Проф. Н. Е. Жуковскій.

Аналитическая механика.

Студенческое Издательское
Общество
при И. М. Т. У.

Студенческая Издательская Комиссія при И. М. Т. У.

Н. Е. Жуковскій

профессоръ Императорскаго Московскаго Техническаго Училища.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

Изданіе для слушателей автора.

Цѣна 4 руб. 50 коп.

Типо-литографія Т-ва И. Н. КУШНЕРЕВЪ и К°. Пименовская улица, с. д.

МОСКВА—1910.

Издано съ разрѣшенія автора.

Изданіемъ завѣдывали студенты *В. Н. Литковъ, Л. С. Маршакъ* и *А. В. Назимовъ.*

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Кинематика.

Кинематика точки.

Кинематика системы.

Динамика.

Динамика точки.

Движеніе планетъ.

Равновѣсіе несвободной матеріальной точки.

Движеніе несвободной матеріальной точки.

Объ относительномъ движеніи матеріальной точки.

Статика системы.

Динамика системы.

Объ ударѣ.

Примѣненіе метода Лагранжа къ задачамъ на упругія системы.

Отъ автора.

Это изданіе моего курса по Аналитической механикѣ заключаетъ въ себѣ противъ прежняго изданія двѣ добавочныя статьи:

1) О принужденномъ движеніи.

2) Приложеніе метода Лагранжа къ задачамъ Строительной механики.

Обѣ статьи представляютъ интересъ для техниковъ. Послѣдняя статья даетъ пріемы рѣшенія задачъ на неопредѣленно-статическія системы, изслѣдованіе которыхъ часто затрудняетъ конструкторовъ.

Н. Жуковскій.

КИНЕМАТИКА.

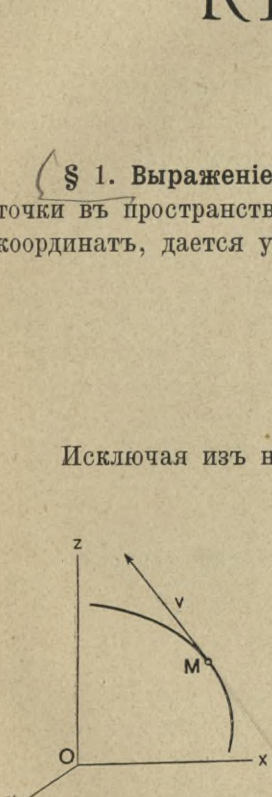
Кинематика точки.

§ 1. Выраженіе скорости въ Декартовыхъ координатахъ. Движеніе точки въ пространствѣ, разсматриваемое относительно прямоугольныхъ осей координатъ, дается уравненіями:

$$\left.\begin{array}{l} x = f(t), \\ y = \varphi(t), \\ z = \psi(t). \end{array}\right\}$$

Исключая изъ нихъ t, получаемъ уравненія траекторіи движенія точки:

$$\left.\begin{array}{l} y = F(x), \\ z = F_1(x). \end{array}\right\}$$



Фиг. 1.

Обозначимъ скорость точки по траекторіи черезъ v (фиг. 1), а углы, образуемые векторомъ v съ осями x, y, z,—черезъ α, β, γ.

На основаніи извѣстной теоремы: *проекція скорости точки на какую-либо изъ осей равна скорости движенія проекціи точки по этой оси*, имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{l} \text{пр}_x v = f'(t), \\ \text{пр}_y v = \varphi'(t), \\ \text{пр}_z v = \psi'(t), \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\mathbf{A})$$

или

$$\left.\begin{array}{l} v\cos\alpha = \dfrac{dx}{dt}, \\ v\cos\beta = \dfrac{dy}{dt}, \\ v\cos\gamma = \dfrac{dz}{dt}. \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\mathbf{B})$$

Возводя въ квадратъ и складывая полученныя равенства, находимъ:

$$v^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Но по извѣстной теоремѣ аналитической геометріи имѣемъ:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

а потому:

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Знакъ передъ корнемъ берется только положительный, такъ какъ v представляетъ абсолютную величину скорости, направленіе же ея опредѣляется углами α, β, γ, опредѣляемыми изъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{\frac{dx}{dt}}{v},\\ \cos\beta&=\frac{\frac{dy}{dt}}{v},\\ \cos\gamma&=\frac{\frac{dz}{dt}}{v}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Пользуясь ур-іями (1) и (2), разберемъ слѣдующій примѣръ.

Даны уравненія движенія:

$$x=a\cos\omega t,$$
$$y=b\sin\omega t,$$
$$z=0.$$

Требуется опредѣлить траекторію и скорость движенія.

Для опредѣленія траекторіи изъ первыхъ двухъ уравненій исключаемъ t; находимъ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\omega t+\sin^2\omega t=1.$$

Слѣдовательно, движеніе совершается по эллипсу.

Скорость этого движенія найдемъ въ формулѣ (1), для чего изъ данныхъ уравненій опредѣляемъ значенія производныхъ $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Получаемъ:

$$\frac{dx}{dt}=-a\omega\sin\omega t=-\frac{a}{b}\omega y,$$

$$\frac{dy}{dt}=b\omega\cos\omega t=\frac{b}{a}\omega x,$$

$$\frac{dz}{dt}=0.$$

Подставляя въ формулу (1), получаемъ:

$$v = \omega \sqrt{\frac{a^2}{b^2} y^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2}.$$

Направленіе скорости находимъ по формуламъ (2):

$$\cos\alpha = \frac{\frac{dx}{dt}}{v} = -\frac{\frac{a}{b} y}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} y^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{dy}{dt}}{v} = \frac{\frac{b}{a} x}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} y^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2}}$$

§ 2. Выраженіе скорости въ полярныхъ координатахъ. Полярными координатами пользуются при изслѣдованіи движенія подъ дѣйствіемъ центральныхъ силъ. Такое движеніе, какъ это мы увидимъ впослѣдствіи, совершается въ плоскости, а потому выведемъ формулы скорости въ полярныхъ координатахъ лишь для движенія въ плоскости (фиг. 2).

Уравненія такого движенія будутъ:

$$r = f(t),$$
$$\varphi = \psi(t),$$

гдѣ r есть радіусъ векторъ, а φ—уголъ его съ осью Ox.

Отсюда, исключая t, можно опредѣлить уравненіе траекторіи:

$$r = F(\varphi).$$

При $z = 0$ (движеніе совершается въ плоскости) формула скорости (1) принимаетъ видъ:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1')$$

По формуламъ перехода отъ Декартовыхъ координатъ къ полярнымъ имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

Отсюда, замѣчая, что r и φ суть функціи t, находимъ:

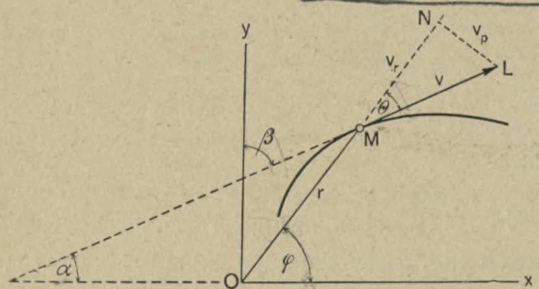
$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dr}{dt}\cos\varphi - r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dr}{dt}\sin\varphi + r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (b)$$

Возводя въ квадратъ и складывая, находимъ:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

откуда слѣдуетъ, что

$$v=\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$



Фиг. 2.

Обозначая проекцію скорости на радіусъ векторъ черезъ v_r, уголъ между ними—черезъ Θ, а углы скорости v съ осями x и y—черезъ α и β, имѣемъ:

$$v_r=v\ \cos\Theta;$$

а такъ какъ

$$\cos\Theta=\cos\varphi\ \cos\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\cos\beta,$$

то

$$v_r=v\left[\cos\varphi\ \cos\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\cos\beta\right].$$

Пользуясь ур-іями (2), находимъ:

$$v_r=v\left[\cos\varphi\,\frac{\frac{dx}{dt}}{v}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\frac{\frac{dy}{dt}}{v}\right],$$

а затѣмъ, принимая во вниманіе ур-ія (b) и дѣлая соотвѣтствующія сокращенія, находимъ:

$$v_r=\cos\varphi\left(\frac{dr}{dt}\cos\varphi-r\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}\right)+\sin\varphi\left(\frac{dr}{dt}\sin\varphi+r\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}\right)=$$

$$=\frac{dr}{dt}\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=\frac{dr}{dt}.$$

Итакъ:

$$v_r=\frac{dr}{dt}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

т.-е. *проекція скорости на радіусъ векторъ равняется скорости измѣненія величины радіуса вектора.*

Проекцію скорости на перпендикуляръ къ радіусу вектору обозначимъ черезъ v_p. По теоремѣ Пиѳагора

$$v^2 = v_r^2 + v_p^2.$$

Подставляя сюда выраженія v и v_r изъ (3) и (4), находимъ:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + v_p^2,$$

откуда:

$$v_p = r\frac{d\varphi}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Далѣе, изъ прямоугольнаго треугольника *MNL* (фиг. 2) находимъ:

$$tg\,\Theta = \frac{NL}{MN} = \frac{v_p}{v_r};$$

$$tg\,\Theta = \frac{r\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{dr}{dt}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Итакъ, основныя *кинематическія формулы для полярныхъ координатъ* таковы:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

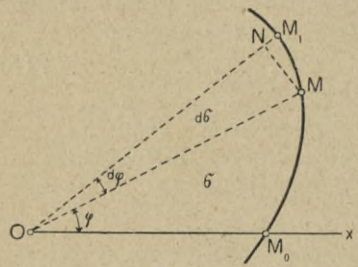
$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$v_p = r\frac{d\varphi}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$tg\,\Theta = \frac{r\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{dr}{dt}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Величина v_r называется *скоростью скольженія по радіусу вектору*, а $\frac{d\varphi}{dt}$, обозначаемая обыкновенно греческой буквой ω, называется *угловой скоростью радіуса вектора*. Кромѣ того, слѣдуетъ обратить вниманіе на выраженіе $\frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt}$, называемое *секторальной скоростью*. Вывести ее можно такъ: пусть въ нѣкоторый моментъ времени движущаяся точка находится въ положеніи M (фиг. 3). Площадь M_0OM, описанную радіусомъ векторомъ, обозначимъ черезъ σ. Спустя безконечно малый промежутокъ времени dt точка перейдетъ въ положеніе M_1. Приращеніе MOM_1 площади, описываемой радіусомъ векторомъ, обозначимъ черезъ $d\sigma$. Площадь MOM_1 въ предѣлѣ равна площади сектора MON, такъ какъ площадь фигуры MNM_1 есть безконечно малая величина второго порядка. Поэтому

$$d\sigma = \frac{1}{2} r\, d\varphi \,.\, r = \frac{1}{2} r^2\, d\varphi.$$



Фиг. 3.

Раздѣливъ на dt, получимъ нужное намъ выраженіе секторальной скорости:

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\sigma}{dt},$$

при чемъ $\frac{d\sigma}{dt}$ даетъ скорость измѣненія величины площади, описываемой радіусомъ векторомъ, — это и будетъ секторальная скорость.

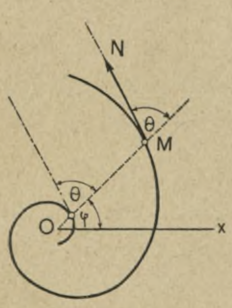
Примѣнимъ полученныя формулы (3—6) къ двумъ случаямъ движенія.

I. Опредѣлить величину и направленіе скорости движенія, даннаго уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} r &= ke^t, \\ \varphi &= \frac{t}{a}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Исключая t, находимъ уравненіе траекторіи:

$$r = ke^{a\varphi};$$



Фиг. 4.

отсюда видно, что траекторія нашего движенія представляетъ собою логариѳмическую спираль, обладающую свойствомъ ассимптотически приближаться къ полюсу O (фиг. 4) ($r = 0$ при $\varphi = -\infty$).

Величина скорости и ея направленіе опредѣляются формулами (3) и (6).

Изъ ур. (α) находимъ нужныя намъ выраженія производныхъ $\frac{dr}{dt}$ и $\frac{d\varphi}{dt}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= ke^t = r; \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{a}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

Подставляя ихъ въ (3) и (6), находимъ:

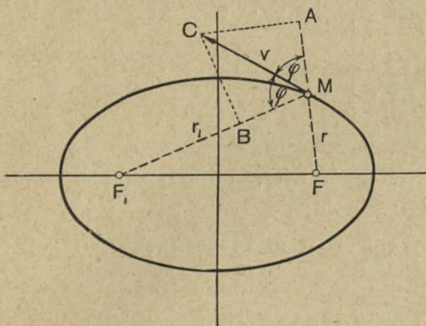
$$v = \sqrt{r^2 + r^2 . \frac{1}{a^2}} = r\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}};$$

$$tg\,\Theta = r . \frac{1}{a} : r = \frac{1}{a} = const.$$

II. Опредѣлить направленіе скорости точки, движущейся по эллипсу (фигура 5).

Обозначимъ скорость точки M черезъ v, а проекціи скорости на радіусъ векторъ и перпендикуляръ къ нему соотвѣтственно черезъ v_r и v_p.

Изслѣдуя движеніе въ полярныхъ координатахъ и принимая за полюсъ одинъ фокусъ эллипса, F, имѣемъ, согласно (4):



Фиг. 5.

$$v_r = \frac{dr}{dt}.$$

Принимая за полюсъ другой фокусъ, F_1, получаемъ:

$$v_{r_1} = \frac{dr_1}{dt}.$$

А такъ какъ $r + r_1 = 2a$, то, дифференцируя, получаемъ:

$$\frac{dr}{dt} + \frac{dr_1}{dt} = 0,$$

и, слѣдовательно,

$$v_r = - v_{r_1}.$$

Мы имѣемъ далѣе:

$$v_r = MA,$$

$$v_{r_1} = - MB;$$

поэтому

$$MA = -(- MB),$$

или

$$MA = MB.$$

Изъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ MAC и MBC находимъ:

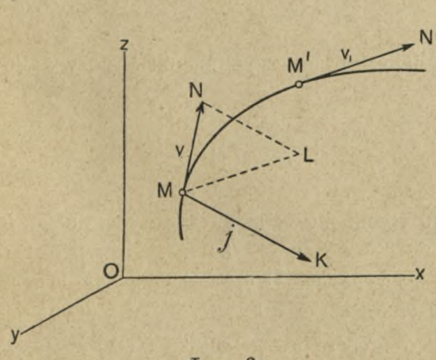
$$\angle CMA = \angle CMB.$$

Это значитъ, что направленіе касательной къ эллипсу дѣлитъ пополамъ уголъ между радіусомъ векторомъ и продолженіемъ другого радіуса вектора.

Подобный способъ опредѣленія направленія касательной, разсматриваемой какъ направленіе скорости, предложенъ Робервалемъ.

§ 3. Выраженіе полнаго ускоренія въ Декартовыхъ координатахъ.

Полное ускореніе можетъ быть представлено векторомъ, выражающимъ геометрическую производную скорости по времени. На фиг. 6 полное ускореніе представляется отрѣзкомъ



Фиг. 6.

$$MK = lim \frac{NL}{\Delta t} = j.$$

Для опредѣленія полнаго ускоренія j, воспользуемся теоремой кинематики: *проекція полнаго ускоренія на какую-нибудь ось равна ускоренію въ прямолинейномъ движеніи проекціи точки по этой оси.*

Имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} np_x j = j\cos\lambda = \frac{d^2x}{dt^2}, \\ np_y j = j\cos\mu = \frac{d^2y}{dt^2}, \\ np_z j = j\cos\nu = \frac{d^2z}{dt^2}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

гдѣ j есть полное ускореніе точки M, а λ, μ, ν — углы, образуемые ускореніемъ съ осями координатъ x, y, z.

Возводя полученныя уравненія въ квадратъ и складывая, находимъ:

$$\boxed{j = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Формулой (7) дается абсолютная величина j; направленіе же опредѣляется изъ формулъ:

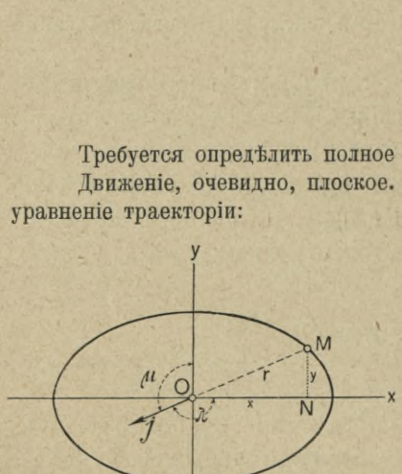
$$\boxed{\left.\begin{aligned} \cos\lambda = \frac{d^2x}{dt^2} : j, \\ \cos\mu = \frac{d^2y}{dt^2} : j, \\ \cos\nu = \frac{d^2z}{dt^2} : j. \end{aligned}\right\}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Возьмемъ для примѣра знакомыя уже намъ уравненія движенія:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\omega t, \\ y &= b\sin\omega t, \\ z &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

Требуется опредѣлить полное ускореніе j.

Движеніе, очевидно, плоское. Исключая изъ первыхъ двухъ уравненій t, получаемъ уравненіе траекторіи:



Фиг. 7.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это есть уравненіе эллипса съ полуосями a и b (фиг. 7).

При $z = 0$ формула (7) принимаетъ видъ:

$$j = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} \quad \ldots\ldots \quad (7')$$

Но въ данномъ случаѣ (см. стр. 2)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 . a \cos \omega t = -\omega^2 x,\\
&\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 . b \sin \omega t = -\omega^2 y.
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\delta)$$

Подставляя эти выраженія въ (7′), находимъ:

$$j = \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 r,$$

гдѣ r есть радіусъ векторъ ***OM***. Слѣдовательно, j есть функція радіуса r. Направленіе j опредѣляется углами λ, μ, ν по уравненіямъ (8) и (δ). Находимъ:

$$\cos\lambda = -\frac{\omega^2 x}{\omega^2 r} = -\frac{x}{r},$$

$$\cos\mu = -\frac{\omega^2 y}{\omega^2 r} = -\frac{y}{r},$$

$$\cos\nu = 0.$$

Косинусы угловъ, образуемыхъ радіусомъ векторомъ съ осями координатъ, отличаются отъ найденныхъ выраженій лишь знаками. Это показываетъ, что ускореніе направлено по радіусу вектору къ центру.

§ 4. Проекція полнаго ускоренія на касательную и главную нормаль. Для вывода искомыхъ формулъ проекціи, j_t, полнаго ускоренія на касательную и проекціи, j_n, полнаго ускоренія на нормаль, преобразуемъ сначала выраженія вторыхъ производныхъ, входящихъ въ уравненія (8).

Замѣчая, что $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)$, и разсматривая x, какъ функцію пройденнаго пути s, а пройденный путь s—какъ функцію времени t, напишемъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}\right),$$

или, принимая во вниманіе, что

$$\frac{ds}{dt} = v,$$

находимъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(v \cdot \frac{dx}{ds}\right).$$

Дифференцируя далѣе по правилу дифференцированія произведенія, получимъ:

$$\frac{d}{dt}\left(v \cdot \frac{dx}{ds}\right) = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dv}{dt} + v\,\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\right) =$$

$$= \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dv}{dt} + v \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dv}{dt} + v \cdot \frac{d^2x}{ds^2} \cdot v,$$

что окончательно даетъ выраженіе для $\text{пр}_x j$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dv}{dt}+v^2\,\frac{d^2x}{ds^2}\\ &\text{Аналогично находимъ выраженія для } \text{пр}_y\, j \text{ и } \text{пр}_z\, j:\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=\frac{dy}{ds}\cdot\frac{dv}{dt}+v^2\,\frac{d^2y}{ds^2},\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=\frac{dz}{ds}\cdot\frac{dv}{dt}+v^2\,\frac{d^2z}{ds^2}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\,(9)$$

Пусть α, β, γ суть углы, образуемые касательной къ траекторіи съ осями координатъ, а a, b, c — углы, образуемые главною нормалью съ тѣми же осями. Въ анализѣ, въ главѣ о кривизнѣ 1-го рода, доказываются слѣдующія формулы:

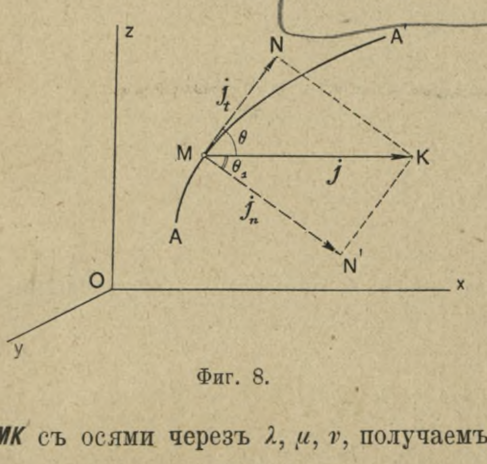
$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\qquad \frac{d^2x}{ds^2}=\frac{\cos a}{\varrho},$$

$$\frac{dy}{ds}=\cos\beta,\qquad \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{\cos b}{\varrho},$$

$$\frac{dz}{ds}=\cos\gamma,\qquad \frac{d^2z}{ds^2}=\frac{\cos c}{\varrho},$$

гдѣ ϱ есть радіусъ кривизны траекторіи въ разсматриваемой точкѣ M, а s — дуга кривой (фиг. 8). Подставляя эти выраженія въ (9), получаемъ окончательно:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=\frac{dv}{dt}\cos\alpha+\frac{v^2\cos a}{\varrho},\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=\frac{dv}{dt}\cos\beta+\frac{v^2\cos b}{\varrho},\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=\frac{dv}{dt}\cos\gamma+\frac{v^2\cos c}{\varrho}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\,(10)$$



Фиг. 8.

Формулами (10) мы и воспользуемся при выводѣ выраженія проекціи полнаго ускоренія на касательную и нормаль.

Изъ чертежа имѣемъ:

$$j_t=MN=j\cos\Theta,$$

гдѣ Θ есть уголъ касательной съ направленіемъ ускоренія.

Обозначая далѣе углы вектора MK съ осями черезъ λ, μ, ν, получаемъ:

$$\cos\Theta=\cos\alpha\,\cos\lambda+\cos\beta\,\cos\mu+\cos\gamma\,\cos\nu,$$

такъ что

$$j_t = j(\cos\alpha \cos\lambda + \cos\beta \cos\mu + \cos\gamma \cos\nu) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

Для преобразованія формулы (11) воспользуемся уравненіями (8) и (10). Получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{d^2x}{dt^2} : j = \left(\frac{dv}{dt}\cos\alpha + \frac{v^2\cos a}{\varrho}\right) : j. \\ &\text{Аналогично находимъ:} \\ \cos\mu &= \left(\frac{dv}{dt}\cos\beta + \frac{v^2\cos b}{\varrho}\right) : j, \\ \cos\nu &= \left(\frac{dv}{dt}\cos\gamma + \frac{v^2\cos c}{\varrho}\right) : j. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

Подставляя эти выраженія косинусовъ въ формулу (11), находимъ:

$$j_t = \frac{dv}{dt}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + \frac{v^2}{\varrho}(\cos\alpha\cos a + \cos\beta\cos b + \cos\gamma\cos c).$$

Первая сумма въ скобкахъ равна единицѣ, а вторая, какъ выражающая косинусъ угла между перпендикулярными линіями, равна нулю. Слѣдовательно:

$$j_t = \frac{dv}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

Точно также для j_n получимъ:

$$j_n = MN' = j\cos\Theta_1 .$$

Производимъ здѣсь подстановку, сходную съ предыдущей, а именно, пишемъ:

$$j_n = j\cos\Theta_1 = j(\cos a \cos\lambda + \cos b \cos\mu + \cos c \cos\nu),$$

гдѣ a, b, c суть углы главной нормали съ осями координатъ. Далѣе, въ виду (12), получаемъ:

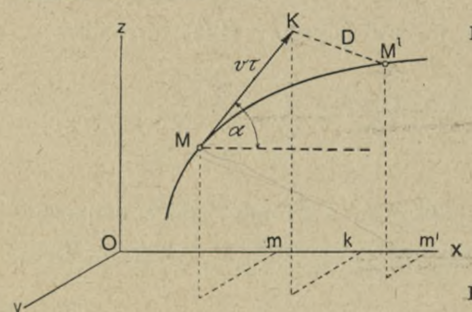
$$j_n = \frac{dv}{dt}(\cos a \cos\alpha + \cos b \cos\beta + \cos c \cos\gamma) + \frac{v^2}{\varrho}(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c), \; . \; (14)$$

а такъ какъ сумма въ скобкахъ при $\dfrac{dv}{dt}$ есть нуль, а при $\dfrac{v^2}{\varrho}$ — единица, то получаемъ окончательно:

$$j_n = \frac{v^2}{\varrho} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

§ 5. **Девіація.** Девіація есть кинематическій элементъ, дающій въ динамикѣ представленіе объ эффектѣ дѣйствія силы за данный исчезающе малый промежутокъ времени τ. Пусть MM' есть траекторія движенія точки (фиг. 9). Если бы въ данный моментъ M сила перестала дѣйствовать, а точка имѣла бы уже скорость v, то въ слѣдующій промежутокъ времени τ точка, по закону инерціи, прошла бы прямолинейный путь $MK = v\tau$; а такъ какъ на самомъ дѣлѣ сила не перестаетъ дѣйствовать, то точка во время τ придетъ не въ K, а въ M'. Слѣдовательно, результатъ дѣйствія силы за этотъ промежутокъ времени характеризуется хордой KM', называемой *девіаціей*. Будемъ обозначать ее буквой D. Основная теорема о девіаціи можетъ быть формулирована такъ:

Теорема. *Девіація направлена параллельно полному ускоренію j и равна пути, пройденному за время τ равномѣрно ускореннымъ движеніемъ съ ускореніемъ j.*



Фиг. 9.

Положимъ, что уравненія движенія будутъ:

$$x = f(t),$$
$$y = \varphi(t),$$
$$z = \psi(t).$$

Пусть положеніе матеріальной точки M соотвѣтствуетъ времени t, а положеніе M' — времени $(t + \tau)$, такъ что, если Om есть $x = f(t)$, то Om' есть $f(t+\tau)$.

Для доказательства теоремы воспользуемся равенствомъ, получаемымъ изъ фиг. 9:

$$\text{пр}_x M'K = \text{пр}_x D = mm' - mk.$$

Но

$$mm' = Om' - Om = f(t+\tau) - f(t);$$

$$mk = \text{пр}_x MK = v\tau\cos\alpha = \tau\frac{dx}{dt} = \tau f'(t).$$

Поэтому:

$$\text{пр}_x D = f(t+\tau) - f(t) - \tau f'(t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16'')$$

Разлагая $f(t+\tau)$ въ рядъ по строкѣ Тейлора, находимъ:

$$f(t+\tau) = f(t) + \tau f'(t) + \frac{\tau^2}{1.2} f''(t) + \frac{\tau^3}{1.2.3} f'''(t) + \frac{\tau^4}{1.2.3.4} f^{IV}(t) + \ldots$$

Подставляя въ $(16'')$ и сокращая, находимъ:

$$\text{пр}_x D = \frac{\tau^2}{1.2} f''(t) + \frac{\tau^3}{1.2.3} f'''(t) + \frac{\tau^4}{1.2.3.4} f^{IV}(t) + \quad \ldots \quad (16')$$

Пренебрегая членами $\frac{\tau^3}{1.2.3} f'''(t) + \frac{\tau^4}{1.2.3.4} f^{IV}(t) + \ldots$, какъ безконечно малыми высшаго порядка, сравнительно съ членомъ $\frac{\tau^2}{1.2} f''(t)$, получимъ изъ (16′) проекцію девіаціи на ось x:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{пр}_x D = \frac{\tau^2}{1\,.\,2} f''(t) = \frac{\tau^2}{1\,.\,2} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}. \\
\text{Аналогично можемъ написать:} \\
\text{пр}_y D = \frac{\tau^2}{1\,.\,2} \varphi''(t) = \frac{\tau^2}{1\,.\,2} \cdot \frac{d^2y}{dt^2}, \\
\text{пр}_z D = \frac{\tau^2}{1\,.\,2} \psi''(t) = \frac{\tau^2}{1\,.\,2} \cdot \frac{d^2z}{dt^2}.
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Отсюда находимъ выраженіе девіаціи D:

$$D = \frac{\tau^2}{2} \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17')$$

что, въ виду (7), принимаетъ видъ:

$$D = \frac{\tau^2}{1\,.\,2} j \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Направленіе девіаціи опредѣлится такимъ образомъ: обозначая углы вектора D съ осями координатъ черезъ λ, μ, γ, имѣемъ:

$$\text{пр}_x D = D\,.\,cos\,\lambda;$$

откуда:

$$cos\,\lambda = \frac{\text{пр}_x D}{D},$$

что, въ виду (16) и (17′), переписывается такъ:

$$\left.\begin{array}{l}
cos\,\lambda = \dfrac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}} = \dfrac{\frac{d^2x}{dt^2}}{j}. \\
\text{Аналогично:} \\
cos\,\mu = \dfrac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}} = \dfrac{\frac{d^2y}{dt^2}}{j}, \\
cos\,\gamma = \dfrac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}} = \dfrac{\frac{d^2z}{dt^2}}{j}.
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Но таковы же были выраженія косинусовъ угловъ, образуемыхъ векторомъ j съ осями координатъ (см. ур. 8). Слѣдовательно: *девіація параллельна полному ускоренію.*

Сопоставляя выраженіе

$$D = \frac{\tau^2}{1 \cdot 2} j$$

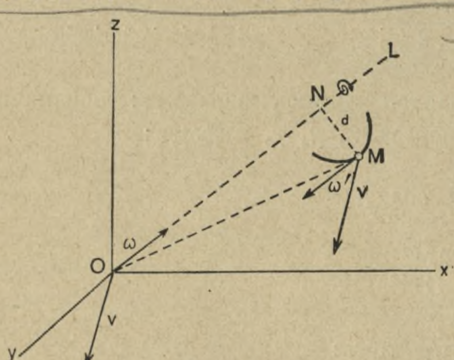
съ формулой

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

заключаемъ, что D есть путь, пройденный въ равномѣрно-ускоренномъ движеніи съ ускореніемъ j за время τ.

Кинематика системы.

§ 6. Формулы Эйлера. Эти формулы выражаютъ проекціи скорости какой-нибудь точки твердаго тѣла, *ращающагося* около *неподвижной* точки, на прямоугольныя оси координатъ, имѣющія *начало въ этой же неподвижной точкѣ*. По теоремѣ, доказанной въ элементарномъ курсѣ кинематики, все движеніе тѣла, въ продолженіе весьма малаго промежутка времени, приводится къ его вращенію около нѣкоторой мгновенной оси OL (фиг. 10), проходящей черезъ неподвижную точку, съ нѣкоторой угловой скоростью ω.



Фиг. 10.

Примемъ точку O за начало прямоугольныхъ осей xyz и отложимъ на оси OL векторъ ω такъ, чтобы наблюдатель, смотрящій изъ конца вектора въ его начало, видѣлъ вращеніе тѣла, совершающимся по часовой стрѣлкѣ. Назовемъ проекціи этого вектора на оси координатъ x, y, z соотвѣтственно черезъ p, q, r.

Скорость v какой-либо точки тѣла M выражается формулой:

$$v = \omega d,$$

гдѣ $d = MN$ есть длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки M на ось вращенія. Очевидно, что направленіе этой скорости будетъ перпендикулярно къ плоскости треугольника OMN. Легко усмотрѣть, что векторъ v, представляющій найденную скорость, геометрически равенъ моменту пары (ω, ω'), которую мы нашли бы, если бы разсматривали угловую скорость ω, какъ силу, и приложили бы къ точкѣ M другую силу ω', равную ω, параллельную ей и направленную въ обратную сторону (моментъ такой пары выразился бы также произведеніемъ ωd).

Проведемъ векторъ v черезъ точку O и постараемся составить выраженія его проекцій по осямъ координатъ, пользуясь теоремой статики: *проекція момента пары на какую-либо ось равна суммѣ моментовъ силъ, составляющихъ пару, относительно разсматриваемой оси:*

$$\text{пр}_x(\omega d) = m_x(\omega) + m_x(\omega') = \text{пр}_x v.$$

Но

$$m_x(\omega) = 0,$$

такъ какъ векторъ ω пересѣкаетъ ось Ox. Что же касается $m_x(\omega')$, то мы составимъ его по аналитической формулѣ момента силы, принимая во вниманіе, что координаты точки M суть: x, y, z, а проекціи вектора ω' суть: $(-p)$, $(-q)$, $(-r)$, потому что векторъ ω' направленъ въ противоположную сторону сравнительно съ векторомъ ω.

Такимъ образомъ получаемъ:

$$m_x(\omega') = y(-r) - z(-q) = qz - ry.$$

Такъ что, окончательно, для проекціи вектора v на Ox находимъ:

$$\text{пр}_x v = qz - ry.$$

Аналогично для проекціи вектора v на оси Oy, Oz:

$$\left.\begin{aligned} \text{пр}_y v &= rx - pz, \\ \text{пр}_z v &= py - qx. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (19')$$

Такимъ образомъ получаемъ систему уравненій Эйлера для проекцій скорости v на оси координатъ:

$$\left.\begin{aligned} \text{пр}_x v &= qz - ry, \\ \text{пр}_y v &= rx - pz, \\ \text{пр}_z v &= py - qx. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (19)$$

При этомъ выводѣ мы воспользовались соображеніями изъ области статики; но это сдѣлано совершенно законно, такъ какъ соображенія эти чисто геометрическаго характера и относятся какъ къ силамъ, такъ и ко всякимъ другимъ векторамъ. Величины p, q и r въ формулахъ Эйлера суть проекціи по осямъ угловой скорости ω, такъ что

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

§ 7. Формулы скорости точки свободнаго твердаго тѣла. Для опредѣленія проекцій по осямъ координатъ скорости точки *свободнаго* твердаго тѣла мы можемъ воспользоваться теоремой кинематики, о разложеніи разсматриваемаго движенія на поступательное движеніе со скоростью какой-нибудь точки тѣла и на вращательное около оси, проходящей черезъ эту точку.

Пусть начало ***O*** *неподвижныхъ* осей координатъ совпадаетъ въ разсматриваемый моментъ времени съ той именно точкой тѣла, по которой мы опредѣляемъ его *поступательное* движеніе (фиг. 10). Назовемъ скорость разсматриваемаго *поступательнаго* движенія этой точки черезъ w. Искомая скорость u какой-нибудь точки ***M*** твердаго тѣла будетъ теперь геометрически слагаться изъ скорости w и скорости v во вращательномъ движеніи тѣла около оси, проходящей черезъ точку ***O***, т.-е.

$$\overline{u} = \overline{w} + \overline{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20')$$

Скорость v находится согласно съ изложеннымъ въ предыдущемъ параграфѣ, и ея проекціи по осямъ координатъ могутъ быть выражены формулами Эйлера.

Составимъ проекціи по осямъ координатъ вектора u, принимая во вниманіе формулу (20'). Когда векторы складываются геометрически, то ихъ проекціи складываются алгебраически; поэтому, по формуламъ (19) и (20'), имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \text{пр}_x u &= \text{пр}_x w + qz - ry, \\ \text{пр}_y u &= \text{пр}_y w + rx - pz, \\ \text{пр}_z u &= \text{пр}_z w + py - qx. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Полученныя формулы выражаютъ проекціи скорости какой-нибудь точки *свободнаго твердаго тѣла* на *неподвижныя* оси координатъ.

§ 8. Теорема Коріолиса. Въ элементарномъ курсѣ кинематики доказывалась теорема о сложеніи полныхъ ускореній, т.-е. находилось полное ускореніе *абсолютнаго* движенія точки по полному ускоренію *относительнаго* движенія точки по движущейся траекторіи и полному ускоренію *переноснаго* движенія самой траекторіи относительно неподвижныхъ осей координатъ. Но при этомъ дѣлалась оговорка, что предложенное доказательство теоремы примѣнимо лишь къ случаю перемѣщенія траекторіи параллельно самой себѣ,—слѣдовательно, траекторія разсматривалась двигающейся *поступательно, безъ вращенія*. Теорема Коріолиса о полномъ ускореніи сложнаго движенія разсматриваетъ *общій случай*, въ которомъ траекторія движется *произвольно*.

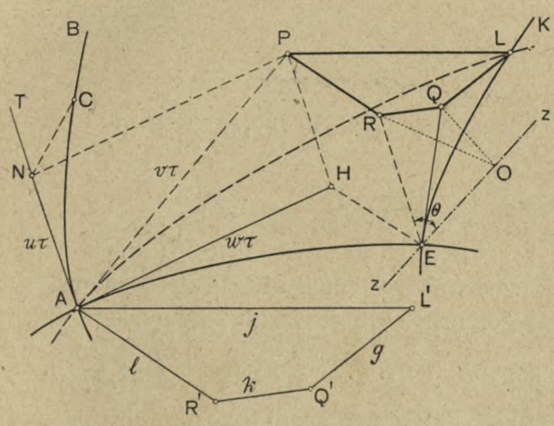
Дадимъ геометрическій выводъ теоремы Коріолиса, пользуясь теоремой о девіаціи (см. стр. 12).

Представимъ точку, движущуюся по траекторіи ***AB*** (фиг. 11). Скорость этого *относительнаго* движенія обозначимъ черезъ u. Сама траекторія ***AB*** движется въ пространствѣ, при чемъ точка ея A описываетъ кривую AE. Скорость этого *переноснаго* движенія обозначимъ черезъ w.

Отъ сложенія этихъ двухъ движеній получается *абсолютное* движеніе по траекторіи AL, со скоростью v.

Построимъ девіаціи каждаго изъ упомянутыхъ движеній точки.

Находясь въ A и обладая скоростью относительнаго движенія u, наша точка, спустя исчезающе малый промежутокъ времени τ, займетъ на траекторіи AB положеніе C. Отложимъ на касательной AT отрѣзокъ $AN = u\tau$. Девіація относительнаго движенія будетъ NC. Разсуждая такимъ же образомъ, найдемъ, что девіація переноснаго движенія представляется векторомъ HE, при чемъ $AH = w\tau$.



Фиг. 11.

Складывая по правилу параллелограмма векторы $AN = u\tau$ и $AH = w\tau$, получимъ векторъ AP. Здѣсь $AP = v\tau$, потому, что, если бы мы складывали векторы u и w, то получили бы векторъ v, выражающій абсолютную скорость (по правилу параллелограмма скоростей); наши же векторы отличаются отъ этихъ лишь множителемъ τ. Если же $AP = v\tau$, то девіація абсолютнаго движенія точки равна PL, ибо въ абсолютномъ движеніи точка опишетъ кривую AL. Новое положеніе траекторіи AB, спустя время τ, будетъ EK, а новое положеніе точки C будетъ L.

Представимъ теперь девіацію *абсолютнаго* движенія въ видѣ геометрической суммы. Для этого черезъ точку E проведемъ прямую ER, равную и параллельную AN, и прямую EQ, представляющую новое положеніе вектора AN. Проведемъ линіи PR, RQ, QL. Изъ фигуры (11) видно, что геометрическая сумма этихъ трехъ отрѣзковъ равна вектору PL.

$$\overline{PL} = \overline{PR} + \overline{RQ} + \overline{QL} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Полное ускореніе *абсолютнаго* движенія обозначимъ черезъ j, полное ускореніе *относительнаго* черезъ g, полное ускореніе *переноснаго* черезъ l. Выяснимъ значенія векторовъ, входящихъ въ равенство (21). Мы имѣемъ по формулѣ (17):

$$PL = \frac{\tau^2}{1 \cdot 2} j;$$

$$PR = HE = \frac{\tau^2}{1 \cdot 2} l.$$

Векторъ RQ представляетъ разстояніе, описанное концомъ вектора $u\tau$, повернувшагося во время τ, около мгновенной оси вращенія zz (траекторія AB движется не поступательно). Опустимъ изъ точекъ R и Q перпендикуляры на ось zz, которые пересѣкутся въ центрѣ вращенія O. Хорда RQ безконечно мало отличается отъ дуги RQ, описанной точкой R во время τ, такъ какъ уголъ поворота ROQ при безконечно маломъ τ тоже безконечно малъ. Обозначимъ угловую скорость вращенія около оси zz черезъ ω, тогда получимъ:

$$RQ = \omega OR\tau.$$

Но, обозначивъ уголъ между осью zz и направленіемъ скорости относительнаго движенія u (т.-е. уголъ zER) черезъ Θ, получимъ изъ прямоугольнаго $\triangle ORE$, что

$$OR = ER \sin\Theta = u\tau \sin\Theta.$$

Подставляя значеніе OR въ предыдущее равенство, получимъ:

$$RQ = \tau^2 \omega u \sin\Theta.$$

Что касается направленія вектора RQ, то этотъ векторъ перпендикуляренъ къ оси zz и скорости относительнаго движенія u. Наконецъ, изъ фиг. (11) видно, что векторъ QL по абсолютной величинѣ равенъ NC и, слѣдовательно, равенъ девіаціи скорости u, т.-е. по формулѣ (17) $\frac{\tau^2}{1.2}g$. Но, переходя къ предѣлу, при $\tau = 0$, получимъ совпаденіе положеній траекторіи EK съ AB, а потому и совпаденіе векторовъ QL и NC. Отсюда заключаемъ, что въ предѣлѣ векторъ QL имѣетъ направленіе ускоренія g.

Итакъ, находимъ:

$$QL = NC = \frac{\tau^2}{1\,.\,2}g.$$

Возвращаясь къ равенству (21) и вставляя въ него найденныя выраженія векторовъ, получимъ:

$$\overline{\frac{\tau^2}{2}j} = \overline{\frac{\tau^2}{2}l} + \overline{\tau^2\omega u \sin\Theta} + \overline{\frac{\tau^2}{2}g} \quad \dots\dots\dots \quad (22')$$

Помноживъ обѣ части этого геометрическаго равенства на $\frac{2}{\tau^2}$, получимъ:

$$\overline{j} = \overline{l} + \overline{2\,\omega u \sin\Theta} + \overline{g} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (22'')$$

Произведенное нами умноженіе обѣихъ частей геометрическаго равенства (22′) на $\frac{2}{\tau^2}$ съ геометрической точки зрѣнія соотвѣтствуетъ пропорціональному измѣненію абсолютныхъ величинъ векторовъ, представленныхъ членами уравненія, безъ измѣненія ихъ направленія. А такъ какъ равенство (22′) характеризуетъ замкнутость ломаной линіи *PRQLP*, то умноженіе его на $\frac{2}{\tau^2}$ соотвѣтствуетъ построенію новаго многоугольника *AR′ Q′ L′ A*, стороны котораго параллельны и пропорціональны сторонамъ многоугольника *PRQLP*, при чемъ факторъ пропорціональности равенъ $\frac{2}{\tau^2}$. Въ найденномъ многоугольникѣ замыкающая сторона $AL' = j$ представляетъ геометрическую сумму векторовъ $AR' = l$, $Q'L' = g$

$$\text{и } R'Q' = k = 2\omega u \sin\Theta \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (23)$$

Этотъ послѣдній векторъ k называется *поворотнымъ ускореніемъ;* онъ перпендикуляренъ оси вращенія и скорости u относительнаго движенія.

На основаніи сказаннаго имѣемъ:

Е. Г.

$$\overline{j} = \overline{l} + \overline{k} + \overline{g} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (22)$$

Выведенная формула даетъ слѣдующую теорему Коріолиса: *полное ускореніе сложнаго движенія равно геометрической суммѣ трехъ векторовъ: полнаго ускоренія относительнаго движенія, полнаго ускоренія переноснаго движенія и поворотнаго ускоренія.*

Посмотримъ, когда поворотное ускореніе k обращается въ нуль. Это имѣетъ мѣсто:

1) *если* $\omega = 0$;

тогда движеніе траекторіи поступательно, и

$$\overline{j} = \overline{l} + \overline{g} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (22''')$$

2) *если* $u = 0$;

тогда точка не имѣетъ относительнаго движенія, и

$$\overline{j} = \overline{l} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (22^{IV})$$

3) *если* $\sin\Theta = 0$, или $\Theta = 0$;

тогда скорость относительнаго движенія точки параллельна оси вращенія траекторіи, и

$$\overline{j} = \overline{l} + \overline{g} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (22^{V})$$

§ 9. Аналитическое выраженіе проекцій поворотнаго ускоренія. Пусть нѣкоторая точка движется по траекторіи *AB*, перемѣщающейся относительно осей координатъ ***x***, ***y***, ***z*** (фиг. 12).

Въ разсматриваемый моментъ времени точка находится въ положеніи M. Проведемъ черезъ M оси x', y', z', параллельныя осямъ x, y, z. Обозначимъ скорость точки по траекторіи черезъ u, мгновенную ось вращенія траекторіи черезъ ML. Проведемъ черезъ точку D, лежащую на концѣ вектора относительной скорости u, плоскость Q, перпендикулярную къ оси ML, и пусть плоскость Q и ось ML пересѣкаются въ точкѣ C.

Векторъ k, какъ сказано выше, долженъ быть перпендикуляренъ вектору u и оси вращенія ML, а потому и плоскости DMC. Поэтому онъ, во-первыхъ, имѣя общую точку D съ плоскостью Q, самъ будетъ лежать въ этой плоскости, ибо плоскость Q перпендикулярна къ MC, и, во-вторыхъ, будетъ перпендикуляренъ къ прямой CD, лежащей въ плоскости CMD, по той же причинѣ.

Слѣдовательно, векторъ k будетъ касательнымъ къ окружности, описываемой точкой D при вращеніи около оси ML.

Въ предыдущемъ параграфѣ мы получили (23), что

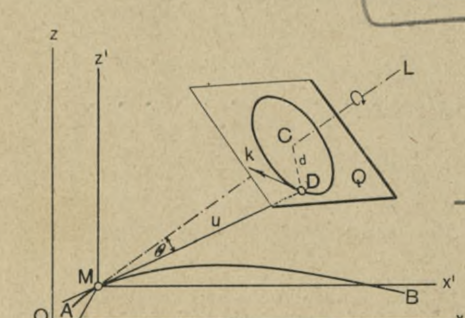
$$k = 2\omega u \sin\theta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (23)$$

Но изъ прямоугольнаго треугольника DCM заключаемъ, что

$$d = DC = DM \sin\theta = u \sin\theta.$$

Слѣдовательно,

$$k = 2\omega d.$$



Фиг. 12.

Величина ωd равна скорости движенія точки D при вращеніи ея около оси ML съ угловой скоростью ω. Такимъ образомъ поворотное ускореніе равно двойной скорости вращательнаго движенія точки D и направлено по этой скорости. Слѣдовательно и проекціи поворотнаго ускоренія на оси координатъ будутъ равны двойнымъ проекціямъ на эти оси скорости движенія точки D. Величины же проекцій скорости точки D, имѣющей координаты x', y', z', выражаются по формуламъ Эйлера (19) такъ:

$$\left.\begin{aligned} \text{пр}_{x'} k &= 2(qz' - ry'), \\ \text{пр}_{y'} k &= 2(rx' - pz'), \\ \text{пр}_{z'} k &= 2(py' - qx'). \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (24')$$

Изъ фигуры (12) видно, что координаты x', y', z' точки D равны проекціямъ скорости u на оси x', y', z'. Вслѣдствіе параллельности этихъ осей съ осями x, y, z находимъ, что

$$x' = \text{пр}_x u;$$
$$y' = \text{пр}_y u;$$
$$z' = \text{пр}_z u.$$

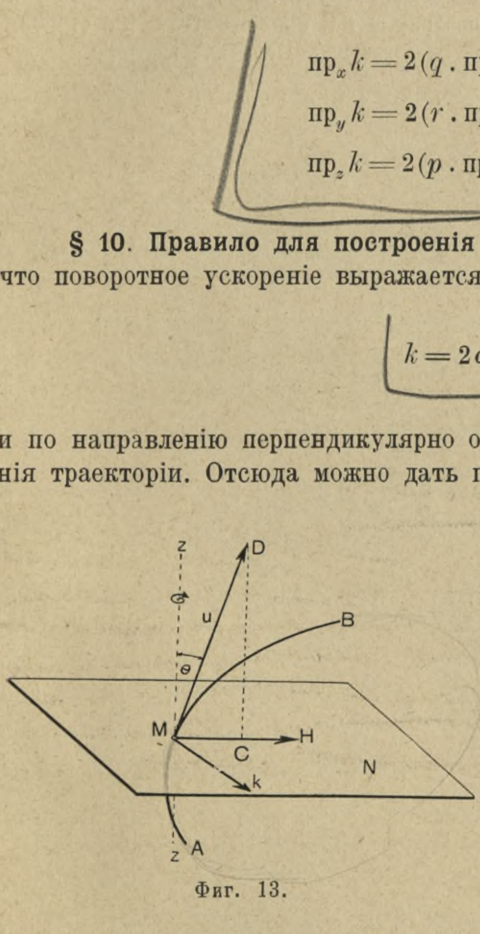
Сдѣлавъ подстановку этихъ выраженій въ уравненія (24′), получаемъ окончательныя формулы проекцій поворотнаго ускоренія на оси координатъ:

$$\left.\begin{aligned} \text{пр}_x k &= 2(q \,.\, \text{пр}_z u - r \,.\, \text{пр}_y u), \\ \text{пр}_y k &= 2(r \,.\, \text{пр}_x u - p \,.\, \text{пр}_z u), \\ \text{пр}_z k &= 2(p \,.\, \text{пр}_y u - q \,.\, \text{пр}_x u). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

§ 10. Правило для построенія поворотнаго ускоренія. Мы доказали, что поворотное ускореніе выражается формулой:

$$k = 2\omega u \sin\Theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

и по направленію перпендикулярно относительной скорости u и оси вращенія траекторіи. Отсюда можно дать правило для построенія его.



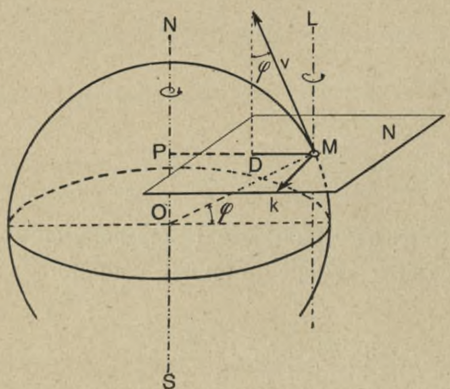
Фиг. 13.

Проектируемъ относительную скорость u на плоскость N, перпендикулярную къ оси вращенія (фиг. 13). Проекція будетъ $MC = u \sin\Theta$, гдѣ Θ уголъ u съ осью вращенія zz. Умножимъ эту проекцію на 2ω. Получимъ векторъ $MH = 2\omega u \sin\Theta$. Чтобы сдѣлать его перпендикулярнымъ къ u и zz, поворачиваемъ его на прямой уголъ около оси zz. Тогда онъ приметъ направленіе вектора Mk и представитъ поворотное ускореніе. Вращеніе надо совершать въ сторону вращенія траекторіи; это слѣдуетъ изъ даннаго геометрическаго доказательства теоремы Коріолиса.

Отсюда правило:

чтобы получить поворотное ускореніе, надо относительную скорость спроектировать на плоскость, перпендикулярную къ оси вращенія траекторіи, умножить на двойную угловую скорость и повернуть на прямой уголъ въ сторону вращенія траекторіи.

Опредѣлить поворотное ускореніе точки, движущейся равномѣрно со скоростью v по меридіану и находящейся на широтѣ φ, при вращательномъ движеніи земли вокругъ ея оси (фиг. 14).



Фиг. 14.

На основаніи правила, извѣстнаго изъ элементарнаго курса кинематики, вращеніе около оси ***NS*** со скоростью ω можетъ быть замѣнено вращеніемъ около оси ***ML*** съ тою же угловой скоростью ω и поступательнымъ движеніемъ точки ***M*** со скоростью ω***PM***. Проведя плоскость ***N***, перпендикулярную къ ***ML***, спроектируемъ на нее скорость v.

Проекція выразится отрѣзкомъ ***MD*** $= v \sin \varphi$. Его надо умножить на 2ω и повернуть на прямой уголъ въ сторону вращенія земли. Получимъ векторъ

$$k = 2\omega v \sin \varphi.$$

ДИНАМИКА.

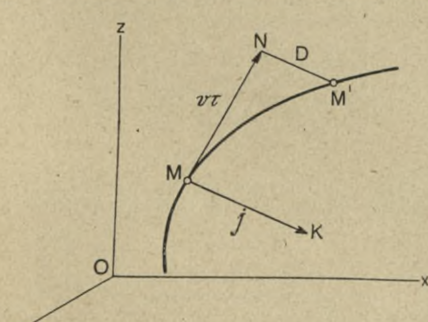
Динамика точки.

§ 11. Дифференціальныя уравненія. Въ основу динамики матеріальной точки ложится слѣдующая теорема о связи между дѣйствующей силой и полнымъ ускореніемъ:

сила направлена по полному ускоренію и равна произведенію полнаго ускоренія на массу.

Для прямолинейнаго движенія теорема эта была доказана въ элементарномъ курсѣ. Докажемъ ее для криволинейнаго движенія, пользуясь теоремой о девіаціи.

По второму началу динамики (законъ независимости дѣйствія силъ) движеніе точки отъ дѣйствія силы и по инерціи слагается кинематически изъ движеній, происходящихъ отъ этихъ двухъ причинъ отдѣльно. Поэтому



Фиг. 15.

движеніе точки M по траекторіи MM' (фиг. 15) слагается изъ двухъ движеній: во-первыхъ, изъ движенія по инерціи со скоростью v, которая въ исчезающе малый промежутокъ времени τ приводитъ точку M въ N, гдѣ $MN = v\tau$, и, во-вторыхъ, изъ движенія точки подъ дѣйствіемъ движущей силы, приводящей въ тотъ же промежутокъ времени матеріальную точку изъ N въ M', гдѣ $NM' = D$ есть девіація.

По теоремѣ о девіаціи (см. § 5) $NM' = D$ параллельно $MK = j$, а слѣдовательно сила P параллельна полному ускоренію.

Съ другой стороны, по той же теоремѣ (форм. 17) $D = \frac{\tau^2}{2} j$. Но въ элементарномъ курсѣ было показано, что сила P, дѣйствующая на матеріальную точку массы m безъ начальной скорости, заставляетъ ее пройти во время τ по своему направленію пространство

$$s = \frac{P}{m} \cdot \frac{\tau^2}{2}.$$

Но

$$s = \frac{\tau^2}{2} \cdot j,$$

ибо девіація (D) опредѣляетъ тоже движеніе безъ начальной скорости, а потому:

$$\frac{\tau^2}{2} j = \frac{P}{m} \cdot \frac{\tau^2}{2},$$

откуда

$$P = mj,$$

что и требовалось доказать.

Выведемъ теперь дифференціальныя уравненія движенія матеріальной точки. Обозначимъ углы, образуемые силой P, а равно и векторомъ j, съ осями координатъ, черезъ α, β, γ и, умноживъ предыдущее равенство на $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} P\cos\alpha &= mj\cos\alpha, \\ P\cos\beta &= mj\cos\beta, \\ P\cos\gamma &= mj\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

По формуламъ (8) имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} j\cos\alpha &= \frac{d^2x}{dt^2}, \\ j\cos\beta &= \frac{d^2y}{dt^2}, \\ j\cos\gamma &= \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8')$$

Съ другой стороны, обозначая проекціи силы P на оси координатъ черезъ X, Y, Z, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} P\cos\alpha &= X, \\ P\cos\beta &= Y, \\ P\cos\gamma &= Z. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

И теперь въ виду (26) и (8′) система ур-ній (25) приметъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} X &= m\frac{d^2x}{dt^2}, \\ Y &= m\frac{d^2y}{dt^2}, \\ Z &= m\frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

Полученныя три уравненія называются *дифференціальными уравненіями* движенія свободной матеріальной точки. Съ ихъ помощью мы можемъ опредѣлить характеръ того поля силъ, къ которому относится движеніе.

Возьмемъ для примѣра уравненія движенія:

$$x = a \cos \omega t,$$

$$y = b \sin \omega t.$$

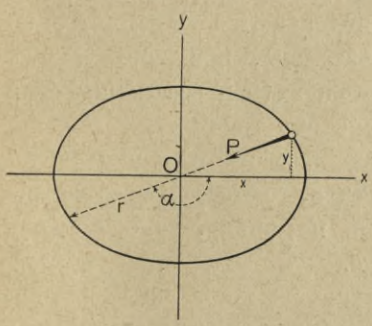
Требуется опредѣлить силу P, подъ дѣйствіемъ которой происходитъ это движеніе. [Движеніе очевидно плоское ($z = 0$).]

Исключивъ изъ уравненій движенія время t, получимъ уравненіе траекторіи:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

которое представляетъ эллипсъ съ полуосями a и b (фиг. 16).

Опредѣлимъ изъ данныхъ уравненій выраженія $\frac{d^2x}{dt^2}$ и $\frac{d^2y}{dt^2}$:



Фиг. 16.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y.$$

Подставляя въ форм. (27), найдемъ:

$$X = -m\,\omega^2 x,$$

$$Y = -m\,\omega^2 y,$$

$$Z = 0.$$

Откуда искомая сила P опредѣлится такъ:

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{m^2\omega^4 x^2 + m^2\omega^4 y^2} = m\,\omega^2 \sqrt{x^2 + y^2},$$

или

$$P = m\,.\,\omega^2\,.\,r,$$

гдѣ r есть радіусъ векторъ эллипса.

Это выраженіе силы указываетъ, что сила P измѣняется пропорціонально радіусу вектору эллипса, r.

Направленіе же силы P опредѣляется углами $\alpha = \angle(P, x)$ и $\beta = \angle(P, y)$ по формуламъ (26)

$$cs\,\alpha = \frac{X}{P},$$

$$cs\,\beta = \frac{Y}{P},$$

что для нашего случая выразится такъ:

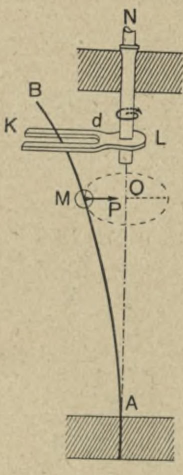
$$cs\,\alpha = -\frac{m\,\omega^2 x}{m\,\omega^2 r} = -\frac{x}{r},$$

$$cs\,\beta = -\frac{m\,\omega^2 y}{m\,\omega^2 r} = -\frac{y}{r}.$$

Косинусы же угловъ, образуемыхъ радіусомъ r съ осями x и y, равны $\frac{x}{r}$ и $\frac{y}{r}$; слѣдовательно, сила направлена по радіусу. Но такъ какъ значенія косинусовъ этихъ угловъ по знакамъ противоположны, то сила направлена *къ центру*.

Разсматриваемое движеніе по эллипсу представляетъ движеніе проекціи точки, вращающейся съ постоянной угловой скоростью ω по окружности радіуса a, наклоненной къ плоскости эллипса подъ угломъ α, опредѣляемаго равенствомъ $\cos\alpha = \frac{b}{a}$. Слѣдовательно, періодъ оборота $T = \frac{2\pi}{\omega}$, т.-е. не зависитъ отъ формы эллипса.

На основаніи этого свойства разсматриваемаго движенія устраиваются регуляторы нѣкоторыхъ измѣрительныхъ приборовъ. Силой P, движущей массу M въ этихъ регуляторахъ, является упругость вертикальнаго стержня AB (фиг. 17), ущемленнаго въ нижнемъ концѣ. Для правильнаго хода ось NL должна дѣлать одинъ оборотъ въ опредѣленное время T. Къ этой оси прикрѣплена вилка LK, въ которую введенъ верхній конецъ стержня AB, несущаго массу M. Величина M и упругость стержня подбираются соотвѣтственно требуемому періоду T; слѣдовательно, при нормальномъ ходѣ стержень движется свободно (центробѣжная сила заставляетъ удалиться стержень отъ точки d).



Фиг. 17.

Если ходъ гирь, вращающихъ съ помощію зубчатыхъ колесъ ось ON, замедляется, то стержень вслѣдствіе инерціи массы M нажимаетъ на вилку, ускоряетъ ея движеніе и приближается къ d.

При ускореніи хода вилка нажимаетъ на стержень, и движеніе замедляется, при чемъ стержень, вслѣдствіе увеличенія центробѣжной силы, удаляется отъ d. Размѣръ вилки подбирается такъ, чтобы, при возможныхъ отклоненіяхъ отъ нормальнаго хода, стержень не выходилъ изъ вилки и не приближался къ ней въ точкѣ d. Такой регуляторъ употребляется для регулированія движенія астрономической трубы.

Приведенный примѣръ показываетъ, какимъ образомъ по даннымъ уравненіямъ движенія опредѣляется сила, подъ вліяніемъ которой происходитъ это движеніе. Для этого пользуются дифференціальными уравненіями движенія (форм. 27).

Обратная задача—по заданнымъ силамъ найти, какъ движется матеріальная точка, рѣшается съ помощію интегрированія этихъ уравненій. Эта задача можетъ представить значительныя трудности, такъ какъ, вообще, интеграція ур-ій можетъ быть недоступна. Напримѣръ, мы можемъ считать вполнѣ разрѣшенной задачу о движеніи матеріальной точки подъ вліяніемъ двухъ притягивающихъ центровъ; но вопросъ о движеніи трехъ взаимно притягивающихся по закону Ньютона матеріальныхъ точкахъ (задача о трехъ тѣлахъ) не только не разрѣшенъ, но неизвѣстно даже и приближенное его разрѣшеніе.

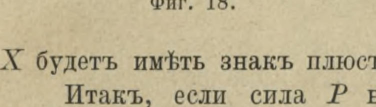
Вопросъ объ интеграціи ур-ій (27) представляется фундаментальнымъ вопросомъ динамики. Первая задача, которую мы поставимъ себѣ разрѣшить, будетъ задача о прямолинейномъ движеніи, въ которомъ точка или свободна, или движется по прямолинейному пути, предписанному ей какими-либо кинематическими условіями.

§ 12. Опредѣленіе уравненій прямолинейнаго движенія, производимаго силой, законъ измѣненія которой извѣстенъ. Обращаясь къ ур-ію $X = m\,\dfrac{d^2x}{dt^2}$, замѣтимъ, что сила X можетъ быть различна. Самый важный случай—это тотъ, когда сила есть *функція положенія* точки (магнитъ, пружина). Но могутъ быть предложены задачи, принадлежащія къ типу относительнаго движенія; тогда приходится вносить силы, происходящія вслѣдствіе того, что всякое относительное движеніе можно разсматривать, какъ абсолютное, прибавивъ къ дѣйствующимъ силамъ, какъ это будетъ доказано впослѣдствіи, силы инерціи. Такія силы могутъ мѣняться со временемъ. Силы могутъ измѣняться со временемъ и вслѣдствіе движенія притягивающаго тѣла; примѣръ—дѣйствіе луны на воду океана.

Наконецъ, третьимъ случаемъ мы будемъ считать тотъ, когда сила X является *функціей скорости*; обыкновенно такими силами бываютъ пассивныя, сопротивляющіяся движенію силы. Итакъ, изслѣдуемъ всѣ три случая прямолинейнаго движенія въ слѣдующемъ порядкѣ:

1) Сила дана, какъ функція времени: $X = \varphi(t)$.
2) Сила дана, какъ функція пространства: $X = \varphi(x)$.
3) Сила дана, какъ функція скорости: $X = \varphi(v)$.

Установимъ предварительно правило знаковъ для силъ. Свободная матеріальная точка движется *прямолинейно*, если сила имѣетъ *постоянное направленіе* и *начальная скорость равна нулю* или *направлена по силѣ*. Проведя по направленію силы ось **Ox** (фиг. 18), напишемъ по форм. (26) выраженіе силы, дѣйствующей по этой оси:



Фиг. 18.

$$X = P\cos\alpha \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

гдѣ $\alpha = 0^0$ и $\alpha = 180^0$; въ первомъ случаѣ X будетъ имѣть знакъ плюсъ, во второмъ—минусъ.

Итакъ, если сила P направлена въ положительную сторону оси x, то X положителенъ, а въ противномъ случаѣ отрицателенъ.

Обратимъ вниманіе на слѣдующія выраженія второй производной отъ пространства x по времени t;

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dv}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Но такъ какъ скорость v есть функція x, а x есть функція времени t, то

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\,\frac{dv}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28')$$

Тѣмъ или другимъ изъ этихъ выраженій намъ придется пользоваться при рѣшеніи задачъ.

1 случай.

$$X = \varphi(t).$$

Здѣсь производную $\frac{d^2x}{dt}$ надо писать *непремѣнно* въ видѣ (28) $\frac{dv}{dt}$, потому что тогда въ написанномъ уравненіи будетъ только два перемѣнныхъ, которыя можно раздѣлить и произвести интеграцію.

По формуламъ (27) и (28) имѣемъ:

$$X = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27')$$

Интегрируя предыдущее выраженіе, найдемъ:

$$\int m\,dv = \int X\,dt$$

$$m.v = \int^t X\,dt + C.$$

Произвольное постоянное C всегда находится по начальнымъ даннымъ — начальному положенію и начальной скорости.

Полагая, что при $t = 0$, $v = v_0$, получимъ:

$$mv_0 = \int^0 X\,dt + C.$$

Вычитая это выраженіе изъ предыдущаго, имѣемъ:

$$mv - mv_0 = \int_0^t X\,dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

Это выраженіе представляетъ собой теорему о количествѣ движенія: *приращеніе количества движенія равняется суммѣ импульсовъ силъ за данное время.*

Взявъ интегралъ ур-нія (29), получимъ уравненіе вида:

$$v = \psi(t).$$

Такъ какъ,

$$v = \frac{dx}{dt},$$

то имѣемъ:

$$v = \psi(t) = \frac{dx}{dt},$$

такъ что

$$dx = \psi(t) \,.\, dt.$$

Интегрируя, получаемъ:

$$x = \int^t \psi(t) \,.\, dt + C_1 \,.$$

Полагая, что при началѣ движенія $t = 0$ и координата $x=0$, получимъ:

$$0 = \int^0 \psi(t)\, dt + C_1 \,.$$

Вычитая это равенство изъ предыдущаго, имѣемъ:

$$x = \int_0^t \psi(t) \,.\, dt \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \quad (30)$$

Отсюда получаемъ пространство x, какъ функцію времени t.

2 случай.

$$X = \varphi(x).$$

Случай, когда сила есть функція пространства, является самой ходовой задачей. Ускореніе придется представить *непремѣнно* въ видѣ (28′) $v\dfrac{dv}{dx}$, опять-таки съ тою цѣлью, чтобы вошло только два перемѣнныхъ.

По формуламъ (27) и (28′)

$$X = mv\frac{dv}{dx} \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \quad (27'')$$

Интегрируя (27″), найдемъ:

$$\int^x X\,dx = \int mv\,dv = \frac{mv^2}{2} + C_2 \,.$$

Полагаемъ при началѣ движенія

$$x = 0 \quad \text{и} \quad v = v_0 \,.$$

Тогда:

$$\int^0 X\,dx = \frac{mv_0^2}{2} + C_2 \,.$$

Вычитая это равенство изъ предыдущаго, находимъ:

$$\int_0^x X\,dx = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \quad (31)$$

Формула эта выражаетъ теорему живыхъ силъ: *приращеніе живой силы на данномъ пути равно работѣ силы на этомъ пути* (X есть сила, dx—элементъ пути).

Изъ формулы (31) находимъ v:

$$v^2 = v_0{}^2 + \frac{2}{m}\int_0^x X\,dx = \psi(x);$$

$$v = \pm\sqrt{\psi(x)}.$$

Передъ корнемъ надо взять $+$, если при движеніи точки координата x возрастаетъ, и $-$, если она убываетъ. Положимъ, что x возрастаетъ:

$$v = \sqrt{\psi(x)},$$

но $v = \frac{dx}{dt}$, поэтому:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\psi(x)};$$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}.$$

Интегрируя, найдемъ:

$$t = \int^x \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} + C_3.$$

Полагая при началѣ движенія $t=0$ и $x=0$, находимъ:

$$0 = \int^0 \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} + C_3.$$

Вычитаемъ это равенство изъ предыдущаго:

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

Это даетъ искомую связь между t и x.

3 случай.

$$X = \varphi(v).$$

Въ этомъ случаѣ выраженіе ускоренія можетъ представиться въ обѣихъ формахъ (28) и (28'); такъ какъ X зависитъ по условію, только отъ v, то, какую бы мы форму ни взяли, мы, все равно, получимъ только два перемѣнныхъ и ихъ дифференціалы.

Напишемъ дифференціальное уравненіе на основаніи (27) и (28) въ такомъ видѣ:

$$X = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27')$$

Можно было бы воспользоваться и выраженіемъ $X = mv\frac{dv}{dx}$, но мы возьмемъ сначала первое и опредѣлимъ изъ него dt:

$$dt = m\frac{dv}{X}.$$

Интегрируя, найдемъ:

$$t = m\int^{v} \frac{dv}{X} + C_4.$$

Полагая въ началѣ движенія $t = 0$ и $v = v_0$, имѣемъ:

$$0 = m\int^{v_0} \frac{dv}{X} + C_4.$$

Вычитаемъ это равенство изъ предыдущаго:

$$t = m\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{X} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Если это уравненіе можно рѣшить относительно v, то находимъ:

$$v = \psi(t).$$

Подставляя сюда $\frac{dx}{dt}$ вмѣсто v, находимъ:

$$dx = \psi(t)\,dt,$$

откуда

$$x = \int \psi(t)\,dt + C_5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Это даетъ искомую связь между t и x.

Большей частью уравненіе (33) не разрѣшимо относительно v, или разрѣшимо очень трудно. Въ такомъ случаѣ пользуемся выраженіемъ:

$$X = mv\frac{dv}{dx};$$

$$dx = mv \cdot \frac{dv}{X}.$$

Интегрируя, получимъ:

$$x = m\int^{v} v \cdot \frac{dv}{X} + C_6 .$$

Полагая въ началѣ движенія $x = x_0$ и $v = v_0$, находимъ:

$$x_0 = m\int^{v_0} \frac{v \,.\, dv}{X} + C_6 .$$

Вычитаемъ это равенство изъ предыдущаго:

$$x - x_0 = m\int_{v_0}^{v} \frac{v \,.\, dv}{X} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

Найденныя уравненія (33) и (35) даютъ возможность установить связь между t и x.

Кромѣ разсмотрѣнныхъ трехъ случаевъ выраженія силы, существуетъ много другихъ, такъ какъ сила можетъ быть дана функціей нѣсколькихъ перемѣнныхъ: времени, пространства, скорости. Для такого случая нѣтъ общаго способа рѣшенія, оно извѣстно лишь для частныхъ случаевъ.

Теперь рѣшимъ нѣсколько задачъ, важныхъ не только какъ примѣры на интегрированіе дифференціальныхъ уравненій, но имѣющихъ значеніе изслѣдованія обыденныхъ явленій природы. Въ нѣкоторыхъ старинныхъ сочиненіяхъ, каковъ, напримѣръ, классическій трудъ Эйлера, эти задачи, въ связи съ другими подобными, составляютъ содержаніе всего курса механики.

§ 13. Паденіе тѣлъ съ большой высоты. Если тѣло падаетъ съ очень большой высоты, то законы Галлилея (*ускореніе постоянно*) не могутъ быть приложимы, такъ какъ приходится принять въ соображеніе зависимость ускоренія отъ разстоянія. Разсматривая движеніе тѣла на весьма большомъ разстояніи отъ земли, приходится принять силу притяженія земли перемѣнной, *измѣняющейся по закону Ньютона*, обратно пропорціонально квадрату разстоянія отъ центра земли и прямо пропорціонально массамъ земли и тѣла. Разсматриваемый случай имѣетъ мѣсто при паденіи аэролитовъ.

Пусть M и m суть массы земли и притягиваемаго ею тѣла, x — разстояніе въ данный моментъ между центромъ земли и притягиваемымъ тѣломъ (фиг. 19).

Сила взаимодѣйствія по закону Ньютона напишется такъ:

$$P = k \cdot \frac{m \,.\, M}{x^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

гдѣ k *есть коэффиціентъ пропорціональности, выражающій силу тяготѣнія между двумя единицами массы на единицѣ разстоянія.*

Полагая

$$k \, . \, M = \mu,$$

получимъ:

$$P = \frac{m\mu}{x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36')$$

Для опредѣленія μ предположимъ, что наша матеріальная точка m находится на поверхности земли. Тогда получимъ:

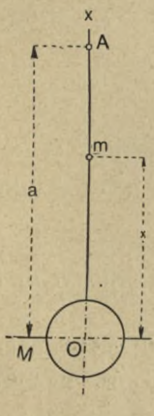
$$x = R \text{ (радіусъ земли)},$$
$$P = mg \text{ (вѣсъ тѣла)},$$

и уравненіе (36′) приметъ видъ:

$$mg = \frac{m\mu}{R^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36'')$$

откуда

$$\mu = R^2 g = 9{,}81 \ R^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$



Фиг. 19.

Подставивъ значеніе R въ метрахъ, получимъ числовую величину μ.

Опредѣливъ μ и подставивъ полученное его значеніе въ (36′), получимъ окончательно

$$P = \frac{m \, . \, 9{,}81 \, . \, R^2}{x^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36''')$$

Далѣе, принимая **Ox** за ось x-овъ, получаемъ дифференціальное уравненіе движенія:

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2} = mv\frac{dv}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27'')$$

Съ другой стороны, согласно съ направленіемъ силы (отъ x къ O, т.-е. въ отрицательную сторону оси х-овъ) получаемъ:

$$X = -P = -\frac{m\mu}{x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36^{IV})$$

Слѣдовательно, изъ (27″) и (36^{IV}) выходитъ:

$$mv\frac{dv}{dx} = -\frac{m\mu}{x^2}$$

$$v\,dv = -\frac{\mu\,dx}{x^2}$$

Умножая обѣ части на 2 и интегрируя, получимъ:

$$\int 2\,v\,.\,dv = v^2 = -2\,\mu \int \frac{dx}{x^2} + C = \frac{2\,\mu}{x} + C \,.\;.\;.\;.\;.\; (38)$$

Полагая, что при

$$x = a,$$

(гдѣ a — разстояніе отъ начала паденія до центра земли), скорость

$$v = 0,$$

имѣемъ по (38):

$$\frac{2\,\mu}{a} + C = 0,$$

откуда:

$$C = -\frac{2\,\mu}{a}.$$

Подставляя это значеніе C въ (38), имѣемъ:

$$v^2 = \frac{2\,\mu}{x} - \frac{2\,\mu}{a} = 2\,\mu\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right);$$

откуда

$$v = -\sqrt{2\,\mu\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (39)$$

Передъ корнемъ надо взять минусъ, такъ какъ скорость направлена въ сторону, обратную положительному направленію оси x-овъ.

Полагая, что точка приближается къ землѣ изъ міроваго пространства, когда $a = \infty$, и беря $x = R$, по формулѣ (39), найдемъ скорость паденія тѣла съ очень большой высоты:

$$v = -\sqrt{\frac{2\,\mu}{R}},$$

а по (37)

$$v = -\sqrt{\frac{2\,R^2 g}{R}} = -\sqrt{2\,Rg}\,.$$

Подставляя $g = 9{,}81$ *mt/sec*^{2} и $R = 6000$ *mt*, получаемъ для скорости v значеніе 11179 *mt/sec*.

Между тѣмъ, примѣняя формулу Галлилея:

$$v = \sqrt{2gh},$$

вѣрную для высотъ h, небольшихъ по сравненію съ радіусомъ земли, получили бы въ данномъ случаѣ: $v = \infty$ (въ данномъ случаѣ $h = a = \infty$).

