

TEORYA SPRĘŻYSTOŚCI

I JEJ ZASTOSOWANIE DO NAUKI O
WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW BUDOWLANYCH
ORAZ DO ZASAD GŁÓWNYCH
STATYKI CIECZY I DYNAMIKI CIECZY.

NAPISAŁ

HIPOLIT JEWNIEWICZ

Profesor Instytutu Technologicznego w Petersburgu.

Wydawnictwo Kasy funduszu imienia prof. Hipolita Jewniewicza
przy Stowarzyszeniu Techników w Warszawie.

WARSZAWA.

Skład główny w księgarni E. Wende i S-ka (T. Hiż i A. Turkuł).

1910.

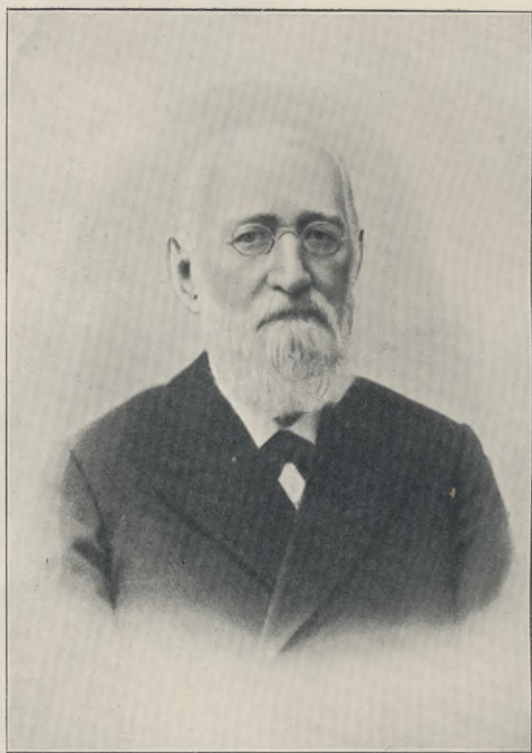
Cena rub. 2.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000301605





Hipolit Jewmierz

TEORYA SPRĘŻYSTOŚCI

I JEJ ZASTOSOWANIE DO NAUKI O
WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW BUDOWLANYCH

ORAZ DO ZASAD GŁÓWNYCH

STATYKI CIECZY I DYNAMIKI CIECZY.

NAPISAŁ

HIPOLIT JEWNIOWICZ

Profesor Instytutu Technologicznego w Petersburgu.

Wydawnictwo Kasy funduszu imienia prof. Hipolita Jewniewicza
przy Stowarzyszeniu Techników w Warszawie.

W A R S Z A W A .

Skład główny w księgarni E. Wende i S-ka (T. Hiż i A. Turkuł).

—
1910.



III 16583

Drukarnia Rubieszewskiego i Wrotnowskiego w Warszawie.

C. 2057
sbt.

Akc. Nr. 3532/50

Od Komitetu funduszu imienia prof. Hipolita Jewniewicza przy Stowarzyszeniu Techników w Warszawie.

Komitet funduszu imienia profesora Hipolita Jewniewicza przy Stowarzyszeniu Techników w Warszawie, jako pierwsze swe wydawnictwo postanowił wydrukować dotychczas nigdzie nie wydane dzieło ś. p. prof. H. Jewniewicza p. t. „Teorya sprężystości“.

Ponieważ rękopis był przygotowany przez autora do użytku słuchaczy Instytutu Technologicznego w Petersburgu, przeto trzeba było przełożyć go na język ojczysty. Przed przystąpieniem do druku praca niniejsza została przejrzana przez profesora Wszechnicy Jagiellońskiej Kazimierza Żurawskiego i innych matematyków, którzy orzekli, że mimo kilkunastu lat, jakie ubiegły od czasu napisania dzieła, nie straciło ono swej wartości.

Słownictwo zastosowano w przekładzie powszechnie w dziełach polskich tej treści przyjęte; zachowano jednak pewne wyrażenia odrębne oryginału, jako cechy znamienne tej pracy.

Na czele dzieła podano życiorys autora.

Komitet uważa za swój obowiązek wyrażenie głębokiego uznania p. inż. Jakóbowi Heilpernowi, który bezinteresownie poprawił i przygotował do druku rękopis przekładu, dorobił spis przedmiotów i skorowidz alfabetyczny wyrażen technicznych oraz wykonał mozolną pracę korekty drukarskiej.

Hipolit Dominik Jewniewicz.

Hipolit Dominik Jewniewicz urodził się 4 sierpnia 1831 r., we wsi Kiemin, położonej w powiecie Sieńskim gub. Mohyłowskiej i był jedynym synem Antoniego i Maryi z Lipińskich.

Z domu rodzicielskiego wyniósł staranne wychowanie domowe, a oddany do szkół wychowywał się początkowo w Orszy w szkole powiatowej, poczem uczęszczał do gimnazyum w Mohyłowiu, następnie w Pskowie, gdzie zdobył patent dojrzałości wraz z medalem srebrnym.

Nauki wyższe pobierał w Uniwersytecie w Petersburgu na wydziale fizyczno-matematycznym, który ukończył chlubnie w r. 1855. Dzięki swym wybitnym zdolnościom i rzadko spotykanej pracowitości, już na ławie szkolnej potrafił zwrócić na siebie uwagę ówczesnych profesorów, z którymi następnie utrzymywał bliższe stosunki przez długie lata po ukończeniu Uniwersytetu.

Swoją działalność pedagogiczną rozpoczął Jewniewicz w r. 1856 w Instytucie Technologicznym Petersburskim, który wówczas był szkołą średnią. Podróż za granicę, którą odbył w latach 1861—62, w celach naukowych, dla zbadania teorii budowy maszyn i zwiedzenia fabryk maszyn, skierowała jego działalność na tory matematyki stosowanej, której życie całe poświęcił. Gdy Instytut Technologiczny zostaje przekształcony ze szkoły średniej na wyższy zakład naukowy, Jewniewicz zajmuje odrazu wybitne w nim stanowisko, którego nie opuszcza przez lat 47, do końca życia, kształcąc umysły i serca oddanej mu młodzieży.

W r. 1868 Jewniewicz zostaje dziekanem Instytutu Technologicznego i stanowisko to piastuje przez lat 19, czyli przez cały okres trwania tego urzędu, jednając sobie na niem wielką popularność i wielką miłość młodzieży za roztropne, a wyrozumiałe i ojcowskie jej traktowanie. Na stanowisku tem wielce się on przyczynił do rozrostu i rozkwitu Instytutu, ściągając swymi wykładami liczne zastępy młodzieży.

Jego wykłady mechaniki stosowanej, hydrauliki, teorii sprężystości, teorii wytrzymałości materyałów budowlanych, mechaniki elementarnej

i analitycznej, teorii prawdopodobieństwa, teorii rachunku kwaternionowego, ściągały liczne zastępy słuchaczy, wpajały w młodzież prawdziwe zamiłowanie do nauki przez lat 45 z górą. Przepelniony miłością do szerzenia wiedzy wśród pokoleń młodych, z którymi nawet w wieku późniejszym przedziwnie potrafił obcować z katedry, hypnotyzując audytorium świeżością i młodością swego umysłu, Jewniewicz chętnie rozszerzał zakres swych wykładów.

W r. 1863 rozpoczyna on wykłady mechaniki w Petersburskiej Akademii Inżynierów Marynarki, w r. 1884 obejmuje katedrę mechaniki stosowanej i hydrauliki w Instytucie Inżynierów Cywilnych, który własnym nakładem wydaje dzieło jego: „Kurs praktyczny mechaniki“; wreszcie w r. 1891 zostaje zaproszony jako profesor do Instytutu Inżynierów Elektrotechników i w znacznej mierze przyczynia się osobistą pracą do zorganizowania tej uczelni, która w uznaniu wysokich jego zasług mianuje go w r. 1895 członkiem honorowym Rady Instytutu, a w r. 1900 inżynierem honorowym elektrotechniki.

Niestrudzona działalność profesorska w czterech wyższych zakładach naukowych bynajmniej nie wyczerpuje jego zasług i nie stanowi jedynej ujścia dla jego pracy i energii.

Poza działalnością profesorską H. Jewniewicz bierze czynny udział w życiu społecznym, w szeregu komisji naukowych, w spełnianiu licznych specjalnych poleceń rządowych, w ekspertyzach, konkursach, ocenach miejskich, oraz w towarzystwach naukowych, wreszcie wydaje szereg własnych prac naukowych.

Za pracę „Podręcznik do ustalenia praw wytrzymałości materiałów budowlanych, wraz z teorią sprężystości ciał stałych“ Uniwersytet Petersburski w r. 1868 udziela Jewniewiczowi stopień magistra matematyki stosowanej; dzieło to i dziś jeszcze zalicza się do klasycznej literatury zawodowej i celuje zwięzłością i jasnością wykładu czystej teorii pojęć matematycznych i praw w tej dziedzinie.

Wydawany przez lat 13 staraniem Petersburskiego Towarzystwa Techników Słownik techniczny rosyjsko-francusko-angielsko-niemiecki posiadał w osobie Jewniewicza niezmordowanego współpracownika i zawdzięcza mu swoją korektę drukarską.

Artykuły Jewniewicza w czasopiśmie „Inżeniernyj Żurnał“ p. t. „Kilka słów o prawach ruchu wody zaskórnej“ i „O wypływie cieczy przy zmiennym poziomie“, które się zjawiły w r. 1891, zyskały autorowi specjalną nagrodę.

Działalność jego jako członka Towarzystwa Technicznego Petersburskiego jest tak niestrudzona i cenna, iż Towarzystwo to w uznaniu zasług położonych mianuje Jewniewicza swym członkiem dożywotnim.

Siłą wypadków rzucony na obczyznę, oderwany od pnia rodzimego, dla dobra którego w odmiennych warunkach poświęciłby swe życie pracowite, Jewniewicz potrafił utrzymać zawsze związek z krajem rodzinnym i to w sposób podwójny: był on opiekunem i powiernikiem tułaczkiej młodzieży polskiej, która jak i on na obczyźnie szukać musiała nauki, a nadto otwierał jej i dom swój i serce swoje, rozumem, radą i stosunkami służył.

Skromna ofiara, z której się zebrał „Fundusz imienia profesora Hipolita Jewniewicza“ ku uczczeniu 45-letniej pracy jego profesorskiej, jest raczej chęcią wyrażenia zasłużonej czci, niż jej miernikiem.

Prawdziwy obywatel kraju, prof. Jewniewicz dobrze się zasługiwał i technice polskiej. Utrzymywał stały kontakt z redakcją *Przeglądu Technicznego* i w r. 1889 wchodzi w skład Komitetu Redakcyjnego tegoż pisma; drukuje w *Przeglądzie Technicznym* szereg własnych artykułów z dziedziny matematyki stosowanej, pozostaje w ciągłym stosunku z Redakcją „Prac matematyczno-fizycznych“ prof. Dicksteina i Kasą Mianowskiego. Z prac Jewniewicza drukowanych w *Przeglądzie Technicznym* wymieniamy: „Równania hydrauliczne Boussinesq'a i kilka z nich wniosków“ (1889), „Prawa ruchu wód zaskórnych“ (1889), „O wypływie cieczy przy zmiennym poziomie“ (1890), „Zarys cynematyki cieczy“ (1891). I szkolnictwu polskiem Jewniewicz na schyłku swego życia nie odmówił swego bogatego doświadczenia, zdobytego na niwie pedagogiki, biorąc bardzo czynny udział w tworzeniu programów oraz organizacji szkoły średniej technicznej w Warszawie pp. Wawelberga i Rotwanda.

Za tę swoją pracę niestrudzoną, za umiłowanie młodzieży, za pracowitość charakteru, nieskazitelną duszę, za pogodę oblicza, zdobył sobie zasłużone uznanie, miłość i cześć, jakie się rzadko komu w udziale dostają. Swoi i obcy, blizcy i dalecy, składali hołd bezgranicznej czci i wdzięczności sędziwemu starcowi w roku 1902, roku jego jubileuszu 45-letniej działalności profesorskiej.

A drugim aktem hołdu, połączonego ze smutkiem bezgranicznym, był dzień 21 listopada 1905 r., gdy niezliczone tłumy przyjaciół, uczniów, wielbicieli i życzliwych oddawały ostatnią posługę jego śmiertelnym szczątkom.

*Komitet funduszu imienia,
prof. Hipolita Jewniewicza przy Stowarzyszeniu
Techników w Warszawie.*

TREŚĆ DZIEŁA.

Część pierwsza. Teorya sprężystości ciał stałych.

	<i>Str.</i>
Wstęp. 1. Cząsteczki. Siły cząsteczkowe. Przyciąganie i odpychanie. Równowaga naprężona i równowaga naturalna. Odształcenia. Siły sprężystości (naprężenia)	3
2. Sprężystość. Zmiany sprężyste i trwałe.	4
3. Proporcjonalność małych zmian układu względnego cząsteczek ciała do sił sprężystości. Odształcenia.	5

Rozdział I. Własności geometryczne odształceń.

4. Uwagi wstępne. Proste rozciąganie i ściskanie	6
5. Wydłużenie wskutek rozciągania	7
6. Przesuwanie (ściananie).	8
7. Rozciąganie wskutek przesuwania	8
8. Przesuwanie wskutek rozciągania.	9
9. Przesuwanie wskutek przesuwania	10
10. Odształcenie ogólne ciała	10
11. Zależność odształceń składowych od bezwzględnych posunięć punktów ciała	11
12. Warunki odształceń składowych.	14
13. Wzory Euler'a.	15
14. Obroty względne cząstek ciała.	16
15. Wyprowadzenie analityczne wzorów na wydłużenia i przesunięcia	17
16. Elipsoida wydłużeń	19
17. Oznaczenie wydłużeń głównych	22
18. Oznaczenie wydłużeń głównych w przypadkach szczególnych.	26

Rozdział II. O siłach sprężystości.

19. Określenie siły sprężystości	30
20. Równania równowagi ciała sprężystego. Równanie ogólne równowagi	31
21. Równania szczególne równowagi	35
22. Rozmieszczenie sił sprężystych dokoła punktu.	36
23. Elipsoida sprężystości	38

24.	Wyznaczenie sił głównych sprężystości	40
25.	Wyznaczenie największej siły stycznej	42
26.	Równania ruchu ciała sprężystego	45
27.	Praca sił poruszających. Zasada pracy najmniejszej sił sprężystych	46
28.	Potencjał sił sprężystych.	49

Rozdział III. Zależność sił sprężystości od odkształceń składowych.

29.	Współczynniki sprężystości	53
30.	Ciała o płaszczyznach symetrii	57
31.	Ciała równozwrotnie sprężyste	58
32.	Współczynnik zmian poprzecznych	60
33.	Wyznaczalność zagadnień, odnoszących się do odkształceń. Warunki znoszące posunięcia wspólne wszystkim punktom ciała	63
34.	Uwagi o ciałach, których jeden wymiar lub dwa wymiary są nieskończenie małe	66

Część druga. Zastosowania teorii sprężystości.

Wytrzymałość materiałów budowlanych.

Wstęp.	35. Uwagi wstępne	69
36.	Ciała graniastosłupowate. Najprostsze ich odkształcenia.	70
37.	Przekroje i włókna po odkształceniu	71
38.	Wzory Green'a.	73

Rozdział IV. Rozciąganie, ściskanie i przesuwanie (ściananie) ciał graniastosłupowatych.

39.	Rozciąganie albo ściskanie, przy którym ujawnia się zmiana wymiarów poprzecznych.	76
40.	Warunek wytrzymałości	78
41.	Rozciąganie albo ściskanie, przy którym nie ujawniają się zmiany poprzeczne.	80
42.	Rozciąganie albo ściskanie, przy uwzględnieniu ciężaru własnego graniastosłupa.	81
43.	Ciała o wytrzymałości jednostajnej	83
44.	Przesuwanie w graniastosłupach i wytrzymałość ich złożona przy rozciąganiu i przesuwaniu	86
45.	Tablica I współczynników	90

Rozdział V. Skręcanie.

46.	Skręcanie walca o podstawie kołowej	92
47.	Warunek wytrzymałości	95
48.	Skręcanie prętów o obwodzie niekołowym	95
49.	Skręcanie walca kołowego około osi pozaśrodkowej (mimośrodkowej)	103
49 ^a .	Skręcanie walca eliptycznego	104
50.	Skręcanie graniastosłupa, mającego za podstawę trójkąt równoboczny.	106
51.	Skręcanie prostopadłościanów	108
52.	Skręcanie rur	112
53.	Tablica II współczynników	114

Rozdział VI. Wyginanie.

54.	Układ naprężeń w punktach przekroju graniastoslupa wyginanego	115
55.	Równanie włókna środkowego	119
56.	<i>I. Jeden koniec graniastoslupa osadzony jest nieruchomo, drugi zaś jest swobodny.</i> Wyginanie wywołuje siła, działająca na koniec swobodny	123
57.	Wyginanie następuje pod obciążeniem, rozłożonem równomiernie na całej długości graniastoslupa	124
58.	Wyginanie wywołują dwie siły równoległe	125
59.	<i>II. Jeden koniec graniastoslupa jest osadzony nieruchomo, drugi zaś jest podparty.</i> Wyginanie wywołuje siła, działająca w pewnej odległości od końca osadzonego	127
60.	Wyginanie następuje pod obciążeniem rozłożonem równomiernie na całej długości graniastoslupa	129
61.	<i>III. Oba końce graniastoslupa osadzone są nieruchomo.</i> Wyginanie wywołuje jedna siła	129
62.	Wyginanie następuje pod obciążeniem rozłożonem równomiernie	131
63.	<i>IV. Oba końce graniastoslupa są podparte swobodnie.</i> Wyginanie wywołuje jedna siła	132
64.	Wyginanie powstaje pod obciążeniem rozłożonem równomiernie na całej długości	133
65.	Wygięcie Lamarle'a	134
66.	<i>V. Graniastoslup ma więcej niż dwa punkty podparcia, leżące na jednej prostej.</i> Twierdzenie o trzech momentach	135
67.	Przęsła jednakowej długości i jednakowo obciążone	138
68-71.	<i>VI. Wyginanie pod działaniem sił nieprostopadłych do osi graniastoslupa.</i> Siła działa na koniec swobodny belki, w drugim końcu osadzonej	142
72.	Warunek wytrzymałości graniastoslupów wyginanych	154
73.	Wyginanie stożka	156
74.	Warunek wytrzymałości dla klina	157
75.	Ciała o wytrzymałości jednostajnej na wyginanie	158
76.	Tablica III współczynników	160
77.	<i>VII. Wyginanie belek o osi krzywej.</i>	160

Rozdział VII. Zadanie Saint-Venant'a.

78.	Określenie zadania	167
79.	Wyznaczenie posunięć u , v i w	168
80.	Wyznaczenie współczynników	172
81.	Obwód symetryczny	177
82.	Oznaczenie funkcji B_0 , B_1 i B_2 dla obwodu eliptycznego	178
83.	Przypadki szczególne odkształcenia ciała graniastoslupowatego. Rozciąganie albo ściskanie. Skręcanie. Wyginanie płaskie. Wyginanie ukośne	180
84.	Warunki wytrzymałości złożonej graniastoslupów	184
85.	Wyginanie i skręcanie	185
86.	Rozciąganie, wyginanie i skręcanie	189
87.	Praca sił wewnętrznych ciała graniastoslupowatego, powstająca podczas jego odkształcania	190
88.	Zastosowanie zasady pracy najmniejszej sił wewnętrznych	195

Rozdział VIII. Wytrzymałość naczyń kulistych i walcowych na ciśnienie prostopadłe do ścian.

89.	Wytrzymałość naczyń kulistych. Kula pusta i kula pełna	202
90.	Wytrzymałość naczyń walcowych	207
91.	Warunek wytrzymałości warstwy walcowej.	210
92.	Rura zaopatrzona w dna	211
93.	Wzory przybliżone na grubość ścianki naczynia	212
94.	Naczynie walcowe o obwodzie eliptycznym przekroju	217

Rozdział IX. Drgania nieskończenie małe ciała sprężystego. Przenoszenie się drgań w ośrodku sprężystym.

95.	Równania równowagi drutu bardzo cienkiego	222
96.	Drgania struny naprężonej	225
97.	D'Alembert'a całka zupełna	234
98.	Drgania płyt	236
99.	Drgania płyty prostokątnej	240
100.	Drgania płyty okrągłej	244
101.	Drganie ciężaru zawieszzonego na końcu pręta pionowego	252
102.	Ten sam przypadek przy uwzględnieniu ciężaru własnego pręta	255
103.	Drgania pręta pod wpływem sił wywołujących wygięcie	259
104.	Drgania pręta sprężystego prostego podczas skręcania.	263
105.	Rozchodzenie się drgań w ośrodku równozwrotnym o sprężystości stałej	265
106.	Rozchodzenie się drgań poprzecznych w ośrodku krystalicznym	271

Równania zasadnicze statyki cieczy i dynamiki cieczy.

107.	Ciecz. Ciśnienie hydrostatyczne. Równania ogólne równowagi cieczy	285
108.	Równania ruchu ciała ciekłego. Równanie znamienne gazów.	286
109.	Hypoteza Newton'a. Równania Navier'a. Współczynnik tarcia wewnętrznej cieczy.	288

Ważniejsze omyłki druku.

Str.	wiersz	zamiast:	winno być:
15	5 od dołu	$\frac{d^2y}{dz^2} = 0$	$\frac{d^2u}{dz^2} = 0$
23	2 od góry	Δ^r	Δ_r
39	9 od dołu	nazwał <i>elipsoidą</i>	nazwał również <i>elipsoidą</i>
196	11 i 10 od dołu	tego względem	tego równania względem
222	10 „ „	cienkiej ω	cienkiej, ω

CZĘŚĆ PIERWSZA.

—

TEORYA SPRĘŻYSTOŚCI CIAŁ STAŁYCH.

WSTĘP.

1. W celu wyjaśnienia zjawisk, występujących w ciałach w przyrodzie, pod działaniem sił zewnętrznych, np. zjawiska kurczenia i rozszerzania się ciał, zjawiska przenoszenia się ciśnień z jednej części ciała na inną, zjawiska takiegoż przenoszenia się wstrząśnień i t. p., należy przyjąć, że ciała w przyrodzie składają się z cząsteczek oddzielnych, nie stykających się, lecz połączonych jednak z sobą w pewien sposób. Na czym właściwie polega istota tych połączeń i w czym tkwi przyczyna ich istnienia, tego nie wiemy.

Ponieważ połączenia te zmieniają warunki ruchu cząsteczek ciała, gdy na nie działają siły zewnętrzne, przeto możemy, zgodnie z zasadami mechaniki, zastąpić działanie tych połączeń pewnymi siłami, które też zwać będziemy *cząsteczkowymi* czyli *molekularnymi*, albo ogólniej *siłami wewnętrznymi ciała*.

Skoro przyjmujemy istnienie sił wewnętrznych, to należy przypuścić, że są one dwojakie: *przyciągające* i *odpychające*. Zarówno pierwsze jak i drugie należy uważać za *funkcye ciągłe odległości wzajemnej cząsteczek* i to za *funkcye, które z powiększaniem się odległości między cząsteczkami nadzwyczaj szybko maleją*, tak, że wartości tych funkcji stają się równe zeru przy odległościach zaledwie dostrzegalnych przy naszych spostrzeżeniach.

Funkcya, wyrażająca prawo przyciągania cząsteczkowego, maleje wolniej aniżeli funkcya, wyrażająca prawo odpychania. Ponieważ dla pewnej odległości cząsteczek przyciąganie równa się odpychaniu, przeto po zwiększeniu tej odległości, przyciąganie będzie większe aniżeli odpychanie, a po zmniejszeniu, naodwrot, odpychanie stanie się większem aniżeli przyciąganie.

Jeżeli ciało, na które działają siły zewnętrzne, znajduje się w równowadze, to siły te równoważą się z siłami wewnętrznymi ciała. Taki

przypadek równowagi, zachodzący zwykle w rzeczywistości, nazywamy *równowagą naprężoną*, dla odróżnienia od przypadku urojonego, zwanego *równowagą naturalną*, którą wyobrażamy sobie jako istniejącą, gdy sił zewnętrznych niema, a więc gdy siły wewnętrzne ciała znajdują się same w równowadze.

Przypuścmy, że na ciało, znajdujące się w równowadze naturalnej, zaczynają działać pewne siły zewnętrzne. Siły te naruszają równowagę sił wewnętrznych, wskutek czego układ względny cząsteczek ciała i ich odległości wzajemnie zaczną się zmieniać, a wraz ze zmianą tych odległości zmieniają się także i naprężenia sił wewnętrznych. Tak więc pod działaniem sił zewnętrznych na cząsteczki ciała powinny powstać nowe siły wewnętrzne, wzajemnie się nie równoważące. Rzecz jasna, że zmiana położenia cząsteczek ciała i zmiana jego kształtu, czyli *odkształcenie* ciała, będzie trwało dopóki nowe siły cząsteczkowe nie zrównoważą się z siłami zewnętrznymi i ciało w ten sposób nie przejdzie ze stanu równowagi naturalnej do stanu równowagi naprężonej. Oczywiście, że jeżeli wielkość sił zewnętrznych jest znaczna, to zanim siły wewnętrzne będą mogły zrównoważyć się z siłami zewnętrznymi, może łączność cząsteczek ciała zostać zerwaną, t. j. odległości pomiędzy cząsteczkami w niektórych miejscach mogą osiągnąć taką wielkość, przy której przyciąganie stanie się równe zeru i wówczas ciało rozpadnie się na części.

Przypuścmy teraz, że siły zewnętrzne, które zmieniły kształt ciała, przestały działać. Wtedy cząsteczki znowu zaczną zmieniać swoje położenie wzajemne, lecz w kierunku odwrotnym. Istotnie tam, gdzie ciało było rozciągane, t. j. gdzie przyciąganie jest silniejsze aniżeli odpychanie, cząsteczki, nie wstrzymywane już przez siły zewnętrzne, będą się zbliżały, tam zaś, gdzie ciało było ściskane, czyli gdzie odpychanie jest silniejsze aniżeli przyciąganie, tam cząsteczki będą się oddalały. Skoro więc siły zewnętrzne przestaną działać, to znowu rozpocznie się odkształcanie ciała, przyczem będzie ono wracało do swego kształtu pierwotnego, zupełnie podobnie, jak sprężyna wygięta wraca do stanu początkowego z chwilą, gdy siła, która ją wygięła, przestaje działać. Zgodnie z tą ostatnią własnością ciał, różnice sił wzajemnie się przyciągających i odpychających, z sobą się nie równoważących, działających między każdą parą zbliżonych do siebie punktów ciała podczas działania na to ciało sił zewnętrznych, nazywamy *siłami sprężystości* czyli *naprężeniami*.

2. Z objaśnień powyższych nie należy jednakże wysnuwać wniosku, że wszystkie ciała i zawsze, po ustaniu działania sił zewnętrznych, wracają w zupełności do poprzedniego swojego kształtu. Przy dostatecznie wielkiej zmianie układu względnego cząsteczek ciała,

może się zdarzyć, że powrót do kształtu pierwotnego skutecznia się tylko częściowo i skutek tego ciało przejdzie w nowy stan naturalny, różniący się od pierwotnego układem cząsteczek i kształtem zewnętrznym. W tym przypadku mówi się, że *sprężystość ciała została naruszona* przez działanie sił zewnętrznych. Wartości zaś zmian wzajemnych odległości cząsteczek, przy których sprężystość zostaje naruszona, nazywano *granice zmian bezpiecznych*.

Zmiany wzajemnych odległości cząsteczek ciała, wywołane działaniem sił zewnętrznych, należy ogólnie uważać za składające się z dwóch części: ze *zmian sprężystych*, znikających po ustaniu działania sił zewnętrznych i *zmian trwałych*, pozostających w ciele na zawsze.

Należy jeszcze zaznaczyć, że na wielkość zmian układu względno cząsteczek ciała może mieć wpływ dłuższy lub krótszy czas działania sił wewnętrznych i bezwładność poruszanych cząsteczek ciała. Spostrzeżenia wykazują, że przy długotrwałem działaniu sił, zmiany, należące do bezpiecznych (nieszkodliwych), mogą, wzrastając nieograniczenie, przekroczyć granicę tych zmian bezpiecznych. Z tego powodu rozróżnia się granice zmian bezpiecznych *czasowych* i *długotrwałych*. Te ostatnie, oczywiście, zawsze są mniejsze aniżeli pierwsze. Co się zaś tyczy bezwładności cząsteczek poruszanych, to siła ta ujawnia szczególnie wyraźne działanie przy szybkich zmianach stanu ciała, jak np. przy uderzeniach. W takim przypadku, skutek działania bezwładności może nie tylko sprężystość ciała zostać naruszoną, ale i samo ciało może uleść zupełnemu zburzeniu i rozpaść się na części.

3. Na zakończenie dodamy, że we wszystkich badaniach niniejszej teorii będą rozważane tylko przypadki bardzo małego odkształcenia ciała, t. j. takiego odkształcenia, przy którym wzajemne odległości cząsteczek otrzymują przyrosty (dodatnie lub ujemne) bardzo małe w stosunku do tych odległości. Takie ograniczenie jest niezbędne nie tylko dlatego, że upraszcza badanie, ale i z powodu, że zależność między siłami zewnętrznymi a wywoływanymi przez nie zmianami jest nam znana dostatecznie dokładnie tylko wtedy, gdy te zmiany mają bardzo małe wartości. Co się tyczy tej zależności, to doświadczenie uczy, że bardzo małe zmiany są proporcjonalne do sił zewnętrznych. Skoro więc uwzględnimy, że siły sprężystości równoważą się z siłami zewnętrznymi, to dojdziemy do wniosku, że *bardzo małe zmiany układu względno cząsteczek ciała są proporcjonalne do sił sprężystości*.

Ten ostatni wniosek, stanowiący jedno z założeń podstawowych teorii, powinien być przyjęty albo jako wynik doświadczenia, albo jako hipoteza, która, z powodu zgodności wyprowadzanych z niej wniosków z doświadczeniem, osiągnęła wysoki stopień prawdopodobieństwa.

ROZDZIAŁ I.

Własności geometryczne odkształceń.

4. Wykład teorii sprężystości zaczniemy od badania zmian, które mogą powstać w układzie względnym punktów ciała, czyli od wyjaśnienia własności geometrycznych tych zmian, nie biorąc na razie pod uwagę działania sił, wywołujących te zmiany.

Każda z wielkości, zdolna, zgodnie z naszymi pojęciami, do zmian podczas odkształcania ciała, otrzyma wskutek tego odkształcania przyrost. Te przyrosty uważać będziemy za tak małe w stosunku do samych wielkości, że w obliczenia nasze będziemy wprowadzali tylko pierwsze potęgi tych przyrostów.

Zaczniemy od rozważania najprostszyc przypadków odkształcenia ciała.

Proste rozciąganie albo ściskanie. Przypuśćmy, że cząsteczki ciała, które zmieniło swój kształt pod działaniem sił zewnętrznych, zadość czyniły przy przenoszeniu się następującym warunkom: a) wszystkie one poruszały się po prostych równoległych do pewnej prostej λ ; b) cząsteczki, należące do tego samego przecięcia, prostopadłego do λ , przebyły równe długości; c) cząsteczki, należące do różnych przecięć, prostopadłych do λ , przeszły nierówne długości, lecz poruszały się tak, że wzajemna odległość dwóch takich przecięć, otrzymała przyrost proporcjonalny do tej odległości. Współczynnik proporcjonalności, czyli stosunek przyrostu odległości przecięć do odległości tych przecięć, będziemy oznaczali przez Δ_1 .

Przyjmujemy w ciele, przed jego odkształceniem, dwa punkty A i B (rys. 1), leżące na kierunku λ ich ogólnego poruszania się i prowadzimy dwa przecięcia, prostopadłe do λ , z których pierwsze przechodzi przez punkt A , drugie zaś przez punkt B .

Ponieważ, zgodnie z istotą niniejszej teorii, zajmują nas sprawy dotyczące zmian układu względnego punktów ciała, nie zaś rozkład

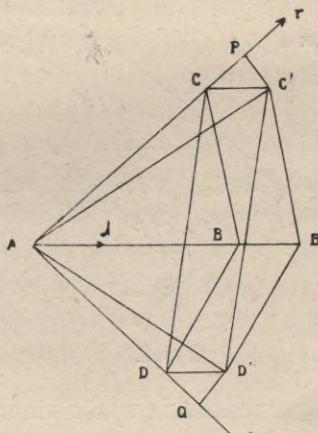
bezwzględny punktów tych w przestrzeni, przeto i w przypadku danym możemy pierwsze przecięcie uważać za nieruchome, drugie zaś za przesunięte w nowe położenie, w którym odległość wzajemna AB' tych przecięć równa się rzeczywistej odległości między temi przecięciami po odkształceniu ciała. Stosunek przyrostu BB' odległości AB danych przecięć do teje odległości AB będzie

$$\Delta_\lambda = \frac{BB'}{AB} \dots \dots \dots (1).$$

Stosunek ten nazywamy *względem wydłużeniem (rozciągnięciem) w kierunku λ* . Oznacza on oczywiście przyrost jednostki długości ciała, uważany w kierunku λ i jest *wielkością oderwaną*.

Zaznaczymy jeszcze, że gdyby odległość AB dwóch przecięć danych ciała, prostopadłych do λ , zmniejszyła się o długość BB' , to wówczas Δ_λ byłoby *wielkością ujemną* i wyrażałoby *względne skrócenie ciała w kierunku λ* .

5. Wydłużenie wskutek rozciągania. Zmianom odległości wzajemnej cząsteczek, w kierunku λ , towarzyszą niezbędnie zmiany odległości w rozmaitych innych kierunkach; możemy przeto zająć się oznaczeniem wydłużenia względnego Δ_r w kierunku r , wywołanego przez wydłużenie Δ_λ . W celu rozwiązania tego zadania prowadzimy przez punkt A ciała prostą, równoległą do danego kierunku r , przecinającą w punkcie C płaszczyznę prostopadłą do λ , przechodzącą przez punkt B . Posunięcie CC' punktu C będzie równe posunięciu BB' punktu B i do tego posunięcia równoległe, a zatem odległość AC po odkształceniu ciała, zamienia się na AC' , t. j. powiększa się o długość, równą różnicy $AC' - AC$. Do oznaczenia Δ_r mamy:



Rys. 1.

$$\Delta_r = \frac{AC' - AC}{AC} \quad (\text{p. rys. 1}).$$

Ponieważ zmiany w układzie względnym punktów ciała przyjmujemy jako bardzo małe, przeto długości BB' i CC' uważać musimy jako bardzo małe w stosunku do AB i AC , a więc i kąt CAC' musi być bardzo mały. Po wyprowadzeniu z punktu C' prostopadłej $C'P$ do prostej AC , można, z dokładnością do wielkości bardzo małych drugiego stopnia, przyjąć $AC' = AP$ i $\Delta_r = \frac{CP}{AC}$; a ponieważ $CP = CC' \cos(r, \lambda) =$

$$= BB' \cos(r, \lambda) \text{ i } AC = \frac{AB}{\cos(r, \lambda)}, \text{ przeto do oznaczenia } \Delta_r \text{ służy wzór:}$$

$$\Delta_r = \Delta_\lambda \cdot \cos^2(r, \lambda) \dots \dots \dots (2).$$

6. Przesuwanie (ścianianie). Przypuśćmy, że cząsteczki ciała podczas odkształcania poruszały się przy zachowaniu następujących warunków: a) wszystkie one poruszały się w kierunkach równoległych do prostej μ , prostopadłej do prostej λ ; b) cząsteczki, należące do tego samego przecięcia, prostopadłego do λ , przeszły równe długości; c) cząsteczki, należące do różnych takich przecięć, przeszły nierówne długości, ale poruszały się tak, że różnica długości przebytych przez punkty dwóch takich przecięć, jest proporcjonalna do odległości wzajemnej tych przecięć. Współczynnik proporcjonalności będziemy oznaczali w danym przypadku przez $g_{\lambda, \mu}$.

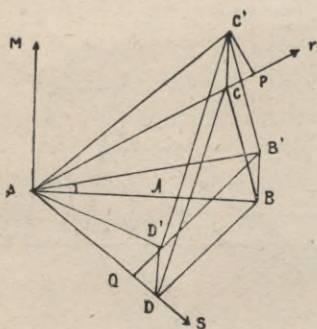
Przyjmujemy wewnątrz ciała dwa punkty A i B (rys. 2), leżące na prostej równoległej do kierunku λ , i przez każdy z tych punktów prowadzimy przecięcie prostopadłe do λ . Przyjmując pierwsze z nich, przechodzące przez punkt A , za nieruchome, a drugie, przechodzące przez punkt B , za przesunięte równoległe do kierunku μ o długość BB' , otrzymamy:

$$g_{\lambda, \mu} = \frac{BB'}{AB} \dots \dots (3).$$

Ten stosunek będziemy nazywali *przesunięciem względnym przecięć prostopadłych do prostej λ w kierunku μ* , a płaszczyznę prostopadłych do siebie kierunków λ i μ — *płaszczyzną przesuwania (ścianiania)*. Z wzoru (3) widzimy,

że $g_{\lambda, \mu}$ przedstawia właściwie styczną (tangens) kąta BAB' , ale ponieważ wobec nieznacznego odkształcania ciała, przesunięcie względne BB' może być tylko bardzo małe w stosunku do AB , przeto $g_{\lambda, \mu}$ możemy, zgodnie z przyjętym przez nas stopniem dokładności, poczytywać za miarę kąta BAB' . Skoro uwzględnimy, że dwie proste $A\mu$ i $A\lambda$, które przed odkształceniem tworzyły kąt prosty, po odkształceniu tworzą kąt $\mu AB'$, równający się prostemu zmniejszonemu o kąt BAB' , to możemy określić przesunięcie w następujący jeszcze sposób: *przesunięcie $g_{\lambda, \mu}$ stanowi miarę powstającego podczas odkształcania ciała ujemnego przyrostu kąta prostego między kierunkami λ i μ* .

7. Rozciąganie wskutek przesuwania (ścianiania). Przechodzimy do oznaczenia rozciągnięcia w danym kierunku r , wywołanego przez przesunięcie $g_{\lambda, \mu}$.



Rys. 2.

W celu rozwiązania tego zadania, prowadzimy przez punkt A prostą AC (rys. 2), równoległą do kierunku danego r , aż do przecięcia w punkcie C z płaszczyzną prostopadłą do λ , przechodzącą przez punkt B . Posunięcie względne CC' punktu C jest równe posunięciu BB' punktu B i do niego równoległe. Ponieważ prosta AC , po odkształceniu ciała, zamienia się na AC' , przeto długość jej powiększa się o różnicę $AC' - AC$; otrzymujemy więc:

$$\Delta_r = \frac{AC' - AC}{AC}.$$

Z punktu C' prowadzimy prostopadłą $C'P$ do prostej AC . Możemy przyjąć: $AC' = AP$; $AC' - AC = CP = CC' \cos(r, \mu)$; $CC' = BB'$ i $AC = \frac{AB}{\cos(r, \lambda)}$, więc:

$$\Delta_r = g_{\lambda\mu} \cdot \cos(r, \lambda) \cdot \cos(r, \mu) \dots \dots \dots (4).$$

Wzór ten wskazuje, że przesuwanie (ściananie) wywołuje w pewnych kierunkach rozciągnięcie, w innych zaś ściśnięcie. Tak np. w kierunku r na rys. 2 powstaje rozciągnięcie, a w kierunku s — ściśnięcie.

8. Przesuwanie (ściananie) wskutek rozciągania. Wróćmy do rozciągania w kierunku λ i oznaczmy przesunięcie g_{rs} , wywołane wydłużeniem Δ_λ (rys. 1). Już z samego określenia przesuwania (ścianania) wynika, że kierunki r i s , przed odkształceniem ciała, tworzą kąt prosty. Obieramy na przecięciu, prostopadłym do kierunku ruchu punktów ciała, przechodzącym przez punkt B , dwa punkty C i D takie, ażeby prosta AC była równoległą do kierunku r , a prosta AD do kierunku s . Kąt CAD będzie równy 90° ; po odkształceniu ciała, gdy trójkąt CBD przejdzie w położenie $C'B'D'$, proste AC i AD przejdą w AC' i AD' , a kąt CAD zamieni się na $C'AD'$. Ten kąt, z uwagi na przyjęte przesunięcie g_{rs} , będzie równy $\frac{\pi}{2} - g_{rs}$.

Po rozwiązaniu trójkątów CAD i $C'AD'$ i uwzględniając, że $C'D' = CD$, otrzymamy:

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 = AC'^2 + AD'^2 - 2 AC' \cdot AD' \cdot \cos(C'AD'),$$

skąd

$$\cos(C'AD') = \cos\left(\frac{\pi}{2} - g_{rs}\right) = \frac{AC'^2 + AD'^2 - AC^2 - AD^2}{2 AC' \cdot AD'}.$$

Ponieważ $AC' = (1 + \Delta_r) AC$ i $AD' = (1 + \Delta_s) AD$, przeto:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - g_{rs}\right) = \sin g_{rs} = \frac{[(1 + \Delta_r)^2 - 1] AC^2 + [(1 + \Delta_s)^2 - 1] AD^2}{2(1 + \Delta_r)(1 + \Delta_s) AC \cdot AD}$$

i z dokładnością do drugiego stopnia bardzo małych wielkości, otrzymujemy:

$$g_{rs} = \Delta_r \frac{AC}{AD} + \Delta_s \frac{AD}{AC}.$$

A ponieważ z trójkątów prostokątnych ABC i ABD mamy $AC = \frac{AB}{\cos(r, \lambda)}$

i $AD = \frac{AB}{\cos(s, \lambda)}$, więc:

$$g_{rs} = \Delta_r \frac{\cos(s, \lambda)}{\cos(r, \lambda)} + \Delta_s \frac{\cos(r, \lambda)}{\cos(s, \lambda)} \dots \dots \dots (5).$$

Ponieważ mamy oznaczyć przesunięcie wywołane istniejącem wydłużeniem Δ_λ , przeto powinniśmy w wzorze (5) oznaczyć Δ_r i Δ_s z wzoru (2), a mianowicie:

$$\Delta_r = \Delta_\lambda \cos^2(r, \lambda) \quad \text{i} \quad \Delta_s = \Delta_\lambda \cos^2(s, \lambda).$$

Wskutek tego na oznaczenie przesunięcia wywołanego rozciąganiem otrzymujemy wzór:

$$g_{rs} = 2 \Delta_\lambda \cos(r, \lambda) \cos(s, \lambda) \dots \dots \dots (6).$$

9. Przesuwanie (ściananie) wskutek przesuwania (ścianania). Pozostaje jeszcze oznaczyć przesuwanie wywołane przesuwaniem. W tym celu przypuśćmy, że mamy oznaczyć przesunięcie g_{rs} , wywołane istniejącem przesunięciem $g_{\lambda\mu}$.

Rzecz jasna, że wzór (5) daje możność oznaczenia szukanego przesunięcia, jeżeli w nim przyjmiemy Δ_r i Δ_s za rozciągnięcia, wywołane przesunięciem $g_{\lambda\mu}$, czyli, gdy oznaczymy te rozciągnięcia z wzoru (4). Skoro to wykonamy, otrzymamy na przesuwanie wywołane przesuwaniem wzór następujący:

$$g_{rs} = g_{\lambda\mu} [\cos(r, \lambda) \cdot \cos(s, \mu) + \cos(r, \mu) \cdot \cos(s, \lambda)] \dots \dots (7).$$

Zwróćmy uwagę, że części drugie wzorów (6) i (7) są symetryczne względem liter r i s , więc $g_{rs} = g_{sr}$. Z tego równania wypływa, że jeżeli w ciele nastąpiło przesunięcie g_{rs} przecięć prostopadłych do r w kierunku s , to takiemu przesunięciu, przy przyjętym przez nas do obliczeń stopniu dokładności, niezbędnie towarzyszy równe mu pod względem wielkości przesunięcie g_{sr} przecięć prostopadłych do s w kierunku r .

10. Odkształcenie ogólne ciała. Przy każdym, choćby najmniejszym, odkształceniu ciała, zmiany w układzie względnym blisko siebie znajdujących się cząstek ciała, sprowadzają się do zmian odległości wzajemnych między cząsteczkami i do zmiany kątów, utworzonych przez te odległości, t. j. do pewnych wydłużeń i przesunięć. W istocie, odnieśmy ciało, znajdujące się w równowadze naturalnej, do trzech wzajemnie do siebie prostopadłych osi współrzędnych x, y i z z punktu, któremu odpowiadają współrzędne x, y i z , nakreślmy nieskończenie mały prostopadłościan, o krawędziach równoległych do osi współrzędnych. W taki sposób ustalony prostopadłościan nazywać będziemy *prostopadłościana*

nem cząstkowym (elementarnym), a długości jego krawędzi, równoległych do osi x , y i z , oznaczać będziemy przez ∂x , ∂y i ∂z . Nadto przyjmujemy, że ciało doznało pewnego, ale bardzo małego, odkształcenia. Układ względny cząsteczek prostopadłościanu cząstkowego zmieni się, ale tak, że nieskończenie małe jego krawędzie pozostaną prostymi, a nieskończenie małe ściany jego pozostaną płaszczyznami; skutkiem czego jedyne zmiany, jakie zajdą w tym prostopadłościanie, polegać będą na zmianie długości krawędzi i na zmianie kątów, utworzonych przez te krawędzie, czyli na powstaniu trzech wydłużeń Δ_x , Δ_y i Δ_z i trzech przesunięć $g_{yz} = g_{zy}$; $g_{zx} = g_{xz}$ i $g_{xy} = g_{yx}$.

Oczywiście, że w przypadku najogólniejszym odkształcenia ciała, odkształcenie jest w zupełności oznaczone przez wartości liczebne *sześciu* ilości: Δ_x , Δ_y , Δ_z , g_{yz} , g_{zx} i g_{xy} , które zwać będziemy *odkształceniami składowymi ciała odkształconego* i które dla rozmaitych prostopadłościanów cząstkowych, na które można rozdzielić całe ciało, mogą mieć wartości różne. Zgodnie z tem *odkształcenia składowe ciała powinniśmy uważać za funkcyę współrzędnych*. Postać tych funkcyi jest zależna od układu sił zewnętrznych, wywołujących odkształcenie, jako też od kształtu ciała, na które siły te działają.

Gdy znamy wartości odkształceń składowych dla dowolnego punktu ciała, możemy oznaczyć dla tego punktu dowolne wydłużenie Δ_r i dowolne przesunięcie g_{rs} . W istocie, zgodnie z zasadą *niezależności ruchów skojarzonych (sprzężonych)*, wydłużenie Δ_r musi składać się z sumy sześciu wydłużeń, wywołanych przez każde z sześciu odkształceń skojarzonych oddzielnie. Skoro trzy pierwsze z tych wydłużeń oznaczymy z wzoru (2), a trzy pozostałe z wzoru (4), to po dodaniu ich otrzymamy:

$$\Delta_r = \Delta_x \cos^2(r, x) + \Delta_y \cos^2(r, y) + \Delta_z \cos^2(r, z) + \\ + g_{yz} \cos(r, y) \cdot \cos(r, z) + g_{zx} \cos(r, z) \cdot \cos(r, x) + g_{xy} \cos(r, x) \cos(r, y) \quad (8).$$

Stosując w sposób podobny wzory (6) i (7) do oznaczenia przesunięcia g_{rs} , otrzymamy:

$$g_{rs} = 2\Delta_x \cos(r, x) \cos(s, x) + 2\Delta_y \cos(r, y) \cos(s, y) + 2\Delta_z \cos(r, z) \cos(s, z) + \\ + g_{yz} [\cos(r, y) \cos(s, z) + \cos(r, z) \cos(s, y)] + \\ + g_{zx} [\cos(r, z) \cos(s, x) + \cos(r, x) \cos(s, z)] + \\ + g_{xy} [\cos(r, x) \cos(s, y) + \cos(r, y) \cos(s, x)] \quad \dots \quad (9).$$

Należy mieć na uwadze, że ten ostatni wzór jest ważny tylko gdy $\cos(r, s) = 0$.

11. Zależność odkształceń składowych od bezwzględnych posunięć punktów ciała. Jeżeli posunięcia bezwzględne punktów ciała są znane, to można z nich oznaczyć i zmiany zasze w układzie względnym tych punktów, można więc znaleźć odkształcenia składowe ciała. W celu

oznaczenia zależności odkształceń składowych od posunięć bezwzględnych budujemy w ciele, przed jego odkształceniem, równoległościan cząstkowy (elementarny), o krawędziach ∂x , ∂y i ∂z . Oznaczmy literą O wierzchołek równoległościanu najbliższy początkowi osi współrzędnych, a trzy krawędzie, schodzące się w tym wierzchołku i równoległe do osi x , y i z niechaj będą OA , OB i OC . Współrzędne czterech wierzchołków równoległościanu O , A , B i C , przed odkształceniem ciała, są następujące:

$$\begin{array}{lll} \text{wierzchołka } O: & x, & y, & z; \\ \text{„ } A: & x + \partial x, & y, & z; \\ \text{„ } B: & x, & y + \partial y, & z; \\ \text{„ } C: & x, & y, & z + \partial z. \end{array}$$

Jeżeli współrzędne wierzchołka O , po odkształceniu ciała, oznaczymy przez $x + u$, $y + v$, $z + w$, to u , v , w będą *posunięciami bezwzględными* punktu O . Posunięcia te należy uważać za funkcje współrzędnych, albowiem rozmaite punkty ciała posuwają się rozmaicie. Jednocześnie mamy prawo uważać te funkcje za *ciągłe*, czyli za takie, zapomocą których można oznaczać posunięcia nie tylko cząsteczek materyalnych ciała, ale i tych punktów geometrycznych, które możemy wyobrazić sobie w odstępach pomiędzy cząsteczkami.

Przy takim założeniu co do funkcji u , v i w , otrzymujemy dla współrzędnych czterech wierzchołków równoległościanu, po odkształceniu ciała:

$$\begin{array}{lll} \text{dla } O: & x + u, & y + v, & z + w \\ \text{„ } A: & x + u + \partial x + \frac{\partial u}{\partial x} \partial x, & y + v + \frac{\partial v}{\partial x} \partial x, & z + w + \frac{\partial w}{\partial x} \partial x; \\ \text{„ } B: & x + u + \frac{\partial u}{\partial y} \partial y, & y + v + \partial y + \frac{\partial v}{\partial y} \partial y, & z + w + \frac{\partial w}{\partial y} \partial y; \\ \text{„ } C: & x + u + \frac{\partial u}{\partial z} \partial z, & y + v + \frac{\partial v}{\partial z} \partial z, & z + w + \partial z + \frac{\partial w}{\partial z} \partial z. \end{array}$$

Odejmując od współrzędnych wierzchołków A , B i C odpowiadające im współrzędne wierzchołka O , otrzymujemy do oznaczenia rzutów krawędzi równoległościanu na osie współrzędnych, po odkształceniu równoległościanu, wzory następujące, w których długość tych krawędzi OA , OB , OC po odkształceniu oznaczona jest przez a , b i c :

$$\left. \begin{array}{l} a \cos(a, x) = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \partial x, \quad a \cos(a, y) = \frac{\partial v}{\partial x} \partial x, \quad a \cos(a, z) = \frac{\partial w}{\partial x} \partial x \\ b \cos(b, x) = \frac{\partial u}{\partial y} \partial y, \quad b \cos(b, y) = \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \partial y, \quad b \cos(b, z) = \frac{\partial w}{\partial y} \partial y \\ c \cos(c, x) = \frac{\partial u}{\partial z} \partial z, \quad c \cos(c, y) = \frac{\partial v}{\partial z} \partial z, \quad c \cos(c, z) = \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \partial z \end{array} \right\} (10).$$

Dla długości krawędzi, po odkształceniu, mamy: $a = (1 + \Delta_x) \partial x$; $b = (1 + \Delta_y) \partial y$ i $c = (1 + \Delta_z) \partial z$; to też do oznaczenia Δ_x służy równanie:

$$(1 + \Delta_x)^2 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \dots \dots \dots (a).$$

Dostawę zaś kąta, utworzonego przez krawędzie b i c , po odkształceniu, oznaczyć można z wzoru:

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - g_{yz}\right) = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial v}{\partial z} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \frac{\partial w}{\partial y}}{(1 + \Delta_y) (1 + \Delta_z)} \quad (b).$$

Ponieważ odkształcenia przyjmujemy jako bardzo małe, przeto wielkości a , b i c uważać należy za różniące się bardzo mało od ∂x , ∂y i ∂z ; dostawy zaś kątów (a, x) , (b, y) i (c, z) za bardzo zbliżone do jedności, a dostawy pozostałych kątów, wchodzących we wzory (10), za bardzo zbliżone do zera. Przy tych założeniach, musimy wszystkie pochodne cząstkowe funkcji u , v i w , wchodzące we wzory (10), również jak i odkształcenia składowe uważać za ułamki bardzo małe; to też, zachowując we wzorach (a) i (b) tylko pierwsze potęgi tych ułamków, otrzymamy:

$$\Delta_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{i} \quad \sin g_{yz} = g_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.$$

W takiż sposób oznaczyć możemy i pozostałe cztery odkształcenia składowe.

A zatem zależność pomiędzy odkształceniami składowymi a posunięciami bezwzględными punktów ciała, wyraża się wzorami następującymi:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \Delta_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \Delta_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ g_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & g_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, & g_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} (11).$$

Zanim przystąpimy do wysnucia wniosków z tych wzorów, zużytkujemy wzory (10) do oznaczenia objętości równoległościanu cząstkowego, po jego odkształceniu.

Objętość równoległościanu dowolnego, przy jakimkolwiek położeniu jego względem osi współrzędnych, jak wiadomo z Geometrii Analitycznej, wyraża się zapomocą wyznacznika, utworzonego z rzutów jego krawędzi na osie współrzędnych; w danym więc przypadku objętość szukana jest:

$$D \cdot \partial x \partial y \partial z,$$

gdzie D jest wyznacznikiem:

$$D = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y}, & 1 + \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z}, & \frac{\partial v}{\partial z}, & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Tworząc w rzeczy samej ten wyznacznik i zachowując w nim tylko pierwsze potęgi bardzo małych ułamków, otrzymamy: $D = 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$, a zatem objętość równoległościanu, po jego odkształceniu, będzie:

$$\partial x \partial y \partial z + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \partial x \partial y \partial z.$$

Oznaczmy literą θ tak zwane *względne rozprzestrzenienie (rozszerzalność przestrzenną) ciała*, czyli stosunek przyrostu objętości do jej wielkości pierwotnej, a otrzymamy:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \dots \dots \dots (12).$$

A więc *rozprzestrzenienie ciała w danym jego punkcie równa się sumie trzech wydłużeń w trzech wzajemnie do siebie prostopadłych kierunkach.*

12. Warunki odkształceń składowych. Wzór (11) wskazuje, że wszystkie sześć odkształceń składowych wyrażają się zapomocą pochodnych cząstkowych trzech funkcji u, v i w ; a zatem nie mamy prawa wybierania dla tych odkształceń składowych funkcji dowolnych, choćby one miały bardzo małe wartości dla wszystkich punktów ciała, albowiem te funkcje muszą czynić zadość pewnym warunkom całkowalności. A więc pomiędzy odkształceniami składowymi istnieje zależność, którą możemy uwidocznic, wyłączając funkcje u, v i w z równań (10). Tak np. różniczkując czwarte z tych równań dwukrotnie, względem y i z , otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 g_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \Delta_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Delta_z}{\partial y^2} \quad (a).$$

Z czwartego i piątego równania wynika:

$$\frac{\partial g_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial g_{zx}}{\partial y} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial g_{xy}}{\partial z};$$

Różniczkując zaś to równanie ostatnie względem z , otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 g_{yz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 g_{zx}}{\partial y \partial z} = 2 \frac{\partial^2 \Delta_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g_{xy}}{\partial z^2} \dots \dots \dots (b).$$

W ten sposób możemy otrzymać jeszcze dwa równania podobne do (a) i dwa równania podobne do (b); szukana więc zależność wyrazi się zapomo-
cą równań następujących:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 g_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \Delta_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Delta_z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 g_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \Delta_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 g_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \Delta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta_y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 g_{yz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 g_{zx}}{\partial y \partial z} &= 2 \frac{\partial^2 \Delta_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g_{xy}}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 g_{zx}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 g_{xy}}{\partial z \partial x} &= 2 \frac{\partial^2 \Delta_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 g_{yz}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 g_{xy}}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 g_{yz}}{\partial x \partial y} &= 2 \frac{\partial^2 \Delta_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 g_{zx}}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13).$$

Te równania nazywają się *warunkami jednoczesności odkształceń składowych*. Równania te powinny przejść w tożsamości, gdy za odkształcenia składowe podstawimy funkcye, które wyrażają te odkształcenia składowe.

13. Wzory Euler'a. Przypadek takiego posunięcia punktów ciała sprężystego, przy którym układ względny jego cząsteczek się nie zmienia, musi, jako przypadek szczególny, podpadać pod wzory ogólne (11). W takim przypadku odkształcenia składowe wszystkich punktów ciała muszą być równe zeru. To też posunięcia, nie zmieniające układu względnego cząsteczek i kształtu ciała, można otrzymać przez całkowanie następujących sześciu równań różniczkowych, o pochodnych cząstkowych:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14).$$

Trzy pierwsze z tych równań wykazują, że funkcya *u* zawiera tylko *y* i *z*, funkcya *v* — tylko *x* i *z*, funkcya *w* — tylko *x* i *y*; różniczkując przeto równanie piąte względem *z*, a szóste względem *y*, otrzymamy: $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Różniczkując równanie piąte względem *y*, szóste zaś względem *z* i dodając, otrzymamy:

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0,$$

a stąd, przy uwzględnieniu równania czwartego, otrzymujemy $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$.

Tak więc widzimy, że wszystkie trzy pochodne cząstkowe stopnia drugiego funkcji u są równe zeru, wskutek czego funkcja ta ma postać:

$$u = \alpha + qz + q'y.$$

Podobnie przekonamy się, że funkcje v i w , można wyrazić w postaci:

$$v = \beta + rx + r'z \quad \text{i} \quad w = \gamma + py + p'x,$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma, p, q, r, p', q'$ i r' są ilościami stałymi. Sprawdzając zaś równanie (14), otrzymamy: $q' = -r$, $r' = -p$ i $p' = -q$. A więc ostatecznie jest:

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha + qz - ry \\ v &= \beta + rx - pz \\ w &= \gamma + py - qx \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15).$$

Wzory te są znane w Mechanice Analitycznej pod nazwą *wzorów Euler'a*. Wyznaczają one nieskończenie małe posunięcia punktów ciała bezwzględnie sztywnego w kierunku osi współrzędnych. Stałe α, β i γ są to nieskończenie małe posunięcia postępowe w kierunku osi x, y i z , stałe zaś p, q i r — nieskończenie małe ruchy obrotowe około tychże osi.

14. Obroty względne cząstek (elementów) ciała. Weźmy teraz w ciele, przed jego odkształceniem, dwa sąsiednie punkty i niech x, y i z będą współrzędnymi punktu pierwszego, zaś $x + \partial x, y + \partial y$ i $z + \partial z$ — współrzędnymi drugiego. Skoro współrzędne punktu pierwszego po odkształceniu oznaczymy przez $x + u, y + v$ i $z + w$, to dla współrzędnych punktu drugiego otrzymamy: $x + \partial x + u + du, y + \partial y + v + dv$ i $z + \partial z + w + dw$. Tu różniczki zupełne du, dv i dw przedstawiają *ruchy względne punktu drugiego* (względem punktu pierwszego), zaś $\partial x, \partial y$ i ∂z — *współrzędne względne punktu drugiego*. Tak więc dla ruchów względnych mamy wyrażenia:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \partial x + \frac{\partial u}{\partial y} \partial y + \frac{\partial u}{\partial z} \partial z,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} \partial x + \frac{\partial v}{\partial y} \partial y + \frac{\partial v}{\partial z} \partial z,$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} \partial x + \frac{\partial w}{\partial y} \partial y + \frac{\partial w}{\partial z} \partial z.$$

Wyrażenia te możemy przedstawić w innej postaci, zasługującej na uwagę. W tym celu załóżmy, że:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} &= 2\pi \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} &= 2\chi \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= 2\rho \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16).$$

Łącząc te wzory z (11), znajdziemy, że:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \Delta_x, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \rho - \frac{1}{2} g_{xy}, & \frac{\partial u}{\partial z} &= \chi + \frac{1}{2} g_{zx} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \rho + \frac{1}{2} g_{xy}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \Delta_y, & \frac{\partial v}{\partial z} &= \pi - \frac{1}{2} g_{yz} \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \chi - \frac{1}{2} g_{xz}, & \frac{\partial w}{\partial y} &= \pi + \frac{1}{2} g_{yz}, & \frac{\partial w}{\partial z} &= \Delta_z \end{aligned} \right\} \dots (17).$$

Otrzymujemy więc dla ruchów względnych:

$$\left. \begin{aligned} du &= \Delta_x dx - \frac{1}{2} g_{yx} dy + \frac{1}{2} g_{zx} dz + \chi dz - \rho dy \\ dv &= \Delta_y dy - \frac{1}{2} g_{zy} dz + \frac{1}{2} g_{xy} dx + \rho dx - \pi dz \\ dw &= \Delta_z dz - \frac{1}{2} g_{xz} dx + \frac{1}{2} g_{yz} dy + \pi dy - \chi dx \end{aligned} \right\} \dots (18).$$

Wzory te wskazują, że ruch względny cząstek ciała w kierunku każdej z osi współrzędnych składa się z posunięć wywołanych przez jedno rozciągnięcie i dwa przesunięcia, powstałe w kierunku osi, i nadto z posunięcia, które się wyraża różnicą $\chi dz - \rho dy$ dla osi x , $\rho dx - \pi dz$ dla osi y i $\pi dy - \chi dx$ dla osi z . Te ostatnie posunięcia mają skład identyczny z ruchami ciała bezwzględnie sztywnego (p. wzór 15), wywołanymi przez obrót jego około osi współrzędnych. A więc stałe π , χ i ρ , wchodzące we wzory (16), są to *bardzo małe ruchy względne obrotowe cząstek ciała*. Dochodzimy przeto do wniosku, że podczas odkształcania ciała każda cząstka jego, mówiąc ogólnie, nie tylko się odkształca, ale i obraca około osi współrzędnych o kąty bardzo małe względem cząstek sąsiednich.

15. Wyprowadzenie analityczne wzorów na wydłużenia i przesunięcia. Przyjmijmy w ciele, przed jego odkształceniem, punkt O o współrzędnych x, y i z i przeprowadźmy przez ten punkt dwa dowolne kierunki r i s . Na pierwszym z tych kierunków przyjmujemy punkt A w nieskończenie małej odległości dr od punktu O , na drugim — punkt B w nieskończenie małej odległości ds od tegoż punktu O . Gdy ciało ulegnie bardzo małemu odkształceniu, punkty O, A i B zajmą inne położenie, przyczem zmieni się kąt między kierunkami OA i OB , czyli między r i s . Postaramy się oznaczyć przyrost dostawy kąta, utworzonego przez te kierunki.

Zgódźmy się na razie oznaczać znakiem δ przyrosty, powstające wskutek odkształcenia, a znakiem d nieskończenie małe przyrosty geometryczne, które otrzymujemy, przechodząc od jednego punktu ciała do innego sąsiedniego. Musimy jednakże mieć na uwadze, że te dwa rodzaje przyrostów są zupełnie od siebie niezależne. Przyjmując odkształcenie ciała za tak małe, że można nie uwzględniać potęg wyższych nad pierwszą bardzo małych przyrostów oznaczonych znakiem δ , powinniśmy zapatrywać się na te przyrosty jako na wielkości, które ze względu na swoje własności nie różnią się od różniczek.

Ponieważ już przedtem zgodziliśmy się oznaczać przyrosty współrzędnych, powstające wskutek odkształcenia, przez u , v i w , przeto:

$$u = \delta x, \quad v = \delta y \quad \text{i} \quad w = \delta z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a).$$

Do oznaczenia $\delta \cos(r, s)$ mamy:

$$\delta \cos(r, s) = \delta [\cos(r, x) \cos(s, x)] + \delta [\cos(r, y) \cos(s, y)] + \delta [\cos(r, z) \cos(s, z)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b).$$

Pierwszy wyraz części drugiej przyjmuje postać:

$$\delta [\cos(r, x) \cos(s, x)] = \cos(s, x) \delta \cos(r, x) + \cos(r, x) \delta \cos(s, x) \quad (c).$$

Że jednak $\cos(r, x) = \frac{dx}{dr}$, $\cos(r, y) = \frac{dy}{dr}$, $\cos(r, z) = \frac{dz}{dr}$,

przeto $\delta \cos(r, x) = \delta \left(\frac{dx}{dr} \right) = \frac{\delta dx}{dr} - \frac{dx}{dr} \cdot \frac{\delta dr}{dr} = \frac{\delta dx}{dr} - \cos(r, x) \frac{\delta dr}{dr}$.

Wskutek niezależności działań, oznaczonych znakami δ i d , otrzymujemy:

$$\delta dx = d\delta x = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Nadto widoczne jest, że: $\frac{\delta dr}{dr} = \Delta_r$, więc:

$$\delta \cos(r, x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \Delta_r \right) \cos(r, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(r, y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(r, z).$$

Oczywiście:

$$\delta \cos(s, x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \Delta_s \right) \cos(s, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(s, y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(s, z).$$

Równanie (c) przyjmuje więc postać:

$$\begin{aligned} \delta [\cos(r, x) \cos(s, x)] &= \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \Delta_r - \Delta_s \right] \cos(r, x) \cos(s, x) + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial y} [\cos(r, y) \cos(s, x) + \cos(r, x) \cos(s, y)] + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial z} [\cos(r, z) \cos(s, x) + \cos(r, x) \cos(s, z)] \quad . \quad . \quad . \quad (d). \end{aligned}$$

Przez przestawienie kołowe liter x, y i z oraz u, v i w wyprowadzimy z wzoru (d) wzory na dwa pozostałe wyrazy części drugiej wzoru (b), tak, że na $\delta \cos(r, s)$, czyli na $-\sin(r, s) \delta(\widehat{rs})$ otrzymamy wzór:

$$\begin{aligned} & -\sin(r, s) \delta(\widehat{rs}) = -(\Delta_r + \Delta_s) \cos(r, s) + \\ & + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \cos(r, x) \cos(s, x) + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \cos(r, y) \cos(s, y) + \\ & + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \cos(r, z) \cos(s, z) + \\ & + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) [\cos(r, z) \cos(s, y) + \cos(r, y) \cos(s, z)] + \\ & + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) [\cos(r, x) \cos(s, z) + \cos(r, z) \cos(s, x)] + \\ & + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) [\cos(r, y) \cos(s, x) + \cos(r, x) \cos(s, y)] \dots \quad (19) \end{aligned}$$

W przypadku szczególnym, gdy kierunek s zlewa się z kierunkiem r , otrzymamy $\sin(r, s) = 0$, $\cos(r, s) = 1$, $\Delta_r = \Delta_s$ i z wzoru (19) można będzie oznaczyć wyrażenie na Δ_r . Jeżeli zaś kierunek s będzie prostopadły do r , to otrzymamy $\sin(r, s) = 1$, $\cos(r, s) = 0$ i $-\delta(\widehat{rs}) = g_{rs}$. W tym przypadku wzór (19) wyznaczy przesunięcie g_{rs} . Tak więc wzór (19) obejmuje nie tylko wzór (8) i (9), ale i wzory (11), wyrażające zależność odkształceń składowych od bezwzględnych przesunięć punktów.

16. Elipsoida wydłużenia. Postarajmy się wyprowadzić wnioski z wzoru (p. wzór 8):

$$\begin{aligned} \Delta_r = & \Delta_x \cos^2(r, x) + \Delta_y \cos^2(r, y) + \Delta_z \cos^2(r, z) + \\ & + g_{yz} \cos(r, y) \cos(r, z) + g_{zx} \cos(r, z) \cos(r, x) + \\ & + g_{xy} \cos(r, x) \cos(r, y) \dots \dots \dots \quad (20). \end{aligned}$$

Za początek współrzędnych przyjmujemy ten punkt ciała, dla którego znane są wartości liczebne odkształceń składowych i oznaczwszy Δ_r dla danego kierunku r z wzoru (20), odkładamy na tym kierunku, od początku współrzędnych, długość R , zawierającą tyle jednostek miary liniowej, ile jednostek oderwanych mieści się w wielkości $\frac{1}{\sqrt{\pm \Delta_r}}$.

Ponieważ dla danego kierunku r wydłużenie Δ_r może być ilością dodatnią lub ujemną, przeto z dwóch znaków, stojących przed ilością Δ_r , wybierzemy ten, dla którego ilość pod znakiem pierwiastku jest dodatnia. Przy takim wyborze znaku długość $R = \frac{1}{\sqrt{\pm \Delta_r}}$ będzie zawsze

rzeczywista. Wskutek tego przy wskazanem postępowaniu otrzymamy punkt na każdym kierunku, wychodzącym z początku współrzędnych. Wszystkie te punkty łącznie utworzą pewną powierzchnię, mającą tę własność, że *jej promienie wodzące, wychodzące z początku współrzędnych, są odwrotnie proporcjonalne do pierwiastku kwadratowego z wydłużeń, odpowiadających kierunkom tych promieni wodzących.*

Niech x, y i z będą współrzędnymi końca długości R , czyli współrzędnymi jednego z punktów tej powierzchni. W celu otrzymania równania samej powierzchni, należy we wzorze (20) przyjąć:

$$\cos(r, x) = \frac{x}{R} = x \sqrt{\pm \Delta_r}, \quad \cos(r, y) = y \sqrt{\pm \Delta_r}$$

$$\text{i} \quad \cos(r, z) \sqrt{\pm \Delta_r},$$

a wtedy otrzymamy równanie:

$$\Delta_x x^2 + \Delta_y y^2 + \Delta_z z^2 + g_{yz} \cdot yz + g_{zx} \cdot zx + g_{xy} \cdot xy = \pm 1 \quad (21).$$

Równanie to przedstawia powierzchnię drugiego stopnia, mającą środek w początku współrzędnych.

Wiemy, że takie powierzchnie mają trzy główne wzajemnie do siebie prostopadłe średnice, mające tę własność, że gdy osi współrzędnych zleją się z temi średnicami, równanie powierzchni nie będzie zawierało wyrazów z iloczynami współrzędnych. Oznaczając więc kierunki średnic głównych przez ξ, η i ζ , otrzymamy:

$$\Delta_\xi \cdot \xi^2 + \Delta_\eta \cdot \eta^2 + \Delta_\zeta \cdot \zeta^2 = \pm 1 \quad \dots \quad (22).$$

$$\Delta_r = \Delta_\xi \cdot \cos^2(r, \xi) + \Delta_\eta \cdot \cos^2(r, \eta) + \Delta_\zeta \cos^2(r, \zeta) \quad (23).$$

a jednocześnie:

$$g_{\eta\zeta} = 0, \quad g_{\xi\zeta} = 0 \quad \text{i} \quad g_{\xi\eta} = 0 \quad \dots \quad (24).$$

Trzy równania ostatnie dowodzą, że *w każdym punkcie ciała istnieją trzy wzajemnie do siebie prostopadłe płaszczyzny, które nie ulegają przesuwaniu*, czyli wyrażając się inaczej, *w każdym punkcie ciała istnieją trzy takie wzajemnie do siebie prostopadłe kierunki, które i po odkształceniu ciała pozostają wzajemnie do siebie prostopadłymi.* Kierunki te zlewają się ze średnicami głównymi powierzchni (22) i nazywają się *kierunkami wydłużeń głównych*, a ilości Δ_ξ, Δ_η i Δ_ζ zwane są *wydłużeniami głównymi.*

Jeżeli wszystkie trzy wydłużenia główne mają znak jednakowy, to równaniu (22) uczynimy zadość, przyjmując w części jego drugiej znak $+$ lub $-$, stosownie do tego, czy wydłużenia główne są ilościami dodatnimi czy też ujemnymi. W danym przypadku równanie (22) będzie wyrażało *elipsoide*, a wydłużenia, odpowiadające wszelkim innym kierunkom, będą miały taki sam znak jak i wydłużenia główne, co wynika z równania (23).

Jeżeli natomiast wydłużenia główne mają znaki różne, to równaniu (22) uczynimy zadość, przyjmując w części jego drugiej zarówno $+1$ jak i -1 . W przypadku tym więc równanie rzeczzone rozpada się na dwa równania i przedstawia *dwie hyperboloidy sprzężone: jednopowłokową i dwupowłokową*, mające wspólny stożek asymptotyczny, którego równanie brzmi:

$$\Delta_{\xi} \cdot \xi^2 + \Delta_{\eta} \cdot \eta^2 + \Delta_{\zeta} \cdot \zeta^2 = 0 \quad \dots \quad (25).$$

Promieniom wodzącym jednej z tych hyperboloid odpowiadają wydłużenia, promieniom zaś wodzącym drugiej — skrócenia; na tworzących stożka asymptotycznego niema ani wydłużeń, ani skróceń, dlatego też można stożek ten nazwać *stożkiem wydłużeń zerowych*.

Równanie (22) może przedstawiać oczywiście wszystkie poszczególne przypadki elipsoidy i hyperboloidy. Tak np. jeżeli jedno z wydłużeń głównych, przypuścmy Δ_{ζ} będzie równe zeru, to równanie (22) przyjmie postać:

$$\Delta_{\xi} \cdot \xi^2 + \Delta_{\eta} \cdot \eta^2 = \pm 1$$

i będzie przedstawiało albo *jeden walec o podstawie eliptycznej*, albo *dwie walce, mające za podstawy dwie hyperbole sprzężone*. W tym ostatnim przypadku stożek asymptotyczny zamienia się na *dwie płaszczyzny, zawierające oś ζ i asymptoty hyperbol*.

Jeżeli dwa wydłużenia główne, np. Δ_{η} i Δ_{ζ} , równe są zeru, to równanie (22) przyjmie postać:

$$\Delta_{\xi} \cdot \xi^2 = \pm 1 \quad \text{czyli} \quad \xi = \pm \frac{1}{\sqrt{\pm \Delta_{\xi}}},$$

będzie więc przedstawiało *dwie płaszczyzny, prostopadłe do osi ξ* . Stożek asymptotyczny zamieni się w tym przypadku na płaszczyznę współrzędnych ($\eta\zeta$). Przy przejściu kierunku r z części przestrzeni, leżącej z jednej strony tej płaszczyzny, do części przestrzeni, leżącej z drugiej strony tejże płaszczyzny, ilość Δ_r stanie się zawsze równa zeru, ilekroć kierunek r padnie na płaszczyznę ($\eta\zeta$), ale z obu stron tej płaszczyzny będzie miała jeden i ten sam znak, zgodny ze znakiem ilości Δ_{ξ} .

Jeżeli wszystkie trzy wydłużenia główne są równe zeru, to i każde wydłużenie Δ_r jest równe zeru, czyli wzór ogólny (20) przyjmie w tym przypadku postać:

$$g_{yz} \cos(r, y) \cos(r, z) + g_{zx} \cos(r, z) \cos(r, x) + \\ + g_{xy} \cos(r, x) \cos(r, y) = 0.$$

A że wzór ten jest ważny dla dowolnego r , przeto:

$$g_{yz} = g_{zx} = g_{xy} = 0.$$

Wynika stąd, że wszystkie trzy wydłużenia główne mogą być równe

zeru tylko w takim punkcie ciała, w którego sąsiedztwie w ciele nie nastąpiło żadne odkształcenie.

Jeżeli dwa wydłużenia główne są sobie równe, to równanie (22) przedstawiać będzie albo *elipsoidę obrotową* albo *dwie hyperboloidy obrotowe*; jeżeli zaś wszystkie trzy wydłużenia główne są sobie równe, to równanie (22) wyrazi *powierzchnię kulistą*.

17. Oznaczenie wydłużeń głównych. Ponieważ wydłużenie względne Δ_r jest odwrotnie proporcjonalne do potęgi drugiej długości połowy tej średnicy elipsoidy wydłużeń, która pada na kierunek r , przeto oznaczenie wydłużeń głównych sprowadza się do oznaczenia wydłużeń największych i najmniejszych, czyli do oznaczenia takich wartości dostaw: $\cos(r, x)$, $\cos(r, y)$ i $\cos(r, z)$, dla których Δ_r będzie największe lub najmniejsze, z zastrzeżeniem, że:

$$\cos^2(r, x) + \cos^2(r, y) + \cos^2(r, z) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (a).$$

Zgodnie więc ze znanymi zasadami oznaczania największości względnej, należy przyrównać do zera pochodne względem każdej z trzech dostaw funkcji następującej:

$$\Delta_r - \lambda [\cos^2(r, x) + \cos^2(r, y) + \cos^2(r, z)],$$

a po rozwiązaniu otrzymanych równań względem dostaw wybrać w nich dla stałego czynnika λ wartość taką, jaka zadość czyniłaby równaniu warunkowemu (a).

Wartości dostaw należy szukać z równań:

$$\frac{\partial \Delta_r}{\partial \cos(r, x)} - 2\lambda \cos(r, x) = 0,$$

$$\frac{\partial \Delta_r}{\partial \cos(r, y)} - 2\lambda \cos(r, y) = 0,$$

$$\frac{\partial \Delta_r}{\partial \cos(r, z)} - 2\lambda \cos(r, z) = 0.$$

Oznaczywszy zaś w rzeczy samej pochodne Δ_r względem dostaw z równania (8), otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} 2(\Delta_x - \lambda) \cos(r, x) + g_{xy} \cos(r, y) + g_{xz} \cos(r, z) &= 0, \\ g_{xy} \cos(r, x) + 2(\Delta_y - \lambda) \cos(r, y) + g_{yz} \cos(r, z) &= 0, \\ g_{xz} \cos(r, x) + g_{yz} \cos(r, y) + 2(\Delta_z - \lambda) \cos(r, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad (b).$$

Pomnóżmy pierwsze z tych równań przez $\cos(r, z)$, drugie przez $\cos(r, y)$, trzecie przez $\cos(r, x)$ i dodajmy je, a otrzymamy równanie:

$$2[\Delta_r - \lambda \{\cos^2(r, x) + \cos^2(r, y) + \cos^2(r, z)\}] = 0 \quad . \quad . \quad (c),$$

które wskutek warunku (a) daje:

$$\lambda = (\Delta_r)_{\max} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d).$$

Rzeczywiście, równanie (c) otrzymaliśmy z równań (b), istniejących dla takich tylko wartości dostaw, przy których Δ^r ma wartość największą albo najmniejszą.

W celu oznaczenia wydłużeń głównych, należy rozwiązać układ równań postaci:

$$\left. \begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ a'x + b'y + c'z &= 0 \\ a''x + b''y + c''z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (e),$$

pod warunkiem, że:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \dots \dots \dots (f),$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos(r, x), \quad y = \cos(r, y), \quad z = \cos(r, z) \\ \alpha &= 2(\Delta_x - \lambda), \quad b' = 2(\Delta_y - \lambda), \quad c'' = 2(\Delta_z - \lambda) \\ b &= a' = g_{xy}, \quad c = a'' = g_{zx}, \quad c' = b'' = g_{yz} \end{aligned} \right\} \dots (g).$$

Gdy istnieją równania (f), równania (e) nie dopuszczają rozwiązania $x = y = z = 0$. Wskutek tego wyznacznik, utworzony z współczynników tych równań, musi być równy zeru.

Mamy więc równanie:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (h),$$

które możemy wyrazić w następujących trzech postaciach:

$$\begin{aligned} a(b'c'' - c'b'') + b(c'a'' - a'c'') + c(a'b'' - b'a'') &= 0 \\ a'(b''c - c''b) + b'(c''a - a''c) + c'(a''b - b''a) &= 0 \\ a''(bc' - cb') + b''(ca' - ac') + c''(ab' - ba') &= 0 \end{aligned}$$

Z porównania tych równań z równaniami (e), otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{b'c'' - c'b''} &= \frac{y}{c'a'' - a'c''} = \frac{z}{a'b'' - b'a''}, \\ \frac{x}{b''c - c''b} &= \frac{y}{c''a - a''c} = \frac{z}{a''b - b''a}, \\ \frac{x}{bc' - cb'} &= \frac{y}{ca' - ac'} = \frac{z}{ab' - ba'}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (i).$$

Z równości (g) wynika jednak, że:

$$\left. \begin{aligned} b'c'' - c'b'' &= b'c'' - c'^2 = 4(\Delta_y - \lambda)(\Delta_x - \lambda) - g^2_{yz} = \alpha \\ c''a - a''c &= c''a - c^2 = 4(\Delta_x - \lambda)(\Delta_y - \lambda) - g^2_{zx} = \beta \\ ab' - ba' &= ab' - b^2 = 4(\Delta_x - \lambda)(\Delta_y - \lambda) - g^2_{xy} = \gamma \\ a''b - b''a &= ca' - ac' = g_{xx}g_{xy} - 2(\Delta_x - \lambda)g_{yz} = p \\ a'b'' - b'a'' &= bc' - cb' = g_{xy}g_{yz} - 2(\Delta_y - \lambda)g_{zx} = q \\ c'a'' - a'c'' &= b''c - c''b = g_{zy}g_{zx} - 2(\Delta_z - \lambda)g_{xy} = r \end{aligned} \right\} \quad (j),$$

przyczem równania (i) zamieniają się na:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\alpha} &= \frac{y}{r} = \frac{z}{q} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + r^2 + q^2}} \\ \frac{x}{r} &= \frac{y}{\beta} = \frac{z}{p} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \beta^2 + p^2}} \\ \frac{x}{q} &= \frac{y}{p} = \frac{z}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{q^2 + p^2 + \gamma^2}} \end{aligned} \right\} \quad (k).$$

Z tych ostatnich proporcji wynika:

$$p^2 = \beta\gamma, \quad q^2 = \gamma\alpha \quad \text{i} \quad r^2 = \alpha\beta \quad \dots \quad (l).$$

W istocie, z proporcji $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{r}$ i $\frac{x}{r} = \frac{y}{\beta}$ wynika, że $\frac{\alpha}{r} = \frac{r}{\beta}$, czyli $r^2 = \alpha\beta$; w tenże sposób z proporcji $\frac{y}{\beta} = \frac{z}{p}$ i $\frac{y}{p} = \frac{z}{\gamma}$ otrzymujemy $p^2 = \beta\gamma$; z proporcji zaś $\frac{z}{\gamma} = \frac{x}{q}$ i $\frac{z}{q} = \frac{x}{\alpha}$ mamy $q^2 = \gamma\alpha$.

Ilości, znajdujące się pod znakiem pierwiastku kwadratowego w równaniach (k), można wyrazić w sposób następujący:

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 + r^2 + q^2 &= \alpha^2 + \alpha\beta + \gamma\alpha = \alpha(\alpha + \beta + \gamma) = \alpha F(\lambda) \\ r^2 + \beta^2 + p^2 &= \alpha\beta + \beta^2 + \beta\gamma = \beta(\alpha + \beta + \gamma) = \beta F(\lambda) \\ q^2 + p^2 + \gamma^2 &= \gamma\alpha + \beta\gamma + \gamma^2 = \gamma(\alpha + \beta + \gamma) = \gamma F(\lambda) \end{aligned} \right\} \quad (m).$$

gdzie $F(\lambda) = \alpha + \beta + \gamma \quad \dots \quad (n).$

Weźmy teraz z proporcji (k):

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\alpha \cdot F(\lambda)}}, \quad \frac{y}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\beta \cdot F(\lambda)}}, \quad \frac{z}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\gamma \cdot F(\lambda)}};$$

a podnosząc te równania do potęgi drugiej, otrzymamy:

$$x^2 = \frac{\alpha}{F(\lambda)}, \quad y^2 = \frac{\beta}{F(\lambda)}, \quad z^2 = \frac{\gamma}{F(\lambda)} \quad \dots \quad (o).$$

Wyrażenia ostatnie posłużą do oznaczenia wartości liczebnej każdej z niewiadomych x, y i z . W celu zaś oznaczenia znaków, jakie nadać należy tym niewiadomym, bierzemy proporcye następujące:

$$\frac{y}{p} = \frac{z}{\gamma}, \quad \frac{z}{q} = \frac{x}{\alpha} \quad \text{i} \quad \frac{x}{r} = \frac{y}{\beta};$$

a mnożąc pierwszą z nich przez z , drugą przez x , trzecią przez y , otrzymamy:

$$yz = p \frac{z^2}{\gamma} = \frac{p}{F(\lambda)}, \quad zx = q \frac{x^2}{\alpha} = \frac{q}{F(\lambda)} \quad \text{i} \quad xy = r \frac{y^2}{\beta} = \frac{r}{F(\lambda)}. \quad (\text{p}).$$

Wreszcie wstawiając w równania (h), (o) i (p) za $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ i t. p. ich wartości, otrzymamy równania.

$$4(\Delta_x - \lambda)(\Delta_y - \lambda)(\Delta_z - \lambda) - (\Delta_x - \lambda)g_{yz}^2 - (\Delta_y - \lambda)g_{zx}^2 - (\Delta_z - \lambda)g_{xy}^2 + g_{yz}g_{zx}g_{xy} = 0 \dots \dots (26),$$

$$\left. \begin{aligned} \cos^2(r, x) &= \frac{1}{F(\lambda)} [4(\Delta_y - \lambda)(\Delta_z - \lambda) - g_{yz}^2] \\ \cos^2(r, y) &= \frac{1}{F(\lambda)} [4(\Delta_x - \lambda)(\Delta_z - \lambda) - g_{zx}^2] \\ \cos^2(r, z) &= \frac{1}{F(\lambda)} [4(\Delta_x - \lambda)(\Delta_y - \lambda) - g_{xy}^2] \end{aligned} \right\} \dots \dots (27).$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(r, y) \cos(r, z) &= \frac{1}{F(\lambda)} [g_{zx}g_{xy} - 2(\Delta_x - \lambda)g_{yz}] \\ \cos(r, z) \cos(r, x) &= \frac{1}{F(\lambda)} [g_{xy}g_{yz} - 2(\Delta_y - \lambda)g_{zx}] \\ \cos(r, x) \cos(r, y) &= \frac{1}{F(\lambda)} [g_{yz}g_{zx} - 2(\Delta_z - \lambda)g_{xy}] \end{aligned} \right\} \dots \dots (28).$$

gdzie
$$F(\lambda) = 4(\Delta_y - \lambda)(\Delta_z - \lambda) + 4(\Delta_z - \lambda)(\Delta_x - \lambda) + + 4(\Delta_x - \lambda)(\Delta_y - \lambda) - g_{yz}^2 - g_{zx}^2 - g_{xy}^2 \dots \dots (29).$$

Zauważmy, że $F(\lambda)$ jest pochodną względem λ części pierwszej równania (26), wziętą ze znakiem minus.

Pierwiastki równania (26) trzeciego stopnia, względem λ , dają wielkości trzech wydłużeń głównych; równania zaś (27) i (28) oznaczają kierunek każdego z tych wydłużeń.

Po wykonaniu działań, wskazanych w części pierwszej równania (26) i po zniesieniu współczynnika przy λ^3 , otrzymamy równanie to w postaci:

$$\lambda^3 - (\Delta_x + \Delta_y + \Delta_z)\lambda^2 + [\Delta_x\Delta_y + \Delta_y\Delta_z + \Delta_z\Delta_x - \frac{1}{4}(g_{yz}^2 + g_{zx}^2 + g_{xy}^2)]\lambda + + \frac{1}{4}(\Delta_x g_{yz}^2 + \Delta_y g_{zx}^2 + \Delta_z g_{xy}^2 - g_{yz}g_{zx}g_{xy}) - \Delta_x\Delta_y\Delta_z = 0 \dots (30),$$

a ponieważ to ostatnie równanie powinno być identyczne z równaniem:

$$(\lambda - \Delta_\xi) (\lambda - \Delta_\eta) (\lambda - \Delta_\zeta) = 0,$$

przeto porównyując w tych równaniach ze sobą współczynniki przy jednakowych potęgach λ , otrzymamy następujący związek między wydłużeniami głównymi a odkształceniami składowymi:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_\xi + \Delta_\eta + \Delta_\zeta &= \Delta_x + \Delta_y + \Delta_z \\ \Delta_\eta \Delta_\zeta + \Delta_\zeta \Delta_\xi + \Delta_\xi \Delta_\eta &= \Delta_y \Delta_z + \Delta_z \Delta_x + \Delta_x \Delta_y - \frac{1}{4}(g^2_{yz} + g^2_{zx} + g^2_{xy}) \\ \Delta_\xi \Delta_\eta \Delta_\zeta &= \Delta_x \Delta_y \Delta_z + \frac{1}{4}(g_{yz} g_{zx} g_{xy} - \Delta_x g^2_{yz} - \Delta_y g^2_{zx} - \Delta_z g^2_{xy}) \end{aligned} \right\} \dots (31).$$

Wielkość każdego z wydłużeń głównych nie zależy, oczywiście, od układu osi współrzędnych x, y i z , dlatego też części drugie równości (31) powinny mieć tę samą własność, t. j. części drugie tych równań są takimi funkcjami odkształceń składowych, że nie zmieniają się ze zmianą układu osi współrzędnych i że wskutek tego można je nazwać *niezmiennikami (inwariantami) osi współrzędnych*.

Zapomocą tych niezmienników można wyprowadzić wiele innych. Tak np. jeżeli oznaczymy pierwszy z niezmienników (31) przez θ , a drugi przez θ' , to z łatwością otrzymamy niezmiennik następujący:

$$\theta^2 - 2\theta' = \Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 + \frac{1}{2}(g^2_{yz} + g^2_{zx} + g^2_{xy}) \dots (32).$$

18. Oznaczenie wydłużeń głównych w przypadkach szczególnych. Przypadek 1-szy. *Dwa wydłużenia główne są sobie równe.* Przypuśćmy np., że $\Delta_\eta = \Delta_\zeta$. Wówczas na zasadzie własności równań, mających pierwiastki wielokrotne, otrzymujemy $F'(\Delta_\eta) = 0$; dla danego więc pierwiastku z równań (27) i (28) znajdujemy:

$$\left. \begin{aligned} 4(\Delta_y - \Delta_\eta) (\Delta_z - \Delta_\eta) &= g^2_{yz} \\ 4(\Delta_z - \Delta_\eta) (\Delta_x - \Delta_\eta) &= g^2_{zx} \\ 4(\Delta_x - \Delta_\eta) (\Delta_y - \Delta_\eta) &= g^2_{xy} \\ \Delta_x - \Delta_\eta &= \frac{1}{2} \frac{g_{xy} g_{zx}}{g_{yz}} \\ \Delta_y - \Delta_\eta &= \frac{1}{2} \frac{g_{yz} g_{xy}}{g_{zx}} \\ \Delta_z - \Delta_\eta &= \frac{1}{2} \frac{g_{zx} g_{yz}}{g_{xy}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (33).$$

Jeżeli dla skrócenia oznaczymy:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{g_{xy} g_{zx}}{g_{yz}} + \frac{g_{yz} g_{xy}}{g_{zx}} + \frac{g_{zx} g_{yz}}{g_{xy}} \right) = k \dots \dots \dots (34).$$

to z trzech ostatnich równań otrzymamy:

$$\Delta_\eta = \Delta_\zeta = \frac{1}{3} [\Delta_x + \Delta_y + \Delta_z - k] \dots \dots \dots (35).$$

Kierunki η i ζ są zupełnie dowolne, byleby były wzajemnie do siebie prostopadłe i leżały w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku ξ .

Pierwsze z równań (31), daje w przypadku rozważanym:

$$\Delta_\xi = \theta - 2\Delta_\eta = \Delta_\eta + k \dots \dots \dots (36),$$

przyczem z równań (27) i (28) dla kierunku ξ wynika:

$$\left. \begin{aligned} \cos^2(\xi, x) &= \frac{\Delta_x - \Delta_\eta}{k}, \quad \cos^2(\xi, y) = \frac{\Delta_y - \Delta_\eta}{k}, \quad \cos^2(\xi, z) = \frac{\Delta_z - \Delta_\eta}{k} \\ \cos(\xi, y) \cos(\xi, z) &= \frac{g_{yz}}{2k}, \quad \cos(\xi, z) \cos(\xi, x) = \frac{g_{zx}}{2k}, \\ \cos(\xi, x) \cos(\xi, y) &= \frac{g_{xy}}{2k} \end{aligned} \right\} \dots (37),$$

a przytem $F(\Delta_\xi) = F(\Delta_\eta + k) = 4k^2$.

Przypadek 2-gi. Wszystkie trzy wydłużenia główne są sobie równe. Wtedy mamy:

$$\Delta_\xi = \Delta_\eta = \Delta_\zeta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z, \quad g_{yz} = g_{zx} = g_{xy} = 0;$$

Jako kierunki ξ , η i ζ mogą być wzięte dowolne trzy kierunki wzajemnie do siebie prostopadłe.

Przypadek 3-ci. Jedno z wydłużeń głównych równe jest zeru. Niech będzie np. $\Delta_\zeta = 0$, wtedy do oznaczenia kierunku ζ otrzymujemy z równań (27) i (28):

$$\left. \begin{aligned} \cos^2(\zeta, x) &= \frac{1}{F'(0)} [4 \Delta_y \Delta_z - g^2_{yz}] \\ \cos^2(\zeta, y) &= \frac{1}{F'(0)} [4 \Delta_x \Delta_z - g^2_{zx}] \\ \cos^2(\zeta, z) &= \frac{1}{F'(0)} [4 \Delta_x \Delta_y - g^2_{xy}] \\ \cos(\zeta, y) \cos(\zeta, z) &= \frac{1}{F'(0)} [g_{xz} g_{xy} - 2 \Delta_x g_{yz}] \\ \cos(\zeta, z) \cos(\zeta, x) &= \frac{1}{F'(0)} [g_{xy} g_{yz} - 2 \Delta_y g_{zx}] \\ \cos(\zeta, x) \cos(\zeta, y) &= \frac{1}{F'(0)} [g_{yz} g_{zx} - 2 \Delta_z g_{xy}] \end{aligned} \right\} \dots \dots (38),$$

gdzie $F'(0) = 4(\Delta_y \Delta_z + \Delta_z \Delta_x + \Delta_x \Delta_y) - g^2_{yz} - g^2_{zx} - g^2_{xy}$,

a przytem z ostatniego równania (31) otrzymamy:

$$\Delta_x \Delta_y \Delta_z + \frac{1}{4} (g_{yz} g_{xx} g_{xy} - \Delta_x g^2_{yz} - \Delta_y g^2_{zx} - \Delta_z g^2_{xy}) = 0 \dots (39).$$

Dwa pozostałe wydłużenia Δ_ξ i Δ_η są pierwiastkami następującego równania stopnia drugiego:

$$\lambda^2 - (\Delta_x + \Delta_y + \Delta_z) \lambda + \Delta_y \Delta_z + \Delta_x \Delta_x - \frac{1}{4} (g^2_{yz} + g^2_{zx} + g^2_{xy}) = 0. \dots (40).$$

Przypadek 4-ty. Dwa wydłużenia główne są równe zeru. Przypuśćmy, że np. $\Delta_\eta = \Delta_z = 0$. W tym przypadku należy w równaniach (38) przyjąć $F(0) = 0$; z ostatnich więc trzech z tych równań otrzymamy:

$$\Delta_x = \frac{1}{2} \frac{g_{xz} g_{xy}}{g_{yz}}, \quad \Delta_y = \frac{1}{2} \frac{g_{xy} g_{yz}}{g_{zx}}, \quad \Delta_z = \frac{1}{2} \frac{g_{yz} g_{zx}}{g_{xy}}. \dots (41),$$

a dla Δ_ξ otrzymamy z równania pierwszego grupy (31):

$$\left. \begin{aligned} \Delta_\xi &= \Delta_x + \Delta_y + \Delta_z = k = \theta \\ \cos^2(\xi, x) &= \frac{\Delta_x}{k}, \quad \cos^2(\xi, y) = \frac{\Delta_y}{k}, \quad \cos^2(\xi, z) = \frac{\Delta_z}{k} \\ \cos(\xi, y) \cos(\xi, z) &= \frac{g_{yz}}{2k}, \quad \cos(\xi, z) \cos(\xi, x) = \frac{g_{zx}}{2k}, \\ \cos(\xi, x) \cos(\xi, y) &= \frac{g_{xy}}{2k} \end{aligned} \right\} \dots (42).$$

Przypadek 5-ty. Znaleźć wydłużenia główne w punkcie ciała, dla którego wszystkie odkształcenia składowe, za wyłączeniem g_{xy} , są równe zeru. Równanie ogólne (26) w danym przypadku przyjmie postać:

$$4\lambda^3 - g^2_{xy} \lambda = 0 \quad \text{czyli} \quad (\lambda^2 - \frac{1}{4} g^2_{xy}) \lambda = 0.$$

Pierwiastki tego równania są:

$$\Delta_\xi = \frac{1}{2} g_{xy}, \quad \Delta_\eta = -\frac{1}{2} g_{xy} \quad \text{i} \quad \Delta_z = 0 \dots (43).$$

A więc zarówno największe wydłużenie jak i największe skrócenie, wywołane przesunięciem g_{xy} , ma wartość liczebną równą połowie tego przesunięcia. W celu zaś oznaczenia kierunku ξ zwróćmy się do równań (27) i (28), z których, mając na względzie, że $F(\Delta_\xi) = 2g^2_{xy}$, otrzymamy:

$$\cos^2(\xi, x) = \cos^2(\xi, y) = \cos(\xi, x) \cos(\xi, y) = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \cos(\xi, z) = 0.$$

Kierunek więc największego wydłużenia leży w płaszczyźnie (x, y) , i tworzy zarówno z osią x jak i z osią y kąt 45° .

Do oznaczenia zaś kierunku η największego skrócenia otrzymamy:

$$\cos^2(\eta, x) = \cos^2(\eta, y) = -\cos(\eta, x) \cos(\eta, y) = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \cos(\eta, z) = 0.$$

A więc η tworzy z jedną z osi x lub y kąt 45° , a z drugą kąt 135° .

Przypadek 6-ty. Oznaczyć największe wydłużenie w punkcie ciała, dla którego:

$$\Delta_x = \Delta_y = \mu \Delta_z \quad \text{i} \quad g_{xy} = g_{yz} = 0.$$

Równanie (26) w tym przypadku przyjmuje postać:

$$(\lambda + \mu \Delta_z) [4(\lambda + \mu \Delta_z)(\lambda - \Delta_z) - g_{zx}^2] = 0$$

i rozpada się na dwa równania następujące:

$$4(\lambda + \mu \Delta_z)(\lambda - \Delta_z) = g_{zx}^2; \quad \lambda + \mu \Delta_z = 0. \\ \text{i} \quad \lambda_3 = -\mu \Delta_z.$$

Pierwiastki tych równań są:

$$\lambda_2 \left| = \frac{1 - \mu}{2} \Delta_z \pm \sqrt{\left(\frac{1 + \mu}{2} \Delta_z\right)^2 + \left(\frac{1}{2} g_{zx}\right)^2},$$

Jeżeli przyjmiemy, że $\Delta_z > 0$ i $\mu < 1$, to największe wydłużenie rzeczywiste da się oznaczyć z wzoru:

$$(\Delta_r)_{\max.} = \lambda_1 = \frac{1 - \mu}{2} \Delta_z + \sqrt{\left(\frac{1 + \mu}{2} \Delta_z\right)^2 + \left(\frac{1}{2} g_{zx}\right)^2} \quad (44).$$

Dla $F(\lambda_1)$ otrzymujemy:

$$F(\lambda_1) = 8(\lambda_1 + \mu \Delta_z)(\lambda_1 - \Delta_z) + 4(\lambda + \mu \Delta_z)^2 - g_{zx}^2,$$

a ponieważ pierwiastek λ_1 czyni zadość równaniu:

$$4(\lambda + \mu \Delta_z)(\lambda - \Delta_z) = g_{zx}^2,$$

przeto otrzymujemy:

$$F(\lambda_1) = 4(\lambda_1 + \mu \Delta_z)(\lambda_1 - \Delta_z) + 4(\lambda + \mu \Delta_z)^2 \quad \text{lub}$$

$$F(\lambda_1) = 4(\lambda_1 + \mu \Delta_z) [2\lambda_1 - (1 - \mu) \Delta_z].$$

Dla kierunku zaś największego wydłużenia otrzymujemy:

$$\cos^2(r, x) = \frac{\lambda_1 - \Delta_z}{2\lambda_1 - (1 - \mu)\Delta_z}, \quad \cos^2(r, y) = 0,$$

$$\cos^2(r, z) = \frac{\lambda_1 + \mu \Delta_z}{2\lambda_1 - (1 - \mu)\Delta_z}, \quad 2 \cos(r, x) \cos(r, z) = \frac{g_{zx}}{2\lambda_1 - (1 - \mu)\Delta_z},$$

czyli wstawiając za λ_1 wartość jego z równania (44):

$$\left. \begin{aligned} \cos^2(r, x) &= \frac{1}{2} - \frac{(1 + \mu) \Delta_z}{V(1 + \mu)^2 \Delta_z^2 + g_{zx}^2} \\ \cos^2(r, z) &= \frac{1}{2} + \frac{(1 + \mu) \Delta_z}{V(1 + \mu)^2 \Delta_z^2 + g_{zx}^2} \\ 2 \cos(r, x) \cos(r, z) &= \frac{g_{zx}}{V(1 + \mu)^2 \Delta_z^2 + g_{zx}^2} \end{aligned} \right\} \dots (45).$$

Wzory (44) i (45) mają zastosowanie ważne w nauce o wytrzymałości materiałów budowlanych.

ROZDZIAŁ II.

O siłach sprężystości.

19. Określenie siły sprężystości. W celu określenia siły sprężystości wyobraźmy sobie, że mamy ciało, znajdujące się w równowadze pod działaniem sił zewnętrznych. Prowadzimy płaszczyznę dowolną MN tak, ażeby przecięła ciało na dwie części P i Q , i odłączamy w myśli część Q . Ponieważ punkty części Q wywierają pewne działania na punkty części P i odwrotnie i ponieważ tylko dzięki temu wzajemnemu oddziaływaniu istnieje stan równowagi, przeto po odjęciu części Q równowaga zostanie naruszona. Punkty powierzchni MN , ograniczającej część pozostałą P , dążyć będą do poruszania się i istotnie poruszają się, o ile nie będą wstrzymane przez pewne siły, ściśle oznaczone zarówno co do wielkości swej jak i kierunku. Weźmy na płaszczyźnie MN punkt m i niech n będzie normalną zewnętrzną (normalną w kierunku części odjętej Q) do płaszczyzny w tym punkcie, a $\partial\omega$ niech będzie nieskończenie małą płaszczyzną (cząstką, czyli elementem powierzchni), której środek ciężkości znajduje się w punkcie m i która przystaje do płaszczyzny stycznej do powierzchni. Jeżeli po odjęciu części Q , cząstka $\partial\omega$ ma pozostać w położeniu swem pierwotnym, to na wszystkie jej punkty muszą działać pewne siły. Wypadkowa wszystkich tych sił jest siłą zwaną siłą sprężystości, działającą w punkcie m ciała, na płaszczyznę $\partial\omega$, dla której n jest normalną zewnętrzną.

