nachdem M_1 im 1. Felde nur negative Beiträge hat, wird A_1 daselbst nur positive Beiträge haben, und zwar ist es gegen den Stützendruck des einfachen Trägers um $\frac{9M_1}{41}$ erhöht.

v=1.

2. Verlauf der A_1 -Einflußlinie im 2. Felde.

Befindet sich eine Last P im 2. Felde (Fig. 60), dann erzeugt sie beim einfachen Balken $\overline{a_0 a_1}$ den Widerstand $\mathfrak{B}_1 = 0$, beim einfachen Träger $\overline{a_1 a_2}$ den Stützenwiderstand $\mathfrak{A}_2 = \frac{P(l-x)}{l}$. Es lautet dann die um- $\mathfrak{A}_4 \qquad \mathfrak{A}_4 \qquad \mathfrak{A}_4$ $\mathfrak{A}_4 \qquad \mathfrak{A}_4$ $\mathfrak{A}_4 \qquad \mathfrak{A}_4$

Es lautet dann die umgeformte Gleichung (43) $A_1 = \frac{P(l-x)}{l} + \frac{M_2}{l} - \frac{2M_1}{l}$

und nach Einsetzen P=1 und unter Benutzung von (3) und (4) die Gleichung der Einflußlinie

$$y = \frac{5 x^3 - 9 l x^2 - l^2 x + 5 l^3}{5 l^3} \cdots \cdots (47).$$

a) Belastungsscheiden.

y=0, x=l.

Es ist das ganze 2. Feld positiv beitragend und A_1 hat gegen den Stützendruck eines einfachen Trägers eine Erhöhung von $\frac{2M_1}{l} - \frac{M_2}{l}$.

b) Maximum.

Das mathematische Maximum hat keine statische Bedeutung

 $y_{\max} = 1$ bei x = 0.

c) Wendepunkt.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{30 x - 18 l}{5 l^3} = 0$$

$$\underline{x_i = \frac{3}{5} l} \cdots \cdots (48), \qquad \underline{y_i = 0,448}.$$

3. Verlauf der A_1 -Einflußlinie im 3. Felde.

Befindet sich die Last P im 3. Felde (Fig. 61), so erzeugt sie beim einfachen Träger $\overline{a_0 a_1} \mathfrak{B}_1 = 0$ und beim einfachen Träger $\overline{a_1 a_2} \mathfrak{A}_2 = 0$.



Unter Benutzung der Gleichung (5) lautet dann die Gleichung der Einflußlinie

 $y = -\frac{2}{5 l^3} (2 l^2 x - 3 l x^2 + x^3) \cdots (49).$

(49 ist die Gleichung einer kubischen Parabel.



Fig. 62.

Nachdem M_1 im 3. Felde nur positive Beiträge hat, wird $A_1 = -\frac{6M_1}{l}$ daselbst nur negative Beiträge haben und es ist somit das ganze 3. Feld negativ beitragend für den Stützendruck A_1 .

y=0 bei x=0 und x=l. b) Maximum.

UnterBerücksichtigung der Formel (12) ist

$$\max y = -\frac{4}{15\sqrt{3}} \cdots \cdots (50),$$

bei $x' = l - x = \frac{l}{\sqrt{3}} \cdots$ (12 a).

 $\max_{\min}^{\max} A_1$.

Einflußlinie des Stützendruckes A2.

Sie ist das Spiegelbild der A_1 -Einflußlinie, ebenso die Belastungsschemen. (Siehe Fig. 63.)





Einflußlinie des Auflagerdruckes A3

ist das Spiegelbild der A_0 -Einflußlinie, ebenso die Belastungsschemen. (Siehe Fig. 64.)





Einflußlinien der Querkräfte.

Für die Querkraft eines kontinuierlichen Trägers hatten wir die Beziehung $T = \mathfrak{T} + \frac{M_b - M_a}{l}$

angeführt, worin \mathfrak{T} die Querkraft des einfachen Balkens $\overline{a b}$ bedeutete, M_b das rechte, M_a das linke Stützenmoment (Fig. 65). Die Einflußlinien werden je nach dem Felde, in welchem der Querschnitt sich befindet, verschieden sein.



Einflußlinie der Querkraft in einem beliebigen Querschnitte μl des 1. Feldes.

so daß



1. Verlauf der Kurve im 1. Felde.

Es ist bekanntlich für eine Last im 1. Felde für den einfachen Balken $\overline{a_0 a_1}$

 $\mathfrak{T} = P \frac{l-x}{l} = \mathfrak{A}_1 \cdots$ (a) für Lasten rechts von μl ,

= $-\frac{Px}{l}$ = $-\mathfrak{B}_1 \cdots$ (b) für Lasten links von μl (Fig. 66).

Es wird sonach die Einflußlinie im 1. Felde aus 2 Ästen bestehen.

 α) Linker Ast.

Hierbei ist in (b) P = 1 zu setzen, M_1 dann aus (1) einzuführen. Es lautet schließlich die Gleichung der Einflußlinie

 $y = \frac{4 x^3 - 19 l^2 x}{15 l^3} \cdots \cdots \cdots \cdots (51).$

Gleichung (51) liefert in den statisch in Rechnung kommenden Grenzen nur negative Werte, es erreicht y seinen Höchstwert bei $x = \mu l$

$$\underline{y_{\min}} = \frac{4 \,\mu^3 - 19 \,\mu}{15} \quad \dots \quad (52)$$

 $\min y_{\min} = -1 \quad \text{bei } \mu = 1 \quad \text{d. i. } -A_1.$

 β) Rechter Ast der Kurve im 1. Felde.

Es ist, um zu der Gleichung der Einflußlinie zu gelangen, in (a) P=1 einzusetzen, die M_1 -Einflußlinie ist wieder durch (1) gegeben, so daß die





$$y = \frac{12}{15 l^3} \cdots (37)$$

lautet.

Es ist dies die Gleichung der A_0 -Einflußlinie, was auch ohne weiteres aus folgender Überlegung folgert. Die Querkraft in einem beliebigen Querschnitte ist gleich der Summe der äußeren Kräfte, die sich auf dem Trägerteile links vom Querschnitte befinden.

 $T = A_0 - \Sigma_0^{\mu} P$; nun ist aber für eine Last rechts von μl die einzige linke äußere Kraft die Reaktion A_0 und somit

$$T = A_0$$
.

(37) liefert nur positive Werte in den statisch in Frage kommenden Grenzen.

Den Höchstwert erreicht y bei $x = \mu l$

$$y_{\max} = \frac{4 \,\mu^3 - 19 \,\mu + 15}{15} \,\cdots \cdots \,(53)$$

 $\max y_{\max} = 1 \quad \text{bei} \quad \mu = 0 \quad \text{d. i. } A_0.$

Aus (52) und (53) ist

 $y_{\text{max}} + (-y_{\text{min}}) = 1 = \text{konst.},$

wie beim einfachen Träger. Diese Beziehung bedeutet, daß die beiden Kurvenäste parallel sind, nachdem sie in allen Querschnitten die vertikale Entfernung 1 haben.

Es ist somit der links von μl gelegene Teil des 1. Feldes zur Querkraft negativ, der rechte Teil positiv beitragend; steht die Last im Querschnitte μl , dann hat die Querkraft 2 Werte, wovon wir den einen einem unendlich nahen Querschnitte links, den anderen einem unendlich nahen Querschnitte rechts zuschreiben.

2. Verlauf der Einflußlinie im 2. Felde.

Aus derselben Überlegung, wie beim rechten Kurvenast im 1. Felde folgert, daß auch hier die T-Einflußlinie durch die A_0 -Einflußlinie gegeben ist.

Es ist, da $\mathfrak{I}=0$

$$T = \frac{M_1}{l} = A_0$$

und nach (39)

bei

$$y = -\frac{1}{15 l^3} (7 l^2 x - 12 l x^2 + 5 x^3) \cdots (39).$$

Es ist das ganze 2. Feld negativ beitragend, und nach (40)

$$ax y = -0,080112 \cdots \cdots (40)$$

$$c_{\max y} = 0,38367 \, l \, \cdots \, (9) \, .$$

Der Wendepunkt i

$$\underline{x_i = \frac{4}{5}l} \cdots \cdots \cdots (11) \qquad \underline{y_i = 0,032}.$$

3. Verlauf der Einflußlinie im 3. Felde.

Wie im 2. Felde, so ist auch hier die T-Einflußlinie durch die A_0 -Einflußlinie gegeben.

$$y = \frac{1}{15 l^3} (2 l^2 x - 3 l x^2 + x^3) \cdots (41).$$

Das ganze 3. Feld ist positiv beitragend.

max
$$y = \frac{2}{45\sqrt{3}} \cdots \cdots (42)$$
 bei $x' = l - x = \frac{l}{\sqrt{3}}$.

Es ist nun der ganze Verlauf der Einflußlinie in Fig. 68 angegeben. Aus der Einflußlinie ergeben sich sodann die Belastungschemen für $\max_{\min} T$.



Fig. 68.

Einflußlinie der Querkraft T in einem beliebigen Querschnitte μl des 2. Feldes.

Es ist wieder



1. Verlauf der Einflußlinie im 1. Felde.

Befindet sich eine Last P im 1. Felde, erzeugt sie im Querschnitte μl des einfachen Balkens $\overline{a_1 a_2}$ die Querkraft $\mathfrak{T} = 0$ (Fig. 70).

Es ist daher

$$T = \frac{M_2 - M_1}{I}$$

Nachdem aber im 1. Felde



Die M_1 - Einflußlinie hat im 1. Felde lauter negative Ordinaten, somit wird die T - Einflußlinie hier lauter positive Ordinaten haben, und es ist das

ganze 1. Feld zur Querkraft T eines Querschnittes μl des 2. Feldes positiv beitragend.

Mit Benutzung der Gleichung (1) ist dann die Gleichung der T-Einflußlinie

$$y = \frac{x (l^2 - x^2)}{3 l^3} \cdots \cdots \cdots (54).$$

Es ist weiter unter Zuhilfenahme der Formeln (8) und (7)

$$\underline{\max y = \frac{2}{9\sqrt{3}}} \cdots \cdots \cdots (55) \qquad \text{bei } x = \frac{l}{\sqrt{3}} \cdots \cdots (7).$$

2. Verlauf der Einflußlinie im 2. Felde.

Befindet sich eine Last P im 2. Felde (Fig. 71), so erzeugt sie im Querschnitte μl des einfachen Balkens $\overline{a_1 a_2}$ die Querkraft



Es besteht die Einflußlinie somit aus 2 Ästen.

a) Linker Ast der Kurve.

Durch Einsetzen P = 1 in (b) und unter Zuhilfenahme der Formeln (3), (4) kommen wir zur Gleichung des linken Astes der *T*-Einflußlinie:

 $y = \frac{2 x^3 - 3 l x^2 - 2 l^2 x}{3 l^3} \cdots \cdots \cdots (56).$

Für x=0 ist y=0.

y ist negativ und erreicht seinen Höchstwert bei $x = \mu l$.

$$y_{\min} = \frac{2\mu^3 - 3\mu^2 - 2\mu}{3} \cdots \cdots \cdots (57).$$

Die Kurve hat einen Wendepunkt bei $\frac{l}{2}$; ist $\mu > \frac{1}{2}$, dann kommt er zur Geltung.

Weiter ist min $y_{\min} = -1$ bei $\mu = 1$, d. i. die Ordinate von $-A_2$.

 β) Rechter Ast der Kurve.

Durch Einsetzen P = 1 in (a) und Anwendung der Gleichungen (3), (4) gelangen wir zur Gleichung des rechten Astes der Einflußlinie.

$$y = \frac{2 x^3 - 3 l x^2 - 2 l^2 x + 3 l^3}{3 l^3} \cdots \cdots \cdots (58).$$

Für x = l ist y = 0.

Von µl bis l liefert (58) positive Werte.

Den Höchstwert erreicht y bei $x = \mu l$

$$y_{\max} = \frac{2 \mu^3 - 3 \mu^2 - 2 \mu + 3}{3} \cdots \cdots \cdots (59).$$

Durch Vergleich von (57) und (59)

$$y_{\max} + (-y_{\min}) = 1$$

 $\max y_{\max} = 1$ bei $\mu = 0$, d. i. A_1 .

Die kubische Parabel (58) hat einen Wendepunkt bei $x = \frac{l}{2}$; ist $\mu < \frac{1}{2}$, so hat dieser Punkt statische Bedeutung.

3. Verlauf der Einflußlinie im 3. Felde.

Befindet sich eine Last P im 3. Felde (Fig. 72), so erzeugt sie im Querschnitte μl des einfachen Trägers $\overline{a_1 a_2}$ die Querkraft $\mathfrak{T} = 0$.



Es ist somit

$$T = \frac{M_2 - M_1}{I}$$

Im 3. Felde ist, wie bereits eingangs bewiesen wurde,

 $M_2 = -4 M_1$.

Somit ist

$$T = \frac{-5M_1}{l}$$

Nachdem die M_1 -Einflußlinie im 3. Felde nur positive Ordinaten hat, wird die *T*-Einflußlinie daselbst nur negative Ordinaten haben, es ist somit das ganze 3. Feld zur Querkraft eines Querschnittes μl des 2. Feldes negativ beitragend.

Mit Hilfe der Gleichung (5) ist die Gleichung der Einflußlinie

$$y = -\frac{1}{3 l^3} \left(2 l^2 x - 3 l x^2 + x^3 \right) \cdots \cdots \cdots \cdots (60).$$

Es ist nun mit Hilfe von (12)

$$\underline{\max y = -\frac{2}{9\sqrt{3}}} \cdots \cdots \cdots (61) \quad \text{bei } \underline{l - x = x' = \frac{l}{\sqrt{3}}} = \cdots \cdots (12 \text{ a}).$$

Der ganze Verlauf der Einflußlinie gestaltet sich nach Fig. 73.

Ebenso ergeben sich auch die beigefügten Belastungsschemen für $\frac{\max}{\min} T$. Das 1. Feld ist ganz positiv beitragend, das 2. Feld von der linken Stütze bis zum Querschnitt negativ, hierauf positiv beitragend, das 3. Feld ist ganz negativ beitragend.



Querschnitt des 1. Feldes. Fig. 73.

Es genügt, den symmetrisch gelegenen Querschnitt des 1. Feldes zu betrachten und im Spiegelbilde seiner Einflußlinie die Vorzeichen zu vertauschen.