Найдемъ теперь связь между временемъ и пространствомъ, для чего въ уравненіи (39) замѣнимъ v черезъ $\frac{dx}{dt}$

$$v=\frac{dx}{dt}=-\sqrt{2\mu\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (39')$$

Раздѣляемъ перемѣнныя:

$$\sqrt{2\mu}\,.\,dt=-\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}}=-\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{a-x}}\,dx.$$

Для удобства интегрированія дѣлимъ обѣ части равенства на $\sqrt{a}$ и умножаемъ числителя и знаменателя второй части на $\sqrt{x}$:

$$\sqrt{\frac{2\mu}{a}}\cdot dt=-\frac{x\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

Прибавляя и вычитая изъ числителя второй части по $a\,.\,dx$, получимъ:

$$\sqrt{\frac{2\mu}{a}}\cdot dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x\,dx+a\,dx-a\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}=\frac{1}{2}\,\frac{(a-2x)\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}-\frac{1}{2}\,\frac{a\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$

Въ подкоренномъ количествѣ знаменателя второго члена второй части прибавляемъ и вычитаемъ $\frac{a^2}{4}$:

$$\sqrt{\frac{2\mu}{a}}\cdot dt=\frac{1}{2}\,\frac{(a-2x)\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{a\,dx}{\sqrt{\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{d(ax-x^2)}{\sqrt{ax-x^2}}-\frac{a}{2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{(2x-a)^2}{4}}}=d\sqrt{ax-x^2}-\frac{a}{2}\cdot\frac{\frac{2}{a}\cdot dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-a}{a}\right)^2}}=$$

$$=d\sqrt{ax-x^2}-\frac{a}{2}\,\frac{\frac{2\,dx}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-a}{a}\right)^2}}.$$

Замѣтивъ, что $d\,\frac{2x-a}{a}=\frac{2\,dx}{a}$, получимъ:

$$\sqrt{\frac{2\mu}{a}}\,dt=d\sqrt{ax-x^2}-\frac{a}{2}\,\frac{d\,\frac{2x-a}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-a}{a}\right)^2}}=$$

$$=d\sqrt{ax-x^2}+\frac{a}{2}\,d\,arc\,cos\,\frac{2x-a}{a}\,.$$

Интегрируя, найдемъ:

$$t\sqrt{\frac{2\mu}{a}}=\sqrt{ax-x^2}+\frac{a}{2}\,arc\,cos\,\frac{2x-a}{a}+C_1\,.$$

Полагая при началѣ движенія, т.-е. при $t=0$, $x=a$, имѣемъ:

$$0=\frac{a}{2}\,arc\,cos\,(1)+C_1\,.$$

Но

$$arc\,cos\,(1)=0,$$

а потому:

$$C_1=0.$$

Слѣдовательно,

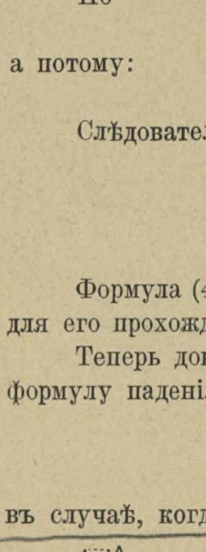
$$t\sqrt{\frac{2\mu}{a}}=\sqrt{ax-x^2}+\frac{a}{2}\,arc\,cos\,\frac{2x-a}{a}\quad\ldots\ldots\quad(40)$$

Формула (40) даетъ зависимость между пространствомъ x и потребнымъ для его прохожденія временемъ t.

Теперь докажемъ, что формула (40) переходитъ въ данную Галлилеемъ формулу паденія тѣлъ на землю:

$$h=\tfrac{1}{2}\,gt^2,$$

въ случаѣ, когда h очень мало сравнительно съ радіусомъ земли R.



Фиг. 19'.

Для этого случая [фиг. (19')] должны принять:

$$\left.\begin{array}{l} a=R+h \\ x=R. \\ a-x=h \end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(41)$$

Откуда:

Величину x беремъ равной R потому, что разсматриваемъ моментъ достиженія тѣломъ земной поверхности,—моментъ конца паденія.

Въ нашу формулу (40) вмѣсто $arc\cos$, введемъ $arc\sin$ по тригонометрической формулѣ:

$$arc\cos m = arc\sin \sqrt{1-m^2},$$

послѣ чего она перепишется такъ:

$$t\sqrt{\frac{2\mu}{a}} = \sqrt{ax-x^2} + \frac{a}{2}\,arc\sin\sqrt{1-\left(\frac{2x-a}{a}\right)^2}.$$

Подставляя сюда значеніе μ изъ (37) и дѣлая необходимыя преобразованія, получаемъ:

$$t\sqrt{\frac{2R^2g}{a}} = \sqrt{x(a-x)} + \frac{a}{2}\,arc\sin\sqrt{\frac{4x}{a^2}(a-x)}.$$

Теперь, принявъ во вниманіе (41), напишемъ:

$$t\sqrt{\frac{2R^2g}{R+h}} = \sqrt{Rh} + \frac{R+h}{2}\,arc\sin\sqrt{\frac{4Rh}{(R+h)^2}}$$

x(a-x)

или, дѣля все равенство на $\sqrt{\frac{2R^2}{R+h}}$, перепишемъ его такъ:

$$t\sqrt{g} = \sqrt{\frac{Rh.(R+h)}{2R^2}} + \frac{(R+h)}{2\sqrt{\frac{2R^2}{R+h}}}\,arc\sin\sqrt{\frac{4Rh}{(R+h)^2}};$$

или $$t\sqrt{g} = \sqrt{\frac{(R+h)h}{2R}} + \sqrt{\frac{(R+h)^3}{8R^2}}\cdot arc\sin\sqrt{\frac{4Rh}{(R+h)^2}}.$$

Теперь умножимъ и раздѣлимъ послѣдній членъ этого равенства на $\sqrt{\frac{4Rh}{(R+h)^2}}$, получимъ:

$$t\sqrt{g} = \sqrt{\frac{(R+h)h}{2R}} + \sqrt{\frac{(R+h)^3}{8R^2}\cdot\frac{4Rh}{(R+h)^2}}\cdot\frac{arc\sin\sqrt{\frac{4Rh}{(R+h)^2}}}{\sqrt{\frac{4Rh}{(R+h)^2}}},$$

или $$t\sqrt{g} = \sqrt{\frac{(R+h)h}{2R}} + \sqrt{\frac{(R+h)h}{2R}}\cdot\frac{arc\sin\sqrt{\frac{4Rh}{(R+h)^2}}}{\sqrt{\frac{4Rh}{(R+h)^2}}};$$

$$t\sqrt{g} = \sqrt{\frac{h}{2}\left(1+\frac{h}{R}\right)} + \sqrt{\frac{h}{2}\left(1+\frac{h}{R}\right)}\cdot\frac{arc\sin\sqrt{\frac{4h}{R}:\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}}{\sqrt{\frac{4h}{R}:\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}}.$$

Въ виду того, что h очень мало сравнительно съ R, аргументъ дуги и ея синусъ будутъ очень малы, такъ что отношеніе дуги къ ея синусу можно принять равнымъ 1.

Поэтому:

$$\lim \frac{arc\ sin \sqrt{4 \cdot \frac{h}{R} : \left(1+\frac{h}{R}\right)^2}}{\sqrt{4 \cdot \frac{h}{R} : \left(1+\frac{h}{R}\right)^2}} = 1.$$

Наше равенство послѣ этого перепишется такъ:

$$t\sqrt{g} = 2\sqrt{\frac{h}{2}\left(1+\frac{h}{R}\right)}.$$

Въ силу того же условія (h мало по сравненію съ R) можно отбросить безъ замѣтной погрѣшности въ подкоренномъ выраженіи членъ $\frac{h}{R}$, что окончательно дастъ:

$$t\sqrt{g} = 2\sqrt{\frac{h}{2}},$$

откуда

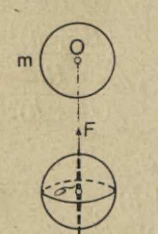
$$t\sqrt{g} = \sqrt{2h}$$

или

$$h = \frac{1}{2}gt^2.$$

Это и есть формула Галлилея.

§ 14. Паденіе тѣла въ сопротивляющейся средѣ. Законъ паденія тѣлъ, данный Галлилеемъ, вполнѣ вѣренъ лишь для паденія въ пустотѣ; тогда скорость, пріобрѣтаемая тѣломъ, прямо пропорціональна времени $v = gt$. Если же тѣло падаетъ въ воздухѣ, то наблюдается отступленіе отъ этого закона, обусловливаемое наличностью сопротивленія воздуха паденію тѣла. Живая сила падающаго тѣла тратится въ этомъ случаѣ на образованіе вихревыхъ движеній воздуха и, кромѣ того, на преодолѣваніе молекулярныхъ силъ прилипанія воздуха къ движущемуся тѣлу. Опытъ показалъ, *что сила сопротивленія среды зависитъ отъ скорости*, при чемъ для не слишкомъ малыхъ скоростей (0,1 *mt.* въ секунду и больше) *сопротивленіе можно считать прямо пропорціональнымъ квадрату скорости;* въ случаѣ же весьма *незначительныхъ* скоростей *сопротивленіе пропорціонально первой степени скорости.*



Фиг. 20.

Выведемъ аналитическія формулы паденія тѣла въ воздухѣ. Пусть легкій шаръ падаетъ изъ точки *O*. Примемъ эту точку за начало координатъ оси *x*, которую направимъ по вертикали внизъ (фиг. 20).

Во время паденія на тѣло дѣйствуютъ двѣ силы: одна P — сила тяжести, направленная внизъ и равная mg, и другая F, направленная вверхъ и равная силѣ сопротивленія воздуха. Если чрезъ μ обозначимъ нѣкоторый опытный коэффиціентъ сопротивленія, черезъ σ обозначимъ площадь большого круга падающаго шара, а черезъ γ обозначимъ плотность среды, въ которой происходитъ паденіе (для воздуха $\gamma = 1{,}2$ при 15^0), то изъ опытнаго закона, приведеннаго выше, слѣдуетъ, что:

$$F = \mu\sigma\gamma v^2.$$

запомнить

Опредѣленіемъ коэффиціента μ занимались многіе ученые, такъ Ньютонъ нашелъ, что для шара $\mu = 0{,}026$ (для пластинки принимаютъ $\mu = 0{,}085$). Покойный профессоръ Д. И. Менделѣевъ нашелъ, что при небольшихъ скоростяхъ (отъ 0,1 до 1 mt. въ секунду) $\mu = 0{,}25$.

Въ послѣднее время закономъ измѣненія коэффиціента μ со скоростью занимался профессоръ Н. А. Морозовъ и построилъ кривую, выражающую связь между μ и v. Если мы на оси абсциссъ будемъ откладывать скорости, а на оси ординатъ соотвѣтствующіе этимъ скоростямъ коэффиціенты μ, то кривая, изображающая соотвѣтственныя измѣненія коэффиціента μ отъ скорости, представится въ такомъ видѣ: при скоростяхъ отъ 3 до 10 mt. въ секунду, кривая немного опускается (μ убываетъ); при скоростяхъ отъ 10 mt. до 300 mt. въ секунду, кривая медленно подымается (μ возрастаетъ); при скоростяхъ отъ 300 mt. до 400 mt. въ секунду, кривая быстро поднимается, при скоростяхъ же большихъ 400 mt. въ сек., кривая идетъ параллельно оси абсциссъ (μ остается постояннымъ и равнымъ 0,038).

Законъ же пропорціональности силы сопротивленія плотности среды γ оказывается необычайно вѣренъ. Обыкновенно опыты въ водѣ переносятъ на опыты съ воздухомъ и только перемѣняютъ факторъ γ. Кромѣ воды и воздуха опыты производились также и надъ нефтью (проф. Мерчиномъ).

Для упрощенія вычисленія преобразуемъ выраженіе

$$F = \mu\sigma\gamma v^2$$

въ такое:

$$\left.\begin{aligned} F &= mgk^2v^2, \\ k^2 &= \frac{\mu\sigma\gamma}{mg} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

гдѣ

запомнить.

Движущая сила X слагается изъ положительной P и отрицательной F, слѣдовательно:

$$X = mg - mgk^2v^2 = mg(1 - k^2v^2).$$

Согласно дифференціальному уравненію движенія (27):

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

0,38

имѣемъ:

$$mg(1-k^2v^2)=m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Сокративъ на m и замѣнивъ $\frac{d^2x}{dt^2}$ согласно (28) чрезъ $\frac{dv}{dt}$, имѣемъ:

$$\frac{dv}{dt}=(1-k^2v^2)\,g,$$

или, раздѣливъ перемѣнныя, получимъ:

$$\frac{dv}{1-k^2v^2}=g\,.\,dt.$$

Для интегрированія преобразуемъ это выраженіе слѣдующимъ образомъ: Умножимъ и раздѣлимъ первую часть уравненія на 2

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\,dv}{1-k^2v^2}=gdt.$$

Затѣмъ къ числителю первой части прибавимъ и вычтемъ $kv\,dv$, тогда наше уравненіе напишется такъ:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(dv+kv\,dv)}{(1-kv)(1+kv)}+\frac{(dv-kv\,dv)}{(1-kv)(1+kv)}\right]=gdt,$$

что послѣ необходимыхъ упрощеній дастъ:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{dv}{1+kv}+\frac{dv}{1-kv}\right]=g\,.\,dt.$$

Умноживъ на $2k$, получимъ:

$$\frac{k\,dv}{1+kv}+\frac{k\,dv}{1-kv}=2kg\,.\,dt.$$

Интегрируя, получаемъ:

$$L(1+kv)-L(1-kv)=2kgt+C.$$

Полагая, что при началѣ движенія, т.-е. при $t=0$, $v=0$, находимъ:

$$C=0.$$

Первая часть представляетъ логариѳмъ дроби, а потому:

$$L\frac{1+kv}{1-kv}=2kgt,$$

или

$$\frac{1+kv}{1-kv}=e^{2kgt},$$

гдѣ e—основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ. Опредѣлимъ отсюда v:

$$v=\frac{1}{k}\cdot\frac{e^{2kgt}-1}{e^{2kgt}+1}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(43)$$

Помноживъ числителя и знаменателя на e^{-2kgt}, получимъ:

$$v=\frac{1}{k}\cdot\frac{1-e^{-2kgt}}{1+e^{-2kgt}}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(43')$$

Изъ этой формулы видно, что въ предѣлѣ, при $t=\infty$, скорость v становится максимальной постоянной величиной, а именно:

$$v_{max}=\frac{1}{k}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(43'')$$

Конечно, въ дѣйствительности паденіе тѣла въ воздухѣ не можетъ продолжаться безконечно долго, намъ большей частью приходится измѣрять это время секундами. Но на практикѣ, вслѣдствіе малаго числового значенія e^{-2kg}, можно считать, что, спустя одну, двѣ секунды отъ начала паденія скорость v достигнетъ своего максимума, равнаго $\frac{1}{k}$, и тѣло станетъ двигаться дальше уже равномѣрно.

Благодаря сопротивленію воздуха, всякое тѣло, падающее на земную поверхность, можетъ пріобрѣсти только ограниченную максимальную скорость, зависящую отъ его массы, объема и формы. Это обстоятельство имѣетъ громадное значеніе. Если бы сопротивленія воздуха не существовало, то паденіе совершалось бы по закону Галлилея и скорость, возрастая по формулѣ

$$v=\sqrt{2gh},$$

при значительныхъ h могла бы достигать большихъ значеній. Аэролиты, благодаря сопротивленію воздуха, большей частію разрушаются, сгораютъ и падаютъ на земную поверхность въ видѣ осадка мелкой космической пыли. Если бы атмосфера не оказывала сопротивленія, то скорость достигала бы величины, указанной въ § 13, стр. 34.

Изъ приведенныхъ формулъ для F слѣдуетъ теорема Маріотта: *предѣльныя скорости шаровъ одинаковой плотности разныхъ радіусовъ, прямо пропорціональны корнямъ квадратнымъ изъ ихъ радіусовъ.*

Обозначимъ радіусъ одного шара черезъ r и его скорость черезъ v_{max}, а другого—r_1 и $v_{1\,max}$.

Такъ какъ оба тѣла—шары, *то коэффиціентъ μ у нихъ одинъ и тотъ же.* Обозначая плотность черезъ ϱ по (43″) и (42), и принимая во вниманіе, что m (масса шара) $= \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho$, а $\delta = \pi r^2$, получимъ:

$$v_{max} = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{mg}{\mu\delta}} = \sqrt{\frac{4\pi r^3 \varrho}{3\pi r^2}} \cdot \sqrt{\frac{g}{\mu}} = \sqrt{\frac{g}{\mu}} \cdot \sqrt{\frac{4\varrho}{3}} \cdot \sqrt{r}.$$

Аналогично для второго шара имѣемъ:

$$v_{1\,max} = \frac{1}{k_1} = \sqrt{\frac{m_1 g}{\mu\delta_1}} = \sqrt{\frac{4\pi r_1^{\,3}\varrho}{3\pi r_1^{\,2}}} \cdot \sqrt{\frac{g}{\mu}} = \sqrt{\frac{g}{\mu}} \cdot \sqrt{\frac{4\varrho}{3}} \cdot \sqrt{r_1}.$$

Отсюда:

$$\frac{v_{max}}{v_{1\,max}} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r_1}},$$

что и требовалось доказать.

Формула (43) даетъ *зависимость между скоростью* падающаго тѣла *и временемъ.* Пользуясь этой формулой, выведемъ *зависимость пути*, пройденнаго падающимъ въ сопротивляющейся средѣ тѣломъ, *отъ времени.*

Умножимъ числителя и знаменателя второй части равенства (43) на e^{-kgt} и, замѣнивъ v черезъ $\frac{dx}{dt}$, получимъ:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{k} \cdot \frac{e^{kgt} - e^{-kgt}}{e^{kgt} + e^{-kgt}}.$$

Умноживъ обѣ части равенства на $k^2 g dt$, имѣемъ:

$$k^2 g \,.\, dx = \frac{e^{kgt} - e^{-kgt}}{e^{kgt} + e^{-kgt}} \,.\, kgdt.$$

Интегрируя, найдемъ:

$$k^2 g x = L\,[e^{kgt} + e^{-kgt}] + C.$$

Полагая при началѣ движенія

$$t = 0$$

и

$$x = 0,$$

находимъ:

$$C = -L2.$$

Поэтому:

$$k^2 gx = L\left[\frac{e^{kgt} + e^{-kgt}}{2}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (44)$$

Выраженіе въ скобкахъ представляетъ функцію отъ аргумента kgt, называемую Cosinus hyperbolicum. Это одна изъ гиперболическихъ функцій, имѣющихъ большое значеніе во многихъ вопросахъ механики. Функціи эти суть тѣ же обыкновенныя тригонометрическія функціи, отнесенныя къ мнимымъ дугамъ. Онѣ подробно изучены и для нихъ составлены такія же таблицы, какъ и для обыкновенныхъ тригонометрическихъ функцій. Обозначаются онѣ слѣдующимъ образомъ:

$$\sin h\,(kgt) = \frac{e^{kgt} - e^{-kgt}}{2};$$

$$\cos h\,(kgt) = \frac{e^{kgt} + e^{-kgt}}{2}.$$

При такомъ обозначеніи предыдущая формула можетъ быть написана такъ:

$$x = \frac{L[\operatorname{Cos} h\,(kgt)]}{k^2 g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (44')$$

Имѣя въ распоряженіи упомянутыя таблицы, легко найти пространство x по времени t, отыскавъ $L \cos h$ для аргумента kgt.

§ 15. Движеніе тѣла, брошеннаго по вертикальному направленію снизу вверхъ. Пусть тѣло массы m брошено изъ точки O вверхъ по вертикальной линіи Ox (фиг. 21), которую примемъ за ось, полагая начало координатъ въ точкѣ O. Во время движенія на тѣло будутъ дѣйствовать двѣ силы: сила тяжести, направленная внизъ и равная mg, и сила сопротивленія воздуха, которая, согласно (42), выразится черезъ $F = mgk^2v^2$ и будетъ направлена въ сторону, противоположную направленію движенія. Пока тѣло летитъ вверхъ, сила F направлена внизъ. Въ такомъ случаѣ сила X, подъ вліяніемъ которой и происходитъ движеніе, при полетѣ тѣла вверхъ выразится такъ:

Фиг. 21.

$$X = -(mg + mgk^2v^2) = -mg(1 + k^2v^2).$$

По (27) и (28)

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv}{dt}.$$

Подставляя вмѣсто X его послѣднее выраженіе и дѣля обѣ части уравненія на m, находимъ:

$$\frac{dv}{dt} = -g(1 + k^2v^2).$$

Раздѣляемъ перемѣнныя:

$$\frac{k\,dv}{1 + k^2v^2} = -kg\,.\,dt.$$

Интегрируя, находимъ:

$$\operatorname{arc} tg\, kv = -kgt + C.$$

Полагая при $t = 0$, т.-е. въ началѣ движенія, $v = w$ (скорость, съ которой было брошено тѣло), находимъ, что

$$C = \operatorname{arc} tg\, kw.$$

Поэтому:

$$\operatorname{arc} tg\, kw - \operatorname{arc} tg\, kv = kgt.$$

Преобразуемъ первую часть равенства по тригонометрической формулѣ:

$$\operatorname{arc} tg\, m - \operatorname{arc} tg\, n = \operatorname{arc} tg \frac{m - n}{1 + mn}.$$

Получаемъ:

$$\operatorname{arc} tg \frac{kw - kv}{1 + k^2wv} = kgt.$$

Или:

$$\frac{kw - kv}{1 + k^2wv} = tg\, kgt;$$

откуда:

$$v = \frac{kw - tg\, kgt}{k(1 + kw\, tg\, kgt)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

Опредѣлимъ время T, въ продолженіе котораго тѣло долетитъ до высшей точки. Въ этой точкѣ скорость $v = 0$, а потому искомое время T будетъ равно t, найденному изъ предыдущей формулы при $v = 0$. Такимъ образомъ, находимъ:

$$kw = tg\, kgT;$$

откуда:

$$T = \frac{\operatorname{arc} tg\, kw}{kg} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

Значеніе T можетъ быть найдено при всякихъ условіяхъ, такъ какъ tg можетъ имѣть всевозможныя значенія.

Выведемъ формулу, дающую зависимость пространства x отъ времени t. Подставимъ въ формулу (45) $\frac{dx}{dt}$ вмѣсто v; находимъ:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{kw-tg\,kgt}{k(1+kw\,tg\,kgt)}.$$

Замѣняя $tg\,kgt$ черезъ $\frac{sin\,kgt}{cos\,kgt}$ и преобразовывая, получаемъ:

$$k\,dx=\frac{kw\,cos\,kgt-sin\,kgt}{cos\,kgt+kw\,sin\,kgt}\cdot dt.$$

Умножаемъ обѣ части равенства на kg:

$$k^2g\,dx=\frac{k^2gw\,cos\,kgt-kg\,sin\,kgt}{cos\,kgt+kw\,sin\,kgt}\cdot dt.$$

Интегрируя, найдемъ:

$$k^2gx=L[cos\,kgt+kw\,sin\,kgt]+C_1.$$

Полагая при началѣ движенія

$$t=0 \quad \text{и} \quad x=0,$$

находимъ, что

$$0=L1+C_1;$$

откуда

$$C_1=0.$$

Поэтому:

$$k^2gx=L[cos\,kgt+kw\,sin\,kgt] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

Найдемъ теперь наибольшую высоту H, на которую взлетитъ тѣло, брошенное вверхъ со скоростью w. Высота эта будетъ достигнута, спустя T секундъ послѣ начала движенія, а потому H будетъ равно x, найденному изъ формулы (47) при

$$t=T=\frac{\text{arc}\,tg\,kw}{kg}.$$

Но изъ этого послѣдняго равенства:

$$kgT=\text{arc}\,tg\,kw,$$

или

$$tg\,kgT=kw.$$

Выразимъ входящіе въ формулу (47) $cos(kgT)$ и $sin(kgT)$ черезъ $tg(kgT)$. При значеніи $t=T$ и $x=H$ получимъ:

$$k^2gH = L\left[\frac{1}{\sqrt{1+tg^2kgT}} + \frac{kw\,tg\,kgT}{\sqrt{1+tg^2kgT}}\right].$$

Замѣняя $tg\,kgT$ черезъ kw, находимъ:

$$k^2gH = L\left[\frac{1}{\sqrt{1+k^2w^2}} + \frac{k^2w^2}{\sqrt{1+k^2w^2}}\right] = \frac{1}{2}L[1+k^2w^2] \quad . \quad . \quad . \, (48)$$

По этой формулѣ и находимъ величину H, на которую подымется брошенное вверхъ тѣло.

Поднявшись на наибольшую высоту, тѣло будетъ падать. Скорость при паденіи можно опредѣлить по формулѣ (43), но удобнѣе для этого имѣть особую формулу. Выведемъ ее. Движеніе будемъ разсматривать относительно той же оси координатъ Ox, направленной вверхъ (фиг. 21). При паденіи на тѣло дѣйствуютъ двѣ силы: во-первыхъ, сила тяжести $P=mg$, направленная къ точкѣ O и потому отрицательная, и, во-вторыхъ, сила сопротивленія воздуха $F=mgk^2v^2$, направленная вверхъ и, слѣдовательно, положительная. Въ такомъ случаѣ сила, подъ вліяніемъ которой совершается движеніе, будетъ:

$$X = -mg + mgk^2v^2 = -mg(1-k^2v^2).$$

Представляя X по формулѣ (27″) въ видѣ $mv\frac{dv}{dx}$, получаемъ:

$$mv\cdot\frac{dv}{dx} = -mg(1-k^2v^2);$$

откуда:

$$\frac{v\,dv}{1-k^2v^2} = -g\,dx.$$

Для удобства интегрированія умножаемъ обѣ части равенства на $-2k^2$, а затѣмъ интегрируемъ. Получаемъ:

$$\frac{-2k^2v\,dv}{1-k^2v^2} = 2k^2g\,dx;$$

$$L(1-k^2v^2) + C_2 = 2k^2gx.$$

При началѣ паденія

$$x = H,$$

$$v = 0;$$

поэтому

$$C_2 = 2k^2gH,$$

или, на основаніи формулы (48),

$$C_2 = L(1 + k^2 w^2).$$

Въ силу этого предыдущее уравненіе приметъ видъ:

$$2k^2 gx = L(1 - k^2 v^2) + L(1 + k^2 w^2),$$

или:

$$2k^2 gx = L[(1 - k^2 v^2)(1 + k^2 w^2)] \quad \dots\dots\dots (49)$$

Эта формула даетъ зависимость между скоростью v при паденіи тѣла, высотою x, на которой находится тѣло, и начальной скоростью w, съ которой оно было брошено вверхъ.

Опредѣлимъ по этой формулѣ скорость v_1, съ которой тѣло упадетъ на землю. На поверхности земли координата $x = 0$, а слѣд. получаемъ:

$$L[(1 - k^2 v_1^2)(1 + k^2 w^2)] = 0.$$

Слѣдовательно:

$$(1 - k^2 v_1^2)(1 + k^2 w^2) = 1.$$

Рѣшая послѣднее уравненіе, находимъ:

$$v_1^2 = \frac{w^2}{1 + k^2 w^2}.$$

Если бы сопротивленіе воздуха не существовало, то $v_1 = w$; изъ формулы же видно, что при сопротивленіи воздуха $v_1 < w$. Когда начальная скорость w очень значительна, то въ выраженіи

$$v_1^2 = \frac{w^2}{1 + k^2 w^2} = \frac{1}{\frac{1}{w^2} + k^2}$$

можно пренебречь дробью $\frac{1}{w^2}$, такъ какъ она очень мала. Тогда тѣло упадетъ со скоростью

$$v_1 = \frac{1}{k} \quad \dots\dots\dots\dots\dots (49')$$

Найденная скорость равна скорости v_{max}, получаемой тѣломъ при паденіи внизъ въ продолженіе значительнаго промежутка времени [см. (43″)]. Ясно, что такъ и должно быть, такъ какъ при большой начальной скорости тѣло поднимается на большую высоту и, слѣдовательно, падаетъ сравнительно долго.

9 **§ 16. Криволинейное движенiе.** Криволинейное движенiе дается тремя уравненiями:

$$\left.\begin{array}{l} X = m\dfrac{d^2x}{dt^2}, \\ Y = m\dfrac{d^2y}{dt^2}, \\ Z = m\dfrac{d^2z}{dt^2}. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

При этомъ сила P можетъ мѣнять свое направленiе или же сохранять его, но тогда направленiе силы не будетъ совпадать съ направленiемъ первоначальной скорости точки.

Вопросъ объ интегрированiи трехъ дифференцiальныхъ уравненiй (27) рѣшается просто, когда компоненты X, Y, Z являются функцiями соотвѣтственныхъ координатъ, проекцiй скорости и времени, т.-е.

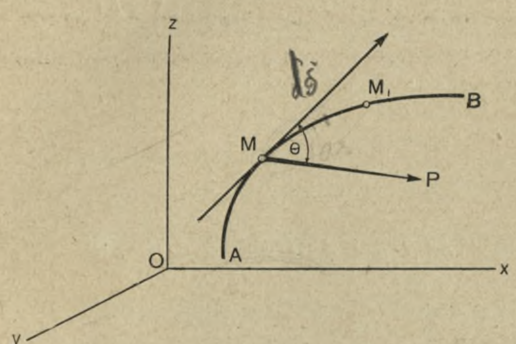
$$X = F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right),$$

такъ какъ при этомъ каждое изъ уравненiй интегрируется отдѣльно. Въ этомъ случаѣ рѣшенiе сводится къ отысканiю двухъ интеграловъ для каждой оси и требуетъ введенiя двухъ произвольныхъ постоянныхъ. Слѣдовательно, всего придется ввести шесть постоянныхъ. Данными для опредѣленiя этихъ шести постоянныхъ будутъ элементы, опредѣляющiе начальное положенiе точки, т.-е. три ея координаты и три слагающiя скорости по осямъ координатъ (компоненты скорости) въ начальный моментъ движенiя. Въ курсѣ анализа доказывается, что и въ томъ случаѣ, когда дифференцiальныя уравненiя движенiя нельзя интегрировать порознь, произвольныхъ постоянныхъ будетъ также шесть. Задача объ интегрированiи уравненiй криволинейнаго движенiя матерiальной точки, когда силы X, Y, Z суть функцiи времени, пространства и скорости, общихъ прiемовъ рѣшенiя не имѣетъ, часто невыполнима по своей трудности, и только въ частныхъ случаяхъ возможно получить окончательное рѣшенiе. Разобраться въ этихъ случаяхъ помогаютъ теоремы динамики, указывающiя законы силъ природы, при которыхъ уравненiя динамики даютъ нѣкоторыя опредѣленныя соотношенiя между скоростями и координатами.

Зависимость между координатами точки, ея скоростью и временемъ, удовлетворяющая уравненiямъ динамики, называется *интеграломъ уравненiй движенiя*. Эти интегралы и даютъ теоремы механики. Нѣкоторые изъ нихъ были извѣстны до примѣненiя анализа безконечно-малыхъ къ рѣшенiю вопросовъ механики. Къ числу подобныхъ интеграловъ принадлежитъ интегралъ живыхъ силъ, выводомъ котораго мы теперь и займемся.

§ 17. Теорема живыхъ силъ. Для вывода теоремы воспользуемся дифференціальными уравненіями движенія:

$$\left.\begin{aligned} X &= m\frac{d^2x}{dt^2}, \\ Y &= m\frac{d^2y}{dt^2}, \\ Z &= m\frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$



Фиг. 22.

Отнесемъ движеніе къ системѣ координатъ x, y, z и положимъ, что въ моментъ времени t матеріальная точка находится въ M (фиг. 22), а въ промежутокъ времени dt проходитъ путь ds и переходитъ въ M_1.

Умножаемъ дифференціальныя уравненія (27) соотвѣтственно на dx, dy, dz, т.-е. на приращенія координатъ за промежутокъ времени dt, и складываемъ; получаемъ:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = m\frac{dx\,.\,d^2x + dy\,.\,d^2y + dz\,.\,d^2z}{dt^2} \quad \ldots (50)$$

Преобразуемъ первую часть этого уравненія, умножая и дѣля всѣ его члены на $P\,ds$:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = P\,ds\left[\frac{X}{P}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{P}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{P}\cdot\frac{dz}{ds}\right].$$

Здѣсь $\frac{X}{P}$, $\frac{Y}{P}$, $\frac{Z}{P}$ представляютъ косинусы угловъ, образуемыхъ силой P съ осями x, y, z, а $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ даютъ косинусы угловъ элемента пути ds съ тѣми же осями. Въ такомъ случаѣ сумма произведеній ихъ въ скобкахъ равняется косинусу угла между направленіями P и ds, т.-е. $\cos\Theta$.

Слѣдовательно:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = P\,ds\cos\Theta \quad \ldots\ldots\ldots (51)$$

Выраженіе $P\,ds\cos\Theta$, представляющее произведеніе силы на элементъ пути и на $\cos$ угла между ними, называется *элементарной работой силы P на пути ds.*

Вторая же часть уравненія (50) представляетъ *дифференціалъ живой силы*: $d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$.

Въ самомъ дѣлѣ, по формулѣ (1) имѣемъ:

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1')$$

Возьмемъ отъ обѣихъ частей равенства производныя по t; находимъ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{1}{2}\left\{2\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) + 2\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) + 2\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right)\right\};$$

иначе:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Умножая обѣ части этого равенства на $m\,dt$, найдемъ:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = m\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots (52)$$

Пользуясь равенствами (51) и (52), перепишемъ теперь уравненіе (50) такъ:

$$P\,ds\cos\Theta = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

Это уравненіе и даетъ теорему живыхъ силъ въ дифференціальной формѣ и можетъ быть формулировано такъ:

дифференціалъ живой силы равенъ элементарной работѣ дѣйствующей силы.

Если траекторія точки извѣстна, а P и Θ представляютъ извѣстныя функціи отъ s, то ур-іе (53) можно проинтегрировать; а именно:

$$\frac{m\,.\,v^2}{2} = \int^s P\cos\Theta\,ds + C.$$

Произвольное постоянное C опредѣлимъ по начальнымъ даннымъ. Пусть въ началѣ движенія, при

$$s = s_0,$$

скорость

$$v = v_0.$$

Тогда:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \int^{s_0} P\cos\Theta\,ds + C.$$

Вычитая это равенство изъ предыдущаго, находимъ:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{s_0}^{s} P \cos\Theta\, ds \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (54)$$

Это равенство даетъ теорему живыхъ силъ:

приращеніе живой силы на данномъ пути равно работѣ силы на этомъ пути.

Въ томъ случаѣ, когда движеніе совершается подъ дѣйствіемъ силъ природы, зависящихъ отъ координатъ x, y, z, выраженіе теоремы живыхъ силъ значительно упрощается, благодаря замѣчательному свойству всѣхъ такихъ силъ, именно,—ихъ консервативности. Разсмотримъ, въ чемъ состоитъ это свойство и какъ выражается при его помощи теорема живыхъ силъ.

§ 18. Консервативность силъ природы. Всѣ силы природы, могущія быть представленными, какъ функціи координатъ, обладаютъ свойствомъ консервативности, состоящимъ въ слѣдующемъ:

работа, совершаемая силами поля, при переносѣ матеріальной точки изъ одной точки поля въ другую, не зависитъ отъ пути, по которому совершается переносъ, а зависитъ только отъ положенія начальной и конечной точки переноса.

Математически признакъ консервативности силъ выражается въ томъ, что проекціи силы на оси координатъ равны частнымъ производнымъ, взятымъ по тѣмъ же осямъ отъ нѣкоторой функціи координатъ, называемой *силовой* или *потенціальной функціей.* Этой функціей характеризуется законъ поля силъ. Обозначимъ ее черезъ U. Согласно указанному математическому признаку консервативности, имѣемъ:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \; Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \; Z = \frac{\partial U}{\partial z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (55)$$

Силовая функція есть функція только координатъ и называется также функціей точки, такъ какъ для всякой точки пространства она имѣетъ вполнѣ опредѣленное значеніе. Изъ вышесказаннаго заключаемъ, что *силовая функція есть такая функція точки, частныя производныя которой по осямъ координатъ равны проекціямъ на тѣ же оси силы P, дѣйствующей въ той же точкѣ поля.*

Покажемъ, что изъ признака консервативности силъ, выраженнаго послѣдними равенствами, выводится принципъ консервативности. Воспользуемся уравненіемъ (51) и, пользуясь (55), перепишемъ его такъ:

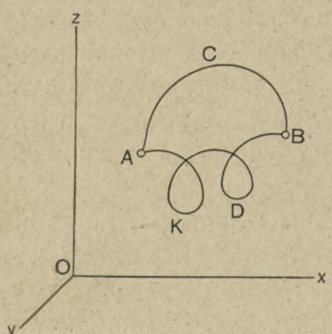
$$P \cos\Theta\, ds = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$

Замѣчая, что вторая часть равенства есть полный дифференціалъ отъ функціи U, имѣемъ:

$$P\cos\Theta\,ds = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (56)$$

т.-е. *элементарная работа силы поля равна полному дифференціалу силовой функціи.*

Пусть точка отнесена къ осямъ координатъ x, y, z (фиг. 23). Переносимъ точку изъ положенія $A\,(x_0, y_0, z_0)$ въ положеніе $B\,(x_1, y_1, z_1)$. Силовая функція поля U въ точкѣ A пусть имѣетъ значеніе U_0, а въ точкѣ B — U.



Фиг. 23.

Длина дуги траекторіи ACB отсчитывается отъ начальной точки K, отъ которой A пусть находится на разстояніи s_0, а B — на разстояніи s. Въ такомъ случаѣ, чтобы найти работу силъ поля при переносѣ матеріальной точки изъ A въ B, надо взять междупредѣльный интегралъ отъ s_0 до s отъ обѣихъ частей предыдущаго равенства. Получимъ:

$$\int_{s_0}^{s} P\cos\Theta\,.\,ds = \int_{U_0}^{U} dU = U - U_0 \; . \; . \quad (57)$$

Итакъ, *работа силъ поля при переносѣ точки изъ A въ B равна разности значеній силовой функціи въ конечныхъ точкахъ B и A и вовсе не зависитъ отъ пути, по которому совершается переносъ.*

Это и есть *свойство консервативности силъ.*

Изъ приведеннаго доказательства видно, что *всѣ силы, имѣющія силовыя функціи, обладаютъ свойствомъ консервативности.* Всѣ извѣстныя силы природы, имѣющія поле, какъ-то: Ньютоніанское тяготѣніе, магнетизмъ, электрическія силы, молекулярныя силы,—имѣютъ силовыя функціи, а потому обладаютъ свойствомъ консервативности.

Можетъ показаться, что для любой силы, выраженной функціями разстоянія, можно подыскать силовую функцію, т.-е., что проекціи всякой силы по осямъ координатъ могутъ быть представлены, какъ частныя производныя отъ нѣкоторой функціи; а если такъ, то можно было бы подумать, что свойство консервативности должно существовать для всякаго поля силъ, какое бы мы ни вообразили.

Докажемъ, что такое предположеніе невѣрно, для чего выведемъ условіе существованія силовой функціи. Воспользуемся соотношеніями (55):

$$X = \frac{\partial U}{dx} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (55_1)$$

$$Y = \frac{\partial U}{dy} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (55_2)$$

$$Z = \frac{\partial U}{dz} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (55_3)$$

Возьмемъ частную производную по z отъ обѣихъ частей равенства (55_2) и частную производную по y отъ равенства (55_3); получаемъ:

$$\frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z},$$
$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial y}.$$

Вторыя части этихъ уравненій между собой равны, а слѣдовательно, равны и первыя, т.-е.:

$$\frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58')$$

Поступая аналогично съ (55_3) и (55_1), а затѣмъ съ (55_1) и (55_2), находимъ еще два подобныхъ же соотношенія:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58'')$$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58''')$$

Система ур-ій (58′), (58″), (58‴) и представляетъ собою искомое условіе существованія силовой функціи. Ради удобства выписываемъ ихъ здѣсь еще разъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial z}&=\frac{\partial Z}{\partial y}\\ \frac{\partial Z}{\partial x}&=\frac{\partial X}{\partial z}\\ \frac{\partial X}{\partial y}&=\frac{\partial Y}{\partial x}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

Два послѣднихъ равенства можно получить, сдѣлавъ круговую подстановку въ первомъ.

Въ случаѣ, когда движеніе производится силами консервативнаго поля, имѣющаго силовую функцію U, теорема живыхъ силъ преобразовывается къ виду, называемому *интеграломъ живыхъ силъ*, дающему соотношеніе между координатами и скоростями въ движеніи матеріальной точки. Сопоставляя уравненія (54) и (57), получаемъ искомое соотношеніе:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0{}^2}{2}=U-U_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

т.-е. *приращеніе живой силы на данномъ пути равно приращенію силовой функціи на этомъ пути.*

Это справедливо независимо отъ самого пути, такъ какъ приращеніе силовой функціи зависитъ только отъ начальной и конечной точекъ его, а въ этой формулѣ v_0 и v означаютъ скорости въ начальной и конечной точкахъ разсматриваемаго движенія, производимаго силами даннаго поля.

Въ математической физикѣ равенство (59) пишется обыкновенно въ другой формѣ, именно:

$$\frac{mv^2}{2} - U = \frac{mv_0^2}{2} - U_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (59')$$

Живую силу $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ принято называть *кинетической* энергіей или явной энергіей, а $(-U)$ — *потенціальной* или скрытой энергіей. Это $(-U)$ представляетъ запасъ энергіи, который можетъ проявиться въ явной формѣ движенія. Соотношеніе (59′) выражаетъ законъ сохраненія энергіи, гласящій, что *сумма кинетической и потенціальной энергій во всякій моментъ движенія, производимаго дѣйствіемъ силъ консервативнаго поля, во всѣхъ точкахъ пути одна и та же.*

Полная энергія при движеніи матеріальной точки въ консервативномъ полѣ силъ сохраняется.

§ 19. Поверхность уровня. *Поверхностью уровня называется поверхность, на которой силовая функція имѣетъ постоянную величину.* Положимъ, что мы имѣемъ консервативное поле силъ, характеризуемое силовой функціей $U(x, y, z)$. Уравненіе,

$$U(x, y, z) = const.,$$

или, короче,

$$U = C,$$

есть, согласно вышеприведенному опредѣленію, уравненіе поверхности уровня. Въ этомъ уравненіи U есть функція трехъ координатъ, а C — параметръ. Придавая ему всевозможныя значенія, мы получимъ цѣлое семейство поверхностей уровня, раздѣляющихъ поле на слои, въ каждомъ изъ которыхъ силовая функція имѣетъ нѣкоторую опредѣленную величину C. Приведемъ двѣ теоремы относительно консервативнаго поля силъ.

Теорема 1. *Во всякой точкѣ разсматриваемаго поля сила нормальна къ поверхности уровня.*

Положимъ, что въ точкѣ поля M дѣйствуетъ сила P, образующая съ осями координатъ углы α, β, γ (фиг. 24).

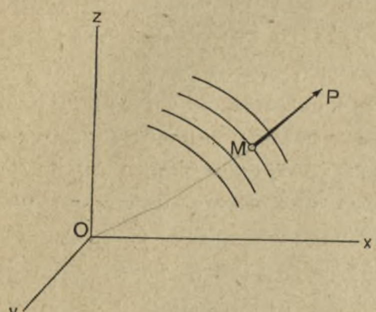
Пусть проекціи силы P на оси x, y, z будутъ X, Y, Z. Косинусы угловъ, образуемыхъ силой P съ осями, представятся такъ:

$$\cos\alpha = \frac{X}{P} = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Но X, Y, Z могутъ быть замѣнены частными производными силовой функціи U, по уравненію (55). Тогда

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}}.$$

Изъ анализа извѣстно, что вторая часть равенства выражаетъ косинусъ угла, образуемаго нормалью къ поверхности U съ осью x; слѣдовательно:



Фиг. 24.

$$\cos\alpha = \cos(n, x).$$

Аналогично найдемъ, что

$$\cos\beta = \cos(n, y),$$

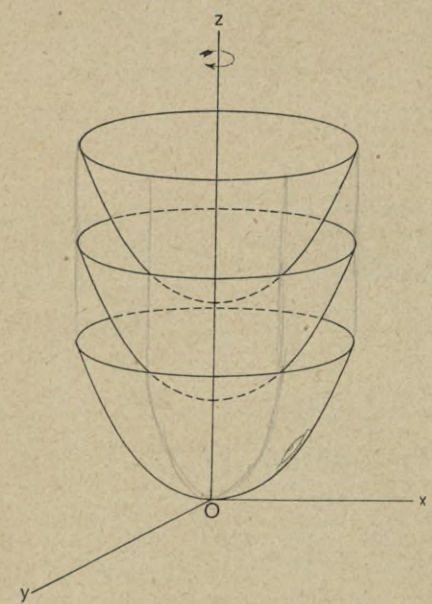
$$\cos\gamma = \cos(n, z).$$

Эти три равенства указываютъ, что *сила направлена по нормали къ поверхности уровня.*

Доказанная теорема выясняетъ, почему поверхности, опредѣляемыя уравненіями вида $U = C$, называются поверхностями уровня. Этими словами мы привыкли называть свободную поверхность воды, находящейся въ равновѣсіи, подъ дѣйствіемъ перпендикулярныхъ къ этой поверхности силъ тяжести. Кромѣ того, поверхностью уровня мы называемъ всякую поверхность, параллельную поверхности уровня воды. Такія поверхности вывѣряются нами посредствомъ ватерпаса или уровня. Такимъ образомъ свободная поверхность воды есть одна изъ поверхностей уровня силового поля, получающагося вслѣдствіе притяженія массой земли.

Въ случаѣ центральной силы поверхности уровня суть концентрическія сферы, описанныя изъ центра тяготѣнія. Въ случаѣ какого-либо другого поля силъ поверхность уровня представляетъ какія-либо иныя геометрическія формы. Вообще говоря, всякому силовому полю соотвѣтствуютъ свои характерныя формы поверхностей уровня, и онѣ могутъ быть безконечно разнообразны, и если мы себѣ представимъ въ какомъ бы то ни было изъ этихъ полей жидкость, на частицы которой дѣйствуютъ силы поля, то поверхность этой жидкости приметъ форму соотвѣтствующей этому полю поверхности уровня. Такъ, напримѣръ, магнитныя или діамагнитныя жидкости, помѣщенныя въ полѣ сильнаго магнита или въ полѣ нѣсколькихъ магнитовъ, принимаютъ своеобразныя волнистыя формы свободной поверхности. Поверхности уровня на центробѣжной машинѣ представляютъ изъ себя параболоиды вращенія (фиг. 25).

Если бы, находясь на вращающейся площадкѣ, мы вздумали вывѣрить поверхность уровня посредствомъ ватерпаса, то вмѣсто горизонтальной поверхности получили бы параболоидальную, потому что къ силовому полю тяготѣнія земли присоединилось бы поле центробѣжныхъ силъ. Если бы въ этомъ случаѣ для вывѣрки поверхности уровня мы воспользовались приборомъ, называемымъ «уровнемъ съ воздушнымъ пузырькомъ», то пузырекъ этотъ занялъ бы устойчивое положеніе посреди выпуклаго стекла прибора лишь въ томъ случаѣ, когда плоскость основанія уровня совпала бы съ элементомъ поверхности уровня параболоида вращенія. Кромѣ того, стеклышко «уровня» должно быть при этомъ обращено вовнутрь параболоида, какъ показано на фигурѣ (25), такъ какъ вода, будучи тяжелѣе воздуха, при вращеніи машины получаетъ большую центробѣжную силу, чѣмъ воздухъ.



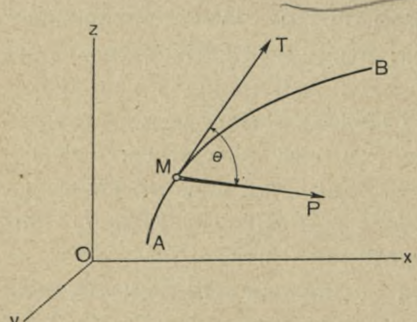
Фиг. 25.

Изъ приведенныхъ примѣровъ ясно, чѣмъ обусловливается возможность признанія данной поверхности поверхностью уровня.

Теорема 2. *Производная отъ потенціальной функціи по дугѣ какой-нибудь кривой равна проекціи силы поля въ разсматриваемой точкѣ на касательную къ этой кривой.*

Положимъ, что имѣемъ какую-нибудь кривую AB (фиг. 26) (въ частномъ случаѣ она можетъ быть и прямой), расположенную въ полѣ силъ, опредѣляемомъ силовой функціей U. Зная уравненіе кривой AB, выразимъ координаты каждой изъ точекъ этой кривой, какъ функціи ея дуги s. Пусть:

$$x = f(s),\ y = f_1(s),\ z = f_2(s).$$



Фиг. 26.

Тогда силовая функція $U = F(x, y, z)$ тоже можетъ быть представлена, какъ функція s:

$$U = F(s).$$

Это уравненіе даетъ значеніе потенціальной функціи U во всякой точкѣ кривой AB. Составимъ производную отъ U по s, разсматривая U, какъ функцію отъ x, y, z, а x, y, z, какъ функціи s. Получимъ:

$$\frac{dU}{ds} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds}.$$

Преобразовывая написанное уравненіе по форм. (55), имѣемъ:

$$\frac{dU}{ds}=X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}.$$

Умножаемъ и дѣлимъ вторую часть равенства на P; получаемъ:

$$\frac{dU}{ds}=P\left(\frac{X}{P}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{Y}{P}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{Z}{P}\cdot\frac{dz}{ds}\right).$$

Выраженіе въ скобкахъ равно косинусу угла Θ, образуемаго направленіемъ силы P съ касательной *MT*, или, иначе говоря, съ элементомъ кривой ds. Поэтому:

$$\frac{dU}{ds}=P\cos\Theta, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (60)$$

что и требовалось доказать.

Разсмотримъ два частныхъ случая.

1) Если вся кривая лежитъ въ поверхности уровня, то во всѣхъ точкахъ этой кривой функція U имѣетъ постоянное значеніе; слѣдовательно:

$$\frac{dU}{ds}=0,$$

и, значитъ,

$$P\cos\Theta=0.$$

Но сила P, вообще говоря, не равна нулю, значитъ

$$\cos\Theta=0,$$

т.-е.

$$\Theta=\frac{\pi}{2}.$$

Такимъ образомъ, во всѣхъ точкахъ кривой сила нормальна къ кривой, что даетъ намъ другое доказательство теоремы (1), такъ какъ кривую на поверхности уровня можно проводить произвольно.

2) Пусть кривая ортогональна съ поверхностью уровня поля, т.-е. она пересѣкаетъ каждую поверхность уровня по направленію нормали къ ней. Въ этомъ случаѣ длина дуги s отсчитывается по нормалямъ къ поверхностямъ уровня и эту длину принято обозначать черезъ n. Тогда равенство (60) напишется такъ:

$$\frac{dU}{dn}=P\cos 0^0$$

или

$$\frac{dU}{dn}=P\cos 180^0,$$

т. к. сила, будучи перпендикулярна къ поверхности уровня во всѣхъ точкахъ кривой, направлена по касательной къ кривой.

Сила P всегда берется лишь по абсолютной величинѣ, косинусъ же, опредѣляющій ея направленіе, берется со знакомъ; слѣдовательно, $\frac{dU}{dn}$ равняется или P, или $-P$. Ясно, что направленіе силы зависитъ отъ знака производной $\frac{dU}{dn}$, а именно: при положительномъ $\frac{dU}{dn}$ (функція U возрастаетъ) уголъ $\theta = 0$; при отрицательномъ $\frac{dU}{dn}$ (функція U убываетъ) уголъ $\theta = \pi$. Отсюда вытекаетъ правило, опредѣляющее направленіе силы:

сила направлена въ ту сторону нормали, куда силовая функція возрастаетъ.

Разсмотримъ примѣры силовыхъ функцій и соотвѣтствующихъ имъ поверхностей уровня.

7064

Примѣръ 1. Дѣйствіе силы тяжести, разсматриваемое на небольшомъ районѣ, можетъ быть принято за равномѣрное поле, т.-е. такое поле, во всѣхъ точкахъ котораго дѣйствуютъ равныя и параллельныя силы. Разсматривая это поле въ Декартовыхъ координатахъ и направляя ось z вертикально вверхъ, находимъ, что

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = -mg.$$

Признакъ существованія силовой функціи, очевидно, удовлетворяется, такъ какъ всѣ три равенства (58) обращаются въ тождество.

Для нахожденія силовой функціи воспользуемся формулой (56):

$$dU = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Въ данномъ случаѣ при $X = 0$ и $Y = 0$, имѣемъ

$$dU = -mg\,dz.$$

Интегрируя, находимъ:

$$U = -mgz + C_1.$$

Это и есть силовая функція для силы тяжести на небольшомъ районѣ. Такъ какъ выборъ положенія начала координатъ произволенъ, то мы можемъ положить $C_1 = 0$, послѣ чего получимъ выраженіе силовой функціи въ видѣ

$$U = -mgz.$$

Поверхности уровня опредѣляются уравненіемъ

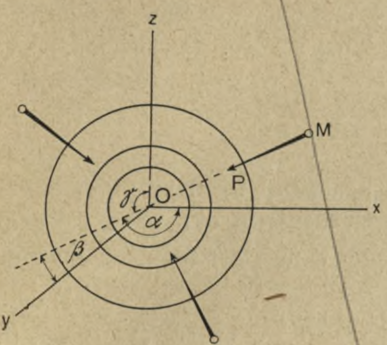
$$U = C,$$

слѣдовательно, ур-іе семейства поверхностей уровня имѣетъ въ данномъ случаѣ видъ

$$Z = const.$$

Это есть уравненіе семейства горизонтальныхъ плоскостей.

Примѣръ 2. Разсмотримъ поле силъ, притягивающихъ къ центру по какому-нибудь закону, выраженному въ функціи разстоянія.



Фиг. 27.

Примемъ начало координатъ ***O*** за центръ силъ. Точка ***M*** массы m отталкивается или притягивается къ этому центру силою P (фиг. 27). Силу эту представимъ въ видѣ:

$$P = \mu m \varphi(r).$$

Здѣсь μ есть нѣкоторый коэффиціентъ, а $\varphi(r)$ — нѣкоторая функція разстоянія точки отъ центра силъ, гдѣ $r = OM$. Функція эта выражаетъ законъ измѣненія силъ поля. Обозначая черезъ α, β, γ углы, образуемые силой P, которую будемъ считать притягательною, съ осями координатъ, и замѣчая, что

$$\cos\alpha = -\frac{x}{r}, \quad \cos\beta = -\frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = -\frac{z}{r},$$

гдѣ x, y, z суть координаты точки ***M***, находимъ выраженія компонентовъ силы P:

$$\left.\begin{aligned} X &= P\cos\alpha = -\mu m \varphi(r)\frac{x}{r}, \\ Y &= P\cos\beta = -\mu m \varphi(r)\frac{y}{r}, \\ Z &= P\cos\gamma = -\mu m \varphi(r)\frac{z}{r}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (61)$$

Если бы сила P была отталкивающая, то компоненты ея были бы положительны.

Посмотримъ, существуетъ ли для разсматриваемаго поля силъ силовая функція?

Для рѣшенія этого вопроса испробуемъ, удовлетворяются ли въ нашемъ случаѣ условія существованія силовой функціи, данныя формулой (58), именно:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots (58)$$

Подставляя въ (58) найденныя значенія Y и Z по (61), находимъ:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{\varphi(r)\mu m y}{r}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{\varphi(r)\mu m z}{r}\right],$$

или:

$$-y\mu m\frac{\partial\left(\frac{\varphi(r)}{r}\right)}{\partial z} = -z\mu m\frac{\partial\left(\frac{\varphi(r)}{r}\right)}{\partial y}.$$

Такъ какъ μ и m постоянны, y въ частномъ процессѣ измѣненія по z тоже постоянно, равно какъ и z въ частномъ процессѣ измѣненія по y, то ихъ можно вынести за знакъ дифференціала, что нами и сдѣлано.

Уравненіе это сокращается на $(-\mu m)$. Кромѣ того, замѣчаемъ, что

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

слѣдовательно r есть функція координатъ, а потому производныя, взятыя по координатамъ, могутъ быть замѣнены производными отъ тѣхъ же выраженій по r, помноженными на производныя отъ r по тѣмъ же координатамъ. Тогда получимъ:

$$y \frac{d}{dr}\left[\frac{\varphi(r)}{r}\right]\frac{dr}{dz} = z \frac{d}{dr}\left[\frac{\varphi(r)}{r}\right]\frac{dr}{dy} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (62)$$

Но

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{r}.$$

Точно такъ же

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Подставляя эти выраженія въ (62), имѣемъ:

$$\frac{yz}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left[\frac{\varphi(r)}{r}\right] = \frac{zy}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left[\frac{\varphi(r)}{r}\right],$$

—въ результатѣ получили тождество. Поступая такимъ же образомъ съ остальными двумя условіями существованія силовой функціи, опять находимъ тождества.

Такимъ образомъ доказано, что *для центральныхъ силъ существуетъ потенціальная функція* U.

Найдемъ ея выраженіе, для чего воспользуемся равенствами (61) и (56). Имѣемъ:

$$dU = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -\mu m \frac{\varphi(r)}{r}(x\,dx + y\,dy + z\,dz).$$

Выраженіе въ скобкахъ равно $r\,dr$; дѣйствительно:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

дифференцируя, получаемъ:

$$r\,dr = x\,dx + y\,dy + z\,dz.$$

Замѣтивъ это и произведя подстановку, находимъ:

$$dU = -\mu m \varphi(r)\,dr.$$

Интегрируя, находимъ выраженіе силовой функціи U для центральныхъ силъ:

$$U = -\mu m \int \varphi(r)\, dr + C \quad \ldots \ldots \ldots \quad (63)$$

Въ случаѣ Ньютоніанскаго поля сила обратно пропорціональна квадрату разстоянія, слѣдовательно:

$$\varphi(r) = \frac{1}{r^2}.$$

Подставляя послѣднее выраженіе въ предыдущее уравненіе, находимъ силовую функцію Ньютоніанскаго поля:

$$U = -\mu m \int \frac{dr}{r^2} + C = \frac{\mu m}{r} + C \quad \ldots \ldots \ldots \quad (63')$$

Въ коэффиціентъ μ входитъ масса центральнаго тѣла.

Поверхности уровня поля центральныхъ силъ выражаются уравненіемъ:

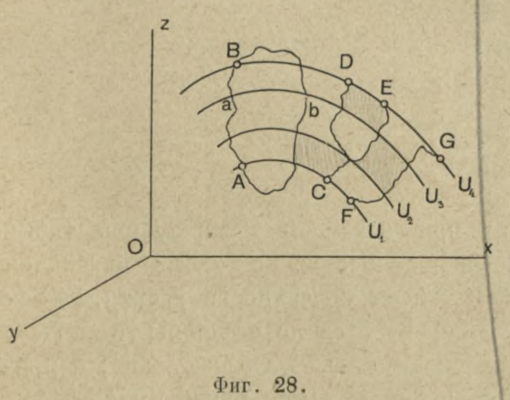
$$U = -\mu m \int \varphi(r)\, dr = const. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (63'')$$

или:

$$r = const.$$

Отсюда выводимъ, что въ случаѣ центральныхъ силъ поверхности уровня суть концентрическія сферы, въ центрѣ которыхъ находится центръ силы.

Когда извѣстна силовая функція поля, можно вычертить поверхности уровня и силовыя линіи, т.-е. линіи, по направленію которыхъ дѣйствуютъ силы поля. Линіи эти будутъ ортогональны къ поверхностямъ уровня (стр. 54, теор. 1).



Фиг. 28.

Если мы представимъ себѣ какое-нибудь консервативное силовое поле (фиг. 28) съ построенными въ немъ поверхностями уровня, на которыхъ потенціалъ имѣетъ значенія U_1, U_2, U_3, U_4 и т. д., то работа, совершаемая силами этого поля, при переносѣ въ немъ матеріальной точки, будетъ равна разности потенціаловъ конечныхъ и начальныхъ точекъ. Законъ этотъ уже доказанъ и формулируется въ видѣ интеграла живыхъ силъ:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U - U_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (59)$$

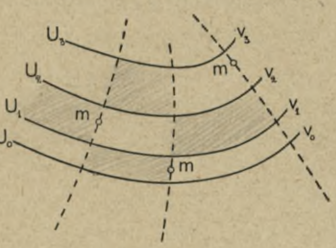
Отсюда мы заключаемъ, что *работа*, которую нужно затратить (работа эта можетъ быть и положительна и отрицательна), чтобы перенести матеріальную точку съ поверхности одного уровня на другой, *равна разности потенціаловъ этихъ уровней*, и слѣдовательно, *не зависитъ ни отъ траекторіи переноса, ни отъ выбора на этихъ поверхностяхъ уровня начальной и конечной точекъ переноса.*

Такимъ образомъ работа на пути **AaB** (фиг. 28) равна работѣ на пути **AbB** и равна $(U_4 - U_1)$. Точно такъ же работы на путяхъ **CD**, **CE** и **FG** между собой равны и выражаются черезъ $(U_4 - U_1)$. Но на основаніи приведеннаго интеграла живыхъ силъ можемъ сказать, что приращеніе силовой функціи равно приращенію живой силы. Отсюда заключаемъ, что

приращеніе живой силы остается то же самое для всѣхъ путей, заключенныхъ между двумя поверхностями уровня.

Слѣдствіемъ этого положенія является слѣдующее свойство движенія подъ дѣйствіемъ консервативныхъ силъ.

Представимъ себѣ нѣсколько матеріальныхъ точекъ равныхъ массъ m, движущихся вслѣдствіе дѣйствія на нихъ силъ какого-нибудь консервативнаго поля. Положимъ, что поле это представлено на фиг. (29) и имѣетъ поверхности уровня U_0, U_1, U_2 и т. д. *Если эти точки при переходѣ черезъ какую-нибудь изъ поверхностей уровня имѣли одинаковыя скорости, то и всякую другую поверхность уровня онѣ пройдутъ тоже съ равными скоростями.* Докажемъ это.



Фиг. 29.

Положимъ, что при переходѣ черезъ поверхность уровня U_0 всѣ точки имѣли скорость v_0, и пусть при переходѣ черезъ поверхность уровня U_1 онѣ имѣютъ скорости v_1, v_1', v_1'' и т. д.

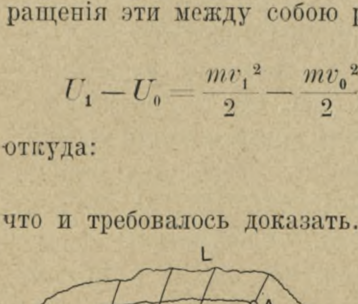
Приращеніе живой силы при переходѣ съ поверхности U_0 на поверхность U_1 для каждой изъ точекъ равно $(U_1 - U_0)$, и, слѣдовательно, приращенія эти между собою равны, т.-е.

$$U_1 - U_0 = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m(v_1')^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m(v_1'')^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \ldots\ldots;$$

откуда:

$$v_1 = v_1' = v_1'' = \ldots\ldots,$$

что и требовалось доказать.



Фиг. 30.

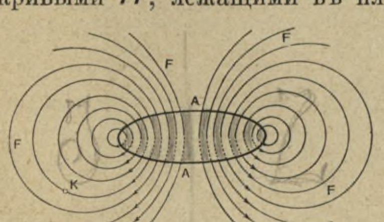
Если при переносѣ матеріальной точки начальное и конечное ея положенія находятся на одной и той же поверхности уровня, то вся работа при переносѣ ея по какой бы то ни было траекторіи равна нулю,—слѣдовательно, и приращеніе живой силы также равно нулю.

Отсюда вытекаетъ доказательство невозможности устроить perpetuum mobile въ полѣ консервативныхъ силъ. Дѣйствительно, на практикѣ мы можемъ имѣть дѣло съ полемъ силъ лишь на ограниченномъ пространствѣ; пусть эта граница доступной намъ части поля представлена на фиг. (30) контуромъ LLL. Поверхности уровня этого поля пусть будутъ U_0, U_1 и т. д. Представимъ себѣ матеріальную точку A, движущуюся какъ-нибудь въ этомъ полѣ. Въ силу того, что поле ограничено, при предположеніи вѣчнаго движенія, необходимо допустить, что точка пересѣчетъ одну и ту же поверхность уровня неоднократно, а въ такомъ случаѣ приращеніе живой силы, будетъ равно нулю за промежутокъ времени между двумя вступленіями точки на одну и ту же поверхность уровня, и накопленія энергіи не будетъ получаться.

Для системы точекъ, а слѣдовательно, и для всякой машины, это положеніе также справедливо, а потому нельзя устроить машины вѣчнаго движенія. Этого не допускаетъ свойство консервативности силъ природы.

Изъ интеграла живыхъ силъ заключаемъ, что если траекторія переноса точки замкнута, то работа, затраченная при переносѣ по этой траекторіи, равна нулю, такъ какъ начальная и конечная точки совпадаютъ, и потенціалъ ихъ одинъ и тотъ же. Но есть случай, когда это положеніе оказывается невѣрнымъ. Это случай, когда поле силъ имѣетъ замкнутыя силовыя линіи, охватывающія нѣкоторыя кольца, поверхность которыхъ служитъ границею поля. Такое поле получается, напримѣръ, когда имѣемъ замкнутый проводникъ электрическаго тока.

Положимъ, что токъ идетъ по круглому проводнику AA (фиг. 31), тогда силовыя линіи электрическаго поля будутъ нѣкоторыми замкнутыми кривыми FF, лежащими въ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ плоскости проводника. Силовыя линіи охватываютъ проводникъ и заполняютъ собой все пространство вокругъ него. Такимъ образомъ, поверхность проводника служитъ границею поля. Во всѣхъ точкахъ замкнутой силовой линіи FF дѣйствуютъ силы, направленныя въ одну сторону по силовой линіи.

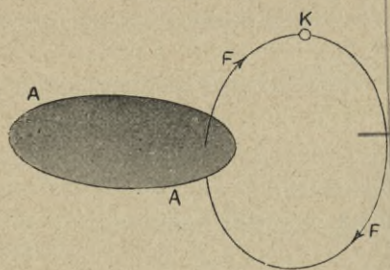


Фиг. 31.

Если мы представимъ себѣ матеріальную точку, на которую дѣйствуютъ силы нашего поля, и помѣстимъ эту точку на замкнутую силовую линію, хотя бы въ K, то подъ вліяніемъ силъ поля точка будетъ двигаться по линіи FF и, вернувшись опять въ K, будетъ уже имѣть нѣкоторую опредѣленную живую силу $\frac{mv^2}{2}$. Затѣмъ точка опять опишетъ эту замкнутую траекторію и получитъ еще такое же приращеніе живой силы $\frac{mv^2}{2}$, и т. д. Такимъ образомъ, оставляя точку двигаться, мы получаемъ безконечное движеніе и безконечное приращеніе живой силы точки.

Мы получили «perpetuum mobile», но такое «perpetuum mobile» не противорѣчитъ принципу сохраненія энергіи, т. к. мы не создаемъ энергіи изъ ничего. Намъ необходимо для полученія указаннаго поля имѣть создающій его электрическій токъ, и мы, въ сущности, преобразовываемъ электрическую энергію въ энергію движенія нашей точки.

Разсматриваемый случай представляетъ случай многозначной силовой функціи, который подлежитъ особому изслѣдованію. Если исключить изъ разсмотрѣнія траекторіи проходящія сквозь контуръ кольца (фигура 31′), проведя черезъ этотъ контуръ поверхность (эта поверхность на черт. затушевана), которую нельзя пересѣкать, то оставшееся поле будетъ консервативно.



Фиг. 31′.

§ 20. Теорема площадей. Теорема площадей имѣетъ мѣсто, когда движеніе матеріальной точки совершается подъ дѣйствіемъ силы, постоянно пересѣкающей какую-либо ось.

Положимъ, что матеріальная точка M (фиг. 32) массы m движется по траекторіи AB подъ дѣйствіемъ силы P, пересѣкающей ось Oz.

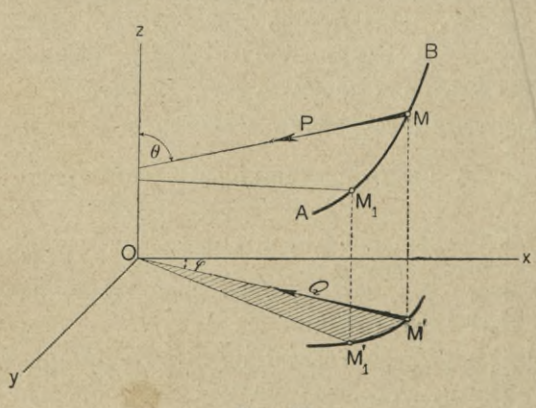
Составимъ компоненты силы P. Обозначимъ уголъ, образуемый силой P съ осью z, черезъ Θ. Тогда проекція силы P на плоскость xy, равная положимъ Q, выразится такъ: $Q = P \sin\Theta$. Векторъ Q проходитъ черезъ начало координатъ O, и косинусъ угла, образуемаго имъ съ осью Ox, равенъ $\frac{x}{r}$, а съ осью Oy — равенъ $\frac{y}{r}$, гдѣ x и y — текущія координаты точки M, а $r = OM'$. Компоненты силы P выразятся такъ:

$$X = -P \sin\Theta \frac{x}{r},$$

$$Y = -P \sin\Theta \frac{y}{r},$$

$$Z = -P \cos\Theta.$$

Пользуясь дифференціальными уравненіями движенія (27), находимъ:



Фиг. 32.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -P \sin\Theta \frac{x}{r}, \quad \times y$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -P \sin\Theta \frac{y}{r}, \quad \times x$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -P \cos\Theta.$$

Умножимъ первое ур-іе на y, второе на x, и вычтемъ изъ второго первое; получимъ:

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0.$$

Но m не равно нулю; поэтому

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Замѣтимъ, что первая часть равенства можетъ быть представлена въ видѣ:

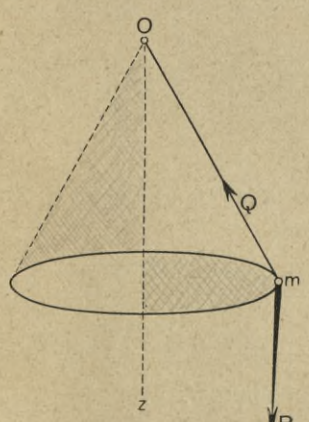
$$\frac{d}{dt}\left[x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right] =$$

$$= \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + x\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} - y\frac{d^2x}{dt^2} = x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Равенство это показываетъ, что *выраженіе въ скобкахъ не зависитъ отъ времени.* Интегрируя его, находимъ математическое выраженіе теоремы площадей:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (64)$$

Соотношеніе это, называемое *интеграломъ площадей,* имѣетъ большое значеніе, такъ какъ посредствомъ него рѣшаются всѣ случаи движенія подъ дѣйствіемъ силъ, пересѣкающихъ данную ось. Такихъ случаевъ въ природѣ очень много. Между прочимъ сюда можно отнести движеніе тяжелой матеріальной точки, прикрѣпленной на резинѣ. Пусть матеріальная точка m вѣса R, подвѣшена на резинѣ Om (фиг. 33).



Фиг. 33.

Силу тяжести R можно сложить съ силой натяженія резины Q. Равнодѣйствующая этихъ силъ постоянно пересѣкаетъ вертикальную ось Oz.

Выяснимъ, почему выведенный интегралъ (64) называется интеграломъ площадей.

Пусть точка массы m (фиг. 32) въ своемъ движеніи переходитъ изъ положенія M въ положеніе M_1. Соотвѣтственно этому и M' (проекція M на плоскость xy) перейдетъ въ M'_1, описавъ дугу $M'M'_1$. Радіусъ же $r = OM'$ опишетъ въ это время площадь $M'OM'_1$. Обозначаемъ черезъ φ уголъ, образуемый радіусомъ r съ осью Ox и вмѣсто Декартовыхъ координатъ примемъ полярныя. Формулы перехода, какъ извѣстно, таковы (см. стр. 3):

$$\varphi = \operatorname{arc}tg\frac{y}{x},$$

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

$\left(\frac{y}{x}\right)' =$

Возьмемъ производную по времени отъ перваго равенства; имѣемъ:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2 + y^2}.$$

Замѣняя знаменатель на основанiи второй формулы перехода, имѣемъ:

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (64')$$

Но вторая часть равенства есть выраженiе интеграла площадей, равное произвольному постоянному C. Первая же часть, какъ было выведено въ кинематикѣ (стр. 6), равна двойной секторальной скорости $= 2\frac{d\sigma}{dt}$. Поэтому интегралъ площадей можетъ быть представленъ слѣдующимъ образомъ:

или:
$$\left.\begin{aligned} r^2\frac{d\varphi}{dt} &= C, \\ \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{C}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (65')$$

Интегрируя послѣднее уравненiе, находимъ:

$$\sigma = \frac{C}{2}t + C_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (65'')$$

Полагая, что въ началѣ движенiя радiусъ r совпадаетъ съ осью x, отъ которой отсчитывается площадь σ, находимъ, что при

$$t = 0,$$
$$\sigma = 0.$$

Подставляя эти значенiя въ равенство (65″), находимъ, что

$$C_1 = 0,$$

и теорема площадей напишется такъ:

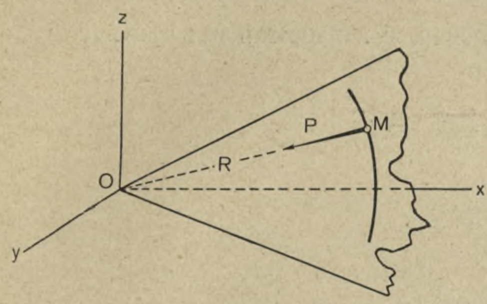
$$\sigma = \frac{C}{2}t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

т.-е. *если матерiальная точка движется подъ дѣйствiемъ силы, которая постоянно пересѣкаетъ какую-нибудь ось, то радiусъ векторъ проекцiи* *этой точки на плоскость, перпендикулярную къ этой оси, описываетъ площади, пропорціональныя временамъ.*

Радіусъ векторъ берется отъ точки пересѣченія оси съ плоскостью. Можно ту же теорему выразить еще такъ:

Секторальная скорость движенія проекціи точки есть величина постоянная.

§ 21. Теорема площадей для центральной силы. Еще болѣе важенъ, по своей распространенности въ природѣ, другой случай движенія,—именно, движеніе подъ дѣйствіемъ центральной силы, т.-е. силы, проходящей всегда черезъ одну и ту же точку, называемую *центромъ силъ*. Въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто не одинъ, а *три* интеграла площадей, т. к., если начало координатъ помѣстить въ центрѣ силъ, то сила будетъ пересѣкать всѣ три оси. Обозначимъ черезъ R разстояніе точки M (фиг. 34) отъ центра силъ, а черезъ x, y, z координаты, опредѣляющія ея положеніе. Найдемъ выраженіе компонентовъ силы P, дѣйствующей на точку M. По уравненію (26) имѣемъ:



Фиг. 34.

$$\left.\begin{aligned} X &= P\cos\alpha = -P\frac{x}{R}, \\ Y &= P\cos\beta = -P\frac{y}{R}, \\ Z &= P\cos\gamma = -P\frac{z}{R}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26')$$

Беря отношенія компонентовъ къ соотвѣтствующимъ координатамъ, видимъ, что признакъ существованія центральныхъ силъ выражается слѣдующими соотношеніями:

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = -\frac{P}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

Отсюда теорема:

Компоненты центральной силы, дѣйствующей въ какой-нибудь точкѣ поля, при центрѣ силъ въ началѣ координатъ, пропорціональны соотвѣтствующимъ координатамъ этой точки.

Можно прямо написать три интеграла площадей, такъ какъ сила пересѣкаетъ каждую изъ осей координатъ, но для отчетливости выведемъ ихъ изъ дифференціальныхъ уравненій движенія, для чего подставимъ въ (27) найденныя значенія компонентовъ силы. Изъ (27) находимъ:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -P\frac{x}{R},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -P\frac{y}{R}, \quad z$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -P\frac{z}{R}. \quad y$$

Умножая второе ур-іе на z и третье на y и вычитая изъ третьяго второе, находимъ:

$$m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0;$$

откуда:

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0;$$

что приводится къ

$$\frac{d}{dt}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = 0.$$

Интегрируя, находимъ:

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = A \qquad \text{. . . . .} \qquad (67')$$

Таковъ интегралъ для оси Ox. Поступая аналогично, находимъ для осей Oy и Oz еще два интеграла. Такимъ образомъ, въ случаѣ центральныхъ силъ существуютъ слѣдующіе три совмѣстныхъ интеграла площадей:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{для оси } Ox: & y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt} = A, \\[2ex]
\text{для оси } Oy: & z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt} = B, \\[2ex]
\text{для оси } Oz: & x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt} = C.
\end{array}\right\} \qquad \text{. . . . .} \qquad (67)$$

x y z

Совмѣстное существованіе этихъ трехъ интеграловъ приводитъ къ заключенію объ особомъ видѣ траекторіи. Умножая первое равенство на x, второе на y, третье на z и складывая ихъ, находимъ:

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Это уравненіе *плоскости, проходящей черезъ начало координатъ.* Слѣдовательно, траекторія есть *плоская кривая*, и въ плоскости ея лежитъ центръ силъ.

Примемъ плоскость траекторіи за плоскость xy, тогда

$$z = 0,$$

и два первыхъ интеграла удовлетворяются сами собой:

$$A = 0$$

и

$$B = 0.$$

Остается третій интегралъ, который будемъ писать въ полярномъ видѣ по формуламъ (65) и (65').

Такимъ образомъ мы доказали теорему площадей для *центральныхъ* силъ:

Если сила центральна, то траекторія матеріальной точки, движущейся подъ дѣйствіемъ этой силы, будетъ плоская, и плоскость траекторіи проходитъ черезъ центръ силы. Въ этой плоскости движеніе совершается такъ, что радіусъ векторъ, проведенный относительно центра силы, описываетъ площади, пропорціональныя временамъ.

§ 22. Обратная теорема площадей для центральныхъ силъ. *Если движеніе совершается по плоской траекторіи и если въ плоскости траекторіи есть точка, относительно которой радіусъ векторъ описываетъ площади, пропорціональныя временамъ, то движеніе это совершается подъ дѣйствіемъ центральной силы, имѣющей центръ въ упомянутой точкѣ.*

Пусть траекторія AB лежитъ въ плоскости K (фиг. 35). Начало координатъ примемъ въ точкѣ, относительно которой радіусъ описываетъ площади, пропорціональныя временамъ. Математически это свойство выражается такъ:

$$\frac{d\sigma}{dt} = const. \qquad (68)$$

Здѣсь $d\sigma$ есть площадь MOM_1, описанная радіусомъ R во время dt. Обозначимъ черезъ α, β, γ углы нормали N къ плоскости K съ осями x, y, z.

