DZIEŁA I ROZPRAWY MATEMATYCZNO-FIZYCZNE,
wydawane przez
A. CZAJEWICZA i S. DICKSTEINA
Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB, PRACUJĄCYCH NA POLU NAUKOWEM, IMIENIA JÓZEFA MIANOWSKIEGO.

VII.

GEOMETRYA WYKREŚLNA

opracował

Dr. M. Feldblum.

WARSZAWA.
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI E. WENDEGO I SP.

1902.

CENA RUB. 2.

GEOMETRYA WYKREŚLNA.

Warszawa. W drukarni Noskowskiego, Warecka 15.

DZIEŁA I ROZPRAWY MATEMATYCZNO-FIZYCZNE,
wydawane przez
A. CZAJEWICZA i S. DICKSTEINA
Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB, PRACUJĄCYCH NA POLU NAUKOWEM, IMIENIA JÓZEFA MIANOWSKIEGO.

VII.

GEOMETRYA WYKREŚLNA

opracował

Dr. M. Feldblum.

WARSZAWA.
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI E. WENDEGO I SP.

1902.

Дозволено Цензурою.
Варшава, 22 Августа 1902 года.

PRZEDMOWA.

Przy opracowywaniu podręcznika niniejszego mieliśmy na względzie przedewszystkiem potrzeby słuchaczów szkół technicznych i dlatego położyliśmy główny nacisk na same konstrukcye, stanowiące przedmiot istotny geometryi wykreślnej.

Idąc za przykładem autorów nowszych, wprowadziliśmy wykład pojęć geometryi rzutowej, które rozwinięte zostały o tyle, o ile to okazuje się potrzebnem w konstrukcyach geometryi wykreślnej; zasadom geometryi rzutowej poświęciliśmy cały rozdział pierwszy.

Przy wykreśleniach, odnoszących się do punktów, linij i płaszczyzn, o ile zachodziła potrzeba przekształceń, stosowaliśmy metodę obrotów i kładów elementów danych, pozostawiając płaszczyzny rzutu nieruchomemi. Uważamy bowiem, idąc za zdaniem Fiedlera, za wysoce niepedagogiczne stosowanie zmiany płaszczyzn rzutu, gdy uczący się nie nabrał jeszcze dostatecznej wprawy w rozwiązywaniu zadań przy płaszczyznach rzutu niezmiennych; skoro zaś zadania zasadnicze zostały rozwiązane przy płaszczyznach rzutu stałych, to teorya zmiany płaszczyzn rzutu okazuje się zbyteczną.

Przy wykładzie teoryi perspektywy ograniczyliśmy się na tak zw. perspektywie stosowanej, gdyż tylko ta ma wartość praktyczną, zwłaszcza, że t. zw. perspektywa czysta nie zawiera niczego zasadniczo odmiennego od stosowanej. Pominęliśmy także rzut równoległy ukośny, uważając go za zbyteczny obok wykładu aksonometryi prostokątnej.

Dla ułatwienia czytelnikowi nabycia wprawy w posiłkowaniu się geometryą wykreślną zaopatrzyliśmy każdy rozdział w odpowiednie ćwiczenia, które poczęści są oryginalne, poczęści zaś zapożyczone skądinąd. W końcu dzieła podane są wskazówki do tych ćwiczeń, a niekiedy — rozwiązania całkowite.

Przy opracowywaniu podręcznika korzystaliśmy, między innemi, z dzieł następujących:

W. Fiedler — „Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage" Lipsk, 3 tomy, trzecie wyd. 1884—1888; Chr. Wiener — „Lehrbuch der darstellenden Geometrie", Lipsk, 2 tomy, 1884—1888; K. Rohn i E. Papperitz „Lehrbuch der darstellenden Geometrie," Lipsk, 2 tomy, 1893 — 1896; R. Müller — „Leitfaden für die Vorlesungen über darstellende Geometrie," Brunświk 1899; zwłaszcza z podręcznika Rohna i Papperitza zapożyczyliśmy znaczną część konstrukcyj i figur.

Autor.

SPIS RZECZY.

ROZDZIAŁ III.

Wielościany.

§ 1. *Wyznaczenie wielościanu przez rzuty.*

§ 2. *Przekroje płaskie wielościanów; ich przecinanie się wzajemne.*

§ 3. *Cienie wielościanów.*

ROZDZIAŁ IV.

Linie krzywe.

§ 1. *Krzywe płaskie.*

ROZDZIAŁ V.

Powierzchnie walcowa i stożkowa.

ROZDZIAŁ VI.

Powierzchnie obrotowe.

ROZDZIAŁ VII.

Powierzchnie śrubowe i inne.

ROZDZIAŁ IX.

Aksonometrya.

WSTĘP.

Geometrya wykreślna jest nauką o metodach, za pomocą których na rysunku płaskim (dwuwymiarowym) przedstawić można wielkość, kształt i położenie wzajemne przedmiotów przestrzennych (trójwymiarowych). Wszelkie konstrukcye geometryczne, jakie przy rozwiązywaniu zagadnień stereometrycznych wykonywać musielibyśmy w przestrzeni, sprowadzają się przy pomocy geometryi wykreślnej do konstrukcyj na płaszczyznie. Jak geometrya analityczna używa liczb i rachunku do przedstawiania położenia elementów geometrycznych w przestrzeni i rozwiązywania zagadnień odnośnych, tak geometrya wykreślna posiłkuje się w tym celu kreśleniem, rysunkiem na płaszczyznie.

Zastosowania praktyczne geometryi wykreślnej są liczne i doniosłe, szczególniej w budownictwie, technice maszynowej, ciesielstwie, blacharstwie, kamieniarstwie i t. p. W zastosowaniach tych ma geometrya wykreślna zadanie dwojakie do spełnienia: 1) przedstawić na rysunku płaskim przedmiot istniejący (budowlę, maszynę lub in.) tak, aby rysunek ten informował dokładnie o wielkości i kształcie przedmiotu; 2) wykonać rysunek przedmiotu pomyślanego tak, aby na zasadzie tego rysunku można było dokładnie przedmiot pomyślany wykonać. W obydwóch tych wypadkach pożądany jest nadto rysunek dodatkowy, dający ogólny wygląd przedmiotu samego (istniejącego lub pomyślanego); dla większej plastyczności rysunku wyznacza się zwykle cienie, oraz rozmaitość natężenia światła w różnych miejscach na powierzchni przedmiotu; w tym celu geometrya wykreślna rozwija metody perspektywy i pokrewnej jej aksonometryi oraz teoryę cieni i teoryę oświetlenia powierzchni. Dzięki zwłaszcza teoryi perspektywy i teoryi cieni, geometrya wykreślna staje się nauką pomocniczą dla sztuki malarskiej, dając rysunkowi podwaliny ściśle naukowe.

Zanim do właściwej geometryi wykreślnej przystąpimy, rozwiniemy w zarysie zasady t. zw. geometryi rzutowej; twierdzenia tej ostatniej będą nam niejednokrotnie znakomicie ułatwiały konstrukcye geometryi wykreślnej.

ROZDZIAŁ I.

WIADOMOŚCI Z GEOMETRYI RZUTOWEJ.

§ 1. Teorya rzutu środkowego.

1. Zobaczmy przedewszystkiem, jak rozumiane są w geometryi rzutowej proste i płaszczyzny równoległe.

Punkty w nieskończoności.

Niech na płaszczyznie daną będzie prosta a i punkt M, zewnątrz niej położony (fig. 1); poprowadźmy z punktu M prostopadłą MN do prostej a, oraz prostą, tworzącą z prostą MN pewien kąt ostry φ i przecinającą prostą a w punkcie S. Wyobraźmy sobie, że kąt φ ciągle wzrasta; równocześnie punkt S będzie się oddalał na prawo od punktu N. Dopóki kąt φ pozostaje mniejszym od prostego, mamy zawsze pewne określone położenie punktu S*) i odwrotnie: każdemu położeniu punktu S z prawej strony od punktu N odpowiada pewna określona wielkość kąta φ, mniejsza od prostego. Gdy w granicy kąt φ stanie się prostym, prosta MS stanie się równoległą MK do

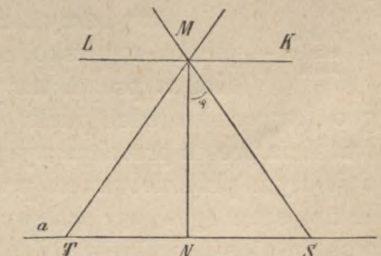


fig. 1.

*) Założenie to jest pewnikiem, na którym opiera się geometrya Euklidesa; analogicznie można zbudować geometryę, w której ten pewnik nie istnieje. Por. artykuł Mansiona: „Pierwsze zasady metageometryi" (tłom. S. Dicksteina) w tomie I-ym „Wiadomości Matematycznych" (1897).

prostej a; o punkcie S powiemy, że oddalił się w nieskończoność, posuwając się na prostej a w prawą stronę od punktu N. Podobnież możemy rozważać prostą, obracającą się około punktu M i przecinającą prostą a w punkcie T z lewej strony od punktu N; gdy prosta MT stanie się równoległą ML do a, powiemy o punkcie T, że oddalił się w nieskończoność, posuwając się na prostej a w lewą stronę od punktu N. Lecz proste MK i ML, z których każda tworzy z prostą MN kąt prosty, stanowią jednę prostą KL; ponieważ zaś wszelkie dwie proste na płaszczyznie w ogólności przecinają się w jednym tylko punkcie, przeto przyjmijmy za zasadę, że i prosta KL, równoległa do prostej a, nie może mieć z nią więcej nad jeden punkt wspólny, t. j., czy punkt na prostej a oddala się w nieskończoność w prawą stronę od punktu N, czy też w lewą, zawsze otrzymujemy jeden tylko punkt w nieskończoności; prosta a posiada więc jeden punkt nieskończenie daleki.

Mieliśmy dwie proste równoległe i widzieliśmy, że one mają punkt w nieskończoności wspólny. Rozważmy trzecią prostą, do nich równoległą; przetnie ona każdą z poprzednich w tym samym punkcie nieskończenie dalekim. Wszystkie więc proste wzajemnie równoległe posiadają jeden punkt wspólny w nieskończoności. Inny układ równoległych ma inny punkt w nieskończoności, tak że punkt nieskończenie daleki określony jest w zupełności, gdy dany jest kierunek; mówimy też zamiast „punkt nieskończenie daleki na danej prostej" — „punkt nieskończenie daleki w kierunku danej prostej."

Prosta w nieskończoności.

Rozważmy teraz miejsce geometryczne wszystkich punktów nieskończenie dalekich na danej płaszczyznie. Każda prosta na tej płaszczyznie ma z tem miejscem geometrycznem jeden punkt wspólny, ale też tylko jeden; a ponieważ linia prosta przecina wyłącznie linię prostą w jednym i tylko w jednym punkcie, przeto przyjmujemy, dla zachowania analogii, że miejscem geometrycznem punktów nieskończenie dalekich na płaszczyznie danej jest linia prosta, nieskończenie odległa na płaszczyznie danej.

Niech dane będą dwie płaszczyzny równoległe; ponieważ dla każdego układu prostych równoległych na jednej płaszczyznie mamy na drugiej płaszczyznie układ prostych, równoległych do tamtych prostych, każdy zatem punkt nieskończenie daleki na jednej z tych płaszczyzn należy też do drugiej płaszczyzny; dwie płaszczyzny równoległe mają więc prostą w nieskończoności wspólną.

Płaszczyzna nieskończoności.

Rozważając układ płaszczyzn równoległych, widzimy z łatwością, że wszystkie one posiadają wspólną prostą w nieskończoności, przez każdą z nich oddzielnie w zupełności wyznaczoną. Inny układ płaszczyzn równoległych wyznacza inną prostą w nieskończoności. Jakież jest miejsce geometryczne wszystkich tych prostych nieskończenie odległych? Każda płaszczyzna posiada linię prostą wspólną z tem miejscem geometrycznem i żadnego innego punktu, oprócz punktów tej prostej; a że płaszczyzna jest jedyną powierzchnią, z którą wszelka inna płaszczyzna ma linię prostą wspólną i nie ma nadto żadnego punktu wspólnego, to przyjmujemy na tej zasadzie, dla zachowania analogii, że miejscem geometrycznem wszystkich prostych w nieskończoności w przestrzeni — jest płaszczyzna nieskończenie daleka*).

Rzut punktu.

2. Obierzmy w przestrzeni pewną płaszczyznę stałą P, oraz pewien punkt stały O, nie leżący na tej płaszczyznie i znajdujący się w skończonej od niej odległości (fig. 2). Niech dany będzie w przestrzeni jakikolwiek punkt A; połączywszy punkt O z punktem A prostą, otrzymamy w przecięciu się prostej OA z płaszczyzną P punkt A'. Będziemy punkt A' nazywali rzutem punktu A na płaszczyznę P ze środka O. Punkt O zwać będziemy środkiem rzutu, a płaszczyznę P — płaszczyzną rzutu. Wszelką prostą, wychodzącą ze środka rzutu, nazywać będziemy promieniem rzucającym.

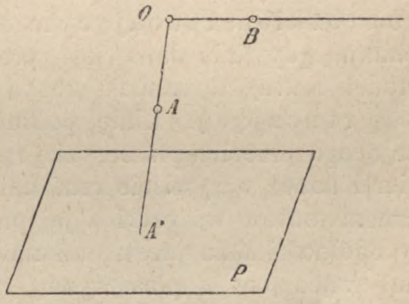


fig. 2.

Oczywiście, wszystkie punkty, leżące na jednym promieniu rzucającym, posiadają rzut wspólny, tak, że położenie punktu w przestrzeni nie jest dostatecznie określone, gdy dany jest tylko rzut jego; lecz odwrotnie twierdzić możemy, że każdy punkt w przestrzeni posiada rzut jeden zupełnie określony. Gdy promień rzucający punktu A nie jest równoległy do płaszczyzny rzutu, to rzutem punktu A jest punkt przecięcia tego promienia z płaszczyzną

*) Wyczerpujący wykład tych pojęć czytelnik znajdzie np. w dziele M. Pascha: „Vorlesungen über neuere Geometrie" 1882, wyd. Teubnera.

rzutu; jeżeli zaś promień rzucający pewnego punktu B jest równoległy do płaszczyzny rzutu, to punktem wspólnym tego promienia z płaszczyzną rzutu jest punkt nieskończenie odległy w kierunku prostej OB; ten nieskończenie daleki punkt uważać więc winniśmy za rzut punktu B na płaszczyznę P ze środka O. Wszystkie punkty, mające rzuty w nieskończoności, leżą na płaszczyznie, równoległej do płaszczyzny rzutu i przechodzącej przez środek rzutu; płaszczyznę tę nazywamy **płaszczyzną zniknienia**.

Wprowadzając pojęcie o punktach nieskończenie odległych, zyskujemy jednolitość twierdzeń; tylko dzięki tej zasadzie możemy powiedzieć, że każdy punkt przestrzeni posiada rzut zupełnie określony. Wyjątek z tej reguły stanowi jedyny punkt: środek rzutu; rzut tego punktu jest zupełnie nieokreślony: możemy każdy punkt płaszczyzny rzutu uważać za rzut środka rzutu. Punkty, leżące na samej płaszczyznie rzutu, są zarazem swojemi rzutami.

Rzut linii.

Jeżeli w przestrzeni dana będzie jakakolwiek linia płaska lub skośna, to promienie rzucające punktów tej linii utworzą stożek z wierzchołkiem w środku rzutu; nazwijmy go **stożkiem rzucającym** linii danej; w szczególnym przypadku, gdy linia dana jest prostą (która nie przechodzi przez środek rzutu), to zamiast stożka rzucającego mamy — **płaszczyznę rzucającą**. Linię, podług której powierzchnia stożka rzucającego przecina płaszczyznę rzutu, nazywać będziemy **rzutem linii** danej; oczywiście rzut linii danej jest miejscem geometrycznem rzutów wszystkich jej punktów. Rzutem linii prostej jest w ogólności linia prosta, mianowicie: prosta przecięcia płaszczyzny rzucającej z płaszczyzną rzutu; jedynie tylko, gdy prosta przechodzi przez środek rzutu, wszystkie jej punkty (oprócz samego środka rzutu) mają jeden i ten sam rzut, mianowicie: punkt, w którym prosta dana przecina płaszczyznę rzutu; możemy więc ten punkt uważać za rzut prostej danej. Zakładamy zresztą w dalszem rozumowaniu, o ile nie jest wyraźnie zaznaczone założenie przeciwne, że prosta dana nie przechodzi przez środek rzutu.

Rzut linii prostej.

Zauważmy niektóre własności rzutu linii prostej. Ponieważ linia prosta jest w zupełności wyznaczona przez dwa jej punkty, przeto dla wyznaczenia rzutu prostej wystarcza wyznaczyć rzuty dwóch jej punktów; prosta, łącząca te dwa rzuty, jest rzutem prostej danej. Promieniem rzucającym punktu nieskończenie odległego na prostej danej jest prosta, poprowadzona przez środek rzutu równolegle do danej prostej; punkt przecięcia tego promienia z płaszczyzną rzutu leży więc na rzucie prostej danej; jeżeli rozważymy w przestrzeni układ prostych równoległych, to wskutek powyższego, rzuty wszystkich tych prostych przejdą przez punkt przecięcia promienia rzucającego, do nich równoległego, z płaszczyzną rzutu. Można to samo wywnioskować i stąd, że płaszczyzny rzucające wszystkich prostych danego układu równoległych mają wspólną prostą, mianowicie powyżej wyznaczony promień rzucający. Punkt, przez który przechodzą rzuty prostych wzajemnie równoległych, t. j. rzut punktu w nieskończoności, wyznaczonego przez układ prostych równoległych, nazywa się z b i e g i e m tych prostych równoległych na płaszczyźnie rzutu.

W szczególnym przypadku, gdy proste dane są równoległe do płaszczyzny rzutu, zbieg ich leży w odległości nieskończonej. Jeżeli prosta leży w płaszczyznie zniknienia, to jej rzutem jest nieskończenie daleka prosta płaszczyzny rzutu.

Każda prosta posiada punkt, którego rzut leży w nieskończoności; jest to punkt, w którym prosta ta przecina płaszczyznę zniknienia; punkt ten nazywamy p u n k t e m z n i k n i e n i a prostej danej. W szczególności, gdy prosta jest równoległa do płaszczyzny rzutu, to jej punkt zniknienia leży sam w nieskończoności.

Zbieg płaszczyzny. Niech daną będzie płaszczyzna jakakolwiek, nie przechodząca przez środek rzutu. Prowadząc przez środek rzutu płaszczyznę do niej równoległą, otrzymamy, jako przecięcie tej płaszczyzny z płaszczyzną rzutu, prostą, będącą rzutem prostej w nieskończoności płaszczyzny danej; ta prosta na płaszczyznie rzutu nazywa się z b i e g i e m płaszczyzny danej. Oczywiście wszystkie płaszczyzny równoległe posiadają zbieg wspólny. Gdy płaszczyzny są równoległe do płaszczyzny rzutu, to zbieg ich jest prostą w nieskończoności płaszczyzny rzutu.

Wszelka płaszczyzna, nie przechodząca przez środek rzutu, posiada prostą, rzut której jest prostą w nieskończoności płaszczyzny rzutu; prostą tę otrzymujemy, przecinając płaszczyznę daną płaszczyzną zniknienia; nazywamy tę prostą p r o s t ą z n i k n i e n i a płaszczyzny danej.

Metoda rzutu środkowego. Gdy mamy w przestrzeni figurę jakąkolwiek, złożoną z punktów i linij, to ogół rzutów tych punktów i tych linij nazywamy r z u t e m f i g u r y d a n e j. Metoda badania własności figury przez rozważanie jej, jako rzutu innej figury z pewnego środka, nazywa się **metodą rzutu środkowego**. Zajmiemy się obecnie bliżej rzutem figur płaskich.

Własności rzutowe figur.

3. Tworząc rzut jakiejkolwiek figury płaskiej, widzimy, że w ogólności długości odcinków i wielkości kątów inne są w rzucie, niż w figurze samej, że proste równoległe przez rzut przekształcają się na proste nierównoległe i t. p. Istnieją wszakże własności figur takie, które zostają zachowane po rzucie z jakiegokolwiek środka; własności takie, niezmienne względem rzutu, nazywamy **własnościami rzutowemi** figur *). Podamy tu niektóre najprostsze własności rzutowe.

Szereg punktów.

Gdy punkty $A, B, C, \ldots$ leżą na jednej prostej, to ich rzuty $A', B', C', \ldots$ leżą również na jednej prostej. Nazywając ogół punktów, leżących na jednej prostej, **szeregiem punktów**, możemy własność tę wyrazić w sposób następujący: **rzutem szeregu punktów jest szereg punktów.** Prosta, na której leżą punkty szeregu, nazywa się **podkładem** szeregu.

Pęk promieni.

Gdy promienie $a, b, c, \ldots$ przechodzą przez jeden punkt, w odległości skończonej lub w nieskończoności, to ich rzuty $a', b', c', \ldots$ mają również punkt wspólny. Nazywając ogół promieni na płaszczyznie, wychodzących z jednego punktu, **pękiem promieni**, możemy własność tę wyrazić, mówiąc, że **rzutem pęku promieni jest pęk promieni.** Punkt, z którego wychodzą promienie pęku, nazywa się **wierzchołkiem pęku**. Gdy wierzchołek leży w nieskończoności, to promienie pęku są wzajemnie równoległe.

Rozpatrzymy teraz inną jeszcze ważną własność rzutową figur. Uprzednio wszakże uczynimy uwagę o znakach odcinków i kątów.

Zwrot odcinków i kątów.

4. W odcinku AB brać będziemy pod uwagę nietylko długość bezwzględną, lecz także kierunek, uważając A za punkt początkowy odcinka, B za jego punkt końcowy. Odcinek BA posiada tę samą długość bezwzględną, co i odcinek AB, lecz zwrot odmienny; piszemy przeto: $BA = - AB$, czyli $AB + BA = 0$. Jakiekolwiek trzy punkty A, B, C jednej prostej czynią zadość równaniu $AB + BC = AC$, czyli: $AB + BC + CA = 0$; każdy odcinek AB możemy przedstawić w postaci: $AB = KB - KA$, gdzie K jest zupełnie dowolnym punktem prostej AB.

---

*) **Poncelet**: „Traité de propriétés projectives des figures.”

Podobnież uważamy kąty $\angle AOB$ i $\angle BOA$, jako równe, co do wielkości bezwzględnej, lecz mające zwroty przeciwne; wstawa kąta AOB równa jest wstawie kąta BOA, wziętej z odwrotnym znakiem.

Dwa odcinki na jednej prostej (albo na prostych równoległych) mają znaki jednakowe lub różne, zależnie od tego, czy zwrot ich jest jednakowy, czy też różny; w pierwszym przypadku stosunek tych odcinków jest liczbą dodatnią, w drugim — ujemną.

Gdy dane są dwa punkty stałe A i B, to przez stosunek $k = AC : CB$ punkt C prostej AB wyznaczony jest w sposób zupełnie określony, t. j. gdy punkt C przebiega całą prostą nieograniczoną, stosunek ten przybiera wszelkie wartości, przytem każdą raz jeden. Rzeczywiście, gdy punkt C jest w punkcie A, jest $k = 0$; gdy C dąży od A do B, AC wzrasta, CB się zmniejsza, k stale wzrasta; w środku O odcinka AB k przyjmuje wartość $+1$, w punkcie B przyjmuje wartość $+\infty$,

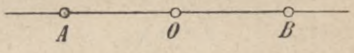


fig. 3.

lecz przy przejściu przez B czyni przeskok od $+\infty$ do $-\infty$, i dalej, gdy punkt C oddala się od B do nieskończoności w prawą stronę, pozostaje k ujemnem i wzrasta od $-\infty$ do -1. Pisząc: $k = \frac{AB + BC}{CB} = -1 + \frac{AB}{CB}$, widzimy, że położeniu punktu C w nieskończoności odpowiada wartość $k = -1$; gdy punkt C oddala się od A w lewą stronę, to k również zostaje ujemnem, lecz jego wartość bezwzględna wzrasta od 0 do 1; w nieskończoności k znowu otrzymuje wartość -1, co się zgadza z naszem założeniem, że prostej przypisujemy w nieskończoności jeden punkt (art. 1). Tak więc wartościom k od 0 do $+1$ odpowiadają punkty odcinka AO, wartościom k od $+1$ do $+\infty$ punkty od 0 do B, wartościom od 0 do -1 punkty od A ku lewej stronie do nieskończoności, wreszcie wartościom od $-\infty$ do -1 punkty od B ku prawej stronie do nieskończoności.

Podobnież przekonać się można, że gdy dane są dwa promienie OA i OB, to przez stosunek $\frac{\sin AOC}{\sin COB}$ każdy promień OC wyznaczony jest w zupełności.

Stosunek anharmoniczny.

5. Niech dane będą na prostej 4 punkty: A, B, C, D; ich rzuty oznaczmy przez A', B', C', D' (fig. 4); stosunek $\frac{AB}{BC}$

będzie w ogólności różny od stosunku $\frac{A'B'}{B'C'}$, tak samo stosunek $\frac{AD}{DC}$ będzie w ogólności różny od stosunku $\frac{A'D'}{D'C'}$, lecz stosunek dwu stosunków: $\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC}$ będzie zawsze równy stosunkowi odpowiedniemu $\frac{A'B'}{B'C'} : \frac{A'D'}{D'C'}$, tak co do wielkości, jak co do znaku. Liczbę $\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC}$ nazywamy stosunkiem anharmonicznym albo stosunkiem podziału podwójnego 4-ch punktów A, B, C, D; twierdzenie więc nasze polega na tem, że przy rzucie stosunek anharmoniczny 4-ch punktów zostaje zachowany*).

Dowód tego twierdzenia jest nadzwyczaj prosty. Jakoż mamy:

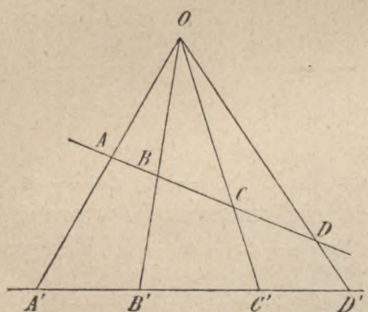


fig. 4.

$$AB \,.\, \sin OBA = OA \,.\, \sin AOB$$
$$BC \,.\, \sin OBC = OC \,.\, \sin BOC$$

skąd: $$\frac{AB}{BC} = \frac{OA}{OC} \cdot \frac{\sin AOB}{\sin BOC};$$

podobnież znajdziemy:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{OA}{OC} \cdot \frac{\sin AOD}{\sin DOC};$$

stąd otrzymujemy:

$$\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC} = \frac{\sin AOB}{\sin BOC} : \frac{\sin AOD}{\sin DOC}$$

Szukając w tenże sposób wartości stosunku anharmonicznego punktów A', B', C', D', otrzymamy zupełnie ten sam wzór, skąd wynika, że stosunek anharmoniczny punktów A, B, C, D równy jest stosunkowi anharmonicznemu punktów A', B', C', D', co było do dowiedzenia.

Nazywając liczbę:

$$\frac{\sin AOB}{\sin BOC} : \frac{\sin AOD}{\sin DOC}$$

stosunkiem anharmonicznym 4-ch promieni: OA, OB, OC, OD, widzimy z powyższego dowodzenia, że stosunek anharmoniczny 4-ch punktów równy jest stosunkowi anharmonicznemu ich promieni rzucających; jeżeli więc rzucimy 4 punkty dane z innego środka rzutu, to otrzymamy inne

*) Twierdzenie to podaje już Pappus z Aleksandryi w IV w. przed Chr.

4 promienie, których stosunek anharmoniczny równy będzie stosunkowi anharmonicznemu poprzednich 4-ch promieni.

Oznaczać będziemy w skróceniu stosunek anharmoniczny punktów A, B, C, D przez symbol $(ABCD)$, a stosunek anharmoniczny promieni: OA, OB, OC, OD przez symbol (OA, OB, OC, OD), albo: $O\,(ABCD)$.

Jeżeli rzutami 4-ch promieni a, b, c, d, wychodzących z jednego punktu na płaszczyznę dowolną, są promienie a', b', c', d', to mamy:

$$(abcd) = (a'b'c'd').$$

Rzeczywiście, przetnijmy promienie a, b, c, d jakąkolwiek prostą w punktach odp. A, B, C, D i oznaczmy rzuty tych punktów przez A', B', C', D', wówczas punkty A', B', C', D' leżą na jednej prostej i przytem odpowiednio na promieniach a', b', c', d', mamy przeto:

$$(abcd) = (ABCD), \quad (a'b'c'd') = (A'B'C'D'),$$

lecz na zasadzie dowiedzionego wyżej twierdzenia jest:

$$(ABCD) = (A'B'C'D'), \text{ a więc: } (abcd) = (a'b'c'd').$$

Nietylko więc wielkość stosunku anharmonicznego 4-ch punktów szeregu, lecz i wielkość stosunku anharmonicznego 4-ch promieni pęku jest własnością rzutową.

Gdy dane są trzy punkty: A, B, C, to czwarty punkt D jest w zupełności wyznaczony przez stosunek anharmoniczny $(ABCD) = \alpha$; rzeczywiście, mamy wówczas:

$$\alpha = \frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC},$$

lub, oznaczając stosunek wiadomy: $\frac{AB}{BC}$ przez β:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{\beta}{\alpha},$$

stosunek $\frac{AD}{DC}$ jest zatem wiadomy, a przez to punkt D jest wyznaczony w sposób zupełnie określony (art. 4).

Podobnie wyznaczony jest w sposób określony promień OD przez stosunek anharmoniczny, jaki tworzy z trzema promieniami danemi: OA, OB, OC.

Pokrewieństwo rzutowe.

6. Pojęcie o stosunku anharmonicznym prowadzi nas konsekwentnie do badania pewnego rodzaju związku między szeregami punktów i pękami promieni. Niech dane będą 2 szeregi punktów na prostych a i a'. Możemy pomiędzy temi szeregami ustanowić zależność tak, aby każdemu punktowi jednego szeregu odpowiadał pewien określony punkt drugiego, i odwrotnie, i aby przytem stosunek anharmoniczny dowolnych 4-ch punktów jednego szeregu równy był stosunkowi anharmonicznemu odpowiednich 4-ch punktów drugiego szeregu. W tym celu obieramy w szeregach dowolnie 3 pary punktów odpowiednich: A i A', B i B', C i C', następnie dla każdego punktu pierwszego szeregu uważamy jako odpowiadający mu w drugim szeregu punkt, który z punktami A', B', C' wyznacza stosunek anharmoniczny równy temu, jaki ów punkt pierwszego szeregu wyznacza z punktami A, B, C. Ażeby pokazać, jak graficznie wyznaczać pary punktów odpowiednich, i zarazem dowieść, że przy tak ustanowionej zależności rzeczywiście stosunek anharmoniczny każdych 4-ch punktów jednego szeregu równy jest stosunkowi anharmonicznemu odpowiednich 4-ch punktów drugiego, postępujemy w sposób następujący. Przenosimy prostą a tak, aby punkt A zszedł się z punktem A', i oznaczamy przez O punkt, w którym przecinają się proste BB' i CC'; stosunek anharmoniczny każdych 4-ch punktów szeregu a równy jest stosunkowi anharmonicznemu 4-ch promieni, rzucających je z punktu O; wskutek tego promienie, wychodzące z punktu O, przecinają proste a i a' w punktach odpowiednich; możemy więc tą drogą z łatwością znaleść na prostej a' punkt, odpowiadający danemu punktowi prostej a; wymieniona wyżej własność tych dwu szeregów wynika też bezpośrednio z tego, że po przeniesieniu prostej a do nowego położenia każdy z szeregów a i a' może być uważany jako rzut drugiego ze środka O. Wszelako położenie to specyalne prostej a było nam potrzebne li tylko dla wykreślenia par punktów odpowiednich; w ogólności prosta a może mieć położenie jakiekolwiek, i w ogólnym przypadku żadne z 3-ch prostych, łączących 3 pary punktów odpowiednich nie przejdą przez jeden punkt; jeżeli jednak położenie prostych a i a' będzie takie, że 3 proste, łączące pewne 3 pary punktów odpowiednich, przechodzą przez jeden punkt, to wszelka prosta, łącząca jakąkolwiek parę punktów odpowiednich, musi przejść przez ten sam punkt. Dwa szeregi punktów, między któremi ustanowiona jest powyższego rodzaju zależność, będziemy nazywali

rzutowo pokrewnemi. Rzuty dwóch szeregów rzutowo pokrewnych z jednego środka są znowu szeregami rzutowo pokrewnymi. W szczególności, gdy odległości między punktami jednego szeregu proporcyonalne są do odległości między odpowiedniemi punktami drugiego szeregu, to dwa takie rzutowo pokrewne szeregi nazywamy podobnemi, gdy zaś powyższe odległości są odpowiednio równe, to szeregi nazywamy równemi. W szeregach podobnych (a więc i w równych) punkty nieskończenie dalekie odpowiadają sobie wzajemnie. Podobieństwo oraz równość szeregów rzutowo pokrewnych w ogólności nie zostają zachowane przy rzucie środkowym.

Takie same pokrewieństwo rzutowe ustanowić możemy między dwoma pękami promieni. Niech dane będą dwa pęki o wierzchołkach A i A'. Obieramy dowolnie 3 pary promieni, odpowiadających sobie: a i a', b i b', c i c', następnie wyznaczamy pary promieni odpowiednich pod warunkiem, aby promień pierwszego pęku z promieniami a, b, c, oraz promień drugiego pęku z promieniami a', b', c' wyznaczali stosunki anharmoniczne równe; dla wykonania konstrukcyi par promieni odpowiednich, przenieśmy pęk A tak, aby promienie a i a' znalazły się na jednej prostej, i poprowadźmy prostą o przez punkty przecięcia się promieni b, b' i c, c', wówczas każda para promieni odpowiednich przetnie prostą o w tym samym punkcie. Stosunek anharmoniczny każdych 4-ch promieni pęku A będzie równy stosunkowi anharmonicznemu odpowiednich 4-ch promieni pęku A', gdyż obydwa te stosunki równe są stosunkowi anharmonicznemu 4-ch punktów, w których promienie te przecinają prostą o. W ogólności pęki A i A' leżą tak, że żadne 3 pary promieni odpowiadających sobie nie przecinają się w punktach jednej prostej; jeżeli wszakże ma to miejsce dla pewnych 3-ch par promieni odpowiadających sobie, to każde inne dwa promienie odpowiednie przecinają się na tej samej prostej. Gdy rzucimy z dowolnego punktu na płaszczyznę dowolną dwa pęki rzutowo pokrewne, otrzymamy znowu dwa pęki rzutowo pokrewne. Gdy kąty, utworzone przez promienie jednego pęku, równe są kątom, utworzonym przez odpowiednie promienie drugiego pęku, to nazywamy dwa takie rzutowo pokrewne pęki równemi. Równość dwóch pęków rzutowo pokrewnych w ogólności nie zostaje zachowana przy rzucie środkowym.

Oczywiście, możemy również mówić o pokrewieństwie rzutowem szeregu punktów i pęku promieni.

Dwa szeregi punktów na jednej prostej.

7. Pokrewieństwo rzutowe szeregów punktów lub pęków promieni nie zmienia się, jeżeli podstawy szeregów lub wierzchołki pęków przenosimy dowolnie. Możemy w szczególności dwa szeregi rzutowo pokrewne umieścić na wspólnej podstawie, oraz dwa pęki rzutowo pokrewne umieścić tak, aby miały wspólny wierzchołek. W tem położeniu specyalnem występują pewne własności szczególne, na które musimy zwrócić uwagę.

Gdy na jednym podkładzie mamy dwa szeregi rzutowo pokrewne, to każdy punkt podkładu otrzymuje nazwę podwójną, stosownie do tego, czy uważamy go jako element szeregu pierwszego, czy też drugiego. Będziemy punkty pierwszego szeregu oznaczali literami nieakcentowanemi, punkty zaś drugiego — akcentowanemi, przyczem dla pary punktów odpowiadających sobie używać będziemy tej samej litery. Tak np. punktowi MN', uważanemu jako punkt pierwszego szeregu, odpowiada punkt M' drugiego szeregu, zaś uważanemu, jako punkt drugiego szeregu, odpowiada w pierwszym szeregu punkt N. W każdym szeregu istnieje punkt szczególny, mianowicie: punkt odpowiadający punktowi nieskończenie odległemu w drugim szeregu; punkt pierwszego szeregu, odpowiadający nieskończenie dalekiemu punktowi drugiego szeregu, będziemy oznaczali literą K, a punkt drugiego szeregu, odpowiadający nieskończenie dalekiemu punktowi pierwszego szeregu, oznaczać będziemy literą L'. Niech A, A' będzie jakakolwiek para punktów odpowiednich; gdy punkt przebiega pierwszy szereg od punktu A w pewnym kierunku, to odpowiedni punkt przebiega drugi szereg od punktu A' w tym samym albo w przeciwnym kierunku; w pierwszym przypadku nazywać będziemy szeregi równobieżnemi albo równozwrotnemi, w drugim przeciwbieżnemi albo przeciwzwrotnemi.

Szeregi równobieżne i przeciwbieżne.

Punkty podwójne.

Może się zdarzyć, że punkt jednego szeregu schodzi się z odpowiadającym mu punktem drugiego szeregu; punkt taki nazywa się punktem podwójnym szeregów. Dwa szeregi na wspólnej podstawie nie mogą mieć więcej nad 2 punkty podwójne; gdyby bowiem miały 3 punkty podwójne, to każdy punkt musiałby z temi trzema wyznaczać stosunek anharmoniczny równy temu, jaki wyznacza z niemi punkt odpowiedni, wskutek tego każdy punkt schodziłby się ze swoim odpowiednim (art. 4), wszystkie punkty byłyby podwójne i mielibyśmy do czynienia z jednym tylko szeregiem punktów. Jeżeli obydwa szeregi są przeciwbieżne, to posiadają one z pewnością dwa punkty podwójne; w samej rzeczy, niech L' znajduje się z prawej strony od K; punkt pierwszego szeregu przebiega z nieskończoności z lewej strony do punktu K; wówczas punkt odpowiedni drugiego szeregu przebiegać będzie od punktu L' ku lewej stronie do nieskończoności, z pewnością więc zejdzie się para punktów odpowiednich z lewej strony od K; niech następnie punkt pierwszego szeregu przebiega od punktu K ku prawej stronie do nieskończoności, wówczas odpowiedni punkt drugiego szeregu przebiegać będzie od nieskończoności z prawej strony do L', a więc z prawej strony od L' znowu zejdzie się jedna para punktów odpowiednich. Niech teraz szeregi będą równobieżne. Gdy punkt pierwszego szeregu przebiega od punktu K ku lewej stronie do nieskończoności, to odpowiedni punkt drugiego szeregu przebiega od nieskończoności z prawej strony do punktu L', więc zewnątrz odcinka KL' nie może się znajdować punkt podwójny; w tym przypadku punktu podwójnego może wcale nie być, może być jeden albo dwa między punktami K i L'. Aby módz określić, kiedy który z tych trzech przypadków zachodzi, wyłożymy najprzód pewną własność punktów szeregu względem punktów szczególnych K i L'.

Potęga pokrewieństwa rzutowego.

Oznaczmy tymczasowo punkt nieskończenie daleki pierwszego szeregu przez L_∞, a punkt nieskończenie daleki drugiego szeregu przez K'_∞; niech A, A' i B, B' będą dwie jakiekolwiek pary punktów odpowiednich; wskutek pokrewieństwa rzutowego punktów A, K, B, L_∞ z punktami A', K'_∞, B', L' mieć będziemy:

$$\frac{AK}{KB} : \frac{AL_\infty}{L_\infty B} = \frac{A'K'_\infty}{K'_\infty B'} : \frac{A'L'}{L'B'},$$

lecz $$\frac{AL_\infty}{L_\infty B} = -1, \quad \frac{A'K'_\infty}{K'_\infty B'} = -1, \text{ a więc:}$$

$$\frac{AK}{KB} = \frac{L'B'}{A'L'}, \text{ czyli: } KA \,.\, L'A' = KB \,.\, L'B',$$

t. j. iloczyn odległości: KX i $L'X'$ jest dla wszystkich par punktów odpowiednich X, X' stały; nazywamy wielkość tego iloczynu potęgą pokrewieństwa rzutowego szeregów. Gdy szeregi są równobieżne, to punkty K, X, L_∞ następują w tej samej kolei, co punkty K'_∞, X', L', odcinki więc KX, $L'X'$ mają znaki różne, i potęga jest ujemną; w przypadku szeregów przeciwbieżnych potęga okazuje się dodatnią.

Zastosujemy dowiedzione tu twierdzenie do wykrycia punktów podwójnych. Oznaczmy odcinek KL' przez $2a$, jego środek przez O; potęgę pokrewieństwa rzutowego oznaczmy przez $\pm m^2$, tak, że znak górny odpowiada przypadkowi szeregów przeciwbieżnych, znak dolny — przypadkowi szeregów równobieżnych. Niech XX' będzie punktem podwójnym; oznaczmy jego odległość od O przez x, wówczas mieć będziemy:

$$KX = KO + OX = a + x$$

$$L'X' = L'X = L'O + OX = -a + x$$

a więc: $x^2 - a^2 = \pm m^2, \quad x^2 = a^2 \pm m^2.$

W przypadku szeregów przeciwbieżnych mamy: $x^2 = a^2 + m^2$ i na x otrzymujemy dwie wartości rzeczywiste, większe od a: $x = \pm \sqrt{a^2 + m^2}$, co się zgadza z poprzednio otrzymanym rezultatem. Jeżeli zaś szeregi są równobieżne, to mamy: $x^2 = a^2 - m^2$; zachodzić tu mogą trzy wypadki: 1) jeżeli $m^2 < a^2$, to na x otrzymujemy dwie wartości, mniejsze od a: $x = \pm \sqrt{a^2 - m^2}$; mamy tedy 2 punkty podwójne wewnątrz odcinka KL'; 2) jeżeli $m^2 = a^2$ to $x = 0$, wtedy środek odcinka KL' jest jedynym punktem podwójnym; wreszcie 3) jeżeli $m^2 > a^2$, to na x otrzymujemy wartości urojone, wówczas więc punktów podwójnych niema.

Pęki promieni równobieżne i przeciwbieżne.

Zupełnie analogiczne zależności można wykryć w dwóch rzutowo pokrewnych pękach promieni o wierzchołku wspólnym. Nazywamy dwa takie pęki **równobieżnemi**, albo **równozwrotnemi**, jeżeli promień jednego pęku obraca się około wierzchołka w pewnym kierunku, gdy odpowiedni promień drugiego pęku obraca się w tym samym kierunku; w przeciwnym wypadku nazywamy pęki **przeciwbieżnemi** lub **przeciwzwrotnemi**. (Pojęcie równobieżności i przeciwbieżności pęków promieni stosuje się zresztą także do pęków o wierzchołkach różnych). Przecinając dwa pęki promieni prostą, otrzymujemy na niej dwa szeregi punktów, które są równobieżne lub przeciwbieżne, zależnie od tego, czy pęki są równobieżne czy przeciwbieżne. Gdy promień, uważany jako należący do jednego pęku, odpowiada samemu sobie, jeżeli go uważamy, jako promień drugiego pęku, to nazywa się on **promieniem podwójnym** pęków; punkt przecięcia promienia podwójnego z jakąkolwiek prostą jest punktem podwójnym szeregów, wyznaczonych na tej prostej

Promienie podwójne.

przez obydwa pęki. Stąd wynika, że dwa pęki o wspólnym wierzchołku przeciwbieżne mają zawsze dwa promienie podwójne, dwa zaś takie pęki równobieżne mają dwa promienie podwójne, albo jeden promień podwójny, albo też wcale promienia podwójnego nie mają. Odnośnie do tych różnych przypadków możnaby wysnuć kryteryum analogiczne do tego, jakie znaleźliśmy dla szeregów punktów; nie jest ono wszakże nam potrzebne, gdyż zamiast badać dane pęki promieni pod względem ich promieni podwójnych, możemy przeciąć je prostą jakąkolwiek i badać tak otrzymane szeregi punktów pod względem ich punktów podwójnych.

8. Dwa szeregi punktów o wspólnej podstawie, oraz dwa pęki promieni o wspólnym wierzchołku, będąc rzutowo pokrewnemi, mogą mieć szczególne położenie, które w geometryi rzutowej odgrywa rolę nader ważną. Pewnemu punktowi AB' odpowiada punkt A' lub punkt B, zależnie od tego, do którego szeregu odnosimy ten punkt AB'; w ogólności punkty A' i B nie schodzą się w jednym punkcie podstawy; jeżeli wszakże szeregi mają takie położenie, że punkty A' i B stanowią jeden punkt podkładu, to jest, jeśli punkty AB' i $A'B$ odpowiadają sobie dwojako, to każde dwa punkty odpowiednie odpowiadają sobie dwojako; dowód tego twierdzenia pomijamy. O szeregach, mających takie szczególne położenie, mówimy, że tworzą inwolucyę punktów*). Oczywiście w inwolucyi punkty K i L' (art. 7) schodzą się razem, albowiem odpowiadające im punkty schodzą się w nieskończenie dalekim punkcie podkładu. Punkt KL' nazywa się środkiem inwolucyi. Rozróżniamy inwolucyę równobieżną i przeciwbieżną. Ponieważ w tym przypadku mamy $KL' = a = 0$, przeto, oznaczając, jak poprzednio, przez $\pm m^2$ stały iloczyn odległości punktów odpowiednich od środka inwolucyi, t. zw. potęgę inwolucyi, a przez x odległość punktu podwójnego od tego środka, mieć będziemy: $x^2 = \pm m^2$; stąd widzimy, że w inwolucyi przeciwbieżnej są 2 punkty podwójne w równej odległości od środka, w inwolucyi zaś równobieżnej niema wcale punktów podwójnych.

Inwolucya punktów.

O dwóch rzutowo pokrewnych pękach promieni ze wspólnym wierzchołkiem mówimy, że tworzą inwolucyę promieni, jeżeli każde dwa promienie odpowiednie odpowiadają sobie dwojako; warunkiem dostatecznym na to jest, aby dwa

Inwolucya promieni.

*) Pojęcie inwolucyi zawdzięczamy Desargues'owi (1639).

jakiekolwiek promienie odpowiednie odpowiadały sobie dwojako. Inwolucya promieni bywa przeciwbieżną i równobieżną; inwolucya promieni przeciwbieżna ma dwa promienie podwójne, inwolucya równobieżna nie ma promieni podwójnych. Przecinając inwolucyę promieni prostą, otrzymujemy na niej inwolucyę punktów; promienie podwójne inwolucyi promieni przecinają tę prostą w punktach podwójnych inwolucyi punktów*).

Wykreślenie środka inwolucyi.

Inwolucya jest dana, gdy dane są 2 pary elementów, odpowiadających sobie, np. gdy dane są punkty A i B, C i D; wówczas mamy trzy pary punktów szeregów rzutowo pokrewnych: A, B, C i B, A, D. Niech dana będzie inwolucya punktów A, B; C, D. Aby znaleść środek tej inwolucyi, obieramy dowolny punkt O, nie leżący na podkładzie inwolucyi, i kreślimy dwa koła: jedno przez punkty O, A, B, drugie przez punkty O, C, D. Koła te przetną się jeszcze raz w punkcie M, a prosta OM przetnie podkład inwolucyi w środku szukanym K; rzeczywiście, będzie: $KA \, . \, KB = KC \, . \, KD$.

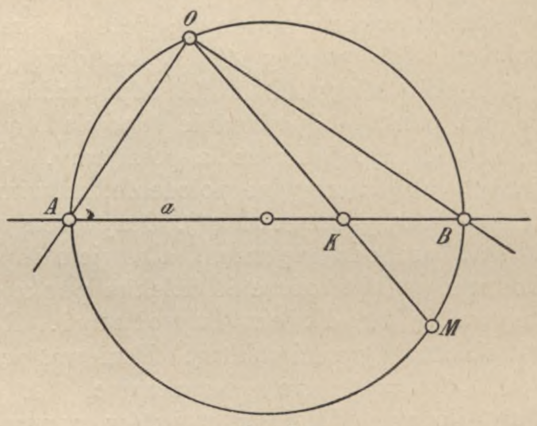


fig. 5.

Para prostopadłych promieni inwolucyi.

W każdej inwolucyi jest para odpowiadających sobie promieni wzajemnie prostopadłych. Dla dowiedzenia tego twierdzenia przetnijmy inwolucyę promieni z wierzchołkiem O prostą a. Niech p będzie potęgą inwolucyi punktów na prostej a, a K — środkiem tej inwolucyi (fig. 5 dla $p < 0$ i fig. 6 dla $p > 0$).

*) Systematyczny wykład teoryi pokrewieństwa rzutowego i teoryi inwolucyi, jakoteż innych teoryj, będących przedmiotem niniejszego rozdziału, znajdzie czytelnik, między innemi, w dziełach następujących: Chasles — Traité de géométrie supérieure, Steiner-Schröter — Theorie der Kegelschnitte, Reye — Geometrie der Lage.

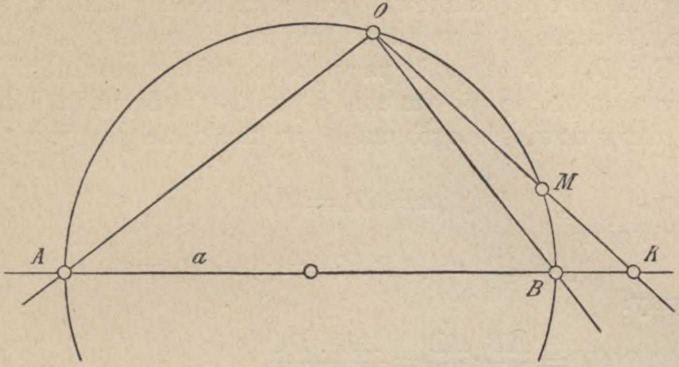


fig. 6.

Wyznaczmy na prostej KO punkt M tak, aby było: $KO.KM = p$; przez punkty O i M wykreślmy koło ze środkiem na a; niech A i B będą punktami przecięcia się tego koła z prostą a, wtedy promienie OA i OB są odpowiadającemi sobie w inwolucyi promieniami wzajemnie prostopadłemi.

9. Całą tu wyłożoną teoryę pokrewieństwa rzutowego szeregów punktów i pęków promieni wysnuliśmy z pojęcia o stosunku anharmonicznym czterech punktów lub czterech promieni. Rozpatrzymy jeszcze pokrótce własności czterech punktów i czterech promieni, których stosunek anharmoniczny ma specyalną wartość —1; takie cztery punkty lub cztery promienie występują bardzo często w geometryi i noszą osobną nazwę: punktów względn. promieni harmonicznych. Cztery punkty szeregu A, B, C, D nazywamy więc harmonicznemi, gdy istnieje zależność:

Punkty i promienie harmoniczne.

$$\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC} = -1,$$

a cztery promienie pęku: a, b, c, d nazywamy harmonicznemi, gdy istnieje zależność:

$$\frac{\sin(a,b)}{\sin(b,c)} : \frac{\sin(a,d)}{\sin(d,c)} = -1.$$

Przecinając cztery promienie harmoniczne prostą, otrzymujemy w przecięciu cztery punkty harmoniczne; rzucając cztery punkty harmoniczne z jakiegokolwiek punktu, otrzymujemy cztery promienie harmoniczne.

Gdy A, B, C, D stanowią grupę czterech punktów harmonicznych, to możemy przestawić miejscami punkty A i C, lub punkty B i D, lub też obie pary jednocześnie; stosunek anharmoniczny od tego się nie zmieni, i punkty będą nadal harmonicznemi. Aby dowieść tego, mamy wykazać, że gdy jest

$$(ABCD) = -1,$$

to jest również:

$$(CBAD) = (ADCB) = (CDAB) = -1.$$

Otóż mamy:

$$(ABCD) = \frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC} = \frac{AB \,.\, DC}{BC \,.\, AD},$$

$$(CBAD) = \frac{CB}{BA} : \frac{CD}{DA} = \frac{CB \,.\, DA}{BA \,.\, CD} = \frac{1}{(ABCD)} = -1,$$

$$(ADCB) = \frac{AD}{DC} : \frac{AB}{BC} = \frac{AD \,.\, BC}{DC \,.\, AB} = \frac{1}{(ABCD)} = -1,$$

$$(CDAB) = \frac{CD}{DA} : \frac{CB}{BA} = \frac{CD \,.\, BA}{DA \,.\, CB} = (ABCD) = -1,$$

Pary punktów lub promieni harmonicznie sprzężonych.

Na zasadzie tej własności mówimy, że A, C i B, D są dwie pary punktów harmonicznie sprzężonych; mówi się też, że punkty A i C są harmonicznie sprzężone względem punktów B i D, oraz, że nawzajem punkty B i D są harmonicznie sprzężone względem punktów A i C.

Podobnież, jeżeli $(abcd) = -1$, to promienie a i c są harmonicznie sprzężone względem pary promieni b i d, oraz nawzajem promienie b i d są harmonicznie sprzężone względem promieni a i c.

Położenie wzajemne punktów lub promieni harmonicznych.

Niech A, C i B, D będą dwie pary punktów harmonicznie sprzężonych; równanie: $(ABCD) = -1$ możemy też napisać w postaci:

$$\frac{AB}{BC} = -\frac{AD}{DC};$$

jeżeli punkt B leży między punktami A i C, to stosunek $\frac{AB}{BC}$ jest dodatni, stosunek $\frac{AD}{DC}$ musi wtedy być ujemny, czyli punkt D musi leżeć zewnątrz odcinka AC; gdyby punkt B leżał zewnątrz odcinka AC, to punkt D leżałby między A i C. A więc: gdy dwie pary punktów są harmonicznie sprzężone, to jeden punkt każdej pary leży wewnątrz, drugi punkt — zewnątrz drugiej pary.

Podobnież przekonać się możemy, że gdy dwie pary promieni pęku są harmonicznie sprzężone, to jeden promień każdej pary leży wewnątrz, drugi — zewnątrz kąta, utworzonego przez drugą parę promieni.

Jeżeli przez B oznaczymy punkt, leżący wewnątrz odcinka AC, to z równania

$$AB : BC = - AD : DC$$

wynika, że jeżeli $AD > CD$, to $AB > BC$, i przeciwnie: jeżeli $AD < CD$, to i $AB < BC$. Stąd wynika, że punkty B i D leżą po jednej stronie względem środka odcinka AC, a punkty A i C po jednej stronie względem środka odcinka BD, innemi słowy: środek odcinka AC leży zewnątrz odcinka BD, a środek odcinka BD leży zewnątrz odcinka AC.

Podobnież okazać możemy, że dwusieczna kąta (a, c) leży zewnątrz kąta (b, d), a dwusieczna tego ostatniego kąta leży zewnątrz kąta (a, c). Gdy punkt B schodzi się z punktem C, tak, że jest: $BC = 0$, to jest także $CD = 0$, t. j. punkt D również schodzi się wówczas z punktem C. Punkt zaś A może zająć wtedy położenie dowolne. Podobną własność posiadają cztery promienie harmoniczne.

Przykłady. Jako przykład punktów harmonicznych służyć mogą: końce jakiegokolwiek odcinka, jego środek, oraz punkt nieskończenie daleki na prostej tego odcinka; końce odcinka stanowią jedną parę punktów sprzężonych, a jego środek i punkt nieskończenie daleki — drugą parę. Rzeczywiście, oznaczając końce odcinka przez A, C, jego środek przez B, a punkt w nieskończoności przez D_∞, mieć będziemy:

$$\frac{AC}{CB} = 1, \quad \frac{AD_\infty}{D_\infty B} = -1, \quad \text{a więc.} \quad (ABCD_\infty) = -1.$$

W wierzchołku każdego równoległoboku mamy cztery promienie harmoniczne, mianowicie: para boków sprzężona jest względem wychodzącej z tego wierzchołka przekątnej i prostej, równoległej do drugiej przekątnej; te cztery promienie przecinają bowiem drugą przekątną w punktach harmonicznych.

Dwa promienie jakiekolwiek są harmonicznie sprzężone względem dwusiecznych ich kąta, oraz kąta przyległego; jeżeli bowiem przetniemy te cztery promienie prostą, prostopadłą do jednej z dwusiecznych, to otrzymamy w przecięciu cztery punkty harmoniczne.

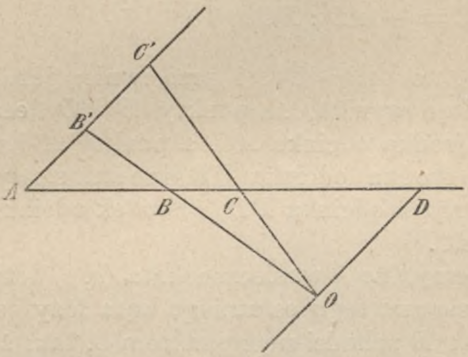


fig. 7.

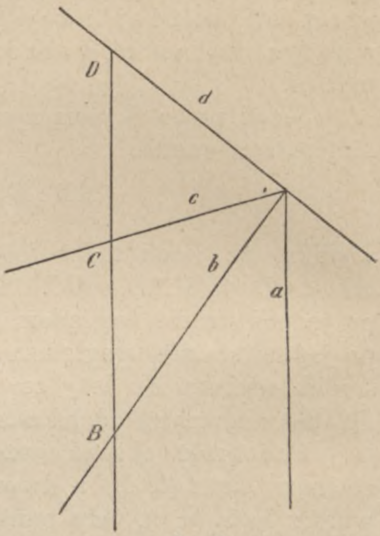


fig. 8.

Gdy dane cztery promienie harmoniczne przetniemy prostą, równoległą do jednego z nich, to promień z nim sprzężony rozdzieli na połowy odcinek, który na prostej wyznaczą dwa inne promienie; otrzymamy bowiem na prostej cztery punkty harmoniczne, z których jeden leży w nieskończoności.

Przytoczone tu przykłady i własności elementów harmonicznych dają nam sposób wykreślenia elementu, sprzężonego z danym względem dwóch innych elementów danych. Niech np. szukany będzie punkt D harmonicznie sprzężony z punktem B względem A i C (fig. 7). Prowadzimy przez A jakąkolwiek prostą i bierzemy na niej odcinki dowolne, lecz równe: $AB' = B'C'$. Z punktu O, w którym przecinają się proste $B'B$ i $C'C$, prowadzimy promień równoległy do AC'; promień tèn przetnie prostą AC w szukanym punkcie D; rzeczywiście, oznaczając przez D'_∞ punkt w nieskończoności na prostej AC', mieć będziemy:

$$-1 = (AB'C'D'_\infty) = O\,(ABCD) = (ABCD).$$

Niech szukany będzie promień d, harmonicznie sprzężony z promieniem b względem promieni a i c (fig. 8). Prowadzimy prostą jakąkolwiek równoległą do a; przetnie ona b i c odpowiednio w punktach B i C; odcinając $CD = BC$, otrzymamy punkt D, przez który przechodzi promień d; rzeczywiście, oznaczając przez A_∞ punkt w nieskończoności na prostej BD, mieć będziemy:

$$-1 = (A_\infty BCD) = (abcd).$$

Wyprowadźmy pewną własność czterech punktów harmonicznych. Niech punkty A i C będą harmonicznie sprzężone względem punktów B i A; niech O będzie środkiem odcinka AC. Gdy we wzorze:

$$\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC} = -1$$

podstawimy (na zasadzie art. 4):

$$AB = OB - OA, \quad BC = OC - OB = -(OA + OB),$$

$$AD = OD - OA, \quad DC = OC - OD = -(OA + OD),$$

to otrzymamy: $\overline{OA}^2 = OB \,.\, OD.$

Wzór ten jest charakterystyczny dla punktów A, B, C, D, od ostatniego bowiem wzoru łatwo jest przejść do pierwszego, wyrażającego, że stosunek podwójnego podziału tych punktów równy jest -1.

Elementy harmoniczne w inwolucyi.

Gdy porównamy związek otrzymany z równaniem, określającem punkty podwójne inwolucyi (art. 8), to spostrzeżemy, że w inwolucyi przeciwbieżnej punktów każda para punktów odpowiednich jest harmonicznie sprzężona z parą punktów podwójnych. Przecinając inwolucyę promieni prostą dowolną, przekonywamy się następnie, że w inwolucyi przeciwbieżnej promieni każda para promieni odpowiednich jest harmonicznie sprzężona z parą promieni podwójnych.

§ 2. Zarys teoryi stożkowych.

Stożkowa, jako rzut koła.

10. Powierzchnia stożkowa, rzucająca koło z jakiegokolwiek punktu, nie leżącego na płaszczyznie koła, nazywa się powierzchnią stożkową kołową. Przekrój płaski tej powierzchni nazywa się przecięciem stożkowem, krócej linią stożkową, lub poprostu stożkową. Stożkowa jest więc rzutem koła, i, jako taka, posiada wszystkie własności rzutowe koła; przenosząc kilka takich własności bezpośrednio na stożkową, powiedzieć możemy: że prosta, leżąca na płaszczyznie linii stożkowej, przecina tę ostatnią najwyżej w dwóch punktach; że z punktu, leżącego na płaszczyznie linii stożkowej, można poprowadzić najwyżej dwie styczne do niej; że w punkcie na stożkowej można poprowadzić tylko jednę styczną do niej; że styczna do stożkowej posiada z nią tylko punkt styczności wspólny. W geometryi nazywa się rzędem krzywej płaskiej - największa liczba punktów, w których krzywą tę przeciąć może linia prosta, a klasą krzywej płaskiej — największa liczba stycznych, jaką można poprowadzić do niej z jednego punktu. Linia stożkowa jest zatem krzywą rzędu drugiego i klasy drugiej.

Będziemy oznaczali koło przez k_1, stożkową, będącą jego rzutem, przez k.

Trzy rodzaje stożkowych.

Stożkowa może mieć punkty w nieskończonej odległości. Pod względem liczby tych punktów możliwe są trzy kategorye stożkowych:

1) Jeżeli płaszczyzna rzutu ma takie położenie względem koła k_1, że to ostatnie nie ma punktu wspólnego z płaszczyzną zniknienia, to stożkowa k nie ma wcale punktów w nieskończoności; taka stożkowa nazywa się elipsą; koło jest szczególnym przypadkiem elipsy.

2) Gdy płaszczyzna zniknienia przecina koło k_1 w dwóch punktach, to stożkowa k ma dwa punkty w nieskończoności; taką stożkową nazywamy hyperbolą; rzuty stycznych do koła w punktach przecięcia się z płaszczyzną zniknienia są stycznemi do hyperboli w jej nieskończenie dalekich punktach i nazywają się asymptotami hyperboli.

Wreszcie 3) gdy koło k_1 ma z płaszczyzną zniknienia jeden tylko punkt wspólny, tak że styczna do koła w tym punkcie leży w płaszczyznie zniknienia, to stożkowa k ma jeden punkt w nieskończoności; nazywamy ją w tym przypadku parabolą.

Elipsa więc nie ma z prostą nieskończenie odległą żadnego punktu wspólnego, hyperbolę przecina ta prosta w dwóch punktach, wyznaczonych przez kierunki asymptot, a paraboli dotyka ona w jednym punkcie.

W rozdziale V-ym podane będą metody kreślenia stożkowych za pomocą przecinania powierzchni stożkowej kołowej płaszczyznami; w końcu zaś rozdziału niniejszego podamy wykreślenia stożkowych, oparte na innej zasadzie (art. **26**).

Teraz przystąpimy do zbadania zasadniczych własności stożkowych na zasadzie ich określenia, jako rzutów koła. W tym celu wyłożymy najprzód pewne własności koła.

Potęga punktu względem koła.

11. Niech dane będzie koło i punkt O gdziekolwiek na płaszczyznie koła; poprowadźmy przez O prostą dowolną; wiadomo jest, że iloczyn odległości punktu O od punktów przecięcia się tej prostej z kołem jest stały dla wszystkich prostych; iloczyn ten nazywa się potęgą punktu O względem koła danego; gdy punkt O leży zewnątrz koła, to potęga jego jest równa kwadratowi stycznej, poprowadzonej z niego do koła; potęga ta jest wówczas dodatnią; potęga punktu leżącego wewnątrz koła jest ujemna, wreszcie potęga punktu okręgu koła jest równa zeru. Gdy dane są dwa koła, to

Oś potęgowa dwóch kół.

miejscem geometrycznem punktów, mających względem obydwóch kół jednakową potęgę, jest pewna prosta, prostopadła do prostej, łączącej środki kół; to miejsce geometryczne nazywa się osią potęgową albo osią pierwiastną dwóch kół. Gdy dane są trzy koła, to punkt przecięcia się osi potęgowych dwóch par kół posiada jednakową potęgę względem wszystkich trzech kół; musi on więc leżeć i na osi potęgowej trzeciej pary kół.

Wykreślenie osi potęgowej dwóch kół nie przedstawia trudności: gdy dane koła przecinają się, to ich oś potęgowa przechodzi przez ich punkty przecięcia się; jeżeli zaś koła dane nie przecinają się, to kreślimy trzecie koło pomocnicze, przecinające obydwa dane; punkt przecięcia się osi potęgowych trzeciego koła z każdem z kół danych należy do osi potęgowej szukanej.

Punkty harmoniczne w kole.

Niech dane będzie koło k_1 i punkt O (fig. 9 i 10). Wykreślmy drugie koło k_2, którego średnicą byłby odcinek, łączący punkt O ze środkiem koła k_1; oczywiście koło k_2 jest miejscem geometrycznem środków cięciw koła k_1, przechodzących przez punkt O. Wykreślmy następnie oś potęgową kół k_1 i k_2. Twierdzimy, że na każdej prostej, przechodzącej przez O i przecinającej koło k_1 w punktach A i B, a oś potęgową w punkcie C, punkty O i C są harmonicznie sprzężone względem A i B;

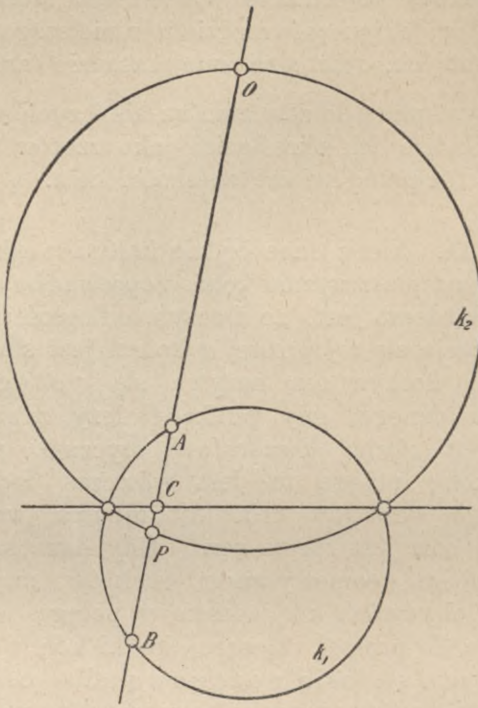


fig. 9.

dowiedziemy tego. Ponieważ punkt C ma tę samą potęgę względem kół k_1 i k_2, to mamy: $CA \,.\, CB = CO \,.\, CP$, gdzie P jest oczywiście środkiem odcinka AB. W równaniu powyższem zawarte jest nasze twierdzenie; aby je na jaw wydobyć, podstawiamy w niem:

$$CA = PA - PC,$$
$$CB = PB - PC = -(PA + PC),$$
$$CO = PO - PC,$$

i otrzymujemy:

$$\overline{PC}^2 - \overline{PA}^2 + PC\,(PO - PC) = 0$$

czyli:

$$\overline{PA}^2 = PO \,.\, PC,$$

przez co twierdzenie nasze jest dowiedzione (art. 9).

W szczególnym przypadku, gdy punkt O leży na okręgu koła k_1, oś potęgowa kół k_1 i k_2 jest styczną do koła k_1 w punkcie O. Ponieważ w tym przypadku w punkcie O schodzą się punkty A i B, to punkt O jest harmonicznie sprzężony z każdym punktem stycznej i odwrotnie, każdy punkt stycznej jest harmonicznie sprzężony z punktem O względem schodzących się w tymże punkcie O punktów A i B.

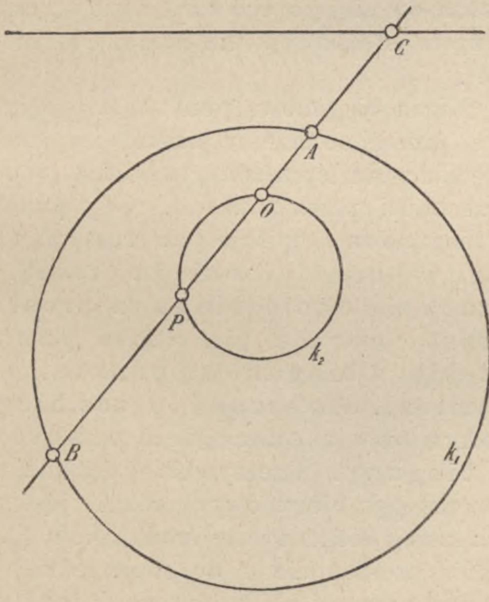


fig. 10.

12. Przeniesiemy teraz na stożkowe te z powyżej wyłożonych własności koła, które posiadają charakter własności rzutowych.

Biegun i biegunowa.

Będziemy nazywali dwa punkty **harmonicznie sprzężonemi** (albo krócej **sprzężonemi**) **względem stożkowej**, kiedy punkty te są harmonicznie sprzężone względem punktów przecięcia się łączącej je prostej ze stożkową.

Ponieważ rzutem prostej jest prosta, a rzutem 4-ch punktów harmonicznych są znów cztery punkty harmoniczne, to z artykułu poprzedniego wynika, że wszystkie punkty, sprzężone z jednym punktem danym, leżą na linii prostej. Prosta ta nazywa się biegunową punktu danego, a punkt dany względem swej biegunowej nazywa się jej biegunem.

Punkty wewnętrzne i zewnętrzne. Mówimy o punkcie, że leży wewnątrz stożkowej, gdy jego biegunowa nie przecina stożkowej, zewnątrz zaś stożkowej w przeciwnym razie. Biegunową punktu na stożkowej jest styczna do stożkowej w tym punkcie; odwrotnie, biegunem stycznej do stożkowej jest jej punkt styczności. Ponieważ proste, łączące biegun z punktami przecięcia się biegunowej ze stożkową, są stycznemi do stożkowej w tych punktach przecięcia się, to widzimy, że z punktu, leżącego zewnątrz stożkowej, można do niej poprowadzić dwie styczne, a z punktu, leżącego wewnątrz stożkowej, nie można do niej poprowadzić żadnej stycznej.

Własności dualistyczne biegunów i biegunowych. Niech biegunową punktu A będzie prosta a; gdy na tej prostej obierzemy jakikolwiek punkt B, to punkt A będzie z nim sprzężony, wskutek czego biegunowa b punktu B przechodzi przez punkt A. Gdy punkt B przebiega prostą a, jego biegunowa b opisuje pęk prostych z wierzchołkiem w A, to jest: gdy punkt przebiega prostą, biegunowa punktu obraca się około bieguna prostej; odwrotnie też: gdy prosta obraca się około punktu, biegun prostej przebiega biegunową punktu.

Pęk promieni, utworzony przez biegunowe, jest rzutowo pokrewny z szeregiem punktów, utworzonym przez bieguny. Rzeczywiście, dla koła ma to miejsce, albowiem wówczas pęk biegunowych równy jest pękowi promieni, rzucających szereg biegunów ze środka koła (promienie jednego z tych pęków prostopadłe są do odpowiednich promieni drugiego); przez rzut przenosi się ta własność i na stożkową jakąkolwiek.

Środek stożkowej. **13.** Biegun prostej nieskończenie dalekiej nazywa się środkiem stożkowej. Z tego określenia i z artykułów **10** i **12** wynika, że środek elipsy leży wewnątrz niej, środek hyperboli — zewnątrz, a środek paraboli na niej samej, mianowicie w jej nieskończenie dalekim punkcie. Ze środka elipsy nie można więc prowadzić do niej stycznych, ze środka hyperboli wychodzą dwie styczne, dotykające hyperboli w jej nieskończenie dalekich punktach; są to znane nam już asymptoty hyperboli; przez środek paraboli przechodzi jedna styczna do niej, mianowicie prosta w nieskończoności.

Średnice stożkowej. Proste, przechodzące przez środek stożkowej, nazywają się **średnicami**. Gdy średnica przecina stożkową, to pod nazwą średnicy rozumie się też odcinek tej prostej, zawarty pomiędzy punktami przecięcia się ze stożkową; w tym przypadku środek stożkowej dzieli średnicę na połowy, jest on bowiem harmonicznie sprzężony z nieskończenie dalekim punktem średnicy względem końców tej ostatniej. Średnice elipsy są wszystkie ograniczone; hyperbola posiada średnice ograniczone i nieograniczone. Średnice paraboli, jako proste przechodzące przez punkt nieskończenie daleki tej krzywej, są wszystkie równoległe.

Średnice sprzężone. Biegun średnicy leży w nieskończoności. Gdy jedna średnica przechodzi przez nieskończenie daleki biegun drugiej, to druga średnica przechodzi przez nieskończenie daleki biegun pierwszej; dwie takie średnice nazywają się **sprzężonemi**. W kole każde dwie średnice wzajemnie prostopadłe są sprzężone. Jeżeli w stożkowej prowadzić będziemy cięciwy równoległe do jednego kierunku, to środki tych cięciw są harmonicznie sprzężone z ich punktem nieskończenie dalekim; środki te więc leżą na średnicy, sprzężonej z równoległą do nich średnicą. Innemi słowy: **każda średnica dzieli na połowy wszystkie cięciwy, równoległe do średnicy, z nią sprzężonej**. Na tej zasadzie mówimy o **średnicy, sprzężonej z danym kierunkiem cięciw**. Parabola nie ma oczywiście średnic sprzężonych; mimo to każda średnica jest sprzężona z pewnym kierunkiem cięciw, które dzieli na połowy. W hyperboli asymptota, jako jedna ze średnic, jest sprzężona sama z sobą, albowiem jej nieskończenie daleki punkt jest zarazem jej biegunem.

Styczne w końcach średnicy. Styczne w punktach przecięcia się średnicy ze stożkową są równoległe do kierunku z nią sprzężonego, gdy bowiem punkt styczności, jako biegun stycznej, leży na średnicy, musi styczna ta przejść przez biegun średnicy, t. j. być równoległą do cięciw, dzielonych przez tę średnicę na połowy.

Jeżeli wpiszemy w stożkową równoległobok $PQRS$ (fig. 11 i 12), to punkt M przecięcia się przekątnych RP i QS, jako środek tych przekątnych, jest harmonicznie sprzężony z nieskończenie dalekiemi punktami tych prostych, M jest przeto środkiem stożkowej. Średnice równoległe do boków równoległoboku są sprzężone, albowiem np. średnica równoległa do RS dzieli na połowy cięciwy RQ i PS. Styczne w punktach P, Q, R, S tworzą równoległobok $ABCD$. Rozważanie zupełnie elementarne prowadzi do wniosku, że przekątne BD i CA tego równoległoboku, opisanego na stożkowej, przecinają się w punkcie M i są równoległe odpowiednio do prostych QR i RS; te przekątne są więc średnicami sprzężonemi.

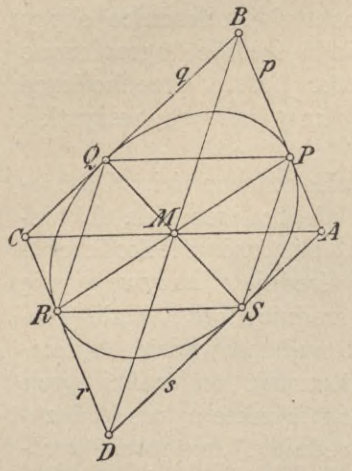


fig. 11.

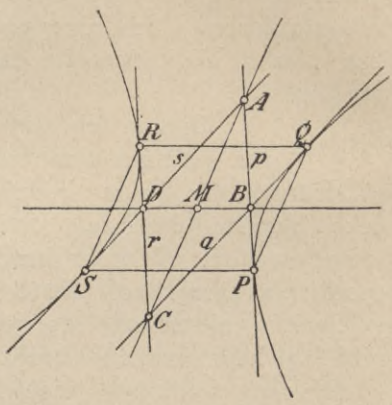


fig. 12.

14. Jeżeli do każdej średnicy elipsy lub hyperboli uważać będziemy jako odpowiadającą jej średnicę z nią sprzężoną, to ogół wszystkich średnic stożkowej rozpatrywać możemy jako dwa pęki promieni o wspólnym wierzchołku; pęki te są rzutowo pokrewne na zasadzie art. **12**, a ponieważ dwie średnice sprzężone odpowiadają sobie wzajemnie, to pęki te tworzą inwolucyę. Z art. **8** wynika, że wśród wszystkich, nieskończenie wielu par średnic sprzężonych istnieje jedna para prostopadłych do siebie; te dwie średnice szczególne nazywają się osiami stożkowej. Art. **8** daje też sposób wykreślenia kierunków osi, gdy dane są kierunki dwóch par średnic sprzężonych.

Osie.

W paraboli istnieje jedna średnica prostopadła do kierunku sprzężonych z nią cięciw; średnica ta nazywa się osią paraboli.

Stożkowa jest symetryczna względem każdej osi.

Wierzchołki.

Punkty, w których osie przecinają stożkową, nazywają się wierzchołkami stożkowej. Elipsa ma cztery wierzchołki, hyperbola dwa, gdyż jedna tylko oś przecina hyperbolę; parabola ma jeden wierzchołek.

Styczna do stożkowej w wierzchołku jest prostopadła do osi, na której leży ten wierzchołek.

Pewna własność hyperboli.

Zwrócimy jeszcze uwagę na pewną własność hyperboli. Gdy uważać będziemy średnice sprzężone hyperboli, jako odpowiadające sobie promienie inwolucyi pęku o wierzchołku w środku, to asymptoty, jako odpowiadające sobie samym, będą promieniami podwójnemi tej inwolucyi; każde przeto dwie średnice sprzężone hyperboli są harmonicznie sprzężone względem jej asymptot (art. 9, koniec). Z tej własności wynika dalej, że środek odcinka prostej, zawartego między asymptotami, leży na średnicy sprzężonej z kierunkiem tego odcinka.

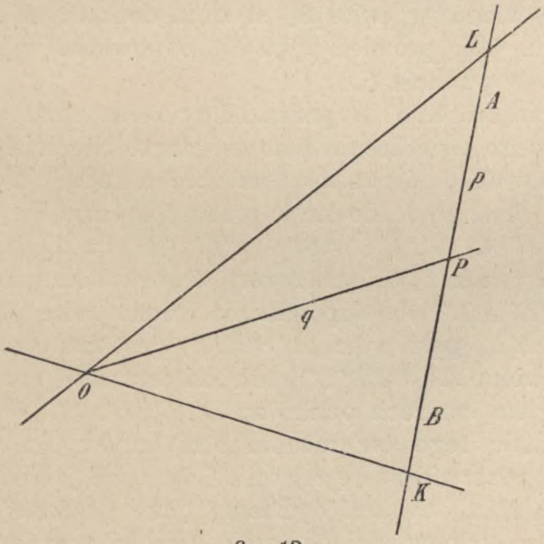


fig. 13.

Niech pewna prosta p (fig. 13) przecina hyperbolę w punktach A i B, a asymptoty w punktach K i L; średnica q, sprzężona z kierunkiem p, przetnie p w punkcie P, który będzie środkiem zarówno odcinka AB, jak i odcinka KL; stąd wynika, jako ważne twierdzenie, że $AL = BK$.

Wykreślenie hyperboli z asymptot. Twierdzenie powyższe posłużyć nam może do wykreślenia hyperboli, gdy dane są jej asymptoty i jeden punkt krzywej; jakoż na każdym promieniu, przechodzącym przez punkt dany, znajdziemy przy pomocy własności dowiedzionej inny punkt hyperboli, leżący na tej samej gałęzi; drugą gałąź wykreślimy na zasadzie symetryi względem środka, którym jest punkt przecięcia asymptot.

Szeregi i pęki rzutowo pokrewne w kole. **15.** Zajmijmy się teraz szeregiem innych własności stożkowych, które posłużą nam do wykreślenia stożkowej, gdy daną będzie dostateczna liczba punktów lub stycznych.

Gdy dwa jakiekolwiek punkty S i S_1 na okręgu koła przyjmiemy za wierzchołki pęków promieni, a za odpowiadające sobie uważać będziemy promienie, przecinające się na okręgu koła, to dwa te pęki promieni będą równe; wynika to z równości kątów wpisanych w koło i opierających się na tym samym łuku koła. W szczególności promieniowi SS_1, uważanemu, jako promień pęku S, odpowiada w pęku S_1 styczna do koła w punkcie S_1, a uważanemu, jako promień pęku S_1, odpowiada w pęku S styczna do koła w punkcie S.

Z tego twierdzenia wyprowadzimy zaraz inne przy pomocy następującego twierdzenia pomocniczego. Niech A, B, C, D, E będą jakiekolwiek pięć punktów na okręgu koła, i niech styczne w punktach B, C, D, E do koła przetną styczną w punkcie A w punktach B', C', D', E', wtedy $(B'C'D'E') = A(BCDE)$. Rzeczywiście, gdy przez M oznaczymy środek koła, to promienie MB', MC', MD' ME' są odpowiednio prostopadłe do promieni AB, AC, AD, AE, pęk więc $A(BCDE)$ jest rzutowo pokrewny (równy) z pękiem $A(B'C'D'E')$, ten zaś ostatni — rzutowo pokrewny z szeregiem czterech punktów: B', C', D', E'.

Na zasadzie tego twierdzenia otrzymujemy z twierdzenia poprzedniego własność następującą. Gdy dwie jakiekolwiek styczne do koła: t i t_1 uważać będziemy jako podkłady szeregów punktów, a za odpowiadające sobie uważać będziemy punkty, wyznaczone na nich przez inne styczne do koła, to dwa te szeregi punktów będą rzutowo pokrewne. W szczególności punktowi przecięcia się prostych t i t_1, uważanemu jako punkt szeregu t, odpowiada w szeregu t_1 punkt styczności tej prostej, a uważanemu, jako punkt szeregu t_1, odpowiada punkt styczności prostej t.

Przez rzut środkowy przenosimy własności koła tu wyłożone na stożkowe, możemy więc powiedzieć:

Szeregi i pęki rzutowo pokrewne w stożkowej.

16. Pęki promieni, rzucających wszystkie punkty stożkowej z jakichkolwiek dwóch jej punktów, są rzutowo pokrewne; stycznym do stożkowej w wierzchołkach pęków odpowiada promień wspólny dwóch pęków (fig. 14).

Szeregi punktów, w których wszystkie styczne do stożkowej przecinają dwie jakiekolwiek z nich, są rzutowo pokrewne; punktom styczności podkładów szeregów odpowiada punkt przecięcia się tych podkładów (fig. 15).

Twierdzenia te można też odwrócić, a mianowicie:

Utworzenie stożkowej przez pęki rzutowo pokrewne.

Punkty przecięcia się promieni odpowiednich dwóch pęków rzutowo pokrewnych są punktami stożkowej, przechodzącej przez wierzchołki pęków (naturalnie, jeżeli pęki te nie mają położenia szczególnego, kiedy promienie odpowiadające sobie przecinają się na jednej prostej — p. art. **6**); promienie, odpowiadające promieniowi wspólnemu dwóch pęków, są styczne do stożkowej w wierzchołkach pęków.

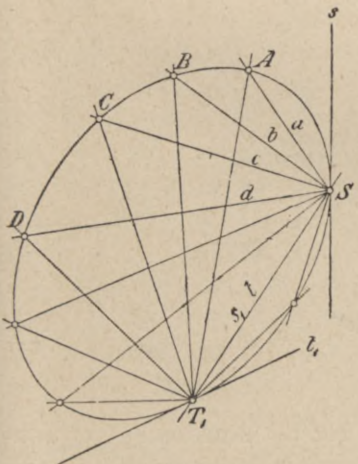


fig. 14.

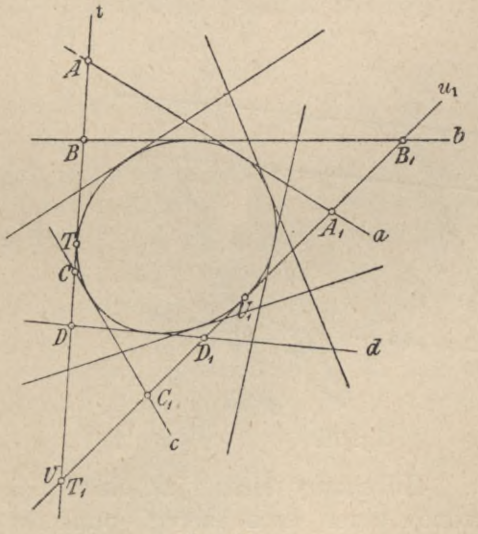


fig. 15.

Utworzenie stożkowej przez szeregi rzutowo pokrewne.

Proste, łączące punkty odpowiadające sobie w dwóch szeregach rzutowo pokrewnych, są stycznemi do stożkowej, dotykającej podkładów szeregów (naturalnie, jeżeli szeregi te nie mają położenia szczególnego, kiedy proste, łączące punkty odpowiednie przecinają się wszystkie w jednym punkcie — art. 6); punkty, odpowiadające punktowi wspólnemu dwóch szeregów, są punktami styczności podkładów szeregów.

Dowodzenie tych twierdzeń odwrotnych pomijamy*).

Rodzaj stożkowej, utworzonej sposobem powyższym.

17. Gdy dane są dwa rzutowo pokrewne pęki promieni, to wyznaczona przez nie stożkowa jest elipsą, parabolą lub hyperbolą, stosownie do tego, czy w pękach tych niema promieni odpowiednich równoległych, czy jest jedna para takich promieni lub też czy dwie są takie pary. Jeżeli jeden pęk przeniesiemy równolegle tak, aby jego wierzchołek zeszedł się z wierzchołkiem drugiego, to kwestya powyższa sprowadza się do tego, czy dwa pęki rzutowo pokrewne o wspólnym wierzchołku nie mają promienia podwójnego, czy mają jeden promień podwójny lub dwa. Stąd widzimy, że dwa pęki przeciwbieżne wyznaczają zawsze hyperbolę, równobieżne zaś mogą wyznaczać każdy z trzech typów stożkowej.

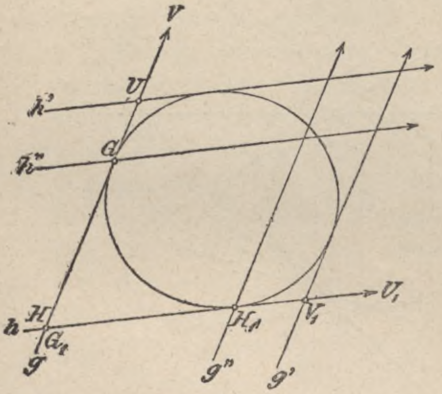


fig. 16.

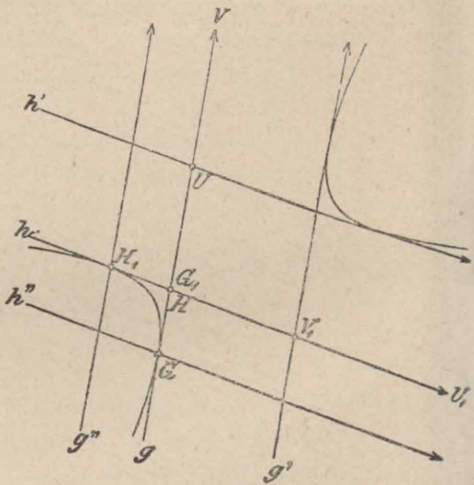


fig. 17.

Zobaczmy teraz, jak określa się rodzaj stożkowej, wyznaczonej przez dwa szeregi punktów rzutowo pokrewne. Jeżeli dane dwa szeregi są podobne, to nieskończenie dalekie punkty odpowiadają sobie nawzajem, prosta w nieskończoności jest jedną ze stycznych do stożkowej; ta ostatnia jest zatem parabolą.

*) Czytelnik znajdzie je w dziełach specyalnych o geometryi położenia; możemy też wskazać dowodzenie w podręczniku: Rohn i Papperitz, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Lipsk, 1893 t. I, § 304. M. A. Baraniecki, „Przecięcia stożkowe" Warszawa 1885.

Jeżeli dane dwa szeregi nie są podobne, to mogą one wyznaczać elipsę lub hyperbolę. Niech dwa te szeregi będą g i h (fig. 16 i 17); punktowi w nieskończoności U_1 na prostej h niech odpowiada punkt U na prostej g, a punktowi w nieskończoności V na prostej g niech odpowiada punkt V_1 na prostej h. Punktowi przecięcia się prostych g i h niech odpowiadają na nich punkty G i H_1. Poprowadźmy przez U i G równoległe h' i h'' do h, a przez V_1 i H_1 — równoległe g' i g'' do g. Punkt nieskończenie daleki V leży zewnątrz stożkowej, albowiem z niego wychodzą dwie styczne do stożkowej: g i g'; prosta w nieskończoności leży zewnątrz pasa między g i g', jeżeli zatem prosta ta przecina stożkową, to wszystkie proste wychodzące z V (t. j. równoległe do g i g') i nie leżące między g i g', przecinają stożkową, zaś wychodzące z V i leżące między g i g' nie przecinają jej; jeżeli zaś prosta w nieskończoności nie przecina stożkowej, to jest odwrotnie. Lecz prosta g'' równoległa do g i g' przecina stożkową, a zatem, jeżeli g'' leży między g i g', to prosta w nieskończoności nie przecina stożkowej i ta ostatnia jest elipsą, jeżeli zaś g'' nie leży między g i g', to prosta w nieskończoności przecina stożkową, i ta ostatnia jest hyperbolą. To samo kryteryum dają proste h, h' i h''.

Pięć punktów wyznaczają stożkową.

18. Stożkowa jest zupełnie określona, gdy dane są pięć jej punktów. Niech dane będą punkty A, B, C, D, E. Uważamy pęk $A\,(CDE)$ za rzutowo pokrewny z pękiem $B\,(CDE)$; wykreślając promienie odpowiednie dwóch pęków, otrzymamy z ich przecięcia się punkty stożkowej. Dla ułatwienia wykreślenia poprowadzimy przez punkt C dowolne dwie proste a i b; niech punkty przecięcia się prostej a z promieniami pęku A będą C, D_1, E_1, a punkty przecięcia się prostej b z promieniami pęku B: C, D_2, E_2. Szeregi na prostych a i b są rzutowo pokrewne, a że mają punkt C wspólny odpowiadający samemu sobie, to wszystkie proste, łączące punkty odpowiednie, przecinają się w jednym punkcie. Niech punkt przecięcia się prostych D_1D_2 i E_1E_2 będzie S, wtedy każdy promień pęku S przecina a i b w punktach odpowiednich, a łącząc te punkty odpowiednio z A i B, otrzymamy promienie odpowiednie pęków A i B.

Styczne do stożkowej w punktach danych.

Niech prosta AB przecina proste a i b odpowiednio w punktach K_1 i L_2; wyznaczamy odpowiednie punkty K_2 i L_1, wtedy AL_1 jest styczną do stożkowej w punkcie A, a BK_2 — styczną do stożkowej w punkcie B. W ten sposób, gdy dane są pięć punktów stożkowej, można w każdym z tych punktów wyznaczyć styczną.

Można też wykreślić punkty lub styczne stożkowej, gdy dane są pięć stycznych, lub cztery punkty i styczna w jednym z nich, trzy punkty i styczne w dwóch z nich i t. p. Pomijamy wszakże te konstrukcye według powyższej metody, podamy natomiast rozwiązanie tych zadań na zasadzie dwóch twierdzeń, jakie teraz wyłożymy.

Sześciokąt wpisany w stożkową.

19. Twierdzenie Pascala*). Gdy w stożkową wpiszemy sześciokąt jakikolwiek, to punkty przecięcia się trzech par boków przeciwległych leżą na jednej prostej, t. zw. prostej Pascala.

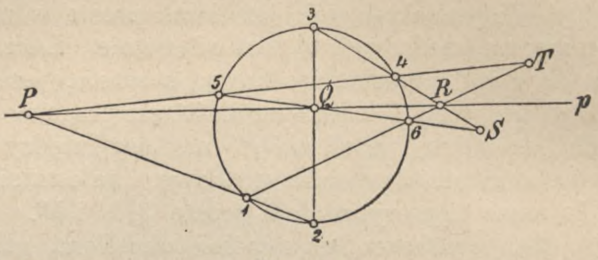


fig. 18.

Niech 1, 2, 3, 4, 5, 6 będzie sześciokątem danym (fig. 18); boki przeciwległe 12 i 45 niech przecinają się w punkcie P, boki 23 i 56 w Q, wreszcie boki 34 i 61 w R. Oznaczamy punkt przecięcia prostych 34 i 56 przez S, a prostych 45 i 61 przez T. Pęki 12, 14, 15, 16 i 32, 34, 35, 36 są rzutowo pokrewne (art. 16), lecz $1\,(2456) = (P45T)$, a $3\,(2456) = (QS56)$, zatem $(P45T) = (QS56)$; lecz punkt 5 jest wspólny dla obydwóch szeregów $P45T$ i $QS56$, wskutek tego proste PQ, $4S$ i $T6$ przecinają się w jednym punkcie, t. j. punkt R leży na prostej PQ, co było do dowiedzenia.

Sześciokąt opisany na stożkowej.

Twierdzenie Brianchona**). Proste, łączące wierzchołki przeciwległe sześciokąta opisanego na stożkowej, przecinają się w jednym punkcie, t. zw. punkcie Brianchona.

---

*) Pascal: „Essais pour les coniques"; twierdzenie swoje Pascal nazywa „hexagrammum mysticum".

**) Podane w rozprawie: „Mémoire sur les lignes du second ordre". Paryż 1817.

Oznaczmy przez I, II, III, IV, V i VI boki sześciokąta opisanego (figura 19). Przez I-II rozumiejmy punkt przecięcia się prostych I i II i anal. Niech prosta p łączy wierzchołki przeciwległe I-II i IV-V, prosta q — II-III i V-VI, a prosta r — III-IV i VI-I. Oznaczmy przez s prostą, łączącą punkty III-IV i V-VI, a przez t — prostą, łączącą punkty IV-V i VI-I. Szereg czterech punktów, w których prostą I przecinają

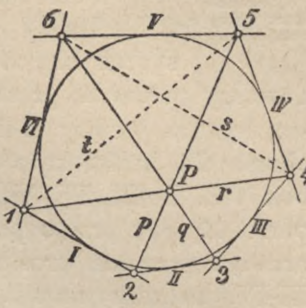


fig. 19.

proste II,IV,V,VI, jest rzutowo pokrewny z szeregiem czterech punktów, w których te same proste przecinają prostą III (art. 16). Pierwszy szereg rzucony jest z punktu IV-V przez promienie p, IV, V, t, a drugi szereg z punktu V-VI przez promienie q, s V, VI, te dwa pęki są zatem rzutowo pokrewne, a ponieważ promień V jest w nich wspólny, to punkty pq, IVs, tVI leżą na jednej prostej, t. j. prosta r przechodzi przez punkt pq, co było do dowiedzenia.

Wykreślenie stożkowej z pięciu punktów.

20. Niech dane będą pięć punktów 1, 2, 3, 4, 5, przez które poprowadzić chcemy stożkową. Prowadźmy proste 12, 23, 34, 45, oraz przez 5 dowolną prostą a; punkty przecięcia się prostych 12 i 45 oraz prostych 23 i a wyznaczają prostą Pascala dla sześciokąta wpisanego w stożkową, którego pięć wierzchołków są pięć punktów danych, a szósty leży na prostej a; gdy przeto punkt przecięcia się prostej 34 z prostą Pascala połączymy z punktem 1, to tak poprowadzona prosta przetnie a w szóstym punkcie, leżącym na stożkowej; obierając dowolnie prostą a, otrzymamy dowolną liczbę nowych punktów stożkowej.

Wykreślenie stożkowej z czterech punktów i stycznej w jednym z nich, lub z trzech punktów i stycznych w dwóch z nich.

Gdy dwa wierzchołki przyległe w sześciokącie wpisanym schodzą się razem, to prosta, je łącząca, staje się styczną w tym wierzchołku. Możemy, dzięki tej uwadze, za pomocą prostej Pascala wykreślić styczną do stożkowej w każdym z punktów danych, jakoteż wykreślić punkty stożkowej, gdy dane są cztery punkty stożkowej i styczna w jednym z nich, lub trzy punkty i styczne w dwóch z nich.

Wykreślenie stożkowej z pięciu stycznych.

Niech dane będą pięć stycznych do stożkowej I, II, III, IV, V i chciejmy wykreślić dowolną liczbę stycznych, obwodzących tę stożkową. Obieramy na V dowolny punkt A; prosta, łącząca punkty I-II i IV-V, oraz prosta, łącząca punkty II-III i A, przecinają się w punkcie Brianchona dla sześciokąta opisanego na stożkowej, mającego pięć boków I, II, III, IV, V, a szósty bok którego przechodzi przez punkt A; gdy przeto połączymy punkt A z punktem, w którym prostą I przecina prosta, łącząca punkt Brianchona z punktem III-IV, to otrzymamy szóstą styczną do stożkowej. Obierając punkt A dowolnie na V, otrzymamy dowolną liczbę stycznych do stożkowej.

Wykreślenie stożkowej z czterech stycznych i punktu styczności jednej z nich, albo z 3-ch stycznych i punktów styczności dwóch z nich.

Gdy dwa boki przyległe sześciokąta opisanego zlewają się w jednę prostą, to punkt ich przecięcia staje się punktem styczności tej prostej. Możemy dzięki tej uwadze za pomocą punktu Brianchona wykreślić punkty styczności pięciu stycznych danych, jakoteż wykreślić styczne do stożkowej, gdy dane są cztery styczne i punkt styczności jednej z nich, albo trzy styczne i punkty styczności dwóch z nich.

Cztery elementy, wyznaczające parabolę.

Ponieważ jedna styczna do paraboli jest zawsze wiadomą, mianowicie prosta w nieskończoności, to parabola jest w zupełności wyznaczona, gdy dane są cztery jej styczne, lub trzy styczne i punkt styczności jednej z nich lub dwie styczne i punkty ich styczności. Gdy dany jest kierunek średnic, to wiadomy jest przez to punkt w nieskończoności na paraboli; parabola jest przeto wyznaczona, gdy dane są, oprócz kierunku średnic, trzy styczne, lub dwie styczne i punkt styczności jednej z nich, lub dwa punkty i styczna w jednym z nich, lub trzy punkty. We wszystkich tych przypadkach do wykreślenia paraboli zastosować można twierdzenie Pascala lub Brianchona.

§ 3. Właściwości rzutu równoległego.

Rzut równoległy i w szczególności prostokątny.

21. W rozważaniach powyższych zakładaliśmy zawsze, że środek rzutu znajduje się w odległości skończonej. Niech teraz środek rzutu przejdzie do nieskończoności; wszystkie promienie rzucające będą wówczas do siebie równoległe; ta szczególna postać rzutu środkowego nazywa się wskutek tego rzutem równoległym, gdy kierunek promieni rzucających prostopadły jest do płaszczyzny rzutu, to mamy rzut równoległy prostokątny, albo krótko: rzut prostokątny.

W rzucie równoległym rzutem punktu jest punkt, rzutem prostej — prosta. Krzywa linia rzucana jest nie przez powierzchnię stożkową rzucającą, lecz przez powierzchnię walcową rzucającą.

W rzucie środkowym w ogólnym przypadku punkt, znajdujący się w odległości skończonej, mógł być rzucony w nieskończoność, w rzucie zaś równoległym każdy punkt w odległości skończonej ma rzut również w odległości skończonej, tylko rzuty punktów w nieskończoności są punktami w nieskończoności. Wynika to z tego, że wraz ze środkiem rzutu przesuwa się w nieskończoność i płaszczyzna zniknienia. Wskutek tej właściwości rzutu równoległego proste równoległe pozostają równoległemi po rzucie, a proste przecinające się nigdy nie mają rzutów równoległych. Odcinki równe jednej prostej lub prostych równoległych pozostają równemi po rzucie; ogólniej, stosunek zwyczajny dwóch odcinków jednej prostej lub prostych równoległych zostaje zachowany, a tem samem zachowany zostaje stosunek anharmoniczny czterech punktów prostej, a że rzutem pęku promieni przeciętych prostą jest pęk promieni przeciętych prostą, to stosunek anharmoniczny czterech promieni pęku również zostaje zachowany. Rzutem więc szeregów punktów rzutowo pokrewnych oraz pęków promieni rzutowo pokrewnych są również szeregi punktów rzutowo pokrewne, względnie pęki promieni rzutowo pokrewne, rzutem inwolucyi — inwolucya. W szczególności rzutem szeregów równych są szeregi równe, szeregów podobnych — szeregi podobne.

Zachowanie równoległości.

Zachowanie stosunku dwóch odcinków równoległych.

Zachowanie pokrewieństwa rzutowego.

Elipsa, jako rzut równoległy koła.

22. Rzutem równoległym koła jest elipsa. Jeżeli bowiem wszystkie punkty koła rzucimy z dwóch jego punktów, to otrzymamy dwa pęki promieni równe; ich rzutem równoległym będą dwa pęki promieni rzutowo pokrewne; takie dwa pęki wyznaczają, jak wiadomo, przez punkty przecięcia się promieni odpowiadających sobie stożkową, przechodzącą przez wierzchołki pęków; w tym przypadku stożkową tą może być tylko elipsa, albowiem nie ma ona punktów w nieskończoności,

gdyż nie ma ich również koło. Środek elipsy, będącej rzutem równoległym koła, jest rzutem środka koła; rzutem średnic koła są średnice elipsy; średnice prostopadłe koła dają w rzucie średnice sprzężone elipsy.

Twierdzenie powyższe można też odwrócić; a mianowicie: każda elipsa uważana być może jako rzut równoległy koła, przy dowolnie wyznaczonym kierunku promieni rzucających. Dowodzenie tego twierdzenia pomijamy (por. art. 16).

Rzut prostokątny koła. Gdy rzut równoległy jest prostokątny, to długość rzutu każdego odcinka prostej równa jest długości samego odcinka, pomnożonej przez dostawę kąta nachylenia prostej tego odcinka względem płaszczyzny rzutu. Gdy rozważymy rzut prostokątny koła, to średnica jego, równoległa do płaszczyzny rzutu, oraz średnica do poprzedniej prostopadła będą miały, jako rzuty, osi elipsy; pierwsza z tych średnic zachowa przy rzucie swoją długość, rzut drugiej będzie mniejszy od niej w stosunku dostawy kąta płaszczyzny koła z płaszczyzną rzutu, więc rzutem pierwszej średnicy będzie oś wielka elipsy, rzutem drugiej — oś mała.

Zaznaczymy (dla zastosowania w następstwie), że kąt prosty, którego jedno ramię jest równoległe do płaszczyzny rzutu, zostaje kątem prostym w rzucie prostokątnym. Jakoż, oznaczmy przez a ramię kąta równoległe do płaszczyzny rzutu, przez b — drugie ramię, wtedy prosta a jest prostopadła do płaszczyzny rzucającej prostej b, a więc i do rzutu prostej b, zaś rzut prostej a jest do tego ostatniego równoległy.

§ 4. Kolineacya figur na płaszczyznie.

Określenie. **23.** O dwóch figurach na płaszczyznie mówimy, że są w kolineacyi, gdy każdemu punktowi jednej figury odpowiada punkt drugiej, każdej prostej jednej — prosta drugiej, przyczem wszystkie proste, łączące punkty odpowiednie obydwóch figur przechodzą przez jeden punkt, t. zw. środek kolineacyi, a wszystkie punkty przecięcia się prostych odpowiednich leżą na jednej prostej, t. zw. osi kolineacyi. Proste, wychodzące ze środka kolineacyi, nazywać będziemy promieniami kolineacyi. Aby mieć przykład figur kolineacyjnych, weźmy w przestrzeni jakąkolwiek figurę na płaszczyznie m i rzuć-

Przykład figur kolineacyjnych.

my ją z jakiegokolwiek punktu zewnątrz niej leżącego na inną płaszczyznę n, następnie obierzmy dowolny inny punkt B, nie leżący na żadnej z płaszczyzn m i n, i rzućmy z punktu B cały ten układ figur na płaszczyznę dowolną, np. na płaszczyznę m; wtedy na płaszczyznie m otrzymamy oczywiście dwie figury w kolineacyi; środkiem tej kolineacyi będzie rzut punktu A ze środka B, osią kolineacyi będzie prosta przecięcia się płaszczyzn m i n.

Kreślenie figur kolineacyjnych z daną.

Gdy dana jest na płaszczyznie figura jakakolwiek to, obrawszy dowolnie środek O i oś a kolineacyi, możemy wykreślić nieskończenie wiele figur kolineacyjnych z daną względem środka O i osi a. Figura taka będzie zupełnie wyznaczona, gdy obierzemy punkt A', odpowiadający pewnemu punktowi A figury danej; naturalnie punkt A' wybrany być musi na promieniu OA. Twierdzenie nasze będzie dowiedzione, gdy pokażemy, jak wykreślić punkt B', odpowiadający innemu punktowi B figury danej; w tym celu kreślimy prostą AB, która przetnie oś a w punkcie K; prosta KA' odpowiada prostej KA; punkt B' otrzymamy w przecięciu się promienia OB z prostą KA'.