Fig. 74.

Der ganze Verlauf der Kurve gestaltet sich dann nach Fig. 74.

Ebenso wie in den vorigen Fällen ergeben sich dann die Belastungsschemen.

Gleichförmig verteilte Last.

Ebenso wie beim Träger auf 3 Stützen wollen wir, einheitlich mit vorausgegangenem vorgehend, auch hier die bereits in Tabellen enthaltenen Werte ableiten und analytisch die Kurven der maximalen und minimalen Momente, sowie maximalen und minimalen Querkräfte bestimmen.

Bezüglich der Anwendung der Einflußflächen, besonders bei ungleichförmiger zusammenhängender Belastung, bleibt alles, was weiter oben gesagt wurde, in Gültigkeit.

Die Werte der maximalen Biegungsmomente im 1. Felde.

a) Für Querschnitte zwischen a_0 und $\varrho_1(\frac{15}{19}l)$ ist das ganze 1. Feld positiv, das 2. negativ, das 3. wieder positiv beitragend.

Um $\max M$ zu erzielen, belasten wir also das 1. und 3. Feld voll, das 2. lassen wir unbelastet.

Es ist sodann

$$\max M_{\mu l}^{p} = p \left(F_{1} + F_{2} + F_{4} \right)$$
 (Fig. 75)

mit Hilfe der Formeln (14), (18) und (21).

Lederer, Einflußlinien.



$$F_{1} = \int_{0}^{\frac{\mu l}{4} \frac{\mu x^{3} + (15 - 19 \mu) l^{2} x}{15 l^{2}} dx$$

$$F_{2} = \int_{\mu l}^{l} \frac{\frac{4}{4} \frac{\mu x^{3} - 19 \mu l^{2} x + 15 \mu l^{3}}{15 l^{2}} dx$$

$$F_4 = \int_{0}^{\mu} \frac{\mu}{15 l^2} (2l^2 x - 3l x^2 + x^3) dx$$

Nach Durchführung der Integration ist

$$\max M^{p}_{\mu_{l}} = \frac{pl^{2}}{10} [\frac{9}{2}\mu - 5\mu^{2}] \cdot (62).$$

Aus (62) lassen sich wieder die Werte der Winklerschen Tabellen von 0 bis $\frac{1}{1}\frac{5}{9}l$ berechnen.

Die **max** M - Kurve zwischen a_0 und ϱ_1 ist nach (62) eine quadratische Parabel.

Das größte Maximum des 1. Feldes.

Wenn wir in (62) μ als unabhängig Variable, **max** M als abhängig Variable betrachten, so muß für max max M

$$\frac{d_{\max}M}{d\mu} = 0 \quad \text{sein.}$$

Durch Differentiierung der Gleichung (62)

$$0 = \frac{pl^{2}}{10} [\frac{9}{2} - 10 \,\mu]$$

$$\frac{\mu_{\max \max M} = 0.45}{\max \max M = \frac{8.1}{8.00} \,pl^{2}} \cdots \cdots \cdots (63)$$

und

b) Befindet sich ein Querschnitt zwischen $\frac{1}{19}l$ und l, so bleiben für **max** M die Flächen F_2 und F_4 wie vor, die Fläche F_1 jedoch ist nur in den



Fig. 76.

Grenzen vl und μl zu integrieren, da Belastungen von **O** bis vl negative Momente ergeben. (Siehe Fig. 76.)

Hierbei ist vl die Lage der Belastungsscheide, gegeben durch Formel (15).

$$vl = \sqrt{\frac{19\,\mu - 15}{4\,\mu}}l.$$

Es ist nun



50

aus vorigem

$$F_{2} = \frac{l^{2}}{15} \left[-\mu^{5} + 19 \frac{\mu^{3}}{2} - 15 \mu^{2} + 13 \frac{\mu}{2} \right]$$
$$F_{4} = \frac{\mu l^{2}}{60}$$

- 51

und schließlich

$$\max M^{p}_{\mu_{l}} = \frac{pl^{2}}{15} \left[-\frac{15\,\mu^{2}}{2} + \frac{27\,\mu}{4} - \mu\,\nu^{4} + \frac{19\,\mu\,\nu^{2}}{2} - \frac{15\,\nu^{2}}{2} \right] \cdots \cdots \cdots (65).$$

Aus (65) kann man auch die Tabellenwerte von $\frac{1.5}{1.9}l$ bis l berechnen. Für $\mu = 1$ ist aus (15) $\nu = 1$

und

$$\max M = \max (+ M_1) = \frac{1}{6} p l^2 \cdots (66),$$

was auch aus der Gleichung (5) der M_1 -Einflußlinie im 3. Felde zu berechnen ist.

Die Werte der minimalen Biegungsmomente im 1. Felde.

a) Handelt es sich um min M zwischen 0 und $\frac{15}{19}l$, so belasten wir das 2. Feld, das 1. und 3. Feld lassen wir unbelastet. Es ist dann



Fig. 77.

Mit Hilfe der Formel (19) ist

$$F_{3} = \int_{0}^{l} \frac{\mu}{15 l^{2}} (7 l^{2} x - 12 l x^{2} + 5 x^{3}) = -\frac{\mu l^{2}}{20}$$
$$\min M_{\mu l}^{p} = -p \frac{\mu l^{2}}{20} \cdots \cdots \cdots (67).$$

und

(67) ist, wenn $\min M^p$ als Ordinaten betrachtet werden, die Gleichung einer Geraden, es ist auch bekanntlich die $\min M$ -Kurve zwischen den Festpunkten eine Gerade. Handelt es sich jedoch um **min** M in einem Querschnitte zwischen q_1 und a_1 , dann ist noch der negative Teil der Einflußlinie im 1. Felde von **O** bis vl mitzurechnen. (Fig. 78.) \mathbb{R}^{Λ} Dabei ist wieder vl durch



(15) gegeben. Nennen wir diese Fläche

 F_5 , dann ist

$$\min M = p \left(F_3 + F_5 \right)$$

$$F_5 = \int_0^{\nu_l} \frac{4 \,\mu \, x^3 + (15 - 19 \,\mu) \, l^2 x}{15 \, l^2} \, dx$$

und nachdem

$$F_3 = -\frac{\mu l^2}{20}$$

$$\min M_{\mu l}^{p} = p l^{2} \left[-\frac{\mu}{20} + \frac{\mu \nu^{4}}{15} - \frac{19 \,\mu \nu^{2}}{30} + \frac{\nu^{2}}{2} \right] \cdots \cdots \cdots (68).$$

Den Höchstwert erreicht **min** M bei $\mu = 1$. Es ist sodann

$$\min M_1 = \max \left(-M_1\right) = -\frac{7}{\pi^0} p l^2 \cdots \cdots \cdots (69)$$

oder, wie wir in den Tabellen finden, $\frac{7}{60} = 0,1167$.

Gleichmäßig verteilte Last über den ganzen Träger.

Dies ist gewöhnlich beim Eigengewicht der Fall. Da muß man sämtliche Einflußflächen in Rechnung ziehen, und da sich nun die Integralwerte über die ganzen Kurven erstrecken, ist es gleichgültig, wo sich der Querschnitt befindet Es ist auch F_1 des 1. Falles gleich $(F_1 + F_5)$ des 2. Falles.

Es ist somit

$$M_{u_1}^g = g(F_1 + F_2 + F_3 + F_4)$$

mit Bezeichnung aus 1. Falle

und nach Einsetzen der früher berechneten Werte

$$M^{g}_{\mu l} = \frac{g l^{2}}{10} (4 \mu - 5 \mu^{2}) \cdots \cdots \cdots (70).$$

Gleichung (70) gibt als Verlauf der Momentenlinie eine quadratische Parabel an, was auch bekanntlich der Fall ist, da die Momentenfläche des kontinuierlichen Trägers aus der parabolischen des einfachen Trägers durch Addition der Zusatztrapezflächen entsteht.

Wenn wir in (70) anstatt $g \cdots p$ schreiben, so ist

$$M^{p}_{\mu l} = \frac{p l^{2}}{10} (4 \mu - 5 \mu^{2}) = \max M^{p}_{\mu l} + \min M^{p}_{\mu l}$$

Für $\mu = 1$ aus (70)

$$\underline{M_1^g} = -\frac{g l^2}{10} \cdots \cdots \cdots (71)$$

ein bekannter Wert.

Setzen wir in (70) $M^g = 0$, erhalten wir $\mu_i = \frac{4}{5}$ als Querschnitt des Wendepunktes der Biegelinie bei gleichförmiger Totalbelastung.

Weiter ist

 $\max M^g = \frac{2}{25} g \, l^2 \cdots \cdots \quad \text{im Querschnitte} \quad x_{\max M^g} = 0.4 \, l.$

Die Werte der maximalen Biegungsmomente im 2. Felde.

a) Befindet sich der Querschnitt μl in den inneren $\frac{3}{5}$ des Feldes, d. i. zwischen den Festpunkten, so müssen wir, um **max** M zu erzielen, das 2. Feld voll belasten, das 1. und 3. Feld müssen wir unbelastet lassen.

Es ist dann





Unter Zuhilfenahme der Gleichungen (29) und (30)

$$F_{2} = \int_{0}^{\frac{l^{2}}{(8-10\mu)l^{2}x+(12-15\mu)lx^{2}+5(2\mu-1)x^{3}}} dx$$

$$F_{3} = \int_{\mu l}^{\frac{l}{(15\mu l^{3}-(10\mu+7)l^{2}x-(15\mu-12)lx^{2}+5(2\mu-1)x^{3}}{15l^{2}}} dx$$

Nach Durchführung der Integration

$$\max_{\mu_{\mu}} M^{p}_{\mu_{\ell}} = \frac{p l^{2}}{2} \left[-\mu^{2} + \mu - \frac{1}{10} \right] \cdots \cdots \cdots (72).$$

Gleichung (72) gibt wieder an, daß der Verlauf der max M-Kurve zwischen den Festpunkten eine quadratische Parabel ist.

Aus (72) lassen sich die Werte der Winklerschen Tabellen für $\frac{1}{5} \leq \mu \leq \frac{4}{5}$ berechnen.

Durch Differentiierung der Gleichung (72) kommen wir zur Lage des Querschnittes des größten Maximums.

$$\frac{d \max M}{d \mu} = \frac{p l^2}{2} [-2 \mu + 1] = 0$$

$$\mu_{\max \max M} = \frac{1}{2} \cdots \cdots \cdots (73)$$

oder, wie wir in den Tabellen vorfinden, $\frac{3}{40} = 0,075$.

b) Befindet sich ein Querschnitt zwischen $\frac{4}{5}l$ und l, d. i. zwischen ϱ_2 und a_2 (Querschnitte zwischen a_1 und λ_2 liefern infolge der Symmetrie dieselben

54



Fig. 80.

Werte und es wird die $\max_{\min} M$ -Kurve zwischen a_1 und λ_2 das Spiegelbild des Teiles zwischen ϱ_2 und a_2 sein), so ist ein Teil des 2. Feldes von a_1 bis vl negativ beitragend und muß daher für **max** *M* unbelastet bleiben. Das 1. Feld ist positiv beitragend und wird voll belastet, das 3. Feld trägt negativ bei und bleibt daher unbelastet.

Es ist dann $\max M^p_{\mu_l} = p(F_1 + F_2 + F_3)$ (Fig. 80) und mit Hilfe der Gleichungen (26), (28), (30)

$$F_{1} = \int_{0}^{l} \frac{5\mu - 4}{15l^{2}} x (l^{2} - x^{2}) dx$$

$$F_{2} = \int_{\nu_{l}}^{\mu_{l}} \frac{1}{(8 - 10\mu)l^{2}x + (12 - 15\mu)lx^{2} + 5(2\mu - 1)x^{3}}{15l^{2}} dx$$

$$F_{3} = \int_{\mu_{l}}^{l} \frac{15\mu l^{3} - (10\mu + 7)l^{2}x - (15\mu - 12)lx^{2} + 5(2\mu - 1)x^{3}}{15l^{2}} dx$$

Nach Durchführung der Integration

$$\max M^{p}_{\mu l} = p l^{2} \left[\frac{5 \mu - 4}{60} - \frac{\mu^{2}}{2} + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{20} - \frac{4}{15} \nu^{2} + \frac{\mu \nu^{2}}{3} - \frac{4}{15} \nu^{3} + \frac{\mu \nu^{3}}{3} + \frac{\mu^{4}}{12} - \frac{\mu \nu^{4}}{6} \right] \cdot (75).$$

Hierbei ist die Lage der Belastungsscheide durch die Gleichung (29) gegeben.

Aus (75) lassen sich die Werte der max M-Kurvenordinaten oder der Winklerschen Tabellen berechnen.*)

Für $\mu = 1$ erhalten wir aus (29) $\nu = 1$ und aus (75)

$$\max M = \max (+ M_2) = \max (+ M_1) = \frac{p l^2}{60} \cdots \cdots \cdots (66),$$

was wir auch ohne weiteres aus Gleichung (5) berechnen können.

und

^{*)} Wie aus den Tabellen zum Schlusse ersichtlich, decken sich sämtliche hier berechneten Werte mit den betreffenden Werten der Winklerschen Tabellen bis auf 0,10 ldes 2. Feldes, wo sich bereits seit der 1. Herausgabe der erwähnten Tabellen bis auf heute 2 grobe Fehler befinden.

Die Werte der minimalen Biegungsmomente im 2. Felde.

a) Befindet sich der Querschnitt μl zwischen den Festpunkten, so müssen wir, um **min** M zu erzielen, das 1. und 3. Feld voll belasten, wogegen das 2. Feld unbelastet bleibt. (Fig. 81.)



Sodann ist

nin
$$M_{\mu_1}^p = p(F_1 + F_4)$$
.

Unter Zuhilfenahme der Gleichungen (26) und (32)

$$F_{1} = \int_{0}^{l} \frac{5 \mu - 4}{15 l^{2}} x (l^{2} - x^{2}) dx$$

$$F_{4} = \int_{0}^{l} \frac{1 - 5 \mu}{15 l^{2}} (-2 l^{2} x + 3 l x^{2} - x^{3}),$$

so daß nach Durchführung der Integration

min
$$M^{p}_{\mu l} = -\frac{p l^{2}}{20} = \text{konst.}$$
 (76).