Siła ta jest proporcjonalna do powierzchni płaszczyzny i z tego powodu może być oznaczona przez $p_n \partial\omega$. Przy takim oznaczeniu, będzie p_n *siłą sprężystości, sprowadzoną do jednostki powierzchni*. Wskaźnik n wskazuje kierunek normalnej do tej płaszczyzny, na którą działa owa siła.

Siła sprężystości, działająca na cząstkę powierzchni MN części P , zastępuje oczywiście działanie części Q na tę cząstkę, a więc, jeżeli siła ta będzie skierowana w stronę części Q , to będzie to oznaczało, że część Q przyciąga tę cząstkę, czyli że i część P przyciąga ją z taką samą siłą.

W tym przypadku siła sprężystości będzie *przyciągająca*, a rzut jej na normalną zewnętrzną będzie *dodatni*. Jeżeli zaś siła sprężystości skierowana będzie włąb pozostałej części P , to cząstka uważana powierzchni jest odpychana przez część Q , a więc i przez część P . Siła sprężystości w tym razie będzie *odpychająca*, a rzut jej na normalną zewnętrzną będzie *ujemny*.

Z podanego powyżej określenia siły sprężystości wynika nietylko, że siła ta może dla różnych punktów ciała być różną, lecz że nawet dla jednego i tego samego punktu można otrzymać różne co do wielkości i kierunku siły sprężystości, jeżeli płaszczyzna, na którą działa ta siła, będzie zmieniała swoje położenie, obracając się około swego środka ciężkości. Należy zatem siłę sprężystości uważać za funkcję współrzędnych punktu i kątów, wyznaczających położenie normalnej do płaszczyzny. Gdy zaś cząsteczki ciała nie znajdują się w stanie spoczynku, siła sprężystości jest zarazem funkcją czasu.

Przyjmijmy oznaczenia następujące: siłę sprężystości, sprowadzoną do jednostki powierzchni i działającą na płaszczyznę, dla której normalną zewnętrzną jest n , oznaczajmy przez p_n , rzut zaś siły p_n na kierunek dowolny s — przez p_{ns} . Tak np.

$$p_{ns} = p_n \cos(p_n, s), \quad p_{sn} = p_s \cos(p_s, n), \quad p_{nn} = p_n \cos(p_n, n),$$

$$p_{xx} = p_x \cos(p_x, x), \quad p_{xy} = p_x \cos(p_x, y), \quad \text{i t. p.}$$

Celem dokładnego poznania sił sprężystości powinniśmy umieć wyjaśnić, jak się te siły zmieniają przy przejściu od jednego punktu ciała do innego sąsiedniego, a również poznać zależność ich od kątów, ustalających położenie płaszczyzny, na którą działa dana siła.

Zmienność sił sprężystości przy przejściu od jednego punktu do innego i rozkład ich dokoła danego punktu na rozmaite pod względem swojego położenia płaszczyzny, można wyprowadzić z warunków równowagi sił, działających na punkty ciała. Zwracamy się przeto obecnie do oznaczenia tych warunków.

20. Równania równowagi ciała sprężystego. W celu otrzymania równań równowagi układu punktów, połączonych z sobą w sposób dowolny, można posiłkować się metodą Lagrange'a, opartą na zasadzie *przesunięć przygotowanych (przysposobionych)*. Metoda ta ma tę ważną zaletę, że wszystkie warunki niezbędne dla równowagi daje jednocześnie, ale wymaga, ażeby warunki przesunięć przygotowanych układu punktów były wyrażone analitycznie w postaci równań lub nierówności, co nie zawsze jest łatwe, szczególnie zaś wtedy, gdy warunki te nie są dane bezpośrednio i musimy je oznaczać z pewnych własności układu. W takim przypadku dogodniej jest w celu wyprowadzenia równań równowagi po-

siłkować się inną metodą, polegającą na działaniach następujących: a) z danego układu punktów wybieramy cząstkę objętości, której to cząstki wszystkie trzy wymiary są wielkościami nieskończenie małemi stopnia pierwszego i odrzuciwszy inne części układu, zastępujemy ich działanie na wydzieloną cząstkę siłami, działającymi na punkty powierzchni cząstki; b) biorąc pod uwagę, że równowaga układu nie zostaje naruszona przez wprowadzenie nowych związków, zmieniających pewne z przesunięć przygotowanych na niemożliwe, wprowadzamy założenie, że cząstka wybrana jest ciałem bezwzględnie sztywnem, którego części nie są zdolne do posunięć, zmieniających ich układ względny, i c) oznaczamy warunki równowagi cząstki z wzorów, służących do swobodnego niezmiennego układu punktów.

Ta ostatnia metoda jest równie ogólną jak metoda Lagrange'a, albowiem może być stosowana i do układu nieswobodnego, o ile do sił rzeczywiście działających na punkty układu dołączymy i przeciwdziałania związków, które go czynią nieswobodnym. Metoda ta stoi niżej od metody Lagrange'a pod względem zupełności, ponieważ nie daje jednocześnie wszystkich warunków niezbędnych do równowagi. Istotnie, warunki niezbędne i wystarczające do równowagi układu niezmiennego są niezbędne i dla układu zmiennego, lecz nie są dlań wystarczające. Dla układu zmiennego, oprócz warunków *wspólnych dla wszystkich jego punktów*, istnieją jeszcze warunki *szczególne* dla punktów, leżących na powierzchniach, ograniczających układ. Celem otrzymania tych warunków szczególnych, należy wyosobnić z układu cząstkę objętości tak, ażeby jedna z jej ścian przystawała do powierzchni ograniczającej i wyprowadzić równania równowagi tej cząstki.

Wyprowadzimy równania równowagi ciała sprężystego na zasadzie metody ostatnio wspomnianej.

Przypominamy, że równania równowagi ciała swobodnego, bezwzględnie sztywnego, są następujące:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0 \\ \Sigma(Zy - Yz) = 0, \quad \Sigma(Xz - Zx) = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0 \end{aligned} \right\} (46),$$

gdzie X , Y i Z są to rzuty na wzajemnie do siebie prostopadłe osie współrzędnych siły, działającej na punkt ciała, o współrzędnych x , y i z .

Równania ogólne równowagi. Oznaczmy w ciele, znajdującem się w stanie równowagi naprężonej, równoległością cząstkową, o krawędziach ∂x , ∂y i ∂z , a odrzuciwszy wszystkie inne części ciała, zastąpmy ich działanie siłami, działającymi na ściany tego równoległością. Wypadkowa sił, działających na punkty ściany dowolnej, będzie siłą sprężystości, działającą na tę ścianę. Tę ostatnią siłę rozkładamy na trzy składowe, równoległe do osi współrzędnych.

Zaczynamy od ściany najbliższej do płaszczyzny (yz) i do niej równoległej. Ponieważ powierzchnia tej ściany równa się iloczynowi $\partial y \partial z$, a normalna zewnętrzna do niej idzie w kierunku osi ujemnej x , przeto siła sprężystości, działająca na tę ścianę, będzie $-p_x \partial y \partial z$, a rzuty jej na osie współrzędnych będą:

$$-p_{xx} \partial y \partial z, \quad -p_{xy} \partial y \partial z \quad \text{i} \quad -p_{xz} \partial y \partial z.$$

Współrzędne zaś punktu przyczepienia siły będą:

$$x, \quad y + \frac{1}{2} \partial y \quad \text{i} \quad z + \frac{1}{2} \partial z,$$

gdzie x, y i z są współrzędnymi wierzchołka równoległościanu, najbliższego do początku współrzędnych.

Przy przejściu od ściany uważanej do ściany do niej równoległej, współrzędne y i z się nie zmieniają, lecz współrzędna x zwiększa się o ∂x , a wskutek tego siły sprężystości, uważane jako funkcje ciągłe współrzędnych otrzymają przy tem przejściu nieskończenie małe przyrosty tylko wskutek zmiany x . Z uwagi zaś, że dla tej ściany oś dodatnia x jest normalną zewnętrzną, otrzymamy dla rzutów siły sprężystości tej ściany na osie współrzędnych:

$$\left(p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \partial x\right) \partial y \partial z, \quad \left(p_{xy} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} \partial x\right) \partial y \partial z, \quad \left(p_{xz} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} \partial x\right) \partial y \partial z,$$

dla współrzędnych zaś punktu przyczepienia (przytknięcia) siły:

$$x + \partial x, \quad y + \frac{1}{2} \partial y \quad \text{i} \quad z + \frac{1}{2} \partial z.$$

W takiż sposób otrzymamy dla rzutów siły sprężystości, działającej na ścianę najbliższą do płaszczyzny (zx):

$$-p_{yx} \partial z \partial x, \quad -p_{yy} \partial z \partial x, \quad -p_{yz} \partial z \partial x,$$

dla współrzędnych zaś punktu przyczepienia:

$$x + \frac{1}{2} \partial x, \quad y \quad \text{i} \quad z + \frac{1}{2} \partial z.$$

Rzuty siły, przytkniętej do ściany najbardziej oddalonej od płaszczyzny (zy), będą:

$$\left(p_{yx} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} \partial y\right) \partial z \partial x, \quad \left(p_{yy} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} \partial y\right) \partial z \partial x, \quad \left(p_{yz} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} \partial y\right) \partial z \partial x,$$

a współrzędne punktu przyczepienia:

$$x + \frac{1}{2} \partial x, \quad y + \partial y \quad \text{i} \quad z + \frac{1}{2} \partial z.$$

Wreszcie dla ściany, najbliższej do płaszczyzny (xy) otrzymamy dla rzutów siły sprężystości:

$$-p_{xx} \partial x \partial y, \quad -p_{xy} \partial x \partial y, \quad -p_{xz} \partial x \partial y$$

a dla współrzędnych punktu przyczepienia:

$$x + \frac{1}{2} \partial x, \quad y + \frac{1}{2} \partial y \quad \text{i} \quad z;$$

dla ściany zaś równoległej do ostatniej mieć będziemy:

$$\left(p_{xz} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \partial z \right) \partial x \partial y, \quad \left(p_{xy} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial z} \partial z \right) \partial x \partial y, \quad \left(p_{zz} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \partial z \right) \partial x \partial y,$$

$$x + \frac{1}{2} \partial x, \quad y + \frac{1}{2} \partial y \quad \text{i} \quad z + \partial z.$$

Jeżeli nadto przez X, Y i Z oznaczymy rzuty na osie współrzędnych przyspieszenia zewnętrznej siły masy, działającej na wszystkie punkty ciała (np. siły ciężkości i t. p.), a przez m masę jednostki objętości ciała (gęstość), to rzuty wypadkowej sił zewnętrznych, działających jednocześnie na wszystkie punkty równoległościanu cząstkowego, będą:

$$m X \partial x \partial y \partial z, \quad m Y \partial x \partial y \partial z \quad \text{i} \quad m Z \partial x \partial y \partial z,$$

współrzędne zaś punktu przyczepienia będą:

$$x + \frac{1}{2} \partial x, \quad y + \frac{1}{2} \partial y \quad \text{i} \quad z + \frac{1}{2} \partial z.$$

Teraz łatwo można zauważyć, że pierwsze trzy równania grupy (46) sprowadzają się do następujących:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} + m X &= 0 \\ \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} + m Y &= 0 \\ \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + m Z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (47).$$

Istnienie tych równań jest niezbędne do unicestwienia posunięć postępowych równoległościanu cząstkowego; w celu zaś otrzymania warunków, przy których znikają jego ruchy obrotowe, zobaczymy, do czego doprowadza np. warunek $\Sigma(Yx - Xy) = 0$. W tym celu zauważymy przedewszystkiem, że równania (46) otrzymano przy założeniu, iż środek momentów znajduje się w początku współrzędnych, którego położenie jest zresztą zupełnie dowolne. Celem więc możliwie prędkiego otrzymania szukanych warunków, przenosimy początek współrzędnych do środka ciężkości równoległościanu, nie zmieniając kierunku osi. Rzuty sił pozostaną przytem bez zmiany, a nowe współrzędne ich punktów przyczepienia otrzymamy z poprzednich, zastępując w nich x, y i z przez $x - \frac{1}{2} \partial x, y - \frac{1}{2} \partial y$ i $z - \frac{1}{2} \partial z$, i wprowadzając założenie, że $x=y=z=0$. Postępując w ten sposób, przekonamy się z łatwością, że powyższy warunek sprowadza się do następującego:

$$p_{xy} + \frac{1}{2} \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} \partial x - p_{yx} - \frac{1}{2} \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} \partial y = 0,$$

albo, zaniedbując wielkości nieskończenie małe wobec wielkości skończonych: $p_{xy} = p_{yx}$. W takiż sposób ustalimy jeszcze dwa warunki: $p_{yz} = p_{zy}$ i $p_{zx} = p_{xz}$.

Równania więc (47), wraz z warunkami:

$$p_{yz} = p_{zy}, \quad p_{zx} = p_{xz} \quad \text{i} \quad p_{xy} = p_{yx} \quad \dots \quad (48)$$

są to właśnie *równania ogólne równowagi ciała sprężystego*, które powinny istnieć dla każdego jego punktu.

21. Równania szczególne równowagi. W celu otrzymania równań szczególnych równowagi dla punktów, leżących na granicach ciała, wydzielamy z ciała nieskończenie mały *czworościan* taki, ażeby trzy jego ściany były równoległe do płaszczyzn współrzędnych, a czwarta, pochylona względem nich, przystawała do powierzchni ograniczającej ciało. Niech n będzie normalną zewnętrzną do tej ostatniej ściany, $\partial\omega$ — powierzchnią tej ściany, P — ciśnieniem zewnętrznym, działającym na jednostkę powierzchni, a ∂x , ∂y i ∂z — długościami krawędzi czworościanu równoległych do osi współrzędnych.

Zastępując działanie na czworościan części ciała siłami sprężystości, przekonamy się łatwo, że równania, unicestwiające posunięcia postępowe tego czworościanu, są następujące:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} [p_{xx} \partial y \partial z + p_{yx} \partial z \partial x + p_{zx} \partial x \partial y] + P \partial\omega \cos(P, x) + \frac{1}{6} m X \partial x \partial y \partial z &= 0 \\ -\frac{1}{2} [p_{xy} \partial y \partial z + p_{yy} \partial z \partial x + p_{zy} \partial x \partial y] + P \partial\omega \cos(P, y) + \frac{1}{6} m Y \partial x \partial y \partial z &= 0 \\ -\frac{1}{2} [p_{xz} \partial y \partial z + p_{yz} \partial z \partial x + p_{zz} \partial x \partial y] + P \partial\omega \cos(P, z) + \frac{1}{6} m Z \partial x \partial y \partial z &= 0 \end{aligned}$$

Ponieważ wzajemnie do siebie prostopadłe trzy ściany czworościanu są rzutami na płaszczyzny współrzędnych, pochylonej względem nich ściany czwartej $\partial\omega$, przeto:

$$\frac{1}{2} \partial y \partial z = \partial\omega \cos(n, x), \quad \frac{1}{2} \partial z \partial x = \partial\omega \cos(n, y), \quad \frac{1}{2} \partial x \partial y = \partial\omega \cos(n, z).$$

Skoro wprowadzimy to w równania poprzednie i usuniemy z nich wyrazy ostatnie, jako nieskończenie małe wyższego stopnia, w porównaniu z innymi, oraz zniesiemy $\partial\omega$, to otrzymamy ostatecznie równania następujące:

$$\left. \begin{aligned} P \cos(P, x) &= p_{xx} \cos(n, x) + p_{yx} \cos(n, y) + p_{zx} \cos(n, z) \\ P \cos(P, y) &= p_{xy} \cos(n, x) + p_{yy} \cos(n, y) + p_{zy} \cos(n, z) \\ P \cos(P, z) &= p_{xz} \cos(n, x) + p_{yz} \cos(n, y) + p_{zz} \cos(n, z) \end{aligned} \right\} \quad (49).$$

Warunki, unicestwiające ruchy obrotowe czworościanu, prowadzą do równań (48).

Równania (49) są to właśnie *równania szczególne (graniczne) równowagi*, ważne tylko dla punktów, leżących na powierzchniach, ograniczających ciało.

Gdyby czworościan był wydzielony z ciała w taki sposób, iż nie miałyby ściany wspólnej z powierzchnią, ograniczającą ciało, to w równaniach (49) należałoby siłę P zastąpić siłą sprężystości p_n ; wskutek czego równania te przybrałyby postać:

$$\left. \begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx} \cos(n, x) + p_{yx} \cos(n, y) + p_{zx} \cos(n, z) \\ p_{ny} &= p_{xy} \cos(n, x) + p_{yy} \cos(n, y) + p_{zy} \cos(n, z) \\ p_{nz} &= p_{xz} \cos(n, x) + p_{yz} \cos(n, y) + p_{zz} \cos(n, z) \end{aligned} \right\} \dots (50).$$

Te trzy równania mieszczą się, oczywiście, w jednym następującem:

$$p_{ns} = p_{xs} \cos(n, x) + p_{ys} \cos(n, y) + p_{zs} \cos(n, z). \dots (51).$$

Równania (50) mogą dać pojęcie o prawie rozmieszczenia sił sprężystości dokoła danego punktu ciała, ponieważ określają one zależność siły p_n od kierunku normalnej n do tej płaszczyzny, na którą działa ta siła; równania zaś (47) wraz z (48), jako zawierające pochodne sił sprężystości względem współrzędnych, mogą dać pojęcie o zmienności tych sił przy przejściu z jednego punktu ciała do innego sąsiedniego.

Wszystkie te równania zawierają tylko sześć sił sprężystości:

$$p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz} = p_{zy}, p_{zx} = p_{xz} \text{ i } p_{xy} = p_{yx},$$

z których trzy pierwsze są to *siły normalne*, pozostałe zaś trzy — *siły styczne*. Wogóle p_{nm} jest to siła normalna, a p_{nm} — siła styczna sprężystości, o ile dla tej siły ostatniej, kierunki n i m są do siebie prostopadłe.

22. Rozmieszczenie sił sprężystych dokoła punktu. Przy przyjętych przez nas oznaczeniach rzutów sił sprężystych i przy uwzględnieniu warunku, że osi współrzędnych x, y i z tworzą układ prostokątny osi, otrzymujemy wzory:

$$p_n^2 = p_{nx}^2 + p_{ny}^2 + p_{nz}^2 \dots (52).$$

$$\left. \begin{aligned} p_x^2 &= p_{xx}^2 + p_{xy}^2 + p_{xz}^2 \\ p_y^2 &= p_{yx}^2 + p_{yy}^2 + p_{yz}^2 \\ p_z^2 &= p_{zx}^2 + p_{zy}^2 + p_{zz}^2 \end{aligned} \right\} \dots (53).$$

$$p_{ns} = p_{nx} \cos(s, x) + p_{ny} \cos(s, y) + p_{nz} \cos(s, z) \dots (54).$$

Wzór ostatni, gdy w nim za p_{nx} , p_{ny} i p_{nz} podstawimy ich wartości z równań (50), przybierze postać:

$$\begin{aligned} p_{ns} &= p_{xx} \cos(n, x) \cos(s, x) + p_{yy} \cos(n, y) \cos(s, y) + p_{zz} \cos(n, z) \cos(s, z) + \\ &+ p_{yz} [\cos(n, y) \cos(s, z) + \cos(n, z) \cos(s, y)] + \\ &+ p_{zx} [\cos(n, z) \cos(s, x) + \cos(n, x) \cos(s, z)] + \\ &+ p_{xy} [\cos(n, x) \cos(s, y) + \cos(n, y) \cos(s, x)] \dots (55). \end{aligned}$$

W przypadku szczególnym, gdy kierunek s , na którym oznaczamy rzut siły p_n , zleje się z kierunkiem n , otrzymamy:

$$p_{nn} = p_{xx} \cos^2(n, x) + p_{yy} \cos^2(n, y) + p_{zz} \cos^2(n, z) + \\ + 2p_{yz} \cos(n, y) \cos(n, z) + 2p_{zx} \cos(n, z) \cos(n, x) + \\ + 2p_{xy} \cos(n, x) \cos(n, y) (56).$$

Ponieważ część druga wzoru (55) jest symetryczna względem liter n i s , przeto przychodzimy do wniosku, że dla kierunków dowolnych n i s zawsze

$$p_{ns} = p_{sn} (57).$$

Wzór ostatni mieści w sobie *twierdzenie wzajemnej równości rzutów sił sprężystych*, polegające na tem, że rzut siły sprężystości p_n na linię s równy jest rzutowi siły sprężystości p_s na linię n . Warunki równowagi (48) są to więc przypadki szczególne tego twierdzenia.

Ponieważ wzory (51) i (54) otrzymaliśmy na podstawie założenia, że rzut siły wypadkowej na kierunek dowolny równy jest sumie rzutów sił składowych na ten sam kierunek, przeto z wzoru (54) wynika, że p_{nx} , p_{ny} i p_{nz} są to wzajemnie do siebie prostopadłe siły składowe siły p_n , a z wzoru (51), że $p_x \cos(n, x)$, $p_y \cos(n, y)$ i $p_z \cos(n, z)$ są to także składowe siły p_n , ale nie prostopadłe do siebie wzajemnie.

Z zestawienia wzoru (56) z (8) jest widoczne, że siła normalna sprężystości p_{nn} wyraża się przez $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$ i $\cos(n, z)$, zupełnie tak samo jak wydłużenie względne Δ_n ; wskutek tego prawo rozmieszczenia dokoła danego punktu sił normalnych, działających na rozmaite płaszczyzny, jest zgodne z prawem rozmieszczenia wydłużeń dokoła tegoż punktu. Taką analogią istnieje pomiędzy wzorem (55), określającym siłę sprężystości p_{ns} , a wzorem (9), określającym przesunięcie g_{ns} .

Ażeby od wzorów ogólnych (8) i (9) przejść do wzorów (56) i (55), należy we wzorach (8) i (9) za wielkości Δ_x , Δ_y , Δ_z i Δ_n podstawić p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} i p_{nn} , a za wielkości g_{yz} , g_{zx} , g_{xy} , i g_{ns} podstawić $2p_{yz}$, $2p_{zx}$, $2p_{xy}$ i $2p_{ns}$. Z tego nie należy jednak wyprowadzać wniosku, że każdy wzór, wyrażający pewną zależność między odkształceniami ciała, można zapomocą wskazanej powyżej zamiany współczynników, przekształcić na wzór, wyrażający zależność między siłami sprężystości. Zupełna analogia bowiem między wzorami obu tych kategorii nie istnieje, choćby tylko dlatego, że dla przesunięcia g_{ns} musieliśmy z konieczności przypuścić, iż kierunki n i s są do siebie prostopadłe, gdy tymczasem dla siły sprężystości p_{ns} takie ograniczenie nie jest potrzebne, gdyż istnieje ona dla dowolnych kierunków n i s . Tak np. trzy siły sprężystości p_{nx} , p_{ny} i p_{nz} istnieją jednocześnie, gdy tymczasem trzy przesunięcia g_{nx} , g_{ny} i g_{nz} jednocześnie istnieć nie mogą, albowiem nie-

ma takiego kierunku n , który byłby jednocześnie prostopadły do trzech osi x , y i z .

23. Elipsoida sprężystości. Wzór (56), określający p_{nn} , pozwala na takie wykreślenie, jakim posilkowaliśmy się przy wyprowadzeniu wzoru (8). W każdym więc punkcie ciała możemy przeprowadzić powierzchnię stopnia drugiego, oznaczoną przez równanie:

$$p_{xx}x^2 + p_{yy}y^2 + p_{zz}z^2 + 2p_{yz}yz + 2p_{zx}zx + 2p_{xy}xy = \pm 1 \quad (58),$$

której środek leży w punkcie wybranym, a promienie wodzące, wychodzące z tego środka, są równe $\frac{1}{\sqrt{\pm p_{nn}}}$.

Tę powierzchnię Cauchy nazwał *elipsoidą sprężystości*, a kierunki jej średnic głównych — *osiąmi sprężystości w danym punkcie*.

Jeżeli przez ξ , η i ζ oznaczymy kierunki wzajemne do siebie prostopadłych osi sprężystości w danym punkcie, a przez A_1 , A_2 i A_3 — siły główne sprężystości, działające w tychże kierunkach, to równanie elipsoidy sprężystości, odniesione do jej średnic głównych, będzie:

$$A_1 \xi^2 + A_2 \eta^2 + A_3 \zeta^2 = \pm 1 \quad (59),$$

a wzór na siłę sprężystości p_{nn} :

$$p_{nn} = A_1 \cos^2(n, \xi) + A_2 \cos^2(n, \eta) + A_3 \cos^2(n, \zeta) \quad (60).$$

Jednocześnie będziemy mieli warunki:

$$p_{\eta\zeta} = 0, \quad p_{\xi\zeta} = 0 \quad \text{i} \quad p_{\xi\eta} = 0 \quad (61).$$

Te ostatnie warunki wykazują, że w każdym punkcie ciała istnieją trzy takie wzajemnie prostopadłe płaszczyzny, na które działają prostopadłe do nich siły sprężystości. Normalne do tych płaszczyzn padają na kierunki ξ , η i ζ ; mamy więc:

$$p_{\xi} = p_{\xi\xi} = A_1, \quad p_{\eta} = p_{\eta\eta} = A_2 \quad \text{i} \quad p_{\zeta} = p_{\zeta\zeta} = A_3 \quad (62).$$

Gdy wszystkie te trzy siły główne sprężystości są przyciągające, albo wszystkie trzy odpychające, wówczas równanie (59) da nam elipsoidę. W tym przypadku wszystkie inne siły normalne danego punktu będą jednoimiennie z głównymi. Jeżeli natomiast dwie z sił głównych będą przyciągające, a trzecia odpychająca, lub naodwrot, wówczas równanie (59) da nam dwie hyperboloidy sprzężone: jednopowłokową i dwupowłokową, mające wspólny stożek asymptotyczny, którego równanie ma postać:

$$A_1 \xi^2 + A_2 \eta^2 + A_3 \zeta^2 = 0 \quad (63).$$

Dla kierunku n , zlewającego się z dowolną z tworzących tego stożka asymptotycznego, siła p_{nn} będzie równa zeru. A zatem tworzące tego stożka mają kierunek normalnych do takich płaszczyzn, na które działają siły stycznne sprężystości.

Wzory (50) przyjmują szczególnie prostą postać, gdy osi współrzędnych x, y i z zlewają się z osiami głównymi sprężystości danego punktu. W tym przypadku wzory te dla rzutów siły p_n na osie główne sprężystości, dadzą:

$$p_{n\xi} = A_1 \cos(n, \xi), \quad p_{n\eta} = A_2 \cos(n, \eta), \quad p_{n\zeta} = A_3 \cos(n, \zeta) \dots (64),$$

skąd wynika, że:

$$p_n = \sqrt{[A_1^2 \cos^2(n, \xi) + A_2^2 \cos^2(n, \eta) + A_3^2 \cos^2(n, \zeta)]} \dots (65).$$

$$i \quad \cos(p_n, \xi) = \frac{A_1 \cos(n, \xi)}{p_n}, \quad \cos(p_n, \eta) = \frac{A_2 \cos(n, \eta)}{p_n},$$

$$\cos(p_n, \zeta) = \frac{A_3 \cos(n, \zeta)}{p_n} \dots \dots \dots (66).$$

Wreszcie, do oznaczenia kąta, jaki tworzy siła p_n z normalną n , służy równanie:

$$\cos(p_n, n) = \frac{p_{nn}}{p_n} = \frac{A_1}{p_n} \cos^2(n, \xi) + \frac{A_2}{p_n} \cos^2(n, \eta) + \frac{A_3}{p_n} \cos^2(n, \zeta). (67).$$

Jeżeli przez ξ', η' i ζ' oznaczymy współrzędne punktu końcowego siły p_n , odniesionego do osi głównych sprężystości, to otrzymamy:

$$\xi' = p_n \cos(p_n, \xi) = p_{n\xi}, \quad \eta' = p_{n\eta} \quad i \quad \zeta' = p_{n\zeta}, \quad \text{lub}$$

$$\xi' = A_1 \cos(n, \xi), \quad \eta' = A_2 \cos(n, \eta) \quad i \quad \zeta' = A_3 \cos(n, \zeta).$$

Skoro zaś z tych równań oznaczymy $\cos(n, \xi), \cos(n, \eta),$ i $\cos(n, \zeta)$ oraz podstawimy w znaną równość:

$$\cos^2(n, \xi) + \cos^2(n, \eta) + \cos^2(n, \zeta) = 1,$$

to otrzymamy równanie:

$$\frac{\xi'^2}{A_1^2} + \frac{\eta'^2}{A_2^2} + \frac{\zeta'^2}{A_3^2} = 1 \dots \dots \dots (68).$$

Z tego równania wyprowadzamy wniosek, że *punkty końcowe wszystkich sił sprężystości danego punktu leżą na elipsoidzie, której półosie zlewają się z osiami głównymi sprężystości i mają wielkości równe siłom głównym sprężystości.* Tę elipsoidę Lamé nazwał *elipsoidą sprężystości.*

Ponieważ z równań powyższych dla ξ', η' i ζ' wynika, że:

$$\cos(n, \xi) = \frac{\xi'}{A_1}, \quad \cos(n, \eta) = \frac{\eta'}{A_2}, \quad \cos(n, \zeta) = \frac{\zeta'}{A_3},$$

przeto równanie płaszczyzny, na którą działa siła p_n , będzie:

$$\frac{\xi'}{A_1} \xi + \frac{\eta'}{A_2} \eta + \frac{\zeta'}{A_3} \zeta = 0 \dots \dots \dots (69);$$

płaszczyzna ta jest więc równoległa do płaszczyzny stycznej do po-

wierzchni, oznaczonej przez równanie:

$$\frac{\xi^2}{A_1} + \frac{\eta^2}{A_2} + \frac{\zeta^2}{A_3} = \pm 1 \quad \dots \quad (70)$$

w tym samym punkcie, w którym przecina ją siła p_n . To ostatnie równanie daje albo elipsoidę albo dwie hyperboloidy, posiadające wspólny stożek asymptotyczny, o równaniu:

$$\frac{\xi^2}{A_1} + \frac{\eta^2}{A_2} + \frac{\zeta^2}{A_3} = 0 \quad \dots \quad (71).$$

Z pochodzenia powierzchni (70) wynika, że gdy siła p_n zleje się z jedną z tworzących stożka asymptotycznego (71), wówczas płaszczyzna, na którą działa ta siła, zlewa się z płaszczyzną styczną do tego stożka, zawierającą tę tworzącą, czyli w tym przypadku siła p_n będzie siłą styczną sprężystości.

Oczywiście, płaszczyzny styczne do stożka (71) zlewają się z temi płaszczyznami, do których normalne tworzą stożek, oznaczony przez równanie (63).

24. Wyznaczenie sił głównych sprężystości. Ponieważ każda siła główna sprężystości jest prostopadła do płaszczyzny, na którą działa, przeto oznaczając przez A którąkolwiek z trzech sił głównych sprężystości, a przez N kierunek normalnej do jej płaszczyzny, otrzymamy na podstawie wzoru (50) następujące równania do wyznaczenia wielkości i kierunku tej siły:

$$A \cos(N, x) = p_{xx} \cos(N, x) + p_{yx} \cos(N, y) + p_{zx} \cos(N, z),$$

$$A \cos(N, y) = p_{xy} \cos(N, x) + p_{yy} \cos(N, y) + p_{zy} \cos(N, z),$$

$$A \cos(N, z) = p_{xz} \cos(N, x) + p_{yz} \cos(N, y) + p_{zz} \cos(N, z),$$

czyli:

$$\left. \begin{aligned} (p_{xx} - A) \cos(N, x) + p_{yx} \cos(N, y) + p_{zx} \cos(N, z) &= 0 \\ p_{xy} \cos(N, x) + (p_{yy} - A) \cos(N, y) + p_{zy} \cos(N, z) &= 0 \\ p_{xz} \cos(N, x) + p_{yz} \cos(N, y) + (p_{zz} - A) \cos(N, z) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (72).$$

gdzie $\cos^2(N, x) + \cos^2(N, y) + \cos^2(N, z) = 1$

Rozwiązując te równania w taki sam sposób, w jaki rozwiązaliśmy równania, służące do wyznaczania wielkości i kierunku największego wydłużenia względnego, otrzymamy równania:

$$\left. \begin{aligned} \cos^2(N, x) &= \frac{(p_{yy} - A)(p_{zz} - A) - p_{yz}^2}{F(A)} \\ \cos^2(N, y) &= \frac{(p_{zz} - A)(p_{xx} - A) - p_{zx}^2}{F(A)} \\ \cos^2(N, z) &= \frac{(p_{xx} - A)(p_{yy} - A) - p_{xy}^2}{F(A)} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (73).$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(N, y) \cos(N, z) &= \frac{p_{zx} p_{yx} - p_{zy} (p_{xx} - A)}{F(A)} \\ \cos(N, z) \cos(N, x) &= \frac{p_{xy} p_{zy} - p_{xz} (p_{yy} - A)}{F(A)} \\ \cos(N, x) \cos(N, y) &= \frac{p_{yz} p_{xz} - p_{yx} (p_{zz} - A)}{F(A)} \end{aligned} \right\} \dots (74).$$

gdzie $F(A) = (p_{yy} - A)(p_{zz} - A) + (p_{zz} - A)(p_{xx} - A) +$
 $+ (p_{xx} - A)(p_{yy} - A) - (p^2_{yz} + p^2_{zx} + p^2_{xy}) \dots (75)$

$$(p_{xx} - A)(p_{yy} - A)(p_{zz} - A) - (p_{xx} - A)p^2_{yz} - (p_{yy} - A)p^2_{zx} -$$

$$- (p_{zz} - A)p^2_{xy} + 2p_{yz} p_{zx} p_{xy} = 0 \dots (76).$$

Ostatniemu równaniu możemy nadać postać następującą:

$$A^3 - (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})A^2 + (p_{yy} p_{zz} + p_{zz} p_{xx} + p_{xx} p_{yy} - p^2_{yz} - p^2_{zx} - p^2_{xy})A -$$

$$- 2p_{yz} p_{zx} p_{xy} - p_{xx} p_{yy} p_{zz} + p_{xx} p^2_{yz} + p_{yy} p^2_{zx} + p_{zz} p^2_{xy} =$$

$$= (A - A_1)(A - A_2)(A - A_3) = 0 \dots (77).$$

Stąd:

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} \\ A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_1 &= p_{xx} p_{yy} + p_{yy} p_{zz} + p_{zz} p_{xx} - p^2_{yz} - p^2_{zx} - p^2_{xy} \\ A_1 A_2 A_3 &= p_{xx} p_{yy} p_{zz} + 2p_{yz} p_{zx} p_{xy} - p_{xx} p^2_{yz} - p_{yy} p^2_{zx} - p_{zz} p^2_{xy} \end{aligned} \right\} (78).$$

Zarówno pierwsze, jak i drugie części ostatnich trzech równań są niezmiennikami osi współrzędnych.

W przypadku szczególnym, gdy z sił głównych sprężystości dwie są sobie równe, np. $A_2 = A_3$, będziemy mieli wzory: $F(A_2) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} (p_{yy} - A_2)(p_{zz} - A_2) &= p^2_{yz} \\ (p_{zz} - A_2)(p_{xx} - A_2) &= p^2_{zx} \\ (p_{xx} - A_2)(p_{yy} - A_2) &= p^2_{xy} \end{aligned} \right\} \dots (79).$$

$$p_{xx} - A_2 = \frac{p_{xy} p_{xz}}{p_{yz}}, \quad p_{yy} - A_2 = \frac{p_{yz} p_{yx}}{p_{zx}}, \quad p_{zz} - A_2 = \frac{p_{zx} p_{zy}}{p_{xy}}$$

$$A_2 = A_3 = \frac{1}{2} [p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} - k] \dots (80),$$

gdzie $k = \frac{p_{xy} p_{xz}}{p_{yz}} + \frac{p_{yz} p_{yx}}{p_{zx}} + \frac{p_{zx} p_{zy}}{p_{xy}} \dots (81)$

$$A_1 = A_2 + k \dots (82)$$

$$\left. \begin{aligned} k \cos^2(N_1, x) &= p_{xx} - A_2, \quad k \cos^2(N_1, y) = p_{yy} - A_2, \\ k \cos^2(N_1, z) &= p_{zz} - A_2, \\ k \cos(N_1, y) \cos(N_1, z) &= p_{yz}, \quad k \cos(N_1, z) \cos(N_1, x) = p_{zx}, \\ k \cos(N_1, x) \cos(N_1, y) &= p_{xy} \end{aligned} \right\} \dots (83).$$

W przypadku, gdy $A_1 = A_2 = A_3$ elipsoida sprężystości staje się kulą i wtedy:

$$A_1 = p_{xx} = p_{yy} = p_{zz}, \quad p_{yz} = p_{zx} = p_{xy} = 0 \quad \dots \quad (84).$$

Gdy jedna z sił głównych sprężystości równa się zeru, np. $A_3 = 0$, otrzymujemy wzory:

$$\left. \begin{aligned} F(o) &= p_{yy} p_{zz} + p_{zz} p_{xx} + p_{xx} p_{yy} - p_{yz}^2 - p_{zx}^2 - p_{xy}^2 \quad (85). \\ F(o) \cos^2(N_3, x) &= p_{yy} p_{zz} - p_{yz}^2 \\ F(o) \cos^2(N_3, y) &= p_{zz} p_{xx} - p_{zx}^2 \\ F(o) \cos^2(N_3, z) &= p_{xx} p_{yy} - p_{xy}^2 \\ F(o) \cos(N_3, y) \cos(N_3, z) &= p_{yz} p_{zx} - p_{zy} p_{xz} \\ F(o) \cos(N_3, z) \cos(N_3, x) &= p_{zx} p_{xy} - p_{zx} p_{yy} \\ F(o) \cos(N_3, x) \cos(N_3, y) &= p_{xz} p_{yz} - p_{xy} p_{zz} \end{aligned} \right\} \dots \quad (86).$$

Dwie siły pozostałe, nie równe zeru, będą pierwiastkami równania:

$$A^2 - (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) A + F(o) = 0 \quad \dots \quad (87),$$

przyczem będzie nadto:

$$p_{xx} p_{yy} p_{zz} + 2 p_{yz} p_{zx} p_{xy} - p_{xx} p_{yz}^2 - p_{yy} p_{zx}^2 - p_{zz} p_{xy}^2 = 0 \quad (88).$$

Gdy dwie z sił głównych sprężystości są równe zeru, wtedy $F(o) = 0$, a z równania (86) wynika:

$$p_{xx} = \frac{p_{yz} p_{zx}}{p_{yz}}, \quad p_{yy} = \frac{p_{yz} p_{xy}}{p_{zx}}, \quad p_{zz} = \frac{p_{zx} p_{xy}}{p_{xy}} \quad \dots \quad (89).$$

Trzecia siła, nie równa zeru, może być oznaczona z równań:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = k \\ k \cos^2(N_1, x) &= p_{xx}, \quad k \cos^2(N_1, y) = p_{yy}, \quad k \cos^2(N_1, z) = p_{zz} \\ k \cos(N_1, y) \cos(N_1, z) &= p_{yz}, \quad k \cos(N_1, z) \cos(N_1, x) = p_{zx} \\ k \cos(N_1, x) \cos(N_1, y) &= p_{xy} \end{aligned} \right\} \dots \quad (90).$$

Wreszcie, gdy $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, wtedy:

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p_{yz} = p_{zx} = p_{xy} = 0 \quad \dots \quad (91).$$

25. Wyznaczenie największej siły stycznej. W zastosowaniu teorii sprężystości może okazać się potrzebnym wzór na największą z sił stycznych w danym punkcie ciała. W celu oznaczenia takiej największej siły, przyjmujemy siły główne sprężystości w danym punkcie za osie współrzędnych i wtedy na dowolną siłę styczną p_{ns} będziemy mieli wzór:

$$p_{ns} = A_1 \cos(n, \xi) \cos(s, \xi) + A_2 \cos(n, \eta) \cos(s, \eta) + A_3 \cos(n, \zeta) \cos(s, \zeta) \quad \dots \quad (92)$$

pod warunkiem, że: $\cos(n, s) = 0$.

Przypuśćmy na razie, że kierunek n jest dany, szukamy zaś kierunku s , dla którego siła p_{ns} staje się największą. Ażeby rozwiązać to zadanie, musimy przyrównać do zera pochodne względem $\cos(s, \xi)$, $\cos(s, \eta)$ i $\cos(s, \zeta)$ funkcji następującej:

$$p_{ns} - \lambda \{ \cos(n, \xi) \cos(s, \xi) + \cos(n, \eta) \cos(s, \eta) + \cos(n, \zeta) \cos(s, \zeta) \} + \mu \{ 1 - \cos^2(s, \xi) - \cos^2(s, \eta) - \cos^2(s, \zeta) \},$$

gdzie λ i μ są to ilości stałe nie równe zeru.

Rozwiązanie więc zadania zawarte jest w równaniach następujących:

$$\left. \begin{aligned} (A_1 - \lambda) \cos(n, \xi) &= 2\mu \cos(s, \xi) \\ (A_2 - \lambda) \cos(n, \eta) &= 2\mu \cos(s, \eta) \\ (A_3 - \lambda) \cos(n, \zeta) &= 2\mu \cos(s, \zeta) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (93).$$

$$\left. \begin{aligned} \cos^2(s, \xi) + \cos^2(s, \eta) + \cos^2(s, \zeta) &= 1 \\ \cos^2(n, \xi) + \cos^2(n, \eta) + \cos^2(n, \zeta) &= 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (94)$$

$$\cos(n, \xi) \cos(s, \xi) + \cos(n, \eta) \cos(s, \eta) + \cos(n, \zeta) \cos(s, \zeta) = 0 \dots (95).$$

Mnożąc równania (93) najpierw przez $\cos(s, \xi)$, $\cos(s, \eta)$, $\cos(s, \zeta)$ i dodając je, następnie zaś przez $\cos(n, \xi)$, $\cos(n, \eta)$, $\cos(n, \zeta)$ i również dodając, otrzymujemy:

$$2\mu = (p_{ns})_{\max} \text{ i } \lambda = A_1 = \cos^2(n, \xi) + A_2 \cos^2(n, \eta) + A_3 \cos^2(n, \zeta) = p_{nn}.$$

Podnosząc wreszcie równania (93) do drugiej potęgi i dodając je, otrzymujemy:

$$(2\mu)^2 = (p_{ns}^2)_{\max} = A_1^2 \cos^2(n, \xi) + A_2^2 \cos^2(n, \eta) + A_3^2 \cos^2(n, \zeta) + \lambda^2 - 2\lambda [A_1 \cos^2(n, \xi) + A_2 \cos^2(n, \eta) + A_3 \cos^2(n, \zeta)]$$

$$\text{czyli } (p_{ns}^2)_{\max} = A_1^2 \cos^2(n, \xi) + A_2^2 \cos^2(n, \eta) + A_3^2 \cos^2(n, \zeta) - p_{nn}^2 \dots (96).$$

To ostatnie równanie na zasadzie wzoru (65) można przedstawić w postaci:

$$(p_{ns}^2)_{\max} = p_{2n}^2 - p_{nn}^2 \text{ czyli } (p_{ns}^2)_{\max} + p_{nn}^2 = p_{2n}^2.$$

A więc największa z sił stycznych sprężystości danej płaszczyzny jest rzutem na tę płaszczyznę tej siły sprężystości, która na tę płaszczyznę działa. Podstawiając we wzorze (96) za siłę p_{nn} jej wartość, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (p_{ns}^2)_{\max} &= A_1^2 \cos^2(n, \xi) \sin^2(n, \xi) + A_2^2 \cos^2(n, \eta) \sin^2(n, \eta) + \\ &+ A_3^2 \cos^2(n, \zeta) \sin^2(n, \zeta) - 2A_1 A_2 \cos^2(n, \xi) \cos^2(n, \eta) - \\ &- 2A_2 A_3 \cos^2(n, \eta) \cos^2(n, \zeta) - 2A_3 A_1 \cos^2(n, \zeta) \cos^2(n, \xi). \end{aligned}$$

Że jednak: $\sin^2(n, \xi) = \cos^2(n, \eta) + \cos^2(n, \zeta)$ i t. d., przeto:

$$(p^2_{ns})_{\max} = (A_1 - A_2)^2 \cos^2(n, \xi) \cos^2(n, \eta) + (A_2 - A_3)^2 \cos^2(n, \eta) \cos^2(n, \zeta) + (A_3 - A_1)^2 \cos^2(n, \zeta) \cos^2(n, \xi) \dots \dots \dots (97).$$

Teraz oznaczmy kierunek n , dla którego równanie (97) staje się największem. W tym celu przyrównujemy do zera pochodne względem $\cos(n, \xi)$, $\cos(n, \eta)$ i $\cos(n, \zeta)$ funkcji następującej:

$$(p^2_{ns})_{\max} + f [1 - \cos^2(n, \xi) - \cos^2(n, \eta) - \cos^2(n, \zeta)],$$

gdzie f jest współczynnikiem stałym. Rozwiązanie więc zadania zawarte jest w równaniach:

$$\left. \begin{aligned} [(A_1 - A_2)^2 \cos^2(n, \eta) + (A_3 - A_1)^2 \cos^2(n, \zeta) - f] \cos(n, \xi) &= 0 \\ [(A_2 - A_3)^2 \cos^2(n, \zeta) + (A_1 - A_2)^2 \cos^2(n, \xi) - f] \cos(n, \eta) &= 0 \\ [(A_3 - A_1)^2 \cos^2(n, \xi) + (A_2 - A_3)^2 \cos^2(n, \eta) - f] \cos(n, \zeta) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (98).$$

Uczynić zadość tym równaniom przez przypuszczenie, że $\cos(n, \xi) = \cos(n, \eta) = \cos(n, \zeta) = 0$, nie można, z powodu istnienia drugiego z równań warunkowych (94). Również nie można przyjąć, że dwie z trzech powyższych dostaw są równe zeru; albowiem, przyjmując np. $\cos(n, \xi) = \cos(n, \eta) = 0$, otrzymamy z równania (93), że $\cos(s, \xi) = \cos(s, \eta) = 0$, a wówczas z równania (95) wypadnie: $\cos(n, \zeta) = 0$ albo $\cos(s, \zeta) = 0$, co znowu jest niemożliwe, z uwagi na równania warunkowe (94).

Można jednakże uczynić zadość powyższym równaniom, przyjmując, że jedna z trzech dostaw równa się zeru. Tak np. gdy przyjmiemy $\cos(n, \xi) = 0$, uczynimy zadość pierwszemu z równań (98), a wtedy drugie i trzecie z tych równań dają: $f = (A_2 - A_3)^2 \cos^2(n, \zeta) = (A_2 - A_3)^2 \cos^2(n, \eta)$, czyli $\cos^2(n, \zeta) = \cos^2(n, \eta)$; a że $\cos^2(n, \eta) + \cos^2(n, \zeta) = 1$, przeto otrzymujemy rozwiązanie:

$$\cos(n, \zeta) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \cos(n, \eta) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \cos(n, \xi) = 0 \dots \dots (99).$$

Wtedy z wzoru (97) otrzymamy:

$$(p^2_{ns})_{\max} = (A_2 - A_3)^2 \cos^2(n, \eta) \cos^2(n, \zeta) = \left(\frac{A_2 - A_3}{2}\right)^2,$$

a więc: $2 \mu = (p_{ns})_{\max} = \frac{1}{2} (A_2 - A_3) \dots \dots \dots (100).$

Nadto mamy:

$$\lambda = p_{nn} = \frac{A_2 + A_3}{2} \dots \dots \dots (101).$$

W celu zaś wyznaczenia kierunku s z równań (93), znajdujemy:

$$\cos(s, \xi) = 0, \quad \cos(s, \eta) = \frac{A_2 - \lambda}{2 \mu} \cos(n, \eta) = \frac{A_2 - \frac{1}{2}(A_1 + A_3)}{\frac{1}{2}(A_2 - A_3)} \cos(n, \eta)$$

$$\begin{aligned} \text{czyli } \cos(s, \eta) = \cos(n, \eta) = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{i} \quad \cos(s, \zeta) = \frac{A_3 - \lambda}{2\mu} \cos(n, \zeta) = \\ = \frac{A_3 - \frac{1}{2}(A_2 + A_3)}{\frac{1}{2}(A_2 - A_3)} \cos(n, \zeta) = -\cos(n, \zeta) = -\sqrt{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ażeby otrzymane rozwiązanie rzeczywiście dawało największą ze wszystkich sił stycznych punktu, różnica $A_2 - A_3$ powinna być największa, czyli A_2 powinno być największą, a A_3 — najmniejszą z trzech sił głównych sprężystości punktu. Kierunek więc normalnej n do płaszczyzny, na którą działa największa z sił stycznych i kierunek s tej największej siły stycznej leżą na płaszczyźnie, przechodzącej przez największą i najmniejszą z sił głównych sprężystości. Kierunek n (albo s tworzy z temi siłami głównymi kąty 45° ; kierunek zaś s (albo n) tworzy z jedną z tych sił kąt 45° , a z drugą $90^\circ + 45^\circ$.

26. Równania ruchu ciała sprężystego. W celu dokładnego poznania sił sprężystości należy umieć oznaczać ich pracę, ujawniającą się podczas odkształcania, to też należy wyprowadzić równania ruchu ciała sprężystego.

Równania ruchu można otrzymać z równań równowagi ciała sprężystego, według zasady d'Alembert'a, przez zastąpienie w tych ostatnich równaniach sił zewnętrznych, działających jednocześnie na wszystkie punkty ciała, t. j. działających na masę ciała, siłami straconemi, lub mówiąc inaczej, przez wprowadzenie do równań równowagi sił, bezwładności poruszających się punktów ciała.

Jeżeli współrzędne pewnego punktu ciała, przed odkształceniem, oznaczymy przez x, y i z , a przez $x + u, y + v$ i $z + w$ — współrzędne tego samego punktu w chwili t , gdy cząstki ciała się posuwają, to dla rzutów przyspieszenia siły bezwładności na osie współrzędnych otrzymamy wzory:

$$-\frac{d^2u}{dt^2}, \quad -\frac{d^2v}{dt^2} \quad \text{i} \quad -\frac{d^2w}{dt^2}.$$

Skoro więc w równaniu (47) za X, Y i Z podstawimy $X - \frac{d^2u}{dt^2}$, $Y - \frac{d^2v}{dt^2}$ i $Z - \frac{d^2w}{dt^2}$, to otrzymamy równania ruchu ciała sprężystego:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2u}{dt^2} &= \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} + m X \\ m \frac{d^2v}{dt^2} &= \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} + m Y \\ m \frac{d^2w}{dt^2} &= \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + m Z \end{aligned} \right\} \dots \dots (102).$$

27. Praca sił poruszających. Zasada pracy najmniejszej sił sprężystych. Niech punkt ciała, któremu w chwili t odpowiadają współrzędne $x + u$, $y + v$ i $z + w$, ulegnie dowolnemu nieskończenie małemu posunięciu, którego rzuty na osie współrzędnych niech będą δu , δv i δw . Praca cząstkowa (elementarna) siły, poruszającej równoległoscian cząstkowy, wydzielony w danem ciele, będzie:

$$m \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \delta u + \frac{d^2 v}{dt^2} \delta v + \frac{d^2 w}{dt^2} \delta w \right) \partial x \partial y \partial z,$$

a praca cząstkowa wszystkich sił, poruszających punkty ciała, którą oznaczymy przez δT , będzie wyrażona przez całkę trzykrotną:

$$\delta T = \iiint m \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \delta u + \frac{d^2 v}{dt^2} \delta v + \frac{d^2 w}{dt^2} \delta w \right) \partial x \partial y \partial z \dots (103),$$

która rozpościera się na całą objętość ciała.

Wzór ten na δT może być przy uwzględnieniu równań (102) przedstawiony w postaci:

$$\delta T = \delta U + \delta V \dots (104),$$

gdzie
$$\delta U = \iiint m (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) \partial x \partial y \partial z \dots (105),$$

jest pracą cząstkową sił zewnętrznych, działających jednocześnie na wszystkie punkty ciała, a

$$\delta V = \iiint \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) \delta u \\ \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right) \delta v \\ \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{ys}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zs}}{\partial z} \right) \delta w \end{array} \right\} \partial x \partial y \partial z \dots (106)$$

jest pracą cząstkową sił sprężystych wewnętrznych, działających zarówno na punkty wewnętrzne jak i na punkty skrajne ciała.

Zbadajmy jedną z dziewięciu całek, wchodzących w skład wzoru na δV . Weźmy np. całkę:

$$\iiint \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \delta u \cdot \partial x \partial y \partial z = \iint \partial y \partial z \int \delta u \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \partial x.$$

Całkując w rzeczy samej względem x przez części, otrzymamy:

$$\int \delta u \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \partial x = (p_{xx} \delta u)'' - \int p_{xx} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \partial x.$$

A ponieważ $\frac{\partial \delta u}{\partial x} = \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$, przeto otrzymamy:

$$\iiint \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \delta u \cdot \partial x \partial y \partial z = \iint \partial y \partial z (p_{xx} \delta u)'' - \iiint p_{xx} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \partial x \partial y \partial z.$$

Znakiem (),'' wyrażamy tu tę okoliczność, że wielkość, znajdującą się w nawiasie, należy brać w pewnych granicach. Ponieważ poprzednie całkowanie przez części wykonane było względem x , więc uważaliśmy y i z za ilości stałe, wskutek czego całkowanie rozciągało się na objętość tylko tych cząstek ciała, które przez swe zespolenie tworzą nieskończenie cienki słup, równoległy do osi x i mający za podstawę płaszczyznę $\partial y \partial z$. Zatem granicom wskazanego całkowania powinny odpowiadać te punkty powierzchni ciała, przez które słup ten wchodzi w głąb ciała i wychodzi z niego nazewnątrz. Zakładając, że ciało jest ograniczone ze wszystkich stron, otrzymamy punktów takich liczbę parzystą. Niech n' i n'' będą normalne zewnętrzne do powierzchni ciała w dwóch następujących po sobie punktach wejścia i wyjścia słupa, a $\partial q'$ i $\partial q''$ nieskończenie małe cząstki powierzchni w tych punktach, wybrane tak, że płaszczyzna $\partial y \partial z$ jest rzutem ich obu na płaszczyznę (yz). Przy tych założeniach otrzymamy:

$$\partial y \partial z = \partial q'' \cos (n'', x) - \partial q' \cos (n', x).$$

Tu $\cos (n', x)$ wzięty jest ze znakiem minus, z powodu, że powierzchnia $\partial y \partial z$ jest wielkością dodatnią, dostawa zaś kąta rozwartego jest wielkością ujemną.

Wreszcie, jeżeli oznaczymy przez p'_{xx} i p''_{xx} , $\delta u'$ i $\delta u''$ wartości siły p_{xx} , i posunięcia δu w punktach wejścia i wyjścia słupa, to otrzymamy:

$$\begin{aligned} \iint (p_{xx} \delta u)'' \partial y \partial z &= \iint p''_{xx} \delta u'' \cos (n'', x) \partial q'' + \\ &+ \iint p'_{xx} \delta u' \cos (n', x) \partial q'. \end{aligned}$$

Dwa inne punkty wejścia i wyjścia słupa dadzą w części drugiej równania ostatniego dwa nowe wyrazy, podobne do poprzednich i t. d. dla każdej pary takich punktów. Szukana więc całka $\iint (p_{xx} \delta u)'' \partial y \partial z$ może oczywiście być zastąpiona całką:

$$\iint p_{xx} \delta u \cos (n, x) \partial q,$$

rozpostartą na wszystkie cząstki ∂q powierzchni, ograniczającej ciało.

Mamy więc:

$$\iiint \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \delta u \cdot \partial x \partial y \partial z = \iint p_{xx} \delta u \cos (n, x) \partial q - \iiint p_{xx} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \partial x \partial y \partial z.$$

W takiż sposób otrzymamy:

$$\begin{aligned} \iiint \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} \delta u \cdot \partial x \partial y \partial z &= \iint p_{yx} \delta u \cos(n, y) \partial q - \iiint p_{yx} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \partial x \partial y \partial z \\ \iiint \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \delta w \cdot \partial x \partial y \partial z &= \iint p_{zx} \delta w \cos(n, z) \partial q - \iiint p_{zx} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \partial x \partial y \partial z \\ \iiint \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} \delta v \cdot \partial x \partial y \partial z &= \iint p_{xy} \delta v \cos(n, x) \partial q - \iiint p_{xy} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \partial x \partial y \partial z \end{aligned}$$

i t. p.

Wzór więc na δV przyjmie postać:

$$\delta V = \delta V' - \delta V'' \dots \dots \dots (107),$$

gdzie:

$$\delta V' = \iint \left\{ \begin{aligned} & \{ p_{xx} \cos(n, x) + p_{yx} \cos(n, y) + p_{zx} \cos(n, z) \} \delta u \\ & \{ p_{xy} \cos(n, x) + p_{yy} \cos(n, y) + p_{zy} \cos(n, z) \} \delta v \\ & \{ p_{xz} \cos(n, x) + p_{yz} \cos(n, y) + p_{zz} \cos(n, z) \} \delta w \end{aligned} \right\} \partial q,$$

czyli na podstawie równań (49):

$$\delta V' = \iint \{ P \cos(P, x) \delta u + P \cos(P, y) \delta v + P \cos(P, z) \delta w \} \partial q \dots (108)$$

$$\begin{aligned} \delta V'' &= \iiint \left\{ p_{xx} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + p_{yy} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + p_{zz} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + \right. \\ & \left. + p_{yz} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + p_{zx} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + p_{xy} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} \partial x \partial y \partial z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{czyli } \delta V'' &= \iiint \{ p_{xx} \delta \Delta_x + p_{yy} \delta \Delta_y + p_{zz} \delta \Delta_z + p_{yz} \delta g_{yz} + \\ & + p_{zx} \delta g_{zx} + p_{xy} \delta g_{xy} \} \partial x \partial y \partial z \dots \dots \dots (109). \end{aligned}$$

Widzimy więc, że $\delta V'$ jest pracą cząstkową sił zewnętrznych, działających na punkty powierzchni, ograniczającej ciało; $\delta V''$ zaś jest pracą cząstkową sił sprężystych.

Mamy więc równanie:

$$\delta T = \delta U + \delta V' - \delta V'' \dots \dots \dots (110).$$

Jeżeli w chwili t ciało przejdzie w stan równowagi naprężonej, to $\delta T = 0$, a więc:

$$\delta U + \delta V' = \delta V'' \dots \dots \dots (111).$$

To ostatnie równanie, wynikające również z zasady przesunięć przygotowanych (przysposobionych), wskazuje, że przy równowadze ciała sprężystego siły zewnętrzne są w równowadze z siłami sprężystości.

Ponieważ równowaga ciała sprężystego nie zostanie naruszona przez wprowadzenie związków, które je zamieniają na ciało bezwzględnie

sztynne, a dla takiego ciała, w razie jego równowagi, musi istnieć równanie $\delta U + \delta V' = 0$, przeto z równania (111) otrzymamy dla równowagi ciała sprężystego:

$$\delta V'' = 0. \dots \dots \dots (112).$$

Widzimy stąd, że w razie równowagi ciała sprężystego zarówno siły zewnętrzne, jak i siły sprężystości, tworzą dwa takie układy sił, że żaden z nich, oddzielnie wzięty, nie może wywołać żadnych posunięć cząsteczek danego ciała, o ile ciało to zamieni się na bezwzględnie sztywne.

Z równania (112) wynika jeszcze, że funkcya V'' , przedstawiająca pracę sił wewnętrznych ciała podczas jego odkształcania, osiąga w chwili nastąpienia równowagi *najmniejszą swą wartość*, albowiem można udowodnić, że dla tej chwili istnieje nierówność $\delta^2 V'' > 0$.

Równanie więc (112) wyraża prawo ciekawe i pożyteczne w zastosowaniach, polegające na tem, że ciała, na które działają siły zewnętrzne, odkształcają się tak, iż praca sił wewnętrznych podczas tego odkształcania jest najmniejsza. Prawo to nazywa się *zasadą najmniejszej pracy sił wewnętrznych*.

28. Potencjał sił sprężystych. Równanie (109), przedstawiające pracę cząstkową sił sprężystych, napiszmy w postaci następującej:

$$\delta V'' = \iiint \delta \Phi \partial x \partial y \partial z \dots \dots \dots (113),$$

gdzie

$$\delta \Phi = p_{xx} \delta \Delta_x + p_{yy} \delta \Delta_y + p_{zz} \delta \Delta_z + p_{yz} \delta g_{yz} + p_{zx} \delta g_{zx} + p_{xy} \delta g_{xy} \dots (114).$$

Jeżeli mamy oznaczyć pracę sił wewnętrznych sprężystości w stosunku do rzeczywistych posunięć punktów ciała, w pewnym skończonym odstępie czasu, to należy zcałkować wzór (114) w granicach, odpowiadających początkowi i końcowi uważanego przeciągu czasu, a następnie pomnożyć otrzymaną całkę przez $\partial x \partial y \partial z$ i rozpostrzeć na całą objętość ciała.

Przypuśćmy np., że mamy oznaczyć pracę sił sprężystych, poczynawszy od chwili, gdy ciało zaczęło wychodzić ze stanu równowagi naturalnej do chwili, gdy pojawiły się w niem odkształcenia składowe $\Delta_x, \Delta_y, \dots \dots g_{xy}$. Niech $p_{xx}, p_{yy} \dots p_{xy}$ będą siłami sprężystości, odpowiadającymi tym odkształceniom składowym, t. j. odpowiadające końcowi przyjętego okresu czasu. W takim razie granice dolne całkowania będą zerami, a górne będą równe odkształceniom składowym $\Delta_x, \Delta_y \dots g_{xy}$. Lecz przy takim całkowaniu należy mieć na uwadze, że siły sprężystości same są funkcjami odkształceń składowych i że podczas uważanego przeciągu czasu siły te zmieniały się od zera do wartości, odpowiadających granicom górnym całkowania. Co się zaś tyczy

zależności sił sprężystości od odkształceń składowych, to, gdy poprzestajemy na przypadku bardzo małego odkształcenia ciała, należy na podstawie doświadczeń uważać *siły sprężystości za funkcje liniowe odkształceń składowych*. Przy takim założeniu co do tych sił, wartość średnia każdej z nich, podczas uważanego przeciągu czasu, równa się średniej arytmetycznej z dwóch wartości skrajnych, odpowiadających początkowi i końcowi danego przeciągu czasu. Uznając za początek tego okresu czasu stan równowagi naturalnej, należy wartość początkową każdej siły sprężystości przyjąć za równą zeru, wskutek czego wartości średnie tych sił będą:

$$\frac{1}{2} p_{xx}, \frac{1}{2} p_{yy}, \dots, \frac{1}{2} p_{xy}.$$

Wstawiając te wartości średnie we wzór (114) i całkując go w granicach wskazanych, otrzymamy:

$$\Phi = \frac{1}{2} [p_{xx} \Delta_x + p_{yy} \Delta_y + p_{zz} \Delta_z + p_{yz} g_{yz} + p_{zx} g_{zx} + p_{xy} g_{xy}] \dots (115),$$

a stąd:

$$V'' = \int \int \int \Phi \partial x \partial y \partial z \dots \dots \dots (116).$$

Wielkość Φ nazywa się *potencjałem sił sprężystości*, sprowadzonym do jednostki objętości ciała. Wielkość ta posiada wiele zasługujących na uwagę własności.

Wzór (115) na potencjał Φ otrzymaliśmy, całkując wzór różniczkowy (114), w którym uważaliśmy wszystkie odkształcenia składowe za zmienne, od siebie niezależne. Potencjał Φ powinien więc być zależny tylko od tych wartości odkształceń składowych, które odpowiadają granicy górnej i dolnej całkowania, nie może zaś być zależny na przykład od porządku, w którym powstawały te odkształcenia składowe, od prawa, podług którego wzrastały one od zera do ich obecnych wartości, od postaci trajektorii cząsteczek ciała odkształcanego i t. p. A więc przy całkowaniu wzoru (114) przyjęto założenie, wyraźnie niezaznaczone, że część druga tego wzoru jest *różniczką zupełną* pewnej funkcji sześciu niezależnych od siebie odkształceń składowych. Teraz oczywiście powstaje pytanie, czyśmy mieli prawo uczynić założenie, że wzór (114) na $\delta \Phi$ jest różniczką zupełną zmiennych $\Delta_x, \Delta_y, \dots, g_{xy}$? Na pytanie to możemy odpowiedzieć twierdząco.

Istotnie, siły sprężystości powstają w sposób wiadomy z tych sił wewnętrznych cząsteczkowych, od których zależy oddziaływanie wzajemne na siebie cząsteczek ciała, a praca cząstkowa sił cząsteczkowych jest zawsze różniczką zupełną. Przypuśćmy, że dwie cząsteczki ciała a i b znajdują się od siebie w odległości r ; współrzędne pierwszej niech będą x, y i z , drugiej zaś x', y' i z' ; wreszcie niech $f(r)$ będzie siłą oddziaływania wzajemnego na siebie tych cząsteczek. Siła ta ma kierunek prostej, łączącej cząsteczki a i b ; przypuśćmy, że działa od a ku b , gdy rozważamy działanie cząsteczki b na a , a od b ku a , gdy rozważamy

działanie cząsteczki a na b . Wtedy rzuty siły, mającej początek w cząsteczce a , na osie współrzędnych, są: $f(r) \cos(r, x)$, $f(r) \cos(r, y)$ i $f(r) \cos(r, z)$, pracę zaś cząstkową tej siły wyrazi suma:

$$f(r) [\cos(r, x) \partial x + \cos(r, y) \partial y + \cos(r, z) \partial z].$$

Rzuty na osie współrzędnych siły, mającej początek w cząsteczce b , są: $-f(r) \cos(r, x)$, $-f(r) \cos(r, y)$ i $-f(r) \cos(r, z)$, a praca cząstkowa tej siły będzie:

$$-f(r) [\cos(r, x) \partial x' + \cos(r, y) \partial y' + \cos(r, z) \partial z'].$$

Praca więc cząstkowa sił, działających między parą punktów ciała a i b , jest:

$$f(r) [\cos(r, x) (\partial x - \partial x') + \cos(r, y) (\partial y - \partial y') + \cos(r, z) (\partial z - \partial z')].$$

Jednakże $r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$ i $\cos(r, x) = \frac{x-x'}{r}$,

$$\cos(r, y) = \frac{y-y'}{r}, \quad \cos(r, z) = \frac{z-z'}{r};$$

a ponieważ jednocześnie mamy:

$$r \partial r = (x-x') (\partial x - \partial x') + (y-y') (\partial y - \partial y') + (z-z') (\partial z - \partial z'),$$

przeto:

$$\partial r = -[\cos(r, x) (\partial x - \partial x') + \cos(r, y) (\partial y - \partial y') + \cos(r, z) (\partial z - \partial z')]$$

i dla szukanej pracy cząstkowej otrzymujemy: $-f(r) \partial r$. Dla takiejże pracy sił, działających między inną parą punktów, oddalonych od siebie o r' , otrzymamy: $-f(r') \partial r'$ i t. d. Stąd wynika, że praca cząstkowa wszystkich sił cząsteczkowych ciała, będzie:

$$-\Sigma f(r) \partial r,$$

gdzie znak Σ oznacza sumowanie, rozpostarte na wszystkie możliwe pary cząsteczek ciała. Ponieważ w tej sumie każdy wyraz, wzięty oddzielnie, jest różniczką zupełną, więc i cała suma przedstawia różniczkę zupełną pewnej funkcji zmiennych odległości r, r', r'', \dots

Wzór (114), przedstawiający pracę cząstkową sił cząsteczkowych, sprowadzoną do jednostki objętości ciała, musi więc także być różniczką zupełną pewnej funkcji odkształceń składowych; otrzymujemy zatem równości:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_x} = p_{xx}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_y} = p_{yy}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_z} = p_{zz} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial g_{yz}} = p_{yz}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial g_{zx}} = p_{zx}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial g_{xy}} = p_{xy} \end{aligned} \right\} \dots (117).$$

Różniczkując te równości, otrzymujemy piętnaście równości, zawartych w jednym wzorze ogólnym:

$$\frac{\partial p_i}{\partial \Delta_k} = \frac{\partial p_k}{\partial \Delta_i} \dots \dots \dots (118),$$

w którym za i i k należy podstawić liczby szeregu 1, 2, 3, 4, 5 i 6 i przyjmować:

$$p_1 = p_{xx}, p_2 = p_{yy}, p_3 = p_{zz}, p_4 = p_{yz}, p_5 = p_{zx} \text{ i } p_6 = p_{xy};$$

$$\Delta_1 = \Delta_x, \Delta_2 = \Delta_y, \Delta_3 = \Delta_z, \Delta_4 = g_{yz}, \Delta_5 = g_{zx} \text{ i } \Delta_6 = g_{xy}.$$

Weźmy teraz pochodną cząstkową wzoru (115) względem Δ_x , a otrzymamy:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_x} = \frac{1}{2} p_{xx} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial p_{xx}}{\partial \Delta_x} \Delta_x + \frac{\partial p_{yy}}{\partial \Delta_x} \Delta_y + \frac{\partial p_{zz}}{\partial \Delta_x} \Delta_z + \frac{\partial p_{yz}}{\partial \Delta_x} g_{yz} + \right. \\ \left. + \frac{\partial p_{zx}}{\partial \Delta_x} g_{zx} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial \Delta_x} g_{xy} \right].$$

Jednakże $\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_x} = p_{xx}, \quad \frac{\partial p_{yy}}{\partial \Delta_x} = \frac{\partial p_{xx}}{\partial \Delta_y}, \quad \frac{\partial p_{zz}}{\partial \Delta_x} = \frac{\partial p_{xx}}{\partial \Delta_z}$ i t. d.,

otrzymujemy więc:

$$p_{xx} = \frac{\partial p_{xx}}{\partial \Delta_x} \Delta_x + \frac{\partial p_{xx}}{\partial \Delta_y} \Delta_y + \frac{\partial p_{xx}}{\partial \Delta_z} \Delta_z + \frac{\partial p_{xx}}{\partial g_{yz}} g_{yz} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial g_{zx}} g_{zx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial g_{xy}} g_{xy}.$$

Na podstawie znanego twierdzenia Euler'a dla funkcji jednorodnych, wyprowadzamy wniosek, że p_{xx} jest funkcją odkształceń składowych jednorodną, pierwszego stopnia. W takiż sposób przekonamy się, że *wszystkie siły sprężystości są funkcjami liniowemi odkształceń składowych*, co przyjęliśmy już zresztą jako założenie podstawowe dla naszych wywodów, otrzymane z doświadczeń. Na podstawie doświadczeń należy, zgodnie z poglądem Kirchhoff'a, przyjąć dla funkcji Φ jeszcze dwie własności następujące: że *funkcja ta pozostaje zawsze dodatnią* i że *może zamienić się na zero tylko wtedy, gdy wszystkie odkształcenia składowe są równe zeru*. W rzeczy samej, przypuszczając, że Φ może zmieniać swój znak, musielibyśmy przypuścić, że podczas odkształcania ciała siły wewnętrzne nie zawsze przeciwdziałają zewnętrznym, wywołującym odkształcenie, ale że mogą nawet pomagać im, a takie przypuszczenie jest sprzeczne ze wszelkimi spostrzeżeniami. Skoro zaś przypuścilibyśmy, że Φ może być równe zeru wtedy, gdy nie wszystkie odkształcenia składowe są zerami, to musielibyśmy przyjąć, że można wywoływać w ciałach pewne odkształcenia bez zużycia na to pracy, co również nie zgadza się z rzeczywistością.

ROZDZIAŁ III.

Zależność sił sprężystości od odkształceń składowych.

29. **Współczynniki sprężystości.** W rozdziale poprzednim dowiedliśmy, że przy bardzo małym odkształceniu ciała, siły sprężystości należy uważać za funkcyje liniowe odkształceń składowych. Przyjmując to założenie podstawowe niniejszej teorii jako wynik doświadczenia, można zależność sił sprężystości od odkształceń składowych wyrazić zapomocą wzorów następujących:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= a_{11} \Delta_x + a_{12} \Delta_y + a_{13} \Delta_z + a_{14} g_{yz} + a_{15} g_{zx} + a_{16} g_{xy} \\ p_{yy} &= a_{21} \Delta_x + a_{22} \Delta_y + a_{23} \Delta_z + a_{24} g_{yz} + a_{25} g_{zx} + a_{26} g_{xy} \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ p_{xy} &= a_{61} \Delta_x + a_{62} \Delta_y + a_{63} \Delta_z + a_{64} g_{yz} + a_{65} g_{zx} + a_{66} g_{xy} \end{aligned} \right\} \dots (119),$$

w których 36 współczynników: $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{66}$, zwanych *współczynnikami (modułami) sprężystości ciała*, należy uważać za ilości niezależne od odkształceń składowych.

Z samej postaci tych wzorów i z powodu, że odkształcenia składowe są to liczby bardzo małe, oderwane i ułamkowe, wynika, że *współczynniki sprężystości ciała są to wielkości jednorodne z siłami sprężystości i w porównaniu z niemi bardzo wielkie.*

Mając na uwadze piętnaście równości, zawartych we wzorze ogólnym (118), otrzymamy również piętnaście równości, zawartych we wzorze:

$$a_{ik} = a_{ki} \dots \dots \dots (120),$$

w którym za i i k należy podstawić dowolne liczby szeregu 1, 2, 3, 4, 5 i 6.

A więc z 36 współczynników może być tylko 21 różniących się wielkością; możemy więc powiedzieć, że w najogólniejszym przypadku budowy ciała natura jego charakteryzuje się *nie więcej jak 21 różnymi współczynnikami (modułami).*

Jeszcze w następujący sposób możemy się przekonać, że niema więcej aniżeli 21 różnych współczynników. Ponieważ siły sprężystości są to funkcyje odkształceń składowych jednorodne, pierwszego stopnia, przeto potencyał Φ , oznaczony z wzoru (115), jest funkcją odkształceń składowych, jednorodną, stopnia drugiego, wskutek czego w funkcyi tej mogą występować tylko wyrazy, zawierające odkształcenia składowe w potęgach drugiej lub ich iloczyny po dwa. Liczba wyrazów pierwszego rodzaju nie może być większa od sześciu, liczba zaś wyrazów drugiego rodzaju nie może być większa od liczby kombinacji z sześciu liter po dwie, t. j. nie większa niż 15. Zatem wszystkich wyrazów we wzorze na Φ nie może być więcej niż 21. Ponieważ jednak pochodne cząstkowe potencyału względem odkształceń składowych są równe odpowiednim siłom sprężystości, przeto liczba różnych współczynników we wzorach na te siły, również nie może być większa niż 21.

W przypadku ogólnym gęstość i budowa ciała w rozmaitych miejscach może być różna, musimy więc w przypadku ogólnym współczynniki sprężystości uważać za funkcyje współrzędnych punktów ciała; przyczem dla różnych ciał postać tych funkcyi może być rozmaita. Najprostszymi ciałami przyrody pod względem budowy są oczywiście te, dla których współczynniki sprężystości są ilościami stałymi, jakkolwiek różnymi dla rozmaitych ciał tego rodzaju.

Budowa takich ciał powinna okazywać pewną jednolitość w ugrupowaniu cząsteczek dokoła każdego punktu. Z tego powodu ciała tego rodzaju można zwać *ciałami o sprężystości jednolitej* albo *o sprężystości stałej*. Bardzo jest prawdopodobne, że np. kryształy należą do grupy ciał o sprężystości stałej (jednolitej) i znamionują je współczynniki sprężystości stałe.

Jeszcze prostszy przypadek budowy przedstawiałoby ciało o sprężystości stałej (jednolitej), w którym rozkład cząsteczek byłby jednakowy z obu stron każdej płaszczyzny, mającej zupełnie określony kierunek, i ten sam dla wszystkich punktów. Takie ciało miałoby *płaszczyzną symetrii* i znamionowałyby je współczynniki sprężystości stałe, których liczba byłaby mniejsza od 21. Podobnie możemy wyobrazić sobie ciało, posiadające dwie albo trzy płaszczyzny symetrii. Możemy wyobrazić sobie ciało, w którym rozmieszczenie cząsteczek dokoła każdej linii, mającej kierunek określony jest jednakowe i wszędzie takie same. Takie ciało posiadałoby *oś symetrii*, a każda płaszczyzna, przechodząca przez tę oś, byłaby płaszczyzną symetrii.

Najprostszymi wreszcie przypadkiem budowy ciała byłby ten, gdyby budowa ta jego była we wszystkich punktach i wszystkich kierunkach jednakowa. Dla takiego ciała każdy kierunek byłby osią symetrii, a więc i każda płaszczyzna byłaby płaszczyzną symetrii; liczba zaś różnych

współczynników sprężystości byłaby najmniejsza. Ciała tego rodzaju będziemy, za przykładem Cauchy'ego, nazywali *ciałami równozwrotnie sprężystymi (izotropowo-sprężystymi)* albo *ciałami równozwrotnemi o sprężystości stałej*.

Własności współczynników sprężystości, zarówno w przypadku ogólnym jak i w przypadkach szczególnych budowy ciała, wynikają z własności funkcji potencjalnej Φ . To też na zasadzie tej własności potencjału, że jego pochodne cząstkowe względem odkształceń składowych są równe odpowiednim siłom sprężystości, otrzymaliśmy 15 równości (120) pomiędzy współczynnikami. W takiż sposób ta własność potencjału, że on dla wszelkich dowolnych wartości odkształceń składowych pozostaje dodatnim, doprowadzi nas do poznania pewnych nierówności, którym współczynniki sprężystości powinny zadość czynić.

W celu otrzymania tych nierówności napiszmy wzór potencjału Φ w tej postaci, którą otrzymuje się, gdy we wzorze (115) za siły sprężystości podstawimy ich wartości z wzorów (119).

Postać ta jest następująca:

$$2\Phi = \left. \begin{aligned} & a_{11} \Delta_x^2 + a_{22} \Delta_y^2 + a_{33} \Delta_z^2 + a_{44} g_{yz}^2 + a_{55} g_{zx}^2 + a_{66} g_{xy}^2 + \\ & + 2a_{12} \Delta_x \Delta_y + 2a_{13} \Delta_x \Delta_z + 2a_{14} \Delta_x g_{yz} + 2a_{15} \Delta_x g_{zx} + 2a_{16} \Delta_x g_{xy} + \\ & + 2a_{23} \Delta_y \Delta_z + 2a_{24} \Delta_y g_{yz} + 2a_{25} \Delta_y g_{zx} + 2a_{26} \Delta_y g_{xy} + \\ & + 2a_{34} \Delta_z g_{yz} + 2a_{35} \Delta_z g_{zx} + 2a_{36} \Delta_z g_{xy} + \\ & + 2a_{45} g_{yz} g_{zx} + 2a_{46} g_{yz} g_{xy} + \\ & + 2a_{56} g_{zx} g_{xy} \end{aligned} \right\} (121).$$

Ponieważ Φ jest funkcją odkształceń składowych jednorodną, stopnia drugiego, zawierającą 21 różnych współczynników, przeto możemy wyrazić ją także w postaci następującej:

$$2\Phi = (A_1 \Delta_x + A_2 \Delta_y + A_3 \Delta_z + A_4 g_{yz} + A_5 g_{zx} + A_6 g_{xy})^2 + \\ + (B_2 \Delta_y + B_3 \Delta_z + B_4 g_{yz} + B_5 g_{zx} + B_6 g_{xy})^2 + \\ + (C_3 \Delta_z + C_4 g_{yz} + C_5 g_{zx} + C_6 g_{xy})^2 + \\ + (D_4 g_{yz} + D_5 g_{zx} + D_6 g_{xy})^2 + \\ + (E_5 g_{zx} + E_6 g_{xy})^2 + \\ + F_6^2 g_{xy}^2 \dots (122),$$

gdzie część druga jest także funkcją odkształceń składowych jednorodną, stopnia drugiego, zawierającą również 21 różnych współczynników.

Po porównaniu współczynników podobnych we wzorach (121) i (122), otrzymujemy równania następujące:

$$\left. \begin{aligned} A_1^2 = a_{11}, \quad A_2^2 + B_2^2 = a_{22}, \quad A_3^2 + B_3^2 + C_3^2 = a_{33}, \\ A_4^2 + B_4^2 + C_4^2 + D_4^2 = a_{44}, \quad A_5^2 + B_5^2 + C_5^2 + D_5^2 + E_5^2 = a_{55}, \\ A_6^2 + B_6^2 + C_6^2 + D_6^2 + E_6^2 + F_6^2 = a_{66} \end{aligned} \right\} \dots (a).$$

$$A_1 A_2 = a_{12}, \quad A_1 A_3 = a_{13}, \quad A_1 A_4 = a_{14}, \quad A_1 A_5 = a_{15}, \quad A_1 A_6 = a_{16} \dots (b)$$

$$A_2 A_3 + B_2 B_3 = a_{23}, \quad A_2 A_4 + B_2 B_4 = a_{24}, \quad A_2 A_5 + B_2 B_5 = a_{25}, \\ A_2 A_6 + B_2 B_6 = a_{26} \dots (c)$$

$$A_3 A_4 + B_3 B_4 + C_3 C_4 = a_{34}, \quad A_3 A_5 + B_3 B_5 + C_3 C_5 = a_{35}, \\ A_3 A_6 + B_3 B_6 + C_3 C_6 = a_{36} \dots (d)$$

$$A_4 A_5 + B_4 B_5 + C_4 C_5 + D_4 D_5 = a_{45}, \quad A_4 A_6 + B_4 B_6 + C_4 C_6 + D_4 D_6 = a_{46} \dots (e)$$

$$A_5 A_6 + B_5 B_6 + C_5 C_6 + D_5 D_6 + E_5 E_6 = a_{56} \dots (f),$$

z których możemy oznaczyć, w zależności od współczynników, wszystkie współczynniki wzoru (122), których jest 21.

Jeżeli wielkość Φ pozostaje dodatnią dla wszelkich możebnych wartości odkształceń składowych, to żaden ze współczynników wzoru (122), przedstawiającego sumę sześciu kwadratów, nie może być wielkością urojoną. Skoro wprowadzimy ten warunek do równań (a), (b), (c), (d), (e) i (f), to będziemy mogli ustalić wszystkie te nierówności, którym współczynniki sprężystości powinny zadość czynić.

Z równań (a) widzimy, że każdy z sześciu współczynników sprężystości postaci a_{ii} jest ilością dodatnią, czyli:

$$a_{ii} > 0 \dots (123),$$

gdzie za i należy podstawić liczby szeregu 1, 2, 3, 4, 5 i 6.

Pierwsze z równań (b) daje: $A_2^2 = \frac{a_{12}^2}{a_{11}}$, a wtedy drugie z równań

(a) przybiera postać: $B_2^2 \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}$, skąd wynika, że $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$, albo pisząc inaczej:

$$\text{wyznacznik} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \dots (124).$$

Pierwsze z równań (c) daje:

$$B_3^2 = \frac{(a_{23} - A_2 A_3)^2}{B_2^2} = \frac{\left(a_{23} - \frac{a_{12} a_{13}}{a_{11}} \right)^2}{B_2^2} = \frac{(a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13})^2}{a_{11} (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)},$$

a wtedy z trzeciego z równań (a) wynika:

$$C_3^2 = a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} - \frac{(a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13})^2}{a_{11} (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)} > 0,$$

albo po wykonaniu działań wskazanych:

$$\text{wyznacznik } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0 \dots \dots \dots (125).$$

W takiż sposób przekonamy się, że wogóle:

$$\text{wyznacznik } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix} > 0 \dots \dots \dots (126),$$

gdzie za i należy podstawić liczby szeregu 1, 2, 3, 4, 5 i 6.

30. Ciała o płaszczyznach symetrii. Określmy płaszczyznę symetrii ciała własnością następującą potencyału: jeżeli oś x współrzędnych jest skierowana prostopadle do płaszczyzny symetrii, to potencjał Φ nie zmieni się wskutek zastąpienia x i u przez $-x$ i $-u$.

Ponieważ wskutek zmiany znaku przy ilościach: x i u zmienia się również znak odkształceń składowych g_{zx} i g_{xy} , jak to widzimy z wzorów (11), przeto we wzorze (121) na Φ powinny być równe zeru współczynniki następujące: a_{15} , a_{25} , a_{35} , a_{45} , a_{16} , a_{26} , a_{36} , a_{46} . A więc w przypadku, gdy płaszczyzna (yz) jest płaszczyzną symetrii ciała, zależność sił sprężystości od odkształceń składowych wyraża się zapomocą wzorów następujących:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= a_{11} \Delta_x + a_{12} \Delta_y + a_{13} \Delta_z + a_{14} g_{yz} \\ p_{yy} &= a_{21} \Delta_x + a_{22} \Delta_y + a_{23} \Delta_z + a_{24} g_{yz} \\ p_{zz} &= a_{31} \Delta_x + a_{32} \Delta_y + a_{33} \Delta_z + a_{34} g_{yz} \\ p_{yz} &= a_{41} \Delta_x + a_{42} \Delta_y + a_{43} \Delta_z + a_{44} g_{yz} \\ p_{zx} &= a_{55} g_{zx} + a_{56} g_{xy} \\ p_{xy} &= a_{65} g_{zx} + a_{66} g_{xy} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (127),$$

gdzie mamy tylko *trzydzieści* różnych współczynników.

Jeżeli nietylko płaszczyzna (yz) ale i płaszczyzna (xz) jest płaszczyzną symetrii, to funkcya Φ nie powinna się zmieniać nawet w razie zastąpienia y i v przez $-y$ i $-v$; a ponieważ w takim przypadku zmieniają znak odkształcenia składowe g_{yz} i g_{xy} , przeto we wzorze (121) muszą być równe zeru także współczynniki: a_{14} , a_{24} , a_{34} , a_{56} . W przypadku zatem, gdy płaszczyzny (yz) i (xz) są płaszczyznami symetrii ciała, mamy wzory:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= a_{11} \Delta_x + a_{12} \Delta_y + a_{13} \Delta_z \\ p_{yy} &= a_{21} \Delta_x + a_{22} \Delta_y + a_{23} \Delta_z \\ p_{zz} &= a_{31} \Delta_x + a_{32} \Delta_y + a_{33} \Delta_z \\ p_{yz} &= a_{44} g_{yz} \\ p_{zx} &= a_{55} g_{zx} \\ p_{xy} &= a_{66} g_{xy} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (128)$$

$$2\Phi = a_{11} \Delta_x^2 + a_{22} \Delta_y^2 + a_{33} \Delta_z^2 + a_{44} g_{yz}^2 + a_{55} g_{zx}^2 + a_{66} g_{xy}^2 + 2(a_{12} \Delta_x \Delta_y + a_{23} \Delta_y \Delta_z + a_{13} \Delta_x \Delta_z) \dots \dots \dots (129),$$

gdzie różnych współczynników jest *dziewięć*.

Z tych wzorów widzimy, że w przypadku rozważanym, płaszczyzna (xy) jest również płaszczyzną symetrii. A zatem, jeżeli ciało posiada dwie do siebie prostopadłe płaszczyzny symetrii, to i płaszczyzna trzecia, do nich prostopadła, jest także płaszczyzną symetrii.

31. Ciała równozwrotnie sprężyste. Ciało równozwrotnie sprężyste charakteryzuje się własnością, że dla niego każda płaszczyzna jest płaszczyzną symetrii, a więc wzór (129) potencjału Φ jest ważny i dla tego ciała, bez względu na to, jakie jest położenie prostopadłych do siebie osi x, y i z . A zatem wzór ten nie może się zmieniać, gdy zamienimy oś x na oś y i odwrotnie, lub oś x na oś z i odwrotnie, lub wreszcie oś y na oś z i odwrotnie. Wskutek tego muszą istnieć równości:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}, \quad a_{44} = a_{55} = a_{66}, \quad a_{12} = a_{23} = a_{31},$$

a wzór (129) musi przybrać postać:

$$2\Phi = a_{11}(\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2) + a_{44}(g_{yz}^2 + g_{zx}^2 + g_{xy}^2) + 2a_{12}(\Delta_x \Delta_y + \Delta_y \Delta_z + \Delta_z \Delta_x).$$

Wzór ten możemy również tak napisać:

$$2\Phi = a_{12}(\Delta_x + \Delta_y + \Delta_z)^2 + (a_{11} - a_{12})\left(\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 + \frac{g_{xy}^2 + g_{yz}^2 + g_{zx}^2}{2}\right) + \left(a_{44} - \frac{a_{11} - a_{12}}{2}\right)(g_{yz}^2 + g_{zx}^2 + g_{xy}^2),$$

gdzie $\Delta_x + \Delta_y + \Delta_z$ i $\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 + \frac{1}{2}(g_{yz}^2 + g_{zx}^2 + g_{xy}^2)$ są to niezmienniki osi współrzędnych, jak to nam wiadomo z wzorów (31). Ażeby więc funkcja Φ była niezależna od położenia osi współrzędnych, nie powinno być w powyższym wzorze ostatniego wyrazu, zależnego od położenia osi. Otrzymujemy więc jeszcze równość:

$$a_{44} = \frac{1}{2}(a_{11} - a_{12}),$$

gdzie $a_{11} > a_{12}$, gdyż $a_{44} > 0$.

Mamy więc dla ciała równozwrotnie sprężystego wzory:

$$2\Phi = a_{12} (\Delta_x + \Delta_y + \Delta_z)^2 + 2a_{44} \left(\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 + \frac{g_{yz}^2 + g_{zx}^2 + g_{xy}^2}{2} \right). \quad (130).$$

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= a_{11} \Delta_x + a_{12} (\Delta_y + \Delta_z) = a_{12} \theta + 2a_{44} \Delta_x, & p_{yz} &= a_{44} g_{yz} \\ p_{yy} &= a_{11} \Delta_y + a_{12} (\Delta_x + \Delta_z) = a_{12} \theta + 2a_{44} \Delta_y, & p_{zx} &= a_{44} g_{zx} \\ p_{zz} &= a_{11} \Delta_z + a_{12} (\Delta_x + \Delta_y) = a_{12} \theta + 2a_{44} \Delta_z, & p_{xy} &= a_{44} g_{xy} \end{aligned} \right\} \dots (131),$$

gdzie wchodzi tylko *dwa* różne współczynniki.

Współczynnik a_{44} nazywa się *współczynnikiem sprężystości poprzecznej ciała* i oznacza się literą G . Uznajmy dalej, że:

$$\frac{a_{12}}{2a_{44}} = \frac{a_{12}}{2G} = \frac{\mu}{1-2\mu} \quad \text{i} \quad 2(1+\mu)G = E \dots (132),$$

gdzie μ jest pewną liczbą oderwaną, a E jest ilością jednorodną ze współczynnikiem G , zwaną *współczynnikiem sprężystości podłużnej ciała*.

Przy powyższych oznaczeniach otrzymujemy z równania $2a_{44} = a_{11} - a_{12}$:

$$2G = a_{11} - \frac{\mu}{1-2\mu} 2G, \quad \text{skąd} \quad a_{11} = \frac{1-\mu}{1-2\mu} 2G$$

$$\text{i} \quad \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{1-\mu}{\mu}, \quad \text{ale} \quad a_{11} > a_{12}, \quad \text{więc} \quad 1-\mu > \mu, \quad \text{czyli}$$

$$\mu < \frac{1}{2} \dots (133).$$

Powyższe więc wzory dla ciała równozwrotnie sprężystego można przedstawić w postaci następującej:

$$\Phi = \frac{E}{1+\mu} \left[\frac{\mu}{1-2\mu} \theta^2 + \Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 + \frac{1}{2} (g_{yz}^2 + g_{zx}^2 + g_{xy}^2) \right]. \quad (134)$$

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= \frac{E}{1+\mu} \left[\frac{\mu \theta}{1-2\mu} + \Delta_x \right], & p_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} g_{yz} \\ p_{yy} &= \frac{E}{1+\mu} \left[\frac{\mu \theta}{1-2\mu} + \Delta_y \right], & p_{zx} &= \frac{E}{2(1+\mu)} g_{zx} \\ p_{zz} &= \frac{E}{1+\mu} \left[\frac{\mu \theta}{1-2\mu} + \Delta_z \right], & p_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} g_{xy} \end{aligned} \right\} \dots (135),$$

gdzie $\theta = \Delta_x + \Delta_y + \Delta_z$.

Wzory zaś, wyrażające odkształcenia składowe zapomocą sił sprężystości, są następujące:

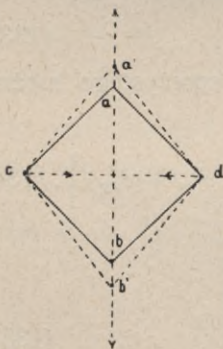
$$\left. \begin{aligned} \Delta_x &= \frac{1}{E} [p_{xx} - \mu (p_{yy} + p_{zz})], & g_{yz} &= \frac{2(1+\mu)}{E} p_{yz} \\ \Delta_y &= \frac{1}{E} [p_{yy} - \mu (p_{zz} + p_{xx})], & g_{zx} &= \frac{2(1+\mu)}{E} p_{zx} \\ \Delta_z &= \frac{1}{E} [p_{zz} - \mu (p_{xx} + p_{yy})], & g_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} p_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (136)$$

$$2\Phi = \frac{1}{E} [p_{xx}^2 + p_{yy}^2 + p_{zz}^2 - 2\mu (p_{xx} p_{yy} + p_{yy} p_{zz} + p_{zz} p_{xx}) + 2(1+\mu)(p_{yz}^2 + p_{zx}^2 + p_{xy}^2)] \quad (137).$$

Dwa współczynniki, znajdujące się w powyższych wzorach, mianowicie współczynnik sprężystości podłużnej E i liczba μ , mają dla różnych ciał równozwrotnie sprężystych wartości różne. Liczba μ , jak to już udowodniliśmy, jest mniejsza od $\frac{1}{2}$. Doświadczenia wskazują, że liczba ta leży między $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$.

32. Współczynnik zmian poprzecznych. Liczba μ ma znaczenie fizyczne, dzięki któremu nazywamy ją *współczynnikiem zmian poprzecznych ciała*. Dla ujawnienia tego znaczenia musimy udowodnić poprzednio twierdzenie następujące: *przy każdym wydłużeniu ciała muszą zjawiać się skrócenia w kierunkach prostopadłych do wydłużenia, o ile niema sił zewnętrznych temu przeciwdziałających.*

Niech r będzie kierunkiem wydłużenia ciała, a więc kierunkiem sił zewnętrznych, wywołujących to wydłużenie.



Rys. 3.

Przyjmijmy wewnątrz ciała cztery punkty: a, b, c i d (rys. 3) tak, aby one przed odkształceniem ciała leżały w wierzchołkach bardzo małego kwadratu, którego przekątnia ab jest równoległa do kierunku r . Po odkształceniu odległość między punktami a i b będzie $a'b' = ab(1 + \Delta_r)$. Ponieważ, zgodnie z założeniem, odległość między punktami a i b powiększyła się, przeto między nimi niewątpliwie zjawiała się siła przyciągająca sprężystości, skutkiem której działania punkty te powróciłyby do położenia pierwotnego, gdyby temu nie przeszkadzały siły zewnętrzne, rozciągające ciało.

Z powiększeniem wszakże odległości między punktami a i b , powiększa się odległość również między punktami a i c , a i d , b i c , b i d , a więc między każdą parą tych punktów pojawiają się także siły przyciągające sprężystości. Tak np. punkt c będzie poddany działaniu dwóch takich sił, równych sobie, z których jedna skierowana jest od c do a , a druga od c do b , a wypadkowa ich będzie skierowana od c do d .

Również punkt d będzie poddany działaniu dwóch sił, których wypadkowa ma kierunek od d do c . Ponieważ dla ruchu punktów c i d po przekątnej cd , prostopadłej do sił zewnętrznych, rozciągających ciało, niema przeszkód ze strony tych sił, przeto punkty c i d zbliżą się do siebie, a więc wydłużeniu w kierunku przekątnej ab będzie towarzyszyło skrócenie w kierunku przekątnej cd . W takiż sposób przekonać się możemy, że każdemu skróceniu w kierunku r towarzyszą wydłużenia w kierunkach prostopadłych do tego skrócenia.

Spostrzeżenia potwierdzają te wyniki teoretyczne i wykazują, że *bardzo małe zmiany poprzeczne, wywołane przez zmiany podłużne, są zawsze proporcjonalne do tych ostatnich*. Współczynnik proporcjonalności jest właśnie liczbą μ , wchodzącą we wzory (135) i (136).

Istotnie, weźmy w ciele równoległościan cząstkowy, o krawędziach równoległych do osi współrzędnych x , y i z i poddajmy to ciało nieznacznemu odkształceniu. Po skończeniu tego odkształcenia w równoległościanie ujawnią się trzy wydłużenia: Δ_x , Δ_y i Δ_z i trzy przesunięcia: g_{yz} , g_{zx} i g_{xy} . Nadto na ścianach równoległościanu zjawiają się siły sprężystości; te siły możemy uważać za owe siły zewnętrzne, które wywołały odkształcenie równoległościanu. Rozkładając każdą z tych sił na składowe w kierunkach osi współrzędnych x , y i z , otrzymujemy na każdej ścianie trzy siły: jedną normalną do ściany i dwie styczne. Możemy więc przyjąć, że równoległościan poddany jest działaniu sił następujących:

- 1) sił p_{xx} , rozciągających go w kierunku osi x i działających na dwie ściany prostopadłe do tej osi;
- 2) sił p_{yy} , rozciągających w kierunku osi y ;
- 3) sił p_{zz} , rozciągających w kierunku osi z — i
- 4) sił stycznych p_{yz} , p_{zx} i p_{xy} , które wywołują oczywiście przesunięcia: g_{yz} , g_{zx} i g_{xy} .

Niech i , i' i i'' będą wydłużeniami względniemi w kierunku osi x , y i z , wywołanemi przez siły normalne p_{xx} , p_{yy} i p_{zz} . Ponieważ między temi siłami i wywołanemi przez nie wydłużeniami względniemi powinna istnieć zależność liniowa, przeto możemy uznać, że dla ciała równozwrotnie sprężystego:

$$p_{xx} = E i, \quad p_{yy} = E i' \quad \text{ i } \quad p_{zz} = E i'' \quad . \quad . \quad . \quad (138),$$

gdzie E jest współczynnikiem sprężystości podłużnej ciała, stałym dla wszystkich kierunków i dla wszystkich punktów ciała.

Każdemu z powstałych wydłużeń i , i' i i'' musi towarzyszyć skrócenie poprzeczne. Z tego powodu nasz równoległościan ulegnie:

w kierunku osi x	wydłużeniu i	i skróceniu	$\mu i'$	i	$\mu i''$
„ „ y	„ „	„ „	i'	„ „	$\mu i''$ i μi
„ „ z	„ „	„ „	i''	„ „	μi i $\mu i'$

Otrzymamy zatem:

$\Delta_x = i - \mu (i' + i'')$, $\Delta_y = i' - \mu (i'' + i)$ i $\Delta_z = i'' - \mu (i + i')$,
czyli, wprowadzając za i , i' i i'' ich wartości z równań (138):

$$\Delta_x = \frac{1}{E} \left[p_{xx} - \mu (p_{yy} + p_{zz}) \right]$$

$$\Delta_y = \frac{1}{E} \left[p_{yy} - \mu (p_{zz} + p_{xx}) \right]$$

$$\Delta_z = \frac{1}{E} \left[p_{zz} - \mu (p_{xx} + p_{yy}) \right]$$

Wzory te są identyczne z wzorami (136).

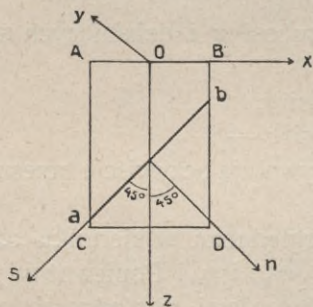
Dla sił stycznych sprężystości możemy przyjąć:

$$p_{yz} = G g_{yz}, \quad p_{zx} = G g_{zx} \quad \text{i} \quad p_{xy} = G g_{xy} \quad \dots \quad (139)$$

gdzie G jest współczynnikiem sprężystości poprzecznej ciała, stałym dla wszystkich kierunków i dla wszystkich punktów ciała równozwrotnie sprężystego.

Pomiędzy tym współczynnikiem a ilościami E i μ istnieje związek (132), który możemy otrzymać również na zasadzie rozumowania następującego, niezależnie od wzorów (136).

Niech $ABCD$ (rys. 4) przedstawia graniastosłup prosty, zbudowany



Rys. 4

z materiału równozwrotnie sprężystego i niech na obie podstawy tego graniastosłupa działają siły zewnętrzne, równoległe do jego osi geometrycznej i jednostajnie rozłożone na całej powierzchni każdej z tych podstaw. Kierunek tych sił jest taki, że graniastosłup jest rozciągany w kierunku swej długości. Niech P będzie wypadkową sił, działających na każdą z dwóch podstaw, i niech i będzie wydłużeniem względnym, w kierunku osi graniastosłupa. Wreszcie niech F oznacza powierzchnię przecięcia poprzecznego graniastosłupa, czyli powierzchnię jego podstawy. Otrzymujemy wtedy dla siły rozciągającej, sprowadzonej do jednostki powierzchni:

$$\frac{P}{F} = E i \quad \dots \quad (140).$$

Jeżeli siły zewnętrzne nie działają na ściany boczne i jeżeli nie uwzględnimy własnego ciężaru graniastosłupa, to odkształcenie graniastosłupa będzie polegało na wydłużeniu w kierunku jego osi geometrycz-

nej i na skróceniach w kierunkach prostopadłych do tej osi. Jeżeli więc oś z ma kierunek osi graniastosłupa, a osi x i y leżą na jednej z jego podstaw, to dla dowolnego punktu graniastosłupa otrzymamy:

$$\Delta_x = \Delta_y = -\mu \cdot i = -\frac{\mu P}{EF}, \quad \Delta_z = i = \frac{P}{EF}, \quad g_{yz} = g_{zx} = g_{xy} = 0 \dots (141).$$

Weźmy teraz przekrój ab , pochylony do osi graniastosłupa pod kątem 45° , tak, aby normalna n do tego przekroju leżała na płaszczyźnie xz . Wówczas będzie: $\cos(n, x) = \cos 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\cos(n, y) = 0$; $\cos(n, z) = \sin 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$. W tym przekroju nastąpi największe przesunięcie g_{ns} , którego kierunek s może być oznaczony z następujących wartości dostaw: $\cos(s, x) = \cos 135^\circ = -\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\cos(s, y) = 0$; $\cos(s, z) = \cos 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$. A zatem dla danego przypadku, na mocy wzoru ogólnego (9) na przesunięcia g_{ns} , otrzymujemy:

$$g_{ns} = -2\mu i \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) + 2i \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = (1 + \mu)i \quad \text{czyli}$$

$$g_{ns} = (1 + \mu) \frac{P}{EF} \dots \dots \dots (142).$$

Przenieśmy teraz wszystkie siły składowe P na przekrój ab i rozłożmy je w kierunkach n i s , t. j. w kierunkach: normalnym i stycznym do przekroju. Wypadkowa wszystkich sił stycznych będzie $P \cos 45^\circ = \frac{P}{\sqrt{2}}$.

