„*WIEDZA MATEMATYCZNA*"
ZBIÓR DZIEŁ Z DZIEDZINY MATEMATYKI CZYSTEJ I STOSOWANEJ, WYDAWANY PRZEZ ST. KWIETNIEWSKIEGO, ST. STRASZEWICZA i WŁ. WOJTOWICZA.

EDWARD GOURSAT
PROFESOR WYDZIAŁU NAUK ŚCISŁYCH UNIWERSYTETU PARYSKIEGO.

KURS ANALIZY MATEMATYCZNEJ

WYDANIE DRUGIE,
CAŁKOWICIE PRZEROBIONE.

TOM I.

CZĘŚĆ 2. — GIEOMETRJA RÓŻNICZKOWA.

PRZEKŁAD, DOKONANY
PRZEZ
T. J. ŁAZOWSKIEGO.

Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB PRACUJĄCYCH NA POLU NAUKOWYM IMIENIA D-ra JÓZEFA MIANOWSKIEGO.

WARSZAWA
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI E. WENDE i S-ka.
1917

Ukazanie się niniejszego przekładu wymaga krótkiego wyjaśnienia. Tłumaczenie całości „Kursu Analizy matematycznej" E. Goursata zostało przedsięwzięte jeszcze w r. 1913, i rękopis tomu I-go był gotów na wiosnę r. 1914. Niestety, zdarzyło się tak, że większa część tego rękopisu zawędrowała jeszcze przed wojną do Szwajcarji, skąd, mimo starań, nie udało się dotychczas jej sprowadzić. Wobec tedy potrzeb bieżących uczelni wyższych i w celu uniknięcia zupełnego zahamowania całego wydawnictwa na czas nieokreślony, postanowiono rozpocząć druk dzieła od części końcowej tomu I-go, stanowiącej całość do pewnego stopnia zamkniętą, a będącej w danym czasie do rozporządzenia.

W najbliższym czasie rozpocznie się druk tomu II-go, którego pierwsza część, zawierająca teorję funkcji analitycznych, może stanowić znów osobną książkę, odpowiadającą pewnym określonym i wyraźnym potrzebom.

GIEOMETRJA RÓŻNICZKOWA

ROZDZIAŁ X.

TEORJA OBWIJAJĄCYCH. — STYCZNOŚĆ.

Krzywe i powierzchnie, badane w Gieometrji właściwej, są to krzywe i powierzchnie analityczne. Atoli istnienie utworów gieometrycznych, które będziemy określali, wymaga jedynie istnienia pochodnych aż do pewnego rzędu, zależnego od natury zagadnienia. Tak np. krzywa płaska, wyrażona za pomocą równania $y = f(x)$, posiada styczną, jeżeli funkcja $f(x)$ posiada pochodną $f'(x)$; promień krzywizny, jeżeli $f'(x)$ posiada również pochodną $f''(x)$ i tak dalej.

I. KRZYWE I POWIERZCHNIE OBWIJAJĄCE.

207. Poszukiwanie obwijających. — Gdy w równaniu krzywej płaskiej C

(1) $$f(x, y, a) = 0,$$

zależnym od dowolnego parametru a, zmieniamy ów parametr, to krzywa zmienia, w ogólności w sposób ciągły, swą postać i położenie. Jeżeli wszystkie krzywe C, wyznaczone w ten sposób, pozostają wciąż stycznemi do pewnej określonej krzywej E, krzywa owa zowie się obwijającą (lub obwiednią — po fr.: enveloppe) krzywych C, zwanych w tym razie *obwiniętemi* (enveloppées). Przypuśćmy, że mając krzywe C, chcemy rozpoznać, czy posiadają obwijającą i określić ją.

Założywszy, iż owa obwijająca E istnieje, oznaczmy przez (x, y) spółrzędne punktu styczności M krzywej E z krzywą obwiniętą C, która odpowiada wartości a parametru. Współrzędne x, y stanowią funkcje niewiadome parametru a, czyniące zadość równaniu (1). Aby je określić, należy wyrazić, iż styczna do krzywej, zakreślonej przez punkt M, gdy a się zmienia, utożsamia się ze styczną do krzywej C. Oznaczmy przez

δx i δy spółczynniki kierunkowe stycznej do krzywej obwiniętej, a przez $\frac{dx}{da}$ i $\frac{dy}{da}$ pochodne funkcji niewiadomych $x = \varphi(a)$, $y = \psi(a)$; winno być

$$\frac{\frac{dx}{da}}{\delta x} = \frac{\frac{dy}{da}}{\delta y}. \tag{2}$$

Otóż, ponieważ krzywa C jest wyrażona przez równanie (1), w którym a zachowuje wartość stałą, mamy dla wyznaczenia stycznej do tej krzywej związek

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y = 0. \tag{3}$$

Z drugiej strony funkcje niewiadome $x = \varphi(a)$, $y = \psi(a)$ czynią również zadość równaniu

$$f(x, y, a) = 0,$$

w którym a oznacza teraz zmienną niezależną, a przeto mamy również

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{da} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{da} + \frac{\partial f}{\partial a} = 0. \tag{4}$$

Wobec związków (3) i (4) warunek (2) zamienia się w

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0; \tag{5}$$

równanie to, w połączeniu ze związkiem (1), wyznacza obie funkcje niewiadome $x = \varphi(a)$, $y = \psi(a)$. *O ile tedy obwijająca istnieje, otrzymujemy jej równanie za pomocą rugowania parametru a z równań $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$.*

Niech $R(x, y) = 0$ stanowi wynik rugowania; zbadajmy, czy ta krzywa jest istotnie obwijającą. Jeżeli C_0 oznacza jedną z krzywych C, odpowiadającą wartości a_0 parametru, a (x_0, y_0) spółrzędne punktu przecięcia M_0 krzywych

$$f(x, y, a_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{d a_0} = 0, \tag{6}$$

to równania (1) i (5) określają funkcje $x = \varphi(a)$, $y = \psi(a)$, równające się odpowiednio x_0, y_0 dla $a = a_0$ i takie, iż mamy oczywiście, dla $a = a_0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}\left(\frac{dx}{da}\right)_0 + \frac{\partial f}{\partial y_0}\left(\frac{dy}{da}\right)_0 = 0;$$

związek ten, zestawiony ze związkiem (3), wskazuje, iż w punkcie (x_0, y_0) styczna do krzywej C_0 pokrywa styczną do krzywej, zakreślonej przez punkt (x, y), o ile tylko nie mamy jednocześnie $\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y_0} = 0$, to jest o ile punkt (x_0, y_0) nie jest punktem osobliwym krzywej C_0. *Równanie*

$R(x, y) = 0$ przedstawia tedy albo obwijającą krzywych C albo też miejsce gieometryczne punktów osobliwych tych krzywych.

Można uzupełnić jeszcze ten wynik. Jeżeli każda z krzywych C posiada jeden lub więcej punktów osobliwych, ich miejsce gieometryczne stanowi bez wątpienia część krzywej $R(x, y) = 0$. Oznaczmy istotnie przez (x, y) spółrzędne jednego z tych punktów osobliwych; x i y stanowią funkcje a, czyniące zadość jednocześnie trzem warunkom

$$f(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

a więc również warunkowi $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$; x i y czynią tedy zadość równaniu $R = 0$, otrzymanemu przez wyrugowanie a z równań $f = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$. W wypadku najogólniejszym, krzywa $R(x, y) = 0$ składa się z dwuch części różnych pod względem analitycznym, z których jedna jest właściwą obwijającą, podczas gdy druga stanowi miejsce gieometryczne punktów osobliwych.

Przykład. — Jeżeli $f(x, y, a) = y^4 - y^2 + (x - a)^2 = 0$, to $\frac{\partial f}{\partial a} = -2(x - a)$ i, rugując a z $f = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, osiągamy równanie $y^4 - y^2 = 0$, które przedstawia trzy linje proste: $y = 0$, $y = +1$, $y = -1$. Rozważane krzywe otrzymujemy za pomocą przesunięcia równolegle do osi Ox krzywej $y^4 - y^2 + x^2 = 0$; otóż krzywa ta posiada punkt podwójny w początku układu spółrzędnych i w punktach przecięcia z osią Oy jest styczna do prostych $y = \pm 1$. Prosta $y = 0$ jest tedy miejscem gieometrycznym punktów osobliwych, gdy tymczasem proste $y = \pm 1$ stanowią obwijającą we właściwym znaczeniu tego słowa.

208. Gdy krzywa C posiada obwijającą E, to punkty styczności krzywej C z jej obwijającą stanowią *położenia graniczne punktów przecięcia tej krzywej z krzywą nieskończenie bliską tej samej rodziny*. Weźmy, w istocie, równania dwuch sąsiednich krzywych

$$(7) \qquad f(x, y, a) = 0, \quad f(x, y, a + h) = 0;$$

układ (7), wyznaczający spółrzędne punktów wspólnych, może być oczywiście zastąpiony przez układ równoważny

$$(7') \qquad f(x, y, a) = 0, \quad \frac{f(x, y, a + h) - f(x, y, a)}{h} = 0,$$

w którym drugie równanie, gdy h dąży do 0, to jest, gdy druga krzywa zbliża się nieograniczenie do pierwszej, zmienia się na $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ (1). Własność ta jest zresztą niemal oczywista; istotnie widzimy na rys. 35 *a*, iż punkt przecięcia N dwuch krzywych sąsiednich C i C' zbliża się nieograniczenie do punktu styczności M, gdy druga krzywa C' zmierza do C. Na rys. 35 *b* widać również, iż gdy krzywe (1) posiadają punkt podwójny, jeden z punktów przecięcia dwuch krzywych sąsiednich C i C' zmierza do punktu podwójnego, gdy krzywa C' zbliża się do krzywej C.

Uwaga powyższa wyjaśnia dobrze, dlaczego jednocześnie z obwijającą winniśmy znaleźć miejsce gieometryczne punktów osobliwych. Załóżmy, w celu skupienia uwagi, iż $f(x, y, a)$ stanowi wielomian stopnia m-ego względem a. Dla jakiegoś punktu M_0, obranego dowolnie w płaszczyźnie, o spółrzędnych (x_0, y_0), równanie

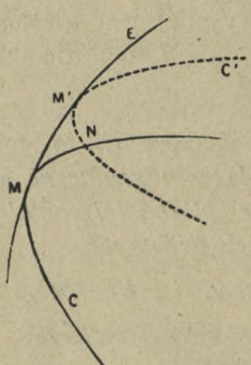
$$f(x_0, y_0, a) = 0 \tag{8}$$

posiada w ogólności m różnych pierwiastków, przez ten punkt przechodzi tedy m rozmaitych krzywych rozważanej rodziny. Lecz jeżeli punkt M_0 należy do krzywej $R(x, y) = 0$, mamy jednocześnie:

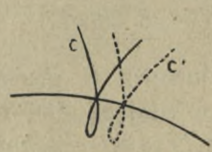
$$f(x_0, y_0, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0,$$

i równanie (8) posiada pierwiastek podwójny. Można tedy rzec, iż krzywa $R(x, y)$ stanowi miejsce gieometryczne takich punktów płaszczyzny, iż dwie krzywe rodziny (1), które przez nie przechodzą, nakrywają się wzajemnie. Otóż rysunki 35 *a* i 35 *b* wskazują właśnie, iż gdy jakiś punkt

Rys. 35 *a*.



Rys. 35 *b*.



([1]) Można nadać temu dowodowi większą ścisłość, pisząc drugie z równań (7') w postaci $f'_a(x, y, a + \theta h) = 0$. Jeżeli punkt (x, y) dąży do punktu granicznego (x_1, y_1), gdy h zmierza do zera, a pochodna f'_a jest ciągła, to spółrzędne tego punktu granicznego winny czynić zadość obu związkom:

$$f(x_1, y_1, a) = 0, \qquad f'_a(x_1, y_1, a) = 0.$$

zbliża się nieograniczenie bądź do jakiegoś punktu obwijającej, bądź do punktu krzywej, stanowiącej miejsce gieometryczne punktów osobliwych, dwie z krzywych C, przechodzących przez ten punkt, różnią się bardzo mało jedna od drugiej i dążą do wzajemnego nakrycia się w położeniu granicznym.

Uwaga. — Zdarza się często, iż poszukujemy obwiedni krzywych, których równanie

(9) $$F(x, y, a, b) = 0,$$

zawiera dwa parametry zmienne a i b, związane ze sobą przez równanie $\varphi(a, b) = 0$. Wypadek ten nie różni się od wypadku ogólnego, ponieważ można uważać b za funkcję a, określoną za pomocą związku $\varphi = 0$. Podług podanego przepisu należy do równania (9) dołączyć to, które otrzymamy, przyrównywując do zera pochodną pierwszej strony względem parametru a

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{da} = 0;$$

lecz ze związku $\varphi(a, b) = 0$ wnioskujemy:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{db}{da} = 0$$

i rugując $\frac{db}{da}$ sprowadzamy równanie poprzednie do postaci

(10) $$\frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0.$$

Otrzymujemy przeto równanie obwijającej, rugując a i b z równań $F = 0$, $\varphi = 0$ i równania (10).

209. Obwijająca rodziny prostych. — Weźmy równanie prostej D w postaci normalnej

(11) $$x \cos \alpha + y \sin \alpha - f(\alpha) = 0;$$

parametrem zmiennym jest tu kąt α. Różniczkując względem tego parametru, otrzymujemy

(12) $$-x \sin \alpha + y \cos \alpha - f'(\alpha) = 0,$$

i z równań (11) i (12) wyznaczamy spółrzędne punktu styczności prostej ruchomej z jej obwijającą

(13) $$\begin{cases} x = f(\alpha) \cos \alpha - f'(\alpha) \sin \alpha \\ y = f(\alpha) \sin \alpha + f'(\alpha) \cos \alpha. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, iż prosta D jest styczną do krzywej E, zakreślonej przez punkt (x, y); wnioskujemy w istocie z równań (13):

$$(14)\qquad \begin{cases} dx = -\,[f(\alpha) + f''(\alpha)]\sin\alpha\, d\alpha \\ dy = \quad [f(\alpha) + f''(\alpha)]\cos\alpha\, d\alpha, \end{cases}$$

widzimy stąd, iż spółczynnik kątowy stycznej równa się $-\cot\alpha$, a więc właśnie spółczynnikowi kątowemu prostej D. Z równań (14) wnioskujemy również, oznaczając przez s łuk krzywej obwijającej:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm\,[f(\alpha) + f''(\alpha)]\, d\alpha,$$

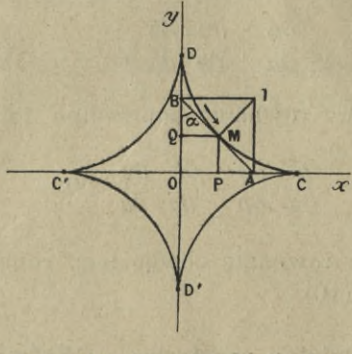
i przeto

$$s = \pm\,[\int f(\alpha)\, d\alpha + f'(\alpha)];$$

aby tedy otrzymać krzywą sprostowalną, wystarczy wziąć za $f(\alpha)$ pochodną jakiejś znanej funkcji [1].

Weźmy np. $f(\alpha) = l \sin\alpha \cos\alpha$; czyniąc kolejno w równaniu (11) $x = 0$ i $y = 0$, otrzymujemy (rys. 36) $OA = l \sin\alpha$, $OB = l\cos\alpha$, a więc $AB = l$. Szukana krzywa

Rys. 36.



jest tedy obwijającą prostej o stałej długości l, dotykającej wciąż końcami dwuch prostych, prostopadłych do siebie. Wzory (13) przybierają tu postać:

$$x = l \sin^3\alpha, \qquad y = l\cos^3\alpha,$$

---

[1] Wszystkie wielkości, występujące po prawej stronie wzoru, wyznaczającego łuk:

$$s = f'(\alpha) + \int f(\alpha)\, d\alpha,$$

posiadają znaczenie gieometryczne: α stanowi kąt pomiędzy Ox a prostopadłą ON do prostej ruchomej, wykreśloną z początku układu, $f(\alpha)$ — odległość ON początku układu od tej prostej; $f'(\alpha)$ równa się co do wartości bezwzględnej odległości MN punktu styczności prostej ruchomej z jej obwijającą od spodka N prostopadłej, wykreślonej z początku układu. Ten wzór rektyfikacyjny bywa niekiedy zwany *wzorem Legendre'a.*

i równaniem obwijającej będzie

$$\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{l}\right)^{\frac{2}{3}}=1;$$

jest to hipocykloida o czterech punktach zwrotu, posiadająca kształt, wskazany na rysunku. Gdy α wzrasta od 0 do $\frac{\pi}{2}$, to punkt styczności przebiega łuk DC. Długość łuku, liczona od punktu D, posiada wyrażenie następujące

$$s=\int_0^{\alpha} 3\, l \sin\alpha \cos\alpha \; d\alpha=\frac{3\,l}{2}\sin^2\alpha.$$

Niech I oznacza wierzchołek prostokąta, wykreślonego na OA i OB, a M spodek prostopadłej, wykreślonej do AB z punktu I. Z trójkątów AMI, APM mamy kolejno

$$AM=AI\cos\alpha=l\cos^2\alpha, \qquad AP=AM\sin\alpha=l\cos^2\alpha\sin\alpha$$

a więc $OP=OA-AP=l\sin^3\alpha$, tak iż punkt M jest punktem styczności prostej AB z jej obwiednią. Mamy wreszcie

$$BM=l-AM=l\sin^2\alpha;$$

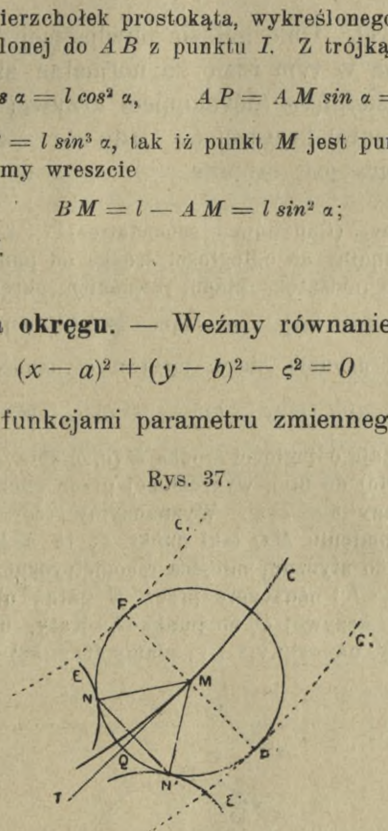
przeto łuk $DM=\frac{3}{2}\,BM$.

210. Obwijająca okręgu. — Weźmy równanie okręgu

(15) $$(x-a)^2+(y-b)^2-\varsigma^2=0$$

w którym a, b, ς są funkcjami parametru zmiennego t. Punktami stycz-

Rys. 37.



ności tego okręgu z jego obwijającą są punkty przecięcia z prostą

(16) $$(x-a)\,a'+(y-b)\,b'+\varsigma\varsigma'=0,$$

prostopadłą do stycznej krzywej C, którą zakreśla środek (a, b) koła, i położoną w odległości, równej $\varsigma\frac{d\varsigma}{ds}$ od środka (s — łuk krzywej C). Prosta owa przecina okrąg w dwu punktach N, N', symetrycznych względem stycznej MT (rys. 37), obwijająca składa się tedy z dwuch gałęzi E, E', nie odróżniających się ogólnie pod względem analitycznym. Zauważyć można parę wypadków szczególnych:

po 1-e) Jeżeli ς jest stałe, to cięciwa NN', łącząca punkty styczności, zamienia się w normalną PP' i obwijająca składa się z dwuch krzywych równoległych C_1, C_1', otrzymanych za pomocą odłożenia z obu stron punktu M, na normalnej do krzywej C, odległości stałej ς.

po 2-e) Jeżeli $\varsigma = s + C$, to $\varsigma \frac{d\varsigma}{ds} = \varsigma$; cięciwa NN' staje się styczną do okręgu w punkcie Q. Obie gałęzie obwijającej Γ nakrywają się wzajemnie i obwijająca ma w tym razie za normalne styczne do krzywej C; mówimy, iż C jest *rozwiniętą* (développée) krzywej Γ i nawzajem Γ jest *rozwijającą* (développante) krzywej C. Gdy $d\varsigma > ds$, prosta (16) nie przecina okręgu i obwijająca jest urojona.

Linje palące wtórne. (Caustiques secondaires). — Założmy, iż promień koła zmiennego jest proporcjonalny do odległości środka od punktu stałego O. Jeżeli ten punkt stały weźmiemy za początek układu, równaniem okręgu będzie

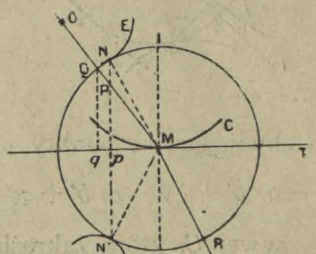
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = k^2(a^2+b^2),$$

gdzie k oznacza pewien czynnik stały; cięciwa styczności będzie miała równanie następujące:

$$(x-a)\,a' + (y-b)\,b' + k^2(aa'+bb') = 0.$$

Niech δ i δ' oznaczają odległości środka $M(a, b)$ koła od cięciwy, łączącej punkty styczności i od równoległej do niej, wykreślonej przez początek układu; z równania poprzedniego otrzymujemy $\delta = k^2\delta'$. Wyznaczymy tedy cięciwę, łączącą punkty styczności, biorąc na promieniu MO taki punkt P, iż $MP = k^2 MO$, i wykreślając z punktu P prostopadłą do stycznej miejsca gieometrycznego C środków kół obwiniętych. Założmy iż $k < 1$ i oznaczmy przez E gałąź obwijającej, położoną z tej samej strony stycznej do krzywej C, co punkt O. Kąty, utworzone przez normalną MI z prostemi MO i MN, nazwijmy i i r; mamy (rys. 38)

Rys. 38.



$$\sin i = \frac{Mq}{MQ}, \quad \sin r = \frac{Mp}{MN}, \quad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{Mq}{Mp} = \frac{MQ}{MP} = \frac{1}{k}.$$

Wyobraźmy sobie teraz, iż w punkcie O jest umieszczone źródło światła i że krzywa C stanowi linję graniczną pomiędzy środowiskiem, w którym leży punkt O i innym środowiskiem, którego spółczynnik załamania względem pierwszego równa się $\frac{1}{k}$. Po załamaniu się promień padający OM zmienia się na promień załamany MR, stanowiący, zgodnie z prawem załamania światła, właśnie przedłużenie NM. Wszystkie promienie załamane MR są tedy prostopadłe do obwijającej E, zwanej *linją palącą* czyli *kaustyczną wtórną*, odpowiadającą załamaniu (par réfraxion).

Druga gałąź obwijającej E nie ma oczywiście żadnego znaczenia fizycznego; odpowiadałaby ona, gdyby to było możliwe, ujemnemu spółczynnikowi załamania. Jeżeli założymy, iż $k = 1$, to obwijająca E przemieni się w sam punkt O, a obwijająca E' stanie się miejscem gieometrycznym punktów symetrycznych z punktem O względem stycznych krzywej C. Krzywa ta stanowi również linję palącą wtórną, *odpowiadającą odbiciu* od krzywej C promieni świetlnych, wychodzących z punktu O. W ten sam sposób dowiedziemy, iż jeżeli dokoła każdego punktu krzywej C, jako środka, zakreślimy okrąg o promieniu proporcjonalnym do odległości środka od pewnej stałej prostej, to obwijające będą stanowiły linje palące wtórne, odpowiadające promieniom świetlnym, wychodzącym z punktu w nieskończoności.

211. Rodziny powierzchni o jednym parametrze zmiennym. — Niech

$$f(x, y, z, a) = 0 \tag{17}$$

stanowi równanie powierzchni S, zależnej od parametru zmiennego a. Jeżeli istnieje powierzchnia E, styczna do każdej z powierzchni S wzdłuż pewnej krzywej C, powierzchnia ta zowie się *powierzchnią obwijającą* (surface enveloppe) powierzchni S, a krzywa styczności C dwuch powierzchni S i E — *linją charakterystyczną* (charactéristique).

Aby rozpoznać, czy istnieje powierzchnia obwijająca, należy tedy sprawdzić, czy można na każdej z powierzchni S wyznaczyć taką krzywą C, iżby miejsce gieometryczne tych krzywych stanowiło powierzchnię styczną do powierzchni S wzdłuż C. Niech x, y, z oznaczają spółrzędne punktu M linji charakterystycznej; jeżeli ten punkt nie jest punktem osobliwym powierzchni S, to równanie płaszczyzny stycznej do tej powierzchni w punkcie M będzie następujące:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z) = 0.$$

Z drugiej strony, gdy punkt się porusza po powierzchni obwijającej E, to x, y, z, a stanowią funkcje dwuch zmiennych niezależnych, czyniące zadość równaniu (17); między ich różniczkami zachodzi związek

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial a} da = 0.$$

Na to, aby płaszczyzna styczna do powierzchni E stanowiła jedno z płaszczyzną styczną do S, potrzeba i wystarcza, iżby pomiędzy różniczkami dx, dy, dz zachodził związek

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0;$$

związek ten, wobec poprzedniego warunku, jest równoważny równaniu

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0. \tag{18}$$

Nawzajem można uzasadnić podobnie jak w stosunku do krzywych płaskich (art. 207), iż powierzchnia $R(x, y, z) = 0$, otrzymana przez wyrugowanie parametru a z równań (17) i (18) stanowi albo powierzchnię obwijającą układu powierzchni S albo miejsce gieometryczne punktów osobliwych. Linja charakterystyczna C, przedstawiona przez równanie (17) i (18), jest również położeniem granicznym krzywej przecięcia powierzchni S z powierzchnią nieskończenie bliską, należącą do tej samej rodziny.

212. Rodziny powierzchni o dwuch parametrach. — Weźmy obecnie równanie

$$f(x, y, z, a, b) = 0, \tag{19}$$

określające powierzchnie S, zależne od dwuch parametrów a i b.

W ogólności nie istnieje powierzchnia styczna do każdej powierzchni tej rodziny wzdłuż pewnej krzywej; istotnie, jeżeli zwiążemy oba parametry zależnością $b = \varphi(a)$, to otrzymamy powierzchnie zależne tylko od jednego parametru a, i linja charakterystyczna będzie wyznaczona przez równanie (19) łącznie z równaniem

$$\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}\varphi'(a) = 0. \tag{20}$$

Linja charakterystyczna zależy tedy w ogólności od $\varphi'(a)$, i na każdej z powierzchni S leży nieskończenie wiele linji charakterystycznych; nie tworzą przeto one przy zmienianiu a i b żadnej powierzchni. Zbadajmy, czy istnieje powierzchnia E, któraby dotykała każdą z powierzchni nie wzdłuż całej krzywej, lecz w jednym tylko lub kilku punktach. Jeżeli taka powierzchnia istnieje, to spółrzędne (x, y, z) punktu styczności powierzchni S z powierzchnią obwijającą E stanowią funkcje dwuch parametrów zmiennych a i b, czyniące zadość równaniu (19); ich różniczki przeto spełniają warunek

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial a}da + \frac{\partial f}{\partial b}db = 0. \tag{21}$$

Na to, aby powierzchnia, stanowiąca miejsce gieometryczne punktu (x, y, z), była styczna do powierzchni S, potrzeba jeszcze, iżby zachodził związek

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0,$$

skąd wobec związku poprzedniego wynika:

$$\frac{\partial f}{\partial a}da + \frac{\partial f}{\partial b}db = 0.$$

Ponieważ a i b są zmiennemi niezależnemi, punkt styczności winien czynić zadość jednocześnie dwom równaniom

(22) $$\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial b} = 0.$$

Otrzymamy tedy równanie powierzchni obwijającej, rugując a i b z trzech związków (19) i (22). Rozumowanie wskazuje oczywiście, iż znaleziona w ten sposób powierzchnia jest styczna do powierzchni S, o ile tylko nie mamy dla wspólnych pierwiastków równań (19) i (22) jednocześnie

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

powierzchnia ta jest przeto albo powierzchnią obwijającą, albo miejscem gieometrycznym punktów osobliwych powierzchni S.

Mamy tedy ostatecznie dwa rodzaje powierzchni obwijających, odpowiednio do tego, czy powierzchnie obwinięte zależą od jednego czy dwuch parametrów. Np. płaszczyzna styczna do kuli lub hiperboloidy zależy od dwuch parametrów i płaszczyzna ta dotyka powierzchni w jednym tylko punkcie. Natomiast płaszczyzna styczna do stożka lub walca zależy tylko od jednego parametru zmiennego i styka się ze swą powierzchnią obwijającą wzdłuż jednej z tworzących.

213. Powierzchnie rozwijalne. — Powierzchnia, obwijająca rodzinę płaszczyzn, zależnych od jednego parametru zmiennego, zowie się *powierzchnią rozwijalną* (surface développable).

Weźmy równanie płaszczyzny ruchomej P

(23) $$z = \alpha x + y f(\alpha) + \varphi(\alpha),$$

w którym α oznacza parametr zmienny, $f(\alpha)$ i $\varphi(\alpha)$ dwie jakiekolwiek funkcje tego parametru. Linję charakterystyczną wyznaczamy za pomocą równania (23) łącznie z równaniem

(24) $$x + y f'(\alpha) + \varphi'(\alpha) = 0,$$

otrzymanym przez różniczkowanie pierwszego względem α, jest to tedy linja prosta G, a powierzchnia rozwijalna stanowi powierzchnię prostolinjową (s. reglée). Dowiedziemy, iż te wszystkie proste G są styczne do pewnej krzywej skośnej. W tym celu zróżniczkujmy równanie płaszczyzny raz jeszcze względem α; otrzymane przy tym równanie

$$y f''(\alpha) + \varphi''(\alpha) = 0 \tag{25}$$

wyznacza na linji charakterystycznej G pewien punkt M. Miejsce gieometryczne takich punktów M (zależnych od α) stanowi krzywa skośna Γ, której styczną jest sama prosta G. W istocie, krzywa Γ jest wyznaczona za pomocą trzech równań (23), (24), (25), z których można obliczyć spółrzędne x, y, z w zależności od α. Jeżeli zróżniczkujemy dwa pierwsze z tych równań, mając wzgląd na trzecie, to otrzymamy

$$dz = \alpha\, dx + f(\alpha)\, dy, \qquad dx + f'(\alpha)\, dy = 0; \tag{26}$$

związki te wyrażają, iż styczna do krzywej Γ jest równoległa do linji charakterystycznej G. Skądinąd obie te proste posiadają punkt wspólny — a więc nakrywają się wzajemnie.

Wszelka powierzchnia rozwijalna może tedy być określona jako powierzchnia, utworzona przez styczne do pewnej krzywej Γ. Owa krzywa Γ może w wyjątkowym razie zamienić się w punkt w odległości skończonej lub nieskończonej; powierzchnia obwijająca staje się wtedy powierzchnią stożkową lub walcową. Zdarza się to, gdy $f''(\alpha) = 0$.

Nawzajem, wszelka powierzchnia, utworzona przez styczne do krzywej skośnej Γ, jest powierzchnią rozwijalną. Jeżeli bowiem

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

stanowią spółrzędne punktu krzywej Γ, to płaszczyzna ściśle styczna, której określenie gieometryczne będzie dane w dalszym ciągu (art. 222), posiada równanie

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0, \tag{27}$$

w którym spółczynniki A, B, C czynią zadość związkom

$$Adx + Bdy + Cdz = 0, \quad Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z = 0. \tag{28}$$

Płaszczyzna ta zależy od jednego parametru zmiennego t; sprawdzimy zaraz, iż linja charakterystyczna tej płaszczyzny jest to właśnie styczna do krzywej Γ. Linja charakterystyczna jest to przecięcie płaszczyzny ściśle stycznej z płaszczyzną

$$dA(X - x) + dB(Y - y) + dC(Z - z) = 0,$$

przeciągniętą również przez punkt (x, y, z). Aby okazać, iż utożsamia się ona ze styczną, wystarczy dowieść, iż mamy

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0, \qquad d A\,dx + d B\,dy + d C\,dz = 0;$$

pierwszy związek jest jednym ze związków (28), wyznaczających A, B, C. Drugi otrzymujemy za pomocą różniczkowania pierwszego, uwzględniając drugie z równań (28).

Ten sposób powstawania powierzchni rozwijalnej pozwala na wytworzenie sobie nader jasnego pojęcia o kształcie powierzchni. Weźmy łuk AB jakiejś krzywej skośnej; przez każdy punkt M łuku AB przeciągnijmy styczną i rozważajmy tylko tę jej część, która odpowiada określonemu zwrotowi łuku, np. od A do B. Miejsce gieometryczne tych promieni stanowi płat powierzchni rozwijalnej S_1, ograniczony przez łuk AB i styczne w punktach A i B, a pozatym rozciągający się w nieskończoność. Biorąc podobnież drugą część każdej stycznej, otrzymujemy drugi analogiczny płat powierzchni S_2, spojony z S_1 wzdłuż łuku AB; widzowi, umieszczonemu w górze, wydaje się, iż oba płaty powierzchni pokrywają się częściowo nawzajem. Rzecz jasna, iż wszelka płaszczyzna, przeciągnięta przez punkt O łuku AB, przecina płaty S_1 i S_2 podług dwuch gałęzi pewnej krzywej, spotykających się w punkcie O, który jest punktem zwrotu; własność ta tłumaczy nazwę *krawędzi zwrotu*, nadaną krzywej skośnej Γ.

Łatwo sprawdzić to samo za pomocą rachunku. Weźmy punkt O za początek układu, płaszczyznę sieczną za płaszczyznę xy, styczną za oś Oz, płaszczyznę ściśle styczną za płaszczyznę xz; jeżeli uważamy z za zmienną niezależną, to szeregi, wyrażające x i y, przybierają postać następującą:

$$x = a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots, \qquad y = b_3 z^3 + \ldots,$$

ponieważ winniśmy mieć w początku układu

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dy}{dz} = \frac{d^2 y}{dz^2} = 0,$$

i równania stycznej w punkcie zbliżonym do początku układu napiszemy w postaci

$$\frac{X - a_2 z^2 - a_3 z^3 - \ldots}{2\,a_2 z + \ldots} = \frac{Y - b_3 z^3 - \ldots}{3\,b_3 z^2 + \ldots} = Z - z.$$

Czyniąc $Z = O$, otrzymamy spółrzędne X, Y punktu przebicia stycznej z płaszczyzną sieczną; szeregi, wyrażające te spółrzędne, rozpoczynają się odpowiednio od wyrazu, zawierającego z^2, i wyrazu, zawierającego z^3. Mamy tedy istotnie w początku układu punkt zwrotu.

Przykład. — Weźmy za krawędź zwrotu krzywą skośną trzeciego rzędu $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$. Równaniem płaszczyzny ściśle stycznej będzie

$$t^3-3t^2X+3tY-Z=0;$$

równanie powierzchni obwijającej otrzymamy, wyrażając, iż równanie poprzednie, rozważane jako równanie względem t, posiada pierwiastek podwójny; rugujemy tedy t z równań

$$(E)\qquad \begin{cases} t^2-2tX+Y=0 \\ Xt^2-2tY+Z=0. \end{cases}$$

Wynik rugowania stanowi równanie

$$(XY-Z)^2-4(X^2-Y)(Y^2-XZ)=0,$$

powierzchnia rozwijalna jest tedy powierzchnią czwartego rzędu.

Zauważmy, iż równania (E) wyrażają styczną do krzywej skośnej trzeciego rzędu.

214. — Jeżeli $z=F(x,y)$ stanowi równanie powierzchni rozwijalnej, to *funkcja $F(x,y)$ czyni zadość równaniu $s^2-rt=0$,* w którym r, s, t oznaczają, jak zwykle, trzy pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji $F(x,y)$.

W istocie, płaszczyzna styczna do tej powierzchni, o równaniu

$$Z=pX+qY+z-px-qy,$$

winna zależeć tylko od jednego parametru; więc z trzech wielkości p, q, $z-px-qy$ jedna tylko może być dowolna, i w szczególności istnieje pewna zależność między p i q, $f(p,q)=0$. Wnioskujemy stąd, iż jakobian $\dfrac{D(p,q)}{D(x,y)}=rt-s^2$ winien być tożsamościowo równy zeru.

Naodwrót, jeżeli $rt-s^2=0$, to q i p są związane co najmniej przez jedno równanie. Jeżeli istnieją dwa takie, niezależne od siebie, związki, to p i q są stałe: $p=a$, $q=b$, a funkcja $F(x,y)$ równa się $ax+by+c$; powierzchnia jest płaszczyzną. Jeżeli istnieje jedna tylko zależność między p i q, to możemy napisać $q=\varphi(p)$, gdzie *p nie jest wielkością stałą.* Lecz mamy również

$$y(rt-s^2)=\frac{D(z-px-qy,\ p)}{D(x,y)},$$

a więc $z-px-qy$ jest również funkcją p, przypuśćmy $\psi(p)$, gdy $rt-s^2=0$. Funkcja nieznana $F(x,y)$ i jej pochodne cząstkowe p i q czynią tedy zadość warunkom

$$q=\varphi(p),\qquad z-px-\varphi(p)y=\psi(p);$$

zróżniczkujmy drugi związek względem x i y, a otrzymamy

$$[x+y\varphi'(p)+\psi'(p)]\frac{\partial p}{\partial x}=0, \qquad [x+y\varphi'(p)+\psi'(p)]\frac{\partial p}{\partial y}=0.$$

Ponieważ p nie jest wielkością stałą, winniśmy mieć

$$x+y\varphi'(p)+\psi'(p)=0.$$

Otrzymamy tedy równanie powierzchni, rugując p z tego związku oraz równania

$$z=px+y\varphi(p)+\psi(p),$$

co da właśnie, o ile uważamy p za parametr zmienny, powierzchnię, obwijającą rodzinę płaszczyzn $z=px+y\varphi(p)+\psi(p)$.

215. Obwijająca rodziny krzywych skośnych. — Rodzina krzywych skośnych, zależnych od jednego parametru zmiennego, nie posiada w ogólności krzywej obwijającej. Rozpatrzmy z początku rodzinę prostych

(29) $$x=az+p, \qquad y=bz+q,$$

gdzie a, b, p, q stanowią dane funkcje parametru zmiennego α; zbadajmy, w jakich warunkach prosta, określona przez te równania, styka się we wszystkich swoich położeniach z jakąś krzywą skośną Γ. Niech $z=\varphi(\alpha)$ oznacza spółrzędną z punktu M, w którym prosta ruchoma D dotyka swej obwijającej Γ; poszukiwana krzywa Γ będzie przedstawiona przez równanie (29), łącznie ze związkiem $z=\varphi(\alpha)$, a spółczynniki kierunkowe stycznej do tej krzywej będą posiadały wyrażenia

$$\frac{dx}{d\alpha}=a\varphi'(\alpha)+a'\varphi(\alpha)+p',$$

$$\frac{dy}{d\alpha}=b\varphi'(\alpha)+b'\varphi(\alpha)+q', \qquad \frac{dz}{d\alpha}=\varphi'(\alpha),$$

w których a', b', p', q' oznaczają pochodne funkcji a, b, p, q. Do tego, aby ta styczna była właśnie prostą D, potrzeba i wystarcza, iżby były spełnione warunki:

$$\frac{dx}{d\alpha}=a\frac{dz}{d\alpha}, \qquad \frac{dy}{d\alpha}=b\frac{dz}{d\alpha},$$

to jest

$$a'\varphi(\alpha)+p'=0, \qquad b'\varphi(\alpha)+q'=0.$$

Funkcja nieznana $\varphi(\alpha)$ winna tedy czynić zadość dwom różnym równaniom, więc prosta ruchoma posiada obwijającą jedynie wtedy, kiedy te równania są zgodne z sobą, to jest gdy mamy

$$a'q'-b'p'=0.$$

Gdy ten warunek jest spełniony, to krzywą obwijającą otrzymujemy, biorąc

$$\varphi(\alpha) = -\frac{p'}{a'} = -\frac{q'}{b'}.$$

Łatwo uogólnić to rozumowanie. Rozpatrzmy rodzinę krzywych (C), zależnych od parametru zmiennego (α) i danych przez równania:

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad \Phi(x, y, z, \alpha) = 0, \tag{30}$$

jeżeli te krzywe C są styczne do pewnej krzywej Γ, to spółrzędne (x, y, z) punktu styczności M obwijającej z krzywą C, odpowiadającą jakiejś wartości α parametru, stanowią funkcje parametru, czyniące zadość równaniom (30) i jeszcze jednemu, różnemu od nich, równaniu. Jeżeli dx, dy, dz oznaczają różniczki, odpowiadające przesuwaniu się punktu M po krzywej C, to między różniczkami temi zachodzą, wobec stałości w tym razie parametru α, związki następujące:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{dx} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{dz} dz = 0, \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = 0. \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Oznaczmy z drugiej strony przez δx, δy, δz, $\delta\alpha$ różniczki zmiennych x, y, z, α, odpowiadające przesunięciu punktu M wzdłuż krzywej Γ; czynią one zadość równaniom:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \delta\alpha = 0, \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \delta z + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \delta\alpha = 0. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

Na to aby krzywe C i Γ stykały się z sobą, potrzeba i wystarcza iżbyśmy mieli

$$\frac{dx}{\delta x} = \frac{dy}{\delta y} = \frac{dz}{\delta z},$$

z warunków tych, wobec związków (31) i (32), wynika:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} \delta\alpha = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \delta\alpha = 0.$$

Współczynniki x, y, z punktu styczności winny przeto czynić zadość równaniom

$$F = 0, \quad \Phi = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0. \tag{33}$$

Aby krzywe C posiadały obwijającą, potrzeba tedy, iżby cztery powyższe równania były zgodne z sobą przy wszelkiej wartości parametru α. Nawzajem, z rozumowania naszego wynika, iż jeżeli te równania, dla wszelkiej wartości α, posiadają wspólne pierwiastki, to krzywa Γ, zakreślona przez punkt (x, y, z), styka się w każdym punkcie z odpowiednią krzywą C. Wszelako dowód wymaga, iżby punkt o spółrzędnych (x, y, z) nie był punktem osobliwym krzywej C, to jest iżby związki (31) wyznaczały stosunki różniczek dx, dy, dz.

