Leçons

d'Arithmétique

théorique et pratique

IMPRIMERIE E. CAPIOMONT ET C^ie

PARIS

6, RUE DES POITEVINS, 6

(Ancien Hôtel de Thou)

Cours complet de mathématiques élémentaires
Publié sous la direction de **M. DARBOUX**, doyen de la Faculté des Sciences de Paris.

Leçons d'Arithmétique

théorique et pratique

PAR

Jules Tannery
Sous-directeur des études scientifiques à l'École normale supérieure.

PARIS
Armand Colin & C^{ie}, Éditeurs
5, rue de Mézières, 5

1894

AVERTISSEMENT

J'ai essayé de faire ici un livre d'enseignement, qui puisse servir à ceux qui commencent leurs études mathématiques et à ceux qui les poursuivent, qui soit très élémentaire au début, où les démonstrations prennent, peu à peu, une forme plus abstraite, et qui, à la fin, touche à des sujets d'ordre assez élevé. Je n'ai donc pas cherché l'homogénéité et je n'ai pas craint de montrer les choses sous des aspects divers. Au début, j'ai insisté de mon mieux, en multipliant les exemples concrets, sur la signification des opérations fondamentales; l'habitude pratique que les enfants ont de ces opérations, et qu'il est indispensable de leur donner de bonne heure, arrive à leur en cacher le sens, il faut leur apprendre à se défier de cette habitude, à ne pas la confondre avec l'évidence ; d'ailleurs, une bonne explication de la numération implique l'intelligence de ces opérations, dont les propriétés fondamentales devraient, logiquement, être étudiées avant la numération. Ces propriétés fondamentales, je les ai ensuite reprises et développées, sous une forme plus abstraite, en les plaçant toujours avant l'explication de la règle relative à l'opération correspondante : l'intelligence de ces règles est sans doute importante, elle importe beaucoup moins que la connaissance approfondie des propriétés. Les théories élémentaires de la divisibilité, du plus grand commun diviseur, des nombres premiers sont, depuis longtemps, excellemment exposées, et l'on ne peut y changer que des détails, sur lesquels il est inutile d'insister ici. Pour ce qui est des fractions, après en avoir expliqué l'origine concrète, je les ai regardées résolument comme des systèmes de deux nombres entiers : c'est là une idée qui n'est pas nouvelle[1] ; elle offre cet avantage de ne pas sortir du domaine de l'Arithmétique et de préparer le lecteur à d'autres notions, par exemple à l'introduction des nombres imaginaires, en Algèbre. Préparer le lecteur à ce qu'il apprendra plus tard, c'est là le but que j'ai eu constamment devant les yeux. Après avoir parlé des fractions décimales, j'ai insisté sur les *calculs approchés :* sans doute, une théorie des erreurs, un peu complète, suppose quelques connaissances en Algèbre ; au moins m'a-t-il paru nécessaire de poser les questions et d'indiquer les éléments des solutions ; quant au reste, le lecteur le trouvera de lui-même, dès que ses connaissances algébriques seront assez développées. Il importe de savoir calculer, et de savoir ce qu'on fait quand on calcule. Cette même préoccupation m'a suivi dans le chapitre relatif aux carrés, à la racine carrée, etc... Dans ce chapitre, la définition de la racine exacte est seulement *préparée*, je suis resté strictement dans le domaine des nombres rationnels.

Je n'ai pas craint de m'arrêter longtemps sur les *mesures* et les diverses questions qui se rapportent à ce sujet. D'une part, on rencontre là une idée essentielle, celle de la proportionnalité, sur laquelle on ne saurait trop insister ; d'autre part, le *système métrique* et l'explication des diverses *règles* élémentaires offrent l'occasion de donner au lecteur quelques connaissances pratiques que ceux-là même qui désirent s'adonner à la pure théorie auraient grand tort de mépriser.

Les sujets qu'on vient de résumer constituent la partie élémentaire du présent livre : ils représentent l'ensemble des connaissances exigées pour le Baccalauréat.

Les trois derniers chapitres[2] s'adressent aux lecteurs qui veulent pousser plus loin leurs études scientifiques.

Pour ce qui est des nombres irrationnels, j'ai adopté pleine-

1. Elle a été développée récemment par M. Méray et par M. Ricquier.

2. Ils sont imprimés en *petits caractères ;* çà et là, dans les chapitres précédents, on rencontre des passages imprimés de la même façon ; ce sont ou des développements théoriques moins essentiels que le reste, ou de simples applications.

ment l'idée fondamentale de M. Dedekind, qui consiste à définir chaque nombre irrationnel en disant quels sont les nombres rationnels qui sont plus petits ou plus grands que lui. Cette méthode donne, à ce qu'il me semble, l'idée la plus claire possible du nombre irrationnel, en permettant d'assigner immédiatement à chaque nombre irrationnel sa place dans la suite des nombres : cela vaut bien les quelques efforts qu'elle exige. Je ne crois nullement que ces efforts soient au-dessus de la portée d'un bon élève de la classe de mathématiques élémentaires, et si, par malheur, celui-ci, à un moment donné, oubliait le détail de quelque démonstration, du moment qu'il a bien saisi le sens des définitions et la marche générale des idées, cela, à mon sens, n'aurait aucune importance. Les propositions fondamentales sur les limites ont trouvé leur place dans le même chapitre ; il ne resterait qu'à ajouter quelques mots pour que le lecteur fût en possession des propositions essentielles concernant les *séries*, dont, toutefois, je n'ai pas parlé ; mais j'ai cru pouvoir donner quelques indications sur les *ensembles;* ces indications, après ce qui a été dit des nombres irrationnels, n'offraient aucune difficulté.

Dans le chapitre sur la mesure des grandeurs, j'ai essayé, sur les conseils de M. Darboux, de tirer ce que l'on pouvait de la vieille définition « une grandeur est tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution » ; je me suis efforcé d'expliquer comment on pouvait établir une correspondance entre les nombres et les états d'une grandeur, et comment dans certains cas cette correspondance réalisait la proportionnalité entre les grandeurs et les nombres.

Enfin, dans le dernier chapitre, j'ai donné les premiers éléments de la Théorie des nombres. J'ai développé ces éléments un peu plus qu'on ne fait d'habitude, et je n'ai pas craint d'y faire entrer la *loi de réciprocité des restes quadratiques*, en sorte que le lecteur qui aura bien voulu me suivre jusque-là puisse au moins soupçonner que la Théorie des nombres est une véritable science, non un recueil de théorèmes isolés, plus ou moins curieux.

Ici et là, dans le texte, les notes ou les exercices, j'ai introduit quelques courts renseignements historiques : je les dois presque tous à mon frère.

J'ai apporté le plus grand soin au choix des exercices. Rien, peut-être, ne vaut, pour la formation de l'esprit mathématique, les problèmes d'Arithmétique et de Géométrie élémentaire. Ceux que l'on trouvera ici ont été pris en partie dans des livres, recueils ou mémoires divers[1]; beaucoup ont été choisis pour donner au lecteur quelque ouverture sur des parties plus élevées de la science.

Je dois adresser, en terminant, mes meilleurs remerciements à M. Darboux : il m'a aidé de ses conseils, non seulement pour l'ensemble, mais encore pour les détails, et si ce livre n'est pas meilleur, ce n'est certainement pas à lui qu'il faudra le reprocher.

1. Je n'ai pas cru devoir faire de la *bibliographie* à propos de ces exercices; mais je dois indiquer quelques-unes des sources où j'ai puisé. Les exercices 12, 61, 83, 84, 85, 117, 129, 130, 131, 138, 164, 166, 168, 170, 172, 191, 201, 207, 228 se trouvent dans l'excellent *Traité d'Arithmétique* de M. Joseph Bertrand (Paris, Hachette); les exercices 21 (y compris la démonstration), 23, 24, 30, 36, 58, 82, 83, 104, 105, 114, 115, 123, 124, 125, 126, 143, 154, 155, 161, 167, 176, 189 sont extraits de la *Théorie des nombres* de Lucas (Paris, Gauthier-Villars et fils); les exercices 2, 90, 98, 134, 141, 145, 178, 190, 203, 232, 241, 242, 243, 247 sont pris dans le recueil d'*Exercices d'Arithmétique* de MM. Fitz-Patrik et Chevrel, édité chez M. Hermann, recueil que je me permets de recommander au lecteur; les exercices 148, 149, 150, 151, 183, 192 sont extraits des *Disquisitiones* de Gauss; les exercices 255, 256 et ceux qui sont numérotés de 267 à 281 sont tirés du *Traité d'Arithmétique commerciale* de M. Brasilier (Paris, Masson). Les exercices 6, 31 se trouvent dans la *Zahlentheorie* de M. Bachmann (Leipzig, Teubner). Les exercices 10, 53, 120 et 121, 171 sont tirés respectivement de notes ou mémoires de MM. Bourlet, Kronecker, Stieltjes, Catalan. M. C. Stephanos, a indiqué, pour les nombres irrationnels, le mode de représentation qui se réduit, pour les nombres rationnels, à la forme indiquée dans l'exercice 211; c'est là l'origine de plusieurs exercices que reconnaîtra le lecteur, en particulier de la proposition contenue dans l'exercice 311. Les propositions contenues dans les exercices 314, 315, 316 sont extraites du *Corso di Analisi algebrica* de M. Cesàro (Turin, Bocca frères). Enfin les importantes propositions contenues dans les exercices 317, 318 et 319 sont dues, ainsi que les démonstrations, à Lejeune Dirichlet et à M. Hermite.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

Préliminaires. — Numération.

CHAPITRE II

Opérations fondamentales.

CHAPITRE III

Propositions fondamentales sur la divisibilité. Caractères de divisibilité.

CHAPITRE IV

Plus grand commun diviseur. — Plus petit commun multiple.

CHAPITRE V

Nombres premiers.

CHAPITRE VI

Fractions ordinaires.

CHAPITRE VII

Fractions décimales.

CHAPITRE VIII

Calculs approchés.

CHAPITRE IX

Carrés. — Cubes. — Racine carrée. — Racine cubique.

CHAPITRE X

Système métrique.

CHAPITRE XI

Applications.

CHAPITRE XII

Nombres irrationnels. — Limites.

CHAPITRE XIII

Mesure des grandeurs.

CHAPITRE XIV

Éléments de la Théorie des nombres.

LEÇONS D'ARITHMÉTIQUE

CHAPITRE PREMIER

PRÉLIMINAIRES. — NUMÉRATION

§ 1. — Notion de nombre. Égalité.

1. Voici un sac de billes, un troupeau de moutons, des lettres qui forment un mot, des mots qui forment une phrase : combien y a-t-il de billes dans ce sac, de moutons dans ce troupeau, de lettres dans ce mot, de mots dans cette phrase? La réponse à ces questions est un *nombre*, ou d'une façon plus précise, un nombre entier (1).

L'idée de nombre entier résulte, par abstraction, de l'idée d'une *collection d'objets distincts* ; elle est indépendante de la nature de ces objets, qui peuvent être pareils, comme les billes de ce sac, ou différents, comme les lettres de ce mot, les mots de cette phrase, mais qui doivent être distincts les uns des autres et groupés ensemble de manière à former une collection, un tout : chercher le nombre d'objets contenus dans une collection, c'est *compter* ces objets.

2. Pour former une collection quelconque d'objets, on peut prendre d'abord un seul objet, puis lui joindre un autre objet, puis leur joindre encore un autre objet, puis encore un autre, puis encore un autre, etc., jusqu'à ce qu'on ait formé la collection que l'on voulait obtenir : inversement, on peut détruire une collection quelconque en en retirant successivement, un par un, les objets qui la composent, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus.

On peut ainsi former des collections comprenant *un* objet (2), *un et un* objets, *un et un et un* objets, *un et un et un et un* objets, etc... *Un*, *un et un*, *un et un et un*, *un et un et un et un*,... sont des nombres (3). Dans ces expressions « *un*, *un et un*, *un et un et un*, ... » on ne spécifie pas

1. Dans les cinq premiers chapitres il ne sera jamais question que de nombres *entiers* : aussi le mot *entier* sera-t-il, le plus souvent, sous-entendu.

2. Dans le cas d'un objet, le mot collection est impropre.

3. V. Husserl : *Philosophie der Arithmetik*. Halle, 1891.

la nature des objets que l'on compte, on en fait *abstraction* : c'est en ce sens que l'on dit que *un*, *un et un*, ... sont des nombres *abstraits*. Au lieu des expressions *un*, *un et un*, *un et un et un*, *un et un et un et un*,..., on emploie les mots *un*, *deux*, *trois*, *quatre*,... qui ont la même signification ; *deux* est la même chose que *un et un*, *trois* est la même chose que *un et un et un*, ou que *deux et un*, *quatre* est la même chose que *trois et un*, *cinq*, la même chose que *quatre et un* ; la suite des nombres que l'on peut ainsi former,

un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix,...,

en *ajoutant* chaque fois *un* au nombre précédent est la *suite naturelle* des nombres. Cette suite est *indéfinie* ; c'est-à-dire que si l'on est arrivé à un terme quelconque de cette suite, on peut, en ajoutant *un* à ce nombre, former un nombre nouveau, qui n'avait pas encore été obtenu.

3. A cette suite est liée l'idée de *rang* : *ranger* des objets dans un certain ordre, c'est faire correspondre un de ces objets au nombre un, l'appeler *premier* ; puis faire correspondre un autre au nombre deux, l'appeler *deuxième* ; puis faire correspondre un autre encore au nombre trois, l'appeler *troisième* ; puis faire correspondre un autre (qui n'a pas encore été nommé) au nombre quatre, l'appeler *quatrième*, etc... On n'opère pas autrement quand on *compte* les objets d'une collection, un à un ; on les fait correspondre successivement aux noms un, deux, trois, quatre... ; quand on est arrivé au dernier objet de la collection, le nom de nombre auquel on le fait correspondre est le nombre d'objets de la collection. *Si l'on compte les mêmes objets dans un ordre, ou dans un autre, on trouve toujours le même nombre comme résultat* : c'est là une proposition que je regarderai ici comme évidente, comme liée à l'idée de nombre.

4. Nous avons déduit l'idée de *rang* de l'idée de *nombre*, ou de collection. Quelques auteurs [1] veulent que l'on fasse l'inverse. L'idée de *rang* nous est fournie par la suite des événements dans le temps : une pareille suite étant donnée, on sait ce qu'on dit quand on dit qu'un événement est antérieur ou postérieur à un autre. On peut dès lors imaginer une suite de *signes* tous différents, par exemple la suite des *mots* un, deux, trois, quatre..., rangés dans un ordre *déterminé* : il faut entendre par là que, étant donnés deux de ces signes différents, on sait celui qui précède l'autre : ces signes sont

1. En particulier Kronecker et M. von Helmholtz.

les nombres, leur suite est la suite naturelle. A ce point de vue, ajouter *un* à un nombre, c'est remplacer ce nombre par le suivant.

5. Pour reconnaître que le nombre d'objets qui figurent dans une collection est le même que le nombre d'objets qui figurent dans une autre collection, ou comme on dit, que ces deux nombres d'objets sont *égaux*, il suffit de *compter* les objets qui figurent dans chaque collection. On peut encore procéder de la façon suivante qui ne suppose pas qu'on sache compter, qu'on sache les noms des nombres.

Supposons qu'un enfant veuille acheter des pommes à un marchand qui les vend un sou chacune ; il peut donner un sou contre lequel le marchand lui donnera une pomme ; puis un autre sou et recevoir une pomme ; donner encore un sou et recevoir encore une pomme, etc... Au bout d'un nombre quelconque d'échanges, le nombre de pommes qu'il a reçues est égal au nombre de sous qu'il a donnés ; à chaque pomme reçue *correspond* un sou donné : c'est ainsi que se pratiquent les échanges entre objets de même valeur chez les peuples qui ne savent pas compter.

Les nombres d'objets qui figurent dans deux collections sont égaux si l'on peut faire *correspondre* chaque objet de l'une à un objet et à un seul de l'autre collection, de manière qu'il ne reste dans aucune collection aucun objet qui n'ait son correspondant dans l'autre. La correspondance pourrait s'établir en faisant une *marque* différente sur chaque objet de la première collection et la *même marque* sur l'objet correspondant de la seconde. Comme *marques*, on pourrait se servir des noms de nombre de la suite naturelle : on *compterait* alors les deux collections, en sorte que, au fond, le procédé primitif pour constater l'égalité en nombre de deux collections et le procédé plus savant qui consiste à les compter, reviennent au même.

6. Il est clair que si, en comparant deux collections à une troisième, on a constaté qu'elles contenaient chacune le même nombre d'objets que cette troisième, on pourra être assuré qu'elles contiennent l'une et l'autre le même nombre d'objets. On pourra, si l'on veut, faire correspondre entre eux deux objets appartenant l'un à la première collection, l'autre à la seconde, lorsqu'ils correspondent à un même objet de la troisième. *Deux nombres égaux à un troisième sont égaux entre eux.*

Deux nombres qui ne sont pas égaux sont *inégaux.*

7. Les nombres, a-t-on dit plus haut, permettent de répondre à cette question : combien y a-t-il d'objets dans une collection ? Pour

former une collection à proprement parler, il faut au moins deux objets ; toutefois, nous avons considéré *un* comme un nombre : le mot un, en effet, s'offre comme une réponse naturelle dans des questions de ce genre : Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe? Il y en a *un*. Combien y a-t-il de sous dans ce porte-monnaie? Il y en a un. Si la classe était vide, ou le porte-monnaie, il faudrait répondre *zéro* ; *zéro* est aussi regardé comme un *nombre* ; il signifie l'absence d'objets dans la collection, qui à vrai dire n'existe pas. Au lieu de dire qu'un nombre est zéro, on dit aussi que ce nombre est *nul*. Si l'on veut faire figurer zéro dans la suite naturelle des nombres, ce qui est souvent utile, on le place en tête, avant *un*, et l'on écrit :

zéro, un, deux, trois, quatre.....

8. Au lieu des mots zéro, un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, on emploie avec la même signification les *chiffres :*

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Nous verrons un peu plus tard comment au moyen de ces chiffres on peut figurer tous les nombres. Il est clair que pour figurer les premiers nombres, on aurait pu employer tels autres signes que l'on aurait voulu, pourvu que ces signes fussent différents les uns des autres : on aurait pu, par exemple, se servir des lettres de l'alphabet, a, b, c, d, e,... dans l'ordre habituel, ou dans un ordre quelconque.

Chacun a entendu parler des procédés dits cryptographiques, qui consistent à remplacer dans l'écriture, d'après une convention faite à l'avance, certaines lettres par des chiffres; on peut aussi bien faire de l'arithmétique en remplaçant certains chiffres, ou certains nombres, par des lettres. On peut d'ailleurs changer de convention toutes les fois qu'on veut, pourvu qu'on en prévienne.

Nous nous servirons souvent de lettres pour désigner des nombres; ainsi au lieu de dire un certain nombre, nous dirons le nombre a, ou plus brièvement a, et lorsque, au même endroit, il sera, à plusieurs reprises, question du nombre a, ce sera toujours du même nombre qu'on voudra parler. De même, au lieu de dire deux certains nombres, le premier et le second, nous dirons les nombres a et b, ou plus brièvement a et b.

Avec un peu d'habitude, on verra combien l'emploi de pareils symboles simplifie le langage et éclaire le raisonnement.

9. Outre les chiffres et les lettres pour représenter des nombres, nous emploierons des signes abréviatifs pour exprimer des relations

entre ces nombres et des opérations à effectuer sur ces nombres; ces signes seront définis au fur et à mesure; dès à présent, nous pouvons définir le signe $=$ qui, placé entre deux nombres, exprime que les deux nombres sont les mêmes, qu'ils sont égaux; ce signe s'énonce *égale*. Ainsi, au lieu de dire que la lettre a représente le même nombre que cinq, je puis écrire

$$a = 5;$$

ce qui s'énonce : a égale cinq. Les deux nombres, réunis par le signe $=$, forment ce qu'on appelle une *égalité*; les deux nombres sont les *membres* de l'égalité, le nombre écrit à gauche est le premier membre, le nombre écrit à droite est le second membre. Au lieu de dire « deux nombres égaux à un troisième sont égaux entre eux », on peut dire : si l'on a

$$a = c, \qquad b = c,$$

on aura

$$a = b.$$

Les chiffres et les lettres qui représentent les nombres, les signes qui représentent des relations ou des opérations, constituent en quelque sorte le langage propre de l'*Arithmétique*, qui est la science des nombres, de leurs propriétés et de leurs relations.

§ 2. — **Définition des opérations fondamentales.**

10. *Addition.* — Considérons deux collections d'objets : l'une contient, par exemple, six objets, l'autre trois. Réunissons-les pour n'en faire qu'une seule : le nombre d'objets contenus dans la collection totale est la *somme* des nombres six et trois; trouver cette *somme*, c'est *ajouter* ou *additionner* les nombres six et trois; l'opération qui consiste à trouver cette somme est une *addition* : ici la *somme* est égale à neuf. Si, au lieu d'employer les mots six, trois, neuf, on se servait, pour désigner les nombres, du mot un répété (n° 2), l'opération serait bien aisée : on dirait : la première collection contient un et un et un et un et un et un objets; la seconde collection contient un et un et un objets; la collection totale contient un et un et un et un et un et un et un et un et un objets. On entend la même chose exactement en disant que six objets et trois objets font neuf objets. Au lieu d'employer la conjonction *et* pour indiquer la réunion des objets, on emploie le mot *plus* pour indiquer l'addition des nombres, et ce mot se remplace lui-même par le signe $+$. Ainsi les égalités

$$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$
$$3 = 1 + 1 + 1,$$
$$6 + 3 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9$$

se comprennent d'elles-mêmes d'après ce qu'on vient de dire.

Remarquons que l'idée d'addition est déjà impliquée dans celle de nombre [1], puisque les nombres de la suite naturelle un, deux, trois, quatre,..., se forment chacun en ajoutant un au nombre précédent; ainsi l'on a

$$2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1,\ldots$$

11. Pour réunir une collection de six objets et une collection de trois objets, on peut évidemment joindre aux six objets de la première collection les trois objets de la seconde *un à un*, ce qui revient à *compter* ainsi : six et un font sept, sept et un font huit, huit et un font neuf; c'est ainsi que l'on opère quand on compte sur les doigts. Cela revient encore à s'avancer de trois rangs, dans la suite naturelle à partir de *six*; c'est là ce qu'on appelle ajouter trois à six, ce que l'on désigne plus particulièrement par le symbole $6 + 3$. Au contraire, pour ajouter six à trois, pour former le nombre $3 + 6$, il faudrait ajouter successivement à trois six unités, s'avancer de six rangs dans la suite naturelle des nombres, à partir de trois; mais ces distinctions n'ont pas ici grande importance, le résultat, en effet, ne dépend pas de l'ordre dans lequel on fait les opérations; en d'autres termes, on a

$$6 + 3 = 3 + 6,$$

et, quels que soient les nombres a et b,

$$a + b = b + a.$$

Cette proposition ne diffère pas, au fond, de celle qui a été énoncée au n° 3 : On trouve toujours le même nombre en comptant les objets d'une collection, dans un ordre ou dans un autre.

12. Nous avons supposé jusqu'à présent qu'on ne considérait que deux collections, qu'on n'ajoutait que deux nombres ; mais il est clair

1. Ceci ne serait pas exact si l'on voulait se tenir exclusivement au point de vue indiqué dans le n° 4 ; au reste on reviendra sur ce sujet dans le chapitre suivant (*Note du n°* 48).

que la notion d'addition s'étend d'elle-même à autant de nombres que l'on veut. Considérons, par exemple, quatre collections d'objets; on peut les réunir pour n'en faire qu'une seule; le nombre des objets contenus dans la collection totale sera la *somme* des nombres d'objets contenus dans chacune des collections primitives; trouver cette somme, c'est *ajouter* ou *additionner* ces nombres; pour effectuer cette somme, on peut se borner toujours à ajouter seulement deux nombres à la fois, ce qui revient à réunir d'abord la seconde collection à la première, à réunir ensuite au tout la troisième collection, puis encore la quatrième collection; c'est cette manière d'opérer qu'on entend d'une façon précise, quand on écrit, par exemple :

$$2+4+3+5,$$

en supposant que la première collection contienne deux objets, la seconde quatre, la troisième trois, la quatrième cinq : on entend qu'on ajoute 4 à 2, puis 3 au résultat, puis enfin 5 au résultat. Mais ici encore, cette distinction précise importe peu; on peut aussi bien entendre qu'on ajoute les nombres 2, 4, 3, 5 à la fois, comme il a été expliqué d'abord, et cette remarque montre bien, en admettant toujours le postulatum du n° 3, qu'on arrive au même résultat, quel que soit l'ordre dans lequel on ajoute les nombres; par exemple, on a

$$2+4+3+5=3+2+5+4.$$

On serait encore arrivé au même résultat en réunissant, par exemple, la première et la troisième collection, en faisant la somme $2+3$, puis en réunissant la seconde et la quatrième collection, en faisant la somme $4+5$, et en réunissant ensemble les deux collections auxquelles on est ainsi parvenu, ce qui revient à ajouter les nombres $2+3$ et $4+5$; c'est ce que l'on exprime en écrivant

$$2+4+3+5=(2+3)+(4+5);$$

les parenthèses qui figurent dans le second membre veulent dire que ce qu'elles enferment est un seul nombre, ou, comme l'on dit, que les opérations qui sont indiquées à l'intérieur des parenthèses doivent être regardées comme effectuées. Les parenthèses seront toujours employés avec cette signification.

En particulier, il est clair qu'on obtient le même résultat en ajoutant successivement à un nombre a deux nombres b et c ou en ajoutant au nombre a la somme $b+c$ des deux nombres b et c, ce que l'on exprime par l'égalité

$$a+b+c=a+(b+c).$$

13. Par définition, on ne change pas un nombre en lui ajoutant 0, ou en ajoutant ce nombre à 0; en d'autres termes, on a

$$a+0=a, \qquad 0+a=a,$$

quel que soit le nombre a : il est clair que 0 est le seul nombre qui, ajouté à un autre nombre, ne le modifie pas. En particulier on a

$$0+0=0$$

et il n'y a que deux nombres nuls dont la somme puisse être nulle.

14. Nous pouvons maintenant énoncer les définitions et théorèmes que voici :

La somme de deux ou plusieurs nombres s'obtient en donnant à ces nombres une signification concrète : ils se rapportent alors à des collections d'objets distincts. Si l'on réunit ces collections en une seule, le nombre des objets contenus dans cette collection est la somme cherchée; obtenir cette somme, c'est ajouter ou additionner les nombres donnés; si zéro figure parmi les nombres à ajouter, on n'en tiendra pas compte. La somme est indépendante de l'ordre de ses *parties* (des nombres à ajouter). Pour obtenir la somme, on peut remplacer tels nombres que l'on voudra par leur somme effectuée.

15. Tout nombre obtenu en ajoutant à un nombre un nombre autre que zéro est dit *plus grand* que lui (ou supérieur à lui); réciproquement ce dernier est dit *plus petit* (ou inférieur); ainsi $3+2$ ou 5 est plus grand que 3, 3 est plus petit que 5; les mots *plus grand*, *plus petit* se remplacent par les signes $>$, $<$, l'ouverture de l'angle étant toujours tournée vers le plus grand nombre; ainsi l'on écrit

$$5>3, \qquad 3<5;$$

ces deux *inégalités* ont la même signification.

Les nombres de la suite naturelle vont en grandissant. D'après la définition précédente on a

$$0<1, \qquad 1<2, \qquad 2<3, \qquad 3<4, \ \ldots$$

D'après cette même définition, les nombres plus grands que 5, par exemple, sont les nombres

$$5+1, \qquad 5+1+1, \qquad 5+1+1+1, \ \ldots,$$

c'est-à-dire les nombres qui suivent 5 dans la suite naturelle.

Si l'on a trois nombres, que le second soit plus grand que le premier, le troisième plus grand que le second, il est clair que le troisième sera plus grand que le premier : en effet le second s'obtient en ajoutant quelques unités au premier et il faut ajouter encore quelques unités pour avoir le troisième.

Ainsi, si l'on a

$$b > a, \qquad c > b,$$

on aura aussi

$$c > a;$$

on écrit souvent, avec la même signification,

$$a < b < c.$$

16. Si deux sommes sont composées, l'une et l'autre, d'un même nombre de parties, et si les parties de l'une sont égales aux parties correspondantes de l'autre, il est clair que les deux sommes sont égales.

Si les parties de la première somme sont plus grandes que les parties correspondantes de l'autre, la première somme sera plus grande que la seconde.

Par exemple, $9=7+2$, $8=5+3$, $6=4+2$ sont des nombres respectivement plus grands que 7, 5, 4 : on en peut conclure que $9+8+6$ est plus grand que $7+5+4$: en effet, on a

$$\begin{aligned} 9+8+6 &= (7+2)+(5+3)+(4+2) \\ &= 7+2+5+3+4+2 \\ &= (7+5+4)+(2+3+2); \end{aligned}$$

la somme $9+8+6$ s'obtient donc en ajoutant quelque chose à $7+5+4$; elle est plus grande que $7+5+4$.

Quelques parties du premier nombre pourraient être égales aux parties correspondantes du second nombre; si les autres parties du premier nombre étaient plus grandes que les parties correspondantes du second nombre, on pourrait toujours affirmer que le premier nombre est plus grand que le second.

Il résulte en particulier de là qu'*on trouve des sommes différentes* *en ajoutant à un même nombre deux nombres différents : la plus grande somme correspond au plus grand nombre ajouté.*

17. *Multiplication.* — La *multiplication* est un cas particulier de l'addition : lorsque tous les nombres à ajouter sont égaux, l'un quelconque de ces nombres prend le nom de *multiplicande*, le nombre de nombres égaux à ajouter prend le nom de *multiplicateur*, l'addition prend le nom de *multiplication*, le résultat ou la somme prend le nom de *produit*. Le multiplicande et le multiplicateur sont les *facteurs* du produit.

Ainsi multiplier 4 par 3 c'est faire la somme de 3 nombres égaux à 4, c'est effectuer l'addition

$$4+4+4;$$

4 est le multiplicande, 3 est le multiplicateur ; on emploie dans le même sens les expressions : répéter quatre, trois fois; trouver un nombre trois fois plus grand que quatre [1]; faire le produit de trois par quatre, et l'on désigne le résultat en disant trois fois quatre. On emploie encore les expressions : le double, le triple, le quadruple, le quintuple, le sextuple, ... d'un nombre, pour dire le résultat obtenu en multipliant ce nombre par 2, 3, 4, 5, 6, ...

Multiplier zéro par trois, c'est faire la somme $0+0+0$, qui est elle-même 0. Le produit de zéro par un nombre quelconque est zéro.

18. Dans la définition qui précède, le multiplicande peut être un nombre quelconque, mais le multiplicateur ne peut être ni un, ni zéro ; on convient cependant de parler de multiplications où le multiplicateur est un, ou zéro : le *produit* ou résultat de la multiplication doit être alors défini comme il suit : Si le multiplicateur est un, le produit est toujours égal au multiplicande; si le multiplicateur est zéro, le produit est toujours 0.

Remarquons en passant que le produit de un par un nombre quelconque est toujours égal à ce nombre : ainsi le produit de un par cinq est, en vertu de la définition générale, la somme $1+1+1+1+1$ ou cinq; le produit de un par un est un; le produit de un par zéro est zéro.

Le produit de zéro par un ou par zéro est zéro; le produit de zéro par un nombre quelconque est toujours zéro, ainsi qu'on l'a expliqué plus haut.

1. On doit rejeter alors l'expression, employée dans le langage vulgaire : un nombre *une fois* plus grand qu'un autre; elle signifie, dans notre langage, un nombre *deux* fois plus grand qu'un autre.

19. Quand le multiplicateur est plus grand que un et que le multiplicande n'est pas nul, le produit est plus grand que le multiplicande, puisqu'il est la somme de plusieurs nombres égaux au multiplicande.

Il résulte encore de la remarque du n° 16 que si l'on multiplie deux nombres différents par un même nombre, autre que zéro, ces produits sont différents : le plus grand produit correspond au plus grand multiplicande, puisque ce produit peut être regardé comme la somme de parties plus grandes que celles dont se compose l'autre produit.

20. On a déjà fait observer plusieurs fois que l'on peut *compter* aussi bien des objets composés que des objets simples.

Si l'on a, par exemple, des sacs contenant chacun 9 billes et si l'on a 7 pareils sacs, ils contiennent ensemble un nombre de billes égal à 9 multiplié par 7. Il résulte de cette observation que *pour multiplier un nombre par une somme, on peut le multiplier successivement par les parties de cette somme et ajouter les résultats* :

Par exemple le produit de 9 par la somme $7 = 5 + 2$ est égal à la somme des produits de 9 par 5 et par 2. En effet avoir 7 sacs de 9 billes chacun, ou en avoir 5 et 2, c'est la même chose : or 7 sacs de 9 billes en contiennent ensemble un nombre égal au produit de 9 par 7 ; 5 sacs de 9 billes en contiennent un nombre égal au produit de 9 par 5 ; 2 sacs de 9 billes en contiennent un nombre égal au produit de 9 par 2 : donc le produit de 9 par 7 est égal à la somme des produits obtenus en multipliant 9 par 5 et par 2.

21. On emploie le signe $\times$ comme signe de la multiplication : on place d'abord le multiplicande, puis le signe $\times$, que l'on énonce *multiplié par*, puis le multiplicateur ; ainsi :

$$4 \times 3 = 4 + 4 + 4.$$

Remarquons en passant que lorsqu'on dit au contraire trois fois quatre, on énonce d'abord le multiplicateur, puis le multiplicande ; on verra plus tard que ce défaut de correspondance entre le langage écrit et le langage parlé ne crée aucune difficulté.

22. On peut multiplier entre eux plus de deux nombres ; mais, provisoirement, nous devons essentiellement supposer que les opérations s'effectuent dans un ordre déterminé. Ainsi le symbole

$$4 \times 3 \times 5$$

veut dire qu'on doit multiplier 4 par 3, puis le résultat par 5 ; si on attribue aux parenthèses le sens que nous avons déjà expliqué, c'est la même chose que

$$(4 \times 3) \times 5,$$

ou que

$$(4 \times 3) + (4 \times 3) + (4 \times 3) + (4 \times 3) + (4 \times 3);$$

4, 3, 5 sont les facteurs : le résultat de ces opérations continue à porter le nom de produit. De même $4 \times 3 \times 5 \times 2$ veut dire qu'on effectue, comme il a été expliqué, le produit $4 \times 3 \times 5$ et qu'on le multiplie ensuite par 2.

La proposition du n° 20, appliquée à l'exemple choisi pour la démontrer, peut s'écrire

$$9 \times (5 + 2) = (9 \times 5) + (9 \times 2).$$

Il importe d'appeler l'attention sur une habitude qui, sans autre explication, pourrait donner lieu à des confusions. Dans le second membre de l'égalité précédente, on a mis les deux produits 9×5, 9×2 entre parenthèses, conformément aux conventions du n° 12. Ces parenthèses, d'ordinaire, on les sous-entend. En général, quand on a à indiquer des sommes de *produits*, on regarde ces produits comme effectués; ainsi on écrit

$$9 \times 5 + 9 \times 2, \quad 7 \times 8 + 3 \times 4$$

avec la même signification que

$$(9 \times 5) + (9 \times 2), \quad (7 \times 8) + (3 \times 4).$$

L'expression $7 \times 8 + 3 \times 4$, par exemple, représente la somme des deux produits obtenus l'un en multipliant 7 par 8, l'autre en multipliant 3 par 4, et non, comme on pourrait le croire si l'on n'était pas prévenu, le nombre obtenu en multipliant 7 par 8, en ajoutant 3 au résultat et en multipliant le tout par 4. Le nombre qui résulterait de cette suite d'opérations s'écrirait

$$(7 \times 8 + 3) \times 4.$$

23. Lorsque tous les facteurs d'un produit, en nombre quelconque, sont égaux, le produit s'appelle *puissance* ; c'est la puissance deux (ou deuxième), la puissance trois (ou troisième), quatre (ou quatrième),... du nombre qui figure comme facteur, suivant qu'il y a deux, trois, quatre,... facteurs égaux à ce nombre ; le nombre des facteurs égaux est appelé aussi l'exposant de la puissance. On indique une puissance d'un nombre en écrivant ce nombre et en plaçant à sa droite et en haut, en plus petits caractères, l'exposant de la puissance.

Ainsi la quatrième puissance de trois (ou trois puissance quatre) s'écrit

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3;$$

Au lieu de seconde et de troisième puissance, on emploie, avec la même signification, les mots *carré* et *cube* ; ainsi le carré de trois (ou trois au carré) n'est autre chose que

$$3 \times 3 = 3^2 = 3 + 3 + 3;$$

le cube de quatre, c'est

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 4 \times 4 + 4 \times 4 + 4 \times 4 + 4 \times 4.$$

Par définition, la puissance *un* d'un nombre n'est autre chose que ce nombre; l'exposant un se sous-entend d'ordinaire.

24. *Soustraction.* — Considérons deux collections d'objets; pour savoir si ces deux collections contiennent le même nombre d'objets, on cherchera (n° 5) à faire correspondre les objets de la première aux objets de la seconde: pour cela on prendra dans chaque collection un objet et on les affectera d'une même marque ; par exemple, on écrira sur chacun d'eux le nombre un. Puis on prendra dans chaque collection un objet non marqué, et on les affectera d'une même marque; on écrira par exemple le nombre deux sur chacun. Puis on prendra dans chaque collection un objet non marqué, et on les affectera d'une même marque ; on écrira par exemple le nombre trois sur chacun d'eux, etc... On continuera ainsi jusqu'à ce que tous les objets d'une collection soient marqués : si tous les objets de l'autre collection sont aussi marqués, les deux collections comprennent le même nombre d'objets, et, si l'on a adopté le système de marques que nous venons d'expliquer, le dernier nombre employé comme *marque* est le nombre d'objets qui figurent dans l'une et l'autre collection. Si tous les objets de la première collection sont marqués et que tous ceux de la seconde ne le soient pas, celle-ci contient le plus grand nombre d'objets : les objets de cette seconde collection se trouvent par là même *séparés* en deux *groupes*; le premier groupe contenant les objets marqués, en nombre égal au nombre d'objets de la première collection, le second groupe contenant les objets non marqués: le nombre d'objets contenus dans ce second groupe est la *différence* entre le nombre d'objets contenus dans la première collection et le nombre d'objets contenus dans la seconde. Si, dans la seconde collection, on supprime les objets du premier groupe, les objets marqués, il reste le second groupe : de là vient l'emploi du mot *reste* pour désigner la différence, et l'emploi des mots *retrancher*, *ôter*, pour désigner l'opération que l'on vient de décrire.

25. D'une façon plus abstraite, on peut dire :

Deux nombres inégaux étant donnés, l'un d'eux est certainement plus grand que l'autre, c'est-à-dire qu'il peut s'obtenir en lui ajoutant un certain nombre. Retrancher, ôter, soustraire un nombre d'un autre plus grand, c'est trouver le nombre qu'il faut ajouter au plus petit pour obtenir le plus grand; l'opération s'appelle soustraction, le résultat s'appelle reste ou différence. Si l'on sépare le plus grand nombre en deux parties, dont l'une soit égale au plus petit nombre, l'autre partie est la différence.

Par exemple, 2 est la différence entre 5 et 3, puique 5 est la somme de 3 et de 2. Les deux nombres donnés s'appellent quelquefois les deux termes de la différence.

Il n'y a certainement qu'un seul nombre qui, ajouté au plus petit, reproduise le plus grand; c'est ce qui résulte suffisamment des explications qui précèdent et de la signification concrète attribuée à la *soustraction*. Cela résulte aussi de la remarque qui termine le n° 16.

La soustraction peut se définir encore comme il suit :

Si deux nombres ne sont pas égaux, ils n'occupent pas le même rang dans la suite naturelle des nombres; celui qu'on rencontre le premier est le plus petit, le nombre de rangs dont il faut s'avancer dans la suite pour atteindre le second, ou, si l'on veut (n° 11), le nombre d'unités qu'il faut ajouter au premier pour obtenir le second est la différence entre les deux nombres.

26. Par définition, la différence de deux nombres égaux est le nombre zéro. Cette définition rentre dans la définition générale, puisque l'on ne change pas un nombre en lui ajoutant zéro, et que zéro est le seul nombre qui jouisse de cette propriété. Pour la même raison, il convient de dire qu'on ne change pas un nombre quand on en retranche zéro. Quand on retranche d'un nombre un nombre autre que zéro, on obtient comme reste un nombre plus petit que le premier.

27. Pour signifier une soustraction, on écrit d'abord le plus grand nombre, on place ensuite le signe — (que l'on énonce *moins*) et ensuite le plus petit.

Ainsi $5 - 3$ est la différence entre 5 et 3; et les deux égalités

$$5 - 3 = 2, \qquad 5 = 3 + 2$$

ont exactement le même sens, l'une entraîne l'autre.

On écrit de même

$$5 - 5 = 0.$$

D'une façon générale, les égalités

$$a = b + c, \qquad a - b = c, \qquad a - c = b$$

ont le même sens.

Remarquons enfin que, pour qu'on puisse retrancher le nombre b du nombre a, il faut et il suffit que b soit plus petit que a ou égal à a, ce que l'on exprime en écrivant

$$b \leqq a$$

et en disant b inférieur ou égal à a, b au plus égal à a.

28. Nous venons d'observer que les deux égalités

$$5 - 3 = 2, \qquad 5 = 3 + 2$$

avaient exactement le même sens; or nous avons vu (n° 20) que la seconde entraînait la suivante

$$9 \times 5 = 9 \times 3 + 9 \times 2,$$

et celle-ci peut s'interpréter en disant que le produit de 9 par le nombre 2, qui est la différence entre 5 et 3, est égal à la différence entre le produit de 9 par 5 et le produit de 9 par 3. On conclut de là la proposition suivante, qui est, au fond, identique à celle du n° 20 : *Pour multiplier un nombre par une différence on peut multiplier ce nombre successivement par les deux termes de la différence et retrancher le second résultat du premier.*

En adoptant une convention toute pareille à celle du n° 23, c'est-à-dire en regardant comme effectués les produits que l'on doit retrancher, comme ceux que l'on doit ajouter, l'égalité précédente peut s'écrire

$$9 \times 3 = 9 \times 5 - 9 \times 2$$

en omettant les parenthèses.

29. Lorsqu'un nombre est donné comme une somme de nombres, et qu'on veut en retrancher un de ces nombres, il suffit d'effacer ce nombre et de faire la somme de ceux qui restent.

Par exemple, si de la somme

$$3+2+5+4,$$

on voulait retrancher 5, il suffirait d'effectuer la somme

$$3+2+4:$$

en effet, $3+2+5+4$ est la somme de $3+2+4$ et de 5. Si, ensuite, on voulait retrancher du reste $3+2+4$ le nombre 2, on n'aurait qu'à effectuer la somme $3+4$. Remarquons que l'on serait arrivé au même résultat final en retranchant tout d'un coup du nombre $3+2+5+4$ la somme $2+4$, puisque l'on a

$$3+2+5+4=(3+5)+(2+4).$$

30. En général, *si d'un nombre a, on peut retrancher successivement plusieurs nombres p, q, r, on peut retrancher à la fois du nombre a la somme $p+q+r$, et, en procédant d'une façon ou de l'autre, on arrive au même résultat.*

Considérons en effet une collection d'objets, un sac de billes, par exemple, et supposons qu'on en retranche successivement deux billes, quatre billes, trois billes; il suffit d'imaginer qu'on ait mis ensemble ces deux, quatre et trois billes pour comprendre qu'on a séparé les billes en deux parties : d'une part celles qui restent dans le sac, d'autre part la collection de celles qu'on en a retirées, dont le nombre est la somme $2+3+4$; on serait donc parvenu au même résultat en retranchant cette somme du nombre de billes primitivement contenues dans le sac.

31. *Division*. — Un cas particulier intéressant est celui où les nombres qu'on veut retrancher successivement d'un nombre donné sont tous égaux; leur somme peut alors être regardée comme un produit (n° 17); le multiplicande est l'une quelconque des parties de la somme, le multiplicateur est le nombre des parties. Le reste est le même, soit que l'on retranche successivement chacune des parties, soit que l'on retranche, d'un seul coup, leur somme, c'est-à-dire le produit de l'une de ces parties par leur nombre.

Étant donnés deux nombres, la *division* du premier par le second a pour but de retrancher du premier nombre le second autant de fois que possible; le nombre de soustractions successives que l'on peut effectuer s'appelle *quotient*; le *reste* de la dernière soustraction s'appelle *reste* de la division. Le premier nombre s'appelle *dividende*, le second *diviseur*.

Supposons, par exemple, qu'un enfant veuille partager entre cinq de ses camarades les billes contenues dans un sac, en donnant à chacun d'eux le même nombre de billes et en donnant à chacun d'eux le plus de billes possible. Il pourra procéder comme il suit : il donnera d'abord une bille à chacun de ses camarades; il aura alors retranché cinq billes du sac. Puis il distribuera une bille à chacun; il aura alors retranché encore cinq billes, en tout deux fois cinq billes; après une troisième distribution, il aura retiré du sac trois fois cinq billes, et ainsi de suite; il s'arrêtera quand le sac ne contiendra plus qu'un nombre de billes moindre que cinq. L'opération sera terminée; le nombre de distributions, ou le nombre de fois qu'il a retranché cinq du nombre primitif de billes contenues dans le sac, est le quotient; c'est le nombre de billes reçues par chaque enfant. Le nombre de billes qui restent dans le sac est le reste de la division. Supposons, pour fixer le langage, qu'on ait fait sept distributions, et qu'il reste trois billes. On aura séparé la collection de billes d'une part en sept groupes de cinq billes, dont chacun a servi à faire une distribution, et d'autre part en un groupe de trois billes. En réunissant ensemble tous ces groupes, on retrouve le nombre primitif de billes.

Ainsi le reste est la différence entre le nombre primitif de billes et la somme des nombres de billes successivement retranchées, c'est-à-dire sept fois cinq, ou 5×7. En d'autres termes, l'opération a permis de mettre le dividende sous la forme

$$5 \times 7 + 3.$$

On peut donc dire encore que la division est une opération qui consiste à décomposer le dividende en un certain nombre de parties égales au diviseur et en un *reste* moindre que le diviseur : le nombre de parties égales au diviseur est le quotient.

Le reste peut être zéro : on dit alors que la division se fait exactement ; dans ce cas, le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient.

La définition que nous venons de donner suppose que le dividende est au moins égal au diviseur; dans le cas contraire, on *convient* de regarder le quotient comme étant égal à zéro, et le reste comme étant égal au dividende. Avec cette convention, on peut dire, même dans ce cas, que le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient, produit qui est nul, plus le reste.

§ 3. — Numération parlée.

32. Après ces notions préliminaires, arrivons à la façon dont on nomme les nombres. Si l'on se bornait à donner aux nombres des noms différents entre eux, d'ailleurs quelconques, la mémoire ne pourrait retenir que bien peu de ces noms; en outre, en nommant l'un de ces nombres, on aurait difficilement idée de son ordre de grandeur, de sa place dans la suite naturelle des nombres. Nous allons voir comment, au moyen d'un petit nombre de mots combinés entre eux d'après des règles simples, on a pu nommer beaucoup de nombres et leur attribuer des noms qui donnent de suite une idée de leur grandeur.

Nous avons déjà dit qu'on avait donné aux premiers nombres de la suite naturelle les noms :

un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix.

On nomme les neuf nombres qui suivent dix, en plaçant le mot dix devant les neuf premiers nombres; ainsi, l'on dit :

dix-un, dix-deux, dix-trois, dix-quatre, dix-cinq, dix-six, dix-sept, dix-huit, dix-neuf.

Dix-un, par définition, s'obtient en ajoutant un à dix; dix-deux s'obtient en ajoutant un à dix-un, et par conséquent, en ajoutant un et un, ou deux, à dix. C'est une application de ce théorème qu'on obtient le même résultat en ajoutant à un même nombre deux nombres successivement ou bien leur somme : un et un, ou leur somme deux; de même, dix-trois peut être regardé soit comme dix-deux plus un, soit comme la somme de dix et de trois, etc... Dans les mots dix-un, dix-deux..., dix-neuf, le trait d'union a le même sens que le mot plus.

Au lieu des mots dix-un, dix-deux, dix-trois, dix-quatre, dix-cinq, dix-six, l'usage a fait prévaloir les mots onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize.

Après dix-neuf, la même règle conduirait à dire dix-dix; ce nombre n'est autre chose que la somme dix plus dix, ou deux fois dix; ce nombre deux fois dix s'appelle vingt; on désigne de même les neuf nombres qui suivent vingt en faisant précéder du mot vingt les noms des neuf premiers nombres: ainsi, l'on dit vingt-un, vingt-deux,..., vingt-neuf; la même observation que l'on a faite plus haut s'applique encore: ces mots ont le même sens que vingt plus un, vingt plus deux,..., vingt plus neuf. Après vingt-neuf, au lieu de vingt plus dix, ou de deux fois dix plus dix, ou de trois fois dix[1], on dit trente; et l'on continue de la même façon en disant trente-un, trente-deux,..., trente-neuf; il suffira ensuite de dire que les mots quarante, cinquante, soixante, septante, octante, nonante, cent ont le même sens que : quatre fois dix, cinq fois dix, six fois dix, sept fois dix, huit fois dix, neuf fois dix, dix fois dix, pour savoir comment on nomme les cent premiers nombres de la suite naturelle.

Toutefois l'usage a apporté quelques dérogations à ces règles : au lieu de septante, on dit soixante-dix; on dit de même soixante-onze, soixante-douze, soixante-treize,..., soixante-dix-neuf, au lieu de septante-un, septante-deux, septante-trois..., septante-neuf; puis on dit quatre-vingts[2] au lieu de octante, quatre-vingt-dix au lieu de nonante, puis quatre-vingt-onze, quatre-vingt-douze..., quatre-vingt-dix-neuf au lieu de nonante-un, nonante-deux, nonante-neuf.

On nomme les quatre-vingt-dix-neuf nombres qui suivent cent en plaçant le mot cent devant les noms des quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres; cent quatre-vingt-dix-neuf plus un, c'est la même chose, en vertu d'une remarque déjà faite, que cent plus cent ou deux fois cent; au lieu de deux fois cent on dit deux cents; on dira de même trois cents, quatre cents,..., neuf cents au lieu de trois fois cent, quatre fois cent, neuf fois cent. Les noms des quatre-vingt-dix-neuf nombres qui suivent deux cents se nomment en plaçant les mots deux cent devant les noms des quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres; deux cent quatre-vingt-dix-neuf plus un c'est deux cents plus cent, ou trois cents; et ainsi de suite. On nomme ainsi tous les nombres jusqu'à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf; neuf cent quatre-vingt-dix-neuf plus un, c'est neuf cents plus cent, ou dix fois cent; au lieu de dix fois cent, on dit mille.

Arrêtons-nous un instant ici, supprimons toutes les irrégularités de langage que l'usage a introduites dans la façon de nommer les mille premiers nombres, et remarquons même qu'au lieu d'employer les mots vingt, trente, ..., nonante, on aurait très bien pu dire deux dix, trois dix, ..., neuf dix, comme on dit ensuite deux

1. Le lecteur observera que, en disant « deux fois dix plus dix est la même chose que trois fois dix », on applique en fait le théorème du n° 20. La même observation s'applique plusieurs fois.

2. C'est le reste de façons de parler qui ont encore leur trace dans les expressions six-vingts, quinze-vingts. Quatre-vingts, six-vingts, quinze-vingts ont le sens de quatre fois vingt, six fois vingt, quinze fois vingt. Le trait d'union indique ici, non une addition comme dans les mots dix-sept, dix-huit..., mais une multiplication. Les anciennes expressions septante, octante, nonante se sont conservées dans la Suisse romande; il est regrettable qu'elles soient tombées en désuétude chez nous.

cents, trois cents, ..., neuf cents; au lieu de dire vingt-un, vingt-deux, ..., on dirait deux dix un, deux dix deux, etc. ; la numération parlée serait alors entièrement régulière jusqu'à mille ; les mots nouveaux qu'on est obligé d'introduire après les noms des neuf premiers nombres sont dix, qui vaut dix unités, cent qui vaut dix fois dix, mille qui vaut dix fois cent ; en sorte que, avec douze mots différents, on a pu nommer les mille premiers nombres ; en outre on voit que, après les dix premiers nombres, les mots nouveaux s'introduisent pour nommer des nombres qui sont de dix en dix fois plus grands. Il aurait peut-être été plus régulier de continuer ainsi et de créer des mots nouveaux pour dire dix fois mille, cent fois mille, etc.... ; mais c'est une autre règle qui a prévalu.

On compte par mille comme on a compté jusqu'ici par unités, c'est-à-dire qu'on emploie les expressions deux mille, trois mille,..., dix mille, ..., vingt mille, ..., quatre-vingt-dix-neuf mille, cent mille, deux cent mille, ..., neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille, avec le même sens que deux fois mille, trois fois mille, ..., dix fois mille, ..., vingt fois mille, ..., quatre-vingt-dix-neuf fois mille, cent fois mille, deux cents fois mille,..., neuf cent quatre-vingt-dix-neuf fois mille, et l'on ne crée de mot nouveau que pour mille fois mille, que l'on appelle un *million*.

Pour nommer les neuf cent quatre-vingt-dix-neuf nombres qui suivent mille, on fait précéder du mot mille (ou *mil*) les noms des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres ; ainsi l'on dit : mille un, mille deux, ..., mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf; mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf plus un, c'est mille plus mille ou deux mille ; de même entre deux mille et trois mille, ..., entre neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille et un million.

On compte ensuite par millions, en disant deux millions, trois millions, ..., neuf cent quatre-vingt dix-neuf millions, avec le sens de deux fois un million, trois fois un million, ..., neuf cent quatre-vingt-dix-neuf fois un million ; on ne crée de nom nouveau que pour mille millions, que l'on appelle un billion (1) ou un milliard.

On nomme les neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf nombres qui suivent un million, en plaçant les mots un million avant les noms des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres ; ainsi on dit un million un, un million deux,..., un million neuf cent quatre-

1. Cette signification du mot billion est relativement récente et n'a pas été adoptée partout : en Allemagne un billion est un million de millions, un trillion est un million de billions, etc....

vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf ; le nombre suivant est deux millions ; on recommence alors à dire, deux millions un, deux millions deux, ..., jusqu'à trois millions, et ainsi de suite jusqu'à un billion.

On compte ensuite par billions comme on a fait par mille, ou par millions, et l'on ne crée de nom nouveau que pour mille billions, que l'on appellerait un trillion ; les nombres placés entre un billion et deux billions s'énonceraient successivement en plaçant après les mots un billion les noms des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf millions neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres ; on place ces mêmes noms après deux billions pour désigner les nombres entre deux billions et trois billions, etc.

On compterait ensuite par trillions, jusqu'à mille trillions, auquel nombre on donnerait un nom nouveau et l'on introduirait toujours des noms nouveaux pour désigner des collections d'unités de mille en mille fois plus grandes. Mais déjà les mots un billion, un trillion ne sont guère usités : on n'a pas besoin dans la pratique de nombres aussi grands, et quand il s'agit des grands nombres que la science est obligée de considérer, on se contente de les écrire. La numération écrite, en effet, est beaucoup plus simple et plus régulière que la numération parlée. Les règles n'y présentent pas d'exceptions, enfin au moyen de dix caractères elle permet de désigner n'importe quel nombre. Quoique la numération parlée permette avec peu de mots de désigner beaucoup de nombres, pour nommer l'infinité des nombres, il n'en faudrait pas moins une infinité de mots. En outre, elle comporte une certaine confusion, en ce sens que la juxtaposition des noms de nombres implique tantôt l'idée d'addition tantôt l'idée de multiplication ; ainsi quand on dit deux cent dix-sept : deux cents implique l'idée de *multiplication* (deux fois cent) ; au contraire dix-sept doit être *ajouté* à deux cents. L'habitude, il est vrai, empêche de tomber dans ces confusions, et même d'y penser. Quoi qu'il en soit, le véritable instrument scientifique est la numération écrite, instrument d'une rare perfection, et qu'on ne saurait trop admirer.

§ 4. — **Numération écrite.**

33. Nous allons montrer comment au moyen des seuls chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, on peut *compter* une collection d'objets et figurer (écrire) le nombre d'objets contenus dans cette collection.

Supposons que nous ayons devant nous un petit monceau de blé dont nous voulons compter les grains. Nous supposerons aussi que nous ayons à notre disposition des sacs de diverses dimensions, les uns blancs, les autres bleus.

Groupons les grains de blé dix par dix, jusqu'à ce qu'il en reste moins de dix ; mettons chaque groupe de dix grains dans un sac blanc, que nous appellerons *sac* du premier ordre : cette opération sera la première mise en sac [1]. Mettons les grains qui restent dans un sac bleu sur lequel nous inscrirons au moyen d'un des chiffres 0, 1, 2, ..., 9, le nombre de grains qu'il contient, et que nous placerons à part, à l'extrémité de droite d'une ligne horizontale. Si ce sac est vide, c'est-à-dire si tous les grains ont pu être distribués dans les sacs du premier ordre, c'est le chiffre 0 qu'on a inscrit sur le sac bleu.

Nous avons maintenant devant nous l'ensemble des sacs du premier ordre : considérons-les comme des objets distincts, susceptibles d'être comptés. Groupons-les dix par dix, jusqu'à ce qu'il en reste moins de dix. Mettons chaque groupe de dix sacs du premier ordre dans un sac blanc, que nous appellerons unité ou sac du second ordre ; ce sera la *deuxième* mise en sac. Mettons les sacs du premier ordre qui restent dans un sac bleu, en inscrivant leur nombre au moyen d'un des chiffres 0, 1, 2, ..., 9, et plaçons ce second sac bleu à part, à gauche du premier, sur la même ligne.

Nous avons maintenant devant nous l'ensemble des sacs du second ordre. Groupons-les dix par dix. Mettons chaque groupe de dix sacs du second ordre dans un sac blanc, que nous appellerons sac du troisième ordre ; ce sera la *troisième* mise en sac. Mettons les sacs du second ordre qui restent dans un sac bleu, en inscrivant leur nombre au moyen d'un des chiffres 0, 1, 2, ..., 9, et plaçons ce troisième sac bleu à part, à gauche des deux premiers, sur la même ligne.

Continuons de la même façon ; après chaque opération le nombre de sacs blancs que l'on a devant soi a diminué, leur ordre s'est élevé ; au bout d'un certain nombre d'opérations, on finira par avoir devant soi moins de dix sacs blancs du même ordre, le plus élevé auquel on soit parvenu. Alors on les mettra dans un sac bleu, avec un des chiffres 1, 2, ..., 9 et l'on mettra ce dernier sac bleu à part, à gauche des précédents, et sur la même ligne. Cette fois, le chiffre inscrit ne sera certainement pas un 0. Tous les grains sont distribués dans les sacs bleus, dont chacun porte son chiffre ; l'opération est terminée.

1. Le mot *mise* est pris ici dans l'acception : *action de mettre*.

Si maintenant on écrit sur une même ligne les chiffres qui figurent sur les sacs bleus, exactement dans le même ordre, on aura une représentation abrégée du résultat : ce sera le nombre de grains de blé écrit dans le *système décimal*, ou encore dans le système dont la base est *dix*. Il est clair que les chiffres inscrits et leur rang ne dépendent que du nombre total des grains de blé.

34. L'opération que nous venons de décrire donne lieu aux observations suivantes :

Tout d'abord, elle permet d'avoir, immédiatement, écrits dans le même système, les nombres des sacs blancs du premier ordre, ou du second, ou du troisième..., que l'on a obtenus après chaque opération partielle.

Considérons, par exemple, les sacs blancs du premier ordre, dont on a le monceau devant soi, dès qu'on a mis à part, dans le premier sac bleu, les grains qui restaient après la première mise en sac; ces sacs du premier ordre, on les a traités exactement comme les grains de blé, et on les a distribués dans le second sac bleu, dans le troisième, dans le quatrième, etc... Les chiffres inscrits sur ces sacs bleus, placés chacun à leur rang, donnent donc la représentation écrite du nombre de sacs du premier ordre; on obtient ce nombre écrit dans le système décimal en supprimant le premier chiffre à droite du nombre écrit de grains de blé; en supprimant encore un chiffre à droite, on aura le nombre écrit de sacs du second ordre; en supprimant encore un chiffre à droite, on aura le nombre écrit de sacs du troisième ordre, etc...

35. Chaque sac du premier ordre contient dix grains; chaque sac du second ordre contient dix sacs du premier ordre, ou dix fois dix grains, ou cent grains, dans le langage de la numération parlée; chaque sac du troisième ordre contient dix fois cent grains, ou mille grains, dans ce même langage, etc... Chaque sac blanc contient dix sacs blancs de l'ordre immédiatement inférieur, ou dix fois plus de grains que le sac blanc de l'ordre immédiatement inférieur.

On peut dire encore, en se reportant aux définitions des nos 22 et 23, que les sacs blancs du premier ordre, du second, du troisième, du quatrième,..., contiennent des nombres de grains qui sont respectivement dix, dix $\times$ dix, dix $\times$ dix $\times$ dix, dix $\times$ dix $\times$ dix $\times$ dix,...; le nombre de grains contenus dans chaque sac blanc est un *produit* de facteurs tous égaux à dix, ou une puissance de dix; le nombre de ces facteurs, ou l'exposant de cette puissance, est l'ordre du sac blanc.

36. Chaque opération partielle correspond à une division par dix.

Ainsi, dans le premier groupement des grains dix par dix, le nombre de sacs du premier ordre est le *quotient* de la division par dix du nombre total de grains de blé ; le chiffre inscrit sur le premier sac bleu (en commençant par la droite) est le *reste* de cette division ; de même, le nombre de sacs du second ordre est le quotient de la division par dix du nombre de sacs du premier ordre, et le chiffre inscrit sur le second sac bleu est le reste de cette division ; le nombre de sacs du troisième ordre est le quotient de la division par dix du nombre de sacs du second ordre et le chiffre inscrit sur le troisième sac bleu est le reste de cette division, etc...

37. On peut aller plus loin dans cette même voie. Après la première opération partielle, chaque sac du premier ordre contient évidemment plus de grains qu'il n'y en a dans le premier sac bleu. De même, chaque sac du second ordre contient plus de grains qu'on n'en a mis à part dans les deux premiers sacs bleus, ensemble : en effet, un sac du second ordre contient un sac du premier ordre plus neuf sacs du premier ordre ; or, le premier sac bleu contient moins de grains qu'un sac du premier ordre, et le second sac bleu contient au plus neuf sacs du premier ordre. De même un sac du troisième ordre contient plus de grains qu'on n'en a mis à part dans les trois premiers sacs bleus : en effet, un sac du troisième ordre contient un sac du second ordre plus neuf sacs du second ordre ; or, les deux premiers sacs bleus, pris ensemble, contiennent moins de grains qu'un sac du second ordre, et le troisième sac bleu contient au plus neuf sacs du second ordre. De même un sac du quatrième ordre contient à lui seul plus de grains qu'on n'en a mis à part dans les quatre premiers sacs bleus : car un sac du quatrième ordre contient un sac du troisième ordre plus neuf sacs du troisième ordre ; or, les trois premiers sacs bleus, ensemble, contiennent moins de grains qu'un sac du troisième ordre, et le quatrième sac bleu contient au plus neuf sacs du troisième ordre. Il est clair que le raisonnement se continue jusqu'au bout ; mais arrêtons-le au point où nous en sommes, et supposons aussi que la distribution des grains de blés en sac ait été arrêtée au moment où, après avoir formé les sacs blancs du quatrième ordre, on a mis à part, dans le quatrième sac bleu, les sacs du troisième ordre qui restaient.

38. Les grains de blé se trouvent distribués, d'une part, dans les sacs du quatrième ordre, dont chacun contient le même nombre de grains (dix mille dans le langage de la numération parlée) ; d'autre part, dans les quatre premiers sacs bleus qui, ensemble, ne contiennent pas dix mille grains. On voit donc qu'on peut retrancher du nombre total de grains de blé autant de fois dix mille qu'il y a de sacs du quatrième ordre, et que le reste, le nombre de grains contenus dans les quatre premiers sacs bleus, est inférieur à dix mille. En d'autres termes, le nombre de sacs du quatrième ordre est le quotient de la division du nombre total de grains par dix mille, et le nombre de grains contenus dans les quatre premiers sacs bleus est le reste de cette division.

Si l'on a écrit le nombre total des grains de blé, le nombre de sacs du quatrième ordre, le précédent quotient, s'obtient en supprimant les quatre derniers chiffres ; l'ensemble des quatre derniers chiffres, écrits dans leur ordre, figure le reste.

39. Cette remarque nous permet de répondre aisément à la question suivante :

Si l'on compte de la façon qu'on a expliquée les grains de blé contenus dans un autre tas, comment savoir si l'un des tas contient plus de grains que l'autre ?

Supposons qu'on mette en sac en même temps, mais séparément, les deux tas, et que l'on s'arrête, par exemple, dans les deux opérations, quand on a formé les sacs du quatrième ordre, et mis à part, pour chaque tas, dans un sac bleu, les sacs blancs du troisième ordre qui restaient. Si *l'on sait reconnaître que le nombre de sacs du quatrième ordre est plus grand pour le premier tas que pour le second*, on pourra affirmer que le premier tas contient plus de grains que le second.

Pour chaque tas, en effet, les grains ont été séparés en deux parties : les grains contenus dans les sacs du quatrième ordre et ceux qui sont rangés dans les sacs bleus ; mais tous les grains contenus dans les sacs bleus provenant du second tas sont en moindre nombre que les grains contenus dans un seul sac du quatrième ordre, et, puisque le premier tas fournit au moins un sac du quatrième ordre de plus que le second tas, il est clair que le premier tas contiendra plus de grains que le second.

Si donc, quand on a terminé la mise en sac, pour les deux tas, on voit qu'on a obtenu, pour le premier, des sacs d'un ordre plus élevé que le second n'en a fourni, on pourra affirmer que le premier tas contient plus de grains que le second ; cette circonstance se reconnaîtra sur les nombres écrits, en constatant que le premier nombre écrit contient plus de chiffres que le second.

Si les deux nombres écrits contiennent le même nombre de chiffres, on comparera les deux premiers chiffres de *gauche*, ceux qui représentent des sacs de l'ordre le plus élevé ; si le premier chiffre du premier nombre est plus *fort* [1] que le premier chiffre du second, le premier tas contiendra plus de grains que le second, puisqu'il y a au moins un sac de l'ordre le plus élevé de plus pour le premier tas que pour le second; si les premiers chiffres de gauche sont les mêmes dans les deux nombres, on comparera les deuxièmes chiffres; si, pour le premier nombre, le deuxième chiffre est plus fort que pour le second, le premier nombre sera plus grand que le second; si les deux premiers chiffres de gauche sont les mêmes dans les deux nombres, on comparera les troisièmes chiffres, etc...; il est clair qu'on parviendra ainsi, très aisément, à reconnaître si les deux nombres sont égaux, ou si l'un est plus grand que l'autre.

40. Comment s'écrivent, dans le système décimal, les nombres de grains contenus dans les sacs du premier ordre, du second, du troisième, etc...?

Si notre tas de blé ne contenait que dix grains, il tiendrait tout entier dans un sac du premier ordre; le premier sac bleu serait vide, il serait marqué 0, le second sac bleu serait marqué 1; le nombre de grains contenus dans un sac du premier ordre s'écrit 10. Si notre tas de blé pouvait tenir tout entier dans un sac du second ordre, on voit de même que le premier sac bleu et le second sac bleu seraient vides, le troisième sac bleu serait marqué 1; le nombre de grains contenus dans un sac du second ordre s'écrit 100; de même, le nombre de grains contenus dans un sac du troisième ordre s'écrit 1000, etc... En général, le nombre de grains contenus dans un sac d'ordre quelconque, s'écrit en plaçant à la droite du chiffre 1 un certain nombre de zéros, qu'indique l'ordre du sac.

D'après ce qui a été dit aux nos 35, 23, on peut donc écrire

$$100 = 10 \times 10 = 10^2,$$
$$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3,$$
$$10000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4.$$

41. Plus généralement, comment écrire le nombre de grains que contiennent un certain nombre de sacs d'un ordre déterminé, du troisième par exemple, quand on sait écrire ce nombre de sacs?

Supposons qu'on ait opéré sur un tas de blé qui puisse être distribué exactement dans 37 sacs du troisième ordre; alors les trois premiers sacs bleus seraient vides, le quatrième sac bleu serait marqué 7, le cinquième et dernier serait marqué 3; le nombre de

1. Un chiffre plus *fort* qu'un autre représente un nombre plus grand; 9 est un chiffre plus fort que 7.

grains s'écrirait 37000. Il suffira donc d'ajouter trois zéros à la droite de 37; en général, on ajoutera à la droite du nombre de sacs des zéros en nombre marqué par l'ordre du sac. Observons en passant que 37000 n'est autre chose que 37 fois mille; en d'autres termes on a

$$1000 \times 37 = 37000.$$

42. Supposons qu'en opérant comme nous l'avons expliqué sur un tas de blé, on ait obtenu huit sacs bleus, sur lesquels soient respectivement inscrits, en allant de droite à gauche, les chiffres 4, 5, 1, 3, 7, 0, 8, 2; le nombre total de grains de blé s'écrira 28073154; il y aura 2807315 sacs du premier ordre contenant en tout 28073150 grains; 280731 sacs du second ordre, contenant en tout 28073100 grains; 28073 sacs du troisième ordre contenant en tout 28073000 grains, ...; 28 sacs du sixième ordre contenant 28000000 grains; 2 sacs du septième ordre contenant 20000000 grains.

On voit qu'on peut écrire

$$\begin{aligned}28073154 &= 4 + 50 + 100 + 3000 + 70000 + 8000000 + 20000000\\ &= 4 + 10 \times 5 + 100 \times 1 + 1000 \times 3 + 10000 \times 7\\ &\quad + 100000 \times 0 + 1000000 \times 8 + 10000000 \times 2\\ &= 4 + 10 \times 5 + 10^2 \times 1 + 10^3 \times 3 + 10^4 \times 7\\ &\quad + 10^5 \times 0 + 10^6 \times 8 + 10^7 \times 2.\end{aligned}$$

Notons encore l'égalité suivante

$$\begin{aligned}28073154 &= 28070000 + 3154\\ &= 10000 \times 2807 + 3154,\end{aligned}$$

qui correspond au moment où l'on a formé les sacs du quatrième ordre contenant chacun 10000 grains, et où l'on a mis à part dans les sacs bleus 3154 grains, nombre inférieur à 10000, comme on l'a observé. Cette égalité exprime que le quotient de la division du nombre écrit 28073154 par 10000 est 2807 et le reste 3154.

43. Arrêtons-nous un instant sur les sacs blancs qui correspondent aux mille, aux millions, ..., à ces nombres de mille en mille fois plus grands pour lesquels, dans la numération parlée, on a créé des noms nouveaux.

Les sacs qui contiennent mille grains sont du troisième ordre; leur nombre s'obtient en supprimant les trois premiers chiffres à droite dans le nombre écrit qui figure le nombre total de grains : ce sera, dans l'exemple qu'on a pris, 28073. Quand on a formé les sacs du troisième ordre, pour former les sacs qui contiennent mille sacs du troisième ordre, il faut effectuer trois nouvelles mises en sac, de même qu'il a fallu effectuer trois mises en sac pour parvenir aux sacs contenant mille grains; les sacs ainsi obtenus seront du sixième ordre : ils contiendront mille fois mille grains, ou un million; on obtiendra leur nombre en supprimant six chiffres à droite du nombre 28073154 ou trois chiffres à droite du nombre 28073; on trouve ainsi 28.

De même, si le tas de blé était suffisamment gros, on formerait les sacs contenant mille millions ou un billion de grains, en prenant les sacs du sixième ordre et en effectuant trois nouvelles mises en sac : ce seraient des sacs du neuvième ordre; leur nombre se déduirait du nombre écrit de grains de blé en supprimant neuf chiffres à droite de ce nombre, etc.

Observons que les nombres mille, un million, un billion s'écrivent dans le système décimal

$$1000 = 10^3,$$
$$1000000 = 1000 \times 1000 = 1000^2 = 10^6,$$
$$1000000000 = 1000^3 = 10^9.$$

44. Adoptons maintenant des dénominations plus abstraites, qui se comprendront d'elles-mêmes, après les explications qui ont été données, et qui pourront nous servir dans tous les cas.

Nous appellerons unités composées du premier ordre, du second ordre, du troisième ordre, etc., les nombres qui s'écrivent 10, 100, 1000, ... C'étaient les nombres de grains contenus dans nos sacs du premier, du second, du troisième ordre.... L'unité composée du premier ordre équivaut à dix unités simples [1]; chaque unité composée d'ordre supérieur équivaut à dix unités composées de l'ordre immédiatement inférieur.

Dans le nombre 28073154, 4 est le *chiffre* des unités simples; et 28073154 le *nombre* des unités simples; 5 est le *chiffre* des unités composées du premier ordre ou des dizaines, 2807315 est le *nombre* des dizaines; 1 est le *chiffre* des unités composées du second ordre, ou des centaines, 280731 est le *nombre* des centaines; 3 est le *chiffre* des unités composées du troisième ordre, ou des mille, 28073 est le *nombre* des mille, etc. ...; 8 est le *chiffre* des unités composées du sixième ordre, ou des millions, 28 est le *nombre* des millions, 2 est le *chiffre* et le *nombre* des unités composées du septième ordre, ou des

1. Les unités simples, si on veut leur attribuer un ordre, devront être regardées comme d'ordre *zéro*.

dizaines de millions; c'est le chiffre des plus *hautes* unités du nombre proposé.

45. Observons maintenant que la convention essentielle grâce à laquelle on peut écrire dans le système décimal un nombre quelconque, consiste à attribuer aux chiffres des valeurs différentes suivant leur position relative; *dans un nombre écrit, le premier chiffre à droite représente des unités simples, et chaque autre chiffre représente des unités composées dix fois plus grandes que celles qu'exprime le chiffre placé à sa droite.* S'il y a lieu, le zéro permet d'attribuer aux autres chiffres, dits *chiffres significatifs*, le rang qu'ils doivent occuper, afin qu'ils expriment bien les unités qu'on veut leur faire exprimer.

Un zéro, deux zéros, trois zéros,..., placés à la droite d'un nombre lui font exprimer des unités composées du premier, du deuxième, du troisième ordre... On pourrait, si cela avait quelque utilité, placer autant de zéros qu'on voudrait à la gauche d'un nombre; on ne le changerait point.

46. Il ne nous reste plus, pour terminer ce sujet, qu'à montrer comment on peut passer de la numération écrite à la numération parlée et réciproquement; comment on peut énoncer un nombre écrit, écrire un nombre énoncé.

Si le nombre écrit contient seulement un, deux ou trois chiffres, il n'y a aucune difficulté à l'énoncer; dans le cas de deux chiffres, on voit de suite le nombre de dizaines et d'unités; par exemple 28 s'énonce vingt-huit, puisque 28 veut dire deux fois dix, plus huit. S'il y a trois chiffres, on énonce d'abord le chiffre de gauche qu'on fait suivre du mot cent, et l'on énonce ensuite le nombre de deux chiffres qui reste : 928, 908, 920 s'énoncent neuf cent vingt-huit, neuf cent huit, neuf cent vingt.

Si le nombre proposé a six chiffres au plus, on supprime trois chiffres à droite, on énonce le nombre formé par les un, deux ou trois chiffres qui restent, en le faisant suivre du mot mille, et l'on énonce ensuite le nombre formé par les trois chiffres supprimés.

Si le nombre proposé a neuf chiffres au plus, on supprime six chiffres à droite; on énonce le nombre formé par les un, deux ou trois chiffres qui restent, en faisant suivre du mot millions, et l'on énonce ensuite le nombre formé par les six chiffres que l'on avait supprimés, etc...

Toutes ces règles ont été justifiées d'avance par les explications relatives à la recherche du nombre de mille, de millions, de billions, ... contenus dans un nombre.

En résumé, on sépare le nombre écrit en tranches de trois chiffres en commençant par la droite ; la dernière tranche de gauche peut contenir un, deux ou trois chiffres ; la première tranche à droite correspond aux unités simples, la deuxième aux mille, la troisième aux millions, la quatrième aux billions, etc... On énonce chaque tranche successivement, en allant de gauche à droite, ce que l'on sait faire si l'on sait énoncer un nombre écrit de trois chiffres, et l'on fait suivre le nombre écrit dans chaque tranche de celui des mots... billions, millions, mille, unités qui lui correspond. Le mot *unités* se sous-entend d'ordinaire [1].

En renversant cette règle, en quelque sorte, on a la règle pour écrire un nombre énoncé.

D'abord on n'a aucune difficulté si le nombre est moindre que mille ; on n'aura besoin, pour l'écrire, que de trois chiffres au plus ; le chiffre des centaines, celui des dizaines et celui des unités se reconnaissent à la seule audition.

Si le nombre contient des billions, des millions, des mille, des unités, en l'entendant énoncer on écrira successivement, en allant de gauche à droite, les *tranches* qui correspondent aux billions, aux millions, aux mille, aux unités. Ces tranches, sauf peut-être la première, comporteront trois chiffres [2].

47. L'habitude de compter de dix en dix, commune à presque tous les peuples ayant acquis un certain degré de culture, remonte à la plus haute antiquité. A cette même habitude se rattachent aussi de très anciennes façons d'écrire les nombres qui, dans le fond, sont identiques à la numération décimale.

Plus anciennement encore, peut-être, au lieu d'écrire les nombres, on les figurait au moyen de *jetons*. Chaque jeton représentait une unité d'un certain ordre, dans le sens que nous avons donné à ce mot. Les jetons se disposaient sur une table ou *abaque*, portant des lignes parallèles ou colonnes. Sur la première colonne (en comptant les colonnes de la droite vers la gauche), on plaçait des jetons représentant chacun une unité simple ; sur la seconde colonne, des jetons représentant chacun une dizaine ; sur la troisième colonne, des jetons

1. C'est à cette règle que correspond l'habitude, assez fréquemment suivie, de laisser, dans l'écriture ou l'impression, un petit intervalle entre les *tranches* de trois chiffres, afin de faciliter la lecture. On écrit, par exemple :

28 073 154.

2. Le lecteur un peu familier avec l'arithmétique reconnaîtra que la numération parlée est en quelque sorte mixte : elle a à la fois dix et mille pour bases. On aurait eu un système simple en introduisant des mots nouveaux pour les unités composées de dix en dix fois plus grandes.

représentant chacun une centaine, etc... On avait ainsi une représentation des nombres, très analogue à la représentation décimale. La même table servait au calcul et son usage s'est conservé jusqu'au siècle dernier [1]. Le boulier des écoles et le *suân-pân* chinois offrent une disposition analogue.

Dans l'écriture cunéiforme, les Babyloniens notent les nombres de un à neuf par la répétition d'un même signe, puis les collections de dizaines par la répétition d'un même signe différent du premier, puis les collections de centaines, encore par la répétition d'un autre signe.

Dans les systèmes de cette nature s'introduisirent des abréviations qui en altérèrent la simplicité et le caractère systématique. A ce type de numération, on peut rattacher la numération romaine, bien connue du lecteur : cette numération, si on la bornait à l'emploi et à la répétition des signes I, X, C, M,..., pour représenter les unités, les dizaines, les centaines, les mille,... serait une véritable numération décimale. C'est les abréviations qui la défigurent, et notamment celles qui se rapportent aux nombres comme IX, XIX, XC,... voisins d'un nombre qui s'exprimerait par un symbole simple; ces abréviations rendent très pénibles tout calcul direct, effectué sur les nombres écrits. Les Égyptiens avaient un mode de numération analogue à celui des Babyloniens et comportant aussi des abréviations [2]. Les Grecs de l'école d'Alexandrie introduisirent une notation très systématique, qui consistait à représenter les neuf premiers nombres par les neuf premières lettres de l'alphabet, les neuf premières collections de dizaines par les neuf lettres suivantes, les neuf premières collections de centaines par les dernières lettres de l'alphabet (complété par quelques autres caractères); pour les mille, ils recommençaient à employer les neuf premières lettres, en plaçant un signe au-dessous; ils comptaient ensuite par dizaines de mille ou *myriades*, puis par myriades de myriades, etc... Ils étaient en possession de tables de multiplication assez étendues.

Quant au système actuel de numération écrite, comportant l'emploi de neuf chiffres significatifs et du zéro, ainsi que la règle qui concerne la valeur relative des chiffres, il fut introduit dans l'Inde à

1. Dans la première scène du *Malade imaginaire*, c'est avec des *jetons* qu'Argan fait ses comptes.

2. Voici une particularité assez remarquable de leur façon de procéder dans les calculs : pour faire une multiplication, ils ne multipliaient jamais que par le nombre deux, et réunissaient ensuite les produits partiels : le lecteur se rendra aisément compte de la meilleure manière pour procéder ainsi en supposant le multiplicateur écrit dans le système binaire. (Voy. Ex. 8, 9.) La pratique de la division était fondée sur le même principe.

une époque qui n'est pas bien déterminée, mais qui, toutefois, semble postérieure à l'ère chrétienne. L'invention de ce système est un fait capital dans l'histoire de la science et l'habitude que nous avons de la numération décimale ne doit pas nous empêcher d'admirer la merveilleuse simplicité de son mécanisme.

Les Arabes rapportèrent de l'Inde la numération décimale et les principales règles de calcul. Ce système pénétra ainsi dans l'Occident vers le onzième ou douzième siècle [1].

L'emploi des chiffres significatifs a précédé, dans l'Occident, l'usage du zéro. Leur première introduction est contemporaine de Gerbert (vers l'an 1000). Ils servaient alors à distinguer les *jetons* au moyen desquels on calculait. L'introduction du zéro n'eut lieu que deux cents ans plus tard [2].

Exercices [3].

1. Combien y a-t-il de nombres différents ayant un nombre donné de chiffres, 5 chiffres par exemple? Combien y a-t-il de nombres différents n'ayant pas plus de 5 chiffres?

2. Un livre a 300 pages. Combien faut-il de caractères pour numéroter ces pages? Combien de fois emploie-t-on le caractère 0, le caractère 1, le caractère 2, etc...?

3. Si a est un nombre de n chiffres, on a

$$10^{n-1} \leqq a < 10^n - 1.$$

4. Si tous les mots d'une langue avaient neuf lettres prises seulement parmi les lettres a, b, c, d, e, f, g, h, k, et si l'on remplaçait ces lettres respectivement par les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, chaque mot serait écrit comme un nombre de neuf chiffres : si, dans un dictionnaire, on rangeait les mots de cette langue dans l'ordre alphabétique, suivant l'usage habituel, les nombres correspondant aux mots seraient rangés par ordre de grandeur.

5. On a neuf poids pesant respectivement 1, 2, 3, ..., 8, 9 grammes, neuf autres poids pesant respectivement 1 fois, 2 fois, ..., 9 fois 10 grammes; 9 autres poids pesant respectivement 1 fois, 2 fois, ..., 9 fois 100 grammes; 9 autres poids pesant respectivement 1 fois, 2 fois, ..., 9 fois 1000 grammes. Avec ces poids, on peut peser, à 1 gramme près, tout corps pesant moins de 10000 grammes.

1. Les règles de calcul encore employées par les Hindous sont équivalentes aux nôtres, sans leur être identiques : la différence consiste surtout en ce que, calculant sur des tablettes recouvertes de sable fin, ils ne craignent pas d'effacer un chiffre déjà écrit pour le corriger. Cette facilité leur permet, par exemple, de commencer la multiplication par les chiffres de gauche, en corrigeant ainsi, au fur et à mesure, les chiffres obtenus au produit : de cette façon les calculateurs hindous un peu exercés arrivent à écrire le produit de deux nombres d'autant de chiffres qu'on voudra, sans écrire comme nous les produits partiels du multiplicande par les divers chiffres du multiplicateur. (Voir un article de M. Delbos dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XVI, p. 93.)

2. Je dois ces divers renseignements historiques à M. Paul Tannery, mon frère.

3. On rappelle, à propos des *Exercices*, ce qui a déjà été dit au début. Dans tous les exercices relatifs aux cinq premiers chapitres, le mot *nombre* est toujours pris dans le sens de nombre entier. Les lettres représentent toujours des nombres entiers, et s'il est question de solutions d'une équation, on entend toujours parler de solutions en nombres entiers. — Le numérotage des exercices se suivra d'un bout à l'autre du volume.

6. On a 11 poids pesant respectivement 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 grammes; avec ces poids on peut peser, à 1 gramme près, tout corps qui pèse moins de 1024 grammes.

7. Tout nombre autre que 1 est ou bien une puissance de 2, ou bien une puissance de 2 augmentée de 1, ou bien une somme de puissances de 2 toutes différentes, ou bien une telle somme augmentée de 1.

8. Tout nombre peut s'écrire sous la forme [1]

$$\alpha_0 + 2 \times \alpha_1 + 2^2 \times \alpha_2 + 2^3 \times \alpha_3 + \ldots + 2^n \times \alpha_n,$$

les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant chacun égal à 0 ou à 1. Un nombre ne peut être écrit ainsi que d'une seule manière.

9. a étant un nombre donné plus grand que 1, tout nombre peut être mis, et cela d'une seule façon, sous la forme.

$$\alpha_0 + a \times \alpha_1 + a^2 \times \alpha_2 + \ldots + a^n \times \alpha_n,$$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *étant des nombres plus petits que* a.

Écrire ainsi un nombre, c'est, au fond, l'écrire dans le système de numération dont la base est a; si on imagine a chiffres représentant tous les nombres inférieurs à a, y compris 0, les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ doivent être pris parmi ces chiffres, et le nombre $\alpha_0 + a \times \alpha_1 + a^2 \times \alpha_2 + \ldots + a^n \times \alpha_n$ pourrait être écrit sous la forme $\alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_1 \alpha_0$, en supposant que chaque chiffre placé à gauche d'un autre représente des unités composées a fois plus fortes que ce dernier. Cette notation ne sera pas employée dans ces *Leçons*, d'autant qu'une notation pareille, avec un sens tout différent, sera introduite pour la multiplication.

Si l'on supposait que la base de la numération fût 2, la numération serait dite *binaire*.

10. n personnes reçoivent chacune un des numéros $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Elles ont devant elles n objets portant aussi les numéros $0, 1, 2, \ldots, n-1$; chacune doit choisir un de ces objets; elles ont à leur disposition des jetons et une corbeille. La personne qui a le numéro 0 mettra dans la corbeille un nombre de jetons égal au numéro de l'objet qu'elle a choisi; celle qui a le numéro 1 mettra dans la corbeille un nombre de jetons égal au produit de n par le numéro de l'objet qu'elle a choisi. En général, la personne qui a le numéro k et qui a choisi l'objet portant le numéro h mettra dans la corbeille un nombre de jetons égal à $n^k \times h$. On demande de dire, d'après le nombre de jetons qui se trouvent dans la corbeille, quel objet chaque personne a choisi.

11. On donne une suite infinie de nombres

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$$

1. Cette façon d'écrire donne lieu à quelques observations que nous faisons ici, une fois pour toutes.

Au lieu de représenter par des lettres différentes $a, b, c, \ldots$, ou $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, des nombres que l'on veut distinguer les uns des autres, on peut représenter ces nombres par une même lettre affectée d'*indices* placés en bas : c'est ce que l'on a fait ici en écrivant $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ que l'on énonce alpha indice zéro, alpha indice un, alpha indice deux,..., ou, plus brièvement, quand on n'a pas à craindre de confusion avec les puissances, alpha zéro, alpha un, alpha deux, etc... Les indices se placent en bas pour éviter la confusion avec les exposants. Au lieu d'employer des indices en bas, on place aussi souvent des accents en haut : ainsi on emploie, pour désigner des nombres distincts, les notations $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots$ que l'on énonce alpha, alpha prime, alpha seconde, alpha tierce,... Ces notations conviennent en particulier quand les nombres qu'on représente ainsi se trouvent jouer un rôle analogue. Enfin, les points suspensifs... remplacent des termes analogues à ceux qui les précèdent et qui suivraient la même *loi*, jusqu'au dernier terme écrit.

tous plus grands que 1; démontrer que tout nombre peut être mis, et cela d'une seule façon, sous la forme

$$\alpha_0 + a_1 \times \alpha_1 + a_1 \times a_2 \times \alpha_2 + a_1 \times a_2 \times a_3 \times \alpha_3 + \dots$$
$$+ a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n \times \alpha_n,$$

en désignant par $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des nombres tels que l'on ait

$$\alpha_p < a_{p+1},$$

quel que soit l'indice p.

12. On écrit la suite des nombres naturels sans les séparer : 12345678910111213... Quel est, dans cette suite, le 100000ème chiffre ?

CHAPITRE II

OPÉRATIONS FONDAMENTALES

§ 1. — Addition.

48. Aux nos 10, 11, 12, 13, 14, on a défini l'addition, ou plutôt, on a expliqué, au moyen d'une représentation concrète, en quoi consistait l'opération et quelles en étaient les propriétés principales.

L'addition est liée si étroitement à l'idée de nombre, de collection, qu'il est naturel en en parlant, de se reporter à l'origine concrète de cette idée. Toutefois, il importe de dégager nettement les propriétés essentielles de l'opération.

Nous admettons qu'on sache ce que c'est qu'ajouter b à a, nous représentons le résultat par $a + b$ et nous admettons que l'on a [1] :

$$a + b = b + a.$$

Ayant défini $a + b$, on définit $a + b + c$ comme la somme obtenue en ajoutant c à $a + b$; on pourrait écrire d'une façon plus explicite $(a + b) + c$; nous admettons que l'on a

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

c'est-à-dire que l'on obtient le même résultat[2] en ajoutant c à $a + b$, ou $b + c$ à a. Du cas de trois nombres on s'élève successivement à celui de quatre, cinq, ..., nombres.

Enfin, par définition, on a

$$a + 0 = 0 + a = a,$$

1. On énonce cette propriété en disant que l'addition est une opération *commutative*.
2. On énonce cette propriété en disant que l'addition est une opération *associative*.

et, à cause de cette définition, les propriétés précédentes subsistent quand l'un quelconque des nombres a, b, c est nul.

En répétant un raisonnement que, pour suivre les habitudes, nous ne développerons qu'à propos de la multiplication (n[os] 77, 78), le lecteur un peu exercé reconnaîtra sans peine que les propositions qui précèdent suffisent à *démontrer* que *dans une somme d'un nombre quelconque de parties, on peut, sans changer la somme, intervertir l'ordre des parties et remplacer telles parties que l'on veut par leur somme effectuée.* Ces dernières propositions, dans le chapitre précédent, ont été *admises* comme résultant de la représentation concrète de l'addition [1].

1. J'indique ci-dessous comment, en restant exclusivement au point de vue du n° 4, M. von Helmholtz démontre les postulats fondamentaux de l'addition, qui sont d'ailleurs les seuls postulats de l'arithmétique et de l'algèbre.

Rappelons d'abord que, à ce point de vue, les noms de *nombre* zéro, un, deux, trois, ... sont simplement des signes différents qui se suivent dans un ordre déterminé. De même les nombres écrits dans le système décimal 0, 1, 2, 3, ..., 9, 10, 11, ... sont simplement des signes différents écrits les uns à la suite des autres d'après la loi suivante. On écrit d'abord les chiffres 0, 1, 2, ..., 9 puis on les récrit en les faisant précéder du chiffre 1, puis on les récrit en les faisant précéder du chiffre 2, puis encore en les faisant précéder du chiffre 3, ..., puis enfin en les faisant précéder du chiffre 9 ; ensuite on récrit encore les chiffres 0, 1, 2, ... 9, en les faisant précéder du symbole 10, puis du symbole 11, du symbole 12, ..., du symbole 99, etc. ....

Deux nombres sont égaux s'ils sont représentés par le même symbole.

Venons maintenant à l'addition et écartons d'abord le cas où le nombre que l'on ajoute est 0. Ajouter 1 à un nombre, c'est remplacer ce nombre par celui qui le suit immédiatement dans la suite naturelle ; en d'autres termes, écrire $a+1$, c'est écrire le nombre qui suit a ; écrire $a+2$, c'est écrire le nombre qui suit $a+1$; écrire $a+3$, c'est écrire le nombre qui suit $a+2$; b étant un nombre quelconque, autre que zéro, occupant un rang déterminé dans la suite naturelle, on s'élève ainsi de proche en proche à la notion du nombre $a+b$ obtenu en ajoutant b à a ; par définition, ajouter $b+1$ à a c'est ajouter 1 à $a+b$; en d'autres termes, on a *par définition*

$$(1) \qquad a+(b+1)=(a+b)+1.$$

On déduit de là, par *induction*, que l'on a, quel que soit le nombre c, autre que zéro,

$$(2) \qquad a+(b+c)=(a+b)+c.$$

La proposition est vraie en effet quand c est égal à 1 ; admettons qu'elle soit vraie quand c est égal au nombre n, je vais montrer qu'elle subsiste quand c est égal au nombre suivant $p=n+1$. En effet, $b+p$ est égal, d'après l'égalité (1) à $(b+n)+1$; ajouter $b+p$ à a, c'est donc, en vertu de la même égalité, la même chose que d'ajouter 1 à $a+(b+n)$, nombre égal, par hypothèse, à $(a+b)+n$; on a donc

$$a+(b+p)=[(a+b)+n]+1 ;$$

mais le nombre qui figure dans le second membre n'est autre, toujours en vertu de l'égalité (1), que le résultat obtenu en ajoutant $n+1$ ou p à $a+b$; on a donc bien

$$a+(b+p)=(a+b)+p.$$

Ainsi l'égalité (2), vraie pour $c=1$, est vraie, par cela même, pour $c=1+1=2$, pour $c=2+1=3$, pour $c=3+1=4$, etc. ; elle est vraie quel que soit c.

On va prouver de même que l'on a, quel que soit le nombre a, autre que 0,

$$a+1=1+a ;$$

la proposition est vraie quand a est égal à 1 ; admettons qu'elle soit vraie quand a est égal à n ; je vais montrer qu'elle subsiste quand a est égal au nombre suivant $p=n+1$. En effet $1+p$ ou $1+(n+1)$ est, à cause de (1), égal à $(1+n)+1$, ou à $p+1$, puisque, par hypothèse, $1+n$ est la même chose que $n+1$.

De même encore, on a, quels que soient les nombres a et b, autres que 0,

$$(3) \qquad a+b=b+a.$$

La proposition est vraie quand b est égal à 1 ; admettons qu'elle soit vraie quand b est égal

Rappelons enfin cette proposition, qui résulte immédiatement de ce qui précède et qui d'ailleurs a déjà été énoncée au n° 14 : En ajoutant deux nombres différents à un même nombre, on obtient deux nombres différents.

49. Il me reste à expliquer comment on effectue pratiquement l'addition de plusieurs nombres; le problème est le suivant [1] :

Plusieurs nombres étant écrits dans le système décimal, écrire leur somme dans ce système.

Je distinguerai plusieurs cas.

1° Supposons qu'on ait à ajouter un nombre d'un seul chiffre à un nombre terminé par un zéro.

Soit par exemple à ajouter 7 à 340; le résultat s'obtient immédiatement, c'est 347, puisque le dernier nombre (n° 42) n'est autre chose que 340 + 7.

Il suffit donc de remplacer le zéro du second nombre par le chiffre qui représente le premier.

2° Supposons maintenant que les nombres à ajouter soient tous terminés par un zéro.

Soit par exemple à ajouter 870, 9200, 350, 80, ou 87 dizaines, 920 dizaines, 35 dizaines, 8 dizaines; la somme sera (n° 20) un nombre de dizaines égal à la somme de 87, 920, 35, 8. Si l'on sait écrire la somme de ces derniers nombres, on lui fera représenter des dizaines en plaçant un zéro à sa droite.

Ainsi, pour ajouter des nombres qui sont tous terminés par un zéro, on peut supprimer ce zéro, ajouter les nombres que l'on obtient ainsi, puis placer un zéro à la droite du résultat.

à n, je vais prouver qu'elle subsiste quand b est égal au nombre suivant $p = n + 1$. En effet $a + p$ est, comme on l'a déjà observé, la même chose que $(a + n) + 1$, ou que $(n + a) + 1$, puisque, par hypothèse, $n + a$ est la même chose que $a + n$; d'ailleurs, toujours à cause de l'égalité (1), $(n + a) + 1$ est la même chose que $n + (a + 1)$, ou que $n + (1 + a)$, puisqu'on vient de prouver que $a + 1$ est le même nombre que $1 + a$; enfin, en vertu de l'égalité (2), $n + (1 + a)$ est égal à $(n + 1) + a$ ou à $p + a$; on a donc bien

$$a + p = p + a.$$

L'égalité (1), qui sert de définition, subsiste quand le nombre a est égal à 0; on en conclut, encore par le même mode de raisonnement, que l'on a, quel que soit le nombre a, autre que 0,

$$0 + a = a;$$

en effet l'égalité est vraie, par définition, quand a est égal à 1, et elle s'étend sans peine à un nombre quelconque. Enfin, par une définition nouvelle, on a, quel que soit le nombre a,

$$a + 0 = a \tag{4}$$

et l'on voit dès lors très aisément que les propriétés (1), (2), (3) subsistent lorsque l'un ou l'autre des nombres a, b, c est nul. — Les indications qui précèdent, très intéressantes au point de vue philosophique, m'ont été fournies par M. Lamaire, professeur au lycée de Lille.

1. Je dois à M. de Pellieux, professeur au lycée Henri IV, cette façon très claire de poser le problème.

3° Plaçons-nous maintenant dans le cas général et soit à ajouter les quatre nombres 3872, 607, 8749, 1621. Je vais montrer comment on peut déterminer le chiffre des unités du total et ramener la recherche des autres chiffres à un problème analogue au problème proposé, mais plus simple. On peut écrire les nombres donnés $3870+2$, $600+7$, $8740+9$, $1620+1$; la somme de tous ces nombres, d'après les principes relatifs à l'addition (n° 14) peut s'obtenir en faisant d'une part la somme des nombres 2, 7, 9, 1, c'est-à-dire des unités simples des nombres proposés, puis la somme des nombres 3870, 600, 8740, 1620, qui rentrent dans le cas que nous venons d'examiner; la somme des nombres d'un seul chiffre 2, 7, 9, 1 s'obtient sans difficulté, c'est 19 ou $10+9$; il faudra ajouter ce nombre à la somme des nombres 3870, 600, 8740, 1620; il reviendra au même d'ajouter 9 à la somme des nombres 10, 3870, 600, 8740, 1620. Cette dernière somme sera terminée par un zéro; pour lui ajouter 9, on remplacera ce zéro par 9; 9 est le chiffre des unités du total cherché. On a maintenant à faire la somme des nombres, tous terminés par un zéro, 10, 3870, 600, 8740, 1620. Il suffira pour cela de faire la somme des nombres 1, 387, 60, 874, 162 et de placer à sa droite ce zéro qui doit être remplacé par un 9; on écrira tout simplement cette somme à la gauche de ce chiffre 9, que je suppose déjà écrit, en sorte que le chiffre des unités, dans la somme des nombres 1, 387, 60, 874, 162, se trouvera être le chiffre des dizaines dans le total cherché. Quant à la somme des nombres 1, 387, 60, 874, 162, on déterminera le chiffre de ses unités exactement de la même façon; ce chiffre sera le chiffre des dizaines du total cherché; on voit comment on pourra déterminer ainsi successivement le chiffre des unités, des dizaines, des centaines,... de ce total. Les explications qui précèdent justifient la règle suivante.

50. *Règle.* — Pour ajouter plusieurs nombres, on les écrit les uns au-dessous des autres de manière que les chiffres représentant des unités de même espèce soient dans une même colonne verticale; nous appellerons ces colonnes : colonnes des unités simples, des dizaines, des centaines, des mille, etc... Sous le dernier nombre on tire un trait horizontal, qui séparera le dernier nombre du total cherché; on ajoute ensuite successivement les nombres d'un chiffre contenus dans la colonne des unités simples; si le résultat n'a qu'un chiffre, on écrit ce chiffre à la place du total, sous la colonne des unités simples; ce sera le chiffre des unités simples du total; s'il en a plusieurs, on écrit seulement le dernier chiffre de droite, qui sera encore le chiffre des unités simples du total, et l'on *retient* le nombre formé par l'ensemble des autres chiffres; à ce nombre on ajoute successivement les nombres d'un chiffre contenus dans la colonne des dizaines; si le résultat n'a qu'un chiffre, on écrit ce chiffre au total, sous la colonne des dizaines, à gauche du chiffre des unités simples du total, de manière à lui faire représenter des dizaines; s'il en a plusieurs, on n'écrit à cette même place que le dernier chiffre de droite, et l'on retient le nombre formé par les autres chiffres pour lui ajouter les nombres d'un chiffre contenus dans la colonne des centaines; si le résultat n'a qu'un chiffre, on l'écrit au total, à la place des centaines; s'il en a plusieurs, on n'écrit à cette même place que le dernier chiffre de droite et l'on retient le nombre formé par les autres chiffres pour lui ajouter successivement les chiffres des mille; on continue ainsi jusqu'à l'épuisement des colonnes; quand on a fait la somme du dernier nombre retenu et des nombres d'un chiffre contenus dans la dernière colonne de gauche, on place le résultat tel quel, à la gauche des chiffres déjà écrits au total.

Pour l'exemple qui a été développé, on disposera l'opération comme ci-dessous :

$$\begin{array}{r} 3872 \\ 607 \\ 8749 \\ 1621 \\ \hline 14849 \end{array}$$

et l'on dira 2 et 7 font 9, et 9 font 18, et 1 font 19; je pose 9 et je retiens 1; 1 et 7 font 8, et 0 font 8, et 4 font 12, et 2 font 14; je pose 4 et je retiens 1; 1 et 8 font 9, et 6 font 15, et 7 font 22, et 6 font 28; je pose 8 et je retiens 2; 2 et 3 font 5, et 8 font 13, et 1 font 14, que j'écris. Le résultat est 14849.

51. On voit que l'opération a été ramenée à des additions partielles, dans lesquelles on n'a jamais à ajouter à un nombre, qui peut d'ailleurs être quelconque, qu'un nombre d'un chiffre. Quant à cette dernière opération, il convient d'en acquérir l'habitude de bonne heure; théoriquement, on pourrait l'effectuer à part, en écrivant les deux nombres à ajouter, et en appliquant la règle même qu'on vient d'exposer; on n'aurait alors à ajouter que des nombres d'un chiffre, et s'il y avait une retenue, elle ne pourrait excéder 1. Mais l'opération est assez simple pour se faire de tête, car elle ne porte habituellement que sur le dernier chiffre ou les deux derniers chiffres du nombre qui en a plusieurs; il y a exception quand la première addition partielle donne une retenue et que les chiffres des dizaines, des centaines,... dans le nombre de plusieurs chiffres sont des 9; auquel cas, ils sont remplacés dans le total par des 0, et le chiffre qui précède à gauche ces 9 doit être augmenté d'une unité. Par exemple, $789997 + 4 = 790001$; $99999 + 3 = 100002$. Au surplus, quand on effectue une addition, des nombres d'une pareille grandeur ne pourraient se présenter dans les additions partielles que si l'on avait beaucoup de nombres à ajouter, et il y aurait alors tout intérêt à fractionner l'opération, c'est-à-dire à n'ajouter ensemble qu'une partie des nombres, puis une autre partie, ... et à réunir toutes les sommes partielles.

Ce fractionnement de l'opération est à recommander en particulier quand les nombres à ajouter ont beaucoup de chiffres. Dans ce cas, quelques calculateurs n'additionnent jamais que deux nombres à la fois, de manière à éviter presque toutes les causes d'erreur. Au contraire, dans les calculs usuels, chez les commerçants, où d'ordinaire chaque nombre n'a que deux ou trois chiffres, les comptables s'habituent à additionner à la fois plusieurs chiffres dans une même colonne, ou encore deux nombres de deux et même de trois chiffres.

Pour ajouter de tête des nombres de deux ou de trois chiffres, il convient d'effectuer l'opération en commençant par les plus hautes unités, et en corrigeant mentalement le résultat si les chiffres suivants fournissent des retenues.

Au reste, la pratique de l'opération suggère à chacun des abréviations sur lesquelles nous n'avons pas à insister.

52. *Preuve de l'addition.* — On appelle preuve d'une opération une autre opération dont le résultat permet de contrôler le résultat de la première. La vérification n'est jamais complète; si la preuve, comme on dit, ne *réussit* pas, c'est qu'on s'est trompé dans l'opération, ou dans la preuve, ou dans les deux. Si la vérification réussit, il peut arriver que la première opération soit inexacte et que l'erreur commise ne soit pas mise en évidence par la preuve, ou qu'une seconde erreur commise dans la preuve compense la première.

Toutefois, le contrôle augmente beaucoup les chances d'exactitude, et il n'est guère d'opération d'arithmétique qui ne doive être contrôlée.

Un premier moyen de contrôle consiste à *recommencer l'opération.* L'expérience montre qu'en faisant deux fois de suite la même opération on commet souvent deux fois de suite la même faute, au même endroit, en raison de la tendance que nous avons à prendre des habitudes. Aussi convient-il d'avoir à sa disposition d'autres preuves.

Pour l'addition, on peut recommencer l'opération en rangeant les nombres à ajouter dans un autre ordre : il est commode, pour ne pas les écrire deux fois, de faire les additions partielles de bas en haut, au lieu de les faire de haut en bas.

Exercices.

13. D'après les *recensements* publiés entre 1880 et 1891 la population des États qui suivent, États que l'on peut regarder comme formant l'Europe occidentale, était représentée par les nombres placés en regard de ces États :

Grande-Bretagne et Irlande	37 888 153
Pays-Bas	4 511 415
Belgique	5 520 009
Grand-duché de Luxembourg	211 088
France	38 218 903
Monaco	13 304

En supposant ces nombres exacts, quelle serait la population de l'Europe occidentale ?

14. Sur 7 nombres qui doivent être rangés par ordre de grandeur, on connaît le premier qui est 8, et l'on sait que chacun des autres s'obtient en ajoutant 2 au précédent : quels sont ces 7 nombres ?

15. 10 nombres correspondent aux numéros 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Celui qui correspond au numéro 0 est 12, chacun des autres s'obtient en ajoutant le numéro auquel il correspond au nombre qui correspond au numéro immédiatement inférieur. Quels sont ces dix nombres ?

16. $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ étant des nombres inconnus, sauf le premier, et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres connus, on sait qu'on a pour toutes les valeurs de p, à partir de 1 jusqu'à n,

$$u_p = u_{p-1} + a_p;$$

démontrer que l'on a

$$u_n = u_0 + a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$$

17. Pour former une *table d'addition* qui donne à la simple lecture la somme de deux nombres quelconques pris dans la suite 1, 2, 3, ..., n, on peut procéder comme il suit :

Prenant une feuille de papier quadrillé, on écrit sur une première ligne horizontale, dans les cases du papier, les nombres 2, 3, 4, ..., $n+1$; puis sur une seconde ligne horizontale, dans les cases situées au-dessous des précédentes, les nombres 3, 4, 5, ..., $n+2$; puis, au-dessous encore les nombres 4, 5, 6, ..., $n+3$, et ainsi de suite ; la dernière ligne horizontale contiendra les nombres $n+1, n+2, \ldots, n+n$. On a ainsi formé une table carrée contenant n^2 cases : il reste à écrire les nombres qui permettent de la consulter (et qui ne doivent pas être regardés comme faisant partie de la table). Au-dessus des cases de la première ligne horizontale on placera les numéros 1, 2, 3, ..., n : ce seront les numéros des *colonnes verticales* de la table ; en face des cases de la première colonne verticale, à gauche, on place les numéros 1, 2, 3, ..., n; ce seront les numéros des *lignes horizontales*. La case qui appartient à la fois à la colonne qui porte le numéro a et à la ligne qui porte le numéro b contient la somme $a+b$. La disposition qu'on vient de décrire est la disposition d'une *table à double entrée*.

18. Sur une feuille de papier quadrillé, on écrit, dans les cases du papier, sur une ligne horizontale les nombres 1, 2, 3, ..., n. Dans les cases au-dessous, en commençant par celle qui se trouve au-dessous du chiffre 1, on écrit les nombres 2, 3, 4, ..., $n-1$, puis, au-dessous en commençant toujours dans la même colonne verticale, les nombres 3, 4, 5, ..., $n-2$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit amené à écrire dans la première colonne verticale de gauche le seul nombre n. On forme ainsi un sorte de triangle :

Démontrer que la somme de tous les nombres écrits est égale à la somme des carrés des nombres 1, 2, 3, ..., n.

19. L'équation [1]

$$x + y = n,$$

où n est un nombre donné et x, y deux nombres inconnus, admet $n+1$ systèmes distincts de solutions. Par exemple, si n est égal à 3, on a les 4 solutions : $x=0, y=3$; $x=1, y=2$; $x=2, y=1$; $x=3, y=0$.

20. On considère la suite des nombres 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., obtenus de la façon suivante : les deux premiers termes sont les nombres 0, 1; chacun des suivants s'obtient en faisant la somme des deux termes qui le précèdent. Calculer les trente premiers termes de cette suite.

Cette suite reviendra souvent dans la série des exercices. On la désignera sous le nom de *suite de l'exercice* (20), et l'on en désignera habituellement les termes par $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, ..$; on suppose $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, ..., en sorte qu'elle est définie par l'égalité

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

qui doit avoir lieu pour toutes les valeurs de n à partir de 0, et par les deux égalités

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1;$$

u_n est le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme de la suite.

La question actuelle est un simple exercice numérique : on demande de calculer $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{29}$.

21. Démontrer que, dans la suite qu'on vient de définir, la somme des premiers termes consécutifs, augmentée de 1, est égale au terme qui suit de deux rangs le terme auquel on s'est arrêté.

Je donne ici une démonstration de cette proposition, parce qu'elle fournit un exemple simple d'un procédé très souvent employé en mathématiques. On *vérifie* d'abord sur les premiers termes connus, 0, 1, 1, 2, 3, ..., l'exactitude du théorème; ainsi, la somme des deux premiers termes 0 et 1, augmentée de 1, est 2; la somme des trois premiers termes, augmentée de 1, est 3, et à la rigueur la *première* vérification suffit. Puis, admettant que la loi est vraie pour les n premiers termes de la suite, on *démontre* que, par cela même, elle est vraie pour les $n+1$ premiers termes; dès lors, étant vraie, comme on l'a vérifié, pour les deux premiers termes, elle est vraie pour les trois premiers, pour les quatre, cinq,... premiers; elle est *toujours* vraie [2].

Dans le cas actuel, admettons que le théorème énoncé soit vrai pour les n premiers termes de la suite, le terme auquel on s'arrête est alors u_{n-1}. Celui qui le suit de deux rangs est u_{n+1}, et l'on a, *par hypothèse* :

$$u_{n+1} = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + 1; \tag{1}$$

1. Une équation est une égalité indiquant certaines opérations à faire sur un ou plusieurs nombres inconnus, représentés habituellement par les lettres $x, y, \ldots$ L'égalité n'est *vraie* que pour certaines valeurs attribuées à ces lettres : un système de valeurs qui, attribuées aux inconnues, vérifient l'équation est un système de solutions, ou plus brièvement une solution ; deux solutions sont distinctes si l'une des inconnues, au moins, ne se trouve pas avoir la même valeur dans ces deux solutions.

2. Ce procédé de démonstration a déjà été appliqué dans la note du n° 48.

il faut démontrer que cette égalité et la définition de la suite entraînent l'égalité

$$u_{n+2} = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n + 1.$$

C'est ce qui devient évident en ajoutant u_n aux deux termes de l'égalité (1) et en remarquant que le nombre $u_n + u_{n+1}$ qui s'introduit dans le premier nombre est égal à u_{n+2}, en vertu de la définition de la suite.

Ce procédé de démonstration est dit *procédé d'induction*.

22. On forme le triangle suivant, dit triangle arithmétique de Pascal :

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1
.	.	.	.	.	.

d'après la loi que voici : en dehors des nombres 1 qui remplissent la première colonne verticale et qui terminent chaque ligne horizontale, chaque nombre du triangle est égal à la somme du nombre qui est immédiatement au-dessus de lui et du nombre qui précède ce dernier, sur la même ligne horizontale. Si l'on numérote les lignes horizontales, en descendant, au moyen des numéros 0, 1, 2, 3, ..., et les lignes verticales, en allant de gauche à droite, au moyen des mêmes numéros, si enfin on convient de représenter le nombre du triangle de Pascal qui est situé à la fois dans la ligne qui porte le numéro n et dans la colonne qui porte le numéro p, par le symbole C_n^p, où il est bien entendu que le nombre p, placé en haut, est un simple numéro d'ordre, non un exposant, la loi précédente peut s'exprimer par la formule $C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$. — Compléter le triangle jusqu'à la ligne qui porterait le n° 10.

23. Dans une ligne quelconque du triangle de Pascal, les termes à égale distance des extrêmes sont égaux.

Dans chaque ligne horizontale, la somme des termes est double de la somme des termes de la ligne horizontale précédente.

La somme des termes de la ligne horizontale qui porte le n° n est égale à 2^n. On peut donc écrire :

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

Un nombre quelconque du triangle de Pascal est égal à la somme des termes placés au-dessus de lui dans la colonne verticale précédente.

Si l'on fait la somme des termes contenus dans une parallèle à l'hypoténuse du triangle, à partir de l'un des nombres 1 qui figurent à gauche, on trouve le nombre du triangle qui est immédiatement au-dessous de celui auquel on s'est arrêté.

Dans une ligne quelconque du triangle de Pascal, la somme des termes de rang impair est égale à la somme des termes de rang pair : dans la ligne qui porte le numéro n, chacune des sommes est égale à 2^{n-1}.

24. Dans la suite de l'exercice 20, il y a au moins quatre et au plus cinq termes d'un nombre de chiffres donné plus grand que 1.

§ 2. — **Soustraction.**

53. La soustraction a déjà été définie au n° 24 et l'on y a expliqué sa signification concrète. Reprenant cette définition sous forme abstraite, je dirai :

Deux nombres a et b étant donnés, tels que le premier soit plus grand que le second, on appelle différence entre ces deux nombres un troisième nombre qui, ajouté au second, reproduise le premier. Il n'y a qu'un seul nombre qui jouisse de cette propriété, puisque, en ajoutant deux nombres différents à un même nombre, on trouve deux nombres différents (n° 16). L'opération qui consiste à trouver cette différence s'appelle soustraction : la différence s'appelle aussi reste, et quelquefois complément de b à a; elle se représente par $a-b$. On peut dire encore que retrancher (ou soustraire) b de a, c'est séparer a en deux parties dont l'une soit b ; l'autre est la différence cherchée.

Si les deux nombres a, b sont égaux, leur différence est 0. Si b est plus grand que a, on ne peut pas retrancher b de a.

Si d est la différence entre a et b, on peut écrire indifféremment

$$d=a-b, \qquad a=b+d.$$

54. On a souvent à faire sur des nombres donnés, des additions et des soustractions qui doivent se suivre dans un ordre déterminé. Considérons, par exemple, l'expression

$$8-5+12-4-3+7-9:$$

les opérations doivent se faire, dans l'ordre indiqué, en allant de gauche à droite : et l'expression précédente veut dire qu'on retranche 5 de 8, qu'on ajoute 12 au résultat, puis qu'on retranche 4, puis encore 3, puis que l'on ajoute 7, puis que, enfin, on retranche 9. On verra plus tard qu'il y a d'autres moyens de calculer cette expression.

Quelquefois les nombres que l'on doit ajouter ou retrancher sont eux-mêmes les résultats d'additions ou de soustractions, que l'on veut mettre en évidence; on se sert alors de parenthèses (n° 12). Par exemple, les expressions

$$8+(12-5), \qquad 8-(12-5),$$

veulent dire : la première, qu'on doit ajouter à 8 la différence entre 12 et 5; la seconde, qu'on doit retrancher de 8 la différence entre 12 et 5. Les opérations indiquées entre parenthèses doivent toujours être regardées comme effectuées.

55. Rappelons cette proposition sur laquelle on a déjà appelé l'attention :

Étant donnée une somme de plusieurs nombres, pour retrancher de cette somme un de ces nombres, il suffit d'en effacer ce nombre et de faire la somme de ceux qui restent.

Soit, par exemple, la somme $a+b+c$, je dis que si l'on en retranche b, la différence sera $a+c$; on a, en effet, en vertu des propriétés démontrées ou admises pour l'addition,

$$a+b+c=(a+c)+b=b+(a+c),$$

$a+c$ est donc le nombre qu'il faut ajouter à b pour obtenir la somme $a+b+c$, c'est donc la différence entre cette somme et b.

56. En particulier, on a

$$a+b-b=a\,;$$

on a de même, en supposant b inférieur ou égal à a,

$$a-b+b=a\,;$$

en effet, d'après la définition de la soustraction, on a

$$b+(a-b)=a,$$

mais $b+(a-b)$ est la même chose que $(a-b)+b$ ou que $a-b+b$: la proposition est donc démontrée.

En d'autres termes : *on ne change pas un nombre a en lui ajoutant un nombre b et en retranchant ensuite b, ou bien en retranchant d'abord b et en ajoutant ensuite b*. Ces propositions sont d'ailleurs bien évidentes quand on se reporte à la signification concrète des opérations ; il en est de même de plusieurs autres, qui suivent, comme le lecteur ne manquera pas de s'en apercevoir ; mais on verra plus tard qu'il y a grand avantage à tirer les démonstrations des seules définitions.

Les propositions que nous venons d'établir montrent que, si, dans une suite d'additions et de soustractions, on se trouve avoir à ajouter et à retrancher successivement le même nombre, ou bien à retrancher et à ajouter successivement le même nombre, on peut se dispenser de faire l'une ou l'autre opération.

Soit, par exemple, l'expression

$$7+3-4+4-5+6,$$

on doit ajouter 3 à 7, puis retrancher et ajouter 4, *ce qui ne change rien ;* on aura ensuite à retrancher 5 et à ajouter 6 ; on aura donc le même résultat en calculant l'expression

$$7+3-5+6.$$

57. Rappelons encore, pour en présenter la démonstration sous forme abstraite, et pour le compléter, le théorème du numéro 30.

1° *Si l'on peut retrancher d'un nombre a la somme de deux autres b et c, on pourra retrancher successivement de a les nombres b et c et le résultat final sera le même.* Cette proposition peut se traduire sous une forme condensée, par l'égalité

$$a-(b+c)=a-b-c,$$

qui suppose que la somme $b+c$ est inférieure ou égale à a; le théorème exprime que l'on peut retrancher b de a, puis c de la différence $a-b$, et que le nombre ainsi obtenu est le même que la différence entre a et $b+c$.

2° *Si l'on peut retrancher d'un nombre a, successivement, les deux nombres b et c, on peut tout aussi bien retrancher de a la somme b+c des deux nombres, et le résultat final est le même.* C'est ce qu'on exprime d'une façon condensée en écrivant l'égalité

$$a-b-c=a-(b+c),$$

qui suppose que b est inférieur ou égal à a, que c est inférieur ou égal à $a-b$: et le théorème affirme que, dans ces conditions, la somme $b+c$ est inférieure ou égale à a et que la différence entre a et $b+c$ est égale à la différence entre $a-b$ et c.

1° Supposons $b+c$ inférieur ou égal à a et soit d la différence entre a et $b+c$, on aura

$$a=d+(b+c)=d+b+c;$$

en retranchant b de a ou de $d+b+c$, on obtient $d+c$ (n° 55); en d'autres termes on a $a-b=d+c$; en retranchant ensuite c de $a-b$ ou de $d+c$, on obtient d; on a donc

$$d=a-b-c,$$

ce qu'il fallait démontrer.

2° Supposons qu'on puisse retrancher successivement de a les nombres b et c, et soit d le résultat : d s'obtient en retranchant c de $a-b$; en d'autres termes, on a

$$a-b=d+c;$$

dire que la différence entre a et b est $d+c$, c'est dire que a est la somme de b et de $d+c$; en d'autres termes, on a

$$a=d+c+b=d+(c+b);$$

et cette égalité veut dire que d est la différence entre a et $c+b$ ou $b+c$; c'est ce qu'il fallait démontrer.

58. Nous établirons maintenant la proposition suivante dont le numéro 56 contient un cas particulier.

On obtient le même résultat en retranchant d'un nombre a le nombre b et en ajoutant ensuite le nombre c, ou bien en ajoutant d'abord au nombre a le nombre c et en retranchant b du résultat.

Ce théorème, qui suppose évidemment b inférieur ou égal à a, s'exprime, sous une forme condensée, par l'égalité

$$a-b+c=a+c-b.$$

Le premier membre est la somme de $a-b$ et de c; le second membre s'obtient en faisant la somme de a et de c puis en retranchant b; mais, puisque a est la somme de $a-b$ et de b, $a+c$ peut être regardé comme la somme des nombres $a-b$, b, c; pour retrancher b de cette somme, il suffit (nº 55) de faire la somme de $a-b$ et de c; la proposition est donc démontrée.

59. *Pour ajouter à un nombre a la différence entre deux nombres b et c (dont on suppose que c est inférieur ou égal à b), on peut ajouter b à a et retrancher c du résultat; on peut aussi, dans le cas où c n'est pas plus grand que a, commencer par retrancher c de a, puis ajouter b au résultat.*

Ces théorèmes énoncés peuvent se traduire, sous une forme condensée, par les égalités

$$a+(b-c)=a+b-c,$$
$$a+(b-c)=a-c+b;$$

la première suppose seulement que c est inférieur ou égal à b; la seconde suppose, en outre, que c est inférieur ou égal à a. Il suffira évidemment de démontrer le premier théorème, puisqu'on vient de prouver que $a+b-c$ et $a-c+b$ sont le même nombre.

Or, pour effectuer l'expression $a+b-c$ on doit d'abord faire la somme de a et de b, puis retrancher c; mais b est égal à la somme de $b-c$ et de c; $a+b$ peut donc être (nº 14) regardé comme la somme des trois nombres a, $b-c$, c; pour retrancher c de cette somme, il suffit de faire la somme des deux premiers a et $b-c$; or cette somme est bien le premier membre de l'égalité à démontrer.

Exemple : 25 est la différence entre 30 et 5. On obtient le même résultat 125 en ajoutant 25 à 100, en ajoutant 30 à 100 puis en retranchant 5, ou en retranchant 5 de 100 et ajoutant ensuite 30.

60. *Pour retrancher d'un nombre a la différence $b-c$ entre deux* *nombres b et c, on peut ajouter c à a et retrancher b du résultat, ou bien, si b est inférieur ou égal à a, retrancher d'abord b de a, puis ajouter c.*

Ces théorèmes s'expriment par les égalités

$$a-(b-c)=a+c-b,$$
$$a-(b-c)=a-b+c;$$

elles supposent toutes deux c inférieur ou égal à b, et $b-c$ inférieur ou égal à a; la seconde suppose en outre b inférieur ou égal à a. Il suffira de démontrer la première (n° 58).

Si l'on désigne par d la différence entre a et $b-c$ on aura (n° 58)

$$a=d+(b-c)=b-c+d=(b+d)-c.$$

Il faut prouver que $a+c-b$ est égal à d : on forme $a+c-b$ en ajoutant d'abord c à a ou à $(b+d)-c$, ce qui donne $b+d$ (n° 56), puis en retranchant b du résultat, ce qui donne bien d comme on l'avait annoncé.

Exemple : 25 est la différence entre 30 et 5. On obtient le même résultat 75 en retranchant 25 de 100, ou en ajoutant 5 à 100 et en retranchant ensuite 30, ou encore en retranchant 30 de 100 et en ajoutant ensuite 5.

61. Considérons maintenant une expression dans laquelle on a à effectuer, dans un certain ordre, des additions et des soustractions; on suppose, bien entendu, que ces opérations peuvent être effectuées dans l'ordre où elles sont indiquées; je dis qu'on parviendra au résultat cherché en faisant la somme de tous les nombres qui doivent être ajoutés, puis la somme de tous les nombres qui doivent être retranchés et en soustrayant la seconde somme de la première.

Pour avoir la valeur de l'expression $8-5+12-4-3+7-9$, par exemple, on peut faire la somme $8+12+7$ et en retrancher la somme $5+4+3+9$. En effet, on doit d'abord calculer l'expression $8-5+12$, qui, d'après le théorème du n° 58, est égale à $8+12-5$; du résultat on doit retrancher 4, ce qui donne $8+12-5-4$: cette dernière expression s'obtient en calculant la somme $8+12$ et en en retranchant successivement 5 et 4, ou, ce qui revient au même (n° 57), en en retranchant la somme $5+4$; en d'autres termes, on a

$$8+12-5-4=(8+12)-(5+4);$$

on doit ensuite retrancher 3 du résultat; le résultat peut s'obtenir en retranchant de $8+12$ successivement $5+4$ et 3, ou, ce qui revient au même, en retranchant de $8+12$ la somme $5+4+3$; en d'autres termes, on a

$$8+12-5-4-3=8+12-(5+4+3);$$

on doit ensuite ajouter 7 au résultat; mais on obtient le même résultat en retranchant d'abord de la somme $8+12$ le nombre $5+4+3$ et en ajoutant ensuite 7, ou en ajoutant d'abord 7 à $8+12$ et en retranchant ensuite $5+4+3$; on obtient ainsi

$$(8+12+7)-(5+4+3);$$

on a enfin à retrancher 9 du résultat : mais on obtient le même résultat en retranchant successivement du nombre $8+12+7$ les nombres $5+4+3$ et 9 ou en retranchant leur somme $5+4+3+9$; en d'autres termes, on a bien

$$8-5+12-4-3+7-9=(8+12+7)-(5+4+3+9),$$

comme on l'avait annoncé. Le raisonnement est général et l'on n'a jamais, pour l'achever, qu'à appliquer les théorèmes des nos 56-60, de manière, dans les opérations successives, à amener toujours au commencement les nombres à ajouter et à la fin les nombres à retrancher.

62. Il ne sera peut-être pas inutile d'indiquer une démonstration concrète du théorème précédent, qui a l'avantage d'être directe et de se généraliser facilement. Figurons, sur une feuille de papier, 8 points, barrons-en 5; le nombre de ceux qui restent est $8-5$; ajoutons 12 nouveaux points, il y en aura $8-5+12$ qui ne sont pas barrés; barrons-en 4, puis encore 3, il en restera $8-5+12-4-3$; ajoutons-en 7, il y en aura $8-5+12-4-3+7$; barrons-en 9; il en restera $8-5+12-4-3+7-9$. C'est le nombre cherché : d'ailleurs, il est clair qu'on a figuré en tout $8+12+7$ points et qu'on en a barré $5+4+3+9$; le nombre de points non barrés est donc $(8+12+7)-(5+4+3+9)$ [1].

La même proposition apparaît encore d'une façon presque évidente en se plaçant au point de vue d'un commerçant : recevoir 8 francs, en payer 5, recevoir ensuite 12 francs, en payer 4, puis 3, en recevoir 7, enfin en payer 9, c'est la même chose que de recevoir, en une fois, 8 francs, 12 francs,

1. M. Dorlet, professeur au lycée de Roanne, m'a fait remarquer que ce procédé de démonstration, en rangeant successivement dans une colonne les points qui figurent les nombres à ajouter, dans une autre les points qui figurent les nombres à retrancher, et en barrant, à chaque fois, tous les points qui subsistent dans une colonne, et autant de points dans l'autre, permettait d'établir rapidement la proposition analogue d'algèbre, pour les nombres positifs ou négatifs. On peut consulter sur ce sujet l'excellent *Traité d'Arithmétique* de M. Humbert (Paris, Nony, 1893).

7 francs ou $8+12+7$ francs et de payer ensuite, en une fois, 5 francs, 4 francs, 3 francs, 9 francs ou $5+4+3+9$ francs; c'est alors la différence

$$(8+12+7)-(5+4+3+9)$$

qui reste au commerçant.

63. En résumé, une suite d'additions et de soustractions revient à deux additions et à une soustraction finale : dans les additions, les nombres peuvent être ajoutés n'importe dans quel ordre ; il en résulte que les additions et les soustractions peuvent se faire dans n'importe quel ordre — dans un ordre, toutefois, qui permette de les faire — pourvu que ce soient toujours les mêmes nombres que l'on ajoute, les mêmes que l'on retranche : par exemple, on a

$$8-5+12-4-3+7-9=7+8-5-3-4+12-9,$$

car les deux expressions sont respectivement égales à

$$(8+12+7)-(5+4+3+9) \text{ et à } (7+8+12)-(5+3+4+9);$$

mais on ne pourrait pas écrire

$$8-5+12-4-3+7-9=8-5-9+12-4-3+7,$$

car la seconde expression n'a pas de sens.

Cette possibilité de changer l'ordre des additions et des soustractions permet de rapprocher, s'il en existe, une addition et une soustraction qui porteraient sur le même nombre et d'éviter, par conséquent, l'une et l'autre (n° 56). Par exemple, on a

$$8+12-6-8+3=12+8-8-6+3=12-6+3.$$

64. *Si l'on a deux sommes d'un même nombre de termes et si les termes de la première somme sont supérieurs ou égaux aux termes de la seconde, pour retrancher la seconde somme de la première, on peut retrancher chaque partie de la seconde somme de la partie correspondante de la première, et ajouter ensuite les différences partielles obtenues.*

Considérons, par exemple, les sommes

$$12+8+7+4, \qquad 10+5+7+3;$$

je dis que leur différence est égale à la somme des différences $12-10$, $8-5$, $7-7$, $4-3$. En effet, pour ajouter la différence $8-5$ à $12-10$, on peut ajouter 8 et retrancher 5, et l'on obtient ainsi $12-10+8-5$; pour ajouter $7-7$ au résultat, on peut ajouter 7 et retrancher ensuite 7, ce qui donne $12 - 10 + 8 - 5 + 7 - 7$; enfin en ajoutant encore $4 - 3$, on aura $12 - 10 + 8 - 5 + 7 - 7 + 4 - 3$, ce qui, d'après ce qu'on vient de démontrer, est égal à

$$(12 + 8 + 7 + 4) - (10 + 5 + 7 + 3);$$

c'est ce qu'il fallait établir.

65. *On ne change pas une différence en augmentant d'un même nombre les deux nombres qu'on doit retrancher l'un de l'autre.*

Ce théorème s'exprime par l'égalité

$$a - b = (a + c) - (b + c),$$

qui suppose naturellement a supérieur ou égal à b. On a, en effet, en vertu des propositions antérieures,

$$a - b = a + c - c - b = (a + c) - (c + b) = (a + c) - (b + c).$$

On peut aussi diminuer d'un même nombre les deux nombres qu'on doit retrancher l'un de l'autre.

66. Voici encore quelques conséquences faciles relatives aux inégalités.

Quand on retranche d'un nombre un autre nombre qui n'est pas nul, on le diminue. Quand on retranche d'un même nombre deux nombres différents, on obtient deux résultats différents et la plus grande différence s'obtient en retranchant le plus petit des deux nombres.

Soit à retrancher du nombre a les deux nombres b, c et supposons $b < c$; je dis qu'on aura

$$a - b > a - c,$$

en supposant bien entendu que les soustractions puissent se faire. En effet, si c est plus grand que b, soit d la différence $c - b$: on aura

$$c = b + d,$$

puis (n° 57)

$$a - c = a - b - d,$$

mais le nombre $a - b - d$ s'obtient en retranchant d, qui n'est pas nul, de $a - b$, on a donc bien

$$a - c < a - b.$$

On démontrerait d'une façon analogue, que, si deux nombres sont différents, on obtient deux résultats différents en en retranchant un même nombre ; la plus grande différence correspond au plus grand nombre.

Enfin, si l'on a

$$a > b,$$
$$\alpha < \beta,$$

on aura

$$a - \alpha > b - \beta,$$

en supposant que les soustractions indiquées puissent se faire, car on a, d'après les propositions qu'on vient d'établir ou d'énoncer,

$$a - \alpha > b - \alpha, \qquad b - \alpha > b - \beta.$$

67. *Étant donnée une suite de nombres rangés dans un ordre tel que chacun d'eux soit supérieur au précédent, la différence entre le dernier et le premier est égale à la somme des différences entre chacun des nombres et celui qui le précède.*

Si, par exemple, on considère la suite

$$3,\ 7,\ 10,\ 23,\ 37,$$

la différence $37 - 3 = 34$ est égale à la somme des différences

$$7 - 3 = 4, \qquad 10 - 7 = 3, \qquad 23 - 10 = 13, \qquad 37 - 23 = 14.$$

En effet, le second nombre est égal au premier, plus la différence entre le second et le premier ; le troisième nombre est égal au second augmenté de la différence entre le troisième et le second, c'est-à-dire au premier augmenté de la différence entre le second et le premier et de la différence entre le troisième et le second ; de même, le quatrième sera la somme du premier nombre, de la différence entre le second et le premier, de la différence entre le troisième et le second, de la différence entre le quatrième et le troisième. Enfin, le dernier nombre sera égal au premier augmenté de la somme des différences entre le second et le premier, entre le troisième et le second, ..., entre le dernier et l'avant-dernier.

Dans le cas de trois nombres, on a la conséquence que voici : la différence entre un nombre compris entre deux autres, et l'un ou l'autre de ces nombres est plus petite que la différence entre ces deux derniers nombres.

68. Étant donnée une suite de nombres, ou *termes*, tels que chacun d'eux s'obtienne en ajoutant un même nombre au précédent, on dit que ces nombres forment une *progression arithmétique*. Le nombre qu'il faut ajouter à chaque terme de la progression arithmétique pour obtenir le suivant, ou, si l'on veut, la différence entre chaque terme de la progression et le précédent, s'appelle *raison* de la progression.

Ainsi les nombres consécutifs

$$3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$$

forment une progression arithmétique dont la raison est un ; les nombres

$$7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17$$

forment une progression arithmétique dont la raison est deux.

69. Il résulte du n° 67 que, si l'on considère un nombre compris entre deux termes d'une progression arithmétique, la différence entre ce nombre et chacun des deux termes qui le comprennent est moindre que la raison, tandis que la différence entre le même nombre et n'importe quel autre terme de la progression est plus grande que la raison.

Soit, par exemple, la progression arithmétique dont la raison est 5 :

$$7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ 32.$$

Le nombre 19 est compris entre 17 et 22 ; il diffère de 17 ou de 22 d'un nombre moindre que $22 - 17$ ou 5 ; sa différence avec 12 sera égale à la différence entre 19 et 17, augmentée de la différence entre 17 et 12, elle sera donc plus grande que 5, etc...

70. On appelle termes *extrêmes* dans une progression arithmétique le premier et le dernier, 7 et 32 dans l'exemple précédent. Le second terme et l'avant-dernier, puis le troisième terme et celui qui précède l'avant-dernier, puis le quatrième terme et le terme qui précède celui qui précède l'avant-dernier, etc., sont dits *également éloignés des extrêmes*.

Dans une progression arithmétique, la somme de deux termes également éloignés des extrêmes est toujours la même.

Dans l'exemple précédent, on a ainsi

$$7 + 32 = 39, \qquad 12 + 27 = 39, \qquad 17 + 22 = 39.$$

En effet, 12 et 27 se déduisent respectivement de 7 et de 32 en ajoutant et en retranchant 5 ; donc la somme de 12 et de 27 est la même que celle de 7 et de 32 ; 17 et 22 se déduisent respectivement de 12 et de 27 en ajoutant et en retranchant 5 ; donc la somme de 17 et de 22 est la même que celle de 12 et de 27 ou que celle de 7 et de 32 ; le raisonnement est évidemment général.

Il résulte immédiatement de là que le double de la somme des termes d'une progression arithmétique est égal à autant de fois la somme des termes extrêmes qu'il y a de termes dans la progression. Si, en effet, on écrit la somme des termes de la progression, puis au-dessous la somme de ces termes en ordre inverse, comme il suit,

$$\begin{array}{c} 7 + 12 + 17 + 22 + 27 + 32 \\ 32 + 27 + 22 + 17 + 12 + \ \ 7, \end{array}$$

et que l'on ajoute, en groupant ensemble les termes de même rang dans les deux sommes, on voit de suite qu'on obtient pour le double de la somme des termes, autant de fois la somme des termes extrêmes $7 + 32$ qu'il y a de termes dans la progression.

71. Il reste à expliquer la pratique de la soustraction. Le problème est le suivant : *deux nombres étant écrits dans le système décimal, écrire leur différence dans le système décimal.*

On sait par cœur les résultats obtenus en ajoutant à l'un quelconque des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 un nombre d'un chiffre, résultats qui sont tous inférieurs à 20 ; on en déduit immédiatement les différences obtenues en retranchant l'un des nombres 1, 2, 3, 4, ..., 10 d'un nombre d'un chiffre, ou d'un nombre de deux chiffres dans lequel le chiffre des dizaines est 1, lorsque cette différence n'a qu'un chiffre ; ces résultats doivent être immédiatement présents à la mémoire.

Ceci posé, deux nombres étant écrits dans le système décimal, on reconnaît immédiatement par la règle du n° 39 quel est le plus grand.

Il est aisé de trouver le chiffre des unités du reste et de ramener l'opération au cas où chacun des nombres donnés a un chiffre de moins ; en procédant ainsi de proche en proche, on parvient au résultat.

1° Supposons que les deux nombres soient terminés par un zéro : soient par exemple les nombres 720 et 640 ; la différence cherchée s'obtient en plaçant entre 72 et 64, un zéro à la droite de la différence, qui est égale à 8.

Cela résulte immédiatement de la règle analogue relative à l'addition, ou si l'on veut du théorème du n° 28.

2° Supposons maintenant que le chiffre des unités du plus grand nombre soit égal ou supérieur au chiffre des unités du plus petit.

Soit, par exemple, à faire la différence entre 7897 et 6323 : on a, en séparant les dizaines et les unités,

$$\begin{aligned} 7897 &= 7890 + 7, \\ 6323 &= 6320 + 3\,; \end{aligned}$$

on est d'ailleurs assuré (n° 39) que, dans le petit nombre, le nombre des dizaines est inférieur ou égal au nombre des dizaines du plus grand : on peut donc écrire (n° 64)

$$7897 - 6323 = (7890 - 6320) + (7 - 3).$$

La différence 7 — 3 s'effectue immédiatement ; elle n'a qu'un chiffre, elle est 4 ; le calcul de la différence entre 7890 et 6320 s'effectue en calculant la différence entre 789 et 632 et en plaçant un zéro à la droite ; puisqu'on doit ajouter 4 au résultat, on voit qu'il suffira de calculer la différence entre 789 et 632, puis de placer un 4 à la droite du résultat ; en d'autres termes 4 est le chiffre des unités du reste cherché, et le nombre des dizaines de ce reste est 789 — 632. On est donc ramené à calculer cette différence, sur laquelle on pourra raisonner de la même manière.

3° Supposons que le chiffre des unités du plus grand nombre soit plus petit que le chiffre des unités du plus petit. Le nombre des dizaines du plus grand nombre est nécessairement *supérieur* au nombre des dizaines du plus petit.