Jeżeli przez F' oznaczymy powierzchnię przekroju ukośnego, to dla stycznej siły sprężystości p_{ns} otrzymamy:

$$p_{ns} = \frac{P}{F' \sqrt{2}};$$

ponieważ zaś $F' = \frac{F}{\cos 45^\circ} = F\sqrt{2}$, przeto

$$p_{ns} = \frac{1}{2} \frac{P}{F} = \frac{1}{2} Ei.$$

Siła styczna p_{ns} musi być proporcjonalna do przesunięcia g_{ns} , więc:

$$\frac{1}{2} Ei = G g_{ns} = G (1 + \mu) i,$$

a stąd otrzymujemy: $2(1 + \mu)G = E$, t. j. wzór (132).

33. Wyznaczalność zagadnień, odnoszących się do odkształceń. Warunki znoszące posunięcia, wspólne wszystkim punktom ciała. W niniejszym ustępie udowodnimy pewne twierdzenie, bardzo ważne w zastosowaniach teorii sprężystości, polegające na tem, że zadanie, odnoszące się do odkształceń ciała sprężystego, będzie zupełnie określone i będzie dawało tylko jedno rozwiązanie, gdy wprowadzimy warunki, uniemożliwiające posunięcia i obroty, wspólne wszystkim punktom ciała.

Przypuśćmy, że przy rozwiązywaniu pewnego zadania otrzymaliśmy dwa rozwiązania. Niech u_1, v_1 i w_1 , będzie układem posunięć, otrzymanych z pierwszego rozwiązania, a u_2, v_2 i w_2 — z drugiego. W takim przypadku z wzorów (11) otrzymamy dwa układy odkształceń składowych, a z wzorów (136) otrzymamy dwa układy sił sprężystości (przypuszczamy, że ciało jest równozwrotnie sprężyste). Możemy więc napisać równania równowagi (47) i (49) dwójako: dla układu u_1, v_1 i w_1 i dla układu u_2, v_2 i w_2 . Jeżeli od równań układu drugiego odejmiemy równania odpowiednie układu pierwszego, to otrzymamy równania równowagi dla układu $u_1 - u_2, v_1 - v_2$ i $w_1 - w_2$, które nie będą zawierały wyrazów z siłami zewnętrznymi. Musimy więc różnice $u_1 - u_2, v_1 - v_2$ i $w_1 - w_2$ uważać za takie posunięcia, jakim mogą podlegać punkty ciała przy przejściu tegoż ze stanu równowagi naturalnej do stanu równowagi naprężonej, *bez działania sił zewnętrznych*. Ale dla takiego przejścia praca sił wewnętrznych musi być równa zeru, czyli musi być:

$$\int \int \int \Phi \partial x \partial y \partial z = 0,$$

gdzie w wyrażeniu na Φ za u, v i w należy podstawić różnice $u_1 - u_2, v_1 - v_2$ i $w_1 - w_2$. Ponieważ wszystkie elementy powyższej całki trzykrotnej są ilościami dodatnimi, przeto całka ta będzie równa zeru tylko wtedy, gdy $\Phi = 0$, a ten warunek, zgodnie z własnością funkcji Φ , wyłożoną w ustępie 28, doprowadza do równań następujących:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial (v_1 - v_2)}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial (w_1 - w_2)}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial (v_1 - v_2)}{\partial z} + \frac{\partial (w_1 - w_2)}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial (w_1 - w_2)}{\partial x} + \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial y} + \frac{\partial (v_1 - v_2)}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

z których otrzymujemy, jak wiadomo, z ustępu 13:

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= \alpha + qz - ry \\ v_1 - v_2 &= \beta + rx - pz \\ w_1 - w_2 &= \gamma + py - qx. \end{aligned}$$

Jeżeli wszakże wprowadzimy warunki, uniemożliwiające posunięcia postępowe i ruchy obrotowe, wspólne wszystkim punktom ciała, to zmuszeni będziemy przyjąć:

$$\begin{aligned} \alpha = \beta = \gamma = p = q = r = 0, & \quad \text{a więc:} \\ u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2 \quad \text{i} \quad w_1 = w_2, & \end{aligned}$$

co jest dowodem naszego twierdzenia.

Przy rozwiązywaniu więc jakiegokolwiek zadania tyżącego się odkształceń ciała sprężystego, gdy mamy otrzymać tylko jedno rozwiązanie, musimy wprowadzić warunki, znoszące możność zmiany położenia punktów ciała, przy których układ wzajemny tych punktów się nie zmienia, ale zarazem warunki te nie powinny zawierać przeszkód dla jakichkolwiek bądź posunięć, zmieniających układ wzajemny punktów. Tym wymaganiom uczynimy zadość, wprowadzając trzy warunki następujące: 1) jeden z punktów ciała powinien być nieruchomy, 2) jedna cząstka liniowa, przechodząca przez punkt nieruchomy, nie powinna zmieniać swojego kierunku i 3) jedna cząstka powierzchni, przechodząca przez rzeczoną cząstkę liniową, powinna pozostawać w swej płaszczyźnie.

Ażeby te warunki wyrazić analitycznie, przypuśćmy, że punkt nieruchomy leży w początku współrzędnych O i przyjmijmy na osi x punkt A , a na osi y punkt B , nieskończenie blisko do punktu O .

Współrzędne tych trzech punktów, przed odkształceniem ciała, są:

$$\begin{array}{l} \text{dla punkt } O: \quad 0, \quad 0, \quad 0 \\ \text{„ „ } A: \quad \partial x, \quad 0, \quad 0 \\ \text{„ „ } B: \quad 0, \quad \partial y, \quad 0. \end{array}$$

Po odkształceniu zaś będą:

$$\begin{array}{l} \text{dla punktu } O: \quad u, \quad v, \quad w \\ \text{„ „ } A: \quad \partial x + u + \frac{\partial u}{\partial x} \partial x, \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} \partial x, \quad w + \frac{\partial w}{\partial x} \partial x \\ \text{„ „ } B: \quad u + \frac{\partial u}{\partial y} \partial y, \quad \partial y + v + \frac{\partial v}{\partial y} \partial y, \quad w + \frac{\partial w}{\partial y} \partial y. \end{array}$$

Warunek, że punkt O ma być nieruchomy, wymaga, ażeby $u=0$, $v=0$ i $w=0$. Warunek, że cząstka liniowa OA nie powinna zmieniać swojego kierunku, czyli że punkt A nie powinien zbaczać z osi x , wymaga, ażeby: $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$.

Wreszcie warunek, że cząstka powierzchni OAB powinna pozostawać w swej płaszczyźnie, czyli że punkt B nie powinien schodzić z płaszczyzny (xy) , wymaga, ażeby $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$.

Zawsze mamy więc prawo co do wartości funkcji u , v i w wprowadzić warunki, że przy $x=0$, $y=0$ i $z=0$ istnieją równości:

$$\left. \begin{array}{l} u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (143).$$

Wprowadzając te warunki we wzory (15) w ustępie 13, otrzymamy:

$$\alpha = \beta = \gamma = 0 \quad \text{i} \quad p = q = r = 0,$$

skąd dochodzimy do wniosku, że warunki te znoszą zmiany miejsca postępowe i obrotowe, wspólne wszystkim punktom ciała.

Gdyby punkt A leżał na osi z w odległości ∂z od początku współrzędnych O , a punkt B na osi x w odległości ∂x od O , to warunek, że punkt A nie powinien schodzić z osi z , a punkt B nie powinien schodzić z płaszczyzny (zx) , wyraziłby się w sposób następujący:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{przy} \quad x = y = z = 0 \quad \dots \quad (143 \text{ bis}).$$

34. Na zakończenie tego, cośmy wyżej wyłożyli, zauważymy, że w zadaniach, dotyczących odkształcenia ciał, przypuszczaliśmy milcząco, iż *stosunki pomiędzy wymiarami rozważanych ciał są wielkościami skończonemi*. Rzeczywiście, zawsze mieliśmy na widoku w tych zagadnieniach, iż sprężystość ciała podczas odkształcania nie zmienia się, czyli że układ wzajemny cząsteczek sąsiednich ciała zmienia się bardzo mało. Warunek ten w rozmaitych ciałach może być zachowany w różnych okolicznościach. Dla ciała, którego wymiary są wszystkie tego samego rzędu, t. j. albo wszystkie skończone, albo wszystkie nieskończenie małe, warunek, że sprężystość podczas odkształcania nie powinna się zmieniać, sprowadza się do tego, że postać ciała po odkształceniu powinna tylko bardzo mało różnić się od postaci pierwotnej. Dla takich ciał posunięcia u , v i w są funkcjami, zachowującemi bardzo małe wartości dla wszystkich punktów ciała. Gdy natomiast wymiary ciała są nie tego samego rzędu, np. w drucie bardzo cienkim albo w bardzo cienkiej płytce, wtedy warunek niezmienności sprężystości nie wymaga, by postać zewnętrzna po odkształceniu różniła się bardzo mało od postaci pierwotnej. Istotnie, drut prosty możemy zgąć w pierścień albo spiralnie, cienką zaś płytkę płaską możemy zgąć w rurkę, a jednak układ wzajemny cząsteczek w każdej cząstce, oddzielnie uważanej, zmieni się bardzo mało. Oczywiście, dla ciał tego rodzaju, funkcje u , v i w mogą dla wielu punktów ciała mieć wartości skończone, a jednak warunek niezmienności sprężystości będzie zachowany.

Wobec tego w teorii sprężystości należy ciała, których wszystkie wymiary są tego samego rzędu, badać oddzielnie od ciał, których jeden lub dwa wymiary są nieskończenie małe.

Nie możemy jednakże rozgraniczyć wyraźnie obu tych części teorii. Związek między niemi jest widoczny, a polega na tem, że ciała, których jeden lub dwa wymiary są bardzo małe, możemy rozłożyć na cząstki, których wszystkie wymiary są tego samego rzędu, wskutek czego wszystkie wzory pierwszej części teorii mogą być stosowane i do tych cząstek. Zadanie istotne drugiej części teorii polega na wynajdywaniu sposobów, zapomocą których możnaby sumować wyniki, otrzymane dla każdej z cząstek, ażeby następnie z tych wyników wyprowadzić wnioski co do zjawisk, następujących w całym ciele badanem.

CZĘŚĆ DRUGA.



ZASTOSOWANIA TEORYI SPRĘŻYSTOŚCI.

Wytrzymałość materiałów budowlanych.

WSTĘP.

35. Przy badaniu oporu, jaki przeciwstawiają ciała działaniu sił zewnętrznych, je odkształcających, rozróżniamy dwa rodzaje zagadnień, rzeczowo różnych, albowiem: albo z danego kształtu ciała przed odkształceniem i danych funkcji zmian u , v i w , należy oznaczyć układ sił zewnętrznych, mogący wywołać te dane zmiany; albo też na odwrót: z danych sił zewnętrznych i danego kształtu pierwotnego ciała, należy oznaczyć zmiany w położeniu wzajemnem jego punktów, czyli należy oznaczyć kształt ciała, po odkształceniu.

Zagadnienia pierwszego rodzaju zawsze dają się rozwiązywać bez trudności. Istotnie, w takim przypadku przez różniczkowanie danych funkcji u , v i w oznaczamy najpierw odkształcenia składowe z wzorów (11), następnie zaś z wzorów (135) (w przypuszczeniu, że mamy do czynienia z ciałem równozwrotnie sprężystem) oznaczamy siły sprężystości i wreszcie z równań równowagi (47), (48) i (49) oznaczamy siły zewnętrzne, działające zarówno na masę jak i na oddzielne punkty powierzchni.

Rozwiązywanie natomiast zagadnień drugiego rodzaju, nawet w przypadkach najprostszych, połączone jest ze znacznymi trudnościami. Trudność tu napotykana polega głównie na całkowaniu równań różniczkowych (47). Dlatego też w nauce o wytrzymałości materiałów budowlanych badamy tylko odkształcenia ciał, najprostszych kształtów geometrycznych, mianowicie ciał graniastosłupowych i kulistych, z materiału jednorodnego, i to jedynie przy pewnych układach sił zewnętrznych, nie zaś przy układach dowolnych tych sił. W przypadkach nieco zawilższych, w celu rozwiązania zagadnienia, uciekamy się do założeń upraszczających, lub też staramy się odgadnąć wartość niektórych z sześciu odkształceń składowych, następnie zaś staramy się oznaczyć pozostałe, tak, ażeby uczynić zadość równaniom równowagi i warunkom jednoczesności tych odkształceń składowych. Przy takim sposobie rozwiązywa-

nia zagadnień otrzymujemy równania różniczkowe cząstkowe prostsze, co ułatwia ich całkowanie.

Z założeń upraszczających, któremi się zwykle posługujemy, jedno polega na tem, że przy oznaczaniu wypadkowej i momentu liniowego sił zewnętrznych, gdy siły te po odkształceniu ciała dojdą już do równowagi z siłami sprężystości, przypuszczamy, że współrzędne punktów przyłączenia tych sił zewnętrznych są takie same jak przed odkształceniem ciała. Oczywiście, że takie założenie co do współrzędnych punktów przyłączenia sił jest przyczyną omyłek w obliczeniu, ale omyłki te są nieznaczne, o ile kształt ciała po odkształceniu rzeczywiście mało różni się od kształtu pierwotnego.

36. W badaniu odkształceń ciał graniastosłupowych będziemy te ciała sprowadzali do trzech prostopadłych do siebie osi współrzędnych x , y i z ; przyjmując oś z w kierunku osi geometrycznej graniastosłupa (prostej, łączącej środki ciężkości jego przecięć poprzecznych), osi zaś x i y — w płaszczyźnie jednej z podstaw.

Jakkolwiek odkształcenia, którym może podlegać ciało graniastosłupowe, są bardzo rozmaite, to jednak możemy uważać te odkształcenia jako wynik jednoczesnego powstania kilku prostszych odkształceń. Rzeczywiście, przypuśćmy, że przecięliśmy graniastosłup płaszczyzną prostopadłą do jego osi i że odłączyliśmy część graniastosłupa bardziej oddaloną od początku współrzędnych; wtedy dla równowagi części pozostałej należy działanie części odjętej zastąpić siłami sprężystości lub naprężeniami, działającymi na punkty danego przecięcia poprzecznego. Te naprężenia tworzą oczywiście układ sił równoznaczny z układem sił zewnętrznych, działających na punkty części odłączonej graniastosłupa. Jeżeli każdą z tych ostatnich sił zewnętrznych przeniesiemy równolegle do niej samej do środka ciężkości przyjętego przecięcia poprzecznego, to sprowadzimy układ tych sił do jednej wypadkowej R i do pary sił, której moment liniowy jest M . Niech R_1 i R_2 będą rzutami wypadkowej R na normalnej do przekroju i na płaszczyźnie przekroju, a M_1 i M_2 takimiż rzutami momentu liniowego M pary wypadkowej. Najprostsze odkształcenia ciała graniastosłupowego otrzymujemy, gdy każda z czterech wielkości: R_1 , R_2 , M_1 i M_2 istnieje oddzielnie.

Te najprostsze odkształcenia są:

- 1) *wydłużenie* lub *skrócenie*, gdy działa tylko jedna siła R_1 ,
- 2) *przesunięcie* (*ścięcie*) lub *poślizg*, gdy działa tylko siła R_2 ,
- 3) *skręcenie*, gdy działa tylko moment M_1 pary, leżącej w płaszczyźnie przekroju — i
- 4) *ugięcie*, gdy działa tylko moment M_2 pary, leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny przekroju.

A zatem odkształcenie ciała graniastostupowego w przypadku najogólniejszym możemy uważać za wynik jednoczesnego rozciągnięcia podłużnego (lub ściśnięcia), przesunięcia, skręcenia i ugięcia.

Oznaczmy przez R_x , R_y i R_z rzuty wypadkowej R na osiach współrzędnych, a przez M_x , M_y i M_z rzuty głównego momentu liniowego M , w przypuszczeniu, że środek ciężkości przekroju przyjęliśmy za środek momentów. Przy takich założeniach i gdy uwzględnimy, że rzuty na osiach współrzędnych naprężenia przyczepionego w punkcie (x, y) przekroju są p_{xx} , p_{yy} i p_{zz} , otrzymamy równania następujące:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \iint p_{xx} \partial F, & M_x &= \iint p_{zz} y \partial F \\ R_y &= \iint p_{yy} \partial F, & M_y &= - \iint p_{zz} x \partial F \\ R_z &= \iint p_{zz} \partial F, & M_z &= \iint (p_{yy} x - p_{xx} y) \partial F \end{aligned} \right\} \dots (144),$$

gdzie całkowanie należy rozpostrzeć na wszystkie cząstki powierzchni F przekroju.

37. Niech x' , y' i z' będą współrzędnymi pewnego punktu ciała graniastostupowego po tegoż odkształceniu, a x , y i z — współrzędnymi tegoż punktu przed odkształceniem, wreszcie u , v i w — bardzo małymi posunięciami tegoż punktu; otrzymamy wtedy:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + u \\ y' &= y + v \\ z' &= z + w \end{aligned} \right\} \dots (145),$$

gdzie u , v i w , jako funkcje współrzędnych, mogą być przedstawione w sposób następujący:

$$u = f_1(x, y, z), \quad v = f_2(x, y, z) \quad \text{i} \quad w = f_3(x, y, z).$$

Skoro z dwóch pierwszych równań (145) oznaczymy współrzędne x i y , to możemy w pierwszym stopniu przybliżenia zaniechać bardzo małe wielkości u i v , t. j. przyjąć $x = x'$ i $y = y'$, a wtedy trzecie z powyższych równań przyjmie postać:

$$f_3(x', y', z) + z - z' = 0 \dots (146).$$

Jeżeli w tem równaniu będziemy uważali x' , y' i z' za współrzędne bieżące, to przedstawi nam ono *równanie tej powierzchni, w którą się zamienia przekrój płaski graniastostupa po odkształceniu*. Ilość z wchodzi w to równanie jako parametr stały, z którego zmianą przechodzimy od jednego przekroju do innego. Niech N będzie normalną do tej powierzchni w pewnym punkcie x' , y' i z' , wtedy:

$$\cos(N, x) = \frac{1}{N} \frac{\partial f_3}{\partial x'}, \quad \cos(N, y) = \frac{1}{N} \frac{\partial f_3}{\partial y'}, \quad \cos(N, z) = -\frac{1}{N} \dots (147),$$

gdzie
$$N = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial y'}\right)^2}.$$

A zatem, jeżeli przekrój pozostaje płaskim, to dostawy kątów, jakie tworzą normalne z osiami współrzędnych, muszą być ilościami stałymi, zależnymi tylko od parametru z , a więc:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \dots (148),$$

czyli funkcja w będzie miała postać:

$$w = \varphi(z) + \varphi_1(z)x + \varphi_2(z)y \dots (149).$$

Jeżeli przekroje, pozostając płaskimi, będą zarazem jak i poprzednio prostopadłe do osi z , to:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{i} \quad w = \varphi(z) \dots (150).$$

Z równania trzeciego grupy (144), odrzucając ilość w , otrzymamy $z = z'$, a podstawiając tę wartość w dwa pierwsze równania tejże grupy, otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y, z') + x - x' &= 0 \\ f_2(x, y, z') + y - y' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (151).$$

Równania te oznaczają *linię krzywą, w którą zamienia się proste włókno podłużne graniastostupa po odkształceniu*. Tu x i y są parametrami stałymi, które zmieniając, przechodzimy od jednego włókna podłużnego do innego.

Dostawy kątów stycznej τ do włókna z osiami współrzędnych są:

$$\cos(\tau, x) = \frac{1}{\tau} \frac{\partial f_1}{\partial z'}, \quad \cos(\tau, y) = \frac{1}{\tau} \frac{\partial f_2}{\partial z'}, \quad \cos(\tau, z) = \frac{1}{\tau} \dots (152),$$

gdzie
$$\tau = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z'}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z'}\right)^2} \dots (153).$$

Jeżeli włókna podłużne graniastostupa pozostają prostymi, to pochodne, wchodzące we wzory (152), będą ilościami stałymi, zależnymi tylko od parametrów x i y ; w danym więc przypadku:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \dots (154).$$

Jeżeli nadto włókna te pozostaną także równoległymi do osi z , to:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \dots (155).$$

38. Wzory Green'a. W dalszych wywodach będą nam potrzebne wzory Green'a, mające bardzo ważne zastosowanie w wielu gałęziach fizyki matematycznej; wobec tego uważamy za pożądane tu je wyprowadzić.

Przypuśćmy, że mamy trzy funkcje A , B i C współrzędnych x, y, z i że mamy oznaczyć trzykrotną całkę:

$$\iiint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) \partial x \partial y \partial z ,$$

rozpościerając się na wszystkie cząstki pewnej bryły, ograniczonej ze wszystkich stron jedną lub kilku rozmaitemi powierzchniami. Co do funkcji A , B i C i ich pierwszych pochodnych przypuszczamy, że są ciągłe, jednoznaczne i że dla wszystkich punktów rzeczony bryły mają wartości skończone.

Wyznaczając pierwszy z trzech wyrazów, na które rozkłada się dana całka, otrzymujemy:

$$\iiint \frac{\partial A}{\partial x} \partial x \partial y \partial z = \iint \partial y \partial z \int \frac{\partial A}{\partial x} \partial x = \iint (A'' - A') \partial y \partial z.$$

Tu A'' i A' są to wartości funkcji A , odpowiadające granicy górnej i dolnej całkowania względem zmiennej x . Granicom tym odpowiadają te miejsca powierzchni, ograniczającej bryłę, przez które słup prostoliniowy, równoległy do osi x i mający za podstawę powierzchnię $\partial y \partial z$, wkracza w bryłę i wychodzi z niej na zewnątrz. Niech $\partial S'$ i $\partial S''$ będą cząstkami powierzchni ograniczającej, mieszczącymi się w owym słupie w miejscach jego wejścia i wyjścia, a N' i N'' — kierunkami normalnych zewnętrznych do tych cząstek. Wtedy otrzymamy:

$$\partial y \partial z = \partial S'' \cos (N'', x) = \partial S' \cos (N', x) ,$$

wobec czego:

$$\begin{aligned} \iiint \frac{\partial A}{\partial x} \partial x \partial y \partial z &= \iint A'' \partial y \partial z = \iint A' \partial y \partial z = \iint A'' \cos (N'', x) \partial S'' + \\ &+ \iint A' \cos (N', x) \partial S' = \iint A \cos (N, x) \partial S. \end{aligned}$$

Ostatnią całkę musimy rozpostrzeć na wszystkie cząstki ∂S powierzchni ograniczającej. Oczywiście będzie:

$$\begin{aligned} \iiint \frac{\partial B}{\partial y} \partial x \partial y \partial z &= \iint B \cos (N, y) \partial S \quad \text{i} \\ \iiint \frac{\partial C}{\partial z} \partial x \partial y \partial z &= \iint C \cos (N, z) \partial S. \end{aligned}$$

A zatem mamy wzór:

$$\iiint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) \partial x \partial y \partial z =$$

$$= \iint [A \cos(N, x) + B \cos(N, y) + C \cos(N, z)] \partial S \dots (156).$$

Jeżeli w tym wzorze przyjmiemy:

$$A = U \frac{\partial V}{\partial x}, \quad B = U \frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{i} \quad C = U \frac{\partial V}{\partial z},$$

gdzie U i V są także funkcjami współrzędnych x, y i z , to otrzymamy wzór:

$$\begin{aligned} & \iiint U \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \partial x \partial y \partial z + \\ & + \iiint \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) \partial x \partial y \partial z = \\ & = \iint U \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) \right] \partial S = \\ & = \iint U \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial N} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial N} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial N} \right) \partial S = \\ & = \iint U \frac{\partial V}{\partial N} \partial S \dots \dots \dots (157) \end{aligned}$$

Przyjmując we wzorze ostatnim $U = 1$, otrzymamy:

$$\iiint \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \partial x \partial y \partial z = \iint \frac{\partial V}{\partial N} \partial S \dots (158).$$

Wszystkie te wzory wskazują w jaki sposób pewne całki trzykrotne, rozpościerające się na pewną bryłę, mogą być zamienione na całki dwukrotne, rozpościerające się na powierzchnię, ograniczającą tę bryłę.

Jeżeliby zamiast trzech funkcji A, B i C trzech współrzędnych x, y i z dane były tylko dwie funkcje A i B , zależne jedynie od dwóch współrzędnych x i y i jeżelibyśmy zamiast całki trzykrotnej objętościowej mieli do oznaczenia całkę dwukrotną następującą:

$$\iint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) \partial x \partial y,$$

rozpościerającą się na wszystkie cząstki płaszczyzny, ograniczonej jedną lub wielu liniami krzywymi, to w takim przypadku musielibyśmy w powyższych wzorach zamienić całki, rozpościerające się na bryłę, na całki, rozpościerające się na obwód, ograniczający tę płaszczyznę, na którą musi być rozpostarte całkowanie.

W takim przypadku szczególnym otrzymamy, oczywiście, zamiast wzorów (156), (157) i (158) wzory następujące:

$$\iint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) \partial x \partial y = \int [A \cos(n, x) + B \cos(n, y)] \partial s \quad \dots \quad (159),$$

$$\begin{aligned} \iint U \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \partial x \partial y + \iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} \right) \partial x \partial y = \\ = \int U \frac{\partial V}{\partial n} \partial s \quad \dots \quad \dots \quad (160), \end{aligned}$$

$$\iint \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \partial x \partial y = \int \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(n, y) \right] \partial s \quad \dots \quad (161).$$

W tych wzorach n jest normalną zewnętrzną do cząstki ∂s zarysu, ograniczającego daną płaszczyznę.

Potrzebne nam będą zwłaszcza wzory (159) i (161).

ROZDZIAŁ IV.

Rozciąganie, ściskanie i przesuwanie (ścinianie) ciał graniastosłupowych.

39. Rozciąganie albo ściskanie, przy którym ujawnia się zmiana wymiarów poprzecznych. Wyobraźmy sobie graniastosłup z materiału jednolitego (izotropowego), położony względem osi współrzędnych x, y i z tak, jak to było wskazane w ustępie 36, i przypuśćmy, że wskutek działania sił zewnętrznych zjawilo się w nim wydłużenie względne i w kierunku osi z , jednakowe dla wszystkich punktów. Wyobraźmy sobie nadto, że temu wydłużeniu towarzyszy skrócenie poprzeczne — μi . Odległości x, y i z pewnego punktu graniastosłupa od płaszczyzn współrzędnych po odkształceniu będą: $x - \mu ix$, $y - \mu iy$ i $z + iz$, przy założeniu, że punkt, znajdujący się w początku współrzędnych pozostał nieruchomym i że graniastosłup nie wykonywał ruchów obrotowych wokoło osi współrzędnych. Posunięcia u, v i w w danym przypadku będą:

$$u = -\mu ix, \quad v = -\mu iy \quad \text{ i } \quad w = iz \quad \dots \quad (162),$$

a odkształcenia składowe (p. wzór 11) będą:

$$\Delta_x = \Delta_y = -\mu i, \quad \Delta_z = i, \quad g_{yz} = g_{zx} = g_{xy} = 0 \quad \dots \quad (163),$$

Rozprzestrzenienie zaś względne będzie:

$$\theta = (1 - 2\mu) i \quad \dots \quad (164).$$

Ponieważ liczba μ , jak wiemy, jest mniejsza od $\frac{1}{2}$, przeto $1 - 2\mu$ jest ilością dodatnią, a więc przy rozciąganiu podłużnym graniastosłupów (gdy $i > 0$), objętość ich, bez względu na skrócenia poprzeczne, zwiększa się; przy ścisaniu zaś podłużnym (gdy $i < 0$) — objętość się zmniejsza. Równania $g_{yz} = g_{zx} = g_{xy} = 0$, ważne dla wszystkich punktów ciała, wskazują, że kierunki wydłużeń głównych we wszystkich punktach są równoległe do osi współrzędnych; skutek tego przy rozciąganiu podłużnym, największe rozciągnięcie ujawni się we włóknach podłużnych, a przy ścisaniu podłużnym największe rozciągnięcie uja-

wni się we włóknach poprzecznych. W przypadku pierwszym największe rozciągnięcie równe jest i , w drugim zaś μi .

Równanie powierzchni, zwanej elipsoidą wydłużeń, w danym przypadku będzie:

$$-\mu i (x^2 + y^2) + iz^2 = \pm 1.$$

Powierzchnia ta składa się więc z dwóch sprzężonych hiperboloid obrotowych dokoła prostej równoległej do osi z i przechodzącej przez ten punkt ciała, dla którego tworzymy tę powierzchnię.

Stożek asymptotyczny, czyli stożek wydłużeń zerowych, oznaczony jest przez równanie:

$$z^2 = \mu (x^2 + y^2),$$

z którego widzimy, że kąt α pochylenia tworzących tego stożka względem jego osi, może być oznaczony z równania:

$$\operatorname{tg} \alpha = V^{1/\mu}.$$

Ponieważ μ znajduje się w granicach pomiędzy $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$, przeto kąt α blizki jest 60° .

W celu oznaczenia sił sprężystości lub naprężeń, wywołanych w punktach graniastosłupa, podstawiamy we wzorze (135) zamiast odkształceń składowych ich wartości i otrzymujemy:

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{yz} = p_{zx} = p_{xy} = 0 \quad \text{i} \quad p_{zz} = E \Delta_z = E i \quad . \quad . \quad (165).$$

Ponieważ wszystkie trzy siły styczne p_{yz} , p_{zx} i p_{xy} są równe zeru, przeto w każdym punkcie graniastosłupa, *osi sprężystości* są równoległe do osi współrzędnych x , y i z .

Równanie elipsoidy sprężystości przyjmuje postać $E i z^2 = 1$ albo $z = \pm V^{1/E i}$. W danym więc przypadku powierzchnia ta składa się z dwóch płaszczyzn prostopadłych do osi z i jednakowo oddalonych od punktu, dla którego tworzymy tę powierzchnię. Stożek zaś asymptotyczny przekształca się w płaszczyznę, prostopadłą do osi z i przechodzącą przez punkt uważany.

Oznaczmy przez Q wypadkową wszystkich naprężeń normalnych p_{zz} przekroju graniastosłupa, a przez F — powierzchnię tego przekroju; wtedy będzie

$$Q = F \cdot p_{zz} = E F i, \quad \text{skąd} \quad i = \frac{Q}{E F} \quad . \quad . \quad . \quad (166).$$

Punktem przyczepienia wypadkowej Q jest oczywiście środek ciężkości przekroju.

Jeżeli mamy oznaczyć siły zewnętrzne, mogące wywołać odkształcenie rozważane graniastosłupa, to wprowadzamy do równań (47) zamiast naprężeń ich wartości i otrzymujemy:

$$m X = m Y = m Z = 0.$$

A zatem przypadek rozważany rozciągania albo ściskania może zajść tylko wtedy, gdy ciało graniastosłupowe podlega tylko siłom działającym na masę, t. j. tylko siłom, działającym jednocześnie na wszystkie punkty ciała.

Normalna zewnętrzna do powierzchni bocznej graniastosłupa w dowolnym tejże powierzchni punkcie jest prostopadła do osi z , czyli $\cos(n, z) = 0$ i równanie (49) przybiera postać:

$$P \cos(P, x) = P \cos(P, y) = P \cos(P, z) = 0,$$

z czego wnosimy, że w punktach powierzchni bocznej niema ciśnień zewnętrznych. Wreszcie dla podstaw graniastosłupa mamy:

$$\cos(n, x) = \cos(n, y) = 0 \quad \text{i} \quad \cos(n, z) = \pm 1,$$

gdzie znak $+$ brać należy dla podstawy, bardziej oddalonej od początku współrzędnych, znak zaś $-$ dla podstawy, przechodzącej przez początek współrzędnych. Wobec takich wartości dostaw, z równań (49) otrzymamy:

$$\cos(P, x) = 0, \quad \cos(P, y) = 0, \quad \cos(P, z) = \pm 1 \quad \text{i} \quad P = p_{zs}.$$

Siły więc, działające na podstawy graniastosłupa, powinny być równoległe do osi graniastosłupa i działać na jedną z podstaw w kierunku dodatnich z -tów, na drugą zaś — w kierunku odwrotnym; nadto, siły te winny być rozłożone równomiernie na powierzchni podstawy, a wypadkowa sił, działających na każdą z podstaw, powinna być równa sile Q .

Powyżej mieliśmy: $w = iz$ i $i = \frac{Q}{FE}$, a więc $w = \frac{Qz}{FE}$. Jeżeli długość graniastosłupa przed odkształceniem oznaczymy przez L , a wydłużenie jego bezwzględne — przez l , to do oznaczenia tego wydłużenia będziemy mieli wzór:

$$l = \frac{QL}{FE} \dots \dots \dots (167).$$

40. Warunek wytrzymałości. Przechodzimy teraz do warunku wytrzymałości graniastosłupa podlegającego rozciąganiu lub ściskaniu. Przedewszystkiem zauważmy, że przerwać związek między cząstkami ciała możemy tylko rozłączając cząsteczki, czyli powiększając ich odległości wzajemne. Jeżeli więc ciało ma zadość uczynić warunkom wytrzymałości, to należy takie nadać mu wymiary, ażeby największe rozciągnięcie względne (rozciągnięcie, nie zaś ściśnięcie), mogące powstać w tem ciełe, nie przekroczyło granicy rozciągnięć bezpiecznych. Przypuśćmy, że I jest to wydłużenie względne, przy którym zaczyna naruszać się sprężystość materiału danego graniastosłupa. Warunek wytrzymałości możemy oczywiście wyrazić w postaci:

$$(\Delta_r)_{\max} = \frac{I}{k} \dots \dots \dots (168),$$

gdzie k jest pewną liczbą, *niezbędnie większą od jedności*. Liczbę tę możemy nazwać *współczynnikiem wytrzymałości*, albowiem im większym jest k , tem mniejszym jest wydłużenie ciała i tem więc jest większą wytrzymałość ciała.

Ponieważ każdemu wydłużeniu i odpowiada ściśle oznaczone naprężenie, wyrażające się wzorem $p_{zz} = E i$, przeto oznaczając przez T naprężenie, odpowiadające największemu wydłużeniu nieszkodliwemu I , czyli przyjmując $T = E I$, możemy warunek wytrzymałości przedstawić także w postaci:

$$(\Delta_r)_{\max} = \frac{T}{k E} \dots \dots \dots (169).$$

Oczywiście, naprężenie T , które nazywa się *największym naprężeniem bezpiecznym*, powinno być dla każdego materiału budowlanego oznaczone zapomocą doświadczeń. Co się tyczy wielkości liczebnej współczynnika wytrzymałości k , to należy zauważyć, że wielkość ta jest zależna od wielu okoliczności, np. od jakości materiału, od warunków, w jakich będzie się znajdowała dana część budowli i t. p. Współczynnik ten, stosownie do okoliczności, może mieć wartość od 3 do 6 i większą. Jeżeli dana część ustroju ma znajdować się w spoczynku, można przyjąć $k = 3$; dla części zaś ustroju, które znajdować się mają w ruchu łagodnym, przyjmuje się $k = 4$; gdy ustrój podlega uderzeniom i wstrząśnieniom słabym, można przyjąć $k = 5$, a przy uderzeniach silnych $k = 6$. Jednakże rozmaite inne względy mogą budującego w każdym poszczególnym przypadku nakłonić do uchylania się od tych wartości.

Wracając do rozważanego powyżej przypadku rozciągania graniastosłupa, piszemy warunek wytrzymałości pod postacią:

$$(\Delta_r)_{\max} = i = \frac{Q}{F \cdot E} + \frac{T}{k E},$$

a stąd dla powierzchni przekroju graniastosłupa otrzymujemy:

$$F = \frac{k Q}{T} \dots \dots \dots (170).$$

Ten ostatni wzór jest ważny tylko gdy zachodzi rzeczywiście rozciąganie. Dla ściskania zaś będzie:

$$(\Delta_r)_{\max} = \mu i = \frac{\mu Q}{F E} = \frac{T}{k E} \quad \text{i stąd}$$

$$F = \mu \frac{k Q}{T} = \frac{k Q}{T'} \dots \dots \dots (171),$$

gdzie $T' = \frac{T}{\mu}$.

Przy porównywaniu ze sobą wzorów (170) i (171) łatwo zauważymy, że ciała jednolite (izotropowe) ujawniają wytrzymałość na ściskanie trzy do czterech razy większą, aniżeli na rozciąganie.

Jednakże ten wniosek teoretyczny nie zupełnie potwierdzają doświadczenia nad rozmaitymi materiałami budowlanymi, prawdopodobnie dlatego, że ich budowa nie zupełnie odpowiada pojęciu jednolitości (izotropii). Z tego powodu w zastosowaniu praktycznym wzoru (171) bierzemy zamiast T' nie $\frac{T}{\mu}$, lecz dane, otrzymywane z bezpośrednich badań nad ściskaniem różnych materiałów. Tablice, w których zestawiono wartości naprężeń T i T' podane są poniżej.

41. Rozciąganie albo ściskanie, przy którym nie ujawniają się zmiany poprzeczne. Dla rozciągania podłużnego, któremu nie towarzyszy skrócenie poprzeczne, możemy oznaczyć posunięcia punktów graniastosłupa z wzorów następujących:

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{i} \quad w = iz,$$

z wzorów zaś (11), (135) i (47) otrzymamy:

$$\Delta_x = \Delta_y = 0, \quad \Delta_z = i, \quad g_{yz} = g_{zx} = g_{xy} = 0, \quad \theta = i,$$

$$p_{xx} = p_{yy} = \frac{\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} E i$$

$$p_{zz} = \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} E i$$

$$p_{yz} = p_{zx} = p_{xy} = 0$$

$$X = Y = Z = 0.$$

Jeżeli przez p oznaczymy ciśnienie zewnętrzne, działające na jednostkę powierzchni bocznej graniastosłupa, to z równań (49) otrzymamy:

$$\cos(p, x) = \cos(n, x), \quad \cos(p, y) = \cos(n, y),$$

$$\cos(p, z) = 0 \quad \text{i} \quad p = \frac{\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} E i;$$

dla ciśnienia zaś P na jednostkę powierzchni podstawy graniastosłupa, otrzymamy z tych samych wzorów:

$$\cos(P, x) = 0, \quad \cos(P, y) = 0, \quad \cos(P, z) = \pm 1 \quad \text{i}$$

$$P = \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} E i.$$

Wypadkowa Q tych ciśnień ostatnich równa jest iloczynowi PF , a więc

$$i = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{1-\mu} \frac{Q}{FE} \quad \text{i} \quad p = \frac{\mu}{1-\mu} P.$$

Z tych wzorów dochodzimy do wniosku, że rozważany przypadek rozciągania może zajść w warunkach następujących: a) nie należy uwzględniać ciężaru własnego graniastosłupa, b) powierzchnia boczna graniastosłupa powinna podlegać ciśnieniu, jednostajnie na niej rozłożonemu i mającemu kierunek normalnych zewnętrznych, gdy $i > 0$, lub wewnętrznych, gdy $i < 0$, i c) ciśnienie normalne na jednostkę powierzchni bocznej graniastosłupa powinno być w takim stosunku do takiegoż ciśnienia na podstawy, jak μ do $1-\mu$, czyli powinno być dwa do trzech razy mniejsze od ciśnienia na podstawy.

Gdy $i > 0$, wtedy $(\Delta_r)_{\max} = i$ i warunek wytrzymałości daje dla powierzchni F przekroju graniastosłupa:

$$F = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{1-\mu} \cdot \frac{kQ}{F} = \text{prawie } \frac{5}{6} \frac{kQ}{T}.$$

W danym więc przypadku graniastosłup jest nieco wytrzymalszy na rozciąganie, aniżeli w przypadku, gdy dla ścisnięć poprzecznych nie było żadnych przeszkód.

Gdy $i < 0$, czyli gdy graniastosłup podlega ścisnaniu podłużnemu, któremu nie towarzyszą rozciągnięcia poprzeczne, nie zachodzi obawa rozerwania, a więc w tym razie niema warunku wytrzymałości. Rzeczywiście, gdybyśmy włożyli ciało graniastosłupowe w naczynie o ścianach bardzo wytrzymałych i szczelnie przylegających do powierzchni bocznej danego ciała, to moglibyśmy poddać to ciało bardzo silnemu ścisnaniu, bez uszczerbku dla jego trwałości. Ciśnienie zewnętrzne działające na graniastosłup, udzieli się nietylko dnu naczynia, ale i jego ścianom, podobnie jak w razie, gdy naczynie napełnione byłoby cieczą, z tą jednakże różnicą, że ciśnienie na jednostkę powierzchni ściany będzie prawie trzy razy mniejsze od ciśnienia na dno, gdy tymczasem przy napełnieniu naczynia cieczą obydwie te ciśnienia byłyby sobie równe.

42. Rozciąganie albo ściskanie przy uwzględnieniu ciężaru własnego graniastosłupa. Zbadajmy rozciąganie graniastosłupa prostego przez działanie siły zewnętrznej pionowej Q , przyczepionej do podstawy dolnej graniastosłupa i przez ciężar własny graniastosłupa. W tym przypadku naprężenie p_{zz} dla punktów pewnego przekroju, przyjętego w odległości z od podstawy górnej, możemy oznaczyć w taki sam sposób, jak i w przypadku rozważanym w ustępie 39, zapomocą

wzoru $p_{zz} = E \Delta_z = E \frac{\partial w}{\partial z}$. Ciśnienie więc na cały przekrój będzie równe:

$$p_{zz} F = E F \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Ciśnienie to musi być równe sile Q powiększonej o ciężar części gra-

niasłupa, leżącej pomiędzy danym przekrojem a podstawą dolną. To też skoro oznaczymy przez δ ciężar jednostki objętości graniastosłupa, to otrzymamy:

$$p_{zz} F = EF \frac{\partial w}{\partial z} = Q + \delta \int_0^L F \, dz. \quad (172),$$

czyli, z uwagi, że F dla graniastosłupa jest ilością stałą:

$$EF \frac{\partial w}{\partial z} = Q + \delta F (L-z) \quad (173).$$

Z tego ostatniego wzoru wynika, że wydłużenie względne osiąga maximum dla $z = 0$, czyli dla podstawy górnej graniastosłupa, która też w danym przypadku nazywa się *przekrojem niebezpiecznym*. To wydłużenie największe równa się $\frac{Q}{FE} + \frac{\delta FL}{FE}$; warunek zatem wytrzymałości będzie:

$$\frac{Q}{FE} + \frac{\delta FL}{FE} = \frac{T}{kE},$$

skąd znajdujemy:

$$F = \frac{kQ}{T - k\delta L} \quad (174).$$

Równanie ostatnie wskazuje, że powierzchnia F przekroju graniastosłupa staje się wielkością nieoznaczoną, gdy:

$$Q = 0 \quad \text{i} \quad L = \frac{T}{k\delta} \quad (175).$$

Stąd wypływa wniosek, że graniastosłup prosty, poddany rozciąganiu tylko pod działaniem ciężaru własnego, będzie posiadał żądany stopień wytrzymałości k , bez względu na powierzchnię jego przekroju, o ile długość L tego graniastosłupa będzie oznaczona z wzoru (175). Największa długość graniastosłupa, przy której naprężenie w przekroju niebezpiecznym staje się równem największemu naprężeniu bezpiecznemu T , może być oznaczona z wzoru (175), gdy przyjmiemy w nim $k=1$. Długość ta jest $L_{\max} = \frac{T}{\delta}$. Tak np. dla drutu miedzianego, dla którego największe naprężenie bezpieczne $T = 1200 \text{ kg/cm}^2$, a ciężar 1 cm^3 wynosi $\delta = 0,00889 \text{ kg}$, długość $L_{\max} = \frac{1200}{0,00889} \text{ cm} = 1349,83 \text{ m}$.

Ciężar graniastosłupa o współczynniku wytrzymałości k , gdy powierzchnię przekroju tego graniastosłupa oznaczono z wzoru (174), wynosi:

$$\delta FL = \frac{\delta L k Q}{T - k\delta L} \quad (176).$$

Jeżeli mamy oznaczyć całkowite wydłużenie l takiego graniastostupa, to powinniśmy zcałkować równanie (173) w granicach od $z=0$ do $z=L$, po wykonaniu czego otrzymamy:

$$l = \frac{Q + \frac{1}{2} \delta FL}{FE} L \dots \dots \dots (177).$$

Wprowadzając tu za F jego wartość z równania (174), otrzymamy:

$$l = \frac{TL}{kE} - \frac{\delta L^2}{2E} \dots \dots \dots (178).$$

Z porównania wzoru (177) z wzorem (167) wynika, że ciężar własny graniastostupa prostego wywołuje w nim całkowite wydłużenie dwa razy mniejsze od tego, jakie wywołałaby siła równa temu ciężarowi, przyczepiona do podstawy dolnej graniastostupa.

Wszystkie powyższe wzory są ważne także, gdy siła Q i ciężar własny graniastostupa będą go ścisakały, należy wtedy jedynie zastąpić najwyższe naprężenie bezpieczne T przez naprężenie $\frac{T}{\mu}$, czyli T' , albowiem największemu rozciąganiu będą podlegały włókna nie podłużne, lecz poprzeczne, leżące w przekroju niebezpiecznym.

Można łatwo zbadać przypadki, w których siła Q i ciężar graniastostupa działają w kierunkach przeciwnych, t. j. gdy jedna z tych sił rozciąga, druga zaś ścisaka graniastostup, czyli gdy siły te wchodzi w równania ze znakami przeciwnymi. W takich przypadkach w graniastostupie mogą być dwa przekroje niebezpieczne: jeden tam, gdzie rozciągnięcia podłużne osiągną maximum, drugi zaś tam, gdzie rozciągnięcia poprzeczne są największe. To też w takich przypadkach należy ustalić dwa warunki wytrzymałości i uwzględnić ten, który dla powierzchni F przekroju daje wartość większą.

43. Ciała o wytrzymałości jednostajnej. Wzór (172) możemy stosować również do ciała niegraniastostupowego o osi prostej, którego przekroje zmieniają się ciągle ze zmianą współrzędnej z . Zastosujemy tu ten wzór do wyznaczenia *kształtu ciała o wytrzymałości jednostajnej na rozciąganie lub ściskanie*, przyczem nazwą ciała o wytrzymałości jednostajnej oznaczamy takie ciało, którego wszystkie przekroje podlegają jednakowemu naprężeniu na jednostkę powierzchni.

Wielkość $E \frac{\partial w}{\partial z}$, przedstawiającą naprężenie na jednostkę powierzchni przekroju, musimy dla szukanego ciała poczytywać za stałą, powierzchnię zaś F — za zmienną; różniczkując przeto równanie (172) i mając na względzie, że w całce, wchodzącej w to równanie, granica dolna jest zmienna, otrzymamy:

$$E \frac{\partial w}{\partial z} \partial F = - \delta F \partial z, \text{ czyli } E \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial F}{F} = - \delta \cdot \partial z.$$

Całkując to równanie w granicach $z = L$ i $z = Z$, znajdziemy:

$$E \frac{\partial w}{\partial z} \log \text{nat} \left(\frac{F}{F_0} \right) = \delta (L - z),$$

gdzie F_0 jest powierzchnią podstawy ciała, odpowiadającą wartości $z = L$.

Przyjmując we wzorze (172) $z = L$ i $F = F_0$, otrzymamy:

$$EF_0 \frac{\partial w}{\partial z} = Q, \text{ a więc } \frac{Q}{F_0} \log \text{nat} \left(\frac{F}{F_0} \right) = \delta (L - z),$$

skąd:

$$F = F_0 e^{\frac{\delta F_0}{Q} (L - z)} \dots \dots \dots (179).$$

Z tego wzoru wyznaczmy powierzchnię każdego z przekrojów ciała, gdy tylko znana jest powierzchnia F_0 . Ta zaś powierzchnia może być wyznaczona z warunku wytrzymałości, który daje:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{Q}{F_0 E} = \frac{T}{kE}, \text{ skąd } F_0 = \frac{kQ}{T}.$$

Ostatecznie otrzymujemy więc wzór:

$$F = \frac{kQ}{T} e^{\frac{k\delta}{T} (L - z)} \dots \dots \dots (180).$$

Ciążar ciała o wytrzymałości jednostajnej jest równy:

$$\delta \int_0^L F \partial z = Q \left(e^{\frac{k\delta L}{T}} - 1 \right) \dots \dots \dots (181).$$

Wydłużenie zaś całkowite l otrzymujemy, całkując równanie $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{T}{kE}$ w granicach $z = 0$ i $z = L$:

$$l = \frac{TL}{kE} \dots \dots \dots (182).$$

Z porównania wzorów (181) i (182) z wzorami (176) i (178) wynika, że do zbudowania ciała o wytrzymałości jednostajnej potrzeba mniej materiału, aniżeli na ciało graniastosłupowe takiej samej długości i tego samego stopnia wytrzymałości, i że ciało o wytrzymałości jednostajnej odkształca się znacznie aniżeli graniastosłupowe.

W praktyce często zamiast prętów, mających kształt ciała o wytrzymałości jednostajnej, stosowane są pręty, składające się z połączonych ze sobą części graniastosłupowych. Powierzchnie przekrojów

tych części graniastosłupowych wyznaczane są w taki sposób, ażeby naprężenie na jednostkę powierzchni przekroju niebezpiecznego każdego graniastosłupa było równe $\frac{T}{k}$. Przypuśćmy, że pręt składa się z n czę-

ści graniastosłupowych, których przekroje są F_1, F_2, \dots, F_n , długości zaś L_1, L_2, \dots, L_n , gdzie F_1 i L_1 stosują się do tej części graniastosłupowej, na której podstawę dolną działa siła rozciągająca Q .

Weźmy dwa graniastosłupy, bezpośrednio po sobie idące, a mianowicie $(x-1)$ -szy i x -wy. Na przekrój niebezpieczny pierwszego działa siła $F_{x-1} \cdot \frac{T}{k}$, a na przekrój niebezpieczny drugiego — siła $F_x \cdot \frac{T}{k}$.

Ta ostatnia siła musi być równa sile $F_{x-1} \cdot \frac{T}{k}$, powiększonej o ciężar własny graniastosłupa x -wego; otrzymamy więc równanie:

$$F_x \cdot \frac{T}{k} = F_{x-1} \cdot \frac{T}{k} + \delta F_x L_x,$$

a stąd:

$$F_x = \frac{F_{x-1}}{1-a_x} \dots \dots \dots (183),$$

gdzie dla uproszczenia przyjęliśmy $\frac{k \delta L_x}{T} = a_x$.

Z wzoru (174) dla powierzchni przekroju graniastosłupa pierwszego mamy:

$$F_1 = \frac{kQ}{T - k\delta L_1} = \frac{kQ}{T} \cdot \frac{1}{1-a_1},$$

nadto z wzoru (183) znajdziemy:

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{F_1}{1-a_2} \\ F_3 &= \frac{F_2}{1-a_3} \\ &\dots \dots \dots \\ F_x &= \frac{F_{x-1}}{1-a_x}. \end{aligned}$$

Mnożąc te równania przez siebie, otrzymamy:

$$F_x = \frac{kQ}{T} \cdot \frac{1}{(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_x)} \dots \dots (184).$$

W przypadku szczególnym, gdy $L_1 = L_2 = \dots = L_n = \frac{L}{n}$, otrzymamy wzór:

$$F_x = \frac{kQ}{T} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{k\delta L}{nT}\right)^x} \dots \dots \dots (185).$$

Wydłużenie całkowite graniastostupa x -go, zgodnie z wzorem (178), będzie:

$$l_x = \frac{T}{kE} L_x - \frac{\delta L_x^2}{2E}.$$

Wydłużenie zupełne całego pręta, składającego się z n części, będzie:

$$l = \frac{T}{kE} L - \frac{\delta}{2E} (L_1^2 + L_2^2 + \dots + L_n^2) \dots (186),$$

gdy zaś długości części są jednakowe, to:

$$l = \frac{TL}{kE} - \frac{\delta L^2}{2En} \dots \dots \dots (186^a).$$

Ciężar całego pręta, przy długości jednakowej wszystkich części, wynosi:

$$\delta \frac{L}{n} (F_1 + F_2 + \dots + F_n) = \frac{\delta L}{n} \sum_1^{n+1} F_x,$$

a że:

$$\sum_1^{n+1} F_x = \frac{kQ}{T} \sum_1^{n+1} \left(\frac{1}{1 - \frac{k\delta L}{nT}} \right)^x = \frac{nQ}{\delta L} \left[\left(\frac{nT}{nT - k\delta L} \right)^n - 1 \right],$$

przeto na ciężar ten otrzymujemy wzór:

$$\frac{\delta L}{n} \sum_1^{n+1} F_x = Q \left[\left(\frac{nT}{nT - k\delta L} \right)^n - 1 \right] \dots \dots (187).$$

44. Przesuwanie w graniastostupach i wytrzymałość ich złożona przy rozciąganiu i przesuwaniu. Przesuwanie (ściananie) spotyka się w wielu przypadkach; nity, zwoje śrub i naśrubków, kliny łącznikowe i wiele innych części budowli podlegają przesuwaniu. Wogóle możemy powiedzieć, że graniastostupy niewielkiej długości, poddane wyginaniu, przeciwdziałają temuż przez przesuwania we wszystkich swych przekrojach. Graniastostupy natomiast znacznej długości, na które działają siły wyginające, przeciwdziałają im jedynie przez przesuwanie tylko w tych przekrojach, w których moment sił wyginających równa się zero, lub jest bardzo mały. Tak np. belka, wygięta w dwóch przeciwnych kierunkach, której oś ma postać znaku f , opiera się tylko przesuwaniem w przekrojach, sąsiadujących z punktem zwrotnym, w którym niema ugięcia, albowiem krzywizna w tem miejscu równa się zero.

Przypuśćmy, że mamy graniastostup bardzo krótki, którego jedna podstawa umocowana jest nieruchomo, a na drugą działają siły zewnętrzne równoległe, rozłożone jednostajnie na powierzchni podstawy i prostopadłe do osi graniastostupa (styczne do podstawy).

Niech wypadkowa tych sił będzie P . Różne przekroje będą opierały się sile P przesuwaniem i wyginaniem; że jednak moment sił wyginających, z powodu nieznaczonej długości graniastostupa, będzie dla każdego z tych przekrojów bardzo mały, przeto możemy przypuścić, że we wszystkich przekrojach ujawnia się tylko przesuwanie.

Przyjmując oś x za równoległą do siły P , możemy oznaczyć to przesuwanie przez g_{zx} . Przypuszczając nadto, że jest ono jednakowe dla wszystkich punktów graniastostupa, otrzymamy:

$$p_{zx} = G g_{zx} \quad \text{i} \quad p_{zx} F = F G g_{zx} = \frac{EF}{2(1+\mu)} g_{zx} = P,$$

skąd na przesuwanie otrzymujemy:

$$g_{zx} = 2(1+\mu) \frac{P}{EF} \dots \dots \dots (188).$$

Dla rozciągnięcia największego mamy wzór następujący (ustęp 17, przypadek 5-ty):

$$(\Delta_r)_{\max} = \frac{1}{2} g_{zx} = (1+\mu) \frac{P}{EF},$$

warunek więc wytrzymałości będzie:

$$(1+\mu) \frac{P}{EF} = \frac{T}{kE}, \quad \text{czyli}$$

$$F = (1+\mu) \frac{kP}{T} = \frac{kP}{T''} \dots \dots \dots (189),$$

gdzie $T'' = \frac{T}{1+\mu}$.

Z ostatniego wzoru wyprowadzamy wniosek, że *ciała jednolite (izotropowe) są w stosunku prawie 4 : 5 mniej wytrzymałe na przesuwanie, aniżeli na rozciąganie.*

Przyjęte powyżej przypuszczenie, że z sześciu odkształceń składowych istnieje tylko odkształcenie składowe stałe g_{zx} , wraz z założeniem, że podstawa graniastostupa, leżąca na płaszczyźnie współrzędnej xy , jest nieruchoma, prowadzi do następujących wartości przesunięć:

$$u = gz, \quad v = 0 \quad \text{i} \quad w = 0,$$

gdzie g jest ilością stałą.

Z równań tych otrzymujemy dla odkształceń składowych:

$$\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = g_{yz} = g_{zy} = 0 \quad \text{i} \quad g_{zx} = g,$$

dla sił zaś sprężystości:

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p_{yz} = p_{xy} = 0 \quad \text{i} \quad p_{zx} = Gg = \frac{Eg}{2(1+\mu)}.$$

Równania ogólne równowagi wykażą nadto, że sił działających na masę (t. j. jednocześnie na wszystkie punkty ciała) tu być nie powinno; natomiast z równań poszczególnych równowagi dla siły p , działającej na jednostkę powierzchni podstawy graniastosłupa, wynika:

$$\cos(p, x) = 1, \quad \cos(p, y) = \cos(p, z) = 0 \quad \text{i} \quad p = p_{zx} = \frac{Eg}{2(1+\mu)}.$$

Dla siły zaś q , działającej na jednostkę powierzchni bocznej graniastosłupa, równania równowagi dadzą:

$$\cos(q, x) = \cos(q, y) = 0, \quad \cos(q, z) = 1 \quad \text{i} \quad q = p_{zx} \cos(n, x) = p \cos(n, x).$$

A więc na powierzchnię boczną powinny działać siły zewnętrzne, równoległe do osi z , ale rozłożone nie jednostajnie, lecz proporcjonalnie do dostawy kąta, jaki tworzy normalna n do powierzchni z osią x . Te siły zewnętrzne, styczne do powierzchni bocznej, mogą być dla części graniastosłupa, leżącej pomiędzy podstawą (na którą działa siła $p F = P$) a jakimkolwiek przekrojem, sprowadzone do jednej pary, znoszącej działanie pary, powstałej wskutek przeniesienia siły P z podstawy do środka ciężkości rozważanego przekroju. W ten sposób znosimy działanie wyginające siły P i pozostaje się tylko przesuwanie (ścinięcie), wywołane tą siłą. Jeżeliby na powierzchnię boczną nie działały wspomniane powyżej siły styczne, to przesuwaniu będzie towarzyszyło wyginanie, wskutek którego zmieni się prawo układu przesunięć w punktach przekroju. Przesunięcia te wtedy będą się zmniejszały w miarę zbliżania się do obwodu przekroju, a na samym obwodzie staną się równe zeru. Istotnie, gdy na powierzchnię boczną nie działają żadne siły zewnętrzne styczne, to w punktach obwodu nie mogą zjawić się siły sprężystości p_{zx} , wskutek czego nie może w tych punktach być przesunięcia g_{zx} . Przy takim układzie przesunięć przekroje graniastosłupa, po odkształceniu, powinny być powierzchniami krzywymi, z powodu, że przekroje te zachowują położenie prostopadłe względem wszystkich włókien podłużnych, leżących na powierzchni bocznej, ale zbaczają od takiego położenia względem wszystkich innych włókien podłużnych graniastosłupa.

Przechodzimy teraz do wyznaczenia warunku wytrzymałości graniastosłupa, poddanego jednocześnie rozciąganiu lub ściskaniu i przesuwaniu (ścinianiu) w pewnym przekroju.

Niech P będzie siłą, rozciągającą graniastosłup w kierunku jego osi, a Q — siłą, wywołującą przesuwanie przekroju. Zakładając, że oś x jest równoległa do siły Q i że niema przeszkód, tamujących kurczenie

przecięcia poprzecznego, otrzymamy dla odkształceń składowych wartości następujące:

$$\Delta_x = \Delta_y = -\mu i, \quad \Delta_z = i, \quad g_{zx} = g, \quad g_{yz} = g_{xy} = 0,$$

gdzie $i = \frac{P}{FE}$ i $g = \frac{2(1+\mu)Q}{FE}$.

Największe wydłużenie, wywołane temi zmianami, jest (wzór 44):

$$(\Delta_r)_{\max} = \frac{(1-\mu)i}{2} + \sqrt{\left(\frac{1+\mu}{2}i\right)^2 + \left(\frac{1}{2}g\right)^2}.$$

Warunek więc wytrzymałości, po wstawieniu za i i g ich wartości, będzie:

$$\frac{1-\mu}{2} \frac{P}{FE} + \sqrt{\left(\frac{1+\mu}{2} \frac{P}{FE}\right)^2 + \left(\frac{(1+\mu)Q}{FE}\right)^2} = \frac{T}{kE}.$$

Z równania tego otrzymujemy:

$$F = \frac{1-\mu}{2} \frac{kP}{T} + \sqrt{\left(\frac{1+\mu}{2} \frac{kP}{T}\right)^2 + \left(\frac{(1+\mu)kQ}{T}\right)^2}. \quad (190).$$

Wzorowi temu możemy jednak nadać inną postać. Niech F_1 będzie powierzchnią przekroju, oznaczoną tylko dla siły rozciągającej P (t. j. w przypuszczeniu, że $Q = 0$), a F_0 — powierzchnią przekroju, oznaczoną tylko dla siły przesuwającej Q . Wtedy otrzymamy:

$$F_1 = \frac{kP}{T} \quad \text{i} \quad F_0 = \frac{(1+\mu)kQ}{T},$$

przyczem z wzoru (190) wyniknie:

$$F = \frac{1-\mu}{2} F_1 + \sqrt{\left(\frac{1+\mu}{2} F_1\right)^2 + F_0^2}. \quad (191).$$

czyli przyjmując $\mu = \frac{1}{4}$:

$$F = \frac{3}{8} F_1 + \sqrt{\left(\frac{5}{8} F_1\right)^2 + F_0^2}. \quad (192).$$

Gdyby siła P wywoływała ściskanie, nie zaś rozciąganie, musielibyśmy we wzorze (190) zmienić znak przy tej sile i wtedy otrzymalibyśmy:

$$F = -\frac{1-\mu}{2} \frac{kP}{T} + \sqrt{\left(\frac{1+\mu}{2} \frac{kP}{T}\right)^2 + \left(\frac{(1+\mu)kQ}{T}\right)^2}.$$

Oznaczając zaś powierzchnię przekroju, wyznaczoną tylko dla ściskania, przez F_2 , otrzymamy:

$$F_2 = \frac{\mu kP}{T}, \quad \text{czyli} \quad \frac{kP}{T} = \frac{F_2}{\mu}$$

i

$$F = -\frac{1-\mu}{2} F_2 + \sqrt{\left(\frac{1+\mu}{2\mu} F_2\right)^2 + F_0^2}.$$

Przyjmując $\mu = \frac{1}{4}$, znajdziemy:

$$F = -\frac{3}{8} F_2 + \sqrt{\left(\frac{5}{2} F_2\right)^2 + F_0^2} \quad \dots \quad (193).$$

Wartość najmniejszą dla powierzchni F otrzymujemy, gdy $F_2 = 0,3 F_0$; wtedy:

$$F = 0,8 F_0,$$

czyli ściskanie, towarzyszące przesuwaniu, może zwiększyć wytrzymałość graniastosłupa na przesuwanie (ścinięcie).

Z wzoru (193) wynika, że F może być równe F_0 w dwóch wypadkach, a mianowicie: gdy $F_2 = 0$ i gdy $F_2 = 0,75 F_0$; czyli $F < F_0$ dla wszystkich wartości F_2 , leżących w granicach

$$0 < F_2 < 0,75 F_0.$$

Zauważmy jeszcze, że jeżeli:

$$F_2 = 0,3 F_0, \quad \text{to} \quad \frac{\mu k P}{T} = 0,3 \frac{(1 + \mu) k Q}{T},$$

czyli $\mu P = 0,3 (1 + \mu) Q$, i przy $\mu = \frac{1}{4}$:

$$P = 0,3 \cdot 5 Q = 1,5 Q.$$

Wogóle ściskanie zwiększa wytrzymałość na przesuwanie (ścinięcie), gdy siła ścisakąjąca P jest mniejsza od $3,75 Q$.

45. Tablica I. Tablica ta zawiera dane, niezbędne przy rozwiązywaniu zagadnień praktycznych z zakresu rozciągania, ściskania i przesuwania (ścinięcia).

NAZWA MATERIAŁU	E	T	T'	T''	R	R'	
Żelazo kute dużych wymiarów	2 10^6	1500	1500	1200	4000	2200	7,78
Żelazo kute małych wymiarów	2 10^6	2000	2000	1200	5000	3000	7,78
Żelazo kotłowe	18 10^5	1500	1500	1200	3400	2100	7,78
Druć żelazny	2 10^6	2000	—	—	7000	—	7,75
Żelazo łane	9 10^5	750	1500	650	1100	7500	7,25
Stal łana	3 10^6	6500	—	4800	10000	—	7,85
Stal utwardniona (hartowana)	22 10^5	2600	—	4800	7500	—	7,85
Miedź	11 10^5	360	—	—	2700	6500	8,88
Druć miedziany	13 10^5	1200	—	—	3000	—	8,89
Mosiądz	10 ⁶	480	—	—	1200	11000	8,55
Spisz (bronz)	6 10^5	800	—	—	2500	—	8,40
Drzewo	11 10^4	200	160	150	800	500	od 0,50 do 0,75
ina konopna nowa	25 10^3	300	—	—	600	—	—
Lina konopna stara	5 10^3	200	—	—	400	—	—
Rzemień	10 ³	120	—	—	250	—	—
Cegła	—	—	—	—	—	60	2
Mur z piaskowca	—	—	—	—	—	150	2
Mur z wapienia	—	—	—	—	—	530	2,12

Uwaga. Gdy drzewo jest rozrywane w kierunku prostopadłym do włókien podłużnych, $R = 50$, nie zaś 800.

Liczby, wchodzące w skład tej tablicy, są: E współczynnik sprężystości podłużnej, T — naprężenie największe przy rozciąganiu, T' — przy ściskaniu, T'' — przy przesuwaniu; R — naprężenie przy rozerwaniu wskutek rozciągania, R' — naprężenie przy zgnieceniu wskutek ściskania. Wszystkie te ilości są podane w kg/cm^2 . Wreszcie δ jest ciężarem w kg/dm^3 materiału.

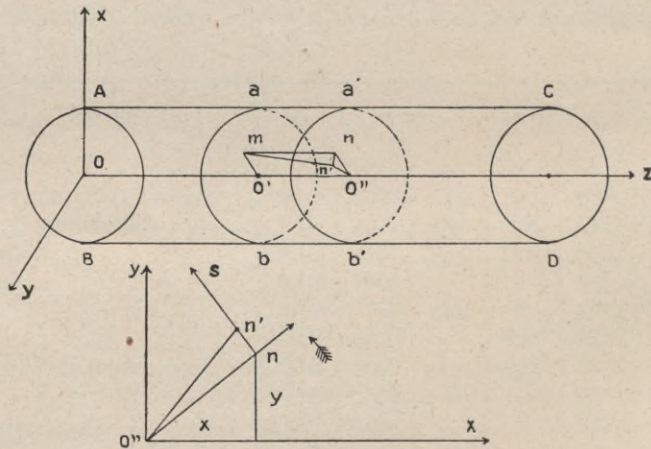
Uwaga. Chcąc wyrazić naprężenia w pudach na cal kwadratowy, należy pomnożyć liczby odpowiednie tej tablicy przez 0,39385 (t. j. w przybliżeniu przez 0,4).

ROZDZIAŁ V.

Skręcanie.

46. Skręcanie walca o podstawie kołowej. W walcu kołowym sam kształt obwodu przekroju, symetrycznego we wszystkich kierunkach względem osi, wskazuje, że przy pewnej symetrii w układzie sił zewnętrznych względem tej osi, przekroje walca mogą i po skręceniu pozostać płaskimi i prostopadłymi do osi, nie przekształcając się w powierzchni krzywe.

Niech $ABCD$ (rys. 5) przedstawia walec kołowy, którego przekroje



Rys. 5.

po skręceniu pozostały płaskimi i prostopadłymi do osi. Przypuśćmy, że na podstawy AB i CD (rys. 5) działają pewne siły zewnętrzne, skręcające walec tak, że podstawa CD obróciła się względem podstawy AB , uważanej za nieruchomą, o kąt φ_0 , który nazywać będziemy *kątem skręcenia*. Wtedy dwa sąsiednie przekroje ab i $a'b'$ w odległości z i $z+dz$ od podstawy AB obróca się względem podstawy AB : pierwszy o kąt φ ,

drugi o kąt $\varphi + \partial\varphi$. Przy takim oznaczeniu $\partial\varphi$ przedstawia kąt, o który obrócił się przekrój $a'b'$ względem przekroju ab . Włókno podłużne mn , leżące pomiędzy przekrojami ab i $a'b'$ i mające więc długość ∂z , przechodzi po odkształceniu w położenie mn' i wtedy nieskończenie mała płaszczyzna ∂F , będąca podstawą włókna mn , przesuwa się w kierunku s , prostopadłym do prostej $O''n$, i przebywa drogę nn' równą $\rho d\varphi$, gdzie ρ jest odległością środka n płaszczyzny ∂F od osi z . A więc przesunięcie g_{zs} w punkcie n walca wyraża się wzorem:

$$g_{zs} = \rho \frac{\partial\varphi}{\partial z} \dots \dots \dots (193).$$

To przesunięcie, jako posunięcie względne w płaszczyźnie (xy) punktu n , możemy rozłożyć na dwa posunięcia względne: g_{zx} i g_{zy} , dla których otrzymujemy wzory następujące, gdy współrzędne punktu n oznaczymy przez x i y :

$$g_{zx} = g_{zs} \cos(s, x) = -g_{zs} \frac{y}{\rho} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot y$$

$$g_{zy} = g_{zs} \cos(s, y) = g_{zs} \frac{x}{\rho} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot x.$$

Naprężenia więc styczne w punkcie danym będą:

$$p_{zx} = -G \frac{\partial\varphi}{\partial z} y \quad \text{i} \quad p_{zy} = G \frac{\partial\varphi}{\partial z} x \dots \dots \dots (194).$$

Rzuty R_x i R_y na osie x i y wypadkowej wszystkich takich naprężeń przekroju walca są:

$$R_x = \int p_{zx} \partial F = -G \frac{\partial\varphi}{\partial z} \int y \partial F$$

$$R_y = \int p_{zy} \partial F = G \frac{\partial\varphi}{\partial z} \int x \partial F.$$

Ponieważ zaś środek ciężkości przekroju leży w osi z , przeto całki $\int y \partial F$ i $\int x \partial F$ są równe zeru, a więc $R_x = R_y = 0$, czyli wypadkowa naprężeń stycznych dowolnego przekroju walca równa jest zeru. To też te naprężenia sprowadzają się do pary sił, leżącej w płaszczyźnie przekroju. Moment tej pary jest:

$$M_z = \int (p_{zy} x - p_{zx} y) \partial F = F \frac{\partial\varphi}{\partial z} \int (x^2 + y^2) \partial F, \text{ czyli}$$

$$M_z = G \frac{\partial\varphi}{\partial z} \int \rho^2 \partial F = G \frac{\partial\varphi}{\partial z} I_0 \dots \dots \dots (195),$$

gdzie $I_0 = \int \rho^2 \partial F$ jest to moment biegunowy bezwładności przekroju.

Oczywiście, rzeczony odkształcenie walca nastąpi w rzeczywistości, gdy siły zewnętrzne, działające na podstawy, będą rozmieszczone w punktach każdej z podstaw tak, jak są rozmieszczone naprężenia styczne p_{zs} w punktach każdego z przekrojów. Przy zachowaniu tego warunku siły zewnętrzne, działające na jedną z podstaw walca, mogą być sprowadzone do pary sił, której moment równy jest wyżej oznaczonemu momentowi M_z . Dlatego możemy uważać wzór (195) za równanie równowagi walca. W równaniu tem część pierwsza, t. j. M_z , jest momentem sił zewnętrznych, skręcających walec, część zaś druga jest momentem naprężeń, powstałych w punktach przekroju i przeciwdziałających dalszemu skręcaniu.

Co się tyczy rozmieszczenia sił zewnętrznych, działających na powierzchnie, ograniczające ciało, to należy zauważyć, że nie możemy sprawdzić w każdym poszczególnym przypadku, czy siły te są tak rozłożone, czy inaczej. Istotnie, możemy wywierać ciśnienie na powierzchnię ciała tylko w ten sposób, że dane ciało stykamy z innymi ciałami, lecz przytem pytanie, jakie jest rozmieszczenie ciśnień w punktach powierzchni się stykających, prawdopodobnie nigdy wyjaśnione nie będzie. Spostrzeżenia dowodzą, że sposób rozmieszczenia sił zewnętrznych na powierzchni ciała ma wpływ nieznaczny na przejawy wytrzymałości ciał. Pomimo bardzo rozmaitego rozmieszczenia tych sił, zjawiska, ujawniające się w ciałach, są prawie identyczne, o ile tylko wypadkowa i moment liniowy sił zewnętrznych są jednakowe w rozmaitych przypadkach.

Należy zatem przypuścić, że sposób rozmieszczenia sił zewnętrznych w punktach powierzchni, ograniczającej ciało, wywiera wpływ jawny tylko na układ cząsteczek w pobliżu tej powierzchni; w głębi zaś ciała, w miarę oddalania się od powierzchni, na którą działają siły zewnętrzne, wpływ ich rozmieszczenia coraz bardziej maleje i staje się coraz mniej jawnym, a wszelkie zjawiska stają się zależnymi tylko od wypadkowej i od momentu liniowego sił zewnętrznych. Skoro więc przekonamy się, że np. siły zewnętrzne, działające na podstawę walca, sprowadzają się do pary sił, leżącej w płaszczyźnie tej podstawy, to możemy, bez popełnienia choćby nieznacznego błędu, zastosować do danego przypadku wzory wyprowadzone powyżej na skręcanie, bez względu na rozmieszczenie sił składowych.

Całkując równanie (195) i mając na względzie, że przy $z = 0$ także $\varphi = 0$, otrzymujemy:

$$\varphi = \frac{M_z \cdot z}{G \cdot I_0} \dots \dots \dots (196).$$

Oznaczając zaś przez L długość walca i wyrażając kąt skręcenia w stopniach, otrzymamy dla tego kąta:

$$\varphi_0 = \frac{360}{2\pi} \frac{M_z \cdot L}{G \cdot I_0} \dots \dots \dots (197).$$

47. Warunek wytrzymałości. Wyprowadzenie warunku wytrzymałości w rozważanym przypadku nie przedstawia trudności.

Z wzoru (193) wynika, że przesunięcie g_{zs} osiąga swoje maximum w punktach najbardziej oddalonych od osi walca, t. j. w punktach, leżących na powierzchni bocznej. Oznaczając przeto przez r promień obwodu przekroju kołowego, otrzymamy:

$$(g_{zs})_{\max} = r \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{M_z r}{G I_0} = 2 (1 + \mu) \frac{M_z r}{E I_0}.$$

A ponieważ największe rozciągnięcie, wywołane przesunięciem, równe jest połowie tego przesunięcia, przeto warunek wytrzymałości będzie:

$$(\Delta_r)_{\max} = (1 + \mu) \frac{M_z r}{E I_0} = \frac{T}{k E},$$

skąd otrzymujemy:

$$\frac{I_0}{r} = (1 + \mu) \frac{k M_z}{T} = \frac{k M_z}{T''} \dots \dots \dots (198),$$

gdzie $T'' = \frac{T}{1 + \mu}$.

Wreszcie, jak wiemy, dla koła $I_0 = \frac{\pi}{2} r^4$. Ostatnie więc równanie da nam:

$$r = \sqrt[3]{\frac{2k M_z}{\pi T''}} \dots \dots \dots (199).$$

Zapomocą tego wzoru można oznaczyć promień walca, gdy dane są: M_z i T'' .

Jakkolwiek wzór (198) jest ważny tylko dla walca kołowego, to jednak stosują go, jako przybliżony, do oznaczania wymiarów przekroju wszelkich graniastosłupów skręcanych, bez względu na kształt obwodu przekroju. Przy takim zastosowaniu wzoru, należy wielkość I_0 uważać za moment biegunowy bezwładności przekroju graniastosłupa, a r — za odległość środka ciężkości przekroju od punktu obwodu, najbardziej oddalonego od tego środka ciężkości.

48. Skręcanie pretów o obwodzie niekołowym. Gdy kształt obwodu przekroju nie jest kołem, badanie skręcania widać skutkiem tego, że przekroje podczas odkształcania się paczą.

Rozpatrując uważnie warunki, dla których otrzymaliśmy wzory na skręcanie walca kołowego, możemy znaleźć w nich klucz do wyjaśnienia skręcania przy wielu innych kształtach obwodu.

Przy skręcaniu walca kołowego przypuszczaliśmy: 1) że niema sił działających na masę (t. j. działających na wszystkie punkty danego ciała jednocześnie), 2) że na powierzchnię boczną walca nie działają ci-

śnienia zewnętrzne i 3) że dla wszystkich jego punktów są urzeczywistnione warunki następujące:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (200),$$

tak, że z sześciu odkształceń składowych, występują w każdym punkcie tylko dwa g_{xx} i g_{yy} . Ten ostatni warunek napisaliśmy w przypuszczeniu, że oś współrzędnych z albo leży w osi geometrycznej walca, albo jest do niej równoległa. W celu uogólnienia wyników będziemy przyjmowali, że oś z jest równoległa do osi walca.

Przekonamy się niebawem, że warunki powyżej przytoczone mogą być urzeczywistnione nie tylko gdy obwód przekroju jest okręgiem koła, ale i przy nieskończeniu wielu innych kształtach obwodu.

Wprowadzając warunki (200) w równania (135), otrzymujemy:

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p_{xy} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (201).$$

Równania zaś ogólne równowagi (47), gdy przyjmiemy w nich $X = Y = Z = 0$, dadzą:

$$\frac{\partial p_{zx}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} = 0,$$

czyli, co jest to samo:

$$\frac{\partial g_{zx}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial g_{zy}}{\partial z} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial g_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial g_{zy}}{\partial y} = 0. \quad . \quad . \quad (202).$$

Te trzy równania muszą istnieć dla wszystkich punktów ciała. Dla punktów zaś powierzchni bocznej, oprócz tych równań, otrzymujemy nadto z równań (49), przyjmując w nich $P = 0$:

$$p_{zx} \cos(n, x) + p_{zy} \cos(n, y) = 0, \quad \text{czyli}$$

$$g_{zx} \cos(n, x) + g_{zy} \cos(n, y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (203),$$

gdzie n jest normalną zewnętrzną do powierzchni bocznej, a zatem i do obwodu przekroju.

Równania powyżej wyprowadzone dają możliwość oznaczenia postaci funkcji u , v i w . Trzy pierwsze z równań (200) wskazują, że u nie jest zależne od x , v od y i w od z ; a zatem czwarte z tych równań, przez różniczkowanie tegoż względem y i x , daje:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (a).$$

Dwa pierwsze równania grupy (202) możemy napisać tak:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0,$$

a zatem gdy $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, to:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (b).$$

Wreszcie z czwartego równania grupy (200) wynika, że:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = 0,$$

możemy więc przyjąć:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -\beta \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = \beta \quad \dots \dots \dots \quad (c).$$

Ponieważ u nie jest zależne od x , ani v od y , przeto ilość β nie może zawierać zmiennych x i y , a ponieważ $-\frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0$, przeto β nie zawiera zmiennej z , czyli β jest ilością stałą.

Do oznaczenia więc postaci funkcji u i v otrzymaliśmy równania następujące:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -\beta \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = \beta, \end{aligned}$$

z których wynika:

$$\begin{aligned} u &= -\beta yz + ay + bz + c \\ v &= \beta zx + a'x + b'z + c'. \end{aligned}$$

Że jednak $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a + a' = 0$, czyli $a' = -a$,

przeto:

$$\begin{aligned} u &= -\beta yz + ay + bz + c \\ v &= \beta zx - ax + b'z + c'. \end{aligned}$$

W celu unicestwienia posunięć postępowych i ruchów obrotowych, wspólnych wszystkim punktom ciała, wprowadzamy warunki, że punkt, znajdujący się w początku współrzędnych, jest nieruchomy, że cząstka liniowa, przechodząca przez ten punkt i leżąca na osi z , nie zmienia swego kierunku i że cząstka powierzchni, przechodząca przez tę cząstkę liniową i leżąca w płaszczyźnie (zx) , pozostała w tejże płaszczyźnie.

Warunki te wymagają (p. wzór 143 bis), ażeby przy $x=y=z=0$,

$$u = v = w = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

a więc, w celu zadośćuczynienia tym warunkom, należy przyjąć $c = c' = a = b = b' = 0$, a wtedy:

$$u = -\beta yz \quad \text{i} \quad v = \beta xz \quad (d).$$

Do oznaczenia posunięcia w , otrzymujemy z trzeciego z równań (202) następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (e).$$

Przypuśćmy, że $w = \beta B(x, y)$, gdzie funkcję B musimy oznaczyć z równania:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = 0,$$

przy warunku, że $B(0, 0) = 0$, albowiem w musi być równe zeru, gdy $x = y = 0$.

Mamy więc równania:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\beta yz, \quad v = \beta xz, \quad w = \beta B(x, y) \\ \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} &= 0 \\ \text{i} \quad B(0, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} . . . (204).$$

Posiłkując się temi równaniami, otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} p_{zx} &= \beta G \left(\frac{\partial B}{\partial x} - y \right) \\ p_{zy} &= \beta G \left(\frac{\partial B}{\partial y} + x \right) \\ R_x &= \iint p_{zx} \partial F = \beta G \iint \left(\frac{\partial B}{\partial x} - y \right) \partial F \\ R_y &= \iint p_{zy} \partial F = \beta G \iint \left(\frac{\partial B}{\partial y} + x \right) \partial F \\ M_z &= \iint (p_{zy} x - p_{zx} y) \partial F = \\ &= \beta G \left[\iint \left(\frac{\partial B}{\partial y} x - \frac{\partial B}{\partial x} y \right) \partial F + I_x + I_y \right] \end{aligned} \right\} . . . (205).$$

Równanie (203), ważne dla punktów na powierzchni bocznej, przyjmuje postać:

$$\left(\frac{\partial B}{\partial x} - y \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial B}{\partial y} + x \right) \sin(n, x) = 0, \quad \text{czyli}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial B}{\partial y} \sin(n, x) = y \cos(n, x) - x \sin(n, x) . . (206).$$

Ponieważ $\cos(n, y) = \sin(n, x)$, $\frac{\cos(n, y)}{\cos(n, x)} = \operatorname{tg}(n, x) = -\frac{\partial x}{\partial y}$,

przeto:

$$\left(\frac{\partial B}{\partial x} - y\right) - \left(\frac{\partial B}{\partial y} + x\right) \frac{\partial x}{\partial y} = 0, \quad \text{czyli}$$

$$\left(\frac{\partial B}{\partial y} + x\right) \partial x - \left(\frac{\partial B}{\partial x} - y\right) \partial y = 0 \dots (207).$$

To równanie ostatnie, lub równanie identyczne (206), należy uważać jako równanie różniczkowe obwodu przekroju danego ciała.

Ponieważ istnieje nieskończona liczba funkcji, czyniących zadość równaniu $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = 0$ i każda z tych funkcji, przy uwzględnieniu równania (207), da inne równanie obwodu, przeto istnieje nieskończenie wiele obwodów, przy których odkształcenie ciała graniastosłupowego czyni zadość podanym powyżej warunkom. W każdym przypadku poszczególnym możemy całkować równanie (207) bez trudności, ponieważ część pierwsza tego równania jest różniczką zupełną. Istotnie warunek całkowalności wymaga ażeby istniała tożsamość:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - y\right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial B}{\partial y} + x\right), \quad \text{czyli} \quad \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}, \quad \text{czyli}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = 0, \quad \text{a to równanie jest równaniem czwartem grupy (204).}$$

Teraz udowodnimy, że $R_x = R_y = 0$, czyli że *naprężenia, wywołane w punktach przekroju, sprowadzają się do jednej pary sił*, jak i w walcu kołowym.

Dzięki równaniu $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = 0$, mamy:

$$\iint \frac{\partial B}{\partial x} \partial F = \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial B}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial B}{\partial y} \right) \right] \partial F$$

$$\iint \frac{\partial B}{\partial y} \partial F = \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial B}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial B}{\partial y} \right) \right] \partial F.$$

Posiłkując się zaś wzorem (159), otrzymamy:

$$\iint \frac{\partial B}{\partial x} \partial F = \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial B}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial B}{\partial y} \right) \right] \partial F =$$

$$= \int x \left[\frac{\partial B}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial B}{\partial y} \cos(n, y) \right] \partial s.$$

Całkę w drugiej części tego wzoru należy rozpostrzeć na obwód, a że dla punktów tego obwodu mamy równanie (206), przeto:

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial B}{\partial x} \partial F &= \iint [xy \cos(n, x) - x^2 \cos(n, y)] \partial s = \\ &= \iint \left(\frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial(-x^2)}{\partial y} \right) \partial F = \iint y \partial F, \end{aligned}$$

a zatem
$$\iint \left(\frac{\partial B}{\partial x} - y \right) \partial F = 0 \quad \text{i} \quad R_x = 0.$$

W takiż sposób otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial B}{\partial y} \partial F &= \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial B}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial B}{\partial y} \right) \right] \partial F = \\ &= \iint y \left(\frac{\partial B}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial B}{\partial y} \cos(n, y) \right) \partial s = \\ &= \iint [y^2 \cos(n, x) - xy \cos(n, y)] \partial s = \\ &= \iint \left(\frac{\partial(y^2)}{\partial x} + \frac{\partial(-xy)}{\partial y} \right) \partial F = - \iint x \partial F, \end{aligned}$$

a zatem
$$\iint \left(\frac{\partial B}{\partial y} + x \right) \partial F = 0 \quad \text{i} \quad R_y = 0,$$

Dwa pierwsze z równań (204) wskazują, że gdy $x=0$ i $y=0$, posunięcia u i v stają się równe zeru, bez względu na wartość z , czyli włókno podłużne, leżące w osi z , nie zmienia swego położenia, t. j. *oś z jest osią skręcania ciała.*

Ponieważ $V\sqrt{u^2 + v^2} = \beta z \sqrt{x^2 + y^2} = \beta z \rho$, gdzie ρ jest odległością punktu od osi skręcania, a $\sqrt{u^2 + v^2}$, jest rzutem na płaszczyznę (xy) łuku, opisanego przez ten punkt podczas skręcania, przeto kąt skręcania φ będzie:

$$\varphi = \frac{V\sqrt{u^2 + v^2}}{\rho} = \beta z \dots \dots \dots (208),$$

a całkowity kąt skręcania, wyrażony w stopniach, będzie:

$$\varphi_0 = \frac{360}{2\pi} \beta L \dots \dots \dots (209).$$

Oczywiście, β jest *miarą kąta skręcania każdej jednostki długości ciała.*

Ilość β należy uważać za bardzo małą, ponieważ wszystkie nasze rozumowania przeprowadziliśmy tylko dla odkształceń nieznacznych.

Równanie powierzchni krzywej, w którą przekształcają się przekroje płaskie, jest (p. równ. 146):

$$z' = z + \beta B(x', y') \dots \dots \dots (210),$$

Kształt tej powierzchni zależy od postaci funkcji B , czyli od kształtu obwodu przekroju. Równania zaś włókien podłużnych, po odkształceniu, są (p. rów. 151):

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - \beta y z' \\ y' &= y + \beta x z' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (211).$$

Włókna więc podłużne pozostają prostymi, ale przestają być równoległymi do osi z .

Wreszcie, do oznaczenia przesunięcia g_{zs} mamy równanie:

$$g_{zs}^2 = \beta^2 \left[\left(\frac{\partial B}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial y} + x \right)^2 \right] \dots \dots (212).$$

Zapomocą tego równania możemy udowodnić, że g_{zs}^2 jest taką funkcją zmiennych x i y , która nie posiada maximum. Istotnie, dla tych wartości x i y , przy których g_{zs}^2 osiąga maximum, pochodne drugie, wzięte oba razy względem x i oba razy względem y , muszą być ilościami ujemnymi, a zatem i ich suma musi być ujemną, gdy tymczasem z wzoru (212) otrzymuje się dla tej sumy ilość dodatnią, albowiem

$$\frac{\partial^2 (g_{zs}^2)}{\partial x^2} = 2\beta^2 \left[\left(\frac{\partial B}{\partial x} - y \right) \frac{\partial^3 B}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial B}{\partial y} + x \right) \frac{\partial^3 B}{\partial x^2 \partial y} + \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} + 1 \right)^2 \right]$$

$$\frac{\partial^2 (g_{zs}^2)}{\partial y^2} = 2\beta^2 \left[\left(\frac{\partial B}{\partial x} - y \right) \frac{\partial^3 B}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial B}{\partial y} + x \right) \frac{\partial^3 B}{\partial y^3} + \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} - 1 \right)^2 \right].$$

Suma tych pochodnych cząstkowych jest:

$$2\beta^2 \left[\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} + 1 \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - y \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial B}{\partial y} + x \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \right) \right].$$

A że $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = 0$, przeto suma ta zawsze musi być dodatnia.

Przesunięcie g_{zs} , nie posiadając maximum bezwzględnego, posiada jednak oczywiście maximum względne w pewnym punkcie obwodu przekroju, a więc i $(\Delta_r)_{\max}$ musi być na obwodzie.

Wzory powyżej wyprowadzone ustalają zarówno wszystkie okoliczności skręcania, jak i kształt obwodu przekroju, w zależności od postaci funkcji B . Jednakże w zastosowaniach dogodniejszymi są wzory, wyrażone bezpośrednio w zależności od kształtu obwodu. Niech $f(x, y) = 0$ będzie równaniem tego obwodu. Równanie jego różniczkowe będzie:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \partial x + \frac{\partial f}{\partial y} \partial y = 0.$$

Równanie (207) może się różnić od tego równania tylko czynnikiem stałym, ponieważ pierwsze części obu tych równań są różniczkami zupełnymi. Możemy więc przyjąć:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= D \left(x + \frac{\partial B}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= D \left(y - \frac{\partial B}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (213),$$

gdzie D jest ilością stałą, nie równą zeru.

Z tych ostatnich równań otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2D \dots \dots \dots (214).$$

Za przykładem Lamé'go nazywamy wyrażenie w pierwszej części tego równania parametrem różniczkowym drugiego stopnia funkcji f ; mamy więc prawo powiedzieć, że wyprowadzone przez nas wzory na skręcanie mogą być stosowane do ciał graniastosiłupowatych tylko wtedy, gdy obwód przekroju oznaczony jest równaniem $f(x, y) = 0$, zawierającym funkcję $f(x, y)$, której parametr różniczkowy drugiego stopnia jest ilością stałą nie równą zeru.

Z równań (213) mamy:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = y - \frac{1}{D} \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{1}{D} \frac{\partial f}{\partial x} - x \dots \dots (215),$$

czyli
$$\partial B = \left(y - \frac{1}{D} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \partial x + \left(\frac{1}{D} \frac{\partial f}{\partial x} - x \right) \partial y \quad \text{i}$$

$$B = \int \left[\left(y - \frac{1}{D} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \partial x + \left(\frac{1}{D} \frac{\partial f}{\partial x} - x \right) \partial y \right] \dots \dots (216).$$

Przytem równania, wyrażające warunki skręcania, przyjmują postać:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\beta yz \\ v &= \beta xz \\ w &= \beta \int \left[\left(y - \frac{1}{D} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \partial x + \left(\frac{1}{D} \frac{\partial f}{\partial x} - x \right) \partial y \right] \\ p_{xz} &= -\beta \frac{G}{D} \frac{\partial f}{\partial y} \\ p_{zy} &= \beta \frac{G}{D} \frac{\partial f}{\partial x} \\ M_z &= \beta \frac{G}{D} \iint \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) \partial F \\ g_{ss} &= \frac{\beta}{D} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (217).$$

Wzór na moment M_z możemy przedstawić inaczej. Mamy:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (x, f) + \frac{\partial}{\partial y} (y, f) - 2f,$$

$$\iint \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) \partial F = \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} (x, f) + \frac{\partial}{\partial y} (y, f) \right] \partial F - 2 \iint f \partial F.$$

Jednakże zgodnie z wzorem (159):

$$\iint \left[\frac{\partial}{\partial x} (x \cdot f) + \frac{\partial}{\partial y} (y \cdot f) \right] \partial F = \int f [x \cos (n, x) + y \cos (n, y)] \partial s .$$

Ponieważ zaś na obwodzie $f=0$, przeto całka w drugiej części ostatniego równania równa jest zeru i na moment M_z otrzymamy:

$$M_z = -2\beta \frac{G}{D} \iint f(x, y) \partial F \dots \dots (218).$$

49. Skręcanie walca kołowego około osi pozaśrodkowej (mimośrodkowej). Niech a i b będą współrzędnymi środka okręgu, o promieniu r . Przyjmując, że ten okrąg jest obwodem przekroju walca danego, będziemy mieli:

$$f(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0 .$$

Stąd: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-a)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y-b)$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2D = 4$,

czyli $D = 2$.

Ponieważ dla parametru różniczkowego drugiego stopnia funkcji $f(x, y)$ otrzymaliśmy ilość stałą, przeto skręcanie danego walca może być oznaczone z naszych wzorów.

Zauważymy najpierw, że:

$$\iint x \partial F = aF, \quad \iint y \partial F = bF \quad \text{i} \quad \iint (x^2 + y^2) \partial F = I_0 + (a^2 + b^2) F ,$$

gdzie $F = \pi r^2$ i $I_0 = \frac{\pi r^4}{2}$.

Równanie (216), służące do oznaczenia funkcji B , przyjmie postać:

$$B = \int [(y - y + b) \partial x + (x - x - a) \partial y] = bx - ay$$

i wtedy z wzorów (217) otrzymamy:

$$u = -\beta yz, \quad v = \beta xz, \quad w = \beta (bx - ay)$$

$$p_{zx} = -\beta G (y - b), \quad p_{zy} = \beta G (x - a)$$

$$g_{zs} = \beta \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

$$\begin{aligned} M_z &= \beta \frac{G}{D} \iint \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) \partial F = \beta G \iint [x(x-a) + y(y-b)] \partial F = \\ &= \beta G \left[\iint (x^2 + y^2) \partial F - a \iint x \partial F - b \iint y \partial F \right] = \\ &= \beta G [I - (a^2 + b^2) F] = \beta G I_0 . \end{aligned}$$

Z wzoru (218) otrzymalibyśmy:

$$\begin{aligned} M_z &= -\beta G \iint [(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2] \partial F = \\ &= -\beta G \iint (x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2) \partial F = \\ &= -\beta G [I - 2(a^2 + b^2) F + (a^2 + b^2) F - r^2 F] = -\beta G (I_0 - r^2 F) . \end{aligned}$$

Z porównania tych dwóch wzorów na M_z , otrzymujemy:

$$I_0 = -I_0 + r^2 F, \text{ czyli } 2I_0 = r^2 F \text{ i } I_0 = \frac{1}{2} r^2 F = \frac{\pi r^4}{2}.$$

Największe przesunięcie występuje na obwodzie, zatem $(g_{zs})_{\max} = \beta r$. Stąd wyprowadzamy wniosek, że zarówno $(g_{zs})_{\max}$, jak i M_z mają te same wartości, jak przy skręcaniu około osi, przechodzącej przez środek przekroju.

Równania przekrojów po odkształceniu są:

$$z' = z + \beta (bx' - ay').$$

Przekroje te więc pozostają płaskimi, lecz nie są prostopadłymi do osi z .

Równania włókien podłużnych są:

$$x' = x - \beta yz' \text{ i } y' = y + \beta xz'.$$

Równanie włókna środkowego jest:

$$x' = a - \beta bz' \text{ i } y' = b + \beta az'.$$

Dostawy kątów, utworzonych przez to włókno środkowe z osiami współrzędnych, są:

$$-\frac{\beta b}{T}, \quad \frac{\beta a}{T} \text{ i } \frac{1}{T}, \text{ gdzie } T = \sqrt{1 + (\beta a)^2 + (\beta b)^2}.$$

Przekroje więc pozostają prostopadłymi do włókna środkowego.

49^a. Skręcanie walca eliptycznego. Niech osi x i y padają na półosie elipsy, których wielkości są a i b . Równanie takiej elipsy jest:

$$f(x, y) = b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Z równania tego otrzymujemy:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2b^2 x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2a^2 y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2b^2 \text{ i } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a^2, \text{ a więc}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2D = 2(a^2 + b^2), \text{ czyli } D = a^2 + b^2.$$

Ponieważ dla parametru różniczkowego funkcji f otrzymaliśmy ilość stałą, przeto walec eliptyczny może przy skręcaniu czynić zadość warunkom, dla których wyprowadzone były wzory na skręcanie.

Wzory te w danym przypadku przyjmują postać:

$$u = -\beta zy, \quad v = \beta zx, \quad w = -\beta \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy \quad \dots \quad (219).$$

$$\left. \begin{aligned} p_{zx} &= -\beta G \frac{2a^2}{a^2 + b^2} y \\ p_{zy} &= \beta G \frac{2b^2}{a^2 + b^2} x \\ M_z &= 2\beta G \frac{a^2 I_x + b^2 I_y}{a^2 + b^2} \\ g_{zs} &= 2\beta \frac{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}}{a^2 + b^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (220).$$

gdzie I_x i I_y są momentami głównymi bezwładności elipsy względem osi x i y , czyli:

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \iint y^2 \varrho F = \frac{\pi}{4} ab^3 \quad \text{i} \quad I_y = \iint x^2 \varrho F = \frac{\pi}{4} ba^3 \\ M_z &= \beta \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} G \end{aligned} \right\} \dots (221).$$

Największe przesunięcie pojawić się musi na obwodzie, dla którego punktów wyraz $\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}$ jest, jak wiemy, odwrotnie proporcjonalny do odległości stycznej do elipsy w punkcie (x, y) od środka elipsy. Największe więc przesunięcie występuje w tym punkcie obwodu, w którym przeprowadzona styczna najmniej jest oddalona od środka, t. j. *na końcach osi małej obwodu eliptycznego*. Skoro przyjmiemy $a > b$, to dla największego przesunięcia otrzymamy:

$$(g_{zs})_{\max} = 2\beta \frac{a^2 b}{a^2 + b^2},$$

czyli, podstawiając wartość β z równania (221):

$$(g_{zs})_{\max} = \frac{2 M_z}{\pi G a b^2}.$$

Z warunku więc wytrzymałości otrzymamy:

$$ab^2 = \frac{2k M_z}{\pi T''} \dots \dots \dots (222),$$

gdzie $T'' = \frac{T}{1 + \mu}$.

Równanie powierzchni przekrojów po odkształceniu jest:

$$z' = z - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \beta x' y' = z - \frac{a^2 - b^2}{\pi G a^3 b^3} M_z x' y'. \dots (223).$$

Powierzchnia ta jest *powierzchnią skośną* *). Przecięcia tej powierzchni z płaszczyznami prostopadłymi do osi z są hyperbolami, dla których osi x i y są asymptotami. Części powierzchni, leżące w ćwiartce pierwszej i trzeciej, w których obie współrzędne x' i y' mają znaki jednakowe, są zwrócone wklęsłościami w stronę dodatnich z -tów, w pozostałych zaś dwóch ćwiartkach części powierzchni są wypukłe.

Pożytecznym jest porównać wyniki, otrzymane z wzoru ścisłego (222), z wynikami, które otrzymalibyśmy gdyby wymiary elipsy były oznaczone z wzoru (198), którym, jak już zauważyliśmy w końcu ustępu 47, posilkują się zazwyczaj w zastosowaniach przy wszelkich obwodach.

*) Paraboloida hyperboliczna.

Ponieważ moment biegunowy bezwładności elipsy $I_0 = \frac{\pi}{4} ab(a^2 + b^2)$; odległość zaś punktu elipsy najbardziej oddalonego od osi skręcania równa się a , przeto z wzoru (198) otrzymujemy:

$$\frac{\pi}{4} b(a^2 + b^2) = \frac{k M_z}{T'''}.$$

Niech będzie $a = mb$, gdzie $m > 1$; to z wzoru ścisłego otrzymalibyśmy:

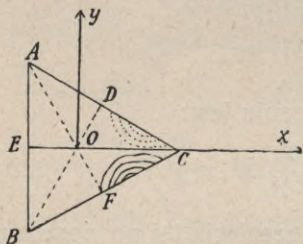
$$b^3 = \frac{2k M_z}{\pi T'''} \cdot \frac{1}{m},$$

z wzoru zaś przybliżonego:

$$b^3 = \frac{2k M_z}{\pi T'''} \cdot \frac{2}{1+m^2}.$$

Że jednak $(m-1)^2 = 1+m^2-2m > 0$, przeto $\frac{1}{m} > \frac{2}{1+m^2}$, wzór więc przybliżony daje wymiary mniejsze dla półosi elipsy. Jeżeli m jest znacznie większe od jedności, to błąd na niekorzyść wytrzymałości może być bardzo poważny. Tak np. przy $a = 5b$, czyli $m = 5$, z wzoru przybliżonego otrzymuje się dla półosi b wartość 0,72723 wielkości rzeczywistej.

50. Skręcanie graniastostupa, mającego za podstawę trójkąt równoboczny. Obwód, mający kształt trójkąta równobocznego, jest po eliptycznym najprostszym z obwodów algebraicznych, dla których są ważne wzory powyżej wyprowadzone.



Rys. 6.