Uwaga. — Gdy krzywe C stanowią linje charakterystyczne rodziny powierzchni o jednym parametrze $F(x, y, z, \alpha) = 0$, to równania (33) sprowadzają się do trzech różnych równań

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} = 0; \tag{34}$$

krzywa, przedstawiona przez te równania, jest tedy obwijającą linji charakterystycznych. Jest to uogólnienie własności, uzasadnionej powyżej w stosunku do tworzących powierzchni rozwijalnej.

Równaniom prostej ruchomej nadajemy niekiedy postać

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, \tag{35}$$

gdzie x_0, y_0, z_0, a, b, c stanowią funkcje parametru zmiennego α. Łatwo znaleźć bezpośrednio warunek istnienia obwijającej tej rodziny. Oznaczmy przez l wartość wspólną powyższych stosunków; spółrzędne jakiegokolwiek punktu prostej posiadają wyrażenia

$$x = x_0 + la, \qquad y = y_0 + lb, \qquad z = z_0 + lc,$$

i chodzi o stwierdzenie, czy można wziąć za l taką funkcję α, iżby krzywa, zakreślona przez punkt (x, y, z), była styczna do prostej ruchomej. Trzeba do tego warunku

$$\frac{x_0' + a'l}{a} = \frac{y_0' + b'l}{b} = \frac{z_0' + c'l}{c}; \tag{36}$$

oznaczając przez m jeszcze jedną liczbę nieoznaczoną, równą tym stosunkom, i rugując l i m z trzech otrzymanych równań linjowych, osiągamy równanie warunkowe

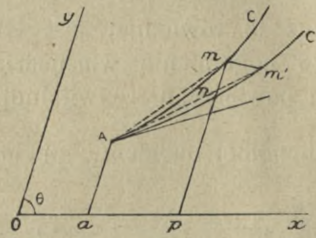
$$\begin{vmatrix} x_0' & y_0' & z_0' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0. \tag{37}$$

Jeżeli ten warunek jest spełniony, to z równań (36) można wyznaczyć l, a więc i linję obwijającą.

II. — STYCZNOŚĆ DWU KRZYWYCH, KRZYWEJ Z POWIERZCHNIĄ.

216. Styczność dwu krzywych płaskich. (Contact de deux courbes planes). — Weźmy dwie krzywe C i C', styczne do siebie w punkcie A. Każdemu punktowi m krzywej C, zbliżonemu do punktu A, podporządkujmy podług jakiegokolwiek prawa punkt m' krzywej C', tak, iżby ten punkt pokrywał punkt A jednocześnie z punktem m.

Rys. 39.



Biorąc za nieskończenie małą pierwszego rzędu łuk Am, lub też, co wychodzi na jedno, cięciwę Am, zbadajmy z początku, jaki należy obrać sposób podporządkowania, aby rząd nieskończenie małej mm' względem Am był jak największy [1]. W tym celu odnieśmy obie krzywe do dwuch osi spółrzędnych, prostokątnych lub ukośnokątnych, z których oś y-ów nie jest równoległa do wspólnej stycznej AT. Niech

$$(C) \qquad y = f(x)$$

$$(C') \qquad Y = F(x)$$

stanowią równania obu krzywych, a (x_0, y_0) — spółrzędne punktu A; spółrzędnemi punktu m będą $x_0 + h$ i $f(x_0 + h)$, a punktu m' — $x_0 + k$ i $F(x_0 + k)$; k oznacza funkcję przyrostu h, dążącą wraz z h do zera i określającą obrany sposób podporządkowania wzajemnego punktów obu

[1] Rzecz oczywista, iż otrzymalibyśmy szukany rząd, podporządkowując punktowi m punkt m', położony ze wszystkich punktów krzywej C' najbliżej punktu m. Okażemy jednak, iż można ten sposób podporządkowania zastąpić przez nieskończenie wiele innych sposobów.

krzywych. Zauważmy jeszcze, iż można zastąpić nieskończenie małą pierwszego rzędu Am przez $h = ap$, ponieważ stosunek $\frac{ap}{Am}$ dąży do granicy skończonej, różnej od zera, gdy punkt m zbliża się nieograniczenie do punktu A.

Po tych omówieniach załóżmy, iż przy pewnym sposobie podporządkowania mm' stanowi nieskończenie małą rzędu $r+1$ względem h; $\overline{mm'}^2$ jest w takim razie nieskończenie małą rzędu $2r+2$.

Owóż można napisać, oznaczając przez Θ kąt między osiami,

$$\overline{mm'}^2 = [F(x_0+k) - f(x_0+h) + (k-h)\cos\Theta]^2 + (k-h)^2 \sin^2\Theta;$$

potrzeba tedy, iżby każda z różnic: $k-h$ i

$$F(x_0+k) - f(x_0+h)$$

stanowiła nieskończenie małą rzędu conajmniej $r+1$, to jest, iżbyśmy mieli, oznaczając przez α i β funkcje przyrostu h, zachowujące wielkość skończoną, gdy h dąży do zera:

$$k = h + \alpha h^{r+1}, \qquad F(x_0+k) - f(x_0+h) = \beta h^{r+1}.$$

Wzór ostatni możemy napisać inaczej

$$F(x_0+h+\alpha h^{r+1}) - f(x_0+h) = \beta h^{r+1};$$

jeżeli wyobrazimy sobie $F(x_0+h+\alpha h^{r+1})$ w postaci szeregu potęg α, to część zależna od α będzie nieskończenie małą rzędu co najmniej $r+1$, a więc różnica

$$\Delta = F(x_0+h) - f(x_0+h)$$

będzie również nieskończenie małą rzędu co najmniej równego $r+1$, lecz może być rzędu wyższego. Otóż ta różnica Δ stanowi odległość mn punktów krzywych C i C', położonych na tej samej prostej równoległej do osi Oy. Ponieważ, zastępując punkt m' przez punkt n, możemy tylko powiększyć rząd nieskończenie małej mm', więc wnioskujemy, iż *odległość dwu odpowiednich punktów obu krzywych jest nieskończenie małą możliwie największego rzędu w takim razie, gdy punkty odpowiednie są położone na prostej, równoległej do osi Oy.* Jeżeli ten rząd równa się $r+1$, mówimy, iż krzywe mają ze sobą w punkcie A *styczność rzędu r* (un contact d'ordre r).

Uwagi. — Określenie to nastręcza pewne uwagi. Oś Oy jest ostatecznie prostą, spełniającą ten jedyny warunek, iż nie jest równoległa do wspólnej stycznej AT; można tedy w celu wyznaczenia rzędu styczności podporządkować sobie punkty dwuch krzywych, położone odpowiednio na prostych, równoległych do jakiejś prostej stałej D, nie równoległej do stycznej. Podany dowód wskazuje, iż otrzymany rząd nieskończenie małej badanej nie zależy od kierunku prostej D, co łatwo sprawdzić.

Przypuśćmy istotnie, iż przez punkt m krzywej C przeciągamy dwie proste mm' i mn (rys. 39), równoległe do dwuch prostych o kierunkach stałych, z których żaden nie jest kierunkiem stycznej. W trójkącie $mm'n$ mamy

$$\frac{mm'}{mn} = \frac{\sin \widehat{mnm'}}{\sin \widehat{mm'n}};$$

gdy punkt m zbliża się do A, to kąty $\widehat{mnm'}$, $\widehat{mm'n}$ dążą do granic, różnych od O i π, ponieważ cięciwa $m'n$ ma za granicę styczną AT, a więc mm' jest nieskończenie małą tego samego rzędu, co mn. Ten sam rachunek wykazuje, iż niezależnie od konstrukcji, wiążącej punkt m' z punktem m, mm' nie może być nieskończenie małą rzędu wyższego, niż mn, ponieważ licznik $\sin \widehat{mnm'}$ posiada granicę różną od zera.

Wzięliśmy za nieskończenie małą pierwszego rzędu łuk Am lub cięciwę Am; otrzymalibyśmy ten sam wynik, biorąc łuk An krzywej C', gdyż Am i An są tego samego rzędu.

Gdy dwie krzywe C i C' mają ze sobą styczność rzędu r-ego, można wynaleźć nieskończenie wiele takich sposobów podporządkowania wzajemnego punktów m, m' obu krzywych, iżby mm' stanowiło nieskończenie małą rzędu $r+1$. Wystarczy wziąć $k = h + \alpha h^{s+1}$, gdzie $s \geqq r$, a α stanowi funkcję h, zachowującą wartość skończoną gdy $h = 0$. Gdybyśmy mieli $s < r$, mm' byłoby nieskończenie małą rzędu $s+1$.

217. Rząd styczności. (Ordre du contact). — Aby otrzymać rząd styczności dwuch krzywych C i C', należy przeto obliczyć rząd względem h różnicy

$$Y - y = F(x_0 + h) - f(x_0 + h).$$

Ponieważ krzywe są styczne do siebie w punkcie A, mamy przedewszystkim $F(x_0) = f(x_0)$, $F'(x_0) = f'(x_0)$, może jednak zdarzyć się, iż oprócz tego pewna liczba następnych pochodnych obu funkcji równa się sobie odpowiednio przy $x = x_0$. Biorąc wypadek ogólny, załóżmy, iż mamy

$$(38) \qquad \begin{cases} F(x_0) = f(x_0), & F'(x_0) = f'(x_0), \\ F''(x_0) = f''(x_0), \ldots, & F^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0), \end{cases}$$

a że pochodne następne $F^{(n+1)}(x_0)$ i $f^{(n+1)}(x_0)$ nie są równe.

Stosując do funkcji $F(x)$ i $f(x)$ wzór Taylora, możemy napisać

$$Y = F(x_0) + \frac{h}{1} F'(x_0) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^{(n)}(x_0) + \\ + \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} [F^{(n+1)}(x_0) + \varepsilon],$$

$$y = f(x_0) + \frac{h}{1} f'(x_0) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x_0) + \\ + \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} [f^{(n+1)}(x_0) + \varepsilon'],$$

a po odjęciu stronami

$$(39) \qquad Y - y = \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} [F^{(n+1)}(x_0) - f^{(n+1)}(x_0) + \varepsilon - \varepsilon'],$$

gdzie ε, ε' są nieskończenie małe. *Rząd styczności dwuch krzywych równa się tedy rzędowi najwyższych pochodnych funkcji $f(x)$ i $F(x)$, równych dla $x = x_0$.*

Warunki (38), podane przez Lagrange'a, wyrażają również, iż $x = x_0$ stanowi pierwiastek wielokrotny rzędu $n+1$ równania $F(x) = f(x)$. Owóż równanie to wyznacza odcięte punktów wspólnych obu krzywych C i C'; można tedy rzec, iż krzywe, mające styczność rzędu n-ego, posiadają $n+1$ punktów przecięcia, *zbiegających się w jednym punkcie* (confondus en un seul).

Wzór (39) wskazuje, iż $Y - y$ zmienia znak wraz z h, gdy n jest parzyste i nie zmienia znaku, gdy n jest nieparzyste. Przeto *krzywe, mające ze sobą styczność rzędu nieparzystego, nie przecinają się wzajemnie w punkcie styczności, krzywe zaś, mające ze sobą styczność rzędu parzystego, przecinają się* (se traversent). Łatwo sobie zdać z tego sprawę. Rozważmy w celu ustalenia uwagi krzywą C', przecinającą krzywą C w trzech punktach, zbliżonych do punktu A; jeżeli ta krzywa C' przekształca się w sposób ciągły tak, iż jej wszystkie trzy punkty przecięcia z C zbiegają się w punkcie A, to położenie graniczne krzywej C' ma z C styczność rzędu drugiego, i wystarczy wykonać rysunek, by stwierdzić, iż obie te krzywe przecinają się wzajemnie w punkcie A. Rozumowanie takie posiada oczywiście charakter zupełnie ogólny.

Gdy równania dwuch krzywych nie są rozwiązane względem rzędnych y i Y, co zachodzi najczęściej, to zasady obliczania pochodnych pozwalają zawsze na znalezienie warunków niezbędnych do tego, iżby krzywe miały styczność rzędu n. Zagadnienie nie nastręcza tedy żadnej szczególnej trudności. Zbadajmy jedynie niektóre wypadki szczególne, spotykane często w zastosowaniach. Założymy z początku, iż spółrzędne punktu każdej krzywej są wyrażone w zależności od parametru zmiennego w sposób następujący

$$(C) \qquad x = f(t), \qquad y = \varphi(t),$$

$$(C') \qquad X = f(u), \qquad Y = \psi(u),$$

i że dla pewnej szczególnej wartości t_0 mamy jednocześnie $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$, $\varphi'(t_0) = \varphi'(t_0)$, tak iż krzywe stykają się ze sobą w punkcie A, o spółrzędnych $f(t_0)$, $\varphi(t_0)$. Jeżeli $f'(t_0)$ nie równa się zeru, co właśnie założymy, to wspólna styczna nie jest równoległa do Oy i, czyniąc $u = t$, otrzymamy punkty obu krzywych, posiadające tę samą odciętą. Z drugiej strony $x - x_0$ jest nieskończenie małą pierwszego rzędu względem $t - t_0$, wracamy tedy znów do oceny rzędu nieskończonostkowego różnicy $\psi(t) - \varphi(t)$ względem $t - t_0$. Na to, aby krzywe miały ze sobą styczność rzędu n, potrzeba i wystarcza, iżbyśmy mieli

$$(40) \qquad \psi(t_0) = \varphi(t_0), \quad \psi'(t_0) = \varphi'(t_0), \ldots, \quad \psi^{(n)}(t_0) = \varphi^{(n)}(t_0),$$

i styczność jest rzędu nie wyższego niż n, jeżeli pochodne $\psi^{(n+1)}(t_0)$ i $\varphi^{(n+1)}(t_0)$ nie są równe.

Rozpatrzmy jeszcze wypadek, gdy krzywa C jest określona przez równania

$$(41) \qquad x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

gdy tymczasem krzywa C' posiada jedno równanie $F(x, y) = 0$. Ten wypadek może być sprowadzony do poprzedniego; zastąpmy w $F(x, y)$ zmienną x przez $f(t)$ i niech $y = \psi(t)$ oznacza funkcję uwikłaną, określoną za pomocą związku

$$(42) \qquad F[f(t), \psi(t)] = 0,$$

tak iż można również krzywą C' uważać za przedstawioną za pomocą układu równań

$$(43) \qquad x = f(t), \qquad y = \psi(t).$$

Na to, aby krzywe C i C' miały w punkcie A, odpowiadającym wartości t_0 parametru, styczność rzędu n-ego, potrzeba, iżby były spełnione warunki (40), znalezione powyżej. Otóż kolejne pochodne funkcji uwikłanej $\psi(t)$ mogą być wyznaczone z równań

$$
(44) \quad \left\{
\begin{aligned}
& \frac{\partial F}{\partial x} f'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} \psi'(t) = 0, \\
& \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} [f'(t)]^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} f'(t) \psi'(t) + \\
& \qquad + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} [\psi'(t)]^2 + \frac{\partial F}{\partial x} f''(t) + \frac{\partial F}{\partial y} \psi''(t) = 0, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \frac{\partial^n F}{\partial x^n} [f'(t)]^n + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y} \psi^{(n)}(t) = 0;
\end{aligned}
\right.
$$

otrzymamy warunki styczności, czyniąc w tych wzorach $t = t_0$, $x = f(t_0)$, $y = \psi(t_0) = \varphi(t_0)$, $\psi'(t_0) = \varphi'(t_0), \ldots, \psi^{(n)}(t_0) = \varphi^{(n)}(t_0)$. Możemy je wyrazić jeszcze w sposób następujący: oznaczmy przez $\Phi(t)$ funkcję $F[f(t), \varphi(t)]$; *na to, aby krzywe miały ze sobą w punkcie* $t = t_0$ *styczność rzędu* n-ego, *potrzeba i wystarcza, iżbyśmy mieli*

$$
(45) \qquad \Phi(t_0) = 0, \quad \Phi'(t_0) = 0, \ldots, \quad \Phi^{(n)}(t_0) = 0.
$$

Równanie $\Phi(t) = 0$ daje wartości parametru t, odpowiadające punktom przecięcia dwuch krzywych. Warunki styczności wyrażają ponad to, iż $t = t_0$ stanowi pierwiastek rzędu $n + 1$ tego równania, to jest, iż krzywe posiadają $n + 1$ punktów wspólnych, które się pokrywają.

218. Krzywe ściśle styczne. — Mając pewną określoną krzywą C i krzywą C', zależną od $n + 1$ parametrów $a, b, c, \ldots, l$

$$
(46) \qquad F(x, y, a, b, c, \ldots, l) = 0,
$$

możemy obrać wartości tych $n + 1$ parametrów w ten sposób, iżby krzywa C' miała z krzywą C w punkcie, z góry danym, styczność rzędu n. Niech $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ stanowią spółrzędne jakiegoś punktu krzywej C; warunki potrzebne do tego, aby krzywe C i C' miały w punkcie $t = t_0$ styczność rzędu n, są wyrażone przez równania (45), w których zakładamy

$$
\Phi(t) = F[f(t), \varphi(t), a, b, c, \ldots l].
$$

Gdy jest dana wartość t_0 parametru t, to owe $n + 1$ równań wyznaczają $n + 1$ parametrów $a, b, c, \ldots, l$. Otrzymana w ten sposób krzywa C' zowie się *ściśle styczną* (osculatrice) do krzywej C.

Zastosujmy tę teorję do linji najprostszych. Równanie prostej $y = ax + b$ zależy od dwuch parametrów a i b; prosta „ściśle styczna“

ma tedy z krzywą styczność pierwszego rzędu. Jeżeli równaniem krzywej C jest $y = f(x)$, to parametry a i b winny czynić zadość dwom związkom

$$f(x_0) = ax_0 + b, \qquad f'(x_0) = a;$$

odnajdujemy na nowo, jak się można było spodziewać, równanie stycznej.

Równanie okręgu

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0 \tag{47}$$

zależy od trzech parametrów a, b, R; koło ściśle styczne ma tedy z krzywą styczność drugiego rzędu. Jeżeli $y = f(x)$ stanowi równanie danej krzywej, to wyznaczamy a, b i R, wyrażając, iż okrąg przecina tę krzywą w trzech zbiegających się ze sobą punktach, co oprócz równania (47) daje dwa warunki

$$x - a + (y-b)y' = 0, \qquad 1 + y'^2 + (y-b)y'' = 0. \tag{48}$$

Wartości a i b, otrzymane z tych dwuch związków, są takie same, jak wartości spółrzędnych środka krzywizny; przeto *koło ściśle styczne utożsamia się z kołem krzywizny.* Ponieważ ma zachodzić styczność drugiego rzędu, więc *okrąg koła krzywiznowego krzywej płaskiej przecina (naogół* — dod. tł.*) tę krzywą w punkcie styczności.*

Wszystkie te wyniki mogły być z góry przewidziane. W samej rzeczy, spółrzędne środka krzywizny zależą jedynie od x, y, y', y''; dwie krzywe, mające ze sobą styczność drugiego rzędu, posiadają tedy ten sam środek krzywizny. Otóż środek krzywizny koła ściśle stycznego jest oczywiście środkiem tegoż koła; a więc koła: krzywiznowe i ściśle styczne są tym samym kołem. Rozważmy, z drugiej strony, dwa poblizkie koła krzywiznowe; różnica promieni, równa łukowi rozwiniętej, zawartemu pomiędzy dwoma środkami, przewyższa odległość pomiędzy środkami. Jedno z dwuch kół leży tedy całkowicie wewnątrz drugiego, co nie mogłoby zachodzić, gdyby oba koła leżały wewnątrz lub oba zewnątrz krzywej C w sąsiedztwie punktu styczności. Winny tedy przechodzić z jednej strony krzywej C na drugą.

Krzywa płaska posiada jednak niektóre punkty szczególne, w których okrąg koła ściśle stycznego nie przechodzi z jednej strony krzywej na drugą, i należy nawiązać tę uwagę do pewnej własności ogólniejszej. Mając krzywą C', zależną od $n+1$ parametrów, możemy do $(n+1)$ równań (45) dorzucić jeszcze równanie

$$\Phi^{(n+1)}(t_0) = 0,$$

z warunkiem, że uważać będziemy t_0 również za niewiadomą, którą chcemy wyznaczyć. Przeto na krzywej płaskiej C istnieje naogół pewna liczba punktów, w których styczność z krzywą ściśle styczną C' jest rzędu $n+1$.

Tak, mamy punkty, w których styczna ma z krzywą styczność drugiego rzędu; są to punkty przegięcia, dla których $y'' = 0$. Aby otrzymać punkty, w których koło ściśle styczne ma z krzywą styczność trzeciego rzędu, należy zróżniczkować drugie z równań (48), co daje

$$3y'y'' + (y-b)y''' = 0,$$

rugując $y - b$, osiągamy warunek

(49) $$(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 = 0.$$

Dla punktów, czyniących zadość temu warunkowi, mamy $\frac{dR}{dx} = 0$, czyli promień krzywizny osiąga w nich największość lub najmniejszość. W zastosowaniu do elipsy, są to jej wierzchołki; o ile chodzi o cykloidę — punkty, w których styczna jest równoległa do podstawy (base).

219. — Krzywa ściśle styczna może być uważana za położenie graniczne, do którego zmierza krzywa C', spotykająca krzywą C w $n+1$ punktach, gdy te wszystkie punkty dążą do połączenia się w jedno. W celu ustalenia uwagi weźmy rodzinę krzywych, zależnych od trzech parametrów a, b, c, i niech t_0+h_1, t_0+h_2, t_0+h_3 będą trzema wartościami, zbliżonemi do wartości t_0; krzywa C', spotykająca krzywą C w trzech odpowiednich punktach, będzie wyznaczona przez równania

(50) $$\Phi(t_0+h_1) = 0, \quad \Phi(t_0+h_2) = 0, \quad \Phi(t_0+h_3) = 0.$$

Odjąwszy pierwsze równanie od każdego z dwuch następnych, zastosujmy do obu różnic twierdzenie o przyrostach skończonych; otrzymamy układ równoważny poprzedniemu

(51) $$\Phi(t_0+h_1) = 0, \quad \Phi'(t_0+k_1) = 0, \quad \Phi'(t_0+k_2) = 0,$$

gdzie k_1 jest zawarte między h_1 a h_2, k_2 między h_1 i h_3. Odejmując znów drugie równanie od trzeciego i stosując twierdzenie o przyrostach skończonych, otrzymujemy nowy układ

(52) $$\Phi(t_0+h_1) = 0, \quad \Phi'(t_0+k_1) = 0, \quad \Phi''(t_0+l_1) = 0;$$

w którym l_1 zawiera się między k_1 i k_2. Gdy h_1, h_2, h_3 dążą do zera, to samo dzieje się z k_1, k_2, l_1 i po osiągnięciu granicy równania te przybierają postać

$$\Phi(t_0) = 0, \quad \Phi'(t_0) = 0, \quad \Phi''(t_0) = 0;$$

są to właśnie równania, wyznaczające krzywą ściśle styczną. Przy jakiejkolwiekbądź liczbie parametrów rozumowanie będzie takie samo; możnaby również określić krzywą ściśle styczną jako granicę, do której dąży krzywa C', styczna w p punktach do krzywej C i przecinająca ją w q innych punktach (zakładamy przytym $2p+q=n+1$), gdy te $p+q$ punktów zbiegają się w jednym punkcie.

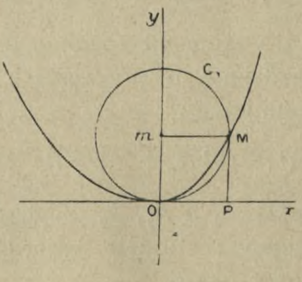
Np. okrąg koła ściśle stycznego jest położeniem granicznym okręgu, przechodzącego przez trzy punkty krzywej C, nieskończenie blizkie punktu styczności. Jest to również położenie graniczne okręgu, stycznego do krzywej C w danym punkcie i przechodzącego przez drugi, nieskończenie blizki, punkt krzywej C. Zatrzymam się na chwilę przy tej własności, łatwej do stwierdzenia.

Weźmy za początek układu punkt dany, za oś x-ów styczną, a za kierunek dodatni Oy kierunek normalnej ku środkowi krzywizny. Mamy w początku układu $y'=0$, a więc $R=\frac{1}{y''}$ i, oznaczając przez ε liczbę nieskończenie małą, gdy x jest nieskończenie małe, możemy napisać podług wzoru Taylora

$$y=x^2\left(\frac{1}{2R}+\varepsilon\right).$$

Wnioskujemy stąd, iż R stanowi granicę, do której dąży wyrażenie $\frac{x^2}{2y}=\frac{\overline{OP}^2}{2MP}$, gdy punkt M zbliża się do punktu O. Niech, z drugiej strony,

Rys. 40.



R_1 oznacza promień okręgu C_1 stycznego w początku układu do osi Ox i przechodzącego przez punkt M. Mamy

$$\overline{OP}^2=\overline{Mm}^2=MP\,(2R_1-MP),$$

czyli

$$\frac{\overline{OP}^2}{2MP}=R_1-\frac{MP}{2};$$

granica promienia R_1 równa się tedy rzeczywiście promieniowi krzywizny R.

220. Styczność dwuch krzywych skośnych. — Rząd styczności dwuch krzywych skośnych określa się w sposób podobny jak rząd styczności dwu krzywych płaskich. Rozpatrzmy dwie krzywe Γ, Γ' styczne do siebie w punkcie wspólnym A; niech M stanowi punkt krzywej Γ, zbliżony do punktu A, któremu podporządkowujemy podług jakiegokolwiek prawa punkt M' krzywej Γ' w ten sposób, iżby oba punkty M, M' dążyły jednocześnie do punktu A. Zbadajmy, jaki może być największy rząd nieskończenie małej MM' względem łuku AM, uważanego za nieskończenie małą pierwszego rzędu; jeżeli będzie to $n+1$, powiemy, iż krzywe mają ze sobą styczność rzędu n.

Odnieśmy obie krzywe do układu prostokątnego spółrzędnych (¹), w którym płaszczyzna yz nie jest równoległa do wspólnej stycznej, i załóżmy z początku, iż równaniom ich nadano postać następującą:

$$(\Gamma)\ \begin{cases} y=f(x), \\ z=\varphi(x), \end{cases} \qquad (\Gamma')\ \begin{cases} Y=F(x), \\ Z=\Phi(x). \end{cases}$$

Jeżeli x_0, y_0, z_0 są spółrzędnemi punktu styczności, to punkty M i M' posiadają odpowiednio spółrzędne

$$M[x_0+h,\ f(x_0+h),\ \varphi(x_0+h)],\quad M'[x_0+k,\ F(x_0+k),\ \Phi(x_0+k)],$$

gdzie k stanowi funkcję h, zależną od ustalonego prawa podporządkowania, która staje się zerem wraz z h. Możemy jeszcze wziąć za nieskończenie małą pierwszego rzędu zamiast łuku AM (art. 216) przyrost h; aby MM' było nieskończenie małą rzędu $n+1$, trzeba, iżby każda z różnic

$$k-h,\quad F(x_0+k)-f(x_0+h),\quad \Phi(x_0+k)-\varphi(x_0+h)$$

była nieskończenie małą rzędu co najmniej $n+1$. Winniśmy tedy mieć

$$k+h=\alpha h^{n+1},\quad F(x_0+k)-f(x_0+h)=\beta h^{n+1},$$
$$\Phi(x_0+k)-\varphi(x_0+h)=\gamma h^{n+1};$$

(α, β, γ pozostają skończone, gdy h dąży do zera); zastępując przyrost k przez jego wartość $h+\alpha h^{n+1}$, nadajemy dwom ostatnim warunkom postać

$$F(x_0+h+\alpha h^{n+1})-f(x_0+h)=\beta h^{n+1},$$
$$\Phi(x_0+h+\alpha h^{n+1})-\varphi(x_0+h)=\gamma h^{n+1}.$$

(¹) Przypominając sobie wzór, który daje odległość między dwoma punktami gdy układ jest ukośnokątny, sprawdzimy łatwo, iż założenie to nie jest bynajmniej w dalszym ciągu konieczne.

Gdy rozwiniemy w szeregi za pomocą wzoru Taylora funkcje $F(x_0 + h + \alpha h^{n+1})$ i $\Phi(x_0 + h + \alpha h^{n+1})$, to wszystkie wyrazy, zależne od α, będą zawierały, jako czynnik, h^{n+1} i różnice

$$F(x_0 + h) - f(x_0 + h), \quad \Phi(x_0 + h) - \varphi(x_0 + h)$$

muszą być co najmniej rzędu $n+1$. Wynika stąd, iż jeżeli MM' jest rzędu $n+1$, to odległość MN między punktami M i N dwuch krzywych, posiadającemi tę samą odciętą $(x_0 + h)$, jest co najmniej rzędu $n+1$. Otrzymamy tedy największy rząd nieskończonostkowy, *podporządkowując sobie wzajemnie punkty dwuch krzywych, posiadające tę samą odciętą.*

Łatwo wyznaczyć ten rząd. Ponieważ krzywe są styczne, mamy związki

$$f(x_0) = F(x_0), \quad f'(x_0) = F'(x_0), \quad \varphi(x_0) = \Phi(x_0), \quad \varphi'(x_0) = \Phi'(x_0);$$

załóżmy, iż mamy jeszcze w ogólności

$$f''(x_0) = F''(x_0), \ldots, \qquad f^{(n)}(x) = F^{(n)}(x_0),$$
$$\varphi''(x_0) = \Phi''(x_0), \ldots, \qquad \varphi^{(n)}(x_0) = \Phi^{(n)}(x_0);$$

a jedna przynajmniej z różnic

$$F^{(n+1)}(x_0) - f^{(n+1)}(x_0), \qquad \Phi^{(n+1)}(x_0) - \varphi^{(n+1)}(x_0)$$

nie jest zerem. Odległość MM' będzie rzędu $n+1$, i krzywe będą miały styczność rzędu n-go. Można jeszcze wyrazić ten wynik w sposób następujący: Aby otrzymać rząd styczności dwuch krzywych Γ i Γ', wystarczy rozpatrzyć rzuty (C, C') i $C_1, C_1')$ tych krzywych na płaszczyzny xOy i xOz, wyznaczyć rząd styczności krzywych C i C', oraz C_1 i C_1' i wziąć mniejszą z tych dwuch liczb.

Gdy krzywe Γ, Γ' są przedstawione przez wzory

$$(\Gamma) \qquad x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t),$$
$$(\Gamma') \qquad X = f(u), \qquad Y = \Phi(u), \qquad Z = \Psi(u),$$

to krzywe te są styczne w pewnym punkcie, o ile dla $u = t = t_0$ mamy

$$\Phi(t_0) = \varphi(t_0), \quad \Phi'(t_0) = \varphi'(t_0), \quad \Psi(t_0) = \psi(t_0), \quad \Psi'(t_0) = \varphi'(t_0);$$

założymy, iż w punkcie styczności wspólna styczna nie jest równoległa do płaszczyzny yOz, to jest, iż $f'(t_0)$ nie równa się zeru. Punkty dwuch krzywych, posiadające tę samą odciętą, odpowiadają tej samej wartości t. Na to, aby zachodziła styczność rzędu n-ego, potrzeba i wystarcza, iżby

$\Phi(t_0) - \varphi(t)$, $\Psi(t) - \psi(t)$ były nieskończenie małemi rzędu $n+1$ względem $t - t_0$, to jest iżbyśmy mieli

$$\Phi'(t_0) = \varphi'(t_0), \ldots, \quad \Phi^{(n)}(t_0) = \varphi^{(n)}(t_0),$$
$$\Psi'(t_0) = \psi'(t_0), \ldots, \quad \Psi^{(n)}(t_0) = \psi^{(n)}(t_0),$$

a żeby przytym jedna co najmniej z różnic

$$\Phi^{(n+1)}(t_0) - \varphi^{(n+1)}(t_0), \quad \Psi^{(n+1)}(t_0) - \psi^{(n+1)}(t_0),$$

nie była równa zeru.

Do wypadku poprzedniego da się sprowadzić wypadek, kiedy jedna z krzywych, np. Γ jest określona za pomocą równań

(53) $$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t),$$

a druga Γ' za pomocą nierozwiązanego układu równań

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0.$$

Powtarzając rozumowanie z art. 217 i oznaczając

$$\Phi(t) = F[f(t), \varphi(t), \psi(t)], \quad \Phi_1(t) = F_1[f(t), \varphi(t), \psi(t)],$$

dowiedlibyśmy, iż na to, aby w punkcie krzywej Γ, odpowiadającemu wartości t_0, zachodziła styczność rzędu n, potrzeba warunków

(54) $$\begin{cases} \Phi(t_0) = 0, & \Phi'(t_0) = 0, \ldots, & \Phi^{(n)}(t_0) = 0, \\ \Phi_1(t_0) = 0, & \Phi_1'(t_0) = 0, \ldots, & \Phi_1^{(n)}(t_0) = 0. \end{cases}$$

221. Krzywe ściśle styczne. — Rozpatrzmy, z jednej strony, pewną określoną krzywą Γ, której spółrzędne są wyrażone w zależności od jednego parametru za pomocą wzorów (53), z drugiej zaś rodzinę krzywych Γ', zależnych od $2n+2$ parametrów $a, b, c, \ldots l$, o równaniach

(55) $$F(x, y, z, a, b, \ldots l) = 0, \quad F_1(x, y, z, a, b, \ldots l) = 0.$$

Można w ogólności obrać te $2n+2$ parametry w taki sposób, iżby jedna z krzywych Γ' miała z krzywą Γ w danym punkcie styczność rzędu n. Krzywa, otrzymana zgodnie z tem założeniem, zowie się *ściśle styczną* do Γ (osculatrice à Γ). Równaniami, wyznaczającemi parametry $a, b, c, \ldots, l$, są właśnie $2n+2$ równania (54), wyżej wypisane. Należy zauważyć, iż równania te mogą być zgodne tylko wtedy, kiedy każda z funkcji F, F_1 zawiera co najmniej $n+1$ parametrów. Np., jeżeli krzywe Γ' są krzywemi płaskiemi, to jedno z równań (55) zawiera zaledwie trzy parametry; krzywa płaska nie może tedy w punkcie, wziętym na krzywej skośnej zupełnie dowolnie, posiadać z nią styczności rzędu wyższego ponad drugi.

Zastosujmy tę teorję do linji najprostszych: prostej i okręgu. Prosta zależy od czterech parametrów; prosta ściśle styczna będzie tedy miała z krzywą styczność pierwszego rzędu. Łatwo sprawdzić, iż nie jest to nic innego, jak poprostu styczna; istotnie, jeżeli wypiszemy równania prostej

$$x = az + p, \quad y = bz + q,$$

równania (54) przybiorą dla punktu (x_0, y_0, z_0) krzywej Γ postać

$$x = az_0 + p, \quad x_0' = az_0', \quad y_0 = bz + q, \quad y_0' = bz_0';$$

otrzymujemy stąd

$$a = \frac{x_0'}{z_0'}, \quad b = \frac{y_0'}{z_0'}, \quad p = x_0 - \frac{x_0'}{z_0'} z_0, \quad q = y_0 - \frac{y_0'}{z_0'} z_0;$$

odnajdujemy tedy istotnie równanie stycznej. Na to, aby styczna miała z krzywą styczność drugiego rzędu, potrzebaby mieć $x_0'' = az_0''$, $y_0'' = bz_0''$, a przeto

$$\frac{x_0''}{x_0'} = \frac{y_0''}{y_0'} = \frac{z_0''}{z_0'};$$

odnajdujemy takie punkty w innym zagadnieniu (art. 226). Koło w przestrzeni zależy od sześciu parametrów; *koło ściśle styczne* będzie tedy miało z krzywą styczność drugiego rzędu. Napiszmy równania okręgu

$$F(x, y, z) = A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0$$
$$F_1(x, y, z) = (z - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2 = 0;$$

parametrami zmiennemi będą tu a, b, c, R i stosunki dwu z pośród spółczynników A, B, C do trzeciego. Wartości tych parametrów będą w takim razie wyznaczone przez następujące równania, w których x, y, z mają być zastąpione odpowiednio przez $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$:

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0$$

$$A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} = 0$$

$$A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{d^2y}{dt^2} + C\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

$$(x - a)\frac{dx}{dt} + (y - b)\frac{dy}{dt} + (z - c)\frac{dz}{dt} = 0$$

$$(x - a)\frac{d^2x}{dt^2} + (y - b)\frac{d^2y}{dt^2} + (z - c)\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 0.$$

Drugi i trzeci z tych związków wskazują, iż płaszczyzna koła ściśle stycznego jest to płaszczyzna ściśle styczna (art. 222). Co do dwuch ostatnich równań, wyrażają one odpowiednio, o ile uważamy w nich a, b, c za spółrzędne bieżące, płaszczyznę normalną w punkcie (x, y, z) i płaszczyznę normalną nieskończenie blizką (p. art. 230).