Soit, par exemple, à retrancher 8727 de 9543 ; on aura encore

$$9543 = 9540 + 3,$$
$$8727 = 8720 + 7;$$

puis, en ajoutant 10 aux deux nombres et en appliquant la proposition du n° 65,

$$9543 - 8727 = (9540 + 13) - (8730 + 7) = (9540 - 8730) + (13 - 7);$$

la différence 13 — 7 se calcule immédiatement, elle n'a qu'un chiffre : elle est 6. On est donc ramené à effectuer la différence entre 9540 et 8730, ou entre 954 et 873 ; cette différence trouvée, on placera un 6 à sa droite, et on aura le résultat cherché ; en d'autres termes 6 est le chiffre des unités du reste cherché, et le nombre des dizaines de ce reste est 954 — 873.

Les explications qui précèdent justifient la règle suivante.

72. *Règle.* — Pour retrancher un nombre b d'un nombre a, plus grand que b, on écrit le nombre b sous le nombre a de manière que les chiffres de b soient respectivement au-dessous des chiffres de a qui expriment des unités du même ordre ; on tire un trait au-dessous de a ; c'est sous ce trait qu'on écrira chiffre par chiffre le *reste* de l'opération ; ces chiffres se placeront respectivement au-dessous des chiffres de b qui représentent des unités du même ordre. On commence l'opération par la droite : on retranche, s'il est possible, le chiffre des unités simples de b du chiffre des unités simples de a, le

résultat est le chiffre des unités simples du reste ; si le chiffre des unités simples de b est plus fort que le chiffre des unités simples de a, on ajoute 10 à ce dernier chiffre, et l'on fait ensuite la soustraction ; la différence est le chiffre des unités simples du reste et l'on ajoute 1 au chiffre des dizaines de b. Du chiffre des dizaines de a, on retranche, s'il est possible, le chiffre des dizaines de b (augmenté de 1 dans le dernier cas) : le résultat est le chiffre des dizaines du reste ; si la soustraction est impossible, on augmente de 10 le chiffre des dizaines de a et l'on fait la soustraction, le résultat est alors le chiffre des dizaines du reste et l'on augmente d'une unité le chiffre des centaines de b ; du chiffre des centaines de a, on retranche, s'il est possible, le chiffre des centaines de b (augmenté de 1 dans le second cas) ; le résultat est le chiffre des centaines du reste ; si la soustraction est impossible, on augmente de 10 le chiffre des centaines de a, on fait la soustraction, et le résultat est le chiffre des centaines du reste ; on augmente alors d'une unité le chiffre des mille de b, etc. On continue de la même façon jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les chiffres de b ; quand on a retranché le dernier chiffre de b, on place à gauche de la partie écrite au reste le nombre formé par les chiffres (à gauche) non employés dans a, tel quel si la dernière soustraction partielle a été directe, et diminué de 1 si, pour la faire, il a fallu augmenter de 10 le chiffre de a qui correspond au chiffre des plus hautes unités de b.

Soit, par exemple, à retrancher 749752 de 58634564 ; on dispose l'opération comme ci-dessous

$$\begin{array}{r} 58634564 \\ 749752 \\ \hline 57884812 \end{array}$$

et l'on dit 2 ôté de 4, il reste 2 ; 5 ôté de 6, il reste 1 ; 7 ôté de 15, il reste 8 et je retiens 1 ; 9 et 1 font 10 ; 10 ôté de 14, il reste 4 et je retiens 1 ; 4 et 1 font 5 ; 5 ôté de 13, il reste 8 et je retiens 1 ; 7 et 1 font 8 ; 8 ôté de 16, il reste 8 et je retiens 1 ; 1 ôté de 58 il reste 57.

Il est à peine utile de dire que la *preuve* de la soustraction se fait en constatant que le plus grand nombre est la somme du plus petit et du reste.

Exercices.

25. Pour retrancher un nombre a d'un autre nombre b, on peut procéder comme il suit : soit 10^n la plus petite puissance de 10 qui soit supérieure à a ; on forme d'abord la différence $10^n - a$, que l'on appelle souvent complément de a à 10^n. Il suffit pour cela d'écrire un nombre a' ayant autant de chiffres que a et dont chaque chiffre, dans le cas où le dernier chiffre de a n'est par un 0, est le complément à 9 du chiffre de même rang dans a, sauf le dernier chiffre qui est le complément à 10. On fait ensuite la somme $a' + b$ et l'on en retranche 10^n.

Par exemple : $a = 567803$, $b = 7854321$,
$a' = 432197$,
$b + a' = 8286518$, $b - a = 7286518$.

26. La méthode précédente s'applique en particulier quand on a à faire à la fois des additions et des soustractions : on choisit une puissance de 10 supérieure à tous les nombres qu'il faut retrancher, soit 10^n ; on forme le complément de chacun de ces nombres à 10^n ; on ajoute tous ces compléments aux nombres à ajouter, ce qui se fait en une fois ; on retranche du résultat autant de fois 10^n qu'il y avait de nombres à retrancher.

Exemple : Calculer $a - b + c - d$, en supposant

$$a = 721956, \quad b = 621512, \quad c = 31849, \quad d = 87225 :$$

En posant $b' = 10^6 - b = 378488$, $d' = 10^6 - d = 912775$, on trouve

$$a + b' + c + d' - 10^6 \times 2 = 45068.$$

27. Combien l'équation

$$x - y = 53$$

a-t-elle de solutions distinctes, pour lesquelles x et y soient inférieurs à 100 ?

28. On considère n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tels que chacun d'eux soit plus grand que le suivant ; on forme les nombres

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_1 - a_2, \quad b_3 = a_1 - a_2 + a_3, \quad b_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4,$$

et ainsi de suite, jusqu'au nombre b_n obtenu en ajoutant a_n au précédent, ou en retranchant a_n, suivant que n est impair ou pair. Démontrer que chacun des nombres $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ est compris entre les deux qui le précèdent : démontrer que l'on a

$$b_1 > b_3 > b_5, \ldots; \quad b_2 < b_4 < b_6, \ldots,$$

et que chacun des nombres b affecté d'un indice pair est plus petit que chacun des nombres b affecté d'un indice impair.

29. Le double de la somme des n premiers nombres $1, 2, 3, \ldots, n$ est égal à $n(n+1)$.

La somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2.

30. Si dans la suite de l'exercice 20, on fait la somme de tous les termes de deux en deux à partir de 0 en s'arrêtant à un certain terme, et qu'on retranche du résultat la somme de tous les termes que l'on a sautés, on trouvera le terme qui précède celui auquel on s'est arrêté, diminué de 1.

Par exemple : $0 + 1 + 3 + 8 + 21 - 1 - 2 - 5 - 13 = 12 = 13 - 1.$

De même, si on faisait la somme des termes 1, 2, 5, 13, ..., pris dans la suite de deux en deux, à partir de 1, et en s'arrêtant à un certain terme, et qu'on en retranchât les termes que l'on a sautés, on trouverait le terme qui précède celui auquel on s'est arrêté, augmenté de 1 ; par exemple :

$$1 + 2 + 5 + 13 + 34 - 0 - 1 - 3 - 8 - 21 = 22 = 21 + 1.$$

31. Avec 8 poids pesant respectivement 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187 grammes on peut peser à 1 gramme près, en mettant au besoin des poids dans les deux plateaux de la balance, tout corps dont le poids ne dépasse pas 3280 grammes.

32. Tout nombre autre que 1 est ou bien une puissance de 3, ou bien une puissance de 3 augmentée ou diminuée de 1, ou bien une somme de puissances de 3 toutes distinctes, ou bien une pareille somme augmentée ou diminuée de 1, ou bien la différence entre une puissance de 3 ou une somme de puissances de 3 toutes distinctes et une autre puissance de 3 ou la somme d'autres puissances de 3 toutes distinctes entre elles, ou encore une pareille différence augmentée ou diminuée de 1.

33. Trois personnes rangées dans un ordre déterminé ont à choisir chacune une des couleurs *bleu*, *blanc*, *rouge*. Elles ont devant elles une soucoupe contenant 10 jetons ; elles ont en outre des jetons dans leurs poches. La personne qui a choisi le bleu, quelle qu'elle soit, ne touchera pas aux jetons de la soucoupe. Celle qui a choisi le blanc mettra dans la soucoupe 1, 3 ou 9 jetons suivant qu'elle est la première, la seconde ou la troisième. Celle qui a choisi le rouge enlèvera 1, 3 ou 9 jetons suivant qu'elle est la première, la seconde ou la troisième. On demande de dire, d'après le nombre de jetons qui restent dans la soucoupe, quelle couleur a choisie chaque personne.

§ 3. — **Multiplication.**

73. La multiplication, les mots multiplicande, multiplicateur, facteur, produit, etc., ..., ont été définis aux nos 17 et 18 ; nous n'y reviendrons pas, non plus qu'au sens du signe $\times$. Nous préviendrons toutefois qu'on remplace quelquefois ce signe par un point avec le même sens ; ainsi 3.4 ou 3×4 veulent dire la même chose : la somme de 4 nombres égaux à 3. Enfin quand les facteurs sont représentés par des lettres, on peut écrire leur produit en les juxtaposant, sans aucun signe. Provisoirement, nous conviendrons d'écrire d'abord le multiplicande, puis le multiplicateur ; ainsi $a \times b$, $a.b$, ab représentent le produit de a par b, la somme de b nombres égaux à a.

74. *Pour multiplier une somme par un nombre, on peut multiplier les parties de cette somme par le multiplicateur, et ajouter les produits partiels* (1).

Soit, par exemple, à multiplier $5 + 7 + 2$ par un nombre 3 (autre que un ou zéro) : c'est faire la somme de trois nombres égaux à $5 + 7 + 2$: le résultat est $5 + 7 + 2 + 5 + 7 + 2 + 5 + 7 + 2$, ou, en changeant l'ordre des nombres à ajouter et en réunissant certaines parties de la somme,

$$(5 + 5 + 5) + (7 + 7 + 7) + (2 + 2 + 2),$$

ou encore

$$5 \times 3 + 7 \times 3 + 2 \times 3 ;$$

c'est ce qu'il fallait démontrer. La proposition résulte des définitions quand le multiplicateur est un ou zéro.

1. C'est cette propriété qu'on exprime en disant que la multiplication est une opération *distributive*.

Lorsque le multiplicande est la somme de deux nombres a, b, le théorème s'exprime sous une forme condensée par l'égalité

$$(a+b)\,c = ac + bc,$$

la parenthèse indiquant que la somme $a+b$ doit être regardée comme effectuée.

Inversement, si l'on a une somme de produits dans lesquels tous les multiplicateurs soient les mêmes, on peut remplacer cette somme par un produit unique dans lequel le multiplicateur est le même que dans les produits partiels et dans lequel le multiplicande est la somme des multiplicandes de ces mêmes produits partiels. Ainsi, la somme $5 \times 3 + 7 \times 3 + 2 \times 3$ peut être remplacée par le produit unique $(5 + 7 + 2) \times 3$. C'est ce qu'on appelle mettre 3 en facteur. De même encore $5 \times 3 + 3$ peut être remplacé par $(5 + 1) \times 3$, parce que le dernier terme 3 de la somme peut être regardé comme le produit de 1 par 3 (n° 18).

75. *Dans un produit de deux facteurs, on peut intervertir l'ordre des facteurs.*

Ainsi, en prenant un exemple où aucun des deux facteurs n'est un ou zéro, le produit de 4 par 5 est égal au produit de 5 par 4 : en d'autres termes, on obtient la même somme en ajoutant 5 nombres égaux à 4, ou 4 nombres égaux à 5.

C'est une conséquence du théorème précédent ; en effet, 4 est la somme de 4 unités,

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1\,;$$

pour multiplier cette somme par 5, on peut multiplier chacune des parties par 5 : le produit de 1 par 5 est 5 ; on a donc

$$4 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5 = 5 \times 4.$$

La proposition résulte des définitions, quand l'un des facteurs est un ou zéro.

76. *Pour multiplier un nombre par une somme, on peut multiplier ce nombre par les parties de cette somme et ajouter les produits partiels.*

Ce théorème est une conséquence évidente des deux propositions qui précèdent ; il a d'ailleurs été démontré directement au n° 20.

Pour multiplier par c la différence entre deux nombres a, b, on peut multiplier ces deux nombres par c et retrancher le second produit du premier.

Sous une forme condensée, on peut écrire

$$(a - b)\,c = ac - bc.$$

Soit à multiplier 7 — 2 par 3 ; d'après la définition, il faut effectuer la somme

$$(7-2)+(7-2)+(7-2);$$

elle est égale (nos 59, 61) à

$$7-2+7-2+7-2=(7+7+7)-(2+2+2)$$

ou encore à

$$7\times3-2\times3.$$

Pour multiplier un nombre c par la différence de deux nombres a, b, on peut multiplier c par chacun des nombres a, b, puis retrancher le second produit du premier.

Cette proposition, démontrée directement au n° 28, peut être regardée comme une conséquence du théorème précédent et de la possibilité d'intervertir les facteurs.

77. On a expliqué au n° 22 ce qu'il fallait entendre par un produit de plusieurs facteurs rangés dans un ordre déterminé. On doit faire le produit des deux premiers facteurs, le produit du résultat par le troisième, le produit du résultat par le quatrième, ..., jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les facteurs. Dans un tel produit, on peut remplacer toujours autant de facteurs que l'on veut, pris au commencement, par leur produit effectué.

Dans un produit de plusieurs facteurs, on peut intervertir l'ordre des facteurs.

Nous diviserons la démonstration en deux parties :

1° Dans un produit de plusieurs facteurs, on peut intervertir l'ordre des deux premiers.

Cela résulte de ce qu'il faut commencer par effectuer le produit de ces deux facteurs, et de ce que, dans un produit de *deux* facteurs, l'ordre est indifférent.

2° Dans un produit de plusieurs facteurs, on peut intervertir l'ordre des deux derniers.

On peut se borner au cas où il n'y a que trois facteurs, car on peut toujours remplacer les facteurs qui précèdent les deux derniers par leur produit effectué. Dans le cas de trois facteurs, la démonstration est toute pareille à celle du n° 75.

Considérons le produit $3\times4\times5$; je dis qu'il est égal à $3\times5\times4$.

En effet, pour effectuer le second produit, on doit effectuer d'abord le produit de 3 par 5, ou faire la somme de 5 nombres égaux à 3, c'est-à-dire la somme

$$3+3+3+3+3;$$

on doit multiplier cette somme par 4; pour cela, on multipliera chacune des parties par 4, ce qui donne

$$3\times 4+3\times 4+3\times 4+3\times 4+3\times 4;$$

cette somme comprend 5 termes tous égaux à 3×4, c'est donc $(3\times 4)\times 5$ ou, ce qui revient au même, $3\times 4\times 5$.

3° Dans un produit de plusieurs facteurs, on peut intervertir l'ordre de deux facteurs consécutifs, qui ne sont ni les deux premiers ni les deux derniers.

Soit, par exemple, le produit $7\times 3\times 4\times 5$; je dis qu'il est égal à $7\times 4\times 3\times 5$: on a en effet

$$7\times 3\times 4=7\times 4\times 3,$$

et en multipliant chacun de ces nombres égaux par 5, on trouve

$$7\times 3\times 4\times 5=7\times 4\times 3\times 5.$$

4° Dans un produit d'un nombre quelconque de facteurs, on peut ranger les facteurs dans l'ordre que l'on veut. Considérons en effet le facteur du produit que l'on veut amener au premier rang; en le changeant de place avec celui qui le précède, on le fait avancer d'un rang, sans changer la valeur du produit; on peut ensuite le faire avancer encore d'un rang, etc..., jusqu'à ce qu'il soit arrivé au premier. On prendra ensuite le facteur qu'on veut amener au second rang et on l'y amènera de la même façon en le permutant avec celui qui le précède, etc... Tous les facteurs peuvent ainsi être amenés au rang prescrit.

Par exemple, si nous considérons le produit $7\times 4\times 3\times 5$, je dis qu'on peut l'écrire $5\times 3\times 4\times 7$. On a en effet

$$\begin{aligned}7\times 4\times 3\times 5 &= 7\times 4\times 5\times 3=7\times 5\times 4\times 3\\ &= 5\times 7\times 4\times 3=5\times 7\times 3\times 4=5\times 3\times 7\times 4\\ &= 5\times 3\times 4\times 7.\end{aligned}$$

On n'a jamais interverti que deux facteurs consécutifs.

78. *Dans un produit de plusieurs facteurs, on peut remplacer tels facteurs que l'on veut par leur produit effectué.*

Soit, par exemple, le produit

$$7 \times 5 \times 4 \times 3 \times 6 \times 12 \times 13 \times 25.$$

Je dis qu'on peut y remplacer les facteurs 5, 3, 12 par leur produit effectué $(5 \times 3 \times 12)$ et les facteurs 7, 13, 25 par leur produit effectué $(7 \times 13 \times 25)$; en sorte que le produit pourra s'écrire, par exemple :

$$4 \times (5 \times 3 \times 12) \times 6 \times (7 \times 13 \times 25).$$

D'abord, on peut remplacer 5, 3, 12 par leur produit effectué : il suffit en effet de faire passer ces facteurs au premier rang et d'écrire le produit

$$\begin{aligned} 5 \times 3 \times 12 \times 7 \times 4 \times 6 \times 13 \times 25 \\ = (5 \times 3 \times 12) \times 7 \times 4 \times 6 \times 13 \times 25; \end{aligned}$$

dans le nouveau produit, qui ne contient plus que six facteurs, on fera passer de même les facteurs 7, 13, 25 au premier rang et en supposant leur produit effectué, on l'écrira

$$(7 \times 13 \times 25) \times (5 \times 3 \times 12) \times 4 \times 6;$$

il n'y a plus que quatre facteurs; en les intervertissant convenablement, on aura mis le produit sous la forme demandée.

Inversement, dans un produit de facteurs, où certains facteurs sont eux-mêmes des produits de facteurs mis entre parenthèses, on peut supprimer les parenthèses, puisque, ensuite, on pourrait les rétablir, c'est-à-dire remplacer certains facteurs par leur produit effectué.

79. *Pour multiplier un produit de plusieurs facteurs par un nombre, il suffit de multiplier l'un des facteurs par ce nombre.*

Soit, par exemple, le produit $7 \times 4 \times 5 \times 6$ à multiplier par 12. Il suffira de remplacer le facteur 4 par 4×12; en effet le produit cherché peut s'écrire

$$\begin{aligned} (7 \times 4 \times 5 \times 6) \times 12 &= 7 \times 4 \times 5 \times 6 \times 12 \\ &= 7 \times (4 \times 12) \times 5 \times 6. \end{aligned}$$

80. *Pour multiplier un nombre par un produit de facteurs, on peut multiplier ce nombre successivement par les facteurs du produit.*

Soit, par exemple, 7 à multiplier par $(12 \times 3 \times 5)$; le produit est égal à $7 \times (12 \times 3 \times 5)$ et, en supprimant les parenthèses, à $7 \times 12 \times 3 \times 5$: c'est ce qu'il fallait démontrer.

81. Les puissances d'un nombre, les exposants ont été définis au n° 23, ainsi que les mots carré, cube d'un nombre.

Quand les facteurs d'un produit sont des puissances d'un même nombre, le produit est une puissance de ce nombre, dont l'exposant est la somme des exposants qui correspondent aux différents facteurs.

Soit, par exemple, le produit

$$5 \times 5^3 \times 5^2,$$

composé de trois facteurs qui sont respectivement les puissances 1ière, 3ième, 2ième du nombre 5; je dis que ce produit est égal à une puissance de 5 dont l'exposant est $1+3+2$. En effet, en recourant à la définition, on voit qu'on peut écrire ce produit

$$(5) \times (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5).$$

Dans chaque parenthèse, il y a autant de facteurs égaux à 5 qu'il y a d'unités dans l'exposant du facteur correspondant[1]. En supprimant les parenthèses, on aura un produit contenant $1+3+2$ facteurs égaux à 5, c'est-à-dire

$$5^{1+3+2};$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

Considérons le cas particulier où tous les facteurs du produit seraient la même puissance du même nombre ; soit, par exemple, le produit

$$5^2 \times 5^2 \times 5^2.$$

Ce produit est par définition le cube de 5^2, et d'après ce qu'on vient de dire, il est égal à une puissance de 5 dont l'exposant serait $2+2+2=2\times 3$. On a donc

$$(5^2)^3 = 5^{2\times 3}.$$

Ainsi, *pour élever une puissance d'un nombre a à une certaine puissance, il suffit de multiplier par l'exposant de cette puissance l'exposant du nombre a.*

Pour élever un produit de plusieurs facteurs à une certaine puissance, il suffit d'élever à cette puissance chacun des facteurs.

1. On rappelle que quand il n'y a pas d'exposant, celui-ci doit être regardé comme égal à l'unité.

Soit, par exemple, à élever au cube le produit $5 \times 7 \times 4$: on a

$$\begin{aligned}(5 \times 7 \times 4)^3 &= (5 \times 7 \times 4) \times (5 \times 7 \times 4) \times (5 \times 7 \times 4)\\ &= (5 \times 5 \times 5) \times (7 \times 7 \times 7) \times (4 \times 4 \times 4)\\ &= 5^3 \times 7^3 \times 4^3.\end{aligned}$$

On a souvent à appliquer à la fois les théorèmes précédents ; comme, par exemple, dans l'égalité que voici, qui résulte immédiatement de ces théorèmes :

$$(5^2 \times 7 \times 4^3)^4 = 5^{2 \times 4} \times 7^4 \times 4^{3 \times 4} = 5^8 \times 7^4 \times 4^{12}$$

82. Les théorèmes des nos 74, 76 permettent de remplacer le produit de deux facteurs dont l'un est une somme ou une différence par une somme ou une différence de produits partiels. Ainsi on a

$$(a + b)c = ac + bc, \qquad (a - b)c = ac - bc;$$

mettre les produits qui figurent dans les premiers membres sous les formes qui apparaissent dans les seconds membres, c'est *développer* ces produits.

On peut à l'aide de ces théorèmes trouver des expressions intéressantes pour le produit de deux facteurs dont l'un et l'autre sont une somme ou une différence, pour le carré d'une somme ou d'une différence.

Soit, par exemple, à multiplier la somme $a + b$ par la somme $c + d$. On pourra multiplier $a + b$ par chacune des parties c, d de la seconde somme et ajouter les résultats, ce qui donne

$$(a + b)c + (a + b)d;$$

en remplaçant dans cette somme $(a + b)c$ et $(a + b)\,d$ respectivement par $ac + bc$, $ad + bd$, on obtient

$$(ac + bc) + (ad + bd) = ac + bc + ad + bd,$$

et, finalement, on a

$$(a + b)\,(c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

Ainsi le produit d'une somme de deux nombres par une somme de deux nombres est égal à la somme des quatre produits obtenus en multipliant chaque partie de la première somme par chaque partie de la seconde. Remplacer le produit des deux sommes $a + b$, $c + d$ par cette somme de quatre produits, c'est développer le produit $(a + b)\,(c + d)$.

83. Si on suppose que les nombres c, d soient respectivement égaux aux nombres a, b, l'égalité précédente devient

$$(a + b)(a + b) = aa + ba + ab + bb.$$

Les produits $(a + b)(a + b)$, aa, bb sont respectivement les carrés des nombres $a + b$, a, b ; ils se représentent par $(a + b)^2$, a^2, b^2 ; les deux produits ba, ab sont égaux, leur somme est le double de l'un d'eux et peut s'écrire $ab \times 2$; on l'écrit [1] habituellement $2ab$, que l'on énonce deux ab (deux fois ab). Avec ces notations, l'égalité qu'on vient d'obtenir devient

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Elle peut être remplacée par cet énoncé :

Le carré de la somme de deux nombres est égal à la somme des carrés de ces nombres, augmentée de leur double produit [2].

84. Considérons maintenant le produit de la différence des deux nombres a, b par la différence des deux nombres c, d.

Pour multiplier la différence $a - b$ par le nombre $c - d$, on peut multiplier chacun des nombres a, b par $c - d$ et faire la différence des produits, ce qui donne

$$a(c - d) - b(c - d).$$

Mais les produits $a(c-d)$, $b(c-d)$ sont respectivement égaux à $ac - ad$, $bc - bd$; la différence de ces produits est donc la différence entre les nombres $ac - ad$, $bc - bd$; pour effectuer cette différence on peut ajouter bd au nombre $ac - ad$, et retrancher bc du résultat (n° 60), on a ainsi finalement

$$(a - b)(c - d) = ac - ad + bd - bc ;$$

remplacer le premier membre par le second, c'est développer ce premier membre.

1. Si l'on adopte les conventions du n° 22, $2ab$ signifie le résultat obtenu en multipliant 2 successivement par a et b ; mais rien n'empêche de regarder dans $2ab$ le produit ab comme effectué, et, puisqu'on peut intervertir l'ordre des facteurs 2 et ab, de regarder $2ab$ comme le produit de ab par 2, au lieu de le regarder comme le produit de 2 par ab.

Remarquons encore que, au n° 73, on a dit que, dans un produit de deux ou plusieurs facteurs on pouvait supprimer le signe de la multiplication ($\times$), quand les facteurs étaient représentés par des lettres. Il n'y a pas d'inconvénient à supprimer ce signe quand *l'un* des facteurs est écrit en chiffres ; c'est ce qu'on fait habituellement et l'on place d'ordinaire ce facteur (dit numérique) en tête du produit : ainsi on écrit $2a$ avec le sens de $2 \times a$, ou de $a \times 2$; on énonce deux a.

2. C'est-à-dire du double de leur produit.

85. Dans le cas particulier où l'on a $c = a$, $d = b$, cette formule devient

$$(a - b)(a - b) = aa - ab + bb - ba;$$

d'ailleurs pour effectuer le second membre on peut faire la somme $aa + bb$ et en retrancher la somme $ab + ba$; en d'autres termes, on a

$$(a - b)(a - b) = aa + bb - (ab + ba),$$

ou encore, puisque $(a - b)(a - b)$, aa, bb sont les carrés de $a - b$, a, b et que les nombres ab, ba sont égaux,

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

En d'autres termes, le carré de la différence entre deux nombres est égal à la somme des carrés de ces nombres, diminuée de leur double produit.

86. Soit enfin à multiplier la somme de deux nombres a, b par la différence des deux nombres c, d. Pour multiplier la somme $a + b$ par le nombre $c - d$, il suffit d'en multiplier les deux parties par $c - d$ et d'ajouter les produits ainsi obtenus, ce qui donne

$$a(c - d) + b(c - d);$$

mais les deux produits $a(c - d)$, $b(c - d)$ sont respectivement égaux à $ac - ad$, $bc - bd$, leur somme est donc égale à

$$(ac - ad) + (bc - bd) = ac - ad + bc - bd:$$

on a

$$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd.$$

87. Dans le cas particulier où l'on a $c = a$, $d = b$, cette formule devient

$$(a + b)(a - b) = aa - ab + ba - bb;$$

on voit que l'on a à retrancher le nombre ab, puis à ajouter le nombre égal ba; ces deux opérations peuvent être supprimées et l'on a finalement

$$(a + b)(a - b) = aa - bb = a^2 - b^2;$$

en d'autres termes, *le produit de la somme de deux nombres par leur différence est égal à la différence de leurs carrés*. En particulier si l'on suppose $b = 1$, on a

$$(a + 1)(a - 1) = a^2 - 1.$$

Les propositions précédentes peuvent être étendues et généralisées. Les méthodes que l'on a exposées s'appliquent sans peine à la multiplication de deux expressions obtenues en faisant une suite d'additions et de soustractions sur des nombres déterminés. Au lieu de deux pareilles expressions, on pourrait en considérer trois, *développer* le produit des deux premières, puis le produit du résultat par la troisième. C'est en *Algèbre* qu'on apprendra à effectuer de la façon la plus simple et la plus générale des opérations de cette nature.

88. L'égalité

$$a^2 - b^2 = (a - b) \times (a + b)$$

est un cas particulier de l'égalité

$$a^n - b^n = (a - b) \times (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

où l'on suppose $a > b$ et où les points suspensifs qui figurent dans le second facteur du second nombre sont mis à la place de termes qui suivent la même loi que ceux qui les précèdent; ainsi le terme $a^{n-3}b^2$ devrait être suivi du terme $a^{n-4}b^3$, celui-ci du terme $a^{n-5}b^4$, ..., l'exposant de a allant toujours en diminuant d'une unité quand on passe d'un terme au suivant, et l'exposant de b allant en augmentant d'une unité, jusqu'à ce qu'on arrive à l'avant-dernier terme écrit ab^{n-2}; on aurait, par exemple, en supposance $n = 5$,

$$(a^5 - b^5) = (a - b)\ (a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4).$$

Pour *vérifier* cette dernière égalité, représentons le second facteur du second membre par P; on aura

$$\begin{aligned}(a - b)\mathrm{P} &= a\mathrm{P} - b\mathrm{P},\\ a\mathrm{P} &= a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4,\\ b\mathrm{P} &= \phantom{a^5 + {}} a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5,\end{aligned}$$

et, en retranchant membre à membre,

$$a\mathrm{P} - b\mathrm{P} = a^5 - b^5,$$

c'est ce qu'il fallait démontrer; la démonstration est la même dans le cas général.

89. Résumons enfin les observations relatives aux inégalités.

1° En supposant que a ne soit pas nul et que b soit plus grand que un, on a (n° 19)

$$ab > a.$$

2° En supposant que a ne soit pas nul et que l'on ait $b > c$, on a (n° 19)

$$ab > ac.$$

3° Si l'on a

$$a > \alpha, \quad b > \beta,$$

on a

$$ab > \alpha\beta.$$

En effet, l'inégalité $b > \beta$ suppose que b n'est pas nul ; on a donc $ab > \alpha b$, puisque a est plus grand que α; mais, puisque b est plus grand que β, αb est plus grand que $\alpha\beta$ si α n'est pas nul, il lui est égal si α est nul; dans tous les cas on a

$$ab > \alpha\beta.$$

90. Il nous reste à expliquer la pratique de la multiplication.

Le problème est le suivant : *Le multiplicande et le multiplicateur étant écrits dans le système décimal, écrire le produit dans le système décimal.*

D'après la définition de la multiplication, on n'a qu'à effectuer l'addition d'autant de nombres égaux au multiplicande qu'il y a d'unités dans le multiplicateur; mais, en raison de l'égalité des nombres à ajouter, l'opération peut être abrégée de beaucoup: ce sont ces abréviations qu'il nous faut faire connaître, et qui sont fondées sur les divers théorèmes que l'on a établis dans ce chapitre.

91. Pour en donner de suite un exemple, considérons le cas où l'on a à multiplier un nombre par un autre formé de l'unité suivie de plusieurs zéros.

Soit, par exemple, à multiplier 272 par 1000. On devrait, d'après la définition, faire l'addition de mille nombres égaux à 272; mais, puisque, dans un produit, on peut intervertir l'ordre des facteurs, on parviendra au résultat en multipliant 1000 par 272, ou en ajoutant 272 nombres égaux à 1000, c'est-à-dire à une unité composée du 3e ordre ; le résultat est évident : c'est 272 unités composées du 3e ordre, ou 272000 d'après les règles de la numération écrite. Ainsi : *pour faire le produit de deux nombres dont l'un est formé de l'unité suivie d'un certain nombre de zéros, il suffit de placer ces zéros à la droite de l'autre.*

92. On appelle *multiple* d'un nombre tout nombre obtenu en le multipliant par un autre. Il est souvent utile de former une table des neuf premiers multiples d'un nombre donné, c'est-à-dire des résultats que l'on obtient en le multipliant par 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

C'est la définition même de la multiplication qu'il convient alors d'appliquer.

Soit, par exemple, à former les neuf premiers multiples de 98756 :

1	98756
2	197512
3	296268
4	395024
5	493780
6	592536
7	691292
8	790048
9	888804
	987560.

On écrit sur une colonne verticale les nombre 1, 2, 3, ..., 9 ; en face de 1 on écrit le nombre 98756 ; on l'ajoute à lui-même et l'on écrit le résultat en face du nombre 2 ; ce qui donne 197512 ; on ajoute les deux nombres 98756, 197512, ce qui revient à ajouter trois nombres égaux à 98756, et l'on obtient ainsi le produit 296268 de 98756 par 3 ; on écrit ce produit en face du nombre 3 ; on ajoute ensuite 98756 au dernier nombre trouvé ; cela revient à ajouter 4 nombres égaux à 98756 ; le résultat de l'addition est 395024 ; c'est le produit de 98756 par 4, on l'écrit en face du nombre 4 ; on continue ainsi jusqu'à ce que l'on ait formé le produit de 98756 par 9. Chaque résultat a été obtenu en faisant l'addition de deux nombres ; si l'on continuait en ajoutant encore 98756 au dernier nombre trouvé, à savoir 888804, on devrait trouver le produit de 98756 par 10 ou 987560, en vertu du précédent théorème. On a là une vérification facile, qu'il ne faut pas négliger.

93. On ne procède pas autrement pour former la *table de multiplication* qui donne les produits de chacun des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 par chacun de ces nombres. Sur une première ligne horizontale on écrit ces nombres ; sur une seconde ligne, au-dessous, les résultats obtenus en ajoutant chacun de ces nombres à lui-même ; sur une troisième ligne, les résultats obtenus en ajoutant à chacun des nombres de la seconde le nombre écrit au-dessus dans la première ; sur une quatrième ligne, les nombres obtenus en ajoutant à chacun des nombres de la troisième le nombre situé au-dessus dans la première, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait écrit la neuvième ligne. On formera ainsi le tableau suivant :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Ce tableau étant formé, si l'on veut avoir, par exemple, le produit de 7 par 6, on cherchera dans la première ligne horizontale le nombre 7; on cherchera ensuite la 6ième ligne horizontale, c'est celle qui commence par un 6 : le nombre qui se trouve dans cette ligne horizontale à l'intersection avec la colonne verticale qui commence par un 7 est le produit cherché, 42.

On observera que les nombres contenus dans ce tableau se reproduisent symétriquement par rapport à la diagonale du carré qui va de la première case (en haut et à gauche) à la dernière (en bas et à droite). C'est la traduction de ce fait que dans un produit de deux facteurs, on peut, sans changer le produit, intervertir l'ordre des facteurs. La diagonale dont nous venons de parler contient les *carrés* des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 [1].

Les résultats de cette table doivent être sus par cœur.

94. Quant à ce qui concerne la façon pratique d'effectuer une multiplication de deux nombres, nous distinguerons quatre cas.

1. Il est clair qu'on peut construire des tables de multiplication s'étendant aussi loin qu'on le veut ; mais la disposition qu'on vient de décrire devient impraticable si la table a une grande extension. Il existe des tables de multiplication, dues à Crelle, qui donnent les produits de chaque nombre de trois chiffres par chaque nombre de trois chiffres. Ces tables sont très précieuses pour abréger les calculs numériques.

1° Les deux facteurs n'ont qu'un chiffre.

Le résultat, qui se trouverait dans la table de multiplication, s'écrit immédiatement.

2° L'un des facteurs, que l'on prendra comme multiplicateur, n'a qu'un chiffre; l'autre en a plusieurs.

Soit, par exemple, à multiplier 89023 par 4; on procède absolument comme si l'on additionnait 4 nombres égaux à 89023 :

$$\begin{array}{r} 89023 \\ 89023 \\ 89023 \\ 89023 \\ \hline 356092; \end{array}$$

mais on fait tout d'un coup les sommes des chiffres contenus dans chaque colonne, ce qui revient à multiplier l'un d'eux par 4, et l'on n'ajoute la retenue qu'après avoir fait cette multiplication; ainsi, commençant par la droite, au lieu de dire 3 et 3 font 6, et 3 font 9, et 3 font 12, on dit 4 fois 3 font 12, je pose 2 et je retiens 1; puis 4 fois 2 font 8, 8 et 1 font 9; je pose 9; 4 fois 0 font 0; je pose 0; 4 fois 9 font 36, je pose 6 et je retiens 3; 4 fois 8 font 32, 32 et 3 font 35; je pose 5 et j'avance 3. Le produit est 356092.

Règle.— Pour multiplier un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un chiffre, on écrit les deux nombres l'un au-dessous de l'autre; on place d'ordinaire le multiplicateur sous le chiffre des unités du multiplicande; on tire un trait sous les deux nombres; c'est sous ce trait que l'on écrira le produit, chiffre par chiffre. On multiplie par le multiplicateur le chiffre des unités du multiplicande, et l'on écrit le chiffre des unités du produit partiel; c'est le chiffre des unités du produit cherché; on retient les dizaines s'il y en a; on multiplie le chiffre des dizaines du multiplicande par le multiplicateur et l'on ajoute la retenue, s'il y en a; le chiffre des unités du résultat est le chiffre des dizaines du produit; on l'écrit et l'on retient les dizaines du résultat; on continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les chiffres du multiplicande.

3° Le multiplicateur est formé d'un chiffre suivi de plusieurs zéros.

Soit à multiplier 89023 par 4000; 4000 est égal à 4×1000; pour multiplier 89023 par 4000, on peut le multiplier successivement par 4, puis par 1000; la dernière multiplication se fera en mettant trois zéros à droite du produit 89023×4 effectué; le résultat est 356092000.

4° Le multiplicande et le multiplicateur sont quelconques.

Je supposerai d'abord que ni l'un ni l'autre ne soient terminés par des zéros. Soit, par exemple, à multiplier 98756 par 823. Le multiplicateur 823 est égal à $800 + 20 + 3$; on multipliera 98756 par 3, 20, 800 et l'on ajoutera les résultats (n° 20). On est ramené aux cas précédents.

On disposera l'opération comme il suit :

On écrit d'abord le multiplicande, puis au-dessous le multiplicateur ; on tire un trait :

$$\begin{array}{r} 98756 \\ 823 \\ \hline 296268 \\ 1975120 \\ 79004800 \\ \hline 81276188. \end{array}$$

Sous le trait, on écrit les produits du multiplicande par 3, 20, 800, les uns sous les autres, de manière que les chiffres représentant les unités du même ordre soient dans une même colonne verticale. Ces produits sont les produits *partiels*. On se dispense habituellement d'écrire un, deux, ..., zéros à la suite du second, du troisième,... produit partiel, mais on a soin de mettre les chiffres à la même place que si les zéros étaient écrits. Puis on fait la somme des produits partiels; c'est le produit cherché, qui est ici 81276188. — Si l'un des chiffres du multiplicateur était un 0, on serait amené à écrire une ligne de zéros parmi les produits partiels; on s'en dispense, à la condition de placer les chiffres du produit partiel suivant comme si cette ligne de zéros était écrite.

Rien n'empêcherait, à la rigueur, de suivre la même marche si les facteurs étaient terminés par des zéros; mais il est commode de procéder comme il suit.

Soit à multiplier 98756000 par 8230000; les deux nombres peuvent s'écrire

$$98756 \times 1000, \quad 823 \times 10000;$$

leur produit (n° 78) est égal au produit de 98756×823 par 1000×10000 ou 10000000; après avoir effectué le premier produit, on placera à la droite sept zéros, autant qu'il y en avait, en tout, dans le multiplicande et le multiplicateur. Le résultat sera ici

$$812761880000000.$$

95. *Règle*. — Pour multiplier deux nombres de plusieurs chiffres, on supprime les zéros placés à la droite de ces nombres, s'il y en a, et l'on écrit le multiplicande, puis, au-dessous, le multiplicateur ; on choisit habituellement pour ce dernier le nombre qui a le moins de chiffres. Sous le multiplicateur on tire un trait. On multiplie successivement le multiplicande par les chiffres du multiplicateur, en allant de droite à gauche. On écrit chaque produit partiel sous le précédent, en reculant d'un rang vers la gauche, c'est-à-dire que l'on place le chiffre des unités de chaque produit partiel sous le chiffre des dizaines du produit partiel qui précède, le chiffre des dizaines sous le chiffre des centaines du produit précédent, etc... S'il se rencontre un zéro au multiplicateur, on n'en tient compte que pour reculer de *deux* rangs vers la gauche le produit partiel suivant; s'il y avait deux zéros consécutifs au multiplicateur, on en tiendrait compte pour reculer de *trois* rangs vers la gauche le produit partiel suivant, etc...

Quand on a écrit tous les produits partiels, on tire un trait au-dessous, et on les ajoute : la somme est le produit cherché. Si l'on a supprimé des zéros, tant au multiplicande qu'au multiplicateur, on les replace tous à la droite du produit.

On peut faire la preuve de l'opération en échangeant le multiplicande et le multiplicateur.

Si l'on a trois nombres à multiplier, on effectue le produit des deux premiers, et l'on multiplie le résultat par le troisième.

96. Les opérations d'addition et de multiplication donnent lieu à quelques remarques qui nous seront utiles plus tard. Pour ce qui est de l'addition, mentionnons la proposition suivante :

Lorsque l'on a n nombres à ajouter et qu'on applique la règle du n° 72, la retenue provenant de l'addition des chiffres d'une colonne et de la retenue antérieure ne peut dépasser $n - 1$.

Supposons, par exemple, que l'on ajoute 7 nombres ; les chiffres qui sont contenus dans la colonne des unités sont au plus des 9, leur somme est au plus égale à 7 fois 9 ou 7 fois $10 - 1$, c'est-à-dire $70 - 7$; la retenue, dans ce cas, sera égale à 6; quels que soient les chiffres contenus dans la colonne des unités, elle sera inférieure ou égale à 6. Dans la colonne suivante, si même tous les chiffres étaient des 9, la somme de ces chiffres augmentée de la retenue supposée égale à 6 serait égale à $70 - 7 + 6 = 70 - 1$; la retenue sera donc au plus égale à 6. Le raisonnement se continue évidemment.

Cette remarque peut servir si l'on n'a besoin que des premiers chiffres de gauche dans le résultat d'une addition. Supposons, par exemple, qu'on ait à faire l'addition suivante :

$$\begin{array}{r} 798725 \\ 1046537 \\ 906435 \\ 78452 \\ \hline \end{array}$$

en négligeant dans chacun des nombres les trois derniers chiffres, on trouvera 2828 mille ; ce serait le nombre de mille contenus dans le total s'il n'y avait pas de retenue provenant des chiffres négligés ; cette retenue ne peut excéder 3 mille : le nombre de mille du résultat est donc 2828 ou 2831 ou un nombre intermédiaire ; le nombre de centaines de mille est certainement 28.

97. Occupons-nous maintenant de la multiplication.

Supposons que le multiplicande a ait n chiffres et que le multiplicateur b en ait p ; ce dernier est plus petit que 10^p et au moins égal à 10^{p-1} ; le produit sera plus petit que $a \times 10^p$ et au moins égal à $a \times 10^{p-1}$; ces deux derniers produits s'obtiennent en plaçant p ou $p - 1$ zéros à la droite du nombre a ; on obtient ainsi des nombres de $n + p$ ou de $n + p - 1$ chiffres. Le produit, compris entre ces deux nombres, a $n + p$ ou $n + p - 1$ chiffres.

98. Supposons qu'on augmente le multiplicande a d'une unité ; le produit deviendra $(a + 1)\, b = ab + b$; il sera augmenté du multiplicateur.

Sur quels chiffres du produit porte cette modification ?

Imaginons qu'on ait écrit l'un sous l'autre les deux nombres ab, b pour en faire la somme ; si l'on désigne encore par p le nombre de chiffres de b, les p derniers chiffres du produit ab auront sous eux les chiffres de b et seront en général modifiés par l'addition ; le premier des chiffres de ab qui n'a rien au-dessous de lui pourra être augmenté d'une unité, si l'addition précédente comporte une retenue. Si donc dans les deux produits ab, $(a + 1)\, b$ on supprime les p derniers chiffres, le second des nombres ainsi obtenus sera égal ou supérieur d'une unité au premier. En général, le dernier chiffre seul sera différent ; pourtant si ce dernier chiffre était un 9 dans le nombre provenant de ab, l'addition d'une unité aurait sa répercussion sur le chiffre précédent, et même sur plusieurs des chiffres précédents, si ceux-ci étaient aussi des 9.

Supposons maintenant que l'on augmente d'une unité les deux facteurs a, b et comparons de la même façon les deux produits ab, $(a+1)(b+1)$. Désignons toujours par n et p les nombres de chiffres de a et de b; supposons enfin $n \leqq p$. Pour former le second produit il suffira d'appliquer deux fois la règle précédente; on déduira d'abord $(a+1)b$ de ab en lui ajoutant b; puis $(a+1)(b+1)$ de $(a+1)b$ en lui ajoutant $a+1$. On reconnaît aisément, en s'appuyant sur le résultat précédent, que, si dans les nombres ab et $(a+1)(b+1)$ on supprime les p derniers chiffres, les deux nombres restants seront égaux, ou bien le second sera supérieur au premier d'une ou même de deux unités.

99. Quand on a deux nombres un peu grands à multiplier l'un par l'autre, il arrive fréquemment, dans la pratique, qu'on n'ait besoin que des premiers chiffres du produit, les autres pouvant être simplement remplacés par des zéros qui indiquent seulement la valeur relative des chiffres que l'on conserve. S'il en est ainsi, il suffit d'un peu d'attention pour reconnaître que, en appliquant alors la règle du n° 95, on fait beaucoup de calculs inutiles : on peut les éviter en employant le procédé dit de la *multiplication abrégée.*

Supposons, par exemple, qu'on ait à multiplier le nombre $a = 4532169$ par le nombre $b = 3141592$; le multiplicateur a ici 7 chiffres; je désignerai en général ce nombre de chiffres par p. La multiplication, faite comme d'habitude, est figurée ci-dessous :

$$
\begin{array}{r}
4\,5\,3\,2\,1\,6\,9 \\
\underline{3\,1\,4\,1\,5\,9\,2} \\
9\,0\,6\,4\,3\,3\,8 \\
4\,0\,7\,8\,9\,5\,2\,1 \\
2\,2\,6\,6\,0\,8\,4\,5 \\
4\,5\,3\,2\,1\,6\,9 \\
1\,8\,1\,2\,8\,6\,7\,6 \\
4\,5\,3\,2\,1\,6\,9 \\
1\,3\,5\,9\,6\,5\,0\,7 \\
\hline
\end{array}
$$

On va montrer comment on peut simplifier tant l'addition finale que le calcul des produits partiels, lorsque, par exemple, on ne se préoccupe pas des nombres inférieurs à une unité composée du cinquième ordre.

Désignons par P le nombre de centaines de mille, par exemple, contenues dans le produit et par A_1, A_2, ..., A_7 les nombres de centaines de mille contenues dans les produits partiels. Il résulte de la remarque faite au n° 96 que P sera égal à la somme $A_1 + A_2 + \ldots + A_7$ augmentée d'un nombre au plus égal à $6 = p - 1$. Cette remarque permettrait de simplifier l'addition des produits partiels, si l'on ne voulait que les premiers chiffres du produit; mais il convient de simplifier aussi le calcul des produits partiels.

Le premier s'obtient en multipliant a par le chiffre 2 des unités du multiplicateur, c'est-à-dire en ajoutant deux nombres égaux à a; si dans ces deux nombres on supprimait les cinq derniers chiffres de droite, on trouverait comme somme un nombre A'_1, inférieur ou égal à A_1, la différence serait d'ailleurs, toujours pour la même raison, au plus égale à $2-1$. D'ailleurs A'_1 n'est autre chose que le produit de 45 par 2. Le second produit partiel s'obtient en multipliant $a = 4532169$ par 90 ou 45321690 par 9, ce qui revient à ajouter neuf nombres égaux à 45321690; si dans les neuf nombres on supprimait encore les cinq derniers chiffres, on trouverait comme somme un nombre A'_2 inférieur ou égal à A_2, la différence serait au plus égale à $9-1$; A'_2 est d'ailleurs le produit de 453 par 9; on voit de même que, en désignant par $A'_3, A'_4, A'_5, A'_6, A'_7$ les produits respectifs de 4532 par 5, 45321 par 1, 453216 par 4, 4532169 par 1, 45321690 par 3, les nombres $A'_3, A'_4, A'_5, A'_6, A'_7$ seront inférieurs ou égaux aux nombres A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, les différences respectives étant au plus égales aux chiffres employés comme multiplicateurs, diminués d'une unité, c'est-à-dire au plus égales à $5-1, 1-1, 4-1, 1-1, 3-1$; par conséquent le nombre

$$P' = A'_1 + A'_2 + A'_3 + A'_4 + A'_5 + A'_6 + A'_7$$

sera inférieur ou égal au nombre

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7$$

et la différence sera au plus égale à

$$2-1+9-1+5-1+1-1+4-1+1-1+3-1,$$

c'est-à-dire au plus égale à la somme S des chiffres du multiplicateur diminuée du nombre p de ces chiffres. D'ailleurs P s'obtient en ajoutant à $A_1 + A_2 + \ldots + A_7$ un nombre au plus égal à $p-1$; donc P pourra s'obtenir en ajoutant à P' un nombre au plus égal à

$$(S-p)+(p-1) = S-1.$$

Ce nombre $S-1$, dans la pratique, est habituellement inférieur à 100; il en sera certainement ainsi si le multiplicateur n'a pas douze chiffres. Si donc dans P et dans P' on supprime les deux derniers chiffres de droite, les deux nombres ainsi obtenus (qui, dans le cas actuel, représenteront des unités composées du 7ᵉ ordre), différeront au plus d'une unité.

Les raisonnements qui précèdent suffisent à justifier la règle que voici:

100. Supposons qu'on ne veuille conserver au produit que les chiffres représentant des unités composées d'ordre $k+2$, au moins. On écrira le multiplicande, puis, au-dessous, le multiplicateur *renversé*, en plaçant le chiffre des unités simples sous le chiffre du multiplicande (complété au besoin par des zéros placés à sa gauche) qui représenterait des unités composées d'ordre k. Pour effectuer chaque produit partiel, on négligera au multiplicande les chiffres placés à droite de la colonne verticale qui contient le chiffre du multiplicateur que l'on emploie : chaque produit partiel ainsi obtenu représente des unités d'ordre k ; on les disposera donc les uns au-dessous des autres de façon que leurs derniers chiffres de droite soient dans une même colonne verticale. On en fera la somme, qui représente aussi des unités d'ordre k. On supprime les deux derniers chiffres, et le nombre ainsi obtenu, qui représente des unités d'ordre $k+2$, est égal au nombre d'unités d'ordre $k+2$ du produit cherché, ou lui est inférieur d'une unité.

Dans le cas choisi comme exemple, on dispose les calculs comme il suit :

$$
\begin{array}{r}
4532169 \\
\underline{2951413} \\
90 \\
4077 \\
22660 \\
45321 \\
1812864 \\
4532169 \\
\underline{135965070} \\
142382251
\end{array}
$$

Le résultat brut représenterait des centaines de mille, il diffère du nombre de centaines de mille du produit cherché d'un nombre inférieur à $3+1+4+1+5+9+2$ ou à 25 ; en ajoutant 25 au nombre précédent on n'altère pas le chiffre des centaines : on est donc certain ici que 1423822 est exactement le nombre de dizaines de millions du produit, tandis que l'application de la règle laisserait un doute sur le dernier chiffre. On voit que le calcul de la somme des chiffres du multiplicateur peut être utile.

Il est à peine utile de dire qu'on se dispense d'écrire les produits partiels qui seraient manifestement nuls.

Je laisse au lecteur le soin de reconnaître que si, dans le produit des deux nombres précédents, on voulait conserver seulement les unités du dixième ordre, il y aurait lieu, en se dispensant d'écrire les chiffres qui ne servent pas, d'adopter la disposition suivante :

$$
\begin{array}{r}
45321 \\
\underline{51413} \\
20 \\
45 \\
1812 \\
4532 \\
\underline{135963} \\
142372
\end{array}
$$

1423 est le nombre d'unités du $10^{\text{ième}}$ ordre du produit.

Exercices.

34. Combien y a-t-il de minutes et de secondes dans un jour, dans une semaine, dans une année ordinaire, dans une année bissextile, dans un siècle?

35. Quel est le carré de 100000001, de 9999999? Quel est le produit de 9999999 par 10000001? Quel est le produit de 9 par la somme des nombres 1, 10, 10^2..., 10^n?

36. On dit à une personne d'écrire trois nombres de cinq chiffres, en annonçant que l'on écrira trois autres nombres, pour former le total 299997. — Il suffit de placer au-dessous de chacun des nombres écrits, des nombres dont les chiffres soient les compléments à 9 des chiffres écrits au-dessus. Le total sera 99999×3.

37. Le carré d'un nombre et le carré de son dernier chiffre sont terminés par le même chiffre. — Le carré d'un nombre ne peut être terminé par l'un des chiffres 2, 3, 7, 8.

38. Séparer les nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 en deux groupes tels que la différence entre les produits obtenus en multipliant les nombres qui figurent dans chaque groupe soit égale à 1.

39. On dit que des nombres forment une progression géométrique si chacun d'eux peut s'obtenir en multipliant le précédent par un même nombre, qui s'appelle *raison* de la progression géométrique. Ainsi les nombres 7, 14, 28, 56, 112 forment une progression géométrique, dont la raison est 2; les nombres 1, 10, 100, 1000, 10000 forment une progression géométrique dont la raison est 10.

Démontrer que dans une progression géométrique le produit de deux termes à égale distance des extrêmes est toujours le même.

40. Dans une progression géométrique de n termes, le carré du produit de tous les termes est égal à la puissance $n^{\text{ième}}$ du produit des termes extrêmes.

41. Si l'on multiplie tous les termes d'une progression géométrique par la raison, on a une nouvelle progression géométrique dont tous les termes figurent dans la précédente, sauf le dernier. De la somme des termes de la seconde progression on retranche la somme des termes de la première : quelle sera la différence?

Soient a, b le premier et le dernier terme d'une progression géométrique, q sa raison, S la somme de ses termes, démontrer que l'on a

$$S(q-1) = bq - a.$$

42. Les candidats, pour un concours, ont deux compositions à faire : chaque composition est notée de 0 à 20; la note de la première est multipliée par 7, la note de la seconde est multipliée par 3, et l'on fait la somme des résultats. Construire une table carrée donnant toutes les sommes possibles, de manière qu'en inscrivant au-dessus de la première ligne horizontale les nombres 0, 1, 2, ..., 20 et ces mêmes nombres en face de la première colonne verticale de gauche, on trouve à l'intersection des rangées verticale et horizontale qui contiennent respectivement, en tête ou à gauche, deux notes quelconques, la somme de ces deux notes respectivement multipliées par 7 et par 3. — Les nombres compris dans une même parallèle à l'une des diagonales du carré sont en progression arithmétique.

43. Étant donnés deux nombres a, b, comment formerait-on une table donnant les diverses valeurs que prend l'expression $ax + by$ quand on y remplace successivement x par les nombres 0, 1, 2, ..., n et y par les nombres 0, 1, 2, ... , n? Ces valeurs, qui sont au nombre de $(n+1)^2$, peuvent être disposées dans les $(n+1)^2$ cases d'un carré, de façon que, en inscrivant au-dessus de la première ligne les valeurs 0, 1, 2, ..., n attribuées à x, à gauche de la première colonne les valeurs 0, 1, 2, ... n attribuées à y, on trouve la valeur de $ax + by$ à l'intersection de la colonne verticale qui porte en haut le nombre x, et de la ligne horizontale qui porte à gauche le nombre y.

Le double de la somme des nombres inscrits dans les $(n+1)^2$ cases du carré est égal à $n(n+1)^2(a+b)$.

44. Sur 7 nombres, on connaît le premier qui est 12, et l'on sait pour les autres que chacun s'obtient en doublant le précédent : quels sont ces 7 nombres?

45. 9 nombres correspondent aux numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. On sait que le premier de ces nombres est 10 et que chacun des autres s'obtient en multipliant par le numéro auquel il correspond celui qui correspond au numéro inférieur : quels sont ces neuf nombres?

46. $u_0, u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_n$ étant des nombres inconnus sauf le premier u_0, et $a_1, a_2, ..., a_n$ des nombres connus, on sait que l'on a $u_1 = a_1 u_0$, $u_2 = a_2 u_1$, et, en général, pour toutes les valeurs de p depuis 1 jusqu'à n,

$$u_p = a_p \, u_{p-1} :$$

démontrer que l'on a

$$u_n = u_0 \, a_1 \, a_2 \ldots a_n. \quad (^1)$$

47. $u_0, u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_n$ étant des nombres inconnus sauf le premier, on sait que l'on a

$$u_1 = u_0 + 1, \quad u_2 = 2u_1 + 1.2, \quad u_3 = 3u_2 + 1.2.3,$$

et en général,

$$u_p = pu_{p-1} + 1.2.3\ldots p.$$

Démontrer que l'on a

$$u_n = (u_0 + n) \times 1.2.3\ldots n.$$

48. Étant donnés deux objets a, b, on peut les ranger de deux manières a et b, b et a; étant donné un troisième objet c, on peut le placer avant a et b, entre a et b, après a et b, ou bien avant b et a, entre b et a ou après b et a; on a ainsi 6 manières de ranger trois objets : *cab*, *acb*, *abc*, *cba*, *bca*, *bac*. Démontrer qu'il y a 24 manières de ranger 4 objets a, b, c, d, et en général que, étant donnés n objets distincts, le nombre de manières différentes de ranger ces objets est égal au produit des n premiers nombres consécutifs, ou à $1.2.3\ldots n$. Ainsi, étant donnés dix soldats, on peut les ranger sur une ligne de 3628800 manières différentes.

49. On considère une table de multiplication donnant les produits de deux nombres quelconques égaux ou inférieurs à a. Démontrer que la somme S de tous les nombres qu'elle contient est égale au carré de la somme des a premiers nombres 1,2, ..., a. On a donc (Ex. 29) :

$$4\,S = a^2\,(a+1)^2.$$

50. Dans une pareille table, la somme des termes qui se trouvent dans la dernière colonne de droite et dans la dernière ligne horizontale, est égale à a^3. En conclure que S est la somme des cubes des a premiers nombres.

51. On écrit sur une ligne les nombres 1, 2, 3, ..., n; au-dessous les nombres 2, 3, 4, ..., $n+1$; au-dessous les nombres 3, 4, 5, ..., $n+2$, et ainsi de suite; dans une dernière ligne les nombres n, $n+1$, $n+2$, ..., $n+n-1$. Démontrer que la somme de tous les nombres écrits est égale à n^3.

52. Dans le carré dont on vient d'expliquer la formation, la somme des nombres qui se trouvent dans la dernière colonne de droite et dans la ligne horizontale du bas est égale à $3n^2 - 3n + 1$. En conclure que le sextuple de la somme des carrés des n premiers nombres 1, 2, ..., n est égal à $n(n+1)(2n+1)$.

53. Étant donnés les nombres $n_1, n_2, ..., n_p$, pris parmi les nombres 1, 2, 3, ..., 9, combien peut-on former de nombres différents de p chiffres dans lesquels le premier chiffre est l'un des nombres 1, 2, 3, ..., n_1; le second, un des chiffres 1, 2, 3, ..., n_2;

1. L'expression $a_1, a_2 \ldots a_n$ représente le produit de *tous* les nombres $a_1, a_2 \ldots$ jusqu'à a_n. — On aura souvent à écrire dans ce qui suit le produit des p premiers nombres, qu'on représentera de même par $1.2.3\ldots p$.

le troisième, un des chiffres 1, 2, 3, ..., n_3; ...., le $p^{\text{ième}}$ chiffre un des nombres 1, 2, 3, ..., n_p? Conclure du résultat que le produit de p facteurs, tous inférieurs à 10, est indépendant de l'ordre de ces facteurs. Généraliser ce mode de démonstration. — On observera qu'elle ne suppose pas que les nombres $n_1, n_2, ..., n_p$ soient tous différents.

54. n étant un nombre donné, on demande de démontrer que le nombre de solutions de l'équation

$$x + y + z = n,$$

multiplié par 2, est égal à $(n + 1)(n + 2)$. (Ex. 19.)

55. En désignant par (n, p) le produit des p nombres consécutifs $n + 1$, $n + 2$, ..., $n + p - 1$, $n + p$, démontrer que l'on a

$$(n, p) = (n, p - 1) \times p + (n - 1, p).$$

Déduire de là que le produit (n, p) est égal au produit par p de la somme de n produits dont chacun est un produit de $p - 1$ nombres consécutifs; le premier produit commence par le facteur 1, le second par le facteur 2, ..., le dernier par le facteur n. En d'autres termes on a

$$(n, p) = p \times \left[(0, p - 1) + (1, p - 1) + (2, p - 1) + \ldots + (n, p - 1)\right],$$

ou encore

$$\begin{aligned}&(n+1)(n+2)\ldots(n+p)\\ &= p\left[1.2.\ldots(p-1) + 2.3.\ldots p + 3.4.\ldots(p+1) + \ldots\ldots + (n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)\right].\end{aligned}$$

56. n étant un nombre donné, on demande de démontrer que le nombre de solutions de l'équation à $p + 1$ inconnues $x_1, x_2, ..., x_{p+1}$,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{p+1} = n,$$

multiplié par le produit 1.2.3. ... p des p premiers nombres entiers, est égal à $(n + 1)(n + 2)\ldots(n + p)$.

57. Étant donnés les $2n$ nombres $a_1, a_2, ..., a_n$; $b_1, b_2, ..., b_n$, parmi lesquels les n premiers sont rangés par ordre de grandeur décroissante, on propose de démontrer que si l'on pose

$$\begin{aligned}&S_1 = b_1, \quad S_2 = b_1 + b_2, \quad S_3 = b_1 + b_2 + b_3, \ldots,\\ &S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,\end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned}&a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\\ &= (a_1 - a_2) S_1 + (a_2 - a_3) S_2 + \ldots + (a_{n-1} - a_n) S_{n-1} + a_n S_n.\end{aligned}$$

Démontrer aussi que l'on a

$$a_1 S_1 < a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n < a_1 S_n.$$

58. Dans la suite de l'exercice 20, le carré d'un terme quelconque est égal au produit des deux termes qui le comprennent diminué de un, ou augmenté de un. — Distinguer les deux cas.

59. Si l'on désigne par $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ les termes de la suite de l'exercice 20 et si l'on désigne par $v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots$, les termes $v_0 = a$, $v_1 = b$, $v_2 = a + b$, $v_3 = a + 2b$, ..., d'une suite analogue dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent et dans laquelle les deux premiers termes sont a et b, on aura

$$v_n = u_{n-1} a + u_n b.$$

Dans la suite de l'exercice 20 elle-même, on a, quels que soient les nombres n et p,

$$u_{n+p-1} = u_{n-1} u_{p-1} + u_n u_p.$$

Tout terme d'indice impair u_{2k+1} est la somme des carrés de deux termes consécutifs u_k, u_{k+1}.

60. En développant les expressions $(x+a)^2$, $(x+a)^3$, $(x+a)^4$, on trouve :

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3,$$
$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4.$$

En adoptant les notations de l'exercice 22, ces formules sont toutes contenues dans la suivante :

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 ax^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \dots + C_n^p a^p x^{n-p} + \dots + C_n^n a^n.$$

Montrer que cette formule est vraie quel que soit n ; il suffira pour cela de montrer que si elle est vraie pour le nombre n, elle est vraie pour le nombre $n+1$.

61. Si l'on donne deux suites de nombres, qui en contiennent autant l'une que l'autre, dans quel ordre doit-on les disposer pour que la somme des produits obtenus en multipliant les nombres correspondants soit la plus grande possible ?

§ 4. — Division.

101. La division a été définie au n° 31. Des explications qui ont été données là, il résulte qu'on peut encore adopter la définition suivante :

Étant donnés deux nombres a, b, *appelés dividende et diviseur, la division a pour but de trouver deux nombres* q *et* r, *appelés quotient et reste, tels que l'on ait*

$$a = bq + r, \qquad r < b.$$

Les raisonnements du n° 31 montrent que lorsque l'on se donne les deux nombres a, b dont le second n'est pas nul, il existe toujours un système de nombres q et r vérifiant ces conditions, et qu'il n'en existe qu'un ; ils donnent aussi le moyen de les trouver. Au surplus, on peut encore raisonner et procéder comme il suit :

Étant donnés les nombres a, b, on forme une table des multiples successifs de b, c'est-à-dire des produits obtenus en multipliant b par par 0, 1, 2, 3, ... ; pour cela, on pourra faire comme il a été expliqué au n° 92 ; les nombres inscrits dans cette table forment (n° 68) une progression arithmétique *indéfinie*

$$0,\ b,\ 2b,\ 3b,\ \dots,$$

c'est-à-dire dans laquelle chaque terme est suivi d'un autre ; ils vont en augmentant de b à chaque fois ; ils finiront par dépasser a ; nous supposerons que la table ait été poussée jusque-là. Deux cas peuvent alors se présenter :

1° a figure dans la table précédente. Alors il existe un nombre q, tel que l'on ait

$$a = bq;$$

ce nombre q et le nombre $r = 0$ satisfont aux conditions imposées au quotient et au reste : ils sont les seuls, puisque la différence entre a ou bq et n'importe quel autre terme de la table est au moins égale à b.

2° a ne figure pas dans la table, alors il tombe entre deux termes consécutifs de cette table ; la différence entre a et l'un ou l'autre des termes de la table est inférieure à b ; pour tout autre terme de la table, cette différence est plus grande que b (n° 69).

Si bq et $bq + b = b(q + 1)$ sont les deux termes de la table qui comprennent a, on aura bien, en désignant par r la différence entre a et bq, l'égalité

$$a = bq + r, \quad r < b,$$

et il est clair que a et b étant donnés, q et r sont les seuls nombres qui satisfont à ces conditions.

Dans le cas 1°, où le reste est nul, on emploie indifféremment les expressions suivantes : a est un multiple de b, est divisible par b ; b est un diviseur ou un sous-multiple de a; la division de a par b se fait exactement.

102. Dans beaucoup de questions, c'est le *quotient* surtout qui importe. Il résulte de ce qu'on vient de dire que q sera le quotient de la division de a par b si l'on a

$$bq \leqq a < b(q + 1).$$

Il est clair que les inégalités qui précèdent entraînent les suivantes :

$$bq \leqq a, \qquad a + 1 \leqq b(q + 1):$$

car si $b(q + 1)$ est plus grand que a, il est au moins égal à $a + 1$; inversement, les secondes inégalités entraînent les premières, car si $b(q + 1)$ est supérieur ou égal à $a + 1$, il est certainement plus grand que a. Ainsi les secondes inégalités, comme les premières, expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que q soit le quotient de la division de a par b.

103. Si l'on a entre les nombres a, b, q, r, la relation

$$a = bq + r,$$

on ne peut affirmer que q est le quotient de la division de a par b que dans le cas où r est plus petit que b : dans le cas où r est supérieur ou égal à b, si l'on désigne par q' le quotient de la division de r par b, et par r' le reste de la même division, on aura

$$r = bq' + r'$$

et par suite

$$a = bq + bq' + r' = b(q + q') + r';$$

puisque r' est plus petit que b, cette égalité montre que le quotient de la division de a par b est $q + q'$ et que le reste est r'. On voit ainsi qu'une relation telle que

$$a = bq + r,$$

dans le cas où elle n'exprime pas que q est le quotient de la division de a par b, permet de simplifier la recherche de ce quotient, dont on connaît en quelque sorte une partie q ; pour avoir l'autre partie q', il reste à diviser par b un nombre r, plus petit que a.

104. Diviser un nombre a successivement par les nombres $b, c, d, \ldots$, c'est diviser a par b ; puis diviser le quotient par c ; puis le quotient de cette nouvelle division par d, etc....

Si on divise un nombre a successivement par plusieurs autres, le dernier quotient obtenu est aussi le quotient de la division du nombre a par le produit des nombres que l'on a successivement employés comme diviseurs.

1° Les divisions successives se font exactement : dans ce cas, le nombre a est divisible par le produit des nombres employés comme diviseurs.

Par exemple, si l'on divise 13260 par 17, la division se fait exactement et le quotient est 780 ; c'est-à-dire que l'on a

$$13260 = 17 \times 780;$$

si l'on divise 780 par 13, la division se fait exactement et le quotient est 60, c'est-à-dire que l'on a

$$780 = 13 \times 60;$$

si l'on remplace dans la première égalité 780 par 13×60, il vient

$$13260 = 17 \times (13 \times 60) = 17 \times 13 \times 60;$$

cette dernière égalité montre que 13260 est divisible par le produit 17×13, et que le quotient est 60. Ainsi, au lieu de diviser 13260 successivement par 17 et 13, on peut le diviser d'un seul coup par le produit 17×13, le quotient sera toujours 60. — Si l'on divise

60 par 12, la division se fait exactement et le quotient est 5, c'est-à-dire que l'on a

$$60 = 12 \times 5\,;$$

en remplaçant 60 par 12×5, on a

$$13260 = 17 \times 13 \times 12 \times 5,$$

et cette égalité montre, d'une part que 13260 est divisible par le produit $17 \times 13 \times 12$, et d'autre part que l'on parvient au même quotient 5, soit que l'on divise successivement 13260 par 17, 13 et 12, soit qu'on le divise en une fois par le produit $17 \times 13 \times 12$. Il est clair que le raisonnement peut se continuer, quel que soit le nombre de divisions successives à effectuer.

2° Plaçons-nous maintenant dans le cas général. Sa démonstration peut être calquée sur le procédé qui nous a servi à exposer la numération écrite, laquelle repose au fond sur une succession de divisions par 10.

Supposons qu'on ait à diviser 13283 successivement par 12, 17 et 14; le quotient de la division de 13283 par 12 est 1106 et le reste est 11, c'est-à-dire que l'on a

$$13283 = 12 \times 1106 + 11\,;$$

le quotient de la division de 1106 par 17 est 65 et le reste 1, c'est-à-dire que l'on a

$$1106 = 17 \times 65 + 1\,;$$

le quotient de la division de 65 par 14 est 4 et le reste est 9, c'est-à-dire que l'on a

$$65 = 14 \times 4 + 9.$$

Ceci posé, imaginons que l'on ait un tas de 13283 grains de blé; distribuons les grains dans des sacs blancs contenant chacun 12 grains; on aura 1106 pareils sacs, que l'on appellera sacs du *premier ordre*, et il restera 11 grains que nous placerons à part dans un premier sac bleu. Prenons les 1106 sacs blancs du premier ordre, rangeons-les 17 par 17, et plaçons chaque tas de 17 sacs du premier ordre dans un sac blanc du second ordre; on aura 65 sacs du second ordre, et il restera 1 sac du premier ordre que nous mettrons dans un second sac bleu, à côté du premier sac bleu. Prenons les 65 sacs blancs du second ordre, rangeons-les 14 par 14, et mettons chaque tas de 14 sacs du second ordre dans un sac blanc du troisième ordre; on aura ainsi 4 sacs du troisième ordre et il restera 9 sacs du second ordre que l'on placera dans un troisième sac bleu, à côté des deux premiers. L'opération est terminée.

Dans tous les sacs bleus, il n'y a pas de quoi remplir un sac du troisième ordre ; dans le premier, en effet, il n'y a pas de quoi remplir un sac du premier ordre, il y a 11 grains au plus ; dans le second sac bleu, il y a au plus 16 sacs du premier ordre, et, en ajoutant ce qu'il y a dans le premier sac bleu, on ne trouve pas encore de quoi faire 17 sacs du premier ordre, c'est-à-dire un sac du second ordre ; de même enfin, dans le troisième sac bleu il y a au plus 13 sacs du second ordre ; on n'arrivera pas à en faire 14, c'est-à-dire un sac du troisième ordre, même en ajoutant ce qu'il y a dans les deux premiers sacs bleus.

Ainsi les 13283 grains ont été partagés en deux parties : 1° les 4 sacs du troisième ordre ; 2° ce qu'il y a dans les sacs *bleus*, dont l'ensemble ne vaut pas un sac du troisième ordre.

Or un sac du premier ordre contient 12 grains ; un sac du second ordre contient 17 sacs du premier, et par suite 12×17 grains ; un sac du troisième ordre contient 14 sacs du second, et par suite $12 \times 17 \times 14$ grains.

Donc 13283 grains se composent de 4 fois $12 \times 17 \times 14$ grains, et d'un nombre de grains (contenus dans les sacs bleus) inférieur à $12 \times 17 \times 14$; donc, enfin, le quotient de 13283 par $12 \times 17 \times 14$ est 4, comme le dernier quotient des divisions successives de 13283 par 12, 17 et 14.

Nous avons tenu à présenter la démonstration sous une forme concrète, afin de permettre au lecteur de généraliser la théorie de la numération écrite ; mais la proposition que nous avons en vue ici peut s'établir d'une façon plus brève, au moins en apparence.

Soit a un nombre que l'on divise successivement par b, c, d. Soient q, q', q'' les quotients successifs ; on aura (n° 102)

$$a \geqq bq,$$
$$q \geqq cq',$$
$$q' \geqq dq'';$$

en remplaçant dans la première inégalité q par le nombre inférieur ou égal cq', on ne fera qu'accentuer l'inégalité ; on aura donc

$$a \geqq bcq';$$

en remplaçant de même, dans cette inégalité, q' par dq'', on aura

$$a \geqq bcdq''.$$

On aura aussi

$$a + 1 \leqq b(q + 1),$$
$$q + 1 \leqq c(q' + 1),$$
$$q' + 1 \leqq d(q'' + 1);$$

en remplaçant, dans la première inégalité, $q+1$ par $c(q'+1)$, on aura

$$a + 1 \leqq bc(q' + 1),$$

et, en remplaçant, dans cette inégalité, $q'+1$ par $d(q''+1)$, on aura

$$a + 1 \leqq bcd(q'' + 1).$$

Les deux inégalités

$$a \geqq bcdq'', \quad a + 1 \leqq bcd(q'' + 1)$$

montrent que q'' est le quotient de la division de a par le produit bcd; c'est ce qu'il fallait démontrer.

Il résulte du théorème qui fait l'objet de ce numéro et de la proposition relative à la possibilité d'intervertir l'ordre des facteurs d'un produit que *si l'on divise un nombre successivement par plusieurs autres, on obtient le même quotient final, quel que soit l'ordre dans lequel on effectue les divisions.*

105. Il reste à expliquer le mécanisme de la division; le problème est le suivant :

Deux nombres étant écrits dans le système décimal, écrire, dans ce même système, le quotient et le reste de la division du premier par le second.

Il y a un cas où la réponse est immédiate; c'est celui où le diviseur est égal à l'unité suivie de zéros.

Soit, par exemple, à diviser 83728 par 1000; l'égalité

$$83728 = 1000 \times 83 + 728$$

montre que le quotient cherché est 83 et le reste 728 (nº 38).

Pour diviser un nombre par l'unité suivie de plusieurs zéros, on supprime à la droite de ce nombre autant de chiffres qu'il y a de zéros dans le diviseur : le nombre restant est le quotient; le reste est le nombre formé par l'ensemble des chiffres supprimés.

106. Je distinguerai maintenant trois cas.

1° Le diviseur et le quotient n'ont qu'un chiffre; on s'assurera que l'on est dans ce cas en ajoutant un zéro à la droite du diviseur : si le nombre ainsi formé est plus grand que le dividende, c'est que le diviseur n'est pas contenu 10 fois dans le dividende, c'est donc que le quotient n'a qu'un chiffre. Il est à peine utile de dire qu'on a supposé le dividende supérieur ou égal au diviseur, afin que le quotient ne soit pas nul.

Soit, par exemple, à diviser 75 par 9 ; la table de multiplication fournit les multiples successifs de 9 par les nombres d'un chiffre ; on voit de suite que 75 est compris entre $72 = 9 \times 8$ et $81 = 9 \times 9$, c'est donc que 8 est le quotient ; le reste s'obtient en retranchant 72 de 75, il est 3.

L'habitude permet de faire, dans ce cas, l'opération avec une grande rapidité.

2° Le diviseur a plusieurs chiffres, et le quotient n'en a qu'un.

On s'assure encore qu'on est dans ce cas, en constatant que, en ajoutant un zéro à la droite du diviseur, on obtient un nombre supérieur au dividende.

L'opération se fait par tâtonnement ; les remarques qui suivent tendent seulement à diminuer le nombre des essais.

Soit, par exemple, à diviser 2361 par 458. On est bien dans le cas considéré, puisque 4580 est supérieur à 2361.

Si l'on divisait 2361 par 400 au lieu de le diviser par 458, on ne pourrait évidemment qu'augmenter le quotient, car 400 est contenu dans 2361 au moins autant de fois que 458. Pour diviser 2361 par 400 ou par 100×4, on peut le diviser successivement par 100 et par 4 (n° 104).

Le quotient de la division de 2361 par 100 est 23 ; il reste à diviser 23 par 4 ; on est dans le premier cas : le quotient est 5, 5 est aussi le quotient de la division de 2361 par 400 ; le quotient de la division de 2361 par 458 est 5 ou un chiffre plus faible : on dit que 5 est une *limite supérieure* du quotient de la division de 2361 par 458.

De même, si l'on divisait 2361 par 500 au lieu de le diviser par 458, on ne pourrait évidemment que diminuer le quotient ; le quotient de 2361 par 500 est le même que le quotient de 23 par 5, c'est 4 ; le quotient de la division de 2361 par 458 est 4 ou un chiffre plus faible : 4 est une *limite inférieure* du quotient de la division de 2361 par 458.

On essaie 5 en faisant le produit de 458 par 5, ce qui donne 2290, nombre inférieur à 2361 ; 2361 contient 5 fois 458 et ne le contient pas davantage : 5 est le quotient, le reste est $2361 - 2290 = 71$.

Soit, comme second exemple, à diviser 989 par 199 ; en suivant le même procédé, on est amené à diviser 989 par 100, le quotient est 9 ; pour essayer 9 on multiplie 199 par 9, le produit est 1791 : 9 est trop *fort*; le quotient cherché est 8 ou un nombre moindre; on essaie 8 de la même façon, on a $199 \times 8 = 1592$; 1592 est plus grand que 989; 8 est trop fort; on essaiera 7 : on a $199 \times 7 = 1393$; 7 est trop fort; $199 \times 6 = 1194$; 6 est encore trop fort; $199 \times 5 = 995$; 5 est encore trop fort; $199 \times 4 = 796$: 796 étant inférieur à 989, on voit que le quotient est 4 et le reste $989 - 796 = 193$. En faisant les essais de cette façon, c'est-à-dire en diminuant à chaque fois d'une unité le chiffre à essayer, on est sûr que le premier chiffre qui fournira un produit inférieur ou égal au dividende sera le quotient cherché. L'exemple précédent, qui est particulièrement défavorable, montre qu'on peut avoir à faire cinq essais inutiles. Ces essais, à la vérité, on ne les fait pas ordinairement jusqu'au bout; on fait porter les multiplications sur les deux premiers chiffres du diviseur et l'on compare le résultat aux premiers chiffres du dividende; pour essayer 7, par exemple, on dira 7 fois 9 font 63, 7 fois 1 font 7 et 6 font 13; le produit de 199 par 7 contiendra au moins 13 centaines, il sera donc supérieur à 989, qui n'en contient que 9. 7 est donc un chiffre trop fort. Quoi qu'il en soit, on peut être amené à essayer un chiffre dont on juge, sans en être sûr, qu'il n'est pas trop fort. On s'en assurera en constatant que le produit du diviseur par ce chiffre peut se retrancher du dividende et que le reste est inférieur au diviseur.

Pour avoir, dans l'exemple précédent, une limite inférieure du quotient, on diviserait 989 par 200 : le quotient est 4; la limite inférieure se trouve être le chiffre cherché.

Soit encore à diviser 12725 par 1984 : on divisera d'après le procédé indiqué 12725 par 1000, ce qui donnerait pour quotient 12; puisque le quotient cherché ne peut avoir qu'un chiffre, il sera évidemment inutile d'essayer 12, 11, 10 ; on commencera les essais à 9 : le quotient est 6.

Règle. — Quand le quotient n'a qu'un chiffre, on supprime à droite du dividende autant de chiffres qu'il y en a au diviseur, moins un; on divise le nombre restant [1] par le premier chiffre du diviseur; si le quotient n'a qu'un chiffre, ce chiffre est une limite supérieure du quotient cherché ; si le quotient trouvé est supérieur à 9, on prendra 9 pour cette limite supérieure. On *essaie* le chiffre trouvé comme limite supérieure en multipliant le diviseur par ce chiffre ; il est le chiffre cherché si le produit est égal ou inférieur au dividende, et le reste est égal à la différence entre le dividende et ce produit. Si le

1. Il est aisé de voir que ce nombre restant n'a qu'un ou deux chiffres.

produit est plus grand que le dividende, on diminue d'une unité le chiffre à essayer, et l'on a ainsi une nouvelle limite supérieure du quotient cherché, que l'on traite de la même manière.

On obtient une limite inférieure du quotient cherché en divisant le nombre conservé à la gauche du dividende par le premier chiffre du diviseur augmenté d'une unité.

Pour obtenir le reste on fait souvent à la fois la multiplication du diviseur par le chiffre qu'on essaie au quotient et la soustraction de ce produit; nous n'insisterons pas sur l'explication de ce procédé qui n'est applicable que si le chiffre que l'on essaie est bon, et qui, même dans ce cas, est une cause d'erreur qu'il vaut mieux écarter.

Remarque. — La méthode qui sert à faire les essais dans ce cas repose sur la proposition générale que voici :

Soient, dans une division, a, b, q *le dividende, le diviseur et le quotient : supposons qu'on supprime à la droite de* a *et de* b *un même nombre de chiffres et soient* a' *et* b' *les nombres ainsi obtenus ; le quotient de* a' *par* b' *sera égal ou supérieur à* q; *le quotient de la division de* a' *par* $b'+1$ *sera égal ou inférieur à* q.

La démonstration est la même que dans le cas particulier que l'on a considéré; soient en effet, par exemple,

$$a = 758235,\ b = 8397,\ a' = 7582,\ b' = 83.$$

Si, au lieu de diviser a par b on le divise par 8300 ou 8400, on ne pourra, dans le premier cas, qu'augmenter le quotient, dans le second, que le diminuer; mais, pour diviser a par 100×83, ou par 100×84, on peut le diviser d'abord par 100, ce qui donne comme quotient $a' = 7582$, puis diviser a' par 83, ou par 84.

3° Le diviseur et le quotient ont plusieurs chiffres. On détermine le quotient chiffre par chiffre, en commençant par les plus hautes unités. La méthode repose sur le théorème suivant :

Pour obtenir le nombre de dizaines, de centaines, de mille,... du quotient, il suffit de diviser par le diviseur le nombre de dizaines, de centaines, de mille,... du dividende.

Je dis, par exemple, que le nombre de mille du quotient s'obtiendra en divisant par le diviseur le nombre de mille du dividende.

Supposons que le nombre de mille du quotient soit 23; cela veut dire que le diviseur est contenu 23000 fois dans le dividende, et qu'il n'est pas contenu 24000 fois; mais 23000 fois le diviseur et 24000 fois le diviseur sont respectivement des nombres exacts de mille, nombres que l'on obtient en multipliant le diviseur par 23 et par 24, et dont le premier doit être contenu dans le nombre de mille du dividende, tandis que le second n'y est pas contenu; ceci veut dire que 23 est le quotient de la division par le diviseur du nombre de mille du dividende.

Ainsi, dans la division de 187772893 par 941, pour avoir le nombre de mille du quotient, il suffira de diviser 187772 par 941.

Cette proposition et la remarque faite au n° 103, sur le cas où l'on a séparé le dividende en deux parties dont l'une est un multiple du diviseur, contiennent l'explication du mécanisme de la division.

Soit, par exemple, à diviser 228606 par 325 : si l'on voulait avoir les dizaines du quotient, on diviserait 22860 par 325 ; si l'on voulait avoir les centaines, on diviserait 2286 par 325; mais ici le quotient n'aurait qu'un chiffre ; on voit donc que le chiffre des plus hautes unités du quotient représente des centaines, et l'on obtiendra le chiffre de ces centaines en divisant 2286 par 325 ; on est ici dans le 2^e cas : le quotient est 7 et le reste, obtenu en retranchant de 2286 le produit $325 \times 7 = 2275$, est 11 ; c'est le premier *reste partiel*; le produit du diviseur 325 par 700 serait 227500, et pour obtenir la différence entre 228606 et 227500, il est clair qu'il suffit d'ajouter à la droite du premier reste partiel 11 les deux derniers chiffres 06 du dividende, ce qui donne 1106. On a séparé le dividende en deux parties, l'une égale à 325×700, l'autre à 1106 : on obtiendra donc le quotient de la division de 228606 par 325 en ajoutant à 700 le quotient de la division de 1106 par 325 ; ce quotient est certainement inférieur à 100, car autrement 228606 contiendrait 325 au moins 800 fois : son premier chiffre représentera des dizaines ; on obtiendra ce chiffre en divisant les dizaines de 1106 par 325, c'est-à-dire 110 par 325 ; ici le quotient est 0 et le reste 110 ; le chiffre des unités s'obtiendra en divisant 1106 par 325; on est dans le premier cas, car autrement le quotient de la division de 1106 par 325 aurait contenu des dizaines. En divisant 1106 par 325 on trouve comme quotient 3, le reste est $1106 - 325 \times 3 = 1106 - 975 = 131$: le quotient de la division de 228606 par 325 est 703, et le reste 131. On dispose l'opération comme il suit :

$$
\begin{array}{r|l}
228606 & 325 \\ \cline{2-2}
\underline{2275} & 703 \\
1106 & \\
\underline{975} & \\
131 &
\end{array}
$$

107. Ces explications justifient la règle suivante :

Pour diviser un nombre a par un nombre b, on écrit sur une même horizontale le dividende à gauche, le diviseur à droite ; on les sépare par un trait vertical ; sous le diviseur, on trace un trait horizontal ; c'est sous ce trait qu'on placera le quotient chiffre par chiffre. On sépare à la gauche de a un nombre tel que le quotient de la division de ce nombre par b ait un chiffre et n'en ait qu'un, ou, comme l'on dit, un nombre qui contienne b et qui ne le contienne pas dix fois : ce nombre est le premier dividende partiel. L'ordre des unités qu'exprime au dividende le dernier chiffre de ce dividende partiel est l'ordre des plus hautes unités du quotient : le quotient de la division du premier dividende partiel par le diviseur, est le premier chiffre du quotient ; on fait le produit du diviseur par ce chiffre et on écrit ce produit au-dessous du premier dividende partiel, de manière que les unités de même ordre se correspondent ; on tire un trait sous le produit et l'on écrit au-dessous la différence entre le premier dividende partiel et ce produit ; cette différence est le premier reste partiel ; on forme le second dividende partiel en plaçant, à droite de ce reste, le premier des chiffres négligés au dividende, ou, comme l'on dit, en abaissant ce chiffre ; en plaçant, au dividende, un point au-dessus du chiffre qu'on a abaissé, on se souviendra que c'est à ce chiffre qu'on est resté ; le quotient de la division du second dividende partiel par le diviseur donne le second chiffre du quotient ; on écrit au-dessous du second dividende partiel le produit du diviseur par ce second chiffre, on tire un trait, on écrit au-dessous la différence entre le second dividende partiel et ce produit ; cette différence est le second reste partiel ; à droite on abaisse le chiffre du dividende qui suit celui qu'on vient d'abaisser et l'on forme ainsi le troisième dividende partiel, qui fournira de même le troisième chiffre du quotient, etc. ; quand on aura abaissé le dernier chiffre du dividende, on aura formé le dernier dividende partiel, qui, divisé par le diviseur, donne le chiffre des unités du quotient. En retranchant de ce dernier dividende partiel le produit du diviseur par ce chiffre, on obtient le dernier reste partiel qui est aussi le reste de la division. Il est à peine utile de dire que lorsqu'on est amené à écrire au quotient quelques zéros, la multiplication et la soustraction correspondantes se font sans aucune écriture.

108. Lorsque l'opération comporte un assez grand nombre de chiffres au quotient, il est très avantageux de former, comme on l'a expliqué au n° 92, une table des neuf premiers multiples du diviseur ; cette table permet de supprimer les essais dans chaque division partielle ; elle fournit à coup sûr le chiffre correspondant du quotient et réduit ainsi l'opération à une suite de soustractions.

Voici un exemple d'une division faite ainsi, en utilisant la table du n° 92 :

```
      . . . . . . . .
7 8 5 4 3 2 1 7 8 6 5 4 3 | 9 8 7 5 6
6 9 1 2 9 2               |------------------
-----------               | 7 9 5 3 2 6 0 3
  9 4 1 4 0 1
  8 8 8 8 0 4
  -----------
    5 2 5 9 7 7
    4 9 3 7 8 0
    -----------
      3 2 1 9 7 8
      2 9 6 2 6 8
      -----------
        2 5 7 1 0 6
        1 9 7 5 1 2
        -----------
          5 9 5 9 4 5
          5 9 2 5 3 6
          -----------
            3 4 0 9 4 3
            2 9 6 2 6 8
            -----------
              4 4 6 7 5
```

109. La preuve de l'opération se fait en multipliant le diviseur par le quotient et en ajoutant le reste au produit ; on doit retrouver le dividende, comme somme.

110. Lorsque le diviseur n'a qu'un chiffre, on n'adopte pas la disposition précédente. On se contente d'écrire le dividende et, au fur et à mesure, les chiffres du quotient, obtenus au fond toujours par le même procédé, mais sans écrire ni les produits partiels, ni les restes partiels. Soit, par exemple, à diviser 97042256 par 7. On dira : le quotient pour 9 est 1 et il reste 2 ; le quotient pour 27 est 3 et il reste 6 ; le quotient pour 60 est 8 et il reste 4 ; le quotient pour 44 est 6 et il reste 2 ; le quotient pour 22 est 3 et il reste 1 ; le quotient pour 12 est 1 et il reste 5 ; le quotient pour 55 est 7 et il reste 6 ; le quotient pour 66 est 9 et il reste 3 ; le quotient est donc 13863179 et le reste 3. Avec un peu d'habitude, on peut même faire de cette façon les divisions par un nombre de deux chiffres.

111. Nous avons à faire sur la division quelques observations analogues à celles que nous avons faites sur la multiplication.

Soient a le dividende et b le diviseur ; désignons par n et p leurs nombres de chiffres. Pour effectuer la division, on sépare d'abord un nombre qui contienne b sans le contenir dix fois : ce premier dividende partiel a p ou $p+1$ chiffres; il fournira un chiffre au quotient; chacun des $n-p$ ou $n-p-1$ chiffres restant au dividende fournira aussi un chiffre : il y aura au quotient $n-p-1$ ou $n-p$ chiffres.

112. Examinons ce qui arrive quand on augmente le diviseur d'une unité.

Soient q et r le quotient et le reste, on a :

$$a = bq + r = (b+1)q + r - q;$$

si r est égal ou supérieur à q, $r-q$ manifestement inférieur à $b+1$ sera le reste de la division de a par $b+1$, le quotient sera q; si r est plus petit que q, le quotient de la division de a par $b+1$ sera certainement inférieur à q. Donc :

La condition nécessaire et suffisante pour que le quotient d'une division ne change pas quand on augmente le diviseur d'une unité est que le reste soit au moins égal au quotient.

Si r est plus petit que q, mais si l'on sait que q est au plus égal à b, il est aisé de vérifier que le quotient de la division de a par $b+1$ est $q-1$; en effet, l'égalité $a = bq + r$ entraîne la suivante :

$$a = (b+1)(q-1) + b + 1 - (q-r),$$

et l'on voit que $b+1-(q-r)$ est inférieur à $b+1$, puisque $q-r$ est au moins égal à un.

Donc, dans tous les cas, si le quotient ne dépasse pas le diviseur, en augmentant ce diviseur d'une unité, on obtiendra le même quotient, peut-être diminué d'une unité. Si le dernier chiffre du quotient, dans la première opération, n'est pas un zéro, on est sûr que les chiffres précédents seront les mêmes dans les deux opérations.

Ces remarques s'appliquent évidemment aux divisions partielles que l'on a à effectuer dans les divisions de a par b ou par $b+1$.

1° Quand on divise a par b, tant que les restes partiels sont supérieurs ou égaux à la partie écrite au quotient, on est sûr que les chiffres obtenus au quotient sont les mêmes que les chiffres correspondants dans la division de a par $b+1$.

2° Quand on divise a par b, tant que la partie écrite au quotient ne dépasse pas b, on est sûr que le nombre écrit au quotient est le même que le nombre correspondant dans la division de a par $b+1$, ou que le second nombre est égal au premier diminué d'une unité.

113. Si dans le diviseur on remplaçait les k derniers chiffres par des zéros, on ne pourrait qu'augmenter le quotient; mais si en faisant cette nouvelle division, on s'arrête avant que la partie écrite au quotient dépasse le diviseur, on est sûr que cette partie est égale à la partie correspondante du quotient véritable, ou à cette partie augmentée d'une unité de l'ordre du dernier chiffre. On est toujours certain qu'il en est ainsi tant que le quotient aura un chiffre de moins que le diviseur. — On n'aura aucun doute sur l'exactitude des chiffres trouvés, si le dernier reste est supérieur à la partie écrite au quotient.

Soit, en effet, à diviser 1898765 par 48579. D'après une remarque qui a été faite au nº 106, le quotient cherché est au plus égal au quotient de la division de 1898765 par 48500 et au moins égal au quotient de la division de 1898765 par 48600; tant que les deux divisions fourniront les mêmes chiffres au quotient, ces chiffres seront *exacts;* si l'on effectue la division de 18987 par 485, tant que la partie écrite au quotient ne dépassera pas 485, on sera assuré que cette partie sera égale à la partie correspondante du quotient de la division par 486 ou à cette partie augmentée d'une unité. Sauf cette erreur possible d'une unité, qui ne porte d'ordinaire que sur le dernier chiffre, cette partie sera donc la même que la partie correspondante du quotient dans la division de 1898765 par 48579; l'opération est faite ci-dessous :

$$\begin{array}{r|l}
18987 & 485 \\
\underline{1455} & \overline{39} \\
4437 & \\
\underline{4365} & \\
72 &
\end{array}$$

Le reste 72 est ici plus grand que la partie écrite au quotient; les deux chiffres 3, 9 sont sûrement exacts; ils seront les deux premiers chiffres du quotient de la division de 1898765 par 48579 : 39 est le nombre de centaines du quotient de cette division.

On voit comment cette méthode permet de simplifier la recherche des premiers chiffres du quotient dans une division.

Exemple. Trouver les huit premiers chiffres du quotient de la division de 10^{20} par 3141592653589.

On veut avoir 8 chiffres au quotient : conservons-en 9 au diviseur, le quotient sera certainement inférieur au diviseur : en calculant les 8 premiers chiffres du quotient de la division de 10^{20} par 3141592650000, ou de 10^{16} par 314159265, on sera sûr de ces 8 chiffres, sauf l'erreur possible d'une unité sur le dernier. On trouve comme quotient 31830988 et comme reste 20596180 : ce reste étant supérieur à la partie écrite au quotient, il n'y a, ici encore, aucun doute sur l'exactitude des huit chiffres.

114. On pourra établir d'une façon analogue la proposition suivante :

Lorsque, dans une division, le quotient est inférieur d'au moins deux unités au diviseur, en diminuant le diviseur d'une unité, on augmente au plus le quotient d'une unité.

Exercices.

62. Sachant que l'on a

$$1040318228677 = 2870561 \times 362407 + 5741129,$$

trouver le quotient et le reste de la division du nombre 1040318228677 soit par 2870564, soit par 362407.

63. Sachant que l'on a

$$1040384968947 = 2870764 \times 362407 - 1,$$

trouver le quotient et le reste de la division du nombre qui figure au premier membre de cette égalité soit par 2870761, soit par 362407.

64. Un marchand de vin a acheté 537 litres de vin pour 300 francs; il veut le revendre au détail, en vendant chaque litre pour un prix qui soit un nombre exact de pièces de cinq centimes ; il désire que son bénéfice ne dépasse pas 50 francs, mais s'en rapproche le plus possible. Combien devra-t-il vendre chaque litre, et quel sera son bénéfice?

Même question en supposant qu'il veuille que son bénéfice soit au moins égal à 50 francs, mais dépasse cette somme le moins possible.

65. Démontrer que avec une pièce de 1 franc, deux pièces de 2 francs, une pièce de 5 francs, deux pièces de 10 francs, une pièce de 20 francs, un billet de 50 francs, neuf billets de 100 francs, on peut payer n'importe quelle somme inférieure ou égale à 1000 francs.

66. Un professeur fait 4 classes par semaine, des jours déterminés, sans en faire deux le même jour. Combien de classes aura-t-il faites au moins et au plus en 130 jours.

67. Trouver deux nombres, connaissant leur somme et leur différence.

68. Le nombre des termes d'une progression arithmétique s'obtient en divisant la différence des termes extrêmes par la raison et en ajoutant 1 au résultat.

69. On ne change pas le quotient d'une division en augmentant le dividende d'un nombre moindre que la différence entre le diviseur et le reste.

70. Lorsque, dans une division, la somme du quotient et du reste est inférieure au diviseur diminué d'une unité, on ne change pas le quotient en diminuant le diviseur d'une unité.

71. Si l'on divise les nombres consécutifs 0, 1, 2, 3,... par un même nombre a, on trouvera comme quotients successifs, d'abord a fois le quotient 0, puis a fois le quotient 1, puis a fois le quotient 2, puis a fois le quotient 3 et ainsi de suite.

72. Comment pourrait-on former rapidement une table fournissant le quotient de la division de l'un quelconque des nombres 0, 1, 2, 3, ..., a par l'un quelconque des nombres 1, 2, 3, ..., b?

73. Imaginons qu'on ait formé une table qui fournirait les quotients de la division de l'un quelconque des nombres 0, 1, 2, 3,..., 5040, par chacun des nombres

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 : on demande quelle serait la somme de tous les quotient inscrits dans cette table. — On a 5040 = 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

74. Parmi les nombres moindres que 200, quels sont ceux qui peuvent servir de dividende et de diviseur à une division dont le quotient est 53 et le reste 37 ?

75. On sait que dans une division le dividende est 1986 et le quotient 729 : quels peuvent être le diviseur et le reste ?

76. Dans une division le dividende est 1986 et le reste 25 : quels peuvent être le diviseur et le quotient ?

77. Pour mettre un nombre donné A sous la forme

$$\alpha_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \ldots + \alpha_n a^n,$$

où a est un nombre plus grand que 1 ; $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, des nombres moindres que a (Ex. : 9), on divisera A par a, α_0 sera le reste ; soit A_1 le quotient ; on divisera A_1 par a ; α_1 sera le reste ; soit A_2 le quotient ; on divisera A_2 par a ; α_2 sera le reste, etc... Effectuer les calculs en supposant $A = 1000000$ et successivement $a = 12$, $a = 2$.

78. Plusieurs nombres sont mis sous la forme $\alpha_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \ldots + \alpha_n a^n$; peut-on en profiter pour obtenir, sous la même forme, les résultats d'additions, de soustractions, de multiplications, de divisions effectuées sur ces nombres ?

79. Quels sont le quotient et le reste dans la division par $2^{23} + 2 + 1$ de

$$2^{40} + 2^{28} + 2^{23} + 2^{20} + 2^{18} + 2^{17} + 2^6 + 2^5 + 2 + 1 ?$$

80. Réduire en jours, heures, minutes, secondes un nombre donné A de secondes, c'est mettre ce nombre sous la forme

$$\alpha_0 + \alpha_1 \times 60 + \alpha_2 \times 60^2 + \alpha_3 60^2 \times 24,$$

avec cette condition que α_0 et α_1 soient inférieurs à 60 et α_2 inférieur à 24. A secondes équivalent à α_3 jours, α_2 heures, α_1 minutes, α_0 secondes. Comment trouver les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ quand on se donne le nombre A ?

81. Comment devra-t-on s'y prendre pour mettre un nombre donné A sous la forme

$$\alpha_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_1 a_2 + \alpha_3 a_1 a_2 a_3 + \ldots + \alpha_n a_1 a_2 a_3 \ldots a_n,$$

la suite des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, tous plus grands que 1, étant donnée, et les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ devant satisfaire à la condition

$$\alpha_p < a_{p+1},$$

pour toutes les valeurs possibles de p ? (Ex. : 11.)

Effectuer les calculs pour le nombre $A = 1000000$, en supposant $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a = 4, \ldots a_p = p + 1, \ldots$.

Profiter du calcul pour dire quels sont le quotient et le reste de la division de 1000000 par $5040 = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$.

82. Le nombre de solutions de l'équation

$$x + ay = b$$

est égal au quotient de la division de b par a, augmenté d'une unité.

CHAPITRE III

PROPOSITIONS FONDAMENTALES SUR LA DIVISIBILITÉ CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ

§ 1. — Divisibilité. — Théorèmes généraux.

115. Dans le paragraphe précédent, concernant la division, on a porté également l'attention sur le quotient et le reste ; l'addition, la soustraction, la multiplication sont des opérations dont chacune n'a qu'un résultat, la division comporte deux résultats : le quotient et le reste.

Toutefois quand la division se fait exactement, il convient évidemment de porter exclusivement l'attention sur le quotient, qui est alors le résultat de l'opération; faire la division, c'est trouver ce quotient. Le dividende est alors le produit du diviseur par le quotient, en sorte que la division apparaît comme opération inverse de la multiplication. Le dividende est aussi le produit du quotient par le diviseur, c'est-à-dire qu'il est la somme d'autant de parties égales au quotient qu'il y a d'unités dans le diviseur; faire la division c'est donc trouver l'une de ces parties, ou comme l'on dit encore, diviser le dividende en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le diviseur. C'est ce sens qui est le sens étymologique du mot diviser. C'est encore ce sens que l'on retrouve dans les expressions usuelles telles que prendre la cinquième partie, la douzième partie,... ou plus brièvement le cinquième, le douzième d'un nombre. Ces mots n'ont, pour le moment, de signification que si la division par cinq, ou par douze, peut se faire exactement. Au lieu de dire la deuxième, la troisième, la quatrième partie d'un nombre, on dit la moitié, le tiers, le quart ; ici encore on suppose que les divisions par deux, trois, quatre se font exactement.

116. Lorsque a est divisible par b on représente souvent le quotient de la division par le symbole $\frac{a}{b}$, qui s'énonce a sur b, ou a divisé par b. Ce symbole, pour le moment, n'a aucune signification lorsque a n'est pas divisible par b. Lorsque b est égal à 1, le quotient est a, en sorte que $\frac{a}{1}$ a le même sens que a. Lorsque a est divisible par b et que q est le quotient, on écrit indifféremment

$$\frac{a}{b} = q, \qquad a = bq:$$

ainsi les égalités

$$\frac{24}{8} = 3, \qquad 24 = 8 \times 3,$$

ont exactement le même sens.

On observera les habitudes suivantes relativement aux symboles $\frac{a}{b}$, pour lesquels, encore une fois, on suppose essentiellement que a est divisible par b ; quand ils figurent dans des calculs ou des égalités, on a soin de mettre la barre en face des signes $=$, $+$, $-$, $\times$. Ainsi, on écrira :

$$\frac{24}{8} + \frac{12}{3} = 3 + 4 = 7,$$
$$\frac{24}{8} \times \frac{28}{7} = 3 \times 4 = 12.$$

117. *Si deux nombres sont divisibles par un troisième, leur somme ou leur différence est divisible par ce troisième et le quotient est la somme ou la différence des quotients.*

Soient a, b les deux nombres divisibles par c, soient a' et b' les quotients de la division de a et b par c, on aura

$$a = a'c, \qquad b = b'c$$

et par conséquent

$$a + b = a'c + b'c = (a' + b')c,$$
$$a - b = a'c - b'c = (a' - b')c,$$

ce qui montre bien que $a + b$ et $a - b$ sont divisibles par c et que les quotients $a' + b'$, $a' - b'$ sont l'un la somme, l'autre la différence des quotients a', b'.

Plus généralement, si l'on considère plusieurs nombres $a, b, c, d, \ldots$, tous divisibles par le nombre n, le résultat obtenu en les ajoutant ou en les retranchant dans un certain ordre est aussi divisible par n, et le quotient s'obtient en faisant les mêmes additions et soustractions, dans le même ordre, sur les résultats a', b', c', d',... de la division par n des nombres a, b, c, d,...

Il est sous-entendu que les additions et les soustractions doivent se suivre dans un ordre tel que les soustractions soient toujours possibles.

Considérons en effet, par exemple, l'expression

$$a - b + c - d;$$

on a, par hypothèse,

$$a = a'n, \qquad b = b'n, \qquad c = c'n, \qquad d = d'n,$$

et par suite

$$\begin{aligned} a - b + c - d &= a'n - b'n + c'n - d'n \\ &= (a' - b' + c' - d')\, n. \end{aligned}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

On peut donc écrire, en supposant a, b, c, et d divisibles par n,

$$\frac{a - b + c - d}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n} + \frac{c}{n} - \frac{d}{n}.$$

En particulier, *si la somme de deux nombres est divisible par un nombre m, ainsi que l'une de ses parties, l'autre partie est aussi divisible par ce nombre.*

La seconde partie est, en effet, la différence entre la somme et la première partie, et les deux termes de cette différence sont divisibles par le nombre m.

Si la différence entre deux nombres a, b est divisible par le nombre m, ainsi que l'un des nombres a, b, il en sera de même de l'autre.

En effet, si les nombres $a - b$ et b sont divisibles par m, il en sera de même du nombre a qui est leur somme; si les nombres a et $a - b$ sont divisibles par m, il en sera de même du nombre b, qui est leur différence.

118. *Si un nombre a est un multiple de b, tout multiple de a est aussi multiple de b.*

Soit en effet am un multiple quelconque de a, il peut être regardé comme la somme de m nombres égaux à a, tous divisibles par b; cette somme est donc divisible par b; le quotient obtenu en la divisant par b est la somme de m nombres égaux à a', en désignant par a' le quotient de la division de a par b. Ainsi le quotient de la division de am par b est $a'm$ et l'on peut énoncer le théorème suivant : Dans un produit de deux facteurs, si l'un des facteurs est divisible par un nombre, il en est de même du produit et, pour diviser le produit par ce nombre, il suffit de diviser le facteur considéré.

Ce théorème s'étend à un produit d'autant de facteurs que l'on veut, dont l'un est divisible par le nombre que l'on emploie comme diviseur, puisque ce produit peut être regardé comme obtenu en multipliant le facteur considéré par le produit de tous les autres.

Il pourrait se déduire tout aussi bien, sous cette forme générale, de la proposition établie au n° 79. Si, en effet, dans un produit P de plusieurs facteurs, on remplace un des facteurs a, divisible par b, par le quotient a' que l'on obtient en divisant a par b, on obtient un nouveau produit P′; ce produit P′, si on le multiplie par b, ce qui peut se faire en multipliant a' par b, ou en remplaçant a' par a, reproduit P : inversement P est divisible par b, et le quotient est P′.

119. Dans le cas d'un produit de deux facteurs, la proposition qui vient d'être établie peut s'énoncer autrement. Soit, par exemple, le produit $15 \times 7 = (3 \times 5) \times 7$; si on le divise par 5, le quotient sera 3×7, et l'on voit qu'il revient au même de diviser d'abord 15 par 5 et de multiplier ensuite le quotient par 7, ou de multiplier d'abord le nombre 15 par 7 et de diviser ensuite le produit par 5.

Lorsqu'un nombre a est divisible par un nombre b, il revient au même de diviser a par b et de multiplier le quotient par c, ou de multiplier a par c et de diviser le produit par b.

Diviser 15×7 par 5, c'est prendre le cinquième de sept fois 15; diviser 15 par 5, c'est en prendre le cinquième ; en multipliant le résultat par 7, on obtient sept fois le cinquième de 15. C'est ce qu'on exprime en disant : Sept fois le cinquième de 15 (ou les sept cinquièmes de 15), est la même chose que le cinquième de sept fois 15.

Le lecteur voit de lui-même ce qu'il y a de général dans cette façon de parler ; mais il ne doit pas oublier qu'on suppose essentiellement ici que les divisions puissent s'effectuer exactement.

120. Lorsqu'une division se fait exactement, elle se fera encore exactement après qu'on aura multiplié le dividende et le diviseur par un même nombre, différent de zéro, et elle fournira le même quotient.

Supposons en effet que a soit divisible par b et soit q le quotient ; on aura

$$a = bq$$

et en multipliant les deux membres par un nombre quelconque m différent de zéro, on aura

$$am = bqm = (bm) \times q;$$

cette dernière égalité exprime que am est divisible par bm et que le quotient est q.

En d'autres termes, si a est divisible par b, am est divisible par bm, et l'on peut écrire

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$$

Réciproquement, lorsqu'une division se fait exactement et que le dividende et le diviseur sont divisibles par un même nombre, elle se fera encore exactement après qu'on aura divisé le dividende et le diviseur par ce nombre, et elle fournira le même quotient.

Supposons en effet que le dividende a et le diviseur b soient divisibles par m et désignons par a' et b' les nombres que l'on obtient en les divisant par m; divisons par m les deux membres de l'égalité

$$a = bq;$$

pour diviser bq par m, il suffira (nº 118) de remplacer b par b' et l'on aura l'égalité

$$a' = b'q$$

qui prouve que a' est divisible par b' et que le quotient est q, comme le quotient de la division de a par b.

121. Si les deux nombres a et a' sont respectivement divisibles par b et b', leur produit aa' est divisible par bb' et le quotient est le produit des quotients des divisions de a par b et de a' par b'.

Soient en effet q et q' ces derniers quotients ; on aura

$$a = bq, \qquad a' = b'q',$$

et par suite

$$a \times a' = bq \times b'q',$$

ou

$$aa' = (bb') \times (qq').$$

Cette dernière égalité exprime que aa' est divisible par bb' et que le quotient est bien le produit qq' des quotients primitifs. En d'autres termes, quand a est divisible par b et a' par b', aa' est divisible par bb' et l'on peut écrire

$$\frac{a}{b}\times\frac{a'}{b'}=\frac{aa'}{bb'}.$$

122. Les propositions du n° 120 sont comprises, comme cas particuliers, dans le théorème suivant et dans sa réciproque.

Quand on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre, différent de zéro, le quotient n'est pas changé, et le reste est multiplié par ce nombre.

Soient a, b, q, r le dividende, le diviseur, le quotient et le reste de la division primitive, et c le nombre par lequel on multiplie : on a

$$a=bq+r, \qquad r<b;$$

on en déduit, en multipliant par c les deux nombres de l'égalité et de l'inégalité,

$$ac=bcq+rc, \qquad rc<bc:$$

il résulte de là que q et rc sont bien le quotient et le reste dans la division de ac par bc.

Cette proposition entraîne la suivante.

Lorsque le dividende et le diviseur sont divisibles par un même nombre, le reste est aussi divisible par ce nombre; si l'on divise le dividende et le diviseur par ce nombre, le quotient n'est pas changé et le reste est divisé par ce nombre.

Soient, en effet, a, b, q, r le dividende, le diviseur, le quotient et le reste dans la première division ; soit c un nombre qui divise a et b ; soient a', b' les résultats obtenus en divisant a et b par c; soient enfin q', r' le quotient et le reste dans la division de a' par b'; a, b s'obtiennent en multipliant a', b' par c ; en vertu du théorème direct, q est égal à q' et r s'obtient en multipliant r' par c; r est donc divisible par c et l'on a bien

$$r'=\frac{r}{c}.$$

123. Les propositions qui suivent concernent surtout le reste.

On ne modifie pas le reste d'une division quand on augmente ou qu'on diminue le dividende d'un multiple du diviseur.

Soient, en effet, a, b, q, r le dividende, le diviseur, le quotient et le reste d'une division ; on a

$$a=bq+r, \qquad r<b;$$

si bm est un multiple quelconque du diviseur, on aura

$$a + bm = b(q + m) + r, \qquad r < b,$$
$$a - bm = b(q - m) + r, \qquad r < b;$$

et l'on voit que r est le reste de la division de $a + bm$, ou de $a - bm$, par b : les quotients sont $q + m$, $q - m$; c'est au fond la même proposition qu'au n° 103.

On observera que ce théorème peut encore être énoncé sous les formes suivantes :

Si dans une somme de deux nombres une des parties est divisible par un nombre m, on obtiendra le même reste en divisant par m soit l'autre partie, soit la somme. Si dans une différence le plus petit nombre est divisible par m, on obtiendra le même reste en divisant par m soit le plus grand nombre, soit la différence.

124. *Si la différence entre les deux nombres a et a' est divisible par b, on obtiendra le même reste en divisant a ou a' par b.*

En effet, le plus grand des deux nombres a, a' s'obtient en ajoutant à l'autre un multiple du diviseur b.

Réciproquement, *si deux nombres a, a' divisés par le nombre b donnent le même reste r, leur différence est divisible par b.*

En effet, si l'on désigne par q et q' les quotients, on aura

$$a = bq + r,$$
$$a' = bq' + r,$$

et, en supposant a plus grand que a',

$$a - a' = bq + r - (bq' + r) = bq - bq' = b(q - q').$$

125. *Si dans une division, le dividende est une somme ou une différence, on ne modifie pas le reste en augmentant ou en diminuant d'un multiple du diviseur l'une des parties de la somme, l'un des termes de la différence.*

En effet, par là, on ne fait qu'augmenter ou diminuer le dividende d'un multiple du diviseur.

126. *Si, dans une division, le dividende est un produit de plusieurs facteurs, on ne change pas le reste en augmentant ou en diminuant l'un de ces facteurs d'un multiple du diviseur.*

Soient en effet a l'un des facteurs du dividende, et a', l'autre facteur, ou le produit des autres facteurs, s'il y en a plus d'un. Soit b le diviseur. En ajoutant, par exemple, au facteur a un multiple mb du diviseur, le produit sera remplacé par

$$(a + mb)\, a' = aa' + mba' = aa' + b \times (ma'),$$

c'est-à-dire que le dividende sera augmenté d'un multiple de b, à savoir $b \times (ma')$; le reste ne sera donc pas modifié.

Il est clair qu'on ne changera pas le reste si on augmente ou qu'on diminue successivement chacun des facteurs qui entrent au dividende d'un multiple du diviseur; on ne changera donc pas non plus ce reste en augmentant, ou en diminuant, à la fois, de multiples du diviseur, tous les facteurs du dividende.

Considérons, par exemple, le produit $12 \times 17 \times 8$ comme dividende et 5 comme diviseur; le reste sera le même si l'on remplace 12 par 2, 17 par 2, 8 par 3, puisque l'on a

$$\begin{aligned} 12 &= 2 \times 5 + 2, \\ 17 &= 2 \times 5 + 7, \\ 8 &= 3 + 5. \end{aligned}$$

En particulier, on pourra remplacer, sans changer le reste, tous les facteurs du dividende par les restes qu'on obtient en les divisant par le diviseur. Dans l'exemple précédent, on aurait ainsi pu remplacer 12 par 2, 17 par 2, 8 par 3; on aurait ainsi obtenu $2 \times 2 \times 3 = 12$; le reste de la division par 5 de ce produit est 2; il en est de même du reste de la division par 5 du produit $12 \times 17 \times 8$.

§ 2. — Caractères de divisibilité.

127. On a souvent intérêt à calculer le reste d'une division, sans avoir besoin du quotient : en particulier, il est souvent intéressant de reconnaître si ce reste est nul, ou non. Au lieu de faire la division tout entière, il est très commode de s'appuyer sur les théorèmes précédents pour substituer au dividende d'autres nombres plus simples et qui fournissent le même reste.

Les règles qui suivent se rapportent essentiellement à la numération décimale.

128. *Caractères de divisibilité par* 2, 5; 4, 25;... De l'égalité

$$10 = 2 \times 5$$

on déduit (nº 81)

$$\begin{aligned} 10^2 &= 100 = 2^2 \times 5^2 = 4 \times 25, \\ 10^3 &= 1000 = 2^3 \times 5^3 = 8 \times 125, \end{aligned}$$

et en général

$$10^n = 2^n \times 5^n.$$

Puisque 10 est divisible par 2 et par 5, tout multiple de 10 sera divisible par 2 et par 5; ou encore toute collection de dizaines est un multiple de 2 et de 5; de même toute collection de centaines est un multiple de 4 et 25, toute collection de mille est un multiple de 8 et de 125. Il résulte de là que si l'on cherche le reste de la division d'un nombre A par 2 ou par 5, on peut négliger les dizaines de A, c'est-à-dire ne conserver que le dernier chiffre (à droite) de A; si l'on cherche le reste de la division d'un nombre A par 4 ou par 25, on peut négliger les centaines de A et remplacer A par le nombre formé par l'ensemble de ses deux derniers chiffres à droite; de même, si l'on cherche le reste de la division d'un nombre par 8 ou 125, on peut négliger les mille de A, ou remplacer A par le nombre formé par l'ensemble de ses trois derniers chiffres, etc...

Par exemple, le reste de la division de 874367 par 4 est le même que le reste de la division de 67, c'est 3; le reste de la division par 125 du même nombre est le même que le reste de la division de 367, c'est 117.

En particulier, on a les théorèmes suivants :

Pour qu'un nombre soit divisible par 2, il faut et il suffit qu'il soit terminé par un des chiffres 0, 2, 4, 6, 8 : en effet, ce sont là les seuls nombres d'un chiffre qui soient divisibles par 2.

Les nombres divisibles par 2 sont dits *pairs*.

Les nombres qui sont terminés par les chiffres 1, 3, 5, 7, 9 ne sont pas divisibles par 2 : ils sont *impairs*.

Pour qu'un nombre soit divisible par 5, il faut et il suffit qu'il soit terminé par un des chiffres 0, 5, car ce sont là les seuls nombres d'un chiffre qui soient divisibles par 5.

Pour qu'un nombre soit divisible par 4, il faut et il suffit que le nombre formé par ses deux derniers chiffres soit divisible par 4.

Pour qu'un nombre soit divisible par 25, il faut et il suffit qu'il soit terminé par deux zéros, ou par 25, ou par 50, ou par 75.

Pour qu'un nombre soit divisible par 8, il faut et il suffit que le nombre formé par ses trois derniers chiffres soit divisible par 8, etc.

129. *Caractère de divisibilité par* 9 *ou par* 3. Le reste de la division d'un nombre par 9 ou par 3 est le même que le reste de la division par 9 ou par 3 de la somme de ses chiffres significatifs.

La démonstration repose sur les remarques suivantes :

Si l'on divise par 9 l'unité suivie d'un certain nombre de zéros le reste est 1.

En effet 10 est égal à $9+1$; l'unité suivie d'un nombre quelconque de zéros est un produit de facteurs tous égaux à 10; on ne modifie pas le reste de la division par 9 d'un tel produit en diminuant chaque facteur de 9 (nº 126); il reste alors un produit de facteurs tous égaux à 1 : donc le reste cherché est 1. Cette proposition se lit d'ailleurs en quelque sorte sur la forme du nombre obtenu en retranchant 1 d'un nombre formé en écrivant l'unité suivie de plusieurs zéros; la différence est évidemment un nombre dont tous les chiffres sont des 9, et qui comprend autant de chiffres qu'il y avait de zéros après l'unité : par exemple, on a

$$10000 = 9999 + 1 = 9 \times 1111 + 1.$$

Considérons maintenant le nombre 7805643; il est égal à

$$1000000 \times 7 + 100000 \times 8 + 1000 \times 5 + 100 \times 6 + 10 \times 4 + 3.$$

On ne modifiera pas le reste obtenu en divisant cette somme par 9, si l'on remplace chaque partie de cette somme par le reste qu'elle fournirait en la divisant par 9 (nº 125); chaque partie est un produit, et l'on ne modifie pas le reste que donne ce produit en remplaçant l'un des facteurs par le reste qu'il fournirait en le divisant par 9; on peut donc, sans changer le reste, remplacer les facteurs 1000000, 100000, 1000, 100, 10 par 1; on obtient ainsi la somme

$$7 + 8 + 5 + 6 + 4 + 3$$

des chiffres significatifs du nombre proposé; c'est ce qu'il fallait démontrer.

On peut dire encore : Tout nombre est un multiple de 9 plus la somme de ses chiffres significatifs.

En effet 7805643 et $7+8+5+6+4+3$, divisés par 9, donnent le même reste; leur différence est donc divisible par 9.

En particulier : Pour qu'un nombre soit divisible par 9, il faut et il suffit que la somme de ses chiffres significatifs soit divisible par 9.

Comme 9 est un multiple de 3, il est clair qu'on peut dire encore que le nombre 7805643 est un multiple de 3 augmenté de la somme $7+8+5+6+4+3$ de ses chiffres significatifs; en sorte que le reste de la division par 3 du nombre 7805643 est le même que le reste de la division par 3 de la somme de ses chiffres significatifs. Pour qu'un nombre soit divisible par 3, il faut et il suffit que la somme de ses chiffres significatifs soit divisible par 3.

Pour obtenir le reste de la division par 9 d'un nombre, dans la pratique, on applique plusieurs fois le même théorème, en supprimant les multiples de 9 à chaque fois : ainsi pour calculer le reste relatif à $7+8+5+6+4+3$, on effectue la somme $7+8=15$ et l'on remplace 15 par $1+5=6$; on a ensuite à ajouter 5, ce qui donne 11, que l'on remplace par $1+1=2$; on ajoute ensuite à 2 successivement 6 et 4, ce qui donne 12, que l'on remplace par $1+2=3$; il n'y a plus qu'à ajouter 3 : le reste est 6. S'il y a des 9 parmi les chiffres significatifs on n'en tient pas compte.

130. La méthode générale pour trouver le caractère de divisibilité par un nombre a apparaît sur cet exemple.

Supposons que l'on connaisse les restes obtenus en divisant par a les nombres 10, 100, 1000, ... et considérons un nombre quelconque, par exemple le nombre 7805643 ; on l'écrira

$$3+10\times 4+100\times 6+1000\times 5+100000\times 8+1000000\times 7,$$

et pour obtenir le reste de la division par a, on remplacera dans cette somme 10, 100, 1000, ... par les restes qu'ils fournissent en les divisant par a. Ce qui fait la simplicité de la méthode pour le cas où a est 9, c'est que tous les restes se trouvent égaux à 1. On pourrait traiter exactement de la même façon les cas ou a est égal à 2, 4, 8, ... ou à 5, 25, 125, ... ; dans ces cas tous les restes finissent par devenir nuls, et c'est pourquoi les caractères de divisibilité ne portent que sur les derniers chiffres. On verra plus tard (n° 240) que les restes finissent toujours par se reproduire périodiquement, et il en résulte une simplification dans l'emploi de cette méthode ; sans m'arrêter davantage à ces généralités, je me contenterai de l'appliquer au cas où $a=11$.

131. *Caractère de divisibilité par* 11. Pour obtenir le reste de la division par 11 d'un nombre quelconque, on peut procéder comme il suit : on fait la somme des chiffres qui représentent des unités simples ou composées d'ordre pair (les unités simples doivent être regardées comme d'un ordre *pair*, l'ordre zéro) ; on fait aussi la somme des chiffres qui représentent des unités d'ordre impair. Si la seconde somme est inférieure ou égale à la première on la retranche de la première : le reste cherché est le même que pour la différence ; si la seconde somme est supérieure à la première on fait la soustraction après avoir ajouté à la première un multiple de 11 assez grand pour qu'elle soit possible ; on pourrait tout aussi bien diminuer la seconde somme d'un multiple de 11 ; dans tous les cas, la différence, divisée par 11, fournira le même reste que le nombre proposé.

Les restes de la division des nombres 10 et 100 par 11 sont respectivement 10 et 1 : en effet, on a : $100 = 99 + 1 = 11 \times 9 + 1$; il est bien aisé de conclure de là que si on divise par 11 les termes de la suite 10, 100, 1000, 10000, ..., on trouvera alternativement pour restes 10 et 1 ; autrement dit : Tout nombre formé en faisant suivre l'unité d'un nombre pair de zéros, divisé par 11, donne pour reste 1 ; tout nombre formé en faisant suivre l'unité d'un nombre impair de zéros, divisé par 11, donne pour reste 10. En effet, un nombre formé de la première façon peut être regardé comme un produit de facteurs tous égaux à 100, et l'on ne change pas le reste que ce produit fournirait en le divisant par 11 si l'on remplace chacun des facteurs par 1, c'est-à-dire par le reste qu'il donne lui-même quand on le divise par 11 ; le reste, dans ce cas, est donc égal à 1 ; si maintenant on considère un nombre formé de la seconde façon, il peut être regardé comme le produit par 10 d'un nombre formé en faisant suivre l'unité d'un nombre pair de zéros ; dans ce produit on peut encore, si l'on se borne à chercher le reste relatif à la division par 11, remplacer le second facteur par 1, c'est-à-dire par le reste qu'il donne quand on le divise par 11 ; dans ce second cas, le reste sera donc 10×1 ou 10.

Considérons maintenant le nombre.

$$\begin{aligned} 7850492 = 2 + 10 \times 9 + 100 \times 4 + 1000 \times 0 + 10000 \times 5 \\ + 100000 \times 8 + 1000000 \times 7. \end{aligned}$$

On ne change pas le reste de la division par 11 en remplaçant dans le second membre les facteurs 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000 par leurs restes, c'est-à-dire par les nombres 10, 1, 10, 1, 10, 1, 10; ce second membre devient alors

$$2 + 4 + 5 + 7 + 10(9 + 0 + 8);$$

dans cette somme, on voit figurer la somme des chiffres représentant des unités d'ordre pair et la somme des chiffres représentant des unités d'ordre impair, cette dernière multipliée par $10 = 11 - 1$; le résultat précédent peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 5 + 7 + (11 - 1) \times (9 + 0 + 8) \\ = 2 + 4 + 5 + 7 + 11m - (9 + 8 + 8); \end{aligned}$$

dans le multiple de 11, $11 \times m$, qui figure ici, m représente la somme des chiffres d'ordre impair, mais si l'on ne se préoccupe que du reste de la division par 11, on peut remplacer ce multiple de 11 par tel autre multiple de 11 que l'on voudra, pourvu que la soustraction puisse se faire; on pourrait aussi bien diminuer la somme à retrancher de tel multiple de 11 qu'on voudra. La proposition est démontrée. Dans l'exemple considéré, on peut effectuer la différence $2+4+5+7-(9+8)$, elle est égale à 1 : le reste cherché est 1.

On peut dire encore : Tout nombre est un multiple de 11 augmenté de la somme de ses chiffres de rang pair et diminué de la somme de ses chiffres de rang impair.

132. *Preuves de la multiplication par* 9 *ou par* 11. — La proposition du n° 125 fournit un moyen précieux de contrôler une multiplication.

Soient a, b deux facteurs d'un produit ab; soient, en employant un diviseur quelconque c, a' et b' les restes de la division par c de a et de b; en divisant par c le produit ab, ou le produit $a'b'$, on doit retrouver le même reste; on choisira pour le diviseur c un nombre pour lequel le calcul des restes soit facile; on peut être tenté de prendre pour c l'un des nombres 2, 5, 8...; mais la preuve ne porterait alors que sur les derniers chiffres du produit. Au contraire, les diviseurs 9 et 11 conviennent parfaitement. C'est évidemment le premier qui est le plus commode, et c'est celui qu'on utilise le plus fréquemment.

Prenons par exemple la multiplication de 98756 par 823, effectuée au n° 94. Les restes de la division par 9 du multiplicande et du multiplicateur sont respectivement 8 et 4; le reste relatif au produit devra être le même que le reste de la division par 9 du produit $8 \times 4 = 32$, reste qui est 5; on a trouvé au produit 81276188, qui donne bien aussi 5 pour reste.

Si l'on avait employé le diviseur 11, on aurait trouvé, pour restes, relatifs aux deux facteurs, 9 et 9 : le reste relatif au produit doit donc être le même que pour 81, c'est-à-dire 4, ce qui se vérifie bien encore.

Il y a lieu de remarquer que la preuve par 9, si elle réussit et si elle a été faite sans erreur, prouve seulement que l'erreur, s'il y en a une, est un multiple de 9. On voit sans peine, par exemple, qu'elle n'avertirait pas d'une erreur commise en ne plaçant point les produits partiels à la place convenable.

De même la preuve par 11 montre que l'erreur, s'il y en a une, est un multiple de 11. L'emploi simultané des deux preuves montre que l'erreur doit être à la fois un multiple de 11 et de 9; on verra plus tard (n° 145) qu'elle est alors nécessairement un multiple de 99.

Exercices.

83. Un nombre est divisible par 4 si le chiffre des unités ajouté au double du chiffre des dizaines donne une somme divisible par 4.

84. Un nombre est divisible par 8 si le chiffre des unités ajouté au double du chiffre des dizaines et à quatre fois celui des centaines donne une somme divisible par 8.

85. Un nombre est divisible par 6 si le chiffre des unités ajouté à quatre fois la somme de tous les autres donne une somme divisible par 6.

86. La différence entre un nombre et ce même nombre renversé (c'est-à-dire obtenu en écrivant les chiffres en ordre inverse) est divisible par 9.

87. La somme d'un nombre et du même nombre renversé est divisible par 11 quand le nombre de chiffres est pair.

88. Le reste de la division d'un nombre par 99 s'obtient en le séparant en tranches de deux chiffres à partir de la droite, en ajoutant ces tranches et en cherchant le reste de leur somme divisée par 99.

89. Formuler une règle analogue à celle de l'exercice précédent pour les nombres 999, 9999, ..., 101, 1001, 10001, etc.

90. De l'égalité $1001 = 7 \times 11 \times 13$, déduire la règle suivante : Pour trouver le reste de la division d'un nombre par 7, 11 ou 13, on peut le décomposer en tranches de trois chiffres à partir de la droite, faire la somme des tranches de rang impair et, après lui avoir ajouté, s'il est nécessaire, un multiple de 7, 11 ou 13, en retrancher la somme des tranches de rang pair, puis diviser la différence par 7, 11 ou 13. Le reste de cette division sera le reste cherché.

91. Tout nombre impair est un multiple de 4 augmenté de 1, ou diminué de 1.

92. Le carré de tout nombre impair divisé par 8 donne 1 pour reste.

93. Tout nombre impair qui est la somme des carrés de deux nombres donne 1 pour reste quand on le divise par 4.

94. Si a n'est pas divisible par 5, $a^4 - 1$ est un multiple de 5.

Le mode de démonstration, souvent employé, consiste à remplacer, dans $a^4 - 1$, a par le reste que l'on obtient en le divisant par 5, ce reste peut être 1, 2, 3, 4 : on constate que dans tous les cas le résultat est divisible par 5.

95. Si a n'est pas divisible par 7, $a^6 - 1$ est divisible par 7.

96. Le produit de deux nombres entiers consécutifs est toujours pair; en prenant la moitié de ce produit on aura un quotient qui, divisé par 3, ne pourra jamais donner 2 pour reste.

97. Le produit de p nombres entiers consécutifs est divisible par p.

Cette proposition peut s'établir, par induction, au moyen du théorème énoncé dans l'exercice 55.

98. Quels que soient les nombres a, b où l'on suppose $a \geqq b$, l'un des nombres a, b, $a + b$, $a - b$, $2a + b$, $2a - b$, est divisible par 5.

99. Quels seraient dans le système de numération dont la base est a les caractères de divisibilité par $a - 1$ et par $a + 1$?

100. a et b étant deux nombres non divisibles par 3, $a^6 - b^6$ est divisible par 9.

101. $a^n - b^n$ est divisible par $a - b$, quels que soient les nombres a, b, n.

$a^n - b^n$ est divisible par $a + b$ si n est pair.

$a^n + b^n$ est divisible par $a + b$ si n est impair.

En particulier $2^n - 1$ est divisible par 3 si n est pair, $2^n + 1$ est divisible par 3 si n est impair.

102. Si l'on veut avoir le reste de la division par p du résultat obtenu en remplaçant x par un nombre quelconque a dans une expression de la forme

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n,$$

où $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ sont des nombres donnés, on peut remplacer x par le reste obtenu en divisant a par p; les résultats des deux substitutions, divisés par p, donnent le même reste.

Si dans le *polynome* précédent, on met successivement à la place de x les nombres 0, 1, 2, 3, ..., et que l'on divise par p les résultats obtenus, on trouvera une suite de restes qui se reproduiront périodiquement de p en p.

Cette proposition sera généralisée dans le chapitre final, où l'on en tirera de nombreuses conséquences.

103. Avec les notations expliquées au n° 116, on voit que les propositions énoncées aux exercices 29, 52, 50, 56, 41 peuvent être énoncées comme il suit :

La somme des n premiers nombres, à partir de 1, est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

La somme des carrés des n premiers nombres, à partir de 1, est $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

La somme des cubes des n premiers nombres est $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Le nombre de solutions distinctes de l'équation $x_1 + x_2 + \ldots + x_{p+1} = n$ est

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{1.2.\ldots p},$$

et de ces propositions résultent les théorèmes suivants :

$n(n+1)(2n+1)$ est toujours divisible par 6. Le produit de p nombres entiers consécutifs est toujours divisible par le produit des p premiers nombres.

La somme s des termes d'une progression géométrique dont le premier terme est a, le dernier terme b et la raison q est donnée par la formule

$$s = \frac{bq - a}{q - 1},$$

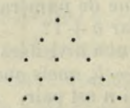
en supposant q autre que 1.

Quel que soit le nombre a, autre que 1, on a

$$\frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n.$$

Cette dernière proposition ne diffère pas de celle qui a été établie au n° 88, lorsqu'on y suppose $b = 1$.

104. On désigne sous le nom de nombres triangulaires, carrés, pentagonaux, hexagonaux, etc., les nombres obtenus en faisant la somme des premiers termes d'une progression arithmétique dans laquelle le premier terme est toujours 1 et dans laquelle la raison est 1, 2, 3, 4, etc. En faisant la somme des n premiers termes on a le $n^{\text{ième}}$ nombre triangulaire, carré, etc.; ces dénominations s'expliquent pour les nombres triangulaires, par exemple, en remarquant qu'ils représentent des nombres de points qui peuvent être arrangés en triangle comme dans la figure ci-dessous :



Le lecteur trouvera sans peine une interprétation analogue pour les autres nombres polygonaux.

En général, l'expression du $n^{\text{ième}}$ nombre polygonal correspondant à un polygone de q côtés est donnée par la formule :

$$P_n^q = 1 + (q-2) \times \frac{n(n-1)}{2};$$

(dans la notation P_n^q, q est un indice, non un exposant).

105. La somme des n premiers nombres triangulaires est un nombre *pyramidal*. En général, on appelle $n^{\text{ième}}$ *nombre figuré* d'ordre q la somme des n premiers nombres figurés d'ordre $q-1$, en regardant les nombres de la suite naturelle 1, 2, 3, ... comme figurés d'ordre 1, les nombres triangulaires comme figurés d'ordre 2, les nombres pyramidaux comme figurés d'ordre 3, etc. Le $n^{\text{ième}}$ nombre figuré d'ordre q est donné par la formule :

$$F_n^q = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+q-1)}{1.2\dots q};$$

(dans la notation F_n^q, q est un indice, non un exposant). (Ex. 41, 55.)

La somme des n premiers nombres triangulaires représente le nombre de boulets sphériques contenus dans une pile triangulaire. La somme des n premiers nombres carrés représente le nombre de boulets sphériques contenus dans une pile carrée. On suppose que, en passant d'une couche de boulets à la couche supérieure, le nombre de boulets contenus dans le côté du triangle ou du carré qui forme cette couche diminue d'une unité. La pile se termine en haut par un seul boulet.

106. En conservant les notations de l'exercice 22 démontrer par induction que le nombre C_n^p du triangle de Pascal est égal, lorsque p est plus grand que 1, au quotient du produit de p nombres consécutifs décroissants, à partir de n, divisé par le produit des p premiers nombres; en d'autres termes on a :

$$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{1.2.3\dots p}.$$

Lorsque p est égal à 1, ou à 0, cette formule doit être remplacée par les suivantes :

$$C_n^1 = n, \ C_n^0 = 1.$$

On admettra que la loi est vraie pour les n premières lignes du triangle, on en déduira qu'elle subsiste pour la $(n+1)^{\text{ième}}$.

CHAPITRE IV

PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE

§ 1. — Plus grand commun diviseur.

133. Un nombre admet plusieurs *diviseurs* parmi lesquels figurent toujours un et le nombre lui-même; par exemple, 1, 2, 3, 6 sont les diviseurs de 6. Le nombre des diviseurs de a est limité, puisque les diviseurs sont tous, sauf l'un d'eux, inférieurs à a.

Il y aurait exception si a était nul; tout nombre peut être regardé comme un diviseur de zéro, zéro peut être regardé comme un multiple d'un nombre quelconque. En raison du caractère exceptionnel du nombre zéro, nous l'exclurons de ce qui suit : en parlant des diviseurs d'un nombre, nous supposerons que ce nombre n'est pas nul; en parlant des multiples d'un nombre, nous entendrons parler des multiples qui ne sont pas nuls.

Étant donnés plusieurs nombres a, b, c, ... différents de zéro, il peut exister plusieurs nombres qui les divisent tous : *un* est toujours un pareil nombre; ces nombres s'appellent les *communs diviseurs* de a, b, c, ... Leur nombre est limité, car aucun d'eux ne peut dépasser le plus petit des nombres a, b, c, ...; il y en a un qui est plus grand que tous les autres : c'est le plus grand commun diviseur des nombres a, b, c, ...

La notion du plus grand commun diviseur est capitale en arithmétique; son importance tient surtout à la proposition suivante, dont la démonstration va nous fournir en même temps un moyen pratique pour calculer le plus grand commun diviseur :

Les diviseurs communs de deux ou plusieurs nombres sont les mêmes que les diviseurs de leur plus grand commun diviseur; en d'autres termes : tout diviseur de deux ou plusieurs nombres est un diviseur de leur plus grand commun diviseur.

134. Considérons d'abord le cas de deux nombres a, b. Si a est divisible par b, tout diviseur de b est un diviseur de son multiple a, donc les communs diviseurs de a et de b sont les mêmes que les diviseurs de b.

Supposons maintenant qu'aucun des deux nombres a, b ne soit divisible par l'autre; les deux nombres a, b sont alors différents; supposons $a > b$.

Les diviseurs communs à a et à b sont les mêmes que les diviseurs communs à b et au reste c de la division de a par b.

Soit, en effet, q le quotient de la division de a par b, on aura

$$a = bq + c.$$

Tout nombre qui divise a et b divise aussi bq : il divise une somme a et l'une de ses parties bq : il divise donc l'autre c. Tout nombre qui divise b et c divise aussi bq : il divise les deux parties bq et c d'une somme, il divise donc cette somme qui est égale à a. Ainsi les communs diviseurs de a et de b sont des communs diviseurs de b et de c; les communs diviseurs de b et de c sont des communs diviseurs de a et de b. Si l'on range dans un premier tableau tous les communs diviseurs de a et de b et dans un second tableau tous les communs diviseurs de b et de c, tout nombre qui figure dans le premier tableau figure dans le second, tout nombre qui figure dans le second tableau figure dans le premier ; les nombres qui figurent dans un des tableaux sont *les mêmes* que ceux qui figurent dans l'autre. Le théorème est démontré.

Si c divise b, les diviseurs communs de c et de b sont les mêmes que les diviseurs de c ; puisque les diviseurs communs de a et de b sont les mêmes que ceux de c et de b, ils sont aussi les mêmes que les diviseurs de c.

Si c ne divise pas b, on a fait cependant un pas, puisque c est plus petit que b et que, ainsi, la recherche des communs diviseurs de a, b est ramenée à la recherche des communs diviseurs des deux nombres plus petits b et c. Soit alors d le reste de la division de b par c ; les communs diviseurs de b et de c sont les mêmes que les communs diviseurs de c et de d ; si d divise c, les communs diviseurs de c et de d sont les mêmes que les diviseurs de d ; si d ne divise pas c, soit e le reste de la division de c par d, les communs diviseurs de c et de d sont les mêmes que les communs diviseurs de d et de e ; si e divise d, ils sont les mêmes que les diviseurs de e ; si e ne divise pas d, on continuera de la même façon.