Gleichung (76) gibt an, daß die **min** M - Kurve zwischen λ_2 und ϱ_2 eine horizontale Gerade ist (y = k).

b) Befindet sich jedoch der Querschnitt zwischen ϱ_2 und a_2 (für Querschnitte zwischen a_1 und λ_2

gilt wieder die aus der Symmetrie resultierende Beziehung), so ist, um **min** Mzu erzielen, der Teil $\overline{a_1 \nu l}$ des 2. Feldes zu belasten, ebenso ist das 3. Feld voll zu belasten. (Fig. 82.)

Es ist dann

min $M_{\mu_I}^p = p(F_4 + F_5)$ und nach Anwendung der



56 -

Gleichungen (28) und (32)

$$F_{4} = \int_{0}^{5} -\frac{1-5\mu}{15l^{2}} \left(-2l^{2}x+3lx^{2}-x^{3}\right) dx$$

$$F_{5} = \int_{0}^{\nu_{l}} \frac{(8-10\mu)l^{2}x+(12-15\mu)lx^{2}+5(2\mu-1)x^{3}}{15l^{2}} dx$$

$$M_{\mu_{l}}^{p} = \frac{pl^{2}}{15} \left[\frac{15}{60} -\frac{15}{12}\mu+4\nu^{2}-5\mu\nu^{2}+4\nu^{3}-5\mu\nu^{3}+\frac{5}{2}\mu\nu^{4}-\frac{5}{4}\nu^{4}\right] \cdots (77),$$

wobei die Belastungsscheide vl durch Gleichung (29) gegeben ist.

Für $\mu = 1$ erhalten wir aus (29) $\nu = 1$ und es ist dann

$$\min M = \max (-M_2) = \max (-M_1) = -\frac{7}{60} p l^2 \cdots \cdots \cdots (69),$$

was wir bereits in Gleichung (69) festgestellt hatten.

Gleichförmig verteilte Last über den ganzen Träger.

Hierbei gibt es keinen Unterschied in der Lage der Querschnitte, da wieder die Integrale über den ganzen Verlauf der einzelnen Kurven zu erstrecken sind.

Es ist, wenn wir von dem ersteren einfacheren Fall ausgehen,

$$M_{\mu_l}^g = g(F_1 + F_2 + F_3 + F_4)$$

und

min .

$$M^{g}_{\mu l} = g l^{2} \left[-\frac{\mu^{2}}{2} + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{10} \right] \quad \cdots \quad (78).$$

Der Verlauf der M^{g} -Kurve im 2. Felde ist ebenfalls eine quadratische Parabel.

Für $\mu = 0$ oder $\mu = 1$

$$\underline{M_1^g = M_2^g = -\frac{g l^2}{10}} \cdots \cdots \cdots (71),$$

was bereits in (71) festgestellt wurde.

Wenn wir anstatt $g \cdots p$ setzen, ist-wieder

$$M^p_{\mu l} = \max M^p_{\mu l'} + \min M^p_{\mu l'}$$

Für $M^g = 0$ ergeben sich die Wendepunktsquerschnitte der Biegelinie bei Vollast

$$\mu_i = \frac{1 \pm \frac{1}{\sqrt{5}}}{2}.$$

Weiter ist

$$x \max M^g = \frac{1}{2}$$
 und $\max M^g = \frac{1}{40} gl^2$.

Die Kurve der $\max_{\min i}^{\max i}$ Biegungsmomente im 3. Felde ist das Spiegelbild der $\max_{\min}^{\max} M$ -Kurve des 1. Feldes.

Werte der maximalen Querkräfte im 1. Felde.

Wollen wir im Querschnitte μl des 1. Feldes **max** T erzielen, so belasten wir den Teil $\mu l a_1$ des 1. Feldes, sowie das 3. Feld voll, Teil $\overline{a_0 \mu l}$ des 1. Feldes und das 2. Feld bleiben unbelastet. (Fig. 83.)



Fig. 83.

Es ist dann

$$\max T_{\mu_1}^p = p(F_1 + F_2)$$

und unter Benutzung der Gleichungen (37) und (41)

$$F_{1} = \int_{\mu}^{2} \frac{4x^{3} - 19l^{2}x + 15l^{3}}{15l^{3}} dx$$
$$F_{2} = \int_{0}^{l} \frac{2l^{2}x - 3lx^{2} + x^{3}}{15l^{3}} dx$$

und somit nach Durchführung der Integration

$$\max T^{p}_{\mu l} = \frac{pl}{60} [27 - 60 \,\mu + 38 \,\mu^{2} - 4 \,\mu^{4}] \quad \cdots \quad (79).$$

(79) ist die Gleichung einer biquadratischen Parabel, deren Ordinaten $y = \max T$ aus (79) zu berechnen sind.

Für $\mu = 0$

$$\max A_0 = \frac{9}{2^0} pl \cdots \cdots (80),$$

was auch aus der A_0 -Einflußlinie zu berechnen ist.

Für $\mu = 1$

$$\max T_1 = + \frac{1}{66} pl \cdots (\alpha)$$

die unendlich nahe nach links von der 1. Stütze entfernte Querkraft.

Werte der minimalen Querkräfte im 1. Felde.

Wollen wir im Querschnitte μl min *T* erzielen, so belasten wir den linken Teil $\overline{a_0 \mu l}$ des ersten Feldes und das zweite Feld voll, es ist dann

min
$$T^{p}_{\mu l} = p(F_3 + F_4)$$
 (Fig. 84)

und mit Hilfe der Gleichungen (51) und (39)

$$F_3 = \int_{0}^{\frac{\mu}{9}} \frac{1}{4x^3 - 19l^2 x}{15l^3} dx$$



58 -

so daß schließlich

Für $\mu = 1$

min $T^{p}_{\mu l} = \frac{pl}{60} [4 \,\mu^4 - 38 \,\mu^2 - 3] \cdots (81).$

Die Gleichung (81) gibt an, daß die min *T*-Kurve ebenfalls eine biquadratische Parabel sei, deren Ordinaten $y = \min T$ aus (81) zu berechnen sind. Für $\mu = 0$

$$\underline{\min A_0} = -\frac{pl}{20} \cdots \cdots \cdots (82).$$
$$\underline{\min T_1} = -\frac{37}{6} \frac{pl}{6} \frac{pl}{20} \cdots \cdots \cdots (\beta)$$

die unendlich nahe nach links von a_1 gelegene Querkraft.

Gleichförmig verteilte Last über den ganzen Träger.

Für eine Last, die über den ganzen Träger verteilt ist, sind sämtliche Flächen zusammenzuziehen.

$$T^{g}_{\mu l} = g(F_{1} + F_{2} + F_{3} + F_{4})$$
$$T^{g}_{\mu l} = \frac{gl}{5} [2 - 5\mu] \cdots \cdots (83).$$

Die Kurve der Querkräfte in diesem Falle ist eine Gerade, wie aus (83) ersichtlich.

Für $\mu = 1$ $\frac{A_0^g = \frac{2}{5} gl \cdots (84) \quad (\max A_0^p + \min A_0^p = A_0^p), \text{ wie aus (82) und (80) ersichtlich.}}{\text{Für } \mu = 1}$ $\frac{T_1^g = -\frac{2}{5} gl \cdots (\gamma) \quad (\max T_1^p + \min T_1^p = T_1^p), \text{ wie aus (α) und (β) ersichtlich.}}{\text{sichtlich.}}$

Für $\mu = 0.4$ ist $T^g = 0$ und es muß somit in $0.41 \max M^g$ entstehen, was auch aus der Bedingung

$$\frac{dMg}{dx} = 0$$

folgert.

Werte der maximalen Querkräfte im 2. Felde.

Für einen Querschnitt des 2. Feldes müssen wir, um **max** T zu erzielen, das erste Feld voll belasten, ebenso den Teil des 2. Feldes rechts vom Querschnitte μI . Das 3. Feld und

der linke Teil des 2. Feldes bleiben unbelastet. (Fig. 85.)

Es ist nun

$$\max T_{\mu_1}^p = p(F_1 + F_2),$$

wobei wir F_1 und F_2 mit Hilfe der Gleichungen (54) und (58) berechnen.



ao

und

$$\max T = \frac{p \, l}{12} [7 - 12 \, \mu + 4 \, \mu^2 + 4 \, \mu^3 - 2 \, \mu^4] \quad \cdots \qquad (85)$$

a

Fig. 85.

·al3

Für $\mu = 0$

$$\max T'_1 = \frac{7}{12} pl \cdots \cdots (d),$$

die Querkraft unendlich nahe nach rechts von a_1 . Gleichung (85) gibt wieder den Verlauf der **max** *T*-Kurve im 2. Felde als den einer biquadratischen Parabel an, deren Ordinaten $y = \max T$ aus (85) zu berechnen sind.

Werte der minimalen Querkräfte im 2. Felde.

Handelt es sich um **min** T im Querschnitte μl , so müssen wir den linken Teil des 2. Feldes und das 3. Feld voll belasten. (Fig. 86.)

Es ist dann

$$\min T^{p}_{\mu} = p(F_{3} + F_{4}).$$

Dabei berechnen wir die Flächen F_3 , F_4 mit Hilfe der Gleichungen (56) und (60).

$$F_3 = \int_0^{\frac{\mu}{2}} \frac{2x^3 - 3lx^2 - 2l^2x}{3l^3} dx$$

6.)

$$a_0$$
 $F_1 + a_1$
 F_2
 $+ a_3$
 F_3
 $min T$
 F_3
 F_3
 F_4
 F_3
 F_3
 F_4
 F_3
 F_4
 F_5
 F_4
 F_5
 F_4
 F_5
 F_4
 F_5
 F_5
 F_6
 F

$$F_4 = \int_0^l \frac{2l^2 x - 3lx^2 + x^3}{3l^3} dx$$

und

min
$$T = \frac{pl}{12} [-1 - 4\mu^2 - 4\mu^3 + 2\mu^4] \cdots [86].$$

Wie aus (86) folgert, ist die **min** *T*-Kurve im 2. Felde ebenfalls eine biquadratische Parabel und die Ordinatenwerte lassen sich aus (86) bestimmen.

Für $\mu = 0$

 $\underline{\min \ T'_1 = -\frac{pl}{12}} \cdots \cdots \cdots (\epsilon)$

die unendlich nahe nach rechts von a_1 gelegene Querkraft.

Bekanntlich ist der Stützendruck $A_1 = -T_1 + T'_1$, wo T_1 die unendlich nahe linke und T'_1 die unendlich nahe rechte Querkraft bedeuten.

Die min T_1 -Belastung deckt sich mit der max T'_1 -Belastung, sowie mit der max A_1 -Belastung. Es ist somit

max $A_1 = -\min T_1 + \max T'_1$ und aus (β) und (d)

$$\max A_{1} = \frac{3}{6} \frac{7}{6} pl + \frac{7}{12} pl$$
$$\max A_{1} = \frac{6}{5} pl \cdots \cdots (87).$$

Ebenso ist min $A_1 = -\max T_1 + \min T'_1$ und aus (a) und (ϵ)

$$\min A_1 = -\frac{pl}{60} - \frac{pl}{12}$$
$$\min A_1 = -\frac{pl}{10} \cdots \cdots \cdots (88).$$

Die Werte (87), (88) können auch direkt aus der A_1 -Einflußlinie bestimmt werden.

Gleichförmig verteilte Last über den ganzen Träger.

Um bei dieser Belastung die Querkraft zu bestimmen, sind sämtliche Einflußflächen in Rechnung zu ziehen. Es ist

$$T^{g} = g(F_{1} + F_{2} + F_{3} + F_{4})$$

und nach Einsetzen der Werte für einzelne Flächen

$$T^{g}_{\mu l} = \frac{g_{l}}{2} [1 - 2\mu] \cdots (89).$$

Gleichung (89) gibt den Verlauf der T^g -Kurve als eine Gerade an. Diese schneidet die X-Achse bei $\mu = \frac{1}{2}$, wo dann **max** M^g auftritt, was bereits früher konstatiert wurde.

Schreiben wir in (89) p anstatt g, dann ist

$$\max T^p_{\mu_l} + \min T^p_{\mu_l} = T^p_{\mu_l}.$$

Durch Einsetzen $\mu = 0$ in (89)

$$T'_1 = \frac{gl}{2} \cdots \cdots \cdots (\zeta)$$

und mit Hilfe der Formel (γ)

$$A_{1} = -T_{1} + T'_{1}$$

$$A_{1} = \frac{3}{5}gl + \frac{gl}{2}$$

$$A_{1}^{g} = \frac{11}{10}gl \cdots (90).$$

Wenn wieder p anstatt g geschrieben wird, dann ist durch Vergleichung der Gleichungen (87), (88)

$$\max A_1^p + \min A_1^p = \left(\frac{6}{5} - \frac{1}{10}\right) pl = \frac{1}{10} pl = A_1^p.$$

Als weitere Kontrolle diene folgende Beziehung. Bei Vollbelastung muß $A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 3 gl.$

Nachdem infolge der Symmetrie $A_3 = A_0$, $A_2 = A_1$, muß

$$A_0^g + A_1^g = \frac{3}{2}gl.$$

Aus (84) und (90)

$$A_0^g + A_1^g = (\frac{2}{5} + \frac{1}{16})gl = \frac{15}{16}gl = \frac{3}{2}gl,$$

wie die obige Bedingung verlangt.

Die \max_{\min}^{\max} *T*-Kurve im 3. Felde ist das Spiegelbild der \max_{\max}^{\min} *T*-Kurve im 1. Felde.

D.

Kontinuierlicher Träger mit 3 ungleichen Feldern.

Unter denselben Voraussetzungen, wie in den vorigen 3 Fällen, können wir auch hier den Einfluß einer beweglichen Last mit Hilfe der Clapeyronschen Gleichungen ermitteln.

Der Träger ist zweifach statisch unbestimmt und es läßt sich auch die Dreimomentengleichung zweimal aufstellen. (Fig. 87.)

Für die ersten 2 Felder:

$$M_0 l_1 + 2 M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 + \frac{\mathfrak{N}_1}{l_1} + \frac{\mathfrak{N}_2}{l_2} = 0$$
 (a)

Für das 2. und 3. Feld

$$M_1 l_2 + 2 M_2 (l_2 + l_3) + M_3 l_3 + \frac{\mathfrak{N}_2}{l_2} + \frac{\mathfrak{N}_3}{l_3} = 0$$
 (b).