222. Styczność krzywej z powierzchnią. — Rozpatrzmy powierzchnię S oraz krzywą Γ styczną do tej powierzchni w punkcie A. Punktowi M krzywej, blizkiemu punktu A, podporządkujmy podług dowolnego prawa punkt M' powierzchni, w ten sposób, iżby oba punkty M i M' dążyły jednocześnie do punktu A. Zbadamy z początku, jak należy dobrać punkt M', aby rząd nieskończenie małej MM' względem łuku AM był jak największy. Odnieśmy rozważaną figurę do trzech osi spółrzędnych, tworzących taki układ prostokątny, iż styczna do krzywej Γ nie jest równoległa do płaszczyzny yz, i że płaszczyzna styczna do powierzchni nie jest równoległa do osi Oz. Niech x_0, y_0, z_0 stanowią spółrzędne punktu A; $Z = F(x, y)$ równanie powierzchni S; $y = f(x)$, $z = \varphi(z)$ — równania krzywej Γ, i wyobraźmy sobie, iż przy pewnym sposobie podporządkowania MM' jest nieskończenie małą rzędu $n+1$. Spółrzędnemi x, y, z punktu M będą:

$$x_0 + h, \quad f(x_0 + h), \quad \varphi(x_0 + h);$$

$X, Y, Z = F(X, Y)$ niech oznaczają spółrzędne punktu M'. Na to aby MM' było rzędu $n+1$ względem łuku AM czyli, co na jedno wychodzi, względem h, trzeba, iżby każda z różnic $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ była nieskończenie małą rzędu co najmniej $n+1$. Należy tedy mieć, oznaczając przez α, β, γ wielkości, które dla $h=0$ pozostają skończone:

$$X - x = \alpha h^{n+1}, \quad Y - y = \beta h^{n+1}, \quad Z - z = F(X, Y) - z = \gamma h^{n+1},$$

a przeto

$$F(x + \alpha h^{n+1}, y + \beta h^{n+1}) - z = \gamma h^{n+1}.$$

Różnica $F(x, y) - z$ będzie tedy również rzędu co najmniej $n+1$. Stąd wynika, iż jeżeli podporządkujemy punktowi M krzywej Γ punkt N powierzchni S, w którym przebija powierzchnię prosta równoległa do Oz, przeciągnięta przez M, to rząd nieskończonostkowy MN równa się co najmniej rzędowi MM'. Będziemy tedy mieli rząd styczności krzywej z powierzchnią, gdy znajdziemy rząd MN względem łuku AM lub przyrostu h. Można rzec jeszcze, iż *jest to rząd styczności krzywej* Γ *z krzywą* Γ', *stanowiącą na powierzchni ślad walca, rzucającego* Γ *równolegle do* Oz. (Rzecz jasna zresztą, iż kierunkiem Oz może być kierunek dowolny, nie równoległy do płaszczyzny stycznej).

Równania krzywej Γ' są następujące

$$y = f(x), \qquad Z = F[x, f(x)] = \Phi(x);$$

i mamy, zgodnie z założeniem

$$\Phi(x_0) = \varphi(x_0), \qquad \Phi'(x_0) = \varphi'(x_0);$$

gdy oprócz tego są spełnione warunki

$$\Phi''(x_0) = \varphi''(x_0), \ldots, \quad \Phi^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x), \quad \Phi^{(n+1)}(x_0) \neq \varphi^{(n+1)}(x_0),$$

to krzywa i powierzchnia mają ze sobą styczność rzędu n. Zauważmy, iż równanie $\Phi(x) = \varphi(x)$ daje odcięte punktów przecięcia, które się zbiegają w tym punkcie.

Rozpatrzmy jeszcze wypadek, w którym krzywa Γ jest dana przez równania $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$, a powierzchnia S przez równanie $F(x, y, z) = 0$. Krzywej Γ', przed chwilą określonej, będą odpowiadały równania $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, $z = \pi(t)$; funkcja $\pi(t)$ będzie tu określona za pomocą związku

$$F[f(t), \varphi(t), \pi(t)] = 0.$$

Aby Γ i Γ' miały z sobą styczność rzędu n, potrzeba, iżby $\pi(t) = \psi(t)$ było nieskończenie małą rzędu $n+1$ względem $t - t_0$, to jest iżbyśmy mieli

$$\pi(t_0) = \psi(t_0), \quad \pi'(t_0) = \psi'(t_0), \ldots, \quad \pi^{(n)}(t_0) = \psi^{(n)}(t_0).$$

Nadając symbolowi $\Phi(t)$ to samo znaczenie co poprzednio (art. 220), można jeszcze napisać te warunki w postaci

$$\Phi(t_0) = 0, \quad \Phi'(t_0) = 0, \ldots, \quad \Phi^{(n)}(t_0) = 0;$$

wyrażają one, iż krzywa i powierzchnia mają $n+1$ punktów przecięcia, zbiegających się w punkcie styczności.

Jeżeli powierzchnia S zależy od $n+1$ parametrów $a, b, c, \ldots l$, to można obrać je w taki sposób, iżby ta powierzchnia miała z daną krzywą, w danym jej punkcie, styczność rzędu n; powierzchnia, otrzymana w ten sposób, zowie się *ściśle styczną* (osculatrice).

Gdy chodzi o płaszczyznę, mamy trzy parametry do rozporządzenia; następujące równania wyznaczają te parametry:

$$\begin{gathered} A f(t) + B \varphi(t) + C \varphi(t) + D = 0, \\ A f'(t) + B \varphi'(t) + C \psi'(t) = 0, \\ A f''(i) + B \varphi''(t) + C \psi''(t) = 0. \end{gathered}$$

Są to właśnie równania, których użyliśmy do określenia płaszczyzny ściśle stycznej w art. 213; widzimy, iż styczność jest w ogólności drugiego rzędu. Na to, aby zachodziła styczność rzędu wyższego, należałoby mieć

$$A f'''(t) + B\varphi'''(t) + C\psi'''(t) = 0,$$

płaszczyznę ściśle styczną nazywamy w takim razie zwrotną (stationnaire).

Kula zależy od czterech parametrów; kula ściśle styczna ma tedy z krzywą styczność trzeciego rzędu. Odpowiedni rachunek wykonamy w dalszym ciągu (art. 238).

223. Proste ściśle styczne do powierzchni. — Jeżeli równania krzywej C zależą od $n+2$ parametrów zmiennych, to można dobrać te parametry w ten sposób, by krzywa ta miała z daną powierzchnią S, w danym punkcie M, styczność rzędu n. Istotnie, wyrażając, iż krzywa C przechodzi przez punkt M i że w punkcie tym pokrywa się wzajemnie $n+1$ punktów przecięcia krzywej z powierzchnią S, otrzymujemy ogółem dla wyznaczenia parametrów $n+2$ równania. Np. prosta zależy od czterech parametrów; w każdym punkcie jakiejś powierzchni zachodzi styczność drugiego rzędu z jedną lub kilku prostemi. Aby wyznaczyć te proste, obierzemy za początek układu rozpatrywany punkt powierzchni, a osi z-ów nadamy taki kierunek, by nie leżała w płaszczyźnie stycznej; niech $z = F(x, y)$ stanowi równanie powierzchni w stosunku do tego układu. Szukana prosta przechodzi oczywiście przez początek układu i równania jej mają postać

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \varsigma;$$

równanie $c\varsigma = F(a\varsigma, b\varsigma)$ winno posiadać pierwiastek potrójny $\varsigma = 0$, co pociąga za sobą warunki

$$c = ap + bq,$$

$$0 = a^2 r + 2abs + b^2 t;$$

p, q, r, s, t oznaczają tu pochodne pierwszego i drugiego rzędu funkcji $F(x, y)$ dla $x = y = 0$. Pierwszy z tych dwu związków wyraża, iż szukana prosta leży w płaszczyznie stycznej do powierzchni, co było zresztą à priori oczywiste. Widzimy jeszcze, iż stosunek $\frac{b}{a}$ jest wyznaczony za pomocą równania drugiego stopnia, posiadającego pierwiastki rzeczywiste, o ile tylko $s^2 - rt$ jest dodatnie. Przez każdy punkt powierzchni przechodzą w ogólności *dwie*, ale tylko dwie proste, mające z powierzchnią styczność drugiego rzędu; owe proste są rzeczywiste lub urojone, stosownie do znaku wyrażenia $s^2 - rt$. Powrócimy do nich w rozdziale XII, przy badaniu krzywizny powierzchni.

ĆWICZENIA.

1. C oznacza daną krzywą trzeciego rzędu, posiadającą w O punkt podwójny. Kąt prosty MON obraca się dokoła punktu O, ramiona jego przecinają odpowiednio krzywą C w M i N. Znaleźć obwijającą prostej MN. Rozważyć, w szczególności, wypadki, gdy równaniem krzywej C jest $\lambda y^2 = x^3$, lub $x^3 + y^3 = \mu xy$.

[Egzamin na stopień licencjata: Bordeaux, lipiec 1885].

2. Wyznaczyć punkty, w których krzywa, określona przez równanie

$$x = a\,(n\,\omega - \sin\,\omega), \qquad y = a\,(n - \cos\,\omega)$$

posiada z kołem ściśle stycznym styczność rzędu wyższego nad drugi.

[Egz. na s. lic.: Grenobla, lipiec 1885].

3. m, m_1, m_2 stanowią trzy punkty poblizkie krzywej płaskiej. Znaleźć wartość graniczną, do której dąży promień koła opisanego na trójkącie, utworzonym przez styczne w tych trzech punktach, gdy punkty te dążą do jednego wspólnego położenia.

4. Jeżeli krzywa zamknięta bez punktów przegięcia posiada rozwiniętą również zamkniętą, to długość całkowita tej rozwiniętej równa się podwójnej różnicy pomiędzy sumą największości promieni krzywizny we wszystkich punktach danej krzywej.

5. Jeżeli z każdego punktu jakiejś krzywej przeciągniemy prostą o danej długości, tworzącą kąt stały z normalną, to normalna do krzywej, stanowiącej miejsce gieometryczne końców tych prostych, przechodzi przez środek krzywizny danej krzywej.

6. Jeżeli r oznacza promień wodzący, przeciągnięty ze stałego bieguna do punktu krzywej płaskiej, a p odległość tego środka od stycznej, to promień krzywizny R wyraża się za pomocą wzoru

$$R = \pm\, r\,\frac{dr}{dp}.$$

7. Miejsce gieometryczne ognisk parabol, mających w danym punkcie styczność drugiego rzędu z daną krzywą, stanowi pewien okrąg.

8. Wyznaczyć miejsce gieometryczne środków elips, których osie mają dane kierunki, i które posiadają w danym punkcie styczność drugiego rzędu z daną krzywą.

9. $F(X, Y\; x, y)$ stanowi funkcję dwu par zmiennych (x, y, X, Y). Jeżeli w równaniu $F = O$ uważamy (x, y) za spółrzędne danego punktu m, a X i Y za spółrzędne bieżące, to związek ten podporządkowuje każdemu punktowi m płaszczyzny pewną krzywą c. Gdy punkt m zakreśla krzywą C, to odpowiednia krzywa c obwija krzywą Γ, określoną przez równania

$$F(X, Y;\, x, y) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\, y = 0.$$

Owa krzywa Γ powstaje z krzywej C za pomocą przekształcenia stycznościowego (transformation de contact), a przekształcenie odwrotne otrzymujemy, zastępując każdą z par (x, y) i (X, Y) przez drugą z nich. Rozciągnąć to na powierzchnie (p. art. 62).

Zastosowanie: $$F = X^2 + Y^2 - Xx - Yy.$$

10. Na to, aby krzywa C, posiadająca równanie $F(x, y, a) = 0$, miała w jakimś punkcie styczność rzędu n ze swą obwijającą, potrzeba i wystarcza, iżby ten punkt czynił zadość warunkom:

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial^n F}{\partial a^n} = 0.$$

Zastosowanie do wypadku, gdy C jest okręgiem.

11. Każda z powierzchni $F(x, y, z, a) = 0$ ma styczność drugiego rzędu z krawędzią zwrotu powierzchni obwijającej, określoną przez równania

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = 0.$$

12. Wyznaczyć miejsce gieometryczne środków kul, które mają w danym punkcie styczność drugiego rzędu z daną krzywą.

13. Jeżeli powierzchnia, obwijająca rodzinę kul zmiennych, zależnych od jednego parametru, przemienia się w krzywą Γ, to owa krzywa Γ ma z każdą z tych kul styczność drugiego rzędu.

14*. Jeżeli dokoła każdego punktu m danej powierzchni S, jako środka, zakreślimy powierzchnię kulistą Σ o promieniu zmiennym R, to kula taka dotknie w ogólności swej powierzchni obwijającej w takich dwu punktach M i M', iż prosta MM' jest prostopadła do płaszczyzny stycznej do powierzchni S w punkcie m. Obliczyć odległość δ punktu m od prostej MM'.

Jeżeli powierzchnia S stanowi podstawę układu prostokątnego spółrzędnych krzywolinjowych, tak iż $ds^2 = E du^2 + G dv^2$, to mamy

$$\delta^2 = R^2 \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial R}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{G} \left(\frac{\partial R}{\partial v} \right)^2 \right].$$

15. Jeżeli powierzchnia S jest styczna do płaszczyzny P we wszystkich punktach pewnej krzywej C, leżącej w tej płaszczyźnie, to styczna w jakimkolwiek punkcie tej krzywej posiada styczność trzeciego rzędu z powierzchnią S.

16*. Przez każdy punkt M powierzchni S przechodzi w ogólności ∞^1 okręgów, mających z S styczność trzeciego rzędu. Przez każdą styczną do powierzchni w punkcie M przechodzi płaszczyzna jednego, ale tylko jednego z tych okręgów. Jeżeli punkt M nie jest punktem kołowym, to istnieje *dziesięć* kół, mających w punkcie M styczność czwartego rzędu z powierzchnią.

[Darboux, Bulletin des Sciences mathématiques, t. IV, serja 2, 1880, str. 348—384].

ROZDZIAŁ XI.

KRZYWE SKOŚNE.

I. — PŁASZCZYZNA ŚCIŚLE STYCZNA.

224. Określenie i równanie. — Kilkakrotnie już (art. 213, 221, 222), była mowa o płaszczyźnie ściśle stycznej do krzywej skośnej. Określenie bezpośrednie tej płaszczyzny jest podobne do określenia stycznej. Niech M stanowi punkt krzywej skośnej Γ, MT — styczną w tym punkcie; płaszczyzna, zawierająca prostą MT oraz inny punkt M' krzywej Γ, nieskończenie blizki punktu M, dąży w ogólności, gdy punkt M' zbliża się coraz bardziej do punktu M, do pewnego położenia granicznego. Ową płaszczyznę graniczną nazywamy płaszczyzną *ściśle styczną* (plan osculateur à la courbe) do krzywej Γ w punkcie M. Znajdźmy z początku jej równanie.

Wzory, wyrażające spółrzędne punktu krzywej Γ w zależności od jednego parametru, niech będą następujące:

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t); \tag{1}$$

punkty M i M' mają odpowiadać wartościom t i $t+h$ parametru. Płaszczyzna MTM' posiada równanie

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0,$$

w którym spółczynniki A, B, C winny czynić zadość związkom

$$Af'(t) + B\varphi'(t) + C\psi'(t) = 0 \tag{2}$$

$$A[f(t+h) - f(t)] + B[\varphi(t+h) - \varphi(t)] + C[\psi(t+h) - \psi(t)] = 0. \tag{3}$$

Gdy zastąpimy w związku (3) $f(t+h)$, $\varphi(t+h)$, $\psi(t+h)$ przez szeregi, na które te wyrażenia dadzą się rozwinąć podług wzoru Taylora, to będziemy mogli nadać mu postać

$$A\left\{hf'(t)+\frac{h^2}{1.2}[f''(t)+\varepsilon_1]\right\}+B\left\{h\varphi'(t)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(t)+\varepsilon_2]\right\}+\ldots=0;$$

odejmując od tej równości związek (2), pomnożony przez h i dzieląc wynik przez $\frac{h^2}{2}$, stwierdzamy, że układ związków (2) i (3) jest równoważny układowi następującemu:

$$Af'(t)+B\varphi'(t)=0$$

$$A[f''(t)+\varepsilon_1]+B[\varphi''(t)+\varepsilon_2]+C[\psi''(t)+\varepsilon_3]=0,$$

w którym ε_1, ε_2, ε_3 są to nieskończenie małe, dążące wraz z h do zera.

Gdy h zmierza do zera, to drugi z tych związków przemienia się w

$$(4) \qquad Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)=0.$$

Równanie płaszczyzny ściśle stycznej ma tedy postać

$$(5) \qquad A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

gdzie spółczynniki A, B, C muszą czynić zadość warunkom

$$(6) \qquad \begin{cases} Adx+Bdy+Cdz=0, \\ Ad^2x+Bd^2y+Cd^2z=0. \end{cases}$$

Piszemy również nieraz równanie płaszczyzny ściśle stycznej w postaci wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2x \end{vmatrix}=0.$$

Łatwo sprawdzić, iż ze wszystkich płaszczyzn, przechodzących przez styczną, *płaszczyzna ściśle styczna zbliża się najbardziej do krzywej* Γ w pobliżu punktu styczności (art. 222). Rozpatrzmy z początku płaszczyznę, przechodzącą przez styczną lecz nie będącą płaszczyzną ściśle styczną, i niech $F(t)$ oznacza wynik podstawienia do lewej strony równania (5) $f(t+h)$, $\varphi(t+h)$, $\psi(t+h)$ zamiast spółrzędnych bieżących X, Y, Z; otrzymujemy

$$F(t)=\frac{h^2}{1.2}[Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)+\eta],$$

gdzie η dąży do zera wraz z h. Odległość płaszczyzny od punktu krzywej Γ, zbliżonego do punktu M, jest tedy nieskończenie małą *drugiego rzędu;* prócz tego, ponieważ $F(t)$ przy h nader małym zachowuje wciąż ten sam znak, więc widzimy, iż krzywa Γ leży w pobliżu punktu styczności tylko z jednej strony płaszczyzny stycznej.

Co innego stosuje się do płaszczyzny ściśle stycznej; spółczynniki w równaniu tej płaszczyzny spełniają warunek: $Af'' + B\varphi'' + C\psi'' = 0$, i należy w szeregach, wyrażających spółrzędne punktu krzywej Γ, wziąć jeszcze wyrazy trzeciego rzędu względem h, co daje po podstawieniu

$$F(t) = \frac{h^3}{1.2.3}\left(\frac{A\,d^3x + B\,d^3y + C\,d^3z}{dt^3} + \eta\right).$$

Widzimy, że odległość punktu krzywej Γ od płaszczyzny ściśle stycznej jest nieskończenie małą *trzeciego rzędu*; ponad to $F(t)$ zmienia znak wraz z h, co dowodzi, iż *krzywa skośna przechodzi w punkcie styczności z jednej strony płaszczyzny ściśle stycznej na drugą*. Własności te odróżniają wyraźnie płaszczyznę ściśle styczną od wszystkich innych płaszczyzn, przesuniętych przez styczną.

225. Płaszczyzny ściśle styczne zwrotne. — Wnioski poprzednie nie są słuszne, o ile spółczynniki A, B, C w równaniu płaszczyzny ściśle stycznej czynią zadość warunkowi

$$A\,d^3x + B\,d^3y + C\,d^3z = 0; \tag{7}$$

w tym wypadku należy posunąć się w szeregach, wyrażających spółrzędne, aż do wyrazów czwartego rzędu; otrzymujemy wtedy wynik następujący:

$$F(t) = \frac{h^4}{1.2.3.4}\left(\frac{A\,d^4x + B\,d^4y + C\,d^4z}{dt^4} + \eta\right).$$

Płaszczyznę ściśle styczną w takich punktach nazywamy *zwrotną* (On dit qu'en ces points le plan osculateur est *stationnaire*); jeżeli, co zachodzi w ogólności, $A\,d^4x + B\,d^4y + C\,d^4z$ nie równa się zeru, to $F(t)$ nie zmienia znaku wraz z h i krzywa *nie przebija płaszczyzny ściśle stycznej*. Pozatym odległość punktu krzywej od płaszczyzny ściśle stycznej jest nieskończenie małą czwartego rzędu. Gdybyśmy mieli $A\,d^4x + B\,d^4y + C\,d^4z = 0$, to należałoby posunąć się w szeregach aż do wyrazów piątego rzędu, i tak dalej.

Rugując z trzech równań (6) i (7) A, B i C, otrzymujemy równanie względem t

$$\Delta = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0; \tag{8}$$

którego pierwiastki wyznaczają punkty krzywej Γ, w których się zatrzymuje [1] płaszczyzna ściśle styczna. Każda krzywa skośna posiada tedy zwykle pewną liczbę punktów, odznaczających się tą własnością.

---

[1] Czyli: staje się zwrotną. [*Uw. tł.*].

Nasuwa nam to na myśl zbadanie, czy istnieją krzywe Γ, dla których wszystkie płaszczyzny ściśle styczne byłyby zwrotne. Dokładniej, poszukajmy wszystkich funkcji x, y, z zmiennej t, ciągłych i posiadających pochodne ciągłe, aż do trzeciego rzędu włącznie, a odznaczających się własnością, iż dany powyżej wyznacznik równa się tożsamościowo zeru, gdy t zmienia się pomiędzy granicami a i b $(a < b)$.

Załóżmy z początku, iż jeden z podwyznaczników Δ, odpowiadających wyrazom trzeciego wiersza, np. $dx\,d^2y - dy\,d^2x$ nie staje się zerem w przedziale (a, b). Związki

$$(9)\qquad \begin{cases} dz = C_1\,dx + C_2\,dy, \\ d^2z = C_1\,d^2x + C_2\,d^2y \end{cases}$$

wyznaczają C_1 i C_2, jako funkcje ciągłe zmiennej t w tym przedziale; ponieważ $\Delta = 0$, funkcje te czynią zadość warunkowi

$$(10)\qquad d^3z = C_1\,d^3x + C_2\,d^3y.$$

Zróżniczkujmy teraz, bacząc na wzór (10), równania (9); otrzymujemy nowe równania

$$d\,C_1\,dx + d\,C_2\,dy = 0, \qquad d\,C_1\,d^2x + d\,C_2\,d^2y = 0,$$

skąd wynika $d\,C_1 = d\,C_2 = 0$. Spółczynniki C_1, C_2 są to tedy liczby stałe i za pomocą całkowania pierwszego z równań (9) otrzymujemy, oznaczając przez C_3 jeszcze jedną stałą:

$$z = C_1 x + C_2 y + C_3.$$

Krzywa Γ jest tedy krzywą płaską.

Jeżeli wyznacznik $dx\,d^2y - dy\,d^2x$ staje się zerem przy pewnej wartości c zmiennej t, zawartej między a i b, to rozumowanie nie daje już wystarczającego dowodu, ponieważ wyrażenia C_1 i C_2 stają się dla tej wartości c zmiennej t nieskończonemi lub nieoznaczonemi. Załóżmy, w celu ustalenia uwagi, iż badany wyznacznik równa się zeru w przedziale (a, b) jedynie dla tej wartości t, i że dla tej samej wartości $t = c$ wyznacznik analogiczny $dx\,d^2z - dz\,d^2x$ nie jest zerem. Rozumowanie poprzednie wskazuje, że wszystkie punkty krzywej Γ, otrzymane przy zmienianiu się t od a do c, leżą w tej samej płaszczyźnie P, i że wszystkie punkty, otrzymane przy wzroście t od c do b, leżą w innej płaszczyźnie Q. Z drugiej strony, ponieważ podwyznacznik $dx\,d^2z - dz\,d^2x$ nie równa się zeru dla $t = c$, więc można wybrać liczbę h dość małą, by ten podwyznacznik nie stał się zerem przy wzroście t od $c - h$ do $c + h$. Wszystkie punkty krzywej Γ, otrzymane przy wzroście t od $c - h$ do $c + h$, leżą w tej samej płaszczyźnie R; owa płaszczyzna R musi mieć z płaszczyznami P i Q nieskończoną liczbę punktów wspólnych, nie położonych na jednej prostej, a przeto wszystkie trzy płaszczyzny łączą się w jedną.

Uogólniając to rozumowanie, wnioskujemy, iż jeżeli wyznaczniki

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x, \qquad dx\,d^2z - dz\,d^2x, \qquad dy\,d^2z - dz\,d^2y,$$

nie stają się w przedziale (a, b) wszystkie jednocześnie równemi zeru, to wszystkie punkty krzywej Γ leżą w jednej płaszczyźnie. Jeżeli wszystkie trzy wyznaczniki stają się jednocześnie zerami, to może się wydarzyć, iż krzywa Γ składa się z pewnej liczby łuków, należących do krzywych płaskich i położonych w różnych płaszczyznach; łuki te łączą się ze sobą w punktach, w których płaszczyzna ściśle styczna jest nieoznaczona [1].

Gdy wszystkie trzy wymienione podwyznaczniki równają się w pewnym przedziale tożsamościowo zeru, to linja Γ jest linją prostą lub składa się z odcinków prostych. Jeżeli np. $\frac{dx}{dt}$ nie staje się zerem w przedziale (a, b), to można napisać:

$$\frac{d^2y\, dx - dy\, d^2x}{(dx)^2} = 0, \qquad \frac{d^2z\, dx - dz\, d^2x}{(dx)^2} = 0,$$

skąd wnioskujemy, oznaczając przez C_1 i C_2 dwie stałe:

$$dy = C_1\, dx, \qquad dz = C_2\, dx;$$

jeszcze jedno całkowanie daje następnie

$$y = C_1 x + C_1', \qquad z = C_2 x + C_2',$$

co wskazuje, iż linja Γ jest prostą.

226. Styczne zwrotne. — Wykład poprzedzający doprowadza nas do badania pewnych wyjątkowych punktów krzywej skośnej, zaznaczonych już dawniej (art. 221); są to punkty, w których mamy:

$$\frac{d^2x}{dx} = \frac{d^2y}{dy} = \frac{d^2z}{dz}; \tag{11}$$

mówimy, iż styczna *zatrzymuje się* w tych punktach czyli staje się styczną zwrotną (la tangente est stationnaire). Stosując wzór, wyznaczający odległość punktu od prostej, dowodzimy łatwo, iż odległość pomiędzy punktem krzywej Γ a styczną do niej w punkcie poblizkim, stanowiąca w ogólności nieskończenie małą drugiego rzędu, jest, gdy mamy do czynienia ze styczną zwrotną, nieskończenie małą trzeciego rzędu. Jeżeli krzywa Γ staje się krzywą płaską, to styczne zwrotne stają się stycznemi w punktach przegięcia (les tangentes d'inflexion). Wykonane już obliczenie przekonywa, iż jedyną linją, której wszystkie styczne są zwrotne, jest linja prosta.

Dla punktu, w którym styczna się zatrzymuje, mamy $\Delta = 0$ i równanie płaszczyzny ściśle stycznej otrzymuje postać nieoznaczoną. Lecz ta nieoznaczoność jest tylko pozorna. Istotnie, jeżeli wykonamy ponownie obliczenia, czynione na początku art. 224, posuwając się przytym w szeregach, wyrażających spółrzędne punktu M' aż do wyrazów trzeciego rzędu i zużytkowując związki (11), to przekonamy się, iż równanie płaszczyzny, przesuniętej przez styczną w M oraz punkt M', może być napisane w postaci

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ f'(t) & \varphi'(t) & \psi'(t) \\ f'''(t) + \varepsilon_1 & \varphi'''(t) + \varepsilon_2 & \psi'''(t) + \varepsilon_3 \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie ε_1, ε_2, ε_3 stanowią liczby, dążące wraz z h do zera. Płaszczyzna ta dąży przeto

---

[1] Jak się zdaje, ten wypadek szczególny został zaznaczony po raz pierwszy przez p. Peano; posiada on oczywiście znaczenie wyłącznie analityczne.

do zupełnie określonego położenia granicznego; otrzymujemy równanie płaszczyzny stycznej, zastępując drugi ze związków (6) związkiem następującym

$$A\,d^3x + B\,d^3y + C\,d^3z = 0.$$

Gdybyśmy mieli również

$$\frac{d^3x}{dx} = \frac{d^3y}{dy} = \frac{d^3z}{dz};$$

winnibyśmy zastąpić drugi ze związków (6) przez związek

$$A\,d^qx + B\,d^qy + C\,d^qz = 0,$$

oznaczając przez q najmniejszą liczbę całkowitą, która czyni ten związek niezależnym od $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$. Uzasadnienie tego i zbadanie położenia krzywej względem płaszczyzny ściśle stycznej pozostawiamy czytelnikowi.

W ogólności, jeżeli nie zachodzi związek

$$A\,d^4x + B\,d^4y + C\,d^4z = 0,$$

to krzywa skośna przebija wszelką płaszczyznę styczną, prócz płaszczyzny ściśle stycznej, której nie przebija.

Zastosowanie do pewnych krzywych. — Rozważmy w szczególności krzywe skośne Γ, czyniące zadość warunkowi o postaci następującej:

(12) $$x\,dy - y\,dx = K\,dz,$$

w którym K jest liczbą stałą; ze związku tego otrzymujemy jeszcze

(13) $$\begin{cases} x\,d^2y - y\,d^2x = K\,dz \\ x\,d^3y - y\,d^3x + dx\,d^2y - dy\,d^2x = K\,dz. \end{cases}$$

Mając krzywą tego rodzaju, postarajmy się odnaleźć płaszczyzny ściśle styczne, zawierające dany punkt (a, b, c) przestrzeni. Spółrzędne punktu styczności (x, y, z) winny czynić zadość równaniu

$$\begin{vmatrix} a-x & b-y & c-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0,$$

które, wobec związków (12) i (13), przybiera postać

(14) $$ay - bx + K(c - z) = 0;$$

punkty styczności stanowią tedy przecięcia krzywej skośnej Γ i płaszczyzny, zawierającej punkt (a, b, c), której odpowiada równanie (14).

Równanie $\Delta = 0$, wyznaczające punkty, w których się zatrzymuje płaszczyzna ściśle styczna, przybiera, po zastąpieniu dz, d^2z, d^3z przez ich wartości, postać

$$\Delta = \frac{1}{K}(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 = 0;$$

będziemy tedy mieli dla tych punktów

$$\frac{d^2x}{dx} = \frac{d^2y}{dy} = \frac{y\,d^2x - x\,d^2y}{y\,dx - x\,dy} = \frac{d^2z}{dz};$$

co wskazuje, że w tych samych punktach zatrzymuje się styczna.

Łatwo określić krzywe skośne, czyniące zadość równaniu (12); wystarczy np., oznaczając przez A, B, C, m, n liczby stałe, założyć:

$$x = At^m, \qquad y = Bt^n, \qquad z = Ct^{m+n}.$$

Najprostszemi krzywemi tego rodzaju są: krzywa skośna trzeciego rzędu $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ oraz krzywa skośna czwartego rzędu $x = t$, $y = t^3$, $z = t^4$. Te same warunki spełnia również linja śrubowa kołowa (l'hélice circulaire)

$$x = a \cos t, \qquad y = a \sin t, \qquad z = Kt.$$

Na to, aby otrzymać wszystkie krzywe skośne, czyniące zadość warunkowi (12), napiszemy go w postaci

$$d(xy - Kz) = 2y\,dx;$$

jeżeli mamy

$$x = f(t), \qquad xy - Kz = \varphi(t),$$

związek ten daje nam $2yf'(t) = \varphi'(t)$. Rozwiązując te trzy równania względem x, y, z, otrzymujemy wyrażenia ogólne spółrzędnych w zależności od parametru zmiennego

$$x = f(t), \qquad y = \frac{\varphi'(t)}{2f'(t)}, \qquad Kz = \frac{f(t)\,\varphi'(t)}{2f'(t)} - \varphi(t). \tag{15}$$

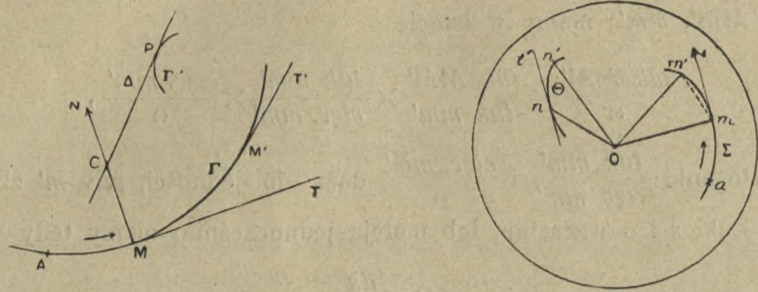
Wzory te zależą od dwuch dowolnych funkcji f i φ; rzecz jasna atoli, iż można nadać jednej z nich jakiś kształt szczególny, np. założyć $f(t) = t$, nie zmniejszając przez to ogólności rozwiązania.

II. — KRZYWIZNA I SKRĘCENIE. ROZWINIĘTE.

227. Krzywa kulista wskazująca. — Obierzmy na krzywej Γ określony kierunek przebiegu i oznaczmy przez s łuk krzywej AM, zawarty między dowolnym punktem M i punktem A, który ma stanowić początek łuków; opatrzmy ten łuk znakiem $+$ lub $-$, stosownie do tego czy kierunek od A do M jest kierunkiem dodatnim czy też przeciwnym. Niech MT stanowi kierunek *dodatni* stycznej w punkcie M, t. j. kierunek, odpowiadający wzrostowi łuków. Jeżeli przez jakiś punkt O w przestrzeni przeciągniemy równoległe do tych promieni, to utworzymy stożek S, stanowiący stożek kierunkowy (le cône directeur) powierzchni rozwijalnej, utworzonej przez styczne do krzywej Γ. Dokoła punktu O, jako środka, zakreślimy promieniem równym jedności powierzchnię kulistą i oznaczmy przez Σ przecięcie tej powierzchni z opisanym poprzednio stożkiem; krzywa Σ zowie się *krzywą kulistą wskazującą* (l'indicatrice sphérique), odpowiadającą krzywej Γ. Owe dwie krzywe dają się sobie podporządkować wzajemnie w ten sposób, iż punktowi M krzywej Γ odpowiada punkt m, w którym promień o kierunku, równoległym do MT, przebija powierzchnię kulistą. Gdy punkt M przebiega krzywą Γ w kierunku dodatnim, to punkt m przebiega krzywą Σ w pewnym kierunku, który obierzemy na krzywej Σ za kierunek dodatni; w ten sposób odpowiadające sobie łuki s i σ obu krzywych wzrastają jednocześnie (rys. 41).

Rzecz jasna, iż jeżeli przeniesiemy w inne miejsce środek O kuli, to krzywa Σ ulegnie takiemu samemu przeniesieniu; w dalszym ciągu będziemy zakładali, iż punkt O jest początkiem układu spółrzędnych. Dalej, jeżeli zmienimy umowę co do kierunku dodatniego krzywej Γ, to krzywa Σ zamieni się na krzywą symetryczną względem środka O; należy jednak zauważyć, iż kierunek dodatni mt styczny do Σ nie zależy od obranego kierunku przebiegu wzdłuż krzywej Γ.

Rys. 41.



Płaszczyzna styczna do powierzchni stożkowej wzdłuż tworzącej Om *jest równoległa do płaszczyzny ściśle stycznej w punkcie M.* Istotnie, jeżeli zakładając, iż środek O kuli jest początkiem układu, napiszemy równanie płaszczyzny $Om\,m'$ w postaci

$$AX + BY + CZ = 0,$$

to, z powodu równoległości tej płaszczyzny do stycznych w punktach M i M', odpowiadających wartościom t i $t+h$ parametru, będziemy mieli

$$Af'(t) + B\varphi'(t) + C\psi'(t) = 0, \tag{16}$$

$$Af'(t+h) + B\varphi'(t+h) + C\psi'(t+h) = 0; \tag{17}$$

drugi z tych związków może być zastąpiony przez równanie

$$A\frac{f'(t+h) - f'(t)}{h} + B\frac{\varphi'(t+h) - \varphi'(t)}{h} + C\frac{\psi'(t+h) - \psi'(t)}{h} = 0,$$

które przybiera, gdy h dąży do zera, postać następującą

$$Af''(t) + B\varphi''(t) + C\psi''(t) = 0. \tag{18}$$

Równania (16) i (18), które osiągamy w ten sposób, są właśnie równaniami, określającemi płaszczyznę ściśle styczną.

228. Promień krzywizny. — Niech ω oznacza kąt między kierunkami dodatniemi MT, $M'T'$ stycznych w dwu punktach nieskończenie blizkich M i M' krzywej Γ. Granica, do której dąży iloraz $\frac{\omega}{łuk\ MM'}$, gdy punkt M' zbliża się nieograniczenie do punktu M, zowie się *krzywizną* (courbure) ([1]) krzywej Γ w punkcie M; promień krzywizny równa się odwrotności krzywizny, to jest granicy ilorazu $\frac{łuk\ MM'}{\omega}$. Można jeszcze określić promień krzywizny, jako granicę stosunku łuków nieskończenie małych MM', mm'; mamy w istocie

$$\frac{łuk\ MM'}{\omega}=\frac{łuk\ MM'}{łuk\ mm'}\times\frac{łuk\ mm'}{cięc.\ mm'}\times\frac{cięc.\ mm'}{\omega},$$

a oba stosunki $\frac{łuk\ mm'}{cięc.\ mm'}$ i $\frac{cięc.\ mm'}{\omega}$ dążą do jedności, gdy m' zbliża się do m. Łuki s i σ wzrastają lub maleją jednocześnie; mamy tedy

$$R=\frac{ds}{d\sigma}. \tag{19}$$

Niech

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t) \tag{20}$$

oznaczają spółrzędne punktu krzywej Γ, odniesione do układu prostokątnego o początku w punkcie O. Spółrzędne punktu m są to właśnie dostawy kierunkowe stycznej MT

$$\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \beta=\frac{dy}{ds},\quad \gamma=\frac{dz}{ds};$$

z wzorów tych otrzymujemy

$$d\alpha=\frac{ds\,d^2x-dx\,d^2s}{ds^2},\quad d\beta=\frac{ds\,d^2y-dy\,d^2s}{ds^2},\quad d\gamma=\frac{ds\,d^2z-dz\,d^2s}{ds^2},$$

$$d\sigma^2=d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2=\frac{(ds\,d^2x-dx\,d^2s)^2+(ds\,d^2y-dy\,d^2s)^2+(\ldots.)^2}{ds^4},$$

czyli, po rozwinięciu kwadratów i uwzględnieniu związków, wyznaczających ds^2 i $ds\,d^2s$,

$$d\sigma^2=\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\,[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]-(dxd^2x+dyd_2y+dzd^2z)^2}{ds^4}.$$

([1]) Dokładniej: krzywizną pierwszą (la première courbure). W. Folkierski używał również nazwy: zgięcie. [*Uw. tł.*].

Zakładając, jak to będziemy czynili w dalszym ciągu:

$$(21)\qquad \begin{cases} A = dyd^2z - dzd^2y, & B = dzd^2x - dxd^2z, \\ C = dxd^2y - dyd^2x \end{cases}$$

i stosując tożsamość Lagrange'a, możemy napisać

$$d\sigma^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{ds^4};$$

wzór (19), wyrażający promień krzywizny, przybiera tedy postać

$$R^2 = \frac{ds^6}{A^2 + B^2 + C^2};$$

jak widzimy, R^2 jest funkcją wymierną zmiennych x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''. Co się tyczy samego promienia krzywizny, posiada on wyrażenie niewymierne, lecz jest z istoty swej wielkością dodatnią.

Uwaga. — Gdy zmienną niezależną jest łuk krzywej Γ, to funkcje $f(s)$, $\varphi(s)$, $\psi(s)$ czynią zadość warunkom $f'^2(s) + \varphi'^2(s) + \psi'^2(s) = 1$, i wzór wyrażający promień krzywizny, przybiera postać wytworniejszą. Istotnie, rozpoczynając na nowo poprzedni rachunek i uważając przytem s za zmienną niezależną, otrzymujemy

$$(23)\qquad \begin{cases} \alpha = f'(s), & \beta = \varphi'(s), & \gamma = \psi'(s), \\ d\alpha = f''(s)ds, & d\beta = \varphi''(s)ds, & d\gamma = \psi''(s)ds, \\ d\sigma^2 = \{[f''(s)]^2 + [\varphi''(s)]^2 + [\psi''(s)]^2\} ds^2 \end{cases}$$

a stąd

$$(24)\qquad \frac{1}{R^2} = [f''(s)]^2 + [\varphi''(s)]^2 + [\psi''(s)]^2.$$

229. Normalna główna. Środek krzywizny. — Przeciągnijmy przez punkt M krzywej Γ prostą, równoległą do stycznej w punkcie m do krzywej Σ i rozważajmy na tej prostej kierunek MN, równoległy do kierunku dodatniego mt. Prosta, otrzymana w ten sposób, nazywa się *normalną główną* krzywej Γ (la normale principale à Γ); jest to normalna, położona w płaszczyźnie ściśle stycznej, ponieważ mt jest prostopadła do Om a płaszczyzna Omt — równoległa do płaszczyzny ściśle stycznej (art. 227). Kierunek MN jest *kierunkiem dodatnim normalnej głównej*. Jest to kierunek zupełnie określony, ponieważ kierunek mt nie zależy od obranego kierunku przebiegu wzdłuż Γ. Ujrzymy zaraz, w jaki sposób możnaby określić ten kierunek bez pomocy krzywej wskazującej.