Przyjmując układ osi współrzędnych x i y taki, jaki jest wskazany na rys. 6 i oznaczając wysokość trójkąta przez h , otrzymujemy dla boków AC , BC i AB trójkąta ABC równania:

$$y\sqrt{3} + x - \frac{2h}{3} = 0, \quad y\sqrt{3} - \left(x - \frac{2h}{3}\right) = 0 \quad \text{i} \quad x + \frac{h}{3} = 0.$$

Mnożąc przez się te równania, otrzymujemy równanie obwodu:

$$f(x, y) = h(x^2 + y^2) - (x^3 - 3xy^2) - \frac{4h^3}{27} = 0. \quad \dots \quad (224).$$

Z równania tego wynika:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2hx - 3(x^2 - y^2) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2hy + 6xy \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (225).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2h - 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2h + 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2D = 4h,$$

zatem $D = 2h \dots \dots \dots (226).$

Równania (217) przyjmą wtedy postać:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\beta zy, & v &= \beta zx, & w &= \frac{\beta}{2h} (y^3 - 3x^2y) \\ p_{zx} &= -\frac{\beta G}{2h} (2hy + 6xy) \\ p_{zy} &= \frac{\beta G}{2h} [2hx - 3(x^2 - y^2)] \\ g_{zs} &= \frac{\beta}{2h} \sqrt{\{9(x^2 + y^2)^2 + 4h^2(x^2 + y^2) - 12h(x^3 - 3xy^2)\}} \\ M_z &= \frac{\beta G}{2h} \iint [2h(x^2 + y^2) - 3(x^3 - 3xy^2)] \partial F \end{aligned} \right\} \dots (227).$$

Z wzoru (218) otrzymujemy na moment M_z :

$$M_z = -2 \frac{\beta G}{2h} \left[h \iint (x^2 + y^2) \partial F - \iint (x^3 - 3xy^2) \partial F - \frac{4h^3}{27} F \right] (228).$$

Dla danego trójkąta mamy wszakże:

$$F = \frac{h^2}{\sqrt{3}} \quad \text{i} \quad \iint (x^2 + y^2) \partial F = I_0 = \frac{h^4}{9\sqrt{3}}, \quad *)$$

na moment M_z mamy więc dwa wzory:

$$\begin{aligned} M_z &= \frac{\beta G}{2h} \left[\frac{2h^5}{9\sqrt{3}} - 3 \iint (x^3 - 3xy^2) \partial F \right] \quad \text{i} \\ M_z &= \frac{\beta G}{2h} \left[-\frac{2h^5}{9\sqrt{3}} + 2 \iint (x^3 - 3xy^2) \partial F + \frac{8h^5}{27\sqrt{3}} \right]. \end{aligned}$$

Z porównania ze sobą tych wzorów, wynika:

$$\iint (x^3 - 3xy^2) \partial F = \frac{4h^5}{135\sqrt{3}}.$$

Zatem na M_z otrzymujemy ostatecznie:

$$M_z = \frac{\beta G}{2h} \left[\frac{2h^5}{9\sqrt{3}} - \frac{12h^5}{135\sqrt{3}} \right] = \frac{\beta Gh^4}{15\sqrt{3}} \dots \dots (229).$$

Największe przesunięcie następuje w środkach boków trójkąta, t. j. w punktach D, E i F . Przesunięcie to jest:

*) Moment bezwładności powierzchni trójkąta dowolnego względem prostej, leżącej w jego płaszczyźnie, jest równy sumie momentów trzech mas, z których każda jest równa jednej trzeciej powierzchni trójkąta, umieszczonych w środkach boków trójkąta.

$$(g_{zs})_{\max} = \frac{1}{2} \beta h = \frac{15\sqrt{3}}{2} \frac{M_z}{Gh^3} \dots \dots \dots (230).$$

W wierzchołkach zaś A, B i C i w środku ciężkości O przesunięcie $g_{zs} = 0$.

Z warunku wytrzymałości otrzymujemy:

$$h^3 = \frac{15\sqrt{3}}{2} \frac{k M_z}{T''} = 7,5 \cdot \sqrt{3} \frac{k M_z}{T''} \dots \dots \dots (231).$$

Przy zastosowaniu natomiast wzoru (198) otrzymalibyśmy:

$$h^3 = \frac{6\sqrt{3}}{T''} k M_z.$$

Wysokość h , oznaczona z tego wzoru, stanowiłaby 0,92832 wysokości rzeczywistej.

Równanie powierzchni krzywej, w którą przechodzą przekroje po odkształceniu, jest:

$$z' = z - \frac{\beta}{2h} (3x'^2 y' - y'^3) \dots \dots \dots (232).$$

Skoro zamiast współrzędnych x i y wprowadzimy współrzędne biegunowe ρ i φ i przyjmiemy $x = \rho \cos \varphi$ i $y = \rho \sin \varphi$, to równanie tej powierzchni przyjmie postać:

$$z' = z - \frac{\beta \rho^3}{2h} \sin(3\varphi) \dots \dots \dots (233).$$

Z tego równania widzimy, że ta powierzchnia jest w kątach COD , AOE i BOF wklęsła, a w kątach AOD , BOE i COF — wypukła.

Zauważmy jeszcze, że równanie (223) obwodu przy współrzędnych biegunowych przyjmie postać:

$$h\rho^2 - \rho^3 \cos(3\varphi) - \frac{4h^3}{27} = 0 \dots \dots \dots (234).$$

51. Skrećanie prostopadłościanów. Przy badaniu skrećania ciał graniastosłupowych, możemy napotkać trudności, polegające na tem, że albo równanie obwodu okaże się równaniem bardzo zawiłym przestępnym, jak to zawsze jest np. dla prostopadłościanów, o podstawie prostokątnej lub kwadratowej, albo też równanie to nie uczyni zadość warunkowi (214). W obydwu tych przypadkach można rozwiązać zadanie tylko w przybliżeniu. Droga, którą wtedy postępujemy, polega na tem, że stosownie do kształtu danego obwodu, tworzymy algebraiczną funkcję całkowitą x i y ze współczynnikami nieoznaczonymi, która, gdy ją przyjmiemy za funkcję $f(x, y)$, mogłaby możebnie jaknajdokładniej przedstawiać miejsce geometryczne danego obwodu. Następnie oznaczamy

współczynniki tej funkcji tak, ażeby warunek $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \text{const.}$ był spełniony i ażeby krzywa $f(x, y) = 0$ miała jaknajwięcej punktów wspólnych z danym obwodem.

Przypuśćmy dla przykładu, że dany jest prostopadłościan o podstawie kształtu prostokąta, którego boki są $2a$ i $2b$. Przyjmując osi współrzędnych x i y w osiach symetrii prostokąta, łatwo zauważymy, że krzywa, zbliżona do prostokąta, jest oznaczona równaniem parzystym zarówno względem x jak i względem y . Postać przeto ogólna równania takich krzywych algebraicznych jest:

$Ax^2 + By^2 + Px^4 + Rx^2y^2 + Qy^4 + px^6 + rx^4y^2 + sx^2y^4 + qy^6 + \dots - C = 0$.
 Parametr różniczkowy drugiego stopnia funkcji, podanej w pierwszej części tego równania, jest:

$$2(A+B) + 2(6P+R)x^2 + 2(6Q+R)y^2 + 2(15p+r)x^4 + 2(15q+s)y^2 + 12(r+s)x^2y^2 + \dots$$

Ażeby parametr ten był ilością stałą, musimy przyjąć:

$$6P + R = 0, \quad 6Q + R = 0, \quad 15p + r = 0, \\ 15q + s = 0, \quad r + s = 0, \quad \dots$$

Stąd otrzymujemy:

$$R = -6P = -6Q, \quad s = -r = 15p = -15q, \quad \dots$$

Równanie więc, mogące z większą lub mniejszą dokładnością przedstawić jakikolwiek obwód symetryczny względem osi współrzędnych x i y , jest:

$$Ax^2 + By^2 + P(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + p(x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6) + \dots - C = 0.$$

Oczywiście, im więcej wyrazów zatrzymamy w tem równaniu, tem dokładniej może ono przedstawić dany obwód. W celu otrzymania krzywej, zbliżonej kształtem do prostokąta, wystarczy zatrzymać wyrazy o współczynnikach A, B, P i C . Do oznaczenia zaś tych współczynników niezbędnem jest, ażeby krzywa przechodziła przez wszystkie wierzchołki i przez środki boków prostokąta. Wtedy otrzymamy:

$$Aa^2 + Bb^2 + P(a^4 - 6a^2b^2 + b^4) = C \\ Aa^2 + Pa^4 = C \quad \text{i} \quad Bb^2 + Pb^4 = C.$$

Z równań tych wynika:

$$P = \frac{C}{6a^2b^2}, \quad A = \frac{6b^2 - a^2}{6a^2b^2} C \quad \text{i} \quad B = \frac{6a^2 - b^2}{6a^2b^2} C.$$

Równanie więc szukanej krzywej jest:

$$f(x, y) = (6b^2 - a^2)x^2 + (6a^2 - b^2)y^2 + x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 6a^2b^2 = 0 \dots (235).$$

Z tego równania otrzymujemy do oznaczenia parametru funkcji f :

$$2D = 2(6a^2 - b^2) + 2(6b^2 - a^2) = 10(a^2 + b^2),$$

dla pierwszych zaś pochodnych:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x [6b^2 - a^2 + 2x^2 - 6y^2]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y [6a^2 - b^2 + 2y^2 - 6x^2].$$

Wobec tego, z równania (216) otrzymamy:

$$M_z = \frac{2\beta G}{5(a^2 + b^2)} \left[(6a^2 - b^2) I_x + (6b^2 - a^2) I_y + \right. \\ \left. + 2 \iint (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \partial F \right].$$

Ponieważ dla prostokąta o bokach $2a$ i $2b$ mamy $I_x = \frac{4}{3} ab^3$, $I_y = \frac{4}{3} ba^3$, $\iint x^4 \partial F = \frac{4}{3} ba^5$, $\iint y^4 \partial F = \frac{4}{3} ab^5$ i $\iint x^2y^2 \partial F = \frac{4}{3} a^3b^3$, przeto otrzymujemy:

$$M_z = \frac{8}{75} \beta G \frac{ab}{a^2 + b^2} [a^4 + 40a^2b^2 + b^4] \dots (236).$$

Przesunięcie g_{zs} oznacza się z wzoru:

$$g_{zs} = \frac{2\beta}{5(a^2 + b^2)} \sqrt{\{x^2(6b^2 - a^2 + 2x^2 - 6y^2)^2 + y^2(6a^2 - b^2 + 2y^2 - 6x^2)^2\}}. (237);$$

Analogicznie jak dla elipsy możemy przewidzieć, że największe przesunięcie występuje na obwodzie w punkcie $(0, \pm b)$, o ile przyjmiemy $a > b$. Mamy więc:

$$(g_{zs})_{\max} = \frac{2}{5} \beta \frac{(6a^2 + b^2)b}{a^2 + b^2} \dots (238),$$

po podstawieniu zaś za β wartości z równania (236), otrzymamy warunek wytrzymałości:

$$\frac{4}{15} a \frac{a^4 + 40a^2b^2 + b^4}{6a^2 + b^2} = \frac{k M_z}{T''} \dots (239),$$

gdzie $T'' = \frac{T}{1 + \mu}$.

Krzywa stopnia czwartego, którą przyjęliśmy za prostokąt, różni się od prostokąta tem, że ma wierzchołki zaokrąglone i boki nieco wklęsłe. Jeżeli a mało różni się od b , to krzywa ta może z dostateczną dokładnością zastąpić prostokąt, lecz gdy a jest znacznie większe od b , np. gdy $a \geq 5b$, krzywa przybiera kształt zbliżony do cyfry 8 i wtedy w pobliżu wierzchołków prostokąta tworzy znaczne wypukłości i bardzo wybitnie różni się od niego kształtem.

Przyjmując w wyprowadzonych powyżej wzorach $a = b$, otrzymamy wzory dostatecznie dokładne w zastosowaniu do prostopadłościanu, mającego za podstawę kwadrat:

$$\left. \begin{aligned} M_z &= 0,14 \beta G (2a)^4 \\ (g_{zs})_{\max} &= 1,4 \beta a = 5 \frac{M_z}{G (2a)^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (240)$$

i jako warunek wytrzymałości:

$$0,2 (2a)^3 = \frac{k M_z}{T''} \dots \dots \dots (241).$$

Wzory zupełnie dokładne dałyby:

$$M_z = 0,14058 \beta G (2a)^4, \quad (g_{zs})_{\max} = 1,3506 \beta a = 4,80366 \frac{M_z}{G (2a)^3}$$

$$\text{i} \quad 0,20817 (2a)^3 = \frac{k M_z}{T''}.$$

We wzorach tych $2a$ wyraża bok kwadratu.

Zaznaczamy, że w zastosowaniach należy zawsze oddawać pierwszeństwo wzorowi przybliżonemu (241) nad ścisłym, ponieważ jest on prostszy i jednocześnie daje nieco większe wymiary przekroju.

Gdy podstawą jest prostokąt bardzo wydłużony, tak, że $a > 5b$, lepiej jest posilkować się wzorami, wyprowadzonymi dla obwodu eliptycznego, zastępując w nich I_x i I_y przez $\frac{4}{3} ab^3$ i $\frac{4}{3} ba^3$. Po takim podstawieniu we wzorach (220) otrzymamy dla obwodów prostokątnych bardzo wydłużonych (gdy $a > 5b$):

$$M_z = \frac{1}{3} \beta G \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}, \quad (g_{zs})_{\max} = 2\beta \frac{a^2 b}{a^2 + b^2} = \frac{3 M_z}{G (2a) (2b)^2};$$

warunek zaś wytrzymałości będzie:

$$\frac{1}{3} (2a) (2b)^2 = \frac{k M_z}{T''} \dots \dots \dots (242).$$

Wreszcie gdy stosunek $\frac{a}{b}$ leży w granicach między 1 a 5, lepiej jest posilkować się wzorami następującymi:

$$M_z = \gamma (2a) (2b)^3 \beta G, \quad (g_{zs})_{\max} = \eta \beta b \quad \text{i} \quad \frac{2\gamma}{\eta} (2a) (2b)^2 = \frac{k M_z}{T''} \dots \dots (243),$$

w których wartości liczbowe współczynników γ , η i $\frac{2\gamma}{\eta}$ należy brać z tablicy następującej, ułożonej przez Saint-Venant'a, na podstawie ścisłych wzorów, które ustalił na skręcanie prostopadłościanów, o podstawie kształtu prostokąta.

$\frac{a}{b}$	γ	η	$\frac{2\gamma}{\eta}$	$\frac{a}{b}$	γ	η	$\frac{2\gamma}{\eta}$
1,0	0,14058	1,3506	0,20817	1,75	0,21428	1,7932	0,23896
1,1	0,15398	1,4396	0,21393	1,8	0,21743	1,8088	0,24042
1,2	0,16612	1,5175	0,21920	2,0	0,22868	1,8601	0,24588
1,3	0,17707	1,5854	0,22315	3,0	0,26332	1,9709	0,26720
1,4	0,18690	1,6443	0,22733	4,0	0,28081	1,9940	0,28166
1,5	0,19576	1,6951	0,23097	5,0	0,29135	1,9987	0,29150
1,6	0,20374	1,7389	0,23433	∞	0,33333	2,0000	0,33333

Przy oznaczaniu warunku wytrzymałości prostopadłościaków skręcanych i wyginanych, może zająć potrzeba oznaczenia wartości największego przesunięcia w środku mniejszego boku prostokąta. Oznaczając to przesunięcie przez g'_{zs} i przedstawiając je zapomocą wzoru:

$$g'_{zs} = \eta' \beta a \dots \dots \dots (244),$$

należy brać wartość współczynnika η' z tablicy następującej:

$\frac{a}{b}$	1	1,25	1,50	1,75	2,5	5	10	∞
η'	1,3506	1,1378	0,9707	0,8410	0,5935	0,2970	0,1486	0

52. Skręcanie rur. Rury mają dwie powierzchnie boczne: zewnętrzną i wewnętrzną, a zatem dwa obwody przekroju. Dla każdej z tych powierzchni bocznych musi istnieć równanie (203), dla każdego więc z dwóch obwodów przekroju winno spełniać się równanie (207), czyli *obydwa obwody powinny mieć wspólne równanie różniczkowe*. Równania obwodów w postaci swej ostatecznej mogą więc różnić się tylko wyrazem stałym. Tak np. jeżeli jeden obwód jest okręgiem, o równaniu $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, to równanie drugiego obwodu będzie $x^2 + y^2 - r'^2 = 0$, a więc drugi obwód będzie także okręgiem, lecz o promieniu innym r' . Jeżeli obwód zewnętrzny jest elipsą, o równaniu $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, to równanie obwodu wewnętrznego będzie:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - m^2a^2b^2 = 0,$$

t. j. obwód wewnętrzny będzie także elipsą, o półosiach proporcjonalnych do półosi elipsy zewnętrznej.

Dla rury walcowej, której przekroju obwodami są dwie elipsy, geometrycznie podobne i podobnie umieszczone, a mianowicie jedna o półosiach a i b , a druga o półosiach ma i mb , należy we wzorach (221) przyjąć:

$$I_x = \frac{\pi}{4} [ab^3 - (ma)(mb)^3] = \frac{\pi}{4} ab^3 (1-m^4) \quad \text{i} \quad I_y = \frac{\pi}{4} ba^3 (1-m^4),$$

wtedy otrzymamy:

$$M_x = \pi \beta G \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} (1-m^4), \quad (g_{zs})_{\max} = 2\beta \frac{ba^2}{a^2 + b^2};$$

dla warunku zaś wytrzymałości:

$$(1-m^4) ab^2 = \frac{2k M_x}{\pi T''} \dots \dots \dots (245).$$

Skoro tu przyjmiemy $a = b = r$, to otrzymamy wzory dla rury walcowej kołowej, o promieniu okręgu zewnętrznego r :

$$M_x = \frac{\pi}{2} \beta G r^4 (1-m^4), \quad (g_{zs})_{\max} = \beta r \quad \text{i} \quad (1-m^4) r^3 = \frac{2k M_x}{\pi T''} \dots \dots (246).$$

Oznaczmy grubość ścianki tej rury przez e , a powierzchnię przekroju pierścieniowego przez F , to $m = 1 - \frac{e}{r}$, a $F = \pi r^2 (1-m^2)$; stąd zaś:

$$r^3 = \left[\sqrt{\frac{F}{\pi(1-m^2)}} \right]^3.$$

Z równania (246) wynika:

$$(F')^{3/2} = 2V\pi \frac{k M_x}{T''} \frac{V\sqrt{1-m^2}}{1+m^2} \dots \dots \dots (247).$$

Jeżeli przez F_0 oznaczymy powierzchnię przekroju walca pełnego, czyniącą zadość warunkowi wytrzymałości, to do oznaczenia tej powierzchni służy równanie:

$$(F_0)^{3/2} = 2V\pi \frac{k M_x}{T''} \dots \dots \dots (248).$$

Z dwóch ostatnich równań wynika:

$$F = F_0 \sqrt[3]{\frac{1-m^2}{(1+m^2)^2}} \dots \dots \dots (249).$$

Stąd jest widoczne, że walce rurowe tem są wytrzymalsze na skręcanie, im m bardziej jest zbliżone do jedności, czyli im mniejszym jest stosunek e/r . Tak np. gdy $e/r = 0,1$, to $m = 0,9$ i $F = 0,387 F_0$.

Jeżeliby równania różniczkowe obwodu zewnętrznego i obwodu wewnętrznego nie były zupełnie jednakowe, to skręcanie rury o takich obwodach możnaby oznaczyć jedynie w przybliżeniu i to tylko pod warunkiem, że szerokość powierzchni pierścieniowej, mieszczącej się między obwodami, jest niewielka w porównaniu z wymiarami samych obwodów. W celu otrzymania takich wzorów przybliżonych należy: ustalić najpierw równanie dokładne lub przybliżone krzywej, zajmującej wszędzie poło-

żenie średnie pomiędzy danymi obwodami i następnie wyprowadzić wzory na skręcanie walca pełnego, którego przekroju obwodem jest rzeczona krzywa. We wzorach, w ten sposób otrzymanych, do wyrażenia na moment M_x wejdą całki, które należy oznaczyć, rozpościerając całkowanie na powierzchnię pierścieniową danego ciała rurowego.

53. Tablica II. Przy wyznaczaniu wymiarów ciał słupowatych, skręcanych, należy dla naprężenia T'' , wchodzącego we wzory powyżej podane, brać wartości z tablicy następującej:

Materyał	Naprężenie bezpieczne T'' kg/cm^2
Stal	3 600
Żelazo kowalne	2 160
„ lane	900
Drzewo	144

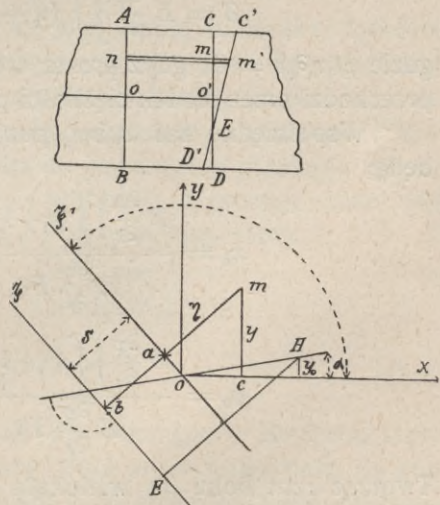
ROZDZIAŁ VI.

W y g i n a n i e.

54. Układ naprężeń w punktach przekroju graniastostłupa wyginanego.
 W ustępie 36 wyjaśniliśmy, że wyginanie ciała graniastostłupowatego następuje wtedy, gdy naprężenia w przekroju sprowadzają się do pary sił, leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do przekroju. Powstające w tym przypadku odkształcenie graniastostłupa jest następstwem obracania się każdego z przekrojów około prostej, leżącej w płaszczyźnie danego przekroju; przyczem te przekroje mogą, jak i przy skręcaniu, przekształcać się na powierzchnie krzywe.

Badanie wyginania zaczniemy od założenia, że przekroje pozostają płaskimi i normalnymi do krzywej, w którą przekształca się oś graniastostłupa po odkształceniu. To założenie, przy nieznacznem wygięciu, zbliżone jest do rzeczywistości.

Niech AB i CD będą dwoma nieskończenie bliskimi przekrojami graniastostłupa (rys. 7), O i O' — ich środkami ciężkości, a ∂s — ich odległością. Przypuśćmy, że przekrój CD obrócił się względem przekroju AB , który uważamy za nieruchomy, o nieskończenie mały kąt $CEC' = \partial\varphi$. Wreszcie niech prosta $E\xi$, leżąca w płaszczyźnie tego przekroju, będzie tą osią, około której przekrój CD się obrócił. Osie współrzędnych x i y przyjmujemy w płaszczyźnie tego przekroju, w kierunku osi głównych bezwładności środka ciężkości przekroju.



Rys. 7.

Skoro oznaczymy przez I_x i I_y momenty główne bezwładności, to otrzymamy:

$$I_x = \iint y^2 \partial F, \quad I_y = \iint x^2 \partial F, \quad \iint xy \partial F = 0, \\ \iint x \partial F = \iint y \partial F = 0 \quad \dots \dots \dots (a).$$

Włókno podłużne nm , leżące pomiędzy rozważanymi przekrojami, wydłuża się o $mm' = (\eta + \delta) \partial \varphi$, gdzie η jest odległością ma włókna od prostej $O\xi'$, równoległej do prostej $E\xi$ i przechodzącej przez środek ciężkości przekroju, a δ jest odległością ab pomiędzy prostymi równoległymi $E\xi$ i $O\xi'$.

Wydłużenie więc względne włókna podłużnego nm jest:

$$\Delta_s = (\eta + \delta) \frac{\partial \varphi}{\partial s} \quad \dots \dots \dots (250).$$

Z wzoru tego wynika, że: 1) rozciągnięcie największe ujawnia się w punktach przekroju najbardziej oddalonych od osi obrotu $E\xi$; 2) rząd włókien podłużnych, przechodzących przez oś obrotu, nie zmienia swojej długości i 3) z jednej strony tej osi włókna podłużne są rozciągane, z drugiej zaś — ściskane.

Rząd włókien, nie zmieniających długości podczas wyginania, nazywa się *warstwą obojętną*. We wzorze więc poprzednim na Δ_s ilość δ wyraża odległość środka ciężkości przekroju od warstwy obojętnej.

Naprężenie normalne p_{ss} w punkcie m przekroju wynosi:

$$p_{ss} = E \frac{\partial \varphi}{\partial s} (\eta + \delta) \quad \dots \dots \dots (251),$$

a wypadkowa Z takich naprężeń we wszystkich punktach przekroju:

$$Z = E \frac{\partial \varphi}{\partial s} \iint (\eta + \delta) \partial F = E \frac{\partial \varphi}{\partial s} F \delta \quad \dots \dots \dots (252),$$

gdzie $\iint \eta \partial F = 0$, gdyż prosta $O\xi'$, od której mierzymy odległość η , przechodzi przez środek ciężkości przekroju.

Współrzędne zaś x_0 i y_0 punktu przyczepienia tej wypadkowej Z będą:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial s} \iint (\eta + \delta) x \partial F}{E \frac{\partial \varphi}{\partial s} F \delta} = \frac{1}{F \delta} \iint \eta x \partial F \\ y_0 &= \frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial s} \iint (\eta + \delta) y \partial F}{E \frac{\partial \varphi}{\partial s} F \delta} = \frac{1}{F \delta} \iint \eta y \partial F \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (b).$$

Tworząc rzut boku am wielokąta $maOcm$ na kierunek tegoż boku am , otrzymamy:

$$\overline{am} = \eta = x \sin \beta - y \cos \beta \quad \dots \dots \dots (c),$$

gdzie β jest to kąt $xO\xi'$, który tworzy prosta $O\xi'$ z osią x . Możemy więc wzory na x_0 i y_0 przedstawić w postaci:

$$x_0 = \frac{I_y}{F\delta} \sin \beta \quad \text{i} \quad y_0 = -\frac{I_x}{F\delta} \cos \beta \quad \dots \quad (253).$$

Przypuśćmy, że punkt H (rys. 7) jest punktem przyczepienia wypadkowej Z i że h jest odległością tego punktu od osi obrotu $E\xi$; wtedy z wzoru (c) otrzymamy:

$$h - \delta = \eta_0 = x_0 \sin \beta - y_0 \cos \beta = \frac{I_x \cos^2 \beta + I_y \sin^2 \beta}{F\delta} \quad \dots \quad (d).$$

Skoro jednak moment bezwładności przekroju względem osi obrotu $E\xi$ oznaczymy przez I_ξ , a względem prostej $O\xi'$ przez $I_{\xi'}$, to otrzymamy:

$$I_x \cos^2 \beta + I_y \sin^2 \beta = I_{\xi'} = I_\xi - F\delta^2$$

a równanie (d) da wówczas:

$$h\delta = \frac{I_\xi}{F} \quad \dots \quad (254).$$

Ten wzór ostatni wskazuje, że położenie względne punktu przyczepienia naprężenia normalnego wypadkowego i osi obrotu przekroju, czyni zadość temu samemu warunkowi, co położenie *środku uderzenia i osi swobodnej obrotu*.

Łatwo można teraz oznaczyć moment M siły Z względem środka ciężkości przekroju, albowiem:

$$M = Z \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Wzór ten, na podstawie równań (250) i (251), można przedstawić w postaci:

$$M = E \frac{\partial \varphi}{\partial s} \sqrt{(I_x \cos \beta)^2 + (I_y \sin \beta)^2} \quad \dots \quad (255).$$

Przenosząc więc siłę Z równoległe do niej samej do środka ciężkości przekroju, sprowadzimy układ naprężeń normalnych danego przekroju do jednej siły Z , przyczepionej w środku ciężkości przekroju, i do jednej pary, której moment M może być oznaczony z równania (255). Płaszczyzna tej pary jest prostopadła do płaszczyzny przekroju i przecina ją w prostej OH . W celu ustalenia położenia tej prostej, oznaczamy przez α kąt, który ona tworzy z osią x i otrzymujemy wtedy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_0}{x_0} = -\frac{I_x \cos \beta}{I_y \sin \beta},$$

skąd:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = -\frac{I_x}{I_y} \quad \dots \quad (256).$$

W tem równaniu ostatniem wyrażone jest twierdzenie Bresse'a, które można wysłowić w sposób następujący: *Ślad płaszczyzny pary na płaszczyźnie przekroju i prosta, przechodząca przez środek ciężkości przekroju, a równoległa do osi obrotu tegoż przekroju, zlewają się ze średnicami sprzężonemi elipsy centralnej przekroju.*

Istotnie, równanie elipsy centralnej brzmi: $I_x x^2 + I_y y^2 = \text{const.}$, a równanie stycznej do niej w punkcie (x', y') jest: $I_x x'x + I_y y'y = \text{const.}$;

jeżeli więc punktem styczności będzie punkt przecięcia prostej OH z elipsą, to otrzymamy:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y_0}{x_0} = \operatorname{tg} \alpha .$$

Oznaczając zaś przez θ kąt, który ta styczna tworzy z osią x , otrzymamy z równania stycznej:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta = - \frac{I_x}{I_y} \cdot \frac{x'}{y'} = - \frac{I_x}{I_y} \operatorname{ctg} \alpha .$$

Stąd:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \theta = - \frac{I_x}{I_y} .$$

Z porównania tego równania z równaniem (256) wynika:

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \beta ,$$

co jest dowodem twierdzenia Bresse'a.

Do wyznaczenia kąta γ , utworzonego przez ślad pary i oś obrotu, mamy równanie:

$$\cos \gamma = \cos (\beta - \alpha) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha = \frac{x_0 \cos \beta + y_0 \sin \beta}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} ,$$

czyli, podstawiając za x_0 i y_0 ich wartości:

$$\cos \gamma = \frac{(I_y - I_x) \cos \beta \sin \beta}{\sqrt{(I_x \cos \beta)^2 + (I_y \sin \beta)^2}} \dots \dots \dots (257).$$

Z wzorów powyżej wyprowadzonych można wyprowadzić wiele ważnych wniosków: Z wzoru (252) widzimy, że δ będzie równe zeru, gdy Z jest równe zeru, czyli że warstwu obojętna przechodzi przez środki ciężkości przekrojów, gdy w każdym z tych przekrojów wypadkowa naprężeń normalnych jest równa zeru.

Z wzorów (253) widzimy, że $x_0 = y_0 = 0$, gdy $\delta = \infty$; a więc punkt przyczepienia wypadkowej wszystkich naprężeń normalnych (punkt H na rys. 7) znajduje się w środku ciężkości przekroju, gdy odległość warstwy obojętnej od tegoż środka ciężkości jest nieskończenie wielką. Skoro to nastąpi dla wszystkich przekrojów graniastosłupa, to zamiast wyginania otrzymamy rozciąganie zwykłe.

Z równania (255), przyjmując $I_y > I_x$, otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} M_{\max} &= E \frac{\partial \varphi}{\partial s} I_y \quad \text{przy } \beta = 90^\circ \\ M_{\min} &= E \frac{\partial \varphi}{\partial s} I_x \quad \text{przy } \beta = 180^\circ \text{ (lub } 0^\circ) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (258).$$

A więc osi główne bezwładności przekroju mogą być nazwane osiami najłatwiejszego i najtrudniejszego wyginania, albowiem wytrzymałość na skręcanie (mierzona wielkością momentu naprężeń), około jednej z tych osi jest najmniejsza, a około drugiej największa. Największa wytrzymałość ujawnia się przy obracaniu przekroju około tej z głównych osi bezwładności, względem której moment bezwładności jest największy.

Przyjmując: $\alpha < 90^\circ$ i $I_y > I_x$, otrzymamy z równań (256) i (257): $\beta > 90^\circ$ i $\gamma > 90^\circ$; gdy więc płaszczyzna pary nie przechodzi przez osiową, *kierunek osi obrotu znajduje się w kącie, utworzonym przez prostą do płaszczyzny pary z osią najłatwiejszego wyginania.*

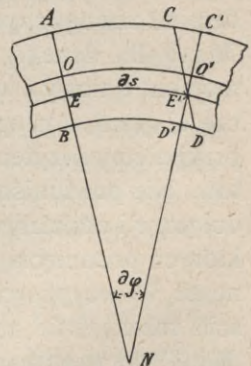
Gdy oś obrotu pada na jedną z osi głównych bezwładności środka ciężkości przekroju, wytwarzają się przypadki najprostsze i jednocześnie najważniejsze w praktyce, ponieważ w budowlach układamy zazwyczaj części wyginane tak, ażeby ujawniały największą wytrzymałość i jaknajmniej zmieniały swój kształt, albo też tak, ażeby odkształcenia były największe. Ostatniemu warunkowi odpowiadają np. sprężyny w dynamometrach, gdzie znaczne odkształcenia, bez przekroczenia wytrzymałości, są korzystne, gdyż zwiększają czułość dynamometru.

Zajmować się będziemy przeważnie przypadkami, w których dla każdego przekroju ślad płaszczyzny pary na płaszczyźnie przekroju pada na jedną z osi głównych bezwładności środka ciężkości przekroju. W takim przypadku wzór na moment M przybiera postać:

$$M = E \frac{\partial \varphi}{\partial s} I \dots \dots \dots (259),$$

gdzie I jest momentem bezwładności względem tej z głównych osi bezwładności, która jest prostą do płaszczyzny pary.

55. Równanie włókna środkowego. Niech AB i $C'D'$ (rys. 8) będą nieskończenie bliskimi przekrojami graniastostłupa wygiętego, które pozostały płaskimi i normalnymi zarówno do włókna środkowego OO' , jak i do warstwy obojętnej EE' . Przekrój $C'D'$ przed wygięciem był równoległy do przekroju AB , czyli padał na CD , a więc kąt $CE'C' = \partial \varphi$, o który przekrój CD obrócił się względem przekroju AB , równy jest kątowi ONO' normalnych głównych ON i $O'N$ do krzywej OO' . Skoro więc odległość rozważanych przekrojów przed wygięciem, czyli długość EE' warstwy obojętnej, oznaczymy przez ∂s , a promień krzywizny włókna środkowego przez ρ i uwzględnimy, że promień krzywizny warstwy obojętnej równy jest $ON - OE = \rho - \delta$, to otrzymamy:



Rys. 8.

$$\frac{1}{\rho - \delta} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \dots \dots \dots (260),$$

co w związku z wzorem (257) daje:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{IE} \cdot \frac{1}{1 + \frac{M\delta}{IE}};$$

z równań zaś (250) i (257) wynika, że $\frac{M\delta}{I} = \frac{Z}{F}$, otrzymujemy więc:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{IE} \cdot \frac{1}{1 + \frac{Z}{FE}} \dots \dots \dots (261).$$

W przypadku szczególnym, gdy we wszystkich przekrojach wypadkowa naprężeń normalnych równa jest zeru, albo gdy jest bardzo mała w porównaniu z siłą FE , możemy zamiast wzoru (261) stosować wzór następujący:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{IE} \dots \dots \dots (262).$$

W tym przypadku włókno środkowe leży w warstwie obojętnej.

Równanie (261) lub (262), jako wyznaczające krzywiznę włókna środkowego, właściwie jest równaniem różniczkowym tej krzywej, w którą przekształca się włókno środkowe po wygięciu. Całkując to równanie różniczkowe, możemy znaleźć równanie rzeczonyj krzywej w postaci skończonej, ale w tym celu należy uprzednio oznaczyć ilości M i Z .

Oznaczenie momentu M i wypadkowej Z naprężeń normalnych nie przedstawia trudności, skoro zauważymy, że gdy odłączymy część graniastosłupa, leżącą pomiędzy rozważanym przekrojem a jedną z jego podstaw, należy przyjąć siły, działające na punkty przekroju, mogące zastąpić działanie części oddzielonej. Siły te powinny utworzyć układ sił równy układowi naprężeń, wywołanych w przekroju i równoznaczny z układem sił zewnętrznych, działających na punkty części odłączonej. Ilości M i Z dla danego przekroju mogą więc być ustalone, gdy oznaczymy moment liniowy i wypadkową sił zewnętrznych, działających na punkty części graniastosłupa, leżącej z jednej strony rozważanego przekroju i gdy przyjmiemy przytem środek ciężkości tego przekroju za środek momentów. Nie powinniśmy przytem przeoczyć, że do sił zewnętrznych należy dołączyć i oddziaływania, występujące w tych punktach graniastosłupa, których posunięcia są uwarunkowane pewnymi przeszkodami zewnętrznymi. W przypuszczeniu, że odkształcenie jest nieznaczne, można uprościć rozwiązanie zadania, odnosząc siły zewnętrzne, przy oznaczaniu M i Z , do graniastosłupa w tem jego położeniu, jakie miał przed wygięciem. Przez to, oczywiście, wprowadzimy pewne błędy do równań na współrzędne punktów przyczepienia sił zewnętrznych, ale wpływ tych błędów będzie bardzo mały, gdy rozważamy wygięcie nieznaczne.

Równanie (261) lub (262) istnieje dla wszystkich punktów osi wygiętej graniastosłupa tylko wtedy, gdy kierunek momentu liniowego sił zewnętrznych w każdym przekroju pada na jedną i tę samą oś główną bezwładności przekroju. Ażeby warunek ten był spełniony, powinny

siły zewnętrzne leżeć w płaszczyźnie prostopadłej do tejże osi bezwładności. A ponieważ w takim razie przekroje obracać się będą około tejże osi, przeto oś graniastosłupa, po wygięciu, będzie *krzywą płaską*, w której płaszczyźnie leżeć będą wszystkie siły zewnętrzne. Krzywą, w którą przekształca się oś graniastosłupa po wygięciu, t. j. oś odkształconą, będziemy nazywali *linią wygięcia*.

Wyprowadzimy równanie linii wygięcia dla różnych przypadków, spotykanych w zastosowaniach, w przypuszczeniu, że siły zewnętrzne wyginające są przyłączone do punktów tej linii. Siły te mogą być rozmieszczone dwojako: mogą działać na wszystkie punkty osi bez wyjątku, zmieniając się w pewien sposób ciągle przy przejściu z jednego punktu do innego, albo też mogą skupiać się tylko w pewnych oddzielnych punktach osi.

W przypadku pierwszym moment M będzie funkcją ciągłą współrzędnych linii wygięcia na całej jej długości; w przypadku zaś drugim— dla każdej części tej linii wygięcia, leżącej między dwoma punktami przyłączenia dwóch sił sąsiednich, moment M będzie wyrażał się inną funkcją. W tym więc ostatnim przypadku każda taka część linii wygięcia będzie wyrażona innem równaniem.

Przypuśćmy, że siły zewnętrzne leżą w płaszczyźnie, zawierającej oś z i oś główną bezwładności x środka ciężkości przekroju. Rozważając część graniastosłupa, znajdującą się między podstawą bardziej oddaloną od początku współrzędnych a tym przekrojem, dla którego mamy oznaczyć układ naprężeń, przypuszczamy, że P_1 jest jedną z sił wewnętrznych, działających na rozważaną część graniastosłupa. Niech Z_1 i X_1 będą rzutami tej siły na osie współrzędnych, a z_1 i x_1 — współrzędnymi punktu przyłączenia tej siły. Wreszcie niech z i x będą współrzędnymi środka ciężkości danego przekroju. Przenosząc wszystkie siły zewnętrzne, działające na wspomnianą powyżej część graniastosłupa, do środka ciężkości przekroju, sprowadzimy układ jego naprężeń do jednej wypadkowej, której rzuty na osie współrzędnych są ΣZ_1 i ΣX_1 , oraz do jednej pary, której moment jest:

$$M = \Sigma \{ X_1 (z_1 - z) - Z_1 (x_1 - x) \} = \Sigma (X_1 z_1 - Z_1 x_1) - z \Sigma X_1 + x \Sigma Z_1.$$

A zatem nastąpi wyginanie, rozciąganie i przesuwanie. Siła, wywołująca rozciąganie, jest ΣZ_1 , wywołująca zaś przesuwanie jest ΣX_1 . Zwróćmy uwagę, że te siły możemy otrzymać z wzoru na moment w sposób następujący:

$$\Sigma Z_1 = \frac{\partial M}{\partial x} \quad \text{i} \quad \Sigma X_1 = - \frac{\partial M}{\partial z} \quad \dots \quad (263).$$

Przypadek najprostszy zachodzi, gdy siły zewnętrzne są prostopadłe do osi graniastosłupa, t. j. do osi z -ów. W tym przypadku moment M jest

funkcją tylko odciętej z linii wygięcia, ponieważ Z_1 dla wszystkich sił jest równe zeru. Jeżelibyśmy w danym przypadku rozważali tylko wyginanie, nie uwzględniając wcale siły, wywołującej przesuwanie, to równanie linii wygięcia dałoby się łatwo zcałkować. W rzeczy samej, wiemy z rachunku różniczkowego, że:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}}{\left\{ 1 + \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 \right\}^{3/2}} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right) \quad (264),$$

możemy więc równanie (262) napisać w sposób następujący:

$$EI \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right) = M \frac{\partial z}{\partial s};$$

ponieważ zaś M jest funkcją tylko zmiennej z , przeto:

$$EI \frac{\partial x}{\partial s} = \int M \frac{\partial z}{\partial s} + C \quad (265).$$

Jednakże $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2}}$, czyli $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2}}$; wpro-

wadzając więc do tego równania za $\frac{\partial x}{\partial s}$ wartość tej pochodnej z równania (265) i całkując względem z , znajdziemy długość s rozważanej części linii wygięcia. Wreszcie, uwzględniając, że $\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}$, czyli

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\frac{\partial x}{\partial s}}{\frac{\partial z}{\partial s}} = \frac{\partial x}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2}} \frac{\partial z}{\partial s} \quad (266),$$

otrzymamy przez całkowanie tego ostatniego wzoru związek między rzędną x a odciętą z dla rozważanej części linii wygięcia. Należy zauważyć, że całki, zapomocą których jest wyrażony łuk s i rzędna x linii wygięcia, prowadzą do funkcji eliptycznych, a nawet ultraeliptycznych; to też dla ich uniknięcia poprzestajemy w praktyce na rozwiązaniu przybliżonym.

Skoro przyjmiemy, że wygięcie jest nieznaczne, to możemy oś graniastosłupa po wygięciu uważać za krzywą, bardzo mało różniącą się od osi prostej z , a więc $\frac{\partial x}{\partial s}$, jako dostawa kąta, który z osią x tworzy styczna do tej krzywej, jest bardzo małym ułamkiem (jako dostawa kąta mało różniącego się od kąta prostego). Wobec tego możemy wzory na $\frac{\partial z}{\partial s}$ i $\frac{\partial x}{\partial s}$ rozłożyć na szeregi według potęg rosnących tego małego ułam-

ka i poprzestać na kilku pierwszych wyrazach. Szeregi te są następujące:

$$\left. \begin{aligned} \partial s &= \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^6 + \dots \right] \partial z \\ \partial x &= \left[\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^5 + \dots \right] \partial z \end{aligned} \right\} \dots \quad (267).$$

Jeżeli w każdym z tych szeregów odrzucimy potęgi wyższe od pierwszej ułamka bardzo małego $\frac{\partial x}{\partial s}$, to otrzymamy: $\partial s = \partial z$, a wówczas równanie (265) przyjmie postać:

$$EI \frac{\partial x}{\partial z} = \int M \partial z + C \dots \dots \dots (268).$$

Całkując je, otrzymamy:

$$EI x = \int \partial z \int M \partial z + Cz + C' \dots \dots \dots (269).$$

Przy tym stopniu dokładności, który przyjęliśmy przy ustalaniu dwóch równań ostatnich, równanie podstawowe (262) przyjmuje postać:

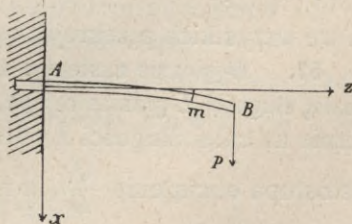
$$EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = M \dots \dots \dots (270).$$

Przypadki szczególne, które obecnie zamierzamy rozważać, wyjaśnią zastosowanie wyprowadzonych powyżej wzorów i wskażą te rozumowania, którymi posługiwać się należy przy wyznaczaniu dowolnych stałych, wprowadzanych przy całkowaniu.

I. Jeden koniec graniastosłupa osadzony jest nieruchomo, drugi zaś jest swobodny.

56. Wyginanie wywołuje siła P , działająca na koniec swobodny B

(rys. 9). Zauważmy przedewszystkiem, że osadzenie nieruchome końca A powinno uniemożliwić wszelkie posunięcia postępowe i ruchy obrotowe podstawy tego końca. Skoro środek ciężkości podstawy A końca osadzonego nieruchomo przyjmiemy za początek współrzędnych, to styczna do linii wygięcia w punkcie A musi paść na kierunek osi graniastosłupa przed wygięciem, czyli na kierunek osi z , a więc



Rys. 9.

gdy $z = 0$ będzie $x = 0$ i $\frac{\partial x}{\partial z} = 0$, albowiem $\frac{\partial x}{\partial z}$ jest tangensem kąta stycznej z osią z .

Dla punktu m linii wygięcia, który przed wygięciem był oddalony o z od początku współrzędnych, otrzymujemy na moment wzór:

$$M = P(L - z),$$

gdzie L jest długością AB graniastostupa. Mamy zatem równanie:

$$IE \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = P(L - z) \dots \dots \dots (271).$$

Mnożymy je przez ∂z i całkując w granicach od zera do z , otrzymujemy:

$$IE \frac{\partial x}{\partial z} = P \left(Lz - \frac{z^2}{2} \right) \dots \dots \dots (272).$$

Zapomocą tego równania oznaczamy tangens kąta z osią z stycznej do linii wygięcia w każdym jej punkcie. Całkowanie dalsze równania (272) w tychże granicach daje:

$$IE x = P \left(L \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) \dots \dots \dots (273).$$

Jest to równanie przybliżone linii wygięcia AB w danym przypadku. Krzywa ta jest *parabolą sześcienną*. Największa rzędna tej krzywej nazywa się *strzałką wygięcia* albo *ugięciem* i oznacza się zwykle literą f . Ugięcie otrzymujemy z równania (273), przyjmując w niem $z = L$:

$$f = \frac{PL^3}{3IE} \dots \dots \dots (274).$$

Zauważmy, że moment $M = P(L - z)$ osiąga maximum w osadzonej nieruchomo podstawie A graniastostupa, skutkiem czego podstawa ta w danym przypadku nazywa się *przekrojem niebezpiecznym*. Dla tego przekroju:

$$M_{\max} = PL \dots \dots \dots (275).$$

Wreszcie $-\frac{\partial M}{\partial z} = P$ jest ilością stałą, co oznacza, że siła ścinająca P jest we wszystkich przekrojach graniastostupa jednakowa.

57. Wyginanie następuje pod obciążeniem Q , rozłożonem równomiernie na całej długości L graniastostupa. Gdy obciążenie Q rozłożone jest równomiernie na całej długości L , przypada na każdą jednostkę długości graniastostupa obciążenie $\frac{Q}{L}$, a na część mB (rys. 9), której długość możemy przyjąć za równą $L - z$, przypada obciążenie $\frac{Q}{L}(L - z)$. A ponieważ odległość punktu przyczepienia tej siły od punktu m linii wygięcia jest $\frac{1}{2}(L - z)$, przeto na moment względem punktu m mamy:

$$M = \frac{Q(L - z)^2}{2L} \dots \dots \dots (276).$$

Stąd otrzymujemy równanie:

$$IE \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{Q(L-z)^2}{2L} = \frac{Q}{2L} (L^2 - 2Lz + z^2).$$

Całkując to równanie dwukrotnie, za każdym razem w granicach od $z = 0$ do $z = z$, i uwzględniając, że przy $z = 0$ musi być $\frac{\partial x}{\partial z} = 0$ i $x = 0$, otrzymamy:

$$IE \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{Q}{2L} \left(L^2 z - Lz^2 + \frac{z^3}{3} \right) \dots \dots \dots (277)$$

$$IE x = \frac{Q}{2L} \left(L^2 \frac{z^2}{2} - L \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{12} \right) \dots \dots \dots (278).$$

Przyjmijmy w ostatnim równaniu $z = L$, to na ugięcie f otrzymamy wzór:

$$f = \frac{QL^3}{8IE} \dots \dots \dots (279).$$

Przekrojem niebezpiecznym będzie, jak i w przypadku poprzednim, podstawa osadzona nieruchomo i dla tego przekroju:

$$M_{\max} = \frac{1}{2} QL \dots \dots \dots (280).$$

Wreszcie do oznaczenia siły, wywołującej przesuwanie, mamy:

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{Q(L-z)}{L}. \text{ Siła ta jest więc w różnych przekrojach różnaita.}$$

Największą swą wartość, wynoszącą Q , siła ta osiąga w przekroju niebezpiecznym.

58. Wyginanie wywołują dwie siły równoległe do osi x , z których jedna P' działa w odległości a od podstawy osadzonej, a druga P działa w końcu swobodnym. W takim przypadku linia wygięcia składa się z dwóch części, posiadających swe oddzielne równania. Część pierwsza rozciąga się od podstawy osadzonej do punktu przyczepienia siły P' , część druga zaś od tego punktu do końca swobodnego.

Warunki wyginania części pierwszej są wyznaczone równaniami następującymi, w których odciętej z można nadawać wartości od 0 do a włącznie:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= IE \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = P'(a-z) + P(L-z) \\ IE \frac{\partial x}{\partial z} &= P' \left(az - \frac{z^2}{2} \right) + P \left(Lz - \frac{z^2}{2} \right) \\ IE x &= P' \left(a \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + P \left(L \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots (281).$$

Warunki wyginania części drugiej są wyznaczone równaniami:

$$M_2 = IE \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = P(L - z)$$

$$IE \frac{\partial x}{\partial z} = P \left(Lz - \frac{z^2}{2} \right) + C$$

$$IE x = P \left(\frac{Lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + Cz + C'.$$

Stałe dowolne C i C' można oznaczyć z warunku, że obie powyżej wspomniane części linii wygięcia mają jeden punkt wspólny, a mianowicie punkt przyczepienia siły P' , dla którego $z = a$. Wartości więc $\frac{\partial x}{\partial z}$ i x , odpowiadające temu punktowi, można otrzymać bądź z równań ostatnich, bądź też z równań (281) dla części pierwszej, przyjmując w nich $z = a$. Otrzymujemy wówczas:

$$P' \frac{a^2}{2} + P \left(La - \frac{a^2}{2} \right) = P \left(La - \frac{a^2}{2} \right) + C \quad \text{i}$$

$$P' \frac{a^3}{3} + P \left(L \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{6} \right) = P \left(L \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{6} \right) + Ca + C'.$$

Stąd:

$$C = P' \frac{a^2}{2} \quad \text{i} \quad C' = -P' \frac{a^3}{6}.$$

Równania więc części drugiej są:

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= IE \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = P(L - z) \\ IE \frac{\partial x}{\partial z} &= P \left(Lz - \frac{z^2}{2} \right) + \frac{1}{2} P' a^2 \\ IE x &= P \left(L \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + \frac{1}{2} P' a^2 z - \frac{1}{6} P' a^3 \end{aligned} \right\} \dots (282).$$

W tych równaniach odcięta z może przyjmować wartości od a do L włącznie.

Na ugięcie f otrzymamy z równania ostatniego, przyjmując w niem $z = L$, wzór:

$$f = \frac{PL^3}{3IE} + \frac{P'}{IE} \left(L \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{6} \right) \dots (283).$$

Wyprowadzone powyżej wzory stosują się do przypadku, gdy obie siły P i P' są skierowane w stronę dodatniej osi x -ów. Natomiast, gdy jedna z tych sił, np. P' , jest skierowana ku ujemnej osi x -ów, należy we wzorach zastąpić P' przez $-P'$. W tym przypadku część pierwsza krzywej może mieć punkt zwrotny, dla którego moment M_1 równy jest zeru.

Odciętą z tego punktu otrzymamy z równania: $P(L-z) - P'(a-z) = 0$, z którego wynika:

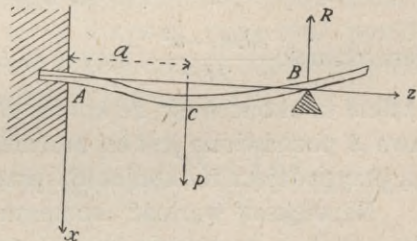
$$z = \frac{P'a - PL}{P' - P} \dots \dots \dots (284).$$

Ażeby jednak punkt zwrotny istniał w rzeczywistości, odcięta z , oznaczona z równania (284), musi być mniejsza od a , co może nastąpić tylko, gdy P' jest większe od $P \frac{L}{a}$.

Bez względu na to, czy siły P i P' są skierowane w jedną stronę, czy w strony przeciwne, przekrojem niebezpiecznym będzie albo podstawa osadzona, albo przekrój, dla którego $z = a$, zależnie od tego, dla którego z tych dwóch przekrojów wielkość liczebna (niezależnie od znaku) momentu jest większa.

II. Jeden koniec graniastosłupa jest osadzony nieruchomo, drugi zaś jest podparty.

59. Wyginanie wywołuje siła P , działająca w odległości a od końca osadzonego (rys. 10). Zakładamy, że środek ciężkości przekroju podpartego B nie może podlegać posunięciom postępowym, lecz że sam przekrój może się swobodnie obracać. Ponieważ zapobiedz posunięciom postępowym punktu B możemy przez działanie na ten punkt pewnej siły, przeto możemy działanie podpory na ten punkt zastąpić siłą R , którą nazywamy *oddziaływaniami* albo *odporem* (*reakcją*) w przekroju podpartym.



Rys. 10.

To oddziaływanie musi być normalną do krzywej, którą tworzy oś graniastosłupa po wygięciu; skoro jednak wygięcie uważamy za nieznaczne, to siłę tę możemy zawsze uważać za prostopadłą do osi z , t. j. do kierunku osi graniastosłupa przed wygięciem.

Oczywiście, gdy przyjmiemy, że siła P i oddziaływanie R są prostopadłe do osi z , to wyginanie graniastosłupa w danym przypadku będzie oznaczone wzorami (281) i (282), po zastąpieniu w nich P' przez P i P przez $-R$.

Mamy więc w tym przypadku: dla części AC :

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= P(a-z) - R(L-z) \\ I E \frac{\partial x}{\partial z} &= P\left(az - \frac{z^2}{2}\right) - R\left(Lz - \frac{z^2}{2}\right) \\ I E x &= P\left(a \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) - R\left(L \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) \end{aligned} \right\} \dots (285)$$

i dla części CB :

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= -R(L-z) \\ IE \frac{\partial x}{\partial z} &= -R \left(Lz - \frac{z^2}{2} \right) + \frac{1}{2} P a^2 \\ IE x &= -R \left(L \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + \frac{1}{2} P a^2 z - \frac{1}{6} P a^3 \end{aligned} \right\} \dots (286).$$

Ponieważ rzędna punktu B równa jest zeru, więc z ostatniego równania, gdy przyjmiemy w niem $z = L$, otrzymamy wzór na oddziaływanie:

$$R = P \left(\frac{a}{L} \right)^2 \frac{3L-a}{2L} = P \frac{a}{L} \cdot \frac{3La-a^2}{2L^2} \dots (287).$$

Gdyby koniec A , podobnie jak koniec B , był podparty, nie zaś osadzony nieruchomo, to moglibyśmy oddziaływanie R oznaczyć według zasad statyki, rozkładając siłę P na dwie siły równoległe, działające w punktach A i B . Wówczas otrzymalibyśmy jako oddziaływanie:

$R = P \frac{a}{L}$. W przypadku natomiast rozważanym, jak widzimy z wzoru (287), oddziaływanie w punkcie B jest mniejsze od $P \frac{a}{L}$, albo-

wiem ułamek $\frac{3La-a^2}{2L^2}$, gdy $a < L$, jest zawsze mniejszy od jedności.

A zatem ta okoliczność, że koniec B może się swobodnie obracać, a podstawa A pozbawiona jest tej możności, jest przyczyną, że część ciśnienia, przypadająca na koniec B , przechodzi na koniec A .

Największą wartość momentu w części pierwszej otrzymujemy gdy $z = 0$, a w części drugiej gdy $z = a$. Wartości tych momentów są:

$$\begin{aligned} (M_1)_{\max} &= Pa \left[1 - \frac{3La-a^2}{2L^2} \right]; \\ (M_2)_{\max} &= -Pa \cdot \frac{3La-a^2}{2L^2} \cdot \frac{L-a}{L} \dots (288). \end{aligned}$$

Zakładając, że moment M_1 części pierwszej jest równy zeru, otrzymujemy odcięta z_1 punktu zwrotnego:

$$z_1 = a \frac{1 - \frac{3La-a^2}{2L^2}}{1 - \frac{a}{L} \frac{3La-a^2}{2L^2}}, \text{ co jest zawsze } < a \dots (289).$$

Gdy $a = \frac{1}{2} L$, otrzymujemy:

$$R = \frac{5}{8} \frac{P}{2}, \quad (M_1)_{\max} = \frac{3}{16} PL, \quad (M_2)_{\max} = -\frac{5}{32} PL \quad \text{i} \quad z_1 = \frac{3}{11} L.$$

A zatem w tym przypadku przekrojem niebezpiecznym jest podstawa osadzona nieruchomo.

60. Wyginanie następuje pod obciążeniem Q , rozłożonem równomiernie na całej długości graniastostłupa. Jeżeli i w tym przypadku oznaczymy oddziaływanie w końcu podpartym przez R , to na wyginanie otrzymamy wzory:

$$\left. \begin{aligned} M &= IE \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{Q}{2L} (L-z)^2 - R(L-z) \\ IE \frac{\partial x}{\partial z} &= \frac{Q}{2L} \left[L^2 z - Lz^2 + \frac{z^3}{3} \right] - R \left(Lz - \frac{z^2}{2} \right) \\ IE x &= \frac{Q}{2L} \left[L^2 \frac{z^2}{2} - L \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{12} \right] - R \left(L \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) \end{aligned} \right\} \dots (290).$$

Skoro w równaniu ostatniem przyjmiemy $z=0$ i $x=0$, to otrzymamy równanie, z którego oznaczymy oddziaływanie R :

$$R = \frac{3}{8} Q \dots \dots \dots (291).$$

Przekrojem niebezpiecznym jest przekrój osadzony, dla którego jest:

$$M_{\max} = \frac{1}{8} QL \dots \dots \dots (292).$$

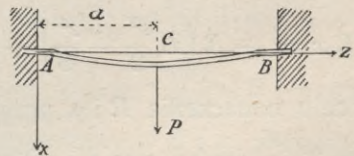
W miarę oddalania się od początku współrzędnych, moment M stopniowo zmniejsza się i dla $z = \frac{1}{4} L$ staje się równym zeru. A zatem odcięta $z = \frac{1}{4} L$ wyznacza punkt zwrotny krzywej; poza tym punktem moment staje się ujemnym, a wartość jego liczebna rośnie do punktu $z = \frac{5}{8} L$, gdzie wartość ta jest największą i równą $\frac{9}{128} QL$. Ale to drugie maximum jest mniejsze od pierwszego.

Największa rzędna odpowiada odciętej $z = \frac{15 - \sqrt{33}}{16} L = 0,578 L$.

III. Oba końce graniastostłupa osadzone są nieruchomo.

61. Wyginanie wywołuje siła P , działająca w odległości a od końca A .

Ponieważ koniec B (rys. 11) nie może teraz wykonywać ruchów ani postępowych, ani obrotowych, przeto oddziaływanie w tym końcu musi składać się z siły R , znoszącej ruch postępowy w kierunku osi x , i z pary sił o pewnym momencie μ , znoszącej ruch obrotowy przekroju B . Płaszczyzna tej pary zlewa się z płaszczyzną (zx).



Rys. 11.

Ilości R i μ nie są nam wiadome; wiemy natomiast, że w punkcie B linii wygięcia styczna pada na oś z i że rzędna tego punktu równa jest zeru, czyli, że przy $z=L$ mamy $x=0$ i $\frac{\partial x}{\partial z} = 0$.

Warunki wyginania części pierwszej AC są oznaczone przez równania:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= IE \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = P(a-z) - R(L-z) + \mu \\ IE \frac{\partial x}{\partial z} &= P\left(az - \frac{z^2}{2}\right) - R\left(Lz - \frac{z^2}{2}\right) + \mu z \\ IE x &= P\left(a\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) - R\left(L\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) + \mu \frac{z^2}{2} \end{aligned} \right\} \dots (293),$$

części zaś drugiej *CB* przez równania:

$$\begin{aligned} M_2 &= IE \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -R(L-z) + \mu \\ IE \frac{\partial x}{\partial z} &= -R\left(Lz - \frac{z^2}{2}\right) + \mu z + C \\ IE x &= -R\left(L\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) + \mu \frac{z^2}{2} + Cz + C' \end{aligned}$$

W celu oznaczenia stałych *C* i *C'*, wprowadzonych przy całkowaniu, przyjmujemy zarówno w tych ostatnich równaniach jak i w równaniach (293) $z = a$ i zrównujemy ze sobą wartości otrzymane na $\frac{\partial x}{\partial z}$ i na *x*. W ten sposób otrzymamy dwa równania o dwóch niewiadomych *C* i *C'*, z których znajdziemy:

$$C = \frac{1}{2} Pa^2 \quad \text{i} \quad C' = -\frac{1}{6} Pa^3.$$

Równania dla części *CB* przyjmują więc postać:

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= IE \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -R(L-z) + \mu \\ IE \frac{\partial x}{\partial z} &= -R\left(Lz - \frac{z^2}{2}\right) + \mu z + \frac{1}{2} Pa^2 \\ IE x &= -R\left(L\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) + \mu \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2} Pa^2 z - \frac{1}{6} Pa^3 \end{aligned} \right\} \dots (294).$$

W celu oznaczenia *R* i μ przyjmujemy w ostatnich dwóch równaniach $x = 0$, $\frac{\partial x}{\partial z} = 0$ i $z = L$. Otrzymamy wówczas dwa równania:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} RL^2 + \mu L + \frac{1}{2} Pa^2 &= 0 \\ -\frac{1}{3} RL^3 + \frac{1}{2} \mu L^2 + \frac{1}{2} Pa^2 L - \frac{1}{6} Pa^3 &= 0, \end{aligned}$$

z których oznaczamy *R* i μ :

$$R = P \frac{3La^2 - 2a^3}{L^3} \quad \text{i} \quad \mu = P \frac{La^2 - a^3}{L^2} = P \left(\frac{a}{L}\right)^2 (L-a) \dots (295).$$

Mając te wartości na *R* i μ , z łatwością znajdziemy:

$$\left. \begin{array}{l} \text{w punkcie } A: \\ \text{,, } B: \\ \text{,, } C: \end{array} \right\} \begin{array}{l} M_{\max} = Pa \left(\frac{L-a}{L} \right)^2 \\ M_{\max} = \mu = P(L-a) \left(\frac{a}{L} \right)^2 \\ M_{\max} = -2PL \left(\frac{a}{L} \right)^2 \left(\frac{L-a}{L} \right)^2 \end{array} \dots (296).$$

Linia wygięcia ma dwa punkty zwrotne, których odcięte są:

$$z_1 = a \frac{L}{L+2a} \quad \text{i} \quad z_2 = L \frac{2L-a}{3L-2a} \dots (297).$$

W przypadku szczególnym, gdy $a = \frac{1}{2}L$, otrzymamy:

$$R = \frac{1}{2}P, \quad \mu = \frac{1}{8}PL, \quad z_1 = \frac{1}{4}L, \quad z = \frac{3}{4}L.$$

Największa rzędna, czyli ugięcie f , będzie w tym punkcie, którego odcięta $z = \frac{1}{2}L$. Na ugięcie otrzymujemy równanie:

$$IEf = \frac{1}{192} PL^3 \dots (298).$$

W tym przypadku szczególnym przekroje końcowe i przekrój środkowy są jednakowo niebezpieczne. Dla każdego z tych przekrojów wartość liczebna momentu M jest równa $\frac{1}{8}PL$.

62. Wyginanie następuje pod obciążeniem Q , rozłożonem równomiernie na całej długości. W tym przypadku warunki wyginania są oznaczone przez równania:

$$\begin{aligned} M &= IE \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{Q}{2L} (L-z)^2 - R(L-z) + \mu \\ IE \frac{\partial x}{\partial z} &= \frac{Q}{2L} \left(L^2 z - Lz^2 + \frac{z^3}{3} \right) - R \left(Lz - \frac{z^2}{2} \right) + \mu z \\ IE x &= \frac{Q}{2L} \left(L^2 \frac{z^2}{2} - L \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{12} \right) - R \left(L \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + \mu \frac{z^2}{2}. \end{aligned}$$

Przyjmując w dwóch ostatnich równaniach $x=0$, $\frac{\partial x}{\partial z} = 0$ i $z=L$, otrzymamy dwa równania o dwóch niewiadomych R i μ . Z równań tych znajdziemy:

$$R = \frac{1}{2}Q \quad \text{i} \quad \mu = \frac{1}{12}QL \dots (299).$$

Wobec tego otrzymamy równania:

$$\left. \begin{array}{l} M = \frac{Q}{12L} (L^2 - 6Lz + 6z^2) \\ IE \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{Q}{12L} (L^2 z - 3Lz^2 + 2z^3) \\ IE x = \frac{Q}{12L} \left(L^2 \frac{z^2}{2} - Lz^3 + \frac{z^4}{2} \right) \end{array} \right\} \dots (300).$$

$$M_{\max} = \frac{QL}{12} \text{ (gdy } z=0 \text{ i } \text{ gdy } z=L).$$

Linia wygięcia ma dwa punkty zwrotne, których odcięte są:

$$z_1 = (1 - \sqrt{\frac{1}{3}}) \frac{L}{2} = 0,2113 L$$

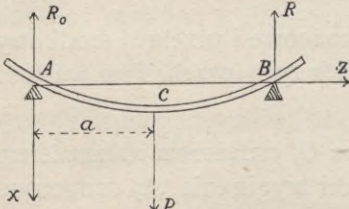
$$z_2 = (1 + \sqrt{\frac{1}{3}}) \frac{L}{2} = 0,7886 L.$$

Wreszcie, największą rzędną, czyli ugięcie f , otrzymujemy z równania:

$$IE f = \frac{QL^3}{384} \text{ (przy } z = \frac{1}{2} L).$$

IV. Oba końce graniastosłupa są podparte swobodnie.

63. Wyginanie wywołuje siła P , działająca w odległości a od podpory pierwszej A (rys. 12). W tym przypadku oddziaływania R_0 i R w przekrojach podpartych A i B mogą być oznaczone podług zasad statyki, a mianowicie mamy:



Rys 12.

$$R = P \frac{a}{L} \text{ i } R_0 = P \frac{L-a}{L} \dots (301).$$

Dla przekroju dowolnego części pierwszej AC , moment M_1 jest:

$$M_1 = IE' \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = P(a-z) - R(L-z) = -R_0 z = -P \frac{L-a}{L} z \dots (302).$$

Oznaczając przez α kąt, jaki z osią z tworzy styczna do linii wygięcia w punkcie A , czyli gdy $z=0$, $\frac{\partial x}{\partial z} = \text{tg } \alpha$, i całkując równanie (302), otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} IE \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \text{tg } \alpha \right) &= -P \frac{L-a}{L} \frac{z^2}{2} \\ IE (x - z \cdot \text{tg } \alpha) &= -P \frac{L-a}{L} \frac{z^3}{6} \end{aligned} \right\} \dots (303).$$

W przekroju dowolnym części drugiej CB , moment M_2 jest:

$$M_2 = IE \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -R(L-z) = -P \frac{a}{L} (L-z) \dots (304).$$

Całkując to równanie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} IE \frac{\partial x}{\partial z} &= -P \frac{a}{L} \left(Lz - \frac{z^2}{2} \right) + C \\ IE x &= -P \frac{a}{L} \left(L \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + Cz + C'. \end{aligned}$$

Z tych ostatnich równań na $\frac{\partial x}{\partial z}$ i na x , na punkty C linii wygięcia powinniśmy otrzymać takie same wartości jak z równań (303), a więc:

$$C = IE \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2} P a^2 \quad \text{i} \quad C' = -\frac{1}{6} P a^3 .$$

Równania warunków wyginania części CB , przyjmują wobec tego postać:

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= -P \frac{a}{L} (L-z) \\ IE \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \operatorname{tg} \alpha \right) &= -P \frac{a}{L} \left(Lz - \frac{z^2}{2} \right) + \frac{1}{2} P a^2 \\ IE (x - z \operatorname{tg} \alpha) &= -P \frac{a}{L} \left(L \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + \frac{1}{2} P a^2 z - \frac{1}{6} P a^3 \end{aligned} \right\} \dots (305).$$

Jeżeli w tem ostatniem równaniu przyjmiemy $z = L$ i $x = 0$, to otrzymamy równanie na $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Pa(L-a)(2L-a)}{6IE L} \dots (306).$$

Z przedostatniego równania grupy (305) otrzymamy, przy $z = L$, na $\operatorname{tg} \beta$, gdzie β jest kątem, który tworzy z osią z styczna do linii wygięcia w punkcie B :

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{Pa(L-a)(L+a)}{6IE L} \dots (307).$$

Największą wartość osiąga moment w przekroju, dla którego odcięta $z = a$:

$$M_{\max} = -\frac{P}{L} a (L-a) \dots (308).$$

Wartość ujemna momentu wskazuje, że promień krzywizny linii wygięcia jest skierowany w stronę przeciwną aniżeli siła P .

W przypadku szczególnym, gdy $a = \frac{1}{2} L$, otrzymamy:

$$R_0 = R = \frac{1}{2} P, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta = \frac{PL^2}{16IE}, \quad M_{\max} = -\frac{PL}{4} \dots (309).$$

W tym przypadku rzędna największa, czyli ugięcie f , odpowiada punktowi, leżącemu w środku długości, przyczem:

$$f = \frac{PL^3}{48IE} = \frac{\frac{1}{2} P \left(\frac{L}{2} \right)^3}{3IE} \dots (310).$$

64. Wyginanie powstaje pod obciążeniem Q , rozłożonem równomiernie na całej długości. W tym przypadku oddziaływania $R_0 = R = \frac{1}{2} Q$, a warunki wyginania są oznaczone przez równania:

$$\left. \begin{aligned} IE \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} &= \frac{Q}{2L} (L-z)^2 - \frac{Q}{2} (L-z) \\ IE \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \operatorname{tg} \alpha \right) &= \frac{Q}{2L} \left(L^2 z - Lz^2 + \frac{z^3}{3} \right) - \frac{Q}{2} \left(Lz - \frac{z^2}{2} \right) \\ IE (x - z \operatorname{tg} \alpha) &= \frac{Q}{2L} \left(L^2 \frac{z^2}{2} - L \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{12} \right) - \frac{Q}{2} \left(L \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) \end{aligned} \right\} \dots (311).$$

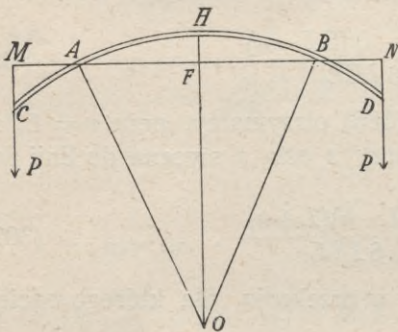
Z dwóch ostatnich równań, przy $z = L$ i $x = 0$, otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} \alpha = - \operatorname{tg} \beta = \frac{QL^2}{24 IE} \dots \dots \dots (312).$$

Przy $z = \frac{1}{2} L$ otrzymamy:

$$M_{\max} = - \frac{QL}{8} \quad \text{i} \quad f = \frac{5}{384} \frac{QL^3}{IE} \dots \dots \dots (313).$$

65. Wygięcie Lamarle'a. W celu oznaczenia współczynnika E



Rys. 13.

sprężystości podłużnej zapomocą doświadczenia, Lamarle zastosował wygięcie, przedstawione na rys. 13. W tym przypadku punkty podparcia A i B belki leżą na jednej prostej poziomej w odległościach jednakowych od końców belki C i D , na które działają siły równe P i P . Oczywiście, oddziaływanie w każdym punkcie podparcia jest P , a wobec tego moment sił, odniesiony do punktu

dowolnego części AB linii wygięcia, jest ilością stałą równą Pa , gdzie $a = AM$ i $a = BN$. To też AB jest łukiem kołowym, którego promień:

$$\rho = \frac{IE}{Pa} \dots \dots \dots (314).$$

Skoro oznaczymy długość AB przez $2b$, to otrzymamy na ugięcie $f = HF$ równanie $(2\rho - f)f = b^2$, z którego po podstawieniu za ρ jego wartości, otrzymamy:

$$E = \frac{Pa}{2I} \cdot \frac{b^2 + f^2}{f} \dots \dots \dots (315).$$

Ponieważ a , b , f i wymiary przekroju danego graniastosłupa mogą być oznaczone zapomocą pomiarów bezpośrednich, przeto wzór ostatni może służyć do oznaczenia współczynnika sprężystości E .

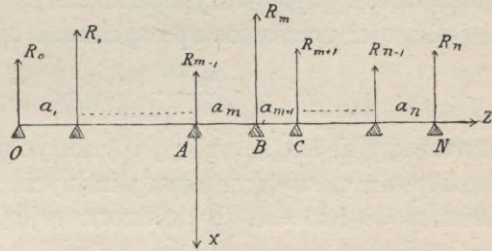
Ten przypadek wyginania daje bardzo ściśle wartości współczynnika sprężystości. Rzeczywiście, uwzględniając, że wszystkie ciała uchy-

biają więcej lub mniej jednolitości (izotropii) budowy, możemy zapomocą doświadczeń oznaczać tylko wartości średnie współczynnika sprężystości, a wskutek tego najkorzystniej jest posiłkować się takim odkształceniem graniastosłupa, przy którym wszystkie przekroje znajdują się w warunkach jednakowych. Przypadek Lamarle'a czyni zadość temu warunkowi dla wszystkich przekrojów części AB . Nadto, wzory nasze na wyginanie były wyprowadzone w przypuszczeniu, że przekroje pozostają płaskimi, co wogóle jest sprzeczne z rzeczywistością, gdy tymczasem w danym przypadku przekroje części AB ściśle odpowiadają temu warunkowi. Wreszcie, wzory nasze dają równanie przybliżone linii wygięcia, gdy tymczasem w przypadku Lamarle'a znamy zupełnie dokładne równanie tej krzywej i wskutek tego otrzymujemy zupełnie dokładny wzór na ugięcie f .

V. Graniastosłup ma więcej niż dwa punkty podparcia, leżące na jednej prostej.

66. Twierdzenie o trzech momentach. Przypuśćmy, że graniastosłup ma n przęseł, czyli że opiera się na $n+1$ podporach. Oznaczmy oddziaływania w przekrojach podpartych kolejno przez R_0, R_1, \dots i R_n (rys. 14), a długości przęseł przez a_1, a_2, \dots i a_n .

Przyjmijmy, że wyginanie wywołują obciążenia rozłożone równomiernie na każdym z przęseł i że na jednostkę długości każdego z tych przęseł przypadają obciążenia równe kolejno q_1, q_2, \dots i q_n . Wreszcie, momenty względem każdego z przekrojów podpartych niech będą μ_0, μ_1, \dots i μ_n .



Rys. 14.

Z tych momentów μ_0 i μ_n są równe zero, gdy końce O i N (rys. 14) są podparte swobodnie; natomiast momenty te będą ilościami niewiadomymi gdy końce rzeczzone będą osadzone nieruchomo.

W celu otrzymania równań, wyznaczających warunki wyginania, przyjmujemy początek m -tego przęsła, t. j. punkt A , za początek współrzędnych i przenosimy wszystkie siły, działające na część BN , do przekroju podpartego B . Wtedy w tym przekroju otrzymamy pewną siłę P_m i pewną parę sił, której moment jest równy μ_m . Siła P_m będzie:

$$P_m = q_{m+1} a_{m+1} + q_{m+2} a_{m+2} + \dots + q_n a_n - (R_m + R_{m+1} + \dots + R_n) \dots \dots \dots (a).$$

Także siła w następnym przekroju podpartym C będzie:

$$P_{m+1} = q_{m+2} a_{m+2} + \dots + q_n a_n - (R_{m+1} + \dots + R_n), \text{ więc}$$

$$P_m - P_{m+1} = q_{m+1} a_{m+1} - R_m \dots \dots \dots (b).$$

Dla momentu μ_{m-1} w przekroju A mamy teraz:

$$\mu_{m-1} = \mu_m + \frac{1}{2} q_m a_m^2 + P_m a_m, \text{ skąd}$$

$$P_m = \frac{\mu_{m-1} - \mu_m}{a_m} - \frac{1}{2} q_m a_m \dots \dots \dots (c)$$

$$P_{m+1} = \frac{\mu_m - \mu_{m+1}}{a_{m+1}} - \frac{1}{2} q_{m+1} a_{m+1}, \text{ więc}$$

$$P_m - P_{m+1} = \frac{\mu_{m-1} - \mu_m}{a_m} - \frac{\mu_m - \mu_{m+1}}{a_{m+1}} + \frac{1}{2} q_{m+1} a_{m+1} - \frac{1}{2} q_m a_m.$$

Ostatnie równanie wraz z równaniem (b) daje:

$$R_m = \frac{1}{2} (q_m a_m + q_{m+1} a_{m+1}) + \frac{\mu_m - \mu_{m+1}}{a_{m+1}} + \frac{\mu_m - \mu_{m-1}}{a_m} \dots \dots (316).$$

Wzór ten wskazuje, że oddziaływania podpór nie mogą być oznaczone przez rozłożenie każdego z obciążeń, zgodnie z zasadami statyki, na dwie składowe, ponieważ te oddziaływania zależą nietylko od obciążeń, lecz i od momentów μ . Tylko w dwóch przypadkach możnaby oznaczyć oddziaływania przez rozkład każdego z obciążeń na dwie składowe, a mianowicie: gdyby wszystkie momenty μ były równe, albo gdyby na całej długości graniastostupa spełnione było równanie:

$$\frac{\mu_m - \mu_{m+1}}{a_{m+1}} + \frac{\mu_m - \mu_{m-1}}{a_m} = 0 \dots \dots (317).$$

Zaznaczamy nadto, że wzór (316) służyć może do oznaczenia wszystkich oddziaływań za wyłączeniem skrajnych, ponieważ, jeżeli przyjmiemy w nim $m=0$ i $m=n$, to do wzoru wejdą ilości nieistniejące a_0 , a_{n+1} , μ_{-1} i μ_{n+1} .

Oddziaływania R_0 i R_n można oznaczyć z równań następujących, wpływających bezpośrednio z rysunku 14:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2} q_1 a_1^2 + \mu_0 - R_0 a_1 \\ \mu_{n-1} &= \frac{1}{2} q_n a_n^2 + \mu_n - R_n a_n \end{aligned} \right\} \dots \dots (318),$$

gdzie μ_0 i μ_n są równe zeru, gdy końce są podparte swobodnie.

Do wyznaczenia warunków wyginania w przeszle m -tem mamy teraz wzory:

$$\left. \begin{aligned} IE \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} &= \frac{1}{2} q_m (a_m - z)^2 + P_m (a_m - z) + \mu_m \\ IE \frac{\partial x}{\partial z} &= \frac{1}{2} q_m \left(a_m^2 z - a_m z^2 + \frac{z^3}{3} \right) + P_m \left(a_m z - \frac{z^2}{2} \right) + \mu_m z + C_m \\ IE x &= \frac{1}{2} q_m \left(a_m^2 \frac{z^2}{2} - a_m \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{12} \right) + P_m \left(a_m \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + \mu_m \frac{z^2}{2} + C_m z \end{aligned} \right\} (319).$$

W tych równaniach można zmieniać z tylko w granicach od 0 do a_m włącznie.

Jeżeli wprowadzimy warunek, że przy $z = a_m$ rzędna $x = 0$, to otrzymamy na stałą C_m wzór:

$$C_m = -a_m \left(\frac{1}{8} q_m a_m^2 + \frac{1}{3} P_m a_m + \frac{1}{2} \mu_m \right) \dots \quad (d).$$

Jeżeli kąty stycznej z osią z na początku i na końcu przęsła m -tego oznaczymy przez α_{m-1} i α_m , to drugie z równań (319) da:

$$IE \operatorname{tg} \alpha_{m-1} = C_m$$

$$IE \operatorname{tg} \alpha_m = \frac{1}{6} q_m a_m^3 + \frac{1}{2} P_m a_m^2 + \mu_m a_m + C_m.$$

Podstawiając tu za P_m i C_m ich wartości z równań (d) i (c), otrzymamy:

$$IE \operatorname{tg} \alpha_{m-1} = \frac{1}{24} q_m a_m^3 - \frac{1}{6} (\mu_m + 2\mu_{m-1}) a_m \dots \quad (e)$$

$$IE \operatorname{tg} \alpha_m = -\frac{1}{24} q_m a_m^3 + \frac{1}{6} (\mu_{m-1} + 2\mu_m) a_m \dots \quad (f).$$

Powiększając we wzorze (e) wskaźnik m o jedność i porównyując osiągnięty wynik z wzorem (f), otrzymamy równanie:

$$a_m \mu_{m-1} + 2(a_m + a_{m+1}) \mu_m + a_{m+1} \mu_{m+1} = \frac{1}{4} (q_m a_m^3 + q_{m+1} a_{m+1}^3) \dots \quad (320).$$

To ostatnie równanie, wyprowadzone przez Bertot'a, wyrażające związek pomiędzy trzema momentami, odpowiadającymi trzem podporom sąsiednim, stanowi *twierdzenie o trzech momentach*.

Skoro w równaniu (320) nadawać będziemy wskaźnikowi m wszystkie wartości od 1 do $n-1$ włącznie, to otrzymamy $n-1$ równań, z których oznaczymy wszystkie momenty, o ile $\mu_0 = \mu_n = 0$, t. j. gdy końce graniastosłupa są swobodnie podparte. Jeżeliby natomiast końce były osadzone, musielibyśmy do $n-1$ równań, otrzymanych z twierdzenia Bertot'a, dołączyć dwa równania, wynikające z warunku, że $\alpha_0 = \alpha_n = 0$. Te ostatnie równania otrzymać można z równań (e) i (f), przyjmując w pierwszym $m=1$, w drugim zaś $m=n$. Równania te są:

$$2\mu_0 + \mu_1 = \frac{1}{4} q_1 a_1^2 \quad \text{i} \quad 2\mu_n + \mu_{n-1} = \frac{1}{4} q_n a_n^2 \dots \quad (321).$$

Jeżeliby jeden z końców, np. pierwszy, był osadzony nieruchomo, drugi zaś podparty swobodnie, to należałoby w równaniach Bertot'a przyjąć $\mu_n = 0$ i do równań tych dołączyć pierwsze z równań (321).

Stąd widzimy, że rozwiązanie zagadnienia dotyczącego wyginania belki, leżącej na wielu podporach, sprowadza się do rozwiązania równań, wypływających z twierdzenia Bertot'a. Gdy liczba przęseł jest niewielka, rozwiązanie tych równań, jako równań stopnia pierwszego, nie przedstawia trudności, gdy natomiast liczba przęseł jest znaczna, rozwiązanie rzeczonych równań może być zmusne.

Równanie (320) jest to właściwie *równanie liniowe różnicowe drugiego rzędu*. Celem wyprowadzenia z niego wzoru ogólnego na μ_m należy to równanie całkować, co jednak jest możebne tylko w niewielu przypadkach szczególnych.

67. Przęsła jednakowej długości i jednakowo obciążone. W tym przypadku należy przyjąć:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = a \quad \text{i} \quad q_1 = q_2 = \dots = q_n = q .$$

Wobec tego z równania (320) wynika:

$$\mu_{m-1} + 4\mu_m + \mu_{m+1} = \frac{1}{2}qa^2 = h ,$$

czyli, gdy m powiększymy o jedność:

$$\mu_m + 4\mu_{m+1} + \mu_{m+2} = \frac{1}{2}qa^2 = h \quad \dots \quad (322).$$

To ostatnie równanie, o stałych współczynnikach (niezależnych od m), możemy spełnić, przyjmując:

$$\mu_m = \frac{1}{6}h + Ck^m + C'k'^m \quad \dots \quad (323),$$

gdzie k i k' są pierwiastkami równania następującego:

$$x^2 + 4x + 1 = 0 \quad \dots \quad (324),$$

a C i C' są ilościami stałymi dowolnymi.

Istotnie, z równania (323) wynika:

$$\mu_{m+1} = \frac{1}{6}h + Ck^{m+1} + C'k'^{m+1} \quad \text{i}$$

$$\mu_{m+2} = \frac{1}{6}h + Ck^{m+2} + C'k'^{m+2} ,$$

z równania zaś (322) otrzymujemy:

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)h + Ck^m(1 + 4k + k^2) + C'k'^m(1 + 4k' + k'^2) = h ,$$

czyli otrzymujemy tożsamość $h=h$, z powodu, że k i k' są pierwiastkami równania (324).

Do oznaczenia stałych C i C' musimy znać warunki, w jakich znajdują się końce belki.

Przypuśćmy, że końce te są podparte swobodnie. Wtedy $\mu_0 = \mu_n = 0$; przyjmując więc w rozwiązaniu (323) $m=0$ i $m=n$ i uwzględniając, że iloczyn $kk'=1$, czyli $k'=k^{-1}$, otrzymamy:

$$C + C' = -\frac{h}{6} \quad \text{i} \quad Ck^n + C'k^{-n} = -\frac{h}{6} .$$

Stąd:

$$C = -\frac{h}{6} \cdot \frac{1}{k^n + 1} , \quad C' = -\frac{h}{6} \cdot \frac{k^n}{k^n + 1} ,$$

$$\mu_m = \frac{qa^2}{12} \left[1 - \frac{k^m + k^{n-m}}{k^n + 1} \right] \quad \dots \quad (325).$$

Równanie (316) daje wartość oddziaływania R_m :

$$R_m = qa + \frac{2\mu_m - \mu_{m-1} - \mu_{m+1}}{a} ,$$

czyli, rugując μ_m zapomocą równania:

$$\mu_{m-1} + 4\mu_m + \mu_{m+1} = \frac{1}{2}qa^2 ,$$

otrzymamy:

$$R_m = \frac{5}{4} qa - \frac{3}{2a} (\mu_{m-1} + \mu_{m+1}).$$

Z wzoru (325) mamy:

$$\mu_{m-1} + \mu_{m+1} = \frac{qa^2}{6} - \frac{qa^2}{12} \cdot \frac{k^{m-1} + k^{n-m+1} + k^{m+1} + k^{n-m-1}}{k^n + 1},$$

a że:

$$k^{m-1} + k^{m+1} = \left(\frac{1}{k} + k\right) k^m, \quad k^{n-m+1} + k^{n-m-1} = \left(\frac{1}{k} + k\right) k^{n-m} \quad \text{i}$$

$$\frac{1}{k} + k = \frac{k^2 + 1}{k} = -\frac{4k}{k} = -4,$$

przeto:

$$\mu_{m-1} + \mu_{m+1} = \frac{qa^2}{6} + \frac{qa^2}{3} \frac{k^m + k^{n-m}}{k^n + 1}.$$

Ostatecznie więc otrzymujemy:

$$R_m = \frac{qa}{2} \left[2 - \frac{k^m + k^{n-m}}{k^n + 1} \right] \dots \dots \dots (326).$$

Jako oddziaływania w przekrojach końcowych otrzymujemy z wzoru (318):

$$R_0 = R_n = \frac{qa}{12} \left[5 + \frac{k^{n-1} + k}{k^n + 1} \right] \dots \dots \dots (327).$$

W celu ułatwienia obliczeń gdy n jest liczbą wielką, podajemy tabelicę wartości współczynników A_i i B_i we wzorach:

$$k^{2i} + 1 = A_i k^i \quad \text{i} \quad k^{2i+1} + 1 = B_i (k+1) k^i \quad \dots \dots \dots (328)$$

i	A_i	B_i	i	A_i	B_i
0	2	1	7	-10084	-13775
1	-4	-5	8	37634	51409
2	14	19	9	-140452	-191861
3	-52	-71	10	524174	716035
4	194	265	11	-1956244	-2672279
5	-724	-989	12	7300802	9973081
6	2702	3691	13	-27246964	-37220045

Tabelicę tę ułożono w sposób następujący: Wartości dwumianów k^4+1, k^6+1 i t. d., o potęgach parzystych, otrzymano przez podnoszenie równania podstawowego $k^2+1 = -4k$ do potęg całkowitych, poczynając od drugiej; wartości zaś dwumianów k^3+1, k^5+1 i t. d., o potęgach nieparzystych, otrzymano dzieląc te dwumiany przez $k+1$. Tak np.

$$(k^2 + 1)^2 = k^4 + 2k^2 + 1 = (-4k)^2 = 16k^2, \text{ stąd}$$

$$k^4 + 1 = 16k^2 - 2k^2 = 14k^2, \text{ a więc } A_2 = 14.$$

$$(k^2 + 1)^3 = k^6 + 1 + 3k^2(k^2 + 1) = -64k^3, \text{ stąd}$$

$$k^6 + 1 = (-64k^3 + 3 \cdot 4k^3) = -52k^3, \text{ a więc } A_3 = -52.$$

$$k^3 + 1 = (k^2 + 1 - k)(k + 1) = (-4 - 1)k(k + 1) = -5k(k + 1), \text{ a więc } B_1 = -5$$

$$k^5 + 1 = [k^4 + 1 - k(k^2 + 1) + k^2](k + 1) = (14 + 4 + 1)(k + 1)k^2 \text{ czyli}$$

$$k^5 + 1 = 19(k + 1)k^2, \text{ a więc } B_2 = 19, \text{ i t. d.}$$

Zaznaczamy przytem, że liczby A_i i B_i spełniają równania:

$$A_i = -4A_{i-1} - A_{i-2}, \quad B_i = -4B_{i-1} - B_{i-2} \text{ i } A_i = B_i + B_{i-1} \dots (329),$$

czyli liczby te tworzą tak zwane *szeregi zwrotne*, w których wyraz dowolny szeregu może być otrzymany z dwóch wyrazów go poprzedzających. Stosunek dowolnego wyrazu szeregu do wyrazu bezpośrednio po nim następującego, w miarę wzrastania ilości i zbliża się do tego pierwiastka równania $k^2 + 4k + 1 = 0$, którego wartość liczebna jest mniejsza od jedności, t. j. do $k = -2 + \sqrt{3} = -0,267949$. To też, gdy $i = \infty$, otrzymujemy:

$$\lim \left[\frac{A_{i-1}}{A_i} \right] = \lim \left[\frac{B_{i-1}}{B_i} \right] = k = -2 + \sqrt{3} \dots (330).$$

istotnie, wzór (328) daje:

$$\frac{k^{2(i-1)} + 1}{k^{2i} + 1} = \frac{A_{i-1}}{A_i} \cdot \frac{k^{i-1}}{k^i} = \frac{A_{i-1}}{A_i} \cdot \frac{1}{k}.$$

A że ilości $k^{2(i-1)}$ i k^{2i} , gdy k jest ułamkiem właściwym, zbliżają się do zera, przeto w miarę wzrastania wykładnika, granica stosunku $\frac{A_{i-1}}{A_i}$, przy $i = \infty$, będzie równa k .

Taką wartość otrzymamy i dla granicy stosunku liczb B_{i-1} i B_i . Z łatwością jeszcze znajdziemy, że wogóle, gdy $i = \infty$

$$\lim \left[\frac{A_{i-s}}{A_i} \right] = \lim \left[\frac{B_{i-s}}{B_i} \right] = k^s.$$

Przypuśćmy, że liczba n jest liczbą parzystą; przyjmując wtedy $n = 2\lambda$, otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \mu_m &= \frac{qa^2}{12} \left[1 - \frac{A_{\lambda-m}}{A_\lambda} \right] \\ R_m &= qa \left[1 - \frac{A_{\lambda-m}}{2A_\lambda} \right] \\ R_0 = R_n &= \frac{qa}{12} \left[5 + \frac{A_{\lambda-1}}{A_\lambda} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (331).$$

Gdy zaś n jest nieparzyste, to przyjmując $n = 2\lambda + 1$, otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \mu_m &= \frac{qa^2}{12} \left[1 - \frac{B_{\lambda-m}}{B_\lambda} \right] \\ R_m &= qa \left[1 - \frac{B_{\lambda-m}}{2B_\lambda} \right] \\ R_0 = R_n &= \frac{qa}{12} \left[5 + \frac{B_{\lambda-1}}{B_\lambda} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (332).$$

Ponieważ wartości liczebne A_i i B_i zwiększają się w miarę wzrastania i i mają znaki naprzemian to $+$, to $-$, przeto możemy z łatwością z wzorów powyższych wyprowadzić wnioski następujące:

Bez względu na to, jaką jest liczba pręseł, zawsze $\mu_1 = \mu_{n-1}$ jest największym z momentów, którego wartość liczebna, w miarę zwiększania się liczby pręseł, zbliża się do granicy $(1 - k) \frac{qa^2}{12}$, czyli do $1,267949 \frac{qa^2}{12}$.

Momenty o wskaźnikach nieparzystych $\mu_1, \mu_3, \mu_5, \dots$ zmniejszają się w miarę zbliżania się do środka belki i zbliżają się do granicy $\frac{qa^2}{12}$; momenty zaś o wskaźnikach parzystych zwiększają się w miarę zbliżania się do środka belki i zbliżają się do tejże granicy $\frac{qa^2}{12}$. To samo możemy powiedzieć o oddziaływaniach. Największem z oddziaływań jest $R_1 = R_{n-1}$. Oddziaływania o wskaźnikach nieparzystych zmniejszają się w miarę zbliżania się do środka belki i zbliżają się do granicy qa ; oddziaływania zaś o wskaźnikach parzystych zwiększają się w miarę zbliżania się do środka belki i zbliżają do tejże granicy qa . Największe z przeciwdziałań R_1 , w miarę zwiększania się liczby pręseł, zbliża się do granicy $(1 - \frac{1}{2}k) qa = 1,133975 qa$. Oddziaływania podpór skrajnych R_0 i R_n zawsze są mniejsze od wszystkich innych i w miarę zwiększania się n zbliżają się do $0,394338 qa$.

Przypuśćmy teraz, że oba końce belki są osadzone nieruchomo. Do wyznaczenia momentów będziemy mieli szereg równań:

$$\begin{aligned} 2\mu_0 + \mu_1 &= \frac{1}{4} qa^2 \\ \mu_0 + 4\mu_1 + \mu_2 &= \frac{1}{2} qa^2 \\ \dots \dots \dots \\ \mu_{n-2} + 4\mu_{n-1} + \mu_n &= \frac{1}{2} qa^2 \\ \mu_{n-1} + 2\mu_n &= \frac{1}{4} qa^2 \end{aligned}$$

Równania te będą spełnione, gdy:

$$\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_{n-1} = \mu_n = \frac{qa^2}{12} \dots \dots (333).$$

Ponieważ zaś równania stopnia pierwszego mają tylko jedno rozwiązanie, przeto rozwiązanie (333) jest jedynym rozwiązaniem szukanem. Gdy wszystkie momenty są jednakowe, możemy oddziaływania oznaczyć na podstawie zasad statyki, a więc:

$$R_0 = R_n = \frac{1}{2} qa, \quad R_1 = R_2 = \dots = R_{n-1} = qa \quad (334).$$

Zbadajmy teraz przypadek szczególny, gdy koniec o oddziaływaniu R_0 jest umocowany nieruchomo, drugi zaś koniec o oddziaływaniu R_n jest podparty swobodnie. W tym przypadku jest $\mu_n = 0$ i $2\mu_0 + \mu_1 = \frac{1}{4} qa^2$. Te dwa równania służą do oznaczenia stałych C i C' w całce ogólnej $\mu_m = \frac{h}{6} + Ck^m + C'k^{-m}$. Do oznaczenia więc C i C' mamy równania:

$$Ck^n + C'k^{-n} = -\frac{h}{6} \quad \text{i} \quad C(2+k) + C'(2+k^{-1}) = 0.$$

Z drugiego z tych równań wynika:

$$C' = -C \frac{2+k}{2+k^{-1}} = -C \frac{k^2+2k}{2k+1} = C,$$

albowiem z równania $k^2+4k+1=0$ wynika, że $k^2+2k=-(2k+1)$. Wobec tego równanie pierwsze daje:

$$C = C' = -\frac{h}{6} \frac{1}{k^n+k^{-n}} = -\frac{h}{6} \frac{k^n}{k^{2n}+1}.$$

W danym więc przypadku mamy:

$$\mu_m = \frac{qa^2}{12} \left[1 - \frac{A_m}{A_n} \right] \quad (335)$$

$$R_m = qa \left[1 - \frac{A_m}{2A_n} \right] \quad (336)$$

$$R_0 = \frac{1}{2} qa \left[1 - \frac{1}{A_n} \right] \quad \text{i} \quad R_n = \frac{qa}{12} \left[5 + \frac{A_{n-1}}{A_n} \right] \quad (337).$$

Wzory te wskazują, że zarówno największy moment, jak i największe oddziaływanie, występują nad podporą najbliższą do końca umocowanego belki.

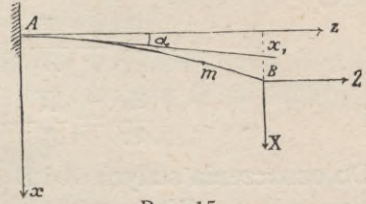
VI. Wyginanie pod działaniem sił nieprostokątnych do osi graniastosłupa.

68. Zbadamy tu tylko ten przypadek, gdy siła wyginająca działa na koniec graniastosłupa. Niech Z i X (rys. 15) będą rzutami takiej

siły na osie współrzędnych, a z_1 i x_1 niech będą współrzędnymi punktu przyłączenia tej siły po odkształceniu. Moment tej siły względem punktu m linii wygięcia jest równy:

$$X(z_1 - z) - Z(x_1 - x),$$

wobec czego dla krzywizny linii wygięcia w punkcie m otrzymujemy wzór:



Rys. 15.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{X(z_1 - z) - Z(x_1 - x)}{IE \left(1 + \frac{Z}{EF} \right)} \dots \dots \dots (338).$$

Skoro poprzestaniemy na przypadku wyginania nieznacznego, to możemy zamiast $\frac{1}{\rho}$ wziąć $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$ i wtedy otrzymamy równanie różniczkowe:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{X(z_1 - z) - Z(x_1 - x)}{IE \left(1 + \frac{Z}{EF} \right)} \dots \dots \dots (a).$$

Jedną z całek szczególnych tego równania otrzymamy, przyrównywując licznik strony drugiej do zera. Całka ta jest:

$$x = x_1 - \frac{X}{Z} (z_1 - z),$$

wobec czego całka ogólna będzie miała postać:

$$x = x_1 - \frac{X}{Z} (z_1 - z) + f(z) \dots \dots \dots (b),$$

gdzie funkcję $f(z)$ należy oznaczyć z równania:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{Z}{IE \left(1 + \frac{Z}{EF} \right)} \cdot f(z) \dots \dots \dots (c).$$

Przy całkowaniu tego równania należy rozróżnić dwa przypadki: gdy $Z > 0$, t. j. gdy graniastosłup podlega rozciąganiu i wyginaniu, oraz gdy $Z < 0$, t. j. gdy zachodzi ściskanie i wyginanie.

Zacniemy od przypadku, gdy $Z > 0$.

W tym przypadku możemy przyjąć:

$$\frac{Z}{IE \left(1 + \frac{Z}{EF} \right)} = m^2 \dots \dots \dots (339),$$

przyczem m będzie ilością rzeczywistą, całka zaś równania $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = m^2 f(z)$, jak wiadomo, będzie miała postać $f(z) = Ae^{ms} + Be^{-ms}$.

A więc całka ogólna równania (a), zawierająca dwie stałe dowolne, jest:

$$x = x_1 - \frac{X}{Z} (z_1 - z) + Ae^{mz} + Be^{-mz} \dots \dots \dots (d)$$

i

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{X}{Z} + m (Ae^{mz} - Be^{-mz}) \dots \dots \dots (e).$$

Do oznaczenia stałych A i B mamy warunki: $x=0$ przy $z=0$ i $x=x_1$ przy $z=z_1$. Wprowadzając te warunki do równania (d), otrzymamy:

$$Ae^{mz_1} + Be^{-mz_1} = 0 \quad \text{i} \quad A + B = \frac{X}{Z} z_1 - x_1 = \frac{Xz_1 - Zx_1}{Z}.$$

Stąd znajdujemy:

$$A = - \frac{Xz_1 - Zx_1}{Z} \cdot \frac{e^{-mz_1}}{e^{mz_1} - e^{-mz_1}} \quad \text{i} \quad B = \frac{Xz_1 - Zx_1}{Z} \cdot \frac{e^{mz_1}}{e^{mz_1} - e^{-mz_1}}.$$

Dla linii wygięcia otrzymujemy więc:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 - \frac{X}{Z} (z_1 - z) + \frac{Xz_1 - Zx_1}{Z} \cdot \frac{e^{m(z_1-z)} - e^{-m(z_1-z)}}{e^{mz_1} - e^{-mz_1}} \\ \frac{\partial x}{\partial z} &= \frac{X}{Z} - m \frac{Xz_1 - Zx_1}{Z} \cdot \frac{e^{m(z_1-z)} + e^{-m(z_1-z)}}{e^{mz_1} - e^{-mz_1}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (340).$$

W celu uogólnienia wniosków przypuścmy, że koniec A (rys. 15) graniastosłupa jest osadzony tak, że styczna do linii wygięcia w tym punkcie tworzy z osią z bardzo mały kąt α . Wtedy z równania ostatniego otrzymamy:

$$\text{tg } \alpha = \frac{X}{Z} - m \frac{Xz_1 - Zx_1}{Z} \cdot \frac{e^{mz_1} + e^{-mz_1}}{e^{mz_1} - e^{-mz_1}} \dots \dots (341).$$

To równanie ostatnie, w którym możemy z_1 zastąpić długością L graniastosłupa, daje nam możliwość oznaczenia ugięcia x_1 , wskutek czego równania (340) wyznaczą kształt linii wygięcia.

Jeżeli wreszcie mamy oznaczyć odległość δ warstwy obojętnej od włókna środkowego w danym przekroju, to powinniśmy zwrócić się do równań (252) i (259), z których wynika wogóle: $\delta = \frac{I}{F} \cdot \frac{Z}{M}$. Wskutek tego w przypadku rozważanym:

$$\delta = \frac{I}{F} \cdot \frac{Z}{X(z_1 - z) - Z(x_1 - x)} \dots \dots (342).$$

Z wzoru tego widzimy, że w żadnym z przekrojów włókno środkowe nie leży w warstwie obojętnej.

W przypadku szczególnym, gdy α równe jest zeru i siła wyginająca X jest także równa zeru, wzór (341) daje $x_1=0$, a z równań (340) otrzymamy dla wszystkich punktów linii wygięcia $x=0$ i $\frac{\partial x}{\partial z} = 0$.

Czyli: *graniastosłup, na który działa tylko siła rozciągająca, przyczepiona w środku ciężkości podstawy, nie może się wygiąć.*

69. Zbadajmy teraz ważniejszy dla nas przypadek, gdy $Z < 0$. Przypuśćmy, że $Z = -Q$, przyczem przyjmujemy siłę Q za dodatnią, nadto przypuśćmy, że:

$$\frac{Z}{IE \left(1 + \frac{Z}{EF} \right)} = \frac{-Q}{IE \left(1 - \frac{Q}{EF} \right)} = -n^2 \dots (343).$$

Ilość n będzie ilością rzeczywistą, ponieważ Q , nawet przy znacznym wygięciu, jest mniejsze od siły EF .