Тогда, умноживъ выраженіе (68) на $cos\,\alpha$, $cos\,\beta$, $cos\,\gamma$, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} cos\,\alpha &= const.\, cos\,\alpha, \\ \frac{d\sigma}{dt} cos\,\beta &= const.\, cos\,\beta, \\ \frac{d\sigma}{dt} cos\,\gamma &= const.\, cos\,\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (68')$$

Въ этихъ выраженіяхъ $d\sigma\, cos\,\alpha$, $d\sigma\, cos\,\beta$, $d\sigma\, cos\,\gamma$ суть проекціи $d\sigma$ на площади yz, xz, xy.

Обозначимъ ихъ черезъ $d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\sigma_z$ и, подставивъ эти значенія въ равенства (68′), найдемъ:

$$\frac{d\sigma_x}{dt} = const.\cos\alpha,$$

$$\frac{d\sigma_y}{dt} = const.\cos\beta,$$

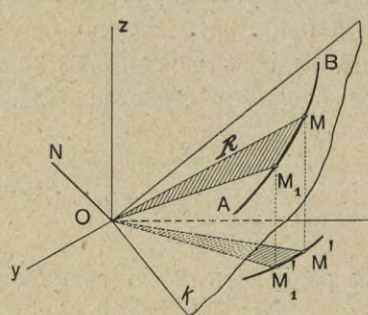
$$\frac{d\sigma_z}{dt} = const.\cos\gamma.$$

Первыя части этихъ равенствъ представляютъ собою секторальныя скорости проекцій точки на плоскости **yz**, **xz**, **xy**. Выразимъ эти секторальныя скорости въ Декартовыхъ координатахъ, пользуясь равенствами (65′) и (64′), и, принимая во вниманіе (67), окончательно находимъ:

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = A,$$

$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = B,$$

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C,$$



Фиг. 35.

гдѣ $A = 2.const.\cos\alpha$, $B = 2.const.\cos\beta$ и $C = 2.const.\cos\gamma$, суть произвольныя постоянныя.

Взявъ производныя по времени отъ этихъ трехъ равенствъ и сдѣлавъ приведеніе, получимъ:

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

$$z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Изъ этихъ равенствъ составляемъ пропорцію:

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{y} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{z}.$$

Замѣтимъ, что вторыя производныя отъ координатъ x, y, z по времени пропорціональны компонентамъ силы по тѣмъ же координатамъ [см. форм. a (27)]. Дѣлая замѣну, находимъ:

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}.$$

Это и есть признакъ центральной силы (ур-іе 66), дѣйствующей изъ центра, помѣщеннаго въ началѣ координатъ. Итакъ, теорема доказана.

§ 23. Формулы Бинé (Binet). Формулы Бине служатъ для изслѣдованія задачи о движеніи матеріальной точки подъ дѣйствіемъ центральной силы. Задача эта имѣетъ важное примѣненіе въ астрономіи.

Въ виду того, что размѣры небесныхъ тѣлъ несравненно меньше раздѣляющихъ ихъ разстояній, можно вмѣсто тѣлъ разсматривать матеріальныя точки, сосредоточивая массы тѣлъ въ ихъ центрахъ тяжести, а въ такомъ случаѣ силы тяготѣнія являются центральными. Если между небесными тѣлами, связанными силой тяготѣнія въ отдѣльную систему, имѣется одно или нѣсколько тѣлъ, значительно превосходящихъ массою остальныя, то движенія тѣлъ системы можно считать совершающимися подъ дѣйствіемъ центральныхъ силъ, центрами которыхъ являются эти массивныя тѣла. Формулы Бине даютъ рѣшеніе движенія небесныхъ тѣлъ подъ дѣйствіемъ одного центра силъ.

Впервые эта задача была рѣшена Ньютономъ въ его «Принципахъ натуральной философіи». Всѣ изслѣдованія сдѣланы Ньютономъ геометрическими способами и занимаютъ большую часть этого сочиненія. Теперь же, помощью анализа, задача о движеніи подъ дѣйствіемъ центральной силы разрѣшается совсѣмъ просто.

Если дано уравненіе траекторіи движенія, совершаемаго подъ дѣйствіемъ центральной силы, и дано расположеніе этой траекторіи относительно центра силы, то, помощью формулъ Бине, можно опредѣлить съ точностью до постояннаго множителя:

во-первыхъ, скорость въ любой точкѣ траекторіи и,

во-вторыхъ, силу, дѣйствующую въ любой точкѣ траекторіи.

Пусть матеріальная точка движется подъ дѣйствіемъ отталкивательной центральной силы P, которую будемъ считать въ этомъ предположеніи положительной. При центральной силѣ, какъ извѣстно, траекторія будетъ плоской кривой. Положимъ, что эта траекторія ***AB*** (фиг. 36) дана въ полярныхъ координатахъ уравненіемъ:

$$r=\psi(\varphi),$$

при чемъ полюсъ помѣщенъ въ центрѣ силъ, въ точкѣ ***O***, а уголъ φ отсчитывается отъ нѣкоторой полярной оси ***Ox***.

Квадратъ скорости въ полярныхъ координатахъ представится по формулѣ (3) такъ:

$$v^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Въ случаѣ движенія подъ дѣйствіемъ центральной силы имѣетъ мѣсто интегралъ площадей; напишемъ его въ полярныхъ координатахъ по формулѣ (65′):

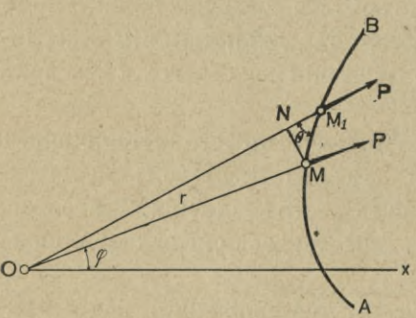
$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C.$$

Исключимъ изъ написанныхъ уравненій время, подставляя его значеніе, найденное изъ второго уравненія, въ первое. Имѣемъ:

$$dt = \frac{r^2}{C} d\varphi.$$

Тогда формула (3) перепишется такъ:

$$v^2 = \frac{C^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3')$$



Фиг. 36.

Въ формулахъ Бине вмѣсто r употребляется другая величина:

$$u = \frac{1}{r} \quad \ldots\ldots \quad (69)$$

Въ такомъ случаѣ

$$r = \frac{1}{u}$$

и

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{1}{u} \\ dr &= -\frac{du}{u^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (69')$$

Сдѣлавъ подстановку изъ (69′) въ (3′), найдемъ:

I ф-ла Бине

$$v^2 = C^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

Это и есть первая формула Бине, дающая связь между скоростью и величиною u независимо отъ времени. Здѣсь

$$u = \frac{1}{\psi(\varphi)}$$

опредѣляется по данному уравненію траекторіи:

$$r = \psi(\varphi).$$

Входящій въ выраженіе скорости произвольный постоянный множитель C указываетъ на то, что по всякой данной траекторіи движеніе подъ дѣйствіемъ опредѣленнаго центра можетъ происходить со многими разными скоростями, но всѣ эти скорости отличаются только постояннымъ множителемъ C. Величина скорости, при данной траекторіи, всецѣло зависитъ отъ интенсивности центральной силы, и если эта сила дана въ какой-нибудь точкѣ траекторіи, то можно будетъ опредѣлить множитель C, какъ это увидимъ изъ второй формулы Бине, а тогда и скорость v будетъ имѣть вполнѣ опредѣленное значеніе.

Для вывода этой второй формулы воспользуемся теоремой живыхъ силъ, написавъ ее въ дифференціальной формѣ [см. (53)]:

$$P \cos \Theta \, ds = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (53)$$

Представимъ элементарную работу силы въ другомъ видѣ. Положимъ, что точка перешла изъ M въ M_1 (фиг. 36), пройдя безконечно-малый элементъ пути ds. Соотвѣтственно приращенію ds радіусъ векторъ получилъ при этомъ приращеніе dr. На чертежѣ находимъ dr, проведя изъ O дугу радіуса OM; тогда $dr = NM_1$. При безконечно-маломъ ds дуги MM_1 и MN можно замѣнить ихъ хордами. Тогда, полагая, что радіусъ векторъ, по направленію котораго дѣйствуетъ сила, съ элементомъ пути ds образуетъ уголъ Θ, изъ прямоугольнаго тр-ка MNM_1 находимъ:

$$\cos \Theta \, . \, ds = dr = -\frac{du}{u^2},$$

въ виду (69′).

Подставляя это выраженіе въ первую часть уравненія (53) и замѣняя во второй части v^2 по формулѣ (70), получаемъ:

$$-P\frac{du}{u^2} = d\left\{\frac{m}{2}C^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right]\right\}.$$

Выполняя дифференцированіе второй части равенства, возьмемъ производную по $d\varphi$ отъ выраженія въ скобкахъ и, умноживъ ее на $d\varphi$, найдемъ:

$$-P\frac{du}{u^2} = mC^2\left[u \cdot \frac{du}{d\varphi} + \frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right] d\varphi.$$

Отсюда:

$$\frac{P}{m} = -C^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (71)$$

Это и есть вторая формула Бине. Она выражаетъ законъ центральной силы, производящей движеніе по данной траекторіи. Входящій въ выраженіе силы произвольный постоянный множитель C^2 показываетъ, что движеніе точки по данной траекторіи можетъ производиться множествомъ различныхъ силъ, дѣйствующихъ изъ даннаго центра, но всѣ эти силы находятся между собой въ опредѣленномъ соотношеніи: *функціональная ихъ величина, общая для всѣхъ, вполнѣ опредѣлена, отличаются же онѣ только постояннымъ множителемъ* C^2.

Найденныя формулы (70) и (71) показываютъ, что скорость v движенія точки прямо пропорціональна C, а сила P, производящая это движеніе, прямо пропорціональна C^2. Слѣдовательно, увеличенію C въ n разъ соотвѣтствуетъ увеличеніе v въ n разъ и увеличеніе P въ n^2 разъ. Отсюда заключаемъ, что производящая движеніе по данной траекторіи центральная сила, дѣйствующая изъ даннаго центра и опредѣляемая по второй формулѣ Бине, *можетъ быть измѣняема въ произвольное число n^2 разъ, и соотвѣтственно этому скорость v измѣнится въ n разъ.*

Опредѣленность функціональной величины силы, производящей движеніе, и такая же опредѣленность скорости не будутъ имѣть мѣсто въ томъ случаѣ, когда дана только траекторія и не даны условія, что движеніе совершается подъ дѣйствіемъ центральной силы. Въ этомъ случаѣ для каждой точки траекторіи можно взять произвольную скорость, по которой найдется соотвѣтственная сила.

Формулы Бине выведены здѣсь изъ разсмотрѣнія движенія подъ дѣйствіемъ отталкивающей центральной силы. Если вторая часть равенства (71) выйдетъ послѣ вычисленія со знакомъ плюсъ, то это показываетъ, что сила дѣйствительно отталкивательная, если же она выйдетъ со знакомъ минусъ, то это показывало бы намъ, что сила P не отталкивательная, а притягательная.

Замѣтимъ, что «формулой Бине» принято называть только вторую изъ выведенныхъ формулъ, дающую выраженіе силы.

74—94

Движеніе планетъ.

§ 24. Выводъ закона Ньютона изъ законовъ Кеплера. Законы движенія планетъ были найдены Кеплеромъ изъ наблюденій Тиходебраге и формулированы слѣдующимъ образомъ:

1. *Всѣ планеты и кометы движутся по коническимъ сѣченіямъ, въ одномъ изъ фокусовъ которыхъ находится солнце.*

2. *Площади, описываемыя радіусами векторами планетъ, пропорціональны временамъ.*

3. *Квадраты временъ обращенія планетъ относятся какъ кубы большихъ полуосей ихъ эллиптическихъ орбитъ.*

При разсмотрѣніи движенія планетъ мы примемъ во вниманіе лишь дѣйствіе солнца на планеты, а взаимодѣйствіе планетъ другъ на друга и вліяніе спутниковъ на движеніе планетъ отбросимъ, какъ ничтожное сравнительно съ силою притяженія солнца, но очень усложняющее задачу.

На основаніи первыхъ двухъ законовъ Кеплера мы заключаемъ, что *орбиты планетъ плоски* и *движеніе совершается подъ дѣйствіемъ центральной силы, направленной къ солнцу.* Выведемъ теперь изъ этихъ законовъ законъ Ньютона.

Отнесемъ орбиту къ полярнымъ координатамъ съ полюсомъ въ центрѣ солнца. Уравненіе орбиты, какъ конического сѣченія, будетъ, какъ это выводится въ аналит. геометріи:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \quad \dots\dots\dots\dots\dots (72)$$

гдѣ p — параметръ, а e — эксцентриситетъ коническаго сѣченія, равный $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ (a и b суть полуоси конич. сѣченія).

Замѣнимъ r его обратной величиной u по уравненію (69) и напишемъ уравненіе орбиты въ такомъ видѣ:

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\varphi}{p} \quad \dots\dots\dots\dots (72')$$

Вторая формула Бине имѣетъ видъ:

$$\frac{P}{m} = -C^2u^2\left[u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right] \dots\dots\dots\dots\dots (71)$$

Для опредѣленія величины $\frac{d^2u}{d\varphi^2}$ воспользуемся ур-іемъ (72′). Имѣемъ:

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{e\sin\varphi}{p};$$

такъ что

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -\frac{e\cos\varphi}{p}.$$

Подставляя въ (71) полученную величину $\frac{d^2u}{d\varphi^2}$, равно какъ и значеніе u изъ (72′), находимъ:

$$\frac{P}{m} = -C^2u^2\left(\frac{1 + e\cos\varphi}{p} - \frac{e\cos\varphi}{p}\right) = -\frac{C^2u^2}{p}.$$

Положивъ

$$\frac{C^2}{p} = \mu \quad \dots\dots\dots\dots\dots (73)$$

и замѣнивъ u черезъ $\frac{1}{r}$, получимъ для силы P такое выраженіе:

$$P = -\frac{\mu m}{r^2} \quad \dots\dots\dots\dots\dots (74)$$

Формула (74) указываетъ, что P есть *притягательная сила, измѣняющаяся обратно пропорціонально квадратамъ разстояній и прямо пропорціонально массамъ планетъ*, подъ условіемъ постоянства коэффиціента μ. Это и есть законъ Ньютона.

Покажемъ теперь, что упомянутое условіе постоянства μ которое есть сила притяженія между двумя единицами массы на единицѣ разстоянія, оправдывается для всѣхъ планетъ солнечной системы.

По третьему закону Кеплера:

$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{T_1{}^2}{a_1{}^3}=const. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (75)$$

гдѣ T и T_1 суть времена полнаго обращенія планетъ, а a и a_1 — большія полуоси ихъ орбитъ. Обозначимъ малую полуось одной изъ орбитъ черезъ b; тогда площадь, ограниченная траекторіями планеты, будетъ равна πab.

Напишемъ выраженіе секторальной скорости

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{C}{2}.$$

Интегрируя послѣднее уравненіе, находимъ:

$$\sigma=\frac{C}{2}t+C_1.$$

Полагая, что въ началѣ движенія радіусъ r совпадаетъ съ осью x, отъ которой отсчитывается площадь σ, находимъ, что при $t=0$, $\sigma=0$.

Подставляя эти значенія въ послѣднее равенство, находимъ, что $C_1=0$, и теорема площадей напишется:

$$\sigma=\frac{C}{2}t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

Это выраженіе представляетъ площадь, описанную радіусомъ векторомъ планеты во время t. Положивъ $t=T$, гдѣ T — время полнаго оборота планеты, найдемъ, что вся площадь траекторіи есть:

$$\frac{C}{2}T=\pi ab,$$

откуда:

$$T=\frac{2\pi ab}{C}.$$

Изъ (73) имѣемъ:

$$C=\sqrt{\mu p};$$

далѣе, изъ аналитической геометріи извѣстно:

$$p = \frac{b^2}{a},$$

тогда:

$$C = b\sqrt{\frac{\mu}{a}};$$

$$T = \frac{2\pi ab}{C} = \frac{2\pi ab}{b\sqrt{\frac{\mu}{a}}} = \frac{2\pi\sqrt{a^3}}{\sqrt{\mu}};$$

такъ что:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu \,.\, a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} = const.,$$

откуда:

$$\mu = \frac{4\pi^2}{const.} = const \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

Итакъ, значеніе μ оказывается одинаковымъ для всѣхъ планетъ нашей системы; оно вычислено Гауссомъ и носитъ названіе «Гауссова числа».

§ 25. Выводъ законовъ Кеплера изъ закона Ньютона. Обратно, принявъ извѣстнымъ законъ Ньютона, можно вывести законы Кеплера. Надо замѣтить, что эта задача отнюдь не предрѣшается предыдущимъ выводомъ закона притяженія изъ законовъ Кеплера, такъ какъ при извѣстной силѣ можетъ получиться не одно движеніе, а нѣсколько. Такъ, напримѣръ, подъ вліяніемъ двухъ солнцъ траекторія планеты можетъ быть коническимъ сѣченіемъ лишь подъ условіемъ извѣстнаго первоначальнаго толчка, даннаго тѣлу, а если бросить тѣло иначе, то траекторія значительно усложнится.

Для рѣшенія предложенной задачи воспользуемся формулой интеграла живыхъ силъ (59):

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0{}^2}{2} = U - U_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

т.-е. приращеніе живой силы равно приращенію силовой функціи. Силовая функція для Ньютоніанскихъ силъ, по формулѣ (63′), есть

$$U = \frac{\mu m}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (63')$$

или, по замѣнѣ $\frac{1}{r}$ черезъ u:

$$U = \mu m u\,.$$

Подставимъ это выраженіе въ интегралъ живыхъ силъ; получимъ:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = m\mu u - m\mu u_0,$$

гдѣ u_0 есть величина, обратная радіусу вектору для начальнаго момента времени. Опредѣлимъ изъ предыдущаго равенства v^2:

$$v^2 = 2\mu u + v_0^2 - 2\mu u_0.$$

Но членъ $(v_0^2 - 2\mu u_0)$ есть величина постоянная, такъ какъ зависитъ только отъ начальныхъ данныхъ, поэтому обозначимъ его черезъ α.

Итакъ

$$v_0^2 - 2\mu u_0 = \alpha \quad \dots \dots \dots \dots \quad (77)$$

тогда

$$v^2 = 2\mu u + \alpha.$$

Но по формулѣ Бине (70) для центральной силы имѣемъ:

$$v^2 = C^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right].$$

Поэтому:

$$C^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right] = 2\mu u + \alpha.$$

Рѣшая это уравненіе относительно $d\varphi$, найдемъ:

$$d\varphi = \pm \frac{du}{\sqrt{\frac{\alpha}{C^2} + \frac{2\mu u}{C^2} - u^2}}.$$

Выборъ знака передъ корнемъ зависитъ отъ условій, которыми мы характеризуемъ начальное положеніе. Условимся считать уголъ φ въ направленіи, соотвѣтствующемъ возрастанію r. Если r возрастаетъ, то его обратная величина u убываетъ, и du будетъ отрицательно, а потому въ предыдущей формулѣ надо взять передъ второй частью минусъ:

$$d\varphi = -\frac{du}{\sqrt{\frac{\alpha}{C^2} + \frac{2\mu u}{C^2} - u^2}}.$$

Для интеграціи преобразуемъ выраженіе, стоящее подъ радикаломъ:

$$\sqrt{\frac{\alpha}{C^2} + \frac{2\mu u}{C^2} - u^2} = \sqrt{\frac{\alpha}{C^2} + \frac{\mu^2}{C^4} - \left(u - \frac{\mu}{C^2}\right)^2}.$$

Такъ какъ C есть произвольная постоянная, то, имѣя въ виду послѣдующія преобразованія, положимъ:

$$\frac{\alpha}{C^2}+\frac{\mu^2}{C^4}=\frac{e^2}{p^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (78)$$

Эту сумму мы приравняли существенно положительной величинѣ, такъ какъ въ противномъ случаѣ выраженіе 2-й части было бы мнимымъ. По формулѣ (73) имѣемъ:

$$\frac{\mu}{C^2}=\frac{1}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (73')$$

Тогда, выражая $d\varphi$ черезъ (78) и (73′), найдемъ:

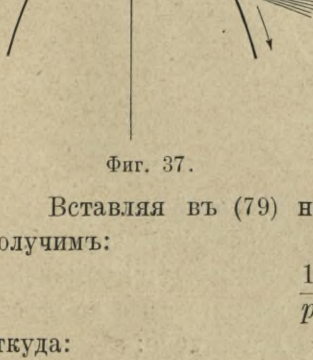
$$d\varphi=-\frac{du}{\sqrt{\frac{e^2}{p^2}-\left(\frac{up-1}{p}\right)^2}}=\frac{-\frac{p\,du}{e}}{\sqrt{1-\left(\frac{up-1}{e}\right)^2}}.$$

Вторая часть полученнаго равенства есть дифференціалъ $\arccos\frac{up-1}{e}$. Поэтому по интеграціи находимъ:

$$\varphi+\beta=\arccos\frac{up-1}{e};$$

откуда $\frac{up-1}{e}=\cos(\varphi+\beta)$

$$u=\frac{1}{p}\Big[1+e\cos(\varphi+\beta)\Big] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (79)$$



Фиг. 37.

Для опредѣленія произвольнаго постояннаго β положимъ, что мы начали разсматривать движеніе съ того мѣста, когда r есть min. (фиг. 37), а слѣдовательно, u есть max. Тогда, при $\varphi=0$, имѣемъ u есть max. Но изъ формулы видно, что u будетъ max. при $\cos(\varphi+\beta)=1$, при чемъ оно получаетъ значеніе:

$$u_{max}=\frac{1}{p}(1+e).$$

Вставляя въ (79) найденныя величины для начальнаго положенія, получимъ:

$$\frac{1}{p}(1+e)=\frac{1}{p}(1+e\cos\beta),$$

откуда:

$$\cos\beta=1;$$
$$\beta=0.$$

По замѣнѣ въ формулѣ (79) произвольнаго постояннаго его величиной, найдемъ:

$$u = \frac{1}{p}(1 + e\cos\varphi),$$

а принимая во вниманіе, что $u = \frac{1}{r}$, окончательно получимъ:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}.$$

Это и есть уравненіе коническихъ сѣченій.

Посмотримъ, при какихъ условіяхъ это коническое сѣченіе будетъ эллипсомъ, гиперболой или параболой, что, какъ извѣстно изъ аналитической геометріи, зависитъ отъ значенія e, которое мы и опредѣлимъ въ зависимости отъ данныхъ величинъ. Воспользуемся для этого уравненіями (78) и (73′).

Уравненіе (73′) возведемъ въ квадратъ и вычтемъ изъ (78): Получимъ:

$$\frac{e^2 - 1}{p^2} = \frac{a}{C^2},$$

или, подставивъ a изъ уравненія (77), найдемъ:

$$\frac{e^2 - 1}{p^2} = \frac{v_0^2 - 2\mu u_0}{C^2},$$

откуда:

$$e^2 = 1 + \frac{(v_0^2 - 2\mu u_0)p^2}{C^2}.$$

Изъ аналитической геометріи извѣстно, что при $e < 1$ получимъ эллипсъ, при $e = 1$ — параболу, при $e > 1$ — гиперболу. Слѣдовательно, траекторія будетъ:

1) эллипсъ, если $v_0^2 < 2\mu u_0$.

2) парабола, если $v_0^2 = 2\mu u_0$.

3) гипербола, если $v_0^2 > 2\mu u_0$.

Видъ траекторіи, стало быть, зависитъ отъ начальной скорости v_0 и отъ начальнаго положенія u_0, но не зависитъ отъ направленія скорости.

§ 26. Опредѣленіе связи между положеніемъ планеты и временемъ. При рѣшеніи вопроса о связи между положеніемъ небеснаго тѣла на орбитѣ (опредѣляемаго угломъ φ) и временемъ различаютъ два случая:

1) Движеніе совершается по параболѣ; тогда непосредственно находится связь между φ и t.

2) Движеніе происходитъ по эллипсу; тогда для простоты рѣшенія приходится вводить вмѣсто φ новое перемѣнное.

Первый случай соотвѣтствуетъ движенію кометъ. Кометами называются небесныя тѣла, движущіяся въ пространствѣ по параболамъ или очень растянутымъ эллипсамъ. Для наблюденія кометы доступны лишь въ то время, когда онѣ приближаются къ солнцу. При этомъ кометы пріобрѣтаютъ своеобразный видъ: у нихъ образуются хвосты, направленные въ сторону, противоположную отъ солнца.

Объясненіе образованія хвостовъ и ихъ формы принадлежитъ знаменитому астроному Ѳ. А. Бредихину. Теорія, предложенная имъ, состоитъ въ слѣдующемъ: при приближеніи къ перигелію, на нѣкоторыя составныя части кометы начинаетъ усиливаться дѣйствіе отталкивательныхъ центральныхъ силъ, центромъ которыхъ является солнце. Вслѣдствіе этихъ силъ нѣкоторыя частицы отдѣляются отъ ядра кометы и начинаютъ двигаться по гиперболамъ, образуя газообразные хвосты кометы. На основаніи опытовъ теперь установлено, что свѣтовые лучи, проходя черезъ очень рѣдкое газообразное вещество, гонятъ это вещество по своему направленію. (Изслѣдованія проф. П. Н. Лебедева.) Сдѣлавъ это допущеніе, Бредихинъ вполнѣ разъяснилъ различныя формы хвостовъ и ихъ расположеніе. Разница формъ хвостовъ зависитъ отъ свойствъ составляющей ихъ матеріи, въ связи съ которыми стоятъ *разныя величины коэффиціентовъ отталкивательной силы*. Такихъ коэффиціентовъ найдено три, и каждому изъ нихъ соотвѣтствуетъ особый типъ хвоста. Наблюденія показываютъ, что комета можетъ имѣть одновременно одинъ, два или три хвоста, что зависитъ отъ состава ядра кометы.

Для отысканія связи между φ и t, когда траекторія представляется параболой, воспользуемся теоремой площадей. Отнесемъ орбиту кометы къ полярнымъ координатамъ съ центромъ O и осью OA (фиг. 37). Уравненіе ея будетъ въ этомъ случаѣ *):

$$r = \frac{p}{1 + \cos\varphi}.$$

По теоремѣ площадей (65′):

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C,$$

откуда:

$$dt = \frac{r^2}{C} d\varphi.$$

Подставляя сюда r изъ уравненія параболы, получимъ:

$$dt = \frac{p^2}{C} \cdot \frac{d\varphi}{(1 + \cos\varphi)^2}.$$

*) Имѣемъ вообще $r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$, гдѣ $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$; для параболы $b = 0$, а слѣд., $e = 1$.

Замѣнимъ $(1+\cos\varphi)^2$ по формулѣ косинуса половинной дуги:

$$(1+\cos\varphi)^2 = 4\cos^4\frac{\varphi}{2}.$$

Тогда получимъ:

$$dt = \frac{p^2}{2C}\left[\frac{d\varphi}{2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right].$$

Но

$$\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = 1+tg^2\frac{\varphi}{2}.$$

Слѣдовательно:

$$dt = \frac{p^2}{2C}\left(d\,tg\frac{\varphi}{2}\right)\left(1+tg^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

Здѣсь C замѣнимъ черезъ $\sqrt{p\mu}$ по (73); тогда наша формула приметъ видъ:

$$dt = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\mu}}\left(d\,tg\frac{\varphi}{2}+tg^2\frac{\varphi}{2}\cdot d\,tg\frac{\varphi}{2}\right).$$

Послѣ интегрированія найдемъ:

$$t+\tau = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\mu}}\left(tg\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{3}tg^3\frac{\varphi}{2}\right).$$

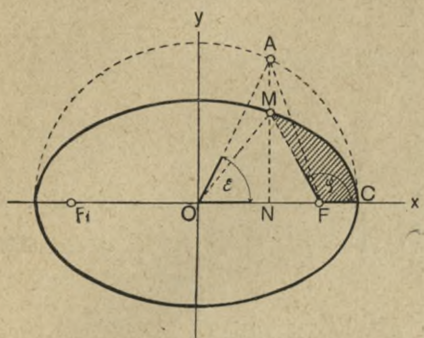
Для опредѣленія произвольнаго постояннаго τ начнемъ считать время отъ положенія кометы въ перигеліи. Тогда при $\varphi=0$ и $t=0$, а потому и $\tau=0$.

Итакъ, окончательно искомая связь выразится формулой:

$$t = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\mu}}\left(tg\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{3}tg^3\frac{\varphi}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (80)$$

Установимъ теперь аналогичную связь между t и φ для планетъ, орбиты которыхъ суть *эллипсы*. Пусть планета описываетъ эллипсъ съ полуосями a и b, въ фокусѣ F этого эллипса находится центръ притяженія— солнце. Вмѣсто угла φ, для удобства вычисленія, введемъ новый уголъ ε. Такая замѣна угла φ, называемаго *истинной аномаліей,* угломъ ε, называемымъ *эксцентрической аномаліей,* дѣлается съ цѣлью упростить интегрированіе, которое, въ случаѣ непосредственнаго отысканія связи между t и φ, приводитъ къ довольно сложнымъ квадратурамъ.

Для полученія угла ε опишемъ на большой оси эллипса окружность (фиг. 38) и опустимъ изъ взятаго положенія M планеты на орбитѣ перпендикуляръ MN на главную ось; пересѣченіе его съ окружностью въ точкѣ A соединяемъ съ центромъ O. Полученный $\angle AON = \varepsilon$, называемый *эксцентрической аномаліей*, мы примемъ за уголъ, опредѣляющій положеніе планеты.

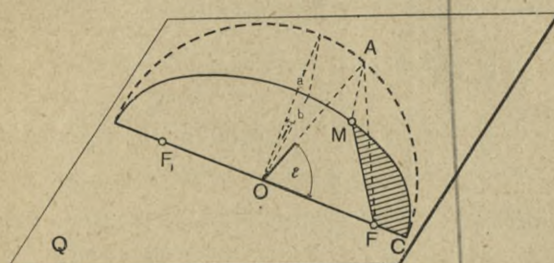


Фиг. 38.

Связь между ε и t найдемъ слѣдующимъ образомъ. Исходимъ изъ теоремы площадей въ интегральной формѣ:

$$\sigma = \frac{C}{2} t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

Въ данномъ случаѣ σ равно площади MFC — площади, описанной радіусомъ векторомъ FC при перемѣщеніи планеты изъ C въ M. Для выраженія площади MFC черезъ уголъ ε и полуоси эллипса вообразимъ окружность радіуса OC (фиг. 39), плоскость которой наклонена къ плоскости траекторіи Q подъ угломъ i, при чемъ $\cos i = \frac{b}{a}$. Тогда эта окружность спроектируется въ видѣ эллипса съ полуосями a и b. Отмѣтимъ въ эллипсѣ площадь $\sigma = MFC$ и будемъ разсматривать ее, какъ проекцію площади AFC, полученной такимъ же образомъ, какъ и на фигурѣ (38). Въ такомъ случаѣ:



Фиг. 39.

$$\sigma = MFC = AFC \cos i = AFC \frac{b}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

Площадь AFC = площади кругового сектора AOC безъ площади $\triangle OAF$. Площадь круг. сект. AOC выразится черезъ

$$\frac{\smile AC \,.\, OA}{2} = \frac{a\varepsilon \,.\, a}{2} = \frac{a^2 \varepsilon}{2}.$$

Площадь $\triangle OAF = \frac{OA \,.\, OF}{2} \sin \angle AOF = \frac{OA \,.\, OF}{2} \sin \varepsilon.$

Точка F есть фокусъ эллипса. Изъ аналит. геометріи извѣстно, что

$$OF = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = ae,$$

ибо

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$ (см. стр. 75).

Слѣдов., площадь $\triangle OAF$ перепишется такъ:

$$\triangle OAF=\frac{OA\,.\,OF\sin\varepsilon}{2}=\frac{a\,.\,ae\,.\sin\varepsilon}{2}=\frac{a^2e\sin\varepsilon}{2}.$$

Откуда:

$$AFC=\frac{a^2}{2}(\varepsilon-e\,.\sin\varepsilon)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(82)$$

Подставляя въ (81) значеніе AFC изъ (82), находимъ:

$$\sigma=\frac{ab}{2}[\varepsilon-e\sin\varepsilon]\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(83)$$

а принимая во вниманіе (65) и вставляя въ него значенія для σ изъ (83), получимъ:

$$t=\frac{ab}{C}[\varepsilon-e\sin\varepsilon].$$

Внося $\sqrt{p\mu}$ вмѣсто C [по формулѣ (73)] и замѣняя p черезъ $\frac{b^2}{a}$, получимъ окончательно:

$$t=\frac{ab}{\sqrt{\mu\,.\,\frac{b^2}{a}}}[\varepsilon-e\sin\varepsilon],$$

или:

$$t=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}[\varepsilon-e\sin\varepsilon]\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(84)$$

Это и есть окончательная формула, дающая связь между t и ε.

Если, наоборотъ, принять за извѣстное величину t и опредѣлить изъ найденнаго уравненія ε, то получимъ задачу Кеплера. При возрастаніи ε до 2π время t становится равнымъ времени полнаго оборота планеты T. Изъ формулы (84) имѣемъ:

$$T=\frac{a^{\frac{3}{2}}\,.\,2\pi}{\sqrt{\mu}}.$$

Эта формула оправдываетъ третій законъ Кеплера:

$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{\mu}=const.$$

§ 27. Движеніе тѣла, брошеннаго подъ угломъ къ горизонту. Рѣшимъ эту задачу, не принимая въ расчетъ сопротивленія среды. Пусть нѣкоторое тѣло брошено въ плоскости ***xOy*** со скоростью w подъ угломъ α къ горизонту (фиг. 40). Движеніе тѣла въ этомъ случаѣ будетъ происходить подъ дѣйствіемъ одной лишь силы тяжести, такъ что компоненты дѣйствующей силы по осямъ координатъ будутъ:

$$X = 0,$$

$$Y = -mg,$$

гдѣ m есть масса брошеннаго тѣла. Для нашего случая дифференціальныя уравненія движенія (27) будутъ таковы:

$$m . \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27\alpha)$$

$$m . \frac{d^2y}{dt^2} = -mg \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27\beta)$$

Интегрируя уравненіе (27α), получимъ:

$$\frac{dx}{dt} = C.$$

Произвольное постоянное C этого уравненія опредѣляется по начальнымъ условіямъ: тѣло брошено со скоростью w и въ началѣ движенія имѣло скорость по оси ***Ox***.

$$\frac{dx}{dt} = C = w \cos \alpha.$$

Интегрируемъ найденное уравненіе снова; находимъ:

$$x = wt \cos \alpha + C_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27\gamma)$$

Для точки ***O*** имѣемъ:

$$x = 0, \ t = 0;$$

слѣдовательно,

$$C_1 = 0,$$

и наше уравненіе (27γ) приметъ окончательный видъ:

$$x = wt \cos \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (85)$$

Для интегрированія уравненія (27β) представимъ его въ видѣ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = -g.$$

Интегрируя, находимъ:

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86')$$

Для опредѣленія C_2 замѣтимъ, что при $t = 0$, $\frac{dy}{dt} = w \sin \alpha$ (проекція w на ось Oy). Тогда

$$C_2 = w \sin \alpha,$$

и теперь ур. (86′) напишется такъ:

$$\frac{dy}{dt} = -gt + w \sin \alpha .$$

Интегрируя, найдемъ:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + wt \sin \alpha + C_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86'')$$

Для опредѣленія C_3 замѣчаемъ, что въ началѣ координатъ при $y = 0$, имѣемъ $t = 0$; тогда изъ (86″) находимъ, что и $C_3 = 0$, и ур-іе (86″) принимаетъ окончательно видъ:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + wt \sin \alpha .$$

Подставляя въ это ур-іе значеніе t изъ ур-ія (85):

$$t = \frac{x}{w \cos \alpha},$$

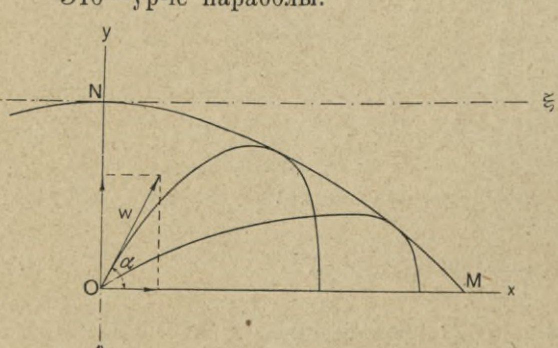
находимъ:

$$y = -\frac{gx^2}{2 w^2 \cos^2 \alpha} + \frac{w \, . \, x \sin \alpha}{w \cos \alpha},$$

что окончательно даетъ:

$$y = x \, tg \, \alpha - \frac{gx^2}{2 w^2 \cos^2 \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

Это — ур-іе параболы.



Фиг. 40.

§ 28. Отысканіе огибающей всѣхъ параболическихъ траекторій при постоянномъ w. Зададимся цѣлью отыскать огибающую всѣхъ параболическихъ траекторій, по которымъ движется матеріальная точка, бросаемая подъ различными углами къ горизонту съ постоянной скоростью w (фиг. 40). Но прежде покажемъ общій способъ полученія уравненія огибающей по данному уравненію огибаемой.

Если мы имѣемъ уравненіе кривой вида:

$$f(x, y, p) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (87)$$

гдѣ x и y суть текущія координаты, а p—параметръ, то видъ этой кривой и положеніе ея на плоскости, характеризуясь параметромъ p, мѣняются съ измѣненіемъ p. Огибающую можно разсматривать какъ геометрическое мѣсто предѣловъ пересѣченія кривыхъ, происходящихъ отъ измѣненія параметровъ въ уравненіи данной кривой. Если въ данномъ уравненіи кривой параметръ p измѣнится въ $(p + dp)$, то уравненіе кривой будетъ:

$$f(x, y, p + dp) = 0.$$

Разлагая это уравненіе по строкѣ Тейлора, получимъ:

$$f(x, y, p) + f_p'(x, y, p)\, dp + \frac{1}{1 \cdot 2} f_p''(x, y, p)\,(dp)^2 + \ldots = 0 \;.\;.\; (87')$$

Координаты точки пересѣченія обѣихъ безконечно близкихъ кривыхъ должны удовлетворять какъ этому ур-ію, такъ и ур-ію (87). Но въ виду (87) первый членъ строки (87′) пропадаетъ и мы получаемъ ур-іе:

$$f_p'(x, y, p)\, dp + \frac{1}{1 \cdot 2} f_p''(x, y, p)\,(dp)^2 + \ldots = 0.$$

Сокращая все ур-іе на dp и переходя къ предѣлу $(dp = 0)$, находимъ ур-іе, которому должны удовлетворять координаты точекъ пересѣченія смежныхъ кривыхъ:

$$f_p'(x, y, p) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (88)$$

Исключая параметръ p изъ ур-ій (87) и (88), и получимъ ур-іе огибающей въ формѣ

$$R(x, y) = 0.$$

Примѣнимъ эти разсужденія къ случаю, разобранному въ предыдущемъ параграфѣ. Мы имѣли тамъ ур-іе одной изъ параболъ:

$$y = x\, tg\, \alpha - \frac{g x^2}{2 w^2 \cos^2 \alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots (86)$$

За параметръ p примемъ величину $tg\, \alpha$, т.-е. положимъ

$$tg\, \alpha = p.$$

Тогда входящая сюда величина $\frac{1}{cos^2\alpha}$ выразится такъ:

$$\frac{1}{cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha = 1 + p^2$$

и предыдущее уравненіе напишется:

$$y = xp - \frac{gx^2}{2w^2}(1 + p^2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (89')$$

Дифференцируя уравненіе (89′) по p, согласно (88), находимъ:

$$x - \frac{gx^2}{w^2}p = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (89'')$$

Исключаемъ теперь параметръ p изъ (89′) и (89″),—тогда и получимъ искомое ур-іе огибающей. Изъ (89″) имѣемъ:

$$p = \frac{w^2}{gx}.$$

Подставляя это значеніе p въ уравненіе (89′), получимъ уравненіе огибающей:

$$y = \frac{w^2}{2g} - \frac{gx^2}{2w^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (89)$$

Это уравненіе представляетъ тоже параболу. Точки пересѣченія ея съ осями координатъ опредѣлятся такъ:

съ осью x: $$y = 0,\ x = OM = \frac{w^2}{g},$$

съ осью y: $$x = 0,\ y = ON = \frac{w^2}{2g}.$$

Таковы значенія координатъ точекъ пересѣченія M и N огибающей параболы съ осями x и y.

Отнесемъ полученное уравненіе (89) къ новой системѣ координатъ $\eta N \xi$, начало которой помѣстимъ въ точкѣ N. Тогда имѣемъ формулы перехода:

$$x = \xi,$$

$$y = \frac{w^2}{2g} - \eta.$$

И тогда ур. (89) приметъ видъ:

$$\xi^2 = \frac{2w^2}{g}\eta.$$

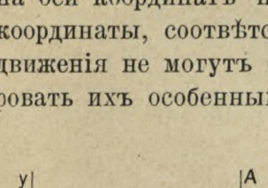
Слѣдовательно, огибающая парабола имѣетъ вершину въ N, ось ея есть $N\eta$, а параметръ равенъ $\frac{w^2}{g}$.

§ 29. Движеніе артиллерійскаго снаряда, пущеннаго подъ угломъ къ горизонту. Мы разсмотрѣли задачу о движеніи тѣла подъ угломъ къ горизонту въ пустотѣ. Если тѣло брошено въ воздухѣ, то сопротивленіе среды значительно измѣняетъ движеніе, и траекторіей является своеобразная трансцендентная кривая. Изслѣдованіе этого движенія очень важно въ баллистикѣ. Въ артиллерійскихъ школахъ существуетъ спеціальная каѳедра, посвященная подробному изученію этой задачи.


Фиг. 41.

Форма движущагося въ сопротивляющейся средѣ тѣла, а также и вращательное движеніе, сообщенное ему при бросаніи, вліяютъ на его полетъ. Именно этими факторами и объясняются разнообразныя и довольно удивительныя формы траекторій, описываемыхъ бумерангомъ,—охотничьимъ орудіемъ, употребляемымъ нѣкоторыми дикими племенами и представляющимъ изъ себя деревянное тѣло особой формы. На фиг. 41 представлена фигура, вырѣзавъ которую изъ карточки, мы получимъ тѣло, способное описывать при бросаніи траекторію, характерную для бумеранга.

Чтобы не сдѣлать задачу слишкомъ сложной, разсмотримъ движеніе въ сопротивляющейся средѣ шарообразнаго тѣла, брошеннаго подъ нѣкоторымъ угломъ къ горизонту и движущагося поступательно. Въ этомъ случаѣ на тѣло дѣйствуютъ двѣ силы: сила тяжести P, по вертикали внизъ, и сила сопротивленія воздуха F, направленная въ сторону, противоположную движенію тѣла, и по величинѣ прямо пропорціональная квадрату скорости. Трудность этой задачи состоитъ въ томъ, что проекціи силы сопротивленія на оси координатъ не могутъ быть представлены въ видѣ функціи одной координаты, соотвѣтствующей оси, а потому дифференціальныя уравненія движенія не могутъ быть объинтегрированы порознь. Приходится интегрировать ихъ особеннымъ образомъ совмѣстно.



Фиг. 42.

Пусть тѣло, брошенное подъ угломъ α къ горизонту, движется по плоской траекторіи OBC (фиг. 42). На него будутъ дѣйствовать силы: сила тяжести $P = mg$ и сила сопротивленія $F = mgk^2v^2$ [см. стр. 39, форм. (42)].

Силы эти даютъ слѣдующіе компоненты по осямъ x и y:

$$X = -mgk^2v^2\frac{dx}{ds},$$

$$Y = -mg - mgk^2v^2\frac{dy}{ds}.$$

Здѣсь $\frac{dx}{ds}$ и $\frac{dy}{ds}$ представляютъ косинусы угловъ, образуемыхъ направленіемъ скорости съ осями x и y. Дифференціальныя уравненія движенія [формулы (27)] напишутся такъ:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-mgk^2v^2\frac{dx}{ds},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg-mgk^2v^2\frac{dy}{ds},$$

или:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-gk^2v^2\frac{dx}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (90)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=g-gk^2v^2\frac{dy}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (91)$$

Пріемъ интегрированія будетъ состоять въ томъ, что мы будемъ стремиться выразить x, y, t въ видѣ функціи параметра p, гдѣ $p=\frac{dy}{dx}$ и представляетъ тангенсъ угла, образуемаго касательной къ траекторіи съ осью x. Производныя $\frac{d^2y}{dt^2}$ и $\frac{dy}{ds}$, входящія въ уравненіе (91), могутъ быть выражены черезъ p такъ:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=p\cdot\frac{dx}{dt};$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=p\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}.$$

Подобнымъ же образомъ:

$$\frac{dy}{ds}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}=p\cdot\frac{dx}{ds}.$$

Подставляя эти выраженія въ (91), находимъ:

$$p\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}=-g-gk^2v^2p\frac{dx}{ds};$$

$$p\left(\frac{d^2x}{dt^2}+gk^2v^2\frac{dx}{ds}\right)+\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}=-g.$$

Но изъ уравненія (90) слѣдуетъ, что выраженіе въ скобкахъ равно нулю, а потому имѣемъ:

$$\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}=-g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (92)$$

Преобразуемъ теперь уравненіе (90), для чего замѣтимъ, что

$$\frac{dx}{ds}=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{1}{v}.$$

Подставляя это выраженіе въ уравненіе (90), находимъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -gk^2v\frac{dx}{dt};$$

$$\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}} = -gk^2v;$$

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}} = -gk^2v\,dt.$$

Но

$$v\,dt = ds,$$

а первая часть равенства представляетъ $dLg\left(\frac{dx}{dt}\right)$; поэтому уравненіе (90) напишется такъ:

$$dLg\left(\frac{dx}{dt}\right) = -gk^2ds.$$

Интегрируя его, получимъ:

$$Lg\left(\frac{dx}{dt}\right) = -gk^2s + C.$$

Въ начальный моментъ движенія дуга $s = 0$, а проекція скорости $\frac{dx}{dt}$ равняется $v_0 \cos\alpha$, гдѣ α уголъ, подъ которымъ брошено тѣло относительно горизонта. Поэтому:

$$Lg(v_0 \cos\alpha) = C,$$

и уравненіе (90) теперь приметъ видъ:

$$Lg\left(\frac{\frac{dx}{dt}}{v_0 \cos\alpha}\right) = -gk^2s;$$

откуда:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha \,.\, e^{-gk^2s} \quad \text{. . . . .} \quad (93)$$

гдѣ e основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ.

Изъ уравненія (93) заключаемъ, что при s, равномъ безконечности, $\frac{dx}{dt} = 0$. Это показываетъ, что при безконечномъ продолженіи дуги траекторіи точка теряетъ всю свою скорость по оси **Ox**. Слѣдовательно, на нѣкоторомъ разстояніи отъ начала координатъ должна быть перпендикулярная къ оси Ox ассимптота AS, къ которой безконечно приближается траекторія OBC. Подставимъ въ уравненіе (92), найденное изъ (93) выраженіе $\frac{dx}{dt}$, и опредѣлимъ $\frac{dp}{dt}$. Имѣемъ:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{g \cdot e^{gk^2 s}}{v_0 \cos \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

Вторая часть этого уравненія при всевозможныхъ значеніяхъ s остается отрицательной. Это показываетъ, что тангенсъ угла, образуемаго касательной къ траекторіи съ осью Ox, постоянно убываетъ. При $s=0$ тангенсъ положителенъ, при нѣкоторомъ промежуточномъ значеніи онъ проходитъ черезъ нуль и, становясь отрицательнымъ, при дальнѣйшемъ увеличеніи онъ продолжаетъ безпредѣльно убывать. Слѣдовательно, при $s=\infty$, $tg\alpha = -\infty$ и $\alpha = -90^0$, т.-е. касательная къ траекторіи, проведенная въ точкѣ, безконечно удаленной отъ ея начала, пересѣкаетъ ось Ox подъ прямымъ угломъ. Это и есть вышеупомянутая ассимптома.

Найдемъ связь между p и s изъ уравненій (93) и (94). Замѣтимъ, что

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

или

$$ds = dx\sqrt{1+p^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

Раздѣливъ по частямъ уравненіе (94) и (93), находимъ:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} e^{2gk^2 s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

Перемноживъ накрестъ уравненіе (96) и (95), получимъ:

$$\sqrt{1+p^2} \cdot dp = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} e^{2gk^2 s} \cdot ds.$$

Интегрируемъ это уравненіе:

$$2\int \sqrt{1+p^2} \cdot dp = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha \cdot gk^2} e^{2gk^2 s} + C.$$

Интегралъ, стоящій въ первой части равенства и встрѣчающійся при квадратурѣ гиперболы, извѣстенъ изъ анализа:

$$\int \sqrt{1+p^2} \cdot dp = \frac{1}{2}\left[p\sqrt{1+p^2} + Lg\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)\right].$$

Эта функція p, представленная выраженіемъ, стоящимъ въ прямыхъ скобкахъ, очень важна для рѣшенія задачъ баллистики, и для нея вычислены спеціальныя таблицы. Обозначимъ ее черезъ $\psi(p)$:

$$p\sqrt{1+p^2}+Lg(p+\sqrt{1+p^2})=\psi(p) \quad \ldots\ldots\ldots (97)$$

Пользуясь формулой (97), перепишемъ предыдущее уравненіе:

$$\frac{1}{k^2 v_0{}^2 \cos^2\alpha} e^{2gk^2s} = C-\psi(p) \quad \ldots\ldots\ldots (98)$$

Для опредѣленія C замѣтимъ, что при началѣ движенія $s=0$ и $p=tg\,\alpha$. Подставляя эти значенія въ (98), находимъ:

$$C=\frac{1}{k^2 v_0{}^2 \cos^2\alpha}+\psi(tg\,\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots (99)$$

Далѣе изъ уравненія (98) находимъ, что

$$e^{gk^2s}=kv_0\cos\alpha\,.\sqrt{C-\psi(p)} \quad \ldots\ldots\ldots (100)$$

Пользуясь этими уравненіями, выразимъ x, y, t черезъ p. Изъ уравненія (96) имѣемъ:

$$dx=-\frac{v_0{}^2\cos^2\alpha}{g}e^{-2gk^2s}\,.\,dp.$$

Подставляемъ e^{gk^2s} изъ уравненія (100):

$$dx=-\frac{dp}{gk^2}[C-\psi(p)]^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots (101)$$

Изъ уравненія

$$\frac{dy}{dx}=p$$

имѣемъ:

$$dy=p\,dx.$$

Замѣняя dx черезъ найденное выраженіе изъ (101), находимъ:

$$dy=-\frac{p\,dp}{gk^2}[C-\psi(p)]^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots (102)$$

Изъ уравненія (94) имѣемъ:

$$dt=-\frac{v_0\cos\alpha}{ge^{gk^2s}}\,.\,dp.$$

Подставляя e^{gk^2s} изъ уравненія (100), находимъ:

$$dt = -\frac{dp}{kg}[C - \psi(p)]^{-\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (103)$$

Интегрируя уравненія (101), (102), (103), получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{1}{gk^2}\int_{tg\,\alpha}^{p}[C - \psi(p)]^{-1}\,.\,dp; \\ y &= -\frac{1}{gk^2}\int_{tg\,\alpha}^{p}[C - \psi(p)]^{-1}\,.\,p\,.\,dp; \\ t &= -\frac{1}{gk}\int_{tg\,\alpha}^{p}[C - \psi(p)]^{-\frac{1}{2}}\,.\,dp. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (104)$$

Формулы (99) и (104) служатъ основаніемъ рѣшенія задачъ баллистики. Для вычисленія ихъ существуютъ спеціальныя таблицы.

Положимъ, что намъ извѣстенъ уголъ α, подъ которымъ брошенъ снарядъ, и первоначальная скорость снаряда v_0; извѣстно также $k = \sqrt{\frac{\mu\sigma}{mg}}$ (§ 14). Требуется опредѣлить полетъ такого снаряда.

По обыкновеннымъ таблицамъ отыскиваемъ величину $tg\,\alpha$. Затѣмъ, по спеціальнымъ таблицамъ функціи $\psi(p)$ находимъ величину $\psi\,tg\,\alpha$. Далѣе, выяснивъ по формулѣ (99) постоянное C, можемъ опредѣлить x, y и t для всякаго p, т.-е. опредѣлить, въ какомъ мѣстѣ пространства и въ какой моментъ времени движется снарядъ, образуя уголъ arc $tg\,p$ съ горизонтомъ. Для этого обращаемся къ спеціальнымъ таблицамъ слѣдующихъ трехъ функцій:

$$\Phi = \int_0^p [C - \psi(p)]^{-1}\,.\,dp,$$

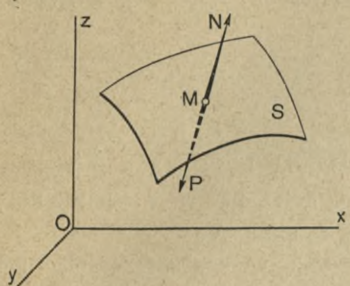
$$\Phi_1 = \int_0^p [C - \psi(p)]^{-1}\,.\,p\,.\,dp,$$

$$\Phi_2 = \int_0^p [C - \psi(p)]^{-\frac{1}{2}}\,.\,dp.$$

Въ этихъ таблицахъ мы будемъ открывать страницы, соотвѣтствующія вычисленному нами C. На этихъ страницахъ будемъ отыскивать значенія функцій при выбранномъ нами аргументѣ p и изъ нихъ вычитать значеніе тѣхъ же функцій при p, равномъ вычисленному $tg\,\alpha$. Такимъ образомъ опредѣлятся междупредѣльные интегралы, входящіе въ составъ формулы (104), а по нимъ уже легко опредѣлить x, y и t.

Равновѣсіе несвободной матеріальной точки.

§ 30. Равновѣсіе матеріальной точки на поверхности. Пусть матеріальная точка M стѣснена условіями, позволяющими ей перемѣщаться лишь на поверхности S, данной уравненіемъ $f(x, y, z) = 0$ въ прямоугольной системѣ координатъ (фиг. 43).



Фиг. 43.

Поверхность S будемъ считать совершенно гладкой, чтобы не принимать въ расчетъ силъ тренія. Подъ вліяніемъ внѣшней силы P, приложенной къ точкѣ M, разовьется давленіе на поверхность, противодѣйствіемъ которому будетъ нормальная сила N сопротивленія поверхности. Замѣнивъ механическій эффектъ поверхности S силой N, мы можемъ разсматривать точку M, какъ свободную, и написать для нея условія равновѣсія, состоящія въ томъ, что сумма проекцій силъ на каждую изъ осей координатъ равна нулю.

$$\left.\begin{aligned} X + N\cos\alpha = 0, \\ Y + N\cos\beta = 0, \\ Z + N\cos\gamma = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (105')$$

гдѣ X, Y, Z—проекціи силы P на оси координатъ, а α, β, γ—углы, образуемые нормалью къ поверхности съ осями координатъ.

Изъ анализа извѣстно, что cos-ы угловъ нормали къ поверхности выражаются формулами:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta}, \quad \cos\gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta}, \quad \ldots\ldots (106)$$

гдѣ

$$\Delta = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

а $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$—частныя производныя функціи $f(x, y, z)$.

Выборъ знака при Δ зависитъ отъ того, какое направленіе нормали мы принимаемъ за положительное. Когда это направленіе установлено, то *сила сопротивленія N считается положительной, если направлена по положительной нормали, и отрицательной, если направлена въ обратную сторону.*

Замѣнивъ въ уравненіяхъ (105′) косинусы ихъ значеніями изъ (106), найдемъ:

$f(x,y,z)=0$

$$\left.\begin{aligned} X+\frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}=0, \\ Y+\frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=0, \\ Z+\frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}=0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (105)$$

Это суть три уравненія равновѣсія несвободной матеріальной точки. Присоединивъ къ нимъ уравненіе поверхности, будемъ имѣть 4 уравненія, изъ которыхъ и опредѣлятся координаты x, y, z и сила N.

Возьмемъ для примѣра такую задачу: Найти положеніе равновѣсія матеріальной точки M массы m (фигура 44) подъ дѣйствіемъ силы тяжести P на поверхности эллипсоида, даннаго въ системѣ осей x, y, z, уравненіемъ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Назовемъ углы, образуемые направленіемъ силы тяжести P съ осями x, y, z, соотвѣтственно черезъ α, β и γ. Величина силы P будетъ $=mg$. Напишемъ условія равновѣсія точки на поверхности:

$$\left.\begin{aligned} X+\frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}=0, \\ Y+\frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=0, \\ Z+\frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}=0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (105)$$

Изъ уравненія эллипсоида опредѣлимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{a^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{b^2},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{2z}{c^2}.$$

Величины же X, Y, Z для даннаго случая выразятся:

$$\begin{aligned} X&=-mg\cos\alpha, \\ Y&=-mg\cos\beta, \\ Z&=-mg\cos\gamma. \end{aligned}$$

Условимся считать положительной внѣшнюю нормаль къ поверхности эллипсоида; въ такомъ случаѣ при Δ возьмемъ знакъ $+$ (въ анализѣ было доказано, что внѣшней нормали соотвѣтствуютъ $+\Delta$). Тогда уравненія (105) примутъ видъ:

$$-mg\cos\alpha+\frac{2Nx}{\Delta a^2}=0,$$

$$-mg\cos\beta+\frac{2Ny}{\Delta b^2}=0,$$

$$-mg\cos\gamma+\frac{2Nz}{\Delta c^2}=0.$$

Опредѣлимъ отсюда координаты x, y, z:

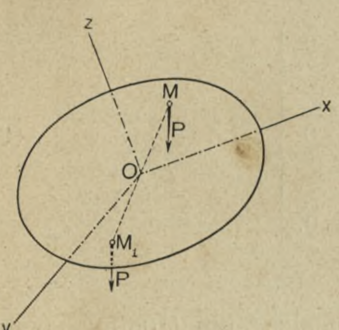
$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{mg\,a^2 \cos\alpha}{2} \cdot \frac{\Delta}{N}, \\ y &= \frac{mg\,b^2 \cos\beta}{2} \cdot \frac{\Delta}{N}, \\ z &= \frac{mg\,c^2 \cos\gamma}{2} \cdot \frac{\Delta}{N}. \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (107)$$

Подставивъ въ уравненіе эллипсоида найденныя величины, получимъ:

$$\frac{m^2 g^2}{4} (a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma) \left(\frac{\Delta}{N}\right)^2 = 1.$$

Отсюда:

$$\frac{N}{\Delta} = \pm \frac{mg}{2} \sqrt{a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma} \quad \dots\dots\dots \quad (107')$$



Фиг. 44.

Если въ системѣ ур-ій (107) замѣнимъ $\frac{N}{\Delta}$ полученной величиной изъ (107′), то будемъ имѣть:

$$x = \pm \frac{a^2 \cos\alpha}{\sqrt{a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma}},$$

$$y = \pm \frac{b^2 \cos\beta}{\sqrt{a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma}},$$

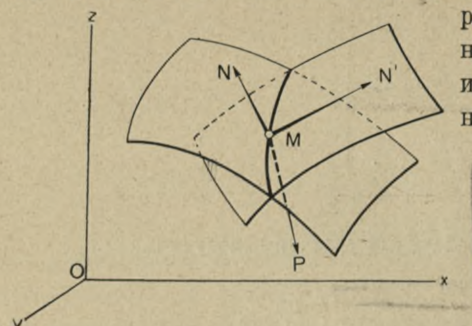
$$z = \pm \frac{c^2 \cos\gamma}{\sqrt{a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma}}.$$

Итакъ, получено два рѣшенія, опредѣляющихъ положеніе равновѣсія точки M на данной поверхности. Этимъ двумъ рѣшеніямъ будутъ удовлетворять два значенія силы сопротивленія. Если мы возьмемъ координаты положительными, то почучимъ на поверхности эллипсоида точку M. Сила N будетъ въ этомъ случаѣ положительна (потому что мы условились считать Δ положительнымъ и изъ уравненія (107′) имѣемъ при положительномъ корнѣ положительное N); это рѣшеніе имѣетъ мѣсто, если матеріальная точка находится на внѣшней поверхности эллипсоида. Проведя радіусъ-векторъ черезъ точку M, найдемъ, что на его продолженіи въ обратную сторону будетъ находиться точка M_1 съ координатами, удовлетворяющими второму рѣшенію. Знакъ минусъ при N въ этомъ случаѣ указываетъ направленіе силы N внутрь эллипсоида, что соотвѣтствуетъ положенію точки M_1 во внутренней полости эллипсоида.

12 **§ 31. Равновѣсіе точки на линіи.** Положимъ, что точка M подъ дѣйствіемъ силы P движется по нѣкоторой линіи. Разсматривая эту линію, какъ пересѣченіе 2-хъ поверхностей, получимъ ея уравненія въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z) &= 0, \\ f_1(x, y, z) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (108')$$

Весь эффектъ дѣйствія поверхностей при дѣйствіи внѣшней силы P на точку **M** (фиг. 45) можетъ быть представленъ въ видѣ нормальныхъ силъ сопротивленія N, оказываемыхъ каждой поверхностью. Тогда мы можемъ разсматривать точку **M**, какъ свободную, подъ дѣйствіемъ трехъ силъ P, N и N' и по (105′) условія равновѣсія написать въ видѣ:



Фиг. 45.

$$\left.\begin{aligned} X + N\cos\alpha + N_1\cos\alpha_1 &= 0 \\ Y + N\cos\beta + N_1\cos\beta_1 &= 0 \\ Z + N\cos\gamma + N_1\cos\gamma_1 &= 0 \end{aligned}\right\} . \quad (108'')$$

гдѣ α, β, γ и α_1, β_1, γ_1 суть углы нормалей къ поверхностямъ съ осями x, y, z. Пользуясь формулой (106), можно переписать систему ур-ій (108″) въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} X + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{N_1}{\Delta_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x} &= 0 \\ Y + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{N_1}{\Delta_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y} &= 0 \\ Z + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{N_1}{\Delta_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (108)$$

Присоединяя къ этимъ уравненіямъ уравненія линіи (108′), получимъ пять уравненій, изъ которыхъ и опредѣлимъ всѣ нужныя намъ пять неизвѣстныхъ: x, y, z, N и N_1.

Движеніе несвободной матеріальной точки.

12 **§ 32. Движеніе матеріальной точки по поверхности.** При рѣшеніи задачи о движеніи несвободной матеріальной точки поступаемъ такъ же, какъ и въ предыдущемъ параграфѣ; именно, замѣняемъ связи силами сопротивленія и затѣмъ разсматриваемъ движеніе матеріальной точки, какъ свободной, подъ дѣйствіемъ данныхъ силъ и прибавленныхъ силъ сопротивленія.

Положимъ, что точка **M** массы m подъ дѣйствіемъ силы P движется по поверхности **Q**, данной уравненіемъ:

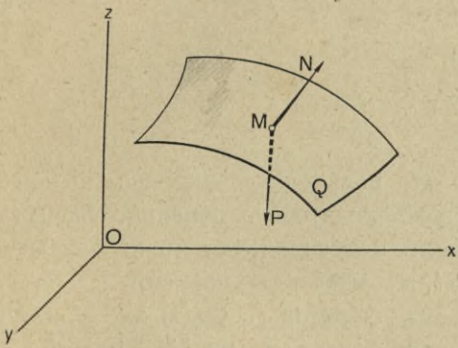
$$f(x, y, z) = 0.$$

Механическій эффектъ идеально-гладкой поверхности представленъ нормальной силой N (фиг. 46). Напишемъ дифференціальныя уравненія движенія по поверхности, т.-е.:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X+\frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y+\frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z+\frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (109)$$

гдѣ X, Y, Z суть компоненты силы P, а $\frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}$ суть компоненты силы N, при чемъ принято

$$\Delta=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$



Фиг. 46.

Три дифференціальныя уравненія движенія (109) вмѣстѣ съ уравненіемъ поверхности и рѣшаютъ нашу задачу. Исключая изъ (109) величину $\frac{N}{\Delta}$, найдемъ два дифференціальныхъ уравненія второго порядка. Въ нихъ z замѣнимъ черезъ его значеніе $\varphi(x, y)$, найденное изъ уравненія поверхности. Тогда получимъ два уравненія второго порядка съ двумя неизвѣстными функціями x и y и независимымъ перемѣннымъ t. Объинтегрировавъ эти уравненія (при чемъ получатся четыре произвольныхъ постоянныхъ, которыя опредѣлимъ по начальнымъ условіямъ), найдемъ x и y, какъ функціи t. Подставляя найденныя выраженія въ уравненіе $z=\varphi(x, y)$, опредѣлимъ z, а потомъ изъ любого дифференціальнаго уравненія движенія можно найти и N.

12 **§ 33. Движеніе точки по линіи.** Пусть линія, по которой движется точка, дана двумя уравненіями:

$$f(x, y, z)=0,$$
$$f_1(x, y, z)=0,$$

представляющими двѣ поверхности, дающія въ пересѣченіи нашу линію. Механическій эффектъ линіи является равнодѣйствующимъ эффектомъ дѣйствія обѣихъ поверхностей, а потому его можно замѣнить нормальными силами сопротивленія N и N_1, придавъ которыя къ дѣйствующей силѣ P, получимъ возможность разсматривать точку, какъ свободную.

Пишемъ дифференціальныя уравненія:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=X+\frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{N_1}{\Delta_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x},\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=Y+\frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{N_1}{\Delta_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y},\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=Z+\frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{N_1}{\Delta_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial z}. \end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(110)$$

Эти три уравненія съ двумя уравненіями линіи вполнѣ рѣшаютъ вопросъ.

Общій ходъ рѣшенія задачи таковъ: исключивъ изъ трехъ дифференціальныхъ уравненій движенія количества $\frac{N}{\Delta}$ и $\frac{N_1}{\Delta_1}$, получимъ одно дифференціальное уравненіе съ тремя неизвѣстными функціями x, y, z и независимымъ перемѣннымъ t. Изъ двухъ уравненій поверхности находимъ:

$$y=\varphi(x),$$

$$z=\varphi_1(x).$$

Подставляя эти значенія въ только что полученное дифференціальное уравненіе, получимъ дифференціальное уравненіе второго порядка, содержащее только x и t. Интегрируя его (при чемъ получатся два произвольныхъ постоянныхъ), найдемъ x, какъ функцію t, а затѣмъ изъ уравненій $y=\varphi(x)$ и $z=\varphi_1(x)$ опредѣлимъ также y и z, какъ функціи t. Силы же N и N_1 можно найти изъ любыхъ двухъ дифференціальныхъ уравненій движенія.

§ 34. Теорема живыхъ силъ для несвободной матеріальной точки. Теорему живыхъ силъ для несвободной матеріальной точки докажемъ, разсматривая случай движенія по линіи; случай же движенія по поверхности получимъ, полагая въ уравненіяхъ движенія по линіи $N_1=0$.

Умножимъ уравненія (110) соотвѣтственно на $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

Складывая найденныя равенства, получаемъ:

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{dz}{dt}\right)=$$

$$=X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}+\frac{N}{\Delta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}\right)+$$

$$+\frac{N_1}{\Delta_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}\right)\quad\ldots\ldots\ldots(111)$$

Первую часть этого уравненія можно представить въ видѣ:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\right\}=\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

Два послѣднихъ члена второй части уравненія (111) равны нулю, такъ какъ равны нулю выраженія въ скобкахъ, представляющія собою полныя производныя по t отъ первыхъ частей уравненія $f(x, y, z)=0$ и $f_1(x, y, z)=0$, которымъ координаты точки все время удовлетворяютъ. Тогда уравненіе (111) напишется въ видѣ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)=X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}$$

или

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz.$$

Наконецъ, на основаніи формулы (51) имѣемъ:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=P\cos\theta\,.\,ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (112)$$

Это и есть *теорема живыхъ силъ въ дифференціальной формѣ*, — она та же, что и для свободной точки. Разница только въ выводѣ: пришлось разсматривать еще нормальныя силы сопротивленія поверхностей, но эти силы работы не производятъ, т. к. они нормальны къ элементамъ пути ds.

Принимая во вниманіе, что по формулѣ (56)

$$P\cos\theta\,.\,ds=dU$$

и, интегрируя выведенное ур-іе (112), находимъ:

$$\frac{mv^2}{2}+C=U.$$

При $v=v_0$ имѣемъ:

$$U=U_0;$$

слѣдовательно:

$$\frac{mv_0^2}{2}+C=U_0.$$

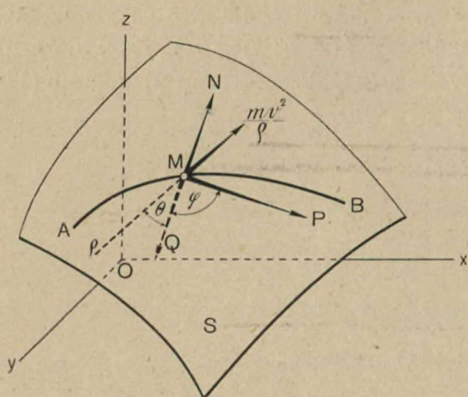
Вычитая это равенство изъ предыдущаго, находимъ:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=U-U_0.$$

Это *интегралъ живыхъ силъ.* Изъ хода разсужденія видно, что и въ случаѣ движенія по поверхности, при $N_1=0$, придемъ къ тому же результату.

Итакъ, теорема живыхъ силъ, а слѣдовательно, и принципъ постоянства энергіи остается неизмѣннымъ и для случая несвободнаго движенія матеріальной точки, при отсутствіи силъ тренія. Нормальныя силы сопротивленія поверхностей работы не производятъ.

13 **§ 35. Опредѣленіе силы давленія матеріальной точки на поверхность, по которой она движется.** По закону: дѣйствіе равно противодѣйствію, давленіе Q точки ***M*** (фиг. 47) на поверхность равно силѣ N реакціи поверхности, но направлено въ противоположную сторону; слѣдовательно:



Фиг. 47.

$$Q = -N.$$

Положимъ, что точка массы m движется по траекторіи ***AB*** на поверхности ***S***. Уравненія движенія точки на поверхности (§ 32) напишутся по формулѣ (109) такъ:

$$X + N\cos\alpha = m\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$Y + N\cos\beta = m\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$Z + N\cos\gamma = m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Отсюда находимъ проекціи силы Q, имѣя въ виду, что $Q = -N$:

$$\left.\begin{aligned} Q\cos\alpha &= X - m\frac{d^2x}{dt^2}, \\ Q\cos\beta &= Y - m\frac{d^2y}{dt^2}, \\ Q\cos\gamma &= Z - m\frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (113)$$

Изъ кинематики извѣстно (§ 4), что полное ускореніе геометрически можетъ быть представлено въ видѣ суммы двухъ векторовъ: 1) проекціи полнаго ускоренія на касательную,—тангенціальнаго ускоренія, равнаго $\frac{dv}{dt}$, и 2) проекціи полнаго ускоренія на нормаль,—нормальнаго ускоренія, равнаго $\frac{v^2}{\rho}$.

Обозначимъ черезъ a, b, c углы, образуемые касательной къ траекторіи съ осями координатъ, а черезъ λ, μ, ν — углы, образуемые радіусомъ кривизны съ осями координатъ; тогда проекціи полнаго ускоренія представятся слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \cos a + \frac{v^2}{\varrho} \cos \lambda,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \cos b + \frac{v^2}{\varrho} \cos \mu,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \cos c + \frac{v^2}{\varrho} \cos \nu.$$

Уравненія (113) перепишутся теперь такъ:

$$Q \cos \alpha = X - m \frac{dv}{dt} \cos a - m \frac{v^2}{\varrho} \cos \lambda,$$

$$Q \cos \beta = Y - m \frac{dv}{dt} \cos b - m \frac{v^2}{\varrho} \cos \mu,$$

$$Q \cos \gamma = Z - m \frac{dv}{dt} \cos c - m \frac{v^2}{\varrho} \cos \nu.$$

Помножимъ эти три уравненія соотвѣтственно на $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, и сложимъ. Замѣчаемъ, что сумма квадратовъ косинусовъ, получающаяся при Q, равна 1, и подставляемъ вмѣсто X, Y, Z выраженія:

$$P \frac{X}{P},\ P \frac{Y}{P},\ P \frac{Z}{P},$$

послѣ чего P выйдетъ за скобку.

h

Получаемъ:

$$Q = P \left(\frac{X}{P} \cos \alpha + \frac{Y}{P} \cos \beta + \frac{Z}{P} \cos \gamma \right) -$$

$$- m \frac{dv}{dt} (\cos \alpha \cos a + \cos \beta \cos b + \cos \gamma \cos c) -$$

$$- m \frac{v^2}{\varrho} (\cos \lambda \cos \alpha + \cos \mu \cos \beta + \cos \nu \cos \gamma).$$

Выраженіе въ скобкахъ при P равно $\cos \varphi$, гдѣ φ есть уголъ между направленіемъ силы и нормалью; выраженіе въ скобкахъ при $m \frac{dv}{dt}$ равно косинусу угла между нормалью и касательной, т.-е. нулю, выраженіе въ скобкахъ при $m \frac{v^2}{\varrho}$ равно $\cos \Theta$, гдѣ Θ есть уголъ, образуемый радіусомъ кривизны, направленнымъ къ центру кривизны, съ нормалью (замѣтимъ, что радіусъ кривизны траекторіи, вообще говоря, не совпадаетъ съ направленіемъ нормали къ поверхности, на которой лежитъ траекторія). Теперь наше уравненіе принимаетъ видъ:

$$Q = P\ cos\,\varphi - m\frac{v^2}{\varrho}\ cos\,\Theta.$$

Этой формулѣ можно дать видъ: . . . . . . (114)

$$Q = P\ cos\,\varphi + m\frac{v^2}{\varrho}\ cos\,(\pi - \Theta)$$

т.-е. давленіе, развиваемое матеріальной точкой при движеніи ея по поверхности, направлено по нормали къ поверхности и равно суммѣ проекцій на эту нормаль данной силы P и центробѣжной силы инерціи $\frac{mv^2}{\varrho}$.

Возьмемъ для примѣра слѣдующій случай движенія: Матеріальная точка движется подъ дѣйствіемъ силы тяжести по поверхности шара, выходя изъ самой верхней его точки съ начальною скоростью w. Опредѣлить силу давленія матеріальной точки на эту поверхность и то мѣсто, гдѣ матеріальная точка соскочитъ съ шара.

Фиг. 48.

Пусть имѣемъ шаръ радіуса a и матеріальную точку M массы m (фиг. 48). Возьмемъ начало прямоугольныхъ осей координатъ въ центрѣ шара и направимъ ось z вертикально вверхъ, а ось x такъ, чтобы начальная скорость w матеріальной точки лежала въ плоскости xz.

Уравненіе шара относительно его центра пишется такъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Компоненты силы тяжести, подъ дѣйствіемъ которой движется точка M, въ нашемъ случаѣ напишутся такъ:

$$X = 0,\ \ Y = 0,\ \ Z = -mg.$$

Траекторіей движенія будетъ меридіанъ AB въ вертикальной плоскости xz. Опредѣлимъ силу давленія точки на поверхность шара. По ур-ію (114) имѣемъ:

$$Q = P\,cos\,(P, n) - \frac{mv^2}{\varrho}\ cos\,(\varrho, n).$$

Для нашего же случая:

$$P = mg;$$

$$cos\,(P, n) = \frac{z}{a};$$

$$\varrho = a;$$

$$cos\,(\varrho, n) = 1;$$

поэтому:

$$Q = mg\frac{z}{a} - \frac{mv^2}{a} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (114')$$

Опредѣлимъ v^2 по теоремѣ живыхъ силъ; для этого, принимая во вниманіе, что сила тяжести имѣетъ силовую функцію, воспользуемся уравненіемъ (59):

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U - U_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (59)$$

Въ нашемъ случаѣ

$$U = -mgz,$$

$$U_0 = -mga,$$

$$v_0 = w;$$

такъ что (59) приметъ видъ:

$$mv^2 = mw^2 + 2mg(a - z).$$

Теперь уравненіе (114′) перепишется такъ:

$$Q = mg\frac{z}{a} - \frac{1}{a}\left[mw^2 + 2mg(a - z)\right],$$

или

$$Q = m\left(\frac{3gz}{a} - 2g - \frac{w^2}{a}\right).$$

Такова сила давленія матеріальной точки на шарѣ. Въ тотъ моментъ, когда это давленіе обратится въ нуль, матеріальная точка соскочитъ съ шара и будетъ двигаться, какъ свободная, по параболѣ. Координата z, характеризующая мѣсто, гдѣ точка соскочитъ съ шара, опредѣлится изъ уравненія:

$$Q = 0,$$

т.-е. изъ ур-ія:

$$m\left(\frac{3gz}{a} - 2g - \frac{w^2}{a}\right) = 0,$$

откуда:

$$z = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}\cdot\frac{w^2}{g}.$$

Если начальная скорость очень мала, такъ что членомъ $\frac{w^2}{2g}$ можно будетъ принебречь, то получимъ, что $z = \frac{2}{3}a$, т.-е. матеріальная точка соскочитъ съ шара на высотѣ $\frac{2}{3}$ радіуса шара, считая отъ горизонтальной плоскости, проходящей черезъ центръ.