Jeżeli odmierzymy od punktu M w kierunku MN odcinek MC równy promieniowi krzywizny, otrzymamy punkt C, zwany *środkiem krzywizny*;

okrąg o promieniu MC, zakreślony dokoła punktu C, jako środka, zowie się *kołem krzywiznowem* (cercle de courbure). Jeżeli oznaczymy przez α', β', γ' dostawy kierunkowe normalnej głównej, to spółrzędne x_1, y_1, z_1 środka krzywizny dadzą się wyrazić w sposób następujący:

$$x_1 = x + R\alpha', \qquad y_1 = y + R\beta', \qquad z_1 = z + R\gamma'.$$

Otóż mamy

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} = R\frac{d\alpha}{ds} = R\frac{ds\, d^2x - dx\, d^2s}{ds^3}$$

i podobnież znajdujemy β' i γ'. Podstawiając do wyrażenia x_1 wartość α', otrzymujemy

$$x_1 = x + R^2 \frac{ds\, d^2x - dx\, d^2s}{ds^3};$$

spółczynnik przy R^2 może być jeszcze napisany w postaci

$$\frac{ds^2\, d^2x - dx\, ds\, d^2s}{ds^4} = \frac{d^2x\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) - dx\,(dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z)}{ds^4},$$

czyli, po wprowadzeniu spółczynników A, B, C,

$$\frac{B\, dz - C\, dy}{ds^4}.$$

Za pomocą zamiany symetrycznej spółczynników przechodzimy od wartości x_1 do wartości y_1 i z_1 i ostatecznie otrzymujemy następujące wyrażenia spółrzędnych środka krzywizny:

$$(25) \quad \begin{cases} x_1 = x + R^2 \dfrac{B\, dz - C\, dy}{ds^4}, \quad y_1 = y + R^2 \dfrac{C\, dx - A\, dz}{ds^4}, \\ z_1 = z + R^2 \dfrac{A\, dy - B\, dx}{ds^4}; \end{cases}$$

wzory te są wymierne względem x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''.

Gdy przeciągniemy przez punkt M płaszczyznę Q, prostopadłą do MN, płaszczyzna ta przejdzie przez styczną MT i nie zostanie przebita przez krzywą w punkcie M. Dowiedziemy, iż środek krzywizny i punkty krzywej Γ, sąsiednie względem M, leżą po tej samej stronie tej płaszczyzny Q. Aby uzasadnić tę własność, załóżmy, iż zmienną niezależną jest łuk s krzywej Γ, liczony od punktu M; otrzymamy spółrzędną X punktu M', zbliżonego do M, w postaci

$$X = x + \frac{s}{1}\frac{dx}{ds} + \frac{s^2}{1.2}\left(\frac{d^2x}{ds^2} + \varepsilon\right)$$

oraz wyrażenia analogiczne współrzędnych Y i Z. Ponieważ jednak zmienną niezależną jest s, więc

$$\frac{dx}{ds}=\alpha, \qquad \frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d\alpha}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{ds}=\frac{1}{R}\alpha',$$

i wzór dla X przybiera postać

$$X=x+\alpha s+\left(\frac{\alpha'}{R}+\varepsilon\right)\frac{s^2}{1.2}.$$

Jeżeli podstawimy do pierwszej części równania płaszczyzny prostopadłej do MN

$$\alpha'(X-x)+\beta'(Y-y)+\gamma'(Z-z)=0$$

zamiast X, Y, Z ich wartości obliczone w ten sposób, to otrzymamy jako wynik tego podstawienia, oznaczając przez η liczbę, dążącą do zera wraz z s

$$\frac{s}{1}(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')+\frac{s^2}{1.2}\left(\frac{1}{R}+\eta\right)=\frac{s^2}{2}\left(\frac{1}{R}+\eta\right);$$

wynik ten dla wartości s zbliżonych do zera jest dodatni. Podobnież zastępując X, Y, Z przez spółrzędne $x+R\alpha',\ldots$ środka krzywizny, otrzymamy jako wynik podstawienia R, wielkość z istoty swej dodatnią, co potwierdza wskazaną własność.

230. Prosta biegunowa. Powierzchnia biegunowa. — Prostopadła Δ do płaszczyzny ściśle stycznej, przeciągnięta przez środek krzywizny, zowie się *prostą biegunową* (droite polaire). Prosta owa stanowi linję charakterystyczną płaszczyzny normalnej do Γ. Istotnie, stwierdzamy odrazu, iż przecięcie dwuch płaszczyzn normalnych, odpowiadających punktom poblizkim M i M', stanowi prostą, prostopadłą do prostych MT, MT' a więc do płaszczyzny mOm'. Gdy punkt M' zbliża się do M, to płaszczyzna mOm' staje się równoległą do płaszczyzny ściśle stycznej; granicą prostej D jest tedy prosta prostopadła do płaszczyzny ściśle stycznej. Aby dowieść, iż ta prosta przechodzi przez środek krzywizny, przypuśćmy, iż bierzemy za zmienną niezależną łuk s krzywej Γ; równaniem płaszczyzny normalnej będzie wtedy

$$\alpha(X-x)+\beta(Y-y)+\gamma(Z-z)=0, \tag{26}$$

i linja charakterystyczna zostanie wyznaczona przez równania (26) i (27)

$$\frac{\alpha'}{R}(X-x)+\frac{\beta'}{R}(Y-y)+\frac{\gamma'}{R}(Z-z)-1=0. \tag{27}$$

Równanie (27) odpowiada płaszczyźnie prostopadłej do normalnej głównej i zawierającej środek krzywizny. Przecięcie tych dwuch płaszczyzn jest tedy prostą biegunową. Widzimy stąd, że środek krzywizny jest tym samym, co środek koła ściśle stycznego (art. 221), a przeto koło krzywiznowe utożsamia się z kołem ściśle stycznym. Można było z góry przewidzieć ten wynik, gdyż dwie krzywe, mające ze sobą styczność drugiego rzędu, posiadają to samo koło krzywiznowe, a to wobec równości pochodnych x', y', z', x'', y'', z'', odpowiadających obu krzywym.

Powierzchnia prostolinjowa, stanowiąca miejsce gieometryczne prostych biegunowych, nazywa się *powierzchnią biegunową*. Podług uzasadnionego przed chwilą twierdzenia jest to również powierzchnia rozwijalna, obwijająca płaszczyzny normalne do Γ. Gdy krzywa Γ jest krzywą płaską, to powierzchnia biegunowa stanowi powierzchnię walcową, której przekrojem prostopadłym jest rozwinięta krzywej Γ; wskazane własności stają się wtedy oczywiste.

231. Skręcenie. — Zastępując w określeniu krzywizny pierwszej styczną przez płaszczyznę ściśle styczną, otrzymujemy nowy element gieometryczny, mierzący poniekąd mniejszą lub większą szybkość obrotu płaszczyzny ściśle stycznej. Niech ω' oznacza kąt pomiędzy dwiema płaszczyznami ściśle stycznemi w punktach nieskończenie blizkich M i M'; nazywamy *skręceniem* (torsion; inaczej: krzywizną drugą [*uw. tł.*]) w punkcie M granicę, do której zmierza iloraz $\frac{\omega'}{\text{łuk } MM'}$, gdy punkt M' zbliża się nieograniczenie do punktu M. Promień skręcenia T jest to odwrotność skręcenia.

Przeciągnijmy przez punkt M prostopadłą do płaszczyzny ściśle stycznej i obierzmy na tej prostej, zwanej *dwunormalną* (binormale), pewien określony zwrot (który później ustalimy), o dostawach α'', β'', γ''. Promień równoległy, wychodzący z początku układu, przebija kulę o promieniu równym jedności w punkcie n, który podporządkujemy również punktowi M krzywej Γ. (Rys. 41).

Miejsce gieometryczne punktów n stanowi krzywa kulista Θ; uzasadniamy, podobnie jak wyżej, iż promień skręcenia T może być również określony jako granica stosunku dwu odpowiadających sobie nieskończenie małych łuków MM' i nn' krzywych Γ i Θ. Mamy tedy, oznaczając przez τ łuk krzywej Θ

$$T^2 = \frac{ds^2}{d\tau^2}.$$

Spółrzędnemi punktu n są α'', β'', γ'', to jest

$$\alpha'' = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad \beta'' = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\gamma'' = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

we wszystkich trzech wzorach należy wziąć pierwiastek z tym samym znakiem. Otrzymujemy stąd wartości $d\alpha''$, $d\beta''$, $d\gamma''$; mamy np.

$$d\alpha'' = \pm\frac{(A^2+B^2+C^2)\,dA - A\,(AdA+BdB+CdC)}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}};$$

wzór

$$d\tau^2 = d\alpha''^2 + d\beta''^2 + d\gamma''^2$$

daje nam

$$d\tau^2 = \frac{(A^2+B^2+C^2)\,(dA^2+dB^2+dC^2) - (AdA+BdB+CdC)^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}$$

czyli po zastosowaniu ponownym tożsamości Lagrange'a

$$d\tau^2 = \frac{(BdC-CdB)^2 + (CdA-AdC)^2 + (AdB-BdA)^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}.$$

Możemy uprościć licznik, stosując związki

$$Adx + Bdy + Cdz = 0,$$

$$dA\,dx + dA\,dy + dC\,dz = 0,$$

skąd otrzymujemy

$$(28) \qquad \frac{dx}{BdC-CdB} = \frac{dy}{CdA-AdC} = \frac{dz}{AdB-BdA} = \frac{1}{K},$$

w takim razie

$$d\tau^2 = \frac{K^2\,ds^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}. \quad (^1)$$

---

(1)
$$\frac{dx^2}{(BdC-CdB)^2} = \frac{dy^2}{(CdA-AdC)^2} = \frac{dz^2}{(AdB-BdA)^2} =$$

$$= \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{(BdC-CdB)^2+(CdA-AdC)^2+(AdB-BdA)^2} =$$

$$= \frac{ds^2}{(BdC-CdB)^2+(CdA-AdC)^2+(AdB-BdA)^2} = \frac{1}{K^2}.$$

Stąd licznik wyrażenia $d\tau^2$ równa się K^2ds^2. K określamy jako $= \frac{BdC-CdB}{dx}$

[*Uw. tł.*

Co się tyczy wartości K, otrzymujemy, otwierając nawiasy:

$$K = \frac{(dzd^2x - dxd^2z)\,(dxd^3y - dyd^3x) - (dxd^2y - dyd^2x)\,(dzd^3x - dxd^3z)}{dx} =$$

$$= dzd^2x\,d^3y - dxd^2z\,d^3y + dyd^2z\,d^3x -$$

$$- d^2ydz\,d^3x + dxd^2y\,d^3z - dyd^2x\,d^3z;$$

wyrażenie to stanowi właśnie wynik rozwinięcia wyznacznika Δ (art. 225, wzór 8). Mamy tedy

$$d\tau = \pm \frac{\Delta ds}{A^2 + B^2 + C^2}$$

przeto

$$T = \pm \frac{A^2 + B^2 + C^2}{\Delta}. \tag{29}$$

Gdybyśmy uważali promień skręcenia T za wielkość z istoty swej dodatnią, podobnie jak promień krzywizny, to musielibyśmy wziąć za T wartość bezwzględną tego wyrażenia. Należy atoli zauważyć, że jest ono wymierne względem x', x'', x''', y', y'', y''', z', z'', z'''. Jest tedy rzeczą naturalną uważać promień skręcenia za wielkość, opatrzoną tym lub innym znakiem. Znaki przeciwne odpowiadają dwom zupełnie odmiennym położeniom krzywej Γ w sąsiedztwie punktu M.

Ponieważ znak promienia T zależy jedynie od znaku Δ, zbadajmy, jak zmienia się położenie krzywej w zależności od tego znaku. Założymy, iż układ osi spółrzędnych $Oxyz$ jest położony w ten sposób, że dla spostrzegacza, stojącego na płaszczyźnie xy w punkcie O, z głową na osi Oz (¹), oś Ox musiałaby być obróconą o 90^0 od prawej ręki ku lewej, aby przystać do osi Oy. Umówiwszy się co do tego, obieramy na dwunormalnej taki kierunek MN_b, iżby trójścian, utworzony przez proste MT, MN, MN_b posiadał ten sam układ, co trójścian $Oxyz$. Jeżeli przeniesiemy w sposób ciągły krzywą Γ tak, aby punkt M przystał do O, MT do Ox, MN do Oy, to MN_b otrzyma ten sam kierunek co Oz. W ruchu tym wartość bezwzględna T pozostaje bez zmiany; Δ nie może tedy stać się zerem i przeto zachowuje ten sam znak (²). Odnosząc krzywą Γ do tego nowego układu spółrzędnych, załóżmy, iż początkowi jego odpowiada war-

(¹) Mówimy tu wszędzie o części dodatniej każdej osi. — *Uw. tłum.*).

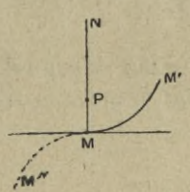
(²) Można zresztą okazać za pomocą bezpośredniego rachunku, iż Δ nie zmienia się przy przejściu od jakiegoś układu prostokątnego do innego układu prostokątnego o tym samym położeniu wzajemnym osi („de même disposition“ — czyli, jak się można wyrazić inaczej: *nakładalnego* na pierwszy.

tość $t=0$ parametru; oznaczając przez ε, ε', ε'' liczby, dążące do zera wraz z t, wyrazimy spółrzędne jakiegoś punktu sąsiedniego w postaci następującej

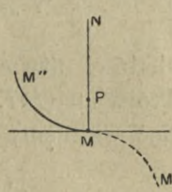
$$(30)\qquad \begin{cases} x = a_1 t + t^2 (a_2 + \varepsilon), \\ y = b_2 t^2 + t^3 (b_3 + \varepsilon'), \\ z = t^3 (c_3 + \varepsilon''); \end{cases}$$

istotnie przy obranym układzie spółrzędnych winniśmy dla $t=0$ mieć $dy = dz = d^2 z = 0$. Można założyć $a_1 > 0$, ponieważ wystarczyłoby zastąpić t przez $-t$, aby zmienić a_1 na $-a_1$; b_2 jest liczbą dodatnią, ponieważ y winno być dla wartości t, dość zbliżonych do zera, dodatnim — lecz c_3 może być zarówno dodatnim jak ujemnym. Otóż dla $t=0$ mamy $\Delta = 12\, a_1 b_2 c_3\, dt^6$, a więc Δ ma ten sam znak, co c_3. Ustaliwszy to, odróżnimy dwa wypadki, stosownie do znaku c_3: 1) jeżeli $c_3 > 0$, to x i z są jednocześnie: ujemne, gdy t zmienia się od $-h$ do 0 i dodatnie, gdy t wzrasta od 0 do $+h$ (h — liczba dodatnia nader mała). Spostrzegacz, stojący na płaszczyźnie ściśle stycznej w jakimś punkcie P normalnej głównej, widziałby łuk MM' na lewo od siebie i ponad płaszczyzną ściśle styczną a łuk MM'' na prawo i poniżej płaszczyzny ściśle stycznej (rys. 42 a).

Rys. 42 a.



Rys. 42 b.



Krzywa jest tedy *lewoskrętna* (la courbe est sinistrorsum). Gdyby c_3 było ujemne, krzywa byłaby przeciwnie *prawoskrętna* (dextrorsum). Oba te układy są zupełnie różne od siebie. Np. dwie linje śrubowe o tym samym kroku, zakreślone na dwuch powierzchniach walcowych o tym samym promieniu, mogą przystać do siebie, jeżeli obie są lewoskrętne lub obie prawoskrętne; lecz jeżeli jedna jest lewoskrętna, a druga prawoskrętna, to każda może przystawać jedynie do linji symetrycznej z drugą względem jakiejś płaszczyzny.

Będziemy odtąd pisali wzór, wyrażający skręcenie, w postaci

$$(31)\qquad T = -\frac{A^2 + B^2 + C^2}{\Delta};$$

w punkcie, któremu odpowiada T dodatnie, krzywa jest prawoskrętna, a w punkcie, któremu odpowiada T ujemne, lewoskrętna. Przy innym układzie trójścianu $Oxyz$ zachodziłyby stosunki odwrotne.

232. Wzory Freneta. — Każdy punkt M krzywej Γ stanowi wierzchołek trójścianu prostokątnego o tym samym układzie, co trójścian $Oxyz$, utworzonego przez styczną, normalną główną i dwunormalną. Kierunek dodatni normalnej głównej jest wyraźnie określony, gdy tymczasem kierunek dodatni stycznej może być wzięty dowolnie i wyznacza wraz z poprzednim kierunek dwunormalnej. Różniczki dziewięciu dostaw α, β, $\gamma, \ldots$ wyrazić można w sposób nader prosty w zależności od R i T oraz samych dostaw za pomocą wzorów, podanych przez Freneta [1]. Otrzymaliśmy już te z nich, które dają $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$:

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha'}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds}=\frac{\beta'}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma'}{R}. \tag{32}$$

Niech

$$\alpha''=\varepsilon\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \beta''=\varepsilon\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\gamma''=\varepsilon\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad (\varepsilon=\pm 1)$$

oznaczają dostawy kątów, utworzonych przez kierunek dodatni dwunormalnej z osiami. Trójścian (MT, MN, MN_b) posiada taki sam układ, jak trójścian $Oxyz$, więc winniśmy mieć

$$\alpha'=\beta''\gamma-\beta\gamma''$$

czyli

$$\alpha'=\varepsilon\frac{B\gamma-C\beta}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Z drugiej strony wzór, dający $d\alpha''$, może być napisany w postaci

$$d\alpha''=\varepsilon\frac{B(BdA-AdB)+C(CdA-AdC)}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}},$$

czyli wobec związków (28) i wartości K

$$\frac{d\alpha''}{ds}=\varepsilon\Delta\frac{C\beta-B\gamma}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\Delta\alpha'}{A^2+B^2+C^2}.$$

---

(1) P. Nouvelles Annales de Mathématiques, 1864, str. 284.

Spółczynnik przy α' równa się $\frac{1}{T}$ [wzór (31)]; obliczylibyśmy podobnie $d\beta''$ i $d\gamma''$, i ostatecznie mamy wzory (¹), zupełnie podobne do wzorów (32):

$$(33)\qquad \frac{d\alpha''}{ds}=\frac{\alpha'}{T},\qquad \frac{d\beta''}{ds}=\frac{\beta'}{T},\qquad \frac{d\gamma''}{ds}=\frac{\gamma'}{T}.$$

Aby wyznaczyć $d\alpha'$, $d\beta'$, $d\gamma'$, zróżniczkujmy znane związki

$$\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1$$
$$\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'-0,$$
$$\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0,$$

po zastąpieniu $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, $d\alpha''$, $d\beta''$, $d\gamma''$ przez ich wartości, wzięte z wzorów (32) i (33), otrzymujemy stąd

$$\alpha'd\alpha'+\beta'd\beta'+\gamma'd\gamma'=0,$$
$$\alpha d\alpha'+\beta d\beta'+\gamma d\gamma'+\frac{ds}{R}=0,$$
$$\alpha''d\alpha'+\beta''d\beta'+\gamma''d\gamma'+\frac{ds}{T}=0;$$

wystarczy teraz rozwiązać te równania względem $d\alpha'$, $d\beta'$, $d\gamma'$:

$$(34)\qquad \frac{d\alpha'}{ds}=-\frac{\alpha}{R}-\frac{\alpha''}{T},\qquad \frac{d\beta'}{ds}=-\frac{\beta}{R}-\frac{\beta''}{T},\qquad \frac{d\gamma'}{ds}=-\frac{\gamma}{R}-\frac{\gamma''}{T}.$$

Wzory (32), (33), (34) są właśnie wzorami szukanemi.

Uwaga. — Wzory (33) wskazują, iż styczna do krzywej kulistej Θ, zakreślonej przez punkt n o spółrzędnych α'', β'', γ'', jest równoległa do normalnej głównej. To samo wynika również z rozważań czysto gieometrycznych. Rozważmy w istocie stożek S' o wierzchołku O, którego kierownicą jest krzywa Θ; tworząca On jest prostopadła do płaszczyzny stycznej wzdłuż Om do stożka S (art. 231), a przeto stożek S' jest dla stożka S stożkiem *spełniającym* (suplémentaire) Wiadomo jednak, iż stosunek pomiędzy dwoma takimi stożkami jest odwracalny, tak iż wzajemnie tworząca Om stożka S jest prostopadła do płaszczyzny stycznej wzdłuż

(¹) Gdybyśmy napisali wzór wyznaczający skręcenie w postaci $\frac{1}{T}=\frac{\Delta}{A^2+B^2+C^2}$, należałoby wzorom Freneta nadać inny kształt:

$$d\alpha''\tau=-\frac{\alpha'\,ds}{T}\ \text{i t. d.}$$

On do S'. Wobec tego styczna mt do krzywej Σ, jako prostopadła do dwuch prostych Om i On, jest prostopadła do płaszczyzny mOn, i podobnież styczna nt' do krzywej Θ jest prostopadła do płaszczyzny mOn. Te dwie proste są tedy równoległe.

233. Spółrzędne x, y, z w postaci szeregów potęg s. — Jeżeli mamy dane dwie funkcje zmiennej niezależnej s, $R = \varphi(s)$, $T = \psi(s)$, z których pierwsza jest zawsze dodatnia, to funkcjom tym odpowiada pewna krzywa skośna Γ, określona pod każdym względem, z wyjątkiem swego położenia w przestrzeni, której promień krzywizny i promień skręcenia są wyrażone za pomocą podanych wzorów w zależności od długości łuku, liczonej od pewnego punktu tej krzywej. Dowód ścisły tego twierdzenia może być uskuteczniony dopiero po wykładzie teorji równań różniczkowych. Okażemy tylko, w jaki sposób można wyrazić spółrzędne punktu krzywej szukanej w postaci szeregów potęg łuku s, o ile zakładamy, iż takie rozwinięcie jest możliwe. Weźmy za osie spółrzędnych styczną, normalną główną i dwunormalną, odpowiadające punktowi O, od którego mierzymy długość łuku; spółrzędne punktu szukanej krzywej, zbliżonego do początku układu, posiadają wyrażenie następujące:

$$(35)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{s}{1}\left(\dfrac{dx}{ds}\right)_0 + \dfrac{s^2}{1.2}\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)_0 + \dfrac{s^3}{1.2.3}\left(\dfrac{d^3x}{ds^3}\right)_0 + \dots \\ y = \dfrac{s}{1}\left(\dfrac{dy}{ds}\right)_0 + \dfrac{s^2}{1.2}\left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)_0 + \dfrac{s^3}{1.2.3}\left(\dfrac{d^3y}{ds^3}\right)_0 + \dots \\ z = \dfrac{s}{1}\left(\dfrac{dz}{ds}\right)_0 + \dfrac{s^2}{1.2}\left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)_0 + \dfrac{s^3}{1.2.3}\left(\dfrac{d^3z}{ds^3}\right)_0 + \dots \end{cases}$$

Atoli mamy

$$\frac{dx}{ds} = \alpha, \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R},$$

a po zróżniczkowaniu ponownym

$$\frac{d^3x}{ds^3} = -\frac{\alpha'}{R^2}\frac{dR}{ds} - \frac{1}{R}\left(\frac{\alpha}{R} + \frac{\alpha''}{T}\right);$$

w ogólności zaś za pomocą wielokrotnego stosowania wzorów Freneta otrzymujemy wyrażenie $\dfrac{d^nx}{ds^n}$ w postaci

$$\frac{d^ns}{dx^n} = L_n\alpha + M_n\alpha' + P_n\alpha'',$$

gdzie L_n, M_n, P_n oznaczają pewne znane funkcje wielkości R, T i ich kolejnych pochodnych względem łuku. Otrzymalibyśmy podobnież kolejne pochodne spółrzędnych y i z, zastępując $\alpha, \alpha', \alpha''$ przez β, β', β'' i $\gamma, \gamma', \gamma''$. Lecz w początku układu mamy $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$, $\alpha_0' = 0$, $\beta_0' = 1$, $\gamma_0' = 0$, $\alpha_0'' = 0$, $\beta_0'' = 0$, $\gamma_0'' = 1$ i wzory (35), w których zachowamy tylko wyrazy, zawierające s, s^2, s^3, pomijając wszystkie następne, stopnia wyższego ponad trzeci, przybierają postać

$$(36) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{s}{1} - \frac{s^3}{6R^2} + \dots, \\ y &= \frac{s^2}{2R} - \frac{s^3}{6R^2}\frac{dR}{ds} + \dots, \\ z &= -\frac{s^3}{6RT} + \dots; \end{aligned} \right.$$

zakładamy, oczywiście, iż R, T, $\frac{dR}{ds} \dots$ są zastąpione przez ich wartości dla $s = 0$.

Wzory te pozwalają łatwo obliczyć części główne niektórych nieskończenie małych. Tak np. odległość punktu nieskończenie blizkiego krzywej od płaszczyzny ściśle stycznej jest nieskończenie małą trzeciego rzędu, o części głównej, równającej się $-\frac{s^2}{6RT}$. Odległość punktu od osi Ox, to jest od stycznej, jest nieskończenie małą drugiego rzędu, o części głównej $\frac{s^2}{2R}$ (p. art. 219). Obliczmy jeszcze długość cięciwy nieskończenie małej c. Opuszczając wyrazy stopnia wyższego ponad czwarty, mamy

$$c^2 = x^2 + y^2 + z^2 = s^2 - \frac{s^4}{12R^2} + \dots.$$

Stąd wynika

$$c = s\left(1 - \frac{s^2}{12R^2} + \dots\right)^{\frac{1}{2}} = s\left(1 - \frac{s^2}{24R^2} + \dots\right);$$

różnica $s - c$ jest tedy nieskończenie małą trzeciego rzędu, której część główną stanowi $\frac{s^3}{24R^2}$.

Za pomocą zupełnie podobnego rachunku można dowieść, iż odległość najkrótsza pomiędzy styczną w początku układu a styczną w punkcie nieskończenie blizkim jest nieskończenie małą trzeciego rzędu, której część główną stanowi $\frac{s^3}{12RT}$. Zawdzięczamy to twierdzenie p. Bouquet.

234. Równanie naturalne krzywej. — Gdy promień skręcenia T jest nieskończony, to krzywa jest płaska, ponieważ Δ staje się zerem (art. 225); w tym wypadku równania różniczkowe, określające krzywą, mogą być rozwiązane za pomocą całkowań.

Przypuśćmy, iż za zmienną niezależną wzięto łuk s; spółrzędne x i y w układzie prostokątnym stanowią funkcje zmiennej s, czyniące zadość dwom równaniom (art. 228, *Uwaga*)

$$(37)\qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1,\qquad \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2=\left[\frac{1}{\varphi(s)}\right]^2.$$

Pierwszemu z tych równań uczynimy zadość, zakładając $\frac{dx}{ds}=\cos\alpha$, $\frac{dy}{ds}=\sin\alpha$, gdzie α ma oznaczać kąt pomiędzy Ox i kierunkiem dodatnim stycznej, drugie zaś daje nam wtedy

$$d\alpha=\pm\frac{ds}{\varphi(s)};$$

wzór ten możnaby napisać odrazu, jako wniosek z określenia promienia krzywizny.

Wyznaczamy stąd α za pomocą całkowania

$$\alpha=\alpha_0\pm\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\varphi(s)}.$$

Całkując jeszcze dwa razy, otrzymujemy następnie x i y

$$x=x_0+\int_{s_0}^{s}\cos\alpha\,ds,\qquad y=y_0+\int_{s_0}^{s}\sin\alpha\,ds.$$

Określone w ten sposób krzywe zależą od trzech stałych x_0, y_0, α_0; jeżeli jednak będziemy zwracali uwagę nie na położenie, a jedynie na kształt, to w istocie będziemy mieli tylko jedną krzywą. Istotnie, rozpatrzmy krzywą szczególną C, wyznaczoną przez wzory

$$X=\int_{s_0}^{s}\cos\left[\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\varphi(s)}\right]ds,\qquad Y=\int_{s_0}^{s}\sin\left[\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\varphi(s)}\right]ds;$$

biorąc z początku znak $+$, możemy napisać wzory ogólne w postaci

$$x=x_0+X\cos\alpha_0-Y\sin\alpha_0,$$

$$y=y_0+X\sin\alpha_0+Y\cos\alpha_0;$$

są to wzory, określające przekształcenie spółrzędnych. Podobnież, biorąc $\varphi(s)$ ze znakiem $-$, otrzymalibyśmy krzywą, symetryczną względem krzywej C. Krzywa płaska jest tedy w zupełności wyznaczona, co do kształtu, jeżeli znamy promień krzywizny jako funkcję łuku. Równanie $R=\varphi(s)$ nazywa się *równaniem naturalnym* (équation intrinsèque) krzywej.

Ogólniej, jeżeli znamy jakiś związek pomiędzy dwiema z trzech wielkości: R, s, α, to krzywa jest w zupełności określona co do kształtu i można otrzymać jej spółrzędne za pomocą kwadratur. Tak np. jeżeli znamy R w postaci funkcji kąta α, $R=f(\alpha)$, to $ds=f(\alpha)\,d\alpha$ i dalej

$$dx = \cos\alpha\, f(\alpha)\, d\alpha,$$

$$dy = \sin\alpha\, f(\alpha)\, d\alpha;$$

stąd otrzymujemy za pomocą dwuch kwadratur x i y. Np., jeżeli R jest stałe, otrzymujemy z tych wzorów:

$$x = x_0 + R\sin\alpha, \qquad y = y_0 - R\cos\alpha;$$

krzywa szukana jest tedy okręgiem o promieniu R — wynik oczywisty wobec własności rozwiniętej. Skoro łuk tej rozwiniętej ma się równać zeru, musi ona, rzecz jasna, stać się pojedyńczym punktem.

Znajdźmy jeszcze krzywą płaską, której promień krzywizny byłby odwrotnie proporcjonalny do łuku: $R=\frac{a^2}{s}$; mamy z początku:

$$\alpha = \int_0^s \frac{s\,ds}{a^2} = \frac{s^2}{2a^2},$$

następnie

$$x = \int_0^s \cos\frac{s^2}{2a^2}\,ds, \qquad y = \int_0^s \sin\frac{s^2}{2a^2}\,ds.$$

Aczkolwiek nie możemy otrzymać tych całek w postaci wyraźnej, łatwo wyobrazić sobie kształt odpowiedniej krzywej. Gdy s wzrasta od 0 do $+\infty$, to x i y dążą do granicy skończonej, przechodząc nieskończoną liczbę razy przez największości i najmniejszości; krzywa posiada tedy kształt linji spiralnej, zbliżającej się asymptotycznie do pewnego punktu na prostej $y=x$.

235. Rozwijające i rozwinięte. — Mówimy, że krzywa Γ_1 stanowi *rozwijającą* (développante) innej krzywej Γ, jeżeli styczne krzywej Γ należą do normalnych krzywej Γ_1; odwrotnie, krzywa Γ jest zwana *rozwiniętą* (développée) krzywej Γ_1. Rzecz jasna, że wszystkie rozwijające krzywej Γ leżą na *powierzchni rozwijalnej* (surface développable), której krawędzią zwrotu jest Γ, i przecinają pod kątem prostym tworzące tej powierzchni.

Niech x, y, z oznaczają spółrzędne punktu M krzywej Γ; α, β, γ — dostawy kątów stycznej z osiami spółrzędnych, a l — odcinek MM_1, zawarty pomiędzy punktem M i punktem M_1, w którym jedna z rozwijających przecina styczną do Γ w punkcie M; punkt M_1 będzie posiadał spółrzędne

$$x_1 = x + l\alpha, \qquad y_1 = y + l\beta, \qquad z_1 = z + l\gamma$$

i przeto

$$dx_1 = dx + l\,d\alpha + \alpha\,dl, \qquad dy_1 = dy + l\,d\beta + \beta\,dl,$$

$$dz_1 = dz + l\,d\gamma + \gamma\,dl.$$

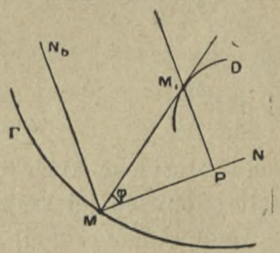
Warunek niezbędny i wystarczający do tego, aby krzywa, zakreślona przez punkt M_1, była normalna do MM_1, wyraża się za pomocą równania $\alpha\,dx_1 + \beta\,dy_1 + \gamma\,dz_1 = 0$, czyli:

$$\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz + dl + l(\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma) = 0,$$

co się sprowadza ostatecznie do postaci: $ds + dl = 0$. Rozwijające krzywej skośnej Γ otrzymujemy tedy za pomocą tej samej konstrukcji, która daje rozwijające krzywej płaskiej.

Zbadajmy teraz różne rozwinięte krzywej Γ t. j. sposoby takiego kojarzenia normalnych do tej krzywej, z zachowaniem ciągłości w ich następowaniu po sobie, iżby tworzyły powierzchnię rozwijalną (rys. 43).

Rys. 43.



Niech D stanowi jedną z rozwiniętych, φ – kąt między normalną MM_1 i normalną główną MN, l — odcinek MP, ograniczony przez punkt M i rzut P punktu M_1 na normalną główną. Rzucając linję łamaną $OMPM_1$ na osie spółrzędnych, wyrażamy spółrzędne x_1, y_1, z_1 punktu M_1 za pomocą wzorów

$$(38) \qquad \begin{cases} x_1 = x + l\alpha' + l\alpha'' \operatorname{tang}\varphi, \\ y_1 = y + l\beta' + l\beta'' \operatorname{tang}\varphi, \\ z_1 = z + l\gamma' + l\gamma'' \operatorname{tang}\varphi. \end{cases}$$

Styczną do krzywej, zakreślonej przez punkt M_1, winna być sama prosta MM_1, co wymaga zachowania warunków:

$$\frac{dx_1}{x_1 - x} = \frac{dy_1}{y_1 - y} = \frac{dz_1}{z_1 - z};$$

oznaczmy przez K wspólną wartość tych trzech stosunków; warunek $dx_1 = K(x_1 - x)$, po zastąpieniu x_1 i dx_1 przez ich wartości i zastosowaniu wzorów Freneta, może być napisany w postaci

$$\alpha\, ds \left(1 - \frac{l}{R}\right) + \alpha' \left(dl + l \operatorname{tang} \varphi \frac{ds}{T} - Kl\right) +$$
$$+ \alpha'' \left[d(l \operatorname{tang} \varphi) - \frac{lds}{T} - Kl \operatorname{tang} \varphi\right] = 0.$$

Warunki $dy_1 = K(y_1 - y)$, $dz_1 = K(z_1 - z)$ dadzą wzory zupełnie analogiczne, które otrzymamy z powyższego za pomocą zamiany α, α', α'' na β, β', β'' a potym na γ, γ', γ''. Ponieważ wyznacznik, utworzony z dziewięciu dostaw, równa się jedności, przeto układ, złożony z trzech otrzymanych związków, jest równoważny układowi:

$$(39) \qquad \begin{cases} \left(1 - \dfrac{l}{R}\right) ds = 0, \qquad dl + l \operatorname{tang} \varphi \dfrac{ds}{T} = Kl, \\ d(l \operatorname{tang} \varphi) - \dfrac{lds}{T} = Kl \operatorname{tang} \varphi. \end{cases}$$

Z pierwszej równości otrzymujemy $l = R$, co wskazuje, iż punkt P stanowi środek krzywizny, a prosta PM_1 prostą biegunową, przeto *wszystkie rozwinięte krzywej Γ leżą na powierzchni biegunowej*. Aby wyznaczyć dokładniej te rozwinięte, musimy jeszcze tylko wyrugować K z dwuch ostatnich związków (39), zastępując w nich l przez R; po wszystkich redukcjach, pozostaje jedynie: $ds = Td\varphi$. Kąt φ da się tedy wyznaczyć za pomocą jednej kwadratury

$$(40) \qquad \varphi = \varphi_0 + \int_0^s \frac{ds}{T}.$$

Jeżeli rozważamy dwie wartości kąta φ, odpowiadające dwom różnym wartościom stałej φ_0, to różnica między takimi dwoma kątami pozostaje stałą wzdłuż całej krzywej Γ. Widzimy tedy, iż *normalne do krzywej Γ, styczne do dwuch różnych rozwiniętych, przecinają się pod kątem stałym.* Znając przeto jeden układ normalnych krzywej Γ, tworzący powierzchnię rozwijalną, otrzymamy wszystkie inne powierzchnie rozwijalne, utworzone przez normalne tej krzywej, obracając normalne pierwszego układu o jakiś kąt stały, zresztą dowolny, dokoła punktów, w których spotykają Γ.

Uwaga 1. — Jeżeli Γ jest krzywą płaską, to T jest nieskończenie wielkie, i wzór poprzedni daje $\varphi = \varphi_0$. Rozwinięta, odpowiadająca wartości $\varphi_0 = 0$, stanowi zwykłą rozwiniętą płaską, stanowiącą również miejsce gieometryczne środków krzywizny. Inne rozwinięte, w liczbie nieskończenie wielkiej, są położone na walcu, którego przekrój normalny stanowi owa rozwinięta płaska: są to krzywe skośne, zwane *linjami śrubowemi* (hélices), które zbadamy w następnym artykule. Jest to jedyny wypadek, w którym miejsce gieometryczne środków krzywizny jest jednocześnie jedną z rozwiniętych. Istotnie, na to, aby wartość $\varphi = 0$ czyniła zadość warunkowi (40), potrzeba, iżby T było nieskończone, czyli iżby $\Delta = 0$; w takim zaś razie krzywa jest krzywą płaską (art. 225).

Uwaga 2. — Jeżeli krzywa D stanowi rozwiniętą krzywej Γ, to Γ jest naodwrót rozwijającą krzywej D. Oznaczając tedy przez s_1 łuk rozwiniętej, liczony w odpowiednim kierunku, mamy

$$ds_1 = d\,(MM_1);$$

rozwinięte dowolnej krzywej są tedy krzywemi sprostowalnemi (rectifiables).

236. Linje śrubowe (Hélices). — Weźmy dowolną krzywą płaską C; jeżeli od każdego punktu m tej krzywej odłożymy na prostopadłej do jej płaszczyzny odcinek mM, proporcjonalny do łuku krzywej C, liczonego od pewnego punktu stałego A, to miejsce gieometryczne punktów M stanowi krzywą skośną Γ, zwaną *linją śrubową*. Niech płaszczyzna krzywej C będzie płaszczyzną xy; załóżmy, że wzory

$$x = f(\sigma), \qquad y = \varphi(\sigma)$$

wyrażają zależność spółrzędnych punktu m krzywej C od łuku σ; oznaczając przez K pewien stały czynnik, otrzymamy spółrzędne odpowiedniego punktu M krzywej Γ w postaci

$$(41) \qquad x = f(\sigma), \qquad y = \varphi(\sigma), \qquad z = K\sigma.$$

Zauważmy, że funkcje f i φ spełniają warunek $f'^2 + \varphi'^2 = 1$. Oznaczając przez s łuk Γ, otrzymujemy z wzorów (41)

$$ds^2 = (f'^2 + \varphi'^2 + K^2)\, d\sigma^2 = (1 + K^2)\, d\sigma^2$$

i stąd

$$s = \sigma\sqrt{1 + K^2} + H;$$

odmierzając łuki s i σ od tego samego punktu A krzywej C, to jest czyniąc $H = 0$, będziemy mieli

$$s = \sigma\sqrt{1 + K^2}.$$

Dostawy kierunkowe stycznej do Γ posiadają wartości:

$$(42) \qquad \alpha = \frac{f'(\sigma)}{\sqrt{1 + K^2}}, \qquad \beta = \frac{\varphi'(\sigma)}{\sqrt{1 + K^2}}, \qquad \gamma = \frac{K}{\sqrt{1 + K^2}};$$

widzimy, iż γ nie zależy od σ, czyli że styczna tworzy kąt stały z osią Oz. Własność ta posiada znaczenie charakterystyczne, ponieważ nawzajem: *wszelka krzywa, której styczne tworzą kąt stały z jakimś określonym kierunkiem, jest linją śrubową.* Aby to uzasadnić, nadajmy osi Oz ów kierunek i oznaczmy przez C rzut rozważanej krzywej Γ na płaszczyznę xy; możemy zawsze napisać równania krzywej Γ w postaci

$$(43) \qquad x = f(\sigma), \qquad y = \varphi(\sigma), \qquad z = \psi(\sigma),$$

poddając f i φ warunkowi $f'^2 + \varphi'^2 = 1$, co jest równoznaczne z obraniem za zmienną niezależną łuku σ krzywej C. Otrzymujemy stąd,

$$\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{\psi'(\sigma)}{\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}} = \frac{\psi'}{1 + \psi'^2};$$

warunek niezbędny i wystarczający stałości γ polega na stałości ψ', a przeto $\psi(\sigma)$ musi posiadać postać $K\sigma + z_0$. Przy odpowiednim wyborze początku układu równania krzywej Γ otrzymają postać (41).