Les restes successifs c, d, e,... vont en diminuant à chaque fois, on ne peut en trouver qu'un nombre limité ; mais d'un autre côté, on ne peut être arrêté dans la suite de ces opérations que si l'on rencontre un reste qui divise le précédent : cette circonstance se présentera donc nécessairement. Elle pourra se présenter, en particulier, dans le cas, d'ailleurs remarquable, où l'on parvient à un reste égal à 1 ; ce reste divise certainement le précédent. Soit, dans tous les cas, h le reste qui divise le reste précédent g. Les communs diviseurs de a et de b sont les mêmes que ceux de b et de c, qui sont les mêmes que ceux de c et de d, qui sont les mêmes que ceux de d et de e, ..., qui sont les mêmes que ceux de g et de h : et ces derniers sont les mêmes que les diviseurs de h.

Donc les diviseurs communs de a, b sont les mêmes que les diviseurs de h [1].

Étant donnés deux nombres a, b, différents de zéro, il existe un nombre h tel que les diviseurs communs de a, b soient les mêmes que les diviseurs de h; ce nombre, qui peut s'obtenir par les opérations précédentes, s'appelle le plus grand commun diviseur de a, b, nom qui est évidemment justifié puisque h est le plus grand diviseur de h.

1. M. Vacquant, inspecteur général de l'Université, a bien voulu appeler mon attention sur la convenance qu'il y a à insister tout d'abord sur cet énoncé et à ne faire intervenir que plus tard la notion de *plus grand* commun diviseur. Cette observation acquiert toute sa portée dans la théorie du plus grand commun diviseur algébrique, qui est, au fond, identique à celle qu'on vient d'exposer.

Considérons, par exemple, les nombres 360 et 172; en divisant 360 par 172, on a pour quotient 2 et pour reste 16; en divisant 172 par 16, on a pour quotient 10 et pour reste 12; en divisant 16 par 12, on a pour quotient 1 et pour reste 4; en divisant 12 par 4, on a pour quotient 3 et pour reste 0.

Les diviseurs communs de 360 et de 172 sont les mêmes que les diviseurs communs de 172 et de 16, qui sont les mêmes que les diviseurs communs de 16 et de 12, qui sont les mêmes que les diviseurs communs de 12 et de 4, qui sont les mêmes que les diviseurs de 4, puisque 12 est un multiple de 4. On adopte souvent la disposition suivante pour les calculs, disposition qui montre l'enchaînement des divisions; au lieu de placer les quotients au-dessous des diviseurs, on les a placés au-dessus, afin de laisser la place libre pour les restes; d'ailleurs ces quotients n'ont ici aucune importance :

	2	10	1	3
360	172	16	12	4
344	160	12	12	
16	12	4	0	

4 est le plus grand commun diviseur.

135. On peut profiter de quelques simplifications pour cette recherche.

Remarquons d'abord que pour démontrer que les diviseurs communs de a et de b étaient les mêmes que ceux de b et de c, on s'est fondé uniquement sur l'égalité

$$a = bq + c,$$

qui n'implique pas que c soit plus petit que b, qui n'implique donc pas que c soit le reste de la division de a par b; cette supposition n'est intervenue que plus tard, quand on a remarqué que les restes successifs allaient en diminuant; mais, dans tous les cas, rien n'empêche, pourvu que a, b, c soient liés par une relation telle que la précédente, de substituer la recherche du plus grand commun diviseur de b et de c à la recherche du plus grand commun diviseur de a et de b.

Il en serait évidemment de même si a, b, c étaient liés par une relation telle que

$$a = bq - c,$$

car rien n'empêcherait de reprendre sur cette égalité, en les modifiant à peine, les raisonnements que l'on a faits sur l'égalité $a = bq + c$.

Or, en supposant toujours que c soit le reste de la division de a par b, on a évidemment

$$a = b(q+1) + c - b = b(q+1) - (b - c);$$

si $b - c$ est plus petit que c, il sera avantageux de le substituer à c dans la recherche du plus grand commun diviseur; c'est ce qui arrivera si l'on a $b < 2c$; ainsi dans l'exemple précédent, au diviseur 12 on pourra substituer le diviseur $16 - 12 = 4$, et supprimer une division.

136. *Règle.* — Pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres dont aucun n'est nul, on divise le plus grand par le plus petit; si la division se fait exactement, le plus petit est le plus grand commun diviseur cherché; sinon on divise le nombre employé comme diviseur par le reste de la division; puis, le nombre employé comme diviseur dans cette nouvelle division par le reste qu'elle fournit, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'une division réussisse. Le nombre employé alors comme diviseur est le plus grand commun diviseur cherché. Pour simplifier cette recherche, on peut d'ailleurs utiliser les remarques précédentes.

137. Considérons maintenant le cas de plusieurs nombres $a, b, c, d, \ldots$: puisque les diviseurs communs à deux de ces nombres a, b sont les mêmes que les diviseurs de leur plus grand commun diviseur D, il est clair que les communs diviseurs de a, b, c, $d, \ldots$ seront les mêmes que les communs diviseurs de D, c, $d, \ldots$ ceux-ci sont les mêmes que les diviseurs communs de D', $d \ldots$, en désignant par D' le plus grand commun diviseur de D et de c, etc...; on finira par n'avoir plus que deux nombres et les diviseurs communs à a, b, c, $d, \ldots$ seront évidemment les mêmes que les diviseurs du plus grand commun diviseur de ces nombres-là. Étant donnés autant de nombres que l'on voudra, il existe donc un nombre dont les diviseurs sont les mêmes que les diviseurs communs des nombres donnés; on lui donne le nom de plus grand commun diviseur de ces nombres; on ramène la recherche de ce plus grand commun diviseur au cas de deux nombres, en s'appuyant sur ce qu'on ne change pas les diviseurs communs de plusieurs nombres en substituant à deux de ces nombres leur plus grand commun diviseur. — Il est d'ailleurs évident qu'on pourrait aussi bien remplacer trois, quatre,... de ces nombres par leur plus grand commun diviseur.

Soient, par exemple, les nombres 360, 180, 54, 372. 180 est le plus grand commun diviseur de 360 et de 180; le plus grand commun diviseur des quatre nombres est le même que le plus grand commun diviseur de 180, 54, 372; le plus grand commun diviseur de 180 et de 54 est 18; celui de 372 et de 18 est 6 : le plus grand commun diviseur des quatre nombres est 6, et les communs diviseurs de 360, 180, 54, 372 sont les mêmes que les diviseurs de 6.

Dans la pratique, quand on a à chercher le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, il est généralement avantageux de commencer par les plus petits.

138. *Quand on multiplie deux ou plusieurs nombres par un même facteur, leur plus grand commun diviseur est multiplié par ce facteur.* On entend par là que le plus grand commun diviseur des nouveaux nombres est égal au plus grand commun diviseur des anciens nombres multiplié par le facteur par lequel on les a multipliés eux-mêmes.

Dans le cas de deux nombres, cette proposition résulte du procédé exposé pour obtenir le plus grand commun diviseur de deux nombres. Reprenons les notations du n° 134 : soient a, b les deux nombres proposés, c le reste de la division de a par b, d le reste de la division de b par c, ..., h le plus grand commun diviseur.

Si l'on multiplie les nombres a et b par un facteur m, c'est-à-dire si on substitue aux nombres a, b les nombres am, bm, le reste c sera aussi multiplié par m, c'est-à-dire que cm devra remplacer c; de même le reste de la division de bm par cm sera dm ; tous les restes seront multipliés par m : le plus grand commun diviseur, qui est le dernier de ces restes, sera aussi multiplié par m.

Ainsi le plus grand commun diviseur de 360 et de 172 est 4 : celui de $360 \times 5 = 1800$ et de $172 \times 5 = 860$ sera $4 \times 5 = 20$.

Considérons maintenant le cas de trois nombres a, b, c; soient D le plus grand commun diviseur de a, b et D′ le plus grand commun diviseur de D et de c, c'est-à-dire le plus grand commun diviseur de a, b, c; je dis que le plus grand commun diviseur de am, bm, cm est $D'm$; en effet le plus grand commun diviseur de am et de bm est Dm; le plus grand commun diviseur de Dm et de cm, ou le plus grand commun diviseur de am, bm, cm, est $D'm$.

Du cas de trois nombres on s'élève successivement au cas de quatre, cinq, ... nombres. La proposition est générale.

139. *Quand deux ou plusieurs nombres sont divisibles par un même nombre m il en est de même du plus grand commun diviseur; si on effectue les divisions, le plus grand commun diviseur est lui-même divisé par le nombre m*; c'est-à-dire que le plus grand commun diviseur des nouveaux nombres est égal au plus grand commun diviseur des anciens divisé par m.

On peut démontrer cette proposition de la même façon que la précédente; on peut aussi observer qu'elle en résulte.

Considérons, par exemple, les trois nombres a, b, c divisibles par m; soit D leur plus grand commun diviseur; soient a', b', c' les résultats de la division de a, b, c par m, et soit D′ leur plus grand commun diviseur : le plus grand commun diviseur de ma', mb', mc' sera, en vertu de la proposition démontrée en premier lieu, égal à mD' ; on aura donc $D = mD'$, en d'autres termes D' est le quotient de la division de D par m.

140. En particulier, si l'on divise les nombres a, b, c,... par leur plus grand commun diviseur D, le plus grand commun diviseur des quotients a', b', c',... sera $\frac{D}{D}$ ou un. Les quotients n'auront pas de diviseur commun autre que un. Réciproquement si les nombres a', b', c',... ont pour plus grand commun diviseur l'unité et si D est un nombre quelconque, le plus grand commun diviseur des nombres $a'D$, $b'D$, $c'D$,..., obtenus en multipliant par D les nombres a', b', c',..., sera le produit de un par D, c'est-à-dire D.

Lorsque le plus grand commun diviseur de deux nombres est un, on dit que ces deux nombres sont premiers entre eux; ainsi 8 et 11 sont premiers entre eux. On peut donc dire : *Quand on divise deux nombres par leur plus grand commun diviseur, les quotients sont premiers entre eux*; ainsi $\frac{360}{4} = 90$ et $\frac{172}{4} = 43$ sont premiers entre eux; réciproquement *quand deux nombres sont premiers entre eux et qu'on les multiplie par un troisième nombre, ce troisième nombre est le plus grand commun diviseur des produits* (1).

On dit que plusieurs nombres sont premiers entre eux deux à deux lorsque chacun de ces nombres est premier à chacun des autres. Ainsi 3, 8, 11 sont premiers entre eux deux à deux; 10, 12, 7 ne sont pas premiers entre eux deux à deux, quoique le plus grand commun diviseur de ces nombres soit égal à un.

Remarquons en passant que lorsque deux nombres sont premiers entre eux, tout diviseur de l'un est premier avec tout diviseur de l'autre; car, si ces deux diviseurs étaient multiples d'un même nombre, il en serait de même des deux nombres proposés.

141. Les propositions qui ont été établies au n° 140, bien qu'elles ne soient qu'un cas particulier du théorème du numéro précédent, sont très importantes et il n'est peut-être pas inutile de remarquer que la proposition

1. Ces façons de parler s'étendraient d'elles-mêmes au cas de plusieurs nombres, si l'on convenait de dire que plusieurs nombres a, b, c, ... sont premiers entre eux quand leur plus grand commun diviseur est un. A ce sujet le langage varie un peu suivant les auteurs : quelques-uns disent, dans ce cas, que les nombres sont premiers entre eux, pris dans leur ensemble ; d'autres n'appellent nombres premiers entre eux que ceux que nous appelons premiers entre eux deux à deux. Pour éviter toute confusion, quand il s'agira de plusieurs nombres, je dirai : nombres dont le plus grand commun diviseur est l'unité.

directe résulte immédiatement de ce que le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres est *le plus grand* de leurs communs diviseurs.

Si on désigne encore, en effet, les nombres donnés par $a, b, c, \ldots$, par D leur plus grand commun diviseur, par $a', b', c', \ldots$ les résultats obtenus en divisant $a, b, c, \ldots$ par D, je dis que $a', b', c', \ldots$ ne peuvent avoir d'autre diviseur commun m que l'unité; si l'on avait en effet

$$a' = a''m, \qquad b' = b''m, \qquad c' = c''m, \ldots,$$

puisque l'on a

$$a = a'\mathrm{D}, \qquad b = b'\mathrm{D}, \qquad c = c'\mathrm{D}, \ldots,$$

on aurait

$$a = a''m\mathrm{D}, \qquad b = b''m\mathrm{D}, \qquad c = c''m\mathrm{D}, \ldots;$$

en sorte que les nombres a, b, c auraient pour commun diviseur le nombre $m\mathrm{D}$, qui serait plus grand que D si m était plus grand que un.

Quant à la *réciproque*, elle deviendrait évidente de la même façon si l'on admettait que *tout diviseur commun à plusieurs nombres $a, b, c, \ldots$ est un diviseur du plus grand* D *des communs diviseurs de ces nombres*. Cette proposition a été démontrée plus haut en s'appuyant sur l'opération même qui fournit le plus grand commun diviseur, elle le sera autrement un peu plus bas.

142. *On ne change pas le plus grand commun diviseur de deux nombres en multipliant l'un d'eux par un facteur premier à l'autre.*

Soient en effet a, b les deux nombres; soit m un nombre premier à b : je dis que le plus grand commun diviseur de a et de b est le même que le plus grand commun diviseur de ma et de b.

Il faut montrer que les diviseurs communs de a et de b sont les mêmes que les diviseurs communs de ma et de b : les diviseurs communs de a et de b sont évidemment des diviseurs communs de ma et de b; il suffit donc de montrer que les diviseurs communs de ma et de b sont des diviseurs communs de a et de b, c'est-à-dire qu'ils divisent a; or le plus grand commun diviseur de b et de m est 1; le plus grand commun diviseur de ba et de ma sera donc a; mais tout nombre qui divise b et ma divise aussi ba et ma; il divise donc leur plus grand commun diviseur a, ce qu'il fallait démontrer.

Inversement, on n'altérera pas le plus grand commun diviseur entre deux nombres a, b en divisant l'un d'eux par un nombre premier à l'autre. On suppose essentiellement que la division se fasse exactement.

Cette proposition est au fond identique à la précédente : dire, en supposant que m soit premier à b, que le plus grand commun diviseur de a et de b est le même que le plus grand commun diviseur de ma et de b, ou dire que le plus grand commun diviseur de ma et de b est le même que le plus grand commun diviseur de a et de b, c'est dire la même chose.

143. On obtient deux conséquences importantes de ce théorème en supposant successivement que b, que l'on regarde toujours comme premier à m, divise le produit ma ou soit premier avec a.

1° Si b divise le produit ma, il est le plus grand commun diviseur de b et de ma, et par suite de b et de a, puisqu'il est premier avec m: il divise donc le nombre a. Par suite :

Si un nombre divise un produit de deux facteurs et qu'il soit premier avec l'un d'eux, il divise l'autre.

Par exemple, 6 divise $60 = 12 \times 5$; il est premier avec 5, il divise donc certainement 12 ; 15 divise aussi 60, il ne divise aucun des facteurs 12,5, mais il n'est premier avec aucun d'eux.

2° Si b est premier avec a comme avec m, il est premier avec ma, puisque le plus grand commun diviseur de b et de ma doit être 1, comme le plus grand commun diviseur de b et de a. Donc :

Tout nombre qui est premier avec les deux facteurs d'un produit est premier avec ce produit.

La première proposition est une des propositions les plus importantes de l'arithmétique, et c'est la facilité avec laquelle elle se déduit de la considération du plus grand commun diviseur qui est la raison de l'ordre adopté dans la présente théorie.

La seconde proposition se généralise comme il suit :

144. *Si un nombre est premier avec tous les facteurs d'un produit, il est premier avec ce produit.*

Le théorème est démontré quand le produit ne comprend que deux facteurs ; supposons qu'il en contienne trois, p, q, r, et supposons le nombre a premier avec chacun des nombres p, q, r : je dis qu'il est premier avec le produit pqr; en effet, étant premier avec p, q, il est premier avec pq; étant premier avec pq et r, il est premier avec $pq \times r = pqr$. Du cas de trois facteurs, on passe au cas de quatre, cinq,... facteurs. La proposition est générale.

Si deux produits sont tels que chaque facteur de l'un soit premier avec chaque facteur de l'autre, les deux produits sont premiers entre eux.

Soient en effet abc, $pqrs$ les deux produits ; supposons que a, b, c soient respectivement premiers avec p, q, r, s : a sera premier au produit $pqrs$, de même b et c; $pqrs$ étant premier à a, à b, à c, sera premier à leur produit abc.

Ainsi 3 est premier avec 4, 5, 7, il sera premier à leur produit 140;

3 et 13 sont premiers à chacun des nombres 4, 5, 7 : le produit $3 \times 13 = 39$ sera premier au produit $4 \times 5 \times 7 = 140$.

Comme cas particuliers des théorèmes précédents, on aura, en supposant les facteurs égaux dans chaque produit, les théorèmes suivants :

Si deux nombres sont premiers entre eux, l'un d'eux est premier avec toute puissance de l'autre; toute puissance de l'un sera première avec toute puissance de l'autre.

Ainsi 7 et 5 sont premiers entre eux : il en est de même de 7 et de $5^3 = 125$, de 5^3 et de $7^4 = 2401$ [1].

145. *Quand un nombre est divisible par plusieurs autres qui sont premiers entre eux deux à deux, il est divisible par leur produit.*

Supposons que le nombre A soit divisible par les nombres a, b, premiers entre eux; soit q le quotient de A par a, on aura

$$A = aq;$$

le nombre b, premier à a, divise le produit aq; il doit donc diviser le facteur q; si q' est le quotient, on aura

$$q = bq',$$

et par suite

$$A = aq = a\,(bq') = abq',$$

ce qui montre que A est divisible par ab et que le quotient de la division est q'.

Supposons maintenant que A soit divisible par les nombres a, b, c, premiers entre eux deux à deux : A étant divisible par les deux nombres a, b, premiers entre eux, est divisible par leur produit ab, mais ce produit est premier au troisième nombre c (n° 144), puisque c est premier à chacun des facteurs a, b; A étant divisible par les deux nombres ab et c, premiers entre eux, est divisible par leur produit abc.

Du cas de trois nombres a, b, c, on passera au cas de quatre nombres, a, b, c, d, etc... : la proposition est générale. Il convient de la rapprocher du théorème du n° 104, en vertu duquel on obtiendra le même quotient final en divisant successivement le nombre A par les différents facteurs du produit, ou par le produit.

1. L'ordre que j'ai adopté dans les numéros précédents (142-144) a été indiqué par Lejeune Dirichlet. (V. Dedekind, *Vorlesungen über Zahlentheorie*.)

§ 2. — Plus petit commun multiple.

146. Un nombre A, différent de zéro, est dit commun multiple de plusieurs nombres $a, b, c,\ldots$ s'il est divisible par chacun d'eux.

Des nombres $a, b, c,\ldots$ étant donnés, le produit de ces nombres, multiplié par un facteur arbitraire, est un commun multiple de ces nombres ; ceux-ci admettent donc une infinité de communs multiples ; parmi ces communs multiples, il y en a un qui est plus petit que tous les autres ; en effet, de deux choses l'une : ou il n'y a pas de commun multiple plus petit que le produit des nombres $a, b, c,\ldots$, alors ce produit est le plus petit commun multiple cherché ; ou il y a quelque commun multiple inférieur à ce produit ; mais les nombres inférieurs à ce produit $abc\ldots$ étant en nombre limité, il en est de même des communs multiples inférieurs à $abc\ldots$; parmi ceux-ci, il y en a un qui est plus petit que tous les autres.

147. Si les nombres $a, b, c,\ldots$ sont premiers entre eux deux à deux, il résulte du théorème précédent que tout commun multiple de ces nombres est un multiple de leur produit $abc\ldots$: ce produit est donc le plus petit commun multiple des nombres $a, b, c,\ldots$ et tout commun multiple de ces nombres est un multiple de leur plus petit commun multiple. Cette proposition va être généralisée et nous allons montrer que les multiples communs à deux ou plusieurs nombres s'obtiennent en multipliant l'un d'eux par un nombre arbitraire.

148. Considérons d'abord deux nombres, a, b ; soit D leur plus grand commun diviseur ; soient a', b' les quotients de la division de a, b par D ; on a

$$a = a'\mathrm{D}, \qquad b = b'\mathrm{D},$$

et les nombres a', b' sont premiers entre eux. Tout multiple de a s'obtient en multipliant a par un certain nombre m ; il peut donc se représenter par $a'\mathrm{D}m$. Si l'on veut que ce nombre soit un multiple de b, il faut choisir m de façon que $a'\mathrm{D}m$ soit divisible par b ou $b'\mathrm{D}$; si q est le quotient, on aura

$$a'\mathrm{D}m = b'\mathrm{D}q,$$

ou, en divisant par D,

$$a'm = b'q ;$$

il faut donc que b' divise $a'm$; or il est premier avec a', il faut donc qu'il divise m. Réciproquement, si m est divisible par b', il en sera de même de $a'm$, et par suite $a'm\mathrm{D}$ sera divisible par $b'\mathrm{D} = b$ (n° 120). Ainsi tout commun multiple de a et de b s'obtiendra en mettant dans le produit $a'\mathrm{D}m$, à la place de m, un multiple de b' et, réciproquement, tout nombre obtenu de cette façon est un multiple commun de a, b; or, tout multiple de b' est de la forme kb', k étant un nombre quelconque; donc, tout multiple commun de a, b est de la forme

$$a'\mathrm{D} \times (kb') = a'b'\mathrm{D} \times k,$$

et réciproquement : on voit donc que les multiples communs de a, b sont les mêmes nombres que les multiples de $a'b'\mathrm{D}$; on les obtiendra tous en donnant à k les valeurs 1, 2, 3,... Le plus petit est $a'b'\mathrm{D}$.

Par exemple, le plus petit multiple commun de 360 et 172 est égal au produit de 172 par $\frac{360}{4} = 90$: il est 15480; les multiples de 15480 sont les multiples communs de 360 et 172.

Si les nombres a, b sont premiers entre eux, on a $\mathrm{D} = 1$, $a' = a$, $b' = b$, et la démonstration précédente montre que les multiples communs de a, b sont les mêmes nombres que les multiples de leur produit : c'est la proposition du n° 145.

Le nombre $a'b'\mathrm{D}$ s'appelle *plus petit commun multiple* des nombres a, b; cette dénomination est évidemment justifiée. On peut l'écrire ab', ou $a'b$, ou encore $\frac{ab}{\mathrm{D}}$; car on a vu, n° 118, que pour diviser par D le produit ab, il suffisait de diviser par D l'un de ses facteurs : $\frac{ab}{\mathrm{D}}$ est donc la même chose que $a'b$. Nous sommes parvenus au théorème suivant :

Le plus petit commun multiple de deux nombres s'obtient en divisant leur produit par leur plus grand commun diviseur; les multiples communs de deux nombres sont les mêmes nombres que les multiples de leur plus petit commun multiple.

149. Si l'on a maintenant plusieurs nombres, a, b, c, d par exemple, et que l'on cherche les communs multiples de ces nombres, on peut remplacer deux d'entre eux, a, b par exemple, par leur plus petit commun multiple M; les multiples communs de a, b étant les mêmes nombres que les multiples de M, il est clair que les multiples communs de a, b, c, d seront les mêmes que les multiples communs des nombres M, c, d; si l'on désigne maintenant par M′ le plus petit commun multiple de M et de c, il est clair que les communs multiples de M, c, d seront les mêmes que les communs multiples de

M′, d; enfin, si l'on désigne par M″ le plus petit commun multiple de M′, d, les communs multiples de M′, d seront les mêmes nombres que les multiples de M″.

Le raisonnement est général et l'on voit que : 1° *Étant donnés autant de nombres qu'on veut, il existe un nombre m tel que les multiples communs des nombres donnés soient les mêmes nombres que les multiples de m; ce nombre m s'appelle le plus petit commun multiple des nombres donnés;*

2° *Dans la recherche du plus petit commun multiple de plusieurs nombres, on peut remplacer deux ou plusieurs de ces nombres par leur plus petit commun multiple.*

Par exemple, le plus petit commun multiple de 360, 172, 18, 21 est le même que le plus petit commun multiple de 15480 (qui est le plus petit commun multiple de 360 et de 172) et de 126 (qui est le plus petit commun multiple de 18 et de 21); et comme 18 est le plus grand commun diviseur de 15480 et de 126, le plus petit commun multiple cherché est égal au produit de 15480 par $\frac{126}{18} = 7$; il est donc 108360.

150. Il ne sera pas inutile de remarquer que le théorème fondamental « les multiples communs à deux ou plusieurs nombres sont les mêmes nombres que les multiples de leur plus petit commun multiple » peut être déduit directement de la notion de *plus petit* commun multiple.

Soit en effet M le plus petit commun multiple des nombres $a, b, c, \ldots$ tel qu'il a été défini au n° 146 et soit M′ un commun multiple de ces nombres; si M′ n'est pas divisible par M, soit M″ le reste de la division de M′ par M; M″ devra être divisible par a, b, c,... (n° 134); M″ est donc un commun multiple de a, b, c,...; mais M″ est plus petit que M; M ne serait donc pas le plus petit commun multiple.

151. Cette proposition entraîne la proposition analogue relative au plus grand commun diviseur.

On observera d'abord que si le commun multiple de plusieurs nombres D, D′, D″,... figure parmi ces nombres, c'est certainement le plus grand d'entre eux. Ceci posé, soient a, b, c,... plusieurs nombres et D, D′, D″,... tous leurs communs diviseurs; les nombres a, b, c,... étant des multiples de D, D′, D″,... seront divisibles par leur plus petit commun multiple, qui ainsi fera nécessairement partie des nombres D, D′, D″,... et sera donc le plus grand d'entre eux. On a ainsi une seconde démonstration de la propriété fondamentale du plus grand commun diviseur [1].

1. Elle est tirée d'un Mémoire de M. Stieltjes (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, T. V).

152. *La condition nécessaire et suffisante pour que* M *soit le plus petit commun multiple des nombres* a, b, c,... *est que* M *soit divisible par chacun de ces nombres et que les quotients soient premiers entre eux.*

1° Si M est le plus petit commun multiple de a, b, c,..., les quotients obtenus en divisant M par a, b, c,... sont premiers entre eux : désignons, en effet, ces quotients par a', b', c',..., on aura

$$M = aa' = bb' = cc' = ...;$$

si a', b', c',... avaient un diviseur commun k autre que un, on pourrait poser

$$a' = ka'',\ b' = kb'',\ c' = kc'',...,$$

et par suite

$$M = aa''k = bb''k = cc''k = ...;$$

M serait donc divisible par k et l'on aurait

$$\frac{M}{k} = aa'' = bb'' = cc'' = ...;$$

$\frac{M}{k}$ serait donc un commun multiple de a, b, c, ..., et M ne serait pas le plus petit commun multiple de ces nombres.

2° Si M est un commun multiple, mais non le plus petit commun multiple de a, b, c,..., les quotients de la division de M par a, b, c,... ne sont pas premiers entre eux.

Soit en effet m le plus petit commun multiple de a, b, c,... et soient a', b', c',... les quotients $\frac{m}{a}$, $\frac{m}{b}$, $\frac{m}{c}$,...; on aura

$$m = aa' = bb' = cc' = ...;$$

d'ailleurs M est divisible par m; soit h le quotient, qui, par hypothèse, est plus grand que un : on aura

$$M = mh = aa'h = bb'h = cc'h = ...,$$

d'où l'on déduit que les quotients de la division de M par a, b, c,... sont respectivement $a'h$, $b'h$, $c'h$,..., et qu'ils admettent le diviseur commun h (1).

153. *Quand on multiplie ou qu'on divise plusieurs nombres* a, b, c,... *par un même nombre* h, *le plus petit commun multiple des nombres* a, b, c,... *est multiplié ou divisé par* h. (Les divisions de a, b, c,... par h sont supposées se faire exactement.)

Soit, en effet, M le plus petit commun multiple de a, b, c,...; Mh sera divisible par ah, bh, ch,... et les quotients sont les mêmes que les quotients de

1. Ces démonstrations ne s'appuient que sur la définition du *plus petit* commun multiple de deux ou plusieurs nombres, et sur la propriété fondamentale « Tout multiple de plusieurs nombres est un multiple de leur plus petit commun multiple » ; elles font exactement pendant aux démonstrations du n° 141, pour le plus grand commun diviseur.

la division de M par a, b, c,...; ils sont donc premiers entre eux; donc Mh est le plus petit commun multiple de ah, bh, ch,... La démonstration est la même quand on divise par h.

154. Les propositions des nos 152 et 153, qui montrent l'analogie de la théorie du plus petit commun multiple et du plus grand commun diviseur, ont été établies sans le secours de cette dernière théorie.

Observons que la proposition qui nous a servi de point de départ, « Le plus petit commun multiple de deux nombres a, b, dont le plus grand commun diviseur est D, est $\frac{ab}{D}$ », en résulte immédiatement : en effet, on a

$$\frac{ab}{D} = a\frac{b}{D} = b\frac{a}{D},$$

c'est-à-dire que le nombre $\frac{ab}{D}$ est divisible par a et par b et que les quotients sont respectivement $\frac{b}{D}$, $\frac{a}{D}$: ces quotients sont premiers entre eux, puisque D est le plus grand commun diviseur des deux nombres a, b; donc (n° 152) $\frac{ab}{D}$ est le plus petit commun multiple de a et de b. Le lecteur démontrera de même la proposition suivante, d'ailleurs facile à généraliser :

Étant donnés trois nombres a, b, c, si D est le plus grand commun diviseur des produits bc, ca, ab, le plus petit commun multiple de a, b, c est $\frac{abc}{D}$.

Exercices.

107. Quel est le plus grand commun diviseur des nombres

$$360 \times 473,\ 172 \times 361?$$

108. Parmi les nombres inférieurs à 100 quels sont ceux qui ont avec 360 le plus grand commun diviseur 4?

109. Si b est premier avec a et si l'on divise par b les nombres

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ (b-1)a,$$

on obtiendra $b - 1$ restes différents, dont aucun n'est nul et qui ne sont autres que les nombres 1, 2, 3, ..., $b - 1$ rangés dans un certain ordre.

De nombreuses conséquences de cette proposition seront développées dans le chapitre dernier.

110. Etant donnée une progression géométrique indéfinie

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots$$

dont le premier terme est 1 et la raison a, si l'on divise tous les termes par un nombre b premier à a, les restes se reproduiront périodiquement. Il existe en particulier une infinité de termes qui fournissent comme reste le nombre un ; si n est le plus petit exposant pour lequel $a^n - 1$ soit divisible par a, la période des restes se compose de n termes différents. Déterminer cette période dans le cas où $a = 2$, $b = 23$.

La proposition précédente, dont diverses conséquences seront développées dans le chapitre dernier, est le fondement de la théorie générale des caractères de divisibilité dans un système de numération dont la base est a.

111. Si a' est premier à b et si b' est premier à a, le plus grand commun diviseur de a et de b sera le même que le plus grand commun diviseur de aa' et de bb'.

112. Si le plus grand commun diviseur des nombres m, b, c est l'unité, le plus grand commun diviseur des trois nombres ma, b, c est le même que celui des trois nombres a, b, c.

113. Si d est le plus grand commun diviseur de a et de b; si d' est le plus grand commun diviseur de a' et de b et si d et d' sont premiers entre eux, le plus grand commun diviseur de aa' et de b sera dd'.

114. Si l'on applique la méthode pour chercher le plus grand commun diviseur à deux termes consécutifs de la suite de l'exercice 20, on trouvera comme restes successifs les termes précédents de cette suite. Deux termes consécutifs de cette suite sont premiers entre eux.

115. Dans la suite de l'exercice 20, on sait (Ex. 59) que l'on a

$$u_{m+n} = u_{n-1} u_m + u_n u_{m+1}.$$

Démontrer que le plus grand commun diviseur de u_{m+n} et de u_m est le même que celui de u_m et de u_n; ce plus grand commun diviseur est égal à u_d, en désignant par d le plus grand commun diviseur de m et de n.

116. On considère n nombres a, b, c, ...; on prend le plus grand commun diviseur de deux quelconques d'entre eux, et l'on conserve tous les nombres différents a', b', c', ... que l'on peut obtenir ainsi; on opère sur a', b', c', ... comme on a fait sur a, b, c, ..., etc... Au bout d'un nombre fini d'opérations, on aura le plus grand commun diviseur des nombres proposés.

117. Dans l'opération du plus grand commun diviseur, il est impossible que plus de deux restes consécutifs tombent entre deux mêmes termes de la suite de l'exercice 20; s'il en tombe deux, il n'y en aura aucun dans l'intervalle suivant.

En partant de là, montrer que l'opération du plus grand commun diviseur exige un nombre de divisions au plus égal à cinq fois le nombre des chiffres du plus petit des deux nombres. (Ex. 24.)

118. Le plus petit commun multiple de deux nombres est 96; l'un de ces nombres est 6, quel peut être l'autre?

119. Si m est premier à b, le plus petit commun multiple de ma et de b est égal au produit par m du plus petit commun multiple de a et de b.

120. Soit A le plus grand commun diviseur des p nombres a_1, a_2, ... a_p; soit B le plus grand commun diviseur des q nombres b_1, b_2, ..., b_q : le plus grand commun diviseur des pq produits que l'on peut former en prenant un facteur parmi les nombres a_1, a_2, ..., a_p et l'autre facteur parmi les nombres b_1, b_2, ..., b_q, est AB.

Ce théorème subsiste quand on remplace les mots « plus grand commun diviseur » par les mots « plus petit commun multiple ».

121. Si le plus grand commun diviseur des nombres m, a, b est l'unité, le plus grand commun diviseur de m et de ab est égal au produit du plus grand commun diviseur de m et de a par le plus grand commun diviseur de m et de b.

122. Si l'on a

$$x' = ax + by, \quad y' = a'x + b'y$$

et si $ab' - a'b$ est égal à un, le plus grand commun diviseur de x, y est le même que celui de x', y'.

CHAPITRE V

NOMBRES PREMIERS

155. *Un nombre premier est un nombre qui n'admet pas d'autre diviseur que lui-même et l'unité* [1].

Ainsi 7 est un nombre premier, parce qu'il n'est divisible par aucun des nombres 2, 3, 4, 5, 6.

Le mot premier a déjà été introduit au n° 140, dans un sens différent : 4 et 15 sont premiers *entre eux*, ou 4 est premier avec 15; dans ce sens, il est question de deux nombres; c'est *relativement* à l'un que l'autre est premier. Au contraire 7 est premier *absolu.*

Tout nombre premier (absolu) est premier relativement à un nombre qu'il ne divise pas; ainsi 7 est premier à 15 qu'il ne divise pas; en effet, d'une part 7 ne divise pas 15, d'autre part tout nombre autre que 1 et 7 ne peut diviser 7, et par conséquent ne peut diviser 7 et 15. 7 n'est pas premier à 14 qu'il divise. En particulier, tout nombre premier absolu est premier relativement à tout nombre plus petit que lui.

156. *Tout nombre qui n'est pas premier admet un diviseur premier, autre que un.*

En effet, un nombre a qui n'est pas premier admet des diviseurs plus petits que lui, autres que un; le nombre de ces diviseurs est limité; le plus petit d'entre eux, b, est premier, car autrement il admettrait un diviseur plus petit que lui, autre que un, et ce diviseur diviserait a; donc b ne serait pas le plus petit des diviseurs de a.

157. *La suite des nombres premiers est illimitée.* Cet énoncé veut dire que, si l'on donne un nombre premier quelconque, il y en a un plus grand.

Supposons, en effet, qu'il y ait un nombre premier p plus grand que tous les autres. Formons le produit de tous les nombres qui ne sont pas supérieurs à p, produit que nous représenterons par $1.\ 2.\ 3 \ldots p$; ajoutons 1 à ce produit; de deux choses l'une : ou le nombre ainsi formé,

$$1.\ 2.\ 3 \ldots p + 1,$$

est premier, et alors il est plus grand que p; ou il n'est pas pre-

1. Quelques auteurs ne comptent pas *un* parmi les nombres premiers.

mier; dans ce dernier cas, il admettrait un diviseur premier, autre que un; mais ce diviseur ne peut être un des nombres 2, 3,..., p; car alors, divisant la somme $1.2.3...p+1$ et l'une des parties de cette somme, $1.2.3...p$, dans laquelle il entre en facteur, il diviserait la seconde partie, qui est un; il est donc plus grand que p; dans les deux cas, il est prouvé qu'il existe un nombre premier plus grand que p.

158. Dans ce numéro et dans le suivant, afin d'éviter des répétitions fastidieuses, je ne regarderai pas le nombre *un* comme un nombre premier; en parlant des diviseurs premiers d'un nombre, j'entendrai donc les diviseurs autres que un. Enfin, en parlant des multiples d'un nombre, j'entendrai les multiples obtenus en multipliant ce nombre par un facteur plus grand que un.

Ceci posé, j'établirai d'abord le lemme suivant :

Si le nombre A *est inférieur au carré du nombre* a *et s'il n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs à* a, *on peut affirmer que le nombre* A *est premier.*

Supposons, en effet, que les conditions imposées au nombre A soient réalisées et que, cependant, il ne soit pas premier : soit alors p le plus petit nombre premier qui divise A, on aura

$$A = pq,$$

en désignant par q le quotient de la division de A par p; puisque A n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à a, p est au moins égal à a; q est donc inférieur à a, puisque le produit de deux nombres égaux ou supérieurs à a serait au moins égal à $a \times a$ et, par conséquent, plus grand que A; mais A est divisible par q, et par n'importe quel diviseur premier de q, c'est-à-dire par un nombre premier inférieur ou égal à q, et, dans tous les cas, moindre que a. La contradiction est manifeste.

159. *Formation d'une table de nombres premiers.* — Soit maintenant à construire une table de nombres premiers inférieurs ou égaux à un nombre donné N. J'écris la suite naturelle

$$2, 3, 4, 5, \ldots, N$$

des nombres, depuis 2 jusqu'à N. 2 est premier; je barre tous les multiples de 2; c'est à 2×2 qu'il faut commencer. Après 2, on rencontre 3, qui n'est pas barré; mais il ne reste plus dans la table aucun nombre qui soit divisible par 2, le seul nombre premier plus petit que 3; donc, en vertu du lemme, tous les nombres qui subsistent et qui sont inférieurs à 3×3 sont premiers; je barre tous les multiples de 3; c'est à 3×3 qu'il faudra commencer, car un multiple inférieur de 3, n'étant pas premier, n'a pu subsister dans la table. Après 3, on rencontre 5, qui n'est pas barré; mais il ne reste plus dans la table de nombre qui soit divisible par 2 ou par 3, les seuls nombres premiers inférieurs à 5; donc, en vertu du lemme, tous les nombres qui subsistent et qui sont inférieurs à 5×5 sont premiers; je barre tous les multiples de 5; c'est à 5×5 qu'il faudra commencer, puisque les multiples inférieurs, n'étant pas premiers, ont été barrés. Après 5, on rencontre 7, qui n'est pas barré ; mais il ne reste dans la table aucun nombre qui soit divisible par un nombre premier inférieur à 7; donc, en vertu du lemme, tous les nombres qui subsistent et qui sont inférieurs à 7×7 sont premiers; je barre tous les multiples de 7; c'est à 7×7 qu'il faut commencer. Après 7, on rencontre 11 ; tous les nombres qui subsistent dans la table et qui sont inférieurs à 11×11 sont premiers; si, en continuant de la même façon, on vient de barrer les multiples du nombre premier p, et si p' est le premier nombre de la table qui ne soit pas barré, on est sûr que tous les nombres qui subsistent et qui sont inférieurs à $p' \times p'$ sont premiers; si $p' \times p'$ est supérieur à N, l'opération est terminée. Si l'on avait voulu construire, par exemple, une table des nombres premiers inférieurs à 100, on se serait arrêté après avoir barré les multiples de 7.

Cette construction donne lieu à quelques observations : elle a été appuyée sur un lemme qui est commode, mais non essentiel. Après chaque radiation, il est manifeste que le premier nombre que l'on rencontre dans la table est premier, puisque, n'ayant pas été barré, il n'admet certainement pas de diviseur premier plus petit que lui : par exemple, quand on a supprimé les multiples de 2 et de 3, le premier nombre que l'on rencontre, c'est-à-dire 5, est certainement premier. Quand on veut ensuite barrer les multiples de 5, c'est assurément à 5×5 qu'il faudra commencer, car les multiples inférieurs obtenus en multipliant 5 par un nombre a plus petit que 5, et, par suite, divisible par un nombre premier moindre que 5, à savoir n'importe quel diviseur premier de a, ont déjà été barrés ; ce raisonnement se continue indéfiniment. Que les nombres inférieurs à 7×7, qui subsistent dans la table quand on a barré les multiples de 5, soient premiers, c'est ce qui résulte de ce que, dans la suite des opérations, on n'aura jamais à les barrer, puisque la radiation des multiples de 7 commencera à 7×7, etc... Ainsi, la seule observation de la façon dont les choses se passent, jointe au théorème du n° 156, permet d'obtenir toutes les conclusions essentielles. Le lecteur reconnaîtra qu'on peut même se passer aisément de ce théorème.

Au point de vue pratique, pour barrer les multiples d'un nombre, de 5 par exemple, en commençant à l'un de ces multiples, à 25 par exemple, on procède comme il suit : après avoir barré 25, on place successivement la plume sur les nombres suivants 26, 27, 28, ..., barrés ou non, en comptant 1, 2, 3, ... ; on s'arrête quand on compte 5 et l'on barre le nombre sur lequel on s'est arrêté, puis on recommence à compter 1, 2, 3, ... sur les nombres suivants, et, quand on compte 5 de nouveau, on barre encore le nombre sur lequel on est arrêté, etc... Ajoutons que, tout en opérant exactement de la même façon, on peut, au début, se dispenser d'écrire les nombres pairs, sauf 2 ; ceci, toutefois, aurait besoin d'une justification, que le lecteur trouvera aisément de lui-même, surtout s'il veut bien se reporter au théorème du n° 160.

La table I, à la fin du volume, donne la liste des nombres premiers moindres que 1000.

Reconnaître si un nombre donné est premier. — Supposons maintenant qu'on veuille reconnaître si le nombre donné n est premier, et que ce nombre ne figure pas dans la table que l'on a à sa disposition. On essaiera successivement comme diviseurs les nombres premiers 2, 3, 5, 7 ... dans l'ordre où ils se suivent, jusqu'à ce qu'on ait été amené à essayer, sans que cette division ait réussi, non plus que les précédentes, un nombre premier p qui fournisse un quotient q inférieur ou égal au nombre premier p' qui suit p dans la table ; dès lors on peut affirmer que le nombre n est premier ; on a, en effet,

$$n < p\,(q+1) < p' \times p',$$

et le nombre n, n'étant divisible par aucun nombre premier inférieur à p', est premier en vertu du lemme.

Par exemple, le nombre 1009 est premier : l'emploi des caractères de divisibilité montre qu'il n'est divisible ni par 3, ni par 5, ni par 11 ; les divisions par 7, 13, 17, 19, 29, 31 ne réussissent pas ; la dernière donne pour quotient 32, nombre inférieur au nombre premier 37 qui suit 31. Il n'est pas utile d'aller plus loin.

Cette méthode suppose qu'on ait une table de nombres premiers à sa disposition. S'il n'en est pas ainsi, on essaiera comme diviseurs les nombres de la suite naturelle 2, 3, 4, 5, ... dans leur ordre, en se dispensant toutefois d'essayer les nombres dont on sait qu'ils ne sont pas premiers, et l'on s'arrêtera quand on aura essayé en vain un diviseur p qui fournisse un quotient q moindre que lui ; on aura en effet alors

$$n < p(q+1) < p^2,$$

et l'on sera certain que le nombre n, n'admettant pas de diviseur premier moindre que p, est premier.

160. *Un nombre premier qui divise un produit de plusieurs facteurs divise au moins l'un d'eux.*

En effet, si le nombre premier ne divise aucun des facteurs, il est premier à chacun d'eux (n° 155); il est donc premier à leur produit (n° 144).

La démonstration précédente s'appuie sur la théorie du plus grand commun diviseur : comme le théorème que l'on vient d'établir est le fondement essentiel de ce qui va suivre, il ne sera pas inutile d'en donner une démonstration directe, qui ne s'appuie que sur les propositions plus élémentaires du chapitre III.

Considérons d'abord un produit de deux facteurs a, b, et soit p un nombre premier. Je dis que si p ne divise ni a, ni b, il ne divise pas ab ; il suffit de faire la démonstration dans le cas où les nombres a, b sont inférieurs à p. Si l'on désigne, en effet, par a', b' les restes de la division de a, b par p, les restes de la division par p des produits ab, $a'b'$ sont égaux (n° 126); si le second reste n'est pas nul, le premier ne le sera pas non plus ; si donc on a démontré que le produit ab ne pouvait être divisible par p quand les nombres a, b sont inférieurs à p, la proposition sera démontrée dans tous les cas.

Or, supposons qu'on puisse associer à un nombre a, plus petit que le nombre premier p, un nombre plus petit aussi que p, tel que son produit par a soit divisible par p, et soit b le plus petit des nombres pour lesquels cela a lieu; b est plus grand que un, puisque $a \times 1 = a$, étant inférieur à p, ne peut être divisible par p. Soit r le reste de la division de p par b, et q le quotient; on aura $p = bq + r$, et, par conséquent, $ap = abq + ar$; la somme $abq + ar$ est divisible par p; la première partie l'est aussi, puisque ab est, par hypothèse, un multiple de p; il faudrait donc que la seconde partie ar fût divisible aussi par p; mais cela est impossible, puisque r est plus petit que b, et que b est, par hypothèse, le plus petit nombre qui, associé à a, donne un produit divisible par p.

Considérons maintenant un produit de trois facteurs a, b, c, dont aucun n'est divisible par le nombre premier p ; p, ne divisant ni a ni b, ne divise pas ab ; ne divisant ni ab ni c, il ne peut diviser leur produit abc; du cas de trois facteurs on s'élève successivement au cas de quatre, cinq, six, ... facteurs; la proposition est générale. Cette démonstration est due à Gauss.

161. *Tout nombre qui n'est pas premier peut être décomposé en un* *produit de facteurs premiers autres que un; la décomposition ne peut se faire que d'une seule façon.*

1° La décomposition est possible.

Soit A un nombre qui n'est pas premier; il admet un diviseur premier a autre que 1 et que A (n° 156); soit q le quotient de la division de A par a; q n'est pas égal à 1 et l'on a

$$A = aq.$$

Si q est premier, la décomposition est faite; si q n'est pas premier, il admet un diviseur premier b autre que 1 et que q; si q' est le quotient de la division de q par b, q' n'est pas égal à 1 et l'on a

$$q = bq',$$

et par conséquent en remplaçant q par bq' dans aq,

$$A = abq';$$

si q' est premier, la décomposition est effectuée; sinon q' admettra un diviseur premier c autre que 1 et que q', et l'on pourra poser

$$q' = cq'',$$

d'où

$$A = abcq''.$$

Si q'' est premier, la décomposition est terminée; sinon, on continuera. Les nombres A, q, q', q'', ... vont en diminuant, puisque chacun d'eux s'obtient en divisant le précédent par un nombre plus grand que 1; il n'y a qu'un nombre limité de nombres inférieurs à A, il faudra donc que la suite des opérations s'arrête; elle ne peut s'arrêter que lorsqu'on trouve un quotient qui est un nombre premier; cette circonstance se présentera donc. A ce moment, la décomposition sera effectuée et le nombre A sera mis sous la forme d'un produit $abc ... r$ de facteurs $a, b, c, ..., r$ tous premiers et différents de un. Les facteurs peuvent d'ailleurs être différents ou égaux.

2° La décomposition ne peut s'effectuer que d'une seule façon. Soit en effet $a'b'c'...p'$ un produit de facteurs $a', b', c', ..., p'$ tous premiers, qui soit égal au produit $abc...r$. Je dis, en supposant que le facteur 1 ne figure pas parmi les nombres a, b, c..., r, a', b', c',..., p', que les deux produits $abc...r$, $a'b'c'...p'$, sauf l'ordre des facteurs, sont identiques; en effet, a divise le premier produit; il doit diviser le second, et par conséquent l'un de ses facteurs, et par conséquent être égal à ce facteur. Supposons que a' soit égal à a; en supprimant dans les deux produits égaux les facteurs égaux a et a', les résultats doivent être encore égaux, et l'on doit avoir

$$bc...r = b'c'...p';$$

mais le même raisonnement s'applique au facteur b du premier produit qui doit avoir son égal b' dans le second; en supprimant ensuite les deux facteurs égaux b et b', on voit que le facteur c du premier produit devra avoir son égal c' dans le second, etc... Ainsi, chaque facteur du premier produit doit avoir son égal dans le second, et comme l'égalité ne saurait subsister après avoir supprimé tous les facteurs d'un produit, s'il en restait quelqu'un dans l'autre, on voit qu'il y a nécessairement autant de facteurs dans un produit que dans l'autre, et qu'on peut ranger ces facteurs de manière que les facteurs qui occupent le même rang dans les deux produits soient identiques.

162. Nous allons maintenant montrer, sur un exemple, comment l'on effectue la décomposition.

Soit à décomposer 360; on essaie la division par les nombres premiers successifs, en s'aidant pour les premiers des caractères de divisibilité. 360 est divisible par 2; le quotient est 180; ce nombre est encore divisible par 2; le quotient est 90; ce nombre est encore divisible par 2; le quotient est 45; ce nombre n'est plus divisible par 2, mais il est divisible par 3; le quotient est 15; ce nombre est divisible encore par 3; le quotient est 5, qui est premier [1].

On adopte, pour indiquer ces résultats, la disposition suivante : en haut, à gauche, on place le nombre à décomposer et l'on tire à droite un trait vertical; en face du nombre, à droite du trait, on écrit le diviseur premier et au-dessous du nombre, le quotient; en face de ce quotient le diviseur premier, et au-dessous du premier quotient le nouveau quotient, etc.; on continue jusqu'à ce que l'on ait obtenu un quotient qui soit un nombre premier; on a soin de l'écrire à nouveau, à droite du trait vertical, en face de lui-même :

$$\begin{array}{r|l}
360 & 2 \\
180 & 2 \\
90 & 2 \\
45 & 3 \\
15 & 3 \\
5 & 5
\end{array}$$

1. Dans chaque opération, le dividende n'est certainement pas divisible par les nombres premiers autres que un et moindres que celui qu'on essaie comme diviseur; si l'on vient de faire la division par le nombre premier p, si la division a réussi, et si le quotient q est moindre que p^2, on peut affirmer (n° 158) que q est premier, puisqu'il ne peut être divisible, non plus que le dividende, par un nombre premier autre que un et inférieur à p.

Si on lit les nombres à gauche, en remontant, il est clair que l'on aura $15 = 3 \times 5$, puis

$$45 = 3 \times 15 = 3 \times (3 \times 5) = 3 \times 3 \times 5,$$

puis

$$90 = 2 \times 45 = 2 \times (3 \times 3 \times 5) = 2 \times 3 \times 3 \times 5,$$

et ainsi de suite, en sorte que chaque nombre, à gauche, est le produit des nombres de la colonne de droite situés à la même hauteur que lui ou plus bas; en particulier 360 sera égal au produit de tous les nombres de la colonne de droite, en sorte que l'on aura

$$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5,$$

en employant la notation des exposants.

Quand un nombre est premier, on doit le regarder comme tout décomposé. A proprement parler, ce n'est pas un produit. Même dans ce cas, nous emploierons (abusivement) l'expression de produit de facteurs premiers. On observera enfin que parmi les facteurs premiers d'un nombre, on ne compte pas le nombre 1.

163. Cette façon de représenter un nombre quelconque par un produit de facteurs premiers est très utile dans beaucoup de circonstances : elle facilite diverses opérations et met en évidence diverses propriétés des nombres.

Quand deux nombres B, C sont décomposés en facteurs premiers, on obtient immédiatement leur produit décomposé en facteurs premiers ; il suffit en quelque sorte de juxtaposer les facteurs de C à ceux de B; en d'autres termes, les facteurs du produit BC sont les facteurs qui figurent dans B et dans C, et le nombre de fois que chaque facteur entre dans ce produit est la somme des nombres qui expriment combien de fois le facteur entre dans B et dans C.

Lorsqu'on emploie la notation des exposants, on peut dire que chaque facteur premier du produit BC est un facteur premier de l'un ou de l'autre des nombres B, C et que l'exposant dont il est affecté est la somme des exposants avec lesquels il figure dans B et dans C, s'il figure à la fois dans ces deux nombres ; il ne faut pas oublier que les facteurs qui n'ont pas d'exposant doivent être regardés comme affectés de l'exposant 1.

Par exemple, le produit des deux nombres

$$B = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5, \qquad C = 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 11$$

est

$$BC = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 11$$
$$= 2^5 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11.$$

164. *Pour qu'un nombre* A *décomposé en facteurs premiers soit divisible par un nombre* B *décomposé en facteurs premiers, il faut et il suffit que tous les facteurs premiers qui figurent dans* B *se retrouvent dans* A, *chacun d'eux en nombre au moins égal.*

1° La condition est nécessaire; en effet, supposons A divisible par B et soit C le quotient, aussi décomposé en facteurs premiers, on aura

$$A = B \times C.$$

Le second membre est tout décomposé en facteurs premiers, comme le premier membre; les deux décompositions doivent être identiques. Donc tous les facteurs qui entrent dans B doivent figurer dans A, en nombre au moins égal.

2° La condition est suffisante : en effet, si A contient tous les facteurs de B, en nombre au moins égal, on pourra dans A mettre en avant tous les facteurs de B, en les répétant autant de fois qu'ils figurent dans B; on voit alors clairement que A est divisible par B, et que le quotient est le produit des autres facteurs. Ainsi, si on a $A = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 \times 11$ et $B = 2 \times 3 \times 7 \times 7$, on écrira

$$A = (2 \times 3 \times 7 \times 7) \times (2 \times 11);$$

si l'on emploie la notation des exposants, on peut exprimer le théorème précédent sous la forme que voici :

Pour que le nombre A soit divisible par le nombre B, il faut et il suffit que chaque facteur qui figure dans B figure dans A avec un exposant égal ou supérieur. Le quotient $\frac{A}{B}$ est égal alors au produit des facteurs de A qui ne figurent pas dans B, avec leurs exposants, et des facteurs de A qui figurent aussi dans B, mais avec des exposants moindres, égaux à la différence des exposants qu'ils ont dans A et dans B.

Ainsi, $A = 2^3 \times 3^2 \times 5^3 \times 7 \times 19$ est divisible par $B = 2^2 \times 5 \times 7$ et l'on a

$$\frac{A}{B} = 2^{3-2} \times 3^2 \times 5^{3-1} \times 19 = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 19.$$

Le théorème précédent est capital dans la théorie de la divisibilité et résout en quelque sorte toutes les questions posées dans le précédent chapitre.

165. *Trouver tous les diviseurs d'un nombre.*

Supposons le nombre donné A décomposé en facteurs premiers. Tout diviseur de A, en dehors de 1, devra être composé de facteurs premiers qui figurent dans A, avec des exposants égaux ou moindres. En écrivant tous les nombres ainsi composés, on obtiendra tous les diviseurs de A.

Pour n'en oublier aucun, on peut procéder comme il suit.

Soit, par exemple, $A = 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

Sur une première ligne, on écrit les nombres

$$(1) \qquad 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3;$$

ils sont, avec le diviseur 1, les diviseurs qui ne contiennent pas d'autre facteur premier que 2; sur une seconde ligne on écrit les nombres

$$(2) \qquad 1,\ 3,\ 3^2;$$

on multiplie les nombres de la première ligne par chacun des nombres qui figurent dans la seconde ligne; on formera ainsi les nombres

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & 2^2, & 2^3, \\ 1\times 3, & 2\times 3, & 2^2\times 3, & 2^3\times 3, \\ 1\times 3^2, & 2\times 3^2, & 2^2\times 3^2, & 2^3\times 3^2, \end{array}$$

qui sont, avec le nombre 1, tous les diviseurs où n'entrent pas d'autres facteurs premiers que 2 et 3; enfin, en multipliant tous ces nombres par chacun des nombres

$$(3) \qquad 1,\ 5,$$

on reproduira, d'une part, tous les diviseurs précédemment obtenus, et en outre, ceux qui contiennent le facteur 5; on obtiendra ainsi les nombres

$1, 2, 2^2, 2^3, 3, 2\times 3, 2^2\times 3, 2^3\times 3, 3^2, 2\times 3^2, 2^2\times 3^2, 2^3\times 3^2, 5, 2\times 5, 2^2\times 5, 2^3\times 5, 3\times 5, 2\times 3\times 5, 2^2\times 3\times 5, 2^3\times 3\times 5, 3^2\times 5, 2\times 3^2\times 5, 2^2\times 3^2\times 5, 2^3\times 3^2\times 5,$

ou

1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360.

Ce sont tous les diviseurs cherchés. Leur nombre est évidemment le produit des nombres de termes qui se trouvent dans les lignes (1), (2), (3), c'est-à-dire, en général, le produit des exposants, augmentés chacun d'une unité, des facteurs premiers différents qui figurent dans la décomposition de A. Ce nombre est pair si l'un des exposants est impair ; il n'est impair que si tous les exposants sont pairs, c'est-à-dire si A est le carré d'un nombre que l'on obtiendrait en divisant par 2 l'exposant de chaque facteur premier qui entre dans A. Par exemple, si l'on avait

$$A = 2^4 \times 3^6 \times 7^2,$$

le nombre des diviseurs serait $5 \times 7 \times 3 = 105$, et A serait le carré de $2^2 \times 3^3 \times 7$, puisque l'on a (n° 81)

$$(2^2 \times 3^3 \times 7)^2 = 2^{2\times 2} \times 3^{3\times 2} \times 7^{1\times 2} = A.$$

166. Quand on se donne deux ou plusieurs nombres A, B, C, ..., décomposés en facteurs premiers, on reconnaît de suite s'ils ont quelque diviseur commun autre que un : un tel diviseur, décomposé en facteurs premiers, ne peut comprendre que des facteurs premiers communs à tous les nombres A, B, C, ... ; inversement tout produit de facteurs premiers ainsi formé est un commun diviseur de A, B, C, ... ; le plus grand d'entre eux s'obtiendra en prenant *tous* les facteurs premiers communs à A, B, C, ... et en répétant chacun autant de fois que possible, c'est-à-dire autant de fois qu'il figure dans celui des nombres A, B, C, ... où il est répété le moins de fois. D'après la règle pour la formation des diviseurs d'un nombre, il est clair que les diviseurs communs des nombres A, B, C, ... seraient les mêmes que les diviseurs de leur plus grand commun diviseur.

Règle. — Pour former le plus grand commun diviseur de deux ou plusieurs nombres décomposés en facteurs premiers, on fait le produit de tous les facteurs premiers différents communs à ces nombres et l'on affecte chacun d'eux d'un exposant égal au plus faible des exposants dont ce facteur est affecté dans les différents nombres.

Exemple : soient les trois nombres

$$\begin{aligned} A &= 2^3 \times 3^2 \times 5^3 \times 7 \times 11^2, \\ B &= 2 \times 3^3 \times 5 \times 11 \times 13, \\ C &= 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11 \times 19. \end{aligned}$$

Le plus grand commun diviseur sera

$$2 \times 3^2 \times 5 \times 11.$$

Si les nombres A, B, C, ... n'ont pas de facteurs premiers communs, ils sont premiers entre eux.

167. Avec la décomposition en facteurs premiers, les théorèmes des nos 143, 144 deviennent intuitifs; à la vérité, ces théorèmes ont servi (n° 161) à montrer qu'un nombre ne pouvait être décomposé que d'une seule façon en facteurs premiers; mais on a vu que cette proposition pouvait être établie directement. Il en est de même des propositions suivantes : si on multiplie, ou si on divise deux ou plusieurs nombres par un même nombre, on multiplie ou on divise leur plus grand commun diviseur par ce nombre; si on divise deux nombres par leur plus grand commun diviseur, les quotients sont premiers entre eux, puisque, après la division, il ne reste plus de facteurs premiers communs; si on les divise par tout autre diviseur commun que le plus grand, il reste quelques facteurs communs et les quotients ne sont pas premiers entre eux, etc...

168. Le plus petit commun multiple de plusieurs nombres A, B, C, ..., décomposés en facteurs premiers, s'obtient aussi aisément.

Chaque multiple commun, décomposé en facteurs premiers, doit contenir tous les facteurs qui figurent dans chacun des nombres A, B, C, ..., et chacun de ces facteurs doit être répété au moins autant de fois qu'il l'est dans chacun des nombres A, B, C, ..., c'est-à-dire autant de fois qu'il est répété dans celui des nombres A, B, C, ... où il est répété le plus grand nombre de fois. Réciproquement tout nombre décomposé en facteurs premiers qui satisfait à ces conditions est un multiple commun de A, B, C, ... : le plus petit s'obtiendra en ne prenant que les facteurs premiers qui figurent dans chacun des nombres A, B, C, ... et en ne répétant pas l'un quelconque d'entre eux plus souvent qu'il n'est répété dans celui des nombres A, B, C, ... où il est répété le plus grand nombre de fois. Tout multiple commun sera un multiple du plus petit commun multiple.

Règle. — Pour former le plus petit commun multiple de plusieurs nombres décomposés en facteurs premiers, on forme le produit de tous les facteurs premiers différents qui figurent dans les nombres A, B, C, ..., et l'on affecte chacun d'eux de l'exposant qu'il a dans celui des nombres A, B, C, ... où il figure avec l'exposant le plus élevé.

Par exemple, le plus petit commun multiple des nombres

$$2^3 \times 3^2 \times 5, \quad 2 \times 3^3 \times 7 \times 11, \quad 3^2 \times 7^2 \times 19$$

est

$$2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7^2 \times 11 \times 19.$$

Si l'on divise le plus petit commun multiple des nombres A, B, C, ... ainsi formé par ces nombres eux-mêmes, les quotients n'auront plus de diviseur commum; car s'il subsistait, dans ces quotients, un facteur premier commun, en multipliant ces quotients par A, B, C, ..., ce facteur se trouverait dans les produits avec un exposant plus élevé que dans tous les nombres A, B, C, ...; on n'aurait donc pas appliqué la règle. Le plus petit commun multiple est le seul multiple commun qui jouisse de cette propriété.

Enfin si l'on ne considère que deux nombres A, B et si on multiplie leur plus grand commun diviseur par leur plus petit commun multiple, on voit que chacun des facteurs premiers qui entrent dans A, ou dans B, figure dans le produit; si ce n'est pas un facteur premier commun à A et à B, il figure dans le produit avec l'exposant qu'il a dans A ou dans B; si c'est un facteur premier commun, il entre dans le produit avec un exposant qui est la somme de son plus grand et de son plus petit exposant dans A et dans B, c'est-à-dire la somme de ses deux exposants dans A et dans B ; le produit considéré est donc le produit des nombres A, B; c'est la règle du n° 163.

169. Les propriétés des nombres ont attiré de bonne heure l'attention des Grecs. On voit déjà les Pythagoriciens spéculer sur les nombres premiers, sur les nombres *triangulaires*, *carrés*, *polygonaux* (Ex. 104), sur les nombres *pyramidaux* (Ex. 105), sur les nombres *parfaits* (Ex. 154), sur les nombres *amiables* (tels que chacun d'eux soit égal à la somme des parties aliquotes de l'autre). Les *Éléments* d'Euclide, qui constituent un résumé des connaissances essentielles auxquelles les Grecs étaient parvenus, vers l'an 300 avant J.-C., tant en Géométrie qu'en Arithmétique, contiennent les propositions les plus importantes du chapitre actuel et du chapitre précédent, en particulier, la notion du plus grand commun diviseur, celle du plus petit commun multiple, le théorème du n° 160, dont la démonstration offrait assurément une grande difficulté, enfin le théorème du n° 157 sur l'infinité des nombres premiers. La méthode même pour la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres est souvent désignée sous le nom d'*algorithme d'Euclide*. La démonstration que nous avons donnée du théorème relatif à l'infinité des nombres premiers est celle même que l'on trouve dans Euclide [1]. La règle pour la formation d'une table de nombres

1. Une généralisation bien naturelle de ce théorème est fournie par l'énoncé suivant : Dans toute progression arithmétique dont la raison et le premier terme sont des nombres premiers entre eux, il y a une infinité de termes qui sont des nombres premiers absolus. La démonstration de cette proposition est très difficile; elle a été donnée, dans ce siècle, par Lejeune Dirichlet.

premiers est aussi très ancienne : elle est attribuée à Eratosthène (vers l'an 250 av. J.-C.) et est souvent désignée sous le nom de *crible d'Ératosthène*[1].

Exercices.

123. Considérons la suite des nombres premiers jusqu'à p; soit A le produit de quelques-uns de ces nombres, B le produit de tous les autres. Démontrer que le nombre $A+B$ admet un diviseur premier plus grand que p; il en est de même, en supposant $A > B$, du nombre $A-B$, à moins qu'il ne soit égal à un.

124. Si dans les expressions

$$x^2+x+17,\quad 2x^2+29,\quad x^2+x+41,$$

on remplace x par 0, 1, 2, 3,..., on trouve d'abord comme résultat des nombres premiers. Les plus petites valeurs de x pour lesquelles on obtient des nombres qui ne sont pas premiers sont respectivement $x=15$, $x=28$, $x=39$.

125. Quelle est la plus petite valeur du nombre premier p tel que l'expression

$$1.2.3.\ldots.p+1,$$

considérée au nº 157, ne soit pas elle-même un nombre premier?

Réponse : $p=5$.

En désignant par A_p le produit des nombres premiers non supérieurs au nombre premier p, quelle est la plus petite valeur de p pour laquelle A_p+1 n'est pas un nombre premier?

Réponse : $p=13$.

126. Quel est le plus petit nombre premier p, autre que 1, tel que 2^p-1 ne soit pas premier?

Réponse : $p=11$.

Quelle est la plus petite valeur de n telle que

$$2^{2^n}+1$$

ne soit pas premier?

Réponse : $n=5$. — 2^{2^n} veut dire 2 élevé à la puissance 2^n.

127. Décomposer en facteurs premiers le nombre

$$1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10.$$

128. Lorsque n n'est pas premier, le nombre 2^n-1 n'est pas premier. Décomposer ce nombre en facteurs premiers pour les valeurs 4, 6, 8, 9, 10, 12 attribuées à n.

129. Le produit $n(n+1)(2n+1)$ est toujours divisible par 6.

On montre que l'un des trois facteurs est divisible par 3 ; l'un des deux premiers est toujours divisible par 2. Un procédé analogue s'applique dans beaucoup de cas.

130. Le carré d'un nombre premier diminué de un est divisible par 24, sauf dans le cas où le nombre premier est 2 ou 3.

131. Le produit $ab(a^2+b^2)(a^2-b^2)$ est toujours divisible par 30.

132. Le nombre a^7-a est toujours divisible par 42.

133. Le nombre $a^{13}-a$ est toujours divisible par 546.

134. Si le nombre a est terminé par 4 et s'il n'est pas divisible par 4, le produit $a(a^2-1)(a^2-4)$ est divisible par 480.

1. On possède aujourd'hui, pour les neuf premiers millions, des tables qui fournissent non seulement les nombres premiers, mais, pour chaque nombre non premier son plus petit diviseur : elles ont été calculées par Buckhardt, M. Glaisher, et par Dase. (Voir un article de M. Gram dans les *Acta mathematica*, t. 17.)

135. Si a et b sont premiers entre eux, $a + b$ et $a - b$ ne peuvent avoir d'autre diviseur commun que 1 et 2.

136. Si a et b sont premiers entre eux, si x est premier à b et y à a, le nombre $ax + by$ est premier au produit ab.

Il est aisé de voir que les deux nombres $ax + by$ et ab ne peuvent avoir de diviseur *premier* commun : car si p était un tel diviseur, il diviserait l'un des facteurs du produit ab, a par exemple; divisant $ax + by$ et a, p diviserait by, etc... Ce procédé de démonstration est fréquemment employé.

137. Si a, b, c sont premiers entre eux deux à deux, la condition nécessaire et suffisante pour que le nombre $bcx + acy + abz$ soit premier au produit abc est que x, y, z soient respectivement premiers à a, b, c.

138. Si a, b sont premiers entre eux, les deux nombres $a^2 - ab + b^2$ et $a + b$ ne peuvent pas avoir d'autre facteur premier commun que 3.

139. Si un nombre premier p est la différence entre les carrés de deux nombres, ces deux nombres sont $\frac{p-1}{2}$ et $\frac{p+1}{2}$.

140. Pour reconnaître si un nombre p est premier on peut lui ajouter successivement les carrés des $\frac{p-1}{2}$ premiers nombres 1, 2, ..., $\frac{p-1}{2}$; si le premier des nombres ainsi formés qui soit lui-même le carré d'un nombre est $p + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$, le nombre p est premier.

141. Un nombre premier ne peut pas être la somme de plusieurs nombres impairs consécutifs.

142. Trouver un nombre p supérieur à 3 et tel que le nombre $\frac{p^2-1}{8}$ soit premier.

143. Si le nombre $2^n + 1$ est premier, n est une puissance de 2.

144. Quel est le plus petit nombre entier admettant 15 diviseurs?

145. Trouver le nombre de deux chiffres qui admet le plus grand nombre de diviseurs.

146. Le nombre de diviseurs de a^m est premier avec m.

147. De l'égalité

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2),$$

déduire qu'il est impossible de satisfaire à l'équation

$$x^4 + 4y^4 = p,$$

lorsque p est premier, à moins que p ne soit 1 ou 5.

148. Combien, dans la suite 1, 2, 3, ..., n des n premiers nombres, y a-t-il de nombres divisibles par le nombre premier p ?

149. Sur n nombres consécutifs, il y en a au moins autant de divisibles par le nombre premier p que dans les n premiers nombres.

150. Si l'on décompose en facteurs premiers le produit 1. 2. 3. ... n des n premiers nombres, chaque nombre premier p inférieur à n figurera avec un exposant égal à la somme des quotients obtenus en divisant n successivement par p, p^2, p^3, ...

151. Déduire des propositions qui précèdent une démonstration de ce théorème déjà énoncé dans l'exercice 99 : le produit de n nombres consécutifs est toujours divisible par le produit 1. 2. 3. ... n.

152. Les diviseurs d'un nombre n peuvent être rangés par couples tels que le produit de deux diviseurs qui figurent dans un même couple soit égal à n. Si n est le carré d'un nombre entier, il y a un couple formé de deux diviseurs égaux : ceci n'a lieu que dans ce seul cas.

Si l'on désigne par ν le nombre de diviseurs du nombre n, le produit de tous les diviseurs de n est égal à $n^{\frac{\nu}{2}}$ si n n'est pas le carré d'un nombre entier. Si l'on a $n = m^2$, ce produit est égal à m^ν.

153. Si un nombre n décomposé en facteurs premiers est égal à

$$a^\alpha \, b^\beta \, c^\gamma \ldots,$$

en désignant par $a, b, c, \ldots$ les facteurs premiers différents de n, le nombre des diviseurs de n est égal à $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)\ldots$, ces diviseurs eux-mêmes sont les différents termes obtenus en développant le produit

$$\left(1 + a + a^2 + \ldots + a^\alpha\right)\left(1 + b + b^2 + \ldots + b^\beta\right)\left(1 + c + c^2 + \ldots + c^\gamma\right)\ldots,$$

la somme de ces diviseurs sera égale à ce produit ou à

$$\frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \times \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \times \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} \times \ldots.$$

154. On appelle parties aliquotes d'un nombre, les diviseurs de ce nombre, excepté ce nombre lui-même.

On appelle nombre *parfait* tout nombre qui est la somme de ses parties aliquotes; nombre *abondant* tout nombre plus petit que la somme de ses parties aliquotes, nombre *déficient* tout nombre plus grand que cette somme.

Si p est un nombre premier et si $2^p - 1$ est aussi premier, le nombre

$$2^{p-1}(2^p - 1)$$

est un nombre parfait.

Trouver des exemples numériques de nombres abondants et déficients.

155. En désignant en général par $\nu(a)$ le nombre de diviseurs d'un nombre a et par $\sigma(a)$ la somme de ces diviseurs, on a, en supposant les nombres $a, b, c, \ldots$ premiers entre eux deux à deux,

$$\nu(abc\ldots) = \nu(a) \times \nu(b) \times \nu(c) \times \ldots,$$
$$\sigma(abc\ldots) = \sigma(a) \times \sigma(b) \times \sigma(c) \times \ldots.$$

156. En conservant les notations de l'exercice 22, démontrer que si n est un nombre premier et p un nombre autre que 0 ou n, C_n^p est divisible par n.

En s'appuyant sur l'exercice 60, démontrer ensuite que, en supposant toujours n premier, le nombre

$$(a + b)^n - a^n - b^n$$

est divisible par n.

Conclure de là que $a^n - a$ est toujours divisible par le nombre premier n : si, en effet, la proposition est vraie pour deux nombres a, b, elle est vraie pour leur somme.

Ce théorème est connu sous le nom de théorème de Fermat. On en verra l'importance dans le dernier chapitre.

CHAPITRE VI

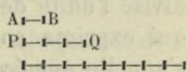
FRACTIONS ORDINAIRES

§ 1. — **Première définition des fractions.**

170. La notion de nombre a été tirée de l'idée de collection d'objets distincts; elle s'applique toutefois à la mesure des grandeurs continues, et cette application conduit à étendre la notion de nombre, à considérer de nouveaux nombres, tout différents de ceux que l'on a considérés jusqu'ici. Cette extension exige que l'on distingue, dans le langage, les nombres déjà connus, les nombres *entiers*, et ceux que nous allons introduire : désormais nous dirons toujours un nombre entier, ou plus brièvement un entier, quand il s'agira de l'un des nombres 0, 1, 2, 3, ...

Nous donnerons aux nouveaux nombres une origine concrète, en considérant d'ailleurs particulièrement des grandeurs continues de l'espèce la plus simple, des longueurs de droites limitées. Les explications qui suivent s'appliquent aisément à d'autres grandeurs continues.

171. Le lecteur sait ce que c'est que *mesurer* une ligne droite. On choisit une fois pour toutes une droite limitée AB que l'on appelle unité de longueur. Pour *mesurer* une droite quelconque PQ, on porte sur cette droite, à partir de l'une de ses extrémités P, l'unité de longueur, autant de fois que possible. Il peut arriver que, en procédant ainsi, on tombe sur l'autre extrémité Q; on dit alors que PQ contient l'unité de longueur un certain nombre entier de fois et ce nombre entier est la *mesure* de PQ. Ainsi, dans la figure ci-dessus, PQ contient trois fois l'unité de longueur; PQ est mesuré par le nombre 3.

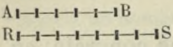


Les longueurs que l'on peut ainsi mesurer au moyen de nombres entiers sont évidemment celles que l'on obtient en portant sur une droite indéfinie, à partir d'un point marqué 0, et bout à bout, des unités de longueur, toujours dans le même sens; si l'on marque au moyen des nombres 1, 2, 3, 4, ... les extrémités successives de ces unités de longueur, le nombre marqué en un point quelconque mesure la longueur qui s'étend entre le point marqué 0 et le point considéré.

Toute longueur égale à l'une de celles que l'on peut former ainsi est mesurée par le même nombre ; l'unité de longueur elle-même est mesurée par le nombre 1. Parmi ces longueurs, on peut, si l'on veut, ranger la *longueur nulle*, celle d'une droite (fictive) dont l'origine et l'extrémité coïncideraient, et qui serait mesurée par le nombre 0. Il est bien évident qu'on ne peut pas mesurer ainsi toutes les longueurs ; on ne pourra pas mesurer la longueur d'une droite qui aurait son origine au point 0 et son extrémité entre deux quelconques des points marqués par les nombres 0, 1, 2, 3, 4...

172. Pour mesurer une longueur qui ne contient pas l'unité un nombre exact de fois, on peut essayer de procéder de la façon suivante :

On divisera l'unité de longueur AB en un certain nombre entier de parties égales, en 5 parties par exemple ; et l'on appellera une quelconque de ces parties un cinquième de l'unité de longueur : il peut se faire que la longueur considérée RS contienne cette partie de l'unité exactement un nombre entier de fois, par exemple 7 fois : on dira alors qu'elle contient exactement 7 fois le cinquième de l'unité : il faut pour la mesurer *deux* nombres entiers, ici 5 et 7 ; l'un exprime en combien de parties on a divisé l'unité de longueur, l'autre combien la longueur considérée contient de ces parties : ces deux nombres entiers jouent, comme on le voit, un rôle très différent : pour les distinguer l'un de l'autre, on leur donne des noms différents, on les écrit à des places différentes, on les énonce de façons différentes.



Le nombre entier qui exprime en combien de parties égales on a divisé l'unité de longueur s'appelle *dénominateur* ; le nombre entier qui exprime combien de parties contient la longueur considérée s'appelle *numérateur* ; on écrit le numérateur au-dessus du dénominateur, en les séparant par une barre : dans l'exemple précédent, on écrira

$$\frac{7}{5};$$

on énonce d'abord le numérateur, puis le dénominateur, en les séparant par le mot sur (sept sur cinq) ; ou bien on énonce le numérateur, puis le dénominateur en le faisant suivre de la terminaison *ième* (sept cinquièmes) ; cette dernière façon de s'exprimer rappelle parfaitement les opérations que nous venons de décrire.

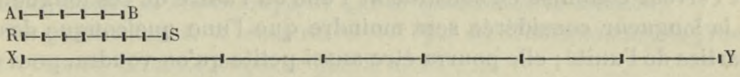
Elle comporte des exceptions quand le dénominateur est 2, 3, ou 4 ; on énonce alors le numérateur et on le fait suivre, suivant les cas, des mots demi, tiers, quart : ainsi, on dira trois demis, deux tiers, cinq quarts pour énoncer les symboles $\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}$.

Enfin, l'ensemble des deux nombres entiers (numérateur et dénominateur) écrits ou énoncés ainsi de manière à distinguer leurs rôles respectifs est une *fraction*.

Les *fractions* sont regardées comme des *nombres*; dans l'exemple précédent, la fraction $\frac{7}{5}$ est la mesure de la longueur RS(1).

173. Reprenons cet exemple, pour expliquer une interprétation un peu différente.

La longueur RS peut être regardée comme obtenue en plaçant bout à bout, en ligne droite, sept fois la cinquième partie de AB ; il importe de remarquer qu'elle peut être obtenue, tout aussi bien, en plaçant bout à bout, en ligne droite, sept fois AB, ce qui donne la longueur XY, et en prenant ensuite la cinquième partie de XY.



En effet, par définition, XY contient sept fois AB ou bien sept fois cinq des parties de AB, ou encore cinq fois sept des parties de AB ; mais sept parties de AB, c'est RS; donc XY contient cinq fois RS ; en d'autres termes, RS est le cinquième de XY.

Par conséquent, le nombre $\frac{7}{5}$ peut être regardé comme mesurant une longueur RS obtenue, soit en prenant sept fois le cinquième de l'unité de longueur (c'est le premier sens), soit en prenant le cinquième de sept fois l'unité de longueur (c'est le second sens).

Ce résultat est général. Si a et b sont deux nombres entiers, la fraction $\frac{a}{b}$ peut être regardée comme mesurant une longueur obtenue soit en prenant a fois la $b^{\text{ième}}$ partie de l'unité de longueur, soit en prenant la $b^{\text{ième}}$ partie de a fois l'unité de longueur. Le lecteur rapprochera ce raisonnement de celui du n° 119.

1. La notation $\frac{a}{b}$ a déjà été employée au n° 116, pour exprimer le quotient de la division du nombre entier a par le nombre entier b quand cette division peut se faire exactement. Le lecteur peut faire un instant abstraction de ce qui a été dit alors, la concordance des deux notations lui apparaîtra bientôt.

174. Revenons maintenant à la première signification attribuée au mot fraction.

Les longueurs que l'on peut *mesurer* au moyen de fractions sont celles que l'on peut obtenir en divisant l'unité de longueur en un certain nombre entier de parties égales et en portant, l'une au bout de l'autre, plusieurs de ces parties. A la vérité, on n'obtient pas ainsi *toutes* les longueurs : c'est là un point sur lequel nous aurons à revenir. Mais il convient de remarquer de suite que si on divise l'unité de longueur en un assez grand nombre entier b de parties égales, chacune de ces parties deviendra très petite. Si, en désignant par a un nombre entier, la longueur à mesurer contient a de ces parties et n'en contient pas $a+1$, elle sera comprise entre deux longueurs, mesurées respectivement par les fractions

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a+1}{b},$$

et l'erreur commise en substituant l'une ou l'autre de ces longueurs à la longueur considérée sera moindre que l'une quelconque des b parties de l'unité; elle pourra être aussi petite qu'on voudra, pourvu que b soit assez grand. Les deux fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a+1}{b}$ sont dites des mesures approchées, la première par défaut, la seconde par excès, de la longueur considérée, à $\frac{1}{b}$ près.

Dans la pratique, lorsque l'erreur ainsi commise n'est pas appréciable avec nos instruments de mesure, il n'y a aucune raison d'en tenir compte : pratiquement les nombres entiers et les fractions suffisent à mesurer toutes les longueurs. D'ailleurs, pour le moment, nous ne considérons que des longueurs qui puissent être mesurées par des nombres entiers, ou par des fractions : ces longueurs sont dites *commensurables* à l'unité.

175. Une longueur qui peut être mesurée par un nombre entier ne peut évidemment être mesurée que par ce seul nombre entier. Il en est tout autrement quand on introduit les fractions : il existe une infinité de fractions qui mesurent la même longueur, et cela, lors même que cette longueur peut aussi être mesurée par un nombre entier.

Tout d'abord, il est clair que deux fractions qui ont même dénominateur, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, par exemple, et des numérateurs différents ne peuvent pas mesurer la même longueur : dire, en effet, que la fraction $\frac{4}{7}$ mesure cette longueur, cela veut dire que si on divise l'unité de longueur en 7 parties égales, la longueur considérée contient exactement 4 de ces parties, ni plus, ni moins.

176. Ceci posé, cherchons d'abord à quelle condition doivent satisfaire le numérateur a et le dénominateur b d'une fraction $\frac{a}{b}$ pour que cette fraction mesure la même longueur qu'un nombre entier n. La longueur considérée contient n unités de longueur; si on divise l'unité en b parties égales, chacune des n unités contiendra b de ces parties, la longueur considérée en contiendra donc n fois b ou bn; elle doit, d'autre part, en contenir a ; il faut donc que l'on ait $a = bn$; le numérateur doit donc être divisible par le dénominateur et le quotient doit être n. Ainsi :

Une fraction dans laquelle le numérateur est divisible par le dénominateur mesure la même longueur que le quotient de la division.

En particulier, *si le numérateur est égal au dénominateur, la fraction mesure la même longueur que le nombre* 1.

177. Nous allons montrer maintenant qu'une longueur qui est mesurée par une fraction peut être mesurée par une infinité d'autres fractions.

Considérons, par exemple, la fraction $\frac{7}{5}$ qui mesure la longueur RS, quand on prend AB pour unité de longueur. Divisons l'unité AB en 5×3 parties égales, au lieu de la diviser seulement en 5 parties égales; chacune des anciennes parties contiendra 3 des nouvelles parties; la longueur RS qui contenait 7 des anciennes parties en contiendra donc 7 fois 3 des nouvelles; en d'autres termes, elle pourra être mesurée par la fraction $\frac{7 \times 3}{5 \times 3}$; le raisonnement est général, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Deux fractions dont la seconde s'obtient en multipliant par un même nombre entier le numérateur et le dénominateur de la première, mesurent la même longueur.

178. Il est maintenant aisé de trouver la condition nécessaire et suffisante pour que deux fractions mesurent la même longueur.

Soient $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ ces deux fractions, en désignant par a, b, a', b' des nombres entiers. D'après le raisonnement précédent, les deux fractions

$$\frac{a \times b'}{b \times b'}, \quad \frac{a' \times b}{b' \times b}$$

mesurent respectivement les mêmes longueurs que les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$; elles expriment les mesures de ces longueurs, quand on divise l'unité de longueur en $b \times b'$ parties égales, au lieu de la diviser en b ou en b' parties égales; mais elles ont maintenant le même dénominateur; elles ne peuvent donc mesurer la même longueur que si leurs numérateurs sont égaux, que si l'on a $a \times b' = a' \times b$.

Ainsi : *la condition nécessaire et suffisante pour que deux fractions mesurent la même longueur consiste en ce que le produit du numérateur de la première par le dénominateur de la seconde soit égal au produit du numérateur de la seconde par le dénominateur de la première.*

Pour qu'une fraction mesure la même longueur qu'un nombre entier donné, il faut et il suffit que son numérateur soit égal au produit de son dénominateur par ce nombre.

On fera rentrer la seconde condition dans la première en convenant de regarder tout nombre entier comme une fraction, dont le dénominateur serait 1 et dont le numérateur serait le nombre entier considéré.

§ 2. — Deuxième définition des fractions. Égalité. Réduction au même dénominateur.

179. Nous allons maintenant faire abstraction de l'origine concrète des fractions et nous adopterons les définitions suivantes que les explications qui précèdent justifient amplement :

Une fraction est l'ensemble de deux nombres entiers, appelés l'un numérateur, l'autre dénominateur, qui jouent des rôles différents. Cet ensemble est appelé lui-même un nombre; il est soumis à des règles de calcul qui seront bientôt expliquées. Le numérateur et le dénominateur sont les deux termes de la fraction.

On écrit le numérateur au-dessus du dénominateur en les séparant par une barre.

Le numérateur peut être un nombre entier quelconque, le dénominateur un nombre entier quelconque autre que 0.

Il est clair que toutes les définitions relatives à l'égalité et aux opérations à effectuer sur les nouveaux nombres doivent être reprises l'une après l'autre.

180. *Égalité*. — Par définition, une fraction dont le dénominateur est 1 est égale à son numérateur; elle est ainsi égale à un nombre entier.

Deux fractions sont égales si le produit du numérateur de la première par le dénominateur de la seconde est égal au produit du numérateur de la seconde par le dénominateur de la première ; autrement elles sont *inégales*.

Pour justifier cette définition abstraite de l'égalité, il faut montrer que deux fractions égales à une troisième fraction sont égales entre elles. Cette proposition, à la vérité, est évidente au point de vue concret, puisque les trois fractions mesurent la même longueur; il est bien aisé de la vérifier sans faire intervenir aucune notion étrangère à la pure Arithmétique.

Soient, en supposant que a, b, a', b', a'', b'' soient des nombres entiers dont aucun n'est nul, $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ deux fractions égales à la fraction $\frac{a''}{b''}$. On a, d'après la définition de l'égalité,

$$ab'' = a''b,$$
$$a'b'' = a''b';$$

en multipliant en croix ces deux égalités, on obtient

$$a'b''a''b = ab''a''b',$$

ou

$$(a'b) \times (a''b'') = (ab') \times (a''b'').$$

Les deux nombres entiers $a'b$, ab' donnent le même produit quand on les multiplie par $a''b''$; ils sont donc égaux. C'est dire que les deux fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ sont égales.

La démonstration subsiste quand b'' est égal à 1 ; c'est-à-dire que deux fractions égales à un nombre entier sont égales entre elles.

Pour qu'une fraction soit égale à une autre fraction dont le numérateur est nul, il faut et il suffit que son numérateur soit aussi nul.

En effet, si dans l'égalité $ab' = a'b$, qui exprime en général que les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ sont égales, on suppose $a = 0$, ab' devient nul et pour que $a'b$ soit aussi nul, puisque b est essentiellement différent de zéro, il faut que a' soit nul.

Toutes les fractions à numérateur nul doivent donc être regardées comme égales; l'une d'elles est la fraction $\frac{0}{1}$ dont le dénominateur est 1, et qui doit, d'après ce qu'on a dit plus haut, être regardée comme égale à son numérateur 0 :

Toute fraction à numérateur nul est égale à 0.

181. *En multipliant les deux termes d'une fraction par un même nombre entier, autre que zéro, on obtient une fraction égale.*

Soit $\frac{a}{b}$ la fraction donnée, je dis que, en désignant par m un nombre entier quelconque, autre que zéro, on a

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm};$$

cette égalité, en effet, veut dire que l'on a $abm = bam$, ce qui est évident.

Lorsque les deux termes d'une fraction sont divisibles par un même nombre entier, en les divisant par ce nombre, on obtient une fraction égale.

En effet, par le théorème précédent, la première fraction est égale à la seconde.

Considérons une fraction dont le numérateur a soit divisible par le dénominateur b; soit q le quotient de la division de a par b; on aura $a = bq$, la fraction $\frac{a}{b}=\frac{bq}{b}$ est aussi égale, d'après le théorème précédent, à $\frac{q}{1}$, et par conséquent à q, en vertu d'une convention antérieure. Ainsi :

Lorsque le numérateur d'une fraction est divisible par le dénominateur, cette fraction est égale au quotient de la division du numérateur par le dénominateur.

Par conséquent, la notation des fractions contient comme cas particulier la notation expliquée au n° 116 pour représenter une division, quand celle-ci peut s'effectuer exactement.

Puisque, une fraction étant donnée, il y a une infinité de fractions qui lui sont égales, il est naturel de chercher parmi ces fractions celle qui est la plus simple de toutes, celle dont les termes sont les plus petits possibles.

182. Le précédent théorème permet de *simplifier* une fraction, en divisant les deux termes par un diviseur commun. Par exemple, on peut remplacer $\frac{6}{8}$ par $\frac{3}{4}$.

On appelle fraction irréductible toute fraction dans laquelle les deux termes sont premiers entre eux. Observons, en passant, que d'après cette définition, le numérateur d'une fraction irréductible ne peut jamais être nul; une fraction irréductible n'est jamais nulle. Toute fraction non nulle est égale à une fraction irréductible; pour obtenir celle-ci, il suffit de diviser les deux termes de la fraction donnée par leur plus grand commun diviseur, puisque (n° 140) les quotients sont premiers entre eux.

Par exemple, le plus grand commun diviseur entre 172 et 360 est 4; par conséquent la fraction $\frac{172}{360}$ est égale à la fraction irréductible $\frac{43}{90}$.

183. *Toute fraction égale à une fraction irréductible a ses deux termes équimultiples des termes de cette dernière;* c'est-à-dire que les termes de la première fraction s'obtiennent en multipliant les termes de la seconde par un même nombre.

Soient, en effet, les deux fractions égales $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$; supposons la première fraction $\frac{a}{b}$ irréductible, c'est-à-dire a premier à b; l'égalité $ab' = a'b$ montre que a doit diviser le produit $a'b$, puisqu'il divise le nombre égal ab'; il est premier avec b, donc il divise a'; appelons q le quotient, on aura $a' = aq$, et par conséquent $ab' = aqb$; les deux produits égaux ab', aqb resteront égaux après la suppression du facteur commun a, qui n'est pas nul; on a donc $b' = bq$. Les deux égalités

$$a' = aq, \qquad b' = bq,$$

expriment que les deux termes de la fraction, a', b', sont des équimultiples de a et de b. On voit, en particulier, qu'il ne peut exister de fraction égale à la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ et dont les termes soient plus petits.

Si la fraction $\frac{a'}{b'}$ était aussi irréductible, il faudrait, pour qu'elle fût égale à $\frac{a}{b}$, que q fût égal à 1 : deux fractions irréductibles ne peuvent être égales sans être égales terme à terme.

Nous appellerons nombre fractionnaire toute fraction égale à une fraction irréductible dont le dénominateur n'est pas 1 ; un nombre fractionnaire ne peut être égal à un entier.

184. *Réduction au même dénominateur.* — Des fractions étant données, on peut se proposer de trouver des fractions qui leur soient respectivement égales et qui aient toutes le même dénominateur.

Soient les fractions

$$\frac{3}{4}, \quad \frac{7}{8}, \quad \frac{5}{12}.$$

On parviendra évidemment au résultat en multipliant les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs des autres : on obtiendra ainsi les fractions

$$\frac{3\times8\times12}{4\times8\times12}, \quad \frac{7\times4\times12}{8\times4\times12}, \quad \frac{5\times4\times8}{12\times4\times8},$$

qui sont respectivement égales aux précédentes et qui ont le même dénominateur. On peut les écrire

$$\frac{288}{384}, \quad \frac{336}{384}, \quad \frac{160}{384}.$$

185. La solution que nous venons d'indiquer n'est pas la seule ; il y en a une infinité d'autres, et parmi toutes ces solutions il y en a une plus simple que toutes les autres.

Supposons les fractions données irréductibles et cherchons comment des fractions qui leur sont égales respectivement peuvent avoir le même dénominateur. Nous pouvons raisonner sur les fractions précédentes

$$\frac{3}{4}, \quad \frac{7}{8}, \quad \frac{5}{12},$$

qui sont irréductibles. Soit M un nombre qui puisse servir de dénominateur commun à des fractions respectivement égales à celles-là. Toute fraction égale à la fraction irréductible $\frac{3}{4}$ a son dénominateur multiple de 4 ; ainsi M doit être un multiple de 4 ; pour la même raison il doit être un multiple du dénominateur de chacune des fractions $\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{5}{12}$; c'est donc un multiple commun des dénominateurs de ces fractions : réciproquement tout multiple commun M de ces dénominateurs répond à la question : il existe, en effet, une fraction égale à $\frac{3}{4}$ et dont le dénominateur est M ; on l'obtient en divisant M par 4 et en multipliant les deux termes de $\frac{3}{4}$ par le quotient : on obtiendra de même des fractions ayant M pour dénominateur et respectivement égales à $\frac{7}{8}, \frac{5}{12}$.

Si, par exemple, on prend pour M le nombre 72, qui est un commun multiple de 4, 8, 12, on obtient les fractions cherchées en multipliant les deux termes de $\frac{3}{4}$ par $\frac{72}{4} = 18$, les deux termes de $\frac{7}{8}$ par $\frac{72}{8} = 9$, les deux termes de $\frac{5}{12}$ par $\frac{72}{12} = 6$; on trouve ainsi

$$\frac{54}{72}, \quad \frac{63}{72}, \quad \frac{30}{72}.$$

Le procédé que l'on vient d'exposer fournit évidemment toutes les solutions possibles : la solution la plus simple s'obtiendra en prenant pour le dénominateur commun M le plus petit commun multiple des dénominateurs des fractions données, qui sera ici 24 : on multipliera alors les deux termes de $\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{5}{12}$ respectivement par $\frac{24}{4} = 6, \frac{24}{8} = 3, \frac{24}{12} = 2$, et l'on obtiendra les fractions

$$\frac{18}{24}, \quad \frac{21}{24}, \quad \frac{10}{24},$$

respectivement égales aux fractions

$$\frac{3}{4}, \quad \frac{7}{8}, \quad \frac{5}{12},$$

et dont le dénominateur est le plus petit possible.

Considérons une autre solution du problème et soient

$$\frac{A}{M'}, \quad \frac{B}{M'}, \quad \frac{C}{M'}$$

des fractions respectivement égales aux fractions données : M′ devra être un multiple commun de 4, 8, 12 et par suite un multiple de 24 (n° 149) ; soit q le quotient de la division de M′ par 24. Comme on a en particulier

$$\frac{A}{M'} = \frac{18}{24},$$

c'est-à-dire

$$A \times 24 = M' \times 18,$$

et que M′ est égal à $24 \times q$, on en déduit, après la suppression du facteur commun 24,

$$A = 18 \times q.$$

On aura de même

$$B = 21 \times q, \qquad C = 10 \times q.$$

Ainsi toutes les solutions du problème s'obtiendront en multipliant par un même nombre entier, différent de zéro, d'ailleurs quelconque, les deux termes de chacune des fractions

$$\frac{18}{24}, \quad \frac{21}{24}, \quad \frac{10}{24}.$$

Règle. — Pour réduire plusieurs fractions irréductibles au dénominateur commun le plus simple, on cherche le plus petit commun multiple des dénominateurs de ces fractions. Ce plus petit multiple est le dénominateur commun cherché. Le numérateur de chaque fraction s'obtient en multipliant le numérateur de la fraction à laquelle elle doit être égale par le quotient de la division du plus petit commun multiple par le dénominateur de cette même fraction.

L'opération ne présentera aucune difficulté quand les termes des diverses fractions seront décomposés en facteurs premiers, les multiplications et divisions se faisant alors immédiatement. Considérons, par exemple, les fractions

$$\frac{3 \times 7^2}{2^3 \times 5^2 \times 11}, \quad \frac{2 \times 19}{5^3 \times 17 \times 3}, \quad \frac{11 \times 7}{19 \times 2^2 \times 5};$$

le plus petit commun multiple des dénominateurs sera

$$2^3 \times 3 \times 5^3 \times 11 \times 17 \times 19,$$

qui, divisé par les dénominateurs, fournit les quotients

$$3 \times 5 \times 17 \times 19, \quad 2^3 \times 11 \times 19, \quad 2 \times 3 \times 5^2 \times 11 \times 17,$$

et les fractions cherchées sont

$$\frac{3^2\times5\times7^2\times17\times19}{2^3\times3\times5^3\times11\times17\times19},\quad \frac{2^4\times11\times19^2}{2^3\times3\times5^3\times11\times17\times19},$$
$$\frac{2\times3\times5^2\times7\times11^2\times17}{2^3\times3\times5^3\times11\times17\times19}.$$

Dans le cas particulier où les dénominateurs des fractions proposées sont premiers deux à deux, leur plus petit commun multiple est leur produit. On retombe alors sur le procédé du numéro précédent.

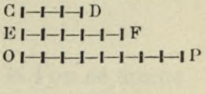
On peut se proposer, quand on se donne des nombres entiers et des fractions, de trouver des fractions respectivement égales à ces entiers et à ces fractions, et qui aient toutes le même dénominateur. Il n'y a qu'à appliquer la règle précédente en regardant les entiers comme des fractions dont le dénominateur est égal à 1. Pratiquement on fait la réduction au même dénominateur des fractions dont le dénominateur est plus grand que un : soit M le dénominateur commun; chaque nombre entier est égal à une fraction dont le numérateur est le produit de ce nombre par M et dont le dénominateur est M.

Remarquons que le procédé qui sert à réduire les fractions au même dénominateur permettrait également de réduire des fractions données au même numérateur, et aussi de remplacer deux fractions données par des fractions qui leur seraient respectivement égales, le numérateur de l'une étant égal au dénominateur de l'autre.

§ 3. — Opérations sur les fractions.

186. *Addition*. — Pour définir l'addition de deux fractions, nous nous reporterons à la signification concrète des fractions.

Supposons d'abord que les deux fractions aient un même dénominateur : soient, par exemple, les deux fractions $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$. Quand on a pris une unité de longueur AB, qu'on l'a divisée en 7 parties égales, la première fraction $\frac{3}{7}$ mesure une longueur CD obtenue en



plaçant bout à bout 3 de ces parties; la seconde mesure une longueur EF obtenue en plaçant bout à bout 5 de ces parties. Il est naturel de regarder la somme des fractions $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$ comme mesurant la longueur

OP obtenue en plaçant bout à bout, sur une même droite, les longueurs CD, EF; cette longueur OP contient $3+5$ des parties, elle est mesurée par la fraction

$$\frac{3+5}{7}=\frac{8}{7}.$$

Il est donc naturel de regarder comme la somme de deux ou plusieurs fractions ayant le même dénominateur, une nouvelle fraction ayant encore ce même dénominateur, et dont le numérateur s'obtient en faisant la somme des numérateurs des fractions proposées.

Quand les fractions n'ont pas le même dénominateur, il est naturel de les remplacer par des fractions égales, de même dénominateur. On est ainsi conduit à la définition suivante, qui contient en même temps la règle de l'opération.

L'addition de plusieurs nombres entiers ou fractionnaires se fait en remplaçant tous ces nombres par des fractions qui leur soient respectivement égales, et qui ont un même dénominateur. On ajoute ensuite les numérateurs, on prend le total comme numérateur d'une nouvelle fraction, et pour dénominateur le dénominateur commun. La fraction ainsi formée, ou toute fraction égale, est la somme des nombres entiers ou fractionnaires proposés.

Par exemple, la somme des fractions $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{12}$, somme que l'on écrit

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{5}{12},$$

s'obtient en remplaçant les fractions par les fractions égales et de même dénominateur

$$\frac{18}{24},\quad \frac{21}{24},\quad \frac{10}{24};$$

leur somme cherchée est la fraction

$$\frac{18+21+10}{24}=\frac{49}{24}.$$

Cette même fraction $\frac{49}{24}$ est aussi la somme des deux nombres 2 et $\frac{1}{24}$, car le premier est égal à la fraction $\frac{48}{24}$.

187. Toutefois, pour justifier la définition et la règle qui précèdent, il faut montrer que si l'on emploie deux procédés différents pour réduire les fractions données au même dénominateur, on trouvera toujours des sommes égales.

La somme à effectuer peut contenir des fractions et des entiers ; mais en regardant ces derniers comme des fractions dont le dénominateur est égal à l'unité, on est ramené au cas où tous les nombres à ajouter sont des fractions.

Supposons que ces fractions soient au nombre de trois, qu'elles aient été réduites au dénominateur commun le plus simple et représentons-les, dans cet état, par

$$\frac{a}{D}, \quad \frac{b}{D}, \quad \frac{c}{D},$$

leur somme sera la fraction

$$\frac{a+b+c}{D}.$$

Si on les réduit d'une autre façon au même dénominateur, les nouvelles fractions doivent pouvoir se déduire des précédentes en multipliant tous les termes par un même nombre entier q (n° 185). Elles pourront donc se représenter par

$$\frac{aq}{Dq}, \quad \frac{bq}{Dq}, \quad \frac{cq}{Dq},$$

et leur somme sera alors la fraction

$$\frac{aq+bq+cq}{Dq};$$

ou encore

$$\frac{(a+b+c)\,q}{Dq};$$

cette fraction, obtenue en multipliant par q les deux termes de la fraction $\frac{a+b+c}{D}$, lui est égale (n° 181).

Du même coup, il est évidemment démontré que, si l'on se donne des nombres quelconques, entiers ou fractionnaires, puis d'autres nombres, entiers ou fractionnaires, qui leur soient respectivement égaux, la somme des premiers est égale à la somme des seconds : il suffit, pour s'en convaincre, de supposer que les différents nombres aient été réduits au même dénominateur.

Il est à peine utile de dire que l'addition des nombres entiers rentre dans la définition de l'addition des fractions; le dénominateur commun des fractions que l'on substitue à ces nombres entiers est alors un.

L'addition des fractions étant ramenée au fond à celle des nombres entiers, par la réduction au même dénominateur, les propositions énoncées au n° 12 s'étendent d'elles-mêmes aux fractions. Ainsi :

Dans une somme de nombres entiers ou fractionnaires, on peut intervertir l'ordre des termes de la somme, remplacer tels nombres que l'on veut par leur somme effectuée. Pour ajouter à un nombre la somme de plusieurs autres, on peut lui ajouter successivement ces derniers, etc... Il suffit, après avoir fait la réduction au même dénominateur, d'appliquer aux numérateurs ces théorèmes, certainement vrais pour les nombres entiers.

188. *Inégalité.* — Étant données deux fractions qui ne sont pas égales, on reconnaît cette inégalité en les réduisant au même dénominateur; les numérateurs sont alors inégaux, l'un est plus grand que l'autre; la fraction qui correspond au plus grand numérateur est dite plus grande que celle qui correspond au plus petit; celle-ci est dite plus petite que la première.

Le sens de l'inégalité ne dépend pas non plus de la façon dont on a réduit les fractions au même dénominateur.

Supposons, en effet, qu'on ait commencé par les réduire au dénominateur commun le plus simple et représentons-les, dans cet état, par

$$\frac{a}{\mathrm{D}}, \quad \frac{b}{\mathrm{D}};$$

si on les réduit au même dénominateur d'une autre façon, les nouvelles fractions se déduiront de celles qu'on vient d'écrire, en multipliant tous leurs termes par un même nombre q; elles pourront donc se représenter par

$$\frac{aq}{\mathrm{D}q}, \quad \frac{bq}{\mathrm{D}q}.$$

Or, si la première fraction $\frac{a}{\mathrm{D}}$ est plus grande que la seconde fraction $\frac{b}{\mathrm{D}}$, c'est que l'on a $a > b$; on a alors $aq > bq$; réciproquement cette dernière inégalité entraîne $a > b$; la conclusion est évidente.

Si les deux fractions données sont $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, elles deviennent, en les réduisant au même dénominateur, $\frac{ab'}{bb'}$, $\frac{a'b}{bb'}$; elles sont égales si l'on a $ab' = a'b$; la première est la plus grande, si l'on a $ab' > a'b$. Si l'on supposait que leurs numérateurs a, a' fussent égaux (sans être nuls), il faudrait donc, pour que les deux fractions fussent égales, que l'on eût $b' = b$, et pour que la première fût la plus grande, que l'on eût $b' > b$, d'où l'on tire la conclusion suivante :

Deux fractions qui ont le même numérateur ne peuvent être égales que si leurs dénominateurs sont égaux. De deux fractions qui ont le même numérateur et des dénominateurs inégaux, la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur. Ces théorèmes supposent toutefois que les fractions ne soient pas nulles.

Une fraction étant donnée, on l'augmente soit en augmentant son numérateur, soit en diminuant son dénominateur.

189. Faisons encore la remarque suivante :

Étant donné un nombre $\frac{a}{b}$ aussi petit que l'on voudra, mais non nul, on peut trouver des nombres plus petits : tel sera en effet le nombre $\frac{a}{b'}$, si b' est plus grand que b. En particulier, il y a des puissances de 10 supérieures à b; si 10^n est une telle puissance, la fraction $\frac{a}{10^n}$, et *a fortiori* la fraction $\frac{1}{10^n}$ sera plus petite que $\frac{a}{b}$.

190. La réduction au même dénominateur permet de ranger plusieurs fractions données par ordre de grandeur.

Ainsi, si on considère les fractions $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{12}$, en les réduisant au même dénominateur, on obtient les fractions $\frac{18}{24}$, $\frac{21}{24}$, $\frac{10}{24}$, et l'on voit, si on les écrit dans l'ordre

$$\frac{10}{24}, \quad \frac{18}{24}, \quad \frac{21}{24}$$

ou, ce qui est la même chose :

$$\frac{5}{12}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{7}{8},$$

que chaque fraction est plus grande que la précédente.

191. La réduction au même dénominateur permet aussi d'étendre aux fractions les propositions relatives aux inégalités, démontrées pour les nombres entiers.

Désignons par A, B, C,... des nombres quelconques entiers ou fractionnaires [1].

Si l'on a $A > B$ et $B > C$, on a aussi $A > C$ et l'on peut écrire

$$A > B > C.$$

On peut ajouter un même nombre aux deux membres d'une inégalité; celle-ci subsiste dans le même sens. Cette proposition contient la suivante : En ajoutant à un même nombre deux nombres inégaux, on obtient deux nombres qui sont aussi inégaux.

On peut ajouter, membre à membre, plusieurs inégalités de même sens.

192. *Soustraction.* — En ajoutant à une fraction une fraction qui n'est pas nulle, on obtient une fraction plus grande, comme il est évident, en supposant les deux fractions réduites au même dénominateur. Inversement, *étant données deux fractions telles que la première soit plus grande que la seconde, il existe une fraction qui, ajoutée à la seconde, reproduit la première*. Cette fraction s'appelle la *différence* entre les deux fractions données; l'opération qui consiste à la trouver s'appelle *soustraction.*

Supposons les deux fractions réduites au même dénominateur, et soient par exemple

$$\frac{8}{5}, \quad \frac{2}{5};$$

8 est la somme des deux nombres 2 et 6, $\frac{8}{5}$ sera donc la somme de $\frac{2}{5}$ et de $\frac{6}{5}$: d'ailleurs $\frac{6}{5}$ est le seul nombre qui, ajouté à $\frac{2}{5}$, donne pour somme $\frac{8}{5}$, car, si on ajoute deux nombres inégaux à un même nombre, on obtient deux sommes inégales.

Étant donnés deux nombres entiers ou fractionnaires, pour retrancher le plus petit du plus grand, on réduit ces deux nombres au même dénominateur ; on retranche ensuite le plus petit numérateur du plus grand et l'on prend la différence comme numérateur d'une nouvelle fraction, à laquelle on donne comme dénominateur

1. Le lecteur observera que c'est la première fois qu'une fraction est représentée par une lettre ; jusqu'ici une lettre n'a jamais représenté qu'un nombre entier.

le dénominateur commun. Cette nouvelle fraction est la différence cherchée.

La soustraction peut encore se faire quand les deux nombres sont égaux ; leur différence est 0.

La réduction au même dénominateur ramenant la soustraction des fractions, comme l'addition, à la soustraction des nombres entiers, tous les théorèmes des nos 54-65 relatifs à la façon dont on peut ajouter à un nombre une somme ou une différence, retrancher d'un nombre une somme ou une différence, traiter les expressions obtenues en ajoutant ou en retranchant des nombres rangés dans un certain ordre, s'étendent immédiatement au cas où les nombres auxquels on a affaire sont des fractions, ou tantôt des fractions, tantôt des nombres entiers. Au reste, la possibilité d'étendre ces théorèmes aux fractions s'aperçoit encore, en remarquant que les démonstrations de ces propositions ont été toujours présentées de manière à ne faire intervenir que les propriétés relatives à l'addition, la définition de la soustraction et ce fait qu'il n'y a qu'un nombre qui, ajouté à un nombre b, puisse donner comme somme un nombre a.

Toutes ces propositions subsistent. Les démonstrations ont été faites le plus souvent avec des lettres qui peuvent représenter aussi bien des fractions que des entiers. Les conclusions subsistent donc, comme aussi les propositions relatives aux inégalités (n° 66), aux nombres rangés par ordre de grandeur, aux progressions arithmétiques (nos 67-70).

193. *Recherche du plus grand entier contenu dans une fraction.* — On reconnaît de suite si une fraction est inférieure [1], égale ou supérieure à 1 : le nombre 1 est lui-même égal à une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont égaux au dénominateur de la fraction donnée ; la fraction sera donc inférieure, égale ou supérieure à 1, suivant que son numérateur sera inférieur, égal ou supérieur à son dénominateur.

Une fraction étant donnée, si on divise le numérateur par le dénominateur, la fraction peut être regardée comme la somme du quotient et d'une fraction, plus petite que 1, *de même dénominateur qu'elle et dont le numérateur est le reste de la division* [2].

1. Une fraction plus petite que un s'appelle fraction *proprement dite*.

2. Quand un nombre est la somme d'un entier et d'une fraction, on le représente souvent en écrivant d'abord le nombre entier, puis, à la suite, la fraction ; ainsi les symboles $3\frac{1}{2}$, $4\frac{2}{3}$ ont le même sens que $3+\frac{1}{2}$, $4+\frac{2}{3}$. Cette notation, qu'on emploiera quelquefois dans le chapitre IX, n'est guère usitée que si la fraction a des termes très simples.

Soit, par exemple, la fraction

$$\frac{2872}{25}.$$

En divisant 2872 par 25, on trouve 114 comme quotient et 22 comme reste ; c'est-à-dire que l'on a

$$2872 = 114 \times 25 + 22.$$

On en conclut, par la règle d'addition des fractions,

$$\frac{2872}{25} = \frac{114 \times 25}{25} + \frac{22}{25}.$$

Mais $\frac{114 \times 25}{25}$ est égal à $\frac{114}{1}$ ou à 114 ; on a donc

$$\frac{2872}{25} = 114 + \frac{22}{25},$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

Si le numérateur de la fraction donnée était plus petit que le dénominateur, le quotient serait 0, le reste serait le numérateur ; l'opération serait inutile.

Si le numérateur de la fraction donnée était divisible par le dénominateur, le reste serait nul et la fraction serait, comme on le savait déjà (n° 182), égale à un nombre entier.

Revenons à l'exemple précédent. On a, puisque la division de 2872 par 25 laisse un reste (n° 102),

$$114 \times 25 < 2872 < 115 \times 25 ;$$

on en conclut, d'après les règles du n° 188,

$$\frac{114 \times 25}{25} < \frac{2872}{25} < \frac{115 \times 25}{25},$$

ou

$$114 < \frac{2872}{25} < 115,$$

ce qu'on exprime en disant que la fraction $\frac{2872}{25}$ est comprise entre les deux nombres entiers consécutifs 114 et 115, ou encore que 114 est le plus grand nombre entier inférieur à la fraction (ou contenu dans la fraction), et que 115 est le plus petit nombre entier supérieur à la fraction.

Si donc l'on considère la suite des nombres entiers consécutifs

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\dots$$

qui forme une progression arithmétique dont la raison est 1, toute fraction qui n'est pas égale à un nombre entier trouve sa place entre deux termes de cette suite, dont le plus petit est précisément le quotient de la division du numérateur par le dénominateur. Sa différence avec l'un ou l'autre de ces deux termes est moindre que 1 ; sa différence avec n'importe quel autre terme de la suite est plus grande que 1 (n° 69).

Ainsi, une fraction étant donnée, si on divise le numérateur par le dénominateur, le quotient est le plus grand nombre entier contenu dans la fraction, c'est-à-dire le plus grand nombre entier inférieur ou égal à la fraction, l'égalité ne pouvant avoir lieu que lorsque le numérateur est divisible par le dénominateur. Ce quotient est le seul parmi les nombres entiers inférieurs ou égaux à la fraction qui en diffère de moins d'une d'unité. On l'appelle *partie entière* de la fraction, ou *valeur approchée de la fraction à une unité près par défaut.* Le quotient, augmenté d'une unité, est toujours plus grand que la fraction ; il en diffère d'une unité si le numérateur est divisible par le dénominateur, de moins d'une unité dans le cas contraire. Parmi les nombres entiers plus grands que la fraction, c'est celui qui en diffère le moins. On l'appelle *valeur approchée de la fraction, à une unité près, par excès.*

194. *Multiplication.* — La multiplication d'un nombre (entier ou fractionnaire) par un nombre entier peut se définir comme au n° 17.

Écartons d'abord le cas où ce nombre serait 0 ou 1. Dans le premier cas, le produit, par définition, serait 0 ; dans le second cas, par définition encore, il serait égal à la fraction donnée.

Le *produit* d'un nombre (entier ou fractionnaire), appelé *multiplicande*, par un nombre entier, appelé *multiplicateur*, autre que 0 ou 1, est la somme d'autant de nombres égaux au multiplicande qu'il y a d'unités dans le multiplicateur.

Ainsi le produit de $\frac{3}{5}$ par 4 sera par définition

$$\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=\frac{3+3+3+3}{5}=\frac{3\times 4}{5}=\frac{12}{5}.$$

Règle. — Pour multiplier une fraction par un nombre entier, on *multiplie le numérateur de la fraction par le nombre entier et l'on conserve le dénominateur.*

Après avoir fait cette multiplication, on peut simplifier le produit, s'il y a lieu. En particulier, si le dénominateur était divisible par le nombre entier qui a été employé comme multiplicateur, on pourrait diviser en haut et en bas par le multiplicateur, ce qui rétablirait le numérateur primitif. En appliquant aux fractions le langage expliqué au n° 17, on peut dire :

On rend une fraction deux, trois, quatre... fois plus grande, en multipliant son numérateur par 2, 3, 4..., *ou, lorsque l'opération peut se faire exactement, en divisant son numérateur par* 2, 3, 4....

195. En particulier, si on multiplie une fraction par son dénominateur, on trouve comme produit son numérateur.

Par exemple, le produit de $\frac{3}{5}$ par 5 est $\frac{3 \times 5}{5} = \frac{3}{1} = 3$.

Ainsi, 3 peut être regardé comme la somme de 5 nombres égaux à $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{5}$ est d'ailleurs le seul nombre tel que, en le répétant cinq fois, on trouve 3; car, en ajoutant cinq nombres plus petits que $\frac{3}{5}$, on trouverait un résultat plus petit, en ajoutant 5 nombres plus grands que $\frac{3}{5}$, on trouverait un résultat plus grand. C'est ce qu'on exprime souvent en disant que $\frac{3}{5}$ est la cinquième partie de 3.

Le raisonnement est général et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Une fraction dont le dénominateur est n est la $n^{\text{ième}}$ partie de son numérateur; ce qui veut dire que le numérateur est égal à la somme de n fractions égales à la fraction donnée.

Le lecteur reconnaîtra immédiatement que l'interprétation concrète de ce résultat a déjà été donnée au n° 173.

196. *Par définition, le produit de deux fractions est une fraction dont le numérateur est le produit des numérateurs des fractions proposées, dont le dénominateur est le produit des dénominateurs de ces fractions.*

L'ordre des facteurs au numérateur et au dénominateur du produit n'importe évidemment pas, non plus, par conséquent, que l'ordre des deux fractions que l'on veut multiplier et dont l'une pourra être appelée multiplicande, l'autre multiplicateur. On donnera, à l'une et à l'autre, le nom de *facteur* du produit des deux fractions.

On est conduit naturellement à cette définition par le théorème du n° 121 qui, dans notre langage actuel, se rapporte au cas où le numérateur de chaque fraction est divisible par son dénominateur.

Ainsi le produit de $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{4}$ sera

$$\frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Pour justifier la définition précédente, il faut montrer que si l'on donne d'une part deux fractions, d'autre part deux autres fractions qui leur soient égales, le produit des premières est égal au produit des secondes.

Soient $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ deux fractions, $\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$ des fractions qui leur soient respectivement égales. On a par hypothèse

$$aB = bA,$$
$$a'B' = b'A';$$

on en conclut, en multipliant membre à membre et en groupant convenablement les facteurs,

$$(aa') \times (BB') = (bb') \times (AA').$$

Or cette égalité exprime précisément ce qu'il fallait démontrer, que la fraction $\frac{aa'}{bb'}$ est égale à la fraction $\frac{AA'}{BB'}$.

Lorsque l'une des fractions que l'on multiplie est un nombre entier, il suffit de multiplier le numérateur de l'autre par ce nombre, et l'on retombe sur la règle du numéro précédent.

Quand l'une des fractions est égale à 1, le produit est égal à l'autre fraction. Quand l'une des fractions est nulle, le produit est nul.

197. Il convient de s'arrêter au cas où le numérateur de l'une des fractions est égal à l'unité.

Soit, par exemple, à multiplier $\frac{3}{5}$ par $\frac{1}{7}$; le produit est $\frac{3}{5 \times 7}$. Si l'on répétait 7 fois ce produit, on obtiendrait comme résultat $\frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{3}{5}$; c'est dire, en employant le même langage qu'au n° 195, que $\frac{3}{5 \times 7}$ est la septième partie de $\frac{3}{5}$; c'est ce qui explique cette façon de parler : multiplier un nombre par $\frac{1}{7}$, c'est en prendre la septième partie, ou, plus brièvement, le septième.

De même qu'on dit qu'un nombre est sept fois plus grand que son septième, il convient de dire que le septième d'un nombre est sept fois plus petit que ce nombre : on rend donc une fraction sept fois plus petite en multipliant son dénominateur par 7. Mais, après cette multiplication, on peut, s'il y a lieu, simplifier le résultat ; si, en particulier, le numérateur de la fraction primitive était divisible par 7, on pourrait, dans la seconde fraction, diviser en haut et en bas par 7, ce qui rétablirait le dénominateur primitif. Ainsi, en général :

On rend une fraction deux, trois, quatre,... fois plus petite en multipliant son dénominateur par 2, 3, 4,..., *ou, lorsque l'opération peut se faire exactement, en divisant son numérateur par* 2, 3, 4,...

Soit encore à multiplier $\frac{3}{5}$ par $\frac{4}{7}$; le produit est $\frac{3 \times 4}{5 \times 7}$; il est égal au résultat que l'on obtient en répétant 4 fois la fraction $\frac{3}{5 \times 7}$, ou en répétant 4 fois la septième partie de $\frac{3}{5}$; c'est ce qu'on exprime en disant : *multiplier un nombre par* $\frac{4}{7}$, *c'est prendre* 4 *fois le septième de ce nombre*. Dans cette façon de parler, on regarde $\frac{4}{7}$ comme le multiplicateur et $\frac{3}{5}$ comme le multiplicande.

198. Pour multiplier plusieurs fractions rangées dans un certain ordre, on fait le produit des deux premières, on multiplie le résultat par la troisième, puis le résultat par la quatrième, etc... On voit de suite que le numérateur et le dénominateur du produit sont les produits respectifs des numérateurs et des dénominateurs des fractions.

Les théorèmes démontrés aux n^os^ 75, 77, 78 s'étendent immédiatement aux produits de fractions. Ainsi :

Dans un produit de fractions, on peut intervertir l'ordre des facteurs, remplacer tels facteurs que l'on veut par leur produit effectué.

Ces propositions, en effet, s'appliquent aux produits de nombres entiers qui figurent en numérateur et en dénominateur. Signalons encore cette conséquence : *Pour multiplier un produit de plusieurs facteurs par un nombre, il suffit de multiplier l'un des facteurs par ce nombre.*

La notation des puissances s'applique aux fractions, comme aux nombres entiers; le carré, le cube, la $n^{\text{ième}}$ puissance d'une fraction sont respectivement les produits de deux, de trois, de n facteurs égaux à cette fraction. Pour écrire le carré, le cube, la $n^{\text{ième}}$ puissance d'une fraction, on place cette fraction entre parenthèses, et l'on place l'exposant un peu en haut : on écrira ainsi, par exemple,

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2, \quad \left(\frac{4}{5}\right)^3, \quad \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

On a d'ailleurs, en vertu de la définition de la multiplication,

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{4\times 4}{5\times 5}=\frac{4^2}{5^2}, \qquad \left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{4^3}{5^3}.$$

En général, *pour élever une fraction à la puissance n, il suffit d'élever à cette puissance son numérateur et son dénominateur.*

199. Il nous reste à étendre aux fractions les propositions des nos 74, 76. Ainsi :

Pour multiplier une somme (ou une différence) par un nombre, il suffit de multiplier par ce nombre les termes de la somme (ou de la différence) et d'ajouter (ou de retrancher) les résultats.

La démonstration est la même dans les deux cas et consiste essentiellement à supposer que les deux termes de la somme ou de la différence ont le même dénominateur.

Soit, par exemple, à multiplier par $\frac{4}{7}$ la somme $\frac{3}{5}+\frac{8}{5}$. Cette somme peut s'écrire $\frac{3+8}{5}$ et le produit cherché sera

$$\frac{3+8}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{(3+8)\times 4}{5\times 7}=\frac{3\times 4+8\times 4}{5\times 7}=\frac{3\times 4}{5\times 7}+\frac{8\times 4}{5\times 7}$$
$$=\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}+\frac{8}{5}\times\frac{4}{7};$$

sous cette dernière forme, on reconnaît bien que le théorème est démontré.

La règle s'étend d'elle-même à la multiplication par une fraction quelconque d'une expression obtenue en ajoutant ou retranchant successivement des nombres quelconques rangés dans un ordre déterminé.

Inversement, puisque l'on peut intervertir l'ordre des facteurs, dans une multiplication, pour multiplier un nombre par une somme, il suffit de multiplier ce nombre par chacun des deux termes de la somme et d'ajouter les résultats. De même pour multiplier un nombre par une différence, il suffit de multiplier ce nombre par les deux termes de la différence et de retrancher les produits.

Ces théorèmes s'expriment, sous une forme abrégée, par les formules

$$(b+c)\,a = a\,(b+c) = ab + ac,$$
$$(b-c)\,a = a(b-c) = ab - ac,$$

dans lesquelles a, b, c sont des nombres entiers ou fractionnaires. Les formules de la seconde ligne supposent que b est supérieur ou égal à c.

Les formules établies aux n^os 82-87, relatives à la multiplication d'une somme par une somme ou par une différence, ou d'une différence par une différence, s'étendent immédiatement aux fractions, puisqu'elles sont une conséquence immédiate des formules précédentes.

200. Des propositions précédentes résultent encore quelques propositions importantes relatives aux inégalités.

On peut multiplier, sans en changer le sens, les deux membres d'une inégalité par un même nombre, entier ou fractionnaire, différent de zéro.

Soit, par exemple, en désignant par a, b, c des nombres entiers ou fractionnaires, dont le dernier n'est pas nul, l'inégalité

$$a > b;$$

elle signifie qu'il existe un nombre d, différent de 0, tel que l'on ait

$$a = b + d,$$

on en conclura, en multipliant par c,

$$ac = bc + dc$$

et comme le produit dc dans lequel aucun des facteurs n'est nul est différent de zéro, on en déduit

$$ac > bc.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

De même, puisque dans un produit on peut intervertir l'ordre des facteurs, si on multiplie un même nombre c, autre que 0, par deux nombres différents a, b, on obtiendra deux résultats différents ca, cb

et l'on aura $ca > cb$, ou $ca < cb$, suivant que l'on aura $a > b$, ou $b > a$.

En particulier, puisque l'on ne change pas un nombre en le multipliant par 1, on l'augmentera ou on le diminuera en le multipliant par un nombre plus grand ou plus petit que 1 ; ainsi on augmente un nombre en le multipliant par une fraction dont le numérateur est plus grand que le dénominateur, on le diminue en le multipliant par une fraction dont le dénominateur est plus grand que le numérateur. Plus particulièrement encore, on voit que le produit de deux fractions dans lesquelles le numérateur est plus petit que le dénominateur est plus petit que chacun des facteurs, que le carré d'une telle fraction est plus petit qu'elle, que le cube est plus petit que le carré, que, en général, les puissances d'une telle fraction vont en diminuant quand l'exposant de la puissance augmente : telles sont, par exemple, les puissances de $\frac{2}{3}$,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}, \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{8}{27} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}, \ldots,$$

et l'on a

$$\frac{2}{3} > \frac{4}{9} > \frac{8}{27} > \frac{16}{81} > \cdots,$$

puisque chaque terme de cette suite s'obtient en multipliant le précédent par le nombre $\frac{2}{3}$ plus petit que 1.

Au contraire, le produit de deux fractions dans lesquelles le numérateur dépasse le dénominateur est plus grand que chacune des deux fractions ; le carré d'une telle fraction est plus grand qu'elle, son cube est plus grand que son carré, etc... ; les puissances d'une telle fraction vont en augmentant à mesure que l'exposant de la puissance augmente ; telles sont, par exemple, les puissances de $\frac{3}{2}$, on aura

$$\frac{3}{2} < \left(\frac{3}{2}\right)^2 < \left(\frac{3}{2}\right)^3 < \left(\frac{3}{2}\right)^4 < \cdots,$$

ou

$$\frac{3}{2} < \frac{9}{4} < \frac{27}{8} < \frac{81}{16} < \cdots.$$

201. *On peut multiplier deux inégalités de même sens, membre à membre.*

Ainsi les deux inégalités

$$a < b,$$
$$a' < b',$$

où a, b, a', b' sont des nombres quelconques, différents de 0, entraînent l'inégalité

$$aa' < bb'.$$

Cette proposition pourrait s'établir comme la précédente; mais on peut aussi l'en déduire.

L'inégalité $a < b$ entraîne en effet l'inégalité $aa' < ba'$; de même l'inégalité $a' < b'$ entraîne $a'b < bb'$, et les deux inégalités $aa' < ba'$, $ba' < bb'$ entraînent finalement l'inégalité $aa' < bb'$.

Il est clair que la proposition subsiste si quelqu'un des nombres a, a' était nul. Quant aux nombres b, b', il est absurde de les supposer nuls, puisqu'il n'y a pas de nombres plus petits que 0.

202. *Division*. — Les mots *division*, *diviser*, *quotient* comportent chacun des sens très différents. Il est regrettable qu'on n'ait pas créé des mots différents pour désigner des choses distinctes, mais il y a là un usage contre lequel il semble difficile de réagir, quelque fâcheux qu'il soit.

La division a été définie au § 4 du chapitre II avec un sens très précis; c'est une opération qui comporte deux résultats, le quotient et le reste.

Nous allons maintenant définir une opération qui s'applique aux nombres entiers ou fractionnaires, qui porte le même nom, mais qui, en général, est entièrement distincte de la division définie au chapitre cité.

Étant donnés deux nombres entiers ou fractionnaires, appelés l'un dividende, l'autre diviseur, et dont le second n'est pas nul, on appelle division l'opération consistant à trouver un nombre appelé quotient qui, multiplié par le diviseur, reproduise le dividende. En d'autres termes, on connaît un produit de deux facteurs (le dividende) et l'un de ces facteurs (le diviseur), on demande l'autre (le quotient).

Il est nécessaire de pouvoir distinguer cette opération et son résultat, le quotient, de l'opération du chapitre II. Cette dernière, quand une confusion sera possible, sera dite division dans le sens de la théorie des nombres entiers; le quotient de la division dans le sens de la théorie des nombres entiers sera dit quotient approché à une unité près par défaut, ou d'une façon abrégée, quotient à une unité près; cette dénomination sera bientôt justifiée. Le quotient, résultat de la division telle que nous venons de la définir, sera qualifié d'*exact*.

Si a est le dividende et b le diviseur, on désigne aussi sous le nom de *rapport* de a à b le quotient (exact) de la division de a par b. Le mot rapport a l'avantage sur le mot quotient de ne pas être ambigu, et il serait peut-être légitime d'en proposer l'emploi à l'exclusion du mot quotient (exact). Je me conformerai à l'usage en employant l'un et l'autre mot.

203. *Cas où le diviseur est entier*. — Supposons d'abord que le dividende et le diviseur soient entiers; diviser un nombre (entier) par 7, par exemple, c'est trouver un nombre qui, multiplié par 7, reproduise le dividende. Si le dividende est un nombre entier divisible par 7, le nombre cherché s'obtiendra en divisant ce dividende par 7, au sens de la théorie des nombres entiers; ce sera le quotient de cette division (n° 115). Alors les deux sens du mot division coïncident, au moins si l'on fait abstraction de la considération du *reste*, qui dans ce cas est nul; les deux sens du mot quotient n'en font plus qu'un ; il n'en est plus ainsi quand le dividende, supposé toujours entier, n'est pas un multiple du diviseur. Supposons qu'on veuille diviser 12 par 7 ; nous avons appris au n° 195 à trouver le résultat : c'est la fraction $\frac{12}{7}$, puisque, en multipliant cette fraction par 7, on obtient 12 comme produit. Ainsi :

Le quotient exact de la division d'un nombre entier par un autre nombre entier est une fraction dont le dividende est le numérateur, et dont le diviseur est le dénominateur.

Cette règle s'applique encore quand le dividende est divisible par le diviseur, et pour le dire en passant, c'est la justification de la notation, toute pareille à celle des fractions, employée pour désigner le quotient d'une division dans le sens de la théorie des nombres entiers, quand cette division peut se faire exactement (n° 116).

Quand la division ne peut pas se faire exactement, au sens de la théorie des nombres entiers, comme dans l'exemple $\frac{12}{7}$, le quotient, au sens de la théorie des nombres entiers, est le plus grand entier contenu dans le quotient exact $\frac{12}{7}$; comme on l'a vu au n° 193, c'est la valeur approchée à une unité près par défaut de cette fraction, d'où la dénomination de quotient à une unité près, ou encore, avec la même signification, de *partie entière du quotient*.

Il convient peut-être à ce propos de signaler la notation $E\left(\frac{12}{7}\right)$, qui n'est guère employée que dans l'Arithmétique supérieure, pour désigner cette partie entière du quotient, ou, si l'on veut, le quotient dans le sens de la théorie des nombres entiers. En général, si a est un nombre quelconque, $E(a)$ désigne le plus grand nombre entier inférieur ou égal à a.

Remarquons encore que c'est ici, non dans la théorie des nombres entiers, que le mot *diviser* est employé dans son vrai sens : *diviser en parties égales*; la notation des fractions permet de diviser un nombre entier quelconque en autant de parties égales que l'on veut. Le nombre 12 peut être regardé comme la somme de 7 parties dont chacune est égale à la fraction $\frac{12}{7}$: cette fraction, comme on l'a dit au n° 195, est la septième partie de 12.

Cette signification du mot *diviser* se conserve quand, le diviseur étant entier, le dividende est quelconque.

Soit, par exemple, à diviser $\frac{3}{5}$ par 7, le résultat est $\frac{3}{5 \times 7}$, comme on l'a vu au n° 197, et il suffit de se reporter aux raisonnements de ce même numéro pour énoncer la règle suivante :

Pour diviser une fraction par un nombre entier, on multiplie son dénominateur par ce nombre, ou, si l'opération peut se faire exactement, on divise son numérateur par ce nombre.

Il est à peine utile de dire que le cas où le dividende est entier rentre dans le cas où il est fractionnaire, en lui donnant un dénominateur égal à un.

204. *Cas général.* — Supposons que le dividende et le diviseur soient quelconques.

Soit, par exemple, à diviser $\frac{3}{5}$ par $\frac{4}{7}$; le quotient cherché sera

$$\frac{3 \times 7}{5 \times 4},$$

car en multipliant ce nombre par $\frac{4}{7}$, on trouve

$$\frac{3 \times 7 \times 4}{5 \times 4 \times 7} = \frac{3}{5},$$

comme on le voit en divisant haut et bas par $7 \times 4 = 4 \times 7$, dans la fraction qui figure au premier membre. Il n'y a certainement pas d'autre nombre tel que, en le multipliant par $\frac{4}{7}$, on retrouve $\frac{3}{5}$, puisque, en multipliant deux nombres différents par un même nombre, on trouve des résultats différents. Cette même observation aurait pu être faite dans les cas particuliers, précédemment étudiés.

On voit que le résultat a été obtenu en multipliant la fraction $\frac{3}{5}$ par $\frac{7}{4}$, c'est-à-dire par une fraction qui se déduit du diviseur $\frac{4}{7}$ en mettant le numérateur à la place du dénominateur et le dénominateur à la place du numérateur; comme l'on dit, la fraction $\frac{7}{4}$ est la fraction $\frac{4}{7}$ *renversée*; on dit encore que $\frac{7}{4}$ est l'*inverse* de $\frac{4}{7}$; en général, deux nombres sont dits *inverses* quand leur produit est égal à l'unité; c'est le cas des fractions $\frac{7}{4}$, $\frac{4}{7}$.

Règle. — Pour diviser une fraction par une fraction, on multiplie la fraction dividende par la fraction diviseur renversée (ou par l'inverse du diviseur).

Cette règle comprend comme cas particuliers les règles précédentes.

Ainsi le quotient de 12 par 7, ou de $\frac{12}{1}$ par $\frac{7}{1}$, s'obtient en multipliant $\frac{12}{1}$ par $\frac{1}{7}$, ce qui donne $\frac{12 \times 1}{1 \times 7} = \frac{12}{7}$; le quotient de $\frac{3}{5}$ par 7, ou par $\frac{7}{1}$, s'obtient en multipliant $\frac{3}{5}$ par $\frac{1}{7}$, ce qui donne $\frac{3}{5 \times 7}$. Signalons encore le cas où le numérateur de la fraction diviseur serait 1, le quotient de $\frac{3}{5}$ par $\frac{1}{7}$ s'obtient en multipliant $\frac{3}{5}$ par 7; c'est $\frac{3 \times 7}{5}$.

Si l'on rapproche ces résultats de ceux qui ont été obtenus aux nos 194-197, on voit que l'opération qui consiste à multiplier un nombre par une fraction peut se faire en deux fois.

Par exemple, multiplier un nombre par $\frac{4}{7}$ revient à le multiplier par 4 et à le diviser par 7, c'est-à-dire à prendre le septième de quatre fois ce nombre, ou encore à le diviser par 7 et à le multiplier par 4, c'est-à-dire à prendre quatre fois le septième de ce nombre. On a par exemple

$$\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{3 \times 4}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{3}{5 \times 7} \times 4.$$

205. On ne change pas le quotient (exact) de la division de deux nombres entiers ou fractionnaires en les multipliant par un même nombre.

Cette proposition a déjà été établie au nº 120, dans le cas d'une division qui se fait exactement. La démonstration repose uniquement sur ce que le dividende est le produit du diviseur par le quotient; elle subsiste dans le cas général; je la reprends toutefois ci-dessous :

Soient les deux nombres $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$ et soit $\frac{a}{b}$ leur rapport; on a, par définition,

$$\frac{3}{5} = \frac{a}{b} \times \frac{4}{7};$$

multipliant les deux membres de cette égalité par un même nombre $\frac{8}{9}$, par exemple, on aura

$$\frac{3}{5} \times \frac{8}{9} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{4}{7} \times \frac{8}{9}\right)$$

et cette égalité prouve bien que $\frac{a}{b}$ est aussi le quotient de la division de $\frac{3}{5} \times \frac{8}{9}$ par $\frac{4}{7} \times \frac{8}{9}$. — Au surplus, il suffit d'effectuer ce quotient qui est

$$\frac{3 \times 8}{5 \times 9} \times \frac{7 \times 9}{4 \times 8} = \frac{3 \times 8 \times 7 \times 9}{5 \times 9 \times 4 \times 8} = \frac{3 \times 7}{5 \times 4},$$

comme il résulte de simplifications faciles, pour vérifier l'exactitude de la proposition.

Puisque la division se ramène à une multiplication, on peut évidemment énoncer le théorème suivant :

On ne change pas le quotient (exact) de la division de deux nombres entiers ou fractionnaires en les divisant (exactement) par un même nombre.

206. On peut indifféremment diviser un nombre successivement par plusieurs autres, ou le diviser par leur produit :

On peut reprendre ici la démonstration du n° 104, dans le cas où les divisions se font exactement, ou déduire la proposition de la règle qui ramène la division à une multiplication.

En raison de cette même règle, il suffira d'énoncer les théorèmes suivants.

Pour diviser une somme ou une différence par un nombre, il suffit de diviser les termes de cette somme ou de cette différence par ce nombre et d'ajouter ou de retrancher les résultats.

On peut, sans en changer le sens, diviser les deux membres d'une inégalité par un même nombre.

Si on a deux fractions inégales et si on les renverse, on obtient deux fractions inégales, la plus grande devient la plus petite.

Cette proposition devient évidente, si l'on suppose les deux fractions réduites au même dénominateur; après qu'on les a renversées, elles ont même numérateur et c'est celle qui a le plus petit dénominateur qui est alors la plus grande.

Si l'on renverse une fraction plus petite que l'unité, on obtient une fraction plus grande que l'unité.

On augmente ou on diminue un nombre en le divisant par une fraction, suivant que cette fraction est plus petite ou plus grande que l'unité.

Si on divise un même nombre par deux fractions, le plus grand quotient correspondra à la plus petite fraction, puisque diviser par une fraction, c'est multiplier par la fraction renversée.

§ 4. — **Fractions généralisées.**

207. Le symbole d'une fraction $\frac{3}{7}$ peut être regardé comme le symbole de la division de 3 par 7. Cette manière d'écrire, réservée jusqu'ici aux nombres entiers qui figurent au numérateur et au dénominateur, il est naturel de l'étendre aux fractions.

En désignant par a et b des nombres quelconques, entiers ou fractionnaires, on désigne par le symbole $\frac{a}{b}$ le quotient (exact) de la division de a par b ou, comme l'on dit aussi, le rapport de a à b.

On donne encore le nom de fraction à un tel symbole : c'est une fraction *composée* ou *généralisée*. On donne encore le nom de numérateur et de dénominateur aux nombres a et b, que l'on peut appeler tout aussi bien *dividende* et *diviseur*; nous réservons le nom de fraction *ordinaire* aux fractions dont le numérateur et le dénominateur sont entiers.