14 **§ 36. Математическій маятникъ.** Математическимъ маятникомъ называется тяжелая матеріальная точка, движущаяся по нѣкоторой данной кривой въ вертикальной плоскости. Будучи все время подъ дѣйствіемъ силы тяжести, маятникъ въ нижней точкѣ кривой находится въ устойчивомъ равновѣсіи; выведенный изъ этого положенія и предоставленный силѣ тяжести, маятникъ получаетъ колебательное движеніе. Если нѣтъ никакихъ силъ, сопротивляющихся его движенію, то движеніе это продолжается безконечно. Изслѣдуемъ движеніе маятника.

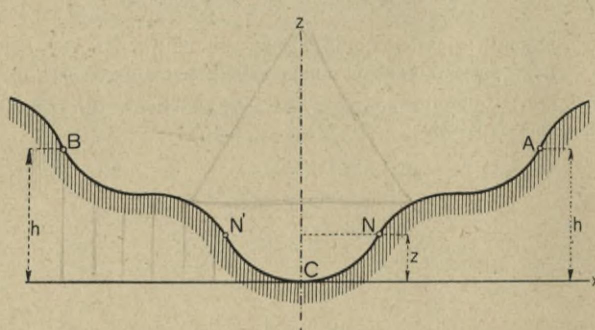
Предположимъ, что выведенный изъ положенія равновѣсія C (фиг. 49) маятникъ пущенъ въ точкѣ A безъ всякой начальной скорости. Пусть кривая ACB, по которой онъ движется, симметрична относительно вертикальной оси **Cz**. Примемъ за прямоугольныя оси координатъ прямую **Cx**, касательную къ **ACB** въ точкѣ **C**, и перпендикуляръ къ ней **Cz**. Координата z начальнаго положенія маятника въ точкѣ **A** пусть равняется h, а дуга **AC** равняется s_0. Будемъ опредѣлять положеніе маятника на кривой не координатами x и z, а дугою s, дающей разстояніе его отъ точки **C**. Условимся считать направленіе дуги s отъ **C** къ **A** положительнымъ.

Для вывода формулы скорости маятника въ какой-нибудь промежуточной точкѣ **N** воспользуемся теоремой живыхъ силъ въ формѣ (59):

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U - U_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (59)$$

Въ данномъ случаѣ v_0 равно нулю, а величины U и U_0 суть значенія силовой функціи въ точкахъ **N** и **A**. Для силы тяжести силовая функція имѣетъ видъ $(-mgz)$. Слѣдовательно:

$$U = -mgz \text{ (для точки } N\text{)},$$
$$U_0 = -mgh \text{ (для точки } A\text{)}.$$



Фиг. 49.

Приведенное уравненіе (59) въ нашемъ случаѣ напишется такъ:

$$\frac{mv^2}{2} = -mgz + mgh = mg(h - z),$$

откуда:

$$v = \pm\sqrt{2g(h-z)}.$$

Если въ точкѣ **N** маятникъ движется отъ **A** къ **C**, то беремъ v со знакомъ минусъ, ибо дугу s считаемъ положительной отъ **C** къ **A**, и тогда:

$$v_N = -\sqrt{2g(h-z)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (115)$$

Наибольшее значеніе скорость, очевидно, будетъ имѣть при $z = 0$, т.-е. въ точкѣ **C**, здѣсь

$$v_C = -\sqrt{2gh}.$$

По этимъ даннымъ легко опредѣлить ту точку B, до которой поднимется маятникъ, выйдя далѣе изъ C со скоростью v_C. Очевидно, что въ этой точкѣ скорость его v_B равна нулю. Обозначимъ ординату искомой точки B черезъ z'. Тогда для положеній маятника въ C и B можемъ написать ур-іе живыхъ силъ:

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = U_C - U_B.$$

Имѣемъ далѣе: $v_C = \sqrt{2gh}$, такъ что $\frac{mv_C^2}{2} = \frac{m \cdot 2gh}{2} = mgh$; $v_B = 0$ (по условію); $U_C = 0$, такъ какъ $U = -mgz$, а для C, $z_C = 0$; $U_B = -mgz'$. Подставляя полученныя значенія въ вышенаписанное ур-іе, получимъ:

$$mgh = mgz',$$

такъ что

$$z' = h,$$

т.-е. точка B симметрична съ точкой A, а поэтому

$$\smile CA = \smile CB = s_0.$$

Зная теперь скорость во всякой точкѣ пути, легко опредѣлить связь между временемъ и пройденнымъ путемъ. Подставляя $\frac{ds}{dt}$ вмѣсто v въ формулу (115), получимъ:

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(h-z)}}.$$

Интегрированіе даетъ:

$$t = -\int^s \frac{ds}{\sqrt{2g(h-z)}} + C.$$

При $t = 0$, $s = s_0$; слѣдовательно:

$$0 = -\int^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{2g(h-z)}} + C.$$

Вычитая изъ перваго уравненія второе, получимъ:

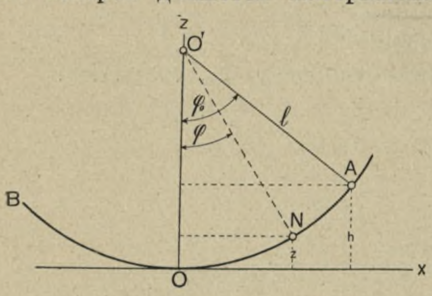
$$t = \int_s^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{2g(h-z)}}.$$

Называя время, соотвѣтствующее перемѣщенію точки изъ *A* въ *B*, *періодомъ полнаго колебанія* T, имѣемъ изъ предыдущей формулы для половины періода ур-іе:

$$\frac{T}{2}=\int_0^{s_0}\frac{ds}{\sqrt{2g(h-z)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (116)$$

Это есть общая формула времени колебанія всякаго математическаго маятника.

Разсмотримъ случай круговаго маятника. Пусть радіусъ окружности, по которой движется матеріальная точка, есть l (фиг. 49′), а уголъ размаха, т.-е. уголъ наибольшаго отклоненія отъ вертикали, равенъ φ_0. Въ случаѣ круга удобнѣе дугу s замѣнить черезъ уголъ отклоненія φ. Изъ чертежа видно, что:



Фиг. 49′.

$$s=l\varphi,$$
$$ds=l\,d\varphi,$$
$$z=l-l\cos\varphi,$$
$$h=l-l\cos\varphi_0.$$

Предѣламъ s_0 и 0 будутъ соотвѣтствовать предѣлы φ_0 и 0. Формула (116) послѣ подстановокъ и соотвѣтствующихъ упрощеній приметъ видъ:

$$\frac{T}{2}=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\varphi_0)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (116')$$

Вычислимъ приближенную величину этого интеграла, достаточно точную для малыхъ угловъ отклоненія. Разложимъ $\cos\varphi$ и $\cos\varphi_0$ въ рядъ (по строкѣ Маклорена):

$$\cos\varphi=1-\frac{\varphi^2}{1.2}+\frac{\varphi^4}{4!}-\frac{\varphi^6}{6!}+\ldots.$$

$$\cos\varphi_0=1-\frac{\varphi_0^{\,2}}{1.2}+\frac{\varphi_0^{\,4}}{4!}-\frac{\varphi_0^{\,6}}{6!}+\ldots.$$

Составимъ разность этихъ строкъ, пренебрегая членами рядовъ выше второй степени; находимъ:

$$\cos\varphi-\cos\varphi_0=\frac{1}{2}\left(\varphi_0^{\,2}-\varphi^2\right).$$

Подставляя это выраженіе разностей въ формулу (116′), получимъ:

$$\frac{T}{2}=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^{\,2}-\varphi^2}}=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{\dfrac{d\varphi}{\varphi_0}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\varphi}{\varphi_0}\right)^2}}.$$

Интегрированіе даетъ

$$\frac{T}{2}=\sqrt{\frac{l}{g}}\Big|_{0}^{\varphi_0}\operatorname{arc}\sin\frac{\varphi}{\varphi_0}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,;$$

такъ что для періода полнаго колебанія имѣемъ:

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Это есть приближенная формула кругового маятника. Ею можно пользоваться, получая довольно точные результаты для случаевъ небольшихъ угловъ отклоненія, до 5^0.

Выведемъ, далѣе, точную формулу, для чего интегралъ формулы (116') приведемъ къ виду эллиптическаго интеграла перваго рода. Производимъ замѣну перемѣннаго φ перемѣннымъ Θ, для чего полагаемъ:

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\Theta\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(117)$$

что всегда возможно, ибо $\sin\frac{\varphi}{2}\leq\sin\frac{\varphi_0}{2}$, а потому $\sin\Theta\leq 1$.

Предѣлы интегрированія при новомъ перемѣнномъ Θ будутъ:

$$\left.\begin{array}{l}\text{при } \varphi=0,\quad \Theta=0\,;\\ \text{при } \varphi=\varphi_0,\quad \Theta=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(118)$$

Далѣе, опредѣляемъ всѣ функціи прежняго перемѣннаго черезъ новое перемѣнное. Дифференцируя (117), находимъ:

$$\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{d\varphi}{2}=\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\Theta\,d\Theta,$$

откуда:

$$d\varphi=\frac{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\Theta\,d\Theta}{\cos\frac{\varphi}{2}}\,.$$

Но

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,,$$

слѣдовательно,

$$d\varphi = \frac{2\, sin \frac{\varphi_0}{2} \cos\Theta\, d\Theta}{\sqrt{1 - sin^2 \frac{\varphi_0}{2} sin^2\Theta}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (119)$$

далѣе:

$$\cos\varphi_0 = 1 - 2\, sin^2 \frac{\varphi_0}{2};$$

$$\cos\varphi = 1 - 2\, sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1 - 2\, sin^2 \frac{\varphi_0}{2} sin^2\Theta.$$

Преобразуемъ теперь радикалъ формулы (116′); находимъ:

$$\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)} = \sqrt{2\left(1 - 2\, sin^2 \frac{\varphi_0}{2} sin^2\Theta - 1 + 2\, sin^2 \frac{\varphi_0}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{2 \,.\, 2 \,.\, sin^2 \frac{\varphi_0}{2} (1 - sin^2\Theta)} = 2\, sin \frac{\varphi_0}{2} \cos\Theta \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (120)$$

На основаніи соотношеній (118), (119) и (120), ур-іе (116′) можно переписать такъ:

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\, sin \frac{\varphi_0}{2} \cos\Theta\, d\Theta}{2\, sin \frac{\varphi_0}{2} \cos\Theta \,.\, \sqrt{1 - sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \,.\, sin^2\Theta}} =$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Theta}{\sqrt{1 - sin^2 \frac{\varphi_0}{2} sin^2\Theta}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (121)$$

Полученный интегралъ есть эллиптическій интегралъ перваго рода и обозначается, по Лежандру, черезъ $F\left(\frac{\pi}{2},\, sin \frac{\varphi_0}{2}\right)$. Дадимъ рядъ, выражающій этотъ интегралъ. Представимъ его въ видѣ

$$\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - sin^2 \frac{\varphi_0}{2} sin^2\Theta\right)^{-\frac{1}{2}} d\Theta$$

и развернемъ подынтегральную функцію въ рядъ по биному Ньютона:

$$\left[1 - sin^2 \frac{\varphi_0}{2} sin^2\Theta\right]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} sin^2 \frac{\varphi_0}{2} sin^2\Theta + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} sin^4 \frac{\varphi_0}{2} sin^4\Theta \; . \; . \quad (122)$$

Общій $(n+1)$-ый членъ этого ряда будетъ:

$$\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,.\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,.\,.\,.\,.\,2n}\,sin^{2n}\frac{\varphi_0}{2}\,sin^{2n}\theta,$$

такъ что общій членъ ряда въ выраженіи $\frac{T}{2}$ положимъ, членъ k, будетъ:

$$k=\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,.\,.\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,.\,.\,.\,.\,2n}\,sin^{2n}\frac{\varphi_0}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n}\theta\,d\theta.$$

Въ анализѣ было доказано, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n}\theta\,d\theta=\frac{1\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,.\,.\,.\,.\,2n}\cdot\frac{\pi}{2};$$

поэтому послѣ интегрированія общій членъ приметъ видъ:

$$k=\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,.\,.\,(2n-1)}{2\,.\,4\,6\,.\,.\,.\,.\,.\,2n}\right)^2\frac{\pi}{2}\,sin^{2n}\left(\frac{\varphi_0}{2}\right).$$

Что касается перваго члена ряда, то изъ выраженія общаго члена онъ не можетъ быть непосредственно опредѣленъ; но изъ равенствъ (121) и (122) легко видѣть, что первый членъ будетъ равенъ

$$\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Взявъ въ рядѣ за скобку $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ и умноживъ обѣ части уравненія (121) на 2, получимъ:

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 sin^2\frac{\varphi_0}{2}+\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 sin^4\frac{\varphi_0}{2}+\ldots\right].$$

Такова точная формула времени одного размаха кругового маятника. Рядъ, входящій въ эту формулу, быстро сходится. Ограничиваясь конечнымъ числомъ членовъ ряда, мы получимъ величину T всегда меньше дѣйствительной. Но для предѣльнаго случая, когда уголъ отклоненія маятника φ_0 равняется 180^0, мы получаемъ въ скобкахъ рядъ расходящійся, и величину T находимъ равною безконечности. Это соотвѣтствуетъ случаю неустойчиваго равновѣсія.

§ 37. Изохронный маятникъ. Изохронизмомъ маятника называется свойство, по которому время колебанія маятника не зависитъ отъ величины размаха. Свойствомъ изохронизма обладаетъ циклоидальный маятникъ, т.-е. маятникъ, матеріальная точка котораго движется по циклоидѣ. Для этой кривой между длиной дуги s и координатою z существуетъ соотношеніе:

$$s=\sqrt{8az},$$

гдѣ a есть радіусъ круга, производящаго циклоиду.

Отсюда

$$z=\frac{s^2}{8a}.$$

При $z=h$, $s=s_0$ и, слѣдовательно,

$$h=\frac{s_0{}^2}{8a}.$$

Подставивъ эти величины въ основную формулу періода колебанія маятника (116), найдемъ:

$$\frac{T}{2}=\int_0^{s_0}\frac{ds}{\sqrt{2g\left(\frac{s_0{}^2-s^2}{8a}\right)}}=\sqrt{\frac{4a}{g}}\int_0^{s_0}\frac{\frac{ds}{s_0}}{\sqrt{1-\left(\frac{s}{s_0}\right)^2}}.$$

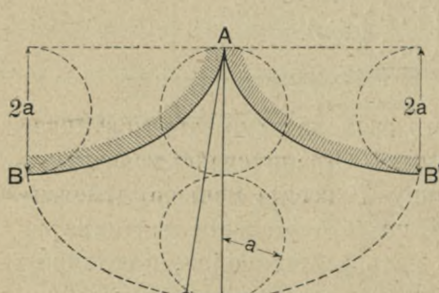
Интегрированіе даетъ:

$$\frac{T}{2}=\sqrt{\frac{4a}{g}}\Big|_0^{s_0} arc\,sin\,\frac{s}{s_0}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{4a}{g}};$$

или

$$T=\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

Полученная формула показываетъ, что *періодъ колебанія циклоидальнаго маятника не зависитъ отъ размаха, а зависитъ только отъ величины радіуса окружности, образующей циклоиду, по которой движется маятникъ.*



Фиг. 50.

Для осуществленія циклоидальнаго маятника Гюйгенсъ воспользовался разверткой циклоиды, которая, какъ показываетъ анализъ, оказывается также циклоидой, равной притомъ развертывающей.

Выполнивъ два профиля AB и AB' циклоиды (фиг. 50), соотвѣтствующихъ образующей окружности радіуса a, помѣстимъ ихъ около точки привѣса A маятника. Матеріальная точка M привѣшена на гибкой нити AM, длиной $4a$. При качанiи маятника въ плоскости направляющихъ циклоидъ AB и AB' нить AM будетъ ихъ огибать, и точка M будетъ двигаться по циклоидѣ BMB', соотвѣтствующей образующей окружности радiуса a. *Такой маятникъ изохроненъ.*

Вмѣсто гибкой нити Гюйгенсъ употреблялъ твердый стержень, верхняя часть котораго A была замѣнена гибкой пружиной; при этомъ маятникъ не могъ, конечно, занимать положенiй около B и B'.

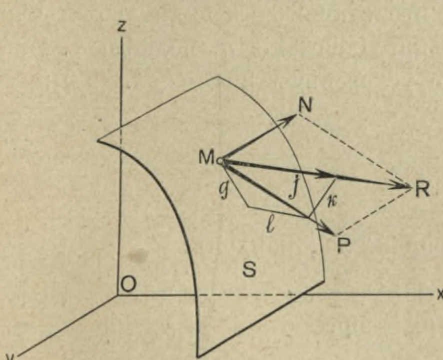
Вопросъ о движенiи маятника въ сопротивляющейся средѣ также вполнѣ разрѣшенъ. Оказывается, что сопротивленiе среды влiяетъ только на уменьшенiе амплитуды колебанiя (величины размаха), *вовсе не влiяя на время качанiя маятника;* колебанiе маятника въ этомъ случаѣ называется «погасающимъ». Этимъ погасанiемъ амплитуды пользуются для опредѣленiя сопротивленiя среды при малыхъ скоростяхъ.

Объ относительномъ движенiи матерiальной точки.

15 **§ 38. Динамическая теорема Корiолиса.** Задача объ относительномъ движенiи заключается въ нахожденiи связи между силами, дѣйствующими на точку, и ея относительнымъ движенiемъ.

Положимъ, что матерiальная точка M массы m движется по поверхности S подъ дѣйствiемъ силы P (фиг. 51). Поверхность S дана уравненiемъ

$$f(x,\ y,\ z) = 0$$



Фиг. 51.

относительно подвижныхъ осей координатъ x, y, z, законъ переноснаго движенiя которыхъ извѣстенъ. Сила P дана тоже относительно этихъ подвижныхъ координатъ. Требуется найти дифференцiальныя уравненiя относительнаго движенiя точки, т.-е. того движенiя, которое увидитъ наблюдатель, перемѣщающiйся вмѣстѣ съ подвижными осями координатъ x, y, z. Для наблюдателя это движенiе будетъ совершаться такъ, какъ будто кромѣ данной силы P дѣйствуютъ еще какiя-то силы; эти силы, зависящiя отъ передвиженiя самой системы координатъ, называются *Корiолисовыми силами.*

Механическiй эффектъ поверхности S замѣнимъ нормальной силой сопротивленiя N и будемъ разсматривать движенiе точки, какъ свободной, подъ дѣйствiемъ силъ P и N, дающихъ равнодѣйствующую R.

На основанiи § 11 напишемъ:

$$R = mj,$$

гдѣ j есть полное ускореніе точки въ ея абсолютномъ движеніи. Обозначая углы, образуемые силою R съ осями координатъ, черезъ α, β, γ, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} R\cos\alpha &= mj\cos\alpha, \\ R\cos\beta &= mj\cos\beta, \\ R\cos\gamma &= mj\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (123')$$

Выраженія первыхъ частей равенствъ преобразуемъ на основаніи формулъ (109) движенія матеріальной точки по поверхности такъ:

$$\begin{aligned} R\cos\alpha &= X + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}, \\ R\cos\beta &= Y + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}, \\ R\cos\gamma &= Z + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned}$$

А для преобразованія вторыхъ частей равенствъ полное ускореніе j сложнаго движенія по теоремѣ Коріолиса представимъ въ видѣ геометрической суммы полнаго ускоренія относительнаго движенія g, полнаго ускоренія переноснаго движенія l и поворотнаго ускоренія k [см. форм. (22)]:

$$\overline{j} = \overline{g} + \overline{l} + \overline{k}.$$

Проектируя эти ускоренія на оси координатъ, найдемъ:

$$\begin{aligned} j\cos\alpha &= \text{пр}_x g + \text{пр}_x l + \text{пр}_x k, \\ j\cos\beta &= \text{пр}_y g + \text{пр}_y l + \text{пр}_y k, \\ j\cos\gamma &= \text{пр}_z g + \text{пр}_z l + \text{пр}_z k. \end{aligned}$$

Проекціи же полнаго ускоренія относительнаго движенія, g, на тѣ же оси будутъ:

$$\begin{aligned} \text{пр}_x g &= \frac{d^2x}{dt^2}, \\ \text{пр}_y g &= \frac{d^2y}{dt^2}, \\ \text{пр}_z g &= \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned}$$

Подставляя найденныя значенія въ уравненія (123′), получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} X+\dfrac{N}{\Delta}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}-m\ \text{пр}_x l-m\ \text{пр}_x k=m\dfrac{d^2x}{dt^2}, \\ Y+\dfrac{N}{\Delta}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}-m\ \text{пр}_y l-m\ \text{пр}_y k=m\dfrac{d^2y}{dt^2}, \\ Z+\dfrac{N}{\Delta}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial z}-m\ \text{пр}_z l-m\ \text{пр}_z k=m\dfrac{d^2z}{dt^2}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (123)$$

Это и суть *дифференціальныя уравненія относительнаго движенія точки.* Кромѣ непосредственно дѣйствующихъ силъ и силы сопротивленія связей, эти уравненія содержатъ еще двѣ другія силы, а именно: $(-ml)$, силу инерціи переноснаго движенія, и $(-mk)$, поворотную силу инерціи.

Эти силы носятъ названіе силъ Коріолиса и направлены въ сторону, противоположную ускореніямъ l и k.

Отсюда вытекаетъ динамическая теорема Коріолиса: *въ относительномъ движеніи къ дѣйствующимъ силамъ надо прибавить силу инерціи, происходящую отъ ускоренія переноснаго движенія, и другую силу инерціи, происходящую отъ поворотнаго ускоренія, а затѣмъ разсматривать движеніе какъ абсолютное.*

Добавочныхъ силъ не будетъ, если оси координатъ передвигаются въ пространствѣ поступательно, прямолинейно и равномѣрно, такъ какъ при этомъ условіи переносное и поворотное ускоренія равны нулю. Въ этомъ случаѣ относительное движеніе подъ дѣйствіемъ данной силы будетъ происходить точно такъ же, какъ если бы оси координатъ находились въ покоѣ.

Въ случаѣ поступательнаго движенія осей остается только одна сила Коріолиса,— сила инерціи отъ переноснаго движенія. Точно также при разсмотрѣніи относительнаго покоя надо къ дѣйствующимъ силамъ прибавить только одну силу Коріолиса,—силу инерціи отъ переноснаго движенія.

На основаніи теоремы Коріолиса выясняется, между прочимъ, почему при движеніи тѣлъ на земной поверхности происходитъ отклоненіе отъ того направленія, которое соотвѣтствовало бы силамъ, дѣйствующимъ на тѣло. Это отклоненіе обусловливается вращеніемъ земли около ея оси.

Какъ мы видѣли, эффектъ, получающійся вслѣдствіе движенія осей координатъ (относительно которыхъ наблюдается движеніе), можетъ быть разсматриваемъ, какъ результатъ дѣйствія нѣкоторыхъ воображаемыхъ силъ,—именно, Коріолисовыхъ силъ инерціи. Добавленіе этихъ фиктивныхъ силъ имѣетъ ту выгоду, что при этомъ мы можемъ удобно изслѣдовать наблюдаемое нами относительное движеніе, такъ какъ, по теоремѣ Коріолиса, послѣ прибавленія этихъ силъ движеніе надо разсматривать, какъ абсолютное. Употребляя этотъ методъ, мы заключаемъ, что упомянутыя отклоненія въ движеніи на земной поверхности происходятъ вслѣдствіе силы инерціи поворотнаго ускоренія.

Для движенія матеріальной точки, находящейся на широтѣ φ, по земному меридіану со скоростью v, поворотное ускореніе имѣетъ значеніе [форм. (23)]:

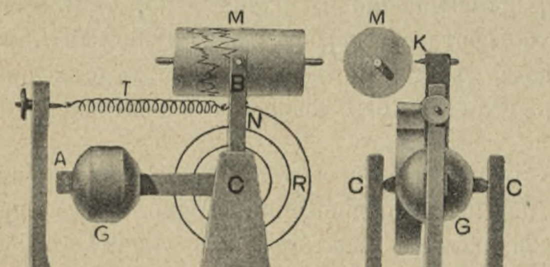
$$k = 2\omega v \sin\varphi,$$

гдѣ ω — угловая скорость вращенія земли; а, значитъ, поворотная сила инерціи выразится черезъ

$$mk = 2\omega mv \sin\varphi.$$

Направлена же эта сила инерціи перпендикулярно къ скорости и въ такую сторону, что всякое движеніе *на сѣверномъ* полушаріи получаетъ отклоненіе *вправо*, а *на южномъ — влѣво*.

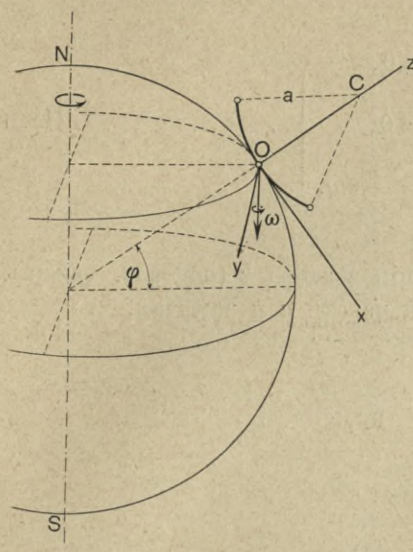
Иллюстрируемъ статью объ относительномъ движеніи слѣдующимъ примѣромъ, имѣющимъ не только теоретическій интересъ, но и практическое примѣненіе. Это приборъ, изобрѣтенный японскимъ профессоромъ Мильномъ для изслѣдованія колебанія желѣзнодорожныхъ поѣздовъ и называемый *сейсмометромъ*. Въ основу его положено существованіе силы инерціи отъ ускоренія влеченія при относительномъ движеніи тѣла. Сейсмометръ, смотря по роду колебаній, воспринимаемыхъ имъ, устраивается весьма разнообразно. Разсмотримъ типъ сейсмометровъ, служащихъ для измѣренія вертикальныхъ перемѣщеній, испытываемыхъ поѣздомъ вслѣдствіе неоднородности строенія верхняго пути и неравномѣрности и непрямолинейности хода поѣзда.



Фиг. 52.

Сейсмометры эти имѣютъ такое устройство (фиг. 52). Ломаный прямоугольный рычагъ ACB посаженъ свободно на ось C; на горизонтальномъ плечѣ AC онъ несетъ массу G; къ вертикальному плечу его, въ точкѣ N, прикрѣпленъ конецъ пружины R, другой конецъ которой скрѣпленъ со стойкой S. Рядомъ съ точкой N прикрѣплена къ рычагу другая пружина T, оттягивающая его въ сторону, обратную дѣйствію пружины R. Допустимъ теперь, что ось C опускается быстро внизъ; тогда масса G, благодаря проявляющейся силѣ инерціи, стремясь сохранить свое первоначальное положеніе, приподымаетъ вверхъ конецъ A рычага ACB и заставляетъ конецъ B отклониться вправо отъ первоначальнаго положенія. Это отклоненіе зарегистровывается штифтомъ K на барабанѣ M, вращаемомъ часовымъ механизмомъ, а пружина T, вмѣстѣ съ пружиной R, заставляетъ затѣмъ рычагъ ACB занять прежнее положеніе послѣ совершоннаго имъ колебанія. Поставивъ такой приборъ въ движущійся поѣздъ, мы получимъ на барабанѣ діаграмму, дающую наглядное представленіе о зыбкости полотна и его уклонахъ.

§ 39. Задача Фуко о движенiи маятника. Пусть на поверхности земли, въ какой-нибудь ея точкѣ O, находящейся на широтѣ φ, производится опытъ съ маятникомъ (фиг. 53). Выведемъ аналитически законъ движенiя этого маятника относительно подвижныхъ (вслѣдствiе вращенiя земли около ея оси) осей координатъ x, y, z, изъ которыхъ ось Oz направлена по вертикали отъ точки O вверхъ, ось Ox — по меридiану на югъ, и ось Oy — по параллельному кругу на западъ. Наблюдатель, находящiйся на поверхности земли, будетъ видѣть именно это относительное движенiе.



Фиг. 53.

Обозначивъ длину маятника черезъ a, напишемъ уравненiе поверхности, на которой должна оставаться матерiальная точка:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - a)^2 - a^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (124)$$

Это будетъ, очевидно, поверхность шара съ центромъ въ точкѣ C и радiусомъ $r = a$.

Напишемъ выведенныя выше [см. форм. (123)] дифференцiальныя уравненiя относительнаго движенiя.

Обозначая проекцiи силы притяженiя земли на оси координатъ черезъ X, Y, Z, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} X - m\,\text{пр}_x l - m\,\text{пр}_x k + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} &= m\frac{d^2x}{dt^2}, \\ Y - m\,\text{пр}_y l - m\,\text{пр}_y k + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} &= m\frac{d^2y}{dt^2}, \\ Z - m\,\text{пр}_z l - m\,\text{пр}_z k + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial z} &= m\frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (123)$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ ускоренiе переноснаго движенiя, вслѣдствiе р а в н о м ѣ р н о с т и в р а щ е н i я земли о к о л о ея о с и, сводится къ одному центростремительному. Слѣдовательно, силой инерцiи переноснаго движенiя будетъ сила центробѣжная. Но эта сила входитъ въ составъ силы тяжести mg, которая, собственно, и есть равнодѣйствующая силы земного притяженiя и центробѣжной силы.

Не зная величины X, мы знаемъ только, что

$$\left.\begin{aligned} X - m\,\text{пр}_x\,l &= \text{пр}_x\,mg = 0, \\ Y - m\,\text{пр}_y\,l &= \text{пр}_y\,mg = 0, \\ Z - m\,\text{пр}_z\,l &= \text{пр}_z\,mg = + mg. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (125)$$

Найдемъ теперь выраженія для проекціи вектора k (поворот. ускор.). Обозначая скорость относительнаго движенія черезъ u и замѣчая, что

$$\text{пр}_x\,u = \frac{dx}{dt}, \quad \text{пр}_y\,u = \frac{dy}{dt}, \quad \text{пр}_z\,u = \frac{dz}{dt},$$

имѣемъ по формулѣ (24):

$$\text{пр}_x\,k = 2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right),$$

$$\text{пр}_y\,k = 2\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right),$$

$$\text{пр}_z\,k = 2\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right).$$

Опредѣлимъ значенія входящихъ въ эти ур-ія факторовъ p, q и r (проекцій угловой скорости земли на оси координатъ). Въ кинематикѣ было показано, что всякое движеніе можно разсматривать какъ поступательное со скоростью нѣкоторой точки тѣла и какъ вращательное около нѣкоторой оси, проходящей черезъ эту точку. Поэтому движеніе нашихъ осей координатъ съ землею мы можемъ разсматривать какъ поступательное со скоростью точки O и вращательное около оси, проходящей черезъ эту точку и параллельной оси земли. Скорость вращательнаго движенія около этой оси будетъ равна угловой скорости вращенія земли ω. Векторъ ω отложимъ на чертежѣ отъ точки O внизъ, потому что при взглядѣ съ юга на сѣверъ вращеніе земли представляется совершающимся по стрѣлкѣ часовъ. Зная ω, найдемъ проекціи ея на оси координатъ, т.-е. p, q, r:

$$p = \omega\cos(\omega,\, x) = \omega\cos\varphi,$$

$$q = \omega\cos(\omega,\, y) = \omega\cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$r = \omega\cos(\omega,\, z) = \omega\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\,\omega\sin\varphi.$$

Подставляя эти значенія въ уравненія для проекцій вектора k, находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
\text{пр}_x k &= 2\omega \sin\varphi \frac{dy}{dt}, \\
\text{пр}_y k &= -2\omega\left(\sin\varphi \frac{dx}{dt} + \cos\varphi \frac{dz}{dt}\right), \\
\text{пр}_z k &= 2\omega \cos\varphi \frac{dy}{dt}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (126)$$

Преобразуемъ теперь выраженія вида $\frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}$, входящія въ формулу (123). Изъ уравненія поверхности движенія (124) находимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2(z-a).$$

Далѣе:

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4(z-a)^2} = 2a.$$

Слѣдовательно:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} &= N\frac{x}{a}, \\
\frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} &= N\frac{y}{a}, \\
\frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial f}{\partial z} &= N\frac{z-a}{a}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (127)$$

Дифференціальныя уравненія (123) на основаніи равенствъ (125), (126) и (127) перепишутся теперь такъ:

$$\left.\begin{aligned}
-2m\omega\sin\varphi\frac{dy}{dt} + N\frac{x}{a} &= m\frac{d^2x}{dt^2}, \\
2m\omega\sin\varphi\frac{dx}{dt} + 2m\omega\cos\varphi\frac{dz}{dt} + N\frac{y}{a} &= m\frac{d^2y}{dt^2}, \\
-mg - 2m\omega\cos\varphi\frac{dy}{dt} + N\frac{z-a}{a} &= m\frac{d^2z}{dt^2}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (128)$$

Полученныя уравненія представляютъ систему совмѣстныхъ дифференціальныхъ уравненій движенія съ постоянными коэффиціентами. Хотя интегрированіе ихъ можетъ быть доведено до конца совершенно точно, но при этомъ встрѣчаются усложненія, зависящія отъ такихъ величинъ, которыя на практикѣ очень мало вліяютъ на ходъ явленій и которыя поэтому, ради простоты результата, и представляется возможнымъ отбросить. Такъ величина угловой скорости земли ω весьма мала, а именно:

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \,.\, 60 \,.\, 60} = \frac{1}{13700}\,.$$

Очень мала также и величина скорости $\frac{dz}{dt}$ маятника по оси Oz, потому что въ опытѣ Фуко маятникъ берется весьма длинный и съ незначительнымъ размахомъ (всего нѣсколько минутъ),—поэтому шарикъ маятника движется почти горизонтально. По этимъ соображеніямъ членомъ $2m\,\omega\cos\varphi\frac{dz}{dt}$ второго уравненія можно пренебречь, упрощая тѣмъ самымъ систему уравненій (128).

Умноживъ первое изъ полученныхъ уравненій на y, а второе на x, вычитаемъ первое изъ второго; находимъ:

$$2m\,\omega\sin\varphi\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)=m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right),$$

откуда:

$$\omega\sin\varphi\frac{d}{dt}(x^2+y^2)=\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right).$$

Интегрируя, находимъ:

$$\omega\sin\varphi\,(x^2+y^2)=x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}+C\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (129)$$

Для опредѣленія произвольнаго постояннаго C перейдемъ къ полярнымъ координатамъ съ полюсомъ O, опредѣляющимъ положеніе проекціи маятника на плоскость xOy, отсчитывая при этомъ углы Θ радіуса вектора ϱ отъ оси Ox. Формулы перехода таковы (см. стр. 65):

$$x^2+y^2=\varrho^2,$$

$$\Theta = arc\,tg\,\frac{y}{x}\,.$$

Кромѣ того, при выводѣ теоремы площадей было показано (см. форм. 64′), что

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=\varrho^2\frac{d\Theta}{dt}\,.$$

Въ виду этого уравненіе (129) приметъ видъ:

$$\omega\sin\varphi\,.\,\varrho^2=\varrho^2\frac{d\Theta}{dt}+C.$$

Положимъ, что при началѣ движенія маятникъ находится въ *O*,—виситъ вертикально; дадимъ ему толчокъ. Въ такомъ случаѣ, въ начальный моментъ $t = 0$ и $\varrho = 0$, а слѣдовательно $C = 0$, и наше уравненіе приметъ видъ:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \sin \varphi \qquad (130)$$

Интегрированіе даетъ:

$$\theta = t\,\omega \sin \varphi + C_1.$$

При

$$t = 0, \quad \theta = \theta_0;$$

значитъ:

$$C_1 = \theta_0.$$

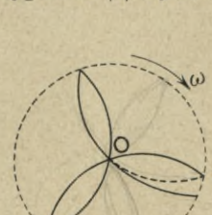
И окончательно:

$$\theta = \theta_0 + \omega t \sin \varphi.$$

Это уравненіе показываетъ, что плоскость качанія маятника будетъ постоянно отступать отъ востока на западъ; для точекъ *сѣвернаго* полушарія—*по* часовой стрѣлкѣ, а для точекъ *южнаго* полушарія—*противъ* часовой стрѣлки ($\sin\varphi$ для южнаго полушарія отрицателенъ). Уравненіе (130) даетъ угловую скорость этого вращенія плоскости качанія маятника, которая на полюсѣ, при $\varphi = 90^0$, равна скорости вращенія земли ω, а на экваторѣ, при $\varphi = 0^0$, равна нулю.

Опредѣляя C, мы предположили, что движеніе маятника начинается отъ точки *O*. Но это не соотвѣтствуетъ способу приведенія маятника въ движеніе, употребляемому на практикѣ. Обыкновенно для этого маятникъ выводятъ на нѣкоторый уголъ въ сторону, привязываютъ на нить и, подождавъ, пока маятникъ успокоится, пережигаютъ нить. Не получивъ никакихъ толчковъ, маятникъ начинаетъ колебаться, и можно доказать, что онъ, вслѣдствіе вращенія земли, при качаніи не будетъ проходить черезъ точку, которую занималъ при равновѣсіи, а будетъ описывать кривую двойной кривизны, проекція которой на горизонтальную плоскость будетъ имѣть видъ, приблизительно представленный на фигурѣ 54. Допущенію же, сдѣлан-

Фиг. 54.



Фиг. 55.

ному нами, соотвѣтствуетъ пусканіе маятника посредствомъ **центральнаго удара**, при положеніи его въ точкѣ *O*. При такомъ пусканіи маятника горизонтальная проекція его траекторіи будетъ имѣть приблизительно видъ фигуры 55. На указанныхъ чертежахъ кривизна траекторій значительно увеличена,—такія кривыя соотвѣтствовали бы гораздо большимъ угловымъ скоростямъ, чѣмъ угловая скорость земли. Формы этихъ траекторій очень наглядно воспроизводятся опытами съ маятникомъ, подвѣшеннымъ къ центробѣжной машинѣ.

Посмотримъ, не вліяетъ ли вращеніе земли на время качанія маятника.

Помноживъ дифференціальныя уравненія относительнаго движенія (128) соотвѣтственно на $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ и сложивъ ихъ, по упрощеніи, найдемъ

$$N\frac{x}{a}\cdot\frac{dx}{dt}+N\frac{y}{a}\cdot\frac{dy}{dt}+N\frac{z-a}{a}\cdot\frac{dz}{dt}-mg\frac{dz}{dt}=$$

$$=m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{dz}{dt}\right);$$

или

$$\frac{N}{a}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+(z-a)\frac{dz}{dt}\right)-mg\frac{dz}{dt}=\frac{m}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right].$$

На основаніи уравненія (124) скобка въ первой части полученнаго уравненія равна нулю, а прямая скобка во второй части равенства равна v^2, квадрату скорости въ относительномъ движеніи [форм. (1)]. Поэтому можемъ написать:

$$-g\frac{dz}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v^2).$$

Интегрируя, получаемъ:

$$v^2=C_2-2gz.$$

При $z=0$ маятникъ находится въ O. Обозначимъ квадратъ его скорости въ этотъ моментъ чрезъ $2gh$, гдѣ h есть нѣкоторая высота; найдемъ:

$$C_2=2gh.$$

Подставляя, получаемъ окончательно:

$$v^2=2g(h-z)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(131)$$

Такова скорость относительнаго движенія. Но эта относительная скорость слагается геометрически изъ двухъ скоростей: во-первыхъ, изъ скорости $\frac{ds}{dt}$ по дугѣ s, лежащей въ плоскости качанія маятника и, во-вторыхъ, изъ скорости, получающейся вслѣдствіе найденнаго вращенія этой плоскости, равной $\varrho\omega\sin\varphi$. Здѣсь угловая скорость вращенія плоскости (форм. 130) помножена на ϱ, гдѣ ϱ есть разстояніе движущейся точки отъ оси Oz. Эти составляющія скорости перпендикулярны между собой, значитъ:

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \varrho^2 \omega^2 sin^2 \varphi.$$

Членомъ $\varrho^2 \omega^2 sin^2 \varphi$ можно пренебречь, такъ какъ въ него входитъ множителемъ квадратъ очень малой величины ω. Слѣдовательно, уравненіе (131) даетъ:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g(h - z),$$

а это есть общая формула скорости маятника въ однородномъ полѣ съ напряженіемъ g (см. стр. 106). Такимъ образомъ, вращеніе земли вліяетъ на движеніе маятника постольку, поскольку оно вліяетъ на напряженіе тяжести.

124-147

СТАТИКА СИСТЕМЫ.

§ 40. О механической системѣ. *Механической системой* называется собраніе матеріальныхъ точекъ, связанныхъ между собой. Связи эти могутъ быть съ одной стороны *геометрическія*, происходящія отъ извѣстныхъ *кинематическихъ* условій, съ другой стороны *динамическія*, состоящія въ взаимодѣйствующихъ между матеріальными точками силахъ. Отъ нашего произвола зависитъ выдѣлить извѣстную группу матеріальныхъ точекъ въ отдѣльную механическую систему.

Существуютъ системы, не имѣющія никакихъ геометрическихъ связей; такія системы называются *динамическими;* таковы, напримѣръ, солнечная система, системы звѣздныхъ скопленій и т. д., въ которыхъ тѣла притягиваются другъ къ другу по закону Ньютона. Газъ такъ же обыкновенно характеризуютъ, какъ систему динамическую, точки которой отталкиваются другъ отъ друга. Если же въ системѣ есть какія-нибудь геометрическія связи, то такая система называется *геометрической;* таково, напримѣръ, твердое тѣло. Всякую систему можно разсматривать какъ динамическую, такъ какъ связи могутъ быть замѣнены силами.

Капельная жидкость есть также геометрическая система: мы можемъ произвольно перемѣщать ея части, придавая жидкой массѣ форму какого угодно сосуда, но объема каждаго элемента жидкости измѣнить не можемъ.

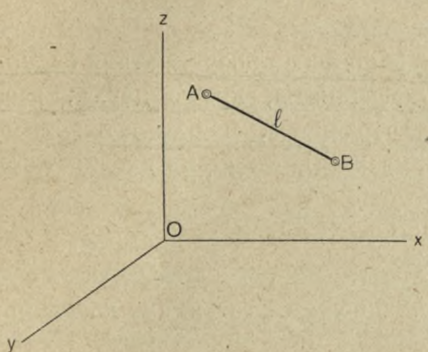
Силы, дѣйствующія на точки системы, и ея геометрическія связи раздѣляются на внутреннія и внѣшнія. *Внутренними* силами называются такія, которыя дѣйствуютъ между матеріальными точками, входящими въ составъ самой системы; *внѣшними*—такія, которыя дѣйствуютъ между посторонними матеріальными точками и точками системы. Такъ, напримѣръ, если примемъ за систему Сатурнъ съ его кольцами и спутниками, то дѣйствующая на эту систему сила тяготѣнія солнца и возмущающія вліянія планетъ будутъ внѣшними силами. Если же примемъ за систему солнце со всѣми вращающимися вокругъ него тѣлами, то силы, связующія систему Сатурна, и силы тяготѣнія солнца и планетъ,—всѣ онѣ будутъ силами внутренними.

Связи точно также называются *внутренними*, если связываютъ между собой точки самой системы, и *внѣшними*, если связываютъ точки системы съ неподвижными тѣлами или съ тѣлами, движущимися по заданному закону.

Если принять за систему жидкость и разсматривать ее налитою въ стаканъ, то условіе ея *несжимаемости* будетъ *внутренней геометрической* связью, а условіе, что она должна имѣть *форму* сосуда, будетъ *внѣшней геометрической* связью.

Если система имѣетъ однѣ внутреннія геометрическія связи, то она называется *свободной*. Свободная система характеризуется тѣмъ, что она можетъ получать тѣ же перемѣщенія, какъ и свободное твердое тѣло. Жидкая масса, вылитая въ пространство, будетъ свободнымъ тѣломъ, такъ какъ единственной связью въ этомъ случаѣ явится ея несжимаемость.

Геометрическія связи системы выражаются математически соотношеніями между координатами точекъ системы. Если, напримѣръ, система состоитъ изъ двухъ матеріальныхъ точекъ **A** съ координатами x, y, z и **B** съ координатами x', y', z' и связана тѣмъ условіемъ, что разстояніе l между точками не измѣняется (фиг. 56), то эта связь выразится такимъ уравненіемъ:



Фиг. 56.

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=l^2=const.$$

Такимъ образомъ, неизмѣняемость разстоянія двухъ точекъ системы даетъ намъ соотношеніе между $3.2=6$ координатами этихъ точекъ.

Практически всякая геометрическая связь осуществляется какими-нибудь кинематическими матеріальными средствами. Всякая геометрическая связь вполнѣ обусловливается соотношеніемъ между координатами точекъ системы.

И наоборотъ, всякая связь, выраженная соотношеніемъ координатъ точекъ, есть связь геометрическая.

Въ общемъ видѣ при одной связи, стѣсняющей n точекъ системы съ координатами (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), ... $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$, мы получимъ нѣкоторое соотношеніе между всѣми $3n$ координатами:

$$f(x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots \ldots x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})=0.$$

Такихъ соотношеній можетъ быть нѣсколько; тогда говорятъ, что система имѣетъ нѣсколько связей.

Самое большое число *независимыхъ между собою соотношеній*, выражающихъ связи подвижной системы изъ n матеріальныхъ точекъ, будетъ $(3n-1)$:

$$f_1=0,\ f_2=0,\ f_3=0, \ldots \ldots f_{3n-1}=0,$$

потому что, если бы мы имѣли $3n$ соотношеній, то всѣ $3n$ координатъ точекъ будутъ имѣть опредѣленныя значенія, и, слѣдовательно, *система будетъ неподвижна.*

Система изъ n точекъ, стѣсненная $(3n-1)$ уравненіями, называется *системой съ полнымъ числомъ условій*, или *системой съ одной степенью свободы.* Система съ полнымъ числомъ условій является простѣйшей въ смыслѣ опредѣленности ея движенія. Покажемъ, что въ такой системѣ каждая точка можетъ двигаться только по вполнѣ опредѣленному пути, и при этомъ перемѣщеніе одной точки по ея траекторіи вызываетъ опредѣленныя перемѣщенія всѣхъ другихъ точекъ по ихъ траекторіямъ.

Пусть даны $(3n-1)$ условій системы изъ n точекъ:

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ f_3 = 0, \ldots\ldots\ldots f_{3n-1} = 0.$$

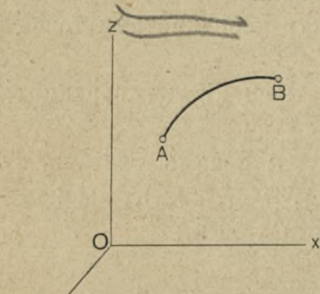
Остановивъ вниманіе на одной точкѣ системы съ координатами (x, y, z), исключимъ изъ $3n-1$ уравненій всѣ координаты, кромѣ двухъ; всего, такимъ образомъ, исключается $3n-2$ координаты, и останутся только координаты x и y. Тогда получимъ одно уравненіе съ двумя неизвѣстными:

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Производя исключеніе въ другомъ порядкѣ, сохраняя координаты x и z, найдемъ:

$$\varphi_1(x, z) = 0.$$

Эти два уравненія представляютъ намъ нѣкоторую, вполнѣ опредѣленную *линію AB* (фиг. 57), по которой можетъ двигаться одна точка системы, опредѣляемая координатами x, y, z. Точно также находимъ уравненія траекторій и всѣхъ остальныхъ точекъ. Итакъ, каждой точкѣ системы съ полнымъ числомъ условій предписанъ вполнѣ *опредѣленный путь.*



Фиг. 57.

Положимъ, что одна изъ точекъ системы, хотя бы первая (x, y, z), перемѣстилась по своей траекторіи изъ положенія A въ положеніе B (фиг. 56), и координата x ея новаго положенія извѣстна: $x = a$. Прибавляя это равенство къ имѣющимся уже $(3n-1)$ даннымъ уравненіямъ, опредѣляемъ всѣ $3n$ координатъ и, слѣдовательно, находимъ соотвѣтствующія новыя положенія всѣхъ точекъ системы. Такимъ образомъ, всякое перемѣщеніе системы съ полнымъ числомъ условій вполнѣ опредѣляется *однимъ параметромъ*,— поэтому такая система называется еще *системой съ одной степенью свободы*, или *съ однимъ свободнымъ перемѣщеніемъ.*

Примѣръ системы съ полнымъ числомъ условій мы имѣемъ въ нашихъ машинахъ, устроенныхъ такъ, что любая часть машины движется по вполнѣ опредѣленной траекторіи, и если матеріальную точку по этой траекторіи продвинуть, то всѣ остальныя матеріальныя точки дадутъ вполнѣ опредѣленныя перемѣщенія.

Если на систему изъ n точекъ наложено $(3n - 2)$ условій, то она называется *системой съ двумя степенями свободы*. Въ этомъ случаѣ всѣ точки движутся по предписаннымъ *поверхностямъ*, и всякое перемѣщеніе системы вполнѣ опредѣляется *двумя* параметрами. Дѣйствительно, изъ $(3n - 2)$ данныхъ уравненій мы можемъ исключить всѣ координаты, кромѣ трехъ (т.-е. всего $3n - 3$ координаты); тогда связь между оставшимися тремя координатами x, y, z выразится такъ:

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

Это и есть уравненіе поверхности, по которой можетъ перемѣщаться первая точка системы, такъ какъ ея координаты x, y, z постоянно должны удовлетворять этому уравненію. Производя исключенія въ другомъ порядкѣ, находимъ такимъ же способомъ уравненія поверхностей, по которымъ перемѣщаются остальныя точки.

Въ системѣ съ двумя степенями свободы всякое перемѣщеніе одной какой-либо точки по ея поверхности вызываетъ опредѣленныя перемѣщенія всѣхъ остальныхъ точекъ системы по ихъ поверхностямъ, потому что тогда мы знаемъ координаты x и y этой точки, а зная ихъ, можемъ присоединить ихъ къ даннымъ $(3n - 2)$ уравненіямъ, рѣшая же эти уравненія, найдемъ для точекъ системы всѣ $3n$ координатъ, выраженныхъ по этимъ двумъ координатамъ, т.-е. опредѣлимъ положеніе всей системы. Такая система и называется *системой съ двумя степенями свободы* потому, что *ея положеніе вполнѣ опредѣляютъ два параметра*.

Примѣромъ системы съ двумя степенями свободы можетъ служить механизмъ центробѣжнаго регулятора. Его массивные шары могутъ быть повернуты около вертикальной оси и, кромѣ того, отклонены отъ нея; при этомъ точки шаровъ перемѣщаются по опредѣленнымъ сферическимъ поверхностямъ, а точки муфты—по цилиндрамъ. *Положеніе этой системы* опредѣляется *двумя параметрами*: угломъ поворота и угломъ отклоненія.

Систему съ двумя степенями свободы называютъ еще *системой съ двумя свободными перемѣщеніями*. Нельзя понимать этого выраженія въ буквальномъ смыслѣ, такъ какъ во всякой системѣ съ двумя степенями свободы каждая точка можетъ свободно перемѣщаться по безконечно разнообразнымъ траекторіямъ, связаннымъ лишь тѣми условіями, что всѣ онѣ лежатъ на одной поверхности.

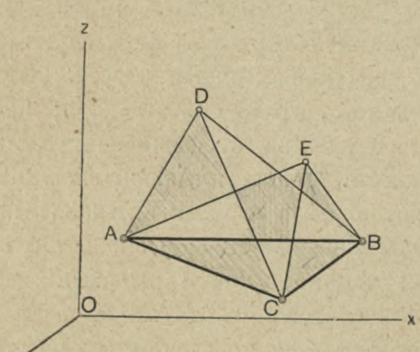
Какъ мы видѣли, всякое перемѣщеніе системы съ двумя степенями свободы опредѣляется только двумя параметрами, и измѣненію каждаго изъ этихъ параметровъ въ отдѣльности соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленный родъ перемѣщенія всей системы. Всякое же другое перемѣщеніе системы можно разсматривать, какъ результатъ совмѣщенія перемѣщеній этихъ двухъ родовъ. Приведенный примѣръ центробѣжнаго регулятора хорошо поясняетъ сказанное. Двумя параметрами служатъ: 1) уголъ поворота и

2) уголъ отклоненія. Каждому изъ этихъ параметровъ соотвѣтствуетъ опредѣленнаго рода перемѣщеніе: *a*) по параллельнымъ горизонтальнымъ кругамъ и *b*) по вертикальнымъ меридіональнымъ кругамъ. Только эти два рода перемѣщеній и возможны для системы регулятора. Поэтому всякое перемѣщеніе, возможное для регулятора, мы разсматриваемъ какъ сложеніе этихъ двухъ родовъ движеній. Замѣтимъ, что *возможнымъ перемѣщеніемъ* называется такое, которое не противорѣчитъ даннымъ наложеннымъ на систему условіямъ, выраженнымъ уравненіями.

Аналогично вышеизложенному разсматриваются еще системы съ тремя степенями свободы; въ нихъ положеніе всей системы опредѣляется тремя параметрами, и, слѣдовательно, всякая точка можетъ двигаться въ пространствѣ по какимъ угодно траекторіямъ. Но и въ этомъ случаѣ опредѣленному перемѣщенію одной изъ точекъ системы соотвѣтствуютъ вполнѣ опредѣленныя перемѣщенія всѣхъ другихъ.

Въ случаѣ системы съ четырьмя степенями свободы такое соотношеніе между движеніями точекъ уже не существуетъ. Перемѣщеніе одной матеріальной точки системы не опредѣляетъ въ этомъ случаѣ перемѣщеній остальныхъ точекъ, такъ какъ для опредѣленія координатъ всѣхъ точекъ не достаточно трехъ координатъ, опредѣляющихъ перемѣщенія одной изъ нихъ, а нуженъ еще четвертый параметръ. Ясно, что въ этомъ случаѣ перемѣщеніе всей системы вполнѣ опредѣляется перемѣщеніемъ одной изъ точекъ и измѣненіемъ еще какой-нибудь координаты.

Вообще можно разсматривать системы со многими степенями свободы. Если система изъ n точекъ имѣетъ $3n - i$ связей, которыми она стѣснена, то она называется *системой съ i степенями свободы*, и положеніе ея вполнѣ опредѣляется i параметрами, за которые можно взять, напримѣръ, i координатъ. Опредѣлимъ для примѣра, *сколько степеней свободы имѣетъ свободное твердое тѣло*.



Фиг. 58.

Чтобы найти сколькими условіями стѣснена свободная неизмѣняемая система, охарактеризуемъ ее такъ: изъ n точекъ этой системы возьмемъ три A, B и C, съ координатами (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), неизмѣнно связанныя въ треугольникъ линіями AB, BC, AC (фиг. 58). Такъ какъ отрѣзки $AB = l_0$, $BC = l_1$ и $AC = l_2$ постоянны, то имѣемъ соотношенія:

$$\left.\begin{aligned} (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2 = l_0{}^2, \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l_1{}^2, \\ (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2 = l_2{}^2. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (D)$$

Станемъ теперь съ этими точками *A*, *B* и *C* соединять неизмѣняемыми линіями точки *D*, *E*, . . . съ координатами (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4), . . . Чтобы показать, что *D* соединено неизмѣняемо съ *A*, *B*, *C*, надо написать для трехъ линій $AD = l_3$, $BD = l_4$ и $CD = l_5$ уравненія вида:

$$\left.\begin{aligned} &(x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 + (z_3 - z_0)^2 = l_3{}^2, \\ &(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = l_4{}^2, \\ &(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = l_5{}^2. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (E)$$

Такимъ образомъ, кромѣ трехъ основныхъ уравненій (D) для точекъ *A*, *B* и *C*, для каждой новой точки придется написать еще 3 уравненія типа (E); а осталось у насъ точекъ $(n-3)$. Слѣдовательно, мы получаемъ $3\,(n-3)$ уравненія. Прибавляя къ нимъ 3 уравненія (D), получимъ $[3 + 3(n-3)]$, т.-е. $(3\,n - 6)$ уравненій.

Это значитъ, что *свободное твердое тѣло имѣетъ шесть степеней свободы*, и движеніе его вполнѣ опредѣляется *шестью параметрами*.

Геометрическія связи, стѣсняющія свободу системы, могутъ быть двухъ родовъ: во-первыхъ, такія, отъ которыхъ система никоимъ образомъ освободиться не можетъ, и, во-вторыхъ, такія связи, отъ которыхъ она при нѣкоторыхъ перемѣщеніяхъ освобождается. Положимъ, напримѣръ, что двѣ матеріальныя точки соединены между собой неизмѣняемымъ стержнемъ; такая система двухъ точекъ характеризуется тѣмъ условіемъ, что разстояніе между ними не измѣняется, и условіе это выразится равенствомъ:

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 = l^2.$$

Если же мы представимъ себѣ, что двѣ матеріальныя точки связаны между собой нитью, то система наша будетъ стѣснена тѣмъ геометрическимъ условіемъ, что разстояніе между ними не можетъ быть больше даннаго. Математически эта связь выразится уже неравенствомъ вида

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 \leqq l^2.$$

Въ этомъ случаѣ система можетъ освобождаться отъ связи, состоящей въ постоянствѣ разстоянія, лишь въ одну сторону,—именно, въ сторону уменьшенія этого разстоянія.

Связи, удерживающія съ одной или двухъ сторонъ, имѣютъ мѣсто и для матеріальной точки. Таковъ, напримѣръ, случай, разсмотрѣнный въ концѣ § 31, когда матеріальная точка движется по поверхности эллипсоида; найдено два условія: для случая, когда точка можетъ сойти съ поверхности эллипсоида во внѣшнее пространство, и для случая возможности схода точки во внутреннее пространство полаго эллипсоида. Если же дано условіе, что точка не можетъ сойти съ поверхности эллипсоида ни въ ту, ни въ другую сторону, то надо сохранить одновременно оба рѣшенія для равновѣсія.

Для простоты изложенія мы будемъ разсматривать условія равновѣсія системъ, предполагая, что онѣ **не могутъ** освобождаться отъ наложенныхъ на нихъ связей. Если же дана задача съ освобождающимися связями, то, рѣшивъ ее въ предположеніи, что связи сохраняются, мы будемъ отбрасывать лишнія по механическому смыслу задачи положенія равновѣсія.

14 **§ 41. Теорема Лагранжа. Методъ возможныхъ перемѣщеній.** Переходя къ вопросу о равновѣсіи системы, замѣтимъ, что задача о немъ рѣшается съ помощью принципа возможныхъ перемѣщеній, установленнаго Лагранжемъ. Еще ранѣе принципъ этотъ былъ открытъ Галлилеемъ и формулированъ имъ въ видѣ извѣстнаго «золотого правила»,—*что теряется въ силѣ, то выигрывается въ скорости.*

Но Галлилей относилъ свое правило только къ машинамъ. Лагранжъ же показалъ, что этотъ принципъ охватываетъ собою всю статику всевозможныхъ системъ и всевозможные вопросы о движеніи.

Теорема Лагранжа даетъ вполнѣ общій и простой способъ рѣшенія задачи о равновѣсіи системы, стѣсненной какими-либо кинематическими условіями; она читается такъ:

Условіе, необходимое и достаточное для равновѣсія всякой системы, состоитъ въ томъ, чтобы при всѣхъ возможныхъ безконечно-малыхъ перемѣщеніяхъ системы при выходѣ ея изъ разсматриваемаго положенія равновѣсія сумма элементарныхъ работъ всѣхъ дѣйствующихъ на систему силъ была равна нулю.

Безконечно-малыя перемѣщенія точекъ мы будемъ представлять въ видѣ безконечно-малыхъ векторовъ, изображая ихъ черезъ δs, отмѣчая постановкой знака δ вмѣсто d перемѣщенія не дѣйствительно существующія, которыя разсматриваются въ динамикѣ, а воображаемыя перемѣщенія, съ помощью которыхъ можно перемѣстить точки системы изъ даннаго положенія въ другое, согласно съ ея связями.

Теорема Лагранжа заключаетъ въ себѣ могущественный способъ рѣшенія задачъ. Способъ этотъ гораздо шире, чѣмъ способъ элементарной статики, и является вполнѣ однообразнымъ для различныхъ системъ. Пользуясь этимъ способомъ, всѣхъ силъ сопротивленія связей принимать въ соображеніе не приходится, благодаря чему обходится сложность рѣшенія задачи.

Излагаемую теорему Лагранжъ доказалъ въ своемъ знаменитомъ сочиненіи «Mécanique analytique» въ 1788 г. и положилъ ее въ основу всего своего изложенія аналитической механики. Мы приведемъ здѣсь доказательство теоремы Лагранжа по способу Ампера, предпославъ ей предварительно слѣдующія три вспомогательныя леммы:

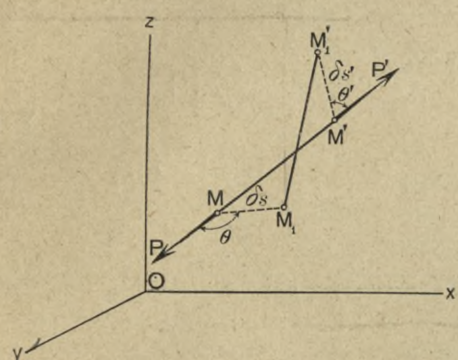
Лемма 1. *Если на двѣ неизмѣнно соединенныя матеріальныя точки дѣйствуютъ равныя и прямо противоположныя силы, то сумма элементарныхъ работъ этихъ силъ при всякомъ возможномъ перемѣщеніи этой системы равна нулю.*

Пусть матеріальныя точки M (x, y, z) и M' (x', y', z'), на которыя дѣйствуютъ двѣ равныя противоположныя силы P и P', находятся на постоянномъ между собой разстоянiи $MM' = l$ (фиг. 59); условiе это выражается уравненiемъ:

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = l^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (132)$$

Докажемъ, что при всякомъ возможномъ перемѣщенiи

$$\text{раб. } (P) + \text{раб. } (P') = 0.$$



Фиг. 59.

Для этого вообразимъ, что наша система получила безконечно-малое перемѣщенiе, и разсматриваемыя точки заняли положенiе M_1 и M_1', пройдя безконечно-малые элементы путей $MM_1 = \delta s$ и $M'M'_1 = \delta s'$. Координаты новыхъ положенiй этихъ точекъ будутъ теперь таковы:

$$[(x + \delta x),\ (y + \delta y),\ (z + \delta z)],$$

$$[(x' + \delta x'),\ (y' + \delta y'),\ (z' + \delta z')].$$

Подставивъ эти значенiя координатъ въ уравненiе (132), выражающее основное условiе системы, получимъ соотношенiе:

$$(x' - x + \delta x' - \delta x)^2 + (y' - y + \delta y' - \delta y)^2 + (z' - z + \delta z' - \delta z)^2 = l^2,$$

или

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 + (\delta x' - \delta x)^2 + (\delta y' - \delta y)^2 + (\delta z' - \delta z)^2 +$$
$$+ 2\,(x' - x)\,(\delta x' - \delta x) + 2\,(y' - y)\,(\delta y' - \delta y) + 2\,(z' - z)\,(\delta z' - \delta z) = l^2.$$

Принявъ во вниманiе уравненiе (132) и пренебрегая безконечно-малыми второго порядка, найдемъ:

$$2\,(x' - x)\,(\delta x' - \delta x) + 2\,(y' - y)\,(\delta y' - \delta y) + 2\,(z' - z)\,(\delta z' - \delta z) = 0 \;^{*)}.$$

*) Эту же формулу мы получили бы, продифференцировавъ уравненiе (132):

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = l^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (132)$$

При этомъ нужно замѣтить, что дифференцiалъ слѣдуетъ брать не по знаку d, а по знаку δ.

Подъ знакомъ d въ механикѣ разумѣютъ опредѣленное перемѣщенiе—приращенiе координатъ *дѣйствительно совершившееся* за опредѣленное время. Когда же рѣчь идетъ о разныхъ

Сокращаемъ все на 2 и пишемъ наше уравненіе нѣсколько въ иной формѣ:

$$(x'-x)\,\delta x' + (y'-y)\,\delta y' + (z'-z)\,\delta z +$$
$$+ (x-x')\,\delta x + (y-y')\,\delta y + (z-z')\,\delta z = 0.$$

Умножаемъ первые три члена уравненія на отношеніе $\frac{P'}{l}$, а послѣдующіе три—на равное ему отношеніе $\frac{P}{l}$. Затѣмъ первые три члена умножимъ и раздѣлимъ на $\delta s'$, а послѣдніе три—на δs. Тогда получимъ:

$$P'\,\delta s'\left[\frac{x'-x}{l}\cdot\frac{\delta x'}{\delta s'} + \frac{y'-y}{l}\cdot\frac{\delta y'}{\delta s'} + \frac{z'-z}{l}\cdot\frac{\delta z'}{\delta s'}\right] +$$
$$+ P\,\delta s\left[\frac{x-x'}{l}\cdot\frac{\delta x}{\delta s} + \frac{y-y'}{l}\cdot\frac{\delta y}{\delta s} + \frac{z-z'}{l}\cdot\frac{\delta z}{\delta s}\right] = 0.$$

Но:

$$\frac{x'-x}{l} = \cos(l, x), \qquad \frac{\delta x'}{\delta s'} = \cos(x, s');$$
$$\frac{y'-y}{l} = \cos(l, y), \qquad \frac{\delta y'}{\delta s'} = \cos(y, s');$$
$$\frac{z'-z}{l} = \cos(l, z), \qquad \frac{\delta z'}{\delta s'} = \cos(z, s').$$

Слѣдовательно сумма, стоящая въ первыхъ скобкахъ, равна:

$$\cos(l, x)\cos(x, s') + \cos(l, y)\cos(y, s') + \cos(l, z)\cos(z, s') = \cos(l, s') = \cos\Theta'.$$

Совершенно такъ же получимъ, что сумма, стоящая во вторыхъ скобкахъ, равна $\cos\Theta$.

Итакъ, выраженія въ первыхъ скобкахъ представляютъ косинусъ угла Θ', образуемый линіей **MM'** съ направленіями перемѣщенія $\delta s'$, а выраженія во вторыхъ—косинусъ угла Θ, образуемый линіей **M'M** съ направленіемъ δs. Замѣтимъ, что при отсчетѣ угла Θ' за положительное направленіе линіи **MM'** принято направленіе отъ **M** къ **M'**, при отсчетѣ же угла Θ положительное направленіе линіи **M'M** считаемъ обратно. Обусловливается это тѣмъ, что въ первыхъ прямыхъ скобкахъ стоятъ биномы типа $(x'-x)$, во вторыхъ же—типа $(x-x')$, а извѣстно, что при выраженіи проекціи

способахъ, которыми можно было бы систему привести въ движеніе, то, такъ называемое, *возможное приращеніе параметровъ* обозначаютъ буквой δ.

Итакъ, дифференцируемъ написанное уравненіе (132). Получаемъ:

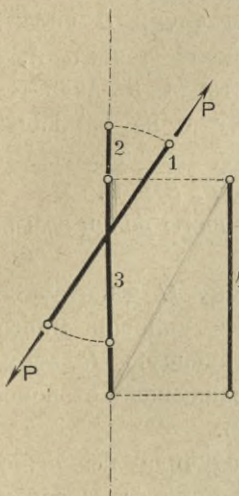
$$2(x'-x)(\delta x'-\delta x) + 2(y'-y)(\delta y'-\delta y) + 2(z'-z)(\delta z'-\delta z) = 0.$$

линіи изъ координаты конечной точки вычитается координата начальной. Такимъ образомъ, Θ и Θ' суть углы, образуемые направленіями силъ P и P' съ возможными перемѣщеніями δs, $\delta s'$.

Замѣняя выраженіе прямыхъ скобокъ косинусами найденныхъ угловъ, получимъ:

$$P' \delta s' \cos \Theta' + P \delta s \cos \Theta = 0,$$

т.-е. *сумма элементарныхъ работъ всякаго возможнаго перемѣщенія равна нулю*, что и требовалось доказать.



Фиг. 60.

Легко доказать эту лемму *геометрически*. Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ въ пространствѣ матеріальную палочку и попробуемъ дать ей другое положеніе (фиг. 60).

Привести ее изъ положенія *1* въ положеніе *4* можно такъ:

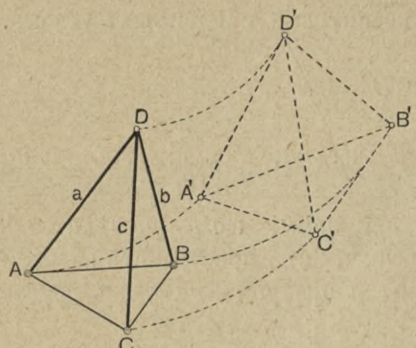
Сначала повернемъ ее въ положеніе *2*. Работы при этомъ нѣтъ, такъ какъ перемѣщеніе перпендикулярно къ направленію силы. Затѣмъ продвинемъ палочку вдоль ея линіи; при этомъ одна сила совершаетъ отрицательную работу, но другая противоположная сила совершаетъ работу положительную, такъ что сумма обѣихъ работъ равна *нулю*.

Наконецъ, сообщаемъ палочкѣ поступательное перемѣщеніе изъ положенія *3* въ положеніе *4*. Это перемѣщеніе, перпендикулярное къ направленію дѣйствія силъ, также не даетъ работы, и, такимъ образомъ лемма доказана.

Лемма 2. *Нисколько не стѣсняя возможныхъ перемѣщеній системы, можно всегда любыя три ея точки связать неизмѣнно съ четвертой свободной точкой.*

Положеніе, высказанное въ этой леммѣ, само по себѣ очевидно; наглядно можно его себѣ представить слѣдующей схемой. Вообразимъ, что три точки какой угодно системы соединены съ концами ножекъ треножника астролябіи; четвертой свободной точкой является конецъ шарнира, которымъ прикрѣпляется самая астролябія; ножки присоединены къ этому шарниру такъ, что способны вращаться во всѣхъ направленіяхъ. Ясно, что конечныя точки ножекъ могутъ двигаться всевозможными способами и присоединенная четвертая точка ничѣмъ не стѣснитъ эти движенія. Но такъ будетъ лишь до тѣхъ поръ, пока четвертая точка не займетъ положенія въ одной плоскости съ тремя другими; при такомъ ея положеніи прибавляется связь: три первыхъ точки уже не могутъ больше расходиться по направленію ножекъ. Однако присоединяемая точка всегда можетъ быть выбрана такъ, что при всѣхъ возможныхъ перемѣщеніяхъ системы она не будетъ стѣснять движенія; для этого ее надо взять достаточно удаленной отъ плоскости, проходящей чрезъ три данныя точки.

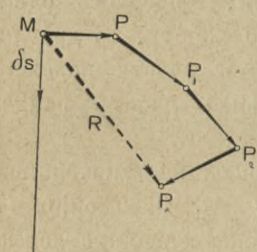
Докажемъ эту лемму математически. Къ тремъ точкамъ A, B и C (фиг. 61), входящимъ въ какую-либо систему, присоединимъ свободную точку D такъ, что разстоянія $AD = a$, $BD = b$ и $CD = c$ неизмѣнны. Положимъ, что точки A, B, C перемѣстились въ весьма близкія положенія A', B', C'. Тогда новое положеніе D' точки D опредѣлится какъ ближайшая изъ двухъ точекъ пересѣченія трехъ сферъ, описанныхъ изъ центровъ A', B', C' радіусами a, b, c.



Фиг. 61.

Такимъ способомъ оказывается, что траекторія и положенія точки D вполнѣ зависятъ отъ перемѣщеній точекъ A, B и C. Слѣдовательно, точка D является включенной въ систему и не вліяющей на ея перемѣщенія, такъ какъ точка D взята свободной и не вступающей въ одну плоскость съ A, B и C.

Лемма 3. *Элементарная работа равнодѣйствующей силы равна суммѣ элементарныхъ работъ составляющихъ.*



Фиг. 62.

Пусть на матеріальную точку M дѣйствуютъ силы P, P_1, P_2, ... Построивъ силовой многоугольникъ, находимъ равнодѣйствующую R этихъ силъ, которая представится замыкающей стороной многоугольника $MPP_1P_2P_3$ (фиг. 62).

Вообразимъ, что точка получила возможное перемѣщеніе и прошла элементъ пути δs. Проектируя силовой многоугольникъ на направленіе δs, находимъ:

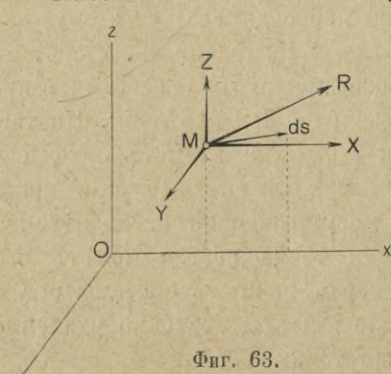
$$R \cos(R, \delta s) = \Sigma P \cos(P, \delta s).$$

Помножая обѣ части равенства на δs, находимъ:

$$R\, \delta s \cos(R, \delta s) = \Sigma P\, \delta s \cos(P, \delta s).$$

Равенство это и выражаетъ третью лемму.

Слѣдствіе. Разлагая силу R на составляющія X, Y, Z (фиг. 63), можемъ написать по леммѣ 3:



Фиг. 63.

$$R\, \delta s \cos(R, \delta s) = X \cos(x, \delta s)\, \delta s + Y \cos(y, \delta s)\, \delta s + Z \cos(z, \delta s)\, \delta s.$$

Но

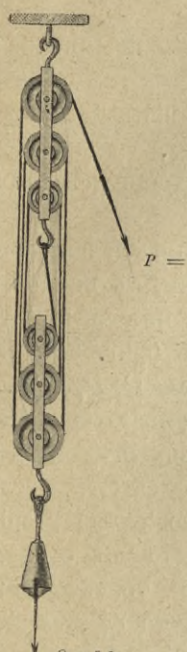
$$\cos(x, \delta s)\, \delta s = \delta x,$$
$$\cos(y, \delta s)\, \delta s = \delta y,$$
$$\cos(z, \delta s)\, \delta s = \delta z,$$

слѣдовательно,

$$R\, \delta s \cos(R, \delta s) = X\, \delta x + Y\, \delta y + Z\, \delta z.$$

Какъ уже было сказано, «золотое правило» было установлено Галлилеемъ; оно состоитъ въ томъ, что части машины, которыя находятся подъ эффектомъ малыхъ силъ, быстро двигаются, а части машины, находящіяся подъ дѣйствіемъ большихъ силъ, двигаются медленно.

Если мы представимъ себѣ полиспастъ изъ шести блоковъ (фиг. 64) и назовемъ перемѣщеніе руки, тянущей съ силой P за конецъ веревки, черезъ δs, а соотвѣтственное перемѣщеніе груза Q назовемъ черезъ δx, то увидимъ, что:



Фиг. 64.

$$\delta x = \frac{1}{6}\,\delta s,$$

т.-е. что *выигралось въ силѣ, то проигралось въ скорости.*

Предполагая, что $P = 1\ kg$, а $Q = 6\ kg$, составимъ работы силъ P и Q:

$$P\ \delta s = 1\,\delta s,$$

$$Q\ \delta x = 6\ \delta x = 6\ \frac{1}{6}\ \delta s = \delta s.$$

Значитъ,

$$P\ \delta s = Q\ \delta x,$$

или

$$P\ \delta s - Q\ \delta x = 0.$$

Но $(-Q\,\delta x)$ представляетъ взятую съ надлежащимъ знакомъ работу груза Q; слѣдовательно, «золотое правило» сводится къ тому, что сумма работъ, съ надлежащими знаками, всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на точки системы, равна нулю.

Сказанное относится къ машинѣ, представляющей систему съ одною степенью свободы; но теорема Лагранжа справедлива и для системъ со всякою степенью свободы. Попробуемъ, напримѣръ, выводить всевозможными способами изъ положенія равновѣсія свободное твердое тѣло.

Въ нашемъ распоряженіи имѣется шесть такихъ способовъ, характеризующихъ движеніе свободнаго тѣла: мы можемъ продвигать его вдоль трехъ осей координатъ и поворачивать около нихъ. Если силы находятся въ равновѣсіи, то для каждаго такого перемѣщенія найдемъ, что сумма элементарныхъ работъ равна нулю.

Можетъ, наконецъ, получить осуществленіе система, болѣе свободная, нежели свободное твердое тѣло, напримѣръ, *подобно измѣняемые многоугольники*, которые можно растягивать.

Во всѣхъ случаяхъ равенство суммы работъ всѣхъ силъ нулю для всякихъ возможныхъ перемѣщеній служитъ необходимымъ и достаточнымъ признакомъ равновѣсія системы. Признакъ этотъ и достаточенъ, такъ какъ при немъ равновѣсіе будетъ имѣть мѣсто, и необходимъ, такъ какъ если его нѣтъ, то нѣтъ и равновѣсія. Способы, которыми мы выводимъ систему изъ положенія равновѣсія, вполнѣ характеризуются параметрами, опредѣляющими положеніе системы; параметры могутъ быть какіе угодно, такъ что способъ Лагранжа отнюдь не связанъ непремѣнно Декартовыми координатами.