Wzór $\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{R}$ daje w tym wypadku, wobec stałości γ, $\gamma' = 0$. Normalna główna jest tedy prostopadła do tworzących walca; ponieważ jest ona oprócz tego prostopadła do stycznej linji śrubowej, przeto stanowi normalną do powierzchni walcowej, i płaszczyzna ściśle styczna jest również prostopadła do powierzchni walcowej. Dwunormalna leży tedy w płaszczyźnie stycznej do walca i przeto, będąc prostopadłą do stycznej, tworzy również kąt stały z osią Oz.

Wzór $\frac{d\gamma'}{ds} = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma''}{T}$ daje następnie, ponieważ $\gamma' = 0$: $\frac{\gamma}{R} + \frac{\gamma''}{T} = 0$, co oznacza, że dla linji śrubowej stosunek $\frac{T}{R}$ jest stały.

Wszystkie te własności stanowią cechy wyłączne linji śrubowej. Dowiedźmy np. że *wszelka krzywa, dla której stosunek $\frac{R}{T}$ jest stały, jest linją śrubową*. (Barré de Saint-Venant i J. Bertrand).

Ze wzorów Freneta otrzymujemy

$$\frac{d\alpha}{d\alpha''} = \frac{d\beta}{d\beta''} = \frac{d\gamma}{d\gamma''} = \frac{T}{R} = \frac{1}{H};$$

jeżeli H jest stałe, to oznaczając przez A, B, C trzy nowe stałe, otrzymujemy jako wynik całkowania

$$\alpha'' = H\alpha - A, \qquad \beta'' = H\beta - B, \qquad \gamma'' = H\gamma - C.$$

Dodajmy do siebie te trzy równania, pomnożywszy je odpowiednio przez α, β, γ; otrzymamy

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = H,$$

a więc również

$$\frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{H}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

lecz

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

stanowią dostawy kierunkowe jakiejś prostej Δ i związek powyższy wyraża, iż styczna tworzy z kierunkiem tej prostej kąt stały; rozważana krzywa jest tedy linją śrubową.

Obliczmy jeszcze promień krzywizny. Podług wzorów (42), znalezionych powyżej dla α i β, mamy

$$\frac{\alpha'}{R} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{1 + K^2} f''(\sigma), \qquad \frac{\beta'}{R} = \frac{1}{1 + K^2} \varphi''(\sigma),$$

a ponieważ $\gamma' = 0$, otrzymujemy stąd

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{(1+K^2)^2}\,[f''^2(\sigma) + \varphi''^2(\sigma)]. \tag{44}$$

Stosunek $\frac{1+K^2}{R}$ jest tedy niezależny od K; otóż, jak łatwo sprawdzić (art. 228), przy $K = 0$ ten stosunek staje się równym odwrotności promienia krzywizny przekroju prostopadłego C, $\frac{1}{r}$. Wzór powyższy można przeto napisać w postaci $R = r\,(1+K^2)$, która wskazuje, iż promień krzywizny linji śrubowej jest proporcjonalny do promienia krzywizny krzywej C. Łatwo nawiązać ten wynik do rozważania krzywych, posiadających R i T stałe. W istocie, z powodu stałości stosunku $\frac{R}{T}$, krzywe takie są linjami śrubowemi, zgodnie z twierdzeniem Barré de Saint-Venanta i J. Bertranda. Ponad to stałość R pociąga za sobą stałość promienia krzywizny r krzywej C, a więc krzywa C jest okręgiem, i *badana krzywa stanowi linję śrubową zakreśloną na walcu obrotowym.* Zawdzięczamy to twierdzenie p. Puiseux [1].

237. Krzywe J. Bertranda. — Normalne główne krzywej płaskiej są jednocześnie normalnemi głównemi nieskończonej liczby innych krzywych płaskich, równoległych do pierwszej krzywej. J. Bertrand postawił sobie zagadnienie co do krzywych skośnych, których normalne główne są również normalnemi głównemi pewnej innej krzywej skośnej. Przypuśćmy, żeśmy wyrazili spółrzędne x, y, z punktu zmiennego w zależności od łuku s; na każdej z normalnych głównych odłóżmy odcinek l, i spółrzędne punktu końcowego oznaczmy przez X, Y, Z

$$X = x + l\alpha', \qquad Y = y + l\beta', \qquad Z = z + l\gamma'. \tag{45}$$

Na to, aby normalna główna do krzywej Γ była również normalną główną krzywej Γ', zakreślonej przez punkt (X, Y, Z), potrzeba i wystarcza, iżby zachodziły związki

$$\alpha'\,dX + \beta'\,dY + \gamma'\,dZ = 0,$$

$$\alpha'\,(dY\,d^2Z - dZ\,d^2Y) + \beta'\,(dZ\,d^2X - dX\,d^2Z) + \gamma'\,(dX\,d^2Y - dY\,d^2X) = 0,$$

których znaczenie jest zupełnie jasne. Z pierwszego otrzymujemy $dl = 0$, a więc długość odcinka l winna być stała. Zastępując następnie w drugiej równości dX, d^2X, dY,... przez odpowiednie wartości, wyznaczone za pomocą wzorów Freneta i wzorów, otrzymanych przez ich różniczkowanie, dochodzimy, po dokonaniu redukcji, do wzoru

$$\frac{1}{T}\,d\left(1 - \frac{l}{R}\right) = \left(1 - \frac{l}{R}\right)d\left(\frac{1}{T}\right),$$

skąd otrzymujemy za pomocą całkowania, oznaczając przez l' nową stałą, związek

$$\frac{l}{R} + \frac{l'}{T} = 1. \tag{46}$$

---

[1] Dowód opiera się na założeniu, że rozpatrujemy jedynie krzywe rzeczywiste, ponieważ przypuściliśmy powyżej, iż $A^2 + B^2 + C^2$ nie jest równe zeru. (P. Teza p. Lyon „Sur les courbes à torsion constante“, 1890).

Poszukiwane krzywe są tedy krzywemi, których krzywizna i skręcenie są związane ze sobą przez jakieś równanie linjowe. Ponad to widzimy, iż warunek ten jest wystarczający, i że odcinek l może być wyznaczony właśnie za pomocą równania (46).

Już Monge zbadał był godny uwagi wypadek szczególny, gdy promień krzywizny jest stały. Związek (46) przybiera wtedy postać $l = R$, i krzywa Γ', dana przez wzory (45), stanowi miejsce gieometryczne środków krzywizny krzywej Γ. Zakładając, iż $l = R = Const.$, otrzymujemy z wzorów (45)

$$dX = -\frac{R}{T}\alpha'' ds, \qquad dY = -\frac{R}{T}\beta'' ds, \qquad dZ = -\frac{R}{T}\gamma'' ds;$$

stąd wynika, iż styczna do krzywej Γ' stanowi prostą biegunową krzywej Γ. Promień krzywizny R' krzywej Γ' jest znów wyznaczony przez wzór

$$R'^2 = \frac{dX^2 + dY^2 + dZ^2}{d\alpha''^2 + d\beta''^2 + d\gamma''^2} = R^2;$$

widzimy, iż ten promień krzywizuy jest również stały i równy R, i pomiędzy obu Γ i Γ' zachodzi stosunek wzajemny: każda z nich stanowi krawędź zwrotu powierzchni biegunowej, odpowiadającej drugiej krzywej. Wszystkie te własności łatwo sprawdzić bezpośrednio w stosunku do linji śrubowej kołowej.

Uwaga. — Łatwo otrzymać wzory ogólne dla wszystkich krzywych skośnych, których promień krzywizny jest stały i równy R. Niech α, β, γ stanowią trzy funkcje parametru zmiennego, czyniące zadość warunkowi $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Wzory

$$(47) \qquad X = R\int \alpha\, d\sigma, \qquad Y = R\int \beta\, d\sigma, \qquad Z = R\int \gamma\, d\sigma,$$

w których zakładamy

$$d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2},$$

określają krzywą, spełniającą postawiony warunek, i łatwo okazać, że otrzymujemy w ten sposób wszystkie takie krzywe. Istotnie, α, β, γ są to właśnie dostawy kierunkowe stycznej, a σ — łuk krzywej kulistej wskazującej (art. 227).

238. Kula ściśle styczna. — Zastosujmy jeszcze wzory Freneta do wyznaczenia kuli ściśle stycznej. Załóżmy, iż współrzędne x, y, z punktu krzywej Γ są wyrażone w zależności od łuku s tej krzywej. Na to, aby kula o środku (a, b, c) i promieniu ς miała z krzywą Γ w danym jej punkcie styczność trzeciego rzędu, potrzeba i wystarcza, iżbyśmy mieli

$$\Phi(s) = 0, \qquad \Phi'(s) = 0, \qquad \Phi''(s) = 0, \qquad \Phi'''(s) = 0,$$

gdzie

$$\Phi(s) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - \varsigma,$$

a x, y, z są uważane za funkcje s. Wzory Freneta pozwalają napisać trzy ostatnie warunki w postaci bardziej szczegółowej

$$\Phi'(s) = (x-a)\alpha + (y-b)\beta + (z-c)\gamma = 0,$$

$$\Phi''(s) = (x-a)\frac{\alpha'}{R} + (y-b)\frac{\beta'}{R} + (z-c)\frac{\gamma'}{R} + 1 = 0,$$

$$\Phi'''(s) = -\frac{x-a}{R}\left(\frac{\alpha}{R}+\frac{\alpha''}{T}\right) - \frac{y-b}{R}\left(\frac{\beta}{R}+\frac{\beta''}{T}\right) -$$

$$-\frac{z-c}{R}\left(\frac{\gamma}{R}+\frac{\gamma''}{T}\right) - \frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}\left[(x-a)\,\alpha' + (y-b)\,\beta' + (z-c)\,\gamma'\right] = 0.$$

Trzy powyższe równania wyznaczają a, b, c. Otóż pierwsze, gdy uważamy w nim a, b, c za spółrzędne bieżące, odpowiada płaszczyźnie, normalnej do krzywej w punkcie (x, y, z), a dwa następne stanowią wyniki różniczkowania pierwszego względem parametru zmiennego s; środek kuli ściśle stycznej jest tedy punktem, w którym prosta biegunowa dotyka swej obwijającej.

Zauważmy, w celu rozwiązania tych trzech równań, że wobec dwuch poprzednich trzecie może być napisane w postaci:

$$(x-a)\,\alpha'' + (y-b)\,\beta'' + (z-c)\,\gamma'' = T\frac{dR}{ds},$$

skąd otrzymujemy z łatwością

$$a = x + R\alpha' - T\frac{dR}{ds}\alpha'',$$

$$b = y + R\beta' - T\frac{dR}{ds}\beta'',$$

$$c = z + R\gamma' - T\frac{dR}{ds}\gamma'';$$

promień ς kuli ściśle stycznej będzie wyznaczony za pomocą wzoru

$$\varsigma^2 = R^2 + T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2.$$

Gdy R jest stałe, to środek kuli ściśle stycznej, zgodnie z wynikiem, osiągniętym w końcu art. 237, zbiega się ze środkiem krzywizny.

ĆWICZENIA.

1. Znaleźć równania (nie różniczkowe) rozwiniętych krzywej, która przecina pod kątem stałym tworzące prostolinjowe stożka kołowego prostego; wykonać roztrząsanie zagadnienia.
[Egzamin na stopień licenc.: Marsylja, lipiec 1884].

2. Czy istnieją takie krzywe skośne Γ, że punkty przebicia płaszczyzny stałej P przez styczną, normalną główną i dwunormalną stanowią wierzchołki trójkąta równobocznego?

3. Γ oznacza krawędź zwrotu powierzchni, obwijającej układ kul (czyli obwijającą kół charakterystycznych); dowieść, że krzywa, stanowiąca miejsce gieometryczne środków kul, leży na powierzchni biegunowej krzywej Γ. Twierdzenie odwrotne.

4. Mając daną krzywą skośną Γ, przeciągamy przez punkt stały O przestrzeni prostą, równoległą do prostej biegunowej w punkcie M krzywej Γ, i odmierzamy na tej prostej odcinek ON równy promieniowi krzywizny krzywej Γ w punkcie M. Dowieść, że punkt N zakreśla krzywą skośną Γ', która odpowiada krzywej Γ'', stanowiącej miejsce gieometryczne środków krzywizny krzywej Γ, w ten sposób, że elementy linjowe są równe i prostopadłe względem siebie wzajemnie. [ROUQUET].

5. Jeżeli promień kuli ściśle stycznej do krzywej skośnej Γ posiada długość stałą a, to krzywa ta leży na powierzchni kuli o promieniu a, o ile tylko promień krzywizny nie jest stały i równy a.

6. Na to, aby miejscem gieometrycznym środków krzywizny linji śrubowej, zakreślonej na walcu, była inna linja śrubowa, zakreślona na walcu o tworzących równoległych do tworzących pierwszego walca, potrzeba i wystarcza, iżby przekrój prostopadły pierwszej powierzchni walcowej był okręgiem lub linją spiralną logarytmiczną. W drugim wypadku, obie linje śrubowe leżą na powierzchni stożków obrotowych. [TISSOT, Nouvelles Annales, t. XI, 1852].

7*. Jeżeli dwie krzywe skośne posiadają te same normalne główne, to płaszczyzny ściśle styczne do tych krzywych w punktach przecięcia ze wspólnemi normalnemi tworzą z sobą odpowiednio kąt stały. Dwa takie punkty odpowiednie oraz środki krzywizny dwu krzywych stanowią czwórkę punktów o stałym stosunku podwójnym (anharmonicznym). Iloczyn promieni skręcenia dwu krzywych w punktach odpowiednich jest stały. [PAWEŁ SERRET, MANNHEIM, SCHELL].

8*. x, y, z stanowią spółrzędne prostokątne punktu krzywej skośnej Γ, s — łuk tej krzywej. Nazywamy krzywą Γ_0, której punkty posiadają spółrzędne:

$$x_0 = \int \alpha'' \, ds, \qquad y_0 = \int \beta'' \, ds, \qquad z_0 = \int \gamma'' \, ds,$$

krzywą dołączoną (courbe adjointe); krzywe zaś, określone za pomocą równań

$$X = x \cos \theta + x_0 \sin \theta, \qquad Y = y \cos \theta + y_0 \sin \theta, \qquad Z = z \cos \theta + z_0 \sin \theta,$$

w których θ oznacza kąt stały, zowiemy *krzywemi skojarzonemi* (courbe associées). Znaleźć układ trójścianu podstawowego tych nowych krzywych oraz promienie krzywizny i skręcenia.

Jeżeli krzywa Γ posiada stałą krzywiznę, to krzywa Γ_0 ma stałe skręcenie i krzywe skojarzone są to krzywe Bertranda. Oprzeć na tym uzasadnienie równań ogólnych tych krzywych.

9. Mając dwie krzywe Γ i Γ', styczne do siebie w punkcie A, odmierzamy na nich od punktu A, w tym samym kierunku, dwa równe a nader małe łuki AM i AM'. Znaleźć położenie graniczne prostej MM'. [CAUCHY].

10. Do tego, aby prosta, złączona niezmiennie z trójścianem podstawowym krzywej skośnej Γ i przechodząca przez wierzchołek trójścianu, zakreślała powierzch-

nię rozwijalną, potrzeba ogólnie, iżby owa prosta była styczną. Wyjątek pod tym względem stanowi wypadek, gdy krzywa Γ jest linją śrubową — w takim razie istnieje nieskończenie wiele prostych, spełniających podany warunek.

Krzywej Bertranda odpowiadają dwie parabaloidy hiperboliczne, związane niezmiennie z trójścianem podstawowym, których wszystkie tworzące zakreślają powierzchnie rozwijalne. [CESARO, Rivista di Matematica, t. II 1892, str. 155].

11*. Aby normalne główne jednej krzywej skośnej były dwunormalnemi innej, między promieniem krzywizny a promieniem skręcenia winien zachodzić związek

$$A\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{T^2}\right)=\frac{B}{R},$$

w którym A i B stanowią spółczynniki stałe.

[MANNHEIM, Comptes rendus 1877].

Wypadki, w których prosta, przeciągnięta przez punkt krzywej skośnej i związana niezmiennie z trójścianem podstawowym, pozostaje normalną główną lub dwunormalną innej krzywej skośnej, były zbadane przez Pelleta (Comptes rendus, maj 1887), Cesarò (Nouvelles Annales, 1888 str. 147) i Balitranda (Mathesis, 1894 str. 159).

12. Jeżeli płaszczyzna ściśle styczna do krzywej skośnej Γ jest jednocześnie stale styczna do jakiejś stałej kuli, o środku O, to: 1) płaszczyzna, przesunięta przez styczną równolegle do normalnej głównej, przechodzi przez punkt O; 2) stosunek promienia krzywizny do promienia skręcenia stanowi funkcję linjową łuku. Twierdzenie odwrotne.

13. Jeżeli bierzemy za kierunek rzutu kierunek stycznej MT do krzywej Γ w jakimś punkcie M tej krzywej, to rzut m punktu M na płaszczyznę P stanowi punkt zwrotu rzutu krzywej Γ na tę płaszczyznę, a styczną w punkcie zwrotu jest ślad na płaszczyźnie P płaszczyzny ściśle stycznej do krzywej Γ w punkcie M. Rozpatrzeć wypadek, gdy płaszczyzna ściśle styczna w punkcie M jest zwrotna.

14*. Przeciągamy przez każdy punkt M krzywej C normalną, tworzącą z normalną główną kąt zmienny φ, i odkładamy na niej odległość stałą $MM' = l$. Krzywa C', zakreślona przez punkt M', jest normalna do tej samej prostej MM'. Określić kąt φ w ten sposób, aby styczne do krzywych C, C' w punktach odpowiednich M, M', tworzyły kąt stały V. Wypadek szczególny: $V=\frac{\pi}{2}$. Uważając za niewiadomą $tg\frac{\varphi}{2}$, otrzymujemy równanie Riccati'ego.

[DARBOUX, Comptes rendus, t. CXLVI, 1908, str. 881].

ROZDZIAŁ XII.

POWIERZCHNIE.

I. — KRZYWIZNA LINJI, NAKREŚLONYCH NA POWIERZCHNI.

239. Wzór zasadniczy. Twierdzenie Meusniera. — Określamy ogólnie powierzchnię S za pomocą układu trzech równań

$$(1) \qquad x=f(u, v), \qquad y=\varphi(u, v), \qquad z=\psi(u, v),$$

w których x, y, z są spółrzędnemi punktu tej powierzchni, a u i v — dwoma parametrami zmiennemi. Funkcje f, φ, ψ niekoniecznie mają stanowić funkcje analityczne, lecz będziemy zakładali, iż, z wyłączeniem pewnych punktów wyjątkowych, są to funkcje ciągłe i posiadające ciągłe pochodne cząstkowe obu pierwszych rzędów. Jeżeli wyznaczniki

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

nie równają się jednocześnie zeru dla jakiegoś układu wartości u, v, to punkt odpowiedni M powierzchni jest punktem *zwyczajnym* (point ordinaire; art. 64) i w sąsiedztwie tego punktu jedna ze spółrzędnych jest funkcją ciągłą dwu innych, posiadającą również pochodne cząstkowe ciągłe pierwszego i drugiego rzędu. Zbadajmy krzywiznę rozmaitych krzywych, położonych na powierzchni i przechodzących przez punkt zwyczajny. Możnaby założyć, iż w sąsiedztwie takiego punktu powierzchnia jest dana za pomocą równania o postaci $z=F(x, y)$, lecz otrzymamy wzory bardziej symetryczne i dające się zastosować w szerszym zakresie, jeżeli się oprzemy na trzech równaniach (1).

Napiszmy równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni w punkcie (x, y, z)

$$(2) \qquad A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0;$$

spółczynniki A, B, C winny czynić zadość związkom:

(3) $$SA\frac{\partial x}{\partial u}=0, \qquad SA\frac{\partial x}{\partial v}=0,$$

w których znak S nie wymaga objaśnień ([1]). Ze związków tych wnioskujemy, oznaczając przez K spółczynnik stały lub zmienny, który można obrać dowolnie ([2])

(4) $$A=K\frac{D(y,\,z)}{D(u,\,v)}, \qquad B=K\frac{D(z,\,x)}{D(u,\,v)}, \qquad C=K\frac{D(x,\,y)}{D(u,\,v)}.$$

Jeżeli np. wyrażamy powierzchnię za pomocą równania $z=F(x,\,y)$, to założyć można $x=u$, $y=v$, $K=-1$, a wartości odpowiednie A, B i C będą następujące: $A=p$, $B=q$, $C=-1$; p i q posiadają przytym zwykłe znaczenie.

Jeżeli w równaniach (1) zastąpimy u i v przez funkcje zmiennej α, to punkt $(x,\,y,\,z)$ będzie zakreślał krzywą Γ, położoną na S, a spółczynniki kierunkowe stycznej do tej krzywej będą proporcjonalne do

$$dx=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv, \qquad dy=\frac{\partial \varphi}{\partial u}du+\frac{\partial \varphi}{\partial v}dv, \qquad dz=\frac{\partial \psi}{\partial u}du+\frac{\partial \psi}{\partial v}dv;$$

każdej wartości stosunku $\frac{dv}{du}$ odpowiada tedy określona styczna do powierzchni w punkcie $(u,\,v)$ i łatwo obliczyć dostawy kierunkowe tej stycznej. Wzdłuż krzywej Γ różniczki dx, dy, dz spełniają warunek

(5) $$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0,$$

który wyraża poprostu, że styczna do krzywej Γ leży w płaszczyźnie stycznej do powierzchni. Biorąc różniczkę zupełną lewej strony tego równania (art. 39), otrzymujemy związek pomiędzy różniczkami drugiego rzędu zmiennych x, y, z

(6) $$A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z+dA\,dx+dB\,dy+dC\,dz=0,$$

którego znaczenie gieometryczne wyjaśnimy wkrótce.

([1]) $SA\frac{\partial x}{\partial u}=A\frac{\partial x}{\partial u}+B\frac{\partial y}{\partial u}+C\frac{\partial z}{\partial u}$; $\quad SA\frac{\partial x}{\partial v}=A\frac{\partial x}{\partial v}+B\frac{\partial y}{\partial v}+C\frac{\partial z}{\partial v}$.

(Uw. tłum.).

([2]) Rzecz jasna, że możnaby ustalić raz na zawsze spółczynnik K, biorąc np. $K=\pm 1$. Dogodniej jednak, ze względu na zastosowania, pozostawić ten czynnik nieoznaczonym, aby módz określić go w każdym poszczególnym wypadku, o ile to możliwe, w taki sposób, iżby zostały uproszczone wyrażenia spółczynników A, B, C.

Zauważmy przedewszystkiem, że $dA\,dx + dB\,dy + dC\,dz$ stanowi formę kwadratową różniczek du, dv

$$(7)\qquad dA\,dx + dB\,dy + dC\,dz = D\,du^2 + 2\,D'du\,dv + D''dv^2,$$

której spółczynniki D, D', D'' otrzymamy za pomocą różniczkowania wyrażeń x, y, z, A, B, C.

Z drugiej strony, $A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z$, podzielone przez pewien czynnik, wyraża dostawę kąta pomiędzy dwiema prostemi o spółczynnikach kierunkowych (A, B, C) i (d^2x, d^2y, d^2z). Prosta o spółczynnikach kierunkowych A, B, C jest prostopadła do powierzchni; obierzmy za zwrot dodatni tej normalnej zwrot, któremu odpowiadają dostawy kierunkowe:

$$(8)\qquad \lambda = \frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \mu = \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \nu = \frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Skądinąd, gdy weźmiemy za zmienną niezależną łuk s krzywej Γ, a symbolom α', β', γ', R nadamy zwykłe ich znaczenie, to otrzymamy:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\alpha'}{R},\quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{\beta'}{R},\quad \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{\gamma'}{R}.$$

(art. 232). Dzieląc wszystkie wyrazy związku (6) przez ds^2, możemy tedy napisać go w postaci

$$\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{R}(\lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma') = \frac{D\,du^2 + 2\,D'du\,dv + D''dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2};$$

E, F, G są przytym spółczynnikami Gaussa, występującemi we wzorze $ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$ (art. 131).

Otóż, jeżeli oznaczymy przez Θ kąt, utworzony przez normalną główną do krzywej Γ z kierunkiem dodatnim normalnej do powierzchni, to otrzymamy $\lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma' = \cos\Theta$, i stąd wynika wzór zasadniczy

$$(9)\qquad \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{R}\cos\Theta = \frac{D\,du^2 + 2\,D'du\,dv + D''dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

zupełnie równoważny wzorowi (6). W związku tym pierwiastek $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ oraz promień krzywizny R stanowią wielkości z istoty swej dodatnie, i przeto $\cos\Theta$ ma ten sam znak, co strona prawa równania, która przy jakimś danym układzie wartości u i v zależy jedynie od stosunku $\frac{dv}{du}$, to jest od położenia stycznej do krzywej Γ w punkcie M. Załóżmy, że Γ' oznacza inną krzywą na powierzchni, styczną w punkcie M do pierwszej krzywej, R' — jej promień krzywizny, a Θ' — kąt jej normalnej głównej z kierunkiem dodatnim normalnej do powierzchni. Prawa strona równości (9) posiada tę samą wartość dla obu krzywych; mamy przeto

$$\frac{\cos\Theta}{R} = \frac{\cos\Theta'}{R'}. \tag{10}$$

Rozpatrzmy w szczególności dwie krzywe Γ i Γ', położone na powierzchni i posiadające w punkcie M tę samą płaszczyznę ściśle styczną (nie stanowiącą płaszczyzny stycznej do powierzchni). Rzecz jasna, iż te krzywe posiadają w punkcie M wspólną styczną, utworzoną przez przecięcie płaszczyzny stycznej do powierzchni z płaszczyzną ściśle styczną. Można tedy zastosować do nich wzór (10). Lecz kierunki dwu normalnych głównych są takie same lub przeciwne, mamy tedy $\Theta' = \Theta$, lub $\Theta' = \pi - \Theta$. Drugie przypuszczenie musi być odrzucone, ponieważ $\cos\Theta$ i $\cos\Theta'$ mają ten sam znak; przeto $\Theta' = \Theta$ a stąd: $R' = R$. Krzywe Γ i Γ', którym odpowiada ten sam kierunek normalnej głównej i ten sam promień krzywizny, posiadają ten sam środek krzywizny.

Ostatecznie, *wszystkie krzywe, położone na powierzchni, przechodzące przez punkt M i posiadające w tym punkcie tę samą płaszczyznę ściśle styczną (inną niż płaszczyzna styczna do powierzchni), mają również ten sam środek krzywizny.* W szczególności, wszelka krzywa, leżąca na powierzchni, ma ten sam środek krzywizny, co przekrój płaski powierzchni jej płaszczyzną ściśle styczną.

Wystarczy tedy zbadać jedynie krzywiznę przekrojów płaskich powierzchni, przechodzących przez punkt M. Zobaczmy z początku, w jaki sposób zmienia się krzywizna rozmaitych przekrojów płaskich, których płaszczyzny są przeciągnięte przez tę samą styczną MT. Nie zmniejszając ogólności, możemy przypuścić, iż owa styczna spełnia warunek

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''dv^2 > 0,$$

ponieważ zmiana znaku spółczynników A, B, C, z którą się wiąże zmiana zwrotu dodatniego normalnej do powierzchni, pociąga za sobą, rzecz oczywista, również zmianę znaku D, D', D''. Dla tych wszystkich przekrojów płaskich $\cos\Theta$ jest dodatnie i kąt Θ jest kątem ostrym; w szczególności przekrojowi normalnemu, zawierającemu MT, odpowiada kąt $\Theta' = 0$. Oznaczając przez R' promień krzywizny tego przekroju normalnego, możemy nadać związkowi (10) postać: $R = R'\cos\Theta$. Jak łatwo zauważyć, równość ta wyraża, że *środek krzywizny przekroju ukośnego* (oblique), *jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę tego przekroju środka krzywizny przekroju normalnego, zawierającego tę samą styczną* (twierdzenie Meusniera).

Twierdzenie powyższe pozwala oprzeć badanie krzywizny przekroju ukośnego na badaniu krzywizny przekroju normalnego. Wyłożymy w tej chwili wyniki, otrzymane przez Eulera; zauważmy jednak z początku, iż wzór (9) może przybierać w stosunku do przekroju normalnego dwie odmienne postacie, zależnie od znaku wyrażenia

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2.$$

Aby uniknąć tej niedogodności, umówimy się, iż będziemy w dalszym ciągu oznaczali przez R promień krzywizny przekroju normalnego, opatrzony znakiem $+$ lub $-$, stosownie do tego, czy kierunek od punktu M do środka krzywizny jest kierunkiem dodatnim normalnej do powierzchni czy też kierunkiem przeciwnym. Wobec tej umowy promień R w obu wypadkach będzie dany przez wzór:

$$\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{R} = \frac{D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}, \tag{11}$$

który wyznaczy bez żadnych wątpliwości położenie środka krzywizny.

Na zasadzie wzoru (11) określamy łatwo położenie powierzchni względem płaszczyzny stycznej w sąsiedztwie punktu styczności. Gdy mamy $D'^2 - DD'' < 0$, to trójmian $D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2$ zachowuje przy obrocie płaszczyzny siecznej dokoła normalnej znak stały, a mianowicie znak spółczynników D i D''; wszystkie przekroje normalne posiadają środek krzywizny z tej samej strony płaszczyzny stycznej, są tedy położone po tej samej stronie tej płaszczyzny; mówimy, iż powierzchnia jest w danym punkcie *wypukła* (convexe). Przeciwnie, gdy $D'^2 - DD'' > 0$, to trójmian $D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2$ przy pewnych dwuch położeniach płaszczyzny siecznej staje się zerem; punkt badany jest dla odpowiednich przekrojów normalnych punktem przegięcia. Gdy płaszczyzna sieczna jest położona w jednym z kątów dwuściennych, utworzonych przez płaszczyzny tych dwu przekrojów, R jest dodatnie i przekrój leży po jednej stronie płaszczyzny stycznej; gdy płaszczyzna sieczna leży w kącie dwuściennym spełniającym, R jest ujemne i przekrój znajduje się po drugiej stronie płaszczyzny stycznej. Powierzchnia przecina tedy w sąsiedztwie punktu styczności płaszczyznę styczną; mówimy, że krzywa posiada w tym punkcie krzywiznę *różnoznaczną* (est à courbures opposées) czyli że punkt jest punktem *hiperbolicznym* powierzchni. Nakoniec, gdy w badanym punkcie $D'^2 - DD'' = 0$, to wszystkie przekroje płaskie normalne są położone po tej samej stronie płaszczyzny stycznej, prócz jednego, który posiada promień krzywizny nieskończenie wielki i który naogół przechodzi z jednej strony płaszczyzny stycznej na drugą; mówimy w takim razie, iż punkt jest punktem *parabolicznym* (parabolique) powierzchni.

Rozpatrzmy w szczególności powierzchnię S, daną za pomocą równania $z = F(x, y)$. Gdy weźmiemy: $A = p$, $B = q$, $C = -1$, to otrzymamy odrazu, nadając symbolom r, s, t zwykłe ich znaczenie: $D = r$, $D' = s$, $D'' = t$. Spółczynniki E, F, G otrzymają wartości: $E = 1 + p^2$, $F = pq$, $G = 1 + q^2$.

Zwrot dodatni normalnej do powierzchni posiada dostawy kierunkowe:

$$(12) \qquad \lambda = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \mu = \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

i tworzy z osią Oz kąt ostry. Jeżeli α, β, γ oznaczają dostawy kierunkowe stycznej w punkcie M do przekroju normalnego, to du, dv są proporcjonalne do α i β, i wzór (11) przybiera postać

$$(13) \qquad \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{(1 + p^2)\alpha^2 + 2pq\alpha\beta + (1 + q^2)\beta^2};$$

ze względu na związki $\gamma = p\alpha + q\beta$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, można napisać to w sposób prostszy:

$$(13') \qquad \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{R} = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2.$$

W tym wypadku znak trójmianu $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$ stanowi o tym, czy przekrój normalny jest położony w sąsiedztwie punktu styczności pod płaszczyzną styczną czy nad nią. Powierzchnia jest w punkcie M wypukła lub posiada krzywiznę różnoznaczną, stosownie do tego, czy $s^2 - rt < 0$ czy też $s^2 - rt > 0$; jeżeli $s^2 - rt = 0$, mamy punkt paraboliczny.

Łatwo sprawdzić powyższe wyniki, badając różnicę δ pomiędzy spółrzędnemi z i z' dwu punktów: powierzchni i płaszczyzny stycznej, posiadających ten sam rzut na płaszczyźnie xy. Oznaczmy przez (x_0, y_0) spółrzędne punktu styczności, a przez p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 wartości pochodnych funkcji $F(x, y)$ w tym punkcie. Mamy:

$$\delta = F(x, y) - p_0(x - x_0) - q_0(y - y),$$

$$\left(\frac{\partial\delta}{\partial x}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial\delta}{\partial y}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}\right)_0 = r_0, \qquad \left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x\partial y}\right)_0 = s_0, \qquad \left(\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}\right)_0 = t_0.$$

Jeżeli $s_0^2 - r_0 t_0 < 0$, to δ osiąga w punkcie M największość lub najmniejszość (art. 47), i ponieważ δ, odpowiadające temu punktowi, równa się zeru, więc δ zachowuje w jego otoczeniu znak stały; przeciwnie, o ile $s_0^2 - r_0 t_0 > 0$, w punkcie M niema ani największości ani najmniejszości, i δ nie zachowuje przeto w sąsiedztwie tego punktu znaku stałego.

240. Dwie formy podstawowe. — Badanie powyższe zwróciło naszą uwagę, oprócz formy

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$$

na drugą jeszcze formę kwadratową

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2.$$

Stosownie do samego określenia spółczynniki D, D', D'' mają wartości następujące:

$$(14)\qquad D = S\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad D'' = S\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad 2\,D' = S\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + S\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u};$$

wyrażenie D' może być uproszczone przy uwzględnieniu związków (3). W istocie, jeżeli zróżniczkujemy pierwszą z tych równości względem v, a drugą względem u, to otrzymamy:

$$S\,A\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + S\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad S\,A\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + S\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0;$$

mamy tedy:

$$S\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = S\frac{\partial A}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v},$$

a przeto

$$(14')\qquad D' = S\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = S\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Można jeszcze wyznaczyć D, D', D'' za pomocą wyrażeń, zawierających jedynie pochodne spółrzędnych x, y, z. Z tożsamości (6) otrzymujemy

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = -\,(A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z);$$

spółczynnik D równa się tedy

$$-\left(A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right).$$

Zastępując A, B i C przez ich wartości (4), przekonywamy się, iż spółczynnik przy K stanowi wynik rozwinięcia pewnego wyznacznika:

$$(15)\qquad D = -\,K\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix}$$

i podobnież osiągamy, co następuje:

$$(16) \qquad D' = -K \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} \end{vmatrix}, \qquad D'' = -K \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix}.$$

Spółczynniki D, D', D'', podobnie jak A, B, C, będą wyznaczone w zupełności dopiero, gdy obierzemy czynnik K, podczas gdy forma kwadratowa

$$(17) \qquad \frac{D\, du^2 + 2 D'\, du\, dv + D''\, dv^2}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

nie zależy, o ile pomijamy sprawę znaku, od tego czynnika K. Owo wyrażenie (17) posiada nader proste znaczenie gieometryczne. Przypuśćmy, że δ oznacza odległość, opatrzoną odpowiednim znakiem, pomiędzy punktem powierzchni, odpowiadającym wartościom $u + du$ i $v + dv$ parametrów, a płaszczyzną styczną w punkcie (u, v). Jeżeli rozwiniemy δ w szereg potęg du i dv, to wyrazy pierwszego stopnia, stosownie do związków (3), znikną, a ogół wyrazów drugiego stopnia względem du i dv będzie właśnie równy

$$\frac{1}{2} \; \frac{A\, d^2x + B\, d^2y + C\, d^2z}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

t. j. formie (17), pomnożonej przez $-\frac{1}{2}$. Wzór ogólny (11), wyznaczający promień krzywizny przekroju normalnego, przybiera tedy postać

$$\frac{1}{R} = 2 \lim \frac{\delta}{ds^2},$$

co jest zupełnie zgodne z wynikiem, dawniej już zaznaczonym (art. 219).

241. Twierdzenie Eulera. Linja wskazująca. — Aby zbadać zmienność co do wielkości promienia krzywizny przekroju normalnego, wyobraźmy sobie, żeśmy wzięli za początek układu punkt rozważany powierzchni, a za płaszczyznę xy płaszczyznę styczną do tej powierzchni. Przy takim układzie spółrzędnych mamy $p = q = 0$, i wzór (13) przybiera postać:

$$(18) \qquad \frac{1}{R} = r \cos^2 \varphi + 2 s \cos \varphi \sin \varphi + t \sin^2 \varphi;$$

φ oznacza tu kąt, utworzony przez Ox i ślad płaszczyzny siecznej na płaszczyźnie xy. Przyrównywując do zera pochodną prawej strony, znajdziemy, iż największość i najmniejszość promienia R odpowiadają dwu kierunkom prostopadłym do siebie. Aby zbadać szczegółowo zmienność R we wszystkich możliwych wypadkach szczególnych, wygodnie użyć następującego zobrazowania gieometrycznego: wyobraźmy sobie, że na śladzie płaszczyzny siecznej odmierzamy odcinek Om równy pierwiastkowi kwadratowemu z wartości bezwzględnej promienia krzywizny; punkt m zakreśli krzywą, zwaną *linją wskazującą* (indicatrice), i rzecz jasna, że rozpatrywanie tej krzywej, po jej wykreśleniu, pozwoli zdać sobie odrazu sprawę ze zmienności promienia krzywizny. Zbadajmy obecnie trzy możliwe wypadki:

1) $$s^2 - rt < 0.$$

Promień R posiada znak stały; załóżmy, że jest on dodatni. Spółrzędnemi punktu m będą:

$$\xi = \sqrt{R} \cos \varphi, \qquad \eta = \sqrt{R} \sin \varphi,$$

przeto równanie szukanej krzywej przybierze postać:

$$r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2 = 1; \tag{19}$$

krzywa ta stanowi elipsę o środku w początku układu.

Widzimy, że R osiąga największość, gdy ślad płaszczyzny siecznej schodzi się z osią wielką elipsy, a najmniejszość, gdy ślad ten zbiega się z osią małą i że dwie płaszczyzny sieczne o śladach, jednakowo nachylonych do osi linji wskazującej, dają tę samą wartość R.