Równanie (c) ustępu poprzedniego przybiera postać:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -n^2 f(z).$$

Z równania tego wynika:

$$f(z) = A \cos(nz) + B \sin(nz),$$

wskutek czego całka ogólna równania (a) będzie:

$$x = x_1 + \frac{X}{Q}(z_1 - z) + A \cos(nz) + B \sin(nz).$$

Z równania tego przy tych samych warunkach, jak w ustępie 68, otrzymamy:

$$A \cos(nz_1) + B \sin(nz_1) = 0 \quad \text{i} \quad A + x_1 + \frac{X}{Q} z_1 = 0.$$

Stąd:

$$A = -\frac{Qx_1 + Xz_1}{Q} \quad \text{i} \quad B = \frac{Qx_1 + Xz_1}{Q} \cdot \text{ctg}(nz_1),$$

a więc:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + \frac{X}{Q}(z_1 - z) - \frac{Qx_1 + Xz_1}{Q} \cdot \frac{\sin[n(z_1 - z)]}{\sin(nz_1)} \\ \frac{\partial x}{\partial z} &= -\frac{X}{Q} + n \frac{Qx_1 + Xz_1}{Q} \cdot \frac{\cos[n(z_1 - z)]}{\sin(nz_1)} \end{aligned} \right\} \dots (344).$$

Przyjmując w równaniu ostatniem $z = 0$, otrzymamy:

$$\text{tg } \alpha = -\frac{X}{Q} + n \frac{Qx_1 + Xz_1}{Q} \text{ctg}(nz_1) \dots (345).$$

Wreszcie do oznaczenia położenia warstwy obojętnej mamy równanie:

$$\delta = -\frac{IQ}{F(Qx_1 + Xz_1)} \cdot \frac{\sin(nz_1)}{\sin[n(z_1 - z)]} \dots (346).$$

Zastanówmy się nad przypadkiem gdy $X = 0$. W tym przypadku równania, wyznaczające warunki wyginania, będą:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 \left[1 - \frac{\sin [n(z_1 - z)]}{\sin (nz_1)} \right] \\ \frac{\partial x}{\partial z} &= nx_1 \cdot \frac{\cos [n(z_1 - z)]}{\sin (nz_1)} \\ \operatorname{tg} \alpha &= nx_1 \cdot \operatorname{ctg} (nz_1) \\ \delta &= -\frac{I}{Fx_1} \cdot \frac{\sin (nz_1)}{\sin [n(z_1 - z)]} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (347),$$

gdzie $n = \sqrt{\frac{Q}{IE \left(1 - \frac{Q}{EF} \right)}}$.

Równania te wyznaczają w zupełności warunki wyginania graniastopła, gdy kąt α nie jest równy zero. Gdy natomiast $\alpha = 0$, t. j. gdy koniec A osadzony jest w kierunku osi z , z równania trzeciego grupy (347) otrzymamy $x_1 = 0$, o ile $\operatorname{ctg} (nz_1)$ nie jest równy zero, a wtedy dla wszystkich przekrojów będziemy mieli $x = 0$, $\frac{\partial x}{\partial z} = 0$ i $\delta = \infty$.

Graniastopł podlega więc tylko ściskaniu bez wyginania. Jeżeli przy $\operatorname{tg} \alpha = 0$ i $\operatorname{ctg} (nz_1)$ będzie równy zero, to x_1 może istnieć i wyginanie staje się możliwem. Wzory dla tego przypadku przyjmują postać:

$$x = x_1 [1 - \cos (nz)] \quad \text{i} \quad \frac{\partial x}{\partial z} = nx_1 \sin (nz) \dots \dots (348).$$

Z warunku zaś, że $\operatorname{ctg} (nz_1) = 0$, wynika:

$$nz_1 = L \sqrt{\frac{Q}{IE \left(1 - \frac{Q}{EF} \right)}} = (2i+1) \frac{\pi}{2},$$

gdzie i jest jedną z liczb szeregu naturalnego 0, 1, 2, 3... Przyjmując $i = 0$, otrzymamy długość najmniejszą graniastopła, przy której siła ściskająca Q może wywołać wygięcie. Długość tę wyznacza wzór:

$$L_{\min} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{IE}{Q} \left(1 - \frac{Q}{EF} \right)} \dots \dots \dots (349),$$

albo, w razie zaniechania ułamka $\frac{Q}{EF}$, małego w stosunku do jedności:

$$L_{\min} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{IE}{Q}} \dots \dots \dots (350).$$

W tych wzorach I przedstawia najmniejszy z momentów bezwładności przekroju, albowiem przy zginaniu przekroje będą się obracały około osi wygięcia najbliższego.

Z tego co powyżej powiedzieliśmy, wynika, że gdy jeden koniec

jest osadzony, a na drugi działa siła ściskająca Q , to wygięcie nie nastąpi, o ile długość L graniastopuła czyni zadość nierówności:

$$L < \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{I_{\min} E}{Q} \left(1 - \frac{Q}{EF}\right)} \dots \dots \dots (351).$$

Gdy ta nierówność nie jest spełniona, to wygięcie nastąpi, ale warunki jego nie są wyznaczone wzorami (348), ponieważ w te wzory wchodzi ilość nieoznaczona x_1 . Nieoznaczoność ta pochodzi stąd, że stopień dokładności, który przyjęliśmy przy wyprowadzaniu wzorów, nie jest dostateczny do rozwiązania niniejszego zadania.

Równania (347) zawierają jeszcze jeden przypadek wyginania. Przypuśćmy, że środki ciężkości obu podstaw pozostały na osi z . Wtedy rzędna x_1 będzie równa zeru, a więc i $x = 0$, $\frac{\partial x}{\partial z} = 0$ i $\delta = \infty$, wyginania więc nie będzie, o ile $\text{ctg}(nz_1)$ nie będzie równocześnie równy ∞ . Skoro natomiast $\text{ctg}(nz_1)$ będzie równy ∞ , czyli $\sin(nz_1)$ będzie równy zeru, to $\text{tg } \alpha$, x , $\frac{\partial x}{\partial z}$ i δ przyjmą postać nieoznaczoną i wyginanie staje się znowu możliwym.

Rugując z dwóch pierwszych równań grupy (347) rzędna x_1 zapomocą równania trzeciego tej grupy i przyjmując w wyniku ostatecznym $\sin(nz_1) = 0$, otrzymamy:

$$x = \frac{\text{tg } \alpha}{n} \sin(nz), \quad \frac{\partial x}{\partial z} = \text{tg } \alpha \cos(nz) \dots \dots \dots (352).$$

Równania te zawierają jednak czynnik nieoznaczony $\text{tg } \alpha$, nie mogą więc służyć do wyznaczania warunków wyginania.

Z warunku zaś, że $\sin(nz_1) = 0$, wynika:

$$nz_1 = L \sqrt{\frac{Q}{IE \left(1 - \frac{Q}{EF}\right)}} = i\pi,$$

gdzie i jest liczbą dowolną całkowitą. Przyjmując $i = 1$, otrzymamy:

$$L_{\min} = \pi \sqrt{\frac{I_{\min} E}{Q} \left(1 - \frac{Q}{EF}\right)},$$

albo mniej dokładnie:

$$L_{\min} = \pi \sqrt{\frac{I_{\min} E}{Q}}.$$

A więc pręt, którego oba końce pozostają na prostej, wyznaczającej położenie jego osi, nie będzie się wyginał, gdy długość jego L czyni zadość nierówności:

$$L < \pi \sqrt{\frac{I_{\min} E}{Q} \left(1 - \frac{Q}{EF}\right)} \dots \dots \dots (353).$$

70. Jeżeli mamy oznaczyć warunki wyginania w przypadkach, w których otrzymaliśmy wyrażenia nieoznaczone, to powinniśmy zamiast $\frac{1}{\rho}$ brać nie $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$, jak to czyniliśmy powyżej, lecz wyrażenie dokładniejsze.

Zupełnie dokładnem wyrażeniem krzywizny jest $\frac{1}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$, gdzie φ jest kątem stycznej do krzywej z osią z . Równanie więc dokładne, gdy $X=0$ i $Z=-Q$, jest:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = n^2 (x_1 - x) \dots \dots \dots (a).$$

Ponieważ to równanie zawiera trzy zmienne φ , s i x , przeto w celu wyrugowania jednej z nich, różniczkujemy to równanie względem s i wprowadzamy zamiast pochodnej $\frac{\partial x}{\partial s}$ jej wartość $\sin \varphi$; wtedy otrzymamy równanie:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = -n^2 \sin \varphi \dots \dots \dots (b).$$

Mnożymy to równanie przez $2\partial\varphi$ i całkujemy je, poczem otrzymamy:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2 = C + 2n^2 \cos \varphi.$$

Ale z równania (a) widzimy, że $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$ przy $x = x_1$; oznaczając przeto przez φ_1 wartość kąta φ przy $x = x_1$, otrzymamy:

$$C = -2n^2 \cos \varphi_1 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = n \sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_1)} \dots (c).$$

Stąd wynika, że $\cos \varphi > \cos \varphi_1$, czyli $\varphi < \varphi_1$.

Równanie (a) na zasadzie równania (c) daje:

$$x = x_1 - \frac{1}{n} \sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_1)} \dots \dots (d)$$

i
$$n \partial s = \frac{\partial \varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_1)}} \dots \dots \dots (e).$$

Że jednak $\cos \varphi - \cos \varphi_1 = 2 \left[\sin^2 \left(\frac{\varphi_1}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right]$ i $\sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) < \sin \left(\frac{\varphi_1}{2} \right)$, przeto możemy przyjąć:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin \phi \dots \dots \dots (f).$$

i wtedy otrzymamy:

$$n \partial s = \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \phi}} \dots \dots \dots (g).$$

Należy jeszcze tylko zcałkować to ostatnie równanie w granicach odpowiednich, ażeby oznaczyć zależność pomiędzy długością graniasto-słupa L a kątem φ_1 , ale w tym celu należy ściśle określić, jaki przypadek wyginania mamy badać.

Przypuśćmy, że koniec A (rys. 15) jest osadzony w kierunku osi z , drugi zaś koniec jest swobodny. W takim przypadku kąt φ będzie się zmieniał w granicach od 0 do φ_1 , granice więc dla kąta ψ będą 0 i $\frac{\pi}{2}$, jak to widzimy z równania (f); z równania zaś (g) w tym przypadku otrzymamy:

$$nL = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \psi}} \dots \dots \dots (354).$$

Rozwijając funkcję pod znakiem całki w szereg, według potęg rosnących $\sin^2 \psi$ i całkując, otrzymamy:

$$nL = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k} \sin^k \frac{\varphi_1}{2} \right]^2 \right\} \dots (355).$$

Jeżeli zaś poprzestaniemy tylko na dwóch pierwszych wyrazach tego szeregu nieskończonego, to otrzymamy:

$$nL = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \right),$$

skąd wynika, że:

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} = 2 \sqrt{\frac{2nL}{\pi} - 1} \dots \dots \dots (356).$$

Z tego ostatniego równania widzimy, że wyginanie będzie istniało, gdy $\frac{2nL}{\pi} - 1$ będzie większe od zera, czyli gdy $L > \frac{\pi}{2n}$. Zakładając, że warunek ten jest spełniony i przyjmując w równaniu (d): $x = 0$ i $\varphi = 0$, otrzymamy:

$$x_1 = \frac{1}{n} \sqrt{2(1 - \cos \varphi_1)} = \frac{2}{n} \sin \frac{\varphi_1}{2} = \frac{4}{n} \sqrt{\frac{2nL}{\pi} - 1} \dots (357).$$

Wzór ten wyznacza ugięcie x_1 , które w równaniach (348) było nieoznaczone.

Do oznaczenia w tym przypadku odciętej z_1 służy równanie:

$$\partial z = \cos \varphi \cdot \partial s = \left[1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right] \partial s = \left[1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \psi \right] \partial s.$$

Podstawiając w tem równaniu za ∂s jego wartość z równania (g), otrzymamy:

$$n\partial z = \frac{\partial\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \psi}} - 2 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \frac{\sin^2 \psi \cdot \partial\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \psi}}.$$

W wyrazie ostatnim strony drugiej tego równania możemy mianownik przyjąć równym jedności, ponieważ już licznik zawiera bardzo mały czynnik $\sin^2 \frac{\varphi_1}{2}$, a wtedy, całkując to równanie w granicach od 0 do z_1 , otrzymamy:

$$nz_1 = nL - 2 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi \partial\psi = nL - \frac{\pi}{2} \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}.$$

A więc:

$$L - z_1 = \frac{2\pi}{n} \left(\frac{2nL}{\pi} - 1 \right) \dots \dots \dots (358).$$

Gdy oba końce pręta pozostają w osi z_1 , rzędna x_1 będzie zerem i do wyznaczenia warunków wyginania będziemy mieli równanie:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = -n^2 x,$$

z którego wyprowadzamy wniosek, że kąt φ , w miarę zwiększania się łuku s , albo odciętej z , będzie się zmniejszał przy wartościach dodatnich rzędnej x , a zwiększał przy wartościach ujemnych tejże rzędnej.

Skoro zróżniczkujemy to równanie względem s , zastąpimy $\frac{\partial x}{\partial s}$ przez $\sin \varphi$ i następnie zcałkujemy, to otrzymamy:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s} \right)^2 = C + 2n^2 \cos \varphi.$$

W celu wyznaczenia stałej C przyjmijmy, że linia wygięcia tworzy kąt α z osią z w początku współrzędnych. Wtedy, mając na względzie, że przy $x = 0$ jest także $\frac{\partial\varphi}{\partial s} = 0$, otrzymamy:

$$0 = C + 2n^2 \cos \alpha \quad \text{i} \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s} \right)^2 = 2n^2 (\cos \varphi - \cos \alpha) \quad (359),$$

$$\text{czyli} \quad n^2 x^2 = 2 (\cos \varphi - \cos \alpha) \quad (360).$$

Widzimy stąd, że dla każdego punktu przecięcia linii wygięcia z osią z dostawa kąta φ będzie równa dostawie kąta α , a więc będzie $\varphi = \pm \alpha$.

Z równania (359) wynika:

$$n \partial s = \frac{\partial \varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \alpha)}} = \frac{\partial \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}},$$

albo, przyjmując $\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \psi$:

$$n \partial s = \frac{\partial \psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi}}.$$

Dla pierwszego punktu przecięcia linii wygięcia z osią z , t. j. dla początku współrzędnych, $\varphi = \alpha$, a więc $\psi = \frac{\pi}{2}$; dla punktu drugiego $\varphi = -\alpha$ i $\psi = \frac{3\pi}{2}$; dla trzeciego znowu $\varphi = \alpha$ i $\psi = \frac{5\pi}{2}$ i t. d. Dla ostatniego punktu przecięcia, czyli dla drugiego końca graniastosłupa, $\varphi = (-1)^{i-1} \alpha$ i $\psi = (2i-1) \frac{\pi}{2}$, gdzie i oznacza liczbę przecięć linii wygięcia z osią z . Całkując więc teraz równanie ostatnie względem s , w granicach od 0 do L , otrzymamy:

$$nL = \int_{\frac{\pi}{2}}^{(2i-1)\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi}},$$

czyli
$$nL = (i-1) \pi \left[1 + \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k} \sin^k \frac{\alpha}{2} \right)^2 \right].$$

W przybliżeniu zaś:

$$nL = (i-1) \pi \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right].$$

Stąd wynika, że:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = 2 \sqrt{\frac{nL}{(i-1) \pi} - 1} \dots \dots \dots (361).$$

Wyginanie więc będzie możebne tylko gdy $\frac{nL}{(i-1) \pi} - 1 > 0$,

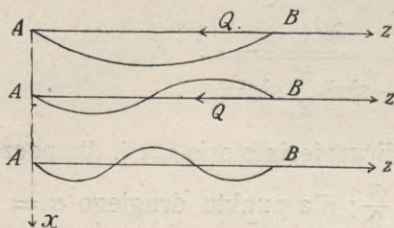
czyli gdy:

$$L > (i-1) \pi \sqrt{\frac{I_{\min} E}{Q} \left(1 - \frac{Q}{EF} \right)} \dots \dots \dots (362).$$

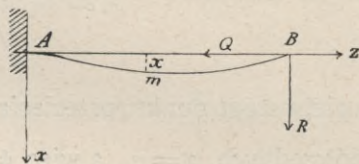
Przyjmując w tej nierówności $i = 2$, otrzymamy długość najmniejszą,

przy której wyginanie jest możliwe, przyczem linia wygięcia będzie miała tylko dwa punkty wspólne z osią z . Gdy L będzie nieco większe od $2\pi \sqrt{\frac{IE}{Q} \left(1 - \frac{Q}{EF}\right)}$, linia wygięcia będzie miała trzy punkty wspólne z osią z i t. d. (rys. 16).

71. Należy jeszcze zbadać dwa przypadki możliwego wyginania graniastopu przy działaniu siły go ściskającej.



Rys. 16.



Rys. 17.

1) Jeden koniec osadzony jest nieruchomo w kierunku osi z , drugi zaś ma pozostawać w tej osi, ale może się swobodnie obracać (rys. 17). W tym przypadku należy graniastopu uważać, jako podlegający w końcu B działaniu dwóch sił: jednej Q ściskającej i drugiej R , równoległej do osi x , stanowiącej nieznanne nam oddziaływanie w końcu B swobodnie podpartym. Warunki wyginania w tym przypadku otrzymamy z wzorów (344) i (345) (w ustępie 69), jeśli przyjmiemy w nich $x_1 = 0$, $X = R$ i $\text{tg } \alpha = 0$. Wzory te będą:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{R}{Q} \left\{ z_1 - z - z_1 \cdot \frac{\sin [n(z_1 - z)]}{\sin (nz_1)} \right\} \\ \frac{\partial x}{\partial z} &= \frac{R}{Q} \left\{ nz_1 \frac{\cos [n(z_1 - z)]}{\sin (nz_1)} - 1 \right\} \\ 0 &= nz_1 \text{ctg} (nz_1) - 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots (363).$$

Z ostatniego z tych wzorów otrzymujemy:

$$\text{tg} (nz_1) = nz_1 \dots \dots \dots (364).$$

Ponieważ łuki, mniejsze od ćwierci koła, są mniejsze niż ich tangens, przeto łuk, spełniający równanie (364), musi być większy od połowy okręgu koła i mniejszy od trzech czwartych okręgu. Łuk ten, wyrażony w stopniach, jest większy od 257° i mniejszy od 258° . W istocie, łuk 257° jest równy $2\pi \frac{257}{360} = 4,48543$, a $\text{tg } 257^\circ = \text{tg } 77^\circ = 4,33148$, gdy tymczasem łuk 258° jest równy $2\pi \frac{258}{360} = 4,50288$, a $\text{tg } 258^\circ = \text{tg } 78^\circ = 4,70463$. Możemy więc z wielką dokładnością przyjąć:

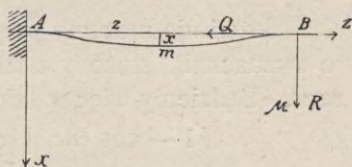
$$nz_1 = \frac{1}{2}(4,48543 + 4,50288) = 4,494,$$

czyli
$$z_1 = 4,494 \sqrt{\frac{IE}{Q}} \left(1 - \frac{Q}{EF} \right) \dots \dots \dots (365).$$

We wzorze tym możemy przyjąć z_1 równe długości graniastosłupa L . Wobec tego wzór ten wyznacza najmniejszą długość graniastosłupa, dla której wyginanie jest możliwe.

2) Jeden koniec jest osadzony w kierunku osi z , drugi zaś ma pozostawać w tej osi i nie może obracać się swobodnie (rys. 18).

W tym przypadku oddziaływanie w końcu B należy uważać jako złożone z siły R i pary, której moment przyjmujemy za równy μ . Moment więc sił, działających na koniec B , względem pewnego punktu m linii wygięcia, będzie równy $\mu + R(z_1 - z) - Qx$, gdzie $z_1 = AB$.



Rys. 18.

Równanie różniczkowe linii wygięcia jest:

$$\left(1 - \frac{Q}{EF} \right) EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \mu + R(z_1 - z) - Qx,$$

całka zaś jego:

$$x = \frac{\mu}{Q} + \frac{R}{Q} (z_1 - z) + A \cos (nz) + B \sin (nz)$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{R}{Q} - nA \sin (nz) + nB \cos (nz).$$

Ponieważ $x = 0$ i $\frac{\partial x}{\partial z} = 0$ gdy $z = 0$ i gdy $z = z_1$, przeto mamy równania:

$$\frac{\mu + Rz_1}{Q} + A = 0, \quad -\frac{R}{Q} + nB = 0$$

$$\frac{\mu}{Q} + A \cos (nz_1) + B \sin (nz_1) = 0 \quad \text{i}$$

$$-\frac{R}{Q} - nA \sin (nz_1) + nB \cos (nz_1) = 0.$$

Z dwóch pierwszych z tych równań wynika:

$$A = -\frac{\mu + Rz_1}{Q} \quad \text{i} \quad B = \frac{R}{nQ},$$

wobec czego dwa równania ostatnie przyjmą postać:

$$\left. \begin{aligned} n [1 - \cos (nz_1)] \mu + [\sin (nz_1) - nz_1 \cos (nz_1)] R &= 0 \\ n \sin (nz_1) \mu + [\cos (nz_1) + nz_1 \sin (nz_1) - 1] R &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (a).$$

Jeżeli z okoliczności warunkujących posunięcia końca B , można wywnioskować, że oddziaływanie R równe jest zeru, to z równań (a) otrzymamy:

$$\cos (nz_1) = 1 \quad \text{i} \quad \sin (nz_1) = 0 ,$$

czyli $nz_1 = 2i\pi$, gdzie i jest liczbą dowolną całkowitą. W danym więc przypadku długość najmniejsza graniastostupa, dla której możliwe jest wyginanie, wynosi:

$$z_1 = L_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{EI_{\min}}{Q} \left(1 - \frac{Q}{EF}\right)} \quad \dots \quad (366).$$

Jeżeli nie możemy przyjąć, że oddziaływanie R jest równe zeru, to wyznacznik, złożony z współczynników równań (a), musi być równy zeru. Będziemy więc w takim przypadku mieli:

$$\begin{aligned} [1 - \cos (nz_1)] [\cos (nz_1) + nz_1 \sin (nz_1) - 1] - \\ - \sin (nz_1) [\sin (nz_1) - nz_1 \cos (nz_1)] = 0 , \end{aligned}$$

$$\text{czyli} \quad nz_1 \sin (nz_1) - 2 [1 - \cos (nz_1)] = 0 ,$$

$$\text{czyli} \quad \sin \left(\frac{nz_1}{2}\right) \left[\frac{nz_1}{2} \cos \left(\frac{nz_1}{2}\right) - \sin \left(\frac{nz_1}{2}\right)\right] = 0 \quad \dots \quad (b).$$

Równanie ostatnie ma dwa rozwiązania:

$$\sin \left(\frac{nz_1}{2}\right) = 0 \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \left(\frac{nz_1}{2}\right) = \frac{nz_1}{2} \quad \dots \quad (c).$$

Łuk najmniejszy, czyniący zadość pierwszemu z tych równań, równy jest π , a więc rozwiązanie to daje dla L_{\min} tę samą wartość jak i przy $R = 0$, a mianowicie wartość oznaczoną z wzoru (366).

Rozwiązanie drugie równania (c) daje:

$$\frac{nz_1}{2} = 4,494, \quad \text{czyli} \quad z_1 = \frac{8,988}{n} = 2,862 \frac{\pi}{n}.$$

Rozwiązanie to daje na długość najmniejszą, przy której wyginanie jest możliwe, wartość większą od wartości z rozwiązania pierwszego, wskutek czego tę wartość ostatnią powinniśmy odrzucić.

W praktyce staramy się unikać wyginania graniastostupów podlegających ściskaniu. Z tego powodu z wzorów powyżej wyprowadzonych wartość praktyczną mają nierówności, którym należy zadość uczynić, ażeby wyginanie nie nastąpiło.

72. Warunek wytrzymałości graniastostupów wyginanych. Wyprowadzimy tu warunek wytrzymałości graniastostupów wyginanych, przyjmując, że przesuwanie, zwykle towarzyszące wyginaniu, nie wywiera wpływu jawnego na wytrzymałość i że włókno środkowe leży w warstwie obojętnej.

Poprzednio widzieliśmy, że warstwa obojętna dzieli graniastostup wygięty na dwie części: w jednej z nich włókna podłużne są rozciągane,

w drugiej — ściskane i to tem bardziej, im bardziej są one oddalone od warstwy obojętnej. W części pierwszej istnieją rozciągnięcia podłużne i ściśnięcia poprzeczne, w drugiej zaś ściśnięcia podłużne i rozciągnięcia poprzeczne. W ten sposób w każdym przecięciu poprzecznym graniastostłupa wygiętego mamy dwa rodzaje rozciągnięć: jedno podłużne, drugie poprzeczne.

Niech η będzie w pewnym przecięciu poprzecznym odległością od warstwy obojętnej tego punktu, w którym rozciągnięcie podłużne jest największe, i niech η' będzie odległością punktu leżącego z drugiej strony warstwy obojętnej, w którym rozciągnięcia poprzeczne są największe. Wzór (250) wraz z wzorem (259), gdy w pierwszym z nich przyjmiemy $\delta = 0$, daje na rozciągnięcia największe:

$$\frac{M\eta}{EI} \quad \text{i} \quad \mu \frac{M\eta'}{EI} \dots \dots \dots \quad (\text{a}).$$

Ilości jednakże η , η' , I , E i μ są stałe dla wszystkich przecięć graniastostłupa, gdy tymczasem moment M jest dla różnych takich przecięć rozmaity. Wobec tego rozciągnięcia największe osiągają wartość największą w tym przekroju, dla którego moment M ma wartość największą, t. j. w przekroju niebezpiecznym.

Warunki wytrzymałości mają oczywiście postać:

$$\eta \frac{M_{\max}}{EI} = \frac{T}{kE} \quad \text{i} \quad \mu \eta' \frac{M_{\max}}{EI} = \frac{T'}{kE},$$

czyli

$$\frac{I}{\eta} = \frac{k M_{\max}}{T} \quad \text{i} \quad \frac{I}{\eta'} = \frac{k M_{\max}}{T'} \dots \dots \dots \quad (367),$$

gdzie $T' = \frac{T}{\mu}$.

Z tych dwóch warunków należy w każdym przypadku szczególnym zatrzymać ten, który prowadzi do większych wymiarów przekroju.

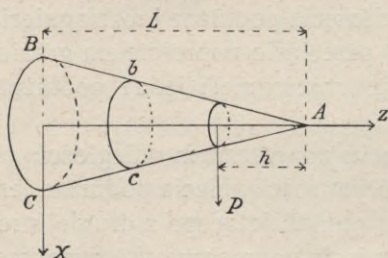
Gdy przedstawimy równania (367) pod postacią:

$$T = k M_{\max} \cdot \frac{\eta}{I} \quad \text{i} \quad T' = k M_{\max} \cdot \frac{\eta'}{I},$$

łatwo zauważymy, że wyraz $\frac{M\eta}{I}$ jest naprężeniem, sprowadzonym do jednostki powierzchni, w punkcie oddalonym od warstwy obojętnej o η i należącym do przekroju, dla którego moment równy jest M . Warunek wytrzymałości wyraża, właściwie mówiąc, to, że wartość największa tego naprężenia nie przekracza pewnej granicy. A zatem warunki wytrzymałości możemy przedstawić także w postaci następującej:

$$T = k \left(\frac{M\eta}{I} \right)_{\max} \quad \text{i} \quad T' = k \left(\frac{M\eta'}{I} \right)_{\max} \dots \dots \dots \quad (368).$$

Warunki wytrzymałości w tej ostatniej postaci mogą być stosowane i do prętów o przekroju zmiennym.



Rys. 19.

Przypuśćmy np., że pręt stożkowy ABC (rys. 19), o podstawie kształtu koła, umocowany nieruchomo, wygina się pod działaniem siły P , prostopadłej do osi stożka i działającej w odległości h od wierzchołka A . Oznaczmy przez r_0 promień podstawy umocowanej, a przez r promień pewnego przekroju bc w odległości z od podstawy; wtedy mamy:

$$I = \frac{\pi}{4} r^4, \quad \eta = \eta' = r, \quad M = P(L - h - z) \quad \text{i} \quad r = r_0 \frac{L - z}{L},$$

a więc:

$$\frac{M\eta}{I} = \frac{4P(L - h - z)}{\pi r^3} = \frac{4PL^3}{\pi r_0^3} \cdot \frac{L - h - z}{(L - z)^3} \quad \dots \quad (a).$$

Wartość największą osiąga to wyrażenie w przekroju, dla którego $z = L - \frac{2}{3}h$; przekrój więc niebezpieczny leży pomiędzy podstawą osadzoną a przekrojem, w którym działa siła P i znajduje się w odległości $\frac{1}{2}h$ od tego przekroju. A więc przekrój niebezpieczny leży w podstawie umocowanej, gdy h będzie równe lub większe niż $\frac{2}{3}L$.

Podstawiając we wzorze (a) $L - \frac{2}{3}h$ zamiast z , otrzymamy:

$$\left(\frac{M\eta}{I}\right)_{\max} = \frac{16}{27} \frac{PL^3}{\pi r_0^3 h^2} = \frac{T}{k} \quad \dots \quad (369).$$

Wzór (369) wyraża warunek wytrzymałości, gdy $h < \frac{2}{3}L$. Gdy natomiast h jest większe niż $\frac{2}{3}L$, wtedy przekrojem niebezpiecznym jest podstawa umocowana, dla której $z = 0$, a warunek wytrzymałości brzmi:

$$\frac{4P}{\pi r_0^3} (L - h) = \frac{T}{k} \quad \dots \quad (370).$$

Gdy h jest zbliżone do L , należy warunek wytrzymałości wprowadzić dla przesuwania (ścianania), albowiem w takim przypadku moment siły wyginającej jest bardzo mały dla wszystkich przekrojów.

73. Wyginanie stożka. Możemy ustalić wszystkie warunki wyginania stożka, rozważanego w ustępie 72, całkując dwukrotnie równanie:

$$E \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{M}{I} = \frac{4PL^4}{\pi r_0^4} \cdot \frac{L - h - z}{(L - z)^4} = \frac{4PL^4}{\pi r_0^4} \left[\frac{1}{(L - z)^3} - \frac{h}{(L - z)^4} \right]$$

i wyznaczając stałe dowolne z warunków, że przy $z = 0$ jednocześnie powinno być $x = 0$ i $\frac{\partial x}{\partial z} = 0$.

Równania otrzymane w ten sposób są:

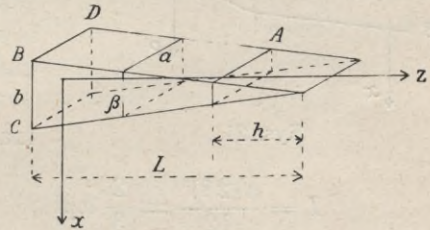
$$\left. \begin{aligned} E \frac{\partial x}{\partial z} &= \frac{4 PL^4}{\pi r_0^4} \left[\frac{1}{2(L-z)^2} - \frac{h}{3(L-z)^3} - \frac{3L-2h}{6L^3} \right] \\ E x &= \frac{4 PL^4}{\pi r_0^4} \left[\frac{1}{2(L-z)} - \frac{h}{6(L-z)^2} - \frac{3L-2h}{6L^3} \cdot z - \frac{3L-h}{6L^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (371).$$

Przyjmując w równaniu ostatniem $z = L - h$, otrzymamy na ugięcie wzór:

$$f = \frac{4 PL (L-h)^3}{3\pi E r_0^4 h} \dots \dots \dots (372).$$

Wzór ten wskazuje, że ugięcie staje się ilością bardzo wielką, gdy ułamek właściwy $\frac{h}{L}$ ma wartości małe, co sprzeciwia się jednak założeniu, że wyginanie ma być nieznaczne, przyjętemu za zasadę przy wyprowadzaniu wszystkich naszych wzorów. Stąd wynika, że wzory wyprowadzone na wyginanie stożka można stosować tylko gdy stosunek h/L nie bardzo różni się od jedności.

74. Warunek wytrzymałości dla klina. Jako przykład drugi przypuśćmy, że mamy klin $ABCD$ (rys. 20), którego podstawa osadzona jest nieruchomo i który wygina się pod działaniem obciążenia Q , prostopadłego do osi i rozłożonego równomiernie na długości $L - h$ od podstawy umocowanej BCD . Przekroje tego klina są prostokątami, o szerokości stałej a i wysokości zmiennej β .



Rys. 20.

Jeżeli wysokość BC podstawy osadzonej jest b , to:

$$\beta = b \frac{L-z}{L}, \quad M = \frac{1}{2} q (L-h-z)^2, \quad \eta = \frac{1}{2} \beta,$$

$$I = \frac{a\beta^3}{12} \quad \text{i} \quad q = \frac{Q}{L-h},$$

a więc:

$$\frac{M\eta}{I} = \frac{3qL^2}{ab^2} \left(\frac{L-h-z}{L-z} \right)^2 \dots \dots \dots (a).$$

Ponieważ ułamek $\frac{L-h-z}{L-z}$ jest mniejszy od jedności, przeto osiąga on wartość największą przy wartości możebnie najmniejszej z , t. j. przy $z = 0$. Z tego powodu przekrojem niebezpiecznym klina jest jego podstawa osadzona nieruchomo. Wobec tego warunek wytrzymałości będzie:

$$\left(\frac{M\eta}{I} \right)_{\max} = \frac{3q}{ab^2} (L-h)^2 = \frac{T}{k} \dots \dots \dots (373).$$

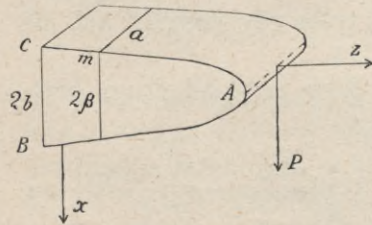
Z równania (a) wynika, że gdy $h = 0$, ilość $\frac{M\eta}{I}$ staje się ilością stałą równą $\frac{3qL^2}{ab^2}$. W tym więc przypadku naprężenie największe jest

jednakowe we wszystkich przecięciach poprzecznych, a więc wszystkie te przecięcia są jednakowo niebezpieczne. Ciało, w którego wszystkich przekrojach włókna niebezpieczne podlegają jednakowemu rozciąganiu, nazywa się *ciałem o wytrzymałości jednostajnej na wyginanie*.

75. Ciała o wytrzymałości jednostajnej na wyginanie. Z podanego powyżej określenia ciała o wytrzymałości jednostajnej wynika, że kształt jego powinien być wyznaczony z równania:

$$\frac{M\eta}{I} = \text{const} = T \dots \dots \dots (374).$$

Dla przykładu przypuśćmy, że siła, wyginająca ciało, działa w końcu swobodnym A (rys. 21) i że przekroje są prostokątami o szerokości stałej a i wysokości zmiennej 2β . Zadanie polega więc na wyznaczeniu krzywej AmC w taki sposób, ażeby otrzymać ciało o wytrzymałości jednostajnej.



Rys. 21.

Dla dowolnego przekroju tego ciała mamy:

$$I = \frac{a(2\beta)^3}{12} = \frac{2}{3} a\beta^3, \quad \eta = \beta \quad \text{i} \quad M = P(L-z);$$

a więc:

$$T = \frac{P(L-z)\beta}{\frac{2}{3} a\beta^3}, \quad \text{stad:}$$

$$\beta^2 = \frac{3P}{2aT} (L-z) \dots \dots \dots (375).$$

Jeżeli przez $2b$ oznaczymy wysokość BC podstawy osadzonej, to będziemy mieli $b^2 = \frac{3PL}{2aT}$, a więc:

$$\beta^2 = b^2 \frac{L-z}{L} \dots \dots \dots (376).$$

Uważając w tem równaniu z i β jako współrzędne bieżące krzywej $BAmC$, widzimy, że krzywa ta jest *parabolą*, której wierzchołek leży w punkcie A .

Gdyby przy takim samym kształcie przekrojów wyginanie wywołane było przez obciążenie rozłożone równomiernie na całej długości L i gdyby wzór ogólny na moment M był równy $\frac{1}{2} q(L-z)^2$, to do oznaczenia β mielibyśmy równanie: $\beta = \pm b \frac{L-z}{L}$. Zamiast więc para-

boli mielibyśmy dwie proste, przecinające się w punkcie A , a ciało o wytrzymałości jednostajnej na wyginanie byłoby klinem, jak to już wiemy z ustępu 74.

Jeżeli ciało o wytrzymałości jednostajnej ma być bryłą obrotową, to oznaczając przez r_0 i r promienie przekrojów, odpowiadających odciętym 0 i z , otrzymamy w przypadku, gdy $M = P(L - z)$:

$$r^3 = r_0^3 \frac{L - z}{L} \dots \dots \dots (377).$$

W tym więc przypadku przecięcie podłużne ciała, przechodzące przez oś obrotu, jest ograniczone *parabolą sześcienną*.

Ciała o wytrzymałości jednostajnej na wyginanie, zarówno jak ciała o wytrzymałości jednostajnej na rozciąganie, wymagają mniej materiału, lecz znacznie się odkształcają. W istocie, badając np. ciało o wytrzymałości jednostajnej, przedstawione na rys. 21, otrzymamy jego objętość, mnożąc powierzchnię BAC przez a ; powierzchnia zaś, ograniczona parabolą BAC równa jest, jak wiadomo, $\frac{2}{3} Lb$. Objętość więc ciała tego równa jest $\frac{2}{3} Lab$. Objętość ciała graniastosłupowatego równałaby się $2 Lab$, t. j. byłaby trzy razy większa. Druga własność tego ciała, tycząca się jego odkształcania, uwydatni się po oznaczeniu ugięcia. W celu oznaczenia ugięcia należy zcałkować dwukrotnie równanie:

$$E \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{3 P(L - z)}{2 a b^3} = \frac{3 PL \sqrt{L}}{2 a b^3} (L - z)^{-1/2},$$

uwzględniając, że gdy $z = 0$, musi być $x = 0$ i $\frac{\partial x}{\partial z} = 0$. Otrzymamy więc równania:

$$E \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{3 PL \sqrt{L}}{a b^3} (\sqrt{L} - \sqrt{L - z})$$

i

$$E x = \frac{3 PL \sqrt{L}}{a b^3} (z \sqrt{L} + \frac{2}{3} (L - z)^{3/2} - \frac{2}{3} L \sqrt{L}).$$

Przyjmując w równaniu ostatnim $z = L$, otrzymamy na ugięcie wzór:

$$f = \frac{PL^3}{E a b^3} \dots \dots \dots (378),$$

gdy tymczasem dla ciała graniastosłupowatego mieliśmy:

$$f = \frac{PL^3}{3 IE} = \frac{PL^3}{2 E a b^3},$$

t. j. ugięcie jest dla ciała graniastosłupowatego dwa razy mniejsze niż dla ciała o wytrzymałości jednostajnej.

76. **Tablica III.** Naprężenie T , wchodzące we wzory, które dają warunki wytrzymałości graniastosłupów wyginanych, należy brać z tablicy następującej.

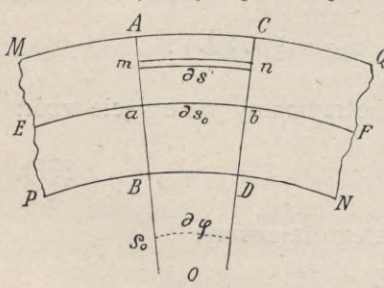
Material	T w kg/cm^2
Stal najlepsza	6 000
Stal zwykła	3 300
Żelazo kowalne	2 520
Żelazo lane	1 260
Miedź	1 800
Drzewo	180

VII. Wyginanie belek o osi krzywej.

77. Wyobraźmy sobie krzywą płaską, nie mającą punktów odosobnionych (izolowanych), ani wielokrotnych, ani zwrotnych i przyjmijmy tę krzywą za kierownicę, po której posuwamy środek ciężkości powierzchni, ograniczonej pewnym obwodem symetrycznym tak, ażeby zadośćuczynić warunkom następującym: 1) płaszczyzna tworząca powinna być we wszystkich swoich położeniach prostopadła do kierownicy i 2) oś symetrii obwodu poruszającego się pozostawać powinna w płaszczyźnie kierownicy.

Płaszczyzna, poruszająca się w ten sposób, zakreśli pewne ciało geometryczne. Każde ciało materialne, mające kształt podobny do kształtu tego ciała geometrycznego, będziemy nazywali *belką albo prętem o osi krzywej płaskiej i o stałym przekroju*.

Badać będziemy wyginanie takich belek krzywych, przyjmując nadto, że wymiary przekroju belki, leżące w płaszczyźnie kierownicy (w płaszczyźnie włókna środkowego), są niewielkie w porównaniu z promieniami krzywizny tej krzywej, i że siły zewnętrzne, wywołujące odkształcenie, leżą w płaszczyźnie kierownicy.



Rys. 22.

Przy spełnieniu wszystkich warunków powyższych, oś płaska belki będzie i po odkształceniu krzywą płaską.

Niech $MQNP$ (rys. 22) będzie częścią belki krzywej przed odkształceniem i niech EF będzie włóknem środkowym tej belki, a AB i CD dwoma sąsiednimi przekrojami, pochylonymi do siebie pod kątem $AOC = \partial\varphi$ i niech wreszcie $Oa = Ob = \rho_0$ będzie promieniem

krzywizny włókna środkowego w punkcie a . Przez środek ciężkości a przekroju AB prowadzimy prostą, prostopadłą do płaszczyzny aOb

i oznaczamy przez η odległość pewnego punktu m od tej prostej. Wreszcie, w punkcie m wyznaczamy nieskończenie małą płaszczyznę ∂F , którą przyjmujemy za podstawę nieskończenie cienkiego włókna mn , równoległego do włókna środkowego ab . Oznaczając długość tych włókien ab i mn przez ∂s_0 i ∂s , otrzymamy:

$$\partial s_0 = \rho_0 \partial \varphi \quad \text{i} \quad \partial s = (\rho_0 + \eta) \partial \varphi = \partial s_0 + \eta \partial \varphi \quad \dots \quad (a).$$

Gdy pod działaniem sił zewnętrznych nastąpi odkształcenie, wszystkie ilości, wchodzące we wzory poprzednie, zmieniają się, a mianowicie otrzymają przyrosty, które będziemy oznaczali znakiem δ . Odkształcenie zaś przypuszczamy tak małe, że możemy bez znacznego błędu pominąć potęgę tych przyrostów wyższe od pierwszej. Przy takim zastrzeżeniu przyrosty te niczem nie różnią się od różniczek. Wreszcie należy uwzględnić, że przyrosty, które oznaczamy znakami δ i ∂ , są od siebie niezależne, wskutek czego mamy prawo napisać równości:

$$\delta \partial s = \partial \delta s, \quad \delta \partial \rho_0 = \partial \delta \rho_0 \quad \text{i t. p.}$$

Różniczkujemy teraz według znaku δ drugie z równań (a) i otrzymujemy:

$$\delta \partial s = \delta \partial s_0 + \eta \delta \partial \varphi + \partial \varphi \delta \eta,$$

skąd wynika, że:

$$\frac{\delta \partial s}{\partial s} = \frac{\delta \partial s_0 + \eta \delta \partial \varphi + \partial \varphi \delta \eta}{\partial s_0 + \eta \partial \varphi} = \frac{\frac{\delta \partial s_0}{\partial s_0} + \eta \frac{\delta \partial \varphi}{\partial s_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial s_0} \delta \eta}{1 + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial s_0}}.$$

Ale $\frac{\delta \partial s}{\partial s}$ i $\frac{\delta \partial s_0}{\partial s_0}$ są to wydłużenia względne włókien mn i ab . Oznaczmy te wydłużenia przez Δ i Δ_0 , a wtedy będzie:

$$\Delta = \frac{\Delta_0 + \omega \frac{\eta}{\rho_0} + \frac{\delta \eta}{\rho_0}}{1 + \frac{\eta}{\rho_0}} \quad \dots \quad (b),$$

gdzie przez skrócenie oznaczyliśmy:

$$\frac{\delta \partial \varphi}{\partial \varphi} = \omega \quad \dots \quad (c),$$

stąd:

$$\frac{\delta \partial \varphi}{\partial s_0} = \frac{\delta \partial \varphi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s_0} = \omega \cdot \frac{1}{\rho_0}.$$

Zmianę długości η , występującą podczas odkształcania, należy uważać za skutek dwóch przyczyn: po pierwsze istnienia skręceń poprzecznych, towarzyszących wydłużeniom Δ , powtórę zmian wymiarów poprzecznych belki, pod działaniem mogących istnieć sił zewnętrznych normalnych, działających na powierzchnie boczne belki.

Wobec tego, że przypadek dany jest bardzo zawiły i przy założeniu, że wymiary przekroju belki, są niewielkie, przyjmujemy, że przekroje nie zmieniają ani kształtu ani wymiarów podczas odkształcania. Przy takim przypuszczeniu możemy przyrost $\delta\eta$ uważać za równy zeru i zamiast wzoru (b) wziąć wzór:

$$\Delta = \frac{\Delta_0 + \omega \frac{\eta}{\rho_0}}{1 + \frac{\eta}{\rho_0}},$$

z którego otrzymujemy:

$$\Delta = \left(\Delta_0 + \omega \frac{\eta}{\rho_0} \right) \left(1 + \frac{\eta}{\rho_0} \right)^{-1} = \left(\Delta_0 + \omega \frac{\eta}{\rho_0} \right) \left[1 - \frac{\eta}{\rho_0} + \left(\frac{\eta}{\rho_0} \right)^2 - \left(\frac{\eta}{\rho_0} \right)^3 + \dots \right],$$

czyli, pomijając potęgi bardzo małego ułamka $\frac{\eta}{\rho_0}$ wyższe od drugiej:

$$\Delta = \Delta_0 + (\omega - \Delta_0) \left(\frac{\eta}{\rho_0} - \frac{\eta^2}{\rho_0^2} \right) \dots \dots \dots (d).$$

Niech P będzie wypadkową wszystkich naprężeń, prostopadłych do przekroju, działającą w środku ciężkości przekroju, a M — momentem tych naprężeń względem prostej, przechodzącej przez środek ciężkości przekroju i prostopadłej do płaszczyzny włókna środkowego. Przy takich oznaczeniach będzie:

$$P = E \int \Delta \partial F \quad \text{i} \quad M = E \int \Delta \eta \partial F.$$

Podstawiając tu za Δ jego wartość i uwzględniając, że $\int \eta \partial F = 0$, a $\int \eta^2 \partial F = I$, otrzymamy:

$$P = E \left[\Delta_0 F - (\omega - \Delta_0) \frac{I}{\rho_0^2} \right] \quad \text{i} \quad M = (\omega - \Delta_0) \frac{EI}{\rho_0}.$$

Stąd na Δ_0 i ω znajdujemy:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_0 &= \frac{1}{EF} \left[P + \frac{M}{\rho_0} \right] \\ \omega &= \frac{1}{EF} \left[P + \frac{M}{\rho_0} \right] + \frac{M\rho_0}{EI} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (379),$$

a więc na Δ otrzymujemy wzór:

$$\Delta = \frac{1}{EF} \left[P + \frac{M}{\rho_0} \right] + \frac{M\rho_0}{EI} \left(\frac{\eta}{\rho_0} - \frac{\eta^2}{\rho_0^2} \right)$$

czyli
$$\Delta = \frac{P}{EF} + \frac{M\eta}{EI} + \frac{M}{E\rho_0} \left(\frac{1}{F} - \frac{\eta^2}{I} \right) \dots \dots \dots (380).$$

Wzór ostatni dla pręta o osi prostej, dla którego $\rho_0 = \infty$, daje znany nam wzór w teorii wyginania graniastosłupów:

$$\Delta = \frac{P}{EF} + \frac{M\eta}{EI}.$$

Niech ρ będzie promieniem krzywizny włókna środkowego po odkształceniu. Zróżniczkujemy według znaku δ pierwsze z równań (a); wówczas otrzymamy:

$$\delta \partial s_0 = \rho_0 \delta \partial \varphi + \partial \varphi \delta \rho_0,$$

albo, dzieląc przez $\partial s_0 = \rho_0 \partial \varphi$:

$$\Delta_0 = \omega + \frac{\partial \rho_0}{\rho_0}.$$

Stąd wynika, że:

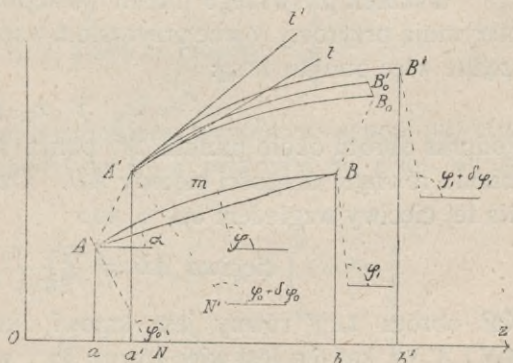
$$-\frac{\Delta_0 - \omega}{\rho_0^2} = -\frac{\delta \rho_0}{\rho_0^2} = \delta \left(\frac{1}{\rho_0} \right) = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\omega - \Delta_0}{\rho_0},$$

czyli, podstawiając za Δ_0 i ω ich wartości:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{M}{EI} \dots \dots \dots (381).$$

Ilości P i M , wchodzące we wzory powyższe, powinny być w każdym przypadku szczególnym oznaczone z sił zewnętrznych, wyginających belkę krzywą. Przy takim oznaczaniu tych ilości należy do sił zewnętrznych zaliczyć i oddziaływania niewiadome, istniejące w przekrojach belki, których posunięcia są zależne od pewnych warunków, wskutek czego wzory wyprowadzone powyżej nie rozwiązują w całości zagadnienia o wyginaniu danej belki. Musimy mieć wzory, z których moglibyśmy oznaczyć oddziaływania niewiadome. Oczywiście, do oznaczenia tych oddziaływań wystarczają równania, wyrażające zależność między posunięciami dwóch dowolnych przekrojów belki krzywej. Mając takie równania, można je stosować do każdej pary przekrojów, których posunięcia są nam wiadome z warunków samego zadania; będziemy więc mogli otrzymać dostateczną liczbę równań, niezbędnych do oznaczenia oddziaływań niewiadomych.

Przystępujemy przeto do wyprowadzenia tych równań. Przypuśćmy, że jest dane położenie pewnej części AB (rys. 23) krzywej osi belki przed jej wygięciem i położenie $A'B'$ tej samej części po wygięciu. Zada-



Rys. 23.

nie polega na oznaczeniu posunięć przekroju B w zależności od posu-

Skoro łuk ten, jako bardzo mały, uważać będziemy za prostą i utworzymy jego rzuty na osiach współrzędnych z i x , to na przyrosty współrzędnych punktu B_0 otrzymamy wartości:

$$-(x_1 - x_0) \delta\varphi_0 \quad \text{i} \quad (z_1 - z_0) \delta\varphi_0 \quad \dots \quad (d).$$

Współrzędne więc punktu B_0' są:

$$z_1 + \delta z_0 - (x_1 - x_0) \delta\varphi_0 \quad \text{i} \quad x_1 + \delta x_0 + (z_1 - z_0) \delta\varphi_0 \quad \dots \quad (e).$$

Wskutek rozciągnięcia jednej z cząstek ∂s_0 krzywej, punkt B_0' przejdzie drogę w kierunku tej cząstki równą $\Delta_0 \partial s_0$. Jeżeli więc oznaczymy przez φ kąt z osią z normalnej do tej cząstki, to otrzymamy na przyrosty współrzędnych punktu B_0' wartości: $\Delta_0 \partial s_0 \sin \varphi$ i $-\Delta_0 \partial s_0 \cos \varphi$. że jednak $\partial s_0 \sin \varphi = \partial z$ i $-\partial s_0 \cos \varphi = \partial x$, przeto przyrosty te będą: $\Delta_0 \partial z$ i $\Delta_0 \partial x$. Całkując te wyrazy w granicach odpowiednich, otrzymamy na przyrosty współrzędnych punktu B_0' , wywołane ogólnym rozciągnięciem wszystkich cząstek krzywej, wartości następujące:

$$\int_{z_0}^{z_1} \Delta_0 \partial z \quad \text{i} \quad \int_{x_0}^{x_1} \Delta_0 \partial x \quad \dots \quad (f).$$

Wreszcie, wskutek obrotu jednego z przekrojów (którego współrzędne są: z i x) o bardzo mały kąt $\delta\partial\varphi$ względem przekroju sąsiedniego, punkt B_0' zakreśli łuk koła o promieniu równym długości cięciwy, łączącej ten punkt ze środkiem przekroju się obracającego. Współrzędne więc otrzymają przyrosty: $-(x_1 - x) \delta\partial\varphi$ i $(z_1 - z) \delta\partial\varphi$ [p. powyżej równ. (d)]. Całkując te wyrazy, otrzymamy przyrosty wywołane działaniem łącznym obrotów wszystkich przekrojów. Ponieważ $\delta\partial\varphi = \omega\partial\varphi$, przeto przyrosty te będą:

$$\left. \begin{aligned} - \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (x_1 - x) \omega \partial\varphi &= - x_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \omega \partial\varphi + \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} x \omega \partial\varphi \\ \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (z_1 - z) \omega \partial\varphi &= z_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \omega \partial\varphi - \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} z \omega \partial\varphi \end{aligned} \right\} \dots \quad (g).$$

Wskutek wszystkich powyżej wymienionych czterech ruchów punktów krzywej AB , punkt B przechodzi do B' , a przyrosty δz_1 i δx_1 współrzędnych będą:

$$\left. \begin{aligned} \delta z_1 &= \delta z_0 - (x_1 - x_0) \delta\varphi_0 + \int_{z_0}^{z_1} \Delta_0 \partial z - x_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \omega \partial\varphi + \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} x \omega \partial\varphi \\ \delta x_1 &= \delta x_0 + (z_1 - z_0) \delta\varphi_0 + \int_{x_0}^{x_1} \Delta_0 \partial x + z_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \omega \partial\varphi - \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} z \omega \partial\varphi \end{aligned} \right\} \dots \quad (382).$$

W celu oznaczenia zaś przyrostu $\partial\varphi_1$ kąta φ_1 należy zcałkować równanie $\delta\partial\varphi = \partial\delta\varphi = \omega\partial\varphi$ w granicach od φ_0 do φ_1 . Otrzymamy wtedy:

$$\delta\varphi_1 = \delta\varphi_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \omega\partial\varphi \dots \dots \dots (383).$$

Równania (382) i (383) mogą służyć do oznaczenia oddziaływań niewiadomych.

Przy zastosowaniu tych równań do pręta o osi prostej, musieliśmy przyjąć $\rho_0 = \infty$; przytem jednak należałoby uwzględnić, że $\omega\partial\varphi$ równe jest $\frac{\omega}{\rho_0} \partial s_0$, gdzie czynnik $\frac{\omega}{\rho_0}$, przy $\rho_0 = \infty$, przekształca się w $\frac{M}{EI}$, jak to jest widoczne z równania drugiego grupy (379), a Δ_0 przekształca się w $\frac{P}{EF}$. Dla prętów więc o osi prostej mamy:

$$\left. \begin{aligned} \delta z_1 &= \delta z_0 + (x_1 - x_0) \delta\varphi_0 + \frac{1}{EF} \int_{z_0}^{z_1} P \partial z - \int_{s_0}^{s_1} \frac{M}{EI} (x_1 - x) \partial s \\ \delta x_1 &= \delta x_0 + (z_1 - z_0) \delta\varphi_0 + \frac{1}{EF} \int_{x_0}^{x_1} P \partial x + \int_{s_0}^{s_1} \frac{M}{EI} (z_1 - z) \partial s \\ \delta\varphi_1 &= \delta\varphi_0 + \frac{1}{EI} \int_{s_0}^{s_1} M \partial s \end{aligned} \right\} \dots \dots (384).$$

Jeżeli oś pręta prostego przed odkształceniem pada na oś z , to wszystkie rzędne x należy uważać za równe zeru, a przyrosty δx za rzędne tej krzywej, w którą przechodzi oś prosta po wygięciu. Kąty φ należy przyjąć za równe $\frac{\pi}{2}$, przyrosty zaś $\delta\varphi$ uważać za kąty z osią z stycznych do osi wygiętej pręta. Skoro te ostatnie kąty oznaczymy wogóle przez α , rzędne zaś osi wygiętej pręta wogóle przez x , to otrzymamy wzory:

$$\left. \begin{aligned} \delta z_1 &= \delta z_0 + \frac{1}{EF} \int_{z_0}^{z_1} P \partial z \\ x_1 &= x_0 + (z_1 - z_0) \alpha_0 + \frac{1}{EI} \int_{z_0}^{z_1} M (z_1 - z) \partial z \\ \alpha_1 &= \alpha_0 + \frac{1}{EI} \int_{z_0}^{z_1} M \partial z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (385).$$

ROZDZIAŁ VII.

Zadanie Saint-Venant'a.

78. Określenie zadania. W rozdziale niniejszym rozważać będziemy przypadek ogólny wytrzymałości złożonej graniastosłupów, przy działaniu sił je odkształcających. Zadanie wytrzymałości złożonej było rozwiązane przez Clebsch'a ¹⁾ i nazwane zostało przezeń zadaniem Saint-Venant'a, z powodu, że warunki, przy których rozwiązanie tego zadania jest możebne, ustalił już dawniej Saint-Venant, który brał je za podstawę do wyjaśnienia zjawisk skręcania i wyginania graniastosłupów ²⁾.

Zadanie Saint-Venant'a jest następujące: Oznaczyć warunki równowagi ciała równozwrotnie sprężystego, kształtu graniastosłupa lub walca, gdy siły zewnętrzne działają tylko na jego końcach (niema natomiast sił działających na powierzchnię boczną, ani sił zewnętrznych działających na masę, t. j. działających jednocześnie na wszystkie punkty ciała), tak przytem rozmieszczonych, że włókna podłużne tego ciała nie wywierają na siebie ciśnień bocznych, t. j. że na powierzchni bocznej żadnego z tych włókien niema naprężeń normalnych.

Przyjmując osie współrzędnych tak, jak to było wskazane na początku ustępu 36 i oznaczając przez n kierunek normalnej do powierzchni bocznej dowolnego włókna podłużnego w dowolnym jej punkcie, otrzymamy, na zasadzie warunku ostatniego, dla wszystkich punktów ciała graniastosłupowatego równanie $p_{nn} = 0$ przy wszystkich kierunkach n , dla których $\cos(n, z) = 0$. Ponieważ kierunki x i y odpowiadają temu ostatniemu warunkowi, przeto dla nich również istnieją równości $p_{xx} = 0$ i $p_{yy} = 0$. Zwracając się do wzoru ogólnego (56) na p_{nn} (p. ustęp 22) i przyjmując w nim $p_{xx} = p_{yy} = 0$, $\cos(n, z) = 0$ i $p_{nn} = 0$, znajdziemy, że naprężenie styczne p_{xy} także równe jest zeru.

¹⁾ Theorie der Elasticität fester Körper, 1862.

²⁾ Mém. sur la torsion des prismes, 1855; Mém. sur la flexion des prismes. Liouville. Journ. II Série, T. 1 (1856).

Dla wszystkich więc punktów ciała mamy warunki:

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{xy} = 0 \dots \dots \dots (a).$$

Wprowadzając te warunki do wzorów (136) (p. ustęp 31), otrzymamy:

$$\Delta_x = \Delta_y = -\frac{\mu}{E} p_{zz}, \quad p_{zz} = E \Delta_z \quad \text{i} \quad g_{xy} = 0, \quad \text{czyli} \quad \Delta_x = \Delta_y = -\mu \Delta_z, \\ \text{albo:}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{i} \quad p_{zz} = E \frac{\partial w}{\partial z} \dots \dots \dots (b).$$

Równania równowagi (47) (p. ustęp 20), gdy przyjmiemy, że w nich siły działające na masę (t. j. działające jednocześnie na wszystkie punkty ciała) są równe zeru i gdy wprowadzimy warunki (a), dadzą:

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p_{yy}}{\partial z} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} = 0, \quad \text{czyli} \\ \frac{\partial g_{xx}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial g_{yy}}{\partial z} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial g_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial g_{yy}}{\partial y} + 2(1 + \mu) \frac{\partial \Delta_z}{\partial z} = 0.$$

Podstawiając za odkształcenia składowe ich wartości w zależności od posunięć, otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0 \quad \text{i} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0.$$

Równanie ostatnie, na mocy równań (b), przyjmie postać:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0.$$

Do oznaczenia więc funkcji u , v i w mamy sześć równań różniczkowych:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = -\mu \frac{\partial w}{\partial z} & \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\mu \frac{\partial w}{\partial z} & \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 & \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (c).$$

79. Wyznaczenie posunięć u , v i w . Różniczkujemy równanie czwarte grupy (c) względem x , piąte względem y i dodajemy je:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad \text{czyli} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(-2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = -2(1 + \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = 0, \quad \text{czyli} \\ \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = 0 \dots \dots \dots (d).$$

Różniczkujemy równanie czwarte względem y , piąte względem x i dodajemy:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = 0.$$

Stąd na zasadzie równania trzeciego:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = 0 \quad \dots \quad (e).$$

Różniczkujemy ponownie równanie czwarte względem x , piąte względem y i odejmujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z} - \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z} = 0, \quad \text{czyli} \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z} \quad \dots \quad (f). \end{aligned}$$

Różniczkujemy równanie szóste względem z :

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z} = -2 \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = 0 \quad [\text{na mocy równania (d)}].$$

Równanie to w związku z równaniem (f) daje:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z} = 0.$$

Do oznaczenia więc pochodnej $\frac{\partial w}{\partial z}$, czyli odkształcenia składowego Δ_z , służą równania następujące:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad \dots \quad (g).$$

Równania te wskazują, że pochodna $\frac{\partial w}{\partial z}$ zawiera każdą ze współrzędnych x, y i z w potęgze nie wyższej od pierwszej i nie zawiera iloczynu xy , wskutek czego postać pochodnej $\frac{\partial w}{\partial z}$ może być tylko następująca:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = a + a_1 x + a_2 y + z (b + b_1 x + b_2 y) \quad \dots \quad (h),$$

gdzie a, a_1, a_2, b, b_1 i b_2 są to pewne ilości stałe dowolne, bardzo małe, albowiem odkształcenia składowe powinniśmy uważać za bardzo małe.

Teraz równania: pierwsze i drugie grupy (c) przyjmują postać:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\mu (a + a_1 x + a_2 y) - \mu z (b + b_1 x + b_2 y) \quad \dots \quad (i).$$

Całkując równania (i) i (h), otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\mu \left(ax + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 xy \right) - \mu z \left(bx + b_1 \frac{x^2}{2} + b_2 xy \right) + f_1(y, z) \\ v &= -\mu \left(ay + a_1 xy + a_2 \frac{y^2}{2} \right) - \mu z \left(by + b_1 xy + b_2 \frac{y^2}{2} \right) + f_2(z, x) \\ w &= (a + a_1 x + a_2 y) z + (b + b_1 x + b_2 y) \frac{z^2}{2} + F(x, y) \end{aligned} \right\} (j).$$

Tu funkcje f_1 , f_2 i F są funkcjami dowolnymi tych zmiennych, które przy każdym z wykonanych całkowań, przyjmowaliśmy za stałe.

Równania: czwarte i piąte grupy (c), wraz z równaniem (h), dają:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = -a_1 - b_1 z \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = -a_2 - b_2 z. \end{aligned}$$

Sprawdzając te ostatnie równania zapomocą równań (j), otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} = -a_1 - b_1 z \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} = -a_2 - b_2 z.$$

Stąd wynika, że:

$$\begin{aligned} f_1(y, z) &= -a_1 \frac{z^2}{2} - b_1 \frac{z^3}{6} + \varphi_1(y) \cdot z + \psi_1(y) \\ f_2(x, z) &= -a_2 \frac{z^2}{2} - b_2 \frac{z^3}{6} + \varphi_2(x) \cdot z + \psi_2(x), \end{aligned}$$

gdzie φ_1 , ψ_1 , φ_2 i ψ_2 są nowymi funkcjami dowolnymi, które należy oznaczyć, tak, ażeby równanie $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ było spełnione, wskutek czego:

$$-\mu a_2 x - \mu b_2 xz + z \varphi_1' + \psi_1' - \mu a_1 y - \mu b_1 yz + z \varphi_2' + \psi_2' = 0.$$

Ponieważ ta równość musi istnieć przy dowolnym z , przeto rozpada się ona na dwie następujące równości:

$$\begin{aligned} \varphi_1'(y) + \varphi_2'(x) &= \mu b_1 y + \mu b_2 x + b_0 - b_0 \\ \psi_1'(y) + \psi_2'(x) &= \mu a_1 y + \mu a_2 x + a_0 - a_0, \end{aligned}$$

gdzie dla tem większego uogólnienia wyników wprowadziliśmy różnice równe zero $b_0 - b_0$ i $a_0 - a_0$.

Ostatnie dwie tożsamości muszą być spełnione przy dowolnych x i y , mamy więc:

$$\begin{aligned} \varphi_1'(y) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \mu b_1 y + b_0, & \varphi_2'(x) &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \mu b_2 x - b_0, \\ \psi_1'(y) &= \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \mu a_1 y + a_0, & \psi_2'(x) &= \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = \mu a_2 x - a_0. \end{aligned}$$

Stąd, całkując, otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(y) &= \mu b_1 \frac{y^2}{2} + b_0 y + b' ; & \varphi_2(x) &= \mu b_2 \frac{x^2}{2} - b_0 x + b'' \\ \psi_1(y) &= \mu a_1 \frac{y^2}{2} + a_0 y + a' ; & \psi_2(x) &= \mu a_2 \frac{x^2}{2} - a_0 x + a'' \end{aligned} \right\} \dots (k).$$

Ilości a' , a'' , b' i b'' są to stałe dowolne.

Funkcję $F(x, y)$ możemy wyznaczyć zapomocą równania szóstego grupy (c), z którego otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2(b + b_1 x + b_2 y) = 0 \dots (l).$$

To ostatnie równanie można uprościć przez zastąpienie funkcji F sumą dwóch funkcji $\Omega(x, y) + f(x, y)$, i przez podstawienie za funkcję f jednej z całek cząstkowych równania (l).

Clebsch przyjmuje:

$$f(x, y) = - \left[b \frac{x^2 + y^2}{2} + b_1 x y^2 + b_2 y x^2 + c' x + c'' y \right],$$

my zaś przyjmiemy:

$$\begin{aligned} f(x, y) = - \left[b \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{2 - \mu}{6} (b_1 x^3 + b_2 y^3) + \right. \\ \left. + \frac{\mu}{2} (b_1 x y^2 + b_2 y x^2) + c' x + c'' y \right] \dots (m), \end{aligned}$$

albowiem z wzoru ostatniego na funkcję f wynikają wzory ostateczne nieco prostsze.

Wprowadzając za F sumę $\Omega + f$, otrzymamy równanie:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 0 \dots (n),$$

które służy do wyznaczenia funkcji Ω .

Z wyników dotychczasowych, łącznie uważanych, otrzymujemy następujące wzory na posunięcia u , v i w :

$$\left. \begin{aligned} u &= -\mu \left(ax + a_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + a_2 xy \right) - \mu z \left(bx + b_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + b_2 xy \right) - \\ &\quad - a_1 \frac{z^2}{2} - b_1 \frac{z^3}{6} + z(b_0 y + b') + a_0 y + a' \\ v &= -\mu \left(ay + a_1 xy + a_2 \frac{y^2 - x^2}{2} \right) - \mu z \left(by + b_1 xy + b_2 \frac{y^2 - x^2}{2} \right) - \\ &\quad - a_2 \frac{z^2}{2} - b_2 \frac{z^3}{6} + z(-b_0 x + b'') - a_0 x + a'' \\ w &= (a + a_1 x + a_2 y) z + (b + b_1 x + b_2 y) \frac{z^2}{2} + \Omega(x, y) - b \frac{x^2 + y^2}{2} - \\ &\quad - \frac{2 - \mu}{6} (b_1 x^3 + b_2 y^3) - \frac{\mu}{2} (b_1 x y^2 + b_2 y x^2) - c' x - c'' y \end{aligned} \right\} (o).$$

Zapomocą tych wzorów oznaczymy odkształcenia składowe, a następnie dla sił sprężystości otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial x} - (1+\mu) bx + b_0 y - b_1 x^2 - 2\mu b_2 xy + b' - c' \right] \\ p_{yy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y} - (1+\mu) by + b_0 x - 2\mu b_1 xy - b_2 y^2 + b'' - c'' \right] \\ p_{zz} &= E [a + a_1 x + a_2 y + z(b + b_1 x + b_2 y)] \end{aligned} \right\} \cdot (p).$$

80. Wyznaczenie współczynników. Wzory (o) na posunięcia zawierają 14 współczynników $a, a_1, a_2, a_0, a', a'', b, b_1, b_2, b_0, b', b'', c' i c''$, a nadto wartość funkcji $\Omega(x, y)$ nie jest wyznaczona przy $x = y = 0$. Wzory więc nasze zawierają ogółem 15 niewiadomych ilości stałych. Do oznaczenia tych 15 niewiadomych mamy jednak tylko 12 warunków, a mianowicie: sześć warunków, wynikających z założenia, że ciało graniastłupowate nie podlega posunięciom postępowym ani ruchom obrotowym, wspólnym wszystkim jego punktom i sześć warunków, oznaczonych przez trzy rzuty wypadkowej i trzy rzuty momentu liniowego sił zewnętrznych, odkształcających ciało. Nieoznaczone trzy współczynniki możemy wyzyskać w celu uproszczenia wzorów. Tak np. z wzorów (p) widzimy, że wzory na naprężenia styczne będą nieco prostsze, gdy przyjmiemy:

$$c' = b' \quad \text{i} \quad c'' = b'' \quad \dots \dots \dots (q).$$

W celu uniemożliwienia posunięć postępowych i ruchów obrotowych, wspólnych wszystkim punktom ciała, wystarcza postawienie warunku, że przy $x=y=z=0$ powinny istnieć równości (p. koniec ustępu 33):

$$u = v = w = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Równości te zaś wymagają, ażeby:

$$\begin{aligned} a' = a'' = 0, \quad \Omega(o, o) = 0, \quad a_0 = 0, \\ b' = c' = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)_o, \quad b'' = c'' = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)_o \quad \dots \dots \dots (r). \end{aligned}$$

Dotychczas nie wyraziliśmy analitycznie warunku, że na powierzchni bocznej graniastłupa nie działają siły zewnętrzne. Oznaczając przez n normalną zewnętrzną do powierzchni bocznej w dowolnym jej punkcie, możemy warunek rzeczony wyrazić zapomocą równania $p_n = 0$, które rozkłada się na trzy:

$$p_{nx} = 0, \quad p_{ny} = 0 \quad \text{i} \quad p_{nz} = 0.$$

Te ostatnie równania, na podstawie wzorów (50) (p. ustęp 21), gdy istnieją równości:

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{xy} = 0 \quad \text{i} \quad \cos(n, z) = 0$$

dają tylko jedno równanie następujące:

$$p_{zx} \cos(n, x) + p_{zy} \cos(n, y) = 0,$$

albo, gdy oznaczymy przez φ kąt normalnej n z osią x :

$$p_{zx} \cos \varphi + p_{zy} \sin \varphi = 0. \quad (s).$$

To ostatnie równanie powinno istnieć tylko dla punktów obwodu przekroju. Kąt φ jest kątem normalnej zewnętrznej do obwodu z osią x . Skoro wprowadzimy w to równanie zamiast sił sprężystości ich wartości z równań (p), otrzymamy równanie:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \sin \varphi = V \cos \varphi + W \sin \varphi \quad (t),$$

gdzie
$$V = (1 + \mu) b x - b_0 y + b_1 x^2 + 2\mu b_2 xy \quad (u).$$
 i
$$W = (1 + \mu) b y + b_0 x + 2\mu b_1 xy + b_2 y^2$$

Z równań tych widzimy, że funkcja Ω może zawierać tylko współczynniki b , b_0 , b_1 i b_2 , które z uwagi na nieznaczące odkształcenie należy uważać za ilości bardzo małe, wskutek czego, odrzucając potęgi wyższe od pierwszej tych ilości, możemy przyjąć:

$$\Omega = b B + b_0 B_0 + b_1 B_1 + b_2 B_2 \quad (v),$$

gdzie B , B_0 , B_1 i B_2 są to pewne funkcje współrzędnych x i y .

Funkcja Ω powinna jednak spełniać równanie (n) dla wszystkich punktów graniastosłupa i równanie (t) dla punktów obwodu, bez względu na to, jakie są wartości stałych b , b_0 , b_1 i b_2 . Wskutek tego funkcje B , B_0 , B_1 i B_2 powinny dla wszystkich punktów graniastosłupa czynić zadość równaniom:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 B_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_0}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_2}{\partial y^2} = 0 \quad (w)$$

i równocześnie powinny dla punktów obwodu zadość czynić równaniom:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial B}{\partial y} \sin \varphi &= (1 + \mu) (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \\ \frac{\partial B_0}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial B_0}{\partial y} \sin \varphi &= -y \cos \varphi + x \sin \varphi \\ \frac{\partial B_1}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial B_1}{\partial y} \sin \varphi &= x^2 \cos \varphi + 2\mu xy \sin \varphi \\ \frac{\partial B_2}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial B_2}{\partial y} \sin \varphi &= 2\mu xy \cos \varphi + y^2 \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (x),$$

przyczem powinno być:

$$B(0, 0) = B_0(0, 0) = B_1(0, 0) = B_2(0, 0) = 0 \quad (y).$$

Na podstawie tych ostatnich równań można dowieść, że współczynnik b równy jest zeru, t. j. że funkcja B nie powinna wchodzić w nasze równania, albowiem równania, którym ta funkcja powinna zadość czynić, wymagają, ażeby powierzchnia przekroju była równa zeru, co jest niemożliwe. Rzeczywiście, na zasadzie wzoru (161) (p. ustęp 38) mamy:

$$\iint \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \right) \partial x \partial y = \int \left(\frac{\partial B}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial B}{\partial y} \sin \varphi \right) \partial s .$$

Jeżeli całkę strony pierwszej tego równania rozpostrzemy na powierzchnię przekroju, to całkę strony drugiej powinniśmy rozpostrzeć na obwód przekroju. A że dla wszystkich punktów graniastostłupa

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = 0 ,$$

a dla punktów obwodu:

$$\frac{\partial B}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial B}{\partial y} \sin \varphi = (1 + \mu) (x \cos \varphi + y \sin \varphi) ,$$

przeto otrzymujemy równanie:

$$\int (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \partial s = 0 .$$

Jednakże z wzoru (159) wynika:

$$\begin{aligned} \int (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \partial s &= \iint \left[\frac{\partial(x)}{\partial y} + \frac{\partial(y)}{\partial x} \right] \partial x \partial y = \\ &= \iint (1 + 1) \partial x \partial y = 2 \iint \partial x \partial y = 2F = 0 , \end{aligned}$$

gdzie F jest powierzchnią przekroju, która nie może być równą zeru.

Przyjmując więc $b=0$, otrzymamy ostatecznie wzory następujące:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\mu \left(ax + a_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + a_2 xy \right) - \mu z \left(b_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + b_2 xy \right) - \\ &\quad - a_1 \frac{z^2}{2} - b_1 \frac{z^3}{6} + z \left[b_0 y + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)_0 \right] \\ v &= -\mu \left(ay + a_1 xy + a_2 \frac{y^2 - x^2}{2} \right) - \mu z \left(b_1 xy + b_2 \frac{y^2 - x^2}{2} \right) - \\ &\quad - a_2 \frac{z^2}{2} - b_2 \frac{z^3}{6} + z \left[-b_0 x + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)_0 \right] \\ w &= (a + a_1 x + a_2 y) z + (b_1 x + b_2 y) \frac{z^2}{2} + \Omega(x, y) - \\ &\quad - \frac{2-\mu}{6} (b_1 x^3 + b_2 y^3) - \frac{1}{2} \mu (b_1 xy^2 + b_2 yx^2) - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)_0 x - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)_0 y \end{aligned} \right\} . \quad (386).$$

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial x} + b_0 y - b_1 x^2 - 2\mu b_2 xy \right] \\ p_{yy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y} - b_0 x - 2\mu b_1 xy - b_2 y^2 \right] \\ p_{zz} &= E [a + a_1 x + a_2 y + z (b_1 x + b_2 y)] \\ p_{xx} &= p_{yy} = p_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (387).$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= b_0 B_0 + b_1 B_1 + b_2 B_2 \\ \frac{\partial^2 B_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_0}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_2}{\partial y^2} = 0 \\ B_0(0, 0) &= B_1(0, 0) = B_2(0, 0) = 0 \\ \frac{\partial B_0}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial B_0}{\partial y} \sin \varphi &= -y \cos \varphi + x \sin \varphi \\ \frac{\partial B_1}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial B_1}{\partial y} \sin \varphi &= x^2 \cos \varphi + 2\mu xy \sin \varphi \\ \frac{\partial B_2}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial B_2}{\partial y} \sin \varphi &= 2\mu xy \cos \varphi + y^2 \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots (388).$$

W celu wyznaczenia pozostałych sześciu współczynników musimy zwrócić się do sił zewnętrznych, odkształcających graniastóp.

Przyjmijmy, że siły zewnętrzne, działające na podstawę graniastopu, po przeniesieniu ich do początku współrzędnych, każdą równolegle do siebie samej, sprowadzają się do jednej wypadkowej R , której rzuty na osie współrzędnych x , y i z są R_x , R_y i R_z i do jednej pary, której momentu liniowego rzuty na też osie są M_x , M_y i M_z .

Nadto przyjmijmy, że osi współrzędnych x i y zlewają się z osiami głównymi bezwładności środka ciężkości podstawy, czyli że:

$$\iint x \, \partial x \, \partial y = 0, \quad \iint y \, \partial x \, \partial y = 0, \quad \iint xy \, \partial x \, \partial y = 0,$$

$$\iint y^2 \, \partial x \, \partial y = I_x \quad \text{i} \quad \iint x^2 \, \partial x \, \partial y = I_y,$$

gdzie I_x i I_y są to momenty główne bezwładności przekroju.

Skoro długość graniastopu oznaczmy przez L i uwzględnimy, że siły zewnętrzne równoważą się z naprężeniami, to otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \iint p_{xx} \, \partial x \, \partial y, \quad R_y = \iint p_{yy} \, \partial x \, \partial y, \quad R_z = \iint p_{zz} \, \partial x \, \partial y \\ M_x &= \iint (p_{zz} y - p_{zy} L) \, \partial x \, \partial y = \iint y p_{zz} \, \partial x \, \partial y - L R_y \\ M_y &= \iint (p_{zx} L - p_{zz} x) \, \partial x \, \partial y = L R_x - \iint x p_{zz} \, \partial x \, \partial y \\ M_z &= \iint (p_{zy} x - p_{zx} y) \, \partial x \, \partial y. \end{aligned} \right\} \dots (389).$$

czyli, wstawiając za siły sprężystości ich wartości:

$$R_x = \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\iint \frac{\partial \Omega}{\partial x} \partial x \partial y - b_1 I_y \right]$$

$$R_y = \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\iint \frac{\partial \Omega}{\partial y} \partial x \partial y - b_2 I_x \right]$$

$$R_z = E a F$$

$$M_x = E I_x (a_2 + L b_2) - L R_2$$

$$M_y = - E I_y (a_1 + L b_1) + L R_1$$

$$M_z = \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\iint \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) \partial x \partial y - b_0 (I_x + I_y) + \right. \\ \left. + (1-2\mu) \iint (b_1 y x^2 - b_2 x y^2) \partial x \partial y \right].$$

Całki, wchodzące we wzory na R_x i R_y , mogą być wyznaczone, pomimo, że funkcja Ω nie jest jeszcze znana. Rzeczywiście:

$$\frac{\partial \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} + x \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \Omega}{\partial x},$$

mamy więc:

$$\iint \frac{\partial \Omega}{\partial x} \partial x \partial y = \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) \right] \partial x \partial y \\ = \int x \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \sin \varphi \right) \partial s \quad (\text{według wzoru 159}) \\ = \int x (V \cos \varphi + W \sin \varphi) \partial s \quad (\quad , \quad , \quad t) \\ = \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} (x V) + \frac{\partial}{\partial y} (x W) \right] \partial x \partial y \quad (\quad , \quad , \quad 159).$$

Jednakże $\frac{\partial}{\partial x} (x V) + \frac{\partial}{\partial y} (x W) = -b_0 y + 3 b_1 x^2 + 4 \mu b_2 x y + 2 \mu b_1 x^2 + 2 b_2 x y$,

więc $\iint \frac{\partial \Omega}{\partial x} \partial x \partial y = (3+2\mu) b_1 I_y$.

W takiż sposób otrzymamy:

$$\iint \frac{\partial \Omega}{\partial y} \partial x \partial y = (3+2\mu) b_2 I_x.$$

Wobec tego wzory poprzednie przyjmują postać:

$$R_x = E I_y b_1, \quad R_y = E I_x b_2, \quad R_z = E F a,$$

$$M_x = E I_x a_2, \quad M_y = - E I_y a_1$$

i dają:

$$a = \frac{R_x}{EF}, \quad a_1 = -\frac{M_y}{EI_y}, \quad a_2 = \frac{M_x}{EI_x}, \quad b_1 = \frac{R_x}{EI_y} \quad \text{i} \quad b_2 = \frac{R_y}{EI_x} \dots (390).$$

Współczynnik b_0 powinien być oznaczony z równania:

$$M_z = \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\iint \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) \partial x \partial y - b_0 (I_x + I_y) + \right. \\ \left. + (1 - 2\mu) \iint (b_1 yx^2 - b_2 xy^2) \partial x \partial y \right] \dots (391),$$

gdzie $\Omega = b_0 B_0 + b_1 B_1 + b_2 B_2$.

81. Obwód symetryczny. Wzór (391), służący do oznaczenia współczynnika b_0 , upraszcza się znacznie gdy obwód przekroju jest symetryczny względem osi x i y . To uproszczenie jest następstwem tej okoliczności, że w takim przypadku całka podwójna $\iint f(x, y) \partial x \partial y$, rozpostarta na powierzchnię przekroju, będzie równa zeru zawsze, gdy funkcja $f(x, y)$ będzie nieparzysta względem jednej ze zmiennych x lub y , albowiem każdemu dodatniemu elementowi całki będzie odpowiadał element równy mu lecz ujemny.

Zgodnie z tą uwagą, we wzorze (391), gdy obwód jest symetryczny, należy przyjąć $\iint (b_1 yx^2 - b_2 xy^2) \partial x \partial y = 0$, ponieważ yx^2 jest funkcją nieparzystą zmiennej y , a xy^2 jest funkcją nieparzystą zmiennej x . Nadto możemy udowodnić, że i każda z całek

$$\iint \left(x \frac{\partial B_1}{\partial y} - y \frac{\partial B_1}{\partial x} \right) \partial x \partial y \quad \text{i} \quad \iint \left(x \frac{\partial B_2}{\partial y} - y \frac{\partial B_2}{\partial x} \right) \partial x \partial y$$

jest także równa zeru, wskutek czego równanie (391) przyjmuje postać:

$$M_z = \frac{Eb_0}{2(1+\mu)} \left[\iint \left(x \frac{\partial B_0}{\partial y} - y \frac{\partial B_0}{\partial x} \right) \partial x \partial y - (I_x + I_y) \right] \dots (392).$$

W istocie, jeżeli φ jest kątem normalnej zewnętrznej do obwodu z osią x w punkcie (x, y) , to w punkcie $(-x, y)$ kąt ten, gdy obwód jest symetryczny, będzie równy $180^\circ - \varphi$; ponieważ zaś $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$, a $\sin(180^\circ - \varphi) = \sin \varphi$, przeto $\cos \varphi$ jest funkcją nieparzystą zmiennej x , a $\sin \varphi$ jest funkcją parzystą zmiennej x . W punkcie $(x, -y)$ obwodu, kąt będzie równy $360^\circ - \varphi$, czyli $-\varphi$; a ponieważ $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$ i $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$, przeto $\cos \varphi$ jest funkcją parzystą zmiennej y , a $\sin \varphi$ — nieparzystą zmiennej y .

Dla obwodów więc symetrycznych $\cos \varphi$ jest funkcją nieparzystą zmiennej x i parzystą zmiennej y , a $\sin \varphi$ jest funkcją parzystą zmiennej x i nieparzystą zmiennej y . Rozważając strony drugie trzech równań ostatnich grupy (388), przychodzimy do wniosku, że gdy obwód jest symetryczny:

$\frac{\partial B_0}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial B_0}{\partial y} \sin \varphi$ jest funkcją *nieparzystą* zarówno zmiennej x jak i zmiennej y ;

$\frac{\partial B_1}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial B_1}{\partial y} \sin \varphi$ jest funkcją *nieparzystą* zmiennej x i *parzystą* zmiennej y ;

$\frac{\partial B_2}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial B_2}{\partial y} \sin \varphi$ jest funkcją *parzystą* zmiennej x i *nieparzystą* zmiennej y .

A więc:

funkcya B_0 musi być funkcją <i>nieparzystą</i> zmiennych x i y funkcya B_1 musi być funkcją <i>nieparzystą</i> zmiennej x i <i>pa- rzystą</i> zmiennej y funkcya B_2 musi być funkcją <i>parzystą</i> zmiennej x i <i>niepa- rzystą</i> zmiennej y	. . . (393),
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------

przyczem funkcye $x \frac{\partial B_1}{\partial y} - y \frac{\partial B_1}{\partial x}$ i $x \frac{\partial B_2}{\partial y} - y \frac{\partial B_2}{\partial x}$ będą nieparzystymi: pierwsza zmiennej y , a druga zmiennej x , skutkiem czego podane wyżej całki tych funkcji będą równe zeru.

§2. Oznaczenie funkcji B_0 , B_1 i B_2 dla obwodu eliptycznego. Dla przykładu oznaczymy funkcye B_0 , B_1 i B_2 dla obwodu eliptycznego, o równaniu $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$. Różniczkując to równanie, otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{m^2 y}{n^2 x}, \text{ czyli } \sin \varphi : \cos \varphi = \frac{y}{n^2} : \frac{x}{m^2},$$

wskutek czego trzy równania ostatnie grupy (388) przyjmą postać:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B_0}{\partial x} \cdot \frac{x}{m^2} + \frac{\partial B_0}{\partial y} \cdot \frac{y}{n^2} &= \frac{m^2 - n^2}{m^2 n^2} xy \\ \frac{\partial B_1}{\partial x} \cdot \frac{x}{m^2} + \frac{\partial B_1}{\partial y} \cdot \frac{y}{n^2} &= \frac{x^3}{m^2} + \frac{2\mu}{n^2} xy^2 \\ \frac{\partial B_2}{\partial x} \cdot \frac{x}{m^2} + \frac{\partial B_2}{\partial y} \cdot \frac{y}{n^2} &= \frac{2\mu}{m^2} x^2 y + \frac{y^3}{n^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (a).$$

Dla elipsy, jako obwodu symetrycznego, możemy przyjąć na zasadzie wyników (393):

$$\begin{aligned} B_0 &= \alpha xy \\ B_1 &= \beta x + \beta' x y^2 + \beta'' x^3 \\ B_2 &= \gamma y + \gamma' y x^2 + \gamma'' y^3. \end{aligned}$$

Każda z tych funkcji powinna jednakże zadość czynić równaniu $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = 0$, wskutek czego:

$$6\beta'' + 2\beta' = 0 \quad \text{i} \quad 6\gamma'' + 2\gamma' = 0, \quad \text{czyli} \quad \beta' = -3\beta'' \quad \text{i} \quad \gamma' = -3\gamma''.$$

Mamy więc:

$$B_0 = \alpha xy, \quad B_1 = \beta x + \beta''(x^3 - 3xy^2) \quad \text{i} \quad B_2 = \gamma y + \gamma''(y^3 - 3yx^2).$$

Dla pochodnych tych funkcji otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_0}{\partial x} &= \alpha y, & \frac{\partial B_0}{\partial y} &= \alpha x \\ \frac{\partial B_1}{\partial x} &= \beta + 3\beta''(x^2 - y^2), & \frac{\partial B_1}{\partial y} &= -6\beta'' xy \\ \frac{\partial B_2}{\partial x} &= -6\gamma'' xy, & \frac{\partial B_2}{\partial y} &= \gamma + 3\gamma''(y^2 - x^2). \end{aligned}$$

Te pochodne należy wprowadzić w równania (a); ponieważ jednak te równania istnieją tylko dla punktów obwodu, dla których $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$, przeto mamy prawo uczynić pochodne $\frac{\partial B_1}{\partial x}$ i $\frac{\partial B_2}{\partial y}$ funkcjami jednorodnymi współrzędnych, mnożąc wyrazy β i γ przez sumę $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2}$. Po wykonaniu tego otrzymamy zamiast równań (a) następujące:

$$\begin{aligned} \alpha \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \right) xy &= \frac{m^2 - n^2}{m^2 n^2} xy \\ \left[\beta \left(\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} \right) + 3\beta''(x^2 - y^2) \right] \frac{x^2}{m^2} - 6\beta'' xy \frac{y}{n^2} &= \frac{x^3}{m^2} + \frac{2\mu}{n^2} xy^2 \\ - 6\gamma'' xy \frac{x}{m^2} + \left[\gamma \left(\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} \right) + 3\gamma''(y^2 - x^2) \right] \frac{y}{n^2} &= \frac{2\mu}{m^2} x^2 y + \frac{y^3}{n^2}. \end{aligned}$$

Gdy porównamy współczynniki wyrazów podobnych w obu stronach każdej z tych równości, otrzymamy równania:

$$\alpha \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{m^2 - n^2}{m^2 n^2}$$

$$\beta + 3\beta'' m^2 = m^2, \quad \beta - 3(n^2 + 2m^2)\beta'' = 2\mu m^2$$

$$\gamma + 3\gamma'' n^2 = n^2, \quad \gamma - 3(m^2 + 2n^2)\gamma'' = 2\mu n^2,$$

z których otrzymujemy:

$$\alpha = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$$

$$\beta = \frac{2(1 + \mu)m^2 + n^2}{3m^2 + n^2} m^2, \quad \beta'' = \frac{1 - 2\mu}{3} \frac{m^2}{3m^2 + n^2}$$

$$\gamma = \frac{2(1 + \mu)n^2 + m^2}{3n^2 + m^2} n^2, \quad \gamma'' = \frac{1 - 2\mu}{3} \frac{n^2}{3n^2 + m^2}.$$

Funkcye więc szukane dla obwodu eliptycznego są:

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} xy \\ B_1 &= \frac{m^2}{3m^2 + n^2} \left[\{n^2 + 2(1 + \mu)m^2\} x + \frac{1 - 2\mu}{3} (x^3 - 3xy^2) \right] \\ B_2 &= \frac{n^2}{3n^2 + m^2} \left[\{m^2 + 2(1 + \mu)n^2\} y + \frac{1 - 2\mu}{3} (y^3 - 3yx^2) \right] \end{aligned} \right\} \quad (394).$$

a zatem
$$\iint \left(x \frac{\partial B_0}{\partial y} - y \frac{\partial B_0}{\partial x} \right) \partial x \partial y = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} (I_y - I_x).$$

Z równania (392) w danym przypadku wynika:

$$b_0 = - \frac{1 + \mu}{E} \cdot \frac{m^2 + n^2}{m^2 I_x + n^2 I_y} \cdot M_z \quad \dots \quad (395),$$

a ponieważ dla elipsy $I_x = \frac{\pi}{4} mn^3$ i $I_y = \frac{\pi}{4} m^3 n$, przeto:

$$b_0 = - \frac{1 + \mu}{E} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{m^2 + n^2}{m^3 n^3} \cdot M_z \quad \dots \quad (396).$$

Dla walca kołowego, o promieniu r , należy w tych wzorach przyjąć $m^2 = n^2 = r^2$.

83. Przypadki szczególne odkształcenia ciała graniastosłupowatego.

Rozciąganie albo *ściskanie* otrzymamy, gdy z sześciu współczynników a , a_1 , a_2 , b_0 , b_1 i b_2 zatrzymamy we wzorach tylko pierwszy a , pozostałe zaś przyjmiemy za równe zero. W tym przypadku będzie:

$$u = -\mu a x, \quad v = -\mu a y, \quad w = a z$$

$$\Delta_x = \Delta_y = -\mu a, \quad \Delta_z = a = \frac{R_z}{EF}$$

$$g_{xy} = g_{yz} = g_{zx} = 0, \quad \Omega = 0$$

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{xy} = p_{xz} = p_{zy} = 0, \quad p_{zz} = Ea = \frac{R_z}{F}.$$

Przypadek ten rozważaliśmy w ustępie 39.

Skrećanie otrzymamy, gdy zatrzymamy tylko współczynnik b_0 .

Wzory w tym przypadku będą miały postać następującą:

$$u = b_0 z \left[y + \left(\frac{\partial B_0}{\partial x} \right)_0 \right], \quad v = b_0 z \left[-x + \left(\frac{\partial B_0}{\partial y} \right)_0 \right]$$

$$w = b_0 \left[B_0 - x \left(\frac{\partial B_0}{\partial x} \right)_0 - y \left(\frac{\partial B_0}{\partial y} \right)_0 \right]$$

$$p_{xx} = \frac{Eb_0}{2(1 + \mu)} \left(\frac{\partial B_0}{\partial x} + y \right), \quad p_{yy} = \frac{Eb_0}{2(1 + \mu)} \left(\frac{\partial B_0}{\partial y} - x \right), \quad p_{zz} = 0.$$

Do oznaczenia funkcji B_0 mamy równania:

$$\frac{\partial^2 B_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_0}{\partial y^2} = 0, \quad B_0(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial B_0}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial B_0}{\partial y} \sin \varphi = -y \cos \varphi + x \sin \varphi,$$

a współczynnik b_0 otrzymujemy z wzoru:

$$b_0 = \frac{2(1 + \mu)}{E} \cdot \frac{M_x}{\iint \left(x \frac{\partial B_0}{\partial y} - y \frac{\partial B_0}{\partial x} \right) \partial x \partial y - (I_x + I_y)}$$

Przypadek ten rozważaliśmy w ustępie 48.

Wyginięcie płaskie otrzymamy, gdy zatrzymamy dwa współczynniki a_1 i b_1 (albo a_2 i b_2). Jeżeli np. wyginanie wywołuje siła P , działająca w środku ciężkości podstawy i równoległa do osi x , to otrzymamy $R_x = P$ i $M_y = PL$, a więc:

$$a_1 = -\frac{PL}{EI_y} \quad \text{i} \quad b_1 = \frac{P}{EI_y}.$$

Wzory zaś dadzą:

$$\Omega = b_1 B_1$$

$$u = \frac{P}{EI_y} \left[\mu \frac{x^2 - y^2}{2} (L - z) + L \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} + \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} \right)_0 z \right]$$

$$v = \frac{P}{EI_y} \left[\mu xy (L - z) + \left(\frac{\partial B_1}{\partial y} \right)_0 z \right]$$

$$w = \frac{P}{EI_y} \left[B_1 - \frac{2 - \mu}{6} x^3 - \frac{1}{2} \mu xy^2 - \left(Lz - \frac{z^2}{2} \right) x - x \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} \right)_0 - y \left(\frac{\partial B_1}{\partial y} \right)_0 \right]$$

$$\Delta_x = \Delta_y = -\mu \Delta_s, \quad \Delta_s = -\frac{P(L - z)}{EI_y} x$$

$$g_{sx} = \frac{P}{EI_y} \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} - x^2 \right), \quad (g_{sx})_0 = \frac{P}{EI_y} \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} \right)_0$$

$$g_{sy} = \frac{P}{EI_y} \left(\frac{\partial B_1}{\partial y} - 2\mu xy \right), \quad (g_{sy})_0 = \frac{P}{EI_y} \left(\frac{\partial B_1}{\partial y} \right)_0$$

$$p_{sx} = G g_{sx}, \quad p_{sy} = G g_{sy}, \quad p_{sz} = -\frac{P}{I_y} (L - z) x$$

$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_1}{\partial y^2} = 0, \quad B_1(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial B_1}{\partial y} \sin \varphi = x^2 \cos \varphi + 2\mu xy \sin \varphi.$$

Równania włókna podłużnego, przechodzącego przez punkt (x, y) podstawy, są:

$$x' = x + \frac{P}{EI_y} \left[\mu \frac{x^2 - y^2}{2} (L - z') + L \frac{z'^2}{2} - \frac{z'^3}{6} \right] + (g_{xx})_0 z'$$

$$y' = y + \frac{P}{EI_y} \mu xy (L - z') + (g_{yy})_0 z' ,$$

a równania włókna środkowego:

$$x' = \frac{P}{EI_y} \left(L \frac{z'^2}{2} - \frac{z'^3}{6} \right) + (g_{xx})_0 z' , \quad y' = (g_{yy})_0 z' .$$

Do oznaczenia kierunku stycznej do tej ostatniej krzywej, służą równania:

$$\frac{\partial x'}{\partial z'} = \frac{P}{EI_y} \left(L z' - \frac{z'^2}{2} \right) + (g_{xx})_0 , \quad \frac{\partial y'}{\partial z'} = (g_{yy})_0 .$$

Z tych równań widzimy, że rzuty na płaszczyznę (yz) zarówno włókna środkowego, jak i wszystkich wogóle włókien podłużnych, są liniami prostymi, włókna więc te są krzywymi płaskimi, ale nie leżą one w tej płaszczyźnie, równoległej do płaszczyzny (zx) , w której leżały przed wygięciem.

Gdy obwód jest symetryczny, funkcya B_1 będzie funkcją nieparzystą zmiennej x i parzystą zmiennej y , wskutek czego $\left(\frac{\partial B_1}{\partial y} \right)_0$ będzie równe zero, a równania linii wygięcia będą:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{P}{EI_y} \left(L \frac{z'^2}{2} - \frac{z'^3}{6} \right) + (g_{xx})_0 z' \\ y' &= 0 \\ \frac{\partial x'}{\partial z'} &= \frac{P}{EI_y} \left(L z' - \frac{z'^2}{2} \right) + (g_{xx})_0 \\ \frac{\partial^2 x'}{\partial z'^2} &= \frac{P(L - z')}{EI_y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (397).$$

Gdy więc obwód jest symetryczny, linia wygięcia leży w płaszczyźnie (zx) .

Skoro porównamy te wzory z wzorami (271), (272) i (273), wprowadzonymi bez uwzględnienia przesuwania, to zauważymy, że to przesuwanie zwiększa tangens kąta pochylenia stycznej względem osi z o wyraz, równy wartości przesuwania w środku ciężkości przekroju i zwiększa rzędną linii wygięcia o wyraz proporcjonalny do odciętej i tej wartości przesuwania. Tak np. gdy obwód jest eliptyczny, otrzymamy z wzoru (394):

$$\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0 = \frac{m^2}{3m^2 + n^2} [n^2 + 2(1 + \mu)m^2]$$

$$(g_{zx})_0 = \frac{P}{EI_y} \frac{m^2}{3m^2 + n^2} [n^2 + 2(1 + \mu)m^2] ,$$

gdzie $I_y = \frac{\pi}{4} nm^3 = \frac{F}{4} m^2$ i $E = 2(1 + \mu)G$, a więc:

$$(g_{zx})_0 = \frac{P}{GF} \frac{2n^2 + 4(1 + \mu)m^2}{(1 + \mu)(3m^2 + n^2)} = \frac{P}{GF} \frac{4 + \frac{2}{1 + \mu} \left(\frac{n}{m}\right)^2}{3 + \left(\frac{n}{m}\right)^2} .$$

Gdyby przesuwanie, wywołane siłą P , było rozłożone równomiernie na wszystkie punkty przekroju, to równałoby się $\frac{P}{GF}$; gdy zaś jest rozłożone nierównomiernie, to w celu oznaczenia jego wartości w środku elipsy należy $\frac{P}{GF}$ pomnożyć przez współczynnik:

$$\frac{4 + \frac{2}{1 + \mu} \left(\frac{n}{m}\right)^2}{3 + \left(\frac{n}{m}\right)^2} ,$$

którego wartość liczebna leży w granicach od $\frac{4}{3}$ do $\frac{2}{1 + \mu}$ *) , bardzo bliskich siebie, albowiem μ jest zbliżone do $\frac{1}{3}$, wskutek czego $\frac{2}{1 + \mu}$ jest zbliżone do 1,5. Możemy zatem zawsze przyjmować:

$$(g_{zx})_0 = 1,45 \frac{P}{GF} (398).$$

Dla walca kołowego, o promieniu r , otrzymalibyśmy:

$$\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0 = \frac{3 + 2\mu}{4} r^2 , \quad (g_{zx})_0 = \frac{P}{EI_y} \left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0 , \quad \text{czyli}$$

$$(g_{zx})_0 = \frac{P}{E\pi r^4} (3 + 2\mu) r^2 = \frac{P}{GF} \frac{3 + 2\mu}{2 + 2\mu} = 1,4 \frac{P}{GF} . . . (399).$$

Wyginanie ukośne otrzymamy gdy zatrzymamy we wzorach współczynniki a_1 , b_1 , a_2 i b_2 . Takie wyginanie wywołają dwie siły R_x i R_y , których momenty względem początku współrzędnych są: $M_y = R_x L$ i $M_x = -R_y L$; wskutek czego:

$$a_1 = -\frac{R_x L}{EI_y} , \quad a_2 = -\frac{R_y L}{EI_x} , \quad b_1 = \frac{R_x}{EI_y} \quad \text{i} \quad b_2 = \frac{R_y}{EI_x} .$$

*) Granice te otrzymamy, przypuszczając, że $\frac{n}{m} = 0$ i ∞ .

Dla Δ_z otrzymamy:

$$\Delta_z = a_1 x + a_2 y + z (b_1 x + b_2 y) = - \frac{L-z}{E} \left(\frac{R_x}{I_y} x + \frac{R_y}{I_x} y \right).$$

Stąd widzimy, że Δ_z będzie równe zeru we wszystkich przekrojach dla punktów, spełniających równanie:

$$\frac{R_x}{I_y} x + \frac{R_y}{I_x} y = 0.$$

Jest to równanie prostej, będącej przecięciem warstwy obojętnej z płaszczyzną podstawy. Prosta ta przechodzi przez środek ciężkości podstawy i tworzy z osią x kąt α , którego tangens jest:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = - \frac{I_x}{I_y} \cdot \frac{R_x}{R_y} = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} \quad \dots \quad (400).$$

Z tego ostatniego równania można łatwo otrzymać twierdzenie Bresse'a (p. równanie 256).

Ponieważ przy wyginaniu ukośnem zmienne u i v zawierają wyrazy ze współrzędną z w potędze wyższej od pierwszej, przeto włókno środkowe jest krzywą o krzywiznie podwójnej.

Wreszcie zaznaczamy, że przekroje graniastostłupa przy wyginaniu przekształcają się na powierzchnie krzywe, których kształt jest zależny od postaci funkcji B_1 i B_2 , t. j. od kształtu obwodu przekroju. Skrzywienie przekrojów, oczywiście, jest następstwem nierównomiernego rozłożenia przesunień w punktach każdego z tych przekrojów.