Quand le numérateur et le dénominateur d'une fraction composée ne sont pas représentés par des lettres uniques, mais sont donnés comme des fractions ordinaires, il est nécessaire de n'employer la notation précédente qu'avec quelques précautions, qui se traduisent par l'emploi convenable de parenthèses, et quelquefois par l'emploi d'une plus grosse barre horizontale pour indiquer le signe de la division;

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{4}{5}\right)}, \quad \frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{4}, \quad \frac{4}{\left(\frac{2}{3}\right)}$$

sont des fractions composées; la première représente le quotient de $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, la seconde celui de $\frac{2}{3}$ par 4, la troisième celui de 4 par $\frac{2}{3}$. Les parenthèses veulent dire que la fraction qu'elles enferment doit être regardée comme un seul nombre, que ce nombre soit regardé comme dividende ou comme diviseur. Enfin, quand on indique des opérations à effectuer sur de pareilles fractions, il faut prendre soin de placer la barre, qui est spécialement un symbole de division, la grosse barre si l'on veut, sur la même ligne que le signe d'opération; ainsi on écrira

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{4}{5}\right)} - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{4} + \frac{4}{\left(\frac{2}{3}\right)}$$

pour désigner le nombre obtenu en retranchant la seconde fraction de la première et en ajoutant la troisième au résultat.

On appelle *valeur* d'une fraction composée la fraction ordinaire qui lui est égale; ainsi les valeurs des fractions composées que l'on a écrites plus haut sont respectivement

$$\frac{2 \times 5}{3 \times 4} = \frac{5}{6}, \quad \frac{2}{3 \times 4} = \frac{1}{6}, \quad \frac{4 \times 3}{2} = 6.$$

En se reportant à la définition de la division, on voit que le numérateur d'une fraction composée est égal au produit du dénominateur de cette fraction composée par sa valeur. Ainsi l'on a

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{5}\times\frac{5}{6},\qquad \frac{2}{3}=4\times\frac{1}{6},\qquad 4=\frac{2}{3}\times 6.$$

208. On peut multiplier ou diviser, sans en changer la valeur, les deux termes d'une fraction composée par un même nombre (différent de zéro).

Cette proposition ne diffère pas de celle-ci : on ne change pas le quotient exact d'une division, quand on multiplie ou qu'on divise le dividende et le diviseur par un même nombre.

Elle permet de réduire deux ou plusieurs fractions composées au même dénominateur, en multipliant les deux termes de chacune d'elles par le produit des dénominateurs de toutes les autres (n° 184).

Ainsi les deux fractions composées $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ sont respectivement égales aux fractions $\frac{ab'}{bb'}$, $\frac{a'b}{bb'}$. Comme on obtient des résultats différents en multipliant ou en divisant (exactement) deux nombres différents par un même nombre, on voit que les deux fractions proposées seront égales ou inégales suivant que ab' et $a'b$ seront égaux ou inégaux. Ainsi la condition d'égalité de deux fractions composées est la même que pour deux fractions ordinaires.

209. La somme ou la différence de deux fractions composées de même dénominateur s'obtient en faisant la somme ou la différence des numérateurs et en la divisant par le dénominateur commun. Cette proposition a été énoncée sous une autre forme au n° 206.

Le produit de deux fractions composées s'obtient en divisant le produit des numérateurs par le produit des dénominateurs.

Ici encore on a affaire à une proposition qui généralise un théorème relatif à des nombres entiers (n° 121). Je reproduis la démonstration :

Soient $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ les fractions dont on veut faire le produit, q et q' leurs valeurs ; on a

$$a = bq,$$
$$a' = b'q',$$

et, en multipliant,

$$aa' = bqb'q' = (bb')\times(qq');$$

cette égalité veut dire que le produit qq' des valeurs des deux fractions s'obtient en divisant le produit de leurs numérateurs par le produit de leurs dénominateurs.

Exemple : on a

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{4}{7}\right)} \times \frac{\left(\frac{5}{6}\right)}{\left(\frac{8}{9}\right)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{5}{6}}{\frac{4}{7} \times \frac{8}{9}}.$$

La vérification est facile et fournit une nouvelle démonstration du théorème : le premier nombre, en effet, est, par définition, le produit des deux fractions ordinaires

$$\frac{2 \times 7}{3 \times 4}, \quad \frac{5 \times 9}{6 \times 8},$$

c'est-à-dire qu'il est égal à

$$\frac{2 \times 7 \times 5 \times 9}{3 \times 4 \times 6 \times 8}.$$

Le second nombre est, par définition, le quotient de la division des deux nombres

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{2 \times 5}{3 \times 6}, \quad \frac{4}{7} \times \frac{8}{9} = \frac{4 \times 8}{7 \times 9},$$

et ce quotient est

$$\frac{2 \times 5}{3 \times 6} \times \frac{7 \times 9}{4 \times 8} = \frac{2 \times 5 \times 7 \times 9}{3 \times 6 \times 4 \times 8};$$

Ces deux résultats sont identiques, terme à terme, sauf l'ordre des facteurs.

Enfin, pour diviser une fraction composée par une fraction composée, il suffit de multiplier la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.

La démonstration est la même qu'au n° 204.

Ainsi les règles de calcul pour les fractions composées sont les mêmes que pour les fractions ordinaires.

210. La théorie des fractions généralisées n'est au fond que l'application d'une notation; mais cette notation est très commode; elle permet, quels que soient les nombres A, B, C, pourvu que B ne soit pas nul, de remplacer l'égalité

$$A \times B = C$$

par l'égalité

$$A = \frac{C}{B},$$

ce que la notation des nombres entiers ne permet que lorsque C est divisible par B, et ce que la notation des fractions ordinaires ne permet que lorsque B et C sont entiers.

Par exemple, on a démontré au nº 70, que le double de la somme des termes d'une progression arithmétique est égal au produit de la somme des termes extrêmes par le nombre de termes de la progression : la démonstration faite dans le cas des nombres entiers s'étend de suite au cas des nombres fractionnaires. Maintenant nous pouvons dire : la somme des termes d'une progression arithmétique est égale à la moitié du produit de la somme des termes extrêmes par le nombre de termes de cette progression.

De même, en supposant toujours que B ne soit pas nul, l'une quelconque des deux inégalités

$$A \times B > C, \qquad A > \frac{C}{B},$$

pourra remplacer l'autre et ce simple énoncé contient les propositions suivantes : on peut diviser ou multiplier par un même nombre, sans en changer le sens, les deux membres d'une inégalité. Appliquons cette remarque aux propositions qui suivent.

211. Étant donnés un nombre a, aussi petit qu'on le veut, et un nombre A, aussi grand qu'on le veut, on peut trouver un nombre entier m tel que le produit de a par m, ou par un nombre plus grand, soit supérieur à A.

On veut avoir $am > A$, ou, puisque a n'est pas nul,

$$m > \frac{A}{a}.$$

La plus petite valeur de m, qui satisfait à cette inégalité, sera le nombre entier immédiatement supérieur à la valeur de $\frac{A}{a}$, nombre entier que l'on a appris à déterminer au nº 193.

Étant donnés un nombre A, aussi grand qu'on le voudra, et un nombre a, aussi petit qu'on le voudra, mais non nul, on peut trouver un nombre entier m, tel que le quotient (exact) de A par m, ou par un nombre plus grand, soit inférieur à a.

Cette proposition ne diffère pas de la précédente ; l'une et l'autre sont une conséquence immédiate du nº 193, sauf pour ce qui concerne les notations.

212. *Étant données plusieurs fractions*

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a'}{b'}, \quad \frac{a''}{b''}$$

rangées par ordre de grandeur croissante, c'est-à-dire dans un ordre tel que chaque fraction soit au moins égale à celle qui la précède, la fraction

$$\frac{a+a'+a''}{b+b'+b''},$$

dont le numérateur est la somme des numérateurs et le dénominateur la somme des dénominateurs, est comprise entre la plus petite et la plus grande des fractions proposées, si celles-ci ne sont pas toutes égales ; dans ce dernier cas, elle leur est égale.

Désignons, en effet, par q, q', q'' les valeurs des fractions proposées, on a

$$a = bq, \qquad a' = b'q', \qquad a'' = b''q'';$$

on a d'ailleurs, par hypothèse,

$$\frac{a}{b} = q, \qquad \frac{a'}{b'} \geqq q, \qquad \frac{a''}{b''} \geqq q$$

et, par conséquent,

$$a = bq \qquad a' \geqq b'q \qquad a'' \geqq b''q;$$

il n'y a partout le signe = que dans le cas où toutes les fractions proposées auraient la même valeur q. En ajoutant, on obtient

$$a + a' + a'' \geqq (b + b' + b'')q,$$

et l'on ne peut avoir le signe = que dans le cas où toutes les fractions proposées auraient la même valeur q. Cette inégalité entraîne la suivante :

$$\frac{a+a'+a''}{b+b'+b''} \geqq q.$$

On démontrerait de même l'inégalité

$$\frac{a+a'+a''}{b+b'+b''} \leqq q''.$$

Observons qu'avant d'ajouter les numérateurs et les dénominateurs, on aurait pu multiplier les deux termes de chaque fraction par un même nombre différent de zéro; ainsi en supposant les nombres m, m', m'' différents de zéro, on peut dire que la fraction

$$\frac{ma + m'a' + m''a''}{mb + m'b' + m''b''}$$

est comprise entre les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a''}{b''}$ si ces fractions ne sont pas égales; dans ce dernier cas, elle est égale aux trois fractions proposées.

Si on considère par exemple les deux fractions $\frac{m}{m}$, $\frac{a}{b}$, dont la première est égale à l'unité, on voit que la fraction $\frac{a+m}{b+m}$ est comprise entre $\frac{a}{b}$ et un, en d'autres termes elle est plus voisine de un que ne l'est $\frac{a}{b}$: donc, si le numérateur d'une fraction est plus petit que son dénominateur, on augmente cette fraction en ajoutant un même nombre à ses deux termes; on la diminue au contraire, si le numérateur est plus grand que le dénominateur; on ne la change pas si le numérateur est égal au dénominateur.

§ 5. — Proportions. — Nombres proportionnels.

213. On appelle proportion l'égalité de deux rapports, ou, si l'on veut, de deux fractions ordinaires ou composées. Les égalités

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4}, \quad \frac{\left(\frac{5}{8}\right)}{\left(\frac{7}{10}\right)} = \frac{25}{28}$$

sont des proportions entre les nombres 3, 2, 6, 4 d'une part, entre les nombres $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{10}$, 25, 28 de l'autre. Nous supposerons essentiellement dans ce qui suit qu'aucun des rapports considérés et, par conséquent, aucun de leurs termes n'est nul.

Dans la proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

les *termes* de la proportion sont les nombres a, b, a', b' : le numérateur de la première fraction et le dénominateur de la deuxième fraction s'appellent souvent les *extrêmes*, le dénominateur de la première fraction et le numérateur de la deuxième fraction s'appellent souvent les *moyens*. Ces dénominations proviennent d'une façon d'écrire qui a été longtemps usitée, à savoir :

$$a : b :: a' : b',$$

qui s'énonçait ainsi : a est à b, comme a' est à b'. Dans l'expression *est à*, il faut faire entrer l'idée de rapport.

214. *Dans toute proportion le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.*

C'est-à-dire que, si l'on a

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'},$$

on a aussi

$$ab' = a'b.$$

C'est en effet la condition d'égalité des fractions. Réciproquement étant donnés quatre nombres différents de zéro tels que le produit de deux d'entre eux soit égal au produit des deux autres, ces quatre nombres forment une proportion, que l'on peut écrire de diverses manières, en s'arrangeant toujours pour que les deux facteurs qui entrent dans un des produits soient les extrêmes, et les deux facteurs qui entrent dans le produit égal soient les moyens.

Si, par exemple, entre les quatre nombres non nuls a, b, a', b' on on a la relation

$$ab' = a'b,$$

on aura

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$
$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}, \qquad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}.$$

Inversement, l'une quelconque des quatre proportions qu'on vient d'écrire entraîne les trois autres, puisqu'elle entraîne la relation $ab' = a'b$. C'est ce que l'on exprime souvent en disant que dans une proportion on peut intervertir les moyens ou les extrêmes.

Si l'on connaît trois des termes d'une proportion, on peut calculer le quatrième.

Ainsi, si l'on sait que les quatre nombres a, b, a', b' doivent former la proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

et si l'on connaît les nombres b, a', b' il est aisé d'obtenir a : de la relation

$$ab' = a'b,$$

on tire en effet

$$a = \frac{a'b}{b'}.$$

215. Considérons les nombres

$$6, \ 8, \ 24, \ 16, \ 12$$

d'une part, et d'autre part les nombres

$$3, \ 4, \ 12, \ 8, \ 6;$$

chaque terme de la première suite s'obtient en multipliant par 2 le terme correspondant de la seconde suite; inversement chaque terme de la seconde suite s'obtient en multipliant par $\frac{1}{2}$ le terme correspondant de la première suite.

On peut dire encore que le rapport d'un terme de la première suite au terme correspondant de la seconde suite est toujours 2, ou que le rapport d'un terme de la seconde suite au terme correspondant de la première suite est toujours $\frac{1}{2}$. Dans ces conditions, on dit que les nombres 6, 8, 24, 16, 12 sont proportionnels aux nombres 3, 4, 12, 8, 6.

Généralement, considérons une première suite de nombres

$$a, \ b, \ c, \ d, \ \ldots,$$

et une seconde suite de nombres correspondants

$$a', b', c', d', \ldots,$$

et supposons qu'il n'y ait pas de nombres nuls parmi eux.

Les nombres a, b, c, d, ... sont dits proportionnels aux nombres a', b', c', d', ... si l'on a

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \cdots;$$

s'il en est ainsi, on a aussi

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d} = \cdots,$$

car ces dernières fractions sont égales comme inverses des précédentes; on peut donc dire que les nombres a', b', c' d', ... sont proportionnels aux nombres a, b, c, d, ...

Si l'on désigne par q la valeur de chacune des fractions égales $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$, $\frac{d}{d'}$, ..., on aura

$$a = a'q, \quad b = b'q, \quad c = c'q, \quad d = d'q, \quad \ldots .$$

Ainsi chaque terme de la première suite est égal au terme correspondant de la seconde suite multiplié par q : inversement, chaque terme de la seconde suite est égal au terme correspondant de la première suite multiplié par $\frac{1}{q}$, ou divisé par q.

Réciproquement, étant données deux suites de nombres correspondants, si chaque terme de l'une des suites s'obtient en multipliant le terme correspondant de la seconde suite par un facteur qui soit toujours le même, les termes de l'une des suites seront évidemment proportionnels aux termes de l'autre.

Cette remarque permet, connaissant deux termes correspondants de deux suites, d'écrire dans l'une des suites tels nombres que l'on voudra, et de calculer les termes correspondants de l'autre suite, de manière que les deux suites soient formées de nombres proportionnels.

Supposons, par exemple, que les nombres 3 et 2 doivent se correspondre dans la première suite et dans la seconde ; chaque nombre de la seconde suite devra être égal au nombre correspondant de la première multiplié par $\frac{2}{3}$; si l'on introduit dans la première suite les nombres 6, 12, 9, 21, il faudra introduire, comme termes correspondants dans la seconde, les termes 4, 8, 6, 14.

Il est à peine utile de faire remarquer que, dans deux suites de nombres proportionnels, l'ordre des termes n'importe pas, pourvu que ce soient toujours les mêmes nombres dans les deux suites qui se correspondent.

Une proportion $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ montre que les nombres a, a' sont proportionnels aux nombres b, b' ; de même aussi, puisque cette proportion peut s'écrire $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, les nombres a, b sont proportionnels aux nombres a', b'.

216. *Si l'on considère deux suites de nombres proportionnels, le rapport de deux termes de la première suite est égal au rapport des deux termes correspondants de la seconde suite.*

En effet, si les termes de l'une des suites

$$\begin{matrix} a, & b, & c, & d, & \ldots, \\ a', & b', & c', & d', & \ldots \end{matrix}$$

sont proportionnels aux termes de l'autre, on aura, par exemple,

$$\frac{b}{d} = \frac{b'}{d'},$$

car cette égalité est une conséquence de l'égalité

$$\frac{b}{b'} = \frac{d}{d'}.$$

Réciproquement, si les deux suites

$$\begin{matrix} a, & b, & c, & d, & \ldots, \\ a', & b', & c', & d', & \ldots \end{matrix}$$

sont telles que le rapport de deux termes quelconques de l'une soit toujours égal au rapport des termes correspondants de l'autre, les termes de l'une des suites sont proportionnels aux termes de l'autre.

Si l'on a, en effet,

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}, \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}, \quad \frac{d}{a} = \frac{d'}{a'}, \ldots,$$

on aura aussi,

$$\frac{b}{b'} = \frac{a}{a'}, \quad \frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}, \quad \frac{d}{d'} = \frac{a}{a'}, \dots$$

et par suite

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \dots.$$

La démonstration même prouve qu'il suffit que le rapport de chacun des termes de la première suite à l'un d'entre eux, le premier par exemple, soit égal au rapport des deux nombres correspondants dans la seconde.

217. *Si les termes de deux suites sont respectivement proportionnels aux termes d'une troisième suite, ils sont proportionnels entre eux.*

Supposons, par exemple, les termes de l'une des suites

$$a', b', c', d', \dots,$$
$$a, b, c, d, \dots$$

proportionnels aux termes correspondants de l'autre.

On aura, en désignant par q' la valeur du rapport $\frac{a'}{a}$,

$$a' = aq', \quad b' = bq', \quad c' = cq', \quad d' = dq'.$$

Supposons de même les termes de l'une des suites

$$a'', b'', c'', d'', \dots,$$
$$a, b, c, d, \dots$$

proportionnels aux termes correspondants de l'autre, on aura, en désignant par q'' la valeur du rapport $\frac{a''}{a}$,

$$a'' = aq'', \quad b'' = bq'', \quad c'' = cq'', \quad d'' = dq'', \dots.$$

Je dis que les termes de l'une des suites

$$a', b', c', d', \dots,$$
$$a'', b'', c'', d'', \dots,$$

sont proportionnels aux termes correspondants de l'autre. On aura, en effet,

$$\frac{a'}{a''} = \frac{aq'}{aq''} = \frac{q'}{q''}.$$

Ce rapport est manifestement le même pour deux termes correspondants quelconques; en d'autres termes, on a

$$\frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''} = \frac{c'}{c''} = \frac{d'}{d''} = \ldots = \frac{q'}{q''}.$$

218. *Étant données deux suites de nombres proportionnels*

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots,$$
$$a',\ b',\ c',\ d',\ \ldots,$$

on pourra, en désignant par $m, n, p, q, \ldots$ des nombres quelconques, différents de zéro, introduire dans la première suite les nombres ma, nb, pc, qd, ..., pourvu qu'on introduise comme termes correspondants dans la seconde les termes ma', nb', pc', qd', ...

Cela résulte de ce que l'on n'altère pas un rapport en multipliant ces deux termes par un même nombre.

Étant données deux suites de nombres proportionnels

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots,$$
$$a',\ b',\ c',\ d',\ \ldots,$$

on peut introduire dans l'une des suites la somme de deux ou de plusieurs de ces termes, pourvu que l'on introduise comme terme correspondant la somme des termes correspondants de l'autre suite.

Ainsi, si l'on introduit le terme $a + b + c$ dans la première suite, le terme correspondant de la seconde sera $a' + b' + c'$: en effet, si l'on désigne par q le rapport $\frac{a}{a'}$, on aura

$$a + b + c = a'q + b'q + c'q = (a' + b' + c')q,$$

ce qui démontre la proposition, puisque les termes de la suite

$$a,\ b,\ c,\ d,\ a + b + c,\ \ldots$$

s'obtiennent en multipliant par q, les termes de la suite

$$a',\ b',\ c',\ d',\ a' + b' + c',\ \ldots.$$

De même si l'on introduit dans la première suite le terme $a - b$ (supposé différent de zéro) le terme correspondant de la seconde sera $a' - b'$.

219. Supposons en particulier les nombres a, b proportionnels aux nombres a', b' : les termes de l'une des suites

$$\begin{array}{llll} a, b, & a+b, & a-b, \\ a', b', & a'+b', & a'-b' \end{array}$$

sont proportionnels aux termes de l'autre.

D'ailleurs, les deux suites précédentes sont certainement formées de termes proportionnels, pourvu que deux termes de l'une soient proportionnels aux deux termes correspondants de l'autre.

Je me contenterai de remarquer, dans le cas où la démonstration est la moins facile, celui où l'on suppose $a+b$, $a-b$ proportionnels à $a'+b'$, $a'-b'$, que l'application des théorèmes précédents prouve que les deux suites

$$\begin{array}{l} a+b,\ a-b,\ a+b+a-b=2a,\ a+b-(a-b)=2b,\ a,\ b, \\ a'+b',a'-b',a'+b'+a'-b'=2a',\ a'+b'-(a'-b')=2b',a',b' \end{array}$$

sont composées de termes proportionnels.

La proposition précédente peut s'énoncer sous la forme suivante : L'une quelconque des proportions

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'},\quad \frac{a+b}{a}=\frac{a'+b'}{a'},\quad \frac{a-b}{a}=\frac{a'-b'}{a'},$$
$$\frac{a+b}{b}=\frac{a'+b'}{b'},\quad \frac{a-b}{b}=\frac{a'-b'}{b'},\quad \frac{a+b}{a'+b'}=\frac{a-b}{a'-b'},$$

ou de celles qu'on peut en déduire par l'interversion des extrêmes et des moyens, entraîne toutes les autres.

Il est à peine utile de dire que, en écrivant $a-b$, $a'-b'$, on suppose $a>b$, $a'>b'$.

220. *Nombres inversement proportionnels.* — Lorsque des nombres sont proportionnels à d'autres, on dit souvent, dans le même sens, qu'ils leur sont *directement* proportionnels ; il va sans dire que cet adverbe peut se sous-entendre.

En supposant qu'aux nombres de la suite

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots$$

correspondent les nombres de la suite,

$$a',\ b',\ c',\ d',\ \ldots,$$

et qu'aucun nombre des deux suites ne soit nul, on dit que les nombres a', b', c', d',... sont inversement proportionnels aux nombres

$a, b, c, d, \ldots$, s'ils sont proportionnels à leurs inverses, c'est-à-dire si les nombres des deux suites

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \ldots,$$
$$a', b', c', d', \ldots$$

sont (directement) proportionnels.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le rapport de l'un quelconque des nombres de la seconde suite au nombre correspondant de la première soit toujours le même; ces rapports sont respectivement aa', bb', cc', dd', ...; on déduit de là les conclusions suivantes :

Pour que les nombres $a', b', c', d', \ldots$ soient inversement proportionnels aux nombres $a, b, c, d, \ldots$, il faut et il suffit que le produit d'un nombre quelconque de l'une des suites par le nombre correspondant de l'autre suite soit toujours le même; s'il en est ainsi, il est clair que les nombres $a, b, c, d, \ldots$ sont inversement proportionnels aux nombres $a', b', c', d', \ldots$.

Par exemple, les nombres

$$1, 3, 4, 8, 12, 24$$

et les nombres

$$24, 8, 6, 3, 2, 1$$

sont inversement proportionnels.

Pour que les nombres de l'une des deux suites correspondantes

$$a, b, c, d, \ldots,$$
$$a', b', c', d', \ldots$$

soient inversement proportionnels aux nombres de l'autre suite, il faut et il suffit que le rapport de deux termes quelconques de l'une des deux suites soit l'inverse du rapport des deux termes correspondants de l'autre suite.

La condition est nécessaire et suffisante, car elle exprime que dans les deux suites

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \ldots,$$
$$a', b', c', d', \ldots,$$

le rapport de deux termes quelconques de la seconde suite, par exemple $\frac{b'}{c'}$, est égal au rapport

$$\frac{\left(\frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{c}\right)} = \frac{c}{b}$$

des deux termes correspondants de la première, c'est-à-dire que les nombres de la suite $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \ldots$ sont proportionnels aux nombres de la suite $a', b', c', d' \ldots$.

Je me contenterai d'énoncer la proposition suivante, dont la démonstration est immédiate.

Si les termes de la suite

$$a, \ b, \ c, \ d, \ldots$$

et ceux de la suite

$$a', \ b', \ c', \ d', \ldots$$

sont inversement proportionnels aux termes de la suite

$$a'', b'', c'', d'', \ldots,$$

les termes des deux premières suites sont directement proportionnels.

Exercices.

157. Ranger par ordre de grandeur toutes les fractions irréductibles dont les deux termes sont moindres que 7.

Ranger par ordre de grandeur toutes les fractions irréductibles dans lesquelles la somme des termes est inférieure à 7.

158. Mettre sous forme de fraction irréductible la somme des nombres :

$$2, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{1.\,2.\,3}, \ \frac{1}{1.\,2.\,3.\,4}, \ \frac{1}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}, \ \frac{1}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6}, \ \frac{1}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7}.$$

159. Simplifier la fraction :

$$\frac{(2^{10}-1)\,(2^{40}-1)}{(2^{10}+1)\,(2^{30}-1)}.$$

160. Simplifier la fraction $\frac{1.\,2.\,3.\,\ldots\,2n}{2.\,4.\,6.\,\ldots\,2n}$ en supposant que n soit un entier plus grand que 1. Le dénominateur est le produit des n premiers nombres pairs.

161. Simplifier l'expression

$$10^{59}\left(\frac{1025}{1024}\right)^5\left(\frac{1048576}{1048575}\right)^8\left(\frac{6560}{6561}\right)^3\left(\frac{15624}{15625}\right)^8\left(\frac{9801}{9800}\right)^4.$$

162. Quelle est la plus petite puissance à laquelle il faut élever $\frac{1}{2}$ pour que le résultat soit moindre que $\frac{1}{1000}$?

163. Les seuls nombres entiers que l'on puisse ajouter aux deux termes d'une fraction irréductible sans en altérer la valeur sont des équimultiples de ces termes.

164. La somme de deux fractions irréductibles ne peut être un nombre entier que si elles ont même dénominateur.

165. La somme de plusieurs fractions irréductibles dans lesquelles les dénominateurs sont premiers entre eux deux à deux, ne peut être un nombre entier.

166. La somme de trois fractions irréductibles ne peut être un nombre entier, si l'un des trois dénominateurs contient un facteur premier qui ne divise aucun des deux autres.

167. Une femme porte des pommes au marché ; elle en vend à une première personne la moitié, plus la moitié d'une pomme ; à une seconde personne, la moitié de ce qui lui reste, plus la moitié d'une pomme. Après n opérations de ce genre, elle a tout vendu. Combien la marchande avait-elle de pommes ?

168. Si l'on range par ordre de grandeur toutes les fractions irréductibles moindres que l'unité, dont le dénominateur est inférieur à un nombre donné, les fractions à égale distance des extrêmes auront le même dénominateur et la somme sera l'unité.

169. La somme des fractions

$$\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3}, \ldots, \frac{1}{2n},$$

où n est un nombre entier, est plus grande que $\frac{1}{2}$.

170. Si l'on considère les fractions

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

on pourra en prendre un assez grand nombre pour que leur somme dépasse tel nombre que l'on voudra.

171. Démontrer que l'on a, en désignant par n un entier plus grand que un,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}.$$

172. Démontrer que l'on a, en désignant par n un entier quelconque, plus grand que un,

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}.$$

C'est une conséquence de l'égalité $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$; on observera que cette même égalité entraîne l'inégalité

$$\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

qui fournit aisément la solution de l'exercice suivant.

173. Si n et p sont des entiers quelconques, au moins égaux à 1, on a

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p};$$

le premier membre est plus grand que $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}$.

174. La somme d'autant de fractions que l'on voudra, prises parmi les fractions

$$\frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \ldots,$$

est toujours plus petite que 1.

175. Démontrer que l'on a, en désignant par n un nombre entier plus grand que un,

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$

176. Si, en désignant par n un nombre entier plus grand que 1, on pose :

$$\frac{e_n}{1.2.3.\ldots n} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.\ldots n},$$

on aura :

$$e_{n+1} = (n+1)\,e_n + 1,$$
$$e_{n+1} = (n+2)\,e_n - ne_{n-1}.$$

177. Si n est un entier quelconque supérieur ou égal à 1, on a :

$$\frac{n}{1.2.\ldots(n+1)} = \frac{1}{1.2.\ldots n} - \frac{1}{1.2.\ldots(n+1)}.$$

Si p désigne aussi un entier supérieur ou égal à 1, on a :

$$\frac{n}{1.2.\ldots(n+1)} + \frac{n+1}{1.2.\ldots(n+2)} + \ldots + \frac{n+p}{1.2.\ldots(n+p+1)}$$

$$= \frac{1}{1.2.\ldots n} - \frac{1}{1.2.\ldots(n+p+1)};$$

$$\frac{1}{1.2.\ldots(n+1)} + \frac{1}{1.2.\ldots(n+2)} + \ldots + \frac{1}{1.2.\ldots(n+p+1)}$$

$$< \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1.2.\ldots n} - \frac{1}{1.2.\ldots(n+p+1)}\right].$$

178. Trouver un nombre entier de deux chiffres qui soit égal au double du produit de ses chiffres.

179. Trouver toutes les solutions possibles en nombres entiers x, y de l'équation

$$y\,\frac{2x-4}{x} = 4.$$

180. Trouver toutes les manières possibles de décomposer 4 en une somme de fractions égales ou inégales dont chacune puisse s'obtenir en remplaçant, dans l'expression $\frac{2x-4}{x}$, x par un nombre entier, plus grand que 2.

Cette question et la précédente se présentent en Géométrie quand on demande de *paver* le plan avec des polygones réguliers ayant tous le même côté et de même espèce ou d'espèces différentes.

181. Trouver les solutions en nombres entiers de l'équation

$$4x = z(2x + 2y - xy).$$

On observera tout d'abord que les nombres entiers x, y doivent être moindres que 6, sauf dans le cas où l'on supposerait $x = 2$.

(Cette question se présente quand on se propose de partager la surface d'une sphère en polygones réguliers et égaux.)

182. P, a, b étant des nombres entiers premiers entre eux deux à deux, et P étant inférieur au produit ab, démontrer que l'on peut mettre la fraction $\frac{P}{ab}$, et cela d'une seule façon, sous la forme $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}$, α et β étant des nombres entiers respectivement moindres que a et b.

183. P, a, b, c, ... étant des nombres entiers premiers entre eux deux à deux, démontrer que la fraction $\frac{P}{abc\ldots}$ peut se mettre, et cela d'une seule façon, sous la forme

$$n + \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \ldots,$$

n étant un nombre entier, et α, β, γ, ... des nombres aussi entiers, dont aucun n'est nul, et qui sont respectivement moindres que a, b, c, ...

184. Soit $\frac{P}{a^\alpha}$ une fraction irréductible dans laquelle le dénominateur est une puissance d'un nombre entier, autre que 1. Démontrer que cette fraction peut être mise sous la forme

$$n + \frac{a_0}{a^\alpha} + \frac{a_1}{a^{\alpha-1}} + \frac{a_2}{a^{\alpha-2}} + \ldots + \frac{a_{\alpha-1}}{a},$$

n étant un nombre entier, ainsi que les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_{\alpha-1}$; ces nombres sont tous plus petits que a; le nombre a_0 ne peut être nul.

185. En supposant que le dénominateur d'une fraction irréductible, décomposé en facteurs premiers, soit $a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \ldots$, où a, b, c, ... sont des nombres premiers distincts, démontrer que cette fraction peut, et cela d'une seule façon, être mise sous la forme

$$\begin{aligned} n &+ \frac{a_0}{a^\alpha} + \frac{a_1}{a^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{a_{\alpha-1}}{a} \\ &+ \frac{b_0}{b^\beta} + \frac{b_1}{b^{\beta-1}} + \ldots + \frac{b_{\beta-1}}{b} \\ &+ \frac{c_0}{c^\gamma} + \frac{c_1}{c^{\gamma-1}} + \ldots + \frac{c_{\gamma-1}}{c} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

n étant un nombre entier; les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_{\alpha-1}$ étant entiers et plus petits que a; les nombres $b_0, b_1, \ldots b_{\beta-1}$, étant entiers et plus petits que b, etc. Les nombres a_0, b_0, c_0, ... ne sont jamais nuls.

186. $\frac{a}{b}$ étant une fraction à termes entiers, plus petite que un, on a, en désignant par q et a_1 le quotient et le reste de la division de b par a,

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q+1} + \frac{a-a_1}{b(q+1)}.$$

L'emploi répété de cette égalité permet de mettre la fraction $\frac{a}{b}$ sous la forme

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q'+1} + \frac{1}{q''+1} + \cdots,$$

en désignant par $q, q', q'', \ldots$ des entiers, en nombre limité, qui vont en croissant [1].

187. En conservant les notations de l'exercice précédent, montrer que l'égalité

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q} - \frac{a_1}{bq}$$

permet de mettre la fraction $\frac{a}{b}$ sous la forme

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} - \ldots \pm \frac{1}{q_{n-1}} \mp \frac{1}{q_n},$$

où il faut prendre dans les deux derniers termes les signes supérieurs ou les signes inférieurs suivant que n est impair ou pair, et où $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q_n$ désignent des nombres entiers croissants qui satisfont à la condition $q_p \geqq q_{p-1}^2 + q_{p-1}$ pour les valeurs $1, 2, \ldots, n$ attribuées à l'indice p.

188. Si q est un nombre plus petit que 1, on a

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

189. Des joueurs, en nombre n et en ordre donné, conviennent que le perdant doublera l'argent des $n-1$ autres : ils perdent chacun une partie dans l'ordre donné, et à la fin, ils ont chacun la même somme a. Combien avaient-ils en commençant ?

190. Un vase contient a litres de vin ; on en tire b litres que l'on remplace par de l'eau ; on retire encore b litres, que l'on remplace par de l'eau, et ainsi de suite n fois ; combien restera-t-il de vin dans le vase ?

191. En désignant par x un nombre quelconque et par n un entier quelconque plus grand que 1, on a :

$$\mathrm{E}(x) + \mathrm{E}\left(x + \frac{1}{n}\right) + \mathrm{E}\left(x + \frac{2}{n}\right) + \cdots + \mathrm{E}\left(x + \frac{n-1}{n}\right) = \mathrm{E}(nx).$$

1. Les Égyptiens, dans leurs calculs, n'employaient que des fractions ayant pour numérateur l'unité, sauf, toutefois, la fraction $\frac{2}{3}$. Toute fraction devait donc être décomposée en une somme de fractions ayant pour numérateur l'unité : la règle précédente fournit un moyen d'y arriver ; le problème admet d'ailleurs beaucoup d'autres solutions. Les Égyptiens cherchaient, autant que possible, à avoir des dénominateurs simples, ou, au moins, décomposables en facteurs simples, mais nullement à obtenir une suite de fractions dont chacune fût très petite par rapport aux précédentes : c'est ce dernier problème que résout la méthode indiquée.

192. Étant donnée l'expression $\frac{ax+b}{a'x+b'}$ où a', b' sont des nombres différents de 0, démontrer qu'elle est toujours comprise entre $\frac{a}{a'}$ et $\frac{b}{b'}$; quand la valeur de x augmente, la valeur de cette expression augmente ou diminue suivant que l'on a $\frac{a}{a'} > \frac{b}{b'}$, ou $\frac{a}{a'} < \frac{b}{b'}$; qu'arrive-t-il quand on a $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$?

CHAPITRE VII

FRACTIONS DÉCIMALES

§ 1. — **Fractions décimales. Définition. Opérations.**

221. *On appelle fraction décimale une fraction dont le numérateur est un nombre entier et le dénominateur une puissance de* 10. Ainsi

$$\frac{18}{10},\quad \frac{9}{100},\quad \frac{1214}{1000}$$

sont des fractions décimales.

On emploie une notation spéciale pour représenter ces fractions, notation qui les rapproche des nombres entiers écrits dans le système décimal : elle consiste, dans le cas où le numérateur est supérieur ou égal au dénominateur, à écrire ce numérateur et à séparer à sa droite, par une virgule, autant de chiffres qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance de 10 qui figure au dénominateur, ou, si l'on veut, qu'il y a de zéros au dénominateur écrit dans le système décimal ; ainsi la première et la troisième des fractions précédentes s'écrivent 1,8 et 1,214.

Dans le cas où le numérateur est plus petit que le dénominateur, on procède de même, mais après avoir placé à la gauche du nombre écrit au numérateur assez de zéros pour qu'il en reste un, et un seul, à gauche de la virgule ; ainsi la fraction $\frac{9}{100}$ s'écrira 0,09 ; les fractions

$$\frac{1}{10},\quad \frac{1}{100},\quad \frac{1}{1000},\quad \frac{1}{10000},\ldots$$

s'écriront

$$0{,}1;\quad 0{,}01;\quad 0{,}001;\quad 0{,}0001\ldots.$$

Les nombres écrits de cette façon sont des nombres décimaux.

Inversement un nombre décimal se transforme immédiatement en fraction ordinaire ; en supprimant la virgule, et en effaçant, si l'on veut, les zéros à gauche, on a le numérateur ; le dénominateur est l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y avait de chiffres à droite de la virgule.

Ainsi les nombres

$$3{,}14159\,; \qquad 0{,}0037$$

ne représentent rien autre chose que les fractions

$$\frac{314159}{100000}, \qquad \frac{37}{10000};$$

les chiffres à droite de la virgule sont les *chiffres décimaux*, dont l'ensemble s'appelle quelquefois *mantisse*. Le nombre formé par l'ensemble des chiffres placés à gauche de la virgule est la *partie entière* de la fraction ; c'est, d'après la règle donnée au n° 193, le quotient de la division du numérateur par le dénominateur, au sens de la théorie des nombres entiers ; c'est donc le plus grand nombre entier contenu dans la fraction, ou encore la valeur approchée de la fraction à une unité près, par défaut (n° 203).

L'analogie de cette notation avec le système de numération adopté pour les nombres entiers est manifeste. Considérons par exemple la fraction décimale

$$\frac{127835}{1000} = 127{,}835\,;$$

elle peut s'écrire

$$127 + \frac{835}{1000} = 127 + \frac{800}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{5}{1000},$$

ou encore, en faisant des simplifications évidentes,

$$127 + \frac{8}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{1000};$$

c'est ce que l'on exprime en disant que lorsqu'on écrit 127,835 le premier chiffre à droite de la virgule représente les dixièmes, le second les centièmes, le troisième les millièmes, etc... Or $1 = \frac{10}{10}$ vaut dix dixièmes ; $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$ vaut dix centièmes ; $\frac{1}{100} = \frac{10}{1000}$ vaut dix millièmes. On appelle unité décimale du premier, du second, du troisième ... ordre les nombres $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ... Dès lors, on peut dire que chaque chiffre décimal représente des unités dix fois plus fortes que le chiffre décimal écrit immédiatement à sa droite, et que le chiffre des unités simples représente, lui aussi, des unités dix fois plus fortes que le chiffre décimal qui le suit, dont il est séparé par une virgule.

222. *Réduction au même dénominateur. — Égalité, inégalité.* — Nous ferons d'abord les observations suivantes : Deux fractions décimales qui, écrites sous la forme de fractions ordinaires, ont le même dénominateur, ont le même nombre de chiffres décimaux quand on les écrit avec la notation décimale. Si on considère une fraction décimale écrite sous la forme d'une fraction ordinaire, on peut multiplier le numérateur et le dénominateur par une même puissance de 10, ce qui revient à placer un même nombre de zéros à droite du numérateur et du dénominateur, ou, dans la notation décimale, à placer ces zéros à droite des chiffres décimaux sans déplacer la virgule ; ainsi on a

$$12{,}371 = \frac{12371}{1000} = \frac{1237100}{100000} = 12{,}37100,$$

donc :

On n'altère pas une fraction décimale, écrite avec la notation décimale, en plaçant des zéros à la droite des chiffres décimaux, sans déplacer la virgule; on ne l'altère pas non plus en supprimant des zéros placés à droite de la partie décimale.

D'après cela, on réduira au même dénominateur deux fractions décimales écrites avec la notation décimale en plaçant assez de zéros à la droite de la partie décimale de celle des fractions qui a le moins de chiffres décimaux pour qu'elle en acquière autant que l'autre.

Si l'on se donne, par exemple, les deux fractions 12,371 et 0,00897, on remplacera la première par 12,37100; les deux fractions

$$12{,}37100 = \frac{1237100}{100000}, \qquad 0{,}00897 = \frac{897}{100000}$$

ont le même dénominateur.

Étant données autant de fractions décimales que l'on voudra, on les réduira au même dénominateur en plaçant assez de zéros à la droite des chiffres décimaux de celles qui en ont le moins pour que toutes aient le même nombre de chiffres décimaux.

223. Quand deux fractions ont le même dénominateur, on reconnaît de suite à l'inspection des numérateurs si elles sont égales ou non, et, dans ce dernier cas, quelle est la plus grande. L'application de cette règle aux fractions décimales fournit les théorèmes suivants.

Pour que deux fractions décimales, écrites avec la notation décimale, soient égales, il faut et il suffit que les chiffres avec lesquels elles sont écrites soient les mêmes et occupent les mêmes places relativement à la virgule, sauf les zéros placés à droite des chiffres décimaux significatifs, zéros dont il n'y a pas lieu de tenir compte.

En d'autres termes et en ne tenant pas compte des zéros qu'on peut placer à droite de la partie décimale, on ne peut écrire un nombre avec la notation décimale que d'une seule façon.

Deux fractions décimales étant données, on reconnaît que la première est plus grande que la seconde si la partie entière est plus grande, ou si, les parties entières étant égales, le premier chiffre décimal que l'on rencontre en allant de gauche à droite et qui diffère du chiffre décimal de même rang dans la seconde fraction est plus fort que ce dernier. Ainsi l'on a

$$36{,}03027 > 36{,}0298,$$

parce que l'on a

$$\frac{3603027}{100000} > \frac{3602980}{100000}.$$

On peut faire sur les nombres décimaux une observation toute pareille à celle qui a été faite pour les nombres entiers quand on a traité de la numération (nº 39). Chaque chiffre exprime des unités composées, simples ou décimales, d'un certain ordre ; une unité de cet ordre est plus grande que le nombre formé par l'ensemble des chiffres qui suivent le chiffre que l'on considère, en supposant que chacun de ces chiffres conserve la signification qu'il avait dans le nombre proposé.

Ainsi, dans le nombre 357,8214 le chiffre 2 représente des centièmes, le chiffre 5 représente des dizaines; un centième ou 0,01 est plus grand que 0,0014 ; 10 ou une dizaine est plus grand que 7,8214. On a, en effet,

$$0{,}01 = \frac{100}{10000} > \frac{14}{10000}; \; 10 = \frac{100000}{10000} > \frac{78214}{10000}.$$

224. *Addition et soustraction.* — On ramène les fractions écrites dans la notation décimale à avoir le même nombre de chiffres décimaux; elles peuvent être regardées alors comme ayant le même dénominateur; en employant la notation des fractions ordinaires, il faudrait, pour ajouter ou retrancher les fractions, ajouter ou retrancher les numérateurs : l'opération faite, on aurait ensuite à revenir à la notation décimale, en séparant à la somme ou à la différence autant de chiffres décimaux qu'il y en avait dans chacun des nombres. Pour ajouter ou retrancher les numérateurs, on les disposerait comme il a été expliqué dans la théorie de l'addition ou de la soustraction des nombres entiers, et puisque les chiffres décimaux dans les fractions données sont partout en même nombre, on voit que les virgules, si on les avait conservées, seraient toutes dans une même colonne verticale, les unes au-dessous des autres, et que, dans la somme ou la différence, la virgule devrait être placée dans le prolongement de la même colonne verticale : le plus simple sera donc de conserver ces virgules dans les nombres donnés, que l'on écrira les uns au-dessous des autres, de manière que les virgules soient dans une même colonne verticale, ainsi que les chiffres qui, dans les différents nombres, occupent le même rang, soit à droite, soit à gauche, par rapport à la virgule, de faire l'addition ou la soustraction, comme pour les nombres entiers, sans tenir compte des virgules, et, enfin, de placer, au total ou à la différence, la virgule sous les virgules des nombres à ajouter ou à retrancher. On voit que, au moins pour l'addition, l'adjonction de zéros à droite des chiffres décimaux est inutile, puisque ces zéros n'interviennent pas dans l'addition. Pour la soustraction, on peut aussi bien se dispenser d'écrire ces zéros, mais il faut faire l'opération comme s'ils existaient.

On a donné ci-dessous un exemple d'addition et un exemple de soustraction pour des nombres décimaux :

$$\begin{array}{r@{,}l}
0 & 0987 \\
121 & \\
38 & 74 \\
2 & 936 \\
\hline
162 & 7747
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r@{,}l}
28 & 53 \\
0 & 7982 \\
\hline
27 & 7318
\end{array}$$

225. *Multiplication.* — *Pour multiplier deux fractions décimales écrites avec la notation décimale, on fait la multiplication comme pour les nombres entiers, sans tenir compte de la virgule, on sépare ensuite à la droite du produit autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans le multiplicande et le multiplicateur.*

Soient, par exemple, les deux fractions décimales 37,82 et 2,387; on peut les écrire

$$\frac{3782}{100}, \quad \frac{2387}{1000};$$

leur produit est

$$\frac{3782 \times 2387}{100 \times 1000};$$

on l'obtiendra donc en multipliant 3782 par 2387 et en séparant $2+3=5$ chiffres décimaux à droite; on dispose l'opération comme ci-dessous :

$$\begin{array}{r} 37{,}82 \\ 2{,}387 \\ \hline 26474 \\ 30256 \\ 11346 \\ 7564 \\ \hline 90{,}27634 \end{array}$$

Lorsque l'un des facteurs est un nombre entier, on doit séparer dans le produit autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans l'autre facteur.

Observons en particulier le cas où le multiplicateur est l'un des nombres 10, 100, 1000, ... On peut alors appliquer la remarque du n° 194 relative au cas où l'on a à multiplier une fraction par un nombre entier qui divise exactement le dénominateur de cette fraction.

Soit, par exemple, à multiplier par 100 la fraction 2,87145; on peut écrire cette fraction

$$\frac{287145}{100000};$$

pour la multiplier par 100, il suffit d'en diviser le dénominateur par 100, ce qui se fera en supprimant deux zéros et donnera la fraction

$$\frac{287145}{1000} = 287{,}145 :$$

en l'écrivant avec la notation décimale, elle sera écrite avec les mêmes chiffres, mais avec deux chiffres décimaux de moins que la fraction donnée 2,87145; elle s'en déduira donc en avançant la virgule de deux rangs vers la droite. Ainsi :

Pour multiplier une fraction décimale écrite avec la notation décimale par 10, 100, 1000, ..., on avance la virgule de un, deux, trois rangs vers la droite. Si l'on était arrêté dans cette opération par le manque de chiffres décimaux, on les remplacerait par des zéros. Ainsi le produit de 0,27 par 10000 s'obtiendra en appliquant la règle précédente à la fraction 0,2700; ce qui donne 2700; dans ce cas, après l'opération, il est évidemment inutile d'écrire la virgule.

226. Puisque la multiplication des nombres décimaux revient à la multiplication des nombres entiers, on pourra, si l'on ne veut conserver qu'un certain nombre de chiffres d'un produit, appliquer le procédé dit abrégé (n° 99). Les calculs sont tout pareils, qu'il s'agisse de nombres entiers ou décimaux; la seule précaution à prendre concerne la détermination de l'ordre du dernier chiffre conservé. Les explications qu'on vient de donner et celles que l'on a données lorsqu'on a exposé la théorie de l'opération abrégée permettront toujours de le faire avec sécurité.

227. *Division.* — Observons d'abord que pour diviser (exactement) un nombre décimal par 10, 100, 1000, ..., il suffit de reculer la virgule vers la gauche de un, deux, trois, ... rangs. Si on est arrêté dans l'opération par le manque de chiffres, on suppléera à ces chiffres par des zéros placés à gauche de la partie entière, en nombre suffisant pour que, après l'opération, il en reste un avant la virgule.

Ainsi le quotient exact de 132,781 par 100 est 1,32781; celui de 0,07 par 1000 est 0,00007. Cette règle se déduit si l'on veut de la règle relative à la multiplication d'un nombre décimal par 10, 100, 1000, ... ; en multipliant en effet le nombre 1,32781 par 100 et le nombre 0,00007 par 1000, on retrouve évidemment les nombres donnés 132,781 et 0,07.

228. Dans le cas général, on obtiendra le quotient exact d'un nombre décimal par un autre nombre décimal ayant le même nombre de chiffres décimaux (ce que l'on peut toujours supposer), en écrivant une fraction ordinaire dont les deux nombres décimaux donnés soient respectivement le numérateur et le dénominateur, et en supprimant les virgules.

Soit, par exemple, à diviser 38,761 par 21,142 : c'est diviser $\frac{38761}{1000}$ par $\frac{21142}{1000}$; le quotient est

$$\frac{38761 \times 1000}{1000 \times 21142} = \frac{38761}{21142}.$$

Il est mis sous forme d'une fraction ordinaire : nous ne pouvons pour le moment aller plus loin ; nous reviendrons au n° 253 sur la division des nombres décimaux, quand nous aurons traité de la réduction d'une fraction ordinaire en fraction décimale, problème qui se pose maintenant de lui-même.

§ 2. — Conversion d'une fraction ordinaire en fraction décimale.

229. Le problème est le suivant : *Étant donnée une fraction ordinaire, trouver la plus grande fraction décimale d'un nombre donné de chiffres décimaux, qui ne dépasse pas la fraction donnée.*

Soit, en désignant par a et b des nombres entiers, $\frac{a}{b}$ la fraction donnée; cherchons le plus grand nombre décimal de n chiffres décimaux qui ne dépasse pas $\frac{a}{b}$; en mettant ce nombre décimal sous la forme d'une fraction ordinaire, on pourra le représenter par $\frac{K}{10^n}$, son numérateur K étant entier; cet entier K est déterminé par les inégalités

$$\frac{K}{10^n} \leqq \frac{a}{b} < \frac{K+1}{10^n},$$

qui ne font que traduire l'énoncé; on en conclut

$$K \leqq \frac{a}{b} \times 10^n < K+1,$$

et ces dernières inégalités montrent que K est la partie entière de la fraction $\frac{a \times 10^n}{b}$, ou, si l'on veut, le quotient de la division de $a \times 10^n$ par b, au sens de la théorie des nombres entiers.

Règle. — Pour trouver le plus grand nombre décimal de n chiffres décimaux qui soit inférieur ou égal à une fraction donnée, on multiplie cette fraction par 10^n, on cherche la partie entière du produit, et, à droite de cette partie entière, on sépare n chiffres décimaux.

Considérons la suite des fractions décimales de n chiffres décimaux, on peut les écrire

$$0, \quad \frac{1}{10^n}, \quad \frac{2}{10^n}, \quad \frac{3}{10^n}, \ldots, \frac{K}{10^n}, \quad \frac{K+1}{10^n}, \ldots;$$

elles forment une progression arithmétique; chacune d'elles s'obtient en ajoutant $\frac{1}{10^n}$ à la précédente. La fraction $\frac{a}{b}$ est égale à l'une d'elles $\frac{K}{10^n}$, ou bien tombe entre deux consécutives, $\frac{K}{10^n}$ et $\frac{K+1}{10^n}$; dans le premier cas, $\frac{a}{b}$ différera des fractions décimales de n chiffres, autres que $\frac{K}{10^n}$, d'au moins $\frac{1}{10^n}$; dans le second cas, sa différence avec $\frac{K}{10^n}$ ou $\frac{K+1}{10^n}$ sera moindre que $\frac{1}{10^n}$; sa différence avec les autres fractions décimales de n chiffres décimaux sera supérieure à $\frac{1}{10^n}$. Dans les deux cas, parmi les fractions décimales de n chiffres qui ne dépassent pas $\frac{a}{b}$, c'est $\frac{K}{10^n}$ qui s'en approche le plus.

La fraction $\frac{K}{10^n}$ est dite la valeur approchée de $\frac{a}{b}$ à $\frac{1}{10^n}$ près, par défaut; quand elle est écrite avec la notation décimale, on l'appelle encore valeur approchée de $\frac{a}{b}$ avec n chiffres décimaux. La fraction $\frac{K+1}{10^n}$ est dite la valeur approchée de $\frac{a}{b}$ à $\frac{1}{10^n}$ près, par excès.

Le quotient de la division de $a \times 10^n$ par b, au sens de la théorie des nombres entiers, est K; si la division se fait exactement, la fraction ordinaire $\frac{a}{b}$ aura été transformée exactement en fraction décimale; dans le cas contraire, soit r le reste : on aura

$$a \times 10^n = K \times b + r,$$

et en regardant les deux membres de cette égalité comme les numérateurs de fractions dont le dénominateur serait $10^n \times b$, on voit que l'on aura

$$\frac{a \times 10^n}{10^n \times b} = \frac{K \times b}{10^n \times b} + \frac{r}{10^n \times b},$$

ou, après des simplifications évidentes,

$$\frac{a}{b} = \frac{K}{10^n} + \frac{1}{10^n} \times \frac{r}{b};$$

on a ainsi l'expression de la différence entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{K}{10^n}$; c'est le produit de $\frac{1}{10^n}$ par une fraction $\frac{r}{b}$ plus petite que l'unité.

Soit, par exemple, à chercher la valeur approchée de $\frac{31}{7}$ à $\frac{1}{10^6}$ ou 0,000001 près, par défaut. On devra diviser $31 \times 10^6 = 31000000$ par 7 au sens de la théorie des nombres entiers; le quotient est 4428571, le reste est 3; la valeur approchée s'obtient en divisant 4428571 par 1000000, c'est-à-dire en séparant six chiffres décimaux; on a d'ailleurs, en vertu de la division,

$$31000000 = 4428571 \times 7 + 3,$$

d'où, en divisant (exactement) par 1000000×7,

$$\frac{31}{7} = 4{,}428571 + 0{,}000001 \times \frac{3}{7},$$

égalité qui montre que la différence entre $\frac{31}{7}$ et 4,428571 est égale aux trois septièmes de un millionième (n° 197).

230. L'opération même met en évidence une propriété bien remarquable.

Si l'on veut avoir successivement les valeurs approchées de $\frac{31}{7}$ à 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ... près, par défaut, chaque opération peut servir à la suivante : pour la première, il faut diviser au sens de la théorie des nombres entiers 31 par 7; le quotient est 4, le reste est 3; si l'on veut avoir la valeur approchée à $\frac{1}{10}$ près, il faut diviser 310 par 7; mais on a calculé déjà le premier chiffre de ce quotient qui est 4, et l'on a le reste correspondant qui est 3. Pour continuer l'opération, il faut abaisser un 0, ce qui donne 30 ; en divisant 30 par 7 on obtient le second chiffre du quotient qui est 4, et le reste correspondant qui est 2 ; la valeur approchée à 0,1 près est 4,4. Pour avoir la valeur approchée à 0,01 près, on devrait diviser 3100 par 7; mais on a déjà les deux premiers chiffres du quotient, et le reste correspondant qui est 2 ; pour continuer l'opération, il faut abaisser un zéro, ce qui donne 20, diviser 20 par 7, ce qui donne comme quotient 2 et comme reste 6; la valeur approchée à 0,01 près est 4,42. Pour obtenir la valeur approchée à 0,001 près, on devra diviser 31000 par 7 ; mais on a déjà trois chiffres du quotient et le reste correspondant, etc.... On adopte pour les calculs la disposition suivante (le diviseur n'ayant qu'un chiffre, on n'a pas écrit les produits de ce diviseur par les divers chiffres du quotient; on s'est contenté d'écrire les restes) :

$$
\begin{array}{r|l}
31 & 7 \\ \cline{2-2}
30 & 4,428571 \\
20 & \\
60 & \\
40 & \\
50 & \\
10 & \\
3 &
\end{array}
$$

231. On conclut de là la règle et les remarques que voici. Pour obtenir la valeur approchée d'une fraction ordinaire avec un certain nombre de chiffres décimaux, on divise le numérateur par le dénominateur au sens de la théorie des nombres entiers; le quotient fournit la partie entière de la fraction décimale cherchée, ou la valeur approchée de la fraction donnée à une unité près; on met une virgule à la suite du quotient trouvé, un zéro à la suite du reste, et l'on continue la division, ce qui donne au quotient le premier chiffre décimal cherché; à la suite du nouveau reste on place un zéro, et on continue la division, on a au quotient le second chiffre décimal cherché ; on continue ainsi en plaçant chaque fois un zéro à la suite du reste, jusqu'à ce que l'on ait le nombre de chiffres voulu : la fraction décimale écrite au quotient est la valeur approchée que l'on cherche, sa différence avec la fraction donnée est égale au produit d'une unité décimale de l'ordre du dernier chiffre décimal écrit au quotient par une fraction ordinaire moindre que un, dont le dénominateur est le dénominateur de la fraction proposée, et le numérateur le dernier reste de la division.

Quand on a la valeur approchée (par défaut) avec n chiffres décimaux, il suffit de conserver dans cette fraction décimale un, deux, trois, ... chiffres décimaux pour avoir la valeur approchée de la fraction donnée, par défaut, à $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$ près. En forçant le dernier chiffre de ces valeurs approchées, on obtient les valeurs approchées, par excès, à $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$ près.

Cette conséquence, que nous avons déduite de l'opération même, pouvait se prévoir. Par exemple, si la valeur approchée de $\frac{31}{7}$ à $\frac{1}{10^6}$ près est 4,428571, il est clair que le nombre $\frac{31}{7}$ étant supérieur (ou égal) à 4,428571 sera *a fortiori* supérieur (ou égal) à 4,428; mais il est inférieur à 4,429 puisqu'il est inférieur à 4,428572. Ainsi 4,428 et 4,429 sont bien les valeurs approchées par défaut et par excès de $\frac{31}{7}$ à $\frac{1}{1000}$ près.

L'observation qui précède s'applique aux nombres décimaux eux-mêmes : quand on a un tel nombre, on obtient immédiatement sa valeur approchée par défaut à $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$ près, en gardant seulement un, deux, trois, ... chiffres décimaux; on en déduit immédiatement les valeurs approchées par excès.

232. Voici encore une observation analogue aux précédentes et qui se déduit immédiatement de l'opération même.

Ayant la valeur approchée d'une fraction $\frac{a}{b}$ avec n chiffres décimaux, on obtient la valeur approchée de cette fraction multipliée par 10, 100, 1000, ..., avec $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... chiffres décimaux en avançant simplement la virgule de un, deux, trois, ... rangs vers la droite; en avançant la virgule de n rangs, on obtient la valeur approchée à une unité près par défaut de la fraction multipliée par 10^n. Inversement en partant toujours de la même valeur approchée avec n chiffres et en reculant la virgule de un, deux, trois, ... rangs vers la gauche, on obtient la valeur approchée de la fraction divisée par 10, 100, 1000, ..., avec $n+1$, $n+2$, $n+3$, ... chiffres décimaux.

La première partie du théorème implique évidemment la seconde; c'est la seule dont nous nous occuperons; il suffit, par exemple, de se reporter à l'opération du numéro précédent pour reconnaître que, si on cherche les valeurs approchées successives des fractions $\frac{31}{7}$ et $\frac{3100}{7}$, on trouvera exactement les mêmes chiffres au quotient, les mêmes nombres comme restes partiels, et dans le même ordre;

seulement dans le second cas, la partie entière comporte deux chiffres de plus que dans le premier. La proposition est donc démontrée.

233. L'opération que nous avons décrite au n° 230, et qui permet d'obtenir, au moyen d'une division poursuivie aussi loin qu'on le veut, les chiffres successifs des fractions décimales qui approchent d'une fraction ordinaire $\frac{a}{b}$ à $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$ près, est ce que nous appellerons, d'une façon un peu impropre, la *conversion de cette fraction ordinaire en fraction décimale* : cette expression n'est vraiment correcte que dans le cas, sur lequel nous insisterons tout à l'heure, où l'on parvient ainsi à une fraction *décimale* égale à la fraction proposée; nous la conserverons, même quand il n'en est pas ainsi, pour la commodité du langage.

234. Supposons que la fraction ordinaire $\frac{a}{b}$ se trouve être égale à une fraction décimale, et que cette fraction décimale ait n chiffres décimaux; en calculant les valeurs approchées de $\frac{a}{b}$, par défaut, à $\frac{1}{10^n}$ près, comme il a été expliqué, on tombera nécessairement sur la fraction décimale *égale* à $\frac{a}{b}$, et l'on en sera prévenu par ce fait que le reste de la division partielle qui correspond au $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal est nul. L'opération, comme on dit, est terminée; si on voulait la continuer, on ne trouverait désormais, comme chiffres du quotient, et comme restes partiels, que des zéros. Si la fraction $\frac{a}{b}$ n'est égale à aucune fraction décimale, l'opération pourra se continuer indéfiniment, on ne trouvera jamais un reste nul.

235. Il convient de savoir reconnaître sur la fraction $\frac{a}{b}$ elle-même s'il existe ou non une fraction décimale qui lui soit égale.

Supposons la fraction $\frac{a}{b}$ irréductible, et supposons que cette fraction soit égale à une fraction décimale de n chiffres décimaux, dont le dernier ne soit pas un zéro; alors, en vertu même de la façon dont on fait l'opération, le nombre a, quand on a placé à sa droite n zéros, doit être divisible par b et les nombres obtenus en plaçant à la droite de a moins de n zéros ne doivent pas être divisibles par b; en d'autres termes, 10^n est la plus petite puissance de 10 telle que $a \times 10^n$ soit divisible par b. Pour que $a \times 10^n$ soit divisible par b, comme

b est premier à a, il faut et il suffit que b divise 10^n ou $2^n \times 5^n$; ou encore que b, décomposé en facteurs premiers, ne contienne pas d'autre facteur premier que 2 et 5 et que le plus grand des exposants dont sont affectés ces facteurs premiers soit au plus égal à n.

Inversement, la plus petite puissance de 10 telle que son produit par a soit divisible par b aura un exposant n égal au plus haut exposant des facteurs 2 et 5 dans b, décomposé en facteurs premiers.

La condition nécessaire et suffisante pour que la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ soit égale à une fraction décimale, est que le dénominateur b de cette fraction, décomposé en facteurs premiers, n'admette pas d'autre facteur que 2 *et* 5 ; *le nombre des chiffres décimaux du nombre décimal égal à $\frac{a}{b}$ est égal au plus haut des exposants dont sont affectés ces facteurs* 2 *et* 5 *dans b.*

La même proposition s'établit directement. Trouver un nombre décimal égal à la fraction $\frac{a}{b}$, c'est trouver un nombre entier A et un exposant n, tels que l'on ait

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{10^n},$$

ou

$$a \times 10^n = A \times b.$$

Pour que cela soit possible, il faut et il suffit qu'il y ait une puissance de 10 telle que son produit par a soit divisible par b.

Chaque puissance de 10 qui jouit de cette propriété fournit un nombre décimal égal à $\frac{a}{b}$, nombre qui a autant de chiffres décimaux qu'il y a d'unités dans l'exposant de cette puissance. Ces nombres décimaux, égaux entre eux, ne peuvent différer que par les zéros qui les terminent; celui d'entre eux qui n'est terminé par aucun zéro provient donc de la plus petite puissance de 10 qui, multipliée par a, soit divisible par b. Si b est premier à a, les conclusions sont les mêmes que tout à l'heure.

On trouve ainsi

$$\frac{1}{2} = 0{,}5;\quad \frac{1}{4} = 0{,}25;\quad \frac{1}{8} = 0{,}125;\quad \frac{1}{16} = 0{,}0625;$$

$$\frac{1}{5} = 0{,}2;\quad \frac{1}{25} = 0{,}04;\quad \frac{1}{125} = 0{,}008;\quad \frac{1}{625} = 0{,}0016.$$

236. Lorsque le dénominateur b d'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ contient d'autres facteurs premiers que 2 ou 5, en effectuant la réduction de cette fraction en fraction décimale, on ne parvient jamais à un reste nul, et l'opération peut être poursuivie indéfiniment. Les remarques qui suivent s'appliquent spécialement à ce cas; elles s'appliquent encore dans le cas où l'opération se *termine*, en imaginant qu'on la poursuive cependant, ce qui revient à placer successivement des zéros à droite de la fraction décimale exactement égale à la fraction proposée.

Les valeurs approchées d'une fraction ordinaire, par défaut, à 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; ..., se déduisent chacune de la précédente en plaçant à droite un certain chiffre décimal; chacune est supérieure ou égale à la précédente; elle lui serait égale, si le chiffre placé à droite était un zéro; ces valeurs, qui vont ainsi en augmentant, ou mieux, en ne diminuant jamais, se rapprochent de plus en plus de la fraction considérée; elles finissent par lui devenir égales, si cette fraction est égale à une fraction décimale, auquel cas, comme on vient de le rappeler, en continuant les opérations, on finira par rencontrer cette fraction décimale elle-même et, dès qu'on l'aura rencontrée, toutes les valeurs approchées qui suivent lui restent toujours égales.

Quant aux valeurs approchées par excès à 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; ... près, elles ne vont jamais en diminuant. Reprenons, en effet, l'exemple traité plus haut. Les valeurs approchées de $\frac{31}{7}$ à 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; ... près sont respectivement

$$\begin{array}{llll} 4,4; & 4,42; & 4,428; & 4,4285; \ldots, \\ 4,5; & 4,43; & 4,429; & 4,4286; \ldots. \end{array}$$

Le dernier chiffre de chaque valeur approchée par excès est généralement plus fort d'une unité que l'avant-dernier chiffre de la valeur approchée par excès qui suit; il n'y a d'exception que dans le cas où cette dernière valeur approchée par excès proviendrait d'une valeur approchée par défaut dont le dernier chiffre serait un 9; en général, une valeur approchée par excès est plus petite que la précédente; dans le cas d'exception qu'on vient de signaler, les deux valeurs approchées par excès qui se suivent seraient égales. Si, par exemple, la valeur approchée, par défaut, à 0,0001 près était 4,4289 au lieu d'être 4,4285, les deux valeurs approchées par excès à 0,001 et 0,0001 près, seraient 4,429 et 4,4290.

237. Soit $\frac{a}{b}$ une fraction quelconque; soient, en général α_n et β_n ses valeurs approchées par défaut et par excès à $\frac{1}{10^n}$ près; on aura

$$\alpha_n \leqq \frac{a}{b} < \beta_n, \quad \beta_n - \alpha_n = \frac{1}{10^n};$$

la différence entre $\frac{a}{b}$ et l'un ou l'autre des nombres α_n, β_n est au plus égale à $\frac{1}{10^n}$; on peut prendre n assez grand (nº 189) pour que cette fraction soit plus petite que tel nombre que l'on voudra, car n peut être pris assez grand pour que 10^n dépasse tel nombre que l'on veut; c'est ce qu'on exprime en disant qu'on peut approcher autant que l'on veut d'une fraction quelconque, soit en moins, soit en plus, au moyen d'une fraction décimale. Ces valeurs approchées suffisent dans les calculs pratiques; c'est un point sur lequel nous reviendrons plus tard.

Si l'on se donne un nombre aussi petit qu'on le veut ε, on peut lui faire correspondre un nombre entier n tel que, pour ce nombre et les nombres plus grands, la différence entre $\frac{a}{b}$ et α_n, et celle entre $\frac{a}{b}$ et β_n soient moindres que ε. C'est ce qu'on exprime en disant que α_n et β_n ont pour **limite** $\frac{a}{b}$ quand n grandit indéfiniment.

Quand n grandit, α_n tend vers sa limite en augmentant, il finit par l'atteindre si la fraction $\frac{a}{b}$ est égale à une fraction décimale; il ne l'atteint jamais dans le cas contraire. Dans les mêmes conditions, β_n tend vers sa limite en diminuant; il ne l'atteint jamais.

On s'exprime aussi quelquefois de la façon suivante :

La suite indéfinie [1]

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

des valeurs approchées par excès d'une fraction ordinaire $\frac{a}{b}$, *à* $\frac{1}{10}$,

1. *Indéfinie* veut dire qu'après chaque terme de la suite il y en a un autre.

$\frac{1}{100}, \ldots, \frac{1}{10^n}, \ldots$ *près, a pour limite cette fraction; de même aussi la suite*

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$$

des valeurs approchées par excès, de la même fraction $\frac{a}{b}$, *aux mêmes ordres, a pour limite cette fraction.*

238. *En général, si l'on considère une suite indéfinie de nombres*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

tels que l'on sache calculer l'un quelconque d'entre eux connaissant son rang, on dira que la suite a pour limite un nombre A, *ou mieux que* a_n *a pour limite* A *quand* n *grandit indéfiniment, si à chaque nombre donné, aussi petit qu'on veut,* ε, *on peut faire correspondre un entier* n, *tel que la différence* (1) *entre* A *et* a_n, *ou l'un quelconque des termes qui suivent* a_n, *soit moindre que* ε.

Par exemple $1 + \frac{1}{n}$, ou $\frac{n+1}{n}$, a pour limite 1 quand n grandit indéfiniment : on dit la même chose en disant que la suite indéfinie,

$$\frac{3}{2}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{5}{4}, \ldots, \quad \frac{n+1}{n}, \ldots$$

a pour limite 1 ; il en est de même des suites

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{4}{5}, \ldots, \quad \frac{n}{n+1}, \ldots$$

$$\frac{3}{2}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{6}{5}, \ldots, \frac{2n+1}{2n}, \quad \frac{2n+2}{2n+1}, \ldots.$$

Cette notion de limite, que l'on rencontre ici pour la première fois en Arithmétique, est très importante.

239. Remarquons que, si l'on réduit en fractions décimales deux fractions différentes $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$, en poursuivant l'opération indéfiniment, on finira nécessairement par trouver des fractions décimales différentes : en d'autres termes, il est impossible que, en cherchant

1. La différence peut être A — a_n, ou a_n — A suivant que a_n est plus petit ou plus grand que A.

pour les deux fractions les valeurs approchées par défaut à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, ..., $\frac{1}{10^n}$, ... près, on tombe sur la même suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$. En effet, si ces deux fractions conduisaient à cette même suite, elles devraient être comprises toutes deux entre α_n et $\alpha_n + \frac{1}{10^n}$; leur différence devrait donc être inférieure à $\frac{1}{10^n}$, quel que fût n, et cela est impossible, puisqu'on peut prendre n assez grand pour que $\frac{1}{10^n}$ soit plus petit que la différence entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$.

§ 3. — Fractions décimales périodiques.

240. *Fractions décimales périodiques.* — Nous avons vu que deux cas peuvent se présenter, quand on cherche les fractions décimales approchées de la fraction ordinaire $\frac{a}{b}$ par défaut à 0,1; 0,01; 0,001; ... près : l'opération peut se terminer; c'est ce qui arrive quand il existe une puissance de 10 telle que, en multipliant a par cette puissance, le produit soit divisible par b; dans le cas contraire, elle peut être poursuivie indéfiniment.

Il nous reste à faire quelques observations sur la façon dont se suivent les chiffres dans les valeurs approchées, observations qui sont d'ailleurs plus curieuses au point de vue théorique qu'elles ne sont utiles dans la pratique.

On peut se borner au cas où le numérateur de la fraction est plus petit que le dénominateur; s'il était plus grand, on substituerait à ce numérateur le reste de sa division (au sens de la théorie des nombres entiers) par le dénominateur; en continuant l'opération, on trouverait évidemment les mêmes chiffres décimaux.

Considérons, par exemple, la fraction $\frac{13}{14}$; on est bien dans le cas où l'opération ne se termine pas, puisque cette fraction est irréductible et que son dénominateur $14 = 2 \times 7$, décomposé en facteurs premiers, contient un facteur premier 7, autre que 2 ou 5; en lui appliquant la règle du n° 231, on est amené à faire l'opération figurée ci-dessous :

$$
\begin{array}{l|l}
130 & 14 \\ \cline{2-2}
126 & 0,9285714 \\ \cline{1-1}
40 & \\
28 & \\ \cline{1-1}
120 & \\
112 & \\ \cline{1-1}
80 & \\
70 & \\ \cline{1-1}
100 & \\
98 & \\ \cline{1-1}
20 & \\
14 & \\ \cline{1-1}
60 & \\
56 & \\ \cline{1-1}
40 &
\end{array}
$$

On a trouvé comme dividendes partiels successifs 130, 40, 120, 80, 100, 20, 60, 40 ; à partir de ce dernier, qui a été déjà obtenu, il est clair que les opérations vont se reproduire exactement comme elles se sont produites à partir du moment où on a obtenu une première fois ce dividende partiel, c'est-à-dire qu'on retrouvera dans le même ordre les dividendes partiels 120, 80, 100, 20, 60, 40, et, au quotient, les chiffres 2, 8, 5, 7, 1, 4, et ainsi de suite indéfiniment. Cette circonstance pouvait être prévue, car les dividendes partiels proviennent des restes partiels par l'adjonction d'un zéro : or ces restes sont nécessairement plus petits que 14 et différents de zéro ; ils ne peuvent donc être que les nombres 1, 2, 3, ..., 12, 13 ; au bout de 13 opérations partielles au plus, on devait donc retomber, soit sur un reste déjà obtenu, soit sur le numérateur même de la fraction dont on est parti ; à partir de ce moment, les opérations partielles se reproduiront *périodiquement* toujours les mêmes, et l'on n'aura aucune peine à écrire la fraction décimale approchée par défaut de la fraction donnée, avec autant de chiffres que l'on voudra.

Si, dans l'exemple précédent, on veut 12 chiffres décimaux, on écrira :

$$0,928571428571.$$

241. On appelle *fraction décimale périodique* un symbole écrit comme une fraction décimale ordinaire, mais où l'on imagine une suite indéfinie de chiffres décimaux qui, à partir de l'un d'entre eux, se reproduisent périodiquement, toujours les mêmes et dans le même ordre.

L'ensemble des chiffres qui se reproduisent est ce qu'on appelle la *période* de la fraction décimale périodique.

Si l'on considère la fraction décimale périodique

$$0{,}928571428571428571 42\ldots,$$

où les chiffres 2, 8, 5, 7, 1, 4 se reproduisent indéfiniment, on dit qu'elle est engendrée par la fraction $\frac{13}{14}$, ou que la fraction $\frac{13}{14}$ en est la *fraction génératrice*, c'est-à-dire qu'on est conduit à ce symbole en cherchant les valeurs approchées de $\frac{13}{14}$ à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$,... près, par défaut, et en imaginant que les opérations soient continuées indéfiniment. La période de cette fraction décimale périodique est le nombre 285714 ; en prenant les n premiers chiffres décimaux, on a la fraction décimale approchée de $\frac{13}{14}$ à $\frac{1}{10^n}$ près. Cette valeur approchée, quand n croît indéfiniment, a $\frac{13}{14}$ pour limite.

Les fractions décimales périodiques se divisent en deux classes : les fractions décimales périodiques *simples*, pour lesquelles la période commence immédiatement après la virgule : telle la fraction périodique

$$0{,}36363636\ldots$$

à période 36, et les fractions périodiques *mixtes*, où la période ne commence pas de suite après la virgule ; telle est la fraction décimale périodique engendrée par la fraction $\frac{13}{14}$. Dans une fraction périodique mixte, les chiffres placés entre la virgule et la période sont dits *irréguliers*. Leur ensemble forme la *partie irrégulière* de la fraction périodique mixte.

Toute fraction décimale périodique a-t-elle une fraction génératrice ?

Si elle en a une, elle n'en a qu'une, puisque (n° 239) deux fractions différentes engendrent nécessairement des suites différentes de fractions décimales approchées par défaut à 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; ... près.

242. Considérons d'abord le cas d'une fraction décimale périodique simple, dont la partie entière soit nulle, par exemple, la fraction décimale périodique 0,363636, ...

La fraction ordinaire à termes entiers $\frac{a}{b}$ sera sûrement la fraction génératrice de la fraction décimale périodique 0,363636..., si, en réduisant la fraction $\frac{a}{b}$, on trouve comme partie entière 0 (ce qui oblige à supposer $a < b$), comme premiers chiffres décimaux 3 et 6, puis comme reste le nombre a lui-même, de façon à retomber ensuite, au quotient, sur les mêmes chiffres 3 et 6. Puisque, pour calculer deux chiffres décimaux, on a dû ajouter deux zéros à droite de a, cela revient à dire que le quotient, au sens de la théorie des nombres entiers, de la division de $a \times 100$ par b est 36 et le reste a; on a donc, s'il en est ainsi :

$$a \times 100 = b \times 36 + a;$$

en retranchant a des deux membres de cette égalité, on obtient :

$$a \times 99 = b \times 36;$$

et réciproquement cette dernière égalité ou la suivante

$$\frac{a}{b} = \frac{36}{99}$$

entraîne la première.

Si donc on prend pour $\frac{a}{b}$ une quelconque des fractions égales à $\frac{36}{99}$, on aura $a \times 100 = b \times 36 + a$, et comme a est plus petit que b, puisque 36 est plus petit que 99, on voit que, en divisant $a \times 100$ par b, au sens de la théorie des nombres entiers, on aura pour quotient 36 et pour reste a.

Ainsi $\frac{36}{99}$ est la fraction génératrice de la fraction décimale périodique simple 0,363636.

Notre raisonnement est en défaut pour la *seule* fraction décimale périodique simple 0,99999... ; puisque, alors, en essayant de former une fraction génératrice $\frac{a}{b}$ comme tout à l'heure, on aurait $a = b$.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Toute fraction décimale périodique simple dans laquelle tous les chiffres de la période ne sont pas des 9 *admet une fraction génératrice dont le numérateur est formé par la période, et le dénominateur composé d'autant de* 9 *qu'il y a de chiffres dans la période.*

243. Si l'on appliquait cette règle à la fraction décimale périodique simple 0,999..., on trouverait 1 comme résultat, et il convient de remarquer que 1 est la limite de la suite indéfinie formée par les nombres 0,9; 0,99; 0,999; ..., puisque les différences entre 1 et les nombres de cette suite sont respectivement 0,1; 0,01; 0,001; ...

Il est aisé de déduire de là, en répétant le raisonnement du n° 239, que la fraction décimale périodique 0,9999... n'a pas de fraction génératrice. Si cette fraction génératrice existait, elle devrait être comprise entre 0,9 et $0,9 + 0,1 = 1$, entre 0,99 et $0,99 + 0,01 = 1$, entre 0,999 et $0,999 + 0,001 = 1$, etc.; sa différence avec 1 devrait être moindre que $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ et, en général, moindre que $\frac{1}{10^n}$, quel que fût n; or, cela est impossible, puisque l'on peut prendre n assez grand pour que $\frac{1}{10^n}$ soit moindre que la différence entre 1 et la fraction génératrice que l'on suppose exister.

244. Laissons de côté ce cas exceptionnel. Nous avons supposé que la partie entière de la fraction décimale périodique simple était 0; il est clair que s'il en est autrement, il suffira d'ajouter cette partie entière à la fraction formée par la règle que l'on vient de donner pour avoir la fraction génératrice de la fraction décimale périodique donnée : considérons, par exemple, la fraction décimale périodique

$$375,363636\ldots;$$

elle sera engendrée par le nombre fractionnaire

$$375 + \frac{36}{99} = \frac{375 \times 99 + 36}{99},$$

car si on réduit cette fraction en fraction décimale, on trouvera pour partie entière 375 et pour reste correspondant 36, en sorte que les chiffres décimaux seront les mêmes que ceux qui proviennent de la réduction en fraction décimale de la fraction $\frac{36}{99}$, c'est-à-dire 3636....

245. Considérons maintenant une fraction décimale périodique mixte dont la partie entière soit nulle, par exemple la fraction

$$0,375363636...,$$

dans laquelle la période est 36 et la partie irrégulière 375; la fraction

$$\frac{375 \times 99 + 36}{99}$$

engendrerait la fraction décimale 375,363636... ; c'est-à-dire que ses valeurs approchées à 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; 0,0001 ; ... près, par défaut, seraient respectivement

$$375,3 ; \quad 375,36 ; \quad 375,363 ; \quad 375,3636 ; \ldots.. ;$$

les valeurs approchées à 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; ... près, par défaut, de la fraction ordinaire

$$\frac{375 \times 99 + 36}{99 \times 1000},$$

seraient donc (n° 232)

$$0,3753 ; \quad 0,37536 ; \quad 0,375363 ; \quad 0,3753636 ; \ldots ;$$

en d'autres termes, la fraction ordinaire

$$\frac{375 \times 99 + 36}{99 \times 1000},$$

est la fraction génératrice de la fraction décimale périodique mixte 0,375363636... ; on peut l'écrire

$$\frac{375 \times (100 - 1) + 36}{99000} = \frac{37500 + 36 - 375}{99000} = \frac{37536 - 375}{99000},$$

d'où la règle suivante.

Le dénominateur de la fraction génératrice d'une fraction décimale périodique mixte dans laquelle la partie entière est 0 *s'obtient en faisant suivre d'autant de zéros qu'il y a de chiffres irréguliers un nombre formé d'autant de* 9 *qu'il y a de chiffres à la période; son numérateur s'obtient en retranchant la partie irrégulière du nombre formé en faisant suivre cette partie irrégulière de la période, ou, ce qui revient au même, en ajoutant à la période le produit de la partie irrégulière par un nombre formé d'autant de* 9 *qu'il y a de chiffres à la période.*

246. Cette règle comporte naturellement la même exception que la règle relative aux fractions périodiques simples, d'où elle a été déduite : les chiffres de la période ne doivent pas être tous des 9. Si on l'appliquait dans ce cas, par exemple à la fraction 0,47999..., on trouverait comme résultat $\frac{47 \times 9 + 9}{900}$: on a utilisé, pour former le numérateur, la seconde forme indiquée dans la règle; on a d'ailleurs

$$\frac{47 \times 9 + 9}{900} = \frac{(47+1) \times 9}{100 \times 9} = \frac{48}{100} = 0{,}48$$

et l'on voit sans peine que 0,48 est la *limite* de la suite indéfinie

$$0{,}47;\ 0{,}479;\ 0{,}4799;\ 0{,}47999;\ \ldots;$$

on en conclut d'ailleurs que la fraction décimale périodique mixte 0,47999... n'a pas de fraction génératrice.

247. Enfin, dans le cas où l'on aurait affaire à une fraction décimale périodique mixte qui ne rentrerait pas dans le cas d'exception, mais pour laquelle la partie entière ne serait pas 0, il suffirait pour avoir sa fraction génératrice d'ajouter cette partie entière à la fraction formée par la règle précédente.

248. Considérons la fraction génératrice d'une fraction décimale périodique simple, par exemple la fraction $\frac{36}{99}$ qui engendre la fraction décimale périodique 0,363636... Cette fraction génératrice ne sera pas, en général, irréductible. Mais son dénominateur étant premier à 10, restera premier à 10 quand on le réduira à sa plus simple expression. Donc une fraction ordinaire irréductible qui engendre une fraction décimale périodique simple a son dénominateur premier à 2 et à 5.

Considérons maintenant la fraction génératrice d'une fraction périodique mixte, par exemple la fraction $\frac{25736 - 257}{99000}$, qui engendre la fraction périodique mixte

$$0{,}257363636\ldots.$$

Son numérateur ne peut être terminé par un 0 ; il faudrait pour cela que le dernier chiffre de la période fût égal au dernier chiffre irrégulier ; ce dernier chiffre irrégulier aurait donc pu être pris pour le premier chiffre de la période que, ainsi, on aurait dû faire commencer plus tôt. Le numérateur n'étant pas terminé par un 0 est premier à l'un, au moins, des facteurs 2 ou 5 ; mais ce facteur figure au dénominateur, supposé décomposé en facteurs premiers, à une puissance égale au nombre de zéros, c'est-à-dire au nombre de chiffres irréguliers. Donc le dénominateur d'une fraction ordinaire irréductible qui engendre une fraction décimale périodique mixte, décomposé en facteurs premiers, admettra, parmi ces facteurs, l'un des nombres 2 ou 5 avec un exposant égal au nombre des chiffres irréguliers.

Réciproquement, toute fraction irréductible dans laquelle le dénominateur n'est divisible ni par 2 ni par 5 donne naissance à une fraction décimale périodique simple, puisqu'elle ne peut donner naissance ni à une fraction décimale limitée, ni à une fraction périodique mixte. Toute fraction irréductible dans laquelle le dénominateur est divisible par 2 ou 5 et par quelque autre nombre premier donne naissance à une fraction décimale périodique mixte, puisqu'elle ne peut donner naissance ni à une fraction décimale limitée, ni à une fraction décimale périodique simple; le nombre de chiffres irréguliers est égal à l'exposant de celui des facteurs 2 ou 5 qui entre avec le plus grand exposant dans le dénominateur de la fraction proposée, décomposé en facteurs premiers.

§ 4. — Valeur approchée d'un nombre donné, à α près.

249. Les notions qui précèdent sont susceptibles d'être généralisées.

Etant donnés un nombre A quelconque et un nombre entier ou fractionnaire α, la valeur approchée de A à α près, par défaut, est le plus grand multiple [1] de α qui soit inférieur ou égal à A. Ce produit, augmenté de α, est la valeur approchée de A, à α près, par excès.

Soit K le nombre entier par lequel il faut multiplier α pour avoir la valeur approchée de A, par défaut, à α près; on devra avoir

$$K\alpha \leqq A < (K+1)\alpha,$$

d'où l'on déduit, en divisant par α,

$$K \leqq \frac{A}{\alpha} < (K+1),$$

et ces dernières inégalités montrent que K est la partie entière du quotient $\frac{A}{\alpha}$.

1. Jusqu'ici, on n'a employé l'expression « multiple d'un nombre » que lorsque ce nombre était entier. Il est à peine utile de dire qu'un multiple d'un nombre entier ou fractionnaire a est le résultat obtenu en multipliant a par un nombre *entier* quelconque. Dans ce qui suit, on n'exclut même pas le cas où le multiplicateur serait nul, comme on avait fait dans le chapitre relatif au plus grand commun diviseur et au plus petit commun multiple.

En considérant la suite des nombres

$$0,\ \alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha,\ \ldots,\ K\alpha,\ (K+1)\alpha,\ \ldots$$

obtenus en multipliant α par les nombres 0, 1, 2, 3, ..., suite dont chaque terme s'obtient en ajoutant α au précédent, et qui, ainsi, forme une progression arithmétique, on voit que A est un terme $K\alpha$ de cette suite, ou bien qu'il tombe entre deux termes consécutifs $K\alpha$, $(K+1)\alpha$; dans le premier cas, la différence entre A et l'un quelconque des termes de la suite, autre que $K\alpha$, est au moins égale à α; dans le second, la différence entre A et l'un ou l'autre des nombres $K\alpha$, $(K+1)\alpha$ est moindre que α ; avec les autres termes de la suite, la différence est plus grande que α. Dans tous les cas, $K\alpha$ est, parmi tous les termes de la suite qui ne dépassent pas A, celui qui s'en approche le plus, et $(K+1)\alpha$ est, de tous les termes de la suite qui dépassent A, celui qui s'en approche le plus.

Il arrive souvent qu'on prenne pour α l'inverse d'un nombre entier n : le nombre $\frac{A}{\alpha}$ doit alors être remplacé par An; si K est la partie entière de ce produit, $\frac{K}{n}$ est la valeur approchée de A, à $\frac{1}{n}$ près, par défaut.

Cherchons par exemple les valeurs approchées de $\frac{355}{113}$, à $\frac{1}{7}$ près : on cherchera la partie entière de $\frac{355 \times 7}{113} = \frac{2485}{113}$; en divisant 2485 par 113, on trouve pour quotient 21 et pour reste 112; la valeur approchée à $\frac{1}{7}$ près par défaut est $\frac{21}{7} = 3$; la valeur approchée par excès est $\frac{22}{7}$: l'opération montre d'ailleurs que l'on a

$$355 \times 7 = 113 \times 21 + 112 = 113 \times 22 - 1,$$

d'où, en divisant par 113×7,

$$\frac{355}{113} = \frac{21}{7} + \frac{112}{113 \times 7} = \frac{22}{7} - \frac{1}{113 \times 7}.$$

Les différences entre $\frac{355}{113}$ et ses valeurs approchées sont respectivement $\frac{112}{113} \times \frac{1}{7}$ et $\frac{1}{113} \times \frac{1}{7}$; la dernière est très petite, la première diffère à peine de $\frac{1}{7}$.

250. Considérons encore les valeurs approchées par défaut de $\frac{16}{9}$ à $\frac{1}{4}$ près et à $\frac{1}{7}$ près ; on trouvera sans peine qu'elles sont respectivement $\frac{7}{4}$ et $\frac{12}{7}$; c'est la première qui est la plus approchée de $\frac{16}{9}$, car elle est la plus grande. Ainsi, si l'on se donne deux nombres α, α' tels que α' soit plus petit que α, la valeur approchée d'un nombre A à α près, par défaut, peut être plus grande que la valeur approchée à α' près, par défaut. Le lecteur reconnaîtra sans peine que cette circonstance ne se présentera jamais si l'on a $\alpha = n\alpha'$, n étant un nombre entier.

251. Étant donnée une fraction $\frac{a}{b}$ à termes entiers, si l'on cherche ses valeurs $\frac{K}{2}$, $\frac{K+1}{2}$ approchées à $\frac{1}{2}$ près, par défaut et par excès, l'une de ces valeurs sera un nombre entier puisque l'un des nombres consécutifs K et K + 1 est certainement pair.

Il importe de remarquer que cette valeur s'obtient sans peine quand on cherche le plus grand entier contenu dans $\frac{a}{b}$; si l'on désigne en effet par q ce nombre entier et par r le reste de la division de a par b au sens de la théorie des nombres entiers, on a

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}.$$

La fraction $\frac{r}{b}$ sera inférieure à $\frac{1}{2}$ si l'on a $b > 2r$; si l'on a $b \leqq 2r$, elle sera supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$. Dans le premier cas, la différence entre $\frac{a}{b}$ et q est moindre que $\frac{1}{2}$; q est la valeur cherchée. Dans le second cas cette différence est au moins égale à $\frac{1}{2}$, et l'on a

$$q + \frac{1}{2} \leqq \frac{a}{b} < q + 1 ;$$

la différence entre $q + 1$ et $\frac{a}{b}$ est au plus égale à $\frac{1}{2}$, c'est $q + 1$ qui est le nombre entier que l'on cherche.

Il y a donc en général un nombre entier et un seul qui diffère de $\frac{a}{b}$ d'une quantité moindre que $\frac{1}{2}$. C'est l'une ou l'autre des valeurs approchées de $\frac{a}{b}$ à une unité près, par défaut ou par excès, suivant que b est supérieur ou inférieur au double du reste ; si b était égal au double du reste, il y aurait deux nombres entiers dont la différence avec $\frac{a}{b}$ serait égale à $\frac{1}{2}$. Cette circonstance ne se présentera jamais si b est impair ; si la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible, elle ne pourra se présenter que dans le cas où b est égal à 2.

252. Observons que quand un nombre entier ou décimal est écrit dans le système décimal, on obtient immédiatement ses valeurs approchées à 1, 10, 100, 1000, ... près, par défaut; il résulte immédiatement de la définition et l'on vérifie sans peine par l'application de la règle précédente que ces valeurs s'obtiennent en supprimant la partie décimale, s'il y en a une, puis en remplaçant successivement par des zéros, un, deux, trois, ... chiffres à droite; ainsi les valeurs approchées à 1, 10, 100 près, par défaut, de 2847,5023 sont respectivement 2847, 2840, 2800. On peut observer encore que la détermination du quotient de deux nombres entiers, chiffre par chiffre, revient à la détermination de ce quotient à .... 1000, 100, 10, 1 près, par défaut.

§ 5. — Division de deux nombres décimaux.

253. On a vu au n° 228 comment on peut écrire, sous forme de fraction ordinaire, le quotient exact de la division d'une fraction décimale par une fraction décimale. On peut ensuite, si l'on veut, réduire cette fraction ordinaire en fraction décimale, en calculant un, deux, trois, ... chiffres décimaux : c'est ce qu'on appelle *pousser la division* jusqu'aux dixièmes, aux centièmes, aux millièmes.... On peut toujours employer le procédé du n° 228; c'est-à-dire s'arranger de manière que le dividende et le diviseur aient le même nombre de chiffres décimaux, puis supprimer les virgules et opérer la réduction en fraction décimale; on peut aussi profiter des remarques qui suivent.

254. Supposons le diviseur entier : soit, par exemple, à diviser 3141,593 ou $\frac{3141593}{1000}$ par 2718; d'après le n° 203, le quotient exact est la fraction $q = \frac{3141593}{2718 \times 1000}$, qui s'obtient en divisant par 1000 la fraction $q' = \frac{3141593}{2718}$; or, d'après ce que l'on a dit au n° 232, la réduction en fractions décimales des fractions q et q' est une seule et même opération : les chiffres se suivent dans le même ordre, mais, dans le second cas, ils représentent des unités mille fois plus grandes que dans le premier ; le nombre des unités simples, pour la fraction q, sera donc le nombre des mille pour la fraction q' ; ce dernier nombre est le nombre de mille dans la partie entière de q', ou dans le quotient de la division, au sens de la théorie des nombres entiers, de 3141593 par 2718 ; il s'obtient en divisant par 2718, au même sens, le nombre de mille de 3141593, c'est-à-dire 3141, ou encore le nombre d'unités simples du dividende primitif 3141,593. On adopte la disposition suivante :

3141,593	2718
2718	1,1558 ...
4235	
2718	
15179	
13590	
15893	
13590	
23030	
21744	
1286	
......	

On écrit le dividende et le diviseur comme dans la division des nombres entiers (n° 107), on fait la division de la partie entière 3141 du dividende par le diviseur 2718, comme dans la théorie des nombres entiers ; le quotient trouvé est la partie entière du quotient cherché ; après l'avoir calculée, on place à droite une virgule et l'on continue la division en abaissant successivement les chiffres décimaux, on obtient ainsi, chiffre par chiffre, la partie décimale du quotient cherché, supposé réduit en fraction décimale, et chaque chiffre que l'on écrit au quotient représente des unités du même ordre que le chiffre qu'on vient d'abaisser. Dans l'exemple écrit plus haut, le dernier chiffre abaissé est un 0 qui correspondrait, au dividende, à un 0, non écrit, représentant des dix-millièmes; le chiffre correspondant, au quotient, représente bien des dix-millièmes. Si l'on regardait le reste final 1286 comme représentant aussi des dix-millièmes, c'est-à-dire si on l'écrivait 0,1286, il y aurait entre le dividende, le diviseur et le reste ainsi interprété la même relation que dans la division au sens des nombres entiers, c'est-à-dire que le dividende serait égal au produit du diviseur par le nombre écrit au quotient, plus le reste. L'opération que l'on a faite montre en effet, en se reportant à la théorie de la division des nombres entiers, que l'on a

$$31415930 = 2718 \times 11558 + 1286;$$

on en déduit en divisant par 10000,

$$3141{,}593 = 2718 \times 1{,}1558 + 0{,}1286.$$

255. *Règle :* Pour diviser exactement un nombre décimal par un nombre entier, et réduire du même coup le quotient en fraction décimale, on effectue la division comme dans la théorie des nombres entiers, mais on place une virgule au quotient, après avoir calculé le chiffre du quotient fourni par le dividende partiel dont le dernier chiffre est le chiffre des unités du dividende, et l'on continue la division en abaissant successivement les chiffres décimaux du dividende, chiffres que l'on remplace par des zéros quand ils n'existent pas.

Voici encore un exemple de l'application de cette règle relatif à la division de 1,414213 par 647 :

$$\begin{array}{r|l}
1{,}414213 & 647 \\ \cline{2-2}
\underline{1294} & 0{,}002185 \\
1202 & \\
\underline{647} & \\
5551 & \\
\underline{5176} & \\
3753 & \\
\underline{3235} & \\
518 &
\end{array}$$

On aurait ici :

$$1{,}414213 = 647 \times 0{,}002185 + 0{,}000518.$$

256. Si le diviseur n'est pas entier, on ramène ce cas au précédent en avançant la virgule vers la droite, au dividende, d'autant de rangs qu'il y a de chiffres décimaux au diviseur et en supprimant la virgule dans ce dernier nombre.

Exercices.

193. Le dénominateur d'une fraction à termes entiers est un nombre connu de n chiffres; on connaît la valeur approchée de la fraction à $\frac{1}{10^n}$ près, par défaut, trouver le numérateur.

Exemple : trouver le numérateur d'une fraction dont le dénominateur est 113 et dont la valeur approchée par défaut, à 0,001 près, est 3,141?

194. Quel est le plus grand des deux nombres

$$174 + \frac{7}{13} + \frac{12}{13^2} + \frac{8}{13^3} + \frac{9}{13^4} + \frac{10}{13^5},$$
$$174 + \frac{7}{13} + \frac{11}{13^2} + \frac{12}{13^3} + \frac{11}{13^4} + \frac{12}{13^5}?$$

195. Si a est un nombre entier donné, autre que 1, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ puisse être mise sous la forme

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_2}{a^2} + \frac{\alpha_3}{a^3} + \dots + \frac{\alpha_n}{a^n},$$

où α_0 est un nombre entier et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des nombres entiers tous inférieurs à a, est que le dénominateur q, décomposé en facteurs premiers, ne contienne pas d'autres facteurs premiers que ceux qui figurent dans a.

Une fraction $\frac{p}{q}$ ne peut être mise sous cette forme que d'une seule façon.

196. Toute fraction plus petite que 1 peut être représentée, avec telle approximation qu'on voudra, par une somme de fractions dont les numérateurs sont égaux à l'unité et les dénominateurs à des puissances de 2, toutes différentes.

En conclure que l'on peut réaliser approximativement la division d'une grandeur en n parties égales, en ne faisant jamais que des divisions par 2. — Par exemple, pour diviser approximativement une longueur en 60 parties égales on peut la diviser en 64 parties égales, ajouter à l'une de ces parties son seizième, puis le seizième de ce seizième.

Trouver une construction approchée pour inscrire dans un cercle un polygone régulier de sept côtés.

197. Si a est un nombre entier autre que 1, la valeur approchée d'un nombre fractionnaire A à $\frac{1}{a^n}$ près, par défaut, pourra se mettre sous la forme

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_2}{a^2} + \frac{\alpha_3}{a^3} + \dots + \frac{\alpha_n}{a^n},$$

en désignant par α_0 un nombre entier et par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ des nombres entiers (qui peuvent être nuls), tous plus petits que a. Si l'on suppose connus les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$, quelles seront les valeurs approchées de A à $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \dots, \frac{1}{a^{n-1}}, \frac{1}{a^n}$ près par défaut ou par excès?

198. Si le nombre A est mis sous forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$, et si le dénominateur q, décomposé en facteurs premiers, contient un facteur qui ne figure pas dans a, la recherche des valeurs approchées de A à $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \ldots, \frac{1}{a^n}, \ldots$ pourra être poursuivie indéfiniment; montrer comment cette recherche conduira à une suite de nombres entiers $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, tous inférieurs à a, qui finira par être périodique.

Si a désigne un nombre entier autre que un, le nombre

$$\frac{a-1}{a}+\frac{a-1}{a^2}+\frac{a-1}{a^3}+\cdots+\frac{a-1}{a^n}$$

a pour limite l'unité quand le nombre n augmente indéfiniment.

199. Si l'on réduit en fraction décimale une fraction irréductible $\frac{a}{b}$, qui donne naissance à une fraction décimale périodique simple, le nombre de chiffres de la période est le plus petit nombre entier n tel que $10^n - 1$ soit divisible par b; il est par conséquent indépendant du numérateur a.

200. Si en désignant par a et b des nombres premiers entre eux on considère la progression géométrique indéfinie

$$1, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots,$$

et que l'on en divise tous les termes par b, les restes se reproduiront périodiquement. Le nombre de termes contenus dans une période est le plus petit entier n tel que $a^n - 1$ soit divisible par b. (On reviendra sur ce sujet dans le chapitre final.)

201. Si a et b sont premiers entre eux et premiers à 10 et si m, n sont respectivement les nombres de chiffres des périodes dans les fractions décimales périodiques engendrées par deux fractions irréductibles dont les dénominateurs sont a et b, toute fraction irréductible dont le dénominateur est ab engendrera une fraction décimale périodique dans laquelle le nombre de chiffres de la période sera le plus petit commun multiple de m et de n. Tel sera le cas, en particulier, pour la somme des deux fractions proposées.

202. Quels sont les dénominateurs des fractions irréductibles qui peuvent servir de fraction génératrice à des fractions décimales périodiques simples dont les périodes aient un, deux, ou trois chiffres?

203. Trouver les dénominateurs des fractions irréductibles qui, réduites en fractions décimales, donnent naissance à une fraction décimale périodique mixte qui a deux chiffres irréguliers et une période de trois chiffres.

204. Étant donné un nombre entier quelconque a, on peut en écrivant d'abord des 9 puis des 0, former un nombre qui soit divisible par a.

205. Étant donné un nombre entier a premier à 30, on peut trouver un nombre dont tous les chiffres soient des 1 et qui soit divisible par a.

Étant donné un nombre impair a, il existe un nombre entier n tel que $2^n - 1$ soit divisible par a. (Cette proposition est aussi bien un cas particulier de celle qui est énoncée dans l'exercice 200.)

206. Si b est un nombre premier et si la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ donne naissance à une fraction décimale périodique dans laquelle la période ait un nombre pair $2n$ de chiffres, la somme du nombre formé par les n premiers chiffres de la période et du nombre formé par les n derniers sera un nombre dont les n chiffres seront des 9.

207. Si $\frac{a}{b}$ est une fraction irréductible donnant naissance à une fraction décimale périodique simple dont la période ait $b - 1$ chiffres, et si l'on range sur un cercle, d'après leur ordre, les $b-1$ chiffres, ou les $b-1$ restes partiels correspondants, chacune des figures ainsi obtenues restera la même quel que soit le numérateur a. Si l'on a effectué la réduction en fraction décimale pour une pareille fraction, on n'aura plus aucun calcul à faire pour effectuer la réduction de n'importe quelle autre fraction dont le numérateur sera un nombre premier à b et inférieur à b. Cette circonstance se présente en particulier pour les nombres $b = 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97$.

208. Trouver la limite vers laquelle tend le nombre

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$$

quand n augmente indéfiniment. (V. Ex. 172.)

209. Étant donnée une suite indéfinie de nombres entiers

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

tous plus grand que un, la valeur approchée par défaut d'un nombre fractionnaire A à $\dfrac{1}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$ près, peut être mise sous la forme

$$\alpha_0+\frac{\alpha_1}{a_1}+\frac{\alpha_2}{a_1 a_2}+\frac{\alpha_3}{a_1 a_2 a_3}+\dots+\frac{\alpha_n}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n},$$

α_0 étant un nombre entier et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des nombres entiers respectivement moindres que $a_1, a_2, \dots, a_n$. Elle ne peut être mise sous cette forme que d'une façon. Supposant que l'on connaisse les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, on demande quelles sont les valeurs approchées par défaut et par excès de A à

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_1 a_2}, \frac{1}{a_1 a_2 a_3}, \dots, \frac{1}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n},$$

près.

210. Si l'on se donne une suite indéfinie

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

de nombres entiers tous plus grands que un, le nombre

$$\frac{a_1-1}{a_1}+\frac{a_2-1}{a_1 a_2}+\frac{a_3-1}{a_1 a_2 a_3}+\dots+\frac{a_n-1}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$$

a pour limite l'unité quand n augmente indéfiniment.

211. Tout nombre fractionnaire peut être mis, et cela d'une seule façon, sous la forme

$$\alpha_0+\frac{\alpha_1}{1.2}+\frac{\alpha_2}{1.2.3}+\frac{\alpha_3}{1.2.3.4}+\dots+\frac{\alpha_{n-1}}{1.2.3\dots n},$$

en désignant par α_0 un nombre entier et par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ des nombres entiers respectivement inférieurs à $2, 3, \dots, n$.

212. Si l'on désigne par $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ la suite des nombres premiers $2, 3, 5, 7, \dots$ tout nombre fractionnaire peut être mis sous la forme

$$\alpha_0+\frac{\alpha_1}{a_1}+\frac{\alpha_2}{a_1 a_2}+\frac{\alpha_3}{a_1 a_2 a_3}+\dots+\frac{\alpha_n}{a_1 a_2 \dots a_n},$$

α_0 étant un nombre entier et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ des nombres respectivement plus petits que les nombres $a_1, a_2, a_3, \dots$, et cela d'une seule façon.

CHAPITRE VIII

CALCULS APPROCHÉS

§ 1. — Valeurs approchées. — Définitions diverses.

257. Nous avons vu comment les calculs faits avec des nombres décimaux ont la plus parfaite ressemblance avec les calculs faits avec des nombres entiers. Au lieu de calculer avec des fractions, il semble préférable de calculer avec des nombres décimaux, de manière que toutes les additions, soustractions, multiplications et divisions portent sur des nombres décimaux; toutefois si l'on veut procéder ainsi, on est obligé de remplacer, le plus souvent, les fractions et les quotients exacts par des valeurs approchées; les calculs ainsi faits ne peuvent conduire qu'à des résultats approximatifs. D'un autre côté, les nombres décimaux que l'on emploie peuvent avoir un grand nombre de chiffres décimaux; ce nombre s'augmente considérablement, dans les calculs, si l'on a, par exemple, à effectuer des multiplications; alors les derniers chiffres décimaux peuvent représenter des unités tellement petites qu'elles n'offrent aucun intérêt dans la pratique; ces dernières décimales peuvent n'inspirer aucune confiance, si les calculs proviennent de données qui ne sont elles-mêmes qu'approchées, et l'on peut penser avec raison qu'en les déterminant, on a fait des calculs inutiles. On voit se poser divers ordres de questions : quand on fait des calculs exacts sur des nombres qui ne sont qu'approchés, quel degré de confiance est-ce que méritent les résultats? Si l'on veut avoir des résultats suffisamment approchés, quel degré d'approximation faut-il avoir dans les données, et, en particulier, avec combien de décimales doit-on connaître ces données? Combien de décimales convient-il de conserver aux résultats du calcul? Comment doit-on s'y prendre pour éviter autant que possible des calculs laborieux et inutiles? Ces questions se posent d'une façon plus pressante, s'il se peut, pour les problèmes d'ordre pratique. Là les données ne sont jamais exactes; on sait seulement, pour chacune d'elles, qu'elle est comprise entre certaines limites, fournies par les instruments de mesure [1]. C'est aux questions de ce genre que l'on va essayer de répondre. Le lecteur reconnaîtra d'ailleurs que les principes qui vont être développés trouvent leur application, lors même que l'on ne s'astreint pas à calculer avec des nombres décimaux.

258. Lorsqu'on substitue à un nombre a regardé comme exact, un autre nombre approché a', l'*erreur* commise est la différence entre a et a' ; elle est $a - a'$, ou $a' - a$ suivant que a est plus grand ou plus petit que a' ; dans le premier cas, elle est *en moins* ; dans le second, *en plus*. D'ordinaire, l'erreur n'est pas connue, non plus que le nombre exact ; on connaît seulement un nombre auquel l'erreur doit rester inférieure, ou comme l'on dit, une limite supérieure de l'erreur : je dirai souvent « une limite », en sous-entendant l'épithète « supérieure ».

Si, par exemple, on mesure une longueur rectiligne avec une bonne règle divisée en centimètres, on conçoit que l'extrémité de la longueur à mesurer tombera, d'ordinaire, entre deux divisions, et qu'on pourra avoir le nombre qui la mesure avec une erreur moindre que 1 si on prend le centimètre pour unité, avec une erreur moindre que 0,01 si l'on prend le mètre pour unité.

Dans beaucoup de cas, on sait en outre le *sens* de l'erreur, c'est-à-dire si elle est en plus ou en moins.

Ainsi, si l'on connaît une valeur approchée a' d'un nombre a et si l'on sait que le nombre ε est une limite supérieure de l'erreur commise, on peut affirmer, dans tous les cas, que le nombre a est compris entre $a' + \varepsilon$ et $a' - \varepsilon$; si l'on sait que l'erreur est en moins, on pourra affirmer que a est compris entre a' et $a' + \varepsilon$; si l'on sait que l'erreur est en plus, on pourra affirmer que a est compris entre a' et $a' - \varepsilon$.

Dans ces conditions, nous dirons que a' est une valeur approchée de a, *avec une erreur moindre* que ε, par défaut ou par excès, suivant que l'erreur est en moins ou en plus : on dit souvent dans le même sens, une valeur approchée à moins de ε, ou même, plus brièvement, à ε près. J'éviterai cette dernière façon de parler ; on a donné, en effet, un sens précis à cette expression : valeur approchée à ε près (par défaut ou par excès) ; ce que l'on a nommé ainsi est bien une valeur approchée avec une erreur moindre que ε, mais l'inverse n'est pas vrai : ainsi 3,14 et 3,15 sont les valeurs approchées de

1. Il est à peine utile de prévenir que le mot *limite* est pris ici dans un sens tout différent de celui qui lui a été donné au n° 238 ; dire qu'un nombre est compris entre les limites a, b c'est dire simplement qu'il est compris entre les deux nombres a, b ; le plus petit de ces nombres est une *limite inférieure ;* le plus grand, une limite *supérieure*.

$\frac{355}{113}$ à 0,01 près par défaut et par excès ; $\frac{22}{7}$ et 3,139 sont, ainsi qu'il est aisé de le vérifier, des valeurs approchées de $\frac{355}{113}$, avec une erreur moindre que 0,01, l'une par excès, l'autre par défaut.

259. Quand on connaît la valeur approchée d'un nombre a à $\frac{1}{10^n}$ près, par défaut, on dit aussi qu'on connaît sa valeur avec n décimales exactes ; en général, les chiffres d'une valeur approchée a' d'un nombre a, valeur écrite dans le système décimal, sont dits *exacts* tant qu'ils coïncident respectivement avec les chiffres de la valeur approchée de a, par défaut, à une unité près d'un ordre égal ou supérieur à l'ordre du dernier chiffre de a'. Ainsi, si l'on suppose $a = \frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots$ et $a' = 3{,}1427$, les trois premiers chiffres de a', seront *exacts*, les deux premières décimales seront exactes [1].

Lorsque l'on connaît la valeur approchée d'un nombre a à $\frac{1}{10^n}$ près, par défaut, si cette valeur approchée comporte p chiffres, en ne comptant pas, s'il y en a, les zéros qui se trouvent à gauche, on dit que le nombre a est connu avec p chiffres.

On emploie la même expression si l'on connaît la valeur approchée de a à une unité près par défaut et que cette valeur approchée comporte p, chiffres ou encore si l'on connaît la valeur approchée de a à 10^n près, par défaut, et que cette valeur, abstraction faite des n zéros qui la terminent, comporte p chiffres.

260. Lorsqu'un nombre est donné sous forme de fraction $\frac{a}{b}$, et qu'on veut le remplacer par une valeur approchée, avec n décimales, on a à choisir entre la valeur approchée à $\frac{1}{10^n}$ près par défaut et la valeur approchée à $\frac{1}{10^n}$ près, par excès. Désignons ces valeurs approchées par A et $A + \frac{1}{10^n}$; supposons qu'on ait calculé

1. La définition qui précède est *précise;* dans la pratique, on considère souvent comme *exact* le dernier chiffre à droite pourvu qu'il coïncide avec le chiffre de la valeur approchée par défaut ou par excès à une unité près de l'ordre de ce dernier chiffre. Il n'y a pas de raison, en général, pour préférer la valeur approchée en moins à la valeur approchée en plus ; toutefois dans ce qui suit, c'est à la définition précise qu'il convient de se reporter. — Observons, en passant, que l'égalité $\frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots$ est incorrecte ; il faut entendre que, si l'on réduit la fraction qui figure au premier membre en fraction décimale, les premiers chiffres sont 3,1415929...

la valeur approchée de $\frac{a}{b}$ à $\frac{1}{10^{n+1}}$ près, par défaut, et désignons par α le dernier chiffre de cette valeur, on aura

$$A + \frac{\alpha}{10^{n+1}} \gtreqless \frac{a}{b} < A + \frac{\alpha+1}{10^{n+1}};$$

par conséquent l'erreur commise en prenant A pour valeur approchée est supérieure ou égale à $\frac{\alpha}{10^{n+1}}$; l'égalité ne pouvant avoir lieu que si la fraction $\frac{a}{b}$ est exactement égale à un nombre décimal de $n+1$ chiffres décimaux, ou, comme l'on dit, si en poussant la réduction plus loin, tous les chiffres après le $(n+1)^{\text{ième}}$ sont des zéros; c'est ce que j'appellerai le cas exceptionnel.

Supposons maintenant qu'on prenne $A + \frac{1}{10^n} = A + \frac{10}{10^{n+1}}$ pour valeur approchée de $\frac{a}{b}$; comme on a

$$A + \frac{\alpha}{10^{n+1}} \leqq \frac{a}{b} < A + \frac{\alpha+1}{10^{n+1}} \leqq A + \frac{10}{10^{n+1}},$$

on voit que l'erreur est plus grande que la différence entre les deux derniers nombres qui figurent dans ces inégalités, et au plus égale à la différence entre le dernier et le premier; l'erreur est donc supérieure à $\frac{10-\alpha-1}{10^{n+1}}$; elle est au plus égale à $\frac{10-\alpha}{10^{n+1}}$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que dans le cas exceptionnel signalé plus haut.

Si α est un chiffre inférieur à 5, en prenant la valeur approchée par défaut, on commet une erreur inférieure à $\frac{5}{10^{n+1}} = \frac{1}{2\times 10^n}$, en prenant au contraire la valeur approchée par excès, on commettrait une erreur supérieure à $\frac{10-5}{10^{n+1}} = \frac{1}{2\times 10^n}$, c'est la valeur approchée par défaut qui est la plus avantageuse : si α est 5 ou un chiffre plus fort, en prenant la valeur approchée par défaut, on commettrait une erreur au moins égale à $\frac{5}{10^{n+1}} = \frac{1}{2\times 10^n}$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que si l'on a $\alpha = 5$ et si l'on est dans le cas d'exception ; en prenant la valeur approchée par excès, on commet une erreur au plus égale à $\frac{10-5}{10^{n+1}} = \frac{1}{2\times 10^n}$, l'égalité ne pourrait avoir lieu que dans les mêmes conditions doublement exceptionnelles : ce sera donc la valeur approchée par excès qui sera la plus approchée.

En résumé, on peut toujours remplacer une fraction $\frac{a}{b}$ par une fraction décimale, ayant n chiffres décimaux, avec une erreur (en moins ou en plus) inférieure ou égale à $\frac{1}{2\times 10^n}$; pour cela on réduit $\frac{a}{b}$ en fraction décimale avec $n+1$ chiffres décimaux au moins ; si le $(n+1)^{\text{ième}}$ chiffre est inférieur à 5, on ne garde que les n premiers ; si le $(n+1)^{\text{ième}}$ chiffre est 5 ou un chiffre plus fort, on augmente d'une unité le $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal, ou, comme l'on dit, on *force* le $n^{\text{ième}}$ chiffre. Cette modification ne porte en général que sur le $n^{\text{ième}}$ chiffre ; si, toutefois, il était un 9, elle se répercuterait sur le chiffre précédent, etc. L'erreur, en opérant ainsi, ne peut atteindre la limite $\frac{1}{2\times 10^n}$ que dans le cas où le $(n+1)^{\text{ième}}$ chiffre est un 5 et tous les chiffres suivants des zéros.

En outre, les raisonnements précédents fournissent des limites inférieure et supérieure de l'erreur commise ainsi ; expressions qui dépendent du $(n+1)^{\text{ième}}$ chiffre.

Il est à peine utile de dire que les résultats qui précèdent subsistent quand la fraction $\frac{a}{b}$ est elle-même un nombre décimal, avec plus de n décimales ; ils sont, dans ce cas, presque intuitifs et cela permet de les retenir aisément dans le cas général, en substituant par la pensée à la fraction $\frac{a}{b}$ une fraction décimale avec un nombre indéfini de chiffres.

Exemple : Soit

$$\frac{a}{b} = \frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots ;$$

si l'on prend comme valeur approchée 3,14 l'erreur sera moindre que $\frac{2}{1000}$ et, *a fortiori*, que $\frac{5}{1000}$ ou $\frac{1}{200}$; si l'on prend comme valeur approchée 3,141 l'erreur sera supérieure à $\frac{5}{10000}$ et moindre que $\frac{6}{10000}$; si l'on prend comme valeur approchée 3,142 l'erreur sera moindre que $\frac{10-5}{10000}=\frac{1}{2000}$ et plus grande que $\frac{10-6}{10000}=\frac{4}{10000}$; si l'on prend 3,1416 pour valeur approchée, l'erreur sera moindre que $\frac{10-9}{100000}=\frac{1}{100000}$, etc... [1].

261. Le nombre dont on part, pour lui substituer ainsi une valeur approchée, peut lui-même être entaché d'une erreur; dans l'évaluation de l'erreur finale, il faut naturellement tenir compte des *deux* erreurs commises. Dans tous les cas, on aura une limite supérieure de cette erreur finale en ajoutant les limites des deux erreurs. Si l'on sait que l'une des erreurs est en plus, et que l'autre est en moins, il est clair que l'on pourra prendre pour limite supérieure de l'erreur finale la plus grande des deux limites.

Si, par exemple on sait que $\frac{355}{113}$ est une valeur approchée d'un nombre avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^6}$, on peut être assuré que 3,14159 est une valeur approchée de ce nombre avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^6}+\frac{3}{10^6}$ ou $\frac{4}{10^6}$, moindre *a fortiori* que $\frac{1}{2\times 10^5}$; si l'on savait que $\frac{355}{113}$ est une valeur approchée, par excès, d'un nombre, avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^6}$, l'erreur commise en remplaçant $\frac{355}{113}$ par 3,141592 étant une erreur en moins, inférieure aussi à $\frac{1}{10^6}$, on pourrait affirmer que 3,141592 est une valeur approchée du nombre considéré, avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^6}$.

262. Étant donné un nombre décimal a qui est une valeur approchée d'un nombre inconnu A, et connaissant une limite supérieure ε de l'erreur dont est entaché a, on peut se demander combien il y a dans a de chiffres dont on puisse garantir l'exactitude (nº 259).

Le nombre A est compris entre $a-\varepsilon$ et $a+\varepsilon$; si l'on réduit ces deux nombres en fractions décimales, les chiffres communs aux deux

1. Observons que la même règle s'applique à la détermination du nombre entier qui approche d'un nombre décimal donné à moins de $\frac{1}{2}$ près (nº 251).

résultats, à gauche, sont évidemment exacts. Le calcul des quantités $a - \varepsilon$, $a + \varepsilon$ se fait de tête, quand ε est, comme d'habitude, une fraction décimale simple, par exemple une expression de la forme $\frac{\alpha}{10^n}$, α étant un nombre entier d'un seul chiffre. — Si l'on sait dans quel sens a est approché, il sera évidemment avantageux d'employer les limites a et $a + \varepsilon$, ou $a - \varepsilon$ et a.

Supposons, par exemple, que l'erreur soit inférieure à $\frac{1}{10^n}$; si la $n^{\text{ième}}$ décimale de a n'est ni un 0, ni un 9, les nombres $a - \varepsilon$ et $a + \varepsilon$ auront en commun $n - 1$ décimales, qui seront sûrement exactes; quant à la $n^{\text{ième}}$ décimale du nombre A (réduit en fraction décimale), on a le choix entre trois valeurs, le dernier chiffre décimal de a, ou bien ce dernier chiffre augmenté ou diminué de un.

L'erreur étant toujours supposée moindre que $\frac{1}{10^n}$, on est assuré de l'exactitude des $n - 1$ premiers chiffres pourvu que le $n^{\text{ième}}$ chiffre ne soit pas un 9, si l'on sait que l'erreur est en moins; pourvu que le $n^{\text{ième}}$ chiffre ne soit pas un 0, si l'on sait que l'erreur est en plus.

Enfin, rappelons que si le nombre décimal a comporte seulement n décimales, et si l'erreur est moindre que $\frac{1}{10^n}$, le nombre a sera sûrement l'une des valeurs approchées de A, à $\frac{1}{10^n}$ près, par excès, ou par défaut. Si l'on connaît le sens de l'erreur, on sera donc fixé sur les n premiers chiffres décimaux de A.

263. Lorsque l'on sait seulement d'un nombre qu'il est approché avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^n}$, il est clair qu'il n'y a pas d'intérêt à conserver beaucoup de décimales après la $n^{\text{ième}}$, la suppression de ces décimales ne modifiant pas notablement la limite de l'erreur commise; il peut y avoir intérêt à en conserver une ou deux.

264. L'erreur, telle qu'elle a été définie est l'erreur *absolue*. L'erreur *relative* est le rapport de l'erreur absolue au nombre vrai. Ainsi, si a' est une valeur approchée du nombre a, l'erreur absolue sera $a - a'$, ou $a' - a$, l'erreur relative sera $\frac{a - a'}{a}$, ou $\frac{a' - a}{a}$; l'épithète « absolue » se sous-entend souvent; l'épithète « relative » ne se sous-entend jamais.

Il est clair que, dans une mesure, c'est la petitesse de l'erreur relative qui importe. Si l'erreur relative est petite, la mesure est bonne. Dans des mesures kilométriques, une erreur de quelques décimètres est insignifiante ; dans l'évaluation d'une hauteur barométrique, une erreur d'un millimètre serait considérable.

Quand on a une limite supérieure de l'erreur absolue, on obtient une limite supérieure de l'erreur relative en la divisant par un nombre qui soit certainement inférieur ou égal au nombre véritable. Par exemple, si a' est une valeur approchée de a, avec une erreur moindre que ε, on pourra prendre pour limite supérieure de l'erreur relative $\frac{\varepsilon}{a'-\varepsilon}$; d'ordinaire, on remplace $a'-\varepsilon$ par le nombre que l'on déduit de a' en remplaçant tous les chiffres autres que le premier par des zéros ; souvent même on remplace le premier chiffre par l'unité [1]. Ainsi en supposant $a'=72{,}543$ et l'erreur absolue moindre que $\frac{1}{1000}$ on pourra prendre pour limites de l'erreur relative les nombres $\frac{1}{70\times 1000}$, $\frac{1}{20000}$, $\frac{1}{10000}$. En supposant $a'=0{,}003541$ et l'erreur absolue moindre que $\frac{1}{2\times 10^6}$, on pourra prendre pour limite de l'erreur relative le nombre $\frac{1}{2\times 10^6\times 0{,}003}=\frac{1}{6\times 10^3}$.

Quand on se donne une valeur approchée a' d'un nombre a et une limite supérieure α de l'erreur relative, on peut obtenir une limite supérieure de l'erreur absolue en multipliant α par un nombre au moins égal à a.

Dans la pratique, lorsque a' est un nombre écrit dans le système décimal, on obtiendra facilement une telle limite en multipliant la limite α de l'erreur relative par le nombre qui se déduit de a' en augmentant le premier chiffre de a' d'une unité et remplaçant les autres chiffres par des zéros ; on peut même, si l'on veut, remplacer le premier chiffre par 10.

Supposons par exemple $a'=72{,}645$ et l'erreur relative inférieure à $\frac{1}{10^5}$, l'erreur absolue sera plus petite que $\frac{80}{10^5}$ et *a fortiori* que $\frac{100}{10^5}$ ou $\frac{1}{10^3}$ et l'on voit, puisque l'erreur absolue est moindre que $\frac{1}{10^3}$ et

1. Au cas où a' serait précisément égal à une unité d'un certain ordre, par exemple à 1000 ou à 0,1, on pourrait remplacer $a'-\varepsilon$ par 900, ou par 0,09 ; une observation analogue trouverait plusieurs fois sa place dans la suite ; je ne m'y arrêterai pas.

que le troisième chiffre décimal 5 de a' n'est ni un 0 ni un 9, que les deux premiers chiffres décimaux sont certainement exacts.

Soit de même $a' = 0{,}0018937$; supposons l'erreur relative inférieure à $\frac{1}{2 \times 10^4}$ et le nombre a' approché par défaut; l'erreur absolue sera plus petite que $\frac{0{,}002}{2 \times 10^4} < \frac{1}{10^7}$; a' étant approché par défaut et l'erreur relative étant moindre que $\frac{1}{10^7}$, les sept décimales de a' sont sûrement exactes.

§ 2. — Opérations. — Calculs approchés.

265. Après ces définitions et explications préliminaires, je vais passer en revue les diverses opérations et traiter des problèmes qui se posent quand on fait les calculs avec des valeurs approchées.

Addition. — Soient A, B, C, D des nombres (inconnus) dont on connaît des valeurs approchées a, b, c, d et désignons par α, β, γ, δ les limites supérieures des erreurs que comportent respectivement ces valeurs approchées. Les nombres A, B, C, D étant respectivement plus grands que les nombres $a - \alpha$, $b - \beta$, $c - \gamma$, $d - \delta$ et plus petits que les nombres $a + \alpha$, $b + \beta$, $c + \gamma$, $d + \delta$, leur somme $A + B + C + D$ sera comprise entre les nombres

$$(a - \alpha) + (b - \beta) + (c - \gamma) + (d - \delta)$$
$$= a + b + c + d - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

et

$$(a + \alpha) + (b + \beta) + (c + \gamma) + (d + \delta)$$
$$= a + b + c + d + (\alpha + \beta + \gamma + \delta),$$

qui diffèrent tous les deux de $a + b + c + d$ d'une quantité égale à $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

Ainsi, en prenant pour valeur approchée de la somme des nombres A, B, C, D la somme de leurs valeurs approchées a, b, c, d, on commettra une erreur moindre que la somme des limites des erreurs.

Supposons qu'on sache le sens des erreurs dont sont entachés les nombres a, b, c, d : on sait, par exemple, que les deux premiers sont approchés par défaut, les deux seconds par excès.

On peut dire alors que A, B, C, D sont inférieurs respectivement à $a + \alpha$, $b + \beta$, c, d et supérieurs respectivement à $a, b, c - \gamma, d - \delta$, leur somme sera donc comprise entre $a+b+c+d-(\gamma+\delta)$ et $a+b+c+d+(\alpha+\beta)$; par suite $a+b+c+d$ sera une valeur approchée de cette somme, avec une erreur moindre que la plus grande des deux sommes obtenues en faisant d'une part la somme des erreurs en moins, d'autre part la somme des erreurs en plus.

266. *Soustraction.*— Si a, b sont des valeurs approchées des nombres A, B avec des erreurs moindres que α, β, le nombre $a-b$ sera une valeur approchée de $A-B$ avec une erreur moindre que $\alpha+\beta$. Si a et b sont approchés dans le même sens, tous deux par défaut, ou tous deux par excès, l'erreur commise en prenant $a-b$ pour valeur approchée de $A-B$ est moindre que la plus grande des quantités α, β.

Je laisse au lecteur le soin de faire la démonstration.

267. *Multiplication.* — Soient a, b des valeurs approchées des nombres A, B avec des erreurs moindres que α, β : le produit AB sera compris entre les nombres

$$(a-\alpha)(b-\beta) = ab - a\beta - b\alpha + \alpha\beta$$

et

$$(a+\alpha)(b+\beta) = ab + a\beta + b\alpha + \alpha\beta,$$

qui diffèrent de ab d'une quantité égale ou inférieure au nombre

$$a\beta + b\alpha + \alpha\beta = a\beta + (b+\beta)\alpha = b\alpha + (a+\alpha)\beta,$$

qui peut donc être regardé comme une limite supérieure de l'erreur que l'on commet en prenant ab pour valeur approchée de AB.

On calculera grossièrement cette limite en remplaçant respectivement a et $b+\beta$ par des nombres plus grands qui permettent des calculs rapides, par exemple, par les nombres qui se déduisent de a et b en forçant le premier chiffre de gauche et remplaçant tous les autres par des zéros. — On n'oubliera pas que chaque facteur multiplie la limite de l'erreur que comporte l'autre.

Il n'y a rien à changer à cette règle lorsqu'on sait le sens des erreurs que comportent a et b si ces deux nombres sont approchés dans le même sens; mais on peut l'améliorer si l'on sait que a et b sont approchés dans des sens contraires.

Supposons, par exemple, a approché par défaut, b par excès; A et B sont respectivement supérieurs à $a, b-\beta$ et inférieurs à $a+\alpha, b$: leur produit est donc compris entre $ab-a\beta$, $ab+b\alpha$; dans ce cas on pourra donc prendre pour limite de l'erreur commise en substituant ab à AB le plus grand des nombres $a\beta$, $b\alpha$.

268. Quand on fait le calcul avec des nombres décimaux, comme la multiplication revient toujours, au fond, à une multiplication de nombres entiers, il est commode de profiter des remarques qui ont été faites au n° 98 et d'où résulte immédiatement la proposition suivante.

Si les nombres A, B sont connus l'un et l'autre avec un certain nombre de chiffres (n° 259) au moins égal à p, si les nombres décimaux a, b sont les valeurs approchées de A, B formées avec ces chiffres, si l'on effectue le produit ab et que, tout en laissant la virgule à sa place, on remplace les p derniers chiffres du produit par des zéros, les chiffres restants seront exacts, sauf peut-être le dernier et la répercussion possible sur les chiffres précédents : quant à ce dernier chiffre il peut se faire qu'il doive être augmenté de une ou deux unités.

Cette remarque même montre que, en appliquant le procédé ordinaire de multiplication, on calcule beaucoup de chiffres inutiles : on évitera cet inconvénient en employant la multiplication dite abrégée.

269. *Division.* — Soient a, b des valeurs approchées de A, B avec des erreurs moindres que α, β; la fraction $\frac{A}{B}$ sera comprise, comme $\frac{a}{b}$, entre les fractions $\frac{a-\alpha}{b+\beta}$ et $\frac{a+\alpha}{b-\beta}$: la différence entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{A}{B}$ sera donc inférieure (n° 67) à la plus grande des différences

$$\frac{a}{b}-\frac{a-\alpha}{b+\beta}, \qquad \frac{a+\alpha}{b-\beta}-\frac{a}{b};$$

on a d'ailleurs

$$\frac{a}{b}-\frac{a-\alpha}{b+\beta}=\frac{a(b+\beta)-b(a-\alpha)}{b(b+\beta)}=\frac{a\beta+b\alpha}{b(b+\beta)},$$

$$\frac{a+\alpha}{b-\beta}-\frac{a}{b}=\frac{(a+\alpha)b-a(b-\beta)}{b(b-\beta)}=\frac{a\beta+b\alpha}{b(b-\beta)};$$

ces deux différences sont inférieures à

$$\frac{a\beta+b\alpha}{(b-\beta)^2}.$$

On pourra donc prendre cette expression pour limite supérieure de l'erreur commise quand on substitue la fraction $\frac{a}{b}$ à la fraction $\frac{A}{B}$;

pour la calculer on remplacera a, b au numérateur par des nombres plus grands, par exemple par ceux qu'on en déduit en forçant le premier chiffre de gauche, et en remplaçant les autres chiffres par des zéros; au contraire, on remplacera au dénominateur $b-\beta$ par un nombre plus petit, par exemple, par le nombre qu'on déduit de b en remplaçant par des zéros tous les chiffres autres que le premier de gauche.

Il n'y a rien à changer à cette règle quand on connaît le sens des erreurs que comportent a, b si ces erreurs sont de sens contraire; mais on peut l'améliorer si les erreurs sont de même sens.

Supposons, par exemple que a et b soient approchés par excès; le rapport $\frac{A}{B}$ est compris entre $\frac{a-\alpha}{b}$ et $\frac{a}{b-\beta}$; on a d'ailleurs

$$\frac{a}{b}-\frac{a-\alpha}{b}=\frac{\alpha}{b},$$

$$\frac{a}{b-\beta}-\frac{a}{b}=\frac{a\beta}{b(b-\beta)}<\frac{a\beta}{(b-\beta)^2};$$

on pourra prendre comme limite de l'erreur commise en remplaçant $\frac{A}{B}$ par $\frac{a}{b}$ la plus grande des fractions

$$\frac{\alpha}{b}, \quad \frac{a\beta}{(b-\beta)^2}.$$

Le lecteur ne manquera pas d'observer que le cas où le diviseur b est très petit constitue une circonstance très défavorable, la limite de l'erreur pouvant alors devenir très grande.

270. Ici encore, il sera souvent commode, lorsqu'on fait les calculs avec des nombres décimaux, de se reporter aux remarques des nos 112, 113, 114. Comme la division des nombres décimaux se ramène à celle des nombres entiers, il nous suffira d'examiner le cas où les valeurs approchées que l'on considère sont entières. Supposons donc que les parties entières des nombres A, B soient a, b, et que la seconde comporte p chiffres.

Le rapport $\frac{A}{B}$ est compris entre les deux fractions $\frac{a+1}{b}$ et $\frac{a}{b+1}$; si l'on réduit ces fractions en fractions décimales, on obtiendra des valeurs approchées de $\frac{A}{B}$, et ce rapport sera certainement connu avec autant de chiffres exacts que l'on trouvera de chiffres communs en *poussant* la division de $a+1$ par b, ou de a par $b+1$ aussi loin qu'on voudra. Ces divisions, si on doit les pousser jusqu'à ce qu'on obtienne un quotient de n

chiffres décimaux, reviennent aux divisions de $(a+1) \times 10^n$ par b ou de $a \times 10^n$ par $b+1$, entendues au sens de la théorie des nombres entiers. La remarque finale du n° 114 trouve donc ici son application, et l'on en conclut que si l'on effectue la division de a par $b+1$, en poussant cette opération jusqu'à ce qu'on ait obtenu $p-1$ chiffres au quotient [1], pourvu toutefois que le nombre de chiffres décimaux que l'on est amené à écrire au quotient ne dépasse pas non plus $p-1$, les chiffres ainsi obtenus seront exacts, sauf peut-être le dernier et la répercussion possible sur les précédents : quant au dernier chiffre, s'il n'est pas exact, il devra être augmenté de une ou deux unités.

§ 3. — Applications.

271. Venons maintenant à l'application de ces règles. Les calculs à faire se composant d'additions, de soustractions, de multiplications et divisions successives, on n'aura aucune peine à calculer une limite supérieure des erreurs commises sur chaque opération, et par conséquent de l'erreur finale. Si l'on fait les calculs en nombres décimaux, il ne faudra pas négliger les erreurs qui peuvent résulter de la suppression des dernières décimales, après chaque opération partielle ; il sera nécessaire de faire entrer en ligne de compte ces erreurs.

Les problèmes qui présentent le plus de difficulté sont ceux où, voulant arriver au résultat avec une erreur moindre qu'une limite donnée à l'avance (limite qui doit être évidemment supérieure à celle qui résulterait nécessairement des erreurs que comportent les données, avec quelque précision qu'on fît les calculs), on veut faire les calculs avec le moins d'effort possible, c'est-à-dire en opérant sur des nombres décimaux qui ont le moins de chiffres possible. La détermination de ce nombre de chiffres exige quelque soin. Les exemples qui suivent feront connaître suffisamment et la nature des problèmes qui se posent et la façon d'opérer.

272. Trouver une valeur approchée de la somme des trois nombres 31,428 ; 7,825; 14,642, les erreurs étant toutes moindres que 0,001. On fera l'addition indiquée ci-dessous :

$$\begin{array}{r} 31,428 \\ 7,825 \\ 14,642 \\ \hline 53,895 \end{array}$$

1. On compte ces chiffres, comme on l'a expliqué à la fin du n° 259, à partir du premier chiffre de gauche qui n'est pas un zéro.

l'erreur dont peut être entachée la somme 53,895 est moindre que 0,003; la somme cherchée est comprise entre 53,898 et 53,892 ; 53,89 est une valeur approchée dont les chiffres sont exacts.

2° Calculer avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^4}$ la somme des fractions

$$\frac{18257}{32549},\quad \frac{423678}{59474},\quad \frac{27}{9953}.$$

On pourrait sans doute réduire ces fractions au même dénominateur, les ajouter, puis réduire le résultat en fraction décimale, en poussant les calculs jusqu'à la 4e décimale. Ces calculs seraient assez pénibles.

En calculant chacune des fractions avec 5 décimales, et faisant la somme des valeurs approchées, l'erreur qui concerne cette somme sera moindre que $\frac{3}{10^5}$ et *a fortiori* que $\frac{1}{10^4}$; ces valeurs approchées ont été écrites ci-dessous, ainsi que leur somme,

$$\begin{array}{r} 0,56090 \\ 7,12375 \\ 0,00271 \\ \hline 7,68736 \end{array}$$

La valeur 7,6873 est approchée par défaut, avec une erreur moindre que $\frac{3}{10^5} + \frac{7}{10^6} < \frac{1}{10^4}$, c'est donc la valeur approchée de la somme des trois fractions à $\frac{1}{10^4}$ près.

Pour calculer, en général, la somme de plusieurs nombres, avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^n}$, il suffit, s'il y en a moins de 10, d'avoir des valeurs approchées de ces nombres avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^{n+1}}$.

3° Un nombre inconnu est représenté, avec une erreur moindre que $\frac{1}{3\times 10^7}$, par la somme des fractions

$$\frac{5}{2},\quad \frac{1}{6},\quad \frac{1}{24},\quad \frac{1}{120},\quad \frac{1}{720},\quad \frac{1}{5040},\quad \frac{1}{40320},\quad \frac{1}{362880},\quad \frac{1}{3628800};$$

on demande une valeur approchée avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^6}$.

La première fraction peut être évaluée exactement en fraction décimale ; les huit autres peuvent être calculées avec n décimales de façon que l'erreur pour chacune soit moindre que $\frac{1}{2\times 10^n}$; il suffira de prendre n assez grand pour avoir

$$\frac{8}{2\times 10^n} + \frac{1}{3\times 10^7} < \frac{1}{10^6},$$

ou encore

$$\frac{4}{10^n} < \frac{1}{10^6} - \frac{1}{3\times 10^7} \text{ ou } \frac{29}{3\times 10^7},$$

on satisfera à cette inégalité en prenant $n = 7$.

Nous calculerons donc les huit dernières fractions avec 7 décimales, en forçant, s'il y a lieu, le dernier chiffre ; les valeurs approchées des neuf fractions sont écrites ci-dessous, on a marqué d'un astérisque celles dont le dernier chiffre a été forcé, on en a fait la somme :

$$\begin{array}{l}
2,5000000 \\
0,1666667^* \\
0,0416667^* \\
0,0083333 \\
0,0013889^* \\
0,0001984 \\
0,0000248 \\
0,0000028^* \\
0,0000003^* \\
\hline
2,7182819
\end{array}$$

On observera que, pour trois des valeurs approchées, l'erreur est en moins, elle est en plus pour cinq. L'erreur provenant de la substitution dans la somme des nombres décimaux aux fractions est donc moindre que $\frac{5}{2\times 10^7}$: l'erreur totale est moindre que

$$\frac{5}{2\times 10^7} + \frac{1}{3\times 10^7} < \frac{3}{10^7}.$$

Ainsi la valeur approchée 2,7182819 du nombre cherché comporte une erreur moindre que $\frac{3}{10^7} < \frac{1}{10^6}$; le raisonnement précédent ne permet pas de décider si l'erreur est en plus ou en moins. Il permet toutefois d'avoir une valeur approchée du nombre cherché avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^6}$, et ne comportant que six décimales : ce nombre cherché est, en effet, compris entre les nombres 2,7182822 et 2,7182816 que l'on obtient en ajoutant et en retranchant $\frac{3}{10^7}$ au nombre 2,7182819 ; il en résulte que 2,718282 est une valeur approchée avec une erreur, en plus ou en moins, inférieure à $\frac{1}{10^6}$. Les cinq premières décimales sont exactes.