Przekroje normalne, których płaszczyzny zawierają osie linji wskazującej, nazywają się *przekrojami normalnymi głównymi* (sections normales principales), a odpowiednie promienie krzywizny — *promieniami głównymi krzywizny* (rayons de courbure principaux). Jeżeli weźmiemy za osie Ox i Oy osie linji wskazującej, to otrzymamy dla takiego układu $s = 0$, i wzór (18) przybiera postać:

$$\frac{1}{R} = r \cos^2 \varphi + t \sin^2 \varphi;$$

promienie główne krzywizny R_1 i R_2 łatwo otrzymać, czyniąc $\varphi = 0$ lub $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Mamy tedy $$\frac{1}{R_1} = r, \quad \frac{1}{R_2} = t$$ i stąd:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2}. \tag{20}$$

2) $$s^2 - rt > 0.$$

Przekroje normalne, odpowiadające wartościom φ, czyniącym zadość równaniu
$$r \cos^2 \varphi + 2s \cos \varphi \sin \varphi + t \sin^2 \varphi = 0,$$
mają promień krzywizny nieskończony. Oznaczmy przez $L'_1 OL_1$, $L'_2 OL_2$ ślady tych dwu płaszczyzn na xOy. Gdy ślad płaszczyzny siecznej zawiera się np. wewnątrz kąta L_1OL_2, to trójmian jest dodatni, i używając tego samego sposobu obrazowania, co w pierwszym wypadku, stwierdzamy, iż odpowiednia część linji wskazującej posiada równanie
$$r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2 = 1;$$
jest to hiperbola o asymptotach $L_1'OL_1$ i L'_2OL_2.

Gdy ślad płaszczyzny siecznej leży w kącie $L_2'OL_1$, to $R < 0$, i w celu otrzymania odpowiedniej części linji wskazującej należy założyć
$$\xi = \sqrt{-R} \cos \varphi, \qquad \eta = \sqrt{-R} \sin \varphi,$$
co daje równanie hiperboli sprzężonej z pierwszą
$$r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2 = -1.$$

Obie te hiperbole sprzężone, razem wzięte, pozwalają również wytworzyć sobie pojęcie o zmienności promienia krzywizny przekroju normalnego. Jeżeli weźmiemy osie tych hiperbol za osie spółrzędnych, to wzór ogólny (18) przybierze znów postać (20), R_1 i R_2 będą oznaczały przytym promienie główne krzywizny, z których jeden będzie dodatni, drugi ujemny.

3) $$s^2 - rt = 0.$$

W tym wypadku promień krzywizny R posiada znak stały, np. $+$. Linja wskazująca jest podobnież określona za pomocą równania (19); lecz krzywa ta, należąc do rodzaju parabol i posiadając środek w początku układu, musi niezbędnie składać się z dwu prostych równoległych. Biorąc za oś Oy prostą, równoległą do tych dwu prostych, winniśmy mieć przy takim układzie $s = 0$, $t = 0$, i wzór ogólny (18) przybiera postać
$$\frac{1}{R} = r \cos^2 \varphi$$
czyli
$$R_1 = R \cos^2 \varphi.$$

Można również uważać to równanie za wynik szczególny wzoru (20), otrzymany przy założeniu, iż jeden z promieni głównych krzywizny R_2 staje się nieskończony.

Wzory Eulera mogą być również uzasadnione bez pomocy wzoru podstawowego (13). Biorąc za początek układu punkt badany powierzchni, a za płaszczyznę xy płaszczyznę styczną, możemy napisać, opuszczając w szeregu, wyrażającym z za pomocą wzoru Taylora, wyrazy rzędu trzeciego i rzędów wyższych ponad trzeci

$$z = \frac{r x^2 + 2 s x y + t y^2}{1 . 2} + \dots$$

Aby otrzymać promień krzywizny przekroju, utworzonego przez płaszczyznę $y = x \, tg \, \varphi$, można z początku przekształcić spółrzędne za pomocą wzorów

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \qquad y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi,$$

a następnie założyć $y' = 0$; wyznaczymy w ten sposób z, jako szereg potęg x':

$$z = \frac{r \cos^2 \varphi + 2 s \sin \varphi \cos \varphi + t \sin^2 \varphi}{1 . 2} x'^2 + \dots ;$$

stosując uwagę z art. 219, odnajdujemy ponownie wzór (18).

Uwagi. — Krzywa, stanowiąca przecięcie powierzchni ze swą płaszczyzną styczną, i posiadająca równanie

$$0 = r x^2 + 2 s x y + t y^2 + \varphi_3 (x, y) + \dots,$$

posiada w początku układu punkt podwójny; styczne w tym punkcie podwójnym są właśnie stycznemi asymptomatycznemi. Ogólniej, jeżeli dwie powierzchnie S, S_1 są styczne w początku układu do płaszczyzny xy, to rzut krzywej przekroju na płaszczyznę xy posiada równanie

$$0 = (r - r_1) x^2 + 2 (s - s_1) x y + (t - t_1) y^2 + \dots,$$

w którym r_1, s_1, t_1 mają w stosunku do powierzchni S_1 takie same znaczenie, jak r, s, t w stosunku do S.

Rodzaj punktu podwójnego zależy od znaku wyrażenia

$$(s - s_1)^2 - (r - r_1) (t - t_1);$$

jeżeli wyrażenie to równa się zeru, krzywa, stanowiąca przekrój, posiada w ogólności punkt zwrotu.

W krótkości, każdemu punktowi powierzchni odpowiadają cztery położenia stycznych do tej powierzchni, godne baczniejszej uwagi: odróżniamy mianowicie dwie styczne, prostopadłe względem siebie, którym odpowiada największość lub najmniejszość promienia krzywizny R, oraz dwie styczne *asymptotyczne* (tangentes asymptotiques) czyli *styczne główne* (tang. principales), które dają promień R nieskończenie wielki. Otrzymujemy owe dwie styczne, wyrażając, iż trójmian

$$r \alpha^2 + 2 s \alpha \beta + t \beta^2$$

równa się zeru (p. art. 223). Wskażemy teraz, w jaki sposób dają się określić przekroje normalne główne i promienie główne krzywizny przy dowolnym układzie prostokątnym osi spółrzędnych.

242. Promienie główne krzywizny. — Badanie linji wskazującej wykazuje, iż wszelkiej danej wartości R odpowiadają w ogólności dwa przekroje normalne, rzeczywiste lub urojone, o promieniu krzywizny, posiadającym tę wartość; wyjątek zachodzi jedynie dla wartości R, równej jednemu z promieni głównych krzywizny — w tym wypadku istnieje tylko jeden przekrój normalny o takim promieniu krzywizny, a mianowicie odpowiedni przekrój normalny główny. Aby wyznaczyć przekroje normalne o danym promieniu krzywizny R, powróćmy do wzoru ogólnego (11), który napiszemy w postaci:

$$\frac{1}{\varsigma}=\frac{D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}, \tag{21}$$

zakładając, że

$$R=\varsigma\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

Przy danej wartości ς równanie (21) stanowi równanie drugiego stopnia względem $\frac{dv}{du}$

$$(\varsigma D-E)\,du^2+2(\varsigma D'-F)\,du\,dv+(\varsigma D''-G)\,dv^2=0, \tag{22}$$

którego dwa pierwiastki wyznaczają styczne do przekrojów normalnych o promieniu krzywizny R. Jeżeli R równa się jednemu z promieni głównych krzywizny, to równanie (22) posiada pierwiastek podwójny, czyniący zadość dwu związkom:

$$\begin{cases}(\varsigma D-E)\,du+(\varsigma D'-F)\,dv=0,\\(\varsigma D'-F)\,du+(\varsigma D''-G)\,dv=0,\end{cases} \tag{23}$$

układ ten wyznacza zarówno promienie główne krzywizny, jak przekroje normalne główne. Rugując $\frac{dv}{du}$, otrzymujemy równanie drugiego stopnia względem ς

$$(\varsigma D'-F)^2-(\varsigma D-E)(\varsigma D''-G)=0, \tag{24}$$

w którym wystarczy zastąpić ς przez

$$\frac{R}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

aby otrzymać równanie, dające bezpośrednio promienie główne krzywizny. Podobnież, rugując z tych samych dwu równań (23) ς, otrzymujemy równanie drugiego stopnia względem $\frac{dv}{du}$

$$(D\,du+D'\,dv)(F\,du+G\,dv)-(D'\,du+D''\,dv)(E\,du+F\,dv)=0, \tag{25}$$

którego pierwiastki wyznaczają ślady przekrojów normalnych głównych na płaszczyźnie stycznej.

Z samej natury zagadnienia wynika, że oba pierwiastki równania względem ς są zawsze rzeczywiste; jeżeli R i R' stanowią promienie główne krzywizny, to iloczyn RR' może być obliczony za pomocą związku

$$\frac{1}{RR'} = \frac{DD'' - D'^2}{(EG - F^2)(A^2 + B^2 + C^2)}, \tag{26}$$

który potwierdza wyniki dawniej otrzymane. W istocie, RR' posiada taki sam znak, jak $DD'' - D'^2$, gdyż $EG - F^2$ jest zawsze dodatnie. W punkcie parabolicznym jeden z promieni głównych jest nieskończenie wielki i $\frac{1}{RR'}$ równa się zeru.

Aby równanie (24) posiadało pierwiastki równe, linja wskazująca musi być okręgiem, i wszystkie przekroje normalne będą miały ten sam promień krzywizny. Strona prawa wzoru (11) musi być w takim razie niezależna od stosunku $\frac{dv}{du}$; potrzeba do tego warunków następujących:

$$\frac{D}{E} = \frac{D'}{F} = \frac{D''}{G}. \tag{27}$$

Punkty, czyniące zadość tym warunkom, noszą nazwę punktów *kołowych* (lub *ombilików* — les ombilics). Dla takich punktów równanie (25) staje się tożsamością, ponieważ wszelka średnica koła jest osią symetrji. O ile określamy powierzchnię za pomocą równania $z = F(x, y)$, równania (24), (25), (27) przybierają odpowiednio postać:

$$\left\{\begin{aligned} &(rt - s^2)R^2 - \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,[(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r]R + \\ &\qquad + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0, \end{aligned}\right. \tag{24'}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha^2[(1 + p^2)s - pqr] + \\ &\qquad + \alpha\beta[(1 + p^2)t - (1 + q^2)r] + \beta^2[pqt - (1 + q^2)s] = 0, \end{aligned}\right. \tag{25'}$$

$$\frac{r}{1 + p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1 + q^2}. \tag{27'}$$

Można uważać te wzory za postać szczególną wzorów ogólnych lub też uzasadnić je bezpośrednio przez wnioskowanie z wzoru (13).

Można niekiedy wyznaczyć przekroje normalne główne powierzchni za pomocą rozważań czysto gieometrycznych. Np. rzecz oczywista, iż jeżeli powierzchnia S posiada płaszczyznę symetrji, zawierającą punkt M tej powierzchni, to prosta przecięcia się tej płaszczyzny z płaszczyzną styczną w punkcie M stanowi oś symetrji linji wskazującej, a przekrój powierzchni płaszczyzny symetrji jest jednym z przekrojów normalnych głównych. W ten sposób południk, przeciągnięty przez jakiś punkt powierzchni obrotowej, stanowi jeden z przekrojów normalnych głównych; płaszczyzna drugiego przekroju normalnego głównego przechodzi tedy przez normalną do powierzchni i styczną do równoleżnika. Otóż znamy środek krzywizny jednego z przekrojów ukośnych, zawierających styczną do równoleżnika, a mianowicie środek samego równoleżnika. Stąd wynika, podług twierdzenia Meusniera, że środkiem krzywizny drugiego przekroju głównego jest punkt przecięcia normalnej do powierzchni z osią obrotu.

Gdy mamy do czynienia z punktem powierzchni rozwijalnej, to $s^2 - rt = 0$, i linja wskazująca staje się układem dwuch prostych. Jednym z przekrojów głównych jest w tym wypadku sama linja tworząca, a odpowiedni promień główny krzywizny jest nieskończenie wielki. Płaszczyzna drugiego przekroju głównego jest prostopadła do linji tworzącej. Wszystkie punkty powierzchni rozwijalnej są tedy punktami *parabolicznemi*, i jest to jedyny rodzaj powierzchni o takiej własności (art. 214).

Jeżeli powierzchnia nierozwijalna jest w pewnych punktach wypukła, w innych zaś posiada krzywiznę różnoznaczną, to należy do niej, w ogólności, linja punktów parabolicznych, oddzielająca obszary, dla których $s^2 - rt$ jest dodatnie, od obszarów, dla których $s^2 - rt$ jest ujemne. Np. na pierścieniu (torusie) linję taką utworzą dwa skrajne równoleżniki (t. j. np. najwyższy i najniższy, o ile oś obrotu ma kierunek pionowy [*Uw. tłum.*]).

Powierzchnia wypukła posiada w ogólności tylko pewną liczbę skończoną odosobnionych ***punktów kołowych*** (d'ombilics isolés les uns des autres). Dowodzimy w sposób wyłuszczony poniżej, iż powierzchnia rzeczywista, której wszystkie punkty są punktami kołowemi, musi być powierzchnią kulistą. Oznaczmy znów przez λ, μ, ν dostawy kierunkowe normalnej do powierzchni; wzory (12) dają po zróżniczkowaniu

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{pqs - (1+q^2)r}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{pqt - (1+q^2)s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{pqr - (1+p^2)s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{pqs - (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Związki te, wobec wzorów (27'), przybierają postać:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{\partial\mu}{\partial y}.$$

Pierwszy z tych wzorów wskazuje, że λ zależy tylko od x, drugi — że μ zależy jedynie od y; przeto wartość wspólna pochodnych $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$, $\frac{\partial\mu}{\partial y}$ nie zależy ani od x, ani od y, czyli jest stała; oznaczmy ją przez $\frac{1}{a}$. Otrzymujemy wtedy:

$$\lambda = \frac{x - x_0}{a}, \qquad \mu = \frac{y - y_0}{a}, \qquad \nu = \frac{\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}{a},$$

$$p = -\frac{\lambda}{\nu} = -\frac{x - x_0}{\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}},$$

$$q = -\frac{\mu}{\nu} = -\frac{y - y_0}{\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^3}},$$

i wartość z, osiągnięta za pomocą całkowania, wyraża się w sposób następujący:

$$z = z_0 + \sqrt{a^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2};$$

odnajdujemy istotnie równanie powierzchni kulistej. Stwierdzilibyśmy podobnież, iż w razie, gdy $\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{\partial\mu}{\partial y} = 0$, powierzchnia badana jest płaszczyzną. Lecz równania (27') posiadają oprócz tego nieskończenie wiele rozwiązań zespolonych, czyniących zadość równaniu $1 + p^2 + q^2 = 0$, jak można się przekonać, różniczkując ten związek względem x i względem y.

II. — LINJE ASYMPTOTYCZNE. — LINJE KRZYWIZNOWE.

243. Linje asymptotyczne. — Przez każdy punkt jakiejś części powierzchni, o krzywiźnie różnoznacznej, przechodzą dwie styczne, którym odpowiadają przekroje normalne o nieskończonym promieniu krzywizny: są to asymptoty linji wskazującej. Nazywamy *linjami asymptotycznemi* (lignes asymptotiques) linje, nakreślone na powierzchni i styczne w każdym punkcie do jednej z asymptot. Gdy punkt przebiega jedną z tych linji, u i v stanowią funkcje jednej zmiennej; aby styczna była asymptotą linji wskazującej, du i dv winny, podług rozważań, rozwiniętych powyżej, czynić zadość związkowi:

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0. \tag{28}$$

Wobec tego, że D, D', D'' stanowią funkcje zmiennych u i v, wyciągamy z poprzedniego równania dwie wartości pochodnej $\frac{dv}{du}$

$$\frac{dv}{du} = \varphi_1(u, v), \qquad \frac{du}{du} = \varphi_2(u, v); \tag{29}$$

dowiedziemy później, że każde z tych równań posiada nieskończenie wiele całek i że każda para wartości (u_0, v_0) wyznacza naogół jedną z tych całek, ale tylko jedną. Przez każdy punkt powierzchni przechodzą tedy dwie — ale nie więcej — linje asymptotyczne. Możemy jeszcze napisać równanie różniczkowe (28) w postaci równoważnej, a dogodniejszej naogół w zastosowaniach:

$$d\,A\,dx + d\,B\,dy + d\,C\,dz = 0. \tag{30}$$

W razie, gdy powierzchnia jest dana przez równanie $z = F(x, y)$, powyższe równanie różniczkowe przybiera postać

$$d\,p\,dx + d\,q\,dy = r\,dx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0. \tag{31}$$

Można jeszcze określić linje asymptotyczne za pomocą pewnej własności, niezależnej od pojęć metrycznych. Są to mianowicie *linje, zakreślone na powierzchni, których płaszczyzną ściśle styczną jest płaszczyzna styczna do powierzchni.* W istocie, na to, aby płaszczyzna ściśle styczna przystała do płaszczyzny stycznej do powierzchni, potrzeba i wystarcza, iżby spełnione zostały równocześnie związki:

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0, \qquad A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0;$$

pierwszy z nich zachodzi dla wszelkiej krzywej, zakreślonej na powierzchni, gdy tymczasem drugi, wobec tożsamości (6), jest równoznaczny z równaniem (30). Zresztą łatwo zdać sobie sprawę z równoważności obu określeń. Ponieważ promień krzywizny przekroju normalnego, stycznego do asymptoty linji wskazującej, jest nieskończony, więc to samo, podług twierdzenia Meusniera, musi się stosować do promienia krzywizny linji asymptotycznej, o ile tylko płaszczyzna ściśle styczna tej linji nie jest prostopadła do normalnej, w którym to wypadku twierdzenie Meusniera traci swą wartość. Płaszczyzna ściśle styczna linji asymptotycznej musi tedy stanowić jedno z płaszczyzną styczną do powierzchni, o ile tylko promień krzywizny tej linji nie jest stale nieskończony; w takim razie mielibyśmy linję prostą, a więc linję o nieoznaczonej płaszczyźnie ściśle stycznej. Z własności omawianej wynika oczywiście, że linje asymptotyczne zostają zachowane, jako takie, przy wszelkiem przekształceniu homograficznym (= jednokreślnym). Widzimy stąd również, że równanie różniczkowe ma ten sam kształt, niezależnie od tego czy układ spółrzędnych jest prostokątny czy też ukośnokątny, ponieważ równanie płaszczyzny ściśle stycznej jest w obu wypadkach jednakowe.

Linje asymptotyczne mogą oczywiście istnieć na pewnej powierzchni S jedynie wtedy, gdy ta powierzchnia posiada krzywiznę różnoznaczną. Atoli, gdy powierzchnia jest *analityczna*, równanie różniczkowe (28) posiada zawsze nieskończoną liczbę całek, rzeczywistych lub zespolonych, niezależnie od znaku wyrażenia $D'^2 - DD''$. Powiemy dla uogólnienia, iż powierzchnia analityczna wypukła posiada dwa układy linji asymptotycznych *urojonych* (imaginaires). Tak np. linje asymptotyczne hiperboloidy jednopłatowej tworzą dwa układy tworzących prostolinjowych; gdy mamy do czynienia z elipsoidą lub kulą, tworzące te są urojone, lecz czynią również zadość równaniu różniczkowemu linji asymptotycznych.

Przykłady. — 1. Chcemy określić linje asymptotyczne powierzchni:

$$z = x^m y^n;$$

mamy:

$$r = m(m-1)\, x^{m-2} y^n, \quad s = mn\, x^{m-1} y^{n-1}, \quad t = n(n-1)\, x^m y^{n-2},$$

i równanie różniczkowe (31) może być napisane w postaci

$$m(m-1)\left(\frac{y\,dx}{x\,dy}\right)^2 + 2mn\left(\frac{y\,dx}{x\,dy}\right) + n(n-1) = 0.$$

Otrzymujemy stąd dwie wartości, h_1 i h_2, stosunku $\frac{y\,dx}{x\,dy}$; dwie rodziny linji asymptotycznych mają za rzuty na płaszczyznę xy rodziny krzywych

$$y^{h_1} = C_1 x, \qquad y^{h_2} = C_2 x.$$

2. Weźmy jeszcze powierzchnię *ostrokręgowatą* (czyli konoidę — la surface conoïde) $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Można założyć: $x = u$, $y = uv$, $z = \varphi(v)$ i wtedy związki (3) przybiorą postać:

$$A + Bv = 0, \qquad Bu + C\varphi'(v) = 0;$$

uczynimy zadość tym warunkom, biorąc $C = -u$, $B = \varphi'(v)$, $A = -v\varphi'(v)$; otrzymamy tedy równanie różniczkowe (30) w postaci

$$u\varphi''(v)\,dv^2 - 2\varphi'(v)\,du\,dv = 0.$$

Otrzymujemy z początku rozwiązanie $v = Const$, dające tworzące prostolinjowej; po podzieleniu przez dv, mamy równanie

$$\frac{\varphi''(v)\,dv}{\varphi'(v)} = \frac{2\,du}{u},$$

z którego wypada: $u^2 = C\varphi'(v)$, i rzuty linji asymptotycznych drugiego układu na płaszczyznę xy posiadają równanie:

$$x^2 = C\varphi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

3. Przytoczmy jeszcze powierzchnie, wskazane przez Jameta, o równaniu dającym się wyrazić w postaci:

$$xf\left(\frac{y}{z}\right) = F(z).$$

Biorąc za zmienne niezależne z i $\frac{y}{x} = u$, otrzymujemy następujące równanie różniczkowe linji asymptotycznych:

$$\sqrt{\frac{F''(z)}{F(z)}}\,dz = \pm\sqrt{\frac{f''(u)}{f(u)}}\,du,$$

które daje się scałkować za pomocą dwuch kwadratur.

4. Powierzchni śrubowej (hélicoïde) odpowiadają równania

$$x = \varsigma \cos \omega, \qquad y = \varsigma \sin \omega, \qquad z = f(\varsigma) + h\,\omega;$$

pozostawiamy czytelnikowi uzasadnienie, że równaniem różniczkowym linji asymptotycznych jest równanie

$$\varsigma f''(\varsigma)\, d\varsigma^2 - 2h\, d\omega\, d\varsigma + \varsigma^2 f'(\varsigma)\, d\omega^2 = 0,$$

z którego można wyznaczyć ω za pomocą kwadratury.

244. Linje asymptotyczne powierzchni prostolinjowych. — Wszelka powierzchnia *prostolinjowa* (surface reglée) może być wyrażona za pomocą równań o postaci:

$$x = x_0 + \alpha u, \qquad y = y_0 + \beta u, \qquad z = z_0 + \gamma u,$$

w których x_0, y_0, z_0, α, β, γ stanowią funkcje parametru v. Gdy uczynimy $u = 0$, punkt (x, y, z) czyli, w tym wypadku, (x_0, y_0, z_0) zakreśla na powierzchni pewną krzywą Γ; gdy przeciwnie, pozostawiając v bez zmiany, zmieniamy u, punkt (x, y, z) zakreśla tworzącą prostolinjową powierzchni, i zmienna u jest proporcjonalna do odległości punktu (x, y, z) od punktu (x_0, y_0, z_0) krzywej Γ. Załóżmy, w celu uproszczenia rachunków, iż we wzorach (4) $K = \pm 1$; wyrażenia (15) i (16) wskazują odrazu, że $D = 0$, D' nie zależy od u, a wreszcie D'' stanowi wielomian co najwyżej drugiego stopnia względem u. Dzieląc lewą stronę równania (28) przez czynnik dv, odpowiadający tworzącym prostolinjowym, otrzymujemy równanie różniczkowe, w którym L, M i N są to funkcje zmiennej v:

$$\frac{du}{dv} + Lu^2 + Mu + N = 0, \tag{32}$$

wyznaczające drugi układ linji asymptotycznych. Równania tego rodzaju posiadają własności, godne uwagi, które uzasadnimy w późniejszym czasie. Spostrzeżemy np., że *stosunek anharmoniczny czterech jakichkolwiek całek jest stały;* stąd wynika, że stosunek anharmoniczny czterech punktów, w których dowolna tworząca powierzchni spotyka cztery linje asymptotyczne, jest stały, co pozwala wyznaczyć wszystkie te linje asymptotyczne, skoro znamy trzy z nich. Stwierdzimy również, że gdy znamy jedną lub dwie całki równania (32), to wszystkie pozostałe dadzą się odnaleźć za pomocą jednej lub dwuch kwadratur. Jeżeli wszystkie tworzące powierzchni przecinają pewną prostą stałą, prosta owa stanowi linję asymptotyczną, należącą do drugiego układu, i wszystkie pozostałe linje tego układu otrzymamy za pomocą dwu kwadratur. Jeżeli powierzchnia posiada dwie kierownice prostolinjowe, to znamy dwie linje asymptotyczne, i zdawałoby się, iż w celu otrzymania pozostałych potrzeba wykonać jedną kwadraturę.

Lecz można osiągnąć wynik ściślejszy. W istocie, gdy mamy powierzchnię prostolinjową o dwuch kierownicach prostolinjowych, można zastosować do niej przekształcenie homograficzne tego rodzaju, iżby jedna z tych kierownic stała się prostą w nieskończoności; powierzchnia prostolinjowa staje się powierzchnią *ostrokręgowatą* (s. conoïde), a zauważyliśmy powyżej (art. 243), że linje asymptotyczne powierzchni ostrokręgowatej mogą być otrzymane bez żadnej kwadratury.

245. Linje sprzężone. — *Stycznemi sprzężonemi* (tangentes conjugueés) w punkcie powierzchni S nazywamy dwie proste, przechodzące przez ten punkt, zawarte w płaszczyźnie stycznej i tworzące układ średnic sprzężonych linji wskazującej. Wszelkiej stycznej do powierzchni odpowiada oczywiście styczna, sprzężona z nią; jest ona naogół różna od pierwszej, z wyjątkiem tego jedynie wypadku, kiedy dana styczna jest jedną ze stycznych głównych. Jeżeli du i dv oznaczają parametry kierunkowe stycznej do powierzchni [określonej za pomocą równań:

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v) \qquad (Uw. tł.)].$$

to rzut tej stycznej na płaszczyznę xy ma spółczynnik kątowy, równy

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv}{\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv},$$

i przeto stosunek anharmoniczny czterech stycznych w punkcie $M(u, v)$ powierzchni równa się stosunkowi anharmonicznemu czterech odpowiednich wartości stosunku $\frac{dv}{du}$ (1).

Oznaczmy przez (du, dv) i $(\delta u, \delta v)$ parametry kierunkowe dwuch stycznych MT i MT', a przez c i c' pierwiastki równania

$$D + 2D'm + D''m^2 = 0,$$

(1) Jak można okazać za pomocą łatwego rachunku, stosunek anharmoniczny czyli *stosunek podwójnego podziału* czterech prostych a, b, c, d:

$$\frac{\sin \widehat{(a, c)}}{\sin \widehat{(b, c)}} : \frac{\sin \widehat{(a, d)}}{\sin \widehat{(b, d)}} \text{ równa się też } \frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2} : \frac{t_4 - t_1}{t_4 - t_2},$$

gdzie t_1, t_2, t_3, t_4 oznaczają spółczynniki kątowe prostych a, b, c, d w stosunku do dowolnych osi. Por. np. *Cours de géom. an.*, B. Niewenglowski, 1894, t. I, 98—102.

[*Uw. tłum.*].

wyznaczającego styczne główne. Na to aby MT i MT' były z sobą sprzężone, potrzeba i wystarcza, iżby został spełniony warunek [1]

$$\frac{dv - c\,du}{dv - c'\,du} + \frac{\delta v - c\,\delta u}{\delta v - c'\,\delta u} = 0.$$

Nadając temu równaniu postać całkowitą i zastępując cc', $c+c'$ przez ich wartości, otrzymujemy

$$D\,du\,\delta u + D'(du\,\delta v + dv\,\delta u) + D''\,dv\,\delta v = 0. \tag{33}$$

Ze względu na wartości D, D', D''; warunek ten może jeszcze przybrać każdą z dwuch postaci następujących:

$$d A\,\delta x + d B\,\delta y + d C\,\delta z = 0, \quad \delta A\,dx + \delta B\,dy + \delta C\,dz = 0; \tag{34}$$

oznaczamy przytym ogólnie:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv, \qquad \delta F = \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial v}\delta v.$$

Gdy mamy krzywą Γ, położoną na powierzchni S, to płaszczyzny styczne do tej powierzchni wzdłuż krzywej Γ obwijają powierzchnię rozwijalną, styczną do powierzchni S wzdłuż całej linji Γ; *w każdym punkcie M krzywej Γ tworząca tej powierzchni rozwijalnej jest styczną sprzężoną ze styczną krzywej Γ.*

W istocie, gdy przebiegamy krzywą Γ, x, y, z, A, B, C są zależne od jednego parametru zmiennego α; linja charakterystyczna płaszczyzny stycznej, wobec związku (5), da się określić za pomocą równań:

$$\begin{cases} A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0 \\ dA(X-x) + dB(Y-y) + dC(Z-z) = 0. \end{cases} \tag{35}$$

Litera d oznacza różniczki, liczone względem α; jeżeli parametry kierunkowe tej linji charakterystycznej oznaczymy przez δx, δy, δz, drugi z wzorów (35) przekształca się w związek:

$$d A\,\delta x + d B\,\delta y + d C\,\delta z = 0,$$

taki sam, jak związek (34); stąd wynika wypowiedziane twierdzenie. W szczególności, jeżeli krzywa Γ jest jedną z linji asymptotycznych, linją charakterystyczną jest sama styczna do krzywej Γ, która stanowi przeto krawędź zwrotu powierzchni rozwijalnej (p. art. 243).

---

(1) Wyrażający, iż stosunek anharmoniczny prostych o spółczynnikach kierunkowych: c, c', $\frac{dv}{du}$, $\frac{\delta v}{\delta u}$ równa się -1. [*Uw. tłum.*].

Mówimy, iż dwie rodziny krzywych, nakreślonych na powierzchni, z których każda zależy od jednego parametru zmiennego, tworzą *sieć sprzężoną* (réseau conjugué), jeżeli styczne, odpowiadające krzywym z dwu rodzin, przechodzącym przez jakiś punkt powierzchni, są ze sobą sprzężone. Rzecz oczywista, istnieje nieskończenie wiele sieci sprzężonych, ponieważ można obrać dowolnie jedną z dwu rodzin krzywych, a w takim razie krzywe drugiej rodziny będą wyznaczone za pomocą równania różniczkowego pierwszego rzędu. Istotnie, niech $F(u, v) = K$ stanowi równanie rodziny krzywych, zależnych od dowolnego parametru K. Z równania $dF = 0$ otrzymujemy $\frac{dv}{du} = G(u, v)$, i równanie (33) wyznacza wtedy wartość $\frac{\delta v}{\delta u}$ w zależności od u i v, czyli stanowi równanie różniczkowe pierwszego rzędu.

Poszukajmy np. warunku, aby krzywe $u = const.$, $v = const.$ tworzyły sieć sprzężoną. Można tu założyć $du = 0$, $\delta v = 0$, i warunek (33) przekształca się w $D' = 0$ czyli

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Jak można rzec jeszcze, warunek ten wyraża, że x, y, z stanowią trzy całki równania o postaci

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = M \frac{\partial \Theta}{\partial u} + N \frac{\partial \Theta}{\partial v}, \tag{36}$$

w którym M i N oznaczają funkcje dowolne zmiennych u i v; wystarcza tedy znać trzy różne całki jakiegokolwiek równania o tej postaci, aby otrzymać równania powierzchni, odniesionej do układu sprzężonego. Jeżeli np. weźmiemy $M = N = 0$, każda z całek równania (36) będzie sumą funkcji zmiennej u i funkcji zmiennej v; na wszelkiej powierzchni, której równania mają kształt:

$$x = f(u) + f_1(v), \qquad y = \varphi(u) + \varphi_1(v), \qquad z = \psi(u) + \psi_1(v), \tag{37}$$

krzywe (u) i (v) tworzą sieć sprzężoną.

Powierzchnie tego rodzaju są zwane *powierzchniami translacyjnemi* (surfaces de translation); mogą one być utworzone dwoma różnemi sposobami za pomocą ruchu postępowego (translation) krzywej Γ, pozostającej w tym ruchu bez zmiany, której jakiś punkt zakreśla drugą krzywą Γ'. W istocie, rozważmy cztery punkty powierzchni: M_0, M_1, M_2, M, odpowiadające wartościom (u_0, v_0), (u, v_0), (u_0, v), (u, v) parametrów u i v.

Podług wzorów (37) te cztery punkty stanowią wierzchołki równoległoboku. Jeżeli zmieniamy u, pozostawiając v_0 bez zmiany, to punkt M_1 zakreśla krzywą Γ, położoną na powierzchni; tak samo, jeżeli u_0 pozostaje stałe a v zmienia się, to punkt M_2 przebiega inną krzywą Γ', leżącą na powierzchni. Można tedy uważać tę powierzchnię za utworzoną przez krzywą Γ, której nadano taki ruch postępowy, że punkt M_2 zakreśla Γ', lub przez krzywą Γ', której nadano taki ruch postępowy, że punkt M_1 przebiega Γ. Wobec tego sposobu powstawania powierzchni, rzecz oczywista, iż owe dwie rodziny krzywych są ze sobą sprzężone. Istotnie, styczne np. do różnych położeń krzywej Γ', we wszystkich punktach krzywej Γ, tworzą powierzchnię walcową, styczną do powierzchni wzdłuż całej krzywej Γ. Styczne tych dwu krzywych są tedy z sobą sprzężone.

246. Linje krzywiznowe. — *Linjami krzywiznowemi* (lignes de courbure) powierzchni S nazywamy linje, położone na tej powierzchni i styczne w każdym ze swych punktów do jednej z osi linji wskazującej. Określamy te linje za pomocą otrzymanego powyżej równania różniczkowego

$$(25)\quad \begin{cases} (D\,du + D'\,dv)\,(F\,du + G\,dv) - \\ \qquad - (D'\,du + D''\,dv)\,(E\,du + F\,dv) = 0, \end{cases}$$

z którego dadzą się wysnuć zawsze dwie wartości rzeczywiste stosunku $\frac{dv}{du}\cdot$ Z teorji ogólnej równań różniczkowych wynika, że przez każdy punkt zwyczajny powierzchni, nie będący punktem kołowym, przechodzą dwie, ale tylko dwie linje krzywiznowe, z których każda jest styczna do jednej osi l. wskazującej. Przeto na każdej powierzchni rzeczywistej, odmiennej od płaszczyzny i powierzchni kulistej, istnieją dwie rodziny linji krzywiznowych, tworzące sieć jednocześnie prostokątną i sprzężoną.

Linje krzywiznowe mogą jeszcze być określone za pomocą własności następującej: są to *takie linje, położone na powierzchni, że normalne do powierzchni w różnych punktach jednej z nich tworzą powierzchnię rozwijalną.*

Weźmy, w istocie, równania normalnej

$$\frac{X-x}{A} = \frac{Y-y}{B} = \frac{Z-z}{C};$$

warunek niezbędny i wystarczający do tego, aby ta prosta tworzyła powierzchnię rozwijalną, stanowi równanie (art. 215)

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ A & B & C \\ dA & dB & dC \end{vmatrix} = 0$$

czyli, po rozwinięciu różniczek

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, & \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, & \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \\ A & B & C \\ \frac{\partial A}{\partial u} du + \frac{\partial A}{\partial v} dv, & \frac{\partial B}{\partial u} du + \frac{\partial B}{\partial v} dv, & \frac{\partial C}{\partial u} du + \frac{\partial C}{\partial v} dv \end{vmatrix} = 0.$$

Aby wykazać tożsamość tego równania różniczkowego z równaniem (25), pomnóżmy wyrazy pierwszej kolumny przez $\frac{\partial x}{\partial u}$, wyrazy drugiej przez $\frac{\partial y}{\partial u}$, trzeciej przez $\frac{\partial z}{\partial u}$, i zastąpmy wyrazy pierwszej kolumny przez sumy odpowiednich iloczynów. Po dokonaniu jeszcze tego samego w stosunku do zmiennej v, otrzymujemy, uwzględniając wartości D, D', D'' (wzory 14 i 14′), równanie:

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv, & F\,du + G\,dv, & \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \\ 0 & 0 & C \\ D\,du + D'dv, & D'du + D''dv, & \frac{\partial C}{\partial u} du + \frac{\partial C}{\partial v} dv \end{vmatrix} = 0;$$

odnajdujemy w istocie równanie (25).

Łatwo zdać sobie sprawę z tego wyniku, gdy uwzględnimy własności rozwiniętych krzywych skośnych i własności stycznych sprzężonych.

Niech Γ stanowi taką linję na powierzchni S, iż normalna MN (przy przesuwaniu się punktu M wzdłuż Γ. — *Uw. tłum.*), tworzy powierzchnię rozwijalną; jeżeli obrócimy tę prostą dokoła punktu M w płaszczyźnie normalnej do Γ, to otrzymamy prostą MT' w płaszczyźnie stycznej, prostopadłą do stycznej MT krzywej Γ. Prosta MT' tworzy również powierzchnię rozwijalną, stykającą się z S wzdłuż krzywej Γ (art. 235). Proste MT, MT' są tedy stycznemi sprzężonemi; są to osie linji wskazującej, gdyż się przecinają pod kątem prostym. Twierdzenie odwrotne można uzasadnić w podobny sposób.

W zastosowaniach bywa często dogodnie użyć postaci (38) równania różniczkowego linji krzywiznowych, ponieważ nie potrzeba w takim razie wyliczania uprzedniego sześciu spółczynników E, F, G, D, D', D''. Załóżmy np., że mamy powierzchnię, daną przez równanie $z = F(x, y)$; równania normalnej posiadają kształt:

$$(39) \qquad \begin{cases} X = -pZ + (x + pz), \\ Y = -qZ + (y + qz); \end{cases}$$

aby ta prosta tworzyła powierzchnię rozwijalną, potrzeba i wystarcza, iżby równania (215)

$$(40) \qquad -Z\,dp + d(x+pz) = 0, \qquad -Z\,dq + d(y+qz) = 0$$

były spełnione przy tej samej wartości Z, to jest, iżbyśmy mieli

$$\frac{d(x+pz)}{dp} = \frac{d(y+qz)}{dq}$$

czyli w postaci prostszej

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq}.$$

Zastępując dz, dp, dq przez ich wyrażenia, otrzymujemy równanie różniczkowe

$$(41) \qquad \frac{(1+p^2)\,dx + p\,q\,dy}{r\,dx + s\,dy} = \frac{p\,q\,dx + (1+q^2)\,dy}{s\,dx + t\,dy};$$

zmieniające się, po zastąpieniu dx i dy odpowiednio przez α i β, na równanie (25').

1. Poszukajmy np. linji krzywiznowych powierzchni śrubowej (helikoidy)

$$z = arc\ tang\ \frac{y}{x}.$$

Możemy tu założyć

$$x = \varsigma\cos\Theta, \qquad y = \varsigma\sin\Theta, \qquad z = a\Theta;$$

spółczynniki A, B, C winny czynić zadość związkom

$$A\cos\Theta + B\sin\Theta = 0$$

$$-A\varsigma\sin\Theta + B\varsigma\cos\Theta + Ca = 0.$$

Weźmy $C = \varsigma$ i przeto $A = a\sin\Theta$, $B = -a\cos\Theta$.

Równanie różniczkowe (38), po rozwinięciu i redukcji wyrazów podobnych, przybiera postać

$$d\varsigma^2 - (\varsigma^2 + a^2)\,d\Theta^2 = 0.$$

Otrzymujemy stąd

$$d\Theta = \pm\frac{d\sigma}{\sqrt{\varsigma^2 + a^2}};$$

gdy weźmiemy np. znak $+$, to z całkowania wynika:

$$\varsigma + \sqrt{\varsigma^2 + a^2} = a\,e^{\Theta - \Theta_0}$$

i dalej

$$\varsigma = \frac{a}{2}\left[e^{\Theta - \Theta_0} - e^{-(\Theta - \Theta_0)}\right].$$

Rzuty tych linji krzywiznowych na płaszczyznę xy są linjami spiralnemi, równemi sobie wzajemnie, które łatwo wykreślić.