Oczywiście, punkty, leżące na osi kolineacyi, odpowiadają sobie wzajemnie; również odpowiadają sobie wzajemnie promienie kolineacyi.

Gdy środek kolineacyi znajduje się w odległości skończonej, to nazywamy kolineacyę **środkową**. Gdy środek kolineacyi jest w nieskończoności, mamy kolineacyę **równoległą**; promienie kolineacyi są wówczas równoległe. Gdy kierunek tych promieni prostopadły jest do osi kolineacyi, to kolinecyę równoległą zwiemy **prostokątną**.

Podobieństwo i równość, jako przypadki szczególne kolineacyi.

Szczególnemi przypadkami kolineacyi są **podobieństwo i równość** figur; pierwsze ma miejsce, gdy osią kolineacyi jest prosta w nieskończoności, a środek kolineacyi znajduje się w odległości skończonej; nazywa się on wtedy **środkiem podobieństwa**; jeżeli zaś zarówno środek kolineacyi, jak i oś przechodzą do nieskończoności, to obie figury są równe i jeden z nich otrzymuje się z drugiej przez zwyczajne przesunięcie. W rozważaniach następnych brać będziemy oś kolineacyi w odległości skończonej.

24. Prostej równoległej do osi kolineacyi, t. j. przecinającej ją w punkcie nieskończenie dalekim, odpowiada oczywiście również prosta, równoległa do osi kolineacyi. Gdy przeto jednemu punktowi odpowiada punkt nieskończenie daleki, to prostej, przez ten punkt równolegle do osi kolineacyi poprowadzonej, odpowiada w drugiej figurze prosta w nieskończoności. Aby taki punkt otrzymać, prowadzimy przez *O* jakąkolwiek prostą *OH* (fig. 20), a przez *A'* — prostą do niej równoległą, przecinającą oś w punkcie *K*; prosta *KA* przetnie prostą *OH* w punkcie *L* szukanym.

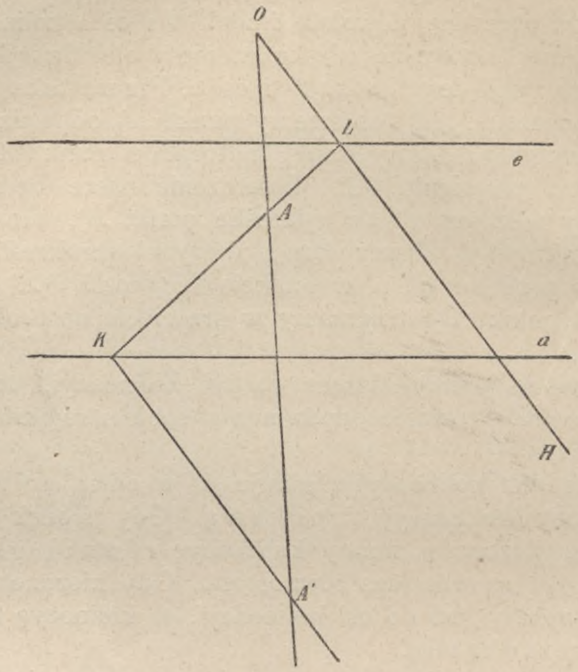


fig. 20.

Rzeczywiście punktowi *L*, jako punktowi przecięcia się prostych *OH* i *KA*, odpowiada w drugiej figurze punkt przecięcia się prostych odpowiednich *OH* i *KA'*, t. j. punkt w nieskończoności w kierunku *OH*. Będziemy nazywali prostą *e*, poprowadzoną przez *L* równolegle do *a*, **prostą zniknienia** dla pierwszej figury. Podobnież znaleść można prostą zniknienia dla drugiej figury, t. j. prostą drugiej figury, odpowiadającą prostej w nieskończoności w pierwszej figurze; oznaczać będziemy tę prostą przez e_∞.

Prosta zniknienia.

Pokrewieństwo rzutowe figur kolineacyjnych.

25. Szereg punktów w jednej figurze jest rzutowo pokrewny z odpowiadającym mu szeregiem punktów w drugiej, albowiem każdy z tych szeregów może być uważany jako rzut drugiego ze środka kolineacyi jako środka rzutu. Stąd łatwo jest widzieć, że i pęki promieni odpowiednie w figurach kolineacyjnych są rzutowo pokrewne: oczywiście, na prostych, odpowiadających sobie, wyznaczają one szeregi punktów rzutowo pokrewne. Stąd wnioskujemy dalej, że dwóm szeregom punktów lub dwóm pękom promieni rzutowo pokrewnym odpowiadają również dwa szeregi punktów lub dwa pęki promieni rzutowo pokrewne. Bezpośrednio zaś z tego wynika, że figurą kolineacyjną ze stożkową jest stożkowa.

Stożkowa, jako figura kolineacyjna z kołem.

26. Rezultat, jaki otrzymaliśmy w art. poprzednim, daje nam sposób wykreślenia wszystkich trzech

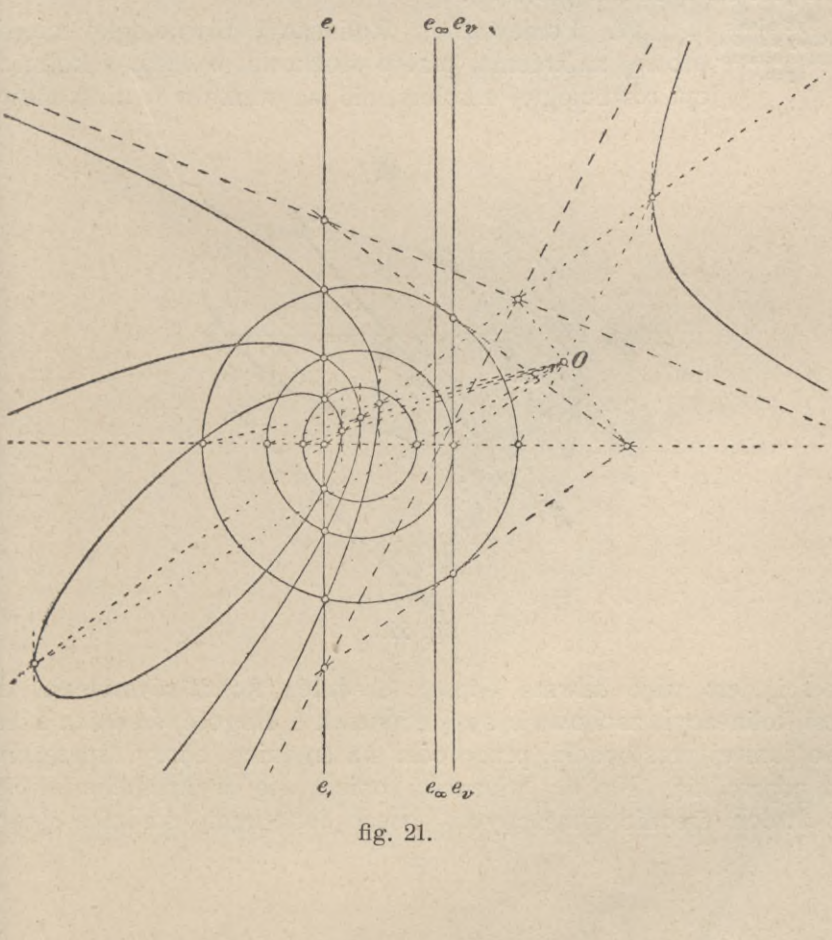


fig. 21.

rodzajów stożkowych, jako figur kolineacyjnych z kołem. Jakoż, jeżeli koło nie ma punktów wspólnych z prostą zniknienia e_v, to stożkowa kolineacyjna nie ma punktów w nieskończoności, jest więc elipsą; gdy koło przecina prostą zniknienia w dwóch punktach, to stożkowa kolineacyjna ma dwa punkty w nieskończoności, jest więc hyperbolą; gdy wreszcie koło dotyka prostej zniknienia w jakimś punkcie, to stożkowa jest parabolą; prosta, łącząca środek kolineacyi z punktem styczności, daje kierunek średnic paraboli. Wszystkie te stożkowe leżą oczywiście po jednej stronie prostej e_∞, ponieważ koło nie ma punktów w nieskończoności. Wykreślenia te są podane na fig. 21, gdzie koło wewnętrzne daje, jako figurę kolineacyjną, elipsę, środkowe — parabolę, a zewnętrzne — hyperbolę; wykreślone są też asymptoty hyperboli, jako proste, odpowiadające stycznym do koła w punktach przecięcia się takowego z prostą e_v (oś kolineacyi oznaczona jest na rysunku przez e_1).

Wykreślenie elipsy z dwóch średnic sprzężonych.

27. Ponieważ w kolineacyi równoległej niema prostej zniknienia, przeto stożkowa, będąca w kolineacyi równoległej z kołem, nie ma punktów w nieskończo-

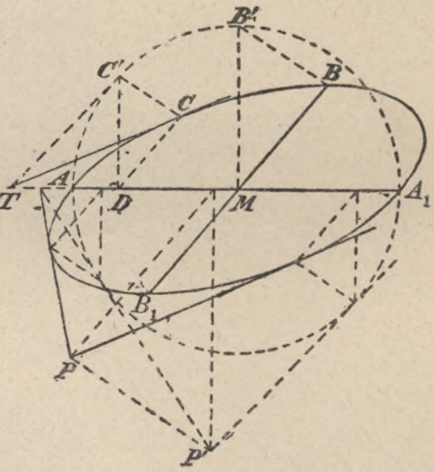


fig. 22.

ności, jest więc zawsze elipsą. Średnica koła, równoległa do osi kolineacyi, zachowuje swój kierunek i długość, średnica koła, do tamtej prostopadła, przechodzi na średnicę elipsy, sprzężoną z poprzednią. Na tej własności opiera się wykreślenie elipsy z dwóch średnic sprzężonych. Niech dane będą średnice sprzężone elipsy AA_1 i BB_1 (fig. 22). Opiszmy na średnicy AA_1 koło, w którem MB' niech będzie promieniem prostopadłym do BB_1. Możemy wtedy oczywiście uważać koło i elipsę, jako znajdujące się w kolineacyi równoległej, w której AA_1 jest osią, a $B'B$ — jednym z promieni kolineacyi. Chcąc otrzymać inny punkt elipsy, odpowiadający np. punktowi C' koła, prowadzimy przez C' prostopadłą $C'D$ do AA_1; prostej DC' odpowiadać będzie prosta DC, równoległa do MB; promień kolineacyjny, wychodzący z C', przetnie DC w punkcie C szukanym. Styczne w punkcie C' do koła i w punkcie C do elipsy przecinają oś w jednym punkcie, skąd otrzymujemy konstrukcyę stycznej do elipsy w danym na niej punkcie. Aby z punktu zewnętrznego P otrzymać styczne do elipsy, wykreślamy punkt P' w figurze koła, odpowiadający punktowi P figury elipsy, wówczas styczne z P do elipsy odpowiadają stycznym z P' do koła.

Inna metoda. Konstrukcya elipsy z dwóch średnic sprzężonych na zasadzie powyżej wyłożonej wykonaną być może sposobem następującym przy pomocy dwóch kół spółśrodkowych.

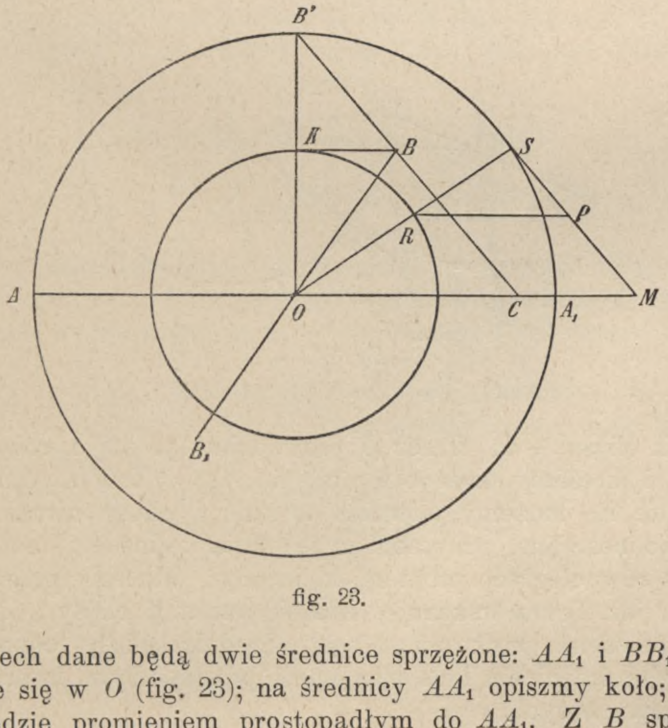


fig. 23.

Niech dane będą dwie średnice sprzężone: AA_1 i BB_1, przecinające się w O (fig. 23); na średnicy AA_1 opiszmy koło; niech OB' będzie promieniem prostopadłym do AA_1. Z B spuśćmy prostopadłą BK na OB', a ze środka O opiszmy drugie koło promieniem OK. Aby następnie otrzymać punkt elipsy, odpowiadający pewnemu punktowi S koła, prowadzimy promień OS, przecinający koło mniejsze w R; przez S prowadzimy promień kolineacyi równolegle do $B'B$, a przez R — równoległą do AA_1; dwie te proste przetną się w szukanym punkcie P elipsy. Istotnie punkty P i S leżą na jednym promieniu kolineacyi, prócz tego proste $B'S$ i BP muszą przeciąć oś AA_1 w jednym punkcie, gdyż SM jest równoległa do $B'C$ i

$$SP : PM = SR : RO = B'K : KO = B'B : BC.$$

Trzecia metoda. Zamiast obierać jednę ze średnic sprzężonych danych za oś kolineacyi, możemy za oś obrać styczną do stożkowej w końcu jednej z tych średnic; styczna ta będzie równoległa do drugiej średnicy. Niech np. dane średnice będą AA', BB' (fig. 24),

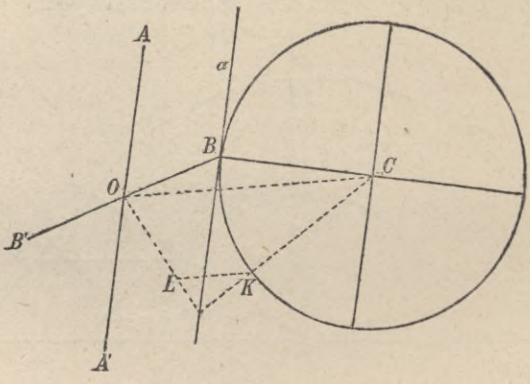


fig. 24.

a środek elipsy — O. Przez B prowadzimy prostą a, równoległą do AA' i kreślimy koło o promieniu $CB = OA$, styczne do a w punkcie B; możemy wówczas to koło i elipsę uważać jako figury kolineacyjne, przyczem a jest osią kolineacyi, a OC kierunkiem równoległych promieni kolineacyi. Możemy przeto z łatwością, jak figura wskazuje, znaleść punkt L elipsy, odpowiadający pewnemu punktowi K koła. Średnice elipsy, odpowiadające dwóm średnicom koła wzajemnie prostopadłym, tworzą parę średnic sprzężonych.

Wykreślenie elipsy z jej osi.

28. Gdy kolineacya równoległa jest prostokątną, to średnica koła, równoległa do osi kolineacyi, daje oś wielką elipsy, a średnica prostopadła do niej — oś małą. Możemy, dzięki temu, wykreślić elipsę, gdy dane są jej osi. Użyjemy do tego również metody dwóch kół spółśrodkowych.

Niech dane osi będą AA' i BB' (fig. 25). Na osiach tych, jak na średnicach, opiszmy dwa koła. Elipsę uważajmy, jako figurę kolineacyjną z kołem zewnętrznem, AA' jest tedy osią kolineacyi prostokątnej. Aby otrzymać punkt elipsy, odpowiadający punktowi S koła, prowadzimy promień OS, przecinający koło mniejsze w punkcie R; z S spuszczamy prostopadłą SM na oś AA', a z R — prostopadłą na SM; w przecięciu się tych prostych otrzymamy punkt P szukany. Rzeczywiście, punkt P leży z punktem S na jednym promieniu kolineacyi, prócz tego, gdy punkt, w którym promień OB przedłużony przeciąłby koło zewnętrzne, nazwiemy przez C, to mieć będziemy:

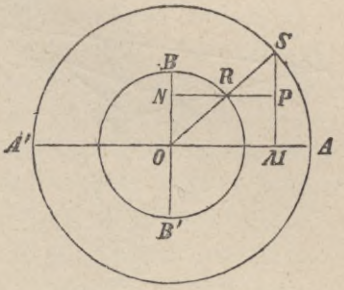


fig. 25.

$$SP : PM = SR : RO = CB : BO,$$

a więc proste CS i BP przecięłyby oś kolineacyi w jednym punkcie.

Do wykreślenia elipsy z jej osi można też użyć metody, opisanej w końcu artykułu poprzedniego, obierając styczną do elipsy w jednym z wierzchołków za oś kolineacyi prostokątnej.

Twierdzenie Desargues'a.

29. W dalszym wykładzie potrzebne nam będzie twierdzenie, którem teraz się zajmiemy; twierdzenie to podał Desargues*).

Gdy punkty przecięcia się boków odpowiednich dwóch trójkątów leżą na jednej prostej, to trójkąty te są w kolineacyi, t. j. proste, łączące wierzchołki odpowiednie, przecinają się w jednym punkcie.

*) W rozprawie: „Méthode universelle de mettre en perspective les objets donnés réellement", Paryż, 1636. Dzieła Desargues'a wydane zostały przez Poudra w roku 1864 w Paryżu.

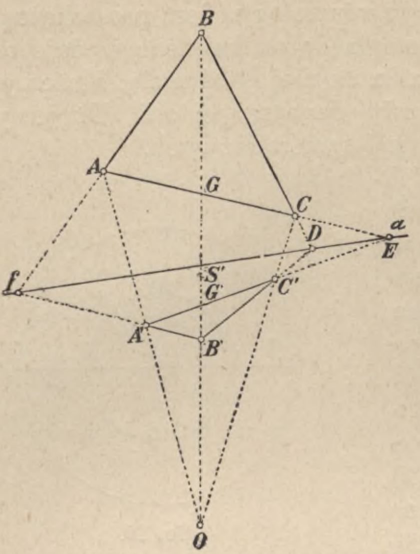


fig. 26.

Niech trójkąty ABC i $A'B'C'$ (fig. 26) mają położenie takie, że punkty D, E, F, w których przecinają się odpowiednie pary boków BC i $B'C'$, CA i $C'A'$, AB i $A'B'$, leżą na jednej prostej a; pragniemy dowieść, że proste AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie O. Rzucając punkty F, S, D, E z punktu B na prostą AC i z punktu B' na prostą $A'C'$, otrzymamy:

$$(FSDE) = (AGCE)$$

$$(FSDE) = (A'G'C'E),$$

skąd znajdziemy:

$$(AGCE) = (A'G'C'E).$$

Szeregi czterech punktów A, G, C, E i A', G', C', E są zatem rzutowo pokrewne, a ponieważ punkt E jest dla nich wspólny, to proste AA', GG', CC' przecinają się w jednym punkcie O, co było do dowiedzenia.

Twierdzenie to daje się odwrócić, a mianowicie:

Twierdzenie odwrotne.

G d y p r o s t e, ł ą c z ą c e w i e r z c h o ł k i o d p o w i e d n i e d w ó c h t r ó j k ą t ó w, p r z e c i n a j ą s i ę w j e d n y m p u n k c i e, t o t r ó j k ą t y t e s ą w k o l i n e a c y i, t. j. punkty przecięcia się boków odpowiednich leżą na jednej prostej.

Jakoż niech trójkąty ABC i $A'B'C'$ (figura 26) mają położenie takie, że proste AA', BB', CC' przecinają się w jednym pnnkcie O; pragniemy dowieść, że punkty D, E, F, w których przecinają się odpowiednie pary boków: BC i $B'C'$, CA i $C'A'$, AB i $A'B'$, leżą na jednej prostej a. Rzucając punkty A, G, C, E ze środków B i O otrzymamy:

$$B(AGCE) = O(AGCE) = O(A'G'C'E),$$

rzucając zaś punkty A', G', C', E ze środków B' i O, otrzymamy:

$$B'(A'G'C'E) = O(A'G'C'E);$$

przez porównanie znajdziemy:

$$B(AGCE) = B'(A'G'C'E);$$

pęki czterech promieni BA, BG, BC, BE i $B'A'$, $B'G'$, $B'C'$, $B'E$ są zatem rzutowo pokrewne, lecz ponieważ promienie BG i $B'G'$ leżą na jednej prostej, to promienie odpowiednie BA i $B'A'$, BC i $B'C'$, BE i $B'E$ przecinają się w punktach jednej linii prostej, co było do dowiedzenia.

30. Korzystając z twierdzenia Desargues'a, dowiedziemy pewnej własności figury płaskiej, którą to własność niejednokrotnie bezpośrednio stosować będziemy w geometryi wykreślnej.

Kład figury płaskiej. Niech dana będzie figura w płaszczyznie m; inna płaszczyzna n niech przecina płaszczyznę m podług prostej a. Nazywać będziemy kładem figury danej na płaszczyznie n położenie, jakie figura ta zajmie, gdy płaszczyznę m obrócimy około prostej a tak, aby przystała do płaszczyzny n.

Kolineacya rzutu i kładu figury płaskiej. Rzut figury płaskiej i jej kład na płaszczyznę rzutu są w kolineacyi; kolineacya jest środkowa albo równoległa (w szczególności prostokątna) stosownie do tego, czy rzut jest środkowy albo równoległy (w szczególności prostokątny).

Oznaczmy, jak wyżej, prostą, podług której płaszczyzna figury przecina płaszczyznę rzutu, przez a; punkty figury płaskiej oznaczajmy przez $A, B, C, \ldots$, ich rzuty — przez $A', B', C', \ldots$, a ich kłady — przez $A^0, B^0, C^0, \ldots$. Prosta jakakolwiek AB w płaszczyznie figury przecina prostą a w tym samym punkcie, w którym tę ostatnią przecina rzut $A'B'$; ten punkt przecięcia nie zmieni swego położenia wskutek kładu, a więc dwie proste odpowiednie $A'B'$ i A^0B^0 przecinają się zawsze na prostej a. Jeden warunek kolineacyi jest więc spełniony.

Niech A, B, C będą trzy jakiekolwiek punkty figury danej, nie leżące na jednej prostej; rzut $A'B'C'$ trójkąta ABC i jego kład $A^0B^0C^0$ czynią zadość warunkom prostego twierdzenia Desargues'a, wskutek tego proste $A'A^0$, $B'B^0$, $C'C^0$ przecinają się w jednym punkcie O. Niech D będzie jakikolwiek inny punkt figury; załóżmy, że D nie leży na prostej AB (gdyby punkt D leżał na prostej AB, wzięlibyśmy zamiast AB prostą BC lub CA); twierdzenie nasze będzie dowiedzione, gdy wykażemy, że prosta $D'D^0$ przechodzi przez punkt O; lecz to jest oczywiste, albowiem trójkąty $D'A'B'$ i $D^0A^0B^0$ czynią również zadość warunkom prostego twierdzenia Desargues'a, a przeto prosta $D'D^0$ przechodzi przez punkt przecięcia się prostych $A'A^0$ i $B'B^0$, t. j. przez punkt O. Punkt O jest środkiem kolineacyi figur $A'B'$.... i A^0B^0..., a prosta a — osią tej kolineacyi.

Niech $A'B'$..... będzie rzutem równoległym figury AB....; mamy wykazać, że wówczas punkt O jest w nieskończoności, to jest, że proste $A'A^0$, $B'B^0$,... są równoległe. Jakoż, niech proste AB i $A'B'$ przetną prostą a w punkcie K; ponieważ według założenia proste AA' i BB' są równoległe, to mamy: $A'B' : AB = B'K : BK$. Kład nie zmienia długości odcinków, jest więc $AB = A^0B^0$ i $BK = B^0K$, a przeto: $A'B' : A^0B^0 = B'K : B^0K$; stąd wynika, czegośmy chcieli dowieść.

W szczególności, niech rzut równoległy będzie prostokątnym. Łatwo jest widzieć, że wtedy punkty A, A', A^0 leżą w płaszczyźnie prostopadłej do a; prosta $A'A^0$, podług której ta płaszczyzna przecina płaszczyznę rzutu, musi zatem być prostopadłą do prostej a; lecz punkt A jest dowolnym punktem figury, a zatem w tym przypadku wszystkie promienie kolineacyi są prostopadłe do osi kolineacyi, t. j. mamy kolineacyę prostokątną, co było do dowiedzenia.

Środek kolineacyi rzutu i kładu figury płaskiej.

Wróćmy jeszcze do najogólniejszego przypadku, kiedy rzut jest środkowy. Wykażemy, że środek kolineacyi kładu figury płaskiej i jej rzutu jest kładem środka rzutu około prostej, podług której płaszczyznę rzutu przecina płaszczyzna, poprowadzona przez środek rzutu równolegle do płaszczyzny figury.

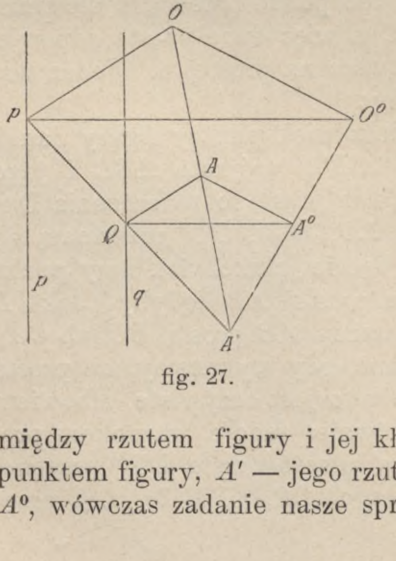


fig. 27.

Niech O (fig. 27) będzie środkiem rzutu, p prostą przecięcia płaszczyzny rzutu z płaszczyzną, poprowadzoną przez O równolegle do płaszczyzny figury, q — prostą przecięcia płaszczyzny figury z płaszczyzną rzutu. Kład figury płaskiej odbywa się przez obrót około prostej q, kład środka rzutu — około prostej p. Oznaczmy kład punktu O przez O^0, wówczas dowieść mamy, że O^0 jest środkiem kolineacyi, zachodzącej między rzutem figury i jej kładem. Niech A będzie dowolnym punktem figury, A' — jego rzutem; kład punktu A oznaczmy przez A^0, wówczas zadanie nasze sprowadza się do dowiedzenia, że prosta $A'A^0$ przechodzi przez punkt O^0. Niech P i Q będą spodkami prostopadłych, spuszczonych z O wzgl. A na p wzgl. q; wtedy jest: $AQ = QA^0$, $OP = PO^0$, nadto proste QA^0 i PO^0, jako prostopadłe do q wzgl. p, są do siebie równoległe. Punkty A', Q, P leżą oczywiście na jednej prostej; a że mamy przytem: $QA^0 : PO^0 = QA : PO = QA' : PA'$, to widzimy, że trójkąty $A'QA^0$ i $A'PO^0$ są podobne, przeto punkty A', A^0 i O^0 leżą na jednej prostej.

ĆWICZENIA.

1) Jeżeli punkt A jest harmonicznie sprzężony z punktem C względem punktów B i D, to jest:

$$\frac{2}{AC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}.$$

2) Przez punkt, dany wewnątrz kąta, poprowadzić prostą tak, aby jej odcinek, zawarty wewnątrz kąta, dzielił się w punkcie danym na połowy.

3) Dany jest trójkąt ABC i punkt M, nie leżący na żadnym z jego boków; przez M poprowadzić prostą tak, aby punkty, w których prostą tę przecinają boki trójkąta, wraz z punktem M tworzyły cztery punkty harmoniczne.

4) Dany jest trójkąt ABC i prosta m, nie przechodząca przez żaden z jego wierzchołków; znaleść na prostej m punkt taki, aby proste, łączące go z wierzchołkami trójkąta, wraz z prostą m tworzyły cztery promienie harmoniczne.

5) Gdy trójkąt zmienny porusza się tak, że boki a, b, c przechodzą odpowiednio przez trzy punkty stałe: M, N, P, nie leżące na jednej prostej, a wierzchołki A (przeciwległy bokowi a) i B (przeciwległy bokowi b) poruszają się odpowiednio po prostych stałych s i t, to trzeci wierzchołek C opisuje stożkową, przechodzącą przez M i N.

6) Gdy trójkąt zmienny porusza się tak, że wierzchołki A, B, C poruszają się odpowiednio po prostych stałych: m, n, p, nie przechodzących przez jeden punkt, a boki a i b przechodzą odpowiednio przez punkty stałe S i T, to trzeci bok c owija stożkową, dotykającą się prostych m i n.

7) Kąt obraca się około stałego wierzchołka O, zachowując niezmienną wielkość; podczas tego jedno ramię kąta wyznacza na prostej stałej m szereg punktów A, B, C,..., gdy drugie ramię na innej prostej stałej n wyznacza szereg punktów A', B', C',...; dowieść, że proste AA',

BB',... owijają stożkową, dotykającą się prostych m i n; stożkowa ta jest parabolą, gdy kąt obracający się równy jest kątowi prostych m i n.

8) Gdy dwa kąty α i β, nie zmieniając swej wielkości, obracają się około swych wierzchołków O i O' tak, że jedna para ramion a i a' przecina się zawsze na prostej danej m, to punkt przecięcia się drugiej pary ramion b i b' opisuje stożkową, przechodzącą przez punkty O i O'; stożkowa ta jest elipsą, parabolą albo hyperbolą, stosownie do tego, czy łuk koła, opisany na cięciwie OO' i obejmujący kąt wpisany $\beta - \alpha$, nie przecina prostej m, dotyka jej albo przecina ją w dwóch punktach; w ostatnim przypadku, gdy jeden z punktów przecięcia się, M, ma takie położenie, że $\angle MOO' = \alpha$ (lub $180^0 - \alpha$), to wyjątkowo proste b i b' przecinają się na jednej prostej.

9) Niech figura m' będzie rzutem figury m ze środka O. Gdy figurę m obracać będziemy około prostej przecięcia g płaszczyzn m i m', to w każdem położeniu istnieje w przestrzeni punkt O, względem którego, jako środka rzutu, niezmienna figura m' jest rzutem ruchomej figury m; miejscem geometrycznem punktu O jest pewne koło, leżące w płaszczyznie prostopadłej do prostej g; przy każdem położeniu figury m, jej płaszczyzna jest równoległa do tego promienia koła, który skierowany jest do odnośnego punktu O.

ROZDZIAŁ II.

PUNKT, PROSTA I PŁASZCZYZNA.

§ 1. Wyznaczenie położenia punktu, prostej i płaszczyzny.

Dwie płaszczyzny rzutu.

31. Jeden rzut punktu nie wystarcza (art. 2) do określenia jego położenia w przestrzeni, dlatego w geometryi wykreślnej obiera się dwie płaszczyzny rzutu, zazwyczaj do siebie prostopadłe, i na każdej wyznacza się rzut prostokątny punktu; przez to, oczywiście, położenie punktu w przestrzeni jest w zupełności określone. (Zgódźmy się na przyszłość, gdy mówić będziemy o rzucie, rozumieć rzut prostokątny, o ile nie powiemy wyraźnie, że mowa jest o rzucie innego rodzaju).

Jedna z płaszczyzn rzutu nazywa się płaszczyzną p o z i o m ą .druga — p i o n o w ą; rzut punktu (lub w ogóle figury jakiejkolwiek) na płaszczyznę poziomą nazywa się r z u t e m p o z i o m y m punktu (wzgl. figury), rzut na płaszczyznę pionową — r z u t e m p i o n o w y m. Prosta x przecięcia się płaszczyzn rzutu nazywa się o s i ą r z u t u.

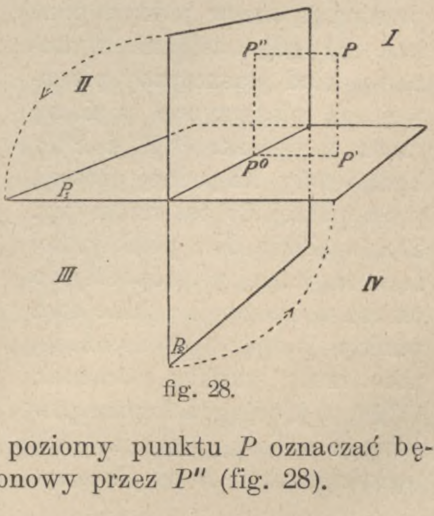


fig. 28.

Oznaczmy płaszczyznę poziomą rzutu przez P_1, a płaszczyznę pionową przez P_2. Rzut poziomy punktu P oznaczać będziemy przez P', a jego rzut pionowy przez P'' (fig. 28).

Cztery ćwierci przestrzeni.

Płaszczyzny rzutu dzielą przestrzeń na cztery ćwierci. Wyobrażając siebie nad płaszczyzną poziomą i przed płaszczyzną pionową, gdzie znajduje się punkt P na figurze 28, nazywać będziemy tę ćwierć, gdzie się znajdujemy, pierwszą, znajdującą się nad $\boldsymbol{P}_1$ i za $\boldsymbol{P}_2$ — drugą, pod $\boldsymbol{P}_1$ i za $\boldsymbol{P}_2$ — trzecią, wreszcie pod $\boldsymbol{P}_1$ i przed $\boldsymbol{P}_2$ — czwartą. Płaszczyznę, dzielącą na połowy kąty dwuścienne pierwszej i trzeciej ćwierci, nazywać będziemy pierwszą główną płaszczyzną dwusieczną ($\boldsymbol{H}_1$), a dzielącą na połowy kąty dwuścienne drugiej i czwartej ćwierci — drugą główną płaszczyzną dwusieczną ($\boldsymbol{H}_2$).

Sprowadzenie płaszczyzn rzutu do jednej.

Po wykonaniu rzutów punktu wyobrażamy sobie, że płaszczyzna pionowa rzutu obraca się około osi rzutu tak, aby dolna jej część przystała do przedniej części płaszczyzny poziomej, i, sprowadziwszy tym sposobem płaszczyzny rzutu do jednej, kładziemy ją na płaszczyznę rysunku. Otrzymujemy wtedy rzuty poziome i rzuty pionowe w jednej płaszczyznie, odróżniamy je zaś przez to, że pierwsze mają po jednym akcencie, drugie — po dwa. Dla jednolitości oznaczeń będziemy w przyszłości punkty oznaczali przez A, B, C..., proste przez a, b, c..., zaś płaszczyzny przez $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, ...

Rzuty punktu.

32. Punkty P, P' i P'' (fig. 28) leżą oczywiście w płaszczyznie prostopadłej do osi rzutu; gdy przeto z punktów P' i P'' spuścimy prostopadłe na oś, to przetną ją one w jednym punkcie P_0; gdy następnie wykonamy kład płaszczyzny pionowej na płaszczyznę poziomą rzutu, to odcinki P^0P'' i P^0P' będą leżały na jednej prostej, prostopadłej do osi rzutu (fig. 29); wszelkie dwa punkty, leżące na jednej prostopadłej do osi rzutu, i też tylko takie dwa punkty mogą być uważane, jako rzuty punktu. Odcinek $P''P^0$, t. j. odległość rzutu pionowego od osi, jest miarą odległości punktu P od płaszczy-

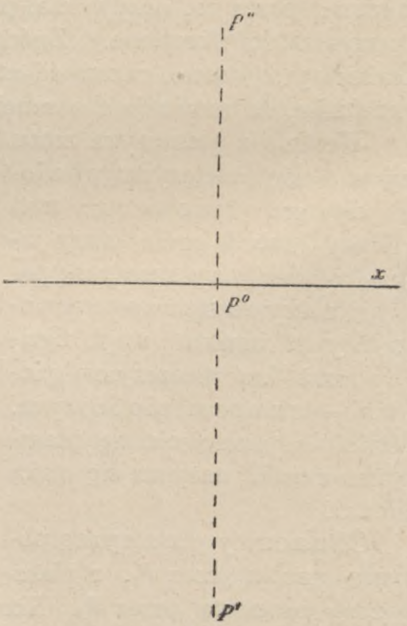


fig. 29.

Położenie punktu w przestrzeni.

zny poziomej rzutu, a odcinek $P'P^0$ — miarą odległości punktu P od płaszczyzny pionowej rzutu. Gdy zatem P' leży na osi, to punkt P leży w płaszczyznie P_2 (schodząc się z punktem P''), gdy zaś P'' leży na osi, to punkt P leży w płaszczyznie P_1 (schodząc się z punktem P'). Z położenia rzutów punktu względem osi łatwo jest spostrzedz dokładnie, w której ćwierci przestrzeni, lub w której części płaszczyzny rzutu znajduje się punkt. Na fig. 30 przedstawione są rzuty punktu w rozmaitych

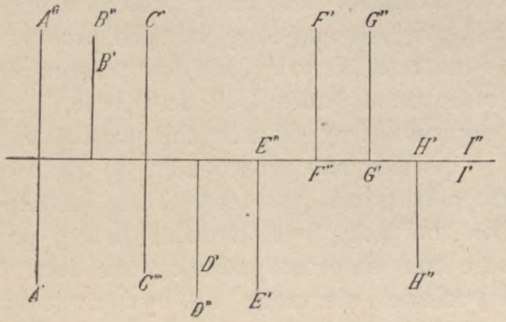


fig. 30.

położeniach; widzimy, że punkt A znajduje się w pierwszej ćwierci, punkt B w drugiej, C — w trzeciej, D — w czwartej, E — na płaszczyznie P_1 przed płaszczyzną P_2, F — na płaszczyznie P_1 za płaszczyzną P_2, G — na płaszczyznie P_2 nad osią x, H — na płaszczyznie P_2 pod osią x, I — leży na osi rzutu. Jeżeli odległości obydwóch rzutów punktu od osi x są jednakowe, to punkt jest jednakowo oddalony od obydwóch płaszczyzn rzutu i leży przeto na pierwszej lub drugiej płaszczyznie dwusiecznej głównej.

Rzuty prostej.

33. Położenie prostej w przestrzeni wyznacza się przez jej rzuty na płaszczyzny P_1 i P_2; rzut prostej na płaszczyznę P_1 nazywa się jej **rzutem poziomym**, a rzut jej na płaszczyznę P_2 — **rzutem pionowym**. Oznaczać będziemy rzut poziomy prostej a przez a', a jej rzut pionowy przez a''. W ogólności rzutami prostej są dwie proste nachylone do osi rzutu. Rozważmy własności rzutów prostej, odpowiadających pewnym szczególnym jej położeniom; własności te wynikają z samego pojęcia o rzucie prostokątnym i z zasadniczych twierdzeń stereometryi.

Położenia szczególne prostej.

Gdy prosta jest równoległa do jednej z płaszczyzn rzutu, to jej rzut na drugą płaszczyznę równoległy jest do osi. Gdy prosta leży na jednej z płaszczyzn rzutu, to rzut jej na drugą płaszczyznę leży na osi. Gdy prosta prostopadła jest do jednej z płaszczyzn rzutu, to jej rzut na tę płaszczyznę jest punktem, a na drugą płaszczyznę — prostą prostopadłą do osi i przechodzącą przez ten punkt. Gdy prosta leży w płaszczyznie, prostopadłej do osi rzutu, lecz nie jest prostopadła do żadnej z płaszczyzn rzutu, to obydwa rzuty prostej leżą na jednej prostej, prostopadłej do osi.

Położenie prostej w przestrzeni.

Wszelkie dwie proste w płaszczyznie rysunku mogą być uważane, jako rzuty prostej w przestrzeni; oczywiście, przyjmując jednę z tych prostych za rzut poziomy, drugą — za rzut pionowy, dajmy płaszczyznom rzutu położenie wzajemnie prostopadłe (jak na fig 28), następnie przez rzut poziomy poprowadźmy płaszczyznę prostopadłą do P_1, przez rzut pionowy — płaszczyznę prostopadłą do P_2; prosta przecięcia się tych dwóch płaszczyzn jest tedy prostą szukaną. Dwie proste wtedy tylko nie mogą być rzutami jednej prostej w przestrzeni, gdy obie one są prostopadłe do osi, lecz nie przecinają jej w jednym punkcie; nie mogą też być rzutami prostej dwie proste, z których jedna jest prostopadła do osi, druga — nachylona do niej. Gdy wreszcie obydwa rzuty leżą na jednej prostopadłej do osi, to przez nie prosta w przestrzeni nie jest wcale wyznaczona, wiadoma jest tylko wówczas płaszczyzna prostopadła do osi, w której prosta się znajdować musi, lecz wszystkie proste, leżące na tej płaszczyznie, mają oczywiście te same rzuty. Dla oznaczenia przeto położenia prostej, prostopadłej do osi, lecz nachylonej do płaszczyzn rzutu, dają się zwykle rzuty dwóch punktów, leżących na tej prostej; oczywiście, wszystkie cztery rzuty punktów (dwa poziome i dwa pionowe) leżeć muszą na jednej prostej, prostopadłej do osi.

W przypadku ogólnym można również wyznaczyć położenie prostej w przestrzeni przez rzuty dwóch jej punktów. Z samego bowiem pojęcia o rzucie wynika, że gdy punkt leży na prostej, to rzut poziomy punktu leży na rzucie poziomym prostej, a rzut pionowy punktu — na rzucie pionowym prostej; gdy przeto wiadome są rzuty dwóch punktów A i B, to prosta $A'B'$ jest rzutem poziomym, a prosta $A''B''$ rzutem pionowym prostej AB.

Ślady prostej.

34. Z punktów prostej szczególne znaczenie mają te punkty, w których ona przecina płaszczyzny rzutu; punkty te nazywamy śladami prostej, mianowicie: punkt przecięcia się prostej z płaszczyzną P_1 — śladem poziomym, a punkt przecięcia się prostej z płaszczyzną P_2 — śladem pionowym. Ślad poziomy prostej schodzi się oczywiście ze swoim rzutem poziomym, jako też ślad pionowy ze swoim rzutem pionowym, zaś rzut pionowy śladu poziomego, oraz rzut poziomy śladu pionowego leżą na osi rzutu. Dlatego, chcąc otrzymać ślady prostej, danej przez rzuty g' i g'', wyznaczamy punkt G''_1, w którym rzut pionowy g'' przecina oś, oraz punkt G'_2, w którym rzut poziomy g' przecina oś; G''_1 jest wtedy rzutem pionowym śladu poziomego, sam zaś ślad poziomy G_1 otrzymamy w przecięciu prostopadłej w G''_1 do osi z g'; podobnież G'_2 jest rzutem pozio-

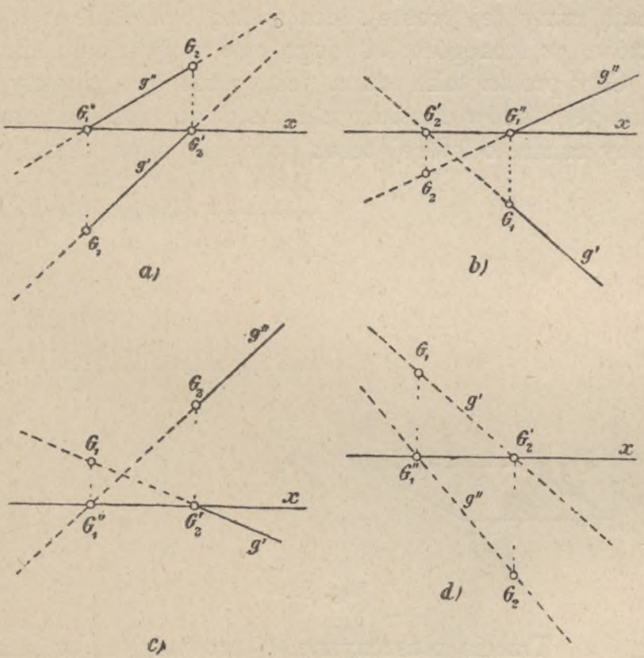


fig. 31.

mym śladu pionowego G_2, który otrzymamy w przecięciu prostopadłej w G'_2 do osi z g''. Gdy sobie wyobrazimy płaszczyzny rzutu w położeniu, wskazanem na fig. 28, to prosta g przedstawi nam się, jako łącząca punkty G_1 i G_2. Odcinek prostej, zawarty między jej śladami, znajdować się może w różnych ćwierciach przestrzeni; na fig. 31 pod a) odcinek ten leży w pierwszej ćwierci, pod b) — w czwartej, pod c) — w drugiej, pod d) — w trzeciej. (Przy kreśleniu wyobrażamy sobie zwykle, że jesteśmy w pierwszej ćwierci, oraz, że płaszczyzny rzutu

Część widzialna prostej.

są nieprzezroczyste, tak więc widzialnemi są dla nas tylko te części linij, które znajdują się w pierwszej ćwierci, pozostałe części są dla nas niewidzialne; części linij widzialne kreśli się zwykle linią ciągłą, niewidzialne — przerywaną).

Rzuty prostej, danej przez ślady

Gdy ślady G_1 i G_2 prostej są dane, to możemy z łatwością wykreślić rzuty tej prostej; znajdujemy w tym celu punkty G_1'' i G_2', prosta G_1G_2' jest wtedy rzutem poziomym prostej, a prosta G_2G_1'' — jej rzutem pionowym.

Prosta, prostopadła do osi.

35. Widzieliśmy (art. 33), że dla wyznaczenia prostej, leżącej w płaszczyznie prostopadłej do osi, nie wystarczają rzuty tej prostej, lecz muszą być dane rzuty dwóch jej punktów; w szczególności mogą być w tym celu dane ślady prostej. Gdy prosta taka dana jest przez dwa punkty, to dla znalezienia jej śladów musimy uciec się do trzeciej pomocniczej płaszczyzny rzutu, o której teraz powiemy słów kilka.

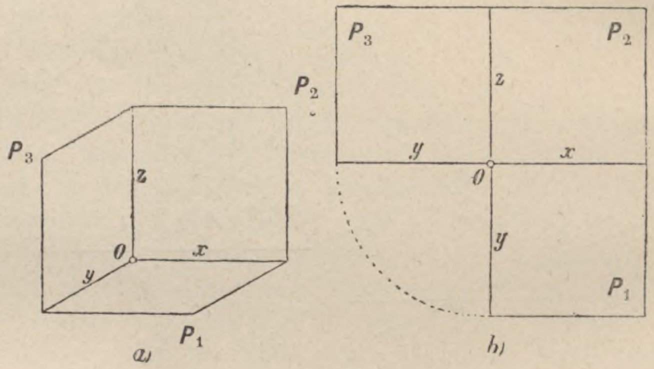


fig. 32.

Płaszczyzna rzutu bocznego.

Trzecią płaszczyznę P_3 prowadzimy prostopadle do osi x; płaszczyznę P_1 niech ona przetnie podług prostej y, a płaszczyznę P_2 — podług prostej z. Rzut na płaszczyznę P_3 nazywamy **rzutem bocznym**. Po wykonaniu rzutu bocznego kładziemy płaszczyznę P_3 na płaszczyznę P_2, obracając ją około osi z, a następnie obie kładziemy na płaszczyznę P_1, obracając je około osi x (p. fig. 32). Oznaczać będziemy rzut boczny punktu P przez P'''. Oczywiście odległość punktu P''' od y równa jest odległości punktu P od P_1, a więc także odległości punktu P'' od x; odległość zaś punktu P''' od z równa jest odległości punktu P od P_2, a więc także odległości punktu P' od x; wskutek tego, znając rzuty poziomy i pionowy punktu P, wykreślić możemy jego rzut boczny sposobem wskazanym na fig. 33.

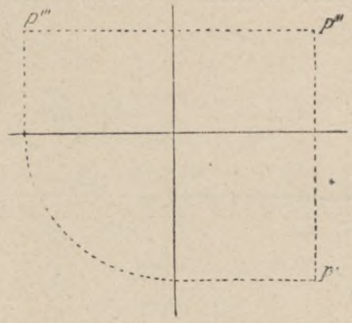


fig. 33.

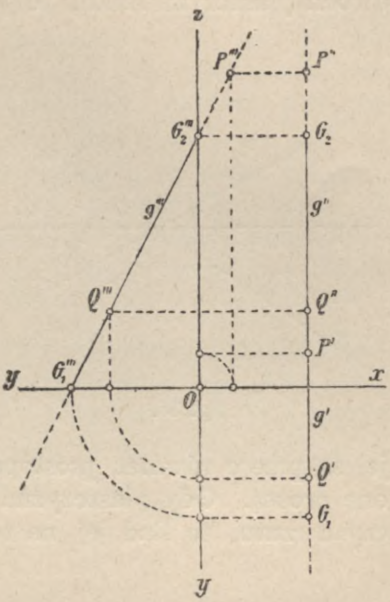


fig. 34.

Ślady prostej, prostopadłej do osi.

36. Niech prosta, prostopadła do osi rzutu x, dana będzie przez dwa punkty P i Q (fig. 34). Sposobem, podanym w artykule poprzednim, kreślimy rzuty boczne tych punktów: P''' i Q'''; prosta $P'''Q'''$ jest tedy rzutem bocznym prostej PQ. Znajdujemy rzuty boczne śladów tej prostej: G_1''' i G_2''', a z nich z łatwością otrzymujemy ślady G_1 i G_2, jak wskazuje figura. Pewne uproszczenie zaszłoby oczywiście w konstrukcyi, gdybyśmy za płaszczyznę P_3 przyjęli tę, która zawiera prostą PQ.

Ślady płaszczyzny.

37. Położenie płaszczyzny w przestrzeni wyznacza się przez proste, podług których ona przecina płaszczyzny rzutu; prosta przecięcia się płaszczyzny danej z płaszczyzną P_1 nazywa się jej śladem poziomym, a z płaszczyzną P_2 — śladem pionowym. Ślady płaszczyzny przecinają oczywiście oś rzutu w tym samym punkcie, w którym oś tę przecina sama płaszczyzna. Oznaczać będziemy ślady płaszczyzny A przez a_1, a_2, a punkt, w którym płaszczyzna, ta przecina oś, przez A albo A_x (por. fig. 35). Rozważmy, jakie położenia przyjmują ślady płaszczyzny, gdy ta ostatnia zajmuje pewne położenia szczególne.

Położenia szczególne płaszczyzny.

Gdy płaszczyzna prostopadła jest do jednej z płaszczyzn rzutu, to ślad jej na drugiej płaszczyznie prostopadły jest do osi; gdy płaszczyzna prostopadła jest do obydwóch płaszczyzn rzutu, to jest ona prostopadła i do osi, ślady

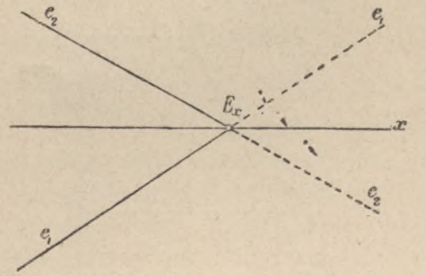


fig. 35.

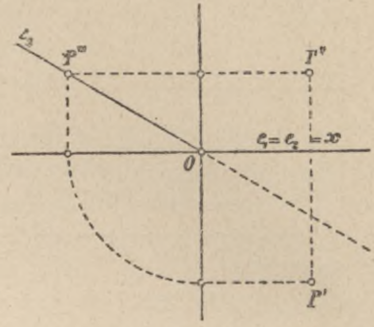


fig. 36.

jej są przeto również prostopadłe do osi i tworzą oczywiście jednę prostą. Gdy płaszczyzna równoległa jest do jednej z płaszczyzn rzutu, to ślad jej na tej płaszczyznie leży w nieskończo-

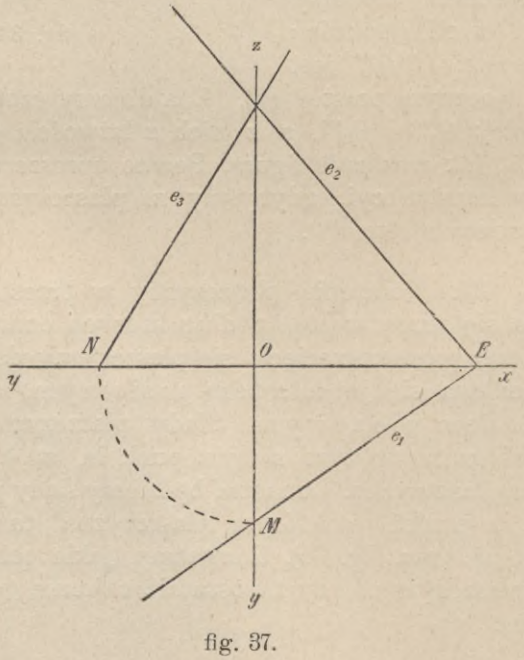


fig. 37.

ności, na drugiej zaś jest równoległy do osi rzutu. Gdy płaszczyzna równoległa jest do osi rzutu, nie będąc równoległą do żadnej z płaszczyzn rzutu, to obydwa ślady płaszczyzny są równoległe do osi rzutu.

Ślad boczny płaszczyzny. Jeżeli płaszczyzna przechodzi przez oś, to obydwa jej ślady schodzą się z osią i nie wyznaczają przeto płaszczyzny. W takim razie wyznacza się położenie płaszczyzny, dając jakiś punkt P, nie leżący na osi, przez który przechodzić ma płaszczyzna dana; dla uwidocznienia położenia płaszczyzny w tym przypadku, kreślimy ślad jej na płaszczyźnie P_3, t. zw. **ślad boczny**; ślad ten przechodzi oczywiście przez punkt O, w którym płaszczyzna P_3 przecina oś x, i przez rzut boczny P''' punktu P (fig. 36).

Nieraz potrzebny jest ślad boczny (e_3) płaszczyzny jakiejkolwiek, danej przez ślady poziomy (e_1) i pionowy (e_2). Aby otrzymać ślad boczny, uważamy, że e_3 i e_2 przecinają z w tym samym punkcie, zaś $OM = ON$; wskutek tego wykreślenie śladu e_3 odbywa się tak, jak wskazuje figura 37.

§ 2. Położenie wzajemne punktów, prostych i płaszczyzn; proste i płaszczyzny wzajemnie równoległe.

38. Dwie proste w przestrzeni mogą albo nie mieć żadnego punktu wspólnego (być skośnemi), albo przecinać się w punkcie w odległości skończonej, albo też być równoległemi (t. j. mieć punkt nieskończenie daleki wspólny). Zobaczmy, jak z rzutów dwóch prostych poznać można, który z tych przypadków ma miejsce. Załóżmy najprzód, że z prostych danych: g i h żadna nie leży w płaszczyźnie, prostopadłej do osi.

Proste, przecinające się. Jeżeli proste g i h przecinają się w punkcie P, to rzuty poziome g' i h' przecinają się w rzucie poziomym P', a rzuty pionowe g'' i h'' — w rzucie pionowym P'' punktu P; odwrotnie też, gdy punkt P' w którym przecinają się g' i h', oraz punkt P'', w którym przecinają się g'' i h'', leżą na jednej prostej, prostopadłej do osi x, to proste g i h przecinają się, a P' i P'' są rzutami punktu ich przecięcia się.

Proste równoległe.

Gdy proste g i h są wzajemnie równoległe, to równoległemi są oczywiście ich rzuty poziome g' i h', jakoteż ich rzuty pionowe g'' i h'' (art. **21**); odwrotnie też, gdy g' i g'' są równoległe odpowiednio do h' i h'', to płaszczyzny, rzucające proste g i h na każdą z płaszczyzn rzutu, są wzajemnie równoległe, proste g i h są przeto również wzajemnie równoległe.

Proste skośne.

Z powyższego wynika, że jeśli dwa rzuty jednoimienne dwóch prostych są równoległe, inne zaś dwa przecinają się, albo gdy obie pary rzutów jednoimiennych przecinają się, lecz punkty przecięcia się nie leżą na jednej prostopadłej do osi, to proste dane są skośne.

Równoległa do prostej danej przez punkt dany.

Aby przez punkt P poprowadzić prostą h, równoległą do danej prostej g, uważamy, że rzuty prostej h muszą przechodzić przez odpowiednie rzuty punktu P i być równoległemi do odpowiednich rzutów prostej g; prowadzimy zatem h' przez P' równolegle do g' i h'' przez P'' równolegle do g''.

Przypadki szczególne.

39. W artykule poprzednim założyliśmy, że obie proste g i h są nachylone względem osi rzutu. Gdy warunek ten nie jest spełniony, to otrzymane tam kryterya bezpośrednio nie dają się zastosować, posiłkujemy się wówczas rzutem bocznym.

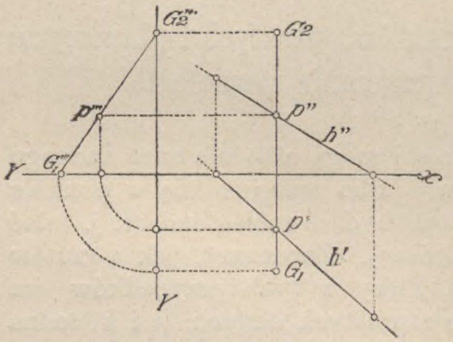


fig. 38.

Niech jedna z prostych, np. prosta g, ma kierunek prostopadły do osi i dana będzie przez ślady G_1 i G_2, druga — prosta h — niech będzie nachylona do osi (fig. 38); w tym przypadku proste mogą się albo przecinać, albo być skośnemi; jeżeli przecinają się, to punktem przecięcia się może być tylko punkt P, w którym prosta h przecina płaszczyznę, prostopadłą do osi x i przechodzącą przez prostą g. Punkt zaś P leży na prostej g, lub nie leży na niej, stosownie do tego, czy rzut boczny P''' punktu P leży lub nie leży na rzucie bocznym $G_1'''G_2'''$ prostej g.

Niech obie proste leżą w jednej płaszczyźnie, prostopadłej do osi rzutu x, i dane będą przez ślady G_1, G_2, odp. H_1, H_2; mogą one być równoległe, lub przecinać się. Obieramy płaszczyznę prostych g i h za płaszczyznę rzutu bocznego i kreślimy rzuty boczne tych prostych; jeżeli rzuty te okażą się równoległemi, to proste dane są równoległe; jeżeli zaś rzuty boczne prostych g i h przecinają się w punkcie P''' (fig. 39), to proste te przecinają się w punkcie odpowiednim P, którego rzuty P' i P'' wykreślają się przy pomocy rzutu P''' sposobem wiadomym.

Gdy wreszcie proste g i h leżą w dwóch różnych płaszczyznach, prostopadłych do osi rzutu, to mogą one być równoległemi lub skośnemi; kreślimy znowu rzuty boczne prostych g i h na jednę płaszczyznę P_3; gdy rzuty te są równoległe, to są niemi również proste g i h, gdy zaś rzuty g''' i h''' przecinają się, to proste g i h są skośne.

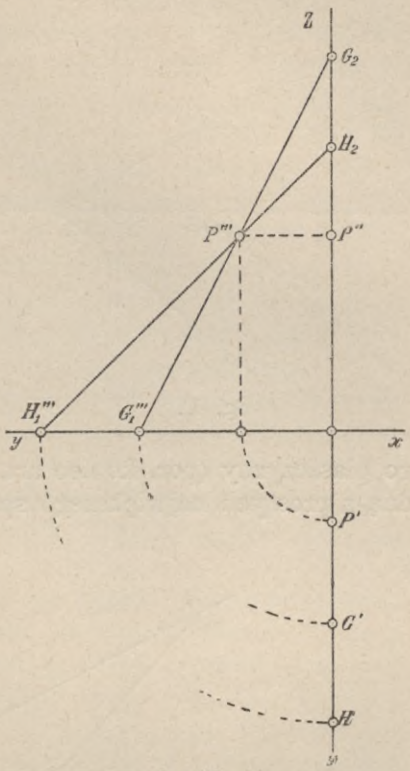


fig. 39.

Prosta na płaszczyznie.

40. Gdy prosta leży na płaszczyznie, to ślady prostej muszą leżeć na śladach jednoimiennych płaszczyzny, i odwrotnie: prosta, której ślady leżą na jednoimiennych śladach płaszczyzny, leży cała na tej płaszczynie. Twierdzenia te są same przez się oczywiste.

Proste poziome i proste największego spadku.

Z pośród prostych, leżących na płaszczyznie, szczególnie ważne są dwie klasy prostych: proste, równoległe do płaszczyzny poziomej rzutu, nazywać je będziemy prostemi poziomemi płaszczyzny danej, — oraz proste, do poprzednich prostopadłe, — nazywać je będziemy prostemi największego spadku (proste ostatniej kategoryi mają największy kąt nachylenia względem plaszczyzny poziomej rzutu)

Linia pozioma jest oczywiście równoległa do śladu poziomego płaszczyzny, jej rzut poziomy jest przeto równoległy do tegoż śladu, a rzut pionowy jest równoległy do osi rzutu; ślad pionowy

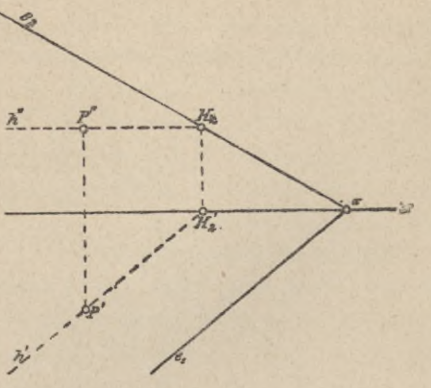


fig. 40.

leży naturalnie na śladzie pionowym płaszczyzny. Na fig. 40 prosta h jest jedną z linij poziomych płaszczyzny E.

Ponieważ prosta największego spadku jest prostopadła do śladu poziomego płaszczyzny, przeto płaszczyzna, rzucająca tę prostą na płaszczyznę poziomą rzutu, jest prostopadła do tegoż śladu, skąd wynika, że rzut poziomy prostej największego spadku jest prostopadły do śladu poziomego płaszczyzny (por. koniec art. 22). Na fig. 41 prosta h jest jedną z prostych największego spadku płaszczyzny E.

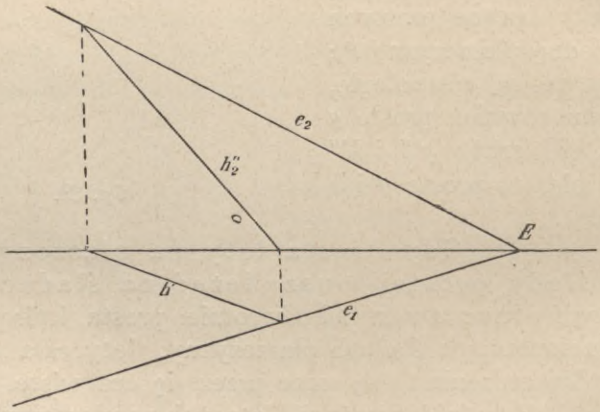


fig. 41.

Punkt na płaszczyznie

Kryteryum, któreby wprost z rysunku dało poznać, czy punkt dany leży na danej płaszczyznie, czy też nie, nie istnieje; by to rozstrzygnąć, prowadzimy przez punkt dany prostą h (fig. 40), równoległą do śladu poziomego płaszczyzny danej; jeżeli punkt P leży na płaszczyznie, to i prosta h musi na niej leżeć, co poznajemy z tego, że wówczas ślad H_2 tej prostej leży na śladzie pionowym e_2 płaszczyzny.

Figura na płaszczyznie danej.

41. Gdy dane są ślady płaszczyzny, oraz jeden rzut, np. poziomy, punktu leżącego na niej, to z łatwością wykreślamy rzut jego pionowy, jak wskazuje figura 40; również wykreślić możemy rzut pionowy prostej, leżącej na płaszczyznie, danej przez ślady, gdy znamy jej rzut poziomy. Dla wyznaczenia zatem jakiejkolwiek figury płaskiej wystarczy znać jeden jej rzut oraz ślady jej płaszczyzny, drugi rzut możemy wtedy z tych danych wykreślić; nie będziemy wszakże dla każdego punktu oddzielnie kreślić wskazanym sposobem jego rzutu drugiego; wystarczy bowiem wykreślić rzut drugi dla jednego tylko punktu, rzuty wszystkich pozostałych punktów znajdujemy wtedy z łatwością na zasadzie twierdzenia następującego:

Rzuty poziomy i pionowy figury płaskiej są w kolineacyi równoległej; promienie kolineacyi są prostopadłe do osi rzutu, a osią kolineacyi jest prosta, będąca podwójnym (zarazem poziomym i pionowym) rzutem prostej przecięcia się płaszczyny figury z płaszczyzną dwusieczną H_2.

Kolineacya obydwóch rzutów figury płaskiej.

W istocie, uważając za punkty odpowiadające sobie rzuty jednego punktu (a więc za proste odpowiadające sobie rzuty jednej prostej), widzimy najprzód, że każde dwa punkty, odpowiadające sobie, leżą na jednej prostopadłej do osi rzutu; następnie; nazwijmy prostą przecięcia się płaszczyzny figury z płaszczyzną dwusieczną H_2 przez h; obydwa rzuty tej prostej schodzą się w jednej prostej h_1. Niech pewna prosta g w płaszczyznie figury przecina prostą h w punkcie A; rzuty punktu A leżą tedy jednocześnie na prostej h_1 i na obydwóch rzutach prostej g, czyli: proste g', g'' i h_1 przecinają się w jednym punkcie; stąd wynika, że wszystkie pary prostych, odpowiadających sobie, przecinają się na prostej h_1, która jest tedy osią kolineacyi.

Wykreśliwszy drugi rzut jednego punktu figury, łączymy punkt przecięcia obydwóch rzutów prostej pomocniczej, użytej do tego wykreślenia, z punktem przecięcia się śladów płaszczyzny danej, i otrzymujemy w ten sposób oś kolineacyi; rzuty pozostałych punktów figury wykreślamy następnie podług metody, wyłożonej w art. **23** z tą modyfikacyą, że środek kolineacyi jest obecnie w nieskończoności, w kierunku prostopadłym do osi rzutu.

Ślady płaszczyzny, wyznaczonej w sposób rozmaity.

42. Położenie płaszczyzny może być w zupełności wyznaczone bez pomocy śladów, np. przez dwie proste, przecinające się lub równoległe, przez prostą i punkt, nie leżący na niej, albo przez trzy punkty, nie leżące na jednej prostej. W każdym z tych przypadków ślady płaszczyzny dają się z łatwością wyznaczyć.

Gdy dane są dwie przecinające się (fig. 42) lub równoległe (fig. 43) proste g i h, to ślad pionowy przechodzącej przez nie płaszczyzny łączy ich ślady pionowe, ślad poziomy płaszczyzny łączy ślady poziome prostych.

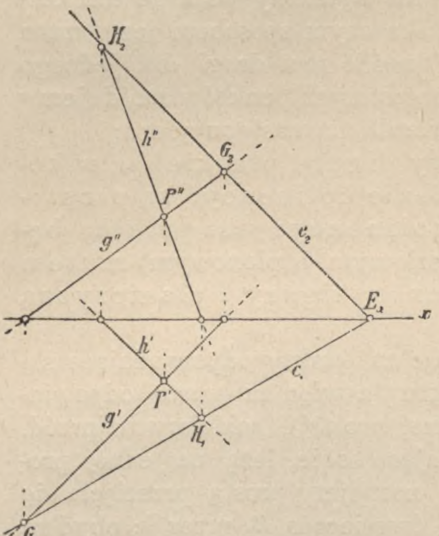


fig. 42.

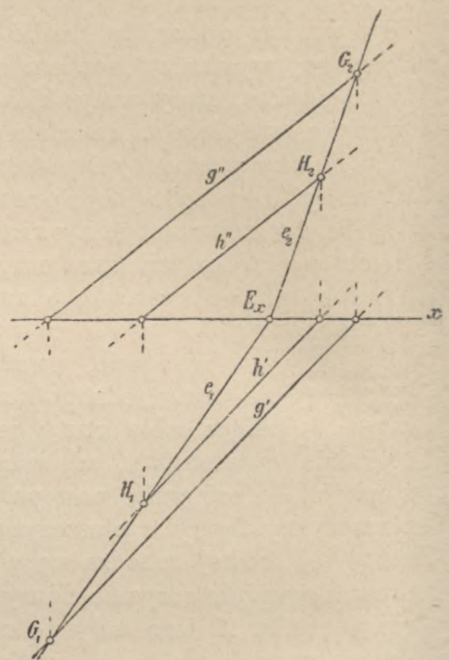


fig. 43.

W niektórych przypadkach uciec się musimy do konstrukcyj pomocniczych, np. gdy wszystkie lub niektóre ślady prostych g i h leżą po za obrębem rysunku; w takim razie prowadzimy jakiekolwiek dwie proste i i k (fig. 44), przecinające się wzajemnie i przecinające obie proste g i h, bacząc przytem, aby ślady prostych i i k nie leżały zbyt daleko; oczywiście, płaszczyzna, wyznaczona przez proste g i h, zawiera również proste i i k, otrzymujemy przeto ślady płaszczyzny szukanej, łącząc prostemi ślady jednoimienne prostych i i k.

Gdy obie proste g i h przecinają oś rzutu w jednym punkcie E_x (fig. 45), to prowadzimy dowolną prostą i, przecinającą obie proste dane; płaszczyzna, wyznaczona przez proste g i h, przechodzi oczywiście przez punkt E_x i zawiera prostą i; otrzymujemy przeto ślady tej płaszczyzny, łącząc punkt E_x ze śladami prostej i.

Dla otrzymania śladów płaszczyzny, wyznaczonej przez punkt i prostą, łączymy punkt dany z jakimkolwiek punktem prostej danej i sprowadzamy przypadek ten do przypadku dwóch prostych przecinających się; do tegoż samego sprowadzamy przypadek trzech punktów, łącząc jeden z nich z dwoma innemi.

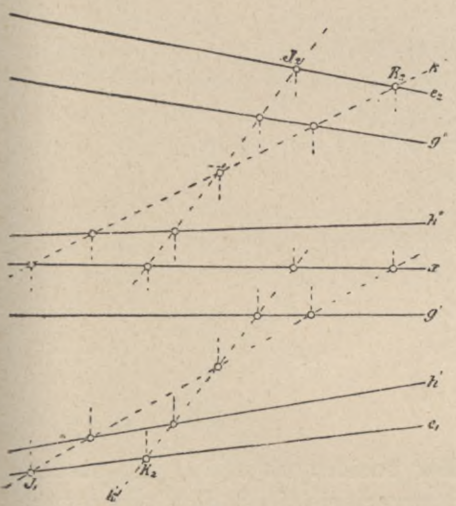


fig. 44.

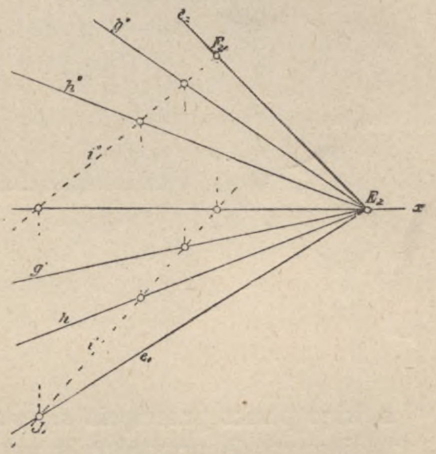


fig. 45.

Płaszczyzny równoległe.

43. Dwie płaszczyzny równoległe przecinają trzecią dowolną płaszczyznę podług prostych równoległych, w szczególności przeto ślady jednoimienne dwóch płaszczyzn równoległych są równoległe.

Aby zatem przez dany punkt P poprowadzić płaszczyznę, równoległą do płaszczyzny K, danej przez ślady k_1 i k_2 (fig. 46), prowadzimy przez P prostą l, równoległą do śladu poziomego k_1; prosta ta leży oczywiście na płaszczyznie szukanej, a więc ślad pionowy e_2 płaszczyzny szukanej prowadzimy przez ślad pionowy prostej l równolegle do k_2, a ślad

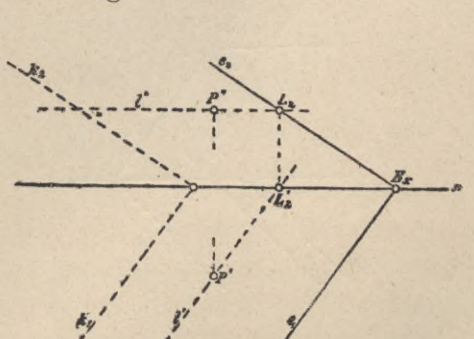


fig. 46.

poziomy e_1 prowadzimy z punktu E_x, w którym e_2 przecina oś rzutu, równolegle do k_1.

Prosta przecięcia się dwóch płaszczyzn.

44. Wykreślić prostą przecięcia się dwóch płaszczyzn danych. Niech dane będą płaszczyzny **A** i **B** przez ślady. Każdy ślad prostej przecięcia g leżeć musi na obydwóch jednoimiennych śladach płaszczyzn danych (art. **40**),

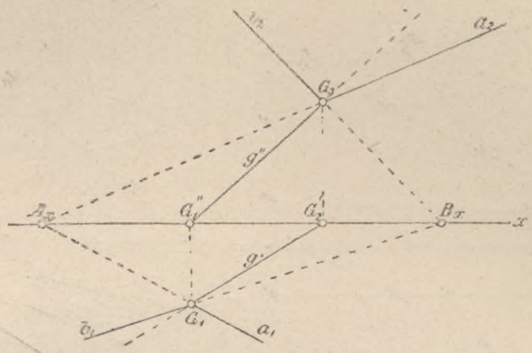


fig. 47.

a więc punkt przecięcia się śladów poziomych a_1 i b_1 jest śladem poziomym G_1 prostej g, a punkt przecięcia się śladów pionowych a_2 i b_2 — śladem pionowym G_2 tej prostej (fig. 47); mając zaś ślady prostej g, z łatwością wykreślić możemy jej rzuty (art. **34**).

fig. 48.

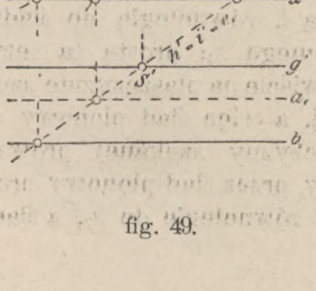


fig. 49.

Przypadki szczególne. Gdy dwa ślady jednoimienne płaszczyzn danych, np. ślady ich poziome, są równoległe, to prosta szukana jest do tych śladów równoległa, jej rzut poziomy jest więc równoległy do śladów poziomych płaszczyzn, a jej rzut pionowy jest równoległy do osi (fig. 48).

Gdy obie płaszczyzny dane są równoległe do osi rzutu, to prosta ich przecięcia się jest również równoległa do osi, dla jej wyznaczenia wystarcza przeto znaleść jeden jej punkt; w tym celu przecinamy obie płaszczyzny dowolną trzecią płaszczyzną, najdogodniej — prostopadłą do jednej z płaszczyzn rzutu np. do P_1 (fig. 49); niech ta płaszczyzna przetnie płaszczyzny dane podług prostych h i i, wtedy punkt przecięcia się tych prostych leży oczywiście na prostej szukanej.

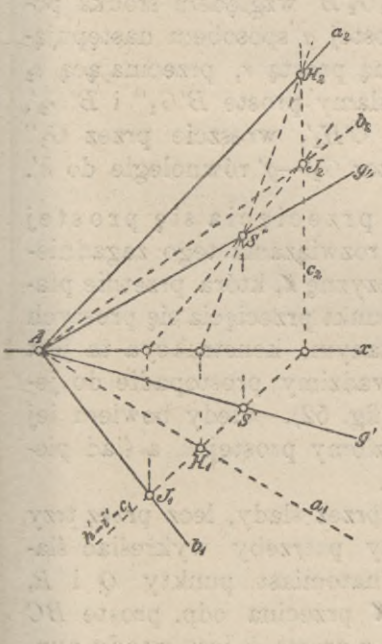


fig. 50.

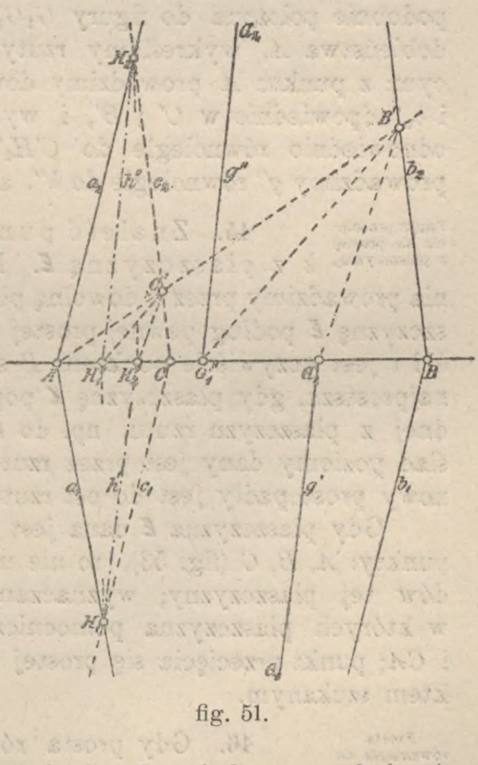


fig. 51.

Gdy płaszczyzny dane przecinają oś w jednym punkcie A, to prosta g ich przecięcia się przechodzi przez ten punkt, a więc i obydwa jej rzuty przechodzą przez punkt A; dla znalezienia jeszcze jednego punktu prostej g, prowadzimy dowolną płaszczyznę, np. prostopadłą do P_1 (fig. 50), przecinającą płaszczyzny dane podług prostych h i i; punkt przecięcia się tych prostych S należy oczywiście do prostej g, AS' jest zatem rzutem poziomym g', a AS'' — rzutem pionowym g'' prostej g.

Może się zdarzyć, że ślady jednoimienne dwóch płaszczyzn danych A i B przecinają się po za obrębem rysunku; dla wykreślenia prostej ich przecięcia się nie możemy wtedy bezpośrednio zastosować wyłożonej w tym artykule konstrukcyi, lecz musimy użyć konstrukcyi pomocniczej. Prowadzimy mianowicie dowolną płaszczyznę C, równoległą do płaszczyzny B, tak, aby jej ślady przecinały ślady jednoimienne płaszczyzny A w granicach rysunku (fig. 51), i wykreślamy rzuty prostej h, podług której przecinają się płaszczyzny A i C; oczywiście prosta szukana g jest równoległa do prostej h; zauważywszy, że figura $H_1H_1''H_2H_2'C$ jest podobnie położona do figury $G_1G_1''G_2G_2'B$ względem środka podobieństwa A, wykreślamy rzuty prostej g sposobem następującym: z punktu A prowadzimy dowolną prostą r, przecinającą c_2 i b_2 odpowiednio w C' i B', i wykreślamy proste $B'G_1''$ i $B'G_2'$, odpowiednio równolegle do $C'H_1''$ i $C'H_2'$, wreszcie przez G_1'' prowadzimy g'' równolegle do h'', a przez G_2'—g' równolegle do h'.

Punkt przecięcia się prostej z płaszczyzną. **45.** Znaleść punkt przecięcia się prostej k z płaszczyzną E. Dla rozwiązania tego zagadnienia prowadzimy przez k dowolną płaszczyznę K, która przetnie płaszczyznę E podług pewnej prostej i; punkt przecięcia się prostych k i i jest oczywiście punktem P szukanym; konstrukcya ta jest najprostsza, gdy płaszczyznę K poprowadzimy prostopadle do jednej z płaszczyzn rzutu, np. do P_1 (fig. 52), wtedy bowiem jej ślad poziomy dany jest przez rzut poziomy prostej k, a ślad pionowy prostopadły jest do osi rzutu x.

Gdy płaszczyzna E dana jest nie przez ślady, lecz przez trzy punkty: A, B, C (fig. 53), to nie mamy potrzeby wykreślać śladów tej płaszczyzny; wyznaczamy natomiast punkty Q i R, w których płaszczyzna pomocnicza K przecina odp. proste BC i CA; punkt przecięcia się prostej QR z prostą k jest wtedy punktem szukanym.

Prosta równoległa do płaszczyzny. **46.** Gdy prosta równoległa jest do płaszczyzny, to z rzutów prostej i śladów płaszczyzny bezpośrednio tego poznać nie można; możemy to rozstrzygnąć, np. prowadząc prostą dowolną, którąby leżała na płaszczyznie danej i miała rzut poziomy równoległy do rzutu poziomego prostej danej; gdy rzuty

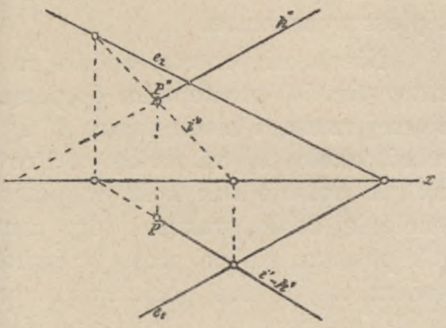


fig. 52.

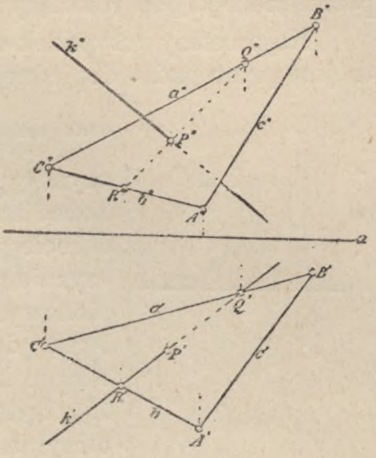


fig. 53.

pionowe obydwóch prostych okażą się również równoległemi, to prosta dana równoległa jest do płaszczyzny danej; albo też, przez prostą daną prowadzimy płaszczyznę dowolną, mającą ślad poziomy równoległy do śladu poziomego płaszczyzny danej; jeżeli ślady pionowe płaszczyzn okażą się również równoległemi, to prosta dana równoległa jest do płaszczyzny danej.

§ 3. Mierzenie odległości i kątów; proste i płaszczyzny wzajemnie prostopadłe.

47. Rzuty odcinków i kątów mają w ogólności wielkość inną, niż odcinki i kąty same; chcąc zatem znaleść wielkość istotną odcinka lub kąta w figurze jakiejś, należy figurze tej nadać specyalne położenie takie, aby odcinek odp. płaszczyzna kąta, których wielkość poznać chcemy, były równoległe do jednej z płaszczyzn rzutu, wtedy bowiem w rzucie prostopadłym odcinki i kąty zachowują swą wielkość istotną. Dla zmiany położenia figur używać będziemy dwóch metod: metody obrotu około prostej i metody kładu pewnych płaszczyzn na płaszczyznę rzutu; druga z tych metod jest zresztą przypadkiem szczególnym pierwszej; metody te rozwijać będziemy w miarę tego, jak nam potrzebne będą do rozwiązywania zagadnień zasadniczych *).

Najprostszy przypadek obrotu mamy wówczas, gdy oś obrotu jest prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutu.

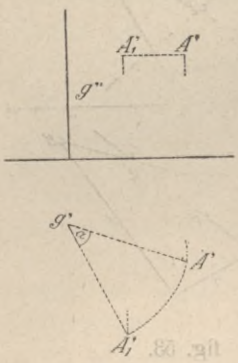


fig. 54.

Obrót punktu. Niech osią obrotu będzie prosta g (fig. 54) prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutu, i niech punkt A wykonać ma obrót około tej osi na kąt α. Przy obrocie punkt A opisuje łuk koła w płaszczyznie równoległej do P_1, wskutek tego rzut pionowy A'' posuwa się po prostej równoległej do osi rzutu, a rzut poziomy A' po okręgu koła ze środkiem w g'; rzuty punktu A_1, będącego nowem położeniem punktu A, otrzymamy przeto, jak wskazuje figura.

Obrót prostej. Aby wykonać obrót prostej jakiejkolwiek około prostej, prostopadłej do płaszczyzny rzutu, kreślimy rzuty dwóch jej punktów po obrocie; za jeden z tych punktów dogodnie jest wziąć ślad prostej, leżący w płaszczyznie, do której oś obrotu jest prostopadła; ślad ten bowiem pozostaje w płaszczyznie rzutu.

Obrót płaszczyzny. Niech trzeba będzie obrócić płaszczyznę E na kąt α około prostej g, prostopadłej do płaszczyzny P_1 (fig. 55). Oznaczmy przez G punkt przecięcia się płaszczyzny E z prostą g; łatwo możemy wykreślić prostą poziomą l płaszczyzny E, przechodzącą przez G; po obrocie prosta l pozostanie poziomą; jej nowe położenie l_1 możemy z łatwością wykreślić; następnie wykreślamy ślady płaszczyzny po obrocie, zauważywszy, że ślad poziomy płaszczyzny zachowuje swą odległość od rzutu poziomego prostej l i pozostaje do tego rzutu równoległy, a ślad pionowy płaszczyzny przechodzi przez ślad pionowy prostej l_1.

*) Istnieje jeszcze metoda zmiany płaszczyzn rzutu, służąca do tegoż celu; metoda ta polega na tem, że zamiast płaszczyzn rzutu, względem których są dane rzuty figury, obieramy dwie inne wzajemnie prostopadłe płaszczyzny rzutu, względem których położenie figury byłoby dogodniejsze, poczem z rzutów figury względem płaszczyzn pierwotnych wykreślamy jej rzuty względem płaszczyzn nowych. Po wykonaniu zaś konstrukcyi względem płaszczyzn zmienionych przenosimy rezultaty tak, aby odpowiadały położeniu danemu płaszczyzn rzutu.

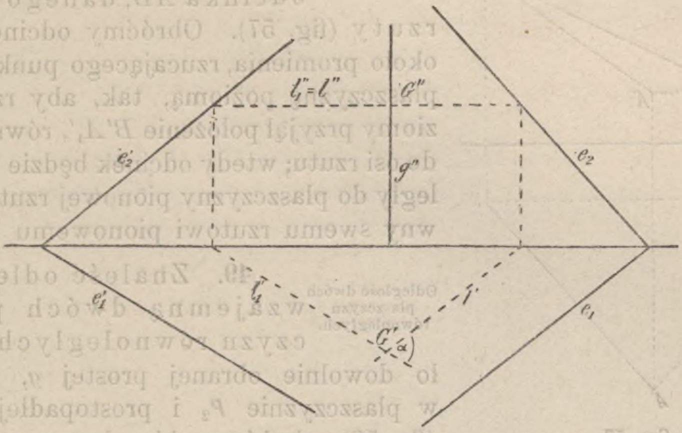


fig. 55.

Wykreślenie jest znacznie prostsze, gdy oś obrotu g leży w płaszczyznie pionowej rzutu (fig. 56); obracamy wtedy ślad poziomy płaszczyzny około śladu poziomego prostej g na kąt α, punkt zaś przecięcia się śladu pionowego płaszczyzny z prostą g jest nieruchomy

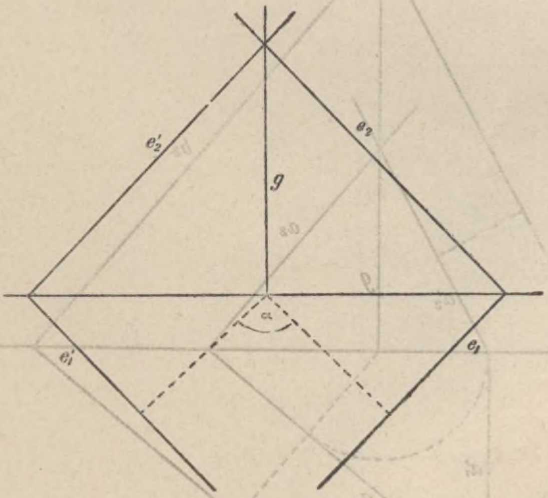


fig. 56.

Zastosujemy teraz ten szczególny przypadek obrotu do rozwiązania niektórych zagadnień.

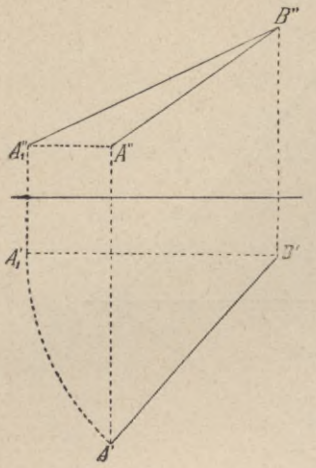


fig. 57.

Długość odcinka.

48. Znaleść długość odcinka AB, danego przez rzuty (fig. 57). Obróćmy odcinek AB około promienia, rzucającego punkt B na płaszczyznę poziomą, tak, aby rzut poziomy przyjął położenie $B'A_1'$, równoległe do osi rzutu; wtedy odcinek będzie równoległy do płaszczyzny pionowej rzutu i równy swemu rzutowi pionowemu $A_1''B''$.

Odległość dwóch płaszczyzn równoległych.

49. Znaleść odległość wzajemną dwóch płaszczyzn równoległych. Około dowolnie obranej prostej g, leżącej w płaszczyznie P_2 i prostopadłej do P_1 (fig. 58), obróćmy obie płaszczyzny tak, aby stały się prostopadłemi do płaszczyzny P_2, wtedy odległość d między ich śladami pionowemi będzie odległością żądaną.

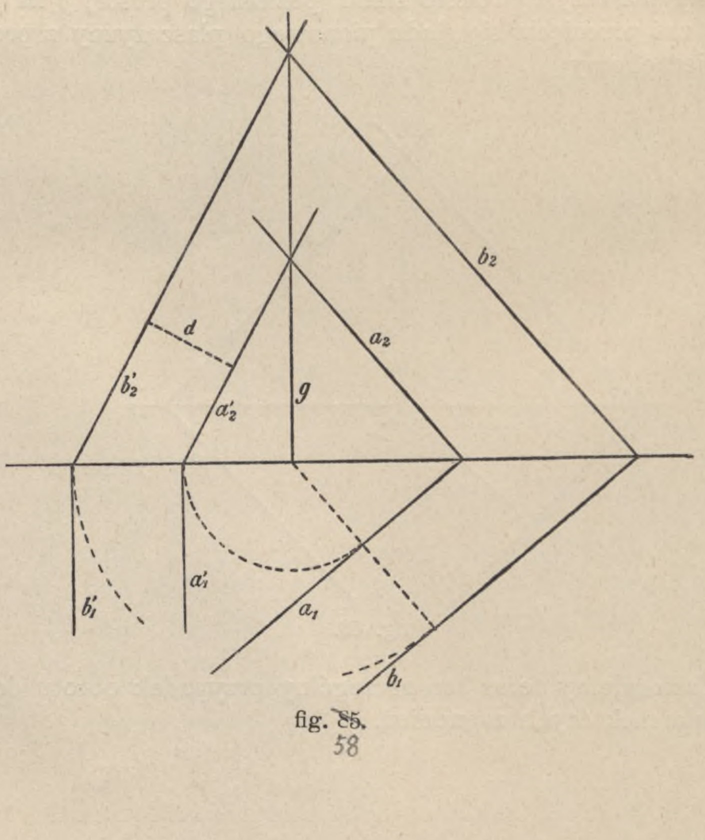


fig. 58.

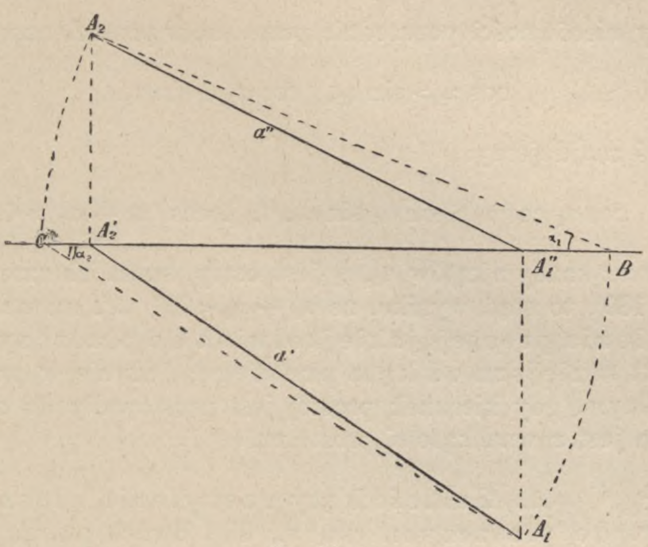


fig. 59.

Nachylenie prostej do płaszczyzn rzutu.

50. Wykreślić kąty nachylenia prostej danej do płaszczyzn rzutu. Kątem nachylenia prostej do płaszczyzny nazywamy kąt, zawarty między prostą i jej rzutem prostopadłym na płaszczyznę; kąt ten zachowuje swą wielkość, gdy prostą daną obracamy około prostej, prostopadłej do płaszczyzny danej.

Chcąc zatem znaleść kąt nachylenia α_1 prostej a (fig. 59) do płaszczyzny P_1, obróćmy ją około prostej A_2A_2' tak, aby zajęła położenie A_2B w płaszczyznie P_2; jej rzut poziomy będzie wówczas na osi, a więc kąt A_2BA_2' będzie szukanym kątem α_1; w podobnyż sposób przez obrót około A_1A_1'' znajdujemy kąt A_1CA_1'', równy kątowi nachylenia α_2 prostej a do płaszczyzny pionowej rzutu.

Na podstawie powyższego wykreślenia okazać możemy, że kąty α_1 i α_2 czynią zawsze zadość pewnemu warunkowi. Mamy bowiem:

$$A_2'B \,(= A_2'A_1) > A_1A_1''$$

$$A_1''C \,(= A_1''A_2) > A_2A_2';$$

zauważywszy, że odcinki A_2B i A_1C równe są długości l odcinka prostej a, zawartego między śladami, oraz że:

$$A_2'B = l \cos \alpha_1, \quad A_1''C = l \cos \alpha_2, \quad A_2A_2' = l \sin \alpha_1, \quad A_1A_1'' = l \sin \alpha_2,$$

możemy nierówności poprzednie przepisać w postaci następującej:

$$\cos \alpha_1 > \sin \alpha_2, \quad \cos \alpha_2 > \sin \alpha_1,$$

stąd zaś znajdujemy:

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 > \sin \alpha_1 \sin \alpha_2, \text{ t. j. } \cos (\alpha_1 + \alpha_2) > 0,$$

a ponieważ każdy z kątów α_1, α_2 jest ostry, suma ich zatem mniejsza od 180°, to stąd wynika, że $\alpha_1 + \alpha_2 < 90°$, t. j. suma kątów nachylenia prostej jakiejkolwiek do płaszczyzn rzutu jest mniejsza od kąta prostego; jedynie w przypadku szczególnym, gdy kierunek prostej jest prostopadły do osi rzutu, suma ta jest równa kątowi prostemu.

Nachylenie płaszczyzny do płaszczyzn rzutu.

51. Znaleść kąty nachylenia płaszczyzny do płaszczyzn rzutu. Kąt dwóch płaszczyzn mierzymy przez kąt płaski, jaki otrzymujemy, przecinając ściany kąta dwuściennego płaszczyzną prostopadłą do jego krawędzi; kąt ten nie zmienia swej wielkości, gdy jednę z płaszczyzn obracamy około prostej, prostopadłej do drugiej płaszczyzny.

Aby znaleść kąt nachylenia ε_1 płaszczyzny, danej przez ślady, do płaszczyzny P_1, obracamy płaszczyznę daną około dowolnie obranej prostej, leżącej w płaszczyźnie P_2 i prostopadłej do P_1, tak, aby jej ślad poziomy stał się prostopadłym do osi rzutu; wtedy kąt, zawarty między śladem pionowym i osią rzutu, będzie równy kątowi ε_1; podobnież znaleść możemy kąt nachylenia ε_2 płaszczyzny danej do płaszczyzny P_2.

Kąty ε_1 i ε_2 czynią również zadość pewnemu warunkowi. Aby go wykryć, zauważmy, że gdy dwie płaszczyzny tworzą pomiędzy sobą kąt ε, to prosta, prostopadła do jednej z nich, jest nachylona do drugiej pod kątem $90°-\varepsilon$. Jeżeli tedy oznaczymy przez α_1, α_2 kąty nachylenia prostej, prostopadłej do płaszczyzny danej, do płaszczyzn rzutu, a przez ε_1, ε_2 kąty nachylenia tej płaszczyzny do płaszczyzn rzutu, to mieć będziemy:

$$\varepsilon_1 = 90°-\alpha_1, \quad \varepsilon_2 = 90°-\alpha_2,$$

a więc:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 180° - (\alpha_1 + \alpha_2),$$

ponieważ zaś (art. **50**) jest: $\alpha_1 + \alpha_2 < 90°$, przeto $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 90°$, t. j. suma kątów nachylenia płaszczyzny jakiejkolwiek do płaszczyzn rzutu jest większa od kąta prostego; w szczególnym tylko przypadku, gdy płaszczyzna równoległa jest do osi rzutu, suma powyższa jest równa kątowi prostemu.

Prosta, prostopadła do płaszczyzny.

52. **Gdy prosta jest prostopadła do płaszczyzny, to rzuty prostej są prostopadłe do śladów jednoimiennych płaszczyzny.**

Niech prosta g będzie prostopadła do płaszczyzny E; jest ona wtedy prostopadła do każdej prostej na E, a więc w szczególności do śladów tej płaszczyzny; ślad poziomy e_1, będąc prostopadłym do prostej g i do promieni, rzucających punkty prostej g na płaszczyznę P_1, jest wskutek tego prostopadły do płaszczyzny, rzucającej prostą g na płaszczyznę poziomą rzutu, a więc i do rzutu poziomego g', który leży w tej płaszczyźnie rzucającej; podobnież okazać można, że rzut pionowy g'' prostej jest prostopadły do śladu pionowego e_2 płaszczyzny (por. koniec art. 22).

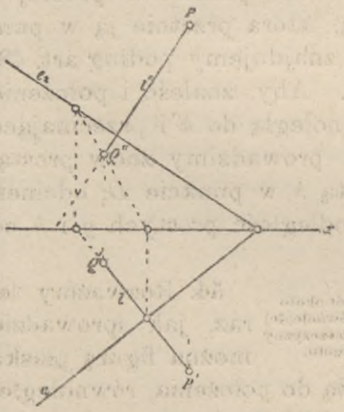


fig. 60.

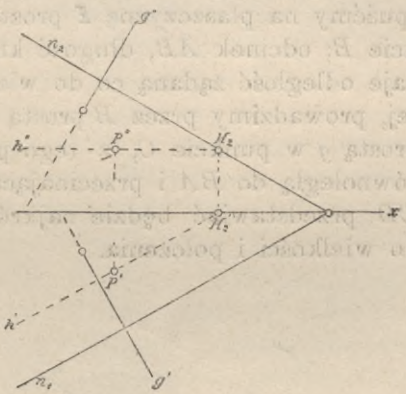


fig. 61.

Prostopadła z punktu na płaszczyznę.

Chcąc zatem z punktu P spuścić prostopadłą na płaszczyznę E (fig. 60), prowadzimy przez P' prostopadłą i' do śladu e_1, a przez P'' — prostopadłą i'' do śladu e_2, wtedy i' i i'' są rzutami prostopadłej szukanej, a punkt Q, w którym ona przecina płaszczyznę E, jej spodkiem. Wykreślając długość odcinka PQ (art. 48), mieć będziemy odległość punktu P od płaszczyzny E.

Dla wykreślenia śladów płaszczyzny, prostopadłej do prostej danej g i przechodzącej przez punkt P dany, spostrzegamy, że ponieważ znamy kierunki śladów płaszczyzny, to wystarczy znaleść jeden punkt jednego ze śladów; w tym celu najlepiej jest przez P poprowadzić linię poziomą h płaszczyzny szukanej (fig. 61); ślad pionowy płaszczyzny musi wtedy przejść przez ślad pionowy prostej h. Wykreślając punkt Q, w którym tak wyznaczona płaszczyzna przecina prostą g, i wyznaczając długość odcinka PQ, mieć będziemy odległość punktu P od prostej g. (W art. 54 podamy inny sposób wyznaczenia odległości punktu od prostej).

Najkrótsza odległość prostych skośnych.

53. Odległość najkrótsza dwóch prostych skośnych mierzy się odległością punktów przecięcia się tych prostych z prostą, prostopadłą do nich obydwóch; rozumiemy też niekiedy pod odległością najkrótszą dwóch prostych skośnych odcinek pomiędzy owemi punktami przecięcia się, nie tylko pod względem długości, lecz i pod względem położenia.

Gdy dane są proste g i h skośne, to dla znalezienia ich odległości najkrótszej prowadzimy przez dowolny punkt prostej g prostą k, równoległą do h; proste g i k wyznaczają płaszczyznę $\boldsymbol{E}$, równoległą do prostej h. Z jakiegokolwiek punktu A prostej h spuśćmy na płaszczyznę $\boldsymbol{E}$ prostopadłą, która przetnie ją w punkcie B; odcinek AB, długość którego znajdujemy podług art. 48, daje odległość żądaną co do wielkości. Aby znaleść i położenie jej, prowadzimy przez B prostą l, równoległą do k i przecinającą prostą g w punkcie C, z tego punktu prowadzimy znów prostą, równoległą do BA i przecinającą prostą h w punkcie D; odcinek CD przedstawiać będzie najkrótszą odległość prostych g i h co do wielkości i położenia.

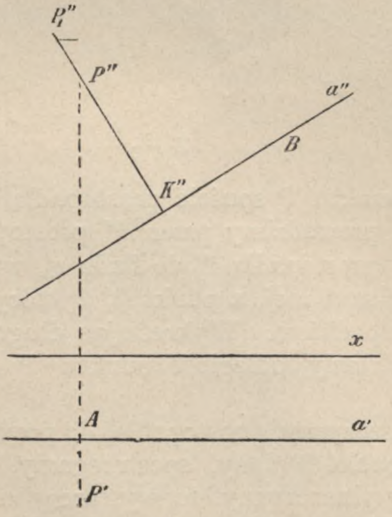


fig. 62.

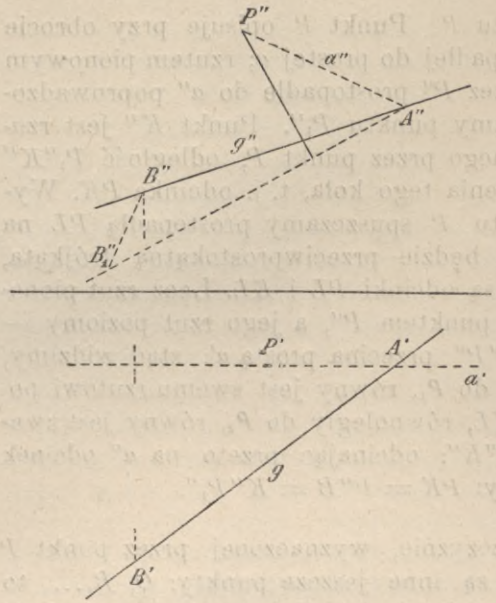
Obrót około osi równoległej do płaszczyzny rzutu.

54. Rozważmy teraz, jak sprowadzić można figurę płaską daną do położenia, równoległego do jednej z płaszczyzn rzutu, przez obrót około prostej, równoległej do tej płaszczyzny.

Niech dany będzie punkt P (fig. 62), oraz prosta a, równoległa do $\boldsymbol{P}_2$; około a mamy obrócić punkt P tak, aby znalazł się on w płaszczyźnie $\boldsymbol{A}$, przez a równolegle do $\boldsymbol{P}_2$ poprowadzonej. Ponieważ rzut poziomy punktu P po obrocie leżeć będzie na a', to mamy tylko znaleść rzut pionowy nowego położenia P_1 punktu P Punkt P opisuje przy obrocie koło w płaszczyznie prostopadłej do prostej a; rzutem pionowym tego koła będzie prosta, przez P'' prostopadle do a'' poprowadzona, na niej więc szukać mamy punktu P_1''. Punkt K'' jest rzutem środka K koła, opisanego przez punkt P, odległość $P_1''K''$ przedstawia wielkość promienia tego koła, t. j. odcinka PK. Wyobraźmy sobie, że z punktu P spuszczamy prostopadłą PL na płaszczyznę A; wtedy PK będzie przeciwprostokątną trójkąta, którego przyprostokątnemi są odcinki PL i KL. Lecz rzut pionowy punktu L schodzi się z punktem P'', a jego rzut poziomy — z punktem A, w którym $P'P''$ przecina prostą a'; stąd widzimy, że odcinek PL, równoległy do P_1, równy jest swemu rzutowi poziomemu AP', a odcinek KL, równoległy do P_2, równy jest swemu rzutowi pionowemu $P''K''$; odcinając przeto na a'' odcinek $K''B = AP'$, mieć będziemy: $PK = P''B = K''P_1''$.

Postać istotna figury płaskiej. Gdy w płaszczyznie, wyznaczonej przez punkt P i prostą a, dane są inne jeszcze punkty: Q, R,..., to ich rzuty pionowe, po sprowadzeniu ich płaszczyzny przez obrót około a do płaszczyzny A, wykreślamy na zasadzie spostrzeżenia, że rzut pionowy przed obrotem $P''Q''R''$... i rzut p onowy po obrocie: $P_1''Q_1''R_1''$... są w kolineacyi prostokątnej, przyczem osią kolineacyi jest prosta a''; w rzeczy samej, wszystkie proste $P''P_1''$, $Q''Q_1''$,..., łączące dwa punkty odpowiednie, są prostopadłe do a'', a proste odpowiednie, jak $P''Q''$ i $P_1''Q_1''$, przecinają się na a'', gdyż przed obrotem i po obrocie prosta PQ przecina prostą a w tym samym punkcie. Rzuty poziome wszystkich punktów figury po obrocie leżą na prostej a'. Oczywiście rzut pionowy daje nam w tym wypadku postać rzeczywistą figury PQR....