84. Warunki wytrzymałości złożonej graniastostłupów. Z wzorów (386), wyznaczających posunięcia u, v i w punktów ciała graniastostłupowatego, podlegającego rozciąganiu lub ścisłaniu, przesuwaniu, wyginaniu i skręcaniu, możemy oznaczyć odkształcenia składowe dla każdego punktu, a zatem znaleźć także największe rozciągnięcie dla danego punktu.

Ponieważ dla wszystkich punktów $g_{xy} = 0$ i $\Delta_x = \Delta_y = -\mu \Delta_z$, przeto dla największego rozciągnięcia w punkcie (x, y, z) , zgodnie z wzorem (44) (p. ustęp 17), otrzymamy:

$$(\Delta_z)_{\max} = \frac{1-\mu}{2} \Delta_z + \sqrt{\left(\frac{1+\mu}{2} \Delta_z\right)^2 + \left(\frac{1}{2} g\right)^2} \quad \dots \quad (A),$$

gdzie $g^2 = g_{zx}^2 + g_{zy}^2$.

Z wzorów zaś (386) wynika:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_z &= a + a_1 x + a_2 y + z (b_1 x + b_2 y) \\ g_{zx} &= b_0 \left(\frac{\partial B_0}{\partial x} + y \right) + b_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} - x^2 \right) + b_2 \left(\frac{\partial B_2}{\partial x} - 2\mu xy \right) \\ g_{zy} &= b_0 \left(\frac{\partial B_0}{\partial y} - x \right) + b_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial y} - 2\mu xy \right) + b_2 \left(\frac{\partial B_2}{\partial y} - y^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (B).$$

Te wartości odkształceń składowych należy wprowadzić we wzór (A) i oznaczyć wartości współrzędnych x, y i z , przy których strona druga tego wzoru osiąga wartość największą. W ten sposób znajdziemy wydłużenie włókna niebezpiecznego w przekroju niebezpiecznym. Mając to wydłużenie, otrzymamy warunek wytrzymałości złożonej, w postaci:

$$\left[\frac{1-\mu}{2} \Delta_z + \sqrt{\left(\frac{1+\mu}{2} \Delta_z \right)^2 + \frac{1}{4} (g_{zx}^2 + g_{zy}^2)} \right]_{\max} = \frac{T}{kE} \quad \dots (401).$$

Oznaczenie wartości strony pierwszej tego równania przedstawia wielkie trudności, z powodu zawłości równań, służących do oznaczenia tych wartości x, y i z , przy których strona pierwsza równania (401) osiąga wartość największą.

W zastosowaniach rozwiązanie zadania zazwyczaj upraszcza się, albowiem nie uwzględnia się przesunięć, wywoływanych przez siły wyginające, t. j. pomija się w wyrażeniach na g_{zx} i g_{zy} wyrazy o współczynnikach b_1 i b_2 . Przy takim uproszczeniu otrzymamy:

$$\begin{aligned} \Delta_z &= a + a_1 x + a_2 y + z (b_1 x + b_2 y) \\ g_{zx} &= b_0 \left(\frac{\partial B_0}{\partial x} + y \right), \quad g_{zy} = b_0 \left(\frac{\partial B_0}{\partial y} - x \right), \end{aligned}$$

gdzie:

$$a = \frac{R_z}{EF}, \quad a_1 = -\frac{M_y}{EI_y}, \quad a_2 = \frac{M_x}{EI_x}, \quad b_1 = \frac{R_x}{EI_y}, \quad b_2 = \frac{R_y}{EI_x}$$

$$i \quad b_0 = \frac{2(1+\mu)}{E} \cdot \frac{M_z}{\iint \left(x \frac{\partial B_0}{\partial y} - y \frac{\partial B_0}{\partial x} \right) \partial x \partial y - (I_x + I_y)} \quad \dots (402).$$

Jednakże $M_x = -R_y L$ i $M_y = R_x L$, więc:

$$\Delta_z = \frac{R_z}{EF} - \frac{R_x (L-z)}{EI_y} x - \frac{R_y (L-z)}{EI_x} y.$$

Tu $R_x(L-z)$ i $R_y(L-z)$ są momentami sił R_x i R_y względem przekroju w odległości z od początku współrzędnych. Jeżeli te momenty zmienne oznaczymy przez \overline{M}_y i \overline{M}_x , to:

$$\Delta_z = \frac{R_z}{EF} - \frac{\overline{M}_y \cdot x}{EI_y} - \frac{\overline{M}_x \cdot y}{EI_x} \quad \dots (403)$$

$$i \quad g_{zx}^2 + g_{zy}^2 = b_0^2 \left[\left(\frac{\partial B_0}{\partial x} + y \right)^2 + \left(\frac{\partial B_0}{\partial y} - x \right)^2 \right] \quad \dots (404).$$

Zastosujemy te wzory do niektórych przypadków szczególnych.

85. Wyginanie i skręcanie. Przypuśćmy, że mamy walec kołowy, o promieniu r , podlegający wyginaniu w płaszczyźnie (zx) i skręcaniu.

Oznaczmy przez M największy moment wyginający, a przez M_0 moment skręcający. W tym przypadku należy przyjąć:

$$R_z = 0, \quad \overline{M_x} = 0, \quad \overline{M_y} = M, \quad M_z = M_0, \quad B_0 = 0$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi}{4} r^4, \quad b_0 = -\frac{4(1+\mu)}{E} \frac{M_0}{\pi r^4}, \quad \Delta_z = -\frac{4 M x}{E \pi r^4}$$

$$\text{i} \quad g = \sqrt{g_{xx}^2 + g_{yy}^2} = -\frac{4(1+\mu)}{E} \frac{M_0}{\pi r^4} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ponieważ w przypadku rozważanym największe wydłużenie Δ_z i największe przesunięcie g występują w jednym i tym samym punkcie obwodu, a mianowicie w punkcie, dla którego $x = -r$ i $y = 0$, przeto z warunku wytrzymałości (401) wynika:

$$r^3 = \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{4kM}{\pi T} + \sqrt{\left(\frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{4kM}{\pi T}\right)^2 + \left(\frac{2(1+\mu)kM_0}{\pi T}\right)^2} \quad (405).$$

Skoro przez r_1 oznaczymy promień walca, obliczony wyłącznie na wyginanie, a przez r_0 promień obliczony wyłącznie na skręcanie, to przyjmując we wzorze (405) kolejno $M_0 = 0$ i $M = 0$, otrzymamy:

$$r_1^3 = \frac{4kM}{\pi T} \quad \text{i} \quad r_0^3 = \frac{2kM_0}{\pi T''} \quad (406),$$

gdzie $T'' = \frac{T}{1+\mu}$.

Z wzoru (405) otrzymamy wobec tego:

$$r^3 = \frac{1-\mu}{2} r_1^3 + \sqrt{\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^2 r_1^6 + r_0^6},$$

albo, z powodu, że $T' = \frac{T}{\mu}$, czyli $\mu = \frac{T}{T'}$,

$$r^3 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{T}{T'}\right) r_1^3 + \sqrt{\left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{T}{T'}\right)\right]^2 r_1^6 + r_0^6} \quad (407).$$

Dla materiału równozwrotnie sprężystego stosunek $\frac{T}{T'}$ leży między $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$, wogóle zaś wartości na T i T' należy brać z tablic na rozciąganie i ściskanie.

W zastosowaniach często zamiast wzoru (407) stosowany jest wzór prostszy:

$$r^3 = r_1^3 + r_0^3 \quad (408),$$

który wyprowadzić można w sposób następujący: Przypuśćmy, że walec składa się z ośrodka walcowego o promieniu r_1 i powłoki walcowej o grubości ścianki $r - r_1$, i oznaczmy promień r_1 ośrodka na samo tylko wyginanie oraz grubość $r - r_1$ powłoki na samo tylko skręcanie.

Otrzymamy wtedy:

$$r_1^3 = \frac{4kM}{\pi T} \quad \text{i} \quad \frac{r^4 - r_1^4}{r} = \frac{2kM_0}{\pi T''},$$

a więc

$$r^3 = r_1^3 \frac{r_1}{r} + \frac{2kM_0}{\pi T''} = r_1^3 \cdot \frac{r_1}{r} + r_0^3.$$

W stronie drugiej tego ostatniego wzoru dla uproszczenia i większego bezpieczeństwa możemy przyjąć $\frac{r_1}{r} = 1$, a wówczas otrzymamy wzór (408). Wzór ten daje zawsze wymiary przekroju większe, aniżeli wzór ściślejszy (407), wobec czego może być w praktyce stosowany. W istocie, jeżeli wartość, otrzymana z wzoru (408) na r^3 jest większa od wartości otrzymanej z wzoru (407), to musi istnieć nierówność:

$$r_1^3 + r_0^3 > \frac{1-\mu}{2} r_1^3 + \sqrt{\left(\frac{1+\mu}{2} r_1^3\right)^2 + r_0^6}, \quad \text{czyli}$$

$$\left[\frac{1+\mu}{2} r_1^3 + r_0^3\right]^2 > \left(\frac{1+\mu}{2} r_1^3\right)^2 + r_0^6, \quad \text{czyli}$$

$$(1+\mu) r_1^3 r_0^3 > 0,$$

co jest zgodne z rzeczywistością.

Należy nadto zaznaczyć, że wzór (407) stosuje się do walca z materiału równozwrotnie sprężystego lub w przybliżeniu jednolitego, dla którego $\frac{T}{T''} < 1$. Gdyby natomiast ten stosunek był większy od jedności, to rozciągnięcia poprzeczne po stronie wklęsłej byłyby większe od rozciągnięć podłużnych po stronie wypukłej i punkt niebezpieczny przekroju byłby wyznaczony przez współrzędne $x = r$ i $y = 0$, wskutek czego Δ_x byłoby równe $-\frac{4M}{\pi r^3}$. Wzór (405) w takim przypadku przybrałby postać:

$$r^3 = -\frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{4kM}{\pi T} + \sqrt{\left(\frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{4kM}{\pi T}\right)^2 + \left(\frac{2(1+\mu)kM_0}{\pi T}\right)^2},$$

Z wzoru tego, przyjmując kolejno $M_0 = 0$ i $M = 0$, otrzymamy:

$$r_1^3 = \mu \frac{4kM}{\pi T} = \frac{4kM}{\pi T''} \quad \text{i} \quad r_0^3 = \frac{2kM}{\pi T''},$$

wskutek czego otrzymamy wzór:

$$r^3 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{T'}{T}\right) r_1^3 + \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 + \frac{T'}{T}\right)^2 r_1^3 + r_0^6} \quad \dots \quad (409).$$

Jako drugi przykład zbadajmy walec, o podstawie eliptycznej, poddany skręcaniu i bardzo łagodnemu wyginaniu. Niech równanie ob-

wodu będzie $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$, gdzie $m < n$. W tym przypadku największe rozciągnięcie, wywołane skręcaniem i największe rozciągnięcie, wywołane wyginaniem, wystąpią w tym samym punkcie obwodu, wyznaczonym przez współrzędne $x = -m$ i $y = 0$.

Mamy więc:

$$\Delta_s = \frac{4M}{E\pi n m^2} \quad \text{i} \quad g = \frac{4(1+\mu)M_0}{E\pi n m^2}.$$

Warunek zaś wytrzymałości będzie:

$$nm^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{T'}{T''} \right) \alpha^3 + \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 + \frac{T'}{T''} \right)^2 \alpha^6 + \alpha_0^6} \quad (410),$$

gdzie $\alpha^3 = \frac{4kM}{\pi T'}$, $\alpha_0^3 = \frac{2kM_0}{\pi T''}$, $T'' = \frac{T}{1+\mu}$ i $T' = \frac{T}{\mu}$.

Dla ciał nierównozwrotnie sprężystych, dla których $\frac{T'}{T''} > 1$, otrzymamy:

$$nm^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{T'}{T''} \right) \alpha_1^3 + \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 + \frac{T'}{T''} \right)^2 \alpha_1^6 + \alpha_0^6} \quad (411),$$

gdzie $\alpha_1^3 = \frac{4kM}{\pi T'}$, a α_0^3 ma wartość poprzednią.

Jeżeli dany walec będzie poddany skręcaniu i silniejszemu wyginaniu, to największe przesunięcie, wywołane skręcaniem, nastąpi, jak i poprzednio, na końcu małej osi elipsy, a największe rozciągnięcie wskutek wyginania ujawni się na końcu wielkiej osi elipsy; przy współczesnym przeto działaniu skręcania i wyginania punkt niebezpieczny może nie znajdować się na końcach osi.

Przyjmując $m > n$, otrzymamy dla dowolnego punktu przekroju niebezpiecznego:

$$\Delta_s = -\frac{4Mx}{E\pi n m^3} \quad \text{i} \quad g = \frac{2M_0}{G\pi n^3 m^3} \sqrt{n^4 x^2 + m^4 y^2} \quad (\text{wzór 220}),$$

Warunek zaś wytrzymałości będzie:

$$nm^3 = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{T'}{T''} \right) \frac{\alpha^3}{m} x + \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 + \frac{T'}{T''} \right)^2 \alpha^6 \left(\frac{x}{m} \right)^2 + \alpha_0^6 \left[\left(\frac{x}{m} \right)^2 + \frac{m^2}{n^2} \left(\frac{y}{n} \right)^2 \right]}.$$

Ponieważ punkt niebezpieczny musi leżeć na obwodzie, przeto zamiast $\left(\frac{y}{n} \right)^2$ wstawić możemy $1 - \left(\frac{x}{m} \right)^2$, a wtedy otrzymamy:

$$nm^2 = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{T}{T''}\right) \alpha^3 \frac{x}{m} + \sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)^2 \alpha_0^6 + \left[\frac{1}{4} \left(1 + \frac{T'}{T''}\right)^2 \alpha^6 - \left\{\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 1\right\} \alpha_0^6\right] \left(\frac{x}{m}\right)^2}.$$

Wzór ten wskazuje, że punkt niebezpieczny przekroju niebezpiecznego, będzie wyznaczony przez współrzędne $x = -m$ i $y = 0$, gdy:

$$\frac{1}{4} \left(1 + \frac{T'}{T''}\right)^2 \alpha^6 > \left\{\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 1\right\} \alpha_0^6. \quad (412).$$

Jeżeliby ten warunek nie był spełniony, to wartość współrzędnej x , przy której strona druga równania ostatniego osiąga maximum, musielibyśmy oznaczyć podług znanych zasad rachunku różniczkowego.

Dla graniastosłupów, o podstawie prostokątnej lub kwadratowej, ustalenie warunku wytrzymałości nie przedstawia trudności, gdy $(\Delta_s)_{\max}$ i g_{\max} istnieją dla tego samego punktu obwodu. Gdy natomiast warunek ten nie jest spełniony, to oznaczenie niebezpiecznego punktu przekroju niebezpiecznego może być związane z wielkimi trudnościami, z powodu, że w takim przypadku dla przesunięcia g musimy brać wzory ściśle przestępne, gdyż wzory przybliżone, wyprowadzone przez upodobnienie prostokąta z elipsą lub lemniskatą, dają na przesunięcie g wartości znacznie różniące się od rzeczywistych, dla punktów, w których g nie jest największe.

86. Rozciąganie, wyginanie i skręcanie. Przypuśćmy, że na dany walec kołowy działa siła rozciągająca P , moment wyginający, którego wartość największa jest M , i moment skręcający M_0 . Ponieważ rozciąganie wskutek siły P rozkłada się równomiernie na wszystkie włókna podłużne, przeto działanie jednoczesne tego rozciągania z wyginaniem i skręcaniem nie zmienia położenia punktu niebezpiecznego w przekroju niebezpiecznym, o ile siła P jest rzeczywiście rozciągającą, nie zaś ścisnącą.

Jeżeli siła P rozciąga, to, gdy nie uwzględnimy przesuwania, wywołanego przez siły wyginające, otrzymamy dla punktu niebezpiecznego w przekroju niebezpiecznym:

$$\Delta_s = \frac{P}{EF} + \frac{4M}{E\pi r^3} \quad \text{i} \quad g = \frac{2M_0}{E\pi r^3} \cdot 2(1+\mu). \quad (413).$$

Wartości te należy wstawić we wzór (401), któremu możemy nadać postać:

$$\left(1 - \frac{Ek\Delta_s}{T}\right) \left(1 + \frac{Ek\Delta_s}{T''}\right) = \left(\frac{Ekg}{2(1+\mu)T''}\right)^2. \quad (414).$$

W danym więc przypadku do wyznaczenia r mamy równanie stopnia szóstego:

$$\left[r^3 - \frac{k}{\pi T} (Pr + 4M) \right] \left[r^3 + \frac{k}{\pi T'} (Pr + 4M) \right] = \left(\frac{2kM_0}{\pi T''} \right)^2 \quad (415).$$

Gdy działa *rozciąganie i skręcanie*, równanie to przyjmie postać:

$$r^2 \left(r^2 - \frac{kP}{\pi T} \right) \left(r^2 + \frac{kP}{\pi T'} \right) = \left(\frac{2kM_0}{\pi T''} \right)^2 \quad (416),$$

gdy zaś działa *rozciąganie i wyginanie*:

$$\left[r^3 - \frac{k}{\pi T} (Pr + 4M) \right] \left[r^3 + \frac{k}{\pi T'} (Pr + 4M) \right] = 0 \quad (417).$$

Gdy działa *ściskanie, wyginanie i skręcanie* musimy zastąpić P przez $-P$, a ponieważ w tym przypadku punkt niebezpieczny przekroju może znajdować się zarówno po stronie wypukłej, jak i po stronie wklęsłej walca, zależnie od wielkości sił działających, przeto warunek wytrzymałości należy przyjąć w postaci:

$$\left[r^3 - \frac{k}{\pi T} (-Pr \pm 4M) \right] \left[r^3 + \frac{k}{\pi T'} (-Pr \pm 4M) \right] = \left(\frac{2kM_0}{\pi T''} \right)^2 \quad (418)$$

i brać przy M ten znak, przy którym r ma wartość większą.

W przypadku szczególnym, gdy działa *ściskanie i skręcanie*, będzie:

$$r^2 \left(r^2 + \frac{kP}{\pi T} \right) \left(r^2 - \frac{kP}{\pi T'} \right) = \left(\frac{2kM_0}{\pi T''} \right)^2 \quad (419),$$

a gdy działa *ściskanie i wyginanie*:

$$\left[r^3 - \frac{k}{\pi T} (-Pr \pm 4M) \right] \left[r^3 + \frac{k}{\pi T'} (-Pr \pm 4M) \right] = 0 \quad (420).$$

W tych przypadkach wytrzymałości złożonej graniastosłupów, w których oznaczenie przesuwania, wywołanego przez moment skręcający, jest utrudnione, można wymiary przekroju, czyniące zadość warunkom wytrzymałości, oznaczyć w przybliżeniu, na zasadzie wzoru:

$$g = \frac{M_0}{GI_0} \sqrt{x^2 + y^2}$$

i oznaczając moment biegunowy bezwładności I_0 równy $\iint f(x^2 + y^2) \partial x \partial y$, gdzie całkowanie jest rozpostarte na powierzchnię przekroju danego ciała graniastosłupowatego.

87. Praca sił wewnętrznych ciała graniastosłupowatego, powstająca podczas jego odkształcania. Badania nad odkształcaniem ciał graniastosłupowatych zakończymy wyznaczeniem pracy sił wewnętrznych podczas odkształcania takich ciał.

Wiadomo (p. wzory 115 i 116), że praca W sił wewnętrznych wogóle wyraża się zapomocą całki potrójnej $W = \iiint \Phi \partial x \partial y \partial z$, rozpo-

startej na całą objętość ciała sprężystego. Funkcja pod znakiem całki Φ , zwana *potencjałem sił sprężystych*, może być oznaczona z wzoru:

$$\Phi = \frac{1}{2} [p_{xx} \Delta_x + p_{yy} \Delta_y + p_{zz} \Delta_z + p_{zx} g_{zx} + p_{zy} g_{zy} + p_{xy} g_{xy}].$$

Wzór ten, gdy siły zewnętrzne działają tylko na końce ciała graniastoslupowatego, przyjmuje postać:

$$\Phi = \frac{1}{2} [p_{zz} \Delta_z + p_{zx} g_{zx} + p_{zy} g_{zy}],$$

gdyż w takim przypadku siły p_{xx} , p_{yy} i p_{xy} dla wszystkich punktów ciała są równe zeru.

Skoro dla przekroju wyznaczonego przez współrzędną z , oznaczymy wypadkową naprężeń normalnych, działającą w środku ciężkości tego przekroju, przez Z , moment zaś naprężeń względem głównej osi bezwładności środka ciężkości, około której obraca się przekrój, przez M i wreszcie przez x odległość pewnego punktu tego przekroju od tej głównej osi bezwładności, to na p_{zz} otrzymamy:

$$p_{zz} = \frac{Z}{F} - \frac{M \cdot x}{I} \dots \dots \dots (a).$$

Jeżeli przez M_0 oznaczymy moment skracający i nie uwzględnimy przesuwania, wywołanego przez siły wyginające, to otrzymamy:

$$\sqrt{p_{zz}^2 + p_{zy}^2} = \frac{M_0}{I_0} \sqrt{x^2 + y^2} \dots \dots \dots (b).$$

Ten wzór ostatni jest ścisły tylko dla walca kołowego, gdy jednak nie uwzględnimy wykrzywienia przekrojów, powstającego skutkiem skręcania, możemy posługiwać się tym wzorem, jako przybliżonym, przy wszelkich kształtach obwodu przekroju, o ile moment biegunowy bezwładności $I_0 = I_x + I_y$ był wyznaczony dla powierzchni przekroju danego graniastoslupa.

Ponieważ $\Delta_z = \frac{p_{zz}}{E}$, $g_{zx} = \frac{p_{zx}}{G}$, $g_{zy} = \frac{p_{zy}}{G}$,

przeto $\Phi = \frac{1}{2E} p_{zz}^2 + \frac{1}{2G} [p_{zx}^2 + p_{zy}^2]$, czyli

$$\Phi = \frac{1}{2E} \left(\frac{Z}{F} - \frac{M \cdot x}{I} \right)^2 + \frac{1}{2G} \frac{M_0^2}{I_0^2} (x^2 + y^2).$$

W celu otrzymania pracy W należy pomnożyć wyrażenia ostatnie przez $\partial x \partial y \partial z$ i zcałkować, rozpościerając całkowanie na całą objętość graniastoslupa. Przy tem całkowaniu przyjmiemy, że siły wyginające są prostopadłe do osi graniastoslupa, czyli do osi z , wskutek czego moment wyginający M jest funkcją tylko współrzędnej z .

Mamy więc:

$$\begin{aligned}
 W = & \frac{1}{2E} \iiint \left(\frac{Z^2}{F^2} - \frac{2ZM}{F \cdot I} x + \frac{M^2 x^2}{I^2} \right) \partial x \partial y \partial z + \\
 & + \frac{1}{2G} \iiint \frac{M_0^2}{I_0^2} (x^2 + y^2) \partial x \partial y \partial z = \frac{1}{2EF^2} \int Z^2 \partial z \int \partial x \partial y - \\
 & - \frac{1}{EFI} \int Z M \partial z \int x \partial x \partial y + \frac{1}{2EI^2} \int M^2 \partial z \int x^2 \partial x \partial y + \\
 & + \frac{M_0^2}{2GI_0^2} \int \partial z \int (x^2 + y^2) \partial x \partial y .
 \end{aligned}$$

Jednakże $\int \partial x \partial y = F$, $\int x \partial x \partial y = 0$, $\int x^2 \partial x \partial y = I$,
 $\int (x^2 + y^2) \partial x \partial y = I_0$ i $\int \partial z = L$, a zatem:

$$W = \frac{1}{2EF} \int Z^2 \partial z + \frac{1}{2EI} \int M^2 \partial z + \frac{M_0^2 L}{2GI_0} \dots \dots \dots (421).$$

Gdy siła rozciągająca lub ściskająca Z jest jednakowa dla wszystkich przekrojów, otrzymamy:

$$W = \frac{Z^2 L}{2EF} + \frac{1}{2EI} \int M^2 \partial z + \frac{M_0^2 L}{2GI_0} \dots \dots \dots (422).$$

Jakkolwiek wzory te wyprowadzono przy założeniu, że siły zewnętrzne, odkształcające ciało graniastosłupowe, działają na jego końce, to jednak możemy nimi posługiwać się, jako przybliżonymi i przy dowolnem innym rozmieszczeniu sił zewnętrznych, o ile siły wyginające są prostopadłe do osi.

Zbadajmy niektóre przypadki szczególne.

Przypadek I. Proste rozciąganie albo ściskanie wskutek siły P , działającej na koniec.

W tym przypadku $M = M_0 = 0$ i $Z = P$, a więc:

$$W = \frac{P^2 L}{2EF} = \frac{1}{2} P l \dots \dots \dots (423),$$

gdzie $l = \frac{PL}{EF}$ jest to wydłużenie całkowite graniastosłupa, wywołane przez siłę P .

Przypadek II. Proste rozciąganie albo ściskanie graniastosłupa pionowego wskutek ciężaru własnego Q i siły P , działającej na koniec.

W tym przypadku należy przyjąć

$$M = M_0 = 0 \quad \text{i} \quad Z = P + \frac{Q}{L} (L - z) .$$

Z wzoru przeto (421) otrzymamy:

$$W = \frac{1}{2EF} \int_0^L \left[P^2 + \frac{2PQ}{L} (L-z) + \frac{Q^2}{L^2} (L-z)^2 \right] dz, \text{ czyli}$$

$$W = \frac{1}{2EF} \left[P^2 L + \frac{PQ}{L} L^2 + \frac{Q^2}{L^2} \cdot \frac{L^3}{3} \right] = \frac{L}{2EF} \left[P^2 + \frac{Q^2}{3} + PQ \right] (424).$$

Jeżeliby rozciąganie albo ściskanie było wywołane tylko ciężarem własnym, to mielibyśmy w tym przypadku $P = 0$ i

$$W = \frac{Q^2 L}{6EF} \dots \dots \dots (425).$$

A więc praca sił wewnętrznych podczas rozciągania graniastostupa pionowego pod działaniem ciężaru własnego jest trzy razy mniejsza aniżeli praca podczas rozciągania pod działaniem siły równej ciężarowi, lecz mającej punkt przyczepienia w końcu graniastostupa.

Ponieważ wzór (424) na pracę W , z powodu, iż wchodzi weń wyraz o iloczynie PQ , nie jest równy sumie wyrażień (423) i (425), przeto nawet z tego przykładu szczególnego, do którego stosuje się wzór (424), widzimy, że praca sił wewnętrznych, powstająca w ciele sprężystym, gdy jednocześnie działa na to ciało kilka sił zewnętrznych, nie jest wogóle równa sumie prac, które otrzymalibyśmy, gdyby każda z tych sił działała oddzielnie.

Napiszmy wzór (423) w postaci:

$$W = \frac{P^2 FL}{2EF^2} = \frac{1}{2E} \left(\frac{P}{F} \right)^2 FL = \frac{1}{2E} \left(\frac{P}{F} \right)^2 \cdot V,$$

gdzie $V = FL$ jest objętością graniastostupa.

Jeżeliby siła rozciągająca P była tak wielka, iż wywołane przez nią naprężenie w punktach przekroju graniastostupa, byłoby równe największemu naprężeniu bezpiecznemu T , to na pracę W otrzymalibyśmy:

$$W = \frac{T^2}{2E} \cdot V \dots \dots \dots (426).$$

Tę pracę Poncelet nazwał *wytrzymałością żywą sprężystą ciała graniastostupowatego na rozciąganie*. Wytrzymałość żywa sprężysta na rozciąganie (albo ściskanie) jest więc wprost proporcjonalna do kwadratu największego naprężenia bezpiecznego i do objętości graniastostupa, oraz odwrotnie proporcjonalna do współczynnika sprężystości podłużnej.

Ilość zaś $\frac{T^2}{2E}$, przedstawiająca wytrzymałość żywą każdej jednostki objętości graniastostupa, nazwano *wytrzymałością żywą sprężystą materiału na rozciąganie*.

Przy budowie takiej części maszyny, która poddana będzie uderzeniom, należy wybierać materiał, którego wytrzymałość żywa jest wielka.

Przypadek III. Wyginanie płaskie wskutek siły P , działającej na koniec graniastosłupa. Przekrój, leżący w płaszczyźnie (xy) , osadzony jest nieruchomo w kierunku osi z .

W tym przypadku mamy: $Z = 0$, $M_0 = 0$ i $M = P(L - z)$, a więc:

$$W = \frac{P^2}{2EI} \int_0^L (L-z)^2 dz = \frac{P^2 L^3}{6EI} = \frac{1}{2} P \cdot f. \quad (427),$$

gdzie $f = \frac{PL^3}{3EI}$ jest ugięciem.

Jeżeli siła wyginająca P jest tak wielka, że wywołane przez nią naprężenie włókna niebezpiecznego w przekroju niebezpiecznym będzie równe największemu naprężeniu bezpiecznemu T , to:

$$T = \frac{M_{\max} \cdot \eta}{I} = \frac{PL\eta}{I}, \quad \text{skąd} \quad P = \frac{TI}{L\eta},$$

a zatem
$$W = \left(\frac{TI}{L\eta}\right)^2 \frac{L^3}{6EI} = \frac{T^2 IL}{6E\eta^2}. \quad (427^a).$$

Wyrażenie ostatnie nazwano *wytrzymałością żywą sprężystą ciała graniastosłupowatego na wyginanie*.

Dla graniastosłupa o przekroju prostokątnym, którego wymiary są a i b , otrzymamy:

gdy siła P jest równoległa do boku a :
$$\frac{I}{\eta^2} = \frac{ba^3}{12} : \frac{a^2}{4} = \frac{ab}{3} = \frac{F}{3},$$

gdy siła P jest równoległa do boku b :
$$\frac{I}{\eta^2} = \frac{ab^3}{12} : \frac{b^2}{4} = \frac{ab}{3} = \frac{F}{3};$$

mamy więc w obu przypadkach:

$$W = \frac{T^2}{18E} FL + \frac{T^2}{18E} \cdot V. \quad (428).$$

Wytrzymałość żywa na wyginanie graniastosłupa o podstawie prostokątnej jest proporcjonalna do objętości graniastosłupa i nie jest zależna od tego, jakiemu wyginaniu podlega graniastosłup: silnemu czy słabemu. Ten sam wynik otrzymalibyśmy i dla walca o podstawie eliptycznej.

Przypadek IV. Wyginanie płaskie wskutek siły P , działającej na koniec graniastosłupa i obciążenia Q , równomiernie rozłożonego na całej długości. W tym przypadku mamy:

$$Z = 0, \quad M_0 = 0, \quad M = P(L-z) + \frac{Q}{2L}(L-z)^2, \quad \text{a więc:}$$

$$W = \frac{1}{2EI} \int_0^L \left[P^2 (L-z)^2 + \frac{PQ}{L} (L-z)^3 + \frac{Q^2}{4L^2} (L-z)^4 \right] dz, \text{ czyli}$$

$$W = \frac{1}{2EI} \left[P^2 \frac{L^3}{3} + \frac{PQ}{L} \frac{L^4}{4} + \frac{Q^2}{4L^2} \frac{L^5}{5} \right] = \frac{L^3}{2EI} \left[\frac{P^2}{3} + \frac{PQ}{4} + \frac{Q^2}{20} \right] \quad (429).$$

Przypadek V. Wyginanie wskutek siły R , działającej na koniec graniastosłupa i siły P , działającej w odległości a od końca osadzonego, w którym znajduje się początek współrzędnych. Ponieważ w tym przypadku moment wyginający będzie dwojaki: jeden równy $P(a-z) + R(L-z)$ dla wartości z , leżących w granicach od $z=0$ do $z=a$, i drugi równy $R(L-z)$ dla wartości z w granicach od $z=a$ do $z=L$, przeto na pracę sił wewnętrznych otrzymamy:

$$W = \frac{1}{2EI} \left\{ \int_0^a [P(a-z) + R(L-z)]^2 dz + \int_a^L R^2 (L-z)^2 dz \right\},$$

czyli:

$$W = \frac{1}{2EI} \left\{ \int_0^a P^2 (a-z)^2 dz + \int_0^a 2PR(a-z)(L-z) dz + \int_0^L R^2 (L-z)^2 dz \right\},$$

czyli:

$$W = \frac{1}{2EI} \left[P^2 \frac{a^3}{3} + R^2 \frac{L^3}{3} + \frac{1}{3} PR a^2 (3L-a) \right] \dots \dots \dots (430).$$

Przypadek VI. Skręcanie ciała graniastosłupowatego.

W przypadku tym mamy $Z=0$ i $M=0$, a więc:

$$W = \frac{M_0^2 L}{2GI_0} = \frac{1}{2} M_0 \varphi. \dots \dots \dots (431),$$

gdzie $\varphi = \frac{M_0 L}{GI_0}$ jest łukiem, mierzącym kąt skręcenia.

Jeżeli moment skręcający M_0 jest tak wielki, że naprężenie we włóknie niebezpiecznym osiągnie wartość największego naprężenia bezpiecznego T , to będzie:

$$T = (1+\mu) \frac{M_0 \eta}{I_0}, \text{ czyli } \frac{T}{1+\mu} = T'' = \frac{M_0 \eta}{I_0}, \text{ skąd otrzymujemy:}$$

$$M_0 = \frac{T'' I_0}{\eta}, \text{ a więc:}$$

$$W = \frac{T''^2 I_0}{2G \eta^2} \cdot L. \dots \dots \dots (432).$$

To ostatnie wyrażenie jest *wytrzymałością żywą sprężystą ciała graniastosłupowatego na skręcanie*.

88. Zastosowanie zasady pracy najmniejszej sił wewnętrznych do rozwiązania niektórych zadań. Gdy mamy wzór na pracę sił wewnętrznych

ciała odkształcanego, możemy posilkować się tym wzorem do oznaczenia pewnych ilości, wchodzących w skład tego wzoru jako niewiadome, stosując *zasadę pracy najmniejszej siły wewnętrznych*.

Przytoczone poniżej przykłady wystarczą do objaśnienia zastosowania rzeczonyj zasady do rozwiązywania pewnych zadań.

Przykład I. Jeden koniec graniastostłupa jest osadzony nieruchomo w murze, drugi zaś opiera się swobodnie na podporze niesprężystej, w jednym poziomie z końcem osadzonym. Wyginanie wywołuje obciążenie Q , rozłożone równomiernie na całej długości L graniastostłupa. Mamy oznaczyć niewiadome oddziaływanie P w końcu podpartym.

Ponieważ w rozważanym przypadku wyginania, mamy na moment M wzór:

$$M = \frac{Q}{2L} (L-z)^2 + P(L-z),$$

przeto wzór na pracę W będzie (p. wzór 429):

$$W = \frac{L^3}{2EI} \left(\frac{P^2}{3} + \frac{PQ}{4} + \frac{Q^2}{20} \right).$$

We wzorze tym należy dobrać P tak, ażeby W było najmniejsze. Skoro więc weźmiemy pochodną względem P i przyrównamy ją do zera, to otrzymamy równanie:

$$\frac{2}{3}P + \frac{Q}{4} = 0, \quad \text{skąd } P = -\frac{3}{8}Q \dots (433).$$

Przykład II. Położenie graniastostłupa jest to samo, jak w przykładzie poprzednim, ale wyginanie wywołuje siła P , działająca w odległości a od muru. Mamy oznaczyć niewiadome oddziaływanie R w końcu podpartym.

W tym przypadku na moment M mamy dwa wzory rozmaite: jeden $P(a-z) + R(L-z)$ dla wartości z od $z=0$ do $z=a$, drugi zaś $R(L-z)$ dla wartości z od $z=a$ do $z=L$. Wzór więc na pracę W jest ten sam, jak wzór (430). Skoro pochodną strony drugiej tego względem R przyrównamy do zera, to otrzymamy:

$$\frac{2}{3}RL^3 + \frac{1}{3}Pa^2(3L-a) = 0, \quad \text{skąd } R = -\frac{P}{2} \left(\frac{a}{L} \right)^2 \cdot \frac{3L-a}{L} \dots (434).$$

Przykład III. Oba końce graniastostłupa są osadzone w murach równoległych na jednym poziomie. Wyginanie wywołuje obciążenie Q , rozłożone równomiernie na całej długości graniastostłupa. Mamy oznaczyć oddziaływania w obu końcach, które wyrażają się przez siłę R i przez parę sił o momencie μ .

Ponieważ tu
$$M = \frac{Q}{2L} (L-z)^2 + R(L-z) + \mu,$$

przeto na pracę W otrzymamy wzór:

$$W = \frac{1}{2EI} \int_0^L \left[\frac{Q}{2L} (L-z)^2 + R(L-z) + \mu \right]^2 dz.$$

Skoro pochodne strony drugiej tego wzoru, wzięte względem R i μ , przyrównamy do zera, to otrzymamy:

$$\int_0^L \left[\frac{Q}{2L} (L-z)^2 + R(L-z) + \mu \right] (L-z) dz = 0,$$

$$\int_0^L \left[\frac{Q}{2L} (L-z)^2 + R(L-z) + \mu \right] dz = 0,$$

czyli, po zcałkowaniu:

$$\frac{Q}{2L} \cdot \frac{L^4}{4} + R \frac{L^3}{3} + \mu \frac{L^2}{2} = 0,$$

$$\frac{Q}{2L} \cdot \frac{L^3}{3} + R \frac{L^2}{2} + \mu L = 0.$$

Rozwiązując te równania względem R i μ , otrzymamy:

$$R = -\frac{Q}{2} \quad \text{i} \quad \mu = \frac{QL}{12} \dots \dots \dots (435).$$

Przykład IV. Jeden koniec graniastosłupa jest osadzony w murze, drugi zaś opiera się swobodnie na słupie sprężystym graniastosłupowym, w poziomie końca osadzonego. Wyginanie wywołane jest przez obciążenie Q , równomiernie rozłożone na całej długości graniastosłupa.

Skoro oddziaływanie niewiadome w końcu podpartym oznaczymy przez P , to otrzymamy dla pracy sił wewnętrznych wzór ten sam, jak w przykładzie pierwszym, ale ponieważ w danym przypadku ujawnia się także praca sił wewnętrznych w słupie, podlegającym ściskaniu pod działaniem siły P , przeto praca sił wewnętrznych graniastosłupa i podpory słupowej będzie:

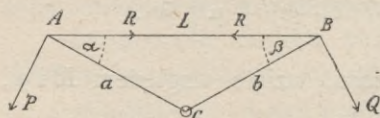
$$W = \frac{L^3}{2EI} \left(\frac{Q^2}{20} + \frac{P^2}{3} + \frac{PQ}{4} \right) + \frac{P^2 L_0}{2 E_0 F_0},$$

gdzie L_0 , F_0 i E_0 są to kolejno: wysokość podpory słupowej, powierzchnia jej przekroju i współczynnik sprężystości podłużnej jej materiału.

Wartość oddziaływania P , dla której wielkość ta staje się najmniejszą, jest:

$$P = -\frac{3}{8} Q \cdot \frac{1}{1 + 3 \frac{E I L_0}{E_0 F_0 L^3}} \dots \dots \dots (436).$$

Przykład V. Końce A i B drąga dwuramiennego załamanego ACB (rys. 24), dla zwiększenia jego trwałości połączone są ściągiem AB .



Rys. 21.

Drąg znajduje się w równowadze pod działaniem sił P i Q , leżących w płaszczyźnie trójkąta ACB i działających w końcach drąga, prostopadłe do kierunków ramion. Mamy oznaczyć naprężenie R , powstające w ściągu AB .

Zauważymy najpierw, że to naprężenie nie może być oznaczone na podstawie zasad statyki z warunków równowagi dźwigni. W istocie, niech a, b i L będą kolejno: długościami ramion AC, BC i długością ściągu AB , α i β zaś – kątami przy wierzchołkach A i B trójkąta ACB , to, rozkładając naprężenie R w każdym końcu drąga na dwie składowe: jedną prostopadłą do ramienia i drugą wzdłuż ramienia, otrzymamy: dla końca A ramienia AC siłę $P - R \sin \alpha$, prostopadłą do tego ramienia, wywołującą wyginanie, i siłę $R \cos \alpha$, idącą wzdłuż ramienia, wywołującą ściskanie tego ramienia; dla końca zaś B ramienia BC dwie siły: $Q - R \sin \beta$, wywołującą wyginanie tego ramienia, i $R \cos \beta$, ścisającą to ramię. Siły ścisające $R \cos \alpha$ i $R \cos \beta$ są równoważone przez oddziaływania, powstające w punkcie podparcia C drąga, siły zaś $P - R \sin \alpha$ i $Q - R \sin \beta$ będą w równowadze, gdy będzie spełniony warunek:

$$(P - R \sin \alpha) a = (Q - R \sin \beta) b, \quad \text{czyli}$$

$$Pa - Qb = R(a \sin \alpha - b \sin \beta).$$

Z trójkąta ACB wynika jednak, że:

$$a : b = \sin \beta : \sin \alpha, \quad \text{czyli} \quad a \sin \alpha - b \sin \beta = 0,$$

wskutek czego warunek równowagi wymaga, ażeby $Pa - Qb = 0$, a zatem naprężenie R pozostaje nieoznaczonym.

Ponieważ w danym przypadku odkształcenie polega na ściśnięciu i zgięciu każdego z dwóch ramion drąga i na rozciągnięciu ściąga, przeto praca W sił wewnętrznych, powstających podczas tego odkształcania, jest:

$$W = \frac{(R \cos \alpha)^2 a}{2 EF} + \frac{(P - R \sin \alpha)^2 a^3}{6 EI} + \frac{(R \cos \beta)^2 b}{2 EF} + \frac{(Q - R \sin \beta)^2 b^3}{6 EI} + \frac{R^2 L}{2 E_0 F_0},$$

gdzie F i I są to: powierzchnia i moment bezwładności przekroju ramion drąga, F_0 zaś jest powierzchnią przekroju ściąga.

Wartość naprężenia R , przy którym ta praca staje się najmniejszą, jest:

$$R = \frac{P a^3 \sin \alpha + Q b^3 \sin \beta}{a^3 \sin^2 \alpha + b^3 \sin^2 \beta + 3 \frac{I}{F} (a \cos^2 \alpha + b \cos^2 \beta) + \frac{3 E I L}{E_0 F_0}} \dots (437).$$

Przykład VI. Graniastosłup, którego oba końce osadzone są w murach równoległych, poddany jest w przekroju, oddalonym od pierwszego końca o L_1 , a od drugiego o $L_2 = L - L_1$, działaniu pary skręcającej, o momencie M_0 . Mamy oznaczyć momenty μ_1 i μ_2 par, wyrażających oddziaływania w końcach osadzonych. Ponieważ pary μ_1 , μ_2 i M_0 leżą w płaszczyznach równoległych i dwie pierwsze równoważą trzecią, przeto $\mu_1 + \mu_2 = M_0$. Oczywiście, część o długości L_1 jest skręcana przez parę μ_1 , część zaś o długości L_2 — przez parę μ_2 . Na pracę więc sił wewnętrznych otrzymujemy wzór:

$$W = \frac{\mu_1^2 L_1}{2 G I_0} + \frac{\mu_2^2 L_2}{2 G I_0} = \frac{1}{2 G I_0} [L_1 \mu_1^2 + L_2 \mu_2^2], \text{ czyli}$$

$$W = \frac{1}{2 G I_0} [L_1 \mu_1^2 + L_2 (M_0 - \mu_1)^2].$$

Skoro pochodną względem μ_1 strony drugiej tego równania przyrównamy do zera, to otrzymamy:

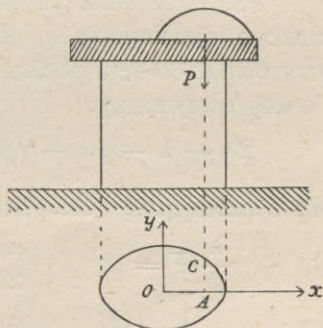
$$\mu_1 = M_0 \frac{L_2}{L_1 + L_2} = M_0 \frac{L_2}{L} \quad \text{ i } \quad \mu_2 = M_0 \frac{L_1}{L} \dots (438).$$

Przy tych wartościach momentów μ_1 i μ_2 , na kąty zupełne skręcania φ_1 i φ_2 części L_1 i L_2 graniastosłupa, otrzymamy wzory:

$$\varphi_1 = \frac{\mu_1 L_1}{G I_0} = \frac{M_0}{G I_0} \frac{L_1 L_2}{L} \quad \text{ i } \quad \varphi_2 = \frac{\mu_2 L_2}{G I_0} = \frac{M_0}{G I_0} \frac{L_1 L_2}{L} \dots (439),$$

a więc $\varphi_1 = \varphi_2$, co można było łatwo z góry przewidzieć.

Przykład VII. Na podłodze poziomej niesprężystej, postawiony jest słup pionowy, o wysokości L i o powierzchni przekroju F . Na wierzchu słupa spoczywa płyta pozioma niesprężysta, na której leży obciążenie P , którego środek ciężkości C wyznaczony jest przez współrzędne $OA = \alpha$ i $AC = \beta$ (rys. 25). Osi współrzędnych x i y zlewają się z osiami głównymi bezwładności środka ciężkości podstawy słupa. Mamy oznaczyć prawo rozkładu ciśnień na punkty podstawy słupa.



Rys. 25.

Niech q będzie ciśnieniem na jednostkę powierzchni podstawy

w punkcie, wyznaczonym przez współrzędne x i y , wtedy na zasadzie statyki otrzymamy trzy równania:

$$\left. \begin{aligned} \iint q \, \partial x \, \partial y &= P \\ \iint q x \, \partial x \, \partial y &= P \alpha \\ \iint q y \, \partial x \, \partial y &= P \beta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (a).$$

Nadto mamy równania:

$$\begin{aligned} \iint x \, \partial x \, \partial y &= 0, & \iint y \, \partial x \, \partial y &= 0, & \iint xy \, \partial x \, \partial y &= 0, \\ \iint \partial x \, \partial y &= F, & \iint y^2 \, \partial x \, \partial y &= I_x, & \iint x^2 \, \partial x \, \partial y &= I_y, \end{aligned}$$

w których wszystkie całki podwójne należy rozprześć na całą powierzchnię F podstawy słupa.

Na pracę W sił wewnętrznych, powstających w materiale słupa podczas ściskania jego włókien podłużnych, mamy:

$$W = \iint \frac{(q \, \partial x \, \partial y)^2 L}{2 E \, \partial x \, \partial y} = \frac{L}{2 E} \iint q^2 \, \partial x \, \partial y.$$

W tym wzorze musimy znaleźć dla q taką funkcję x i y , przy której całka $\iint q^2 \, \partial x \, \partial y$ byłaby najmniejsza i któraby jednocześnie spełniała równania warunkowe (a).

W celu rozwiązania tego zadania, powinniśmy, zgodnie z wymaganiami rachunku waryacyjnego, doprowadzić do minimum całkę następującą:

$$\iint (q^2 - \lambda q - \mu q x - \nu q y) \, \partial x \, \partial y,$$

w której λ , μ i ν są to czynniki stałe dowolne.

Ponieważ funkcya pod znakiem całki ostatniej zawiera tylko funkcję niewiadomą q , nie zawiera zaś jej pochodnych, przeto należy przyrównać do zera pochodną funkcji pod znakiem całki względem q i wtedy otrzymamy:

$$2q - \lambda - \mu x - \nu y = 0, \text{ czyli } q = \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2} x + \frac{\nu}{2} y.$$

Wprowadzając tę wartość na q w równania (a), otrzymamy:

$$\frac{\lambda}{2} F = P, \quad \frac{\mu}{2} I_y = P \alpha \quad \text{i} \quad \frac{\nu}{2} I_x = P \beta, \quad \text{stad}$$

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{P}{F}, \quad \frac{\mu}{2} = \frac{P \alpha}{I_y} \quad \text{i} \quad \frac{\nu}{2} = \frac{P \beta}{I_x}, \quad \text{a więc}$$

$$q = P \left[\frac{1}{F} + \frac{\alpha x}{I_y} + \frac{\beta y}{I_x} \right] \dots \dots \dots (440).$$

Wzór ten wyraża prawo rozkładu ciśnień w punktach podstawy słupa, o ile α i β są takimi, że dla żadnego punktu tej podstawy q nie staje się ujemnem. W istocie, włókno podłużne słupa, znajdujące się nad punktem, dla którego $q < 0$, byłoby nie ściskane lecz rozciągane, co jest niemożliwe z powodu, że podstawa słupa nie jest połączona z podłogą, na której słup stoi. Chcących zapoznać się z rozwiązaniem zadania w przypadku, gdy wzór (440) daje dla pewnej części podstawy słupa wartości ujemne, odsyłamy do części pierwszej Kursu Mechaniki stosowanej Bresse'a, a mianowicie do rozdziału: „Répartition d'une charge totale sur la base d'un prisme n'ayant pas d'adhérence avec son appui“ *).

*) Cours de Mécanique appliquée par M. Bresse, 1^{re} partie.

ROZDZIAŁ VIII.

Wytrzymałość naczyń kulistych i walcowych na ciśnienie prostopadłe do ścian.

89. **Wytrzymałość naczyń kulistych.** Wyobraźmy sobie warstwę kulistą z materiału równozwrotnie sprężystego, t. j. ciało, ograniczone dwiema powierzchniami kulistymi współśrodkowymi. Niech R i R' będą promieniami powierzchni zewnętrznej i wewnętrznej, a r — odległością pewnego punktu warstwy od jej środka, np. punktu, wyznaczonego przez współrzędne x, y i z układu prostokątnego. Przyjmując początek współrzędnych w środku warstwy, będziemy mieli:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{i} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \quad \dots \quad (a).$$

Przypuśćmy, że na powierzchni kuliste warstwy działają ciśnienia zewnętrzne, rozłożone równomiernie i mające kierunek normalnych wewnętrznych warstwy. Niech P będzie ciśnieniem na jednostkę powierzchni zewnętrznej, a P' — ciśnieniem na jednostkę powierzchni wewnętrznej.

Nie uwzględniając ciężaru własnego warstwy, możemy przypuścić, że każdy punkt warstwy może posuwać się tylko w kierunku promienia, na którym się znajduje, t. j. że każde z posunięć u, v i w tego punktu jest proporcjonalne do odpowiedniej współrzędnej. Mamy więc:

$$u = \varphi x, \quad v = \varphi y \quad \text{i} \quad w = \varphi z \quad \dots \quad (b),$$

gdzie współczynnik proporcjonalności φ może być funkcją tylko r .

W celu wyznaczenia tego współczynnika należy zwrócić się do równań ogólnych równowagi (47). Równania te, gdy w nich za siły sprężystości podstawimy ich wartości w zależności od odkształceń składowych z wzorów (135), następnie zaś wyrazimy odkształcenia składowe zapomocą posunięć z wzorów (11) i (12), przyjmą postać:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mathfrak{D}(u) \right] + \rho X &= 0 \\ \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mathfrak{D}(v) \right] + \rho Y &= 0 \\ \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mathfrak{D}(w) \right] + \rho Z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (441),$$

gdzie $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$, zaś $\mathfrak{D}(u)$, $\mathfrak{D}(v)$ i $\mathfrak{D}(w)$ są to tak zwane parametry różniczkowe drugiego rzędu funkcji u, v i w , t. j. wyrażenia postaci: $\mathfrak{D}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ i t. d.

Z wzorów (b) zapomocą równań (a) otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \Delta_x = \varphi + x \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \varphi + \frac{x^2}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \Delta_y = \varphi + y \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = \varphi + \frac{y^2}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \Delta_z = \varphi + z \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = \varphi + \frac{z^2}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (c),$$

a więc: $\theta = 3\varphi + r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \dots \dots \dots (d)$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \left(4 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) \frac{x}{r} \dots \dots \dots (e)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(3 - \frac{x^2}{r^2} \right) \frac{x}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{x^3}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, & g_{yz} &= 2 \frac{yz}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left(1 - \frac{y^2}{r^2} \right) \frac{x}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{xy^2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, & g_{zx} &= 2 \frac{zx}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \left(1 - \frac{z^2}{r^2} \right) \frac{x}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{xz^2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, & g_{xy} &= 2 \frac{xy}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \end{aligned}$$

a więc: $\mathfrak{D}(u) = \left(4 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) \frac{x}{r} = \frac{\partial \theta}{\partial x}$.

Z pierwszego z równań (441), gdy przyjmiemy w niem $X=0$, otrzymamy:

$$4 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0, \quad \text{czyli} \quad 4r^3 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + r^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0.$$

Całkując to ostatnie równanie dwa razy, otrzymujemy:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{C}{r^4} \quad \text{i} \quad \varphi = C' - \frac{C}{3r^3} \dots \dots \dots (f).$$

gdzie C i C' są to stałe dowolne.

Dla odkształceń składowych warstwy kulistej mamy:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_x &= C' - \frac{C}{3r^3} + \frac{Cx^2}{r^5}, & g_{yz} &= 2C \frac{yz}{r^5} \\ \Delta_y &= C' - \frac{C}{3r^3} + \frac{Cy^2}{r^5}, & g_{zx} &= 2C \frac{zx}{r^5} \\ \Delta_z &= C' - \frac{C}{3r^3} + \frac{Cz^2}{r^5}, & g_{xy} &= 2C \frac{xy}{r^5} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (g)$$

i $\theta = 3C'$.

Ponieważ te równania istnieją przy każdym dowolnem położeniu osi współrzędnych, o ile ich początek znajduje się w środku warstwy kulistej, przeto możemy przyjąć, że oś x przechodzi przez punkt rozważany warstwy, wskutek czego będzie: $x=r$, $y=z=0$ i

$$\left. \begin{aligned} \Delta_x &= \Delta_r = C' + \frac{2}{3} \frac{C}{r^3} \\ \Delta_y &= \Delta_z = C' - \frac{1}{3} \frac{C}{r^3} \\ g_{yz} &= g_{zx} = g_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (h).$$

Wobec tego dla sił sprężystości otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= p_{rr} = \frac{E}{1+\mu} \left[\frac{1+\mu}{1-2\mu} C' + \frac{2}{3} \frac{C}{r^3} \right] \\ p_{yy} &= p_{zz} = \frac{E}{1+\mu} \left[\frac{1+\mu}{1-2\mu} C' - \frac{1}{3} \frac{C}{r^3} \right] \\ p_{yz} &= p_{zx} = p_{xy} = 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (i)$$

Teraz zwracamy się do równań szczególnych równowagi (p. równ. 49). Dla punktu przecięcia osi x z powierzchnią zewnętrzną należy przyjąć:

$$\begin{aligned} \cos(n, x) &= \cos(n, r) = 1, & \cos(n, y) &= \cos(n, z) = 0 \\ \cos(P, x) &= -1, & \cos(P, y) &= \cos(P, z) = 0, \end{aligned} \text{ a więc:}$$

$$-P = \frac{E}{1+\mu} \left[\frac{1+\mu}{1-2\mu} C' + \frac{2}{3} \frac{C}{R^3} \right],$$

dla punktu zaś przecięcia osi x z powierzchnią wewnętrzną:

$$\begin{aligned} \cos(n, x) &= -1, & \cos(n, y) &= \cos(n, z) = 0, \\ \cos(P', x) &= 1, & \cos(P', y) &= \cos(P', z) = 0, \end{aligned} \text{ a więc:}$$

$$-P' = \frac{E}{1+\mu} \left[\frac{1+\mu}{1-2\mu} C' + \frac{2}{3} \frac{C}{R'^3} \right].$$

Z równań tych wynika:

$$C = -\frac{3}{2} \frac{1+\mu}{E} \frac{R^3 R'^3 (P' - P)}{R^3 - R'^3} \quad \text{i} \quad C' = \frac{1-2\mu}{E} \frac{P' R'^3 - P R^3}{R^3 - R'^3},$$

wobec czego mamy:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} = p_{rr} &= \frac{P' R'^3 - PR^3 - \frac{R^3 R'^3 (P' - P)}{r^3}}{R^3 - R'^3} \\ p_{yy} = p_{zz} &= \frac{P' R'^3 - PR^3 + \frac{R^3 R'^3 (P' - P)}{2r^3}}{R^3 - R'^3} \end{aligned} \right\} \dots (442).$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_x = \Delta_r &= \frac{1}{E(R^3 - R'^3)} \left[(1 - 2\mu)(P' R'^3 - PR^3) - \right. \\ &\quad \left. - (1 + \mu) \frac{R^3 R'^3}{r^3} (P' - P) \right] \\ \Delta_y = \Delta_z &= \frac{1}{E(R^3 - R'^3)} \left[(1 - 2\mu)(P' R'^3 - PR^3) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 + \mu}{2} \frac{R^3 R'^3}{r^3} (P' - P) \right] \end{aligned} \right\} \dots (443).$$

Jeżeli ciśnienie wewnętrzne P' jest większe od zewnętrznego P i jeżeli jednocześnie $P' R'^3 - PR^3 > 0$, to, jak widzimy z równań (443), rozciągnięcie największe wystąpi na wewnętrznej powierzchni warstwy, w kierunku prostym do promienia. Oznaczając to rozciągnięcie największe przez Δ_{\max} , możemy napisać następujący warunek wytrzymałości warstwy:

$$\Delta_{\max} = \frac{1}{E(R^3 - R'^3)} \left[(1 - 2\mu)(P' R'^3 - PR^3) + \frac{1 + \mu}{2} R^3 (P' - P) \right] = \frac{T}{kE},$$

z którego otrzymujemy:

$$\frac{R}{R'} = \sqrt[3]{\frac{\frac{T}{k} + (1 - 2\mu) P'}{\frac{T}{k} + \frac{3}{2}(1 - \mu) P - \frac{1}{2}(1 + \mu) P'}} \dots (444).$$

Gdy znamy stosunek promieni, możemy wyznaczyć grubość e ściany warstwy z równania:

$$\frac{R}{R'} = \frac{R' + e}{R'} = 1 + \frac{e}{R'}.$$

Ponieważ wzór (444) możemy wyrazić w postaci:

$$1 + \frac{e}{R'} = \left[1 + \frac{\frac{3}{2}(1 - \mu)(P' - P)}{\frac{T}{k} + \frac{3}{2}(1 - \mu) P - \frac{1}{2}(1 + \mu) P'} \right]^{1/3},$$

przeto gdy różnica $P' - P$ jest niewielka w porównaniu z napręże-

niem $\frac{T}{k}$, możemy stosunek $\frac{e}{R'}$ oznaczyć z następującego wzoru przybliżonego:

$$\frac{e}{R'} = \frac{\frac{1}{2} (1-\mu) (P' - P)}{\frac{T}{k} + \frac{3}{2} (1-\mu) P - \frac{1}{2} (1+\mu) P'} \quad \dots \quad (445).$$

Gdy każde z ciśnień P' i P , oddzielnie wzięte, jest niewielkie, możemy stosować wzór:

$$\frac{e}{R'} = \frac{1}{2} (1-\mu) \frac{k (P' - P)}{T} \quad \dots \quad (446).$$

Lamé *) otrzymuje warunek wytrzymałości przez przyrównanie największej z sił sprężystości do naprężenia $\frac{T}{k}$. Warunek ten jest:

$$\frac{R}{R'} = \sqrt[3]{\frac{\frac{T}{k} + P'}{\frac{T}{k} + \frac{3}{2} P - \frac{1}{2} P'}} \quad \dots \quad (447).$$

To ostatnie równanie możemy otrzymać również z wzoru (444), przyjmując w nim $\mu = 0$.

Gdy ciśnienie zewnętrzne P jest większe od wewnętrznego P' , rozciągnięcie największe wystąpi również na powierzchni wewnętrznej, lecz kierunek jego padnie na kierunek promienia warstwy. Warunek wytrzymałości w tym przypadku będzie:

$$(1+\mu) R^3 (P - P') - (1-2\mu) (PR^3 - P' R'^3) = \frac{T}{k} (R^3 - R'^3), \quad \text{czyli}$$

$$\frac{R}{R'} = \sqrt[3]{\frac{\frac{T}{k} + (1-2\mu) P'}{\frac{T}{k} + (1+\mu) P' - 3\mu P}} \quad \dots \quad (448).$$

Wreszcie, gdy ciśnienia P' i P są równe, otrzymamy:

$$\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = - \frac{1-2\mu}{E} P;$$

na warstwę więc działać będzie ściskanie, jednakowe we wszystkich punktach i we wszystkich kierunkach. W tym przypadku nie zachodzi więc potrzeba ustalania warunku wytrzymałości. Ujawnia się to i'z wzo-

*) Lamé. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps so-
es.

ru (444), który przy $P=P'$ daje $R=R'$, co dowodzi, że warstwa choćby najcieńsza uczyni zadość warunkowi wytrzymałości.

Kula pełna. Gdy zamiast warstwy kulistej dana jest kula pełna, na której powierzchnię działa ciśnienie normalne P , wtedy promień r będzie mógł się zmieniać w granicach od 0 do R włącznie. Gdy przyjmiemy $r=0$, czyli gdy przechodzimy do punktu, leżącego w środku kuli, z równań (g) ustępu poprzedniego, otrzymamy na odkształcenia składowe tego punktu wartości nieskończenie wielkie, co jest oczywiście niemożliwe. W celu usunięcia tej niemożliwości, należy przyjąć stałą $C=0$ i wtedy otrzymamy:

$$\varphi = C' , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 , \quad \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \varphi = C' ,$$

$$g_{yz} = g_{zx} = g_{xy} = 0 , \quad p_{yz} = p_{zx} = p_{xy} = 0 , \quad p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = \frac{EC'}{1-2\mu}$$

i
$$P = -\frac{EC'}{1-2\mu} , \quad \text{czyli} \quad C' = -\frac{1-2\mu}{E} P .$$

Jeżeli więc ciśnienie P ma kierunek normalnych wewnętrznych, to kula jest ściskana równomiernie i nie zachodzi więc potrzeba ustalania warunku wytrzymałości; jeżeli zaś ciśnienie P ma kierunek normalnych zewnętrznych, to kula podlega rozciąganiu równomiernemu, równemu $\frac{1-2\mu}{E} P$, a warunek wytrzymałości jest:

$$\frac{T}{kE} = \frac{1-2\mu}{E} P , \quad \text{czyli} \quad kP = \frac{T}{1-2\mu} (449),$$

dla dowolnego promienia kuli.

90. Wytrzymałość naczyń walcowych. W celu wyjaśnienia odkształceń warstwy walcowej, której każdy przekrój ograniczony jest dwoma okręgami współśrodkowymi, oznaczamy przez R i R' promienie powierzchni zewnętrznej i powierzchni wewnętrznej warstwy, a przez P i P' ciśnienia normalne na jednostkę każdej z tych powierzchni.

Jeżeli oś z pada na oś walca, to dla punktu dowolnego warstwy, o współrzędnych x , y i z , oddalonego o r od osi walca, będzie:

$$r^2 = x^2 + y^2 , \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} , \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} , \quad \frac{\partial r}{\partial z} = 0 (a).$$

Wskutek układu symetrycznego względem osi z zarówno cząstek materialnych, tworzących warstwę, jak i sił zewnętrznych, ją odkształcających*), należy uznać, że żadna cząstka warstwy nie może podczas odkształcania zboczyć z tej płaszczyzny diametralnej, na której się znajdo-

*) Ciężaru własnego warstwy nie uwzględniamy.

wała przed odkształceniem. Otrzymamy więc na posunięcia u, v i w wzory:

$$u = \varphi x, \quad v = \varphi y \quad \text{i} \quad w = \alpha z \quad \dots \quad (b),$$

w których współczynniki φ i α mogą być zależne tylko od r .

Różniczkując te wzory, otrzymujemy na odkształcenia składowe i na siły sprężystości:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_x &= \varphi + \frac{x^2}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r}, & g_{yz} &= \frac{yz}{r} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial r} \\ \Delta_y &= \varphi + \frac{y^2}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r}, & g_{zx} &= \frac{zx}{r} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial r} \\ \Delta_z &= \alpha, & g_{xy} &= \frac{2xy}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \dots \quad (c).$$

$$\theta = \alpha + 2\varphi + r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \dots \quad (d)$$

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[\varphi + \mu\alpha + \left\{ \mu + (1-2\mu) \frac{x^2}{r^2} \right\} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] \\ p_{yy} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[\varphi + \mu\alpha + \left\{ \mu + (1-2\mu) \frac{y^2}{r^2} \right\} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] \\ p_{zz} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[(1-\mu)\alpha + 2\mu\varphi + \mu r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] \end{aligned} \right\} \dots \quad (e),$$

$$\left. \begin{aligned} p_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{yz}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \\ p_{yx} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{zx}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \\ p_{xy} &= \frac{E}{1+\mu} \cdot \frac{xy}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \dots \quad (f).$$

Następnie dla pochodnych funkcji θ będzie:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{r} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} + 3 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{y}{r} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} + 3 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0,$$

A że $3 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)$, przeto, przyjmując $r^3 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \beta$,

otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{x}{r} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \beta}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{y}{r} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \beta}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (g).$$

Wreszcie dla parametrów różniczkowych funkcji u, v i w mamy:

$$\mathfrak{D}(u) = \frac{x}{r^3} \frac{\partial \beta}{\partial r}, \quad \mathfrak{D}(v) = \frac{y}{r^3} \frac{\partial \beta}{\partial r} \quad \text{i} \quad \mathfrak{D}(w) = \frac{z}{r} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} \right) \dots \dots (h).$$

Wobec tego równania równowagi (441), gdy przyjmiemy w nich $X = Y = Z = 0$, dadzą:

$$2(1-\mu) \frac{\partial \beta}{\partial r} + r^2 \frac{\partial \alpha}{\partial r} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} = 0 \quad \dots \dots (i).$$

Ostatnie z tych równań wskazuje, że $\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) = 0$, czyli $r \frac{\partial \alpha}{\partial r} = C$

i $\frac{\partial \alpha}{\partial r} = \frac{C}{r}$, wobec czego równanie pierwsze przyjmuje postać

$$\frac{\partial \beta}{\partial r} = - \frac{Cr}{2(1-\mu)}. \quad \text{Mamy więc:}$$

$$\alpha = C' + C \lg r \quad \text{i} \quad \beta = r^3 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = C'' - \frac{Cr^2}{4(1-\mu)}, \quad \text{skąd}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{C''}{r^3} - \frac{C}{4(1-\mu)} \cdot \frac{1}{r} \quad \text{i} \quad \varphi = C''' - \frac{C''}{2r^2} - \frac{C}{4(1-\mu)} \lg r.$$

Funkcje więc α i φ mają postać:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= C' + C \lg r \\ \varphi &= C''' - \frac{C''}{2r^2} - \frac{C}{4(1-\mu)} \lg r \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (j).$$

Powinniśmy jeszcze oznaczyć stałą, wchodzące w skład tych funkcji. W tym celu przypuszczamy na razie, że na powierzchni pierścieniowe podstaw warstwy nie działają żadne siły zewnętrzne. Wtedy naprężenie p_{zz} dla wartości z , odpowiadających tym podstawom, powinno być równe zero. A ponieważ p_{zz} jest zależne tylko od r , które nie jest zależne od z , przeto p_{zz} będzie równe zero dla wszystkich przekrojów. Stąd więc:

$$(1-\mu) \alpha + 2\mu\varphi + \mu r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \text{czyli}$$

$$(1-\mu) C' + 2\mu C''' - \frac{\mu C''}{4(1-\mu)} + \left(1-\mu - \frac{\mu}{2(1-\mu)} \right) C \lg r = 0.$$

Ponieważ to równanie musi istnieć przy dowolnem r , przeto otrzymujemy:

$$C = 0 \quad \text{i} \quad (1-\mu) C' + 2\mu C''' = 0 \quad \dots \quad (k),$$

a więc: $\alpha = C' \quad \text{i} \quad \varphi = C''' - \frac{C''}{2r^2} \dots \dots \dots (l).$

Ażeby uprościć oznaczenie stałych C'' i C''' przypuśćmy, że płaszczyzna współrzędnych (zx) przechodzi przez badany punkt warstwy, t. j. że $x = r$ i $y = 0$. Wtedy z równań (e) otrzymamy dla sił sprężystości:

$$\left. \begin{matrix} p_{xx} = p_{rr} \\ p_{yy} \end{matrix} \right\} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[C''' + \mu C' \pm (1-2\mu) \frac{C''}{2r^2} \right].$$

Wobec tego warunki równowagi punktów, leżących na zewnętrznej i wewnętrznej powierzchni warstwy, będą:

$$-P = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[C''' + \mu C' + (1-2\mu) \frac{C''}{2R^2} \right]$$

$$-P' = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[C''' + \mu C' + (1-2\mu) \frac{C''}{2R'^2} \right].$$

Z równań tych otrzymujemy:

$$\left. \begin{matrix} \frac{C''}{2} = -\frac{1+\mu}{E} \frac{R^2 R'^2 (P' - P)}{R^2 - R'^2} \\ \text{i} \quad C''' + \mu C' = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E} \frac{P' R'^2 - PR^2}{R^2 - R'^2} \end{matrix} \right\} \dots \dots \dots (m).$$

Dołączając do równania ostatniego równanie (k), otrzymamy:

$$\left. \begin{matrix} C' = -\frac{2\mu}{E} \frac{P' R'^2 - PR^2}{R^2 - R'^2} \\ C''' = \frac{1-\mu}{E} \frac{P' R'^2 - PR^2}{R^2 - R'^2} \end{matrix} \right\} \dots \dots \dots (n).$$

Ostatecznie więc otrzymujemy dla rozciągnięć:

$$\left. \begin{matrix} \Delta_r = \Delta_x \\ \Delta_y \end{matrix} \right\} = \frac{1}{E(R^2 - R'^2)} \left[(1-\mu) (P' R'^2 - PR^2) \mp \right. \\ \left. \mp (1+\mu) (P' - P) \frac{R^2 R'^2}{r^2} \right] \\ \Delta_z = -\frac{2\mu}{E} \frac{P' R'^2 - PR^2}{R^2 - R'^2} \left. \right\} \dots \dots \dots (450).$$

91. Warunek wytrzymałości warstwy walcowej. Z wzoru (450) widzimy, że, gdy ciśnienie wewnętrzne P' jest większe od zewnętrznego P , rozciągnięciem największym będzie rozciągnięcie Δ_y przy $r = R'$, a więc w takim przypadku najbardziej rozciągane są włókna pierścienio-

we, leżące na wewnętrznej powierzchni warstwy. Warunek wytrzymałości tych włókien jest:

$$\frac{T}{k} = \frac{1}{R^2 - R'^2} [(1 - \mu) (P' R'^2 - P R^2) + (1 + \mu) (P' - P) R^2].$$

Z warunku tego otrzymujemy:

$$\frac{R}{R'} = 1 + \frac{e}{R'} = \sqrt{\frac{\frac{T}{k} + (1 - \mu) P'}{\frac{T}{k} - (1 + \mu) P' + 2 P}} \dots \dots (451).$$

Przyjmując w tym wzorze $\mu = 0$, otrzymamy wzór Lamé'go:

$$\frac{R}{R'} = 1 + \frac{e}{R'} = \sqrt{\frac{\frac{T}{k} + P'}{\frac{T}{k} - P' + 2 P}} \dots \dots (452)$$

Gdy ciśnienia P' i P są niewielkie w porównaniu z naprężeniem dopuszczalnym $\frac{T}{k}$, z obu tych wzorów otrzymujemy wzór przybliżony:

$$\frac{e}{R'} = \frac{k(P' - P)}{T} \dots \dots (453).$$

Gdy zaś ciśnienie zewnętrzne jest większe od wewnętrznego, rozciągnięcie największe wystąpi we włóknach podłużnych warstwy, a warunek ich wytrzymałości będzie:

$$\frac{T}{k} = 2\mu \frac{P R^2 - P' R'^2}{R^2 - R'^2}.$$

Z warunku tego wynika stosunek promieni:

$$\frac{R}{R'} = \sqrt{\frac{\frac{T}{k} - 2\mu P'}{\frac{T}{k} - 2\mu P}} \dots \dots (454).$$

Wzór ten nie bywa stosowany w praktyce, albowiem z doświadczenia wiadomo, że gdy ciśnienie zewnętrzne jest większe od wewnętrznego, rura może łatwo wygiąć się w ten sposób, że okręgi przekrojów przekształcą się na obwody eliptyczne. Wobec tego przypadek, gdy $P > P'$, wymaga badania oddzielnego, które przeprowadzimy w jednym z ustępów następnych.

92. Rura, zaopatrzona w dna. Przy badaniu odkształcenia naczynia walcowego, zaopatrzonego w dna albo pokrywy, będziemy przyjmowali, że ciśnienia, działające na dna, rozkładają się równomiernie na całą powierzchnię pierścieniową zetknięcia dna z warstwą walcową i że

dno nie stawia oporu posunięciom punktów tej powierzchni w kierunku odpowiednich promieni.

Przy takich założeniach na naprężenia p_{zz} otrzymamy wzór:

$$p_{zz} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[(1-\mu) \alpha + 2\mu \varphi + \mu \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] = \frac{\pi (P' R'^2 - PR^2)}{\pi (R^2 - R'^2)},$$

czyli, podstawiając za α i φ ich wartości z wzorów (j):

$$\begin{aligned} (1-\mu) C' + 2\mu C''' - \frac{\mu C}{4(1-\mu)} + \left(1-\mu - \frac{2\mu}{4(1-\mu)} \right) C \lg r = \\ = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E} \frac{P' R'^2 - PR^2}{R^2 - R'^2}. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że $C = 0$ i

$$(1-\mu) C' + 2\mu C''' = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E} \frac{P' R'^2 - PR^2}{R^2 - R'^2}.$$

Dołączając do tego równania równanie (m), otrzymamy:

$$C' = C''' = \frac{1-2\mu}{E} \frac{P' R'^2 - PR^2}{R^2 - R'^2}, \quad C'' = -\frac{1+\mu}{E} \frac{R^2 R'^2 (P' - P)}{R^2 - R'^2},$$

a więc dla odkształceń składowych punktu, leżącego na osi x , otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_r = \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z = \frac{1-2\mu}{E} \frac{P' R'^2 - PR^2}{R^2 - R'^2} \end{aligned} \right\} = \frac{1}{E(R^2 - R'^2)} \left[(1-2\mu) (P' R'^2 - PR^2) \mp \right. \\ \left. \mp (1+\mu) (P' - P) \frac{R^2 R'^2}{r^2} \right] \dots (455).$$

Z wzorów tych widzimy, że $\Delta_z = \frac{\Delta_r + \Delta_y}{2}$. Największym więc rozciągnięciem może być albo Δ_r albo Δ_y . Gdy $P' > P$ rozciągnięciu największemu podlegają włókna pierścieniowe, leżące na powierzchni wewnętrznej. Z warunku więc, że $(\Delta_y)_{\max} = (\Delta_y)_{r=R'} = \frac{T}{kE}$, otrzymamy:

$$\frac{R}{R'} = 1 + \frac{e}{R'} = \sqrt{\frac{\frac{T}{k} + (1-2\mu) P'}{\frac{T}{k} - (1+\mu) P' + (2-\mu) P}} \dots (456).$$

93. Wzory przybliżone na grubość ścianki naczyń. W praktyce, przy oznaczaniu grubości ścianki naczyń walcowych, oprócz wzorów ścisłych, powyżej uzasadnionych, są stosowane także wzory przybliżone. W celu otrzymania takich wzorów przybliżonych, rozwiążemy tu zadanie dotyczące odkształceń warstwy walcowej ponownie, ale w sposób odmienny

od poprzedniego. Przy tem rozwiązaniu otrzymamy równanie, z którego będziemy mogli wyprowadzić zarówno wzór ścisły, jak i wszystkie wzory przybliżone.

Wyobraźmy sobie punkt m warstwy, znajdujący się w odległości r od osi. Przez ten punkt prowadzimy trzy włókna wzajemnie do siebie prostopadłe: jedno *poprzeczne* w kierunku promienia r , drugie *pierscieniowe*, którego odległość stała od osi jest r i trzecie *podłużne*, równoległe do osi. Naprężenia tych trzech włókien oznaczamy kolejno przez p , q i s . Przyrosty, powstające podczas odkształcania warstwy, będziemy oznaczali znakiem δ .

Cząstka ∂r włókna poprzecznego w punkcie m po odkształceniu będzie miała długość $\partial r + \delta \partial r$; rozciągnięcie więc względne tej cząstki będzie $\frac{\delta \partial r}{\partial r}$. Promień włókna pierścieniowego po odkształceniu będzie $r + \delta r$; długość więc tego włókna powiększy się o $2\pi \delta r$, a jego rozciągnięcie względne będzie: $\frac{2\pi \delta r}{2\pi r} = \frac{\delta r}{r}$. Wreszcie rozciągnięcie względne włókna podłużnego możemy oznaczyć: $\frac{\delta \partial z}{\partial z}$. Przy takich oznaczeniach otrzymamy z wzorów (136):

$$\left. \begin{aligned} \Delta_r &= \frac{1}{E} [p - \mu (q + s)] = \frac{\partial \delta r}{\partial r} \\ \Delta_y &= \frac{1}{E} [q - \mu (s + p)] = \frac{\delta r}{r} \\ \Delta_z &= \frac{1}{E} [s - \mu (p + q)] = \frac{\partial \delta z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A).$$

Prowadzimy przez oś walca i przez punkt m przecięcie i piszemy równanie równowagi między siłami zewnętrznymi, działającymi na powierzchnię, ograniczającej warstwę, a naprężeniami w punktach płaszczyzny przecięcia. Przyjmując długość walca jako jednostkę, otrzymamy

na wypadkową naprężeń: $2 \int_{R'}^R q \partial r$, na wypadkową zaś sił zewnętrznych: $2 (P' R' - PR)$; warunek więc równowagi warstwy jest:

$$\int_{R'}^R q \partial r = P' R' - PR \dots \dots \dots (B).$$

Jeżeli w tem równaniu za promienie R' i R wstawimy r i $r + \partial r$ i zamiast sił zewnętrznych P' i P wprowadzimy naprężenia p i $p + \partial p$ ze znakiem minus, to otrzymamy równanie równowagi warstwy nieskończenie cienkiej, której grubość równa jest ∂r . Równanie to jest:

$$\int_r^{r+\partial r} q \partial r = -pr + (p + \partial p)(r + \partial r) = p \partial r + r \partial p + \partial p \partial r, \text{ czyli}$$

$$q \partial r = p \partial r + r \partial p, \text{ czyli } q = p + r \frac{\partial p}{\partial r} \dots \dots \dots (C).$$

Równania równowagi punktów, leżących na powierzchniach bocznych danej warstwy, będą:

$$P' = - (p)_{r=R'} \quad \text{i} \quad P = - (p)_{r=R} \dots \dots \dots (D),$$

punktów zaś, leżących na przekrojach końcowych:

$$s = 0 \quad \text{albo} \quad s = \frac{P' R'^2 - PR^2}{R^2 - R'^2} \dots \dots \dots (E),$$

zależnie od tego, czy naczynie jest bez dna czy z dnem. We wzorach (A), (B), (C), (D) i (E) są zawarte rozwiązania wszystkich zadań, dotyczących odkształcenia naczynia walcowego. W istocie, z wzoru drugiego

grupy (A) mamy: $\delta r = \frac{r}{E} [q - \mu (p + s)]$. Różniczkując względem znaku ∂ , otrzymamy:

$$\frac{\partial \delta r}{\partial r} = \frac{1}{E} [q - \mu (p + s)] + \frac{r}{E} \left[\frac{\partial q}{\partial r} - \mu \frac{\partial p}{\partial r} \right].$$

Równanie to wraz z równaniem pierwszym grupy (A) daje:

$$(1 + \mu) (q - p) + r \left(\frac{\partial q}{\partial r} - \mu \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0.$$

Z równania (C) wynika, że:

$$q - p = r \frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{i} \quad \frac{\partial q}{\partial r} = 2 \frac{\partial p}{\partial r} + r \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}.$$

Do oznaczenia więc p mamy równanie:

$$3 \frac{\partial p}{\partial r} + r \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = 0, \quad \text{czyli} \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0,$$

którego całka jest:

$$p = C' - \frac{C}{2r^2} \dots \dots \dots (F).$$

Z równań (D) wynika:

$$- P' = C' - \frac{C}{2R'^2} \quad \text{i} \quad - P = C' - \frac{C}{2R^2},$$

zatem $C' = \frac{P' R'^2 - PR^2}{R^2 - R'^2} \quad \text{i} \quad \frac{C}{2} = (P' - P) \frac{R^2 R'^2}{R^2 - R'^2}.$

Z równań zaś (C) i (F), rugując p , otrzymamy:

$$q = C' + \frac{C}{2r^2}.$$

Mamy więc:

$$\left. \begin{aligned} p \\ q \end{aligned} \right\} = \frac{1}{R^2 - R'^2} \left[P' R'^2 - PR^2 \mp P' - P \right] \frac{R^2 R'^2}{r^2} \quad (G).$$

$$s = 0 \quad \text{albo} \quad s = \frac{P' R'^2 - PR^2}{R^2 - R'^2}$$

Wprowadzając te wartości p, q i s we wzory (A), otrzymamy wzory na odkształcenia składowe, które już w pierw wyprowadziliśmy. W ten sposób dochodzimy do wzorów ścisłych.

Wszystkie wzory przybliżone można wyprowadzić przy założeniu, że $\mu = 0$; to też drugie równanie grupy (A) przyjmie postać:

$$\frac{\delta r}{r} = \frac{q}{E} \dots \dots \dots (a),$$

z równania zaś (B) otrzymamy:

$$E \int_{k'}^R \frac{\delta r}{r} \partial r = P' R' - PR \dots \dots \dots (b).$$

Z tego ostatniego równania można wyprowadzić wszystkie wzory przybliżone po oznaczeniu całki, znajdującej się w części pierwszej, czyniąc rozmaite przypuszczenia co do postaci funkcji $\frac{\delta r}{r}$ pod znakiem całki.

Przypuszczenie 1-sze. Ilość $\frac{\delta r}{r}$ jest ilością stałą.

Przypuszczenie, że $\frac{\delta r}{r} = \text{const.}$ jest równoznaczne z przypuszczeniem, że $q = \text{const.}$, możemy więc przyjąć $q = \frac{T}{k}$ i wtedy równanie (b) przyjmie postać:

$$\frac{T}{k} \int_{k'}^R \partial r = \frac{T}{k} (R - R') = P' R' - PR,$$

skąd:

$$\frac{R}{R'} = 1 + \frac{e}{R'} = \frac{T + k P'}{T + k P} = 1 + \frac{k(P' - P)}{T + k P}.$$

Nie uwzględniając ciśnienia zewnętrznego P w porównaniu z naprężeniem dopuszczalnym, otrzymamy wzór następujący, znany pod nazwą wzoru Mariotte'a:

$$\frac{e}{R'} = \frac{k(P' - P)}{T} \dots \dots \dots (457).$$

Z przypuszczenia, że $\frac{\delta r}{r} = \frac{T}{kE}$, wynika:

$$\frac{\delta R}{R} = \frac{\delta R'}{R'} = \frac{\delta R - \delta R'}{R - R'} = \frac{\delta(R - R')}{R - R'} = \frac{\delta e}{e} = \frac{T}{kE}, \text{ czyli } \delta e = \frac{T}{kE} \cdot e.$$

Według więc wzoru Mariotte'a grubość ścianki rośnie w ten sposób, iż powiększa się podczas odkształcenia o ilość proporcjonalną do jej wymiaru pierwotnego, co sprzeciwia się objawom rzeczywistym odkształcenia warstwy.

Przypuszczenie 2-gie. Przyrost $\delta r = \text{const.}$

W tym przypadku $\delta r = \frac{qr}{E} = \text{const.}$, skąd

$$qr = R(q)_R = R'(q)_{R'}, \text{ a więc } (q)_{R'} > (q)_R.$$

Możemy więc przyjąć $(q)_{R'} = \frac{T}{k}$, wskutek czego:

$$\delta r = \frac{TR'}{kE}, \quad \frac{T}{k} R' \int_{R'}^R \frac{\partial r}{r} = \frac{TR'}{k} \lg \left(\frac{R}{R'} \right) = P' R' - PR, \text{ czyli}$$

$$\lg \left(\frac{R}{R'} \right) = \frac{k \left(P' - P \frac{R}{R'} \right)}{T}.$$

Jeżeli w części drugiej tego wzoru, w wyrazie $P \frac{R}{R'}$ przyjmiemy stosunek $\frac{R}{R'}$ równym jedności, to otrzymamy wzór Brix'a:

$$\lg \left(\frac{R}{R'} \right) = \frac{k(P' - P)}{T} \dots \dots \dots (458).$$

Z przypuszczenia, że $\delta r = \text{const.}$ wynika: $\delta R = \delta R'$, a więc $\delta(R - R') = \delta e = 0$. Według wzoru Brix'a grubość ścianki nie zmienia się podczas odkształcenia, co jest bardziej zbliżone do rzeczywistości.

Przypuszczenie 3-cie. Ilość $r \delta r = \text{const.}$ Przy tem przypuszczeniu mamy: $qr^2 = R^2(q)_R = R'^2(q)_{R'}$, a więc $(q)_{R'} > (q)_R$ i możemy przyjąć $(q)_{R'} = \frac{T}{k}$, wskutek czego z równania (b) otrzymamy:

$$\frac{TR'^2}{k} \int_{R'}^R \frac{\partial r}{r^2} = \frac{TR'^2}{k} \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right) = P' R' - PR, \text{ czyli}$$

$$P \left(\frac{R}{R'} \right)^2 + \left(\frac{T}{k} - P' \right) \frac{R}{R'} = \frac{T}{k} \dots \dots \dots (c).$$

Rozwiązując to równanie stopnia drugiego, otrzymujemy:

$$\frac{R}{R'} = \sqrt{\left(\frac{T - kP'}{2kP}\right)^2 + \frac{T}{kP}} - \frac{T - kP'}{2kP} \dots (459).$$

Jeżeli zaś równaniu (c) nadamy postać:

$$(T - kP') \frac{R}{R'} = T - kP \left(\frac{R}{R'}\right)^2$$

i przyjmiemy w stronie drugiej $\left(\frac{R}{R'}\right)^2 = 1$, co idzie na korzyść wytrzymałości, to otrzymamy wzór Barlow'a:

$$\frac{R}{R'} = \frac{T - kP}{T - kP'} \dots (460).$$

Z przypuszczenia, że $r \delta r = \text{const.}$ wynika:

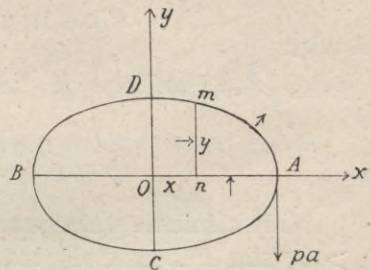
$$\delta R^2 = \delta R'^2, \text{ czyli } \delta(R^2 - R'^2) = 0, \text{ czyli } \delta F = 0.$$

Wzór więc Barlow'a jest ważny w przypadkach, w których podczas odkształcania warstwy, powierzchnia przekroju się nie zmienia. Możemy łatwo przekonać się, że przytem grubość ścianki będzie się zmniejszała, co się zgadza z rzeczywistością, ale odbywa się podług prawa innego aniżeli wynikające z przypuszczenia, na którego podstawie otrzymaliśmy wzór Barlow'a.

94. Naczynie walcowe o obwodzie eliptycznym przekroju. Przyjmujemy, że grubość warstwy jest niewielka, t. j. że ciśnienia zewnętrzne są bardzo małe w porównaniu z naprężeniem dopuszczalnym $\frac{T}{k}$ i że obwody

przekrojów rury są elipsami współśrodkowymi, o małym mimośrodzie, tak, że jego potęgi wyższe od pierwszej można pominąć.

Niech elipsa $ADBC$ (rys. 26) będzie przekrojem powierzchni, jednako-
wo oddalonej od powierzchni bocznych, ograniczających warstwę. Równanie tej elipsy, gdy oznaczymy oś wielką przez a a mimośród przez ϵ , będzie:



Rys. 26.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - \epsilon^2)} = 1, \text{ czyli } y^2 = (a^2 - x^2)(1 - \epsilon^2) \dots (a).$$

Przypuszczenie, że grubość ścianki jest nieznaczną, pozwala uważać ciśnienia zewnętrzne za rozłożone równomiernie na punkty powierzchni środkowej $AmDB$. Niech p będzie ciśnieniem normalnym rzeczywistym na jednostkę tej powierzchni, czyli różnicą ciśnień na powierzchni: wewnętrznej i zewnętrznej. Skoro długość naczynia eliptycznego przy-

miemy za jedność, to jako wypadkową ciśnień zewnętrznych, działających na część ADB powierzchni środkowej, otrzymamy $2pa$. Jeżeli odłączymy część ACB i działanie jej zastąpimy siłami, o punktach przyłączenia A i B , to każda z tych sił będzie równa pa i mieć będzie kierunek równoległy do osi ujemnej y -ów (przyjmujemy, że ciśnienie wewnętrzne jest większe od zewnętrznego). Wyznaczając położenie punktów przyczepienia oddziaływań pa w powierzchni środkowej, możemy popełnić błąd, ponieważ w rzeczywistości punkty przyczepienia tych sił mogą nie leżeć w powierzchni środkowej; powinniśmy więc przyjąć, że oprócz sił pa w każdym z punktów A i B istnieje nadto para sił, której moment niech będzie równy λ .

Przenieśmy teraz wszystkie siły, działające na część Am do punktu m i przyjmując krzywą AmB za włókno środkowe pręta krzywego, oznaczmy przez P wypadkową naprężeń normalnych przekroju przechodzącego przez punkt m tego pręta, a przez M moment tych naprężeń.

Naprężenie normalne P , mające kierunek stycznej t w punkcie m do elipsy, ma na osiach x i y rzuty następujące: $P \cos(t, x)$ i $P \cos(t, y)$. Rzuty te muszą być równe sumie rzutów sił zewnętrznych, działających na część Am pręta krzywego. Układ ciśnień p , rozłożonych równomiernie na część krzywej Am , jest równoważny z układem takichże ciśnień na linię łamaną Am . Oznaczając przeto współrzędne punktu m przez x i y , otrzymamy dwa równania:

$$P \cos(t, x) = py$$

$$P \cos(t, y) = p(a - x) - pa = -px.$$

A więc:

$$P^2 = p^2(y^2 + x^2) = p^2[(a^2 - x^2)(1 - \varepsilon^2) + x^2] = p^2 a^2 \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \varepsilon^2 \right]$$

$$i \quad P = pa \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \frac{\varepsilon^2}{2} \right] \dots \dots \dots (b).$$

Gdy ciśnienie wewnętrzne jest większe od zewnętrznego, t. j. gdy $p > 0$, siła P będzie siłą rozciągającą; w przypadku zaś przeciwnym — ściskającą.

Na moment M naprężeń mamy:

$$M = pa(a - x) - \frac{1}{2} p(a - x)^2 - \frac{1}{2} py^2 + \lambda, \quad \text{czyli}$$

$$M = \lambda + \frac{1}{2} p(a^2 - x^2 - y^2) = \lambda + \frac{1}{2} pa^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \varepsilon^2 \dots \dots (c).$$

Należy tu uwzględnić, że momenty sił, powiększających krzywiznę pręta w przekroju m , uważaliśmy za ilości dodatnie, momenty zaś sił, zmniejszających krzywiznę, za — ujemne.

Do oznaczenia krzywizny elipsy w punkcie m mamy:

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right) = \frac{1}{a} \left[1 - \left(1 - \frac{3x^2}{a^2} \right) \frac{\varepsilon^2}{2} \right] \dots \dots \dots (d).$$

Ponieważ $\left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 = \frac{(1 - \varepsilon^2) x^2}{a^2 - \varepsilon^2 x^2}$, przeto $\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{x}{a} \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \frac{\varepsilon^2}{2} \right]$.

Z powodu symetrycznego układu względem osi y zarówno pręta AmB jak i sił zewnętrznych go wyginających, należy przyjąć, że położenie względne normalnych do krzywej ADB w punktach A i D nie może się zmienić podczas odkształcania. Stosując więc w danym przypadku równanie ogólne (383), wyprowadzone dla prętów o osi krzywej, otrzymamy równanie warunkowe:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega \partial \varphi = 0, \text{ czyli, zastępując } \partial \varphi \text{ przez } \frac{\partial s}{\rho_0},$$

$$\int_0^{\sigma} \frac{\omega}{\rho_0} \partial s = 0 \dots \dots \dots (e),$$

gdzie σ jest długością łuku ćwierci elipsy.

Z równań ogólnych (379) wynika:

$$\frac{\omega}{\rho_0} = \frac{1}{EF} \left(\frac{P}{\rho_0} + \frac{M}{\rho_0^2} \right) + \frac{M}{EI}.$$

A ponieważ $\frac{P}{\rho_0} = p \left[1 - \left(1 - \frac{2x^2}{a^2} \right) \varepsilon^2 \right]$,

$$\frac{M}{\rho_0^2} = \frac{1}{a^2} \left[\lambda - \lambda \left(1 - \frac{3x^2}{a^2} \right) \varepsilon^2 + \frac{pa^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \varepsilon^2 \right],$$

$F = e$ i $I = \frac{e^3}{12}$, gdy przez e oznaczymy grubość ścianki, przeto:

$$\frac{\omega}{\rho_0} = \frac{1}{\varepsilon e} \left\{ p + \frac{\lambda}{a^2} + \frac{12\lambda}{e^2} + \left[\left(\frac{1}{2} p + 6p \frac{a^2}{e^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - p \left(1 - \frac{2x^2}{a^2} \right) - \frac{\lambda}{a^2} \left(1 - \frac{3x^2}{a^2} \right) \right] \varepsilon^2 \right\} \dots \dots \dots (f).$$

Należy jeszcze podstawić ten wzór w równanie (e) i wykonać całkowanie. Wyznamy przytem całkę $\int_0^{\sigma} x^2 \partial s$, przedstawiającą moment bezwładności ćwierci łuku elipsy względem osi y . Że jednak w wyrażeniu (f) wyrazom z x^2 towarzyszy stałe czynniki ε^2 , którego potęgi wyższe od drugiej pomijamy, przeto możemy przy wyznaczaniu tej całki

przyrównywać ϵ do zera, t. j. uważać elipsę za koło o promieniu a . Dla

ćwierci zaś koła mamy: $\int_0^{\sigma} x^2 \partial s = \int_0^{\sigma} y^2 \partial s$, a więc:

$$\int_0^{\sigma} x^2 \partial s = \frac{1}{2} \int_0^{\sigma} (x^2 + y^2) \partial s = \frac{1}{2} a^2 \sigma.$$

Po wykonaniu tego całkowania, otrzymamy z równania (e):

$$\frac{\sigma}{\epsilon e} \left\{ p + \frac{\lambda}{a^2} + \frac{12\lambda}{e^2} + \left(\frac{p}{4} + 3p \frac{a^2}{e^2} + \frac{\lambda}{2a^2} \right) \epsilon^2 \right\} = 0.$$

Stąd na moment λ otrzymamy:

$$\lambda = -p \frac{3 \frac{a^2}{e^2} \epsilon^2 + \frac{\epsilon^2}{4} + 1}{\frac{12}{e^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{\epsilon^2}{2a^2}} = -p a^2 \frac{3 \epsilon^2 + \left(\frac{e}{a}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{e}{a}\right)^2 \epsilon^2}{12 + \left(\frac{e}{a}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{e}{a}\right)^2 \epsilon^2},$$

czyli pomijając wyrazy, zawierające iloczyny dwóch bardzo małych ułamków ϵ^2 i $\left(\frac{e}{a}\right)^2$:

$$\lambda = -p a^2 \cdot \frac{3 \epsilon^2 + \left(\frac{e}{a}\right)^2}{12 + \left(\frac{e}{a}\right)^2}.$$

W tym wzorze można odrzucić w mianowniku ułamek $\left(\frac{e}{a}\right)^2$ jako mały wobec 12, tem bardziej, że licznik też jest ilością bardzo małą. Ostatecznie więc otrzymamy:

$$\lambda = -\frac{p a^2}{4} \left[\epsilon^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{e}{a}\right)^2 \right] \dots \dots \dots (g).$$

Wartość ujemna momentu λ wskazuje, że w przekrojach A i B krzywizna zmniejsza się podczas odkształcania; oczywiście, w przekrojach C i D krzywizna powinna się powiększać. Gdy $p < 0$, czyli gdy ciśnienie zewnętrzne jest większe niż wewnętrzne, rzecz będzie się miała odwrotnie.

Po wyznaczeniu λ otrzymamy na moment M wzór:

$$M = \frac{p a^2}{4} \left[\left(1 - \frac{2x^2}{a^2} \right) \epsilon^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{e}{a}\right)^2 \right] \dots \dots \dots (h),$$

z którego dla przekroju D otrzymujemy:

$$(M)_{x=0} = \frac{p a^2}{4} \left[\epsilon^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{e}{a}\right)^2 \right] \dots \dots \dots (i).$$

Największa wartość liczebna momentu M jest λ , odpowiadająca $x = a$, t. j. przekrojom A i B . Tym przekrojom odpowiada także wartość największa siły P , równa pa , jak to wynika z wzoru (b). Naprężenie więc największe, wywołane przez siłę P w przekroju A jest $\frac{pa}{e}$, a naprężenie największe w tymże przekroju, wywołane przez moment λ jest $\frac{\lambda \eta}{I}$, gdzie należy przyjąć $\eta = -\frac{1}{2}e$ i $I = \frac{e^3}{12}$. Warunek więc wytrzymałości warstwy ma postać następującą:

$$p \frac{a}{e} + \frac{pa^2}{4} \left[\varepsilon^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{e}{a} \right)^2 \right] \frac{6}{e^2} = \frac{T}{k},$$

czyli, mnożąc to równanie przez $\left(\frac{e}{a}\right)^2$:

$$p \frac{e}{a} + \frac{3}{2} p \varepsilon^2 + \frac{1}{2} p \left(\frac{e}{a} \right)^2 = \frac{T}{k} \left(\frac{e}{a} \right)^2, \quad \text{czyli}$$

$$\left(\frac{e}{a} \right)^2 - \frac{T}{k} - \frac{1}{2} p \cdot \frac{e}{a} = \frac{3p}{2 \left(\frac{T}{k} - \frac{1}{2} p \right)} \cdot \varepsilon^2.$$

Pomijając w tem równaniu $\frac{1}{2} p$ wobec $\frac{T}{k}$ i rozwiązując je, otrzymamy:

$$\frac{e}{a} = \frac{kp}{2T} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{6T}{kp} \varepsilon^2} \right] \dots \dots \dots (461).$$

Dla rury walcowej kołowej, o promieniu a , otrzymalibyśmy:

$$\frac{e}{a} = \frac{kp}{T}.$$

Gdy porównamy ten wzór z poprzednim, zauważymy, że nawet nieznaczny mimośród wymaga powiększenia grubości ścianki rury. Jeżeli przyjmiemy więc pod uwagę, że gdy ciśnienie zewnętrzne jest większe od wewnętrznego, mimośród powiększa się podczas odkształcania, to stanie się jasnym, dlaczego w tym przypadku grubość ścianki powinna być znacznie większa, aniżeli w przypadku, gdy ciśnienie wewnętrzne jest większe od zewnętrznego i mimośród podczas odkształcania się zmniejsza.

Do oznaczenia grubości ścianki rury kołowej, o promieniu a , na którą działa ciśnienie zewnętrzne, można stosować wzór (461), przyjmując w nim mimośród ε równym około $\frac{1}{4}$.

ROZDZIAŁ IX.

Drgania nieskończenie małe ciała sprężystego. Przenoszenie się drgań w ośrodku sprężystym.

95. Równania równowagi drutu bardzo cienkiego. Rozpocznijmy od zbadania drgań bardzo cienkiej nitki sprężystej albo drutu sprężystego, t. j. ciała sprężystego, którego dwa wymiary są bardzo małe w porównaniu z trzecim.

Ponieważ równania ruchu jakiegokolwiek ciała otrzymujemy z równań jego równowagi, przez wprowadzenie do tych równań wyrazów, zależnych od siły bezwładności cząstek się poruszających, przeto powinniśmy rozpocząć rzecz od wyprowadzenia równań równowagi nitki sprężystej

Równania równowagi wyprowadzimy na zasadzie przypuszczenia, że taka nitka jest ciałem dokładnie giętkim, co, oczywiście, jest tem bliższe prawdy, im cieńszą jest nitka.

Niech w nitce bardzo cienkiej ω będzie powierzchnią przekroju, przechodzącego przez punkt osi nitki, odpowiadający współrzędnym x, y i z i oddalony o s od początku nitki, mierząc w jej osi. Oznaczając kierunek stycznej do osi nitki w punkcie (x, y, z) także przez s , będziemy mieli:

$$\cos(s, x) = \frac{\partial x}{\partial s}, \quad \cos(s, y) = \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{i} \quad \cos(s, z) = \frac{\partial z}{\partial s} \quad \dots \quad (a),$$

gdzie ∂s przedstawia długość cząstki osi nitki.

Do oznaczenia wielkości i kierunku siły sprężystości p_s , działającej w środku ciężkości przekroju ω , mamy wzory:

$$\left. \begin{aligned} p_{sx} &= p_{xx} \frac{\partial x}{\partial s} + p_{yx} \frac{\partial y}{\partial s} + p_{zx} \frac{\partial z}{\partial s} \\ p_{sy} &= p_{xy} \frac{\partial x}{\partial s} + p_{yy} \frac{\partial y}{\partial s} + p_{zy} \frac{\partial z}{\partial s} \\ p_{sz} &= p_{xz} \frac{\partial x}{\partial s} + p_{yz} \frac{\partial y}{\partial s} + p_{zz} \frac{\partial z}{\partial s} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (b).$$

Na jeden więc koniec cząstki $\omega \partial s$ nitki działa siła, której rzuty na osie współrzędnych są: $-\omega p_{sx}$, $-\omega p_{sy}$ i $-\omega p_{sz}$, na drugi zaś koniec działają siły:

$$\left[\omega p_{sx} + \frac{\partial(\omega p_{sx})}{\partial s} \partial s \right], \left[\omega p_{sy} + \frac{\partial(\omega p_{sy})}{\partial s} \partial s \right] \text{ i } \left[\omega p_{sz} + \frac{\partial(\omega p_{sz})}{\partial s} \partial s \right].$$

Nadto występują w tej cząstce siły działające na masę (t. j. działające jednocześnie na wszystkie punkty cząstki):

$$X \rho \omega \partial s, \quad Y \rho \omega \partial s \quad \text{ i } \quad Z \rho \omega \partial s,$$

gdzie X, Y i Z są rzutami na osie współrzędnych przyśpieszenia sił działających na masę (t. j. sił działających jednocześnie na wszystkie punkty cząstki), a ρ jest masą jednostki objętości nitki.

Skoro przyjmemy, że na powierzchnię boczną badanej nitki sprężystej nie działają żadne siły zewnętrzne, to równania równowagi cząstki nitki będą:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\omega p_{sx})}{\partial s} + \rho X \omega &= 0, & \frac{\partial(\omega p_{sy})}{\partial s} + \rho Y \omega &= 0 \\ \text{ i } & & \frac{\partial(\omega p_{sz})}{\partial s} + \rho Z \omega &= 0 \dots \dots \dots (c). \end{aligned}$$

Do tych równań należy dołączyć równania, wypływające z warunku, że na bocznej powierzchni nitki nie działają żadne siły.