2. Poszukajmy jeszcze linji krzywiznowych paraboloidy $z = \frac{xy}{a}$. Mamy

$$p = \frac{y}{a}, \quad q = \frac{x}{a}, \quad r = t = 0, \quad s = \frac{1}{a},$$

i równanie różniczkowe (41) przybiera tu postać

$$(a^2 + y^2)\, dx^2 = (a^2 + x^2)\, dy^2.$$

Otrzymujemy stąd

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{y^2 + a^2}} = 0;$$

gdy weźmiemy np. oba pierwiastki ze znakiem $+$, to całka ogólna będzie wyrażona za pomocą równania

$$\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)\left(y + \sqrt{y^2 + a^2}\right) = C,$$

określającego jeden z układów linji krzywiznowych. Założywszy

(42) $$\lambda = x\sqrt{y^2 + a^2} + y\sqrt{x^2 + a^2},$$

możemy napisać jeszcze to równanie w postaci

$$\lambda + \sqrt{\lambda^2 + a^4} = C.$$

(Stosujemy przytym tożsamość

$$\left(x\sqrt{y^2 + a^2} + y\sqrt{x^2 + a^2}\right)^2 + a^4 = \left[xy + \sqrt{(x^2 + a^2)\,(y^2 + a^2)}\,\right]^2).$$

Stąd wynika, że rzuty jednego z układów linji krzywiznowych są wyznaczone za pomocą równania (42), w którym λ oznacza stałą dowolną. Podobnież stwierdzilibyśmy, że rzutom linji krzywiznowych, należących do drugiego układu, odpowiada równanie

(43) $$x\sqrt{y^2 + a^2} - y\sqrt{x^2 + a^2} = \mu.$$

Uwzględniając równanie paraboloidy $xy = az$, możemy napisać związki (42) i (43) w postaci

$$\sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + z^2} = C, \qquad \sqrt{x^2 + z^2} - \sqrt{y^2 + z^2} = C';$$

otóż

$$\sqrt{x^2 + z^2} \quad \text{i} \quad \sqrt{y^2 + z^2}$$

oznaczają odległości punktu (x, y, z) od osi Oy i osi Ox, a więc linje krzywiznowe paraboloidy są to takie krzywe, że suma lub różnica odległości jakiegokolwiek z ich punktów od osi Ox i Oy jest stała.

247. Rozwinięta powierzchni. (Développée d'une surface). — Niech C oznacza linję krzywiznową powierzchni S; gdy punkt M przebiega krzywą C, normalna MN powierzchni pozostaje wciąż styczną do pewnej krzywej Γ. Oznaczmy punkt styczności przez A, a jego spółrzędne przez X, Y, Z; Z możemy otrzymać z któregokolwiek z równań (40), stanowiących w istocie jedno, ponieważ C jest linją krzywiznową. Równania te mogą być napisane w postaci

$$Z-z=\frac{(1+p^2)\,dx+p\,q\,dy}{r\,dx+s\,dy}=\frac{p\,q\,dx+(1+q^2)\,dy}{s\,dx+t\,dy};$$

otrzymamy ułamek, równoważny każdemu z tych dwuch, mnożąc oba wyrazy pierwszego stosunku przez dx, a oba wyrazy drugiego przez dy, i dodając je potym, skąd wynika

$$Z-z=\frac{dx^2+dy^2+(p\,dx+q\,dy)^2}{r\,dx^2+2\,s\,dx\,dy+t\,dy^2}.$$

Lecz dx, dy, dz są proporcjonalne do dostaw kierunkowych α, β, γ stycznej; mamy tedy

$$Z-z=\frac{\alpha^2+\beta^2+(p\,\alpha+q\,\beta)^2}{r\,\alpha^2+2\,s\,\alpha\,\beta+t\,\beta^2}=\frac{1}{r\,\alpha^2+2\,s\,\alpha\,\beta+t\,\beta^2}.$$

Porównywując ten wzór z wzorem (13), wyznaczającym, wraz z odpowiednim znakiem, promień krzywizny R przekroju normalnego, stycznego do linji krzywiznowej, widzimy, że związek powyższy może być napisany w postaci

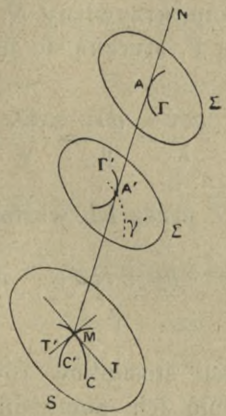
$$Z-z=\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=R\nu; \tag{44}$$

ν oznacza przytem dostawę kąta ostrego, utworzonego przez kierunek dodatni normalnej i oś Oz. Atoli $z+R\nu$ stanowi właśnie wartość Z, odpowiadającą środkowi krzywizny tego przekroju normalnego. Stąd wynika, że *punkt styczności normalnej MN z jej obwiednią Γ zbiega się ze środkiem krzywizny przekroju normalnego głównego, stycznego do C.* Krzywa Γ jest tedy miejscem gieometrycznym takich środków krzywizny. Gdy rozpatrujemy wszystkie linje krzywiznowe, należące do tego samego układu, co linja C, miejsce gieometryczne odpowiednich krzywych Γ stanowi powierzchnia Σ, do której są styczne wszystkie normalne powierzchni S. W istocie, np. normalna MN jest styczna w punkcie A do krzywej Γ, położonej na Σ.

Rozpatrzmy teraz drugą linję krzywiznową C', przechodzącą przez M i przecinającą pod kątem prostym linję C. Normalna do powierzchni S pozostaje tak samo wzdłuż C' styczną do krzywej Γ', stanowiącej miejsce gieometryczne środków krzywizny przekrojów normalnych, stycznych do C. Miejscem gieometrycznym krzywych Γ', odpowiadających układowi linji krzywiznowych, do którego należy C', jest powierzchnia Σ', do której są styczne wszystkie normalne powierzchni S. Powierzchnie Σ i Σ' nie stanowią naogół powierzchni odrębnych z punktu widzenia analitycznego (analitiquement distinctes), lecz dwa płaty tej samej powierzchni, posiadającej równanie nierozkładalne (indécomposable).

Normalna MN powierzchni S jest styczna do tych obu płatów Σ i Σ' w punktach A i A', stanowiących środki główne krzywizny powierzchni S w punkcie M. Łatwo znaleźć płaszczyzny styczne do tych płatów w punktach A i A' (rys. 44). Gdy punkt M przebiega krzywą C, normalna MN

Rys. 44.



zakreśla powierzchnię rozwijalną D, której krawędzią zwrotu jest Γ; z drugiej strony, punkt styczności A' tej normalnej MN z Σ' przebiega krzywą γ', różną od Γ', gdyż prosta MN nie może pozostać jednocześnie styczną do obu krzywych Γ i Γ'. Powierzchnia rozwijalna D i powierzchnia Σ' są tedy w punkcie A' styczne do siebie, i przeto płaszczyzna styczna w A' do Σ' ma wzdłuż MN styczność z powierzchnią rozwijalną D; jest to więc płaszczyzna NMT, zawierająca styczną do krzywej C. Tak samobyśmy stwierdzili, że płaszczyzną styczną w punkcie A do powierzchni Σ jest płaszczyzna NMT', przeciągnięta przez styczną do drugiej linji krzywiznowej C'.

Płaszczyzny NMT, NMT' są do siebie prostopadłe, skąd wynika ważna własność powierzchni rozwiniętej. Wyobraźmy sobie, że z jakiegoś punktu O w przestrzeni opuszczono na powierzchnię S normalną OM, której punkty A i A' są środkami głównemi krzywizny powierzchni S. Płaszczyzny styczne w punktach A i A' do dwu płatów Σ i Σ' powierzchni rozwiniętej są do siebie prostopadłe; ponieważ te płaszczyzny styczne przechodzą przez punkt O, przeto *widzowi, patrzącemu z jakiegokolwiek punktu O w przestrzeni, wydaje się, iż oba płaty powierzchni rozwiniętej, odpowiadającej jakiejś powierzchni S, przecinają się pod kątem prostym.* Twierdzenie odwrotne będzie dowiedzione w dalszym ciągu.

248. Wzory Olinda Rodrigues'a. — Oznaczając zawsze przez λ, μ, ν dostawy kierunkowe normalnej do powierzchni, przez R jeden z promieni głównych krzywizny, mamy spółrzędne odpowiedniego środka krzywizny w postaci

(45) $$X = x + R\lambda, \qquad Y = y + R\mu, \qquad Z = z + R\nu.$$

Gdy punkt (x, y, z) przebiega linję krzywiznową, styczną do przekroju normalnego o promieniu krzywizny R, ów środek krzywizny, jak widzieliśmy, zakreśla krzywą Γ, styczną do normalnej MN powierzchni S. Musimy tedy mieć:

$$\frac{dX}{\lambda} = \frac{dY}{\mu} = \frac{dZ}{\nu},$$

czyli, po zastąpieniu X, Y, Z przez ich wartości z (45):

$$\frac{dx + R\,d\lambda}{\lambda} = \frac{dy + R\,d\mu}{\mu} = \frac{dz + R\,d\nu}{\nu};$$

wspólna wartość tych trzech stosunków równa się zeru, ponieważ, gdy dodamy do siebie odpowiednio ich poprzedniki i następniki, po pomnożeniu obu wyrazów pierwszego stosunku przez λ, drugiego przez μ i trzeciego przez ν, to otrzymamy stosunek równoważny o mianowniku równym jedności, a liczniku

$$\lambda\,dx + \mu\,dy + \nu\,dz + R(\lambda\,d\lambda + \mu\,d\mu + \nu\,d\nu),$$

tożsamościowo równym zeru. Otrzymujemy w ten sposób wzory Olinda Rodrigues'a

(46) $$dx + R\,d\lambda = 0, \qquad dy + R\,d\mu = 0, \qquad dz + R\,d\nu = 0,$$

które odgrywają ważną rolę w teorji powierzchni. Naturalnie, wzory te stosują się tylko do przesunięć punktu (x, y, z) wzdłuż jakiejś linji krzywiznowej.

Uwaga. — Własności powierzchni rozwiniętej możemy również zużytkować w celu ułożenia równania, wyznaczającego promienie główne krzywizny. Zastąpmy we wzorach (45) λ, μ, ν przez ich wartości (8) i załóżmy

$$R = \varsigma\sqrt{A^2 + B^2 + C^2};$$

otrzymamy

$$X = x - \varsigma A, \qquad Y = y - \varsigma B, \qquad Z = z - \varsigma C.$$

Gdy punkt x, y, z zakreśla linję krzywiznową, to punkt X, Y, Z przebiega krzywą styczną do normalnej powierzchni S; mamy przeto

$$\frac{dx-\varsigma dA-A d\varsigma}{A}=\frac{dy-\varsigma dB-B d\varsigma}{B}=\frac{dz-\varsigma dC-C d\varsigma}{C},$$

czyli oznaczając przez $-d\varsigma+K$ wartość wspólną tych stosunków:

$$(47)\qquad \begin{cases} dx-\varsigma dA-AK=0, \qquad dy-\varsigma dB-BK=0,\\ \qquad\qquad dz-\varsigma dC-CK=0.\end{cases}$$

Rugując z tych związków ς i K, odnajdujemy równanie różniczkowe (38) linji krzywiznowych; lecz gdy zastąpimy dx, dy, dz, dA, dB, dC przez

$$\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv,\ldots,\qquad \frac{\partial C}{\partial u}du+\frac{\partial C}{\partial v}dv,$$

a potym wyrugujemy du, dv, K, to otrzymamy równanie względem ς

$$(48)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}-\varsigma\frac{\partial A}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v}-\varsigma\frac{\partial A}{\partial v}, & A\\ \frac{\partial y}{\partial u}-\varsigma\frac{\partial B}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial v}-\varsigma\frac{\partial B}{\partial v}, & B\\ \frac{\partial z}{\partial u}-\varsigma\frac{\partial C}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial v}-\varsigma\frac{\partial C}{\partial v}, & C \end{vmatrix}=0.$$

Tożsamość tego równania z równaniem (24) możemy stwierdzić za pomocą przekształceń, zupełnie podobnych do użytych w art. 246; równanie (48) nie wymaga uprzedniego obliczania E, F, G, D, D', D''.

Poszukajmy jeszcze, dla przykładu, promieni głównych krzywizny powierzchni śrubowej skośnej o płaszczyźnie kierowniczej (hélicoïde gauche à plan directeur). Zmieniając nieco użyte powyżej znakowanie, otrzymujemy

$$x=u\cos v,\qquad y=u\sin v,\qquad z=av$$
$$A=a\sin v,\qquad B=-a\cos v,\qquad C=u,$$

i równanie (48) przybiera postać

$$a^2\varsigma^2=a^2+u^2,$$

skąd $R=\pm\frac{a^2+u^2}{a}$. *Promienie główne krzywizny powierzchni śrubowej są tedy równe (co do wartości bezwzględnej), lecz mają znaki przeciwne.*

249. Twierdzenie Joachimsthala. — Można niekiedy znaleźć linje krzywiznowe powierzchni za pomocą rozważań gieometrycznych. Tak np. jest to rzecz niemal oczywista, że linjami krzywiznowemi powierzchni obrotowej są południki i równoleżniki tej powierzchni, ponieważ te krzywe są w każdym punkcie styczne do jednej z osi linji wskazującej. Sprawdzamy to, spostrzegając, że normalne, brane wzdłuż południka, tworzą płaszczyznę, a normalna, poruszająca się wzdłuż równoleżnika, tworzy stożek obrotowy, a więc, że w obu wypadkach powstają powierzchnie rozwijalne.

Na powierzchni rozwijalnej jedną z rodzin linji krzywiznowych stanowią linje tworzące. Drugą tworzą krzywe, które przecinają tworzące pod kątem prostym ([1]) (trajectoires orthogonales des génératrices), czyli rozwijające krawędzi zwrotu (art. 235); otrzymujemy je za pomocą kwadratury. O ile znamy jedną z nich, możemy na tej zasadzie wyznaczyć wszystkie inne bez żadnej kwadratury. Wszystkie te wyniki łatwo sprawdzić za pomocą rachunku.

Teorja rozwiniętych krzywej skośnej nasunęła Joahimsthalowi ważne twierdzenie, często stosowane w tej teorji. Weźmy dwie powierzchnie S i S', przecinające się wzdłuż krzywej C, która stanowi dla każdej z nich linję krzywiznową; normalna MN do powierzchni S, przesuwając się wzdłuż C, tworzy powierzchnię rozwijalną, a normalna MN' powierzchni S' tworzy w tych samych warunkach inną powierzchnię rozwijalną. Owóż, obie te proste są normalne do krzywej C. A więc, *jeżeli dwie powierzchnie posiadają wspólną linję krzywiznową, to przecinają się wzdłuż tej linji pod kątem stałym* (art. 235).

Naodwrót, *jeżeli dwie powierzchnie przecinają się pod kątem stałym i jeżeli linja przecięcia stanowi linję krzywiznową jednej z nich, to jest również linją krzywiznową dla drugiej.* Wiemy, w istocie, że jeżeli jakaś rodzina normalnych krzywej skośnej C tworzy powierzchnię rozwijalną, to samo się stosuje do normalnych, które otrzymamy, obracając każdą z poprzednich o kąt stały w płaszczyźnie normalnej do krzywej C.

Wszelka krzywa płaska lub kulista jest linją krzywiznową płaszczyzny lub kuli. Wysnuć tedy możemy z twierdzenia Joachimsthala wniosek następujący: *na to, aby linja płaska lub kulista, położona na powierzchni, stanowiła jej linję krzywiznową, potrzeba i wystarcza, iżby powierzchnia przecinała odpowiednią płaszczyznę lub powierzchnię kulistą pod kątem stałym.*

250. Twierdzenie Dupina. — Parę razy już mówiliśmy o układach potrójnie prostokątnych (systèmes triples orthogonaux) — art. 68, 147. Pochodzenie tej teorji należy odnieść do słynnego twierdzenia, odkrytego przez Dupina, które tu uzasadnimy:

([1]) Bywa także używana nazwa: poprzeczne ortogonalne tworzących. [*Uw. tł.*].

Gdy mamy dane trzy rodziny powierzchni, tworzące układ potrójnie prostokątny, to linja przecięcia dwuch powierzchni, należących do różnych rodzin, jest dla każdej z tych powierzchni linją krzywiznową.

Załóżmy, że spółrzędne prostokątne jakiegoś punktu w przestrzeni x, y, z są wyrażone za pomocą trzech parametrów u, v, w, w taki sposób, że trzy rodziny powierzchni (u), (v), (w) tworzą układ potrójnie prostokątny. Warunki prostokątności polegają na trzech związkach (art. 68).

$$(49) \qquad S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}=0, \quad S\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u}=0, \quad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=0.$$

Gdy zróżniczkujemy te związki odpowiednio względem u, v, w, to wypadnie:

$$S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial w}+S\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=0, \quad S\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial w}=0,$$

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial w}+S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial w}=0,$$

skąd za pomocą łatwych zestawień otrzymujemy

$$(50) \qquad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial w}=0, \quad S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial w}=0, \quad S\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=0,$$

Przez wyrugowanie $\frac{\partial x}{\partial w}$, $\frac{\partial y}{\partial w}$, $\frac{\partial z}{\partial w}$ z dwu pierwszych równań (49) i ostatniego z równań (50) dochodzimy do warunku:

$$(51) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \end{vmatrix}=0,$$

który wyraża, że na powierzchni (w) krzywe $u=C$, $v=C'$ tworzą sieć sprzężoną. Sieć ta, będąc jednocześnie prostokątną i sprzężoną, składa się tedy, jak zapowiedzieliśmy w twierdzeniu, z linji krzywiznowych.

Ciekawy przykład układu potrójnie prostokątnego stanowią powierzchnie spółogniskowe drugiego rzędu (art. 148), których badanie bez wątpienia nasunęło Dupinowi twierdzenie ogólne. Z twierdzenia tego wynika, iż linje krzywiznowe elipsoidy lub hiperboloidy (otrzymane już przez Monge'a) są krzywemi przecięcia tej powierzchni z powierzchniami drugiego rzędu, spółogniskowemi z nią.

Paraboloidy o równaniu

$$\frac{y^2}{p-\lambda}+\frac{z^2}{q-\lambda}=2x-\lambda,$$

zawierającym parametr zmienny λ, tworzą również układ potrójnie prostokątny; otrzymujemy na tej zasadzie linje krzywiznowe paraboloidy. Przytoczmy jeszcze układ potrójny, napotkany powyżej (art. 246)

$$\frac{xy}{z}=\alpha, \qquad \sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2}=\beta, \qquad \sqrt{x^2+z^2}-\sqrt{y^2+z^2}=\gamma.$$

Badanie układów potrójnie prostokątnych jest jednym z zadań najbardziej zajmujących i najtrudniejszych gieometrji nieskończonostkowej. Poświęcono temu zagadnieniu wiele rozpraw, których wyniki zostały streszczone w najnowszej pracy p. Darboux ([1]). Dowolna powierzchnia S należy do nieskończenie wielu układów potrójnie prostokątnych; jeden z tych układów stanowią powierzchnie równoległe do S oraz dwie rodziny powierzchni rozwijalnych, utworzonych przez normalne do S, przesuwające się wzdłuż linji krzywiznowych tej powierzchni. Weźmy, w istocie, punkt dowolny O normalnej MN do powierzchni S w punkcie M; MT i MT' niech stanowią styczne do linji krzywiznowych C i C', przechodzących przez M. Powierzchnia równoległa do S, przeciągnięta przez punkt O, posiada płaszczyznę styczną, równoległą do płaszczyzny stycznej w punkcie M do powierzchni S; powierzchniom rozwijalnym, utworzonym przez normalne, przesuwające się wzdłuż krzywej C lub C', odpowiadają płaszczyzny styczne NMT i NMT'. Te trzy płaszczyzny przecinają się istotnie parami pod kątem prostym.

Każdy układ potrójnie prostokątny wyznacza nieskończenie wiele innych podobnych układów, które otrzymujemy za pomocą przekształcenia przez promienie odwrotne (transformation par rayons vecteurs réciproques), ponieważ przekształcenie to zachowuje kąty bez zmiany. Ponieważ, jak widzieliśmy, wszelka powierzchnia należy do układu potrójnie prostokątnego, przeto — jak łatwo sprawdzić — przy wszelkim przekształceniu przez promienie odwrotne, *linje krzywiznowe powierzchni przekształconej, są to przekształcone linji krzywiznowych powierzchni pierwotnej.*

([1]) *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, 1898.

251. Zastosowanie do pewnych klas powierzchni. — Wyznaczenie powierzchni o linjach krzywiznowych, spełniających pewne warunki gieometryczne, dane z góry, stanowi zagadnienie, podejmowane wielokrotnie w różnych postaciach. Wskażemy niektóre z najprostszych wyników, osiągniętych w tym zakresie.

Poszukajmy z początku wszystkich powierzchni, których linje krzywiznowe, należące do jednego z układów, są okręgami. Podług twierdzenia Joachimsthala płaszczyzna koła winna przecinać powierzchnię pod kątem stałym; stąd wynika, że normalne do powierzchni we wszystkich punktach okręgu C winny spotykać oś koła (to jest prostopadłą do płaszczyzny koła, wystawioną z jego środka), w tym samym punkcie O. Powierzchnia kulista o środku w punkcie O, przeciągnięta przez C, jest styczna do powierzchni wzdłuż tej krzywej C; badana powierzchnia stanowi tedy obwiednię rodziny kul, zależnych od *jednego* parametru zmiennego. Nawzajem, *wszelka* powierzchnia, obwijająca rodzinę kul, czyni zadość warunkom zagadnienia, gdyż okręgi, stanowiące linje charakterystyczne, tworzą oczywiście pierwszą rodzinę linji krzywiznowych.

Powierzchnie obrotowe należą, rzecz jasna, jako wypadek szczególny, do tegoż działu. Inną odmianę, godną uwagi, stanowią *powierzchnie przewodowe* (surface canaux) czyli obwiednie kuli o promieniu stałym R, której środek przebiega dowolną krzywą Γ. Linjami charakterystycznemi są tu okręgi o promieniu R, których środki leżą na Γ, a których płaszczyzny są normalne do Γ. Normalne do powierzchni są również normalnemi krzywej Γ; otrzymamy tedy drugi układ linji krzywiznowych, wyznaczając na powierzchni ślady powierzchni rozwijalnych, utworzonych przez normalne krzywej Γ.

Jeżeli oba układy linji krzywiznowych jakiejś powierzchni składają się z okręgów, to powierzchnia owa może być rozważana w dwojaki sposób, jako obwiednia rodziny kul, zależnej od jednego parametru zmiennego. Oznaczmy przez S_1, S_2, S_3 trzy jakiekolwiek powierzchnie kuliste, należące do tego samego układu, przez C_1, C_2, C_3 — odpowiednie linje charakterystyczne, a przez M_1, M_2, M_3 — punkty przecięcia krzywych C_1, C_2, C_3 z linją krzywiznową C', należącą do drugiego układu. Powierzchnia kulista S', styczna do badanej powierzchni we wszystkich punktach okręgu C', jest również styczna w punktach M_1, M_2, M_3 do trzech powierzchni S_1, S_2, S_3; a więc *szukana powierzchnia jest obwiednią rodziny kul, stycznych do trzech kul stałych.* Jest to znana *cyklida Dupina* (cyclide de Dupin). Mannheim dowiódł w sposób nader zręczny, iż powierzchnia ta może być otrzymana za pomocą przekształcenia przez promienie odwrotne pierścienia o przekroju kołowym (tore). Niech γ oznacza okrąg, przecinający pod kątem prostym powierzchnie kuliste S_1, S_2, S_3: jeżeli wykonamy przekształcenie przez promienie odwrotne, biorąc za biegun jakiś punkt okręgu γ, okrąg ten zmienia się w prostą OO', a powierzchnie kuliste S_1, S_2, S_3 przekształcają się odpowiednio w powierzchnie kuliste Σ_1, Σ_2, Σ_3, przecięte przez OO' pod kątem prostym, a więc środki tych kul leżą na tej prostej. Niech C_1', C_2', C_3' oznaczają przecięcia Σ_1, Σ_2, Σ_3 z płaszczyzną zawierającą OO'; C' niech oznacza okrąg styczny do C_1', C_2', C_3', a Σ' — powierzchnię kulistą, której kołem wielkim jest koło C'. Rzecz jasna, iż przy obrocie dokoła OO' powierzchnia kulista Σ' pozostaje wciąż styczna do Σ_1, Σ_2, Σ_3, a więc powierzchnia, obwijająca przy tym ruchu Σ', jest powierzchnią pierścienia o przekroju kołowym, mającego za południk okrąg C'.

Postarajmy się jeszcze wyznaczyć powierzchnie, na których jeden z układów linji krzywiznowych jest utworzony przez krzywe płaskie, położone w płaszczyznach równoległych. Weźmy za płaszczyznę xy płaszczyznę równoległą do płaszczyzn linji krzywiznowych i napiszmy równanie stycznościowe

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = F(\alpha, z)$$

przekroju płaskiego, wyznaczonego na powierzchni przez płaszczyznę równoległą do płaszczyzny xy; $F(\alpha, z)$ jest to funkcja dwu zmiennych α i z, zależna od rozważanej powierzchni. Spółrzędne x, y punktu powierzchni otrzymamy, dołączając do poprzedniego równania związek

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = \frac{\partial F}{\partial \alpha}.$$

Wzory, wyznaczające x, y, z, mają tedy postać następującą:

$$(52) \qquad x = F \cos \alpha - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \sin \alpha, \qquad y = F \sin \alpha + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \cos \alpha, \qquad z = z;$$

dobierając odpowiednio funkcję $F(\alpha, z)$, możemy przedstawić za pomocą takich równań wszelką powierzchnię, z wyjatkiem jedynie powierzchni prostolinjowych, których płaszczyzną kierunkową jest płaszczyzna xy.

Za pomocą łatwego rachunku otrzymamy spółczynniki A, B i C równania płaszczyzny stycznej:

$$A = \cos \alpha, \qquad B = \sin \alpha, \qquad C = -\frac{\partial F}{\partial z},$$

tak, iż dostawa kąta normalnej z osią Oz zostanie wyrażona w sposób następujący

$$\nu = \frac{-F'_z}{\sqrt{1 + F'^2_z}}.$$

Do tego, aby przekroje, położone w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny xOy, stanowiły linje krzywiznowe, potrzeba i wystarcza, stosownie do twierdzenia Joachimsthala, iżby te płaszczyzny tworzyły z powierzchnią kąt stały, to jest, iżby ν było niezależne od α. Do tego zaś potrzeba i wystarcza, iżby $F'(z)$ zależało jedynie od zmiennej z, a więc, iżby $F(\alpha, z)$ posiadało kształt sumy dwu funkcji dowolnych $\varphi(z)$ i $\psi(\alpha)$

$$F(\alpha, z) = \varphi(z) + \psi(\alpha).$$

Wzory (52) przechodzą wtedy w następujące

$$(53) \qquad \begin{cases} x = \psi(\alpha) \cos \alpha - \psi'(\alpha) \sin \alpha + \varphi(z) \cos \alpha, \\ y = \psi(\alpha) \sin \alpha + \psi'(\alpha) \cos \alpha + \varphi(z) \sin \alpha, \\ z = z; \end{cases}$$

w ten sposób otrzymujemy typ najogólniejszy powierzchni, odpowiadających założeniu.

Można opisać powstawanie takich powierzchni w sposób następujący: dwa pierwsze z równań (53), o ile w nich uważamy z za wielkość stałą, a α za zmienną, przedstawiają rodzinę krzywych, stanowiących rzuty na płaszczyznę $z = 0$ przekrojów, wyznaczonych na powierzchni przez płaszczyzny równoległe do płaszczyzny xy.

Owóż, te wszystkie krzywe są równoległe do krzywej, otrzymanej przy założeniu, że $\varphi(z) = 0$, i stąd wysnuwamy konstrukcję następującą: *bierzemy w płaszczyźnie*

$z = 0$ jakąś dowolną krzywą oraz różne krzywe, równoległe do niej, następnie zaś przenosimy każdą z tych krzywych równolegle do Ox, podług dowolnego prawa; powierzchnia, utworzona przez rozmaite położenia krzywej zmiennej, stanowi właśnie typ najogólniejszy powierzchni, odpowiadający wymienionemu założeniu.

Ten sposób powstawania, jak łatwo stwierdzić, może być zastąpiony przez następujący: *powierzchnię o żądanym charakterze tworzy krzywa płaska dowolnego kształtu, której płaszczyzna toczy się bez ślizgania po walcu o dowolnej podstawie.* Są to tedy *powierzchnie gzymsowe* (surfaces moulures).

Możemy to sprawdzić z łatwością za pomocą wzorów (53), badając krzywe płaskie $\alpha = const.$ Krzywe płaskie $z = C$ i $\alpha = C'$ tworzą właśnie dwie rodziny linji krzywiznowych.

252. Odwzorowanie na kuli. (Répresentation sphérique). — Niech Σ oznacza powierzchnię lub część powierzchni, posiadającą dwie różne strony (art. 138). Wybierzmy jedną stronę i rozważajmy w każdym punkcie M zwrot MN normalnej, odpowiadający tej stronie. Następnie wyobraźmy sobie, że ze środka O kuli, której promień równa się jednostce długości, wychodzi promień równoległy do tego kierunku dodatniego MN normalnej do Σ. Ten promień przebija powierzchnię S kuli w punkcie m, który podporządkowujemy punktowi M powierzchni Σ. Każdemu punktowi M powierzchni Σ odpowiada w ten sposób pewien określony punkt m powierzchni S; płaszczyzny styczne w punktach odpowiednich są równoległe, i jeżeli weźmiemy za zwrot dodatni normalnej do powierzchni kulistej kierunek jej ku zewnątrz, to i zwroty dodatnie normalnych obu powierzchni okażą się te same. Każdej krzywej C powierzchni Σ odpowiada krzywa c powierzchni S, stanowiąca *odwzorowanie na kuli* (image sphérique) krzywej C.

Styczna mt w punkcie m krzywej c jest prostopadła do stycznej sprzężonej na Σ ze styczną MT krzywej C w punkcie odpowiednim M.

Niech, w istocie, M i M' oznaczają dwa punkty poblizkie krzywej C, m i m' — punkty odpowiednie krzywej c, D — linję przecięcia płaszczyzn stycznych do powierzchni Σ w punktach M i M', d — linję przecięcia płaszczyzn stycznych do kuli w punktach m i m'. Ponieważ te płaszczyzny są do siebie odpowiednio równoległe, przeto rzecz jasna, że d jest równoległa do D. Gdy punkt M' zbliża się dowolnie do M, prosta D dąży, jako do położenia granicznego, do stycznej MT' do Σ, sprzężonej ze styczną MT do C (art. 245). Podobnież granicą d jest styczna, sprzężona z mt na powierzchni kulistej; nazwijmy ją mt'. Lecz mt' jest prostopadła do mt, ponieważ krzywa wskazująca, która odpowiada jakiemukolwiek punktowi powierzchni kulistej, jest to okrąg; to zaś wystarcza do dowiedzenia wypowiedzianego twierdzenia, ponieważ mt' jest podobnież równoległe do MT'.

Do tego, aby proste MT i mt były równoległe, potrzeba i wystarcza, iżby styczna MT była prostopadła do stycznej, z nią sprzężonej, czyli iżby MT była jedną z osi krzywej wskazującej powierzchni Σ. Widzimy tedy, że *styczna do linji krzywiznowej powierzchni Σ i styczna w punkcie odpowiednim obrazu tej linji na kuli są do siebie równoległe.* Ponad to, linje krzywiznowe są to jedyne krzywe powierzchni Σ, posiadające tę własność.

Wynik ten należy skojarzyć z wzorami Olinda Rodrigues'a. W istocie, gdy obierzemy środek powierzchni kulistej S za początek układu, spółrzędnemi punktu m będą właśnie dostawy kierunkowe λ, μ, ν normalnej, odpowiadające jej zwrotowi dodatniemu, i wyrażając, że styczne do krzywych C i c, zakreślonych przez punkty $M(x, y, z)$ i $m(\lambda, \mu, \nu)$ są równoległe, dostaniemy związki

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{dy}{d\mu} = \frac{dz}{d\nu},$$

najzupełniej zgodnie z wzorami (46).

Weźmy na powierzchni Σ nieskończenie mały element powierzchniowy $d\sigma$, otaczający punkt M tej powierzchni; odpowiedni element powierzchni kuli oznaczmy przez $d\sigma'$. W celu obliczenia stosunku $\frac{d\sigma'}{d\sigma}$ winniśmy zastosować jedynie metodę art. 141, mając na względzie tę okoliczność, że wobec równoległości normalnych do obu powierzchni stosunek $\frac{d\sigma'}{d\sigma}$ równa się stosunkowi $\frac{d\omega'}{d\omega}$ odpowiednich elementów płaszczyzny xy. Załóżmy, iż równaniem powierzchni Σ w sąsiedztwie M jest $z = f(x, y)$ i że uważamy za kierunek dodatni normalnej ten, który tworzy z Oz kąt ostry. Otrzymamy w takim razie spółrzędne punktu m w postaci:

$$x' = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad y' = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad z' = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

i stąd

$$\frac{d\omega'}{d\omega} = \left|\frac{D(x', y')}{D(x, y)}\right| = \left|\frac{D(x', y')}{D(p, q)}\right| \times \left|\frac{D(p, q)}{D(x, y)}\right|$$

czyli, po wykonaniu łatwego rachunku

$$\frac{d\omega'}{d\omega} = \frac{|rt - s^2|}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

Po prawej stronie tego równania mamy wartość bezwzględną krzywizny całkowitej (courbure totale) $\frac{1}{RR'}$ powierzchni Σ, i w ten sposób otrzymujemy określenie tej wielkości gieometrycznej zupełnie analogiczne do określenia krzywizny linji krzywej (art. 228).

Atoli wiemy, że krzywizna krzywej skośnej wyraża się za pomocą pierwiastka, wyrażenie zaś krzywizny całkowitej ma postać wymierną, i przeto wielkości tej można przypisać pewien określony znak, a mianowicie znak wyrażenia $rt - s^2$. Znaczenie tego znaku da się również wytłumaczyć przy pomocy odwzorowania na kuli. Wyobraźmy sobie dwu widzów, rozciągniętych wzdłuż dwu odpowiednich normalnych do powierzchni Σ i S, opartych stopami o te powierzchnie i umieszczonych po ich stronie dodatniej. Gdy pierwszy z tych widzów przebiega kontur powierzchni $d\sigma$ w ten sposób, że ma ją po lewej stronie, drugi, przebiegając obwód pola $d\sigma'$ na kuli, widzi to pole po lewej lub po prawej stronie; w pierwszym wypadku $rt - s^2$, a więc i $\frac{1}{RR'}$, jest dodatnie, w drugim — oba te wyrażenia są ujemne (art. 124, 141).

III. — WIADOMOŚCI O UKŁADACH PROSTYCH.

Położenie prostej w przestrzeni zależy od czterech parametrów zmiennych. Można tedy rozpatrywać zbiory prostych, zależnych od jednego, dwuch lub trzech parametrów zmiennych, stosownie do liczby związków, jakie spełniają cztery parametry, od których zależy położenie prostej. Prosta ruchoma, zależna od *jednego* parametru zmiennego, tworzy *powierzchnię prostolinjową* (surface reglée). Zbiór prostych zależnych od *dwu* różnych parametrów, stanowi *kongruencję prostych* (congruence de droites). Wreszcie *kompleksem prostych* (complexe de droites) nazywamy wszelki ich układ (système de droites), zależny od *trzech* parametrów.

253. Powierzchnie prostolinjowe. — Niech równania

$$x = az + p, \qquad y = bz + q, \tag{54}$$

w których a, b, p, q są funkcjami parametru zmiennego u, odniesione do układu prostokątnego spółrzędnych, odpowiadają tworzącej ruchomej G. Zbadajmy, w jaki sposób zmienia się położenie płaszczyzny stycznej do powierzchni S, utworzonej przez tę prostą, gdy punkt styczności przesuwa się wzdłuż tworzącej. Równania (54), wraz z równaniem $z = z$, wyrażają spółrzędne dowolnego punktu powierzchni w zależności od parametrów niezależnych z i u; równanie płaszczyzny stycznej otrzymamy (art. 64) w postaci:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ a & b & 1 \\ a'z+p' & b'z+q' & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

a', b', p', q' oznaczają tu pochodne spółczynników a, b, p, q względem u. Po zastąpieniu x przez $az+p$, a y przez $bz+q$ i rozwinięciu wyznacznika, równanie to przechodzi w następujące

$$(b'z+q')(X-aZ-p) - (a'z+q')(Y-bz-q) = 0. \tag{55}$$

Widzimy przedewszystkiem, iż płaszczyzna styczna przechodzi zawsze przez tworzącą G, co było zresztą odrazu oczywiste, i następnie, że płaszczyzna ta obraca się dokoła tworzącej, gdy punkt styczności posuwa się wzdłuż tej prostej — o ile tylko ułamek $\dfrac{az'+p'}{b'z+q'}$ nie jest niezależny od z, t. j. o ile nie mamy $a'q' - b'p' = 0$. Ten wypadek szczególny odsuniemy odrazu na bok. Ponieważ ułamek rozważany zależy tylko od pierwszej potęgi z, przeto wszelka płaszczyzna, zawierająca tworzącą, jest styczna do powierzchni w jednym, ale tylko w jednym punkcie tworzącej. Gdy punkt styczności oddala się nieskończenie wzdłuż tworzącej, płaszczyzna styczna dąży do płaszczyzny granicznej P', którą zowiemy *płaszczyzną styczną* w punkcie nieskończenie odległym tworzącej i której odpowiada równanie

$$b'(X - aZ - p) - a'(Y - bZ - q) = 0. \tag{56}$$

Oznaczmy przez ω kąt tej płaszczyzny P' z płaszczyzną styczną w punkcie (x, y, z) tworzącej. Parametry kierunkowe prostopadłych do tych dwu płaszczyzn równają się odpowiednio

$$b', \; -a', \; a'b - ab' \quad \text{i} \quad bz' + q', \; -(a'z + p'), \; b(a'z + p') - a(b'z + q);$$

mamy tedy

$$\cos\omega = \frac{[a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2]^{-\frac{1}{2}}\{[a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2]z + b'q' + a'p' + (ab' - ba')(aq' - bp')\}}{\sqrt{[a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2]z^2 + 2z[b'q' + a'p' + (ab' - ba')(aq' - bp')] + q'^2 + p'^2 + (aq' - bp')^2}},$$

skąd otrzymamy, za pomocą łatwego rachunku

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{(a'q' - b'p')\sqrt{1 + a^2 + b^2}}{[a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2]z + b'q' + a'p' + (ab' - ba')(aq' - bp')}. \tag{57}$$

Płaszczyzna styczna, prostopadła do płaszczyzny P', odpowiada punktowi O_1 tworzącej o spółrzędnej z_1, wyznaczonej za pomocą wzoru

$$z_1 = -\frac{a'p' + b'q' + (ab' - ba')(aq' - bp')}{a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2}; \tag{58}$$

ów punkt O_1 zowie się *punktem środkowym* (point central) tworzącej, a płaszczyzna styczna P w tym punkcie jest płaszczyzną środkową. Kąt Θ, utworzony przez płaszczyznę styczną w innym punkcie tworzącej z płaszczyzną środkową, równa się $\frac{\pi}{2} - \omega$, i wzór (57) może być zastąpiony przez następujący:

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{[a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2](z - z_1)}{(a'q' - b'p')\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Niech ς oznacza odległość punktu środkowego od punktu styczności M, opatrzoną znakiem $+$ lub $-$, stosownie do tego, czy kierunek O_1M tworzy z Oz kąt ostry czy też rozwarty. Mamy

$$\varsigma = (z - z_1)\sqrt{1 + a^2 + b^2}$$

i, zakładając:

$$k = \frac{a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2}{(a'q' - b'p')\,(1 + a^2 + b^2)}, \tag{60}$$

możemy napisać jeszcze wzór powyższy w postaci

$$tang\ \Theta = k\varsigma; \tag{59}$$

czynnik k jest to t. zw. *parametr dystrybucyjny* (paramètre de distribution) lub *parametr tworzącej*. Wzór (59) wyraża w postaci nader prostej prawo, według którego płaszczyzna styczna obraca się dokoła tworzącej. Wzór ten zawiera jedynie elementy, posiadające pewne znaczenie gieometryczne; istotnie, ujrzymy nieco dalej, jak można określić bezpośrednio parametr k. Istnieje w nim jednak pewna dwuznaczność, gdyż nie można rozpoznać odrazu, w jakim kierunku należy liczyć kąt Θ. Innemi słowy, nie wiemy *à priori*, jak się obraca dokoła tworzącej płaszczyzna styczna, gdy się przesuwa punkt styczności. Ten kierunek obrotu jest wyznaczony właśnie przez znak parametru k.