Odległość punktu od prostej. Zastosujemy wyłożoną tu metodę do znalezienia odległości punktu P od prostej g sposobem odmiennym od podanego w art. 52. Poprowadźmy (fig. 63) przez P prostą a, równoległą do płaszczyzny pionowej i przecinającą prostą g w pewnym punkcie A, obróćmy następnie około a całą płaszczyznę, wyznaczoną przez prostą g i punkt P, tak, aby stała się ona równoległą do płaszczyzny P_2; punkty P'' i A'' swego położenia nie zmienią, zaś położenie B_1'' punktu B'' po obrocie wykreślamy sposobem wyłożonym, wtedy odległość szukana równa jest odległości punktu P'' od prostej $A''B_1''$, tę zaś odległość znajdujemy bezpośrednio.



fiig. 63.

Zamiast obracać figurę płaską około prostej, równoległej do płaszczyzny pionowej, możnaby ją obrócić około prostej, równoległej do płaszczyzny poziomej, i nadać jej, położenie równoległe do tej płaszczyzny.

55. Metoda, wyłożona w artykule poprzednim, służy w ogólności do wykreślenia postaci rzeczywistej figury płaskiej, danej przez rzuty. Gdy figura dana jest dość skomplikowana, to metoda ta przedstawia tę niedogodność, że dwa rzuty figury, przed obrotem i po obrocie, nakładają się na siebie nawzajem; rysunek staje się zawikłanym; dogodniej bywa w takich razach używać innej metody, mianowicie: kładu figury danej na jednę z płaszczyzn rzutu; kład taki jest oczywiście szczególnym przypadkiem obrotu, polega bowiem na obrocie płaszczyzny figury około jednego z jej śladów do przystania z odpowiednią płaszczyzną rzutu. Zobaczmy, jak wykreśla się kład figury płaskiej danej.

Kład figury płaskiej.

Niech dane będą ślady e_1, e_2 płaszczyzny **E**, oraz jeden rzut np. poziomy, figury, leżącej w tej płaszczyznie (rzut pionowy może przy tem nie być bezpośrednio dany, gdyż można go otrzymać na zasadzie art. **41**). Wykonajmy kład figury na płaszczyznę poziomą rzutu.

Wykreślmy w tym celu (fig. 64) rzut pionowy A'' punktu A figury i znajdźmy położenie tego punktu w kładzie figury, t. j. kład A^0. Przy obrocie około e_1 punkt A porusza się po kole w płaszczyznie prostopadłej do e_1, rzutem poziomym tego koła jest zatem prostopadła, poprowadzona przez A' do e_1, na niej więc szukać mamy kładu A^0 punktu A. Odległość KA^0 punktu A^0 od e_1 równą jest oczywiście odległości punktu A figury od K, ten zaś odcinek AK jest przeciwprostokątną trójkąta, którego przypro-

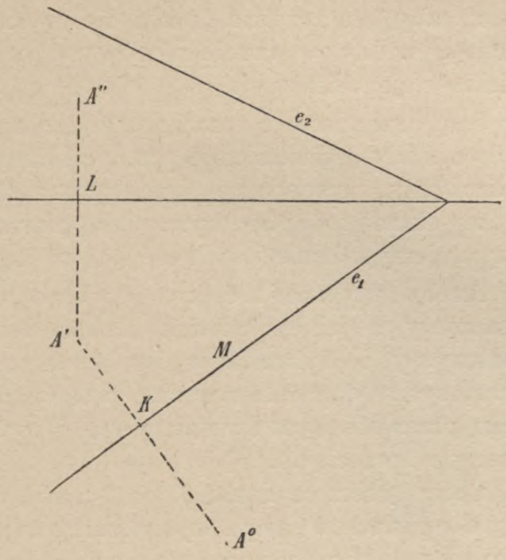


fig. 64.

stokątnemi są odcinki AA' i $A'K$; odcinek AA', mierzący odległość punktu A od płaszczyzny poziomej rzutu, równy jest odcinkowi $A''L$, odcinając więc $KM = A''L$ i $KA^0 = A'M$, otrzymamy szukany kład A^0 punktu A. Kłady innych punktów figury wykreślamy już nie tą samą drogą, lecz znacznie prościej, posiłkując się kolineacyą prostokątną kładu figury płaskiej i jej rzutu poziomego względem śladu e_1, jako osi kolineacyi (art. **30**).

56. Za pomocą metod, wyłożonych w dwóch ostatnich artykułach, możemy wykonać wszelkie konstrukcye, tyczące się figur płaskich, jakoteż określić wielkości wchodzących w skład takiej figury odcinków i kątów. Dla przykładu rozpatrzmy kilka zagadnień zasadniczych.

Wykreślić kąt dwóch prostych, danych przez rzuty.

Kąt dwóch prostych.

Możemy założyć, że proste dane przecinają się, w przeciwnym bowiem razie bierzemy zamiast nich dwie proste, do nich odpowiednio równoległe, wyprowadzone z jakiegokolwiek punktu. Przetnijmy obie proste płaszczyzną dowolną, równoległą do płaszczyzny pionowej rzutu i połączmy punkty przecięcia prostą; około tej prostej obróćmy następnie proste dane tak, aby płaszczyzna, przez nie wyznaczona, była równoległa do P_2, wtedy w rzucie pionowym otrzymamy kąt szukany w wielkości jego istotnej.

Można to samo zagadnienie rozwiązać w ten sposób, że, wyznaczając obydwa ślady jednoimienne prostych danych, kreślimy jeden ślad płaszczyzny, wyznaczonej przez proste dane, i następnie wykonywamy kład tej płaszczyzny na płaszczyznę rzutu; w kładzie otrzymujemy również wielkość istotną kąta szukanego.

Kąt dwóch płaszczyzn.

Ażeby wykreślić kąt dwóch płaszczyzn, spuszczamy z jakiegokolwiek punktu proste prostopadłe na te płaszczyzny i wykreślamy kąt tych prostych; albo: przecinamy płaszczyzny dane płaszczyzną, prostopadłą do krawędzi utworzonego przez nie kąta dwuściennego, i wykreślamy kąt płaski, otrzymany w przecięciu.

Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny.

Chcąc wreszcie znaleść kąt nachylenia prostej do płaszczyzny, wyznaczamy kąt, utworzony przez tę prostą z prostopadłą, spuszczoną z jakiegokolwiek punktu prostej danej na płaszczyznę daną; kąt ten jest dopełnieniem do 90^0 dla kąta szukanego.

ĆWICZENIA*).

10) Wykreślić rzuty punktu, leżącego: a) na pierwszej płaszczyznie dwusiecznej w trzeciej ćwierci; b) na drugiej płaszczyznie dwusiecznej w drugiej ćwierci.

11) Wykreślić rzuty i ślady: a) dwóch prostych, leżących w płaszczyznie poziomej, odp. pionowej rzutu, i nachylonych względem drugiej płaszczyzny rzutu; b) dwóch prostych, leżących w płaszczyznie poziomej, odp. pionowej rzutu, i prostopadłych względem drugiej płaszczyzny rzutu; c) dwóch prostych, prostopadłych do P_1 i przecinających ją przed i za P_2; d) dwóch prostych, prostopadłych do P_2 i przecinających ją nad i pod P_1; e) dwóch prostych, równoległych do P_1 i leżących nad

*) Gdy powiemy, że punkt lub prosta są dane, to rozumieć należy, że dane są ich rzuty; gdy powiemy, że płaszczyzna jest dana, to rozumieć należy, że dane są jej ślady, o ile, naturalnie, nie podany będzie inny sposób wyznaczenia.

nią, odp. pod nią; f) dwóch prostych, równoległych do P_2 i leżących przed nią, odp. za nią; g) czterech prostych, leżących w różnych ćwierciach i równoległych do osi rzutu.

12) Wykreślić ślady czterech płaszczyzn, równoległych do osi, tak, aby część każdej płaszczyzny, zawarta między śladami, była w innej ćwierci; wykreślić też ślady boczne tych płaszczyzn.

13) Wyznaczyć punkty, w których prosta dana przebija obie płaszczyzny dwusieczne kątów, utworzonych przez płaszczyzny rzutu; rozważyć też przypadek szczególny, gdy prosta dana leży w płaszczyznie, prostopadłej do osi rzutu.

14) Wykreślić punkt przecięcia się płaszczyzny jakiejkolwiek z prostą, równoległą do osi rzutu.

15) Wykreślić proste przecięcia się płaszczyzny danej z płaszczyznami dwusiecznemi głównemi H_1 i H_2.

16) Wykreślić punkt przecięcia się prostej jakiejkolwiek z płaszczyzną, przechodzącą przez oś rzutu.

17) Na prostej danej znaleść punkt, mający odległość daną od P_1 (lub od P_2).

18) Dany jest rzut poziomy g' prostej g; wykreślić jej rzut pionowy tak, aby ona leżała w pierwszej (odpow. w drugiej) płaszczyznie dwusiecznej.

19) Dane są: A', A'' i B'; wykreślić B'' tak, aby prosta AB przecięła oś rzutu.

20) Dany jest jeden rzut punktu, leżącego na prostej, danej przez ślady w płaszczyznie prostopadłej do osi rzutu; wykreślić drugi rzut tego punktu.

21) Jakie położenie zajmuje punkt A względem prostej a, gdy A' leży na a', a A'' nie leży na a'' (lub odwrotnie)?

22) Jaki jest warunek, aby trzy punkty dane leżały na jednej prostej?

23) Przez punkt dany poprowadzić prostą (wyznaczyć jej ślady), równoległą do prostej, prostopadłej do osi i danej przez ślady.

24) Znaleść prostą przecięcia się dwóch płaszczyzn, gdy ślady każdej z nich tworzą (na rysunku) jednę prostą.

25) Znaleść punkt przecięcia się prostej, równoległej do osi, z płaszczyzną, której ślady tworzą (na rysunku) jednę prostą.

26) Jak poznać, czy cztery punkty dane leżą na jednej płaszczyznie?

27) Dany jest punkt i jeden ślad płaszczyzny, przechodzącej przez ten punkt; wykreślić drugi jej ślad.

28) Wykreślić punkt przecięcia się trzech płaszczyzn danych.

29) Przez punkt dany poprowadzić prostą, przecinającą dwie proste skośne dane.

30) Jak poznać można z rysunku, gdy trzy płaszczyzny dane mają jednę prostą wspólną?

31) Jak poznać, gdy cztery płaszczyzny dane przecinają się w jednym punkcie?

32) Każda z dwóch płaszczyzn dana jest przez rzuty trzech punktów; wykreślić prostą przecięcia się tych płaszczyzn, nie wykreślając ich śladów.

33) Wykreślić prostą przecięcia się dwóch płaszczyzn, z których jedna jest równoległa do P_1 (lub do P_2).

34) Przez punkt dany poprowadzić płaszczyznę, równoległą do płaszczyzny danej, gdy ta ostatnia jest równoległa do osi rzutu.

35) Przez punkt dany poprowadzić płaszczyznę, równoległą do dwóch prostych skośnych danych.

36) Na płaszczyznie danej poprowadzić przez dany na niej punkt prostą, równoległą do innej płaszczyzny danej.

37) Przez punkt dany poprowadzić prostą, równoległą do dwóch przecinających się płaszczyzn danych.

38) Przez prostą daną poprowadzić płaszczyznę, równoległą do innej prostej danej.

39) Dane są w przestrzeni trzy proste skośne; przeciąć dwie z nich prostą, równoległą do trzeciej.

40) Mając rzut i ślad pionowe prostej, wykreślić jej rzut poziomy tak, aby była ona równoległa do płaszczyzny danej.

41) Mając dany punkt i jeden rzut drugiego punktu, wyznaczyć drugi rzut drugiego punktu tak, aby prosta, łącząca te dwa punkty, była równoległa do płaszczyzny danej.

42) Mając jeden ślad płaszczyzny, wykreślić drugi jej ślad tak, aby była ona równoległa do prostej danej.

43) W płaszczyznie, prostopadłej do P_1, dane są (przez rzuty pionowe wierzchołków) trójkąt, czworokąt i t. p. Wykreślić postać rzeczywistą figury.

44) Podzielić odcinek dany na n równych części, lub w stosunku $m:n$.

45) Na prostej danej od danego na niej punktu odciąć odcinek danej długości.

46) Dany jest punkt i jeden rzut drugiego punktu; wyznaczyć drugi rzut drugiego punktu, gdy dana jest odległość wzajemna tych punktów.

47) Poprowadzić płaszczyznę równoległą do płaszczyzny danej w danej od niej odległości.

48) Przez punkt dany poprowadzić prostą, nachyloną do płaszczyzn rzutu pod kątami odpowiednio danemi.

49) Mając rzut i ślad poziome prostej, wykreślić jej rzut pionowy tak, aby kąt nachylenia jej do P_1 był równy danemu.

50) Mając rzut poziomy i ślad pionowy prostej, wykreślić jej rzut pionowy tak, aby kąt jej nachylenia do P_1 był równy danemu.

51) Mając rzut i ślad poziome prostej, wykreślić jej rzut pionowy tak, aby kąt jej nachylenia do P_2 był równy danemu.

52) Mając rzut poziomy i ślad pionowy prostej, wykreślić jej rzut pionowy tak, aby kąt jej nachylenia do P_2 był równy danemu.

53) Na jednym śladzie płaszczyzny danej dany jest punkt; poprowadzić przez ten punkt na tej płaszczyznie prostą, nachyloną do jednej z płaszczyzn rzutu pod kątem danym.

54) Przez punkt dany poprowadzić prostą, nachyloną do P_1 pod kątem danym i równoległą do płaszczyzny danej.

55) Znaleść kąty nachylenia do płaszczyzn rzutu prostej, prostopadłej do osi rzutu (i danej przez dwa punkty lub ślady).

56) Przez punkt dany poprowadzić płaszczyznę, nachyloną do płaszczyzn rzutu pod kątami odp. danemi (w szczególności, gdy punkt dany jest na osi rzutu).

57) Oznaczyć kąty nachylenia do płaszczyzn rzutu płaszczyzny danej, równoległej do osi rzutu.

58) Dany jest ślad poziomy płaszczyzny; wykreślić jej ślad pionowy tak, aby była ona nachylona do P_1 pod kątem danym.

59) Dany jest ślad poziomy płaszczyzny; wykreślić jej ślad pionowy tak, aby była ona nachylona do P_2 pod kątem danym.

60) Przez prostą daną poprowadzić płaszczyznę, nachyloną do P_1 pod kątem danym.

61) Dany jest punkt i jeden ślad płaszczyzny; wykreślić drugi ślad, znając odległość punktu od płaszczyzny.

62) Dane są płaszczyzna i prosta do niej nachylona; na prostej znaleść punkt, mający daną odległość od płaszczyzny.

63) Na jednej z dwóch prostych skośnych danych wyznaczyć punkt, mający daną odległość od drugiej prostej.

64) Znaleść odległość punktu danego od płaszczyzny danej, równoległej do osi.

65) Dany jest jeden rzut punktu, mającego daną odległość od płaszczyzny danej; wykreślić drugi jego rzut.

66) Wykreślić odległość punktu danego od osi.

67) Wykreślić odległość punktu, danego na P_2, od prostej, danej na P_1.

68) Wykreślić odległość dwóch prostych równoległych danych.

69) Przez prostą daną poprowadzić płaszczyznę, prostopadłą do płaszczyzny danej.

70) Wykreślić odległość punktu danego od prostej danej, prostopadłej do osi.

71) Znaleść najkrótszą odległość rzutów jednej prostej jakiejkolwiek.

72) Wykreślić ślady płaszczyzny, równoległej do dwóch prostych skośnych danych i jednakowo od nich oddalonej.

73) Znaleść odległość wzajemną dwóch prostych, równoległych do osi rzutu.

74) Znaleść odległość najkrótszą prostej danej od osi rzutu.

75) Na prostej danej znaleść punkt, mający od punktu danego odległość daną.

76) Dany jest (przez rzuty) odcinek i punkt, nie leżący na prostej tego odcinka; w płaszczyznie, wyznaczonej przez punkt i odcinek, wykreślić na tym ostatnim trójkąt foremny, kwadrat i t. p.

77) Wykreślić rzuty środka i wielkość promienia koła, przechodzącego przez trzy punkty dane.

78) Wykreślić prostą, jednakowo oddaloną od trzech punktów danych.

79) Na płaszczyznie danej dana jest prosta; przez punkt dany na tej samej płaszczyznie poprowadzić na niej prostą, prostopadłą do prostej danej.

80) Dany jest jeden punkt (przez jeden tylko rzut) na płaszczyznie danej; wykreślić rzuty środka i wielkość promienia koła, przechodzącego przez ten punkt i stycznego do śladów płaszczyzny.

81) Na danej płaszczyznie znaleść prostą, mającą dane odległości od dwóch punktów danych.

82) Wykreślić rzuty dwusiecznej kąta, utworzonego przez dwie przecinające się proste.

83) Z punktu danego poprowadzić prostą, przecinającą prostą daną pod kątem danym.

84) Na danej płaszczyznie dane są punkt i prosta, przez ten punkt przechodząca; poprowadzić na tej płaszczyznie przez ten punkt inną prostą, przecinającą prostą daną pod kątem danym.

85) Wykreślić kąt dwóch prostych, prostopadłych do osi rzutu.

86) Znaleść kąt, zawarty między śladami płaszczyzny danej.

87) Na danej płaszczyznie poprowadzić przez dany na niej punkt prostą, tworzącą z jednym ze śladów płaszczyzny kąt dany.

88) Wykreślić kąt dwóch prostych, z których jedna jest równoległa do jednej z płaszczyzn rzutu.

89) Wykreślić ślady płaszczyzny, dzielącej na połowy kąt dwuścienny, utworzony przez dwie płaszczyzny dane.

90) Znaleść kąt dwóch płaszczyzn, mających jednę parę śladów jednoimiennych równoległych.

91) Znaleść kąt dwóch płaszczyzn, równoległych do osi rzutu.

92) Wykreślić ślady płaszczyzny, przecinającej płaszczyznę daną podług prostej danej pod kątem danym.

93) Przez prostą daną poprowadzić płaszczyznę, przecinającą pod kątem danym inną płaszczyznę daną, nie zawierającą prostej danej.

94) Znaleść kąt nachylenia osi rzutu do płaszczyzny danej.

95) Dane są dwie przecinające się proste; przez jednę z nich poprowadzić płaszczyznę, do której druga prosta byłaby nachylona pod kątem danym (w szczególności, gdy jedną z prostych danych jest oś rzutu).

96) Znając trzy kąty płaskie kąta trójściennego, wykreślić wielkość jego kątów dwuściennych.

97) Znając trzy kąty dwuścienne kąta trójściennego, wykreślić jego kąty płaskie.

98) Znając dwa kąty płaskie kąta trójściennego, oraz zawarty między niemi kąt dwuścienny, wykreślić pozostałe dwa kąty dwuścienne i trzeci kąt płaski.

99) Znając dwa kąty dwuścienne kąta trójściennego i przyległy do nich kąt płaski, wykreślić pozostałe dwa kąty płaskie i trzeci kąt dwuścienny.

100) Znając dwa kąty płaskie kąta trójściennego i kąt dwuścienny, przeciwległy jednemu z nich, wykreślić pozostałe dwa kąty dwuścienne i trzeci płaski.

101) Znając dwa kąty dwuścienne kąta trójściennego i kąt płaski, przeciwległy jednemu z nich, wykreślić pozostałe dwa kąty płaskie i trzeci kąt dwuścienny.

ROZDZIAŁ III.

WIELOŚCIANY.

§ 1. Wyznaczenie wielościanu przez rzuty.

Rzuty wielościanu. 57. Wielościan wyznacza się przez rzuty wierzchołków i krawędzi; oczywiście, gdy krawędź jakaś łączy pewne dwa wierzchołki, to rzut tej krawędzi łączy rzuty owych wierzchołków.

Aby rysunek uczynić przejrzystszym, wyobrażamy sobie, że ściany wielościanu są nieprzezroczyste, i odróżniamy na rysunku krawędzie widzialne dla oka od krawędzi zasłoniętych przez ściany wielościanu, wyciągając pierwsze linią pełną, drugie — przerywaną; przytem, kreśląc rzut jakikolwiek, zakładamy, że na wielościan patrzymy w kierunku promieni rzucających (przy rzucie poziomym z góry, przy pionowym — z przodu). Gdy obydwa rzuty wielościanu są dane, to z łatwością określić możemy, które z krawędzi w każdym rzucie uważać należy za widzialne a które — za zakryte; jak przy tem rozstrzyganiu postępować należy, najlepiej wyjaśnimy na przykładzie następującym. Niech dane będą rzuty czworościanu jakiegokolwiek $ABCD$ (fig. 65). W rzucie poziomym przecinają się krawędzie $A'C'$ i $B'D'$, a zatem albo krawędź AC jest zasłonięta przez ściany ABD i CBD, albo krawędź BD jest zasłonięta przez ściany BAC i DAC; z prostych więc $A'C'$ i $B'D'$ jedna musi być nakreślona linią ciągłą, druga przerywaną; by rozstrzygnąć, która z krawędzi AC i BD jest w rzucie poziomym widzialna, a która zasłonięta, bierzemy pod uwagę punkt przecięcia się prostych $A'C'$ i $B'D'$; oznaczamy punkt ten dwiema literami: E' i F', nazywając przez E odpowiedni punkt prostej BD, a przez F — punkt prostej AC; prowadząc przez punkt $E'F'$ prostopadłą do osi, widzimy, że punkt E'' jest bardziej oddalony od osi, niż punkt F'', punkt E leży zatem nad punktem F; stąd wnioskujemy, że w rzucie poziomym krawędź BD, zawierająca punkt E, jest widzialna, krawędź zaś AC zasłonięta. Podobnież, biorąc pod uwagę punkt przecięcia się prostych $A''C''$ i $B''D''$, i nazywając go przez G'', jako rzut punktu prostej AC, i przez H'', jako rzut punktu prostej BD, widzimy, że punkt G leży przed punktem H, skąd wnioskujemy, że w rzucie pionowym krawędź AC jest widzialną, krawędź BD — zasłoniętą.

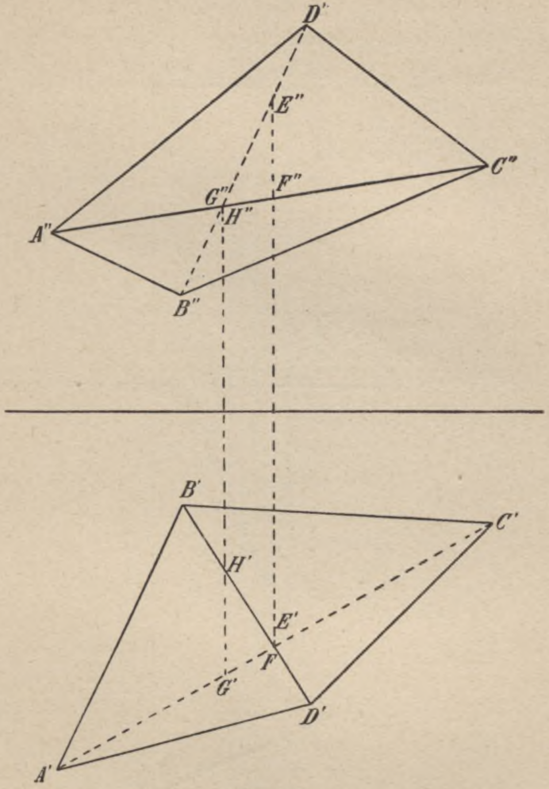


fig. 65.

Kontur istotny i pozorny.

Krawędzie wielościanu, których płaszczyzny rzucające nie przecinają wielościanu, stanowią razem jego kontur istotny; kontur ten oddziela w ogólności część widzialną powierzchni wielościanu od części niewidzialnej; oczywiście, względem każdej płaszczyzny rzutu, posiada wielościan właściwy kontur istotny; rzut tegoż na tę samą płaszczyznę rzutu nazywa się konturem pozornym wielościanu.

58. Przedstawmy w rzutach pięć wielościanów foremnych. Umieszczać będziemy wielościany te w pierwszej ćwierci przestrzeni tak, aby jedna ściana znajdowała się w płaszczyźnie poziomej rzutu.

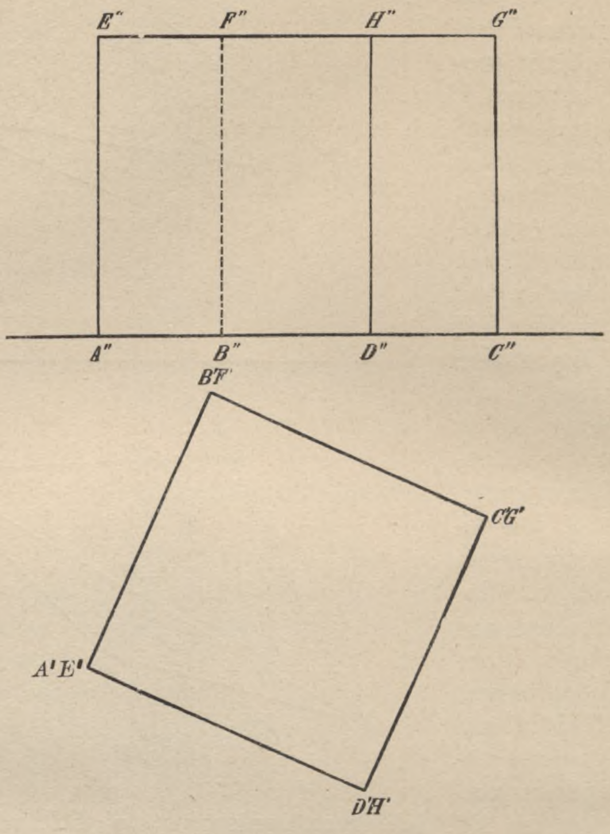


fig. 66.

Sześcian foremny.

Figura 66 przedstawia w rzutach sześcian foremny. W rzucie poziomym mamy kwadrat, będący zarazem podstawą sześcianu; rzut poziomy kwadratu wierzchniego *EFGH* schodzi się z podstawą *ABCD*; krawędzie pionowe przedstawiają się w rzucie poziomym jako punkty—wierzchołki kwadratu. W rzucie pionowym wierzchołki *A*, *B*, *C*, *D* leżą na osi; krawędzie pionowe rzucają się w wielkości naturalnej, rzuty wierzchołków *E*, *F*, *G*, *H* leżą zatem na prostej równoległej do osi, w odległości od niej równej krawędzi sześcianu.

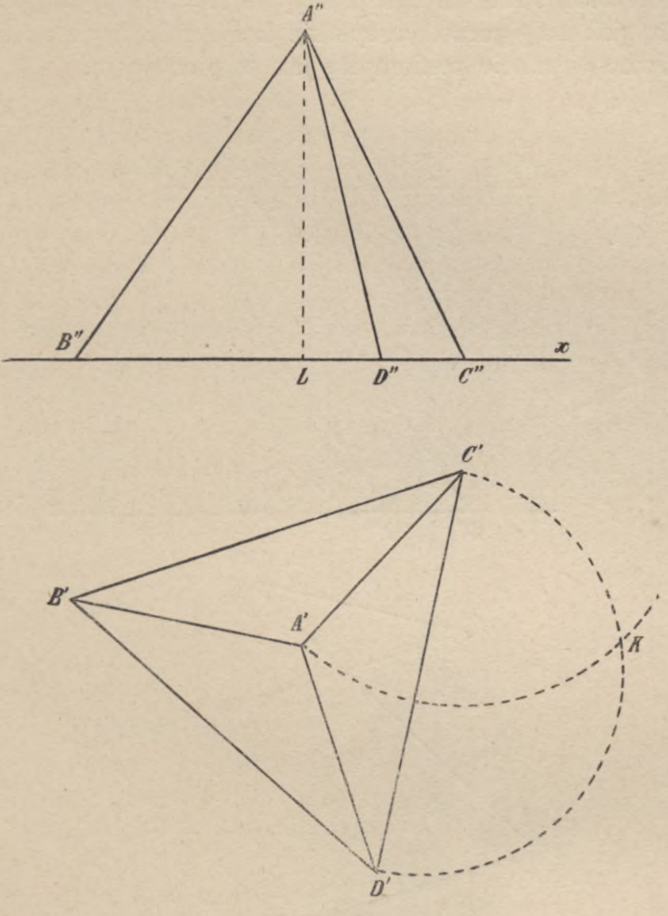


fig. 67.

Czworościan foremny. W rzucie poziomym czworościanu foremnego z podstawą BCD i wierzchołkiem A (fig. 67) rzuty krawędzi bocznych AB, AC, AD przedstawiają się jako promienie koła, opisanego na trójkącie foremnym $B'C'D'$. W rzucie pionowym punkty B'', C'', D'' leżą na osi rzutu; odległość $A''L$ punktu A'' od osi równa jest wysokości czworościanu; wysokość ta jest przyprostokątną trójkąta, którego przeciwprostokątna jest krawędzią czworościanu, a druga przyprostokątna — promieniem koła, opisanego na jednej z jego ścian; kreśląc przeto koło na średnicy $C'D'$ i przecinając je w K łukiem koła, zakreślonego ze środka C'

promieniem $C'A'$, mieć będziemy $A''L = KD'$. W położeniu takiem, jak na figurze, wszystkie krawędzie boczne są widoczne zarówno w rzucie poziomym, jak w pionowym.

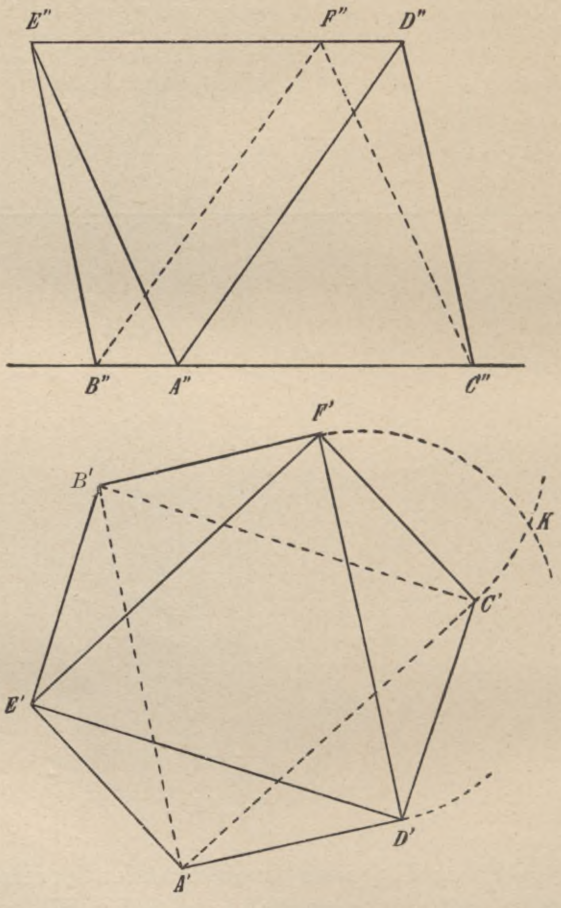


fig. 68.

Ośmiościan foremny.

Wykreślmy rzuty ośmiościanu foremnego, mającego jednę ścianę ABC na płaszczyznie P_1 (fig. 68). W rzucie poziomym ściana ta będzie niewidoczna, wszystkie krawędzie pozostałe będą natomiast widoczne; rzuty wierzchołków leżą w wierzchołkach sześciokąta foremnego. W rzucie pionowym wierzchołki A, B, C mają rzuty na osi, wierzchołki zaś D, E, F, należące do ściany DEF, równoległej do P_1, mają rzuty na prostej, równoległej do osi x w odległości od niej, równej wysokości ośmiościanu; wysokość tę wykreślamy, jako przyprostokątną trójkąta, którego przeciwprostokątną jest długość krawędzi (np. FD), a drugą przyprostokątną — rzut poziomy krawędzi, łączącej wierzchołek podstawy DEF z wierzchołkiem podstawy ABC (np. krawędzi FC); gdy zatem na $F'D'$, jako na średnicy, zakreślimy koło i przetniemy je w punkcie K łukiem koła, opisanego promieniem $F'C'$ ze środka F', to odcinek KD' równy jest wysokości ośmiościanu.

Dwunastościan foremny. Wykreślmy teraz rzuty dwunastościanu foremnego. Ściana, służąca za podstawę, niech będzie $ABCDE$ (figura 69). W rzucie poziomym wierzchołki leżą po dziesięć na dwóch kołach spółśrodkowych; na każdem z kół w równych od siebie odległościach. Obrawszy położenie pięciokąta podstawowego $ABCDE$, możemy odrazu wykreślić również rzuty wierzchołków ściany przeciwleglej podstawie i równoległej do niej; pozostałe wierzchołki znajdziemy z łatwością, gdy wykreślimy jeden z nich, np. F'. W tym celu uważamy, że pięciokąt $AENOF$ można rozpatrywać jako powstały przez obrót pięciokąta $ABCDE$ około AE; wskutek tego punkty B i F' leżeć muszą na prostej prostopadłej do AE; gdy jeszcze spostrzeżemy, że wskutek symetryi AF' tworzy kąty równe z AE i AB, to z łatwością otrzymamy punkt F' i następnie rzuty poziome pozostałych wierzchołków.

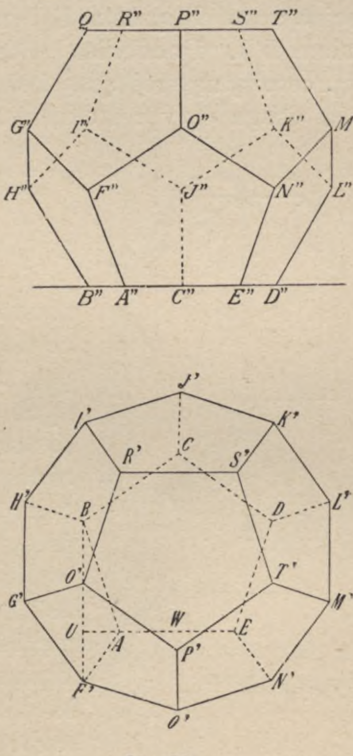


fig. 69.

W rzucie pionowym wierzchołki leżą po pięć na czterech prostych, mianowicie na osi i trzech prostych do niej równoległych; na najbliższej do osi prostej leżą punkty F'', H'', J'', L'', N'', na następnej — G'', I'', K'', M'', O'', na najdalszej — P'', Q'', R'', S'', T''. Odległość od osi do pierwszej prostej równa jest odległości od drugiej do trzeciej; wskutek tego dla wykreślenia wszystkich rzutów pionowych wystarczy wykreślić odległości punktów F'' i J'' od osi W tym celu uważamy, że $F'U$ jest rzutem poziomym odcinka FU, równego co do długości odcinkowi BU, odległość zatem punktu F od płaszczyzny P_1, czyli punktu F'' od osi równa jest przyprostokątnej trójkąta, którego przeciwprostokątna jest BU, a druga przyprostokątna $F'U$; odległość ta równa jest przeto odcinkowi UV, który otrzymujemy, przecinając w V prostą UE łukiem koła, zakreślonego z F' promieniem BU. Podobnież odległość I'' od osi otrzymujemy jako przyprostokątną trójkąta, którego przeciwprostokątna równa jest CW, a druga przyprostokątna — $O'W$.

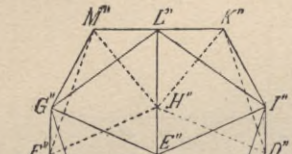


fig. 70.

Dwudziestościan foremny. Wykreślmy wreszcie rzuty dwudziestościanu foremnego (fig. 70). Ściana ABC niech znajduje się na płaszczyznie P_1, wówczas wierzchołki A, B, C i rzuty poziome wierzchołków K, L, M ściany przeciwległej podstawie leżą na okręgu koła w równych od siebie odległościach; rzuty pozostałych sześciu wierzchołków leżą w równych od siebie odległościach na innem kole, współśrodkowem z poprzedniem. Aby znaleść jeden z nich, np. I', wykonajmy kład pięciokąta foremnego $AGLIC$ na płaszczyznę P_1; otrzymamy pięciokąt $AG^0L^0I^0C$; ponieważ obrót wykonany był około osi AC, to punkt I' leży na prostopadłej, spuszczonej z I^0 na AC; z drugiej strony, wskutek symetryi są kąty ACI' i BCI' równe; na zasadzie tych własności możemy łatwo znaleść punkt I' i następnie rzuty poziome pozostałych wierzchołków. W rzucie pionowym leżą rzuty wierzchołków podstawy A'', B'', C'' na osi; punkty D'', E'', F'' leżą na równoległej do osi, w odległości od niej równej przyprostokątnej trójkąta, którego przeciwprostokątną jest OB, a drugą przyprostokątną OE'; odległość ta równa jest odcinkowi $E'P$, który otrzymujemy, przecinając prostą $E'X$, równoległą do AC, łukiem koła, poprowadzonego ze środka O promieniem OB; punkty G'', H'', I'' leżą na prostej, równoległej do osi, w odległości od niej, równej przyprostokątnej trójkąta, którego przeciwprostokątna równa jest krawędzi dwudziestościanu, a druga przyprostokątna odcinkowi AG' lub $L'E'$; otrzymujemy tę odległość, jako odcinek $E'Q$, przecinając w Q prostą $E'X$ łukiem koła, wykreślonego z punktu L' promieniem $L'M'$; wreszcie punkty K'', L'', M'' leżą na równoległej do osi, w takiej odległości od prostej $G''H''I''$, w jakiej prosta $D''E''F''$ leży od osi rzutu.

59. Jako przykład wykreśleń, tyczących się wielościanów, rozwiążmy zagadnienie następujące:

Wykreślić rzuty środka i wielkość promienia kuli, opisanej na czworościanie danym.

Kula, opisana na czworościanie. Niech wierzchołki A, B, C (fig. 71) znajdują się na płaszczyznie P_1, wtedy koło, opisane na trójkącie ABC, leży całkowicie na kuli szukanej, środek O' tego koła jest zatem rzutem poziomym środka kuli; na prostej, poprowadzonej z O' prostopadle do osi rzutu, musi przeto leżeć rzut pionowy O'' środka kuli; z drugiej strony, gdy wykreślimy rzuty cięciwy kuli DE, równoległej do płaszczyzny pionowej rzutu i mającej punkt E na kole powyższem, to w rzucie pionowym O'' leży na prostopadłej do odcinka $D''E''$, wystawionej w jego środku. Znalazłszy rzuty środka kuli, znajdujemy długość jej promienia, jako rzut pionowy $O''F''$ promienia kuli, równoległego do płaszczyzny pionowej rzutu.

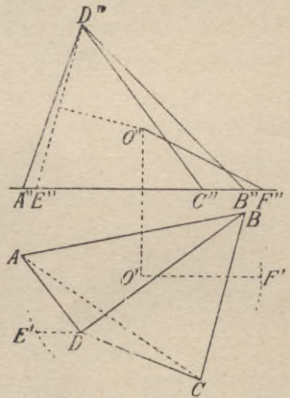


fig. 71.

§ 2. Przekroje płaskie wielościanów i ich przecinanie się wzajemne.

Przekrój wielościanu płaszczyzną. **60.** Gdy dany jest wielościan przez obydwa rzuty, oraz dana jest pewna płaszczyzna, to dla wykreślenia rzutów przekroju wielościanu danego płaszczyzną daną mamy dwie metody. Najczęściej używany sposób wykreślenia polega na tem, że wyznaczamy punkty przecięcia się płaszczyzny z krawędziami wielościanu; punkty te są wierzchołkami wielokąta przekroju; łączymy następnie każde dwa z tych punktów, leżące na krawędziach jednej ściany wielościanu; proste łączące są wtedy bokami wielokąta przekroju.

Metoda krawędzi. Dla ułatwienia wykreślenia wyznaczamy płaszczyznę przez dwie proste poziome, np. m i n (fig. 72); gdy chcemy znaleść punkt przecięcia się krawędzi AB z płaszczyzną mn, to wyobrażamy sobie płaszczyznę rzucającą AB na P_1; płaszczyzna ta przetnie prostą m w pewnym punkcie K, prostą — n

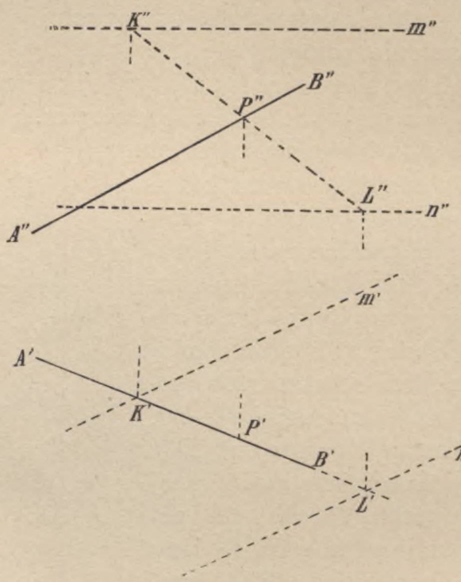


fig. 72.

w punkcie L, proste zaś KL i AB przecinają się w punkcie szukanym. Naturalnie, jeżeli płaszczyzny mn nie przecina krawędź AB, lecz jej przedłużenie, to krawędzi tej nie bierzemy wcale pod uwagę, gdyż nie wyznacza ona wówczas żadnego wierzchołka wielokąta przekroju.

Wyznaczywszy tą drogą wszystkie wierzchołki wielokąta przekroju i pragnąc widzieć jego kształt rzeczywisty, możemy wykreślić jego kład na jednę z płaszczyzn rzutu, przyczem bezpośrednio wykreślamy kład jednego tylko wierzchołka, kłady zaś innych wierzchołków otrzymujemy na zasadzie kolineacyi prostokątnej kładu i rzutu na jednę płaszczyznę.

Metoda ścian. Zamiast stosowania powyższej metody niekiedy wygodnie jest postępować sposobem następującym: wykreślamy bezpośrednio prostą, podług której ścianę wielościanu przecina płaszczyzna dana, bacząc, aby płaszczyzna przecinała ścianę samą, nie zaś jej przedłużenie; tak otrzymana prosta jest bokiem wielokąta przekroju. Punkt przecięcia się dwóch takich prostych, leżących na ścianach wspólnej krawędzi, jest wierzchołkiem wielokąta przekroju.

W przypadku pewnych klas szczególnych wielościanów wykreślenie ogólne można nieco uprościć.

Rozwinięcie wielościanu. 61. Oprócz przekrojów płaskich i ich kładów, potrzeba nieraz wiedzieć, jaka figura otrzymuje się, gdy przez obrót ścian wielościanu około krawędzi sprowadzamy wszystkie te ściany do jednej płaszczyzny; oczywiście, podług niektórych krawędzi musimy wielościan uprzednio rozciąć, wszakże nie powinna przez to rozcinanie powierzchnia wielościanu rozpaść się na kilka części oddzielnych. Figura płaska, tą drogą otrzymana, nazywa się siatką lub rozwinięciem wielościanu. Rozwinięcie wielościanu jest np. ważne, gdy pragniemy przygotować wielościan (czyli jego model) z jednolitego kawałka papieru lub blachy; modele papierowe brył geometrycznych oraz form kryształów, w handlu będące, wykonywane są również przy pomocy ich rozwinięć.

Przykład. 62. Dla przykładu rozwiążemy zadanie następujące.

Dany jest ośmiościan foremny w położeniu takiem, że jeden wierzchołek A znajduje się na płaszczyznie P_1, a prosta AF, łącząca ten wierzchołek z wierzchołkiem przeciwległym F, jest prostopadła do P_1; dana też jest przez swe ślady płaszczyzna E, przecinająca ten ośmiościan; wykreślić rzuty przecięcia, jego postać rzeczywistą, oraz rozwinięcie przeciętego ośmiościanu (fig. 73a i 73b).

W rzucie poziomym cztery wierzchołki będą wierzchołkami kwadratu $B'C'D'E'$, dwa pozostałe wierzchołki $A'F'$ schodzą się w punkcie przecięcia się przekątnych kwadratu; w rzucie pionowym A'' leży na osi, odcinek $F''A''$ jest prostopadły do osi i co do długości równy przekątnej poprzedniego kwadratu, punkty zaś B'', C'', D'', E'' leżą na prostej, równoległej do osi i przechodzącej przez środek odcinka $A''F''$.

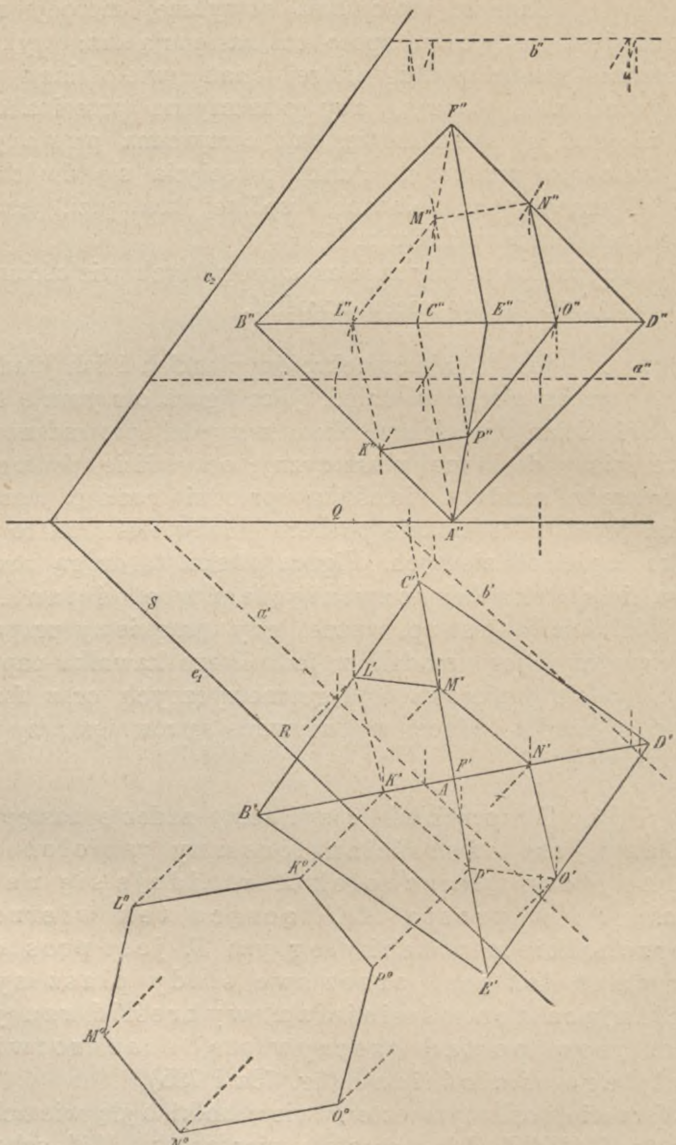


fig. 73a.

Według art. **60** obieramy dla ułatwienia wykreślenia dwie proste poziome *a* i *b* na płaszczyznie danej i szukamy przy ich pomocy, podług metody, opisanej w owym artykule, punktów przecięcia się płaszczyzny ***E*** z krawędziami ośmiościanu.

Przedewszystkiem spostrzegamy, że krawędzie poziome BE i CD nie przecinają płaszczyzny E (pamiętamy, że nie powinniśmy przedłużać krawędzi dla ich przecięcia się z płaszczyzną!), na krawędziach zaś BC i ED znajdujemy punkty przecięcia L wzgl. O. Na krawędzi AB znajdujemy punkt K; ponieważ płaszczyzna, nie przechodząca przez wierzchołki trójkąta, przecina obwód trójkąta w dwóch punktach, lub nie przecina go w żadnym punkcie, to wnioskujemy, że krawędź AC (jako bok trójkąta ABC) nie przecina płaszczyzny E, na tej krawędzi nie szukamy więc wcale punktu przecięcia; ponieważ płaszczyzna E przecina AB, zaś nie przecina BE, przeto musi ona przeciąć AE; na tej krawędzi znajdujemy punkt P; na krawędzi AD znów nie mamy potrzeby szukać punktu przecięcia. Podobnież postępujemy z krawędziami, wychodzącemi z punktu F. Otrzymujemy tą drogą rzuty przecięcia $KLMNOP$; boki tego sześciokąta wykreślamy w rzutach linią ciągłą lub przerywaną, stosownie do tego, czy w odnośnym rzucie są widzialne lub niewidzialne (t. j. czy leżą na ścianach widzialnych ośmiościanu, czy też zasłoniętych).

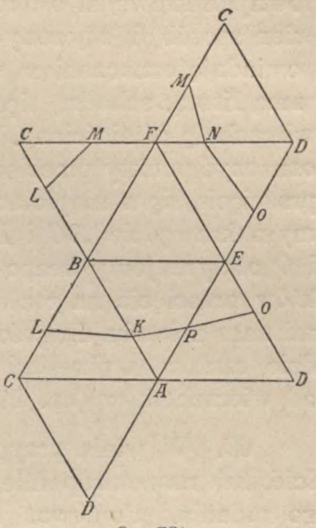


fig. 73b.

Dla wykreślenia postaci rzeczywistej sześciokąta przecięcia wykonajmy kład jego około śladu e_1 na płaszczyznę poziomą rzutu. Wszystkie wierzchołki kładu leżą na prostopadłych do e_1, poprowadzonych przez odpowiednie wierzchołki rzutu poziomego; kład L^0 jednego wierzchołka L znajdujemy, odcinając na prostopadłej z L' do e_1 od e_1 długość RL^0 równą przeciwprostokątnej $L'S$ trójkąta prostokątnego o bokach $L'R$ i $RS = L''Q$ (art. **55**); kłady pozostałych wierzchołków znajdujemy na zasadzie kolineacyi (art. **30**), np. punkt K^0 leżeć musi na prostej, łączącej punkt L^0 z punktem przecięcia prostych $L'K'$ i e_1 i t. d. Tak otrzymany sześciokąt $K^0L^0M^0N^0O^0P^0$ przedstawia przekrój ośmiościanu danego płaszczyzną E w jego postaci rzeczywistej.

Rozwinięcie ośmiościanu wykreślić można w rozmaity sposób; zawsze otrzymamy osiem trójkątów foremnych o bokach równych krawędzi ośmiościanu (np. $B'E'$), ugrupowanych w pewien sposób i złączonych w jednę figurę. Na fig. 73b litery odpowiadają oznaczeniom w rzutach fig. 73a; punkty, oznaczone tą samą literą, schodzą się, gdy rozwinięcie złożymy znowu jako powierzchnię ośmiościanu. Na krawędziach w rozwinięciu musimy oznaczyć punkty przecięcia się z płaszczyzną E i wyciągnąć proste przecięcia się z nią ścian ośmiościanu. Ponieważ w rzucie poziomym krawędzie BC i DE zachowują swą długość, to punkty L i O otrzymujemy bezpośrednio; dla wyznaczenia pozostałych punktów przecięcia na rozwinięciu możemy posiłkować się wiadomemi nam z kładu długościami boków przecięcia, albo też na zasadzie rzutów wykreślać odległości punktów przecięcia krawędzi od wierzchołków (np. FM, BK,...) według art. 48.

63. W wielu przypadkach wykreślenie można jeszcze uprościć, lub nawet zupełnie zmodyfikować, zależnie od natury danego zadania. Ponieważ z wielościanów szczególne znaczenie ze względu na zastosowania mają graniastosłupy i ostrosłupy, to rozwiążmy nasze zadanie dla tych dwóch rodzajów wielościanów.

W y k r e ś l i ć p r z e c i ę c i e g r a n i a s t o s ł u p a p o c h y ł e g o p ł a s z c z y z n ą i j e g o r o z w i n i ę c i e.

Drugi przykład. Niech podstawa graniastosłupa znajduje się w płaszczyznie P_1, niech nią mianowicie będzie trójkąt ABC (fig. 74); niech dane będą rzuty krawędzi bocznej AD, wtedy możemy z łatwością wykreślić rzuty graniastosłupa. Ponieważ rozwinięcie graniastosłupa wykreśla się łatwo, gdy wiadome jest jego przecięcie płaszczyzną prostopadłą do krawędzi bocznych, przeto załóżmy odrazu, że płaszczyzna dana jest do tych krawędzi prostopadła; na sposób wykreślenia rzutów przecięcia, którego użyć zamierzamy, nie będzie to zresztą miało żadnego wpływu.

Uważamy, że boki podstawy ABC i odpowiednie boki przecięcia KLM przecinają się w punktach śladu poziomego e_1 płaszczyzny przecinającej E; stąd wnioskujemy, że w rzucie poziomym boki trójkąta $K'L'M'$ przecinać będą boki odpowiednie trójkąta ABC w punktach prostej e_1, a ponieważ wierzchołki odpowiednie trójkątów ABC i $K'L'M'$ leżą na rzutach poziomych krawędzi bocznych graniastosłupa, a więc na prostopadłych do e_1, to trójkąty ABC i $K'L'M'$ są w kolineacyi prostokątnej, i na tej zasadzie, wykreśliwszy zwykłym sposobem (art. 45) punkt K' (i K''), znajdujemy z łatwością punkty L' i M', poczem bezpośrednio otrzymujemy i rzut pionowy przecięcia.

Kształt prawdziwy trójkąta *KLM* otrzymamy, kreśląc jego kład na P_1; kład ten $K^0L^0M^0$ znajdujemy również na zasadzie kolineacyi metodą art. **55**.

Teraz możemy bez trudu wykreślić rozwinięcie graniastosłupa. Przy rozwinięciu oczywiście obwód trójkąta przekształci się na odcinek prostej; odcinamy przeto na prostej dowolnej odcinki *KM*, *ML*, *LK*, równe bokom odpowiednim trójkąta $K^0M^0L^0$, i na prostych, przez *K*, *M*, *L* prostopadle do *KMLK* poprowadzonych, odcinamy w jednym kierunku odcinki odpowiednio

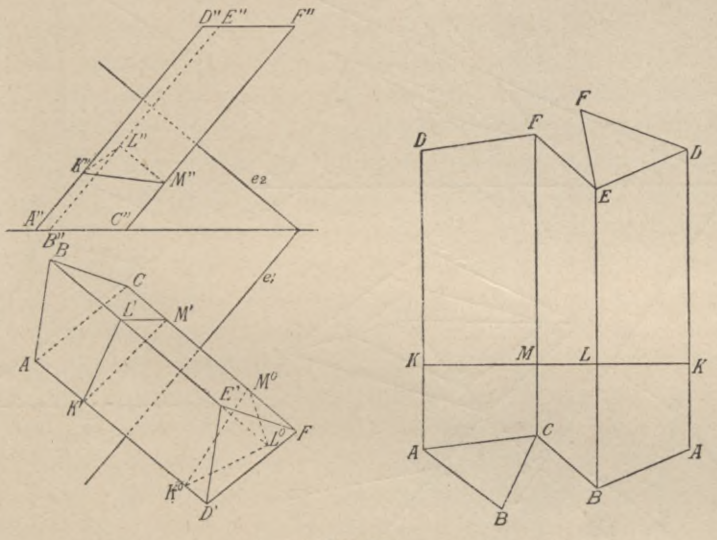


fig. 74.

równe *KA*, *MC*, *LB*, określając długości tych odcinków z ich rzutów metodą art. **48**; tą samą metodą znajdujemy długość krawędzi graniastosłupa i odcinamy ją od punktów *A*, *C*, *B* w kierunku przeciwnym; otrzymamy tedy rozwinięcie powierzchni bocznej graniastosłupa; pozostaje tylko dokreślić przy jednym z odcinków *DF*, *FE*, *ED* i przy jednym z odcinków *AC*, *CB*, *BA* trójkąt, równy podstawie graniastosłupa.

64. W y k r e ś l i ć p r z e c i ę c i e o s t r o s ł u p a p ł a s z c z y z n ą i j e g o r o z w i n i ę c i e.

Trzeci przykład. Niech podstawa ostrosłupa *ABCD* (fig. 75) leży na płaszczyznie P_1; gdy nadto dane są rzuty wierzchołka *S*, to rzuty ostrosłupa wykreślają się z łatwością. Szukajmy jego przecięcia z płaszczyzną E_4, daną przez ślady. Oznaczmy punkty, w których krawędzie SA, SB, SC, SD przecinają płaszczyznę E, odpowiednio przez K, L, M, N. W rzucie poziomym punkty K' L', M', N' leżą na prostych, łączących S' z odpowiedniemi wierzchołkami podstawy; ponieważ dalej boki czworokąta $KLMN$ przecinają odpowiednie boki czworokąta $ABCD$ na śladzie e_1, przeto w rzucie poziomym boki czworokąta $K'L'M'N'$ przecinają

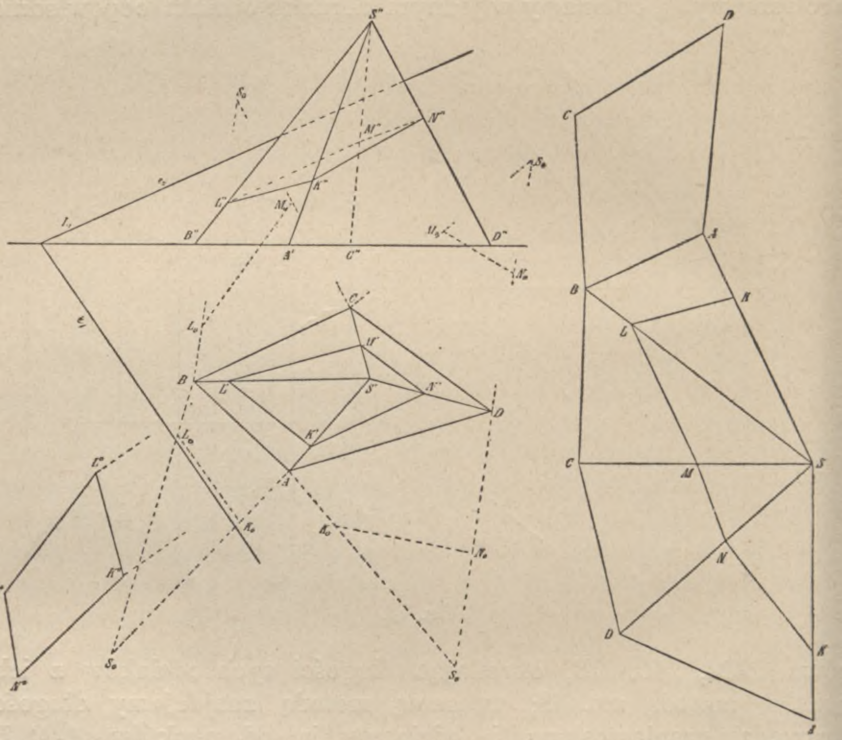


fig. 75.

również odpowiednie boki czworokąta $ABCD$ na prostej e_1, a zatem czworokąty $ABCD$ i $K'L'M'N'$ są w kolineacyi środkowej, której osią jest prosta e_1, a środkiem punkt S'. Gdy więc jeden z wierzchołków czworokąta $K'L'M'N'$ znajdziemy sposobem zwykłym (art. **45**), to pozostałe wykreślimy na zasadzie kolineacyi powyższej. Mając rzut poziomy, znajdujemy rzut pionowy bezpośrednio. Dla wykreślenia postaci rzeczywistej przecięcia wykonywamy jego kład na płaszczyznę P_1 (art. **55**).

Dla wykreślenia rozwinięcia ostrosłupa, wykonywamy kład jego ścian bocznych około odpowiednich boków podstawy (art. 55); otrzymamy cztery trójkąty: S_0AB, S_0BC i t. d.; na nich leżeć będą odpowiednie boki czworokąta przecięcia. Nakreśliwszy te cztery trójkąty tak, aby przystawały bokami odpowiednio równemi przy wspólnym wierzchołku S, otrzymamy rozwinęcie żądane.

Przykłady powyższe w dostateczności wyjaśniają, jak można wykreślać rzuty przekrojów płaskich wielościanów i rozwinięcia tych ostatnich.

Punkty przebicia wielościanu prostą.

65. Jeżeli pragniemy wykreślić punkty, w których pewna prosta dana przecina wielościan dany, to przez prostą prowadzimy płaszczyznę dowolną, wykreślamy figurę, podług której ona przecina wielościan, i znajdujemy punkty żądane, jako punkty przecięcia się figury i prostej danej; oczywiście wystarcza w zupełności wykreślenie jednego rzutu owej figury płaskiej. Co się tyczy wyboru płaszczyzny pomocniczej, to prowadzimy ją o ile można tak, aby wykreślenie figury przecięcia było jaknajprostsze. W ogólnym przypadku wygodnie jest za taką płaszczyznę przyjmować jednę z płaszczyzn rzucających prostej danej. W szczególności natomiast, gdy wielościanem danym jest graniastosłup, poprowadzimy płaszczyznę pomocniczą równolegle do jego krawędzi (ćw. 38 Rozdz. II), gdy zaś — ostrosłup, to płaszczyznę pomocniczą poprowadzimy przez jego wierzchołek, w pierwszym bowiem przypadku płaszczyzna przecina powierzchnię boczną graniastosłupa podług prostych, równoległych do jego krawędzi, w drugim — płaszczyzna przecina powierzchnię boczną ostrosłupa podług prostych, wychodzących z jego wierzchołka.

Przechodzimy teraz do badania wielościanów, przecinających się wzajemnie.

Przenikanie się i wnikanie dwóch wielościanów.

66. Jeżeli dwa wielościany się przecinają, to w przecięciu otrzymujemy jeden lub kilka wielokątów w ogólności skośnych; w pierwszym przypadku mówimy, że jeden wielościan w n i k a w drugi, w drugim — że jeden p r z e n i k a drugi. Wierzchołki wielokąta przecięcia są punktami przecięcia krawędzi jednego wielościanu ze ścianami drugiego, boki wielokątów są prostemi przecięcia ścian jednego wielościanu ze ścianami drugiego. Gdy bok wielokąta przecięcia łączy dwie

krawędzie jednego wielościanu, to należą one oczywiście do jednej ściany, gdy zaś bok ten łączy krawędzie różnych wielościanów, to każda z tych krawędzi przecina jednę ze ścian, przyległych do drugiej krawędzi.

Bok figury przecięcia jest widzialny tylko wtedy, gdy powstaje z przecięcia się dwóch ścian widzialnych; gdy zaś choćby jedna ze ścian, przecinających się w danym boku wielokąta, jest niewidzialna, to bok ten jest niewidzialny.

Do wykreślenia rzutów przecięcia dwóch wielościanów używać możemy dwóch metod różnych, analogicznie do przypadku przecięcia wielościanu płaszczyzną (art. **60**), a mianowicie: możemy wykreślać bezpośrednio wierzchołki figury przecięcia, albo jej boki; najczęściej używa się metody pierwszej; gdy wierzchołki figury przecięcia są wykreślone, to należy je odpowiednio połączyć prostemi dla otrzymania boków tej figury. Ogólny sposób postępowania jest następujący.

Wykreślenie figury przecięcia.

67. Nazwijmy jeden wielościan pierwszym, drugi — drugim. Obierzmy dowolną krawędź pierwszego wielościanu i szukajmy (art. **65**) punktów, w których ona przebija drugi wielościan; przy wykreśleniu otrzymamy, rozumie się, wszystkie punkty, w których prosta, na której leży krawędź obrana, przebija wielościan drugi; z tych punktów bierzemy wszakże pod uwagę te tylko, które leżą na samej krawędzi, nie na jej przedłużeniu. Następnie czynimy to samo ze wszystkiemi pozostałemi krawędziami pierwszego wielościanu; potem kreślimy podobnież na krawędziach drugiego wielościanu punkty, w których one przebijają wielościan pierwszy; jeżeli proste spojrzenie na figurę wskazuje, że pewna krawędź wcale nie przebija drugiego wielościanu, to naturalnie omijamy tę krawędź. Przy szukaniu punktów przecięcia krawędzi jednego wielościanu ze ścianami drugiego, będziemy, zgodnie z teoryą art. **65**, przez krawędzie prowadzili płaszczyzny pomocnicze i szukali ich przecięcia z drugim wielościanem; w ogólności wygodnie jest, jak zauważyliśmy w art. **65**, za takie płaszczyzny przyjmować płaszczyzny rzucające krawędzi; w szczególnych razach okazuje się wszakże właściwszym inny wybór płaszczyzn pomocniczych, tak np., w przypadku dwóch ostrosłupów prowadzić je będziemy przez prostą, łączącą wierzchołki ostrosłupów, w przypadku dwóch graniastosłupów — przez krawędzie jednego, równolegle do krawędzi drugiego, w przypadku graniastosłupa i ostrosłupa — przez krawędzie graniastosłupa i wierzchołek ostrosłupa, oraz przez krawędzie ostrosłupa równolegle do krawędzi graniastosłupa.

Wykreśliwszy wszystkie wierzchołki figury przecięcia, musimy je połączyć prostemi, aby otrzymać jej boki. Obierzmy przeto jeden z wierzchołków A; niech on leży np. na krawędzi a pierwszego wielościanu; niech E będzie jedną ze ścian, przyległych do krawędzi a, F — ścianą drugiego wielościanu, przecinającą a w punkcie A; ściany E i F, mające punkt A wspólny, przecinają się podług prostej, na której leży bok figury przecięcia; następny przeto wierzchołek tej figury leży również na tych ścianach, mianowicie, albo w punkcie, w którym pewna krawędź ściany E (różna od a) przecina F, albo w punkcie, w którym pewna krawędź ściany F przecina ścianę E; znalazłszy wśród pozostałych wierzchołków odpowiedni B (wierzchołek taki znaleść się musi i oczywiście tylko jeden, gdyż jedna krawędź nie może przeciąć jednej ściany więcej, niż w jednym punkcie), otrzymujemy bok AB figury przecięcia; podobnem rozumowaniem znajdujemy bok BC i t. d., aż otrzymamy bok pewien, kończący się w A; wtedy mamy wielokąt $ABC\ldots A$; jeżeli oprócz wierzchołków tego wielokąta niema więcej innych wierzchołków figury przecięcia, to wielokąt ów stanowi całkowitą figurę przecięcia; gdy zaś pozostały jeszcze pewne wierzchołki, nie należące do wielokąta $ABC\ldots A$, to obieramy znowu jeden jakikolwiek z nich i, jak poprzednio, znajdujemy wielokąt z tym wierzchołkiem, będący podobnież, jak $ABC\ldots A$, częścią składową figury przecięcia; postępujemy tak dopóty, aż wszystkie wykreślone wierzchołkl figury przecięcia zostaną wyczerpane. Przy kreśleniu boków tej figury, odróżniamy, według stałej reguły, widzialne od niewidzialnych; pierwsze kreślimy, jak zwykle, linią ciągłą, drugie — przerywaną.

Może się zdarzyć, że dwie krawędzie wielościanów różnych przecinają się w jednym punkcie; z punktu tego wychodzić mogą wówczas cztery boki figury przecięcia.

Przykład. 68. Dla zilustrowania teoryi powyżej wyłożonej wykreślmy przecięcie ostrosłupa trójkątnego i graniastosłupa czworokątnego, mających podstawy na płaszczyznie poziomej rzutu (fig. 76). Przedewszystkiem przez wierzchołek S ostrosłupa prowadzimy prostą ST, równoległą do krawędzi graniastosłupa; ślad poziomy tej prostej niech będzie T; przez prostą ST prowadzić będziemy płaszczyzny pomocnicze. Znajdźmy najprzód wierzchołki, leżące na krawędziach ostrosłupa. Ślady poziome płaszczyzn pomocniczych, poprowadzonych przez krawędzie ostrosłupa, są TA, TB, TC; punkty, w których proste te przecinają podstawę $DEFG$ graniastosłupa, są śladami poziomemi prostych, podług których

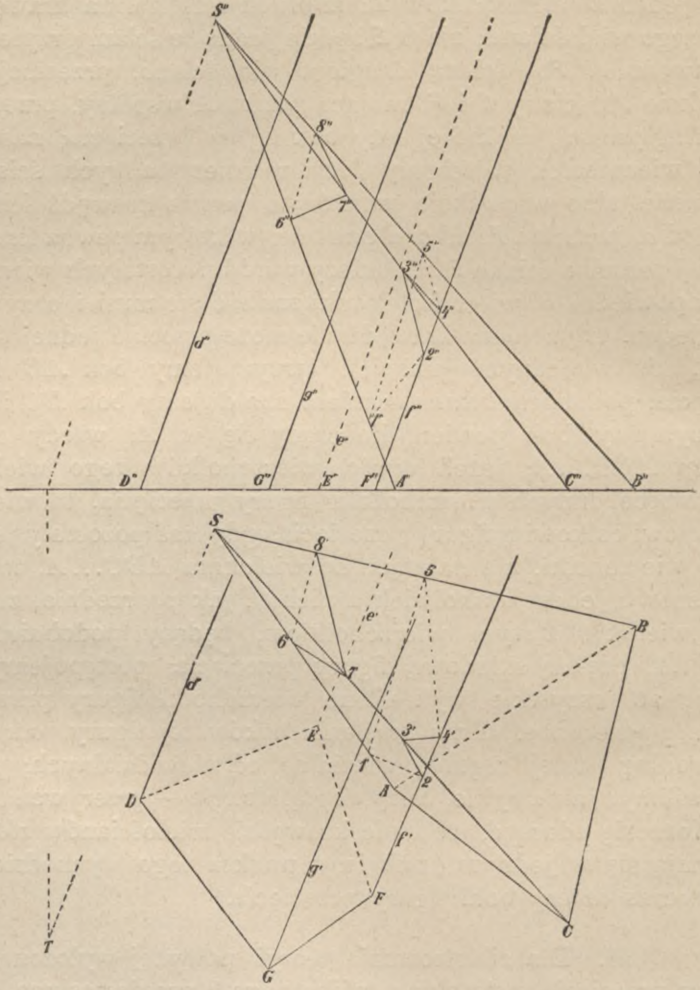


fig. 76.

graniastosłup przecinają owe trzy płaszczyzny pomocnicze; proste te są równoległe do krawędzi graniastosłupa; wykreśliwszy je (tylko w rzucie poziomym), wyznaczamy ich punkty przecięcia z odpowiedniemi krawędziami ostrosłupa; znajdujemy tym sposobem na krawędzi *SA* wierzchołki: 1 i 6, na *SB* — wierzchołki 5 i 8, na *SC* -- 3 i 7. Szukamy teraz wierzchołków, leżących na krawędziach graniastosłupa. Ślady poziome płaszczyzn pomocniczych, poprowadzonych przez *ST* i przez krawędzie graniastosłupa, są: *TD*, *TE*, *TF* i *TG*; z tych prostych tylko jedna *TF* przecina trójkąt *ABC*; łącząc punkty przecięcia z *S*, otrzymamy proste, podług których płaszczyzna *STF* przecina ostrosłup, a wyznaczając punkty przecięcia tych prostych z krawędzią *f* graniastosłupa, otrzymamy na tej ostatniej dwa wierzchołki 2 i 4. Wszystkie te punkty znajdujemy w rzucie poziomym, następnie wykreślamy ich rzuty pionowe, leżące na rzutach pionowych krawędzi odpowiednich. Wykreślmy teraz boki figury przecięcia również najprzód w rzucie poziomym. Zacznijmy np. od wierzchołka 2; leży on na krawędzi *f* graniastosłupa i na ścianie *SAC* ostrosłupa; ściana *fg*, przyległa do *f*, przecina zatem ścianę *SAC* podług boku, którego drugi wierzchołek leży albo na krawędzi *g*, albo na jednej z krawędzi ściany *SAC*; lecz na *g* nie leży żaden wierzchołek, a zatem wierzchołek poszukiwany leży na *SA* lub *SC*; krawędź *SA* nie przecina ściany *fg*, krawędź zaś *SC* przecina ją w punkcie 3; mamy zatem bok 23, który jest widzialny, gdyż leży na ścianach *SAC* i *fg* widzialnych. Bok, wychodzący z 3, leży w przecięciu ściany *SCB* (przyległej do *SC*) i *fg*; drugi (t. j. różny od 3) wierzchołek tego boku leży zatem albo na krawędzi *SB*, albo na krawędzi *f*; lecz krawędź *SB* nie przecina ściany *fg*, natomiast krawędź *f* przebija ścianę *SCB* w punkcie 4; mamy zatem bok 34, który, jako leżący na ścianach widzialnych *SCB* i *fg*, jest widzialny. Bok, wychodzący z 4, leży na przecięciu ścian *SCB* i *fe*, ponieważ zaś wierzchołki pozostałe leżą wyłącznie na krawędziach ostrosłupa, to drugi wierzchołek boku, wychodzącego z 4, leży na jednej z krawędzi ściany *SCB*; z tych tylko *SB* przecina ścianę *ef*, mianowicie w punkcie 5; bok znaleziony 45 jest niewidzialny, gdyż leży na ścianie *ef* niewidzialnej. Rozumując w ten sposób dalej, znajdziemy wychodzący z 5 bok 51 i wychodzący z 1 bok 12; boki te będą również niewidzialne. Wielokąt zamknięty 123451 stanowi część figury przecięcia. Pozostałe trzy wierzchołki dają pozostałą część tej figury, mianowicie trójkąt 678, podług którego ściana *gd* graniastosłupa przecina ostrosłup; w rzucie poziomym boki 67 i 78 są widzialne, bok zaś 68 jest niewidzialny. W rzucie pionowym wykreślamy boki podług rzutu poziomego, lecz kwestyę widzialności lub niewidzialności rozstrzygać musimy niezależnie, albowiem bok widzialny w jednym rzucie, może być niewidzialny w drugim.

§ 3. Cienie wielościanów.

69. Dla większej plastyczności rysunku przyjmujemy, że przedmioty na nim przedstawione, będąc nieprzezroczystemi, są oświetlone, i na rysunku cieniujemy te części figury, na które światło nie pada *).

Oświetlenie środkowe i równoległe.

Zakładać będziemy, że promienie światła wychodzą z jednego punktu, znajdującego się w odległości skończonej lub nieskończonej; w pierwszym przypadku mamy tak zw. oświetlenie środkowe, w drugim — równoległe. Umówmy się na przyszłość, że mamy do czynienia z oświetleniem równoległem — o ile wyraźnie nie będzie uczynione zastrzeżenie odmienne. Kierunek promieni światła oznacza się zwykle przez rzuty prostej, do nich równoległej. Przyjmuje się zazwyczaj, że promienie padają z lewej strony, z góry, z przodu ku prawej stronie, na dół, do tyłu. Często dla uproszczenia wykreślenia przyjmuje się, że kierunek promieni schodzi się z kierunkiem przekątnej sześcianu foremnego, mającego dwie ściany równoległe do płaszczyzn rzutu; w tym szczególnym przypadku rzuty poziome i rzuty pionowe promieni światła tworzą z osią rzutu kąt 45°.

Cienie przedmiotu.

Każdy przedmiot, przedstawiony na rysunku, jest w części oświetlony, w części zaś pogrążony w cieniu, prócz tego rzuca on w ogólności cień na inne przedmioty i na płaszczyzny rzutu; niekiedy nadto jedna część przedmiotu rzuca cień na inną część tego samego przedmiotu. Zakładamy, że płaszczyzny rzutu są nieprzezroczyste i przedłużone nieograniczenie; skutkiem tego przedmioty będą widzialne tylko o tyle, o ile znajdują się w pierwszej ćwierci przestrzeni; wszystkie zaś cienie, rzucone na płaszczyzny rzutów, znajdują się albo na przedniej części

*) W celu jeszcze większego spotęgowania plastyczności, oznacza się nadto na rysunku na częściach oświetlonych rozmaite stopnie natężenia światła, biorąc pod uwagę zależność tego natężenia od kąta, pod jakim promienie światła padają na różne punkty powierzchni przedmiotu; tę teoryę oświetlenia wyłożymy w rozdziale ostatnim.

płaszczyzny poziomej rzutu, albo na górnej części płaszczyzny pionowej. Oświetlone są tylko te punkty powierzchni przedmiotu lub płaszczyzny rzutu, w których promienie światła najprzód napotykają ów przedmiot albo płaszczyznę rzutu; punkty, w których kierunek promieni wychodzi z przedmiotu, są w cieniu, wskutek nieprzezroczystości przedmiotu; mówimy, że punkty te są w cieniu własnym; gdy kierunek promienia, po wyjściu z przedmiotu, znowu pada na pewien punkt powierzchni tegoż lub innego przedmiotu, albo na punkt płaszczyzny rzutu, to punkt ten znajduje się w t. zw. cieniu rzuconym. Gdy zatem promień przecina powierzchnię przedmiotu w kilku punktach, to pierwszy z nich znajduje się w świetle, drugi, czwarty i t. d. w cieniu własnym, a trzeci, piąty i t. d. w cieniu rzuconym. Linia, znajdująca się na powierzchni przedmiotu i oddzielająca punkty oświetlone tej powierzchni od punktów nieoświetlonych, nazywa się granicą światła i cienia na tej powierzchni, albo granicą cienia własnego; w punktach tej linii promienie światła dotykają powierzchni przedmiotu, nie przecinając takowej. Granica cienia, rzuconego przez przedmiot dany na płaszczyzny rzutów lub na powierzchnię innego przedmiotu, jest oczywiście cieniem granicy światła i cienia na powierzchni danego przedmiotu, rzuconym na płaszczyznę rzutów lub odp. na powierzchnię drugiego przedmiotu.

Cień własny i rzucony.

Celem paragrafu niniejszego jest wyjaśnienie metody kreślenia cieni własnych i rzuconych wielościanów; rozwiążmy wszakże uprzednio zadanie wykreślenia cienia, rzuconego przez punkt, odcinek prostej i wielokąt dowolny na płaszczyzny rzutów. Kierunek promieni uważać będziemy za dany przez rzuty prostej l, równoległej do nich.

70. Wykreślić cień, rzucony przez punkt dany na płaszczyzny rzutu.

Cienie punktu.

Prowadzimy przez punkt dany prostą, równoległą do l; ślad poziomy tej prostej jest cieniem, rzuconym przez punkt dany na płaszczyznę poziomą rzutu, a jej ślad pionowy — cieniem, rzuconym przez ten punkt na płaszczyznę pionową rzutów; pierwszy cień nazywamy cieniem poziomym punktu danego, drugi — jego cieniem pionowym. W rzeczywistości punkt posiada jeden tylko cień, albo poziomy, jak np. punkt A figury 77, albo pionowy, jak np. punkt B; ślad pionowy A_v promienia światła, przechodzącego przez punkt A, jest niewidzialny, przypada bowiem na dolnej części płaszczyzny pionowej rzutu; punkt A_v nazywamy cieniem pionowym punktu A, fikcyjnym albo niewłaściwym. Wykreślenie cienia fikcyjnego bywa nieraz, jak wkrótce zobaczymy, konieczne. Gdy promienie światła mają kierunek przekątnej sześcianu wiadomego, to, jak łatwo można widzieć, prosta, łącząca obydwa cienie punktu (rzeczywisty i fikcyjny), jest równoległa do osi rzutu.

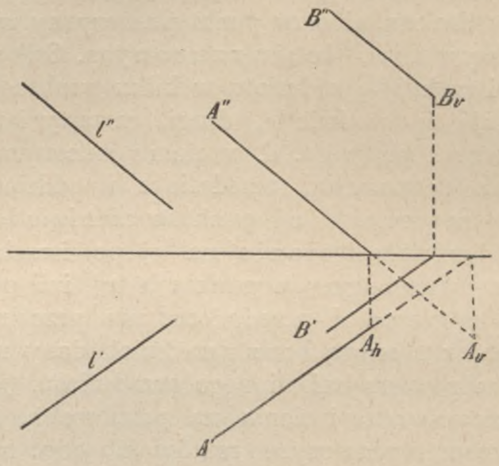


fig. 77.

Gdy w szczególności promień światła, przechodzący przez punkt dany, przecina oś rzutu, to w punkcie przecięcia schodzą się cień poziomy i cień pionowy punktu danego.

W przypadku oświetlenia środkowego znajdujemy cień punktu danego, jako ślad prostej, przechodzącej przez punkt świecący i punkt dany; wszystkie uwagi pozostają zresztą bez zmiany.

71. Wykreślić cień, rzucony przez odcinek na płaszczyzny rzutu.

Cienie odcinka. Cień linii jakiejkolwiek na pewną płaszczyznę jest miejscem geometrycznem cieni wszystkich punktów tej linii na tę płaszczyznę; w szczególności więc cieniem prostej na płaszczyznę daną jest prosta, podług której płaszczyznę tę przecina inna płaszczyzna, poprowadzona przez prostą daną równolegle do promieni światła. Z powyższego wynika, że cieniem odcinka na pewną płaszczyznę jest odcinek prostej, łączącej cienie krańców odcinka na tę płaszczyznę.

Gdy tedy odcinek dany AB ma położenie takie, że punkty A i B (fig. 78) rzucają cienie A_h, B_h na płaszczyznę poziomą rzutu, A_hB_h jest cieniem odcinka AB na tę płaszczyznę, gdy zaś punkty C i D rzucają cienie pionowe, to C_vD_v jest cieniem odcinka CD na płaszczyznę pionową rzutów. Niech odcinek EF ma położenie takie, że punkt E rzuca cień na P_1, a punkt F na P_2; wtedy cień odcinka EF pada w części na P_1, w części na P_2. Aby wykreślić ten cień, wyobraźmy sobie na chwilę, że płaszczyzna P_2 jest przezroczysta; kreśląc wtedy cienie poziome E_h i F_h punktów E i F, otrzymalibyśmy, jako rzut odcinka EF na płaszczy-

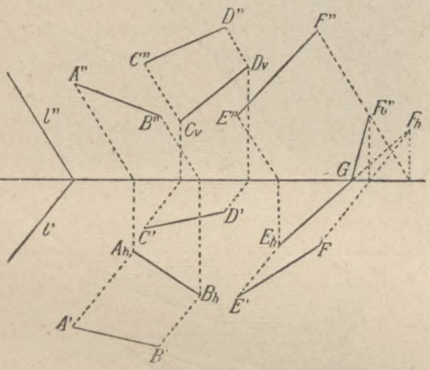


fig. 78.

znę P_1, odcinek E_hF_h. Niech prosta E_hF_h przecina oś rzutu w punkcie G. W rzeczywistości punkt F_h jest cieniem fikcyjnym punktu F; punkt ten rzuca natomiast cień F_v na płaszczyznę P_2; a więc zamiast cienia GF_h na płaszczyznę P_1 mamy cień GF_v na płaszczyznę P_2, tak, że cień całkowity odcinka EF przedstawia się jako linia łamana E_hGF_v, której odcinek E_hG pada na P_1, a odcinek GF_v — na P_2. Gdy przez EF przesuniemy płaszczyznę równolegle do promieni światła, to GE_h będzie oczywiście leżeć na jej śladzie poziomym, GF_v — na śladzie pionowym; w punkcie G płaszczyzna ta przetnie oś rzutu.

Cienie, rzucone na tę samą płaszczyznę przez dwa odcinki równe i równoległe, są między sobą równe i równoległe. Cień odcinka, równoległego do jednej z płaszczyzn rzutu, rzucony na tę płaszczyznę, jest równy odcinkowi samemu i równoległy doń; cień odcinka, prostopadłego do jednej z płaszczyzn rzutu, rzucony na tę samą płaszczyznę, jest równoległy do rzutów promieni światła na tę płaszczyznę.

Umiejąc kreślić cienie odcinków prostoliniowych, możemy z łatwością wykreślić cienie wielokątów dowolnych, płaskich i skośnych.

Cienie wielościanu. **72.** Przystąpmy teraz do wykreślenia cieni wielościanów. Niech wielościanem danym będzie pewien ośmiościan $ABCDEF$ (fig. 79); promienie światła niech mają kierunek przekątnej sześcianu wiadomego (art. **69**). Sposobem, wska-

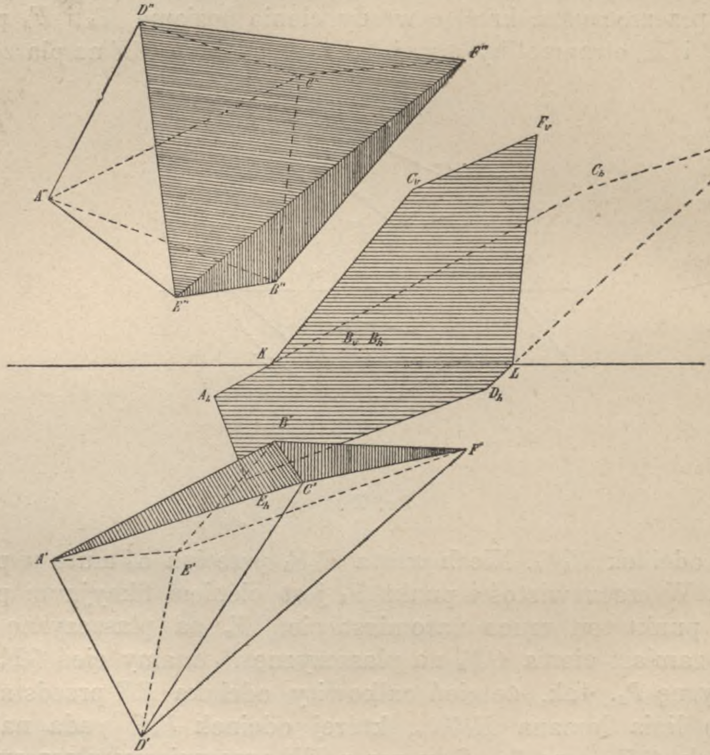


fig. 79.

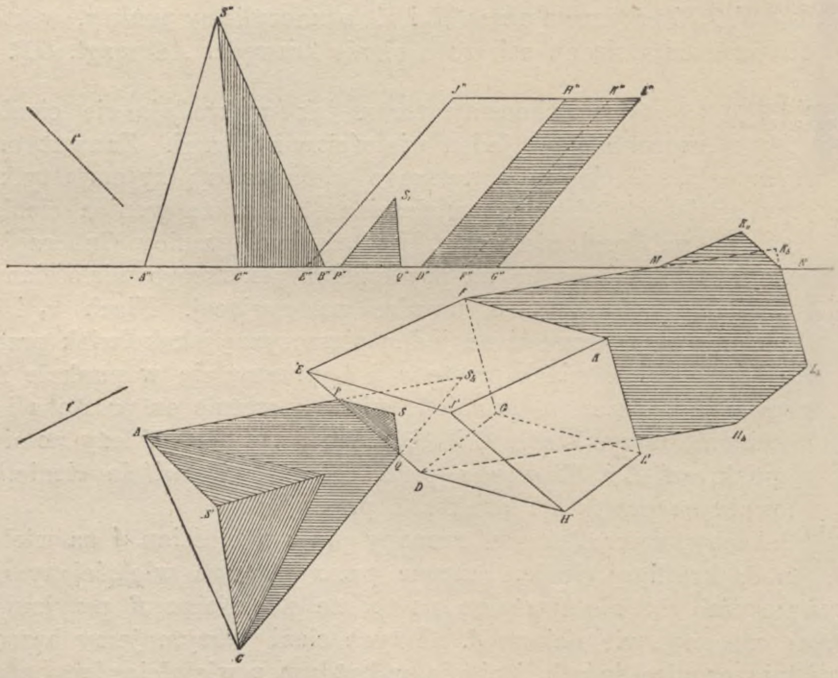
zanym w art. **70**, wykreślamy cienie poziome wszystkich wierzchołków ośmiościanu; z tych cieni B_h, C_h, F_h okazują się fikcyjnemi, gdyż przypadają nad osią rzutu. Gdy wykreślimy cienie poziome wszystkich krawędzi, to przekonamy się, żo cienie A_hC_h, C_hF_h, F_hD_h, D_hE_h, E_hA_h utworzą pięciokąt $A_hC_hF_hD_hE_h$, wewnątrz którego będą leżały cienie wszystkich pozostałych krawędzi (i wierzchołka B); stąd wnioskujemy, że ten pięciokąt jest granicą cienia, rzuconego przez ośmiościan na płaszczyznę P_1 (odwracamy tymczasem uwagę od płaszczyzny P_2). Z tego zaś wynika, że na powierzchni ośmiościanu wielokąt skośny *ACFDEA* jest granicą cienia własnego; linia ta oddziela grupę ścian oświetlonych od nieoświetlonych. Do jednej grupy należą ściany: *ACD*, *DCF*, *ADE*, do drugiej — *ABC*, *BCF*, *DEF*, *ABE*, *BEF*; przez intuicyę spostrzegamy, że pierwsza grupa jest oświetlona, druga — pogrążona w cieniu; możemy się zresztą o tem przekonać, wykreślając punkty, w których jakikolwiek promień światła przebija ściany wielościanu (art. 65), i uważając, do której grupy należy ściana, którą promień najprzód przebija; ta grupa będzie oświetlona.

W rzucie poziomym ze ścian widzialnych nieoświetlone są ściany *ABC* i *BCF*, w pionowym *DEF* i *BEF*; te ściany winniśmy przeto w odnośnych rzutach zacieniować.

Kreślimy następnie cienie pionowe tych wierzchołków, których cienie poziome są fikcyjne. Krawędzie *AE* i *ED* mają cień poziomy, *CF* ma cień pionowy, a *AC* i *DF* rzucają cień na obiedwie płaszczyzny rzutu. Znajdujemy wtedy, że ośmiościan rzuca na płaszczyznę P_1 cień $KA_hE_hD_hL$, a na płaszczyznę P_2 — cień LF_vC_vK, przyczem przez *K* i *L* oznaczyliśmy punkty, w których przecinają się na osi rzutu cienie krawędzi *AC* wzgl. *DF*.

Cień rzucony przez wielościan na wielościan. **73.** Zobaczmy teraz, jak wykreślają się cienie, rzucone przez jeden wielościan na drugi. Zauważymy w tym celu, że cień od pierwszego wielościanu przyjmują tylko ściany oświetlone drugiego wielościanu, oraz, że granica cienia, rzuconego na drugi wielościan, jest cieniem granicy (lub części granicy) światła i cienia na powierzchni pierwszego wielościanu. Wykreślenie opieramy na uwadze następującej. Niech a_1 i b_1 będą cieniami, rzuconemi na jednę płaszczyznę jakąkolwiek przez dwie proste a i b; niech proste a_1 i b_1 przetną się w punkcie K; poprowadźmy przez K promień światła; przetnie on proste a i b odpowiednio w punktach L i M; niech np. punkt M leży pomiędzy punktami L i K, wtedy punkt M jest oczywiście cieniem, rzuconym na prostą b z punktu L prostej a.

Ażeby wykreślić cień rzucony przez wielościan **A** na wielościan **B**, kreślimy cienie, rzucone przez obydwa wielościany na płaszczyznę P_1, nie zważając na to, że wielościan **B** przyjmuje cień rzucony wielościanu **A**. Z tych cieni otrzymujemy bezpośrednio granicę światła i cienia na każdym z wielościanów; badamy potem, które ściany wielościanu **B** są oświetlone, i kreślimy cienie, rzucone na P_1 przez wszystkie oświetlone krawędzie wielościanu B. Następnie bierzemy pod uwagę punkty, w których granica cienia rzuconego na P_1 przez A przecina granicę cienia rzuconego na P_1 przez B, oraz cienie krawędzi oświetlonych wielościanu B. Niech np. cień a_1 krawędzi a wielościanu A (leżącej na jego granicy światła i cienia) przecina w punkcie K cień b_1 krawędzi b wielościanu B (leżącej na jego części oświetlonej albo na jego granicy światła i cienia); prowadzimy przez K prostą w kierunku rzutów poziomych promieni światła; prosta ta niech przetnie rzut poziomy b' krawędzi b w punkcie M', wtedy M' jest rzutem poziomym punktu, w którym krawędź b przecina granicę cienia, rzuconego na B przez A. Tym sposobem znajdujemy wszystkie punkty przecięcia krawędzi wielościanu B z granicą cienia, rzuconego nań przez wielościan A. Jeżeli pewien wierzchołek wielościanu A rzuca cień na ścianę wielościanu B, to znajdujemy ten cień, jako punkt, w którym promień światła, poprowadzony przez ów wierzchołek wielościanu A, przecina ścianę wielościanu B.



fig, 80.

74. Zastosujmy teoryę powyższą do przykładu następującego.

Przykład. Wykreślić cienie własne i rzucone ostrosłupa trójkątnego $SABC$ i graniastosłupa $DEFGHJKL$, mających podstawy na płaszczyznie P_1 (fig. 80).

Wykreślamy przedewszystkiem cienie, rzucone przez wielościany na płaszczyznę P_1; ostrosłup rzuca cień S_hAC, graniastosłup—cień $EFK_hL_hH_hD$; stąd widzimy, że granicą światła i cienia jest na powierzchni ostrosłupa trójkąt SAC, a na powierzchni graniastosłupa wielokąt skośny $EFKLHD$. Intuicya pokazuje nam bezpośrednio, że na ostrosłupie oświetlona jest tylko ściana SAC, na graniastosłupie oświetlone są ściany $DHJE$, $EJKF$ i $HJKL$; w rzucie poziomym graniastosłupa ściany widzialne są oświetlone, zaś w rzucie pionowym ściana $DHLG$ widzialna jest ciemna; w rzucie poziomym ostrosłupa ściany SAB i SBC, a w rzucie pionowym — ściana SBC, będąc widzialnemi, znajdują się w cieniu własnym. Graniastosłup rzuca cień na obie płaszczyzny rzutu; wykreślamy go sposobem wiadomym, kreśląc najprzód cienie poziome wszystkich wierzchołków, a następnie wyznaczając cień na płaszczyznie pionowej rzutu (art. **72**). Szukajmy teraz cienia, rzuconego przez ostrosłup na graniastosłup. Proste S_hA i S_hC, będące cieniami krawędzi SA i SC, przecinają w punktach P i Q krawędź DE graniastosłupa, będącą zarazem swym własnym cieniem; prócz tej krawędzi, nie przecinają one cienia żadnej innej krawędzi graniastosłupa, czy to oświetlonej, czy też na granicy światła i cienia się znajdującej. Cień przyjmuje zatem tylko ściana $EJHD$. Prowadząc przez S promień światła, znajdujemy punkt S_1, w którym on przecina tę ścianę, otrzymujemy w ten sposób rzut poziomy S'_1PQ i rzut pionowy $S''_1P''Q''$ cienia, rzuconego przez ostrosłup na graniastosłup. Na płaszczyznę P_1 rzuca ostrosłup cień $APQC$.

ĆWICZENIA.

102) Wykreślić rzuty graniastosłupa, gdy dane są: jego podstawa na płaszczyznie poziomej rzutu, długość krawędzi bocznych oraz kąty, jakie jedna z krawędzi bocznych tworzy z przyległemi bokami podstawy.

103) Wykreślić rzuty graniastosłupa, gdy dane są: ślady płaszczyzny, na której znajdować się ma podstawa, rzut poziomy podstawy, wysokość graniastosłupa, oraz kąty, jakie jedna z krawędzi bocznych tworzy z przyległemi bokami podstawy.

104) Wykreślić rzuty ostrosłupa, gdy dane są: jego podstawa na płaszczyznie poziomej rzutu, długość jednej z krawędzi bocznych oraz kąty, jakie ta krawędź tworzy z przyległemi bokami podstawy.

105) Wykreślić rzuty ostrosłupa, gdy dane są: ślady płaszczyzny, na której znajdować się ma podstawa, rzut pionowy podstawy, wysokość ostrosłupa, oraz kąty, jakie jedna z krawędzi bocznych tworzy z przyległemi bokami podstawy.

106) Wykreślić rzuty ostrosłupa pięciokątnego foremnego, którego podstawa znajduje się w płaszczyznie prostopadłej do osi.

107) Wykreślić rzuty sześcianu, dwunastościanu i dwudziestościanu foremnych w położeniu takiem, aby przekątna, łącząca dwa wierzchołki przeciwległe, była prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutu.

108) Wykreślić rzuty pięciu wielościanów foremnych w położeniu, jakie zajmą, gdy przyjąwszy je w położeniu, podanem odp. na figurach 66, 67, 68, 69 i 70, obrócimy je na pewien kąt ostry około osi, równoległej do płaszczyzny poziomej rzutu.

109) Umieścić czworościan foremny na płaszczyznie, równoległej do osi i danej przez ślady, tak, aby jeden bok podstawy tworzył ze śladami płaszczyzny kąt dany.

110) Na płaszczyznie, danej przez ślady, umieścić sześcian foremny o danej długości krawędzi tak, aby przekątna podstawy przechodziła przez punkt dany i była równoległa do śladu poziomego płaszczyzny.

111) Znaleść rzuty środka i długość promienia kuli, wpisanej w czworościan dany.

112) Wykreślić rzuty czworościanu, gdy dane są długości wszystkich jego krawędzi.

113) Graniastosłup pięciokątny foremny, stojący na płaszczyznie poziomej, przeciąć płaszczyzną dowolną i wykreślić postać rzeczywistą przecięcia.

114) Ostrosłup pięciokątny foremny, stojący na płaszczyznie poziomej, przeciąć płaszczyzną dowolną i wykreślić postać rzeczywistą przecięcia.

115) Wykreślić rozwinięcie graniastosłupa z zadania 103.

116) Wykreślić rozwinięcie ostrosłupa z zadania 105.

117) Wykreślić rozwinięcia graniastosłupa i ostrosłupa z figury 76 i oznaczyć na rozwinięciu ślady przecięcia się wzajemnego.

118) Przeciąć dwunastościan foremny płaszczyzną dowolną i wykreślić postać rzeczywistą przekroju.

119) Przeciąć ostrosłup z zadania 105 płaszczyzną dowolną i wykreślić postać rzeczywistą przekroju.

120) Dowolny ostrosłup czworokątny przeciąć płaszczyzną tak, aby w przekroju otrzymać trapez, którego boki równoległe miałyby długości odpowiednio dane, przyczem jeden z tych boków leżeć ma na podstawie ostrosłupa, drugi — na pewnej określonej ścianie bocznej.

121) Dowolny ostrosłup czworokątny przeciąć płaszczyzną tak, aby w przekroju otrzymać trapez, którego boki równoległe leżałyby na pewnych dwóch ścianach bocznych przeciwległych i przechodziłyby przez dwa punkty, dane odpowiednio na tych ścianach.

122) Dowolny ostrosłup czworokątny przeciąć płaszczyzną tak, aby w przekroju otrzymać równoległobok o danem polu.

123) Wykreślić rzuty figury przecięcia dwóch graniastosłupów pochyłych, mających podstawy na płaszczyznie P_1.

124) Wykreślić rzuty figury przecięcia dwóch ostrosłupów, mających podstawy na płaszczyznie P_1.

125) Wykreślić rzuty figury przecięcia dwóch graniastosłupów, z których jeden ma podstawę na P_1, drugi — na P_2.

126) Wykreślić rzuty figury przecięcia dwóch ostrosłupów, z których jeden ma podstawę na P_1, drugi — na P_2.

127) Wykreślić rzuty figury przecięcia graniastosłupa i ostrosłupa, z których pierwszy ma podstawę na P_1, drugi — na P_2, lub odwrotnie.

128) Wykreślić rzuty figury przecięcia ośmiościanu foremnego i graniastosłupa jakiegokolwiek; przedstawić ślady przecięcia na rozwinięciu każdego z tych wielościanów.

129) Wykreślić rzuty figury przecięcia dwunastościanu foremnego, mającego jednę ścianę na P_1, i sześcianu foremnego, mającego jeden wierzchołek na P_1 i przekątną, z tego wierzchołka wychodzącą, prostopadłą do P_1.

130) Dane są rzuty wielokąta jakiegokolwiek (w ogólności skośnego); wykreślić cienie, rzucane przez niego na płaszczyzny rzutu.

131) Wykreślić cienie (własne i rzucone) wielościanów foremnych, przedstawionych na figurach 66, 67, 68, 69, 70, oraz tychże wielościanów w położeniach, otrzymanych z rozwiązania zagadnień 107 i 108, jakoteż ośmiościanu foremnego w położeniu takiem, jak na fig. 73.

132) Wykreślić cienie graniastosłupa z zagadnienia 103.

133) Wykreślić cienie ostrosłupa z zagadnienia 105.

134) Wykreślić cienie ostrosłupa z zagadnienia 106.

135) Wykreślić cień, rzucony przez graniastosłup na graniastosłup.

136) Wykreślić cień, rzucony przez graniastosłup na ostrosłup.

137) Wykreślić cień, rzucony przez sześcian foremny na ośmiościan foremny.

138) Wykreślić cień, rzucony przez ośmiościan foremny na dwunastościan foremny.

ROZDZIAŁ IV.

LINIE KRZYWE.

§ 1. Krzywe płaskie.

Wyznaczenie krzywej przez rzuty.

75. Linię krzywą wyznacza się w geometryi wykreślnej przez rzuty, podobnie jak punkt, prostą; przez swe rzuty jest krzywa w zupełności wyznaczona; nieokreśloność, która może powstać, gdy prosta, prostopadła do osi rzutu, przecina jeden rzut krzywej w kilku punktach, usuwa się przez oznaczenie rzutów paru właściwych punktów krzywej literami. Ogół promieni, rzucających punkty krzywej na jakąkolwiek płaszczyznę rzutu, tworzy powierzchnię walcową, rzucającą krzywą na tę płaszczyznę. Gdy wyobrazimy sobie obydwie powierzchnie walcowe, rzucające krzywą na płaszczyzny poziomą i pionową rzutu, to krzywa leżeć będzie w przecięciu tych dwóch walców (nie należy wszakże przypuszczać, że krzywa dana stanowi zawsze całkowite przecięcie tych walców).

Styczna.

Poprowadźmy prostą l przez dwa jakiekolwiek punkty A, B krzywej; w rzucie poziomym prosta l' przecina rzut krzywej w punktach A', B', w rzucie pionowym podobnież prosta l'' przecina rzut krzywej w punktach A'', B''. Niech teraz punkt B zbliża się nieograniczenie po krzywej do nieruchomego punktu A; prosta l będzie zmieniać swój kierunek, przechodząc stale przez punkt A, a gdy w granicy punkt B zejdzie się z punktem A, to prosta l stanie się styczną do krzywej w punkcie A. W rzucie poziomym jednocześnie punkt B' zlewa się z punktem A' i l' przechodzi w styczną do rzutu poziomego krzywej w punkcie A', podobnież w rzucie pionowym. Stąd wnioskujemy, że rzutami poziomym i pionowym stycznej do krzywej w punkcie A są styczne do rzutów odpowiednich krzywej w punkcie A', względnie w A''.

Kolineacya rzutów krzywej płaskiej.

76. Gdy krzywa jest płaska, t. j. gdy wszystkie jej punkty leżą w jednej płaszczyznie, to w tej samej płaszczyznie leżą wszystkie jej cięciwy i styczne; dwie zaś cięciwy lub styczne krzywej skośnej w ogólności nie leżą na jednej płaszczyznie. Gdy mamy krzywą płaską, przedstawioną w rzutach poziomym i pionowym, to możemy ogół jej punktów, cięciw i stycznych uważać jako pewną figurę płaską, której rzutami są punkty, cięciwy i styczne odpowiednich rzutów krzywej. Na zasadzie art. **41** widzimy tedy, że rzuty poziomy i pionowy krzywej płaskiej są w kolineacyi równoległej, mianowicie rzuty każdego punktu leżą zawsze na prostej, prostopadłej do osi rzutu, a rzuty każdej cięciwy lub stycznej przecinają się wszystkie na tej samej prostej — osi kolineacyi; prosta ta jest połączonym rzutem poziomym i pionowym prostej, podług której płaszczyzna krzywej przecina drugą główną płaszczyznę dwusieczną. Kolineacya powyższa jest cechą charakterystyczną dla krzywej płaskiej.

77. Przejrzyjmy teraz pewne własności i osobliwości krzywych płaskich, przyczem dla dogodności brać będziemy płaszczyznę krzywej za płaszczyznę rysunku*).

Element krzywej.

Wyobraźmy sobie, że punnkt ruchomy przebiega krzywą linię daną; w każdem położeniu punktu wyobrażamy sobie styczną do krzywej. Punkt krzywej wraz z kierunkiem stycznej w nim do krzywej nazywamy e l e m e n t e m krzywej. W miarę tego, jak punkt posuwa się po krzywej, elementy krzywej przyjmują wciąż inne kierunki, tak że styczna obraca się przytem około punktu ruchomego krzywej; lecz zarazem coraz inny punkt stycznej styka się z krzywą, tak że punkt styczności posuwa się po stycznej ruchomej. Ze względu na kierunek obrotu stycznej około punktu styczności i posuwania się tego punktu po stycznej, rozróżniamy punkty z w y c z a j n e i rozmaite punkty o s o b l i w e krzywej.

Punkty zwyczajne i osobliwe.

---

*) Teoryę szczegółową krzywych płaskich znajdzie czytelnik w dziele S a l m o n a: „Higher plane curves", tłum. F i e d l e r a p. t. „Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven" Lipsk, drugie wyd. 1882.

Punkt krzywej nazywa się *zwyczajnym*, gdy przy przejściu przez ten punkt punktu styczności nie zmienia się ani kierunek obrotu stycznej około tego punktu styczności, ani kierunek posuwania się tego ostatniego po stycznej (fig. 81). W bliskości punktu zwyczajnego krzywa leży po jednej stronie stycznej.

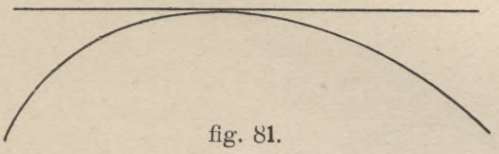


fig. 81.