Oznaczmy przez n kierunek normalnej do bocznej powierzchni cząstki $\omega \partial s$ w punkcie dowolnym. Ponieważ kierunki n i s są do siebie prostopadłe, przeto mamy równanie warunkowe:

$$\frac{\partial x}{\partial s} \cos(n, x) + \frac{\partial y}{\partial s} \cos(n, y) + \frac{\partial z}{\partial s} \cos(n, z) = 0. \dots \dots (d).$$

Warunek zaś, że na powierzchni bocznej nie działają żadne siły, wymaga, ażeby $p_n = 0$, czyli:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} \cos(n, x) + p_{yx} \cos(n, y) + p_{zx} \cos(n, z) &= 0 \\ p_{xy} \cos(n, x) + p_{yy} \cos(n, y) + p_{zy} \cos(n, z) &= 0 \\ p_{xz} \cos(n, x) + p_{yz} \cos(n, y) + p_{zz} \cos(n, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (e).$$

Trzy równania ostatnie istnieją dla wszystkich kierunków n , czyniących zadość równaniu (d); każde więc z tych trzech równań musi być identyczne z równaniem (d), a więc:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= a \frac{\partial x}{\partial s}, & p_{yx} &= a \frac{\partial y}{\partial s}, & p_{zx} &= a \frac{\partial z}{\partial s} \\ p_{xy} &= b \frac{\partial x}{\partial s}, & p_{yy} &= b \frac{\partial y}{\partial s}, & p_{zy} &= b \frac{\partial z}{\partial s} \\ p_{xz} &= c \frac{\partial x}{\partial s}, & p_{yz} &= c \frac{\partial y}{\partial s}, & p_{zz} &= c \frac{\partial z}{\partial s} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (f).$$

Rugując z tych dziewięciu równań trzy współczynniki a, b i c , otrzymamy sześć równań następujących:

$$\frac{p_{xx}}{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2} = \frac{p_{yy}}{\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} = \frac{p_{zz}}{\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2} = \frac{p_{yz}}{\frac{\partial y}{\partial s} \cdot \frac{\partial z}{\partial s}} = \frac{p_{zx}}{\frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial x}{\partial s}} = \frac{p_{xy}}{\frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}} = p \dots \dots (g),$$

gdzie $p = p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}$, gdyż $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 = 1$.

W istocie, mnożąc równanie pierwsze przez czwarte i drugie przez piątą grupy (f), otrzymamy:

$$p_{xx} p_{xy} = ab \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 \quad \text{i} \quad p_{yx} p_{yy} = ab \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2,$$

rugując zaś stąd iloczyn ab , otrzymamy: $\frac{p_{xx}}{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2} = \frac{p_{yy}}{\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2}$. Mnożąc

równanie pierwsze przez piątą, drugie zaś przez czwarte, otrzymamy:

$$p_{xx} p_{yy} = ab \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{i} \quad p_{xy} p_{yx} = p^2_{xy} = ab \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}.$$

A więc $p^2_{xy} = p_{xx} \cdot p_{yy}$. Z otrzymanych dwóch równań, nie zawierających czynników a, b i c , wyprowadzimy cztery pozostałe przez zamianę kołową liter x, y i z , a z tych równań otrzymamy równania (g).

Gdy porównamy równania (g) z równaniami (90) (w ustępie 24), wyznaczającemi siłę główną sprężystości w przypadku, gdy pozostałe dwie siły główne równe są zeru, zauważymy, że w każdym punkcie badanej nitki sprężystej, dwie z sił głównych sprężystości równe są zeru, a trzecia, nie równa zeru, jest właśnie siłą p i że kierunek tej siły p pada na normalną do płaszczyzny ω przekroju nitki. Wielkość p przedstawia więc *naprężenie nitki w przekroju ω* .

Z wzorów (b), przy istnieniu równań (g) i warunku, że:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 = 1,$$

otrzymujemy:

$$p_{sx} = p \frac{\partial x}{\partial s}, \quad p_{sy} = p \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{i} \quad p_{sz} = p \frac{\partial z}{\partial s},$$

wobec czego równania równowagi (c) przyjmują postać:

$$\frac{\partial \left(\omega p \frac{\partial x}{\partial s} \right)}{\partial s} + \rho X \omega = 0, \quad \frac{\partial \left(\omega p \frac{\partial y}{\partial s} \right)}{\partial s} + \rho Y \omega = 0,$$

$$\frac{\partial \left(\omega p \frac{\partial z}{\partial s} \right)}{\partial s} + \rho Z \omega = 0,$$

czyli, po wykonaniu różniczkowania:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (\omega p)}{\partial s} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \omega p \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \rho X \omega &= 0 \\ \frac{\partial (\omega p)}{\partial s} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \omega p \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \rho Y \omega &= 0 \\ \frac{\partial (\omega p)}{\partial s} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} + \omega p \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \rho Z \omega &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (462).$$

Ponieważ

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 = 1 \quad \text{i} \quad \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial y}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = 0,$$

przeto z równań (462) z łatwością otrzymamy:

$$\partial (\omega p) + \rho \omega (X \partial x + Y \partial y + Z \partial z) = 0 \dots \dots \dots (463).$$

Równania te rozwiązują zadania, dotyczące równowagi nitki sprężystej.

96. Drgania struny naprężonej. Przypuśćmy, że dana jest struna, o stałym bardzo małym przekroju ω , która została naprężona przez działanie siły P i w tym stanie końce tej struny A i B zostały umocowane nieruchomo. Początek współrzędnych umieszczamy w punkcie A , a za oś x przyjmujemy prostą AB . Wyobraźmy sobie, że struna ta została w jakikolwiek sposób wprowadzona ze stanu równowagi i że wskutek tego wykonywa szereg bardzo małych drgań. Przyjmijmy na strunie podczas stanu równowagi dwa punkty sąsiednie: jeden o współrzędnych $(x, 0, 0)$, drugi zaś o współrzędnych $(x + \partial x, 0, 0)$, to współrzędne tych punktów w chwili t będą: pierwszego $(x + u, v \text{ i } w)$, drugiego $\left(x + \partial x + u + \frac{\partial u}{\partial x} \partial x, v + \frac{\partial v}{\partial x} \partial x, w + \frac{\partial w}{\partial x} \partial x \right)$. Różnice odpowiednich współrzędnych tych punktów, przedstawiają nam rzuty na osie współrzędnych cząstki ∂s łuku krzywej, którą tworzy oś struny w chwili t . Rzuty te są:

$$\partial s \cdot \cos (\partial s, x) = \partial x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \partial s \cdot \cos (\partial s, y) = \frac{\partial v}{\partial x} \partial x,$$

$$\partial s \cdot \cos (\partial s, z) = \frac{\partial w}{\partial x} \partial x,$$

a więc
$$\partial s = \partial x \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}.$$

Jednakże cząstka ∂s powinna pod względem zarówno wielkości, jak i swojego położenia, bardzo mało różnić się od ∂x , wskutek czego, pochodne $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ i $\frac{\partial w}{\partial x}$ muszą być ilościami bardzo małemi. Pomijając potęgi tych ilości wyższe od pierwszej, otrzymamy.

$$\partial s = \partial x \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x}} = \partial x \left(1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{1/2} = \partial x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$\begin{aligned} \cos(\partial s, x) = 1, \quad \cos(\partial s, y) &= \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-1} = \\ &= \frac{\partial v}{\partial x} \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\text{i} \quad \cos(\partial s, z) = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-1} = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Ponieważ $\frac{\partial s - \partial x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$ wyraża wydłużenie względne cząstki ∂s , przeto

$E \frac{\partial u}{\partial x}$ jest naprężeniem tej cząstki, wywołanem przez zmianę jej kształtu, przy przejściu z położenia równowagi w położenie, w jakim się znajduje w chwili t . Naprężenie więc zupełne struny w przekroju rozważanym będzie:

$$P + E \omega \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Znając długość, kierunek i naprężenie zupełne cząstki ∂s struny, z łatwością możemy napisać równania ruchu struny. W tym celu należy w równaniach (462) przyjąć:

$$\omega p = P + E \omega \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = \cos(\partial s, x) = 1, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \cos(\partial s, y) = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \cos(\partial s, z) = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

i wreszcie zamiast sił X , Y i Z , działających na masę, wprowadzić wyrażenia na rzuty na osie współrzędnych przyspieszenia siły bezwładności*), t. j. przyjąć:

$$X = - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad Y = - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \text{i} \quad Z = - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

*) Pomijamy tu ciężar własny struny.

Po wykonaniu tych podstawień w równaniach (462) i po odrzuceniu wyrazów, zawierających iloczyny pochodnych, jako bardzo małe stopnia wyższego niż pierwszy, otrzymamy równania następujące na bardzo małe drgania struny:

$$E \omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad P \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \rho \omega \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho \omega \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

czyli

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (464),$$

gdzie $b^2 = \frac{E}{\rho}$ i $a^2 = \frac{P}{\rho \omega}$ (465).

Pierwsze z równań (464) wyznacza posunięcie u w kierunku długości struny, t. j. wyznacza tak zwane *drgania podłużne*, gdy tymczasem dwa równania pozostałe wyznaczają tak zwane *drgania poprzeczne*: jedno w płaszczyźnie (xy) , drugie w płaszczyźnie (zx) .

Ponieważ równania drgań podłużnych i poprzecznych mają postać zupełnie jednakową i różnią się tylko czynnikami stałymi, przeto dojdziemy do wniosku, że znamiona ogólne drgań zarówno podłużnych, jak i poprzecznych są jednakowe. Z wzorów (465) wynika, że drgania podłużne struny są tak zależne od współczynnika sprężystości E , jak drgania poprzeczne od naprężenia początkowego $\frac{P}{\omega}$, sprowadzonego do jednostki powierzchni przekroju struny.

Rozważmy równanie drgań poprzecznych struny w płaszczyźnie (xy) , t. j. równanie:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \text{gdzie } a = \sqrt{\frac{P}{\rho \omega}} \dots \dots \dots (466).$$

Z łatwością możemy zapomocą prostego podstawienia, przekonać się, że jeżeli $v_1, v_2, v_3 \dots$ są rozwiązaniami równania (466), czyli takimi funkcjami x i t , które po podstawieniu ich za v w to równanie, przekształcają je w tożsamość, to i suma $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \dots$ będzie również rozwiązaniem i to przy dowolnych współczynnikach stałych c_1, c_2, c_3, \dots .

Mając to na względzie, przyjmujemy $v = e^{\alpha t + \beta x}$ i staramy się wyjaśnić, czy nie można wyznaczyć stałych α i β tak, ażeby funkcya $e^{\alpha t + \beta x}$ była rozwiązaniem, t. j. całką szczególną równania (466).

Ponieważ mamy teraz:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \alpha^2 e^{\alpha t + \beta x} \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \beta^2 e^{\alpha t + \beta x},$$

wobec czego równanie (466) przyjmuje postać: $\alpha^2 = a^2 \beta^2$ i daje: $\beta = \pm \frac{\alpha}{a}$, przeto mamy dwa rozwiązania:

$$v_1 = e^{\alpha t + \frac{\alpha x}{a}} \quad \text{i} \quad v_2 = e^{\alpha t - \frac{\alpha x}{a}},$$

a więc mamy jeszcze rozwiązanie następujące:

$$v = c_1 e^{\alpha t + \frac{\alpha x}{a}} + c_2 e^{\alpha t - \frac{\alpha x}{a}} = e^{\alpha t} \left[c_1 e^{\frac{\alpha x}{a}} + c_2 e^{-\frac{\alpha x}{a}} \right] \dots \dots \dots (a).$$

Ponieważ jednak, zgodnie z założeniem, końce struny są umocowane nieruchomo, przeto przy $x=0$ i przy $x=l$, posunięcie v musi być równe zeru dla każdego dowolnego t . Rozwiązanie (a) uczyni temu zadość, gdy będą istniały dwa równania następujące:

$$c_1 + c_2 = 0 \quad \text{i} \quad c_1 e^{\frac{\alpha l}{a}} + c_2 e^{-\frac{\alpha l}{a}} = 0, \quad \text{czyli}$$

$$c_2 = -c_1 \quad \text{i} \quad e^{\frac{\alpha l}{a}} = e^{-\frac{\alpha l}{a}}.$$

Równanie ostatnie nie może być spełnione przy żadnej rzeczywistej wartości stałej α , za wyłączeniem wartości $\alpha=0$, przy której $v=0$ dla wszystkich punktów struny, a więc wartości nie mającej w danym przypadku żadnego znaczenia. To też α może być tylko urojone. Przyjmijmy $\alpha = \gamma \sqrt{-1}$ i uważajmy γ za ilość rzeczywistą. Wtedy rozwiązanie nasze przyjmie postać:

$$v = e^{\gamma t \sqrt{-1}} c_1 \left[e^{\frac{\gamma x}{a} \sqrt{-1}} - e^{-\frac{\gamma x}{a} \sqrt{-1}} \right].$$

Ale:

$$e^{\gamma t \sqrt{-1}} = \cos(\gamma t) + \sin(\gamma t) \sqrt{-1}; \quad e^{\frac{\gamma x}{a} \sqrt{-1}} - e^{-\frac{\gamma x}{a} \sqrt{-1}} = 2 \sin\left(\frac{\gamma x}{a}\right) \sqrt{-1},$$

a więc:
$$v = 2 c_1 \sqrt{-1} \cdot \sin\left(\frac{\gamma x}{a}\right) [\cos(\gamma t) + \sin(\gamma t) \sqrt{-1}].$$

Przyjmując tu $x=l$ i $v=0$, otrzymamy dla dowolnego t : $\sin\left(\frac{\gamma l}{a}\right) = 0$,

t.j. $\frac{\gamma l}{a} = i\pi$, gdzie i jest dowolną liczbą całkowitą. A więc $\gamma = i\pi \frac{a}{l}$ i funkcje

$$A_i \sin\left(i\pi \frac{x}{l}\right) \cos\left(i\pi \frac{at}{l}\right) \quad \text{i} \quad B_i \sin\left(i\pi \frac{x}{l}\right) \sin\left(i\pi \frac{at}{l}\right)$$

są rozwiązaniami naszego równania. Ponieważ w tych rozwiązaniach liczba i może być dowolną liczbą całkowitą, przeto mamy nieskończenie wielką liczbę różnych rozwiązań, wskutek czego *całka ogólna* równania (466) jest:

$$v = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left[\left\{ A_i \cos \left(i \pi \frac{at}{l} \right) + B_i \sin \left(i \pi \frac{at}{l} \right) \right\} \sin \left(i \pi \frac{x}{l} \right) \right] \dots (467).$$

Ta całka ogólna zawiera dwa szeregi nieskończone ilości stałych dowolnych, a mianowicie: szereg A_1, A_2, A_3, \dots i szereg B_1, B_2, B_3, \dots . Tę całkę ogólną znalazł Daniel Bernoulli, jednakże całka szczególna postaci $\left[A \cos \left(\pi \frac{at}{l} \right) + B \sin \left(\pi \frac{at}{l} \right) \right] \sin \left(\pi \frac{x}{l} \right)$ była znana Taylor'owi już dawniej.

Oczywiście, wszystkie stałe dowolne tej całki ogólnej powinny być dokładnie oznaczone ze stanu początkowego struny, jak to wyjaśnimy poniżej.

Zobaczymy, co nam właściwie daje rozwiązanie (467). W tym celu bierzemy jedną z całek szczególnych, np. całkę:

$$v_i = \sin \left(i \pi \frac{x}{l} \right) \left[A_i \cos \left(i \pi \frac{at}{l} \right) + B_i \sin \left(i \pi \frac{at}{l} \right) \right]$$

i przyjmujemy:

$$\left. \begin{aligned} A_i \sin \left(i \pi \frac{x}{l} \right) &= \mathfrak{D}_i \sin \varphi_i \\ B_i \sin \left(i \pi \frac{x}{l} \right) &= \mathfrak{D}_i \cos \varphi_i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (b).$$

Będziemy wtedy mieli:

$$\operatorname{tg} \varphi_i = \frac{A_i}{B_i} \quad \text{i} \quad \mathfrak{D}_i = \sin \left(i \pi \frac{x}{l} \right) \sqrt{A_i^2 + B_i^2} \dots (468).$$

Z równań ostatnich widzimy, że przy dowolnych A_i i B_i , ilości φ_i i \mathfrak{D}_i są zawsze ilościami rzeczywistymi.

Całka szczególna przyjmuje teraz postać:

$$v_i = \mathfrak{D}_i \sin \left(\varphi_i + i \pi \frac{at}{l} \right) \dots \dots \dots (469)$$

i wskazuje, że posunięcie v_i przekroju struny, wyznaczonego przez współrzędną x , jest *funkcją okresową czasu* t . To posunięcie mieści się w granicach $-\mathfrak{D}_i$ i $+\mathfrak{D}_i$, a więc \mathfrak{D}_i jest *amplitudą drgań* (roz-machem drgań) przekroju uważanego. A ponieważ ta amplituda jest zależna od x , jak to jest widoczne z równania (468), przeto dochodzimy do wniosku, że różne przekroje struny mają rozmaite amplitudy. Oprócz przekrojów końcowych umocowanych, mamy jeszcze $i-1$ przekrojów

niedrgających, a mianowicie przekroje, wyznaczone przez następujące wartości współrzędnej x :

$$\frac{l}{i}, \frac{2l}{i}, \frac{3l}{i}, \dots, \frac{(i-1)l}{i} \dots \dots \dots (470).$$

Są to, tak zwane, *węzły struny*.

Jeżeli czas trwania jednego drgnienia oznaczymy przez τ , to część druga wzoru (469) nie powinna się zmienić gdy za t podstawimy: $t + \tau$, a ponieważ wstawa łuku nie zmieni się gdy łuk powiększymy o 2π , przeto do oznaczenia τ mamy równanie:

$$\varphi_i + i\pi \frac{a(t + \tau)}{l} = \varphi_i + i\pi \frac{at}{l} + 2\pi,$$

z którego otrzymujemy:

$$\tau = \frac{2l}{ia} = \frac{2l}{i} \sqrt{\frac{\rho}{P\omega}} \quad \text{i} \quad \frac{1}{\tau} = N_i = \frac{i}{2l} \sqrt{\frac{P}{\rho\omega}} \dots \dots \dots (471).$$

N_i jest liczbą drgań na sekundę.

Z wzoru ostatniego wynika, że *wysokość tonu*, który struna wydaje, jest proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z naprężenia P , odwrotnie proporcjonalna do grubości struny (średnicy jej przekroju) i odwrotnie proporcjonalna do długości. Ton będzie tem wyższy, im większe jest i . Natomiast amplituda drgań \mathfrak{D}_i , określająca *natężenie dźwięku*, zmniejsza się w miarę powiększania się i , z powodu, że przy większem i mamy więcej węzłów, wskutek czego amplitudy stają się mniejsze.

Teraz staje się zrozumiałem, że całka ogólna (467) wskazuje, iż dźwięk, który wydaje struna, powinniśmy uważać za *akord*, składający się z nieskończenie wielkiej liczby dźwięków prostych, z których ton najsilniejszy, tak zwany *zasadniczy*, jest określony liczbą drgań:

$$N_1 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{P}{\rho\omega}}.$$

Ton ten jest jednocześnie najniższy; tony, następujące po nim, są stopniowo słabsze i posiadają liczbę drgań:

$$N_2 = \frac{2}{2l} \sqrt{\frac{P}{\rho\omega}}, \quad N_3 = \frac{3}{2l} \sqrt{\frac{P}{\rho\omega}}, \dots$$

i t. d. TONY te nazywamy *tonami harmonicznymi*.

Pierwszym z tonów harmoniczych jest *oktawa* tonu zasadniczego, drugim — *kwinta* oktawy i t. d. Jeżeli w przypadku szczególnym stałe A_i i B_i są równe zeru dla pewnej wartości i , to wśród tonów harmoniczych niema tego, który odpowiada tej wartości i . W każdym instrumencie muzycznym tonowi zasadniczemu towarzyszą tony harmo-

niczne, ale nie jednakowe we wszystkich instrumentach. Ta różność tonów harmonicznycch jest przyczyną różnicy *dźwięczności* czyli *barwy* instrumentów. Tak np. przysłuchując się orkiestrze, odróżniamy dźwięki skrzypiec od dźwięków fletu, choćby skrzypce i flet wydawały ten sam ton zasadniczy. Fakt, że ucho nasze odróżnia dźwięki różnych instrumentów, dowodzi, że słyszy ono nietylko ton zasadniczy, lecz i kilka pierwszych tonów harmonicznycch, towarzyszących tonowi zasadniczemu. A skoro tak jest, to ściśle określone drgania ciała dźwięczącego, dochodzące do nerwu słuchowego, rozkładają się w naszym uchu na ton zasadniczy i tony harmoniczne, podobnie jak promienie białe rozszczepiają się w pryzmacie na barwne.

Przechodzimy teraz do wyznaczenia stałych A_i i B_i z danego stanu początkowego struny. Przypuśćmy, że w chwili $t=0$ posunięcia punktów struny czyniły zadość równaniu $v = f(x)$, a prędkości tych punktów — równaniu $\frac{\partial v}{\partial t} = F(x)$.

Oczywiście, mamy prawo stosowania tych funkcji tylko przy wartościach zmiennej x , leżących w granicach od 0 do l . Funkcye te muszą naturalnie czynić zadość warunkom $f(0) = 0$, $f(l) = 0$, $F(0) = 0$ i $F(l) = 0$, gdyż końce struny są umocowane nieruchomo.

Różniczkując względem t równanie (467) i przyjmując w równaniu tak otrzymanem, jako też w równaniu (467), $t = 0$, będziemy mieli:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sum_1^{\infty} A_i \sin\left(i\pi \frac{x}{l}\right) \\ F(x) &= \frac{\pi a}{l} \sum_1^{\infty} B_i i \sin\left(i\pi \frac{x}{l}\right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (472).$$

Ponieważ jesteśmy przekonani, że wszelkie A_i i B_i mogą być wyznaczone z tych równań ostatnich, gdyż drgania punktów struny, w każdym przypadku szczególnym, muszą być zupełnie oznaczone, przeto dochodzimy do wniosku, że *każda funkcya zmiennej x , posiadająca jedną wartość oznaczoną dla każdej wartości x , leżącej w granicach od 0 do l i zamieniająca się w zero dla samych granic, może być, w granicach wskazanych, wyrażona w postaci szeregu nieskończonego, ułożonego według wstaw (sinusów) łuków wielokrotnych wartości x .*

To przypuszczenie jest twierdzeniem analizy matematycznej, dowiedzionem przez Lagrange'a, który podał również i sposób oznaczenia wszystkich współczynników szeregu nieskończonego.

Współczynniki te można oznaczyć zapomocą całki następującej:

$$\int_0^{\pi} \sin(\lambda x) \sin(\mu x) \partial x .$$

Ponieważ $\sin(\lambda x) \sin(\mu x) = \frac{1}{2} [\cos\{(\lambda - \mu)x\} - \cos\{(\lambda + \mu)x\}]$,
 przeto:

$$\int_0^\pi \sin(\lambda x) \sin(\mu x) \partial x = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos\{(\lambda - \mu)x\} \partial x - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos\{(\lambda + \mu)x\} \partial x$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin\{(\lambda - \mu)x\}}{\lambda - \mu} \right]_0^\pi - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin\{(\lambda + \mu)x\}}{\lambda + \mu} \right]_0^\pi.$$

Ograniczając się do przypadku, gdy λ i μ są liczbami całkowitemi, w rozpatrywanej całce określonej otrzymamy zero dla wszystkich wartości λ i μ sobie nierównych. Skoro zaś przyjmiemy $\lambda = \mu$, to ułamek $\frac{\sin\{(\lambda - \mu)x\}}{\lambda - \mu}$ staje się $\frac{0}{0}$, a ponieważ wartość rzeczywista tej nieoznaczoności jest x , o czym można łatwo się przekonać, rozkładając \sin w szereg i ponieważ ilość x , wzięta w granicach od 0 do π , przechodzi w π , przeto i całka nasza przy $\lambda = \mu$ daje π . Tak więc:

$$\int_0^\pi \sin(\lambda x) \sin(\mu x) \partial x = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \lambda \text{ i } \mu \text{ nie są sobie równe;} \\ \frac{1}{2} \pi, & \text{gdy } \lambda = \mu. \end{cases}$$

Wprowadźmy $\frac{\pi x}{l}$ zamiast x , a więc $\frac{\pi \partial x}{l}$ zamiast ∂x i zgodnie z tem zamiast granic 0 i π weźmy granice 0 i l , a otrzymamy wówczas:

$$\int_0^l \sin\left(\lambda \frac{\pi x}{l}\right) \sin\left(\mu \frac{\pi x}{l}\right) \partial x = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \lambda \text{ nie jest równe } \mu; \\ \frac{l}{2}, & \text{gdy } \lambda = \mu. \end{cases} \dots (473).$$

Mnożymy obie strony każdego z równań (472) przez $\sin\left(i \pi \frac{x}{l}\right) \partial x$ i całkujemy w granicach od 0 do l ; wtedy na podstawie wzoru (473) otrzymamy:

$$\int_0^l f(x) \sin\left(i \pi \frac{x}{l}\right) \partial x = A_i \frac{l}{2}$$

$$\int_0^l F(x) \sin\left(i \pi \frac{x}{l}\right) \partial x = \frac{\pi a}{l} B_i \cdot i \frac{l}{2}.$$

Skąd:

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(i \pi \frac{x}{l}\right) \partial x \\ B_i &= \frac{2}{i \pi a} \int_0^l F(x) \sin\left(i \pi \frac{x}{l}\right) \partial x \end{aligned} \right\} \dots (474).$$

Przykład I. Przypuśćmy, że strunę wprawiono w ruch przez uderzenie w bardzo małą jej część, leżącą pomiędzy $x = h - \varepsilon$ a $x = h + \varepsilon$ i że przytem wszystkim punktom bardzo małej długości 2ε była nadana prędkość jednakowa V .

W tym przypadku należy przyjąć:

$$f(x) = 0 \quad \text{dla wszystkich wartości } x,$$

$$F(x) = V \quad \text{dla wartości } x, \text{ leżących w granicach od } h - \varepsilon \text{ do } h + \varepsilon \text{ i}$$

$$F(x) = 0 \quad \text{dla wartości } x, \text{ leżących poza temi granicami.}$$

Wzory (474) dadzą:

$$A_i = 0 \quad \text{dla dowolnego } i,$$

$$B_i = \frac{2V}{i\pi a} \int_{h-\varepsilon}^{h+\varepsilon} \sin\left(i\pi \frac{x}{l}\right) \partial x = \frac{2V}{i\pi a} \cdot \frac{l}{i\pi} \left[\cos\left\{\frac{i\pi(h-\varepsilon)}{l}\right\} - \cos\left\{\frac{i\pi(h+\varepsilon)}{l}\right\} \right],$$

czyli:

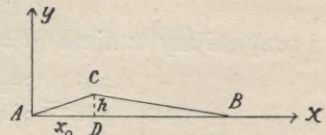
$$B_i = \frac{4Vl}{a(i\pi)^2} \sin\left(\frac{i\pi h}{l}\right) \sin\left(\frac{i\pi\varepsilon}{l}\right) \dots \dots \dots (475).$$

Podstawiając tu za i wszystkie liczby szeregu naturalnego, otrzymamy B_1, B_2, B_3, \dots i t. d.

Gdyby uderzony był jeden z węzłów, odpowiadających np. rozwiązaniu $i = 5$, to h byłoby równe jednej z ilości następujących: $\frac{l}{5}, \frac{2l}{5}, \frac{3l}{5}$ i $\frac{4l}{5}$, a wtedy czynnik $\sin\left(i\pi \frac{h}{l}\right)$ byłby równy $\sin\left(i\frac{\pi}{5}\right)$, albo $\sin\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$, albo $\sin\left(\frac{3i\pi}{5}\right)$, albo wreszcie $\sin\left(\frac{4i\pi}{5}\right)$; mielibyśmy więc ostatecznie $B_5 = B_{10} = B_{15} = B_{20} = \dots = 0$, i wśród tonów harmonicznycch nie byłoby tych, które odpowiadają rozwiązaniu $i = 5$, $i = 10$, $i = 15$ i t. d.

Przykład II. Strunie nadano kształt linii łamanej ACB (rys. 27) i pozostawiono ją następnie samej sobie.

W tym przypadku $F(x) = 0$ dla wszystkich wartości x . Skoro współrzędne wierzchołka C oznaczmy przez x_0 i h , to otrzymamy:



Rys. 27.

$$f(x) = \frac{h}{x_0} \quad \text{dla } x \text{ od } 0 \text{ do } x_0$$

$$\text{i } f(x) = \frac{h}{l-x_0} (l-x) \quad \text{dla } x \text{ od } x_0 \text{ do } l.$$

Dla współczynnika A_i otrzymamy więc:

$$A_i = \frac{2}{l} \left[\frac{h}{x_0} \int_0^{x_0} x \sin \left(i \pi \frac{x}{l} \right) \partial x + \frac{h}{l-x_0} \int_{x_0}^l (l-x) \sin \left(i \pi \frac{x}{l} \right) \partial x \right].$$

$$\begin{aligned} \text{A że: } \int x \sin \left(i \pi \frac{x}{l} \right) \partial x &= - \frac{l}{i \pi} \int x \cdot \partial \cos \left(i \pi \frac{x}{l} \right) \\ &= - \frac{l}{i \pi} \left[x \cos \left(i \pi \frac{x}{l} \right) - \int \cos \left(i \pi \frac{x}{l} \right) \partial x \right] + C \\ &= - \frac{l}{i \pi} x \cos \left(i \pi \frac{x}{l} \right) + \left(\frac{l}{i \pi} \right)^2 \sin \left(i \pi \frac{x}{l} \right) + C, \end{aligned}$$

przeto otrzymujemy dla A_i :

$$A_i = \frac{2hl^2}{i^2 \pi^2 (l-x_0)x_0} \sin \left(i \pi \frac{x_0}{l} \right) \dots \dots \dots (476).$$

Gdyby $x_0 = \frac{1}{2} l$, to mielibyśmy $A_i = \frac{8h}{i^2 \pi^2} \sin \left(i \frac{\pi}{2} \right)$ i wtedy wszystkie A_i dla wartości parzystych i równałyby się zeru, a dla wartości nieparzystych mielibyśmy: $A_1 = \frac{8h}{\pi^2}$, $A_3 = -\frac{8h}{9\pi^2}$, $A_5 = \frac{8h}{25\pi^2}$ i t. d. Współczynniki zaś B_i wszystkie równałyby się zeru dla każdego dowolnego x_0 .

97. Całka ogólna (467) daje nam rozwiązanie równania:

$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ w postaci szeregu nieskończonego, zawierającego liczbę nieskończenie wielką stałych dowolnych A_i i liczbę nieskończenie wielką stałych B_i . Istnieje jeszcze rozwiązanie, zawierające dwie funkcje dowolne zmiennych x i t , podane przez d'Alembert'a i zwane *całką zupełną*.

W celu otrzymania tej całki napiszmy równanie nasze w postaci:

$$\frac{\partial^2 v}{a^2 \partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

i przyjmijmy w niem $at = z$, wtedy:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \text{czyli } \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

To ostatnie równanie wskazuje, że:

$$\frac{\partial v}{\partial x} \partial z + \frac{\partial v}{\partial z} \partial x$$

jest różniczką zupełną pewnej funkcji zmiennych x i z . Oznaczmy tę funkcję przez Φ , a otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} d\Phi &= \frac{\partial v}{\partial x} \partial z + \frac{\partial v}{\partial z} \partial x \\ \text{i } dv &= \frac{\partial v}{\partial x} \partial x + \frac{\partial v}{\partial z} \partial z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (a),$$

gdzie literą d oznaczamy różniczki zupełne.

Dodając i odejmując dwa równania ostatnie, otrzymamy dwa następujące:

$$d[v + \Phi(x, z)] = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \partial(x + z)$$

$$d[v - \Phi(x, z)] = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \partial(x - z),$$

w których strony drugie powinny być różniczkami zupełnemi, gdyż strony pierwsze są różniczkami zupełnemi. Stąd wyprowadzamy wniosek, że $v + \Phi(x, z)$ musi być funkcją $x + z$, a $v - \Phi(x, z)$ musi być funkcją $x - z$. Oznaczmy pierwszą z tych funkcji przez $2\varphi(x + z)$, drugą zaś przez $2\psi(x - z)$, a otrzymamy:

$$v + \Phi(x, z) = 2\varphi(x + z) \quad \text{i} \quad v - \Phi(x, z) = 2\psi(x - z),$$

skąd wynika, że $v = \varphi(x + z) + \psi(x - z)$,

$$\text{czyli} \quad v = \varphi(x + at) + \psi(x - at) \dots \dots \dots (477),$$

gdzie φ i ψ są funkcjami dowolnemi.

Z rozwiązania tego wyniku:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a[\varphi'(x + at) - \psi'(x - at)]. \dots \dots (478).$$

Przyjmując zaś, jak poprzednio, że przy $t = 0$:

$$v = f(x) \quad \text{i} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = F(x),$$

otrzymamy do oznaczenia funkcji φ i ψ równania:

$$\varphi(x) + \psi(x) = f(x),$$

$$\varphi'(x) - \psi'(x) = \frac{1}{a} F(x).$$

Z równania ostatniego, po zcałkowaniu tegoż, otrzymujemy:

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{1}{a} \int_0^x F(x) \partial x.$$

Mamy więc:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x F(x) \partial x \\ \psi(x) &= \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x F(x) \partial x \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (479).$$

Równania te wyznaczają postać funkcji φ i ψ z funkcji danych f i F , lecz tylko dla wartości x , leżących w granicach od 0 do l , gdyż tylko dla tych wartości zmiennej x mają rację bytu wartości funkcji danych f i F . Tymczasem we wzorach (477) mamy prawo nadawać zmiennej t wszelkie możliwe wartości od $-\infty$ do $+\infty$, to też musimy znać wartości funkcji φ i ψ dla wszelkich możliwych wartości zmiennej, nie zaś tylko dla wartości od 0 do l . Wszystkie te wartości oznaczyć można z warunków, że końce struny są nieruchome. W istocie, wprowadzając te warunki w równanie (477), otrzymamy:

$$\begin{aligned}\varphi(at) + \psi(-at) &= 0 \\ \varphi(l+at) + \psi(l-at) &= 0,\end{aligned}$$

czyli, oznaczając ilość at , która może mieć wszelkie wartości od $-\infty$ do $+\infty$, przez z :

$$\varphi(z) = -\psi(-z) \dots \dots \dots (a)$$

$$\varphi(l+z) = -\psi(l-z) \dots \dots \dots (b).$$

Zastępując zaś z przez $-z$, otrzymamy:

$$\varphi(-z) = -\psi(z) \dots \dots \dots (c)$$

$$\varphi(l-z) = -\psi(l+z) \dots \dots \dots (d).$$

Wartości funkcji φ i ψ w granicach od $z=0$ do $z=l$ są znane z równań (479), zmieniając więc w równaniu (b) z w granicach od l do 0, otrzymywać będziemy po stronie drugiej znane nam wartości funkcji ψ . A ponieważ wtedy po stronie pierwszej funkcja φ będzie przyjmowała wartości od $\varphi(l)$ do $\varphi(2l)$, przeto wszystkie te wartości będą nam również znane. Zmieniając w takiż sposób w równaniu (d) z w granicach od l do 0, oznaczymy wszystkie wartości funkcji ψ od $\psi(l)$ do $\psi(2l)$ zapomocą wiadomych nam wartości funkcji φ .

Skoro więc w równaniach (b) i (d) za z podstawimy $l+z$, to otrzymamy:

$\varphi(2l+z) = -\psi(-z) = \varphi(z)$ i $\psi(2l+z) = -\varphi(-z) = \psi(z)$, skąd wyprowadzamy wniosek, że funkcje φ i ψ są okresowe ze wskaźnikiem okresowości równym $2l$.

Przy tej wartości wskaźnika okresowości funkcji φ i ψ posunięcie v nie powinno się zmieniać, o ile w równaniu (477) za x podstawimy $x+2l$. A ponieważ v powinno zachować swoją wartość, gdy czas t zwiększymy o $i\tau$ sekund, gdzie i jest liczbą całkowitą dowolną, przeto:

$$\begin{aligned}x + 2l + at &= x + at + ai\tau, \text{ skąd} \\ 2l &= ai\tau \quad \text{i} \quad \frac{1}{\tau} = N_i = \frac{ai}{2l} = \frac{i}{2l} \sqrt{\frac{P}{\rho \omega}}.\end{aligned}$$

Wzór ten wyznacza wysokość tonu, który wydaje struna.

98. Drgania płyt. Zaczniemy od wyprowadzenia równań równowagi płyty.

Przyjmujemy, że dana jest płyta płaska lub krzywa, o bardzo małej grubości stałej ϵ . Niech $z = f(x, y)$ będzie równaniem *powierzchni średniej*, t. j. powierzchni, która wszędzie przechodzi przez środek grubości ϵ .

Równanie różniczkowe tej powierzchni jest:

$$\partial z = \frac{\partial f}{\partial x} \partial x + \frac{\partial f}{\partial y} \partial y = \frac{\partial z}{\partial x} \partial x + \frac{\partial z}{\partial y} \partial y \dots \dots \dots (a).$$

Do oznaczenia z tego równania kierunku normalnej N do powierzchni, mamy:

$$\begin{aligned} \cos(N, x) &= -\frac{1}{h} \frac{\partial z}{\partial x}, & \cos(N, y) &= -\frac{1}{h} \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \cos(N, z) &= \pm \frac{1}{h} \dots \dots \dots (b), \end{aligned}$$

gdzie $h = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$.

Przy grubości stałej ϵ normalna N do powierzchni średniej będzie normalną także do powierzchni, ograniczających płytę z obu stron.

Przypuśćmy, że na tych powierzchniach niema sił zewnętrznych, wtedy dla punktów tych powierzchni muszą być spełnione równania:

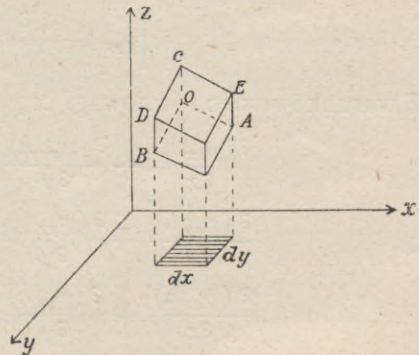
$$\begin{aligned} p_{xx} \cos(N, x) + p_{yx} \cos(N, y) + p_{zx} \cos(N, z) &= 0 \\ p_{xy} \cos(N, x) + p_{yy} \cos(N, y) + p_{zy} \cos(N, z) &= 0 \\ p_{xz} \cos(N, x) + p_{yz} \cos(N, y) + p_{zz} \cos(N, z) &= 0, \end{aligned}$$

które po podstawieniu w nie wyrażen na dostawy przyjmują postać:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= p_{xx} \frac{\partial z}{\partial x} + p_{yx} \frac{\partial z}{\partial y}, & p_{xy} &= p_{xy} \frac{\partial z}{\partial x} + p_{yy} \frac{\partial z}{\partial y} \\ p_{zz} &= p_{xz} \frac{\partial z}{\partial x} + p_{yz} \frac{\partial z}{\partial y} = p_{xx} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2 p_{xy} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + p_{yy} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (c).$$

Z powodu bardzo małej grubości ϵ możemy uważać te równania za istniejące dla wszystkich punktów płyty.

Teraz wyprowadzimy równanie równowagi nieskończenie małej cząstki płyty. W tym celu wyznaczamy na płaszczyźnie (xy) (rys. 28) w punkcie (x, y) nieskończenie mały prostokąt $\partial x \partial y$, przyjmujemy go za podstawę prostopadłościanu, o krawędziach równoległych do osi z i wystawiamy ten prostopadłościan.



Rys. 28.

Część płyty, leżąca wewnątrz tego

prostopadłościanu, przyjmujemy za cząstkę rozważaną płyty. Cząstka ta będzie $OABCD$.

Ściany AOB i ECD należą do powierzchni, ograniczających płytę, na nie więc nie będą działały ciśnienia zewnętrzne, na pozostałe zaś cztery ściany cząstki będą działały siły sprężystości.

Z wierzchołka O prowadzimy prostopadłą do ściany ECD . Kierunek tej prostopadłej zlewa się z normalną N , długość zaś tej prostopadłej jest równa grubości ε płyty; wobec czego dla długości krawędzi OC mamy:

$$OC = \frac{\varepsilon}{\cos(N, z)} = h\varepsilon.$$

Powierzchnie ścian cząstki, prostopadłych do osi x , równają się $h\varepsilon\partial y$, prostopadłych zaś do osi y są $h\varepsilon\partial x$; objętość cząstki będzie $h\varepsilon\partial x\partial y$. Rzuty na osie współrzędnych siły działającej na masę cząstki, są:

$$\rho h\varepsilon X\partial x\partial y, \quad \rho h\varepsilon Y\partial x\partial y \quad \text{i} \quad \rho h\varepsilon Z\partial x\partial y.$$

Rzuty sił sprężystości, działających na ściany cząstki, są:

na ścianie BOC : $-p_{xx}h\varepsilon\partial y$, $-p_{xy}h\varepsilon\partial y$, $-p_{xz}h\varepsilon\partial y$,

na ścianie równoległej do niej:

$$\left[p_{xx}h + \frac{\partial(p_{xx}h)}{\partial x}\partial x \right] \varepsilon\partial y, \quad \left[p_{xy}h + \frac{\partial(p_{xy}h)}{\partial x}\partial x \right] \varepsilon\partial y,$$

$$\left[p_{xz}h + \frac{\partial(p_{xz}h)}{\partial x}\partial x \right] \varepsilon\partial y.$$

Na ścianie AOC : $-p_{yx}h\varepsilon\partial x$, $-p_{yy}h\varepsilon\partial x$, $-p_{yz}h\varepsilon\partial x$,

a na ścianie równoległej do niej:

$$\left[p_{yx}h + \frac{\partial(p_{yx}h)}{\partial y}\partial y \right] \varepsilon\partial x, \quad \left[p_{yy}h + \frac{\partial(p_{yy}h)}{\partial y}\partial y \right] \varepsilon\partial x,$$

$$\left[p_{yz}h + \frac{\partial(p_{yz}h)}{\partial y}\partial y \right] \varepsilon\partial x.$$

Z warunków więc równowagi cząstki otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(p_{xx}h)}{\partial x} + \frac{\partial(p_{yx}h)}{\partial y} + \rho h X &= 0 \\ \frac{\partial(p_{xy}h)}{\partial x} + \frac{\partial(p_{yy}h)}{\partial y} + \rho h Y &= 0 \\ \frac{\partial(p_{xz}h)}{\partial x} + \frac{\partial(p_{yz}h)}{\partial y} + \rho h Z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (480).$$

Trzecie z tych równań możemy, posilując się dwoma pierwszymi równaniami grupy (c), przedstawić w postaci następującej:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[h \left(p_{xx} \frac{\partial z}{\partial x} + p_{xy} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[h \left(p_{xy} \frac{\partial z}{\partial x} + p_{yy} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \right] + \rho h Z = 0, \text{ czyli}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \left[\frac{\partial (h p_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (h p_{xy})}{\partial y} \right] + \frac{\partial z}{\partial y} \left[\frac{\partial (h p_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (h p_{yy})}{\partial y} \right] +$$

$$+ h \left[p_{xx} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 p_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + p_{yy} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \rho Z \right] = 0.$$

Ostatnie równanie możemy, posilując się dwoma pierwszymi równaniami grupy (480), napisać w sposób następujący:

$$p_{xx} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 p_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + p_{yy} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \rho \left(Z - X \frac{\partial z}{\partial x} - Y \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0. \quad (481).$$

W przypadku szczególnym, gdy płyta jest płaska i gdy jej powierzchnia średnia przyjętą zostanie za płaszczyznę (xy) , funkcja $f(x, y)$ będzie równa zero dla wszystkich punktów powierzchni średniej; wówczas będzie:

$$z = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad h = 1,$$

wobec czego z równań (c) otrzymamy:

$$p_{xx} = p_{xy} = p_{yy} = 0. \quad (482),$$

równania zaś (480) przyjmą postać:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \rho X &= 0 \\ \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \rho Y &= 0 \\ Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (483).$$

Ostatnie z tych trzech równań wskazuje, że płyta w stanie równowagi może być płaska tylko przy takich siłach, działających na masę, które leżą w płaszczyźnie samej płyty.

Przypuśćmy teraz, że na powierzchnię boczną walcową (czyli na obwód) płyty płaskiej działa ciśnienie P na jednostkę powierzchni, normalne i jednakowe we wszystkich punktach. Oznaczając przez n normalną do walcowatej powierzchni płyty, otrzymamy:

$$\begin{aligned} P \cos(n, x) &= p_{xx} \cos(n, x) + p_{yx} \cos(n, y) \\ P \cos(n, y) &= p_{xy} \cos(n, x) + p_{yy} \cos(n, y). \end{aligned}$$

Ponieważ te równania muszą istnieć dla wszystkich punktów obwodu, t. j. dla wszystkich kierunków n , czyniących zadość warunkowi $\cos(n, z) = 0$, przeto mamy:

$$p_{xx} = p_{yy} = P \quad \text{i} \quad p_{xy} = 0 \quad (d).$$

Gdybyśmy przyjęli, że równania ostatnie istnieją nietylko dla punktów, leżących na obwodzie, lecz i dla wszystkich punktów płyty, to z równań (483) otrzymalibyśmy $X = Y = 0$. Stąd dochodzimy do wniosku, że, nie uwzględniając sił zewnętrznych, działających na masę, możemy uważać płytę płaską, poddaną działaniu stałego naprężenia P na swoim obwodzie, za znajdującą się w stanie równowagi i wtedy siły sprężystości we wszystkich punktach tej płyty będą miały wartości następujące:

$$p_{xx} = p_{yy} = P, \quad p_{zz} = p_{xz} = p_{yz} = p_{xy} = 0. \quad \dots \quad (e).$$

Przypuśćmy nadto, że mianowicie taka płyta została wyprowadzona ze stanu równowagi i wykonywa drgania poprzeczne, czyli, że jej punkty posuwają się w kierunkach równoległych do osi z . Posunięcie w punktu dowolnego w chwili t będzie funkcją zmiennych x, y i t .

W celu oznaczenia równania tych drgań poprzecznych płyty, musimy w równaniu (481) przyjąć: $z = w, p_{xx} = p_{yy} = P, p_{xy} = 0, X = Y = Z = 0$ i wprowadzić w stronie drugiej wyraz $\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, zależny od rzutu siły bezwładności na oś z .

Po wykonaniu tego otrzymamy równanie:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dots \dots \dots (484).$$

gdzie $c^2 = \frac{P}{\rho}$.

Równanie to wyprowadził Euler.

99. Drgania płyty prostokątnej. Jako przykład pierwszy bierzemy płytę prostokątną o bokach a i b , umocowaną nieruchomo na całym obwodzie, gdy już poprzednio była naprężona przez siłę P na jednostkę powierzchni obwodu. Niech oś x zlewa się z bokiem a prostokąta, a oś y — z bokiem b .

Warunek, że obwód jest umocowany, wymaga, ażeby $w = 0$ przy $x = 0$ i przy $x = a$ dla dowolnych y i t i ażeby $w = 0$ przy $y = 0$ i przy $y = b$ dla dowolnych x i t . Tym warunkom czyni zadość następujące rozwiązanie szczególne równania (484):

$$w = \sin \left(i \pi \frac{x}{a} \right) \sin \left(k \pi \frac{y}{b} \right) [A_{ik} \cos (\pi h t) + B_{ik} \sin (\pi h t)] \dots \dots (f),$$

gdzie i i k są to liczby całkowite dowolne, A_{ik} i B_{ik} — ilości stałe dowolne, a

$$h = c \sqrt{\left(\frac{i}{a} \right)^2 + \left(\frac{k}{b} \right)^2} \dots \dots \dots (485).$$

Jeżeli w tem rozwiązaniu nadawać będziemy ilości i wszystkie możliwe wartości całkowite od 1 do ∞ , to otrzymamy nieskończenie wielką

liczbę rozwiązań naszego równania, a jeżeli w każdym z tych rozwiązań nadawać będziemy ilości k wszelkie możliwe wartości całkowite od 1 do ∞ , to otrzymamy nieskończenie wielką liczbę szeregów o nieskończenie wielkiej liczbie wyrazów w każdym szeregu, a każdy z tych wyrazów będzie rozwiązaniem szczególnym naszego równania. Całka więc ogólna równania (484) przedstawiać się musi jako następująca suma podwójna:

$$w = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sum_{k=1}^{k=\infty} \sin\left(i\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(k\pi \frac{y}{b}\right) [A_{ik} \cos(\pi h t) + B_{ik} \sin(\pi h t)] \dots (486).$$

Liczba drgnień na sekundę, otrzymana z rozwiązania szczególnego (i, k), oznacza się z wzoru:

$$N_{ik} = \frac{1}{2} h = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{i}{a}\right)^2 + \left(\frac{k}{b}\right)^2} \dots (487).$$

W celu oznaczenia stałych dowolnych A i B , przyjmujemy, że w chwili $t=0$

$$w = f(x, y) \quad \text{i} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = F(x, y).$$

Wtedy z wyrażenia dla całki ogólnej otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} A_{ik} \sin\left(i\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(k\pi \frac{y}{b}\right) \\ F(x, y) &= \pi \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} h B_{ik} \sin\left(i\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(k\pi \frac{y}{b}\right) \end{aligned} \right\} \dots (488).$$

Wiadomo nam jednak, że przy całkowitych wartościach wielkości λ, λ', μ i μ' :

$$\int_0^{\pi} \sin(\lambda \alpha) \sin(\lambda' \alpha) \partial \alpha \int_0^{\pi} \sin(\mu \beta) \sin(\mu' \beta) \partial \beta = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2,$$

gdy $\lambda = \lambda'$ i $\mu = \mu'$, albo równa się zero, gdy λ nie jest równe λ' i μ nie jest równe μ' .

Przyjmując zaś $\alpha = \pi \frac{x}{a}$ i $\beta = \pi \frac{y}{b}$, możemy powiedzieć, że:

$$\int_0^a \sin\left(\lambda \pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(\lambda' \pi \frac{x}{a}\right) \partial x \int_0^b \sin\left(\mu \pi \frac{y}{b}\right) \sin\left(\mu' \pi \frac{y}{b}\right) \partial y = \frac{ab}{4},$$

gdy $\lambda = \lambda'$ i $\mu = \mu'$, albo równa się zero, gdy λ nie jest równe λ' i μ nie jest równe μ' .

Mnożymy wobec tego każde z równań (488) przez

$$\sin\left(i\pi\frac{x}{a}\right)\sin\left(k\pi\frac{y}{b}\right)\partial x\partial y,$$

a całkując następnie względem x i względem y w granicach od 0 do a i od 0 do b , otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} A_{ik} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(i\pi\frac{x}{a}\right) \sin\left(k\pi\frac{y}{b}\right) \partial x \partial y \\ B_{ik} &= \frac{4}{\pi a b c \sqrt{\left(\frac{i}{a}\right)^2 + \left(\frac{k}{b}\right)^2}} \int_0^a \int_0^b F(x, y) \sin\left(i\pi\frac{x}{a}\right) \sin\left(k\pi\frac{y}{b}\right) \partial x \partial y \end{aligned} \right\} (489).$$

Z całki szczególnej (f) widzimy, że w równa się zeru (przy dowolnem t) dla wartości x równych $\frac{a}{i}, \frac{2a}{i}, \frac{3a}{i}, \dots, \frac{i-1}{i}a$ i a oraz dla wartości y równych $\frac{b}{k}, \frac{2b}{k}, \frac{3b}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}b$ i b . Mamy więc oprócz obwodu płyty także linie węzłowe, a mianowicie $i-1$ takich linii równooddalonych prostych równoległych do boku b i $k-1$ równooddalonych prostych równoległych do boku a . Te linie węzłowe, gdy płyta wydaje ton, wyznaczony liczbą drgnień N_{ik} (wzór 487), nie są jedynymi. Aby wyjaśnić, w jaki sposób mogą powstawać linie węzłowe oprócz linii równoległych do boków prostokąta, rozważymy przypadek gdy płyta jest kwadratowa, t. j. gdy $a=b$. Dla takiej płyty liczba drgnień na sekundę, odpowiadająca rozwiązaniu (f), będzie:

$$N_{ik} = \frac{c}{2a} \sqrt{i^2 + k^2} = \frac{c}{2a} \sqrt{r}, \quad \text{gdzie } r = i^2 + k^2.$$

Jeżeli mamy oznaczyć ton, dla którego szukamy linii węzłowych, to powinniśmy, oczywiście, oznaczyć ilość r . Przypuśćmy np., że mamy znaleźć linie węzłowe dla tonu, wyznaczonego liczbą drgnień $\frac{c}{2a} \sqrt{10}$. W tym przypadku będzie: $r = i^2 + k^2 = 10$, ale $10 = 1^2 + 3^2$ i $10 = 3^2 + 1^2$, możemy więc przyjąć $i=1$ i $k=3$, lecz możemy też przyjąć $i=3$ i $k=1$.

Dla danego więc tonu, gdy $r=10$, mamy:

$$\begin{aligned} w &= \sin\left(\pi\frac{x}{a}\right)\sin\left(3\pi\frac{y}{a}\right)\left[A_{13}\cos\left(\pi\frac{c}{a}\sqrt{10}t\right) + B_{13}\sin\left(\pi\frac{c}{a}\sqrt{10}t\right)\right] + \\ &+ \sin\left(3\pi\frac{x}{a}\right)\sin\left(\pi\frac{y}{a}\right)\left[A_{31}\cos\left(\pi\frac{c}{a}\sqrt{10}t\right) + B_{31}\sin\left(\pi\frac{c}{a}\sqrt{10}t\right)\right]. \end{aligned}$$

Przypuśćmy, że płytę wyprowadzono ze stanu równowagi i pozostawiono sobie samej, t. j. że punktom jej nie nadano prędkości początkowej. W tym przypadku będzie: $B_{13} = B_{31} = 0$, a ponieważ wogóle $\sin 3\alpha = \sin \alpha (4 \cos^2 \alpha - 1)$, przeto na posunięcie w otrzymujemy:

$$w = \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(\pi \frac{y}{a}\right) \left[A_{13} \left\{ 4 \cos^2\left(\pi \frac{y}{a}\right) - 1 \right\} + \right. \\ \left. + A_{31} \left\{ 4 \cos^2\left(\pi \frac{x}{a}\right) - 1 \right\} \right] \cos\left(\pi \frac{c}{a} \sqrt{10} t\right).$$

Z wzoru tego otrzymujemy następujące linie węzłowe:

$$\sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) = 0, \text{ czyli } x = 0 \text{ i } x = a: \text{ dwa boki kwadratu,}$$

$$\sin\left(\pi \frac{y}{a}\right) = 0, \text{ czyli } y = 0 \text{ i } y = a: \text{ dwa pozostałe boki kwadratu.}$$

$$A_{13} \left[4 \cos^2\left(\pi \frac{y}{a}\right) - 1 \right] + A_{31} \left[4 \cos^2\left(\pi \frac{x}{a}\right) - 1 \right] = 0.$$

Gdyby się pokazało, że $A_{13} = 0$, to z tego równania wynikłoby $\cos\left(\pi \frac{x}{a}\right) = \pm \frac{1}{2}$, stąd więc otrzymalibyśmy łuk 60° i 120° , a zatem $\pi \frac{x}{a} = \frac{\pi}{3}$ i $\pi \frac{x}{a} = \frac{2\pi}{3}$, skąd otrzymujemy $x = \frac{a}{3}$ i $x = \frac{2a}{3}$: dwie proste równoległe do osi y . Gdyby się pokazało, że $A_{31} = 0$, to byłoby: $\cos\left(\pi \frac{y}{a}\right) = \pm \frac{1}{2}$ i stąd $y = \frac{a}{3}$ i $y = \frac{2a}{3}$: dwie proste równoległe do osi x . Gdyby $A_{31} = -A_{13}$, to mielibyśmy $\cos\left(\pi \frac{y}{a}\right) = \mp \cos\left(\pi \frac{x}{a}\right)$ i stąd otrzymalibyśmy $y = a - x$ i $y = x$: obie przekątne kwadratu. Gdyby $A_{31} = A_{13}$, mielibyśmy: $\cos^2\left(\pi \frac{y}{a}\right) + \cos^2\left(\pi \frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2}$, czyli $\cos\left(2\pi \frac{y}{a}\right) + \cos\left(2\pi \frac{x}{a}\right) = -1$. To ostatnie równanie wyznacza krzywą zamkniętą, zbliżoną do okręgu, której środek znajduje się w punkcie przecięcia przekątnych kwadratu i której promień zbliżony jest do $0,24 a$.

W istocie, wskutek przeniesienia początku współrzędnych do środka kwadratu, równanie krzywej przybiera postać: $\cos\left(2\pi \frac{y}{a}\right) + \cos\left(2\pi \frac{x}{a}\right) = 1$ i daje dla promieni wodzących krzywej, padających

na przekątnie kwadratu: $\frac{\sqrt{2}}{6} a = 0,235 a$, dla promieni zaś wodzących, padających na osie współrzędnych: $0,25 a$.

Gdybyśmy mieli oznaczyć linie węzłowe dla tonu, odpowiadającego wartości $r = 65$, musielibyśmy w całości ogólnej zatrzymać cztery rozwiązania szczególne, a mianowicie rozwiązania, dla których $(i = 8, k = 1)$, $(i = 1, k = 8)$, $(i = 7, k = 4)$ i $(i = 4, k = 7)$, gdyż

$$65 = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2.$$

W danym przypadku, oczywiście, otrzymalibyśmy linii węzłowych więcej, niż w przypadku, gdy $r = 10$.

100. Drgania płyty okrągłej. Początek współrzędnych umieszczamy w środku płyty i zamiast współrzędnych prostolinijnych x i y wprowadzamy biegunowe r i φ , t. j. przyjmujemy:

$$x = r \cos \varphi \quad \text{i} \quad y = r \sin \varphi,$$

czyli
$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{i} \quad \varphi = \arctg \left(\frac{y}{x} \right).$$

Z równań tych otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos \varphi, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \sin \varphi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \varphi}{r}, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} &= -\sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\sin^2 \varphi}{r}, & \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} &= \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos^2 \varphi}{r}, \\ & & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r^2}. \end{aligned}$$

Wobec tego będziemy mieli:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

A więc:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left[\left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right] + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial w}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

Jednakże:
$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 = 1.$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} = 0$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = \frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{r^2} = \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{r} = \frac{1}{r}$$

i
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Równanie drgań płyty okrągłej, przy współrzędnych biegunowych, ma więc postać:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \dots \dots \dots (490).$$

Oznaczmy promień obwodu umocowanego płyty przez r_0 i przypuśćmy, że przeszła ona w ruch wskutek nadania jej punktom bardzo małych prędkości początkowych. Wobec tego funkcja w powinna odpowiadać następującym warunkom: powinna być równa zero przy $r = r_0$ dla dowolnego t i powinno być $\frac{\partial w}{\partial t} = F(r, \varphi)$ i $w = 0$ dla $t = 0$.

Zbadajmy, czy nie można uczynić zadość tym warunkom i równaniu (490), przyjmując:

$$w = T \cdot R \cdot \theta \dots \dots \dots (491),$$

gdzie T jest funkcją tylko zmiennej t , R — tylko zmiennej r , θ — tylko zmiennej φ .

Wprowadzając tę wartość za w w równanie (490), otrzymamy:

$$R \theta \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = c^2 \left(T \theta \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + T \theta \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + T R \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} \right),$$

czyli dzieląc przez $T R \theta$:

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} \right) \dots \dots \dots (A).$$

Ponieważ strona pierwsza tego równania zależna jest tylko od t , druga zaś tylko od r i φ , przeto równanie to rozpada się na dwa równania następujące:

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \pm c^2 q^2 \dots \dots \dots (B)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} = \pm q^2 \dots \dots \dots (C),$$

gdzie q^2 jest pewną ilością stałą.

Równaniu ostatniemu można nadać postać następującą:

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} \mp q^2 r^2 = -\frac{1}{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2}.$$

A ponieważ teraz strona pierwsza zawiera tylko zmienną r , druga zaś — tylko zmienną φ , przeto mamy znowu dwa równania:

$$-\frac{1}{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} = \pm n^2 \dots \dots \dots (D)$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \mp q^2 R = \pm n^2 \frac{R}{r^2} \dots \dots \dots (E),$$

gdzie n^2 jest nową ilością stałą.

Z samego założenia jednak posunięcie w winno być funkcją okresową zarówno czasu t , jak i współrzędnej φ , przeto T i θ muszą być funkcjami okresowymi. Wskaźnik okresowości pierwszej z tych funkcji powinien być równy czasowi jednego drgania τ , wskaźnik zaś drugiej powinien być równy 2π .

Ażeby funkcje T i θ były okresowymi, należy w równaniu (B) przy q^2 brać znak dolny, w równaniu zaś (D) brać przy n^2 znak górny i wtedy równania nasze będą:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} &= -c^2 q^2 T \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} &= -n^2 \theta \\ \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(q^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (492).$$

Całka ogólna pierwszego z tych równań jest:

$$T = A \cos (c q t) + B \sin (c q t),$$

ale dla $t=0$ musi być $T=0$, gdyż w staje się równe zero, a więc $A=0$ i

$$T = B \sin (c q t) \dots \dots \dots (F)$$

Całka drugiego z równań (492) jest:

$$\theta = M \cos (n \varphi) + N \sin (n \varphi) \dots \dots \dots (G),$$

a ponieważ wskaźnik okresowości funkcji θ musi być równy 2π , przeto n musi być liczbą całkowitą. Mamy prawo, oczywiście, uważać n za ilość dodatnią, gdyż, przyjmując n za ilość ujemną, liczylibyśmy kąty φ w kierunku odwrotnym.

Całkę trzeciego z równań (492) można otrzymać w postaci szeregu nieskończonego.

Przyjmujemy:

$$R = A r^\alpha + B r^\beta + C r^\gamma + D r^\delta + \dots \dots \dots ,$$

gdzie A, B, C, \dots są to współczynniki stałe, $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ zaś są pewnymi liczbami nierównymi, odpowiadającymi warunkom:

$$\alpha < \beta < \gamma < \delta < \dots$$

Po podstawieniu tej wartości w równanie (492), otrzymamy:

$$A(\alpha^2 - n^2)r^{\alpha-2} + B(\beta^2 - n^2)r^{\beta-2} + C(\gamma^2 - n^2)r^{\gamma-2} + \dots + Aq^2r^\alpha + Bq^2r^\beta + Cq^2r^\gamma + \dots = 0.$$

Ponieważ jest to tożsamość, która musi istnieć dla dowolnego r , przeto współczynniki przy rozmaitych potęgach zmiennej r , muszą być równe zeru. Mamy więc:

$$A(\alpha^2 - n^2) = 0, \text{ czyli } \alpha = \pm n;$$

$$\beta - 2 = \alpha \text{ i } B(\beta^2 - n^2) + Aq^2 = 0, \text{ czyli } \beta = 2 \pm n \text{ i } B = -\frac{Aq^2}{\beta^2 - n^2},$$

$$\gamma - 2 = \beta \text{ i } C(\gamma^2 - n^2) + Bq^2 = 0, \text{ czyli } \gamma = 4 \pm n \text{ i } C = -\frac{Bq^2}{\gamma^2 - n^2} \text{ i t.d.}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\alpha = \pm n, \quad \beta = 2 \pm n, \quad \gamma = 4 \pm n, \quad \delta = 6 \pm n \text{ i t. d.}$$

$$B = -A \frac{(\frac{1}{2}q)^2}{1 \pm n}, \quad C = A \frac{(\frac{1}{2}q)^4}{1.2(1 \pm n)(2 \pm n)},$$

$$D = -A \frac{(\frac{1}{2}q)^6}{1.2.3(1 \pm n)(2 \pm n)(3 \pm n)} \text{ i t. d.}$$

Mamy więc dwa rozwiązania:

$$R = A r^n \left[1 - \frac{(\frac{1}{2}qr)^2}{1(n+1)} + \frac{(\frac{1}{2}qr)^4}{1.2(n+1)(n+2)} - \frac{(\frac{1}{2}qr)^6}{1.2.3(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right]$$

$$R' = A' r^{-n} \left[1 + \frac{(\frac{1}{2}qr)^2}{1(n-1)} + \frac{(\frac{1}{2}qr)^4}{1.2(n-1)(n-2)} + \frac{(\frac{1}{2}qr)^6}{1.2.3(n-1)(n-2)(n-3)} + \dots \right].$$

Ponieważ rozwiązanie ostatnie dla $r = 0$ daje $R' = \infty$, co jest niemożliwe, gdyż posunięcie środka płytki nie może przecież być nieskończenie wielkiem, przeto powinniśmy zatrzymać tylko rozwiązanie pierwsze.

A więc jedna z całek szczególnych równania (490) jest:

$$w = r^n [H_n \cos(n\varphi) + K_n \sin(n\varphi)] U_n \sin(cqt) \dots \quad (H),$$

gdzie
$$U_n = 1 - \frac{(\frac{1}{2}qr)^2}{n+1} + \frac{(\frac{1}{2}qr)^4}{2(n+1)(n+2)} - \frac{(\frac{1}{2}qr)^6}{2.3(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \quad (493).$$

W rozwiązaniu tem mamy prawo podstawić za n wszelkie możliwe liczby całkowite, począwszy od 0 do ∞ ; możemy więc otrzymać nieskończenie wielką liczbę rozwiązań szczególnych.

Ponieważ przy $r = r_0$ $w = 0$ dla dowolnego t , mamy więc równanie:

$$1 - \frac{(\frac{1}{2} q r_0)^2}{n+1} + \frac{(\frac{1}{2} q r_0)^4}{2(n+1)(n+2)} - \frac{(\frac{1}{2} q r_0)^6}{2 \cdot 3(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots = 0 \quad (494).$$

Równanie ostatnie służy do oznaczenia stałej q . Ponieważ stopień tego równania jest nieskończenie wielki, przeto ma ono nieskończenie wielką liczbę pierwiastków dla każdej danej wartości liczby całkowitej n .

Przypuśćmy, że pierwiastki tego równania są:

$$\begin{aligned} q_0^{(1)}, q_0^{(2)}, q_0^{(3)}, \dots q_0^{(s)}, \dots & \text{ dla } n = 0 \\ q_1^{(1)}, q_1^{(2)}, q_1^{(3)}, \dots q_1^{(s)}, \dots & \text{ dla } n = 1 \\ \dots & \dots \\ q_n^{(1)}, q_n^{(2)}, q_n^{(3)}, \dots q_n^{(s)}, \dots & \text{ dla } n = n \text{ i t. d. }^*) \end{aligned}$$

Każdemu z tych pierwiastków odpowiada oddzielne rozwiązanie, tak np. przyjmując $q = q_n^{(s)}$, otrzymamy:

$$w_n^{(s)} = r^n [H_n^{(s)} \cos(n\varphi) + K_n^{(s)} \sin(n\varphi)] U_n^{(s)} \sin(cq_n^{(s)} t) \quad (495),$$

gdzie $U_n^{(s)}$ otrzymamy z równania (493), gdy w niem za q podstawimy $q_n^{(s)}$.

Z tego ostatniego rozwiązania szczególnego można wyprowadzić wszystkie pozostałe, nadając liczbie n wszystkie wartości całkowite od 0 do ∞ i liczbie s wszystkie wartości całkowite od 1 do ∞ .

Wyjaśnijmy teraz co nam daje rozwiązanie szczególne (495). Z rozwiązania tego dla czasu jednego drgnienia otrzymujemy: $cq_n^{(s)} \tau = 2\pi$,

czyli $\tau = \frac{2\pi}{cq_n^{(s)}}$, a więc do oznaczenia liczby drgnień na sekundę, mamy:

$$N_n^{(s)} = \frac{c}{2\pi} q_n^{(s)} \dots \dots \dots (496).$$

Pierwiastki więc równania (494) wyznaczają wysokość tonu, który płyta wydaje, gdy drga ona tak, jak tego wymaga rozwiązanie rozważane.

Ton zasadniczy ma wysokość równą $\frac{c}{2\pi} q_n^{(1)}$, tony zaś harmoniczne —

wysokość $\frac{c}{2\pi} q_n^{(2)}$, $\frac{c}{2\pi} q_n^{(3)}$... i t. d.

*) Bourget wskazał sposoby obliczania tych pierwiastków. Por. Annales de l'École Normale. T. III.

Linie węzłowe dla rozwiązania danego otrzymujemy z równań:

$$r^n = 0, \quad U_n^{(s)} = 0 \quad \text{i} \quad H_n^{(s)} \cos(n\varphi) + K_n^{(s)} \sin(n\varphi) = 0. \quad (497).$$

Pierwsze z tych równań daje $r=0$, za wyłączeniem przypadku, gdy $n=0$; środek więc płyty jest punktem węzłowym dla wszelkich rozwiązań za wyłączeniem rozwiązania, odpowiadającego $n=0$.

Z równania drugiego otrzymujemy:

$$1 - \frac{(\frac{1}{2}\alpha)^2}{n+1} + \frac{(\frac{1}{2}\alpha)^4}{2(n+1)(n+2)} - \dots = 0 \quad (498),$$

gdzie $\alpha = q_n^{(s)} r$. Oznaczając więc pierwiastki tego równania przez $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, otrzymamy:

$$r_1 = \frac{\alpha_1}{q_n^{(s)}}, \quad r_2 = \frac{\alpha_2}{q_n^{(s)}}, \quad r_3 = \frac{\alpha_3}{q_n^{(s)}}, \quad \dots$$

Jednakże równanie (498) jest identyczne z równaniem (494), wskutek czego pierwiastki równania (498) przy temże n są takie same jak równania (494), a więc:

$$\alpha_1 = q_n^{(1)} r_0, \quad \alpha_2 = q_n^{(2)} r_0, \quad \alpha_3 = q_n^{(3)} r_0, \quad \dots$$

stąd:
$$r_1 = \frac{q_n^{(1)}}{q_n^{(s)}} r_0, \quad r_2 = \frac{q_n^{(2)}}{q_n^{(s)}} r_0, \quad r_3 = \frac{q_n^{(3)}}{q_n^{(s)}} r_0, \quad \dots \quad r_s = r_0.$$

Otrzymujemy stąd s okręgów włącznie z okręgiem, będącym obwodem płytki.

Wreszcie z ostatniego z równań (497) wynika:

$$\text{tg}(n\varphi) = -\frac{H_n^{(s)}}{K_n^{(s)}} = \text{const.}$$

Niech ψ będzie najmniejszym z łuków, czyniących zadość temu równaniu; wtedy pozostałe łuki, spełniające to równanie, będą oznaczone przez:

$$n\varphi = \psi + i\pi, \quad \text{czyli} \quad \varphi = \frac{\psi}{n} + i\frac{\pi}{n}.$$

Stąd otrzymujemy na φ wartości następujące:

$$\varphi_0 = \frac{\psi}{n}, \quad \varphi_1 = \frac{\psi}{n} + \frac{\pi}{n}, \quad \varphi_2 = \frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n}, \quad \dots \quad \varphi_{n-1} = \frac{\psi}{n} + \frac{n-1}{n} \pi,$$

$$\varphi_n = \frac{\psi}{n} + \pi = \varphi_0 + \pi, \quad \varphi_{n+1} = \frac{\psi}{n} + \frac{n+1}{n} \pi = \varphi_1 + \pi, \quad \dots \quad \varphi_{2n-1} = \varphi_{n-1} + \pi.$$

Z wszystkich tych rozwiązań otrzymujemy n średnic, tworzących ze sobą kąty równe. Gdy zaś $n=0$, średnice węzłowe nie istnieją i mamy tylko okręgi węzłowe.

Powinniśmy jeszcze wyjaśnić, w jaki sposób można wyznaczyć wszystkie stałe H i K .

Niech q i q' będą dwoma różnymi pierwiastkami równania (494), odpowiadającymi tej samej wartości n ; wtedy będziemy mieli dwa równania (p. równ. 492):

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(q^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0$$

$$\frac{\partial^2 R'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R'}{\partial r} + \left(q'^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R' = 0,$$

gdzie R i R' są wartościami funkcji R , odpowiadającymi wartościom q i q' .

Mnożymy pierwsze z tych równań przez R' , drugie zaś przez R i odejmujemy drugie od pierwszego; wtedy otrzymamy:

$$R' \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} - R \frac{\partial^2 R'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(R' \frac{\partial R}{\partial r} - R \frac{\partial R'}{\partial r} \right) + (q^2 - q'^2) R R' = 0.$$

Równanie ostatnie, po pomnożeniu go przez $r dr$ i po zcałkowaniu w granicach od 0 do r_0 , daje:

$$\int_0^{r_0} \left(R' \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} - R \frac{\partial^2 R'}{\partial r^2} \right) r \partial r + \int_0^{r_0} \left(R' \frac{\partial R}{\partial r} - R \frac{\partial R'}{\partial r} \right) \partial r = (q'^2 - q^2) \int_0^{r_0} R R' r \partial r.$$

Jednakże:

$$\int_0^{r_0} R' \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} r \partial r = \int_0^{r_0} R' r \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \partial r = \left(R' r \frac{\partial R}{\partial r} \right)_0^{r_0} - \int_0^{r_0} \frac{\partial R}{\partial r} \cdot \frac{\partial (R' r)}{\partial r} \partial r.$$

A ponieważ dla granicy górnej R i R' równe są zeru, dla granicy zaś dolnej $r = 0$, przeto wyraz, wolny od całki, równy jest zeru i

$$\int_0^{r_0} R' \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} r \partial r = - \int_0^{r_0} \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial (R' r)}{\partial r} \partial r = - \int_0^{r_0} R' \frac{\partial R}{\partial r} \partial r - \int_0^{r_0} \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial R'}{\partial r} r \partial r,$$

$$\int_0^{r_0} R \frac{\partial^2 R'}{\partial r^2} r \partial r = - \int_0^{r_0} R \frac{\partial R'}{\partial r} \partial r - \int_0^{r_0} \frac{\partial R'}{\partial r} \frac{\partial R}{\partial r} r \partial r,$$

$$\int_0^{r_0} \left(R' \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} - R \frac{\partial^2 R'}{\partial r^2} \right) r \partial r = - \int_0^{r_0} \left(R' \frac{\partial R}{\partial r} - R \frac{\partial R'}{\partial r} \right) \partial r;$$

wskutek czego otrzymujemy:

$$\int_0^{r_0} R R' r \partial r = 0, \text{ czyli } \int_0^{r_0} R_n^{(s)} R_n^{(s')} r \partial r = 0. \quad \dots \quad (499).$$

Zapomocą równania ostatniego możemy oznaczyć wszystkie współczynniki H i K .

Całka ogólna wyraża się, oczywiście, zapomocą sumy podwójnej:

$$w = \sum_{s=1}^{s=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} R_n^{(s)} [H_n^{(s)} \cos(n\varphi) + K_n^{(s)} \sin(n\varphi)] \sin(cq_n^{(s)} t).$$

Z warunku, że dla $t=0$ prędkość $\frac{\partial w}{\partial t}$ punktów płyty wyraża się zapomocą funkcji $F(r, \varphi)$, wynika:

$$F(r, \varphi) = c \sum_{s=1}^{s=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} [q_n^{(s)} R_n^{(s)} \{H_n^{(s)} \cos(n\varphi) + K_n^{(s)} \sin(n\varphi)\}].$$

Mnożymy obie strony tego równania przez:

$$R_n^{(s)} r \cos(n\varphi) \partial r \partial \varphi$$

i całkujemy względem r w granicach 0 i r_0 , względem zaś φ w granicach 0 i 2π ; wówczas otrzymamy:

$$\int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} F(r, \varphi) R_n^{(s)} r \cos(n\varphi) \partial r \partial \varphi = \pi c q_n^{(s)} H_n^{(s)} \int_0^{r_0} (R_n^{(s)})^2 r \partial r \dots (500).$$

W istocie wszystkie wyrazy ze współczynnikami $K_n^{(s')}$, w których s' nie jest równe s , będą równe zeru, gdyż będą zawierały jako czynnik całkę (499). Z tego samego powodu wszystkie wyrazy ze współczynnikami $H_n^{(s')}$ będą także równe zeru. Wyraz z $K_n^{(s)}$ będzie zerem, z powodu,

że zawiera czynnik $\int_0^{2\pi} \cos(n\varphi) \sin(n\varphi) \partial \varphi = 0$. Wyrazy z $H_n^{(s')}$, gdzie n' nie jest równe n , będą zerami, z powodu, że zawierają czynnik

$\int_0^{2\pi} \cos(n\varphi) \cos(n'\varphi) \partial \varphi = 0$. Wyrazy z $K_n^{(s')}$ będą zerami, gdyż za-

wierają czynnik $\int_0^{2\pi} \cos(n\varphi) \sin(n'\varphi) \partial \varphi = 0$. Wreszcie, wyraz z $H_n^{(s)}$

jest równy:

$$q_n^{(s)} H_n^{(s)} \int_0^{r_0} (R_n^{(s)})^2 r \partial r \int_0^{2\pi} \cos^2(n\varphi) \partial \varphi;$$

a ponieważ:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(n\varphi) \partial \varphi = \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{2} n\varphi + \frac{1}{4} \sin(2n\varphi) \right\}_0^{2\pi} = \pi,$$

przezo do oznaczenia stałej $H_n^{(s)}$ otrzymujemy równanie (500).

W taki sam sposób, gdy obie strony równania na $F(r, \varphi)$ pomnożymy przez $R_n^{(s)} r \sin(n\varphi) \partial r \partial \varphi$ i następnie zcałkujemy względem r i względem φ w granicach powyżej wskazanych, otrzymamy równanie, służące do oznaczenia $K_n^{(s)}$:

$$\int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} F(r, \varphi) R_n^{(s)} r \sin(n\varphi) \partial r \partial \varphi = q_n^{(s)} c \pi K_n^{(s)} \int_0^{r_0} (R_n^{(s)})^2 r \partial r \quad . \quad (501).$$

A zatem wszystkie współczynniki H i K można wyznaczyć z wzorów (500) i (501).

Uważamy za pożądanę nadto zaznaczyć, że, ponieważ wszystkie elementy całki

$$\int_0^{r_0} (R_n^{(s)})^2 r \partial r$$

są dodatnie, a suma ilości dodatnich nie może być zerem, przeto żaden ze współczynników H i K , dla dowolnych n i s , nie może stać się ilością nieskończenie wielką.

101. Drganie ciężaru, zawieszono na końcu pręta pionowego. Rozpoczynamy od przypadku, gdy masa pręta jest bardzo mała w stosunku do ciężaru zawieszono.

Niech F będzie powierzchnią przekroju pręta graniastosiłupowatego, L — jego długością w stanie równowagi naturalnej, P — ciężarem zawieszonym, l — wydłużeniem całkowitem pręta w pewnej chwili t ruchu i λ — wydłużeniem całkowitem pręta wywołanem przez ciężar P gdy pręt znajduje się w równowadze statycznej, czyli $\lambda = \frac{Pl}{EF}$.

Ponieważ l wyraża drogę, przebytą przez ciężar P w przeciągu czasu t , przeto siła bezwładności ciężaru będzie $\frac{P}{g} \frac{\partial^2 l}{\partial t^2}$. Siła ta powinna pozostawać w równowadze z siłą P i naprężeniem całkowitem, wywołanem w jakimkolwiek z przekrojów pręta. Naprężenie to zaś, gdy nie uwzględniamy ciężaru własnego pręta, będzie równe $FE \frac{l}{L}$, gdzie $\frac{l}{L}$ jest wydłużeniem względnem, jednakowem dla wszystkich przekrojów.

Równanie więc ruchu ciężaru jest:

$$\frac{P}{g} \frac{\partial^2 l}{\partial t^2} = P - FE \frac{l}{L},$$

czyli
$$\frac{\partial^2 l}{\partial t^2} = g - g \frac{FE}{PL} l.$$

Ponieważ λ jest ilością niezależną od czasu, przeto możemy równanie ostatnie napisać w postaci:

$$\frac{\partial^2(l-\lambda)}{\partial t^2} = g - g \frac{l}{\lambda} = g \frac{\lambda-l}{\lambda} = -\frac{g}{\lambda} (l-\lambda) \dots (502).$$

Całka ogólna tego równania różniczkowego, jak wiadomo, jest:

$$l-\lambda = A \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\right) + B \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\right) \dots (502a).$$

Stąd prędkość ciężaru w chwili t możemy oznaczyć z równania:

$$\frac{\partial l}{\partial t} = \sqrt{\frac{g}{\lambda}} \left[-A \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\right) + B \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\right) \right] \dots (503).$$

W celu wyznaczenia stałych dowolnych przyjmujemy, że w chwili $t=0$ było $l=l_0$ i $\frac{\partial l}{\partial t} = V$. Wobec tego będzie:

$$l_0 - \lambda = A \quad \text{i} \quad V = B \sqrt{\frac{g}{\lambda}},$$

a więc:

$$\left. \begin{aligned} l-\lambda &= (l_0 - \lambda) \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\right) + V \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\right) \\ \frac{\partial l}{\partial t} &= \sqrt{\frac{g}{\lambda}} \left[-(l_0 - \lambda) \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\right) + V \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\right) \right] \end{aligned} \right\} \dots (504).$$

Z tych równań widzimy, że zarówno l jak i $\frac{\partial l}{\partial t}$ są funkcjami okresowymi czasu t i że czas trwania jednego drgania τ oznacza się z równania:

$$(t+\tau) \sqrt{\frac{g}{\lambda}} = t \sqrt{\frac{g}{\lambda}} + 2\pi, \quad \text{czyli} \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \dots (505).$$

Przyjmując pochodną $\frac{\partial l}{\partial t}$ za równą zero, otrzymamy do oznaczenia wartości największego i najmniejszego wydłużenia l :

$$\frac{\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\right)}{\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\right)} = \frac{V \sqrt{\lambda}}{(l_0 - \lambda) \sqrt{g}},$$

czyli:
$$\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\right) = \frac{\pm V \sqrt{\lambda}}{V(l_0 - \lambda)^2 g + V^2 \lambda}$$

i
$$\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\right) = \frac{\pm (l_0 - \lambda) \sqrt{g}}{V(l_0 - \lambda)^2 g + V^2 \lambda},$$

stąd zaś otrzymamy na l :

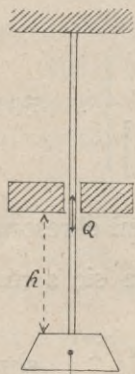
$$\left. \begin{aligned} l_{\max} &= \lambda + \sqrt{(l_0 - \lambda)^2 + \frac{V^2}{g} \lambda} \\ l_{\min} &= \lambda - \sqrt{(l_0 - \lambda)^2 + \frac{V^2}{g} \lambda} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (506).$$

A zatem amplituda drgań jest równa:

$$2 \sqrt{(l_0 - \lambda)^2 + \frac{V^2}{g} \lambda}.$$

Gdyby dla $t=0$ było $l=l_0=0$ i $V=0$, to otrzymalibyśmy $l_{\max}=2\lambda$. Ciężar więc P , zawieszony spokojnie na końcu pręta pionowego (o ciężarze własnym nieznacznym), wywoła w nim drgania, podczas których wydłużenie największe pręta będzie dwa razy większe od wydłużenia, jakie pojawiłoby się w tymże pręcie pod działaniem ciężaru P przy stanie równowagi naprężonej.

Gdyby pręt, rozciągnięty przez siłę P i znajdujący się w równowadze, był wprowadzony w ruch przez uderzenie o ciężar P (rys. 29) ciężaru Q , spadającego z wysokości h , to do oznaczenia wydłużenia największego powinniśmy we wzorze (506) przyjąć:



Rys 29.

$$l_0 = \frac{PL}{FE} \quad \text{i} \quad \lambda = \frac{(P+Q)L}{FE},$$

prędkość zaś V uważać za równą tej prędkości, jaką osiągną obydwa ciężary po ukończeniu działania uderzenia; musielibyśmy więc oznaczyć V z równania:

$$Q \cdot V \sqrt{2gh} = (P+Q) V.$$

Otrzymalibyśmy więc:

$$\begin{aligned} l_{\max} &= \frac{(P+Q)L}{FE} + \frac{QL}{FE} \sqrt{1 + \frac{FE}{(P+Q)L} 2h}, \quad \text{czyli} \\ l_{\max} &= \frac{PL}{FE} + \frac{QL}{FE} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{FE}{P+Q} \cdot \frac{2h}{L}} \right] \dots \dots \dots (507). \end{aligned}$$

Z wzoru ostatniego widzimy, że nawet przy niewielkiej wysokości spadania, wydłużenie największe może osiągnąć wielkość niebezpieczną dla wytrzymałości pręta. Tak np. gdyby $h = \frac{4(P+Q)L}{FE}$, to mielibyśmy:

$$l_{\max} = \frac{PL}{FE} + \frac{QL}{FE} (1 + \sqrt{1+8}) = \frac{(P+4Q)L}{FE},$$

a przy $h = 40 \frac{(P + Q)L}{FE}$ byłyby: $l_{\max} = \frac{(P + 10Q)L}{FE}$ i t. d.

W pierwszym więc przypadku działanie dynamiczne ciężaru Q byłoby cztery razy, a w drugim przypadku dziesięć razy większe aniżeli jego działanie statyczne.

102. Teraz uwzględnimy także ciężar własny pręta, drgającego pod wpływem rozciągającego go ciężaru P .

Początek współrzędnych umieszczamy w podstawie górnej graniastosłupa, osadzonej nieruchomo, oś zaś z umieszczamy w osi graniastosłupa, w przypuszczeniu, że ta oś graniastosłupa jest pionową. Wreszcie, zachowując wszystkie poprzednie oznaczenia, oznaczamy przez δ ciężar jednostki objętości graniastosłupa, przez Q zaś ciężar całego graniastosłupa, równy δFL .

Posunięcie przekroju, oddalonego o z od początku współrzędnych, oznaczamy przez w , wtedy jako naprężenie całkowite tego przekroju (w chwili t) otrzymamy: $FE \frac{\partial w}{\partial z}$.

Gdyby dany graniastosłup znajdował się w stanie równowagi, to rzeczone naprężenie całkowite byłoby równe ciężarowi P , powiększonemu o ciężar części graniastosłupa, znajdującej się poniżej przekroju rozważanego. Mielibyśmy wtedy równania:

$$FE \frac{\partial w}{\partial z} = P + \delta F (L - z)$$

$$i \quad FE w = Pz + \delta F \left(Lz - \frac{z^2}{2} \right) = Pz + \frac{\delta F}{2} (2Lz - z^2),$$

$$\text{czyli} \quad w = \frac{Pz}{FE} + \frac{\delta}{2E} (2Lz - z^2) \dots \dots \dots (a).$$

Ale graniastosłup dany, zgodnie z założeniem, znajduje się w ruchu, posunięcie więc w jest funkcją nie tylko zmiennej z , lecz i czasu t ; równanie więc (a) nie istnieje. W celu wyznaczenia w należy wyprowadzić równanie ruchu cząstki graniastosłupa nieskończenie małej $l' \partial z$. Siła bezwładności tej cząstki jest $\frac{\delta F \partial z}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$. Siła ta musi być równa ciężarowi cząstki $\delta F \partial z$, powiększonemu o różnicę naprężeń, działających na podstawę górną i dolną tej cząstki. A ponieważ ta różnica naprężeń jest równa $\left(FE \frac{\partial w}{\partial z} + FE \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} z \right) - FE \frac{\partial w}{\partial z}$, przeto równanie ruchu cząstki jest:

$$\frac{\delta F \partial z}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \delta F \partial z + FE \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \partial z, \quad \text{czyli}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = g + \frac{Eg}{\delta} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \dots \dots \dots (508).$$

Łatwo możemy przekonać się, że wzór (a) na posunięcia w czyni zadość temu równaniu różniczkowemu, możemy przeto uważać go za jedną z całek cząstkowych tego równania. W celu otrzymania więc całki ogólnej możemy przyjąć $w = \frac{Pz}{FE} + \frac{\delta}{2E} (2Lz - z^2) + \varphi(z, t)$ Wprowadzając to w równanie (508), otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad \text{gdzie } a^2 = \frac{Eg}{\delta} \quad (509).$$

Ponieważ przy $z = 0$ posunięcie w musi być równe zeru dla dowolnego t , przeto i funkcja φ musi spełnić tenże warunek, wskutek czego całka ogólna równania (509), jak to nam wiadomo z zadania dotyczącego drgania strun, będzie miała postać:

$$\varphi(z, t) = \Sigma \sin(mz) [A \cos(mat) + B \sin(mat)],$$

gdzie m, A i B są to ilości stałe, niezależne od z i t , lecz mogące mieć w każdym wyrazie sumy nieskończonej wartości rozmaite. Mamy więc:

$$w = \frac{Pz}{FE} + \frac{\delta}{2E} (2Lz - z^2) + \Sigma \sin(mz) [A \cos(mat) + B \sin(mat)] \quad (510)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{P}{FE} + \frac{\delta}{E} (L - z) + \Sigma m \cos(mz) [A \cos(mat) + B \sin(mat)] \quad (511)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \Sigma m \sin(mz) [B \cos(mat) - A \sin(mat)] \quad (512).$$

W celu oznaczenia stałych, wchodzących w te równania, przypuśćmy, że w początku ruchu, t. j. gdy $t = 0$, posunięcia przekrojów i ich prędkość czynią zadość równaniom:

$$w = f(z) \quad \text{i} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = F(z) \quad (513).$$

Przyjmując więc w równaniach (510) i (512) $t = 0$, otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= \frac{Pz}{FE} + \frac{\delta}{2E} (2Lz - z^2) + \Sigma A \sin(mz) \\ F(z) &= a \Sigma B m \sin(mz) \end{aligned} \right\} \quad (514).$$

Do tych równań musimy dołączyć jeszcze jedno, wynikające z warunku, że na koniec nieumocowany graniastosłupa działa ciężar P .

Z równania (511), gdy przyjmiemy w niem $z = L$, otrzymamy do oznaczenia naprężenia tego końca:

$$FE \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_L = FE \Sigma m \cos(mL) [A \cos(mat) + B \sin(mat)] + P.$$

Naprężenie to, gdyby graniastosłup był w stanie spoczynku, równałoby

się P , lecz w stanie ruchu równa się $P - \frac{P}{g} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)_{z=L}$; a ponieważ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -a^2 \Sigma m^2 \sin(mz) [A \cos(mat) + B \sin(mat)],$$

przeto mamy równanie:

$$\begin{aligned} FE \Sigma m \cos(mL) [A \cos(mat) + B \sin(mat)] = \\ = \frac{P}{g} a^2 \Sigma m^2 \sin(mL) [A \cos(mat) + B \sin(mat)]. \end{aligned}$$

Równaniu temu uczynimy zadość, przy dowolnem t , przyjmując:

$$FE m \cos(mL) = \frac{P}{g} a^2 m^2 \sin(mL),$$

$$\text{albo } mL \cdot \operatorname{tg}(mL) = \frac{F L E g}{P a^2} = \frac{\delta FL}{P} = \frac{Q}{P} = b^2 \dots \dots \dots (515).$$

Z równania tego otrzymamy nieskończenie wielką liczbę wartości stałej m . W istocie, jeżeli zmieniać będziemy łuk mL w granicach od 0 do $\frac{\pi}{2}$, to strona pierwsza równania (515) przejdzie przez wszystkie wartości dodatnie od 0 do ∞ , z których jedna musi być równa b^2 . Równanie więc to ma pierwiastek, leżący w granicach między 0 a $\frac{\pi}{2}$; w granicach od $\frac{\pi}{2}$ do π tangens jest stale ilością ujemną, wskutek czego w tych granicach równanie nie ma pierwiastków; w granicach od π do $\frac{3}{2}\pi$ będzie znowu jeden pierwiastek i t. d. Wogóle, równanie (515) ma pierwiastek, leżący w granicach między $i\pi$ a $i\pi + \frac{\pi}{2}$, gdzie i jest liczbą dowolną całkowitą, nie wyłączając zera. Należy jednocześnie zauważyć, że funkcya $x \operatorname{tg} x$ jest funkcją *parzystą*, dodatnie więc pierwiastki równania (515) czynią mu zadość także i wtedy, gdy są brane ze znakiem minus.

Przypuśćmy, że pierwiastki tego równania są:

$$\pm m_1, \pm m_2, \dots \dots \pm m_i, \pm m_{i+1}, \dots \dots;$$

w takim razie w sumie nieskończonej wyrażenia (510) na w , wyrazy, odpowiadające parze pierwiastków, równych pod względem wielkości, lecz różniących się znakiem, będą:

$$\sin(mz) [A \cos(mat) + B \sin(mat)] - \sin(mz) [A' \cos(mat) - B' \sin(mat)],$$

$$\text{albo } \sin(mz) [(A - A') \cos(mat) + (B + B') \sin(mat)],$$

$$\text{albo } \sin(mz) [C \cos(mat) + D \sin(mat)].$$

Ponieważ zbiór wyrazów, odpowiadających parze powyżej wymienionych pierwiastków, jest zupełnie tej samej postaci, jak i wyrazy, odpowiadające samemu tylko pierwiastkowi dodatniemu, przeto mamy prawo, bez uszczerbku dla ogólności wzoru (510), uwzględniać tylko pierwiastki dodatnie równania (515).

W celu oznaczenia stałych A i B posilkujemy się całką

$$\int \cos (mx) \cos (m'x) \partial x,$$

dla której oznaczenia przyjmujemy:

$$\int \cos (mx) \cos (m'x) \partial x = C$$

$$\int \sin (mx) \sin (m'x) \partial x = D.$$

Dodając do siebie i odejmując od siebie te dwa równania, otrzymamy:

$$C + D = \int \cos (mx - m'x) \partial x = \frac{\sin (mx - m'x)}{m - m'}$$

$$C - D = \int \cos (mx + m'x) \partial x = \frac{\sin (mx + m'x)}{m + m'}$$

a więc:

$$\begin{aligned} C &= \int \cos (mx) \cos (m'x) \partial x = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (mx - m'x)}{m - m'} + \frac{\sin (mx + m'x)}{m + m'} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(m + m') \{ \sin (mx) \cos (m'x) - \cos (mx) \sin (m'x) \} +}{m^2 - m'^2} \\ &\quad + \frac{(m - m') \{ \sin (mx) \cos (m'x) + \cos (mx) \sin (m'x) \}}{m^2 - m'^2} \\ &= \frac{m \sin (mx) \cos (m'x) - m' \cos (mx) \sin (m'x)}{m^2 - m'^2} \\ &= \frac{\cos (mx) \cos (m'x)}{m^2 - m'^2} (m \operatorname{tg} mx - m' \operatorname{tg} m'x). \end{aligned}$$

Biorąc tę całkę w granicach od 0 do L , otrzymamy:

$$\begin{aligned} &\int_0^L \cos (mx) \cos (m'x) \partial x = \\ &= \frac{\cos (mL) \cos (m'L)}{(m^2 - m'^2) L} [mL \operatorname{tg} (mL) - m'L \operatorname{tg} (m'L)], \end{aligned}$$

wskutek czego, gdy m i m' są dwoma pierwiastkami różnymi równania (515), będzie:

$$\int_0^L \cos (mx) \cos (m'x) \partial x = 0 \quad \dots \quad (A).$$

Gdy zaś m' jest równe m , wtedy:

$$\int_0^L \cos^2 mx \cdot \partial x = \frac{1}{4m} [2mL + \sin(2mL)]. \dots \dots \dots (B).$$

Ażeby z tych wzorów ostatnich oznaczyć współczynniki A i B , różniczkujemy równania warunkowe (514) względem z i otrzymujemy:

$$\Sigma Am \cos(mz) = f'(z) - \frac{P}{FE} - \frac{\delta}{E} (L-z)$$

$$\Sigma Bm^2 \cos(mz) = \frac{1}{a} F'(z).$$

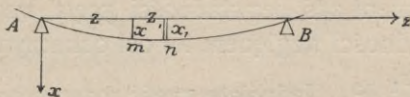
Te ostatnie równania mnożymy przez $\cos(mz) \partial z$ i całkujemy w granicach od 0 do L ; otrzymujemy wówczas wzory:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Am}{4m} \{2mL + \sin(2mL)\} &= \\ &= \int_0^L \left\{ f'(z) - \frac{P}{FE} - \frac{\delta}{E} (L-z) \right\} \cos(mz) \partial z \\ \frac{Bm^2}{4m} \{2mL + \sin(2mL)\} &= \frac{1}{a} \int_0^L F'(z) \cos(mz) \partial z \end{aligned} \right\} \dots (C).$$

Wzory te wyznaczają wszystkie stałe A i wszystkie stałe B dla wszystkich pierwiastków równania (515).

103. Drgania pręta graniastopowatego pod wpływem sił, wywołujących wygięcie płaskie. Zbadamy drgania pręta poziomego pod wpływem ciężaru własnego P i obciążenia Q , rozłożonego równomiernie na całej długości pręta L , przyczem przyjmujemy, że końce pręta są tak podparte, iż nie mogą wykonywać ruchów postępowych, lecz mogą obracać się swobodnie.

Początek współrzędnych umieszczamy w końcu podpartym A , a oś z przeprowadzamy przez drugi koniec B (rys. 30), oś zaś x przyjmujemy w płaszczyźnie włókna środkowego.



Rys. 30.

Gdyby pręt znajdował się w stanie równowagi naprężonej, to mielibyśmy:

$$EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{P+Q}{2L} (L-z)^2 - \frac{P+Q}{2} (L-z) = \frac{P+Q}{2L} (z^2 - Lz).$$

Całkując to równanie dwa razy i uwzględniając, że przy $z = \frac{1}{2} L$ pochodna $\frac{\partial x}{\partial z} = 0$, a przy $z = 0$ rzędna $x = 0$, otrzymamy:

$$EI \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{P+Q}{2L} \left(\frac{z^3}{3} - \frac{1}{2} Lz^2 + \frac{L^3}{12} \right)$$

$$EI x = \frac{P+Q}{24L} (z^4 - 2Lz^3 + L^3 z) (516).$$

Gdy pręt jest w ruchu, równania te nie mogą istnieć, gdyż oprócz sił P i Q będą działały siły bezwładności.

W celu otrzymania równania ruchu pręta należy oznaczyć moment wszystkich sił, działających na część mB , względem pewnego przekroju m pręta. W tym celu bierzemy część nieskończenie małą pręta, o długości ∂z_1 , w odległości z_1 od początku współrzędnych i w odległości $z_1 - z$ od przekroju m i rozważamy siły, działające na tę część.

Siły te są: ciężar własny tej części ∂z_1 i obciążenie na niej spoczywające. Moment tych dwóch sił względem przekroju m jest równy: $\frac{P+Q}{L} \partial z_1 (z_1 - z) = \frac{P+Q}{L} (z_1 - z) \partial z_1$. Bezwładność ciężaru $\frac{P+Q}{L} \partial z_1$

jest równa: $-\frac{P+Q}{gL} \partial z_1 \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}$, a moment tej siły względem przekroju m

jest równy: $-\frac{P+Q}{gL} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} (z_1 - z) \partial z_1$.

Ponieważ dana część ∂z_1 pręta, wychodząc ze stanu równowagi, miała oprócz ruchu postępowego w dół także ruch obrotowy, przeto wskutek tego ostatniego ruchu powstały w niej siły bezwładności, sprowadzające się do pary sił, której moment musi być równy pierwszej pochodnej prędkości kątowej ruchu obrotowego względem czasu t , pomnożonej przez moment bezwładności części ∂z_1 pręta względem jego osi obrotu. Przyjmując, że drgania są bardzo małe, możemy uważać

pochodną $\frac{\partial x_1}{\partial z_1}$ za miarę kąta obrotu, $\frac{\partial^2 x_1}{\partial z_1 \partial t}$ zaś za prędkość kątową obrotu. Pochodna tej prędkości kątowej względem czasu t będzie $-\frac{\partial^3 x_1}{\partial z_1 \partial t^2}$.

Moment zaś bezwładności pręta względem osi obrotu, gdy ramię bezwładności względem tej osi oznaczymy na razie przez k , będzie równy $\frac{P \partial z_1}{gL} k^2$. Jednakże część rozważana pręta przedstawia płytkę nieskoń-

czenie cienką, której powierzchnia równa jest powierzchni F przekroju pręta. Możemy więc przyjąć: $Fk^2 = I$, czyli $k^2 = \frac{I}{F}$. Moment więc

pary wspomnianej jest: $-\frac{PI}{gFL} \frac{\partial^3 x_1}{\partial z_1 \partial t^2} \cdot \partial z_1$.

Suma algebraiczna momentów otrzymanych jest:

$$\frac{P+Q}{L} \left[1 - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} \right] (z_1 - z) \partial z_1 - \frac{PI}{gFL} \frac{\partial^3 x_1}{\partial z_1 \partial t^2} \partial z_1 .$$

Należy sumę tę zcałkować względem z_1 w granicach od $z_1 = z$ do $z_1 = L$ i dodać do tego moment oddziaływania R końca B , t. j. wyraz $-R(L-z)$, poczem otrzymamy następujące równanie ruchu:

$$EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{P+Q}{L} \int_z^L \left(1 - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} \right) (z_1 - z) \partial z_1 - \frac{PI}{gFL} \int_z^L \frac{\partial^3 x_1}{\partial z_1 \partial t^2} \partial z_1 - R(L-z) \dots \dots \dots (a).$$

Ażeby móc zcałkować to równanie, należy poprzednio oswobodzić stronę jego drugą od znaków całki. Można to osiągnąć, różniczkując to równanie dwukrotnie względem z .

W tym celu przypomnimy następujący wzór na różniczkowanie pod znakiem całki:

Jeżeli
$$u = \int_a^b \varphi(x, \alpha) \partial x ,$$

to
$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \int_a^b \frac{\partial \varphi(x, \alpha)}{\partial \alpha} \partial x + \varphi(b, \alpha) \frac{\partial b}{\partial \alpha} - \varphi(a, \alpha) \frac{\partial a}{\partial \alpha} .$$

Posiłkując się tym wzorem, otrzymamy po pierwszym różniczkowaniu:

$$EI \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} = - \frac{P+Q}{L} \int_z^L \left(1 - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} \right) \partial z_1 + \frac{PI}{gFL} \frac{\partial^3 x}{\partial z \partial t^2} + R . (517).$$

Różniczkowanie zaś powtórne da nam:

$$EI \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} = \frac{P+Q}{L} \left(1 - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) + \frac{PI}{gFL} \frac{\partial^4 x}{\partial z^2 \partial t^2} \dots \dots \dots (518).$$

Ponieważ równanie (516) jest jedną z całek szczególnych równania (518), przeto całka ogólna równania ostatniego będzie:

$$EI x = \frac{P+Q}{24L} (z^4 - 2Lz^3 + L^3z) + EI \varphi(z, t) \dots \dots \dots (519).$$

Stąd wynika, że:

$$EI \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} = \frac{P+Q}{L} + EI \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} , \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial \varphi^2}{\partial t^2} \quad \text{i} \quad \frac{\partial^4 x}{\partial z^2 \partial t^2} = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^2 \partial t^2} .$$

Równanie więc (518) przybiera postać:

$$a^4 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^2 \partial t^2} = 0 \quad \dots \quad (520),$$

gdzie $a^4 = g \frac{LEI}{P+Q}$ i $b^2 = \frac{P}{P+Q} \cdot \frac{I}{F}$.