Da bei freier Auflagerung und einer festen Stütze $M_0 = M_3 = 0$ ist, und wenn wir

$$l_1 = \lambda_1 l$$
$$l_2 = \lambda_2 l$$
$$l_3 = \lambda_3 l$$

setzen, so ist

(a')
$$2 M_1 l (\lambda_1 + \lambda_2) + M_2 l \lambda_2 + \frac{\mathfrak{N}_1}{\lambda_1 l} + \frac{\mathfrak{N}_2}{\lambda_2 l} = 0$$

(b')
$$\frac{M_1 l \lambda_2 + 2 M_2 l (\lambda_2 + \lambda_3) + \frac{\mathfrak{N}_2}{\lambda_2 l} + \frac{\mathfrak{N}_3}{\lambda_3 l} = 0}{\lambda_3 l}$$

Weiter ist bekanntlich

$$\mathfrak{N} = Ppp'(l+p)$$
$$\mathfrak{N}' = Ppp'(l+p')$$

für eine Einzellast P, deren Abstände von den Stützen p und p' sind.

Befindet sich die Last P im 1. Felde, so ist

$$\frac{\mathfrak{N}_{1}}{\lambda_{1}l} = \frac{Ppp'(\lambda_{1}l+p)}{\lambda_{1}l}, \ \mathfrak{N}_{2}' = \mathfrak{N}_{2} = \mathfrak{N}_{3}' = 0$$

- 63 -

und es ergibt sich

$$M_2 = \frac{-Ppp'(\lambda_1 l + p)\lambda_2}{\lambda_1 l^2 [\lambda_2^2 - 4(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)]}$$

und

$$M_1 = \frac{2 P p p' (\lambda_1 l + p) (\lambda_2 + \lambda_3)}{\lambda_1 l^2 [\lambda_2^2 - 4 (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_2 + \lambda_3)]}$$

Setzen wir in die letzten 2 Gleichungen P=1, p=x, $p'=\lambda_1 l-x$, so gelangen wir zu den Einflußliniengleichungen der Stützenmomente im 1. Felde

 $\underbrace{y = \frac{2 x (\lambda_1^2 l^2 - x^2) (\lambda_2 + \lambda_3)}{\lambda_1 l^2 [\lambda_2^2 - 4 (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_2 + \lambda_3)]}}_{y = \frac{-x (\lambda_1^2 l^2 - x^2) \lambda_2}{\lambda_1 l^2 [\lambda_2^2 - 4 (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_2 + \lambda_3)]}} \dots (1) \text{ die } M_1 - \text{Einflußliniengleichung},$

Setzen wir in (1) und (2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, gelangen wir zu den früher abgeleiteten Gleichungen bei gleichen Feldern.

$$\frac{\mathfrak{N}_{2}}{l_{2}} = \frac{Ppp'(\lambda_{2}l+p')}{\lambda_{2}l}, \qquad \frac{\mathfrak{N}_{2}}{l_{2}} = \frac{Ppp'(\lambda_{2}l+p)}{\lambda_{2}l}, \qquad \frac{\mathfrak{N}_{1}}{l_{1}} = \frac{\mathfrak{N}_{3}'}{l_{3}} = 0$$

und die Stützenmomente sind:

$$M_{2} = \frac{Ppp'}{\lambda_{2} l^{2}} \frac{2 \left(\lambda_{2} l + p\right) \left(\lambda_{1} + \lambda_{2}\right) - \lambda_{2} \left(\lambda_{2} l + p'\right)}{\lambda_{2}^{2} - 4 \left(\lambda_{1} + \lambda_{2}\right) \left(\lambda_{2} + \lambda_{3}\right)}$$

und

$$M_1 = \frac{2 P p p'}{\lambda_2^2 l^2} \frac{\lambda_2 (\lambda_2 l + p') - 2 (\lambda_2 l + p) (\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_2^2 - 4 (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_2 + \lambda_3)} (\lambda_2 + \lambda_3) - \frac{P p p' (\lambda_2 l + p)}{\lambda_2^2 l^2},$$

woraus wieder mit P=1, p=x, $p'=\lambda_2 l-x$, die Gleichungen der Einflußlinien resultieren

$$\underbrace{ y = \frac{x \left(\lambda_2 l - x\right) \left[2 \lambda_1 \lambda_2 l + x \left(2 \lambda_1 + 3 \lambda_2\right)\right]}{\lambda_2 \left[\lambda_2^2 - 4 \left(\lambda_2 + \lambda_3\right) \left(\lambda_1 + \lambda_2\right)\right] l^2} \cdots (4) }_{\lambda_2 \left[\lambda_2^2 - 4 \left(\lambda_1 + \lambda_2\right) \left(\lambda_2 + 4 \lambda_3\right) l - x \left(3 \lambda_2 + 2 \lambda_3\right)\right]} \cdots (3).$$

(3) ist die Gleichung der M_1 -Einflußlinie, (4) die Gleichung der M_2 -Einflußlinie im 2. Felde. Durch Einsetzen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ gelangen wir wieder zu den Formeln (3), (4) des Trägers mit gleichen Feldern.

Befindet sich eine Last *P* in dem 3. Felde, so ist

$$\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}'_2 = 0$$
, $\frac{\mathfrak{N}'_3}{l_3} = \frac{Ppp'(\lambda_3 l + p')}{\lambda_3 l}$

und die Stützenmomente sind gegeben durch die Gleichungen

$$M_2 = \frac{2 P p p' (\lambda_3 l + p') (\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_3 l^2 [\lambda_2^2 - 4 (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_2 + \lambda_3)]}$$

und

$$M_1 = \frac{-Ppp'(\lambda_3 l + p')\lambda_2}{\lambda_3 l^2 [\lambda_2^2 - 4(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)]}$$

und aus den letzten 2 Gleichungen folgen dann mit P=1, p=x, $p'=\lambda_3 l-x$ die Einflußliniengleichungen

$$y = \frac{-x \left(\lambda_3 l - x\right) \left(2 \lambda_3 l - x\right) \lambda_2}{\lambda_3 l^2 \left[\lambda_2^2 - 4 \left(\lambda_1 + \lambda_2\right) \left(\lambda_2 + \lambda_3\right)\right]} \cdots \cdots \cdots (5) \text{ die } M_1 \text{-Einflußlinie}$$

$$=\frac{2 x (\lambda_3 l-x) (2 \lambda_3 l-x) (\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_3 l^2 [\lambda_2^2 - 4 (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_2 + \lambda_3)]} \cdots \cdots \cdots (6) \text{ die } M_2\text{-Einflußlinie.}$$

und

y

Sind nun die M_1 - und M_2 -Einflußlinien bestimmt, lassen sich die Einflußlinien der Biegungsmomente Stützendrücke und Querkräfte wie in den vorigen Fällen ermitteln. Am raschesten geschieht die weitere Ermittelung graphisch mit Hilfe der Einflußlinien des einfachen Trägers. Durch ebensolche Betrachtungen wie im vorigen Falle findet man die gefährlichen Querschnitte, Maxima, Minima usw.

Allgemein sich auf die weiteren analytischen Ableitungen einzulassen, wäre umständlich; im speziellen Falle, wo λ_1 , λ_2 , λ_3 bestimmte Zahlen sind, gestaltet sich auch die rein analytische Untersuchung einfach.

Als Beispiel der Anwendung der hier abgeleiteten Formeln, sowie der Tabellen diene folgender Auszug aus der Berechnung der neuen Rathausbrücke zu Stockholm.

Berechnung der Platte.

Als Verkehrslast sind eine Dampfwalze von 25 t Dienstgewicht, ein Motorwagen von 16 t Gewicht und ein Lastwagen von 10 t Gewicht, sowie ein Menschengedränge von 500 kg/qm in Rechnung zu nehmen. Nähere Angaben über die Verteilung der Gewichte auf einzelne Rad- resp. Achsendrücke sind den folgenden Bildern zu entnehmen.

Die Platte wird im Einklange mit den preußischen Vorschriften vom 24. Mai 1907 als kontinuierlicher Träger auf 4 Stützen berechnet, wobei sämtliche Felder der 15,0 m breiten Fahrbahn als Mittelfelder bemessen werden, mit Ausnahme der an die Bürgersteige angrenzenden Felder, die als Randfelder dimensioniert werden.

a) Berechnung der Mittelfelder.

Das größte positive Moment tritt in der Mitte des 2. Feldes auf, es ist nur das Mittelfeld zu belasten, die anderen 2 Felder unbelastet zu lassen. Die ungünstigste Wirkung erzeugt die Vorderwalze, über die Mitte des 2. Feldes



aufgestellt. Durch die Chaussierung und Platte verteilt sich der Walzendruck in der Längsrichtung auf 1,20 m; da ein Streifen von 1,0 m Breite untersucht wird, entfällt auf diesen die Last

$$P = \frac{9000}{1,20} = 7500$$
 kg. (Fig. 88.)

In der Querrichtung verteilt sich

der Walzendruck auf 2,10 m, so daß $\frac{7500}{2.10}$ = 3580 kg/m.

Es kommt dabei ein Teil der Belastung in die negative Einflußfläche und verringert somit das Mittelmoment. (Die Wirkung der Hinterwalze ist ungünstiger, da es sich aber nur um ein Beispiel handelt, führen wir den Fall der Vorderwalze an.)

Der Inhalt der positiven Flächen ist nach (74) $_{4_{0}}^{3}l^{2} = 0,133$ qm; der Inhalt der negativen Flächen ist annähernd gemessen — 0,0194 qm, somit die ganze Einflußfläche

0,133 - 0,0194 = 0,1136 gm,
so daß

max $M^p = 0,1136 \times 3580 = 407$ kgm = 40700 kgcm. Hierzu kommt noch die ständige Belastung mit 1200 kg/qm, also für die Platte 1200 kg/m nach (78) mit $\mu = \frac{1}{2}$

 $M^g = 0.025 \times 1.33^2 \times 1200 = 53$ kgm = 5300 kgcm, so daß im ganzen $M^c_{tot.} = 46000$ kgcm.

Das größte negative Moment ist das Stützenmoment max $(-M_i)$.

Wie aus der M_1 -Einflußlinie ersichtlich, muß die Walze in eine solche Lage kommen, daß das 1. und 2. Feld womöglich ungünstig mit 3580 kg/m belastet werden. Wir belasten das 1. Feld

voll und es kommen dann 0,77 m noch auf das 2. Feld.*) Aus der Belastungsfläche der Walze ergibt sich, daß noch 0,10 m des 2. Feldes mit Menschengedränge belastet werden können. Mit Gleichungen aus Fig. 89.



$$F_{1} = \int_{0}^{2} \frac{4x(l^{2} - x^{2})}{15l^{2}} dx = -\frac{1}{15}l^{2} = -0,118 \text{ qm}$$

$$F_{2} = \frac{-1}{15l^{2}} \int_{0}^{0,77} (7l^{2}x - 12lx^{2} + 5x^{3}) dx = -0,0639 \text{ qm}$$

$$F_{1} + F_{2} = -0,1819 \text{ qm}$$

und somit $M_1^W = -3580 \cdot 0,1819 = -65000$ kgcm. Das Moment vom Menschengedränge ist durch die Fläche F_3 gegeben, wobei

$$F_3 = -\frac{1}{15} l^2 \int_{1,25}^{1,55} (7 l^2 x - 12 l x^2 + 5 x^3) dx = 0,0019 \text{ qm}$$

und $M_1^p = -0,0019 \cdot 500 = -0,95 \text{ kgm} = -95 \text{ kgcm}$. Hierzu kommt noch das Moment vom Eigengewicht nach (71) $M_1^q = -\frac{1200.1,33^2}{10} = -212 \text{ kgm} = 21200 \text{ kgcm}$ so daß max $M_1^{\text{tot.}} = -86295 \text{ kgcm}$ ist.

b) Berechnung der Randfelder.

Das größte negative Moment ist das Stützenmoment M_1 , und das wurde bereits bestimmt. Das größte positive Moment tritt für eine Einzellast in 0,4277*l* auf und besitzt da den Wert 0,205 *Pl*, für eine gleichförmige Belastung tritt das max Moment nach (63) in 0,45*l* auf und hat hier den Wert $\frac{8 \cdot 1}{8 \cdot 0 \cdot 0} pl^2$, für das Eigengewicht ist das größte Moment genau bei 0,4*l*. Wenn wir nun allgemein die Einflußlinie des Querschnittes 0,4*l* benutzen, kommen wir zu den Werten 0,2042 *Pl* und $\frac{8 \cdot 0}{8 \cdot 0 \cdot 0} pl^2$, also eine ganz minimale Differenz; dafür können wir aber hier genauer recinen als mit der unbequemen Zahl 0,4277.

Nach Fig. 90 kommt die Dampfwalze über das erste Feld so zu stehen, daß die verteilte Last von 3580 kg/m das 1. Feld ganz belastet, der andere Teil von den 2,10 m links vom Träger fällt.

^{*)} Vergleiche noch das Beispiel zum Schluß! Lederer, Einflußlinien.

Das 3. Feld ist mit Menschengedränge belastet. Die Fläche

$$F_1 + F_2 = \frac{l^2}{15} \left[\frac{13\mu}{2} - \frac{15\mu^2}{2} \right]$$

nach Seite 50 ($F_1 + F_2$).

 $F_1 + F_2 = \frac{l^2}{15} [13 \cdot 0.2 - 15 \cdot 0.08] = 0.0933 \, l^2 = 0.1655 \, \text{qm},$



so daß das von der Dampfwalze verursachte Biegungsmoment

 $M^{\text{D. W.}} = 0,1655 \cdot 3580$ = 593 kgm = 59300 kgcm.

Die Fläche F_3 ist nach Seite 50 F_4

$$F_3 = \frac{\mu l^2}{60} = \frac{l^2}{150} = 0,00667 \, l^2 = 0,0118 \, \text{qm},$$

und somit das vom Menschengedränge verursachte Moment



 $M^p = 0,0118 \cdot 500 = 5,9 \text{ kgm}$ = 590 kgcm.

Das vom Eigengewicht herrührende Biegungsmoment ist nach (70)

 $M^{g} = \frac{g l^{2}}{10} (1, 6 - 0, 8) = 0,08 \cdot 1200 \cdot 1,33^{2}$ = 17000 kgcm,

so daß schließlich das Gesamtmoment $M_{\text{tot.}}^{0,4 l} = 76890$ kgcm.

Berechnung der Fahrbahnträger.