Przy przejściu punktu ruchomego przez punkt *osobliwy* krzywej zmienia się albo kierunek obrotu stycznej około punktu styczności (fig. 82), albo kierunek posuwania się punktu styczności po stycznej (fig. 83), albo też zmieniają się obydwa te kierunki razem (fig. 84); w pierwszym wypadku punkt osobliwy

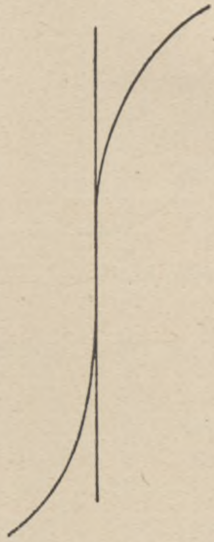


fig. 82.

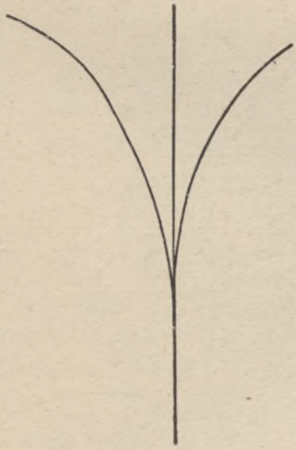


fig. 83.

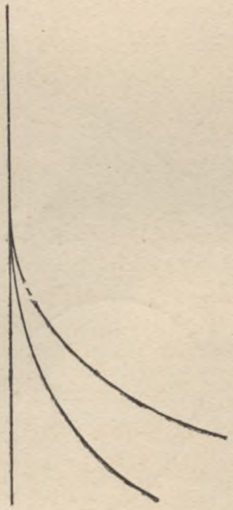


fig. 84.

nazywa się *punktem przegięcia*, w drugim — *punktem zwrotu pierwszego rodzaju*, w trzecim — *punktem zwrotu drugiego rodzaju*. W bliskości punktu przegięcia i punktu zwrotu pierwszego rodzaju krzywa leży po różnych stronach stycznej w tym punkcie, a w bliskości punktu zwrotu drugiego rodzaju — po jednej stronie stycznej odpowiedniej.

Punkty wielokrotne. Oprócz powyżej wymienionych trzech gatunków punktów osobliwych bierzemy jeszcze pod uwagę t. zw. punkty wielokrotne krzywej, t. j. punkty płaszczyzny, przez

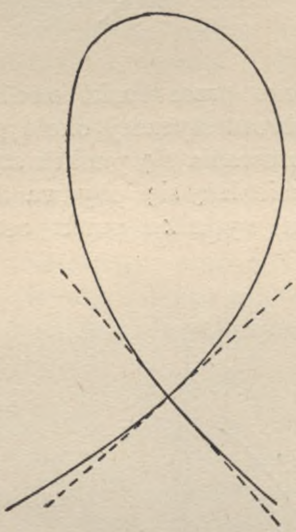


fig. 85.

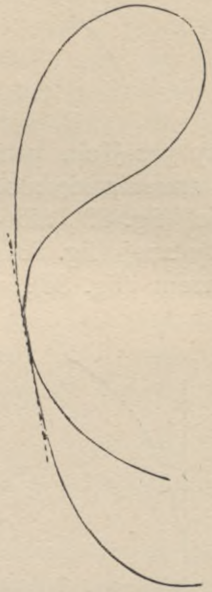


fig. 86.

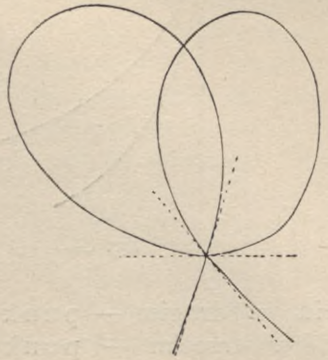


fig. 87.

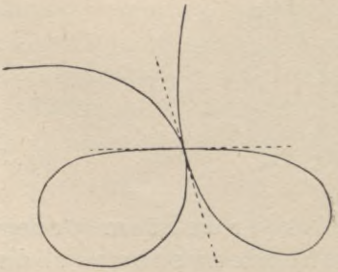


fig. 88.

które punkt ruchomy, przebiegający krzywą, przejść musi dwa lub więcej razy; jeżeli punkt ruchomy, przebiegający krzywą, przechodzi przez ten sam punkt płaszczyzny n razy, to ten punkt płaszczyzny jest punktem n-krotnym krzywej. W punkcie n-krotnym krzywa ma n lub mniej stycznych. Na fig. 85 przedstawiony jest punkt dwukrotny z dwiema różnemi stycznemi, na fig. 86 punkt dwukrotny z jedną styczną; fig. 87 przedstawia punkt trzechkrotny z trzema stycznemi, figura 88 — takiż punkt z dwiema stycznemi.

Opiszemy teraz kilka linij krzywych płaskich, któremi później posiłkować się będziemy.

Cykloidy. **78.** Gdy koło, nie ślizgając się, toczy się po linii prostej, to każdy punkt, niezmiennie połączony z kołem, opisuje linię krzywą, zwaną cykloidą. Punkt, leżący na okręgu koła opisuje t. zw. cykloidę zwyczajną (fig. 90), punkt, niezmiennie związany z kołem, lecz leżący zewnątrz niego, opisuje cykloidę wydłużoną (figura 92), wreszcie punkt, leżący wewnątrz koła i niezmiennie z niem związany, opisuje cykloidę skróconą (fig. 93). Wykreślimy te trzy rodzaje cykloidy.

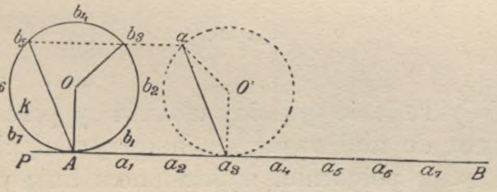


fig. 89.

Cykloida zwyczajna. Niech koło k (fig. 89) o promieniu r toczy się po prostej p; w położeniu początkowem koła niech punkt bieżący cykloidy znajduje się w punkcie styczności A koła i prostej. Gdy koło wykona obrót całkowity, to punkt, opisujący cykloidę, zajmie położenie B na prostej p takie, że $AB = 2\pi r$; długość tę możemy z pewnem przybliżeniem na prostej p odciąć, obierając dla π wartość przybliżoną $3\frac{1}{7}$ *). Podzielmy okrąg koła na pewną liczbę równych części, np. na 8; na tyleż równych części podzielmy odcinek AB; niech $a_1, a_2 \ldots a_7$ będą punktami podziału od-

przybliżony

*) Do wykreślenia długości okręgu koła użyć można także sposobu Kochańskiego, podanego np. w „Geometryi" Badowskiego str. 219.

cinka AB, a b_1, $b_2 \ldots b_7$ punktami podziału koła. Punkty b będą kolejno schodziły się z odpowiedniemi punktami a. Wykreślmy położenie koła, gdy np. punkt b_3 schodzi się z punktem a_3. Punkt bieżący cykloidy będzie wówczas zajmował położenie a takie, że $\angle AOb_3 = \angle aO'a_3$. Gdy prosta, poprowadzona przez b_3 równolegle do p, przecina powtórnie koło k w punkcie b_5, to znajdujemy, że czworokąt Ab_5aa_3 jest równoległobokiem; stąd widzimy, jak można wykreślić punkty cykloidy, odpowiadające różnym punktom podziału koła k i odcinka AB. Mianowicie (fig. 90) prowadzimy odcinki Ab_7, $Ab_6 \ldots$ i z punktów a_1, $a_2 \ldots$ kreślimy odcinki, do nich odpowiednio równoległe i im równe; końce tych odcinków są szukanemi punktami cykloidy.

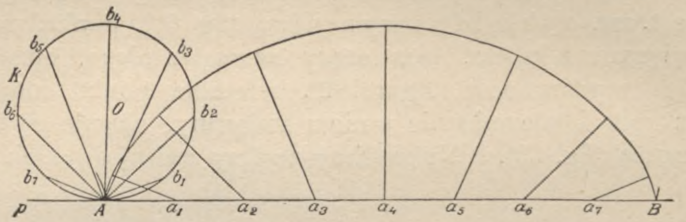


fig. 90.

Styczne do cykloidy zwyczajnej.

Wykreślenie cykloidy ułatwiamy przez kreślenie stycznych do niej w punktach otrzymanych. Gdy rozważymy koło k np. w położeniu, wykreślonem linią punktowaną na fig. 89, to widzimy, że w punkcie a_3 schodzą się element koła i element prostej, i że około punktu tego obraca się całe koło, a wraz z niem i punkt bieżący cykloidy, dopóki nie zejdą się następne elementy koła i prostej; element cykloidy w punkcie a schodzi się przeto z elementem koła, zakreślonego ze środka a_3 promieniem a_3a; wskutek tego jest prosta a_3a normalną do cykloidy w punkcie a, a prostopadła do a_3a w punkcie a — styczną do cykloidy w tym punkcie. Styczna w dowolnym punkcie cykloidy jest zatem prostopadła do prostej, łączącej ten punkt z punktem styczności koła k (w położeniu odpowiedniem) i prostej p.

Cykloida zwyczajna składa się z nieskończonej liczby łuków, będących identycznem powtórzeniem jednego z nich; punkty cykloidy, leżące na prostej p, są punktami zwrotu; styczna w każdym z nich jest prostopadła do p.

Cykloida wydłużona. **79.** Wykreślmy teraz cykloidę wydłużoną.

W położeniu początkowem koło k dotyka prostej p w punkcie A, a punkt bieżący cykloidy niech wówczas znajduje się w A', na przedłużeniu promienia OA (fig. 91). Wykreślmy koło k', współśrodkowe z kołem k i przechodzące przez A', i podzielmy, jak w przypadku cykloidy zwyczajnej, odcinek $AB = 2\pi r$

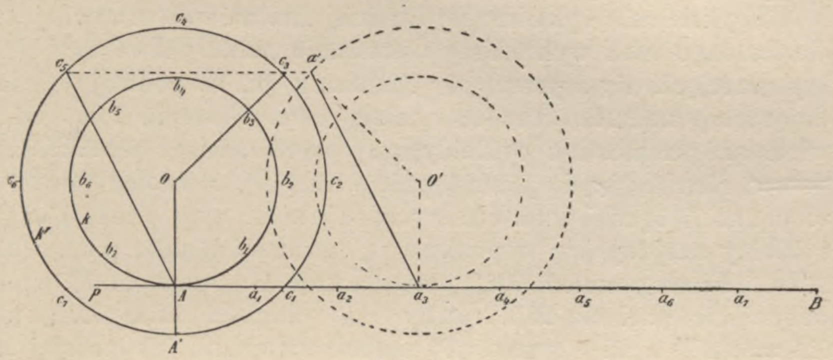


fig. 91.

(r — promień koła k) i koło k na osiem części równych; promienie Ob_1, $Ob_2, \ldots$ przedłużone podzielą koło k' na osiem równych części; oznaczmy punkty podziału koła k' przez c_1, $c_2, \ldots$ Gdy punktem styczności koła k i prostej p będzie np. punkt a_3, to punkt bieżący cykloidy wydłużonej zajmie położenie a' takie, że będzie $\angle AOc_3 = \angle a_3O'a'$; prosta, przez a' równolegle do p poprowadzona, przetnie koło k', oprócz punktu c_3, jeszcze w pewnym punkcie c_5,

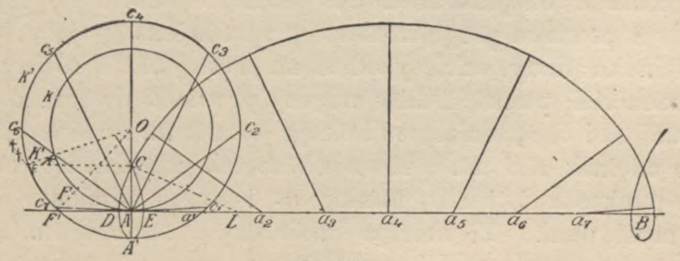


fig. 92.

a wówczas zauważymy, że czworokąt $Ac_5a'a_3$ jest równoległobokiem, skąd wynika następująca konstrukcya cykloidy wydłużonej. Kreślimy odcinki Ac_7, $Ac_6, \ldots$ (fig. 92) i prowadzimy z punktów a_1, $a_2, \ldots.$ odcinki, do nich odp. równoległe i równe im;

końce tych odcinków są punktami cykloidy wydłużonej; podobnież, jak w wypadku cykloidy zwyczajnej, przekonać się możemy, że prostopadłe do tych odcinków w punktach cykloidy są stycznemi do cykloidy w tych punktach.

Cykloida wydłużona składa się również z nieskończonej ilości równych łuków; linia ta posiada punkty podwójne, w których ona przecina samą siebie.

Wykreślenie cykloidy wydłużonej znacznie się ułatwi, jeżeli dla każdego łuku wykreślimy niezależnie punkt podwójny i punkty przecięcia się z prostą p. Oznaczmy punkt podwójny, znajdujący się nad A, przez C; istnieją dwa położenia koła, odpowiadające punktowi C cykloidy; gdy poprowadzimy pro~~mień~~stą CK' ~~koła k'~~, równoległ~~y~~ą do p, następnie prostą CL, równoległą do $K'A$, to punkt L będzie punktem styczności koła, gdy punkt bieżący cykloidy znajduje się w punkcie C, uważanym jako punkt łuku $A'DC$. Niech promień OK' przetnie koło k w punkcie K, wtedy oczywiście odcinek AL równy jest długości łuku AK; lecz $AL = CK'$, a więc punkt K' posiada odległość od prostej AO równą długości łuku AK. Dla znalezienia punktu K' obieramy na kole k kilka punktów dowolnych, przypuszczalnie z różnych stron punktu K; przez każdy z nich prowadzimy promień koła, oraz kreślimy równolegle do AO, w odległościach, odpowiednio równych łukom koła k od A do każdego z tych punktów; przez punkty przecięcia promieni z odpowiedniemi równoległemi prowadzimy odręcznie linię ciągłą, która przetnie koło k' w punkcie K' żądanym; na równoległej do p, poprowadzonej przez K', leżą wszystkie punkty podwójne cykloidy wydłużonej. Odcinek, równy łukowi koła k od punktu A do pewnego punktu X, wykreślić możemy z pewnem przybliżeniem w sposób następujący. Oznaczmy odcinek żądany, odcięty od A na prostej AB i równy łukowi AX, przez AY; punkt X leży między pewnemi dwoma kolejnemi punktami b_r i b_{r+1}, dzielącemi okrąg koła k na n równych części; dzieląc odcinek AB na n równych części, znajdziemy odpowiadające punktom b_r i b_{r+1} punkty a_r i a_{r+1}, pomiędzy któremi leżeć musi punkt Y; dzieląc łuk $b_r b_{r+1}$ i odcinek $a_r a_{r+1}$ na 2, 4, 8.... równych części, znajdziemy coraz bliższe punkty podziału koła, między któremi zawarty jest punkt X, oraz, odpowiednio do nich, coraz węższe granice, pomiędzy któremi zawarty jest punkt Y.

Dla wykreślenia punktu D, w którym cykloida wydłużona przecina prostą p, uważamy, że na zasadzie konstrukcyi ogólnej odcinek AD równy jest długości łuku AF (fig. 92). Wykreślamy tedy odcinek AD według metody powyższej. Mając punkt D, znajdziemy punkt E na zasadzie uwagi, że $AD = AE$.

Cykloida skrócona.

80. Przechodzimy wreszcie do cykloidy skróconej. Jej punkt bieżący niech w położeniu początkowem koła k leży w punkcie A' na promieniu OA (fig. 93), poprowadzonym do punktu styczności A koła k i prostej p. Punkty cykloidy skróconej wykreślamy sposobem zupełnie analogicznym temu, jakiego używaliśmy przy cykloidzie zwyczajnej i wydłużonej; styczna do cykloidy skróconej w pewnym jej punkcie jest również prostopadła do prostej, łączącej ten punkt z punktem styczności prostej p i koła k w położeniu odpowiedniem.

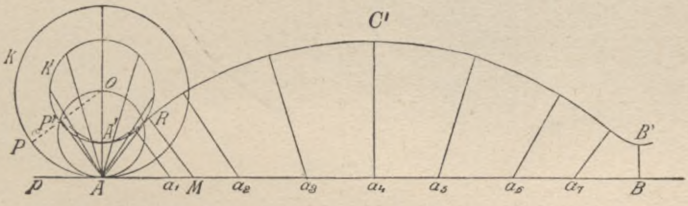


fig. 93.

W punktach A', B' i analogicznych zwraca cykloida skrócona ku prostej p wypukłą stronę, w punktach zaś C' i analogicznych — wklęsłą; pomiędzy punktami A' i C', C' i B',.... posiada krzywa po jednym punkcie przegięcia. Bez dowodzenia podajemy następujące wykreślenie punktów przegięcia cykloidy skróconej. Na odcinku OA, jako na średnicy, opiszmy koło, które przetnie koło k' w pewnym punkcie P'; przedłużenie prostej OP' niech przetnie koło k w punkcie P; odcinamy długość AM, równą długości łuku AP, i kreślimy odcinek MR, równy odcinkowi AP' i równoległy doń; punkt R jest wtedy punktem przegięcia krzywej, a prostopadła do RM w punkcie R — styczną do krzywej w tym punkcie przegięcia.

Inne określenie cykloidy.

Na zasadzie figur 90, 92 i 93 widzimy, że cykloidę określić możemy w inny sposób, jako krzywą, opisaną przez punkt poruszający się ruchem jednostajnym po kole, którego środek jednocześnie porusza się jednostajnie po prostej; cykloida tak powstająca jest zwyczajną, wydłużoną lub skróconą, odpowiednio do tego, czy prędkość ruchu punktu po kole jest równa prędkości ruchu środka koła po prostej, większa od niej lub mniejsza.

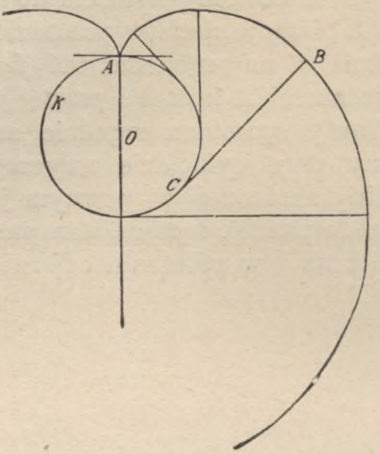


fig. 94.

Rozwinięta koła.

81. Rozpatrzmy teraz krzywą, opisywaną przez punkt prostej, toczącej się bez ślizgania się po kole; krzywa taka nazywa się rozwiniętą koła. W położeniu początkowem punkt bieżący krzywej jest punktem styczności A prostej i koła (fig. 94). W miarę tego, jak prosta toczy się po kole, punkt bieżący krzywej oddala się coraz bardziej od koła i okrąża je nieskończenie wiele razy w postaci linii spiralnej. Gdy prosta z poprzedniego położenia początkowego toczy się po kole w kierunku odwrotnym, to otrzymujemy drugą nieskończoną gałęź krzywej, symetryczną z poprzednią względem średnicy koła, przechodzącej przez A. Niech B będzie pewnym punktem rozwiniętej koła; poprowadziwszy z B styczną BC do koła, znajdziemy na zasadzie określenia krzywej, że długość odcinka BC równa jest długości łuku AC; na tej zasadzie wykreślić możemy dowolną liczbę punktów krzywej; podobnież, jak przy cykloidzie, przekonać się możemy, że styczna do rozwiniętej koła w punkcie B jest prostopadła do BC. W punkcie A krzywa posiada punkt zwrotu. Odległość między dwoma kolejnemi punktami, w których zwoje jednej gałęzi krzywej przecinają styczną jakąkolwiek do koła, równa jest długości okręgu koła.

Spiralna Archimedesa.

82. Zbadajmy krzywą, opisywaną przez punkt niezmiennie złączony z prostą, toczącą się po kole, jak w art. **81**, i w położeniu początkowem prostej znajdujący się w środku koła. Niech prosta potoczy się o łuk $AB = \varphi$ (fig. 95); punkt prostej, który w położeniu początkowem był w A, zajmie teraz położenie K takie, że długość odcinka KB równa będzie długości łuku AB; oznaczywszy promień koła przez p, mieć będziemy:

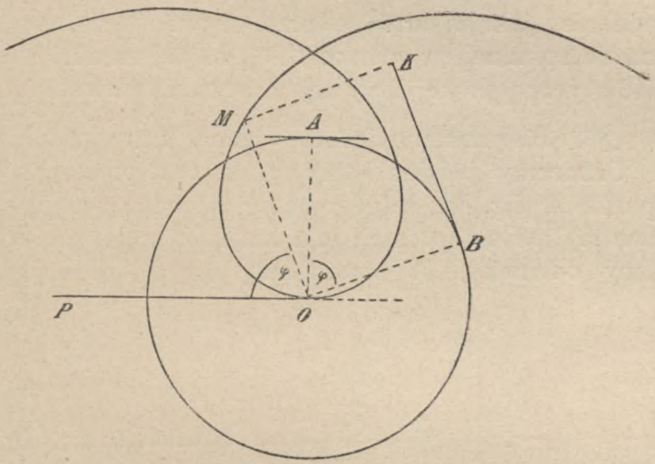


fig. 95.

$BK = p\varphi$; dla otrzymania odnośnego punktu bieżącego krzywej, musimy na prostopadłej do BK w punkcie K od tego punktu odciąć w zwrocie właściwym odcinek $KM = p$. Miejsce geometryczne punktu M będzie krzywą żądaną; nazywamy tę krzywą spiralną Archimedesa. Zauważywszy, że $OMKB$ jest prostokątem, a więc $OM = BK = p\varphi$ i nadto $\angle MOP = \angle AOB = \varphi$, otrzymujemy następujące prostsze określenie spiralnej Archimedesa: gdy promień obracać będziemy około pewnego punktu O od położenia pierwotnego OP i na nim od tegoż punktu O odcinać będziemy długość OM, proporcyonalną do kąta φ, który promień tworzy ze swym kierunkiem pierwotnym, to końce odcinków dadzą spiralną Archimedesa. Tę samą definicyę wysłowić możemy inaczej w sposób następujący: spiralna Archimedesa opisywana jest przez punkt, posuwający się jednostajnie po prostej, gdy ta prosta jednocześnie obraca się jednostajnie około jednego swego punktu. Postać tej linii przedstawiona jest na fig. 95. W zależności od tego, w jakim zwrocie promień zaczynamy obracać od położenia pierwotnego, powstają dwa zwoje spiralnej, które w punkcie O łączą się w sposób ciągły tak, że promień pierwotny jest styczną do podwójnej linii spiralnej w tym punkcie. Obydwa zwoje przecinają się wzajemnie w punktach, leżących na średnicy, prostopadłej do OP, w jednakowych od siebie odległościach, równych $2\pi p$. Odcinek p nazywa się p a r a m e t r e m linii spiralnej.

Podobnie, jak w art. 78, przekonywamy się, że BM jest normalną do spiralnej w punkcie M; na tej zasadzie łatwo jest wykreślić styczną do tej krzywej w punkcie dowolnym.

Sinusoida. **83.** Rozpatrzmy jeszcze jednę krzywą, t. zw. s i n u s o i d ę. Oznaczmy pewien stały punkt na prostej p przez O. Niech punkt A (fig. 96), którego odległość od O oznaczymy przez x, posuwa się po tej prostej; dla każdego położenia punktu A wykreślmy odcinek AB, prostopadły do p i mający długość

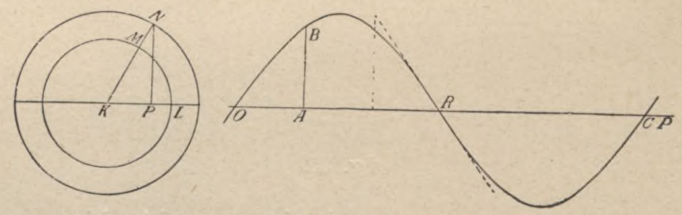


fig. 96.

$y = b \sin \frac{x}{a}$, gdzie a i b są pewne dwa odcinki dane ($b > a$); gdy punkt A przebiega prostą p, punkt B opisuje linię krzywą, zwaną s i n u s o i d ą. Dla wykreślenia punktów sinusoidy kreślimy dwa koła o wspólnym środku K, jedno promieniem a, drugie promieniem b, i obieramy pewną stałą średnicę, przecinającą np. koło wewnętrzne w pewnym punkcie L. Niech pewien promień przecina koło wewnętrzne w M, zewnętrzne — w N; spuśćmy z N prostopadłą NP na prostą KL, wtedy będzie oczywiście: $NP = b \sin \angle MKL$ i $\frac{\smile LM}{a} = \angle MKL$, a więc: $NP = b \sin \frac{\smile LM}{a}$. Gdy zatem odległości x brać będziemy odpowiednio równe długościom łuków LM, a y — równe odpowiednim odcinkom NP, to otrzymywać będziemy punkty sinusoidy. Dla ułatwienia dzielimy uprzednio okrąg koła wewnętrznego na pewną liczbę równych części, i na tyleż równych części dzielimy odcinek OC, równy w przybliżeniu $2\pi a$. Sinusoida ma kształt linii falistej, składającej się z peryodycznie powtarzającego się łuku, dla którego końców różnica odległości x równa jest $2\pi a$. W punktach przecięcia się z prostą p ma sinusoida punkty przegięcia. Łatwo możemy wykreślić styczne w punktach przegięcia. Jakoż, prowadząc sieczną OB, mieć będziemy:

$$\operatorname{tg} \angle BOA = \frac{b}{x} \sin \frac{x}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin \frac{x}{a}}{\frac{x}{a}};$$

gdy B zbliża się do O, x dąży do zera; w granicy sieczna OB przechodzi na styczną w O do sinusoidy, $\angle BOA$ — w kąt tej stycznej z prostą p; ponieważ granicą stosunku $\frac{\sin \frac{x}{a}}{\frac{x}{a}}$, gdy x dąży do zera, jest 1, to widzimy, że styczna trygonometryczna kąta stycznej w O z prostą p równa jest $\frac{b}{a}$; kąt ten możemy na tej zasadzie z łatwością wykreślić. Możnaby w podobny sposób wyprowadzić łatwy sposób kreślenia stycznej w dowolnym punkcie sinusoidy.

§ 2. Krzywe skośne *).

Styczna do krzywej skośnej.

84. Styczną do krzywej w jakimś punkcie A nazywamy, podobnie jak w przypadku krzywej płaskiej, granicę, do której dąży sieczna AB, gdy drugi punkt przecięcia B dąży nieograniczenie po krzywej do zejścia się z punktem A. Każda płaszczyzna, przechodząca przez styczną do krzywej, nazywa się **płaszczyzną styczną** do krzywej; z tych płaszczyzn stycznych wyróżnia się jedna, powstająca w sposób następujący: poprowadźmy przez styczną w A i przez inny punkt w B krzywej płaszczyznę styczną, i niech

Płaszczyzna styczna.

*) Obszerną teoryę krzywych skośnych znaleść można w 2-im tomie Salmona tłóm. Fiedlera: „Analytische Geometrie des Raumes" 3 wyd. 1880.

Płaszczyzna ściśle-styczna. punkt B dąży nieograniczenie do zejścia się z A; płaszczyzna obraca się wtedy około stycznej w A i przyjmuje pewne położenie graniczne, w którem zwiemy ją **płaszczyzną ściśle-styczną** do krzywej w punkcie A.

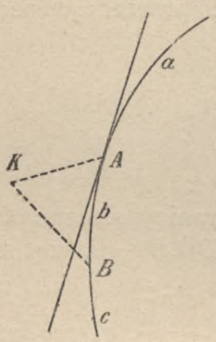


fig. 97.

W bliskości punktu styczności płaszczyzny stycznej krzywa leży po jednej stronie tej płaszczyzny; oczywiście, rozważmy np. płaszczyznę styczną do krzywej w punkcie A i przechodzącą przez pewien punkt K, nie leżący na krzywej (fig. 97). Gdy obierzemy na krzywej dowolny punkt B, różny od A, to możemy płaszczyznę styczną daną uważać jako położenie graniczne płaszczyzny, wyznaczonej przez K, A, B, gdy punkt B dąży do zejścia się z punktem A. Lecz płaszczyzna, wyznaczona przez punkty K, A, B, przecina krzywą w punktach A i B; gdy przeto punkt B jest dostatecznie bliski A, to część AB krzywej leży po jednej stronie płaszczyzny KAB, a części a i c w bliskości punktu A wzgl. B — po drugiej, a ponieważ w granicy część b znika, przeto w bliskości punktu A krzywa przebiega po jednej stronie danej płaszczyzny stycznej. Natomiast w bliskości punktu styczności płaszczyzny ściśle stycznej krzywa przebiega z różnych stron tej płaszczyzny; rzeczywiście płaszczyznę ściśle-styczną w A (fig. 97) uważać możemy jako położenie graniczne płaszczyzny, przechodzącej przez styczną do krzywej w A i przez inny jej punkt B, gdy ten punkt B dąży do zejścia się z punktem A. Ponieważ przed przejściem do granicy płaszczyzna ta dotyka krzywej w A i przecina ją w B, przeto części a i b leżą po jednej jej stronie, część c — po drugiej; zauważywszy zaś, że w granicy część b znika, przekonamy się o prawdziwości twierdzenia powyższego.

Płaszczyzna normalna. Płaszczyzna, prostopadła do stycznej w punkcie styczności, nazywa się **płaszczyzną normalną**, a każda prosta, przecinająca krzywą i leżąca w płaszczyźnie normalnej — **prostą normalną** do krzywej; ta z prostych normalnych, która leży w płaszczyźnie ściśle-stycznej, nazywa się **prostą normalną główną**.

Prosta normalna. Normalna główna.

Punkty osobliwe. **85.** Gdy punkt przebiega krzywą skośną, to styczna w tym punkcie obraca się około niego, i jednocześnie ten punkt styczności posuwa się po stycznej, a płaszczyzna ściśle-styczna obraca się około tej ostatniej. Na tej zasadzie przychodzimy do badania punktów osobliwych krzywej skośnej, mających tę własność, że przy przejściu punktu bieżącego krzywej przez taki punkt zmienia się bądź kierunek posuwania się punktu styczności po stycznej, bądź kierunek obrotu stycznej około punktu styczności w płaszczyznie ściśle-stycznej, bądź też kierunek obrotu płaszczyzny ściśle-stycznej około prostej stycznej, albo też zmieniają się dwa z tych kierunków albo wreszcie wszystkie trzy. Rozmaite przypadki możliwe dają nam siedem gatunków punktów osobliwych krzywej skośnej; nie będziemy wszakże poszczególnie badali tych różnych osobliwości. Oprócz powyżej wskazanych punktów osobliwych, może krzywa skośna posiadać jeszcze punkty wielokrotne.

Punkt osobliwy, jako rzut punktu zwyczajnego krzywej skośnej.

Gdy wykonamy rzut jakikolwiek krzywej skośnej na płaszczyznę dowolną, to w rzucie otrzymamy krzywą płaską, i zdarzyć się może, że rzutem punktu zwyczajnego krzywej skośnej będzie punkt osobliwy krzywej płaskiej; przy głębszem badaniu okazuje się mianowicie, że gdy promień rzucający punktu zwyczajnego A krzywej skośnej leży w płaszczyznie ściśle-stycznej do krzywej w tym punkcie, lecz nie jest sam styczną do krzywej, to rzut A' punktu A jest punktem przegięcia rzutu krzywej; gdy zaś ów promień rzucający jest styczną do krzywej, to punkt A' jest punktem zwrotu rzutu krzywej; gdy wreszcie promień rzucający punktu A przecina krzywą jeszcze w jednym punkcie, to A' jest punktem podwójnym rzutu krzywej.

Powierzchnia rozwijalna, odpowiadająca krzywej skośnej.

86. Z każdą krzywą skośną znajduje się w związku pewna powierzchnia, w zupełności przez tę krzywą wyznaczona. Powierzchnia ta utworzona jest ruchem stycznej do krzywej, gdy punkt styczności przebiega krzywą; styczne do krzywej są tworzącemi prostoliniowemi powierzchni. Powierzchnia powyższa nazywa się *powierzchnią rozwijalną, odpowiadającą danej krzywej*; nazwa „rozwijalnej” pochodzi stąd, że gdy styczne do krzywej prowadzić będziemy od punktu styczności w jednym tylko kierunku, to otrzymana przez to część owej powierzchni daje się rozwinąć na płaszczyznie bez rozdarcia lub sfałdowania; w rozwinięciu z krzywej skośnej powstaje pewna krzywa płaska, styczne do krzywej skośnej przechodzą na styczne do tej krzywej płaskiej.

Model powierzchni rozwijalnej. Możemy na tej zasadzie wykonać model powierzchni rozwijalnej. Przeciąwszy dwa razem złożone kawałki papieru podług krzywej jakiejkolwiek, sklejamy ich brzegi wzdłuż tej krzywej; gdy następnie zegniemy papier tak, aby jeden kawałek papieru odchylił się od drugiego i aby krzywa płaska zgięła się w jakąkolwiek krzywą skośną, to papier przedstawiać będzie powierzchnię rozwijalną, odpowiadającą tej krzywej skośnej.

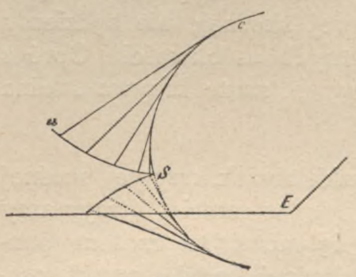


fig. 98.

87. Gdy rozważymy powierzchnię rozwijalną w całej rozciągłości i przetniemy ją płaszczyzną jakąkolwiek, to punkt, w którym płaszczyzna przetnie krzywą skośną, będzie zawsze punktem zwrotu krzywej, podług której płaszczyzna przetnie powierzchnię rozwijalną. Rzeczywiście, niech płaszczyzna E (fig. 98) przecina krzywą c w punkcie zwyczajnym S, a powierzchnię

Krawędź zwrotu. rozwijalną — podług linii u. Punkty linii u powstają z przecięcia się płaszczyzny E ze stycznemi do krzywej c, a styczne do u są prostemi przecięcia płaszczyzny E i płaszczyzn ściśle-stycznych do krzywej c; przy przejściu przez punkt S płaszczyzna ściśle-styczna zachowuje kierunek obrotu około stycznej, dzięki czemu styczna do krzywej u przy przejściu punktu krzywej przez S zachowuje kierunek obrotu około tego punktu styczności; styczna do c, przy przejściu punktu styczności przez S, zachowuje również kierunek obrotu około tego punktu, lecz uważając, że punkt styczności dzieli tę styczną na dwie części, spostrzeżemy z łatwością, że części krzywej u, na które dzieli ją punkt S, są utworzone przez punkty różnych części ruchomej stycznej do c; wskutek tego punkt linii u, przy przejściu przez S, zmienia kierunek posuwania się po stycznej do u; widzimy z tego, że punkt S jest punktem zwrotu dla krzywej u, co było do dowiedzenia. Na zasadzie tej własności krzywa skośna nazywa się krawędzią zwrotu odpowiadającej jej powierzchni rozwijalnej.

Na poprzednio opisanym modelu powierzchni rozwijalnej krawędź zwrotu występuje z wielką wyrazistością.

Prowadząc z dowolnie obranego punktu proste, odpowiednio równoległe do kolejnych tworzących powierzchni rozwijalnej

(t. j. do kolejnych stycznych krzywej skośnej), utworzymy t. zw. stożek kierunkowy owej powierzchni.

88. Rozwiążmy teraz kilka zagadnień względem krzywej skośnej, danej przez rzuty.

Wykreślić styczną do krzywej skośnej c w punkcie P.

Kreślenie stycznej.

Rzuty poziomy i pionowy krzywej c niech będą odpowiednio c' i c''. Kreślimy styczną t' do c' w punkcie P' i styczną t'' do c'' w punkcie P''; wtedy proste t' i t'' są rzutami stycznej do c w punkcie P.

Wykreślić ślady płaszczyzny ściśle-stycznej do krzywej skośnej c w punkcie P.

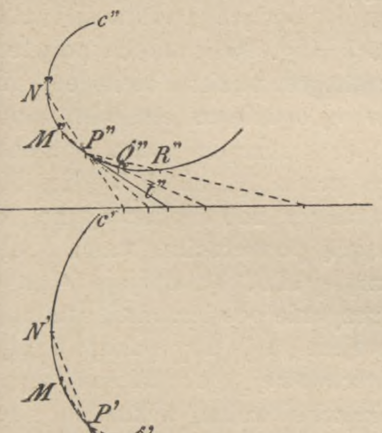


fig. 99.

Kreślenie płaszczyzny ściśle-stycznej.

Kreślimy najprzód rzuty stycznej t do krzywej c w punkcie P (figura 99). Ślad poziomy s_1 płaszczyzny S żądanej przejdzie oczywiście przez ślad poziomy T_1 prostej t. Gdy oznaczymy przez M_1 ślad poziomy prostej, łączącej punkt P z dowolnym punktem M krzywej c, to prosta T_1M_1 będzie śladem poziomym płaszczyzny stycznej do krzywej c w punkcie P i przechodzącej nadto przez punkt M krzywej. Płaszczyzna S jest granicą, do której dąży owa płaszczyzna styczna, kiedy punkt M schodzi się z P; s_1 jest przeto granicą, do której dąży prosta T_1M_1, gdy punkt M_1 schodzi się z T_1. Gdy zatem obierzemy kilka punktów N, M, Q, R na krzywej c (najlepiej po dwa z każdej strony punktu P), i, wykreśliwszy ślady poziome N_1, M_1, Q_1, R_1 prostych PN, PM, PQ, PR, poprowadzimy odręcznie krzywą $N_1M_1T_1Q_1R_1$, następnie wykreślimy styczną do tej krzywej w punkcie T_1, to styczna ta będzie śladem s_1 szukanym. W podobny sposób wykreślić możemy ślad pionowy s_2 powyższej płaszczyzny ściśle-stycznej.

Linia śrubowa. **89.** Jako przykład krzywej skośnej zbadajmy t. zw. h e l i s ę, czyli l i n i ę ś r u b o w ą, krzywą niezmiernie ważną w mechanice i technice. Krzywą tę opisuje punkt, posuwający się równomiernie po tworzącej walca obrotowego, podczas gdy ta tworząca obraca się równomiernie około osi walca. Przy danym kierunku obrotu tworzącej około osi, kierunek ruchu punktu bieżącego po tworzącej może być dwojaki; rozróżniamy wskutek tego dwa rodzaje linij śrubowych: gdy dla obserwatora, stojącego wzdłuż osi walca (bez różnicy, w którym kierunku), punkt bieżący linii śrubowej zjawia się, wznosząc się, z prawej strony, to linia śrubowa nazywa się p r a w o z w r o t n ą, gdy z lewej — l e w o z w r o t n ą. Oś walca nazywa się o s i ą l i n i i ś r u b o w e j.

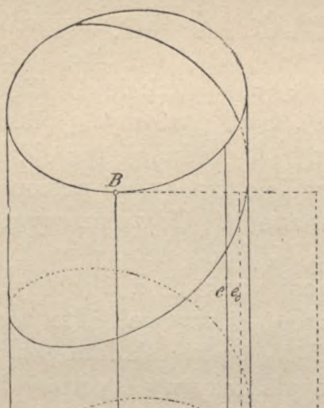


fig. 100.

Rozwinięcie linii śrubowej. **90.** Oznaczmy koło, będące podstawą walca, przez k (fig. 100); niech położenie początkowe punktu bieżącego linii śrubowej będzie na tem kole w punkcie A; tworząca walca, przechodząca przez A, niech będzie AB; wyobraźmy sobie płaszczyznę, dotykającą powierzchni walca podług tworzącej AB, i rozwijajmy na tej płaszczyznie powierzchnię walca jednostajnie tak, aby punkt bieżący linii śrubowej, poruszający się po powierzchni walca, w każdem swem położeniu jednocześnie znajdował się na owej płaszczyznie. Oznaczmy linię śrubową przez s, a linię, powstającą z jej rozwinięcia przez s_0. Przy tem rozwinięciu koło k przejdzie na prostopadłą k_0 do AB, a tworzące walca — na proste, prostopadłe do k_0. Niech P będzie pewnym punktem linii śrubowej, a P_0 — położeniem tego punktu w rozwinięciu; tworząca e, przechodząca przez P, przejdzie na prostą e_0, poprowadzoną przez P_0 prostopadle do k_0; odległość PQ punktu P od podstawy walca równa jest odległości P_0Q_0 punktu P_0 od prostej k_0, a długość łuku AQ — odcinkowi AQ_0. Na zasadzie określenia linii śrubowej widzimy, że stosunek P_0Q_0 i AQ_0 jest jednakowy dla wszystkich punktów linii s_0, stąd wnioskujemy, że linia ta jest prostą, a więc: *przy rozwinięciu walca na płaszczyznie linia śrubowa przechodzi na linię prostą.*

Z tego wynikają pewne dalsze własności linii śrubowej, z których niektóre podamy.

Dwa punkty wyznaczają linię śrubową.

Przez dwa punkty dowolnie obrane na powierzchni walca jest linia śrubowa, przechodząca przez nie, zupełnie wyznaczona, gdy nadto wskazane jest, czy linia ma być prawozwrotną, czy też lewozwrotną, oraz dana jest liczba obrotów całkowitych pomiędzy temi punktami, przez te dane bowiem jest w zupełności wyznaczona rozwinięta linii żądanej.

Linia śrubowa przecina wszystkie tworzące walce pod tym samym kątem, ma to bowiem miejsce w rozwinięciu, a przez rozwijanie nie zmienia się kąt pomiędzy dwiema liniami na powierzchni walca.

Nachylenie linii śrubowej.

Spełnienie kąta powyższego do 90^0 nazywa się *nachyleniem linii śrubowej*; nachylenie to jest oczywiście równe kątowi α, utworzonemu przez proste s_0 i k_0. Gdy $\alpha = 0$, linia śrubowa przechodzi na koło, a gdy $\alpha = 90^0$ — w linię prostą, możemy przeto prostą i koło uważać jako przypadki szczególne linii śrubowej.

Stożek kierunkowy.

Ze stałości kąta nachylenia wynika, że *wszystkie styczne do linii śrubowej są jednakowo nachylone względem płaszczyzny podstawy walca*, mianowicie pod tym kątem nachylenia α. Stożek kierunkowy powierzchni rozwijalnej, odpowiadającej linii śrubowej, jest przeto stożkiem obrotowym (patrz art. **105**).

Wysokość i krok linii śrubowej.

Linia śrubowa przecina jednę tworzącą walca w punktach jednakowo od siebie odległych; odległość między dwoma kolejnemi punktami przecięcia nazywa się *wysokością kroku* linii śrubowej, a długość odcinka linii śrubowej, zawartego między temi punktami przecięcia — *krokiem*. Gdy promień koła k (zwany również *promieniem linii śrubowej*) oznaczymy przez r, wysokość kroku linii śrubowej przez h, a długość kroku przez p, to mieć będziemy:

$$h = 2\pi r \operatorname{tg} \alpha, \quad p = 2\pi r \sec \alpha.$$

Przekrój poprzeczny powierzchni rozwijalnej linii śrubowej.

Zobaczmy, podług jakiej krzywej powierzchnię rozwijalną linii śrubowej przecina płaszczyzna dowolna, prostopadła do osi, np. płaszczyzna podstawy walca, na którym leży linia śrubowa. Linia szukana *u* (fig. 101) utworzona jest przez punkt, w którym tę płaszczyznę przecina styczna bieżąca do linii śrubowej. Lecz przez każdą styczną *t* do linii śrubowej przechodzi pewna płaszczyzna E_0, styczna do walca, na której śladzie leży ślad *T* stycznej *t*; widzimy stąd,

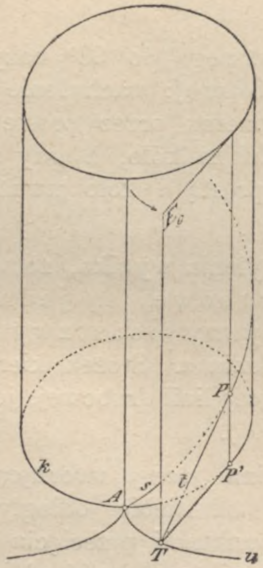


fig. 101.

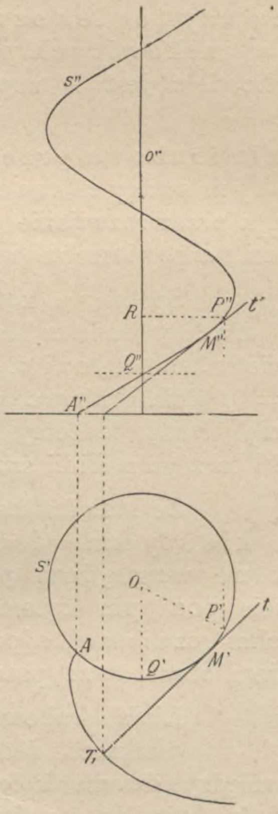


fig. 102.

że linia *u* może być uważana, jako powstająca przez toczenie się śladu płaszczyzny E_0 po kole *k*, linia *u* jest przeto rozwiniętą koła (art. **81**), zatem: p ł a s z c z y z n a, p r o s t o p a d ł a d o o s i l i n i i ś r u b o w e j, p r z e c i n a o d p o w i a d a j ą c ą j e j p o w i e r z c h n i ę rozwijalną podług rozwiniętej koła. Oczywiście, tę samą rozwiniętą koła otrzymujemy dla wszystkich linij śrubowych, nakreślonych na tym samym walcu.

91. Zbadajmy teraz rzuty linii śrubowej.

Rzuty linii śrubowej z osią pionową.

Niech najprzód oś o linii śrubowej s będzie prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutu (figura 102). W rzucie poziomym otrzymujemy wtedy oczywiście koło s', podług którego płaszczyznę P_1 przecina powierzchnia walca, na którym nakreślona jest linia śrubowa. Rozważmy, jaka krzywa s'' otrzymuje się w rzucie pionowym. Oznaczmy przez A punkt przecięcia linii śrubowej z płaszczyzną P_1, a przez Q — najbliższy do P_1 punkt tej linii, leżący w płaszczyznie prostopadłej do P_2 i przechodzącej przez oś o; oznaczmy dalej przez y odległość punktu bieżącego P'' linii s'' od prostej o'', a przez x — odległość tegoż punktu od prostej, poprowadzonej przez Q'' równolegle do osi rzutu; zachowując poprzednie oznaezenia r i h i oznaczając chwilowo kąt $P'OQ'$ przez φ, mieć będziemy na zasadzie określenia linii śrubowej:

$$\frac{r\varphi}{x} = \frac{2\pi r}{h},$$

skąd:

$$\varphi = 2\pi \frac{x}{h};$$

prócz tego daje nam figura 102:

$$y = r \sin \varphi,$$

a więc mamy dla punktów linii s'' zależność:

$$y = r \sin \left(2\pi \frac{x}{h}\right).$$

Z tej zależności widzimy, na zasadzie artykułu **83**, że rzut pionowy linii s jest sinusoidą; gdy zechcemy sinusoidę tę wykreślić sposobem, wskazanym w artykule **83**, to musimy przyjąć: $b = r$, $a = \frac{h}{2\pi}$; za koło o promieniu b przyjmiemy oczywiście koło s', odcinek zaś $\frac{h}{2\pi}$ możemy wykreślić z dostateczną dokładnością, biorąc na 2π wartość przybliżoną np. $^{44}/_{7}$. Odległość punktu Q'' od osi rzutu równa jest na zasadzie określenia linii śrubowej $\frac{h . \smile AQ'}{2\pi r}$, gdzie $\smile AQ'$ oznacza długość łuku AQ'; odległość tę możemy wykreślić jako czwartą proporcyonalną do odcinków $\frac{h}{2\pi}$, $\smile AQ'$, r.

92. Przed zbadaniem rzutów linii śrubowej, której oś jest pochylona względem płaszczyzn rzutu, musimy zbadać rzut równoległy pochyły linii śrubowej na płaszczyznę, prostopadłą do jej osi; krzywa, otrzymana w tym rzucie, będzie zarazem cieniem, rzuconym przez linię śrubową na płaszczyznę rzutu przy oświetleniu równoległem, gdy kierunek promieni rzucających przyjmiemy za kierunek promieni światła.

Rzut równoległy pochyły linii śrubowej jest cykloidą.

W celu otrzymania rzutu równoległego linii śrubowej zauważmy, że można tę linię również określić, jako opisaną przez punkt P, poruszający się równomiernie po kole k, podczas gdy środek tego koła posuwa się jednostajnie po prostej o, prostopadłej do płaszczyzny koła; prosta ta jest osią linii śrubowej. Ponieważ płaszczyzna koła k jest równoległa do płaszczyzny rzutu, to w rzucie tego koła otrzymamy równe mu koło k', po którem rzut P' punktu P porusza się z tą samą stałą szybkością, z jaką punkt P porusza się po kole k; ponieważ przytem środek koła k porusza się jednostajnie po prostej o, to w rzucie środek koła k' porusza się jednostajnie po prostej o', będącej rzutem prostej o; stąd wynika (ustęp końcowy art. **80**), że linia opisana przez punkt P', czyli rzut linii śrubowej, jest cykloidą. Rodzaj tej cykloidy zależny jest od kierunku promieni rzucających. Oznaczmy przez φ kąt nachylenia tych promieni do płaszczyzny rzutu, a przez α, jak poprzednio, kąt nachylenia linii śrubowej (t. j. kąt nachylenia jej stycznych do płaszczyzny rzutu). Podczas gdy P opisuje całkowity okrąg koła k, środek tego koła posuwa po prostej o na długość, równą wysokości h; w tym samym czasie punkt P' opisuje całkowity okrąg koła k', a środek tego koła posuwa się po o' na długość równą h ctg φ. Gdy zatem promień koła k' (lub k) oznaczymy przez r, to prędkość ruchu punktu P' po kole k' ma się do prędkości ruchu środka tego koła po o', jak $2\pi r$ do h ctg φ, czyli, ponieważ jest $h = 2\pi r \operatorname{tg} \alpha$, jak 1 do $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \varphi$, t. j. jak $\operatorname{tg} \varphi$ do $\operatorname{tg} \alpha$. Lecz φ i α są kąty ostre, przeto gdy jest: $\operatorname{tg} \varphi > \operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$, lub $\operatorname{tg} \varphi < \operatorname{tg} \alpha$, to odpowiednio jest: $\varphi > \alpha$, $\varphi = \alpha$, $\varphi < \alpha$. Gdy zatem jest $\varphi = \alpha$, to na zasadzie art. **80** wnioskujemy, że rzutem linii śrubowej jest cykloida zwyczajna, gdy $\varphi > \alpha$ — cykloida wydłużona, a gdy $\varphi < \alpha$ — skrócona.

Rzuty linii śrubowej o osi pochyłej.

93. Znajdźmy teraz rzut prostokątny linii śrubowej, której oś jest pochylona względem płaszczyzny rzutu. Wyobraźmy sobie płaszczyznę pomocniczą, prostopadłą do osi linii śrubowej. Na zasadzie artykułu poprzedniego, promienie, rzucające punkty linii śrubowej na płaszczyznę rzutu, przetną płaszczyznę pomocniczą podług cykloidy; rzut szukany linii śrubowej uważać możemy, jako rzut owej cykloidy w kierunku promieni rzucających; możemy wykreślić kład tej cykloidy na płaszczyznę rzutu, wówczas znajdziemy rzut szukany, jako figurę, będącą w kolineacyi prostokątnej z tym kładem (artykuł **30**).

94. Na zakończenie rozwiążmy parę zadań konstrukcyjnych, odnoszących się do linii śrubowej.

W y k r e ś l i ć r z u t y s t y c z n e j t d o l i n i i ś r u b o w e j w p u n k c i e M n a n i e j (fig. 102).

Kreślenie stycznej do linii śrubowej.

Rzutem poziomym t' stycznej żądanej jest styczna do koła s' w punkcie M'; odcinając na t' od punktu M' w kierunku właściwym długość łuku AM', otrzymamy punkt T_1, będący śladem poziomym stycznej t żądanej. Punkt T_1 jest oczywiście punktem przecięcia prostej t' i rozwiniętej koła s' z punktem początkowym A.

W y k r e ś l i ć r z u t y s t y c z n e j t d o l i n i i ś r u b o w e j, g d y d a n a j e s t p r o s t a l, n a c h y l o n a d o P_1 p o d k ą t e m α, d o k t ó r e j s t y c z n a t m a b y ć r ó w n o l e g ł a.

Na każdym kroku linii śrubowej znaleść można jeden punkt, w którym styczna czyni zadość warunkowi danemu; znajdźmy jednę styczną, obierając dowolnie pewien określony krok linii śrubowej.

Wykreślamy styczne t' i t'_1 do koła s', równoległe do rzutu poziomego l' prostej l i uważamy t' i t'_1 za rzuty poziome pewnych stycznych do linii śrubowej, których rzuty pionowe możemy z łatwością wykreślić; jeden z tych rzutów pionowych będzie równoległy do l'', a to dzięki temu, że prosta l jest nachylona do P_1 pod kątem α; gdy z prostych t'' i t''_1 pierwsza jest do l'' równoległa, to t' i t'' są rzutami stycznej żądanej.

W y k r e ś l i ć s t y c z n ą d o l i n i i ś r u b o w e j, r ó w n o l e g ł ą d o p ł a s z c z y z n y d a n e j.

Wykreślamy prostą dowolną, równoległą do płaszczyzny danej lub leżącą w niej, i nachyloną do płaszczyzny P_1 pod kątem α (por. ćw. 53), i znajdujemy, jak w zagadnieniu poprzedniem, rzuty stycznej, równoległej do tej prostej. W przypadku ogólnym znajdziemy dwa różne kierunki prostej pomocniczej, przeto w ogólności zadanie niniejsze ma dwa rozwiązania.

ĆWICZENIA.

139) Dany jest rzut poziomy krzywej płaskiej; znając nadto rzuty pionowe trzech jej punktów, wykreślić rzut pionowy tej krzywej.

140) Wykreślić punkty, w których płaszczyzna, dana przez ślady, przecina krzywą, daną przez rzuty.

141) Wykreślić ślady płaszczyzny normalnej do krzywej danej przez rzuty w danym na niej punkcie.

142) Wykreślić rzuty głównej normalnej do krzywej, danej przez rzuty, w danym jej punkcie.

143) Znaleść normalną do krzywej, danej przez rzuty, w danym na niej punkcie, prostopadłą do płaszczyzny ściśle-stycznej do tej krzywej w tym punkcie.

144) Dana jest linia śrubowa z osią, prostopadłą do P_1. Wykreślić cień, rzucony przez tę linię na płaszczyznę rzutu przy oświetleniu równoległem, gdy cień ten pada na obie płaszczyzny rzutu.

145) Wykreślić cień, rzucony na płaszczyzny rzutu przez linię śrubową, mającą oś pochyloną względem tych płaszczyzn.

146) Okazać, że płaszczyzna ściśle-styczna do linii śrubowej w pewnym jej punkcie zawiera prostopadłą, spuszczoną z tego punktu na oś linii śrubowej.

147) Okazać, że styczna do linii śrubowej w pewnym jej punkcie jest prostą największego spadku (art. **40**) dla płaszczyzny ściśle-stycznej do linii śrubowej w tymże punkcie.

148) Okazać, że wszystkie płaszczyzny ściśle-styczne do linii śrubowej są jednakowo nachylone do płaszczyzny poziomej rzutu.

149) Okazać, że jeżeli na stycznych do linii śrubowej odcinać od punktu styczności w jednym zwrocie odcinki równe, to końce tych odcinków utworzą nową linię śrubową o tej samej osi i tej samej wysokości, co pierwotna.

150) Przez punkt dany, nie leżący na danej linii śrubowej, poprowadzić płaszczyznę ściśle-styczną do tej linii.

151) Wykreślić ślady płaszczyzny ściśle-stycznej do danej linii śrubowej i równoległej do danej prostej.

ROZDZIAŁ V.

POWIERZCHNIA WALCOWA I STOŻKOWA.

§ 1. O powierzchniach w ogólności.

Wyznaczenie powierzchni. **95.** W geometryi wykreślnej nie możemy wyznaczać powierzchni przez rzuty (podobnie, jak płaszczyzna nie daje się przez rzuty wyznaczyć). Dla wyznaczenia powierzchni wyobrażamy ją sobie, jako powstałą przez ruch pewnej krzywej, w ogólności przekształcającej się podczas tego ruchu, przyczem zarówno prawo ruchu, jakoteż prawo przekształcania się krzywej zakładamy, jako wiadome; krzywą powyższą nazywamy t w o r z ą c ą powierzchni; gdy dane są rzuty tworzącej w jednem jakiemkolwiek położeniu, to na zasadzie praw ruchu i przekształcenia potrafimy wykreślić rzuty tej tworzącej w każdem innem położeniu. Postępowanie to wyjaśnimy na paru przykładach.

Przykłady. Gdy krzywa niezmienna obraca się około prostej, niezmiennie z nią związanej, to opisuje ona tak zw. p o w i e r z c h n i ę o b r o t o w ą. Dla uproszczenia załóżmy, że oś obrotowa jest równoległa do jednej z płaszczyzn rzutu. Gdy dane są jej rzuty, oraz rzuty tworzącej w jakiemkolwiek położeniu, to przy pomocy metody artykułu **54** potrafimy wykreślić rzuty tworzącej w każdem innem położeniu, przez to zaś powierzchnia obrotowa będzie w zupełności wyznaczona.

Niech elipsa porusza się tak, że jej środek posuwa się po prostej, do której płaszczyzna elipsy pozostaje stale prostopadłą; podczas tego ruchu niech elipsa przekształca się tak, iż kierunek osi, oraz ich stosunek niech zostają bez zmiany, końce zaś jednej z nich (a więc i drugiej) niech opisują pewną elipsę stałą. Powierzchnia, tak opisana przez elipsę ruchomą, zwie się elipsoidą. Dla wyznaczenia elipsoidy w zupełności wystarcza przeto podać rzuty elipsy ruchomej w jednem położeniu, oraz rzuty elipsy stałej, opisywanej przez dwa wierzchołki przeciwległe elipsy tworzącej.

W dalszym wykładzie napotkamy wiele innych przykładów wyznaczania powierzchni sposobem powyższym.

Punkt na powierzchni.

Podobnie, jak nie można z samego rysunku, bez konstrukcyj pomocniczych, orzec, czy punkt dany leży na płaszczyznie danej (art. **40**), tak samo nie można tego uczynić w przypadku powierzchni jakiejkolwiek; punkt dany leży na powierzchni, gdy przez niego można poprowadzić tworzącą tej powierzchni. Gdy dany jest rzut poziomy punktu, i pragniemy wykreślić jego rzut pionowy tak, aby punkt ten znajdował się na powierzchni danej, to wyznaczymy rzuty tworzącej w położeniu takiem, aby jej rzut poziomy przeszedł przez rzut poziomy punktu, wówczas rzut pionowy punktu leżeć musi na rzucie pionowym tworzącej.

Styczna do powierzchni.

96. Gdy na powierzchni nakreślimy jakąkolwiek krzywą i w dowolnym punkcie krzywej poprowadzimy styczną do niej, to prosta ta nazywa się styczną do powierzchni w tym samym punkcie. Wszelka płaszczyzna, przechodząca przez prostą, styczną do powierzchni w pewnym jej punkcie, przecina powierzchnię podług krzywej, dla której ta prosta jest styczną w tymże punkcie. W punkcie, danym na powierzchni, można do niej poprowadzić nieskończenie wiele stycznych; wszystkie te proste, styczne do powierzchni w jednym punkcie, leżą na jednej płaszczyznie, którą nazywamy płaszczyzną styczną do powierzchni w tym punkcie. Płaszczyzna styczna do powierzchni w pewnym punkcie jest w zupełności wyznaczona przez dwie proste, styczne do powierzchni w tym punkcie; z rzutów tych prostych stycznych możemy łatwo wykreślić ślady owej płaszczyzny stycznej. Prosta, poprowadzona przez punkt styczności prostopadle do płaszczyzny stycznej, nazywa się normalną do powierzchni w tym punkcie.

Płaszczyzna styczna.

Normalna.

Ślady powierzchni.

Linia, podług której powierzchnię przecina pewna płaszczyzna, np. płaszczyzna rzutu, nazywa się **śladem** powierzchni na tej płaszczyźnie; w szczególności, gdy płaszczyzną przecinającą jest płaszczyzna pozioma (wzgl. pionowa) rzutu, to otrzymujemy ślad poziomy (wzgl. pionowy) powierzchni.

Punkty widzialne i niewidzialne.

Kreśląc rzuty punktów i linij, leżących na powierzchni, odróżniamy te z nich, które są widzialne, od tych, które nie są widzialne, podobnie, jak przy wielościanach. Widzialnemi są te punkty, w których promienie rzucające po raz pierwszy przecinają powierzchnię, wszystkie inne są niewidzialne. Ogół linij, oddzielających punkty widzialne od niewidzialnych, tworzy t. zw. **kontur istotny** powierzchni; rzut konturu istotnego nazywa się **konturem pozornym** (por. art. 57). Płaszczyzny styczne do powierzchni w punktach konturu istotnego są prostopadłe do płaszczyzny rzutu.

Kontur istotny i pozorny.

Gdy zamiast promieni rzucających weźmiemy pod uwagę promienie światła, to punkty, w których promienie te po raz pierwszy przecinają powierzchnię, będą oświetlone, pozostałe zaś pogrążone będą w cieniu własnym lub rzuconym; zamiast konturu istotnego mieć będziemy **granicę światła i cienia** (por. art. 69).

Po powyższych uwagach ogólnych przechodzimy do rozważania szczególnych klas powierzchni.

§ 2. Wyznaczenie powierzchni walcowych i stożkowych.

Powierzchnia walcowa w ogólności.

97. Powierzchnia walcowa powstaje przez ruch prostej, która się porusza, pozostając równoległą do pewnego kierunku stałego. Powierzchnia walcowa wyznaczoną będzie w zupełności, gdy, oprócz kierunku tworzących, dane będą rzuty linii, przez punkty której przechodzi tworząca podczas swego ruchu; linia ta nazywa się **kierującą**; rzuty kierującej i kierunek tworzącej określają całkowicie prawo ruchu tej ostatniej. Oczywiście, kierująca może być linią skośną lub płaską; w szczególności za kierującą przyjąć możemy ślad powierzchni walcowej na jednej z płaszczyzn rzutu; zresztą, gdy jako kierująca dana jest inna linia jakakolwiek, to możemy zawsze ślad powierzchni wykreślić, jako miejsce geometryczne śladów wszystkich tworzących; dla dogodności przeto zakładać będziemy zawsze, że powierzchnia walcowa dana jest przez ślad poziomy i rzuty kierunku tworzących.

Powierzchnia walcowa eliptyczna.

Z pośród powierzchni walcowych szczególnie ważne są te, których ślad jest elipsą (lub w szczególności kołem); nazywamy je *powierzchniami walcowemi eliptycznemi*. Przecinając powierzchnię walcową eliptyczną płaszczyzną dowolną, otrzymujemy w przekroju elipsę, możemy bowiem linię przekroju uważać, jako rzut równoległy śladu powierzchni w kierunku jej tworzących (por. art. **22**). Przekroje płaskie równoległe są oczywiście równe. Wykażemy, że dla każdej powierzchni walcowej eliptycznej istnieją dwa kierunki płaszczyzn, przecinających ją podług kół. Przetnijmy w tym celu powierzchnię daną płaszczyzną, prostopadłą do jej tworzących, i następnie płaszczyznę tę obracajmy około osi wielkiej elipsy przekroju; otrzymywać będziemy elipsy ze wspólną osią wielką i coraz większą osią małą, aż w pewnem położeniu oś mała stanie się równą wielkiej; odpowiednia elipsa jest wówczas kołem; przy dalszym obrocie osie wielka i mała zamieniają swe role. Otrzymaliśmy tym sposobem jeden kierunek płaszczyzny, przecinającej powierzchnię badaną podług koła; drugi kierunek jest z tamtym symetryczny względem płaszczyzny, prostopadłej do tworzących. W szczególnym przypadku mogą te dwa kierunki zejść się razem; wskutek powyżej wspomnianej symetryi płaszczyzny, przecinające powierzchnię podług kół, są w tym wypadku prostopadłe do tworzących; powierzchnia walcowa eliptyczna z jednym kierunkiem przekrojów kołowych jest przeto powierzchnią walcową obrotową; może ona być utworzona przez obrót tworzącej prostoliniowej około równoległej do niej osi, będącej miejscem środków przekrojów kołowych.

Przekroje kołowe.

Powierzchnia walcowa obrotowa.

Płaszczyzna styczna.

98. Dowiedziemy teraz następującej własności płaszczyzn stycznych do powierzchni walcowej.

Płaszczyzna, styczna do powierzchni walcowej w pewnym punkcie, jest styczną do niej w każdym punkcie tworzącej, przechodzącej przez ten punkt.

Chcąc otrzymać płaszczyznę, styczną do powierzchni walcowej w punkcie A (fig. 103), prowadzimy na powierzchni przez punkt A dowolną linię k i kreślimy styczną t do niej w punkcie A; ponieważ tworzącą a, przechodzącą przez A, uważać możemy, jako styczną do samej siebie, to płaszczyzna, wyznaczona przez proste a i t, jest płaszczyzną styczną żądaną. Pragniemy dowieść, że płaszczyzna ta jest styczną do powierzchni walcowej w każdym innym punkcie prostej a; przez dowolny punkt A_1 tej prostej prowadzimy krzywą jakąkolwiek k_1 i kreślimy styczną t_1 do niej w punkcie A_1; zadanie nasze sprowadza się do dowiedzenia, że prosta t_1 leży na płaszczyźnie, wyznaczonej przez proste a i t. Niech inna tworząca b przetnie krzywe k i k_1 w punktach odpowiednich B i B_1; punkty A, A_1, B, B_1 leżą oczywiście w jednej płaszczyźnie; niech teraz tworząca b zbliża się nieograniczenie do tworzącej a; proste AB i A_1B_1 przechodzą w granicy odpowiednio w styczne t i t_1, płaszczyzna zaś AA_1B_1B przechodzi w granicy w powyżej określoną płaszczyznę styczną do powierzchni walcowej w punkcie A; stąd widzimy, że rzeczywiście płaszczyzna ta zawiera prostą t_1.

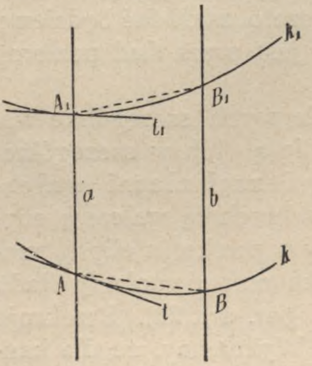


fig. 103.

Gdy pewna płaszczyzna przecina powierzchnię walcową podług krzywej k, płaszczyznę T, styczną do tej powierzchni wzdłuż tworzącej a — podług prostej t, a tworzącą a — w punkcie A, to z powyższego wynika, że prosta t jest styczną do linii k w punkcie A.

99. Kontur istotny powierzchni walcowej stanowią wszystkie te tworzące, w których płaszczyzny styczne są równoległe do promieni rzucających; gdy mamy ślad odpowiedni powierzchni lub rzut pewnej linii kierującej, to do tego śladu względnie rzutu będą styczne rzuty tworzących, stanowiących kontur istotny powierzchni. W podobny sposób znaleść możemy granicę światła i cienia powierzchni walcowej. Pokażemy na przykładzie wykreślanie cieni powierzchni walcowej.

Cienie powierzchni walcowej.

Niech powierzchnia walcowa dana będzie przez ślad poziomy k (fig. 104) i rzuty l', l'' kierunku tworzących; kierunek promieni światła niech dany będzie przez rzuty s', s''. Kontur pozorny rzutu poziomego stanowią: część linii k, oraz dwa skrajne (styczne do niej) rzuty tworzących; kontur pozorny rzutu pionowego stanowią dwa skrajne rzuty pionowe tworzących. Dla wykreślenia cienia poziomego powierzchni walcowej, wykreślamy uprzednio cień poziomy kierunku tworzących i kreślimy wszystkie możliwe styczne do k, równoległe do tego cienia poziomego. W przypadku naszej figury mamy

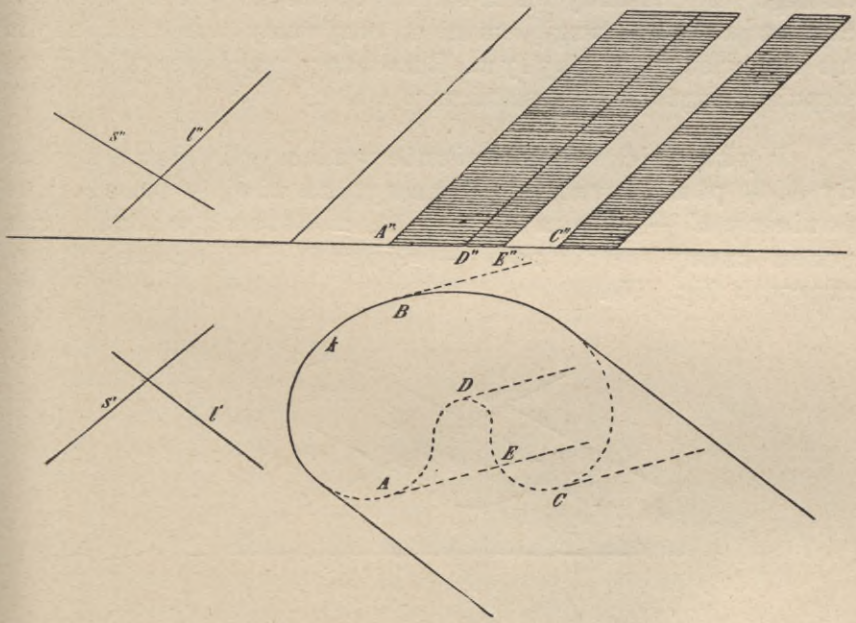


fig. 104.

cztery takie styczne, mianowicie w punktach A, B, C, D. Nazywając tworzące, przechodzące przez te punkty, odpowiednio przez a, b, c, d, widzimy, że tworzące a, b, c należą do granicy światła i cienia, zaś tworząca d jest pogrążona w cieniu (będącym zarazem cieniem własnym i rzuconym), nadto widzimy z figury, że tworząca e, będącą cieniem, rzuconym na powierzchnię przez a, należy również do granicy światła i cienia. W rezultacie widzimy, że część powierzchni, zawarta między tworzącemi a i b, jest oświetlona, między b i c jest w cieniu własnym, między c i e — w świetle, między e i d — w cieniu rzuconym, między d i a — w cieniu własnym.

Walec eliptyczny. **100.** Zajmijmy się teraz bliżej powierzchnią walcową eliptyczną. Oprócz powierzchni walcowej samej rozważać będziemy bryłę geometryczną, ograniczoną tą powierzchnią i dwoma jej przekrojami płaskiemi równoległemi; będziemy bryłę taką nazywali walcem, przekroje zaś płaskie, służące do utworzenia walca, — jego podstawami. Prostą, łączącą środki podstaw, nazywamy osią walca. W zależności od tego, czy podstawy walca są prostopadłe do jego tworzących, czy też pochylone względem nich, nazywamy walec prostym lub odpowiednio pochyłym. Rozwiążmy przedewszystkiem następujące zagadnienie zasadnicze o walcu.

Wykreślić rzuty i cienie walca, gdy dane są ślady e_1, e_2 płaszczyzny podstawy, na niej — przez rzut poziomy a' — elipsa a, będąca podstawą walca, oraz przez rzuty odcinka l — długość i kierunek tworzących (fig. 105).

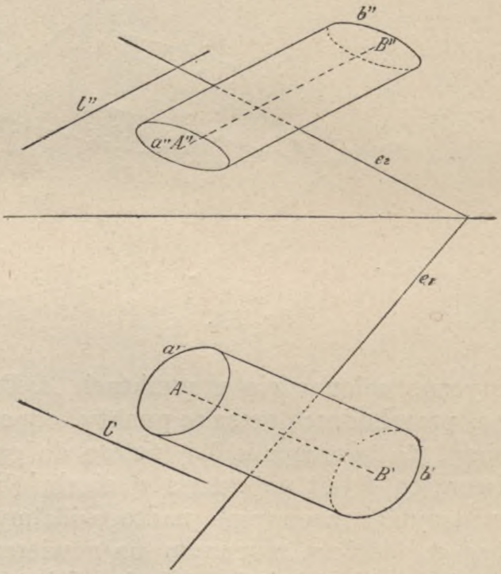


fig. 105.

Rzut poziomy a' elipsy a może być dany przez dwie średnice sprzężone (będące rzutami średnic sprzężonych elipsy a) (por. art. **21** i **22**); wykreślamy wtedy (art. **41**) rzuty pionowe tychże średnic; będą one średnicami sprzężonemi rzutu pionowego a'' elipsy a. Wykreślenie elips a' i a'' odbywa się następnie podług jednej z metod art. **27**. Dla otrzymania konturu pozornego walca np. w rzucie poziomym, musimy do elipsy a' wykreślić styczne, równoległe do l'; uprzednio wyznaczamy w tym celu podług art. **27** punkty styczności tych stycznych, będące końcami średnicy sprzężonej z kierunkiem l'.

Na tak wykreślonych stycznych odcinamy od punktu styczności długości l' i kreślimy elipsę b', będącą przesunięciem równoległem elipsy a' w kierunku i na odległość l'; kontur pozorny w rzucie poziomym składa się z połowy elipsy b', oraz z odcinków wykreślonych powyżej stycznych do nich. W podobny sposób wykreśla się kontur pozorny w rzucie pionowym.

Dla wykreślenia cieni walca uważamy, że granicę światła i cienia na powierzchni bocznej walca stanowią te dwie tworzące, podług których tej powierzchni dotykają płaszczyzny styczne, równoległe do promieni światła; cień poziomy, rzucony przez owe dwie tworzące, stanowić będzie część granicy cienia poziomego, rzuconego przez walec; cień każdej z owych tworzących równy jest oczywiście co do długości i kierunku cieniowi A_1B_1 osi AB walca. Cieniami elips a i b są dwie elipsy a_1 i b_1, które wykreślić możemy, kreśląc dla każdej z nich po parze średnic sprzężonych, będących cieniami średnic sprzężonych odpowiednich podstaw walca; zresztą wystarczy bezpośrednio wykreślić jednę z elips a_1, b_1, — druga jest przesunięciem równoległem pierwszej w kierunku i na odległość A_1B_1. Granicę cienia poziomego, rzuconego przez walec, stanowić będą połowy elips a_1 i b_1, oraz odcinki wspólnych stycznych do nich, które to odcinki, jak powiedzieliśmy, są równoległe i równe odcinkowi A_1B_1. Przy wykreślaniu wyznaczymy uprzednio punkty styczności tych stycznych, jak powyżej. Gdyby okazało się, że część cienia rzuconego pada na płaszczyznę pionową rzutu, to wykreślilibyśmy tę część na zasadzie jej kolineacyi z odpowiednią fikcyjną częścią cienia poziomego (podobnie, jak w art. **72** i **73**). Pozostaje jeszcze wykreślić rzuty tworzących, będących granicą cienia własnego (t. j. granicą światła i cienia) na powierzchni walca; wystarczy oczywiście pokazać, jak możemy znaleść punkty podstawy a, przez które przechodzą te tworzące. Uważamy w tym celu, że styczne, poprowadzone do elipsy a (w jej płaszczyznie) w punktach szukanych, są równoległe do prostej, podług której tę samą płaszczyznę przecina płaszczyzna, przesunięta przez oś AB równolegle do promieni światła (prosta ta jest oczywiście cieniem, rzuconym przez oś walca na płaszczyznę podstawy); ta prosta łączy punkt A z punktem C, w którym płaszczyznę podstawy przebija promień światła, poprowadzony przez punkt B. Punkty szukane na elipsie a będą tedy końcami średnicy, sprzężonej ze średnicą AC. Na tej zasadzie wykreślamy jeden rzut np. poziomy punktów elipsy a, przez które przechodzą tworzące, stanowiące granicę światła i cienia na powierzchni walca; rzuty pionowe znajdujemy następnie z łatwością za pomocą rzutów poziomych.

Konstrukcye zasadnicze. **101.** Rozwiążmy teraz kilka zagadnień zasadniczych o płaszczyznach stycznych do walca, przyczem zakładać możemy, że walec wyznaczony jest np. jak w artykule poprzednim, lub też, że rzuty walca są bezpośrednio dane. Gdy w szczególności płaszczyzna podstawy E zlewać się będzie z płaszczyzną poziomą rzutu, to wykreślenia niżej podane odpowiednio się uproszczą.

W y k r e ś l i ć ś l a d y p ł a s z c z y z n y s t y c z n e j d o p o w i e r z c h n i w a l c a w d a n y m n a n i e j p u n k c i e.

Przez punkt dany prowadzimy tworzącą powierzchni i w śladzie tej tworzącej na płaszczyznie podstawy walca kreślimy styczną do podstawy; ta styczna i owa tworząca wyznaczają płaszczyznę żądaną.

W y k r e ś l i ć ś l a d y p ł a s z c z y z n y, s t y c z n e j d o p o w i e r z c h n i w a l c a i p o p r o w a d z o n e j p r z e z p u n k t K, d a n y z e w n ą t r z w a l c a.

Prosta, poprowadzona z K równolegle do tworzących walca, leży oczywiście na płaszczyznie szukanej; znajdujemy ślad L tej prostej na płaszczyznie podstawy walca i z tego punktu prowadzimy styczne do podstawy; przez każdą z tych stycznych i prostą KL jest wyznaczona płaszczyzna styczna do walca.

W y k r e ś l i ć ś l a d y p ł a s z c z y z n y, s t y c z n e j d o p o w i e r z c h n i w a l c a i r ó w n o l e g ł e j d o p r o s t e j d a n e j g.

Przez prostą g prowadzimy płaszczyznę F, równoległą do tworzących walca; płaszczyzna szukana musi być równoległa do płaszczyzny F. Oznaczając ślad płaszczyzny F na płaszczyznie E przez h, widzimy, że ślad płaszczyzny szukanej jest styczną do elipsy a, równoległą do h; każdy rzut tego śladu jest styczny do odpowiedniego rzutu elipsy a i równoległy do takiegoż rzutu prostej h; możemy wykreślić rzuty dwóch takich stycznych do elipsy a, a przez każdą z nich wraz z tworzącą, przechodzącą przez odpowiedni punkt styczności, jest w zupełności wyznaczona płaszczyzna, czyniąca zadość warunkom zadania.

Gdy w szczególnym przypadku podstawa walca leży na płaszczyźnie P_1, to śladem poziomym płaszczyzny szukanej jest styczna do podstawy, równoległa do h; ślad pionowy płaszczyzny wyznacza się na tej zasadzie, że płaszczyzna ta zawiera tworzącą, przechodzącą przez punkt styczności.

Powierzchnia stożkowa.

102. Powierzchnia stożkowa powstaje przez ruch prostej, przechodzącej przez pewien punkt stały, zwany *wierzchołkiem* powierzchni; powierzchnia stożkowa jest wyznaczona, gdy dany jest jej wierzchołek i nadto krzywa, przez punkty której przechodzi tworząca podczas swego ruchu; krzywą tę zwiemy *kierującą*. Kierującą może być w szczególności ślad powierzchni stożkowej na jednej z płaszczyzn rzutu; zresztą, gdy inna krzywa służy za kier~~ownicę~~ującą, to możemy zawsze ślad powierzchni wykreślić, jako miejsce śladów prostych tworzących; będziemy przeto zakładać, o ile nie uczynimy założenia odmiennego, że powierzchnia stożkowa dana jest przez wierzchołek i ślad poziomy.

Powierzchnia stożkowa rzędu 2-go.

Szczególnie ważną jest powierzchnia stożkowa, której śladem jest jakakolwiek linia stożkowa. Dowolna linia prosta przecina tę powierzchnię najwyżej w dwóch punktach, których rzutami na płaszczyznę śladu są punkty przecięcia rzutu prostej na tę płaszczyznę ze śladem powierzchni. W geometryi nazywamy *rzędem* powierzchni największą liczbę punktów, w których powierzchnię przecina prosta dowolna; na tej zasadzie szczególną powierzchnię stożkową, o której mówimy, nazwać możemy *powierzchnią stożkową rzędu drugiego*. Wszelki przekrój płaski takiej powierzchni jest linią stożkową, możemy bowiem uważać ten przekrój jako rzut środkowy śladu powierzchni z jej wierzchołka na płaszczyznę przekroju. Każdą powierzchnię stożkową rzędu drugiego przeciąć można podług każdego z trzech typów linij stożkowych; okażemy najprzód, że możemy zawsze przeciąć taką powierzchnię podług elipsy. W rzeczy samej, jeżeli śladem powierzchni nie jest elipsa, lecz hyperbola albo parabola, to bierzemy na

Przekroje powierzchni stożkowej rzędu 2-go.

płaszczyznie śladu prostą dowolną, nie przecinającą śladu, i powierzchnię stożkową przecinamy płaszczyzną dowolną, równoległą do płaszczyzny, którą wyznacza owa prosta pomocnicza i wierzchołek powierzchni; z łatwością spostrzegamy, że ta płaszczyzna przekroju przetnie wszystkie tworzące i do żadnej nie będzie równoległą; linia stożkowa, otrzymana w przekroju, nie będzie zatem wcale miała punktów w nieskończoności, t. j. będzie elipsą. Gdy na płaszczyznie elipsy obierzemy dowolną prostą, przecinającą ją w dwóch punktach, oraz prostą, styczną do elipsy, i przez każdą z tych dwóch prostych poprowadzimy płaszczyznę, przechodzącą przez wierzchołek powierzchni, to wszelka płaszczyzna, równoległa do pierwszej z tych płaszczyzn, przetnie powierzchnię podług hyperboli, a równoległa do drugiej — podług paraboli; jakoż, w pierwszym przypadku do płaszczyzny przekroju będą równoległe dwie tworzące powierzchni, tak, że krzywa przekroju mieć będzie dwa punkty w nieskończoności, w drugim przypadku jedna tylko tworząca będzie równoległa do płaszczyzny przekroju, i linia przekroju mieć będzie jeden punkt w nieskończoności.

Można dowieść, że istnieją dwa kierunki płaszczyzn, przecinających rozpatrywaną tu powierzchnię stożkową podług kół. Na zasadzie tej własności widzimy, że powierzchnia stożkowa rzędu drugiego jest identyczna z określoną w artykule **10**-ym powierzchnią stożkową *kołową*. Gdy w szczególności obydwa kierunki przekrojów płaskich kołowych schodzą się razem, to mamy powierzchnię stożkową *obrotową*; powierzchnia taka powstaje skutkiem obrotu jednej prostej około drugiej prostej, przecinającej ją i niezmiennie z nią związanej; wszelka płaszczyzna prostopadła do osi obrotowej, i tylko taka płaszczyzna, przecina powierzchnię stożkową obrotową podług koła.

Płaszczyzna styczna.

103. Zupełnie tem samem rozumowaniem, jak w art. **98**, dowieść można, że *płaszczyzna, styczna do powierzchni stożkowej w jakimkolwiek jej punkcie, jest styczna do tej powierzchni w każdym punkcie tworzącej, przechodzącej przez ów punkt.* Stąd wypływa, że gdy pewna płaszczyzna przecina powierzchnię stożkową podług krzywej k, pewną jej tworzącą a w punkcie A, a płaszczyznę T, dotykającą powierzchni stożkowej wzdłuż prostej a, podług prostej t, to prosta t jest styczną do linii k w punkcie A.

104. Kontur istotny powierzchni stożkowej składa się z ogółu tworzących, mających tę odrębną własność, że płaszczyzny, styczne wzdłuż tych tworzących do powierzchni, są równoległe do promieni rzucających; podobnież, jeżeli wykreślimy płaszczyzny styczne do powierzchni stożkowej, równoległe do promieni światła, to tworzące, podług których płaszczyzny te dotykać będą powierzchni stożkowej, będą stanowić granicę światła i cienia. Zobaczmy na przykładzie, jak wykreślają się cienie powierzchni stożkowej.

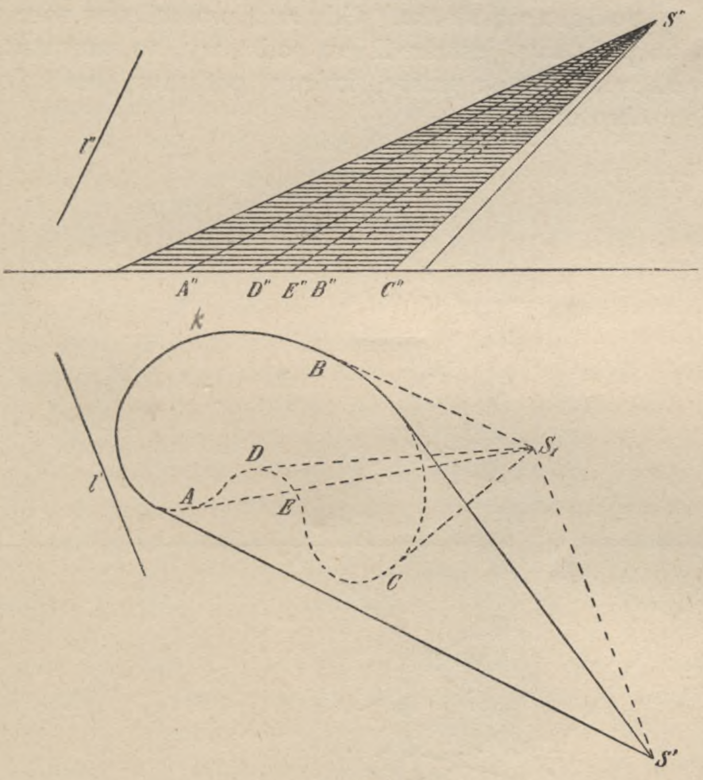


fig. 106.

Kreślenie cieni.

Niech powierzchnia ta dana będzie przez swój ślad poziomy k i rzuty wierzchołka S (fig. 106); niech prosta l wskazuje kierunek promieni światła. Wykreślamy cień poziomy S_1 wierzchołka i z niego prowadzimy styczne do śladu poziomego. W przypadku, przedstawionym na figurze, widzimy, że część powierzchni między tworzącemi SA i SB, oraz część między tworzącemi SE i SC są oświetlone, części między SB i SC, jakoteż między SA i SD znajdują się w cieniu własnym, zaś część między SD i SE — w cieniu rzuconym.

Stożek kołowy. **105.** Zajmiemy się teraz bliżej powierzchnią stożkową rzędu drugiego, przyczem oprócz samej powierzchni rozpatrywać będziemy bryłę geometryczną, ograniczoną przekrojem płaskim tej powierzchni i jej częścią, zawartą między wierzchołkiem i tym przekrojem; bryłę tę zwać będziemy s t o ż k i e m k o ł o w y m, a odgraniczający ją przekrój płaski powierzchni stożkowej — p o d s t a w ą stożka. Gdy rzut prostokątny wierzchołka stożka na podstawę jest środkiem podstawy, to nazywamy stożek p r o s t y m; stożek prosty, którego podstawą jest koło, jest stożkiem obrotowym.

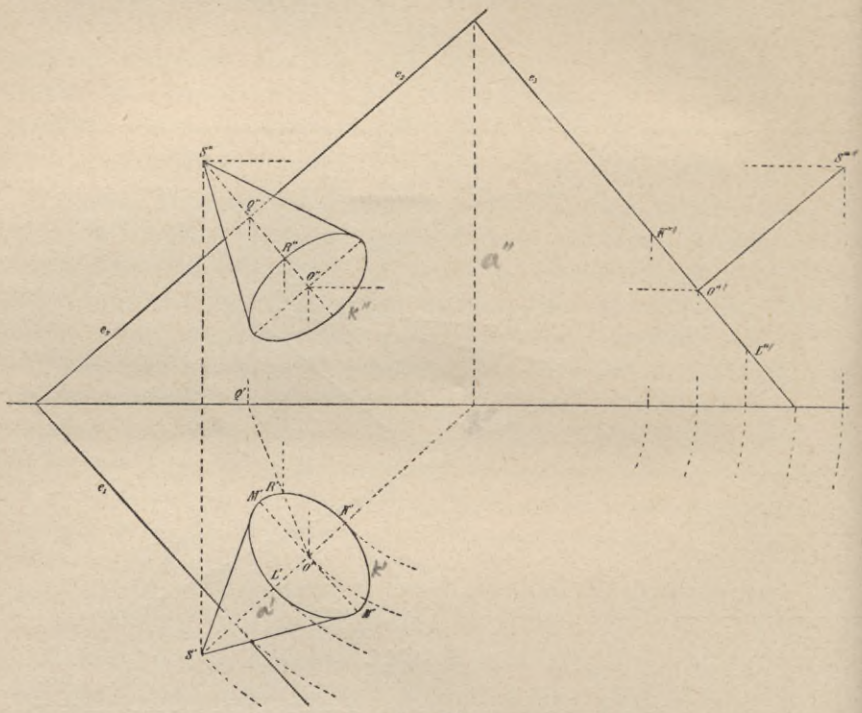


fig. 107.

W y k r e ś l i ć r z u t y i c i e n i e s t o ż k a k o ł o w e g o o b r o t o w e g o, g d y d a n e s ą ś l a d y p ł a s z c z y z n y p o d s t a w y E, w y s o k o ś ć (t. j. o d l e g ł o ś ć w i e r z c h o ł k a o d p o d s t a w y) h, o r a z ś r o d e k O i p r o m i e ń r k o ł a k p o d s t a w y (fig. 107).

Najdogodniej wykonamy wykreślenie żądane, prowadząc przez O płaszczyznę pomocniczą A, prostopadłą do śladu poziomego e_1 płaszczyzny E; oczywiście, w płaszczyznie A znajdować się będzie wierzchołek S stożka. Wykonywając kład płaszczyzny A na płaszczyznę P_2, otrzymamy położenie e_3 prostej przecięcia płaszczyzn E i A; na e_3 wykreślimy kład O''' punktu O. Z łatwością wykreślimy też kład $K'''S'''L'''$ trójkąta, otrzymanego w przecięciu stożka płaszczyzną A, a mianowicie: odcinek $O'''S''' = h$ odcinamy na prostopadłej do e_3 w punkcie O''', zaś odcinki $O'''K'''$ i $O'''L'''$ są równe r. Przy pomocy kładu $K'''S'''L'''$ odrazu znajdziemy zarówno rzuty S' i S'' wierzchołka, jakoteż rzut poziomy $K'L'$ średnicy KL koła k, leżącej w płaszczyznie A; oczywiście odcinek $K'L'$ będzie prostopadły do e_1. Średnica MN koła k, prostopadła do KL, a więc sprzężona z nią, jest równoległa do e_1, wskutek tego jej rzut poziomy $M'N'$ jest również równoległy do e_1 i $M'N' = MN = 2r$; $M'N'$ i $K'L'$ są tedy dwiema średnicami sprzężonemi elipsy k', będącej rzutem poziomym koła k, a ponieważ średnice te są do siebie prostopadłe, to są one jej osiami; znając zaś osi elipsy k', możemy tę ostatnią wykreślić sposobem wiadomym (art. 28). Co się tyczy rzutu pionowego k'' koła k, to takowy możemy wykreślić, albo kreśląc uprzednio rzuty pionowe średnic KL i MN, które to rzuty będą średnicami sprzężonemi elipsy k'', albo też przez wykreślenie osi elipsy k''; oś wielka, równa $2r$, jest równoległa do śladu e_2, a oś małą otrzymamy, znajdując, jak wskazuje figura, odpowiednią średnicę w rzucie poziomym k'. Kontur pozorny każdego rzutu uzupełniają styczne, poprowadzone z rzutów wierzchołka do odpowiednich rzutów podstawy.

Dla wykreślenia cieni stożka, kreślimy cień poziomy S_1 wierzchołka S; cieniem poziomym podstawy stożka będzie elipsa k_1, której parę średnic sprzężonych wykreślić możemy na zasadzie kolineacyi prostokątnej elipsy k_1 z kładem koła k na płaszczyznie P_1. Styczne z S_1 do u_1 wraz z elipsą u_1 stanowią kontur cienia. Tworzące stożka, których cieniami są te styczne, stanowią granicę światła i cienia na powierzchni stożka; rzuty tych tworzących wykreślić możemy na zasadzie dwóch kolineacyj: powyżej wzmiankowanej kolineacyi cienia poziomego i kładu na P_1, oraz kolineacyi tego ostatniego i rzutu poziomego.

Konstrukcye zasadnicze.

106. Rozwiążemy teraz kilka zadań zasadniczych, odnoszących się do płaszczyzn stycznych do powierzchni stożka.

Wykreślić ślady płaszczyzny stycznej do powierzchni stożka w danym jej punkcie.

Płaszczyzna żądana jest wyznaczona przez tworzącą, przechodzącą przez punkt dany, i przez styczną do podstawy, poprowadzoną przez ślad owej tworzącej na płaszczyznie podstawy.

Poprowadzić płaszczyznę styczną do powierzchni stożka kołowego danego przez punkt, leżący zewnątrz niego.

Płaszczyzna żądana zawierać musi prostą, łączącą punkt dany z wierzchołkiem stożka. Gdy podstawa eliptyczna stożka danego leży na płaszczyznie P_1, to ze śladu poziomego owej prostej prowadzimy styczne do podstawy stożka, styczne te są śladami poziomemi płaszczyzn żądanych. W przypadku, gdy płaszczyzna podstawy stożka różna jest od płaszczyzny P_1, wyznaczamy rzuty punktu przecięcia poprzedniej prostej z płaszczyzną podstawy i wykreślamy rzuty stycznych, poprowadzonych z tego punktu do elipsy podstawy; każda z tych stycznych wraz z prostą powyższą wyznacza płaszczyznę styczną żądaną.

Jeżeli uważać będziemy punkt dany za źródło światła, to tworzące, podług których płaszczyzny styczne powyżej wykreślone dotykają powierzchni stożka, stanowić będą granicę światła i cienia na tej powierzchni, a ślady poziome tych płaszczyzn stycznych należeć będą do konturu cienia poziomego, rzuconego przez stożek.

W rozwiązaniu poprzedniem zawiera się też rozwiązanie zagadnienia następującego:

Przez prostą, przechodzącą przez wierzchołek stożka kołowego i leżącą zewnątrz tego stożka, poprowadzić do niego płaszczyznę styczną.

Do tego ostatniego zagadnienia sprowadza się znowu następujące:

Do stożka kołowego danego poprowadzić płaszczyznę styczną, równoległą do prostej danej.

Płaszczyzna żądana musi przejść przez prostą, poprowadzoną z wierzchołka stożka równolegle do prostej danej.

§ 3. Przekroje powierzchni walcowych i stożkowych płaszczyznami.

Ogólna metoda kreślenia przekroju płaskiego powierzchni dowolnej.

107. Metoda ogólna wykreślania przekroju płaskiego powierzchni jakiejkolwiek jest w związku ze sposobem wyznaczania powierzchni w geometryi wykreślnej za pomocą tworzących ruchomych, zmiennych lub stałych (art. **95**), a mianowicie: aby wykreślić rzuty krzywej przecięcia powierzchni danej z pewną płaszczyzną daną, wyznaczamy punkty przecięcia pewnej liczby tworzących z tą płaszczyzną i łączymy (w rzutach) te punkty w odpowiednim porządku linią ciągłą. Często można obierać rozmaite układy tworzących dla wyznaczenia powierzchni; będziemy, o ile można, dla naszych celów wybierać układ tworzących tak, aby ich rzuty względnie łatwo wykreślać się dawały.

Co się tyczy położenia płaszczyzny przekroju, to najdogodniejszem jest jej położenie wówczas, gdy jest prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutu, wtedy bowiem rzut krzywej przekroju na tę płaszczyznę rzutu leży na odpowiednim śladzie płaszczyzny przekroju, drugi zaś rzut daje się względnie łatwo wykreślić. Gdy płaszczyzna przekroju ma jakiekolwiek inne położenie ~~(por. zag. 140)~~, to nieraz dogodnie bywa posiłkować się płaszczyznami pomocniczemi, prostopadłemi do jednej z płaszczyzn rzutu: wyznaczamy linię przecięcia powierzchni płaszczyzną pomocniczą, oraz prostą przecięcia tej płaszczyzny pomocniczej z płaszczyzną daną; punkty, w których ta prosta przetnie ową linię, należą do krzywej żądanej. Niekiedy zresztą obieramy inne płaszczyzny pomocnicze, których przecięcie z powierzchnią daną łatwo wykreślić możemy.

Punkty przebicia powierzchni prostą.

Pragnąc znaleść punkty, w których pewna prosta przebija powierzchnię daną, prowadzimy przez tę prostą płaszczyznę pomocniczą i wykreślamy krzywą, podług której ona przecina powierzchnię; punkty przecięcia tej krzywej i prostej danej są punktami żądanemi. Rozumie się, że przy wyborze płaszczyzny pomocniczej dbać powinniśmy o to, aby rzuty linii, podług której ona przetnie powierzchnię, o ile można najłatwiej wykreślać się dawały, — najlepiej, jeżeli choć jeden z tych rzutów jest linią prostą albo kołem.

Styczna do linii przekroju.

Ażeby wykreślić styczną do przekroju płaskiego w pewnym punkcie, uważamy, że styczna ta leży zarówno na płaszczyznie przekroju, jakoteż na płaszczyznie stycznej do powierzchni w punkcie danym; wykreślamy ją przeto, jako prostą przecięcia tych dwóch płaszczyzn.

Po tych rozważaniach ogólnych przechodzimy specyalnie do przypadku powierzchni walcowych i stożkowych.

Przekrój płaski powierzchni walcowej dowolnej.

108. Niech żądanem będzie wykreślenie rzutów krzywej, podług której pewna płaszczyzna A, dana przez ślady a_1 i a_2, przecina powierzchnię walcową, daną przez kierującą k (w og. skośną) i kierunek tworzących. Za płaszczyzny pomocnicze brać będziemy płaszczyzny, rzucające proste tworzące na płaszczyznę poziomą rzutu. Wykreślenie wykonywamy zatem sposobem następującym. Przez dowolny punkt M linii k prowadzimy tworzącą l i wykreślamy rzuty prostej m, podług której płaszczyzna, rzucająca l na P_1, przecina płaszczyznę A; oczywiście rzut m' schodzi się z rzutem l'; punkt przecięcia prostych l'' i m'' jest rzutem pionowym punktu, w którym tworząca l przebija płaszczyznę A, — rzut poziomy tego punktu znajdujemy na l'. W ten sposób wykreślamy kolejno rzuty pewnej ilości punktów krzywej żądanej, które następnie łączymy linią ciągłą. Przy wykreślaniu pomocną nam jest ta okoliczność, że wskutek równoległości płaszczyzn, rzucających tworzące l na P_1, wszystkie proste m, podług których te płaszczyzny przecinają płaszczyznę A, są równoległe, a zatem równoległemi są z jednej strony proste m' (l'), z drugiej — proste m''.

Wykreślenie postaci istotnej krzywej przecięcia odbywa się przy pomocy kładu płaszczyzny przecinającej na jednę z płaszczyzn rzutu, z zastosowaniem kolineacyi równoległej kładu krzywej przekroju z jej rzutem (art. **30**).

109. Gdy mamy ślad powierzchni walcowej na jednej z płaszczyzn rzutu, np. na P_1, to wykreślenie rzutów krzywej przekroju wykonywamy nader łatwo, za pomocą metody kolineacyi. Oznaczmy krzywą przekroju przez p (jej rzut poziomy przez p'), a ślad poziomy przez s. Gdy punkt M krzywej s i punkt N krzywej p leżą na jednej tworzącej l, to uważajmy punkty M i N za odpowiadające sobie punkty figur s i p, a punkty M i N' — za odpowiadające sobie punkty figur s i p'. Oczywiście proste, łączące punkty odpowiednie figur s i p', są wzajemnie równoległe, jako rzuty l' równoległych tworzących powierzchni walcowej; prócz tego, ponieważ prosta, łącząca dowolne dwa punkty krzywej s, przecina prostą, łączącą dwa odpowiadające im punkty krzywej p, na śladzie poziomym a_1 płaszczyzny przekroju **A**, przeto to samo ma miejsce w rzucie poziomym, między figurami s i p'. Widzimy stąd, że linie s i p' są w kolineacyi równoległej; osią tej kołineacyi jest ślad poziomy płaszczyzny **A**, kierunkiem promieni kolineacyi jest kierunek rzutu poziomego tworzących powierzchni walcowej. Wystarczy zatem wykreślić bezpośrednio jeden punkt krzywej p'; dowolną liczbę innych punktów znajdziemy na zasadzie powyższej kolineacyi. Wykreśliwszy rzut poziomy p' linii przecięcia, znajdziemy jej rzut pionowy p'' również przy pomocy kolineacyi, według art. **41** (zag. 139).

Podobnież ułatwia się wykreślenie krzywej przecięcia w przypadku, gdy kierująca k jest krzywą płaską. Można bowiem z łatwością przekonać się, że figury k' i p' (jakoteż figury k'' i p'') są w kolineacyi równoległej, przyczem osią kolineacyi jest rzut odpowiedni prostej, podług której przecinają się płaszczyzna krzywej k i płaszczyzna przekroju, promienie zaś kolineacyi równoległe są do rzutu odpowiedniego tworzących powierzchni walcowej.

Gdy żądanem będzie wykreślenie punktów przecięcia powierzchni walcowej i prostej danej, to przez prostą poprowadzimy płaszczyznę pomocniczą (art. **107**), równoległą do tworzących walca; płaszczyzna ta przetnie powierzchnię walcową podług pewnej ilości tworzących, które przecięte zostaną przez prostą daną w punktach żądanych.

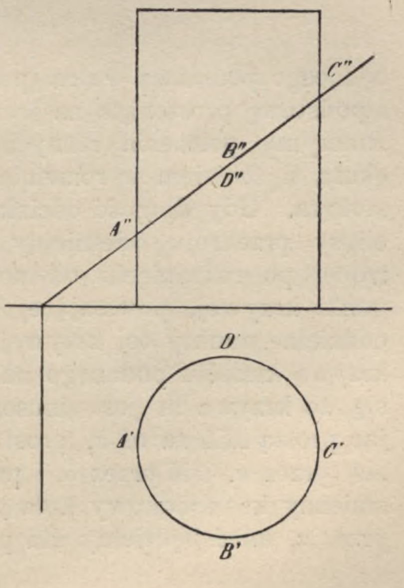


fig. 108.

Przecięcie walca obrotowego płaszczyzną, prostopadłą do P_2.

110. Zajmiemy się teraz specyalnie walcem eliptycznym. Jak wiadomo, wszelki przekrój takiego walca płaszczyzną, nie równoległą do tworzących, jest elipsą. Rozważmy przypadek najprostszy, mianowicie: gdy walec obrotowy z podstawą na płaszczyznie P_1 przecinamy płaszczyzną, prostopadłą do P_2 (fig. 108). Rzutem poziomym elipsy przekroju będzie koło podstawy walca, a rzutem pionowym — odcinek AC śladu pionowego płaszczyzny przekroju, zawarty wewnątrz konturu rzutu pionowego walca; widzimy z łatwością, że odcinek AC równy jest osi wielkiej, a średnica koła — osi małej elipsy przecięcia, możemy zatem kształt tej elipsy wykreślić (art. 28).

Rozwinięcie linii przekroju. Zbadajmy, jaką krzywą utworzy ta elipsa, gdy rozwiniemy powierzchnię walca na płaszczyznie, rozciąwszy ją np. wzdłuż tworzącej, przechodzącej przez A. Rozwijając nasz walec na płaszczyznie, otrzymamy w rozwinięciu prostokąt (fig. 109), którego wysokość równa jest długości tworzących, i którego podstawa równa jest długości okręgu koła,

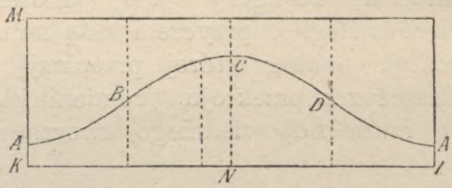


fig. 109.

będącego podstawą walca (porównaj art. 90). Dzieląc okrąg koła i podstawę prostokąta na jednakową liczbę równych części, wyznaczymy położenia różnych tworzących walca; wszystkie one okażą się bowiem w rozwinięciu prostopadłemi do podstawy prostokąta. Gdy długość odcinka tworzącej walca od podstawy do elipsy przekroju odetniemy na odpowiedniem położeniu tworzącej po rozwinięciu od podstawy prostokąta, to otrzymamy punkt krzywej, powstającej z rozwinięcia elipsy. Wyznaczając oddzielne punkty tej krzywej i łącząc je linią ciągłą, otrzymamy krzywą kształtu podanego na fig. 109. Z łatwością przekonamy się, że krzywa ta jest sinusoidą (art. 83). Rzeczywiście, obierając prostą KL za oś x, prostą KM za oś y, oznaczając wreszcie AK przez a, CN przez b, i promień koła podstawy przez r, oraz zmienny kąt środkowy koła podstawy, odpowiadający łukowi x, przez α, mieć będziemy dla punktu bieżącego krzywej:

$$x = r\alpha, \quad y = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\cos\alpha,$$

skąd przez wyrugowanie parametru α otrzymamy:

$$y = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos \frac{x}{r}.$$

Równanie to sprowadzimy do zwykłej postaci równania sinusoidy (art. **83**), przenosząc początek spółrzędnych do punktu B bez zmiany kierunku osi, co wyraża się przez przekształcenia:

$$x = x' + \tfrac{1}{2}\pi r, \quad y = y' + \frac{a+b}{2};$$

otrzymamy wówczas:

$$y' = \frac{b-a}{2} \sin \frac{x'}{r}.$$

Możemy oczywiście do wykreślenia tej sinusoidy zastosować sposób, wyłożony w art. **83**. Dowolną liczbę powtórzeń wykreślonego na fig. 109 łuku tej sinusoidy otrzymamy, tocząc walec po płaszczyźnie dowolną liczbę razy.