4° Les valeurs approchées de deux nombres sont 18,751 et 0,0934; les erreurs correspondantes sont moindres que $\frac{1}{2\times 10^3}$ et $\frac{1}{10^4}$; trouver une valeur approchée du produit.

En prenant $18,751 \times 0,0934$ pour valeur approchée de ce produit, on commet une erreur moindre que

$$\frac{1}{2\times 10^3}\times 0,1+\frac{1}{10^4}\times 20=\frac{1}{2\times 10^4}+\frac{2}{10^3}<\frac{3}{10^3};$$

on a d'ailleurs

$$18,751\times 0,0934=1,7513434;$$

en prenant pour valeur approchée 1,75, on commettra, du fait de la suppression des chiffres décimaux qui suivent, une erreur moindre que $\frac{2}{10^3}$; l'erreur totale sera donc moindre que $\frac{3}{10^3}+\frac{2}{10^3}$ ou $\frac{1}{200}$; le nombre 1,75 est donc approché à une demi-unité près de l'ordre du dernier chiffre décimal.

5° Deux nombres sont donnés par les valeurs approchées 3,14159265 et 2,71828182 qui comportent des erreurs en moins, inférieures l'une et l'autre à $\frac{1}{10^8}$; on demande une valeur approchée de leur produit avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^3}$.

En faisant le produit des deux nombres tels quels, on aurait, d'après les règles précédentes, une valeur approchée avec une erreur moindre que $\frac{4+3}{10^8}<\frac{1}{10^7}$; il serait aisé d'en déduire une valeur approchée avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^3}$; mais les calculs faits ainsi seraient pénibles et on peut procéder plus rapidement.

Désignons par a et b les valeurs approchées dont on se servira pour calculer les valeurs approchées du produit, et par α, β les limites des erreurs qu'elles comportent; on cherchera à satisfaire à l'inégalité

$$\beta a+\alpha(b+\beta)<\frac{1}{10^3}.$$

On y parviendra en satisfaisant aux inégalités

$$a\beta<\frac{1}{2\times 10^3},\ \alpha(b+\beta)<\frac{1}{2\times 10^3};$$

comme a et $b+\beta$ sont respectivement inférieurs à 4 et à 3, il suffira de supposer

$$4\beta<\frac{1}{2\times 10^3},\ 3\alpha<\frac{1}{2\times 10^3},$$

et par conséquent α et β inférieurs à $\frac{1}{10^4}$. En prenant pour a et b les valeurs 3,1416 et 2,7183, les erreurs seront inférieures à $\frac{1}{2\times 10^4}$; le produit est égal à 8,53981128 et l'erreur qu'il comporte est certainement inférieure à $\frac{1}{10^3}$, on voit même qu'elle est inférieure à $\frac{4+3}{2\times 10^4}=\frac{7}{2\times 10^4}$. En remplaçant 8,53981128 par 8,540 l'erreur qui résulte de ce fait est moindre que $\frac{2}{10^4}$; l'erreur totale sera donc moindre que $\frac{2}{10^4}+\frac{7}{2\times 10^4}<\frac{6}{10^4}<\frac{1}{10^3}$. Cette valeur sera donc approchée avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^3}$.

Nous avons profité ici des circonstances mêmes du calcul pour obtenir un résultat ne comportant que trois chiffres décimaux et affecté d'une erreur moindre que $\frac{1}{10^3}$. Des circonstances de cette nature peuvent ne pas se présenter; après avoir calculé un résultat dont on est assuré qu'il est approché avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^3}$ et qui comporte plus de trois chiffres décimaux, si l'on supprime purement et simplement les chiffres décimaux qui suivent le troisième, on peut simplement affirmer que le résultat est approché avec une erreur moindre que $\frac{2}{10^3}$. On pourrait demander de diriger les calculs de façon à obtenir avec sécurité un produit tel que, en y gardant trois chiffres décimaux, l'erreur fût moindre que $\frac{1}{10^3}$. On y parviendra en cherchant d'abord un produit approché pour lequel l'erreur soit moindre que $\frac{1}{2\times 10^3}$. En appliquant ensuite la règle du n° 260, c'est-à-dire en ne conservant que trois décimales au produit, sauf à forcer la dernière, s'il y a lieu, on en déduira une valeur approchée qui différera de la précédente d'une quantité moindre que $\frac{1}{2\times 10^3}$; en adoptant cette valeur, on obtiendra donc une valeur approchée avec une erreur finale moindre que $\frac{1}{10^3}$. L'observation d'ailleurs se généralise immédiatement. Il est à peine besoin de dire que l'on peut, dans les opérations de ce genre, utiliser le procédé abrégé pour la multiplication.

6° On a les valeurs approchées de trois nombres, savoir :

17,8730216; 0,0284513; 2,6035712;

on demande une valeur approchée du produit, avec deux décimales, comportant une erreur moindre que $\frac{1}{100}$. Il faut, d'après ce qu'on a dit, calculer d'abord une valeur approchée du produit avec une erreur moindre que $\frac{1}{2 \times 100}$.

On calculera une valeur approchée du produit des deux premiers facteurs, puis une valeur approchée du produit de cette valeur approchée par le troisième facteur :

Désignons par d la valeur approchée du produit des deux premiers facteurs dont on se servira, par δ la limite de l'erreur qu'elle comporte, par c la valeur approchée du 3ième facteur dont on se servira, par γ la limite de l'erreur qu'elle comporte ; on s'arrangera pour avoir

$$d\gamma + (c + \gamma)\delta < \frac{1}{2 \times 100}.$$

D'ailleurs le produit des deux premiers facteurs est évidemment inférieur à $20 \times 0{,}03 = 0{,}6$; on pourra supposer $d < 0{,}6$; $c + \gamma < 3$; il suffira de s'arranger pour que l'on ait

$$d\gamma < \frac{1}{400}, \quad (c + \gamma)\delta < \frac{1}{400},$$

et c'est ce qui aura lieu si l'on a

$$\gamma < \frac{1}{400 \times 0{,}6}, \qquad \delta < \frac{1}{400 \times 3};$$

on est disposé tout d'abord à prendre $c = 2{,}603$ ou $c = 2{,}604$ puisque l'erreur serait moindre que $\frac{1}{1000}$; il suffira ici de prendre $c = 2{,}60$ puisque l'erreur sera moindre que $\frac{4}{1000}$ ou $\frac{1}{250}$ et, par conséquent, moindre que $\frac{1}{400 \times 0{,}6}$ ou $\frac{1}{240}$. Il faut ensuite s'arranger pour que δ soit moindre que $\frac{1}{1200}$: désignons par a, b les valeurs approchées des deux premiers facteurs dont on se servira; par α, β les limites des erreurs correspondantes ; on s'arrangera pour avoir

$$\beta a + \alpha(b + \beta) < \frac{1}{1200};$$

mais il convient, en outre, de s'arranger pour que d n'ait pas trop de chiffres décimaux, afin d'éviter les longueurs inutiles dans le calcul du produit $d \times c$; cherchons donc une valeur approchée du produit des deux premiers facteurs, avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^4}$; en négligeant la quatrième décimale et les suivantes, on pourra, en forçant au besoin la troisième, s'arranger pour que l'erreur provenant de cette suppression soit moindre que $\frac{1}{2 \times 1000}$, en sorte que l'erreur totale sera moindre que

$$\frac{1}{2 \times 1000} + \frac{1}{10000} < \frac{1}{1200};$$

il suffira de prendre, puisque a et $b + \beta$ sont inférieurs à 20 et à 0,03,

$$\beta < \frac{1}{10^4 \times 20}, \qquad \alpha < \frac{1}{0{,}03 \times 10^4}$$

et, *a fortiori*,

$$\beta < \frac{1}{2 \times 10^5}, \qquad \alpha < \frac{1}{10^3};$$

on prendra donc $a = 17{,}873$; $b = 0{,}02845$, le produit est 0,50848685; en supprimant les décimales qui suivent la troisième, on n'a pas à forcer celle-ci; on prendra donc $d = 0{,}508$; il restera à faire le produit de 0,508 par 2,60 ce qui donnera 1,3208; la valeur approchée du produit sera donc 1,32 avec une erreur moindre que 0,01.

8° Les valeurs $a = 3{,}1415927$ et $b = 0{,}0178964$ sont approchées de deux nombres A, B, par excès, avec des erreurs moindres que $\frac{1}{2 \times 10^7}$; avec combien de décimales exactes peut-on avoir le quotient $\frac{A}{B}$?

L'erreur commise en prenant $\frac{a}{b}$ pour valeur approchée de $\frac{A}{B}$ est moindre que le plus grand des nombres

$$\frac{\left(\frac{1}{2 \times 10^7}\right)}{0{,}01} = \frac{1}{2 \times 10^5}, \qquad \frac{4 \times \frac{1}{2 \times 10^7}}{(0{,}01)^2} = \frac{2}{10^3},$$

c'est-à-dire moindre que 0,002 ; en s'arrêtant dans la réduction de $\frac{a}{b}$ à la troisième décimale, on commettra, de ce fait, une erreur moindre que 0,001 ; en adoptant la valeur ainsi obtenue pour le quotient, on commet une erreur moindre que $0{,}002 + 0{,}001 = 0{,}003$. On trouve d'ailleurs, en faisant la réduction, le nombre 175,543... ; $\frac{A}{B}$ est donc compris entre 175,546 et 175,540 ; sa valeur approchée à 0,01 près est 175,54.

Les données étant les mêmes que précédemment, on demande une valeur entière approchée de $\frac{A}{B}$, avec une erreur moindre que un.

Les calculs précédents répondent sans doute à la question ; mais on peut opérer plus rapidement, en remplaçant le dénominateur b par un nombre ayant moins de chiffres. Il n'y a pas lieu de modifier le numérateur, car le nombre de chiffres du dividende est sans importance pour la simplicité d'une division.

Soit b' une valeur approchée par excès de b, avec une erreur moindre que β ; en substituant $\frac{a}{b'}$ à $\frac{a}{b}$, on commet de ce fait (n° 269), une erreur moindre que $\frac{a\beta}{b^2}$ et par conséquent que

$$\frac{4\beta}{(0,01)^2} = 40000\beta\,;$$

prenons ici $b' = 0,0179$, on aura $\beta < \frac{1}{10^5}$, et l'erreur résultant de ce fait sera moindre que $0,4$; l'erreur résultant de la substitution de $\frac{a}{b'}$ à $\frac{A}{B}$ sera donc moindre que $0,4 + 0,002$, moindre par suite que $\frac{1}{2}$; si ensuite on prend pour $\frac{a}{b'}$ la valeur entière qui en diffère de moins de $\frac{1}{2}$, on aura une valeur entière dont la différence avec $\frac{A}{B}$ sera moindre que un. En effectuant d'ailleurs la division de 3,1415927 par 0,0179 on trouve 175,50... La règle précédente conduit à prendre le résultat 176 ; on observera d'ailleurs, en se reportant aux raisonnements précédents, que l'erreur qui consistait à prendre 175 pour valeur approchée serait moindre que $0,51 + 0,402$ et par suite, plus petite que un ; 175 et 176 étant des valeurs approchées de $\frac{A}{B}$ avec des erreurs moindres que un, la première est sûrement la partie entière de $\frac{A}{B}$.

On aurait pu, pour le même résultat, utiliser les remarques du n° 113.

273. Si l'on a une suite d'opérations à faire dans un certain ordre, si l'on veut arriver au résultat avec une erreur moindre qu'une limite donnée, en faisant les calculs au moyen de nombres décimaux, et en ne conservant que le nombre nécessaire de décimales, on opérera comme il suit.

Désignons pour un instant par $A_1, A_2, \ldots, A_p$ les nombres que fourniront les diverses opérations à effectuer, dans l'ordre où elles doivent être effectuées : A_p est le résultat final, le nombre pour lequel l'erreur doit être moindre qu'une limite fixée ε. L'opération dont A_p est le résultat immédiat porte sur certains nombres ; pour que l'on puisse avoir le résultat avec une erreur moindre que ε, il faut que les erreurs réparties sur les nombres qui fournissent A_p et qui appartiennent soit aux données, soit aux nombres précédemment calculés, soient moindres que certaines limites que les exemples précédents ont appris au lecteur à déterminer ; en d'autres termes, il faut que les nombres dont dépend A_p comportent un certain nombre de décimales que l'on aura à déterminer. Cela fixera les limites d'erreurs avec lesquelles devront être connus certains des résultats qui précèdent A_p; en remontant ainsi de proche en proche, on déterminera l'approximation que doivent avoir les premiers nombres sur lesquels on a à opérer, et le nombre de décimales qu'il convient de conserver à chaque opération.

On a donné dans le cas du produit de trois nombres un exemple de cette façon de faire.

Il faut reconnaître que ces recherches préliminaires, pour peu que les opérations à faire soient un peu nombreuses, peuvent devenir fastidieuses et même difficiles, d'autant qu'elles exigent souvent, comme on l'a vu dans l'exemple rappelé, une première connaissance approximative, grossière il est vrai, des résultats que l'on cherche. On ne procède pas toujours aussi régulièrement; on conserve trop de décimales, au risque d'allonger quelque peu les calculs. Quoi qu'il en soit, et même quand on procède un peu au hasard, et comme à vue de pays, il est toujours essentiel, à chaque opération, de faire attention à la limite de l'erreur qu'elle comporte et qu'il est toujours facile d'évaluer, de façon à avoir une limite de l'erreur finale. On risquerait singulièrement, en procédant autrement, ou d'arriver à un résultat pour lequel un très grand nombre de chiffres n'auraient aucune valeur, ou même à un résultat entaché d'une erreur grossière, beaucoup plus grande que celle que les données comportent.

274. Pour calculer des limites des erreurs qui correspondent aux diverses opérations, on peut procéder autrement qu'on ne l'a fait, et la marche qui va être indiquée sera souvent plus commode, au moins pour le lecteur qui est familier avec les éléments de l'Algèbre.

Supposons qu'on se donne des valeurs approchées a, b, c, ... des nombres A, B, C, ...; on a à faire une suite d'opérations, qui devraient porter sur les nombres exacts A, B, C, ... ; on fait ces opérations sur les nombres a, b, c, ..., et l'on veut avoir une limite de l'erreur commise.

Désignons par α, β, γ... non plus les limites supérieures des erreurs, mais les erreurs elles-mêmes : Les nombres A, B, C, ... seront respectivement égaux à $a \pm \alpha$, $b \pm \beta$, $c \pm \gamma$, ...; en prenant le signe + ou le signe — suivant que l'erreur considérée est en moins ou en plus ([1]).

[1]. Le lecteur, habitué au maniement des nombres positifs et négatifs, remarquera que les nombres A, B, C, ... peuvent être représentés par $a+\alpha$, $b+\beta$, $c+\gamma$..., en convenant de regarder comme positives les erreurs en moins, comme négatives les erreurs en plus : α, β, γ, ... sont alors des nombres positifs ou négatifs. C'est une convention qu'il ne manquera pas d'adopter, en raison de la grande simplification qu'elle apporte dans l'écriture et les calculs.

On effectue les opérations indiquées sur les nombres $a \pm \alpha$, $b \pm \beta$, $c \pm \gamma, \ldots$ et l'on en retranche le résultat des mêmes opérations faites sur les nombres $a, b, c, \ldots$: cette différence est l'erreur finale. L'Algèbre enseigne à en transformer l'expression, de manière à se rendre compte du rôle qu'y jouent les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ et à calculer une limite supérieure de la valeur qu'elle peut atteindre, dans les circonstances les plus défavorables, quand les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont astreints à rester inférieurs à certaines limites données.

Une observation importante à faire est celle-ci : si toutes les erreurs sont très petites, le produit de deux erreurs, le carré d'une erreur seront des nombres très petits par rapport à ces erreurs ; par exemple, si toutes les erreurs sont inférieures à $\frac{1}{10^5}$, le produit de deux erreurs sera inférieur à $\frac{1}{10^{10}}$, et l'on conçoit que les termes qui contiennent un pareil produit, s'il n'est pas multiplié par un très grand nombre, puissent être négligés, au moins dans une première évaluation de l'erreur. Par rapport au produit de deux erreurs, le produit de trois erreurs sera un nombre très petit ; et, si même on conservait, dans l'évaluation de l'erreur, les produits de deux erreurs, on pourrait négliger les produits de trois erreurs, etc.

275. Notons à ce propos, et sans chercher à leur donner un sens très net qu'elles ne comportent pas, les expressions usuelles « quantités du premier, du second, du troisième ordre,..., de petitesse ou de grandeur ».

On fixera d'abord, d'une façon plus ou moins précise des limites l, L, comprenant entre elles l'unité, et que l'on pourra prendre inverses l'une de l'autre ; elles dépendront d'ailleurs du genre de questions que l'on traite, des nombres que l'on y rencontre habituellement. Elles seront, par exemple, 0,1 et 10. Les nombres compris entre ces limites seront regardés comme n'étant ni *grands* ni *petits*. Deux nombres seront dits du *même ordre*, ou d'une façon plus vague, *comparables* entre eux, quand leur rapport tombera entre l et L. On choisira ensuite un nombre ε, petit par rapport à la limite inférieure l, qui sera le type des quantités du premier ordre de petitesse : ce sera, par exemple, 0,001 ; les nombres *comparables* à ε seront dits du premier ordre ; les nombres comparables à ε^2, $\varepsilon^3, \ldots$ seront dits du second, du troisième ordre, ... Les nombres du premier ordre et tous ceux qui sont plus petits que ε seront dits au moins du premier ordre, les nombres du second ordre et ceux qui sont plus petits que ε^2 sont dits au moins du second ordre, etc... D'ordinaire une somme ou une différence de nombres qui sont au moins du premier ordre, est elle-même une quantité petite au moins du premier ordre, pourvu que les nombres à ajouter ne soient pas trop nombreux. De même, pour la somme ou la différence de nombres du second ordre de petitesse, etc... Le produit de deux, de trois, ... nombres du premier ordre est, en général, un nombre du second, du troisième ordre, ... Il conviendra de regarder les nombres comparables à $\frac{1}{\varepsilon}$, $\frac{1}{\varepsilon^2}$, ... comme étant grands du premier, du second ordre, ... de *grandeur*.

276. Quand on veut évaluer approximativement une quantité du premier ordre de petitesse, on néglige habituellement les quantités du second ordre : on ne fait pas autre chose, en supposant que les erreurs soient au moins du premier ordre, lorsqu'on néglige le produit de deux erreurs, même s'il est multiplié par un nombre qui ne soit pas grand. On conçoit qu'on puisse ainsi simplifier beaucoup l'expression de l'erreur qui résulte d'une suite d'opérations. En particulier, quand une erreur se trouve multipliée ou divisée par un nombre, on peut substituer à ce nombre une valeur qui n'en diffère que d'une quantité comparable à l'erreur : on a par exemple, en supposant que α et β soient deux quantités petites du premier ordre, et que le nombre a ne soit pas petit,

$$\frac{\beta}{a} - \frac{\beta}{a+\alpha} = \frac{\alpha\beta}{a(a+\alpha)};$$

si donc en remplace $\dfrac{\beta}{a+\alpha}$ par $\dfrac{\beta}{a}$, on commettra une erreur $\dfrac{\alpha\beta}{a(a+\alpha)}$, qui sera, en général, du second ordre.

L'application de ces principes généraux sera aisée pour le lecteur familier avec le calcul algébrique; l'emploi des nombres *négatifs*, en lui permettant de regarder les erreurs en moins comme positives, les erreurs en plus comme négatives (ou inversement), lui évitera la distinction très fastidieuse de cas qui peuvent être très nombreux. Je me bornerai à une application des remarques précédentes, elle se rapporte à l'évaluation des erreurs relatives dans le cas d'un produit ou d'un quotient, et fournit une règle simple, qui, toutefois, doit être appliquée avec précaution.

277. Soient a, b, deux valeurs approchées par défaut; soient $a+\alpha$, $b+\beta$ les valeurs exactes correspondantes. Si l'on prend ab pour valeur approchée du produit $(a+\alpha)(b+\beta)$, on commet une erreur qui, en négligeant les quantités du second ordre, sera $a\beta + b\alpha$; pour avoir l'erreur relative commise ainsi au produit, on doit diviser l'erreur absolue par le produit exact $(a+\alpha)(b+\beta)$; on peut tout aussi bien diviser par le produit approché ab, qui ne diffère du produit exact que d'une quantité qui est du même ordre que celle qu'on veut évaluer : on obtient ainsi $\dfrac{\alpha}{a} + \dfrac{\beta}{b}$, c'est-à-dire la somme des erreurs relatives commises sur les facteurs; à vrai dire, cette somme est $\dfrac{\alpha}{a+\alpha} + \dfrac{\beta}{b+\beta}$; mais, en général, les quantités $\dfrac{\alpha}{a+\alpha}$, $\dfrac{\beta}{b+\beta}$ ne diffèrent respectivement des quantités $\dfrac{\alpha}{a}$, $\dfrac{\beta}{b}$ que de quantités qui sont habituellement du second ordre. En examinant les divers cas qui peuvent se présenter, on reconnaît que l'erreur relative commise sur un produit dont les deux facteurs sont approchés est égale à la somme ou à la différence des erreurs relatives commises sur les facteurs, suivant que les erreurs sont de même sens ou de sens contraire. De même, en prenant $\frac{a}{b}$ pour la valeur d'un rapport dont les deux termes ne sont connus qu'approximativement, on commet une erreur relative qui peut, en général, être regardée comme la différence ou la somme des erreurs relatives commises sur les deux termes, suivant que ces erreurs sont de même sens ou de sens contraire. En général, pour peu qu'on force ces limites, on peut regarder la *somme* des limites supérieures des erreurs relatives des deux facteurs du produit, ou des deux termes du rapport, comme une limite supérieure de l'erreur relative commise sur le produit ou le rapport.

La proposition qui concerne le produit de *deux* facteurs, si elle était rigoureusement vraie, s'étendrait sans aucune difficulté au cas de trois, quatre, ... facteurs. On peut énoncer, au moins comme donnant des indications utiles, la proposition suivante :

Quand les facteurs d'un produit sont des nombres approchés, la somme des limites supérieures des erreurs relatives des facteurs est une limite supérieure de l'erreur relative du produit.

Connaissant une limite de l'erreur relative, on est en mesure (n° 264) d'avoir une limite de l'erreur absolue, et par suite de reconnaître les chiffres exacts du résultat.

Exercices.

213. En admettant que la durée de l'année tropique soit égale à 365,242217, quand l'unité de temps est le jour (solaire moyen), on demande quelles erreurs on commet quand on prend pour valeur approchée de cette durée les nombres

$$365+\frac{1}{4}-\frac{3}{400},\qquad 365+\frac{8}{33},\qquad 365+\frac{1}{4}-\frac{1}{128},\qquad 365+\frac{1}{5}+\frac{1}{24}.$$

La première valeur approchée est la base du calendrier grégorien, qui consiste à compter l'année ordinaire de 365 jours, à ajouter un jour tous les 4 ans, sauf 3 fois tous les 400 ans. La seconde est la base du calendrier persan qui consiste à ajouter un jour tous les 4 ans pendant une période de 28 ans, puis un jour au bout de 5 ans, soit en tout 8 jours tous les 33 ans. Formuler des règles analogues pour les autres valeurs approchées.

214. Sachant que l'expression

$$3+\frac{1}{7}-\frac{1}{790}+\frac{1}{749896}$$

est une valeur approchée par excès d'un nombre inconnu a, avec une erreur moindre que le carré de la dernière fration, calculer le nombre a avec autant de décimales qu'il est possible. Calculer une limite de l'erreur que l'on commet en prenant pour valeur approchée de a le nombre

$$3+\frac{1}{8}+\frac{1}{61}+\frac{1}{5020}.$$

215. On sait que l'expression

$$3-\frac{1}{3}+\frac{1}{19}-\frac{1}{983}$$

est une valeur approchée par défaut d'un nombre inconnu b, avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^6}$. En désignant par a le même nombre que dans l'exercice précédent, on demande de calculer le produit ab avec une erreur moindre que $\frac{1}{10}$.

216. Le nombre 1,4142135 est la valeur approchée d'un nombre à $\frac{1}{10^7}$ près. Avec quelle approximation peut-on connaître le carré de ce nombre? Combien de chiffres exacts peut-on obtenir dans le carré de ce nombre?

217. La valeur approchée d'un nombre est 3,1415927 avec une erreur moindre que $\frac{1}{2.10^7}$; calculer l'inverse de ce nombre avec le plus grand nombre possible de chiffres décimaux exacts.

218. Un nombre est représenté, avec une erreur en plus, moindre que $\frac{1}{4.10^7}$, par la différence entre la somme des fractions

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{24},\ \frac{1}{720},\ \frac{1}{40320},\ \frac{1}{3628800}$$

et la somme des fractions

$$\frac{1}{6},\ \frac{1}{120},\ \frac{1}{5040},\ \frac{1}{362880}.$$

Calculer ce nombre avec 7 chiffres décimaux, de manière que l'erreur soit moindre que $\frac{1}{10^7}$.

Calculer le produit du nombre trouvé par le nombre 2,718282 calculé n° 272, 3° d'une façon analogue, de façon que l'erreur soit moindre que $\frac{1}{10^4}$.

219. Si α est un nombre très petit, quelles erreurs commet-on en remplaçant $\frac{1}{1+\alpha}$, $\frac{1}{1-\alpha}$, $(1+\alpha)^2$, $(1-\alpha)^2$, $(1+\alpha)^3$, $(1-\alpha)^3$ respectivement par $1-\alpha$, $1+\alpha$, $1+2\alpha$, $1-2\alpha$, $1+3\alpha$, $1-3\alpha$?

220. Les valeurs approchées à $\frac{1}{10^6}$ près, par défaut, de deux nombres a et b sont 3,141592 et 2,718281, trouver avec deux décimales exactes les valeurs de $\frac{a^2}{b}$, a^2b, $\frac{a}{b^2}$.

221. Un nombre inconnu x est donné par l'équation approchée

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{1861}{860};$$

on sait que le second membre est entaché d'une erreur en plus, inférieure à $\frac{1}{10^6}$; la valeur de x que l'on tirerait de cette équation serait-elle approchée par défaut ou par excès? On réduit cette valeur en fraction décimale; sur combien de chiffres décimaux pourra-t-on compter? — Même question pour l'équation $\frac{y+1}{y-1} = \frac{1380}{1051}$, sachant que cette fois l'erreur dont est entaché le second membre est en moins et qu'elle est inférieure à $\frac{1}{10^7}$.

Trouver une limite supérieure de la différence entre y et le carré de x.

222. Admettons que, entre les longueurs l_0, l d'une barre métallique, aux températures 0 et t, il y ait une relation de la forme

$$l = l_0(1 + at)$$

où a est un coefficient qui ne dépend que de la nature du métal ; la valeur de ce coefficient, pour le cuivre pur, est environ $\frac{1708}{10^8}$; en supposant que la température t soit comprise entre 0° et 100°, que la longueur de la barre que l'on mesure soit inférieure à 2 mètres et qu'on ne puisse pas répondre dans la mesure d'une longueur d'une erreur moindre qu'un dixième de millimètre, la valeur du dernier chiffre du numérateur de la fraction précédente aurait-elle quelque importance ? Convient-il pour l'application de cette formule, dans les mêmes conditions, d'observer la température avec une grande précision ? Pourrait-elle servir, si l'on avait mesuré l_0 et l, à calculer t ?

223. En mesurant une barre de cuivre à une température de 25 degrés, on a trouvé 2,7435 ; on ignore le sens de l'erreur, qui est inférieure à $\frac{1}{10^4}$; quelle sera la longueur de cette barre à 0° ? on prendra pour a la même valeur approchée que dans l'exercice précédent.

224. Admettons que, entre les longueurs l_0, l d'une barre métallique, aux températures 0 et t, il y ait une relation de la forme

$$l = l_0(1 + at + bt^2),$$

où a, b sont des coefficients qui ne dépendent que de la nature du métal ; les valeurs de ces coefficients pour le cuivre, par exemple, sont environ $a = \frac{16168}{10^9}$ et $b = \frac{91}{10^{10}}$.

Supposons que la longueur de la barre considérée soit inférieure à 2 mètres, qu'on puisse mesurer les longueurs avec une erreur moindre qu'un centième de millimètre et que l'on applique la formule entre 0 et 200 degrés ; les valeurs des derniers chiffres donnés pour les numérateurs des fractions qui représentent a et b ont-ils quelque importance ?

En supposant $l_0 = 1$, calculer la valeur de l pour $t = 50$ par la formule précédente et par celle de l'exercice 222.

CHAPITRE IX

CARRÉS — CUBES RACINE CARRÉE — RACINE CUBIQUE

§ 1. — **Propositions préliminaires. — Carrés.**

278. Rappelons d'abord les définitions et propositions que voici :

Le carré d'un nombre est le produit de ce nombre par lui-même. Le carré d'une fraction est une fraction dont les deux termes sont les carrés des termes de la fraction proposée : en particulier, si la fraction proposée est irréductible, son carré, formé par la règle précédente, sera une fraction irréductible, car, si deux nombres entiers sont premiers entre eux, il en est de même de leurs carrés, et, plus généralement, de leurs puissances, quelles qu'elles soient. Le carré d'une fraction irréductible ne peut donc être un nombre entier.

Le carré de la somme ou de la différence de deux nombres a et b est donné par les formules

$$(1)\qquad \begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2,\\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2,\end{aligned}$$

qui s'appliquent, que les nombres a et b soient entiers ou fractionnaires.

Si l'on a $A > B$, on a aussi $A^2 > B^2$.

Le carré d'un produit de facteurs s'obtient en faisant le produit des carrés des facteurs. Le carré d'une puissance d'un nombre s'obtient en doublant l'exposant de la puissance de ce nombre : en particulier, le carré d'un nombre entier quelconque formé en faisant suivre l'unité d'un nombre quelconque de zéros, c'est-à-dire d'une puissance de 10 dont l'exposant est ce nombre de zéros, s'obtient en faisant suivre l'unité d'un nombre de zéros égal au double du nombre de zéros que contient le nombre proposé : ainsi les carrés des nombres 10, 100, 1000, ... sont respectivement 100, 10000, 1000000, ... Le carré d'un nombre terminé par plusieurs zéros s'obtient en faisant le carré de ce nombre, abstraction faite des zéros, et en plaçant à la suite de ce carré deux fois plus de zéros qu'il n'y en avait dans le nombre proposé. Ainsi le carré de 5000 est $5^2 \times 1000000 = 25000000$.

279. *La racine carrée* (*exacte*) *d'un nombre* A *est un nombre* B, *dont le carré est égal à* A ; ainsi 5 est la racine carrée de 25, $\frac{2}{3}$ est la racine carrée de $\frac{4}{9}$ parce que l'on a

$$5^2 = 25, \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Il ne peut y avoir qu'un seul nombre B dont le carré soit égal au nombre donné A ; car si l'on a $B^2 = A$, le carré de tout nombre plus grand ou plus petit que B sera plus grand ou plus petit que $B^2 = A$. Mais quand on se donne le nombre A, il n'y a pas toujours un nombre B dont le carré soit égal à A. Ainsi, on voit de suite qu'il n'y a pas de nombre entier dont le carré soit égal à 2 ou à 3; il n'y a pas non plus de nombre fractionnaire. D'une façon générale : *Quand un nombre entier n'est pas le carré d'un autre nombre entier, il n'est pas non plus le carré d'une fraction*, puisque le carré d'une fraction irréductible ne peut être un nombre entier.

Les nombres entiers qui sont les carrés d'un nombre entier, ou qui ont une racine carrée (exacte), s'appellent des carrés parfaits, ou plus simplement des carrés.

Considérons de même une fraction irréductible $\frac{a}{b}$; elle ne peut évidemment être le carré d'un nombre entier; si elle est le carré d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$, on aura

$$\frac{a}{b} = \frac{p^2}{q^2},$$

et la fraction $\frac{p^2}{q^2}$ étant irréductible, il faut que l'on ait $a = p^2$, $b = q^2$. Ainsi : *pour qu'une fraction irréductible soit le carré d'une fraction, il faut et il suffit que ses deux termes soient des carrés parfaits.* La fraction dont les termes sont les racines carrées (exactes) des termes de la fraction proposée est la racine carrée (exacte) de cette fraction.

280. Nous allons maintenant nous occuper spécialement du cas où l'on considère des nombres entiers.

Nous appellerons d'abord l'attention sur deux conséquences du théorème qu'exprime la première des égalités (1).

Le carré d'un nombre entier composé de dizaines et d'unités se compose du carré des dizaines, du double produit des dizaines par les unités et du carré des unités.

Ainsi

$$135^2 = (130 + 5)^2 = 130^2 + 2 \times 130 \times 5 + 5^2.$$

Si dans la même égalité (1), on suppose $b = 1$, on a

$$(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1,$$

ou

$$(a + 1)^2 - a^2 = 2a + 1.$$

Le carré d'un nombre entier est égal au carré du nombre entier immédiatement inférieur augmenté de deux fois ce nombre et de l'unité.

Ce dernier théorème permet de former facilement une table de carrés.

281. Les carrés des neuf premiers nombres

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

se trouvent dans la table de multiplication; ils sont :

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.$$

Au lieu de continuer cette table par une suite de multiplications, on emploiera le procédé suivant qui est beaucoup plus rapide.

Écrivons la suite naturelle des nombres entiers 1, 2, 3, ... et au-dessus, la suite des nombres impairs, de cette façon :

$$\begin{array}{l} 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots \\ 1, 2, 3, 4, 5, \ \ 6, \ \ 7, \ldots \end{array}$$

Si l'on considère un nombre quelconque $a + 1$, de la suite 1, 2, 3, 4, ..., autre que 1, on voit que le nombre impair écrit au-dessus de lui est précisément $2a + 1$. Le carré de 1 est 1 ; d'après la règle précédente, le carré de $2 = 1 + 1$ s'obtiendra en ajoutant à 1 le nombre impair qui est au-dessus de 2, ce qui donne 4; le carré de $3 = 2 + 1$ s'obtient en ajoutant à 4 le nombre impair 5 qui est au-dessus de 3, ce qui donne 9; le carré de 4 s'obtient en ajoutant 7 à 9; le carré de 5 s'obtient en ajoutant 9 à 16; par une suite d'opérations pareilles on formera une table de carrés s'étendant aussi loin qu'on le voudra. — En réfléchissant un peu sur cette règle, le lecteur reconnaîtra sans peine que le carré d'un nombre entier quelconque a est la somme des a premiers nombres impairs.

C'est en appliquant cette règle que l'on a construit la Table II, qui donne les carrés des 99 premiers nombres et que l'on trouvera à la fin du volume.

L'examen de cette table montre que les carrés des nombres entiers vont en augmentant rapidement.

Les nombres inscrits dans cette table sont des carrés parfaits : les nombres compris entre les carrés de deux nombres entiers consécutifs n'ont pas de racine carrée exacte : tel est 8972 qui est compris entre $8836 = 94^2$ et $9025 = 95^2$.

§ 2. — Extraction de la racine carrée.

282. *On appelle racine carrée d'un nombre* A *à une unité près, par défaut, le plus grand nombre entier dont le carré soit inférieur ou égal à* A. Ainsi 7 est la racine carrée à une unité près, par défaut, de 53, parce que l'on a

$$7^2 < 53 < 8^2;$$

on peut dire encore que la racine carrée à une unité près, par défaut, de A est la racine carrée (exacte) du plus grand carré contenu dans A : ainsi $49 = 7^2$ est le plus grand carré contenu dans 53; 7 est la racine carrée à une unité près, par défaut, de 53. La racine carrée à une unité près, par excès, de A est le plus petit nombre entier dont le carré soit supérieur à A. Ainsi 8 est la racine carrée à une unité près, par excès, de 53.

Si a est la racine carrée à une unité près, par défaut, de A, $a+1$ est la racine carrée à une unité près, par excès. Dans le présent paragraphe, où il s'agit de nombres entiers, en parlant de la racine carrée d'un nombre, j'entendrai toujours soit la racine carrée exacte, s'il y en a une, soit la racine carrée à une unité près, par défaut : il y a là une ambiguïté analogue à celle que comporte le mot *quotient* (n° 202); le lecteur prévenu ne pourra s'y tromper. Par exemple, 29 est compris entre $25 = 5^2$ et $36 = 6^2$; 5 est la racine carrée (à une unité près par défaut) de 29. Trouver la racine carrée d'un nombre, c'est *extraire* la racine carrée de ce nombre.

283. Soit a la racine carrée de A, on a

$$a^2 \leqq A < (a+1)^2;$$

la différence $A - a^2$ prend le nom de *reste*. Ce reste est plus petit que la différence $(a+1)^2 - a^2$ qui est égale à $2a+1$. Réciproquement, si les deux nombres entiers a et A sont tels que l'on ait

$$a^2 \leqq A, \quad A - a^2 < 2a + 1,$$

a est la racine carrée de A, car la dernière inégalité entraîne la suivante :

$$A < a^2 + 2a + 1 \quad \text{ou} \quad (a+1)^2.$$

Un nombre entier quelconque est égal au carré de sa racine carrée, augmenté du reste.

284. Lorsqu'un nombre entier est inférieur à 100, sa racine carrée est inférieure à 10 et la connaissance des carrés des neuf premiers nombres suffit à la déterminer.

Lorsqu'un nombre entier est égal ou supérieur à 100, sa racine carrée comprend des dizaines et des unités. Si le nombre était inférieur à 10000, la table des carrés permettrait d'obtenir sa racine carrée ; mais on veut donner maintenant un procédé pour obtenir cette racine, qui s'applique dans tous les cas. Le carré de la racine carrée se compose du carré des dizaines, qui est un nombre exact de centaines, du double produit des dizaines par les unités, qui est un nombre exact de dizaines, et du carré des unités : en ajoutant le reste, on doit reproduire le nombre proposé. On aperçoit de suite que le carré du nombre de dizaines de la racine est un carré contenu dans le nombre de centaines du nombre proposé ; c'est le plus grand carré contenu dans ce nombre de centaines, ainsi qu'il résulte du théorème suivant :

Le nombre de dizaines de la racine carrée d'un nombre entier A *est la racine carrée du nombre de centaines de* A.

Si en effet la racine carrée de A contient 13 dizaines et ne contient pas 14 dizaines, c'est que A contient le carré de 13 dizaines et ne contient pas le carré de 14 dizaines. Or, le carré de 13 dizaines est un nombre exact de centaines, nombre égal à 13^2 ; le carré de 14 dizaines est un nombre exact de centaines, nombre égal à 14^2 ; le nombre de centaines de A contient donc 13^2, sans contenir 14^2 ; sa racine carrée est 13.

Ce théorème ramène la recherche du nombre des dizaines de A à la recherche de la racine carrée d'un nombre contenant deux chiffres de moins que A.

285. Si l'on sait obtenir cette racine, il n'est pas malaisé ensuite d'obtenir le chiffre des unités.

Supposons que le nombre des dizaines de la racine soit 13 et soit b le chiffre des unités : A est la somme de quatre nombres : 1° le carré de 130 ; 2° le double du produit de 130 par b ; 3° le carré de b ; 4° le reste.

La différence $A - 130^2$ ne contient plus que les trois derniers nombres ; elle contient en particulier le double du produit de 130 par b : si donc on la divise par le double de 130, on aura pour quotient entier b, ou un nombre plus grand que b. Le double de 130 s'obtient en multipliant par 10 le double 26 de 13. Pour obtenir le quotient entier de $A - 130^2$ par 26×10, on peut faire l'opération en deux fois (n° 104) : chercher le quotient entier de la division de $A - 130^2$ par 10, ce qui se fait en séparant un chiffre à la droite de

$A - 130^2$, puis diviser le nombre ainsi obtenu par 26. On parvient donc au théorème suivant :

En retranchant d'un nombre A *le carré des dizaines de sa racine carrée, en supprimant un chiffre à la droite de la différence, puis en divisant le nombre ainsi obtenu par le double du nombre des dizaines, on obtient comme quotient entier un nombre égal ou supérieur au chiffre des unités de cette racine.*

Remarquons, en conservant toujours les mêmes hypothèses, que $A - 130^2$ se forme en retranchant 13^2 du nombre de centaines de A et en faisant suivre la différence des deux derniers chiffres de A : en effet 130^2 est égal à $13^2 \times 100$.

Supposons maintenant que, en divisant par 26 le nombre des dizaines de $A - 130^2$, on trouve comme quotient 7 ; pour savoir si 7 est bien le chiffre des unités, on pourra former le carré de 137 : si ce carré est inférieur ou égal à A, 7 est le chiffre cherché. Si l'on a $A < 137^2$, on essaiera 6 en formant le carré de 136 ; si l'on a $A \geqq 136^2$, 6 est alors le chiffre des unités ; si l'on avait $A < 136^2$, on essaierait 5 de la même façon, etc...

Pour faire ces essais, il convient de profiter de ce que l'on a effectué la différence $A - 130^2$. Par exemple, si l'on veut essayer 7, on écrira 7 à la suite du double du nombre des dizaines de la racine et l'on multipliera par 7 le nombre $267 = 2 \times 130 + 7$ ainsi formé : le produit est $2 \times 130 \times 7 + 7^2$, et, si l'on y ajoutait 130^2, on aurait le carré de 137 ; par conséquent on aura

$$A \geqq 137^2, \text{ ou } A < 137^2$$

suivant que l'on aura

$$A - 130^2 \geqq 267 \times 7, \text{ ou } A - 130^2 < 267 \times 7.$$

On voit aussi que, si l'on est dans le premier cas, c'est-à-dire si 7 est bien le chiffre des unités de la racine, pour avoir le reste, $A - 137^2$, il suffira de retrancher 267×7 de $A - 130^2$. Si cette soustraction était impossible, on essaierait de retrancher 266×6, puis 265×5, ... etc., en baissant à chaque fois d'une unité le chiffre à essayer.

La première fois que la soustraction sera possible, le chiffre essayé sera le chiffre que l'on cherche et le résultat de la soustraction sera le reste, dans l'opération de la racine carrée.

Il est à peine utile de dire que si, en faisant la division, on trouvait un quotient supérieur à 9, c'est le chiffre 9 que l'on commencerait par essayer.

286. Si l'on procède comme on vient de l'expliquer, on parviendra sûrement au chiffre des unités; mais on est quelquefois tenté, pour aller plus vite, de diminuer le chiffre à essayer de deux, trois, ... unités. Il est nécessaire alors d'avoir une règle pour reconnaître si le chiffre qu'on a essayé n'est pas trop faible. On applique la condition du n° 283.

Supposons, par exemple, qu'on ait trouvé 7 comme quotient et qu'on veuille essayer de suite le nombre 5; 5 sera le chiffre des unités si le produit 265×5 peut se retrancher de $A - 130^2$ et si la différence est inférieure à $135 \times 2 + 1$, c'est-à-dire au double du nombre que l'on suppose être la racine, augmenté d'une unité : si la différence était égale ou supérieure à $135 \times 2 + 1$, le chiffre 5 serait certainement trop faible.

287. Supposons par exemple qu'on veuille extraire la racine carrée de 63917235; le nombre de dizaines de la racine sera la racine carrée de 639172, nombre de centaines de 63917235, et si l'on avait ce nombre de dizaines, on obtiendrait le chiffre des unités de la façon qui vient d'être expliquée.

On est donc ramené à chercher la racine carrée de 639172; le nombre de dizaines de cette racine est la racine carrée de 6391; le nombre de dizaines de la racine de 6391 est la racine carrée de 63; cette racine est donnée par la table de multiplication, elle est 7. Pour avoir le chiffre des unités de la racine carrée de 6391, on commencera par retrancher de ce nombre le carré de 7 dizaines, ce qui se fera en retranchant de 63 le carré de 7 et en faisant suivre la différence 14 des chiffres 91, ce qui donne 1491. En séparant le dernier chiffre à droite on obtient 149; on divisera ce nombre par le double de 7, c'est-à-dire par 14; le quotient entier est 10; le chiffre des unités de la racine carrée de 6391 est donc 9, ou un chiffre moins fort; pour essayer 9, on place ce chiffre à la suite du double de 7 et on multiplie par 9 le nombre 149 ainsi formé : le résultat est 1341, qui peut se retrancher de 1491, la différence est 150; 9 est le chiffre des unités de la racine carrée de 6391; cette racine est 79 et le reste est 150.

79 est le nombre de dizaines de la racine carrée de 639172. Pour avoir le chiffre des unités de cette racine, on commence par retrancher de 639172 le carré de 79 dizaines; pour cela, il suffit de faire suivre des chiffres 72 la différence 150 entre 6391 et le carré de 79; on obtient ainsi 15072. On sépare un chiffre à droite et on divise 1507 par le double de 79, c'est-à-dire par 158; le quotient entier est 9; 9 est le chiffre des unités de la racine carrée de 639172, ou un

chiffre trop fort. Pour essayer 9, on place ce chiffre après le double de 79 et l'on multiplie par 9 le nombre 1589 ainsi formé ; le produit, qui est égal à 14301, peut se retrancher de 15072 et la différence est 771 ; 9 est le chiffre des unités de la racine de 639172; cette racine est 799 et le reste est 771.

799 est le nombre de dizaines de la racine carrée de 63917235. On retranchera de ce nombre le carré de 799 dizaines, ce qui se fait en plaçant les deux derniers chiffres 35 du nombre proposé à la suite de 771. On divise ensuite 7713 par le double de 799, c'est-à-dire par 1598; le quotient entier est 4; 4 est le chiffre des unités de la racine carrée de 63917235, ou un chiffre trop fort; pour essayer 4 on place ce chiffre à la suite du double de 799 et l'on multiplie par 4 le nombre 15984 ainsi formé; le produit 63936 peut se retrancher de 77135; la différence est 13199; 4 est le chiffre des unités de la racine de 63917235; cette racine est 7994 et le reste est 13199. On vérifie le résultat en constatant que si l'on ajoute ce reste au carré de 7994, c'est-à-dire à 63904036, on reproduit bien le nombre proposé 63917235.

Le raisonnement est général et il suffira d'énoncer la règle suivante, dans laquelle on a fait d'ailleurs entrer l'explication de la façon dont on dispose les calculs : le lecteur voudra bien suivre ces explications sur le tableau (p. 263) qui donne le détail des calculs pour l'extraction de la racine carrée de 63917235.

288. *Règle.* — Pour extraire la racine carrée d'un nombre entier, on écrit ce nombre sur une ligne horizontale, en laissant de la place à droite et en dessous. A droite du nombre on figure un angle droit, dont le petit côté est vertical, le grand côté horizontal ; c'est à l'intérieur de cet angle que l'on placera, au fur et à mesure, les chiffres de la racine carrée. On sépare le nombre en tranches de deux chiffres, en allant de droite à gauche, la dernière tranche ainsi obtenue peut n'avoir qu'un seul chiffre. En parlant désormais de ces tranches, on supposera qu'on les parcourt au contraire en allant de gauche à droite, en sorte que c'est la *première* qui peut n'avoir qu'un seul chiffre.

On calcule successivement les racines carrées des nombres formés par la première tranche, les deux premières, les trois premières tranches, etc., jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les tranches; j'appellerai reste partiel correspondant à chaque opération le reste relatif à cette opération, c'est-à-dire la différence entre le nombre dont on a extrait la racine et le carré de cette racine.

La première opération consiste à extraire la racine carrée d'un nombre moindre que 100; le résultat est fourni par la table de multiplication; il n'a qu'un chiffre, que l'on écrit à la place réservée à la racine, vers la gauche; on calcule le reste correspondant que l'on écrit sous la première tranche, de manière que les unités correspondantes se trouvent sur une même verticale.

Les opérations ultérieures consistent toutes dans la détermination du chiffre des unités d'une racine dont on connaît le nombre des dizaines, nombre qui, à chaque fois, est fourni par l'opération précédente. Chaque opération fournit un chiffre, que l'on écrit à la droite des chiffres déjà obtenus à la racine, de manière à compléter cette racine au fur et à mesure.

Chacune des opérations partielles, après la première, se fait comme il suit : à la suite du reste partiel correspondant à l'opération précédente, on abaisse la tranche qui suit la tranche à laquelle on s'était arrêté dans cette opération. Appelons le nombre ainsi formé dividende partiel. On néglige le dernier chiffre de droite de ce dividende, et l'on divise par le double du nombre écrit à la racine, résultat de l'opération précédente. Le quotient entier est le chiffre *à essayer;* il est exact ou trop fort; pour essayer ce chiffre, on l'écrit à la suite du diviseur et on multiplie le résultat ainsi obtenu par ce même chiffre. Si le produit peut se retrancher du dividende partiel, le chiffre est bon; sinon on le diminue d'une unité et l'on essaie le nouveau chiffre de la même façon; dès que le produit peut se retrancher du dividende partiel, on a obtenu le chiffre cherché et la différence est le reste partiel correspondant à l'opération. Les calculs relatifs aux essais se font dans l'espace laissé libre au-dessous de la racine, en plaçant ces calculs, successivement, de gauche à droite. Ceux qui concernent un même chiffre se placent les uns au-dessous des autres.

Pour faire les essais on peut profiter de la remarque du n° 286.

On commence les opérations que l'on vient de décrire en abaissant la seconde tranche; on les continue en abaissant successivement les tranches de gauche à droite, jusqu'à ce qu'on ait employé la dernière tranche; le dernier reste partiel est le reste de l'opération complète.

On fait la preuve de l'opération en faisant le carré du nombre trouvé à la racine et en ajoutant le reste au résultat, on doit retrouver le nombre proposé.

289. Voici le tableau des calculs pour l'extraction de la racine carrée de 63917235.

```
63917235 | 7994
49       |------------------------------
-----    | 149      1589      15984
 1491    |   9         9          4
 1341      -----    ------    -------
 -----     1341     14301     63936
  15072
  14301
  -----
    77135
    63936
    -----
    13199
```

Dans ce tableau, on a écrit les multiplications, et replacé les nombres à retrancher sous les nombres dont on doit les retrancher; on peut, si l'on veut, effectuer en même temps les multiplications et les soustractions, comme lorsqu'on fait une division. Il semble inutile d'insister sur ce détail.

Dans l'exemple précédent, les essais ont réussi du premier coup : il ne faut pas croire qu'il en soit toujours ainsi. On a placé ci-dessous le tableau détaillé des calculs pour l'extraction de la racine carrée de 30624 ; les explications qui précèdent suffiront amplement au lecteur pour s'en rendre compte.

```
30624 | 174
1     |-------------
---   |  29     345
206   |   9       5
189      ---    ----
---      261    1725
 1724    ===    ====
 1376     28     344
 ----      8       4
  348    ---    ----
         224    1376
         ===
          27
           7
         ---
         189
```

Cet exemple suggère les remarques suivantes : la détermination du second chiffre de la racine a exigé trois essais; si l'on avait, à tout hasard, essayé de suite le chiffre 7, on se serait assuré que 17 est bien la racine carrée de 306, parce que $306 - 17^2 = 17$ est moindre que $2 \times 17 + 1 = 35$. Mais si l'on avait essayé 6 au lieu de 7, la même règle aurait montré que 6 est trop faible. Enfin dans cet exemple, le reste final 348 est le double de la racine, c'est la valeur maximum du reste.

La règle de l'extraction de la racine montre immédiatement que le nombre de chiffres de la racine d'un nombre de $2n$ ou de $2n-1$ chiffres est n. Il serait aisé de démontrer cette proposition directement.

290. On peut présenter la théorie de l'extraction de la racine carrée d'une façon plus générale, qui va, d'ailleurs, fournir des procédés qui abrègent notamment les calculs.

Observons d'abord que le théorème du nº 284 est un cas particulier du théorème suivant.

Pour avoir le nombre d'unités d'ordre n dans la racine d'un nombre A, il suffit de séparer $2n$ chiffres à droite de A et d'extraire la racine carrée du nombre à gauche du signe de séparation.

Par exemple, pour savoir combien il y a de mille dans la racine carrée de A, il suffit d'extraire la racine carrée du nombre de millions de A.

En effet, s'il y a 134 mille dans la racine carrée de A, et non 135 mille, c'est que A contient le carré de 134 mille, et ne contient pas le carré de 135 mille. Or les carrés de 134 mille et de 135 mille sont des nombres exacts de millions, nombres qui s'obtiennent en faisant le carré de 134 et de 135 : donc le nombre de millions de A contient 134^2 et ne contient pas 135^2 : donc 134 est la racine carrée du nombre de millions de A.

En séparant $2n$ chiffres à la droite de A, on mettra ce nombre sous la forme :

$$A = A' \times 10^{2n} + B :$$

B est le nombre à droite du signe de séparation; A′ est le nombre à gauche: B est moindre que 10^{2n}.

Si l'on désigne maintenant par a la racine carrée de A′, la racine carrée de A pourra se mettre sous la forme :

$$a \times 10^n + b,$$

b désignant un nombre entier moindre que 10^n, et l'on aura

$$(a \times 10^n + b)^2 \leqq A < (a \times 10^n + b + 1)^2,$$

ou

$$a^2 \times 10^{2n} + 2ab \times 10^n + b^2 \leqq A < a^2 \times 10^{2n} + 2a(b+1) \times 10^n + (b+1)^2,$$

ou encore en retranchant de tous les membres $a^2 \times 10^{2n}$ et en désignant par R la différence $A - a^2 \times 10^{2n}$,

$$2ab \times 10^n + b^2 \leqq R < 2a(b+1) \times 10^n + (b+1)^2;$$

Si maintenant on supprime b^2 dans le premier membre et si, dans le troisième, on remplace $(b+1)^2$ par $(b+1) \times 10^n$, on ne fera qu'accentuer les inégalités et l'on aura ainsi, après avoir mis $b+1$ en facteur dans le dernier membre,

$$2a \times 10^n \times b \leqq R < (2a+1) \times 10^n \times (b+1);$$

d'où l'on tire

$$b \leqq \frac{R}{2a \times 10^n}, \qquad b+1 > \frac{R}{(2a+1) \times 10^n}.$$

Ces inégalités montrent que b est au plus égal à la partie entière de

$$\frac{R}{2a \times 10^n}$$

et au moins égal à la partie entière de

$$\frac{R}{(2a+1) \times 10^n},$$

en sorte que l'on a ainsi une limite supérieure et une limite inférieure (1) de b.

291. Le lecteur reconnaîtra aisément comment ces résultats s'appliquent dans le cas ou n est égal à un, de façon à retrouver et à compléter la règle du n° 285 ; il pourra aussi reconnaître que la différence entre les deux fractions, dont les parties entières fournissent des limites supérieure et inférieure de b, est égale à

$$\frac{R}{2a \times (2a+1) \times 10^n}$$

et moindre que $\frac{2a}{10^n}$; cette dernière conséquence résulte assez facilement de ce que l'on a $A' - a^2 < 2a + 1$.

292. Quoi qu'il en soit, supposons qu'on ait calculé d'une façon quelconque le nombre a, par exemple en appliquant la méthode ordinaire ; on aura, pour trouver les limites supérieure et inférieure de b, à diviser (au sens de la théorie des nombres entiers) R par $2a \times 10^n$ et $(2a+1) \times 10^n$; pour cela (n° 104), on divisera d'abord R par 10^n, c'est-à-dire qu'on supprimera les n derniers chiffres à droite de R ; soit R′ le résultat ; on divisera ensuite R′ par $2a$ et par $2a+1$; b sera l'un des quotients entiers ou un nombre intermédiaire. Relativement à cette division, il convient d'abord de faire une remarque, dont l'omission pourrait conduire à des erreurs grossières : b,

1. Voir l'exercice 291.

en effet, est un nombre de n chiffres, que l'on doit placer à droite de a; il peut commencer par des zéros, dont il importe de tenir compte.

Dans la division de R' par $2a$ ou par $2a+1$, le dernier chiffre du quotient (chiffre des unités simples) provient d'un dividende partiel terminé par le dernier chiffre de R', le précédent provient du dividende partiel terminé par l'avant-dernier chiffre de R', etc. ; en remontant ainsi de proche en proche, on est amené à prendre comme premier dividende partiel le nombre obtenu en supprimant les $n-1$ derniers chiffres à droite de R, ou, ce qui revient au même, le nombre obtenu en faisant suivre $A'-a^2$ du premier chiffre de B. A la vérité, dans le cas exceptionnel où $A'-a^2$ serait égal à $2a$, et dans ce cas seulement, le premier dividende partiel ainsi formé contiendrait dix fois $2a$; le quotient de R' par $2a$ comporterait donc $n+1$ chiffres et non n; dans ce cas le quotient ne pourrait être égal à b, qui ne peut avoir que n chiffres.

Les remarques du n° 112 relatives à la division d'un nombre par deux entiers consécutifs trouvent ici leur application. Supposons d'abord que $2a$ soit égal ou supérieur à 10^n; on va montrer que le quotient entier de la division de R' par $2a$ est inférieur ou égal à $2a$, il en résultera (n° 112) que ce quotient est égal ou supérieur d'une unité au quotient entier de la division de R' par $2a+1$ et que, par conséquent, il est égal à b ou à $b+1$.

Si l'on n'est pas dans le cas exceptionnel où $A'-a^2$ est égal à $2a$, le quotient entier de la division de R' par $2a$ n'a que n chiffres; il est donc inférieur à $2a$. Si l'on a $A'-a^2=2a$, ce quotient est égal à 10^n; en effet R' s'obtient en faisant suivre $A'-a^2$ ou $2a$ de n chiffres, c'est-à-dire en multipliant $2a$ par 10^n et en ajoutant un nombre moindre que 10^n, et *a fortiori* que $2a$; en divisant le résultat par $2a$ on trouvera donc bien 10^n comme quotient : et, dans ce cas encore, le quotient est inférieur ou égal à $2a$. On observera que, dans le cas exceptionnel, b est certainement égal à 10^n-1, puisqu'il ne peut avoir que n chiffres. D'où la règle suivante :

293. Soit A un nombre entier dont on veut extraire la racine carrée; supposons que, en employant la méthode ordinaire, on ait déterminé plus de la moitié des chiffres de la racine, ou que, si celle-ci commence par un 5 ou un chiffre plus fort, on en ait déterminé au moins la moitié ; soit a le nombre écrit à la racine; à la suite du reste partiel correspondant, on place les n dernières tranches de A ; on forme ainsi le nombre $R=A-a^2\times 10^{2n}$; on sépare à la droite du nombre ainsi formé n chiffres et l'on divise par $2a$ le nombre R' situé à gauche du signe de séparation ; le quotient (entier) q fournit, sauf peut-être une erreur d'une unité en trop, l'ensemble des chiffres restants.

Pour essayer ce nombre q, par un procédé tout pareil à celui du n° 285, et calculer le reste final, on pourra profiter de la division de R' par $2a$, et en particulier du *reste* de cette division, qui est égal à $R'-2a\times q$; en replaçant à droite de ce reste les n derniers chiffres de R, on forme le nombre

$$R''=R-2a\times q\times 10^n=A-a^2\times 10^{2n}-2a\times q\times 10^n,$$

et il suffit de voir si q^2 peut se retrancher de ce nombre. S'il en est ainsi, on pourra retrancher de A le carré de $a \times 10^n + q$ et l'on aura

$$R'' - q^2 = A - (a \times 10^n + q)^2;$$

q sera donc égal à b, non à $b+1$, et le reste de l'opération sera $R'' - q^2$; si la soustraction ne peut s'effectuer, b sera égal à $q-1$ et le reste de l'opération sera $R'' - (q-1)^2$.

Supposons, par exemple, qu'on veuille avoir la racine carrée de 6391723578946702; nous avons déjà calculé (n° 287) la racine de 63917235, et comme le premier chiffre de cette racine est un 7, qu'elle a quatre chiffres et que la racine cherchée en a huit, nous sommes dans le cas où la règle précédente s'applique. On devra à la suite du reste 13199 placer les huit derniers chiffres du nombre proposé, ce qui donne 131997894670 2; puis séparer quatre chiffres à droite, ce qui donne 131997894, et diviser ce nombre par $2 \times 7994 = 15988$; la division est effectuée ci-dessous:

```
131997894 | 15988          8256
127904    |------          8256
------    | 8256          ------
 40938                     49536
 31976                    41280
 -----                   16512
  89629                 66048
  79940                 --------
  -----                 68161536
   96894
   95928
   -----
     966
```

La racine cherchée est 79948256 ou 79948255. Pour avoir un résultat certain, on fera le carré de 8256; il a été effectué à droite de la division; il est 68161536, et ne peut être retranché du nombre 9666702 obtenu en replaçant à la droite du reste 966 de la division les quatre chiffres précédemment négligés; la racine est 79948255 et le reste 101401677.

294. Revenons au cas général et supposons toujours qu'on ait calculé a; nous ne supposons plus que $2a$ soit égal ou supérieur à 10^n. Si les parties entières de $\frac{R'}{2a}$ et de $\frac{R'}{2a+1}$ coïncidaient, chacune d'elles serait égale à b; si ces parties entières coïncident dans leurs premiers chiffres, on aura ainsi, sans ambiguïté, les premiers chiffres de b. Il en est ainsi tant que, en divisant R' par $2a$, les restes partiels se trouvent être supérieurs au nombre écrit au quotient (n° 112). On poussera donc la division de R' par $2a$ tant que cette condition sera vérifiée; on l'arrêtera avant qu'elle ne le soit plus [1]; on trouvera les k premiers chiffres de b_1 que l'on placera à la

1. Elle ne le sera jamais dans le cas exceptionnel où $A' - a^2$ serait égal à $2a$, puisque, alors, le premier reste partiel est nul : il résulte aisément des remarques précédentes que, dans ce cas, si l'on a $2a \geqq 10^p$, b commence par des 9 en nombre au moins égal à p.

droite de a pour former un nombre a_1 qui sera la racine du nombre A_1 que l'on obtiendrait en prenant autant de tranches à gauche de A qu'il y a de chiffres dans a_1, ou en plaçant à droite de A′ les $2k$ chiffres de A qui suivent A′; dans le calcul des k chiffres du quotient, les k derniers chiffres de A_1 n'ont pas servi; les k chiffres qui les précèdent ont été abaissés successivement pour former les dividendes partiels. A la suite du dernier reste de la division, on abaissera d'un coup les k derniers chiffres de A_1, c'est-à-dire autant de chiffres qu'on en a calculé au quotient. Du nombre ainsi formé on retranchera le carré du nombre calculé au quotient et l'on obtiendra ainsi le reste $A_1 - a_1^2$ de l'extraction de la racine carrée de A_1; on continuera en faisant jouer à A, A_1, a_1 le même rôle qu'ont joué A, A', a dans les raisonnements précédents, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait obtenu tous les chiffres de la racine. Ce procédé est très rapide. On l'a appliqué ci-dessous à deux exemples.

Pour extraire la racine carrée de 6391723578946702, on a pris dans la table des carrés les deux premiers chiffres de la racine, dont on a calculé ensuite, par la règle précédente, d'abord un chiffre, puis trois, puis deux. Pour la racine carrée de 980313476587, on a pris encore les deux premiers chiffres dans la table des carrés, une seule division a permis d'obtenir les quatre autres.

6391723578946702	79948255
6241	
1507	
1422	
852	
81	
7713	
6392	
13215	
12784	
4317	
3196	
1121894	
232324	
8895706	
7994820	
9008867	
7994820	
101404702	
3025	
101401677	

158	1598	1598964
9	482	55
	482	55
	964	275
	3856	275
	1928	3025
	232324	

98031347 6587	990107
9801	198
213	0107
198	107
1547	749
1386	107
1616587	11449
11449	
1605138	

§ 3. — Racine carrée approchée.

295. Désormais je m'interdirai de dire la racine carrée d'un nombre pour la racine carrée à une unité près par défaut : si l'on parle de la racine carrée d'un nombre, il s'agira toujours de la racine carrée exacte, que l'on supposera exister, c'est-à-dire d'un nombre dont le carré reproduit le nombre proposé.

Étant donné un nombre entier A, il est clair que ses racines carrées à une unité près, par défaut et par excès, sont les deux nombres entiers dont les carrés diffèrent de A le moins possible; mais on peut se proposer de chercher des fractions dont le carré approche davantage de A; le problème que nous posons pour les nombres entiers se pose aussi pour les fractions.

Étant donné un nombre entier ou fractionnaire A, on appelle racine carrée à une unité près par défaut de A le plus grand nombre entier dont le carré soit contenu dans A. La racine carrée à une unité près, par excès, est le plus petit nombre entier dont le carré soit supérieur à A : elle s'obtient en ajoutant une unité à la racine carrée à une unité près par défaut.

296. Pour avoir la racine carrée à une unité près par défaut de A, il suffit d'extraire la racine carrée, à une unité près par défaut, du plus grand nombre entier contenu dans A.

Le raisonnement est le même qu'aux n^{os} 284 et 290.

Si 13 est la racine carrée à une unité près par défaut de A, c'est que A contient 13^2 et ne contient pas 14^2 ; 13^2 et 14^2 sont des nombres entiers dont le premier est donc contenu dans la partie entière de A, sans que le second le soit. C'est-à-dire que 13 est la racine carrée de la partie entière de A, à une unité près, par défaut.

297. En désignant par α un nombre entier ou une fraction, on appelle racine carrée de A à α près, par défaut, le plus grand multiple de α dont le carré soit contenu dans A. On obtient la racine carrée de A à α près par défaut en extrayant la racine carrée à une unité près par défaut de la partie entière de $\frac{A}{\alpha^2}$ et en multipliant le résultat par α.

En effet, soit $n\alpha$ la racine carrée à α près par défaut de A, n étant un nombre entier inconnu ; on devra avoir, d'après la définition,

$$(n\alpha)^2 \leqq A < [(n+1)\alpha]^2,$$

ou, successivement,

$$n^2\alpha^2 \leqq A < (n+1)^2\alpha^2,$$

$$n^2 \leqq \frac{A}{\alpha^2} < (n+1)^2.$$

Ces dernières inégalités montrent que n est la racine carrée, à une unité près par défaut, de $\frac{A}{\alpha^2}$ et par conséquent la racine carrée, à une unité près par défaut, de la partie entière de $\frac{A}{\alpha^2}$.

Ce théorème, quand A est entier et quand on suppose successivement $\alpha = 10, 100, 1000, \ldots$, fournit comme cas particuliers les théorèmes des n^{os} 284, 290.

Si au contraire α est une fraction de la forme $\frac{1}{p}$, p étant un nombre entier, $\frac{A}{\alpha^2}$ sera alors égal à Ap^2, et l'on voit que la racine carrée de A, à $\frac{1}{p}$ près par défaut, s'obtient en extrayant la racine carrée de la partie entière de Ap^2, à une unité près par défaut, et en en divisant le résultat par p.

Par exemple, la racine carrée de 2, à $\frac{1}{5}$ près par défaut, s'obtiendra en extrayant la racine carrée de 50, à une unité près par défaut, ce qui donne 7 ; le nombre cherché est $\frac{7}{5}$; on trouvera de même que la racine carrée de 2, à $\frac{1}{9}$ près par défaut, est $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

298. La recherche de la racine carrée d'un nombre A à 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; ... près, par défaut, offre un grand intérêt tant au point de vue théorique qu'au point de vue pratique : pour l'effectuer, d'après la règle générale qu'on vient de donner, on multipliera A par 100, 10000, 1000000,... ; on extraira la racine carrée de la partie entière à une unité près par défaut et l'on divisera le résultat par 10, 100, 1000,...

Supposons que A soit écrit sous forme décimale ; on peut obtenir de suite les parties entières de $A \times 100$, $A \times 10000$, $A \times 1000000$, ... ; il suffira d'avancer la virgule de deux, quatre, six, ... rangs vers la droite, en complétant au besoin par des zéros la partie décimale de A. On ne conservera que la partie à gauche de la virgule : on en extraira la racine carrée à une unité près par défaut, puis on divisera cette racine par 10, 100, 1000, ..., ce qui se fait en séparant 1, 2, 3, ... chiffres décimaux.

Imaginons qu'on ait séparé la partie décimale de A en tranches de deux chiffres à partir de la virgule ; désignons ces tranches, en allant de la gauche vers la droite, sous le nom de première, seconde, troisième, ... tranche décimale : chacun des nombres que l'on forme en plaçant à droite de la partie entière de A la première, puis la seconde, puis la troisième, ... tranche décimale contient, au commencement, les mêmes chiffres que le précédent, et le nombre de dizaines de sa racine est précisément la racine carrée, à une unité près par défaut, du précédent, en sorte que si l'on veut calculer *successivement* la racine carrée de A à 1 ; 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; ... près par défaut, chaque opération servira à la suivante, et, pour cette dernière, on n'aura qu'un chiffre de plus à déterminer, ce qui se fera exactement comme on l'a expliqué au n° 285. Il semble inutile d'insister sur la disposition des calculs, qui sera suffisamment expliquée par les exemples suivants, où l'on a calculé à $\frac{1}{10^5}$ près les racines carrées de 2 et de la fraction $\frac{1}{7000}$ dont la valeur approchée à $\frac{1}{10^{10}}$ près, par défaut, est 0,0001428571. On voit que pour 2, on s'est contenté d'écrire les zéros à mesure qu'on en avait besoin. Les racines ont été calculées par la règle du n° 288.

```
     2         | 1,41421
   100         |------------------------------------------
    96         | 24    281     2824    28282    282841
  ----         |  4      1        4        2
   400           96    281    11296    56564
   281
  -----
   11900
   11296
  ------
     60400
     56564
    ------
      383600
      282841
     -------
      100759
```

```
 0,0001428571 | 0,01195
       1      |--------------------
     ---      |   21    229    2385
     042      |    1      9       5
      21          21   2061   11925
     ---
      2185
      2061
     -----
       12471
       11925
      ------
         546
```

Quand le nombre A est plus grand que un, on place, à la racine, la virgule après le dernier chiffre de la racine carrée à une unité près de la partie entière; les chiffres qui suivent sont fournis par les tranches décimales successives. Quand le nombre A est plus petit que un, on écrit d'abord un zéro à la place de la racine, puis une virgule, puis, s'il y a lieu, autant de zéros qu'il y a de tranches décimales composées de zéros; le premier chiffre significatif, à la racine, est la racine carrée à une unité près, par défaut, de la première tranche décimale qui contient au moins un chiffre significatif.

Il est à peine utile de dire que l'on peut appliquer la méthode abrégée du n° 292; par exemple, ayant la racine carrée de 2 à $\frac{1}{10^5}$ près, nous pouvons l'avoir à $\frac{1}{10^{10}}$ près (par défaut ou par excès) au moyen d'une seule division, qui est effectuée en haut de la page suivante :

```
10075900000  | 282842
 848526      |-------
-------      | 35623
 1590640
 1414210
 -------
  1764300
  1697052
  -------
    672480
    565684
    ------
   1067960
    848526
    ------
    219434
```

On est dans le cas où les chiffres ne comportent aucun doute, puisque le reste de la division est supérieur au quotient. Si l'on voulait avoir le reste, dans l'extraction de la racine carrée, il faudrait former la quantité

$$21943400000 - 35623^2.$$

On trouve 20674401871 : ce serait le reste dans l'extraction de la racine carrée de 2×10^{20}, opération dont le résultat est 1,4142135623; la racine carrée de 2 à $\frac{1}{10^{10}}$ près est 1,4142135623 et en la désignant par a, le calcul précédent montre que l'on a :

$$2 - a^2 = 0{,}0000000002067440187 1$$

299. Les racines carrées de 2 à 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001; ... près, par défaut, sont donc

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421;\ \ldots;$$

les racines carrées de 2 à 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001; ... près, par excès, seront

$$2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ 1{,}4143;\ 1{,}41422;\ \ldots.$$

On voit manifestement que les nombres que l'on obtient en extrayant la racine carrée d'un nombre quelconque A à 1; 0,1; 0,01; 0,001; ... près, par défaut, vont en augmentant, ou plutôt ne vont jamais en diminuant. Au contraire, les nombres que l'on obtient en extrayant la racine carrée de A à 1; 0,1; 0,01; 0,001; ... près, par excès, vont en diminuant, ou plutôt n'augmentent jamais; le raisonnement est le même qu'au n° 250.

Les deux suites correspondantes

$$1;\ 1,4;\ 1,41;\ 1,414;\ 1,4142;\ 1,41421;\ \ldots,$$
$$2;\ 1,5;\ 1,42;\ 1,415;\ 1,4143;\ 1,41422;\ \ldots$$

peuvent être poursuivies indéfiniment; tous les termes de la première suite, qui vont en augmentant à mesure qu'on s'avance davantage, sont plus petits qu'un terme quelconque de la seconde suite; tous les termes de la seconde suite, qui vont en diminuant à mesure qu'on s'avance davantage, sont plus grands que les termes de la première suite; la différence entre deux termes de même rang, qui est successivement 1; 0,1; 0,01; 0,001; ..., va en diminuant, et cette différence diminue indéfiniment quand on s'avance indéfiniment dans les deux suites.

On touche ici à la définition de la racine carrée *exacte* de 2; mais je réserve pour un autre chapitre cette définition, qui n'est pas sans difficulté. Je me contenterai de remarquer que la considération de ces deux suites résout le problème posé au n° 295 : trouver des nombres dont le carré diffère de 2 aussi peu qu'on le veut; d'après les opérations du n° 298, les différences entre 2 et les carrés des nombres 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421 sont respectivement 1; 0,04; 0,0119; 0,000604; 0,00003836; 0,0000100759; elles diminuent assez rapidement; les racines carrées à 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; ... près, par excès, donneraient lieu à des observations analogues. Ce résultat est général.

300. En effet, les racines carrées de A à α près, par défaut et par excès, sont des nombres $n\alpha$, $(n+1)\alpha$ tels que l'entier n satisfasse aux inégalités

$$n^2 \leqq \frac{A}{\alpha^2} < (n+1)^2;$$

le nombre A étant compris entre $(n\alpha)^2$ et $[(n+1)\alpha]^2$, sa différence avec l'un ou l'autre de ces deux nombres est moindre que

$$(n+1)^2\alpha^2 - n^2\alpha^2 = [(n+1)^2 - n^2]\alpha^2 = (2n+1)\alpha^2 = (2n\alpha+\alpha)\alpha.$$

Si l'on désigne par B un nombre fixe quelconque, dont le carré soit supérieur à A, on aura

$$n^2\alpha^2 \leqq A < B^2,$$

et, par suite,

$$n\alpha < B;$$

si donc α est plus petit que un, on aura

$$2n\alpha + \alpha < 2B + 1,$$

et la différence entre A et le carré de l'une ou de l'autre de ses racines carrées à α près, par défaut ou par excès, sera moindre que $(2B + 1)\alpha$, quantité qui peut être rendue aussi petite qu'on le veut, en prenant α suffisamment petit. Il existe donc des nombres dont les carrés sont respectivement plus petits et plus grands que A et qui diffèrent de A aussi peu qu'on le voudra. On trouvera en particulier de tels nombres en prenant $\alpha = \frac{1}{10^n}$ et n suffisamment grand. C'est ce que l'on exprime en disant que la différence entre A et le carré de sa racine carrée à α près, par défaut ou par excès, a pour limite zéro quand α diminue indéfiniment. En particulier, si l'on forme la suite indéfinie des racines carrées de A, approchées par défaut à 1 ; 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; ... près, puis la suite des carrés de ces nombres, on pourra dire que les termes de cette dernière suite ont pour limite A quand leur rang augmente indéfiniment (nº 238).

301. Quoique la différence entre A et le carré de sa racine carrée par défaut $n\alpha$, à α près, diminue indéfiniment quand α diminue indéfiniment, cette différence ne décroît pas toujours quand α décroît. Ainsi les racines carrées de 2 à $\frac{1}{5}$ et à $\frac{1}{9}$ près, par défaut, sont respectivement $\frac{7}{5}$ et $\frac{4}{3}$, ou $\frac{21}{15}$ et $\frac{20}{15}$; la seconde est plus petite que la première, et par conséquent on a

$$2 - \left(\frac{7}{5}\right)^2 < 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2.$$

Cette circonstance ne peut se présenter (nº 299) quand on prend les racines carrées de A à une unité, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^3}$, ... près, par défaut : les nombres ainsi formés ne vont jamais en diminuant : plus généralement on pourrait démontrer que si l'on a, en désignant par p un nombre entier, plus grand que un,

$$\beta = \frac{\alpha}{p},$$

la racine carrée de A à β près, par défaut, est au moins égale à la racine carrée de A à α près, par défaut.

§ 4. — Racine carrée approchée d'un nombre dont on ne connaît qu'une valeur approchée.

302. Dans ce qui précède, on a donné un moyen de trouver des nombres dont le carré approche autant qu'on veut d'un nombre A, et l'on a défini la racine carrée de A à α près, par défaut ou par excès. Il est tout naturel d'étendre un peu cette notion : cette extension, il est vrai, se présenterait d'elle-même si l'on avait défini la racine carrée exacte d'un nombre A dans tous les cas.

Les indications suivantes, qui suffisent pour les calculs pratiques, sont légitimes sans cette définition.

On dit qu'un nombre a est une valeur approchée de la racine carrée de A, par défaut, *avec une erreur moindre que* α, si l'on a

$$a^2 < A < (a+\alpha)^2;$$

les mots « valeur approchée de la racine » signifient seulement ici solution du problème qui consiste à trouver des nombres dont le carré approche de A.

On dit de même qu'un nombre b est une valeur approchée de la racine carrée de A, par excès, *avec une erreur moindre que* α, si l'on a

$$(b-\alpha)^2 < A < b^2.$$

Si l'on a

$$a^2 < A < b^2,$$

on pourra donc dire que a et b sont des valeurs approchées de la racine carrée de A, avec une erreur moindre que $b-a$.

Si a est une valeur approchée de la racine carrée de A, par défaut, avec une erreur moindre que α, tout nombre $a-\beta$, plus petit que a, sera une valeur approchée par défaut de cette racine, avec une erreur moindre que $\alpha+\beta$, puisque l'on aura

$$(a-\beta)^2 < A < [(a-\beta)+(\alpha+\beta)]^2;$$

tout nombre $a+\gamma$ plus grand que a sera une valeur approchée par défaut, avec une erreur moindre que $\alpha-\gamma$, si son carré est inférieur à A, ou une valeur approchée par excès, avec une erreur moindre que γ, si son carré est supérieur à A ; car on a, dans le premier cas,

$$a^2 < (a+\gamma)^2 < A < (a+\alpha)^2,$$

et, dans le second,

$$a^2 < A < (a+\gamma)^2.$$

Dans tous les cas, $a+\gamma$ est une valeur approchée de la racine de A avec une erreur moindre que le plus grand des nombres α, γ. Des remarques analogues s'appliquent aux valeurs approchées par excès.

303. Si a est une valeur approchée de A, par défaut, avec une erreur moindre que α, on a

$$A - a^2 < 2a\alpha + \alpha^2;$$

ainsi, le carré de a diffère de A d'une quantité moindre que $\alpha(2a+\alpha)$. Cette quantité est une limite de l'approximation avec laquelle on a résolu le problème « trouver des nombres dont le carré approche de A ». On a souvent besoin d'évaluer grossièrement cette limite; pour cela, on remplace $2a+\alpha$ par un nombre simple qui lui soit notoirement supérieur, par exemple par le nombre obtenu en forçant le premier chiffre de $2a+\alpha$ et en le faisant suivre d'assez de zéros pour lui conserver sa valeur relative. Si α est petit par rapport à a, on n'aura pas, habituellement, à tenir compte de α pour trouver ce premier chiffre.

Ainsi, on sait que 1,414 est une valeur approchée de la racine carrée de 2 avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^3}$; la différence $2-(1,414)^2$ est moindre que $\frac{1}{10^3} \times (3+1) = \frac{4}{10^3}$.

De même si b est une valeur approchée de la racine carrée de A, par excès, avec une erreur moindre que α, on aura

$$b^2 - A < 2b\alpha - \alpha^2 < 2b\alpha;$$

d'où une règle analogue.

304. Inversement, supposons que le carré d'un nombre a soit inférieur à A et en diffère d'une quantité moindre que ε; il est aisé de trouver une limite de l'erreur avec laquelle a approche de la racine carrée de A. On a en effet

$$\left(a + \frac{\varepsilon}{2a}\right)^2 = a^2 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4a^2} > A,$$

puisque, par hypothèse, $a^2+\varepsilon$ est déjà plus grand que A; donc a est une valeur approchée de la racine carrée de A avec une erreur moindre que $\frac{\varepsilon}{2a}$. Des observations analogues s'appliqueraient aux valeurs approchées par excès. Ce qui précède montre comment les nombres dont les carrés approchent beaucoup de A sont très voisins les uns des autres.

305. Supposons enfin que le nombre A ne soit pas exactement connu et que l'on en ait seulement une valeur approchée A′, par défaut, avec une erreur moindre que ε : A est compris entre A′ et $A' + \varepsilon$.

Imaginons qu'on ait calculé une valeur approchée a de la racine carrée de A′, par défaut, avec une erreur moindre que α, a sera une valeur approchée de la racine carrée de A avec une erreur moindre que $\alpha + \frac{\varepsilon}{2a}$; on a en effet

$$\left(a + \alpha + \frac{\varepsilon}{2a}\right)^2 = (a + \alpha)^2 + (a + \alpha)\frac{\varepsilon}{a} + \frac{\varepsilon^2}{4a^2}$$

et le second membre est plus grand que $A' + \varepsilon$, puisque $(a + \alpha)^2$ est plus grand que A′ et que $\frac{a + \alpha}{a}\varepsilon$ est plus grand que ε; ce second membre est donc, *a fortiori*, plus grand que A. Comme A est compris entre a^2 et $\left(a + \alpha + \frac{\varepsilon}{2a}\right)^2$, on peut affirmer que a est une valeur approchée par défaut de la racine carrée de A avec une erreur moindre que $\alpha + \frac{\varepsilon}{2a}$; si l'on n'a besoin que d'une évaluation grossière de cette erreur, on pourra remplacer dans l'expression $\alpha + \frac{\varepsilon}{2a}$, a par tel nombre plus petit que a que l'on voudra, par exemple par son premier chiffre significatif, en lui conservant sa valeur relative.

Cette formule permet de résoudre la question suivante :

306. Supposons que le nombre A ne soit pas donné directement, mais doive résulter de calculs qui permettent de l'obtenir avec telle approximation que l'on veut : jusqu'où devra-t-on pousser l'approximation pour obtenir une valeur approchée de sa racine carrée avec une erreur moindre qu'un nombre donné η ?

Supposons qu'on ait calculé une valeur A′ approchée par défaut de A, avec une erreur moindre que ε, puis une valeur approchée a, par défaut, de la racine carrée de A′ avec une erreur moindre que α; a pourra être regardé comme une valeur approchée par défaut de la racine carrée de A, avec une erreur moindre que η, si l'on a

$$\alpha + \frac{\varepsilon}{2a} < \eta.$$

On commencera par calculer grossièrement un nombre qui soit certainement moindre que a (il suffira, par exemple, de connaître le premier chiffre de a), et l'on remplacera dans l'inégalité précédente a par ce nombre, puis on déterminera α et ε de manière à vérifier l'inégalité. Il est clair qu'il suffira de prendre $\varepsilon < 2a\eta$; on déterminera ensuite α par la condition $\alpha < \eta - \frac{\varepsilon}{2a}$, ce qui est toujours possible puisque l'on peut prendre α aussi petit qu'on le veut.

Une discussion assez facile permettrait de déduire de là le résultat suivant, qui peut être utile dans la pratique : quand on connaît un nombre avec n chiffres exacts, on peut calculer sa racine avec $n-1$ chiffres exacts, sauf une erreur possible de 2 unités du dernier ordre.

§ 5. — Cubes; racine cubique. Puissance $m^{\text{ième}}$; racine $m^{\text{ième}}$.

307. Les détails dans lesquels nous sommes entrés pour les carrés, la racine carrée, nous permettront d'aller plus vite pour ce qui concerne les cubes, la racine cubique, les $m^{\text{ièmes}}$ puissances, la recherche de racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre.

La puissance $m^{\text{ième}}$ d'un nombre est le produit de m facteurs égaux à ce nombre. La puissance $m^{\text{ième}}$ d'une fraction est une fraction dont les termes sont les $m^{\text{ièmes}}$ puissances des termes de la fraction proposée : si cette dernière est irréductible, il en est de même de sa $m^{\text{ième}}$ puissance, formée par la règle précédente. Celle-ci, en particulier, ne peut être un nombre entier.

Si l'on a $A > B$, on a $A^m > B^m$; en effet, A^m est le produit de m facteurs respectivement plus grands que les m facteurs dont se compose B^m ; réciproquement, si l'on a $A^m > B^m$, on a certainement $A > B$.

La racine $m^{\text{ième}}$ (exacte) d'un nombre A est un nombre dont la $m^{\text{ième}}$ puissance est égale à A. Si ce nombre existe, il est unique. Si A est entier et s'il n'est pas la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un nombre entier, il n'est pas non plus la puissance $m^{\text{ième}}$ d'une fraction; il n'admet pas de racine $m^{\text{ième}}$ exacte. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction irréductible admette une racine $m^{\text{ième}}$ exacte est que ses termes soient les puissances $m^{\text{ièmes}}$ de nombres entiers.

La puissance $m^{\text{ième}}$ d'un nombre terminé par p zéros s'obtient en faisant suivre de mp zéros la puissance $m^{\text{ième}}$ de ce nombre, abstraction faite de ses zéros.

308. La racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre entier ou fractionnaire A, à une unité près par défaut, est le plus grand nombre entier dont la puissance $m^{\text{ième}}$ soit égale ou inférieure à A. La racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre A, à une unité près par excès, est le plus petit nombre entier dont la puissance $m^{\text{ième}}$ soit supérieure à A.

Il suffit, pour obtenir la racine $m^{\text{ième}}$ à une unité près par défaut de A, d'extraire la racine $m^{\text{ième}}$, à une unité près par défaut, de la partie entière de A. S'il s'agit, par exemple, de la racine cubique et si la racine cubique de A, à une unité près par défaut, est 13, c'est que A contient 13^3 et ne contient pas 14^3; donc la partie entière de A contient 13^3 et ne contient pas 14^3; donc 13 est la racine cubique, à une unité près, de la partie entière de A.

La racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre entier ou fractionnaire à α près, par défaut, est le plus grand multiple de α dont la $m^{\text{ième}}$ puissance soit inférieure ou égale à A :

Si l'on désigne par $n\alpha$ cette racine, elle est déterminée par les inégalités

$$(n\alpha)^m \leqq A < [(n+1)\,\alpha]^m$$

ou

$$n^m \leqq \frac{A}{\alpha^m} < (n+1)^m$$

qui montrent que n est la racine $m^{\text{ième}}$, à une unité près par défaut, de $\frac{A}{\alpha^m}$, ou, si l'on veut, de la partie entière de $\frac{A}{\alpha^m}$. La recherche de la racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre avec une approximation donnée est donc ramenée à la recherche de la racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre entier, à une unité près par défaut.

309. *Cubes et racines cubiques.* — Entrons dans quelques détails pour ce qui concerne les cubes et les racines cubiques de nombres entiers. Jusqu'au numéro 317, je dirai racine cubique d'un nombre entier pour désigner soit sa racine cubique exacte si elle existe, soit sa racine cubique à une unité près par défaut.

Le cube d'une somme $a+b$ s'obtient en multipliant le carré $a^2+2ab+b^2$ par $a+b$, ce qui se fait en multipliant successivement ce carré par a et par b, et en ajoutant; on trouve ainsi

$$\begin{array}{l} a^3+2a^2b+\ \ ab^2 \\ \qquad +\ \ a^2b+2ab^2+b^3 \end{array}$$

et par conséquent

$$(1) \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

on trouve de même

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

En supposant $b=1$ dans l'égalité (1), on trouve

$$(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$

ou

$$(a+1)^3 - a^3 = 3a^2 + 3a + 1.$$

310. Cette dernière égalité permet de construire aisément une table des cubes des nombres entiers, de 1 à 99 par exemple : en effet, la table II permet, au moyen de calculs très simples, de former les valeurs de $3a^2+3a+1$ quand on y remplace successivement a par 1, 2, 3, 4, ... On a inscrit dans la ligne suivante les valeurs de $3a^2+3a+1$ pour les neuf premiers nombres :

	7	19	37	61	91	127	169	217	271
1	2	3	4	5	6	7	8	9;	

au-dessous on a écrit les neuf premiers nombres en les avançant d'un rang, de façon que chacune des valeurs de $3a^2+3a+1$ corresponde, non au terme de la suite naturelle qui est écrit au-dessous de lui, mais au terme qui le précède immédiatement.

Le cube de 1 est 1 ; le cube du nombre suivant 2 s'obtiendra en ajoutant à 1 la valeur de $3a^2+3a+1$ pour $a=1$, c'est-à-dire 7 ; le cube de 2 est 8. Le cube du nombre suivant 3 s'obtient en ajoutant à 8 la valeur de $3a^2+3a+1$ pour $a=2$, c'est-à-dire 19 ; le cube de 3 est 27 ; le cube de 4 s'obtient en ajoutant 37 à 27 ; c'est 64, etc.... On pourra ainsi former successivement une table des cubes allant de 1 à n, n étant un entier quelconque.

311. Le procédé suivant nous fournit en passant une expression remarquable de la somme des carrés des n premiers nombres. Il met en effet en évidence la proposition suivante : le cube de $n+1$ peut s'obtenir en ajoutant à 1 successivement les valeurs que prend l'expression $3a^2+3a+1$ quand on remplace a par 1, 2, 3, ... n : or cette somme est manifestement égale à $3S_2+3S_1+n$, en désignant par S_1 la somme des n premiers nombres et par S_2 la somme de leurs carrés; en se rappelant (n° 70) que S_1 est égal à $\frac{n(n+1)}{2}$, on en conclut

$$3S_2+3\frac{n(n+1)}{2}+n+1=(n+1)^3,$$

d'où l'on tire en multipliant par 2

$$6S_2+3n(n+1)+2(n+1)=2(n+1)^3$$

ou

$$\begin{aligned}6S_2&=2(n+1)^3-3n(n+1)-2(n+1)\\&=(n+1)[2(n+1)^2-3n-2]\\&=(n+1)(2n^2+n),\end{aligned}$$

et finalement

$$S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Par exemple, la somme des carrés des 99 premiers nombres est égale à

$$\frac{99\times 100\times 199}{6}=33\times 50\times 199=328350,$$

ce qui donnerait un moyen de vérifier la table II.

Le lecteur pourra étendre ce procédé : il verra comment de la table des cubes on pourrait passer à la table des quatrièmes puissances, et comment la construction de cette table permettrait de trouver une expression simple de la somme des cubes des n premiers nombres [1], à savoir $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Quoi qu'il en soit, la table III, que l'on trouvera à la fin du volume, donne les cubes des 99 premiers nombres; elle met en évidence la façon très rapide dont croissent ces cubes.

1. L'égalité signalée dans l'exercice 55 fournit un autre moyen, un peu plus rapide, de parvenir à ces résultats; en y supposant, par exemple, $p=3$ et en y remplaçant n par $n-1$, elle donne

$$n(n+1)(n+2)=3[1.2+2.3+\ldots+n(n+1)];$$

or la quantité entre crochets, dans le second membre, n'est autre chose que

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+\ldots+n^2\\&+1+2+\ldots+n,\end{aligned}$$

c'est-à-dire S_2+S_1, d'où un moyen pour calculer S_2; de même, en supposant $p=4$, on obtiendrait la somme des cubes des n premiers nombres.

312. Arrivons à la recherche de la racine cubique d'un nombre entier.

Si ce nombre entier est inférieur à $100^3 = 1000000$, la table III permettra de l'obtenir immédiatement. Toutefois, il est aisé de montrer que, connaissant seulement les cubes des neuf premiers nombres, on peut obtenir successivement, par une suite d'opérations régulières, tous les chiffres de la racine cubique d'un nombre, quelque grand qu'il soit.

313. Pour obtenir le nombre de dizaines, de centaines, de mille, ... de la racine cubique d'un nombre entier A, il suffit de séparer 3, 6, 9, ... chiffres à la droite de A et d'extraire la racine cubique du nombre placé à gauche du signe de séparation.

Chercher en général combien de fois la racine cubique de A contient 10^n, c'est chercher la racine cubique de A à 10^n près, par défaut; pour cela, il faut (n° 308) diviser A par $(10^n)^3 = 10^{3n}$, et chercher la racine cubique de la partie entière du quotient à une unité près par défaut. Or cette partie entière du quotient s'obtient en supprimant $3n$ chiffres à la gauche de A. Le théorème est donc démontré.

314. En supposant qu'on ait séparé ainsi $3n$ chiffres à gauche de A, désignons par B la partie de A qui est à droite du signe de séparation, par A′ le nombre qui est à gauche, on aura

$$A = A' \times 10^{3n} + B;$$

désignons par a la racine cubique de A′; la racine cubique de A pourra se mettre sous la forme

$$a \times 10^n + b,$$

b étant un nombre entier moindre que 10^n, et l'on aura

$$(a \times 10^n + b)^3 \leqq A < (a \times 10^n + b + 1)^3.$$

En retranchant $a^3 \times 10^{3n}$ des trois membres de cette inégalité et en désignant par R la différence $A - a^3 \times 10^{3n}$, on trouve successivement

$$3\,a^2\,b \times 10^{2n} + 3\,a\,b^2 \times 10^n + b^3 \leqq R,$$

d'où

$$3a^2b \times 10^{2n} \leqq R\ (^1),$$

1. L'égalité ne peut avoir lieu que si l'on a $b = 0$, $R = 0$.

puis

$$R < 3a^2(b+1)\times 10^{2n} + 3a(b+1)^2 \times 10^n + (b+1)^3;$$

or, puisque $b+1$ est au plus égal à 10^n, on ne peut qu'accentuer l'inégalité en remplaçant respectivement $(b+1)^2$ et $(b+1)^3$ par $(b+1)\times 10^n$ et $(b+1)\times 10^{2n}$; on aura donc

$$R < (3a^2+3a+1)(b+1)\times 10^{2n}.$$

Finalement, on parvient aux deux inégalités

$$b \leqq \frac{R}{3a^2 \times 10^{2n}}, \qquad b+1 > \frac{R}{(3a^2+3a+1)\,10^{2n}},$$

qui montrent que les parties entières des deux fractions sont des limites supérieure et inférieure de b.

Si l'on a calculé a, R s'obtient facilement : il suffira de former $A' - a^3$, puis d'écrire à la suite de cette différence les $3n$ chiffres de B. Quant aux parties entières des deux fractions, on les obtiendra en divisant R par 10^{2n} (ce qui se fait en supprimant les $2n$ derniers chiffres de R) et en divisant ensuite le nombre restant par $3a^2$ ou $3a^2+3a+1$; on obtiendra ainsi des quotients entiers b', b''. La racine cubique de A sera $a\times 10^n + b'$, $a\times 10^n + b''$ ou un nombre intermédiaire. On essaie habituellement les nombres en commençant par le plus fort, dont on fait le cube : si ce cube peut se retrancher de A, le premier nombre essayé est la racine cherchée ; si la soustraction est impossible, on diminue le nombre à essayer d'une unité et on essaie de la même façon le nouveau nombre, etc.; en procédant de cette façon, il n'est pas nécessaire de calculer la limite inférieure $a\times 10^n + b''$.

Lorsque l'on essaie au hasard un nombre $r = a\times 10^n + \beta$, où β est, par exemple, un nombre compris entre b' et b'', on sera assuré que r est bien la racine cubique cherchée si l'on a à la fois

$$r^3 \leqq A, \qquad A - r^3 < 3r^2 + 3r + 1.$$

Enfin, au lieu de comparer $(a\times 10^n + \beta)^3$ à A, on peut profiter de ce que l'on a déjà calculé $A - a^3 \times 10^{3n} = R$ et comparer le nombre R à $3a^2\beta\times 10^{2n} + 3a\beta^2\times 10^n + \beta^3$.

Les règles précédentes s'appliquent particulièrement en supposant $n = 1$: elles permettent de calculer le chiffre des unités d'une racine cubique quand on connaît les dizaines de la racine, et l'on peut obtenir successivement les chiffres d'une racine cubique quelconque par le procédé régulier qui suit.

315. On séparera A à partir de la droite en tranches de trois chiffres : la tranche extrême de gauche aura un, deux ou trois chiffres; comptons désormais les tranches, au contraire, en allant de gauche à droite.

On calculera successivement les racines cubiques des nombres formés par la première tranche, par l'ensemble des deux premières tranches, par l'ensemble des trois premières tranches, etc...; on calculera aussi les restes partiels relatifs à chaque opération. La première opération se fera en extrayant la racine cubique d'un nombre moindre que 1000, racine cubique qui n'a qu'un chiffre : cette opération suppose que l'on sache les cubes des neuf premiers nombres; la recherche des racines cubiques des nombres formés par les deux, trois,... premières tranches, revient chaque fois à l'extraction de la racine cubique d'un nombre entier connaissant les dizaines de cette racine; ce nombre de dizaines est fourni par l'opération précédente. Pour obtenir le chiffre des unités, on procède comme il suit : on abaisse à la suite du reste partiel correspondant à l'opération précédente la tranche qui suit celle qu'on vient d'employer; on sépare deux chiffres à droite et l'on divise le nombre à gauche du signe de séparation par trois fois le carré du nombre obtenu à la racine; le chiffre obtenu au quotient est le chiffre cherché ou un chiffre trop fort; on peut, si l'on veut, calculer aussi une limite inférieure. On essaie le nombre trouvé en en comparant directement le cube au nombre partiel dont on veut obtenir la racine, ou par les procédés qui ont été expliqués plus haut; quand on a le chiffre cherché, on calcule le reste partiel et l'on continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les tranches du nombre proposé.

Le nombre des chiffres de la racine est le nombre de tranches du nombre proposé.

Si le nombre proposé n'a pas plus de neuf chiffres, la table III permet d'obtenir de suite le nombre de dizaines de la racine et l'on n'a qu'un chiffre à déterminer. Au reste, quand on a à extraire la racine cubique d'un grand nombre, les deux tables II et III peuvent rendre de grands services, et les remarques du n° 314 permettent d'abréger notablement les calculs : je me contenterai d'expliquer les choses sur un exemple.

316. Supposons qu'on veuille extraire la racine cubique du nombre

$$A = 587243198756432824112;$$

elle a 7 chiffres : les deux premiers s'obtiennent en extrayant la racine cubique de 587243, qui est fournie par la table des cubes, elle est 83, et le reste correspondant est

$$587243 - 571787 = 15456.$$

La racine cubique de A est donc de la forme $a \times 10^5 + b$, en supposant $a = 83$ et en désignant par b un nombre inconnu de 5 chiffres. On a d'ailleurs

$$A - (a \times 10^5)^3 = 15456198756432824112.$$

On doit pour obtenir b séparer 10 chiffres à droite de ce reste, ce qui donne 1545619875, puis diviser ce nombre par $3a^2$ et $3a^2 + 3a + 1$. Ces deux nombres se calculent aisément au moyen de la table II; on trouve

$$3a^2 = 20667,$$
$$3a^2 + 3a + 1 = 20917.$$

On fait les deux divisions simultanément, en s'arrêtant dès que les résultats diffèrent : on trouve respectivement 74 et 73 pour les deux premiers chiffres du quotient; l'un des deux nombres 8373, 8374 est la racine cubique de 587243198756. Essayons 8374; en le regardant comme la somme de 8300 et de 74, son cube s'obtient facilement par les tables; on a déjà la différence entre 587243198756 et $83^3 \times 100^3$; elle est 15456198756; il ne reste plus qu'à en retrancher, s'il est possible, le nombre

$$3 \times 83^2 \times 74 \times 100^2 + 3 \times 83 \times 74^2 \times 100 + 74^3 = 15430337624;$$

la soustraction peut s'effectuer, et le résultat est 25861132; c'est le reste dans l'extraction de la racine cubique de 587243198756, et cette racine cubique est 8374.

La racine cubique de A est donc de la forme $a' \times 1000 + b'$, en représentant 8374 par a' et en désignant par b' un nombre moindre que 1000. Pour déterminer b', on formera, d'après les calculs antérieurs :

$$A - (a' \times 1000)^3 = 25861132432824112;$$

on supprimera six chiffres à droite et l'on divisera le nombre trouvé : 25861132432 par $3a'^2$ et $3a'^2 + 3a' + 1$. Ces deux nombres se calculent facilement, et l'on trouve

$$3a'^2 = 210371628,$$
$$3a'^2 + 3a' + 1 = 210396751.$$

on divise 25861132432 respectivement par ces deux nombres; les deux quotients sont égaux à 122 et la racine cherchée est 8374122. En somme, la recherche de la racine cubique d'un très grand nombre, tel qu'on n'en rencontre assurément pas dans la pratique, n'est pas une opération aussi longue qu'on pourrait le croire.

317. En raison de la façon très rapide dont les cubes des nombres entiers croissent, les derniers chiffres d'un nombre influent peu sur la racine cubique; ainsi, en prenant à la vérité des exemples très favorables, la table III montre qu'il suffit de savoir que le premier chiffre d'un nombre de six chiffres est un 9 pour être sûr que sa racine cubique est 97, 98 ou 99; la racine cubique d'un nombre de six chiffres dont les premiers chiffres sont 92 ou 93, est certainement 97.

318. Pour extraire la racine cubique d'un nombre A écrit sous la forme décimale, à $\frac{1}{10^n}$ près, par défaut, on le multiplie par 10^{3n}, ce qui se fait en avançant la virgule de $3n$ rangs vers la droite; on extrait la racine cubique à une unité près par défaut, et l'on sépare n chiffres décimaux. Cette opération donnerait lieu à des observations analogues à celles que l'on a faites avec détail pour la racine carrée; je n'y reviendrai pas, non plus que sur les définitions concernant les valeurs approchées de la racine avec une erreur moindre qu'un nombre donné.

319. La recherche de la racine $p^{\text{ième}}$ (à une unité près par défaut) d'un nombre entier A se fait par la même méthode que la recherche des racines carrée et cubique.

En séparant pn chiffres à la droite de A, on le met sous la forme

$$A = A'10^{pn} + B,$$

où B est inférieur à 10^{pn}; si on désigne par a la racine $p^{\text{ième}}$ de A′, la racine $p^{\text{ième}}$ de A pourra se mettre sous la forme $a \times 10^n + b$, b étant un nombre moindre que 10^n, et il est clair que le problème pourra être regardé comme résolu, si l'on sait trouver b connaissant a. La solution de la question analogue pour les racines carrée et cubique a été obtenue en partant de l'expression du carré et du cube d'une somme. L'expression analogue (1), pour la puissance $p^{\text{ième}}$ d'une somme (formule du binome), qu'il conviendrait d'employer maintenant, n'est pas d'ordre élémentaire; le lecteur, familier avec l'algèbre, verra de suite le parti qu'on peut tirer de cette formule; on peut lui substituer l'identité plus simple (n° 88)

$$x^p - y^p = (x - y)(x^{p-1} + x^{p-2}y + x^{p-3}y^2 + \dots + y^{p-1}),$$

1. Elle résulte aisément de l'exercice 106.

d'où l'on déduit sans peine, en remplaçant x par $\alpha+\beta$ et y par α, les inégalités

$$(\alpha+\beta)^p-\alpha^p \geqq p\,\alpha^{p-1}\beta,$$
$$(\alpha+\beta)^p-\alpha^p \leqq p(\alpha+\beta)^{p-1}\beta,$$
$$\alpha^p+p\alpha^{p-1}\beta \leqq (\alpha+\beta)^p \leqq \alpha^p+p(\alpha+\beta)^{p-1}\beta;$$

de ces dernières inégalités, il serait aisé de conclure, en reprenant les notations du commencement de ce numéro, que, si le nombre $a\times 10^n+b$ est la racine $p^{\text{ième}}$ de $A=A'\times 10^{3n}+B$, on a

$$b \leqq \frac{R}{pa^{p-1}\times 10^{n(p-1)}},$$
$$b+1 > \frac{R}{p(a+1)^{p-1}\times 10^{n(p-1)}},$$

en désignant par R le nombre $A-a^p\times 10^{np}$; ces deux formules, qui fournissent des limites supérieure et inférieure de b, permettront, au moyen de quelques tâtonnements, de calculer ce nombre si l'on a calculé a.

320. Je me contenterai d'attirer l'attention du lecteur sur le résultat que voici.

Soit $n\alpha$ la racine $p^{\text{ième}}$, à α près, par défaut, du nombre A; n est un nombre entier défini par les inégalités

$$n^p\alpha^p \leqq A < (n+1)^p\alpha^p$$

et que l'on obtient par conséquent, en vertu de raisonnements pareils à ceux du n° 308 en extrayant la racine $p^{\text{ième}}$, à une unité près, de la partie entière du nombre $\frac{A}{\alpha^p}\cdot$

La différence entre A et la puissance $p^{\text{ième}}$ de l'une ou l'autre de ses racines $p^{\text{ièmes}}$, approchées à α près, par excès ou par défaut, sera moindre que

$$(n+1)^p\alpha^p-n^p\alpha^p=\alpha^p\left[(n+1)^p-n^p\right];$$

or on a, en vertu d'une inégalité signalée plus haut,

$$(n+1)^p-n^p < p(n+1)^{p-1},$$

donc la différence considérée est moindre que

$$\alpha p\,\alpha^{p-1}(n+1)^{p-1}=\alpha\,p\,(n\alpha+\alpha)^{p-1}.$$

Si l'on désigne par B un nombre fixe quelconque dont la puissance $p^{\text{ième}}$ soit supérieure à A, on aura certainement $n\alpha < B$, et si l'on suppose que α soit plus petit que un, on voit que la différence considérée sera moindre que

$$\alpha p\,(B+1)^{p-1},$$

quantité qui, en prenant α assez petit, peut être rendue aussi petite qu'on le veut. Par exemple, si l'on veut avoir des nombres dont la puissance $5^{\text{ième}}$ diffère de 2 de moins que $\frac{1}{10^7}$, on pourra prendre $B=\frac{5}{4}$ et déterminer α par l'inégalité

$$5\times\left(\frac{9}{4}\right)^4\alpha<\frac{1}{10^7};$$

on satisfera à cette inégalité en prenant $\alpha=\frac{1}{2}\times\frac{1}{10^9}$.

On voit ainsi, d'une part, qu'il existe des nombres dont les puissances $p^{\text{ièmes}}$ sont inférieures ou supérieures à A et qui en diffèrent d'aussi peu qu'on le veut; d'autre part, que si l'on forme la suite des racines $p^{\text{ièmes}}$ de A approchées à 1; 0,1; 0,01; 0,001; ... près, par défaut, et que l'on imagine que cette suite soit prolongée indéfiniment, puis que l'on forme la suite analogue pour les racines $p^{\text{ièmes}}$ approchées par excès, avec les mêmes degrés d'approximation, les termes de la première suite iront en croissant à mesure qu'on s'avance, les termes de la seconde suite en décroissant, chaque terme de la première suite est moindre qu'un terme quelconque de la seconde; enfin si on forme les puissances $p^{\text{ièmes}}$ des termes d'une suite ou de l'autre, les termes de la nouvelle suite ainsi formée auront pour limite A, quand on s'avance indéfiniment.

Exercices.

225. Extraire la racine carrée du nombre

12315678987654321.

226. Si le carré d'un nombre entier est divisible par un nombre premier p, il est aussi divisible par p^2.

227. Si le carré du nombre entier a divise le carré du nombre entier b, a divise b.

Si les nombres entiers a, b sont premiers entre eux, le produit de ces nombres ne peut être un carré, s'ils ne sont pas eux-mêmes des carrés.

Si la fraction $\frac{a}{b}$ à termes entiers est le carré d'une fraction, le produit ab est un carré.

228. Si a et b sont des nombres entiers premiers entre eux, a^2-b^2 ne peut être un carré parfait que si chacun des nombres $a-b$, $a+b$ est un carré, ou le double d'un carré.

229. Si un nombre entier est terminé par un des chiffres 2, 3, 7, 8, ce nombre n'est pas un carré parfait.

230. Si le produit de deux nombres entiers est un carré, le quotient de chacun de ces deux nombres par leur plus grand commun diviseur est un carré.

231. Si la somme de deux nombres entiers est terminée par un zéro, leurs carrés sont terminés par le même chiffre.

232. Le carré d'un nombre entier terminé par 5 peut-il être terminé par 125 ?

233. La somme des carrés de deux nombres entiers premiers entre eux, divisée par 4, donne pour reste 1 ou 2.

234. Si a est un nombre entier, la racine carrée approchée par défaut de a^2+1 à $\frac{1}{(4a^2+1)^2}$ près est $a+\frac{2a}{4a^2+1}$.

235. La différence entre les carrés de deux nombres entiers consécutifs est 28731 ; trouver ces deux nombres.

236. Si un nombre entier n vérifie une équation de la forme

$$n^2 + \mathrm{A}n = \mathrm{B},$$

où A et B sont des nombres entiers dont le premier A n'est pas plus grand que 2, n est la racine carrée de B, à une unité près.

237. La différence entre les cubes de deux nombres entiers consécutifs, divisée par 6, donne pour reste 1.

238. Le produit de trois nombres entiers consécutifs ne peut être un carré ni le double d'un carré.

239. La différence entre les cubes de deux nombres entiers consécutifs est 29107 ; trouver ces deux nombres.

240. On sait que la somme des n premiers nombres consécutifs est égale à 496 ; trouver n.

241. Un nombre de quatre chiffres est un carré parfait. Trouver ces quatre chiffres, sachant que les deux premiers sont égaux, ainsi que les deux derniers.

242. Le carré de tout nombre impair est la somme de deux entiers consécutifs dont le plus grand est la somme de deux carrés.

243. Le produit de deux nombres entiers est 15375, leur différence est 2 ; trouver ces deux nombres.

244. Soit p un nombre premier plus grand que 2. On élève au carré les nombres 1, 2, 3, ..., $p-1$, et l'on divise les résultats par p ; combien trouve-t-on de restes différents ?

Parmi les nombres 1, 2, 3, ..., $p-1$ il y en a $\frac{p-1}{2}$ et seulement $\frac{p-1}{2}$ qui, retranchés d'un carré convenablement choisi, donnent une différence divisible par p.

Si l'on divise par p les carrés des différents nombres entiers non divisibles par p, on ne trouvera jamais que $\frac{p-1}{2}$ restes différents. Quels sont ces restes si p est 3, 5 ou 7 ?

245. Des identités

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(a'^2+b'^2) &= (aa'-bb')^2+(ab'+a'b)^2\\ &= (aa'+bb')^2+(ab'-a'b)^2,\end{aligned}$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

déduire les théorèmes suivants :

Si deux ou plusieurs nombres entiers sont des sommes de deux carrés, il en est de même de leur produit.

La moitié de la somme des carrés de deux nombres entiers impairs est la somme de deux carrés.

Signalons encore, à un autre point de vue, l'égalité

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4},$$

qui permet de remplacer le calcul du produit de deux nombres donnés a, b par une addition et deux soustractions, quand on a une table qui donne les quarts des carrés des nombres. M. Blater a calculé une telle table pour les nombres entiers de 1 à 200000 : elle est éditée chez MM. Gauthier-Villars et fils. Le *Recueil de formules et de tables numériques* de M. Hoüel (même éditeur) contient une petite table de quarts de carrés.

246. Si les nombres entiers a, b, c vérifient l'égalité

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

l'un des nombres b et c est la différence des carrés de deux nombres entiers, l'autre est le double de leur produit; le nombre a est la somme des carrés de ces nombres.

Trouver tous les nombres entiers a, b, c, premiers entre eux deux à deux, qui vérifient cette égalité et tels que a soit inférieur à 20.

247. Si a est la racine carrée à une unité près, par défaut, d'un nombre entier A qui n'est pas un carré parfait, si r est le reste; si enfin n est la partie entière de $\frac{2a}{r}$, on aura

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 > A > \left(a + \frac{1}{n+1}\right)^2.$$

248. A, B, C étant des nombres donnés dont les deux premiers sont inférieurs ou égaux à 3, trouver un nombre entier n, sachant que l'on a

$$n^3 + An^2 + Bn = C.$$

249. La somme des carrés des n premiers nombres entiers est 338350; trouver n.

Le $n^{\text{ième}}$ nombre pyramidal (Ex. 105) est 166650, trouver n.

250. Si a est un nombre plus grand que 2, les deux nombres $a - \frac{1}{2a} - \frac{1}{8a(a^2-1)}$ et $a - \frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3}$ sont des valeurs approchées de la racine carrée de $a^2 - 1$ par défaut et par excès, les nombres $a + \frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3}$ et $a + \frac{1}{2a} - \frac{1}{8a(a^2+1)}$ sont des valeurs approchées par défaut et par excès de la racine carrée de $a^2 + 1$.

Le nombre $10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{8000} = 10{,}049875$ est la racine carrée de 101 à $\frac{1}{10^6}$ près, par défaut.

251. Si a désigne un nombre entier plus grand que 1, les racines cubiques de $a^3 - 1$ et de $a^3 + 1$ à $\frac{1}{3a^2}$ près, par excès, sont $a - \frac{1}{3a^2}$ et $a + \frac{1}{3a^2}$, respectivement.

252. Étant donnés un nombre a plus grand que 1 et un nombre A aussi grand qu'on le voudra, on peut trouver un entier m tel que l'on ait $a^m > A$.

Soit $a = 1 + \alpha$, la proposition énoncée résulte de l'inégalité (n° 320)

$$(1 + \alpha)^p - 1 > p\,\alpha;$$

il suffira de prendre pour p la partie entière de $\frac{A-1}{\alpha}$ et pour m un entier plus grand que p.

CHAPITRE X

SYSTÈME MÉTRIQUE

§ 1. — Généralités.

321. La théorie de la mesure des grandeurs, quand on veut l'exposer avec une entière rigueur, comporte de notables difficultés; j'y reviendrai au chapitre XIII, quand la notion du nombre aura été complétée; pour le moment, je me bornerai à quelques notions communes, dont la plupart sont déjà familières au lecteur.

Relativement aux quantités dont il sera question ici (longueurs, surfaces, volumes, poids, ...), on peut faire les remarques suivantes :

Si nous considérons des quantités d'une même espèce, on sait ce qu'on entend, en parlant de quantités égales, d'une quantité plus grande ou plus petite qu'une autre, d'une quantité qui est égale à la somme de plusieurs autres; on sait ce que c'est que diviser une telle quantité en parties égales : si on la divise en n parties égales, l'une quelconque d'entre elles sera dite la $n^{\text{ième}}$ partie de cette quantité ; il y a exception quand $n = 2, 3, 4$, auquel cas on emploie les mots moitié, tiers, quart pour désigner les parties : les conditions qui doivent être imposées aux définitions des mots égal, plus grand, plus petit, somme, partie, ... seront précisées au chapitre XIII; les notions qui correspondent à ces mots sont faciles quand il s'agit de longueurs rectilignes; pour le moment, sans nous embarrasser des difficultés qu'elles peuvent comporter, nous les regarderons comme des notions de sens commun.

322. On dit qu'une quantité B est contenue exactement une, deux, trois, quatre, ... fois dans une quantité de même espèce A, quand cette dernière est égale à B, ou égale à la somme de deux, trois, quatre, ... quantités égales à B.

Si B est contenu exactement dans A, plusieurs fois, c'est une *partie aliquote* de A.

On dit que deux quantités de même espèce A, B sont commensurables entre elles quand il existe une quantité C qui est contenue exactement dans A et dans B. Cette quantité C est alors une *commune mesure* de A et de B.

S'il n'existe pas de commune mesure à A et à B, les deux quantités sont dites incommensurables entre elles.

323. Mesurer une quantité A, c'est la comparer à une quantité de même espèce B, choisie à l'avance et que l'on appelle *unité*. Le résultat de cette mesure est un nombre. Cette comparaison se fait comme il suit :

1° A peut être égal à l'unité; sa mesure est alors le nombre 1; A peut être égal à la somme d'un certain nombre de fois l'unité; ce nombre entier de fois est alors la mesure de A. Si A contient l'unité exactement 5 fois, par exemple, A est mesuré par le nombre 5.

2° A peut être égal à une partie aliquote de l'unité, ou à la somme de plusieurs de ces parties aliquotes, obtenues en divisant l'unité en un certain nombre de parties égales; la mesure de A est alors une fraction dont le dénominateur est le nombre de parties dans lesquelles on a divisé l'unité et dont le numérateur est 1 dans le premier cas, et dans le second cas, le nombre de parties aliquotes contenues dans A. Supposons, par exemple, que l'on ait divisé l'unité B en 8 parties égales : si A est égal à l'une de ces parties, sa mesure sera $\frac{1}{8}$; si A est égal à la somme de 9 de ces parties, sa mesure sera $\frac{8}{9}$; on dit aussi que A est le huitième de l'unité, les neuf huitièmes de l'unité.

Dans les cas 1° et 2°, A et l'unité sont des quantités commensurables entre elles; on dit dans le même sens que A est commensurable avec l'unité.

Ces deux cas peuvent être réunis dans un seul énoncé :

Si les quantités A et B sont commensurables entre elles et si C désigne une commune mesure de A et de B, le nombre qui mesure A quand on prend B pour unité est une fraction dont le numérateur indique combien de fois la commune mesure C est contenue dans A, et le dénominateur combien de fois elle est contenue dans l'unité B. Si, par exemple, la commune mesure C est contenue 3 fois dans A et 5 fois dans B, c'est que A peut être obtenu en divisant B en 5 parties égales et en prenant 3 de ces parties; le nombre qui mesure A est donc $\frac{3}{5}$.

3° Si A n'est égal ni à l'unité, ni à la somme de plusieurs unités, ni à une partie aliquote de l'unité, ni à la somme de plusieurs parties aliquotes de l'unité, A est incommensurable à l'unité. Écartons provisoirement ce cas, sur lequel nous reviendrons plus tard.

Nous bornant donc aux cas 1° et 2°, nous supposerons essentiellement que les raisonnements que l'on a faits au commencement du chapitre VI sur les longueurs rectilignes s'appliquent ici, qu'une même grandeur (ou des grandeurs égales) peut être mesurée par des fractions égales, que, réciproquement, des fractions égales mesurent toujours des grandeurs égales (de la même espèce), que des fractions inégales ne peuvent pas mesurer des grandeurs égales, que la somme de deux grandeurs mesurées respectivement par deux fractions a pour mesure la somme de ces fractions.

324. Le nombre qui mesure A quand on prend B pour unité, s'appelle aussi rapport de A à B et se représente par le symbole $\frac{A}{B}$, qu'il faut se garder de confondre avec une fraction : A, B, ne sont pas des nombres, mais des grandeurs : c'est $\frac{A}{B}$ qui est un nombre. A ces symboles, on n'a pas, pour le moment au moins, à appliquer les règles de calcul des fractions.

325. On a souvent *à changer d'unité*. Ce changement donne lieu aux importants théorèmes qui suivent.

Considérons d'abord deux grandeurs A, B, commensurables entre elles :

Le nombre qui mesure A *quand on prend* B *pour unité, et le nombre qui mesure* B *quand on prend* A *pour unité sont inverses l'un de l'autre*: en d'autres termes, les deux rapports $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{A}$ sont des nombres inverses l'un de l'autre.

Supposons, en effet, que la commune mesure C entre A et B soit contenue 3 fois dans A, 5 fois dans B : le nombre qui mesure A, quand on prend B pour unité, est $\frac{3}{5}$; le nombre qui mesure B, quand on prend A pour unité, est $\frac{5}{3}$.

326. Considérons maintenant trois grandeurs, A, B, C.

Si deux grandeurs A, B *sont commensurables à une troisième* C, *elles sont commensurables entre elles, et le nombre qui mesure* A *quand on prend* B *pour unité est égal au rapport des nombres qui mesurent* A *et* B *quand on prend* C *pour unité.*

Supposons d'abord que ces derniers nombres soient des entiers, 3 et 5, par exemple. C'est une commune mesure de A et de B, contenue 3 fois dans A, 5 fois dans B; le rapport de A à B est $\frac{3}{5}$.

Supposons maintenant que les nombres qui mesurent A et B, quand on prend C pour unité, soient des fractions ; rien n'empêche de supposer ces fractions réduites au même dénominateur ; elles seront, par exemple, égales à $\frac{3}{7}$ et $\frac{5}{7}$. Dire que, si l'on prend C pour unité, A et B sont mesurés par les nombres $\frac{3}{7}$ et $\frac{5}{7}$, c'est dire que si on divise C en 7 parties égales et que l'on désigne l'une de ces parties par C′, C′ est contenu 3 fois dans A, 5 fois dans B ; C′ est une commune mesure de A et de B ; on est ramené au cas précédent, le rapport de A à B est $\frac{3}{5}$, qui est bien le rapport des fractions $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$.

Ce théorème, avec la notation des rapports, s'exprime par l'égalité

$$\frac{A}{B}=\frac{\left(\frac{A}{C}\right)}{\left(\frac{B}{C}\right)};$$

le second membre est le quotient exact des deux nombres $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$.

327. *Si* A *est commensurable à* B, *et que* B *soit commensurable à* C, A *est aussi commensurable à* C, *et le nombre qui mesure* A *quand on prend* C *pour unité, est le produit du nombre qui mesure* A *quand on prend* B *pour unité par le nombre qui mesure* B *quand on prend* C *pour unité.*

Que A soit commensurable à C, c'est ce qui résulte, d'après le théorème précédent, de ce que ces deux grandeurs sont, par hypothèse, commensurables à B. Dès lors le théorème énoncé résulte du précédent : Soient, en effet, a' et b les nombres qui mesurent respectivement A et B quand on prend C pour unité ; soit a le nombre qui mesure A quand on prend B pour unité ; on doit avoir $a=\frac{a'}{b}$ et, par suite, $a'=ab$.

En employant la notation des rapports, cette proposition s'exprime par l'égalité

$$\frac{A}{C}=\frac{A}{B}\times\frac{B}{C},$$

dans laquelle le second membre est le produit des deux nombres $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{C}$.

On remarquera d'ailleurs que cette proposition est intuitive quand les nombres a, b sont entiers; si a, b sont des fractions, on peut supposer que le dénominateur de la première fraction soit égal au numérateur de la seconde; si l'on a par exemple $a = \frac{3}{5}$, $b = \frac{5}{7}$, c'est que A s'obtient en divisant B en 5 parties égales et en prenant 3 de ces parties; désignons par B′ le cinquième de B, A est égal à 3 fois B′; de même B s'obtient en divisant C en 7 parties égales et en prenant 5 de ces parties; le $5^{\text{ième}}$ de B ou B′ est donc le $7^{\text{ième}}$ de C; en d'autres termes, A s'obtient en divisant C en 7 parties égales et en prenant 3 de ces parties; la mesure de A, quand on prend C pour unité, est donc $\frac{3}{7} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{7}$.

328. Le théorème précédent contient comme cas particulier les théorèmes suivants, qui sont d'ailleurs faciles à démontrer directement :

Une grandeur A, n fois plus grande que la grandeur B, c'est-à-dire égale à la somme de n grandeurs égales à B, est mesurée par un nombre n fois plus grand que le nombre qui mesure B; soit en effet C l'unité, et soit b le nombre qui mesure B; A, quand on prend B pour unité, a pour mesure n, donc A, en prenant C pour unité, a pour mesure $b \times n$.

Une grandeur A, n fois plus petite que la grandeur B, c'est-à-dire égale à la $n^{\text{ième}}$ partie de B, est mesurée par un nombre n fois plus petit que le nombre qui mesure B.

Soit, en effet, C l'unité, et soit b le nombre qui mesure B; le nombre qui mesure A quand on prend B pour unité est $\frac{1}{n}$; le nombre qui mesure A, quand on prend C pour unité, est donc $\frac{1}{n} \times b = \frac{b}{n}$.

329. Les raisonnements précédents laissent échapper le cas 3° du n° 323, le cas d'une grandeur incommensurable à l'unité. Il n'y a pas alors de nombre entier ou fractionnaire qui la mesure. Soit A une grandeur quelconque. Supposons que A contienne p fois l'unité, c'est-à-dire soit égal ou supérieur à la somme de p grandeurs égales à l'unité, mais que A ne contienne pas l'unité $p + 1$ fois : on dit que le nombre entier p est la mesure approchée de A, à une unité près par défaut.

Plus généralement, divisons l'unité en q parties égales; soit C l'une de ces parties. Supposons que A contienne p fois la grandeur C et ne contienne pas $p+1$ fois la même grandeur. On dira alors que $\frac{p}{q}$ est la mesure approchée de A à $\frac{1}{q}$ près par défaut.

La mesure approchée et la mesure vraie se confondent si C est contenu exactement p fois dans A. Mais, dans tous les cas, si l'on a divisé l'unité en un très grand nombre de parties égales, en sorte que chacune de ces parties soit très petite, les grandeurs mesurées par les nombres $\frac{p}{q}$, $\frac{p+1}{q}$ différeront très peu de A. Il peut se faire même que cette différence soit entièrement insensible à nos sens, aidés par les instruments de mesure les plus délicats. Dès lors il n'y a aucune raison pour ne pas remplacer A par cette grandeur, mesurée par le nombre $\frac{p}{q}$, qu'on n'en saurait distinguer. C'est ce que l'on fait en réalité : on ne mesure jamais de grandeurs incommensurables à l'unité, on leur substitue d'autres grandeurs, qui n'en diffèrent pas sensiblement, et qui sont commensurables à l'unité : ce sont celles-là qu'on mesure. Au surplus toute mesure réelle est forcément inexacte, ou plutôt, on appelle exactes les mesures pour lesquelles l'erreur dont elles sont entachées est de celles que les instruments de mesure ne permettent pas d'apprécier.

Enfin, cette subdivision de l'unité en un nombre quelconque de parties sur laquelle nous avons fondé l'idée de mesure est purement théorique. On ne peut avoir à sa disposition des instruments comportant ainsi toutes les subdivisions possibles; en fait, on se contente de diviser l'unité en un assez grand nombre de parties égales, d'après une loi déterminée, d'ailleurs arbitraire, et en négligeant les quantités plus petites que l'une de ces parties, on substitue à la grandeur que l'on veut mesurer une autre que l'on regarde comme la somme d'un nombre entier de ces parties de l'unité.

Le lecteur admettra sans peine la légitimité de ces substitutions ; mais une objection peut se présenter à son esprit : si sur ces nombres, qui ne représentent qu'à peu près les grandeurs que l'on considère, on effectue des calculs, les résultats de ces calculs mériteront-ils quelque confiance? Pourra-t-on les regarder aussi comme des mesures approchées pour les grandeurs auxquelles on les ferait correspondre légitimement si les nombres primitifs étaient des mesures exactes? Les développements qu'on a donnés dans le chapitre VIII sur les calculs approchés ont dû l'habituer déjà à cette idée qu'une légère modification dans les données d'un calcul numérique n'en altère que légèrement les résultats, et permettent, au moins dans un certain nombre de cas, d'obtenir une limite de l'erreur commise sur les résultats, quand on connaît une limite des erreurs commises sur les données. A la vérité, les raisonnements de ce chapitre supposent toujours l'existence de nombres exacts, et dans le cas où l'on a affaire à des grandeurs incommensurables à l'unité, les nombres qui mesurent ces grandeurs n'ont pas été définis, ils ne le seront qu'au chapitre XII, qui, dans un ordre logique, devrait précéder celui-ci; on verra alors que les conclusions relatives aux calculs approchés subsistent.

Quoi qu'il en soit, sans nous embarrasser pour le moment de ces difficultés, nous supposerons dans ce qui suit que les mesures sont exactes, et nous allons expliquer comment on peut les réaliser.

330. Dans la pratique, on fixe habituellement une unité que l'on appelle *unité principale*, et on lui adjoint un système d'*unités secondaires*; les unités secondaires sont des multiples ou des sous-multiples de l'unité principale, c'est-à-dire qu'elles s'obtiennent en ajoutant ensemble plusieurs grandeurs égales à l'unité principale, ou en divisant celle-ci en parties égales.

Considérons en particulier les multiples et sous-multiples qui correspondent au système décimal de numération.

Ayant donné un nom à l'unité principale, on nomme les multiples obtenus en répétant cette unité 10, 100, 1000, 10000 fois, en faisant précéder ce nom des préfixes (d'origine grecque) *déca*, *hecto*, *kilo*, *myria*; chacun de ces multiples est égal à dix fois celui qui le précède; on nomme les sous-multiples de l'unité obtenue en la divisant en 10, 100, 1000 parties égales, en faisant précéder le nom de l'unité des préfixes (d'origine latine) *déci*, *centi*, *milli* : chacun de ces sous-multiples est égal à dix fois celui qui le suit. Ainsi, en appelant mètre l'unité de longueur, les multiples du mètre, de dix en dix, s'appelleront décamètre, hectomètre, kilomètre, myriamètre; ses sous-multiples s'appellent décimètre, centimètre, millimètre. En rangeant ces diverses unités dans l'ordre myriamètre, kilomètre, hectomètre, décamètre, mètre, décimètre, centimètre, millimètre, on peut dire que chacune est égale à 10 fois celle qui la suit, ou à la dixième partie de celle qui la précède. On peut imaginer, théoriquement, que cette série de noms soit prolongée indéfiniment dans un sens ou dans un autre, et qu'on ait à sa disposition des instruments, des règles par exemple, dont la longueur soit égale à chacune des unités principales ou secondaires.

331. Soit maintenant à mesurer la longueur d'une droite quelconque AB.

On mesurera d'abord cette longueur, à une unité près, avec la plus grande de celles des unités secondaires ou principales qui est contenue dans AB, en plaçant, par exemple, bout à bout, le long de AB, des règles égales à cette unité, à partir du point A; le nombre de règles ainsi placées sera inférieur à dix, sans quoi on aurait pu se servir d'une unité plus grande pour mesurer AB; supposons par exemple, que l'unité secondaire considérée soit le décamètre, et que AB en contienne 7, non 8; en plaçant 7 règles, égales à un décamètre, les unes au bout des autres, à partir du point A, l'extrémité de la 7ième règle sera un point A_1 qui, en général, ne coïncidera pas avec le point B, mais la longueur de A_1B sera moindre qu'un décamètre; on mesurera cette longueur, qui ne contient pas dix mètres, avec un mètre, comme on a mesuré AB avec un décamètre; supposons que A_1B contienne 5 mètres, et non 6 ; c'est que en plaçant 5 mètres, bout à bout, à partir du point A_1, on arrive jusqu'à un point A_2 qui, en général, ne coïncide pas avec B, mais tel que A_2B soit moindre que un mètre, ou dix décimètres.

On mesurera A_2B avec le décimètre, comme on a mesuré A_1B avec le mètre; supposons que A_2B contienne 3 décimètres et n'en contienne pas 4, et désignons par A_3 l'extrémité du 3ième des décimètres placés bout à bout, à partir du point A_2; supposons que A_3B contienne 4 centimètres et non 5, et, en désignant par A_4 le point où l'on parvient ainsi, que A_4B contienne 8 millimètres; on parvient ainsi en un point A_5 qui sera à une distance du point B moindre qu'un millimètre; nous supposons que les deux points A_5 et B coïncident; leur distance, sûrement, sera peu appréciable, et, pour réaliser les mesures que l'on vient d'imaginer, en ne faisant pas d'erreur plus grande qu'un millimètre, il serait nécessaire de prendre de singulières précautions pour placer bien bout à bout, en ligne droite, les règles respectivement égales aux unités secondaires; il faudrait en outre que ces règles eussent été construites avec une rare précision, puis tenir compte de leur dilatation par la chaleur, etc. Dans le cas que nous citons, on peut admettre que l'erreur commise, en remplaçant le point B par le point A_5, sera sûrement inférieure aux *erreurs d'observation*, tenant à l'imperfection des instruments ou à la façon dont on les emploie, même si l'on prenait des précautions qu'il faudrait plusieurs pages pour décrire.

Quoi qu'il en soit, nous regarderons la grandeur AB comme la somme de 7 décamètres, 5 mètres, 3 décimètres, 4 centimètres, 8 millimètres : le nombre qui la mesure quand on prend le mètre pour unité est 75,348; car ce nombre est bien la somme de 7 fois dix unités, de 5 unités, 3 dixièmes d'unité, 4 centièmes d'unité, 8 millièmes d'unité, et mesure par conséquent la somme de 7 décamètres, 5 mètres, 3 décimètres, 4 centimètres, 8 millimètres.

Observons que, d'après la même façon dont on a opéré, les nombres 7; 75; 753; 7534; 75348, regardés comme représentant respectivement des décamètres, des mètres, ..., des millimètres, représentent la mesure de la longueur considérée approchée à un décamètre, un mètre, ..., un millimètre près, par défaut.

On voit comment la possession d'un système d'unités secondaires et principales permet la mesure d'une longueur d'une manière systématique, et la détermination, chiffre par chiffre, du nombre qui mesure cette longueur, en commençant par les plus hautes unités. Le lecteur observera que la marche suivie est en quelque sorte l'inverse de celle qu'on a décrite en exposant la numération écrite. Dans la pratique la façon d'opérer n'est pas tout à fait celle que l'on a décrite. On ne se sert pas, par exemple, de *règles* de dix mètres, mais bien de *chaînes* d'un décamètre, au moins dans les mesures grossières[1]; on ne place pas des règles distinctes bout à bout; on se sert plusieurs fois de la même, en notant à chaque fois le point où elle commence, celui où elle finit; enfin ces règles portent elles-mêmes des subdivisions : ainsi le mètre est divisé en 10, 100, 1000 parties égales, ce qui dispense d'employer des règles trop petites; on n'en construit point, par exemple, qui soient égales à un centimètre ou à un millimètre. Enfin, répétons encore une fois que, dans les mesures de précision, il y a toute une suite de précautions à prendre dont ce n'est pas ici le lieu de parler.

332. Revenons à la longueur dont on a décrit la mesure plus haut, et qui était mesurée, en prenant le mètre pour unité, par le nombre décimal 75,348.

Chaque chiffre de ce nombre a en quelque sorte une signification concrète; les chiffres 7, 5, 3, 4, 8 représentent respectivement des décamètres, des mètres, des décimètres, des centimètres, des millimètres. On en déduit immédiatement le moyen d'écrire le nombre qui mesure la longueur considérée quand on prend pour unité le décamètre, l'hectomètre, le myriamètre, ... ou le décimètre, le centimètre, le millimètre, ... : il suffira d'avancer vers la gauche, ou vers la droite, la virgule de un, deux, trois, ... rangs, après avoir placé (s'il était besoin) des zéros à la droite ou à la gauche du nombre 75,348, ce qui n'en altère pas la valeur.

1. En réalité, l'emploi d'une chaîne d'arpenteur pour évaluer une longueur que l'on voudrait mesurer à un millimètre près serait tout à fait illusoire.

Ainsi, quand on prend le décamètre pour unité, le nombre cherché est 7,5348; car, par le déplacement de la virgule, on a conservé à chaque chiffre du nombre considéré sa signification concrète : 7 représente toujours des décamètres, 5 des mètres, 3 des décimètres, etc.; de même les nombres 0,75348 ; 0,075348 mesurent la même longueur quand on prend pour unité l'hectomètre, ou le kilomètre; 753,48; 7534,8; 75348 représentent aussi la même longueur quand on prend pour unité le décimètre, le centimètre ou le millimètre. Dans tous les cas, la virgule doit être placée après celui des chiffres du nombre primitif qui exprimait des unités (secondaires) égales à la nouvelle unité; ainsi dans le nombre primitif le chiffre 4 exprime des centimètres; si l'on veut prendre le centimètre pour unité, il faut placer la virgule après le 4 et écrire 7534,8; si l'on prenait le millimètre pour unité, il faudrait placer la virgule après le 8 : elle serait d'ailleurs inutile. Ce qui précède permet d'énoncer le théorème suivant :

Quand on a le nombre qui mesure une grandeur avec une certaine unité, si on veut avoir le nombre qui mesure la même grandeur avec une unité 10, 100, 1000, ... *fois plus grande, ou* 10, 100, 1000, ... *fois plus petite, il suffit de diviser le nombre donné par* 10, 100, 1000, ... *ou de le multiplier par* 10, 100, 1000, ...

Il est à peine utile de faire observer que cette proposition est contenue, comme cas particulier, dans les théorèmes des nos 326 et 327.

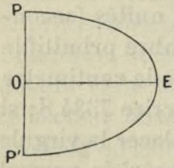
§ 2. — Système métrique; mesures de longueur.

333. Le système métrique est l'ensemble des unités principales et dérivées usitées en France : adopté par la plupart des nations civilisées, on peut espérer qu'il finira par l'être universellement; c'est un *système* en ce sens que les diverses unités sont liées entre elles et que leurs subdivisions sont liées au système décimal de numération.

Avant l'adoption du système métrique, les unités de mesure n'avaient, en France, aucune fixité, elles variaient de province à province : il en résultait des erreurs, des fraudes, des procès innombrables; d'ailleurs, les calculs auxquels elles donnaient lieu étaient compliqués. Il était indispensable d'établir l'ordre et la fixité dans l'ensemble de ces mesures.

Le 9 mai 1790, l'Assemblée nationale décréta la suppression des anciennes mesures et la création d'un système nouveau; la création de ce système fut confiée à l'Académie des sciences, qui nomma à cet effet une commission dans laquelle figuraient Berthollet, Borda, Lagrange, Delambre, Laplace, Méchain et Prony. Ces savants décidèrent, pour assurer la fixité de l'unité fondamentale, l'unité de longueur, de rattacher cette unité aux dimensions du globe terrestre.

Le globe terrestre est, comme on sait, très voisin d'être une sphère. Plus exactement sa surface peut être regardée comme engendrée par une demi-ellipse très peu aplatie PEP′, tournant autour de son petit axe PP′, lequel coïnciderait avec la ligne des pôles (1). Dans cette révolution, le sommet E engendrerait le cercle de l'équateur. Les mesures effectuées par Delambre et Méchain, relatives à l'arc de méridien compris entre Dunkerque et Barcelone, combinées avec les mesures antérieures qui avaient permis de calculer une valeur approchée de l'aplatissement de la terre, c'est-à-dire du rapport au grand axe de l'ellipse de la différence entre les deux axes, conduisirent à regarder le quart du méridien terrestre, c'est-à-dire l'arc PE qui, sur l'ellipse dont la révolution engendrerait la surface terrestre, irait d'un pôle à l'équateur, comme étant égal à 5130740 *toises* de Paris. La dix-millionième partie de cette longueur fut adoptée, sous le nom de mètre, comme nouvelle unité de longueur. [Loi du 18 germinal an III (7 avril 1795.)]



Un étalon en platine, ayant cette longueur, fut déposé aux Archives nationales, le 4 messidor an VII (22 juin 1799) : la longueur de cet étalon, à la température de la glace fondante, est le *mètre légal*.

Au mètre se rattache, comme on l'expliquera bientôt, l'ensemble des autres mesures qui constitue le système métrique. Ce système fut adopté dans son ensemble le 3 novembre 1801 ; la loi du 4 juillet 1837 proscrivit d'une façon effective les anciennes mesures et le système métrique devint exclusivement obligatoire à partir du 1er janvier 1840.

Les mesures géodésiques sur lesquelles a été fondée la détermination du mètre n'étaient pas absolument exactes ; la longueur du mètre légal n'a pas toutefois été changée, il doit être bien entendu que c'est la longueur de l'étalon qui est le mètre. D'après M. Faye, la longueur du quart du méridien terrestre serait, en

1. L'aplatissement est très exagéré sur la figure : il ne pourrait être distingué sur une figure exacte.

mètres, 10002008; d'après M. Clarke, elle serait 10001877. La dix-millionième partie du quart du méridien terrestre serait donc un peu plus grande que le mètre légal, d'environ deux dix-millièmes de mètre.