Die Hauptdimensionierung dieser Träger mit 2 Öffnungen erfolgt wieder nach dem größten positiven Moment bei 0,41 und dem größten negativen Stützenmoment.

Untersucht wird ein 4,0 m breiter, aus der Fahrbahn herausgegriffener Streifen. (Fig. 91.)

 $A_1 A_2$ ist die Symmetrieebene der äußeren Kräfte. Es wäre hier nur eine Verteilung der Einzellasten in der Längsrichtung zu berücksichtigen, was aber keinen großen Ausschlag gibt.

Das seitliche Menschengedränge von $1,8 \cdot 500 = 900 \text{ kg/m} = p'$ steht über den ganzen Träger zur Verfügung, das mittlere Menschengedränge $2,2 \cdot 500 = 1100 \text{ kg/m} = p''$ nur auf den von den ungünstiger wirkenden

- 66 -

Fahrzeugen freien Strecken. Die ständige gleichförmige Last g = 6800 kg/m. Um **max** M in **0,4** l zu erzielen, stellen wir die Hinterwalze mit 16000 kg in 0,4 l, die Vorderwalze mit 9000 kg kommt nach rechts, links von der Walze kommt



ein Lastwagen mit der Hinterachse von 8000 kg. Rechts von der Vorderwalze bis zur Stütze kommt Menschengedränge von 1100 kg/m, nebst dem über das ganze 1. Feld seitwärtiges Menschengedränge von 900 kg/m.

Nun ist von den Einzellasten

 $M_{0,4l} = 16000 \cdot 0,2064 \cdot 13,5 + 9000 \cdot 1,25 + 8000 \cdot 2,2 + 2000 \cdot 0,125$ = 7365000 kgcm,

wobei die Ordinaten 1,25, 2,2 und 0,125 abgegriffen sind.

$$M_{0,\mu,j}^{p^{\prime\prime}} = 1100 \cdot 1,85 = 2035 \,\mathrm{kgm} = 203500 \,\mathrm{kgcm},$$

wobei die Fläche 1,85 qm wieder gemessen ist.

 $M_{0,\mu_1}^{p'} = 0,095 \cdot 900 \cdot 13,5^2 = 15600 \text{ kgm}$

= 1560000 kgcm nach (19) mit μ = 0,4.

Das Eigengewicht erzeugt

 $M_{0,4,1}^g = 0,08 \cdot 6800 \cdot 13,5^2 = 9900\,000 \,\mathrm{kgcm}$

nach (25) mit $\mu = 0,4$.

Es ist schließlich

max
$$M_{0,4 \text{ tot.}} = 19029000 \text{ kgcm}$$
,

welchem Moment bei der Dimensionierung Rechnung zu tragen ist.

Das größte negative Moment ist das Stützenmoment M_1 .

Für M_1 ist der ganze Träger negativ beitragend und somit die zur Verfügung stehenden Lasten in ungünstigste Stellung über den ganzen Träger aufzubringen. Es kommt somit die Hinterwalze mit 16 t in $\frac{l}{\sqrt{3}}$ des ersten Feldes, die Vorderwalze mit 9 t kommt nach links, hierauf weiter nach links der hintere Teil eines Lastwagens, im 2. Felde wird ein elektrischer Motorwagen so aufgestellt, daß eine Asche in $\frac{l}{\sqrt{3}}$ zu stehen kommt, die zweite kommt nach links, die noch freien Strecken des Trägers werden mit mittlerem Menschengedränge belastet; nebstdem kommt über den ganzen Träger seitwärtiges Menschengedränge.

5*

 $M_1 = -16000 \cdot 0.096225 \cdot 13.5 - 9000 \cdot 0.06825 \cdot 13.5 - 8000 \cdot 0.0507 \cdot 13.5 - 6000 \cdot 0.096225 \cdot 13.5 - 6000 \cdot 1.2 = -49545 \text{ kgm},$

wobei wieder 1,2 abgegriffen ist.





Das mittlere Menschengedränge mit 1100 kg/m wird durch Planierung der zugehörigen Flächen bestimmt und gibt ein Moment von

 $M_1^{p''} = -8,52 \cdot 1100 = -9360$ kgm.

Das Eigengewicht mit 6800 kg/m gibt ein Moment von

 $M^{g} = -\frac{1}{8} 6800 \cdot 13,5^{2} = -155000 \, \text{kgm},$

so daß schließlich

max
$$M_{\perp}^{\text{tot.}} = -23\,440\,500$$
 kgcm.

Bestimmung des maximalen Stützendruckes A1.

Zur Berechnung der Auflager ist die größte Auflagerkraft nötig.

Aus der Einflußlinie ergibt sich wieder folgende ungünstigste Laststellung: Die Hinterwalze mit 16000 t über a_1 , die Vorderwalze mit 9 t rechts, weiter rechts Motorwagen und Menschengedränge, links von der Hinterwalze



Lastwagen und Menschengedränge, seitwärts Menschengedränge über den ganzen Träger. (Fig. 94.)

Es ist dann von den Einzellasten

$$\max A_{1}^{P} = 16000 \cdot 1 + 9000 \cdot 0.9 + 6000 (0.715 + 0.55) + 8000 \cdot 0.99 + 2000 \cdot 0.8 = 41210 \text{ kg}.$$

 A_1 vom mittleren Menschengedränge ist wieder durch die zugehörigen Flächen bestimmt und

$$A_1^{p''} = 1100 \cdot 3,77 = 4150$$
 kg.

(Die Flächen könnte man natürlich genau mittelst Integration bestimmen, wie dies bei der Plattenberechnung gezeigt wurde.)

Das seitwärtige Menschengedränge mit 900 kg/m gibt nach (30)

max $A_{1}^{p'} = \frac{5}{4} 900 \cdot 13.5 = 15200 \, \text{kg}.$

Ebenso das Eigengewicht nach (34)

 $A_{1}^{g} = \frac{5}{4} 6800 \cdot 13,5 = 114500 \text{ kg}.$

Es ist schließlich

 $\max A_1^{\text{tot.}} = 175060 \text{ kg.}$

Auf ein Auflager entfällt 58353 kg.

Bestimmung des minimalen Auflagerdruckes A₀.

Zur Berechnung der Landpfeiler haben wir den minimalen Auflagerdruck A₀ zu bestimmen.



Zu dem Zwecke müssen wir das 2. Feld womöglich ungünstig belasten, das 1. unbelastet lassen. Aus der Einflußlinie ergibt sich folgende Lastenstellung: Die Hinterwalze mit 16000 kg in

 $\frac{l}{\sqrt{3}}$ des 2. Feldes, weiter nach rechts die Vorderwalze mit 9000 kg und ein Motorwagen mit 2.6000 kg, links von der Hinterwalze kommt ein Lastwagen mit 8000 kg und 2000 kg. (Fig. 96.)

Es ist somit

min $A_0^P = -16000 \cdot 0.09625 - 9000 \cdot 0.06825 - 6000 (0.041 + 0.0085)$ $-8000 \cdot 0.094 - 2000 \cdot 0.0192 = -3241 \text{ kg}$

vom seitlichen Menschengedränge
$$p' = 900 \text{ kg/m}$$
 nach (31)
min $A_p^{p'} = -r_{\overline{a}} 900 \cdot 13,5 = -760 \text{ kg}$

$$\min A_o^p = -\frac{1}{16}900 \cdot 13,5 = -760$$

und für das Eigengewicht g = 6800 kg/m nach (33)

 $A_{g}^{g} = \frac{3}{8} 6800 \cdot 13,5 = +34500 \text{ kg},$

so daß

min $A_0 = +31500$ kg.

Auf eine Rippe entfällt 10500 kg.



Als kleines Beispiel für ständige Last folge noch die Bestimmung des Stützenmomentes in den Unterzügen unter den Schalungssteifen.

Die Schalungssteifen ruhen auf Unterzügen, die als durchgehende Träger mit 3 Feldern zu berechnen sind. Die Entfernung der doppelten Hängewerke, deren Untergurt als Auflager der Unterzüge dient, ist 2,66 m.

Somit kommen in allen 3 Feldern die Lasten von 2000 kg in $\frac{1}{4}l$ und $\frac{3}{4}l$. Das absolut größte Moment, wornach der Holzquerschnitt bestimmt wird, ist das Stützenmoment M^1 .

Aus (1) bekommen wir

 $\begin{array}{ll} & \text{für } x = \frac{1}{4} \, l & y_1 = -\frac{1}{16} \, l \\ & , x = \frac{3}{4} \, l & y_2 = -\frac{7}{36} \, l \\ \end{array} \\ \text{Aus (3)} & , x = \frac{1}{4} \, l & y_3 = -\frac{2}{320} \, l \\ & , x = \frac{3}{4} \, l & y_4 = -\frac{1}{320} \, l \\ \text{Aus (5)} & , x = \frac{1}{4} \, l & y_5 = +\frac{7}{320} \, l \\ & , x = \frac{3}{4} \, l & y_6 = +\frac{1}{34} \, l \\ \text{und } M_1 = P \sum_{1}^{5} y = -2150 \, (\frac{1}{16} + \frac{7}{80} + \frac{2}{320} + \frac{132}{320} - \frac{7}{320} - \frac{1}{64}) \, 2,66 \\ & \underline{M_1 = -129000 \, \text{kgcm.}} \end{array}$

E. Der horizontal eingespannte Träger.

Wir gehen in unserer Ableitung wieder von einem konstanten EJ aus und wollen den Einfluß einer beweglichen Last ermitteln, somit setzen wir auch voraus, daß der Einspannungswinkel O bleibt.

Der horizontal eingespannte Träger ist zweifach statisch unbestimmt und wir könnten ihn mit Hilfe der Clapeyronschen Gleichungen als kontinuierlichen Träger mit 3 Feldern, wovon die Randfelder Nullfelder sind, durch Berechnung der Stützenmomente (hier Einspannungsmomente) M_1 , M_2 auf dieselbe Weise

wie die früheren Fälle lösen. Wir wollen hier jedoch von der Arbeitsgleichung ausgehen und nach Müller-Breslau*) den linken Auflagerdruck A_1 und das Einspannungsmoment M_1 als statisch unbestimmbare Größen einführen.**)



Unter den oben gemachten Vor-

aussetzungen, ohne Berücksichtigung einer ungleichmäßigen Temperaturerhöhung, lautet die Arbeitsgleichung:

$$L = \int_{EF}^{N} \frac{\partial N}{\partial X} dx + \int_{EJ}^{M} \frac{\partial M}{\partial X} dx = 0.$$

Nachdem hier keine Axialkraft vorhanden ist und EJ = konst.

$$0 = \int M \frac{\partial M}{\partial X} dx.$$

Als statisch unbestimmbare Größen, nach denen die partiellen Differentiale des Biegungsmomentes zu bestimmen sind, werden, wie bereits erwähnt, A_1 und M_1 eingeführt.

Für die Last P ergeben sich die Biegungsmomente zu

 $M = M_1 + A_1 x$ für Querschnitte links von der Last

 $M = M_1 + A_1 x - P(x - p)$ für Querschnitte rechts von der Last. (Fig. 97.) Es sind dann die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial M}{\partial A_1} = x$$
 in beiden Fällen,
 $\frac{\partial M}{\partial M_1} = 1$ in beiden Fällen.

*) Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und Statik der Baukonstruktionen. (Leipzig 1904.)

**) Wir gelangen auch zu sämtlichen Resultaten nur mit Hilfe der M_1 -Werte, nachdem aber A_1 bestimmt ist, ist es bequemer, mit Hilfe der M_1 - und A_1 -Einflußlinie zu arbeiten.

Somit lauten die umgeformten Arbeitsgleichungen

$$\int_{0}^{l} M \frac{\partial M}{\partial A_{1}} dx = 0$$
$$\int_{0}^{l} M \frac{\partial M}{\partial M_{1}} x dx = 0.$$

Wenn wir M durch die oben angeführten Ausdrücke ersetzen, müssen wir das Integral teilen, einmal in den Grenzen **0** und p, das zweite Mal in den Grenzen p und l integrieren.

Es ist sodann

$$\int_{0}^{p} (M_{1} + A_{1}x) dx + \int_{p}^{l} [M_{1} + A_{1}x - P(x - p)] dx = 0$$

$$\int_{0}^{p} (M_{1} + A_{1}x) x dx + \int_{p}^{l} [M_{1} + A_{1}x - P(x - p)] x dx = 0$$

und nach Durchführung der Integration

$$M_{1}l + A_{1}\frac{l^{2}}{2} - P\left[\frac{l^{2}}{2} - pl + \frac{p^{2}}{2}\right] = 0$$
$$M_{1}\frac{l^{2}}{2} + A_{1}\frac{l^{3}}{3} - P\left[\frac{l^{3}}{3} - p\frac{l^{2}}{2} + \frac{p^{3}}{6}\right] = 0$$

und nach Auflösung der letzten Gleichungen

$$A_{1} = P \left[1 - 3 \frac{p^{2}}{l^{2}} + 2 \frac{p^{3}}{l^{3}} \right]$$
$$M_{1} = P \left[2 \frac{p^{2}}{l} - p - \frac{p^{3}}{l^{2}} \right].$$

Setzen wir in die soeben bestimmten Ausdrücke für A_1 und M_1 P=1 und lassen die Lastentfernung p variabel werden, p=x, dann gelangen wir zu den Gleichungen der Einflußlinien beider statisch unbestimmbarer Werte.

Es ist:

$$y = -\frac{x}{l^2} (x^2 - 2 lx + l^2) \cdots \cdots \cdots (1)$$

die Gleichung der Einflußlinie des Einspannungsmomentes M_1 und

$$y = \frac{2 x^3 - 3 l x^2 + l^3}{l^3} \cdots \cdots \cdots \cdots (2)$$

die Gleichung der Einflußlinie der Auflagerreaktion A_1 .

Nun wollen wir diese Gleichungen wie in den vorigen Fällen untersuchen.

Einflußlinie des Einspannungsmomentes M_1 .

Die Gleichung (1)

$$y = -\frac{x}{l^2} (x^2 - 2 lx + l^2)$$

ist die einer kubischen Parabel.