Приступимъ теперь къ доказательству теоремы Лагранжа по способу Ампера въ такой послѣдовательности:

1) сначала докажемъ теорему для системы съ полнымъ числомъ условій, состоящей изъ нечетнаго числа матеріальныхъ точекъ;

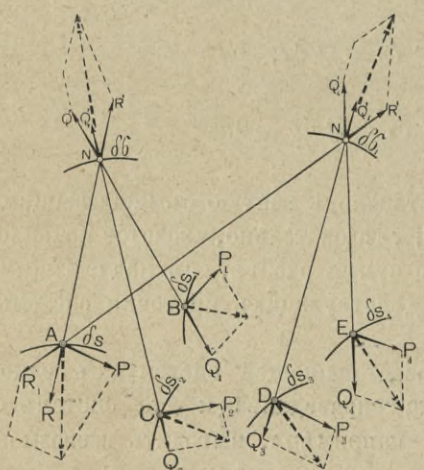
2) доказательство это распространяется на систему съ четнымъ числомъ точекъ;

3) затѣмъ доказывается необходимость условія равновѣсія Лагранжа для всякой системы, со сколькими угодно степенями свободы,

4) и, наконецъ, доказывается достаточность условія равновѣсія Лагранжа для всякой системы.

Такимъ образомъ теорема Лагранжа будетъ доказана во всей полнотѣ.

Докажемъ первое положеніе: пусть мы имѣемъ систему съ полнымъ числомъ условій (механизмъ любой машины), состоящую изъ нечетнаго числа,—положимъ, пяти матеріальныхъ точекъ **A**, **B**, **C**, **D**, **E** (фиг. 65). На эти точки дѣйствуютъ силы $P, P_1, P_2, \dots$ Каждая изъ этихъ точекъ можетъ перемѣщаться по своей, вполнѣ опредѣленной траекторіи. При этомъ, если точка A пройдетъ по своей траекторіи элементарный путь δs, то всѣ остальныя пройдутъ по своимъ траекторіямъ вполнѣ опредѣленные пути $\delta s_1, \delta s_2, \dots$



Фиг. 65.

Сгруппируемъ эти точки попарно: **B** съ **C**, **D** съ **E**, а одна изъ нихъ **A** пусть останется отдѣльно. Къ тремъ точкамъ **A**, **B** и **C** присоединимъ посредствомъ неизмѣняемыхъ стержней произвольную свободную точку **N**, а къ точкамъ **A**, **D** и **E** — подобную же точку N_1. Точки **N** и N_1, въ силу леммы второй, не стѣснятъ систему, но, включившись въ нее, получатъ при данномъ δs единственныя возможныя перемѣщенія $\delta\sigma$ и $\delta\sigma_1$. Къ концамъ неизмѣняемыхъ стержней **NB**, **NC**, N_1D и N_1E, по направленію ихъ, прибавимъ по парѣ равныхъ и противоположныхъ силъ Q, что не повліяетъ на равновѣсіе системы, такъ какъ въ этомъ состоитъ одно изъ основныхъ началъ статики. Эти силы $Q_1, Q_1', Q_2, Q_2', \dots$ выберемъ такъ, чтобы равнодѣйствующія силъ Q_1 и P_1, Q_2 и $P_2, \dots$, приложенныхъ въ **B**, **C**, **D** и **E**, были нормальны къ возможнымъ перемѣщеніямъ этихъ точекъ $\delta s_1, \delta s_2, \dots$ Точно также къ концамъ стержней **NA** и N_1A приложимъ равныя и противоположныя силы R и R', R_1 и R_1' такъ, чтобы равнодѣйствующія всѣхъ силъ при **N** и N_1 были нормальны къ $\delta\sigma$ и $\delta\sigma_1$.

Найденныя равнодѣйствующія, будучи нормальными къ δs_1, δs_2, ... $\delta\sigma$, $\delta\sigma_1$, при перемѣщеніи ихъ точекъ приложенія работы никакой не произведутъ; но элементарная работа равнодѣйствующей равна суммѣ элементарныхъ работъ составляющихъ (лемма 3), поэтому можемъ написать:

для точки *B*,

$$P_1\ \delta s_1 \cos(P_1, \delta s_1) + Q_1\ \delta s_1 \cos(Q_1, \delta s_1) = 0,$$

для точки *C*,

$$P_2\ \delta s_2 \cos(P_2, \delta s_2) + Q_2\ \delta s_2 \cos(Q_2, \delta s_2) = 0, \quad \ldots (133)$$

для точки *N*,

$$Q'_1\ \delta\sigma \cos(Q'_1, \delta\sigma) + Q'_2\ \delta\sigma \cos(Q'_2, \delta\sigma) + {} + R'\ \delta\sigma \cos(R', \delta\sigma) = 0.$$

Аналогичныя равенства можно написать также для точекъ *D*, *E*, и N_1.

Мы видимъ теперь, что на всѣ точки нашей системы, кромѣ точки *A*, дѣйствуютъ равнодѣйствующія силы, нормальныя къ кривымъ, по которымъ эти точки могутъ перемѣщаться. Всѣ эти силы могутъ быть отброшены, и у насъ остаются только силы, дѣйствующія на точку *A*. Такимъ образомъ задача упростилась. У насъ имѣется одна матеріальная точка, и, стало быть, для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы равнодѣйствующая всѣхъ силъ, приложенныхъ въ точкѣ *A*, была нормальна къ пути δs, т.-е. работа равнодѣйствующей этихъ силъ должна быть равна нулю, а слѣдовательно (лемма 3) и сумма работъ слагающихъ также должна быть равна нулю. Въ этомъ—вся мысль доказательства Ампера. Это условіе равновѣсія выразится уравненіемъ

$$P\ \delta s \cos(P, \delta s) + R\ \delta s \cos(R, \delta s) + R_1\ \delta s \cos(R_1, \delta s) = 0. \quad . \quad (134)$$

Равенство это можно преобразовать такъ, чтобы въ него входили только данныя силы. Для этого сложимъ всѣ равенства (133) и (134); получимъ:

$$\Sigma P\,\delta s \cos(P, \delta s) + [Q_1\ \delta s_1 \cos(Q_1, \delta s_1) + Q'_1\ \delta\sigma \cos(Q'_1, \delta\sigma)] + {} + \ldots + [R\,\delta s \cos(R, \delta s) + R'\ \delta s \cos(R', \delta\sigma)] + \ldots = 0.$$

Всѣ выраженія, заключенныя въ прямыя скобки, представляютъ суммы работъ равныхъ и противоположныхъ силъ, приложенныхъ къ концамъ неизмѣняемыхъ стержней и направленныхъ по этимъ стержнямъ; слѣдовательно, на основаніи доказаннаго (лемма 1), выраженія эти равны нулю, а потому равенство, выражающее необходимое и достаточное условіе равновѣсія, приметъ видъ:

$$\Sigma P\ \delta s \cos(P, \delta s) = 0.$$

Т.-е. *условіе, необходимое и достаточное для равновѣсія системы, состоитъ въ томъ, чтобы сумма элементарныхъ работъ всѣхъ дѣйствующихъ на систему силъ при возможномъ перемѣщеніи ея была равна нулю.* Это и есть теорема Лагранжа.

Второе положеніе: если система съ полнымъ числомъ условій состоитъ изъ четнаго числа матеріальныхъ точекъ, то мы всегда можемъ прибавить къ ней еще одну свободную матеріальную точку, къ которой приложена сила, равная нулю. Соединяя эту точку тремя стержнями съ тремя точками системы, мы, по леммѣ 2, не измѣнимъ условій равновѣсія. Система будетъ съ нечетнымъ числомъ точекъ,—а въ такомъ случаѣ имѣетъ мѣсто только что приведенное доказательство Ампера.

Третье положеніе: если система имѣетъ много степеней свободы, то изъ всякаго положенія ее можно вывести безконечно разнообразными путями. Докажемъ, что при равновѣсіи этой системы условіе Лагранжа будетъ удовлетворено для всякаго выхода системы изъ положенія равновѣсія.

Новаго доказательства здѣсь не нужно,—на основаніи простыхъ логическихъ разсужденій можно прійти къ выводу, что теорема Лагранжа и въ этомъ случаѣ должна имѣть мѣсто.

Итакъ, если равновѣсіе есть, то навѣрное есть и указанный его признакъ. Положимъ, что равновѣсіе имѣетъ мѣсто. Тогда мы разсуждаемъ такъ: остановимъ вниманіе на какомъ-нибудь выходѣ изъ положенія равновѣсія, при чемъ точки системы получаютъ перемѣщенія δs, δs_1, δs_2, ... Очевидно, равновѣсіе не нарушится, если мы прибавимъ новыя связи. Прибавимъ столько новыхъ связей, чтобы сдѣлать систему съ полнымъ числомъ условій, и, притомъ, возьмемъ такія связи, чтобы только *отмѣченная группа перемѣщеній* оказалась единственно возможной. Тогда мы получимъ систему съ полнымъ числомъ условій, а для ея равновѣсія необходимо, какъ было доказано, условіе:

$$\Sigma P\, \delta s \cos (P,\, \delta s) = 0.$$

Но отмѣченная группа перемѣщеній выбирается произвольно, и для каждой изъ нихъ разсужденіе наше остается въ силѣ. Слѣдовательно, для равновѣсія системы со сколькими угодно степенями свободы необходимо, чтобы при всѣхъ возможныхъ выходахъ изъ этого положенія равновѣсія сумма элементарныхъ работъ дѣйствующихъ силъ была равна нулю.

Четвертое положеніе: докажемъ, что это необходимое условіе равновѣсія достаточно для всякой системы.

Докажемъ, что если для системы съ i степенями свободы условіе

$$\Sigma P\, \delta s \cos (P,\, \delta s) = 0$$

удовлетворяется для всѣхъ возможныхъ перемѣщеній при выходѣ ея изъ разсматриваемаго положенія, то тогда система навѣрное находится въ равновѣсіи. Приведемъ способъ доказательства отъ противнаго, т.-е. обнаружимъ, что система двигаться не можетъ.

Допустимъ, что наша система выйдетъ изъ положенія равновѣсія. Тогда ея точки совершатъ опредѣленныя перемѣщенія δs, δs_1, δs_2, ... Прибавимъ къ нашей системѣ такія связи, которыя этимъ воображаемымъ перемѣщеніямъ не препятствуютъ, но другихъ перемѣщеній не допускаютъ. На основаніи началъ статики эти связи не уничтожатъ предположеннаго движенія, и наша система станетъ системой съ полнымъ числомъ условій. Для такой системы было доказано, что при соблюденіи условія

$$\Sigma P\, \delta s \cos (P, \delta s) = 0$$

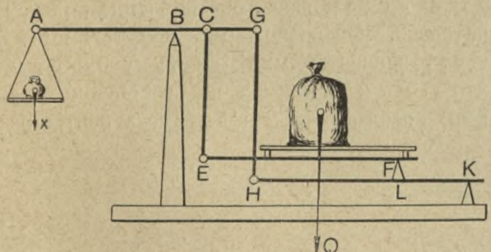
система непремѣнно находится въ равновѣсіи, а между тѣмъ у насъ вышло, что система выходитъ изъ положенія равновѣсія. Слѣдовательно, сдѣланное предположеніе, что система пришла въ движеніе, невозможно.

Итакъ, *условіе необходимое и достаточное для равновѣсія всякой системы состоитъ въ томъ, что при всякомъ безконечно маломъ возможномъ выходѣ системы изъ разсматриваемаго положенія равновѣсія сумма элементарныхъ работъ всѣхъ дѣйствующихъ на систему силъ должна быть равна нулю.*

Рѣшимъ методомъ Лагранжа нѣсколько задачъ.

Примѣръ 1. Изслѣдуемъ вопросъ о равновѣсіи десятичныхъ вѣсовъ (фиг. 66). Между плечами рычаговъ десятичныхъ вѣсовъ существуютъ такія соотношенія:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{1}{10};\quad \frac{CG}{BC} = \frac{LH}{KL} \quad \text{или} \quad \frac{BC + CG}{BC} = \frac{KL + LH}{KL}.$$



Фиг. 66.

Изъ этого послѣдняго соотношенія легко вывести, что при всѣхъ возможныхъ перемѣщеніяхъ системы вѣсовъ площадка EF перемѣщается параллельно самой себѣ и, слѣдовательно, перемѣщеніе груза равно перемѣщенію точки C *). Имѣя это въ виду, примѣнимъ къ этой системѣ съ полнымъ числомъ условій методъ Лагранжа. Единственнымъ параметромъ является уголъ φ отклоненія коромысла отъ горизонтальнаго положенія, который въ положеніи равновѣсія равенъ нулю. Представимъ себѣ безконечно малое перемѣщеніе системы изъ этого положенія, характеризуемое величиной $\delta\varphi$. Въ такомъ случаѣ

$$\text{раб. груза } X = -X\, AB\, \delta\varphi,$$
$$\text{раб. груза } Q = Q\, BC\, \delta\varphi.$$

---

*) Положимъ $BC + CG = n\,BC$; тогда, въ силу сдѣланнаго нами предположенія, $KL + LH = n\,KL$.

Пусть при отклоненіи коромысла точка C проходитъ весьма малое пространство q; тогда на такое же пространство и въ ту же сторону подвинется и конецъ E стержня CE и рычага FE. Очевидно, что другая точка коромысла, точка G пройдетъ пространсто nq, то же пространство пройдетъ и конецъ H стержня HK; точка же L этого рычага пройдетъ пространство, въ n разъ меньшее, т.-е. q.

И по теоремѣ Лагранжа,

$$\text{раб. } X + \text{раб. } Q = \delta\varphi\,(Q\,BC - X\,AB) = 0;$$

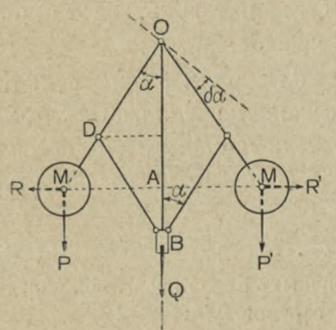
откуда:

$$Q\,BC = X\,AB,$$

$$X = \frac{BC}{AB}\,Q = \frac{1}{10}\,Q.$$

Итакъ, для уравновѣшенія груза на десятичныхъ вѣсахъ надо употреблять гири въ 10 разъ легче груза.

Примѣръ 2. Найдемъ соотношеніе между угловой скоростью вращенія регулятора Уатта и угломъ α отклоненія отъ оси вращенія его стержней, несущихъ массивные шары (фиг. 67).



Фиг. 67.

Регуляторъ разсматривается присоединенный къ какой-либо машинѣ, и угловая скорость его ω зависитъ отъ скорости хода машины. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ регуляторъ Уатта является системой съ полнымъ числомъ условій, и единственное свободное перемѣщеніе его частей опредѣляется параметромъ α, т.-е. угломъ отклоненія стержня OM отъ оси OB. Воспользовавшись принципомъ д'Аламбера, примѣнимъ къ рѣшенію этой задачи методъ Лагранжа.

Пусть въ разсматриваемый моментъ регуляторъ вращается съ постоянной угловой скоростью ω. Въ такомъ случаѣ на систему регулятора дѣйствуетъ только сила тяжести. Пренебрегая вѣсомъ стержней, получимъ слѣдующія силы: $P = P' = Mg$ — силы тяжести, дѣйствующія на массивные шары массы M, и еще вѣсъ муфты Q. Прибавляемъ силы инерціи, въ данномъ случаѣ это будутъ только центробѣжныя силы $R = R' = Mr\,\omega^2$, гдѣ $r = AM$. Подъ вліяніемъ всѣхъ этихъ силъ, по теоремѣ д'Аламбера, остановленная система будетъ находиться въ равновѣсіи и, слѣдовательно, при возможномъ перемѣщеніи изъ этого положенія, опредѣляемаго угломъ α, сумма элементарныхъ работъ упомянутыхъ силъ должна быть равна нулю. Вообразимъ, что уголъ α измѣнился на безконечно-малую величину $\delta\alpha$ и система получила соотвѣтственное перемѣщеніе. Тогда работа центробѣжныхъ силъ R и R' будетъ равна:

$$2\,Mr\,\omega^2\,\delta r = 2\,M\,\omega^2\,OM^2\,\cos\alpha\,\sin\alpha\,\delta\alpha,$$

такъ какъ

$$r = OM\,\sin\alpha,$$

$$\delta r = OM\,\cos\alpha\,\delta\alpha.$$

Работа силъ P и P' будетъ:

$$2\,Mg\,\delta OA = 2\,Mg\,\delta(OM\,\cos\alpha) = -\,2\,Mg\,OM\,\sin\alpha\,\delta\alpha.$$

Работа силы Q будетъ:

$$Q\,\delta OB = Q\,\delta(OD\,\cos\alpha + BD\,\cos\alpha)\,^{*)} = Q\,\delta(2\,OD\,\cos\alpha) = -\,2\,OD\;Q\,\sin\alpha\,\delta\alpha.$$

Но вмѣстѣ съ этой точкой L передвигается и второй конецъ F рычага EF. Такимъ образомъ, выходитъ, что оба конца этого рычага или платформа EF передвигается на пространство q, т.-е. если платформа сначала лежала горизонтально, то и при всякомъ наклоненіи коромысла она останется горизонтальной.

*) Регуляторъ сдѣланъ такъ, что длина стержня OD равна длинѣ стержня DB.

Сумма найден ныхъ элементарныхъ работъ равна нулю:

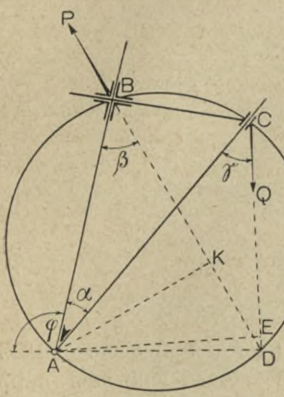
$$2\,M\,\omega^2\,OM^2\cos\alpha\,\sin\alpha\,\delta\alpha - 2\,Mg\,OM\,\sin\alpha\,\delta\alpha - 2\,OD\,Q\,\sin\alpha\,\delta\alpha = 0,$$

$$2\sin\alpha\,\delta\alpha\,(M\,\omega^2\,OM^2\cos\alpha - Mg\,OM - OD\,Q) = 0,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg\,OM + OD\,Q}{M\,OM^2\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{g}{OM\cos\alpha}\left(1 + \frac{Q}{P}\,\frac{OD}{OM}\right)}.$$

Таково искомое соотношеніе между ω и α.

Примѣръ 3. Система состоитъ изъ неизмѣняемаго угла $BAC = \alpha$, могущаго вращаться около точки A, и изъ стержня CB (фиг. 68). Стержень этотъ неизмѣнно присоединенъ къ ползушкѣ C и движется въ ползушкѣ B, которая можетъ скользить по звену AB; такъ что стержень CB, при неподвижности угла BAC, можетъ перемѣщаться параллельно самому себѣ. На ползушки B и C дѣйствуютъ силы P и Q, направленія которыхъ опредѣляются углами β и γ. Найдемъ, какимъ условіямъ должны удовлетворять величины и направленія этихъ силъ для равновѣсія системы.



Фиг. 68.

Всякое положеніе разсматриваемой системы вполнѣ опредѣляется двумя параметрами: угломъ φ и однимъ изъ слѣдующихъ параметровъ, опедѣляющихъ положеніе звена BC относительно угла BAC: AB или AC.

Разсматриваемая система является системой съ двумя степенями свободы, и, примѣняя методъ Лагранжа, надо приравнять нулю сумму элементарныхъ работъ всякаго возможнаго безконечно-малаго перемѣщенія. Но условіе это будетъ уже соблюдено, если мы приравняемъ нулю суммы элементарныхъ работъ безконечно-малыхъ перемѣщеній, соотвѣтствующихъ измѣненіямъ каждаго изъ двухъ параметровъ въ отдѣльности, такъ какъ всякое другое перемѣщеніе можно разсматривать, какъ совокупность перемѣщеній этихъ двухъ родовъ, и если для каждаго изъ нихъ въ отдѣльности сумма элементарныхъ работъ равна нулю, то и для совмѣщенія ихъ условіе это также будетъ соблюдено.

Опустимъ пзъ точки A на P и Q перпендикуляры AK и AE. Тогда, полагая, что уголъ φ получилъ приращеніе $\delta\varphi$, а AB и AC не измѣнились, напишемъ условіе Лагранжа въ предположеніи, что силы P и Q перенесены въ точки K и E:

$$-P\,AK\,\delta\varphi + Q\,AE\,\delta\varphi = 0,$$

или

$$-P\,AK + Q\,AE = 0,$$

но $AK = AB\sin\beta$ и $AE = AC\sin\gamma$; слѣдовательно:

$$P\,AB\sin\beta = Q\,AC\sin\gamma \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \tag{135}$$

Напишемъ еще условіе Лагранжа, предполагая уголъ φ неизмѣннымъ, а AC и AB получающими приращенія δAC и δAB:

$$P\cos\beta\,\delta AB - Q\cos\gamma\,\delta AC = 0.$$

Преобразуемъ это равенство при помощи соотношеній, выведенныхъ изъ $\triangle$ **ABC**:

$$\frac{AC}{AB}=\frac{\sin B}{\sin C}, \quad AB=\frac{\sin C}{\sin B}AC,$$

$$\delta AB=\frac{\sin C}{\sin B}\,\delta AC=\frac{AB}{AC}\,\delta AC.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{\delta AC\,(P\,AB\cos\beta-Q\,AC\cos\gamma)}{AC}=0,$$

или

$$P\,AB\cos\beta=Q\,AC\cos\gamma\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Дѣля (135) на (136), получимъ:

$$tg\,\beta=tg\,\gamma,$$

откуда:

$$\beta=\gamma$$

и уравненіе (135) приметъ видъ:

$$P\,AB=Q\,AC,$$

$$\frac{P}{Q}=\frac{AC}{AB}.$$

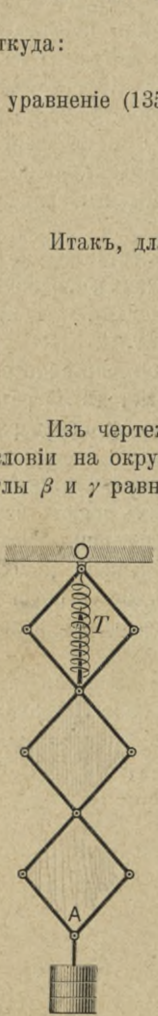
Итакъ, для равновѣсія необходимо, чтобы

$$\frac{P}{Q}=\frac{AC}{AB}$$

и

$$\beta=\gamma.$$

Изъ чертежа видно, что точка **D** пересѣченія силъ P и Q лежитъ при найденномъ условіи на окружности, проходящей черезъ три точки **A**, **B** и **C**, такъ какъ при этомъ углы β и γ равны, какъ опирающіеся на одну и ту же дугу **AD**. Слѣдовательно, выбравъ на этой окружности любую точку **D** и соединивъ ее съ **B** и **C**, получимъ направленія силъ: одна направлена къ точкѣ **D**, а другая отъ точки **D**. Величины же силъ должны находиться въ указанномъ отношеніи.



P

Фиг. 69.

Примѣръ 4. Возьмемъ рядъ одинаковыхъ шарнирныхъ ромбовъ, подвѣшенныхъ въ точкѣ **O** (фиг. 69). На концѣ нижняго ромба въ точкѣ **A** подвѣшенъ грузъ P. Изъ чертежа видно, что грузъ P вытягиваетъ верхній ромбъ, пружина же старается его сократить. Найдемъ, какимъ условіямъ должны удовлетворять величины этихъ силъ для равновѣсія системы.

Выведемъ систему изъ положенія равновѣсія. Пусть безконечно малыя перемѣщенія точекъ приложенія силъ T и P будутъ δy и δz. Въ такомъ случаѣ:

$$\text{раб. груза } P=P\,\delta z,$$

$$\text{раб. пружины } T=-T\,\delta y.$$

Положимъ, что

$$n\,\delta y=\delta z,$$

тогда

$$\text{раб. } T=-T\,\frac{\delta z}{n}.$$

По теоремѣ Лагранжа получаемъ:

$$P\,\delta z-T\,\frac{\delta z}{n}=0,$$

или

$$T=n\,P,$$

гдѣ n есть число ромбовъ.

90 **§ 42. О равновѣсіи неизмѣняемой системы.** Условіе Лагранжа выражается уравненіемъ:

$$\Sigma P\ cos\,(P,\ \delta s)\delta s = 0.$$

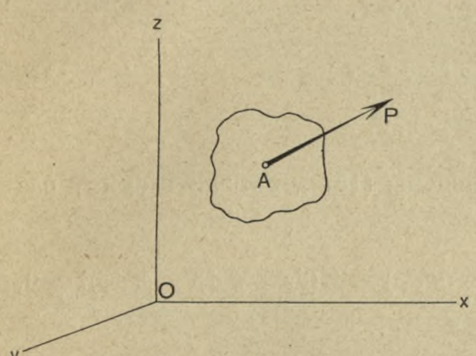
Преобразуемъ это уравненіе, пользуясь Декартовыми координатами, на основаніи извѣстнаго равенства:

$$P\,cos\,(P,\ \delta s)\,\delta s = X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z,$$

гдѣ δx, δy, δz суть приращенія координатъ, соотвѣтствующія приращенію δs. Условіе равновѣсія Лагранжа перепишется теперь такъ:

$$\Sigma\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = 0\ \ldots\ldots\ldots \quad (137)$$

Свободная неизмѣняемая система имѣетъ шесть степеней свободы, и потому мы можемъ выразить всѣ приращенія координатъ δx, δy, δz черезъ соотвѣтствующія приращенія шести параметровъ, опредѣляющихъ положеніе твердаго тѣла, или черезъ шесть какихъ-нибудь безконечно-малыхъ величинъ, опредѣляющихъ его перемѣщеніе. Эти безконечно-малыя величины будутъ $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma, \delta\varphi, \delta\psi, \delta\Theta$, изъ которыхъ три первыя выражаютъ безконечно-малыя поступательныя перемѣщенія, которыя мы можемъ сообщить тѣлу по направленію каждой изъ осей координатъ x, y, z, а $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\Theta$ выражаютъ безконечно-малыя угловыя перемѣщенія, на которыя мы можемъ повернуть тѣло около каждой изъ осей координатъ (фиг. 70).



Фиг. 70.

Чтобы выразить δx, δy, δz черезъ упомянутыя безконечно-малыя величины, воспользуемся формулами Эйлера, опредѣляющими скорости точекъ свободнаго твердаго тѣла [форм. (20)]:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + qz - ry,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\beta}{dt} + rx - pz,$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} + py - qx,$$

гдѣ $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$ суть скорости по осямъ x, y, z точки тѣла, лежащей въ началѣ подвижныхъ осей координатъ, а p, q, r суть угловыя скорости вращеній тѣла около осей x, y, z.

Умножая написанныя равенства на dt и перемѣняя у дифференціаловъ знакъ d на δ, такъ какъ въ методѣ Лагранжа разсматриваются перемѣщенія воображаемыя, находимъ:

$$\delta x = \delta\alpha + qz\,dt - ry\,dt,$$

$$\delta y = \delta\beta + rx\,dt - pz\,dt,$$

$$\delta z = \delta\gamma + py\,dt - qx\,dt.$$

Здѣсь δx, δy, δz суть возможныя перемѣщенія по осямъ координатъ любой точки системы (опредѣляемой координатами x, y, z); $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ суть безконечно-малыя перемѣщенія по осямъ начала подвижныхъ координатъ и, слѣдовательно, возможныя безконечно-малыя поступательныя перемѣщенія неизмѣняемой системы по осямъ координатъ; а $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$ представляютъ безконечно-малые повороты системы около осей координатъ x, y, z, и ихъ мы обозначили черезъ $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\Theta$. Въ такомъ случаѣ формулы Эйлера примутъ видъ:

$$\delta x = \delta\alpha + z\,\delta\psi - y\,\delta\Theta,$$

$$\delta y = \delta\beta + x\,\delta\Theta - z\,\delta\varphi,$$

$$\delta z = \delta\gamma + y\,\delta\varphi - x\,\delta\psi.$$

Подставивъ эти выраженія въ уравненіе (137), получимъ сумму элементарныхъ работъ въ видѣ:

$$\Sigma\,[X(\delta\alpha + z\,\delta\psi - y\,\delta\Theta) + Y(\delta\beta + x\,\delta\Theta - z\,\delta\varphi) + Z(\delta\gamma + y\,\delta\varphi - x\,\delta\psi)] = 0,$$

или

$$\delta\alpha\,\Sigma X + \delta\beta\,\Sigma Y + \delta\gamma\,\Sigma Z + \delta\varphi\,\Sigma(yZ - zY) + \delta\psi\,\Sigma(zX - xZ) + \\ + \delta\Theta\,\Sigma(xY - yX) = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (138)$$

Это уравненіе выражаетъ условіе равновѣсія Лагранжа для свободной неизмѣняемой системы. Въ него входятъ шесть независимыхъ между собой безконечно-малыхъ величинъ $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\Theta$, которыя могутъ имѣть безконечно разнообразныя значенія.

Здѣсь можно обратить вниманіе на слѣдующее. Если нѣсколько совершенно произвольныхъ величинъ множатся на какіе-нибудь коэффиціенты, при чемъ сумма этихъ произведеній всегда равна нулю, то эти коэффиціенты непремѣнно равны нулю. На основаніи этой математической теоремы слѣдуетъ въ уравненіи (138) приравнять нулю всѣ шесть коэффиціентовъ при $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\Theta$, что даетъ намъ шесть извѣстныхъ уравненій равновѣсія свободнаго твердаго тѣла.

Но болѣе просто разсуждать такъ: полученное нами выраженіе должно равняться нулю при всякихъ возможныхъ безконечно-малыхъ перемѣщеніяхъ. Предположимъ, что наше твердое тѣло получило только безконечно-малое поступательное перемѣщеніе вдоль оси Ox. Тогда все перемѣщеніе характеризуется величиной $\delta\alpha$, которая единственно *не равна нулю*, остальныя же безконечно-малыя величины: $\delta\alpha$, $\delta\beta$,.. обратятся въ нули. Все условіе равновѣсія Лагранжа (138) получаетъ видъ:

$$\delta\alpha\, \Sigma X = 0.$$

Такъ какъ $\delta\alpha$ не равно нулю, то значитъ $\Sigma X = 0$.

Поступая такъ дальше, найдемъ:

$$\Sigma Y = 0 \quad \text{и} \quad \Sigma Z = 0.$$

Точно такъ же можно предположить, что тѣло только безконечно-мало повернуто около оси **Ox**, **Oy** или **Oz**. Разсуждая такимъ образомъ, получимъ всѣ шесть основныхъ уравненій статики:

$$\left.\begin{array}{c} \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0, \\ \Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0. \end{array}\right\} \quad . . (139)$$

Это суть извѣстныя условія равновѣсія свободнаго твердаго тѣла.

Условія же равновѣсія несвободной неизмѣняемой системы для всякаго случая легко могутъ быть выведены изъ общаго уравненія (138). Выведемъ эти условія для основныхъ случаевъ несвободнаго твердаго тѣла, разсмотрѣнныхъ въ элементарномъ курсѣ статики. Мы увидимъ, что при этомъ нѣкоторыя изъ условій (139) опустятся, и останется столько условій равновѣсія, сколько параметровъ опредѣляютъ въ пространствѣ положеніе несвободной системы.

1. Твердое тѣло имѣетъ одну неподвижную точку.

Въ этомъ случаѣ тѣло потребуетъ три условія равновѣсія.

Примемъ неподвижную точку за начало координатъ. Поступательныхъ перемѣщеній тѣло получать не можетъ, слѣдовательно,

$$\delta\alpha = \delta\beta = \delta\gamma = 0.$$

Перемѣщенія же $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\Theta$, выражающія приращенія угловъ поворота около осей x, y, z, могутъ имѣть какія угодно значенія.

Уравненіе равновѣсія (138) напишется такъ:

$$\delta\varphi\, \Sigma(yZ - zY) + \delta\psi\, \Sigma(zX - xZ) + \delta\Theta\, \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Можно предположить, что мы поворачиваемъ тѣло только около оси Ox; тогда

$$\delta\varphi\, \Sigma(yZ - zY) = 0,$$

слѣдовательно:

$$\Sigma(yZ - zY) = 0;$$

также найдемъ:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma(zX - xZ) = 0; \\ \Sigma(xY - yX) = 0. \end{array}\right\} \quad . . . . (140)$$

2. Твердое тѣло имѣетъ одну неподвижную ось, положимъ Ox (иначе говоря, двѣ неподвижныя точки).

Въ этомъ случаѣ только $\delta\varphi$ не равно нулю, а

$$\delta\alpha = \delta\beta = \delta\gamma = \delta\psi = \delta\Theta = 0,$$

и уравненіе (138) напишется такъ:

$$\delta\varphi \, \Sigma (yZ - zY) = 0,$$

откуда:

$$\Sigma (yZ - zY) = 0 \qquad (141)$$

3. Двѣ точки твердаго тѣла могутъ скользить по данной оси, положимъ по Ox. Въ этомъ случаѣ

$$\delta\beta = \delta\gamma = \delta\psi = \delta\Theta = 0,$$

и уравненіе (138) напишется такъ:

$$\delta\alpha \, \Sigma X + \delta\varphi \, \Sigma (yZ - zY) = 0.$$

Можно раздѣлить эти два перемѣщенія. Только поступательное:

$$\delta\varphi = 0, \ \delta\alpha \neq 0,$$

откуда

$$\Sigma X = 0.$$

Только вращательное:

$$\delta\alpha = 0, \ \delta\varphi \neq 0,$$

откуда

$$\Sigma (yZ - zY) = 0 \qquad (142)$$

4. Три точки твердаго тѣла могутъ скользить по плоскости xy. Въ этомъ случаѣ

$$\delta\gamma = \delta\varphi = \delta\psi = 0,$$

и уравненіе (138) напишется такъ:

$$\delta\alpha \, \Sigma X + \delta\beta \, \Sigma Y + \delta\Theta \, \Sigma (xY - yX) = 0,$$

откуда:

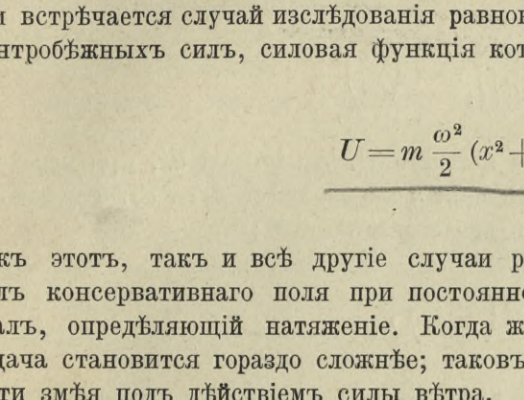
$$\left.\begin{aligned} &\Sigma X = 0, \\ &\Sigma Y = 0, \\ &\Sigma (xY - yX) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (143)$$

§ 43. Равновѣсіе гибкой нити. Изслѣдуемъ вопросъ о равновѣсіи идеально гибкой нерастяжимой однородной нити, которую будемъ разсматривать какъ матеріальную линію, равномѣрно покрытую массами. Массу, отнесенную къ единицѣ длины нити, т.-е. ея плотность, обозначимъ черезъ ϱ; у однородной нити ϱ есть величина постоянная вдоль всей линіи. Задача о равновѣсіи гибкой нити состоитъ въ нахожденіи формы нити и силъ ея натяженія въ каждой точкѣ. Мы изслѣдуемъ равновѣсіе нити подъ дѣйствіемъ силъ консервативнаго поля, т.-е. силъ, имѣющихъ силовую функцію. Въ практикѣ особый интересъ представляетъ случай равновѣсія гибкой нити подъ дѣйствіемъ равномѣрнаго поля силъ тяжести; этотъ случай имѣетъ мѣсто, напримѣръ, въ подвѣсныхъ цѣпныхъ мостахъ. Въ вопросѣ о пряденіи встрѣчается случай изслѣдованія равновѣсія нити подъ дѣйствіемъ поля центробѣжныхъ силъ, силовая функція котораго выражается:

$$U = m\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2);$$

какъ этотъ, такъ и всѣ другіе случаи равновѣсія нити подъ дѣйствіемъ силъ консервативнаго поля при постоянномъ ϱ даютъ одинъ общій интегралъ, опредѣляющій натяженіе. Когда же силовой функціи нѣтъ, тогда задача становится гораздо сложнѣе; таковъ, напримѣръ, случай равновѣсія нити змѣя подъ дѣйствіемъ силы вѣтра.

Положимъ, что гибкая нить привязана концами въ точкахъ A и B (фиг. 71) и находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ силъ какого-либо поля. Поле силъ отнесено къ единицѣ массы, т.-е. на единицу массы въ каждой точкѣ поля дѣйствуетъ нѣкоторая опредѣленная сила P, дающая компоненты X, Y, Z по осямъ координатъ x, y, z. Условія равновѣсія нити можно найти методомъ Лагранжа, но при этомъ надо пользоваться пріемами варіаціоннаго исчисленія; поэтому будемъ рѣшать задачу элементарно.



Фиг. 71.

Отбрасывая концы нити, выдѣляемъ ея элементъ $ab = ds$, а эффектъ концовъ aA и bB замѣнимъ силами T и T_1 натяженія нити. Силы эти, вообще говоря, неравны между собой и направлены по касательнымъ въ точкахъ a и b, слѣдовательно направлены не по одной прямой линіи. Масса dm элемента ds выразится черезъ $\varrho\, ds$, а значитъ на него дѣйствуетъ сила поля $P\varrho\, ds$. Напишемъ условія равновѣсія этого элемента подъ дѣйствіемъ внѣшней силы $P\varrho\, ds$ и силъ натяженія T и T_1 (суммы проекцій силъ на оси координатъ равны нулю) для оси Ox:

$$P\varrho\; ds\; cos\,(P,\,x) + T_1\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 - T\left(\frac{dx}{ds}\right) = 0,$$

гдѣ:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 = cos\,(T_1,\,x);\quad \frac{dx}{ds} = cos\,(T,\,x).$$

Всѣ входящія сюда величины будемъ разсматривать какъ функціи дуги s, отсчитываемой хотя бы отъ точки A.

Разность

$$T_1\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 - T\left(\frac{dx}{ds}\right)$$

есть приращеніе компонента силы натяженія нити по оси Ox, при переходѣ отъ точки a къ b, т.-е. при измѣненіи s на элементъ дуги ds. Въ такомъ случаѣ разность эта можетъ быть представлена такъ:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right),$$

при чемъ дифференціалъ берется по s. Условіе равновѣсія напишется:

$$X\varrho\, ds + d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0,$$

или, дѣля на ds, получимъ для всѣхъ трехъ осей:

$$\left.\begin{aligned} X\varrho + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \\ Y\varrho + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0, \\ Z\varrho + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) = 0. \end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots\ldots\ (144)$$

Это общія уравненія равновѣсія гибкой нити; въ нихъ X, Y, Z— компоненты дѣйствующихъ силъ P какого угодно поля, хотя бы и не консервативнаго. Изъ этихъ уравненій надо опредѣлить слѣдующія четыре функціи:

$$x = f(s),\quad y = f_1(s),\quad z = f_2(s),\quad T = f_3(s).$$

Въ нахожденіи ихъ и состоитъ вся задача: онѣ выражаютъ форму нити при равновѣсіи и ея натяженіе въ любой точкѣ. Для опредѣленія четырехъ функцій недостаточно трехъ уравненій (144); четвертымъ является уравненіе:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (145)$$

выражающее связь между косинусами угловъ, образуемыхъ элементомъ ds съ осями координатъ.

Эти дифференціальныя уравненія второго порядка интегрируются несложно лишь въ частныхъ случаяхъ. Мы рѣшимъ задачу для случая силъ равномѣрнаго поля, когда нить принимаетъ форму *цѣпной линіи.* Но отмѣтимъ раньше нѣсколько замѣчательныхъ свойствъ равновѣсія нити, когда поле силъ, подъ вліяніемъ которыхъ она находится, имѣетъ какую-либо силовую функцію.

При этомъ, если ϱ постоянно, существуетъ интегралъ, очень сходный по внѣшнему виду съ интеграломъ живыхъ силъ. Этотъ интегралъ даетъ возможность найти натяженіе нити въ любой точкѣ независимо отъ ея формы, зная натяженіе въ какой-либо одной точкѣ, аналогично тому, какъ въ интегралѣ живыхъ силъ, зная скорость точки въ одномъ мѣстѣ поля, мы опредѣляемъ ея скорость въ любой точкѣ, независимо отъ траекторіи движенія. Для вывода этого интеграла напишемъ уравненія (144), выполнивъ дифференцированіе въ такомъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} X\varrho+\frac{dT}{ds}\frac{dx}{ds}+T\frac{d^2x}{ds^2}=0,\\ Y\varrho+\frac{dT}{ds}\frac{dy}{ds}+T\frac{d^2y}{ds^2}=0,\\ Z\varrho+\frac{dT}{ds}\frac{dz}{ds}+T\frac{d^2z}{ds^2}=0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (146)$$

Помноживъ эти уравненія соотвѣтственно на

$$\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}$$

и сложивъ ихъ, получимъ:

$$\varrho\left(\frac{X\,dx+Y\,dy+Z\,dz}{ds}\right)+\frac{dT}{ds}\overbrace{\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right]}^{1}+$$
$$+T\underbrace{\left[\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right]}_{0}=0 \quad \ldots\ldots (147)$$

Выраженіе въ скобкахъ при $\frac{dT}{ds}$ равно единицѣ [форм. (145)], а при T равно нулю [производная по ds отъ выраженія (145)]. Кромѣ того, по формулѣ (56)

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=dU,$$

гдѣ U есть силовая функція силъ, дѣйствующихъ на нить. Помножая уравненіе (147) на ds и дѣлая подстановки, получимъ:

$$\varrho\, dU + dT = 0.$$

Интеграція даетъ:

$$\varrho U + T = C.$$

Чтобы освободиться отъ произвольнаго постояннаго C, положимъ, что въ какой-нибудь точкѣ, хотя бы въ A, натяженіе нити извѣстно и равно T_0; значеніе же силовой функціи въ этой точкѣ равно U_0. Въ такомъ случаѣ:

$$\varrho U_0 + T_0 = C.$$

Вычитая это равенство изъ предыдущаго, находимъ:

Интеграл

$$T - T_0 = \varrho\,(U_0 - U) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (148)$$

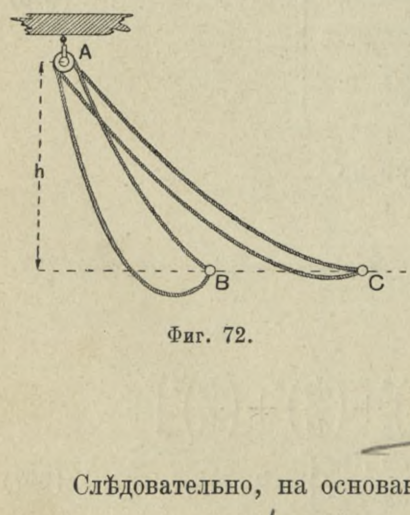
Или:

$$U\varrho + T = U_0\, \varrho + T_0 = const.,$$

что читается такъ: *разность натяженій въ какихъ-либо двухъ точкахъ нити равна произведенію плотности на разность значеній силовой функціи въ этихъ точкахъ, взятую съ обратнымъ знакомъ.*

Разность натяженій не зависитъ отъ длины и формы нити.

Покажемъ это на слѣдующемъ примѣрѣ. Если имѣемъ тяжелый канатъ, какъ-нибудь натянутый между A и B или A и C (фиг. 72), при чемъ B и C лежатъ въ одной горизонтальной плоскости, то разность натяженій на концахъ каната, которую можно опредѣлить посредствомъ динамометровъ, во всѣхъ случаяхъ одна и та же.



Фиг. 72.

Если на высотѣ точекъ B и C силовая функція силы тяжести имѣетъ значеніе $U_0 = C$, то въ A на высотѣ h надъ этими точками, силовая функція имѣетъ значеніе:

$$U = C - gh.$$

Слѣдовательно, на основаніи уравненія (148):

$$T - T_0 = \varrho\,[C - (C - gh)] = \varrho gh.$$

Т.-е. *разность натяженій въ двухъ точкахъ равна въсу единицы длины каната* (ϱg), *умноженному на высоту* (h) *одной точки над другой.*

Выведенный интегралъ [форм. (148)], позволяетъ найти проекцію дѣйствующей силы на касательную къ кривой нити. Взявъ производную по s отъ уравненія (148), въ которомъ T_0, U_0 и ϱ величины постоянныя, найдемъ:

$$\varrho \cdot \frac{dU}{ds} = -\frac{dT}{ds}.$$

Но извѣстно, что $\frac{dU}{ds} = P_s$, проекціи силы поля на касательную [форм. (60)], а значитъ:

$$\varrho P_s = -\frac{dT}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (149)$$

Тангенціональная составляющая силы поля, дѣйствующей на элементъ нити ds, равна и противоположна приращенію силы натяженія нити на этомъ элементѣ ds. Слѣдовательно, силы поля всегда направлены въ ту сторону, куда натяженіе нити убываетъ.

Въ случаѣ движенія гибкой нити (напримѣръ, приводные ремни и канаты) вопросъ о натяженіи ея въ различныхъ точкахъ рѣшается тѣмъ же общимъ способомъ; надо прибавить только по принципу д'Аламбера, къ дѣйствующимъ силамъ силы инерціи.

Выведемъ соотношеніе между величиной силы, дѣйствующей на нить, и радіусомъ кривизны нити. Возведемъ въ квадратъ уравненія (146) и сложимъ ихъ. Тогда, принимая во вниманіе, что

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

получимъ:

$$P^2\varrho^2 = \left(\frac{dT}{ds}\right)^2 \overset{1}{\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right]} + T^2 \overset{\frac{1}{r^2}}{\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]} +$$

$$+ 2T\frac{dT}{ds} \underset{0}{\left[\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{d^2z}{ds^2}\right]}.$$

Изъ уравненія (145) заключаемъ, что скобка перваго члена правой части равна единицѣ, а послѣдняго члена равна нулю, какъ производная этого перваго члена; кромѣ того, изъ анализа извѣстно, что

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 = \frac{1}{r^2},$$

гдѣ r радіусъ кривизны нити. Слѣдовательно:

$$P\varrho = \sqrt{\left(\frac{dT}{ds}\right)^2 + \left(\frac{T}{r}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (150)$$

Изъ этого равенства заключаемъ, что если на элементы нити не дѣйствуютъ никакія силы, и притомъ натяженіе нити T не равно нулю, то она непремѣнно имѣетъ форму прямой линіи.

Дѣйствительно, при $P=0$ изъ равенства (150) находимъ:

$$\left(\frac{dT}{ds}\right)^2+\left(\frac{T}{r}\right)^2=0.$$

Но сумма квадратовъ двухъ дѣйствительныхъ количествъ можетъ быть равна нулю только тогда, когда эти количества суть нули; поэтому

$$\frac{dT}{ds}=0, \quad \frac{T}{r}=0.$$

Но $T \neq 0$, значитъ $r=\infty$, и, слѣдовательно, нить имѣетъ форму прямой линіи и натяженіе вдоль нея постоянно.

Опредѣлимъ теперь нормальную составляющую P_n силы поля. Изъ уравненія (150) находимъ:

$$\left(\frac{T}{r}\right)^2=P^2\varrho^2-\left(\frac{dT}{ds}\right)^2,$$

а замѣчая, что по уравненію (149)

$$\left(\frac{dT}{ds}\right)^2=P_s^2\varrho^2,$$

напишемъ:

$$\left(\frac{T}{r}\right)^2=\varrho^2(P^2-P_s^2).$$

Но очевидно, что

$$P^2-P_s^2=P_n^2,$$

а слѣдовательно

$$P_n\varrho=\frac{T}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (151)$$

Уравненія (150), (149) и (151) даютъ выраженія силы поля $P\varrho$, дѣйствующей на единицу длины нити, и ея составляющихъ $P_s\varrho$ и $P_n\varrho$. Выраженіе послѣдней показываетъ, что если натяженіе нити T очень велико по сравненію съ силой, дѣйствующей на элементъ нити, то и r очень велико. Такимъ образомъ, какія бы силы не дѣйствовали на нить, всегда можно, произвольно увеличивая силу натяженія T, заставить нить принять форму какъ угодно близкую къ прямой.

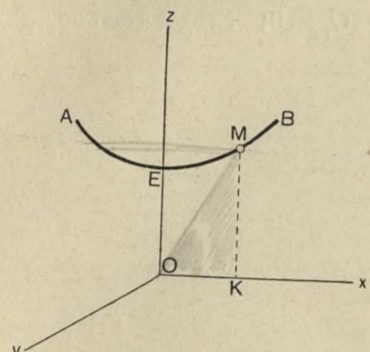
17

§ 44. Задача о цѣпной линіи. *Цѣпной линіей* называется форма, получаемая гибкой нитью постоянной плотности подъ дѣйствіемъ силы тяжести. Для изслѣдованія этого случая равновѣсія гибкой нити воспользуемся общими уравненіями (144):

$$X\varrho + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0,$$

$$Y\varrho + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0,$$

$$Z\varrho + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) = 0,$$



Фиг. 73.

гдѣ X, Y, Z суть компоненты силы поля, дѣйствующей на единицу массы. Въ нашемъ случаѣ на нить дѣйствуютъ силы тяжести, и слѣдовательно (при массѣ $m = 1$):

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g.$$

Расположимъ вертикальную ось Oz такъ, чтобы она проходила черезъ самую низшую точку нити E (фиг. 73), а оси Oy дадимъ направленіе перпендикулярное къ элементу нити, находящемуся въ точкѣ E.

Подставивъ выраженія силъ въ написанныя выше уравненія, получимъ:

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (152)$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (153)$$

$$-\varrho g + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (154)$$

Интегрируя уравненіе (153), находимъ:

$$T\frac{dy}{ds} = C.$$

Для опредѣленія C замѣтимъ, что въ точкѣ E нить перпендикулярна къ оси Oy, а слѣдовательно въ этой точкѣ

$$\frac{dy}{ds} = 0,$$

поэтому и $C = 0$.

А въ такомъ случаѣ по всей длинѣ нити

$$T\frac{dy}{ds}=0;$$

но $T \neq 0$, слѣдовательно,

$$\frac{dy}{ds}=0.$$

Интеграція этого равенства даетъ:

$$y=C_1.$$

А такъ какъ для точки E имѣемъ: $y=0$, то $C_1=0$; слѣдовательно, для всѣхъ точекъ нити

$$y=0,$$

т.-е. вся нить лежитъ въ плоскости xOz.

Интегрируя уравненіе (152), находимъ:

$$T\frac{dx}{ds}=C_2.$$

Въ точкѣ E имѣемъ: $\frac{dx}{ds}=1$, такъ какъ E есть низшая точка цѣпной линіи, и касательная образуетъ здѣсь съ осью Ox уголъ, равный 0^0. Если натяженіе нити въ точкѣ E есть T_0, то $C_2=T_0$, слѣдовательно

$$T\frac{dx}{ds}=T_0,$$

откуда:

$$T=T_0:\frac{dx}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (155)$$

Подставляя найденное значеніе T въ уравненіе (154), получимъ:

$$\frac{d}{ds}\left(T_0\frac{\frac{dz}{ds}}{\frac{dx}{ds}}\right)=\varrho g;$$

$$\frac{d}{ds}\left(T_0\frac{dz}{dx}\right)=\varrho g.$$

Пусть

$$\frac{\varrho g}{T_0}=\frac{1}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (156)$$

гдѣ a есть нѣкоторая постоянная величина; тогда:

$$d\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{ds}{a} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (157)$$

Изъ анализа извѣстно, что

$$ds=\sqrt{dx^2+dz^2}=dx\sqrt{1+p^2} \qquad \ldots\ldots\ldots (158)$$

гдѣ $p=\dfrac{dz}{dx}$.

Подставляя въ уравненіе (157) значенія $\dfrac{dz}{dx}$ и ds изъ уравненія (158), напишемъ его въ такомъ видѣ:

$$dp=\frac{dx\sqrt{1+p^2}}{a};$$

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{dx}{a}.$$

Будемъ его интегрировать. Интегралъ первой части извѣстенъ изъ задачи ректификаціи гиперболы; находимъ его:

$$L(p+\sqrt{1+p^2})=\frac{x}{a}+C_3.$$ запомнить

При $x=0$, т.-е. въ точкѣ E, $p=0$, потому что p есть тангенсъ угла, образуемаго касательной въ точкѣ E съ осью Ox. Слѣдовательно

$$L(1)=C_3=0,$$

и уравненіе напишется такъ:

$$L(p+\sqrt{1+p^2})=\frac{x}{a}.$$

$$p+\sqrt{1+p^2}=e^{\frac{x}{a}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (159)$$ запомни

Съ цѣлью опредѣленія p, воспользуемся тождествомъ:

$$(\sqrt{1+p^2}+p)(\sqrt{1+p^2}-p)=1,$$

которое совмѣстно съ равенствомъ (159) даетъ:

$$\sqrt{1+p^2}-p=e^{-\frac{x}{a}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (160)$$

Вычитая уравненіе (160) изъ уравненія (152), находимъ:

$$p=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

или:

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)=\frac{dz}{dx}.$$

Умноживъ на dx и интегрируя, найдемъ:

$$z=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)+C_1.$$

Пусть начало координатъ расположено такъ, что $OE=a$; тогда при $x=0$, $z=a$, и наше равенство даетъ:

$$a=a+C_1,\quad \text{откуда}\quad C_1=0.$$

Слѣдовательно:

$$z=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (161)$$

Это и есть уравненіе цѣпной линіи. Такъ какъ вторая часть уравненія съ измѣненіемъ x на $(-x)$ не мѣняется, то ось Oz является осью симметріи цѣпной линіи.

Опредѣлимъ теперь силу натяженія T во всякой точкѣ нити. Для этого воспользуемся формулой (155):

$$T=T_0:\frac{dx}{ds}.$$

Подставивъ въ нее значеніе ds изъ уравненія (158):

$$ds=dx\sqrt{1+p^2},$$

получимъ:

$$T=T_0\sqrt{1+p^2}.$$

Далѣе, сложивъ уравненія (159) и (160), найдемъ:

$$\sqrt{1+p^2}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)\quad \ldots\ldots\ldots \quad (162)$$

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ цѣпной линіи (161), получаемъ:

$$\sqrt{1+p^2}=\frac{z}{a},$$

а въ такомъ случаѣ:

$$T = T_0 \frac{z}{a}.$$

Но по уравненію (156)

$$a = \frac{T_0}{\varrho g},$$

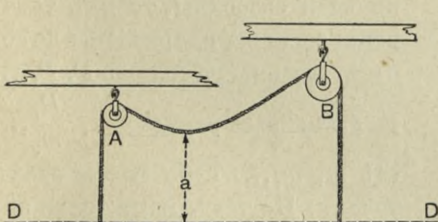
а потому получимъ окончательно:

$$T = g \varrho z.$$

запомнить

Найденный результатъ наглядно представляется геометрически. Ось Ox, отстоящая отъ вершины цѣпной линіи на разстояніи a, называется направляющей, а разстояніе a отъ оси Ox—параметромъ цѣпной линіи. Положимъ, что нужно опредѣлить натяженіе въ точкѣ M. Проведемъ ординату z, которая представится линіей MK. Если бы на этой прямой MK былъ расположенъ отрѣзокъ нити, то вѣсъ его былъ бы равенъ $\varrho g z$ (такъ какъ единица длины нити вѣситъ ϱg). Но какъ разъ этой же величинѣ равно натяженіе T нити въ точкѣ M, слѣдовательно: *натяженіе нити во всякой точкѣ равно вѣсу отрѣзка этой нити, повѣшеннаго вертикально, отъ данной точки до направляющей.*

На основаніи сказаннаго, тяжелая нить, перекинутая черезъ два блока, находится въ равновѣсіи, если ея свободные концы достигаютъ направляющей линіи DD (фиг. 74).



Фиг. 74.

Опредѣлимъ теперь длину дуги s. Изъ уравненій (158) и (162) имѣемъ:

$$ds = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx.$$

Интегрируя, получаемъ:

$$s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) + C_5.$$

Условимся отсчитывать s отъ вершины цѣпной линіи; въ такомъ случаѣ при $x = 0$, $s = 0$ и $C_5 = 0$. Слѣдовательно:

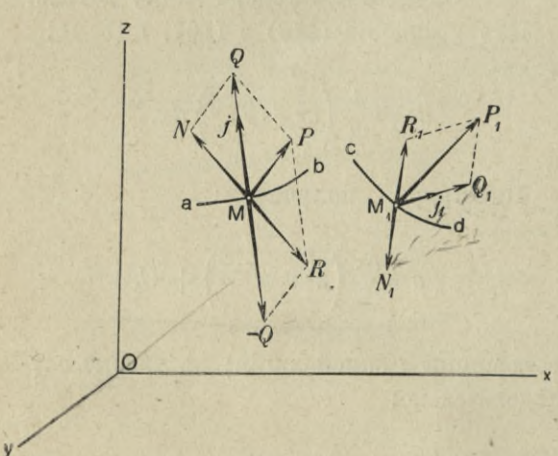
$$s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (163)$$

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ.

§ 45. Принципъ d'Alamber'a. Основаніемъ для вполнѣ общаго способа рѣшенія задачъ о движеніи системы служитъ очень важный для современной техники принципъ д'Аламбера. Примѣняя его, мы сводимъ задачу о движеніи къ вопросу о равновѣсіи, разрѣшаемому по методамъ статики. Принципъ д'Аламбера состоитъ въ слѣдующемъ:

Если систему, находящуюся въ движеніи, остановить въ какой-нибудь моментъ времени и прибавить къ движущимъ силамъ всѣ силы инерціи, то система будетъ въ равновѣсіи. Реакція связей и внутреннія натяженія, имѣющія мѣсто при этомъ равновѣсіи, будутъ тѣ же самыя, которыя существуютъ и въ разсматриваемомъ положеніи при движеніи системы.

Пусть система матеріальныхъ точекъ M, M_1, . . , стѣсненныхъ какими-нибудь связями, находится подъ эффектомъ силъ P, P_1,... (фиг. 75).



Фиг. 75.

Если бы матеріальныя точки были свободны, то ихъ ускоренія были бы направлены по соотвѣтственнымъ силамъ P, P_1,... и были бы равны $\frac{P}{m}$, $\frac{P_1}{m_1}$,.., гдѣ m, m_1,... суть массы этихъ точекъ. Но такъ какъ точки системы не свободны, то ихъ полныя ускоренія j, j_1,... будутъ направлены не по дѣйствующимъ силамъ, а по нѣкоторымъ другимъ силамъ Q, Q_1,... и будутъ равны $\frac{Q}{m}$, $\frac{Q_1}{m_1}$,...., гдѣ Q, Q_1,.... суть тѣ силы, которыя сообщили бы точкамъ системы ускоренія j, j_1,...., если бы дѣйствіе связей мы замѣнили силами N, N_1,... и стали бы разсматривать точки какъ свободныя.

Силы $Q = mj$, $Q_1 = mj_1$,.... д'Аламберъ называетъ *дѣятельными силами*. Если дѣйствующія силы P, P_1,... разложимъ на дѣятельныя силы Q, Q_1,... и нѣкоторыя другія силы R, R_1,..., то силы R, R_1,... уничтожатся эффектомъ развившихся сопротивленій связей системы N, N_1,... и, вслѣдствіе этого, точки системы будутъ двигаться такъ, какъ будто бы онѣ были свободны и находились подъ дѣйствіемъ только дѣятельныхъ силъ Q, Q_1,.... Если это такъ, то, значитъ, силы R, R_1,..., которыя д'Аламберъ называетъ *потерянными*, таковы, что если бы ихъ приложить къ остановленной въ данномъ положеніи системѣ, то система разовьетъ эти самыя силы сопротивленія и тогда наступитъ равновѣсіе.

Каждая *потерянная* сила R, какъ видно изъ фигуры 75, слагается изъ силъ P и $-Q=-mj$. Сила $-Q$, какъ мы знаемъ, есть сила инерціи. Слѣдовательно, прикладывая къ системѣ потерянныя силы, мы, иначе говоря, прикладываемъ всѣ дѣйствующія силы и силы инерціи.

Далѣе, мы можемъ сказать, что потерянныя силы уравновѣсятся на остановленной системѣ эффектомъ сопротивленій связей этой системы, потому что силы R, R_1,... будутъ равны и противоположны силамъ N, N_1,... системы, которыя и суть силы реакціи при движеніи. Такимъ образомъ желаемое доказано.

Пользуясь методомъ Лагранжа, выразимъ условіе равновѣсія силъ дѣйствующихъ и силъ инерціи на остановленной системѣ равенствомъ:

$$\Sigma R\,\delta s \cos(R, \delta s) = 0,$$

или

$$\Sigma (X_1\,\delta x + Y_1\,\delta y + Z_1\,\delta z) = 0,$$

гдѣ X_1, Y_1, Z_1 суть компоненты потерянной силы R по осямъ координатъ. Каждая потерянная сила R слагается изъ дѣйствующей силы P и изъ силы инерціи $-Q=-mj$. Отсюда:

$$X_1 = X - m\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$Y_1 = Y - m\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$Z_1 = Z - m\frac{d^2z}{dt^2},$$

гдѣ X, Y, Z суть компоненты по осямъ координатъ силы P, а $-m\frac{d^2x}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z}{dt^2}$ суть компоненты силы $-Q=-mj$ по тѣмъ же осямъ.

Вслѣдствіе этого при всякомъ возможномъ безконечно-маломъ перемѣщеніи системы, выводящемъ ее изъ положенія, въ которомъ она въ любой моментъ времени воображается остановленной, будетъ удовлетворяться условіе:

$$\Sigma\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0\,. \quad (164)$$

Это равенство называется *основнымъ уравненіемъ динамики* и отличается отъ статическаго условія равновѣсія лишь тѣмъ, что здѣсь прибавлены силы инерціи:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2},\ -m\frac{d^2y}{dt^2},\ -m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Величины δx, δy, δz, δx_1, δy_1, δz_1, ... суть *возможныя* перемѣщенія, *согласныя* со связями остановленной системы.

Вообразимъ, что имѣемъ систему съ i степенями свободы; въ такомъ случаѣ координаты точекъ системы представятся въ видѣ функцій отъ i параметровъ: $q, q_1, \ldots q_{i-1}$ и еще времени t:

$$
\begin{aligned}
x &= f\,(q, q_1, q_2, \ldots\ldots q_{i-1}, t),\\
y &= f_1(q, q_1, q_2, \ldots\ldots q_{i-1}, t),\\
z &= f_2(q, q_1, q_2, \ldots\ldots q_{i-1}, t).
\end{aligned}
$$

Изъ этихъ уравненій опредѣляются безконечно-малыя приращенія координатъ при возможныхъ перемѣщеніяхъ; при этомъ t надо считать постояннымъ, такъ какъ, согласно началу д'Аламбера, мы должны изслѣдовать равновѣсіе системы въ ея остановленномъ положеніи при переставшихъ измѣняться связяхъ. Такимъ образомъ получаемъ:

$$
\delta x = \frac{\partial f}{\partial q}\delta q + \frac{\partial f}{\partial q_1}\delta q_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial q_{i-1}}\delta q_{i-1}.
$$

Аналогично находимъ выраженія для δy, δz, δx_1, δy_1, δz_1, ... Опредѣляя далѣе выраженія производныхъ отъ координатъ по времени, при чемъ t считается уже, очевидно, перемѣннымъ, находимъ:

$$
\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial t};
$$

$$
\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial t}\right).
$$

Подставляя выраженія δx, δy, ... и $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, ... въ основныя уравненія динамики и группируя члены, содержащіе δq, δq_1, ..., найдемъ:

$$
Q\,\delta q + Q_1\,\delta q_1 + Q_2\,\delta q_2 + \ldots\ldots + Q_{i-1}\,\delta q_{i-1} = 0.
$$

Такъ какъ это равенство должно имѣть мѣсто для всевозможныхъ значеній δq, δq_1, δq_2, ..., то мы можемъ положить, что

$$
\delta q \neq 0,\quad \delta q_1 = 0,\quad \delta q_2 = 0, \ldots\ldots,
$$

это приведетъ насъ къ уравненію $Q\,\delta q = 0$, изъ котораго слѣдуетъ $Q = 0$. Такимъ образомъ докажемъ, что всѣ коэффиціенты Q, Q_1, Q_2, ... должны быть равны нулю и уравненіе тогда приводится къ слѣдующимъ i уравненіямъ:

$$Q = 0,$$

$$Q_1 = 0,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

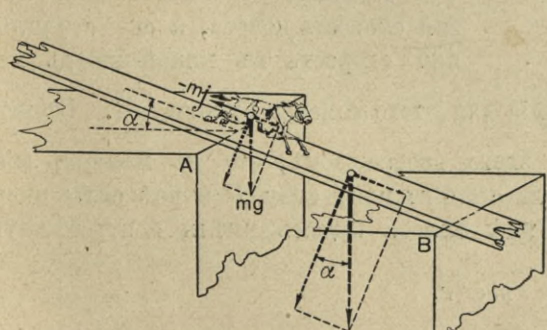
$$Q_{i-1} = 0.$$

Въ выраженія $Q, Q_1, \ldots$ входятъ параметры $q, q_1, q_2, \ldots,$ ихъ первыя и вторыя производныя по времени $\left(\frac{dq}{dt}, \frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \ldots, \frac{d^2q}{dt^2}, \frac{d^2q_1}{dt^2}, \frac{d^2q_2}{dt^2}, \ldots,\right)$ и время t.

Задача сводится къ интегрированію совмѣстныхъ дифференціальныхъ уравненій, въ результатѣ котораго мы опредѣлимъ параметры $q, q_1, q_2, \ldots,$ какъ функціи времени t. При этомъ войдутъ произвольныя постоянныя $C, C_1, \ldots,$ число которыхъ будетъ вдвое больше числа параметровъ, т.-е. $2i$. Поэтому мы будемъ имѣть:

$$q = \psi(t, C, C_1, \ldots C_{2i-1}).$$

Такимъ образомъ принципъ д'Аламбера сводитъ механическую задачу къ чисто-математической, къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій. Это интегрированіе по большей части бываетъ очень сложно, но простыя задачи иногда удается рѣшить, воспользовавшись основными теоремами механики. Дадимъ нѣкоторые примѣры на примѣненіе начала д'Аламбера.



Фиг. 76.

Примѣръ 1. Наклоненная подъ $\angle\ \alpha$ къ горизонту доска лежитъ на двухъ опорахъ A и B (фиг. 76) и безъ тренія скользитъ по нимъ подъ вліяніемъ своего вѣса Mg. Требуется опредѣлить, съ какимъ ускореніемъ должно бѣжать животное вѣса mg по этой доскѣ сверху внизъ, чтобы доска не скользила.

На доску и животное дѣйствуютъ силы тяжести Mg и mg. Разложимъ ихъ на силы, направленныя нормально къ доскѣ и вдоль доски. Первыя уничтожаются реакціями опоръ A и B, а вторыя, равныя $Mg \sin \alpha$ и $mg \sin \alpha$, будутъ стремиться сдвинуть доску и животное по направленію отъ A къ B.

Представимъ себѣ, что животное бѣжитъ съ искомымъ ускореніемъ j, и доска при этомъ находится въ покоѣ. Остановимъ животное и прибавимъ силы инерціи; въ нашемъ случаѣ имѣется только одна сила инерціи $(-mj)$. По принципу д'Аламбера, сила эта вмѣстѣ съ силами, дѣйствующими на систему, даетъ равновѣсіе. Условіе это выразится равенствомъ:

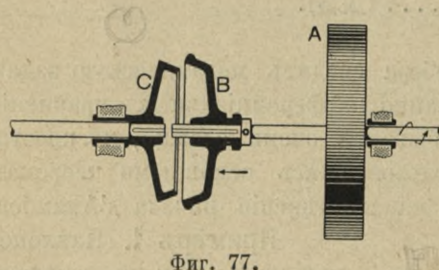
$$Mg \sin\alpha + mg \sin\alpha - mj = 0,$$

откуда:

$$j = g \sin\alpha \left(1 + \frac{M}{m}\right).$$

Съ такимъ ускореніемъ животное должно бѣжать, чтобы доска была неподвижна. Въ этой формулѣ $g \sin\alpha$ есть не что иное какъ ускореніе скольженія доски по опорамъ, когда животное не бѣжитъ. Мы видимъ, что всегда $j > g \sin\alpha$, потому что $\frac{M}{m}$ никогда не можетъ сдѣлаться отрицательнымъ; слѣдовательно, животное должно бѣжать съ ускореніемъ большимъ, чѣмъ то, съ которымъ доска безъ бѣгущаго по ней животнаго соскальзываетъ подъ дѣйствіемъ силы тяжести.

Примѣръ 2. Покоющееся маховое колесо приводится въ движеніе фрикціонной муфтой. Опредѣлить работу тренія за все время приведенія колеса въ движеніе.



Фиг. 77.

Пусть (фиг. 77) отъ нажатія муфты B на фрикціонный конусъ C развивается сила тренія F, перпендикулярная къ оси колеса. Назовемъ черезъ h кратчайшее разстояніе этой силы отъ оси, такъ что моментъ ея относительно оси будетъ hF.

Пусть Ω будетъ конечная угловая скорость колеса, а ω — его угловая скорость въ какой-нибудь моментъ времени t. Угловое ускореніе для этого момента будетъ $\frac{d\omega}{dt}$. Примѣняемъ начало д'Аламбера. Для этого воображаемъ, что въ моментъ времени t колесо остановлено, и прилагаемъ къ нему силу F и всѣ силы инерціи. Для массы m всякой частицы колеса будемъ имѣть центробѣжную силу инерціи:

$$m\omega^2 r,$$

гдѣ r разстояніе точки m отъ оси, и тангенціальную силу инерціи:

$$mr\frac{d\omega}{dt},$$

направленную перпендикулярно радіусу r въ сторону обратную угловому ускоренію.

Поворачиваемъ маховое колесо изъ его остановленнаго положенія на уголъ $\delta\varphi$ и пишемъ по теоремѣ Лагранжа, что сумма работъ всѣхъ дѣйствующихъ силъ и силъ инерціи равна нулю. Работа центробѣжныхъ силъ инерціи при этомъ поворотѣ будетъ нуль, такъ какъ онѣ перпендикулярны къ путямъ; работа же тангенціальныхъ силъ инерціи представится въ видѣ:

$$-\Sigma\, mr\,\frac{d\omega}{dt}\,r\,\delta\varphi = -\,\delta\varphi\,\frac{d\omega}{dt}\,\Sigma\, mr^2,$$

гдѣ $\Sigma\, mr^2$ есть моментъ инерціи J махового колеса. Работа силъ тренія при безконечно-маломъ воображаемомъ перемѣщеніи $\delta\varphi$ будетъ:

$$Fh\,\delta\varphi.$$

Такимъ образомъ

$$\delta\varphi\left(Fh - J\,\frac{d\omega}{dt}\right) = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что

$$J\,\frac{d\omega}{dt} = Fh.$$

Чтобы опредѣлить отсюда работу тренія за все время движенія, умножаемъ обѣ части полученнаго равенства на безконечно-малый уголъ скольженія муфты по фрикціонному конусу

$$(\Omega - \omega)\,dt$$

и беремъ интегралъ въ предѣлахъ 0 и τ, гдѣ τ—время дѣйствія муфты (время, въ которое колесо пріобрѣтаетъ скорость муфты Ω).

$$J\int_0^\tau (\Omega - \omega)\,d\omega = \int_0^\tau Fh\,(\Omega - \omega)\,dt.$$

Вторая часть представляетъ искомую работу тренія, которую обозначимъ черезъ T; что касается первой части, то въ ней можно совершить интегрированіе, замѣчая, что при $t = 0$, $\omega = 0$, а при $t = \tau$, $\omega = \Omega$. Получаемъ:

$$T = J\,\frac{\Omega^2}{2}.$$

Произведеніе момента инерціи на половину квадрата угловой скорости есть живая сила махового колеса. Такимъ образомъ при приведеніи махового колеса фрикціонною муфтою поглощается столько же работы, сколько сообщается колесу въ видѣ живой силы.

92

§ 46. О движенiи центра тяжести. Теорема о движенiи центра тяжести имѣетъ мѣсто, когда для системы являются возможными поступательныя перемѣщенiя параллельно данной оси, параллельно данной плоскости или всякiя поступательныя перемѣщенiя. Всякiя поступательныя перемѣщенiя можетъ имѣть свободная система. Но этимъ свойствомъ могутъ обладать и несвободныя системы.

Система можетъ имѣть всевозможныя поступательныя перемѣщенiя всякiй разъ, когда въ уравненiя, выражающiя связи, входятъ только разности одноименныхъ координатъ, т.-е. когда уравненiя эти имѣютъ видъ:

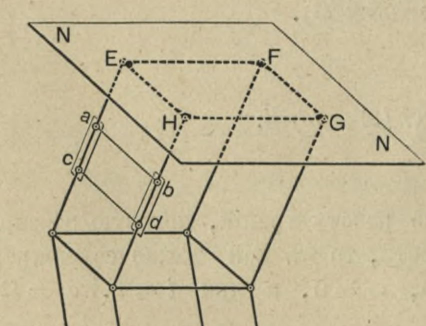
$$f(x-x_1,\ x-x_2,\dots\ y-y_1,\ y-y_2,\dots\ z-z_1,\ z-z_2,\dots)=0.$$

Это обстоятельство будетъ служить аналитическимъ выраженiемъ того условiя, что система можетъ перемѣщаться поступательно, при чемъ всѣ одноименныя координаты получаютъ одно и то же приращенiе.

Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ мы можемъ продвинуть систему поступательно въ любомъ направленiи, потому что координаты новаго положенiя

$$x=x+\delta\alpha,\quad y=y+\delta\beta,\quad z=z+\delta\gamma,$$
$$x_1=x_1+\delta\alpha,\quad y_1=y_1+\delta\beta,\quad z_1=z_1+\delta\gamma,$$
$$\dots\dots\quad \dots\dots\quad \dots\dots$$
$$\dots\dots\quad \dots\dots\quad \dots\dots$$

очевидно удовлетворяютъ уравненiямъ, выражающимъ связи: всѣ $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ взаимно сократятся и разности координатъ не измѣнятся.



Фиг. 78.

Примѣромъ несвободной системы, для которой возможны всякiя поступательныя перемѣщенiя, можетъ служить тѣло ***M*** (фиг. 78), прикрѣпленное къ жесткой рамкѣ ***ABCD***, которая подвѣшена къ другой жесткой рамкѣ ***EFGH*** посредствомъ системы стержней, соединенныхъ шарнирами Гука въ форму двухъ параллелепипедовъ. Стержни ***ab***, ***cd***, ***ef***, ***gh***, соединенные между собой линейками ***ac***, ***bd***, ***eg***, ***fh***, устраняютъ возможность нѣкотораго закручиванiя нижней рамки ***ABCD*** относительно верхней ***EFGH***, лежащей въ плоскости потолка ***N***.

Тѣло ***M*** можно уносить куда угодно, но поворачивать нельзя, оно остается все время всѣми своими частями параллельно потолку ***N***.

Разсмотримъ теперь три случая.

I. Система допускаетъ только одно поступательное перемѣщеніе, т. е. можетъ двигаться поступательно по оси x. Примѣръ: система помѣщена на рельсахъ, въ этомъ направленіи ее двигать можно, но нельзя сдвинуть ни внизъ, ни въ стороны.

II. Система допускаетъ только два поступательныхъ перемѣщенія, т. е. можетъ поступательно перемѣщаться въ плоскости, но ее нельзя продвинуть поступательно перпендикулярно къ плоскости.

III. Систему можно всячески двигать поступательно.

Положимъ, что система можетъ получить перемѣщеніе только въ направленіи оси x (случай I). Для этого случая перемѣщенія δy, $\delta y_1,\ldots,$ δz, $\delta z_1,\ldots.$ можно полагать равными нулю, а перемѣщенія $\delta x = \delta x_1 = \ldots = \delta \alpha$.

Сдѣлавъ такое положеніе въ основномъ уравненіи динамики (164), получимъ:

$$\delta\alpha\,\Sigma\left(X - m\,\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0.$$

Такъ какъ $\delta\alpha \neq 0$, то

$$\Sigma X = \Sigma m\,\frac{d^2x}{dt^2}$$

или

$$\Sigma X = \frac{d}{dt}\,\Sigma m\,\frac{dx}{dt} = \frac{d^2}{dt}\,\Sigma mx.$$

Но, какъ извѣстно, $\Sigma mx = M.\bar{x}$, гдѣ M есть сумма массъ всѣхъ точекъ, а $\bar{x}$—координата центра тяжести системы.

Слѣдовательно,

$$\Sigma X = \frac{d^2}{dt^2}\,\Sigma mx = M\,\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (165')$$

Итакъ, если система можетъ получать поступательное перемѣщеніе по оси x, то сумма проекцій всѣхъ внѣшнихъ силъ на ось x равна произведенію массы системы на $\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}$.