Ażeby dobrze ująć tę rzecz, wyobraźmy sobie widza, umieszczonego wzdłuż tworzącej G; gdy punkt styczności porusza się od jego stóp ku głowie, wówczas płaszczyzna styczna obraca się w jego polu widzenia od lewej ręki ku prawej lub od prawej ku lewej. Wystarczy trochę zastanowienia, by przekonać się, że określony w ten sposób kierunek obrotu pozostaje ten sam, gdy widz zmieni swe położenie względem tworzącej w taki sposób, aby mieć głowę tam, gdzie poprzednio były nogi i nawzajem. Jasne pojęcie o dwu możliwych układach mogą dać dwie paraboloidy hiperboliczne o wspólnej tworzącej, symetryczne względem pewnej płaszczyzny, zawierającej tę tworzącą.

Po tych omówieniach wyobraźmy sobie, iż przenosimy w sposób ciągły trójścian, utworzony przez osie spółrzędnych, tak iżby początek układu znalazł się w punkcie środkowym O_1, oś z-ów przystała do tworzącej, a płaszczyzna xz do płaszczyzny środkowej. Rzecz jasna, że parametr dystrybucyjny zachowuje swą wartość bez zmiany, i wzór (59) w nowym układzie spółrzędnych przechodzi we wzór

$$tang\ \Theta = kz, \tag{59 bis}$$

w którym Θ oznacza kąt płaszczyzny stycznej z płaszczyzną $y = 0$, liczony w odpowiednim kierunku.

Dla wartości u_0 parametru, odpowiadającej osi Oz, winniśmy mieć

$$a = b = p = q = 0,$$

i równanie płaszczyzny stycznej (55) przybiera tu postać

$$(b'z + q')\,X - (a'z + p')\,Y = 0.$$

Ażeby początkiem układu był punkt środkowy, a płaszczyzną xz płaszczyzna środkowa, potrzeba iżby

$$a' = 0, \qquad q' = 0,$$

i równanie płaszczyzny stycznej przybiera kształt

$$Y = \frac{b'z}{p'} X,$$

gdy tymczasem wzór (60) daje

$$k = -\frac{b'}{p'}.$$

Widzimy tedy, iż we wzorze (59 *bis*) należy liczyć kąt Θ od Oy ku Ox. Jeżeli trójścian, utworzony przez osie, jest zorjentowany w sposób, powyżej przyjęty (art. 231), to w oczach widza, leżącego wzdłuż Oz, płaszczyzna styczną będzie się obracała od lewej ręki ku prawej, jeżeli k jest dodatnie, i od prawej ręki ku lewej, jeżeli k jest ujemne.

Miejsce gieometryczne punktów środkowych różnych tworzących nazywamy *linją zwężenia* (ligne de striction). Spółrzędne punktu tej linji są wyznaczone w zależności od parametru u przez równania (54) i (58).

Uwaga. — Jeżeli dla badanej tworzącej $a'q' = b'p'$, to płaszczyzna styczna przy przesuwaniu się wzdłuż tej całej tworzącej pozostaje bez zmiany. Gdy ten warunek jest spełniony przy wszelkich wartościach parametru u, powierzchnia prostolinjowa jest rozwijalna (art. 215), i łatwo odnaleźć ponownie uzasadnione już wyniki. W istocie, jeżeli a' i b' nie równają się jednocześnie zeru, to płaszczyzna styczna we wszystkich punktach tworzącej G jest ta sama, stając się tylko nieoznaczoną w punkcie o spółrzędnej

$$z = -\frac{p'}{a'} = -\frac{q'}{b'},$$

to jest w punkcie styczności tworzącej ze swą obwiednią. Uwzględniając związek $a'q' - b'p' = 0$, sprawdzamy z łatwością, że jest to właśnie wartość z_1, wyznaczona przez wzór (58). Linja zwężenia przechoozi w krawędź zwrotu (arête de rebroussement); co do parametru dystrybucyjnego, staje się nieskończonym. Jeżeli $a' = b' = 0$, mamy do czynienia z powierzchnią walcową; punkt środkowy jest nieoznaczony.

254. — Punkt środkowy i parametr dystrybucyjny mogą być określone w inny jeszcze sposób. Oprócz tworzącej G uwzględnijmy jeszcze tworzącą sąsiednią G_1, odpowiadającą wartości $u+h$ parametru i daną przez równania

$$(61) \qquad x = (a + \Delta a)\, z + p + \Delta p, \quad y = (b + \Delta b)\, z + q + \Delta q.$$

Niech δ oznacza najkrótszą odległość między dwiema prostemi G i G_1, α — kąt, utworzony przez te proste, a X, Y i Z — spółrzędne punktu przecięcia się G ze wspólną prostopadłą.

Wzory, znane dobrze z gieometrji analitycznej, wyznaczają

$$Z = -\frac{\Delta a\,\Delta q + \Delta b\,\Delta p + (a\Delta b - b\Delta a)\,[(a+\Delta a)\,\Delta q - (b+\Delta b)\,\Delta p]}{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (a\Delta b - b\Delta a)^2},$$

$$\delta = \frac{\Delta a\,\Delta q - \Delta b\,\Delta p}{\sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (a\Delta b - b\Delta a)^2}},$$

$$sin\ \alpha = \frac{\sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (a\Delta b - b\Delta a)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+1}\ \sqrt{(a+\Delta a)^2 + (b+\Delta b)^2 + 1}}.$$

Gdy h dąży do zera, Z dąży do wyrażenia, znalezionego powyżej dla z_1, gdy tymczasem $\frac{sin\ \alpha}{\delta}$ ma za granicę k. Punkt środkowy jest to tedy położenie graniczne spodka wspólnej prostopadłej do G i do tworzącej nieskończenie blizkiej, a parametr dystrybucyjny jest to granica stosunku $\frac{sin\ \alpha}{\delta}$.

Zastąpmy w wyrażeniu odległości δ przyrosty Δa, Δb, Δp, Δq przez wyrażające je szeregi potęg h; otrzymamy w ten sposób następujące rozwinięcie licznika:

$$\Delta a\,\Delta q - \Delta b\,\Delta q = h^2\,(a'q' - b'p') + \frac{h^3}{2}\,(a''q' + a'q'' - b''p' - b'p'') + \ldots,$$

gdy tymczasem mianownik jest zawsze wyrażeniem pierwszego rzędu względem h. Widzimy, iż δ jest w ogólności nieskończenie małą pierwszego rzędu, z wyjątkiem tego wypadku, gdy chodzi o powierzchnie rozwijalne, dla których $a'q' - b'p' = 0$. Lecz spółczynnik przy $\frac{h^3}{2}$ jest pochodną wyrażenia $a'q' - b'p'$; spółczynnik ten równa się przeto także zeru, co powoduje, że najkrótsza odległość dwu nieskończenie blizkich tworzących powierzchni rozwijalnej jest nieskończenie małą trzeciego rzędu (art. 233). Zwrócił na to uwagę Bouquet, który dowiódł ponad to, że ta odległość nie może być stale wielkością czwartego rzędu, o ile nie równa się zeru, co zachodzi ze stycznemi do krzywej płaskiej lub tworzącemi powierzchni stożkowej. W celu stwierdzenia tego wystarczy posunąć się przy rozwijaniu różnicy $\Delta a\,\Delta q - \Delta b\,\Delta p$ aż do wyrazów czwartego rzędu.

255. Kongruencje. Powierzchnia ogniskowa. — Wszelki zbiór prostych, danych przez równania

$$x = az + p, \qquad y = bz + q, \tag{62}$$

w których a, b, p i q zależą od dwu parametrów zmiennych α i β, nazywa się *kongruencją prostych* (congruence de droites). Przez każdy punkt przestrzeni przechodzi w ogólności pewna liczba prostych, należących do kongruencji, ponieważ posiadamy — o ile uważamy x, y i z za wiadome — dwa równania do wyznaczenia α i β. Jeżeli uzależnimy od siebie α i β za pomocą jakiegoś związku, to prosta G, odpowiadająca równaniom (62), zakreśli powierzchnię prostolinjową, która nie będzie w ogólności rozwijalną. Ażeby to była powierzchnia rozwijalna, musi być spełniony warunek

$$da\, dq - db\, dp = 0,$$

czyli po zastąpieniu da przez

$$\frac{\partial a}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial a}{\partial \beta} d\beta, \ldots,$$

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial a}{\partial \beta} d\beta\right)\left(\frac{\partial q}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial q}{\partial \beta} d\beta\right) \\ &\qquad - \left(\frac{\partial b}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial b}{\partial \beta} d\beta\right)\left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial p}{\partial \beta} d\beta\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{63}$$

Z tego równania drugiego rzędu względem $\frac{d\beta}{d\alpha}$ otrzymujemy dwie wartości, naogół różne

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \psi_1(\alpha, \beta), \qquad \frac{d\beta}{d\alpha} = \psi_2(\alpha, \beta). \tag{64}$$

Przy uwzględnieniu warunków bardzo ogólnych, które będą ściśle wysłowione nieco później, a które będziemy uważali za spełnione, każdemu z tych równań czyni zadość nieskończenie wiele funkcji zmiennej α; każda posiada jedną, i tylko jedną, całkę, przybierającą wartość β_0 dla $\alpha = \alpha_0$. Wszelka prosta G kongruencji należy zatym do dwu powierzchni rozwijalnych, których wszystkie tworzące wchodzą również w skład kongruencji. Niech Γ i Γ' oznaczają krawędzie zwrotu tych dwu powierzchni rozwijalnych, A i A' — punkty styczności tworzącej G z Γ i Γ'. Te dwa punkty A i A' noszą nazwę *punktów ogniskowych* (points focaux) tworzącej. Możemy je wyznaczyć w sposób, który zaraz zostanie podany, bez konieczności całkowania równania (63), określającego powierzchnie rozwijalne, należące do kongruencji. Spółrzędna któregoś z tych punktów winna czynić zadość jednocześnie dwu warunkom

$$z\,da + dp = 0, \qquad z\,db + dq = 0,$$

czyli, po zastąpieniu da, db, dp, dq przez ich wyrażenia

$$z\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial a}{\partial \beta}\,d\beta\right) + \frac{\partial p}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial p}{\partial \beta}\,d\beta = 0,$$

$$z\left(\frac{\partial b}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial b}{\partial \beta}\,d\beta\right) + \frac{\partial q}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial q}{\partial \beta}\,d\beta = 0.$$

Rugując z tych dwu związków z, odnaleźlibyśmy ponownie równanie (63), lecz za pomocą rugowania stosunku $\frac{d\beta}{d\alpha}$ otrzymujemy równanie drugiego stopnia, wyznaczające dwa punkty ogniskowe

$$(65) \qquad \left(z\frac{\partial a}{\partial \alpha} + \frac{\partial p}{\partial \alpha}\right)\left(z\frac{\partial b}{\partial \beta} + \frac{\partial q}{\partial \beta}\right) - \left(z\frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial p}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial b}{\partial \alpha} + \frac{\partial q}{\partial \alpha}\right) = 0.$$

Miejsce gieometryczne punktów ogniskowych A i A' składa się z dwu płatów Σ, Σ', których równanie otrzymalibyśmy za pomocą rugowania α i β z równań (62) i (65). Te dwa płaty nie są zresztą w ogólności odrębne pod względem analitycznym, lecz należą do tej samej powierzchni. Są to dwa płaty *powierzchni ogniskowej* (surface focale). Owa powierzchnia ogniskowa jest również miejscem gieometrycznym krawędzi zwrotu powierzchni rozwijalnych, należących do kongruencji. Rzecz jasna, w istocie, że stosownie do samego określenia krzywej Γ, styczna do tej krzywej w jakimkolwiek punkcie a należy do kongruencji, i że punkt a jest jednym z jej punktów ogniskowych. Każda z prostych kongruencji jest styczna do dwu płatów Σ, Σ', jako styczna do dwu krzywych, położonych odpowiednio na tych płatach.

Łatwo, za pomocą zastosowania użytego już dawniej (art. 247) rozumowania, wyznaczyć płaszczyzny styczne do powierzchni Σ i Σ' w punktach A i A' (rys. 44). Wyobraźmy sobie np., iż prosta G porusza się, pozostając styczną do Γ; pozostaje ona również styczną do powierzchni Σ', i jej punkt styczności z tym płatem zakreśla krzywą γ', która musi być różną od krzywej Γ'. Powierzchnia rozwijalna, utworzona przez G, jest tedy styczna do Σ' w punkcie A', ponieważ płaszczyzny styczne tych powierzchni zawierają jednocześnie prostą G i styczną krzywej γ'. Stąd wynika, że płaszczyzną styczną w A' do Σ' jest właśnie płaszczyzna ściśle styczna do krzywej Γ w punkcie A. Stwierdzilibyśmy podobnież, że płaszczyzną styczną do Σ w punkcie A jest płaszczyzna ściśle styczna do krzywej Γ' w punkcie A'. Te dwie płaszczyzny nazwiemy *płaszczyznami ogniskowemi* (plans focaux).

Może się przydarzyć, że jeden z płatów powierzchni ogniskowej przejdzie w krzywą C. Proste, należące do kongruencji, pozostają w takim razie styczne do płatu Σ i spotykają krzywą C; jedna z rodzin powierzchni rozwijalnych składa się z powierzchni stożkowych, opisanych na powierzchni Σ (circonscrits à la surface Σ) i mających za wierzchołki różne punkty krzywej C. Jeżeli oba płaty powierzchni ogniskowej przekształcają się w dwie krzywe C i C', to obie rodziny powierzchni rozwijalnych stają się rodzinami, utworzonemi z powierzchni stożkowych, przechodzących przez jedną z tych krzywych, a posiadających wierzchołek na drugiej z nich. Gdy linje C i C' są linjami prostemi, mamy do czynienia z *kongruencją linjową* (congruence linéaire).

256. Kongruencje, złożone z normalnych. — Normalne jakiejś powierzchni tworzą oczywiście kongruencję, lecz odwrócenie tego zdania nie byłoby słuszne; niezawsze istnieje powierzchnia, normalna do wszystkich prostych danej kongruencji. Istotnie, rozważając kongruencję, utworzoną przez normalne jakiejś powierzchni S, stwierdzamy, że dwa płaty powierzchni ogniskowej nie są niczym innym, jak płatami Σ i Σ' powierzchni rozwiniętej, odpowiadającej powierzchni S (art. 247), a spostrzegliśmy, że płaszczyzny, styczne do tych dwu płatów w punktach A i A' ich styczności z normalną, są do siebie prostopadłe. Własność ta cechuje wyłącznie kongruencje, złożone z normalnych.

Poszukajmy, w istocie, warunku, aby prosta (62) była prostopadła do jakiejś powierzchni; potrzeba do tego i wystarcza, iżby istniała taka funkcja $f(\alpha, \beta)$, iżby powierzchnia S, dana przez równania

$$(66) \qquad x = az + p, \qquad y = bz + q, \qquad z = f(\alpha, \beta)$$

miała za normalną właśnie samą prostą G. Potrzeba do tego spełnienia się warunków

$$a\frac{\partial x}{\partial \alpha} + b\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0,$$

$$a\frac{\partial x}{\partial \beta} + b\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \beta} = 0,$$

które po zastąpieniu x przez $az + p$, y przez $bz + q$ i podzieleniu przez

$$\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$$

przybierają postać

$$(67)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \alpha}(z\sqrt{a^2+b^2+1})+\dfrac{a\dfrac{\partial p}{\partial \alpha}+b\dfrac{\partial q}{\partial \alpha}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}=0, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \beta}(z\sqrt{a^2+b^2+1})+\dfrac{a\dfrac{\partial p}{\partial \beta}+b\dfrac{\partial q}{\partial \beta}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}=0. \end{cases}$$

Do tego aby te warunki były zgodne z sobą, potrzeba i wystarcza iżby zachodził związek

$$(68)\quad \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{a\dfrac{\partial p}{\partial \alpha}+b\dfrac{\partial q}{\partial \alpha}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right]=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{a\dfrac{\partial p}{\partial \beta}+b\dfrac{\partial q}{\partial \beta}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right];$$

jeżeli ten warunek jest spełniony, równania (67) wyznaczają z za pomocą jednej kwadratury. Otrzymane powierzchnie zależą od jednej stałej, wprowadzonej przez całkowanie, i tworzą rodzinę powierzchni równoległych.

Aby ująć znaczenie gieometryczne warunku (68), zauważmy, że związek ten jest z istoty swej niezależny od wyboru osi spółrzędnych i zmiennych niezależnych. Wyobraźmy sobie, iżeśmy obrali za oś z-ów jedną z prostych kongruencji, a za parametry α i β spółrzędne punktu przebicia przez jakąkolwiek z prostych kongruencji płaszczyzny $z=0$. W takim razie $p=\alpha$, $q=\beta$, gdy tymczasem a i b są to funkcje zmiennych α i β, równe zeru dla $\alpha=\beta=0$. Warunek całkowalności przechodzi dla wartości $\alpha=0$ i $\beta=0$ parametrów w

$$\frac{\partial a}{\partial \beta}=\frac{\partial b}{\partial \alpha}.$$

Z drugiej strony, równanie (63) przybiera w danym razie postać:

$$\frac{\partial a}{\partial \beta}d\beta^2+\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha}-\frac{\partial b}{\partial \beta}\right)d\alpha\, d\beta-\frac{\partial b}{\partial \alpha}d\alpha^2=0;$$

równanie to, gdy zastąpimy w nim odpowiednio α i β przez x i y, wyznaczy krzywe, stanowiące ślady na płaszczyźnie $z=0$ powierzchni rozwijalnych, należących do kongruencji, i warunek

$$\frac{\partial a}{\partial \beta}=\frac{\partial b}{\partial \alpha}$$

wyraża, że dwie krzywe tego rodzaju, które przechodzą przez początek układu, przecinają się tam pod kątem prostym. Płaszczyzny styczne do dwu powierzchni rozwijalnych kongruencji, zawierających prostą $x=0$, $y=0$, są tedy do siebie prostopadłe, i wynikiem tych rozważań jest następujące ważne twierdzenie: *Na to aby kongruencja prostych była utworzona przez normalne do jakiejś powierzchni, potrzeba i wystarcza, iżby płaszczyzny ogniskowe każdej z prostych, należących do kongruencji, były do siebie prostopadłe.*

Uwaga. — Gdy bierzemy za parametry zmienne α i β dostawy kątów, utworzonych przez prostą z osiami Ox i Oy, to

$$a=\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}},\qquad b=\frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}},\qquad \sqrt{1+a^2+b^2}=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}},$$

równania (67) przybierają postać

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{z}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right)+\alpha\frac{\partial p}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial q}{\partial\alpha}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{z}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right)+\alpha\frac{\partial p}{\partial\beta}+\beta\frac{\partial q}{\partial\beta}=0,$$

i warunek (68) całkowalności sprowadza się do równości

$$\frac{\partial q}{\partial\alpha}=\frac{\partial p}{\partial\beta}.$$

Związek ten wyraża, że p i q są to pochodne cząstkowe tej samej funkcji $F(\alpha,\beta)$, którą otrzymać możemy za pomocą jednej kwadratury:

$$p=\frac{\partial F}{\partial\alpha},\qquad q=\frac{\partial F}{\partial\beta}.$$

Następnie z da się otrzymać za pomocą całkowaaia równania, zawierającego różniczki zupełne

$$d\left(\frac{z}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right)=-\left(\alpha\frac{\partial^2F}{\partial\alpha^2}+\beta\frac{\partial^2F}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)d\alpha-\left(\alpha\frac{\partial^2F}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\beta\frac{\partial^2F}{\partial\beta^2}\right)d\beta,$$

stąd wypływa

$$z=\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\left(C+F-\alpha\frac{\partial F}{\partial\alpha}-\beta\frac{\partial F}{\partial\beta}\right);$$

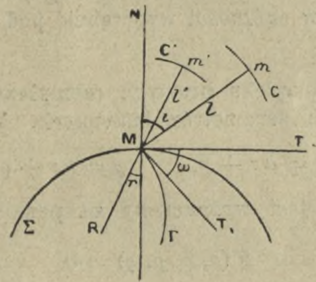
C oznacza tu stałą dowolną.

257. Twierdzenie Malusa. — Gdy promienie świetlne, wychodząee z jednego punktu, są odbite lub załamane przez jakąś powierzchnię, to po odbiciu lub załamaniu stają się prostopadłemi do pewnej rodziny powierzchni równoległych. Twierdzenie to, które zawdzięczamy Malusowi, zostało uogólnione na dowolną liczbę odbić lub załamań przez Cauchy'ego, Dupina, Gergonne'a i Quételeta, i można wypowiedzieć następujące twierdzenie ogólne:

Jeżeli promienie świetlne są prostopadłe do jakiejś powierzchni, to nie tracą tej własności po dowolnej liczbie odbić i załamań.

Ponieważ odbicie może być uważane za załamanie o spółczynniku -1, wystarczy oczywiście dowieść twierdzenia dla jednego załamania. Niech S oznacza powierzchnię normalną do promieni świetlnych, mM — promień padający, który spotyka w punkcie M powierzchnię załamującą Σ, MR — promień załamany. Stosownie do prawa Kartezjusza, promień padający Mm, promień załamany MR i normalna MN leżą w tej samej płaszczyźnie, i pomiędzy kątami i i r (rys. 45) istnieje zależność $n \sin i = \sin r$. W celu ustalenia uwagi załóżmy, zgodnie z rysunkiem, że $n < 1$. Niech Mm równa się l; odmierzmy na przedłużeniu promienia załamanego odcinek $l' = Mm'$, równy odcinkowi l, pomnożonemu przez pewien czynnik stały k, który zaraz wyznaczymy. Punkt m' zakreśla powierzchnię S', i można dobrać czynnik k w ten sposób, ażeby promień załamany Mm' był normalny do tej powierzchni. W istocie, weźmy jakąkolwiek krzywą C, położoną na S; gdy punkt m przebiega C, punkt M, w którym promień padający przebija Σ, zakreśla pewną krzywą Γ, a punkt odpowiedni m' zakreśla na S' inną krzywą C'. Oznaczmy przez s, σ i s' łuki trzech krzywych C, Γ, C', przez ω — kąt stycznej MT_1 do Γ ze śladem MT na płaszczyźnie stycznej płaszczyzny normalnej, zawierającej promień padający, przez φ i φ' —

Rys. 45.



kąty utworzone przez prostą MT_1 z Mm i Mm'. Aby wyznaczyć np. $\cos\varphi$, wyobraźmy sobie, iż bierzemy na MT_1 rzut odcinka równego jedności, odmierzonego na Mm; można z początku rzutować ten odcinek na MT, a następnie otrzymany rzut — na MT_1, skąd otrzymamy

$$\cos\varphi = \sin i \cos\omega;$$

podobnież

$$\cos\varphi' = \sin r \cos\omega.$$

Zastosujmy następnie wzór (16) z art. 84, wyznaczający różniczkę odcinka [1], do dwu odcinków Mm i Mm'; otrzymamy, oznaczając przez θ kąt promienia $m'M$ ze styczną krzywej C':

$$dl = -d\sigma \cos\omega \sin i,$$

$$dl' = -d\sigma \cos\omega \sin r - ds' \cos\theta.$$

---

[1] Jeżeli s oznacza łuk AM jednej krzywej, s_1 — łuk A_1M_1 drugiej krzywej, brane z określonym znakiem, l — długość odcinka ruchomego MM_1, łączącego dwa punkty tych krzywych, θ i θ_1 — kąty, utworzone przez ten odcinek z kierunkami stycznych MT i MT_1, to pomiędzy różniczkami ds, ds_1, dl oraz θ i θ_1 istnieje związek

$$dl = -ds \cos\theta - ds_1 \cos\theta_1,$$

uzasadniony we wzmiankowanym artykule. [*Dod. tłum.*]

Stąd wypływa, gdy zastąpimy dl' przez $k\,dl$, związek

$$\cos\omega\, d\sigma\,(k \sin i - \sin r) = ds' \cos\theta,$$

który przy $k = n$ przechodzi w $ds' \cos\theta = 0$. Promień Mm' jest tedy prostopadły do krzywej C', a pomieważ C' jest to krzywa dowolna na powierzchni S', przeto promień załamany jest właśnie normalną powierzchni S'. Ta powierzchnia S' nazywa się powierzchnią *antykaustyczną* (l'anticaustique) lnb *wtórną powierzchnią kaustyczną* (la caustique secondaire); inaczej: *wtórną powierzchnią palącą*. Rzecz jasna, iż jest to powierzchnia, obwijająca kulę o promieniu równym odcinkowi Mm, pomnożonemu przez n, i o środku w punkcie M, i można wysłowić otrzymany wynik w sposób następujący:

Jeżeli promienie padające są prostopadłe do pewnej powierzchni S, uważajmy tę powierzchnię za obwiednię kul, których środki leżą na powierzchni załamującej Σ. Aby otrzymac powierzchnię antykaustyczną, odpowiadającą promieniom załamanym, należy wziąć powierzchnię, obwijającą wszystkie kule, które powstają przez zmniejszenie promieni kul poprzednio wzmiankowanych w stosunku, równym stosunkowi jedności do spółczynnika załamania.

Owa powierzchnia obwijająca składa się z dwu płatów, odpowiadających spółczynnikom załamania równym co do wartości bezwzględnej, a o znakach przeciwnych. Te dwa płaty nie dadzą się w ogólności wyodrębnić pod względem analitycznym.

258. Kompleksy. — Kompleks prostych (complexe de droites) jest to zbiór prostych, zależnych od trzech parametrów zmiennych. Weźmy równania prostej

$$x = az + p, \qquad y = bz + q; \tag{70}$$

wszelki kompleks prostych jest wyznaczony za pomocą jakiegoś związku pomiędzy a, b, p, q

$$F(a, b, p, q) = 0 \tag{71}$$

i nawzajem. Jeżeli F jest wielomianem względem a, b, p i q, mamy kompleks *algiebraiczny*. Proste, należące do kompleksu, które przechodzą przez dany punkt (x_0, y_0, z_0), tworzą powierzchnię stożkową o wierzchołku w tym punkcie, której równanie otrzymamy za pomocą rugowania a, b, p i q z równań (70), (71) i (72)

$$x_0 = az_0 + p, \qquad y_0 = bz_0 + q; \tag{72}$$

będzie to tedy równanie

$$F\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}, \frac{x_0 z - x z_0}{z - z_0}, \frac{y_0 z - y z_0}{z - z_0}\right) = 0. \tag{73}$$

Podobnież w każdej płaszczyźnie leży nieskończenie wiele prostych, należących do kompleksu; proste owe posiadają obwiednię, zwaną *krzywą kompleksu* (courbe du complexe). Jeżeli kompleks jest algiebraiczny, to *rząd stożka kompleksu równa się klasie krzywej kompleksu.* Przypuśćmy, istotnie, że chcemy otrzymać proste kompleksu, przechodzące przez dany punkt A i położone w płaszczyźnie P, zawierającej ten punkt. Można działać w tym celu w dwojaki sposób: albo przeciąć płaszczyzną P stożek kompleksu o wierzchołku w punkcie A, albo też przeciągnąć przez punkt A styczne do krzywej kompleksu, położonej w płaszczyźnie P. Ponieważ winniśmy otrzymać zawsze tę samą liczbę prostych, słuszność wypowiedzianego twierdzenia zostaje uzasadniona.

Jeżeli stożek kompleksu przekształca się w płaszczyznę, to kompleks otrzymuje nazwę *linjowego* (linéaire), i równanie (71) przybiera postać

$$(74) \qquad Aa + Bb + Cp + Dq + E\,(aq - bp) + F = 0;$$

miejscem gieometrycznym prostych kompleksu, przechodzących przez punkt (x_0, y_0, z_0) jest płaszczyzna, dana przez równanie

$$(75) \qquad \begin{cases} A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(x_0 z - z_0 x) \\ \quad + D\,(y_0 z - z_0 y) + E\,(y_0 x - x_0 y) + F\,(z - z_0) = 0. \end{cases}$$

Krzywa kompleksu, która musi być w tym wypadku krzywą *pierwszej* klasy, sprowadza się do jednego punktu — czyli wszystkie proste kompleksu, położone w jakiejś płaszczyźnie, przechodzą przez pewien punkt tej płaszczyzny, zwany *biegunem* (pôle) lub *ogniskiem* (foyer).

Kompleks linjowy wytwarza tedy pewien związek pomiędzy punktami i płaszczyznami w przestrzeni trójwymiarowej, tego rodzaju, że każdemu punktowi odpowiada przechodząca przezeń płaszczyzna, a każdej płaszczyźnie — pewien punkt, położony na niej. Istnieje tu również podporządkowanie wzajemne prostych. Niech D oznacza prostą, nie należącą do kompleksu, F i F' — ogniska dwu płaszczyzn, przeciągniętych przez tę prostą, a Δ — prostą, łączącą te ogniska. Wszelka płaszczyzna, przeciągnięta przez Δ, ma za ognisko punkt φ, w którym ją przebija prosta D, gdyż proste φF i $\varphi F'$ oczywiście należą do kompleksu. Stąd wynika, że wszelka prosta, przecinająca D i Δ, należy do kompleksu i wreszcie, że ogniskiem płaszczyzny, przechodzącej przez D, jest punkt przebicia tej płaszczyzny przez prostą Δ. Proste D i Δ nazywają się *prostemi sprzężonemi* (droites conjugueés); każda z nich jest miejscem gieometrycznym ognisk płaszczyzn, przechodzących przez drugą.

Jeżeli prosta D oddala się w nieskończoność, płaszczyzny, zawierające D, stają się równoległe, i stwierdzamy, że miejscem gieometrycznym ognisk płaszczyzn, równoległych do pewnej stałej płaszczyzny, jest prosta. Istnieje zawsze taka płaszczyzna, że miejscem gieometrycznym ognisk płaszczyzn, równoległych do niej, jest prosta, prostopadła do tych płaszczyzn. Jeżeli obierzemy tę prostą za oś z-ów, to płaszczyzna, której biegunem jest jakikolwiek punkt osi Oz, winna być równoległa do płaszczyzny $z = 0$.

Podług równania (75) potrzeba i wystarcza do tego, iżbyśmy mieli

$$A = B = C = D = 0;$$

równanie kompleksu przybiera nader prostą postać

$$(76) \qquad aq - bp + K = 0,$$

a płaszczyzna, której ognisko stanowi punkt (x, y, z), posiada równanie

$$(77) \qquad Xy - Yx + K\,(Z - z) = 0,$$

w którym X, Y, Z oznaczają spółrzędne bieżące.

W celu zastosowania tych rozważań poszukajmy krzywych, których styczne należą do omówionego kompleksu. Jeżeli mamy krzywą tego rodzaju, której spółrzędne x, y, z są funkcjami parametru zmiennego, to stycznej w jakimkolwiek punkcie tej krzywej odpowiadają równania

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz};$$

do tego, ażeby ta prosta wchodziła w skład kompleksu, potrzeba i wystarcza, iżby należała do płaszczyzny (77), która ma za ognisko punkt (x, y, z), to jest iżby był spełniony warunek

$$x\,dy - y\,dx = K\,dz. \tag{78}$$

Widzieliśmy już powyżej (art. 226), w jaki sposób można otrzymać wszystkie funkcje x, y, z parametru zmiennego, czyniące mu zadość; mamy tedy wszystkie krzywe, odpowiadające naszemu żądaniu.

Wyniki, otrzymane w art. 226, łatwo sformułować w języku teorji kompleksów. Tak oto, z różniczkowania równania (78) wypada

$$x\,d^2y - y\,d^2x = K\,d^2z, \tag{79}$$

i równania (78) i (79) wskazują, że płaszczyzną ściśle styczną w punkcie (x, y, z) jest właśnie płaszczyzna (77). Można tedy wypowiedzieć twierdzenie następujące: *Gdy styczne krzywej skośnej należą do jakiegoś kompleksu linjowego, płaszczyzną ściśle styczną w dowolnym punkcie tej krzywej jest płaszczyzna, dla której ten punkt jest ogniskiem.*

(APPELL).

Wyobraźmy sobie, że przez jakiś punkt O przestrzeni przeciągamy płaszczyzny ściśle styczne do krzywej skośnej Γ, której styczne należą do pewnego kompleksu linjowego. Niech M stanowi punkt styczności jednej z tych płaszczyzn. Podług powyższego twierdzenia prosta MO jest jedną z prostych kompleksu, i zatym punkt M leży w płaszczyźnie, która ma za ognisko ten punkt O. Nawzajem, jeżeli punkt M krzywej Γ należy do tej płaszczyzny, to prosta MO, należąca do kompleksu, leży w płaszczyźnie ściśle stycznej w punkcie M, i owa płaszczyzna ściśle styczna przechodzi przez punkt O. Punkty szukane są to tedy punkty przecięcia krzywej Γ z płaszczyzną, której ogniskiem jest punkt O (art. 226).

Kompleksy linjowe występują w wielu teorjach gieometrycznych i mechanicznych [ob. np. rozprawy doktorskie Appella i Picarda (1)].

ĆWICZENIA.

1. Wyznaczyć linje krzywiznowe powierzchni rozwijalnej, obwijającej płaszczyznę ruchomą, daną w układzie spółrzędnych prostokątnych przez równanie

$$z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + R\sqrt{1 + \alpha^2 + \varphi^2(\alpha)},$$

w którym α oznacza parametr zmienny, $\varphi(\alpha)$ — dowolną funkcję tego parametru, a R — pewną daną stałą.

[Egzamin na stopień lic.: Paryż, sierpień 1871].

2. a, b, α, β oznaczają funkcje parametru zmiennego; znaleźć warunki, które muszą być spełnione, ażeby prosta $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ zakreślała powierzchnię rozwijalną, której linje krzywiznowe, prostopadłe do tworzących, byłyby położone na kulach spółśrodkowych.

[Egz. na stop. lic.: Paryż, lipiec 1872].

---

(1) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure.* (Roczniki naukowe wyższej Szkoły Normalnej), 1876 i 1877.

3. Wyznaczyć linje krzywiznowe powierzchni danej w układzie spółrzędnych prostokątnych za pomocą równania $e^z = \cos x \cos y$.

[Egz. na stop. lic.: Paryż, lipiec 1875].

4. Mając elipsoidę o trzech osiach nierównych, daną w układzie spółrzędnych prostokątnych za pomocą równania jej powierzchni

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

badamy na niej elipsę E, położoną w płaszczyźnie xz. Znaleźć dla dowolnego punktu M tej elipsy: 1) wyrażenia głównych promieni krzywizny R_1 i R_2 powierzchni elipsoidy; 2) związek, istniejący pomiędzy R_1 i R_2; 3) miejsce gieometryczne środków krzywizny przekrojów głównych, odpowiadające przesuwaniu się punktu M po elipsie E.

[Egz. na stop. lic.: Paryż, listopad 1877].

5. Po 1-sze). Utworzyć równanie drugiego stopnia, wyznaczające promienie główne krzywizny w punkcie dowolnym paraboloidy, określonej w układzie spółrzędnych prostokątnych za pomocą równania

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z;$$

Po 2-gie). Wyrazić w zależności od zmiennej z każdy z dwu promieni głównych krzywizny dla dowolnego punktu linji przecięcia powierzchni paraboloidy danej z powierzchnią paraboloidy, określonej przez równanie

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{a-\lambda}=2z-\lambda.$$

[Egz. na stop. lic.: Paryż, listopad 1880].

6. Wyznaczyć miejsce gieometryczne środków krzywizny przekrojów głównych paraboloidy $xy = az$, przechodzących przez punkty osi Ox.

[Egz. na stop. lic.: Paryż, lipiec 1883].

7. Znaleźć równanie powierzchni, stanowiącej miejsce gieometryczne środków krzywizny przekrojów płaskich danej powierzchni S, zawierających dany punkt M tej powierzchni.

8. Dajemy sobie powierzchnię drugiego stopnia i styczną MT w punkcie M tej powierzchni. Przesuwamy przez MT płaszczyznę i oznaczamy przez O środek krzywizny otrzymanego w ten sposób przekroju płaskiego, a przez O' środek krzywizny rozwiniętej tego przekroju. Znaleźć miejsce gieometryczne punktu O' przy obrocie płaszczyzny siecznej dokoła MT.

[Egz. na stop. lic.: Clermont, lipiec 1883].

9. Wyznaczyć linje asymptotyczne pierścienia (tore), utworzonego przez koło, obracające się dokoła jednej ze stycznych.

[Egz. na stop. lic.: Paryż, listopad 1882].

10. Ox, Oy, Oz oznaczają osie spółrzędnych prostokątnych; w płaszczyźnie zOx mamy daną krzywą C. Utwórzmy powierzchnię za pomocą okręgu ruchomego, którego płaszczyzna pozostaje równoległa do płaszczyzny xOy, a środek przebiega krzywą C, i który przecina stale oś Oz. Biorąc za zmienne spółrzędną z punktu powierzchni i kąt θ pomiędzy promieniem okręgu, przechodzącego przez ten punkt i śladem płaszczyzny tegoż okręgu na płaszczyźnie zOx, ułożyć równanie różniczkowe linji asymptotycznych powierzchni. Zastosować otrzymany wynik do wypadku, gdy C jest parabolą o wierzchołku w punkcie O, której osią jest prosta Ox.

[Egz. na stop. lic.: Paryż, lipiec 1880].

11. Wyznaczyć linje asymptotyczne powierzchni prostolinjowej, stycznej do innej powierzchni prostolinjowej we wszystkich punktach jakiejś tworzącej Δ tej drugiej powierzchni, tak iż wszystkie tworzące pierwszej przecinają prostą Δ.

12. Znaleźć na powierzchni śrubowej prostej (hélicoïde droit) linje, których płaszczyzny ściśle styczne zawierają normalne do powierzchni.

[Egz. na stop. lic.: Paryż, lipiec 1876].

13. Wyznaczyć linje asymptotyczne powierzchni prostolinjowej, określonej przez równania

$$x = (1 + u) \cos v, \qquad y = (1 - u) \sin v, \qquad z = u.$$

[Egz. na stop. lic.: Nancy, listopad 1900].

14*. Dowieść, że linje przecięcia danej powierzchni S z płaszczyznami, przeciągniętemi przez daną prostą Δ, oraz krzywe, podług których powierzchnie stożkowe o wierzchołkach na Δ, opisane na S, stykają się z tą powierzchnią, tworzą sieć sprzężoną.

[Koenigs].

15* Gdy trzy punkty prostej niezmiennej poruszają się w trzech prostopadłych do siebie płaszczyznach, prosta pozostaje wciąż normalną do pewnej rodziny powierzchni równoległych. Otrzymujemy jedną z tych powierzchni, wyznaczając miejsce gieometryczne środków odcinka, łączącego punkt, w którym dana prosta przebija jedną z płaszczyzn spółrzędnych, ze spodkiem prostopadłej do tej prostej, przeciągniętej przez początek układu.

[Darboux, Comptes rendus, t. XCII, 1881, str. 446].

16*. Na wszelkiej powierzchni istnieje linja krzywiznowa urojona, określona jako miejsce gieometryczne punktów, dla których mamy $1 + p^2 + q^2 = 0$. Aby to udowodnić, wystarczy wykazać, iż równaniu różniczkowemu linji krzywiznowych możemy nadać postać:

$$(dp\, dy - dq\, dx)(1 + p^2 + q^2) + (p\, dy - q\, dx)(p\, dp + q\, dq) = 0.$$

[Darboux, Annales de l'École Normale; 1864].

KONIEC GIEOMETRJI RÓŻNICZKOWEJ

i TOMU I.

SPIS RZECZY.

ROZDZIAŁ X.

TEORJA OBWIJAJĄCYCH. — STYCZNOŚĆ.

ROZDZIAŁ XI.

KRZYWE SKOŚNE.

ROZDZIAŁ XII.

POWIERZCHNIE.