Gleichung (1) liefert für positive x nur negative Ordinaten. Wir können nämlich auch schreiben

	*
	$y = -\frac{x}{l^2}(l-x)^2,$
n	$\frac{x}{l^2} \ge 0 \text{und} (l-x)^2 \ge 0,$
	$y \leq 0.$
	x=0 ist $y=0$.
	x = l
imum.	
Bedingung	$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = 0$

und nachder

muB

Bei

Max

Die E

liefert aus (1)

 $x^2 - \frac{4}{3}lx + \frac{l^2}{3} = 0$, $x = \frac{2}{3}l \pm \frac{1}{3}l.$

woraus

Die erste Wurzel

$$x_{\max y} = \frac{l}{3} \cdots \cdots \cdots (3)$$
 liefert $\max y = -\frac{4}{2^47} l \cdots \cdots (4)$.

Die zweite Wurzel x = l, y = 0 besagt, daß bei a_2 die X-Achse Tangente der Kurve ist.

Für $x = \frac{l}{2}$ erhalten wir aus (1) den bekannten Wert

$$y = -\frac{l}{8}$$
 ($M_1 = -\frac{Pl}{8}$ für eine Last in der Mitte).

Wendepunkt.

Die Bedingung $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ liefert durch zweimalige Differentiierung der Gleichung (1)

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{l^2} (-6 x + 4 l) = 0,$$

woraus

$$\underline{x_i = \frac{2}{3} l} \cdots \cdots (5),$$

hierbei ist

 $y_i = -\frac{2}{27}l.$

Der ganze Verlauf der Kurve gestaltet sich wie in Fig. 98 angeführt.

Die Einflußlinie des Einspannungsmomentes M_2 ist das Spiegelbild der M_1 -Einflußlinie.

Einflußlinie der Auflagerreaktion A_1 .

Wir bestimmten in (2) die Gleichung dieser Einflußlinie. Sie lautet

$$y = \frac{2 x^3 - 3 l x^2 + l^3}{l^3} \cdots (2).$$

Es ist dies wieder die Gleichung einer kubischen Parabel.



- 74 -

Maximum.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{l^3} [6x^2 - 6lx] = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = l.$$



Somit ist der ganze Verlauf der Kurve wie aus Fig. 99 ersichtlich.

Die Einflußlinie der Auflagerreaktion A_2 ist das Spiegelbild der A_1 -Einflußlinie.

Einflußlinie des Biegungsmomentes in einem beliebigen Querschnitte µl.

Das Moment in einem Querschnitte ist durch die Beziehungen



Fig. 100.

(a) $M = M_1 + A_1 \mu l$ für Lasten rechts von μl

(b) $M = M_1 + A_1 \mu l - P(\mu l - x)$ für Lasten links von μl

gegeben. (Fig. 100.)

Die Einflußlinie besteht somit aus 2 Asten.

a) Linker Ast der Einflußlinie.

Setzen wir in (b) P=1 und führen anstatt M_1 und A_1 die Ordinaten der M_1 - und A_1 -Einflußlinien aus (1) und (2) ein, so gelangen wir zur Gleichung der M-Einflußlinie links von μl .

$$y = \frac{(2 \mu - 1) x^3 + (2 - 3 \mu) l x^2}{l^2} \cdots \cdots \cdots (8).$$

Gleichung (8) ist wieder die einer kubischen Parabel (nur für $\mu = 0.5$ wird aus (8) eine quadratische Parabel); wir werden sie in der gewohnten Weise nach statisch wichtigen Werten untersuchen.

a) Belastungsscheiden.

Bedingung: y = 0,

zwei Wurzeln sind x = 0, dann folgt aus der verbleibenden linearen Gleichung

$$x_0 = \frac{3 \mu - 2}{2 \mu - 1} l \cdots \cdots \cdots (9).$$

Soll x einen statischen Wert haben, so muß

 $\mu > \frac{2}{3}.$

Die letzte Ungleichheit besagt, daß für Querschnitte von $\frac{3}{3}l$ bis l der linke Einflußlinienast eine Belastungsscheide oder einen neutralen Querschnitt liefert, die Grenze der beiden Querschnittsgattungen ist bekanntlich der rechte Festpunkt, dessen Lage somit mit $\frac{3}{3}l$, was auch bereits bekannt ist, festgelegt wurde.

b) Maximum.

Das mathematische Maximum hat hier keine statische Bedeutung. Den Höchstwert erreicht die Ordinate im Querschnitte selbst bei $x = \mu l$, im Schnittpunkte der beiden Kurvenäste.

$$y_{\max} = 2l(\mu^4 - 2\mu^3 + \mu^2) \cdots \cdots \cdots (10.)$$

Minimum.

Das mathematische Minimum kommt zur Geltung, sobald der Querschnitt hinter $\frac{3}{3}l$ ist und ein Teil der Einflußlinie unter der X-Achse verläuft.

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Durch Differentiierung der Gleichung (8)

$$3(2\mu - 1)x^2 + 2l(2 - 3\mu)x = 0.$$

 $x_1 = 0$, das mathematische Maximum, bedeutet bei a_1 die X-Achse als Tangente, was bereits aus der Bedingung y = 0 resultierte, da sie zwei unendlich nahe Werte x = 0 lieferte.

Für Minimum

$$x_{\min y} = \frac{2l(3\mu - 2)}{3(2\mu - 1)} \cdots \cdots (11).$$

Wie aus (11) ersichtlich, muß für einen x-Wert von statischer Bedeutung $\mu > \frac{2}{3}$, dieselbe Bedingung, zu der wir bereits früher gelangten.

Durch Einsetzen für x aus (11) in (8)

min
$$y = -\frac{4}{27} \frac{(3 \mu - 2)^3}{(2 \mu - 1)^2} l \cdots (12).$$

Wendepunkt.

Im Falle, daß $\mu > \frac{2}{3}$, kommt auch der Wendepunkt zur Geltung. Seine Lage aus der Bedingung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

$$x_i = \frac{3 \mu - 2}{3 (2 \mu - 1)} l \cdots (13).$$

Aus (13) gelangen wir wieder zur Bedingung $\mu > \frac{2}{3}$.

ist

Aus der Beziehung (a) erhalten wir durch Einsetzen der M_1 und A_1 -Einflußlinienordinatenwerte aus (1), (2)

$$y = \frac{(2 \,\mu - 1) \,x^3 + (2 - 3 \,\mu) \,l x^2 - l^2 x + \mu \,l^3}{l^2} \cdots \cdots \cdots (14).$$

(14) ist die Gleichung einer kubischen Parabel, zu der wir infolge der Symmetrie auch gelangt wären, wenn wir in (8) anstatt $x \cdots x' = l - x$ und $1 - \mu$ anstatt μ eingesetzt hätten.

a) Belastungsscheiden.

Bedingung y = 0

$$(2 \mu - 1) x^{3} + (2 - 3 \mu) l x^{2} - l^{2} x + \mu l^{3} = 0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $x_1 = l$.

Wenn wir nun die Gleichung durch (x - l) dividieren, gelangen wir zur quadratischen Gleichung

$$(2 \mu - 1) x^{2} + (1 - \mu) l x - \mu l^{2} = 0,$$

$$x = \frac{\mu - 1 \pm (3\mu - 1)}{2(2\mu - 1)} = 0.$$

woraus

Eine Wurzel $x_2 = l$ bedeutet einen zweiten gemeinsamen Punkt der X-Achse mit der Kurve bei a_2 , somit eine Tangente.

Die zweite Wurzel

$$x = \frac{\mu}{1 - 2\mu} l \cdots \cdots (15)$$

gibt die Belastungsscheide an. Sie hat einen statischen Wert, wenn

$$\frac{\mu}{1-2\mu}l \leq l$$
, somit $\underline{\mu \leq \frac{1}{3}}$,

wodurch die Lage des linken Festpunktes zu $\frac{l}{3}$ festgelegt ist, was auch aus der Symmetrie zu erwarten war.

b) Maximum.

 y_{max} ist bereits durch (10) gegeben.

Minimum.





der X-Achse und besitzt hier ein mathematisches Minimum. Infolge der Symmetrie kann man nach (12) **min** y für den symmetrisch zur Mittelachse gelegenen Querschnitt bestimmen, ebenso x_i aus (13) liefert den zum Wendepunkt symmetrischen Punkt.

Der ganze Verlauf der Einflußlinie gestaltet sich somit folgendermaßen:

a) Befindet sich der Querschnitt zwischen λ und ϱ , im inneren Drittel des Trägers, gibt es keine Belastungsscheide, der ganze Träger ist zum Momente in μl positiv beitragend, es gibt auch nur ein Belastungsschema für max *M*. (Fig. 101.)

b) Befindet sich jedoch der Querschnitt zwischen ϱ und a_2 , dann liefert der linke Kurvenast eine Belastungsscheide nach (9), (11) und 12) die größte negative Ordinate, (13) einen Wendepunkt. Aus der Einflußlinie ergeben sich so die Belastungsschemen für $\max_{\min} M$. (Fig. 102.)

c) Befindet sich der Quer-

schnitt zwischen a_1 und λ , so

sind seine Einflußlinien und Belastungsschemen Spiegelbilder der für den symmetrisch zwischen a_2 und ϱ gelegenen Querschnitt geltenden Einflußlinien und Belastungsschemen. (Fig. 103.)



Fig. 103.

Der gefährliche Querschnitt für max M.

Gleichung (10) lieferte die maximale Ordinate der Einflußlinie des Biegungsmomentes in einem beliebigen Querschnitte

$$y_{\max} = 2l(\mu^4 - 2\mu^3 + \mu^2) \cdots \cdots (10).$$

Die Gleichung gibt an, daß der geometrische Ort der maximalen Ordinaten eine biquadratische Parabel ist. Wird nun die Gleichung (10) nach der unabhängig Variablen μ differentiiert, dann ist

$$\frac{dy_{\max}}{d\mu} = 2l(4\mu^3 - 6\mu^2 + 2\mu) = 0$$

$$2\mu^2 - 3\mu + 1 = 0$$

$$\mu_{\max} y_{\max} = \frac{1}{2} \cdots \cdots \cdots (16).$$

und



Das größte positive Moment tritt in der Mitte auf und es ist

$$\underline{\max y_{\max} = \frac{l}{8}} \cdots \cdots \cdots (17).$$

(Der bekannte Wert $+rac{Pl}{8}$ für eine Einzellast in der Mitte.)

Weiter können wir durch Einsetzen $\mu = \frac{1}{2}$ in (8) und (14) zu den Gleichungen quadratischer Parabeln gelangen.

Linker Ast $y = \frac{x^2}{2l} \cdots a_1$ ist somit der Scheitel. Rechter Ast $y = \frac{(l-x)^2}{2l} = \frac{x^{l^2}}{2l} \cdots a_2$ ist somit der Scheitel.

Der gefährliche Querschnitt für min M

ist der Einspannungsquerschnitt, wo min $M = \max(-M_1)$, welche Werte bereits in (3) und (4) bestimmt wurden.

Einflußlinie der Querkraft in einem beliebigen Querschnitte µl.

Für eine Last rechts vom Querschnitte μl ist die Querkraft T in diesem Querschnitte $T = A_1$, somit gilt von μl bis l die A_1 -Einflußlinie als T-Einflußlinie.



Befindet sich die Last links vom
Duerschnitte, so ist
$$T = A_1 - P = -A_2$$
.

Es besteht somit die Einflußlinie der Querkraft eines jeden Querschnittes aus 2 Asten; der linke Ast ist die negativ genommene Einfluß-

linie der rechten Auflagerreaktion, der rechte Ast ist die Einflußlinie der linken Auflagerreaktion.

a) Linker Ast. Mit Hilfe von (2) und durch Einsetzen P=1

$$y = \frac{2 x^3 - 3 l x^2}{l^3} \cdots \cdots (18).$$

Zu Formel (18) wären wir auch aus (2) gelangt, wenn wir dort x' = l - x anstatt x eingesetzt und die Vorzeichen hernach geändert hätten.

Ist $\mu > \frac{l}{2}$, dann kommt bei $x = \frac{l}{2}$ der Inflexionspunkt zur Geltung. Es ist weiter

$$\frac{y_{\min} = 2\,\mu^3 - 3\,\mu^2}{\max y_{\min} = -1} \quad \text{bei } \mu = 1 \text{ d. i. } -A_2.$$

und

b) Rechter Ast der Kurve.

Hier gilt Gleichung (2)

$$y = \frac{2 x^3 - 3 l x^2 + l^3}{l^3} \cdots \cdots (2).$$

Ist $\mu < \frac{1}{2}$, dann kommt der Inflexionspunkt bei $\frac{1}{2}$ zur Geltung.

Es ist weiter

$$y_{\text{max}} = 2 \mu^3 - 3 \mu^2 + 1 \cdots (20)$$
 bei $x = \mu l$

79 -

und

 $\max y_{\max} = 1$ bei $\mu = 0$ d. i. A_1 .

Durch Vergleich von (19) und (20) kommen wir zu der Beziehung

 $y_{\max} + (-y_{\min}) = 1$.

Diegefährlichen Querschnitte sind die der Auflagerreaktionen,

d. i. $\mu = 0$ und $\mu = 1$, wo max y_{max} und max y_{min} entstehen.

Der ganze Verlauf der Einflußlinie ist aus Fig. 105 ersichtlich.





Aus der Einflußlinie ergeben sich auch ohne weiteres die Belastungsschemen.

Gleichförmige Belastung.

Wie in den vorhergehenden Fällen, so wollen wir auch hier auf Grund der Einflußflächen die Formeln für $\max_{\min}^{\max} M$ und $\max_{\min}^{\max} T$ für gleichförmig verteilte Last oder die Gleichungen der $\max_{\min}^{\max} M$ - und $\max_{\min}^{\max} T$ -Kurven feststellen.

Die Werte der maximalen Biegungsmomente.

Handelt es sich um die Erzielung des maximalen Biegungsmomentes in

einem Querschnitte, müssen wir verschieden belasten, je nachdem, ob sich der Querschnitt im inneren oder in den äußeren Dritteln befindet.

a) Handelt es sich um einen Querschnitt im inneren Drittel, dann ist der ganze Träger für das Moment in μl positiv beitragend und es muß für **max** *M* voll belastet werden. Wenn wir die beiden Teile der Einflußfläche mit F_1 und F_2 bezeichnen, so ist



$$\max M^p_{\mu\nu} = p \left(F_1 + F_2 \right)$$

(Fig. 106)

und mit Hilfe der Gleichungen (8) und (14)

$$F_{1} = \int_{0}^{\mu_{l}} \frac{(2\mu - 1)x^{3} + (2 - 3\mu)lx^{2}}{l^{2}} dx$$

$$F_{2} = \int_{\mu_{l}}^{l} \frac{(2\mu - 1)x^{3} + (2 - 3\mu)lx^{2} - l^{2}x + \mu l^{3}}{l^{2}} dx$$

$$\underline{\max M_{\mu_{l}}^{p}} = p l^{2} \left(-\frac{\mu^{2}}{2} + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{12}\right) \cdots \cdots (21).$$

80

und

Gleichung (21) gibt den Verlauf der max M-Kurve zwischen den Festpunkten an und kann zur Berechnung der Werte oder Ordinaten verwendet werden.