Наличность внутреннихъ силъ никакой роли здѣсь играть не можетъ, такъ какъ, будучи равными и противоположными, всѣ онѣ сокращаются въ ΣX.

Если $\Sigma X = const$, то уравненіе (165′) можно интегрировать. Произведя интеграцію получимъ

$$t\,\Sigma X = M\frac{d\bar{x}}{dt} - M\frac{d\bar{x}_0}{dt},$$

т. е. *приращеніе количества движенія центра тяжести или приращеніе количества движенія всей системы по какому-нибудь направленію (по направленію какой-нибудь координатной оси) за данный промежутокъ вре-*

мени, равно суммѣ импульсовъ дѣйствующихъ силъ по тому же направленію за этотъ промежутокъ времени.

Если $\Sigma X = 0$, то

$$M\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = a = const.$$

Отсюда

$$\bar{x} = at + a_0,$$

т.-е. *проекція центра тяжести на ось x будетъ двигаться равномѣрно.*

Положимъ, что система можетъ имѣть поступательныя перемѣщенія по плоскости xy (случай II).

Для такихъ перемѣщеній:

$$\delta z = \delta z_1 = \ldots\ldots = 0.$$

Если сообщимъ оставленной системѣ перемѣщеніе только въ направленіи оси x, то

$$\delta x = \delta x_1 = \ldots\ldots = \delta\alpha,$$

$$\delta y = \delta y_1 = \ldots\ldots = 0.$$

Основное уравненіе динамики для этого случая приметъ видъ:

$$\delta\alpha\,\Sigma\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0.$$

Но $\delta\alpha \neq 0$. Слѣдовательно

$$\Sigma X = \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Если же сообщимъ остановленной системѣ перемѣщеніе только въ направленіи оси y, то

$$\delta x = \delta x_1 = \ldots\ldots = 0,$$

$$\delta y = \delta y_1 = \ldots\ldots = \delta\beta.$$

Основное уравненіе динамики для этого случая приметъ видъ:

$$\delta\beta\,\Sigma\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0.$$

Но $\delta\beta \neq 0$. Слѣдовательно

$$\Sigma Y = \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Такимъ образомъ будетъ доказана справедливость уравненій:

$$\Sigma X = \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \Sigma mx = M \frac{d^2\bar{x}}{dt^2},$$

$$\Sigma Y = \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \Sigma my = M \frac{d^2\bar{y}}{dt^2}.$$

Если $\Sigma X = 0$ и $\Sigma Y = 0$, т.-е. внѣшнихъ силъ нѣтъ или онѣ вертикальны, то

$$M \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = 0, \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = a = const., \quad \bar{x} = at + a_0,$$

$$M \frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = 0, \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = b = const., \quad \bar{y} = bt + b_0,$$

т.-е. *проекція центра тяжести на плоскость xy будетъ двигаться прямолинейно и равномѣрно.*

Если шаръ, у котораго центръ тяжести не совпадаетъ съ геометрическимъ центромъ, опирается на вполнѣ гладкую плоскость и скользитъ по ней безъ начальной скорости центра тяжести, то центръ тяжести шара будетъ подниматься или опускаться вверхъ и внизъ и не сойдетъ съ одной вертикальной линіи, точка же прикосновенія шара будетъ ходить направо и налѣво.

Точно также центръ тяжести колеблющагося судна на спокойной водѣ будетъ подниматься и опускаться вверхъ и внизъ, но не уйдетъ ни направо ни налѣво.

Пусть, наконецъ, система допускаетъ всякія поступательныя перемѣщенія, т.-е. ее можно двигать по осямъ x, y, z (случай III).

Для точекъ системы, которую мы имѣемъ въ виду, непремѣнно будетъ возможна слѣдующая группа перемѣщеній:

$$\delta x = \delta x_1 = \delta x_2 = \ldots\ldots = \delta\alpha,$$

$$\delta y = \delta y_1 = \delta y_2 = \ldots\ldots = \delta\beta,$$

$$\delta z = \delta z_1 = \delta z_2 = \ldots\ldots = \delta\gamma.$$

Подставивъ эти значенія въ основное уравненіе (164), получимъ:

$$\delta\alpha \Sigma \left(X - m \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \delta\beta \Sigma \left(Y - m \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \delta\gamma \Sigma \left(Z - m \frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0.$$

Здѣсь мы можемъ полагать изъ трехъ перемѣщеній $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ два равными нулю, а третье не равнымъ нулю и такимъ образомъ найдемъ:

$$1)\ \Sigma\left(X - m \frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0, \quad 2)\ \Sigma\left(Y - m \frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0, \quad 3)\ \Sigma\left(Z - m \frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0.$$

Эти уравненія удовлетворяются во все время движенія разсматриваемой системы. Напишемъ ихъ въ такомъ видѣ:

$$\Sigma X = \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \Sigma X = \frac{d^2}{dt^2} \Sigma mx,$$

$$\Sigma Y = \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \text{или} \quad \Sigma Y = \frac{d^2}{dt^2} \Sigma my,$$

$$\Sigma Z = \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2}, \qquad \Sigma Z = \frac{d^2}{dt^2} \Sigma mz.$$

Но извѣстно, что

$$\Sigma mx = M.\bar{x}, \quad \Sigma my = M.\bar{y}, \quad \Sigma mz = M.\bar{z}.$$

Подставляя эти значенія въ наши уравненія, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma X &= M \frac{d^2\bar{x}}{dt^2}, \\ \Sigma Y &= M \frac{d^2\bar{y}}{dt^2}, \\ \Sigma Z &= M \frac{d^2\bar{z}}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (165)$$

Здѣсь ΣX, ΣY, ΣZ суть проекціи на оси координатъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на систему, или, иначе говоря, проекціи равнодѣйствующей силы, которая получится, если всѣ силы перенести въ центръ тяжести и сложить по правилу многоугольника.

Формулы (165) суть не что иное какъ уравненія движенія одной матеріальной точки (центра тяжести), въ которой сосредоточена вся масса системы и къ которой приложена равнодѣйствующая всѣхъ дѣйствующихъ силъ.

Эти формулы даютъ намъ теорему о движеніи центра тяжести.

Центръ тяжести свободной системы или системы, которая, хотя и не свободна, но можетъ получать всякія поступательныя перемѣщенія,—движется какъ матеріальная точка, въ которой сосредоточена вся масса системы и на которую дѣйствуетъ равнодѣйствующая всѣхъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ системѣ.

Замѣтимъ, что въ выраженія ΣX, ΣY, ΣZ не входятъ внутреннія силы, а исключительно только внѣшнія. Это происходитъ оттого, что внутреннія силы всегда войдутъ попарно и, по закону дѣйствія, равнаго противодѣйствію, равны и направлены въ противоположныя стороны; слѣдовательно, никакихъ проекцій на оси координатъ не образуютъ. Поэтому, если одна внутренняя сила даетъ на ось Ox проекцію ($\text{пр}_x Q$), то другая, ей противоположная, даетъ проекцію ($-\text{пр}_x Q$), такъ что сумма ихъ

$$(\text{пр}_x Q) + (-\text{пр}_x Q) = 0.$$

Такимъ образомъ внутреннія силы не могутъ вліять на движеніе центра тяжести. Положимъ, напримѣръ, летитъ граната; пусть воздухъ не оказываетъ ей сопротивленія; въ такомъ случаѣ центръ тяжести гранаты движется по параболѣ. Если затѣмъ во время полета гранату разорвало, то это, очевидно, эффектъ внутреннихъ силъ; а слѣдовательно центръ тяжести системы всѣхъ, теперь уже отдѣльно летящихъ, кусковъ будетъ продолжать описывать свою параболическую траекторію до тѣхъ поръ, пока не прибавятся какія-либо новыя силы или связи, пока всѣ куски ядра продолжаютъ двигаться свободно.

Если равнодѣйствующая внѣшнихъ силъ равна нулю, то

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

и уравненія движенія центра тяжести (165) будутъ:

$$M\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = 0, \quad M\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = 0, \quad M\frac{d^2\bar{z}}{dt^2} = 0.$$

Интегрируя, получимъ:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = a, \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = b, \quad \frac{d\bar{z}}{dt} = c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (166)$$

Интегрируя еще разъ, находимъ:

$$\bar{x} = at + a_0, \quad \bar{y} = bt + b_0, \quad \bar{z} = ct + c_0 \quad \ldots\ldots \quad (167)$$

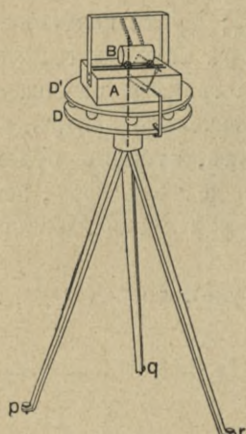
Равенства (166) показываютъ, что если внѣшнихъ силъ нѣтъ или онѣ взаимно уравновѣшиваются, то центръ тяжести будетъ двигаться прямолинейно и равномѣрно, такъ какъ скорость его будетъ имѣть постоянную величину и направленіе.

Если бы въ начальный моментъ центръ тяжести былъ неподвиженъ, то мы имѣли бы, что $a = b = c = 0$; а въ такомъ случаѣ изъ уравненій (167) находимъ:

$$\bar{x} = a_0, \quad \bar{y} = b_0, \quad \bar{z} = c_0,$$

т.-е. координаты центра тяжести постоянны. Отсюда слѣдуетъ принципъ сохраненія центра тяжести: *если система можетъ имѣть всякія поступательныя перемѣщенія и на нее дѣйствуютъ силы, равнодѣйствующая которыхъ равна нулю, то центръ тяжести системы или остается неподвиженъ, или движется прямолинейно и равномѣрно.*

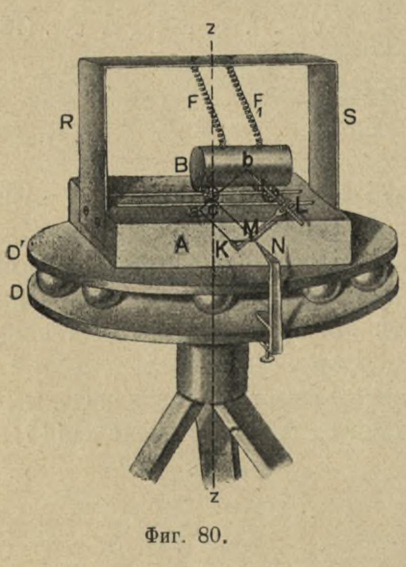
Законъ о движеніи центра тяжести прекрасно иллюстрируется приборомъ Теплера, наглядно показывающимъ, что внутреннія силы, вызывающія относительное перемѣщеніе частей системы, не могутъ привести въ движеніе ея центра тяжести или измѣнить его движеніе. Приборъ этотъ имѣетъ слѣдующее устройство (фиг. 79).



Фиг. 79.

На незыбкомъ штативѣ укрѣпленъ стеклянный дискъ *D* съ строго плоской гладкой поверхностью. Помощью установительныхъ винтовъ *p*, *q*, *r* поверхность этого диска приводится въ горизонтальное положеніе. Самая система, сохраненіе центра тяжести которой мы будемъ наблюдать, состоитъ изъ чугуннаго массива *A* (фиг. 80) и присоединеннаго къ нему массивнаго цилиндра *B*, могущаго перемѣщаться относительно *A*. Въ нижнюю часть массива *A* вдѣланъ стеклянный дискъ *D'*, подобный диску *D*, съ плоской шлифованной поверхностью. Эта система ставится своей гладкой стеклянной поверхностью на очень точной работы стальные золоченые шарики, положенные на горизонтальный дискъ *D*. Такимъ образомъ наша система оказывается свободной для любыхъ перемѣщеній параллельно горизонтальной плоскости.

Единственно внѣшними силами, дѣйствующими на систему, будутъ силы тяжести, вполнѣ уничтожающіяся сопротивленіемъ строго горизонтальной поверхности диска *D*. Силы же тренія доведены до ничтожной малой величины тщательностью выполненія плоскостей и шариковъ, такъ что достаточно дунуть на систему, чтобы она покатилась, несмотря на ея значительную массу и, слѣдовательно, большую инертность.



Фиг. 80.

Съ массивомъ *A* неизмѣнно соединена рамка *RS*. Къ этой рамкѣ придѣланы пружины *F* и F_1, прикрѣпленныя другими концами къ массиву *B*. Этотъ послѣдній массивъ можетъ легко кататься по рельсамъ, положеннымъ на массивѣ *A*. Пружины *F* и F_1 стремятся удерживать массивъ *B* въ серединѣ между точками *R* и *S*. Если же его отвести изъ этого положенія въ сторону, хотя бы въ *R*, и затѣмъ пустить, то подъ дѣйствіемъ пружинъ онъ будетъ колебаться около средняго положенія, обозначеннаго на фигурѣ (80) осью *zz*.

При этомъ внутреннія силы упругости пружинъ приведутъ въ движеніе части системы одну относительно другой; но, по вышеизложенной теоремѣ, эти силы не приведутъ въ движеніе центра тяжести всей системы. Чтобы наглядно показать это на опытѣ съ описываемымъ приборомъ, къ массиву A, противъ его центра тяжести, въ точкѣ K придѣлывается на оси рычажокъ, другой конецъ котораго оканчивается вилкой. Вилка эта наставляется на штифтикъ L, придѣланный къ массиву B противъ его центра тяжести b. При тѣхъ небольшихъ, сравнительно съ длиною рычажка, перемѣщеніяхъ точки L внутри вилки, которыя имѣютъ мѣсто во время опыта, можно считать, что разстояніе $KL = ab$ есть величина постоянная. Центръ тяжести всей системы, очевидно, находится на линіи ab, соединяющей центры тяжести частей A и B, и притомъ въ точкѣ c, дѣлящей отрѣзокъ ab на части, обратно пропорціональныя массамъ частей A и B. Точка M рычажка, находящаяся постоянно противъ центра тяжести c всей системы и отмѣчаемая яркимъ кружочкомъ, имѣетъ постоянное положеніе на рычагѣ KL, такъ какъ $MK : ML = ca : cb =$ (масса B) : (масса A). Если центръ тяжести системы перемѣщается въ пространствѣ, то и мѣтка M перемѣщается точно также. Если центръ тяжести системы не измѣняетъ своего положенія въ пространствѣ, то и M не движется. Для того чтобы удобно было отмѣтить положеніе въ пространствѣ точки M, устроенъ указатель N, прикрѣпляемый къ штативу.

Опытъ состоитъ въ слѣдующемъ. Отводятъ массивъ B изъ положенія равновѣсія, хотя бы направо, и привязываютъ его нитью къ рамкѣ RS. Установивъ указатель N противъ мѣтки M, пережигаютъ нить. Массивъ подъ дѣйствіемъ пружинъ F покатится по рельсамъ налѣво; но вмѣстѣ съ тѣмъ вся система (массивъ A вмѣстѣ съ B) покатится на шарикахъ направо. Дойдя до крайняго лѣваго положенія, массивъ B станетъ двигаться направо, а вся система налѣво. Однако при всѣхъ этихъ колебаніяхъ мѣтка M будетъ стоять неподвижно передъ указателемъ N. Итакъ, дѣйствительно, внутреннія силы не вызываютъ перемѣщенія центра тяжести.

23 **§ 47. Теорема площадей для системы.** Теорема площадей для системы примѣнима тогда, когда система такова, что ее можно повернуть около одной оси, около двухъ осей или около всякой оси, проходящей черезъ данную точку пространства, на весьма малый уголъ. Эта теорема есть основная теорема динамики и излагается сначала въ дифференціальной формѣ.

Докажемъ эту теорему для одной оси.

Пусть система матеріальныхъ точекъ (фиг. 81), находящаяся подъ дѣйствіемъ ряда силъ внутреннихъ и внѣшнихъ, можетъ поворачиваться около оси Oz. Это будетъ въ томъ случаѣ, когда всевозможныя ея точки связаны между собою и связаны чѣмъ-нибудь съ этой осью. При этомъ уравненія связей имѣютъ видъ:

$$f(r_{1,2},\ r_{1,3},\ r_{2,3},\dots\ r_1,\ r_2,\dots) = 0,$$

гдѣ $r_{1,2}$, $r_{1,3}$, $r_{2,3}$,.... разстоянія между точками системы, r_1, r_2,.... разстоянія точекъ системы отъ точекъ, лежащихъ на оси Ox.

Остановивъ систему въ любой моментъ, можемъ написать по принципу д'Аламбера (форм. 164):

$$\Sigma\left[\left(X-m\,\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\,\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\,\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0\,..\,(164)$$

Такъ какъ система можетъ вращаться около оси Oz, то допустимъ, что она повернулась, какъ твердое тѣло, около этой оси на уголъ $\delta\Theta$ и соотвѣтственно этому координаты получили приращенія δx и δy.

По формуламъ Эйлера, вводя $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\Theta$—углы поворота около осей Ox, Oy, Oz, имѣемъ:

$$\delta x = z\,\delta\psi - y\,\delta\Theta\,,$$

$$\delta y = x\,\delta\Theta - z\,\delta\varphi\,,$$

$$\delta z = y\,\delta\varphi - x\,\delta\psi\,.$$

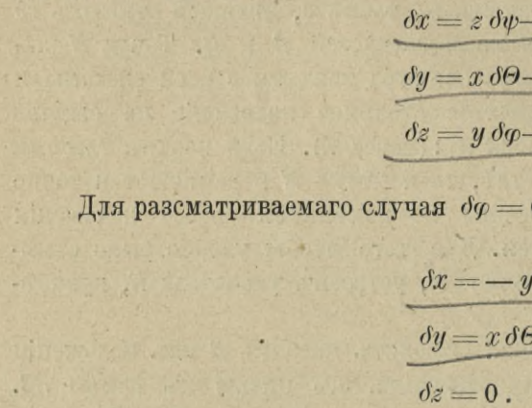
Для разсматриваемаго случая $\delta\varphi=0$, $\delta\psi=0$, а $\delta\Theta \neq 0$, слѣдовательно:

$$\delta x = -\,y\,\delta\Theta\,,$$

$$\delta y = x\,\delta\Theta\,,$$

$$\delta z = 0\,.$$

Эти приращенія можно опредѣлить также, если разсматривать точку M (фиг. 81), которая повернулась около оси Oz на $\angle\,\delta\Theta$, такъ что проекція ея m на плоскость xy заняла положеніе m'. Обозначивъ mO черезъ r, изъ треугольника mcm' имѣемъ:



Фиг. 81.

$$mc = -\,\delta x = r\,\delta\Theta\,\sin\Theta\,,$$

но

$$r\,\sin\Theta = y\,,$$

а потому

$$\delta x = -\,y\,\delta\Theta\,;$$

также и

$$\delta y = r\,\delta\Theta\,\cos\Theta = x\,\delta\Theta\,;$$

$$\delta z = 0\,.$$

Если подставить найденныя значенія для δx, δy, δz въ основное уравненіе (164) динамики, то получимъ:

$$\delta\Theta\,.\,\Sigma\left[x\left(Y-m\,\frac{d^2y}{dt^2}\right)-y\left(X-m\,\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right]=0,$$

Но такъ какъ $\delta\Theta$ не равно нулю, то слѣдовательно

$$\Sigma\left[x\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)-y\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right]=0;$$

или

$$\Sigma(xY-yX)=-\Sigma m\left(y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}\right).$$

Замѣчая, что

$$y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right),$$

перепишемъ полученное равенство:

$$\Sigma(xY-yX)=\frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right) \quad \ldots\ldots (168)$$

Это уравненіе выражаетъ теорему площадей въ дифференціальной формѣ. По способу выраженія Пуансо, количества движенія слѣдуетъ разсматривать какъ силы, въ видѣ векторовъ, направленныхъ по скоростямъ точекъ. Въ полученномъ выше уравненіи роль проекціи силы X играетъ проекція количества движенія на соотвѣтствующую ось, такъ что сумма моментовъ дѣйствующихъ силъ относительно оси Oz, стоящая въ лѣвой части уравненія, равна производной по времени отъ суммы моментовъ количествъ движенія (mv) относительно данной оси. Дѣйствительно,

$$x\,.\,m\frac{dy}{dt}=x\,.\,\text{пр}_y(mv),$$

$$y\,.\,m\frac{dx}{dt}=y\,.\,\text{пр}_x(mv),$$

а потому уравненіе (168) приметъ видъ:

$$\Sigma(xY-yX)=\frac{d}{dt}\Sigma[x\,.\,\text{пр}_y(mv)-y\,.\,\text{пр}_x(mv)] \quad \ldots\ldots (169)$$

т.-е. *сумма моментовъ вращающихъ силъ относительно оси z равна производной по времени отъ суммы моментовъ количествъ движенія относительно той же оси.*

Внутреннія силы взаимодѣйствія матеріальныхъ точекъ системы не входятъ въ выраженіе $\Sigma(xY-yX)$, такъ какъ эти силы являются всегда попарно равными и прямо противоположными (по закону дѣйствія, равнаго противодѣйствію), и слѣдовательно моменты ихъ попарно равны по величинѣ, но противоположны по знаку *).

Пусть векторъ G есть (геометрическій) линейный моментъ пары, который получится, если всѣ количества движенія перенесемъ въ начало координатъ, прибавимъ пары и замѣнимъ ихъ одной силой и одной парой. Векторъ этотъ называется *главнымъ моментомъ количествъ движенія.* Изъ равенства (169) имѣемъ:

$$\Sigma(xY-yX)=\frac{d}{dt}(\text{пр}_z\, G) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (170)$$

Это равенство выражаетъ теорему площадей для системы въ нѣсколько иной формѣ: *сумма моментовъ вращающихъ силъ относительно оси z равна производной по времени отъ проекціи на ось z главнаго момента количествъ движенія.*

Въ § 20 о теоремѣ площадей [формула (64')] было доказано:

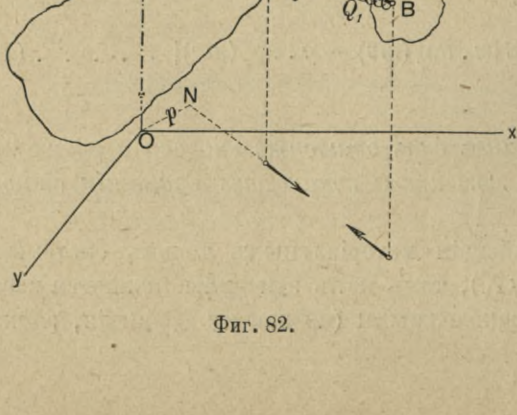
$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=r^2\frac{d\varphi}{dt}=2\frac{d\sigma_z}{dt},$$

на основаніи чего уравненіе (168) перепишется такъ:

$$\Sigma(xY-yX)=2\frac{d}{dt}\Sigma m\frac{d\sigma_z}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (171)$$

Если же нѣтъ внѣшнихъ силъ или если силы приводятся къ двумъ силамъ, пересѣкающимъ ось z, то

$$\Sigma(xY-yX)=0,$$



Фиг. 82.

*) На фигурѣ (81) видно, что для внутреннихъ силъ взаимодѣйствія точекъ M_1 и M_2 можно написать:

$$m_z(Q_1)=\text{пр}.\,Q_1.ON=\text{пр}\;Q_1.p,$$
$$m_z(Q_2)=-\text{пр}.\,Q_2.ON=-\text{пр}\;Q_2.p,$$

откуда

$$m_z(Q_1)+m_z(Q_2)=0.$$

На фигурѣ (82) внутреннія силы Q и Q_1 осуществлены въ видѣ эффекта дѣйствія включенной въ систему пружины.

и слѣдовательно

$$2 \frac{d}{dt} \Sigma m \frac{d\sigma_z}{dt} = 0,$$

что по интеграціи даетъ:

$$\Sigma m \frac{d\sigma_z}{dt} = \frac{C}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (172)$$

Уравненіе это, будучи написано въ видѣ

$$\Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = C, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (173)$$

выражаетъ интегралъ площадей для системы и читается такъ: *если система можетъ вращаться около оси и на нее не дѣйствуютъ внѣшнія силы или онѣ дѣйствуютъ, но приводятся къ двумъ силамъ, проходящимъ черезъ ось вращенія, то сумма произведеній изъ массъ матеріальныхъ точекъ на ихъ секторальныя скорости равна постоянной величинѣ.*

Если система можетъ вращаться около двухъ осей x и y или около каждой изъ осей x, y, z, т.-е. можетъ вращаться во всѣхъ направленіяхъ около точки O, то, повторивъ предыдущія разсужденія для каждой изъ осей, мы нашли бы уравненія аналогичныя уравненіямъ (168—173), выведеннымъ для системы, могущей вращаться около оси z. Интегралъ площадей выразится въ послѣднемъ случаѣ слѣдующими тремя уравненіями, которыя мы напишемъ, дѣлая круговую подстановку буквъ въ уравненіи (173):

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) &= A, \\ \Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) &= B, \\ \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) &= C. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (174)$$

Формула (170) для этого случая приметъ видъ:

$$\Sigma (yZ - zY) = \frac{d}{dt} (\text{пр}_x\, G),$$

$$\Sigma (zX - xZ) = \frac{d}{dt} (\text{пр}_y\, G),$$

$$\Sigma (xY - yX) = \frac{d}{dt} (\text{пр}_z\, G).$$

Выражать въ такомъ видѣ теорему площадей было предложено *Пуансо*. Она читается такъ: *сумма моментовъ вращающихъ силъ относительно* *какой-нибудь изъ осей координатъ равна производной по времени отъ проекціи на ту же ось главнаго момента количествъ движенія.*

Мы видѣли, что внутреннія силы не могутъ мѣнять движенія центра тяжести, но не такъ обстоитъ дѣло съ теоремой площадей.

Нѣкоторые полагали, что внутренними силами нельзя произвести вращенія около данной оси. Такая мысль ошибочна. Внутренними силами мы не можемъ измѣнять угловую скорость; въ этомъ есть сходство съ теоремой о центрѣ тяжести; но нѣтъ такого сходства въ вопросѣ объ измѣненіи угла. Когда внутреннія силы двигаютъ тѣло, то всякій разъ, какъ вся система останавливается, угловыя скорости будутъ возвращаться къ прежнему состоянію. Delaunay, говоря о теоремѣ площадей, впалъ въ упомянутую ошибку. Онъ представлялъ себѣ человѣка, неподвижно висящаго на веревкѣ.

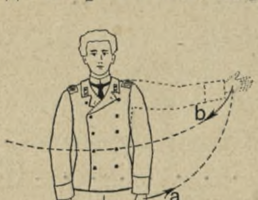
Когда $t = 0$, всѣ $\sigma = 0$ и $\Sigma m\sigma = 0$.

Всегда сумма произведеній массъ на положительныя площади плюсъ соотвѣтствующая сумма произведеній на отрицательныя площади даетъ нуль.

Человѣкъ Delaunay описываетъ рукой, положимъ, положительную площадь. Тогда тѣло человѣка непремѣнно опишетъ отрицательную площадь, и притомъ такую, чтобы $\Sigma m\sigma = 0$.

Необходимо имѣть въ виду, что процессъ возвращенія къ прежнему состоянію можно дѣлать не такимъ, какимъ тѣло изъ этого состоянія выведено; а отъ этихъ процессовъ зависятъ площади.

Пусть къ скамейкѣ *A* (фиг. 83) прикрѣплено кольцо, въ которомъ лежитъ рядъ шариковъ. Поверхъ ихъ находится крышка *B*, на которой стоитъ человѣкъ. Когда онъ быстро поднимаетъ руку вверхъ по стрѣлкѣ *a*, никакихъ площадей въ горизонтальной плоскости не описывается, все остается неподвижнымъ; когда человѣкъ кладетъ себѣ руку на другое плечо, вращая ее на 180° по часовой стрѣлкѣ *b*, то масса руки описываетъ положительныя площади, а такъ какъ $\Sigma m\sigma$ должна быть равна нулю, то дискъ *B* вмѣстѣ съ тѣломъ человѣка описываютъ отрицательныя площади и весь приборъ поворачивается въ сторону обратную часовой стрѣлкѣ. Внизъ можно спустить руку опять въ вертикальной плоскости и привести ее въ прежнее положеніе. Повторяя подобныя движенія человѣкъ будетъ постоянно поворачиваться противъ стрѣлки часовъ.



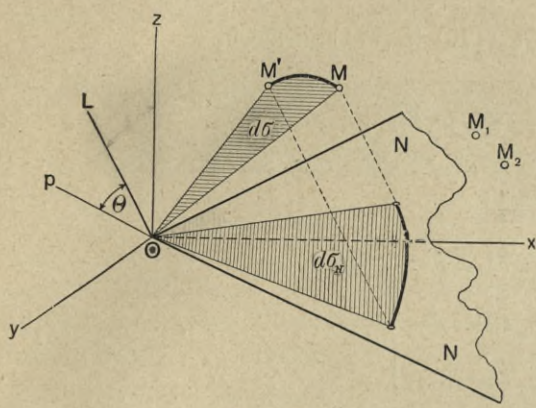
Фиг. 83.

Если человѣкъ вращается на скамейкѣ съ разставленными руками, а потомъ опуститъ руки, то онъ начнетъ вращаться быстрѣе; но, если онъ опять подниметъ руки вверхъ, то онъ будетъ вращаться съ прежней угловой скоростью.

Если мы сначала не имѣемъ скорости, то какія бы манипуляціи мы ни дѣлали, угловая скорость останется равной нулю, когда мы вернемся въ прежнее положеніе.

Итакъ, уголъ пріобрѣсти можно, но угловую скорость получить нельзя.

Если взять кошку за лапки, поднять ее надъ столомъ и выпустить изъ рукъ, то она перевернется въ воздухѣ подъ дѣйствіемъ внутреннихъ силъ и всегда упадетъ на лапки.



Фиг. 84.

Пользуясь интегралами (174), докажемъ теорему о неизмѣнной плоскости Лапласа.

Пусть черезъ начало координатъ *O* проведена произвольная плоскость *N* и къ ней нормаль *L* (фиг. 84). Обозначивъ площадь сектора, описываемую радіусомъ векторомъ нѣкоторой точки *M* за элементъ времени черезъ $d\sigma$ и проведя къ ней нормаль *p*, спроектируемъ ее на плоскость *N*. Тогда получимъ:

$$d\sigma_N = d\sigma \,.\, \cos(L, p).$$

Но

$$\cos(L,p) = \cos(p,x)\cos(L,x) + \cos(p,y)\cos(L,y) + \cos(p,z)\cos(L,z),$$

какъ косинусъ угла между двумя прямыми, и, кромѣ того,

$$\cos(p,x) = \frac{d\sigma_x}{d\sigma}, \quad \cos(p,y) = \frac{d\sigma_y}{d\sigma}, \quad \cos(p,z) = \frac{d\sigma_z}{d\sigma};$$

слѣдовательно

$$d\sigma_N = d\sigma\left[\cos(L,x)\frac{d\sigma_x}{d\sigma} + \cos(L,y)\frac{d\sigma_y}{d\sigma} + \cos(L,z)\frac{d\sigma_z}{d\sigma}\right].$$

Спроектировавъ всѣ секторы $d\sigma$ для всѣхъ точекъ на плоскость *N* и, взявъ сумму произведеній проекцій секторовъ на массы соотвѣтствующихъ имъ точекъ системы, получимъ:

$$\Sigma m\, d\sigma_N = \cos(L,x)\,\Sigma m\, d\sigma_x + \cos(L,y)\,\Sigma m\, d\sigma_y + \cos(L,z)\,\Sigma m\, d\sigma_z.$$

На основаніи уравненія (172) подставимъ сюда:

$A\,\dfrac{dt}{2}$ вмѣсто $\Sigma m\, d\sigma_x$,

$B\,\dfrac{dt}{2}$ » $\Sigma m\, d\sigma_y$,

$C\,\dfrac{dt}{2}$ » $\Sigma m\, d\sigma_z$.

Тогда наше выраженіе напишется такъ:

$$\Sigma m \, d\sigma_N = \frac{dt}{2} \left[A \cos(L, x) + B \cos(L, y) + C \cos(L, z) \right] \quad . \; . \; (175)$$

Далѣе, на основаніи равенствъ (170) и (171) имѣемъ:

$$\text{пр}_z \, G = 2 \, \Sigma m \frac{d\sigma_z}{dt},$$

откуда по уравненію (172) напишемъ:

$$\text{пр}_z \, G = C.$$

По аналогіи получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} \text{пр}_z \, G = C. \\ \text{пр}_x \, G = A, \\ \text{пр}_y \, G = B. \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (176)$$

Слѣдовательно векторъ

$$G = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

а косинусы угловъ, образуемыхъ имъ съ осями координатъ, напишутся:

$$\cos(G, x) = \frac{A}{G}, \quad \cos(G, y) = \frac{B}{G}, \quad \cos(G, z) = \frac{C}{G} \quad . \; . \; . \; (176')$$

Помноживъ и раздѣливъ теперь вторую часть равенства (175) на G, опредѣляемаго изъ (176′), получимъ:

$$\Sigma m \, d\sigma_N = \frac{dt}{2} G \left[\cos(L, x) \cos(G, x) + \cos(L, y) \cos(G, y) + \right.$$

$$\left. + \cos(L, z) \cos(G, z) \right] = \frac{dt}{2} G \cos(G, L).$$

Эта сумма достигаетъ *maximum*'а при $\angle(G, L) = 0$, и тогда

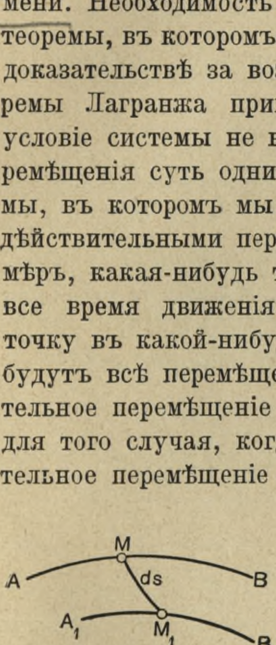
$$max. \; \Sigma m \, d\sigma_N = G \frac{dt}{2}.$$

При этомъ плоскость N будетъ перпендикулярна къ G. Но такъ какъ G образуетъ съ осями постоянные углы, косинусы которыхъ суть $\frac{A}{G}$, $\frac{B}{G}$, $\frac{C}{G}$, то и плоскость N, характеризуемая тѣмъ, что для нея $\Sigma m \frac{d\sigma_N}{dt}$ имѣетъ наибольшее значеніе, равное $\frac{G}{2}$, есть неизмѣняемая плоскость во все время движенія. Эта такъ называемая основная плоскость была указана Лапласомъ.

Благодаря тому, что линейный моментъ пары количествъ движенія остается неизмѣннымъ по величинѣ и направленію, Пуансо выразилъ теорему площадей въ такой формѣ:

Если система можетъ свободно вращаться около начала координатъ, и моментъ внѣшнихъ силъ относительно начала координатъ равенъ нулю, то во все время движенія линейный моментъ G равнодѣйствующей пары, полученной отъ сложенія количествъ движенія, остается неизмѣннымъ.

§ 48. Теорема живыхъ силъ для системы. Теорема живыхъ силъ имѣетъ мѣсто въ томъ случаѣ, когда связи системы не зависятъ отъ времени. Необходимость этого усматривается изъ способа доказательства этой теоремы, въ которомъ исходятъ изъ основного уравненія динамики. Въ этомъ доказательствѣ за возможныя перемѣщенія точекъ системы въ смыслѣ теоремы Лагранжа принимаютъ ея дѣйствительныя перемѣщенія. Если въ условіе системы не входитъ время, то очевидно, что дѣйствительныя перемѣщенія суть одни изъ возможныхъ, т.-е. изъ всякаго положенія системы, въ которомъ мы ее остановимъ во время движенія, ее можно вывести дѣйствительными перемѣщеніями разсматриваемаго момента. Пусть, напримѣръ, какая-нибудь точка системы должна оставаться на поверхности во все время движенія. Если эта поверхность неподвижна, то, остановивъ точку въ какой-нибудь моментъ, мы увидимъ, что для нея возможными будутъ всѣ перемѣщенія по поверхности, а слѣдовательно и то дѣйствительное перемѣщеніе ds, которое получитъ точка во время движенія. Итакъ, для того случая, когда связи системы не зависятъ отъ времени, дѣйствительное перемѣщеніе является однимъ изъ возможныхъ $ds = \delta s$. Если же движеніе точки происходитъ по поверхности AB (фиг. 85), которая съ теченіемъ времени измѣняетъ свое положеніе въ пространствѣ и черезъ промежутокъ времени dt переходитъ въ A_1B_1, то дѣйствительное перемѣщеніе точки M будетъ, напримѣръ, $ds = MM_1$. Если же остановимъ точку M и перестанемъ двигать поверхность, удерживая послѣднюю въ положеніи AB, то дѣйствительное перемѣщеніе ds не будетъ возможнымъ для выхода точки изъ положенія M при условіи ея сохраненія на поверхности AB, а потому и методъ доказательства не можетъ быть приложенъ. Это будетъ еще яснѣе, если сравнимъ формулы, выражающія условія, для дѣйствительныхъ и возможныхъ перемѣщеній.



Фиг. 85.

Пусть система имѣетъ связь, зависящую отъ времени, которая аналитически выражается уравненіемъ вида:

$$f(x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0.$$

Возможныя же перемѣщенія должны удовлетворять условію, существующему при остановленныхъ связяхъ, т.-е. при постоянномъ значеніи t.

Считая t неизмѣннымъ, возьмемъ отъ этой функціи полный дифференціалъ. Поэтому для возможныхъ перемѣщеній получимъ уравненіе вида:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z+\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1+\ldots\ldots+\frac{\partial f}{\partial z_n}\delta z_n=0.$$

Но если бы мы разсматривали не воображаемыя, а дѣйствительныя перемѣщенія, которыя получатъ частицы въ элементъ времени dt, то для дѣйствительныхъ перемѣшеній должно существовать такое соотношеніе:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\ldots\ldots+\frac{\partial f}{\partial z_n}dz_n+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0.$$

Это уравненіе по сравненію съ предыдущимъ имѣетъ добавочный членъ $\frac{\partial f}{\partial t}dt$.

Равенства $dx=\delta x,\ dy=\delta y,\ dz=\delta z,\ dx_1=\delta x_1, \ldots\ldots, dz_n=\delta z_n$ могутъ имѣть мѣсто только при $\frac{\partial f}{\partial t}dt=0$, т.-е. когда въ связи системы не входитъ время. Въ этомъ предположеніи мы можемъ въ основномъ уравненіи динамики (164) принять $\delta x=dx$, $\delta y=dy, \delta z=dz$. Итакъ, если связи системы не зависятъ отъ времени, то дѣйствительныя перемѣщенія можно считать одними изъ возможныхъ; тогда уравненіе (164) приметъ видъ:

$$\Sigma\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)dx+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)dy+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)dz\right]=0;$$

или

$$\Sigma\,(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)=\Sigma\,m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx+\frac{d^2y}{dt^2}dy+\frac{d^2z}{dt^2}dz\right).$$

Лѣвая часть полученнаго уравненія представляетъ собой сумму элементарныхъ работъ всѣхъ дѣйствующихъ силъ:

$$\Sigma\,(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)=\Sigma P\,ds\left[\frac{X}{P}\frac{dx}{ds}+\frac{Y}{P}\frac{dy}{ds}+\frac{Z}{P}\frac{dz}{ds}\right]=\Sigma P\,ds\cos\Theta\,. \quad (177)$$

Въ правой части

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx+\frac{d^2y}{dt^2}dy+\frac{d^2z}{dt^2}dz\right)=d\left(\frac{mv^2}{2}\right),$$

слѣдовательно, имѣемъ:

$$\Sigma P\cos\Theta\,.\,ds=d\,\Sigma\frac{mv^2}{2}\,\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (178)$$

Это и есть теорема живыхъ силъ для системы въ дифференціальной формѣ, т.-е. *сумма элементарныхъ работъ дѣйствующихъ силъ равна дифференціалу всѣхъ живыхъ силъ.*

Часто бываетъ, что силы, дѣйствующія на систему, обладаютъ свойствомъ консервативности, т.-е. для всѣхъ дѣйствующихъ силъ существуетъ нѣкоторая силовая функція U, гдѣ U есть функція координатъ всѣхъ точекъ системы

$$U=f(x,\, y,\, z,\, x_1,\, y_1,\, z_1,\, \ldots\ldots\, x_n,\, y_n,\, z_n),$$

обладающая тѣмъ свойствомъ, что

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}=X_i,\quad \frac{\partial U}{\partial y_i}=Y_i,\quad \frac{\partial U}{\partial z_i}=Z_i.$$

Подставляя эти выраженія въ уравненіе (177), получимъ:

$$\Sigma P\cos\Theta\, ds=\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz)=\Sigma\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz\right)=dU\,. \quad (179)$$

Итакъ, если существуетъ силовая функція, то сумма элементарныхъ работъ дѣйствующихъ силъ равна полному дифференціалу силовой функціи. На основаніи равенства (178) уравненіе (179) приметъ видъ:

$$dU=d\Sigma\frac{mv^2}{2}.$$

Интеграція даетъ:

$$\Sigma\frac{mv^2}{2}=U+C\, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (180)$$

Это и есть *интегралъ живыхъ силъ*, дающій теорему: *Если условіе системы не зависитъ отъ времени и существуетъ силовая функція, то приращеніе живой силы равно силовой функціи плюсъ произвольное постоянное C.*

Пусть для начальнаго момента времени точки системы имѣютъ скорости

$$v=v_0\,,\ v'=v_0',\ v''=v_0'',\ \ldots\,,$$

и силовая функція

$$U=U_0,$$

получимъ:

$$\Sigma\frac{mv_0^{\,2}}{2}=U_0+C.$$

и

$$\Sigma\frac{mv^2}{2}-\Sigma\frac{mv_0^{\,2}}{2}=U-U_0\,;$$

т.-е. *приращенiе живой силы равно приращенiю силовой функцiи.*

Въ физикѣ эта теорема выражается въ такой формѣ:

$$\Sigma\frac{mv^2}{2}+(-U)=\Sigma\frac{mv_0^{\,2}}{2}+(-U_0)=H=const.,$$

гдѣ силовая функцiя съ обратнымъ знакомъ, т.-е. $(-U)=W$ называется *потенцiальной энергiей* и есть запасъ работы, а $\Sigma\frac{mv^2}{2}$ — *кинетической энергiей.* Формула показываетъ, что *сумма потенцiальной и кинетической энергiи для консервативной системы, т.-е. полная энергiя H системы, есть величина постоянная.*

Система называется консервативной, если связи ея не зависятъ отъ времени, и силы, на нее дѣйствующiя, имѣютъ силовую функцiю.

Когда всѣ точки находятся подъ эффектомъ силы тяжести, то для такой системы можемъ написать уравненiе (179)

$$\Sigma(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)=dU \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (179)$$

Для нашего случая

$$X_i=0,\quad Y_i=0,\quad Z_i=-m_i g.$$

Подставляя эти величины въ уравненiе (179), получимъ:

$$-g\,\Sigma\,m\,dz=dU.$$

Интегрируя, получимъ:

$$-g\,\Sigma\,mz=U+C;$$

произвольное постоянное C здѣсь обыкновенно не пишется.

Принявъ во вниманiе, что

$$\Sigma\,mz=M\,.\,\bar{z},$$

имѣемъ:

$$U=-Mg\,.\,\bar{z},$$

или

$$-U=W=Mg\,.\,\bar{z}.$$

Подставивъ это въ наше основное уравненiе (180), получимъ, что для тяжелой системы

$$\Sigma\frac{mv^2}{2}+Mg\,.\,\bar{z}=const.$$

Изъ этого уравненія видно, что если центръ тяжести системы *опускается* внизъ, т.-е z уменьшается, то *живая сила увеличивается*; если же центръ тяжести системы *подымается* вверхъ, то *живая сила уменьшается.*

95 **§ 49. О моментѣ инерціи.** *Моментомъ инерціи* называется выраженіе вида:

$$J = \Sigma m \,.\, d^2,$$

гдѣ m—элементарныя массы, а d—разстояніе этихъ массъ отъ оси, относительно которой пишется моментъ инерціи. Такое выраженіе появляется во всѣхъ вопросахъ динамики, касающихся вращенія твердаго тѣла. Радіусомъ инерціи ϱ называется разстояніе отъ оси вращенія такой точки, сосредоточивая въ которой массу тѣла, получимъ моментъ инерціи такой же, какъ и для всего тѣла. Иначе, это есть корень квадратный изъ отношенія момента инерціи къ массѣ тѣла:

$$\varrho = \sqrt{\frac{J}{M}},$$

и

$$J = M\varrho^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (181')$$

Размѣръ $[J] = [P^1, s^{-1}\, t^2]\,[s^2] = [P^1, s^1, t^2]$.

Вообразимъ, что тѣло отнесено къ прямоугольнымъ осямъ координатъ x, y, z (фиг. 86) и нужно опредѣлить моментъ инерціи этого тѣла относительно оси OL, образующей съ осями координатъ углы α, β, γ. Этотъ моментъ будетъ:

$$J = \Sigma m \,.\, d^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (181)$$

Но

$$\begin{aligned} d^2 &= OM^2 - OP^2 = r^2 - OP^2 = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 \cos^2\Theta = \\ &= (x^2 + y^2 + z^2) - r^2 \left(\frac{x}{r}\cos\alpha + \frac{y}{r}\cos\beta + \frac{z}{r}\cos\gamma\right)^2 = \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - [x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma]^2 = \\ &= \cos^2\alpha\,(y^2 + z^2) + \cos^2\beta\,(z^2 + x^2) + \cos^2\gamma\,(x^2 + y^2) - \\ &\quad - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\alpha\cos\gamma - 2xy\cos\alpha\cos\beta. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} J &= \cos^2\alpha\,\Sigma m\,(y^2 + z^2) + \cos^2\beta\,\Sigma m\,(z^2 + x^2) + \cos^2\gamma\,\Sigma m\,(x^2 + y^2) - \\ &\quad - 2\cos\beta\cos\gamma\,\Sigma myz - 2\cos\alpha\cos\gamma\,\Sigma mzx - 2\cos\alpha\cos\beta\,\Sigma mxy \quad . \; . \quad (182) \end{aligned}$$

Обозначимъ сумму произведеній массъ на сумму квадратовъ двухъ координатъ черезъ:

$$\Sigma m\,(y^2 + z^2) = A,$$

$$\Sigma m\,(z^2 + x^2) = B,$$

$$\Sigma m\,(x^2 + y^2) = C,$$

а сумму произведеній массъ на yz, zx и xy черезъ:

$$\Sigma myz = D,$$

$$\Sigma mzx = E,$$

$$\Sigma mxy = F.$$

Введя эти обозначенія въ уравненіе (182), получимъ выраженіе момента инерціи при произвольномъ направленіи оси:

$$J = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma - 2D\cos\beta\cos\gamma -$$
$$- 2E\cos\alpha\cos\gamma - 2F\cos\alpha\cos\beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (183)$$

Если 6 постоянныхъ A, B, C, D, E и F даны, то легко опредѣлить J для всякаго направленія оси OL.

Можно доказать, что A, B и C суть моменты инерціи тѣла относительно осей x, y и z. Въ самомъ дѣлѣ, направивъ ось OL по оси Ox, будемъ имѣть:

$$\cos\alpha = 1, \quad \cos\beta = \cos\gamma = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

и предыдущее уравненіе дастъ:

$$J_x = A;$$

точно такъ же

$$J_y = B,$$

$$J_z = C.$$

D, E и F называютъ центробѣжными моментами инерціи, такъ какъ они входятъ въ выраженіе моментовъ центробѣжныхъ силъ, относительно осей координатъ.

Докажемъ теперь три теоремы.

Теорема 1. *Если черезъ какую-нибудь точку O проведемъ въ разныхъ направленіяхъ оси OL и отложимъ на нихъ отъ точки O длины* $R = OL = \frac{1}{\sqrt{J}} = \frac{1}{\varrho\sqrt{M}}$, *то геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ L будетъ представлять трехосный эллипсоидъ, имѣющій центромъ точку O* (фиг. 86).

R называется центральнымъ радіусомъ векторомъ эллипсоида инерціи.

Примемъ за начало координатъ точку O. Тогда координаты точки L x, y и z будутъ:

$$x = OL\cos\alpha, \quad y = OL\cos\beta, \quad z = OL\cos\gamma,$$

или

$$x = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{J}}, \quad y = \frac{\cos\beta}{\sqrt{J}}, \quad z = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{J}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (183')$$

Дѣля теперь уравненіе (183) на J, получимъ:

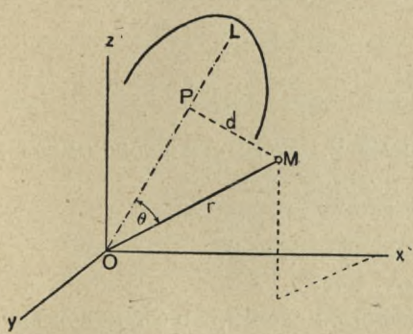
$$1 = A\left(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{J}}\right)^2 + B\left(\frac{\cos\beta}{\sqrt{J}}\right)^2 + C\left(\frac{\cos\gamma}{\sqrt{J}}\right)^2 -$$

$$-2D\frac{\cos\beta}{\sqrt{J}}\cdot\frac{\cos\gamma}{\sqrt{J}} - 2E\frac{\cos\alpha}{\sqrt{J}}\cdot\frac{\cos\gamma}{\sqrt{J}} - 2F\frac{\cos\alpha}{\sqrt{J}}\cdot\frac{\cos\beta}{\sqrt{J}},$$

откуда по уравненію (183') имѣемъ:

$$1 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (184)$$

Это и есть уравненіе нѣкоторой поверхности второго порядка, имѣющей центръ въ началѣ координатъ, такъ какъ въ уравненіи нѣтъ членовъ съ первой степенью неизвѣстныхъ. Поэтому, вообще, мы можемъ допустить, что найденная поверхность есть эллипсоидъ, или гиперболоидъ. Не трудно убѣдиться, что это не будетъ гиперболоидъ. Если бы наша поверхность была гиперболоидомъ, то нѣкоторые изъ радіусовъ векторовъ, параллельные ассимптотическому конусу, были бы равны безконечности. Но $OL = \frac{1}{\sqrt{J}}$, а $J \neq 0$ (при конечныхъ размѣрахъ тѣла), слѣдовательно OL никогда не обратится въ безконечность, что имѣло бы мѣсто въ гиперболоидѣ. Когда рѣчь идетъ о моментѣ инерціи палочки и ось OL взята по самой палочкѣ, тогда $J = 0$. Но эллипсоидъ въ такомъ случаѣ обратится не въ гиперболоидъ, а въ круглый цилиндръ; одна ось его обратится въ безконечность, а двѣ другія полуоси будутъ равны. Слѣдовательно, наша поверхность можетъ быть только эллипсоидомъ, что и доказываетъ теорему.



Фиг. 86.

Этотъ эллипсоидъ называется *эллипсоидомъ инерціи* для точки O. Если точка O есть центръ тяжести тѣла, то эллипсоидъ называется *центральнымъ эллипсоидомъ инерціи.*

Если оси координатъ x, y, z направлены по осямъ эллипсоида инерціи, то въ уравненіе эллипсоида не войдутъ члены съ произведеніемъ координатъ, слѣдовательно въ этомъ случаѣ центробѣжные моменты суть нули:

$$D = E = F = 0.$$

Эти оси называются главными осями эллипсоида инерціи для данной точки.

Уравненіе (184) для этого случая напишется такъ:

$$1 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (185')$$

Иногда бываетъ важно знать ось, около которой, изъ всѣхъ осей, проходящихъ чрезъ данную точку, легче всего вращать тѣло. Для этого находятъ наименьшій моментъ инерціи относительно этихъ осей. Посмотримъ, когда моменты инерціи будутъ наименьшимъ и наибольшимъ. Такъ какъ центральный радіусъ векторъ R эллипсоида инерціи получается, откладывая $R=\frac{1}{\sqrt{J}}$, то $J=\frac{1}{R^2}$.

Если положимъ, что $A<B<C$ и представимъ A, B и C въ видѣ

$$\frac{1}{a^2}=A,\quad \frac{1}{b^2}=B,\quad \frac{1}{c^2}=C,$$

то полуоси эллипсоида суть $a>b>c$.

Наибольшій радіусъ векторъ есть a, а наименьшій c, поэтому полуось a будетъ соотвѣтствовать самому малому моменту инерціи

$$J_{min}=\frac{1}{a^2}.$$

Наибольшій же моментъ инерціи соотвѣтствуетъ полуоси c

$$J_{max}=\frac{1}{c^2}.$$

Изъ уравненія (185′) слѣдуетъ теорема 2. *Если оси координатъ направлены по главнымъ осямъ эллипсоида инерціи, то*

$$\Sigma myz=0,\quad \Sigma mzx=0,\quad \Sigma mxy=0.$$

Когда извѣстенъ центральный эллипсоидъ инерціи, то съ помощью его можно опредѣлить моментъ инерціи относительно всякой оси, проходящей черезъ центръ тяжести. А по этому моменту легко опредѣлить моментъ инерціи относительно всякой другой оси, пользуясь теоремой: *моментъ инерціи относительно какой-нибудь оси равенъ моменту инерціи относительно параллельной оси, проходящей черезъ центръ тяжести плюсъ масса тѣла, умноженная на квадратъ разстоянія между осями.* Доказательство этой теоремы было дано въ элементарномъ курсѣ; повторимъ его здѣсь.

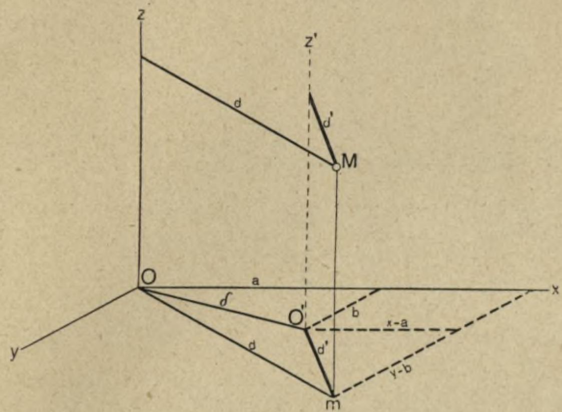
Положимъ, что начало координатъ находится въ центрѣ тяжести и ось Oz параллельна той оси $O'z'$, относительно которой нужно взять моментъ инерціи (фиг. 87).

Полагая координаты точки O' равными a и b, найдемъ искомый моментъ инерціи:

$$J'=\Sigma m(d')^2=\Sigma m[(x-a)^2+(y-b)^2]=$$
$$=\Sigma m(x^2+y^2)+\Sigma m(a^2+b^2)-2a\,\Sigma mx-2b\,\Sigma my.$$

Но

$$\bar{x}=\frac{\Sigma mx}{M}=0,\quad \bar{y}=\frac{\Sigma my}{M}=0;$$



Фиг. 87.

слѣдовательно

$$2a\,\Sigma mx=0 \text{ и } 2b\,\Sigma my=0.$$

А съ другой стороны

$$a^2+b^2=\delta^2.$$

Поэтому находимъ:

$$J'=\Sigma m(x^2+y^2)+$$
$$+\Sigma m\delta^2=J_z+\delta^2\,\Sigma m.$$

Замѣтивъ, что $\Sigma m=M$, получаемъ окончательно:

$$J'=J_z+M\delta^2.$$

Отсюда видно, что моментъ инерціи относительно оси, проходящей черезъ центръ тяжести, всегда меньше момента инерціи, относительно оси, ей параллельной, такъ что наименьшій изъ всѣхъ моментовъ инерціи есть моментъ инерціи относительно большей оси центральнаго эллипсоида инерціи.

Теорема 3. *Если центръ тяжести тѣла лежитъ на одной изъ главныхъ осей эллипсоида инерціи, построеннаго для какой-нибудь точки тѣла, то всѣ эллипсоиды, имѣющіе центры на этой оси, будутъ имѣть упомянутую ось главной осью инерціи.*

Пусть имѣемъ эллипсоидъ инерціи, построенный для какой-нибудь точки O (фиг. 88), и одна изъ главныхъ осей этого эллипсоида инерціи проходитъ чрезъ центръ тяжести C тѣла. Примемъ эту ось за ось z, а оси x и y направимъ какъ-нибудь въ плоскости, перпендикулярной къ z. Посмотримъ, какъ выражается уравненіе даннаго эллипсоида инерціи относительно выбранныхъ нами осей. Если ось z есть одна изъ главныхъ осей эллипсоида, то, пересѣкая его плоскостями xz и yz, мы получимъ эллипсы, отнесенные къ ихъ главнымъ осямъ. Этому условію удовлетворяетъ уравненіе (184) эллипсоида

$$1=Ax^2+By^2+Cz^2-2Fxy\quad\ldots\ldots\ldots\quad(185)$$

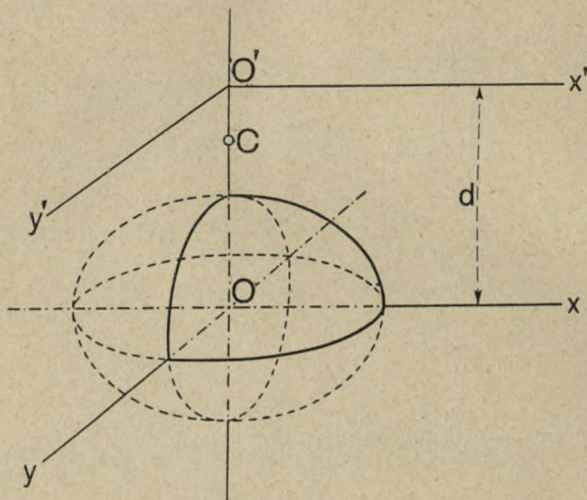
Въ самомъ дѣлѣ, пересѣкая эллипсоидъ плоскостью xz, уравненіе которой есть $y=0$, мы получимъ въ сѣченіи эллипсъ, выражаемый уравненіемъ

$$1=Ax^2+Cz^2,$$

которое отнесено къ главнымъ осямъ. Для плоскости **zy** при $x = 0$ мы получимъ уравненіе эллипса

$$1 = By^2 + Cz^2,$$

гдѣ оси **y** и **z**—главныя оси.



Фиг. 88.

Уравненіе (185) представляетъ эллипсоидъ, для котораго ось **z** есть главная ось. Условіе это выражается тѣмъ, что въ указанномъ уравненіи $D = 0$ и $E = 0$. Слѣдовательно, два условія:

$$D = \Sigma myz = 0,$$

$$E = \Sigma mzx = 0$$

выражаютъ собой, что ось **z** есть главная ось инерціи.

Возьмемъ точку **O'** на оси **z** и покажемъ, что ось **z** будетъ также главной осью эллипсоида, построеннаго для **O'**. Отнесемъ его къ осямъ **x'**, **y'**, **z'**, гдѣ оси **x'** и **y'** параллельны осямъ **x** и **y**, и докажемъ, что для него $D' = 0$ и $E' = 0$.

Зная, что

$$D' = \Sigma my'z'$$

и

$$E' = \Sigma mz'x',$$

замѣнимъ x', y', z' черезъ x, y, z. Формулы перехода будутъ:

$$x' = x,$$

$$y' = y,$$

$$z' = z - OO' = z - d.$$

Слѣдовательно

$$D' = \Sigma\, my\,(z - d) = \Sigma\, myz - d\,\Sigma\, my,$$

$$E' = \Sigma\, mx\,(z - d) = \Sigma\, mzx - d\,\Sigma\, mx.$$

Но

$$\Sigma\, myz = 0 \quad \text{и} \quad \Sigma\, mzx = 0,$$

потому что $D = 0$ и $E = 0$. Кромѣ того, такъ какъ центръ тяжести лежитъ на оси z, то

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\, mx}{M} = 0, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma\, my}{M} = 0,$$

откуда:

$$\Sigma\, mx = 0, \quad \Sigma\, my = 0.$$

Слѣдовательно $E' = 0$ и $D' = 0$, на основаніи чего заключаемъ, что на осяхъ x', y', z' эллипсоидъ инерціи для точки O' располагается такъ, что ось z есть главная ось инерціи, что и требовалось доказать.

26 **§ 50. Вращеніе твердаго тѣла около неподвижной оси.** Положимъ, что тѣло вращается около неподвижной оси. Остановимъ тѣло и прибавимъ силы инерціи; тогда, по принципу д'Аламбера, дѣйствующія силы вмѣстѣ съ силами инерціи дадутъ равновѣсіе. Въ случаѣ неподвижной оси условіе равновѣсія состоитъ въ томъ, что сумма моментовъ всѣхъ силъ относительно этой оси равна нулю.

Проекціи дѣйствующихъ силъ на оси x и y обозначимъ черезъ X и Y, а проекціи силъ инерціи на оси x и y будутъ:

$$\left(-m\frac{d^2x}{dt^2}\right) \quad \text{и} \quad \left(-m\frac{d^2y}{dt^2}\right).$$

Условіе равновѣсія напишется такъ:

$$\Sigma\,(xY - yX) + \Sigma\left[x\left(-m\frac{d^2y}{dt^2}\right) - y\left(-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right] = 0;$$

или

$$\Sigma\,(xY - yX) = \Sigma\, m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

Преобразовывая вторую часть, какъ было показано въ теоремѣ площадей (§ 20), получимъ:

$$\Sigma\,(xY - yX) = \frac{d}{dt}\Sigma\, m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right).$$

Проекціи скоростей точекъ на оси координатъ $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$ выразимъ помощью уравненій Эйлера (19), замѣтивъ, что въ нашемъ случаѣ угловыя скорости вращеній p и q около осей x и y равны нулю, а угловая скорость вращенія r около оси z въ разсматриваемый моментъ равна ω. Получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= qz - ry = -\omega y, \\ \frac{dy}{dt} &= rx - pz = \omega x, \\ \frac{dz}{dt} &= py - qx = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (186')$$

Подставляя эти значенія въ предыдущее уравненіе, находимъ:

$$\Sigma (xY - yX) = \frac{d}{dt} \omega \Sigma m (x^2 + y^2) = J_z \frac{d\omega}{dt},$$

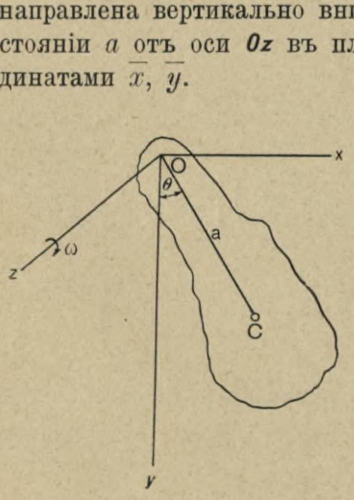
откуда:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma (xY - yX)}{J_z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (186)$$

При вращательномъ движеніи около неподвижной оси угловое ускореніе $\frac{d\omega}{dt}$ *равно суммѣ моментовъ вращающихъ силъ, раздѣленной на моментъ инерціи тѣла относительно разсматриваемой оси.*

§ 51. Физическій маятникъ. *Физическимъ маятникомъ* называется твердое тѣло, находящееся подъ дѣйствіемъ силы тяжести и имѣющее неподвижную горизонтальную ось, не проходящую черезъ его центръ тяжести.

Пусть горизонтальная ось вращенія будетъ Oz (фиг. 89), а ось Oy направлена вертикально внизъ. Центръ тяжести тѣла C находится на разстояніи a отъ оси Oz въ плоскости xy, и положеніе его опредѣляется координатами $\bar{x}$, $\bar{y}$.



Фиг. 89.

Сила тяжести, дѣйствующая на элементъ массы тѣла m, равна mg и направлена параллельно оси y. Слѣдовательно, въ данномъ случаѣ имѣемъ:

$$X = 0, \quad Y = mg.$$

Сумма моментовъ силъ, дѣйствующихъ на тѣло, относительно оси Oz напишется такъ:

$$\Sigma (xY - yX) = g \Sigma mx = gM\bar{x},$$

гдѣ M есть масса всего тѣла. Изъ чертежа видно, что $\bar{x} = a \sin \Theta$, гдѣ Θ—уголъ отклоненія OC отъ вертикальной оси. Поэтому

$$\Sigma (xY - yX) = gMa \,.\, \sin \Theta.$$

Угловое ускореніе около оси по уравненію (186) напишется такъ:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{gMa}{J_z} \sin\Theta.$$

Угловая скорость ω есть предѣлъ отношенія приращенія угла поворота къ соотвѣтствующему приращенію времени.

Будемъ отсчитывать уголъ поворота отъ оси Ox; въ такомъ случаѣ

$$\omega = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) = -\frac{d\Theta}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots (187')$$

откуда

$$dt = -\frac{d\Theta}{\omega}.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\Theta} \cdot \frac{d\Theta}{dt} = -\frac{\omega \,.\, d\omega}{d\Theta} = \frac{gMa}{J_z} \sin\Theta,$$

или

$$\omega \,.\, d\omega = -\frac{gMa}{J_z} \sin\Theta \,.\, d\Theta.$$

Интегрируя, получаемъ:

$$\omega^2 = \frac{2gMa}{J_z} \cos\Theta + C.$$

Въ началѣ движенія, при $\Theta = \Theta_0$, $\omega = 0$; слѣдовательно

$$0 = \frac{2gMa}{J_z} \cos\Theta_0 + C.$$

Вычитая это равенство изъ предыдущаго, имѣемъ:

$$\omega^2 = \frac{gMa}{J_z} \cdot 2(\cos\Theta - \cos\Theta_0);$$

$$\omega = \sqrt{\frac{gMa}{J_z}} \cdot \sqrt{2(\cos\Theta - \cos\Theta_0)}.$$

Мы беремъ знакъ $+$, потому что вращеніе совершается по часовой стрѣлкѣ. Замѣняемъ теперь ω на $-\frac{d\Theta}{dt}$:

$$\frac{d\Theta}{dt} = -\sqrt{\frac{gMa}{J_z}} \sqrt{2(\cos\Theta - \cos\Theta_0)}.$$

Отсюда:

$$dt = -\sqrt{\frac{J_z}{gMa}} \cdot \frac{d\Theta}{\sqrt{2(\cos\Theta - \cos\Theta_0)}},$$

или

$$dt = -\sqrt{\frac{\frac{J_z}{Ma}}{g}} \cdot \frac{d\Theta}{\sqrt{2(\cos\Theta - \cos\Theta_0)}}.$$

Полагая, что

$$\frac{J_z}{Ma} = L,$$

получимъ

$$dt = -\sqrt{\frac{L}{g}} \frac{d\Theta}{\sqrt{2(\cos\Theta - \cos\Theta_0)}}.$$

Эта формула сходна съ формулой (116′), выведенной для математическаго маятника, разница только въ томъ, что вмѣсто l здѣсь стоитъ $L = \frac{J_z}{Ma}$. Итакъ, физическій маятникъ колеблется такъ, какъ математическій, длина котораго L равна моменту инерціи, раздѣленному на произведеніе массы на разстояніе отъ центра тяжести до точки привѣса:

$$L = \frac{J_z}{Ma}.$$

Величина Ma называется *статическимъ моментомъ маятника* относительно оси вращенія.

Обозначивъ черезъ J_0 моментъ инерціи относительно оси, проходящей черезъ центръ тяжести маятника и параллельной оси привѣса, получимъ:

$$J_z = J_0 = Ma^2.$$

Поэтому

$$L = \frac{J_0}{Ma} + a,$$

или

$$(L - a)\,a = \frac{J_0}{M}.$$

Величина $L - a$ оказывается положительной, а слѣдовательно

$$L > a.$$

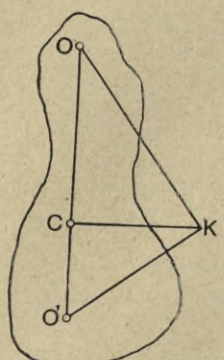
Если отложимъ длину L по линіи **OC** отъ точки **O** (фиг. 90), то получимъ нѣкоторую точку **O′**, называемую *центромъ качанія* и расположенную по предыдущему ниже центра тяжести. Изъ найденной формулы на основаніи уравненія (181') имѣемъ:

$$a(L-a)=\frac{J_0}{M}=\frac{M\varrho_0^{\,2}}{M}=\varrho_0^{\,2};$$

или

$$OC\,.\,O'C=\varrho_0^{\,2}.$$

Отсюда получаемъ простое построеніе центра качанія. Соединяемъ (фиг. 90) центръ тяжести C съ точкой привѣса O; изъ C возставляемъ къ OC перпендикуляръ и откладываемъ на немъ радіусъ инерціи $\varrho_0=CK$ (относительно центра тяжести); соединяемъ точку K съ O и возставляемъ къ KO перпендикуляръ KO' до пересѣченія съ продолженіемъ OC. Точка пересѣченія O' этого перпендикуляра съ OC будетъ искомый центръ качанія. Если бы мы приняли точку O' за точку привѣса и стали искать указаннымъ построеніемъ новый центръ качанія, то нашли бы точку O. Отсюда Теорема Гюйгенса: *центръ качанія и точка привѣса суть точки взаимныя.* Пользуясь этимъ, легко находить центры качанія. Если, обративъ маятникъ и сдѣлавъ точку O' точкой привѣса, мы найдемъ то же время качанія, какое было прежде, то точка O' есть центръ качанія. На основаніи этого соотношенія устраивается оборотный маятникъ Kater'а, извѣстный изъ курса физики.



Фиг. 90.

201.

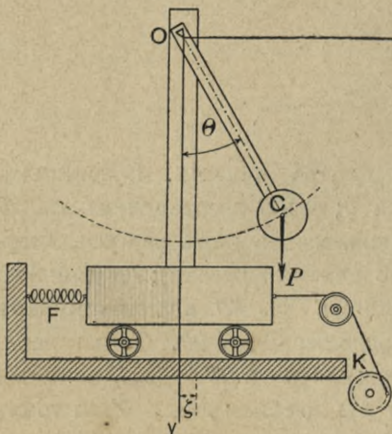
§ 52. О принужденныхъ колебаніяхъ. Будемъ опять разсматривать колебательное движеніе физическаго маятника, но введемъ еще нѣкоторое усложненіе. Предположимъ, что точка привѣса маятника нѣсколько колеблется. Напримѣръ, вообразимъ колеблющійся маятникъ подвѣшеннымъ къ подшипнику, который помощью кривошипнаго механизма можетъ двигаться въ направляющихъ. Эта *раскачка* сказывается на движеніи маятника. При нѣкоторыхъ условіяхъ сопротивленіе воздуха черезъ нѣкоторое время затушитъ колебанія маятника, но принужденное колебаніе останется; если періоды колебанія маятника совпадаютъ съ періодами принужденнаго колебанія, то получаются возрастающіе со временемъ размахи принужденнаго движенія маятника.

Пусть маятникъ (фиг. 91) повѣшенъ на штативѣ, а штативъ подверженъ колебательнымъ движеніямъ подъ дѣйствіемъ кривошипнаго механизма K и пружины F. Движеніе маятника не имѣетъ вліянія на законъ дѣйствія кривошипа и пружины. Раскачка неизмѣнно совершается по опредѣленному гармоническому закону. Пусть телѣжка, а слѣдовательно и точка привѣса O маятника отступаетъ отъ средней линіи на пространство ζ по закону

$$\zeta=b\sin(\lambda t).$$

По теоремѣ Коріолиса мы должны къ силѣ тяжести прибавить еще силы инерціи отъ колебанія телѣжки.

Колеблющіяся оси x и y отходятъ на разстояніе ζ и направо и налѣво, поэтому каждая частица дастъ силу инерціи $m\frac{d^2\zeta}{dt^2}$, но



Фиг. 91.

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -b\lambda^2 \sin(\lambda t),$$

слѣдовательно сила инерціи приметъ видъ:

$$\frac{md^2\zeta}{dt^2} = -mb\lambda^2 \sin(\lambda t).$$

Такъ какъ наши оси движутся поступательно, то силъ инерціи отъ поворотнаго ускоренія не будетъ. Обозначая длину маятника **OC** черезъ a напишемъ угловое ускореніе по формулѣ (186) такъ:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma(xY - yX)}{J} = \frac{Pa \sin\Theta}{J} + \frac{\Sigma mb\lambda^2 \sin(\lambda t)\, y}{J} =$$

$$= \frac{Pa \sin\Theta + b\lambda^2 \sin(\lambda t)\, \Sigma my}{J}.$$

Но

$$\Sigma my = Ma \cos\Theta$$

и

$$P = Mg,$$

слѣдовательно

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Mga \sin\Theta + b\lambda^2 \sin(\lambda t)\, Ma \cos\Theta}{J} \quad \ldots\ldots \quad (187'')$$

Замѣтимъ, что угловая скорость ω по формулѣ (187′) выражается такъ:

$$\omega = -\frac{d\Theta}{dt},$$

откуда

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{d^2\Theta}{dt^2}.$$

Такъ какъ уголъ Θ слишкомъ малъ, то полагаемъ приближенно, что

$$\sin\Theta = \Theta \quad \text{и} \quad \cos\Theta = 1.$$

Подставляя эти величины въ уравненіе (187″), получимъ:

$$-J\frac{d^2\Theta}{dt^2}=Mga\,\Theta+Ma\,b\lambda^2\sin(\lambda t)$$

или

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2}+\frac{Mga}{J}\Theta+\frac{Ma\,b\lambda^2}{J}\sin(\lambda t)=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\mathbf{187})$$

Задача о принужденномъ колебаніи маятника рѣшается интеграціей этого дифференціальнаго уравненія движенія.

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ движенія обыкновеннаго маятника, мы видимъ, что уравненіе (187) имѣетъ добавочный членъ $\frac{Mab\,\lambda^2}{J}\sin(\lambda t)$, зависящій только отъ t.

Опредѣлимъ періодъ колебанія маятника.

Пока разсмотримъ уравненіе (187) безъ послѣдняго члена, т.-е. уравненіе

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2}+\frac{Mga}{J}\Theta=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(188')$$

Интегрируя, получимъ:

$$\Theta=Ce^{\mu t}+C_1e^{-\mu t},$$

гдѣ

$$\mu^2+\frac{Mga}{J}=0,$$

$$\mu=\sqrt{-\frac{Mga}{J}}=\sqrt{\frac{Mga}{J}}\,i,\quad \mu_1=-\sqrt{\frac{Mga}{J}}\,i,$$

а C и C_1 — произвольныя постоянныя.

Тогда получимъ:

$$\Theta=Ce^{t\sqrt{\frac{Mga}{J}}\,i}+C_1e^{-t\sqrt{\frac{Mga}{J}}\,i}.$$

Полагая, что

$$C=\frac{De^{\gamma i}}{2},\quad C_1=\frac{De^{-\gamma i}}{2},$$

получимъ:

$$\Theta=D\left(\frac{e^{\left(t\sqrt{\frac{Mga}{J}}+\gamma\right)i}+e^{-\left(t\sqrt{\frac{Mga}{J}}+\gamma\right)i}}{2}\right).$$

Откуда по извѣстной формулѣ анализа

$$\Theta=D\cos\left(\sqrt{\frac{Mga}{J}}\,t+\gamma\right)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(188'')$$

Называя чрезъ T время одного размаха, получимъ:

$$T\sqrt{\frac{Mga}{J}}=\pi, \quad \frac{Mga}{J}=\frac{\pi^2}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (188''')$$

Имѣя интегралъ уравненія (187) безъ послѣдней части, будемъ отыскивать какое-нибудь частное значеніе уравненія (187). Пусть частный интегралъ уравненія (187) будетъ $\Theta=\psi$.

Если найдемъ частный интегралъ, то общій интегралъ уравненія (187) съ послѣднимъ членомъ будетъ тоже найденъ. Этотъ общій интегралъ уравненія (187) съ послѣднимъ членомъ будетъ равенъ интегралу уравнененія (187) безъ послѣдняго члена плюсъ частный интегралъ.

Положимъ

$$\psi=A\cos(\lambda t)+B\sin(\lambda t).$$

Подставляя это выраженіе въ уравненіе (187), получимъ:

$$-\lambda^2\Big[A\cos(\lambda t)+B\sin(\lambda t)\Big]+\frac{Mga}{J}\Big[A\cos(\lambda t)+B\sin(\lambda t)\Big]+\frac{Mab\,\lambda^2}{J}\sin(\lambda t)=0$$

или

$$\cos(\lambda t)\Big[-\lambda^2 A+A\frac{Mga}{J}\Big]+\sin(\lambda t)\Big[-\lambda^2 B+B\frac{Mga}{J}+\frac{Mab}{J}\lambda^2\Big]=0.$$

Для того, чтобы это условіе удовлетворялось при всякомъ t, необходимо имѣть:

$$A\left(\frac{Mga}{J}-\lambda^2\right)=0,$$

$$B\left(\lambda^2-\frac{Mga}{J}\right)=\frac{Mab}{J}\lambda^2.$$

Отсюда получаемъ:

$$A=0,$$

$$B=\frac{\frac{Mab}{J}\lambda^2}{\lambda^2-\frac{Mga}{J}}.$$

Напишемъ теперь весь интегралъ уравненія (187) съ послѣднимъ членомъ

$$\Theta=\frac{\frac{Mab}{J}\lambda^2}{\lambda^2-\frac{Mga}{J}}\sin(\lambda t)+D\cos\left(\sqrt{\frac{Mga}{J}}\,t+\gamma\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (188)$$

гдѣ D и γ—произвольныя постоянныя.