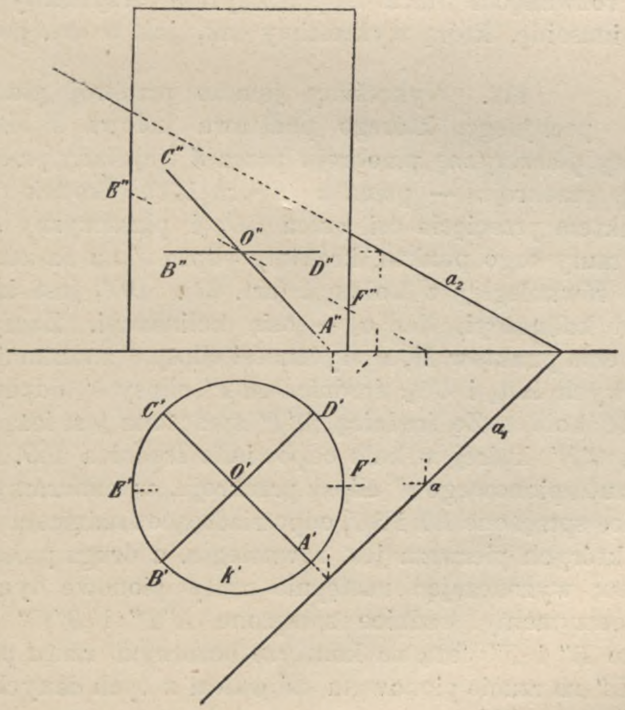


fig. 110.

Przekrój walca obrotowego płaszczyzną dowolną.

111. Niech teraz trzeba będzie przeciąć walec obrotowy z podstawą na P_1 płaszczyzną dowolną $\mathbf{A}$ (fig. 110). Oznaczmy elipsę przekroju przez k; jej rzutem poziomym będzie, jak w poprzednim przypadku, koło podstawy walca; rzutem pionowym będzie pewna elipsa k''. Wszelkie dwie średnice elipsy k, których rzutami są średnice prostopadłe koła k', są średnicami sprzężonemi; w szczególności średnice sprzężone AC i BD, z których pierwsza jest prostopadła do śladu poziomego a_1 płaszczyzny $\mathbf{A}$, druga równoległa do tegoż śladu, — są osiami elipsy k; oś BD elipsy równa jest średnicy koła k'; wykreśliwszy zatem długość drugiej osi AC, potrafimy następnie wykreślić kształt rzeczywisty elipsy k. Z rzutów pionowych $A''C''$ i $B''D''$, jako pary średnic sprzężonych elipsy k'', potrafimy wykreślić tę elipsę; dla dokładności większej rysunku, wyznaczamy niezależnie punkty E'', F'', w których elipsa k'' dotyka konturu pozornego walca w rzucie pionowym; uważamy w tym celu, że EF jest średnicą elipsy k, równoległą do P_2, i na tej zasadzie wykreślamy jej rzuty, jak wskazuje figura.

W rozwinięciu walca na płaszczyznie otrzymamy z elipsy k znowu sinusoidę, którą wykreślimy tak, jak w art. poprzednim.

Przekrój płaski walca pochyłego.

112. Wykreślmy jeszcze przekrój płaski walca pochyłego, którego podstawa kołowa k leży na P_1. Oznaczmy płaszczyznę przekroju przez $\mathbf{A}$ (jej ślady przez a_1 i a_2), a elipsę przekroju — przez e (figura 111). Środek C elipsy e jest punktem przecięcia osi walca OO_1 i płaszczyzny $\mathbf{A}$; wykreśliwszy rzuty tego punktu, kreślimy elipsę e' na zasadzie jej kolineacyi równoległej z kołem k (art. 27). OO'_1 jest kierunkiem promieni kolineacyi, ślad a_1 — osią kolineacyi. Zaczynamy od wyznaczenia punktów M, P styczności elipsy e' z rzutami ~~krawędzi~~ tworzących konturowych AA_1 i CC_1; średnica $M'P'$ elipsy e' odpowiada średnicy AC koła k. Ze średnicą $M'P'$ sprzężona jest leżąca na OO'_1 średnica $Q'N'$, której w kole odpowiada średnica BD. Dla otrzymania rzutu pionowego e'' elipsy przekroju, wyznaczamy w elipsie e' średnice sprzężone RT i SU, odpowiadające średnicom EG i FH koła, z których pierwsza jest równoległa, a druga prostopadła do osi rzutu; wyznaczając następnie rzuty pionowe tych średnic elipsy, otrzymamy średnice sprzężone $R''T''$ i $S''U''$ elipsy e'', przyczem R'' i T'' leżą na konturze pozornym rzutu pionowego, a S'' i U'' na rzucie pionowym osi walca; z tych danych możemy elipsę e'' wykreślić.

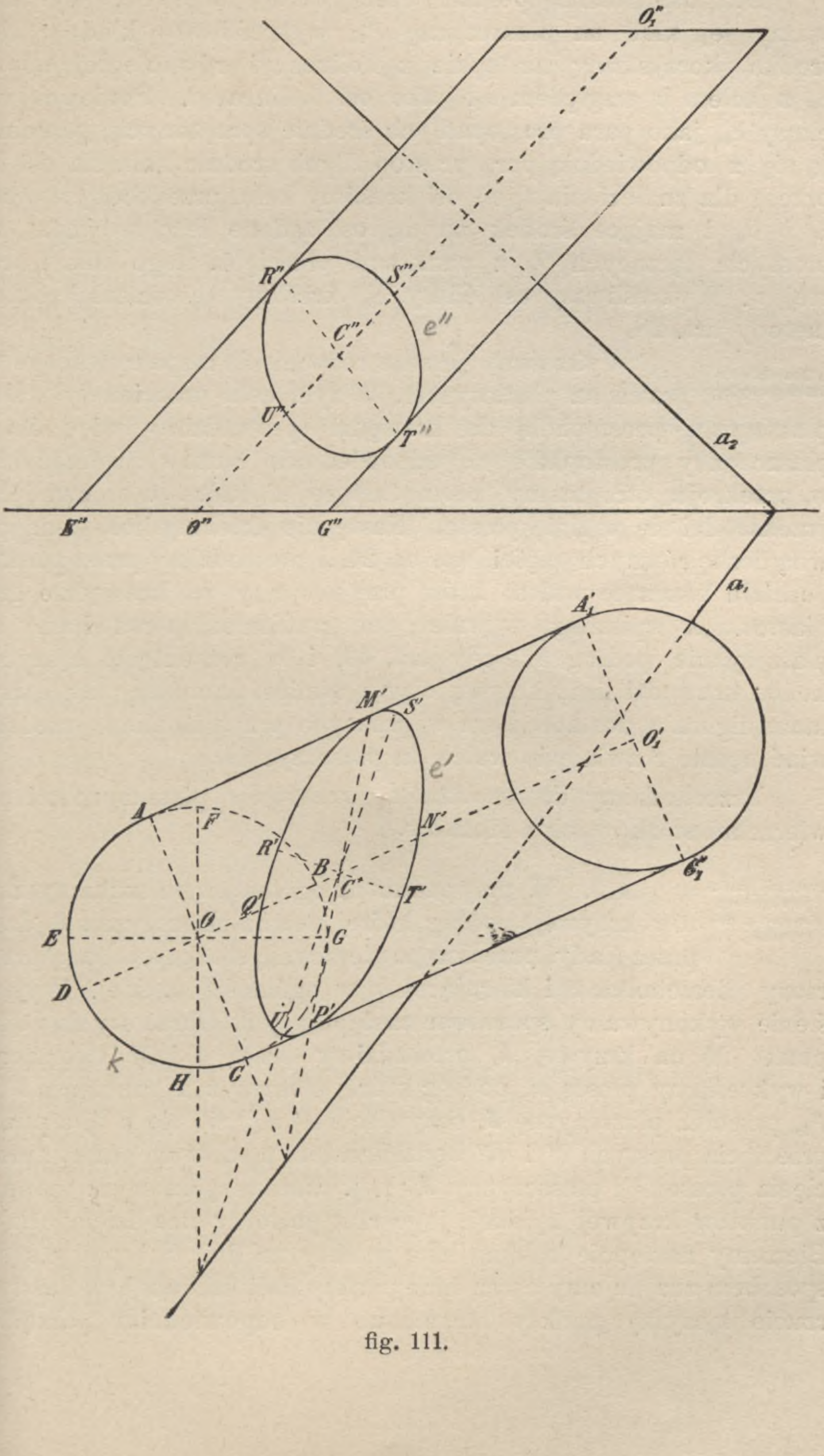


fig. 111.

Dla otrzymania postaci rzeczywistej elipsy e, wykonywamy jej kład na płaszczyznę P_1; wykreśliwszy kład O_0 jej środka, korzystamy następnie z kolineacyi równoległej elipsy e_0 z kołem k względem a_1, jako osi kolineacyi. Ponieważ osi elipsy e_0, jako para prostopadłych średnic sprzężonych, przecinają się z odpowiednią parą prostopadłych średnic koła na osi a_1, przeto dla znalezienia tych osi kreślimy koło, przechodzące przez O i O_0 i mające środek na a_1; osi żądane leżą wówczas na prostych, łączących O_0 z punktami przecięcia tego koła i prostej a_1. Wykreśliwszy osi elipsy e_0, kreślimy tę ostatnią podług metody art. **28**.

Rozwinięcie walca pochyłego. Wykreślmy jeszcze rozwinięcie rozpatrywanego tu walca na płaszczyznie. W tym celu przecinamy walec płaszczyzną prostopadłą do krawędzi (prowadzimy więc ślady płaszczyzny prostopadle do odpowiednich rzutów tworzących); w przekroju otrzymamy pewną elipsę u, która w rozwinięciu przekształci się w linię prostą. Następnie dzielimy koło k na pewną liczbę równych części, np. na 24, i prowadzimy przez punkty podziału tworzące walca, które przyjmujemy za krawędzie graniastosłupa, wpisanego w walec; ten graniastosłup rozwijamy na płaszczyznie podług metody art. **63**, i w rozwinięciu łączymy końce krawędzi linią krzywą ciągłą zamiast łamanej; tak otrzymana figura z dostatecznem w praktyce przybliżeniem przedstawiać będzie rozwinięcie walca na płaszczyznie.

Przechodzimy do rozważania przekrojów płaszczyznami powierzchni stożkowych i stożków.

Przekrój płaski powierzchni stożkowej dowolnej. **113.** W przypadku najogólniejszym szukamy rzutów krzywej, podług której pewna płaszczyzna A, dana przez ślady, przecina powierzchnię stożkową, daną przez rzuty wierzchołka S i kierującej k, w ogólności skośnej. Wykreślenie wykonywamy sposobem następującym. Obrawszy dowolny punkt M na krzywej k, prowadzimy przez S i M tworzącą l i wykreślamy prostą m, podług której płaszczyzna, rzucająca l na P_1, przecina płaszczyznę A; oczywiście m' zejdzie się z l', a punkt przecięcia prostych l'' i m'' będzie rzutem pionowym punktu przecięcia prostej l i płaszczyzny A, t. j. rzutem pionowym jednego z punktów krzywej żądanej; jego rzut poziomy znajdziemy na l'. Bierzemy następnie kolejno inne punkty na linii k i powyższym sposobem znajdujemy coraz inne punkty linii szukanej; w każdym rzucie łączymy punkty otrzymane w odpowiednim porządku linią ciągłą. Wszystkie płaszczyzny, rzucające tworzące l na P_1, zawierają prostopadłą SS', spuszczoną z S na płaszczyznę P_1, a zatem wszystkie proste m przechodzą przez punkt K, w którym prosta SS' przecina płaszczyznę A. Gdy więc wykreślimy rzut pionowy K'' punktu K (K' schodzi się z S'), to wszystkie proste m'' przechodzić będą przez K''; okoliczność ta znakomicie ułatwi wykreślenie.

Kształt rzeczywisty krzywej przecięcia wykreśla się sposobem wiadomym przez kład na płaszczyznę P_1, przy zastosowaniu kolineacyi równoległej tego kładu z rzutem poziomym linii przekroju (art. **30**).

Styczną do linii przekroju w pewnym punkcie wyznaczamy, jako prostą przecięcia płaszczyzny stycznej do powierzchni stożkowej w tym punkcie z płaszczyzną przekroju (art. **107**).

Dla wykreślenia punktów przecięcia prostej danej z powierzchnią stożkową, prowadzimy płaszczyznę pomocniczą przez prostą daną i wierzchołek powierzchni (por. art. **107**).

114. Wykreślenie, wyłożone w art. poprzednim, modyfikuje się i znacznie upraszcza w przypadku, gdy kierująca k jest krzywą płaską. Jakoż, oznaczmy linię przekroju przez p, a prostą, podług której płaszczyzny figur k i p przecinają się, przez n; możemy oczywiście uważać każdą z figur k i p jako rzut drugiej ze środka S. Gdy cały ten układ rzucimy prostokątnie najprzód na P_1, potem na P_2, to zobaczymy, że w rzucie poziomym krzywe k' i p' są w kolineacyi, której osią jest prosta n', a środkiem punkt S', w rzucie zaś pionowym krzywe k'' i p'' są również w kolineacyi, której osią jest prosta n'', a środkiem punkt S''. W każdym rzucie wystarczy przeto wykreślić rzut wierzchołka i prostej n, oraz rzut jednego punktu figury żądanej; dowolną liczbę innych punktów znajdziemy na zasadzie kolineacyi.

Szczególnym przypadkiem poprzedniego jest ten, gdy powierzchnia stożkowa dana jest przez rzuty wierzchołka i jeden ślad np. poziomy. Rzut poziomy linii przecięcia jest wówczas w kolineacyi z tym śladem, przyczem osią kolineacyi jest ślad poziomy płaszczyzny przekroju, a środkiem kolineacyi — rzut poziomy wierzchołka. Rzut pionowy figury przecięcia znajdujemy następnie również za pomocą metody kolineacyi na zasadzie artykułu **41**.

Przekrój płaski stożka obrotowego.

115. Zajmiemy się teraz szczególnym przypadkiem, gdy dany jest stożek kołowy. Rozważmy najprzód stożek kołowy obrotowy, z podstawą na płaszczyznie poziomej rzutu. Wiemy (art. **102**), że w przekroju otrzymamy linię stożkową; z artykułu poprzedniego wiemy też, że rzut poziomy tej stożkowej będzie w kolineacyi środkowej z kołem podstawy stożka; na tej zasadzie możemy wykreślić rzut poziomy stożkowej przekroju, następnie za pomocą kładu płaszczyzny przekroju wykreślimy kształt rzeczywisty przekroju.

Osi stożkowej przekroju możemy najprzód wykreślić, albowiem płaszczyzna, poprowadzona przez wierzchołek stożka prostopadle do śladu poziomego płaszczyzny przekroju, dzieli stożek na dwie połowy symetryczne, względem niej jest płaszczyzna przekroju do siebie samej symetryczna, a zatem ta płaszczyzna pomocnicza dzieli stożkową przekroju na dwie części symetryczne, skąd wynika, że prosta przecięcia tej płaszczyzny z płaszczyzną przekroju jest osią stożkowej; prosta ta jest linią największego spadku płaszczyzny przekroju; jej rzut poziomy wyznaczamy, jako prostopadłą, spuszczoną na ślad poziomy płaszczyzny przekroju ze środka koła podstawy; długość rzutu tej osi możemy wyznaczyć, określając punkty przecięcia osi z powierzchnią stożka; środek tej osi będzie środkiem stożkowej (w przypadku przekroju parabolicznego znajdziemy tą drogą kierunek osi i wierzchołek).

Rozwinięcie stożka.

Gdy rozwiniemy stożek na płaszczyznie (po uprzednim rozcięciu jego powierzchni wzdłuż jednej z tworzących), to otrzymamy wycinek kołowy o promieniu, równym tworzącej stożka; długość łuku tego wycinka równa jest długości obwodu koła podstawy stożka. Aby zatem wykreślić w przybliżeniu rozwinięcie stożka, dzielimy koło podstawy na pewną liczbę równych części, np. na 24, i cięciwę, odpowiadającą 24-ej części koła wpisujemy 24 razy w łuk koła, opisanego promieniem, równym tworzącej; łuk ten będzie w przybliżeniu łukiem wycinka kołowego, powstającego z rozwinięcia stożka. Gdy na pewnej liczbie tworzących w rozwinięciu odetniemy od wierzchołka długości odcinków, zawartych między wierzchołkiem i krzywą przekroju, i następnie tak otrzymane punkty połączymy linią ciągłą, to będziemy mieli rozwinięcie linii przekroju.

Krzywa, na którą się przekształca linia przekroju w rozwinięciu stożka, posiadać może punkty przegięcia; punkty te odpowiadają tym punktom linii przekroju, w których płaszczyzna, styczna do powierzchni stożka, jest prostopadła do powierzchni przekroju. Aby te punkty znaleść, spuszczamy z wierzchołka powierzchni prostopadłą na płaszczyznę przekroju i ze spodka tej prostopadłej prowadzimy styczne do stożkowej przekroju; punkty styczności dadzą w rozwinięciu wspomniane punkty przegięcia. Z powyższej konstrukcyi wynika, że takich punktów albo wcale niema, albo są dwa, lub wreszcie, w szczególnym przypadku, gdy płaszczyzna przekroju jest prostopadła do jednej z tworzących, w jednym punkcie krzywej, otrzymywanej w rozwinięciu, zejdą się dwa punkty przegięcia, i otrzymamy t. zw.

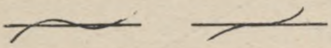


fig. 112.

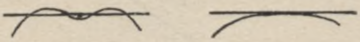


fig. 113.

punkt spłaszczenia; w punkcie spłaszczenia prosta styczna ściślej przystaje do krzywej, niż w punkcie przegięcia; gdy punkt przegięcia można sobie uplastycznić, jako punkt, w którym schodzą się w granicy trzy punkty przecięcia krzywej z prostą (figura 112), punkt spłaszczenia należy sobie przedstawić, jako punkt, w którym w granicy schodzą się cztery punkty przecięcia się krzywej z prostą (fig. 113); w bliskości punktu przegięcia krzywa leży z różnych stron stycznej, w bliskości punktu spłaszczenia — z jednej, podobnie, jak w bliskości punktu zwyczajnego.

Przekrój płaski stożka kołowego pochyłego.

116. Gdy dany będzie stożek kołowy jakikolwiek (nie obrotowy), to do wykreślenia rzutów stożkowej przekroju również zastosować możemy metodę kolineacyi; jedynie w przypadku, gdy w przekroju otrzymuje się elipsa, dogodną jest inna metoda, polegająca na wykreśleniu dwóch średnic sprzężonych elipsy, (z rzutu których następnie elipsa wykreśla się, jak w art. **27**); metoda ta jest analogiczna tej, przy której pomocy kreśliliśmy w art. **115** osi przekroju stożka obrotowego. Dla dogodności załóżmy, że podstawą stożka jest koło k_1, leżące na płaszczyznie poziomej rzutu; dane są nadto rzuty wierzchołka S stożka i ślady płaszczyzny przekroju E (fig. 114).

Oznaczmy przez A_1B_1 średnicę koła k_1, prostopadłą do śladu poziomego e_1 płaszczyzny przekroju. Wyznaczmy rzuty punktów A i B, w których tworzące SA_1 i SB_1 powierzchni przecinają płaszczyznę E; AB będzie wówczas średnicą elipsy przekroju k; rzeczywiście, cięciwy koła k_1, równoległe do e_1, dzielą ~~się~~ one ją na połowy przez średnicę A_1B_1, a ponieważ cięciwy te są równoległe do płaszczyzny E, to widzimy, że w rzucie na tę płaszczyznę z wierzchołka S prosta AB dzieli na połowy cięciwy elipsy k, ró-

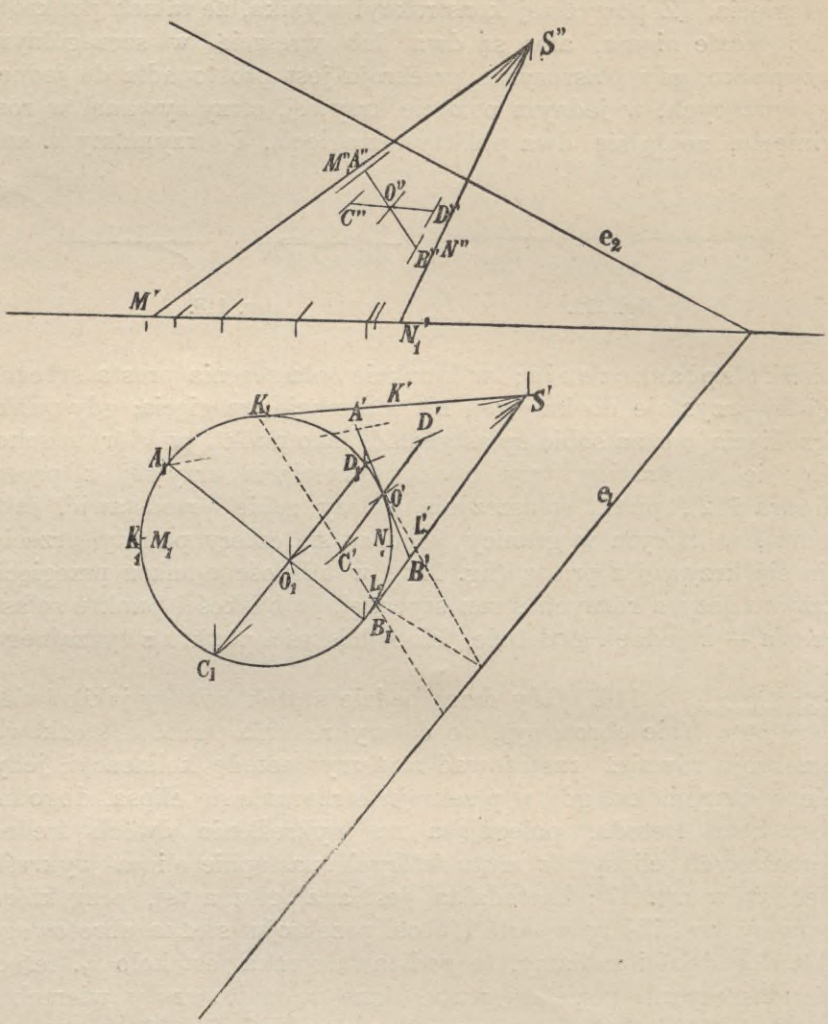


fig. 114.

wnolegle do e_1, AB jest zatem średnicą elipsy k, sprzężoną z kierunkiem e_1; w rzutach jest $A'B'$ średnicą elipsy k', a $A''B''$ — średnicą elipsy k''; środki O, O', O'' tych średnic są środkami odpowiednich elips; średnica $A'B'$ sprzężona jest z kierunkiem e_1, a $A''B''$ — z kierunkiem osi x. Aby znaleść średnicę CD elipsy k, sprzężoną z AB, uważamy, że rzutem jej ze środka S na płaszczyznę podstawy jest cięciwa koła C_1D_1, prostopadła do A_1B_1 i przecinająca A_1B_1 w punkcie O_1, będącym rzutem środkowym punktu O. Znalazłszy tedy ów punkt O_1 i poprowadziwszy przezeń cięciwę koła C_1D_1, prostopadłą do A_1B_1, wykreślimy punkty C i D, w których płaszczyznę E przecinają tworzące SC_1 i SD_1; wówczas średnice CD, $C'D'$, $C''D''$ będą odpowiednio sprzężone ze średnicami AB, $A'B'$, $A''B''$. Dla dokładności wykreślenia dobrze jest wyznaczyć niezależnie punkty, w których elipsy k' względnie k'' dotykają konturu pozornego w rzucie poziomym wzgl. pionowym. W rzucie poziomym korzystamy przytem z kolineacyi elipsy k' i koła k_1, względem punktu S' i prostej e_1, jako środka i osi kolineacyi; oznaczając przez K_1 i L_1 punkty styczności koła k_1 i stycznych, poprowadzonych doń z punktu S', znajdujemy żądane punkty K' i L' elipsy k', jako odpowiadające w kolineacyi punktom K_1 i L_1; mamy przytem inną parę punktów odpowiadających sobie, np. O_1 i O'. W rzucie pionowym szukane punkty są punktami przecięcia płaszczyzny E z tworzącemi SM_1 i SN_1, których rzuty pionowe tworzą kontur rzutu pionowego stożka; na tej też zasadzie znajdujemy punkty żądane M'' i N'', zauważywszy, że M_1 i N_1 są końcami średnicy koła, równoległej do osi rzutu.

Rozwinięcie stożka kołowego pochyłego.

Przybliżone rozwinięcie stożka kołowego pochyłego wykreślić możemy, wpisując w ten stożek ostrosłup o dostatecznie wielkiej liczbie ścian i rozwijając ten ostrosłup podług metody, wyłożonej w art. **64**. Najdogodniej jest przytem za podstawę ostrosłupa wziąć wielokąt foremny o parzystej liczbie boków, tak, aby jedna para wierzchołków przeciwległych stanowiła końce średnicy koła k_1, przechodzącej (ewentualnie w przedłużeniu) przez punkt S'.

§ 4. Przecinanie się wzajemne powierzchni walcowych i stożkowych, oraz cienie, rzucane przez jedne z nich na drugie.

Linia przecięcia dwóch powierzchni dowolnych.

117. Ogólna metoda wykreślenia linii przecięcia dwóch powierzchni jakichkolwiek polega na zastosowaniu układu powierzchni pomocniczych; każda z tych ostatnich przetnie powierzchnie dane podług dwóch linij, których punkty przecięcia będą należały do krzywej żądanej. Naturalnie, należy powierzchnie pomocnicze obierać tak, aby krzywe, podług których one przecinają powierzchnie dane, z łatwością dawały się wykreślać; najczęściej okazuje się dogodnem za powierzchnie pomocnicze obierać płaszczyzny. W każdym przypadku przytem rozważamy, jaki układ płaszczyzn obrać należy, aby rzuty krzywych przekroju były możliwie prostszemi.

Styczna do linii przecięcia.

Styczna do linii przecięcia w pewnym jej punkcie jest styczną w tymże punkcie do każdej z przecinających się powierzchni; wykreślamy przeto tę styczną, jako prostą, podług której przecinają się płaszczyzny, styczne w punkcie danym do powierzchni danych.

Wybór płaszczyzn pomocniczych.

118. Wybór płaszczyzn pomocniczych daje się z góry określić, gdy mamy wykreślić przecięcie się dwóch walców, dwóch stożków, albo walca i stożka. Będziemy mianowicie dbali o to, aby płaszczyzny pomocnicze przecinały każdą z powierzchni danych podług tworzących prostoliniowych. A więc, gdy dane będą dwa walce, to za płaszczyzny pomocnicze obierzemy układ płaszczyzn, równoległych do tworzących obydwóch walców (zag. 35); gdy dane będą dwa stożki, to płaszczyznami pomocniczemi będą płaszczyzny, przechodzące przez prostą, która łączy obydwa wierzchołki stożków; gdy wreszcie mamy walec i stożek, to płaszczyzny pomocnicze przechodzić będą przez prostą, poprowadzoną przez wierzchołek stożka równolegle do tworzących walca. W każdym z tych przypadków wszystkie płaszczyzny pomocnicze przecinać będą powierzchnie dane podług linij prostych, których punkty przecięcia wykreślimy z łatwością; punkty te należeć będą do żądanej linii przecięcia powierzchni danych.

W każdym z rzutów tylko część krzywej przecięcia będzie widzialną, część zaś pozostała widzialną nie będzie. Widzialnemi będą mianowicie te punkty krzywej, które leżą na widzialnych częściach obydwóch powierzchni przecinających się.

Krzywa skośna rzędu 4-go.

119. Będziemy odtąd mieli na uwadze wyłącznie powierzchnie walcowe eliptyczne i inne powierzchnie walcowe rzędu 2-go. Płaszczyzna dowolna przecina każdą z dwóch powierzchni tego rodzaju podług linii stożkowej; dwie tak otrzymane w przekroju linie stożkowe przecinają się najwyżej w 4-ch punktach; możemy zatem powiedzieć, że płaszczyzna dowolna przecina linię przecięcia się powierzchni badanych najwyżej w 4-ch punktach; własność tę wyrażamy inaczej, mówiąc, że linia przecięcia się naszych dwóch powierzchni jest linią skośną rzędu 4-go, — nazywamy bowiem w ogóle linię skośną linią rzędu n-go, gdy płaszczyzna dowolna przecina ją najwyżej w n punktach.

Zniekształcenie krzywej skośnej rzędu 4-go.

Rozważmy dwa szczególne zniekształcenia tej linii 4-go rzędu. Załóżmy najprzód, że dwie powierzchnie dane mają jednę tworzącą prostoliniową wspólną, podług której się przecinają. Płaszczyzna dowolna przetnie tę prostą w jednym punkcie i nadto przetnie linię przecięcia się dwóch powierzchni w 3-ch innych punktach, całkowite zatem przecięcie się tych dwóch powierzchni składać się będzie z powyższej wspólnej tworzącej prostoliniowej i z pewnej krzywej skośnej rzędu 3-go.

Niech teraz powierzchnie rozpatrywane mają wspólną linię stożkową. Uważamy, że krzywa skośna rzędu 2-go nie istnieje, wszelką bowiem krzywą skośną przeciąć możemy płaszczyzną przynajmniej w 3-ch punktach, a więc wszelkie linie rzędu 2-go są znanemi nam liniami stożkowemi. W przypadku badanym, oprócz wspólnej linii stożkowej, powierzchnie przecinają się podług innej jeszcze linii, a ponieważ płaszczyzna dowolna przecina całkowitą linię przecięcia się obydwóch powierzchni w 4-ch punktach, zaś linię stożkową wspólną — w dwóch punktach, przeto dowolna ta płaszczyzna przetnie pozostałą część linii przecięcia najwyżej w dwóch punktach, a więc pozostała część linii przecięcia jest linią rzędu drugiego, t. j. również linią stożkową. Gdy zatem dwie powierzchnie badane mają linię stożkową wspólną, te przecinają się jeszcze podług innej linii stożkowej.

W powyższych dwóch przypadkach szczególnych krzywa rzędu 4-go, otrzymywana w przecięciu się dwóch powierzchni typu badanego, rozpadła się na dwie linie: w pierwszym przypadku na linię prostą i linię skośną rzędu 3-go, w drugim — na dwie linie stożkowe.

Przenikanie się i wnikanie dwóch powierzchni.

120. Gdy wyłączymy przypadki, kiedy dwie przecinające się powierzchnie mają jednę tworzącą wspólną, lub kiedy przecinają się podług dwóch linij stożkowych, to możliwemi są dwa przypadki ogólne: albo żadna z powierzchni nie przecina drugiej wszystkiemi swemi tworzącemi, albo też wszystkie tworzące jednej pewierzchni przecinają drugą powierzchnię, podczas gdy nie wszystkie tworzące drugiej przecinają pierwszą powierzchnię *); w pierwszym przypadku mówimy, że powierzchnie wnikają w siebie, w drugim — że pierwsza powierzchnia przenika drugą. W przypadku wnikania otrzymujemy w przecięciu jednę linię ciągłą, jak wiemy, rzędu 4-go; w przypadku wnikania — linia przecięcia składa się z dwóch części oddzielnych, z których jednę uważać możemy za linię wejścia, drugą — za linię wyjścia; dwie te linie razem wzięte stanowią linię rzędu 4-go. Kiedy ma miejsce przenikanie, a kiedy wnikanie, możemy w każdym szczególnym przypadku orzec na zasadzie położenia wzajemnego powierzchni danych i układu płaszczyzn pomocniczych, a mianowicie: gdy dwie rozpatrywane powierzchnie leżą tak, że płaszczyzny pomocnicze, styczne do jednej z nich, znajdują się obie między płaszczyznami pomocniczemi, stycznemi do drugiej (lub obie zewnątrz tych płaszczyzn), to mamy przypadek przenikania się powierzchni; gdy zaś jedna płaszczyzna pierwszej pary leży wewnątrz, druga — zewnątrz płaszczyzn drugiej pary, to mamy przypadek wnikania powierzchni. Każdemu z tych położeń obydwóch par płaszczyzn stycznych odpowiada zupełnie analogiczne położenie wzajemne śladów tychże płaszczyzn na jakiejkolwiek innej płaszczyźnie; na tej zasadzie możemy z łatwością w każdym poszczególnym przypadku naprzód zbadać, z jakim typem przecinania się powierzchni mamy do czynienia.

Kryteryum powyższe ustaje, gdy żadna z płaszczyzn pomocniczych nie jest styczna bądź do jednej z powierzchni danych,

---

*) Dwom przypadkom wykluczonym odpowiada położenie powierzchni szczególne, gdy każda z nich przecina drugą wszystkiemi swemi tworzącemi (z wyjątkiem przypadku dwóch powierzchni walcowych eliptycznych o wspólnej tworzącej, pozostała część linii przecięcia redukuje się tu bowiem do jednej tworzącej prostoliniowej).

bądź do obydwóch, np. gdy jedną z powierzchni jest powierzchnia stożkowa, której wierzchołek leży wewnątrz drugiej powierzchni; zbadanie kilku możliwych przypadków odnośnych wykazuje, że zawsze mamy w takich razach przypadek przenikania się powierzchni, gdyż krzywa przecięcia składa się z 2-ch linij oddzielnych (musimy, naturalnie, uwzględniać przy powierzchni stożkowej obie powłoki).

Metody, powyżej wyłożone, zastosujemy teraz do paru przypadków szczególnych.

Przykład: przecięcie walca i stożka.

121. W y k r e ś l i ć l i n i ę p r z e c i ę c i a s t o ż k a i w a l c a o b r o t o w y c h, z k t ó r y c h p i e r w s z y s t o i n a p ł a s z c z y z n i e p o z i o m e j r z u t u, p o d s t a w a z a ś d r u g i e g o z n a j d u j e s i ę n a p ł a s z c z y z n i e, d a n e j p r z e z ś l a d y (figura 115).

Niech koło k będzie podstawą stożka; ślady płaszczyzny E podstawy walca oznaczmy, jak zwykle, przez e_1, e_2, i niech koło c_0 będzie kładem tej podstawy c na płaszczyznę poziomą. Poprowadźmy przez wierzchołek S stożka prostą a, równoległą do tworzących walca; gdy przez tę prostą a przesuniemy płaszczyznę P_3, prostopadłą do płaszczyzny P_1, to ślad poziomy tej płaszczyzny będzie prostopadły do e_1 (i zarazem równoległy do rzutów poziomych tworzących walca). Płaszczyzna P_3 posłuży nam do wykreślenia rzutów podstawy walca. Jakoż, wyznaczmy ślad płaszczyzny E na P_3 i wykreślmy kład e_3 tego śladu; gdy średnicę CB^0 obracać będziemy około e_1 tak, aby punkt B_0 przyszedł na płaszczyznę E, to rzutem tego położenia CB średnicy CB^0 będzie oś mała CB' elipsy c'; możemy wyobrazić sobie ten obrót wykonanym w rzucie na płaszczyznę P_3 i w rzeczywistości wykonać go w kładzie poziomym tej płaszczyzny. Wystarczy tu na e_3 od punktu Y, w którym e_3 przecina e_1, odciąć $YB''' = CB_0$, wtedy B''' będzie kładem rzutu punktu B na P_3; spadek zaś prostopadłej, spuszczonej z B''' na CB^0, będzie punktem B' żądanym; oś wielka elipsy c' równa jest średnicy koła c_1, możemy zatem rzut c' koła c wykreślić.

Ponieważ tworzące walca są prostopadłe do jego podstawy, to w kładzie poziomym płaszczyzny P_3 kład a''' prostej a będzie prostopadły do kładu e_3 i oczywiście a''' przejść musi przez ślad poziomy A_1 prostej a. Wykreślmy rzut poziomy śladu A_2 prostej a na płaszczyznie E; w tym celu wyznaczamy kład A'''_2 rzutu tego puuktu na P_3; A'''_2 będzie punktem przecięcia się prostych a''' i e_3, spodek zaś prostopadłej, spuszczonej z A'''_2 na y, będzie punktem A'_2 żądanym.

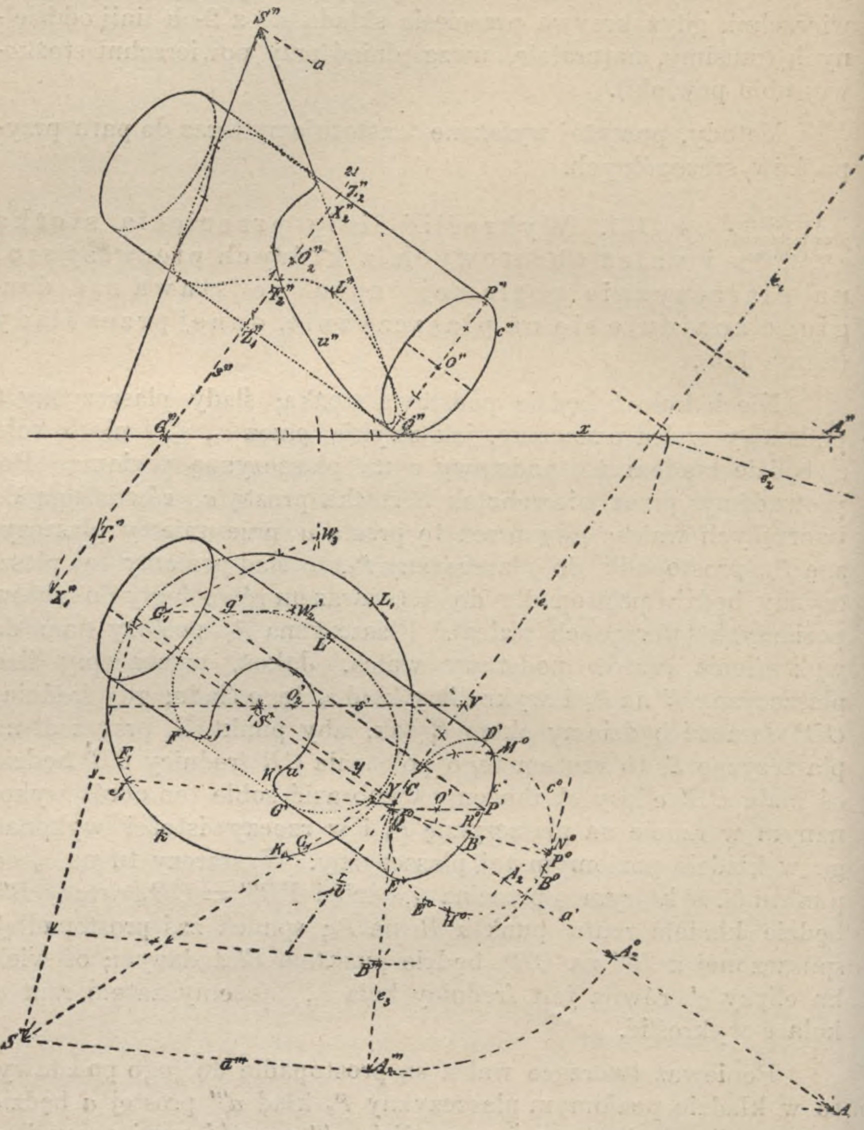


fig. 115.

Zgodnie z metodą ogólną należy przez tak wyznaczoną prostą a prowadzić płaszczyzny pomocnicze; każda z nich przetnie walec i stożek podług tworzących prostoliniowych, których przecięcia wzajemne będą punktami krzywej u szukanej. Musimy jedynie zastanowić się nad możliwie dogodnym sposobem wykonania tych wykreśleń. Uważamy, że ślady wszystkich tych płaszczyzn na płaszczyznie P_1 przechodzą przez A_1, zaś ślady tychże płaszczyzn na E przechodzą przez A_2, oraz, że obydwa te ślady każdej płaszczyzny przecinają się na prostej e_1. Skoro zatem dowolny punkt prostej e_1 połączymy z jednej strony z punktem A_1, z drugiej strony — z punktem A_2, to pierwsza prosta przetnie koło k w dwóch punktach, wyznaczających dwie tworzące stożka, druga zaś prosta przetnie elipsę c' w dwóch punktach, wyznaczających odpowiednie dwie tworzące walca; cztery punkty przecięcia tych prostych należą do krzywej u.

Na rzucie tworzącej walca, stycznym do elipsy c' w punkcie E', znajdziemy w naszym przypadku dwa punkty styczności z krzywą u': F' i G'; przechodzące przez nie tworzące stożka wyznaczone są przez punkty F_1 i G_1, w których koło k przecina prostą, poprowadzoną przez A_1 i przez punkt przecięcia prostych A'_2E' i e_1.

Dla otrzymania rzutu pionowego u'' krzywej przecięcia wyznaczamy dla każdego punktu krzywej u' odpowiedni mu punkt krzywej u'', przyczem najlepiej jest wyznaczyć rzuty pionowe tych tworzących walca i stożka, które przechodzą przez ten punkt.

Określamy następnie w każdym rzucie, która część każdej powierzchni byłaby widzialna, gdyby drugą powierzchnię usunięto, i te części krzywej przecięcia, które należą do widzialnych części obydwóch powierzchni, jako widzialne, kreślimy linię ciągłą, pozostałe zaś, jako niewidzialne, linią przerywaną. Punkty linii przecięcia, oddzielające jej części widzialne od niewidzialnych, leżą zawsze na konturze jednej lub drugiej powierzchni.

122. Wykreślić linię przecięcia się wzajemnego dwóch walców eliptycznych.

Przykład: przecięcie dwóch walców. Niech podstawą jednego z walców danych będzie koło k (fig. 116), znajdujące się na płaszczyznie poziomej rzutu, podstawą zaś drugiego — elipsa c, której płaszczyzna E dana jest przez ślady e_1, e_2; dla dogodności niech ta płaszczyzna będzie prostopadła do płaszczyzny pionowej rzutu.

Płaszczyzny pomocnicze w danym przypadku winny być równoległe do tworzących obydwóch walców; wyznaczmy kierunki śladów tych płaszczyzn na płaszczyźnie P_1 i na płaszczyźnie E. W tym celu z dowolnie obranego na płaszczyźnie P_2 punktu Q

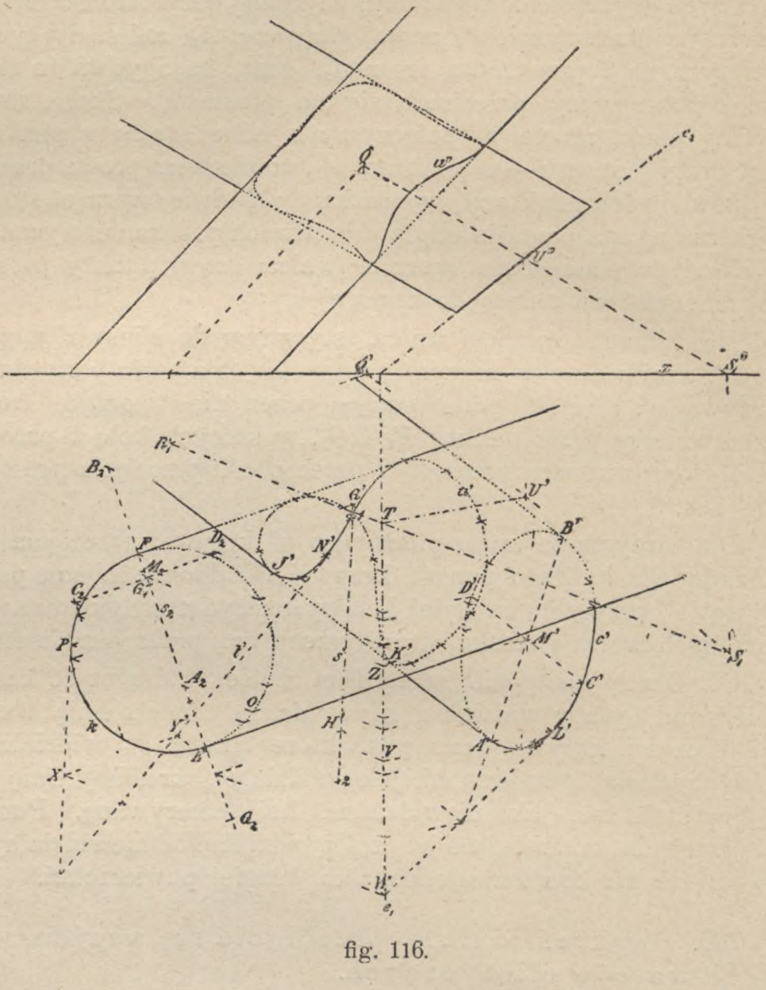


fig. 116.

prowadzimy równoległe do tworzących obydwóch walców i ślady poziome R_1, S_1 tych prostych łączymy prostą R_1S_1, która to prosta będzie równoległa do śladów poziomych płaszczyzn pomocniczych. Wyznaczmy następnie rzuty punktu U, w którym prosta QS przebija płaszczyznę E, oraz punkt przecięcia T prostych R_1S_1 i e_1, wówczas ślady płaszczyzn pomocniczych na płaszczyznie $\boldsymbol{E}$ są równoległe do prostej TU, a rzuty poziome tych śladów — do prostej TU'. Gdy zatem z dowolnego punktu prostej e_1 poprowadzimy dwie proste: jednę równolegle do TR_1, drugą — do TU', i wyznaczymy punkty, w których pierwsza z nich przetnie koło k, a druga — elipsę c', to tworzące odpowiednich walców, przechodzące przez te punkty, przetną się w 4-ch punktach, należących do żądanej linii przecięcia.

Styczną t do linii przecięcia w pewnym jej punkcie N wyznaczamy, jako prostą przecięcia się płaszczyzn, stycznych do powierzchni walców wzdłuż tworzących NP, względnie NL. Śladem poziomym pierwszej płaszczyzny jest styczna do koła k w punkcie P, rzutem poziomym śladu drugiej na płaszczyznie $\boldsymbol{E}$ jest styczna do elipsy c' w punkcie L'; płaszczyzny pomocnicze przecinają te płaszczyzny styczne podług prostych, równoległych do odpowiednich tworzących walców. W szczególności obierzmy płaszczyznę pomocniczą, której ślad poziomy WX (równoległy do R_1S_1) przechodzi przez punkt W, w którym styczna w L' do c' przecina prostą e_1; gdy poprowadzimy przez X i W proste odpowiednio równoległe do rzutów poziomych tworzących, to w przecięciu otrzymamy punkt Y', wyznaczający wraz z punktem N' rzut $N'Y'$ stycznej t do krzywej u w punkcie N; punkt, w którym t' przetnie prostą PX, jest śladem poziomym tej stycznej; znając go wykreślimy odrazu rzut pionowy t'' tej stycznej.

Części widzialne i niewidzialne linii przecięcia wyznaczamy podobnie, jak w przykładzie poprzednim.

Cienie, rzucone przez jednę powierzchnię na drugą.

123. Pozostaje jeszcze rozważyć cień, rzucony przez jednę z powierzchni badanego rodzaju na drugą. Niech powierzchnia $\boldsymbol{A}$ rzuca cień na powierzchnię $\boldsymbol{B}$. Kreślimy przedewszystkiem cienie, rzucone przez obiedwie powierzchnie na płaszczyznę $\boldsymbol{P}_1$ (artykuły **100** i **105**); niech pewna tworząca prostoliniowa l powierzchni $\boldsymbol{B}$ rzuca cień poziomy l_1, który niech przecina granicę cienia poziomego powierzchni $\boldsymbol{A}$ w punkcie L_1; otóż promień światła, przechodzący przez L_1, przetnie tworzącą l w punkcie L, którego cieniem poziomym jest punkt L_1, i ten punkt L należeć będzie do granicy cienia, rzuconego przez $\boldsymbol{A}$ na $\boldsymbol{B}$; wykreśliwszy tym sposobem dostateczną liczbę takich punktów, łączymy je krzywą ciągłą i otrzymujemy tym sposobem linię krzywą żądaną.

ĆWICZENIA.

152) Mając dany rzut poziomy punktu, wykreślić jego rzut pionowy tak, aby punkt ten znajdował się na powierzchni walcowej danej.

153) Wykreślić punkty przecięcia prostej danej z powierzchnią walcową daną.

154) Na płaszczyznie danej poprowadzić przez dany na niej punkt prostą, nachyloną do P_1 pod kątem danym.

155) Przez punkt dany na powierzchni walca lub zewnątrz niej poprowadzić do niej prostą styczną, mającą dany kąt nachylenia względem płaszczyzny P_1.

156) Wykreślić płaszczyznę, styczną do dwóch walców o tworzących równoległych.

157) Wykreślić płaszczyznę, styczną do dwóch walców o wspólnym śladzie poziomym.

158) Dane są dwie płaszczyzny; wykreślić rzuty walca, stycznego do nich, którego śladem poziomym byłoby koło, przechodzące przez punkt dany.

159) Na płaszczyznie dana jest prosta; wykreślić ślad poziomy powierzchni walcowej obrotowej, stycznej do płaszczyzny danej podług prostej danej, gdy nadto dany jest jeden punkt śladu poziomego szukanego.

160) Do dwóch dowolnie danych powierzchni walcowych poprowadzić płaszczyzny styczne równoległe.

161) Dane są rzuty osi walca obrotowego, oraz wielkość promienia jego podstawy; wykreślić rzuty tego walca, oraz jego cienie przy danem oświetleniu równoległem lub środkowem.

162) Mając dany rzut pionowy punktu, wykreślić jego rzut poziomy tak, aby punkt ten znajdował się na powierzchni stożkowej danej.

163) Wykreślić punkty przecięcia prostej danej z daną powierzchnią stożkową.

164) Wykreślić rzuty stożka obrotowego, gdy dane są: rzuty jego wierzchołka, ślady płaszczyzny jego podstawy, oraz kąt nachylenia tworzących do płaszczyzny podstawy.

165) Przez punkt, dany na powierzchni stożka lub zewnątrz niej, poprowadzić do niej prostą styczną, nachyloną do płaszczyzny poziomej rzutu pod kątem danym.

166) Przez prostą daną poprowadzić płaszczyznę, nachyloną pod kątem danym do płaszczyzny poziomej rzutu.

167) Przez prostą daną poprowadzić płaszczyznę, nachyloną pod kątem danym do pewnej płaszczyzny danej.

168) Wykreślić płaszczyznę, styczną do dwóch stożków o wierzchołku wspólnym.

169) Wykreślić płaszczyznę, styczną do dwóch stożków o wspólnym śladzie poziomym.

170) Wykreślić płaszczyznę, styczną do walca i stożka o wspólnym śladzie poziomym.

171) Wykreślić rzuty stożka, stycznego do płaszczyzny danej, gdy dane są: rzut pionowy wierzchołka, oraz dwa punkty podstawy kołowej, leżącej na P_1.

172) Do dwóch stożków dowolnie danych poprowadzić płaszczyzny styczne równoległe.

173) Do walca i stożka dowolnie danych poprowadzić płaszczyzny styczne równoległe.

174) Dane są rzuty osi stożka obrotowego, oraz promień jego podstawy; wykreślić rzuty tego stożka, oraz jego cienie przy danem oświetleniu równoległem lub środkowem.

175) Przez punkt dany zewnątrz stożka poprowadzić do niego prostą styczną, równoległą do danej płaszczyzny.

176) Walec obrotowy dany jest przez trzy tworzące; wykreślić jego ślad poziomy, oraz przekrój płaszczyzną daną.

177) Stożek obrotowy dany jest przez trzy tworzące; wykreślić jego ślad poziomy oraz przekrój płaszczyzną daną.

178) Wykreślić przekrój płaszczyzną daną stożka, danego przez rzuty wierzchołka i przekrój drugą płaszczyzną dwusieczną główną.

179) Wykreślić linię przecięcia dwóch walców, gdy mamy ich ślady jednoimienne.

180) Wykreślić linię przecięcia walca i stożka, gdy mamy ich ślady jednoimienne.

181) Wykreślić linię przecięcia dwóch stożków, gdy mamy ich ślady jednoimienne; w szczególności: dwóch stożków obrotowych, stojących na płaszczyźnie poziomej rzutu, przyczem: a) ich ślady poziome przecinają się, b) ich ślady poziome nie przecinają się.

182) Wykreślić cienie w rozwiązaniu zagadnień 179, 180, 181.

183) Znaleść punkt, mający odpowiednio dane odległości od trzech prostych, dowolnie danych w przestrzeni.

184) Wykreślić rzuty linii rzędu 3-go, otrzymywanej w przecięciu dwóch stożków rzędu 2-go o wspólnej tworzącej.

185) Wykreślić przecięcie się walca eliptycznego i stożka rzędu 2-go o wspólnej tworzącej.

186) Wykreślić cień, rzucony przez brzeg pustego walca eliptycznego (w szczególności obrotowego) na wewnętrzną jego powierzchnię.

187) Wykreślić linię przecięcia dwóch walców obrotowych, których osi przecinają się, w szczególności, gdy osi przecinają się pod kątem prostym; założyć dla dogodności, że osi te leżą w płaszczyznie poziomej rzutu, lub są do niej równoległe. (Takie dwie powierzchnie walcowe tworzą w budownictwie t. zw. sklepienie krzyżowe — niem. Kreuzgewölbe, fr. voûte d'arète).

188) Dany jest stożek obrotowy; przeciąć go powierzchnią walca obrotowego, którego oś ma przecinać oś stożka pod kątem prostym i do którego powierzchni mają być styczne dwie przeciwległe tworzące stożka. Po wykonaniu konstrukcyi wykreślić rozwinięcie tej części powierzchni stożka, która leży zewnątrz walca.

189) Dowieść, że jeżeli granica cienia, rzuconego przez dowolną powierzchnię na inną dowolną powierzchnię przy oświetleniu równoległem, przecina granicę cienia własnego tej drugiej powierzchni, to w punktach przecięcia styczne do pierwszej z tych linij są równoległe do promieni światła.

ROZDZIAŁ VI.

POWIERZCHNIE OBROTOWE.

§ 1. O powierzchniach obrotowych w ogólności.

124. Powierzchnią obrotową nazywamy powierzchnię, utworzoną przez obrót pewnej linii około niezmiennie z nią związanej prostej; prostą tę nazywamy osią powierzchni obrotowej. (W rozdziale poprzednim mieliśmy dwa przykłady powierzchni obrotowych: powierzchnię walcową i stożkową obrotowe). Każdy punkt obracającej się linii opisuje koło w płaszczyznie, prostopadłej do osi, ze środkiem na tej ostatniej; odwrotnie też wszelka płaszczyzna, prostopadła do osi, przecina powierzchnię obrotową podług koła, mającego środek na osi; wszystkie te koła, przez analogię z odpowiedniemi kołami na globusie ziemskim, nazywamy równoleżnikami. Płaszczyzny, przechodzące przez oś, przecinają powierzchnię podług krzywych, przechodzących, skutkiem obrotu około osi, jedna w drugą; krzywe te, również przez powyżej wymienioną analogię, nazywamy południkami powierzchni. Przez każdy punkt powierzchni przechodzi jeden równoleżnik i jeden południk. Wszelka linia — płaska lub skośna — nakreślona na powierzchni obrotowej tak, że przecina wszystkie równoleżniki, tworzy przez obrót około osi tę samą powierzchnię obrotową; w szczególności możemy uważać tę powierzchnię, jako powstałą przez obrót południka około osi.

Równoleżniki i południki.

Płaszczyzna styczna.

Płaszczyzna styczna do powierzchni obrotowej w pewnym jej punkcie wyznacza się najdogodniej przez styczne do równoleżnika i południka, przechodzących przez ten punkt. Styczna do południka, leżąc w jego płaszczyźnie, przecina oś powierzchni, styczna zaś do równoleżnika jest prostopadła do płaszczyzny przechodzącego przez ten punkt południka; do tej samej płaszczyzny jest wskutek tego prostopadła płaszczyzna styczna do powierzchni w punkcie danym. Wnioskujemy stąd dalej, że gdy w punktach jednego południka prowadzić będziemy płaszczyzny styczne do powierzchni obrotowej, to wszystkie te płaszczyzny owijać będą powierzchnię walcową, dla której ów południk jest kierującą, i której tworzące są prostopadłe do płaszczyzny tego południka. Gdy zaś prowadzić będziemy płaszczyzny styczne do powierzchni obrotowej w punktach jednego równoleżnika, to płaszczyzny te owijać będą powierzchnię stożkową obrotową, mającą wierzchołek na osi powierzchni, a ów równoleżnik za podstawę. Ponieważ płaszczyzna styczna do powierzchni obrotowej jest prostopadła do płaszczyzny południka, przechodzącego przez punkt styczności, to normalna do powierzchni obrotowej, będąca zarazem normalną do południka, leży w płaszczyźnie południka i wskutek tego przecina oś powierzchni. Normalne w punktach jednego równoleżnika przecinają oś w tym samym punkcie i tworzą powierzchnię stożkową obrotową.

Równoleżniki i południki powierzchni obrotowej odgrywają rolę pierwszorzędną przy rozwiązywaniu wszelkich zagadnień, tyczących się takiej powierzchni.

125. Zajmijmy się kwestyą wyobrażania powierzchni obrotowej na rysunku, t. j. wykreślania jej konturu pozornego w rzucie poziomym i pionowym.

Rzuty powierzchni obrotowej.

Najdogodniej jest przedstawiać pdwierzchnię obrotową w położeniu takiem, aby jej oś była prostopadła do płaszczyzny P_1; gdy dana jest w innem położeniu, to często okazuje się dogodnem sprowadzić ją przez jeden lub dwa obroty do położenia wskazanego *), a następnie, po wykonaniu wykreślenia, znów sprowadzić ją do położenia pierwotnego. Udogodnienie, jakie zyskujemy przy położeniu osi prostopadłem do P_1, polega na tem, że wówczas rzuty poziome równoleżników

---

*) Wszelką prostą przez obrót około prostej, prostopadłej do P_1, sprowadzić możemy do położenia równoległego do P_2, następnie, przez obrót około prostej, prostopadłej do P_2, — do położenia prostopadłego do P_1.

przedstawiają się jako koła wielkości rzeczywistej o wspólnym środku, będącym rzutem poziomym osi; rzuty poziome południków — jako promienie tych kół spółśrodkowych; w rzucie pionowym równoleżniki dają proste równoległe do osi rzutu; z południków dwa przedstawiają się w postaci istotnej, — są to te, których płaszczyzna jest równoległa do P_2, zatem których rzuty poziome są równoległe do osi rzutu; te dwa szczególne południki nazywać będziemy południkami głównemi; rzuty pozostałych południków znajdują się w kolineacyi prostokątnej z rzutami południków głównych (a więc i między sobą), przyczem osią kolineacyi jest rzut pionowy osi powierzchni; na zasadzie tej kolineacyi możnaby było dowolny z nich wykreślić, gdyby tego zaszła potrzeba.

Gdy powierzchnia obrotowa przedstawiona jest z pionowym kierunkiem osi, to kontur rzutu poziomego składa się z jednego albo dwóch kół, będących rzutami największego względnie największego i najmniejszego z równoleżników, kontur zaś rzutu pionowego stanowią rzuty południków głównych.

Nieco trudniej jest wykreślić kontury rzutów powierzchni obrotowej, danej w położeniu dowolnem. Kontur pozorny w pewnym rzucie utworzony jest, jak wiemy, z rzutów tych punktów powierzchni, w których płaszczyzna styczna jest równoległa do promieni rzucających. W przypadku powierzchni obrotowej obieramy dowolnie jeden równoleżnik i wykreślamy na nim obydwa punkty, w których płaszczyzna styczna do powierzchni czyni zadość powyższemu warunkowi, następnie znajdujemy takież dwa punkty na innym równoleżniku i t. d.; tym sposobem otrzymamy dowolną liczbę punktów konturu żądanego. Co się tyczy sposobu wykreślenia na danym równoleżniku dwóch punktów o powyższej własności, to przypomnijmy sobie, że wszystkie płaszczyzny, styczne do powierzchni w punktach jednego równoleżnika, są styczne do powierzchni stożka obrotowego, mającego za podstawę ten równoleżnik, a za wierzchołek — punkt osi, w którym tę ostatnią przecinają wszystkie te płaszczyzny; na zasadzie tej uwagi zadanie znalezienia na danym równoleżniku dwóch punktów, w których płaszczyzny styczne do powierzchni byłyby równoległe do promieni rzutu, sprowadza się do zadania: poprowadzić do danego stożka obrotowego płaszczyznę styczną, równoległą do prostej danej (do promieni rzutu); to ostatnie zadanie było przez nas rozwiązane (art. **106**).

Cienie powierzchni obrotowej. **126.** Tą samą metodą wykreślić możemy granicę światła i cienia na powierzchni obrotowej danej. Gdy dane jest oświetlenie równoległe, to sposobem artykułu poprzedniego szukamy na każdym równoleżniku punktów, w których płaszczyzny styczne do powierzchni są równoległe do promieni światła. Gdy oświetlenie jest środkowe, to na każdym równoleżniku szukać musimy punktów, w których płaszczyzny styczne do powierzchni przechodzą przez punkt świetlny; w tym przypadku przez rozumowanie takie, jak w art. **125**, sprowadzamy zadanie nasze do następującego: poprowadzić przez punkt dany płaszczyznę styczną do powierzchni danego stożka obrotowego (art. **106**). Punkty, tym sposobem wyznaczone na powierzchni, należą do granicy światła i cienia.

Znając granicę światła i cienia na powierzchni, możemy w każdym rzucie oddzielić część oświetloną od nieoświetlonej. Promienie światła, przechodzące przez punkty granicy światła i cienia, są w tych punktach styczne do powierzchni stożkowej i tworzą w przypadku oświetlenia równoległego powierzchnię walcową, a w przypadku oświetlenia środkowego — powierzchnię stożkową, która to powierzchnia — walcowa wzgl. stożkowa — są styczne do powierzchni obrotowej wzdłuż granicy światła i cienia. Ślad poziomy tej powierzchni walcowej wzgl. stożkowej stanowi kontur cienia poziomego powierzchni obrotowej. Gdy powierzchnia obrotowa rzuca cień na inną jakąkolwiek powierzchnię, to granicę cienia rzuconego stanowi linia, podług której drugą powierzchnię przecina powyżej określona powierzchnia walcowa (wzgl. stożkowa).

127. Niech teraz jakakolwiek powierzchnia rzuca cień na powierzchnię obrotową; zobaczmy, jak najdogodniej wykreśla się w tym przypadku granica cienia rzuconego. Niech powierzchnia obrotowa ma oś pionową; oświetlenie niech będzie równoległe. Powierzchnię, rzucającą cień, oznaczmy przez A. Przedewszystkiem wykreślić musimy granicę cienia, rzuconego przez powierzchnię A na płaszczyznę poziomą P_1, jak gdyby powierzchni obrotowej nie było. Uważamy następnie, że cień poziomy każdego równoleżnika jest kołem, równem temu równoleżnikowi; wykreśliwszy cień poziomy jednego równoleżnika, zaznaczamy punkty przecięcia tego cienia z granicą cienia poziomego powierzchni A; odpowiadające tym punktom punkty na równoleżniku należą do granicy żądanej; możemy tym sposobem wykreślić dowolną liczbę punktów tej granicy.

Przekroje płaskie.

128. Powiemy jeszcze kilka słów o kreśleniu przekroju powierzchni obrotowej płaszczyzną dowolną. Płaszczyzna pomocnicza, prostopadła do osi powierzchni, przecina tę ostatnią podług koła (równoleżnika), a płaszczyznę daną podług prostej; punkty przecięcia tej prostej należą do krzywej przekroju; szereg płaszczyzn pomocniczych da nam tym sposobem szereg punktów krzywej żądanej. Gdy oś powierzchni jest pionowa, wykreślenie to jest oczywiście nadzwyczaj proste.

Przecięcie powierzchni obrotowej powierzchnią dowolną.

Podobnym do poprzedniego sposobem wykreśla się przecięcie powierzchni obrotowej jakąkolwiek inną powierzchnią, mianowicie: przecinamy obie powierzchnie szeregiem płaszczyzn pomocniczych, prostopadłych do osi powierzchni obrotowej; każda taka płaszczyzna przecina powierzchnię obrotową podług koła, a drugą — podług pewnej krzywej; punkty przecięcia koła i krzywej należą do krzywej żądanej. Naturalnie, niema potrzeby wykreślać całkowitego przekroju drugiej powierzchni płaszczyzną pomocniczą: wystarczy bowiem wykreślić części tej krzywej w bliskości punktów przecięcia z odpowiedniem kołem.

Przykład.

129. Dla przykładu wykreślimy zagadnienie następujące: D a n a j e s t p o w i e r z c h n i a o b r o t o w a p r z e z o ś p i o n o w ą i p o ł u d n i k g ł ó w n y; w y k r e ś l i ć ś l a d y p ł a s z c z y z n y E, s t y c z n e j d o p o w i e r z c h n i w p u n k c i e P (danym np. przez rzut poziomy), i w y k r e ś l i ć l i n i ę p r z e c i ę c i a t e j p ł a s z c z y z n y z p o w i e r z c h n i ą o b r o t o w ą (fig. 117).

Rzuty osi niech będą A i a''; m niech będzie krzywą południkową główną. Kontur w rzucie poziomym tworzą koła b' i c' o wspólnym środku A, w rzucie pionowym — krzywa m''.

Przedewszystkiem wykreślmy rzut pionowy punktu P. W tym celu kreślimy koło d' z punktu A, jako środka, promieniem AP' i uważamy je, jako rzut poziomy równoleżnika d, przechodzącego przez pnnkt P; rzutem pionowym koła a będzie odcinek a'' prostej, równoległej do osi rzutu i równy co do długości średnicy koła d'; wykreśliwszy ten odcinek d'', znajdziemy na nim punkt P'', jako spodek prostopadłej, spuszczonej nań z punktu P'.

Płaszczyzna E zawiera styczną do koła d w punkcie P, która to styczna jest równoległa do P_1; wskutek tego ślad poziomy e_1 płaszczyzny E jest równoległy do prostej AP'. Musimy znaleść jeszcze jeden punkt tego śladu, aby go módz wykreślić.

Uważamy, że płaszczyzna E zawiera styczną t w punkcie P do południka, przechodzącego przez ten punkt; przeto ślad e_1 przechodzi przez ślad poziomy T_1 prostej t; aby punkt T_1 znaleść, wykonywamy obrót płaszczyzny południka, przechodzącego przez P, około osi tak, aby ona stała się równoległą do P_2; punkt P

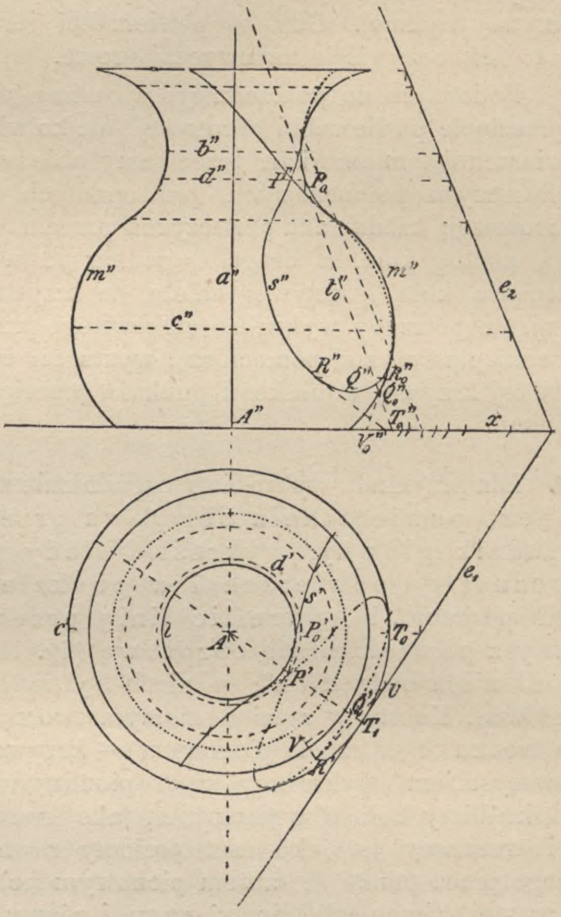


fig. 117.

zajmie wówczas położenie P_0 na południku głównym, styczna t zajmie położenie stycznej t_0 w P_0 do południka głównego; z łatwością znajdziemy ślad T_{01} prostej t_0, a przez odwrotny obrót płaszczyzny południka do położenia poprzedniego znajdziemy ślad T_1 prostej t, poczem odrazu wykreślimy e_1, jako ~~równoległą~~ prostopadłą do AP' przez T_1; znając zaś ślad poziomy e_1 płaszczyzny E, wykreślimy bez trudu jej ślad pionowy e_2 (zagadnienie 27). Linię przecięcia płaszczyzny E z powierzchnią wykreślamy podług metody art. **128**, przyczem bezpośrednio wyznaczamy rzut poziomy linii przekroju, jej rzut pionowy wykreślamy następnie z rzutu poziomego.

Płaszczyzna południka, przechodzącego przez P, zawiera normalną w tym punkcie do powierzchni i jest wskutek tego prostopadła do płaszczyzny stycznej E; a zatem ta płaszczyzna styczna jest symetryczna względem płaszczyzny południka, względem której jest również symetryczna powierzchnia obrotowa; stąd wynika, że i krzywa przekroju jest symetryczna względem tej płaszczyzny południka, na tym ostatnim leży zatem najniższy punkt Q linii przekroju; punkt ten Q znajdziemy na zasadzie uwagi, że, będąc punktem przecięcia prostej t i południka, przechodzi przez obrót, powyżej wykonany, w punkt Q_0, w którym prosta t''_0 przecina południk m''.

§ 2. Powierzchnie obrotowe szczególne.

130. Zbadawszy powierzchnie obrotowe w ogólności, przejdziemy obecnie do niektórych szczególnych powierzchni obrotowych.

Kula. Przez obrót linii stożkowej około jej osi powstaje powierzchnia obrotowa rzędu 2-go. Najprostszą z nich jest kula, powstająca przez obrót koła około średnicy. Jak w kole każda średnica uważana być może za jego oś, tak samo każda średnica kuli uważaną być może za oś obrotu; każda płaszczyzna przecina kulę podług koła; wszystkie koła, których płaszczyzny przechodzą przez środek ~~koła~~ Kuli, czyli t. zw. koła wielkie, są sobie równe, mają bowiem za promień — promień kuli. Dzięki tym własnościom niema potrzeby obierać na kuli układu równoleżników i południków; własności szczególne kuli dają możność prościej rozwiązywać tyczące się jej zagadnienia, niż na zasadzie metod ogólnych.

Proste, równoległe do jednego kierunku i styczne do kuli, tworzą powierzchnię walcową, styczną do kuli podług wielkiego koła, płaszczyzna którego jest prostopadła do kierunku stycznych. Wskutek tego zarówno w rzucie poziomym, jak i w pionowym, kontur kuli stanowić będzie koło, opisane z odpowiedniego rzutu środka kuli promieniem, równym jej promieniowi.

Przekroje płaskie kuli.

131. Wykreślmy rzuty koła u, podług którego kulę przecina płaszczyzna dana E (fig. 118) Rzuty u', u'' szukane są, jak wiadomo, elipsami. Przez środek kuli poprowadźmy płaszczyznę L, prostopadłą do śladu poziomego e_1 płaszczyzny E; względem płaszczyzny L są symetryczne zarówno kula,

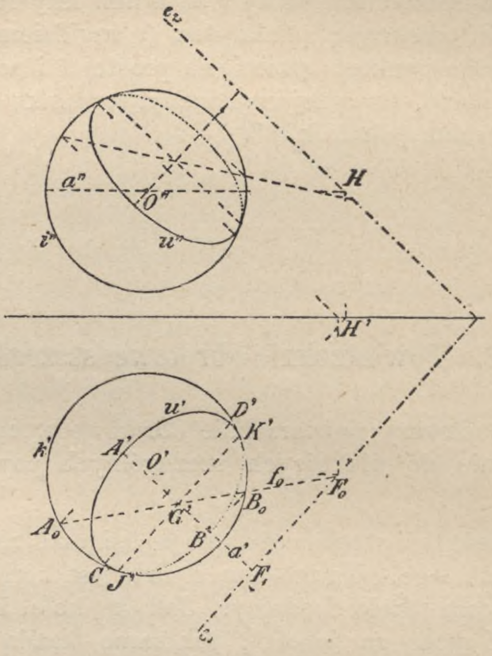


fig. 118.

jak i płaszczyzna E, a więc i koło u, tak że prosta f, podług której przecinają się płaszczyzny E i L, jest średnicą koła u. Dla wykreślenia końców tej średnicy, t. j. punktów przecięcia prostej f z kulą, obróćmy płaszczyznę L około prostej a, poprowadzonej w niej przez O równolegle do P_1, i nadajmy tej płaszczyznie położenie równoległe do P_1. Wtedy koło wielkie, podług którego L przecina kulę, przejdzie w koło k, którego rzut poziomy jest konturem pozornym kuli; punkt F prostej f, który znajdował się na płaszczyznie P_1, opisze koło; jego rzut poziomy posunie się po prostej e_1, jako po prostopadłej do a', na długość, równą odległości tego punktu od prostej a, czyli, co bezpośrednio z rysunku otrzymujemy, odległości punktu O'' od osi rzutu; odcinając tę długość na prostej e_1 od F_1, otrzymamy punkt F_0, będący rzutem punktu F po obrocie; punkt G, w którym przecinają się proste a i f, możemy łatwo wykreślić i tym sposobem będziemy mieli prostą $G'F_0$, będącą rzutem prostej f po obrocie; punkty A_0 i B_0, w których prosta $G'F_0$ przetnie koło k', będą rzutami końców średnicy, leżącej na f, po obrocie; spuszczając zaś z tych punktów prostopadłe na a', otrzymamy rzuty A', B' końców tej średnicy w położeniu pierwotnem; $A'B'$ będzie więc średnicą elipsy u', a środek tego odcinka — środkiem elipsy. Średnica CD koła u, prostopadła do AB, jest równoległa do prostej e_1; rzut więc tej średnicy jest też równoległy do e_1, t. j. prostopadły do $A'B'$; skoro zaś średnice sprzężone $A'B'$ i $C'D'$ są do siebie prostopadłe, to są one osiami elipsy u'; długość odcinka $C'D'$ równa jest długości istotnej średnicy koła u, którą to długość przedstawia nam odcinek A_0B_0; możemy tym sposobem wykreślić osi elipsy u' i następnie (art. **28**) samą elipsę. Punkty J', K', w których elipsa u' dotyka koła k', leżą na prostej $G'H'$, będącej rzutem prostej GH, podług której płaszczyzna E przecina płaszczyznę koła k.

W rzucie pionowym możemy albo wykreślić rzuty średnic AB, CD, które to rzuty będą parą średnic sprzężonych elipsy u'', albo też wykreślić niezależnie, podobnie, jak w rzucie poziomym, osi elipsy u''.

Cienie kuli. **132.** Gdy na kulę padają równoległe promienie światła, to granicę światła i cienia na niej stanowi koło wielkie, płaszczyzna którego jest prostopadła do kierunku promieni; metodą artykułu poprzedniego możemy wykreślić rzuty tego koła, gdy dane są kierunki promieni. Obierzemy na płaszczyznie tego koła wielkiego u dwie średnice prostopadłe a i b, z których pierwsza będzie równoległa do P_1, druga zaś będzie na linii największego spadku; rzuty poziome tych średnic bądą osiami elipsy u', przyczem a' będzie osią wielką, b' — małą.

Cień, rzucony przez kulę na płaszczyznę P_1, jest śladem poziomym walca obrotowego, stycznego do kuli i utworzonego przez promienie światła, czyli jest rzutem koła u w kierunku promieni światła; granica cienia poziomego jest przeto elipsą u_1; cienie a_1 i b_1 średnic prostopadłych a i b koła są średnicami sprzężonemi elipsy, a ponieważ a_1 jest prostopadła do rzutu poziomego promieni światła, b_1 zaś równoległa doń, to a_1 i b_1 są osiami elipsy u_1; a_1 jest równa a, b_1 zaś większa niż b, a zatem a_1 jest osią małą, b_1 — wielką (por. art. 22). Gdy część cienia pada na płaszczyznę pionową, to możemy wykreślić oddzielne punkty granicy tego cienia z odpowiednich punktów granicy cienia fikcyjnego poziomego, lub też możemy niezależnie wykreślić granicę cienia, rzuconego na P_2, i na każdej z płaszczyzn rzutu uwzględnić tylko tę część cienia odpowiedniego, która znajduje się w pierwszej ćwiartce.

Powierzchnie obrotowe rzędu 2-go.

133. Nie będziemy zajmowali się innemi wykreśleniami, specyalnie tyczącemi się kuli; na podstawie bowiem tego, cośmy w dwóch paragrafach poprzednich wyłożyli, zdołamy bez trudu wszelkie podobne wykreślenie wykonać.

Co do innych powierzchni obrotowych rzędu 2-go, to wymienimy tylko definicye i pewne własności charakterystycz ; wszelkie natomiast wykreślenia w zasadzie wykonywać będziemy na podstawie rozwinięć paragrafów poprzednich.

Przez obrót elipsy około osi powstaje e l i p s o i d a o b r o t o w a; jeżeli osią obrotu jest oś mała elipsy, to elipsoida nosi jeszcze miano s f e r o i d y. Hyperbola, obracająca się około osi, nie przecinającej jej, tworzy h y p e r b o l o i d ę o b r o t o w ą j e d n o p o w ł o k o w ą, przez obrót zaś hyperboli około drugiej osi tworzy się h y p e r b o l o i d a o b r o t o w a d w u p o w ł o k o w a. składająca się z dwóch powłók, przechodzących jedna w drugą przez punkty w nieskończoności. Parabola, obracająca się około osi, tworzy p a r a b o l o i d ę o b r o t o w ą.

Bez dowodzenia przytoczymy następujące własności tych powierzchni, mogące być użytecznemi przy wykreśleniach:

płaszczyzna dowolna przecina każdą z tych powierzchni podług linii stożkowej;

styczne, poprowadzone z pewnego punktu do powierzchni obrotowej rzędu 2-go, tworzą powierzchnię stożkową rzędu 2-go; punkty styczności leżą na linii stożkowej;

styczne do powierzchni obrotowej rzędu 2-go, równoległe do pewnego kierunku, tworzą powierzchnię walcową, dotykającą powierzchni obrotowej podług linii stożkowej.

Utworzenie hyperboloidy obrotowej przez ruch prostej.

134. Z pomiędzy powierzchni obrotowych rzędu 2-go posiada hyperboloida jednopowłokowa tę osobliwą własność, że może być utworzona zgoła innym sposobem, niż wyżej wymieniony, a mianowicie: przez obrót prostej około osi, skośnie względem niej położonej. Zbadamy ten sposób powstawania hyperboloidy i wysnujemy z niego pewne ważne własności tej powierzchni.

Prosta, obracająca się około osi, skośnie względem niej położonej, opisuje hyperboloidę obrotową jednopowłokową.

Niech oś obrotowa a (fig. 119) będzie prostopadła do płaszczyzny P_1; wykreślmy rzuty dwóch położeń prostej tworzącej, w których jest ona równoległa do P_2; niech te położenia będą

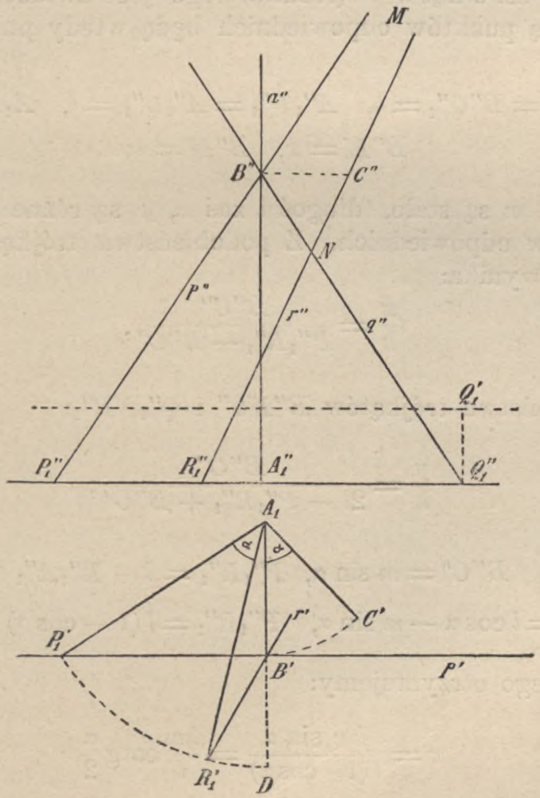


fig. 119.

p i q. Każdy punkt prostej tworzącej opisuje koło w płaszczyznie równoległej do P_1; dowieść należy, że południk powierzchni obrotowej, tak opisanej, jest hyperbolą. Ponieważ przy kierunku pionowym osi obrotowej kontur pozorny w rzucie pionowym jest krzywą, identyczną z krzywą południka, z drugiej zaś strony w danym przypadku kontur pozorny rzutu pionowego owinięty jest przez rzuty pionowe różnych położeń prostej tworzącej, przeto ostatecznie mamy dowieść, że rzuty pionowe tworzących owijają hyperbolę.

Oznaczmy przez r jakąkolwiek tworzącą. Proste r'' wyznaczają na każdej z prostych p'', q'' szereg punktów; uważajmy za odpowiednie każde dwa punkty tych szeregów, leżące na jednej prostej r''; wówczas twierdzimy, że szeregi te są rzutowo pokrewne. Rzeczywiście, niech prosta r powstała z obrotu prostej p około osi o kąt α — (rezultat tego jest uwidoczniony na figurze); parą punktów odpowiednich będą wtedy punkty M i N. Oznaczmy:

$$B''P''_1 = B''Q''_1 = k, \quad A''_1P''_1 = A''_1Q''_1 = l, \quad A_1B' = m,$$
$$B''M = x, \quad B''N = y;$$

odcinki k, l, m są stałe, długości zaś x, y są różne dla różnych par punktów odpowiednich. Z podobieństwa trójkątów $B''MC''$ i $P''_1MR''_1$ wynika:

$$\frac{x}{k} = \frac{B''C''}{P''_1R''_1 - B''C''},$$

a z podobieństwa trójkątów $B''NC''$ i $Q''_1NR''_1$:

$$\frac{y}{k} = \frac{B''C''}{2l - P''_1R''_1 + B''C''};$$

lecz mamy:

$$B''C'' = m \sin\alpha, \quad P''_1R''_1 = l - R''_1A''_1$$

$$R''_1A''_1 = l\cos\alpha - m\sin\alpha, \quad P''_1R''_1 = l(1-\cos\alpha) + m\sin\alpha,$$

wskutek czego otrzymujemy:

$$x = \frac{km\sin\alpha}{l(1-\cos\alpha)} = \frac{km}{l}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$$

$$y = \frac{km\sin\alpha}{l(1+\cos a)} = \frac{km}{l}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

tak że pomiędzy zmiennemi x, y istnieje zależność:

$$xy = \left(\frac{km}{l}\right)^2 = \text{const};$$

równanie to wyraża właśnie, że szeregi punktów p'' i q'' są rzutowo pokrewne.

Jakoż, oznaczmy wielkość stałą $\left(\frac{km}{l}\right)^2$ przez c, wtedy dla czterech dowolnych par punktów rozpatrywanych szeregów będzie:

$$y_1 = \frac{c}{x_1}, \quad y_2 = \frac{c}{x_2}, \quad y_3 = \frac{c}{x_3}, \quad y_4 = \frac{c}{x_4},$$

a więc:

$$\frac{y_2 - y_1}{y_4 - y_1} : \frac{y_2 - y_3}{y_4 - y_3} = \frac{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}}{\frac{1}{x_4} - \frac{1}{x_1}} : \frac{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}}{\frac{1}{x_4} - \frac{1}{x_3}} = \frac{x_2 - x_1}{x_4 - x_1} : \frac{x_2 - x_3}{x_4 - x_3},$$

t. j. stosunek anharmoniczny dowolnych 4-ch punktów M równy jest stosunkowi anharmonicznemu odpowiednich czterech punktów N; c jest potęgą pokrewieństwa rzutowego (art. **7**). Z pokrewieństwa rzutowego szeregów punktów p'' i q'' wynika, że proste r'', łączące pary punktów odpowiednich, owijają linię stożkową (art. **16**); B'' jest oczywiście środkiem tej stożkowej, a że z niego wychodzą dwie styczne p'' i q'' do stożkowej, to ta ostatnia musi być hyperbolą (art. **13**).

Własności hyperboloidy obrotowej.

135. Z wyłożonego sposobu powstawania hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej wynika cały szereg własności tej powierzchni.

Żadne dwa położenia prostej tworzącej nie przecinają się wzajemnie, albowiem na każdym równoleżniku odcinają one łuki o równych kątach środkowych.

Punkt C prostej tworzącej r, najbliższy do osi obrotu, opisuje najmniejszy równoleżnik, który z tego względu nazywa się kołem szyjnem hyperboloidy. Dwa punkty tworzącej r, jednakowo oddalone od punktu C, opisują koła o równym promieniu; stąd widzimy, że powierzchnia jest symetryczna względem płaszczyzny koła szyjnego. Rzuty poziome tworzących są styczne do rzutu poziomego koła szyjnego.

Wyobraźmy sobie przez punkt C poprowadzoną prostą r_1, symetryczną z prostą r względem płaszczyzny koła szyjnego; jeżeli prosta r_1 obracać się będzie około osi obrotu, to każdy jej punkt opisze ten sam równoleżnik, który opisuje punkt prostej r, znajdujący się na tej samej płaszczyznie poziomej; stąd wynika, że prosta r_1 leży całkowicie na powierzchni hyperboloidy i przecina wszystkie proste r. Otrzymujemy tym sposobem twierdzenie następujące:

Na hyperboloidzie obrotowej jednopowłokowej leżą dwa układy tworzących prostoliniowych; żadne dwie tworzące jednego układu nie przecinają się wzajemnie, natomiast każda tworząca jednego układu przecina wszystkie tworzące drugiego układu.

Przez każdy punkt powierzchni przechodzi jedna tworząca jednego układu i jedna drugiego. Ponieważ stycznemi do tych tworzących są te same tworzące, to płaszczyzna, wyznaczona przez nie, jest płaszczyzną, styczną do hyperboloidy; punkt przecięcia tych tworzących jest punktem styczności płaszczyzny stycznej.

Koła zębate hyperboloidalne.

136. Ważne zastosowanie techniczne znajduje hyperboloida obrotowa jednopowłokowa przy t. zw. kołach zębatych hyperboloidalnych. Koła te mają kształt hyperboloid obrotowych, zęby zaś nacięte są w kierunku tworzących prostoliniowych jednego układu. Możliwość zazębiania dwóch takich kół polega na tem, że dwie hyperboloidy obrotowe jednopowłokowe mogą się dotykać wzajemnie wzdłuż tworzących prostoliniowych; stykanie się to oczywiście nie zostaje przerwanem, gdy hyperboloidy obracają się około swych osi. Zbadajmy, jakim warunkom odpowiadać muszą dwie hyperboloidy obrotowe, ażeby mogły stykać się wzdłuż tworzącej prostoliniowej wspólnej.

Niech osi hyperboloid będą a i b (fig. 120), a wspólna tworząca — c; w punktach prostej c winny mieć obie powierzchnie wspólne normalne, lecz z jednej strony te normalne przecinają (art. **124**) obie osi a i b, z drugiej zaś strony leżą w płaszczyznach prostopadłych do c, a więc wzajemnie równoległych; stąd wnioskujemy, że te normalne wyznaczają na prostych a, b, c szeregi punktów podobne. Rzućmy teraz cały ten układ na dowolną płaszczyznę, prostopadłą do c, wtedy rzuty normalnych utworzą pęk prostych z wierzchołkiem w śladzie C' prostej c; na rzutach a' i b' prostych a i b wyznaczy ten pęk szeregi punktów podobne (art. 21); stąd poznajemy, że proste a' i b' są do siebie równoległe. Niezbędnym przeto warunkiem stykania się dwóch hyperboloid obrotowych jest, aby ich osi, oraz wspólna tworząca były równoległe do jednej płaszczyzny (warunek ten nie jest wszakże dostateczny).

Niech teraz daną będzie oś a jednej hyperboloidy i wspólna tworząca c; zobaczmy, jak wykreślić należy oś b drugiej hyperboloidy tak, aby dotykała pierwszej podług prostej c. Obieramy płaszczyznę poziomą rzutu prostopadle do c, następnie prowadzimy płaszczyznę pionową równolegle do a. Wyobrażamy sobie nadto płaszczyznę pomocniczą P_3, równoległą do P_1; ślady prostych a, b, c na P_3 niech będą A_3, B_3, C_3 (figura 120). Prosta $A_1A'_3$ jest przy tym układzie płaszczyzn równoległa do osi rzutu, c'' – do tej ostatniej prostopadła, punkt C'_3 schodzi się z punktem C_1. Obieramy teraz na prostej A_1C_1 dowolny punkt B_1, jako ślad poziomy prostej b; B'_3 wyznaczamy następnie, jako przecięcie prostej A'_3C_1 i prostej, poprowadzonej przez B_1 równolegle do osi rzutu; B''_3 wyznaczamy tak, aby prosta $A''_3B''_3$ była równoległa do osi rzutu.

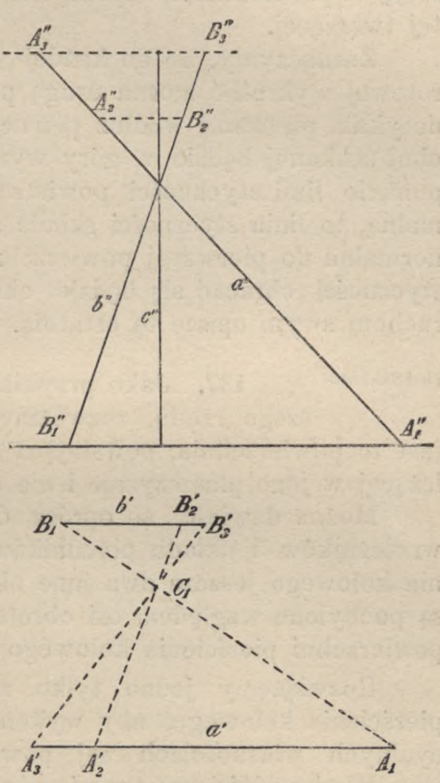


fig. 120.

Wtedy prosta b jest w zupełności wyznaczona przez rzuty śladów B_1 i B_3; mamy przytem dowolność w wyborze punktu B_1 na prostej A_1C_1. Tak wyznaczona prosta b jest osią hyperboloidy, stycznej do hyperboloidy z osią a podług tworzącej c. Jakoż przedewszystkiem spełniony jest warunek niezbędny ku temu: proste a, b i c są równoległe do płaszczyzny P_2. Następnie, gdy na prostych a, b obierzemy odpowiednio dwa punkty A_2, B_2 tak, aby było: $A_2A_1 : A_2A_3 = B_2B_1 : B_2B_3$, to będzie taż sama proporcya w każdym rzucie; stąd wynika, że prosta $A'_2B'_2$ przechodzi przez punkt C_1, a prosta $A''_2B''_2$ jest równoległa do osi rzutu, czyli że prosta A_2B_2 przecina prostą c i jest równoległa do P_1, t. j. prostopadła do c, prosta ta jest przeto wspólną normalną obydwóch hyperboloid; podobnież w każdym punkcie prostej c mają te powierzchnie wspólną normalną, są zatem styczne wzdłuż tej tworzącej.

Zaznaczymy, że do każdej dowolnie danej powierzchni obrotowej wykreślić można drugą powierzchnię obrotową, którąby dotykała pierwszej wzdłuż pewnej linii. Jakoż, niech oś powierzchni szukanej będzie z góry wyznaczona. Ponieważ w każdym punkcie linii styczności powierzchnie mieć muszą wspólną normalną, to linia styczności składa się z tych punktów, w których normalna do pierwszej powierzchni przecina oś drugiej; gdy linia styczności obracać się będzie około osi drugiej powierzchni, to ruchem swym opisze tę ostatnią.

Pierścień kołowy.

137. Jako przykład powierzchni obrotowej wyższego rzędu, rozważmy t. zw. pierścień kołowy; jest to powierzchnia, powstająca skutkiem obrotu koła około osi, leżącej w jego płaszczyznie i nie przecinającej go.

Można dowieść, że oprócz dwóch układów kół: układu równoleżników i układu południków, leżą na powierzchni pierścienia kołowego jeszcze dwa inne układy kół, płaszczyzny których są pochylone względem osi obrotowej, tak, że przez każdy punkt powierzchni pierścienia kołowego przechodzą cztery koła.

Rozwiążemy jedno tylko zagadnienie, odnoszące się do pierścienia kołowego, aby wykonać wykreślenie oparte na specyalnych własnościach tej powierzchni.

Wykreślić rzuty pierścienia kołowego, którego oś a jest pochylona względem płaszczyzny P_1.

Obierzmy P_2 równolegle do a, wtedy w rzucie pionowym otrzymamy, jako kontur powierzchni, dwa koła i wspólne do nich styczne równoległe (fig. 121). Dla wykreślenia konturu w rzucie poziomym dogodnie jest, zamiast metody ogólnej dla powierzchni obrotowych, zastosować w danym przypadku postępowanie, oparte na sposobie powstawania pierścienia kołowego.

Oznaczmy południk powierzchni przez k; środek koła k opisuje koło c, którego rzut poziomy c' możemy z łatwością wykreślić. Płaszczyzny styczne do powierzchni pierścienia w końcach średnicy poziomej koła k zawierają styczne w tych punktach do k i są dlatego prostopadłe do P_1; wskutek tego końce średnicy poziomej koła k należą do konturu rzutu poziomego; w rzucie poziomym długość tej średnicy nie zmienia się; ponieważ nadto ze styczną do koła c stanowi owa średnica kąt prosty, którego jeden bok, mianowicie ta średnica, jest równoległy do P_1, przeto w rzucie poziomym średnica ta okaże się normalną do elipsy c' (art. 22). Gdy zatem na normalnych do elipsy c' odcinać będziemy w obydwóch kierunkach długości promienia koła k, to tak otrzymane punkty dadzą żądany kontur rzutu poziomego; można, oczywiście, kontur ten otrzymać, jako owiniętą układu kół, równych kołu k i opisanych z różnych punktów elipsy c', jako środków. Krzywa otrzymana składa się z dwóch części, z których każda jest symetryczna względem osi elipsy c' i nazywa się krzywą równoległą do c'.

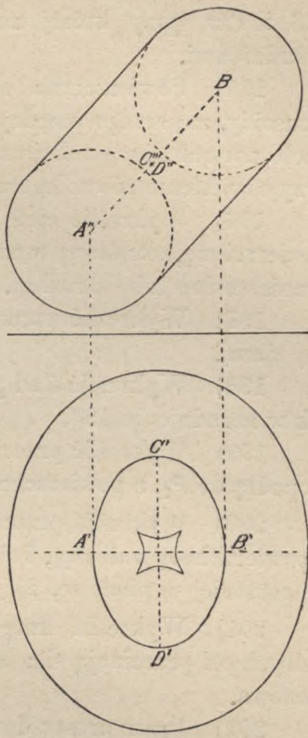


fig. 121.

CWICZENIA.

190) Dany jest rzut pionowy punktu, leżącego na powierzchni obrotowej danej; wykreślić jego rzut poziomy.

191) Powierzchnia obrotowa dana jest przez oś pionową i południk główny; wykreślić południk, przechodzący przez punkt, którego rzut poziomy jest dany.

192) Dana jest oś pionowa powierzchni obrotowej oraz pewna krzywa skośna, jako tworząca; wykreślić kształt południka.

193) Dane są rzuty osi ukośnej powierzchni obrotowej, jeden rzut południka i punkt drugiego rzutu; wykreślić kontur powierzchni w rzucie poziomym i pionowym.

194) Rozwinąć metodę rozwiązywania zagadnień artykułów **125**, **126** i **129**, przy której zamiast równoleżników posiłkowano by się południkami.

195) Powierzchnia obrotowa utworzona jest przez obrót łuku sinusoidy, zawartego między dwoma kolejnemi najgłębszemi punktami, około normalnej w punkcie najwyższym. Wykreślić cienie tej powierzchni przy oświetleniu równoległem.

196) Wykreślić cień, rzucony na powierzchnię obrotową (np. na powierzchnię, określoną w zagadnieniu poprzedniem) przez walec, stożek, graniastosłup lub ostrosłup.

197) Wykreślić punkty przecięcia powierzchni obrotowej z prostą daną.

198) Wykreślić ślad poziomy powierzchni obrotowej, wyznaczonej jak w zagadnieniu 193.

199) Wykreślić przecięcie powierzchni obrotowej, mającej oś prostopadłą do P_1, z powierzchnią stożkową, której ślad poziomy jest dany.

200) Wykreślić przecięcie powierzchni obrotowej o osi pionowej z powierzchnią walcową, której ślad poziomy jest dany: 1) gdy tworzące tej ostatniej są pionowe, 2) gdy mają kierunek dowolnie dany.

201) Wykreślić linię przecięcia dwóch powierzchni obrotowych, których osi przecinają się; dla dogodności niech jedna z tych osi będzie pionowa.

202) Przez prostą daną poprowadzić płaszczyznę styczną do powierzchni obrotowej danej.

203) Poprowadzić do danej powierzchni obrotowej płaszczyznę styczną, równoległą do płaszczyzny danej.

204) Znaleść punkty na powierzchni obrotowej, w których normalna ma kierunek równoległy do prostej danej.

205) Powierzchnia obrotowa dana jest, jak w zagadnieniu 192; na niej wyznaczony jest punkt przez jeden rzut; wykreślić ślady płaszczyzny, stycznej do powierzchni danej w punkcie danym.

206) Do krzywej przekroju powierzchni obrotowej płaszczyzną wykreślić w punkcie danym styczną.

207) Rozwiązać zagadnienia 197, 202 i 203 w zastosowaniu do kuli.

208) Przez punkt dany poprowadzić płaszczyznę, styczną do dwóch kul danych.

209) Poprowadzić płaszczyznę, styczną do trzech kul danych.

210) Przez prostą daną poprowadzić płaszczyznę, przecinającą kulę daną podług koła o promieniu danym.

211) Wykreślić cienie kuli przy oświetleniu środkowem.

212) Wykreślić cień, rzucony przez kulę na stożek, na walec, na inną kulę.

213) Wykreślić cień, rzucony na kulę przez stożek.

214) Elipsoidę obrotową o osi pionowej przeciąć płaszczyzną dowolną.

215) Wykreślić cienie elipsoidy obrotowej przy oświetleniu równoległem i środkowem.

216) Rozwiązać zagadnienie poprzednie dla pierścienia kołowego.

217) Wykreślić południk główny hyperboloidy obrotowej, danej przez oś pionową, oraz rzuty jednej tworzącej prostoliniowej.

218) Hyperboloida obrotowa jednopowłokowa dana jest przez oś i tworzącą prostoliniową; wykreślić oś drugiej hyperboloidy obrotowej jednopowłokowej, dotykającej pierwszej podług tworzącej danej i mającej koło szyjne o promieniu danym.

219) Wykreślić przecięcie pierścienia kołowego plaszczyzną dowolną, w szczególności płaszczyzną styczną.

220) Wykreślić południki główne obydwóch hyperboloid, danych na figurze 120.

ROZDZIAŁ VII.

POWIERZCHNIE ŚRUBOWE I INNE.

§ 1. O powierzchniach prostoliniowych w ogólności.

Powierzchnia prostoliniowa.

138. Powierzchnią prostoliniową nazywamy wszelką powierzchnię, utworzoną przez ruch jakikolwiek linii prostej. Zbadaliśmy poprzednio niektóre szczególne rodzaje powierzchni prostoliniowych, a mianowicie: powierzchnie walcowe i stożkowe, oraz hyperboloidę jednopowłokową (obrotową).

Płaszczyzna styczna.

Płaszczyzna, styczna do powierzchni jakiejkolwiek, zawiera proste, styczne do wszelkiej linii, nakreślonej na powierzchni przez punkt styczności płaszczyzny; ponieważ styczna do tworzącej prostoliniowej schodzi się z tą ostatnią, to widzimy, że płaszczyzna styczna do powierzchni prostoliniowej, zawiera tworzącą powierzchni, przechodzącą przez punkt styczności (por. art. **98**, **103** i **135**).

Powierzchnie prostoliniowe rozwijalne i skośne.

139. Powierzchnie prostoliniowe dzielimy na dwie kategorye: t. zw. powierzchnie prostoliniowe r o z w i j a l n e i s k o ś n e, czyli w i c h r o w a t e; pierwszą kategoryę stanowią te powierzchnie, których dwa następujące po sobie położenia tworzących leżą w jednej płaszczyznie, drugą te, których dwie sąsiednie tworzące są skośnie do siebie położone. W pierwszym przypadku dwie kolejne tworzące mają punkt wspólny i przez ciągły obrót kolejnych tworzących powierzchnia może być rozwiniętą na płaszczyznie; stąd też pochodzi jej nazwa.

Krawędź zwrotu powierzchni rozwijalnej.

140. Gdy tworząca powierzchni prostoliniowej rozwijalnej porusza się, to płaszczyzna, powyżej wymieniona, również porusza się, i w każdem położeniu płaszczyzna ta jest styczna do powierzchni, dotykając jej wzdłuż całej odnośnej tworzącej. Punkt przecięcia kolejnych tworzących opisuje przytem linię skośną, do której tworzące są styczne, a płaszczyzny powyższe — ściśle-styczne; ta linia skośna stanowi dla powierzchni krawędź zwrotu, gdyż punkt przecięcia tej linii z płaszczyzną jakąkolwiek jest punktem zwrotu linii, otrzymanej z przecięcia powierzchni danej tą samą płaszczyzną. Poznajemy, że powierzchnia prostoliniowa rozwijalna jest identyczna z badaną w art. **86** i **87** powierzchnią. Nietylko zatem każdej linii skośnej odpowiada pewna powierzchnia prostoliniowa rozwijalna, utworzona przez styczne do tej linii, ale i odwrotnie, każdej powierzchni prostoliniowej rozwijalnej odpowiada pewna linia skośna, do której tworzące powierzchni są styczne — mianowicie: krawędź zwrotu tej powierzchni.

Linia zwężenia powierzchni prostoliniowej skośnej.

Co się tyczy powierzchni prostoliniowych skośnych, to, wyznaczając na każdej tworzącej punkt, najbliższy do następnej tworzącej, otrzymamy szereg punktów, stanowiących t. zw. linię zwężenia powierzchni. W hyperboloidzie obrotowej jednopowłokowej linię zwężenia stanowi koło szyjne. Płaszczyzna styczna do powierzchni prostoliniowej skośnej zawiera wprawdzie tworzącą, przechodzącą przez punkt styczności, lecz nie dotyka powierzchni wzdłuż tej tworzącej, jak to ma miejsce w przypadku powierzchni rozwijalnej.

Rozpatrzymy niektóre powierzchnie prostoliniowe, znajdujące zastosowanie w budownictwie.

Konoida.

141. Powierzchnią konoidalną (stożkowatą, klinowatą), albo konoidą nazywamy powierzchnię, utworzoną ruchem prostej, przecinającej pewną linię krzywą k i pewną prostą a i pozostającej równoległą do pewnej płaszczyzny; linie k i a nazywamy liniami kierującemi, a płaszczyznę daną — płaszczyzną kierującą powierzchni. Gdy przetniemy linie k i a płaszczyzną, równoległą do płaszczyzny kierującej, to prosta, łącząca punkty przecięcia, będzie tworzącą powierzchni konoidalnej. Konoida nazywa się prostą, gdy prosta kierująca jest prostopadła do płaszczyzny kierującej, w przeciwnym razie zwiemy konoidę ukośną. Rozważmy w szczególności konoidę prostą, której krzywą kierującą jest koło, leżące w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny kierującej; obierzmy płaszczyznę koła za płaszczyznę poziomą rzutu. Przez każdy punkt prostej a przechodzą dwie proste poziome, przecinające koło, t. j. dwie tworzące powierzchni, a zatem prosta a jest prostą podwójną powierzchni.

Oznaczmy końce średnicy poziomej koła k przez B, D (figura 122), pionowej — przez C, E. Płaszczyzny styczne do konoidy w punktach B i D są oczywiście pionowe, i dlatego proste AB' i AD' stanowią kontur rzutu poziomego powierzchni; kontur rzutu pionowego składa się natomiast z koła k, odcinka BA'' prostej a'' i odcinków BC i $A''E$ stycznych do koła w C i E. Na rysunku uwzględniona jest tylko część konoidy, zawarta między kołem k i prostą a.

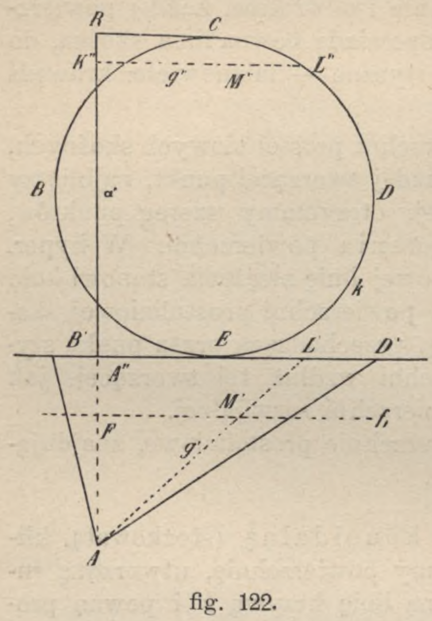


fig. 122.