Gefährlicher Querschnitt.

Wird die Gleichung (21) nach der unabhängig Variablen μ differentiiert, dann gibt sie für $\frac{d_{\max}M}{d\mu} = 0$ den Querschnitt des größten Maximums an.

$$\frac{d_{\max}M}{d\mu} = p\left(-\mu + \frac{1}{2}\right),$$

woraus

$$\underline{\mu_{\max \max M} = \frac{1}{2}} \cdots \cdots (22)$$
max max $M = +\frac{1}{24} p l^2 \cdots (23)$

und

Es entsteht somit das größte positive Moment in der Mitte bei Vollast

und hat den bekannten Wert $\frac{pl^2}{24}$.

b) Befindet sich der Querschnitt zwischen ϱ und a_2 (für Querschnitte zwischen λ und a_1 besteht die bekannte Beziehung des Spiegelbildes), so liefert (9)



Fig. 107.

eine Belastungsscheide bei vl und es darf zur Erzielung von **max** *M* nur der Teil rechts von der Belastungsscheide belastet werden. Es ist dann das Integral der Fläche F_1 nur in den Grenzen vlund μl zu ermitteln. (Fig. 107.)

Somit ist

$$\int_{\nu}^{\mu} = \int_{\nu_{l}}^{\mu_{l}} \frac{(2\mu - 1)x^{3} + (2 - 3\mu)lx^{2}}{l^{2}} dx$$

und nach vorigem $F_2 = -l^2 \left[-\frac{\mu^5}{2} + 5\frac{\mu^4}{4} - \frac{2}{3}\mu^3 - \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{12} \right]$

$$F_1 + F_2 = l^2 \left[-\frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu}{2} + \frac{\nu^4}{4} - \frac{\mu^4}{2} + \mu \nu^3 - \frac{2}{3} \nu^3 - \frac{1}{12} \right] \cdots \cdots \cdots (24)$$

F

und

$$\max M_{u_1}^p = p(F_1 + F_2),$$

hierbei ist v durch Gleichung (9) gegeben.

Für $\mu = 1$ ist aus (9) $\nu = 1$ und $\max M_2 = 0 = \max + M_1$ aus (24).

Die Werte der minimalen Biegungsmomente.

a) Handelt es sich um **min** M für einen Querschnitt im inneren Drittel des Trägers, so ist der negative Teil der Einflußfläche $F_3 = 0$ und somit **min** M = 0. Fassen wir wieder **min** M als Ordinaten auf, dann ist min M = 0 die Gleichung der X-Achse und es fällt somit im inneren Drittel die **min** M-Kurve mit der X-Achse zusammen.

b) Befindet sich jedoch der Querschnitt zwischen ϱ und a_2 (oder λ und a_1), so liefert (9) eine Belastungsscheide, oder der linke Kurvenast eine negative Einflußfläche. Um **min** M zu erzielen, belasten wir den links von der Belastungsscheide liegenden Trägerteil. Es ist dann

 $\min M^p_{\mu_I} = p F_3,$

wobei F_3 mit Hilfe von (8)

$$F_{3} = \int_{0}^{\frac{\nu_{l}}{2}} \frac{\int_{1}^{2} (2\mu - 1) x^{3} + (2 - 3\mu) lx^{2}}{l^{2}} dx$$

und

$$\min M^{p}_{\mu_{l}} = p l^{2} \left[\frac{\mu \nu^{4}}{2} - \frac{\nu^{4}}{4} - \mu \nu^{3} + \frac{2}{3} \nu^{3} \right] \cdots \cdots \cdots (25),$$

wobei wieder v durch Gleichung (9) gegeben ist.

Fur
$$\mu = 1$$
 und $\nu = 1$ aus (9) und aus (25)

$$\max(-M_2) = \max(-M_1) = -\frac{pl^2}{12} \cdots \cdots (26),$$

der bekannte Wert des Einspannungsmomentes bei Vollast.

Gleichförmige Last über den ganzen Träger.

Nachdem sich die Belastungsschemen für $\max M$ und $\min M$ ergänzen, ist das Moment für Vollast gleich der Summe $\max M + \min M$ und es ist nun gleichgültig, wo wir den Querschnitt wählen, denn es ist für Querschnitte hinter den Festpunkten $F_1 + F_2 + F_3$ gleich $F_1 + F_2$ für mittlere Querschnitte. Es ist somit

$$M^{g}_{\mu l} = g l^{2} \left(-\frac{\mu^{2}}{2} + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{12} \right) \cdots \cdots \cdots (27).$$

Für $\mu = \frac{1}{2}$ kommen wir wieder zu max $M^g = \frac{1}{24} gl^2$.

Für $\mu = 0$ gelangen wir wieder zu $M_1^g = -\frac{1}{12}gl^2$.

Für $M^g = 0$ bekommen wir aus (27) die Wendepunkte der Biegelinie bei Vollast

$$\mu_i = \frac{1 \pm 1/\frac{1}{3}}{2}.$$

Die Werte der maximalen Querkräfte.

Wir hatten in (18) und (2) die Gleichungen der Einflußlinienäste einer Querkraft festgelegt. Wollen wir $\max T$ erzielen, so belasten wir den vom Querschnitte μI rechts liegenden Trägerteil. (Fig. 108).

Es ist dann

$$\max T_{u_l}^p = F_1 p$$

/ Lederer, Einflußlinien.

wobei F_1 mit Hilfe von (2)

$$F_{1} = \int_{\mu_{l}}^{l} \frac{2 x^{3} - 3 l x^{2} + l^{3}}{l^{3}} dx$$

und







Für $\mu = 0$ ist $T = A_1$ max $A_1 = \frac{pl}{2}$ (29)



Handelt es sich um **min** T in einem Querschnitte, so ist der linke Teil des Trägers von a_1 bis zum Querschnitte μl zu belasten.

min $T = pF_2$,

Es ist somit

wobei mit Hilfe von (18)

$$F_2 = \int_{0}^{\mu_l} \frac{2 x^3 - 3 l x^2}{l^3} dx$$

min
$$T = pl\left(\frac{\mu^4}{2} - \mu^3\right) \cdots \cdots (30)$$

Für $\mu = 1$ ist

$$\min T^p = -\max A_2 = -\frac{pl}{2}$$

Gleichförmige Last über den ganzen Träger.

Bedeutet T^p die Querkraft bei Vollast, **max** T die maximale Querkraft bei rechtsseitiger, **min** T die minimale Querkraft bei linksseitiger Belastung, so ist

$$T^{p} = \max T^{p} + \min T^{p},$$

$$T^{p} = p (F_{1} + F_{2}) \text{ und } \max T = pF_{1}$$

$$\min T = pF_{2}$$

und

da

Setzen wir g anstatt p, so ist

$$\underline{T^g = gl[\frac{1}{2} - \mu]} \cdots \cdots (31),$$

83

(31) gibt eine Gerade mit $\pm \frac{pl}{2}$ bei den Auflagern, 0 in der Mitte, wie beim einfachen Träger als Querkraftkurve bei Vollast, an.

Die Benutzung dieser Resultate und der ihnen entsprechenden Tabellen ist wie in den vorigen Fällen, wir wollen jedoch noch ein kleines Beispiel anführen.

Es handelt sich um die Berechnung eines Brückenträgers, der in die Rippen der Winkelstützmauern vollkommen eingespannt ist. Wollen wir für das Vorprojekt von der Berechnung des Bauwerkes als eines steifen Rahmens absehen, so untersuchen wir den Fahrbahnträger als horizontal eingespannten Balken.

Es wurde hier insofern ungünstig gerechnet, als nur ein Träger aus der Fahrbahn herausgegriffen wurde; dafür wurde von einem Zuschlag zur beweglichen Last abgesehen.

Die Bestimmung des maximalen Einspannungsmomentes.

Die Vorderwalze mit 10000 kg kommt in $\frac{l}{3}$, das reduzierte Hinterwalzen-

gewicht mit 8100 kg rechts von der Vorderwalze, die übrigen Teile werden mit Menschengedränge ausgefüllt.*) (Fig. 109).

Es ist nun

g = 2300 kg/m Eisengewicht p = 1020 kg/m Menschengedränge. Von den Einzellasten $(-M_1)^p = -10000 \cdot \frac{4}{27} \cdot 12,0$ $-8100 \cdot 1,32 = -28500$ kgm.

Vom Menschengedränge.

 $M_{1}^{p} = p (F_{1} + F_{2})$





$$F_1 = -\int_{0}^{5,z_0} \frac{x^2}{l^2} (x^2 - 2 lx + l^2) dx = -3,56 \text{ qm}$$

$$F_2 = -\int_{7,75}^{12,5} \frac{\int_{12}^{12,5} (x^2 - 2 lx + l^2) dx}{l^2} dx = -1,355 \,\mathrm{qm}$$

so daß

 $M_1^p = -4,915 \cdot 1020 = -5013,3 \text{ kgm}$

Vom Eigengewicht.

$$M_{g}^{g} = -\frac{1}{12} 2300 \cdot 120^{2} = -27,600 \text{ kgm}$$

so daß schließlich

$$\max(-M_1) = -6113300 \text{ kgcm}$$

*) Die genaue Ermittlung der ungünstigsten Laststellung erfolgt ähnlich wie dies zum Schlusse an einem Beispiele gezeigt wird.

Bestimmung des maximalen positiven Momentes.

Dies tritt in der Mitte auf und wir bestimmen es ebenfalls mit Hilfe der Einflußlinie. Die Vorderwalze mit 10000 kg kommt in die Mitte, die Hinterwalze mit 8100 kg nach rechts, der restliche Trägerteil wird mit Menschengedränge belastet. (Fig. 110.)





Moment von der Walze

$$\begin{split} M^P_c &= 10000 \cdot \frac{1}{8} \cdot 12,0 + 8100 \cdot 0,42 = 18400 \text{ kgm}, \\ \text{Moment vom Menschengedränge} \\ M^P &= 1020 \left(\frac{1}{3} 5,25 \cdot 1,8 + \frac{1}{3} 2,25 \cdot 0,2 \right) = 2210 \text{ kgm}, \\ \text{Moment vom Eigengewicht} \end{split}$$

 $M^g = \frac{1}{24} 2300 \cdot 12,0^2 = 13800$ kgm,

so daß schließlich

max $M_c = 3441000$ kgcm.

Bestimmung der dem maximalen Einspannungsmoment entsprechenden Auflagereaktion.

Zur Berechnung der Winkelstützmauer müssen wir die ungünstigste Wirkung des Oberbaues in Rechnung nehmen. Die ungünstigste Wirkung wird eben



Fig. 111.

bei größtem Einspannungsmomente sein. Da die Wirkung der Brücke auf die Stützmauer in einem Einspannungsmomente und in einer Auflagerkraft besteht, müssen wir die bei der für $\max M_1$ ermittelten Laststellung auftretende Auflagerkraft ermitteln. (Fig. 111).

Für folgt aus (2) für

$$x_{1} = \frac{1}{3}$$

$$y_{1} = \frac{2}{27} - \frac{3}{9} + 1 = \frac{2}{27}$$

$$x_{2} = 6,75$$

$$y_{2} = \frac{2 \cdot 6,75^{3} - 3 \cdot 12,0 \cdot 6,75^{2} + 12,0^{3}}{12^{3}} = 0,406$$

Auflagerkraft der Walze

$$A_1^{\rm P} = 100000 \cdot \frac{20}{27} + 8100 \cdot 0,406 = 10700 \text{ kg}$$

Auflagerkraft vom Menschengedränge

$$A_1^p = 1020 (F_1 + F_2)$$

$$F_{1} = \int_{0}^{3,25} \frac{2x^{3} - 3lx^{2} + l^{3}}{l^{3}} dx = 3,05 \text{ m}$$

$$F_{2} = \int_{7,75}^{12,0} \frac{2x^{3} - 3lx^{3} + l^{3}}{l^{3}} dx = 0,42 \text{ m}$$

$$A_1^p = 1020 \cdot 3,47 = 3540 \,\mathrm{kg}.$$

Auflagerkraft vom Eigengewicht

$$A_{g}^{g} = \frac{1}{2}2300 \cdot 12,0 = 13800 \text{ kg}$$

Somit ist

 $A_1 (\max M_1) = 28040 \text{ kg.}$

Zum Schlusse noch eine Bemerkung:

Die Laststellung, wobei die schwerste Last über die maximale Ordinate der Einflußlinie zu stehen kommt, führt allgemein nicht zum genauen Maximalwert; bei graphischer Bestimmung der Einflußlinien bleibt eben nichts anderes übrig als Probieren. Für praktische Zwecke ist das angegebene Verfahren hinreichend genau. Die analytische Ermittelung der Einflußlinie ermöglicht jedoch auch die ganz genaue ungünstigste Laststellung.

Es sei $P_1, P_2 \cdots P_n$ ein Zug von Einzellasten in den Entfernungen $a_1, a_2 \cdots a_{n-1}$ voneinander. Bezeichnen wir die Ordinaten mit $y_1, y_2 \cdots y_n$, die Abszissen mit $x_1, x_2 \cdots x_n$, so ist y = f(x) die Gleichung der Einflußlinie, woraus

$$y_{1} = f(x_{1})$$

$$y_{2} = f(x_{1} + a_{1})$$

$$\dots$$

$$y_{n} = f(x_{1} + \sum_{1}^{n-1} a)$$

Das Moment oder eine andere Größe, für welche die Einflußlinie gilt, ist

$$M = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \cdots + P_n y_n$$

$$M = P_1 f(x_1) + P_2 f(x_1 + a_1) + \cdots + P_n f(x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i)$$

und für die ungünstigste Laststellung

$$\frac{dM}{dx_1} = P_1 f'(x_1) + P_2 f'(x_1 + a_1) + \cdots + P_n f'(x_1 + \sum_{1}^{n-1} a_1) = 0.$$

Besteht die Einflußlinie aus 2 Ästen, müssen die Lasten je nach der Möglichkeit so kombiniert werden, daß beide Gleichungen zur Anwendung kommen und das absolut ungünstigste Resultat beibehalten bleiben.