Обозначимъ теперь черезъ T_1 — періодъ полнаго размаха площадки и напишемъ:

$$\zeta = b \sin \lambda t,$$

откуда

$$\lambda T_1 = \pi$$

и

$$\lambda = \frac{\pi}{T_1}.$$

Подставляя эти величины въ уравненіе (188), а также величину (188'''), получимъ:

$$\Theta = \frac{\left(\frac{\pi^2}{T^2} \cdot \frac{\pi^2}{T_1{}^2}\right) b}{\left(\frac{\pi^2}{T_1{}^2} - \frac{\pi^2}{T^2}\right) g} \sin \frac{\pi t}{T_1} + D \cos \left[\frac{\pi}{T} t + \gamma\right]$$

или

$$\Theta = \frac{\pi^2 b}{(T^2 - T_1{}^2) g} \sin \frac{\pi t}{T_1} + D \cos \left(\frac{\pi}{T} t + \gamma\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (\mathbf{189})$$

Изъ этого уравненія видно, что если разность между T и T_1 весьма мала, т.-е. періоды колебанія маятника и періоды принужденнаго колебанія весьма близки другъ къ другу, то первый членъ нашего уравненія великъ и маятникъ получитъ большія принужденныя колебанія.

Опредѣлимъ произвольныя постоянныя D и γ по начальнымъ даннымъ.

Дифференцируя уравненіе (189) получимъ:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\pi^2 b}{(T^2 - T_1{}^2) g} \frac{\pi}{T_1} \cos \frac{\pi t}{T_1} - D \frac{\pi}{T} \sin \left(\frac{\pi}{T} t + \gamma\right) \quad . \; . \; . \; (190')$$

Опредѣляемъ D и γ. Положимъ, что $t = 0$, $\Theta = \Theta_0$, $\frac{d\Theta}{dt} = 0$. Подставляя эти значенія въ уравненія (189) и (190') получимъ:

$$\Theta_0 = D \cos \gamma \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (190'')$$

откуда

$$D = \frac{\Theta_0}{\cos \gamma}.$$

Далѣе

$$O = \frac{\pi^2 b}{(T^2 - T_1{}^2) g} \frac{\pi}{T_1} - D \frac{\pi}{T} \sin \gamma \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (190''')$$

Дѣля уравненіе (190''') на (190''), получимъ:

$$\frac{\pi^2 b}{(T^2 - T_1{}^2) g} \frac{\pi}{T_1 \Theta_0} = \frac{D \frac{\pi}{T} \sin \gamma}{D \cos \gamma}$$

или

$$tg\,\gamma = \frac{\pi^2 b\, T}{(T^2 - T_1^{\,2})\, g T_1 \Theta_0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (190)$$

Далѣе опредѣляемъ D:

$$D^2 = \frac{\Theta_0^{\,2}}{cos^2\gamma} = \Theta_0^{\,2}(1 + tg^2\gamma) = \Theta_0^{\,2} + \frac{\pi^4 b^2\, T^2}{(T^2 - T_1^{\,2})^2 g^2 T_1^{\,2}} \quad \ldots (191)$$

откуда

$$D = \sqrt{\Theta_0^{\,2} + \frac{\pi^4 b^2\, T^2}{(T^2 - T_1^{\,2})^2 g^2 T_1^{\,2}}}.$$

Колебанія судовъ на спокойной поверхности моря выражаются формулою (188), при чемъ роль a играетъ разстояніе между центромъ тяжести и метоцентромъ.

Если судно не глубоко сидитъ въ водѣ, то оно имѣетъ большую *остойчивость*, т.-е. величина Ma большая.

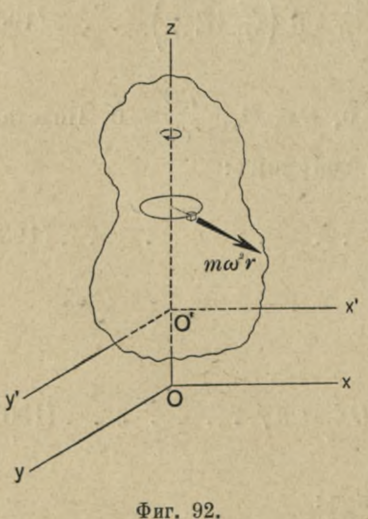
При этомъ, согласно формулѣ (188'''), время T мало и колебанія быстры.

Формула (189) даетъ для судна размахи колебанія на волнахъ, при чемъ T_1 соотвѣтствуетъ періоду волнъ. Большіе размахи получитъ судно при условіи близкомъ къ созвучію $T_1 = T$.

Если судно остойчиво и T мало, то для него опасны волны небольшого періода T_1, которыя чаще встрѣчаются. Свойство судна не раскачиваться на волнахъ называется его *устойчивостью*. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что *остойчивое* судно обладаетъ малою *устойчивостью*.

§ 53. О свободной оси вращенія.

Свободною осью вращенія твердаго тѣла называется такая ось въ тѣлѣ, *около которой оно можетъ вращаться равномѣрно безъ того, чтобы ось нуждалась въ поддержкѣ, если на тѣло не дѣйствуютъ внѣшнія силы.*



Фиг. 92.

Положимъ, что тѣло вращается около оси Oz (фиг. 92) съ постоянною угловою скоростью ω. По принципу д'Аламбера, остановивъ тѣло и прибавивъ къ силамъ дѣйствующимъ силы инерціи, мы получимъ равновѣсіе. Въ нашемъ случаѣ на тѣло не дѣйствуютъ никакія внѣшнія силы. Каждая точка даннаго тѣла описываетъ кругъ и силами инерціи будутъ только центробѣжныя силы. Если эти центробѣжныя силы взаимно уравновѣшиваются, то для равновѣсія тѣла не надо удерживать его ось вращенія, и, слѣдовательно, эта ось окажется свободной осью вращенія. Для этого центробѣжныя силы инерціи должны удовлетворять слѣдующимъ шести уравненіямъ равновѣсія:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma(yZ - zY) = 0,$$
$$\Sigma Y = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0,$$
$$\Sigma Z = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Но центробѣжная сила инерціи, дѣйствующая на элементъ массы m, находящійся на разстояніи r отъ оси вращенія, равна $m\omega^2 r$, а проекціи этой центробѣжной силы на оси координатъ будутъ:

$$X = m\omega^2 r \frac{x}{r} = m\omega^2 x,$$

$$Y = m\omega^2 r \frac{y}{r} = m\omega^2 y,$$

$$Z = 0.$$

Поэтому первыя три условія равновѣсія представятся такъ:

$$\Sigma m\omega^2 x = \omega^2 \Sigma mx = 0,$$
$$\Sigma m\omega^2 y = \omega^2 \Sigma my = 0,$$
$$\Sigma 0 = 0,$$

или:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma mx = 0, \\ \Sigma my = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (192)$$

Далѣе, извѣстно, что координаты центра тяжести выражаются такъ:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma mx}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma my}{M}, \quad \bar{z} = \frac{\Sigma mz}{M},$$

а принимая во вниманіе равенство (192), получаемъ:

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = 0,$$

т.-е. свободная ось вращенія должна проходить черезъ центръ тяжести.

Три послѣднихъ условія равновѣсія послѣ подстановки дадутъ:

$$\Sigma(y \,.\, 0 - zm\omega^2 y) = 0,$$
$$\Sigma(zm\omega^2 x - x \,.\, 0) = 0,$$
$$\Sigma(xm\omega^2 y - ym\omega^2 x) = 0.$$

или:

$$\Sigma myz = D = 0,$$

$$\Sigma mzx = E = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что два центробѣжные момента инерціи должны равняться нулю.

Такимъ образомъ на оси O_z лежитъ центръ тяжести, и эллипсоидъ инерціи, построенный для точки O, имѣетъ эту ось своею главной осью инерціи. По теоремѣ 3 для моментовъ инерціи всякій эллипсоидъ инерціи, имѣющій центръ на оси Oz, будетъ имѣть одною изъ своихъ главныхъ осей эту ось. Отсюда слѣдуетъ, что эта ось будетъ главною осью центральнаго эллипсоида инерціи.

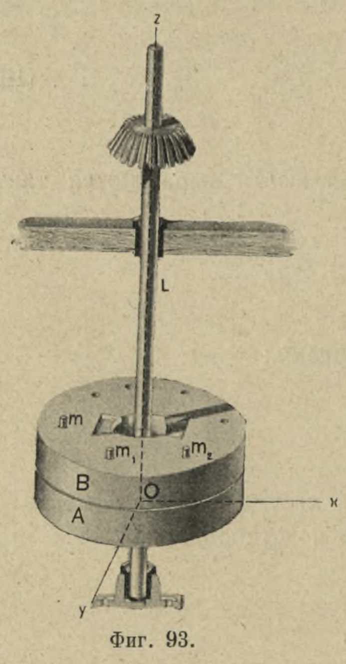
Итакъ, *для того, чтобы ось вращенія тѣла была свободной осью, необходимо, чтобы центръ тяжести лежалъ на оси вращенія*, т.-е.:

$$\bar{x} = 0, \ \bar{y} = 0,$$

и чтобы ось вращенія была одной изъ трехъ главныхъ осей центральнаго эллипсоида инерціи тѣла:

$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mxz = 0.$$

Такъ какъ центральный эллипсоидъ имѣетъ три оси, то во всякомъ тѣлѣ существуютъ три свободныя оси вращенія, направленныя по тремъ главнымъ осямъ центральнаго эллипсоида инерціи. Если центральный эллипсоидъ есть шаръ, то всякая ось, проходящая черезъ центръ тяжести, есть свободная ось вращенія. Не надо думать, что такимъ свойствомъ обладаютъ только тѣла шарообразной формы. Такимъ свойствомъ обладаетъ, напримѣръ, кубъ, для котораго центральный эллипсоидъ инерціи, какъ извѣстно, есть шаръ, и его вращеніе ничѣмъ не отличается отъ вращенія шара.



Фиг. 93.

Есть тѣла, у которыхъ центральный эллипсоидъ инерціи не есть шаръ, но имѣются нѣкоторыя точки, для которыхъ эллипсоидомъ будетъ шаръ, это въ томъ случаѣ, когда центральный эллипсоидъ есть сплюснутый эллипсоидъ вращенія; на его оси можно найти двѣ точки, для которыхъ эллипсоидъ инерціи есть шаръ.

Пользуясь этой теоремой, выяснимъ, какимъ образомъ центрируются жернова. На фигурѣ (93) A представляетъ лежакъ, а B—бѣгунъ. Жерновъ B прикрѣпленъ къ центральной оси L. Статическое равновѣсіе жернова достигается уже тѣмъ, что его центръ тяжести лежитъ на оси L, чтобы жерновъ могъ стоять строго горизонтально. Когда жерновъ вращается, то появляются еще центробѣжныя силы; надо достигнуть того, чтобы эти силы инерціи взаимно уравновѣшивались, иначе жерновъ будетъ бить, такъ какъ ось вращенія не можетъ удерживать этихъ силъ инерціи—ее расшатаетъ. Итакъ, для динамическаго равновѣсія необходимо, чтобы ось вращенія была свободной осью. Достигается это подниманіемъ и опусканіемъ массивовъ m, m_1, m_2, m_3..., помѣщаемыхъ въ дырахъ, просверленныхъ въ жерновѣ. Дѣйствительно, для того, чтобы ось L была свободной осью, необходимо и достаточно соблюденіе условій:

$$\overline{x}=0,$$

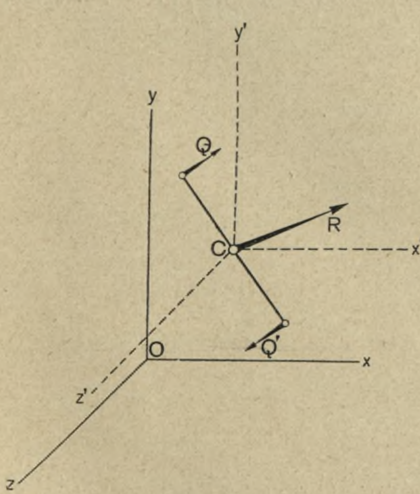
$$\overline{y}=0,$$

$$D=\Sigma myz=0,$$

$$E=\Sigma mzx=0.$$

Первыя два условія удовлетворяются, такъ какъ ось вращенія проходитъ черезъ центръ тяжести. Для удовлетворенія же двухъ послѣднихъ условій мы можемъ измѣнять z, поднимая и опуская вышеупомянутые массивы, не смѣщая этимъ центръ тяжести съ оси L, но D и E измѣняются и получаются равными нулю.

97 **§ 54. Движеніе твердаго тѣла параллельно плоскости.** Пусть твердое тѣло массы M подъ дѣйствіемъ нѣкоторыхъ силъ движется параллельно плоскости xy, проходящей черезъ его центръ тяжести C (фиг. 94). Каждую изъ дѣйствующихъ силъ продолжимъ до пересѣченія съ плоскостью xy и разложимъ на двѣ: одну, направленную по плоскости и другую, перпендикулярную къ ней. Послѣдняя уничтожается силами связей, реакціей плоскости. Если же сила параллельна плоскости, то мы перенесемъ ее на плоскость въ точку, представляющую проекцію на плоскость ея точки приложенія, и прибавимъ пару. Пару эту можно повернуть такъ, чтобы силы ея стали перпендикулярными къ плоскости; слѣдовательно, пара эта уничтожается реакціями связей.



Фиг. 94.

Ясно, что если всѣ силы приводятся къ силамъ, лежащимъ въ плоскости xy, а всѣ массы расположены симметрично относительно этой плоскости, то связи не нужны: тѣло будетъ двигаться параллельно плоскости xy, оставаясь свободнымъ.

Итакъ, вся система приводится къ силамъ, находящимся въ плоскости xy. Перенесемъ ихъ въ центръ тяжести тѣла C и, прибавляя пары, получимъ въ результатѣ силу R (равнодѣйствующую всѣхъ силъ, движущихъ тѣло) и пару (Q, Q'), стремящуюся вертѣть тѣло около оси, проходящей черезъ центръ тяжести; при чемъ и сила и пара лежатъ въ плоскости xy. Посмотримъ, каково будетъ движеніе.

По принципу д'Аламбера, силы, дѣйствующія вмѣстѣ съ силами инерціи, даютъ равновѣсіе. Проекціи силъ инерціи на оси x и y представляются такъ:

$$\left(-m\frac{d^2x}{dt^2}\right) \text{ и } \left(-m\frac{d^2y}{dt^2}\right).$$

Условій равновѣсія въ нашемъ случаѣ будетъ три:

$$\Sigma X = 0,$$

$$\Sigma Y = 0,$$

$$\Sigma (yX - xY) = 0.$$

Они напишутся такъ:

$$R_x + \Sigma\left(-m\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (193)$$

$$R_y + \Sigma\left(-m\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (194)$$

$$\bar{y}R_x - \bar{x}R_y + L + \Sigma\left[y\left(-m\frac{d^2x}{dt^2}\right) - x\left(-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right] \ldots = 0 \quad (195)$$

гдѣ L—моментъ пары (Q, Q').

Изъ уравненія (193) находимъ:

$$R_x = \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\Sigma mx;$$

но извѣстно, что координата центра тяжести

$$\bar{x} = \frac{\Sigma mx}{M},$$

а слѣдовательно

$$R_x = M\cdot\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (196)$$

Аналогично изъ уравненія (194) находимъ:

$$R_y = M\cdot\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (197)$$

Полученныя равенства представляютъ дифференціальныя уравненія движенія центра тяжести. Они показываютъ, что *центръ тяжести даннаго тѣла движется поступательно, какъ матеріальная точка массы M, къ которой приложены всѣ силы, дѣйствующія на тѣло.*

Рѣшимъ вопросъ о вращательномъ движеніи около центра тяжести.

Изъ уравненія (195), произведя преобразованіе, уже встрѣчавшееся въ теоремѣ площадей (§ 20), получимъ:

$$\bar{y}R_x - \bar{x}R_y + L = \frac{d}{dt}\Sigma m\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right).$$

Перейдемъ къ новымъ подвижнымъ осямъ x', y', z', параллельнымъ x, y, z и имѣющимъ постоянно начало въ центрѣ тяжести C (фиг. 94).

Формулы перехода напишутся:

$$x = x' + \bar{x}, \quad y = y' + \bar{y}.$$

Получимъ:

$$\bar{y}R_x - \bar{x}R_y + L = \frac{d}{dt}\Sigma m\left[(y'+\bar{y})\left(\frac{dx'}{dt} + \frac{d\bar{x}}{dt}\right) - (x'+\bar{x})\left(\frac{dy'}{dt} + \frac{d\bar{y}}{dt}\right)\right] =$$

$$= \frac{d}{dt}\Sigma m\left(y'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dy'}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\Sigma m\left(\bar{y}\frac{d\bar{x}}{dt} - \bar{x}\frac{d\bar{y}}{dt}\right) +$$

$$+ \frac{d}{dt}\Sigma m\left(y'\frac{d\bar{x}}{dt} - x'\frac{d\bar{y}}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\Sigma m\left(\bar{y}\frac{dx'}{dt} - \bar{x}\frac{dy'}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\Sigma m\left(y'\frac{dx'}{dt} -\right.$$

$$\left. - x'\frac{dy'}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\Sigma m\left(\bar{y}\frac{d\bar{x}}{dt} - \bar{x}\frac{d\bar{y}}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(\Sigma my'\frac{d\bar{x}}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\left(\Sigma mx'\frac{d\bar{y}}{dt}\right) +$$

$$+ \frac{d}{dt}\left(\Sigma m\bar{y}\frac{dx'}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\left(\Sigma m\bar{x}\frac{dy'}{dt}\right).$$

Но центръ тяжести всегда находится въ началѣ координатъ x', y', z', поэтому

$$\bar{x'} = \frac{\Sigma mx'}{M} = 0,$$

$$\bar{y'} = \frac{\Sigma my'}{M} = 0,$$

и слѣдовательно

$$\Sigma mx' = 0,$$

$$\Sigma my' = 0.$$

На основаніи этихъ равенствъ послѣдніе четыре члена въ нашемъ уравненіи равны нулю. (Замѣтимъ, что $\frac{d}{dt}\left(\Sigma m\bar{x}\frac{dy'}{dt}\right)$ можетъ быть представлено въ такомъ видѣ: $\frac{d}{dt}\left(\bar{x}\frac{d\Sigma my'}{dt}\right)$ и потому равно нулю.) Уравненіе напишется теперь такъ:

$$\bar{y}R_x-\bar{x}R_y+L=M\bar{y}\frac{d^2x}{dt^2}-M\bar{x}\frac{d^2y}{dt}+\frac{d}{dt}\Sigma m\left(y'\frac{dx'}{dt}-x'\frac{dy'}{dt}\right).$$

На основаніи уравненій (196) и (197) первые два члена первой части равенства сокращаются съ первыми двумя членами второй части, и уравненіе приводится къ слѣдующему виду:

$$L=\frac{d}{dt}\Sigma m\left(y'\frac{dx'}{dt}-x'\frac{dy'}{dt}\right).$$

Если вращеніе совершается съ угловою скоростью ω, то по формуламъ Эйлера (19) согласно фигурѣ (94), полагая $p=0$, $q=0$ и $r=-\omega$, получимъ:

$$\frac{dx'}{dt}=\omega y',\quad \frac{dy'}{dt}=-\omega x'.$$

Подставляя эти выраженія, находимъ:

$$L=\frac{d}{dt}\Sigma m(y'^2+x'^2)\,\omega,$$

или:

$$L=J_0\frac{d\omega}{dt},$$

гдѣ J_0—моментъ инерціи тѣла относительно оси Oz', проходящей черезъ центръ тяжести C. Слѣдовательно, *моментъ вращающей пары равенъ моменту инерціи тѣла относительно оси Oz', умноженному на угловое ускореніе.*

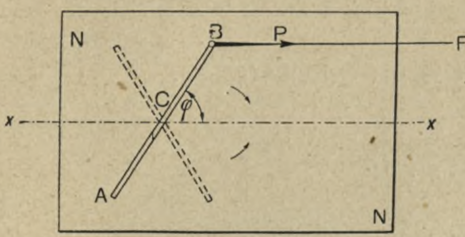
Отсюда:

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{L}{J_0}.$$

Это та же самая формула, которая была выведена для вращенія тѣла около неподвижной оси.

Итакъ, при движеніи твердаго тѣла параллельно нѣкоторой плоскости всѣ силы сводятся къ одной силѣ, приложенной въ центрѣ тяжести, и къ одной парѣ, вращающей тѣло около оси, перпендикулярной къ данной плоскости. *Движеніе происходитъ такъ: центръ тяжести движется подъ дѣйствіемъ упомянутой силы, какъ матеріальная точка массы M (гдѣ M—масса всего тѣла), а тѣло вращается около оси, перпендикулярной къ данной плоскости и проходящей черезъ центръ тяжести тѣла, съ угловымъ ускореніемъ, равнымъ моменту упомянутой пары, дѣленному на моментъ инерціи тѣла относительно оси вращенія.*

Возьмемъ слѣдующій примѣръ. Палочка AB массы M и длины $2a$ (фиг. 95) лежитъ на гладкомъ столѣ NN. Къ ея концу B привязана нить F, за которую палочку тянутъ съ постоянной силой P. При первоначальномъ положеніи нить образуетъ съ направленіемъ палочки уголъ φ. Опредѣлить, каково будетъ движеніе палочки.



Фиг. 95.

По вышеизложенной теоремѣ центръ тяжести палочки будетъ двигаться такъ, какъ движется матеріальная точка массы M подъ дѣйствіемъ силы P. Сила P постоянна и, слѣдовательно, центръ тяжести палочки будетъ двигаться прямолинейно и равномѣрно-ускоренно съ ускореніемъ

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{P}{M}.$$

Интегрируя это уравненіе два раза, получимъ:

$$x=Ct+\frac{P}{M}\,\frac{t^2}{2}.$$

Кромѣ того, палочка будетъ имѣть такое движеніе около центра тяжести, какое она получила бы подъ дѣйствіемъ силы P, если бы ея центръ тяжести C былъ неподвиженъ. Моментъ силы, производящей это движеніе, равенъ $(Pa\,.\,sin\,\varphi)$. Нить настолько длинна, что при всѣхъ положеніяхъ палочки она будетъ оставаться параллельной самой себѣ.

Угловое ускореніе около, проходящей чрезъ центръ тяжести перпендикулярно плоскости, оси по формулѣ (186) напишется такъ:

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{Pa\,sin\,\varphi}{\dfrac{Ma^2}{3}}.$$

Будемъ отсчитывать уголъ поворота φ отъ оси x, по которой движется центръ тяжести; въ такомъ случаѣ

$$\omega=\frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=-\frac{d\varphi}{dt}.$$

Слѣдовательно

$$\omega\,.\,d\omega=-\frac{3P}{Ma}\,sin\,\varphi\,d\varphi.$$

Интегрируя, получаемъ:

$$\omega^2 = \frac{6P}{Ma} \cos\varphi + C.$$

Въ началѣ движенія при $\varphi = \varphi_0$, $\omega = 0$; слѣдовательно,

$$0 = \frac{6P}{Ma} \cos\varphi_0 + C.$$

Вычитая это равенство изъ предыдущаго, имѣемъ:

$$\omega^2 = \frac{6P}{Ma} (\cos\varphi - \cos\varphi_0),$$

отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{6P}{Ma}} \sqrt{(\cos\varphi - \cos\varphi_0)} = -\frac{d\varphi}{dt}$$

и

$$dt = -\sqrt{\frac{Ma}{6P}} \frac{d\varphi}{\sqrt{(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}}.$$

Эта формула сходна съ формулой, выведенной для маятника, разница только въ томъ, что въ нашемъ случаѣ

$$\sqrt{\frac{l}{g}} = \sqrt{\frac{M}{6P} \frac{a}{g}}.$$

Отсюда видимъ, что сила P сообщитъ палочкѣ AB колебательное движеніе, свойственное маятнику, длина котораго

$$l = \frac{M}{6P} a.$$

Do końca przetrzeslane

§ 55. Задачи къ динамикѣ системы. Задача 1. Грузъ G (фиг. 96) поднимаетъ съ помощью подвижного блока грузъ G_1. Вѣса обоихъ блоковъ $= P$, радіусы блоковъ одинаковы и равны r. Опредѣлить ускореніе груза G. Вѣсъ обоймицы включенъ въ G_1.

Рѣшеніе.

Вообразивъ систему остановленной, приложимъ силы инерціи $Q = \frac{G}{g} . j$ и $R = \frac{G_1 + P}{g} \cdot \frac{j}{2}$. Кромѣ того, отъ силъ инерціи образуются еще пары силъ. Моментъ инерціи блоковъ будетъ равенъ приведенной массѣ, умноженной на квадратъ радіуса. Если это произведеніе помножить на угловое ускореніе, то полученный результатъ можно выразить такъ:

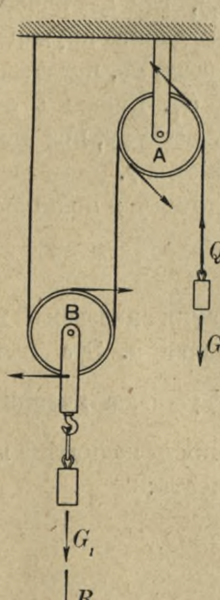
$$\frac{P}{2g}r\cdot j,$$

гдѣ угловое ускореніе есть

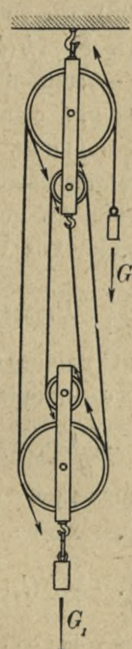
$$\frac{j}{2r}.$$

Принимая во вниманіе, что блоки при опущеніи груза G на δx вертятся въ сторону, противоположную дѣйствію пары силъ инерціи, приравниваемъ нулю сумму всѣхъ элементарныхъ работъ:

$$\left(G-\frac{G}{g}\cdot j\right)\delta x-\frac{P}{2g}r\cdot j\cdot\frac{\delta x}{r}-\left(\frac{G_1+P}{g}\cdot\frac{j}{2}+G_1+P\right)\frac{\delta x}{2}-\frac{P.r}{4g}\cdot j\cdot\frac{\delta x}{2r}=0.$$



Фиг. 96.



Фиг. 97.

Сдѣлавъ необходимыя преобразованія, получимъ, что

$$j=g\frac{\left(G-\dfrac{G_1+P}{2}\right)}{G+\dfrac{G_1}{4}+\dfrac{7P}{8}}.$$

Задача 2. Грузъ G (фиг. 97) поднимаетъ съ помощью полиспаста грузъ G_1, въ вѣсъ котораго включенъ вѣсъ подвижной обоймицы. Всѣхъ блоковъ четыре.

Вѣса большихъ блоковъ — P, вѣса малыхъ блоковъ — p, радіусы большихъ блоковъ равны r, а радіусы малыхъ равны r_1. Опредѣлить ускореніе груза G.

Рѣшеніе.

Силы инерціи всякаго тѣла слагаются:

1) изъ силъ инерціи въ поступательномъ движеніи со скоростью центра тяжести и

2) изъ силъ инерціи вращательнаго движенія около центра тяжести.

A) Элементарная работа вѣсовъ и силъ инерціи отъ поступательнаго движенія:

$$\left(G-\frac{G}{g}j\right)\delta x-\left[\left(\frac{G_1}{g}+\frac{P+p}{g}\right)\frac{j}{4}+P+p+G_1\right]\frac{\delta x}{4}.$$

B) Элементарная работа силъ инерціи отъ вращательнаго движенія:

$$-\frac{P}{2g}r\cdot j\cdot\frac{\delta x}{r}-\frac{P}{2g}r\frac{3j}{4}\frac{3\delta x}{4r}-\frac{p}{2g}\frac{2j}{4}r_1\frac{2\delta x}{4r_1}-\frac{p}{2g}\frac{j}{4}r_1\frac{\delta x}{4r_1}.$$

Сумма всѣхъ этихъ работъ должна равняться нулю.

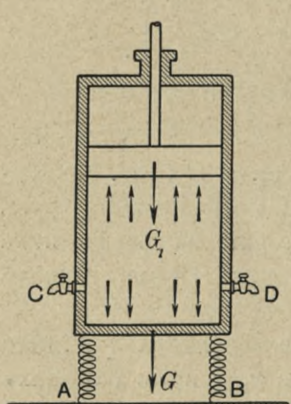
$$\left(G-\frac{G}{g}j\right)\delta x-\left[\left(\frac{G_1}{g}+\frac{P+p}{g}\right)\frac{j}{4}+P+p+G_1\right]\frac{\delta x}{4}-\frac{P}{2g}\cdot r\cdot j\frac{\delta x}{r}-$$

$$-\frac{P}{2g}r\frac{3j}{4}\frac{3\delta x}{4r}-\frac{p}{2g}\frac{2j}{4}r_1\cdot\frac{2\delta x}{4r_1}-\frac{p}{2g}\cdot\frac{j}{4}\cdot r_1\frac{\delta x}{4r_1}=0.$$

Отсюда

$$j=g\frac{G-\dfrac{G_1+P+p}{4}}{G+\dfrac{G_1}{16}+\dfrac{27}{32}P+\dfrac{13}{32}p}.$$

Задача 3. Цилиндръ вѣса G (фиг. 98) въ точкахъ **A** и **B** поддерживается пружинами, сопротивленіе которыхъ $F=k(l_0-l_1)$, гдѣ l_0—начальная длина, а l_1—уменьшенная длина пружинъ. Цилиндръ заключаетъ сжатый воздухъ, поддерживающій въ немъ поршень вѣса G_1. Краны **C** и **D** открываютъ и даютъ вытекать воздуху, при чемъ поршень опускается съ ускореніемъ γ.



Фиг. 98.

Опредѣлить, насколько поднимется цилиндръ.

Рѣшеніе.

Давленіе на площадь поршня назовемъ черезъ $p\,.\,\sigma$, гдѣ σ—площадь поршня. Эта величина $p\,.\,\sigma=G_1-\frac{G_1}{g}\gamma$, гдѣ $\frac{G_1}{g}\gamma$—сила инерціи.

Называя искомую величину поднятія цилиндра черезъ x, можемъ написать:

$$p\,.\,\sigma=k(l_0-x)-G.$$

На основаніи полученныхъ уравненій имѣемъ:

$$k(l_0-x)=G_1+G-\frac{G_1}{g}\gamma \quad \dots\dots\dots\dots (a)$$

Но такъ какъ

$$(G_1+G)=k(l_0-l_1) \quad \dots\dots\dots\dots (b)$$

то, вычитая уравненіе (b) изъ уравненія (a), получимъ:

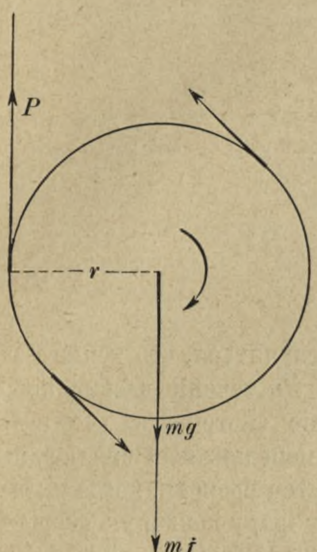
$$x=l_1+\frac{G_1}{k}\cdot\frac{\gamma}{g}.$$

Задача 4. На цилиндръ съ горизонтальной осью (фиг. 99), имѣющій массу m, намотана нить, свободный конецъ которой движется равномѣрно-ускоренно вверхъ съ ускореніемъ f.

Какъ будетъ двигаться цилиндръ?

Рѣшеніе.

Назовемъ силу черезъ P и приложимъ начало d'Alamber'a. Положимъ, что система остановлена. Такъ какъ центръ тяжести движется вверхъ, то сила инерціи направится внизъ и равна mj.



Фиг. 99.

Моментъ пары $= J\dfrac{d\omega}{dt}$.

Здѣсь имѣются двѣ степени свободы: можно все двигать вверхъ поступательно и можно задержать центръ цилиндра, а нить перемѣщать вверхъ. Для поступательнаго перемѣщенія вверхъ на пространство δx имѣемъ:

$$P \,.\, \delta x - mg\,\delta x - mj\,\delta x = 0 \quad . \;.\; .\, (c)$$

гдѣ P — сила натяженія нити. Задерживая центръ тяжести и поворачивая цилиндръ на безконечно малый уголъ $\delta\varphi$, имѣемъ во вращательномъ движеніи:

$$Pr\,\delta\varphi - \frac{1}{2}\,mr^2\frac{d\omega}{dt}\,\delta\varphi = 0 \quad . \;.\; .\, (d)$$

Положимъ, что нить движется вверхъ со скоростью w, а блокъ имѣетъ поступательную скорость v. Тогда

$$w = v + r\omega.$$

Откуда

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dv}{dt} + r\,\frac{d\omega}{dt}.$$

Вводя обозначенія

$$\frac{dw}{dt} = f, \quad \frac{dv}{dt} = j,$$

имѣемъ

$$f = j + r\,\frac{d\omega}{dt},$$

откуда

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{f - j}{r}.$$

Подставляя это въ наше уравненіе (d), получимъ:

$$P=\frac{1}{2}m(f-j).$$

Но, по уравненію (c),

$$P=m(g+j).$$

Значитъ:

$$\frac{1}{2}(f-j)=g+j,$$

$$\frac{1}{2}f=g+\frac{3}{2}j.$$

Окончательно получимъ:

$$j=\frac{2}{3}\left(\frac{f}{2}-g\right)=\frac{f-2g}{3}.$$

Объ ударѣ.

§ 56. Понятіе объ ударной силѣ. Можетъ случиться, что точки матеріальной системы внезапно измѣняютъ скорости въ теченіе весьма короткаго промежутка времени, при чемъ перемѣщеніе системы за это время ничтожно мало. Такъ, напримѣръ, ударъ кія въ неподвижный билліардный шаръ въ теченіе того чрезвычайно малаго промежутка времени, когда имѣетъ мѣсто прикосновеніе кія и шара, сообщаетъ этому шару конечную скорость; что касается перемѣщенія шара за время прикосновенія къ кію, то оно чрезвычайно мало. Точно такъ же упругій шаръ, налетѣвшій на неподвижное препятствіе, въ продолженіе того краткаго мгновенія, когда онъ прикасается къ этому препятствію, почти неподвиженъ, но скорости его точекъ внезапно измѣняются, и въ результатѣ шаръ отпрыгиваетъ отъ препятствія. Когда съ механической системой происходятъ такого рода явленія, то говорятъ, что она подвергается дѣйствію ударныхъ или мгновенныхъ силъ. Эти силы, дѣйствующія въ теченіе весьма короткаго промежутка времени, имѣютъ весьма значительную величину, вслѣдствіе чего и измѣненіе скоростей точекъ системы оказывается конечнымъ.

§ 57. Дѣйствіе ударной силы на матеріальную точку. Пусть мы имѣемъ матеріальную точку массы m и пусть компоненты силы, дѣйствующей на эту точку, суть X, Y, Z. Тогда, какъ извѣстно дифференціальныя уравненія движенія (27) будутъ:

$$\left.\begin{aligned} X&=m\frac{d^2x}{dt^2},\\ Y&=m\frac{d^2y}{dt^2},\\ Z&=m\frac{d^2z}{dt^2},\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

Каково бы ни было движеніе, въ продолженіе его компоненты силы суть опредѣленныя функціи времени; имѣя это въ виду, множимъ уравненія (27) на dt и интегрируемъ каждое изъ нихъ почленно въ предѣлахъ отъ t_0 до t_1. Получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\left(m\frac{dx}{dt}\right)_1-\left(m\frac{dx}{dt}\right)_0&=(mv_x)_1-(mv_x)_0=\int_{t_0}^{t_1}Xdt,\\ \left(m\frac{dy}{dt}\right)_1-\left(m\frac{dy}{dt}\right)_0&=(mv_y)_1-(mv_y)_0=\int_{t_0}^{t_1}Ydt,\\ \left(m\frac{dz}{dt}\right)_1-\left(m\frac{dz}{dt}\right)_0&=(mv_z)_1-(mv_z)_0=\int_{t_0}^{t_1}Zdt.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(198)$$

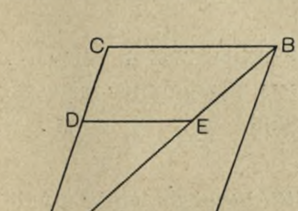
гдѣ $\left(m\frac{dx}{dt}\right)_1$ и $\left(m\frac{dx}{dt}\right)_0\ldots$ суть значенія $m\frac{dx}{dt}\ldots$ во время t_1 и t_0.

Принято называть импульсомъ силы за время t_1-t_0 векторъ, проекціи котораго на оси выражаются правыми частями уравненій (198):

Положимъ для краткости:

$$\left.\begin{aligned}t_1-t_0&=\tau,\\ \int_{t_0}^{t_1}Xdt&=X_\tau,\\ \int_{t_0}^{t_1}Ydt&=Y_\tau,\\ \int_{t_0}^{t_1}Zdt&=Z_\tau.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(199)$$

Уравненія (198) выражаютъ то обстоятельство, что векторъ, изображающій количество движенія матеріальной точки во время t_1, равный mv_1 и направленный по скорости v_1, слагается геометрически изъ вектора количества движенія, построеннаго для момента времени t_0, и импульса силы за время $\tau=t_1-t_0$. Чтобы убѣдиться въ этомъ, достаточно, построивъ скорости точки **M** (фиг. 100), соотвѣтствующія моментамъ t_0 и t_1, $v_0=$ **MD** и $v_1=$ **ME**, отложить затѣмъ на прямыхъ **MD** и **ME** длины **MC** $=mv_0$ и **MB** $=mv_1$ и соединить точки **C** и **B**. Тогда проектированіе на оси ломаной **MCB** и замыкающей ее **MB** даетъ:



Фиг. 100.

$$\begin{aligned}(mv_x)_1&=(mv_x)_0+\text{пр}_x\ CB=(mv_x)_0+\text{пр}_x\ MA,\\ (mv_y)_1&=(mv_y)_0+\text{пр}_y\ CB=(mv_y)_0+\text{пр}_y\ MA,\\ (mv_z)_1&=(mv_z)_0+\text{пр}_z\ CB=(mv_z)_0+\text{пр}_z\ MA.\end{aligned}$$

Изъ сравненія этихъ уравненій съ (198) и (199) мы видимъ, что

$$\text{пр}_x\, \boldsymbol{MA} = X_\tau,$$

$$\text{пр}_y\, \boldsymbol{MA} = Y_\tau,$$

$$\text{пр}_z\, \boldsymbol{MA} = Z_\tau,$$

чѣмъ и доказывается высказанное ранѣе положеніе объ импульсѣ силы.

Предположимъ теперь, что промежутокъ τ малъ. Если сила X, Y, Z не имѣетъ весьма значительной величины, то слагающіе ее импульсы весьма малы, ибо $\int_{t_0}^{t_1} X dt$ численно меньше весьма малаго количества $X_{max}.\tau$ и т. д.; слѣдовательно и скорость за это время измѣнится на весьма малую величину. Это самое обстоятельство имѣетъ мѣсто въ случаѣ движенія матеріальной точки подъ дѣйствіемъ обыкновенныхъ силъ, какова, напримѣръ, сила тяжести. Но если сила весьма значительна, напримѣръ, если она выражается количествомъ $\frac{a}{\tau}$, гдѣ a нѣкоторое конечное постоянное, то X_τ, Y_τ, Z_τ будутъ конечны и, стало быть, импульсъ также имѣетъ конечную величину; вслѣдствіе этого конечно и приращеніе скорости. Такъ, если

$$X = \frac{a}{\tau},$$

то

$$\int_{t_0}^{t_1} X dt = \frac{a}{\tau}\int_{t_0}^{t_1} dt = \frac{a}{\tau}(t_1 - t_0) = \frac{a\tau}{\tau} = a;$$

откуда по уравненію (198)

$$(mv_x)_1 - (mv_x)_0 = a.$$

Перемѣщеніе матеріальной точки за разсматриваемое время окажется однако же ничтожно малымъ; въ самомъ дѣлѣ, если мы обозначимъ черезъ v наибольшую скорость, которую имѣетъ точка въ теченіе этого времени, то перемѣщеніе ея, очевидно, менѣе $v\tau$.

Итакъ, *весьма значительная сила, дѣйствуя на матеріальную точку въ теченіе весьма короткаго промежутка времени, весьма мало смѣщаетъ точку изъ ея положенія, но сообщаетъ конечное измѣненіе ея скорости.*

Рѣшая приближенно вопросъ о дѣйствіи ударныхъ силъ, можно обсуждать идеальный случай (представляющій математическое отвлеченіе) и считать силу безконечно-большой, а время ея дѣйствія безконечно-малымъ. Тогда мы скажемъ, что подъ дѣйствіемъ ударной силы матеріальная точка мгновенно мѣняетъ свою скорость, оставаясь въ томъ положеніи, въ которомъ засталъ ее ударъ. Уравненія (198) сохраняютъ свое значеніе и въ этомъ случаѣ; они позволяютъ измѣрять дѣйствіе ударной силы на матеріальную точку по измѣненію скорости этой точки. Будемъ называть *силою удара* или *импульсивною силою векторъ, компоненты котораго по осямъ суть предѣльныя значенія* X_τ, Y_τ, Z_τ, *въ предположеніи, что* $Lim.\tau = 0$. Будемъ при этомъ всегда имѣть въ виду, что обыкновенныя силы и силы импульсивныя суть количества разнаго наименованія; въ то время, какъ первыя измѣряются произведеніемъ массы точки на ускореніе, послѣднія имѣютъ размѣръ количества движенія (или импульса обыкновенной силы).

Допустимъ, что на матеріальную точку дѣйствуютъ силы, компоненты которыхъ суть X', Y', Z'; X'', Y'', Z'',....

Тогда:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X' + X'' + X''' + \ldots\ldots$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y' + Y'' + Y''' + \ldots\ldots$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z' + Z'' + Z''' + \ldots\ldots$$

Умноживъ эти уравненія на dt и интегрируя въ предѣлахъ t_0 и t_1, мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned}(mv_x)_1 - (mv_x)_0 &= X'_\tau + X''_\tau + \ldots\ldots\\ (mv_y)_1 - (mv_y)_0 &= Y'_\tau + Y''_\tau + \ldots\ldots\\ (mv_z)_1 - (mv_z)_0 &= Z'_\tau + Z''_\tau + \ldots\ldots\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (200)$$

Если въ числѣ дѣйствующихъ силъ имѣются конечныя силы, то предѣльныя значенія соотвѣтствующихъ X_τ, Y_τ, Z_τ суть нули, и, стало быть, въ правыхъ частяхъ равенствъ (200) мы должны сохранить лишь слагающія импульсовъ ударныхъ силъ. Уравненія (200) показываютъ, что дѣйствіе совокупности нѣсколькихъ импульсивныхъ силъ на матеріальную точку эквивалентно дѣйствію одной силы, компоненты которой опредѣляются равенствами:

$$X_\tau = \Sigma X'_\tau,$$

$$Y_\tau = \Sigma Y'_\tau,$$

$$Z_\tau = \Sigma Z'_\tau.$$

Эта равнодѣйствующая импульсивная сила, какъ ясно изъ только что написанныхъ уравненій, есть геометрическая сумма слагающихъ импульсивныхъ силъ. Такимъ образомъ силы импульсивныя складываются по тому же способу, какъ и обыкновенныя.

§ 58. Дѣйствіе удара на механическую систему. Измѣненіе движенія центра тяжести. По теоремѣ о движеніи центра тяжести системы мы можемъ написать по (форм. 165):

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} &= \Sigma X, \\ M\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} &= \Sigma Y, \\ M\frac{d^2\bar{z}}{dt^2} &= \Sigma Z. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (165)$$

гдѣ M—сумма массъ точекъ, входящихъ въ систему, а ΣX, ΣY, ΣZ—суммы проекцій внѣшнихъ силъ, на нее дѣйствующихъ. Внутреннія силы, развивающіяся между членами системы, попарно равны и противоположны, а потому сумма проекцій ихъ на любое направленіе есть нуль.

Интеграція предыдущихъ уравненій даетъ намъ:

$$\left(M\frac{d\bar{x}}{dt}\right)_1 - \left(M\frac{d\bar{x}}{dt}\right)_0 = MV_x)_1 - (MV_x)_0 = \Sigma\int_{t_0}^{t_1} X dt = \Sigma X_\tau,$$

и такимъ же образомъ:

$$\begin{aligned} (MV_y)_1 - (MV_y)_0 &= \Sigma Y_\tau, \\ (MV_z)_1 - (MV_z)_0 &= \Sigma Z_\tau, \end{aligned} \quad \ldots (201)$$

гдѣ V есть скорость центра тяжести.

Предположимъ, что промежутокъ $t_1 - t_0 = \tau$ весьма малъ; тогда въ правыхъ частяхъ полученныхъ уравненій мы должны удержать только импульсы ударныхъ силъ, приложенныхъ извнѣ къ разсматриваемой системѣ. Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующую теорему: *измѣненіе количества движенія центра тяжести системы происходитъ такъ, какъ будто вся масса сосредоточена въ центрѣ тяжести и всѣ внѣшнія импульсивныя силы приложены непосредственно въ этой точкѣ.*

Изъ этой теоремы можно вывести такое слѣдствіе:

Удары, происходящіе во время движенія между тѣлами, входящими въ механическую систему, не измѣняютъ движенія ея центра тяжести.

§ 59. Измѣненіе главнаго момента количествъ движенія. Разумѣя подъ главнымъ моментомъ количествъ движенія системы, векторъ G, проекціи котораго опредѣляются формулами (176) и (174):

$$\left.\begin{aligned} \text{пр}_x G &= \Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right), \\ \text{пр}_y G &= \Sigma m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right), \\ \text{пр}_z G &= \Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (202)$$

мы на основанiи теоремы площадей (форм. 168) можемъ написать:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,\text{пр}_x G &= \Sigma\,(yZ - zY),\\ \frac{d}{dt}\,\text{пр}_y G &= \Sigma\,(zX - xZ),\\ \frac{d}{dt}\,\text{пр}_z G &= \Sigma\,(xY - yX).\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\;(203)$$

Интегрируемъ первое изъ этихъ уравненiй:

$$(\text{пр}_x G)_1 - (\text{пр}_x G)_0 = \Sigma \int_{t_0}^{t_1} (yZ - zY)\,dt \quad\ldots\ldots\;(204)$$

Предположимъ, что $t_1 - t_0 = \tau$ есть тотъ безконечно-малый промежутокъ времени, въ теченiе котораго системѣ наносится ударъ. Координаты x, y, z точекъ приложенiя дѣйствующихъ на систему силъ *не измѣняются въ теченiе удара*, такъ какъ система не успѣваетъ сдвинуться, а потому:

$$\int^{t_1} (yZ - zY)\,dt = y\int_{t_0}^{t_1} Zdt - z\int_{t_0}^{t_1} Ydt = yZ_\tau - zY_\tau\,.$$

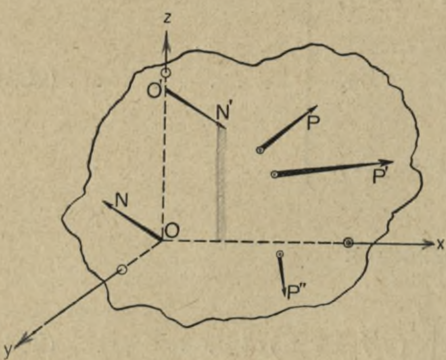
Воспользовавшись этимъ замѣчанiемъ, мы пишемъ уравненiе (204) и слѣдующiя уравненiя, аналогичныя ему, въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}(\text{пр}_x G)_1 - (\text{пр}_x G)_0 &= \Sigma\,(yZ_\tau - zY_\tau),\\ (\text{пр}_y G)_1 - (\text{пр}_y G)_0 &= \Sigma\,(zX_\tau - xZ_\tau),\\ (\text{пр}_z G)_1 - (\text{пр}_z G)_0 &= \Sigma\,(xY_\tau - yX_\tau)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\;(205)$$

Въ правыхъ частяхъ подъ знаками суммъ должно удержать лишь члены, относящiеся къ ударнымъ силамъ. Такъ какъ въ уравненiяхъ (203) входятъ справа лишь моменты внѣшнихъ силъ, то и въ уравненiя (205) должны войти лишь внѣшнiя импульсивныя силы.

Такимъ образомъ, *приращенiе проекцiи на какую-нибудь ось главнаго момента количествъ движенiя (или суммы моментовъ количествъ движенiя около этой оси) равно суммѣ моментовъ внѣшнихъ импульсивныхъ силъ относительно этой оси.*

§ 60. Дѣйствiе удара на твердое тѣло, могущее вращаться около неподвижной оси. Примемъ за неподвижную ось тѣла ось Oz; пусть неподвижность этой прямой достигнута укрѣпленiемъ двухъ ея точекъ O и O' (фиг. 101). Допустимъ, что въ нѣкоторый моментъ времени на движущееся твердое тѣло подѣйствовали импульсивныя силы P, P', P'',..., опредѣленныя своими проекціями на оси координатъ $X_\tau, Y_\tau, Z_\tau, X'_\tau, Y'_\tau, Z'_\tau, \ldots$ и координатами точекъ приложенія $x, y, z, x', y', z', \ldots$ Опредѣлимъ прежде всего измѣненіе угловой скорости вращенія тѣла. Замѣтимъ однако, что въ нашемъ случаѣ проекція вектора G выразится по уравненію (202) такъ:



Фиг. 101.

$$\text{пр}_z G = \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right),$$

а по уравненіямъ (203) и (186):

$$\text{пр}_z G = J \,.\, \omega,$$

гдѣ J—моментъ инерціи тѣла относительно оси Oz.

Тогда, подставивъ это послѣднее значеніе проекціи вектора G въ уравненія (205), найдемъ выраженіе, которое и рѣшитъ нашъ вопросъ. Оно напишется слѣдовательно такъ:

$$J(\omega_1 - \omega_0) = \Sigma (x Y_\tau - y X_\tau) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (206)$$

Обратимся къ вопросу объ ударѣ, которому подвергается ось вращенія. Твердое тѣло наноситъ ударъ точкамъ O и O', которыя дѣйствуютъ на него импульсами, равными и противоположно направленными. Обозначимъ эти послѣдніе черезъ N и N', а ихъ слагающія по осямъ черезъ N_x, N_y, N_z, N'_x, N'_y, N'_z. Такъ какъ связи, стѣсняющія движеніе тѣла, замѣнены теперь силами, то тѣло можно считать за свободную механическую систему и приложить къ ней выше добытыя теоремы объ измѣненіи количества движенія центра тяжести и проекцій главнаго момента. Такъ какъ проекціи скорости точки тѣла, координаты которой суть x, y, z, выразятся по формулѣ (186') такъ:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega y,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \omega x,$$

$$\frac{dz}{dt} = 0,$$

то по формуламъ (201) имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} (MV_x)_1 - (MV_x)_0 &= -M\bar{y}(\omega_1 - \omega_0) = \Sigma X_\tau + N_x + N'_x, \\ (MV_y)_1 - (MV_y)_0 &= M\bar{x}(\omega_1 - \omega_0) = \Sigma Y_\tau + N_y + N'_y, \\ (MV_z)_1 - (MV_z)_0 &= 0 = \Sigma Z_\tau + N_z + N'_z. \end{aligned}\right\} \; . \; (207)$$

Далѣе, изъ формулъ (205) замѣчая, что согласно (186′)

$$\text{пр}_x G = \Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = -\omega \Sigma mzx,$$

$$\text{пр}_y G = \Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = -\omega \Sigma myz,$$

найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} -\Sigma mzx\,(\omega_1 - \omega_0) &= \Sigma\,(yZ_\tau - zY_\tau) - aN'_y, \\ -\Sigma mzy\,(\omega_1 - \omega_0) &= \Sigma\,(zX_\tau - xZ_\tau) + aN'_x, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (208)$$

гдѣ $a = OO'$. Полученныя уравненія (207) и (208) опредѣляютъ искомыя силы сопротивленія оси удару, наносимому ей твердымъ тѣломъ.

Обратимся къ тому случаю, когда имѣется всего одна импульсивная сила, характеризующая получаемый тѣломъ ударъ, и поставимъ себѣ слѣдующій вопросъ: какова должна быть эта сила, для того чтобы ось вращенія не подвергалась удару. Въ этомъ предположеніи суммы, входящія въ формулы (207) и (208), сводятся лишь къ одному слагаемому, количества же N_x, N_y, N_z, N'_x, N'_y, N'_z суть нули. Тогда для опредѣленія величины, направленія и точки приложенія интересующей насъ импульсивной силы мы получаемъ изъ упомянутыхъ формулъ слѣдующія равенства:

$$M\bar{y}(\omega_1 - \omega_0) = -X_\tau,$$

$$M\bar{x}(\omega_1 - \omega_0) = Y_\tau,$$

$$Z_\tau = 0,$$

$$(\omega_1 - \omega_0)\Sigma mzx = zY_\tau,$$

$$-(\omega_1 - \omega_0)\Sigma mzy = zX_\tau;$$

(въ послѣднихъ двухъ уже принято въ разсчетъ предшествующее имъ $Z_\tau = 0$).

Уравненіе $Z_\tau = 0$ показываетъ, что импульсивная сила перпендикулярна къ Oz. Мы можемъ поэтому выбрать координатную плоскость xy такъ, чтобы она содержала импульсивную силу; тогда координата z точки приложенія этой силы есть нуль. Направивъ, кромѣ того, плоскость zx такъ, чтобы направленіе удара было къ ней перпендикулярно, мы будемъ имѣть $X_\tau = 0$, $Y_\tau = P$, полной силѣ удара. Послѣ сего вышенайденныя уравненія перепишутся въ видѣ:

$$\bar{y}(\omega_1 - \omega_0) = 0,$$

$$M\bar{x}(\omega_1 - \omega_0) = P,$$

$$\Sigma mzy = \Sigma mzx = 0.$$

Два послѣднія показываютъ, что ось Oz есть одна изъ главныхъ осей эллипсоида инерціи, построеннаго для точки O; первое даетъ $\bar{y} = 0$, а это значитъ, что центръ тяжести тѣла лежитъ въ плоскости, проходящей черезъ неподвижную ось тѣла и перпендикулярной къ направленію наносимаго ему удара. Наконецъ, уравненіе $M\bar{x}(\omega_1 - \omega_0) = P$, сопоставленное съ (206), которое въ нашемъ случаѣ принимаетъ видъ:

$$J(\omega_1 - \omega_0) = x \cdot P,$$

даетъ намъ

$$x \cdot \bar{x} = \frac{J}{M}; \quad x = \frac{J}{M\bar{x}}.$$

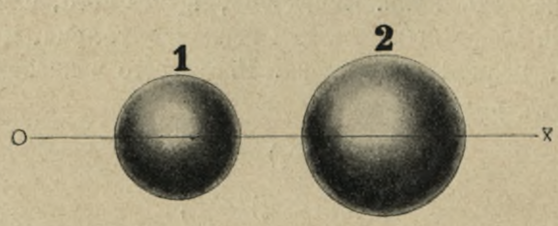
Сравнимъ это выраженіе съ формулою, опредѣляющею центръ качанія физическаго маятника, который мы имѣли бы, подвѣсивъ наше тѣло за ось **Oz**, т.-е. съ $l = \dfrac{J}{Ma}$.

Мы видимъ, что разстояніе точки приложенія удара отъ оси вращенія равно разстоянію означеннаго центра качанія. Опредѣленная такимъ образомъ точка приложенія импульсивной силы, не наносящей удара неподвижной оси вращенія тѣла **Oz**, называется *центромъ удара*, соотвѣтствующимъ этой оси.

Слѣдствіе. Если тѣло вращается вокругъ неподвижной оси со скоростью ω, то мы можемъ сразу остановить движеніе, не повреждая оси. Для этого должно подѣйствовать на тѣло силой, равной $M\omega l$, приложенной на разстояніи l отъ оси въ центрѣ удара; сила эта должна быть направлена перпендикулярно къ плоскости, содержащей ось вращенія и центръ тяжести, въ сторону противную движенію.

Это правило принимается въ разсчетъ при устройствѣ фабричныхъ молотовъ, употребляющихся въ желѣзодѣлательной индустріи; въ противномъ случаѣ дѣйствіе ударовъ, наносимыхъ молоту предметомъ обработки, не преминуло бы расшатать укрѣпленія оси и привело бы аппаратъ въ негодное состояніе. То же самое замѣчаніе относится и къ устройству баллистическаго маятника, служащаго для опредѣленія скорости полета артиллерійскихъ снарядовъ.

§ 61. Объ ударѣ шаровъ. Прямой ударъ. Представимъ себѣ два шара (фиг. 102), движущихся передъ моментомъ удара поступательно по направленію прямой **Ox**, соединяющей ихъ центры, съ разными скоростями. Ударъ, который произойдетъ при такихъ обстоятельствахъ, называется *прямымъ*



Фиг. 102.

въ отличіе отъ *косого* удара, имѣющаго мѣсто, когда скорости шаровъ въ моментъ встрѣчи направлены подъ угломъ къ линіи центровъ.

Пусть скорость и масса шара *1* суть v_1 и m_1, для шара тѣ же количества обозначимъ черезъ v_2 и m_2 и пусть $v_1 > v_2$. Скорости v_1 положительны, если онѣ направлены отъ *0* къ *x*.

Примѣнимъ къ этому случаю теорему о движеніи центра тяжести. Мы имѣемъ матеріальную систему, состоящую изъ двухъ шаровъ. Координата ихъ общаго центра тяжести $\bar{x}$ опредѣляется формулой:

$$\bar{x} = \frac{m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2}{m_1 + m_2},$$

откуда

$$V_x = \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{m_1 \frac{d\bar{x}_1}{dt} + m_2 \frac{d\bar{x}_2}{dt}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Такъ какъ при соударенiи шаровъ въ системѣ нашей развиваются лишь нѣкоторыя внутреннія силы, то

$$(MV_x)_1 - (MV_x)_0 = (m_1 + m_2)\,[(V_x)_1 - (V_x)_0] = 0;$$

$$(V_x)_1 = (V_x)_0.$$

Такимъ образомъ общій центръ тяжести шаровъ сохраняетъ послѣ удара свою скорость. Обозначая скорости нашихъ шаровъ послѣ удара черезъ v_1', v_2', мы получимъ такимъ образомъ:

$$(m_1 + m_2)\, V_x = m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (209)$$

то уравненіе имѣетъ мѣсто, какова бы ни была природа соударившихся шаровъ.

Для полнаго опредѣленія скоростей послѣ удара его недостаточно. Этотъ вопросъ разрѣшается различно въ двухъ существенно различныхъ случаяхъ.

I. Шары неупруги. Пока скорость одного изъ соударившихся шаровъ отличается отъ скорости другого (пока $v_1 > v_2$), шары деформируются такъ, что разстояніе между ихъ центрами уменьшается. Этотъ процессъ окончится въ моментъ равенства обѣихъ скоростей, и два шара останутся въ томъ видѣ, какой они въ этотъ моментъ получатъ, такъ какъ мы считаемъ ихъ совершенно лишенными упругости; далѣе они будутъ продолжать движеніе, все время прикасаясь другъ къ другу, съ тою скоростью V_x, какою обладаетъ ихъ общій центръ тяжести; итакъ, по уравненію (209):

$$v_1' = v_2' = V_x = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (210)$$

II. Шары совершенно упруги. Явленіе удара распадается на двѣ фазы. Въ продолженіе первой происходитъ то же самое, что и въ случаѣ неупругихъ шаровъ; когда она закончится, то разстояніе центровъ достигаетъ своего минимума, и скорости обоихъ шаровъ равны между собою; онѣ выразятся и въ этомъ случаѣ формулой (210). Въ теченіе наступающей вслѣдъ затѣмъ второй фазы происходитъ возстановленіе формы соударившихся тѣлъ. Обозначимъ черезъ P силу дѣйствія шара *1* на шаръ *2* въ какой-нибудь моментъ времени теченія удара. По связи между этой силой и работой мы будемъ имѣть:

$$d\frac{m_2v_2^2}{2}=Pdx'.$$

Такъ какъ сила реакціи второго шара равна и противоположна P, то такимъ же образомъ:

$$d\frac{m_1v_1^2}{2}=-Pdx.$$

Сложивъ два полученныя уравненія, мы будемъ имѣть:

$$d\left(\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}\right)=P(dx'-dx)=Pd(x'-x)=Pdr\quad .\ .\ .\ (211)$$

гдѣ $r=x'-x$ есть разстояніе центровъ шаровъ.

Примѣнимъ полученное уравненіе къ первой фазѣ удара. Пусть R_0 есть начальное, а R_1—конечное значеніе перемѣннаго r; такъ какъ силу развивающейся реакціи шаровъ мы можемъ считать функціей r, то, интегрируя уравненіе (211) получимъ:

$$\left(\frac{m_1v_1^2+m_2v_2^2}{2}\right)_1-\left(\frac{m_1v_1^2+m_2v_2^2}{2}\right)_0=\int_{R_0}^{R_1}Pdr.$$

Такъ какъ

$$(v_1)_0=v_1,\quad (v_2)_0=v_2,\quad (v_1)_1=(v_2)_1=V_x,$$

то уравненіе наше можно переписать въ видѣ:

$$\frac{(m_1+m_2)V_x^2}{2}-\frac{m_1v_1^2+m_2v_2^2}{2}=\int_{R}^{R_1}Pdr\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (212)$$

Это уравненіе будетъ имѣть мѣсто въ моментъ окончанія удара въ случаѣ шаровъ неупругихъ. Во время второй фазы r измѣняется отъ своего minimum'а R_1 до первоначальной величины R_0; скорости мѣняются отъ V_x до v_1' и v_2', и поэтому интеграція уравненія (211), отнесенная ко времени теченія второй фазы, даетъ:

$$\frac{m_1v_1'^2+m_2v_2'^2}{2}-\frac{(m_1+m_2)V_x^2}{2}=\int_{R_1}^{R_0}Pdr\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (213)$$

Если сила P, разсматриваемая какъ функція r, имѣетъ одинъ и тотъ же видъ въ теченіе первой и второй фазы, то тѣла называются *совершенно упругими*; тогда

$$\int_{R_0}^{R_1} Pdr + \int_{R_1}^{R_0} Pdr = 0.$$

Въ силу этого обстоятельства сложеніе уравненій (212) и (213) даетъ намъ:

$$\frac{m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (214)$$

т.-е въ случаѣ соударенія совершенно упругихъ шаровъ ихъ живая сила не измѣняется отъ вліянія удара. Переписавъ уравненія (209) и (214) въ видѣ:

$$m_1(v_1' - v_1) = m_2(v_2 - v_2'),$$

$$m_1(v_1'^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - v_2'^2),$$

мы, по раздѣленіи ихъ другъ на друга, находимъ:

$$v_1' + v_1 = v_2 + v_2' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (215)$$

или

$$v_2' - v_1' = v_1 - v_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (216)$$

Обозначимъ скорость удаленія второго шара отъ перваго послѣ удара черезъ u', а скорость ихъ сближенія до удара черезъ u; тогда

$$u' = v_2' - v_1',$$

$$u = v_1 - v_2,$$

а слѣдовательно:

$$u' = u.$$

Т.-е. шары начинаютъ удаляться другъ отъ друга послѣ удара съ тою самою относительною скоростью, съ которою происходило ихъ сближеніе передъ моментомъ встрѣчи. Для опредѣленія скоростей послѣ удара мы должны рѣшить совмѣстно уравненія (209) и (216):

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

$$v_2' - v_1' = v_1 - v_2,$$

откуда и получимъ:

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2), \\ v_2' &= v_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (217)$$

III. Частные случаи удара совершенно упругихъ шаровъ.

1) Количества движенія шаровъ передъ ударомъ равны и противоположны:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0;$$

тогда

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = 0.$$

Складывая эти равенства и принимая во вниманіе (215), получаемъ:

$$(m_1 + m_2)\, v_1' = -(m_1 + m_2)\, v_1\,,$$

откуда:

$$v_1' = -v_1\,;$$

и точно такъ же:

$$v_2' = -v_2\,.$$

Шары мѣняютъ направленіе своего движенія, не измѣняя численной величины скорости.

2) Массы шаровъ равны. При $m_1 = m_2$ формулы (217) даютъ:

$$v_1' = v_2\,,$$

$$v_2' = v_1\,;$$

шары обмѣниваются скоростями. Если бы до удара переднiй шаръ былъ въ покоѣ, то послѣ удара заднiй остановится, сообщивъ переднему всю свою скорость.

Косой ударъ шаровъ. Въ случаѣ косого удара изслѣдованіе можно вести слѣдующимъ образомъ. Направимъ ось Ox (фиг. 102) по линіи центровъ въ моментъ встрѣчи шаровъ; такъ какъ за время удара положеніе шаровъ (приблизительно) не измѣняется, то Ox можно считать за неподвижную ось. Такъ какъ направленіе силъ реакціи совпадаетъ съ осью x, то то же направленіе имѣетъ и импульсивная сила, выражаемая компонентами

$$\int_{t_0}^{t_1} X dt,\quad \int_{t_0}^{t_1} Y dt,\quad \int_{t_0}^{t_1} Z dt,$$

изъ которыхъ два послѣдніе нули, ибо $Y = Z = 0$. Примѣняя къ нашему случаю теорему объ измѣненіи движенія центра тяжести, мы убѣждаемся, что слагающія скоростей по направленію, перпендикулярному къ Ox, у того и другого шара остаются безъ измѣненія; что же касается измѣненія компонентовъ по оси Ox, V_x и V_x', то оно совершается по законамъ прямого удара.

§ 63. Объ измѣненіи живой силы при ударѣ шаровъ. Мы уже убѣдились, что въ случаѣ шаровъ совершенно упругихъ никакого видимаго измѣненія живой силы не происходитъ. Посмотримъ теперь, что будетъ въ случаѣ шаровъ неупругихъ. Обратимся для этого къ уравненію (212):

$$\frac{(m_1+m_2)V_x^2}{2}-\frac{m_1v_1^2+m_2v_2^2}{2}=\int_{R_0}^{R_1}Pdr.$$

Легко убѣдиться, что интегралъ, стоящій во второй части, менѣе нуля. Для этого достаточно вспомнить, что онъ есть предѣлъ суммы членовъ вида $P.\Delta r$, гдѣ первый множитель больше, а второй меньше нуля, ибо r уменьшается въ теченіе удара. Такимъ образомъ полученное уравненіе свидѣтельствуетъ о видимой потерѣ живой силы при ударѣ неупругихъ тѣлъ. Потерянная живая сила переходитъ въ живую силу частичнаго движенія соударившихся тѣлъ, вслѣдствіе чего и происходитъ нагрѣваніе ихъ.

Любопытно вычислить потерянную живую силу видимаго движенія. Обозначимъ, для краткости, живую силу послѣ удара черезъ T_1, а до удара—черезъ T_0; тогда

$$T_1=\frac{(m_1+m_2)V_x^2}{2},$$

$$T_0=\frac{m_1v_1^2+m_2v_2^2}{2}.$$

Составляемъ:

$$T_0-T_1=\frac{m_1v_1^2}{2}-\frac{m_1V_x^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}-\frac{m_2V_x^2}{2}.$$

Кромѣ того, по формулѣ (209) напишемъ:

$$0=m_1v_1+m_2v_2-m_1V_x-m_2V_x.$$

Умноживъ это уравненіе на V_x и вычитая почленно изъ предшествующаго равенства, находимъ по приведеніи:

$$T_0-T_1=\frac{m_1(v_1-V_x)^2}{2}+\frac{m_2(v_2-V_x)^2}{2}.$$

Разности v_1-V_x, v_2-V_x носятъ названіе *потерянныхъ скоростей*. Примѣняя этотъ терминъ, мы можемъ выразить полученное уравненіе такъ: *при ударѣ неупругихъ шаровъ потерянная живая сила равна живой силѣ потерянныхъ скоростей.* Это положеніе носитъ названіе «теоремы Карно». Она имѣетъ мѣсто не только въ нашемъ частномъ случаѣ, но и вообще при всякомъ ударѣ въ механической системѣ, если только связи, возникающія вслѣдствіе удара, имѣютъ тенденцію сохраняться и послѣ него, такъ что дѣйствительное перемѣщеніе системы въ моментъ времени, слѣдующій за ударомъ, принадлежитъ къ числу перемѣщеній, согласующихся съ вновь наложенными связями. Таково въ нашемъ случаѣ прикосновеніе шаровъ, возникшее при ударѣ и длящееся, хотя, можетъ быть, и въ теченіе весьма короткаго промежутка времени, слѣдующаго за ударомъ.

§ 64. Объ измѣненіи живой силы при ударѣ неупругихъ системъ. Посмотримъ, какъ измѣняется живая сила при ударѣ неупругихъ системъ. Напишемъ условіе равновѣсія внѣшнихъ силъ и силъ инерціи, т.-е. основное уравненіе (164) динамики:

$$\Sigma\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0\ .\ \ .\ (164)$$

Отнесемъ это уравненіе къ тому небольшому промежутку времени τ, въ теченіе котораго произошло соудареніе тѣлъ, входящихъ въ систему. Такъ какъ точки системы за все время удара τ хотя и перемѣщаются, но очень мало, потому что тѣла очень твердыя, то можно пренебречь тѣми малыми перемѣщеніями, которыя произойдутъ за время удара и въ промежуткѣ времени удара τ возможныя перемѣщенія δx, δy, δz,..... можно считать постоянными. Умноживъ основное уравненіе (164) на элементъ времени dt и проинтегрировавъ его въ предѣлахъ отъ 0 до τ, изображающихъ начало и конецъ удара, получимъ:

$$\Sigma\left[\left(\int_0^\tau X\,dt-m\int_0^\tau\frac{d^2x}{dt^2}dt\right)\delta x+\left(\int_0^\tau Y\,dt-m\int_0^\tau\frac{d^2y}{dt^2}dt\right)\delta y+\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^\tau Z\,dt-m\int_0^\tau\frac{d^2z}{dt^2}dt\right)\delta z=0.\right]$$

Если нѣтъ внѣшнихъ мгновенныхъ силъ, то

$$\Sigma\int_0^\tau X\,dt=\tau\Sigma X=0,$$

$$\Sigma\int_0^\tau Y\,dt=\tau\Sigma Y=0,$$

$$\Sigma\int_0^\tau Z\,dt=\tau\Sigma Z=0.$$

Затѣмъ перейдемъ къ членамъ

$$\int_0^\tau\frac{d^2x}{dt^2}dt=\int_0^\tau\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt}dt=\left(\frac{dx}{dt}\right)_\tau-\left(\frac{dx}{dt}\right)_0,$$

$$\int_0^\tau\frac{d^2y}{dt^2}dt=\left(\frac{dy}{dt}\right)_\tau-\left(\frac{dy}{dt}\right)_0,$$

$$\int_0^\tau\frac{d^2z}{dt^2}dt=\left(\frac{dz}{dt}\right)_\tau-\left(\frac{dz}{dt}\right)_0,$$

Обозначая проекціи скорости на оси координатъ въ началѣ удара черезъ u_0, v_0, w_0, а въ концѣ удара черезъ u, v, w, получимъ:

$$\int_0^\tau \frac{d^2x}{dt^2}\,dt = u - u_0,$$

$$\int_0^\tau \frac{d^2y}{dt^2}\,dt = v - v_0,$$

$$\int_0^\tau \frac{d^2z}{dt^2}\,dt = w - w_0.$$

Такимъ образомъ результатомъ нашего преобразованія уравненія (164) будетъ слѣдующая формула:

$$\Sigma\left[m(u_0-u)\,\delta x + m(v_0-v)\,\delta y + m(w_0-w)\,\delta z\right] = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (218)$$

Это уравненіе показываетъ, что количества движенія, потерянныя за время удара на системѣ съ новыми введенными ударомъ связями, уравновѣшиваются. Если система вполнѣ неупруга, т.-е. такая, *у которой скорости въ концѣ удара согласуются со связями системы, введенными въ началѣ удара,* то одними изъ возможныхъ перемѣщеній, дозволяемыхъ связями, введенными въ началѣ удара, будутъ дѣйствительныя перемѣщенія въ концѣ удара. Обозначая скорости послѣ удара черезъ u, v, w и называя элементъ времени черезъ dt, получимъ такія дѣйствительныя перемѣщенія

$$u\,dt, \quad v\,dt, \quad w\,dt.$$

Ихъ и можно ввести въ качествѣ возможныхъ перемѣщеній, т.-е. можно положить:

$$u\,dt = \delta x\; ^{*}),$$

$$v\,dt = \delta y,$$

$$w\,dt = \delta z,$$

$$u_1\,dt = \delta x_1.$$

$$\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

*) Если мы возьмемъ скорости до удара u_0, v_0, w_0, то соотвѣтствующія имъ безконечно-малыя перемѣщенія

$$u_0\,dt, \quad v_0\,dt, \quad w_0\,dt$$

не будутъ относиться къ числу возможныхъ, дозволяемыхъ новой связью, и потому не годятся для нашего уравненія (218), которое выражаетъ равновѣсіе количествъ движенія потерянныхъ во время удара.

Слѣдовательно уравненіе равновѣсія потерянныхъ количествъ движенія будетъ:

$$\Sigma \left\{ m \left[(u_0 - u)\, u\, dt + (v_0 - v)\, v\, dt + (w_0 - w)\, w\, dt \right] \right\} = 0 \quad . \;.\; . \;(219')$$

Но

$$u = \frac{u_0 + u}{2} - \frac{u_0 - u}{2},$$

$$v = \frac{v_0 + v}{2} - \frac{v_0 - v}{2},$$

$$w = \frac{w_0 + w}{2} - \frac{w_0 - w}{2}.$$

Сокращая уравненіе (219′) на dt и подставляя въ него эти выраженія, получимъ:

$$\Sigma m \frac{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}{2} - \Sigma m \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} = \Sigma m \frac{(u_0 - u)^2 + (v_0 - v)^2 + (w_0 - w)^2}{2} \quad . \;(219)$$

Это выраженіе представляетъ теорему Карно и читается такъ: *потерянная живая сила при ударѣ неупругихъ тѣлъ равна живой силѣ потерянныхъ скоростей.* Идея этого вывода принадлежитъ профессору Остроградскому.

Оказывается, что правая часть этого уравненія всегда положительна, т.-е. при ударѣ неупругихъ системъ всегда *теряется* живая сила.

Теорема Карно имѣетъ мѣсто вообще при всякомъ ударѣ въ механической системѣ, если только связи, возникающія вслѣдствіе удара, сохраняются и послѣ него, такъ что дѣйствительное перемѣщеніе системы въ моментъ времени, слѣдующій за ударомъ, принадлежитъ къ числу перемѣщеній, согласующихся съ вновь наложенными связями.

Таково, напримѣръ, прикосновеніе шаровъ, возникшее при ударѣ и длящееся въ неупругихъ шарахъ послѣ удара.

Эта теорема имѣетъ многочисленныя приложенія при изученіи движенія машинъ.

Въ особенности часто приходится примѣнять теорему Карно въ Гидравликѣ, гдѣ постоянно встрѣчаются удары струй воды между собою или удары воды о лопатки, ковши колесъ и т. д.

§ 65. Ударъ шаровъ несовершенно упругихъ. Если мы имѣемъ дѣло съ дѣйствительными физическими тѣлами, то они всегда обладаютъ большею или меньшею дозою упругости, и потому въ дѣйствительности имѣетъ мѣсто промежуточное явленіе: происходитъ видимая потеря живой силы, но она меньше, чѣмъ если бы тѣла были совершенно лишены упругости. Назовемъ живую силу скоростей, потерянныхъ во время первой фазы, черезъ T_p; тогда:

$$T_0 - T_1 = (1 - k^2)\, T_p \quad . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;(220)$$

Опытъ показываетъ, что число k опредѣляется природою соударяющихся тѣлъ и, стало быть, не стоитъ въ зависимости отъ скоростей соударяющихся тѣлъ. Это число зовутъ *коэффиціентомъ возстановленія*; оно введено въ науку впервые Ньютономъ. Въ случаѣ совершенно упругихъ тѣлъ $k=1$; въ другомъ крайнемъ случаѣ тѣлъ неупругихъ $k=0$; вообще же этотъ коэффиціентъ представляетъ собою нѣкоторую правильную дробь.

Такимъ образомъ, вопросъ объ ударѣ шаровъ несовершенно упругихъ сводится къ опредѣленію скоростей ихъ изъ формулъ (209) и (220), т.-е. изъ уравненій:

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = mv + m_2 v_2;$$

$$\frac{m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2} =$$

$$= \frac{m_1 (v_1 - V_x)^2 + m_2 (v_2 - V_x)^2 (1 - k^2)}{2},$$

при чемъ по формулѣ (210):

$$V_x = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

§ 66. Ударъ упругаго шара о преграждающую поверхность. Новое значеніе коэффиціента возстановленія. Пусть упругій шаръ встрѣчаетъ при своемъ движеніи нѣкоторую преграждающую поверхность. Примемъ точку паденія шара на поверхность за начало координатъ (фиг. 103), нормаль поверхности въ этой точкѣ—за ось Ox; плоскость xy пусть содержитъ скорость летящаго шара, плоскость yz, конечно, касается поверхности въ точкѣ O.