Les multiples ou sous-multiples du mètre qui peuvent servir d'unités secondaires ont été définis au n° 330.

334. Les mesures *effectives*, c'est-à-dire les instruments en bois ou en métal qui servent effectivement à mesurer, sont fixées par la loi; celles qu'emploient les commerçants doivent porter la marque de *la vérification des poids et mesures*.

Voici les noms de ces mesures effectives; ces noms s'expliquent d'eux-mêmes; on a placé d'ailleurs, en face de chacun des noms, le nombre qui mesurerait la grandeur correspondante, en prenant le mètre pour unité :

Décimètre.	0,1
Double décimètre. . . .	0,2
Demi-mètre.	0,5
Mètre.	1
Double mètre	2
Demi-décamètre.	5
Décamètre.	10
Double décamètre. . . .	20

Les cinq premières mesures effectives sont habituellement des règles rigides en bois ou en métal, portant des subdivisions en centimètres et quelquefois en millimètres. On se sert aussi de mètres articulés. Le décamètre effectif, qui sert à mesurer les distances sur le terrain, est une chaîne, dite chaîne d'arpenteur, composée de 50 chaînons, dont chacun vaut 2 décimètres. Ces chaînons sont réunis par des anneaux de fer; de cinq en cinq, pour marquer le mètre, l'anneau de fer est remplacé par un anneau de cuivre. Le milieu de la chaîne est marqué par une petite tige de cuivre.

On donne à la chaîne quelques millimètres de plus qu'elle ne devrait avoir, pour compenser le défaut de tension.

Les kilomètres sont marqués par des *bornes*, sur la plupart des routes; de même aussi, très souvent, les hectomètres, de deux en deux.

335. Il nous reste à dire quelques mots sur la façon d'écrire ou d'énoncer les nombres décimaux qui représentent une longueur.

C'est une habitude assez usuelle, en France, que de rappeler *l'unité* en plaçant à droite et en haut du chiffre qui représente les unités l'initiale du nom de cette unité, ou un signe conventionnel qui la rappelle : on emploie les signes *m*, *d*, *c*, *mm*, pour indiquer que l'unité est le mètre, le décimètre, le centimètre, le millimètre; on écrira, par exemple, $18^{m},25$ au lieu de 18,25 si l'unité est le mètre.

D'ordinaire, à l'étranger, le signe qui rappelle la nature de l'unité est placé avant le nombre écrit. Cette coutume est préférable.

Signalons enfin l'introduction récente des mots mégamètre et micromètre ou *micron*, pour désigner un million de mètres d'une part, et la millionième partie du mètre d'autre part. Le *micron* est particulièrement employé pour les recherches qui se font au microscope : on le désigne par la lettre μ.

Pour écrire le résultat d'une mesure exprimée au moyen des unités secondaires et principales, en myriamètres, kilomètres, ..., mètres, décimètres, ..., il suffira d'écrire les uns à la suite des autres les chiffres qui expriment combien de fois chacune des unités figure à son tour dans la grandeur considérée, en commençant par les plus grandes unités et en ayant soin de mettre des zéros à la place de celles qui manqueraient; on met, s'il y a lieu, la virgule à la place convenable, selon l'unité que l'on a choisie. On a donné déjà un exemple au n° 331. En voici encore un : une longueur contenant 7 hectomètres, 3 mètres, 2 centimètres serait mesurée par le nombre $703^{m},02$ en prenant pour unité le mètre.

On suit la règle inverse pour énoncer un nombre écrit; mais le plus souvent on se contente d'énoncer ce nombre en deux fois : d'abord la partie entière, en faisant suivre du nom de l'unité, puis la partie décimale, énoncée comme un nombre entier, en faisant suivre du nom de l'unité secondaire qui correspond au dernier chiffre décimal : ainsi, dans l'exemple précédent, on dira sept cent trois mètres, deux centimètres.

Les nombres 180,25 et 75,072, en supposant qu'on prenne dans le premier cas le mètre pour unité, dans le second cas l'hectomètre, s'énonceront cent quatre-vingts mètres, vingt-cinq centimètres et soixante-quinze hectomètres, soixante-douze décimètres.

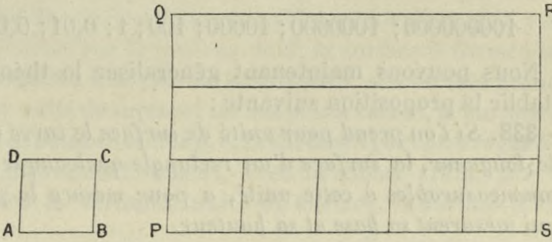
Au surplus, ces habitudes ne sont pas invariables et rien n'empêche de regarder les nombres qui expriment les mesures comme des nombres abstraits, pourvu qu'on sache toujours à quelle unité ils correspondent.

§ 3. — Système métrique : surfaces, volumes.

336. La définition précise du nombre qui mesure une surface donnée, quand on a choisi l'unité de surface, n'est pas sans difficultés, même quand cette surface est plane. Cette définition et les moyens de trouver ce nombre sont du ressort de la Géométrie : je ne peux en donner ici qu'un idée très incomplète.

Je ferai d'abord les observations suivantes :

Si on se donne une longueur quelconque AB, on peut construire un carré ABCD dont le côté soit égal à AB; et si l'on considère un plan, on peut imaginer qu'il soit décomposé en carrés égaux à ABCD; le *carrelage* d'un plancher, un morceau de papier *quadrillé*, fournissent des exemples familiers au lecteur de la figure ainsi formée. Si l'on considère une portion du plan qui soit ainsi entièrement remplie par des carrés égaux à ABCD, et qui contienne un nombre entier n de ces carrés, on dira que cette surface est égale à n fois le carré ABCD, ou qu'elle est mesurée par le nombre entier n quand on prend ce carré pour unité de surface.



Tel sera le cas d'un rectangle PQRS dont les deux côtés PQ, PS contiendraient chacun la longueur AB un nombre exact de fois; supposons que le côté PQ contienne, par exemple, 3 fois cette longueur, et que le côté PS la contienne 5 fois; il est clair, sur la figure, que le rectangle PQRS contient 3 fois 5 carrés égaux à ABCD : si on prenait le carré ABCD pour unité de surface, le rectangle PQRS serait mesuré par le nombre 5×3 ou 15. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si l'on choisit une certaine unité de longueur et si l'on prend pour unité de surface le carré construit sur l'unité de longueur, la surface d'un rectangle dont la base et la hauteur sont mesurées par des nombres entiers est mesurée par le produit de ces nombres. En particulier un carré dont le côté contiendrait exactement n fois l'unité de longueur, sera mesuré par le nombre $n \times n = n^2$, ou, comme l'on dit, par le carré du nombre qui mesure son côté.

337. Considérons par exemple le *mètre carré*, c'est-à-dire le carré dont le côté est un mètre; si l'on prenait le décimètre pour unité de longueur, le côté du mètre carré serait mesuré par le nombre 10, et par conséquent, si l'on prenait pour unité de surface le carré dont le côté est égal à un décimètre, carré auquel on donne le nom de décimètre carré, la surface du mètre carré serait mesurée par le nombre 10×10 ou 100; c'est-à-dire que le mètre carré contient 100 décimètres carrés, ou, si l'on veut, que le décimètre carré est la centième partie du mètre carré.

On désigne sous les noms de *myriamètre carré*, *kilomètre carré*, *hectomètre carré*, *décamètre carré*, *mètre carré*, *décimètre carré*, *centimètre carré*, *millimètre carré*, des carrés dont les côtés sont respectivement un myriamètre, un kilomètre, un hectomètre, un décamètre, un mètre, un décimètre, un centimètre, un millimètre.

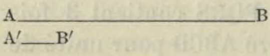
En vertu des raisonnements précédents, chacune de ces surfaces contient exactement cent fois celle qui la suit, ou est la centième partie de celle qui la précède; ces surfaces, si l'on prend le mètre carré pour unité, sont donc mesurées respectivement par les nombres

$$100000000;\ 1000000;\ 10000;\ 100;\ 1;\ 0{,}01;\ 0{,}0001;\ 0{,}000001.$$

Nous pouvons maintenant généraliser le théorème du n° 336 et établir la proposition suivante :

338. *Si l'on prend pour unité de surface le carré construit sur l'unité de longueur, la surface d'un rectangle quelconque, dont les côtés sont commensurables à cette unité, a pour mesure le produit des nombres qui mesurent sa base et sa hauteur.*

Supposons que les nombres qui mesurent la base et la hauteur du rectangle considéré soient deux fractions de même dénominateur, $\frac{3}{7}$ et $\frac{5}{7}$ par exemple.



Soit AB l'unité de longueur; divisons-la en 7 parties égales; soit A′B′ l'une de ces parties. Si l'on prenait pour unité de longueur A′B′ et pour unité de surface le carré construit sur A′B′ comme côté, les côtés du rectangle considéré seraient mesurés par les nombres 3, 5, et sa surface par le nombre 3×5; alors le carré construit sur AB comme côté serait mesuré par le nombre 7×7; il résulte de là et du théorème établi au n° 326, que si l'on prend pour unité de surface le carré construit sur AB comme côté, la surface du rectangle considéré est mesurée par le nombre $\frac{3 \times 5}{7 \times 7} = \frac{3}{7} \times \frac{5}{7}$; c'est ce qu'il fallait démontrer.

En particulier, *si l'on prend pour unité de surface le carré construit sur l'unité de longueur, la surface d'un carré quelconque est mesurée par le carré du nombre qui mesure son côté.*

Par exemple, si l'on prend pour unité de longueur le mètre, pour unité de surface le mètre carré, les surfaces des carrés dont les côtés sont respectivement un décimètre, un centimètre, un millimètre, seront mesurées par les nombres

$$(0,1)^2 = 0,01\,;\ (0,01)^2 = 0,0001\,;\ (0,001)^2 = 0,000001,$$

ce qui est bien conforme aux résultats précédemment obtenus.

339. Supposons maintenant qu'on ait à mesurer une surface plane quelconque; imaginons que le plan qui contient cette surface soit recouvert d'un quadrillage formé de carrés égaux, dont les côtés soient une fraction connue de l'unité de longueur, la $n^{\text{ième}}$ partie par exemple : si l'on prend toujours pour unité de surface le carré construit sur l'unité de longueur, ce carré contiendra n^2 carrés du quadrillage. On pourra compter ceux des petits carrés qui sont à l'intérieur de la surface S : supposons qu'il y en ait p, et qu'il y en ait q qui soient traversés par le contour de S; la surface S′ formée par les p petits carrés diffère très peu de la surface S, si n est très grand; si l'on prenait pour unité de surface l'un des petits carrés, la surface S′ serait mesurée par le nombre entier p, et la surface S peut être regardée comme mesurée approximativement, avec la même unité, par le même nombre; avec la véritable unité de surface, la surface S est donc mesurée approximativement par le nombre $\frac{p}{n^2}$; elle est en réalité comprise entre deux surfaces S′, S″ formées chacune d'un nombre exact de petits carrés, la première de p petits carrés, tous intérieurs à la surface donnée, la seconde de $p+q$ carrés, parmi lesquels il y en a q qui débordent au delà de la surface S et forment une bande étroite aux environs du contour de cette surface. La surface S doit être regardée comme mesurée par un nombre compris entre $\frac{p}{n^2}$ et $\frac{p+q}{n^2}$. On démontre que, si n est assez grand, ces deux nombres diffèrent très peu, en sorte que l'un ou l'autre peut être pris comme une mesure approchée, l'une par défaut, l'autre par excès, du nombre cherché, qui n'est ici défini que d'une manière très imparfaite. On arrive, en Géométrie, à donner à ce nombre un sens précis et, dans une suite de cas simples, à établir des règles qui permettent de le calculer, en ne mesurant que des longueurs rectilignes.

340. Dans le système métrique, l'unité principale de surface est le mètre carré; les unités secondaires sont d'une part le décamètre carré, l'hectomètre carré, le kilomètre carré, d'autre part le décimètre carré, le centimètre carré, le millimètre carré, qui ont été définis au n° 337, où l'on a étudié aussi leur ordre de grandeurs relatives. Ici les multiples successifs ne sont pas de *dix* en *dix* fois, mais bien de *cent* en *cent* fois plus grands; de même les sous-multiples successifs ne sont pas de *dix* en *dix* fois, mais bien de *cent* en *cent* fois plus petits.

Il en résulte que si on a écrit, dans le système décimal, la mesure d'une surface en prenant pour unité de surface le mètre carré, si l'on veut écrire le nombre qui mesure la même surface en prenant pour unité le décamètre carré, l'hectomètre carré, le kilomètre carré, ..., on devra reculer la virgule, vers la gauche, de deux, quatre, six rangs; si l'on veut prendre, au contraire, pour unité le décimètre carré, le centimètre carré, le millimètre carré, on devra avancer la virgule de deux rangs, de quatre rangs, de six rangs, ... vers la droite. Si les chiffres manquent pour cela, on y suppléera par des zéros.

Supposons, par exemple, qu'une surface S, en prenant pour unité le mètre carré, soit mesurée par le nombre 48567,238.

En prenant successivement pour unité le kilomètre carré, l'hectomètre carré, le décamètre carré, le mètre carré, le décimètre carré, le centimètre carré, le millimètre carré, le nombre qui mesure S s'écrira

0,048567238; 4,8567238; 485,67238; 48567,238; 4856723,8;
485672380; 48567238000.

Si l'on évalue une surface en disant successivement combien elle contient de myriamètres carrés, puis de kilomètres carrés, ..., puis de millimètres carrés, c'est-à-dire en disant successivement quelle est sa mesure à un myriamètre carré près, par défaut, puis la mesure de ce qui reste quand on a ôté les myriamètres carrés, à un kilomètre carré près par défaut, puis la mesure de ce qui reste, à un hectomètre carré près par défaut, etc..., les nombres que l'on énonce successivement sont moindres que cent, sauf peut-être le premier, qui se rapporte à la plus haute unité secondaire à laquelle on ait donné un nom; chacun de ces nombres (sauf peut-être le premier) s'exprimera au moyen de deux chiffres, dont l'un ou l'autre peut d'ailleurs être un zéro. Pour écrire la mesure de la surface, on écrira ces nombres les uns à la suite des autres, en commençant par celui qui représente les unités secondaires les plus fortes, sans omettre les zéros, en plaçant la virgule après le nombre qui correspond à l'unité que l'on adopte. Ainsi, en prenant pour unité le mètre carré, la surface qui contiendrait 4 hectomètres carrés, 85 décamètres carrés, 67 mètres carrés, 23 décimètres carrés, 80 centimètres carrés sera représentée par le nombre 48567,2380.

On observera que, de cette façon, la partie décimale a toujours un nombre pair de chiffres, dont le dernier peut être un zéro.

On peut suivre la règle inverse pour énoncer un nombre écrit; on le partage en tranches de deux chiffres, à partir de la virgule, tant en remontant vers la gauche qu'en descendant vers la droite. La dernière tranche de gauche peut n'avoir qu'un chiffre, celle de droite en a nécessairement deux; au besoin on la complète par un zéro. Chaque tranche représente des unités connues, que l'on n'a aucune peine à énoncer, pourvu toutefois qu'elle corresponde à des unités dénommées, ce qui ne manquera guère d'arriver dans la pratique. On commence par la gauche. Ainsi le nombre 783,0020 s'énoncera 7 décamètres carrés, 83 mètres carrés, 20 centimètres carrés, en supposant que l'unité de surface soit le mètre carré. Le plus souvent on énonce un nombre décimal qui mesure une surface en deux fois : on énonce d'abord la partie entière en faisant suivre du nom de l'unité que représente le dernier chiffre; puis on s'arrange, en ajoutant au besoin des zéros, pour que la partie décimale ait un nombre pair de chiffres, on l'énonce ensuite comme un nombre entier, en ajoutant décimètre carré, centimètre carré, millimètre carré, suivant qu'il y a deux, quatre ou six chiffres.

Ainsi, dans le dernier exemple, on dira : sept cent quatre-vingt-trois mètres carrés, vingt centimètres carrés.

Signalons encore l'emploi des symboles *mq*, *dq*, *cq*, placés à droite et en haut du chiffre des unités simples pour indiquer que l'unité de grandeur adoptée est un mètre carré, un décimètre carré, un centimètre carré; *q* est l'initiale du mot *quadratus* (carré, ou quarré dans l'ancienne orthographe).

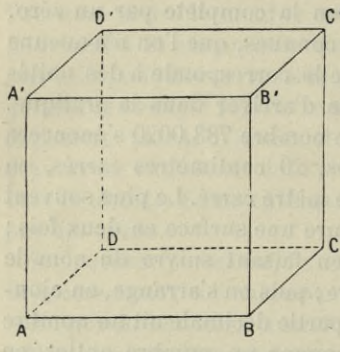
Il n'existe pas de mesures effectives de *surfaces*; celles-ci s'évaluent au moyen de calculs effectués sur des longueurs mesurées, d'après des règles qu'enseigne la Géométrie.

Ainsi la surface d'un rectangle dont la base et la hauteur seraient 1 mètre et 1 décimètre, serait mesurée, en prenant le mètre carré pour unité, par le nombre $1 \times 0{,}1 = 0{,}1$; elle serait égale à dix décimètres carrés.

La surface d'un carré dont le côté est mesuré par le nombre 1,2 en prenant le mètre pour unité serait mesurée par le nombre $(1{,}2)^2 = 1{,}44$: elle serait égale à un mètre carré, 44 décimètres carrés.

341. *Mesures agraires.* — Pour la mesure des champs, l'unité principale est l'*are*; l'are est un décamètre carré, ou cent mètres carrés. Le seul multiple de l'are que l'usage ait consacré est l'hectare, qui vaut cent ares : c'est un hectomètre carré; et le seul sous-multiple qui soit resté usité est le centiare, ou centième de l'are : c'est un mètre carré.

La surface qui, en prenant pour unité le mètre carré, serait mesurée par le nombre 2873654 serait, en prenant l'are pour unité, mesurée par le nombre 28736,54 que l'on pourrait énoncer vingt-huit mille sept cent trente-six ares, cinquante-quatre centiares, ou deux cent quatre-vingt-sept hectares, trente-six ares, cinquante-quatre centiares.



342. La mesure des volumes donne lieu à des observations analogues à celles que l'on a faites pour les surfaces.

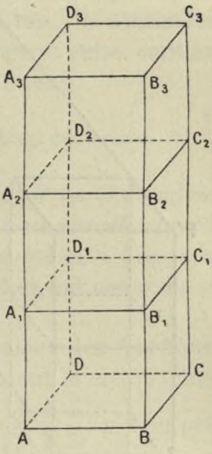
Rappelons d'abord que l'on appelle *parallélépipède rectangle* le volume construit comme il suit :

Considérons un rectangle ABCD que le lecteur pourra se figurer comme étant situé dans un plan horizontal; par les sommets A, B, C, D menons au plan de ABCD des perpendiculaires du même côté du plan et prenons sur elles des longueurs égales AA′, BB′, CC′, DD′; complétons, en joignant A′ et B′, B′ et C′, C′ et D′, D′ et A′, les rectangles ABB′A′, BCC′B′, DCC′D′, ADD′A′; le volume limité d'une part par ces quatre rectangles latéraux, d'autre part par les deux rectangles ABCD, A′B′C′D′ sera un parallélépipède rectangle. Les six rectangles qui le limitent sont ses *faces*, ils sont deux à deux égaux et situés dans des plans parallèles; les côtés de ces rectangles sont les *arêtes* du parallélépipède; il y en a douze; elles sont, quatre par quatre, égales et parallèles : telles sont AB, CD, A′B′, C′D′. Chacune des douze arêtes est égale à l'une des trois arêtes qui partent d'un même sommet : ces trois arêtes sont les trois *dimensions* du parallélépipède. L'une quelconque des faces peut être prise pour la *base* du parallélépipède; la *hauteur* correspondante est alors l'arête perpendiculaire au plan de cette face.

Quand toutes les dimensions d'un parallélépipède rectangle sont égales, ce parallélépipède prend le nom de *cube*; toutes les faces sont alors des carrés égaux; toutes les arêtes sont égales au côté de l'un de ces carrés. Deux cubes de même arête sont égaux.

343. On peut empiler des cubes égaux de manière que la base inférieure de chacun d'eux recouvre exactement la base supérieure du cube placé au-dessous de lui.

On a figuré ci-contre trois cubes empilés ainsi les uns sur les autres; ils forment dans leur ensemble un parallélépipède rectangle qui peut être regardé comme ayant une base carrée ABCD et une hauteur AA_3 égale au triple du côté de cette base.



On peut placer aussi des cubes égaux de façon que leurs faces latérales coïncident.

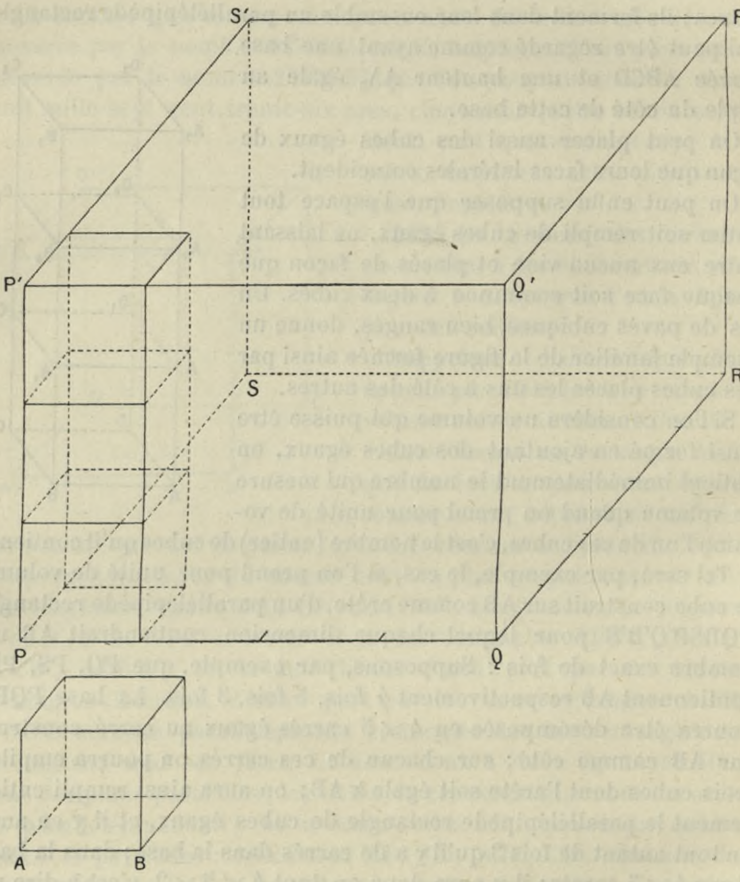
On peut enfin supposer que l'espace tout entier soit rempli de cubes égaux, ne laissant entre eux aucun vide et placés de façon que chaque face soit commune à deux cubes. Un tas de pavés cubiques, bien rangés, donne un exemple familier de la figure formée ainsi par des cubes placés les uns à côté des autres.

Si l'on considère un volume qui puisse être ainsi formé en ajoutant des cubes égaux, on obtient immédiatement le nombre qui mesure ce volume quand on prend pour unité de volume l'un de ces cubes, c'est le nombre (entier) de cubes qu'il contient.

Tel sera, par exemple, le cas, si l'on prend pour unité de volume le cube construit sur AB comme arête, d'un parallélépipède rectangle PQRSP'Q'R'S' pour lequel chaque dimension contiendrait AB un nombre exact de fois : Supposons, par exemple, que PQ, PS, PP' contiennent AB respectivement 4 fois, 5 fois, 3 fois. La base PQRS pourra être décomposée en 4×5 carrés égaux au carré construit sur AB comme côté; sur chacun de ces carrés on pourra empiler trois cubes dont l'arête soit égale à AB; on aura ainsi rempli entièrement le parallélépipède rectangle de cubes égaux, et il y en aura en tout autant de fois 3 qu'il y a de carrés dans la base; dans la base il y a 4×5 carrés; il y aura donc en tout $4 \times 5 \times 3$, c'est-à-dire un nombre égal au produit des nombres entiers qui expriment combien de fois AB est contenu dans chacune des dimensions du parallélépipède : si l'on prenait AB pour unité de longueur et le cube construit sur AB comme unité de volume, les dimensions du parallélépipède seraient mesurées par les nombres 3, 4, 5 et le volume du cube, par le produit $3 \times 4 \times 5$. D'où la conclusion suivante :

Si l'on prend pour unité de volume le cube construit sur l'unité de longueur, le volume d'un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont mesurées par des nombres entiers, est mesuré lui-même par le produit de ces trois nombres entiers.

En particulier, le volume d'un cube dont l'arête est mesurée par



un nombre entier est mesuré lui-même, dans ces conditions, par le cube de ce nombre entier.

Si, par exemple, l'arête d'un cube contient 2, 3, 4, ... fois AB, ce cube contiendra 8, 27, 64,... fois le cube construit sur AB.

344. On appelle mètre cube, décimètre cube, centimètre cube, millimètre cube des cubes dont les arêtes sont respectivement un mètre, un décimètre, un centimètre, un millimètre. Les mots décamètre cube, hectomètre cube, etc., qu'il faudrait prendre dans un sens analogue, ne sont guère employés.

Si l'on prenait pour unité de longueur le décimètre et pour unité de volume le décimètre cube, les dimensions du mètre cube seraient toutes les trois mesurées par le nombre 10; le mètre cube contient donc $10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 1000$ décimètres cubes; en d'autres termes, le décimètre cube est la 1000ième partie du mètre cube; de même le décimètre cube contient 1000 centimètres cubes, le centimètre cube contient 1000 millimètres cubes, le mètre cube contient $1000 \times 1000 = 1000000$ centimètres cubes, il contient

$$1000000 \times 1000 = 1000000000 \text{ millimètres cubes.}$$

345. Plus généralement, *si l'on prend toujours pour unité de volume le cube construit sur l'unité de longueur, le volume d'un parallélépipède rectangle dont les trois dimensions sont commensurables à l'unité de longueur, a pour mesure le produit des trois nombres qui mesurent ses dimensions.*

Supposons que ces trois derniers nombres soient des fractions; rien n'empêche de supposer que ces fractions aient le même dénominateur, qu'elles soient, par exemple, égales à $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$: si l'on prenait pour nouvelle unité de longueur le 7ième de cette unité, et pour nouvelle unité de volume les cubes construits sur cette nouvelle unité de longueur, les dimensions du parallélépipède seraient mesurées par les nombres entiers 3, 4, 5, son volume par le nombre $3 \times 4 \times 5$; l'ancienne unité de volume serait de même, avec la nouvelle, mesurée par le nombre $7 \times 7 \times 7$; donc le nombre qui mesure le parallélépipède rectangle avec l'ancienne unité de volume est bien

$$\frac{3 \times 4 \times 5}{7 \times 7 \times 7} = \frac{3}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{5}{7};$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

En particulier, si l'on prend pour unité de volume le cube construit sur l'unité de longueur, on voit que le volume d'un cube quelconque, dont l'arête est commensurable à l'unité de longueur, est mesuré par le cube du nombre qui mesure son arête.

Si l'on prend pour unité de longueur le mètre et pour unité de volume le mètre cube, les volumes du décimètre cube, du centimètre cube, du millimètre cube seront mesurés respectivement par les nombres

$$(0,1)^3 = 0,001,$$
$$(0,01)^3 = 0,000001,$$
$$(0,001)^3 = 0,000000001,$$

ce qui est conforme aux résultats antérieurs.

346. Considérons maintenant un volume V limité par une surface quelconque S. Imaginons que l'espace soit rempli de petits cubes égaux, l'arête de chacun de ces cubes étant la $n^{\text{ième}}$ partie de l'unité de longueur; en sorte que l'unité de volume, le cube construit sur l'unité de longueur, contienne n^3 de ces petits cubes. Imaginons que l'on compte combien il y a de ces cubes qui remplissent l'espace, à l'intérieur de S; supposons qu'il y en ait p; ces p cubes pris ensemble forment un volume V′ plus petit que V, mais qui en diffère très peu si n est assez grand.

En désignant par q le nombre des petits cubes de l'espace traversés par la surface S, le volume formé par ces cubes est très peu épais, et le volume V″ formé par ces $p+q$ petits cubes déborde un peu au delà du volume V; ce volume V doit être regardé comme mesuré par un nombre compris entre les deux nombres $\frac{p}{n^3}$ et $\frac{p+q}{n^3}$ qui mesurent les volumes V′ et V″; on démontre que, si l'on prend n assez grand, ces deux nombres diffèrent très peu; ils peuvent être pris comme des valeurs approchées de la mesure de V, par défaut et par excès.

347. L'unité principale de volume est le mètre cube, ses sous-multiples usités sont le décimètre cube, le centimètre cube, le millimètre cube, définis plus haut. Les mots décamètre cube, hectomètre cube, ... sont, comme on l'a déjà dit, peu usités.

Quand on a écrit un nombre représentant un volume en prenant le mètre cube pour unité, il suffit de multiplier ce nombre par 1000, 1000000, 1000000000, ou d'avancer la virgule de trois, six, neuf rangs vers la droite, pour écrire le nombre qui représente le même volume quand on prend pour unité le décimètre cube, le centimètre cube, le millimètre cube.

Pour évaluer un volume, on peut dire combien ce volume contient de mètres cubes, puis de décimètres cubes, puis de centimètres cubes, puis de millimètres cubes, c'est-à-dire énoncer la mesure du volume à un mètre cube près, puis la mesure de ce qui reste quand on a ôté les mètres cubes, à un décimètre cube près, etc... Les nombres qui représentent les décimètres cubes, les centimètres cubes, les millimètres cubes sont moindres que mille; on les regardera comme représentés par des nombres de trois chiffres, chiffres qui peuvent d'ailleurs être des zéros.

Pour écrire le nombre qui mesure le volume, on écrira d'abord le nombre de mètres cubes, puis le nombre de décimètres cubes, puis le nombre de centimètres cubes, puis le nombre de millimètres cubes, sans omettre les zéros, et en plaçant la virgule après le nombre qui correspond à l'unité choisie.

Ainsi, un volume comprenant 3 mètres cubes, 72 décimètres cubes, 5 centimètres cubes s'écrira 3,072005 en prenant le mètre cube pour unité, et 3072,005 en prenant le décimètre cube pour unité.

En opérant ainsi, la partie décimale a trois, six ou neuf chiffres, dont les derniers peuvent d'ailleurs être des zéros.

Pour énoncer un nombre décimal qui mesure un volume, on peut suivre une règle inverse; supposons que l'unité soit le mètre cube : on s'arrangera d'abord, par l'adjonction de zéros à droite, pour que la partie décimale contienne trois, six ou neuf chiffres, et on la séparera en tranches de trois chiffres; la première, à partir de la virgule, correspondra aux décimètres cubes, la seconde aux centimètres cubes, la troisième aux millimètres cubes. On énoncera d'abord la partie entière en faisant suivre des mots mètres cubes, puis chaque tranche en faisant suivre du nom de l'unité correspondante; on peut aussi énoncer le nombre en deux fois : d'abord la partie entière en faisant suivre des mots mètres cubes, puis la partie décimale, en faisant suivre des mots décimètres cubes, centimètres cubes, millimètres cubes, suivant qu'elle a trois, six ou neuf chiffres.

Ainsi le nombre 21,0102, en supposant que le mètre cube soit l'unité, s'énoncera vingt et un mètres cubes, dix décimètres cubes, deux cents centimètres cubes, ou bien vingt et un mètres cubes, dix mille deux cents centimètres cubes.

Le lecteur verra sans peine comment ces règles devraient être modifiées si l'on prenait pour unité le décimètre cube, le centimètre cube, ... au lieu du mètre cube.

Notons enfin l'emploi des signes *mc*, *dc*, *cc*, *mmc* pour désigner l'unité adoptée, mètre cube, décimètre cube, centimètre ou millimètre cube, etc., que l'on place quelquefois à droite et en haut du chiffre des unités simples, afin de rappeler la nature de l'unité : ainsi $0^{mc},1$ veut dire 100 décimètres cubes; $3^{cc},02$ veut dire 3 centimètres cubes, vingt millimètres cubes, etc.

Sauf pour les grains et les liquides, on ne construit pas de mesures effectives de volume. On enseigne en Géométrie, au moins dans les cas simples, des règles qui permettent d'obtenir la mesure d'un volume en ne mesurant que des longueurs rectilignes.

348. *Mesures de capacité.* — Pour les liquides, grains ou matières analogues, l'unité principale est le litre : le litre est un décimètre cube. Les multiples usités du litre sont le décalitre et l'hectolitre qui valent dix et cent litres; les sous-multiples usités sont le décilitre ou un dixième de litre, et le centilitre ou un centième de litre.

349. Les mesures effectives pour les liquides sont au nombre de treize, cinq grandes et huit petites.

Les cinq grandes, construites en cuivre, tôle ou fonte, ont la forme de cylindres dont la profondeur est égale au diamètre intérieur : le calcul des dimensions résulte facilement de l'application des règles de Géométrie. Ces mesures sont l'hectolitre, le demi-hectolitre, le double-décalitre, le décalitre, le demi-décalitre. Les huit petites, construites généralement en étain, sont des cylindres dont la profondeur est double du diamètre intérieur : ce sont le double-litre, le litre, le demi-litre, le double-décilitre, le décilitre, le demi-décilitre, le double-centilitre, le centilitre. Pour le lait et l'huile, ces huit petites mesures sont en fer-blanc; ce sont des cylindres dont la profondeur est égale au diamètre intérieur.

Pour les graines et matières sèches, les mesures effectives sont au nombre de onze, depuis l'hectolitre jusqu'au demi-décilitre. Ce sont des cylindres dont la profondeur est égale au diamètre intérieur, construits en bois, cuivre ou tôle.

§ 4. — Système métrique. Poids.

350. Le poids absolu d'un corps, considéré comme la force qui attire ce corps vers le centre de la terre ne dépend pas que de ce corps, mais bien de sa position par rapport à la terre : il n'est pas le même au pôle et à l'équateur, quand on s'enfonce dans la terre ou qu'on s'élève dans l'air. Dans ces diverses positions un même corps, suspendu à un ressort suffisamment sensible, ne lui donnerait pas la même extension. Ces variations sont d'ailleurs très faibles à la surface de la terre, ou lorsqu'on s'en écarte peu.

Au contraire, la *masse* d'un corps reste absolument invariable, quelle que soit la position de ce corps. C'est, au fond, les *masses* que l'on compare et que l'on mesure avec la balance : les masses de deux corps sont égales lorsque, placés dans les deux plateaux d'une balance juste et sensible, ces deux corps se font équilibre;

ou lorsque placés, l'un après l'autre, dans le même plateau d'une balance sensible, ils y font équilibre à un troisième corps. L'équilibre se maintiendra où que l'on transporte la balance. La masse de deux corps réunis est la somme des masses de ces deux corps. On arrive ainsi à la notion d'une masse double, triple, quadruple,... de la masse d'un autre corps, et inversement à celle de la $n^{\text{ième}}$ partie d'une masse.

Dans le langage usuel, auquel on se conformera ici, on dit *poids* dans le sens de *masse*, et cette confusion, dans les choses de la vie courante, n'entraîne aucun inconvénient. Au point de vue scientifique, il conviendrait, dans ce qui suit, de remplacer le mot poids par le mot masse, ou, si l'on veut conserver au mot poids sa signification mécanique, de supposer que tout se passe à Paris.

351. L'unité de poids est le *gramme*; d'après les auteurs du système métrique, c'est le poids d'un centimètre cube d'eau distillée à 4° au-dessus de zéro. Les multiples usités sont le décagramme, l'hectogramme, le kilogramme, qui valent respectivement dix, cent ou mille grammes; les sous-multiples usités sont le décigramme, le centigramme, le milligramme, qui sont respectivement la dixième, la centième, la millième partie du gramme. Le kilogramme doit être défini, en réalité, comme le poids, dans le vide, d'un étalon en platine, déposé le 4 messidor an VII aux Archives nationales. Le gramme est la millième partie de ce poids. Il est bien entendu que ces dernières définitions ne diffèrent des premières que de quantités insensibles dans la pratique (1).

Un décimètre cube, un mètre cube d'eau pèsent donc respectivement un kilogramme, mille kilogrammes.

Les règles pour l'écriture ou la lecture des nombres mesurant des poids et pour le changement des unités sont toutes pareilles à celles qui ont été exposées avec détail pour les longueurs; je n'y reviendrai pas. Signalons seulement les abréviations *kg*, *hg*, *g*, *dg*, *cg*, *mg* pour désigner les mots kilogramme, hectogramme, gramme, décigramme, centigramme, milligramme, et que l'on place en haut et à droite du chiffre des unités simples pour rappeler la nature de l'unité choisie.

Les mesures effectives en poids correspondent aux poids suivants, tous évalués en grammes :

50000; 20000; 10000; 5000; 2000; 1000; 500; 200; 100; 50;
20; 5; 2; 1; 0,5; 0,2; 0,1; 0,05; 0,02; 0,01; 0,005; 0,002; 0,001.

1. D'après les recherches récentes, le poids d'un centimètre cube d'eau à 4° serait $1^{g},000013$.

352. On fabrique des poids en fonte de 50000 grammes à 50 grammes, des poids en cuivre ou en laiton de 20000 grammes à 1 gramme; les poids en fonte ont la forme d'un tronc de pyramide à base hexagonale; ils sont munis d'un anneau; les poids en cuivre ou en laiton ont la forme d'un cylindre surmonté d'un bouton; les neuf derniers poids à partir de $0^g,5$ sont en cuivre, argent ou platine; ils ont la forme d'une plaque mince, rectangulaire, dont un coin est relevé pour qu'on puisse les manier plus aisément.

Une boîte de poids moyens très usitée dans le commerce et les ménages comporte un poids d'un gramme, deux poids de deux grammes, un de cinq, deux de dix, un de vingt, un de cinquante, deux de cent, un de deux cents, un de cinq cents : elle permet de peser, à un gramme près, tous les objets dont le poids est égal ou inférieur à un kilogramme. Des combinaisons de ce genre peuvent être poussées aussi loin qu'on le veut.

Les fortes pesées s'évaluent en tonnes et quintaux. La tonne métrique vaut 1000 kilogrammes, le quintal métrique vaut 100 kilogrammes.

§ 5. — Digression sur les grandeurs proportionnelles. Densité. Titre d'un alliage.

353. Une matière est dite homogène lorsque des corps formés de cette matière ont des poids égaux s'ils ont des volumes égaux. Réciproquement, ils auront des volumes égaux s'ils ont des poids égaux [1]. Remarquons que si l'on prend deux corps d'une telle matière et qu'on les réunisse en un seul, le volume et le poids du corps total seront respectivement la somme des volumes et la somme des poids des deux corps. Si l'on prend, par exemple, 2 litres d'eau et 3 litres d'eau, pesant 2 kilogrammes et 3 kilogrammes, en les réunissant, on formera 5 litres d'eau pesant 5 kilogrammes.

Il résulte des remarques qui précèdent une relation importante entre les volumes et les poids d'un corps homogène.

Comme le raisonnement qui conduit à cette relation se retrouve très souvent en mathématiques, on me permettra d'y insister quelque peu.

354. Supposons d'abord que le corps que l'on considère soit de l'eau, et supposons que le gramme soit exactement le poids d'un centimètre cube d'eau, ce qui aura lieu si l'eau est à une température convenable.

1. Il est sous-entendu que les circonstances telles que la pression, la température qui peuvent influer sur le volume des corps, sont supposées constantes.

Dès lors si l'on mesure les volumes en prenant le centimètre cube pour unité, et les poids en prenant le gramme pour unité, le nombre qui mesure un certain volume d'eau est le même que le nombre qui mesure le poids de cette eau. Cela est évident si le volume est un nombre entier de centimètres cubes : à chaque centimètre cube correspond un gramme; autant de centimètres cubes, autant de grammes. Supposons que le volume soit mesuré par une fraction, $\frac{11}{7}$ par exemple; cela veut dire que ce volume s'obtient en divisant un centimètre cube en 7 parties égales et en réunissant 11 de ces parties; or, si on divise en 7 parties égales un centimètre cube d'eau, chacune de ces parties pèse autant que l'autre; ensemble, elles pèsent un gramme; l'une d'elles pèsera donc un septième de gramme; le poids de 11 de ces parties sera donc mesuré par le nombre $\frac{11}{7}$; c'est ce qu'il fallait démontrer.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'un autre corps homogène, de l'or (fondu) par exemple : un centimètre cube d'or pèse $19^g,26$. Il est aisé de voir que le nombre qui mesure le poids d'une certaine quantité d'or, quand on prend le gramme pour unité, s'obtient en multipliant 19,26 par le nombre qui mesure le volume de cette quantité d'or, quand on prend le centimètre cube pour unité. Cela est clair si ce dernier nombre est entier : le poids de 11 centimètres cubes d'or, par exemple, sera la somme de 11 nombres égaux à 19,26 ou $19,26 \times 11$, en prenant le gramme pour unité. Supposons que le volume s'exprime par $\frac{11}{7}$: le nombre qui mesure le poids d'un septième de centimètre cube d'or s'obtiendra en divisant

$$19,26 = \frac{1926}{100}$$

en sept parties égales; ce sera (n° 203)

$$\frac{1926}{100 \times 7},$$

et le poids de onze septièmes de centimètre cube d'or sera

$$\frac{1926}{100 \times 7} \times 11 = \frac{1926}{100} \times \frac{11}{7},$$

en prenant le gramme pour unité.

Le lecteur observera que cette proposition résulte du théorème du nº 327, en raisonnant comme il suit :

Si l'on prenait pour unité de volume le centimètre cube, et pour unité de poids le poids d'un centimètre cube d'or, les nombres qui mesureraient le volume, ou le poids, d'une certaine quantité d'or seraient les mêmes; donc, si l'on prend pour unité de poids le gramme, en conservant la même unité de volume, le nombre qui mesurera le poids d'une certaine quantité d'or s'obtiendra en multipliant le nombre qui mesure le volume de cet or par le nombre qui exprime l'ancienne unité de poids au moyen de la nouvelle, c'est-à-dire par le nombre qui mesure le poids d'un centimètre cube d'or quand on prend le gramme pour unité.

On appelle densité d'un corps homogène le nombre qui mesure le poids d'un centimètre cube de ce corps, quand on prend le gramme pour unité.

Le nombre qui mesure le poids d'un corps homogène est égal au nombre qui mesure le volume de ce corps, quand on prend le centimètre cube pour unité, multiplié par la densité de ce corps.

Inversement, en conservant les mêmes unités, on voit que le nombre qui mesure le volume s'obtient en divisant (exactement) le nombre qui mesure le poids par la densité, et que le rapport des nombres qui mesurent le volume et le poids, pour une même matière homogène, est un nombre constant égal à la densité.

On pourrait donc définir la densité d'un corps homogène comme le rapport des nombres qui mesurent le poids et le volume d'une certaine quantité de ce corps, quand on prend le gramme pour unité de poids, le centimètre cube pour unité de volume.

355. En réfléchissant à la démonstration précédente, on voit de suite qu'on peut énoncer le précédent théorème sous une forme plus générale :

Quelles que soient les unités de poids et de volume, le nombre qui mesure le poids d'un corps homogène est égal au nombre qui mesure son volume multiplié par le nombre qui mesure le poids de la matière considérée contenue dans l'unité de volume.

Ce dernier nombre change naturellement avec les unités de volume et de poids ; mais il importe de remarquer qu'il reste invariable si, au lieu du centimètre cube et du gramme, on prend pour unités de volume et de poids les *mêmes* multiples (ou sous-multiples) du centimètre cube et du gramme, par exemple le décimètre cube et le kilogramme, qui valent respectivement mille centimètres cubes et mille grammes : en effet, le poids d'un décimètre cube de la matière considérée de densité d sera, si on l'évalue en grammes, mesuré par le nombre $d \times 1000$; si donc on prend le kilogramme pour unité, il sera mesuré (n° 326) par le nombre

$$\frac{d \times 1000}{1000} = d.$$

Le raisonnement est général.

356. Soient $V_1, V_2, \ldots, V_n$ les nombres qui mesurent, quand on prend le centimètre cube pour unité, les volumes de corps formés d'une même matière homogène, de densité d; soient $P_1, P_2, \ldots, P_n$ les nombres qui mesurent les poids de ces mêmes corps quand on prend le gramme pour unité; les nombres $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont proportionnels aux nombres $V_1, V_2, \ldots, V_n$ puisqu'ils peuvent se déduire de ces derniers en les multipliant par un même nombre d. Il résulte de là que le rapport de deux nombres P, P' pris dans la suite $P_1, P_2, \ldots, P_n$ est égal au rapport des nombres correspondants V, V' pris dans la suite $V_1, V_2, \ldots, V_n$; en d'autres termes, on peut écrire

$$\frac{V}{V'} = \frac{P}{P'}.$$

On a vu, au n° 326, que chacun de ces rapports est indépendant de l'unité qui a servi à mesurer, soit les volumes, soit les poids : on a donc ce théorème : Si l'on considère deux corps formés avec une matière homogène, le rapport de leurs volumes est égal au rapport de leurs poids : c'est ce qu'on exprime en disant que les volumes sont proportionnels aux poids.

357. Je vais maintenant essayer de dégager ce qu'il y a de général dans ce qui précède. Nous venons de voir comment les poids et les volumes d'une même matière homogène étaient liés, de telle façon que la connaissance de l'une entraînait la connaissance de l'autre; mais on conçoit qu'une liaison de même nature puisse se présenter dans bien des cas, entre des grandeurs de même espèce ou d'espèce différente.

Pour citer un autre exemple familier, il est clair que le *prix* d'une matière dépend de la quantité de cette matière que l'on vend. Supposons, pour simplifier, que les échanges se fassent de la façon suivante : en échange d'une certaine quantité de la matière considérée qui sera, si l'on veut, du vin d'une certaine qualité, l'acheteur livre un certain poids d'un métal précieux, d'argent, si l'on veut. Nous appellerons *franc* un poids déterminé d'argent : ce sera l'unité de monnaie. Les conventions suivantes s'imposent en quelque sorte d'elles-mêmes : Pour une même quantité de vin, on livrera toujours le même poids d'argent ; pour deux quantités de vin, prises ensemble, on paiera la somme des poids d'argent qui auraient servi à payer chacune d'elles. On reconnaît là des conditions toutes pareilles à celles qui ont été énoncées au n° 353 ; elles entraîneront des conséquences toutes pareilles (n^{os} 354, 355, 356) : je me contenterai de les énoncer.

Si l'unité qui sert à mesurer le vin, le litre par exemple, se payait un franc, les nombres qui mesureraient une quantité quelconque de vin et le prix de cette quantité de vin seraient égaux.

En général, le prix d'une certaine quantité de vin, en prenant le franc pour unité, s'obtient en multipliant le prix d'un litre de vin par le nombre qui mesure cette quantité de vin, quand on prend le litre pour unité.

Si on considère, d'une part, diverses quantités de vin et les nombres qui les mesurent, puis les nombres qui en mesurent les prix, les nombres de la seconde suite sont proportionnels aux nombres de la première.

Le rapport du nombre qui mesure la quantité de vin qu'on achète au nombre qui mesure le prix dont on la paie est constant : il est égal au prix d'une quantité de vin égale à l'unité, d'un litre de vin si on mesure le vin en litres.

Le rapport des prix de deux quantités de vin est égal au rapport de leurs volumes.

358. Voici encore un autre exemple dont nous aurons bientôt besoin : supposons qu'on fonde ensemble deux lingots de métaux différents, d'or et de cuivre, par exemple, et que le mélange en soit parfait : on aura ainsi un alliage.

En disant que le mélange est parfait, on entend que, si l'on prend deux quantités égales de l'alliage, deux poids égaux, pour fixer les idées, ces deux quantités contiendront toujours le même poids d'or. Il est clair aussi que, si on prend deux morceaux quelconques de l'alliage, le poids d'or contenu dans les deux morceaux réunis sera la somme du poids d'or contenu dans chacun des morceaux, de même que le poids total des deux morceaux réunis est la somme des poids de ces deux morceaux.

On reconnaît encore ici des conditions analogues à celles du n° 353 et qui entraînent des conséquences semblables (n^{os} 354, 355, 356).

On appelle titre d'un alliage formé d'un métal précieux ou métal *fin* et d'un autre métal le nombre qui mesure le poids du métal fin contenu dans un gramme d'alliage, quand on prend pour unité de poids le gramme. Habituellement, on donne à l'alliage le nom du métal fin qui y domine.

Ainsi dire qu'un alliage d'or est au titre $\frac{9}{10}$, c'est dire que, si on prend un gramme de cet alliage, il contiendra un poids d'or égal à $0^{g},9$.

Si l'on considère un poids quelconque de l'alliage, on obtiendra le poids d'or qu'il contient, exprimé en grammes, en multipliant le titre par le nombre qui mesure le poids de l'alliage.

Cela est évident si le poids de l'alliage est un nombre entier, 11 par exemple : chaque gramme d'alliage contenant un poids d'or mesuré par le nombre $\frac{9}{10}$, si le titre est $\frac{9}{10}$, le poids d'or contenu dans 11 grammes sera $\frac{9}{10} \times 11$.

Supposons maintenant que le poids d'alliage soit mesuré par une fraction $\frac{11}{7}$ par exemple. Si l'on divise un gramme d'alliage en 7 parties égales, chaque partie contiendra le même poids d'or : comme les 7 parties, en tout, contiennent un poids d'or mesuré par le nombre $\frac{9}{10}$, chacune en contiendra un poids mesuré par le nombre $\frac{9}{10 \times 7}$; 11 de ces parties contiendront un poids d'or mesuré par le nombre

$$\frac{9}{10 \times 7} \times 11 = \frac{9}{10} \times \frac{11}{7}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Si l'on considère plusieurs morceaux de l'alliage dont les poids respectifs soient mesurés par les nombres

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,$$

quand on prend le gramme pour unité, et que l'on désigne par

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$$

les nombres qui mesurent les poids d'or contenus dans ces morceaux, quand on prend encore le gramme pour unité, les seconds nombres s'obtiendront en multipliant les premiers par un même nombre, le titre : ils seront proportionnels aux premiers.

En divisant le nombre qui mesure le poids d'or contenu dans un morceau d'alliage, quand on prend le gramme pour unité, par le nombre qui mesure le poids du morceau, on obtient toujours le même nombre, le titre de l'alliage.

Puisque le titre d'un alliage est le rapport du poids du métal fin et du poids d'alliage pour un même morceau, et que ce rapport ne dépend pas (n° 326) de l'unité de poids, que l'on suppose seulement être la même pour le métal fin et l'alliage, on peut dire que le titre d'un alliage quelconque est le nombre qui mesure le poids de métal fin contenu dans l'unité de poids de l'alliage.

Enfin il résulte encore de ce qui précède que le rapport des poids de métal fin contenu dans deux morceaux d'un même alliage est égal au rapport des poids de ces deux morceaux.

359. Considérons généralement deux sortes de grandeurs [1] (A), (B) qui dépendent l'une de l'autre, qui varient ensemble, de telle sorte que l'une soit déterminée quand l'autre l'est aussi ; on dit que les deux grandeurs sont proportionnelles lorsque le rapport de deux grandeurs A_1, A_2 de la première espèce est toujours égal au rapport des deux grandeurs correspondantes B_1, B_2 de la seconde espèce.

Si l'on suppose que les deux grandeurs soient mesurées dans divers états, l'une avec une unité, l'autre avec une autre unité, aux états de la première grandeur correspondront des nombres

$$a_1, a_2, \ldots, a_n;$$

aux états de la seconde correspondront des nombres

$$b_1, b_2, \ldots, b_n;$$

le rapport de deux nombres de la première suite sera toujours égal au rapport des nombres correspondants de la seconde suite : les deux suites de nombres seront donc proportionnelles (n° 216). Réciproquement si les suites de nombres qui mesurent les grandeurs dans leurs différents états sont proportionnelles, les grandeurs sont elles-mêmes proportionnelles, dans le sens qu'on vient de donner à ce mot. La proportionnalité des suites ne peut dépendre des unités

1. Le symbole (A) ne désigne pas ici une grandeur déterminée, mais seulement l'espèce de cette grandeur : en disant une grandeur (A), j'entends une grandeur de l'espèce (A) ; quand je voudrai parler de grandeurs déterminées de cette espèce, j'emploierai les notations $A_1, A_2, \ldots$; de même pour les grandeurs de l'espèce (B).

qu'on a choisies pour mesurer les grandeurs, car si l'on change l'une de ces unités, tous les nombres a_1, a_2, ..., a_n, ou tous les nombres b_1, b_2, ..., b_n sont multipliés par un même nombre (n° 327); et si les deux suites étaient proportionnelles avant la multiplication, elles le resteront après.

Tous les nombres de la seconde suite s'obtiennent en multipliant par un même nombre les termes de la première suite. Le rapport d'un nombre de la seconde suite au nombre correspondant de la première est constant : il est égal au nombre de la seconde suite qui correspondrait au nombre 1 de la première; c'est le nombre qui mesure la grandeur de l'espèce (B) qui correspond à l'unité de grandeur de l'espèce (A).

Si l'on prend pour mesurer les deux espèces de grandeur (A) et (B) deux grandeurs correspondantes, les nombres 1 et 1 se correspondent dans les deux suites, tous les nombres d'une suite sont égaux aux nombres correspondants de l'autre; le nombre qui mesure une grandeur de l'espèce (A) est égal au nombre qui mesure la grandeur correspondante de l'espèce (B).

Il résulte des n^{os} 353, 354, 355, 356 que les grandeurs (A), (B) sont proportionnelles si les conditions suivantes sont vérifiées[1] : à deux grandeurs égales de l'espèce (A) correspondent des grandeurs égales de l'espèce (B); à la somme de deux grandeurs de l'espèce (A) correspond la somme des deux grandeurs correspondantes de l'espèce (B).

Inversement si les grandeurs (A), (B) sont proportionnelles, on voit de suite que les conditions précédentes sont vérifiées : les conditions sont nécessaires et suffisantes.

360. Si les deux grandeurs (A), (B) sont proportionnelles, on a par définition,

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1},$$

en désignant par A_1, A_2 deux grandeurs de la première espèce (A), par B_1, B_2 les deux grandeurs correspondantes de l'espèce (B); si le premier rapport est un nombre entier n, c'est-à-dire (n° 323) si A_2 est la somme de n grandeurs égales à A_1, le second rapport est égal au même nombre entier, B_2 est la somme de n grandeurs égales à B_1; c'est ce que l'on exprime en disant :

Si deux grandeurs (A), (B) sont proportionnelles, lorsque la

1. Ces notions seront reprises sous une forme plus abstraite au chapitre XIII.

première devient n fois plus grande (ou plus petite), la seconde devient aussi n fois plus grande (ou plus petite).

Réciproquement, si deux grandeurs (A), (B) sont liées de telle façon que la première devenant n fois plus grande (ou plus petite), la seconde devienne aussi n fois plus grande (ou plus petite), et cela quel que soit n, ces deux grandeurs sont proportionnelles.

Soient, en effet, A_1, A_2 deux grandeurs de l'espèce (A), B_1, B_2 les deux grandeurs correspondantes de l'espèce (B).

Supposons, par exemple, que le rapport $\frac{A_2}{A_1}$ soit égal à $\frac{4}{5}$, c'est-à-dire que la grandeur A_2 soit la somme de 4 grandeurs égales à la cinquième partie de A_1; nous désignerons par A_3 la cinquième partie de A_1, et par B_3 la grandeur de l'espèce (B) qui correspond à A_3. Puisque la grandeur A_1 est 5 fois plus grande que A_3, la grandeur B_1, qui correspond à A_1, devra de même être 5 fois plus grande que B_3; puisque la grandeur A_2 est 4 fois plus grande que A_3, la grandeur B_2 doit être 4 fois plus grande que B_3; B_2 est donc la somme de quatre grandeurs égales à B_3, dont chacune est la cinquième partie de B_1: le rapport $\frac{B_2}{B_1}$ est donc, comme le rapport $\frac{A_2}{A_1}$, égal à $\frac{4}{5}$. La proposition est démontrée.

Pour en finir avec ce sujet, disons quelques mots des grandeurs *inversement proportionnelles*.

361. Les grandeurs que l'on a définies jusqu'à présent comme proportionnelles sont dites aussi *directement* proportionnelles; l'adverbe *directement* peut se sous-entendre; l'adverbe *inversement* ne se sous-entend jamais.

Deux grandeurs (A), (B) sont dites inversement proportionnelles si elles sont liées de telle façon qu'à un état déterminé de l'une corresponde toujours un état déterminé de l'autre et si, désignant par A_1, A_2 deux états de la première et par B_1, B_2 les deux états correspondants de la seconde, on a toujours

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_2}{B_1}.$$

S'il en est ainsi et si l'on considère la grandeur (A) dans divers états A_1, A_2, A_3, ... et la grandeur (B) dans les états correspondants B_1, B_2, B_3, ...; si l'on désigne par a_1, a_2, a_3, ... les nombres qui mesurent A_1, A_2, A_3, ..., par b_1, b_2, b_3, ... les nombres qui mesurent B_1, B_2, B_3, ..., les deux suites

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots$$

seront inversement proportionnelles. En effet, on a, par exemple,

$$\frac{A_2}{A_3} = \frac{a_2}{a_3}, \quad \frac{B_3}{B_2} = \frac{b_3}{b_2},$$

et puisque l'on doit avoir $\frac{A_2}{A_3} = \frac{B_3}{B_2}$, on aura aussi $\frac{a_2}{a_3} = \frac{b_3}{b_2}$.

Le produit de deux termes correspondants pris dans les suites

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots$$

sera toujours le même; les deux suites

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots,$$
$$\frac{1}{b_1}, \quad \frac{1}{b_2}, \quad \frac{1}{b_3}, \ldots$$

seront directement proportionnelles.

Inversement, si les grandeurs (A), (B) sont liées de telle façon que, en désignant par a_1, a_2, a_3, ... les nombres qui mesurent la première grandeur dans les états A_1, A_2, A_3, ... et par b_1, b_2, b_3, ... les nombres qui mesurent la seconde grandeur dans les états B_1, B_2, B_3, ..., qui correspondent à A_1, A_2, A_3, ..., les deux suites

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots$$

soient toujours inversement proportionnelles, les grandeurs (A), (B) seront inversement proportionnelles.

Exemples. Il y a une infinité de rectangles qui ont la même surface; chacun de ces rectangles est déterminé si l'on se donne l'une de ses dimensions, la base ou la hauteur; supposons que A_1, A_2, A_3, ... soient les bases de quelques-uns de ces rectangles et B_1, B_2, B_3, ... les hauteurs correspondantes; si, en prenant le mètre pour unité de longueur, les bases A_1, A_2, A_3, ... sont mesurées par les nombres a_1, a_2, a_3, ... et les hauteurs B_1, B_2, B_3, ... par les nombres b_1, b_2, b_3, ..., les deux suites

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots$$

sont inversement proportionnelles; car chacun des produits a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, ... représente la surface de ces rectangles en mètres carrés.

Ainsi la base d'un rectangle d'une surface donnée est inversement proportionnelle à sa hauteur.

Si l'on considère des tonneaux, de volumes différents, contenant des vins différents et tels que chaque tonneau coûte le même prix, le volume de chaque tonneau sera inversement proportionnel au prix du litre de vin qu'il contient.

Si l'on considère des ouvriers dont chacun fasse la même besogne dans le même temps, le temps nécessaire pour faire une besogne déterminée sera inversement proportionnel au nombre d'ouvriers employés pour la faire.

S'il s'agit, par exemple, de creuser un fossé d'une certaine longueur, cette longueur devra, en effet, être égale au produit du nombre de mètres que creuse chaque ouvrier en une heure par le nombre d'heures de travail.

Si diverses escouades d'ouvriers pour lesquels chaque heure de travail est payée le même prix, ont travaillé des temps différents et ont reçu chacune la même somme totale, le nombre d'ouvriers qui composent chacune de ces escouades est inversement proportionnel au temps pendant lequel elle a travaillé.

362. Revenons au cas général et reprenons les mêmes notations.

Si on désigne par (A), (B) des grandeurs inversement proportionnelles, et par A_1, A_2 des états de la première, par B_1, B_2 les états correspondants de la seconde, on aura

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_2}{B_1}.$$

Si le premier rapport est égal à un nombre entier n, c'est-à-dire si la grandeur A_1 est la somme de n grandeurs égales à A_2, B_2 devra de même être la somme de n grandeurs égales à B_1, c'est-à-dire que B_1, qui correspond à A_1, sera la $n^{\text{ième}}$ partie de B_2 qui correspond à A_2. C'est ce qu'on exprime en disant :

Si deux grandeurs d'espèces (A), (B) sont inversement proportionnelles, lorsque l'une d'elles devient n fois plus grande, l'autre devient n fois plus petite.

Réciproquement, si deux grandeurs d'espèces (A), (B), liées entre elles de façon que l'une soit déterminée quand l'autre est déterminée, sont telles que l'une devenant n fois plus grande, l'autre devienne toujours n fois plus petite, ces deux grandeurs sont inversement proportionnelles.

En effet supposons que les grandeurs d'espèces (A), (B) vérifient cette condition : désignons par A_1, A_2 deux grandeurs de la première espèce, par B_1, B_2 les grandeurs correspondantes de la seconde. Supposons que l'on ait

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{4}{5},$$

c'est-à-dire que A_1 soit la somme de quatre grandeurs égales à la cinquième partie de A_2; désignons par A_3 cette cinquième partie, et par B_3 la grandeur de l'espèce (B) qui correspond à A_3. Par hypothèse, la grandeur A_2 est égale à cinq fois A_3, donc B_2 est la cinquième partie de B_3; A_1 est égale à quatre fois A_3, donc B_1 est le quart de B_3; en résumé, B_2 s'obtient en divisant en 5 parties égales la grandeur B_3, qui est la somme de 4 grandeurs égales à B_1; si donc on prend B_1 pour unité, B_3 sera mesuré par le nombre 4, et B_2, qui est le cinquième de B_3, par le nombre $\frac{4}{5}$; c'est dire que le rapport $\frac{B_2}{B_1}$ est bien égal à $\frac{4}{5}$.

§ 6. — Système métrique; monnaies.

363. L'unité monétaire est le *franc*. D'après la loi du 18 germinal an III, le franc est constitué par 5 grammes d'argent au titre de $\frac{9}{10}$. C'est-à-dire que c'est un poids de métal de 5 grammes dans lequel il y a un poids d'argent égal à $5 \times \frac{9}{10} = 4{,}5$ en prenant le gramme pour unité.

Le seul sous-multiple du franc qui soit usité est le centime ou centième partie du franc.

Cette unité est, actuellement, théorique : les *pièces d'un franc* ne sont pas au titre $\frac{9}{10}$.

264. D'après la convention monétaire (6 novembre et 23 décembre 1865), à laquelle ont adhéré la France, la Grèce, l'Italie, la Suisse et la Belgique, des pièces d'or sont frappées au titre de $\frac{9}{10}$ dont les valeurs, en francs, sont inscrites au tableau suivant, dans la colonne de gauche, et les poids, en grammes, dans la colonne de droite :

100	32,25806
50	16,12903
20	6,45161
10	3,22580
5	1,61290

Les mêmes États frappent des pièces d'argent dont les valeurs et les poids sont de même inscrits ci-dessous, avec les mêmes unités :

5	25
2	10
1	5
0,5	2,5
0,2	1

La pièce de 5 francs (argent) est seule au titre de $\frac{9}{10}$, les autres pièces d'argent sont au titre de $\frac{835}{1000}$.

Ainsi, dans une pièce d'or de 10 francs, le poids d'or pur s'obtient comme le produit $3,2258 \times \frac{9}{10}$; il est égal à $2^g,90$ à un centigramme près. De même le poids d'argent pur contenu dans une pièce d'un franc est $4^g,175$.

On frappe en outre des pièces de bronze dont les valeurs respectives sont données ci-dessous, en prenant toujours le franc pour unité : 0,10; 0,05; 0,02; 0,01. Le poids d'un centime en bronze est 1 gramme.

Les poids des monnaies ne peuvent pas être réalisés exactement : on admet pour chaque espèce de monnaie une *tolérance*, les pièces pour lesquelles l'écart entre le poids réel et le poids théorique dépasse cette tolérance doivent être rejetées. La loi fixe aussi les dimensions des monnaies : on trouvera dans l'*Annuaire du Bureau des longitudes*, en particulier, tous les renseignements désirables à cet égard.

365. Le prix d'un certain poids d'argent monnayé (c'est-à-dire de monnaie d'argent) s'obtient très aisément au moyen des nombres précédemment donnés.

En effet ce prix (nº 357) est proportionnel au poids. Il suffit donc d'avoir le prix d'un gramme d'argent monnayé; puisque 5 grammes d'argent monnayé valent 1 franc, 1 gramme d'argent vaut $\frac{1}{5}$, en prenant le franc pour unité, ou 0,20. Le prix d'un poids quelconque d'argent monnayé s'obtiendra en multipliant 0,20 par le poids d'argent évalué en grammes. Ainsi le prix d'un kilogramme d'argent monnayé est 200 francs.

Si l'on prenait pour unité de monnaie une pièce d'or fictive pesant le même poids qu'une pièce d'un franc en argent, on aurait, pour évaluer ensuite en francs une somme quelconque évaluée avec cette unité fictive, à faire un changement d'unité (n° 327), c'est-à-dire à multiplier la somme, évaluée avec l'unité fictive, par le nombre qui représenterait le prix, en francs, de cette unité fictive. Ce nombre est fixé par la loi, il est égal à 15,5. D'où la règle suivante :

Pour évaluer, en francs, le prix d'un certain poids d'or monnayé, on évalue le prix du même poids d'argent monnayé et l'on multiplie le résultat par 15,5.

Ainsi, le prix d'un kilogramme d'or monnayé est

$$200 \times 15{,}5 = 3100,$$

en prenant le franc pour unité.

Exemple. Quel est le prix d'une pièce d'or monnayé dont le poids est 32,25806 en prenant le gramme pour unité? Ce prix, en prenant le franc pour unité, est mesuré par le nombre

$$32{,}25806 \times 0{,}2 \times 15{,}5 = 32{,}25806 \times 3{,}1 = 99{,}999986.$$

La différence entre ce nombre et le nombre 100 que donne le tableau du n° 364 est 0,000014 c'est-à-dire quatorze fois la dix-millième partie d'un centime.

366. La *valeur intrinsèque* d'un lingot d'or ou d'argent est, par définition, la valeur du métal fin que contient ce lingot, calculée en supposant que 4 gr. 50 d'argent pur valent 1 franc, et que le prix du même poids d'or pur soit 15,5. — On rappelle que 4 gr. 50 est le poids d'argent pur contenu dans une pièce (théorique) d'un franc au titre de $\frac{9}{10}$.

Dans cette hypothèse, en multipliant 4,50 par le prix d'un gramme d'argent pur, on doit trouver 1 comme produit; inversement, en prenant le franc pour unité, le prix d'un gramme d'argent pur sera $\frac{1}{4{,}50} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$, et le prix d'un gramme d'or pur sera $\frac{2}{9} \times 15{,}5 = \frac{31}{9}$. Les deux fractions $\frac{2}{9}$ et $\frac{31}{9}$ réduites en fractions décimales, conduisent aux deux fractions périodiques 0,222... et 3,444.... On voit que la valeur intrinsèque d'un kilogramme d'argent pur est 222 fr. 22, à un centime près, celle d'un kilogramme d'or pur est, à la même approximation 3444 fr. 44. En général, pour avoir la valeur intrinsèque d'un lingot d'argent ou d'or, on calculera le nombre qui mesure le poids de métal fin, en multipliant par le titre le poids du lingot évalué en grammes, et l'on multipliera ce nombre par $\frac{2}{9}$ ou $\frac{31}{9}$ suivant qu'il s'agira d'argent ou d'or.

Ainsi la valeur intrinsèque de la pièce d'un franc (argent) réelle au titre 0,835 sera

$$5 \times 0,835 \times \frac{2}{9} = \frac{0,835 \times 10}{9} = \frac{835}{900};$$

la fraction $\frac{835}{900}$, réduite en fraction décimale, donne la fraction périodique 0,92777....

C'est, pour les monnaies étrangères, la *valeur intrinsèque* qui sert de base au *change*.

367. La *valeur au tarif* des matières d'or et d'argent est la valeur intrinsèque diminuée des frais de fabrication pour le monnayage.

Cette retenue, d'après la loi du 31 octobre 1879, est supposée proportionnelle au poids de métal fin contenu dans le lingot considéré : elle s'obtient en multipliant ce poids, évalué en grammes, par le nombre $\frac{67}{9000}$ pour l'or, par le nombre $\frac{15}{9000}$ pour l'argent.

Pour avoir la valeur au tarif d'un lingot, on calculera donc la valeur intrinsèque, la retenue et l'on fera la différence. Ainsi les valeurs au tarif du kilogramme d'or aux titres 1 et 0,900 sont respectivement, en francs, 3437 et 3093,30 ; les valeurs au tarif du kilogramme d'argent aux mêmes titres sont 220,56 et 198,50.

J'extrais ces exemples de l'excellent *Traité d'Arithmétique commerciale* de M. Brasilier [1], où j'ai d'ailleurs largement puisé pour les renseignements d'ordre pratique.

368. Enfin, chaque jour la *cote officielle de la Bourse* publie la *valeur commerciale* du kilogramme d'or et d'argent, telle qu'elle résulte de l'offre et de la demande. Si cette valeur est notablement supérieure à la valeur au tarif, il en résulte un danger pour l'État dont les monnaies risquent d'être accaparées par les marchands d'or et d'argent : c'est une crise monétaire. Le danger peut se produire dans l'autre sens, si la valeur commerciale est très inférieure à la valeur au tarif. Enfin, un autre danger résulte de ce que le rapport entre la valeur commerciale de l'or et de l'argent peut différer notablement du rapport légal 15,5 : il est actuellement beaucoup plus grand ; c'est pour cette raison que la convention monétaire limite pour les différents États qui l'ont adoptée la quantité de monnaie d'argent qui peut être frappée. C'est la même raison qui fait rechercher les payements en or.

Par exemple, le 21 mai 1893, la cote officielle de la Bourse donnait les nombres suivants :

Or en barre, à 1000/1000, le kil. 3437 francs. 1 à 2 $^0/_{00}$ prime. Argent en barre à 1000/1000, le kil. 218,89. 365 à 378 $^0/_{00}$ perte.

1. Paris, Masson, 1889.

Les indications 1000/1000 qui suivent les mots or en barre, argent en barre, signifient qu'il s'agit de lingots au titre $\frac{1000}{1000} = 1$, c'est-à-dire d'or et d'argent purs. Le prix 3437 francs par kilogramme d'or pur est un prix moyen auquel il faut ajouter, pour avoir la valeur commerciale, la *prime*, calculée en multipliant le prix moyen 3437 francs par une fraction p comprise entre $\frac{1}{1000}$ et $\frac{2}{2000}$. (Le symbole $^0/_{00}$ veut dire *pour mille.*) Ce jour-là, la valeur commerciale de l'or pur était donc comprise entre

$$3437 + 3437 \times 0{,}001 = 3440{,}437 \text{ et } 3437 + 3437 \times 0{,}002 = 3443{,}874.$$

Le même jour, la valeur commerciale du kilogramme d'argent pur devait s'obtenir en retranchant du prix moyen 218,89 la *perte*, obtenue en multipliant ce prix moyen par une fraction p comprise entre $\frac{365}{1000}$ et $\frac{370}{1000}$, c'est-à-dire que la valeur commerciale du kilogramme d'argent était comprise entre $218{,}89 - 218{,}89 \times 0{,}365$ et $218{,}89 - 218{,}89 \times 0{,}37$, c'est-à-dire, en ne tenant compte que des centimes, entre 139,00 et 137,90.

Il en résulte que, à cette époque, le rapport des valeurs commerciales d'un même poids d'or et d'argent était voisin de 25 au lieu d'être 15,5.

La valeur commerciale de l'or pur était un peu supérieure à la valeur au tarif précisément égale au nombre 3437 francs, porté comme prix moyen; l'argent subissait une dépréciation considérable puisque la valeur commerciale du kilogramme d'argent pur était 139 francs au plus, et était ainsi très inférieure à la valeur de l'argent monnayé.

Quant à la valeur commerciale d'un lingot d'un poids et d'un titre donnés, elle s'obtient en calculant le poids du métal fin contenu dans le lingot, en prenant, par exemple, le kilogramme pour unité de poids, et en multipliant le résultat par la valeur commerciale du kilogramme de métal fin. Traitons, par exemple, la pièce de 5 francs au titre de 0,9 comme un lingot. Son poids en grammes est 25; le poids d'argent pur qu'elle contient est, avec la même unité, $25 \times 0{,}9 = 22{,}5$; sa valeur commerciale, à l'époque considérée, en prenant 139 francs pour la valeur commerciale du kilogramme d'argent pur, était donc $22{,}5 \times 0{,}139$ ou environ 3f,13. Une pièce d'argent de 5 francs, au titre de 0,9 comme les pièces françaises, mais frappée par un État n'ayant pas adhéré à la convention monétaire, et qui ainsi n'aurait pas *cours forcé* dans notre pays, paraîtrait devoir être reçue pour sa valeur commerciale, soit 3 fr. 13 à l'époque considérée. Elle peut subir en outre une *dépréciation* que font aussi connaître les *cours*. Si cette dépréciation était, par exemple, de 25 pour 100, c'est qu'il faudrait diminuer la valeur commerciale 3,13 du nombre $3{,}13 \times 0{,}25 = 0{,}78.....$, et que, ainsi, la pièce de 5 francs ne serait reçue que pour une valeur égale à $3{,}13 - 0{,}78 = 2{,}35$, valeur inférieure à la moitié de sa valeur nominale.

§ 7. — Anciennes mesures. Mesures étrangères. Mesure du temps.

369. Le système métrique n'a pas toujours été employé, il n'est pas adopté par tous les peuples. Il importe de savoir ramener les autres mesures aux mesures métriques, ou réciproquement.

Si l'on connaît les nombres qui mesurent, avec les unités métriques, les autres unités, anciennes ou étrangères, on déduira sans peine, en appliquant les théorèmes établis dans les nos 325-327, du nombre qui mesure une grandeur quelconque évaluée au moyen de ces unités, le nombre qui mesure cette grandeur avec les unités métriques : c'est ce qu'on appelle effectuer la conversion des mesures anciennes ou étrangères en mesures métriques. Je me bornerai à expliquer cette opération sur un exemple.

Avant l'établissement du système métrique en France, la mesure de longueur était la *toise*. Les évaluations sur lesquelles a été fondée la détermination du mètre ont donné, pour la longueur du quart du méridien terrestre, 5130740 toises : le mètre légal, en prenant la toise pour unité, serait donc mesuré par le nombre 0,513074.

D'après le n° 325, le nombre qui mesure la toise, quand on prend le mètre pour unité, est donc

$$\frac{1}{0,513074};$$

En poussant la division jusqu'au sixième chiffre décimal, on trouve pour le nombre cherché 1,949036. C'est la valeur que nous adopterons.

La toise se divisait en 6 *pieds*, le *pied* en 12 *pouces*, le *pouce* en 12 *lignes*. Les valeurs métriques du pied, du pouce, de la ligne se calculent en divisant le nombre 1,949036 par 6, par 6×12 et par $6 \times 12 \times 12$; elles sont respectivement

$$\begin{aligned} \text{pied} &= 0,32484, \\ \text{pouce} &= 0,02707, \\ \text{ligne} &= 0,00226. \end{aligned}$$

Si une longueur est exprimée en toises, pour avoir sa valeur en mètres, on multipliera le nombre qui la mesure par 1,949036; si elle est exprimée en toises, pieds, pouces, lignes, on multipliera respectivement les nombres de toises, pieds, pouces, lignes par 1,94904; 0,32484; 0,02707; 0,00226, et on ajoutera les résultats.

Si une longueur est évaluée en mètres, pour avoir son évaluation en toises, on multipliera le nombre qui la mesure par 0,513074.

On peut aussi l'évaluer en toises, pieds, pouces et lignes.

Par exemple, le nombre qui mesure l'hectomètre en toises est

$$0,513074 \times 100 = 51,3074 = 51 + 0,3074.$$

Dans un hectomètre il y a 51 toises et une longueur moindre qu'une toise, mesurée, quand on prend la toise pour unité, par le nombre 0,3074 : combien y a-t-il de pieds dans cette longueur? Puisque la toise vaut 6 pieds, cette longueur, évaluée en pieds, sera mesurée par le nombre $0,3074 \times 6 = 1,8444$; elle contient 1 pied et en outre une longueur qui, lorsqu'on prend le pied pour unité, est mesurée par 0,8444; cette longueur, si l'on prend le pouce pour unité, sera mesurée par le nombre $0,8444 \times 12 = 10,1328$; elle contient donc 10 pouces et une longueur qui, en prenant le pouce pour unité, est mesurée par le nombre 0,1328 ; cette dernière longueur, si l'on prend la ligne pour unité, est mesurée par le nombre $0,1328 \times 12 = 1,5936$; elle contient 1 ligne. Ainsi 100 mètres contiennent 51 toises, 1 pied, 10 pouces, 1 ligne.

On trouvera dans l'*Annuaire du Bureau des longitudes* les renseignements désirables pour ce qui concerne soit les anciennes mesures, soit les mesures étrangères.

370. Il nous reste à dire quelques mots de la mesure du temps, qui d'ailleurs ne rentre pas dans le système métrique, et dont la division ne suit pas les lois du système décimal.

Deux temps sont dits égaux si pendant ces deux temps la terre tourne d'un même angle, angle que les phénomènes astronomiques permettent de mesurer. Le jour sidéral est l'intervalle de temps que la terre met à effectuer une révolution complète ; il se divise en 24 heures sidérales, chaque heure sidérale en 60 minutes sidérales, chaque minute sidérale en 60 secondes sidérales.

Le jour solaire moyen, qui sert d'unité de temps, est défini dans les traités de cosmographie ; je me contenterai de dire que sa mesure, en prenant pour unité le jour sidéral, est égale à 1,00273908 ; il se divise en 24 heures solaires, chaque heure en 60 minutes solaires, chaque minute en 60 secondes solaires. Ce sont des heures, minutes et secondes solaires que marquent les pendules et les montres ordinaires.

371. *Système C. G. S.* — Le système dit C. G. S. est un système complet d'unités élaboré par un groupe de savants anglais, adopté en 1881 par un congrès international de physiciens et qui convient particulièrement aux recherches d'ordre scientifique. Il a pour base trois unités fondamentales : le centimètre (unité de longueur), le gramme (unité de poids ou plutôt de *masse*), la seconde (de temps moyen), unité de temps.

Ce sont les initiales des mots centimètre, gramme, seconde qui forment le nom du système C. G. S.

Un *Bureau international de poids et mesures*, qui a son siège au pavillon de Breteuil, près de Paris, concentre les recherches qui se rapportent aux mesures de précision.

Exercices.

253. Un jardin rectangulaire a 100 mètres de long, 50 mètres de large. Une allée dont la largeur est $1^m,50$ en fait le tour; au milieu une allée parallèle au grand côté du rectangle a une largeur de $1^m,75$; il y a en outre cinq allées transversales dont la largeur est de $0^m,90$; le reste est cultivé. Quelle est la surface cultivée?

254. Une croix de marbre a pour section un carré de $0^{mq},19$. Le grand bras de la croix a $1^m,30$; le petit bras $0^m,75$. Quel est le volume de cette croix? Quel est son poids, en supposant que la densité du marbre soit 2,70 ?

255. Une pièce d'or de 20 francs a un diamètre de $0^m,021$; on peut donc avec dix mille pièces de 20 francs remplir, sauf les interstices nécessaires, un carré dont le côté serait $2^m,1$; quelle surface recouvrirait-on ainsi avec une somme de trois milliards, en pièces de 20 francs? — En plaçant bout à bout les mêmes pièces de 20 francs, quelle longueur atteindrait-on?

Quel est le poids d'or pur contenu dans une somme de trois milliards, en or monnayé. Quel serait le volume de cet or? Densité de l'or pur : 19,26.

256. D'après la loi anglaise, avec 40 *livres troy* d'or au titre $\frac{11}{12}$ on doit faire 1869 *souverains*. Calculer la valeur intrinsèque du souverain anglais, sachant que la livre troy vaut $373^g,2419$.

257. Quel est le poids d'air contenu dans une chambre ayant la forme d'un parallélépipède rectangle dont la longueur est $7^m,50$, la largeur $6^m,30$, la hauteur $3^m,90$? Poids du litre d'air : $1^g,293$.

258. Quel est le volume d'un kilogramme de mercure? Densité du mercure : 13,6.

259. Le volume de la Terre, en mètres cubes, est 108326×10^{16}; quelle est sa masse, en supposant sa densité moyenne égale à 5,5 ?

260. La surface de la Terre, en mètres carrés, est 510082×10^9; quelle serait cette surface, évaluée en toises carrées?

261. Quel volume d'eau à 100° faudrait-il prendre pour que la même quantité d'eau à 4° occupât exactement 1 litre? Densité de l'eau à 100° : 0,95865.

262. Quelle serait la valeur commerciale d'un mètre cube d'argent pur, en supposant que la valeur commerciale d'un kilogramme d'argent pur soit 139 francs? Densité de l'argent pur : 10,512.

263. Le tableau suivant contient, outre les noms du Soleil et des principales planètes, deux colonnes de nombres. La première contient des nombres proportionnels aux distances moyennes de chaque astre au Soleil; la seconde, des nombres proportionnels à son diamètre. On sait en outre que, en unités métriques, le rayon de la Terre est 6371000, la distance moyenne du Soleil à la Terre est 1485×10^8.

Soleil		108,56
Mercure	0,3871	0,37
Vénus	0,7233	1
La Terre	1	1
Mars	1,5237	0,53
Jupiter	5,2028	11,06
Saturne	9,5389	9,30
Uranus	19,1833	4,23
Neptune	30,0551	3,80

Pour se faire une idée des dimensions et des distances respectives de ces astres, on peut les représenter, placés en ligne droite, de manière que la distance de la sphère qui représentera le Soleil à celle qui représentera Neptune soit de 6 kilomètres, les diamètres des astres (fictifs) et leurs distances au soleil fictif étant réduits dans la même proportion. Calculer à un millimètre et à un mètre près, respectivement, les diamètres et les distances au soleil fictif des autres astres.

264. Quelle est en minutes et secondes la différence entre le jour solaire et le jour sidéral?

265. La durée de l'année (tropique) est en jours (moyens) égale à 365,2422166; évaluer cette durée en jours, heures, minutes et secondes.

266. Dans un bassin coulent deux robinets : le premier, coulant seul, remplirait le bassin en a heures; le second, de même, le remplirait en b heures; combien de temps les deux robinets, coulant ensemble, mettront-ils à remplir le bassin?

Démontrer que si a, b sont des nombres entiers, ainsi que le nombre cherché, on peut poser

$$a = m(a' + b')a', \qquad b = m(a' + b')b',$$

m étant un nombre entier et a', b' des nombres premiers entre eux.

CHAPITRE XI

APPLICATIONS

§ 1. — Règles de trois.

372. La considération des grandeurs directement ou inversement proportionnelles, donne lieu à des questions connues sous le nom de règles de trois, dont je vais d'abord donner quelques exemples.

On sait que 25 litres de vin coûtent $32^{\text{f}},25$; on demande combien coûteront 37 litres du même vin.

Le prix est proportionnel à la quantité de vin ; si donc on désigne par x le prix de 37 litres de vin, on devra avoir

$$\frac{x}{32,25} = \frac{37}{25}.$$

On en déduit

$$x = \frac{37 \times 32{,}25}{25} = 47{,}25.$$

Le prix cherché est 47,25.

On aurait pu raisonner de la façon suivante : le prix de 25 litres est 32,25 ; le prix d'un litre sera 25 fois moindre ou $\frac{32{,}25}{25}$; le prix de 37 litres sera 37 fois plus fort ou $\frac{32{,}25 \times 37}{25}$.

Il a fallu 18 jours à 8 ouvriers pour exécuter un certain travail; combien aurait-il fallu de temps à 12 ouvriers pour exécuter le même travail ?

Les temps nécessaires à des nombres différents d'ouvriers pour faire un même travail sont inversement proportionnels à ces nombres, en supposant que, dans le même temps, chaque ouvrier fasse le même travail.

Si donc on désigne par x le nombre de jours qu'il faudra à 12 ouvriers pour faire le travail exécuté en 18 jours par 8 ouvriers, on aura

$$\frac{x}{18} = \frac{8}{12},$$

d'où

$$x = \frac{18 \times 8}{12} = 12.$$

On aurait pu raisonner de la façon suivante : pour faire le travail, il a fallu 18 jours à 8 ouvriers ; pour faire le travail il aurait fallu à un seul ouvrier 8 fois plus de temps, soit 18×8 jours ; il faudra à 12 ouvriers 12 fois moins de temps, soit $\frac{18 \times 8}{12}$.

Les problèmes que nous venons de traiter sont des *règles de trois ;* dans chacun il y est question de deux espèces de grandeurs ; dans le premier exemple entrent des quantités de vin et des prix. La quantité de vin et le prix sont des grandeurs directement proportionnelles ; on considérait *deux* quantités de vin connues, 25 litres et 37 litres ; quant aux prix correspondants, un seul était connu, l'autre était la quantité cherchée. Le second exemple est analogue, mais les deux quantités que l'on y considérait, les nombres d'ouvriers et les nombres de jours nécessaires pour exécuter un certain travail, étaient inversement proportionnelles : on connaissait encore deux quantités de la première espèce, une seule quantité de la seconde. Les deux problèmes reviennent à trouver un terme d'une proportion dans laquelle on connaît trois termes (n° 214).

373. Une règle de trois simple est un problème dans lequel entrent deux grandeurs (A), (B) dont on sait qu'elles sont directement ou inversement proportionnelles; on connaît les nombres a_1, a_2 qui

mesurent la première dans deux de ses états A_1, A_2; on connaît le premier des nombres b_1, b_2 qui mesurent la seconde dans les états B_1, B_2 qui correspondent à A_1, A_2; on demande le second nombre. On a, si les grandeurs sont directement proportionnelles, la relation

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1},$$

d'où l'on tire

$$b_2 = \frac{a_2 \times b_1}{a_1};$$

et, si les grandeurs sont inversement proportionnelles,

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_1}{a_2},$$

d'où l'on tire

$$b_2 = \frac{b_1 \times a_1}{a_2}.$$

374. Nous n'avons considéré jusqu'ici que *deux* espèces de grandeurs liées l'une à l'autre. Mais il peut arriver qu'une grandeur d'espèce (X) soit liée à plusieurs grandeurs d'espèces (A), (B), (C), ...; (P), (Q), (R), ..., de façon que toutes ces dernières grandeurs étant déterminées la première (X) le soit. C'est ainsi, par exemple, que le volume d'un parallélépipède rectangle est déterminé quand ses trois dimensions sont déterminées. De même, le nombre d'ouvriers (travaillant tous également) qu'il faut pour creuser un fossé d'une certaine longueur, d'une certaine largeur dépend de cette longueur et de cette largeur, de la longueur et de la largeur que creuse un ouvrier en une heure, du temps que l'on veut employer à creuser le fossé.

Supposons ainsi la grandeur (X) liée aux grandeurs (A), (B), (C), ...; (P), (Q), (R), ... Lorsque l'on donne des valeurs fixes à toutes ces dernières grandeurs sauf à l'une d'elles, on peut dire que (X) ne dépend plus que de celle-là. Par exemple, si l'on se donne deux dimensions d'un parallélépipède rectangle, le volume de ce parallélépipède ne dépend plus que de la troisième dimension. Supposons que, dans ces conditions, la grandeur (X) soit directement ou inversement proportionnelle à la grandeur que l'on n'a pas fixée, suivant que celle-ci appartient à l'une des espèces (A), (B), (C), ... ou à l'une des espèces (P), (Q), (R), ... : on dira alors que la grandeur (X) est directement proportionnelle aux grandeurs (A), (B), (C), ... et inversement proportionnelle aux grandeurs (P), (Q), (R), ...

S'il en est ainsi, et si l'on considère deux états X_1, X_2 de la grandeur (X), qui correspondent respectivement aux états

$$A_1, B_1, C_1, \ldots; P_1, Q_1, R_1, \ldots,$$
$$A_2, B_1, C_1, \ldots; P_1, Q_1, R_1, \ldots$$

des grandeurs (A), (B), (C), ... ; (P), (Q), (R), ..., en sorte que chacune de ces grandeurs, sauf (A), ait la même valeur dans les deux états, ou devra avoir

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{A_1}{A_2}.$$

Au contraire, si l'on considérait deux états X_1, X_2 correspondant aux états

$$A_1, B_1, C_1, \ldots; P_1, Q_1, R_1, \ldots,$$
$$A_1, B_1, C_1, \ldots; P_2, Q_1, R_1, \ldots$$

des grandeurs (A), (B), (C), ... ; (P), (Q), (R), ..., en sorte que chacune des grandeurs, sauf (P), eût la même valeur dans les deux états, on devrait avoir

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{P_1}{P_2}.$$

Par exemple, le temps T nécessaire à n ouvriers pour creuser un fossé ayant partout la même profondeur, une longueur A, une largeur B, est directement proportionnel à A et à B, inversement proportionnel à n, en supposant que, dans le même temps, chaque ouvrier creuse toujours la même surface, à la profondeur voulue.

375. Voici maintenant le genre de problèmes, connus sous le nom de *règles de trois composées*, auxquels donne lieu la notion d'une grandeur directement ou inversement proportionnelle à plusieurs autres.

On considère deux états différents, X_1 et X_2, de la première grandeur, auxquels correspondent les états A_1, B_1, C_1, ... ; P_1, Q_1, R_1, ... des grandeurs (A), (B), (C), ... ; (P), (Q), (R), ..., d'une part, et, d'autre part, les états A_2, B_2, C_2, ... ; P_2, Q_2, R_2, ... des mêmes grandeurs. Chaque grandeur étant mesurée, dans les deux états où on doit la considérer, avec une même unité, on connaît les nombres a_1, b_1, c_1, ... ; p_1, q_1, r_1, ... qui mesurent A_1, B_1, C_1, ... ; P_1, Q_1, R_1, ... et les nombres a_2, b_2, c_2, ... ; p_2, q_2, r_2, ... qui mesurent A_2, B_2, C_2, ... ; P_2, Q_2, R_2, ... ; en désignant par x_1, x_2 les nombres qui mesurent X_1, X_2, on connaît l'un de ces nombres x_1, on demande l'autre x_2.

La *méthode de réduction* à l'unité, qui a déjà été employée pour les exemples de règles de trois simples, va nous fournir la solution de ce problème, en supposant toutefois que tous les nombres $a_1, b_1, c_1, \ldots; p_1, q_1, r_1, \ldots$ et $a_2, b_2, c_2, \ldots; p_2, q_2, r_2, \ldots$ soient entiers.

Cette méthode consiste à trouver le nombre qui mesure la grandeur (X) quand les grandeurs (A), (B), (C), ... ; (P), (Q), (R), ... sont respectivement égales à leurs unités, et cela en partant de ce que l'on connaît le nombre x_1 qui mesure (X), quand les grandeurs (A), (B), (C), ... ; (P), (Q), (R), ... ont des valeurs mesurées par les nombres $a_1, b_1, c_1, \ldots; p_1, q_1, r_1, \ldots$. On calcule ensuite la valeur du nombre x_2 qui mesure (X) quand les grandeurs (A), (B), (C), ... ; (P), (Q), (R), ... sont mesurées par les nombres $a_2, b_2, c_2, \ldots; p_2, q_2, r_2, \ldots$. On raisonne comme il suit :

Quand la grandeur (A) est mesurée par le nombre a_1 et que les grandeurs (B), (C), ... ; (P), (Q), (R), ... sont mesurées par les nombres $b_1, c_1, \ldots; p_1, q_1, r_1, \ldots$, la grandeur (X) est mesurée par le nombre x_1. Si (A) devenait égale à l'unité, c'est-à-dire a_1 fois moins grande, et que les autres grandeurs (B), (C), ...; (P), (Q), (R), ..., restassent les mêmes, la grandeur (X) deviendrait aussi a_1 fois moins grande, et serait ainsi mesurée par le nombre $\frac{x_1}{a_1}$; de même si, la grandeur (A) restant égale à l'unité, la grandeur (B) devenait égale à l'unité, les autres grandeurs (C), ... ; (P), (Q), (R), ... restant les mêmes, la grandeur (X) deviendrait, comme la grandeur $(B)_1$, b_1 fois moins grande, et serait alors mesurée par le nombre $\frac{x_1}{a_1 b_1}$; si ensuite la grandeur (C) devenait égale à l'unité, toutes les autres grandeurs conservant les mêmes valeurs que dans la phase précédente, (X) serait mesurée par le nombre $\frac{x_1}{a_1 b_1 c_1}$; les choses continueront de la même façon, jusqu'à ce qu'on ait *ramené à l'unité* chacune des grandeurs (A), (B), (C), ... auxquelles (X) est directement proportionnelle; quand cela est fait, (P), (Q), (R), ..., ont toujours les mêmes valeurs et (X) est mesurée par le nombre $\frac{x_1}{a_1 b_1 c_1 \ldots}$; si maintenant la grandeur (P) devient égale à l'unité, c'est-à-dire p_1 fois plus petite, la grandeur (X), qui est inversement proportionnelle à P_1, devient p_1 fois plus grande ; elle est mesurée par le nombre $\frac{x_1 p_1}{a_1 b_1 c_1 \ldots}$; si la grandeur (Q) devient égale à l'unité, (X) est mesurée par le nombre $\frac{x_1 p_1 q_1}{a_1 b_1 c_1 \ldots}$; si la grandeur (R) devient aussi égale à l'unité, la grandeur (X) est mesurée par le nombre $\frac{x_1 p_1 q_1 r_1}{a_1 b_1 c_1 \ldots}$; quand toutes les grandeurs sont ramenées à l'unité, la grandeur (X) est mesurée par le nombre $\frac{x_1 p_1 q_1 r_1 \ldots}{a_1 b_1 c_1 \ldots}$. Au numérateur figurent comme facteurs, outre le nombre x_1, tous les nombres qui mesuraient, dans le premier état, les grandeurs (P), (Q), (R), ..., auxquelles la grandeur X est inversement proportionnelle; au dénominateur figurent comme facteurs tous les nombres qui mesuraient, dans le premier état encore, les grandeurs (A), (B), (C), ..., auxquelles la grandeur (X) est directement proportionnelle.

La première partie du problème est résolue; la seconde se résoudra de même, en supposant que les grandeurs (A), (B), (C), ...; (P), (Q), (R), ..., dont chacune est maintenant égale à l'unité correspondante, prennent successivement les valeurs qui répondent au second état.

Ainsi quand (A), au lieu d'être l'unité, devient égale à a_2 unités, pendant que les autres grandeurs restent respectivement égales à l'unité, la grandeur (X) devient a_2 fois plus grande qu'elle n'était et se trouve mesurée par le nombre $\frac{x_1 p_1 q_1 r_1 \ldots a_2}{a_1 b_1 c_1 \ldots}$; puis quand (B) devient égale à b_2 unités, la grandeur (X) est mesurée par le nombre $\frac{x_1 p_1 q_1 r_1 \ldots a_2 b_2}{a_1 b_1 c_1 \ldots}$; quand (C) est devenue égale à c_2 unités, puis que, de même, toutes les grandeurs auxquelles la grandeur (X) est directement proportionnelle ont pris les valeurs qui correspondent au second état, (X) est mesurée par le nombre $\frac{x_1 p_1 q_1 r_1 \ldots a_2 b_2 c_2 \ldots}{a_1 b_1 c_1 \ldots}$; si maintenant (P) devient égale à p_2 unités, (X) devient p_2 fois plus petite et est mesurée par le nombre $\frac{x_1 p_1 q_1 r_1 \ldots a_2 b_2 c_2 \ldots}{a_1 b_1 c_1 \ldots p_2}$; enfin, quand toutes les grandeurs (Q), (R), ... sont devenues, l'une après l'autre, égales à q_2 unités, à r_2 unités, etc., la grandeur (X) est dans le second état : elle est mesurée par le nombre

$$x_2 = \frac{x_1 p_1 q_1 r_1 \ldots a_2 b_2 c_2 \ldots}{a_1 b_1 c_1 \ldots p_2 q_2 r_2 \ldots}. \tag{1}$$

Outre les facteurs déjà énumérés, on a introduit au numérateur, cette fois, les nombres a_2, b_2, c_2, ... qui, dans le second état, mesurent les grandeurs (A), (B), (C), ... auxquelles la grandeur (X) est directement proportionnelle, et, au dénominateur, les nombres p_2, q_2, r_2, ... qui, dans le second état encore, mesurent les grandeurs (P), (Q), (R), ... auxquelles la grandeur (X) est inversement proportionnelle.

L'égalité précédente résout le problème posé. On en tire

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{a_2}{a_1}\times\frac{b_2}{b_1}\times\frac{c_2}{c_1}\times\ldots\times\frac{p_1}{p_2}\times\frac{q_1}{q_2}\times\frac{r_1}{r_2}\times\ldots;$$

d'où la conclusion suivante : le rapport des nombres qui mesurent la grandeur (X), dans le second état et dans le premier, est égal au produit des rapports des nombres qui mesurent, dans le second et le premier état, les grandeurs auxquelles (X) est directement proportionnelle, multiplié par le produit des inverses des rapports des nombres qui mesurent, dans le second et le premier état, les grandeurs auxquelles (X) est inversement proportionnelle.

Il est à remarquer que chacun des rapports est indépendant de l'unité choisie pour mesurer la grandeur qu'il regarde : si, dans les deux états de cette grandeur, les nombres qui la mesurent se trouvaient être fractionnaires, on pourrait, en changeant d'unité, s'arranger pour qu'ils fussent entiers; le rapport ne changerait pas. Cette remarque montre que la formule précédente et la formule (1), qui lui est équivalente, subsistent lors même que les nombres a_1, b_1, c_1, ...; p_1, q_1, r_1, ..., ou a_2, b_2, c_2, ...; p_2, q_2, r_2, ... sont fractionnaires, bien que le raisonnement suppose qu'ils soient entiers.

On observera que le raisonnement par lequel nous sommes parvenus à l'expression de la mesure d'un parallélépipède rectangle dont on connaît les dimensions, est un cas particulier du précédent.

376. *Exemple.* — Un manufacturier a dépensé une première fois 1560 francs pour payer 52 ouvriers dont chacun a travaillé pendant 50 heures; une autre fois il a dépensé 4158 francs pour payer un certain nombre d'ouvriers dont chacun a travaillé 6 heures. Quel était ce nombre?

Il est sous-entendu que, dans tous les cas, chaque ouvrier reçoit la même paye pour une heure de travail.

Reprenons sur cet exemple le raisonnement général, pour signaler une difficulté qui se présente quelquefois.

Si, pour gagner 1560 francs pendant 50 heures, il faut que les ouvriers soient au nombre de 52: pour gagner la même somme pendant 1 heure, il faudra que les ouvriers soient 50 fois plus nombreux, c'est-à-dire soient au nombre de 52×50, et pour gagner 1 fr. pendant 1 heure il faudra que les ouvriers soient 1560 fois moins nombreux que les précédents, c'est-à-dire au nombre de $\frac{52 \times 50}{1560}$; pour gagner 4158 francs pendant 1 heure, il faut que les ouvriers soient en nombre 4158 fois plus grand, c'est-à-dire en nombre égal à $\frac{52 \times 50 \times 4158}{1560}$, et, pour gagner la même somme en 6 heures, il faudra 6 fois moins d'ouvriers, c'est-à-dire un nombre d'ouvriers égal à $\frac{52 \times 50 \times 4158}{1560 \times 6}$. En réduisant cette fraction, on obtient $3 \times 5 \times 7 \times 11 = 1155$ ouvriers.

Le raisonnement, bien que conduisant à un résultat exact, contient un intermédiaire absurde; on a dit, en effet, qu'il fallait pour gagner 1 fr. en 1 heure un nombre d'ouvriers égal à

$$\frac{52 \times 50}{1560} = \frac{5}{3},$$

et il est bien clair que le nombre d'ouvriers doit toujours être un nombre entier. Ici l'unité, pour le nombre d'ouvriers, est imposée par la nature; elle ne peut être subdivisée, comme s'il s'agissait de quantités continues. On s'en tirera en décomposant cependant cette unité naturelle en unités fictives. On imaginera, par exemple, que chaque ouvrier puisse être remplacé par 3 enfants, qui effectueraient, dans le même temps, le même travail que lui. Alors les nombres d'ouvriers auxquels on parvient, exprimés en nombre d'ouvriers enfants, devraient être, à chaque fois, triplés. Il faudrait pour gagner 1 fr. en 1 heure, 5 ouvriers enfants; puis, pour gagner 4158 fr. en 6 heures, il faudrait un nombre d'ouvriers enfants égal à

$$\frac{52 \times 50 \times 4158}{1560 \times 6} \times 3,$$

et par conséquent un nombre d'ouvriers réels trois fois moindre. On voit que, en somme, l'introduction de cette unité fictive ne trouble pas le résultat et permet de raisonner sur des nombres entiers.

Dans tous les cas analogues, on pourra se tirer d'affaire par des artifices semblables, artifices dont, à la vérité, on se dispense habituellement dans la pratique.

§ 2. — **Intérêts simples.**

377. Le prêt à intérêt consiste à prêter une certaine somme d'argent, un *capital*, à cette condition que, pendant le temps où il jouira de ce capital, l'emprunteur versera au prêteur une certaine somme, dite *intérêt* du capital. Le capital, d'ailleurs, appartient toujours au prêteur.

Dans le prêt à intérêt *simple*, on admet les conditions qui suivent :

L'intérêt produit par un capital pendant un certain temps est proportionnel à ce capital, au temps du prêt et au *taux* de l'intérêt, qu'il nous reste à définir.

Le taux de l'intérêt, c'est, à proprement parler, l'intérêt rapporté pendant l'unité de temps par l'unité de capital : par exemple, si l'on prend pour unité de temps l'année, pour unité de monnaie le franc, ce sera l'intérêt rapporté par 1 franc prêté, ou *placé*, pendant 1 an.

Le taux est habituellement représenté par une fraction dont le dénominateur est 100 et le numérateur un nombre simple comme 1, 2, 3, 4, 5, 6 ; il peut être d'ailleurs un nombre fractionnaire comme 3,5 ou 4,5 (trois et demi, quatre et demi). L'habitude est d'énoncer d'abord le numérateur en faisant suivre des mots *pour cent*, que l'on sous-entend même quelquefois, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible. En écrivant, au lieu d'employer la notation habituelle des fractions ordinaires ou décimales, on écrit souvent le numérateur en faisant suivre du symbole $^0/_0$, qui s'énonce *pour cent*. Ainsi on dira le taux quatre pour cent, le taux quatre et demi pour cent, et l'on écrira $4\ ^0/_0$, $4\frac{1}{2}\ ^0/_0$ au lieu de 0,04 ; 0,045. Quand on n'énonce pas l'unité de temps, c'est l'*année* qui est cette unité ; mais on peut employer les mêmes façons de parler, en se servant d'autres unités de temps ; ainsi prêter à $2\ ^0/_0$ en prenant le semestre pour unité de temps, c'est la même chose que de prêter à $4\ ^0/_0$ en prenant pour unité de temps l'année. L'expression pour cent s'explique d'elle-même : si le taux est par exemple $5\ ^0/_0$, c'est que *cent* francs rapportent cinq francs.

On employait autrefois l'expression : prêter au denier tant, par exemple au denier vingt, au denier douze. Cela revient à représenter le taux par une fraction dont le numérateur est un, et dont le dénominateur est le nombre que l'on fait précéder de l'expression *au denier ;* ainsi, puisque l'on a $\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$, prêter à $5\ ^0/_0$, c'est prêter au denier 20, et l'on entendait par là qu'un denier était rapporté par vingt deniers.

378. La relation qui existe entre l'intérêt, le capital, le temps du prêt et le taux résulte immédiatement du théorème du n° 375. Supposons que, en prenant une certaine unité de monnaie et une certaine unité de temps, le capital, le taux, l'intérêt, le temps du prêt soient représentés par les nombres A, r, a, t ; on observera que a et r peuvent être regardés comme des nombres qui représentent les intérêts respectivement rapportés par les capitaux A et 1 pendant les temps t et 1 ; on doit donc avoir, d'après les conventions adoptées,

$$\frac{a}{r} = \frac{A \times t}{1 \times 1},$$

ou

$$a = Art.$$

Reprenons à nouveau, pour démontrer cette formule, le raisonnement de la réduction à l'unité, en supposant, pour fixer les idées, que les unités de monnaie et de temps soient le franc et l'année, et en outre que les nombres A et t soient des nombres entiers. On dira : 1 franc placé pendant 1 an rapporte une somme égale à r; A francs placés pendant 1 an rapporteront une somme A fois plus grande, ou $r \times A$, et A francs placés pendant t années rapporteront une somme qui sera encore t fois plus grande, c'est-à-dire $r \times A \times t$. On a donc $a = Art$. On observera que lors même que les nombres A et t seraient fractionnaires, ce raisonnement s'appliquerait encore, avec quelques modifications sur lesquelles il semble inutile d'insister.

Au bout du temps t le prêteur possède, outre la somme prêtée A, l'intérêt Art de cette somme ; il possède donc la somme

$$A + Art = A(1 + rt);$$

c'est là la *valeur acquise* par la somme A au bout du temps t.

La relation

$$a = Art$$

entre les quatre quantités a, A, r, t permet, quand trois de ces nombres sont connus, d'en déduire le quatrième. On a ainsi les relations

$$A = \frac{a}{rt}, \qquad t = \frac{a}{Ar}, \qquad r = \frac{a}{At},$$

qui font connaître le capital qu'il faut placer à un taux donné r, pendant un temps donné t, pour avoir un intérêt donné a, etc... Chacune de ces formules peut d'ailleurs s'établir directement par le raisonnement relatif aux règles de trois composées.

379. Si le placement ne s'effectue pas pendant un nombre entier d'années, t est une fraction. Un cas très fréquent est celui où le temps est donné en jours. On regarde alors l'année comme ayant 360 jours ; t sera donc donné par une fraction dont le dénominateur sera 360 et le numérateur le nombre n de jours pendant lesquels l'argent a été prêté, en sorte que la formule fondamentale devient

$$a = \mathrm{A}r\frac{n}{360};$$

on pourrait aussi bien l'écrire

$$a = \mathrm{A}\frac{r}{360}n,$$

et l'on observera que $\frac{r}{360}$ est précisément la somme rapportée par un franc pendant un jour, c'est le taux quand on prend le jour pour unité de temps, et alors le temps du prêt est mesuré par le nombre n. La formule ainsi écrite ne diffère donc de la formule générale que par le sens nouveau qu'y prennent les facteurs du second nombre. On verra de même la modification qu'il convient de lui faire subir quand on prend la semaine pour unité de temps : on regarde alors l'année comme comprenant exactement 52 semaines. C'est le mode employé dans les *Caisses d'épargne*, où l'on ne tient compte, d'ailleurs, pour le calcul des intérêts, que du nombre entier de semaines pendant lesquelles l'argent a été placé.

380. Dans les maisons de banque, on a à appliquer très fréquemment la formule $a = \frac{\mathrm{A}rn}{360}$; on a recours, pour effectuer les calculs, à quelques artifices qui ne sont pas sans intérêt. Observons que, dans une suite d'opérations de même nature, ce sont les nombres A et n qui changent, le taux de l'intérêt r reste le même; supposons que ce taux r soit donné sous la forme $\frac{r'}{100}$; en d'autres termes, l'argent est placé au taux r' %. On pourra écrire, en remplaçant r par $\frac{r'}{100}$,

$$a = \frac{\mathrm{A}r'n}{36000} = \frac{\mathrm{A}n}{\left(\frac{36000}{r'}\right)};$$

le nombre $\frac{36000}{r'}$ s'appelle le *diviseur* relatif au taux r'; désignons-le par d; on aura

$$a = \frac{\mathrm{A}n}{d};$$

on obtiendra l'intérêt en divisant par d le produit An.

Dans la pratique, le nombre r' a souvent l'une des valeurs

$$1;\quad 1,5;\quad 2;\quad 2,5;\quad 3;\quad 3,6;\quad 4;\quad 4,5;\quad 5;\quad 6,$$

auxquelles correspondent les diviseurs

$$36000,\ 24000,\ 18000,\ 14400,\ 12000,\ 10000,\ 9000,\ 8000,\ 7200,\ 6000,$$

qui sont tous des nombres entiers. La division par l'un quelconque de ces nombres, surtout pour ceux qui correspondent aux taux 3,6; 4; 4,5; 6, sera, comme on le voit, extrêmement facile.

On observera, sur la formule générale, que le diviseur est le nombre de jours pendant lesquels il faudrait placer un capital pour que l'intérêt fût égal à ce capital; cette formule, si l'on y suppose $n = d$, donne, en effet, $a = \mathrm{A}$. On voit de même qu'un capital égal au diviseur produit un franc d'intérêt par jour.

Méthode des parties aliquotes. — En posant $d = 100\delta$, la formule générale s'écrit

$$a = \frac{\mathrm{A}n}{\delta} \times \frac{1}{100};$$

les valeurs du nombre δ relatives aux taux usuels se déduisent de celles du nombre d en supprimant deux zéros à droite.

Un procédé de calcul assez avantageux consistera à mettre n sous la forme

$$n = \delta q + n_1 + n_2 + n_3 + \ldots,$$

q désignant le quotient à une unité près de la division de n par δ et $n_1, n_2, n_3, \ldots$ des diviseurs (au sens arithmétique) du nombre entier δ, choisis de façon que leur somme soit le reste de la division de n par δ. On a vu au n° 165 comment on pouvait mettre le reste sous cette forme, et cela de façon que les nombres $n_1, n_2, n_3, \ldots$ aillent en décroissant. On aura alors

$$\frac{n}{\delta} = q + \frac{n_1}{\delta} + \frac{n_2}{\delta} + \frac{n_3}{\delta} + \ldots;$$

ou, en désignant par $p_1, p_2, p_3, \ldots$ les quotients entiers de la division de δ par $n_1, n_2, n_3, \ldots,$

$$\frac{n}{\delta} = q + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots.$$

On aura ensuite

$$\frac{\mathrm{A}n}{\delta} = \mathrm{A} \times \frac{n}{\delta} = \mathrm{A}q + \frac{\mathrm{A}}{p_1} + \frac{\mathrm{A}}{p_2} + \frac{\mathrm{A}}{p_3} + \ldots,$$

et chacune des parties de cette somme se calculera très rapidement si, comme il arrive d'habitude, les nombres p_1, p_2, p_3, ... sont petits. On aura ensuite, pour avoir a, à prendre le centième du résultat.

Soit à calculer, par exemple, l'intérêt de 8649f,75 pendant 129 jours à 5 %.

Ici le nombre $\mathfrak{E}$ est égal à 72 dont les diviseurs sont

72, 36, 24, 18, 12, 9, 8, 6, 4, 3, 2, 1 et l'on a $129 = 72 + 36 + 18 + 3$,

$$\frac{129}{72} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{24};$$

on a à ajouter à 8649,75 sa moitié, son quart, son vingt-quatrième; on formera ces deux derniers nombres en calculant la moitié de la moitié de 8649,75 puis le sixième du résultat; on trouve ainsi en négligeant les centimes

$$\begin{array}{r} 8649,7 \\ 4324,8 \\ 2162,4 \\ 360,4 \\ \hline 15497,3 \end{array}$$

en divisant le résultat par 100 on obtient l'intérêt cherché, 154,97.

Si le taux de l'intérêt n'était pas un des nombres simples que nous avons supposés, on pourrait faire les calculs avec celui de ces nombres qui se rapproche le plus du taux donné et ajouter ensuite un terme correctif relatif à ce que l'on a négligé.

Si, en effet, le taux (pour cent) r' est la somme de deux nombres r'_1, r'_2, on a

$$\frac{Ar'n}{36000} = \frac{Ar'_1 n}{36000} + \frac{Ar'_2 n}{36000},$$

en sorte que l'on peut calculer l'intérêt produit par le capital A au taux r' %, en faisant la somme des intérêts produits par le même capital placé pendant le même temps aux taux r'_1 %, r'_2 %.

381. On dit qu'un négociant a un *compte courant* chez un banquier lorsqu'il dépose des capitaux chez ce banquier, qui, de son côté, remet de l'argent au négociant, ou effectue des paiements pour son compte. Ces sommes portent d'ailleurs intérêt à un taux convenu. Le *bordereau* est le détail des sommes versées par le négociant chez le banquier, ou payées par le banquier au compte du négociant, avec les dates des versements ou paiements.

Le *règlement de compte* s'effectue à des dates déterminées, dites époques de clôture : c'est une opération dont le résultat est l'*avoir* du négociant chez le banquier à une telle date. Considérons la période de temps qui s'écoule entre deux époques de clôture. Si l'argent ne portait point intérêt, l'argent du négociant, à chaque instant de cette période, et en particulier à la clôture, serait la différence entre la somme des capitaux versés par lui et la somme de ceux payés par le banquier : cette différence est ce qu'on appelle la *balance des capitaux*.

Supposons maintenant que l'argent porte intérêt, on subdivisera la période entre deux époques de clôture en périodes partielles, pendant chacune desquelles il n'a été fait ni versement ni paiement; imaginons qu'au début de chaque période partielle, c'est-à-dire d'une part après le dernier règlement, d'autre part après chaque versement ou paiement, on ait fait la balance des capitaux; on calculera l'intérêt qu'aurait produit pendant cette période partielle la somme représentée par cette balance; on fera le total de ces intérêts et ce total, ajouté à la balance des capitaux relative à l'époque de clôture, constituera l'avoir du négociant chez le banquier à ce moment; *son compte sera réglé*.

Si l'on suppose que l'intervalle de temps entre deux règlements de compte successifs soit de N jours et que les périodes partielles pendant lesquelles il n'est fait ni versement ni paiement soient de $n_1, n_2, \dots n_p$ jours, on aura

$$N = n_1 + n_2 + \dots + n_p.$$

Pendant la première période partielle de n_1 jours, c'est la somme résultant du dernier règlement de compte qui porte intérêt; désignons-la par B_1, désignons de même par B_2 la balance des capitaux au commencement de la seconde période partielle, après un versement ou un paiement, par B_3 la balance des capitaux au commencement de la troisième période, après que l'on a fait encore un versement ou un paiement, etc... : si d est le *diviseur* relatif au taux de l'intérêt convenu, l'intérêt qu'il faudra ajouter à la balance finale des capitaux sera

$$\frac{n_1 B_1 + n_2 B_2 + \dots + n_p B_p}{d}.$$

Les balances $B_1, B_2, \dots, B_p$ se calculent immédiatement, par des additions ou soustractions, d'après le bordereau.

382. On peut d'ailleurs éviter le calcul des balances en suivant une autre méthode, dite rétrograde ou indirecte. La règle qui résume cette méthode résulterait d'une transformation facile de la formule précédente, transformation que j'omets à cause de son caractère un peu algébrique : cette règle peut être établie directement.

Pour rendre le langage plus uniforme, nous regarderons, dans la formule précédemment établie, la première somme B_1 comme une somme versée par le négociant chez le banquier le jour du précédent règlement de compte, ou, si l'on veut, le jour de l'ouverture du compte.

Observons que l'intérêt produit, pendant un temps donné, par la somme de deux capitaux étant la somme des intérêts que produirait chacun de ces capitaux, l'intérêt produit par la différence entre deux capitaux devra de même être la différence entre les intérêts que produiraient séparément ces capitaux.

Observons aussi que chaque balance est une pareille différence entre les sommes versées par le négociant et celles payées par le banquier au compte du négociant. On voit dès lors qu'on obtiendra l'intérêt cherché en calculant d'une part l'intérêt produit, entre le jour du versement et l'époque de clôture, par chaque somme que verse le négociant, d'autre part l'intérêt produit, entre le jour du paiement et l'époque de clôture, par chaque somme que paie le banquier au compte du négociant, et en retranchant du total des premiers intérêts le total des seconds.

Ainsi, pour calculer l'intérêt cherché, on multipliera par le nombre de jours compris entre l'époque du versement et l'époque de clôture chaque somme versée par le négociant, et on fera le total P de ces produits ; on multipliera de même par le nombre de jours compris entre l'époque du paiement et l'époque de clôture chaque somme payée par le banquier pour le compte du négociant, on fera le total Q de ces produits ; on fera la différence entre les totaux et l'on divisera la différence par le diviseur d relatif au taux de l'intérêt convenu.

J'ai supposé, dans ce qui précède, que la balance des capitaux était à chaque instant en faveur du négociant. Les conventions peuvent être autres et le banquier peut prêter plus d'argent qu'il n'en reçoit. La règle précédente s'applique dans tous les cas, soit que la balance des capitaux ait toujours été en faveur de l'une ou de l'autre des deux parties, soit qu'elle ait été tantôt en faveur de l'une tantôt en faveur de l'autre. Seulement la différence que l'on doit faire à la fin, si elle ne peut se faire dans le sens indiqué, se fera dans l'autre sens et représentera alors une somme due au banquier par le négociant. La justification complète de cette règle, bien que facile, exigerait quelques développements que je préfère laisser de côté ; elle est immédiate pour le lecteur en possession des règles de calcul relatives aux nombres négatifs.

La règle que l'on vient de décrire serait d'une application très facile si l'époque de clôture était déterminée à l'avance; chaque jour de versement ou de paiement, rien n'empêche de calculer la partie correspondante des nombres P ou Q. Les calculs étant ainsi préparés, le calcul du nombre $\frac{P-Q}{d}$ se fera immédiatement, le jour de la clôture. Mais il importe de pouvoir clore le compte le jour que l'on veut; aussi est-ce d'une façon un peu différente que l'on procède.

Désignons par P' le total des produits obtenus respectivement en multipliant par le nombre de jours écoulés entre la date d'ouverture et la date du versement chaque somme versée par le négociant; désignons de même par Q' le total des produits obtenus respectivement en multipliant par le nombre de jours écoulés entre la date d'ouverture et la date du paiement chaque somme payée par le banquier pour le compte du négociant; il est clair que la quantité

$$\frac{P-Q}{d}+\frac{P'-Q'}{d}=\frac{P+P'}{d}-\frac{Q+Q'}{d}$$

représentera l'intérêt que produirait pendant les N jours écoulés entre l'ouverture et la clôture une somme égale à la balance finale B_p des capitaux : en effet, $\frac{P+P'}{d}$, par exemple, est l'intérêt, pendant N jours, des sommes versées par le négociant : on a donc

$$\frac{P-Q}{d}=\frac{B_pN}{d}-\frac{P'-Q'}{d}$$

et c'est le second membre de cette égalité que l'on calcule, en ayant préparé à l'avance, chaque jour de versement ou de paiement, la partie correspondante du nombre P' ou Q'; le jour de clôture, on n'aura qu'à calculer le nombre B_pN.

383. Ce qui précède s'applique aux comptes de *chèques*. Un particulier qui, par exemple, ne veut pas garder de grosses sommes chez lui dépose son argent chez un banquier, qui lui remet un *cahier de chèques*, c'est-à-dire un livre à souche contenant une série de feuilles qui peuvent en être détachées et dont chacune porte une formule telle que : *Payez à* *à* *ordre ou au porteur la somme de* . *Paris, le* .

Si le particulier veut effectuer un paiement, au lieu de le faire en monnaie, il détache une feuille (un *chèque*) du livre à souche et écrit en toutes lettres la somme qu'il veut payer, ainsi que la date du jour. Le chèque doit être présenté chez le banquier dans un délai très court (cinq jours pour une même ville, huit jours s'il doit être payé dans une place autre que celle où il a été émis). Il peut d'ailleurs être *négocié*, remis à un tiers en paiement. La somme qu'il porte ne doit pas être supérieure à la *provision* chez le banquier de celui qui l'a émis, c'est-à-dire à la balance des capitaux relative au moment où il est émis. Les intérêts des comptes de chèques sont habituellement très faibles : ce sont des nombres tels que $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ %.

384. *Escompte.* — *Escompter* une somme *payable à terme*, c'est-à-dire à une date déterminée, dans l'avenir, c'est fournir immédiatement cette somme, diminuée d'une certaine quantité, qui est ce qu'on appelle l'*escompte* de cette somme. Cette opération s'effectue principalement sur les *effets de commerce*. Un effet de commerce est un engagement écrit par lequel un négociant promet de payer à une personne déterminée ou à son ordre, à une date fixe, une certaine somme, pour marchandises reçues. Cette somme est la *valeur nominale* de l'effet; la date à laquelle doit se faire le paiement est l'*échéance*. L'intérêt que porterait cette somme entre une date déterminée et l'échéance est l'*escompte commercial*; la valeur nominale diminuée de l'escompte commercial est la *valeur escomptée* ou la *valeur au comptant* de l'effet, à la date considérée. Le possesseur de l'effet peut, s'il veut se procurer du numéraire, se présenter avant l'échéance chez un banquier qui *fait l'escompte*. Le banquier lui remet, en échange de l'effet dont il devient possesseur, la valeur au comptant de cet effet le jour où on le lui présente; le jour de l'échéance il touchera la valeur nominale; la différence sera son bénéfice. Au lieu de présenter l'effet de commerce au banquier, son possesseur peut d'ailleurs le donner en paiement à un autre négociant, qui le reçoit pour une somme égale à la valeur au comptant, le jour de la transaction. Ajoutons enfin que, outre l'escompte, le banquier peut percevoir une *commission*, évaluée à tant pour cent de la valeur nominale, par exemple $\frac{1}{8}$ % ou $\frac{1}{800}$ de la valeur nominale, et encore un *change de place*, évalué de la même façon, si la valeur nominale de l'effet doit être payée dans une autre ville que celle où il réside. En dehors de ces frais accessoires, le calcul de l'escompte commercial étant un simple calcul d'intérêt, il n'y a pas lieu de nous y arrêter davantage.

385. L'usage d'après lequel on calcule l'escompte commercial n'est pas conforme à la notion que l'on a de l'intérêt. Si A est la valeur nominale de l'effet payable dans n jours, le banquier paie au possesseur de l'effet la somme $A\left(1-\frac{n}{d}\right)$, en désignant toujours par d le diviseur relatif au taux de l'intérêt. Il devrait en réalité payer la somme B qui, placée au même taux pendant n jours, acquerrait la valeur A (nº 378). Au bout de n jours, la *valeur acquise* par la somme B est $B\left(1+\frac{n}{d}\right)$: on devrait donc avoir :

$$B = \frac{A}{1+\frac{n}{d}}.$$

L'escompte serait alors

$$A - \frac{A}{1+\frac{n}{d}} = \frac{A\frac{n}{d}}{1+\frac{n}{d}}$$

au lieu d'être $A\frac{n}{d}$; l'escompte calculé par la formule

$$\frac{A\frac{n}{d}}{1+\frac{n}{d}}$$

est ce qu'on appelle l'escompte *en dedans*; il est plus faible que l'escompte commercial; la règle usuelle est donc avantageuse au banquier : toutefois la différence est faible, si l'effet n'est pas à longue échéance; il est en effet aisé de voir qu'elle est moindre que $A\left(\frac{n}{d}\right)^2$, c'est-à-dire moindre que l'escompte commercial multiplié par $\frac{n}{d}$, nombre qui, habituellement, est petit. Si, par exemple le taux de l'intérêt est 6 °/₀, si la valeur nominale est égale à 9000 francs, si enfin l'effet est *à* 90 *jours*, c'est-à-dire payable dans 90 jours, l'escompte commercial serait de 135 francs et l'escompte en dedans à peu près égal à 133 francs.

Quoi qu'il en soit, c'est l'usage de l'escompte commercial qui a prévalu, et dans les problèmes qui suivent, c'est de cet escompte seul que l'on parlera.

386. On a plusieurs effets de commerce payables à des échéances diverses; on connaît ces échéances ainsi que les valeurs nominales de ces effets; on veut les remplacer par un seul effet payable à une époque déterminée, dite *échéance commune*; quelle devra être la valeur nominale de cet effet unique ?

Pour chaque billet dont l'échéance est postérieure à l'échéance commune, on calculera la *valeur escomptée* de ce billet à l'époque de l'échéance commune; pour chaque billet dont l'échéance est antérieure à l'échéance commune, on calculera sa *valeur acquise* en le supposant placé pendant le temps compris entre son échéance vraie et l'échéance commune; on conservera, s'il y en a, les valeurs nominales des billets dont l'échéance coïnciderait avec l'échéance commune; on fera la somme de toutes ces valeurs, ce sera la valeur nominale cherchée de l'effet unique.

Le lecteur habitué à l'usage des nombres négatifs n'aura aucune peine à réunir ces différents cas dans une seule formule.

387. *Échéance moyenne.* — On a plusieurs effets de commerce payables à des échéances diverses; on connaît ces échéances ainsi que les valeurs nominales de ces effets, on veut les remplacer par un effet unique, dont la valeur nominale soit la somme des valeurs nominales des effets et qui ait même valeur au comptant; on demande quelle échéance on devra prendre pour ce billet : cette échéance (cherchée) est dite échéance *moyenne*.

Soient A_1, A_2, ..., A_p les valeurs nominales des effets payables respectivement dans n_1, n_2, ..., n_p jours; soit N le nombre de jours au bout desquels doit avoir lieu l'échéance moyenne ; on calculera ce nombre N de manière que l'escompte d'un billet dont la valeur nominale serait $A_1 + A_2 + \ldots + A_p$, payable au bout de N jours, soit égal à la somme des escomptes des billets dont les valeurs nominales sont A_1, A_2, ..., A_p et qui sont payables au bout de n_1, n_2, ..., n_p jours. En désignant par d le diviseur relatif au taux de l'intérêt, on devra donc avoir :

$$(A_1 + A_2 + \ldots + A_p)\frac{N}{d} = A_1\frac{n_1}{d} + A_2\frac{n_2}{d} + \ldots + A_p\frac{n_p}{d},$$

et, par conséquent, en multipliant les deux membres par d,

$$(A_1 + A_2 + \ldots A_p)N = A_1n_1 + A_2n_2 + \ldots + A_pn_p,$$

d'où l'on tire finalement

$$N = \frac{A_1n_1 + A_2n_2 + \ldots + A_pn_p}{A_1 + A_2 + \ldots A_p}.$$

Le nombre N ainsi obtenu peut se calculer en divisant par la somme de leurs dénominateurs la somme des numérateurs des fractions $\frac{A_1n_1}{A_1}$, $\frac{A_2n_2}{A_2}$, ..., $\frac{A_pn_p}{A_p}$, qui sont respectivement égales à n_1, n_2, ..., n_p : N est donc (n° 212) compris entre le plus petit et le plus grand des nombres $n_1, n_2, \ldots, n_p$.

§ 3. — Intérêts composés.

388. Supposons qu'un négociant dépose une somme A chez un banquier, sans jamais y toucher, à cette condition qu'elle soit placée à intérêt, au taux r (par franc), et que l'on règle son compte chaque année, comme il a été expliqué au nº 381 : quel sera l'avoir du négociant au bout de n années?

Au bout d'un an, la valeur acquise par la somme A est la somme du capital A augmenté de l'intérêt Ar, c'est-à-dire $A + Ar = A(1+r)$; au premier règlement de compte, l'avoir du négociant sera $A(1+r)$, il s'obtient en multipliant par $1+r$ la somme placée au commencement de l'année; l'avoir du négociant à chaque règlement de compte s'obtient de même en multipliant par $1+r$ l'avoir tel qu'il était au précédent règlement de compte; il sera donc $A(1+r)(1+r) = A(1+r)^2$ au bout du second règlement de compte, $A(1+r)^3$ au bout du troisième, et $A(1+r)^n$ au bout du $n^{\text{ième}}$ règlement de compte, c'est-à-dire au bout de la $n^{\text{ième}}$ année. La valeur acquise A', dans ces conditions, par la somme A, sera donc

$$A' = A(1+r)^n$$

Placer de l'argent dans ces conditions, c'est ce qu'on appelle placer à intérêts composés.

Une somme est placée à intérêts composés lorsqu'elle est regardée comme placée à intérêt simple pendant chaque année, et qu'au bout de chaque année on lui ajoute les intérêts produits dans cette supposition, lesquels porteront eux-mêmes intérêt pendant l'année suivante, comme le capital.

389. La formule

$$A' = A(1+r)^n$$

suppose que n est un nombre entier; dans le cas où n serait un nombre fractionnaire, somme d'un nombre entier m et d'une fraction $\frac{p}{q}$ plus petite que un, il serait naturel, d'après les suppositions précédentes, de regarder la somme A comme placée à intérêts composés pendant m années, au bout desquelles elle aurait acquis une valeur égale à

$$A(1+r)^m,$$

et de regarder ensuite cette dernière somme comme placée à intérêt simple pendant le temps $\frac{p}{q}$: elle rapporterait alors un intérêt égal à

$$A(1+r)^m \times \frac{pr}{q},$$

en sorte que la valeur acquise par la somme A, au bout du temps $m + \frac{p}{q}$, évalué en années et fraction d'année, serait

$$A(1+r)^m + A(1+r)^m \times \frac{pr}{q} = A(1+r)^m\left(1+\frac{pr}{q}\right).$$

En réalité, ce n'est pas par cette formule que le calcul se fait, mais bien par la formule $A' = A(1+r)^{m+\frac{p}{q}}$, laquelle n'a pas actuellement de signification, mais qui en acquerra une plus tard (n^os 451, 452). Elle donne des résultats un peu plus faibles. Bornons-nous ici au cas où, le nombre n étant entier, on applique la formule

$$A' = A(1+r)^n.$$

390. Le calcul de A′ quand on connaît A, r, n, ou de A quand on connaît A′, r, n, est assez pénible. Le lecteur familier avec l'usage des logarithmes voit de suite la commodité qu'ils permettent dans les calculs. L'*Annuaire du Bureau des longitudes* [1] contient des tables qui donnent les valeurs de $(1+r)^n$ et de $\frac{1}{(1+r)^n}$ pour les taux $r = 0{,}025$; $0{,}03$; $0{,}035$; ...; $0{,}055$; $0{,}06$ et pour les valeurs de n qui s'étendent de 1 à 34. Dans ces limites, le calcul de l'une des quantités A et A′ connaissant l'autre se fait, en utilisant ces tables, par une simple multiplication; il est aisé de voir qu'on peut s'en servir pour des valeurs de n supérieures à 34.

Exemple. — Quelle somme faudrait-il placer à intérêts composés pour avoir au bout de 63 ans un capital de 10000 francs, le taux étant $r = 0{,}03$? On aura

$$A = 10000 \times \frac{1}{(1+0{,}03)^{63}}$$
$$= 10000 \times \frac{1}{(1+0{,}03)^{30}} \times \frac{1}{(1+0{,}03)^{33}};$$

1. Je signale cette publication parce qu'elle est très répandue : c'est en quelque sorte l'*almanach* de tous ceux qui ont une culture scientifique; mais ceux qui s'occupent de grandes opérations financières ont besoin de tables plus étendues : on les trouvera par exemple dans la *Théorie des intérêts composés et des annuités* de Fédor Thoman ou dans la *Théorie mathématique des opérations financières* de M. Charlon (Gauthier-Villars et fils).

on trouve d'ailleurs dans la table

$$\frac{1}{(1+0,03)^{30}} = 0,411987,$$

$$\frac{1}{(1+0,03)^{33}} = 0,377026;$$

on trouve, pour le produit de ces deux nombres, avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^6}$, la valeur 0,155330 ; on aura donc :

$$A = 1553,30.$$

Le calcul de n, d'après la formule

$$A' = A(1+r)^n,$$

quand on connaît A, A′, r, n'est pas du ressort de l'Arithmétique; toutefois, les tables dont je viens de parler permettront d'obtenir approximativement le résultat si r est un des taux contenus dans les tables.

Cherchons, par exemple, au bout de combien de temps un capital placé à intérêts composés au taux $r = 0,05$ aura obtenu 10 fois sa valeur. Vraisemblablement, ce ne sera pas au bout d'un nombre exact d'années ; mais on peut chercher un nombre entier m tel que l'on ait

$$(1+r)^m < 10 < (1+r)^{m+1};$$

la plus haute valeur de $(1+r)^m$ qui se trouve dans la table est 5,253348, qui correspond à $m = 34$. Au bout de trente-quatre ans, 1 franc est devenu 5f,253348; au bout de combien de temps cette somme deviendra-t-elle 10 fr.? On est amené à chercher un nombre entier m' tel que l'on ait

$$(1+r)^{m'} < \frac{10}{5,253348} < (1+r)^{m'+1}$$

La fraction $\frac{10}{5,253348}$, convertie en fraction décimale, donne le nombre approché 1,903548; les valeurs de $(1+r)^n$ contenues dans la table qui comprennent 1,903548 sont 1,885649 et 1,979932, qui correspondent à $n = 13$ et $n = 14$; par conséquent, le temps cherché est compris entre $34 + 13$ et $34 + 14$, ou entre 47 et 48 années. Quant à la fraction d'année qu'il faudrait ajouter à 47, on pourrait la chercher en appliquant la formule

$$A' = A(1+r)^m\left(1 + \frac{pr}{q}\right),$$

où l'on supposerait $\frac{A}{A'} = 10$, $r = 0,05$, $m = 47$; mais le résultat ne serait qu'approximatif, puisque cette formule ne représente qu'approximativement la loi des intérêts composés pour les fractions d'année.

Quand n augmente, la quantité $(1+r)^n$ augmente très rapidement, en sorte que la loi des intérêts composés n'est nullement applicable lorsqu'il s'agit de longues périodes d'années, de plusieurs siècles par exemple.

§ 4. — Partages proportionnels. Règles de société, d'alliage, de mélange.

391. *Partages proportionnels.* — On donne d'une part un nombre B, d'autre part p nombres $a_1, a_2, \ldots, a_p$; on se propose de trouver p nombres $b_1, b_2, \ldots, b_p$ proportionnels aux nombres $a_1, a_2, \ldots, a_p$ et dont la somme soit B.

Les deux suites

$$\begin{matrix} b_1, b_2, \ldots, b_p, \\ a_1, a_2, \ldots, a_p \end{matrix}$$

doivent être proportionnelles; il en est de même des deux suites

$$\begin{matrix} b_1, b_2, \ldots, b_p, b_1+b_2+\ldots+b_p, \\ a_1, a_2, \ldots, a_p, a_1+a_2+\ldots+a_p. \end{matrix}$$

Tous les termes sont connus dans la seconde suite; dans la première suite, on ne connaît que le dernier terme, qui est égal à B. D'ailleurs le rapport d'un terme de la première suite au terme correspondant de la seconde doit toujours être le même; on doit donc avoir

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{B}{a_1+a_2+\ldots+a_p},$$

$$\frac{b_2}{a_2} = \frac{B}{a_1+a_2+\ldots+a_p},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{b_p}{a_p} = \frac{B}{a_1+a_2+\ldots+a_p},$$

et par suite

$$b_1 = \frac{B\,a_1}{a_1+a_2+\ldots+a_p},$$

$$b_2 = \frac{B\,a_2}{a_1+a_2+\ldots+a_p},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_p = \frac{B\,a_p}{a_1+a_2+\ldots+a_p}.$$

Il convient de remarquer que les résultats resteraient les mêmes si l'on substituait aux nombres $a_1, a_2, \ldots, a_p$ proportionnellement auxquels le partage doit s'effectuer d'autres nombres $a'_1, a'_2, \ldots, a'_p$ qui leur fussent proportionnels. Cela en effet reviendrait à multiplier par un même nombre tous les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_p$, et, par conséquent, à multiplier par un même nombre les deux termes de chacune des fractions qui fournissent les expressions de $b_1, b_2, \ldots, b_p$.

Réciproquement, si l'on prend pour les nombres $b_1, b_2, \ldots, b_p$ les valeurs précédentes, ces nombres s'obtenant en multipliant $a_1, a_2, \ldots, a_p$ par un même nombre, à savoir

$$\frac{B}{a_1 + a_2 + \cdots + a_p},$$

sont proportionnels à $a_1, a_2, \ldots, a_p$; d'autre part, leur somme est

$$\frac{Ba_1 + Ba_2 + \ldots + Ba_p}{a_1 + a_2 + \ldots + a_p} = \frac{B(a_1 + a_2 + \ldots + a_p)}{a_1 + a_2 + \ldots + a_p} = B.$$

Ce sont donc bien les nombres cherchés.

Règle. — Pour partager un nombre en parties proportionnelles à des nombres donnés, on multiplie par ces derniers nombres le nombre que l'on veut partager, et l'on divise les produits par la somme des nombres proportionnellement auxquels on veut faire le partage.

Exemples. — Diviser 24 proportionnellement à 1, 2, 5; les résultats sont

$$\frac{24 \times 1}{8} = 3, \quad \frac{24 \times 2}{8} = 6, \quad \frac{24 \times 5}{8} = 15;$$

les nombres 3, 6, 15 sont proportionnels à 1, 2, 5 ; leur somme est 24.

Diviser 32 proportionnellement à 2, 7, 8, 5; les résultats sont :

$$\frac{64}{22}, \quad \frac{224}{22}, \quad \frac{256}{22}, \quad \frac{160}{22}.$$

392. *Règles de société.* — Ces règles ont pour but de déterminer le partage des bénéfices (ou des pertes) entre associés qui ont mis en commun des capitaux dans une affaire.

La règle de société est *simple* si les associés ont placé leurs capitaux pendant le même temps. Alors on partage le bénéfice proportionnellement à ces capitaux.

La règle de société est *composée* si les associés ont placé leurs capitaux pendant des temps différents. On partage alors le bénéfice proportionnellement aux produits obtenus en multipliant la *mise* de chaque associé par le temps pendant lequel il a coopéré à l'affaire.

La seconde règle contient, comme cas particulier, la première; il suffira de la justifier.

Supposons, par exemple, qu'il y ait trois associés dont les mises soient respectivement A_1, A_2, A_3, et que ces capitaux aient été engagés dans l'affaire pendant des temps n_1, n_2, n_3. Désignons enfin par B l'intérêt à partager. Nous supposerons que les nombres A_1, A_2, A_3, n_1, n_2, n_3 soient entiers; on réalisera cette condition en subdivisant s'il le faut l'unité de monnaie et celle de temps. Pour fixer le langage nous supposerons que la première soit le franc, la seconde le jour. Nous admettrons que chaque franc, pendant un jour, produit la même parcelle de bénéfice.