Przekroje eliptyczne. Okażemy, że płaszczyzna równoległa do P_2 przecina konoidę podług elipsy. Jakoż, niech ślad poziomy płaszczyzny przekroju będzie f_1; znajdźmy punkt linii przekroju p, leżący na pewnej tworzącej g. Oznaczmy przez K, L, M punkty, w których prosta g przecina odpowiednio prostą a, koło k i płaszczyznę przekroju (tak że M jest punktem linii przekroju), wtedy bezpośrednio z rysunku otrzymamy: $K''M'' : K''L'' = AM' : AL' = AF : AA''$; stosunek $K''M'' : K''L''$ jest przeto stały, niezależny od wyboru tworzącej; stąd poznajemy, że linie p i k są w kolineacyi prostokątnej względem osi kolineacyi a'', linia p jest przeto elipsą (art. 28), która na zasadzie tej kolineacyi z łatwością może być wykreśloną.

W budownictwie konoida prosta znajduje zastosowanie przy sklepieniu wejścia do wieży okrągłej, oraz do kopuły półkulistej (sklepienie konoidalne lub stożkowate — fr. trompe conoide). Płaszczyzna kierująca jest pozioma, za prostą kierującą obiera się w przypadku wieży — jej oś, w przypadku kopuły — jej promień pionowy; koło kierujące obiera się w płaszczyźnie pionowej w odległości od osi wieży (względnie od promienia pionowego kopuły) równej przybliżenie połowie promienia podstawy. Niekiedy w przypadku wieży zamiast koła kierującego posiłkują się elipsą nawiniętą na powierzchni walca.

Sklepienie korytarzy ukośnych.

142. Rozpatrzmy jeszcze pobieżnie inną powierzchnię prostoliniową, używaną w budownictwie do sklepiania korytarzy ukośnych (Wölbfläche des schiefen Durchgangs). Powierzchnia ta utworzona jest przez proste, przecinające dwa koła k_1 i k_2 równe, w równoległych płaszczyznach położone, oraz prostą p, która przechodzi przez środek O odcinka, łączącego środki M_1 i M_2 kół, i jest prostopadła do płaszczyzn tych kół, przytem proste tworzące nie powinny przechodzić przez punkt O. Przez zastrzeżenie ostatnie wyłączamy, jako nie należące do powierzchni sklepienia, tworzące powierzchni stożkowej o wierzchołku O, przechodzącej przez koła k_1 i k_2. Aby znaleść tworzącą powierzchni, przechodzącą przez pewien punkt A koła k_1, prowadzimy przez punkt A i prostą p płaszczyznę, przecinającą koło k_2 w dwóch punktach: B i B'; jedna z prostych AB, AB' przechodzi przez punkt O i jest tworzącą wskazanej powierzchni stożkowej, druga nie przechodzi przez punkt O i jest tworzącą powierzchni rozpatrywanej.

Niech płaszczyzny kół będą pionowe, a płaszczyzna, wyznaczona przez proste p i M_1M_2, pozioma. Względem tej ostatniej płaszczyzny są symetryczne koła k_1 i k_2, a więc i cała powierzchnia, dwie tworzące symetryczne przecinają się na prostej p i leżą w płaszczyźnie pionowej; prosta p okazuje się linią podwójną powierzchni.

Wszelka płaszczyzna, przechodząca przez prostą p, przecina powierzchnię podług dwóch tworzących równoległych, jednakowo oddalonych od punktu O. Jakoż, niech N_1 i N_2 będą punktami przecięcia prostej p z płaszczyznami kół; płaszczyzna dana przetnie płaszczyzny kół podług prostych, przechodzących odpowiednio przez N_1 i N_2 i wzajemnie równoległych; ponieważ odcinki M_1N_1 i M_2N_2 są równoległe i równe, to wnioskujemy, że owe proste wyznaczą w kołach k_1 i k_2 cięciwy równoległe i równe; oznaczmy te cięciwy przez AB i A_1B_1. Figura ABA_1B_1 jest zatem równoległobokiem; przekątne AA_1 i BB_1 przecinają się w punkcie O i są tworzącemi powyżej wspomnianej powierzchni stożkowej, zaś proste AB_1 i A_1B są tworzącemi, podług których płaszczyzna dana przecina powierzchnię; widzimy rzeczywiście, że te tworzące są równoległe i jednakowo oddalone od punktu O. Gdy płaszczyznę daną obracać będziemy około prostej p, to proste AA_1 i BB_1 opiszą powierzchnię stożkową, a proste AB_1 i A_1B, zmieniając kierunek, lecz zostając równoległemi, opiszą powierzchnię sklepienia.

Z twierdzenia powyższego wynika, że wszelka prosta, przechodząca przez punkt O, przecina powierzchnię w dwóch punktach, jednakowo odległych od punktu O; punkt ten jest przeto **środkiem** powierzchni rozważanej.

§ 2. O powierzchniach śrubowych w ogólności.

Powierzchnie śrubowe.

143. Gdy pewna linia niezmienna porusza się tak, że wszystkie jej punkty opisują linie śrubowe około wspólnej osi, to mówimy, że linia ta wykonywa **ruch śrubowy** około tej osi; niezmienność linii ruchomej wymaga, aby linie śrubowe, opisywane przez wszystkie jej punkty, miały tę samą wysokość kroku; stąd wynika, że nachylenie lini śrubowej maleje w miarę tego, im punkt ruchomy bardziej oddalony jest od osi. Powierzchnia, utworzona przez ruch śrubowy jakiejkolwiek linii, nazywa się **powierzchnią śrubową**; oś wspólna wszystkich linij śrubowych nazywa się **osią** powierzchni. Powierzchnia śrubowa może być przesunięta sama w sobie przez odpowiedni ruch śrubowy. Linia, ruchem której tworzy się powierzchnia śrubowa, nazywa się, podług zasady ogólnej, **tworzącą** tej powierzchni; oczywiście, za tworzącą przyjąć możemy wszelką linię na powierzchni, przecinającą wszystkie linie śrubowe powierzchni; w szczególności wyróżniają się następujące dwie tworzące płaskie: linia, podług której powierzchnię przecina płaszczyzna, przechodząca przez oś, oraz linia przecięcia powierzchni płaszczyzną, prostopadłą do osi; pierwszą z tych linij nazywamy **południkiem** powierzchni śrubowej, drugą — jej **przekrojem normalnym**.

Powierzchnie śrubowe zamknięte i otwarte.

144. Rozróżniamy dwa rodzaje powierzchni śrubowej: gdy tworząca przecina oś, to ta ostatnia leży na powierzchni, która w tym przypadku zwie się **zamkniętą**; w przeciwnym razie oś nie leży na powierzchni, i ta ostatnia nazywa się **otwartą**. W przypadku powierzchni śrubowej otwartej jest na tworzącej punkt, najbliższy do osi; linia śrubowa, opisana przez ten punkt, nazywa się **linią śrubową szyjną**.

Wężownica. **145.** Jako przykład powierzchni śrubowej rozpatrzmy powierzchnię, utworzoną ruchem śrubowym koła, leżącego w płaszczyznie normalnej do linii śrubowej, opisywanej przez środek koła. Powierzchnia ta nosi nazwę *wężownicy*. Oczywiście, można tę powierzchnię rozważać również, jako obwiednią kuli, której środek opisuje linię śrubową; ten ostatni sposób utworzenia wężownicy jest często użyteczny przy konstrukcyach.

Względem każdego położenia kuli odnośne położenie koła tworzącego jest kołem kuli, podług którego ta ostatnia dotyka powierzchni wężownicy. Oznaczmy promień kuli (i koła) przez r, promień linii śrubowej s, opisywanej przez środek M, przez d $(d > r)$, wreszcie oś tej linii śrubowej, będącą zarazem osią powierzchni, przez a; niech prosta a będzie pionową; wówczas rzut poziomy s' linii s będzie kołem, opisanem promieniem d ze śladu poziomego A prostej a, jako środka (fig. 123); rzut pionowy s'' jest sinusoidą. Przedstawmy w rzutach jeden krok powierzchni, zawarty między dwoma równoległemi położeniami koła tworzącego, które obierzemy w płaszczyznach, prostopadłych do płaszczyzny pionowej rzutu. Obydwa koła krańcowe przedstawiają się wtedy w rzucie pionowym jako równe i równoległe odcinki $B''F''$

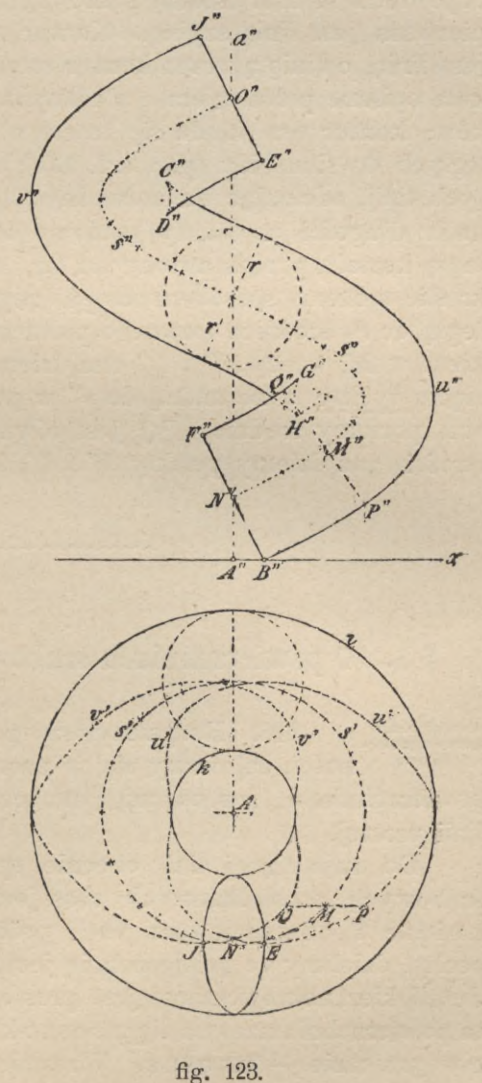


fig. 123.

i $E''J''$, normalne do linii s'' w punktach końcowych N'' i O''; w rzucie zaś poziomym — jako jedna elipsa o osi małej $J'E'$ (lub $B'F'$) i osi wielkiej, równej $2r$. Rzut poziomy wszelkiego innego koła tworzącego jest co do kształtu i rozmiarów elipsą identyczną z poprzednią, ponieważ wszystkie płaszczyzny tych kół mają jednakowe nachylenie względem płaszczyzny poziomej rzutu. Kontur pozorny w rzucie poziomym składa się z dwóch kół k' i i', opisanych ze środka A promieniami odpowiedniemi $d - r$ i $d + r$, odpowiedni kontur istotny stanowią linie śrubowe k i i, z których pierwsza jest linią szyjną. Kontur pozorny w rzucie pionowym jest linią, owiniętą przez kontur rzutu pionowego kul, t. j. przez koła opisane promieniem r z różnych punktów linii s'', jako środków; kontur ten składa się zatem z dwóch linij u'' i v'', równoległych do sinusoidy (por. art. **137**); można też otrzymać punkty tych linij, odcinając na normalnych do s'' w obydwóch kierunkach długości r. Rzuty poziome u' i v' odnośnych linij u i v mają kształt, przedstawiony na fig. 123. Punkty linij u' i v' wykreślić możemy sposobem następującym. Niech PQ będzie równoległą do P_2 średnicą pewnego położenia koła tworzącego ze środkiem w M; wtedy P'' i Q'' znajdziemy na liniach u'' i v'' w przecięciu tychże z normalną do s'' w punkcie M''. Zważywszy, że rzut poziomy średnicy PQ jest równoległy do osi rzutu x, z łatwością znajdziemy punkty P' i Q', leżące odp. na liniach u' i v'.

§ 3. O powierzchniach śrubowych prostoliniowych.

Powierzchnie śrubowe prostoliniowe.

146. Rozpatrzywszy powierzchnie śrubowe w ogólności, zajmiemy się w paragrafie niniejszym wyłącznie powierzchniami śrubowemi, utworzonemi ruchem (śrubowym) linii prostej.

Do zajmującej nas obecnie specyalnej klasy powierzchni śrubowych prostoliniowych stosujemy ogólny podział na zamknięte i otwarte (art. **144**), prócz tego, ze względu na inne cechy, dzielimy te powierzchnie jeszcze sposobem następującym. Jeżeli kierunek tworzącej jest prostopadły do osi powierzchni, to ta powierzchnia nazywa się prostokątną, albo prostą, w przeciwnym razie — ukośną. Wreszcie, zależnie od tego, czy tworzące są styczne do linii śrubowej szyjnej, czy też przecinają ją, mamy powierzchnie śrubowe prostoliniowe **rozwijalne** lub **skośne**; stąd wynika, że rozwijalną może być tylko powierzchnia śrubowa otwarta i ukośna. Oznaczmy przez r najkrótszą odległość tworzącej od osi, przez α kąt nachylenia tworzącej względem płaszczyzny, prostopadłej do osi, wreszcie przez h wysokość kroku ruchu śrubowego, wówczas w przypadku powierzchni śrubowej rozwijalnej istnieje zależność: $h = 2\pi r \operatorname{tg} \alpha$ (porównaj art. **90**).

Cienie własne powierzchni śrubowych prostoliniowych.

147. Zanim przystąpimy do szczegółowego zbadania różnych typów powierzchni śrubowych prostoliniowych, wyłożymy dla tych powierzchni sposób kreślenia cienia własnego *).

Niech koło s' (fig. 124) będzie rzutem poziomym pewnej linii śrubowej s, leżącej na powierzchni; przedewszystkiem wykreślimy leżące na tej linii punkty granicy światła i cienia po-

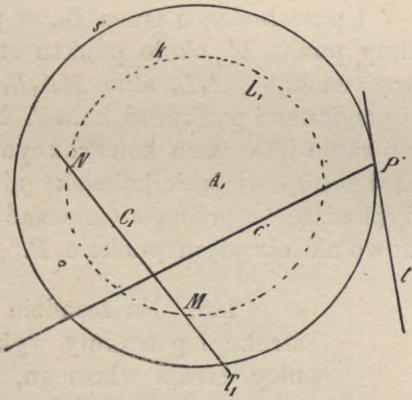


fig. 124.

wierzchni; wystarczą nam ku temu konstrukcye, wyłącznie w rzucie poziomym wykonane. Przez dowolny punkt P linii s prowadzimy tworzącą c powierzchni i styczną t do s. Proste c i t wyznaczają płaszczyznę styczną T do powierzchni w punkcie P.

*) Burmester, Kinematisch-geometrische Construktionen der Parallelprojection der Schraubenflächen und insbesondere des Schattens derselben. Schlöm. Zeitschr. f. M. & Ph. 1873.

Na osi powierzchni obierzmy punkt A w odległości $\frac{h}{2\pi r}$ od płaszczyzny poziomej i przez ten punkt poprowadźmy proste równoległe do c, do t, oraz do promieni światła; niech ślady poziome tych prostych będą odpowiednio C_1, T_1 i L_1; proste A_1C_1, A_1T_1 i A_1L_1 będą odpowiednio równoległe do c', t' i do rzutu poziomego promieni światła, nadto, wskutek szczególnego wyboru punktu A, punkt T_1 znajdować się będzie na kole s'. Prosta T_1C_1 jest oczywiście równoległa do śladu poziomego płaszczyzny T. Rozumujemy teraz sposobem następującym: gdyby punkt P był jednym z punktów żądanych (t. j. gdyby on leżał na granicy cienia własnego), to płaszczyzna T musiała by być równoległą do promieni światła, a więc prosta AL_1 leżałaby całkowicie na płaszczyznie C_1AT_1, czyli punkt L_1 leżałby na prostej T_1C_1. Na figurze nie ma to miejsca, a więc punkt P nie należy do granicy cienia własnego powierzchni, znajdziemy wszakże na kole s' zamiast punktu P' dwa inne punkty, czyniące zadość powyższemu kryteryum, a mianowicie: niech prosta T_1C_1 przecina koło k, współśrodkowe z s' i przechodzące przez L_1, w punktach M i N; gdy wtedy obrócimy punkt P' około punktu A_1 w kierunku ruchu ~~strzałki~~ wskazówki zegaru na kąt NA_1L_1 albo MA_1L_1, to nowe położenia punktu P' będą żądanemi punktami koła s'. Łatwo spostrzedz, że to samo rozumowanie i ta sama konstrukcya dają się zastosować do powierzchni śrubowej jakiejkolwiek (nie prostoliniowej), z tą jedynie modyfikacyą, że prosta c oznaczać będzie s t y c z n ą do tworzącej w dowolnie obranym punkcie P.

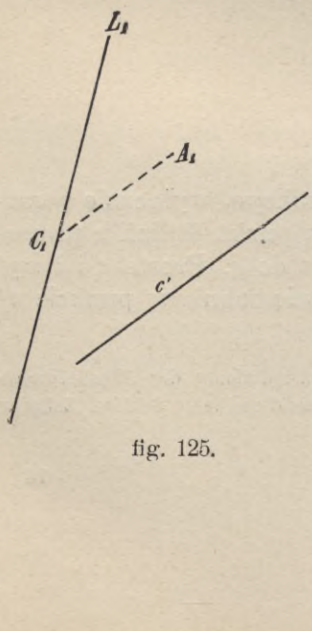


fig. 125.

148. Na zasadzie poprzedniej konstrukcyi potrafimy wykreślić punkt granicy cienia własnego, leżący na danej tworzącej prostoliniowej. Jakoż, niech c' (fig. 125) będzie rzutem poziomym tej tworzącej, A_1 — jak poprzednio — śladem poziomym pionowej osi powierzchni; obieramy na tej osi ten sam punkt A i znajdujemy, jak poprzednio, punkty L_1 i C_1; na zasadzie poprzedniej konstrukcyi widzimy, że punkt X, szukany na prostej c', ma tę własność, że gdy prostopadła do A_1X w punkcie A_1 przetnie prostą L_1C_1 w punkcie Y, to będzie: $A_1X = A_1Y$.

Gdy przeto obrócimy prostą L_1C_1 około punktu A_1 na 90^0, to przetnie ona prostą c' w punkcie żądanym. Niech L i C będą położeniami punktów L_1 i C_1 po tym obrocie. Dla wszystkich tworzących punkt L jest wspólny, zależy on bowiem jedynie od kierunku promieni światła, punkty zaś C leżą na kole o środku A_1, przyczem każda prosta c' jest prostopadła do odnośnego promienia tego koła.

Wykreśliwszy pewną ilość punktów granicy cienia własnego, otrzymamy z łatwością tę granicę.

149. Zajmiemy się obecnie w szczególności powierzchniami prostoliniowemi rozwijalnemi.

Powierzchnia śrubowa rozwijalna.

Wiemy z art. **146**, że wszystkie powierzchnie rozpatrywanej klasy są otwarte i ukośne, że tworzące każdej takiej powierzchni są styczne do pewnej linii śrubowej; z zestawienia tego z art. **86** i **90** poznajemy, że powierzchnie, które mamy na uwadze, są temi samemi powierzchniami, o których mówiliśmy, badając linie śrubowe; wiemy stamtąd, że przekrój normalny takiej powierzchni jest rozwiniętą koła.

Wykreślmy jeden krok powierzchni badanego typu, nadając osi, dla dogodności, kierunek pionowy; niech krok ten zawarty będzie między płaszczyzną P_1 i płaszczyzną P_3, równoległą do niej i odległą od niej na długość h (przez h oznaczamy, jak zwykle, wysokość kroku). Krawędź zwrotu oznaczmy przez s; koło s' (fig. 126) jest wtedy podstawą walca, na którym leży linia s; s'' jest, jak wiemy, sinusoidą. Gdy oznaczymy ślad linii s na P_1 przez A, to punkt A będzie zarazem rzutem poziomym śladu tej samej linii na P_3. Na rysunku mamy linię śrubową prawozwrotną. Ślad poziomy powierzchni, jako miejsce geometryczne śladów poziomych stycznych do s, jest zwojem f_1 rozwiniętej koła s' z początkiem w A; podobnież rzut poziomy śladu powierzchni na P_3 przedstawia się, jako przeciwny zwój f'_3 poprzedniej rozwiniętej koła. Rzut poziomy g' pewnej tworzącej g powierzchni jest styczny do koła s', nadto ślad jej poziomy leży na f_1, a rzut śladu na P_3 — leży na f'_3. Możemy na tej zasadzie wykreślić obydwa rzuty dowolnej tworzącej. Kontur istotny dla rzutu poziomego stanowią: krawędź zwrotu s, rozwinięte koła f_1 i f_3, oraz tworzące k i h, poprowadzone z końców tych linij; przeto kontur pozorny rzutu poziomego składa się z koła s', ze zwojów rozwiniętej koła f_1 i f'_3, oraz z rzutów h', k', stanowiących jednę prostą, styczną do s' w początku rozwiniętej. Kontur istotny dla rzutu pionowego składa się z linij s, f_1, f'_3, k, h i z tworzącej i, równoległej do P_2, tak że kontur pozorny rzutu pionowego składa się z sinusoidy s'', z osi rzutu u, śladu pionowego f''_3 płaszczyzny P_3, oraz z prostych k'', h'' i i''.

Całkowita powierzchnia śrubowa składa się z nieskończenie wielu części, podobnych do przedstawionej; każda z nich jest

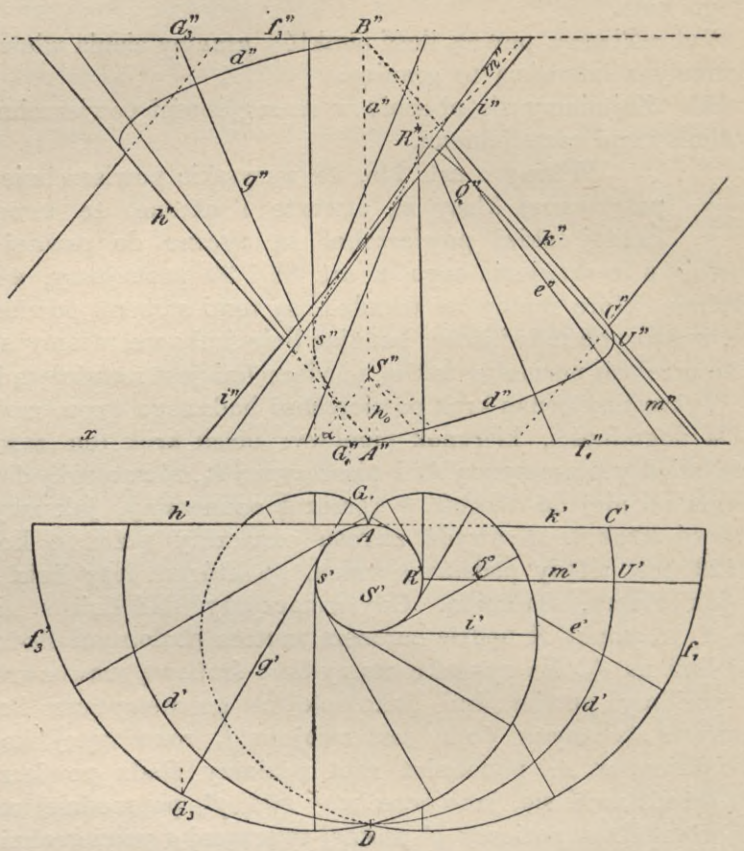


fig. 126.

nieograniczona i rozpościera się do nieskończoności; ślad poziomy powierzchni zupełnej stanowią obie gałęzie rozwiniętej koła o nieskończonej ilości zwojów. Możemy też wyobrazić sobie powierzchnię śrubową, jako utworzoną przez ruch śrubowy tej rozwiniętej koła; każdy z nieskończenie wielu punktów podwójnych tej linii, leżących na prostej AS', utworzy przy tym ruchu linię śrubową podwójną, t. j. linię śrubową, podług której powierzchnia przecina samą siebie. Na fig. 126 przedstawiona jest część takiej linii śrubowej d, utworzona przez punkt D; jej rzutem poziomym jest koło d', przechodzące przez D i mające środek w S', rzut pionowy d'' jest sinusoidą.

Kształt południka m wykreślimy, przecinając powierzchnię płaszczyzną, poprowadzoną przez oś równolegle do P_2; rzut poziomy m' stanowi prosta, przechodząca przez S' i równoległa do osi rzutu; dla oddzielnych punktów prostej m' wyznaczamy odnośne punkty linii m'' przy pomocy rzutów tworzących, przechodzących przez te punkty.

Przekrój. Dla wykreślenia przekroju powierzchni płaszczyzną dowolną A, wykreślamy punkty przecięcia tej płaszczyzny z oddzielnemi tworzącemi powierzchni; najdogodniej jest przytem posiłkować się płaszczyznami P_1 i P_3, a mianowicie: przez obraną tworzącą g prowadzimy płaszczyznę styczną T do powierzchni; ślady tej płaszczyzny na P_1 i P_3 są prostopadłe do g' i przechodzą przez odnośne ślady prostej g; niech M_1 będzie punktem przecięcia śladów poziomych płaszczyzn A i T, a M_3 — punktem przecięcia śladów tychże płaszczyzn na P_3, wówczas prosta M_1M_3 przecina tworzącą g w punkcie jej przecięcia się z płaszczyzną A i jest nadto styczną do linii przekroju w tym punkcie.

Rozwinięcie. Co się tyczy rozwinięcia powierzchni śrubowej na płaszczyznie, to bez dowodzenia zaznaczamy, że w rozwinięciu linia śrubowa s przechodzi w łuk koła s_0, którego promień ρ dany jest przez wzór:

$$\rho = r/\cos^2 \alpha,$$

gdzie r oznacza promień koła s', a α — nachylenie linii śrubowej s. Tworzące, jako styczne do s, przechodzą w styczne do s_0. Na fig. 127 przedstawione jest rozwinięcie tej części powierzchni, która jest przedstawiona w rzutach na fig. 126, przyczem zachowane zostały kontury, obrane na tej ostatniej figurze. Długość łuku s_0 równa jest długości linii śrubowej s, którą to długość otrzymamy przez rozwinięcie walca, na którym leży s; mianowicie długość s_0 jest równa przeciwprostokątnej trójkąta, którego boki są odpowiednio równe $2\pi r$ i h (h — wysokość kroku); tę samą długość mają tworzące h i k, ograniczające powierzchnię. Linie f_1 i f_3 przekształcają się w rozwinięciu w rozwinięte koła s_0: f_{10} i f_{30}. Linia śrubowa, nakreślona na powierzchni, odcina na każdej tworzącej jednakową długość, licząc od punktu styczności tej tworzącej z s; wskutek tego taka linia śrubowa przekształci się w rozwinięciu w koło spółśrodkowe z s. Na figurze 127 przedstawione jest w szczególności przekształcenie linii śrubowej podwójnej d i nadto południka m.

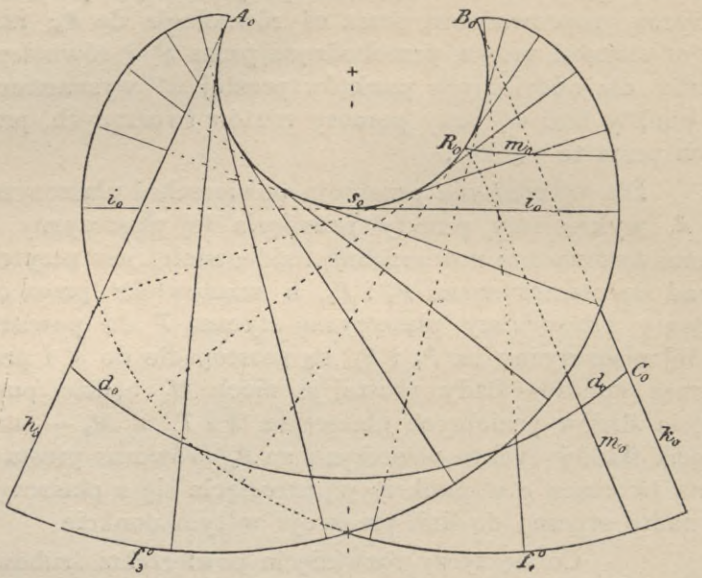


fig. 127.

Cienie. Wykreślenie granicy cienia własnego na powierzchni śrubowej rozwijalnej najprościej wykonywamy sposobem następującym. Wiemy, że granicę cienia własnego stanowią punkty, w których płaszczyzna styczna do powierzchni jest równoległa do promieni światła, a ponieważ płaszczyzna styczna w pewnym punkcie do powierzchni rozwijalnej dotyka takowej we wszystkich punktach przechodzącej przez ten punkt tworzącej, to wnioskujemy, że granica cienia własnego powierzchni badanej składa się z tworzących, mianowicie z tych tworzących, którym odpowiadają płaszczyzny styczne, równoległe do promieni światła. W celu znalezienia tych tworzących, prowadzimy płaszczyzny styczne do stożka kierunkowego (art. **87**) powierzchni danej i równoległe do promieni światła (art. **106**); tworzące, podług których te płaszczyzny dotykają stożka kierunkowego, są równoległe do szukanych tworzących powierzchni śrubowej.

Przystępujemy z kolei do rozważania powierzchni śrubowych prostoliniowych skośnych.

Powierzchnia śrubowa prostoliniowa prostokątna zamknięta.

150. Powierzchnia śrubowa prostokątna zamknięta utworzona jest ruchem śrubowym prostej, przecinającej oś pod kątem prostym. Ponieważ wszystkie tworzące są równoległe do płaszczyzny, prostopadłej do osi, to powierzchnia badana należy oczywiście do rodzaju powierzchni konoidalnych (art. **141**), przyczem za krzywą kierującą służyć może linia śrubowa, opisana przez jakikolwiek punkt tworzącej. (Przy krętych schodach brzegi stopni mają położenie tworzących powierzchni śrubowej prostokątnej zamkniętej).

Przedstawmy w rzutach jeden krok tej powierzchni, zawarty np. między dwiema tworzącemi g i h, leżącemi w płaszczyznach poziomych P_1 i P_3 (art. **149**) (oś a powierzchni zakładamy w kierunku pionowym), oraz między dwiema liniami śrubowemi s i t, leżącemi na walcu, spółosiowym z powierzchnią daną (fig. 128). Kontur pozorny w rzucie poziomym składa się z koła s' (lub t') i prostej g (lub h'), w rzucie pionowym — z dwóch sinusoid s'' i t'', symetrycznie położonych względem prostej a''.

Wykreślmy cienie powierzchni rozpatrywanej.

Cienie.

Dla otrzymania granicy cienia własnego postępujemy podług metody, wyłożonej w art. **148**. Odciąwszy więc na osi a od jej śladu poziomego odcinek równy $\frac{h}{2\pi}$, przez koniec tego odcinka prowadzimy promień światła, którego ślad poziomy następnie obracamy około osi w odpowiednim zwrocie na 90^0; otrzymamy pewien punkt L. Ponieważ tworzące powierzchni są obecnie równoległe do P_1, to punkt C_1 (art. **148**) leży teraz w nieskończoności w kierunku tworzącej, a punkt C (ten sam artykuł) — w nieskończoności w kierunku, do tamtego prostopadłym, prosta LC jest tedy prostopadła do tworzącej, a rzut poziomy granicy cienia własnego jest miejscem geometrycznem spodków prostopadłych, spuszczonych z L na rzuty poziome tworzących. W danym przypadku stanowią te rzuty pęk promieni o wierzchołku A (fig. 128), a zatem rzut poziomy u' granicy cienia własnego powierzchni badanej jest kołem o średnicy LA. Sama zaś linia u jest linią, podług której powierzchnię daną przecina walec obrotowy pionowy o podstawie u'. Przekonamy się z łatwością, że linia ta jest linią śrubową; w rzeczy samej, łuk, opisywany na kole m' przez rzut punktu bieżącego linii u, jest proporcyonalny

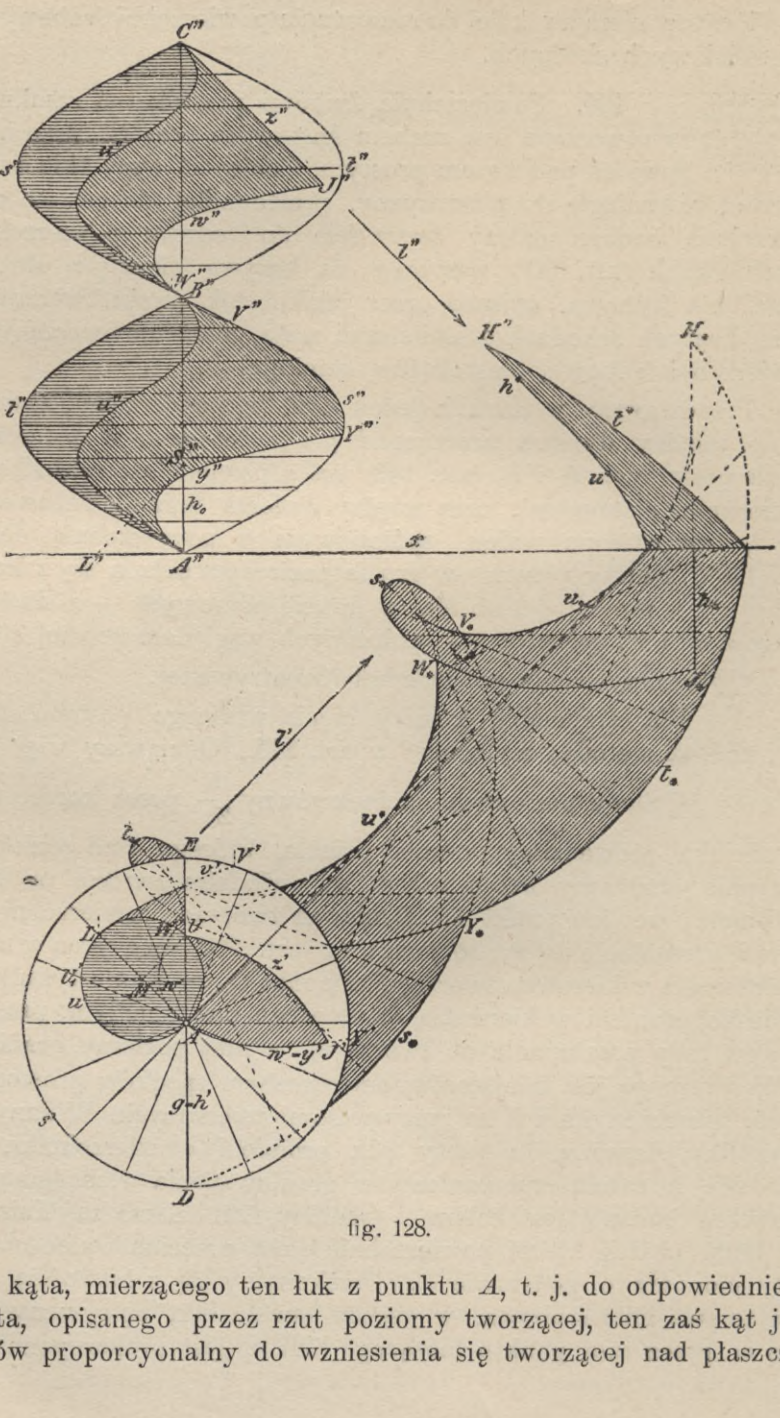


fig. 128.

do kąta, mierzącego ten łuk z punktu A, t. j. do odpowiedniego kąta, opisanego przez rzut poziomy tworzącej, ten zaś kąt jest znów proporcyonalny do wzniesienia się tworzącej nad płaszczyzną P_1; stąd wynika nasze twierdzenie. Gdy tworząca wykona pół obrotu około A, punkt bieżący opisze całe koło u', widzimy zatem, że wysokość kroku linii śrubowej u jest równa $h/2$ (przez h oznaczamy wysokość kroku powierzchni). Rzut u'' jest sinusoidą.

Cień, rzucony przez powierzchnię na P_1, ograniczony jest przez cykloidy, będące cieniami linij s, t, u, oraz przez tworzącą g i cień tworzącej h. Nachylenie linii u jest równe nachyleniu promieni światła, przeto cień poziomy tej linii jest cykloidą zwyczajną. Zakładając (jak jest na fig. 128), że $AD > AL$, otrzymamy cienie linij s i t w kształcie cykloid wydłużonych. Na figurze część cienia pada na P_2; wykreślamy tę część na zasadzie jej kolineacyi z odnośną (fikcyjną) częścią cienia poziomego.

Wreszcie oznaczone są jeszcze na figurze rzuty linij v, w, y, z, będących cieniami odpowiednich linij u, s, t, h na samą powierzchnię; linie v, w, y, z wyznaczają granice cienia, rzuconego przez powierzchnię na samą siebie.

151. Przechodzimy do powierzchni śrubowych zamkniętych ukośnych.

Powierzchnie śrubowe ukośne zamknięte.

Oś a niech znowu będzie pionowa. Rozróżniamy dwie powłoki powierzchni, utworzone odpowiednio przez dwie części tworzącej, na które takową dzieli punkt jej przecięcia się z osią. Weźmiemy pod uwagę tylko dolną powłokę powierzchni, a więc utworzoną przez część tworzącej, skierowaną od osi a ku płaszczyznie P_1, i ograniczoną linią śrubową s (figura 129) i dwiema tworzącemi BC i GH, równoległemi do P_2 (B niech leży na P_1).

Wykreślenie rzutów linij s, BC i GH nie przedstawia żadnych trudności. Pozostaje jeszcze wykreślić część krzywoliniową u'' konturu pozornego w rzucie pionowym. Otrzymamy linię u'', jako owiniętą przez rzuty pionowe tworzących powierzchni. W tym celu dzielimy koło s' (poczynając od B) i odcinek $C''H''$, równy wysokości kroku, na jednakową ilość równych części (na fig. — na 16); promienie koła s', skierowane do punktów podziału, są rzutami poziomemi tworzących, jednakowo od siebie odległych; gdy końce tych promieni rzucimy na oś x i do prostych, łączących te rzuty z punktem C'', prowadzić będziemy równoległe przez odpowiednie punkty podziału odcinka $C''H''$, to te równoległe będą rzutami pionowemi odpowiednich tworzących i owijać będą linię u''. Punkty J'' i K'', odległe od C'' względnie od H'' na $\frac{1}{4}h$, są punktami styczności prostej a'' i linii u''.

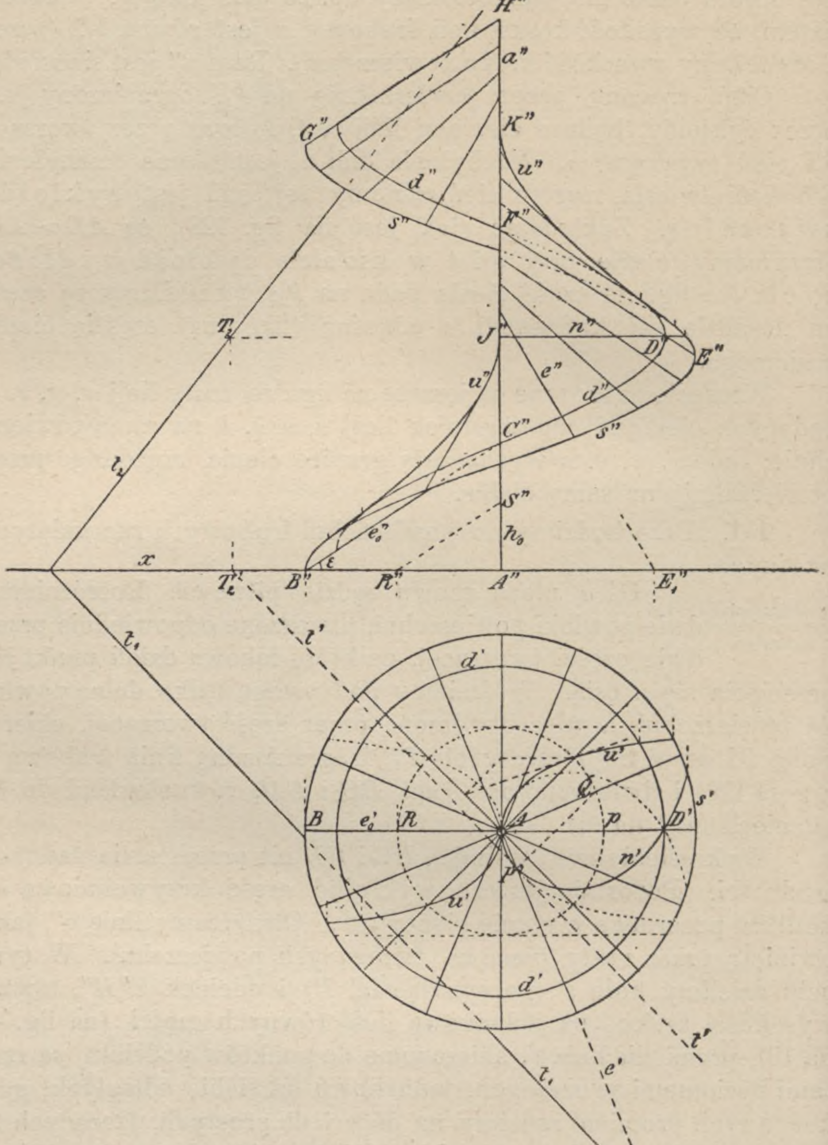

H"
a"
K"
G"
u"
d"
s"
F"
T₂
J"
n"
D
E"
u"
e"
d"
C"
s"
l₂
S"
h₀
e₀"
x
ε
T₂'
B"
R"
A"
E₁"
t₁
l'
d'
u'
Q
s₀
B
e₀'
R
A
p
D'
n'
P
u'
d'
t'
t₁
e'
E₁

fig. 129.

Południk powierzchni składa się z dwóch układów tworzących równoległych: 1) CB, HG,..., 2) FE,..., naprzemian skierowanych od osi na prawo i na lewo i przecinających oś w punktach, oddalonych od siebie o $\frac{1}{4}h$. Każda tworząca jednego układu przecina tworzące drugiego układu, zaś linie śrubowe powierzchni, wyznaczone przez punkty przecięcia, są liniami podwójnemi powierzchni. Na fig. 129 przedstawiona jest jedna taka linia d.

Przekrój normalny. Określmy przekrój normalny powierzchni badanej. Niech (fig. 130) O będzie śladem osi a na płaszczyźnie przekroju, a M, N — dwa punkty tego przekroju, MA, NB — odpowiednie tworzące; gdy oznaczymy kąt MON przez φ, mieć będziemy:

$$AB = \frac{h\varphi}{2\pi};$$

oznaczmy jeszcze stały kąt nachylenia tworzących do płaszczyzny P_1 przez ε, wówczas będzie:

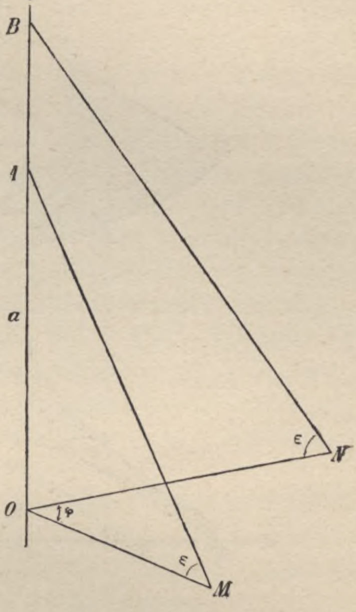


fig. 130.

$$ON = OB \operatorname{cotg} \varepsilon, \quad OM = OA \operatorname{cotg} \varepsilon,$$

a zatem:

$$ON - OM = AB \operatorname{cotg} \varepsilon = \frac{h \operatorname{cotg} \varepsilon}{2\pi} \varphi,$$

skąd poznajemy (art. 82), że krzywa, o której mowa, jest spiralną Archimedesa z parametrem $\frac{h \operatorname{cotg} \varepsilon}{2\pi}$.

Na fig. 129 przedstawiony jest przekrój normalny powierzchni śrubowej płaszczyzną, przecinającą oś w punkcie J. Punkty podwójne spiralnej leżą, jak widzimy, na liniach śrubowych podwójnych.

Cienie. Wykreślimy cienie przedstawionej na fig. 129 części powierzchni śrubowej przy oświetleniu równoległem; promienie światła niech mają kierunek przekątnej sześcianu wiadomego. Rzut poziomy u' granicy cienia własnego wykreślimy przy pomocy metody, wyłożonej w art. **148**. Linia u' (fig. 131) może mieć kształt rozmaity, zawsze jednak jest symetryczna względem linii AL; L jest jej punktem podwójnym, a w A krzywa dotyka samej siebie. Z u' otrzymamy u'', posiłkując się rzutami tworzących.

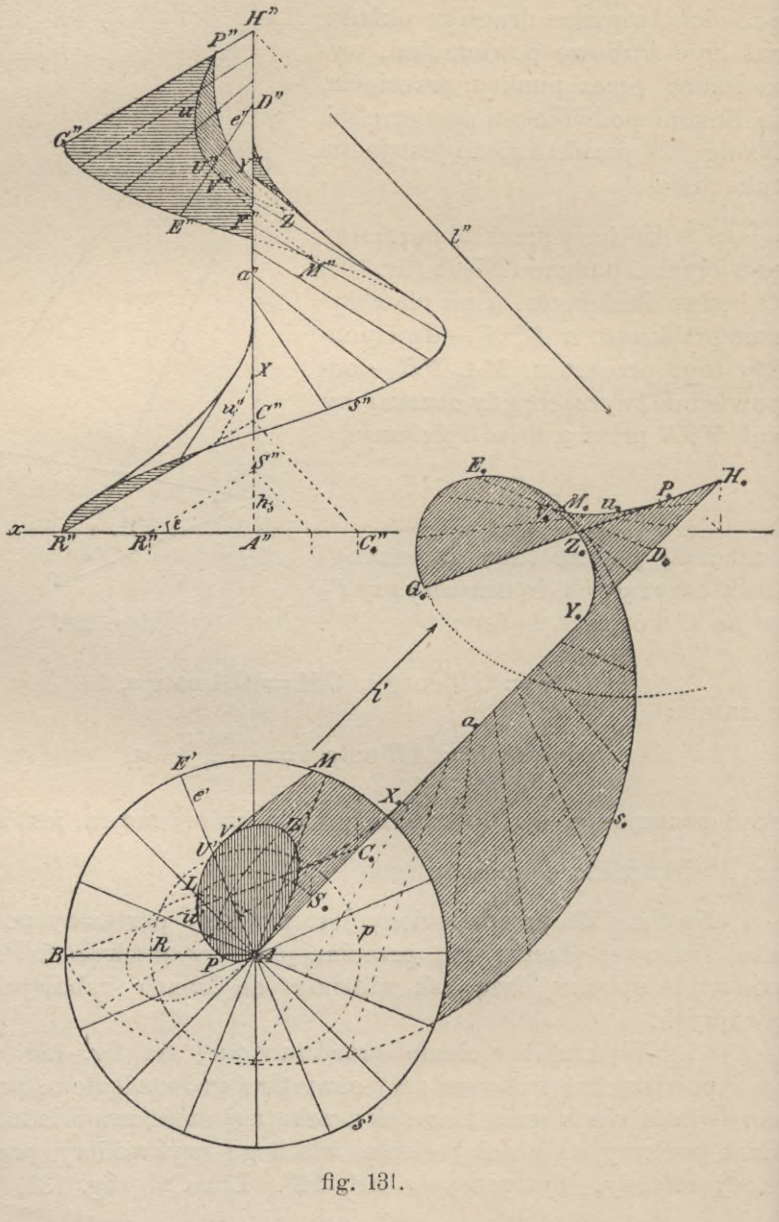


fig. 131.

Ażeby wykreślić cień poziomy powierzchni, kreślimy przedewszystkiem cień poziomy osi a i na nim wyznaczamy cień odcinka CH; dzielimy cień CH na tyleż równych części, na ile był podzielony sam odcinek CH (w danym razie na 16), i przez punkty podziału prowadzimy cienie odnośnych tworzących. Uważamy przytem, że cień pewnej tworzącej powierzchni jest równy i równoległy cieniowi odpowiedniej tworzącej stożka kierunkowego (art. 87); za stożek taki możemy obrać stożek o wierzchołku C i podstawie s', wówczas dość będzie wykreślić cień punktu C, aby otrzymać odcinki, równoległe i równe cieniom tworzących powierzchni, są to mianowicie odcinki, łączące cień punktu C z odnośnemi punktami podziału koła s'. Końce cieni tworzących leżą na cykloidzie, będącej cieniem linii s. Cienie tworzących owijają zarazem cień linii u. Całkowita granica cienia poziomego składa się z cieni linij u, s, a, BC i GH. Jakkolwiek cień pada częścią na płaszczyznę pionową, wykreśliliśmy wszakże cień tak, jak gdyby część płaszczyzny pionowej została usuniętą, a to w celu lepszego uwydatnienia kształtu cienia poziomego powierzchni.

Nad powierzchniami śrubowemi prostoliniowemi otwartemi nie będziemy się zastanawiali, natomiast zajmiemy się najważniejszem zastosowaniem, jakie powierzchnie śrubowe znajdują w technice, a mianowicie **śrubami** i ich **mutrami**.

§ 4. O śrubach.

Śruby **152.** **Śrubą** nazywamy w ogólności ciało, utworzone przez ruch śrubowy jakiejkolwiek zamkniętej figury płaskiej (w tem znaczeniu śrubą będzie więc także ciało, ograniczone powierzchnią wężownicy). W technice przeważnie używane są śruby, posiadające jądro masywne w kształcie walca obrotowego, spółosiowego ze śrubą. Śruba jest w zupełności określona, gdy znamy jej południk; wystarcza w tym celu znać część południka, odpowiadającą wysokości kroku h śruby; część ta ograniczona będzie z góry i z dołu (zakładamy, że oś śruby jest pionowa) promieniami przekrojów normalnych walca, z jednego boku — odcinkiem osi równym h, z drugiego — linią, charakteryzującą kształt śruby; nazywamy tę linię profilem śruby. Najczęściej używane są śruby o profilu, złożonym z linij prostych, a mianowicie: utworzonym przez prostokąt albo trójkąt równoramienny o podstawie na tworzącej walca; profil prostokątny będziemy nazywali płaskim, trójkątny — ostrym. W przypadku profilu ostrego podstawy trójkątów mogą następować po sobie bez przerwy, t. j. mogą mieć długość h, w przypadku zaś profilu płaskiego podstawa prostokąta musi być mniejsza, niż h.

Profil płaski i ostry.

Każdej śrubie odpowiada właściwa jej mutra; jest to ciało, mające wydrążenie w kształcie śruby, które śruba dana wypełnia całkowicie. Zewnętrzna powierzchnia śruby jest identyczna z wewnętrzną powierzchnią mutry; śruba może posuwać się w mutrze ruchem śrubowym.

Mutra.

Śruba o profilu płaskim.

153. Wykreślimy rzuty i cienie śruby o profilu płaskim (fig. 132). Oś śruby niech będzie pionowa; profil niech będzie w szczególności kwadratowy; wysokość profilu (t. j. bok kwadratu) niech równa się połowie wysokości śruby. Na śrubę niech nasadzoną będzie główka w kształcie graniastosłupa sześciokątnego foremnego. Właściwa śruba ograniczona jest częścią walca, stanowiącego jądro, częścią walca spółosiowego, opisanego przez bok profilu, wreszcie częściami dwóch powierzchni śrubowych prostokątnych zamkniętych, utworzonych przez dwa boki poziome profilu. Cztery linie śrubowe, podług których powierzchnie walcowe przecinają powierzchnie śrubowe, stanowią krawędzie śruby. Rzut poziomy tych linij stanowią dwa koła spółśrodkowe i i k, rzuty pionowe — sinusoidy. Na figurze 132 wykreślone są tylko części widzialne konturów. Wykonanie tych wykreśleń, jakoteż wykreślenie rzutów główki śruby, nie przedstawiają żadnych trudności zasadniczych. Prócz tego został na fig. 132 wykreślony cień poziomy śruby przy założeniu — dla lepszego uwydatnienia kształtu tego cienia — że płaszczyzna P_2 jest przezroczysta.

Granica cienia własnego widzialna jest tylko na powierzchniach walcowych, na tych zaś częściach powierzchni śrubowych, które występują na figurze 132, cień własny nie jest widzialny. Cień, rzucony przez śrubę na samą siebie, jest ograniczony przez cienie linij r i s na jądro i na następny niższy skręt śruby, oraz przez cienie krawędzi główki na wierzch skrętu śruby oraz na walec zewnętrzny. Mogłoby się zdarzyć, że główka rzucałaby cień i na walec, stanowiący jądro, oraz, że walec ten rzucałby cień na skręty śruby; na naszej figurze wszakże cienie te nie występują.

Ażeby wyznaczyć cień K, rzucony przez pewien punkt J linii r na walec wewnętrzny, uważamy, że JK jest równoległa do promienia światła l, a zatem $J'K'$ i $J''K''$ są odpowiednio ró-

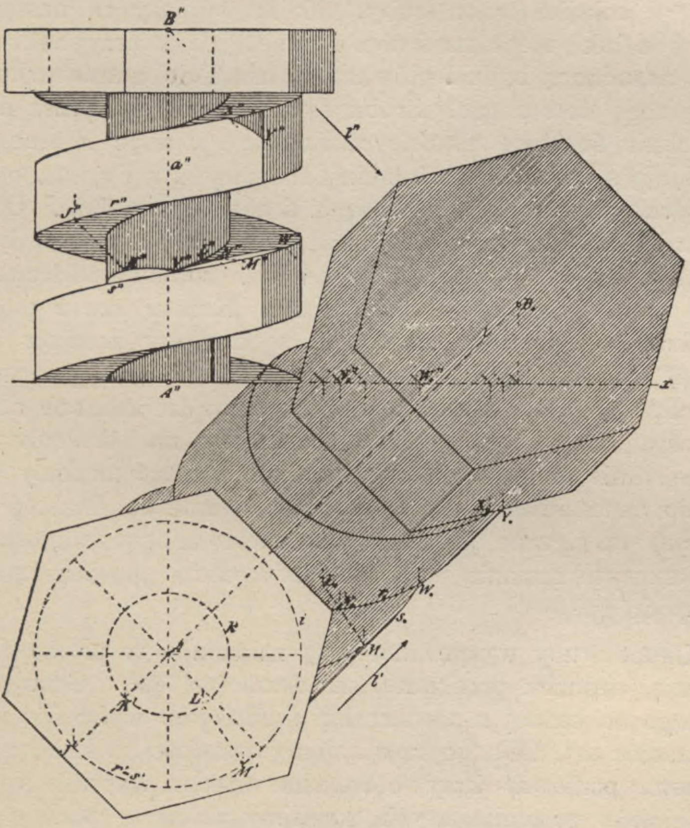


fig. 132.

wnoległe do l' i l'', a że K' leży na kole k, to z łatwością wykreślimy K' i K''. Wykreśliwszy pewną liczbę punktów K, znajdziemy linię UV, kończącą się na linii śrubowej wewnętrznej (punkt U nie jest na figurze widzialny). Od punktu V następuje granica cienia, rzuconego na wierzch skrętu śruby; granica ta kończy się na linii s w punkcie W, który znajdujemy na tej zasadzie, że jego rzutem poziomym jest punkt przecięcia się cieni poziomych linij r i s. Punkt linii VW, leżący na pewnej tworzącej LM, znajdujemy sposobem zwykłym przy pomocy cienia poziomego tej tworzącej.

154. Wykreślmy teraz rzuty śruby o profilu ostrym.

Śruba o profilu ostrym.

Niech trójkąty profilu mają podstawę, równą wysokości kroku śruby, tak że trójkąty te następują po sobie bez luki; niech na śrubę, również jak w przypadku poprzednim, nasadzoną będzie główka w kształcie graniastosłupa sześciokątnego foremnego. Śruba ograniczona jest przez dwie powierzchnie śrubowe ukośne zamknięte (a więc skośne), które przecinają się podług dwóch linij śrubowych r i s, stanowiących zewnętrzną i wewnętrzną krawędź śruby (figura 133). Obieramy znowu płaszczyznę poziomą rzutu prostopadle do osi śruby, wtedy rzuty linij r i s będą, jak wiadomo, kołami spółśrodkowemi, a ich rzuty pionowe — sinusoidami. Kontur rzutu pionowego jest krzywoliniowy i może być wykreślony według metody art. **151**, ponieważ jednak w danym wypadku mamy stosunkowo niewielkie odcinki owych linij, przytem bardzo zbliżone do kształtu prostoliniowego, to poprzestać możemy na konstrukcyi przybliżonej: linie proste, o których mowa, uważać możemy w przybliżeniu dostatecznem, jako wspólne styczne do sinusoid r'' i s''. Widzimy na figurze, jak wierzchnia powierzchnia śrubowa w rzucie pionowym zasłania końce dolne konturu powierzchni śrubowej spodniej.

Cienie śruby wykreślimy przy założeniu, że promienie światła mają kierunek przekątnej sześcianu (art. **69**). Granicę cienia własnego na każdej z powierzchni śrubowych wykreślić możemy na zasadzie art. **148**, poprzestaniemy wszakże na kreśleniu przybliżonem, ponieważ krzywe odnośne bardzo niewiele się różnią od odcinków prostoliniowych; kreślimy zatem — podług metody art. **147** — punkty granicy cienia własnego, leżące na liniach śrubowych r i s, i w rzucie pionowym łączymy każde dwa takie punkty (jak X'' i Y'') prostą, która będzie granicą żądaną. Na figurze widoczną jest granica $X''Y''$ cienia własnego na spodniej powierzchni śrubowej, na wierzchniej zaś odnośna granica leży blisko konturu rzutu pionowego i przypada w cieniu, rzuconym przez śrubę na samą siebie, nie została ona przeto wcale wykreśloną.

Figura 133 podaje jeszcze cień, rzucony przez śrubę na płaszczyznę poziomą rzutu; wykreślenie tego cienia nie przedstawia żadnych zasadniczych trudności.

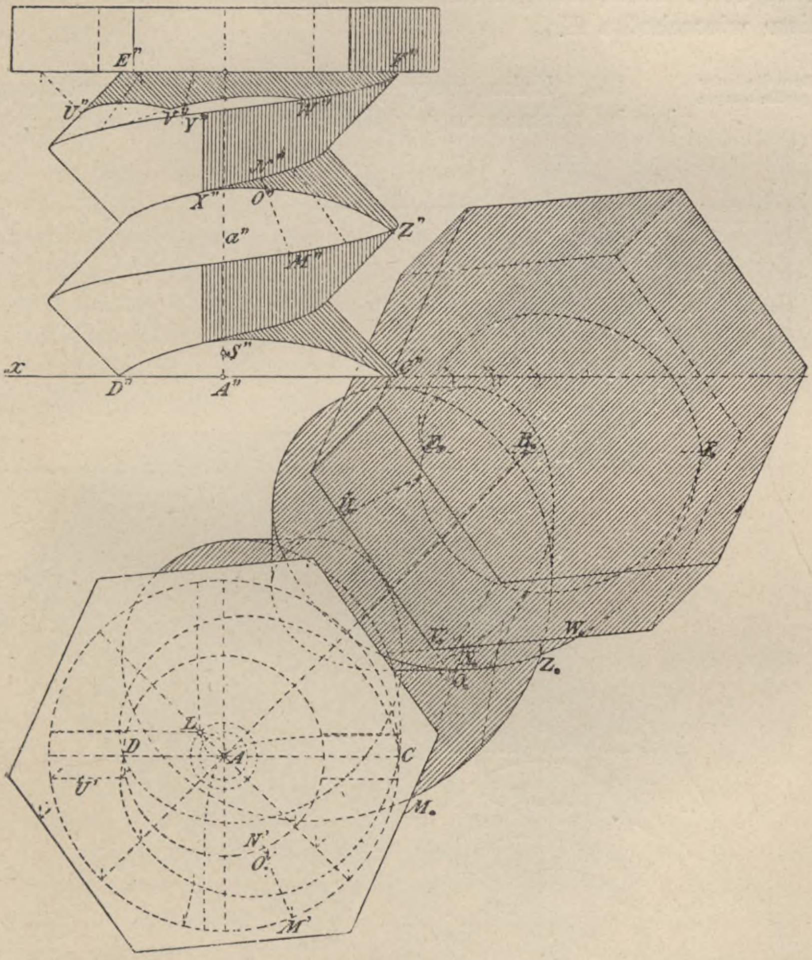


fig. 133.

Co się tyczy cienia, rzuconego przez śrubę na samą siebie, to granica jego składa się z cienia, rzuconego na wierzchnią powierzchnię śrubową przez granicę cienia własnego oraz przez linię śrubową zewnętrzną; punkty granicy znajdujemy przy pomocy cieni poziomych sposobem zwykłym (cień, rzucony przez linię a na linię b, leży na promieniu światła, przechodzącym przez punkt przecięcia się cieni poziomych linij a i b). Na figurze linia XZ jest cieniem, rzuconym przez linię XY, oraz przez część linii śrubowej zewnętrznej; linia UVW jest cieniem, rzuconym przez dwie dolne krawędzie główki; w szczególności, punkt V jest cieniem wierzchołka E.

Mutra dla śruby o profilu ostrym.

155. Zakończmy paragraf niniejszy przedstawieniem w rzutach mutry dla śruby o profilu ostrym.

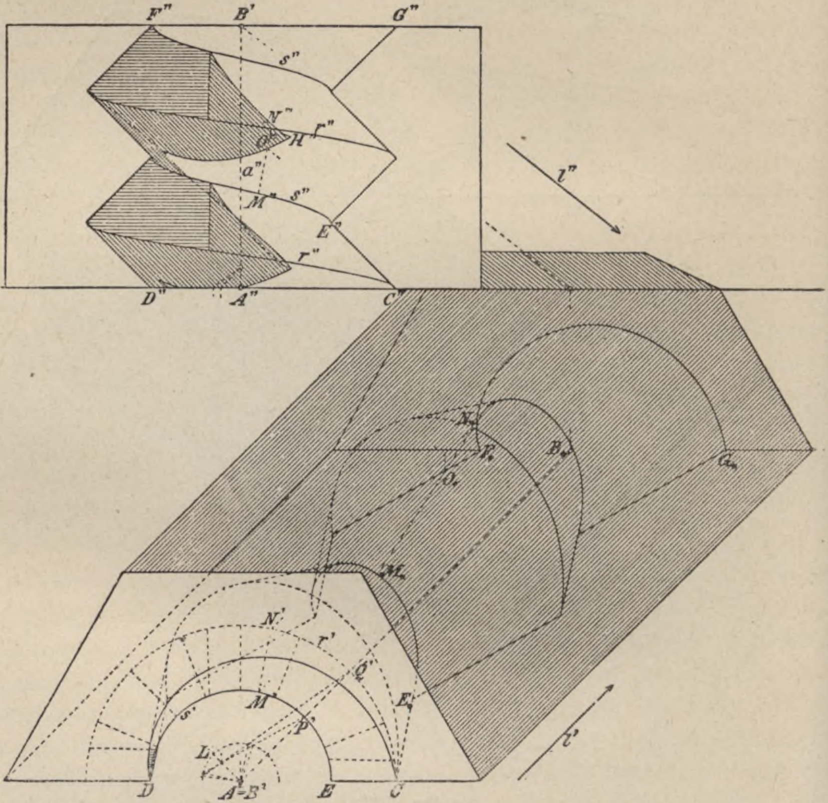


fig. 134.

Niech mutra (fig. 134) ma zewnątrz kształt graniastosłupa sześciokątnego foremnego; podstawa graniastosłupa niech znajduje się na płaszczyznie poziomej rzutu, a jedna ze ścian niech będzie równoległa do płaszczyzny pionowej rzutu; wysokość mutry niech będzie równa podwójnej wysokości kroku śruby. Wyobraźmy sobie, że mutra została przecięta na dwie części płaszczyzną, przechodzącą przez oś śruby i równoległą do płaszczyzny pionowej (płaszczyzną południka głównego), oraz, że przednia połowa została usunięta dla uwidocznienia wnętrza mutry. Kierunek promieni światła zakładamy, jak w artykule poprzednim.

Wykreślenie rzutów i konturów powierzchni wewnętrznej mutry jest identyczne z odnośnemi wykreśleniami artykułu poprzedniego. Przekroje mutry płaszczyznami podstaw ograniczone są wewnątrz spiralnemi Archimedesa (artykuł **151**) *CD* i *FG*. Granica cienia własnego wewnętrznej powierzchni mutry składa się z odnośnych granic na obydwóch powierzchniach śrubowych i wykreśla się zupełnie tak samo, jak przy śrubach. Cień, rzucony na powierzchnię wewnętrzną mutry, ograniczony jest przez cienie wewnętrznej krawędzi *s*, oraz kantów przekroju mutry płaszczyzną południka; dla wykreślenia punktów cieni tych linij posiłkujemy się, jak zwykle, ich cieniami poziomemi.

§ 5. Powierzchnie w rzucie topograficznym.

Rzut topograficzny.

156. Do oznaczania kształtu części powierzchni ziemi używa się w topografii umyślna metoda rzutów, polegająca na tem, że położenie punktu w przestrzeni określa się przez rzut (prostokątny) na pewną stałą płaszczyznę poziomą z oznaczeniem odległości pionowej od tej płaszczyzny; odległość ta uważana jest jako dodatnia albo ujemna, w zależności od tego, czy punkt znajduje się nad płaszczyzną rzutu, czy też pod nią. Taki system rzutu nazywamy rzutem topograficznym. W zasadzie można każdą powierzchnię przedstawić i badać w rzucie topograficznym, praktyczną atoli wartość posiada ten rzut jedynie w topografii, dlatego też zajmiemy się wyłącznie zastosowaniami tego rzutu do przedstawienia kształtu części powierzchni ziemi.

Powierzchnia topograficzna.

157. Nazywać będziemy powierzchnią topograficzną taki obszar powierzchni ziemi, iż bez wyraźnego błędu uważać możemy piony we wszystkich jego punktach za równoległe. Gdy wyobrazimy sobie kulistą powierzchnię oceanu, przedłużoną poprzez lądy, to część tej powierzchni, odpowiadającą powierzchni topograficznej, uważać będziemy mogli za płaską i tę idealną powierzchnię oceanu przyjmiemy za płaszczyznę rzutu. Dla przedstawienia kształtu powierzchni topograficznej przecinamy ją układem płaszczyzn poziomych, poprowadzonych w równych od siebie odległościach, np. 1-go metra

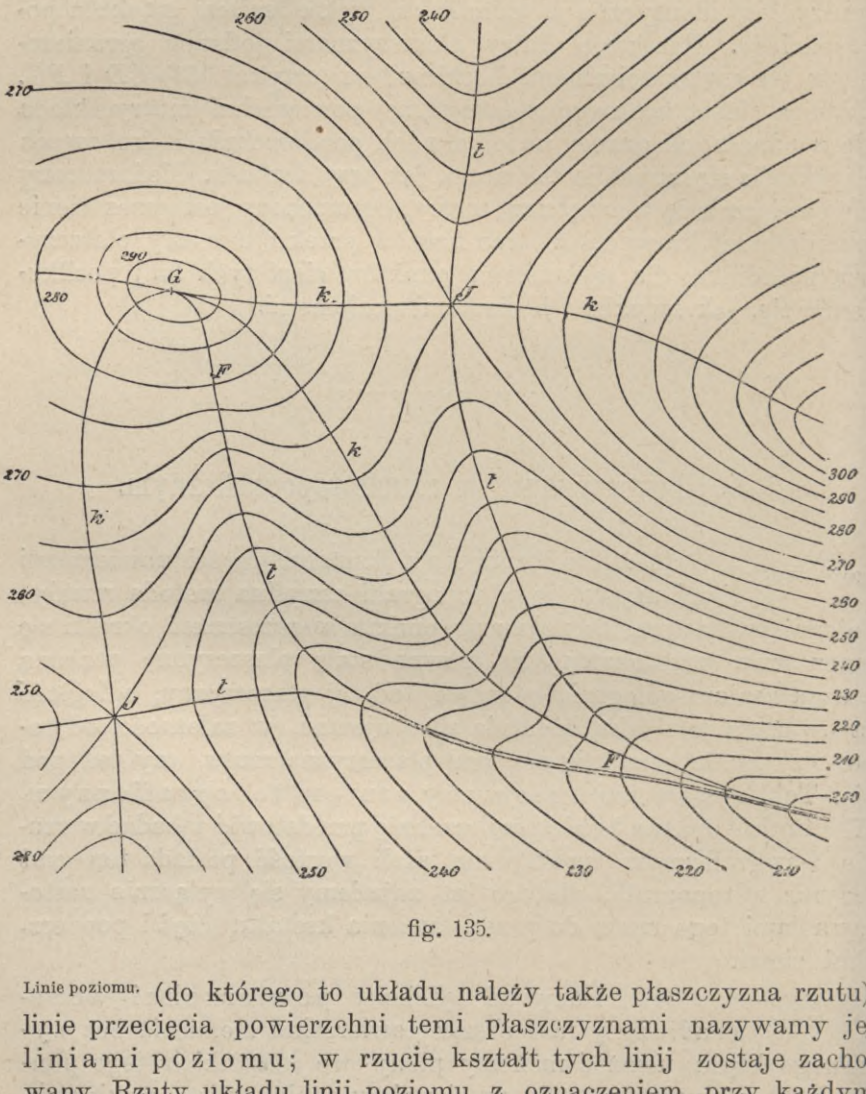


fig. 135.

Linie poziomu. (do którego to układu należy także płaszczyzna rzutu); linie przecięcia powierzchni temi płaszczyznami nazywamy jej liniami poziomu; w rzucie kształt tych linij zostaje zachowany. Rzuty układu linij poziomu z oznaczeniem przy każdym wysokości odnośnej linii dadzą nam obraz powierzchni topograficznej; obraz ten będzie tem wyraźniejszy, im mniejszy jest odstęp między dwiema kolejnemi płaszczyznami poziomemi. Figura 135 daje nam przykład rzutu powierzchni topograficznej; do podobnego rysunku dołącza się zwykle skala.

Linie największego spadku.

Poprowadźmy na powierzchni topograficznej dowolną linię, przecinającą pod kątem prostym wszystkie linie poziomu; gdy w pewnym punkcie tej linii poprowadzimy styczną do niej i płaszczyznę styczną do powierzchni, to prosta styczna będzie oczywiście prostopadła do śladu płaszczyzny stycznej na płaszczyznie rzutu, a więc będzie prostą największego spadku (art. 40) płaszczyzny stycznej. Widzimy stąd, że poprowadzona jak wyżej linia ma w każdym punkcie większe nachylenie do płaszczyzny rzutu, niż wszelka inna, przechodząca przez ten punkt linia na powierzchni; na tej zasadzie nazywamy linię na powierzchni, przecinającą wszystkie linie poziomu pod kątem prostym, linią największego spadku tej powierzchni. Kąt prosty, utworzony przez styczne do przechodzących przez pewien punkt linii poziomu i linii największego spadku, rzuca się oczywiście również, jako kąt prosty (art. 22); stąd wynika, że w rzucie linie poziomu i linie największego spadku przecinają się również pod kątem prostym.

Woda, płynąca w postaci strumienia na powierzchni ziemi, w początku ruchu przyjmuje kierunek linii największego spadku; w dalszym ruchu dąży ona do zachowania kierunku tej linii, zbacza zaś z tej drogi pod wpływem bezwładności; wpływ ten jest tem słabszy, im ruch wolniejszy.

Przyjrzyjmy się bliżej dwom kategoryom linij wskazanych na powierzchni topograficznej.

Linie poziomu są zawsze zamknięte; sprowadzają się one niekiedy do oddzielnego punktu: ma to mianowicie miejsce w punkcie, wyższym od wszystkich otaczających go punktów (jak punkt G na fig. 135), oraz w punkcie, niższym od wszystkich punktów sąsiednich); punkty pierwszego rodzaju nazywać będziemy punktami wierzchołkowemi albo szczytowemi, drugiego rodzaju — punktami zagłębienia.

Punkty szczególne na pow. topograficznej

Niech pewna płaszczyzna pozioma przecina dwa pagórki powierzchni topograficznej podług dwóch oddzielnych linij poziomu (jak np. na fig. 135 płaszczyzna linij 290). Gdy brać będziemy płaszczyzny poziome coraz niższe, to oddzielne dwie linie poziomu zbliżą się i przejdą wreszcie w jednę (260), ale otrzymamy przy tem przejściu jako formę graniczną, przy pewnem położeniu płaszczyzny poziomej, jednę linię poziomu z punktem podwójnym (linia 265); ten punkt powierzchni, ze względu na kształt tej ostatniej w jego okolicy, nazywamy *punktem siodłowym* (na fig. 135 punkt J). Punkty wierzchołkowe, punkty zagłębienia i punkty siodłowe są jedynemi punktami powierzchni, w których płaszczyzna styczna do tej ostatniej jest pozioma. Linie poziomu w ogólności nie mają punktów osobliwych innych, jak punkty podwójne (siodłowe); jedynie osobliwy punkt linii poziomu może być, gdy powierzchnia ma punkt osobliwy w kształcie ostrego wydrążenia lub wystającego ostrza, albo też może być punkt osobliwy linii poziomu na ostrej krawędzi powierzchni, a więc albo na wystającym ostrym kancie, albo na ostrem wyżłobieniu w kształcie rowu.

Linia grzbietowa i dolinowa.

Wyróżniają się dwa szczególne rodzaje linij największego spadku: t. zw. *linia grzbietowa* albo *wododziałowa*, oraz *linia dolinowa*; wszystkie punkty pierwszej linii leżą wyżej, a wszystkie punkty drugiej — niżej, niż punkty sąsiednich linij największego spadku. Bez siły bezwładności woda płynąca nie przecinałaby linii grzbietowej ani dolinowej; płynąc blisko linii grzbietowej, woda oddala się od niej i spływa po zboczach do dwóch dolin; płynąc zaś w okolicy linii dolinowej, woda zbliża się do niej i zbiera się, tworząc strumień.

Przez każdy punkt powierzchni przechodzi w ogólności jedna tylko linia największego spadku; wyjątki stanowią punkty szczególne; a więc: przez punkt wierzchołkowy i punkt zagłębienia przechodzi nieskończenie wiele linij największego spadku, mianowicie we wszystkich kierunkach; przez punkt siodłowy przechodzą dwie linie największego spadku, mianowicie linia grzbietowa i linia dolinowa; wreszcie przez każdy punkt ostrej krawędzi przechodzą trzy linie największego spadku, mianowicie sama krawędź i po jednej linii na każdem zboczu, przylegającem do tej krawędzi.

Z powyższego widzimy, że nie każde dwa układy linij, przecinających się wzajemnie prostokątnie, uważać możemy, jako rzuty linij poziomu i linij największego spadku, albowiem rzuty linij poziomu są liniami zamkniętemi, nie przecinającemi się wzajemnie i posiadającemi najwyżej punkty dwukrotne, natomiast rzuty linij największego spadku są w ogólności liniami nie zamkniętemi i posiadają punkty, przez które przechodzi nieskończenie wiele tych linij.

Rozważmy ważniejsze konstrukcye w rzucie topograficznym.

Położenie prostej w przestrzeni. Prosta unormowana. **158.** Położenie prostej w przestrzeni jest wyznaczone przez rzuty topograficzne dwóch jej punktów. Gdy na rzucie prostej oznaczone są punkty, których wysokości odpowiadają kolejnym liczbom całkowitym, to mówimy, że prosta jest unormowana; odległość między dwoma kolejnemi z tych punktów nazywa się interwalem prostej.

Położenie płaszczyzny. Położenie płaszczyzny pochyłej wyznacza się przez rzut unormowany jej prostej największego spadku, który to rzut w takim wypadku nazywa się skalą spadku płaszczyzny i kreśli się linią podwójną. Proste, prostopadłe do skali spadku, są rzutami linij poziomu danej płaszczyzny.

Przekrój płaski powierzchni topograficznej. **159.** Linię przekroju powierzchni topograficznej płaszczyzną pionową wykreślimy z łatwością, gdy wykonamy kład tej płaszczyzny na jakąkolwiek płaszczyznę poziomą; gdy bowiem przez a oznaczymy ślad płaszczyzny danej na płaszczyznie kładu, to punkty przecięcia linii a i linij poziomu będą rzutami na a punktów przecięcia tychże linij poziomu płaszczyzną daną, a wysokości tych linij poziomu dadzą nam odnośne odległości punktów przecięcia od prostej a.

Ażeby przeciąć powierzchnię topograficzną płaszczyzną pochyłą dowolną, przecinamy każdą linię poziomu powierzchni prostą poziomu płaszczyzny, leżącą na tej samej wysokości; punkt przecięcia, oznaczony tą samą wysokością, jest rzutem topograficznym odnośnego punktu linii przekroju.

Spadzistość linii na powierzchni. **160.** Spadzistość linii, nakreślonej na powierzchni topograficznej, w pewnym punkcie mierzy się styczną trygonometryczną kąta nachylenia stycznej w tym punkcie do linii danej względem płaszczyzny poziomej. Jeżeli linia posiada wszędzie jednakową spadzistość α, to rzuty odcinków tej linii, zawartych między dwiema liniami poziomu, są równe i mają długość $\frac{m}{\alpha}$, gdzie m oznacza stałą odległość między płaszczyznami dwóch kolejnych linij poziomu.

Przez punkt dany P poprowadzić linię o danej stałej spadzistości α. Jeżeli punkt leży na linii poziomu, to z tego punktu, jako ze środka, zakreślamy łuk koła o promieniu $\frac{m}{\alpha}$; gdy łuk ten przetnie najbliższą linię poziomu (w rzucie) w punkcie Q, to tym samym promieniem zakreślamy koło z punktu Q, jako środka, otrzymamy punkt R na następnej linii poziomu, i t. d. Linia PQR.... będzie żądaną. Jeżeli zaś punkt P nie leży na linii poziomu, to odcinki linii żądanej, zawarte między punktem P i sąsiedniemi liniami poziomu, mają się do siebie, jak najkrótsze odległości punktu P od tychże linij poziomu.

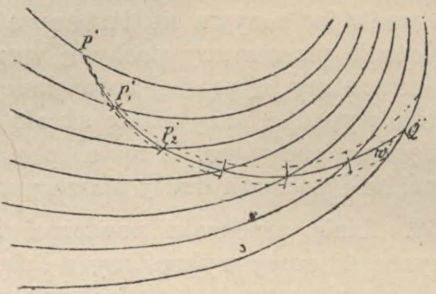


fig. 136.

D a n e d w a p u n k t y P i Q p o ł ą c z y ć l i n i ą o s t a ł e j s p a d z i s t o ś c i (fig. 136). Przedewszystkiem musimy wykreślić długość odcinka linii żądanej, zawartego między dwiema kolejnemi liniami poziomu (interwal); niech różnica wysokości punktów P i Q będzie h, a odległość prostoliniowa PQ — d, wtedy długość szukana będzie cokolwiek większa od $\frac{d}{h}$; po kilku próbach uda nam się poprowadzić — według zagadnienia poprzedniego — przez punkt P dwie linie spadzistości stałej, między któremi leżeć będzie punkt Q; z łatwością wtedy wykreślimy takąż linię, przechodzącą przez punkt Q.

Ć W I C Z E N I A.

221) Powierzchnia prostoliniowa dana jest przez trzy kierujące jakiekolwiek; wykreślić położenie tworzącej, przechodzącej przez pewien punkt, dany na jednej z kierujących.

222) Dwie linie kierujące wyznaczają powierzchnię prostoliniową rozwijalną; wykreślić położenie tworzącej, przechodzącej przez pewien punkt, dany na jednej z kierujących.

223) Wykreślić cienie powierzchni wężownicy.

224) Wykreślić rzuty (i cienie) powierzchni śrubowej, utworzonej ruchem koła, którego środek opisuje linię śrubową, gdy płaszczyzna jego pozostaje prostopadłą do osi tej linii. (W architekturze spotykają się filary, mające kształt podobnej powierzchni śrubowej, przyczem odległość stała środka koła tworzącego od osi powierzchni wynosi około połowy promienia koła, a wysokość kroku wynosi prawie dwukrotną średnicę koła).

225) Wykreślić punkty, w których prosta dana przecina daną powierzchnię śrubową rozwijalną.

226) Do linii śrubowej danej poprowadzić styczne, przecinające prostą daną.

227) Przez punkt dany poprowadzić płaszczyznę styczną do danej powierzchni śrubowej rozwijalnej.

228) Wykreślić płaszczyznę, równoległą do prostej danej i styczną do danej powierzchni śrubowej rozwijalnej.

229) Wykreślić przekrój powierzchni śrubowej rozwijalnej płaszczyzną, równoległą do jej osi (trzy przypadki: płaszczyzna przecina krawędź zwrotu powierzchni, dotyka jej lub nie ma z nią punktów wspólnych).

230) Dane są dwa koła spółśrodkowe, jako rzuty poziome dwóch linij śrubowych o wspólnej osi pionowej, równej wysokości kroku i jednakowym zwrocie; na każdem z tych kół dany jest punkt, jako ślad poziomy odnośnej linii śrubowej; wyznaczyć powierzchnię śrubową rozwijalną, zawierającą obie linie śrubowe (zadanie Oliviera *).

231) Wykreślić przekrój powierzchni śrubowej prostokątnej płaszczyzną dowolnie daną.

232) Wykreślić rzuty i cienie powierzchni śrubowej otwartej: prostokątnej i ukośnej.

233) Wykreślić rzuty śruby, której profil składa się z dwóch kwadratów o boku, równym ćwierci wysokości kroku, oddzielonych od siebie luką o takiejże długości.

234) Wykreślić rzuty śruby, której profil składa się z dwóch równych trójkątów równoramiennych o podstawie, równej połowie wysokości kroku.

235) Przedstawić w rzutach mutrę dla śruby o profilu płaskim (art. **153**) i wykreślić cienie tej mutry.

---

*) Développements de Géométrie descrip. 1843.

236) Oznaczyć w rzucie topograficznym prostą przecięcia się dwóch płaszczyzn danych.

237) Wykreślić w rzucie topograficznym punkt przecięcia się prostej i płaszczyzny danych.

238) Przedstawić w rzucie topograficznym płaszczyznę styczną do powierzchni topograficznej w punkcie danym.

ROZDZIAŁ VIII.

TEORYA PERSPEKTYWY.

§ 1. Pojęcia zasadnicze.

Zadanie teoryi perspektywy

161. Mając rzuty prostokątne jakiegokolwiek przedmiotu, możemy z tychże odczytać dane dokładne co do położenia przedmiotu w przestrzeni, jego rozmiarów i postaci. Wszakże do podmiotowego wyobrażenia o postaci przedmiotu dojść możemy jedynie drogą abstrakcyi, tworząc sobie z danych rzutów punktów i linij przy pomocy siły wyobraźni geometrycznej pojęcie o położeniu tych elementów w przestrzeni; bezpośredniego wrażenia przedmiotu, podobnego do tego, jakie otrzymujemy, patrząc na przedmiot w naturze, albo na poprawnie wykonany obraz malarski, rzuty prostokątne nam nie dadzą. Zastąpienie tego braku jest zadaniem *teoryi perspektywy*. Oto na czem polega jej istota.

Istota teoryi perspektywy.

Każdy punkt przedmiotu wysyła do oka promień; promienie te na siatkówce wywołują obraz przedmiotu. Umieśćmy pomiędzy okiem a przedmiotem płaszczyznę przezroczystą; każdy promień przetnie ją w punkcie, będącym rzutem odnośnego punktu przedmiotu ze środka oka na tę płaszczyznę. Gdybyśmy rysunek ten utrwalili i odpowiednio ukolorowali oraz pocieniowali, to, umieszczając go przed okiem, otrzymalibyśmy wrażenie, prawie takie same, jakie wywołuje przedmiot w naturze. Rysunek powyższy zwiemy obrazem albo *rysunkiem perspektywicznym* przedmiotu; widzimy, że rysunek ten jest tem, co podług rozdziału I-go nazwalibyśmy rzutem przedmiotu ze środka oka na pewną płaszczyznę. Teorya perspektywy uczy, jak wykonać rysunek perspektywiczny przdmiotu, gdy ostatni dany jest przez rzuty prostokątne (lub przez równoważne im pomiary bezpośrednie długości i kątów); tak pojętą perspektywę nazywają niekiedy perspektywą liniową, dla odróżnienia od perspektywy barw, mającej za przedmiot zasady ubarwienia rysunku perspektywicznego, perspektywy światłocienia, badającej zasady cieniowania tychże rysunków, oraz perspektywy powietrznej, zajmującej się badaniem wpływu powietrza na barwy i oświetlenie przedmiotów. Przedmiotem naszego wykładu jest perspektywa liniowa, oraz w głównych zarysach perspektywa światłocienia *).

Określenia. **162.** Obieramy stałą płaszczyznę poziomą P_1, t. zw. płaszczyznę podstawową, i wyobrażamy sobie, że punkty przedmiotu znajdują się na niej i nad nią. Płaszczyznę obrazu P obieramy zawsze pionowo (a to w celu, aby obrazy prostych pionowych były również prostemi pionowemi, oko bowiem jest nader wrażliwe na odstępstwa na rysunku od kierunku pionowego linij, które w naturze są pionowemi). Prostą g przecięcia się płaszczyzn P i P_1 nazywać będziemy prostą podstawową. Położenie oka wyobrażamy sobie nad płaszczyzną P_1 i przed płaszczyzną P, oznaczać będziemy ten punkt przestrzeni literą O i nazywać go punktem ocznym, albo poprostu okiem. Rzut prostokątny A punktu ocznego na płaszczyznę obrazu nazywamy punktem głównym, odległość OA — oddaleniem; koło, zakreślone na płaszczyznie obrazu ze środka A promieniem OA, nazywamy kołem oddalenia.

Przez oko przesuwamy jeszcze dwie płaszczyzny pomocnicze: równoległą do płaszczyzny obrazu oraz równoległą do płaszczyzny podstawowej; pierwszą, dla analogii z art. 2, nazywamy płaszczyzną zniknienia, drugą nazywać będziemy płaszczyzną poziomu. Prostą przecięcia płaszczyzny poziomu i płaszczyzny obrazu nazywać będziemy prostą poziomu i oznaczać przez h. Oczywiście prosta poziomu przechodzi przez

---

*) Niektórzy autorowie badają perspektywę liniową z innego jeszcze, różnego od wyżej podanego, punktu widzenia, uważając ją, jako samoistną metodę oznaczania położenia figur w przestrzeni,—metodę, nie dopełniającą systemu rzutów prostokątnych, ale równoważną mu. W tem rozumieniu nazywają oni perspektywę liniową perspektywą czystą, nadając tej, którą my określiliśmy i którą się zajmować będziemy, miano perspektywy stosowanej.

punkt główny, jest równoległa do prostej podstawowej g i odległa od niej na taką samą długość, jak oko od płaszczyzny P_1. Punkty koła oddalenia, leżące na prostej h, nazywamy punktami oddalenia.

163. Z określenia perspektywy, jako rzutu środkowego, przedewszystkiem wnioskujemy, że obrazem punktu jest punkt — mianowicie rzut punktu danego ze środka O na płaszczyznę P, — a obrazem prostej w ogólności — prosta, mianowicie rzut prostej danej ze środka O na płaszczyznę obrazu; powiedzieliśmy: w ogólności, albowiem w szczególnym przypadku, gdy prosta przechodzi przez oko O, jej obrazem jest punkt. Każdy punkt i każda prosta mają obraz w zupełności określony, odwrotnie zaś obraz nie określa dostatecznie położenia punktu lub prostej; zobaczymy później, jakiemi danemi uzupełniać należy obraz punktu lub prostej, ażeby takowe były w przestrzeni zupełnie określone.

164. Punkt, w którym prosta przebija płaszczyznę obrazu, nazywa się śladem tej prostej, a prosta, podług której płaszczyzna przecina płaszczyznę obrazu — śladem płaszczyzny danej. Gdy prosta znajduje się na płaszczyznie, to ślad tej prostej leży na śladzie tej płaszczyzny (lecz nie zawsze odwrotnie).

165. Ślad prostej, poprowadzonej przez oko równolegle do prostej danej, nazywa się zbiegiem tej ostatniej; jest on obrazem nieskończenie dalekiego punktu tej prostej. Wszystkie proste, równoległe do jednego kierunku, mają ten sam zbieg na płaszczyznie obrazu; obrazy prostych równoległych nie są zatem równoległe, ale przecinają się we wspólnym zbiegu. Gdy prosta przechodzi przez oko, to jej ślad jest zarazem jej zbiegiem i obrazem.

Ślad płaszczyzny, poprowadzonej przez oko równolegle do płaszczyzny danej, nazywa się zbiegiem tej ostatniej; jest on obrazem prostej, nieskończenie odległej na tej płaszczyznie. Płaszczyzny równoległe mają zbieg wspólny. Ślad i zbieg płaszczyzny są zawsze do siebie równoległe; w szczególności, gdy płaszczyzna przechodzi przez oko, jej ślad jest zarazem jej zbiegiem. Gdy prosta leży na płaszczyznie, lub ogólniej: gdy jest do niej równoległą, to zbieg prostej leży na zbiegu płaszczyzny. Odwrotnie, z tego, że zbieg prostej leży na zbiegu płaszczyzny, wnioskować możemy, że prosta jest równoległa do płaszczyzny. Prosta poziomu jest wspólnym zbiegiem wszystkich płaszczyzn poziomych; punkty zbiegu wszystkich prostych poziomych leżą na prostej poziomu; w szczególności proste równoległe do prostej podstawowej mają zbieg w nieskończenie dalekim punkcie prostej h (obrazy przeto tych prostych pozostają równoległemi do nich samych); punkt główny jest wspólnym zbiegiem prostych, prostopadłych do płaszczyzny obrazu; punkty zbiegu prostych, nachylonych do płaszczyzny obrazu pod kątem 45°, są punktami koła oddalenia; w szczególności te z nich, które są równoległe do płaszczyzny podstawowej, mają zbieg w punktach oddalenia.

Położenie punktu, prostej i płaszczyzny.

166. Jak wyżej zaznaczyliśmy (art. **163**), ani położenie punktu, ani prostej w przestrzeni nie jest określone przez ich obrazy. Gdy natomiast na obrazie prostej g wskazane będą jej ślad G i zbieg G_∞, wówczas położenie prostej będzie w zupełności wyznaczone; rzeczywiście prosta ta przechodzi przez punkt G i jest równoległa do OG_∞. Dla oznaczenia położenia punktu w przestrzeni można, oprócz obrazu tego punktu, podać ślad i zbieg dowolnej prostej, przechodzącej przez ten punkt. Niekiedy oznacza się położenie punktu za pomocą jego obrazu wraz z obrazem jego rzutu prostokątnego na płaszczyznę podstawową. Zauważymy jeszcze, że położenie płaszczyzny w przestrzeni w zupełności wyznaczają jej ślad i zbieg.

Położenie wzajemne przedmiotu, płaszczyzny obrazu, płaszczyzny podstawowej i płaszczyzn rzutu.

167. Przedmiot, którego perspektywę kreślić chcemy, wyobrażamy sobie, jako umieszczony za płaszczyzną obrazu i dany nam przez rzuty prostokątne; za płaszczyznę poziomą rzutu obieramy zawsze płaszczyznę podstawową, co się zaś tyczy płaszczyzny pionowej rzutu, to przy przedmiotach, mających np. kształty architektoniczne, a więc uwydatnione kierunki ścian wzajemnie prostopadłych, obieramy zazwyczaj płaszczyznę rzutu równolegle do jednej z tych ścian; gdy płaszczyzna rzutu pionowego P_2 jest równoległa do płaszczyzny obrazu, to zamiast dwóch różnych obieramy poprostu jednę płaszczyznę P; w przeciwnym razie mamy płaszczyznę P_2 różną od P i wówczas nazywamy, jak dawniej, prostą przecięcia się płaszczyzn P_2 i P_1 przez x, nadto oznaczamy przez z prostą przecięcia się płaszczyzn P_2 i P i przez y — prostą, prostopadłą do P_2 i przechodzącą przez punkt wspólny prostych z, x (i g). Płaszczyzny rzutu muszą być sprowadzone do płaszczyzny obrazu.

Kład płaszczyzn rzutu na płaszczyznę obrazu.

Płaszczyznę poziomą rzutu kładziemy na płaszczyznę obrazu przez obrót około prostej g, przyczem obrót ten wykonywamy w takim kierunku, aby tylna część płaszczyzny P_1, t. j. ta, na której istotnie leżą rzuty poziome przedmiotu, przypadła po kładzie pod prostą g; część płaszczyzny P, znajdującą się nad prostą g, rezerwujemy dla rysunku perspektywicznego; ten kierunek kładu płaszczyzny P_1 jest wprost odwrotny od tego, który stosowaliśmy przy metodzie zasadniczej rzutów prostokątnych w geometryi wykreślnej (art. 31).

Płaszczyznę P_2, o ile ona jest różna od płaszczyzny P, kładziemy na tę ostatnią przez obrót około prostej z, obierając kierunek obrotu tak, aby o ile można nie zagmatwać rysunku perspektywicznego.

Kładąc płaszczyznę P_1 na płaszczyznę P, jednocześnie kładziemy na tę ostatnią również płaszczyznę poziomu, obracając ją około prostej h zupełnie tak samo, jak płaszczyzna P_1 obraca się około prostej g. Wskutek tego obrotu płaszczyzny poziomu punkt oczny O, znajdujący się na tej płaszczyznie, zajmie położenie O_0 na płaszczyznie P, będące końcem skierowanego w górę promienia pionowego koła oddalenia; punkt O_0, nadzwyczaj ważny przy konstrukcyach perspektywicznych, nazywać będziemy **kładem oka** na płaszczyznie obrazu. Rzuty będziemy oznaczali po kładzie na P temi samemi literami, jak przed kładem; punkty zaś obrazu perspektywicznego tak samo, jak odnośne punkty w przestrzeni, albo z dodatkiem wskaźnika $({}_1)$. Kład rzutu poziomego oka O', jako punktu, leżącego na przedniej części płaszczyzny P_1, wypadnie nad prostą g, a mianowicie na prostej O_0A w odległości od g, równej oddaleniu (lub, co na jedno wychodzi, w odległości od O_0, równej odległości między g i h).

Kład oka.

168. Zatrzymajmy się jeszcze nieco nad przypadkiem, kiedy płaszczyzny P_2 i P są różne. Zbiegi prostych x i y oznaczmy przez X_∞ i Y_∞; punkty te leżą oczywiście na prostej h. Ażeby je znaleść, zauważmy, że proste OX_∞ i OY_∞ są odpowiednio równoległe do prostych x i y; po kładzie płaszczyzny podstawowej i płaszczyzny poziomu na płaszczyznę obrazu równoległość ta nie zostaje naruszoną; a więc otrzymamy punkty X_∞ i Y_∞, przecinając prostą h prostemi, poprowadzonemi z O_0 równolegle do kładów x i y. Prosta z_∞, poprowadzona przez X_∞ prostopadle do g (równolegle do z), jest zbiegiem płaszczyzny P_2. Niekiedy potrzebny bywa jeszcze kład rzutu pionowego oka O''. Rzut pionowy oka znajduje się na tej samej odległości od płaszczyzny P_1, co samo oko, stąd kład O'' leży na prostej h. Odległość punktu O'' od osi z przed kładem

Zbieg osi x i y.

Kład rzutu pionowego oka

równa jest odległości punktu O' od osi y; wskutek kładu wszakże odległości te się nie zmieniają, a zatem otrzymamy kład O'', odcinając na prostej h od osi z odcinek, równy odległości punktu O' od osi y.

§ 2. Wykreślenia zasadnicze.

169. Wykreślić perspektywę prostej, danej przez rzuty.

Perspektywa prostej. Otrzymamy prostą żądaną, łącząc perspektywy jakichkolwiek dwóch punktów prostej danej; za takie dwa punkty obieramy, jako najdogodniejsze, ślad prostej i jej punkt nieskończenie daleki. Pierwszy z tych punktów, będący zarazem swoją perspektywą, wykreślimy zwykłym sposobem; rozpatrzymy zatem konstrukcyę perspektywy drugiego punktu, t. j. zbiegu prostej danej. Musimy oddzielnie rozważyć dwa przypadki: kiedy płaszczyzny P i P_2 są identyczne i kiedy są różne; zaczynamy od pierwszego.

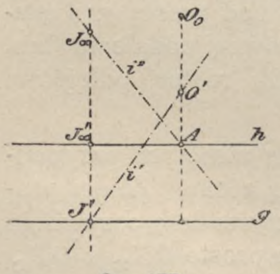


fig. 137.

Oznaczmy przez i promień, poprowadzony przez oko równolegle do prostej danej (fig. 137); punkt żądany jest oczywiście śladem tej prostej i na płaszczyznie obrazu. Rzuty i', i'' otrzymujemy, prowadząc przez O' względnie przez A (t.j. przez rzuty oka) proste, równoległe do odpowiednich rzutów prostej danej; następnie przez punkt przecięcia prostych i' i g prowadzimy do tej ostatniej prostopadłą, która przetnie prostą i'' w punkcie J_∞ żądanym.

170. Niech teraz płaszczyzny P i P_2 nie schodzą się razem. Wykreślamy przedewszystkiem podług art. **168** punkty X_∞, Y_∞ oraz prostą z_∞. Uważamy prostą daną m, jako przecięcie płaszczyzn, rzucających ją na P_2, względnie na P_1; zbieg M_∞ tej prostej otrzymamy, jako punkt przecięcia linij zbiegu tych dwóch płaszczyzn. Linia zbiegu pierwszej z tych płaszczyzn łączy zbieg prostej m'' ze zbiegiem prostych, prostopadłych do P_2; punktem ostatnim jest punkt Y_∞, pierwszy zaś otrzymujemy przy pomocy następującego rozumowania. Zbieg M''_∞ prostej m'' leży oczywiście na zbiegu z_∞ płaszczyzny P_2; przed kładem płaszczyzny P_2 na P proste m'' i OM''_∞ są równoległe; gdy płaszczyznę P_2 sposobem wiadomym przez obrót około z położymy na płaszczyznę P, a płaszczyznę Oz_∞ przez obrót około z_∞ położymy również na P, to, oznaczając położenie punktu O po kładzie przez O^0, spostrzeżemy, że po kładzie proste $O^0M''_\infty$ i m'' okażą się także równoległemi; punkt O^0 wykreślimy bez trudu, poczem otrzymamy punkt M''_∞, jako punkt przecięcia prostej z_∞ z prostą, poprowadzoną przez O^0 równolegle do m''. Prosta $Y_\infty M''_\infty$ będzie zbiegiem płaszczyzny, rzucającej m na P_2. Przechodząc do zbiegu płaszczyzny, rzucającej m na P_1, widzimy, że jest on prostą pionową, poprowadzoną przez zbieg M'_∞ prostej m'; punkt M'_∞ jest punktem przecięcia prostej h i równoległej do m', poprowadzonej przez O_0. Tą drogą otrzymamy w końcu zbieg M_∞ prostej M.

171. Wykreślić perspektywę punktu, danego przez rzuty.

Perspektywa punktu.

Prowadzimy rzut poziomy $O'P'$ promienia OP (figura 138); przez punkt przecięcia G tego rzutu i prostej g prowadzimy do tej ostatniej prostopadłą, która przedstawia oczywiście ślad płaszczyzny pionowej, przechodzącej przez prostą OP, na płaszczyźnie obrazu; na tym śladzie musi znajdować się obraz P_1, który znajdujemy w przecięciu tego śladu z rzutem pionowym AP'' prostej OP.

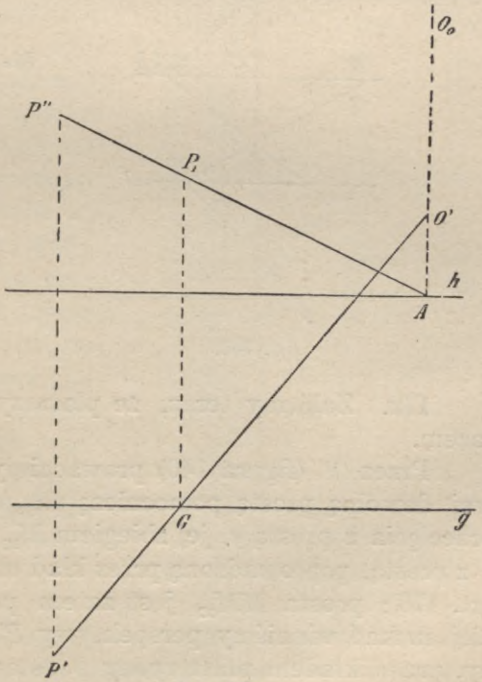


fig. 138.

Opiszemy jeszcze inną metodę wykreślenia punktu P_1. Poprowadźmy przez rzut poziomy P' (fig. 139) dwie proste pomocnicze: prostopadłą do prostej g, oraz nachyloną do niej pod kątem 45^0; ich ślady N i M są punktami ich przecięcia z prostą g; punktami zbiegu tych prostych są odpowiednio punkt główny A i jeden z punktów oddalenia D; obrazy zatem tych prostych są odpowiednio: NA i MD; punkt przecięcia P'_1 tych obrazów jest obrazem punktu P'; prosta PP' ma w przestrzeni kierunek pionowy, jej obrazem jest przeto prostopadła do g, poprowadzona przez P'_1; na tej prostopadłej szukać musimy punktu P_1. Lecz punkt żądany P_1, jako przecięcie prostej OP z płaszczyzną obrazu, leżeć winien na rzucie prostej OP na tę płaszczyznę, gdy zaś rzutami odnośnemi punktów O i P są odpowiednio A i P'', znajdujemy punkt P_1 w przecięciu prostej AP'' z prostopadłą, poprowadzoną do g przez P'_1.

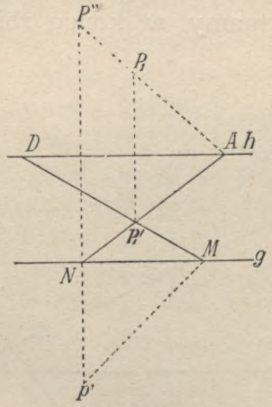


fig. 139.

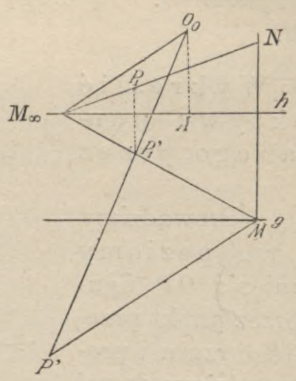


fig. 140.

172. Załóżmy teraz, że płaszczyzny **P** i **P**$_2$ nie schodzą się razem.

Przez P' (figura 140) prowadzimy w płaszczyźnie podstawowej dowolną prostą pomocniczą m; jej śladem M będzie punkt przecięcia z prostą g, jej zbiegiem M_∞ — punkt przecięcia prostej h z prostą, poprowadzoną przez kład oka O_0 równolegle do m (por. art. **170**); prosta MM_∞ jest zatem perspektywą prostej m i na niej szukać winniśmy perspektywy P'_1 punktu P'; z drugiej strony, przed kładem płaszczyzny podstawowej i płaszczyzny poziomu na płaszczyznę pionową punkt P'_1 był punktem przecięcia prostej OP' z płaszczyzną obrazu, podczas kładu zaś, jak łatwo jest widzieć, ów punkt przecięcia zostaje nieruchomy, przeto i po kładzie punkty O_0, P'_1, P' leżą na jednej prostej; tym sposobem znajdziemy punkt P'_1, jako punkt przecięcia prostych MM_∞ i O_0P'; prostopadła przez P'_1 do g jest obrazem prostej PP' i jednem miejscem geometrycznem punktu P_1. Poprowadźmy następnie przez punkt P drugą prostą pomocniczą, równoległą do prostej m; jej zbiegiem będzie znowu punkt M_∞, ślad zaś N znajdować się będzie na prostopadłej do g w punkcie M, przyczem długość odcinka MN równą będzie długości PP', t. j. odległości punktu P od płaszczyzny P_1; długość tę potrafimy otrzymać z rzutów punktu P; prosta $M_\infty N$, jako obraz prostej, przechodzącej przez punkt P, da nam drugie miejsce geometryczne punktu P_1.

Opiszemy jeszcze jednę metodę wykreślenia punktu P_1. Uważamy w tym celu punkt P jako punkt przecięcia prostych PP'' i PP'; punkt P_1 będzie wtedy punktem przecięcia obrazów tych prostych. Obraz prostej PP'' jest śladem na płaszczyznie obrazu płaszczyzny OPP''; niech K oznacza punkt przecięcia prostej z i śladu pionowego $O''P''$ tej płaszczyzny (figura 141), wówczas K należy do obrazu prostej PP''; ponieważ prosta ta jest prostopadła do płaszczyzny pionowej rzutu, przeto jej zbiegiem jest punkt Y_∞ (art. **168**); prosta KY_∞ okazuje się tym sposobem obrazem prostej PP''. Obraz prostej pionowej PP', czyli ślad na płaszczyznie obrazu płaszczyzny pionowej $OO'PP'$ otrzymujemy, kreśląc prostopadłą do g przez punkt przecięcia się G prostych g i $O'P'$ (por. art. **171**, fig. 138); w przecięciu się tej prostopadłej z prostą $Y_\infty K$ znajdujemy punkt żądany P_1.