Jedno z rozwiązań szczególnych tego równania, które daje $\varphi = 0$ przy $z = 0$, jak wymaga tego warunek, że koniec A pręta jest podparty, jest następujące:

$$\varphi = \sin(nz) [A \cos(ht) + B \sin(ht)],$$

gdzie n, A, B i h są ilościami stałymi. Wprowadzając to rozwiązanie w równanie (520), otrzymamy:

$$a^4 n^4 - h^2 - b^2 n^2 h^2 = 0,$$

a więc
$$h = \frac{a^2 n^2}{\sqrt{1 + b^2 n^2}} \dots \dots \dots (521).$$

Całka ogólna równania (518) jest więc następująca:

$$EIx = \frac{P+Q}{24L} (z^4 - 2Lz^3 + L^3z) + \Sigma \sin(nz) [A \cos(ht) + B \sin(ht)].$$

Warunek, że końce pręta są podparte, wymaga, ażeby x i $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$ stały się zerami zarówno przy $z=0$, jak i przy $z=L$, a do tego potrzeba, ażeby $\sin(nL)$ było równe zero.

A więc $nL = i\pi$, gdzie i jest liczbą całkowitą dowolną; całka więc ogólna przybiera ostatecznie postać:

$$EIx = \frac{P+Q}{24L} (z^4 - 2Lz^3 + L^3z) + \Sigma \sin\left(i\pi \frac{z}{L}\right) \left[A_i \cos\left(\frac{i^2 \pi^2 a^2 t}{LV L^2 + (i\pi b)^2}\right) + B_i \sin\left(\frac{i^2 \pi^2 a^2 t}{LV L^2 + (i\pi b)^2}\right) \right] \dots \dots \dots (522).$$

Jeżeli w chwili $t=0$ będą dane równania $x = f(z)$ i $\frac{\partial x}{\partial t} = F(z)$, wyznaczające kształt krzywej, którą tworzy włókno środkowe i prędkość początkową każdego punktu tego włókna, to wszystkie współczynniki A_i i B_i można wyznaczyć zapomocą sposobu Lagrange'a, jak to wskazaliśmy w ustępie 96, przy rozważaniu drgań struny.

Zauważymy, że czas trwania jednego drgnienia τ_i pręta, odpowiadający rozwiązaniu szczególnemu i , jest:

$$\tau_i = \frac{2\pi L \sqrt{L^2 + (i\pi b)^2}}{i^2 \pi^2 a^2} \dots \dots \dots (523).$$

Najdłuższy czas trwania jednego drgania odpowiada pierwszemu rozwiązaniu, dla którego $i = 1$, a mianowicie:

$$\tau_1 = \frac{2LV\sqrt{L^2 + (\pi b)^2}}{\pi a^2}.$$

Stosunek czasów τ_1 do τ_i jest:

$$\frac{\tau_1}{\tau_i} = i^2 \sqrt{\frac{L^2 + (\pi b)^2}{L^2 + (i\pi b)^2}}.$$

Z wzoru tego wynika, że jakkolwiek ruch pręta, odpowiadający każdemu rozwiązaniu szczególnemu i , wziętemu oddzielnie, jest ruchem okresowym, to jednak ruch ogólny nie jest okresowym. Istotnie, ten ruch ogólny, jako wypadkowy nieskończenie wielkiej liczby ruchów okresowych, byłby okresowym, gdyby iloraz $\frac{\tau_1}{\tau_i}$ był liczbą wymierną dla dowolnej liczby całkowitej i . Wzór jednak ostatni wskazuje, że iloraz $\frac{\tau_1}{\tau_i}$ jest liczbą niewymierną. Iloraz ten mógłby być liczbą wymierną dla dowolnego i tylko w tym przypadku, gdyby ilość b była zerem, t. j. gdybyśmy nie uwzględniali ciężaru własnego P pręta.

104. Drgania pręta sprężystego prostego podczas skręcania. Dany jest pręt, którego jeden koniec jest osadzony nieruchomo, na drugi zaś działa para sił, o momencie M , wywołująca skręcanie. Para ta, utrzymując pręt w stanie równowagi naprężonej, przestała nagle nań działać, wskutek czego pręt, pozostawiony sam sobie, wykonywa szereg drgań obrotowych.

W chwili t , naprężenia w przekroju, oddalonym o z od końca osadzonego, sprowadzają się do pary sił o momencie $GI_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, gdzie G jest współczynnikiem sprężystości poprzecznej materiału, I_0 momentem biegunowym bezwładności przekroju, a φ — kątem obrotu przekroju danego, względem końca osadzonego.

Moment $GI_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ powinien być równy sumie momentów, względem osi skręcania, wszystkich sił bezwładności, powstałych w części pręta, leżącej pomiędzy przekrojem o współrzędnej z a końcem swobodnym pręta. Ponieważ dla części pręta o długości nieskończenie małej ∂z_1 siły bezwładności tworzą parę o momencie:

$$- \frac{\partial F \partial z_1}{g} \frac{I_0}{F} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2},$$

przeto równanie ruchu pręta jest:

$$GI_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = - \frac{\delta F}{g} \frac{I_0}{F} \int_x^L \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \partial z_1 ,$$

z którego otrzymujemy:

$$GI_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=L} = 0 .$$

Uwalniając to równanie od znaku całki przez zróżniczkowanie go względem z , otrzymamy równanie:

$$GI_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\delta I_0}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} , \text{ czyli}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (524),$$

gdzie $a^2 = \frac{gG}{\delta}$.

Całka ogólna tego równania jest:

$$\varphi = \Sigma \sin (mz) [A \cos (mat) + B \sin (mat)] .$$

Wprowadzając warunek, że $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ przy $z = L$, dla dowolnego t , otrzymujemy: $\cos (mL) = 0$, a więc $mL = (2i + 1) \frac{\pi}{2}$, czyli $m = (2i + 1) \frac{\pi}{2L}$, gdzie i jest liczbą dowolną całkowitą.

Wobec tego całka ogólna przyjmuje postać:

$$\varphi = \Sigma \sin \left\{ (2i + 1) \frac{\pi z}{2L} \right\} \left[A_i \cos \left\{ (2i + 1) \frac{\pi at}{2L} \right\} + \right.$$

$$\left. + B_i \sin \left\{ (2i + 1) \frac{\pi at}{2L} \right\} \right] (525).$$

W początku ruchu, t. j. gdy $t = 0$, kąt skręcania φ czyni zadość równaniu:

$$\varphi = \frac{Mz}{GI_0} .$$

Mamy więc:

$$\frac{Mz}{GI_0} = \Sigma A_i \sin \left\{ (2i + 1) \frac{\pi z}{2L} \right\} (526).$$

Stąd znajdziemy wszystkie A_i , sposobem Lagrange'a. Stałe B_i będą wszystkie równe zero, o ile przekrojom pręta nie nadano w początku ruchu prędkości kątowych, t. j. o ile przy $t = 0$ pochodna $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ była równa zero.

105. Rozchodzenie się drgań w ośrodku równozwrotnym, o sprężystości stałej. Wyobraźmy sobie, że w ośrodku jednorodnym i równozwrotnym o sprężystości stałej, rozprzestrzeniającym się bezgranicznie we wszelkich kierunkach, pewna cząstka C wykonywa szereg drgań izochronicznych. Cząstkę tę będziemy nazywali *środkiem drgań*.

Drgania cząstki C , udzielając się cząstkom otaczającym ją, będą się rozchodziły we wszelkich kierunkach. Wskutek jednorodności i równozwrotności sprężystej ośrodka możemy przyjąć, że prędkość V rozchodzenia się tych drgań jest ilością stałą i jednakową dla wszelkich kierunków. Wszystkie więc cząstki pewnej kuli o promieniu R , której środek jest w punkcie C , zaczną drgać jednocześnie, następnie wszystkie cząstki innej kuli o promieniu R' , większym aniżeli R , będą również jednocześnie wyprowadzone ze stanu spoczynku i t. d. Możemy więc twierdzić, że w ośrodku jednorodnym i równozwrotnym o sprężystości stałej, drgania rozchodzą się jako *fale kuliste*.

Nazwą fali oznaczamy tu oczywiście powierzchnię, na której znajdujące się cząstki ośrodka wychodzą jednocześnie ze stanu spoczynku.

Gdy środek drgań znajduje się w odległości od nas nieskończenie wielkiej, fale nas dochodzące należy uważać za *płaskie*.

Zaczynamy od zbadania rozchodzenia się fal płaskich.

Przypuśćmy, że w chwili t przez początek O prostopadłych do siebie osi współrzędnych x, y i z przechodzi fala płaska P_0 . Prowadzimy płaszczyznę P , równoległą do płaszczyzny P_0 , w odległości r od tejże. Ażeby wstrząśnienia punktów płaszczyzny P_0 mogły udzielić się punktom płaszczyzny P , potrzeba $\frac{r}{V}$ sekund, gdzie V jest prędkością ruchu fali płaskiej.

Równanie płaszczyzny P , jako oddalonej o r od początku współrzędnych, jest:

$$mx + ny + pz = r. \quad \dots \quad (a),$$

gdzie, jak wiadomo:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = m = \cos(r, x), \quad \frac{\partial r}{\partial y} = n = \cos(r, y), \quad \frac{\partial r}{\partial z} = p = \cos(r, z) \quad \dots \quad (b).$$

Wszystkie cząstki płaszczyzny P_0 , wychodząc jednocześnie z położeń, które zajmują w stanie równowagi, znajdą się jednocześnie w odległościach największych od tych położeń, i wogóle, będą miały w każdej danej chwili *jednakowe fazy ruchu* i jednakowe kierunki ruchu. To samo można powiedzieć i o cząstkach płaszczyzny P , ale fazy cząstek tej płaszczyzny P , mogą w danej chwili różnić się od faz cząstek fali P_0 , gdyż cząstki fali P pozostają w tyle w stosunku do cząstek fali P_0 o $\frac{r}{V}$

sekund. Jeżeli więc posunięcia cząstek płaszczyzny P_0 wyrazimy za pomocą następującej funkcji okresowej czasu t :

$$U_0 = c_0 \cos \left(2\pi \frac{t}{\tau} \right),$$

to posunięcia cząstek płaszczyzny P należy wyrazić za pomocą wzoru:

$$U = c \cos \left(2\pi \frac{t - \frac{r}{V}}{\tau} \right) \dots \dots \dots (527).$$

W tych wzorach U_0 i U , jak to objaśniliśmy, są posunięciami cząstek płaszczyzn P_0 i P , τ jest czasem trwania jednego drgania, c_0 i c są amplitudami drgań cząstek płaszczyzn P_0 i P .

Amplitudy c_0 i c oznaczają siłę dźwięku albo światła, wydzielanego przez środek drgań, gdy dźwięk lub światło dojdą do miejsca, zajmowanego przez płaszczyzny P_0 i P . Siła jednak dźwięku albo światła jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości od ciała, wydającego dźwięk lub światło; to też oznaczając przez L odległość środka drgań od płaszczyzny P_0 , otrzymamy:

$$c : c_0 = L^2 : (L + r)^2 .$$

A ponieważ $L = \infty$, przeto mamy $c = c_0$, t. j., że przy przenoszeniu wstrząśnięć przez fale płaskie, mamy prawo amplitudę c uważać za ilość stałą.

Oznaczmy teraz przez u, v i w rzuty na osie współrzędnych posunięcia U i przyjmijmy:

$$u = \xi U, \quad v = \eta U, \quad w = \zeta U \dots \dots \dots (c),$$

$$\text{gdzie} \quad \xi = \cos(U, x), \quad \eta = \cos(U, y), \quad \zeta = \cos(U, z) \dots \dots \dots (d).$$

Posunięcia u, v i w powinny czynić zadość równaniom ruchu ciała równozwrotnego o sprężystości stałej. Równania te zaś, gdy w nich nie uwzględnimy ciężaru ośrodka sprężystego, mogą być wyrażone w postaci następującej (p. równ. 441):

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho \frac{d^2 u}{dt^2} \right. \\ \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \rho \frac{d^2 v}{dt^2} \right. \\ \left. \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \rho \frac{d^2 w}{dt^2} \right] \right\} \dots \dots (e), \end{aligned}$$

$$\text{gdzie:} \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} .$$

W celu sprawdzenia tych równań za pomocą wzorów (c), należy poprzednio oznaczyć pochodne posunięć u, v i w względem czasu t

i względem współrzędnych, pamiętając, że U jest funkcją tylko zmiennych t i r i że kierunek tego posunięcia nie jest zależny ani od czasu t , ani od współrzędnych, czyli, że ξ , η i ζ są ilościami stałymi.

Dla pochodnych mamy więc:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \xi \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \xi m \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \xi \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = \xi n \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \xi \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = \xi p \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \xi m \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = \xi m^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \xi n^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \xi p^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2},$$

a więc:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \xi (m^2 + n^2 + p^2) \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \xi \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}.$$

W taki sam sposób znajdziemy, że:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \eta \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \zeta \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}.$$

Dalej otrzymamy:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = (\xi m + \eta n + \zeta p) \frac{\partial U}{\partial r} = q \frac{\partial U}{\partial r} \quad \dots \quad (f),$$

gdzie: $q = \xi m + \eta n + \zeta p = \cos(U, r) \dots \dots \dots (g)$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = q \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = q m \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = q n \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \quad \text{i} \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = q p \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}.$$

Wreszcie:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \xi \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \eta \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \zeta \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

Z równania zaś (527) wynika, że:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = - \left(\frac{2\pi}{\tau V} \right)^2 U \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = - \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^2 U,$$

a więc: $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} : \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = V^2.$

Wobec tego z równań ruchu (e) wynika:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)} q m + \left(\frac{E}{2(1+\mu)} - \rho V^2 \right) \xi &= 0 \\ \frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)} q n + \left(\frac{E}{2(1+\mu)} - \rho V^2 \right) \eta &= 0 \\ \frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)} q p + \left(\frac{E}{2(1+\mu)} - \rho V^2 \right) \zeta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (528).$$

Mnożąc te równania kolejno przez m , n i p i dodając je, otrzymamy:

$$\frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)} q + \left(\frac{E}{2(1+\mu)} - \rho V^2 \right) q = 0, \text{ czyli}$$

$$q \left[\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} E - \rho V^2 \right] = 0. \dots (529).$$

Równaniu temu uczynimy zadość, przyjmując albo $q = 0$, albo przyrównyując do zera drugi czynnik.

Przyjmując $q = \cos(U, r) = 0$, otrzymujemy rozwiązanie dla drgań prostopadłych do kierunku r ich rozchodzenia się, czyli dla tak zwanych *drgań poprzecznych*. Prędkość rozchodzenia się tych drgań oznaczamy z równania (528), przy $q = 0$:

$$\frac{E}{2(1+\mu)} - \rho V_1^2 = 0, \text{ czyli } V_1 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)\rho}} \dots (530).$$

Ponieważ z równania (f) przy $q = 0$ otrzymujemy $\theta = 0$, przeto dochodzimy do wniosku, że *drgania poprzeczne odbywają się bez zmiany gęstości ośrodka*.

Przyjmując drugi czynnik równym zeru, otrzymamy:

$$V_2 = \sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \cdot \frac{E}{\rho}} \dots (531).$$

Przy tej wartości prędkości V , równania (528) przyjmują postać:

$$q m = \xi, \quad q n = \eta, \quad q p = \zeta \text{ i dają:}$$

$$q^2 (m^2 + n^2 + p^2) = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \text{ czyli } q^2 = \cos^2(U, r) = 1.$$

Wzór więc (531) daje możność oznaczenia prędkości rozchodzenia się *drgań podłużnych*, t. j. takich, w których kierunek posunięcia U zlewa się z kierunkiem r rozchodzenia się tych drgań. Drgania te odbywają się przy powtarzającym się okresowo rozszerzaniu i zwięzaniu ośrodka.

Obie prędkości rozchodzenia się drgań, zarówno poprzecznych V_1 , jak i podłużnych V_2 , są tem większe, im większy jest współczynnik E sprężystości ośrodka i im mniejsza jest gęstość ρ ośrodka. Stosunek tych prędkości jest:

$$\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}} \dots (532).$$

Ponieważ dla ciał równozwrotnie sprężystych $\mu < \frac{1}{2}$, przeto dla takich ciał $V_1 < V_2$, czyli prędkość rozchodzenia się drgań poprzecznych jest mniejsza od prędkości rozchodzenia się drgań podłużnych.

Zapomocą wzorów (530) i (531) na prędkości V_1 i V_2 można wszystkie wzory, stosujące się do ciał równozwrotnych o sprężystości stałej, tak przekształcić, ażeby one zamiast ilości E i μ zawierały V_1 i V_2 .

Tak np. równania ogólne ruchu ciała równozwrotnie sprężystego zawierają właściwie dwa współczynniki: jeden $\frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)}$ równy różnicy $\rho V_2^2 - \rho V_1^2$ i drugi $\frac{E}{2(1+\mu)}$ równy ρV_1^2 ; równania więc te mogą być wyrażone w postaci:

$$\left. \begin{aligned} V_2^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} + V_1^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + X &= \frac{d^2 u}{dt^2} \\ V_2^2 \frac{\partial \theta}{\partial y} + V_1^2 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] + Y &= \frac{d^2 v}{dt^2} \\ V_2^2 \frac{\partial \theta}{\partial z} + V_1^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] + Z &= \frac{d^2 w}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots (533).$$

Nie od rzeczy będzie zauważyć, że skoro rzuty na osie współrzędnych prędkości kątovej względnej obrotu cząstek ciała oznaczmy przez ω_x , ω_y i ω_z , t. j. przyjmiemy podług wzorów (16):

$$2\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \dots (h),$$

to równania (533) mogą być wyrażone także w postaci:

$$\left. \begin{aligned} V_2^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2V_1^2 \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \right) + X &= \frac{d^2 u}{dt^2} \\ V_2^2 \frac{\partial \theta}{\partial y} + 2V_1^2 \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \right) + Y &= \frac{d^2 v}{dt^2} \\ V_2^2 \frac{\partial \theta}{\partial z} + 2V_1^2 \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right) + Z &= \frac{d^2 w}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots (534).$$

Istotnie, mamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \\ &= 2 \frac{\partial \omega_y}{\partial z} - 2 \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \text{ i t. d.} \end{aligned}$$

Równania (533) są bardzo dogodne do badania ruchów wahadłowych. Tak np. gdy mamy badać drgania poprzeczne, odbywające się bez zmiany gęstości, należy w tych równaniach przyjąć $\theta = 0$, a wtedy równania te, gdy nadto przyjmiemy w nich $X = Y = Z = 0$, przekształcą się na następujące:

$$\left. \begin{aligned} V_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &= \frac{d^2 u}{dt^2} \\ V_1^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) &= \frac{d^2 v}{dt^2} \\ V_1^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) &= \frac{d^2 w}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (535).$$

Całkując te równania, otrzymamy rozwiązanie najogólniejsze dla posunięć u, v i w .

Gdy mamy badać drgania podłużne, powinniśmy przyjąć:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial \theta}{\partial x}, \text{ czyli } \frac{\partial \omega_y}{\partial z} = \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= \frac{\partial \theta}{\partial y}, \text{ czyli } \frac{\partial \omega_x}{\partial x} = \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= \frac{\partial \theta}{\partial z}, \text{ czyli } \frac{\partial \omega_x}{\partial y} = \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (536)$$

i wtedy równania te przyjmą postać:

$$V_1^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{d^2 u}{dt^2}, \quad V_1^2 \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{d^2 v}{dt^2}, \quad V_1^2 \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{d^2 w}{dt^2} \dots \dots (537),$$

t. j. mieć będą postać taką samą, jak równania (535), z tą tylko różnicą, że θ dla drgań podłużnych nie jest równe zeru.

Równania (536) wskazują, że wyrażenie:

$$\omega_x \partial x + \omega_y \partial y + \omega_z \partial z$$

jest różniczką zupełną pewnej funkcji φ , t. j. że istnieje funkcja φ , dla której:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \omega_x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \omega_y \quad \text{i} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \omega_z \dots \dots \dots (538).$$

Możemy więc powiedzieć, że przy rozchodzeniu się w ośrodku równo-zwrotnem drgań podłużnych, istnieje potencjał φ prędkości kątowych obrotu cząstek ośrodka. Potencjał ten, jak widzimy z wyrażień (h) i z równań (538), czyni zadość równaniu:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \dots \dots \dots (539).$$

106. Rozchodzenie się drgań poprzecznych w ośrodku krystalicznym.

Ośrodek krystaliczny uważamy za ciało jednorodne, posiadające we wszystkich punktach budowę jednakową, lecz różne w różnych kierunkach; prędkość więc rozchodzenia się drgań w takim ośrodku należy uważać za wielkość stałą dla danego kierunku, lecz różną dla kierunków rozmaitych. Fale, otaczające środek wstrząsnień, tworzą, oczywiście, w takim ośrodku, pewne powierzchnie zamknięte, różniące się kształtem od powierzchni kuli. Gdy jednak środek wstrząsnień znajduje się w odległości od nas nieskończenie wielkiej, fale dochodzące do nas uważać należy i w tym przypadku za płaskie.

Oznaczmy prędkość rozchodzenia się drgań tylko poprzecznych w ośrodku krystalicznym *załamującym światło podwójnie*.

Oznaczmy przez V prędkość szukaną, τ — czas trwania jednego drgnienia, u, v i w — rzuty na osie współrzędnych posunięcia U cząstki ośrodka, m, n i p — dostawy kątów normalnej do fali płaskiej z osiami współrzędnych, ξ, η i ζ — dostawy kątów z temi osiami posunięcia U i θ — rozprzestrzenialność (rozszerzalność objętościowa) ośrodka.

Przy tych oznaczeniach będzie:

$$\left. \begin{aligned} r &= mx + ny + pz, \quad \text{gdzie } m^2 + n^2 + p^2 = 1, \\ u &= \xi U, \quad v = \eta U, \quad w = \zeta U, \quad \text{gdzie } \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \\ U &= c \cos \left(2\pi \frac{t}{\tau} - 2\pi \frac{r}{V\tau} \right) \\ m\xi + n\eta + p\zeta &= \cos(U, r) = 0 \\ \theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (a).$$

Dwa równania ostatnie wynikają z warunku, że rozważać mamy tylko drgania poprzeczne, odbywające się bez zmiany gęstości ośrodka.

Ponieważ doświadczenia wykazały, że kryształy załamujące światło podwójnie, ze względu na budowę swą wewnętrzną należą do ciał posiadających trzy wzajemnie do siebie prostopadłe płaszczyzny symetrii, przeto przyjmując osie współrzędnych równoległe do normalnych do tych płaszczyzn, otrzymamy wzory następujące, wyrażające zależność sił sprężystości od odkształceń składowych (p. wzory 128 w ustępie 30):

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= a_{11} \Delta_x + a_{12} \Delta_y + a_{13} \Delta_z \\ p_{yy} &= a_{21} \Delta_x + a_{22} \Delta_y + a_{23} \Delta_z \\ p_{zz} &= a_{31} \Delta_x + a_{32} \Delta_y + a_{33} \Delta_z \end{aligned} \right\} \dots (b)$$

$$p_{yz} = a_{44} g_{yz}, \quad p_{zx} = a_{55} g_{zx}, \quad p_{xy} = a_{66} g_{xy} \dots (c).$$

Oznaczając pochodną $\frac{\partial U}{\partial r}$ przez U' , otrzymamy:

$$\Delta_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \xi m U' , \quad \Delta_y = \eta n U' , \quad \Delta_z = \zeta p U'$$

$$g_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = (\eta p + \zeta n) U'$$

$$g_{zx} = (\zeta m + \xi p) U'$$

$$g_{xy} = (\xi n + \eta m) U' .$$

Mamy więc:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= (a_{11} \xi m + a_{12} \eta n + a_{13} \zeta p) U' \\ p_{yy} &= (a_{21} \xi m + a_{22} \eta n + a_{23} \zeta p) U' \\ p_{zz} &= (a_{31} \xi m + a_{32} \eta n + a_{33} \zeta p) U' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (d)$$

$$\left. \begin{aligned} p_{yz} &= a_{44} (\eta p + \zeta n) U' \\ p_{zx} &= a_{55} (\zeta m + \xi p) U' \\ p_{xy} &= a_{66} (\xi n + \eta m) U' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (e)$$

Siły te powinny czynić zadość następującym równaniom ruchu:

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{d^2 u}{dt^2}$$

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} = \rho \frac{d^2 v}{dt^2}$$

$$\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} = \rho \frac{d^2 w}{dt^2} .$$

Z uwagi zaś, że $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} : U'' = V^2$, trzy równania ostatnie ruchu, przy uwzględnieniu równań (d) i (e), przyjmą postać:

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} m^2 + a_{66} n^2 + a_{55} p^2) \xi + (a_{12} + a_{66}) mn \eta + (a_{13} + a_{55}) mp \zeta &= \rho V^2 \xi \\ (a_{21} + a_{66}) nm \xi + (a_{66} m^2 + a_{22} n^2 + a_{44} p^2) \eta + (a_{23} + a_{44}) np \zeta &= \rho V^2 \eta \\ (a_{31} + a_{55}) pm \xi + (a_{32} + a_{44}) pn \eta + (a_{55} m^2 + a_{44} n^2 + a_{33} p^2) \zeta &= \rho V^2 \zeta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (f).$$

Mnożąc te równania kolejno przez m , n i p i dodając je, otrzymamy:

$$A m \xi + B n \eta + C p \zeta = 0 ,$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} A &= a_{11} m^2 + (a_{21} + 2 a_{66}) n^2 + (a_{31} + 2 a_{55}) p^2 \\ B &= (a_{12} + 2 a_{66}) m^2 + a_{22} n^2 + (a_{32} + 2 a_{44}) p^2 \\ C &= (a_{13} + 2 a_{55}) m^2 + (a_{23} + 2 a_{44}) n^2 + a_{33} p^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (g).$$

Do oznaczenia więc kierunku posunięcia U , czyli dostaw ξ , η i ζ , mamy trzy równania:

$$\left. \begin{aligned} Am\xi + Bn\eta + Cp\zeta &= 0 \\ m\xi + n\eta + p\zeta &= 0 \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (h).$$

Z tych równań ostatnich otrzymuje się dla każdej dostawy dwa rozwiązania, różniące się tylko znakiem, co, właściwie, sprowadza się do jednego rozwiązania, t. j. wyznacza tylko jeden kierunek dla posunięcia U . Gdyby zaś zdarzyło się, że dwa pierwsze równania grupy (h) byłyby identyczne, to do oznaczenia trzech dostaw mielibyśmy tylko dwa równania i wtedy z równań tych moglibyśmy otrzymać kilka rozwiązań rzeczywiste różnych. Ten właśnie przypadek, zachodzący w kryształach załamujących światło podwójnie, ma tu dla nas ważność szczególniejszą.

Dwa pierwsze równania grupy (h) będą oczywiście identyczne, gdy $A = B = C$ i to przy dowolnych m, n i p . Ażeby zaś to mogło nastąpić, musi, jak widzimy z wzorów (g), istnieć następująca zależność pomiędzy współczynnikami sprężystości kryształu:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{12} + 2a_{66} = a_{13} + 2a_{55} \\ a_{22} &= a_{23} + 2a_{44} = a_{21} + 2a_{66} \\ a_{33} &= a_{31} + 2a_{55} = a_{32} + 2a_{44}. \end{aligned}$$

Że jednak $a_{12} = a_{21}$, $a_{23} = a_{32}$ i $a_{31} = a_{13}$, przeto:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} \dots \dots \dots (i).$$

Ponieważ współczynniki a_{44} , a_{55} i a_{66} są ilościami dodatnimi (p. nierówności 123 w ustępie 29), przeto możemy przyjąć:

$$a_{44} = \rho a^2, \quad a_{55} = \rho b^2 \quad \text{i} \quad a_{66} = \rho c^2 \dots \dots \dots (j),$$

gdzie a, b i c są to pewne ilości rzeczywiste. Wobec tego otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} a_{12} &= a_{21} = a_{11} - 2\rho c^2 \\ a_{13} &= a_{31} = a_{11} - 2\rho b^2 \\ a_{23} &= a_{32} = a_{11} - 2\rho a^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (k).$$

Wzory zaś (b) na siły sprężystości przyjmą postać:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= -2(c^2 \Delta_y + b^2 \Delta_x) \rho, & p_{yz} &= \rho a^2 g_{yz} \\ p_{yy} &= -2(a^2 \Delta_x + c^2 \Delta_y) \rho, & p_{zx} &= \rho b^2 g_{zx} \\ p_{zz} &= -2(b^2 \Delta_x + a^2 \Delta_y) \rho, & p_{xy} &= \rho c^2 g_{xy} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (l),$$

a równania ogólne ruchu będą:

$$\left. \begin{aligned} 2 \left(b^2 \frac{\partial \omega_y}{\partial z} - c^2 \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) &= \frac{d^2 u}{dt^2} \\ 2 \left(c^2 \frac{\partial \omega_x}{\partial x} - a^2 \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right) &= \frac{d^2 v}{dt^2} \\ 2 \left(a^2 \frac{\partial \omega_x}{\partial y} - b^2 \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right) &= \frac{d^2 w}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (540),$$

gdzie ω_x , ω_y i ω_z są to prędkości kątowe względne obrotu cząstek ośrodka około osi współrzędnych x , y i z . Równania te przechodzą w równania (534) (w ustępie 105) (w przypadku gdy $\theta = 0$ i $X = Y = Z = 0$), gdy przyjmiemy w nich $a^2 = b^2 = c^2 = V^2$. Stąd dochodzimy do wniosku, że ilości a , b i c są prędkościami rozchodzenia się drgań w pewnych szczególnych kierunkach w kryształach.

Wreszcie z równań (f), przy uwzględnieniu wzorów (j) i (k), otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} (c^2 n^2 + b^2 p^2 - V^2) \xi - c^2 mn \eta - b^2 mp \zeta &= 0 \\ -c^2 mn \xi + (a^2 p^2 + c^2 m^2 - V^2) \eta - a^2 np \zeta &= 0 \\ -b^2 mp \xi - a^2 np \eta + (b^2 m^2 + a^2 n^2 - V^2) \zeta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (541).$$

Ponieważ te równania mają rozwiązanie $\xi = \eta = \zeta = 0$, które nie czyni zadość warunkowi, że $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, przeto wyznacznik, złożony ze współczynników tych równań, musi być równy zeru. Mamy więc równanie:

$$\begin{aligned} &(c^2 n^2 + b^2 p^2 - V^2)(a^2 p^2 + c^2 m^2 - V^2)(b^2 m^2 + a^2 n^2 - V^2) - \\ &- (c^2 n^2 + b^2 p^2 - V^2)a^4 n^2 p^2 - (a^2 p^2 + c^2 m^2 - V^2)b^4 p^2 m^2 - \\ &- (b^2 m^2 + a^2 n^2 - V^2)c^4 m^2 n^2 - 2a^2 b^2 c^2 m^2 n^2 p^2 = 0 \dots (m). \end{aligned}$$

Można z łatwością przekonać się, że w tem równaniu wyraz niezależny od V^2 równy jest zeru. Z tego powodu równanie to, gdy odrzucimy pierwiastek $V^2 = 0$, staje się równaniem kwadratowym względem V^2 . To równanie kwadratowe jest:

$$V^4 - [(b^2 + c^2)m^2 + (c^2 + a^2)n^2 + (a^2 + b^2)p^2]V^2 + b^2 c^2 m^2 + c^2 a^2 n^2 + a^2 b^2 p^2 = 0 \dots (542).$$

Mnożymy tu wyraz V^4 przez $m^2 + n^2 + p^2$ (czyli przez 1) i grupujemy wyrazy z m^2 , n^2 i p^2 ; otrzymujemy wówczas:

$$(V^2 - b^2)(V^2 - c^2)m^2 + (V^2 - c^2)(V^2 - a^2)n^2 + (V^2 - a^2)(V^2 - b^2)p^2 = 0,$$

czyli
$$\frac{m^2}{V^2 - a^2} + \frac{n^2}{V^2 - b^2} + \frac{p^2}{V^2 - c^2} = 0 \dots (543).$$

Niech V_1^2 i V_2^2 będą pierwiastkami równania (542) lub (543); otrzymamy wtedy tożsamości:

$$\left. \begin{aligned} \frac{m^2}{V_1^2 - a^2} + \frac{n^2}{V_1^2 - b^2} + \frac{p^2}{V_1^2 - c^2} &= 0 \\ \frac{m^2}{V_2^2 - a^2} + \frac{n^2}{V_2^2 - b^2} + \frac{p^2}{V_2^2 - c^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (n).$$

Odejmując te tożsamości od siebie, otrzymamy nową tożsamość:

$$\frac{m^2}{(V_1^2 - a^2)(V_2^2 - a^2)} + \frac{n^2}{(V_1^2 - b^2)(V_2^2 - b^2)} + \frac{p^2}{(V_1^2 - c^2)(V_2^2 - c^2)} = 0 (o).$$

Nadto z równania (542) wynika:

$$\begin{aligned} (b^2 + c^2) m^2 + (c^2 + a^2) n^2 + (a^2 + b^2) p^2 &= V_1^2 + V_2^2 \\ b^2 c^2 m^2 + c^2 a^2 n^2 + a^2 b^2 p^2 &= V_1^2 V_2^2. \end{aligned}$$

Rozwiązując te dwa równania wraz z równaniem $m^2 + n^2 + p^2 = 1$, względem m^2 , n^2 i p^2 , otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} m^2 &= -\frac{(V_1^2 - a^2)(V_2^2 - a^2)}{(a^2 - b^2)(c^2 - a^2)} \\ n^2 &= -\frac{(V_1^2 - b^2)(V_2^2 - b^2)}{(b^2 - c^2)(a^2 - b^2)} \\ p^2 &= -\frac{(V_1^2 - c^2)(V_2^2 - c^2)}{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (544).$$

Wyprowadzimy jeszcze wzór na sumę następującą, która będzie nam później potrzebna:

$$\frac{m^2}{(V_1^2 - a^2)^2} + \frac{n^2}{(V_1^2 - b^2)^2} + \frac{p^2}{(V_1^2 - c^2)^2} = \sigma.$$

Sumę tę możemy otrzymać w sposób następujący: Z pierwszego z wzorów (544) wynika:

$$\begin{aligned} \frac{m^2}{V_1^2 - a^2} &= -\frac{V_2^2 - a^2}{(a^2 - b^2)(c^2 - a^2)} = -\frac{V_2^2 - V_1^2 + V_1^2 - a^2}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)} (b^2 - c^2) = \\ &= -\left[\frac{V_2^2 - V_1^2}{A} + \frac{V_1^2 - a^2}{A} \right] (b^2 - c^2), \end{aligned}$$

gdzie przez skrócenie oznaczyliśmy:

$$A = (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2) = -a^2 b^2 (a^2 - b^2) - b^2 c^2 (b^2 - c^2) - c^2 a^2 (c^2 - a^2).$$

A więc:

$$\frac{m^2}{(V_1^2 - a^2)^2} = -\frac{b^2 - c^2}{A} - \frac{V_2^2 - V_1^2}{A} \cdot \frac{b^2 - c^2}{V_1^2 - a^2}.$$

W ten sam sposób otrzymamy:

$$\frac{n^2}{(V_1^2 - b^2)^2} = -\frac{c^2 - a^2}{A} - \frac{V_2^2 - V_1^2}{A} \cdot \frac{c^2 - a^2}{V_1^2 - b^2}$$

$$\frac{p^2}{(V_1^2 - c^2)^2} = -\frac{a^2 - b^2}{A} - \frac{V_2^2 - V_1^2}{A} \cdot \frac{a^2 - b^2}{V_1^2 - c^2}$$

Dodając te równania, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{V_2^2 - V_1^2}{A} \left(\frac{b^2 - c^2}{V_1^2 - a^2} + \frac{c^2 - a^2}{V_1^2 - b^2} + \frac{a^2 - b^2}{V_1^2 - c^2} \right) = \\ &= -\frac{V_2^2 - V_1^2}{AP} [(b^2 - c^2)(V_1^2 - b^2)(V_1^2 - c^2) + \end{aligned}$$

$$(c^2 - a^2)(V_1^2 - c^2)(V_1^2 - a^2) + (a^2 - b^2)(V_1^2 - a^2)(V_1^2 - b^2)],$$

gdzie $P = (V_1^2 - a^2)(V_1^2 - b^2)(V_1^2 - c^2)$.

Po wykonaniu działań wskazanych, po stronie drugiej równania, otrzymamy:

$$\sigma = - \frac{V_2^2 - V_1^2}{AP} [b^2 a^2 (a^2 - b^2) + b^2 c^2 (b^2 - c^2) + c^2 a^2 (c^2 - a^2)] ,$$

czyli:

$$\sigma = \frac{m^2}{(V_1^2 - a^2)^2} + \frac{n^2}{(V_1^2 - b^2)^2} + \frac{p^2}{(V_1^2 - c^2)^2} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{P} \dots (p).$$

Przypuśćmy teraz, że $a > b > c$ i $V_1 > V_2$, wtedy z wzoru (544) z łatwością wyprowadzimy wniosek, że ilości m^2, n^2 i p^2 mogą być dodatnimi tylko gdy istnieje nierówność:

$$a > V_1 > b > V_2 > c \dots (545).$$

Dla każdego z dwóch pierwiastków V_1^2 i V_2^2 równania (543) otrzymamy wartości odpowiednie dostaw ξ, η i ζ z równań (541). Tak np. gdy oznaczymy przez ξ_1, η_1 i ζ_1 wartości, odpowiadające pierwiastkowi V_1^2 i przez ξ_2, η_2 i ζ_2 wartości, odpowiadające pierwiastkowi V_2^2 , otrzymamy:

$$\begin{aligned} (c^2 n^2 + b^2 p^2) \xi_1 - c^2 mn \eta_1 - b^2 mp \zeta_1 &= V_1^2 \xi_1 \\ (a^2 p^2 + c^2 m^2) \eta_1 - a^2 np \zeta_1 - c^2 nm \xi_1 &= V_1^2 \eta_1 \\ (b^2 m^2 + a^2 n^2) \zeta_1 - b^2 pm \xi_1 - a^2 pn \eta_1 &= V_1^2 \zeta_1. \end{aligned}$$

Mnożąc te równania kolejno przez ξ_2, η_2 i ζ_2 i dodając, otrzymamy:

$$\begin{aligned} (c^2 n^2 + b^2 p^2) \xi_1 \xi_2 + (a^2 p^2 + c^2 m^2) \eta_1 \eta_2 + (b^2 m^2 + a^2 n^2) \zeta_1 \zeta_2 - \\ - a^2 np (\eta_1 \zeta_2 + \zeta_1 \eta_2) - b^2 pm (\zeta_1 \xi_2 + \xi_1 \zeta_2) - c^2 mn (\xi_1 \eta_2 + \eta_1 \xi_2) = \\ = V_1^2 (\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2). \end{aligned}$$

Ponieważ strona pierwsza równania ostatniego nie zmieni się gdy zastąpimy wskaźnik 1 wskaźnikiem 2 i odwrotnie, przeto strona druga musi mieć tę samą własność. Ponieważ zaś strona druga zmienia się, gdy za V_1^2 wstawimy V_2^2 , o ile nie przypuścimy, że $V_1 = V_2$, przeto musi współczynnik przy V_1^2 być równy zeru.

Dochodzimy więc do wniosku, że $\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2 = 0$, czyli, że kierunki drgań, rozchodzących się z prędkościami V_1 i V_2 , są do siebie *prostopadłe*.

Oznaczmy teraz prędkości rozchodzenia się drgań w kierunkach osi współrzędnych, przy uwzględnieniu nierówności (545).

Dla fali, biegnącej wzdłuż osi x -ów, mamy:

$$m^2 = 1, \quad n = 0 \quad \text{i} \quad p = 0 ;$$

z równań zaś (544) wynika: $V_1^2 = b^2$ i $V_2^2 = c^2$.

Równania (541) przyjmą postać:

$$V^2 \xi = 0, \quad (c^2 - V^2) \eta = 0 \quad \text{i} \quad (b^2 - V^2) \zeta = 0.$$

Gdy więc $V^2 = V_1^2 = b^2$, wtedy $\xi_1 = \eta_1 = 0$ i $\zeta_1 = \pm 1$, t. j. kierunek drgań jest równoległy do osi z -ów.

Jeżeli zaś $V^2 = V_2^2 = c^2$, to $\xi_2 = \zeta_2 = 0$ i $\eta_2 = \pm 1$, t. j. kierunek drgań jest równoległy do osi y -ów.

W ten sam sposób, przyjmując dla fali, biegnącej wzdłuż osi y -ów, $m = p = 0$ i $n^2 = 1$, otrzymamy:

$$V_1^2 = a^2, \quad \xi_1 = \eta_1 = 0, \quad \zeta_1 = \pm 1 \text{ (drgania wzdłuż osi } z)$$

$$V_2^2 = c^2, \quad \xi_2 = \zeta_2 = 0, \quad \eta_2 = \pm 1 \text{ („ „ „ } x).$$

Wreszcie dla fali, biegnącej wzdłuż osi z -ów, należy przyjąć: $m = n = 0$ i $p^2 = 1$ i wtedy otrzymamy:

$$V_1^2 = a^2, \quad \xi_1 = \zeta_1 = 0, \quad \eta_1 = \pm 1 \text{ (drgania wzdłuż osi } y)$$

$$V_2^2 = b^2, \quad \xi_2 = \pm 1, \quad \eta_2 = \zeta_2 = 0 \text{ („ „ „ } x).$$

Widzimy więc, że wzdłuż osi x biegną dwie fale: jedna o prędkości b , druga zaś o prędkości c . Drgania w pierwszej są równoległe do osi z , w drugiej zaś — do osi y .

Wzdłuż osi y biegną dwie fale o prędkościach c i a . W pierwszej, biegnącej z prędkością c , drgania są równoległe do osi x , w drugiej zaś — do osi z .

Wzdłuż osi z biegną również dwie fale: jedna o prędkości a i druga o prędkości b ; w pierwszej drgania są równoległe do osi y , w drugiej zaś — do osi x .

Przypuśćmy, że w badanym przez nas ośrodku krystalicznym istnieje środek wstrząśnięć. Po upływie jednej sekundy wstrząśnienia te dosięgną punktów pewnej powierzchni zamkniętej, otaczającej środek, która będzie powierzchnią fali. W celu oznaczenia tej powierzchni, należy wyobrazić sobie, że w danej chwili przez środek wstrząśnięć, który przyjmujemy za początek współrzędnych, przebiega nieskończenie wiele fal płaskich, we wszelkich możliwych kierunkach; nadto należy przedstawić sobie, że każda z tych fal płaskich posunęła się równoległe do siebie samej o drogę równą prędkości V jej rozchodzenia się i ustalić *powierzchnię powłóczącą* wszystkich tych płaszczyzn.

Równanie jednej z takich płaszczyzn, gdy się ona styka z powierzchnią szukaną (t. j. z falą), jest:

$$mx + ny + pz = V.$$

W równaniu tem m , n i p można oznaczyć z wzorów (544), a więc te dostawy są funkcjami parametrów V_1 i V_2 .

Zgodnie z teorią powierzchni powłóczących otrzymamy równanie powierzchni fali, rugując parametry V_1 i V_2 z trzech równań następujących:

$$\left. \begin{aligned} mx + ny + pz &= V_1 \\ x \frac{\partial m}{\partial V_1} + y \frac{\partial n}{\partial V_1} + z \frac{\partial p}{\partial V_1} &= 1 \\ x \frac{\partial m}{\partial V_2} + y \frac{\partial n}{\partial V_2} + z \frac{\partial p}{\partial V_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (546).$$

Dwa ostatnie z tych równań wyprowadzają się z pierwszego, przez różniczkowanie równania pierwszego względem V_1 i V_2 . Pochodne, wchodzące w te równania, otrzymać można z równań (544), a mianowicie:

$$\frac{\partial m}{\partial V_1} = -\frac{V_1}{m} \frac{V_2^2 - a^2}{(a^2 - b^2)(c^2 - a^2)} = \frac{V_1}{m} \frac{m^2}{V_1^2 - a^2} = \frac{m V_1}{V_1^2 - a^2}$$

$$\frac{\partial m}{\partial V_2} = \frac{m V_2}{V_2^2 - a^2}, \quad \frac{\partial n}{\partial V_1} = \frac{n V_1}{V_1^2 - b^2} \text{ i t. d.}$$

Wobec tego równania (546) przybierają postać:

$$\left. \begin{aligned} mx + ny + pz &= V_1 \\ \frac{mx}{V_1^2 - a^2} + \frac{ny}{V_1^2 - b^2} + \frac{pz}{V_1^2 - c^2} &= \frac{1}{V_1} \\ \frac{mx}{V_2^2 - a^2} + \frac{ny}{V_2^2 - b^2} + \frac{pz}{V_2^2 - c^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (547).$$

Rugując z tych równań parametry, należy uwzględnić, że V_1^2 i V_2^2 są pierwiastkami równania (543) i że m , n i p są funkcjami tych pierwiastków, oznaczonemi przez wzory (544).

Sposób zwykły, polegający na rugowaniu kolejnem najpierw jednego parametru, następnie zaś drugiego, nie może być zastosowany w danym przypadku, musimy więc uciec się do pewnego sposobu sztucznego.

Przyjmujemy:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{mk}{V_1^2 - a^2} + m V_1 \\ y &= \frac{nk}{V_1^2 - b^2} + n V_1 \\ z &= \frac{pk}{V_1^2 - c^2} + p V_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (548)$$

i staramy się tak dobrać ilość k , ażeby równania (548) uczyniły zadość równaniom (547).

Te wzory na x , y i z czynią zadość pierwszemu i trzeciemu z równań (547) przy dowolnem k , z powodu istnienia równań (n) i (o). Drugiemu zaś z równań (547) uczynimy zadość, gdy ilość k będzie równa

$$\frac{P}{V_1(V_2^2 - V_1^2)}.$$

Zamiast więc rugować parametry V_1 i V_2 z równań (547), wyrugujemy je z równań (548), przyjmując w nich:

$$k = \frac{P}{V_1(V_2^2 - V_1^2)} \cdot \dots \dots \dots \quad (q).$$

Podnosząc równania (548) do potęgi drugiej i dodając je, otrzymamy:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 = \left[\frac{m^2}{(V_1^2 - a^2)^2} + \frac{n^2}{(V_1^2 - b^2)^2} + \frac{p^2}{(V_1^2 - c^2)^2} \right] k^2 + V_1^2,$$

czyli na mocy równania (p):

$$\rho^2 - V_1^2 = \frac{V_2^2 - V_1^2}{P} k^2 = \frac{V_2^2 - V_1^2}{P} \cdot \frac{P^2}{V_1^2 (V_2^2 - V_1^2)^2} = \frac{P}{V_1^2 (V_2^2 - V_1^2)},$$

skąd wynika, że:

$$P = (\rho^2 - V_1^2) (V_2^2 - V_1^2) V_1^2 \dots \dots \dots \quad (r).$$

Ale moglibyśmy napisać i tak:

$$\rho^2 - V_1^2 = \frac{V_2^2 - V_1^2}{P} k \cdot k = \frac{V_2^2 - V_1^2}{P} \cdot \frac{P}{V_1 (V_2^2 - V_1^2)} k = \frac{k}{V_1},$$

skąd mamy:

$$k = (\rho^2 - V_1^2) V_1 \dots \dots \dots \quad (s).$$

Przy takiej wartości k pierwsze z równań (548) przyjmie postać:

$$x = m V_1 \left(\frac{\rho^2 - V_1^2}{V_1^2 - a^2} + 1 \right) = m V_1 \frac{\rho^2 - a^2}{V_1^2 - a^2},$$

czyli po podniesieniu do drugiej potęgi:

$$x^2 = m^2 V_1^2 \frac{(\rho^2 - a^2)^2}{(V_1^2 - a^2)^2}.$$

Stąd otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\rho^2 - a^2} &= \frac{m^2 V_1^2 (\rho^2 - a^2)}{(V_1^2 - a^2)^2} = \frac{m^2 V_1^2 (\rho^2 - V_1^2 + V_1^2 - a^2)}{(V_1^2 - a^2)^2} = \\ &= \frac{m^2 V_1^2 (\rho^2 - V_1^2)}{(V_1^2 - a^2)^2} + \frac{m^2 V_1^2}{V_1^2 - a^2}. \end{aligned}$$

W takiż sposób otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} &= \frac{n^2 V_1^2 (\rho^2 - V_1^2)}{(V_1^2 - b^2)^2} + \frac{n^2 V_1^2}{V_1^2 - b^2}, \\ \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} &= \frac{p^2 V_1^2 (\rho^2 - V_1^2)}{(V_1^2 - c^2)^2} + \frac{p^2 V_1^2}{V_1^2 - c^2}. \end{aligned}$$

Dodając te równania i uwzględniając równania (n) i (p), otrzymamy:

$$\frac{x^2}{\rho^2 - a^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = V_1^2 (\rho^2 - V_1^2) \frac{V_2^2 - V_1^2}{P}.$$

Strona druga tego równania, zgodnie z wzorem (r), równa się jedności; wobec tego *równanie powierzchni fali* jest:

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2 - b^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2 - c^2} = 1 \quad (549).$$

Równanie to, po usunięciu mianowników, przyjmuje postać:

$$(x^2 + y^2 + z^2) (a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) - [(b^2 + c^2) a^2 x^2 + (c^2 + a^2) b^2 y^2 + (a^2 + b^2) c^2 z^2] + a^2 b^2 c^2 = 0 \quad (550).$$

Pochodzenie geometryczne tej powierzchni rzędu czwartego, mającej środek w początku współrzędnych, jest następujące:

Weźmy elipsoidę:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

i przetnijmy ją płaszczyzną $mx + ny + pz = 0$, przechodzącą przez jej środek. W przecięciu otrzymamy elipsę o półosiach równych przypuśćmy α i β . Ze środka tej elipsy prowadzimy prostą, prostopadłą do jej płaszczyzny i odkładamy na niej z jednej i z drugiej strony, mierząc od środka, długości równe półosiom α i β . Postępując w taki sam sposób ze wszelkimi możliwymi płaszczyznami przecinającymi, przechodzącymi przez początek współrzędnych, otrzymamy szereg punktów, tworzących powierzchnię, wyznaczoną przez równanie (550).

Istotnie, niech R będzie odległością od początku współrzędnych punktu dowolnego elipsy, otrzymanej z przecięcia płaszczyzną $mx + ny + pz = 0$. Współrzędne tego punktu powinny czynić zadość następującym trzem równaniom:

$$\begin{aligned} R^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 &= 0 \\ mx + ny + pz &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $m^2 + n^2 + p^2 = 1$.

Punkty, leżące na końcach półosi tej elipsy, będą tymi, dla których R jest największe lub najmniejsze. Powinniśmy więc znaleźć maximum i minimum funkcji następującej:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \lambda^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) + \mu (mx + ny + pz).$$

Skoro pochodne tej funkcji względem współrzędnych przyrównamy do zera, to otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} 2x \left(1 - \frac{\lambda^2}{a^2} \right) + \mu m &= 0 \\ 2y \left(1 - \frac{\lambda^2}{b^2} \right) + \mu n &= 0 \\ 2z \left(1 - \frac{\lambda^2}{c^2} \right) + \mu p &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A).$$

Mnożąc te równania kolejno przez x , y i z i dodając, otrzymamy:

$$x^2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{a^2} \right) + y^2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{b^2} \right) + z^2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{c^2} \right) = 0, \text{ czyli}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) = \lambda^2 = R^2.$$

A więc λ jest R_{\max} albo R_{\min} .

Wiedząc to, otrzymujemy z równań (A):

$$x = \frac{1}{2} \mu \frac{ma^2}{\lambda^2 - a^2}, \quad y = \frac{1}{2} \mu \frac{nb^2}{\lambda^2 - b^2}, \quad z = \frac{1}{2} \mu \frac{pc^2}{\lambda^2 - c^2}.$$

Wprowadzając to w równanie płaszczyzny przecinającej, otrzymamy:

$$\frac{m^2 a^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{n^2 b^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{p^2 c^2}{\lambda^2 - c^2} = 0 \dots \dots \dots (B).$$

Z tego równania kwadratowego względem λ^2 widzimy, że każdej płaszczyźnie przecinającej, wyznaczonej przez dostawy m , n i p , odpowiadają dwie rozmaite wartości λ^2 .

Oznaczmy przez X , Y i Z współrzędne punktu, leżącego na końcu długości λ , odciętej na normalnej do płaszczyzny przecinającej. Wtedy otrzymamy:

$$m = \frac{X}{\lambda}, \quad n = \frac{Y}{\lambda} \quad \text{i} \quad p = \frac{Z}{\lambda}.$$

Wobec tego równanie (B) przyjmie postać:

$$a^2 X^2 (\lambda^2 - b^2) (\lambda^2 - c^2) + b^2 Y^2 (\lambda^2 - c^2) (\lambda^2 - a^2) +$$

$$+ c^2 Z^2 (\lambda^2 - a^2) (\lambda^2 - b^2) = 0, \text{ czyli}$$

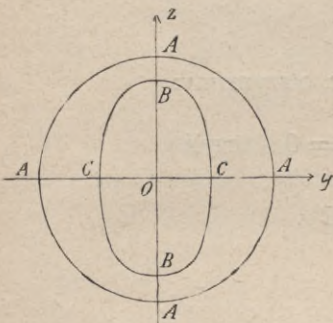
$$(a^2 X^2 + b^2 Y^2 + c^2 Z^2) \lambda^4 - [a^2 (b^2 + c^2) X^2 + b^2 (c^2 + a^2) Y^2 +$$

$$+ c^2 (a^2 + b^2) Z^2] \lambda^2 + a^2 b^2 c^2 (X^2 + Y^2 + Z^2) = 0.$$

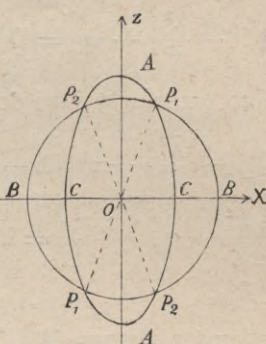
Że jednak $X^2 + Y^2 + Z^2 = \lambda^2$, przeto możemy podzielić równanie ostatnie przez λ^2 , poczem otrzymamy równanie (550) powierzchni fali.

Ta powierzchnia nazywa się *powierzchnią Fresnel'a*. Przecinając tę powierzchnię płaszczyznami współrzędnych, otrzymujemy krzywe, wyznaczone przez równania następujące:

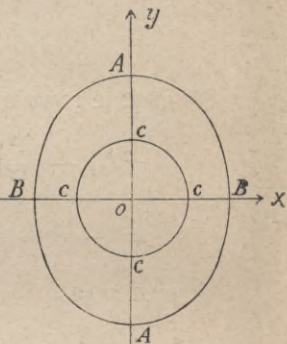
$$\left. \begin{aligned} z \text{ płaszczyzną } (yz) : (y^2 + z^2 - a^2) (b^2 y^2 + c^2 z^2 - b^2 c^2) &= 0 \\ ,, \quad (zx) : (z^2 + x^2 - b^2) (c^2 z^2 + a^2 x^2 - c^2 a^2) &= 0 \\ ,, \quad (xy) : (x^2 + y^2 - c^2) (a^2 x^2 + b^2 y^2 - a^2 b^2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (551).$$



Rys. 30.



Rys. 31.



Rys. 32.

Krzywe te są to elipsy i okręgi, wskazane na rys. 30, 31 i 32, w których $OA = a$, $OB = b$ i $OC = c$.

Z przecięcia z płaszczyzną (zx) widać, że powierzchnia fali składa się z dwóch powierzchni zamkniętych, wstawionych jedna w drugą i mających tylko cztery punkty wspólne: P_1, P_1, P_2 i P_2 (rys. 31).

Proste P_1P_1 i P_2P_2 zowią się *osiąmi optycznymi kryształu*. Przez położenie osi optycznych wyznaczone jest zupełnie dokładnie położenie *osi krystalicznych*, czyli osi współrzędnych x, y i z . Istotnie, oś y jest prostopadłą do osi optycznych, osie zaś x i z są dwusiecznymi (współsięcznymi) kątów, utworzonych przez osie optyczne.

Punkty P_1 i P_2 dla powierzchni zarówno zewnętrznej, jak i wewnętrznej, są to *punkty ombilikalne*, ponieważ styczne w każdym z tych czterech punktów tworzą nie płaszczyznę, lecz stożek.

Współrzędne ombilik są:

$$x_0 = \pm c \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = \pm a \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}. \quad (552).$$

Gdy $a = b$, otrzymujemy zamiast czterech ombilik tylko dwie, leżące na osi z . W tym przypadku równanie powierzchni fali będzie:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) [a^2 (x^2 + y^2) + c^2 z^2 - a^2 c^2] = 0.$$

Równanie to daje kulę o promieniu a (powierzchnia zewnętrzna) i elipsoidę obrotową około osi z (powierzchnia wewnętrzna).

Gdy $b = c$, wtedy znowu zamiast czterech ombilik mamy tylko dwie, leżące na osi x , a równanie powierzchni fali będzie:

$$\cdot (x^2 + y^2 + z^2 - b^2) [a^2 x^2 + b^2 (y^2 + z^2) - a^2 b^2] = 0.$$

W tym więc przypadku powierzchnia fali jest powierzchnią kuli o promieniu b (powierzchnia wewnętrzna) i elipsoidy obrotowej około osi x (powierzchnia zewnętrzna).

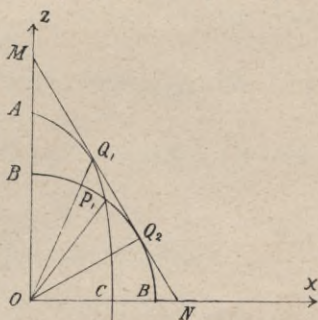
W każdym z tych przypadków szczególnych kryształ ma nie dwie, lecz tylko jedną oś optyczną.

Gdy zaś $a = b = c$, powierzchnia fali staje się zupełnie kulistą, co zachodzi w ośrodku równozwrotnie sprężystym.

Wszystkie zjawiska załamania podwójnego promieni w kryształach dwuosiowych i jednoosiowych, można wyjaśnić własnościami powierzchni fali zapomocą wykresień Huyghens'a.

Nie będziemy tu rozważali wszystkich tych zjawisk, gdyż to wchodzi w zakres optyki, nie zaś teorii sprężystości, lecz zwrócimy jednak uwagę na dwa zjawiska następujące, wynikające z własności powierzchni fali.

Prowadzimy wspólną styczną MN do krzywych otrzymanych z przecięcia fali płaszczyzną (zx) (rys. 33) i przez tę styczną prowadzimy płaszczyznę równoległą do osi y , wtedy możemy dowieść, że ta płaszczyzna będzie się stykała z powierzchnią fali po okręgu, którego średnica równa się odległości $Q_1 Q_2$ punktów styczności Q_1 i Q_2 . Takich płaszczyzn stycznych do powierzchni fali możemy przeprowadzić cztery.



Rys. 33.

Równanie płaszczyzny MN jest:

$$x \sqrt{a^2 - b^2} + z \sqrt{b^2 - c^2} = b \sqrt{a^2 - c^2}, \quad \text{czyli}$$

$$x \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} + z \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} = \frac{x_0}{c} x + \frac{z_0}{a} z = b. \quad (553);$$

współrzędne zaś punktów Q_1 i Q_2 są:

$$x_1 = \frac{c^2}{b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} = \frac{c}{b} x_0, \quad z_1 = \frac{a^2}{b} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} = \frac{a}{b} z_0$$

$$x_2 = b \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} = \frac{b}{c} x_0, \quad z_2 = b \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} = \frac{b}{a} z_0,$$

skąd otrzymujemy: $x_0^2 = x_1 x_2$ i $z_0^2 = z_1 z_2$; t. j. współrzędne ombiliki P_1 są to średnie geometryczne współrzędnych punktów Q_1 i Q_2 .

Jeżeli wypilowalibyśmy z kryształu płytkę tak, ażeby płaszczyzny ograniczające płytkę były równoległe do płaszczyzny MN , to promień światła, padając na taką płytkę prostopadle, po wyjściu z niej utwo-

rzyłby walec kołowy, a więc na ekranie zamiast punktu jasnego ujawniłby się jasny okrąg, którego średnica byłaby jednakowa dla wszystkich odległości ekranu od płytki. Z powodu tej własności kryształu układu dwuosowego, kierunek prostej OQ_2 , prostopadłej do MN , nazwano *osią załamania walcowego*. Takich osi ma kryształ układu dwuosowego dwie.

Jeżelibyśmy zaś wycięli płytkę, o ścianach prostopadłych do osi optycznej OP_1 , to promień światła, padający na ścianę płytki prostopadle, po wyjściu z niej, utworzyłby stożek, a więc na ekranie zamiast punktu jasnego otrzymalibyśmy jasny okrąg, którego średnica powiększałaby się w miarę wzrastania odległości ekranu od płytki. Z powodu tej własności, osi optyczne kryształów układu dwuosowego zwane są *osiami załamania stożkowego*.

Obie te własności wyprowadził Hamilton z równania powierzchni Fresnel'a i obie stwierdzono przez doświadczenia.

Równania zasadnicze statyki cieczy i dynamiki cieczy.

107. Zastosowania teorii sprężystości zakończymy, wskazując w jaki sposób wzory tej teorii mogą służyć do wyprowadzenia równań zasadniczych statyki cieczy i dynamiki cieczy.

Ażeby otrzymać te równania zasadnicze równowagi i ruchu ciała ciekłego, należy poprzednio dać określenie cieczy.

Ciałem ciekłym nazywać będziemy takie ciało, w którego materiale nie mogą pojawiać się siły styczne sprężystości.

Przyjmując w założeniu tę własność cieczy, musimy zarazem dla cieczy przyjąć:

$$p_{yz} = p_{zx} = p_{xy} = 0. \quad \dots \quad (a).$$

Wzory więc zasadnicze (55) i (56) przyjmują dla cieczy postać:

$$p_{ns} = p_{xx} \cos(n, x) \cos(s, x) + p_{yy} \cos(n, y) \cos(s, y) + \\ + p_{zz} \cos(n, z) \cos(s, z) \\ p_{nn} = p_{xx} \cos^2(n, x) + p_{yy} \cos^2(n, y) + p_{zz} \cos^2(n, z).$$

Skoro wprowadzimy warunek, że kierunki n i s są do siebie prostopadłe, czyli, że siła p_{ns} jest siłą styczną sprężystości, to otrzymamy:

$$p_{xx} \cos(n, x) \cos(s, x) + p_{yy} \cos(n, y) \cos(s, y) + p_{zz} \cos(n, z) \cos(s, z) = 0 \\ \cos(n, x) \cos(s, x) + \cos(n, y) \cos(s, y) + \cos(n, z) \cos(s, z) = 0.$$

Ponieważ ostatnie dwa równania muszą istnieć przy wszelkich kierunkach n i s , przeto jest:

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz},$$

wobec czego z wzoru na siłę p_{nn} otrzymamy:

$$p_{nn} = p_{xx} [\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y) + \cos^2(n, z)] = p_{xx}, \quad \text{czyli} \\ p_{nn} = p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} \quad \dots \quad (b).$$

Jeśli więc wewnątrz ciała ciekłego mogą ujawniać się tylko siły normalne sprężystości, to siły te w danym punkcie cieczy muszą być

jednakowe dla wszystkich płaszczyzn, jakie można przeprowadzić przez ten punkt.

Jeżeli zaś postawimy jeszcze warunek, że te siły normalne, jednakowe dla wszystkich płaszczyzn w danym punkcie, są siłami odpychającymi, to jesteśmy zmuszeni przyjąć:

$$p_{nn} = p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p \dots \dots \dots (c).$$

Gdy zachodzi równowaga cieczy, siłę p nazywamy *ciśnieniem hydrostatycznym*.

Zwracamy się teraz do równań ogólnych równowagi ciała sprężystego (równ. 47) i przyjmujemy w nich siły styczne za równe zero, normalne zaś za równe $-p$; wówczas otrzymujemy następujące *równania ogólne równowagi cieczy*:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z \dots \dots \dots (554),$$

w których ρ oznacza masę jednostki objętości cieczy.

Z tych równań otrzymujemy następujące równanie różniczkowe, służące do oznaczenia ciśnienia hydrostatycznego:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \partial x + \frac{\partial p}{\partial y} \partial y + \frac{\partial p}{\partial z} \partial z = dp = \rho (X \partial x + Y \partial y + Z \partial z). \quad (555).$$

Całkując zaś to równanie, otrzymamy:

$$p = \int \rho (X \partial x + Y \partial y + Z \partial z) + C. \dots \dots \dots (556).$$

Równania szczególne równowagi (równ. 49) przyjmą dla ciała ciekłego postać:

$$\begin{aligned} P \cos (P, x) &= -p \cos (n, x) \\ P \cos (P, y) &= -p \cos (n, y) \\ P \cos (P, z) &= -p \cos (n, z) \end{aligned}$$

skąd:

$$\begin{aligned} P = p, \quad \cos (P, x) &= -\cos (n, x), \quad \cos (P, y) = -\cos (n, y), \\ \cos (P, z) &= -\cos (n, z). \end{aligned}$$

Ciśnienie więc zewnętrzne na jednostkę powierzchni, ograniczającej ciecz, musi w każdym punkcie tej powierzchni być równe ciśnieniu hydrostatycznemu, istniejącemu w tym punkcie i musi mieć kierunek normalnej wewnętrznej do powierzchni.

108. Równania ruchu ciała ciekłego otrzymujemy z równań równowagi, wprowadzając w nie wyrazy, zależne od siły bezwładności cząstki ciała ciekłego, dla której mamy oznaczyć równanie ruchu.

Oznaczmy przez u, v i w rzuty na osie współrzędnych prędkości

cząstki, której współrzędne w chwili t są: x, y i z . Rzuty na osie współrzędnych przyspieszenia siły bezwładności tej cząstki będą:

$$-\frac{du}{dt}, \quad -\frac{dv}{dt} \quad \text{i} \quad -\frac{dw}{dt}.$$

Tworząc wyrazy dla tych pochodnych musimy uwzględnić, że prędkości cząstki otrzymują przez przeciąg czasu dt przyrosty, nie tylko wskutek tego, że czas się zmieniał, ale i z powodu, że zmieniały się współrzędne cząstki. Przyrost więc np. prędkości u , będzie:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \partial x + \frac{\partial u}{\partial y} \partial y + \frac{\partial u}{\partial z} \partial z + \frac{\partial u}{\partial t} \partial t.$$

Tu $\partial x, \partial y$ i ∂z są to nieskończenie małe przyrosty współrzędnych cząstki cieczy, t. j. jej posunięcia rzeczywiste w kierunku każdej z osi współrzędnych x, y i z . Wskutek tego posunięcia te należy oznaczyć w sposób następujący:

$$\partial x = u \partial t, \quad \partial y = v \partial t \quad \text{i} \quad \partial z = w \partial t.$$

Na pochodną zupełną prędkości u względem czasu otrzymujemy równanie:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t} \dots \dots \dots (557),$$

gdzie $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ i $\frac{\partial u}{\partial t}$ są to pochodne cząstkowe prędkości u .

W takiż sposób możemy oznaczyć pochodne zupełne $\frac{dv}{dt}$ i $\frac{dw}{dt}$.

Jeżeli więc w równania (554) wprowadzimy wyrazy, zależne od siły bezwładności, to otrzymamy następujące równania ruchu cieczy, znane w dynamice cieczy pod nazwą równań Euler'a.

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w + \frac{\partial v}{\partial t} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w + \frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned} \right\} \dots \dots (558).$$

Do tych równań dołączane jest jeszcze jedno równanie, wynikające z warunku, że masa cząstki cieczy, podczas ruchu po swojej trajektorii, się nie zmienia. Równanie to można otrzymać w sposób następujący:

Za cząstkę objętości cieczy przyjmujemy objętość nieskończenie małego równoległoscianu, o krawędziach równoległych do osi współrzędnych. Długości tych krawędzi niech będą: $\delta x, \delta y$ i δz . Przypuśćmy, że cała objętość tego równoległoscianu jest zupełnie zapełniona

cieczą, wtedy dla masy cząstki cieczy otrzymamy: $\rho \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$. Warunek, że masa ta podczas ruchu się nie zmienia, może być wyrażony przez równanie:

$$\frac{d(\rho \delta x \delta y \delta z)}{dt} = \rho \frac{d(\delta x \delta y \delta z)}{dt} + \delta x \delta y \delta z \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Jednakże:

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta x \delta y \delta z)}{dt} &= \delta y \delta z \frac{d\delta x}{dt} + \delta z \delta x \frac{d\delta y}{dt} + \delta x \delta y \frac{d\delta z}{dt} = \\ &= \delta x \delta y \delta z \left[\frac{d\delta x}{\delta x dt} + \frac{d\delta y}{\delta y dt} + \frac{d\delta z}{\delta z dt} \right] = \\ &= \delta x \delta y \delta z \left[\frac{\delta dx}{\delta x dt} + \frac{\delta dy}{\delta y dt} + \frac{\delta dz}{\delta z dt} \right] = \\ &= \delta x \delta y \delta z \left[\frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left(\frac{dy}{dt} \right) + \frac{\delta}{\delta z} \left(\frac{dz}{dt} \right) \right] = \\ &= \delta x \delta y \delta z \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] = \\ &= \delta x \delta y \delta z \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]. \end{aligned}$$

Równanie więc, które dołączyć należy do równań (558), jest:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \dots \quad (559),$$

gdzie:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w + \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Gdy ciecz jest jednorodną, należy przyjąć $\frac{d\rho}{dt} = 0$, a równanie (559) dla takiej cieczy przyjmuje postać:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots \quad (560)$$

i wyraża warunek, że rozprzestrzenialność cząstek cieczy równa jest zeru, t. j. że objętość cząstek podczas ich ruchu się nie zmienia.

Gdy płyn jest nie cieczą lecz ciałem lotnym, do równań (558) i (559) dołączane jest nadto równanie, zwane *równaniem znamienne* ciał lotnych (gazów). Równanie to jest:

$$\rho = k p \quad \dots \quad (561),$$

gdzie k jest to pewien współczynnik, zależny od temperatury.

109. Równania ruchu Euler'a są ważne tylko dla tak zwanych *cieczy doskonałych*, wewnątrz których, podczas ruchu, nie pojawia się tarcie między cząstkami. Ażeby otrzymać równania ruchu cieczy, istniejących rzeczywiście w przyrodzie, należy do równań Euler'a wprowadzić wyrazy, zależne od tarcia wewnętrznego cząstek cieczy.

W celu oznaczenia postaci wyrazów, które należy wprowadzić do równań Euler'a, powinniśmy znać prawa, którym podlegają tarcia wewnętrzne. Prawa te można wyprowadzić tylko drogą doświadczeń. Gdy niema dostatecznych danych z doświadczeń, a to właśnie zachodzi co do tarcia wewnętrznego cieczy, należy z konieczności poprzestać na hipotezach i doświadczeniami sprawdzać wyniki, otrzymane z tych hipotez. Hypotezę co do tarcia o siebie cząstek ciała ciekłego podał Newton. Zgodnie z tą hipotezą *tarcie wewnętrzne, istniejące między dwiema cząstkami sąsiednimi cieczy, jest funkcją liniową prędkości względnej tych cząstek.*

Ponieważ rzuty prędkości względnej na osie współrzędnych są funkcjami liniowymi pochodnych cząstkowych $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ i t. p., przeto zgodnie z hipotezą Newton'a powinniśmy tarcia wewnętrzne cieczy uważać za funkcye liniowe tych pochodnych. Zależność ta jest więc taka sama, jak zależność sił sprężystości od odkształceń składowych ciała sprężystego, przy nieznacznem odkształceniu tego ciała.

Jeżeli nie uwzględniamy tarcia cząstek cieczy, to, jak widzieliśmy, powinniśmy dla ciała ciekłego przyjąć:

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p, \quad p_{yz} = p_{zx} = p_{xy} = 0.$$

Jeżeli zaś uwzględnimy tarcie, to przypuścimy, że będziemy mieli:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= -p + \pi_{xx}, & p_{yy} &= -p + \pi_{yy}, & p_{zz} &= -p + \pi_{zz}, \\ p_{yz} &= \pi_{yz}, & p_{zx} &= \pi_{zx} & \text{ i } & p_{xy} = \pi_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (562).$$

Oczywiście, przy takich oznaczeniach, siły $\pi_{xx}, \dots, \pi_{yz}, \dots$ przedstawiają naprężenia na ścianach równoległościannu cząstkowego, wziętego wewnątrz cieczy, pochodzące od tarcia.

Uważając zaś ciecz za upodobnioną do ciała równozwrotnie sprężystego, otrzymamy:

$$\pi_{xx} = \frac{E}{1+\mu} \left[\frac{\mu \theta}{1-2\mu} + \frac{\partial u}{\partial x} \right] = B' \theta + 2B \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\pi_{yy} = B' \theta + 2B \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\pi_{zz} = B' \theta + 2B \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\pi_{yz} = B \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \pi_{zx} = B \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \pi_{xy} = B \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right);$$

$$\text{gdzie } \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Mając te wzory, możemy z łatwością napisać równania ruchu cieczy. Pierwsze z tych równań jest:

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} + \rho X = \rho \frac{du}{dt}.$$

Równanie to, gdy w niem za siły p_{xx} , p_{xy} i p_{xz} podstawimy ich wartości z równań (562), przyjmie postać:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + B' \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + \rho X = \rho \frac{du}{dt},$$

czyli

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + B \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (B+B') \frac{\partial \theta}{\partial x} + \rho X = \rho \frac{du}{dt}.$$

Dla cieczy, t. j. gdy $\theta = 0$, otrzymujemy równania ruchu, wyprowadzone przez Navier'a:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{B}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &= \frac{du}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{B}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) &= \frac{dv}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{B}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) &= \frac{dw}{dt} \end{aligned} \right\} \dots (563).$$

Ilość B , wchodząca w te równania, nazywa się *współczynnikiem tarcia wewnętrznego cieczy*. Wielkość liczebna tego współczynnika dla rozmaitych cieczy jest różna i zależna od temperatury cieczy.



SKOROWIDZ ALFABETYCZNY.

Liczba przy wyrazie podana w nawiasie oznacza numer porządkowy dzieła; liczby zaś podane nie w nawiasach oznaczają stronicę dzieła, przyczem miejsca, w których głównie o danym przedmiocie jest mowa lub gdzie podano określenie danego pojęcia, wyróżniano cyframi grubszymi (czcionkami tłustymi). — Wyrazy, użyte w dziele, jako już skądinąd znane, o ile weszły do skorowidza, podane są bez liczb. p. = patrz.

Akord (96); Akkord; accord; акордъ; **230**.
Amplituda drgań (długość drgań, rozмах drgań) (96); Amplitude der Schwingungen; amplitude d'oscillation; амплитуда колебаний (размахъ колебаний); **229**.

Argument ciała odkształcanego p. odkształcenie składowe.

Barwa instrumentu p. dźwięczność.

Belka; Träger, Balken; poutre; брусъ, балка.

Belka ciągła p. belka wieloprzęstowa.

Belka wieloprzęstowa (ciągła) (66) i (67); kontinuierlicher Träger; poutre continue; многопролетный брусъ; **135—142**.

Bezładność (2); Trägheit (Beharrungsvermögen); inertie; инерція; 5.

Bryła obrotowa (75); Umdrehungskörper, Rotationskörper; corps de rotation; тѣло вращения; 159.

Ciało ciekłe p. ciecz.

Ciało doskonałe sprężyste (20); vollkommen elastischer Körper; corps parfaitement élastique; упругое тѣло; **31—35**.

Ciało izotropowe p. ciało jednolite.

Ciało izotropowo-sprężyste p. ciało równo-zwrotne sprężyste.

Ciało jednolite (izotropowe) (39), (40), (44); isotroper Körper; corps isotrope; изотропное тѣло; 76, 80, 87.

Ciało jednorodne (106); homogener Körper; corps homogène; однородное тѣло; 271.

Ciało lotne (gaz) (108); gasförmiger Körper; corps gazeux; газообразная жидкость; **288**.

Ciało niejednorodne; heterogener Körper; corps hétérogène; неоднородное тѣло.

Ciało niesprężyste; unelastischer Körper; corps dénué d'élasticité; неупругое тѣло.

Ciało płynne p. płyn.

Ciało o wytrzymałości jednostajnej (ciało wytrzymałości stałej) (43), (75); Körper von gleicher Festigkeit; pièce d'égalé résistance; тѣло равнаго сопротивления; **83—86, 158—160**.

Ciało równozwrotne sprężyste, ciało równozwrotne o sprężystości stałej (ciało izotropowo-sprężyste) (29), (31), (105); isotroper elastischer Körper; corps isotrope élastique; тѣло изотропно-упругое; **55, 58—60, 265—270**.

Ciało sprężyste (26); elastischer Körper; corps élastique; упругое тѣло; **45**.

Ciało stałe; fester Körper; corps solide; твердое тѣло

Ciało sztywne (13); starrer Körper; corps rigide; жесткое тѣло; 15—16.

Ciągnienie p. rozciąganie.

Ciecz (ciało ciekłe) (108); tropfbare Flüssigkeit; corps liquide; капельная жидкость; **285—288**.

Ciecz doskonała (109); vollkommene Flüssigkeit; liquide parfait; совершенная жидкость; **288**.

Ciężar; Gewicht; poids; вѣсъ.

Ciśnienie p. ściskanie.

Ciśnienie boczne; Seitendruck; pression sur la paroi; боковое давление.

Ciśnienie hydrostatyczne (107); hydrostatischer Druck; pression hydrostatique; гидростатическое давление; **286**.

Cząsteczka (molekuł) (1), Molekül; molécule; частичца (молекуль) **3**.

Cząstka (element) (10), (14); Element; élément; элементъ 10, 11, 12.

Czworościan cząstkowy (elementarny) (21); Elementartetraëder; tétraèdre élémentaire; элементарный тетраэдръ; 35.
 Deformacja p. odkształcenie.
 Długość drgania p. amplituda drgań.
 Długość fali; Wellenlänge; longueur de l'onde; длина волны.
 Dno (92); Boden; fond; днище; 211.
 Drag (dźwignia); Hebel; levier; рычагъ.
 Drag dwuramienny (88); zweiarmliger (doppelarmiger) Hebel; levier à deux branches; двухплечный рычагъ; 198
 Drganie (95); Schwingung; vibration; колебание, вибрація; 222.
 Drgania izochroniczne (105); isochrone Schwingungen; vibrations isochrones; изохроническія колебания; 265.
 Drganie podłużne (96), (105); Longitudinalschwungung; vibration longitudinale; продольное колебание; 227; 268
 Drganie poprzeczne (96), (105); Transversalschwungung; vibration transversale; поперечное колебание; 227; 268; 271.
 Dynamika; Dynamik; dynamique; динамика.
 Dynamika cieczy (hydrodynamika) (107); Hydrodynamik; hydrodynamique; гидродинамика; 285—290.
 Dźwięczność (barwa) instrumentu (96); Klangfarbe; timbre; звучность, тембръ; 231.
 Dźwignia p. drag.
 Element p. cząstka.
 Elipsa centralna (54); Centraellipse; ellipse centrale; центральный эллипс 117.
 Elipsoida obrotowa (16); Rotationsellipsoid; ellipsoïde de rotation; эллипсоидъ вращения; 22.
 Elipsoida sprężystości (23), (39); Elasticitätsellipsoid; ellipsoïde d'élasticité; эллипсоидъ упругости; 38, 39, 77.
 Elipsoida wydłużenia (16), (39); Dehnungsellipsoid; ellipsoïde d'allongement; эллипсоидъ растяжений; 19, 20, 77.
 Energia kinetyczna (siła żywa, rozmach); kinetische Energie (lebendige Kraft); énergie cinétique (force vive); живая сила.
 Fala; Welle; onde; волна.
 Fala kulista (powierzchnia falowa) (105); sphärische Welle; Wallenfläche; onde sphérique, surface d'onde; сферическая волна; 265.
 Fala płaska (105); ebene Welle; onde plane; плоская волна; 265.
 Faza drgania; Schwingungsphase; phase de la vibration; фаза колебания.
 Faza ruchu (105); Bewegungsphase; phase du mouvement; фаза движения; 265.
 Gęstość (20); Dichte; densité; плотность 34.

Graniastosłup Prisma; prisme; призма.
 Hydrodynamika p. dynamika cieczy.
 Hydrostatyka p. statyka cieczy.
 Hyperboloïda dwupowłokowa (16); zweischaliges Hyperboloïd; hyperboloïde bivalve; двуполый гиперболоидъ; 21.
 Hyperboloïda jednowłokowa (16); einschaliges Hyperboloïd; hyperboloïde univalve; однополый гиперболоидъ; 21.
 Hyperboloïda obrotowa (16), (39); Rotationshyperboloïde; hyperboloïde de rotation; гиперболоидъ вращения; 22, 77.
 Hyperboloïdy sprzężone (16); conjugirte Hyperboloïde; hyperboloïdes conjugués; сопряженные гиперболоиды; 21.
 Inwariant p. niezmiennik.
 Izotropia p. jednolitość.
 Jednolitość (40), (65); Isotropie; isotropie; изотропія; 80, 135.
 Kąt skręcenia (46); Verdrehungswinkel; angle de torsion, torsionnement; уголъ кручения, 93.
 Kąt tarcia; Reibungswinkel; angle de friction; уголъ тренія.
 Kierownica; Leitlinie, Directrix; directrice; направляющая кривая, директрисса.
 Kierunek główny; Hauptrichtung; direction principale; главное направление.
 Kierunek wydłużenia głównego (16); Richtung der Hauptdehnung; direction d'allongement principale; направление главного растяжения; 20.
 Krzywizna; Krümmung; courbure; кривизна.
 Kwinta (96); Quinte; quinte; квинта; 230.
 Linia elastyczna p. linia wygięcia.
 Linia węzłowa (linia węzłów) (99); Knotenlinie; ligne des noeuds; узловая линия; 242.
 Linia wygięcia (linia elastyczna, oś odkształcona) (55); Biegungslinie, elastische Linie; ligne élastique; эластическая (упругая) кривая; 121.
 Materia p. tworzywo.
 Materiały budowlane; Bustoffe, Baumaterialien; materiaux; строительные материалы.
 Moduł sprężystości p. współczynnik sprężystości.
 Molekuł p. cząsteczka.
 Moment bezwładności (49a); Trägheitsmoment; moment d'inertie; моментъ инерціи; 104—106.
 Moment biegunowy bezwładności przekroju (46), (49a); polares Trägheitsmoment des Querschnittes; moment d'inertie polaire de la section; полярный моментъ инерціи поперечнаго сѣченія, 93, 106.
 Moment obrotu; Drehmoment, Drehungsmoment; moment de la rotation; моментъ вращения.

- Napężenie** (1) (p. nadto: siła sprężystości); Spannung; tension; напряжение **4**.
- Napężenie bezpieczne** (40); zulässige Spannung; charge de sécurité; безопасное натяжение; **79, 114**.
- Napężenie główne**; Hauptspannung; pression principale; главное натяжение.
- Napężenie normalne**; Normalspannung; Normalspannung; pression normale; нормальное натяжение.
- Napężenie stycznе**; Tangentialspannung; pression tangentielle; касательное натяжение.
- Nateżenie dźwięku** (96); Schallspannung; сила звука; **230**.
- Niezmiennik** (inwaryant) (17); Invariante; invariant; инвариант; **26**.
- Normalna** (19); Normale; normale; нормаль; **30**.
- Obciążenie** (57); Belastung; charge; нагрузка; **124**.
- Obciążenie równomierne** (jednostajne) (57); gleichmässige Belastung; charge uniformément répartie; равномерно распределенная нагрузка; **124**.
- Obertony** p. tonu harmoniczne.
- Obroty sprzężone**; conjugierte Rotationen; rotations conjuguées; сопряженные вращения.
- Obrot (ruch obrotowy)** (14); Rotation, Drehung; rotation; вращение **16**.
- Obszerność drgania** p. amplituda drgań.
- Oddziaływanie podpory** (odpór, reakcja) (59); Auflagerdruck, Stützdruck; réaction des appuis; реакция; **127**.
- Odkształcenie** (deformacja) (1); Formveränderung, Deformation; deformation; деформация; **4**.
- Odkształcenie składowe** (10), (11), (12); partielle Deformation; déformation composante; аргументъ тѣла **10, 11, 14, 49, 50, 53**.
- Odkształcenie sprężyste**; elastische Deformation; déformation élastique; упругая деформация.
- Odkształcenie trwałe**; bleibende Deformation; déformation permanente; неисчезающая деформация.
- Odpór** p. oddziaływanie podpory.
- Odruchanie** (1); Abstossung; répulsion; отталкивание **3**.
- Oktawa** (96); Oktave; octave; октава; **230**.
- Ombilika** (106); ombilic; омбиликъ **282 — 285**.
- Osi sprzężone obrotu**; conjugierte Rotationen; axes de rotation conjugués; сопряженные оси вращения.
- Oś bezwładności** (54); Trägheitsaxe; axe d'inertie; ось инерции; **118**.
- Oś główna bezwładności** (oś główna) (54); Hauptachse der Trägheit; axe principale d'inertie; главная ось инерции; **118**.
- Oś krystaliczna** (106); Krystallaxe; axe de cristall; кристаллическая ось; **282**.
- Oś mimośrodkowa** p. oś pozaśrodkowa.
- Oś obrotowa** (54); Drehungsachse; axe de rotation; ось вращения; **116**.
- Oś odkształcona** p. linia wygięcia.
- Oś optyczna** (106); optische Achse, Sehachse; axe optique; оптическая ось; **282**.
- Oś pozaśrodkowa** (mimośrodkowa) (49); excentriche Achse; axe excentrique; эксцентрическая ось; **103**.
- Oś refrakcyi** p. oś załamania.
- Oś skręcania pozaśrodkowa** (mimośrodkowa) (49); excentriche Torsionsachse; axe de torsion excentrique; эксцентрическая ось кручения **103**.
- Oś skręcania** (48); Torsionsachse, Drehungsachse; axe de torsion, ось кручения; **95**.
- Oś sprężystości** (23), (39); Elasticitätsaxe; axe d'élasticité; ось упругости; **38, 39, 77**.
- Oś swobodna obrotu** (54); freie Drehachse; axe permanente de rotation; ось добровольная (свободная) вращения; **117**.
- Oś załamania** (oś refrakcyi) (106); Strahlenbrechungsaxe; axe de réfraction; ось рефракции; **284**.
- Para sił**; Kräftepaar; couple de forces; пара сил.
- Parabola sześcienna** (56); kubische Parabel; parabole cube; кубическая парабола; **124**.
- Paraboloidea hyperboliczna** (49a); hyperbolisches Paraboloid; paraboloïde hyperbolique; гиперболіческій параболоидъ; **105**.
- Parametr** (48). Parameter; paramètre; параметръ **102**.
- Płyn** (ciało płynne) (108); Flüssigkeit; corps fluide; жидкость; **288**.
- Poślizg** p. przesunięcie.
- Potencjał siły** (28); Potential, Kräftefunktion; potentiel; потенциалъ силы. **49 52**.
- Powierzchnia falowa** p. fala kulista.
- Powierzchnia Fresnel'a** (106), **281**.
- Powierzchnia powłócząca** (106); огибаемая поверхность; **277**.
- Praca** (27); Arbeit; travail; работа; **46—49**.
- Praca cząstkowa** (elementarna) (27); Elementararbeit; travail élémentair; элементарная работа; **46, 49—51**.
- Prędkość**; Geschwindigkeit; vitesse; скорость.
- Pręt**; Stab; lame; стержень.

- Promień świetlny;** Lichtstrahl; rayon du lumière; лучь свѣта.
- Prostopadłościan;** gerades Parallelepipedon; parallépipède rectangle, прямой параллелоипедъ.
- Prostopadłościan cząstkowy (elementarny),** (10); geradès Elementarparallelepipedon; parallépipède rectangle élémentaire; элементарный прямой параллелоипедъ **10—11.**
- Pryzmat;** Prisma; prisme; призма; p. nadto: graniastostup.
- Przecięcie;** Schnittfläche; coupe; сѣкущая плоскость.
- Przekrój niebezpieczny** (42); gefährlicher Querschnitt, Bruchquerschnitt; coupe de rupture; опасное сѣчение; **82—83**
- Przesunięcie (ścięcie)** (5), (36); Verschiebung; glissement; скольженіе, сдвигъ **8, 17, 70.**
- Przesunięcie przygotowane (przysposobione)** (20); virtuelle Verschiebung; déplacement virtuel; возможное перемѣщеніе; **31.**
- Przesuwanie (ściananie)** (6), (7), (8), (9); Schub; cisaillement; скальваніе (срѣзываніе) **8, 9, 10.**
- Przyciąganie** (1); Anziehung; attraction; притяженіе **3.**
- Przyspieszenie;** Beschleunigung; accélération; ускореніе.
- Punkt odosobniony (izolowany) albo sprzężony** (77); isolirter Punkt, konjugierter Punkt; point isolé (conjugué); выходящая точка, **160.**
- Punkty ombilikalne** (106); points ombilicals; омбиликальные точки; **282.**
- Punkt podparcia;** Stützpunkt, point d'appui; точка опоры.
- Punkt przegięcia** p. punkt zwrotny.
- Punkt przyczepienia (przytknięcia) siły** (20); Angriffspunkt der Kraft (Kraftpunkt); point d'application; точка приложенія силы; **33.**
- Punkt wielokrotny** (77); vielfacher Punkt; point multiple; кратная точка; **160.**
- Punkt zwrotny (punkt przegięcia);** Inflexionspunkt, Wendepunkt; point d'inflexion; точка перегиба.
- Reakcja** p. oddziaływanie podrozy.
- Refrakcja** p. załamanie.
- Rozciąganie** (4), (7), (39), (41—43), (86); Zug; traction; растяженіе **6, 8, 76—86, 189—190.**
- Rozciągnięcie** p. wydłużenie.
- Rozmach** p. energia kinetyczna.
- Rozmach drgań** p. amplituda drgań.
- Rozprzestrzenialność (rozszerzalność przestrzenna** czyli objętościowa) (11), (39), (106); räumliche Ausdehnung; dilatabilité cubique; кубическое расширение **14, 76, 271.**
- Równoległościan cząstkowy (elementarny)** (11); (20); Elementarparallelepipedon; parallépipède élémentaire; элементарный параллелоипедъ; **12, 32.**
- Równowaga** (1), (20); Gleichgewicht; équilibre; равновѣсiе **4, 31—36.**
- Równowaga naprężona** (1); gespanntes Gleichgewicht; équilibre tendu; напруженное равновѣсiе **4.**
- Równowaga naturalna** (1); natürliches Gleichgewicht; équilibre général; естественное равновѣсiе **4.**
- Ruch;** Bewegung; mouvement; движеніе.
- Ruch bezwzględny** (11); absolute Bewegung; mouvement absolu; абсолютное движеніе; **11.**
- Ruchy skojarzone (sprzężone)** (10); conjugirte Bewegungen; mouvements conjugués; совокупный движенія **11.**
- Rura;** Rohr; tuyau; труба.
- Siła ciężkości** (20); Schwerkraft; gravité, pesanteur; сила тяжести; **34.**
- Siła cząsteczkowa (molekularna)** p. siła wewnętrzna.
- Siła normalna;** Normalkraft; force normale; нормальная сила.
- Siła odpychająca** (1), (19); Abstossungskraft; force de répulsion; отталкивающая сила **3, 31.**
- Siła przyciągająca** (1), (19); Anziehungskraft; force d'attraction; притягательная сила **3, 31.**
- Siła składowa** p. składowa.
- Siła sprężystości** (p. naprężenie) (1); Elasticitätskraft; force d'élasticité; сила упрукости **4.**
- Siła styczna** (25); Tangentialkraft; force tangente; касательная сила **42—45.**
- Siła wewnętrzna** (cząsteczkowa, molekularna) (1); innere Kraft; force intérieure; внутренняя сила (частичная сила, молекулярная сила) **3.**
- Siła wypadkowa** p. wypadkowa.
- Siła zewnętrzna** (1), äussere Kraft; force extérieure; външняя сила **3, 4.**
- Siła żywa** p. energia kinetyczna.
- Składowa** (siła składowa); Komponente (Seitenkraft); composante d'une force; составная сила.
- Skręcenie** (36), (46—53), (86); Torsion; torsion; крученіе, **70, 92, 114, 185—190**
- Skrócenie** (ściśnięcie) (4), (36); Verkürzung; accourcissement; линейное сжатіе **7, 60** i nast., **70.**
- Spoczynek;** Ruhe; repos; покой.
- Sprężystość** (elastyczność) (2); Elasticität (Federkraft); élasticité; упругость **5.**
- Statyka;** Statik; statique; статика.
- Statyka cieczy (hydrostatyka)** (107); Hydrostatik; hydrostatique; гидростатика; **285—290.**

- Stożek asymptotyczny (stożek wydłużen zerowych) (16), (39); asymptotischer Kegel; cône asymptotique; асимптотический конусъ, конусъ нулевыхъ растяжений; **21, 77.**
- Stożek wydłużen zerowych p. stożek asymptotyczny.
- Strzałka wygięcia p. ugięcie.
- Ściąg (88); Zugstange; tirant; тяга.
- Ścinanie p. przesuwanie.
- Ściskanie (4), (39), (41—43); Druck; pression; сжатие **6, 76—86.**
- Ściśnięcie p. skrócenie.
- Średnice sprzężone (54); zugeordnete (konjugierte) Durchmesser; diamètres conjugués; сопряженные диаметры; **117.**
- Środek ciężkości; Schwerpunkt; centre de gravité; центръ тяжести.
- Środek drgań (105); Schwingungsmittelpunkt; centre de vibration; центръ колебаний; **265.**
- Środek uderzenia (54); Mittelpunkt des Stosses, Stosspunkt; centre der percussion; центръ удара; **117.**
- Tarcie Reibung; friction; трение.
- Топ zasadniczy (96); Hauptton; ton principal; основной звукъ; **230.**
- Tony harmoniczne (obertony) (96); harmonische Töne, Obertöne; sons harmoniques; обертоны; **230.**
- Trajektorja; Trajektorie; trajectoire; траекторія
- Tworzywo (materya); Stoff, Materie; matière; матерія.
- Ugięcie (strzałka wygięcia) (36); Durchbiegung; flèche; стрѣлка прогиба; **70.**
- Układ; System; système; система.
- Walec; Cylinder; cylindre; цилиндръ.
- Walec eliptyczny (walec o podstawie eliptycznej) (49a); elliptischer Cylinder; cylindre elliptique; цилиндръ съ эллиптическимъ основаніемъ, **104.**
- Walec kołowy (49); Kreiscylinder; cylindre circulaire; цилиндръ съ круговымъ основаніемъ, **103.**
- Warstwa obojętna (54); neutrale Faserschichte; fibres neutres; нейтральный слой; **116 i nast.**
- Węzły struny (96); Saitenknoten; noeuds de la corde; узлы струны; **230.**
- Włókno (54), (55); Faser; fibre; фибра; **116—124.**
- Współczynnik proporcjonalności (32); Proportionalitätscoefficient; коэффициентъ пропорциональности; **61.**
- Współczynnik sprężystości (moduł sprężystości) (29); Elasticitätsmodul; coefficient d'élasticité; модуль упругости; **53—57.**
- Współczynnik sprężystości podłużnej (31); Koeffizient der Zugelastizität (der absoluten Elasticität); coefficient d'élasticité de traction; модуль продольной упругости; **59.**
- Współczynnik sprężystości poprzecznej (31), (45); Koeffizient der Druckelastizität (der rückwirkenden Elasticität); coefficient d'élasticité de compression; модуль поперечной упругости; **59, 90.**
- Współczynnik tarcia; Reibungscoefficient; coefficient de friction; коэффициентъ трения.
- Współczynnik wytrzymałości (40); Festigkeitszahl, Widerstandskoeffizient; coefficient de résistance; коэффициентъ прочности (сопротивленія); **79.**
- Wyboczenie; seitliches Ausbiegen; flechissement; продольный изгибъ.
- Wydłużenie (rozciągnięcie) (4), (36); Dehnung; allongement; линейное растяжение **7, 17, 60 i nast., 70.**
- Wydłużenie główne (16), (17), (18); Hauptdehnung; allongement principale; главное растяжение; **20.**
- Wyginanie (54—77), (83), (85); Biegung; flexion; изгибъ; **115—166, 181, 185—190.**
- Wypadkowa (siła wypadkowa); Resultante (Mittelkraft); résultante; равнодѣйствующая.
- Wysokość tonu (96); Tonhöhe; hauteur du ton; высота тона; **230.**
- Wytrzymałość materjałów budowlanych (18); Festigkeit der Baustoffe; résistance des matériaux; **69.**
- Wytrzymałość na przesuwanie (ścinanie) (44); Schubfestigkeit, Scheerfestigkeit; résistance à glissement (à cisaillement); сопротивление сдвигу (срѣзыванію, скалыванію, скольженію). **86—90.**
- Wytrzymałość na rozciąganie (39—43); Zugfestigkeit; résistance à la traction; сопротивление растяженію; **76—86.**
- Wytrzymałość na skręcanie; Torsionsfestigkeit, Drehungsfestigkeit; сопротивление крученію.
- Wytrzymałość na ściskanie (39—43); Druckfestigkeit; résistance à la compression; сопротивление сжатію; **76—86.**
- Wytrzymałość na wyboczenie; Knickfestigkeit; сопротивление продольному изгибу.
- Wytrzymałość na wyginanie; Biegungsfestigkeit; résistance à la flexion; сопротивление изгибу.
- Wytrzymałość złożona (44), (84); zusammengesetzte Festigkeit; résistance composée; сложное сопротивление; **86—90, 184—185.**

Załamanie (refrakcja) (106); Strahlenbrechung, Refraktion; réfraction; рефракція, лучепреломление; 271.

Załamanie podwójne (106); doppelte Strahlenbrechung; double réfraction; двойное лучепреломление; 271.

Zmiana sprężysta (2); elastische Aenderung; transformation élastique; упругое изменение; 5.

Zmiana trwała (2); bleibende Aenderung; transformation permanente; остающееся изменение; 5.



WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

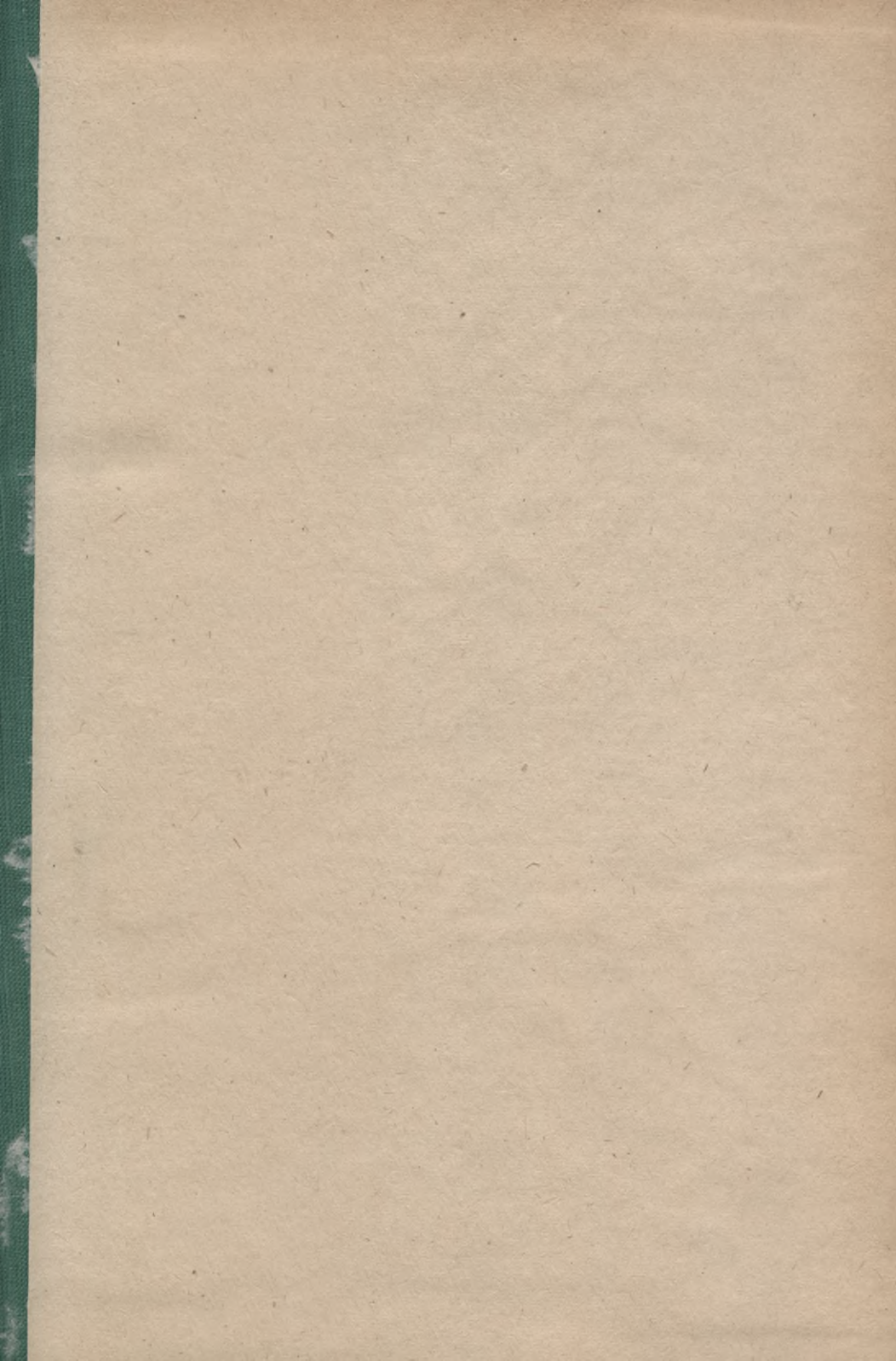


16583

L. inw.

Druk. U. J. Zam. 356. 10.000.

34





BIBLIOTEKA GŁÓWNA

16 583

PK 349/83 - 100 000 egz.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000301605