Désignons cette parcelle de bénéfice par b; A_1 francs engagés pendant un jour produiraient une part de bénéfice égale à $b \times A_1$, la même somme engagée pendant n_1 jours produirait une part de bénéfice égale à $b \times A_1 \times n_1 = A_1 n_1 b$; de même, A_2, A_3 francs placés pendant n_2, n_3 jours produiraient des parts de bénéfice égales à $A_2 n_2 b$, $A_3 n_3 b$; on voit que les parts des associés sont proportionnelles à $A_1 n_1$, $A_2 n_2$, $A_3 n_3$; c'est ce qu'il fallait établir. Ce résultat est indépendant des unités choisies, soit pour la monnaie, soit pour le temps, car la modification de ces unités ne fait que multiplier les nombres $A_1 n_1$, $A_2 n_2$, $A_3 n_3$ par un même nombre, c'est-à-dire ne fait que remplacer ces nombres par des nombres proportionnels. Les parts des associés seront respectivement

$$\frac{BA_1 n_1}{A_1 n_1 + A_2 n_2 + A_3 n_3},$$
$$\frac{BA_2 n_2}{A_1 n_1 + A_2 n_2 + A_3 n_3},$$
$$\frac{BA_3 n_3}{A_1 n_1 + A_2 n_2 + A_3 n_3}.$$

Il pourrait se faire qu'un associé engageât à des époques successives plusieurs capitaux. On le remplacerait par autant d'associés fictifs qu'il a engagé de capitaux, et on lui attribuerait comme part la somme des parts qui reviendraient à chacun des associés fictifs.

393. *Mélanges et alliages; valeur moyenne; titre moyen.* — On a des volumes de vins, A_1, A_2, ..., A_p, de qualités différentes; les prix de l'unité de volume sont respectivement n_1, n_2, ..., n_p. On les mélange ensemble; quel sera le prix de l'unité de volume du mélange?

Divers morceaux d'alliages contenant le même métal précieux ont des poids représentés par les nombres $A_1, A_2, \ldots, A_p$ et des titres représentés par les nombres $n_1, n_2, \ldots, n_p$. On fond tous ces morceaux en un seul alliage ; quel sera son titre ?

Les deux problèmes sont au fond identiques.

1° Rappelons que le prix d'un certain volume de vin s'obtient en multipliant le nombre qui exprime le volume de ce vin (n° 357) par le nombre qui exprime le prix de l'unité de volume. Inversement, le prix de l'unité de volume, pour un vin dont un volume donné coûte un prix donné, s'obtient en divisant le second nombre, celui qui exprime le prix, par le premier, celui qui exprime le volume.

Les prix des volumes $A_1, A_2, \ldots, A_p$ seront donc respectivement $A_1n_1, A_2n_2, \ldots, A_pn_p$; le prix de tout le vin mélangé sera donc $A_1n_1 + A_2n_2 + \ldots + A_pn_p$; comme le volume du mélange est mesuré par le nombre $A_1 + A_2 + \ldots + A_p$, le prix de l'unité de volume sera donné par le nombre

$$N = \frac{A_1n_1 + A_2n_2 + \ldots + A_pn_p}{A_1 + A_2 + \ldots A_p};$$

c'est, si l'on veut, le prix *moyen* du vin. On pourrait constater, comme au n° 387, que N est compris entre le plus petit et le plus grand des nombres $n_1, n_2, \ldots, n_p$. Le prix moyen ne changerait pas si l'on remplaçait les nombres $A_1, A_2, \ldots, A_p$ par des nombres proportionnels. Le lecteur n'aura aucune peine à établir la même règle, en passant par les intermédiaires de la méthode de réduction à l'unité ; il supposera pour cela que les nombres $A_1, A_2, \ldots, A_p$ soient entiers, et représentent, par exemple, des litres.

2° De même, le poids d'un métal précieux, de *fin*, contenu dans un alliage s'obtient en multipliant le titre de cet alliage par le nombre qui mesure le poids du morceau d'alliage. Le poids de fin contenu dans les morceaux dont les poids sont respectivement mesurés par les nombres $A_1, A_2, \ldots, A_p$ seront respectivement A_1n_1, $A_2n_2, \ldots, A_pn_p$. Le poids de fin contenu dans l'alliage final sera mesuré par le nombre $A_1n_1 + A_2n_2 + \ldots + A_pn_p$; le poids du morceau de cet alliage sera $A_1 + A_2 + \ldots + A_p$; son titre sera donc

$$N = \frac{A_1n_1 + A_2n_2 + \ldots + A_pn_p}{A_1 + A_2 + \ldots + A_p};$$

c'est, si l'on veut, le titre moyen. Ici encore, le titre moyen ne change pas si l'on remplace les nombres $A_1, A_2, \ldots, A_p$ par des nombres qui leur soient proportionnels.

394. Dans le cas où l'on ne mélange que deux espèces de liquides, où l'on ne fond ensemble que deux morceaux d'alliages différents, le prix par unité de volume du mélange, ou le titre de l'alliage résultant, est donné par la formule

$$N = \frac{A_1 n_1 + A_2 n_2}{A_1 + A_2},$$

ou

$$(A_1 + A_2)N = A_1 n_1 + A_2 n_2,$$

en désignant toujours par A_1, A_2 les nombres qui mesurent le volume des liquides que l'on mélange, ou le poids des morceaux d'alliages que l'on fond ensemble, et par n_1, n_2 les prix par unité de volume de ces liquides, ou les titres de ces alliages. N est le prix par unité de volume, ou le titre, du mélange, ou de l'alliage résultant. Cette formule conduit à quelques conclusions intéressantes, qui seront utilisées plus tard.

Si l'on a $n_1 = n_2$, il est clair que l'on a aussi $N = n_1 = n_2$, et ce résultat était évident *a priori*.

Si l'on a $n_1 < n_2$, on a (n° 212),

$$n_1 < N < n_2.$$

D'ailleurs, l'égalité

$$A_1 N + A_2 N = A_1 n_1 + A_2 n_2$$

peut s'écrire

$$A_1 N - A_1 n_1 = A_2 n_2 - A_2 N$$

ou, successivement,

$$(N - n_1)A_1 = (n_2 - N)A_2,$$

$$\frac{N - n_1}{n_2 - N} = \frac{A_2}{A_1}.$$

Ainsi, les différences entre le prix, par unité de volume, du mélange et le prix, par unité de volume, des liquides qui constituent le mélange sont inversement proportionnelles aux volumes de ces mélanges, ou bien les différences entre le titre de l'alliage résultant et le titre de chacun des alliages composants sont inversement proportionnelles aux poids des alliages composants.

395. L'égalité $(N - n_1)A_1 = (n_2 - N)A_2$, que nous avons déduite de la formule qui donne N, peut recevoir une interprétation concrète, qui permet de l'établir *a priori*. Plaçons-nous dans le cas des mélanges : supposons que les nombres A_1, A_2 soient entiers, que l'unité de volume soit le litre et, pour rendre l'interprétation plus claire, imaginons que le mélange soit fait par un marchand de vin qui a acheté A_1 litres de vin à n_1 fr., A_2 litres de vin à n_2 fr. et qui veut vendre le mélange au prix coûtant. Continuons de désigner par N le prix coûtant d'un litre du mélange : si le marchand vend tout le mélange à N fr. le litre, il gagnera par litre de la première qualité une somme égale à $N - n_1$, soit, en tout, $(N - n_1) \times A_1$, et il perdra par litre de la seconde qualité une somme égale à $n_2 - N$, soit, en tout, $(n_2 - N) \times A_2$; s'il veut que sa perte et son bénéfice se compensent, il faut donc que l'on ait

$$(N - n_1)A_1 = (n_2 - N)A_2.$$

Cette remarque donne l'explication des règles dites de mélange ou d'alliage.

Dans ces problèmes, qui concernent le mélange de deux espèces de liquides, ou le titre de l'alliage résultant de la fonte de deux alliages, on se donne habituellement le prix du mélange par unité de volume, ou le titre de l'alliage résultant ; on connaît d'ailleurs le prix par unité de volume, ou le titre des éléments composants. On peut se donner la quantité (volume ou poids) du mélange ou de l'alliage résultant, et chercher alors les quantités des éléments composants ; on pourra aussi donner l'une de ces dernières quantités et chercher l'autre, ainsi que le volume du mélange ou le poids de l'alliage résultant.

En d'autres termes, en conservant les notations du numéro précédent, on connaît les nombres n_1, n_2, N et le nombre $A_1 + A_2 = B$ et l'on veut avoir A_1 et A_2 ; ou bien encore on connaît n_1, n_2, N et l'un des nombres A_1, A_2, et on veut avoir l'autre et la somme des deux.

Le premier problème revient à partager le nombre B en parties inversement proportionnelles à $N - n_1$, $n_2 - N$, ou, ce qui revient au même, en parties directement proportionnelles à $n_2 - N$, $N - n_1$; ces parties seront :

$$\frac{B(n_2 - N)}{(n_2 - N) + (N - n_1)} = \frac{B(n_2 - N)}{n_2 - n_1},$$
$$\frac{B(N - n_1)}{(n_2 - N) + (N - n_1)} = \frac{B(N - n_1)}{n_2 - n_1}.$$

Le second problème revient à calculer un terme d'une proportion dont on connaît trois termes.

Exemples. — 1° On a du vin à $0^f,50$ le litre, du vin à $0^f,75$ le litre : quelle quantité devra-t-on prendre de chacun pour avoir 200 litres de vin à $0^f,60$ le litre?

Prenons le centime pour unité de monnaie. On devra partager 200 en parties inversement proportionnelles aux deux nombres $60 - 50 = 10$ et $75 - 60 = 15$, ou en parties directement proportionnelles aux nombres 15 et 10 ; ces parties seront :

$$\frac{200 \times 15}{25} = 120, \qquad \frac{200 \times 10}{25} = 80;$$

ainsi on devra prendre 120 litres de vin à $0^f,50$ le litre et 80 litres de vin à $0^f,75$.

2° On a 1000 grammes d'argent pur et un lingot d'argent au titre de 0,835. Quel poids devra-t-on fondre de ce lingot avec les 1000 grammes d'argent pur, pour avoir un alliage au titre de 0,900?

Le titre de l'argent pur doit être regardé comme égal à 1 ; les différences des titres sont respectivement $0,900 - 0,835 = 0,065$ et $1 - 0,900 = 0,100$; les poids d'alliages employés doivent être inversement proportionnels à ces nombres, ou aux nombres 65, 100; on doit donc avoir, en désignant par x le nombre qui mesure le poids du lingot d'argent à 0,835 qu'il faut prendre,

$$\frac{x}{1000} = \frac{100}{65},$$

d'où

$$x = \frac{100000}{65} = \frac{20000}{13} = 1538,5\dots.$$

En écrivant la dernière égalité, on entend simplement que si l'on convertit la fraction $\frac{20000}{13}$ en fraction décimale, les premiers chiffres que l'on trouve sont 1538,5... .

Il faut donc prendre environ $1538^g,5$ du lingot à 0,835 et l'on aura un lingot à 0,900 pesant $2538^g,5$.

396. Dans les problèmes de cette sorte on dispose souvent les calculs comme il suit : sur une ligne horizontale on place (en supposant qu'il s'agisse d'alliages) les nombres qui représentent les titres n_1, n_2 des alliages donnés; puis entre ces deux nombres, un peu au-dessous, le titre N de l'alliage que l'on veut obtenir; sur une seconde ligne horizontale, les différences $N - n_1$, $n_2 - N$, de façon que chacune soit sur le prolongement de la ligne oblique qui contient les deux nombres dont elle est la différence; c'est ce qu'on appelle faire les différences en croix : les poids des deux alliages que l'on emploie doivent être directement proportionnels à ces différences, en faisant correspondre chacune à l'alliage dont le titre est au-dessus d'elle. La disposition décrite est figurée ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} n_1 & & n_2 \\ & N & \\ n_2 - N & & N - n_1 \end{array}$$

Les poids $n_2 - N$, $N - n_1$ d'alliages aux titres n_1 et n_2 fournissent un alliage au titre N; il en sera de même de poids proportionnels. De même pour les mélanges.

Dans les deux exemples traités, on aurait les dispositions qui suivent :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0{,}50 & & 0{,}75 & 0{,}835 & & 1 \\ & 0{,}60 & & & 0{,}900 & \\ 0{,}15 & & 0{,}10 & 0{,}100 & & 0{,}065 \end{array}$$

Dans le premier cas on a à partager 200 proportionnellement à 0,15 et 0,10, ce qui donne 120 et 80; dans le second, on a déterminer x par la proportion :

$$\frac{x}{1\,000} = \frac{0{,}100}{0{,}065}.$$

§ 5. — Rentes perpétuelles.

397. C'est l'*impôt* qui fournit à l'État les sommes nécessaires pour doter normalement les différents services ; des circonstances peuvent se produire où il a besoin de capitaux considérables que l'impôt ne peut lui fournir immédiatement ; alors, il emprunte. Il emprunte, en fait, sous différentes formes ; nous ne nous occuperons ici que de l'une de ces formes, l'émission de *Rentes perpétuelles*.

En 1872, par exemple, l'État français a fait un emprunt de 3 milliards de francs. Cet emprunt a été fait en rentes 3 °/₀ au cours de 84ᶠ,50. Cela veut dire que, en échange de 84ᶠ,50 donnés le jour de l'émission, l'État garantissait à celui qui lui apportait cette somme une rente de 3 francs par an.

Il garantissait de même à tous ceux dont il recevait les capitaux une rente proportionnelle à la somme versée, dans la proportion de 3 francs pour 84ᶠ,50, de façon toutefois que la rente fût égale à un nombre entier de francs, au moins égal à 3.

La garantie de l'État est représentée par un titre de rente. Un titre de rente est un morceau de papier sur lequel est inscrit le montant de la rente annuelle que le possesseur de ce titre peut toucher dans les caisses de l'État. Il porte l'indication du type de la rente, 3 °/₀ dans l'exemple choisi, et diverses autres indications, en particulier un numéro d'ordre qui permet de le distinguer des autres titres analogues. La *valeur nominale* d'un titre de rente de 3 francs, du type 3 °/₀, est 100 francs, c'est-à-dire que l'État se réserve le droit de cesser le paiement des 3 francs de rente, sous la condition de rembourser 100 francs au possesseur du titre de 3 francs de rente.

La valeur nominale d'un titre de rente de a francs, du même type, sera de même $\frac{a \times 100}{3}$.

398. Les titres de rente sont d'ailleurs de diverses espèces : ils sont *nominatifs*, *au porteur*, ou *mixtes*. Dans le premier cas, ils portent le nom du possesseur, qui touche sa rente dans les caisses de l'État en montrant son titre; les titres au porteur sont regardés comme appartenant à celui qui les détient; ils contiennent des *coupons*, dont chacun porte une date ; à partir de cette date, le porteur du titre peut détacher le coupon et toucher le prix inscrit sur le coupon. Les titres mixtes portent le nom du possesseur et contiennent des coupons pareils à ceux des titres au porteur. Il y a, dans les titres au porteur et dans les titres mixtes, quatre coupons par an, qui correspondent aux quatre trimestres de l'année. Les titres nominatifs ou mixtes offrent au possesseur une grande sécurité : les titres au porteur sont plus facilement échangeables.

Il y a actuellement (1894) deux sortes de rentes perpétuelles, les rentes 3 °/₀, que l'on vient de prendre pour exemple, et les rentes $3\frac{1}{2}$ °/₀, qui proviennent des rentes 5 °/₀, converties en 1883 en rentes $4\frac{1}{2}$ °/₀, puis, au commencement de 1894, en rentes $3\frac{1}{2}$ °/₀, par une opération dont je parlerai bientôt : les coupons des rentes 3 °/₀ se touchent le 1er janvier, le 1er avril, le 1er juillet, le 1er octobre; les coupons de rente $3\frac{1}{2}$ °/₀ se touchent le 16 février, le 16 mai, le 16 août, le 16 novembre.

399. Les titres de rente sont l'objet d'une spéculation continuelle. La *Bourse* est le marché où ils se vendent; leur prix varie chaque jour, selon l'offre et la demande, c'est-à-dire qu'il faut donner, suivant les jours, des sommes différentes pour avoir 3 francs de rente. Ces prix sont publiés dans la *Cote officielle de la Bourse*, reproduite par la plupart des journaux. Ces indications de prix sont suivies de la date à laquelle a été payé le dernier coupon : ainsi, la mention « jouissance 1er juillet » veut dire que le coupon du 1er juillet de l'année courante a été détaché.

Par exemple, le 9 février 1894, le 3 °/₀ était coté 98f,15, c'est-à-dire qu'il fallait, en dehors de quelques frais accessoires dont je parlerai plus tard, payer 98f,15 pour avoir 3 francs de rente. Le taux de l'intérêt de ce placement était donc [1] :

$$\frac{3}{98,15} = 0,0305652...$$

pour un franc.

Si l'on désigne par α le nombre 3 ou 3,5 suivant qu'il s'agit du type 3 °/₀ ou du type 3,5 °/₀, par c le cours de la rente du type considéré, par A le capital avec lequel on veut acheter de la rente, par a la rente annuelle que produira ce capital, on a en général (n° 378)

$$a = \frac{A \times \alpha}{c}$$

et cette formule pourra faire connaître l'un des quatre nombres a, α, A, c quand on connaît les trois autres. Il convient toutefois d'observer que a doit être un nombre entier; on verra plus tard comment on doit tenir compte de cette condition, ainsi que des frais accessoires.

400. Avant 1894, les deux types de rente qui existaient étaient le 3 °/₀ et le $4\frac{1}{2}$ °/₀; par exemple, le 20 octobre 1893, le 3 °/₀ valait 98f,30, c'est-à-dire qu'il fallait payer 98f,30 pour se procurer 3 francs de rente; de même, le $4\frac{1}{2}$ °/₀ valait 105 francs : par conséquent, le taux, l'intérêt d'un franc, était pour la première valeur

$$\frac{3}{98,3} = 0,0305186...,$$

1. Pour calculer le quotient d'une division par un nombre aussi voisin de 100 qu'est 98,15, il est commode de se servir de l'égalité (Ex. 188)

$$\frac{1}{100-\alpha} = \frac{1}{100} + \frac{\alpha}{100^2} + \frac{\alpha^2}{100^3} + \cdots + \frac{\alpha^n}{100^{n+1}} + \frac{\alpha^{n+1}}{100^{n+1} \times (100-\alpha)};$$

les termes successifs du second membre se calculent très aisément : si l'on prend, par exemple, pour valeur approchée du premier membre

$$\frac{1}{100} + \frac{\alpha}{100^2} + \frac{\alpha^2}{100^3},$$

on voit que l'erreur sera

$$\frac{\alpha^3}{100^3 \times (100-\alpha)}$$

et si α est moindre que 2, elle sera moindre que

$$\frac{8}{10^6 \times 98} < \frac{1}{10^7};$$

dans bien des cas il suffira de prendre $\frac{1}{100} + \frac{\alpha}{100^2}$ comme valeur approchée.

et pour la seconde

$$\frac{4,5}{105} = 0,0428571....$$

Cette différence entre les deux taux semble considérable ; elle apparaîtra peut-être mieux encore en remarquant que, pour la première valeur, 1 franc de rente annuelle valait

$$\frac{98,30}{3} = 32,76...,$$

et pour la seconde

$$\frac{105}{4,5} = 23,33...,$$

c'est-à-dire qu'un franc de rente coûtait environ 9 francs de plus avec la première valeur qu'avec la seconde. On peut encore présenter les choses autrement. Si les deux valeurs avaient correspondu au même taux d'intérêt, en prenant toujours 98,30 pour le *cours* du 3 °/ₒ, le $4\frac{1}{2}$ °/ₒ aurait valu

$$\frac{98,30 \times 4,5}{3} = 98,3 \times 1,5 = 147,45.$$

La raison de cet écart, qui ne peut manquer de frapper le lecteur, est dans le droit qu'avait l'État français de rembourser à 100 francs le $4\frac{1}{2}$ °/ₒ, c'est-à-dire de ne plus payer la rente, en remboursant le capital nominal. Devant cette menace, le cours du $4\frac{1}{2}$ °/ₒ ne pouvait beaucoup s'élever au-dessus de cette valeur nominale, que le rentier pouvait être mis en demeure de recevoir du jour au lendemain.

En réalité, le remboursement pur et simple n'est guère praticable. La totalité des rentes qui provenaient du $4\frac{1}{2}$ °/ₒ s'élevait à 305540276 francs. La valeur correspondante était donc

$$\frac{305540276000}{45} = 6789783911,....$$

Pour se procurer une pareille somme, il faudrait un nouvel emprunt, plus considérable qu'aucun de ceux qui aient été effectués en une seule fois. La combinaison la plus simple consiste à offrir aux possesseurs de titres l'alternative entre les deux solutions suivantes, en s'arrangeant de façon que la seconde soit plus avantageuse pour eux que la première, en sorte qu'on puisse compter qu'ils s'arrêteront à cette seconde solution : ou bien accepter le remboursement pur et simple, ou bien recevoir à la place de leurs titres d'autres titres rapportant moins.

401. C'est à ce procédé qu'on s'est arrêté en 1883 pour convertir le 5 °/ₒ en $4\frac{1}{2}$ °/ₒ, puis en 1894 pour convertir le $4\frac{1}{2}$ en $3\frac{1}{2}$. Bornons-nous, pour en expliquer le principe, à cette dernière opération. Pour simplifier les explications, nous laisserons de côté la petite difficulté résultant de ce que la rente inscrite sur chaque titre est toujours un nombre entier de francs, nous raisonnerons comme s'il y avait des titres pour une quotité de rente quelconque.

Les possesseurs de titres de rente $4\frac{1}{2}$ °/ₒ ont eu le choix entre ces deux solutions : ou recevoir 100 francs pour un titre de $4^f,50$, ou ne plus recevoir désormais que $3^f,50$ à la place de $4^f,50$. Dans la seconde solution, la diminution de leur revenu, diminution qui s'élevait à 1 franc pour $4^f,50$, était considérable ; cette seconde solution était cependant plus avantageuse pour eux. En effet, s'ils acceptaient les 100 francs, pour en tirer un nouveau revenu, il leur fallait placer ces 100 francs, acheter d'autres valeurs avec cette somme ; au prix où étaient les autres valeurs, ou du moins celles qui présentaient autant de sécurité que les rentes sur l'État, ils ne pouvaient tirer de ces 100 francs qu'un revenu inférieur à $3^f,50$.

Au moment où la conversion a été annoncée (janvier 1894), l'autre type de rentes sur l'État, le 3 °/ₒ, était au cours de 98 francs. Le taux de l'intérêt, pour cette valeur, était donc, pour 1 franc,

$$\frac{3}{98} = 0,0306249\ldots,$$

c'est-à-dire qu'avec les 100 francs qu'on lui aurait remboursés, le rentier ne pouvait se procurer que $3^f,06$ de rente, au lieu de $3^f,50$ qu'on lui offrait : si on lui avait remboursé, par exemple, la valeur nominale de 4500 francs de rente $4\frac{1}{2}$ °/ₒ, c'est-à-dire 100000 francs, il ne pouvait se procurer, avec ces 100000 francs, qu'un revenu de $3062^f,49$, au lieu du revenu de 3500 francs qu'il conservait en acceptant la conversion.

Plaçons-nous à un autre point de vue ; une fois créé et mis en circulation, le nouveau type de rente devait acquérir et a acquis un certain prix : supposons, pour fixer les idées, que le 3 °/ₒ soit resté à 98 francs, cours dont il s'est très peu écarté aux environs de la conversion : à ce cours, une rente de $3^f,50$ correspondait à un capital de

$$\frac{98 \times 3,50}{3} = 114,33\ldots ;$$

le cours du $3\frac{1}{2}$ °/°, en supposant la *parité* entre les deux valeurs, c'est-à-dire en supposant qu'une même somme placée, soit en 3 °/°, soit en $3\frac{1}{2}$ °/°, rapportât la même rente, aurait donc dû être 114f,33. En fait, le $3\frac{1}{2}$ °/° n'a pas atteint ce cours, à cause de la menace d'une nouvelle conversion que l'État se réserve le droit de faire à partir de 1902, mais il devait évidemment dépasser le cours de 100 francs; il l'a dépassé en fait : peu après sa création, le cours du $3\frac{1}{2}$ °/° a oscillé aux environs de 105 francs et le 18 août 1894, il atteignait 108f,22. Dès lors, le rentier, au moment de la conversion, avait tout intérêt, au lieu de se faire rembourser, à accepter le nouveau titre, quitte à le revendre. Au moment de la conversion, sur les trois cents millions de rente, on a demandé le remboursement pour environ 40000 francs de rente; c'est-à-dire que sur les six milliards de capital nominal, l'État a dû rembourser moins d'un million de francs.

Le bénéfice de l'État à la conversion est évident. Lorsqu'il payait 4f,5, il n'a plus à payer que 3f,5 : il a donc à payer, par année, 1 franc de moins pour une valeur nominale de 100 francs; il a donc eu, à partir de la conversion, à payer à ses créanciers environ 67 millions de moins par an qu'auparavant. Ce bénéfice aurait été encore plus considérable si la nouvelle valeur avait rapporté moins; mais en dehors de l'intérêt des rentiers, dont l'État est obligé de tenir compte, on doit observer qu'une opération aussi considérable ne va pas sans dangers : elle doit être faite de manière que le rentier préfère sûrement le nouveau titre au remboursement. Or nous avons supposé, dans les raisonnements précédents, que le 3 °/° gardait toujours le même cours ; il suffirait d'une *baisse* un peu considérable sur cette valeur, pour tout troubler. Il est aisé de calculer une valeur du 3 °/° au-dessous de laquelle la conversion n'aurait pas réussi. Elle serait déterminée par l'égalité

$$\frac{x \times 3,5}{3} = 100$$

qui exprime que le cours du 3 °/° étant x, on peut, avec un capital de 100 francs acheter 3f,50 de rente; on en tire $x = 85,71...$ Si le 3 °/° était descendu à cette valeur, à l'époque de la conversion, les rentiers n'auraient rien perdu à exiger le remboursement et à acheter du 3 °/° avec leur capital; si le 3 °/° était descendu au-dessous de ce cours, ils auraient eu bénéfice à le faire ; ils auraient donc exigé le remboursement.

402. On a vu au n° 399 que le capital A, la rente a de ce capital, le cours c de la rente et le nombre α égal à 3 ou à 3,50, suivant qu'il s'agit d'un type de rente ou d'un autre, étaient liés par la relation

$$a = \frac{A\alpha}{c}.$$

La solution des problèmes relatifs à la négociation (vente ou achat) des titres de rente dépendrait uniquement de cette relation si, d'une part, le nombre a ne devait pas être entier; si, d'autre part, le négociateur n'avait pas à acquitter quelques frais accessoires dont il me reste à parler.

La négociation des rentes se fait par le ministère des *agents de change*. L'agent de change qui fait une opération pour le compte d'un client prélève, comme commission, un droit de *courtage* de $\frac{1}{8}$ °/o du capital brut qui forme le montant de l'opération; l'État prélève de même un droit de $\frac{1}{10}$ °/o; en outre le *bordereau* d'achat ou de vente, c'est-à-dire la *facture* qui constate cette opération, doit porter un timbre de $0^{f},60$ si le capital négocié ne dépasse pas 10000 francs, et un timbre de $1^{f},80$ s'il dépasse 10000 : ce bordereau, comme toute facture, doit d'ailleurs porter un timbre de $0^{f},10$. Lorsque l'opération est double, qu'elle consiste en une vente suivie à la même heure d'un achat, ou inversement, les frais sont les mêmes que pour une opération simple.

Exemples. — Quel serait le prix d'achat de 572 francs de rente 3 °/o, y compris les frais accessoires, au taux de 98 fr. 15 [1]?

Si l'on ne tient pas compte des frais accessoires, le prix d'achat serait

$$A = \frac{572 \times 98,15}{3} = 18713,93\ldots.$$

La somme à débourser se composera des éléments qui suivent :

Prix d'achat	18713,93
Courtage $\frac{1}{8}$ °/o	23,39
Impôt $\frac{1}{10}$ °/o	18,71
Timbres	1,90
Total.	18757,93.

1. On a dit plus haut qu'on ne pouvait acheter qu'un nombre entier de francs de rente ; en fait, il n'y a pas de titres de rente de moins de 3 francs ; mais l'existence de titres de 4, 5, 6, 7, ... francs, que l'on peut réunir ensemble, permet de raisonner comme s'il y avait des titres de rente de 1 franc, pourvu qu'on ne prétende point acheter 1 ou 2 francs de rente.

Combien, au même cours, pourrait-on acheter de rente 3 °/₀ avec un capital de 10000 francs?

Le capital doit contenir le prix d'achat brut, les frais accessoires; en ne tenant pas compte de ces derniers, on aurait pour la rente annuelle de 10000 francs

$$a = \frac{30000}{98,15}$$

On divise 30000 par 98,15 en s'arrêtant aux unités simples et l'on calcule le reste : on trouve ainsi

$$30000 = 98,15 \times 305 + 64,25,$$

d'où

$$10000 = \frac{98,15}{3} \times 305 + 21,41....$$

La dernière égalité n'est qu'approchée : il faut entendre que les deux membres diffèrent de moins de 0,01.

On voit qu'on ne pourra acheter plus de 305 francs de rente; si on ne les payait que le prix brut, on n'aurait à débourser que $\frac{98,15}{3} \times 305$, c'est-à-dire, à un centime près, $10000 - 21,41 = 9978,59$, et il resterait ainsi 21,41; mais sur cette somme il faudrait payer, en dehors du timbre, le huitième et le dixième de 99,7859, c'est-à-dire $12,46 + 9,97$; ce qui donne une somme supérieure à 21,41; si donc on ne veut rien ajouter, on devra se contenter d'acheter 304 francs de rente, au prix de 9945 fr. 87 auquel il faudra ajouter l'impôt, le courtage et le timbre, soit 23,08; le prix de revient sera donc 9968,95.

Un autre procédé [1] de calcul consiste à réunir en quelque sorte l'impôt et le courtage au cours. Soit c le cours indiqué par la cote de la Bourse; 3 francs de rente coûtent

$$c' = c + \frac{c}{800} + \frac{c}{1000},$$

en sorte qu'on pourrait ne pas tenir compte de l'impôt et du courtage, si l'on remplaçait c par c'. Du capital que l'on veut placer, on retranchera le prix du timbre; on divisera le résultat par $\frac{c'}{3}$, en s'arrêtant aux unités simples, et le nombre entier ainsi obtenu sera le nombre de francs de rente que l'on peut acheter. En d'autres termes, ce nombre est la partie entière de la fraction $\frac{3A'}{c'}$ où A' est le capital diminué des frais de timbre.

1. V. Brasilier, *Traité d'Arithmétique commerciale*, 1re éd., p. 415.

Dans l'exemple choisi on a $A' = 10000 - 0{,}70$; $c' = 98{,}3708375$; en calculant comme on l'a indiqué dans la note du n° 299, on trouve rapidement

$$\frac{3}{c'} = 0{,}0304966...,$$

puis

$$\frac{3A'}{c'} = \frac{3}{c'} \times 10000 - \frac{3}{c'} \times 0{,}70\,;$$

en s'arrêtant aux millièmes dans l'évaluation des deux parties de la différence, on trouve $304{,}966 - 0{,}021 = 304{,}945$, avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^3}$. On voit donc qu'on pourra acheter 304 francs de rente. Pour arriver à ce résultat, il n'était pas nécessaire de pousser les calculs si loin; on l'a fait pour arriver à la conclusion que voici : Le prix d'achat de 304 francs de rente est, en tenant compte de l'impôt et du courtage, $304 \times \frac{c'}{3}$; il restera donc à l'acheteur, après avoir tout soldé,

$$A' - 304 \times \frac{c'}{3} = \frac{c'}{3} \times \left(\frac{3A'}{c'} - 304\right);$$

or on a, à 0,001 près,

$$\frac{c'}{3} = 32{,}790, \qquad \frac{3A'}{c'} - 304 = 0{,}945;$$

en effectuant le produit, on voit qu'il pourra être affecté d'une erreur certainement moindre que $\frac{33}{1000}$; et l'on trouve qu'il est égal à 30,986...; en forçant le chiffre des centièmes, on trouve 31, avec une erreur manifestement moindre que 0,10; il restera donc environ 31 francs à l'acheteur.

D'ordinaire, on se borne à calculer approximativement le courtage et l'impôt sur la somme à placer; on obtient ainsi un résultat trop fort, auquel on ajoute le timbre; on retranche de la somme à placer, on multiplie par 3 et l'on divise par le cours; on obtient ainsi le nombre de francs de rente que l'on cherche, ou plutôt une limite inférieure de ce nombre.

Dans l'exemple précédent l'impôt et le courtage calculés sur 10000 fr. donneraient une somme égale à $10000 \times 0{,}00225 = 22{,}50$; en y ajoutant 0,70 de timbre, on trouve 23,20, résultat qui diffère à peine de celui qu'on a trouvé précédemment, et l'on aura ensuite à diviser $10000 - 23{,}20 = 9976{,}80$ par $\frac{98{,}15}{3}$, en se bornant à la partie entière, ce qui donnera encore 304 fr. Il est manifeste que ce procédé suffira à moins qu'il ne s'agisse de très grosses sommes.

On a 600 francs de rente 3 °/₀; on les vend pour acheter immédiatement du $3\frac{1}{2}$ °/₀; le 3 °/₀ est à 98,15; le $3\frac{1}{2}$, à 104,90. Combien de rente pourra-t-on avoir?

Le prix brut de 600 francs de rente 3 °/₀ est

$$\frac{600 \times 98,15}{3} = 19630$$

d'où il faut déduire l'impôt, le courtage et le timbre, soit 56,06; la différence est 19573,94; pour la seconde opération, si elle suit immédiatement la première, on n'a pas de frais accessoires à payer et il reste à diviser 19573,94 par $\frac{104,90}{3,5}$, en ne gardant que la partie entière. On trouve ainsi 653 francs de rente $3\frac{1}{2}$ dont le prix est 19571,34; l'opération sera évidemment avantageuse pour le rentier.

403. Il existe un autre type de rentes sur l'État : le 3 °/₀ *amortissable*, il diffère de la rente perpétuelle en ce que, chaque année, un certain nombre de titres sont remboursés d'après leur valeur nominale. En outre, les titres correspondent tous à 15 francs de rente ou à des multiples de 15 francs. Pour le reste, les calculs d'échange relatifs au 3 °/₀ sont les mêmes pour le 3 °/₀ amortissable que pour les rentes perpétuelles. Ainsi, le 15 janvier 1894, le 3 °/₀ amortissable était coté 98ᶠ,45; cela voulait dire qu'un titre fictif de 3 francs de rente valait 98ᶠ,45, indépendamment des frais accessoires. Le même jour, le 3 °/₀ ordinaire valait 98ᶠ,20 : l'amortissable était alors plus cher parce que la chance du remboursement à 100 francs était avantageuse, tant que le cours du 3 °/₀ amortissable était inférieur à 100 francs. Le cours du 3 °/₀ ordinaire ayant depuis dépassé 100 francs, il en a été de même du 3 °/₀ amortissable, mais cette valeur a naturellement été cotée au-dessous du 3 °/₀ ordinaire, parce que, alors, la chance de remboursement est devenue désavantageuse. Ainsi, le 18 août 1894, le 3 °/₀ ordinaire valait 103ᶠ,20 et le 3 °/₀ amortissable 101ᶠ,70.

404. Enfin les rentes sur l'État ne sont pas les seules qui se négocient à la Bourse et qui donnent lieu à des calculs analogues.

Les compagnies et sociétés financières se constituent au moyen d'un *capital social* fourni par les membres desdites compagnies ou sociétés, membres qui prennent le nom d'*actionnaires*. Ces membres reçoivent des *actions* qui représentent leur part dans le capital social. Chaque action a une valeur *nominale* : elle est *libérée* si le capital égal à la valeur nominale a été versé; elle est *libérée* de la *moitié*, du *quart*, etc., si la *moitié*, le *quart*, etc., de la valeur nominale a été versé. Celui qui la possède, l'actionnaire, a droit à un dividende annuel, variable suivant les bénéfices réalisés.

Les *actions* des grandes sociétés financières et industrielles se négocient à la Bourse comme les fonds d'État : elles sont *cotées* suivant les bénéfices présumés. La cote de la Bourse fait d'ailleurs mention de la valeur nominale, de la somme effectivement versée sur cette valeur nominale et du montant du dernier dividende.

Les *obligations* sont des titres qui représentent les emprunts contractés par les sociétés, elles sont ainsi l'analogue des fonds d'État et plus particulièrement de la rente amortissable. L'obligation donne droit à un revenu fixe et à un prix de remboursement déterminé : par exemple, les obligations de chemins de fer du type 500 francs 3 °/ₒ sont des titres remboursables à 500 francs, par voie de tirage au sort, et rapportant, jusqu'à l'époque du remboursement, un intérêt annuel de 15 francs, payable par semestre. Chaque obligation porte un numéro d'ordre ; chaque année, un certain nombre d'obligations déterminé par un tableau d'amortissement fixé au moment de l'émission doivent être remboursées. Certaines obligations comportent en outre des lots, c'est-à-dire que, chaque année, un certain nombre, parmi celles qui doivent être remboursées, le sont à un prix beaucoup plus élevé que leur valeur nominale. Le nombre et la quotité des lots, pour chaque année, sont fixés au moment de l'émission. Les obligations se négocient aussi à la Bourse.

Les titres autres que les titres d'État supportent divers impôts, qui sont actuellement (février 1894) les suivants :

Une taxe de 3 °/ₒ sur le revenu, frappant les coupons d'intérêt, les dividendes ;

Une taxe de 0,20 °/ₒ sur le capital, calculée chaque année sur le cours moyen de l'année précédente ;

Une taxe de 3 °/ₒ sur le prix de remboursement quand il s'agit d'un titre remboursé ; il va sans dire que cette taxe frappe les *lots*, s'il y a lieu.

Exercices (1).

267. Le gouvernement français a contracté en 1871 et 1872 des emprunts s'élevant au capital nominal de 6800000000 (nombre rond). Quel a été le total des intérêts payés pendant onze ans ?

268. Un négociant a déposé chez son banquier une somme de 3640 francs qui doit porter intérêt d'après le taux de $2\frac{1}{2}$ °/ₒ par an. Quels sont les intérêts après 7 mois $\frac{1}{2}$?

269. Un négociant achète des marchandises pour la somme de 573896^{f},25. Il doit

1. Les exercices de ce chapitre ont été, sauf les deux derniers, extraits du *Traité d'Arithmétique commerciale* de M. Brasilier.

payer en outre une commisssion de $\frac{1}{2}$ °/₀; les frais de transport augmentent ces premiers déboursés de 8 °/₀. Il se propose de vendre les marchandises avec un bénéfice net de 15 °/₀. Quel doit être le prix de vente?

270. Une minoterie reçoit une commande de 20000 quintaux de farine : combien coûtera la provision de froment nécessaire pour l'exécution de cette commande, si 312 hectolitres de froment donnent 157 quintaux de farine et si le froment coûte 28 francs les 100 kilogrammes, l'hectolitre pesant 75 kilogrammes?

271. Au bout de combien de jours un capital placé à 4 °/₀ a-t-il rapporté en intérêts le soixantième de sa valeur?

272. Un capital placé à intérêts simples depuis 48 jours a rapporté $\frac{1}{500}$ de sa propre valeur. Quel est le taux?

273. Un capitaliste place sa fortune à 4 °/₀; deux ans après, il retire $\frac{1}{4}$ du capital et laisse le reste porter intérêt pendant 7 mois; après ce temps il retire encore $\frac{1}{4}$ du capital qui restait alors placé et laisse le capital ainsi diminué pendant 13 mois. Le total des intérêts simples s'est élevé depuis l'origine du placement à 24375 francs. Quel était le capital primitif?

274. Déterminer l'échéance moyenne de 12 effets de commerce dont les valeurs nominales sont 1000, 2000, 3000, ..., 12000 et dont les échéances se succèdent de 15 jours en 15 jours, le premier étant payable le 3 février 1894. Calculer la valeur escomptée des 12 effets à la date du 19 janvier 1894, d'après le taux de 6 °/₀ par an.

275. Quatre négociants se sont associés pour l'exploitation d'un brevet. Le premier, qui est propriétaire du brevet, en a cédé la jouissance pour 5 ans, à la condition d'avoir 30 °/₀ dans les bénéfices. Le deuxième a mis 36000 francs et a, de plus, rempli les fonctions de gérant, moyennant une part de 4 °/₀ dans les bénéfices; le troisième a mis 30000 francs; le quatrième a versé à la société 15000 francs au commencement de chaque année. A la fin de la cinquième année, le capital net à l'actif de la société est 328000 francs. On en demande la répartition entre les 4 associés.

276. On veut frapper à la Monnaie des pièces d'or de 20 fr. Quels poids faut-il prendre sur deux lingots aux titres de 0,916 et 0,875 pour faire 1860 pièces?

277. Un épicier a trois sortes de cafés, dont les prix sont de 5f,25, 4f,50, 3f,70 le kilogramme. Il mélange 20 kilogrammes de la première qualité avec 13 kilogrammes de la seconde. Quel poids doit-il prendre de la troisième qualité pour former un mélange au prix moyen de 4 fr. le kilogramme?

278. On sait que l'on peut faire la longueur du mètre en plaçant en ligne, les unes à la suite des autres, 40 pièces d'or de 100 fr. et de 10 fr., dont les diamètres sont respectivement de 35 millimètres et de 19 millimètres. Combien faut-il prendre de pièces de chaque espèce?

279. Combien faut-il mettre d'eau dans 224 litres de vin à 1f,20 pour abaisser le prix du litre à 0f,70?

280. Quel poids de cuivre faut-il retirer d'un lingot d'argent, pesant 12 kilogrammes, au titre de 0,900, pour élever le titre à 0,925?

281. Le 13 décembre 1893, avant que le coupon de janvier ne soit détaché, un capitaliste a acheté de la rente 3 °/₀ au cours de 98f,75 autant qu'il lui a été possible avec une somme de 100000 fr., en acquittant les divers droits. Chaque jour d'échéance il place chez un banquier la valeur des coupons : le banquier lui paie un intérêt de 2 °/₀. Quelle somme le banquier lui doit-il le 1er juillet 1895? A quel taux le capitaliste aurait-il dû placer la somme qu'il a déboursée pour recevoir, pendant le même temps, le même intérêt?

282. *Annuités.* — On place à intérêts composés, au taux r, une somme a, puis un an après, la même somme a, puis un an après, encore la même somme a, etc... Quelle sera la valeur acquise C, par l'ensemble de toutes ces sommes, le jour du $n^{\text{ième}}$ versement, $n - 1$ années après le premier?

Ce jour-là, la dernière somme placée le jour même, vaut a; en ajoutant les valeurs acquises par les autres sommes; on trouve (Ex. 188) :

$$C = a + a(1+r) + a(1+r)^2 + \ldots + a(1+r)^{n-1} = a\,\frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

On a ainsi constitué au moyen de n *annuités* égales à a un capital C. Inversement, au lieu de payer C au bout de $n - 1$ années, on peut payer aujourd'hui, et d'année en année, l'annuité $a = \dfrac{rC}{(1+r)^n - 1}$.

On doit un capital dont la valeur actuelle est A, on veut s'acquitter au moyen de n annuités égales, en commençant aujourd'hui même, quelle sera la valeur de chaque annuité a?

Rép. $$a = \frac{Ar(1+r)^{n-1}}{(1+r)^n - 1}.$$

On trouvera dans l'*Annuaire du Bureau des longitudes* des tables qui donnent les valeurs de $\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$ et de son inverse.

283. Calculer approximativement la valeur acquise par 1 fr. au bout de 240 ans, de 2400 ans, en supposant ce franc placé à intérêts composés, au taux de 3 %, et en admettant dans ces limites la légitimité de la formule $A = a(1+r)^n$.

On trouve par un calcul direct ou dans les tables de l'*Annuaire du Bureau des longitudes* : $(1 + 0{,}03)^{24} = 2{,}032\ldots$. Ainsi au bout de 24 ans, la valeur du capital est plus que doublée; admettons qu'elle soit simplement doublée : au bout de 240 ans la valeur du capital sera multipliée par $2^{10} = 1024$, c'est-à-dire par un nombre plus grand que 1000; admettons qu'elle soit multipliée par 1000 seulement : au bout de 2400 ans, elle serait multipliée par $1000^{10} = 10^{30}$.

CHAPITRE XII

NOMBRES IRRATIONNELS. — LIMITES

§ 1. — **Définition des nombres irrationnels.**

405. J'ai considéré jusqu'ici deux espèces de nombres, les nombres entiers 0,1,2,... et les nombres fractionnaires, qui peuvent être formés au moyen de deux nombres entiers, différents de 0.

Ces nombres, pour les distinguer d'autres nombres que l'on va introduire, seront appelés nombres *rationnels*.

On a déjà observé que les nombres rationnels, entiers et fractions, ne suffisaient pas à atteindre l'un des buts essentiels que l'on a eus en vue en construisant l'idée de nombre, et en particulier l'idée de nombre fractionnaire, à savoir la mesure des grandeurs. Pour atteindre ce résultat comme pour répondre à d'autres questions qui se posent nécessairement, il est indispensable d'introduire de nouveaux éléments, dont le calcul sera soumis à des lois déterminées, et que j'appellerai *nombres irrationnels* [1].

L'introduction de ces nouveaux éléments ne va pas sans difficulté, quelque marche que l'on adopte; elle implique en effet la notion de *l'infini*, qui n'a joué jusqu'ici qu'un rôle secondaire. Cette notion, en mathématiques, n'a d'ailleurs rien de bien mystérieux, et on peut la réduire à la proposition suivante : Étant donné un nombre entier, il y en a un plus grand que lui. Mais tandis qu'on s'est élevé de la notion de nombre entier à celle de fraction, en considérant simplement deux nombres rangés dans certain ordre, au lieu d'un seul, il sera nécessaire, pour définir un nombre irrationnel de considérer une infinité de nombres rationnels, c'est-à-dire, en dernière analyse, une infinité de nombres entiers.

Quoi qu'il en soit, nous commencerons par énoncer quelques propositions à peu près évidentes relatives aux nombres rationnels.

406. Étant donné un nombre rationnel quelconque α, autre que zéro, il existe des nombres rationnels plus petits que α (n° 189).

Étant donné un nombre rationnel quelconque a, autre que zéro, il existe des nombres rationnels plus petits et plus grands que a, et qui diffèrent de a d'une quantité moindre que n'importe quel nombre rationnel α, donné à l'avance. On les obtient en retranchant et en ajoutant a à des nombres rationnels moindres que α. Il résulte de là qu'il existe des nombres rationnels qui comprennent entre eux le nombre a et dont la différence est moindre que α.

Étant donnés des nombres rationnels a et b, tels que a soit plus petit que b, il existe des nombres rationnels compris entre a et b : on les obtient en ajoutant à a des nombres plus petits que $b - a$. Observons en particulier qu'il existe des nombres décimaux compris entre a et b; telle sera la valeur approchée de a par excès à $\frac{1}{10^n}$ près, si l'on suppose $\frac{1}{10^n}$ plus petit que $b - a$.

1. On dit assez habituellement *incommensurables*, au lieu de irrationnels. Il serait bon de réserver l'épithète « incommensurable » aux grandeurs.

Les mathématiciens de l'École de Pythagore et, peut-être, leur maître lui-même ont mis hors de doute l'existence de *grandeurs incommensurables* : tels sont le côté et la diagonale d'un carré. On trouve, dans les *Éléments* d'Euclide une théorie du rapport des grandeurs incommensurables et diverses spéculations sur les nombres irrationnels. Parmi les travaux, assez nombreux, des contemporains, relatifs à l'introduction des nombres irrationnels, je citerai un écrit de M. Catalan (V. *Mathesis*, 1886, p. 151) qui remonte à une cinquantaine d'années, une note de M. Méray (*Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limite à des variables données*, *Revue des Sociétés savantes*, *Sciences mathématiques*, t. IV, p. 286, 1869), une brochure de M. Dedekind intitulée *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872), un mémoire de Heine, dans le journal du Crelle (1872), intitulé *Die Elemente der Functionenlehre*. Heine, pour ce qui est du point de départ, s'est rencontré avec M. Méray; ce dernier a repris la question dans ses *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale* (Paris, Gauthier-Villars et fils, 1894); son exposition est irréprochable au point de vue logique. J'ai toutefois adopté ici l'idée fondamentale de M. Dedekind, qui me paraît éclairer profondément la nature du nombre irrationnel.

407. Si l'on considère un nombre rationnel quelconque A, autre que zéro, il permet de partager l'ensemble des nombres rationnels en trois catégories : 1° l'ensemble des nombres rationnels plus petits que A; 2° l'ensemble des nombres rationnels plus grands que A; 3° le nombre rationnel A lui-même.

Un nombre rationnel quelconque appartient à l'une ou l'autre de ces trois catégories.

Il convient de faire les remarques suivantes :

I. Chaque nombre de la première catégorie est plus petit que chaque nombre de la seconde catégorie.

II. Dans la première catégorie, il n'y a pas de nombre qui soit plus grand que tous les autres nombres de la même catégorie, puisque, entre un nombre rationnel $a < A$ et A, il y a des nombres rationnels. De même, dans la seconde catégorie, il n'y a pas de nombre qui soit plus petit que tous les autres, pour la même raison.

Si l'on se donne un nombre rationnel quelconque ε, aussi petit qu'on voudra, il y a des nombres appartenant, l'un à la première catégorie, l'autre à la seconde, et dont la différence est moindre que ε.

408. Certains problèmes conduisent à une séparation des nombres rationnels en *deux* catégories, qui jouissent de propriétés très analogues.

On sait, par exemple, qu'il est impossible de trouver un nombre rationnel dont le carré soit égal à 3. Le carré de tout nombre rationnel est plus petit que 3, ou plus grand que 3. Rangeons dans une première catégorie les nombres dont le carré est plus petit que 3, dans une seconde catégorie tous ceux dont le carré est plus grand que 3. Chaque nombre rationnel appartient à l'une ou à l'autre catégorie.

I. Il y a des nombres dans l'une et l'autre catégorie et chaque nombre de la première catégorie est plus petit que chaque nombre de la seconde.

II. Dans la première catégorie, il n'existe pas de nombre qui soit plus grand que tous les autres nombres de cette catégorie. En effet, si a est un nombre rationnel tel que a^2 soit inférieur à 3, il existe des nombres rationnels dont le carré est aussi inférieur à 3 et diffère de 3 d'une quantité moindre que $3 - a^2$; un tel nombre a' est certainement plus grand que a; car l'inégalité $3 - a'^2 < 3 - a^2$ entraîne l'inégalité $a'^2 > a^2$, et, par suite, $a' > a$. On voit de même que, dans la seconde catégorie, il n'existe pas de nombre plus petit que tous les autres, parce qu'il y a des nombres rationnels dont le carré est plus grand que 3 et diffère de 3 d'aussi peu qu'on le veut.

Enfin, si on se donne un nombre rationnel ε, aussi petit qu'on le veut, il existe des nombres appartenant, l'un à la seconde catégorie, l'autre à la première, et qui ont entre eux une différence moindre que ε. Il suffit, pour trouver de tels nombres, de fixer un ordre d'approximation $\frac{1}{10^n}$ tel que l'on ait $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$ et de chercher les valeurs approchées de la racine carrée de 3, par excès et par défaut, à $\frac{1}{10^n}$ près.

On retrouve donc, pour les deux catégories de nombres rationnels considérées, les mêmes propriétés qui ont été énumérées dans le n° 407; la seule différence est qu'il n'y a ici que deux catégories, au lieu de trois. Les deux catégories formées, l'une des nombres rationnels dont le carré est plus petit que 3, l'autre des nombres rationnels dont le carré est plus grand que 3, embrassent *tous* les nombres rationnels.

409. On dira qu'on a défini un nombre irrationnel toutes les fois qu'on aura défini un moyen de partager tous les nombres rationnels en deux catégories jouissant des propriétés suivantes :

I. Il y a des nombres dans chaque catégorie; la première contient des nombres autre que zéro, et chaque nombre de cette catégorie est plus petit que chaque nombre de la seconde.

II. Dans la première catégorie, il n'y a pas de nombre plus grand que tous les autres nombres de la même catégorie; dans la seconde catégorie, il n'y a pas de nombre plus petit que tous les autres.

C'est la loi même de cette séparation qui définit le nombre irrationnel; en représentant par un symbole, une lettre A par exemple, un tel nombre, ce symbole, cette lettre ne signifient rien autre chose jusqu'à présent que la loi de cette séparation.

410. Par définition, le nombre irrationnel ainsi défini est dit *plus grand* que tous les nombres (rationnels) de la première catégorie, qui sont dits plus petits que lui, et plus petit que tous les nombres (rationnels) de la seconde catégorie, qui sont dits plus grands que lui. On dit encore que le nombre irrationnel est compris entre un nombre quelconque de la première catégorie et un nombre quelconque de la seconde.

Ainsi, si l'on a défini un nombre irrationnel A et si a, a' désignent des nombres rationnels appartenant, l'un à la première catégorie, l'autre à la seconde, on écrira

$$a < \mathrm{A}, \qquad \mathrm{A} > a, \qquad a' > \mathrm{A}, \qquad \mathrm{A} < a',$$

et inversement. Ces *inégalités* n'ont pas d'autre sens que celui-ci : a appartient à la première catégorie, a' appartient à la seconde. D'après la condition II, elles entraînent $a < a'$, et l'on peut par conséquent les écrire

$$a < \mathrm{A} < a'.$$

Il y a, dans la première catégorie, des nombres (rationnels) plus grands que a, cela revient à dire qu'il y a des nombres rationnels plus grands que a et plus petits que A; on dit qu'ils sont compris entre a et A; de même il y a des nombres rationnels plus grands que A et plus petits que a'; on dit qu'ils sont compris entre A et a'.

Il est clair que si a_1 est un nombre rationnel plus petit que a, il appartiendra comme a à la première catégorie ; il ne peut en effet appartenir à la seconde, puisque tout nombre de cette seconde catégorie est plus grand que a, d'après la condition I ; en d'autres termes, si a, a_1 sont des nombres rationnels et si l'on a $a_1 < a$, $a < A$, on a aussi $a_1 < A$. De même, si a', a'_1 sont des nombres rationnels, si a' appartient à la seconde catégorie et si a'_1 est plus grand que a', a'_1 appartiendra aussi à la seconde catégorie ; en d'autres termes, si l'on a $a'_1 > a'$, $a' > A$, on a aussi $a'_1 > A$. Il sera donc permis de condenser ces inégalités et d'écrire

$$a_1 < a < A < a' < a'_1.$$

Par exemple, la séparation de tous les nombres rationnels en deux catégories comprenant, la première tous les nombres rationnels dont le carré est plus petit que 3, la seconde tous les nombres dont le carré est plus grand que 3, définit un nombre irrationnel que l'on appelle racine carrée de 3 et que l'on représente par le symbole $\sqrt{3}$; les inégalités

$$1 < \sqrt{3}, \qquad 1{,}7 < \sqrt{3}, \qquad 2 > \sqrt{3}$$

ne veulent pas dire autre chose que ceci : les nombres rationnels 1 et 1,7 appartiennent à la première catégorie, c'est-à-dire que leur carré est plus petit que 3 ; 2 appartient à la seconde catégorie, c'est-à-dire que son carré est plus grand que 3.

Il existe des nombres rationnels compris entre 1,7 et $\sqrt{3}$; tel est, par exemple, le nombre 1,71, dont le carré est moindre que 3. Il existe des nombres rationnels compris entre $\sqrt{3}$ et 2 ; tel est 1,8 dont le carré est supérieur à 3, et l'on peut écrire

$$1{,}7 < 1{,}71 < \sqrt{3} < 1{,}8 < 2.$$

Les mots *plus petit*, *plus grand* ou les signes $<$, $>$, quand ils se rapportent à un nombre rationnel d'une part, à un nombre irrationnel de l'autre, remplacent les mots *première catégorie, seconde catégorie* ; ils ont l'avantage d'éveiller dans l'esprit des analogies, mais il ne faut pas leur chercher un autre sens que celui qu'on vient de dire.

La notion de nombre irrationnel ainsi présentée est très différente de la notion de nombre entier, ou de celle de fraction : il ne sera donc permis de parler des opérations à faire sur ces nombres qu'après avoir repris toutes les définitions relatives à ces opérations. Ces définitions ne pourront porter que sur la loi de séparation en catégories qui définit chaque nombre irrationnel.

Avant de les aborder je ferai quelques observations.

411. Si l'on partage l'ensemble des nombres rationnels en deux catégories qui vérifient la condition I du n° 408, c'est-à-dire telles que tous les nombres de la première catégorie soient plus petits que tous les nombres de la seconde catégorie, il arrivera de deux choses l'une :

Ou bien les conditions II seront vérifiées, ou bien elles ne le seront pas.

Dans le premier cas, la loi de partage définit un nombre irrationnel; dans le second cas, il est impossible qu'il y ait à la fois dans la première catégorie un nombre a plus grand que tous les autres de la même catégorie, et dans la seconde catégorie un nombre a' plus petit que tous les autres de la même catégorie ; en effet, à cause de la condition I, on aurait $a < a'$, et les nombres rationnels compris entre a et a' ne pourraient appartenir à la première catégorie puisqu'ils sont plus grands que le plus grand nombre a de cette catégorie ; ils ne pourraient non plus appartenir à la seconde catégorie, puisqu'ils sont plus petits que le plus petit nombre de cette catégorie ; le mode de séparation adopté n'aurait donc pas permis de séparer *tous* les nombres rationnels en deux catégories. On ne peut donc supposer que ceci : ou bien, dans la première catégorie, il y a un nombre (rationnel) plus grand que tous les autres, et alors, dans la seconde catégorie, il n'y en a pas qui soit plus petit que tous les autres de la même catégorie ; ou bien il y a un nombre (rationnel) de la seconde catégorie qui est plus petit que tous les autres, et dans la première catégorie il n'y a pas de nombre qui soit plus grand que tous les autres ; par exemple, la première catégorie comprend le nombre 3 et les nombres rationnels plus petits ; la seconde, les nombres rationnels plus grands que 3. Si l'on isole, dans le premier cas, le nombre rationnel plus grand que tous les autres de la première catégorie, et, dans le second cas, le nombre rationnel plus petit que tous les autres nombres de la seconde catégorie, et si de ce nombre unique A on forme une troisième catégorie, on voit que l'on sera précisément dans les circonstances examinées au n° 407 et qui se rapportent au partage des nombres rationnels en trois catégories, contenant, la première, les nombres rationnels plus petits que A ; la seconde, les nombres rationnels plus grands que A ; la troisième, le seul nombre A. On pourra dire alors que le mode de séparation considéré définit le nombre A.

Enfin il pourrait arriver que la première catégorie ne contînt aucun nombre, ou le nombre 0 seulement, la seconde catégorie comprenant, dans le premier cas, tous les nombres rationnels, dans le second tous les nombres rationnels autres que 0. On pourrait dire alors que le mode de séparation définit le nombre 0.

Arrivons maintenant aux définitions concernant les nombres irrationnels : on va construire ces définitions de manière qu'elles s'appliquent aussi aux nombres rationnels, mais elles seront beaucoup plus compliquées que celles qui ont été données antérieurement.

§ 2. — **Egalité, inégalité; valeurs approchées.**

412. Deux nombres A, B rationnels ou irrationnels, et dont aucun n'est le nombre zéro, sont dits égaux si les nombres rationnels plus petits que A sont les mêmes que les nombres rationnels plus petits que B, et si les nombres rationnels plus grands que A sont les mêmes que les nombres rationnels plus grands que B. On écrit alors $A = B$.

En d'autres termes, pour constater l'égalité des nombres A, B, il faudra constater : 1° que tout nombre rationnel plus petit que A est plus petit que B et, réciproquement, que tout nombre rationnel plus petit que B est aussi plus petit que A; 2° que tout nombre rationnel plus grand que A est aussi plus grand que B et, réciproquement, que tout nombre rationnel plus grand que B est plus grand que A.

Si l'un des nombres A, B est zéro, l'autre ne lui sera égal que s'il est aussi zéro : d'ailleurs il est clair que si A était nul, sans que B le fût, les nombres rationnels plus petits que B, et autres que zéro, seraient plus grands que A. Ce cas rentre donc dans le cas général, si ce n'est que la première condition n'a plus de sens.

Deux nombres rationnels A, B que l'on sait être égaux d'après les définitions de l'égalité relatives aux nombres entiers et fractionnaires satisfont évidemment aux conditions précédentes; ils sont égaux au sens de la nouvelle définition.

Deux nombres rationnels A, B que l'on sait être inégaux d'après les définitions de l'égalité relatives aux nombres entiers et fractionnaires ne peuvent satisfaire aux conditions précédentes, car si l'on a, par exemple $A < B$, il y a des nombres rationnels compris entre A et B, c'est-à-dire plus grands que A, plus petits que B.

Si l'un des nombres A, B, le nombre A par exemple, est rationnel et si le nombre B est irrationnel, il est impossible que les conditions précédentes soient vérifiées : en effet, le nombre rationnel A appartient à l'une ou à l'autre des deux catégories relatives au nombre B; s'il appartient, par exemple, à la première catégorie, s'il est plus petit que B, il y a des nombres rationnels compris entre A et B, c'est-à-dire plus grands que A et plus petits que B.

Si les deux nombres A, B sont irrationnels, dire qu'ils sont égaux, d'après les conditions précédentes, c'est dire que les deux modes de séparation des nombres rationnels en deux catégories, qui les définissent, sont les mêmes.

Le lecteur établira sans peine les deux propositions qui suivent; je n'insiste pas sur les démonstrations, d'autant que je n'aurai pas à faire usage de ces propositions.

Des deux conditions relatives à l'égalité de deux nombres A, B, l'une implique l'autre; en d'autres termes, si l'on sait, par exemple, que les nombres rationnels plus petits que A sont les mêmes que les nombres rationnels plus petits que B, on peut affirmer que les nombres rationnels plus grands que A sont aussi les mêmes que les nombres rationnels plus grands que B, en sorte que l'on a $A = B$.

Pour constater l'égalité des nombres A, B, il suffit de prouver que tout nombre rationnel plus petit que A est aussi plus petit que B, et que tout nombre rationnel plus grand que A est aussi plus grand que B.

Il résulte immédiatement de la définition que si deux nombres A, B sont égaux à un troisième C, ils sont égaux entre eux.

413. Si les deux nombres rationnels ou non A et B ne sont pas égaux au sens de la définition précédente, c'est qu'il y a un nombre rationnel plus petit que l'un et qui n'est pas plus petit que l'autre : par exemple, un nombre rationnel a plus petit que A et égal ou supérieur à B : on peut toujours supposer que a soit supérieur à B; s'il lui était égal, on remplacerait en effet a par un des nombres rationnels compris entre a et A.

S'il existe un nombre rationnel a plus petit que A et plus grand que B, il est clair que A n'est pas égal à B; il est clair aussi, d'après les conditions (I), que tout nombre rationnel b plus petit que B sera plus petit que a et, par suite (nº 410), plus petit que A : il ne peut donc exister de nombre rationnel plus petit que B et plus grand que A.

Dans ces conditions, on dit que A est plus grand que B, que B est plus petit que A, et l'on écrit

$$A > B, \qquad B < A.$$

Il résulte de ce qu'on vient de dire que la supposition $A > B$ exclut les suppositions $A = B$, $A < B$.

Inversement ces façons de parler ou d'écrire, au moins lorsque les deux nombres A, B sont irrationnels, ne signifient pas autre chose que ceci : il existe un nombre rationnel a plus petit que A et plus grand que B. Au reste, il est clair, par ce qui précède, que cette définition de l'inégalité reste vraie quand l'un des nombres A, B est rationnel, ou que tous les deux le sont.

S'il existe un nombre rationnel a plus petit que A et plus grand que B, il en existe une infinité : ce sont les nombres rationnels plus petits que a et plus grands que B, ou plus grands que a et plus petits que A.

414. Les deux inégalités

$$A > B, \qquad B > C$$

entraînent l'inégalité.

$$A > C.$$

En effet, les deux premières inégalités veulent dire qu'il existe des nombres rationnels a,b tels que l'on ait

$$A > a, \quad a > B; \quad B > b, \quad b > C;$$

les nombres a, b étant l'un plus grand, l'autre plus petit que B, il est clair, d'après la condition I, que l'on a $a > b$, et par suite $A > b$; les inégalités

$$A > b, \qquad b > C$$

impliquent $A > C$, puisque b est rationnel. D'après cela il est légitime de réunir les deux inégalités $A > B$, $B > C$ dans la suite d'inégalités

$$A > B > C.$$

415. Il est souvent commode, pour démontrer que deux nombres A, B sont égaux, de s'appuyer sur la proposition suivante.

Deux nombres rationnels ou irrationnels A, B sont égaux si, quelque petit que soit le nombre rationnel α, il existe des nombres rationnels a, a' qui comprennent entre eux les nombres A, B et dont la différence soit moindre que α.

En effet, si A et B sont inégaux, supposons, par exemple,

$$A < B;$$

il y aura une infinité de nombres rationnels compris entre A et B; soient p, q deux de ces nombres, tels que l'on ait, par exemple,

$$A < p < q < B.$$

Les nombres A, B étant compris entre a, a', on aurait

$$a < A < B < a'$$

et, en vertu des inégalités précédentes,

$$a < A < p < q < B < a'.$$

Les nombres rationnels p, q étant compris entre a, a', la différence entre ces derniers nombres ne peut être plus petite que $q - p$.

416. Ces notions, relatives à l'égalité et à l'inégalité, vont permettre de développer une notion importante, celle de valeur approchée.

Considérons un nombre irrationnel A, c'est-à-dire, encore une fois, une loi de partage des nombres rationnels en deux catégories, qui jouissent des propriétés I et II.

Soit α un nombre rationnel quelconque; envisageons la suite des multiples de α

$$0,\ \alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha,\ \ldots,\ n\alpha,\ (n+1)\alpha,\ \ldots;$$

chacun de ces nombres, étant rationnel, appartient à la première ou à la seconde catégorie, est plus petit que A, ou plus grand. Le premier, 0, est certainement plus petit que A; d'ailleurs, en s'avançant assez dans la suite, on finit par trouver des nombres plus grands que tel nombre rationnel que l'on voudra, et par suite des nombres plus grands que A.

On appelle valeur approchée de A à α près, par défaut, le plus grand terme de cette suite qui soit inférieur à A; si $n\alpha$ est ce terme, $(n+1)\alpha$ sera plus grand que A; ce sera d'ailleurs le plus petit nombre de cette suite qui soit plus grand que A; c'est par définition la valeur approchée de A à α près, par excès.

La considération de ces valeurs approchées montre clairement que, si on se donne un nombre rationnel ε quelconque, on peut toujours trouver deux nombres rationnels, l'un plus petit que A, l'autre plus grand et qui aient entre eux une différence moindre que ε. Il suffit en effet de prendre α plus petit que ε et de chercher les valeurs approchées de A à α près, par défaut et par excès.

417. La considération des valeurs approchées par défaut de A à 1; 0,1; 0,01; 0,001; ... près offre un intérêt particulier. Désignons la suite de ces valeurs, écrites dans la notation décimale, par a_0, a_1, a_2, a_3, ... Des circonstances toutes pareilles à celles que l'on a signalées au n° 236 se présentent ici. La connaissance d'un terme de cette suite implique la connaissance de tous les termes qui précèdent, lesquels se déduiront du terme que l'on connaît par la suppression d'un ou plusieurs chiffres décimaux, à droite. Si, par exemple, 3,141 est la valeur approchée du nombre irrationnel A à 0,001 près par défaut, la valeur approchée par défaut du nombre A à 0,01 près sera 3,14; on a en effet

$$\frac{3141}{1000} < A < \frac{3142}{1000}$$

et, par suite, *a fortiori*,

$$\frac{3140}{1000} < A < \frac{3150}{1000} \quad \text{ou} \quad \frac{314}{100} < A < \frac{315}{100}.$$

Chacun des nombres a_0, a_1, a_2, a_3, ... se déduisant du précédent par l'adjonction d'un chiffre décimal, qui, à la vérité, peut être un zéro, les termes de cette suite ne vont jamais en décroissant; mais il y a plus, ils finissent toujours par croître; en d'autres termes, dans la suite a_0, a_1, a_2, ..., chaque terme est suivi d'un terme plus grand que lui; en effet, si l'on considère, par exemple, le terme a_4, il y a certainement des nombres rationnels α plus grands que a_4 et plus petits que A; il y a d'ailleurs (n° 406) des nombres décimaux compris entre a_4 et α; il y a donc des nombres décimaux plus grands que a_4 et plus petits que A; si β est un tel nombre et si son dernier chiffre représente des unités du $n^{\text{ième}}$ ordre décimal, la valeur approchée de A à $\frac{1}{10^n}$ près est au moins β; elle est donc plus grande que a_4.

Les nombres

$$a_0 + 1, \quad a_1 + \frac{1}{10}, \quad a_2 + \frac{1}{100}, \quad \ldots, \quad a_n + \frac{1}{10^n}, \ldots$$

sont les valeurs approchées de A, par excès, à 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, ..., $\frac{1}{10^n}$, ... près; on verrait, comme au n° 236, que ces nombres ne croissent jamais et, comme précédemment, qu'ils finissent toujours par décroître.

Si deux nombres irrationnels sont égaux, il est clair que les deux suites qui fournissent leurs valeurs approchées à 1; 0,1; 0,01; ... près, par défaut, sont identiques. Mais si A et B sont des nombres irrationnels ou non qui ne sont pas égaux, les deux suites ne peuvent être identiques. Supposons en effet $B > A$; il y aura des nombres rationnels compris entre A et B; entre deux de ces nombres, il y a certainement des nombres décimaux; il y a donc des nombres décimaux compris entre A et B; soit α un tel nombre et supposons que son dernier chiffre décimal exprime des unités du $n^{\text{ième}}$ ordre décimal; la valeur approchée de A par défaut à $\frac{1}{10^n}$ près sera sûrement moindre que α, la valeur approchée de B, par défaut, au même ordre, sera au moins égale à α; ainsi, les deux valeurs approchées ne peuvent être égales. Si donc on désigne par $a_0, a_1, a_2, \ldots$ et par $b_0, b_1, b_2, \ldots$ les valeurs approchées par défaut de A et de B, à 1; 0,1; 0,01; ... près, et si l'on a $B > A$, on aura nécessairement, pour une valeur de n assez grande, $b_n > a_n$; on aura de même $b_{n+1} > a_{n+1}$, puisque a_{n+1} et b_{n+1} se déduisent respectivement de a_n et de b_n par l'adjonction d'un chiffre décimal; on aura de même $b_{n+2} > a_{n+2}$, etc. On sait aussi que l'inégalité $b_n > a_n$ entraîne les inégalités $b_{n-1} \geqq a_{n-1}$, $b_{n-2} \geqq a_{n-2}$, etc., puisque les nombres b_{n-1}, a_{n-1} se déduisent respectivement de b_n, a_n par la suppression d'un chiffre décimal.

Réciproquement si l'on a, pour une certaine valeur de l'indice n, $b_n > a_n$, on peut affirmer que le nombre B est plus grand que le nombre A, puisque si A était égal ou supérieur à B, on aurait, quel que fût l'indice n, $a_n \geqq b_n$.

Ainsi, la connaissance de la suite des valeurs approchées par défaut à 1; 0,1; 0,01;... près d'un nombre rationnel ou irrationnel caractérise entièrement ce nombre. Si l'on connaît ces suites pour deux nombres, on pourra, théoriquement du moins, reconnaître quel en est le plus grand, quel en est le plus petit. La restriction qui vient d'être indiquée se rapporte à ce qu'on ne sait pas jusqu'à quel rang il faut aller dans ces suites pour reconnaître le plus grand des deux nombres. Observons encore, à cette occasion, qu'une suite d'un nombre infini de termes, a_0, a_1, a_2, ..., ne peut être effectivement connue; on ne peut aller jusqu'au bout de cette suite. Tout ce que l'on peut connaître, c'est la loi d'après laquelle se suivent les termes qui la composent.

D'ordinaire on ne sépare pas en quelque sorte les divers termes de la suite a_0, a_1, a_2, ... des valeurs approchées par défaut d'un nombre A à 1; 0,1; 0,01; ... près. On écrit un symbole comme un nombre décimal, auquel on imaginerait une infinité de chiffres décimaux, et de telle sorte que, en conservant seulement la partie entière et les n premières décimales de ce symbole, on obtienne précisément le nombre décimal a_n; on ne peut écrire qu'un certain nombre de chiffres décimaux au symbole; on supplée, en faisant suivre ces chiffres décimaux de quelques points, à l'infinité de ceux qui manquent. Par exemple, on a défini plus haut ce qu'il faut entendre par $\sqrt{3}$; les valeurs approchées de $\sqrt{3}$ à 1; 0,1; 0,01; ... près par défaut ne sont autre chose que ce qu'on a appelé précédemment les racines carrées de 3 à 1; 0,1; 0,01; ... près par défaut; en écrivant

$$\sqrt{3} = \cancel{1,729131}...,$$

1,73205

on entend dire seulement que les nombres

$$1\,;\ 1{,}7\,;\ 1{,}72\,;\ 1{,}729\,;\ 1{,}7291,\ \ldots$$

sont les valeurs approchées de $\sqrt{3}$ par défaut à 1 ; 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; 0,0001 ; ... près.

Ce symbole ainsi formé, je l'appellerai la représentation décimale du nombre considéré ; le *connaître*, ce n'est pas, bien entendu, autre chose que connaître la loi suivant laquelle se succèdent les chiffres qui le composent. Un pareil symbole, par exemple, est connu pour ce que l'on a appelé une fraction décimale périodique. Observons de suite, à ce propos, que la représentation décimale d'un nombre irrationnel ne peut être une fraction décimale périodique, puisque celle-ci est la représentation décimale de sa fraction génératrice, laquelle est un nombre rationnel, nécessairement plus petit ou plus grand que le nombre irrationnel que l'on considère.

La connaissance des représentations décimales des nombres irrationnels permettra, comme on le verra bientôt, de calculer sur ces nombres avec telle approximation qu'on voudra ; nous verrons en effet comment toute la théorie des calculs approchés, développée dans le chapitre VIII, peut être transportée aux nombres irrationnels ; mais il est nécessaire d'expliquer tout d'abord ce que sont les opérations sur ces nombres.

§ 3. — Opérations.

418. Pour ce qui concerne les définitions des opérations, j'adopterai les notations suivantes : une grande lettre, A par exemple, servira à désigner un nombre qui pourra être rationnel ou irrationnel ; une petite lettre désignera toujours un nombre rationnel : je représenterai les nombres rationnels plus petits que A par a, a_1, a_2, ..., au contraire les nombres rationnels plus grands que A par a', a'_1, a'_2, ...

419. *Addition.* — La somme de deux nombres rationnels ou irrationnels A et B autres que zéro est un nombre plus grand que tout nombre formé en ajoutant deux nombres rationnels respectivement plus petits que A et B, et plus petit que tout nombre formé en ajoutant deux nombres rationnels respectivement plus grands que A et B.

420. Démontrons d'abord que si un tel nombre existe, il n'en existe qu'un.

Supposons en effet que deux nombres C, D rationnels ou irrationnels soient tels que l'on ait

$$a + b < \mathrm{C} < a' + b',$$
$$a + b < \mathrm{D} < a' + b',$$

quels que soient les nombres rationnels a, b respectivement plus petits que A, B et les nombres rationnels a', b' respectivement plus grands que

A, B. Quelque petit que soit le nombre rationnel α, on peut supposer que la différence $a' + b' - (a + b) = (a' - a) + (b' - b)$ entre les deux nombres qui comprennent C et D soit plus petite que α; il suffit pour cela de prendre des nombres a et a', d'une part, b et b', de l'autre, tels que l'on ait

$$a' - a < \frac{\alpha}{2},\quad b' - b < \frac{\alpha}{2}:$$

les nombres C et D, compris entre $a + b$ et $a' + b'$, sont donc égaux (n° 415).

421. Il reste à montrer qu'il existe un nombre qui satisfait à la définition précédente. Considérons un nombre rationnel quelconque; nous le rangerons dans la première catégorie s'il est égal ou inférieur à la somme de deux nombres rationnels a, b respectivement plus petits que A et B, et dans la seconde catégorie s'il est égal ou supérieur à la somme de deux nombres rationnels a', b' respectivement plus grands que A et B.

Il est clair que chaque nombre compris dans la première catégorie est plus petit que chaque nombre compris dans la seconde catégorie. Il est clair aussi que, dans la première catégorie, il n'y a pas de nombre plus grand que tous les autres : si, en effet, on considère un nombre quelconque c de cette catégorie, il est inférieur ou égal à la somme $a + b$ de deux nombres rationnels respectivement plus petits que A et B ; dans les deux cas, il existe certainement des nombres a_1, b_1 respectivement plus grands que a, b et plus petits que A, B, et le nombre $a_1 + b_1$, qu'on doit ranger dans la première catégorie, est plus grand que c. On voit de même que, dans la seconde catégorie, il n'existe pas de nombre qui soit plus petit que tous les autres.

S'il existe un nombre rationnel C qui n'appartienne ni à la première ni à la seconde catégorie, c'est qu'il est plus grand que toute somme obtenue en ajoutant deux nombres rationnels respectivement plus petits que A et B, et qu'il est plus petit que toute somme obtenue en ajoutant deux nombres rationnels respectivement plus grands que A, B, c'est donc qu'il est la somme des deux nombres A, B telle qu'elle a été définie, et, par cela même, on voit qu'il est unique.

S'il n'y a pas de nombre rationnel qui échappe à la fois aux deux catégories, c'est que le mode de classification précédemment expliqué définit un nombre irrationnel plus grand que tout nombre de la première catégorie, c'est-à-dire plus grand que la somme de deux nombres rationnels quelconques a, b respectivement plus petits que A, B, et plus petit que la somme de deux nombres rationnels quelconques a', b' respectivement plus grands que A, B. Ce nombre irrationnel C est la somme des deux nombres A, B, et l'on écrit dans tous les cas

$$C = A + B.$$

Exemple : le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ se définit comme on a fait le nombre

$\sqrt{3}$; et l'on a d'ailleurs, en adoptant la façon d'écrire expliquée au n° 417,

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots, \qquad \sqrt{3} = 1{,}7291\ldots;$$

la somme $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ des deux nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ est ainsi plus grande que $1{,}414 + 1{,}729 = 3{,}143$; elle est plus petite que $1{,}415 + 1{,}730 = 3{,}145$; elle est donc comprise entre 3,14 et 3,15; 3,14 est sa valeur approchée, à 0,01 près, par défaut.

422. Il convient de remarquer que tout nombre rationnel $c < C$ peut être regardé comme la somme de deux nombres rationnels respectivement plus petits que A et B ; il n'y a lieu à démonstration que dans le cas où c a été rangé dans la première catégorie comme inférieur (non égal) à la somme $a + b$ de deux nombres rationnels plus petits respectivement que A et B ; or si l'on a

$$c < a + b$$

et si l'un des deux nombres a, b, le nombre a par exemple, est plus petit que c, on aura

$$c - a < b,$$

et le nombre c pourra être regardé comme la somme des deux nombres rationnels $a < A$ et $c - a < b < B$: si les deux nombres a, b sont supérieurs ou égaux à c, il suffira de prendre deux nombres rationnels quelconques a_1, b_1, dont c soit la somme; on aura $a_1 < c < a < A$, et de même $b_1 < B$.

De même tout nombre rationnel $c' > C$ peut être regardé comme la somme de deux nombres rationnels respectivement plus grands que A, B : car si l'on a par exemple

$$c' > a' + b', \qquad a' > A, \qquad b' > B,$$

on aura $c' - a' > b' > B$; or c' est la somme de $a' > A$ et de $c' - a'$.

Ainsi l'ensemble des nombres rationnels plus petits que $A + B$ est composé de tous les nombres que l'on peut obtenir en faisant la somme de deux nombres rationnels respectivement plus petits que A, B, et seulement des nombres que l'on peut obtenir de cette façon; l'ensemble des nombres rationnels plus grands que $A + B$ est composé de tous les nombres que l'on peut obtenir en faisant la somme de deux nombres rationnels respectivement plus grands que A, B, et seulement des nombres que l'on peut obtenir de cette façon.

423. Par définition, la somme de deux nombres dont l'un est zéro est l'autre nombre; en d'autres termes, on a par définition,

$$A + 0 = 0 + A = A,$$

que le nombre A soit rationnel ou non.

Si l'on considère maintenant des nombres rationnels ou irrationnels, A, B, C, D, E, ..., en nombre fini, rangés dans un ordre déterminé, pour définir leur *somme* $A + B + C + D + E + \ldots$, on définira la somme $A + B$ des deux premiers, puis le nombre obtenu en ajoutant C à cette somme, nombre que l'on écrit $A + B + C$, puis le nombre obtenu en ajoutant D à $A + B + C$, nombre que l'on écrit $A + B + C + D$, etc.

424. Considérons trois nombres A, B, C; d'après ce qu'on vient de dire, les nombres rationnels plus petits que $A + B + C$ sont les mêmes que les nombres que l'on peut obtenir en ajoutant un nombre rationnel c plus petit que C à un nombre rationnel plus petit que $A + B$; mais tout nombre rationnel plus petit que $A + B$ peut s'obtenir en ajoutant deux nombres rationnels a, b respectivement plus petits que A, B; donc les nombres rationnels plus petits que $A + B + C$ sont les mêmes que les nombres que l'on peut obtenir en ajoutant trois nombres rationnels a, b, c respectivement plus petits que A, B, C. De même les nombres rationnels plus grands que $A + B + C$ sont les mêmes que ceux que l'on obtient en ajoutant trois nombres rationnels respectivement plus grands que A, B, C. On passe du cas de trois nombres au cas de quatre nombres, comme on a passé du cas de deux nombres au cas de trois nombres, et il est clair que les nombres rationnels plus petits que la somme $A + B + C + D + E + \ldots$, des nombres A, B, C, D, E, ... sont les mêmes que les nombres que l'on obtient en ajoutant des nombres rationnels a, b, c, d, e, ... respectivement plus petits que A, B, C, D, E, ..., et que les nombres rationnels plus grands que la somme $A + B + C + D + E + \ldots$ sont les mêmes que les nombres que l'on obtient en ajoutant des nombres rationnels a', b', c', d', e', ... respectivement plus grands que A, B, C, D, E, ...

Comme dans une somme de nombres rationnels l'ordre des termes n'influe pas sur le résultat, on voit que l'ordre des nombres A, B, C, D, E, ... n'intervient pas dans la détermination des nombres rationnels plus petits ou plus grands que leur somme. Ainsi :

Dans une somme de nombres quelconques, on peut intervertir l'ordre des termes.

Cette proposition subsiste évidemment lorsque quelques-uns des nombres à ajouter sont nuls, puisqu'il n'y a pas à tenir compte de ces nombres nuls, pour le résultat.

On voit de même que dans une somme de termes quelconques, on peut remplacer tels termes que l'on veut par leur somme effectuée : au surplus, cette proposition est une conséquence de la précédente.

Les propriétés fondamentales de l'addition sont étendues aux nombres irrationnels.

425. En ajoutant à un nombre A un nombre B différent de zéro, on obtient un nombre $A + B$ plus grand que A.

Pour le démontrer, il suffit (n° 413) de prouver l'existence d'un nombre rationnel a' tel que l'on ait

$$A < a' < A + B$$

Soient b, a, a' des nombres rationnels vérifiant les inégalités

$$b < \text{B} \qquad a < \text{A} < a' \qquad a' - a < b$$

la somme des nombres $a' - a <$ B et $a <$ A est plus petite que A + B; or cette somme a' est plus grande que A.

426. *Soustraction.* — Soustraire un nombre B d'un nombre A, c'est trouver un nombre C tel que l'on ait A = B + C.

Le problème n'est possible que si A est égal ou supérieur à B; en effet, en ajoutant 0 à B, on trouve pour somme B, et en ajoutant à B un nombre autre que 0, on trouve un résultat plus grand que B. Si donc A est plus petit que B, on ne reproduira jamais A en ajoutant à B quelque nombre que ce soit.

Si A est égal à B, on a

$$\text{A} = \text{B} + 0;$$

0 satisfait à la condition énoncée; pour la raison qu'on vient de rappeler, c'est le seul nombre qui satisfasse à cette condition.

Si l'on a A > B, on va prouver qu'il existe un nombre C autre que zéro et tel que l'on ait A = B + C; on prouvera ensuite qu'il n'en existe qu'un.

Rangeons dans une première catégorie tout nombre rationnel c qui est égal ou inférieur à la différence $a - b'$ entre un nombre rationnel a plus petit que A et un nombre rationnel b' supérieur à B, mais d'ailleurs moindre que a. Rangeons dans une seconde catégorie tout nombre rationnel c' qui est égal ou supérieur à la différence $a'_1 - b_1$, entre un nombre rationnel $a'_1 >$ A et un nombre rationnel $b_1 <$ B; puisque l'on a

$$b_1 < \text{B} < \text{A} < a'_1,$$

a'_1 est certainement plus grand que b_1.

Chaque nombre de la première catégorie est plus petit que chaque nombre de la seconde catégorie; il suffit pour le démontrer de prouver que l'on a, en vertu des inégalités précédentes,

$$a - b' < a'_1 - b_1,$$

car, s'il en est ainsi, tout nombre plus petit que $a - b'$ sera certainement inférieur à $a'_1 - b_1$, ou à un nombre plus grand; or l'inégalité précédente équivaut à l'inégalité

$$a + b_1 < a'_1 + b',$$

qui est évidente, puisque l'on a

$$a < a'_1, \qquad b_1 < b'.$$

Dans la première catégorie il n'y a pas de nombre plus grand que tous les autres; si c est un nombre de la première catégorie, pour montrer qu'il existe dans cette catégorie un nombre plus grand que c, il suffit de le démontrer dans le cas où c a été rangé dans cette catégorie comme égal (non inférieur) à la différence $a - b'$; or, si les nombres rationnels a et b' sont tels que l'on ait

$$B < b' < a < A,$$

il est clair qu'il y aura des nombres rationnels a_2, b'_2 tels que l'on ait

$$B < b'_2 < b' < a < a_2 < A,$$

et le nombre $a_2 - b'_2 > a - b'$ appartiendra à la première catégorie. De même, dans la seconde catégorie, il n'y a pas de nombre plus petit que tous les autres.

On va montrer maintenant que si l'on ajoute un nombre de la première catégorie et un nombre rationnel plus petit que B, on obtient un nombre plus petit que A, et que si l'on ajoute un nombre de la seconde catégorie et un nombre rationnel plus grand que B, on obtient un nombre plus grand que A.

Désignons en effet par β, β' des nombres rationnels tels que l'on ait

$$\beta < B < \beta',$$

et par c un nombre de la première catégorie, qui pourra par conséquent être regardé comme égal ou inférieur à la différence $a - b'$ entre un nombre rationnel $a < A$ et un nombre rationnel $b' > B$; on aura donc

$$c + \beta \leqq a - b' + \beta;$$

or, β étant plus petit que B et, par suite, que b', le second membre est plus petit que a : on a donc

$$c + \beta < A;$$

de même, si l'on suppose

$$c' \geqq a'_1 - b_1.$$

on aura

$$c' + \beta' \geqq a'_1 - b_1 + \beta';$$

Or β' étant plus grand que b_1, le second membre est plus grand que a'_1 : on a donc

$$c' + \beta' > A.$$

Ceci posé, deux cas peuvent se présenter. Ou bien, dans le mode de classification adopté, il y a un nombre rationnel C qui n'appartient ni à une catégorie ni à l'autre ; ou bien tout nombre rationnel trouve sa place dans une catégorie ou dans l'autre, et alors le mode de classification définit un nombre irrationnel C. Dans les deux cas, le nombre A est plus grand que la somme de deux nombres rationnels quelconques respectivement plus petits que B et C, et plus petit que la somme de deux nombres rationnels quelconques respectivement plus grands que B et C : dans tous les cas, on a

$$A = B + C.$$

427. Les deux nombres A, B étant donnés, il ne peut y avoir qu'un seul nombre C vérifiant cette égalité; si, en effet, il existait un autre nombre D tel que l'on eût

$$A = B + D,$$

et si l'on avait, par exemple, $C > D$, il existerait alors un nombre E tel que l'on eût $C = D + E$; on aurait donc, à cause de la première égalité,

$$A = B + (D + E) = (B + D) + E ;$$

mais en ajoutant E à la somme $B + D$ qui, par hypothèse, est égale à A, on obtient un nombre plus grand que $B + D$ et, par conséquent, plus grand que A. La contradiction est manifeste.

428. Exemple : on a

$$\sqrt{3} = 1{,}729\ldots, \qquad \sqrt{2} = 1{,}414\ldots ;$$

on a donc $\sqrt{3} > \sqrt{2}$; on aura d'ailleurs

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} < 1{,}730 - 1{,}413 \text{ ou } < 0{,}317,$$
$$\sqrt{3} - \sqrt{2} > 1{,}729 - 1{,}415 \text{ ou } > 0{,}314,$$

par conséquent 0,31 est la valeur approchée à 0,01 près par défaut de $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

429. Observons maintenant que les démonstrations de toutes les propositions du chapitre II, § 2 [1], relatives à la façon dont on peut ajouter à un nombre, ou en retrancher, soit une somme, soit une différence, etc., reposent uniquement sur les propriétés fondamentales de l'addition et sur cette proposition : Étant donnés deux nombres A, B, tels que l'on ait $A \geqq B$, il y a un nombre C et un seul tel que l'on ait $A = B + C$; ce nombre est nul si A est égal à B, il n'est nul que dans ce cas. Dès lors, il est évident que toutes ces propositions s'étendent immédiatement aux nombres irrationnels, puisque ces propriétés fondamentales subsistent. Il en est de même des propositions relatives aux expressions obtenues en ajoutant ou en retranchant successivement certains nombres dans un ordre déterminé (n° 63). Il en est de même enfin des propositions élémentaires sur les combinaisons des inégalités par addition ou soustraction, par exemple de ces théorèmes « en ajoutant à un même nombre deux nombres différents, on obtient deux

1. Il faudrait excepter la démonstration surabondante du n° 62 qui ne s'applique qu'aux nombres entiers.

nombres différents; on peut ajouter membre à membre des inégalités de même sens, etc. ... », théorèmes qui résultent immédiatement des propositions fondamentales relatives à l'addition et à la soustraction.

Il en est de même des règles relatives aux calculs approchés, pour ce qui concerne l'addition et la soustraction, car ces règles reposent uniquement sur les propositions que je viens de rappeler, et l'on voit comment la connaissance, même limitée, de la représentation décimale d'un ou plusieurs nombres irrationnels permet déjà certains calculs approchés sur ces nombres.

430. *Multiplication.* — La définition de la multiplication et l'extension des propriétés fondamentales de cette opération se fait exactement de la même manière que pour l'addition.

Le produit de deux nombres quelconques A, B dont aucun n'est nul est un nombre plus grand que tous les nombres que l'on obtient en multipliant deux nombres rationnels respectivement plus petits que A, B, et plus petit que tous les nombres que l'on obtient en multipliant deux nombres rationnels respectivement plus grands que A, B.

Tout d'abord, s'il y a un nombre C satisfaisant à cette définition, il est unique. On devra avoir, en effet, quels que soient les nombres rationnels a, b respectivement plus petits que A, B et les nombres rationnels a', b' respectivement plus grands que A, B, les inégalités

$$a\,b < \mathrm{C} < a'\,b';$$

or si l'on suppose $a' - a = \alpha$, $b' - b = \beta$, on aura

$$a'b' - ab = (a + \alpha)(b + \beta) - ab = a\beta + b\alpha + \alpha\beta,$$

et il est aisé de voir que, en prenant convenablement les nombres a, b, a', b', la quantité $a\beta + b\alpha + \alpha\beta$ peut être supposée plus petite que tel nombre rationnel que l'on voudra; si l'on désigne, en effet, par p un nombre rationnel plus grand que A et que B, et si l'on suppose α et β inférieurs à un nombre rationnel ε plus petit que 1, on aura

$$a\beta + b\alpha + \alpha\beta < p\varepsilon + p\varepsilon + \varepsilon \text{ ou } (2p + 1)\,\varepsilon.$$

Si l'on veut donc que $a'b' - ab$ soit inférieur au nombre rationnel λ, il suffira de supposer

$$\varepsilon < \frac{\lambda}{2p + 1},$$

et de choisir les nombres a', b', a, b tels que l'on ait

$$a' - a < \varepsilon, \qquad b' - b < \varepsilon.$$

Si donc on considère un second nombre D tel que l'on ait, quels que soient les nombres rationnels a, b respectivement plus petits que A, B et les nombres rationnels a', b' respectivement plus grands que A, B,

$$ab < D < a'b',$$

on aura nécessairement $D = C$ (n° 415).

Cela posé, si un nombre rationnel est égal ou inférieur au produit de deux nombres rationnels a, b respectivement plus petits que A, B, on le rangera dans une première catégorie; s'il est égal ou supérieur au produit de deux nombres rationnels a', b' respectivement plus grands que A, B, on le rangera dans une seconde catégorie.

Chaque nombre de la première catégorie est plus petit que chaque nombre de la seconde catégorie.

Dans la première catégorie il n'y a pas de nombre rationnel plus grand que tous les autres, car si un nombre rationnel c a été rangé dans cette catégorie comme étant le produit de deux nombres rationnels a, b respectivement plus petits que A, B, il suffira de faire le produit de deux nombres rationnels a_1, b_1 tels que l'on ait

$$a < a_1 < A, \qquad b < b_1 < B$$

pour avoir un nombre $a_1 b_1$ de la première catégorie plus grand que $ab = c$. Dans la seconde catégorie il n'y a pas de nombre plus petit que tous les autres.

S'il existe un nombre rationnel C qui n'appartienne ni à une catégorie ni à l'autre, ce nombre est plus grand que tous les nombres tels que ab, il est plus petit que tous les nombres tels que $a'b'$, il est le produit des deux nombres donnés A, B; par suite, il est unique.

Si aucun nombre rationnel n'échappe à la fois aux deux catégories, le précédent mode de classification des nombres rationnels définit un nombre irrationnel C; ce nombre est le produit cherché, pour la même raison que tout à l'heure, et l'on écrit dans tous les cas

$$C = A \times B, \quad \text{ou} \quad C = AB.$$

Il est aisé de voir que tout nombre rationnel plus petit que C peut être obtenu en faisant le produit de deux nombres rationnels a, b respectivement plus petits que A, B. En effet, il n'y a lieu à démonstration que dans le cas où le nombre c aurait été rangé dans la première catégorie comme inférieur (et non égal) au produit de deux nombres a, b; mais de l'inégalité

$$c < ab$$

on tire alors

$$b > \frac{c}{a}$$

et c est le produit des deux nombres $a < A$ et $\frac{c}{a} < b < B$; c'est ce qu'il fallait démontrer. De même les nombres rationnels plus grands que C sont les mêmes que les nombres que l'on obtient en faisant le produit de nombres rationnels respectivement plus grands que A, B.

431. Le produit de trois nombres quelconques A, B, C rangés dans un certain ordre se définira comme le nombre obtenu en faisant le produit des deux premiers, puis le produit du résultat et du troisième nombre. Il s'écrira $A \times B \times C$ ou ABC. Les nombres rationnels plus petits que ABC s'obtiennent en faisant le produit d'un nombre rationnel plus petit que C et d'un nombre rationnel plus petit que AB; mais ce dernier nombre est certainement le produit de deux nombres rationnels respectivement plus petits que A, B; donc les nombres rationnels plus petits que ABC sont les mêmes que les nombres obtenus en faisant le produit de trois nombres rationnels a, b, c respectivement plus petits que A, B, C. De même, les nombres rationnels plus grands que ABC sont les mêmes que les nombres obtenus en faisant le produit de trois nombres rationnels a', b', c' respectivement plus grands que A, B, C.

Si l'on se donne autant de nombres que l'on voudra, A, B, C, D, E, ..., leur produit ABCDE... se définira comme obtenu en faisant le produit des deux premiers A, B, ce qui donne AB, puis le produit de AB et du troisième C, ce qui donne ABC, puis le produit de ABC et du quatrième D, ce qui donne ABCD, etc.

En continuant de proche en proche le raisonnement que l'on vient de faire, on voit que les nombres rationnels plus petits que le produit ABCDE... sont les mêmes que les nombres que l'on obtient en faisant le produit de nombres rationnels a, b, c, d, e, ... respectivement plus petits que A, B, C, D, E, ..., et que les nombres rationnels plus grands que ce même produit ABCDE... sont les mêmes que ceux que l'on obtient en faisant le produit de nombres rationnels a', b', c', d', e', ... respectivement plus grands que A, B, C, D, E, ... Comme le produit de nombres rationnels ne dépend pas de l'ordre des facteurs, on voit que la détermination des nombres rationnels plus petits ou plus grands que le produit d'autant de nombres que l'on voudra ne dépend pas de l'ordre de ces nombres. Donc, dans un produit de facteurs quelconques, on peut intervertir l'ordre des facteurs. Les conséquences de ce théorème (n° 78) subsistent aussi.

432. Par définition, le produit de deux facteurs est nul quand l'un de ces facteurs est nul. Il n'est nul que dans ce cas : le théorème précédent et ses conséquences subsistent quand le produit considéré comporte quelque facteur égal à 0, car il est toujours alors égal à 0.

Le produit de A par 1 est A; en effet, soient a, b, a', b' des nombres rationnels qui vérifient les inégalités

$$a < A < a', \qquad b < 1 < b';$$

on aura

$$\begin{aligned} ab &< a < A, \\ a'b' &> a' > A, \end{aligned}$$

donc

$$ab < A < a'b'.$$

433. Si A, B, C sont trois nombres quelconques, on a

$$(B + C) \times A = B \times A + C \times A.$$

Supposons, en effet, en conservant toujours le même mode de notation,

$$a < A < a', \qquad b < B < b', \qquad c < C < c';$$

on aura, d'après les définitions, puisque les nombres a, b, c, a', b', c' sont rationnels

$$\begin{gathered} b + c < B + C < b' + c', \\ ba < BA < b'a', \\ ca < CA < c'a', \end{gathered}$$

puis, toujours en vertu des définitions,

$$\begin{gathered} (b + c) \times a < (B + C) \times A < (b' + c') \times a', \\ ba + ca < BA + CA < b'a' + c'a'; \end{gathered}$$

d'ailleurs, les nombres a, b, c, a', b', c' étant rationnels, on a

$$ba + ca = (b + c)a, \qquad b'a' + c'a' = (b' + c')a';$$

donc, pour prouver l'égalité des nombres $(B + C)A$ et $BA + CA$, il suffit (n° 415) de prouver que l'on peut choisir les nombres a, b, c, a', b', c' de façon que la différence

$$(b' + c')a' - (b + c)a$$

soit plus petite que tel nombre rationnel que l'on voudra. Le raisonnement est le même qu'au n° 430, puisque l'on peut supposer la différence entre les deux nombres a' et a, d'une part, entre les deux nombres $b' + c'$ et $b + c$, de l'autre, aussi petite que l'on voudra.

Cette proposition entraîne la suivante : si l'on a $B \geqq C$, on a

$$(B - C)A = BA - CA.$$

En effet, soit

$$B - C = D;$$

on aura, par le théorème précédent :

$$BA = (C + D)A = CA + DA;$$

on en conclut

$$DA = BA - CA.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. Dans le cas ou B est égal à C, la proposition est évidente.

Les théorèmes sur la multiplication d'une somme ou d'une différence par une somme ou une différence étant des conséquences des théorèmes précédents, leur extension aux nombres irrationnels est immédiate; il en est de même des propositions suivantes :

Quand on multiplie un nombre, autre que zéro, par des nombres différents, les résultats sont différents, et le plus grand produit correspond au plus grand multiplicateur; on peut multiplier membre à membre des inégalités de même sens.

434. *Division.* — Étant donnés deux nombres A, B dont le second n'est pas nul, diviser A par B c'est trouver un nombre C tel que l'on ait

$$A = B \times C.$$

La théorie de la division pourrait être calquée sur la théorie de la soustraction; nous arriverons plus rapidement au résultat comme il suit.

Observons d'abord que, en vertu de l'une des propositions que l'on vient de rappeler, le nombre C, s'il existe, est unique.

Ceci posé, je montrerai d'abord que, étant donné un nombre irrationnel B, autre que 0, il existe un nombre irrationnel C′ tel que l'on ait

$$B \times C = 1.$$

Rangeons en effet dans une première catégorie tout nombre rationnel c dont l'inverse est plus grand que B; dans une seconde catégorie, tout nombre rationnel c' dont l'inverse est plus petit que B; puisque l'on a

$$\frac{1}{c} > B > \frac{1}{c'}$$

on aura $c < c'$; ainsi tout nombre de la première catégorie est plus petit que tout nombre de la seconde ; d'ailleurs chaque nombre rationnel appartient à l'une ou l'autre des deux catégories; enfin, dans la première catégorie, il n'y a pas de nombre plus grand que les autres nombres de la même catégorie, car si c est un nombre de cette catégorie, il y aura certainement un nombre rationnel compris entre B et $\frac{1}{c}$; désignons son inverse par c_1; on aura

$$\frac{1}{c_1} < \frac{1}{c},$$

par conséquent $c < c_1$. De même, dans la seconde catégorie, il n'y a pas de nombre qui soit plus petit que tous les autres. Ce mode de partage de tous les nombres rationnels en deux catégories définit donc un nombre irrationnel C. Il est maintenant bien facile de voir que le produit de ce nombre par B est égal à un.

Si, en effet, on désigne par b, c des nombres rationnels plus petits respectivement que B et que C, c sera l'inverse d'un nombre rationnel b' plus grand que B et par suite que b ; on aura donc

$$b \times c = \frac{b}{b'} < 1;$$

on voit de même que le produit de deux nombres rationnels quelconques respectivement plus grands que B et que C est plus grand que un.

Ce nombre C ainsi défini, tel que l'on ait $B \times C = C \times B = 1$, s'appelle l'inverse de B et se représente par $\frac{1}{B}$.

435. Ceci posé, soit à diviser par B le nombre A. Que B soit rationnel ou non, il existe un nombre $\frac{1}{B}$ tel que, en le multipliant par B, le produit soit un. Le nombre obtenu en multipliant A par $\frac{1}{B}$ sera tel que, en le multipliant par B, on trouve A pour quotient. En effet, pour multiplier un produit par un nombre, il suffit de multiplier par ce nombre un des facteurs du produit. On a donc :

$$\left(A \times \frac{1}{B}\right) \times B = A \times \left(\frac{1}{B} \times B\right) = A \times 1 = A.$$

Le produit de A par $\frac{1}{B}$ se représente par $\frac{A}{B}$.

436. Lorsqu'on s'est occupé des fractions généralisées (Ch. VI, § 4), on a donné des démonstrations de leurs propriétés qui reposaient uniquement sur ce que le numérateur (ou dividende) de la fraction était égal au produit de la valeur de la fraction par son dénominateur (ou diviseur) : ces démonstrations s'étendent donc d'elles-mêmes au cas où les *termes* de la fraction généralisée sont des nombres irrationnels. Ainsi on peut multiplier par un même nombre les deux termes d'une fraction $\frac{A}{B}$ dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres rationnels ou irrationnels, etc... Les règles pour les opérations s'appliquent dans tous les cas.

437. Les propositions concernant les calculs approchés, tant pour la multiplication que pour la division, s'appliquent aussi, sans modification, lors même que les nombres auxquels on a affaire sont irrationnels.

Exemple. — Considérons le produit de $\sqrt{3}$ par $\sqrt{2}$; on observera que si l'on prend les valeurs approchées 1,73 (par excès) et 1,41 par défaut, les erreurs correspondantes sont moindres que $\frac{1}{1000}$ et que $\frac{5}{1000}$; chacun des nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ étant moindre que 2, l'erreur commise sur le produit sera moindre que $\frac{2 \times 5}{1000}$ ou $\frac{1}{100}$; on a d'ailleurs $1,73 \times 1,41 = 2,4393$ et ce nombre est approché du produit $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ avec une erreur moindre que

0,01 ; on en conclut que 2,4 est la valeur approchée du produit à 0,1 près, par défaut.

438. Supposons qu'on ait la représentation décimale d'un nombre irrationnel A ; il sera aisé d'en déduire les représentations décimales des nombres $A \times 10$, $A \times 100$, $A \times 1000$, ...

On a par exemple

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623.... ;$$

le nombre $\sqrt{2}$ est compris entre 1,4142135623 et 1,4142135624 ; donc $\sqrt{2} \times 1000$ est compris entre 1414,2135623 et 1414,2135624 ; sa valeur approchée à $\frac{1}{10^6}$ près, par défaut, est donc 1414,213562 ; c'est-à-dire que si l'on considère le symbole

$$1414{,}2135623...,$$

obtenu en avançant de trois rangs la virgule vers la droite dans le symbole qui représente $\sqrt{2}$, on en déduira en conservant les six premiers chiffres décimaux la valeur approchée de $\sqrt{2}$ à $\frac{1}{10^6}$ près, par défaut. Il est clair que le raisonnement est général : il suffirait d'avoir pris un, deux, trois, ... chiffres décimaux de plus dans la représentation décimale de $\sqrt{2}$ pour prouver que les valeurs approchées de $\sqrt{2} \times 1000$, à $\frac{1}{10^7}$, $\frac{1}{10^8}$, $\frac{1}{10^9}$, ... près, s'obtiennent de la même façon. Donc :

Lorsqu'on a la représentation décimale d'un *nombre irrationnel* A, pour en déduire les représentations décimales des nombres $A \times 10$, $A \times 100$, $A \times 1000$, ..., il suffira d'avancer la virgule vers la droite de un, deux, trois ... rangs.

Inversement il est clair que si l'on a la représentation décimale d'un nombre irrationnel, on obtiendra la représentation décimale du quotient obtenu en divisant ce nombre irrationnel par 10, 100, 1000, en reculant la virgule vers la gauche de un, deux, trois... rangs.

439. *Racine $n^{\text{ième}}$.* — En désignant par n un nombre entier, plus grand que un, on appelle racine $n^{\text{ième}}$ (exacte) d'un nombre A et l'on représente par le symbole $\sqrt[n]{A}$ un nombre qui, élevé à la puissance n, reproduit A. Ce nombre, s'il existe, est unique, car la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre plus grand dépasserait A, puisque la valeur d'un produit augmente quand ses facteurs augmentent : de même la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre plus petit serait moindre que A.

Disons, en passant, que dans le symbole $\sqrt[n]{A}$, en supposant que ce symbole ait un sens, n s'appelle l'*indice* de la *racine* : l'indice ne s'écrit habituellement pas quand il est égal à 2 : on écrit $\sqrt{A}$ au lieu de $\sqrt[2]{A}$.

Si A est rationnel, sa racine $n^{\text{ième}}$ peut être rationnelle; on dit alors que A est une puissance $n^{\text{ième}}$; si A est irrationnel, il est clair que sa racine $n^{\text{ième}}$ ne peut être un nombre rationnel, puisque la puissance $n^{\text{ième}}$ de tout nombre rationnel est un nombre rationnel.

Si A est rationnel sans être une puissance $n^{\text{ième}}$ exacte, on a défini plus haut la racine $n^{\text{ième}}$ de A approchée par défaut ou par excès à α près, et en particulier à $\frac{1}{10^{\mu}}$ près ; on a établi qu'il existait des nombres rationnels plus petits et plus grands que A et dont la $n^{\text{ième}}$ puissance différait de A d'une quantité moindre que tel nombre rationnel ε que l'on veut fixer à l'avance.

440. Il suit de là que, entre deux nombres rationnels quelconques a, b, il y a des nombres rationnels qui sont des puissances $n^{\text{ièmes}}$ exactes : il suffit pour obtenir de tels nombres de choisir un nombre rationnel quelconque c intermédiaire à a et b et de chercher ensuite un nombre rationnel dont la $n^{\text{ième}}$ puissance diffère de c d'une quantité moindre que la plus petite des quantités $c - a$, $b - c$. Par conséquent aussi, étant donné un nombre irrationnel quelconque A, on peut trouver des nombres rationnels dont les puissances $n^{\text{ièmes}}$ soient inférieures ou supérieures à A et qui diffèrent aussi peu qu'on le voudra de A. Si l'on veut, par exemple, trouver un nombre dont la puissance $n^{\text{ième}}$ soit inférieure à A et diffère de A d'une quantité moindre qu'un nombre ε donné à l'avance, il suffira de choisir deux nombres rationnels a, a_1, inférieurs à A, tels que la différence entre A et le plus petit soit moindre que ε, puis de déterminer un nombre rationnel dont la puissance $n^{\text{ième}}$ soit comprise entre a et a_1.

441. Ceci posé, soit A un nombre irrationnel ou un nombre rationnel qui ne soit pas une puissance $n^{\text{ième}}$ exacte. Rangeons dans une première catégorie tous les nombres rationnels dont la puissance $n^{\text{ième}}$ est moindre que A, dans une deuxième catégorie tous les nombres rationnels dont la puissance $n^{\text{ième}}$ est plus grande que A. Chaque nombre rationnel appartiendra à l'une ou à l'autre des catégories ; les nombres de la première catégorie sont tous plus petits que les nombres de la deuxième catégorie. Enfin, dans la première catégorie il n'y a pas de nombre plus grand que tous les autres : soit en effet b un nombre de cette catégorie, il existe certainement un nombre rationnel b_1 dont la puissance $n^{\text{ième}}$ est inférieure à A et tel que l'on ait $A - b_1^n < A - b^n$; or cette inégalité implique $b_1^n > b^n$ et par suite $b_1 > b$. On démontre de même que dans la seconde catégorie il n'existe pas de nombre inférieur à tous les autres.

Le mode de séparation des nombres rationnels en deux catégories définit donc un nombre irrationnel B et il est aisé de voir que l'on a

$$B^n = A.$$

En effet, si nous considérons n nombres pris dans la première catégorie, leur produit sera certainement inférieur à la $n^{\text{ième}}$ puissance du plus grand d'entre eux, et par suite à A ; on voit de même que le produit de n

nombres pris dans la seconde catégorie est supérieur à A. A étant supérieur au produit de n nombres rationnels quelconques plus petits que B, inférieur au produit de n nombres rationnels quelconques plus grands que B, est égal au produit de n facteurs égaux à B; il est donc égal à B^n, et l'on peut aussi bien écrire

$$B = \sqrt[n]{A}.$$

Tout nombre rationnel ou irrationnel a donc une racine $n^{\text{ième}}$.

442. Si A est un nombre rationnel ou irrationnel tel que sa racine $n^{\text{ième}}$ soit irrationnelle, et si l'on désigne par α un nombre rationnel quelconque, la valeur approchée de $\sqrt[n]{A}$ à α près sera le produit de α par un nombre entier K tel que l'on ait

$$K\alpha < \sqrt[n]{A} < (K+1)\alpha.$$

Or, on conclut de ces inégalités

$$(K\alpha)^n < A < [(K \times 1)\alpha]^n;$$

$K\alpha$ sera donc le plus petit multiple de α dont la $n^{\text{ième}}$ puissance soit inférieure à A; c'est ce que nous avons appelé, plus haut, lorsque A est rationnel, la racine $n^{\text{ième}}$ de A à α près, par défaut, et cette expression a donc le même sens que celle-ci : la valeur approchée du nombre $\sqrt[n]{A}$ à α près, par défaut.

On voit ainsi se justifier entièrement les expressions (n° 302) *valeur approchée de la racine* $n^{\text{ième}}$ *d'un nombre* A *avec une erreur moindre que* ε : ce que l'on a appelé ainsi, c'est une valeur approchée du nombre $\sqrt[n]{A}$ avec une erreur moindre que ε. Les règles que l'on a données alors pour le calcul approché de la racine d'un nombre connu avec une certaine approximation, s'appliquent manifestement au calcul numérique des racines des nombres irrationnels. Il serait d'ailleurs maintenant très aisé de retrouver ces règles ou d'autres équivalentes.

Pour nous borner par exemple à la racine carrée, on pourra se servir de l'égalité (n° 87)

$$\left(\sqrt{A} + \sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A} - \sqrt{B}\right) = A - B,$$

où A et B sont des nombres quelconques dont on suppose toutefois que A est supérieur à B. On tire de cette égalité

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} < \frac{A - B}{2\sqrt{B}}.$$

Supposons que A soit un nombre inconnu et B une valeur approchée par défaut de ce nombre avec une erreur moindre que ε; on pourra écrire

$$A = B + \varepsilon',$$

en désignant par ε' un nombre plus petit que ε; on aura donc, en vertu de l'inégalité précédente,

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} < \frac{\varepsilon'}{2\sqrt{B}} < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{B}};$$

par conséquent, $\sqrt{B}$ pourra être regardée comme une valeur approchée de $\sqrt{A}$, par défaut, avec une erreur moindre que $\frac{\varepsilon}{2\sqrt{B}}$, et si l'on calcule une valeur approchée b de $\sqrt{B}$ avec une erreur en moins inférieure à ε_1, le nombre b pourra être regardé comme une valeur approchée de $\sqrt{A}$ avec une erreur moindre que $\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{B}}$.

§ 4. — Opérations sur les radicaux.

443. Pour prouver qu'un nombre est la racine $n^{\text{ième}}$ de A, il suffit de prouver que la puissance $n^{\text{ième}}$ de ce nombre est égale à A. Cette remarque suffit à établir les propositions qui suivent.

Le produit des racines $n^{\text{ièmes}}$ de plusieurs nombres A, B, C, D est égal à la racine $n^{\text{ième}}$ du produit de ces nombres. En d'autres termes, on a

$$(1) \qquad \sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{B} \times \sqrt[n]{C} \times \sqrt[n]{D} = \sqrt[n]{ABCD}.$$

Pour élever à la puissance $n^{\text{ième}}$ le produit $\sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{B} \times \sqrt[n]{C} \times \sqrt[n]{D}$, il suffit, en effet, d'élever à la puissance n chacun de ses facteurs, et l'on obtient ainsi le produit ABCD.

Dans le cas de deux facteurs, le théorème s'exprime par l'égalité

$$\sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{AB}.$$

Un cas particulier intéressant est celui où l'un des nombres A, B, le nombre A, par exemple, est la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre rationnel : supposons $A = a^n$; on aura

$$\sqrt[n]{a^n B} = a \times \sqrt[n]{B};$$

remplacer ainsi $\sqrt[n]{a^n B}$ par $a\sqrt[n]{B}$, c'est ce qu'on appelle faire sortir a du radical, remplacer de même $a\sqrt[n]{B}$ par $\sqrt[n]{a^n B}$ c'est faire entrer a sous le radical. On a, par exemple,

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2},$$
$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^3 \times 3} = 3\sqrt[3]{3}.$$

Un autre cas particulier intéressant est celui où tous les nombres A, B, C, ... qui figurent dans l'égalité (1) sont égaux. On n'a écrit dans cette égalité que quatre facteurs, mais il est clair qu'on aurait pu en écrire autant qu'on aurait voulu, p par exemple. En les supposant tous égaux, l'égalité prendrait la forme

$$(\sqrt[n]{A})^p = \sqrt[n]{A^p}.$$

En d'autres termes, pour élever à la puissance p la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre A, on peut extraire la racine $n^{\text{ième}}$ de la puissance p de ce nombre. Inversement, la racine $n^{\text{ième}}$ de la puissance $p^{\text{ième}}$ d'un nombre est la puissance $p^{\text{ième}}$ de la racine $n^{\text{ième}}$ de ce nombre. On observera que dans le cas où p est égal à n, cette proposition est évidente.

444. La racine $n^{\text{ième}}$ du quotient de deux nombres A, B est égal au quotient des racines $n^{\text{ièmes}}$ de ces nombres ; en d'autres termes, on a

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}.$$

Cette proposition pourrait se déduire de la précédente ; on peut aussi l'établir directement. Pour élever la fraction $\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$ à la puissance $n^{\text{ième}}$, on peut élever ces deux termes à la puissance n, ce qui donne $\frac{A}{B}$: elle est donc bien la racine $n^{\text{ième}}$ de $\frac{A}{B}$. En particulier, on a

$$\sqrt[n]{\frac{1}{B}} = \frac{1}{\sqrt[n]{B}}.$$

445. Étant donnée une fraction $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$ dans laquelle le dénominateur est la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre rationnel b, on peut la remplacer par une fraction égale dont le dénominateur soit b ; il suffit de multiplier les deux termes de la fraction par $(\sqrt[n]{b})^{n-1}$ ou $\sqrt[n]{b^{n-1}}$, on a ainsi

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b} \times (\sqrt[n]{b})^{n-1}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b};$$

par exemple on a

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

il est clair que, pour le calcul numérique, il est plus avantageux de calculer

$\sqrt{2}$ avec une certaine approximation, de diviser ensuite le résultat par 2, que de diviser 1 par la racine carrée de 2 ; on pourrait d'ailleurs aussi bien calculer $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,5}$.

Si l'on applique la transformation précédente à la fraction $\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$ du numéro précédent, on voit qu'on peut l'écrire

$$\frac{\sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{B^{n-1}}}{B} = \frac{\sqrt[n]{A \times B^{n-1}}}{B}.$$

On a par exemple

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2 \times 3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

446. Si l'indice de la racine d'un nombre A est le produit de deux nombres entiers n, p, on peut, pour extraire cette racine, extraire la racine $n^{\text{ième}}$ de A, puis la racine $p^{\text{ième}}$ du résultat : en d'autres termes, on a

$$\sqrt[np]{A} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{A}}.$$

Il suffit de remarquer qu'en élevant le second nombre à la puissance np ou, ce qui revient au même, d'abord à la puissance p, puis à la puissance n, on trouve A. On observera qu'on aurait pu aussi bien écrire

$$\sqrt[np]{A} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{A}}.$$

D'après cela, on peut se borner, pour le calcul des racines, au cas où l'indice est premier. On a, par exemple :

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt{\sqrt{3}}, \quad \sqrt[6]{5} = \sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt{\sqrt[3]{5}}.$$

Il est à peine utile de dire que, réciproquement, pour extraire la racine $n^{\text{ième}}$ de la racine $p^{\text{ième}}$ d'un nombre, on peut, si l'on veut, extraire la racine $(np)^{\text{ième}}$ de ce nombre.

447. On ne change pas la valeur d'une racine en multipliant l'indice de cette racine par un nombre entier et en élevant en même temps la quantité sous le radical à une puissance dont l'exposant soit ce même nombre entier. En d'autres termes, on a

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[np]{A^p};$$

le second nombre, en effet, est égal à $\sqrt[n]{\sqrt[p]{A^p}}$ ou à $\sqrt[n]{A}$. Par exemple, on a

$$\sqrt{7} = \sqrt[6]{7^3}.$$

Inversement, quand on a à extraire la racine d'un nombre élevé à une certaine puissance, si l'indice de la racine et l'exposant sont divisibles par un même facteur, on peut supprimer ce facteur.

Ce théorème ne diffère pas du précédent.

On a, par exemple :

$$\sqrt[10]{2^{10}\times 3^5}=\sqrt[2.5]{(2^2\times 3)^5}=\sqrt{2^2\times 3}=2\sqrt{3}.$$

448. Les propositions précédentes permettent, étant données plusieurs racines, avec des indices différents, de les ramener à avoir toutes le même indice.

Soient, par exemple, les racines

$$\sqrt[a]{A},\ \sqrt[b]{B},\ \sqrt[c]{C},$$

a, b, c désignant des nombres entiers ; soit m le plus petit multiple commun de a, b, c et soient a', b', c' les quotients respectifs de m par a, b, c ; on multipliera les indices a, b, c respectivement par a', b', c', et l'on élèvera en même temps A, B, C aux puissances a', b', c' ; les racines précédentes seront remplacées par

$$\sqrt[m]{A^{a'}},\ \sqrt[m]{B^{b'}},\ \sqrt[m]{C^{c'}}$$

qui leur sont respectivement égales et qui ont même indice.

449. Cette proposition permet d'utiliser les règles des nos 443, 444 pour effectuer des produits ou des quotients de radicaux.

Soient, par exemple, les quantités

$$\sqrt{2},\quad \sqrt[3]{2^2\times 5},\quad \sqrt[6]{2\times 5^2};$$

6 est le plus petit commun multiple des indices 2, 3, 6 ; on aura, en appliquant les règles précédentes,

$$\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3},\quad \sqrt[3]{2^2\times 5}=\sqrt[6]{2^4\times 5^2},$$

$$\sqrt{2}\times\sqrt{2^2\times 5}\times\sqrt[6]{2\times 5^2}=\sqrt[6]{2^3\times 2^4\times 5^2\times 2\times 5^2}=\sqrt[6]{2^8\times 5^4}=\sqrt[3]{2^4\times 5^2}.$$

De même,

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{3^2}}=\sqrt[6]{\frac{2^3}{3^2}}.$$

§ 5. — Exposants fractionnaires.

450. Le lecteur n'a pas manqué de remarquer que les dernières propositions établies ont leurs analogues dans la théorie des fractions. Cette analogie deviendra frappante si l'on adopte la notation des *exposants fractionnaires*.

Avant d'expliquer cette notation, je ferai d'abord les remarques suivantes.

On n'a pas parlé, dans ce qui précède, de racine dont l'indice serait égal à un; mais rien n'empêche de considérer une telle racine, pourvu que l'on convienne de regarder sa valeur comme étant égale à celle du nombre sur lequel elle porte; on aurait ainsi

$$\sqrt[1]{A} = A.$$

Cette convention est bien conforme à la définition générale des radicaux, puisque, en élevant un nombre à la puissance 1, on reproduit ce nombre (n° 23). Dès lors, puisque, dans la démonstration des théorèmes du paragraphe précédent, on s'est appuyé uniquement sur cette définition, il est clair que tous ces théorèmes subsisteront, lors même qu'on y fera figurer des racines d'indice égal à un.

451. En désignant par A un nombre quelconque et par p, q deux nombres entiers différents de zéro, on représente $\sqrt[q]{A^p}$ par le symbole

$$A^{\frac{p}{q}}$$

que l'on énonce A puissance $\frac{p}{q}$: $\frac{p}{q}$ est un exposant *fractionnaire*.

Dans le cas ou p est égal à un, comme A^1 est la même chose que A, on aura par la définition précédente

$$A^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{A}.$$

Dans le cas où q est égal à 1, le symbole $A^{\frac{p}{1}}$ représente la même chose que A^p. Cette convention est conforme à ce qu'on a dit dans le précédent numéro.

Cette notation ne présente aucune difficulté si l'on veut bien se reporter au n° 179 où l'on a dit qu'une fraction devait être regardée comme l'ensemble de deux nombres entiers qui jouent un rôle différent.

Elle est justifiée par ce fait que si les deux fractions $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ sont égales, on a

$$A^{\frac{p}{q}} = A^{\frac{p'}{q'}};$$

Si en effet les deux fractions $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ sont égales, on a $pq' = p'q$ et, par suite,

$$A^{pq'} = A^{p'q};$$

extrayons les racines d'indice qq' des deux membres, on aura

$$\sqrt[qq']{A^{pq'}} = \sqrt[qq']{A^{p'q}};$$

or, en divisant les indices et les exposants par q' dans le premier membre, par q dans le second, on a

$$\sqrt[q]{A^{p}} = \sqrt[q']{A^{p'}},$$

ou, en remontant à la définition des exposants fractionnaires,

$$A^{\frac{p}{q}} = A^{\frac{p'}{q'}}.$$

Il est à peine utile de faire remarquer que, par cette proposition, la simplification de la racine $q^{\text{ième}}$ d'un nombre élevé à une certaine puissance p revient à la simplification d'une fraction, et que la réduction au même indice de plusieurs racines revient à la réduction de plusieurs fractions au même dénominateur.

Mais il y a plus : les règles établies pour le calcul des exposants entiers s'appliquent aux exposants fractionnaires.

452. Pour faire le produit de deux puissances fractionnaires d'un même nombre, il suffit d'élever ce nombre à une puissance dont l'exposant soit une fraction égale à la somme des deux exposants primitifs.

En d'autres termes, on a, en désignant par p, q, p', q' des nombres entiers, différents de zéro,

$$A^{\frac{p}{q}} \times A^{\frac{p'}{q'}} = A^{\frac{pq'+p'q}{qq'}}.$$

On a en effet

$$A^{\frac{p}{q}} = A^{\frac{pq'}{qq'}} = \sqrt[qq']{A^{pq'}},$$

$$A^{\frac{p'}{q'}} = A^{\frac{p'q}{q'q}} = \sqrt[qq']{A^{p'q}},$$

et, par suite,

$$A^{\frac{p}{q}} \times A^{\frac{p'}{q'}} = \sqrt[qq']{A^{pq'}} \times \sqrt[qq']{A^{p'q}};$$

mais, en appliquant le théorème du n° 443, on voit que le second membre est égal à la racine $(qq')^{\text{ième}}$ du produit $A^{pq'} \times A^{p'q}$, qui est lui-même égal à $A^{pq'+p'q}$, puisque les nombres pq' et $p'q$ sont entiers. D'ailleurs on a, en vertu de la définition,

$$\sqrt[qq']{A^{pq'+p'q}} = A^{\frac{pq'+p'q}{qq'}}.$$

La proposition est donc démontrée. On écrit souvent l'égalité qui l'exprime sous la forme

$$A^{\frac{p}{q}} \times A^{\frac{p'}{q'}} = A^{\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}};$$

mais il convient de remarquer que le second membre n'a pas de sens par lui-même ; il est sous-entendu qu'on doit remplacer la somme $\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}$ par sa définition (n° 186), c'est-à-dire par une fraction à termes entiers, égale à cette somme, mais cette notation est commode pour permettre l'extension du théorème considéré au cas de trois, quatre, ... facteurs. Ainsi, de l'égalité précédente on déduit

$$A^{\frac{p}{q}} \times A^{\frac{p'}{q'}} \times A^{\frac{p''}{q''}} = A^{\left(\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}\right)+\frac{p''}{q''}}.$$

Voici quel sens il faut attribuer au second membre : la somme $\left(\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}\right)$ ayant été remplacée par une fraction à termes entiers, on lui ajoute la fraction $\frac{p''}{q''}$, et l'on obtient ainsi, sous forme d'une fraction à termes entiers, l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever A ; mais il est clair que cet exposant peut être aussi bien obtenu en calculant comme on voudra la fraction à termes entiers qui est égale à la somme des trois fractions $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$.

453. Pour élever à la puissance $\frac{p'}{q'}$ un nombre A élevé déjà à une puissance entière ou fractionnaire $\frac{p}{q}$, il suffit de multiplier par $\frac{p'}{q'}$ l'exposant de A ; en d'autres termes, on a

$$\left(A^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p'}{q'}} = A^{\frac{pp'}{qq'}}.$$

On a, en effet, d'après les définitions,

$$A^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{A^p},$$

$$\left(A^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p'}{q'}} = \sqrt[q']{\left(\sqrt[q]{A^p}\right)^{p'}};$$

mais on a de même

$$\left(\sqrt[q]{A^p}\right)^{p'} = \sqrt[q]{A^{pp'}},$$

et la racine $q'^{\text{ième}}$ de cette quantité est égale à $\sqrt[qq']{A^{pp'}}$, ou, en vertu de la définition des exposants fractionnaires, à $A^{\frac{pp'}{qq'}}$: la proposition est donc démontrée.

454. Si, en désignant par p, q, p', q' des nombres entiers, on a

$$\frac{p}{q} > \frac{p'}{q'},$$

on aura, en désignant par A un nombre quelconque, autre que zéro,

$$\frac{A^{\frac{p}{q}}}{A^{\frac{p'}{q'}}} = A^{\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'}},$$

en entendant que, dans le second membre, la différence $\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'}$ soit remplacée par une fraction à termes entiers qui lui soit égale, par exemple par $\frac{pq' - p'q}{qq'}$.

La démonstration est toujours la même ; on a

$$\frac{A^{\frac{p}{q}}}{A^{\frac{p'}{q'}}} = \frac{A^{\frac{pq'}{qq'}}}{A^{\frac{p'q}{qq'}}} = \frac{\sqrt[qq']{A^{pq'}}}{\sqrt[qq']{A^{p'q}}} = \sqrt[qq']{\frac{A^{pq'}}{A^{p'q}}} = \sqrt[qq']{A^{pq'-p'q}} = A^{\frac{pq'-p'q}{qq'}}.$$

455. La notion de différence s'applique encore quand les deux nombres à retrancher sont égaux : si l'on voulait, dans le cas de deux exposants égaux $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, appliquer la même règle, on serait amené à écrire

$$\frac{A^{\frac{p}{q}}}{A^{\frac{p}{q}}} = A^0$$

et cette égalité qui n'a, non plus que son second membre, aucun sens, en acquiert un et devient vraie si l'on convient de représenter par le symbole A^0 le nombre 1. Cette convention est aussi utile, et il convient d'observer, puisqu'on ne change pas un nombre en le multipliant ou en le divisant par un, que, si on l'adopte, les égalités

$$A^a \times A^b = A^{a+b}, \qquad \frac{A^a}{A^b} = A^{a-b}$$

sont vraies quel que soit le nombre A, supposé seulement différent de zéro, et quels que soient les nombres *rationnels* a, b, même si l'un ou l'autre est nul, ou s'ils sont égaux, pourvu toutefois que dans la seconde égalité a soit au moins égal à b.

456. Le nombre A^B ayant été ainsi défini pour toute valeur rationnelle, même nulle, du nombre B, il est naturel de chercher à le définir pour une valeur irrationnelle de B. Sans développer ce sujet, qui sortirait du cadre de cet Ouvrage, je me contenterai de dire que le nombre A^B se définit alors, si A est plus grand que un, comme étant plus grand que tous les nombres A^b obtenus en élevant A à une puissance rationnelle b plus petite que B, et plus petit que tous les nombres $A^{b'}$ obtenus en élevant A à une puissance rationnelle b' plus grande que B. C'est l'inverse quand A est plus petit que un. Les règles du calcul des exposants entiers s'étendent encore aux exposants irrationnels.

§ 6. — Ensembles.

457. Considérons l'ensemble des nombres distincts qui satisfont à une condition déterminée; ils peuvent être en nombre fini ou infini. L'ensemble des diviseurs entiers d'un nombre entier donné ne comprend qu'un nombre fini de termes; l'ensemble des multiples entiers d'un nombre donné en comprend un nombre infini ; de même l'ensemble des nombres premiers, l'ensemble des valeurs distinctes approchées de $\sqrt{2}$, par défaut, à 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; ... près, l'ensemble des nombres rationnels compris entre deux nombres donnés.

En général, on dira qu'un ensemble de nombres ou, plus brièvement, un *ensemble* est déterminé, lorsqu'on peut décider d'un nombre quelconque s'il appartient ou non à cet ensemble. Tel est le cas des ensembles qui viennent d'être énumérés : étant donné, par exemple, un nombre quelconque, on a le moyen de reconnaître si ce nombre est premier ou non : les nombres premiers forment un ensemble déterminé ; on a le moyen de reconnaître si un nombre est ou n'est pas une valeur approchée de $\sqrt{2}$, par défaut, à $\frac{1}{10^n}$ près, n étant un entier quelconque : ces valeurs approchées forment un ensemble.

458. Considérons un ensemble quelconque de nombres : de deux choses l'une, ou il existe un certain nombre supérieur à tous les nombres qui appartiennent à l'ensemble, et je dirai dans ce cas que l'ensemble est *limité*; ou il n'existe pas de pareil nombre, c'est-à-dire que si l'on nomme un nombre quelconque A, on peut affirmer qu'il existe des nombres appartenant à l'ensemble considéré qui sont supérieurs à A, auquel cas je dirai que l'ensemble est *illimité*. Lorsqu'un ensemble est composé d'un nombre fini de termes, il est certainement limité. Il peut toutefois être limité lors même qu'il comprend un nombre infini de termes : tels sont, par exemple, l'ensemble des nombres plus petits que 2, l'ensemble des nombres rationnels plus petits que $\sqrt{2}$, l'ensemble des valeurs (différentes) approchées à 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; ... près de $\sqrt{2}$, etc... Au contraire, l'ensemble des nombres entiers, l'ensemble des nombres premiers, l'ensemble des multiples d'un nombre entier donné, l'ensemble des nombres rationnels plus grands que $\sqrt{2}$, etc., sont des ensembles illimités.

459. Quand un ensemble est limité, il existe un nombre M qui jouit des propriétés suivantes : 1° il est supérieur ou égal à tout nombre de l'ensemble ; 2° il n'y a pas de nombre plus petit que M qui soit supérieur ou égal à tout nombre de l'ensemble ; en d'autres termes, si on considère un nombre quelconque M′ plus petit que M, on peut affirmer qu'il y a un nombre de l'ensemble qui est plus grand que M′ [1]. En d'autres termes encore, quelque petit que soit le nombre ε, il y a dans l'ensemble au moins un nombre dont la différence avec M est moindre que ε.

D'après sa définition, le nombre M, s'il existe, est unique : il s'appelle la *limite supérieure* de l'ensemble.

L'existence de la limite supérieure est évidente dans quelques cas. S'il y a parmi les nombres de l'ensemble un nombre M qui soit plus grand que tous les autres nombres de l'ensemble, ce nombre est lui-même la limite supérieure. C'est ce qui arrive nécessairement lorsque l'ensemble ne comprend qu'un nombre fini d'éléments.

Supposons que tous les nombres qui composent l'ensemble soient inférieurs à P et que parmi ces nombres il n'y en ait aucun qui soit supérieur aux autres.

Rangeons les nombres rationnels en deux catégories : dans la première, nous placerons tout nombre rationnel m qui se trouve être inférieur ou égal à un nombre de l'ensemble ; il y aura des nombres m dans cette catégorie, puisqu'on suppose que l'ensemble comporte des nombres autres que zéro ; rangeons dans la seconde catégorie tout nombre rationnel m' qui est plus grand que tout nombre appartenant à l'ensemble : il y a des nombres dans cette catégorie ; tels sont les nombres rationnels plus grands que P. Chaque nombre de la première catégorie est plus petit que chaque nombre de la seconde.

Si A est un nombre quelconque de l'ensemble, il y a, par hypothèse, dans le même ensemble, un nombre $B > A$; tout nombre rationnel compris entre A et B appartient à la première catégorie ; ainsi il y a dans la première catégorie des nombres rationnels supérieurs à A. Il ne peut y avoir dans la première catégorie un nombre plus grand que tous les autres ; car si m est un nombre de cette catégorie, il y a été rangé comme inférieur ou égal à un nombre A de l'ensemble ; mais, puisqu'il y a dans l'ensemble des nombres B plus grands que A, tout nombre rationnel compris entre m et B appartient aussi à la première catégorie.

Dans la seconde catégorie, de deux choses l'une, ou il y a un nombre M plus petit que tous les autres, ou il n'y en a pas. Dans ce second cas, la

1. Si M était nul, il n'y aurait pas de nombre M′ plus petit que M. M ne peut être nul que si l'ensemble était composé d'un terme unique égal à 0. Cette remarque, bien entendu, ne subsiste pas en Algèbre, quand on considère des nombres *négatifs*. Dans la suite, on écartera d'ailleurs ce cas insignifiant.

séparation des nombres rationnels en deux catégories définit un nombre irrationnel, que je désignerai encore par M.

Dans tous les cas M est plus grand que tout nombre de l'ensemble.

En effet, si A est un nombre de cet ensemble, il y a dans la première catégorie un nombre (rationnel) m plus grand que A; ce nombre m est plus petit que M; on a donc $M > A$.

Si M' est un nombre quelconque plus petit que M, il y a des nombres de l'ensemble compris entre M' et M; en effet, si m est un nombre rationnel quelconque compris entre M' et M, m qui est plus petit que M ne peut appartenir à la seconde catégorie, il appartient donc à la première, et il y a des nombres de l'ensemble supérieurs ou égaux à m; un tel nombre est plus petit que M, il est donc compris entre M' et M. On observera que, entre M et M', il y a une infinité de nombres de l'ensemble; si, en effet, on a démontré qu'il y en a p, soit A le plus grand de ces p nombres; A est plus petit que M; il y a donc entre A et M quelque nombre de l'ensemble; entre M' et M il y a donc $p+1$ nombres de l'ensemble, etc. Cette dernière conclusion, toutefois, suppose que l'ensemble considéré ne contienne pas un nombre qui soit plus grand que tous les autres nombres de cet ensemble, que, en d'autres termes, la limite supérieure M de cet ensemble n'appartienne pas à l'ensemble.

460. Si l'on sait que tous les nombres d'un ensemble sont inférieurs ou égaux à P, il est clair que la limite supérieure M de cet ensemble ne pourra être supérieure à P, puisqu'il ne peut pas y avoir de nombre plus petit que M qui soit supérieur ou égal à tout nombre de l'ensemble.

Si, dans un ensemble dont la limite supérieure est M, on supprime certains nombres, M est toujours supérieur ou égal à ceux qui restent; par suite, la limite supérieure de l'ensemble formé par les nombres que l'on n'a pas supprimés est au plus égale à M.

461. Les nombres d'un ensemble quelconque sont nécessairement supérieurs ou égaux à zéro. On démontrera comme tout à l'heure que, pour tout ensemble, il y a un nombre m jouissant des propriétés suivantes : 1° m est égal ou inférieur à tout nombre de l'ensemble; 2° il n'y a pas de nombre plus grand que m qui soit égal ou inférieur à tout nombre de l'ensemble. En d'autres termes, si m' est un nombre quelconque supérieur à m, il y a au moins un nombre de l'ensemble qui est plus petit que m'. Ce nombre m, nécessairement unique, s'appelle *limite inférieure* de l'ensemble[1].

Pour la définir, dans le cas où il n'y aurait pas dans l'ensemble considéré de nombre plus petit que tous les autres, on séparera encore les nombres rationnels en deux catégories, la seconde catégorie comprenant chaque nombre rationnel qui se trouve être supérieur ou égal à quelque

1. Cette proposition devrait être modifiée, si l'on considérait des nombres négatifs, plus petits que zéro. Dans ce cas, pour affirmer l'existence d'une limite inférieure de l'ensemble, il faudrait savoir que les nombres de l'ensemble sont tous supérieurs à un certain nombre positif ou négatif B; en d'autres termes, il faudrait savoir que l'ensemble est limité par en bas.

nombre de l'ensemble; dans cette catégorie il n'y a pas de nombre plus petit que tous les autres; si parmi les nombres rationnels qui n'y rentrent pas il y en a un plus grand que tous les autres, ce sera le nombre m cherché. Si parmi les nombres rationnels qui ne rentrent pas dans la seconde catégorie il n'y a pas de nombre qui soit plus grand que tous les autres, ces nombres rationnels, à eux tous, forment la première catégorie et la séparation de tous les nombres rationnels en deux catégories définit alors un nombre irrationnel qui est la limite inférieure de l'ensemble considéré.

Si tous les nombres de l'ensemble sont supérieurs ou égaux à un nombre p, sa limite inférieure sera aussi supérieure ou égale à p.

Si l'on supprime quelque nombre d'un ensemble dont la limite inférieure est m, la limite inférieure de l'ensemble des nombres restants sera égale ou supérieure à m.

462. Si l'on considère un ensemble dont les limites supérieure et inférieure sont M et m, tout nombre de l'ensemble sera ou égal à l'un des nombres M, m ou compris entre ces nombres : la différence entre deux nombres quelconques de l'ensemble est donc égale ou inférieure à $M - m$.

D'ailleurs, puisqu'on peut trouver dans l'ensemble des nombres qui diffèrent de M et de m aussi peu qu'on le veut, on pourra former des différences entre deux nombres pris dans l'ensemble qui diffèrent aussi peu qu'on le voudra de $M - m$; donc $M - m$ est la limite supérieure de l'ensemble des nombres distincts que l'on peut former en retranchant un nombre de l'ensemble d'un autre nombre de l'ensemble.

§ 7. — Limites.