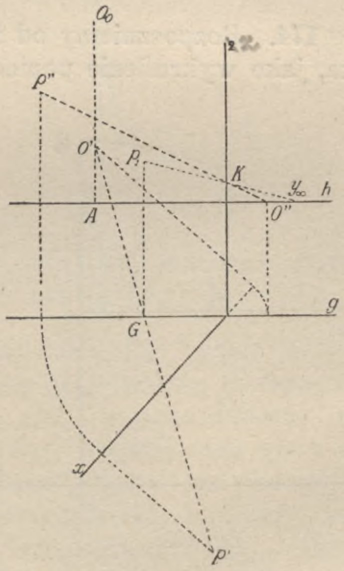


fig. 141.

173. Umiejąc kreślić perspektywy punktów i linij prostych, potrafimy wykreślić perspektywę każdego przedmiotu, mając jego rzuty. Zaznaczyć wypada, że istnieją przyrządy, t. zw. perspektografy, służące do mechanicznego kreślenia perspektywy z rzutów prostokątnych: gdy jeden sztyft przyrządu prowadzimy po rzucie poziomym, a drugi jednocześnie po rzucie pionowym, to ołówek mechanicznie kreśli na papierze perspektywę żądaną; ruchem sztyftu rzutu poziomego warunkuje się składowa ruchu drugiego sztyftu w kierunku osi rzutu, tak, że ten drugi sztyft ma jeszcze tylko swobodę ruchu w kierunku prostopadłym do osi rzutu, i przy używaniu przyrządu uważać jedynie należy, aby sztyft ten nie zboczył z linii rzutu pionowego *).

Przejdźmy teraz do rozwiązania kilku ważniejszych zagadnień, tyczących się teoryi perspektywy.

§ 3. Rozwiązanie różnych zagadnień z teoryi perspektywy.

174. Rozpoczniemy od zagadnienia, które się często napotyka, jako wykreślenie pomocnicze przy innych konstrukcyach.

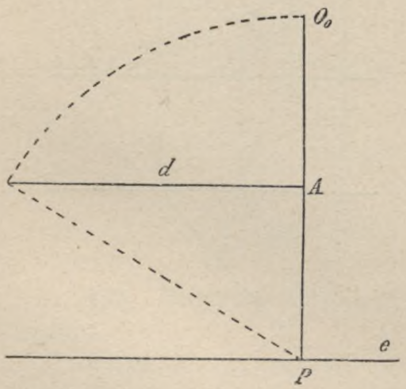


fig. 142.

Wykreślić położenie oka po kładzie około pewnej prostej e, danej na płaszczyznie obrazu.

Kład oka. Niech P (figura 142) oznacza spodek prostopadłej, spuszczonej z oka O na prostą e; położenie kładu O_0 otrzymamy, odcinając długość PO_0, równą OP, na prostopadłej do e w punkcie P; długość zaś OP równa jest przeciwprostokątnej trójkąta, którego przyprostokątnemi są AP i oddalenie d (AO).

175. Wykreślić kład trójkąta, gdy dane są: jego perspektywa oraz ślad i zbieg jego płaszczyzny.

---

*) Pierwszy (według twórcy) perspektograf zbudowany został w 1883 r. przez G. Haucka, profesora politechniki Szarlotenburskiej; przyrząd ten udoskonalony został w 1891 r. przez E. Brauera, prof. politechniki w Karlsruhe. Opis ilustrowany tych przyrządów czytelnik znajdzie w dziele W. Dycka: Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle. Apparate und Instrumente. Monachium 1892. str. 234 i nast.

Przykład: kład trójkąta. Niech perspektywą trójkąta PQR będzie trójkąt $P_1Q_1R_1$ (fig. 143); prosta e niech będzie śladem jego płaszczyzny, a prosta e_∞ — jej zbiegiem. Punkty A, B, C, w których boki trójkąta $P_1Q_1R_1$ przecinają prostą e, są śladami odnośnych boków trójkąta PQR, a punkty A_∞, B_∞, C_∞, w których te proste przecinają prostą e_∞, są zbiegami boków trójkąta PQR (art. **164** i **165**). Gdy płaszczyznę trójkąta i płaszczyznę Oe_∞ położymy na płaszczyznę obrazu, obracając pierwszą około prostej e, a drugą około prostej e_∞, to, oznaczając kład oka przez O_0, spostrzeżemy, że po kładzie proste O_0A_∞, O_0B_∞, O_0C_∞ będą równoległe odpowiednio do kładów odnośnych boków trójkąta (por. art. **170**); gdy zatem podług artykułu poprzedniego wykreślimy kład oka O_0, i poprowadzimy następnie proste O_0A_∞, O_0B_∞, O_0C_∞, wówczas boki kładu trójkąta PQR będą równoległemi do tych prostych, poprowadzonemi odpowiednio przez punkty A, B, C.

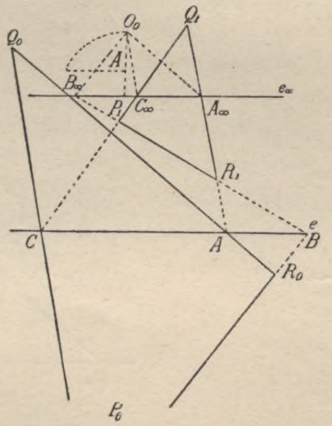


fig. 143.

176. Wykreślić długość odcinka, danego przez perspektywę, oraz przez ślad i zbieg jego prostej.

Długość istotna odcinka. Niech perspektywą odcinka PQ będzie odcinek P_1Q_1 (fig. 144); ślad i zbieg jego prostej g oznaczmy odpowiednio przez G i G_∞. Prostą GG_∞ uważać możemy jako ślad na płaszczyznie obrazu płaszczyzny, wyznaczonej przez oko O i prostą g; wykonajmy kład tej płaszczyzny na płaszczyznę obrazu; kład oka O_0 wykreślimy podług art. **174**, kład zaś prostej g otrzymamy, prowadząc przez G równoległą do O_0G_∞. Prosta OP przejdzie po kładzie w prostą O_0P, punkt zaś P_1 jej przecięcia z prostą GG_∞ pozostanie bez zmiany; stąd widzimy, że kład odcinka PQ otrzymuje się, jako rzut odcinka P_1Q_1 z punktu O_0 na kład prostej g.

Ta sama konstrukcya służy do rozwiązania zagadnienia następującego: na obrazie prostej od danego na niej punktu P_1 odciąć odcinek P_1Q_1, którego długość istotna PQ byłaby równa odcinkowi danemu.

Punkt O_0 służyć może także do podzielenia odcinka P_1Q_1 na części, odpowiadające podziałowi w naturze odcinka PQ na części równe. Na tej zasadzie punkt O_0 nazywa się punktem dzielenia prostej g. Jasną jest rzeczą, że punkt O_0 nie jest jedynym punktem, mającym własność powyższą i rozwiązującym zagadnienia artykułu niniejszego. Jakoż, gdy długość $G_\infty O_0$, równą stałej odległości oka O od zbiegu G_∞ prostej, odetniemy od punktu G_∞

Punkty dzielenia.

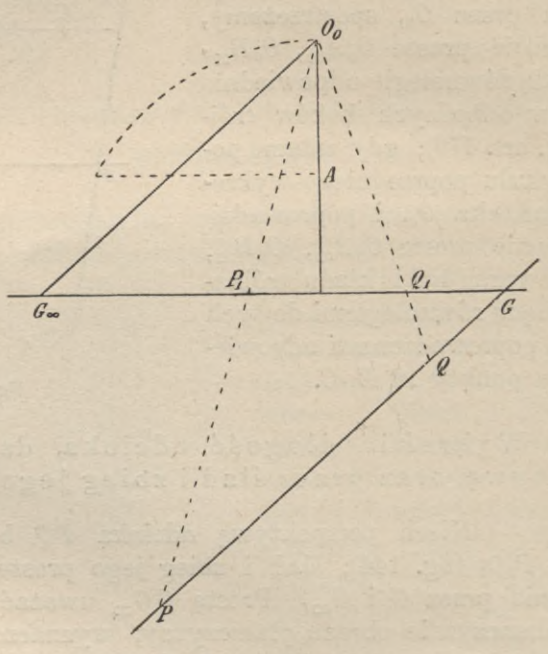


fig. 144.

na dowolnej prostej m_∞, poprowadzonej przez ten punkt, i gdy z końca tego odcinka, jako ze środka, rzucimy odcinek Q_1P_1 na prostą m, poprowadzoną przez G równolegle do m_∞, to na prostej m otrzymamy znowu odcinek, równy istotnej długości odcinka PQ. Tym sposobem widzimy, że każdy punkt koła, zakreślonego z punktu G_∞ promieniem $G_\infty O_0$, przyjęty być może za punkt dzielenia, przyczem prostą, na której odcinają się długości istotne odcinków, prowadzimy przez G równolegle do odnośnego promienia owego koła.

Podział odcinka na części równe.

177. Podział odcinka w perspektywie na części równe wykonać się daje zresztą znacznie prościej bez uciekania się do punktu dzielenia. Niech trzeba będzie np. podzielić odcinek PQ w perspektywie P_1Q_1 na trzy części równe; G_∞ niech oznacza zbieg prostej PQ (fig. 145). Przez G_∞ i P_1 poprowadźmy dwie równoległe n_∞ i m_1 w kierunku dowolnym i uważajmy n_∞ za zbieg pewnej płaszczyzny, zawierającej PQ, a m_1 — za obraz prostej m, poprowadzonej na tej płaszczyznie przez punkt P równolegle do płaszczyzny obrazu. Wyobraźmy

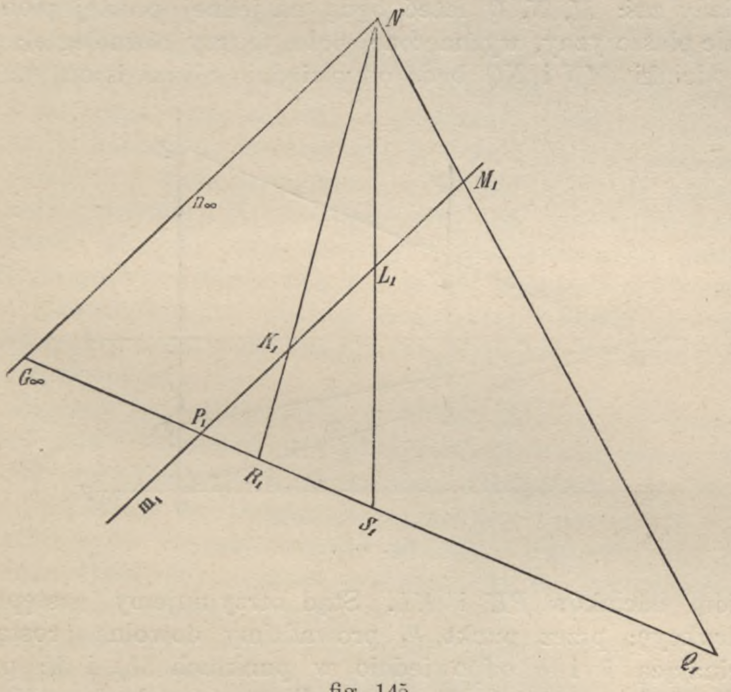


fig. 145.

sobie na prostej m odcięte od punktu P trzy odcinki jednakowej długości: $PK = KL = LM$; obrazy tych odcinków będą też równe. Gdy punkty podziału odcinka PQ oznaczymy przez R i S, to proste RK, SL i QM będą do siebie równoległe; ich obrazy przetną się zatem we wspólnym zbiegu, leżącym na prostej n_∞. Stąd otrzymujemy następującą konstrukcyę. Na prostej m_1 od punktu P_1 odcinamy trzy dowolne, lecz równe odcinki: P_1K_1, K_1L_1, L_1M_1; prowadzimy prostą M_1Q_1, która przetnie prostą n_∞ w pewnym punkcie N; proste NK_1 i NL_1 przetną prostą P_1Q_1 w punktach żądanych: R_1 i S_1.

Odcinki prostych pionowych.

178. Zagadnienia art. **176** rozwiązują się nader łatwo w zastosowaniu do prostych pionowych. Niech np. trzeba będzie na obrazie p_1 prostej pionowej p odciąć od punktu K_1 odcinek K_1L_1, odpowiadający istotnemu odcinkowi KL o długości danej; niech P_1 oznacza obraz śladu P prostej p na płaszczyznie podstawowej (figura 146). Wyobraźmy sobie przez punkty P, K, L poprowadzone w dowolnym kierunku trzy proste poziome: m, n, q, wzajemnie równoległe. Obrazy tych prostych przetną się we wspólnym zbiegu M_∞ na prostej h; ich ślady zaś: M, N, Q leżeć będą na jednej prostej pionowej (śladzie płaszczyzny, wyznaczonej przez te trzy równoległe); przytem odcinki MN i NQ będą odpowiednio równe istotnym dłu-

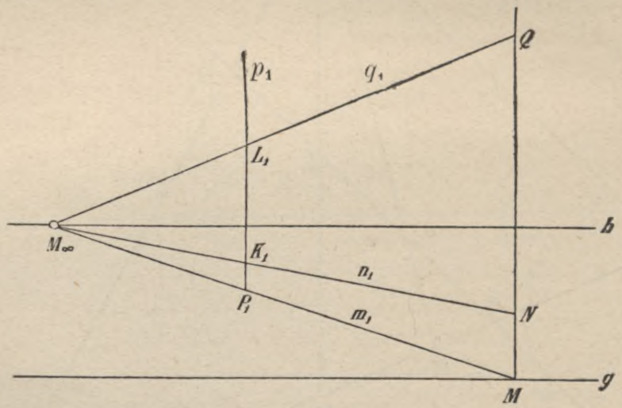


fig. 146.

gościom odcinków PK i KL. Stąd otrzymujemy następującą konstrukcyę: przez punkt P_1 prowadzimy dowolną prostą m_1, przecinającą h i g odpowiednio w punktach M_∞ i M; prosta $M_\infty K_1$ niech przecina w N prostopadłą, poprowadzoną z M do g; daną długość odcinamy tedy na prostej MN od punktu N i koniec odcinka łączymy prostą z punktem M_∞; ta prosta przetnie p_1 w punkcie żądanym L_1.

Metoda redukcyi.

179. Zdarzyć się może, że bądź punkt O_0, bądź inne punkty, niezbędne przy konstrukcyi, wypadają po za obrębem rysunku; uciekamy się wówczas do t. zw. metody redukcyi. Gdy, nie zmieniając położenia oka ani przedmiotu, przesuniemy płaszczyznę obrazu równolegle do siebie bliżej ku oku, a więc w kierunku AO, to obraz, otrzymany na niej w nowem położeniu, będzie figurą podobną i podobnie położoną do poprzedniego obrazu, przyczem punkt A, który swego położenia nie zmieni, będzie środkiem podobieństwa; rozmiary liniowe obrazu ulegną skróceniu (redukcyi) w stosunku zmniejszenia się oddalenia (odległości oka od płaszczyzny obrazu); każdy punkt obrazu przesunie się zatem po prostej, łączącej go z punktem A, tak, że odległość od tego ostatniego zmniejszy się w powyższym stosunku; każda prosta zbliży się w tym samym stosunku do punktu A, zachowując swój kierunek; kąty nie ulegną oczywiście zmianie. Stopień redukcyi zależy od tego, o ile zmniejszymy oddalenie oka od płaszczyzny obrazu, co wyrażamy na rysunku wyborem promienia koła oddalenia, zakreślonego z punktu A (art. **162**); mamy w tym względzie zupełną swobodę, możemy zatem osiągnąć zawsze takie zmniejszenie skali rysunku, aby punkty, potrzebne do konstrukcyi, a zbyt oddalone, znalazły się po redukcyi w granicach rysunku. Jeżeli punkt M zajmie po redukcyi położenie M_1, to nazywamy M_1 zredukowanym punktem M; podobnież mówimy o zredukowanych prostych, o zredukowanym kładzie oka, i t. p. Po wykończeniu konstrukcyi na zredukowanym rysunku przenosimy rezultat na rysunek pierwotny, o ile na tym ostatnim nie wypadnie on znowu po za obrębem rysunku.

Niekiedy bywa dogodniej przesunąć płaszczyznę obrazu równolegle nie w kierunku AO, prostopadłym do niej, ale w innym kierunku, pochylonym względem niej; wtedy punkt A ulega redukcyi, środkiem zaś podobieństwa jest wówczas punkt, w którym płaszczyznę obrazu przebija promień, poprowadzony przez oko równolegle do kierunku przesunięcia się tej płaszczyzny (t. j. punkt zbiegu tego kierunku).

180. Przy kreśleniu perspektywy jakiejkolwiek figury płaskiej, albo przy wykreślaniu kładu takiej figury, danej przez jej perspektywę, oraz ślad i zbieg jej płaszczyzny, pomocnem jest twierdzenie następujące:

Kolineacya perspektywy i kładu figury płaskiej.

Perspektywa figury płaskiej i jej kład na płaszczyznę obrazu są figurami kolineacyjnemi; ślad płaszczyzny figury jest osią kolineacyi, a jej środkiem jest kład punktu ocznego około zbiegu płaszczyzny figury.

Twierdzenie powyższe jest parafrazą twierdzenia art. **30**-go i oddzielnego dowodzenia nie wymaga.

181. Zastosujemy twierdzenie przytoczone do rozwiązania zagadnienia następującego:

Perspektywa koła.

Rozwiązanie za pomocą średnic sprzężonych.

Wykreślić perspektywę koła, mając jego kład oraz ślad e i zbieg e_∞ jego płaszczyzny (fig. 147).

Perspektywa żądana jest przecięciem stożkowem. Gdy wykreślimy kład prostej zniknienia danej płaszczyzny*) (kład ten jest równoległy do e, przechodzi pomiędzy e i O_0 i odległy jest od e tak samo, jak O_0 od e_∞), to stożkowa żądana będzie elipsą, hyperbolą lub parabolą, w zależności od tego, czy kład k_0 koła nie będzie miał punktu wspólnego z kładem prostej zniknienia, czy przetnie go w dwóch punktach, lub też, czy będzie miał z nim jeden punkt styczności wspólny.

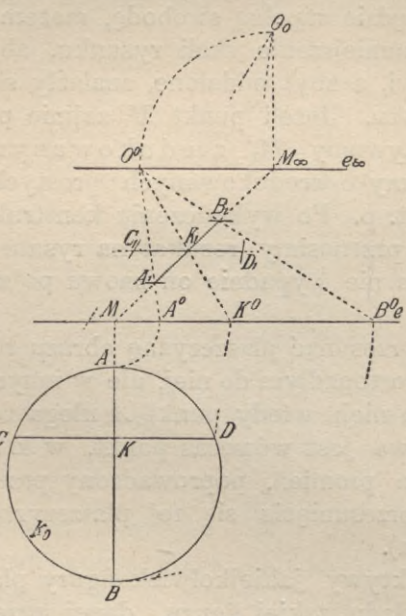


fig. 147.

Obierzmy w szczególności przypadek, kiedy perspektywa k_1 koła k jest elipsą. Będzie to z pewnością miało miejsce, jeżeli koło k całkowicie znajdować się będzie za płaszczyzną obrazu, tak, że proste e i e_∞ oddzielać będą punkt O_0 od kładu k_0, jak to widzimy na figurze 147.

Wykreślmy przedewszystkiem obraz średnicy AB koła k, prostopadłej do e. Przedłużenie BA przetnie e w śladzie M tej średnicy, a spodek M_∞ prostopadłej, spuszczonej z O_0 na e_∞, jest zbiegiem średnicy AB, obraz zatem prostej, na której leży ta średnica, jest MM_∞. Na tym obrazie otrzymać możemy obrazy punktów A i B, jako przecięcia prostemi O_0A i O_0B (tak na podstawie kolineacyi, jak też na tej zasadzie, że O_0 jest punktem dzielenia dla prostej MM_∞). Dokładniej wszakże wyznaczymy te punkty A_1 i B_1, gdy obierzemy punkt dzielenia, leżący na prostej e_∞. Odcinamy zatem $M_\infty O^0 = M_\infty O_0$, $MA^0 = MA$, $MB^0 = MB$, wówczas proste O^0A^0 i O^0B^0 przetną prostą MM_∞ w punktach żądanych A_1 i B_1. Styczne do k_0 w punktach A i B, równoległe do prostej e, dadzą w perspektywie styczne do elipsy k_1 w pun-

*) t. j. prostej przecięcia płaszczyzny danej z płaszczyzną zniknienia.

ktach A_1, B_1, także równoległe do e; stąd widzimy, że A_1B_1 jest średnicą elipsy k_1; środek K_1 tej średnicy jest środkiem elipsy. Średnica C_1D_1, sprzężona z A_1B_1, leży na prostej, równoległej do e, poprowadzonej przez K_1. Wyznaczywszy za pomocą punktu dzielenia O^0 punkt K kładu, odpowiadający punktowi K_1 perspektywy, prowadzimy przez K cięciwę koła k_0, równoległą do e; cięciwa ta CD odpowiada oczywiście szukanej średnicy C_1D_1 elipsy; końce tej średnicy leżą zatem na prostych O_0C i O_0D. Z pary średnic sprzężonych A_1B_1 i C_1D_1 wykreślimy dowolną liczbę punktów elipsy k_1 (art. 27).

Rozwiązanie za pomocą kwadratu opisanego.

Dla wykreślenia perspektywy koła możemy użyć metody, zupełnie odmiennej od przytoczonej. Opiszmy na kole k_0 kwadrat $ABCD$ o bokach odpowiednio równoległych i prostopadłych do prostej e i wykreślmy perspektywę tego kwadratu. W tym celu przecięcia A^0 i B^0 prostych DA i CB z prostą e łączymy ze spodkiem K_∞ prostopadłej, spuszczonej na e_∞ z kładu oka O_0 (około e_∞). Proste $K_\infty A^0$ i $K_\infty B^0$ są odpowiednio obrazami prostych DA i CB. Przekątna CA ma ślad C_0, jej zbieg N otrzymamy, przecinając e_∞ prostą, poprowadzoną przez O_0 równolegle do CA; obrazem przekątnej CA jest tedy prosta C^0N; ta ostatnia przecina $K_\infty A^0$ i $K_\infty B^0$ odpowiednio w punktach A_1 i C_1; przez te punkty prowadzimy równoległe do e, które przetną $K_\infty B^0$ i $K_\infty A^0$ odpowiednio w punktach B_1 i D_1, wówczas trapez $A_1B_1C_1D_1$ będzie perspektywą kwadratu $ABCD$; punkt przecięcia M_1 przekątnych trapezu będzie obrazem środka kwadratu M; prosta $K_\infty M_1$ przecina boki C_1D_1 i A_1B_1 odpowiednio w środkach H_1 i F_1, a równoległa do e, poprowadzona przez M_1, przecina D_1A_1 i C_1B_1 odpowiednio w punktach E_1 i G_1; punkty E_1, F_1, G_1 i H_1 są obrazami środków odnośnych boków kwadratu i punktami styczności elipsy z odnośnemi bokami trapezu. Mamy tym sposobem cztery punkty elipsy, oraz styczne w nich, co zupełnie wystarcza do wykreślenia elipsy;

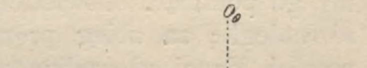


fig 148.

zauważymy, że H_1F_1 jest średnicą elipsy, jej środek — środkiem elipsy. Możemy otrzymać jeszcze inne cztery punkty elipsy i styczne w nich, opisując na kole k_0 kwadrat o bokach, nachylonych do prostej e pod kątem 45°; perspektywa tego kwadratu wykreśla się również z łatwością. (Gdy koło dane jest w płaszczyznie poziomej, to N jest jednym z punktów oddalenia).

182. W końcu rozważyć wypada kreślenie cieni na rysunkach perspektywicznych.

Perspektywa cieni. Rozróżnianie oświetlenia środkowego i równoległego nie jest obecnie ważnem, albowiem obrazy promieni światła tak w jednym, jak w drugim przypadku przedstawiają się jako proste, wychodzące z jednego punktu — w pierwszym wypadku z obrazu punktu świecącego, w drugim — ze zbiegu promieni równoległych; w jednym tylko szczególnym wypadku obrazy promieni są równoległe: kiedy w naturze mamy oświetlenie środkowe, a punkt świecący znajduje się w płaszczyznie zniknienia; przypadek ten jest wszakże wyjątkowy, i możemy go pominąć. Oświetlenie słoneczne uważamy zawsze jako równoległe; za zbieg promieni słonecznych przyjmujemy ślad prostej, idącej od środka tarczy słonecznej do oka.

Oświetlenie wyznaczamy bądź przez obraz L_1 źródła światła L i obraz L'_1 jego rzutu poziomego L', o ile L znajduje się w odległości skończonej, bądź też przez zbieg L_1 promieni równoległych l i zbieg L'_1 ich rzutów poziomych l', o ile L jest punktem nieskończenie odległym. (Gdy punkt L oddala się w nieskończoność, to pierwszy sposób wyznaczania oświetlenia przechodzi sam przez się w drugi). Przy oświetleniu słonecznem cienie przedmiotów w płaszczyznie podstawowej są skierowane ku prostej g, lub mają kierunek równoległy do g, albo też oddalają się od g, a to stosownie do tego, czy słońce znajduje się przed patrzącym na przedmiot, lub w płaszczyznie zniknienia, albo z tyłu patrzącego; ponieważ słońce przyjmujemy zawsze nad horyzontem, to w pierwszym wypadku otrzymamy obraz słońca nad linią poziomu, w ostatnim — pod nią.

Ogólny porządek kreślenia cieni jest taki sam, jak w teoryi rzutów prostokątnych: wykreślamy przedewszystkiem granicę światła i cienia na powierzchni przedmiotu, następnie granicę cienia, rzuconego na płaszczyznę podstawową, i wreszcie cień, rzucony przez powierzchnię na samą siebie.

Rozwiążmy dla przykładu dwa zagadnienia na konstrukcyę cieni.

Obraz cienia poziomego punktu.

183. Wykreślić cień, rzucony na płaszczyznę podstawową przez punkt P, kiedy znamy jego obraz P_1 oraz obraz jego rzutu poziomego P'_1 (figura 149).

Prosta P_1L_1 jest obrazem promienia światła, przechodzącego przez punkt P, a prosta $P'_1L'_1$ jest obrazem rzutu poziomego tego promienia; stąd wnioskujemy, że punkt przecięcia P_0 prostych P_1L_1 i $P'_1L'_1$ jest żądanym cieniem punktu P.

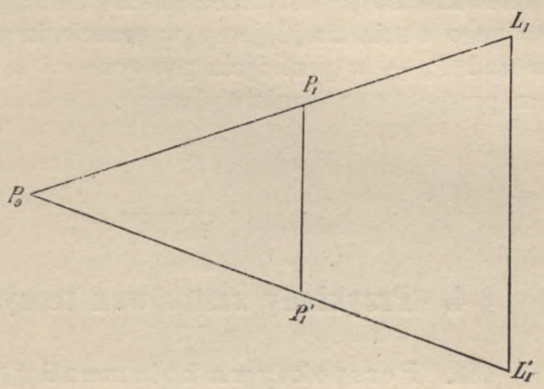


fig. 149.

Odcinek P'_1P_0 jest cieniem odcinka P'_1P_1, powyższa więc konstrukcya jest zarazem rozwiązaniem zagadnienia następującego: wykreślić cień odcinka pionowego, rzucony przezeń na płaszczyznę podstawową.

Cień, rzucony przez prostą na płaszczyznę.

184. Wykreślić cień p_0, rzucony przez prostą p na płaszczyznę E; prosta i płaszczyzna dane są przez swe zbiegi i ślady (fig. 150).

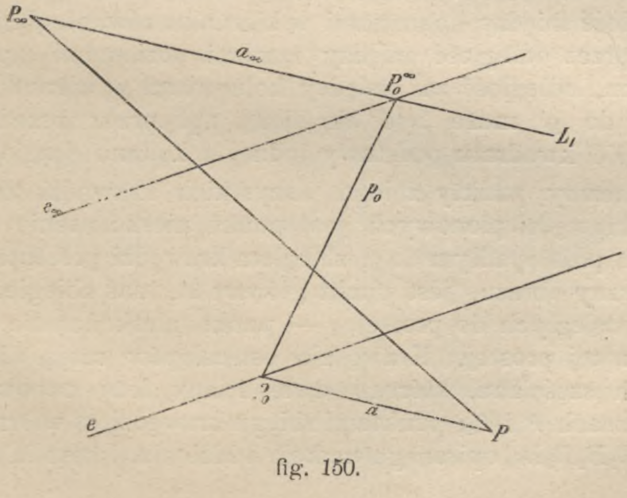


fig. 150.

Przez prostą p poprowadźmy płaszczyznę A, równoległą do promieni światła; zbieg a_∞ tej płaszczyzny łączy zbieg P_0 prostej p ze zbiegiem L_1 promieni światła, ślad zaś a płaszczyzny A przechodzi przez ślad P prostej p i jest równoległy do zbiegu a_∞. Ponieważ cień p_0 jest przecięciem płaszczyzn A i E, przeto zbieg P_0^∞ tego cienia znajdujemy w przecięciu prostych e_∞ i a_∞, a jego ślad P_0 — w przecięciu prostych e i a; prosta $P_0P_0^\infty$ jest zatem perspektywą cienia żądanego.

§ 4. Przykłady zastosowań teoryi perspektywy.

185. Perspektywa kolumnady (fig. 151).

Perspektywa kolumnady.

Podwójny szereg kolumn ustawiony jest w kierunku prostopadłym do płaszczyzny obrazu. Dane są rzuty poziome dwóch przednich kolumn oraz rzut pionowy jednej z nich; płaszczyzna pionowa rzutu schodzi się z płaszczyzną obrazu.

Kolumny ograniczone są ścianami płaskiemi; każda kolumna składa się z trzech części: podstawy, trzonu i kapitelu, które utworzone są z graniastosłupów 4-kątnych foremnych, oraz takich samych ostrosłupów ściętych; ściany graniastosłupów są pionowe, ściany zaś ostrosłupów pochylone są do poziomu pod kątem 45^0.

Odległość między kolumnami w kierunku równoległym do g dana jest przez odległość między rzutami poziomemi przedniej pary kolumn, odległość zaś między kolumnami w kierunku prostopadłym do g może być określoną np. przez przedłużoną przekątną VU kwadratu podstawy jednej z kolumn drugiej pary.

Wyznaczmy punkty zbiegu wszystkich krawędzi kolumn. Zbiegiem krawędzi pionowych jest punkt nieskończenie daleki w kierunku, prostopadłym do g; zbiegiem krawędzi prostopadłych do płaszczyzny obrazu, jest punkt główny A, zaś zbiegiem krawędzi, równoległych do prostej g — punkt nieskończenie daleki w kierunku tej prostej. Krawędzie ostrosłupów mają kierunki przekątnych sześcianu, którego dwie ściany leżą odpowiednio w płaszczyznach P i P_1; punktami zbiegu krawędzi są wierzchołki kwadratu $B_1B_2B_3B_4$, opisanego na kole oddalenia. Przez R, S, T, U

oznaczyliśmy ślady przekątnych kwadratów, leżących w płaszczyznie podstawowej; zbiegami tych przekątnych są punkty oddalenia D i D_1.

Najprzód wykreślimy perspektywy kwadratów podstawowych, leżących na płaszczyznie P_1 (por. art. **181**)); prosta RD przecina AH'' w obrazie H_1 wierzchołka H, równoległa do g przez

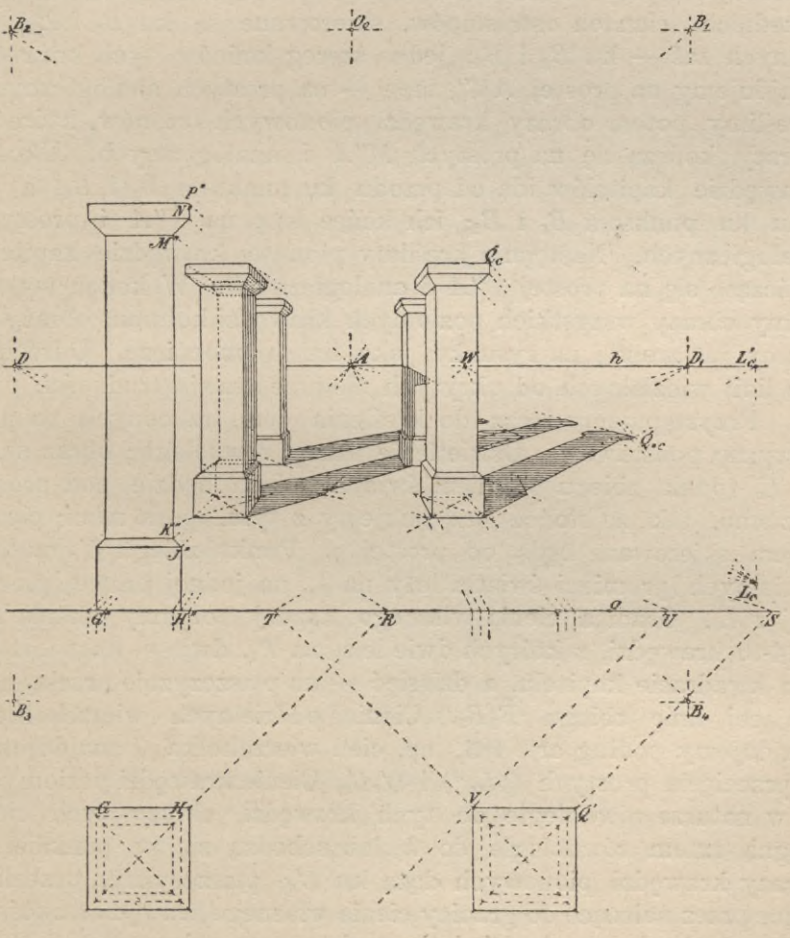


fig. 151.

H_1 przecina AG'' w obrazie G_1 wierzchołka G; podobnym sposobem wykreślimy obrazy wszystkich kwadratów; sprawdzimy, że boki dwóch kwadratów, leżące na jednej równoległej do g, mają jednakową długość. Przez wszystkie wierzchołki tak nakreślonych obrazów kwadratów poprowadzimy proste pionowe, skierowane w górę; będą to obrazy pionowych krawędzi podstaw; jeden szereg końców tych krawędzi leży na prostej $J''A$; prowadząc przez nie równoległe do g, znajdziemy pozostałe końce, które leżą na trzech innych prostych, wychodzących z A, analogicznych do $J''A$. Z kolei kreślimy obrazy ukośnych krawędzi ostrosłupów przy podstawach; obrazy tych z nich, które leżą na przednich ścianach ostrosłupów, skierowane są ku B_1 i B_2, na tylnych zaś — ku B_3 i B_4; jeden szereg końców tych krawędzi znajdujemy na prostej AK'', inne — na prostych analogicznych. Kreślimy potem obrazy krawędzi pionowych trzonów, które to obrazy kończą się na prostych $M''A$ i analogicznych. Ukośne krawędzie kapitelów idą od przodu ku punktom B_3 i B_4, a od tyłu ku punktom B_1 i B_2; ich końce leżą na $N''A$ i prostych analogicznych. Następnie kreślimy pionowe krawędzie kapitelu, kończące się na prostej $P''A$ i analogicznych. W końcu wykreślamy obrazy wszystkich poziomych krawędzi kolumn; obrazy te mamy już zresztą na rysunku, jako linie pomocnicze. Odróżnienie linij widzialnych od ukrytych nie przedstawia trudności.

Przystępujemy teraz do kreślenia cieni, rzuconych na płaszczyznę podstawową. Oświetlenie mamy równoległe; obraz słońca L_c (punkt zbiegu promieni światła) niech będzie pod prostą poziomu, tak że słońce przyjmujemy z tyłu, poza nami; cienie zatem skierowane będą od prostej g. Punkt zbiegu L'_c rzutów poziomych promieni światła leży na h, na jednej prostej pionowej z L_c. Granica cienia własnego każdej kolumny składa się z 14-tu krawędzi, z których dwie leżą na P_1, dwie — na wierzchnim kwadracie kapitelu, a dziesięć — na płaszczyznie przekątnej, mającej linię zbiegu B_2B_3. Cienie oddzielnych wierzchołków znajdujemy podług art. **183**, np. cień wierzchołka Q znajdujemy w przecięciu prostych Q_cL_c *) i $Q'_cL'_c$. Cienie krawędzi poziomych są w naturze równoległe do tych krawędzi, obrazy tych cieni biegną zatem równolegle do h lub schodzą się w punkcie A; obrazy krawędzi pionowych dążą ku L'_c; płaszczyzny, przechodzące przez należące do granicy cienia własnego krawędzie ukośne, i równoległe do promieni światła, mają proste zbiegu B_2L_c i B_3L_c; ponieważ płaszczyzny te przecinają płaszczyznę podstawową podług cieni owych krawędzi ukośnych, przeto obrazy tych cieni mają zbiegi w punktach przecięcia prostej h (jako prostej zbie-

*) Oznaczenie to odpowiada naszemu zwykłemu oznaczeniu Q_1L_1.

gu płaszczyzny podstawowej) z prostemi B_2L_c i B_3L_c; pierwszy z tych punktów W podany jest na rysunku.

W przykładzie, przytoczonym na figurze 151, jedna kolumna rzuca cień na drugą; powiedzmy kilka słów o sposobie wykreślenia obrazu tego cienia. Cienie poziome tych kolumn pokrywają się częściowo; możemy w zasadzie posiłkować się metodą art. **73** i przez punkt przecięcia się granicy obydwóch cieni poziomych poprowadzić promień światła, który na odnośnej ścianie drugiej kolumny wyznaczy wierzchołek cienia, rzuconego na nią przez pierwszą kolumnę. Wszakże nie wszystkie wierzchołki dadzą się tą drogą wykreślić, dogodniej jest używać metody bezpośredniej art. **184**, przyczem pożytecznemi będą uwagi następujące. Cień, rzucony przez krawędź na ścianę, równoległą do niej, jest równoległy do tej krawędzi; na obrazie krawędź ta i jej cień mają wspólny punkt zbiegu. Na tej zasadzie cień, rzucony przez krawędź pionową na takąż ścianę kolumny, jest sam pionowy, a cień, rzucony przez krawędź prostopadłą do płaszczyzny obrazu na ścianę do tej krawędzi równoległą, przechodzi na obrazie przez punkt A. Następnie, obraz cienia, rzuconego przez prostą dowolną na płaszczyznę, równoległą do P, jest równoległy do prostej, łączącej punkt zbiegu danej prostej z punktem zbiegu promieni światła; a więc obraz cienia, rzuconego przez krawędź, prostopadłą do P, na ścianę frontową kolumny, jest równoległy do AL_c, obraz zaś cienia, rzuconego przez krawędź ukośną MN na tę samą ścianę, jest równoległy do B_3L_c. Cień krawędzi pionowej MK na ścianę pochyłą podstawy ma zbieg w punkcie przecięcia prostych B_1B_2 i $L_cL'_c$.

186. Perspektywa obelisku z budową spodnią (figura 152).

Perspektywa obelisku.

Płaszczyzna obrazu niech tworzy pewien kąt z płaszczyzną pionową rzutu, która jest równoległa do boku EF kwadratu podstawy. Płaszczyzny pochyłe podnoża jakoteż szczytu tworzą z poziomem kąt 45°. Ściany boczne obelisku przecinają się w punkcie U jego osi pionowej. Szczegóły konstrukcyi obelisku odczytać można z jego rzutów prostokątnych, które dołączone są do rysunku perspektywicznego w zmniejszeniu do połowy.

Obrawszy proste h i g, jakoteż punkt A na pierwszej z nich, określamy położenie przedmiotu względem płaszczyzny obrazu przez kład rzutu poziomego. Oddalenie AO jest zbyt wielkie, aby kład oka O_0 mógł pomieścić się na rysunku, redukujemy je przeto do połowy i używamy zredukowanego kładu oka $O^r{}_0$ ($AO^r{}_0 = \frac{1}{2}AO_0$). Zbiegi M_∞ i N_∞ boków EF względnie EH kwadratu podstawowego (oraz krawędzi, równoległych do nich) leżą na prostej h. Wykreśla się najprzód zredukowane] punkty: M^r_∞

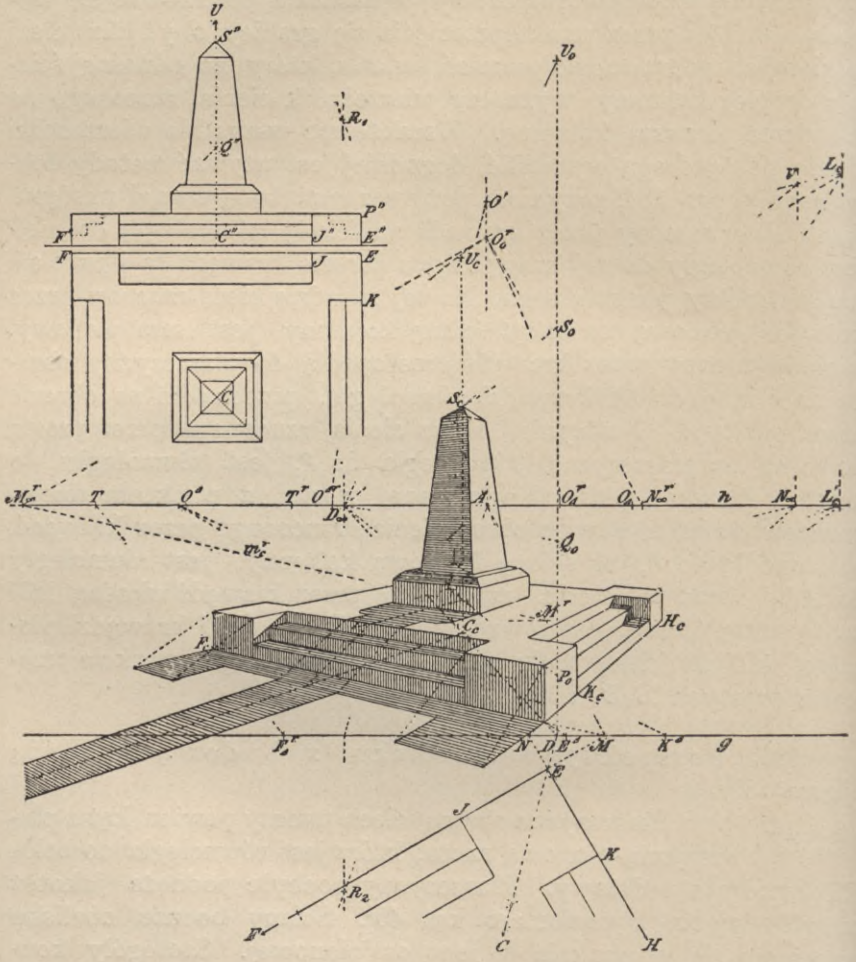


fig. 152.

i N^r_∞, prowadząc $O^r{}_0M^r_\infty$ i $O^r{}_0N^r_\infty$ odpowiednio równolegle do EF i EH; z N^r_∞ otrzymujemy N_∞, odcinając: $AN_\infty = 2AN^r_\infty$, M_∞ zaś znów wypada zbyt daleko. Niech M i N oznaczają ślady prostych EF i EH, wtedy NN_∞ jest obrazem prostej EH; dla otrzymania obrazu prostej EF, znajdujemy jej ślad zredukowany M^r, odcinając (na AM) $AM^r = \frac{1}{2}AM$; wtedy $M^r M^r_\infty$ jest obrazem zredukowanym prostej EF, a równoległa, poprowadzona do niej w podwójnej odległości od A, — obrazem rzeczywistym tej prostej. Sposobem art. **176** wyznaczamy na prostej h punkty dzielenia O_Δ i O^Δ prostych EF i EH i przenosimy na obrazy tych prostych ich podział w naturze (przez punkty K, J i analogiczne). Obraz środka C kwadratu podstawowego znajdujemy w przecięciu przekątnych obrazu tego kwadratu; prosta pionowa, poprowadzona przez obraz punktu C, jest obrazem osi obelisku. Niech D i D_∞ będą odpowiednio śladem i zbiegiem jednej z tych przekątnych; proste pionowe, poprowadzone przez te dwa punkty, są odpowiednio śladem i prostą zbiegu płaszczyzny przekątnej obelisku. Na pierwszej z tych prostych odcinamy od punktu D wysokości, na których znajdują się wierzchołki i krawędzie przedmiotu i łączymy te punkty z punktem D_∞; tym sposobem oznaczymy odnośne wysokości na obrazie; np. odetniemy $DP_0 = E''P''$, poprowadzimy przez E_1 prostą pionową, wtedy $P_0 D_\infty$ przetnie tę prostą w obrazie P_1 punktu P; podobnież wyznaczymy punkt S, punkt Q, w którym przecinają się ściany ukośne podstawy i t. p. Inne szczegóły wykreślenia jasne są z rysunku.

Przy wykreśleniu cieni przyjęte jest oświetlenie słoneczne; L_c i L'_c mają znaczenie to samo, co w artykule poprzednim. Co do samej konstrukcyi, niema żadnego szczegółu, któryby nie mógł być wykonany z łatwością na zasadzie rozważań art. **183** i **184**, podług wzorów art. **185**, zauważymy jedynie, że dla wykreślenia cieni, rzuconych przez krawędzie ukośne, dogodnie jest wykreślić cienie punktów U, S, Q; o ileby cień jakiegoś z tych punktów leżał po za obrębem rysunku, to wykreślimy cień jakiegokolwiek punktu odnośnej krawędzi,—przez ten punkt przejdzie wtedy cień tej krawędzi.

187. Perspektywa halli sklepionej o przejściu podwójnem (figura 153).

Perspektywa halli.

Budowla o przekroju ogólnym kwadratowym składa się ze sklepienia krzyżowego, opartego na czterech słupach o przekroju również kwadratowym; u góry przebiega naokoło gzems zwyczajny, którego krawędzie ukośne są równoległe do przekątnych sześcianu, mającego ściany na płaszczyznach frontowych.

Płaszczyznę obrazu przesuwamy przez przednią krawędź z słupa, dwa boki kwadratu podstawy obieramy odpowiednio za osi x i y; rzuty pionowy i poziomy nie są wykreślone w całości, ale tylko o tyle, o ile niezbędnem jest do wykreślenia perspektywy. Oddalenie podane jest za pomocą zredukowanego kładu oka $O^r_0 : AO^r_0 = \frac{1}{4}AO$. Wiadomym sposobem (art. **168**) wykreślone zostały punkty zbiegu X_∞, Y_∞, M_∞, N_∞ osi x, y oraz przekątnych m, n kwadratu podstawy. Obrazy wszystkich krawędzi prostoliniowych wykreśla się zwykłym sposobem, podobnie, jak w dwóch artykułach poprzednich.

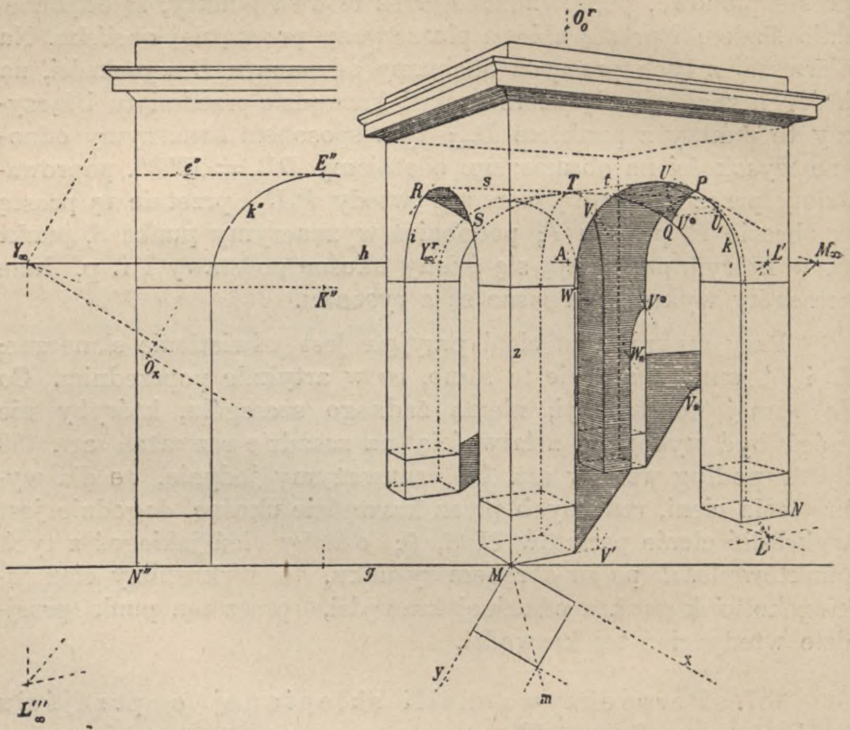


fig. 153.

Z krawędzi pionowych tylko cztery zewnętrzne dochodzą pod dach, pokrywający sklepienie, pozostałe zaś kończą się na płaszczyznie podstawowej sklepienia.

Sklepienie utworzone jest przez dwie jednakowe powierzchnie walcowe obrotowe, których osi poziome przecinają się pod kątem prostym; ściany frontowe przecięte są przez nie podług półokręgów kół; powierzchnie walcowe przecinają się wzajemnie podług dwóch krawędzi, mających punkt wspólny T i leżących w płaszczyznach przekątnych halli; stąd wnioskujemy, że krawędzie te są półelipsami.

Obrazy zarówno półokręgów kół frontowych, jak krawędzi eliptycznych są połowami elips, ponieważ styczne do nich w ich końcach są wszystkie równoległe, mianowicie pionowe. Wykreśliwszy za pomocą punktów X_∞, Y_∞, M_∞, N_∞ obrazy średnic poziomych tych sześciu linij, wyznaczamy ich środki i następnie sprzężone półśrednice pionowe.

Wykreślimy cienie przy oświetleniu słonecznem; L i L' oznaczają odpowiednio zbieg promieni słonecznych i zbieg ich rzutów poziomych; z położenia punktu L pod prostą poziomu wnioskujemy, że słońce przyjętem jest z tyłu, za płaszczyzną zniknienia. Wykreślenie cieni, rzuconych przez krawędzie prostoliniowe na płaszczyznę podstawową i na ściany płaskie, wykonywa się podobnie, jak w artykułach poprzednich i nie wymaga żadnych wyjaśnień szczególnych. Granicę cienia własnego na powierzchni sklepienia stanowią tworzące prostoliniowe powierzchni walcowych; końce tych tworzących znajdujemy na kołach frontowych i i k na zasadzie art. **99**, kreśląc cienie, rzucone przez dowolną tworzącą odnośnej powierzchni na odnośną ścianę frontową, i prowadząc styczną do koła i względnie k, równoległą do tego cienia; punkty styczności będą odpowiednio końcami granicy cienia własnego na powierzchni sklepienia. W naszym przypadku cienie tworzących na płaszczyzny frontowe są równoległe odpowiednio do rzutu pionowego l'' lub bocznego l''' promienia światła. Zauważywszy tedy, że $X_\infty L$ jest prostą zbiegu płaszczyzny, poprowadzonej przez tworzącą jednej powierzchni walcowej równolegle do promieni światła, a prosta, poprowadzona pionowo przez Y_∞, jest prostą zbiegu odnośnej ściany frontowej, widzimy, że punkt przecięcia L'''_∞ tych prostych jest punktem zbiegu cienia odnośnej tworzącej (i równoległego do niej rzutu bocznego l'''). Styczna, poprowadzona z punktu L'''_∞ do koła i, dotyka zatem tego ostatniego w punkcie R granicy światła i cienia. Podobnież znajdziemy na kole k punkt P przy pomocy punktu przecięcia L''_∞ prostej $Y_\infty L$ i prostej pionowej, poprowadzonej przez X_∞. Cień, rzucony na powierzchnię sklepienia, ograniczony jest przez cienie, rzucone na nią przez koła k i i; granice ich zaczynają się w punktach P i R i mają kształt łuków eliptycznych (art. **119**). Łuk

WV koła k rzuca cień na filar, stojący z tyłu; w naturze jest cień tego łuku identyczny z łukiem samym, albowiem ich płaszczyzny są do siebie równoległe; na rysunku są one w kolineacyi, której środkiem jest punkt L, a osią — prosta pionowa, przechodząca przez X_∞. W jest punktem końcowym półokręgu k, w tym więc punkcie i jego cieniu styczne do odnośnych linij mają kierunek pionowy. Ażeby znaleść punkt V, uważamy, że prosta, łącząca obraz jego rzutu poziomego z obrazem rzutu poziomego jego cienia (t. j. z obrazem śladu poziomego krawędzi, przyjmującej ten cień), jest obrazem rzutu poziomego promienia światła i przechodzi wskutek tego przez punkt L'.

ĆWICZENIA.

239) Dowieść, że gdy zbieg płaszczyzny przechodzi przez punkt główny, to płaszczyzna jest prostopadła do płaszczyzny obrazu, i odwrotnie.

240) Kierunek płaszczyzny dany jest przez jej zbieg; wykreślić zbieg prostych prostopadłych do tej płaszczyzny.

241) Dowieść, że gdy dwie proste przecinają się, to prosta, łącząca ich ślady, jest równoległa do prostej, łączącej ich zbiegi, i odwrotnie.

242) Wyznaczyć płaszczyznę (t. j. wykreślić jej ślad e i zbieg e_∞), przechodzącą przez daną (za pomocą śladu K i zbiegu K_∞) prostą k i przez punkt P, dany przez perspektywę P_1 i perspektywę rzutu poziomego P'_1.

243) Dane są: wspólny zbieg K_∞ dwóch prostych równoległych oraz ich ślady K i L; wykreślić ślad i zbieg płaszczyzny tych prostych.

244) Dane są ślady i zbiegi dwóch płaszczyzn; wyznaczyć prostą ich przecięcia.

245) Dane są dwie proste: k (K, K_∞) i l (L, L_∞), na tej ostatniej dany jest obraz P_1 punktu P; wyznaczyć płaszczyznę, przechodzącą przez prostą k i punkt P.

246) Na każdej z dwóch prostych dany jest punkt; wyznaczyć prostą, przechodzącą przez te dwa punkty.

247) Wyznaczyć płaszczyznę, przechodzącą przez trzy punkty, z których każdy dany jest na pewnej prostej.

248) Wykreślić wielkość kąta nachylenia płaszczyzny (e, e_∞) do płaszczyzny obrazu.

249) Wykreślić wielkość kąta nachylenia prostej (E, E_∞) do płaszczyzny obrazu.

250) Wyznaczyć punkt przecięcia trzech płaszczyzn danych.

251) Przez punkt dany poprowadzić płaszczyznę, równoległą do płaszczyzny danej.

252) Wyznaczyć punkt przecięcia prostej i płaszczyzny danych.

253) Wyznaczyć prostą, przechodzącą przez dwa punkty, z których każdy dany jest przez swoją perspektywę i perspektywę rzutu poziomego.

254) Dane są obrazy: punktu, jego rzutu poziomego i przechodzącej przez ten punkt prostej, dany jest nadto ślad tej prostej; wykreślić jej zbieg.

255) Wykreślić kąt dwóch prostych danych.

256) Podzielić na połowy kąt dwóch przecinających się prostych danych.

257) Przez punkt dany poprowadzić prostą, równoległą do prostej danej.

258) Przez punkt dany poprowadzić prostą, przecinającą prostą daną pod kątem danym.

259) Dany jest punkt przez swój obraz i obraz rzutu poziomego; wykreślić rzuty prostokątne tego punktu: a) kiedy płaszczyzna pionowa rzutu schodzi się z płaszczyzną obrazu, b) kiedy te płaszczyzny są różne.

260) Wykreślić ślad i zbieg płaszczyzny, przechodzącej przez trzy punkty, z których każdy dany jest przez obraz swój i obraz rzutu poziomego.

261) Wykreślić perspektywę punktu P, danego przez rzuty prostokątne, za pomocą kładu płaszczyzny OPP'' na płaszczyznę obrazu; płaszczyzna P_2 niech schodzi się z płaszczyzną obrazu.

262) Z punktu danego spuścić prostopadłą na płaszczyznę daną.

263) Znaleść odległość punktu od płaszczyzny.

264) Przez punkt dany poprowadzić płaszczyznę, prostopadłą do prostej danej.

265) Znaleść odległość punktu od prostej.

266) Przez punkt dany na płaszczyźnie poprowadzić do tej ostatniej prostopadłą i odciąć na niej od punktu danego odcinek danej długości.

267) Przez prostą daną poprowadzić płaszczyznę, prostopadłą do płaszczyzny danej.

268) Znaleść kąt nachylenia prostej do płaszczyzny danej.

269) Znaleść kąt nachylenia wzajemnego dwóch płaszczyzn.

270) Znaleść najkrótszą odległość dwóch prostych.

271) Wykreślić perspektywę układu prostych równoległych, znając ich ślady na płaszczyznie poziomej rzutu (nie obrazy tych śladów) oraz punkt jednej z prostych układu.

272) Na obrazie prostej dane są obrazy trzech punktów; wykreślić obraz punktu, harmonicznie z nimi sprzężonego.

273) Dane są obrazy trzech prostych, przechodzących przez jeden punkt; wykreślić obraz czwartej prostej, harmonicznie z tamtemi sprzężonej.

274) Dany jest obraz odcinka; wykreślić obraz środka tego odcinka za pomocą konstrukcyj harmonicznych.

275) Znaleść długość istotną odcinka, danego (w obrazie): a) na prostej pionowej, b) na prostej pochylonej, ale równoległej do płaszczyzny obrazu, c) na prostej, leżącej na płaszczyznie podstawowej, d) na prostej, prostopadłej do płaszczyzny obrazu.

276) Każdy z odcinków zagadnienia poprzedniego podzielić na pewną liczbę części równych.

277) Dana jest prosta przez kład na płaszczyznę obrazu oraz przez ślad i zbieg płaszczyzny, zawierającej tę prostą; nadto na tej prostej dany jest punkt; wykreślić obraz prostej i odciąć na nim od punktu danego odcinek, mający w naturze długość daną.

278) Wykreślić perspektywę punktu, mając obraz jego rzutu poziomego, oraz znając jego odległość od płaszczyzny podstawowej.

279) Zastosować twierdzenie art. **180** do rozwiązania zagadnienia artykułu **175**.

280) Wykreślić perspektywę wielokąta, gdy dane są jego kład oraz ślad i zbieg jego płaszczyzny.

281) Wykreślić perspektywę krzywej płaskiej, znając jej kład oraz ślad i zbieg jej płaszczyzny.

282) Wykreślić obraz kwadratu, danego w płaszczyznie, prostopadłej do prostej podstawowej, i mającego jeden bok poziomy.

283) Wykreślić obraz kwadratu poziomego: a) gdy jeden bok jest równoległy do prostej podstawowej, b) lub tworzy z nią kąt 45^0 albo c) inny dowolnie dany kąt.

284) Wykreślić perspektywę posadzki, ułożonej na płaszczyznie podstawowej: a) z kwadratów o bokach równoległych i prostopadłych do prostej podstawowej, b) z kwadratów o bokach, nachylonych do prostej podstawowej pod kątem 45^0, c) z sześciokątów foremnych.

285) Wykreślić perspektywę toru drogi żelaznej o dwóch parach szyn ze słupami telegraficznemi po obydwóch stronach w równych od siebie odstępach.

286) Wykreślić perspektywę koła w przypadku: a) kiedy kład jego dotyka kładu prostej zniknienia, b) lub przecina go.

287) Wykreślić cień, rzucony przez punkt dany na płaszczyznę daną.

288) Wykreślić perspektywę sześcianu z podstawą na płaszczyźnie podstawowej, przyczem ta podstawa zajmuje kolejno każde z położeń, wskazanych w zagadnieniu 283; wykreślić także cienie.

289) Wykreślić perspektywę prostopadłościanu, którego podstawa leży na płaszczyznie podstawowej, przyczem a) jeden bok podstawy jest równoległy do prostej podstawowej b) lub tworzy z nią kąt dowolnie dany; wykreślić cienie na rysunku perspektywicznym.

290) Wykreślić perspektywę (i cienie) graniastosłupa trójkątnego foremnego: a) stojącego na płaszczyznie podstawowej, b) leżącego na tej płaszczyznie i mającego krawędzie równoległe do prostej podstawowej, c) leżącego na płaszczyznie podstawowej i mającego podstawy równoległe do płaszczyzny obrazu.

291) Wykreślić perspektywę (i cienie) ostrosłupa foremnego czworokątnego, którego podstawa leży na płaszczyznie podstawowej i zajmuje kolejno każde położenie zag. 283.

292) Wykreślić perspektywę walca obrotowego: a) postawionego na płaszczyznę podstawową, b) leżącego na tej płaszczyznie; wykreślić cienie w perspektywie.

293) Wykreślić perspektywę i cienie stożka obrotowego w różnych położeniach.

294) Wykreślić perspektywę halli, której rzuty dane są na fig. 153 (art. **187**), gdy za płaszczyznę obrazu przyjętą jest płaszczyzna pionowa rzutu; na rysunku wykreślić cienie.

295) Wykreślić perspektywę kolumnady, przedstawionej na figurze 151 (art. **185**), gdy płaszczyzna obrazu tworzy pewien kąt z płaszczyzną pionową rzutu. Na rysunku wykreślić cienie.

ROZDZIAŁ IX.

AKSONOMETRYA.

§ 1. Pojęcia zasadnicze.

Zadanie aksonometryi.

188. Aksonometrya ma ten sam cel, co teorya perspektywy, mianowicie: wywołanie za pomocą rysunku wyobrażenia plastycznego o kształcie przedmiotu; metoda aksonometryi różni się wszakże bardzo od metody teoryi perspektywy. Obieramy trzy proste, wzajemnie prostopadłe, wychodzące z jednego punktu i równoległe do głównych kierunków krawędzi przedmiotu, albo do kierunków jego osi lub płaszczyzn symetryi; następnie obieramy płaszczyznę, nachyloną do tych trzech prostych, i rzucamy punkty przedmiotu prostokątnie na tę płaszczyznę; otrzymany obraz nazywamy rzutem albo obrazem aksonometrycznym przedmiotu. Można uważać rzut aksonometryczny jako odmianę perspektywy, polegającą na tem, że płaszczyzna obrazu nie jest pionową, ale pochyloną, oraz, że oko umieszczone jest w nieskończoności w kierunku prostopadłym do płaszczyzny obrazu *). Obraz aksonometryczny wywiera wprawdzie wrażenie mniej plastyczne i mniej bliskie rzeczywistości, niż obraz perspektywiczny, ale często pierwszy w zupełności wystarcza, zwłaszcza, gdy przedstawić mamy przedmiot o rozmiarach niezbyt wielkich.

Porównanie aksonometryi z teoryą perspektywy.

---

*) W dziele J. H. Lamberta: „Freie Perspektive" (Zurych, 2-gie wyd. 1774) rozdział, zawierający zasady aksonometryi, jest zatytułowany: „Von der perspektivischen Entwerfung aus einem unendlich entfernten Gesichtspunkte".

W szczególności nadaje się aksonometrya do wykreślenia obrazu przedmiotów, mających naturalne trzy wyróżniające się kierunki wzajemnie prostopadłe, bądź jako kierunki krawędzi, bądź osi symetryi; tak więc dogodną jest aksonometrya przy rysowaniu form kryształów, przy sporządzaniu szkiców architektonicznych, przy kreśleniu obrazów części maszyn, przyrządów technicznych i t. p.; ilustracye z dziedziny tych przedmiotów w podręcznikach i dziełach naukowych są zazwyczaj wykonywane podług metody aksonometryi. Nad teoryą perspektywy ma aksonometrya tę przewagę, że wykreślenie obrazu aksonometrycznego jest łatwiejsze, niż wykreślenie obrazu perspektywicznego, prócz tego z pierwszego łatwiej jest otrzymać pomiary różnych wielkości, niż z drugiego.

Układ spółrzędnych.

189. Trzy proste x, y, z, wzajemnie prostopadłe, które wyobrażamy sobie w przedmiocie, nazywamy, jak w geometryi analitycznej, osiami spółrzędnych, ich punkt wspólny — początkiem spółrzędnych. Oś z wyobrażamy sobie zwykle skierowaną pionowo w górę. Płaszczyzny, wyznaczone przez pary osi spółrzędnych, nazywamy płaszczyznami spółrzędnych i oznaczamy xy, xz, yz; nazywamy je też odpowiednio płaszczyznami rzutu poziomego, pionowego i bocznego. Rzuty prostokątne punktu A na płaszczyzny spółrzędnych oznaczamy odpowiednio przez A', A'', A'''; odcinki $A'A$, $A''A$, $A'''A$, mierzone od A', względnie A'', względnie A''' do A, nazywamy spółrzędnemi punktu A; odcinki te uważamy za dodatnie lub ujemne, zależnie od tego, czy mają zwrot jednakowy ze zwrotem osi spółrzędnych, do których są odpowiednio równoległe, czy też wprost przeciwny. Jeżeli odcinki, przedstawiające spółrzędne punktu A, przeniesiemy równolegle do siebie tak, aby jeden z nich rozpoczynał się w początku spółrzędnych, a początek każdego następnego przypadał w końcu poprzedniego, to końcem ostatniego będzie punkt A niezależnie od tego, w jakim porządku skombinowaliśmy trzy spółrzędne. Stąd widzimy, że przez trzy spółrzędne jest położenie punktu A w przestrzeni w zupełności i jednoznacznie określone.

190. Możemy teraz sformułować zadanie aksonometryi w sposób następujący: wykreślić rzut aksonometryczny przedmiotu, gdy każdy jego punkt dany jest przez swe spółrzędne. Jeżeli dane będą rzuty prostokątne przedmiotu względem płaszczyzn rzutu poziomego i pionowego, i nadto oznaczony będzie na nich ślad płaszczyzny rzutu bocznego, to z tych danych oczywiście bez trudu otrzymamy wszystkie trzy spółrzędne każdego punktu przedmiotu.

191. Płaszczyznę, na którą rzucamy prostokątnie punkty przedmiotu, nazywamy płaszczyzną obrazu i oznaczamy literą P. Położenie płaszczyzny obrazu względem osi spółrzędnych (a więc pośrednio względem przedmiotu) może być dane przez odcinki, jakie ta płaszczyzna wyznacza na osiach od początku spółrzędnych, albo też, gdy idzie tylko o kierunek płaszczyzny, przez stosunki tych odcinków. W aksonometryi ważniejszem jest jednakże wyznaczanie położenia układu osi spółrzędnych względem płaszczyzny obrazu; zobaczymy wkrótce, jak się to odbywa.

Punkty i linie w przedmiocie oznaczać będziemy temi samemi literami, co ich rzuty aksonometryczne, dodając do pierwszych dla odróżnienia wskaźnik ($_1$), tak np. P, P', p, p' oznaczać będą rzuty aksonometryczne punktów P_1, P'_1, względnie prostych p_1, p'_1. Początek spółrzędnych oznaczać będziemy przez O_1, jego rzut — przez O, osi spółrzędnych — przez x_1, y_1, z_1, ich rzuty aksonometryczne — przez x, y, z.

Trójkąt śladów. 192. Rzut układu osi spółrzędnych przedstawia się w postaci trzech prostych x, y, z, wychodzących z jednego punktu O. Punkty A, B, C, w których osi przebijają płaszczyznę obrazu, tworzą na tej ostatniej trójkąt ABC, który nazywać będziemy trójkątem śladów na płaszczyznie obrazu. Dowiedziemy, że rzuty x, y, z, t. j. proste OA, OB, OC schodzą się z wysokościami trójkąta śladów, czyli innemi słowami, że punkt O jest punktem przecięcia się wysokości trójkąta ABC. W rzeczy samej, prosta O_1A, jako prostopadła do płaszczyzny O_1BC, jest prostopadła do prostej BC, z drugiej strony prosta O_1O, jako prostopadła do płaszczyzny obrazu, jest również prostopadła do prostej BC, skoro zatem prosta BC jest prostopadła do O_1A i do O_1O, to jest ona prostopadła i do prostej AO; podobnież dowiedziemy, że CA i AB są odpowiednio prostopadłe do OB i OC.

Obrazy osi leżą na wysokościach trójkąta śladów.

Jeżeli płaszczyznę obrazu przesuwać będziemy równolegle, to rzuty osi nie zmienią swego położenia, natomiast zmieniać się będą trójkąty śladów, przyczem wszystkie te trójkąty będą do siebie podobne i podobnie położone względem środka podobieństwa O. Ponieważ punkt O wypada zawsze wewnątrz trójkąta śladów, to ten ostatni jest zawsze ostrokątnym.

Każdy trójkąt jest trójkątem śladów pewnego układu spółrzędnych.

193. Uzupełnienie twierdzenia artykułu poprzedniego stanowi twierdzenie następujące: każdy trójkąt i jego wysokości mogą być uważane jako trójkąt śladów i rzuty aksonometryczne układu osi spółrzędnych; dowiedziemy, że przez każdy taki trójkąt jest w przestrzeni wyznaczony w sposób jednoznaczny układ osi spółrzędnych wzajemnie prostopadłych (zakładamy przytem milcząco, że wiemy, z której strony płaszczyzny obrazu znajdować się ma początek spółrzędnych). Niech ABC (figura 154) będzie trójkątem śladów danym, O — punktem przecięcia wysokości; uważając O za rzut początku układu spółrzędnych, których osi przecinają płaszczyznę obrazu w punktach A, B, C, wykonajmy kład trójkąta AO_1B na płaszczyznę obrazu; trójkąt ten jest przy O_1 prostokątny, otrzymamy zatem jego kład AO_0B, przecinając półokrąg koła, zakreślonego na średnicy AB, przedłużeniem prostej CO. Niech ta ostatnia przetnie AB w K; gdy tedy na prostopadłej do płaszczyzny obrazu w punkcie O odetniemy od punktu O we właściwym zwrocie długość przyprostokątnej trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątną drugą jest OK, a przeciwprostokątną — odcinek O_0K, to otrzymamy punkt O_1, będący początkiem szukanego układu spółrzędnych. Tym sposobem przez trójkąt śladów jest położenie osi zupełnie wyznaczone.

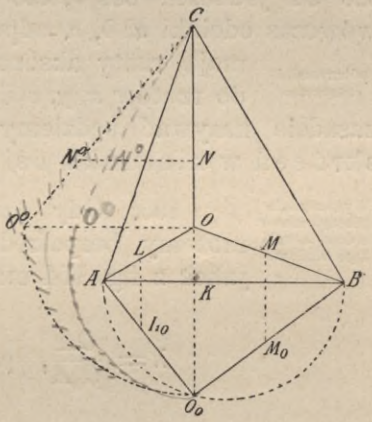


fig. 154.

Na fig. 154 AO_0 i BO_0 dają nam długości istotne odcinków AO_1 i BO_1; dla otrzymania odcinka CO_1 możemy wykonać kład trójkąta prostokątnego OO_1K około prostej CK; gdy na prostej, poprowadzonej z O równolegle do AB, znajdziemy punkt O^0 taki, że $KO^0 = KO_0$, to OO^0K będzie kładem trójkąta OO_1K, a CO^0 — kładem odcinka CO_1.

Skrócenia odcinków na osiach w rzucie aksonometrycznym.

194. Oznaczmy kąty nachylenia osi względem płaszczyzny obrazu, t. j. kąty O_1AO, O_1BO i O_1CO, odpow. przez α, β, γ. Gdy na osiach od początku O_1 odetniemy odcinki jednakowej długości k, to długości rzutów tych odcinków będą:

$$l = k \cos \alpha, \quad m = k \cos \beta, \quad n = k \cos \gamma,$$

t. j. odcinki te ulegną skróceniu w stosunku jedności do dostawy kąta nachylenia odpowiedniej osi. Ponieważ przy rzucie równoległym (którego szczególnym przypadkiem jest rzut prostokątny, jak w aksonometryi) równoległość odcinków i stosunek długości dwóch odcinków równoległych zostają zachowane (art. **21**), to twierdzić możemy, że rzuty odcinków równoległych do osi są równoległe do rzutów tych osi i ulegają skróceniu w tym samym stosunku, co odcinki na odnośnych osiach. Oznaczmy liczby dodatnie, mniejsze od jedności: $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ odpowiednio przez λ, μ, ν, wówczas odcinki a, b, c, odpowiednio równoległe do osi x_1, y_1, z_1, mają rzuty aksonometryczne odpowiednio równoległe do rzutów x, y, z i odpowiednio równe: λa, μb, νc; na tej zasadzie nazywać będziemy liczby λ, μ, ν s p ó ł c z y n n i k a m i s k r ó c e ń w k i e r u n k u o s i x, y, z.

Spółczynniki skróceń.

Wyznaczanie spółczynników skróceń z trójkąta śladów.

195. Gdy dany jest trójkąt śladów, to z niego możemy bezpośrednio odczytać spółczynniki skróceń; jakoż z fig. 154 otzymujemy:

$$\lambda = \frac{OA}{O_0A}, \quad \mu = \frac{OB}{O_0B}, \quad \nu = \frac{OC}{O^0C}.$$

Odcinając na O_0A, O_0B, O^0C odcinki dowolnej, lecz równej długości: O_0L_0, O_0M_0, O^0N^0, otrzymamy podług tej figury:

$$\lambda : \mu : \nu : 1 = OL : OM : ON : O_0L_0.$$

Związek między spółczynnikami skróceń.

196. Wykażemy, jak odwrotnie wykreślić rzuty osi spółrzędnych, odpowiadające danym spółczynnikom skróceń. Zauważymy w tym celu, że pomiędzy liczbami λ, μ, ν zachodzi pewien związek, wskutek czego nie mogą one być dane zupełnie dowolnie. Jeżeli przez punkt O poprowadzimy płaszczyzny, równoległe do płaszczyzn spółrzędnych, to wraz z płaszczyznami spółrzędnych otrzymamy prostopadłościan, którego przekątną będzie O_1O, a krawędziami — odcinki: $O_1O \sin \alpha$, $O_1O \sin \beta$, $O_1O \sin \gamma$; na zasadzie twierdzenia geometryi elementarnej o przekątnej i krawędziach prostopadłościanu mamy:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1,$$

czyli

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2,$$

albo, wprowadzając liczby λ, μ, ν:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 2.$$

Dwie więc tylko z liczb λ, μ, ν mogą być dane dowolnie, trzecia określa się z ostatniego związku. Ponieważ każda z liczb λ, μ, ν jest mniejsza od jedności, przeto z powyższej równości wnioskujemy, że suma kwadratów dwóch z tych liczb jest większa od kwadratu trzeciej.

Zamiast dwóch z liczb λ, μ, ν można dawać stosunki pomiędzy wszystkiemi trzema; gdy np. dane nam są liczby l, m, n takie, że:

$$l : m : n = \lambda : \mu : \nu,$$

wówczas znajdziemy:

$$\lambda = \frac{l}{k}, \quad \mu = \frac{m}{k}, \quad \nu = \frac{n}{k},$$

gdzie k określa się ze związku:

$$2k^2 = l^2 + m^2 + n^2.$$

Trójkąt śladów, odpowiadający danym spółczynnikom skróceń.

197. Niech więc dane będą (liczby lub odcinki) l, m, n; wykreślamy przedewszystkiem $k = \sqrt{\frac{1}{2}(l^2+m^2+n^2)}$ (fig. 155). Wyobraźmy sobie płaszczyznę obrazu przesuniętą przez punkt O_1, tak, że w rozumowaniu następującem punkty O_1 i O są identyczne. Kreślimy dowolny odcinek $OZ = n$ i wyobrażamy sobie na osiach odcinki: $OX_1 = OY_1 = OZ_1 = k$. Wyobraźmy sobie następnie płaszczyznę OZZ_1, prostopadłą do płaszczyzny P; nazwijmy ją Q. Wykonajmy w myśli kład prostych OX_1, OY_1 na płaszczyznę Q przez obrót około prostej, poprowadzonej przez O prostopadle do P; następnie

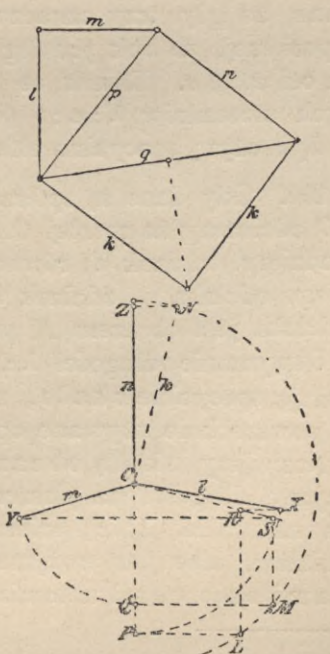


fig. 155.

wykonajmy kład płaszczyzny Q na płaszczyznę P przez obrót około prostej OZ; wówczas odcinki OX_1, OY_1, OZ_1 przedstawią się w naturalnej wielkości, jako promienie OL, OM, ON koła, zakreślonego z punktu O promieniem k; położenie tych promieni będzie takie, że ich rzuty prostokątne na OZ będą odpowiednio: $OP = l$, $OQ = m$, $OZ = n$. Znalazłszy punkty L, M, N, rzucamy pierwsze dwa z nich w kierunku OZ na promień koła, prostopadły do ON; otrzymamy punkty R, S, które po przywróceniu płaszczyzny Q do położenia pierwotnego będą rzutami prostokątnemi punktów X_1, Y_1 na Q. Szukane więc punkty X, Y leżą odpowiednio na prostych, poprowadzonych przez R względnie S prostopadle do OZ, i zarazem na kołach, zakreślonych z O promieniami $OP = l$ względnie $OQ = m$. Tak otrzymamy rzuty osi spółrzędnych, a każdy trójkąt, którego boki są prostopadłe do tych rzutów, uważać możemy, jako trójkąt śladów.

Ekierki aksonometryczne. **198.** Dla ułatwienia wykreślenia kierunku rzutów osi, odpowiadających danym stosunkom spółczynników skróceń, prof. M e h m k e obmyślił t. zw. e k i e r k i a k s o n o m e t r y c z n e*), mające kształt czworokątny; kąty w nich są tak dobrane, że gdy trzy oznaczone boki kolejno przykładamy do linii poziomej, to bok przyległy lub przeciwległy daje kierunek rzutu osi x, y, z. Ekierki te wyrabiane są dla najczęściej używanych stosunków $\lambda : \mu : \nu$ (dla każdej kombinacyi oczywiście musi być użytą specyalna ekierka).

199. Gdy dane są spółrzędne x, y, z punktu M_1, to od punktu O odcinamy na prostej OA długość λx, z końca tego odcinka prowadzimy odcinek μy równolegle do OB i wreszcie z końca drugiego odcinka — odcinek νz w kierunku OC; koniec ostatniego odclnka jest obrazem M punktu M_1.

Skale. Otrzymanie długości λx, μy, νz z danych długości x, y, z ułatwiają specyalne s k a l e, z których dwa typy najdogodniejsze i powszechnie używane opiszemy.

Nazwijmy s k a l ą o b r a z u miarę, którą w rzeczywistości mierzymy długości na płaszczyznie obrazu; może to być albo miara naturalna, którą mierzymy przedmiot, np. metr z jego poddziałem, albo też zwiększenie lub zmniejszenie tej miary; s k a l a m i o s i o w e m i natomiast nazwijmy miary, których jedno-

---

*) Wykonane przez firmę Albert Martz w Stuttgarcie. Opis znajdzie czytelnik w przytoczonem dziele W. D y c k a: Anhang str. 42 i nast.

ści są rzutami aksonometrycznemi jedności skali obrazu, odciętych na odnośnych osiach spółrzędnych; jedność skali osi x, względnie y, względnie z równa się λ, względnie μ, względnie ν jednościom ($\lambda < 1$, $\mu < 1$, $\nu < 1$) skali obrazu. Dla otrzymania takich skal kreślimy (fig. 156) pomiędzy ramionami kąta dowolnego AOB odcinki równoległe AB, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, równe odpowiednio k, l, m, n (art. **194**); na przedłużeniu BA kreślimy podział skali obrazu, wówczas promienie, wychodzące z O do punktów skali AB, wyznaczają na A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 odnośne skale dla osi x, y, z; gdy na AB odetniemy od A odcinek dowolny q, to odnośne odcinki na A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 będą: λq, μq, νq.

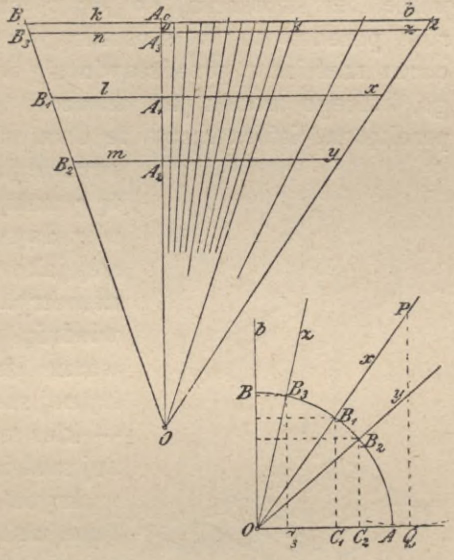


fig. 156.

Na tej samej figurze 156 przedstawiony jest inny typ skali. Przy prostej OA kreślimy kąty: AOB_1, AOB_2, AOB_3, których wstawy: $\frac{B_1C_1}{OB_1}$, $\frac{B_2C_2}{OB_2}$, $\frac{B_3C_3}{OB_3}$ mają się, jak $\lambda : \mu : \nu$ (albo $l : m : n$). Jeżeli chcemy dla przykładu znaleść długość rzutu aksonometrycznego odcinka a, równoległego do osi x, to odcinamy na OB_1 długość $OP = a$, wówczas odległość punktu P od OA daje nam długość żądaną.

Trzy typy aksonometryi.

200. Stosunki spółczynników skróceń wyraża się najdogodniej przez stosunki liczb całkowitych $l : m : n$. Jeżeli te trzy liczby są równe, to płaszczyzna obrazu jest jednakowo nachylona do wszystkich trzech osi, odcinki w kierunkach osi x, y, z ulegają skróceniu w jednakowym stosunku; w tym przypadku nazywamy aksonometryę jednomiarową; jeżeli z liczb l, m, n dwie są równe, trzecia zaś odmienna, to mamy aksonometryę dwumiarową, i wreszcie, gdy wszystkie trzy liczby l, m, n są różne, aksonometrya nosi nazwę trójmiarowej.

Właściwości aksonometryi jednomiarowej. **201.** Aksonometrya jednomiarowa jest najdogodniejszą ze względu na równość skróceń w kierunkach wszystkich trzech osi; skrócenie to wynosi $\frac{\sqrt{6}}{3} = 0{,}816$; można atoli na rysunku aksonometrycznym brać długości rzeczywiste, bez skracania, co jest równoważne powiększeniu rozmiarów przedmiotu w stosunku $1 : 0{,}816 = 1{,}225$. W tym rzucie obraz sześcianu przedstawia się w kształcie sześciokąta foremnego, którego środek jest obrazem dwóch wierzchołków sześcianu; przekątna, która łączy te dwa wierzchołki, przedstawia się na obrazie jako punkt; przechodzące przez tę przekątną płaszczyzny dwusieczne kątów dwuściennych widoczne są na obrazie, jako linie proste. Dlatego też aksonometrya jednomiarowa nie jest odpowiednią dla przedmiotów, w których ważne linie mają kierunek owej przekątnej sześcianu, lub ważne płaszczyzny — kierunek, równoległy do tej przekątnej sześcianu, jak to widzimy naprzykład w kryształach grupy foremnej. Prócz tego, wskutek znacznego nachylenia promieni rzucających do płaszczyzny P_1, otrzymujemy przy patrzeniu na obraz aksonometryczny jednomiarowy wrażenie, jakobyśmy patrzyli na przedmiot ze znacznej wysokości. Dla przykładu przedstawiony jest na figurze 157 nagrobek w kształcie krzyża w rzucie aksonometrycznym jednomiarowym.

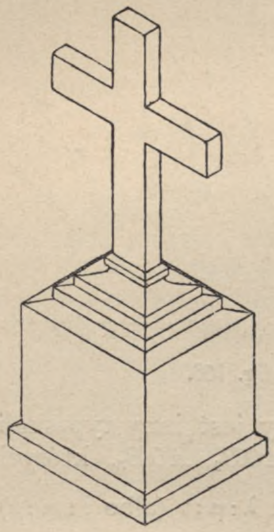


fig. 157.

Właściwości aksonometryi dwumiarowej. **202.** Przy aksonometryi dwumiarowej zachodzą skrócenia jednakowe w dwóch tylko kierunkach osiowych; płaszczyzna dwusieczna kąta dwuściennego między płaszczyznami spółrzędnych, przecinającemi się podług osi wyróżnionej, jest prostopadła do płaszczyzny obrazu. Ten przypadek aksonometryi nadaje się dla przedmiotów, które nie we wszystkich trzech kierunkach mają konstrukcyę jednakową; jeżeli przedmiot ma jednakową konstrukcyę w dwóch kierunkach, w trzecim zaś, do nich prostopadłym, odmienną, to wyróżniająca się oś spółrzędnych nie powinna schodzić się z wyróżniającym się kierunkiem w przedmiocie, albowiem wtedy znowu pewne ważne płaszczyzny i proste przedstawią się na obrazie, jako proste względnie punkty. Najczęściej używane stosunki spółczynników skróceń w aksonometryi dwumiarowej są: 2 : 1 : 2; 3 : 1 : 3.

Aksonometrya trójmiarowa.

203. Najbardziej plastyczne wrażenie sprawia aksonometrya trójmiarowa. Dbać przy niej należy, aby osi *z* odpowiadała największa z liczb *l*, *m*, *n*, aby zatem skrócenie odcinków w kierunku osi *z* było najmniejsze. Najczęściej używa się stosunków: 9 : 5 : 10; 5 : 4 : 6. Widzimy, że oś *y* wyda się bardziej skróconą od osi *x*, płaszczyzna *xz* ulegnie zatem mniejszemu skróceniu, niż inne płaszczyzny spółrzędnych, obieramy

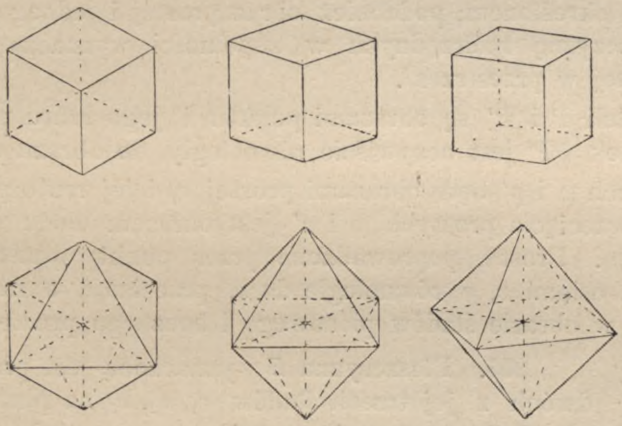


fig. 158.

przeto płaszczyznę *xz* równolegle do najważniejszych ścian przedmiotu. Fig. 165 przedstawia ten sam nagrobek, co fig. 157, lecz wykonany podług zasad aksonometryi trójmiarowej 9 : 5 : 10. Skrócenie w kierunku osi *z* wynosi właściwie 0,985 (art. **196**); na rysunku wszakże odcinków w kierunku osi *z* wcale nie skracano i dla zachowania proporcyi, zamiast liczb λ, μ, wzięte są liczby: 1,015 λ i 1,015 μ (1 : 0,985 = 1,015), co jest równoważne powiększeniu rozmiarów rysunku w stosunku 1,015.

Fig. 158 przedstawia sześcian i ośmiościan foremny w aksonometryi jednomiarowej, dwumiarowej i trójmiarowej.

§ 2. Wykreślenia aksonometryczne.

Wyznaczenie punktu i prostej. **204.** Ani położenie punktu, ani położenie prostej w przestrzeni nie jest wyznaczone przez ich rzuty aksonometryczne; ażeby położenie tych elementów w przestrzeni było zupełnie określone, oprócz ich obrazu daje się obraz rzutu prostokątnego na jednę z płaszczyzn spółrzędnych, najczęściej na P_1; łatwo jest widzieć, że przy takich danych dla punktu bezpośrednio znajdujemy obrazy wszystkich trzech spółrzędnych tego punktu, tak że położenie punktu staje się przez te dane zupełnie określonem; podobnież obraz prostej i jednego jej rzutu na płaszczyznę spółrzędnych w zupełności wyznacza położenie tej prostej w przestrzeni.

Jeżeli P i P' są obrazami punktu i jego rzutu poziomego, to odcinek PP' jest oczywiście równoległy do obrazu osi z.

Niech p i p' będą obrazami prostej p_1 i jej rzutu poziomego. Punkt przecięcia prostych p i p' jest obrazem śladu poziomego prostej p_1. Proste, poprowadzone przez punkty przecięcia prostej p' z osiami x, y równolegle do z, przecinają obraz p odpowiednio w obrazie śladów pionowego i bocznego prostej p_1.

Wyznaczenie płaszczyzny. **205.** Płaszczyzna E wyznaczoną jest przez obrazy dwóch z jej trzech śladów e_1, e_2, e_3 na płaszczyznach spółrzędnych; ślady te przecinają osi x, y, z w punktach E_1, E_2, E_3, w których te osi przecinają płaszczyznę E; gdy dane są dwa ślady: E_2E_3 czyli e_1 i E_3E_1 czyli e_2, to trzecim śladem e_3 jest prosta E_1E_2. Trójkąt $E_1E_2E_3$ nazywać będziemy niekiedy trójkątem śladów płaszczyzny E. Oznaczmy, jak zwykle, trójkąt śladów płaszczyzny obrazu przez ABC. Osi x, y, z łączą wierzchołki odpowiednie trójkątów ABC i $E_1E_2E_3$ i schodzą się w punkcie O, te trójkąty mają zatem położenie takie, jakiego wymaga odwrotne twierdzenie Desargues'a (art. **29**). Stąd wnioskujemy, że punkty przecięcia boków AB i E_1E_2, BC i E_2E_3, CA i E_3E_1 leżą na jednej prostej; łatwo jest spostrzedz, że ta prosta jest śladem płaszczyzny E na płaszczyznie obrazu.

206. Gdy prosta leży na płaszczyznie, to na obrazie ślady prostej leżą na spółimiennych śladach płaszczyzny. O położeniu punktu na płaszczyznie przekonywamy się, prowadząc na płaszczyznie prostą, której obraz przechodzi przez obraz punktu; jeżeli punkt leży na płaszczyznie, to obraz rzutu punktu leży na obrazie odpowiedniego rzutu prostej. Z własności rzutu równoległego (art. **21**) wnioskujemy, że proste równoległe mają rzuty aksonometryczne równoległe; płaszczyzny równoległe mają ślady odpowiednie równoległe.

Wszystkie zagadnienia o przecięciu prostych i płaszczyzn, oraz o prostych i płaszczyznach równoległych, rozwiązane w art. **38** — **46**, rozwiązuje się w aksonometryi za pomocą tych samych rozumowań. Zajmiemy się teraz zadaniami typowemi o mierzeniu odległości i kątów, oraz o wyznaczaniu postaci istotnej figur płaskich. Przy rozwiązywaniu zagadnień tej grupy często pomocnem jest rozwiązanie zagadnienia następującego.

Zagadnienie pomocnicze.

207. Z punktu P spuścić prostopadłą l na prostą g, gdy punkt P i prosta g znajdują się na jednej z płaszczyzn spółrzędnych (fig. 159).

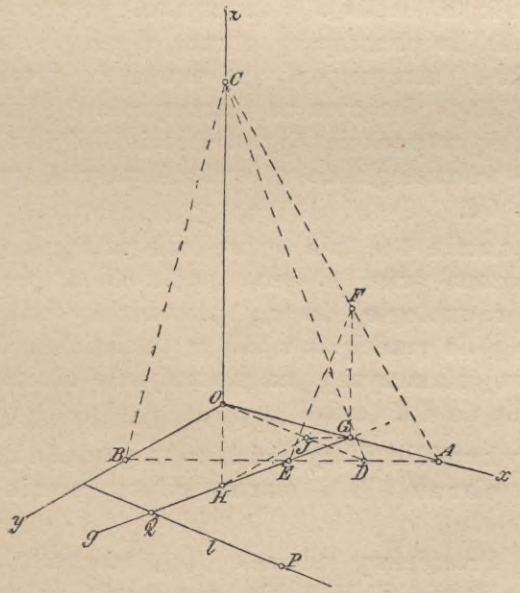


fig. 159.

Niech punkt i prosta znajduja się na płaszczyznie P_1 i niech dane będą przez swe obrazy aksonometryczne.

Rozwiązanie 1-sze. Przez oś z poprowadźmy płaszczyznę, prostopadłą do g_1; na zasadzie art. **52** wiemy, że ślad tej płaszczyzny na płaszczyznie obrazu jest prostopadły do obrazu g, kreślimy więc prostą CD, prostopadłą do g, wtedy OD będzie obrazem śladu tej płaszczyzny na płaszczyznie P_1, a prosta l jest oczywiście równoległa do OD.

Rozwiązanie 2-gie. Wyobraźmy sobie płaszczyznę Q, poprowadzoną przez prostą g prostopadle do P_1; jeżeli przez E i G oznaczymy punkty, w których prosta g przetnie odpowiednio proste BA i OA, i przez G poprowadzimy prostą GF równolegle do z do przecięcia się z AC w F, to prosta EF będzie śladem płaszczyzny Q na płaszczyznie obrazu. Ponieważ prosta l_1 jest prostopadła do płaszczyzny Q, to jest ona prostopadła i do prostej EF; lecz prosta EF jest także prostopadła do promieni, rzucających l_1 na płaszczyznę obrazu; stąd wynika, że EF jest prostopadła do płaszczyzny, rzucającej l_1 na płaszczyznę obrazu, a zatem EF jest prostopadła do l; znajdziemy przeto l, prowadząc przez P prostopadłą do EF.

Rozwiązanie 3-cie (przy którem używa się jedynie rzutów osi, nie zaś trojkąta śladów). Płaszczyzna, poprowadzona przez oś z prostopadle do płaszczyzny obrazu, niech przetnie g_1 w H_1, wówczas punkt H otrzymujemy w przecięciu prostych z i g. W trójkącie $G_1H_1O_1$, leżącym na płaszczyznie P_1, niech wysokości przecinają się w punkcie J_1; na obrazie GJ jest prostopadła do z, a HJ — równoległa do y; wykreśliwszy J, prowadzimy l równolegle do OJ.

Rozwiązanie 4-te (nie wykreślone na figurze). Płaszczyzna, poprowadzona przez z_1 prostopadle do l, przecina P_1 podług prostej, równoległej do g_1; prowadzimy zatem przez O równoległą do g do przecięcia z AB w punkcie K; CK jest wtedy śladem owej płaszczyzny na płaszczyznie obrazu, a prosta l jest prostopadła do CK (art. 52).

208. Wykreślić długość istotną odcinka P_1Q_1, danego przez obraz PQ i obraz rzutu poziomego $P'Q'$ (figura 160).

Długość istotna odcinka. Przenieśmy odcinek P_1Q_1 równolegle do siebie w położenie N_1M_1 takie, aby punkt N_1 znajdował się na osi z_1, a M_1 — na płaszczyznie P_1; prowadzimy w tym celu przez O odcinek OM, równy (w znaczeniu art. 4) odcinkowi $Q'P'$, a przez M — odcinek MN równy (w temże znaczeniu) odcinkowi PQ; punkt N wypaść musi na z i MN jest obrazem odcinka M_1N_1. Płaszczyznę obrazu, którą możemy przesuwać równolegle bez zmiany jakiegokolwiek rzutu punktu lub prostej, i której kierunek jest ustalony przez rzuty osi, przesuńmy przez punkt M_1; poprowadzimy więc przez M prostą, prostopadłą do z, przecinającą x, y odpowiednio w A, B, przez A zaś — prostopadłą do y, przecinającą z w punkcie C; ABC jest trójkątem śladów; CM jest śladem płaszczyzny, przechodzącej przez z_1 i M_1N_1, na płaszczyznie obrazu. Dla otrzymania istotnej długości odcinka M_1N_1,

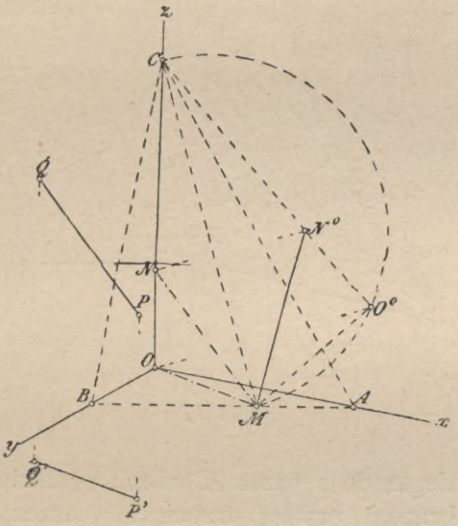


fig. 160.

równego P_1Q_1, wykonajmy kład trójkąta prostokątnego MO_1C na płaszczyznę obrazu; kład O^0 punktu O znajduje się na okręgu koła, zakreślonego na średnicy MC, i zarazem na prostopadłej do CM, poprowadzonej przez O; CO^0 jest kładem boku CO_1; na prostej CO^0 znajdujemy kład N^0 punktu punktu N_1, przecinając ją prostą, poprowadzoną przez N prostopadle do MC; wówczas MN^0 jest długością szukaną.

209. Znaleść odległość punktu P_1 od płaszczyzny E (fig. 161).

Odległość punktu od płaszczyzny.

Oznaczmy przez Q_1 spodek prostopadłej, spuszczonej z P_1 na E; zadanie nasze polega na wykreśleniu odcinka P_1Q_1 i znalezieniu jego długości istotnej. Niech DEF będzie trójkątem śladów płaszczyzny E; znajdujemy (art. **205**) ślad GH tej płaszczyzny na płaszczyznie obrazu; obraz

PQ jest prostopadły do GH (art. 52) i może być na tej zasadzie wykreślony; znajdźmy na nim punkt Q. Ponieważ $P'_1Q'_1$ jest prostopadła do śladu poziomego płaszczyzny E, to wykreślamy $P'Q'$ podług art. **207**. Niech $P'Q'$ przetnie e_1 i y odpowiednio w J

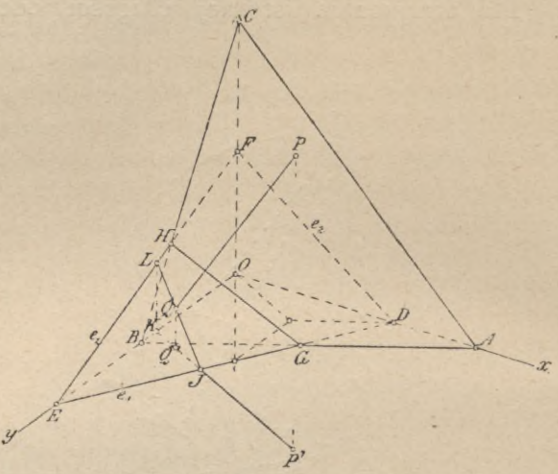


fig. 161.

i K, zaś równoległa do z przez K niech przetnie e_2 w L, wówczas JL jest obrazem prostej przecięcia płaszczyzny E z płaszczyzną, rzucającą PQ na P_1, wskutek tego punkt Q leży na LJ. Znalazłszy punkt Q, wykreślamy długość odcinka PQ podług artykułu **208**.

210. Przy znajdowaniu postaci istotnej figury płaskiej użytecznem jest twierdzenie następujące:

Kolineacya rzutu aksonometrycznego i kładu figury płaskiej. Obraz aksonometryczny figury płaskiej i jej kład na płaszczyznę obrazu są w kolineacyi prostokątnej; osią tej kolineacyi jest ślad płaszczyzny figury na płaszczyznie obrazu.

Twierdzenie to wynika bezpośrednio z art. **30**.

Gdy przeto chcemy wykreślić kład figury płaskiej, danej w rzucie aksonometrycznym, wystarczy wykreślić kład jednego punktu figury; pozostałe punkty kładu znajdziemy na zasadzie kolineacyi.

211. Pokażemy, jak wykreślić kład płaszczyzny, danej przez obrazy śladów.

Kład płaszczyzny. Niech DEF (figura 162) będzie trójkątem śladów płaszczyzny *E*; wykreślamy przedewszystkiem ślad HG tej płaszczyzny na płaszczyźnie obrazu (art. **205**). Przez z prowadzimy następnie płaszczyznę *Q*, prostopadłą do śladu poziomego płaszczyzny *E*; ślad płaszczyzny *Q* na płaszczyznie obrazu będzie prostopadły do obrazu e_1 śladu poziomego płaszczyzny *E* i przejdzie przez punkt C; otrzymamy zatem ten ślad płaszczyzny *Q*, prowadząc przez C prostopadłą CJ do e_1; niech J będzie jej przecięciem z AB, wtedy OJ jest śladem poziomym płasz-

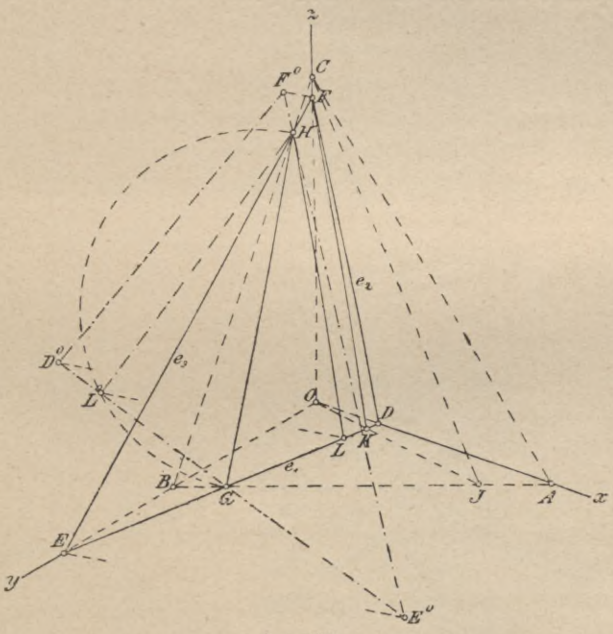


fig. 162.

czyzny *Q*. Jeżeli przez K oznaczymy punkt przecięcia prostych OJ i ED, to FK będzie obrazem linii największego spadku (art. **40**) płaszczyzny *E*; jeżeli przez H poprowadzimy prostą HL, równoległą do FK, do przecięcia z e_1 w L, to GLH będzie obrazem kąta prostego, leżącego na płaszczyznie *E*; kład L^0 punktu L leży zatem na prostopadłej, spuszczonej z L na GH, oraz na okręgu koła, zakreślonego na średnicy GH.

Gdyby na płaszczyznie *E* daną była jakakolwiek figura, to jej kład znaleźlibyśmy z łatwością na zasadzie kolineacyi, mając parę punktów, odpowiadających sobie: L i L^0.

212. Wykreślić kąt dwóch prostych danych.

Kąt dwóch prostych. Przez punkt O_1 przesuwamy proste g_1 i h_1 (fig. 163), odpowiednio równoległe do prostych danych. Niech g' przecina AB w J, wówczas CJ jest śladem na płaszczyznie obrazu płaszczyzny, rzucającej g_1 na P_1, zaś g przecina CJ w śladzie G prostej g_1 na płaszczyznie obrazu; podobnież znajdziemy ślad H prostej h_1 na płaszczyznie obrazu, jako punkt przecięcia prostych h i CK, przyczem K jest punktem przecięcia prostych h' i AB. Prosta GH jest śladem e płaszczyzny prostych g_1 i h_1 na płaszczyznie obrazu; zaś GOH jest obrazem kąta żądanego;

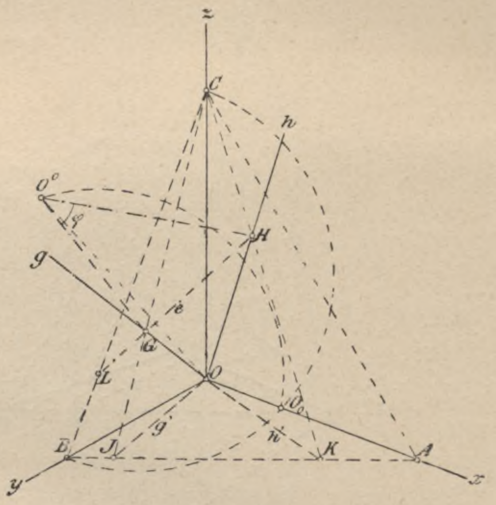


fig. 163.

pozostaje zatem wykonać kład kąta GOH na płaszczyznę obrazu. Wykonajmy najprzód kład pomocniczy trójkąta BOC na płaszczyznę obrazu; w tym celu opisujemy na BC, jako na średnicy, koło, które przetnie prostą AO, prostopadłą do BC, w punkcie O_0 — kładzie punktu O; znajdujemy stąd długość LO_0. Teraz na prostopadłej do e przez O znajdujemy punkt O^0 taki, że $LO^0 = LO_0$, wówczas O^0 jest kładem punktu O_1 około e, a GO^0H — kątem żądanym. Możnaby jeszcze znaleść punkt O^0 na zasadzie uwagi, że odległość O^0 od e równa jest przeciwprostokątnej trójkąta, którego przyprostokątnemi są OO_1 i odległość O od e.

Przykład. **213.** Przykład: Obraz aksonometryczny nagrobka w kształcie krzyża, danego przez rzuty prostokątne (fig. 164 i 165).