Steht noch eine gleichförmige Belastung zur Verfügung, kann auch ihr Einfluß aus der Einflußfläche und je nach der Einzellastenkombination als Funktion von x_1 ausgedrückt werden.

Beispiel 1.

Als kleines Beispiel für Einzellasten werde folgender Fall vorgeführt.

Es handelt sich um das maximale Stützenmoment für eine Platte mtt 1,0 m Spannweite. Als Belastung ist ein Lastwagen von 24,0 t Gesamtgewicht in Rechnung zu ziehen; die Spurweite ist 1,4 m. Wir haben somit mit 2 beweglichen Einzellasten à 6 t zu rechnen.



Infolge der vorgesehenen Straßenanordnung ist eine so minimale Verteilung, daß hiervon abgesehen wird und die Räder als Einzellasten in Rechnung genommen werden.

Wäre die eine Last bedeutend größer als die andere, dann könnte man angenähert **max** M_1 bei der öfters angewendeten Stellung der größten Last über $\frac{l}{\sqrt{3}}$ erwarten, da aber die Lasten gleich sind, der Verlauf der M_1 -Kurve allmählich, muß die ungünstigste Laststellung genau ermittelt werden.

Ein Rad wird sich im 1. Felde befinden und besitze hier die Abszisse x, der nach (1) die Ordinate

$$y_1 = -\frac{4}{15l^2} x (l^2 - x^2)$$

entspricht.

Das 2. Rad im 2. Felde hat die Abszisse

x+1,4-1,0=x+0,4 (Fig. 112)

und nachdem die Einflußlinie hier durch die Gleichung

 $y = -\frac{1}{15l^2} (7 l^2 x - 12 lx^2 + 5x^3)$

- 87 -

gegeben ist, ist für

$$x_2 = x + 0.4$$
 und $l = 1.0$

 $y_2 = -\frac{1}{15} \left[7 \left(x + 0, 4 \right) - 12 \left(x + 0, 4 \right)^2 + 5 \left(x + 0, 4 \right)^3 \right]$

und das Moment

$$M_1^P = P(y_1 + y_2)$$
$$M_1^P = -\frac{6000}{15}(x^3 - 6x^2 + 3,8x + 1,2).$$

Soll M^P₁ Maximum sein, muß

$$\frac{dM_{1}}{dx} = 0$$

$$\frac{dM_{1}}{dx} = -400 (3 x^{2} - 12x + 3,8) = 0$$

$$\underline{x = 0,35}$$

und somit

 $\max M_1^P = -400 (0,35^3 - 6 \cdot 0,35^2 + 3,8 \cdot 0,35 + 1,2) = -734,8 \text{ kgm}$ $\max M_1^P = -73480 \text{ kgcm.}$

Beispiel 2.

Als Beispiel für eine gleichmäßig verteilte Belastung werde noch die genaue Berechnung des Stützenmomentes der Fahrbahnplatte bei der Stockholmer Brücke, die bereits auf Seite 65 annähernd durchgeführt wurde, angegeben.

Die von der Vorderwalze herrührende gleichförmige Last von 3580 kg/m kann über 2,10 m angeordnet werden. Es wird ein Teil des 1. und ein Teil des 2. Feldes belastet. (Fig. 113.)



Es ist

$$M_{1} = (F_{1} + F_{2})p$$

$$F_{1} = -\int_{x_{1}}^{l} \frac{4x (l^{2} - x^{2})}{15 l^{2}} \cdot dx = -\frac{4}{15 l^{2}} \left[l^{2} \cdot \frac{l^{2} - x_{1}^{2}}{2} - \frac{l^{4} - x_{1}^{4}}{4} \right]$$

$$F_{2} = -\int_{0}^{x_{2}} \frac{7 l^{2}x - 12 lx^{2} + 5x^{3}}{15 l^{2}} = -\frac{1}{15 l^{2}} \left[7 l^{2} \frac{x_{2}^{2}}{2} - 12 l \frac{x_{2}^{3}}{3} + \frac{5}{4} x_{2}^{4} \right]$$

Aus Fig. 113 folgt die Beziehung

 $x_1 = x_2 - 0,77$

88 —

Setzen wir nun in die Ausdrücke für F_1 und F_2 l=1,33, $x_1=x_2-0,77$,

gelangen wir zur Gleichung

$$F_1 + F_2 = -\frac{1}{15 \cdot 1.33^2} [1,39 + 3,63 x_2 + 6,21 x_2^2 - 8,4 x_2^3 + 2,25 x_2^4]$$

Soll M^p₁ Maximum werden, muß

$$\frac{d\left(F_1+F_2\right)}{dx_2}=0$$

sein und wenn wir die Differentiation durchführen $x_2^3 - 2,8 x_2^2 + 1,38 x_2 + 0,403 = 0$

Durch Auflösung dieser Gleichung gelangen wir zu den Werten

$$x_1 = 0,22 \text{ m}$$

 $x_2 = 0,99 \text{ m}$

und so daß

$$F_1 + F_2 = 0,192$$
 qm,

max $(-M_1)^p = -68900$ cmkg.

Hierzu das bereits weiter oben bestimmte Moment vom Eigengewicht $M_{\rm g}^{\rm g} = -21200$ cmkg.

so daß

max
$$M_1^{\text{tot.}} = -90100$$
 cmkg,

wogegen früher 86295 cmkg berechnet wurden.

Tabellen der Einflußlinien der Stützenmomente, Biegungsmomente, Auflager-Reaktionen und Querkräfte des kontinuierlichen Trägers mit 2 und 3 gleichen Öffnungen, sowie des horizontal eingespannten Trägers.



Einflußlinien für den Kontinuierlichen Träger mit 2 gleichen Öffnungen.																					
																					Tafel 1.
		1	1	77.		07		-					-]	4					1	
100	0.02475 L	18400	0.0682.57	1 #80.0	0,093%51	2251 0.096 1	0,089251	0,042 L	0,042751	200				es .		111		X	//		<u>1. Feld</u> : $y = \frac{x}{4L^2}$ <u>2. Feld</u> : $y = \frac{x'(2-x'^2)}{4L^2}$; x -l- x Für gleichförmige Belastung: max $M^p = -\frac{1}{8}pL^2$
	4		243	/ 1	1 / 1	A max1-000			X			/ 1		max v = 0,096225		-		2153	/	-	min M ^p = 0 Für Eigengewicht: M ^g =- ¹ /8 gl ²
200	0,087525 T mar	0.0452.0 1	0.0631751	0.05161	fu 1929040'0	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	aloz10452. 8.	0,0128 L 53	0,0057251 82	Bi 10'0	0,0042752	0,00721	0,0089251	nen 19600'0 142	0,0093751 2.	0,00841	0,0068251	2 8400'0	0,0024751	200	$\begin{array}{c} \underline{1.Feld:}\\ y=\overset{x}{_{\mathcal{S}}}+\overset{x}{_{\phi 0\overline{l}\overline{l}}} & \textit{von o bis 0,1l}\\ y\overset{y}{_{\theta 0\overline{l}}}(+l\overset{z}{_{\mathcal{S}}})\overset{z}{_{\mathcal{S}}}\overset{x}{_{\mathcal{S}}}x*x^3)\textit{von 0,1l-l}\\ \underline{2.Feld:} & \underline{M}=0,1M_{\gamma}\\ \hline Fiir gleichtörmige Belastung: \end{array}$
						Ein	flue	Blin	vie	für	das	Bie	egu	unar J-90000-5	tom	ent	in	Z V3	Z	~	max M ^{P2} +0,03815 pl ² min M ^{P2} -0,00625 pl ² Für Eigengewicht: M ⁹ -+0,0325 gl ²
10'0	0015051	0,1504 L =y max	0,12635 U	0,10321 +	0,081251	0,06081	0,042152	0,06561	0,011451	20'0	y 0,00855 L	1 ##100	0,017857	2 0,0192 L	0,01875 L	0,0168 L	g01365 L	19600'0	0,004952	200	<u>1.Keld</u> : J ^{-3,2} + ^{xz³} / ₂₀₁₂ , von 0 bis 0,22 J ⁻² ₂₀₁₂ (42 ³ 5 ¹ / ₂ x ⁴)von 0,27-2 <u>2.Feld</u> : M-0,2M, Für gleichförmige Belastung: max M ² + 0,0675pl ²
														max y = 0,019245	*		2/3				min MP0,0125pl ² Für Eigengewicht: M ^g =0,055gl ²

Einflußlinien für den Kontinulerlichen Träger mit 2 gleichen Offnungen.																					
200	0.0623744	0.17.661	0.400.67	14781 + 12750	04218352 121	12160'0	0'0632251 jai	0.0384 1	aburres B	200	Bie 2527.200	0,02162	0,0261157	1 0,02881	0.0281251 14	0.02522 2.	0,004.121	0,01441	0,0074251	10'0	Tatèl 2. <u>1. Neld</u> : $y=\frac{2.5X}{4}+\frac{3}{4002}x^{3}$ ron 0 bis 0,32 $y=\frac{3}{4012}(kl^{2}5l^{2}x+x^{3})$ ron 0,32-2 <u>2. Keld</u> : M-0,3M, Win claichtéomice Belacture
	744	180	142	Ein. 249	flu + 157	Blin 194	432 95.	fü	· de	75	Bieg	1 28	15770 2459	34 L 284 L	+ ent 2548	1 in 1982	NE 0, 184	1321 22	1660		Fur gleichtormige Belastung: max $M^{p_2} + 0,08625 pl^2$ min $M^{p_2} - 0,01875 pl^2$ Für Eigengewicht: $M^{g_2} + 0,0675 gl^2$ <u>1.Feld</u> : $y=\frac{x}{2} + \frac{1}{102}x^3$ von o his 0,41 $y=\frac{4}{2},(4l^3,5l^3x+x^3)$ von 0 vl-1
10'0	0,00	0.10	0.45	ozo Ein	flux +	Blin	80'0 uie	so'o	" de	10'0	10'0 Bieg	0,02		max y-0038491 0,03	to o	in In	20'0 12 153 0,500	10'0	0,0	0,0	J _{vol} z ^{1,1} vola a nove, e v <u>2. Feld</u> : M-0,4M, Für gleichförmige Belastung: max M ^P -0,095 pl ² min M ^P -0,025 pl ² Für Eigengewicht: M ^g -+0,07 gl ²
100	0,0376251	1940'0	0,1158451	0, 1581	0,2034251	0,15201	0,1053757	10490'0	0,023,0251	10'0	0,0213757	0,0361	0,0446257	max y=0,04811251 0,0481	100468751	0,0427	Win 0,0341252	0,0241	0,0123751	20'0	<u>1. Fold</u> : y= <u>1.52</u> , <u>1</u> <u>4</u> y= <u>51</u> , (4U ³ -51 ² x+x ³)ron 0,51-1 <u>2. Fold</u> : M=0,5M, Für gleichförmige Belastung: maxM ² +0,09375p1 ² min M ² -0,03125p1 ² Für Eigengewicht: M ⁹ -+0,0625g1 ²











Lederer, Einflußlinien.



Einflußlinien für den Kontinuierlichen Träger mit 3 gleichen Öffnungen.






Einflußlinien für den Kontinuierlichen Träger mit 3 gleichen Öffnungen.

Lederer, Einflußlinien.

Einflußlinien für den horizontal eingespannten Träger.

Tafel 12.



 $y = -\frac{x}{l^2} (x^2 - 2lx + l^2)$

Für gleichförmige Belastung: max (-M,)= - % 2pl² min (-M,)=0

Für Eigengewicht: M,^g = -¹/12.gl²

> von 0 bis 0,1 $y = \frac{Q_{3}x^{3} + 1/Lx^{2}}{L^{2}}$ von 0,1 bis $l y = \frac{Q_{3}x^{3} + 1/Lx^{2} - l^{2}x}{L^{2}}$

Für gleichförmige Belastung: max M^P +0,000% pl² min M^P -0,039 pl²

Für Eigengewicht: M^g-0,0383 gl²

> von 0 bis 0,21 $y = \frac{96x^3 + 141x^2}{1^2}$ von 0,2 bis 1 $y = \frac{96x^3 + 141x^2 - 1^2x + 021^3}{1^2}$

Für gleichförmige Belastung: max M^P + 0,0065 pl² min M^P = -0,0098 pl²

Für Eigengewicht: M^g--0,0033 gl²

Für gleichförmige Belastung: max M^P + 0,02184 pl² min M^P = - 0,00013 pl²

Für Eigengewicht: + 0,02171gl²

von 0 bis 0,31 $y = \frac{0.4x^3 + 1.11x^2}{U^2}$ von 0,3 bis 1 $y = \frac{0.4x^3 + 1.11x^2}{U^2}$

Einflußlinien für den horizontal eingespannten Träger.

Tafel 13.

von 0 bis 0,42 $y = \frac{-9.2x^3 + 0.81x^2}{1x}$ von 0,4 bis 2 $y = \frac{-9.2x^3 + 0.81x^2t^2x + 0.9t^3}{1x}$

Für gleichförmige Belastung: max M^p=0,0367 pl² min M^p=0

Für Eigengewicht: M^g= 0,0367 gl²

y = 0,5x² von 0 bis 0,5l Für gleichförmige Belastung: max M^p + ¹/2+ pl²

min MP= 0

Für Eigengewicht: M^g-+¹/₂₄ gl²

 $y = \frac{2 \cdot x^3 - 3 \cdot 1 \cdot x^2 + t^3}{t^3} observe Curve$ $y = -\frac{2 \cdot x^{\cdot 3} - 3 \cdot 1 \cdot x^{\cdot 2} + t^3}{t^3} untere Curve$

Für gleichförmige Belastung:

 $\max \Lambda_{\tau} = \frac{pl}{2}$ min $\Lambda_{\tau} = 0$ max $T_{\mu}^{\mu} pl \left(\frac{y_{\mu} - \mu^{a}}{2} + \mu^{3} - \mu\right)$ min $T_{\mu}^{\mu} - pl \left(\frac{\mu^{a}}{2} - \mu^{3}\right)$



 $\begin{array}{l} A_{1} = \frac{gl}{2} \\ T_{\mu}^{g} l = gl \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \end{array}$

KRAKÓW

Olifechniczna













Biblioteka Politechniki Krakowskiej