Фиг. 103.

Обозначимъ черезъ α уголъ паденія, черезъ β—уголъ отраженія шара; проекціи скорости до удара на оси координатъ обозначимъ черезъ v, u, w, а послѣ удара—черезъ v', u', w'. Замѣтимъ, что вслѣдствіе выбора осей $w=0$.

Такъ какъ импульсивная сила, развиваемая поверхностью, перпендикулярна къ ней и, слѣдовательно, направлена по Ox, то проекціи вектора количества движенія на оси y и z не измѣняются послѣ удара, и мы имѣемъ:

$$mu = mu', \quad u = u',$$

$$mw = mw' = 0, \quad w' = 0.$$

Послѣднее уравненіе показываетъ, что, по отраженіи отъ поверхности, шаръ продолжаетъ двигаться въ плоскости xy.

Живая сила T_0 и T_1 шара до и послѣ паденія на поверхность опредѣляется формулами:

$$T_0 = \frac{m(u^2 + v^2)}{2}.$$

$$T_1 = \frac{m(u'^2 + v'^2)}{2} = \frac{m(u^2 + v'^2)}{2}.$$

Живая сила скорости, потерянной въ концѣ первой фазы удара, будетъ:

$$T_p = \frac{mv^2}{2}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, въ концѣ первой фазы шаръ не будетъ имѣть движенія по нормали къ поверхности, а проекція его скорости на Oy равна своему начальному значенію u; такимъ образомъ, слагающія потерянной скорости суть:

$$v - 0 = v,$$

$$u - u = 0.$$

Составляя

$$T_0 - T_1 = \frac{m(v^2 - v'^2)}{2}$$

и примѣняя формулу (220), получимъ:

$$\frac{m(v^2 - v'^2)}{2} = (1 - k^2)\frac{mv^2}{2},$$

откуда

$$v'^2 = k^2 v^2;$$

или

$$\left(\frac{v'}{u}\right)^2 = k^2 \left(\frac{v}{u}\right)^2.$$

Но

$$\left(\frac{v'}{u}\right)^2 = ctg^2\beta,$$

$$\left(\frac{v}{u}\right)^2 = ctg^2\alpha,$$

а слѣдовательно:

$$tg^2\alpha = k^2 tg^2\beta.$$

Такъ какъ $tg\alpha$ и $tg\beta$ больше нуля, то по извлеченіи корня будемъ имѣть отсюда:

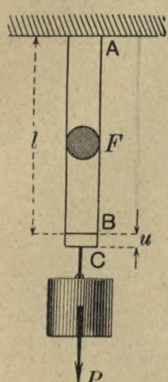
$$\frac{tg\alpha}{tg\beta} = k.$$

Коэффиціентъ возстановленія равенъ отношенію тангенсовъ угловъ паденія и отраженія. Если бы шаръ обладалъ совершенною упругостью, то мы имѣли бы $k=1$ и получили бы обычный законъ равенства угловъ паденія и отраженія.

Примѣненіе метода Лагранжа къ задачамъ на упругія системы.

§ 67. Работа, производимая силами, деформирующими упругія тѣла. Рѣшимъ нѣсколько задачъ на опредѣленіе работы, потребной на различныя деформаціи упругихъ тѣлъ.

Задача 1. Пусть имѣемъ стержень AB длины l (фиг. 104), укрѣпленный къ потолку и находящійся подъ дѣйствіемъ силы P, которая измѣняется отъ нуля до опредѣленной величины P, находясь въ постоянномъ равновѣсіи съ силами упругости стержня.



Фиг. 104.

Опредѣлимъ работу упругихъ силъ при растяженіи стержня.

Пусть въ какомъ-нибудь положеніи удлиненіе стержня есть u, тогда вытяжка стержня будетъ $\frac{u}{l}$. Назовемъ площадь поперечнаго сѣченія стержня черезъ F и модуль упругости черезъ E, будемъ имѣть извѣстную формулу

$$P=EF\frac{u}{l}\quad\ldots\ldots\ldots(221)$$

Пусть T будетъ вся работа, произведенная измѣняющейся силой P, т.-е. такъ называемая *произведенная работа*. Тогда элементарная работа для какого-нибудь положенія стержня будетъ

$$dT=P\,.\,du=EF\frac{u}{l}\,du.$$

Интегрируемъ, измѣняя u отъ O до u, получимъ:

$$T=\frac{EF}{l}\int_0^u u\,du=\frac{EF}{l}\frac{u^2}{2}\quad\ldots\ldots\ldots(221)$$

Эта формула опредѣляетъ произведенную работу, но весьма во многихъ вопросахъ важно опредѣлить произведенную работу не черезъ смѣщеніе u, а черезъ конечную силу P. Чтобы сдѣлать это, изъ формулы (221′) опредѣляемъ u

$$u=\frac{Pl}{EF}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(222')$$

Подставивъ это выраженіе въ формулу (221), найдемъ выраженіе произведенной работы по силѣ:

$$T = \frac{P^2 l}{2EF} \ldots\ldots\ldots\ldots (222)$$

Изъ формулъ (221) и (222) мы видимъ замѣчательное свойство произведенной работы.

Производная отъ произведенной работы по смѣщенію равна силѣ, а производная отъ произведенной работы по силѣ равна смѣщенію.

Дѣйствительно, изъ формулы (221) имѣемъ:

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{EFu}{l},$$

что вслѣдствіе формулы (221) даетъ:

$$\frac{\partial T}{\partial u} = P.$$

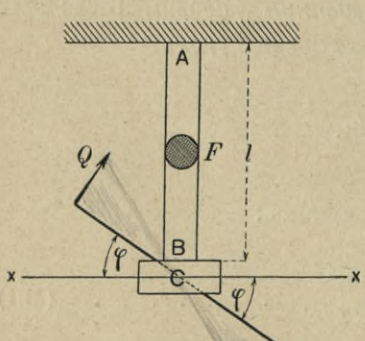
Далѣе изъ формулы (222) имѣемъ:

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{lP}{EF},$$

что вслѣдствіе формулы (222') даетъ:

$$\frac{\partial T}{\partial P} = u.$$

Задача 2. Имѣемъ стержень AB длины l (фиг. 105) одного и того же сѣченія, укрѣпленный концомъ A къ потолку, а на концѣ B подверженный дѣйствію нѣкоторой крутящей пары (Q, Q') съ моментомъ M.



Фиг. 105.

Длина l считается отъ A до того сѣченія, которое крутится. Этотъ моментъ измѣняется отъ нуля до нѣкоторой опредѣленной величины, при чемъ при всякомъ положеніи пара уравновѣшивается силами упругости, происходящими отъ скашиваній въ сѣченіи F. Опредѣлимъ работу, потребную на преодолѣніе силъ упругости.

При этомъ между моментомъ пары M и угломъ φ, на который повернется конецъ стержня, существуетъ извѣстная связь:

$$M = G \cdot J \cdot \frac{\varphi}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots (223')$$

гдѣ G есть второй коэффиціентъ упругости (коэффиціентъ для скашиванія), а J есть моментъ инерціи площади сѣченія стержня относительно оси, проходящей черезъ центръ тяжести площади сѣченія стержня.

Такъ какъ работа пары (Q, Q') равна моменту пары M, умноженному на угловое перемѣщеніе φ, то въ нашемъ случаѣ элементарная произведенная работа будетъ:

$$dT = Md\varphi = \frac{G \, . \, J}{l} \varphi \, . \, d\varphi.$$

Интегрируемъ, измѣняя φ отъ O до φ, получимъ:

$$T = \frac{G \, . \, J}{l} \frac{\varphi^2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (223)$$

Чтобы представить произведенную работу во второмъ видѣ, т.-е. черезъ моментъ M, опредѣляемъ изъ формулы (223')

$$\varphi = \frac{Ml}{G \, . \, J} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (224')$$

и подставляемъ въ формулу (223); получимъ:

$$T = \frac{M^2 l}{2GJ} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (224)$$

Здѣсь мы опять провѣримъ соотношеніе

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{G \, . \, J}{l} \cdot \varphi,$$

которое по формулѣ (223') равно моменту M.

Далѣе изъ формулы (224) имѣемъ:

$$\frac{\partial T}{\partial M} = \frac{Ml}{G \, . \, J} = \varphi.$$

Задача 3. Допустимъ, что небольшая часть короткой заклепки ***ABCD*** (фиг. 106) съ площадью сѣченія F подвержена дѣйствію срѣзывающей силы P и претерпѣваетъ отъ нея скашиваніе φ. Тогда между силой P и малымъ угломъ φ, выраженнымъ въ доляхъ радіуса, будетъ имѣть мѣсто соотношеніе

$$P = G \, . \, F\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (225)$$

гдѣ G—коэффиціентъ скашиванія.

Элементарная произведенная работа равна

$$dT = G \, . \, F \, . \, \varphi \, . \, a \, d\varphi.$$

Интегрируя, при измѣненіи φ отъ O до φ, получимъ

$$T = GFa\int_0^\varphi \varphi d\varphi = \frac{G\,.\,Fa\varphi^2}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (226)$$

Подставляемъ сюда выраженіе φ черезъ P изъ формулы (225):

$$\varphi = \frac{P}{G\,.\,F}.$$

Имѣемъ:

$$T = \frac{1}{2}\,\frac{G\,.\,FaP^2}{G^2F^2} = \frac{1}{2}\,\frac{P^2a}{GF} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (227)$$

Мы видимъ опять, что

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}\,GFa\,2\varphi = Pa$$

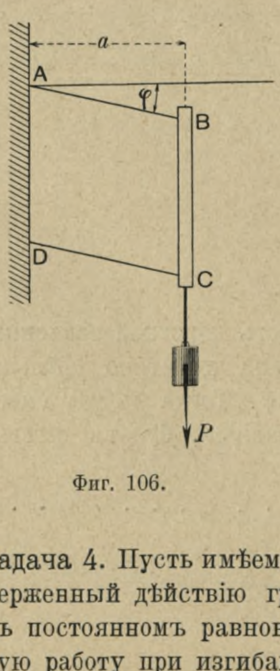
и

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{aP}{GF} = \varphi a,$$

гдѣ φa есть перемѣщеніе точки приложенія силы P.

Очевидно, что, взявъ пвоизводныя отъ T не по φ и по P, а по φa и P, мы получили бы прямо силу P и смѣщеніе φa

$$\frac{\partial T}{\partial(\varphi a)} = P \quad \text{и} \quad \frac{\partial T}{\partial(P)} = \varphi a.$$



Фиг. 106.

Фиг. 107.

Задача 4. Пусть имѣемъ стержень OA, ущемленный въ точкѣ O (фиг. 107) и подверженный дѣйствію груза P, измѣняющагося отъ нуля до P, находясь въ постоянномъ равновѣсіи съ силами упругости. Опредѣлить произведенную работу при изгибаніи стержня.

Осевая линія стержня приметъ видъ, который опредѣляется извѣстнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P(l-x)}{E.J},$$

гдѣ E—модуль упругости, а J моментъ инерціи сѣченія стержня относительно горизонтальной оси, проходящей черезъ центръ тяжести сѣченія.

Первое интегрированіе даетъ:

$$EJ\frac{dy}{dx}=P\left(lx-\frac{x^2}{2}\right)+C.$$

При $x=0$ и $\frac{dy}{dx}=0$, потому что въ точкѣ O касательная къ деформированной осевой линіи образуетъ съ осью x-овъ уголъ O^0.

Отсюда

$$O=O+C.$$

Слѣдовательно,

$$C=O$$

и

$$EJ\frac{dy}{dx}=P\left(lx-\frac{x^2}{2}\right).$$

Тангенсъ угла касательной на концѣ бруса получимъ, полагая $x=l$. Онъ будетъ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P}{EJ}\,\frac{l^2}{2}.$$

Вслѣдствіе малости угла касательной съ осью x-овъ, можно, вмѣсто тангенса, прямо разсматривать уголъ φ.

$$\varphi=\frac{P}{EJ}\,\frac{l^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (228)$$

Переходя къ дальнѣйшему интегрированію уравненія

$$EJdy=P\left(lx-\frac{x^2}{2}\right)dx,$$

получимъ

$$EJy=P\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+C_1.$$

Такъ какъ при $x=0$ и $y=0$, то $C_1=0$. Получаемъ приближенное уравненіе упругой кривой

$$EJy=P\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right).$$

Полагая здѣсь $x = l$, найдемъ извѣстную формулу для стрѣлы прогиба:

$$y = \frac{Pl^3}{3EJ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (229)$$

Пользуясь формулой (229), можно сейчасъ же составить произведенную силой P работу. Элементарная работа

$$dT = P\,dy.$$

Но изъ уравненія (229)

$$P = \frac{3EJ}{l^3} \cdot y.$$

Слѣдовательно,

$$dT = Pdy = \frac{3EJ}{l^3}\, y\, dy,$$

$$T = \frac{3EJ}{l^3} \int_0^y y\, dy = \frac{3}{2}\, \frac{EJ}{l^3}\, y^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (230)$$

Подставимъ сюда величину y изъ формулы (229):

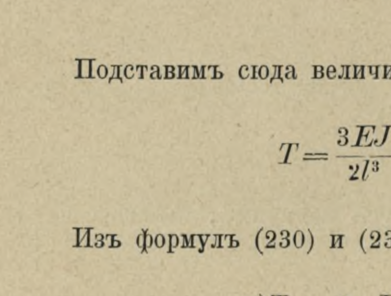
$$T = \frac{3EJ}{2l^3} \cdot \frac{l^6}{E^2J^2} \cdot \frac{P^2}{9} = \frac{1}{6}\, \frac{l^3}{EJ} \cdot P^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (231)$$

Изъ формулъ (230) и (231) опять имѣемъ соотношенія:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{3\,.\,EJ\,.\,2y}{2l^3} = \frac{3EJ}{l^3}\, \frac{l^3}{EJ} \cdot \frac{P}{3} = P,$$

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{1}{3} \cdot \frac{l^3}{EJ} \cdot P = y.$$

Задача 5. Опредѣлить произведенную работу отъ дѣйствія на стержень, ущемленный съ одного конца, пары силъ, приложенной къ другому концу.



Фиг. 108.

Пусть стержень *OA* (фиг. 108), ущемленный въ точкѣ *O*, на концѣ *A* подверженъ эффекту сгибающей пары $(Q,\ Q')$ съ моментомъ M.

Тогда дифференціальное уравненіе осевой линіи будетъ такое:

$$E.J \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = M = const.$$

или

$$EJ\,\frac{d}{dx}\,\frac{dy}{dx} = M.$$

Уголъ, образуемый касательной съ осью x-овъ, назовемъ черезъ φ, получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = tg\,\varphi = \varphi.$$

Подставляя это выраженіе въ наше уравненіе, получимъ:

$$EJ\frac{d\varphi}{dx} = M.$$

Интегрируя, получимъ:

$$EJ\varphi = Mx + C.$$

При

$$x = 0, \quad \varphi = 0, \quad \text{слѣдовательно} \quad C = 0.$$

Отсюда

$$EJ\varphi = Mx.$$

Для конца A надо положить $x = l$; поэтому для конца имѣемъ:

$$EJ\varphi = Ml,$$

$$M = \frac{EJ}{l}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (232)$$

Откуда слѣдуетъ, что

$$\varphi = \frac{Ml}{EJ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (233)$$

Теперь опредѣляемъ работу пары:

$$dT = Md\varphi.$$

Выражаемъ работу по углу φ согласно формулѣ (232):

$$dT = \frac{EJ}{l}\varphi\,d\varphi,$$

$$T = \frac{EJ}{l}\frac{\varphi^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (234)$$

Подставляя вмѣсто φ его выраженіе изъ формулы (233), получимъ:

$$T = \frac{EJ}{2l}\frac{M^2l^2}{E^2J^2} = \frac{M^2l}{2EJ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (235)$$

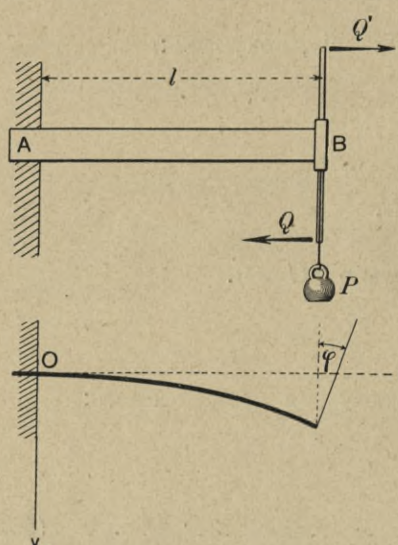
Опять устанавливаемъ, что

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = \frac{EJ}{2l}2\varphi = \frac{EJ}{l}\frac{lM}{EJ} = M,$$

$$\frac{\partial T}{\partial M} = \frac{lM}{EJ} = \varphi.$$

Задача 6. Разсмотримъ тотъ случай, когда произведенная работа характеризуется двумя параметрами.

Опредѣлить работу, произведенную силами уравновѣшивающими силы упругости при балкѣ, защемленной съ одного конца и подверженной съ другого конца дѣйствію сгибающей силы и пары.



Фиг. 109.

Пусть стержень AB (фиг. 109) находится подъ эффектомъ дѣйствія силы P и пары (Q, Q') съ моментомъ M.

Здѣсь имѣетъ мѣсто принципъ сложенія деформацій.

Въ данномъ случаѣ имѣемъ, во-первыхъ, стрѣлу прогиба y, а, во-вторыхъ,— уголъ φ.

Если дѣйствуетъ *только* сила, то стрѣла прогиба и уголъ выразятся такъ:

$$y_1 = \frac{Pl^3}{3EJ};$$

$$\varphi_1 = \frac{Pl^2}{2EJ}.$$

Съ другой стороны, эффектъ *одной только* пары будетъ таковъ:

$$y_2 = \frac{Ml^2}{2EJ};$$

$$\varphi_2 = \frac{Ml}{EJ}.$$

По принципу сложенія деформацій, отъ эффекта одновременнаго дѣйствія получатся уголъ φ и стрѣла прогиба такой величины:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{l}{EJ}\left(\frac{Pl}{2} + M\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (236)$$

$$y = y_1 + y_2 = \frac{l}{EJ}\left(\frac{Pl^2}{3} + \frac{Ml}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (237)$$

Мы видимъ, что коэффиціентъ при P въ выраженіи φ равенъ $\frac{l^2}{2EJ}$; той же самой величинѣ $\frac{l^2}{2EJ}$ равенъ коэффиціентъ при M въ выраженіи y.

Составимъ выраженіе элементарной работы, воображая одновременное дѣйствіе пары съ моментомъ M и силы P

$$dT = P\,dy + M\,d\varphi.$$

Чтобы совершить интеграцію, надо P и M выразить черезъ y и φ.

Помножимъ теперь обѣ части уравненія (236) на величину $\frac{l}{2}$ и результатъ умноженія вычтемъ изъ уравненія (237), получимъ:

$$\frac{EJ}{l}\left(y-\frac{l\varphi}{2}\right)=\frac{l}{12}P \qquad (238)$$

Значитъ,

$$P=\frac{12EJ}{l^3}\left(y-\frac{l\varphi}{2}\right).$$

Помножимъ теперь обѣ части уравненія (236) на $\frac{l}{3}$, обѣ части уравненія (237) на $^1/_2$ и вычтемъ изъ перваго второе; имѣемъ:

$$\frac{EJ}{l}\left(\varphi\frac{l}{3}-\frac{y}{2}\right)=\frac{Ml}{12},$$

$$M=\frac{12EJ}{l^3}\left(\varphi\frac{l^2}{3}-\frac{yl}{2}\right) \qquad (239)$$

Здѣсь также коэффиціентъ въ уравненіи (238) при φ (въ скобкѣ) равенъ $\left(-\frac{l}{2}\right)$; коэффиціентъ въ уравненіи (239) при y равенъ той же самой величинѣ $\left(-\frac{l}{2}\right)$.

Элементарная работа равна

$$dT=\frac{12EJ}{l^3}\left[y\,dy+\frac{l^2}{3}\varphi\,d\varphi-\frac{l}{2}\left(y\,d\varphi+\varphi\,dy\right)\right].$$

Благодаря упомянутому равенству коэффиціентовъ, вторая часть представляетъ полный дифференціалъ, и уравненіе легко интегрируется

$$T=\frac{12EJ}{l^3}\left(\frac{y^2}{2}+\frac{l^2\varphi^2}{6}-\frac{l\varphi y}{2}\right)+C,$$

гдѣ при $\varphi=0$ и $y=0$, $T=0$, слѣдовательно, $C=0$.

Такимъ образомъ произведенная работа будетъ:

$$T=\frac{12EJ}{l^3}\left(\frac{y^2}{2}+\frac{l^2\varphi^2}{6}-\frac{l\varphi y}{2}\right) \qquad (240)$$

Но можно выразить эту работу не по перемѣщеніямъ, а черезъ P и M. Для этого надо подставить изъ формулъ (236) и (237) выраженія φ и y;

но проще взять дифференціалы этихъ двухъ выраженій и вставить ихъ въ элементарную работу:

$$dT = \frac{Pl}{EJ}\left(\frac{l^2}{3}dP + \frac{l}{2}dM\right) + \frac{Ml}{EJ}\left(\frac{l}{2}dP + dM\right) =$$

$$= \frac{l}{EJ}\left[\frac{l^2}{3}P\,dP + M\,dM + \frac{l}{2}\left(P\,dM + M\,dP\right)\right].$$

Послѣ интеграціи получимъ:

$$T = \frac{l}{EJ}\left[\frac{l^2}{6}P^2 + \frac{M^2}{2} + \frac{l}{2}PM\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (241)$$

Легко убѣдиться, что, если взять частную производную отъ найденной произведенной работы по смѣщенію y, то выйдетъ сила P, по смѣщенію φ—получится пара M; взявъ производную по силѣ, получимъ смѣщеніе y, взявъ же ее по моменту пары M, получимъ смѣщеніе φ.

Напримѣръ:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{12EJ}{l^3}\left(y - \frac{l}{2}\varphi\right),$$

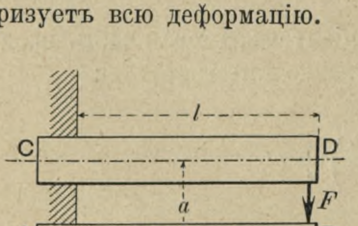
это есть сила P.

$$\frac{\partial T}{\partial M} = \frac{l}{EJ}\left(M + \frac{Pl}{2}\right),$$

это есть смѣщеніе φ.

§ 68. Теорема Кастиліано. Механическая система съ упругими частями можетъ быть такой, что нѣкоторыя части разсматриваются недеформирующимися, и потому нѣкоторыя кинематическія условія системы считаются ненарушимыми, а другія части будутъ извѣстнымъ образомъ деформироваться, при чемъ деформація будетъ характеризоваться малымъ измѣненіемъ нѣкоторыхъ параметровъ.

Задача должна быть поставлена такъ, что рядъ параметровъ характеризуетъ всю деформацію.

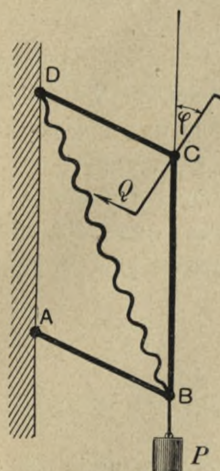


Фиг. 110.

Если, напримѣръ, два бруска AB и CD, ущемленные въ точкахъ A и C (фиг. 110), соединены между собой тягой BD и находятся подъ эффектомъ силъ P и F, то деформація системы, къ которой отнесемъ сгибаніе брусковъ AB и CD, а ровно и вытяжку тяги DB, будетъ вполнѣ охарактеризована вертикальными смѣщеніями x и y точекъ B и D.

Опредѣленнымъ силамъ P и F соотвѣтствуютъ опредѣленныя смѣщенія x и y и наоборотъ.

Положеніе нашей системы опредѣляется двумя параметрами x, y, которымъ соотвѣтствуютъ двѣ силы P и F. Чтобы сообразить какая сила соотвѣтствуетъ данному параметру, надо: вообразить, что всѣ параметры не измѣняются, а измѣняется только этотъ параметръ; потомъ опредѣлить сумму элементарныхъ работъ всѣхъ силъ и раздѣлить ее на измѣненіе разсматриваемаго параметра. Въ нашемъ случаѣ, измѣняя параметръ x, мы получаемъ элементарную работу $P\,\delta x$, которая, по раздѣленію на δx, даетъ намъ силу P, соотвѣтствующую параметру x. На фигурѣ 111 представленъ стержневой параллелограммъ **ABCD**, стороны котораго мы считаемъ неизмѣнными, перетянутый по діагонали растяжимою тягою **BD**. На параллелограммъ дѣйствуетъ грузъ P и пара (Q, Q'), приложенная къ его плечу **CD**. Смѣщеніе параллелограмма опредѣляется: вертикальнымъ смѣщеніемъ x вершины **B** и угломъ поворота φ его звена **BC**. Обобщенныя силы, соотвѣтствующія этимъ параметрамъ, будутъ сила P и моментъ M пары (Q, Q').



Фиг. 111.

Всегда, вообще, имѣется нѣсколько параметровъ, при измѣненіи которыхъ внѣшнія силы производятъ работу, и по этой работѣ можно сообразить обобщенныя силы, соотвѣтствующія параметрамъ.

Пусть даны параметры q, q_1, q_2,..... и соотвѣтствующія имъ силы Q, Q_1, Q_2,...

Измѣненія параметровъ *весьма малы*, но конечны. Когда всѣ параметры заданы, то вполнѣ охарактеризовано все положеніе системы, и по этой причинѣ можно вполнѣ опредѣлить работу T всѣхъ упругихъ силъ, входящихъ въ систему. Въ этомъ заключается принципъ *консервативности* системы. Работа, произведенная на деформацію упругихъ тѣлъ, зависитъ только отъ конечной формы этихъ тѣлъ, а не зависитъ отъ того способа, которымъ мы къ этой формѣ подошли.

Математически этотъ принципъ консервативности выражается тѣмъ, что производная работы есть функція всѣхъ параметровъ, характеризующихъ систему

$$T = F(q,\ q_1,\ q_2, \cdots),$$

не зависящая отъ того, какимъ образомъ деформація произведена.

Мы видѣли, что работа выражается функціей второй степени отъ смѣщеній. Это происходитъ отъ того, что сами упругія силы являются функціей 1-й степени отъ смѣщенія.

Такимъ образомъ произведенная работа будетъ имѣть видъ:

$$T = aq^2 + bq_1{}^2 + 2cq\,q_1 + dq_2{}^2 + 2eq_1\,q_2 + fq_3{}^2 + \ .\ .\ .\ .\ . \quad (242)$$

Докажемъ теперь теорему Кастиліано.

Теорема. *Частныя производныя отъ произведенной работы по смѣщенію равны соотвѣтственнымъ силамъ, а частныя производныя отъ произведенной работы по силамъ даютъ соотвѣтственныя смѣщенія.*

Для доказательства вообразимъ систему, подъ эффектомъ нѣкоторыхъ внѣшнихъ силъ Q, Q_1, Q_2...., въ равновѣсіи, при смѣщеніяхъ $q, q_1, q_2, \ldots$, и приложимъ къ положенію равновѣсія теорему *Лагранжа*, то-есть, предположимъ, что произошли безконечно-малыя измѣненія параметровъ, вслѣдствіе которыхъ всѣ внѣшнія силы, а также и всѣ упругія силы произвели нѣкоторыя элементарныя работы.

Такъ какъ, по сказанному, при измѣненіи смѣщенія q на dq, работу совершаетъ только внѣшняя сила Q, то эта работа будетъ равна $Q\,dq$, также и относительно работы всѣхъ другихъ внѣшнихъ силъ.

Что касается до элементарной работы силъ упругости, то мы замѣтимъ слѣдующее: мы назвали черезъ произведенную работу T—работу внѣшнихъ силъ, необходимую для того, чтобы упругія тѣла изъ недеформированнаго состоянія привести въ деформированное. Такъ какъ упругія силы при этомъ сопротивляются внѣшнимъ силамъ, то ихъ работа одинакова по величинѣ, но противоположна по знаку работѣ внѣшнихъ силъ. Такимъ образомъ, работа упругихъ силъ есть $(-T)$, а элементарная работа упругихъ силъ равна $(-\delta T)$.

Мы получаемъ уравненіе Лагранжа:

$$Q\,\delta q + Q_1\,\delta q_1 + \ldots\ldots - \delta T = 0.$$

Измѣненіе δT происходитъ оттого, что величины q, входящія въ T, получаютъ приращенія δq, δq_1,.... и т. д.

Поэтому наше уравненіе можно написать еще такъ:

$$Q\,\delta q + Q_1\,\delta q_1 + \ldots - \frac{\partial T}{\partial q}\delta q - \frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 - \ldots = 0.$$

Или

$$\delta q\left(Q - \frac{\partial T}{\partial q}\right) + \delta q_1\left(Q_1 - \frac{\partial T}{\partial q_1}\right) + \ldots = 0.$$

Такъ какъ эта формула имѣетъ мѣсто при всевозможныхъ безконечно-малыхъ измѣненіяхъ δq, δq_1, δq_2,.... и т. д., то всѣ коэффиціенты при этихъ множителяхъ δq, δq_1, δq_2,.... и т. д. должны равняться нулю.

(Какъ извѣстно, это положеніе математически доказывается тѣмъ, что, вслѣдствіе произвола перемѣщеній, можно предположить, что мѣняется только одинъ параметръ.)

Итакъ,

$$\delta q\left(Q - \frac{\partial T}{\partial q}\right) = 0, \quad Q = \frac{\partial T}{\partial q}.$$

Точно такъ же

$$Q_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1} \ldots \text{ и т. д.}$$

Такимъ образомъ, первая часть теоремы доказана. Что касается второй части теоремы, то она математически вытекаетъ изъ первой части, опираясь на то положеніе, что произведенная работа есть однородная функція второй степени относительно смѣщенія. Въ математикѣ доказывается слѣдующее свойство однородной функціи. Если T есть однородная функція n-ой степени перемѣнныхъ q, q_1,.... и т. д., то

$$nT = \frac{\partial T}{\partial q} q + \frac{\partial T}{\partial q_1} q_1 + \dots$$

Въ нашемъ случаѣ $n = 2$. Значитъ,

$$2T = \frac{\partial T}{\partial q} q + \frac{\partial T}{\partial q_1} q_1 + \dots$$

Въ силу доказанной нами первой части теоремы равенство можно написать въ такомъ видѣ:

$$2T = Qq + Q_1 q_1 + \dots$$

или

$$T = Qq + Q_1 q_1 + \dots - T.$$

Предположимъ, что въ первой части всѣ смѣщенія q замѣнены черезъ соотвѣтственныя силы Q, изъ линейныхъ формулъ, связывающихъ смѣщенія съ силами, и возьмемъ отъ обѣихъ частей этого равенства производную по Q, разсматривая вторую часть уравненія какъ сложную функцію, въ которой всѣ q зависятъ отъ Q.

$$\frac{\partial (T)}{\partial Q} = q + Q \frac{\partial q}{\partial Q} + Q_1 \frac{\partial q_1}{\partial Q} + \dots - \frac{\partial T}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial Q} - \frac{\partial T}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial Q} =$$

$$= q + Q \frac{\partial q}{\partial Q} + Q_1 \frac{\partial q_1}{\partial Q} + \dots - Q \frac{\partial q}{\partial Q} - Q_1 \frac{\partial q_1}{\partial Q} = q.$$

Точно такъ же можно прійти къ выводу, что $\frac{\partial (T)}{\partial Q_1} = q_1$ и т. д. Это и требовалось доказать.

Примѣръ 1. Приложимъ теорему Кастиліано къ опредѣленію смѣщеній x и y въ упругой системѣ, изображенной на фигурѣ 110 bis, въ предположеніи, что оба бруса одинаковы и дѣйствуетъ только сила P. Надо сначала принимать $F \neq 0$ и потомъ по примѣненіи теоремы положить $F = 0$. Если сила натяженія тяги BD есть S, то на точку B дѣйствуетъ сила $P - S$, а на точку D сила $F + S$. Стрѣлки прогиба, на основаніи сказаннаго выше (форм. 229), будутъ:

$$x = \frac{(P - S) l^3}{3EJ}, \quad y = \frac{(F + S) l^3}{3EJ}.$$

Удлиненіе стержня **BD** выразится (221') формулою:

$$x-y=\frac{aS}{ef},$$

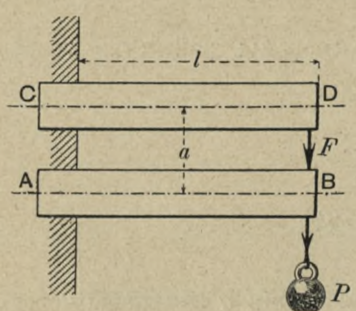
гдѣ a длина, e модуль упругости и f площадь сѣченія стержня **BD.** Мы получаемъ для опредѣленія S уравненіе:

$$\frac{(P-F-2S)l^3}{3EJ}=\frac{aS}{ef},$$

изъ котораго слѣдуетъ, что

$$\frac{(P-F)l^3}{3EJ}=S\left[\frac{a}{ef}+\frac{2l^3}{3EJ}\right],$$

$$S=\frac{(P-F)l^3}{3EJ}:\left[\frac{a}{ef}+\frac{2l^3}{3EJ}\right].$$



Фиг. 110 bis.

Положимъ для сокращенія письма, что

$$\frac{l^3}{3EJ}:\left[\frac{a}{ef}+\frac{2l^3}{3EJ}\right]=\lambda,$$

тогда

$$S=(P-F)\lambda.$$

Подставляя это значеніе въ выраженіе произведенной работы, найдемъ по сказанному выше, что

$$T=\frac{1}{6}\frac{l^3}{EJ}(P-S)^2+\frac{1}{6}\frac{l^3}{EJ}(F+S)^2+\frac{1}{2}\frac{aS^2}{ef}.$$

Теперь мы можемъ опредѣлить искомое смѣщеніе x по теоремѣ Кастиліано:

$$x=\frac{\partial T}{\partial P}=\frac{1}{3}\frac{l^3}{EJ}\left[(P-S)\left(1-\frac{\partial S}{\partial P}\right)+(F+S)\frac{\partial S}{\partial P}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{l^3}{EJ}\left[P-S+(F-P+2S)\frac{\partial S}{\partial P}\right].$$

Подставляя сюда выше найденное значеніе S, полагаемъ въ окончательномъ результатѣ $F=0$.

Получаемъ:

$$x=\frac{1}{3}\frac{l^3P}{EJ}[1-2\lambda+2\lambda^2].$$

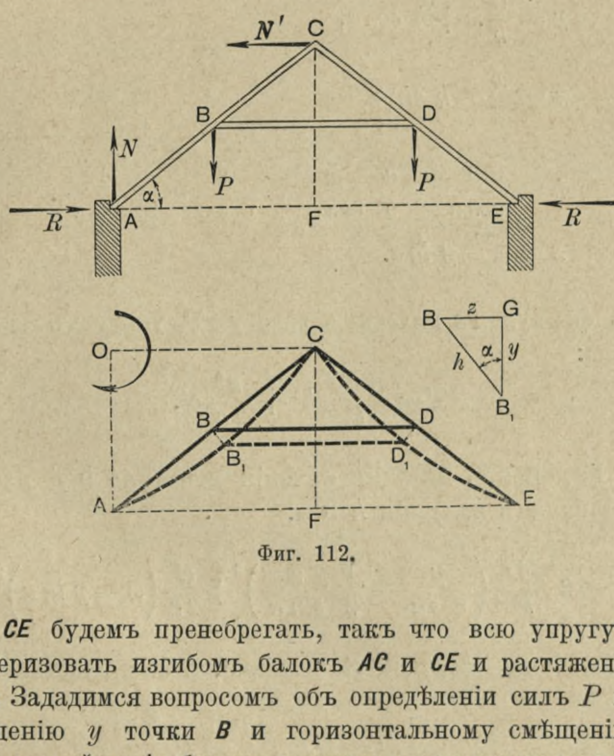
Если тяга *DB* весьма жестка, т.-е. $e = \infty$, то $\lambda = \frac{1}{2}$. При этомъ получается смѣщеніе:

$$x = \frac{1}{6}\,\frac{l^3}{EJ}\,P,$$

которое будетъ въ два раза менѣе (см. формулу 229) стрѣлы прогиба, соотвѣтствующей только одному брусу *AB*.

Этотъ результатъ очевиденъ самъ собою.

Примѣръ 2. Для второго примѣра разсмотримъ ферму, схематически представленную на фигурѣ 112, которая изображаетъ ферму, поддерживающую крышу въ Химическомъ Институтѣ Императорскаго Московскаго Техническаго Училища. Допустимъ для простоты, что вѣсъ крыши $2P$ сосредоточивается въ точкахъ *B* и *D*, при чемъ *AB* = *BC* = *CD* = *DE*. Сжатіемъ



Фиг. 112.

балокъ *AC* и *CE* будемъ пренебрегать, такъ что всю упругую деформацію будемъ характеризовать изгибомъ балокъ *AC* и *CE* и растяженіемъ или сжатіемъ тяги *BD*. Зададимся вопросомъ объ опредѣленіи силъ P и R по вертикальному смѣщенію y точки *B* и горизонтальному смѣщенію x точки *A*; при этомъ первое смѣщеніе будемъ считать положительнымъ внизъ, а второе—положительнымъ вправо. На конецъ *A* балки *AC* будетъ дѣйствовать, кромѣ R, горизонтальной силы реакціи стѣны, еще N, вертикальная реакція стѣны а на конецъ этой балки *C* будетъ дѣйствовать горизонтальная сила противодѣйствія N' правой балки на лѣвую. Такъ какъ сумма моментовъ этихъ трехъ силъ относительно точки *B* равна нулю, то образованныя ими составляющія нормальныя къ балкѣ на концахъ ея *A* и *C* должны быть между собою равны. Вслѣдствіе этого обѣ половины балки *AC* будутъ симметрично согнуты относительно точки *B*. Пусть соотвѣтственная стрѣла прогиба будетъ $BB_1 = h$. Кромѣ изгиба балки AC, произойдетъ еще поворотъ ея на нѣкоторый малый уголъ Θ относительно мгновеннаго центра вращенія O. Если назовемъ черезъ α уголъ наклоненія балки AC къ горизонту и черезъ z горизонтальное смѣщеніе точки B, считаемое положительнымъ вправо, то для трехъ величинъ x, y и Θ найдемъ изъ фигуры 112:

$$x = b\Theta,$$
$$y = a\,\Theta + h\cos\alpha,$$
$$z = \frac{b}{2}\Theta - h\sin\alpha,$$

гдѣ $2a = AF$, $b = CF$ и $\angle CAF = \alpha$.

Исключая Θ, находимъ:

$$y = \frac{a}{b}x + h\cos\alpha,$$
$$z = \frac{x}{2} - h\sin\alpha,$$

откуда

$$h = \frac{y}{\cos\alpha} - \frac{a}{b}\,\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\alpha} - \frac{x}{2\sin\alpha},$$
$$z = x - y\,tg\,\alpha.$$

По этимъ формуламъ находимъ работу T упругихъ силъ для одной половины фермы:

$$T = \frac{3EJ}{l^3}h^2 + \frac{z^2}{2a}ef,$$

гдѣ $AC = 2l$, J моментъ инерціи сѣченія балки AC и f площадь сѣченія тяги BD. Подставляемъ значенія h и z:

$$T = 3\,\frac{EJ}{l^3}\left(\frac{y}{\cos\alpha} - \frac{1}{2}\,\frac{x}{\sin\alpha}\right)^2 + \frac{ef}{2a}\left(x - y\,tg\,\alpha\right)^2.$$

Теперь, пользуясь теоремой Кастиліано, можемъ написать:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -R, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = P,$$

при чемъ знакъ минусъ въ первомъ равенствѣ поставленъ потому, что сила реакціи R взята въ обратномъ направленіи смѣщенію x. Мы находимъ:

$$R = 3\,\frac{EJ}{l^3}\left(\frac{y}{\cos\alpha} - \frac{1}{2}\,\frac{x}{\sin\alpha}\right)\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{ef}{a}\left(x - y\,tg\,\alpha\right) \quad . \; . \; . \; . \; (243')$$

$$P = 6\,\frac{EJ}{l^3}\left(\frac{y}{\cos\alpha} - \frac{1}{2}\,\frac{x}{\sin\alpha}\right)\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{ef}{a}\left[x - y\,tg\,\alpha\right]tg\,\alpha \quad . \; . \; (243'')$$

Эти формулы рѣшаютъ предложенную задачу.

Если бы точки опоры A и E оставались неподвижными и мы желали бы въ этомъ предположенiи опредѣлить силу R, распирающую стѣны, то надо бы было положить въ формулахъ ($243'$ и $243''$) $x=0$ и исключить изъ нихъ y. Это дало бы намъ:

$$R=\frac{P}{2}\,ctg\,\alpha\left[\frac{1+\dfrac{efl^3}{3EJa}\sin^2\alpha}{1+\dfrac{efl^3}{6EJa}\sin^2\alpha}\right].$$

Если бы модуль e былъ очень малъ, т.-е. тяга была бы весьма слаба, то наша формула дала бы величину распора

$$R=\frac{P}{2}\,ctg\,\alpha,$$

которая прямо получается, такъ какъ сумма моментовъ силъ N' и P относительно центра O есть нуль и $R=N'$. Когда $\frac{e}{E}>1$, тогда членъ $\frac{efl^3}{EJ}$ выходитъ очень большимъ, вслѣдствiе того что длина l значительно превосходитъ линейные размѣры сѣченiя балки. Въ этомъ предположенiи мы получаемъ:

$$R=P\,ctg\,\alpha,\qquad y=\frac{Pa}{ef}\,ctg^2\alpha.$$

Такимъ образомъ прибавленiе тяги BD значительно увеличиваетъ распоръ ногъ фермы на стѣны. Этотъ, на первый взглядъ, парадоксальный результатъ произошелъ оттого, что въ данномъ случаѣ тяга BD работаетъ не на растяженiе, а на сжатiе.

§ 69. Теорема о наименьшей произведенной работѣ. Когда къ данной статически опредѣленной системѣ прибавлены лишнiя связи, то для опредѣленiя упругихъ силъ въ этихъ связяхъ весьма удобно пользоваться теоремою о наименьшей произведенной работѣ, которая заключается въ слѣдующемъ:

Если отбросить лишнiя связи и замѣнить ихъ соотвѣтственными упругими силами ихъ реакцiй на данную опредѣленно статическую систему, потомъ по этимъ силамъ реакцiй и даннымъ внѣшнимъ силамъ опредѣлить всѣ упругiя силы въ полученной опредѣленно статической системѣ и составить сумму произведенныхъ работъ какъ для опредѣленно статической системы, такъ и для отброшенныхъ связей, то эта сумма при дѣйствительномъ значенiи силъ реакцiй отброшенныхъ связей имѣетъ minimum.

Эта теорема является прямымъ слѣдствiемъ теоремы Кастилiано.

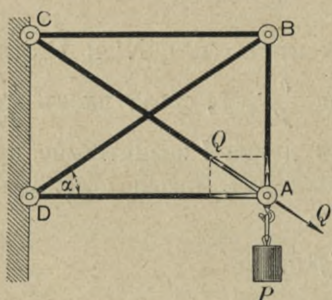
Пусть (фиг. 113) имѣемъ шарнирный параллелограммъ $ABCD$, точки C и D котораго неподвижны и который обремененъ грузомъ P, приложеннымъ къ шарниру A. Параллелограммъ перетянутъ двумя дiагональными тягами CA и DB. Здѣсь одна тяга, напримѣръ, AC, является лишнею связью.

Если бы мы ее отбросили и замѣнили ея эффектъ силою натяженія Q, то система сдѣлалась бы опредѣленно статической и мы безъ труда нашли бы силы натяженія всѣхъ звеньевъ, въ зависимости отъ силъ P и Q. По этимъ силамъ составимъ сумму произведенныхъ работъ, которую назовемъ черезъ T_1; кромѣ этого, составимъ произведенную работу для вытяжки звена *CA* силою Q', равной и противоположной Q, и назовемъ эту работу черезъ T_2. Пусть q будетъ удлиненіе звена *CA*. По теоремѣ Кастиліано можемъ написать:

$$\frac{\partial T_1}{\partial Q} = -q.$$

Съ другой стороны, если бы рѣчь шла только о звенѣ *CA*, укрѣпленномъ въ точкѣ *C* и находящемся подъ эффектомъ силы $Q' = Q$, то мы имѣли бы по теоремѣ Кастиліано

$$\frac{\partial T_2}{\partial Q'} = \frac{\partial T_2}{\partial Q} = q.$$



Фиг. 113.

Сложивъ обѣ написанныя формулы, получаемъ:

$$\frac{\partial (T_1 + T_2)}{\partial Q} = 0.$$

Но $T_1 + T_2 = T$ есть вся произведенная работа какъ въ системѣ съ отброшенной связью, такъ и въ отброшенной связи. Мы получимъ

$$\frac{\partial T}{\partial Q} = 0;$$

но это есть условіе *minimum*'а или *maximum*'а функціи T въ зависимости отъ перемѣннаго параметра Q. То обстоятельство, что въ данномъ случаѣ будетъ *minimum*, слѣдуетъ изъ того, что T есть функція второй степени относительно перемѣннаго Q, которая при всѣхъ значеніяхъ Q существенно положительна. Если бы имѣлось нѣсколько лишнихъ связей, то доказательство теоремы было бы такое же. Отбрасываемъ связи и замѣняемъ ихъ силами Q, Q_1, $Q_2, \ldots$, соотвѣтствующими деформаціямъ $-q, -q_1, -q_2, \ldots$. Называемъ черезъ T_1 работу на преодолѣніе упругихъ силъ въ опредѣленно статической системѣ съ отброшенными связями и черезъ T_2—работу въ отброшенныхъ связяхъ. Эти работы будутъ функціями Q, Q_1, $Q_2, \ldots$.

Пишемъ по теоремѣ Кастиліано:

$$\frac{\partial T_1}{\partial Q} = -q, \quad \frac{\partial T_2}{\partial Q} = q,$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial Q_1} = -q_1, \quad \frac{\partial T_2}{\partial Q_1} = q_1,$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

Складывая попарно эти равенства, получаемъ:

$$\frac{\partial T}{\partial Q}=0, \quad \frac{\partial T}{\partial Q_1}=0, \ldots\ldots$$

Эти формулы даютъ намъ рядъ уравненій первой степени, опредѣляющихъ силы Q, Q_1, $Q_2, \ldots .$, которыя соотвѣтствовали бы *minimum*'у функціи T, если бы это *minimum* существовало. Но такъ какъ функція T всегда положительна, то она навѣрно имѣетъ *minimum*, который и соотвѣтствуетъ нашей задачѣ.

Рѣшимъ вопросъ о силѣ натяженія въ тягѣ **CA** (фиг. 113). При прибавленной силѣ Q звено **DA** будетъ сжато силою $Q \cos \alpha$, а звено **AB** растянуто силою $P - Q \sin \alpha$. Звено **CB** будетъ растянуто силою

$$(P - Q \sin \alpha) \operatorname{ctg} \alpha,$$

а звено **BD** будетъ сжато силою

$$(P - Q \sin \alpha) \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Произведенная работа T_1 будетъ:

$$T_1 = \frac{ef}{2l}\Big[Q \cos \alpha\Big]^2 + \frac{ef}{2l \operatorname{tg} \alpha}\Big[P - Q \sin \alpha\Big]^2 + \frac{ef}{2l}\Big[P - Q \sin \alpha\Big]^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + \\ + \frac{ef}{2l} \cos \alpha \Big[P - Q \sin \alpha\Big]^2 \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

гдѣ e—одинаковый для всѣхъ звеньевъ модуль упругости, f—площадь сѣченія звеньевъ и $l = $ **AD**. Для работы T_2 найдемъ:

$$T_2 = \frac{ef}{2l} \cos \alpha \; Q^2.$$

Такимъ образомъ

$$T = \frac{ef}{2l}\Big[(\cos^2 \alpha + \cos \alpha)\, Q^2 + \left(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}\right)(P - Q \sin \alpha)^2\Big].$$

Согласно теоремѣ о наименьшей произведенной работѣ искомая величина Q найдется изъ уравненія:

$$(\cos^2 \alpha + \cos \alpha)\, Q - \left(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}\right)(P - Q \sin \alpha) \sin \alpha = 0,$$

изъ котораго слѣдуетъ, что

$$Q = \frac{P}{\sin \alpha} \; \frac{\cos \alpha + \sin \alpha + 1}{2 \cos \alpha + \sin \alpha + 2}.$$

§ 70. Теорема Мора. Будемъ разсматривать систему, стѣсненную ненарушимыми геометрическими связями и упругими частями. Предположимъ, что эта система въ первый разъ находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ Q, Q_1,.... при смѣщеніяхъ q, q_1,...., при чемъ развиваются внутреннія упругія силы—S, S_1,.... и упругія деформаціи s, s_1,....; во второй разъ система находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ Q', Q_1',.... при смѣщеніяхъ q', q_1',...., при чемъ развиваются внутреннія упругія силы — S', S_1',.... и соотвѣтственныя деформаціи s', s_1',....

Теорема Мора состоитъ въ слѣдующемъ:

Сумма элементарныхъ работъ внѣшнихъ и упругихъ силъ первой группы при безконечно малыхъ перемѣщеніяхъ, пропорціональныхъ перемѣщеніямъ второй группы, равна нулю.

Для доказательства теоремы пишемъ согласно теоремѣ Кастиліано:

$$Q = \frac{\partial T}{\partial q},$$

$$Q_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Потомъ, умноживъ первое равенство на q', второе—на q_1' и т. д., складываемъ:

$$\Sigma Q q' = \Sigma \frac{dT}{dq} q' \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (243)$$

Произведенная работа T есть однородная функція второй степени относительно малыхъ смѣщеній q, q_1,.... Представимъ ее въ видѣ:

$$T = \frac{1}{2}\left(aq^2 + bq_1^2 + 2cqq_1 + \ldots\right).$$

Легко усмотрѣть, что

$$\Sigma \frac{\partial T}{\partial q} q' = aqq' + bq_1q_1' + c\left(qq_1' + q'q_1\right) + \quad . \ . \ . \ . \ . \ (244)$$

Съ другой стороны, произведенную работу T мы можемъ разсматривать какъ однородную функцію второй степени отъ упругихъ деформацій s, s_1,.... (удлиненій звеньевъ, стрѣлокъ прогиба, угловъ крученія и т. д.) и представлять въ видѣ:

$$(T) = \frac{1}{2}\left(\alpha s^2 + \beta s_1^2 + 2\gamma ss_1 + \ldots\right).$$

Каждая изъ деформацій s есть линейная функція относительно смѣщеній q, q_1,.... Если замѣнимъ величины s, s_1,.... ихъ выраженіями черезъ q, q_1,...., то выраженіе (T) преобразуется въ T. Составимъ сумму:

$$\Sigma \frac{\partial(T)}{\partial s} s' = \alpha s s' + \beta s_1 s_1' + 2\gamma (s s_1' + s' s_1) + \ldots.$$

Замѣнимъ въ ней s, s_1,..... ихъ выраженіями черезъ q, q_1,..... и равнымъ образомъ s', s_1',.... подобными же выраженіями черезъ q', q_1',....; получимъ:

$$\Sigma \frac{\partial(T)}{\partial s} s' = a q q' + b q_1 q_1' + c (q q_1' + q' q_1) + \ldots\ldots = \Sigma \frac{\partial T}{\partial q} q'.$$

На основаніи сказаннаго равенство (243) можно представить въ видѣ:

$$\Sigma Q q' = \Sigma \frac{\partial(T)}{\partial s} s'.$$

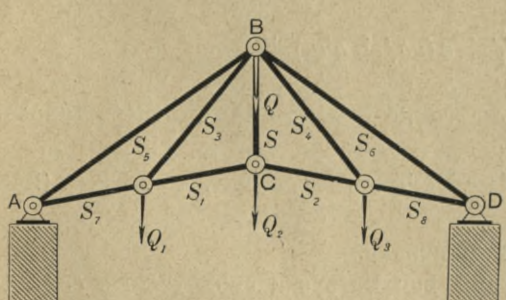
Но

$$\frac{\partial T}{\partial s} = S, \quad \frac{\partial T}{\partial s_1} = S_1, \ldots.,$$

поэтому

$$\Sigma Q q' - \Sigma S s' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (245)$$

Это равенство доказываетъ теорему Мора. Теорема Мора съ удобствомъ прилагается для опредѣленія вертикальныхъ смѣщеній въ опредѣленно статической фермѣ.



Фиг. 114.

Пусть (фиг. 114) требуется опредѣлить вертикальное смѣщеніе узла C подъ дѣйствіемъ грузовъ Q, Q_1, Q_2, Q_3. Для этого отыскиваемъ по обыкновеннымъ пріемамъ графостатики напряженія S, S_1,... во всѣхъ звеньяхъ фермы, считая его положительнымъ въ случаѣ растяженія. Потомъ отбрасываемъ всѣ силы Q_1, Q_2, Q_3; а силу Q, приложенную къ той точкѣ, смѣщеніе которой опредѣляемъ, замѣняемъ силою, равною 1 (одна тонна), при чемъ для такой нагрузки по правиламъ графостатики опять разсчитываемъ всѣ напряженія звеньевъ S', S_1', S_2',.....

По напряженіямъ S, S_1,.... вычисляемъ вытяжки звеньевъ

$$s' = \frac{l S'}{e f},$$

$$s_1' = \frac{l_1 S_1'}{e_1 f_1},$$

. . . . . .

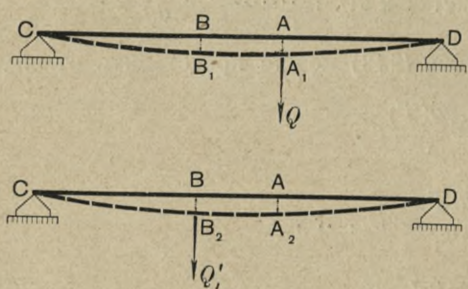
. . . . . .

и пишемъ формулу Мора (245), взявши смѣщенія изъ второго случая нагрузки, а напряженія—изъ перваго. Получимъ

$$q - \Sigma S \frac{lS'}{ef} = 0.$$

Эта формула опредѣляетъ вертикальное смѣщеніе q точки **C**.

§ 71. Теорема Максвеля. Теорема эта устанавливаетъ взаимность между двумя точками **A** и **B** (фиг. 115) упругой системы по отношенію къ силѣ, дѣйствующей на одну точку, и смѣщенію другой точки. Пусть $AA_1 = q$, $BB_1 = q_1$, $AA_2 = q'$ и $BB_2 = q_1'$. Эту теорему можно въ упрощенномъ видѣ высказать такъ:



Фиг. 115.

*Если сила Q, дѣйствующая на точку **A**, вызываетъ въ точкѣ **B** смѣщеніе q_1, то та же сила, приложенная къ точкѣ **B** по направленію смѣщенія q_1, вызываетъ въ точкѣ **A** по направленію прежней силы Q смѣщеніе q'.*

Доказательство этой теоремы получается изъ формулъ (243 и 244) предыдущаго параграфа.

Мы имѣемъ по этимъ формуламъ

$$\Sigma Qq' = aqq' + bq_1q_1' + c(qq_1' + q'q_1) + \ldots\ldots$$

Такъ какъ вторая часть равенства не измѣняется отъ перестановки $q, q_1, \ldots$ на $q', q_1', \ldots,$ то

$$\Sigma Qq' = \Sigma Q'q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (246)$$

Это равенство и даетъ теорему Максвеля.

Предполагая, что въ первый разъ вся нагрузка сводится къ силѣ Q, приложенной въ точкѣ **A** (фиг. 115), а во второй разъ къ силѣ Q_1', приложенной въ точкѣ **B**, будемъ имѣть:

$$Qq' = Q_1'q_1.$$

Если положимъ

$$Q = Q_1',$$

то найдемъ:

$$q_1 = q',$$

что и требовалось доказать.

19. *Жуковскій Н. Е.*, профес. Теоретическая механика. Ч. I. Статика. Ч. II. Кинематика. Ч. III. Динамика. Изд. 2-е (литограф.).

20. *Лахтинъ Н. К.*, препод. Расчетъ арокъ и сводовъ (печатн.), съ черт. въ текстѣ.

21. *Писаревъ В. П.*, препод. Механика. Лекціи, читанныя на высшихъ женскихъ курсахъ (литограф.).

„Техническая библіотека Студенческой Издательской Комиссіи при И. Т. У.".

Вышли въ свѣтъ:

№ 1. *Бернеръ. Berner O.*, Dr.-Ing. Примѣненіе перегрѣтаго пара въ поршневой паровой машинѣ (печатн.). Переводъ инж.-мех. *С. Н. Литкова*, подъ ред. профес. И. М. Т. У. *В. И. Гриневецкаго*. 97 стр., 39 черт. въ текстѣ. 1908 г. Цѣна 1 руб. 60 коп.

№ 2. *Шталь. Stahl W.* Паропроводы высокаго давленія на выставкѣ въ Дюссельдорфѣ (печатн.). Переводъ инж.-мех. *П. А. Богданова* и *А. А. Оттъ*, подъ редакціей преподавателя И. М. Т. У. инж.-мех. *К. В. Кирша*. 24 стр., 28 фиг. въ текстѣ. 1908 г. Цѣна 55 коп.

№ 3. *Жуковскій Н. Е.*, профес. Теорія регулированія хода машинъ (литограф.). Ч. I. 140 стр., 62 черт. въ текстѣ и III табл. 1909 г. Цѣна 2 руб. 25 коп.

Кромѣ того, въ складѣ Издательской Комиссіи имѣются слѣдующія изданія:

Литографированныя:

Величковскій А. П., препод. Термодинамика. (Лекціи, читанныя для студент. химич. отд. И. М. Т. У.) 236 стр., 22 черт. въ текстѣ. 1907 г. Цѣна 2 руб. 20 коп.

Павловъ В. Е., ад.-профес. Аналитическая химія. Количественный анализъ. Ч. I. Объемный анализъ. Ч. II. Вѣсовой анализъ. (Лекціи, читанныя для студент. химич. отд. И. М. Т. У.) 240 стр., 26 черт. въ текстѣ. 1907 г. Цѣна 2 руб. 30 коп.

Прокунинъ М. П., профес. Химическая технологія минеральныхъ веществъ. 304 стран., 308 черт. 1899 г. Цѣна 10 руб.

Страховъ П. С., препод. Прикладная механика. (Лекціи, читанныя для студент. химич. отд. И. М. Т. У.) 368 стр., съ отдѣльнымъ атласомъ чертежей въ XXV табл. 1907 г. Цѣна 4 руб. 60 к.

Черепашинскій М. М., профес. Расчетъ моста. Пособіе при проектированіи желѣзныхъ мостовъ. 109 стр., 45 черт. въ текстѣ. 1906 г. Цѣна 1 руб.

Печатныя:

Александровъ В. А., инж. Практическія работы по электротехникѣ. 800 стр., 237 черт. въ текстѣ. 1909 г. Цѣна 2 руб. 25 коп.

Андреевъ К. А., профес. Основной курсъ аналитической геометріи, изд. 5-е. Съ приложеніемъ примѣровъ, задачъ и вопросовъ для повторенія. 610 стр. 120 черт. въ текстѣ. 1909 г. Цѣна 3 руб. 50 коп.

Его же. Сборникъ упражненій по аналитической геометріи, изд. 2-е. 188 стр., 7 фиг. въ текстѣ. 1909 г. Ц. 1 руб.

Астровъ А. И., ад.-профес. Атласъ конструктивныхъ чертежей, исполненныхъ турбинныхъ установокъ, турбинъ и главнѣйшихъ ихъ деталей. Состоитъ изъ 95 таблицъ. 1905 г. Цѣна 11 р.

Башельри. Bachellery. Автоматическая сцѣпка вагоновъ на американскихъ жел. дорогахъ. Переводъ съ франц. инж.-мех. *Н. В. Подчиненнова.* 90 стр., 20 черт. въ текстѣ. 1903 г. Цѣна 1 руб.

Вейнбергъ Я. И. Лѣсъ, значенiе его въ природѣ и мѣры къ его сохраненiю. 563 стран. 1884 г. Цѣна 2 руб. 50 коп.

Его же. О самовозгаранiи. 249 стр. 1895 г. Цѣна 75 коп.

Его же. Паровые котлы. Причины взрывовъ паровиковъ и мѣры къ ихъ предупрежденiю. 393 стр. 1888 г. Цѣна 1 руб. 25 коп.

Виттенбауэръ Ф., профес. Сборникъ задачъ по теоретической и аналитической механикѣ съ рѣшенiями. 770 задачъ, 306 стр., 531 черт. въ текстѣ. 1908 г. Цѣна 2 руб. 50 коп.

Его же. Графическое опредѣленiе вѣса махового колеса. Переводъ студ.-техн. *Л. М. Вайнберга.* 16 стр., 8 фиг. на отдѣльной таблицѣ. 1908 г. Цѣна 50 коп.

Гриневецкiй В. И., профес. О современныхъ локомобиляхъ. 105 стр., 33 черт. въ текстѣ и IV отд. таблицы чертежей. 1906 г. Цѣна 2 руб.

Его же. Тепловой расчетъ рабочаго процесса двигателей внутренняго сгоранiя. 26 стр., 4 черт. 1907 г. Цѣна 75 коп.

Гюльднеръ Г., инж., Двигатели внутренняго сгоранiя. Переводъ съ нѣмецкаго инж.-мех. *К. В. Кирша* и *Н. К. Пафнутьева*, подъ редакцiей профес. И. М. Т. У. *В. И. Гриневецкаго.* 594 стр., 812 фиг. въ текстѣ и XXVI листовъ чертежей. 1907 г. Цѣна 11 руб.

Донде А. Стереоскопическая фотографiя, ея теорiя и практика. 136 стр., 41 рис. 1908 г. Цѣна 50 коп.

Залѣсскiй В. Г., ад.-профес. Строительное искусство. Ч. I. Строительные матерiалы. 236 стр.+XIII табл. черт. 1906 г. Цѣна 3 руб. 50 коп.

Игнатовъ К. М., инж.-мех., препод. И. М. Т. У. и Завѣд. Технич. Контор. Московск. водопр. Изъ практики проектированiя инженерныхъ сооруженiй. Изданiе выходитъ отдѣльными листами размѣромъ 21″ × 14″, каждый листъ имѣетъ свой №.

I отдѣлъ. Расчетъ движенiя воды въ трубахъ, каналахъ, рѣкахъ, канавахъ, лоткахъ и пр. Расчетъ трубопроводной сѣти. Листы №№ 1—18 и № 27. Цѣна 4 руб. 65 коп.

II отдѣлъ. Проектные и рабочiе чертежи по устройству трубопроводовъ. Листы №№ 30—33. Цѣна 60 коп.

III отдѣлъ. Детали и расчетъ трубопроводовъ. Листы №№ 29, 40, 42, 43 и 46. Цѣна 75 коп.

IV отдѣлъ. Общiя данныя по проектированiю желѣзо-бетона. Листы №№ 19, 22—26, 202 и 203. Цѣна 1 руб. 20 коп.

V отдѣлъ. Примѣры расчета и конструкцiй желѣзо-бетонныхъ (и кирпичныхъ) сооруженiй. Листы №№ 20, 21, 28, 34—39, 41, 44 и 45. Цѣна 1 руб. 50 коп.

VI отдѣлъ. Работы общаго характера. Листы №№ 25, 26 и 29. Цѣна 60 к.

Его же. Къ вопросу о надежности и наивыгоднѣйшей конструкцiи инженерныхъ сооруженiй (водопроводныхъ и канализацiонныхъ). 31 стр. съ черт. въ текстѣ. 1909 г. Цѣна 60 коп.

Извѣстiя Механическаго Института И. М, Т. У.

Выпускъ I. Работы по паровымъ котламъ въ 1903—4 ак. году. 24 стр., IX табл. 1904 г. Цѣна 1 руб.

Выпускъ II. В. И. Гриневецкiй. Графическiй расчетъ парового котла. 46 стр., II табл. 1905 г. Цѣна 1 руб. 25 коп.

Выпускъ III. К. В. Киршъ. Изслѣдованiе паровой установки Фряновской шерстопрядильной фабрики.

Работы локомобильнаго котла Инж. Лабораторiи при новой нефтяной топкѣ.

Топка Вильтона и ея работа. 39 стр., 8 черт. и IV табл. 1906 г. Цѣна 1 руб.

Выпускъ IV. И А. Калинниковъ.

Изслѣдованіе причинъ разрыва парового котла.

Испытаніе желѣзо-бетонныхъ брусьевъ.

Испытаніе на разрывъ круглыхъ и плоскихъ образцовъ, поперечное сѣченіе которыхъ въ серединѣ длины сужено выточкой или запиломъ.

Вліяніе скручиванія литого желѣза на его механическія свойства.

Испытаніе литого и ковкаго чугуна Бутырскаго завода въ Москвѣ.

Упругость приводныхъ ремней: кожанаго, тканаго верблюжьяго и тканаго хлопчато-бумажнаго.

Новые приборы для испытанія матеріаловъ: a) экстензометръ для ремней; b) дефлектометръ.

На какую глубину слѣдуетъ ввертывать желѣзную шпильку въ чугунную деталь. Цѣна 1 руб.

Выпускъ V. Расходъ и давленіе пара на пульверизацію при разныхъ конструкціяхъ и нагрузкахъ паровыхъ форсунокъ.

Изслѣдованіе вліянія разныхъ устройствъ топочной кладки на работу топки и котла. 11 стр., V табл., 8 фиг. и 5 рисунк. 1907 г. Цѣна 50 коп.

Выпускъ VI. К. В. Киршъ. Опыты съ корнваллійскимъ и водотрубнымъ котломъ при нефтяномъ отопленіи.

К. В. Киршъ и И. И. Куколевскій. Изслѣдованіе пароэлектрической установки центральной станціи И. Т. У.

К. В. Киршъ. Изслѣдованіе котельной центральной электрической станціи городскихъ желѣзныхъ дорогъ Москвы. Цѣна 1 руб. 25 коп.

Іоссе Э., профес. Современныя силовыя установки. Техническое и экономическое изслѣдованіе. Переводъ съ нѣм. инж.-мех. *Н. К. Пафнутьева.* 111 стр., 54 фиг. въ текстѣ. 1909 г. Цѣна 1 руб. 50 коп.

Кестнеръ Е. Г., инж.-мех. Паровозостроительный заводъ Baldwina. Изъ поѣздки въ Сѣверо-Американскіе Соединенные Штаты. 77 стр., 76 фиг. въ текстѣ. 1909 г. Цѣна 1 руб.

Киферъ Л. Г., инж.-мех., препод. И. М. Т. У. Атласъ конструктивныхъ чертежей и эскизовъ исполненныхъ воротовъ, крановъ, подъемниковъ и ихъ деталей. 63 табл. 1907 г. Цѣна 9 руб. 50 коп.

Его же. Изгибъ кривого бруса. Теорія и примѣры расчетовъ. 55 стр., 26 фиг. въ текстѣ. 1904 г. Цѣна 80 коп.

Кржижановскій А. Э. Плотины и эксплоатація энергіи воды для питанія двигателя. 66 стр., XV табл. черт. 1904 г.

Его же. Гидравлическая теорія турбины Франциссa быстроходнаго типа. Расчетъ и построеніе лопатокъ. 37 стр., 18 черт. 1907 г.

Кролль М., профес. Учебникъ электротехники для техническихъ школъ и практиковъ. Переводъ съ нѣмецкаго, подъ редакціей преподават. И. М. Т. У. *Б. И. Угримова.* 332 стр., 595 фиг. въ текстѣ. 1908 г. Цѣна 3 руб. 60 коп.

Куколевскій И. И., инж.-мех. Насосныя машины городскихъ водоснабженій. 54 стран., 55 фиг. въ текстѣ и I табл. 1909 г. Цѣна 1 руб. 80 коп.

Куликовскій Г. И. Копированіе посредствомъ свѣта картъ, плановъ, чертежей и т. п. съ научной и художественной цѣлью. Изд. 2-е, дополненное. 32 стр. съ рисунками въ текстѣ и III цвѣтными таблицами. 1900 г. Цѣна 60 коп.

Мазингъ Е. К., инж.-мех. Сборникъ чертежей калорическихъ двигателей. IX таблицъ. Цѣна 1 руб.

Миловичъ А., инж.-мех. Конструированіе лопатокъ турбины Френсиса по способу профессора Pfarr'а, изд. 2-е, исправленное и дополненное. 96 стр. и VIII табл. черт. 1908 г. Цѣна 1 руб. 50 коп.

Поляковъ Р. В., инж.-мех., препод. И. М. Т. У. Инструментальная сталь и ея закалка. 97 стр., 44 фиг. въ текстѣ и VI табл. 1910 г. Цѣна 1 руб. 25 коп.

Его же. Основы механической технологии металловъ XII+338 стр., 326 фиг. въ текстѣ и VIII табл. 1909 г. Цѣна 3 руб. 50 коп.

Pfarr. Закрытыя турбины на горизонтальномъ валу. 32 стр., 21 фиг. въ текстѣ и III отдѣльныхъ таблицы. 1909 г. Цѣна 75 коп.

Его же. Расчетъ всасывающей трубы. 19 стр. и II отдѣльныхъ таблицы. Цѣна 35 коп.

Ридлеръ А., профес. Машиностроительное черченіе. Наглядное изложеніе раціональныхъ основъ исполненія чертежей въ связи съ потребностями практики машиностроенія. Переводъ съ нѣмецкаго инж.-мех. *Н. К. Пафнутьева.* 129 стр., 256 фиг. въ текстѣ. 1902 г. Цѣна 2 руб. 50 коп.

Ритшель Г. В., профес. Руководство къ расчету и проектированію системъ отопленія и вентиляціи. Переводъ подъ редакціей ад.-профес., гражд.-инж. *В. Г. Залѣсскаго*, препод., инж.-техн. *В. М. Чаплина* и инж.-техн. *В. И. Кашкарова.* 211+495 стр., XXVIII табл. 1906 г. Цѣна 10 руб.

Сидоровъ А. И., профес. Атласъ конструктивныхъ чертежей деталей машинъ, изд. 4-е. Ч. I. 60 табл. 1902 г. Цѣна 6 руб.

Его же. Атласъ конструктивныхъ чертежей деталей машинъ, изд. 4-е. Ч. II. Трубы и ихъ соединенія. 62 табл. 1906 г. Цѣна 6 руб.

Его же. Временныя таблицы (для студ. И. М. Т. У.), изд. 2-е. XXXII таблицы. 1909 г. Цѣна 2 руб.

Его же. Детали машинъ. Текстъ. Ч. I. Изд. 3-е. 295 стр., 31 черт. въ текстѣ и 8 рисун. 1908 г. Цѣна 2 руб.

Его же. Задачникъ по деталямъ машинъ. 329 задачъ. 1909 г. Цѣна 1 руб.

Его же. Плоскіе регуляторы быстроходныхъ машинъ ихъ устройство теорія и расчетъ. 172 стр. + XII отдѣльныхъ таблицъ черт. 1895 г. Цѣна 2 руб. 50 коп.

Таблицы по машиностроительному черченію. Къ чертежу трубопровода. X табл. 1907 г. Цѣна 35 коп.

Таблицы по машиностроительному черченію. О вычерчиваніи болтовъ и винтовой нарѣзки. IV табл. 1908 г. Цѣна 20 коп.

Таблицы по скицированію. III табл. 1908 г. Ц. 15 коп.

Таблицы С.-Петербургскаго металлическаго завода. Котлы съ внутренними топочными трубами (Корнваллійскіе и Фербернскіе). Пособіе для проектированія 1907 г. Ц. 7 к.

Тайлоръ Ф. В. Объ искусствѣ обработки металловъ рѣзаніемъ. Переводъ съ англійскаго инж.-мех. *Р. В. Полякова.* 114 стр. съ черт. и табл. въ текстѣ. 1908 г. Цѣна 1 руб.

Угримовъ Б. И., препод. И. М. Т. У. Основы техники сильныхъ токовъ. Томъ I. Постоянный токъ. 487 стр., 428 фиг. въ текстѣ и IV табл. 1908 г. Цѣна 3 руб. 50 коп.

Его же. Техника сильныхъ токовъ. Томъ II. Перемѣнные токи. Вращающіяся магнитныя поля. Трансформаторы. 225 стр., 188 фиг. въ текстѣ. 1908 г. Цѣна 2 руб. 50 коп.

Фолькъ К. Составленіе перспективныхъ эскизовъ деталей машинъ. Переводъ съ нѣмецк. инж.-мех. *И. П. Куколевскаго.* 27 стр., 76 фиг. въ текстѣ. 1903 г. Цѣна 60 коп.

Haeder H. Больная паровая машина и первая помощь въ несчастныхъ случаяхъ съ нею. Переводъ съ нѣмецкаго инж.-мех. *А. И. Сидорова.*

Ч. I. 351 стр., 724 фиг. въ текстѣ. 1902 г. Цѣна 2 руб. 50 коп.

Ч. II. 433 стр., 457 фиг. въ текстѣ. 1904 г. Цѣна 2 руб. 50 коп.

Его же. Паровыя машины и парораспредѣленія. Полный переводъ съ нѣмецкаго, съ исправленіями и дополненіями профес. И. М. Т. У. *А. И. Сидорова.* Книга состоитъ изъ двухъ частей (въ одномъ томѣ) и папки съ чертежами (16 малыхъ и 10 большихъ таблицъ). 1902 г. Цѣна 9 руб.

Худяковъ П. К., профес. Сопротивленіе матеріаловъ. Часть I и II. Изданіе 3-е, съ дополненіями. 333 стр., 93 фиг. въ текстѣ. 1909 г. Цѣна 3 руб. 20 коп.

Его же. Построеніе насосовъ. 459 стр., 243 фиг. въ текстѣ. 1899 г. Цѣна 3 руб. 60 коп.

Его же. Обзоръ успѣховъ и новостей въ построеніи и примѣненіи поршневыхъ насосовъ. 73 стр., 22 фиг. въ текстѣ. 1903 г. Цѣна 50 коп.

Его же. Путь къ Цусимѣ, изд. 2-е. Посвящается памяти товарищей техниковъ, погибшихъ въ Цусимскомъ бою. Книга выясняетъ основныя причины нашего пораженія подъ Цусимою; въ ней собраны фактическія данныя для освѣщенія нашей поразительной технической отсталости въ морскомъ дѣлѣ передъ войною и нашего нерадѣнія. 332 стр. 1908 г. Цѣна 2 руб.

Hütte. Справочная книга для инженеровъ, архитекторовъ, механиковъ и студентовъ. Ч. I и II. Изд. 7-е, 2584 стр., болѣе 1650 черт. въ текстѣ. 1910 г. Цѣна 6 руб. 50 к.

Шапошниковъ Н. А. Основной курсъ математическаго анализа.

Томъ I, выпускъ 1. Введеніе въ высшую алгебру и анализъ перемѣнныхъ, изд. 3-е. 144 стр. 1908 г. Цѣна 1 руб.

Томъ I, выпускъ 2. Основанія дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія съ приложеніями аналитическими и геометрическими. 236 стр., 80 черт. въ текстѣ. 1906 г. Цѣна 1 руб.

Томъ II, выпускъ 1. Основанія высшей алгебры и продолженіе анализа перемѣнныхъ съ приложеніями аналитическими и геометрическими. 238 стр., 18 черт. въ текстѣ. 1908 г. Цѣна 1 руб.

Томъ II, выпускъ 2. Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій и варіаціонное исчисленіе. 156 стр. 1909 г. Цѣна 1 руб.

Ясинскій В. И., докт.-инж., инж.-мех. Вентиляція въ парціальныхъ паровыхъ турбинахъ. Теорія и экспериментальное изслѣдованіе. 58 стр. 43 фиг. 1908 г. Цѣна 1 руб.

Его же. Комбинированная паровая турбина. Опытъ теоретическаго выясненія вопроса о раціональномъ комбинированіи активной и реактивной паровыхъ турбинъ. 27 стр., 13 фиг. въ текстѣ и I табл. Цѣна 80 коп.

Его же. J—S. Діаграмма для водяного пара. Въ маломъ масштабѣ. Цѣна 15 коп. Въ большомъ масштабѣ. Цѣна 30 коп., на лучшей бумагѣ 40 коп.

Кромѣ всѣхъ перечисленныхъ книгъ на Складѣ Издательской Комиссіи имѣются и другія изданія.

Студенческая Издательская Комиссія принимаетъ на себя выписку всевозможныхъ изданій.

Студенческая Издательская Комиссія принимаетъ на себя какъ веденіе всевозможныхъ изданій, такъ и исполненіе всѣхъ работъ по изданіямъ какъ-то: корректуру, изготовленіе чертежей, рисунковъ, сношенія съ типографіями, литографіями, а также беретъ на себя представительство по распространенію изданій.

Цѣна 4 р. 80 к.

ПЕРЕПЛЕТНАЯ ФАБРИКА Г. М. ГРИГОРЬЕВА

[illegible] ТЕЛЕФ. 32—69