Podstawa jest prostokątem z dłuższym wymiarem w kierunku *CD*. Powierzchnie i krawędzie bazy dają w przecięciu linie, leżące w płaszczyznach, tworzących ze ścianami frontowemi kąty dwuścienne 45° (płaszczyzny te nie zawierają przekątnych podstawy). Kreślimy przedewszystkiem prostokąt podstawowy, następnie kwadrat *CDEF* na boku *CD*; *CE* i *DF* są śladami poziomemi owych płaszczyzn, tworzących ze ścianami frontowemi kąt 45°. Przekrój nagrobka wszelką płaszczyzną poziomą jest prostokątem; obrazy wierzchołków tych prostokątów kreślimy najdogodniej, przenosząc podług skali na prostej pionowej, poprowadzonej przez *C*, odnośne wysokości nad pła-

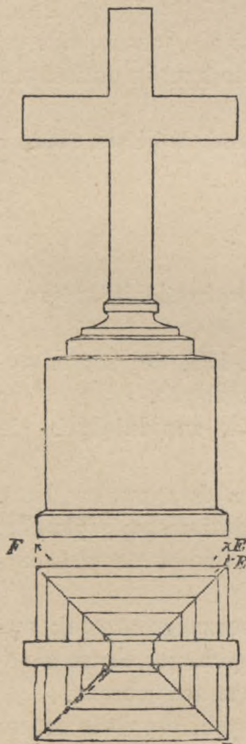


fig. 164.

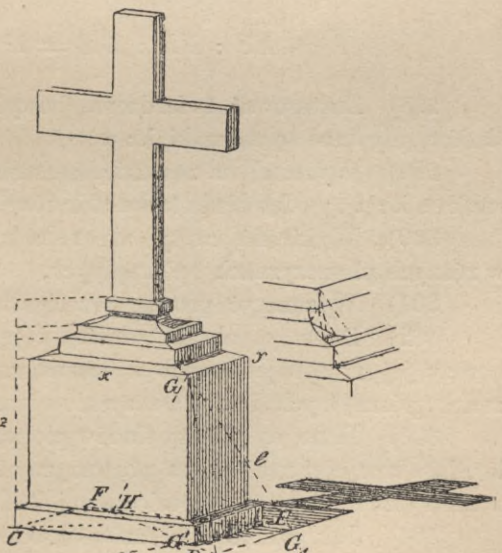


fig. 165.

szczyzną P_1, wzięte z rzutu pionowego, i kreśląc przez te punkty odcinki, równoległe do *CE*, o długościach, które otrzymujemy z rzutu poziomego; jeżeli mianowicie wykreśliliśmy na fig. 164 odcinek *CE'*, równy odcinkowi *CE* z fig. 165, to na *CE'* bezpośrednio otrzymamy długości owych odcinków od prostej pionowej przez C do wierzchołków nagrobka. Promień światła l jest dany przez obraz GG_1 i obraz rzutu poziomego $G'G_1$ (G_1 oznacza tu ślad poziomy tego promienia). Cień, rzucony przez jakikolwiek punkt na P_1, znajdziemy, jako ślad poziomy poprowadzonego przez ten punkt promienia światła.

ĆWICZENIA.

296) Obrazy aksonometryczne rzutów promienia, prostopadłego do P, na płaszczyzny spółrzędnych są równoległe do rzutów odnośnych osi spółrzędnych.

297) Niech AD, BE, CF będą wysokościami trójkąta śladów ABC płaszczyzny obrazu; dowieść, że:

$$EF : FD : DE = \lambda^2 : \mu^2 : \nu^2.$$

298) Zastosować twierdzenie powyższe do wykreślenia trójkąta śladów, gdy dane są stosunki $\lambda : \mu : \nu$.

299) Wykazać na zasadzie konstrukcyi art. **197**, że danym stosunkom $\lambda : \mu : \nu$ odpowiada kilka układów osi spółrzędnych.

300) Wykreślić rzuty aksonometryczne kół, znajdujących się w różnych płaszczyznach spółrzędnych.

301) Wyznaczyć prostą, przechodzącą przez dwa punkty dane.

302) Dane są obrazy prostej i jej rzutu poziomego; wykreślić obrazy jej rzutów pionowego i bocznego, oraz jej śladów na płaszczyznach spółrzędnych i na płaszczyznie obrazu.

303) Dane są obrazy śladów pionowego i bocznego prostej; wykreślić obrazy jej rzutów na płaszczyzny spółrzędnych, jej obraz aksonometryczny, obraz śladu poziomego i ślad na płaszczyznie obrazu.

304) Jak poznać z obrazów aksonometrycznych, czy dwie proste leżą w jednej płaszczyznie lub są skośne?

305) Poprowadzić płaszczyznę przez dwie proste, przecinające się lub równoległe.

306) Przez punkt dany poprowadzić prostą, równoległą do prostej danej.

307) Poprowadzić płaszczyznę przez punkt i prostą lub przez trzy punkty.

308) Mając ślady płaszczyzny na płaszczyznie obrazu i jednej z płaszczyzn spółrzędnych, wykreślić jej ślady na pozostałych płaszczyznach spółrzędnych.

309) Przez prostą daną poprowadzić płaszczyznę, równoległą do drugiej prostej danej.

310) Przez punkt dany poprowadzić płaszczyznę, równoległą do drugiej płaszczyzny, danej przez ślady.

311) Przez punkt dany poprowadzić płaszczyznę, równoległą do dwóch prostych danych.

312) Wykreślić prostą przecięcia się dwóch płaszczyzn danych.

313) Wykreślić punkt przecięcia prostej z płaszczyzną

314) Dane są obrazy dwóch śladów płaszczyzny i obraz punktu, leżącego na tej płaszczyznie; wykreślić obraz rzutu poziomego tego punktu.

315) Dane są obrazy: punktu, jego rzutu poziomego i śladu poziomego przechodzącej przez ten punkt płaszczyzny; wykreślić obrazy pozostałych śladów płaszczyzny.

316) Znaleść odległość dwóch płaszczyzn równoległych.

317) Wykreślić kształt istotny trójkąta śladów płaszczyzny danej.

318) Znaleść odległość punktu od prostej.

319) Wykreślić wielkość kąta dwuściennego dwóch płaszczyzn.

320) Wykreślić kąt nachylenia prostej do płaszczyzny.

321) Wykreślić obraz aksonometryczny kuli.

322) Wykreślić obraz aksonometryczny walca obrotowego, którego podstawa leży w płaszczyznie poziomej rzutu.

ROZDZIAŁ X.

TEORYA OSWIETLENIA POWIERZCHNI.

§ 1. Zasady teoryi oświetlenia powierzchni *).

Zadanie teoryi oświetlenia powierzchni.

214. Przy kreśleniu rzutów prostokątnych różnych przedmiotów kreśliliśmy ich cienie rzucone oraz własne, przez co rysunek zyskiwał na plastyczności; kreślenie cieni własnych polegało na oznaczeniu granicy światła i cienia na powierzchni, czyli linii, oddzielającej część oświetloną powierzchni od nieoświetlonej, i zacieniowaniu tej ostatniej. Ażeby wrażenie przedmiotu, wywoływane w nas przez rysunek, było jeszcze plastyczniejszem, musimy nadto oddać na rysunku stopniowanie natężenia światła na powierzchni, rozmaity stopień jasności w różnych jej punktach. Ta rozmaitość jasności powierzchni w różnych jej punktach zależna jest od wielu czynników skomplikowanych; dla uproszczenia teoryi czynimy pewne

Założenia aksyomatyczne

założenia aksyomatyczne, w przybliżeniu zgodne z rzeczywistością. Zakładać będziemy, że powierzchnia rozpatrywana absolutnie nie przepuszcza i nie pochłania padającego na nią światła; następnie zakładać będziemy, że powierzchnia jest absolutnie matową, t. j. że padające na nią światło zostaje całkowicie rozproszone, przytem we wszystkich kierunkach równomiernie; na zasadzie tego założenia jasność oświetlenia powierzchni

---

*) Klasycznem dziełem o teoryi oświetlenia powierzchni jest praca Burmestera: „Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmässig gestalteter Flächen" Lipsk 1875 r.

w pewnym punkcie jest niezależną od kierunku patrzenia na ten punkt. Zawsze mieć będziemy na uwadze oświetlenie promieniami równoległemi; w tem założeniu przyjmować będziemy prawo fizyczne, że jasność oświetlenia powierzchni w pewnym punkcie proporcyonalną jest do dostawy kąta, utworzonego przez normalną do powierzchni w tym punkcie z kierunkiem promieni. Oznaczając ten kąt przez λ, oraz siłę oświetlenia płaszczyzny prostopadłej do promieni światła przez J, otrzymamy na siłę oświetlenia powierzchni w pewnym punkcie wartość $J \cos\lambda$; dla płaszczyzny jest λ stałe, a więc jasność oświetlenia płaszczyzny jest we wszystkich punktach jednakowa. Część powierzchni, na którą bezpośrednio promienie światła nie padają, nie jest mimo to bezwzględnie ciemną: otrzymuje ona światło, odbite od przedmiotów otaczających, oraz od cząsteczek powietrza; o tem świetle odbitem uczynimy założenie, że promienie jego padają na pogrążoną w cieniu własnym część powierzchni w kierunku równoległym do promieni światła pierwotnego, ale w zwrocie wprost przeciwnym, oraz, że siła światła odbitego $\underline{J}$ stanowi pewną część ułamkową siły światła pierwotnego J; najczęściej zakładają się, że $\underline{J} = \frac{1}{2}J$; przyjmiemy również to założenie, dość blisko odpowiadające rzeczywistości.

Światło odbite.

Linie izofotyczne.

215. Dla oznaczenia na rysunku stopniowania jasności oświetlenia powierzchni prowadzimy na tej ostatniej układ linij, będących miejscami geometrycznemi punktów o jednakowej sile oświetlenia; linie te nazywać będziemy liniami izofotycznemi albo równoświetlnemi. Ponieważ przy danem J siła oświetlenia powierzchni zależną jest jedynie od dostawy kąta λ, to możemy linie równoświetlne określić geometrycznie, jako miejsca geometryczne punktów na powierzchni, w których normalne do tej ostatniej tworzą kąty jednakowe z kierunkiem promieni światła; we wszystkich punktach jednej linii równoświetlnej płaszczyzna styczna jest jednakowo nachyloną względem promieni światła. Granica cienia własnego jest jedną z linij równoświetlnych; odpowiada ona wartości $\cos\lambda = 0$. Najjaśniej oświetlone są te punkty powierzchni, w których normalna jest równoległa do promieni światła; w tych punktach jest $\cos\lambda = 1$; w ogólności na powierzchni jest tylko liczba skończona takich punktów; niekiedy na powierzchni wcale niema punktów, odpowiadających wartości $\cos\lambda = 1$, najjaśniejsze punkty powierzchni odpowiadają wówczas mniejszej wartości $\cos\lambda$ (por. art. **216**).

Kreślimy na powierzchni linie równoświetlne, odpowiadające wartościom $\cos\lambda$ od 0 do 1 w równych przedziałach, naprzykład $\cos\lambda = 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$; odnośne linie równoświetlne nazwijmy odpowiednio: 0, 1, 2, 3, 4, 5, tak, że im wyższym numerem oznaczoną jest linia, tem większym jest stopień jasności jej oświetlenia. Części linij równoświetlnych, przebiegające na nieoświetlonej części powierzchni, podchodzą geometrycznie pod to samo określenie, co części, leżące na oświetlonej części powierzchni, fizycznie zaś mają pierwsze to znaczenie względem światła odbitego, padającego na ciemniejszą część powierzchni, jakie drugie — względem światła pierwotnego; różnica przeto jasności oświetlenia, odpowiadająca dwom kolejnym liniom pierwszego rodzaju, jest dwa razy mniejsza od odpowiadającej dwom kolejnym liniom drugiego rodzaju. Dla odróżnienia będziemy oznaczali numerami podkreślonemi: $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$, $\underline{4}$, $\underline{5}$ części linij równoświetlnych 1, 2, 3, 4, 5, leżące na nieoświetlonej bezpośrednio części powierzchni. Na rysunku stopniujemy cieniowanie, nakładając odpowiednią ilość razy warstwę tuszu stałej gęstości; tusz rozrabiamy wodą więcej lub mniej, zależnie od tego, czy chcemy utrzymać całość rysunku w tonie jaśniejszym lub ciemniejszym; unika się zbytniej gęstości tuszu, aby na najciemniejszych miejscach rysunku nie znikły szczegóły wykreślenia.

Konstrukcyjne określenie jasności oświetlenia powierzchni w pewnym punkcie.

Zanim przystąpimy do wykreślenia linij równoświetlnych na różnych powierzchniach szczególnych, uczynimy jeszcze uwagę następującą. Ponieważ ważnym dla nas jest jedynie względny stopień jasności w różnych punktach, to dajmy J dowolnie wartość 5, wówczas jasność oświetlenia w każdym punkcie powierzchni wyrażać się będzie liczbą $5\cos\lambda$, zawartą pomiędzy 0 i 5. Jeżeli zatem na promieniu światła odetniemy pięć jedności podług jakiejkolwiek skali, to rzut prostokątny tego odcinka na normalną do powierzchni w pewnym punkcie, odczytany podług tej samej skali, da nam stopień natężenia światła w tym punkcie; tę samą długość oczywiście otrzymamy, odcinając 5 jedności na normalnej i rzucając je prostokątnie na kierunek promieni światła; jeżeli ów rzut będzie miał w szczególności długość 0, 1, 2, 3, 4, 5, to punkt obrany leżeć będzie na linii równoświetlnej, oznaczonej odpowiednio takim samym numerem.

Z uwagi ostatniej będziemy korzystali przy wykreślaniu linij równoświetlnych na różnych typach powierzchni.

§ 2. Zastosowania.

216. Walec obrotowy o podstawie na płaszczyznie poziomej rzutu (fig. 166).

Linie równoświetlne walca obrotowego, stojącego na płaszczyznie poziomej.

Kierunek promieni światła oznaczmy przez l. Ponieważ płaszczyzna, styczna do walca, dotyka go podług tworzącej prostoliniowej, to liniami równoświetlnemi powierzchni walcowej są tworzące, i zadanie nasze polega na oznaczeniu śladów tych tworzących na kole podstawy k. Normalne do powierzchni w punktach tego koła przechodzą przez jego środek M. Wyobraźmy sobie na promieniu światła, przechodzącym przez M, odciętą długość MN, równą promieniowi r koła k; jeżeli ten odcinek podzielimy na pięć części równych, to płaszczyzny, poprowadzone przez punkty podziału prostopadle do promienia l, przetną k odpowiednio w punktach żądanych; rzeczywiście, jeżeli przez P oznaczymy jeden taki punkt na kole k, to rzut promienia MP na promień l będzie wielokrotną długości $r:5$. Wykreślmy kład l_0 promienia l około l' na płaszczyznie P_1; punkt przecięcia N_0 prostej l_0 z kołem k będzie kładem punktu N. Powyżej wzmiankowane płaszczyzny, prostopadłe do l, przecinają płaszczyznę, rzucającą l na P_1, podług prostych, prostopadłych do l, a P_1 — podług prostych, prostopadłych do l'; jeżeli przeto podzielimy MN_0 na pięć części równych i przez punkty podziału poprowadzimy prostopadłe do l_0, a przez punkty przecięcia tych prostopadłych z prostą l' poprowadzimy znowu prostopadłe do tej prostej, to te ostatnie prostopadłe przetną koło k w szukanych punktach linij równoświetlnych. Tworząca

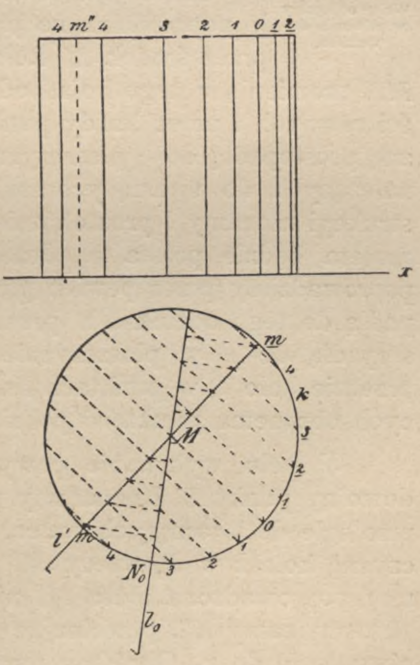


fig. 166.

m posiada oświetlenie najjaśniejsze, odpowiadające stopniowi nieco wyższemu od 4. Linie równoświetlne części nieoświetlonej (bezpośrednio promieniami l) przecinają k w punktach, przeciwległych punktom odnośnych linij części oświetlonej powierzchni.

Przy pomocy rozpatrywanego tu walca możemy wykreślić linie równoświetlne walca prostego o podstawie jakiejkolwiek, łatwo bowiem jest widzieć, że w punktach tych linij na podstawie styczne do tej ostatniej są równoległe do stycznych do koła k w punktach odpowiednich linij równoświetlnych walca obrotowego.

217. Walec obrotowy w położeniu dowolnem (figura 167).

Walec obrotowy w położeniu dowolnem.

Zasada konstrukcyi jest taka sama, jak w artykule poprzednim: na promieniu światła l, przechodzącym przez środek M koła podstawy k, odcinamy długość MN promienia r tego koła; odcinek ten dzielimy na pięć części równych i przez każdy punkt podziału prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do l; płaszczyzny te przetną koło k w punktach, należących do tworzących szukanych. Dla ułatwienia tej konstrukcyi rzucamy l prostokątnie na płaszczyznę koła k; niech tym rzutem będzie prosta p. Jeżeii w płaszczyznie prostych l i p poprowadzimy przez pewien punkt podziału odcinka MN prostopadłą do tego odcinka, a przez jej punkt przecięcia z p — prostopadłą do p w płaszczyznie koła k, to ta prostopadła do p przetnie koło k w punktach linij równoświetlnych, odpowiadających obranemu punktowi podziału odcinka MN.

W celu wykonania powyższej konstrukcyi obierzmy na l dowolny punkt L i oznaczmy prostą, poprowadzoną przez L równolegle do tworzących walca, przez q; niech q przetnie płaszczyznę koła k w P, wtedy MP jest prostą p. Płaszczyzna pozioma, poprowadzona przez M, niech przetnie prostą q w punkcie K; otrzymamy K'', przecinając q'' prostą, poprowadzoną przez M'' równolegle do x. Obróćmy teraz płaszczyznę LMP około prostej MK tak, aby stała się poziomą; oznaczmy rzuty poziome nowych położeń punktów i prostych tej płaszczyzny za pomocą wskaźnika $(_0)$; wykreśliwszy L_0 (art. 54), znajdziemy, że $M'L_0$ będzie prostą l_0, $K'L_0$ — prostą q_0; prostą p_0 otrzymamy, spuszczając z M' prostopadłą $M'P_0$ na q_0. Wykonajmy następnie drugi obrót pomocniczy, mianowicie: sprowadźmy płaszczyznę koła k do położenia poziomego przez obrót około jego średnicy poziomej a;

oznaczmy rzuty poziome punktów i prostych tej płaszczyzny po obrocie przez dodanie wskaźnika (^{0}); znajdujemy k^0, jako koło, zakreślone na średnicy a'; ponieważ rzut P' znajdował się przed obrotem na q', a przez obrót P' posuwa się po tej samej prostej q', jako po prostopadłej do a', to P^0 leży oczywiście na q' i jest przytem $M'P^0 = M'P_0$. W płaszczyznach obróconych możemy

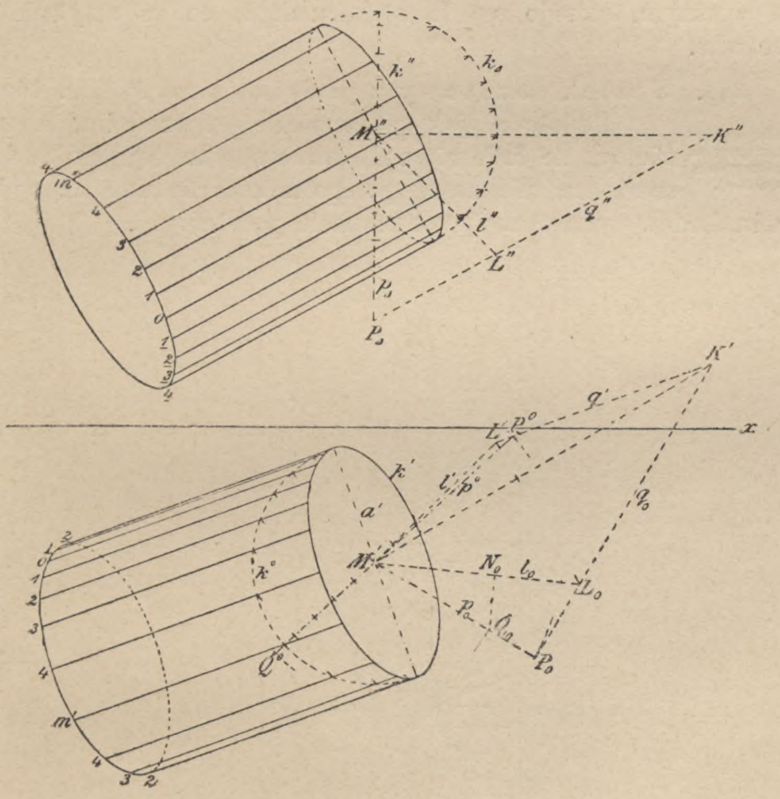


fig. 167.

z łatwością wykonać konstrukcye potrzebne, mianowicie: na l_0 odcinamy długość $M'N_0$, równą promieniowi koła k^0; prostopadła do l_0 w N_0 niech przetnie p_0 w Q_0, odcinamy wtedy $M'Q^0 = M'Q_0$ na p^0 i dzielimy $M'Q^0$ na pięć części równych; prostopadłe do p^0 w punktach podziału przecinają k^0 w punktach, będących nowemi położeniami końców linij równoświetlnych na k. Jeżeli przywrócimy koło k^0 do położenia pierwotnego, to punkty koła k^0 opiszą koła w płaszczyznach pionowych, i rzutami poziomemi tych kół będą proste prostopadłe do a'; stąd wynika, że rzuty poziome tworzących, będących liniami równoświetlnemi, przechodzą przez otrzymane na kole k^0 punkty. Znalazłszy rzuty poziome linij równoświetlnych, bez trudu wykreślimy ich rzuty pionowe.

Największą jasność wykazuje tworząca m; odpowiada ona stopniowi między 4 i 5.

Do linij równoświetlnych części powierzchni, leżącej w cieniu własnym, stosuje się ta sama uwaga, co w artykule poprzednim.

Stożek obrotowy, stojący na płaszczyznie poziomej.

218. Stożek obrotowy z podstawą na P_1 (fig. 168).

Podobnie, jak w artykule poprzednim, z góry wiemy, że linie równoświetlne stożka są jego tworzącemi; zadanie nasze polega zatem również na wykreśleniu śladów tych tworzących na kole podstawy k.

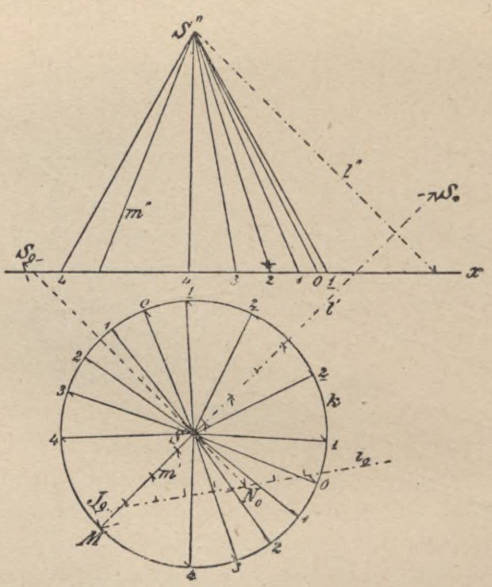


fig. 168.

Oznaczmy wierzchołek stożka przez S. Jeżeli w punktach koła k poprowadzimy normalne do powierzchni stożka, to one utworzą inny stożek obrotowy o wierzchołku N, mający oś SN wspólną ze stożkiem pierwszym, Wyobraźmy sobie następnie przez N promień światła i i na nim od punktu N odetnijmy długość NJ tworzącej drugiego stożka; jeżeli odcinek NJ podzielimy na pięć części równych i przez punkty podziału poprowadzimy płaszczyzny, prostopadłe do i, to one przetną koło k w punktach żądanych; jakoż, niech P będzie jednym z takich punktów na k, wtedy rzut odcinka PN normalnej na promień i ograniczony jest przez N i jeden z punktów podziału odcinka NJ, a przeto długość tego rzutu stanowi wielokrotną długości $NJ : 5$ czyli $NP : 5$. Na tej zasadzie opieramy konstrukcyę następującą.

Przez wierzchołek S poprowadźmy promień światła l i wykonajmy kład płaszczyzny pionowej, przechodzącej przez l, na P_1; niech S_0 będzie kładem punktu S; jeżeli l' przecina k w M, to S_0M jest kładem tworzącej stożka danego, a prostopadła do MS_0, poprowadzona przez M, przecina S_0S' w kładzie N_0 punktu N; prosta, poprowadzona przez N_0 równolegle do kładu promienia l, jest kładem i_0 promienia i. Na i_0 odcinamy $N_0J_0 = N_0M$ i dzielimy ten odcinek na pięć części równych. Płaszczyzny, prostopadłe do i, przecinają płaszczyznę pionową, poprowadzoną przez l, podług prostopadłych do i, a płaszczyznę P_1 — podług prostopadłych do l; prowadzimy przeto przez punkty podziału odcinka N_0J_0 prostopadłe do tego odcinka, a przez punkty ich przecięcia z prostą l' — prostopadłe do tej prostej; te ostatnie prostopadłe przetną k w punktach, będących śladami poziomemi linij równoświetlnych stożka.

219. Stożek obrotowy w położeniu dowolnem (figura 169).

Ogólny plan konstrukcyi jest taki sam, jak w artykule poprzednim.

Stożek obrotowy w położeniu dowolnem.

Oznaczmy znowu wierzchołek stożka danego przez S, a wierzchołek stożka, utworzonego przez normalne do stożka danego w punktach podstawy k — przez N. Przez promień l, przechodzący przez S, oraz przez oś SN poprowadźmy płaszczyznę, która niech przetnie płaszczyznę koła k podług prostej p, a stożki odpowiednio podług tworzących SM i MN. Na prostej i, poprowadzonej przez N równolegle do l, odcinamy $NJ = NM$ i dzielimy NJ na pięć części równych; przez punkty podziału prowadzimy w płaszczyznie SMN (zawierającej proste l, p i i) prostopadłe do i, a przez ich przecięcia z prostą p — prostopadłe do p w płaszczyznie podstawy; te ostatnie prostopadłe przetną koło k w punktach, będących końcami linij równoświetlnych.

Dla wykonania tej konstrukcyi obrócimy płaszczyznę SMN około prostej poziomej OK równolegle do płaszczyzny P_1, a następnie sprowadzimy płaszczyznę koła k do położenia poziomego przez obrót około średnicy poziomej tego koła; punkty i proste po tych obrotach oznaczmy tak samo, jak w art. **217**. Wykreśliwszy tedy S_0, znajdujemy $O'M_0$, jako promień elipsy k', prostopadły do $O'S_0$; prowadząc przez M_0 prostopadłą do M_0S_0, znaj-

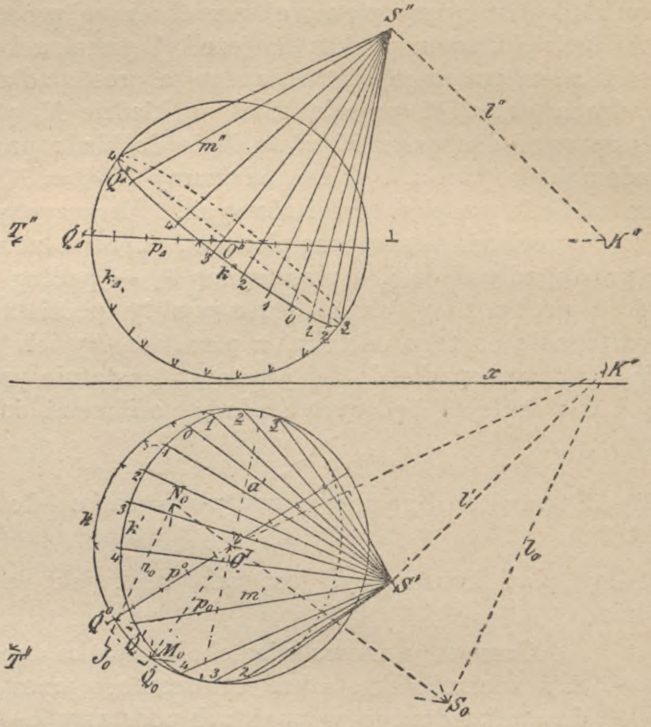


fig. 169.

dziemy w jej przecięciu z $O'S_0$ punkt N_0; przez ten punkt poprowadzimy prostą i_0 równolegle do l_0 i odetniemy na i_0 odcinek $N_0J_0 = N_0M_0$. Niech proste, poprowadzone przez J_0 i N_0 prostopadle do N_0J_0, przecinają p_0 odpowiednio w punktach Q_0 i R_0 (na rysunku punkt R_0 nie jest oznaczony), wtedy Q i R są punktami, w których prostą p przecinają płaszczyzny, prostopadłe do i i poprowadzone przez J i N. Położenie punktu Q' znajdziemy na zasadzie uwagi, że $Q'Q_0$ jest prostopadła do rzutu osi obrotowej $K'O'$, oraz że $S'Q'$ przechodzi przez punkt przecięcia T'' prostych S_0Q_0 i $K'O'$ (figury, opatrzone odpowiednio wskaźnikami ($'$) i ($_0$) są w kolineacyi prostokątnej względem osi $K'T''$); znalazłszy Q', łatwo znajdziemy Q^0, albowiem prosta $Q'Q^0$ jest prostopadła do a', a $O'Q^0 = O'Q_0$; w podobny sposób znajdziemy R^0. Odcinek Q^0R^0 podzielimy następnie na pięć części równych i w punktach podziału wykreślimy do niego prostopadłe, które przetną k^0 w punktach, odpowiadających punktom żądanym na k; z punktów na kole k^0 otrzymamy wreszcie odnośne punkty na kole k' na zasadzie kolineacyi prostokątnej, zachodzącej między figurami, oznaczonemi wskaźnikami ($'$) i (^{0}) względem osi kolineacyi a'.

Z rzutów poziomych otrzymanych punktów wykreślimy z łatwością ich rzuty pionowe.

220. K u l a (figura 170).

Kula. Średnica l kuli, równoległa do promieni światła, przecina jej powierzchnię w punktach, odpowiadających stopniowi oświetlenia 5 względnie $\underline{5}$; jeżeli tę średnicę podzielimy na dziesięć części

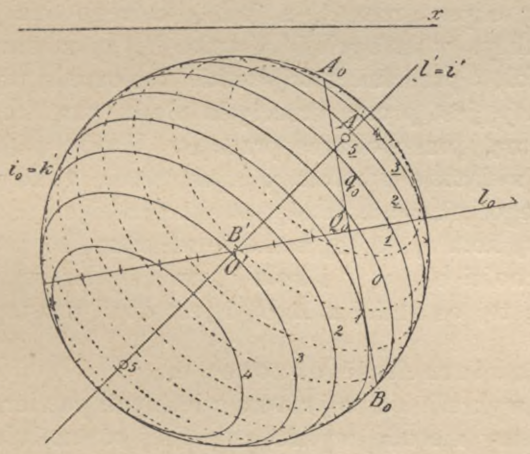


fig. 170.

równych i przez punkty podziału poprowadzimy płaszczyzny, do niej prostopadłe, to one przetną kulę podług kół, będących żądanemi liniami równoświetlnemi. Rzeczywiście, niech Q będzie jednym z punktów podziału, p — odnośnem kołem na kuli, a P — jakimkolwiek punktem na tem kole; oznaczając środek kuli przez O, a jej promień przez r, zauważymy, że długość rzutu prostokątnego promienia kuli OP na promień światła l jest wielokrotną długości $r:5$.

Konstrukcya odnośna wykonana jest na figurze 170 jedynie w rzucie poziomym; rzut pionowy znajdziemy na zasadzie poziomego, albo niezależnie od niego sposobem analogicznym.

Przez obrót około równoległej do l' średnicy kuli sprowadzimy koło wielkie i, leżące w płaszczyznie prostych l i l', do położenia i_0, równoległego do P_1; odnośne położenie prostej l oznaczmy przez l_0. Koło i_0 schodzi się z konturem k' rzutu poziomego kuli. Średnicę koła i_0, leżącą na l_0, dzielimy na dziesięć równych części i przez punkty podziału prowadzimy prostopadłe do l_0; np. przez punkt podziału Q_0 prowadzimy prostopadłą do l_0, przecinającą i_0 w A_0 i B_0. Gdybyśmy znowu sprowadzili i_0 do położenia pierwotnego, to odcinek AB byłby średnicą koła, będącego linią równoświetlną, odpowiadającą punktowi podziału Q_0. Rzut poziomy tego koła jest elipsą, której oś mniejsza $A'B'$ leży na l'; końce tej osi znajdziemy, prowadząc proste A_0A' i B_0B', prostopadłe do l'; oś wielka zaś przechodzi przez Q_0 i ma długość równą A_0B_0. Znając osi elipsy, wykreślimy ją podług art. 28. Oznaczmy tę elipsę przez b', a koło, którego ona jest rzutem, przez b; punkty, w których b' dotyka k', są rzutami punktów, w których koło b przecina koło wielkie poziome k; prosta, łącząca te dwa punkty, jest prostą przecięcia płaszczyzny koła b z płaszczyzną poziomą, przechodzącą przez O. Uważając koło b jako niezmiennie związane z kołem i, spostrzeżemy, że przy obrocie tego ostatniego nie zmienia się punkt przecięcia osi obrotowej z płaszczyzną koła b; na tej zasadzie widzimy, że prosta, łącząca punkty styczności elipsy b' i koła k', przecina prostą l' w punkcie przecięcia się tej ostatniej z A_0B_0 i jest do l' prostopadłą.

221. Powierzchnie obrotowe.

W celu wykreślenia linij równoświetlnych powierzchni obrotowej zastosujemy metodę wykreślania linij równoświetlnych kuli.

Powierzchnie obrotowe.

Oznaczmy przez a oś powierzchni; zakładamy, że ta oś jest pionowa; m niech będzie południkiem głównym, (równoległym do płaszczyzny P_2); oznaczmy dalej przez p równoleżnik dowolny, oraz przez J i K punkty przecięcia się linij p i m. Obrawszy następnie dowolną kulę pomocniczą, prowadzimy w niej średnicę a_1, równoległą do a; do koła wielkiego m_1, równoległego do P_2, prowadzimy styczne, odpowiednio równoległe do stycznych, poprowadzonych do linii m w punktach J i K; punkty styczności na m_1 oznaczmy przez J_1 i K_1; przez te punkty wyobraźmy sobie kolo p_1 na kuli w płaszczyznie, prostopadłej do a_1, a więc równoległej do p. Jasnem jest, że stożek, dotykający powierzchni obrotowej podług koła p, oraz stożek, dotykający kuli podług koła p_1, są sobie równe i jednakowo skierowane; ich linie równoświetlne są zatem odpowiednio równoległe; z drugiej strony jasnem jest, że linie równoległe każdego stożka przecinają koło p względnie p_1 w tych samych punktach, w jakich je przecinają linie równoświetlne odnośnych powierzchni. Te same stosunki zachodzą w szczególności w rzucie pionowym.

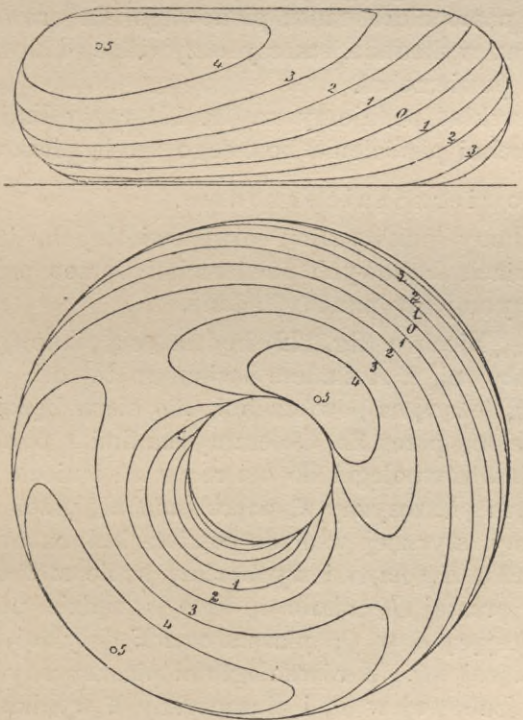


fig. 171.

Wykreślamy tedy rzut pionowy kuli i jej linij równoświetlnych. Kreślimy następnie dowolną prostą p'', prostopadłą do a'' i przecinającą m'' w J'' i K''; do m''_1 prowadzimy styczną, równoległą do stycznej do m'' w J'', a przez punkt styczności J''_1 prowadzimy cięciwę p''_1 koła m''_1, równoległą do p''; niech drugi koniec tej cięciwy będzie K''_1. Rzuty punktów przecięcia linij równoświetlnych kuli z kołem p_1 znajdziemy bezpośrednio na zasadzie artykułu poprzedniego, będą to punkty na odcinku $J''_1K''_1$; a ponieważ szereg odpowiednich punktów na $J''K''$ jest podobny do szeregu $J''_1K''_1$, to dla otrzymania pierwszego winniśmy tylko drugi powiększyć lub zmniejszyć w stosunku $J''_1K''_1 : J''K''$ i przenieść na $J''K''$. Mając rzuty pionowe tych punktów, z łatwością wykreślimy ich rzuty poziome.

Tym sposobem znajdziemy na każdym równoleżniku punkty inij równoświetlnych; wykreśliwszy je na dostatecznej ilości równoleżników, połączymy punkty odpowiednie liniami ciągłemi i otrzymamy tym sposobem linie równoświetlne powierzchni. Wykreślenie pomocnicze rzutu pionowego linij równoświetlnych kuli, będąc raz wykonane, starczy oczywiście dla wszystkich równoleżników powierzchni.

Jako przykład podajemy na fig. 171 rzuty linij równoświetlnych powierzchni pierścienia kołowego z osią pionową.

222. Powierzchnie śrubowe.

Wykreślamy punkty linij równoświetlnych, leżące na oddzielnych liniach śrubowych powierzchni; przez połączenie tych punktów otrzymujemy punkty żądane.

Powierzchnie śrubowe.

Niech a (fig. 172) będzie osią pionową powierzchni śrubowej, a A śladem poziomym tej osi; s niech będzie linią śrubową, leżącą na powierzchni, AS niech będzie wysokością linii s, podzieloną przez 2π. Obierzmy na linii s punkt P taki, że prosta $P'A$ jest równoległa do osi rzutu x, i niech e_1 będzie śladem poziomym płaszczyzny E, poprowadzonej przez S równolegle do płaszczyzny, stycznej w P do powierzchni śrubowej. Spuśćmy z A prostopadłą AQ na e_1 i wyobraźmy sobie stożek, utworzony przez obrót prostej SQ około a; koło k będzie podstawą tego stożka, dotykającą e_1 w Q; płaszczyzna E dotykać będzie stożka podług tworzącej SQ. Z równoległości płaszczyzny, stycznej do powierzchni śrubowej w P, i płaszczyzny E wynika, że powierzchnia śrubowa ma w punkcie P taką samą jasność, jaką ma ów stożek w Q. Niech punkt P przez ruch śrubowy około a przejdzie do pewnego położenia P_1, a Q — przez obrót około a na kąt $P'AP'_1$ — do położenia Q_1; łatwo wtedy zobaczymy, że płaszczyzna, styczna do powierzchni śrubowej w P_1, będzie znowu równoległa do płaszczyzny, stycznej do stożka w Q_1, tak że w tych punktach powierzchnie odnośne mają jednakową jasność oświetlenia. Jeżeli przeto pewna linia równoświetlna stożka przecina koło k w punkcie Q_1, to odnośna linia równoświetlna powierzchni śrubowej przecina linię s w punkcie P_1 takim, że kąt P'_1AQ_1 równy jest kątowi $P'AQ = \beta$. Obierzmy teraz zamiast stożka z podstawą k stożek **K** z podstawą s' i z tworzącemi, równoległemi do odnośnych tworzących tamtego stożka. Wtedy linie równoświetlne tego stożka przetną koło s' w punktach, które przez obrót około A na kąt β w kierunku, wskazanym strzałką, dadzą rzuty poziome punktów przecięcia linii s z odnośnemi liniami równoświetlnemi powierzchni śrubowej.

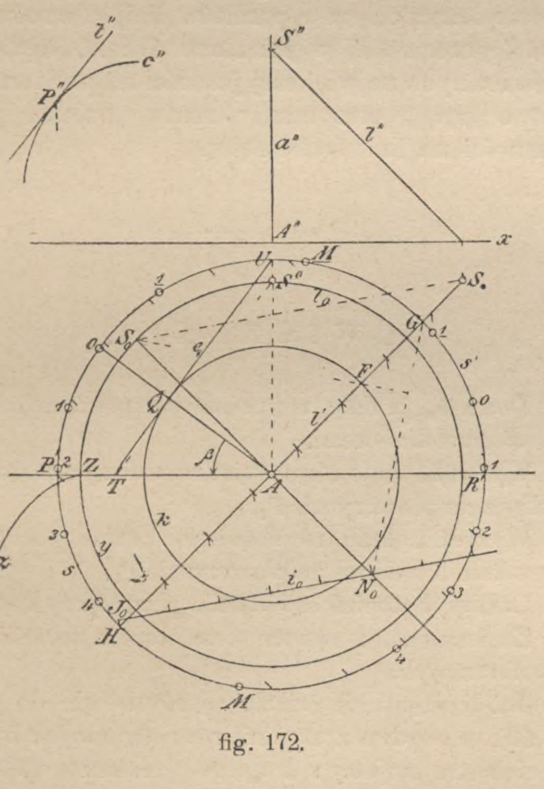


fig. 172.

Konstrukcyę wykonywamy, jak następuje. Znajdujemy przedewszystkiem koło k; rzut l' promienia światła, poprowadzonego przez S, niech przetnie koła k i s' odpowiednio w F i G, wtedy SF jest tworzącą stożka o podstawie k, a G — śladem równoległej tworzącej stożka **K**. Linie równoświetlne stożka **K** znajdujemy, jak na fig. 168, mianowicie: płaszczyznę pionową, poprowadzoną przez l, kładziemy przez obrót około l' na P_1; kład S_0 punktu S znajdziemy, odcinając na prostopadłej do l' od A odcinek $AS_0 = A''S''$; łącząc S_0 ze śladem poziomym promienia l, otrzymamy kład l_0 tego ostatniego; prostopadła, spuszczona z G na S_0F, niech przecina S_0A w N_0; przez N_0 prowadzimy i_0 równolegle do l_0 i odcinamy na i_0 odcinek $N_0J_0 = N_0G$; podzieliwszy odcinek N_0J_0 na pięć części równych, prowadzimy do niego przez punkty podziału prostopadłe, a przez ich punkty przecięcia z prostą l — prostopadłe do tej prostej; te ostatnie prostopadłe przetną koło s' podług śladów linij równoświetlnych stożka K. Obracając te punkty na kole s' o kąt β w odpowiednim kierunku, otrzymamy rzuty poziome leżących na s punktów linij równoświetlnych.

Prosta l' przecina s' w punktach G i H, będących śladami linij równoświetlnych największej jasności na powierzchni stożka K; przez obrót o kąt β otrzymamy rzuty poziome punktów największej jasności na linii śrubowej s.

ĆWICZENIA.

323) Dowieść, że linie równoświetlne powierzchni rozwijalnej są jej tworzącemi prostoliniowemi.

324) Wykreślić linie równoświetlne walca prostego, którego podstawą jest elipsa na płaszczyznie P_1.

325) Wykreślić linie równoświetlne walca pochyłego, którego podstawą jest koło lub elipsa na płaszczyznie P_1.

326) Oznaczyć stopień oświetlenia płaszczyzny danej.

327) Zacieniować, z oznaczeniem stopnia jasności, powierzchnie wielościanów foremnych.

328) Jeżeli promienie światła są równoległe do przekątnej sześcianu (art. **69**), to obydwa rzuty linij równoświetlnych kuli są identyczne; jeden z nich otrzymujemy z drugiego przez obrót o 90^0.

329) Wykreślić linie równoświetlne rozmaitych typów powierzchni śrubowych.

WSKAZÓWKI DO ĆWICZEŃ.

1) Wynika z $(ABCD) = -1$, gdy podstawimy:

$$BC = AC - AB, \quad DC = AC - AD.$$

2) Promień, harmonicznie sprzężony z prostą, łączącą punkt dany z wierzchołkiem kąta, względem ramion kąta, jest równoległy do prostej żądanej.

3) Niech punkt przecięcia się prostej szukanej z prostą BC będzie X, wtedy AM, AB, AC, AX stanowią cztery promienie harmoniczne.

4) Niech punkt przecięcia się prostych m i BC będzie M; oznaczając punkt, w którym prosta, łącząca punkt szukany z punktem A, przecina prostą BC, przez X, widzimy, że punkty M, B, C i X stanowią cztery punkty harmoniczne.

5) Pęk promieni P przecina proste s i t podług szeregów rzutowo pokrewnych; rzucając te szeregi odpowiednio z punktów N i M, otrzymamy dwa pęki promieni rzutowo pokrewne, których promienie odpowiednie przecinają się w punktach C.

6) Szeregi punktów A i B są rzutowo pokrewne, gdyż pierwszy jest rzutem szeregu punktów C z punktu T na prostą m, drugi — rzutem tegoż szeregu z punktu S na prostą n.

7) Pęki $O(ABC\ldots)$ i $O(A'B'C'\ldots)$ są równe, szeregi $A, B, C, \ldots$ i A', B', C', ... są zatem rzutowo pokrewne. W wymienionym przypadku szczególnym punkty w nieskończoności na prostych m i n odpowiadają sobie wzajemnie.

8) Pęki promieni a i a' są rzutowo pokrewne, zaś pęk a jest równy pękowi b, jakoteż pęk a' — pękowi b', a zatem pęki b i b' są rzutowo pokrewne. We wskazanym przypadku szczególnym pęki b i b' mają promień OO' wspólny.

9) Dowodzi się przy pomocy rozumowania, podobnego do końcowego ustępu art. **30**.

13) Pierwszą — w punkcie, którego rzuty leżą symetrycznie względem osi rzutu; drugą — w punkcie, którego rzuty schodzą się razem; w przypadku szczególnym kreślimy rzut boczny.

15) Za pomocą rzutu bocznego znajdziemy jeden punkt każdej prostej; obie przechodzą przez punkt przecięcia śladów płaszczyzny.

16) Łatwo możemy znaleść rzut boczny punktu szukanego.

18) W pierwszym wypadku są g'' i g' symetryczne względem osi, w drugim schodzą się razem.

19) $A'B'$ i $A''B''$ muszą przeciąć się na osi.

20) Rzut boczny.

21) A znajduje się w płaszczyznie, przechodzącej przez a i prostopadłej do P_1, względnie do P_2.

22) Rzuty spółimienne leżeć muszą na jednej prostej.

23) Rzut boczny.

24) W punkcie przecięcia śladów płaszczyzny schodzą się ślady prostej; położenie jej uwidocznia rzut boczny.

26) Prosta, łącząca dwa punkty, musi wtedy przecinać prostą, łączącą drugie dwa punkty, lub być do niej równoległą.

27) Przez punkt dany prowadzimy prostą, leżącą na płaszczyznie i równoległą do śladu danego; drugi ślad płaszczyzny przechodzi przez ślad odpowiedni tej prostej; por. fig. 40.

28) W punkcie żądanym prosta przecięcia dwóch płaszczyzn przecina trzecią.

29) Przez punkt dany i każdą z prostych danych prowadzimy płaszczyznę; dwie te płaszczyzny przetną się podług prostej żądanej.

30) Każde trzy ślady spółimienne przecinają się w jednym punkcie; punkty te są śladami prostej przecięcia.

31) Proste przecięcia dwóch różnych par tych płaszczyzn przecinają się wzajemnie.

32) Podług metody drugiej części art. **45**.

34) Rzut boczny.

35) Płaszczyznę szukaną wyznaczają dwie proste, poprowadzone z punktu danego równolegle do prostych danych.

36) Prosta szukana jest równoległa do prostej, podług której pierwsza płaszczyzna przecina drugą lub równoległą do drugiej.

37) Prosta żądana jest równoległa do prostej przecięcia płaszczyzn danych.

38) Płaszczyzna żądana wyznaczona jest przez pierwszą prostą i przez prostą, poprowadzoną z dowolnego punktu tej prostej równolegle do drugiej.

39) Gdy przez dwie proste poprowadzimy płaszczyzny równoległe do trzeciej (zag. 38), to one przetną się podług prostej żądanej.

40) Kreślimy prostą pomocniczą, równoległą do szukanej i leżącą na płaszczyznie danej.

41) Jak poprzednie.

42) Kreślimy prostą pomocniczą, równoległą do danej i leżącą na płaszczyznie szukanej.

43) Pzez kład na P_2.

44) Jest: $A'C' : C'B' = A''C'' : C''B'' = AC : CB$ (art. **21**).

45) i 46) Art. **48**.

47) Art. **49**.

48) Suma kątów danych nie powinna być większa niż 90^0 (art. **50**); gdy suma ta jest równa 90^0, to prosta szukana jest prostopadła do osi; wykreślamy ją wtedy przez rzut boczny; gdy suma zaś jest mniejsza od 90^0, to kreślimy jakąkolwiek prostą z danemi kątami nachylenia (podług fig. 59, obrawszy dowolnie $A_2B = A_1C$), następnie przez punkt dany prowadzimy prostą, do niej równoległą.

49), 50), 51) i 52) Podług art. **50** i fig. 59.

53) Niech dany będzie punkt A na śladzie pionowym, oraz kąt nachylenia α prostej do P_1; poprowadziwszy przez A w płaszczyznie P_2 prostą, nachyloną do P_1 pod kątem α, obracamy ją około promienia AA' tak, aby jej ślad poziomy znalazł się na śladzie poziomym płaszczyzny; zadanie to ma dwa rozwiązania, jedno lub żadne, stosownie do tego, czy odległość A' od śladu poziomego płaszczyzny jest mniejsza, równa lub większa od AA' ctg α. Gdy dany jest punkt A na śladzie poziomym, oraz kąt nachylenia α prostej do P_1, to kreślimy na płaszczyznie danej jakąkolwiek prostą, nachyloną do P_1 pod kątem α, i prowadzimy przez A równoległą do niej.

55) Przez rzut boczny.

56) Poprowadziwszy prostą jakąkolwiek, nachyloną do P_1 i P_2 pod kątami, dopełniającemi do 90^0 odpowiednio kąty dane (zag. 48), prowadzimy przez punkt dany płaszczyznę, prostopadłą do tej prostej (art. **52**; fig. 61). Warunkiem rozwiązalności zadania jest, aby suma kątów danych nie była mniejsza od 90^0; gdy suma ta równa jest 90^0, to płaszczyzna szukana jest równoległa do osi; możemy w tym wypadku z łatwością wykreślić jej ślad boczny.

57) Rzut boczny.

58) i 59) Art. **51**.

60) Niech A będzie śladem poziomym, B — pionowym prostej, α — kątem danym. Obieramy na osi punkt C tak, aby było: $\angle BCB' = \alpha$, i z B' jako środka kreślimy koło promieniem $B'C$; każda ze stycznych, poprowadzonych do tego koła z punktu A, wyznacza wraz z prostą AB płaszczyznę szukaną.

61) Podobnie do poprzedniego.

62) Art. **49** i **45**.

63) Przez dwukrotne zastosowanie metody art. **47** sprowadźmy jednę prostą do położenia, prostopadłego do jednej z płaszczyzn rzutu.

64) Rzut boczny.

65) Gdy dany jest rzut poziomy punktu, to metodą art. **47** obracamy płaszczyznę daną tak, aby zajęła ona położenie prostopadłe do P_2; oś obrotu najlepiej poprowadzić przez punkt, którego rzut jest dany.

69) Płaszczyzna szukana wyznaczona jest przez prostą daną i przez prostopadłą, spuszczoną z dowolnego punktu tej prostej na płaszczyznę daną.

70) Spodek prostopadłej, spuszczonej z punktu na prostą, wykreśla się przy pomocy rzutu bocznego.

71) Prowadzimy przez G'_2 płaszczyznę, prostopadłą do g', i rzucamy na nią prostą g''; odległość punktu G'_2 od tego rzutu jest odległością szukaną. Rzut wymieniony przechodzi przez G_2 i przez spodek prostopadłej, spuszczonej z G''_1 na prostopadłą, poprowadzoną do g' przez G'_2.

72) Przez środek najkrótszej odległości prostych danych (art. **53** i zag. 44) prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do tej najkrótszej odległości (art. **52**), albo równoległą do prostych danych (zag. 35).

73) Odległość żądana jest równa odległości pomiędzy śladami bocznemi prostych danych.

74) Rzut boczny.

75) Art. **54**.

76) i 77) Art. **54**, albo też art. **55**.

78) Zag. 77 i art. **52**.

80) Art. **55**.

81) Wykonywamy kład płaszczyzny, jak w art. **55**, i wykreślamy po kładzie położenie punktów danych, uważając układ tych punktów i płaszczyzny danej, jako figurę niezmienną w sobie; możemy następnie wykreślić dwa koła, do których prosta szukana ma być styczną wspólną.

82) Art. **56**.

83) Art. **54**.

84) Art. **55**.

85) Rzut boczny.

86) i 87) Art. **55**.

88) Stosujemy metodę art. **54**, przyjmując za oś obrotu ramię kąta, równoległe do płaszczyzny rzutu.

89) Art. **56**.

90) Gdy równoległe są ślady poziome, obracamy płaszczyznę około prostopadłej, spuszczonej na oś z punktu przecięcia się śladów pionowych (art. **47**) tak, aby płaszczyzny stały się prostopadłemi do P_2; w tej ostatatniej otrzymujemy wtedy wielkość kąta szukanego.

91) Kąt szukany równy jest kątowi między śladami bocznemi.

92) Art. **56**.

93) Możemy sprowadzić do zag. 60 przez zastosowanie art. **54**.

94) Kąt żądany jest spełnieniem do 90^0 kąta, utworzonego przez kierunek prostopadłej do płaszczyzny danej z osią rzutu.

95) Przez dwukrotne zastosowanie art. **47** sprowadzamy zagadnienie do przypadku, gdy jedna prosta jest prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutu.

96) Niech kąty płaskie będą α, β, γ; kąty dwuścienne, im przeciwległe, oznaczmy odpowiednio przez: λ, μ, ν. Rozwijając ściany kąta bryłowego w płaszczyznie P_1, otrzymamy pęk 4 promieni, tworzących kąty: $\angle AOB = \alpha$, $\angle BOC = \beta$, $\angle COD = \gamma$. Na OA i OD odcinamy dowolne, lecz równe odcinki OM i ON; obracamy następnie kąt AOB około OB, oraz kąt COD około OC, tak aby proste OA i OD zeszły się, zejdą się przytem punkty M i N w pewnem położeniu P; rzuty punktu P możemy łatwo wykreślić; rzeczywiście: w P' przecinają się prostopadłe, spuszczone z M i N odpowiednio na OB i OC; oznaczając zaś przez K spodek pierwszej z tych prostopadłych, a przez L — spodek drugiej, zobaczymy, że odległość punktu P'' od osi jest $\sqrt{MK^2 - KP'^2}$. Kąt nachylenia prostej PK do płaszczyzny P_1 jest kątem ν, kąt nachylenia prostej PL do tejże płaszczyzny — kątem λ; μ znajdujemy, jako kąt płaszczyzn POB i POC.

97) Sprowadza się do poprzedniego przez rozważanie kąta trójściennego dopełniającego.

98) Dane są: α, β i ν. Nakreśliwszy na P_1 kąt α, prowadzimy przez jedno jego ramię płaszczyznę, nachyloną do P_1 pod kątem ν, a na niej prowadzimy przez wierzchołek kąta α prostą, tworzącą ze śladem poziomym płaszczyzny kąt β; prosta ta, oraz ramiona kąta α są krawędziami rozpatrywanego kąta trójściennego.

99) Można sprowadzić do poprzedniego przez rozważanie kąta dopełniającego. Zaleca się także rozwiązanie niezależne następujące, Dane są: α, μ, ν. Nakreśliwszy na P_1 kąt α, prowadzimy przez jedno jego ramię płaszczyznę nachyloną do P_1 pod kątem μ, a przez drugie — płaszczyznę nachyloną do P_1 pod kątem ν; prosta przecięcia się tych płaszczyzn, oraz ramiona kąta α stanowić będą krawędzie kąta trójściennego rozpatrywanego.

100) Dane są α, β i λ. Na dowolnej płaszczyznie, nachylonej do P_1 pod kątem λ, kreślimy prostą, tworzącą ze śladem poziomym płaszczyzny kąt β; prosta ta i ślad poziomy płaszczyzny będą dwiema krawędziami kąta trójściennego; trzecia krawędź, leżąca na P_1, będzie styczną do pewnego koła, które łatwo możemy wykreślić.

101) Dane są: γ, μ, ν. Rozwiązujemy to zagadnienie przez sprowadzenie do poprzedniego przy pomocy kąta trójściennego dopełniającego, albo też sposobem następującym. Na dowolnej płaszczyznie, nachylonej do P_1 pod kątem μ, kreślimy prostą, tworzącą ze śladem poziomym tej płaszczyzny kąt γ; przez tę prostą prowadzimy drugą płaszczyznę, nachyloną do P_1 pod kątem ν (zag. 60). Powyższa prosta, oraz ślady poziome obydwóch płaszczyzn stanowią krawędzie kąta trójściennego rozpatrywanego.

102) Przy pomocy zagadnienia 96.

103) Można sprowadzić do poprzedniego przez kład płaszczyzny.

104) Podobnie do zag. 102.

105) Podobnie do zag. 103.

108) Art. 54.

111) Dla uproszczenia zakładamy, że podstawa ABC czworościanu leży na płaszczyznie P_1; szukany środek jest punktem przecięcia się płaszczyzn, dzielących na połowy kąty dwuścienne czworościanu przy podstawie. Dla łatwiejszego wykreślenia tego punktu bierzemy dowolną płaszczyznę pomocniczą, równoległą do P_1; w przecięciu się jej z płaszczyznami dwuściennemi otrzymujemy trójkąt $A_1B_1C_1$, podobny do trójkąta A, B, C, a proste AA'_1, BB'_1 i CC'_1 przetną się w rzucie poziomym środka szukanego (por. zag. 89).

112) Możemy wykreślić podstawę na płaszczyznie P_1 i kłady czterech ścian na tej płaszczyznie.

115) Przecinamy uprzednio graniastosłup płaszczyzną, prostopadłą do jego krawędzi bocznych.

116) Można sprowadzić figurę do położenia takiego, jak w zag. 104, i następnie zastosować art. 64; można również wykreślać kształt każdej ściany oddzielnie, jak w art. 54.

120) Przecinamy ścianę boczną wskazaną płaszczyzną, równoległą do podstawy; prosta przecięcia jest równoległa do boków równoległych trapezu.

121) Jednę ze ścian wskazanych przecinamy płaszczyzną, równoległą do drugiej; do prostej przecięcia muszą być równoległe boki równoległe trapezu.

122) Dwie ściany boczne przyległe przecinamy płaszczyznami, odpowiednio równoległemi do ścian bocznych przeciwległych; wszelka płaszczyzna, równoległa do dwóch otrzymanych prostych przecięcia, przecina ostrosłup podług równoległoboku; wszystkie te równoległoboki przecięcia są do siebie podobne.

130) Art. **71**.

139) Przez dane trzy punkty rzutu pionowego krzywej jest wyznaczoną kolineacya, o której mowa w art. **76**. Por. także art. **23** i **41**.

140) Kreślimy rznt pionowy (por. zag. poprzednie) krzywej, leżącej na płaszczyznie danej i mającej rzut poziomy wspólny z krzywą daną; rzut pionowy krzywej tak wykreślonej oraz rzut pionowy krzywej danej przetną się w rzutach pionowych punktów szukanych.

141) Kreślimy styczną do krzywej w punkcie danym (art. **88**) i przez punkt styczności prowadzimy płaszczyznę, do tej stycznej prostopadłą (art. **52**).

142) Wykreśliwszy płaszczyznę ściśle-styczną do krzywej w punkcie danym (art. **88**), kreślimy w tej płaszczyznie prostą, prostopadłą do stycznej do krzywej w tymże punkcie; prosta ta jest normalną główną.

143) Art. **88** i **52**.

144) Wykreślmy najprzód cień poziomy całkowity; część jego, znajdująca się nad osią rzutu, będzie fikcyjną; zamiast tej części cienia poziomego wykreślamy cień na płaszczyznie pionowej rzutu; część ta cienia pionowego jest w kolineacyi równoległej z fikcyjną częścią cienia poziomego, możemy bowiem każdą z tych figur uważać jako rzut równoległy drugiej z nich w kierunku promieni światła (por. art. **30**).

145) Postępujemy podobnie, jak w art. **92**, obierając właściwą płaszczyznę pomocniczą; cień rzucony na jednę z płaszczyzn rzutu, jest figurą kolineacyjną cykloidy, którą można wykreślić; gdy część cienia pada na drugą płaszczyznę rzutu, postępujemy, jak w zagadnieniu poprzedniem.

146) Przy pomocy przedstawienia o linii śrubowej, opisanego w artykule **92**, można spostrzedz, że gdy poprowadzimy płaszczyznę styczną, przechodzącą przez prostopadłą, spuszczoną z punktu styczności na oś linii śrubowej, to w bliskości tej płaszczyzny krzywa leży z różnych jej stron, tak, że ta płaszczyzna jest płaszczyzną ściśle-styczną.

147) Ślad poziomy płaszczyzny ściśle-stycznej jest styczny do pewnej rozwiniętej koła, a rzut poziomy stycznej jest normalny do tejże rozwiniętej koła (fig. 101).

148) Przy pomocy zagadnienia poprzedniego.

150) Wykreślamy koło, będące miejscem geometrycznem śladu poziomego prostej, przechodzącej przez punkt dany i nachylonej do płaszczyzny P_1 pod kątem α; ślad poziomy płaszczyzny szukanej jest styczną wspólną dla tego koła i dla rozwiniętej koła, odpowiadającej danej linii śrubowej. Znalazłszy ten ślad poziomy, możemy wykreślić rzuty stycznej, leżącej w płaszczyznie ściśle-stycznej szukanej.

151) Płaszczyzna, przechodząca przez prostą daną i nachylona do P_1 pod kątem α (zag. 60), jest równoległa do płaszczyzny żądanej.

152) Kreślimy rzuty tworzącej, przechodzącej przez punkt dany.

153) Płaszczyzna, poprowadzona przez prostą daną równolegle do tworzących walca, przetnie powierzchnię walca podług tworzących, które w przecięciu z prostą daną dadzą punkty żądane.

154) Prosta żądana jest tworzącą pewnego stożka obrotowego o wierzchołku w danym punkcie i z podstawą na P_1.

155) Prowadzimy najprzód przez dany punkt płaszczyznę, styczną do powierzchni walca (artykuł **101**) i w niej szukamy prostej żądanej (zag. 154).

156) Ślad płaszczyzny jest styczny do spółimiennych śladów walców.

157) Płaszczyzna żądana jest równoległa do tworzących obydwóch walców, ślad jej jest styczny do wspólnego śladu walców.

158) Tworzące walca równoległe są do prostej przecięcia płaszczyzn danych.

159) Kreślimy kład jakiegokolwiek przekroju płaskiego, prostopadłego do tworzących.

160) Gdy z dowolnego punktu poprowadzimy proste, równoległe do tworzących obydwóch walców, to płaszczyzna wyznaczona przez te proste będzie równoległa do płaszczyzn stycznych żądanych.

163) Prowadzimy płaszczyznę pomocniczą przez prostą daną i wierzchołek stożka.

164) Przy pomocy kładu płaszczyzny podstawy na płaszczyznę poziomą rzutu.

166) Por. zag. 60. Płaszczyznę żądaną wyznaczamy, jako styczną do pewnej powierzchni stożkowej.

167) Por. zag. 164 i 166.

168) Płaszczyzna żądana przechodzi przez wierzchołek wspólny, jej ślad jest styczną wspólną do spółimiennych śladów stożków.

169) Ze śladu poziomego prostej, łączącej wierzchołki stożków, prowadzimy styczną do wspólnego śladu poziomego; styczna ta jest śladem poziomym płaszczyzny żądanej.

170) Podobnie, jak zagadnienie poprzednie, tylko prostą pomocniczą prowadzimy przez wierzchołek stożka równolegle do tworzących walca.

172) Jeden stożek przesuwamy tak, aby jego wierzchołek zeszedł się z wierzchołkiem drugiego, i kreślimy wspólne płaszczyzny styczne do stożków o wspólnym wierzchołku (zag. 168); płaszczyzny żądane są do tych płaszczyzn odpowiednio równoległe.

173) Przez wierzchołek stożka prowadzimy prostą, równoległą do tworzących walca, i przez tę prostą prowadzimy płaszczyznę styczną do stożka.

175) Zagadnienie 36.

183) Miejscami geometrycznemi punktu są trzy powierzchnie walcowe obrotowe.

186) Granicą tego cienia będzie łuk elipsy (art. **119**).

189) Wyobraźmy sobie dwie powierzchnie walcowe o tworzących równoległych do promieni światła i styczne odpowiednio do każdej z powierzchni danych; punkty, wskazane w zadaniu, są punktami przecięcia drugiej powierzchni danej z wspólnemi tworzącemi tych powierzchni walcowych; same zaś te tworzące są stycznemi wymienionemi.

191) Wyznaczywszy rzut pionowy punktu (zagadnienie poprzednie), kreślimy rzut pionowy południka, jako figurę kolineacyjną z rzutem południka głównego (art. **30**).

192) Wyznaczamy punkty południka głównego na różnych równoleżnikach.

193) Zagadnienie 139, art. **125**.

194) Punkty szukane na pewnym południku znajdujemy przez obrót całego układu około osi do położenia takiego, aby południk dany stał się południkiem głównym.

199) Rzut równoleżnika z wierzchołka stożka na płaszczyznę P_1 przecina ślad poziomy stożka w punktach, będących rzutami z tegoż wierzchołka tych punktów równoleżnika, które należą do krzywej żądanej.

200) Podobnie, jak zagadnienie poprzednie; zamiast rzutu środkowego mamy tu rzut równoległy.

201) Płaszczyznę, wyznaczoną przez osi, obierzemy za płaszczyznę pionową rzutu. Powierzchnia kuli, opisana z punktu przecięcia osi, jako ze środka, przecina obie powierzchnie podług kół, których rzuty pionowe są prostemi; rzuty te łatwo mogą być wykreślone, a ich punkt przecięcia da wspólny rzut pionowy dwóch punktów krzywej żądanej.

Szereg pomocniczych kul spółśrodkowych da nam szereg par punktów krzywej żądanej.

202) Gdy z jednego punktu prostej danej poprowadzimy powierzchnię stożkową, styczną do powierzchni obrotowej (art. **125** i **126**), to zagadnienie sprowadzi się do jednego z zagadnień, rozwiązanych w art. **106**.

203) Kreślimy pomocniczą powierzchnię walcową, styczną do po wierzchni obrotowej, mającą tworzące, równoległe do płaszczyzny danej.

204) Sprowadza się do zagadnienia poprzedniego.

208) Por. zagadnienie 168.

209) Można również sprowadzić do zagadnienia 168.

210) Wyznaczywszy odległość płaszczyzny szukanej od środka kuli, sprowadzamy zagadnienie do zagadnienia 202, zastosowanogo do kuli.

214) Możemy w rzucie poziomym wykreślić osi elipsy, będącej rzutem elipsy przekroju.

217) Na fig. 119 p'' i q'' są asymptotami hyperboli, będącej rzutem południka głównego; hyperbola wykreśla się na zasadzie art. **14**.

220) Podług zagadnienia 217 uważamy, że dla każdej hyperboli mamy oś i jednę asymptotę (wspólną), druga asymptota w każdej hyperboli jest symetryczną z pierwszą względem osi.

221) Tworząca żądana jest prostą przecięcia się dwóch powierzchni stożkowych, mających wierzchołek wspólny w punkcie danym, a za kierujące — dwie dane kierujące powierzchni, nie przechodzące przez punkt dany.

222) Przez styczną do pierwszej kierującej w danym na niej punkcie poprowadzimy płaszczyznę, styczną do powierzchni stożkowej, mającej wierzchołek w punkcie danym, a za kierującą — drugą kierującą powierzchni; tak wykreślona płaszczyzna dotknie powierzchni stożkowej podług tworzącej, która będzie żądaną tworzącą powierzchni.

225) Wykreślmy linię, opisaną na P_1 przez ślad poziomy prostej danej, gdy ta ostatnia wykonywa ruch śrubowy taki sam, jaki wykonywa tworząca powierzchni dla jej opisania (będzie to linia, opisana przez punkt, niezmiennie związany z prostą, toczącą się po kole; gdy punkt znajduje się odpowiednio na prostej, lub z tej strony, gdzie leży środek koła, albo z przeciwnej, nazywamy tak powstałą linię rozwiniętą koła zwyczajną, wydłużoną lub skróconą); punkt przecięcia tej linii ze śladem poziomym powierzchni będzie śladem poziomym linii śrubowej, opisanej przez punkt dany przy tym samym ruchu śrubowym. Na kole, będącem rzutem poziomym tej linii śrubowej, znajdziemy rzut poziomy punktu szukanego.

226) Zadanie, identyczne z poprzedniem.

227) Płaszczyzna, poprowadzona przez punkt dany prostopadle do osi powierzchni, przecina tę ostatnią podług rozwiniętej koła; każda styczna do tej linii, poprowadzona przez punkt dany, wyznacza wraz z tworzącą powierzchni, przechodzącą przez punkt styczności, płaszczyznę żądaną.

228) Rozwiązawszy zadanie analogiczne dla stożka kierującego, przenosimy z łatwością rozwiązanie na daną powierzchnię śrubową.

230) Dla każdego koła kreślimy jego rozwiniętą z początkiem w danym na niem punkcie; z jednego z punktów przecięcia tych linij prowadzimy styczne do kół danych; prosta, łącząca obydwa punkty styczności, jest rzutem tworzącej powierzchni, a styczne do niej koło, spółśrodkowe z danemi, — rzutem krawędzi zwrotu powierzchni. Zaznaczamy, że tak wysokość kroku, jak zwrot danych linij śrubowych (a więc i zwrot powierzchni szukanej) zostają nieokreślone.

236) Dwie pary linij poziomu z odpowiednio równemi wysokościami dają w przecięciu się wzajemnem dwa punkty prostej żądanej z wysokościami wiadomemi.

237) Przez prostą daną prowadzimy dowolną płaszczyznę pomocniczą i przecinamy ją płaszczyzną daną.

238) Styczna w danym punkcie do linii największego spadku powierzchni jest prostą największego spadku płaszczyzny stycznej żądanej.

239) Płaszczyzna jest równoległa do prostej OA.

240) Szukany zbieg oznaczmy przez M, spodek prostopadłej, spuszczonej z O na zbieg płaszczyzny, przez N; trójkąt MON jest prostokątny przy O, punkt A jest spodkiem prostopadłej, spuszczonej z O na MN, OA równe jest oddaleniu, MN jest prostopadła do zbiegu płaszczyzny; na zasadzie tych danych można wykreślić kład trójkąta MON około MN.

242) Z K spuszczamy prostopadłą KK' na g; KP_1 jest obrazem prostej KP, $K'P'_1$ — obrazem rzutu poziomego tej prostej; w punkcie przecięcia prostej $K'P'_1$ z prostą h kreślimy do tej ostatniej prostopadłą, która przetnie prostą KP_1 w zbiegu P_∞ prostej KP; $P_\infty K_\infty$ jest wtedy zbiegiem płaszczyzny żądanej, a równoległa do $P_\infty K_\infty$ przez K — jej śladem.

Inne rozwiązanie. Przez P prowadzimy równoległą l do k; $P_1 K_\infty$ jest jej obrazem; prosta, łącząca P'_1 ze spodkiem prostopadłej, spuszczonej z K_∞ na h, przecina g w punkcie L'; prostopadła do g w L' przecina $P_1 K_\infty$ w śladzie L prostej l; LK jest śladem płaszczyzny żądanej, a równoległa do LK przez K_∞ — jej zbiegiem.

243) KL jest śladem płaszczyzny, a równoległa do KL przez K_∞ — jej zbiegiem.

244) Ślady płaszczyzn przecinają się w śladzie prostej, zbiegi płaszczyzn — w zbiegu prostej. Gdy jeden z tych punktów jest niedostępny, przecinamy obie płaszczyzny płaszczyzną pomocniczą.

245) KP_1 jest obrazem PK; jej zbieg leży na równoległej do LK przez L_∞; prosta, łącząca ten zbieg z K_∞, jest zbiegiem płaszczyzny, a równoległa do niej przez K — śladem.

Inne rozwiązanie. P_1K_∞ jest obrazem prostej, poprowadzonej przez P równolegle do k; jej ślad leży na równoległej do $K_\infty L_\infty$ przez L; prosta, łącząca ten ślad z K, jest śladem płaszczyzny, a równoległa do niej przez K_∞ — zbiegiem.

246) Proste niech będą k (K, K_∞) i l (L, L_∞), punkty na nich odpowiednio P, Q. Przez P prowadzimy prostą m, równoległą do l; jej obrazem jest $L_\infty P_1$, śladem M — punkt przecięcia $L_\infty P_1$ z równoległą do $K_\infty L_\infty$ przez K; ML jest śladem płaszczyzny prostych PQ i l, a równoległa do ML przez L_∞ — zbiegiem tej płaszczyzny; na tych prostych leżą odpowiednio ślad i zbieg prostej PQ, której obrazem jest prosta P_1Q_1.

247) Wyznaczamy zbiegi i ślady dwóch prostych, łączących punkty dane (zag. 246); prosta, łącząca zbiegi, jest zbiegiem, a łącząca ślady — śladem płaszczyzny żądanej.

248) Z A spuszczamy prostopadłą AB na e_∞ i na równoległej do e_∞ przez A odcinamy $AC = d$ (oddaleniu); kąt ABC jest żądanym.

249) Zbieg K_∞ prostej łączymy z A i na prostopadłej do AK_∞ przez A odcinamy $AB = d$ (oddaleniu), wtedy $AK_\infty B$ jest kątem żądanym.

250) Por. zagadnienie 244.

251) Niech punkt P dany będzie na prostej k (K, K_∞); ponieważ wystarcza nam kierunek płaszczyzny, to dany jest tylko jej zbieg e_∞. Przez P prowadzimy dowolną prostą l, równoległą do płaszczyzny; jej zbieg jest dowolnym punktem L_∞ prostej e_∞; równoległa do $L_\infty K_\infty$ przez K przecina $L_\infty P$ w śladzie L prostej l, a równoległa do e_∞ przez L jest śladem płaszczyzny żądanej.

252) Przez prostą daną prowadzimy płaszczyznę w dowolnym kierunku (jej śladem i zbiegiem są proste równoległe, poprowadzone w dowolnym kierunku odpowiednio przez ślad i zbieg prostej danej); płaszczyzna ta przetnie płaszczyznę daną podług prostej (zag. 244), której punkt przecięcia z prostą daną będzie punktem żądanym.

253) P_1Q_1 jest obrazem prostej, $P'_1Q'_1$ — obrazem jej rzutu poziomego; $P'_1Q'_1$ przecina g i h odpowiednio w śladzie L' i zbiegu L'_∞

rzutu poziomego prostej; proste pionowe przez L' i L'_∞ przecinają P_1Q_1 odpowiednio w śladzie L i zbiegu L_∞ prostej PQ.

254) Dane są P'_1, P_1, k_1 przez P_1 i K na k_1. Z K spuszczamy prostopadłą KK' na g; $K'P'_1$ przecina h w K'_∞; prostopadła do h w K'_∞ przetnie k_1 w zbiegu K_∞.

255) Ponieważ rozchodzi się tylko o kierunek prostych, to dane są wyłącznie ich zbiegi K_∞ i L_∞. Kąt żądany w naturze jest $K_\infty OL_\infty$; podług art. **174** kreślimy kład oka O_0 około prostej $K_\infty L_\infty$, wtedy otrzymujemy kąt żądany $K_\infty O_0 L_\infty$.

256) Sprowadza się do zagadnienia poprzedniego.

257) Gdy punkt P dany jest przez obraz P_1 na obrazie prostej k (K, K_∞), to łączymy zbieg L_∞ prostej danej l (L, L_∞) z P_1; $L_\infty P_1$ jest obrazem prostej żądanej, L_∞ — jej zbiegiem, a punkt przecięcia obrazu z równoległą do $K_\infty L_\infty$ przez K — śladem tej prostej. Gdy punkt dany jest przez obraz P_1 i obraz rzutu poziomego P'_1, to P_1L_∞ jest obrazem prostej żądanej; prosta, łącząca P'_1 ze spodkiem prostopadłej, spuszczonej z L_∞ na h, jest obrazem rzutu poziomego prostej; ten obraz przecina g w punkcie, który jest rzutem poziomym śladu prostej danej; prowadząc przez ten punkt prostopadłą do g, otrzymamy w przecięciu tej prostopadłej z prostą $L_\infty P_1$ ślad prostej żądanej.

258) Zagadnienia 242, 245 i kład pewnej płaszczyzny.

259) Fig. 139 i 140.

260) Zagadnienie 253.

261) Niech prosta $P'P''$ przecina g w B; od P'' i od A odcinamy w kierunku, prostopadłym do $P''A$, lecz w zwrotach różnych odcinki $P''C = BP'$ i $AO^0 = d$; punkt przecięcia CO^0 i $P''A$ jest perspektywą żądaną.

262) Podług zagadnienia 240 znajdujemy zbieg prostopadłej, następnie podług zag. 257 jej ślad, zaś podług zag. 252 spodek prostopadłej.

263) Podług zag. 262 znajdujemy spodek prostopadłej, spuszczonej z punktu na płaszczyznę, następnie podług art. **176** wyznaczamy długość żądaną.

264) Podług zag. 240 wyznaczamy zbieg płaszczyzny, następnie podług zag. 251 — jej ślad.

265) Podług zagadnienia 264 prowadzimy przez punkt dany płaszczyznę, prostopadłą do prostej danej; podług zag. 252 znajdujemy punkt przecięcia prostej i płaszczyzny, a podług art. **176** odległość tego punktu od punktu danego.

Inne rozwiązanie. Przez punkt i prostą prowadzimy płaszczyznę (zag. 242 lub 245), wykonywamy jej kład i w kładzie wykreślamy długość żądaną.

266) Podobnie, jak zag. 263.

267) Podług zagadnienia 240 wyznaczamy zbieg prostopadłych do płaszczyzny danej; prosta, łącząca ten zbieg ze zbiegiem prostej danej, jest zbiegiem płaszczyzny żądanej, a równoległa do tego zbiegu przez ślad prostej jest śladem płaszczyzny.

268) Stosujemy zagadnienia 240 i 255.

269) Stosujemy dwa razy zagadnienie 240 i następnie 255.

270) Za pomocą zagadnienia 257 prowadzimy przez jednę prostą płaszczyznę, równoległą do drugiej, i znajdujemy podług zag. 263 odległość dowolnego punktu tej drugiej prostej od płaszczyzny.

271) Znajdujemy zbieg K prostej, której pnnkt jest dany, zbieg ten jest wspólnym zbiegiem prostych układu; z punktu K spuszczamy prostopadłą KK' na h; O_0K jest kładem promienia, poprowadzonego przez O równolegle do prostych układu, a $O'K'$ — kładem rzutu poziomego tego promienia. Punkt R, w którym przecinają się proste O_0K i $O'K'$ jest kładem punktu, w którym promień ów przebija płaszczyznę P_1; z punktu R rzucamy wszystkie ślady poziome prostych danych na oś x, wtedy proste, łączące te rzuty z punktem K, są obrazami prostych danych.

272) i 273) Wielkość stosunku anharmonicznego jest własnością rzutową (art. **5**), obrazy zatem 4-ch punktów lub 4-ch prostych harmonicznych są znowu punktami względnie prostemi harmonicznemi.

274) Punkt szukany jest harmonicznie sprzężony ze zbiegiem prostej odcinka względem końców tego odcinka.

275) Przyp. a) i b) podług art. **178**, c) i d) podobnie do art. **176**.

276) W przyp. a) i b) dzielimy bezpośrednio na obrazie, w przyp. zaś c) i d) postępujemy podług art. **177**.

277) Podług art. **176**.

278) Podług art. **178**.

280) i 281) Podług art. **18?**.

286) W przypadku a) parabola, b) hyperbola; posiłkować się można kolineacyą (art. **180**).

287) Zag. 257 i 252.

291) Wykreśliwszy perspektywę podstawy, prowadzimy przez punkt przecięcia przekątnych prostą pionową, jako obraz osi ostrosłupa, i na niej odcinamy (art. **178**) wysokość.

297) Punkty A, E, D, B leżą na jednym okręgu koła, stąd: $\angle DEO = \angle OAB = \angle OCB = \angle FEB$; trójkąty DEO, EFO, DFO są zatem odpowiednio podobne do ABO, BCO i CAO, a punkt O jest nadto środkiem koła, wpisanego w trójkąt DEF; oznaczmy przez r promień

tego koła, wówczas będzie: $DE : AB = r : OF$; z trójkąta zaś AO_1B znajdujemy: $AB : O_1A = O_1B : O_1F$, a z trójkąta: $CO_1F - OF : O_1F = O_1O : O_1C$; $O_1F : O_1O = O_1C : OC$; z tych równań otrzymamy stopniowo:

$$DE = r \cdot \frac{AB}{OF} = r \frac{O_1A \cdot O_1B}{OF \cdot O_1F} = r \cdot \frac{O_1A \cdot O_1B \cdot O_1C}{O_1F^2 \cdot O_1O} =$$

$$= r \cdot \frac{O_1A \cdot O_1B \cdot O_1C}{O_1O^3} \left(\frac{OC}{O_1C}\right)^2 = r \cdot \frac{O_1A \cdot O_1B \cdot O_1C}{O_1O^3} \cdot \nu^2.$$

Analogiczne wzory napiszemy dla EF i FD, wówczas twierdzenie stanie się oczywistem.

298) Wykreślimy trójkąt DEF, wówczas boki trójkąta ABC będą dwusiecznemi jego kątów zewnętrznych.

299) Na fig 155 można zamiast punktu X lub Y, lub obydwóch wziąć punkty symetrycznie położone względem OZ; każda oś może być wzięta w odwrotnym zwrocie.

300) Opisawszy na kole kwadrat, otrzymamy na obrazie elipsę wpisaną w równoległobok.

301) Obraz prostej łączy obrazy punktów, obraz rzutu prostej łączy obrazy odpowiednich rzutów punktów.

302) i 303) Art. **204** — **206**.

304) Jeżeli proste się przecinają, to punkt przecięcia ich obrazów oraz punkt przecięcia obrazów ich rzutów poziomych leżą na prostej, równoległej do osi z; te punkty są wtedy odpowiednio obrazami punktu przecięcia i jego rzutu poziomego. Jeżeli proste są równoległe, to równoległemi są obrazy prostych, jakoteż obrazy ich rzutów na jednę płaszczyznę spółrzędnych.

305) Ślady płaszczyzny łączą spółimienne ślady prostych.

308) Art. **205**.

309) Zag. 306 i 305.

310) Przez punkt prowadzimy dwie proste, równoległe do jakichkolwiek dwóch prostych na płaszczyznie, i sprowadzamy zagadnienie do zag. 305.

317) Fig. 162.

318) Zag. 307 i art. **211**.

319) Z dowolnego punktu prowadzimy proste, prostopadłe do tych płaszczyzn, i wykreślamy kąt tych prostych.

320) Kąt pomiędzy prostą daną i prostą, prostopadłą do płaszczyzny danej, dopełnia kąt szukany do 90^0.

321) Znajdujemy obraz środka kuli; koło, zakreślone z tego obrazu promieniem równym promieniowi kuli, jest obrazem kuli. Obraz rzutu poziomego koła wielkiego, prostopadłego do promieni światła, jest obrazem cienia, rzuconego przez kulę na płaszczyznę poziomą rzutu; obraz ten jest elipsą, której osi łatwo można wykreślić.

322) Obrazy tworzących są równoległe do z; obrazami podstaw są elipsy identyczne, których parę średnic sprzężonych łatwo jest wykreślić (por. zag. 300).

323) Powierzchnia rozwijalna ma jednę płaszczyznę styczną we wszystkich punktach jednej tworzącej prostoliniowej.

326) Stopień jasności oświetlenia płaszczyzny jest równy temu, jaki ma dowolna kula pomocnicza w końcu promienia, prostopadłego do płaszczyzny danej.

WYKAZ TERMINÓW.

(Numera oznaczają artykuły, w których znajduje się objaśnienie terminu; *n.* oznacza nazwę n i e m i e c k ą, *f.* — f r a n c u s k ą).

Aksonometrya 188 — n. Axonometrie — f. axonométrie.
a. jednomiarowa 200 — n. isometrische albo monometrische A. — f. a. isométrique;
a. dwumiarowa 200 — n. dimetrische albo monodimetrische A. f. a. dimétrique;
a. trójmiarowa 200 — n. trimetrische albo anisometrische A. — f. a. trimétrique.
Anharmoniczny 5 — n. anharmonisch — f. anharmonique.
Asymptota 10 — n. Asymptote — f. asymptote.
Biegun 12 — n. Pol — f. pole.
Biegunowa 12 — n. Polare — f. polaire.
Bok (wielokąta) — n. Seite — f. côté.
Cień własny 69 — n Eigenschatten — f. ombre propre.
Cień rzucony 69 — n. Schlagschatten — f. ombre jetée.
Cień poziomy 70 — n. Grundrisschatten.
Cień pionowy 70 — n. Aufrisschatten.
Cień fikcyjny 70.
Cięciwa — n. Sehne — f. corde.
Cykloida zwyczajna 78 — n. gespitzte Cykloide — f. cycloïde
Cykloida wydłużona 79 — n. verschlugene C. — f. c. allongée.
Cykloida skrócona 80 — n. gestreckte C. — f. c. raccourcie.
Czworokąt — n. Viereck — f. quadrilatère.
Czworościan — n. Vierflach — f. tétraèdre.

Dwudziestościan — n. Ikosaeder — f. icosaèdre.
Dwumiarowy — p. aksonometrya.
Dwunastościan — n. Dodekaeder — f. dodécaèdre.
Dwupowłokowy — p. hyperboloida.
Dwusieczny — n. winkelhalbierend — f. bissecteur.
Dziesięciokąt — n. Zehneck — f. décagone.
Element (krzywej) 77 — Element (Kurvenelement) — f. élément.
Elipsa 10 — n. Ellipse — f. ellipse.
Elipsoida 95 — n. Ellipsoid — f. ellipsoïde.
e. obrotowa 133 — n. Umdrehungsellipsoid — f. ellipsoïde de révolution.
Eliptyczny — n. elliptisch — f. elliptique.
Foremny — n. regulär — f. régulier.
Geometrya — n. Geometrie — f. géométrie.
g. analityczna — n. analytische Geometrie — f. géométrie analytique; g. rzutowa — n. projective Geometrie albo Geometrie der Lage — f. géométrie projective albo g. de position; g. wykreślna — n. darstellende G. — f. g. descriptive.
Graniastosłup — n. Prisma — f. prisme.
Granica światła i cienia albo granica cienia własnego 69, — n. Lichtgrenze.
Harmoniczny 9 — n. harmonisch — f. harmonique.
Helisa — p. linia śrubowa.
Hyperbola 10 — n. Hyperbel — f. hyperbole.
Hyperboloida — n. Hyperboloid — f. hyperboloïde.
h. obrotowa 133 — n. Umdrehungshyperboloid — f. h. de révolution; h. jednopowłokowa — n. einschaliges H. — f. h. à une nappe; h. dwupowłokowa — n. zweischaliges H. — f. h. à deux nappes.
Interwal prostej 158 — n. Interval — f. intervalle.
Inwolucya 8 — n. Involution — f. involution.
Izofotyczny — p. linie równoświetlne.
Jednomiarowy — p. aksonometrya.
Jednopowłokowy — p. hyperboloida.
Kąt — n. Winkel — f. angle.
Kierująca 97, 102 — n. Leitlinie — f. directrice.
Klasa (krzywej) 10 — n. Klasse — f. classe.
Kład 30 — n. Umlegung — f. rabattement.
Kolineacya 23—n. Kollineation—f. collinéation, homographie, homologie; k. środkowa 23 — n. centrische K.; k. równoległa 23 — n. Affinität; k. prostokątna 23.

Koło — n. Kreis — f. cercle.
k. oddalenia 162 — n. Distanzkreis. — f. cercle de distance.
k. szyjne 135 — n. Kehlkreis — f. cercle de gorge.
Kołowy — p. stożek.
Konoida 141 — n. Konoid — f. conoïde.
k. prosta — n. gerades K — f. conoïde droite.
k. ukośna — n. schiefes K. — f. conoïde oblique.
Kontur istotny 57, 96 — n. wahrer Umriss.
Kontur pozorny 57, 96 — n. scheinbarer Umriss.
Krawędź — n. Kante — f. arête.
k. zwrotu 87, 140 - n. Rückkehrkante—f. arête de rebroussement.
Krok (linii śrubowej) 90 — n. Gang, Windung — f. spire.
Krzywa — n. Kurve — f. courbe.
k. płaska 75, 76, 77 — n. ebene K. — f. c. plane.
k. skośna 84 i nast. — n. Raumkurve — f. c. gauche.
k. równoległa 137 — n. parallele (äquidistante) K. — f. courbe équidistante.
Kula — n. Kugel — f. sphère.
Linia — n. Linie — f. ligne.
l. dolinowa 157 — n. Thallinie.
l. grzbietowa 157 — n. Kammlinie, Wasserscheide — f. ligne de faîte.
l. izofotyczna albo równoświetlna 215 — n. Lichtgleiche, Isophote — f. ligne isohpotique.
l. największego spadku 157 — n. Fallinie — f. ligne de pente.
l. poziomu 157 — n. Niveaulinie — f. ligne de niveau.
l. śrubowa 89 — n Schraubenlinie — f. hélice.
l. śr. lewozwrotna 89 — n. linksgängige Schr. — f. sinistrorsum.
l. śr. prawozwrotna 89 — n. rechtsgängige Schr. — f. dextrorsum.
l. śr. szyjna 144 — n. Kehlschraubenlinie — f. hélice de gorge.
l. zwężenia 140 — n. Striktionslinie — f. ligne de strictio·.
l. wododziałowa — p. linia grzbietowa.
Łuk — n. Bogen — f. arc.
Mutra 152 — n. Schraubenmutter — f. écrou.
Nachylenie — n. Neigung — f. inclination.
Nieskończoność 1 — n. Unendlichkeit — f. infini.
Normalny — n. normal — f. normal.
prosta normalna 84, 96 — n. Normale — f. normale.
płaszczyzna normalna 84 — n. Normalebene — f. plan normal.
normalna główna 84 — n. Hauptnormale — f. normale principale.

Normować (prostą w rzucie topogr.) 158 — n. normieren, graduiren. — f. graduer.
Obraz, 161, 188 — n. Bild — f. image.
Obrót — n. Umdrehung, Drehung — f. rotation.
Obrotowy — p. powierzchnia.
Oczny — p. punkt.
Oddalenie 162 — n. Distanz — f. distance.
Odpowiedni (punkt, prosta) — n. entsprechend — f. correspondant.
Oko 162 — n. Auge, Augenpunkt — f. point de l'oeil.
Osobliwy — p. punkt.
Ostrosłup — n. Pyramide — f. pyramide.
Oś 14 — n. Axe — f. axe.
oś kolineacyi 23 — n. Kollineationsaxe — f. axe de collinéation.
oś linii śrubowej 89.
oś obrotowa — n. Drehungsaxe — f. axe de rotation.
oś pierwiastna albo potęgowa 11 — n. Potenzaxe, Chordale — f. axe radical.
oś rzutu 31—n. Projektionsaxe—f. axe de projection, ligne de terre.
oś spółrzędnych 189 — n. Koordinatenaxe — f. axe de coordonnées.
Ośmiościan — n. Oktaeder — f. octaèdre.
Oświetlenie środkowe — n. centrale Beleuchtung.
Oświetlenie równoległe — n. parallele Beleuchtung.
Owijać (linię, powierzchnię) — n. umhüllen — f. envelopper.
Parabola 10 — n. Parabel — f. parabole.
Paraboloida — n. Paraboloid — f. paraboloïde.
p. obrotowa 133 — n. Umdrehungsparaboloid — f. paraboloïde de révolution.
Parametr — n. Parameter — f. paramètre.
Perspektograf 173 — n. Perspektograph — f. perspectographe.
Perspektywa 161 — n. Perspektive — f. perspective.
p. barw. — n. Farbenpersp.
p. liniowa - f. p. linéaire.
p. powietrzna — n. Luftpersp.
p. światłocienia — n. Schattenpersp.
p. czysta — n. freie P.
p. stosowana — n. angewandte P.
Pęk promieni 3, 6 — n. Strahlenbüschel — f. faisceau des rayons.
Pierścień kołowy 137 — n. Ringfläche — f. surface annulaire.
Pierwiastny — p. oś.
Pięciokąt — n. Fünfeck — f. pentagone.
Pionowy — n. vertical, lotrecht — f. vertical.

Powierzchnia prostoliniowa 138 — n. Regelfläche — f. surface réglée.
p. rozwijalna 86, 139 — n. abwickelbare F. — f. s. développable.
p. skośna 139 — n. windschiefe F. — f. s. gauche.
p. stożkowa 102 — n. Kegelfläche — f. surface conique.
p. stożkowata — p. konoida.
p. śrubowa 143 — n. Schraubenflläche — f. s. héliocoïdale.
p. ś. otwarta 144 — n. offene Schraubenfl. — f. s. h. ouverte.
p. ś. zamknięta 145 — n. geschlossene Schr. — s. h. fermée.
p. topograficzna 157— n. topographische F.—f. s. topographique.
p. walcowa 97 — n. Cylinderfläche — f. s. cylindrique.
p. wichrowata — p. pow. skośna.
Powłoka — n. Schale, Mantel — f. nappe.
Poziomy — n. horizontal, wagrecht — f. horizontal.
Prawozwrotny — p. linia śrubowa.
Profil śruby 152 — n. Schraubenprofil — f. profil d'une vis.
Promień — n. Strahl, Halbmesser, Radius — f. rayon.
p. kolineacyi 23 — n. Kollineationstrahl — f. r. de collin.
p. linii śrubowej 90—n. Radius einer Schraubenlinie—f. r. d'une hélice.
p. podwójny 7 — n. Doppelstrahl — f. r. double.
p. rzucający 2 — n. projicierender Strahl — f. r. projettant.
Prosta — n. Gerade — f. droite.
p. największego spadku 40 — n. Fallinie — f. ligne de pente.
p. normalna — p. normalny.
p. podstawowa 162 — n. Grundgerade — f. droite fondamentale.
p. poziomu 162 — n. Horizontlinie — f. droite d'horizon.
p. pozioma płaszczyzny 40 — n. Niveaulinie —f. ligne de niveau.
p. zniknienia 2, 24 — n. Verschwindungslinie— f. droite de disparition.
p. zredukowana 179 — n. reducierte G. — f. droite réduite.
Prostokąt — n. Rechteck — f. rectangle.
Prostokątny — n. orthogonal, rechtwinklig, senkrecht — f. orthogonal, rectangulaire.
Prostopadły — n. senkrecht, perpendikulär — f. perpendiculaire.
Prostopadłościan — n. rechtwinkliges Parallelepipedon — f. parallélepipède rectangle.
Prosty — n. gerade — f. droit.
Przecięcie stożkowe — p. stożkowa.
Przeciwbieżny albo przeciwzwrotny 7 — n. ungleichläufend.
Przeciwprostokątna — n. Hypotenuse — f. hypoténuse.
Przyprostokątna — n. Kathete — f. cathète.

Przekątna — n. Diagonale — f. diagonale.
Przenikanie się 66, 120 — n. Durchdringung — f. pénétration totale.
Punkt — n. Punkt — f. point.
p. dzielenia 176 — n. Teilungspunkt — f. p. de division.
p. główny 162 — n. Hauptpunkt — f. point principal.
p. n-krotny 77 — n. n-facher P. — f. point n-tiple
p. oczny 162 — n. Auge, Augenpunkt — f. point de l'oeil.
p. oddalenia 162 — n. Distanzpunkt — f. point de distance.
p. osobliwy 77, 85 — n. singulärer P. — f. point singulier.
p. podwójny 7, 77 — n. Doppelpunkt — f. p. double.
p. przecięcia — n. Schnittpunkt — f. p. d'intersection.
p. przegięcia 77 — n. Wendepunkt — f. p. d'inflexion.
p. siodłowy 157 — n. Sattelpunkt, Jochpunkt.
p. spłaszczenia 115 — n. Flachpunkt — f. point d'aplatissement
p. styczności — n. Berührungspunkt — f. p. de contact.
p. szczytowy 157 — n. Gipfelpunkt.
p. wielokrotny 77 — n. mehrfacher P. — f. point multiple.
p. wierzchołkowy — p. punkt szczytowy.
p. zagłębienia 157 — n. Muldenpunkt.
p. zniknienia 2 — n. Verschwindungspunkt—f. p. de disparition.
p. zwrotu 1-go rodzaju 77 — n. Rückkehrpunkt.
p. zwrotu 2-go rodzaju 77 — n. Schnabelpunkt.
p. zredukowany 179 — n. reducierter P. — f. p. réduit.

Ramię (kąta) — n. Schenkel — f. côté.
Redukcya 179 — n. Reduktion — f. réduction.
Rozwijalny — p. powierzchnia.
Rozwinięcie 61 — n. Abwickelung, Netz — f. développement.
Rozwinięta koła 81 — n. Kreisevolvente — f. développante du cercle.
Równoległobok — n. Parallelogramm — f. parallélogramme.
Równoległościan — n. Parallelepipedon — f. parallélépipède.
Równoległy 1 — n. parallel — f. parallèle.
Równoleżnik 124 — n. Parallelkreis — f. cercle parallèle.
Równość (figur) 6, 23 — n. Gleichheit — f. égalité.
Równoświetlny — p. linia.
Równobieżny 7 — n. gleichläufend.
Równozwrotny — p. równobieżny.
Rząd (linii, powierzchni) 10, 102, 119 — n. Grad — f. dégré.
Rzut 2 — n. Projektion — f. projection.
r. aksonometryczny 188 — n. axonometrische P. — f. pr. axonométrique.

Rzut poziomy 31 — n. Grundriss — f. pr. horizontale.
r. pionowy 31 — n. Aufriss — f. pr. verticale.
r. boczny 35 — n. Seitenriss — f. pr. latérale
r. prostokątny 21 — n. orthogonale Pr. — f. p. orthogonale.
r. równoległy 21 — n. Parallelprojektion — f. pr. parallèle.
r. środkowy 2 — n. Centralprojektion — f. pr. centrale.
r. topograficzny 156 — n. topographische Pr. — f. pr. topographique.
Rzutowy 3 i nast. — n. projektiv — f. projectif.
Sferoida 133 — n. Sphäroid — f. sphéroïde.
Siatka — p. rozwinięcie.
Sinusoida 83 — n. Sinusoide — f. sinusoïde.
Skala — n. Massstab — f. échelle.
s. obrazu 199 — n. Bildmassstab — f. échelle d'image.
s. osiowa 199 — n. Axenmassstab — f. échelle des axes.
s. spadku 158 — n. Gefällemassstab — f. échelle de pente.
Sklepienie — n. Wölbung, Gewölbe — f. voûte.
s. konoidalne 141 — f. trompe conoïde.
s. krzyżowe (zag. 187) — n. Kreuzgewölbe — f. voûte d'arête.
Skośny — n. windschief — f. gauche.
Spiralna 82 — n. Spirale — f. spirale.
Spółczynnik skróceń 194 — n. Verkürzungsverhältnis — f. coefficient de raccourcissement.
Spółrzędna 189 — n. Koordinate — f. coordonnée.
Sprzężony 9, 12, 13 — n. konjugirt — f. conjugué.
Stosunek 5 — n. Verhältnis — f. rapport.
st. anharmoniczny albo st. podwójnego podziału — n. anharmonisches V., Doppelverhältnis — f. rapport anharmonique.
Stożek — n. Kegel — f. cône.
s. kierunkowy 87 — n. Richtungskegel — f. cône de direction.
s. kołowy 10, 102 — n. Kreiskegel — f. cône du 2 dégré.
s. obrotowy — n. Umdrehungskegel — f. cône de révolution.
Stożkowa 10 — n. Kegelschnitt — f. conique, section conique.
Styczna — n. Tangente — f. tangente.
Symetryczny — n. symmetrisch — f. symmétrique.
Szereg punktów 3, 6 — n. Punktreihe — f. ponctuelle.
Sześcian foremny — n. Würfel — f. cube.
Szyjny — p. koło i linia śrubowa.
Ściana — n. Seitenfläche — f. face.
Ściśle-styczny — p. płaszczyzna.
Ślad 34, 37, 96, 164 — n. Spur — f. trace.

Ważniejsze omyłki druku.

		zamiast	czytaj
Str.	5 margines	nie skończoności	w nieskończoności
„	7 wiersz 10 od góry	rzuczający	rzucający
„	8 „ 14 od dołu	równoległe	równoległe.
„	10 „ 7 „	sin AOD/sin BOC	sin AOB/sin BOC
„	11 „ 8 od góry	dowolną,	dowolną
„	21 „ 8 od dołu	C	B
„	21 „ 8 „	B	C
„	22 „ 1 „	A'	A
„	38 „ 11 od góry	liczbą	liczbę
„	41 „ 13 „	A'	A',
„	45 margines	nna	Inna
„	62 wiersz 13 i 14 od d.	mogą się albo przecinać	mogą albo przecinać się
„	63 margines	proste najwięk-	i proste najwięk-
„	65 wiersz 15 od dołu	punku	punktu
„	74 — —	fig. 85.	fig. 58.
„	75 wiersz 10 „	A_1CA_1'	A_1CA_1''
„	86 „ 13 „	koła	koła,
„	94 „ 6 od góry	J''	I''
„	102 „ 1 „	E_1	E
„	102 „ 3 „	K,	K',
„	104 „ 12 „	metoda pierwsza	metody pierw[illegible]ej
„	123 „ 2 od dołu	długości	długości przyb[illegible]nej
„	124 „ 5 od góry	równoległe	równolegle
„	124 „ 10 „	a_3	a_2
„	126 „ 12 i 13 od g.	promień CK' koła k', równoległy do p.	prostą CK', ró[illegible]ległą do p.
„	127 „ 1 od góry	AD	$F'D$
„	127 „ 2 „	AD	$F'D$
„	136 „ 10 „	prawęj	prawej
„	137 „ 3 od dołu	wysokość linii	wysokość kroku linii
„	141 „ 5 „	$ł$	l
„	153 „ 19 od góry	kierownicą	kierującą

			zamiast	czytaj
Str. 157	wiersz	21 od dołu	k'	k''
„ 157	„	18 „	l''	k''
„ 157	„	16 „	k	k'
„ 159	„	18 i 17 od d.	opuścić: (por. zag. 140).	
„ 164	„	5 od góry	k'	k''
„ 164	„	12 od dołu	krawędzi	tworzących
„ 169	„	5 „	k'	k_1
„ 169	„	1 „	dzielą się	dzielone są
„ 174	„	15 od góry	wnikania	przenikania
„ 175	„	15 od dołu	c_1	e_1
„ 184	„	1 od góry	płaszczyzna styczna	płaszczyznę styczną
„ 188	„	3 od dołu	T_{01}	T_0
„ 188	„	1 „	równoległą	prostopadłą
„ 189	„	6 „	koła	kuli
„ 205	„	1 „	powierzchnię	powierzchnię badaną
„ 210	„	20 od góry	strzałki	wskazówki
„ 243	„	— fig. 141	2	z
„ 245	„	1 od dołu	równa	równą
„ 251	„	19 „	O^0	O_0

Figury 73a i 73b, 89 i 90, 91 i 92, 108 i 109 odpowiadają sobie wzajemnie, lecz nie są podług jednej skali wykonane.

Na fig. 106 należy linię $ADECBA$ oznaczyć przez k.

Na fig. 107 elipsę $M'L'N'K'$ oznaczyć należy przez k', rzut pionowy odpowiedni — przez k'', prostą $S'O'$ — przez a', prostopadłą, spuszczoną na ś rzutu z punktu przecięcia prostych e_2 i e_3 — przez a''. Na prostej e_3 zamiast K'', O'', L'' winno być K''', O''', L'''; na prostopadłej do e_3 w punkcie O''' zamiast S'' winno być S'''.

Na fig. 111-ej należy oznaczyć: koło $ADCB$ przez k, elipsę $M'Q'N'$ przez e', elipsę $R''S''U''$ przez e''; zamiast T czytaj T''.

Na fig. 154 łuk O^0O_0 został błędnie wykreślony ze środka O promieniem OO_0, zamiast ze środka K promieniem KO_0.

16716