463. Rappelons et complétons la définition du n° 238.

Soit

$$a_1, a_2, \dots a_n, \dots$$

une suite infinie donnée de nombres rationnels ou irrationnels : en disant que cette suite est infinie, nous entendons seulement que chacun de ses termes est suivi d'un autre; en disant qu'elle est donnée, nous entendons qu'on se donne un moyen de calculer un terme quelconque connaissant son rang : si ce terme était irrationnel, cela voudrait dire qu'on se donne la loi de séparation des nombres rationnels en deux catégories qui le définit.

On dit que cette suite a une limite, ou mieux que a_n a une limite quand n grandit indéfiniment, ou pour n infini, s'il existe un nombre A jouissant de la propriété suivante : quelque petit que soit le nombre ε, autre que zéro, on peut lui faire correspondre un nombre entier p tel que tous les termes de la suite qui suivent le $p^{\text{ième}}$ aient avec A une différence moindre que ε. A est alors la limite de la suite (ou la limite de a_n, pour n infini).

464. Considérons, par exemple, un nombre irrationnel A et la suite de ses valeurs approchées à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, ..., $\frac{1}{10^n}$, ... près, par défaut, $a_1, a_2, \ldots,$ $a_n, \ldots$. La différence $A - a_n$ est inférieure à $\frac{1}{10^n}$; quel que soit le nombre ε autre que zéro, on peut évidemment trouver un nombre entier p, tel que l'on ait $\frac{1}{10^p} < \varepsilon$, et il est clair que l'on aura $A - a_n < \varepsilon$, pourvu que l'on suppose n supérieur (ou égal) à p. A est donc la limite de la suite précédente.

Ainsi un nombre irrationnel quelconque est la limite, quand n grandit indéfiniment, du nombre que l'on déduit de sa représentation décimale en conservant n chiffres décimaux.

On voit aussi bien que le nombre irrationnel A est la limite de la suite

$$a_1 + \frac{1}{10}, \quad a_2 + \frac{1}{100}, \quad \ldots, \quad a_n + \frac{1}{10^n}, \quad \ldots$$

formée par les valeurs approchées à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, ..., $\frac{1}{10^n}$, ..., près, par excès.

465. Les remarques suivantes sont évidentes.

Soit une suite infinie

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

qui admette la limite A. Il en sera de même de la suite que l'on en déduit en supprimant tels termes que l'on veut, au commencement, par exemple les p premiers. Quand on n'a affaire qu'à la limite de la suite, les premiers termes n'importent pas; ce qui importe, c'est la façon dont les termes se comportent quand n croît indéfiniment.

Si A n'est pas nul et si on se donne un nombre quelconque α, autre que zéro, on peut trouver un rang p, à partir duquel tous les termes de la suite soient compris entre $A - \alpha$ et $A + \alpha$; il suffit de déterminer p de façon que la différence entre A et a_n soit moindre que α; si n est plus grand que p, a_n sera compris entre $A - \alpha$ et $A + \alpha$. On peut observer qu'il existe certainement un nombre plus grand que tous les termes de la suite; tel sera par exemple n'importe quel nombre plus grand que les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_p, A + \alpha$. On observera aussi que, à partir d'un certain rang, il n'y a plus, dans la suite, de terme qui soit nul.

Quand A est nul, si on se donne un nombre quelconque α, différent de zéro, on peut affirmer que, à partir d'un certain rang, tous les termes sont plus petits que α.

Quand on sait que, dans une ou plusieurs suites, certaines conditions se trouvent séparément vérifiées à partir d'un certain rang pour chacune des suites, on peut affirmer que, à partir d'un certain rang, *le même pour toutes les suites*, ces conditions se trouvent vérifiées simultanément. Il suffit pour cela de déterminer le plus grand des rangs à partir duquel chacune des conditions se trouve simultanément vérifiée.

Si, par exemple, les deux suites

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$
$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

ont pour limites respectives des nombres A, B, différents de zéro, et si on se donne un nombre α, différent de zéro, on peut affirmer l'existence d'un entier p, tel que chacun des termes de la première suite se trouve, lorsque son rang est supérieur à p, compris entre $A - \alpha$ et $A + \alpha$, et que, *en même temps*, chacun des termes de la seconde suite se trouve compris entre $B - \alpha$ et $B + \alpha$.

466. Lorsqu'on se donne une suite infinie de nombres

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

admettant une limite A, chaque terme constitue en quelque sorte une valeur approchée de A; l'*erreur* que l'on commet en remplaçant la limite A par un terme de cette suite, a_n par exemple, est la différence ε_n entre A et a_n; cette erreur a elle-même pour limite zéro quand n augmente indéfiniment.

Si plusieurs nombres sont donnés ainsi par des suites infinies, si l'on a à faire, sur ces nombres, des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division, et si l'on remplace dans ces opérations les nombres vrais (les limites) par des valeurs approchées (les termes des suites), on aura des valeurs approchées des résultats, avec des erreurs moindres que des nombres qu'on a appris à déterminer au chapitre VIII. On reconnaît sans peine que ces erreurs peuvent être supposées aussi petites qu'on le veut en prenant des termes suffisamment éloignés dans les suites, et par conséquent assez rapprochés de leurs limites; cette remarque conduit aux théorèmes suivants :

Supposons que a_n et b_n aient respectivement pour limites A et B, quand n augmente indéfiniment, la somme $a_n + b_n$ aura pour limite $a + b$; le produit $a_n b_n$ aura pour limite AB; si l'on a (1), quel que soit n, $a_n \geqq b_n$, la différence $a_n - b_n$ aura pour limite $A - B$; enfin, pourvu que B soit différent de 0, la fraction $\frac{a_n}{b_n}$ aura pour limite $\frac{A}{B}$.

Je me contenterai de démontrer la dernière proposition, qui demande quelques précautions de plus que les autres.

Si B n'est pas nul, on finira par ne plus rencontrer dans la suite $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ que des termes qui ne sont pas nuls; on ne considérera les termes $\frac{a_n}{b_n}$ qu'à partir d'un rang tel que cette condition se trouve toujours vérifiée.

1. Cette restriction devient inutile quand on a introduit les nombres négatifs.

Supposons d'abord que A soit nul ; il faut prouver que $\frac{a_n}{b_n}$ a zéro pour limite quand n augmente indéfiniment. Si l'on se donne un nombre quelconque α autre que zéro et un nombre quelconque B′ autre que zéro et plus petit que B, les termes de la suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ finissant par être plus petits que α, ceux de la suite $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ finissant par être plus grands que B′, on pourra donc déterminer un entier p tel que l'on ait

$$\frac{a_n}{b_n} < \frac{\alpha}{B'},$$

pourvu qu'on ait $n > p$; il suffira donc, si l'on se donne un nombre quelconque ε, autre que zéro, d'avoir pris $\frac{\alpha}{B'} < \varepsilon$, ou $\alpha < \varepsilon B'$, pour être assuré que l'on a

$$\frac{a_n}{b_n} < \varepsilon,$$

sous la seule condition $n > p$; il est donc prouvé que $\frac{a_n}{b_n}$, quand n augmente indéfiniment, a pour limite zéro, ou $\frac{A}{B}$.

Supposons maintenant que A ne soit pas nul. Choisissons arbitrairement un nombre B′ autre que zéro et plus petit que B; si l'on se donne un nombre α, différent de zéro et plus petit que $B - B'$, on peut lui faire correspondre un entier p tel que tous les termes de la première suite soient compris entre $A - \alpha$ et $A + \alpha$, et tous les termes de la seconde suite entre $B - \alpha$ et $B + \alpha$, pourvu que l'on ne considère que des termes de rang supérieur à p; sous cette condition, les nombres $\frac{A}{B}$, $\frac{a_n}{b_n}$ sont l'un et l'autre compris entre $\frac{A-\alpha}{B+\alpha}$ et $\frac{A+\alpha}{B-\alpha}$; leur différence mutuelle est donc moindre que la plus grande des deux différences

$$\frac{A}{B} - \frac{A-\alpha}{B+\alpha} = \frac{(A+B)\alpha}{B(B+\alpha)},$$
$$\frac{A+\alpha}{B-\alpha} - \frac{A}{B} = \frac{(A+B)\alpha}{B(B-\alpha)},$$

et moindre, *a fortiori*, que

$$\frac{(A+B)\alpha}{B'^2},$$

puisque l'on a $B' < B - \alpha$; or, si on se donne un nombre quelconque ε, différent de zéro, il suffit d'avoir choisi d'avance α tel que l'on ait

$$\frac{(A+B)\alpha}{B'^2} < \varepsilon,$$

c'est-à-dire α moindre que $\frac{B'^2\varepsilon}{A+B'}$, pour être sûr que la différence entre $\frac{A}{B}$ et $\frac{a_n}{b_n}$ sera moindre que ε dès que n sera supérieur à p. Par suite, $\frac{a_n}{b_n}$ a pour limite $\frac{A}{B}$ quand n augmente indéfiniment.

Il est très important, étant donnée une suite infinie (c'est-à-dire comprenant un nombre infini de termes rangés dans un ordre déterminé), de savoir reconnaître si cette suite a, ou non, une limite. On a à sa disposition, pour cela, deux théorèmes, énoncés aux nos 467 et 471.

467. Si les termes de la suite infinie

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

ne vont jamais en diminuant lorsque l'on s'avance dans la suite et s'ils sont tous inférieurs à un nombre fixe P, la suite a une limite qui ne peut dépasser P, et qui est au moins égale à n'importe quel terme de la suite.

Considérons en effet l'ensemble des nombres distincts qui entrent dans cette suite. Cet ensemble est limité, puisque tous les nombres qui le composent sont plus petits que P. Il a donc une limite supérieure A qui ne peut être plus grande que P, qui est supérieure ou égale à n'importe quel nombre de la suite. Si l'on se donne un nombre quelconque ε autre que zéro, il y a dans l'ensemble, ou dans la suite, au moins un nombre qui diffère de A d'une quantité moindre que ε. Soit a_p ce nombre, les termes de la suite qui suivent a_p sont supérieurs ou égaux à a_p, inférieurs ou égaux à A; leur différence avec A est donc moindre que $A - a_p$, et, *a fortiori*, que ε. La suite a donc A pour limite (n° 463). Observons que si le nombre A était égal à un terme de la suite, à a_p, par exemple, tous les termes de la suite qui suivent a_p seraient nécessairement égaux à A.

468. Imaginons, par exemple, un symbole écrit comme un nombre décimal qui aurait un nombre infini de chiffres décimaux, et considérons la suite dont les termes successifs

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

seraient obtenus en conservant seulement 1, 2, ..., n, ... chiffres décimaux; ces nombres, à mesure qu'on s'avance dans la suite, ne vont jamais en diminuant; chacun d'eux est d'ailleurs inférieur à l'un quelconque des termes de la suite

$$a_1 + \frac{1}{10},\ a_2 + \frac{1}{100},\ \ldots,\ a_n + \frac{1}{10^n}, \ldots,$$

ainsi qu'il résulte immédiatement de la règle (n° 223) pour reconnaître quel est le plus grand de deux nombres décimaux donnés.

La première suite a donc une limite A supérieure ou égale à n'importe lequel de ses termes, inférieure ou égale à n'importe quel terme de la seconde suite. A ne peut être égal à un terme a_n de la première suite que si tous les termes suivants sont égaux à a_n, c'est-à-dire si tous les chiffres qui, dans le symbole décimal, suivent le $n^{\text{ième}}$ sont des zéros. Dans la seconde suite, le raisonnement développé au n° 236 montre que, lorsqu'on s'avance vers la droite, les termes ne vont jamais en augmentant; il en résulte que si A est égal à l'un d'eux, à $a_n + \frac{1}{10^n}$, par exemple, tous les termes suivants sont aussi égaux à A et à $a_n + \frac{1}{10^n}$; or, pour que l'on ait

$$a_n + \frac{1}{10^n} = a_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}},$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{9}{10^{n+1}},$$

mais la différence $a_{n+1} - a_n$ est égale au dernier chiffre de a_{n+1} divisé par 10^{n+1}; l'égalité précédente ne peut donc avoir lieu que si le dernier chiffre de a_{n+1} est un 9; le raisonnement se continue et l'on voit que A ne peut être égal à $a_n + \frac{1}{10^n}$ que si, dans le symbole décimal, tous les chiffres qui suivent le $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal sont des 9. Si l'on exclut ce cas, on voit que l'on aura, quel que soit n,

$$a_n \leqq A < a_n + \frac{1}{10^n};$$

par suite, a_n et $a_n + \frac{1}{10^n}$ seront les valeurs approchées de A par défaut et par excès à $\frac{1}{10^n}$ près; en sorte que le symbole décimal qu'on a imaginé est la représentation décimale du nombre A, qui, par suite (n° 464), ne peut être rationnel que si cette représentation décimale est une fraction décimale périodique.

Il est à peine utile d'ajouter que, dans tous les cas, le nombre A est aussi la limite de la seconde suite

$$a_1 + \frac{1}{10},\ a_2 + \frac{1}{100}, \ldots, a_n + \frac{1}{10^n}, \ldots.$$

469. Au théorème du n° 467 il convient d'ajouter un théorème analogue et dont la démonstration est toute pareille :

Une suite infinie

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

admet une limite si, en s'avançant dans la suite, les termes ne vont jamais en augmentant (1). Cette limite est au plus égale à l'un quelconque des termes de cette suite. C'est la limite inférieure de l'ensemble formé par tous les nombres distincts de la suite.

470. Il arrive fréquemment que l'on a à considérer deux suites infinies

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$
$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

jouissant des propriétés suivantes :

Quand on s'avance à droite, les termes ne vont jamais en diminuant dans la première suite; les termes ne vont jamais en augmentant dans la seconde suite; chaque terme de la première suite est plus petit que chaque terme de la seconde suite. Enfin la différence $b_n - a_n$ de deux termes de même rang a pour limite 0 quand n augmente indéfiniment.

S'il en est ainsi, il est clair que la première suite a une limite A, et la seconde une limite B; d'ailleurs on a

$$a_n \leqq A \leqq b_n, \quad a_n \leqq B \leqq b_n,$$

la différence entre A et B est donc au plus égale à $b_n - a_n$, et comme, en prenant n assez grand cette différence peut être rendue plus petite que tel nombre qu'on voudra, il est clair qu'on a $A = B$. Les deux suites ont une même limite.

On a rencontré un exemple dans le numéro précédent.

471. Pour qu'une suite infinie

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

ait une limite, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée : à chaque nombre ε, aussi petit qu'on le veut, mais différent de zéro, on peut faire correspondre un nombre entier p, tel que la différence entre deux termes quelconques de la suite, de rang supérieur à p, soit moindre que ε (2).

1° La condition est nécessaire. Supposons, en effet, que la suite ait une limite A. Si l'on se donne un nombre quelconque ε, autre que zéro, on pourra lui faire correspondre un entier p, tel que la différence entre A et a_n soit moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$, pourvu que l'on ait $n > p$; si donc on suppose à la fois $n > p$, $m > p$, les nombres a_n et a_m auront avec A une différence moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$; leur différence mutuelle sera sûrement

1. Si l'on considérait des nombres négatifs, il faudrait ajouter : et restent toujours supérieurs à un nombre donné.

2. Ce théorème est dû à *Cauchy*.

moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$ s'ils sont tous deux moindres que A, ou plus grands que A; si l'un était plus grand que A, l'autre plus petit, leur différence mutuelle serait certainement moindre que ε. La proposition est démontrée.

2° La condition est suffisante. Supposons en effet qu'elle soit vérifiée; tous les termes de la suite qui suivent le $p^{\text{ième}}$ sont compris entre $a_p - \varepsilon$ et $a_p + \varepsilon$; il est clair que tous les nombres de la suite sont inférieurs ou égaux au plus grand des nombres

$$a_1, a_2, .., a_{p-1}, a_p + \varepsilon :$$

par suite, l'ensemble fourni par les nombres distincts de la suite considérée est limité (1). Désignons en général par A_n et B_n les limites supérieure et inférieure de l'ensemble formé par les nombres distincts de la suite

$$a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots;$$

il est clair, d'après les remarques faites aux n$^{\text{os}}$ 460, 461, que l'on a, quel que soit l'entier n :

$$A_n \geqq A_{n+1}, \quad A_n \geqq B_n, \quad B_{n+1} \geqq B_n;$$

on a donc, en supposant $m > n$,

$$A_n \geqq A_m \geqq B_m$$

et l'inégalité $A_n \geqq B_m$ subsiste d'ailleurs quels que soient les nombres entiers n et m, puisque, si l'on remplace m par un nombre plus petit, B_m ne peut que diminuer. Si donc on considère les deux suites

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots,$$
$$B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots,$$

les termes de la première ne vont jamais en augmentant, les termes de la seconde ne vont jamais en diminuant; d'ailleurs un terme quelconque de la première est supérieur ou égal à n'importe quel terme de la seconde. Chacune des suites a une limite, et si nous désignons ces limites par A, B nous aurons, quel que soit n :

$$A_n \geqq A \geqq B_n, \quad A_n \geqq B \geqq B_n.$$

On observera en passant que les conséquences qui précèdent subsisteraient pourvu que les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ formassent un ensemble limité, et il serait aisé de montrer encore que, dans ces conditions, on a $A > B$.

1. On prouverait de même, si l'on considérait des nombres négatifs, qu'il est limité *par en bas*.

Quoi qu'il en soit, $A_n - B_n$ est la limite supérieure de l'ensemble des nombres distincts que l'on peut obtenir en retranchant l'un de l'autre deux des nombres $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ (n° 462). Si donc toutes ces différences sont inférieures à ε, on aura $A_n - B_n \leqq \varepsilon$, et cette inégalité subsiste si l'on remplace n par un nombre plus grand, ce qui ne peut que diminuer la différence $A_n - B_n$. Si donc on donne un nombre ε aussi petit qu'on le veut, mais différent de zéro, on pourra lui faire correspondre un nombre entier p, tel que l'on ait, pourvu que n soit supérieur à p :

$$A_n - B_n \leqq \varepsilon;$$

les deux suites

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots,$$
$$B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$$

sont donc dans le cas du n° 470; leurs limites respectives A, B sont donc égales; d'ailleurs, des inégalités

$$A_n \geqq A \geqq B_n, \qquad A_n \geqq a_n \geqq B_n$$

on conclut que la différence entre A et a_n est moindre que $A_n - B_n$, par suite moindre que ε, pourvu que n soit plus grand que p; a_n a donc A pour limite quand n augmente indéfiniment.

472. Enfin, on prend encore le mot *limite* dans un sens différent de ceux qui précèdent, sens qu'il me reste à expliquer.

Considérons un ensemble déterminé quelconque, comprenant un nombre infini de termes. On appelle *valeur limite* de cet ensemble tout nombre A tel que, quelque petit que soit le nombre ε, différent de zéro, on puisse affirmer qu'il y a un nombre infini de termes de l'ensemble dont la différence avec A soit moindre que ε.

Supposons que l'ensemble que l'on considère soit limité et que M et m soient ses limites supérieure et inférieure; on a démontré au n° 460 que si M n'était pas un terme de l'ensemble, M était une valeur limite de cet ensemble, au sens qui vient d'être donné à ce mot; de même m, si ce nombre n'appartient pas à cet ensemble.

De même, si l'on considère une suite

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

qui admette une limite A et dont tous les termes ne soient pas, à partir d'un certain rang, égaux à A, elle comprendra nécessairement un nombre infini de termes distincts, et l'ensemble formé par ces termes distincts aura A pour valeur limite.

La notion de valeur limite d'un ensemble conduit à la proposition suivante :

Si un ensemble (E) est limité et si M et m sont respectivement la limite inférieure de cet ensemble, cet ensemble admet au moins une valeur limite qui est ou M, ou m, ou un nombre intermédiaire.

Si m se trouve être une valeur limite de l'ensemble, il n'y a pas lieu à démonstration. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi : alors il existera des nombres a plus grands que m et tels qu'il n'y ait qu'un nombre fini de termes de l'ensemble entre m et a; en effet, nier l'existence d'un nombre a, c'est affirmer qu'il y a une infinité de termes de l'ensemble entre m et n'importe quel nombre plus grand que m, c'est dire que m est une valeur limite de l'ensemble.

Considérons maintenant l'ensemble (A) des nombres a supérieurs à m, tels que, entre m et chacun d'eux, il n'y ait qu'un nombre fini de termes de l'ensemble (E). L'ensemble (A) est limité, puisque entre m et M il y a une infinité de termes de (E) et que, ainsi, tout terme de (A) est forcément inférieur à M. Désignons par A′ la limite supérieure de l'ensemble (A); on aura certainement

$$m < A' \leqq M.$$

Je dis que A′ est une valeur limite de l'ensemble (E). Soit en effet ε un nombre aussi petit qu'on le voudra, différent de zéro, je dis que entre $A' - \varepsilon$ et $A' + \varepsilon$ il y a une infinité de nombres appartenant à l'ensemble (E). En effet, d'une part, entre m et $A' - \varepsilon$, il n'y a qu'un nombre fini de termes de l'ensemble (E), car il y a certainement un nombre de l'ensemble (A) qui est plus grand que $A' - \varepsilon$; entre ce nombre-là et m, il n'y a qu'un nombre fini de termes de l'ensemble (E). Si donc, d'autre part, entre $A' - \varepsilon$ et $A' + \varepsilon$, il n'y avait qu'un nombre fini de termes de l'ensemble (E), il n'y en aurait aussi qu'un nombre fini entre m et $A' + \varepsilon$, en sorte que $A' + \varepsilon$ appartiendrait aussi à l'ensemble (A). La proposition est donc démontrée [1].

Exercices.

284. Si A est un nombre irrationnel, en lui ajoutant, en lui retranchant un nombre rationnel, en le multipliant par un nombre rationnel autre que zéro, en le divisant par un nombre rationnel, on obtient toujours un nombre irrationnel.

285. Si x est un nombre irrationnel et si a, b, a', b' sont des nombres rationnels, le nombre

$$\frac{ax + b}{a'x + b'}$$

est irrationnel, à moins que l'on n'ait $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$.

286. En désignant par π et e des nombres irrationnels dont les représentations décimales sont

$$\pi = 3{,}14159265\ldots., \qquad e = 2{,}71828182\ldots.,$$

1. Elle est due à *Bolzano*, géomètre du commencement de ce siècle; elle joue un rôle essentiel dans la théorie des ensembles, théorie que l'on doit à M. G. Cantor.

on demande de calculer avec trois décimales exactes les nombres $\frac{1}{\pi}$, $\frac{1}{e}$, π^2, e^2, $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{e}$, $\pi \times e$, $\frac{\pi}{e}$.

287. b étant un nombre irrationnel donné et a un nombre entier donné, autre que un, on peut trouver une suite indéfinie de nombres entiers

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n, \ldots$$

tous plus petits que a, tels que si l'on considère le nombre

$$b_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_2}{a^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{a^n},$$

on ait

$$b_n < b < b_n + \frac{1}{a^n}.$$

En supposant $b = \sqrt{2}$, $a = 2$, calculer les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{10}$.

288. Étant donnés un nombre irrationnel b et une suite indéfinie de nombres entiers, tous plus grands que un,

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

on peut trouver une suite de nombres entiers

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \ldots$$

tels que l'on ait $\alpha_1 < a_1$, $\alpha_2 < a_2, \ldots, \alpha_n < a_n, \ldots$ et tels que si l'on pose

$$b_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_1 a_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

on ait

$$b_n < b < b_n + \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

289. On appelle moyenne arithmétique de deux nombres leur demi-somme, moyenne géométrique de deux nombres la racine carrée de leur produit. Démontrer que la moyenne arithmétique de deux nombres différents est plus grande que leur moyenne géométrique. La différence entre les deux moyennes est plus petite que le carré de la différence entre les deux nombres divisé par huit fois le plus petit.

290. Si x est un nombre compris entre 0 et 1, le nombre $x\,(1-x)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$; il ne peut lui être égal que pour $x = \frac{1}{2}$.

291. Si a est la racine carrée à une unité près, par défaut, du nombre A, on a

$$a + \frac{A - a^2}{2a+1} < \sqrt{A} < a + \frac{A-a^2}{2a+1} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{2a+1}.$$

Si l'on rapproche ce résultat des n^os 290 et suivants, on pourra apprécier l'avantage que présente, dans l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier, l'emploi de la limite inférieure que l'on a indiquée alors.

Voir dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (1887) un article de M. Darboux sur ce sujet.

292. Si a, a', b, b' sont des nombres rationnels dont les deux derniers ne sont pas des carrés parfaits, on ne peut pas avoir $a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'}$ ou $a - \sqrt{b} = a' - \sqrt{b'}$ sans que l'on ait $a = a'$, $b = b'$; on ne peut pas avoir $a + \sqrt{b} = a' - \sqrt{b'}$.

293. Démontrer que l'on a, quels que soient le nombre a et le nombre b plus petit que a,

$$\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{a+b}{2}} + \sqrt{\frac{a-b}{2}},$$
$$\sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{a+b}{2}} - \sqrt{\frac{a-b}{2}}.$$

Démontrer que le nombre

$$\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$$

est égal à 2 si a est compris entre 1 et 2 et à $2\sqrt{a-1}$ si a est plus grand que 2.

294. On considère deux ensembles limités : les limites supérieure et inférieure du premier sont M et m, les limites supérieure et inférieure du second sont M′ et m'. Démontrer que si l'on considère l'ensemble des nombres différents obtenus en ajoutant un terme du premier ensemble et un terme du second, cet ensemble aura pour limites supérieure et inférieure les nombres $M + M'$, $m + m'$. De même, l'ensemble des nombres différents obtenus en multipliant un terme du premier ensemble et un terme du second admet pour limites supérieure et inférieure les nombres MM', mm'.

295. Si le nombre x_n a pour limite x quand n augmente indéfiniment et si l'on désigne par a, b, c, d des nombres fixes dont les deux derniers ne sont nuls ni l'un ni l'autre, le nombre

$$\frac{ax_n + b}{cx_n + d}$$

a pour limite

$$\frac{ax + b}{cx + d},$$

quand n augmente indéfiniment.

296. Quand n augmente indéfiniment, le nombre

$$\frac{ax^n + b}{cx^n + d}$$

a pour limite $\frac{a}{c}$ ou $\frac{b}{d}$ suivant que x est plus grand ou plus petit que un.

297. On considère une suite indéfinie

(1) $$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots,$$

de nombres tels que chacun d'eux soit compris entre les deux qui le précèdent. Démontrer que les deux suites

(2) $$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$
(3) $$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

ont chacune une limite ; si ces deux limites sont les mêmes, la suite (1) a encore une limite qui est aussi la même.

298. Étant donnés deux nombres a, b et a étant le plus petit de ces deux nombres, on forme la suite

$$a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots,$$

dans laquelle chaque terme est la moyenne arithmétique des deux précédents; ainsi on a

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \; b_1 = \frac{a_1+b}{2}, \; a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \; \ldots.$$

Démontrer que l'on a

$$a_n = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 - \frac{1}{4^n}\right),$$

$$b_n = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 + \frac{1}{2.4^n}\right);$$

quelle est, pour n infini, la limite commune de a_n et de b_n?

299. Si les termes de la suite indéfinie

$$a_1, \; a_2, \; \ldots, \; a_n, \; \ldots$$

vont en décroissant et si l'on forme les nombres

$$b_1 = a_1, \; b_2 = a_1 - a_2, \; b_3 = a_1 - a_2 + a_3, \; b_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4, \; \ldots,$$

les suites

$$b_1, \; b_3, \; b_5, \; \ldots \; b_{2n+1}, \; \ldots,$$
$$b_2, \; b_4, \; b_6, \; \ldots \; b_{2n}, \; \ldots$$

ont des limites. Ces limites sont égales si a_n a pour limite zéro quand n augmente indéfiniment; dans ce cas la suite

$$b_1, \; b_2, \; b_3, \; \ldots, \; b_n, \; \ldots$$

a aussi une limite qui est la même que celle des suites précédentes.

300. Soient a et b deux nombres donnés; soient a_1, b_1 les moyennes arithmétique et géométrique de a, b; soient a_2, b_2 les moyennes arithmétique et géométrique de a_1 et b_1, a_3 et b_3 les moyennes arithmétique et géométrique de a_2 et b_2, etc.; on continue ainsi indéfiniment : démontrer que a_n et b_n, quand n augmente indéfiniment, tendent vers une limite commune.

En supposant $a > b$, démontrer que l'on a

$$a_n - b_n < 8b\left(\frac{a-b}{8b}\right)^{2^n}$$

Calculer la limite avec 7 décimales exactes, en supposant $a = 11$, $b = 10$.

301. Soit x un nombre plus petit que un; si l'on pose

$$\sqrt{1-x} = 1 - y,$$

on en conclut

$$y = \frac{x}{2} + \frac{y^2}{2};$$

si l'on pose

$$y_1 = \frac{x}{2}, \; y_2 = \frac{x}{2} + \frac{y_1^2}{2}, \; \ldots, \; y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2}, \; \ldots,$$

les nombres y_1, y_2, ..., y_n, ... tous inférieurs à y, vont en croissant avec n; démontrer que pour n infini, y_n a pour limite le nombre y.

302. Soit x un nombre plus petit que un; si l'on pose

$$\sqrt{1+x} = 1 + y,$$

on en conclut

$$y = \frac{x}{2} - \frac{y^2}{2};$$

si l'on pose

$$y_1 = \frac{x}{2},\ y_2 = \frac{x}{2} - \frac{y_1{}^2}{2},\ \ldots,\ y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2},\ \ldots,$$

chacun des termes de la suite $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ est compris entre les deux termes qui le précèdent. Cette suite a pour limite le nombre y, et les termes en fournissent des valeurs approchées, alternativement par défaut et par excès.

303. Si x est un nombre plus petit que un, les nombres

$$1,\ 1 + \frac{x}{2},\ 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8},\ 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

sont des valeurs approchées de $\sqrt{1+x}$, alternativement par défaut et par excès. Quand x est petit, elles permettent d'avoir $\sqrt{1+x}$ avec une grande approximation.

Si α est très petit par rapport au nombre a, la formule

$$\sqrt{a^2+\alpha} = a\sqrt{1 + \frac{\alpha}{a^2}}$$

permet d'obtenir des valeurs approchées de $\sqrt{a^2+\alpha}$: ainsi $a + \frac{\alpha}{2a}$ est une valeur approchée par excès, $a + \frac{\alpha}{2a} - \frac{\alpha^2}{8a^3}$ est une valeur approchée par défaut.

304. Si x est un nombre plus petit que un, les nombres

$$1 - \frac{x}{2},\ 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8},\ 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16}$$

sont des valeurs approchées de $\sqrt{1-x}$ par excès; les erreurs sont respectivement moindres pour les deux premières valeurs approchées, que

$$\frac{x^2}{8\sqrt{1-x}} \text{ et } \frac{x^3}{16\sqrt{1-x}}\left(1 + \frac{x}{8}\right).$$

Cette dernière partie résulte aisément de ce que si a est une valeur approchée de $\sqrt{A}$ par excès, telle que l'on ait $a^2 - A \leqq \varepsilon$, on a

$$a - \sqrt{A} = \frac{a^2 - A}{a + \sqrt{A}} < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{A}}.$$

305. En supposant x plus petit que un, on a

$$\frac{1 - x + \frac{x^2}{8}}{1 - \frac{x}{2}} - \sqrt{1-x} < \frac{x^4}{2^7(1-x)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{1 + x + \frac{x^2}{8}}{1 + \frac{x}{2}} - \sqrt{1+x} < \frac{x^4}{2^7}.$$

En supposant par exemple $x = \frac{1}{50}$ et $x = \frac{1}{25}$ dans la première et $x = \frac{1}{16}$ dans la seconde, on déduira de là

$$\frac{98005}{69300} - \sqrt{2} < \frac{1}{2 \times 10^8}, \quad \frac{4801}{1960} - \sqrt{6} < \frac{1}{10^7}, \quad \frac{2277}{528} - \sqrt{17} < \frac{1}{2.10^6}.$$

306. Soient a, b deux nombres entiers dont le second n'est pas un carré parfait; on pose, en désignant par A_n, B_n des nombres entiers,

$$(a + \sqrt{b})^n = A_n + B_n\sqrt{b},$$

montrer que l'on a

$$A_{n+1} = A_n a + B_n b, \quad B_{n+1} = B_n a + A_n;$$

ces formules jointes aux égalités $A_1 = a$, $B_1 = 1$ permettent de calculer de proche en proche les nombres A_n, B_n; montrer que l'on a, en supposant $a^2 > b$,

$$(a - \sqrt{b})^n = A_n - B_n\sqrt{b}, \quad A_n^2 - B_n^2 b = (a^2 - b)^n.$$

Comment ces formules doivent-elles être modifiées si l'on a $a^2 < b$? — Par exemple, pour $a = 3, b = 10$, on a $A_5 = 4443$, $B_5 = 1405$;

$$10\,B_5^2 - A_5^2 = 1, \quad \sqrt{10} - \frac{A_5}{B_5} < \frac{1}{10^7}.$$

307. Soit a une valeur approchée de $\sqrt{A}$; soient ensuite

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right), \quad a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{A}{a_1}\right), \ldots, \quad a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}\right);$$

les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ fournissent des valeurs qui approchent rapidement de $\sqrt{A}$, toutes par excès.

Démontrer que l'on a

$$\frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n + \sqrt{A}} = \left(\frac{a_1 - \sqrt{A}}{a_1 + \sqrt{A}}\right)^{2^{n-1}};$$

vers quelle limite tend a_n quand n augmente indéfiniment?

Le procédé de calcul de la racine carrée d'un nombre qui résulte de la proposition précédente était connu des Anciens.

308. Étant donnés deux nombres a, b, on forme une suite de nombres a_1, b_1, a_2, $b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ tels que l'on ait

$$a_1 = \frac{a + b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{a_1 b}, \quad a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad b_2 = \sqrt{a_2 b_1}, \ldots :$$

chaque terme de la suite $a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ est ainsi, à partir du troisième, alternativement la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique entre les deux termes qui le précèdent; en supposant $a < b$, les termes de la suite $a, a_1, a_2, \ldots$ vont en croissant, les termes de la suite $b, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ vont en décroissant; démontrer que l'on a

$$b_n - a_n < \frac{1}{4^n}(b - a),$$

que a_n et b_n tendent vers une limite commune quand n augmente indéfiniment. En est-il de même quand on a $a > b$?

En supposant $a = o$, $b = \frac{1}{2}$, calculer la limite avec trois décimales exactes.

309. a étant un nombre entier autre que un, on considère une suite indéfinie de nombres entiers

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

tous plus petits que a, et l'on considère le nombre

$$b_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_2}{a^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{a^n};$$

démontrer que b_n, lorsque n augmente indéfiniment, tend vers une limite : cette limite est un nombre irrationnel si, à partir d'un certain rang, les termes de la suite

$$\alpha_0, \alpha_1. \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

ne se reproduisent pas périodiquement.

310. On considère une suite indéfinie de nombres entiers, tous plus grands que un,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

et une suite de nombres entiers correspondants

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

tels que l'on ait, quel que soit n, $\alpha_n < a_n$; soit, en désignant par α_0 un nombre entier quelconque

$$b_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_1 a_2} + \frac{\alpha_3}{a_1 a_2 a_3} + \ldots. + \frac{\alpha_n}{a_1 a_2 a_3 \ldots. a_n};$$

démontrer que b_n tend vers une limite quand n augmente indéfiniment.

311. On considère une suite indéfinie de nombres entiers

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

dont le premier est quelconque et dont les autres satisfont aux conditions $\alpha_2 < 2$, $\alpha_3 < 3, \ldots, \alpha_n < n, \ldots$, et l'on pose

$$a_n = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{1.2} + \frac{\alpha_3}{1.2.3} + \frac{\alpha_4}{1.2.3.4} + \cdots + \frac{\alpha_n}{1.2.3\ldots.n} :$$

démontrer que a_n tend vers une limite quand n augmente indéfiniment. Cette limite est un nombre irrationnel, sauf dans le cas où, à partir d'un certain rang p, tous les nombres α_n sont nuls, ou dans le cas où, à partir d'un certain rang p, on a $\alpha_n = n - 1$. — Dans le cas où l'on prend $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots \alpha_n = \ldots = 1$, cette limite est un nombre que l'on désigne habituellement par e.

312. a étant un nombre quelconque autre que zéro, le nombre $\sqrt[n]{a}$ a pour limite l'unité quand n augmente indéfiniment.

Si en désignant par b un nombre quelconque plus grand que un et par p un nombre entier, on pose $a = b^p - b$, puis

$$x_1 = \sqrt[p]{a}, \; x_2 = \sqrt[p]{a + \sqrt[p]{a}}, \; x_3 = \sqrt[p]{a + \sqrt[p]{a + \sqrt[p]{a}}},$$

et, en général, $x_n = \sqrt[p]{a + x_{n-1}}$, on demande de démontrer que x_n est plus petit que b et a pour limite b quand n augmente indéfiniment.

Quelle est la limite de x_n quand p et a sont égaux à 2?

313. On pose

$$a_1 = \sqrt{2},\ a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}},\ a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

et généralement

$$a_n = \sqrt{2+a_{n-1}};$$

montrer que si l'on fait les calculs en conservant chaque fois p décimales l'erreur (en moins) commise sur l'évaluation de a_n sera moindre que $\frac{2}{10^p}\cdot$ Calculer ainsi la valeur approchée de a_5 en prenant $p = 7$. En partant de cette valeur calculer le nombre $64 \times \sqrt{2-a_5}$; avec quelle approximation est-il connu?

314. Supposons que dans les deux suites

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$
$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$$

les termes aillent en augmentant quand n augmente (¹).

Si q est un entier plus grand que p, le nombre $\dfrac{a_q - a_p}{b_q - b_p}$ sera compris entre le plus grand et le plus petit des nombres

$$\frac{a_q - a_{q-1}}{b_q - b_{q-1}},\ \frac{a_{q-1} - a_{q-2}}{b_{q-1} - b_{q-2}},\ \frac{a_{q-2} - a_{q-3}}{b_{q-2} - b_{q-3}},\ \ldots,\ \frac{a_{p+1} - a_p}{b_{p+1} - b_p}.$$

Supposons encore que b_n augmente indéfiniment quand n augmente indéfiniment, on propose de démontrer que si $\dfrac{a_n - b_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ tend vers une limite quand n augmente indéfiniment, $\dfrac{a_n}{b_n}$ tend vers la même limite.

315. Supposons que dans les deux suites

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$
$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$$

les termes aillent en diminuant (²) quand n augmente et que b_n ait pour limite zéro pour n infini, si le nombre $\dfrac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$ tend vers une limite quand n augmente indéfiniment, $\dfrac{a_n}{b_n}$ tend vers la même limite.

316. Si a_n tend vers une limite quand n augmente indéfiniment, il en est de même du nombre

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}.$$

317. Soit x un nombre irrationnel positif donné et m un nombre entier positif aussi donné : démontrer qu'il y a un système de nombres entiers positifs a, b dont le

1. Le lecteur familier avec la théorie des nombres négatifs reconnaîtra que la proposition à démontrer subsiste quand la condition précédente n'est vérifiée que pour la seconde suite.
2. Ici encore cette supposition n'est nécessaire que pour la seconde suite.

premier est inférieur ou égal à m, et tels que la valeur absolue de la différence $ax - b$ soit moindre que $\frac{1}{m}$ [1].

Prenons en effet pour a l'un des nombres 1, 2, ..., m, faisons-lui correspondre le nombre entier b qui est la partie entière de ax, et considérons la partie entière de $m\,(ax - b)$, qui est évidemment inférieure à m : elle prendra m valeurs positives ou nulles quand a prendra les valeurs 1, 2, ..., m; si l'une de ces valeurs est nulle, le théorème est vérifié ; si aucune n'est nulle, deux d'entre elles correspondant, par exemple, aux valeurs a', b' et a'', b'' de a, b seront égales, et le nombre $m\,[(a'' - a')x - (b'' - b')]$ sera plus petit que un, en valeur absolue.

Par exemple, pour $x = \pi = 3{,}14159...$ et $m = 10$, en appliquant la règle précédente, on trouve qu'aucune valeur de la partie entière de $m\,(ax - b)$ n'est nulle, mais que ces parties entières sont égales pour $a' = 1$, $a'' = 8$; pour $a' = 2$, $a'' = 9$; $a' = 3$, $a'' = 10$: dans les trois cas on a $a'' - a' = 7$, $b'' - b' = 22$; $7\pi - 22$ est en valeur absolue plus petit que $\frac{1}{10}$. De même pour $x = \pi^2$, $m = 10$, on trouve que la partie entière de $10\,(7\pi^2 - 69)$ est nulle ; $\frac{69}{7}$ est une valeur approchée de π^2 avec une erreur moindre que $\frac{1}{70}$.

318. Soient x, y deux nombres irrationnels donnés et m, m' deux nombres entiers positifs aussi donnés; démontrer qu'on peut trouver trois nombres entiers a, b, c dont les deux premiers soient en valeur absolue moindres que m et m' et tels que la valeur absolue de $ax + by - c$ soit moindre que $\frac{1}{mm'}$.

Démonstration analogue à la précédente : à chaque système de nombres entiers a, b respectivement pris parmi les nombres 1, 2, ..., m et 1, 2, ..., m', on fait correspondre la partie entière c de $(ax + by)$; on considère ensuite la partie entière de $mm'(ax + by - c)$; parmi les mm' nombres entiers ainsi obtenus, il y en a un qui est nul, ou deux qui sont égaux, etc. Par exemple, pour $x = \pi^2$, $y = \pi$, $m = m' = 20$, on trouve que la partie entière de $20^2(12\pi^2 + 4\pi - 131)$ est nulle. — La racine positive de l'équation $12x^2 + 4x - 131 = 0$ est $x = 3{,}14157...$.

319. Soient x, y deux nombres irrationnels positifs donnés et m un nombre entier positif aussi donné ; on peut trouver trois nombres entiers a, b, c dont le premier soit positif et inférieur à m^2 et tels que les valeurs absolues des nombres $ax - b$, $ax - c$ soient moindres que $\frac{1}{m}$.

Ayant choisi le nombre entier a parmi les nombres 1, 2, 3, ..., m^2, on lui fait correspondre les nombres b, c qui sont les parties entières de ax, ay, puis on étudie les m^2 systèmes de valeurs que peuvent prendre les parties entières de $m(ax - b)$, $m(ax - c)$.

1. Cette question et les suivantes supposent le lecteur familier avec l'usage des nombres négatifs.

CHAPITRE XIII

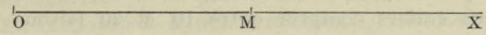
MESURE DES GRANDEURS

§ 1. — Correspondance entre les grandeurs et les nombres.

473. La définition bien connue « on appelle grandeur ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution » est sans doute très vague dans sa généralité. On va toutefois essayer d'en tirer parti pour relier la notion de grandeur et la notion de nombre. En même temps, la première notion se précisera, peu à peu, pour celles des grandeurs auxquelles la notion de nombre s'applique exactement. Sans doute, c'est la notion de grandeur, au moins dans des cas particuliers, qui a donné naissance à la notion de nombre, et dans cet Ouvrage même on s'est efforcé de le montrer lorsque, par exemple, on a introduit les *fractions*; mais on a vu aussi comment cette notion de nombre pourrait être détachée de son origine concrète, se construire entièrement avec un seul élément, le nombre entier, et être amenée ainsi à un haut degré de simplicité et d'abstraction. Maintenant que la notion de nombre entier, fractionnaire ou irrationnel, est complètement élucidée, que les opérations sur ces nombres sont bien précisées, il vaut mieux se placer à un point de vue opposé, et, regardant le nombre abstrait comme un instrument donné et connu, chercher quel parti on peut en tirer pour l'étude des grandeurs : cet instrument, dont on a cherché à expliquer la construction en vue d'usages particuliers, se trouve en effet pouvoir servir dans des cas beaucoup plus étendus.

Une grandeur sera donc un objet ou une propriété susceptible d'états distincts, qui, toutefois, sous ces états distincts, se reconnaît comme étant de la même espèce. Ainsi conçue, la grandeur est quelque chose d'indéterminé. Pour simplifier le langage, j'emploierai une lettre majuscule *entre parenthèses*, (G) par exemple, pour désigner une grandeur d'une certaine espèce; ce symbole (G) ne représente rien de déterminé, il ne se rapporte qu'à l'*espèce* de la grandeur. Dans chacun de ses états distincts, la grandeur (G) est *déterminée*; on la représentera alors par une lettre majuscule, *sans parenthèses*. Il y a peut-être quelque inconvénient à employer le même mot « *grandeur* » pour désigner à la fois, par exemple, une longueur en général et une longueur particulière ; mais la notation précédente et l'emploi de l'épithète « déterminée » permettront de supprimer toute ambiguïté.

474. Si, par exemple, (G) est une longueur rectiligne comptée à partir d'un point O sur une droite OX limitée d'un côté à ce point et indéfinie de l'autre, à chaque position du point M sur la droite OX correspond une longueur déterminée OM ; quand le point M occupe sur la droite des positions distinctes, on a des longueurs distinctes. De même, imaginons, dans la durée, un moment déterminé, que nous appellerons *origine des temps*, et ne considérons que des événements postérieurs à cette origine



des temps ; à deux pareils événements non simultanés correspondront deux temps distincts, écoulés entre l'origine des temps et chacun de ces événements.

Dans les exemples que je viens de citer, si l'on imagine deux états *distincts* de la grandeur considérée, on ne peut s'empêcher de concevoir la grandeur comme étant plus grande dans l'un que dans l'autre. Si le point M′ est, sur la droite OX, plus à droite que le point M, la longueur OM′ est plus grande que la longueur OM. Si, des deux événements que l'on a imaginés, le second est postérieur au premier, et si l'on désigne par T, T′ les temps écoulés entre l'origine des temps et chacun de ces événements, on dira que le temps T′ est plus grand que le temps T.

Supposons d'abord que l'on s'occupe d'une grandeur (G) telle que, si on la considère dans deux états *distincts* A, A′, elle soit nécessairement plus grande dans un état que dans l'autre (et plus petite dans ce second état que dans le premier) ; nous écrirons, par exemple, $A > A'$ ou $A' < A$, et cette supposition exclut la supposition contraire $A < A'$. Nous admettons en outre que la notion de *plus grand* implique la proposition suivante : si l'on considère trois états A, A′, A″ de la grandeur (G) et si l'on a $A > A'$, $A' > A''$ on a $A > A''$, en sorte qu'on peut écrire $A > A' > A''$; on dit que A′ est compris entre A et A″, que A′ est intermédiaire à A, A″.

475. Ceci posé, plusieurs cas peuvent se présenter : il peut arriver que si l'on considère deux états A, A′ de la grandeur (G), il n'y ait qu'un nombre limité (entier) d'états intermédiaires à A, A′ ; il existe alors des états de la grandeur (G) entre lesquels il n'y a pas d'états intermédiaires : c'est le cas des grandeurs *discrètes*, par exemple du nombre d'objets contenus dans une collection. J'écarterai ce cas relativement simple, auquel la notion de nombre entier s'applique particulièrement, et je supposerai que la grandeur (G) dont on s'occupe jouit de la propriété suivante : si l'on considère deux états A, A′ quelconques, mais distincts, il y a au moins un état intermédiaire A″ : il y en a alors une infinité, puisqu'il y a certainement un état A‴ intermédiaire à A′, A″, etc.

476. Considérons maintenant deux états A, A′ de la grandeur (G) et supposons qu'on ait $A < A'$; nous ne nous occuperons, dans ce numéro, que des états A, A′ et des états intermédiaires. Imaginons qu'on fasse correspondre aux états A, A′ deux nombres entiers, 10 et 20 par exemple, en ayant soin de faire correspondre le plus petit entier 10 à la plus petite des grandeurs A, A′.

Aux différents nombres compris entre 10 et 20 nous allons faire correspondre des états intermédiaires à A, A′ en observant toujours la condition suivante que nous appellerons la condition fondamentale : si aux nombres distincts b, c on fait correspondre les états distincts B, C, on aura $B < C$ ou $B > C$, suivant que l'on a $b < c$ ou $b > c$. A des nombres égaux on fera toujours correspondre le même état de grandeur.

Aux nombres entiers compris entre 10 et 20 faisons correspondre, d'après une loi déterminée, mais d'ailleurs arbitraire, des états intermédiaires à A et A′, en observant toutefois la condition précédente.

On a ainsi établi une certaine échelle de graduation de A à A′. Considérons maintenant les fractions comprises entre 10 et 20 et dont le dénominateur est 2 ; pour celles de ces fractions qui sont égales à des nombres entiers, nous les ferons correspondre aux mêmes états qui correspondent à ces nombres entiers ; pour les autres, nous ferons correspondre chacune d'elles, qui se trouve comprise entre deux entiers consécutifs, à un état intermédiaire aux deux entiers qui correspondent à ces entiers consécutifs ; nous aurons ainsi rapproché les échelons de la graduation en multipliant les états de la grandeur qui sont *numérotés*. Considérons de même les fractions comprises entre 10 et 20 dont le dénominateur est 3, en laissant de côté celles de ces fractions qui se trouveraient être égales à quelque fraction de dénominateur 2, que l'on ferait correspondre aux états déjà *numérotés* au moyen de fractions égales, et faisons correspondre à chacune de celles qui subsistent des états intermédiaires à ceux que l'on a déjà numérotés, en tenant toujours compte de la condition fondamentale.

Nous faisons de même, successivement, pour les fractions comprises entre 10 et 20 dont le dénominateur est 4, 5, 6, ..., en resserrant toujours les échelons de la graduation. Cette opération pourra être continuée aussi loin qu'on le voudra. Dans la pratique, si l'on n'a pas été obligé de laisser des lacunes et si, en resserrant par places le *numérotage*, on n'en a effectivement pas laissé, il arrivera, quand on aura poussé la graduation assez loin, que deux états numérotés consécutifs seront à peine distincts, et qu'il n'y aura pas d'erreur appréciable à substituer l'un à l'autre, non plus qu'un état intermédiaire. La grandeur (G) sera en quelque sorte numériquement connue entre A et A′, pourvu qu'on sache bien comment la correspondance entre les nombres et les états de grandeur a été établie ; quand on parlera d'un nombre compris entre 10 et 20, on saura quelle grandeur lui correspond. Suivant le degré de précision que l'on veut atteindre, la graduation peut être poussée plus ou moins loin.

Le thermomètre offre au lecteur un exemple de ce que nous venons de dire, qui lui est bien familier [1].

Théoriquement, on peut imaginer que l'opération soit poursuivie indéfiniment ; alors, on pourra dire qu'à chaque nombre rationnel compris entre

1. Observons toutefois que, dans la pratique, la graduation est habituellement construite au moyen de nombres en progression arithmétique.

10 et 20 correspond un état déterminé de la grandeur (G), la condition fondamentale étant toujours vérifiée. Mais il importe de donner maintenant, en restant au point de vue théorique auquel nous nous plaçons, une forme précise à cette condition que j'ai énoncée sous forme vague : il n'y a pas de lacunes dans le numérotage, ce numérotage pénètre partout. Cette condition consiste en ce que la graduation soit telle qu'il y ait des états numérotés, au moyen de nombres rationnels, entre deux états distincts quelconques B, C, intermédiaires à A, A′ ; la grandeur (G) est supposée telle que cette condition puisse être vérifiée.

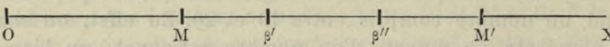
S'il en est ainsi, à chaque état B de la grandeur (G) compris entre A, A′ correspond un nombre compris entre 10 et 20. En effet, ou bien l'état B a été numéroté au moyen d'un nombre rationnel, ou bien il n'en est pas ainsi. Dans ce dernier cas, considérons un nombre rationnel quelconque compris entre 10 et 20 : à ce nombre correspond une grandeur déterminée de l'espèce (G) qui est certainement distincte de B ; suivant que cette grandeur est plus grande ou plus petite que B, nous rangerons le nombre rationnel dans une première ou une seconde catégorie : tous les nombres rationnels compris entre 10 et 20 sont ainsi rangés en deux catégories ; chaque nombre de la première catégorie est plus petit que chaque nombre de la seconde catégorie ; si b_1 est un nombre (rationnel) de la première catégorie, il lui correspond un état B_1 de la grandeur (A) tel que l'on ait $B_1 < B$ et puisque, par hypothèse, il y a au moins un état B_2 intermédiaire à B et à B_1, auquel correspond un nombre rationnel b_2, on voit qu'il y a dans la première catégorie un nombre b_2 plus grand que b_1 ; on voit de même que dans la seconde catégorie il ne peut y avoir de nombre plus petit que tous les autres nombres de la même catégorie. On a donc défini ainsi un nombre irrationnel b que l'on fera correspondre à l'état B.

Ce nombre est plus grand que tous les nombres qui correspondent à des grandeurs de l'espèce (G) numérotées au moyen de nombres rationnels et plus petites que B ; il est plus petit que tous les nombres qui correspondent à des grandeurs de l'espèce (G) numérotées au moyen de nombres rationnels et plus grandes que B.

Pour toutes ces grandeurs, la condition fondamentale est vérifiée.

Enfin si B′ est une grandeur de l'espèce (G) à laquelle corresponde le nombre irrationnel b' et si l'on a, par exemple, $B < B'$, il y aura, par hypothèse, entre les états B et B′ un état intermédiaire B″ numéroté au moyen d'un nombre rationnel b'' et les suppositions $B < B''$, $B'' < B'$ entraînent les inégalités $b < b''$, $b'' < b'$ et par suite $b < b'$; la condition fondamentale est encore vérifiée.

477. Inversement je supposerai qu'à chaque nombre irrationnel b compris entre 10 et 20 corresponde une grandeur B comprise entre A, A′. Pour bien nous rendre compte de la nature de cette nouvelle supposition, reportons-nous au premier exemple signalé, celui d'une longueur portée sur une droite OX, à partir du point O : soient M, M′ les extrémités de cette longueur pour les deux états A, A′ qui correspondent aux nombres 10 et 20; soit b un nombre irrationnel compris entre 10 et 20; désignons par b' un nombre rationnel quelconque compris entre 10 et b, par b'' un nombre rationnel quelconque compris entre b et 20; soient β' et β'' les extrémités des longueurs qui correspondent aux nombres b' et b''; imaginons par exemple que tous les points β' qui répondent à des nombres rationnels b' plus petits que b soient marqués en bleu, que tous les points β'' qui répondent à des nombres rationnels b'' plus grands que b soient marqués en rouge : sur la droite OX, tous les points bleus sont à gauche



des points rouges; les points bleus ne se mêlent jamais aux points rouges : d'un autre côté, entre les points bleus et les points rouges, il ne peut y avoir un espace libre, puisque, entre deux points quelconques de la droite OX, il y a, par hypothèse, des points auxquels répondent des nombres rationnels, c'est-à-dire des points bleus ou rouges; la région de la ligne OX où sont les points bleus ne peut donc être séparée de la région où sont les points rouges par aucun espace libre ; j'admettrai que les deux régions sont séparées par un *point*, extrémité d'une longueur qui correspond au nombre b.

478. Si la grandeur (G) est telle que, entre les états A et A′, une graduation pareille à celle que l'on vient de décrire puisse être réalisée par la pensée, je dirai que cette grandeur est *continue* de A à A′ ; à chaque nombre rationnel ou irrationnel compris entre 10 et 20 correspond un état de cette grandeur intermédiaire à A et A′ ; réciproquement à chaque état intermédiaire à A et A′ correspond un nombre rationnel ou irrationnel compris entre 10 et 20 : enfin la condition fondamentale est toujours vérifiée.

Il est à peine utile de dire que la supposition faite au début, à savoir que les nombres qui correspondaient aux états A, A′ étaient entiers, n'a rien d'essentiel.

479. Ceci posé, si l'on considère une grandeur (G) qui soit continue entre deux quelconques de ses états, diverses circonstances peuvent se présenter. Ou bien il y a des états de cette grandeur au delà et en deçà desquels elle ne peut pas varier, ou bien il n'en est rien. Les angles, en géométrie, fournissent un exemple bien connu du premier cas.

Supposons que la grandeur (G) soit ainsi nécessairement comprise entre deux états limites A et A′, en dehors desquels elle ne puisse être conçue, et supposons qu'on ait A $<$ A′ ; il sera naturel de faire correspondre le nombre 0 à l'état A et un nombre arbitraire à l'état A′, par exemple un nombre entier ([1]); on procédera ensuite au numérotage des états intermédiaires, comme on l'a expliqué.

1. Ce serait le nombre 2, dans l'exemple cité, si l'on évaluait les angles en angles droits, le nombre 180 si on les évaluait en degrés.

480. Supposons maintenant que la grandeur (G) soit telle qu'il existe un certain état A_0 de cette grandeur, au-dessous duquel elle ne puisse pas descendre, mais que si l'on considère tel autre état A que l'on veut, distinct de A_0, il existe certainement un état A' tel que l'on ait $A' > A$; on procédera comme il suit : on fera correspondre l'état A_0 au nombre 0, puis, choisissant des états $A_1, A_2, A_3, \ldots$ tels que l'on ait $A_1 < A_2 < A_3, \ldots$, on les fera correspondre aux nombres entiers 1, 2, 3,...; on imaginera que cette opération de numérotage au moyen des nombres entiers soit poursuivie indéfiniment et de façon que si l'on considère un état quelconque A de la grandeur (G), il y ait certainement un état A_n correspondant à un nombre entier n et tel que l'on ait $A_n > A$ [1]. Puis on graduera la grandeur entre A_0 et A_1, entre A_1 et A_2, entre A_2 et A_3, ..., comme on l'a expliqué dans le numéro 476.

Alors à chaque état possible de la grandeur correspondra un nombre, à chaque nombre correspondra un état de la grandeur : à des nombres plus grands correspondent des grandeurs plus grandes, à deux nombres égaux correspond la même grandeur.

481. Enfin, la grandeur (G) peut n'être limitée ni dans un sens ni dans l'autre; tel est le temps, telle serait la température si on n'admettait pas l'existence du zéro absolu des physiciens : on choisira un état arbitraire A_0 que l'on fera correspondre au nombre 0 et, pour les grandeurs plus grandes que A_6 on procédera comme on vient de l'expliquer; mais on ajoutera à chaque nombre qui correspond à une grandeur plus grande que A_0 les mots *au-dessus de zéro*. Pour les grandeurs (G) inférieures à A_0 on pourra de même faire correspondre chacune d'elles à un nombre que l'on fera suivre des mots *au-dessous de zéro*, mais de façon que si A', A'' sont deux états tels que l'on ait $A' < A'' < A_0$, on ait $a' > a''$, et non $a' < a''$, en désignant par a', a'' les nombres qui correspondent à A', A''. On renverserait en quelque sorte la condition fondamentale.

Ce procédé de numérotage pour les grandeurs moindres que A_0 est tout à fait pareil au procédé de numérotage relatif aux grandeurs supérieures à A_0 ; il ne semble pas utile d'y insister : au surplus, l'Algèbre enseigne à remplacer les mots « au-dessus ou au-dessous de zéro » par d'autres symboles d'un usage beaucoup plus commode.

482. J'ai supposé jusqu'ici que de deux états distincts de la grandeur considérée, l'un était nécessairement plus grand que l'autre. Bien qu'étant distincts par quelques circonstances, deux états peuvent être regardés comme les mêmes. Quand on a parlé de longueurs, on a supposé qu'il s'agissait de longueurs comptées sur une même droite à partir d'un même point. Deux longueurs rectilignes qui ne sont pas portées sur la même droite et qui, en ce sens, sont susceptibles d'être distinguées l'une de l'autre, peuvent cependant être *égales* : elles sont égales quand on peut faire

1. Si l'on n'imposait pas cette condition, on pourrait épuiser l'infinité des nombres entiers en s'approchant d'un état limite au delà duquel la graduation ne pénétrerait pas.

coïncider l'une avec l'autre. Les diverses sciences donnent, pour les diverses grandeurs dont elles s'occupent, des définitions de l'égalité. On enseigne, par exemple, en Physique, ce que c'est que deux corps qui sont à des températures *égales*, ce que c'est qu'un corps qui est à une température *plus grande* qu'un autre corps. La définition de l'égalité et de l'inégalité doit toujours satisfaire aux conditions suivantes, où A, B, C, ... désignent des états déterminés quelconques de la grandeur considérée.

La supposition $A = B$ entraîne la supposition $B = A$; les suppositions $A = C$, $B = C$ entraînent la supposition $A = B$; les suppositions $A = B$, ou $A > B$, et $B > C$ entraînent la supposition $A > C$.

Lorsqu'une telle définition de l'égalité (ou de l'équivalence) est possible, il est nécessaire d'admettre que la graduation de la grandeur considérée, sous les diverses formes qu'elle peut revêtir, est faite de manière qu'à des grandeurs égales correspondent toujours des nombres égaux, qu'à des nombres égaux correspondent, sinon la même grandeur, au moins des grandeurs égales (ou équivalentes). Les conditions imposées à la définition de l'égalité (ou de l'équivalence) ont été choisies pour que cela soit possible.

§ 2. — Des grandeurs directement mesurables.

483. Pour certaines grandeurs, outre la notion d'égalité, on a la notion d'addition. S'il en est ainsi et si l'on peut définir un mode de graduation de la grandeur tel qu'à la somme de deux grandeurs de l'espèce considérée corresponde la somme des deux nombres qui correspondent à ces deux grandeurs, il est clair que ce mode de graduation sera particulièrement avantageux.

On se borne souvent à l'étude des grandeurs de cette dernière espèce, parmi lesquelles il faut placer les longueurs rectilignes, les temps, les poids (ou plutôt les masses mesurées par la balance) : il convenait toutefois d'expliquer comment la notion de nombre s'applique à d'autres grandeurs. Au fond, en dehors des indications du thermomètre, on ne sait guère ce qu'est une température : l'addition de deux températures, en dehors de l'opération d'arithmétique qui consiste à ajouter des *nombres* de degrés, n'a pas de sens, et toutefois l'introduction du nombre que l'on fait correspondre d'une façon déterminée à la température est indispensable en Physique. L'intensité de la lumière d'une source lumineuse fournirait un exemple analogue.

484. Quoi qu'il en soit, je vais désormais m'occuper de grandeurs dont la notion recouvre exactement, en quelque sorte, la notion de nombre, et qui, ainsi, doivent jouir nécessairement des propriétés fondamentales des nombres.

Parmi les propriétés de ces grandeurs figurent d'abord celles qui ont été spécifiées au n° 482, et qui se rapportent à la signification des mots *égal*, *plus grand*, *plus petit*, puis celles qu'on va énoncer. Dans ces énoncés, le symbole (G) désignera l'espèce de la grandeur considérée et les lettres A, B, C,... désigneront des grandeurs déterminées de l'espèce (G) ; toutes ces propriétés sont impliquées par l'hypothèse que voici : la grandeur (G) est susceptible d'une graduation dans laquelle à chaque nombre correspond une grandeur déterminée de l'espèce (G), ou des grandeurs égales ; à des nombres inégaux correspondent des grandeurs inégales, le sens des inégalités étant le même ; à la somme de deux nombres a, b correspond la somme $A + B$ des grandeurs qui correspondent à ces nombres. Réciproquement, à chaque état de la grandeur (G) correspond un nombre, etc.

I. On sait ce que c'est qu'ajouter deux grandeurs de l'espèce (G) ; les définitions de l'addition et de l'égalité satisfont aux conditions suivantes :

$$A + B = B + A, \qquad A + (B + C) = (A + B) + C\,;$$

si l'on a $B = C$, on a aussi $A + B = A + C$.

Il en résulte que, dans une somme d'autant de termes que l'on veut, on peut intervertir l'ordre des termes et remplacer tels termes que l'on veut par leur somme effectuée.

II. On sait ce que c'est que la grandeur *nulle* d'espèce (G), grandeur que l'on fait correspondre au nombre 0, et que l'on représente par le même symbole 0. Sa définition doit satisfaire à la condition $A + 0 = A$, à cause de la propriété correspondante des nombres ; dans cet état *nul*, la grandeur (G), qui ne modifie aucune grandeur de la même espèce à laquelle on l'ajoute, cesse, en quelque sorte, d'exister : telle est la longueur d'une ligne dont les deux extrémités coïncident.

III. Si C n'est pas la grandeur nulle, on a $A + C > A$; il résulte de cette condition que la grandeur nulle est la seule qui, ajoutée à A, reproduise A.

IV. Si l'on a $A > B$, il existe une grandeur C, non nulle, telle que l'on ait $A = B + C$.

V. Si A n'est pas la grandeur nulle, quelle que soit la grandeur B, il existe un nombre entier m tel que l'on ait $mA > B$: dans le premier membre de cette inégalité, mA représente la somme de m grandeurs égales à A : cette somme s'appelle aussi le produit de A par m. Cette supposition, que l'on appelle souvent *axiome d'Archimède*, est nécessitée par le théorème du n° 211, relatif aux *nombres*.

VI. Si m est un nombre entier, autre que 0 et 1, quelle que soit la grandeur B, il existe une grandeur A telle que l'on ait $mA = B$, c'est la $m^{\text{ième}}$ partie de B : en d'autres termes, on peut diviser B en m parties égales.

Il est à peine utile de répéter encore une fois que toutes ces suppositions, calquées sur des propriétés bien connues des nombres, sont nécessaires pour que la correspondance décrite au commencement de ce numéro entre les nombres, d'une part, et les divers états de la grandeur (G), d'autre part, soit possible.

485. Inversement, si la grandeur (G) jouit de ces propriétés et d'une autre encore dont on parlera plus tard, il sera possible de réaliser une graduation telle que celle que l'on a décrite au commencement du numéro précédent.

Tout d'abord, on voit que les hypothèses relatives à la signification des mots : plus grand, plus petit, à l'addition, à l'existence de la différence entre deux grandeurs impliquent de suite les conclusions suivantes.

En ajoutant à deux grandeurs égales A, B des grandeurs inégales C, D, on obtient des grandeurs inégales : supposons en effet $C > D$, il existera une grandeur E, non nulle, telle que l'on ait $C = D + E$; dès lors on aura

$$A + C = B + C = B + (D + E) = (B + D) + E;$$

en vertu de la supposition III, la grandeur $(B + D) + E$, ou $A + C$, est plus grande que $B + D$; il résulte de là que la différence entre les deux grandeurs est unique, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'une grandeur déterminée qui, ajoutée à une grandeur plus petite qu'une autre, puisse reproduire cette dernière. Dès lors les théorèmes fondamentaux établis pour les sommes et différences de nombres entiers s'étendent aux grandeurs, ainsi que les théorèmes sur l'addition, membre à membre, des inégalités.

Il suffit presque de signaler les égalités

$$n(A + B + C + \ldots) = nA + nB + nC + \ldots,$$
$$(n + p + q + \ldots)\, A = nA + pA + qA + \ldots,$$
$$(mn)\, A = m\,(nA),$$

qui sont des conséquences immédiates des suppositions (I) relatives à l'addition; les petites lettres $m, n, p, q, \ldots$ y désignent des nombres entiers. La première, par exemple, veut dire qu'on obtient la même chose en faisant la somme de n grandeurs égales à $A + B + C + \ldots$, ou en groupant ensemble, dans cette somme, les n grandeurs égales à A, les n grandeurs égales à B, etc..., et en ajoutant ensuite les résultats. En la rapprochant de la supposition IV, elle montre que l'on peut multiplier par un même nombre entier les deux membres d'une inégalité entre des grandeurs. La troisième a été obtenue en supposant que dans la seconde figuraient m nombres entiers $n, p, q, \ldots$ tous égaux à n; elle veut dire que la somme de mn grandeurs égales à A est égale à la somme de m grandeurs dont chacune est égale à n fois A.

486. En vertu de la supposition V, si l'on considère la suite de grandeurs en *progression arithmétique*

$$A, \quad 2A, \quad 3A, \quad 4A, \quad \ldots,$$

obtenue en ajoutant à elle-même la grandeur déterminée non nulle A, on finit par trouver dans cette suite des termes qui dépassent telle grandeur B que l'on voudra; on peut dire encore qu'une grandeur déterminée B de l'espèce considérée tombe entre deux termes de cette suite ou coïncide avec l'un de ces termes : si deux grandeurs B, C ne comprennent entre elles aucun terme de cette suite, elles coïncident avec deux termes consécutifs ou sont comprises entre deux termes consécutifs; leur différence est au plus égale à A.

Ceci posé, essayons de graduer la grandeur (G) de manière à satisfaire aux conditions du n° 484. Choisissons arbitrairement une grandeur A_1, autre que la grandeur nulle, et faisons-lui correspondre le nombre 1 ; A_1 sera l'unité de grandeur de l'espèce (G) : une fois cette unité choisie, toute la graduation est déterminée. Aux nombres 1, 2, 3, 4, ... devront correspondre les grandeurs

$$A_1, \quad 2A_1, \quad 3A_1, \quad 4A_1, \quad \ldots$$

dont les termes finissent par dépasser telle grandeur de l'espèce (G) que l'on voudra : ainsi, au delà de chaque grandeur, il y a des grandeurs numérotées au moyen de nombres entiers.

487. Considérons maintenant une fraction de la forme $\frac{1}{q}$, où q est un nombre entier; par hypothèse on peut diviser la grandeur A_1 en q parties égales : en d'autres termes il y a une grandeur B telle que A_1 soit la somme de n grandeurs égales à B; il n'y en a qu'une, car les produits par q de deux grandeurs inégales sont des grandeurs inégales; cette grandeur B, la $q^{\text{ième}}$ partie de A_1, se représente par le symbole $\frac{A_1}{q}$. Faisons correspondre au nombre $\frac{1}{q}$ cette grandeur B; à la somme de q nombres égaux à $\frac{1}{q}$, c'est-à-dire au nombre 1, correspondra bien la grandeur A_1 ; le nombre $\frac{1}{q}$ est d'ailleurs le seul qu'on puisse faire correspondre à B pour qu'il en soit ainsi.

Si p est un nombre entier, au nombre $\frac{p}{q}$, qui est la somme de p nombres égaux à $\frac{1}{q}$, on devra faire correspondre la grandeur pB, ou $p\frac{A_1}{q}$, c'est-à-dire la somme de p grandeurs égales à $\frac{A_1}{q}$: cette somme se représente souvent par le symbole $\frac{p}{q}A_1$; c'est, par définition, le produit de A par la fraction $\frac{p}{q}$. Si la fraction $\frac{p}{q}$ était égale à un nombre entier n, c'est-à-dire si l'on avait $p = nq$, la grandeur $\frac{p}{q}A_1$ ou pB serait égale à nq fois B ou encore à la somme de n grandeurs égales à qB; elle serait égale à nA_1, elle correspondrait au nombre n égal à $\frac{p}{q}$. On reconnaît aussi aisément que si les deux fractions à termes entiers $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ sont égales, les grandeurs qui leur correspondent sont aussi égales. Il suffira, pour s'en convaincre, de se reporter aux raisonnements que l'on a faits au début du chapitre VI, quand on a introduit la notion de l'égalité de deux fractions. Ainsi à des nombres égaux correspondent des grandeurs égales et à chaque nombre rationnel a correspond une grandeur déterminée A. Cette grandeur se représente par aA_1; on dit qu'elle est le produit de A_1 par a et l'on écrit $A = aA_1$; ce nombre a est la *mesure* de A quand on prend A_1 pour unité; c'est aussi, par définition, le *rapport* de A à A_1 et l'on écrit aussi

$$\frac{A}{A_1} = a,$$

en n'attachant pas à cette égalité d'autre sens qu'à l'égalité $A = aA_1$. Il est maintenant facile de vérifier que pour les grandeurs ainsi numérotées, la condition essentielle du n° 484 est vérifiée, c'est-à-dire qu'à la somme de deux ou plusieurs nombres rationnels quelconques correspond une grandeur égale à la somme des grandeurs qui correspondent à ces nombres. Il suffit, pour cela, de supposer que tous ces nombres rationnels soient représentés par des fractions à termes entiers et de même dénominateur. Du même coup, il est prouvé qu'à deux nombres rationnels inégaux a, a' tels que l'on ait $a < a'$ correspondent deux grandeurs A, A′ telles que l'on ait $A < A'$: car le nombre a' est la somme d'un nombre a et d'un autre nombre rationnel autre que 0; la grandeur A′ est donc la somme de A et d'une autre grandeur autre que la grandeur nulle; elle est plus grande que A: la condition fondamentale est vérifiée.

488. Enfin, la graduation ainsi définie pénètre partout sans laisser de lacune : en d'autres termes, entre deux grandeurs inégales A′, A″, il y a toujours une grandeur numérotée au moyen de quelque nombre rationnel.

En effet, désignons par D la différence (non nulle) entre A′ et A″. Il existe (n° 484, V) un nombre entier q tel que l'on ait $qD > A_1$; désignons par B la $q^{\text{ième}}$ partie de A_1; on aura certainement $D > B$, car la supposition $D \leqq B$ impliquerait (n° 485) l'inégalité $qD \leqq qB$ ou $qD \leqq A_1$. Considérons dès lors la suite des grandeurs ou progression arithmétique 0, B, 2 B, 3 B, ..., numérotées au moyen des nombres $0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, \ldots$; les grandeurs A′, A″ comprennent certainement entre elles au moins un terme de cette suite, puisque leur différence est supérieure à B; le numérotage pénètre donc entre les grandeurs A′, A″.

489. Dès lors on peut faire correspondre à chaque grandeur A de l'espèce (G) un nombre rationnel ou irrationnel; un nombre rationnel si elle n'a pas échappé à la graduation que l'on vient de décrire, et dans le cas contraire, un nombre irrationnel α plus grand que tous les nombres rationnels qui correspondent aux grandeurs numérotées et moindres que A, plus petit que tous les nombres rationnels qui correspondent aux grandeurs numérotées et plus grandes que A. Ce nombre α sera encore la mesure de A quand on prend A_1 pour unité, ou le rapport de A à A_1 et l'on écrira

$$A = \alpha A_1, \qquad \frac{A}{A_1} = \alpha.$$

Réciproquement, j'admettrai qu'à chaque nombre irrationnel α correspond une grandeur A de l'espèce (G), supérieure à toutes les grandeurs mesurées par des nombres rationnels moindres que α, inférieure à toutes les grandeurs mesurées par des nombres rationnels plus grands que α. Cette grandeur, si elle existe, est certainement unique, puisque entre deux grandeurs inégales il y en a une plus grande que la première, plus petite que la seconde et qui est mesurée par un nombre rationnel. Admettre l'existence de la grandeur qui correspond au nombre irrationnel α, c'est imposer une condition de plus à la grandeur (G), condition sur le sens de laquelle on s'est suffisamment expliqué au n° 477. On a établi, dans ce même numéro, que la condition fondamentale était toujours vérifiée, lors même qu'il s'agissait de grandeurs correspondant à des nombres irrationnels. La graduation est entièrement terminée.

490. Il reste enfin à prouver que si des grandeurs correspondent à des nombres quelconques, même irrationnels, leur somme correspond à la somme de ces nombres : il suffit évidemment de considérer le cas de *deux* grandeurs A, A'; désignons par α, α' les nombres qui les mesurent; la grandeur $A + A'$ est plus grande que la somme de deux grandeurs respectivement plus petites que A, A', en particulier que la somme de deux grandeurs respectivement mesurées par des nombres rationnels plus petits que α, α' : le nombre qui mesure $A + A'$ est donc plus grand que la somme de deux nombres rationnels quelconques plus petits respectivement que α, α'. On voit de même que le nombre qui mesure $A + A'$ est plus petit que la somme de deux nombres rationnels quelconques respectivement plus grands que α, α'; le nombre qui mesure $A + A'$ est donc $\alpha + \alpha'$.

Je désignerai comme *directement mesurables* les grandeurs (G) qui jouissent des propriétés que l'on vient d'expliquer.

491. On a supposé que la graduation de la grandeur mesurable (G) avait été faite en faisant correspondre la grandeur A_1, non nulle, au nombre 1 ; supposons maintenant qu'on établisse une seconde graduation en faisant correspondre au nombre 1 une autre grandeur A'_1; comment passera-t-on d'une graduation à l'autre ?

Rappelons d'abord l'attention du lecteur sur ce fait essentiel : quand on a choisi l'unité avec laquelle on mesure la grandeur (G), la correspondance entre chaque nombre et chaque état de la grandeur est entièrement déterminée par les conditions suivantes : à des nombres égaux correspondent des grandeurs déterminées égales ; à la somme de deux nombres correspond la somme de deux grandeurs mesurées par ces deux nombres; à deux nombres inégaux a, a', tels que l'on ait $a < a'$, correspondent des grandeurs déterminées inégales A, A' telles que l'on ait $A < A'$: les deux premières conditions permettent de déterminer la grandeur qui correspond à chaque nombre rationnel ; la seconde achève cette détermination pour les nombres irrationnels.

Il suit de là que si, par un procédé quelconque, on a trouvé un mode de correspondance entre chaque nombre rationnel ou irrationnel et chaque grandeur de l'espèce (G) qui satisfasse aux trois conditions et qui, en outre, fasse correspondre au nombre 1 une grandeur déterminée A_1, ce mode de correspondance est assurément le même que celui qu'on a décrit dans le numéro précédent, en partant de la grandeur A_1 comme unité.

Ceci posé, soit λ un nombre fixe quelconque rationnel ou irrationnel, mais différent de 0.

En supposant qu'on ait pris la grandeur A_1 comme unité, on obtient un premier mode de correspondance entre chaque grandeur et chaque nombre. Imaginons un second mode de correspondance qui fasse correspondre à chaque grandeur de l'espèce (G) le produit par λ du nombre qui la mesurait dans le premier mode de graduation. En d'autres termes, dans le second mode, à chaque nombre a correspond la grandeur qui, dans le premier mode, correspondait au nombre $\frac{a}{\lambda}$. Il est clair que la seconde graduation jouit des trois propriétés qu'on vient de rappeler, puisque des nombres égaux restent égaux quand on les multiplie ou qu'on les divise par λ, que pour multiplier ou diviser par λ la somme de deux nombres il suffit de les multiplier ou de les diviser par λ, et que, enfin, on peut multiplier ou diviser par λ les deux termes d'une inégalité entre des nombres. Maintenant, dans le second mode de graduation, la grandeur qui correspond au nombre 1 est celle qui, dans le premier, correspondait au nombre $\frac{1}{\lambda}$; la grandeur qui correspond au nombre λ est celle qui, dans le premier, correspondait au nombre 1, c'est la grandeur A_1.

492. Supposons que l'on mesure la grandeur (G) en prenant pour unité la grandeur A'_1, et choisissons pour λ l'inverse du nombre qui mesure A'_1 quand on prend A_1 pour unité : le mode de graduation de la grandeur (G) qui résulte de ce qu'on prend A'_1 pour unité coïncidera avec le *second* mode de graduation que l'on vient de définir, puisque le second mode satisfait aux trois conditions et que, en outre, il fait correspondre au nombre 1 la grandeur A'_1.

En résumé, on passe de la première graduation, où A_1 est l'unité, à la seconde, où A'_1 est l'unité, en multipliant chaque nombre par un *même* facteur λ, ou en le divisant par $\frac{1}{\lambda}$: $\frac{1}{\lambda}$ est le nombre qui mesure A'_1 quand on prend A_1 pour unité, c'est le rapport $\frac{A'_1}{A_1}$; λ est le nombre qui mesure A_1 quand on prend A'_1 pour unité, c'est le rapport $\frac{A_1}{A'_1}$; en d'autres termes :

Le nombre qui mesure A quand on prend A'_1 pour unité, ou le rapport $\frac{A}{A'_1}$, est égal au produit du nombre qui mesure A quand on prend A_1 pour unité, c'est-à-dire du rapport $\frac{A}{A_1}$, par le nombre qui mesure A_1 quand on prend A_1' pour unité, c'est-à-dire par le rapport $\frac{A_1}{A_1'}$; ce qui peut s'écrire

$$\frac{A}{A_1'} = \frac{A}{A_1} \times \frac{A_1}{A_1'}.$$

Le rapport $\frac{A}{A_1'}$ est égal au quotient obtenu en divisant le nombre $\frac{A}{A_1}$ qui mesure A quand on prend A_1 pour unité par le nombre $\frac{A_1'}{A_1}$ qui mesure A_1' avec la même unité; en d'autres termes encore, le rapport de deux grandeurs mesurables déterminées est égal au rapport des deux *nombres* qui mesurent les deux grandeurs, avec une *même* unité.

Les deux théorèmes précédents sont au fond identiques; mais observons en passant que l'égalité

$$\frac{A}{A_1'} = \frac{A}{A_1} \times \frac{A_1}{A_1'},$$

où figurent des rapports de grandeurs, peut maintenant, au moyen du second énoncé, être regardée comme une égalité, d'ailleurs évidente, entre des nombres.

Il est à peine utile de dire qu'on vient de compléter la démonstration des théorèmes des numéros 326 et 327.

§ 3. — **Grandeurs proportionnelles.**

493. Considérons deux espèces de grandeurs mesurables (G), (G′) liées ensemble de façon qu'à chaque état A de la première corresponde un état A′ de la seconde; inversement à l'état A′ de la seconde correspond l'état A de la première.

Supposons la correspondance telle qu'à deux grandeurs déterminées égales de l'espèce (G) correspondent toujours deux grandeurs déterminées égales de l'espèce (G′), et qu'à la somme de deux grandeurs déterminées de l'espèce (G) corresponde toujours la somme des deux grandeurs correspondantes de l'espèce (G′); je vais démontrer que le rapport de deux grandeurs déterminées quelconques de l'espèce (G) est égal au rapport des deux grandeurs correspondantes de l'espèce (G′) (n° 359).

Observons d'abord que, en vertu des hypothèses, les grandeurs nulles d'espèces (G) et (G′) se correspondent nécessairement, puisque la grandeur nulle est la seule qui, ajoutée à une autre grandeur, ne la modifie pas.

D'ailleurs, si l'on considère deux grandeurs A, B de l'espèce (G) et les deux grandeurs correspondantes A′, B′ de l'espèce (G′), on aura $A' > B'$ si l'on a $A > B$: en effet, cette dernière hypothèse implique l'existence d'une grandeur C, non nulle, telle que l'on ait $A = B + C$; la grandeur correspondante C′ ne sera pas nulle non plus et l'on aura $A' = B' + C'$, donc $A' > B'$.

Ceci posé, mesurons la grandeur (G) en prenant pour unité une grandeur déterminée A_1 de cette espèce et la grandeur (G') en prenant pour unité la grandeur A_1' qui correspond à A_1 ; les nombres de la graduation relatifs aux divers états de (G) seront les mêmes que les nombres de la graduation relatifs aux états correspondants de (G'); il suffit pour s'en convaincre de se reporter à la façon détaillée dont on a expliqué comment la graduation devait se faire. On peut remarquer aussi que si, après avoir gradué la grandeur (G), on fait correspondre dans (G'), à chaque nombre a, la grandeur A' correspondant à la grandeur A de l'espèce (G) qui est mesurée par le nombre a, on aura réalisé un mode de graduation de (G') qui satisfait aux trois conditions du n° 491 et qui en outre fait correspondre au nombre 1 la grandeur A_1'. Il semble bien inutile d'insister sur cette assertion évidente, d'où il résulte que le mode de correspondance qu'on vient d'imaginer entre les nombres et les grandeurs (G') est bien le même que celui qu'on obtiendrait si l'on mesurait les grandeurs en prenant A_1' pour unité.

Le rapport de deux grandeurs étant égal au rapport des nombres qui les mesurent, la proposition énoncée est démontrée.

Les grandeurs (G), (G') qui satisfont aux conditions énoncées sont dites proportionnelles.

On a donné dans les chapitres X et XI de nombreux exemples de grandeurs proportionnelles, et la proposition précédente avait été démontrée dans le cas où les grandeurs comparées étaient commensurables.

§ 4. — Recherche de la commune mesure.

494. Il nous reste à répondre à une question qui s'est sans doute présentée à l'esprit du lecteur : étant données deux grandeurs A, B d'une espèce mesurable (G) telles que leur rapport $\frac{A}{B}$ soit un nombre rationnel, c'est-à-dire, d'après ce qui a été dit plus haut, telles que B ou une certaine partie aliquote de B soit contenue exactement dans A, comment trouver cette partie? En d'autres termes encore, en reprenant les façons de parler du chapitre X, si les grandeurs A, B sont *commensurables*, admettent une *commune mesure*, comment trouver cette commune mesure?

Désignons cette commune mesure par C et supposons qu'elle soit contenue exactement a fois dans A, b fois dans B, on aura

$$A = aC, \qquad B = bC,$$

le rapport $\frac{A}{B}$ sera, d'après le n° 487, égal à $\frac{a}{b}$. Des égalités précédentes on tire

$$bA = aB\,;$$

réciproquement, s'il existe deux nombres entiers a, b tels que bA soit égal à aB, on reconnaît immédiatement, en admettant (n° 484, VI) que la grandeur B puisse être divisée en b parties égales, que la $b^{\text{ième}}$ partie de B est contenue a fois dans A, en sorte qu'il y a certainement une commune mesure à A et à B. Ce résultat peut d'ailleurs s'établir sans faire intervenir la possibilité de cette division ([1]).

L'application du même algorithme (n° 134) qui nous a servi à trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres permet de trouver la plus grande commune mesure des deux grandeurs A, B, si elle existe.

Supposons $A < B$; si B est contenu exactement n fois dans A, en sorte que l'on ait

$$A = nB,$$

il est clair que toute mesure commune à A et à B sera B ou une partie aliquote de B ; B sera la plus grande commune mesure entre A et B.

1. Je dois cette observation à M. E. Lacour; elle offre assurément quelque intérêt, car elle permet de définir le rapport $\frac{A}{B}$ sans faire intervenir d'autres hypothèses que la supposition V du n° 484, en dehors des suppositions relatives à l'égalité, à l'inégalité et à l'addition. Si en effet on veut comparer la fraction à termes entiers $\frac{p}{q}$ aux grandeurs A et B, on aura nécessairement l'une des trois égalité ou inégalités qui suivent

$$qA > pB, \qquad qA = pB, \qquad qA < pB;$$

on constate sans aucune peine, en se fondant seulement sur ce qu'on peut multiplier par un nombre entier les deux membres d'une égalité ou d'une inégalité entre des grandeurs, que, si l'on se place dans l'un de ces cas, l'inégalité ou l'égalité correspondante subsiste quand on remplace p, q par les termes (entiers) d'une fraction égale à $\frac{p}{q}$; que, si l'on est dans le cas où l'on a $qA > pB$, cette inégalité subsiste quand on remplace p, q par les termes (entiers) d'une fraction plus petite que $\frac{p}{q}$, etc... D'après cela on a un moyen de *définir* le rapport $\frac{A}{B}$ comme plus grand que tous les nombres rationnels pour lesquels on a $qA > pB$, égal au nombre $\frac{p}{q}$, s'il y en a un, pour lequel on a $qA = pB$, plus petit que les nombres rationnels $\frac{p}{q}$ pour lesquels on a $qA < pB$. La seule difficulté consiste, dans le cas où il n'existe pas de nombres rationnels p et q tels que l'on ait $qA = pB$, à prouver que parmi les nombres rationnels $\frac{p}{q}$ pour lesquels on a $qA > pB$, il n'y en a pas un qui soit plus grand que les autres. S'il y en avait un, désignons-le par $\frac{p'}{q'}$; on aurait $q'A > p'B$. Il existerait alors (n° 484, V) un entier m tel que l'on eût $m(q'A - p'B) > B$, ou $mq'A > (mp' + 1)B$: or, la fraction $\frac{mp'+1}{mq'}$ est plus grande que $\frac{p'}{q'}$; celle-ci ne serait donc pas la plus grande des fractions $\frac{p}{q}$ pour lesquelles on a $qA > pB$. On prouve de même que parmi les fractions $\frac{p}{q}$ pour lesquelles on a $qA < pB$, il n'y en a pas de plus petite que toutes les autres. On définit donc bien ainsi un nombre *irrationnel* $\frac{A}{B}$. Cette définition, où n'intervient pas la possibilité de diviser B en parties égales, permet d'établir ensuite les propositions fondamentales

$$\frac{A + A'}{B} = \frac{A}{B} + \frac{A'}{B},$$
$$\frac{A}{C} = \frac{A}{B} \times \frac{B}{C},$$

qui sont le fond de toute la théorie de la mesure des grandeurs.

Si B n'est pas contenu exactement dans A, considérons la suite de grandeurs

$$B, \quad 2B, \quad 3B, \dots .$$

A tombera entre deux termes de cette suite $n_1 B$ et $(n_1 + 1) B$, et l'on pourra poser

$$A = n_1 B + B_1,$$

en désignant par B_1 une grandeur plus petite que B; inversement, cette égalité et la condition $B_1 < B$ déterminent sans ambiguïté le nombre entier n_1 et la grandeur B_1.

On reconnaît immédiatement, sur l'égalité $A = n_1 B + B_1$, que toute grandeur contenue exactement dans A et dans B est contenue exactement dans B_1, que toute grandeur contenue exactement dans B et dans B_1 est contenue exactement dans A, en sorte que les communes mesures de A et de B, s'il y en a, sont certainement les mêmes que celles de B et de B_1.

On pourra opérer sur B et B_1 comme sur A et B et, si B ne contient pas exactement B_1, le mettre sous la forme

$$B = n_2 B_1 + B_2, \qquad (B_2 < B_1) ;$$

puis mettre B_1 sous la forme

$$B_1 = n_3 B_2 + B_2, \qquad (B_3 < B_2),$$

etc... : les communes mesures entre deux termes consécutifs de la suite A, B, B_1, B_2, B_3,... sont certainement les mêmes : si la suite se termine, si l'on arrive à une grandeur B_α qui soit exactement contenue dans la précédente, en sorte qu'on ait

$$B_{\alpha-1} = n_{\alpha+1} B_\alpha,$$

il est clair que B_α sera la plus grande commune mesure entre $B_{\alpha-1}$ et B_α et, par suite, entre A, B ; toute commune mesure à A, B sera une partie aliquote de B_α.

Je vais maintenant montrer que s'il existe deux nombres entiers a et b tels que l'on ait

$$bA = aB,$$

l'opération se terminera ; on aura, en effet, alors,

$$b(n_1 B + B_1) = n_1 b B + b B_1 = aB$$

et cette égalité exige qu'on ait $n_1 b < a$, on peut donc l'écrire

$$(a - n_1 b)\, B = b B_1,$$

comme B_1 est plus petit que B, il faut que $a - n_1 b$ soit plus petit que b ; il en résulte que n_1 est le quotient de la division, au sens de la théorie des nombres entiers, de a par b, et que $a - n_1 b$, qui sera désormais désigné par b_1, est le reste de cette division ; on aura d'ailleurs

$$b_1 B = b B_1.$$

Cette égalité, en remplaçant B par $n_2 B_1 + B_2$, montrera de même que n_2 est le quotient de la division de b par b_1 et que $b - n_2 b_1 = b_2$ est le reste de cette division ; l'opération décrite correspond donc exactement à la recherche du plus grand commun diviseur de a par b et se terminera en même temps qu'elle. Elle fournira la plus grande commune mesure entre A et B.

Lorsqu'il n'y a pas de commune mesure entre A et B, l'opération peut se continuer indéfiniment, elle définit alors une suite de nombres entiers

$$n, n_1, n_2, \ldots, n_\alpha, \ldots .$$

Le lecteur, s'il est en possession de la théorie des fractions continues, reconnaîtra comment cette suite de nombres entiers permet d'avoir des valeurs approchées du rapport $\frac{A}{B}$.

CHAPITRE XIV

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES NOMBRES

§ 1. — Périodicité des restes pour certaines suites de nombres entiers.

495. Depuis l'antiquité jusqu'à nos jours, presque tous les grands mathématiciens se sont adonnés à l'étude des propriétés des nombres entiers. Il est résulté de leurs travaux toute une science, connue sous le nom de Théorie des nombres ou d'Arithmétique supérieure. Fermat, Euler, Lagrange, Legendre, Gauss, Lejeune Dirichlet, Kummer, Kronecker, M. Hermite, pour ne citer que les noms les plus illustres, ont largement contribué à l'organisation de cette science, qui compte un très grand nombre de propositions extrêmement belles par leur simplicité, et où les démonstrations, dues aux efforts des plus grands géomètres, sont arrivées souvent à un rare degré de perfection.

La théorie des nombres se trouve d'ailleurs souvent avoir les liens les plus étroits avec les théories de l'Algèbre et de l'Analyse et son étude est indispensable à celui qui veut pénétrer un peu profondément dans ces sciences. Je crois être utile à ceux des lecteurs qui veulent poursuivre leurs études mathématiques en résumant, à leur usage, les résultats les plus élémentaires et les plus importants de cette théorie. Beaucoup des pages qui suivent auraient pu être rédigées sans supposer aucune connaissance en Algèbre; mais comme elles ne seront sans doute lues que par des lecteurs ayant déjà commencé l'étude de cette science, je n'ai pas craint de faire appel à quelques notions ou propositions qui appartiennent aux éléments de l'Algèbre.

496. C'est, habituellement, au début de l'Algèbre que l'on introduit la notion de nombres affectés de signes, de nombres positifs ou négatifs. Je supposerai le lecteur familiarisé avec les règles de calcul relatives à ces nombres. En particulier, désormais, sauf avis contraire, les mots plus grand, plus petit auront le sens de l'Algèbre. On regardera comme un nombre entier tout nombre positif ou négatif dont la valeur absolue est un nombre entier.

Dans ce qui suit, il sera presque uniquement question de nombres entiers positifs ou négatifs. Aussi, toutes les fois qu'il sera question d'un nombre dont on ne dira pas expressément que c'est une fraction, il s'agira d'un nombre entier. De même, lorsqu'il s'agira de polynomes entiers par rapport à une ou plusieurs variables, on supposera essentiellement que les coefficients de ce polynome sont des nombres entiers.

Ces suppositions, qui doivent être toujours présentes à l'esprit du lecteur, seront d'ailleurs rappelées de temps en temps.

497. Un nombre entier b est un diviseur du nombre entier a si la valeur absolue de a est divisible par la valeur absolue de b; il existe alors un nombre entier positif ou négatif c, tel que l'on ait $a = bc$; a est un multiple de b.

Le plus petit multiple commun, ou le plus grand commun diviseur de deux ou plusieurs nombres est le plus petit commun multiple ou le plus grand commun diviseur de leurs valeurs absolues.

La suite des nombres entiers

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

doit maintenant être regardée comme illimitée dans les deux sens; il en est de même de la suite des multiples successifs d'un nombre entier b,

$$\ldots, -3b, -2b, -b, 0, b, 2b, 3b, \ldots,$$

dans laquelle chaque terme se déduit du précédent en lui ajoutant b; les termes de cette suite, quand on parcourt la suite de gauche à droite, vont en augmentant si b est positif, en diminuant si b est négatif.

498. Si l'on compare à cette dernière suite un nombre entier a positif ou négatif, ou bien ce nombre sera égal à quelque terme de cette suite, ou bien il tombera entre deux termes consécutifs; dans tous les cas, désignons par bq le plus grand terme de la suite qui soit égal ou inférieur à a, en sorte que a, s'il n'est pas un multiple de b, tombera entre bq et $bq + b$ ou entre bq et $bq - b$, suivant que b sera positif ou négatif; le nombre bq sera le seul terme de la suite qui soit inférieur ou égal à a, et tel que la différence $a - bq$, qui est positive ou nulle, soit moindre que la valeur absolue de b; on voit donc qu'il existe un couple (et un seul) de nombres entiers q et r, dont le second est nul ou positif et inférieur à la valeur absolue de b, tels enfin que l'on ait

$$a = bq + r.$$

Lorsque a et b sont des nombres positifs, r est le reste de la division de a par b, au sens de la théorie des nombres entiers. Il n'est guère conforme aux habitudes de conserver au mot *division* ce sens lorsqu'il s'agit de nombres positifs ou négatifs ; le mot division s'entend alors d'ordinaire au sens de la division exacte (n° 202); en outre, l'emploi du terme *diviseur* opposé à *dividende* donne lieu à des confusions, en raison même du sens spécial de ce mot qu'on vient de rappeler. Pour toutes ces raisons, il convient de changer un peu la terminologie.

Je désignerai le nombre positif r, qui vient d'être défini d'une façon précise, comme le *reste* de a par rapport au *module* b, le mot module remplaçant ici le mot diviseur dans le sens opposé à dividende.

Pour abréger le langage et l'écriture, au lieu de dire le reste de a par rapport à b, on écrira simplement reste de a (mod. b).

On vient de montrer comment le reste doit être défini quels que soient les signes de a et de b; toutefois, pour ce qui est des restes, la considération des modules négatifs n'offre aucun intérêt; si l'on a en effet

$$a = bq + r,$$

on a aussi

$$a = (-b)(-q) + r,$$

en sorte que le reste demeure le même quand on change le module de signe; aussi regardera-t-on désormais le module comme positif. Le lecteur reconnaîtra d'ailleurs sans peine que cette supposition n'est nullement impliquée dans beaucoup des théorèmes qui suivent.

Supposons que le module b soit un nombre impair; le nombre r ne sera jamais égal à $\frac{b}{2}$, il sera ou plus petit ou plus grand : suivant qu'on se trouve dans un cas ou dans l'autre, le nombre positif r ou le nombre négatif $r - b$ est ce qu'on appelle le *reste minimum* de a (mod. b); le reste minimum est positif ou négatif suivant que le nombre entier approché de la fraction $\frac{a}{b}$ à $\frac{1}{2}$ près est approché par défaut ou par excès. On reconnaît de suite qu'il est caractérisé par l'égalité et les inégalités qui suivent, où on l'a désigné par r,

$$a = bq' + r', \qquad -\frac{b}{2} < r' < \frac{b}{2}.$$

499. Revenons au reste (positif) proprement dit. Les théorèmes d'Arithmétique qui reposent uniquement sur l'égalité $a = bq + r$ et sur ce fait que, si l'on se donne les entiers a, b, il n'y a qu'un couple de nombres entiers q, r qui vérifient cette égalité, subsistent évidemment, que le nombre a soit positif ou négatif. Ainsi :

La somme ou la différence de deux multiples d'un nombre est un multiple de ce nombre. Pour que la différence entre deux nombres entiers a, b soit un multiple de c, il faut et il suffit que les restes de a et de b (mod. c) soient égaux. Pour trouver le reste (mod. a) d'une somme de nombres entiers ou d'un produit de nombres entiers, on peut remplacer chacun de ces nombres par un autre qui n'en diffère que d'un multiple de a, en particulier, par le reste de ce nombre (mod. a).

500. Ces diverses propositions, dont le lecteur se rappelle bien que la démonstration est immédiate, et qui résument ce qu'il y a d'essentiel dans le chapitre III, prennent une forme particulièrement simple quand on adopte la notation que je vais expliquer, et qui est due à Gauss.

On dit que deux nombres entiers a, b sont *congrus* suivant le module c quand leurs restes relativement à ce module sont égaux, ou, ce qui revient au même, quand la différence de ces deux nombres est un multiple de c; on écrit alors

$$a \equiv b \qquad (\text{mod. } c)$$

et l'on énonce a congru à b, module c ou *modulo* c. Une pareille égalité s'appelle une congruence suivant le module c. Deux nombres entiers sont incongrus suivant le module c si leurs restes (mod. c) sont inégaux. En particulier, dire qu'un nombre a est congru à 0 suivant le module c, ou écrire la congruence

$$a \equiv 0 \qquad (\text{mod. } c),$$

c'est dire que a est divisible par c. En se reportant à cette définition et aux théorèmes que l'on a rappelés dans le numéro précédent, on aperçoit immédiatement la vérité des propositions qui suivent :

Deux nombres congrus à un troisième sont congrus entre eux.

On peut ajouter un même nombre entier aux deux membres d'une congruence; on peut aussi en retrancher un même nombre entier; on peut en multiplier les deux membres par un même nombre entier [1]. On peut ajouter membre à membre deux ou plusieurs congruences relatives au même module; on peut multiplier membre à membre deux ou plusieurs congruences suivant le même module. On peut élever au carré, au cube, ..., les deux membres d'une congruence.

Arrêtons-nous seulement sur le cas de la multiplication : dire que les congruences

$$a \equiv a' \qquad (\text{mod. } c),$$
$$b \equiv b' \qquad (\text{mod. } c)$$

1. Pour la division, il y a des précautions à prendre sur lesquelles je reviendrai plus tard, n° 512.

entraînent la congruence

$$ab \equiv a'b' \qquad (\text{mod. } c),$$

c'est écrire sous une forme condensée ce théorème que l'on a rappelé tout à l'heure : on ne change pas le reste (mod. c) du produit de deux nombres entiers a, b, quand on substitue à ces deux nombres deux autres nombres entiers a', b' qui n'en diffèrent que par des multiples de c.

Remarquons encore que, d'après ce qu'on vient de dire, la congruence

$$a \equiv b \qquad (\text{mod. } c)$$

entraîne la congruence

$$a - b \equiv 0 \qquad (\text{mod. c}),$$

et réciproquement; ce n'est que la répétition, sous forme condensée, de la proposition fondamentale : pour que la différence entre deux nombres entiers a, b soit divisible par c, il faut et il suffit que les restes de ces deux nombres, relativement au module c, soient égaux.

En réunissant ces diverses propositions et en les appliquant autant de fois qu'il est nécessaire, on arrive à la proposition suivante :

Si l'on considère un polynome entier par rapport aux variables x, y, z, ... et dont les coefficients soient entiers, c'est-à-dire une somme algébrique de monomes tels que

$$\text{A}x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}\ldots,$$

où le coefficient A est un nombre entier et les exposants α, β, γ, ... des entiers positifs ; si dans ce polynome on remplace successivement les variables x, y, z, ... d'une part par le système de nombres entiers x_1, y_1, z_1, ..., d'autre part, par un autre système de nombres entiers x_2, y_2, z_2, ... respectivement congrus aux précédents suivant un module m, les résultats des deux substitutions seront deux nombres entiers N_1, N_2 congrus suivant le même module m.

501. Si l'on considère la suite des nombres entiers négatifs et positifs

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

et que l'on fasse correspondre à chacun de ces nombres son reste par rapport à un module entier positif a, la façon dont ces restes se suivent est évidente : ils sont les mêmes pour deux nombres entiers dont la différence est a, ils se reproduisent donc périodiquement de a en a ; ces restes pour les nombres 0, 1, 2, ..., $a-1$ sont ces mêmes nombres rangés dans le même ordre, ils se reproduisent dans le même ordre quand on passe aux nombres a, $a+1$, $a+2$, ..., $2a-1$, puis aux nombres $2a$, $2a+1$, $2a+2$, ..., $3a-1$, etc. ; c'étaient encore les mêmes nombres dans le même ordre pour les nombres négatifs $-a$, $-a+1$, ..., -2, -1 qui précèdent zéro, etc.

De même, si dans un polynome quelconque entier par rapport à la variable x, et à coefficients entiers,

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m,$$

on remplace x par deux nombres entiers dont la différence soit a, les deux résultats seront congrus suivant le module a; si donc, dans ce polynome, on remplace x par la suite des nombres entiers négatifs et positifs

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

et qu'on prenne les restes par rapport au module a des résultats, ces restes se reproduiront encore périodiquement de a en a. La période des restes pourra d'ailleurs se décomposer en périodes plus courtes.

Si l'on considère par exemple le polynome x^2+x+1, en mettant à la place de x successivement les nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, et en calculant les restes par rapport au module 7, on trouve successivement 1, 3, 0, 6, 0, 3; la substitution des nombres 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 donnerait des nombres respectivement congrus à ceux-là, etc.

L'étude de ces suites périodiques de restes pour des cas très simples, en particulier pour les polynomes ax, $ax+a'$, x^2, va nous conduire à des résultats très importants.

Observons d'ailleurs que, jusqu'ici, nous n'avons invoqué que les propositions fondamentales du chapitre III, résumées au n° 499. Il est remarquable que l'étude que nous venons d'indiquer puisse nous conduire très simplement aux propositions fondamentales du chapitre IV, qui sont beaucoup plus cachées.

502. Supposons d'abord, quoique cela ne soit pas nécessaire, que les deux nombres entiers a et b soient positifs, et considérons la suite des multiples de a

$$\ldots, -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, \ldots$$

ou, si l'on veut, la suite des valeurs que l'on obtient en remplaçant, dans ax, x par la suite des nombres entiers; si l'on prend les restes des termes de cette suite par rapport au module b, ces restes se reproduiront périodiquement de b en b; il en est ainsi en particulier du reste 0, qui correspondra certainement aux nombres ba, $2ba$, ...; il peut arriver que parmi les nombres

$$a, 2a, 3a, \ldots, (b-1)a$$

il y en ait un qui donne, relativement au module b, le reste 0; soit, en général, h le plus petit nombre entier positif tel que ha soit divisible par b; ha sera le plus petit multiple commun de a et de b; parmi les multiples positifs de a inférieurs à ha, savoir :

$$a, 2a, 3a, \ldots, (h-1)a,$$

il n'y en a, par hypothèse, aucun qui soit divisible par b; il en résulte que deux multiples de a obtenus en multipliant a par deux nombres dont la différence est moindre que h ne peuvent donner le même reste (mod. b); car s'ils fournissaient le même reste, leur différence serait divisible par b, et cette différence s'obtiendrait en multipliant a par un nombre moindre que h.

D'un autre côté, deux multiples de a obtenus en multipliant a par deux nombres dont la différence est h donnent le même reste (mod. b).

Si donc on considère la suite indéfinie des multiples de a

$$\ldots\ -2a,\ -a,\ 0,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ (h-1)a,\ ha,\ (h+1)a,\ \ldots$$

et si l'on divise les termes par b, la suite des restes (mod. b) sera périodique, la période contiendra h termes exactement, et h restes consécutifs sont toujours distincts; on peut dire encore que deux termes αa, βa de cette suite sont congrus ou non (mod. b), suivant que α et β sont congrus ou non (mod. h). En particulier, si l'on ne s'occupe que des multiples positifs, il est clair que les seuls multiples de a qui donneront un reste nul seront les termes de la suite $0, ha, 2ha, 3ha, \ldots$.

Nous rencontrons donc ce théorème :

Tout multiple commun des nombres a, b est un multiple de leur plus petit commun multiple ha.

Puisque ba fournit un reste nul (mod. b), il faut, d'après ce qu'on vient de dire, que b soit un multiple de h.

Désignons par δ, k les quotients des divisions de b par h et de ha par b, les égalités

$$b = h\delta, \qquad ha = kb$$

entraînent la suivante :

$$a = k\delta.$$

Si donc a et b sont premiers entre eux, il faut que δ soit égal à 1 et que h soit égal à b. Donc, les seuls multiples communs de deux nombres premiers entre eux sont des multiples du produit de ces deux nombres. En d'autres termes encore, si un nombre divise un produit de deux facteurs et qu'il soit premier avec l'un d'eux, il divise l'autre.

Si b est premier à a, la période des restes contient b termes; les termes qui fournissent des restes nuls sont d'ailleurs connus : ce sont les multiples de ba. Les b multiples consécutifs de a

$$0,\ a,\ 2a,\ \ldots.,\ (b-1)a$$

fournissent b restes distincts qui ne peuvent être que les nombres 0, 1, 2, ..., $b-1$ dans un certain ordre : le reste 0 est fourni par le terme 0 ; les termes a, $2a$, $3a$, ..., $(b-1)a$ fourniront comme restes, dans un certain ordre, les nombres $1, 2, \ldots, b-1$.

Cette proposition s'établit d'ailleurs très aisément quand on admet les théorèmes fondamentaux sur la divisibilité, que l'on vient de démontrer à nouveau [1], par une voie qui montre bien le rôle que joue la périodicité.

503. Revenons au cas où la période des restes contient h termes. Soit alors d le plus grand commun diviseur de a et de b, $\frac{a}{d}$ et $\frac{b}{d}$ sont premiers entre eux; mais si l'on considère les deux suites

$$0,\ a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,$$
$$0,\ \frac{a}{d},\ 2\frac{a}{d},\ 3\frac{a}{d},\ \ldots$$

et qu'on prenne les restes (mod. b) des termes de la première suite, les restes $\left(\text{mod. } \frac{b}{d}\right)$ des termes de la seconde, il est clair que l'on formera ainsi deux suites de restes et que chaque terme de la première suite s'obtiendra en multipliant par d le terme correspondant de la seconde ; donc la périodicité des deux suites de restes est la même. Or la période pour la première suite contient h termes, par hypothèse; la seconde en contient $\frac{b}{d}$, puisque $\frac{b}{d}$ est premier à $\frac{a}{d}$; on aura donc

$$h = \frac{b}{d}, \qquad ha = \frac{ab}{d}$$

et l'on retrouve ainsi le théorème sur la composition du plus petit commun multiple de deux nombres. En outre, on voit que la période de la seconde suite de restes est fournie par les nombres

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{b}{d} - 1$$

rangés dans un certain ordre ; la période de la première suite de restes sera donc composée des nombres

$$0,\ d,\ 2d,\ \ldots,\ \left(\frac{b}{d} - 1\right)d$$

rangés dans un ordre convenable. En particulier, les multiples de a,

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ \left(\frac{b}{d} - 1\right)a,$$

fourniront, relativement au module b, les restes

$$d,\ 2d,\ 3d,\ \ldots,\ \left(\frac{b}{d} - 1\right)d$$

rangés dans un ordre convenable.

1. Ce mode de démonstration est dû à Poinsot (*Journal de Liouville*, 1re série, t. X).

504. Les restes (mod. b) des termes de la suite

$$\ldots, -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, \ldots$$

se reproduisent périodiquement ; il en sera de même évidemment des restes des termes de la suite

$$\ldots, -3a+a', -2a+a', -a+a', a', a+a', 2a+a', \ldots,$$

obtenus en ajoutant à chaque terme de la première suite le nombre entier a' ; il est clair, en effet, que si deux nombres de l'une des suites sont congrus suivant le module b, il en est de même des termes correspondants de l'autre suite.

Si donc on désigne, comme précédemment, par h le plus petit nombre entier positif tel que son produit par a soit divisible par b, la période des restes, pour la seconde suite, se composera de h termes comme pour la première : toutefois, ici, on ne peut pas affirmer que l'un de ces restes soit nul.

En désignant par x, y deux nombres entiers quelconques, les deux nombres $ax+a'$, $ay+a'$ seront congrus ou non (mod. b), selon que x et y seront congrus ou non (mod. h).

En particulier, si a et b sont premiers entre eux, la période des restes aura b termes, tous distincts : elle ne pourra être formée, ici encore, que des nombres $0, 1, 2, \ldots, b-1$. Les deux nombres $ax+a'$, $ay+a'$ seront congrus ou incongrus suivant le module b, selon que les nombres x, y seront congrus ou non suivant ce même module.

505. On appelle système complet de nombres incongrus suivant le module b un système quelconque de b nombres dont deux quelconques sont incongrus suivant le module b ; tel est, par exemple, le système de nombres $0, 1, 2, \ldots, b-1$; d'ailleurs, comme un nombre quelconque est congru à l'un de ces nombres $0, 1, 2, \ldots, b-1$, il est clair qu'il ne peut pas y avoir plus de b nombres incongrus deux à deux suivant le module b. Un système de b nombres entiers consécutifs est un système complet de nombres incongrus (mod. b).

La définition qu'on vient de donner, jointe aux remarques qui la précèdent immédiatement, conduit à la proposition que voici :

En supposant que a, a', b soient des nombres entiers et que a, b soient premiers entre eux, les b nombres que l'on obtient en remplaçant, dans l'expression $ax+a'$, x par les éléments d'un système complet de nombres incongrus (mod. b) forment eux-mêmes un système complet de nombres incongrus (mod. b). Parmi ces éléments, un seul est nul. Ainsi :

En désignant par a, b des nombres entiers premiers entre eux et par a' un nombre entier quelconque, il y a des valeurs entières qui, attribuées à x, donnent pour $ax+a'$ un résultat congru à zéro (mod. b). Toutes ces valeurs sont congrues entre elles (mod. b); en d'autres termes, si x_0 est l'une d'elles, on les obtiendra toutes en donnant à x les valeurs comprises dans la formule x_0+mb, m étant un nombre entier quelconque.

§ 2. — Congruences à une inconnue.

506. Une congruence peut être l'analogue d'une équation, en ce sens qu'elle n'est vérifiée que par certaines valeurs attribuées à une ou plusieurs lettres, qu'on regarde comme des inconnues. On n'a pas donné à ces congruences de nom spécial. Bornons-nous aux congruences à une seule inconnue.

Une telle congruence sera, en général, de la forme

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n \equiv 0 \qquad (\text{mod.}\, b),$$

A_0, A_1, ..., A_n étant des nombres entiers donnés, ainsi que le module b. Une racine ou solution de cette congruence sera une valeur entière x_0 attribuée à x telle que le nombre $A_0x_0^n + A_1x_0^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x_0 + A_n$ soit divisible par b. Il résulte évidemment du n° 500 que si x_0 est une racine de cette congruence, tous les nombres congrus à x_0 (mod. b) seront aussi des racines de cette même congruence ; ces racines ne sont pas regardées comme distinctes. Deux racines distinctes de la congruence doivent être incongrues (mod. b). On trouvera toutes les racines distinctes en prenant un système de nombres incongrus (mod. b), par exemple $0, 1, 2, \ldots, b-1$, et en cherchant ceux de ces nombres qui vérifient la congruence.

507. Deux congruences sont équivalentes lorsqu'elles ont les mêmes racines. Il est clair que si, dans la congruence précédente, on remplace les coefficients A_0, A_1, ..., A_n par des nombres qui leur soient respectivement congrus (mod. b), on obtiendra une congruence équivalente. En particulier on pourra remplacer les nombres A_0, A_1, ..., A_n par leurs restes respectifs (mod. b). On pourra les ramener à être tous positifs et moindres que la valeur absolue de b; on reconnaît aussi bien qu'on peut les ramener à être, en valeur absolue, au plus égaux à $\frac{b}{2}$: en effet, si b est impair, les b nombres consécutifs

$$-\frac{b-1}{2},\ -\frac{b-1}{2}+1,\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{b-1}{2}-1,\ \frac{b-1}{2}$$

forment un système complet de nombres incongrus (mod. b); chacun des nombres $A_0, A_1, \ldots, A_n$ se trouve donc être congru (mod. b) à l'un d'entre eux, qui n'est autre chose que son reste minimum (mod. b). Si b est pair, la suite des b nombres successifs

$$-\frac{b}{2}+1,\ -\frac{b}{2}+2,\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{b}{2}$$

formera encore un système complet de nombres incongrus.

On voit aussi qu'on peut supprimer tous les termes de la congruence dont les coefficients sont divisibles par b. Le *degré* de la congruence est le degré du terme le plus élevé dont le coefficient ne soit pas divisible par b.

On voit encore qu'on déduit d'une congruence une congruence équivalente en multipliant les deux membres par un même nombre premier au module. En d'autres termes, si l'on désigne par α un entier premier à b, la congruence

$$\alpha A_0 x^n + \alpha A_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha A_{n-1} x + \alpha A_n \equiv 0 \pmod{b}$$

sera équivalente à la proposée. En effet, il est clair que toute racine de la proposée satisfera à celle qu'on vient d'écrire; réciproquement, toute racine de cette dernière vérifiera la première, car si x_0 est une telle racine, le nombre $\alpha(A_0 x_0^n + A_1 x_0^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x_0 + A_n)$ devra être divisible par b, et comme b est premier à α, b devra diviser le nombre $A_0 x_0^n + A_1 x_0^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x_0 + A_n$; en d'autres termes, on aura

$$A_0 x_0^n + A_1 x_0^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x_0 + A_n \equiv 0 \pmod{b},$$

ce qu'il fallait démontrer. De même, si tous les coefficients $A_0, \ldots, A_n$ sont divisibles par un même nombre α, *premier à* b, on pourra supprimer partout le facteur α, et la nouvelle congruence ainsi obtenue sera équivalente à la précédente. Cette réciproque est, en effet, impliquée par le théorème direct. En particulier, on pourra changer les signes de tous les termes d'une congruence.

508. Nous avons, dans ce qui précède, tout ce qui est nécessaire pour traiter des congruences du premier degré à une inconnue.

Une pareille congruence est de la forme

$$ax + a' \equiv 0 \pmod{b},$$

a, b, a' étant des nombres entiers donnés. Supposons d'abord que a et b soient premiers entre eux. Nous savons qu'une pareille congruence admet une racine et une seule. On la trouvera en mettant successivement à la place de x les éléments d'un système complet de nombres incongrus suivant le module b : il y en aura certainement un et un seul qui vérifiera la congruence; on s'arrêtera dès qu'on l'aura trouvé. Ces essais se font très rapidement si le nombre b n'est pas très grand; on ramènera a à être au plus égal à $\frac{b}{2}$, et on essaiera b nombres consécutifs; après en avoir essayé un, on ajoutera a au résultat de la substitution, ce qui reviendra à essayer le suivant; on ramènera d'ailleurs toujours, en retranchant, s'il y a lieu, des multiples de b, les résultats de la substitution à être positifs et plus petits que b, ou, si l'on préfère, à être au plus égaux à $\frac{b}{2}$, en valeur absolue.

Soit, par exemple, à résoudre la congruence

$$21x + 5 \equiv 0 \pmod{29};$$

elle équivaut à la congruence

$$-8x + 5 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 29),$$

puisque 21 est congru à -8 (mod. 29) ; elle équivaut encore à la congruence

$$8x - 5 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 29).$$

On remplacera successivement dans le premier membre x par $0, 1, 2, \ldots, 28$: en appliquant la règle précédente, c'est-à-dire en ajoutant 8 après chaque essai et en réduisant les résultats, s'il y a lieu, on trouve successivement les nombres

$$-5, 3, 11, 19, 27 \equiv -2, 6, 14, 22 \equiv -7, 1, 9, 17, 25 \equiv -4, 4, 12, 20, 28 \equiv -1, 7, 15, 23 \equiv -6, 2, 10, 18, 26 \equiv -3, 5, 13, 21 ; 29 \equiv 0.$$

Le dernier nombre provient de la substitution de $26 \equiv -3$ (mod. 29). Par conséquent -3 est une solution de la congruence proposée : toutes les racines s'obtiendront en ajoutant à -3 au multiple de 29.

509. On remarquera que la recherche d'une racine x de la congruence proposée

$$21x + 5 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 29)$$

équivaut à la recherche d'un système de nombres entiers x, y qui vérifient l'équation

$$21x + 5 = 29\,y :$$

à chaque racine de la congruence correspond une solution x_0, y_0 de l'équation ; inversement, si x_0, y_0 est une solution de l'équation, x_0 est une racine de la congruence.

Les diverses racines de la congruence sont données par la formule $-3 + 29m$, m étant un nombre entier quelconque ; à chacune de ces racines correspond une valeur de y déterminée par l'équation

$$21(-3 + 29m) + 5 = 29y$$

ou

$$-58 + 21 \times 29m = 29y,$$

d'où

$$y = -2 + 21m ;$$

toutes les solutions de l'équation

$$21x + 29y + 5 = 0,$$

en nombres entiers, sont donc données par les formules

$$x = -3 + 29m, \qquad y = -2 + 21m.$$

On voit de suite que les solutions en nombres entiers de l'équation

$$21x + 29y + 5 = 0,$$

qui se déduit de la précédente en changeant y en $-y$, sont de même données par les formules

$$x = -3 + 29m, \quad y = 2 - 21m,$$

où m est un entier quelconque.

Ces résultats se généralisent immédiatement, et l'on arrive aux conclusions suivantes.

Soit

$$ax + by + c = 0$$

une équation du premier degré à deux inconnues et dans laquelle les coefficients a, b, c sont des nombres entiers : si les coefficients a, b sont premiers entre eux, on peut satisfaire à cette équation en donnant à x, y des valeurs entières : si x_0, y_0 est une solution en nombres entiers, toutes les solutions seront données par les formules

$$x = x_0 + mb, \quad y = y_0 - ma,$$

où m est un entier quelconque.

En supposant toujours a et b premiers entre eux, la résolution de la congruence

$$ax \equiv 1 \pmod{b}$$

offre un intérêt particulier : si on en connaît une racine $x = a_0$, on en déduira immédiatement une racine de la congruence

$$ax + a' \equiv 0 \pmod{b},$$

quel que soit le nombre entier a' ; en effet a_0 est certainement premier à b; car, si ces deux nombres avaient un diviseur commun, ce diviseur diviserait $aa_0 - 1$, qui est un multiple de b; il devrait donc diviser 1, il ne peut être que un. Par conséquent (nº 507) la congruence précédente est équivalente à la congruence

$$aa_0x + a'a_0 \equiv 0 \pmod{b}$$

ou à la congruence

$$x + a'a_0 \equiv 0 \pmod{b},$$

puisque a_0a est congru à 1 (mod. b); or cette dernière congruence se résout immédiatement et l'on en tire

$$x \equiv -a'a_0 \pmod{b}.$$

510. Revenons maintenant à la congruence

$$ax + a' \equiv 0 \pmod{b},$$

en ne supposant plus les nombres a et b premiers entre eux; soit d leur plus grand commun diviseur.

On veut trouver un nombre entier x tel que $ax + a'$ soit un multiple de b : s'il en est ainsi, $ax + a'$ sera un multiple de d ; or d divise a et par suite ax; il devra donc diviser a'. D'où cette première conclusion : si a' n'est pas divisible par d, le problème est impossible. Supposons donc a' divisible par d, et soient, pour abréger,

$$a = a_1 d, \qquad b = b_1 d, \qquad a' = a'_1 d,$$

a_1, b_1, a'_1 étant des nombres entiers, a_1 et b_1 étant premiers entre eux. On veut trouver un nombre entier x tel que le produit $d(a_1 x + a'_1)$ soit divisible par db_1; il faut et il suffit, pour cela, que le nombre $a_1 x + a'_1$ soit divisible par b_1, c'est-à-dire que x soit une racine de la congruence du premier degré

$$a_1 x + a'_1 \equiv 0 \pmod{b_1},$$

dans laquelle a_1 et b_1 sont premiers entre eux; cette congruence admet des solutions : si x_0 est une solution, toutes les solutions de cette congruence, et par suite de la congruence proposée, seront données par la formule.

$$x = x_0 + mb_1,$$

où m est un nombre entier quelconque.

Si l'on donne à m la suite des valeurs entières, l'expression $x_0 + mb_1$ prendra une suite de valeurs entières, les restes, relativement au module b, se reproduiront périodiquement de d en d (n° 503), les restes différents correspondront à d valeurs attribuées à m et incongrues entre elles suivant le module d, par exemple, aux valeurs, 0, 1, 2, ..., $d - 1$; par conséquent, si les nombres entiers a, b admettent d comme plus grand commun diviseur, la congruence

$$ax + a' \equiv 0 \pmod{b}$$

n'admettra pas de solution dans le cas où a' n'est pas divisible par d ; si a' est divisible par d, elle admettra d solutions, incongrues suivant le module b, à savoir, en désignant par x_0 l'une de ces solutions,

$$x_0, \quad x_0 + \frac{b}{d}, \quad x_0 + 2\frac{b}{d}, \ldots, \quad x_0 + (d-1)\frac{b}{d}.$$

On déduit de là les conclusions suivantes :

L'équation du premier degré à deux inconnues x, y et à coefficients entiers a, b, c,

$$ax + by + c = 0,$$

n'admet pas de solutions si le nombre c n'est pas un multiple du plus grand commun diviseur d de a, b ; si c est divisible par d, elle admet des solutions : si x_0, y_0 forment une de ces solutions, celles-ci seront toutes données par les formules

$$x = x_0 + m\frac{b}{d}, \qquad y = y_0 - m\frac{a}{d},$$

où m est un entier quelconque.

511. Il résulte de là que si d est le plus grand commun diviseur des deux entiers a, b, il existe deux entiers x, y, positifs ou négatifs, tels que l'on ait

$$ax + by = d.$$

C'est là une proposition importante d'Arithmétique. Elle résulte très facilement, comme on va le voir, de l'algorithme d'Euclide; elle aurait trouvé sa place dans le chapitre IV, si l'on n'avait pas craint, alors, d'employer des nombres négatifs.

Si l'on cherche, en effet, le plus grand commun diviseur des nombres a, b, on est amené à une suite d'égalités telles que

$$\begin{aligned} a &= bq + r, \\ b &= rq_1 + r_1, \\ r &= r_1q_2 + r_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, \end{aligned}$$

qui expriment les résultats des divisions successives que l'on effectue.

Supposons que r_n soit le plus grand commun diviseur de a et de b.

On tire de la première égalité

$$r = a - bq;$$

il existe donc deux nombres $x_0 = 1$, $y_0 = -q$ tels que l'on ait

$$r = ax_0 + by_0.$$

De la seconde égalité on tire

$$r_1 = b - rq_1,$$

et en remplaçant dans le second membre r par $ax_0 + by_0$, on voit qu'il existe deux entiers

$$x_1 = -q_1x_0, \quad y_1 = 1 - q_1y_0$$

tels que l'on ait

$$r_1 = ax_2 + by_1.$$

Le raisonnement se continue évidemment, et, finalement on voit qu'il existe deux entiers x_n, y_n tels que l'on ait

$$ax_n + by_n = r_n:$$

c'est ce qu'il fallait démontrer. En particulier, si a, b sont premiers entre eux, on voit ainsi qu'il existe deux entiers x, y tels que l'on ait

$$ax + by = 1,$$

et l'on a, dans ce qui précède, un moyen régulier pour trouver ces deux nombres.

Afin de montrer l'utilité du théorème qu'on vient d'établir, je vais en tirer une démonstration nouvelle de la proposition fondamentale du n° 142 : « Si a, b sont premiers entre eux, les diviseurs communs de a et de c sont les mêmes que ceux de a et de bc. »

Il suffit, comme on l'a déjà fait observer, de montrer que les diviseurs communs de a et de bc divisent c : or, ayant déterminé les nombres x et y tels que l'on ait

$$ax + by = 1,$$

on obtient, en multipliant les deux membres par c,

$$acx + bcy = c,$$

et il est clair que tout nombre qui divise a et bc, divisant les deux parties du premier nombre, divise aussi le second.

512. Observons, en passant, qu'un raisonnement semblable à celui qu'on a développé dans l'avant-dernier numéro permet de compléter les propositions du n° 500.

Soient A, B deux nombres entiers tels que l'on ait

$$A \equiv B \quad (\text{mod. } b).$$

Supposons que les deux nombres A, B admettent un diviseur commun a, et soit d le plus grand commun diviseur de a et de b.

Posons pour abréger :

$$A = A_1 a, \qquad B = B_1 a, \qquad a = a_1 d, \qquad b = b_1 d,$$

A_1, B_1, a_1, b_1 étant des nombres entiers dont les deux derniers sont premiers entre eux. Par hypothèse, $A - B = a_1 d(A_1 - B_1)$ est un multiple de $b = b_1 d$; par conséquent $a_1(A_1 - B_1)$ est un multiple de b_1 et, comme b_1 est premier à a_1, il faut qu'il divise $A_1 - B_1$; par conséquent, la congruence

$$A \equiv B \quad (\text{mod. } b)$$

entraîne la congruence

$$\frac{A}{a} \equiv \frac{B}{a} \quad \left(\text{mod. } \frac{b}{d}\right).$$

En particulier, si la division peut se faire exactement, on peut diviser par un nombre premier au module les deux termes d'une congruence.

§ 3. — Nouvelles conséquences de la périodicité des restes. Théorème de Fermat.

513. Développons maintenant d'autres conséquences de la périodicité des restes, relatifs au module b, de la suite des multiples

$$\ldots, \quad -3a, \quad -2a, \quad -a, \quad 0, \quad a, \quad 2a, \quad 3a, \quad \ldots$$

d'un nombre entier a.

Supposons a et b positifs et $a < b$.

Imaginons un cercle dont la circonférence soit divisée en b parties égales et supposons que, en parcourant la circonférence dans un sens déterminé, on ait placé, sur les points de division, les numéros $0, 1, 2, \ldots, b-1$, puis que, en marchant dans le même sens, l'on joigne ces points de division de a en a par des droites, en partant du point marqué 0; on joindra ainsi successivement les points dont les numéros sont respectivement

$$0, \quad a, \quad 2a, \quad 3a, \quad \ldots,$$

tant que ces nombres sont inférieurs à b; mais dès qu'ils deviennent égaux ou supérieurs à b, les termes de cette suite doivent être remplacés par leurs restes (mod. b).

D'après les résultats qui précèdent, on voit que le premier point par lequel, en continuant de cette façon, on passera une seconde fois, sera le point 0; en d'autres termes, c'est au point 0 que la ligne brisée, décrite de cette façon, se *ferme*.

Si a est premier à b, les restes successifs seront, dans un certain ordre, les nombres $0, 1, 2, \ldots, b-1$; 0 sera le premier de ces restes; avant de retrouver le reste 0, il faudra avoir trouvé les restes $1, 2, \ldots, b-1$; on passera donc par tous les points marqués avant de fermer la ligne brisée; quand elle se fermera, elle aura b côtés.

Au contraire, si a n'est pas premier à b, les restes successifs seront, dans un certain ordre, les nombres $0, d, 2d, \ldots, b-d$, il y en aura $\frac{b}{d}$ de différents; le premier sera 0 et on retombera sur le reste 0 ou sur le point marqué 0, dès que l'on aura passé par tous les points $0, d, 2d, \ldots, b-d$; la ligne brisée, quand elle se fermera, aura $\frac{b}{d}$ côtés.

Les figures fermées que l'on forme ainsi sont étudiées, en Géométrie, sous le nom de polygones réguliers (convexes ou concaves) : on forme celles qui ont b côtés en divisant la circonférence du cercle en b parties égales et en joignant les points de division de a en a, a étant un nombre premier à b et inférieur à b ; il est clair qu'on obtient la même figure en joignant les points de division de a en a ou de $b-a$ en $b-a$; d'ailleurs, si a est premier à b, il en est de même de $b-a$ et inversement ; le nombre des figures distinctes que l'on pourra former ainsi est donc la moitié du nombre de nombres premiers à b et inférieurs à b.

514. *Théorème de Fermat.* — Soit p un nombre premier absolu et a un entier non divisible par p, a sera premier à p; par conséquent, les nombres $a, 2a, \ldots, (p-1)a$ seront, dans leur ensemble, congrus (mod. p) aux nombres $1, 2, \ldots, p-1$; donc, relativement au même module, le produit

$$a \times 2a \times 3a \times \ldots \times (p-1)a$$

est congru au produit $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (p-1)$; la différence entre ces deux nombres, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &a^{p-1} \times 1.2.3\ldots(p-1) - 1.2.3\ldots(p-1) \\ &= (a^{p-1} - 1) \times 1.2.3\ldots(p-1), \end{aligned}$$

est divisible par p, mais le nombre premier p est premier avec chacun des facteurs $1, 2, 3, \ldots, p-1$ et, devant diviser le produit de ces nombres par $a^{p-1}-1$, doit diviser ce dernier facteur; donc:

Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p, $a^{p-1}-1$ est divisible par p; en d'autres termes encore, on a

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } p).$$

Par exemple, $2^{12} - 1 = 4095$ est divisible par 13 ; le quotient est 315.

Cette proposition, qui est capitale dans la théorie des nombres, est due à Fermat.

On peut l'énoncer un peu autrement ; la congruence

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } p),$$

qui a lieu pourvu que a ne soit pas divisible par le nombre premier p, entraîne la suivante :

$$a^{p} - a \equiv 0 \quad (\text{mod. } p).$$

Or celle-ci est vraie quand a est divisible par p; elle est donc vraie quel que soit l'entier a.

515. *Généralisation.* — Euler a généralisé le théorème de Fermat; la démonstration de la proposition à laquelle il est parvenu est toute pareille à la précédente.

Supposons a et b premiers entre eux. Si α est un entier quelconque, on sait que le plus grand commun diviseur de αa et de b est le même que celui de b et du reste de αa par rapport au module b. C'est aussi le même (n° 142) que le plus grand commun diviseur de α et de b; par conséquent, le reste de αa, par rapport au module b, sera premier à b si α est premier à b et réciproquement.

Désignons pour un instant par k le nombre de ceux des termes de la suite $1, 2, \ldots, b-1$ qui sont premiers à b et désignons ces termes par $r_1, r_2, \ldots, r_k$.

Si on considère la suite a, $2a$, ..., $(b-1)a$, les seuls termes de cette suite qui, relativement au module b, fournissent des termes premiers à b sont les nombres r_1a, r_2a, ..., r_ka ; ces termes fournissent d'ailleurs comme restes des nombres distincts, inférieurs à b et premiers à b, c'est-à-dire les nombres r_1, r_2, ..., r_k pris dans un certain ordre. Dans leur ensemble, les nombres $r_1a, r_2a, \dots, r_ka$ sont donc congrus (mod. b) aux nombres $r_1, r_2, \dots, r_k$; il en résulte que $(a^k-1)r_1r_2\dots r_k$ est divisible par b ; mais ce dernier nombre étant premier à r_1, r_2, ..., r_k, il faut que l'on ait

$$a^k - 1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } b).$$

C'est dans cette congruence que consiste le théorème d'Euler : il contient le théorème de Fermat, car si b est un nombre premier, k est égal à $b-1$.

On donnera plus loin un procédé pour calculer le nombre k, connaissant b (n° 527). Observons seulement ici que le théorème de Fermat généralisé fournit, si l'on sait calculer k, un moyen de résoudre la congruence du premier degré

$$ax + a' \equiv 0 \quad (\text{mod. } b),$$

en supposant a et b premiers entre eux; il suffira, en effet, de prendre

$$x \equiv -a'a^{k-1} \quad (\text{mod. } b).$$

En particulier, si b était premier, on pourrait prendre, en vertu du théorème de Fermat lui-même,

$$x \equiv -a'a^{b-2} \quad (\text{mod. } b).$$

§ 4. — Nouvelle démonstration du théorème de Fermat. Théorème de Wilson. Restes quadratiques.

516. Revenons au théorème de Fermat pour en présenter la démonstration sous une autre forme, qui va nous conduire à des conséquences nouvelles et importantes.

Soit p un nombre premier plus grand que 2 et a l'un des nombres $1, 2, \dots, p-1$; soit D un nombre quelconque, non divisible par p.

La congruence

$$ax \equiv \mathrm{D} \quad (\text{mod.} p)$$

admet une racine, puisque p est premier à a ; cette racine, ne pouvant être 0, est congrue (mod. p) à l'un des nombres $1, 2, \dots, p-1$; il y a donc parmi ces nombres un nombre a' et un seul tel que l'on ait

$$aa' \equiv \mathrm{D} \quad (\text{mod. } p).$$

Ce nombre a' peut être égal au nombre a ou différent; s'il lui est égal, c'est que l'on a

$$a^2 \equiv D \pmod{p}$$

et que, par conséquent, la congruence du second degré

$$x^2 \equiv D \pmod{p}$$

admet une solution a.

Ceci posé, deux cas peuvent se présenter.

1° Le nombre D est tel que la congruence

$$x^2 \equiv D \pmod{p}$$

ne puisse pas être vérifiée; s'il en est ainsi, les nombres a, a' pris parmi les nombres $1, 2, \ldots, p-1$ sont certainement différents et ces $p-1$ derniers nombres peuvent être séparés en $\frac{p-1}{2}$ couples tels que le produit de deux nombres pris dans un même couple soit toujours congru à D (mod. p); dans ce cas, on a

$$1.2.3\ldots(p-1) \equiv D^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p},$$

comme on le voit, en imaginant que dans le premier membre on ait accouplé les facteurs de façon que le produit de deux facteurs soit congru à D.

2° Le nombre D est tel que la congruence

$$x^2 \equiv D \pmod{p}$$

admette une racine; le reste de cette racine, par rapport au module p, sera lui-même une racine; il y aura donc une racine b qui sera l'un des nombres $1, 2, \ldots, p-1$; s'il en est ainsi, la congruence proposée équivaudra à la suivante :

$$x^2 - b^2 = (x-b)(x+b) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Pour que le produit $(x-b)(x+b)$ soit divisible par le nombre premier p, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit divisible par p, c'est-à-dire que toutes les racines de la congruence seront congrues (mod. p) soit à b, soit à $-b$; parmi les nombres $1, 2, \ldots, p-1$, il n'y a que le nombre $p-b$ qui soit congru à $-b$; par conséquent, les $p-1$ nombres $1, 2, \ldots, p-1$, si l'on met à part les deux nombres b, $p-b$, se sépareront en $\frac{p-3}{2}$ couples tels que, dans chaque couple, le produit des deux nombres associés soit congru à D (mod. p) : or on a

$$b(p-b) \equiv -b^2 \equiv -D \pmod{p}:$$

on aura donc, dans ce cas,

$$1.2.3\ldots(p-1) \equiv -D^{\frac{p-3}{2}} \times D \pmod{p},$$

ou

$$1.2.3...(p-1) \equiv -D^{\frac{p-1}{2}} \quad (\text{mod.}\, p).$$

On est, d'ailleurs, certainement dans ce cas pour $D = 1$, car la congruence

$$x^2 \equiv 1 \quad (\text{mod.}\, p)$$

admet les racines 1 et $p-1$; on a donc toujours

$$1.2.3...(p-1) \equiv -1 \quad (\text{mod.}\, p).$$

Ce dernier résultat subsiste même si p est égal à 2. Donc :

Si p est un nombre premier, le nombre

$$1.2.3...(p-1)+1$$

est divisible par p.

Par exemple, le nombre $1.2.3.4+1=25$ est divisible par 5.

Le théorème que l'on vient d'énoncer est connu sous le nom de théorème de Wilson. Il offre ceci d'intéressant qu'il donne un moyen, plus théorique d'ailleurs que pratique, pour reconnaître si un nombre est premier ou non. En effet, si p n'est pas premier, il admet un diviseur p' plus petit que lui, diviseur qui est certainement l'un des nombres $1, 2, ..., p-1$, qui divise donc le produit de ces nombres et qui ne peut diviser, non plus que p, la somme $1.2.3...(p-1)+1$. Si donc le nombre p divise cette somme, c'est qu'il est premier.

517. Revenons au cas où p est premier. Puisque l'on a

$$1.2.3...(p-1) \equiv -1 \quad (\text{mod.}\, p),$$

on voit que dans le cas 1° du numéro précédent, où la congruence $x^2 \equiv D$ (mod. p) est impossible, on a

$$D^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \quad (\text{mod.}\, p),$$

et que, dans le cas 2°, où la congruence $x^2 \equiv D$ (mod. p) admet une racine, on a

$$D^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad (\text{mod.}\, p);$$

l'un des deux nombres $D^{\frac{p-1}{2}}+1$, $D^{\frac{p-1}{2}}-1$ étant ainsi divisible par p, leur produit

$$(D^{\frac{p-1}{2}}+1)(D^{\frac{p-1}{2}}-1) = D^{p-1}-1$$

est certainement divisible par p ; donc, pourvu que D ne soit pas divisible par p, on a

$$D^{p-1}-1 \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, p).$$

C'est le théorème de Fermat : il est démontré à nouveau, en supposant $p > 2$; il subsiste évidemment pour $p = 2$.

518. Prenons $D = -1$, le nombre $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ est égal à $+1$ ou à -1, suivant que $\frac{p-1}{2}$ est pair ou impair, ou, comme l'on dit, suivant que p est de la forme de $4n+1$ ou de la forme de $4n+3$. Dans le premier cas, la congruence

$$x^2 + 1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

est possible ; dans le second cas, elle est impossible.

En d'autres termes, si p est un nombre premier de la forme $4n+1$, il y a un nombre entier x tel que x^2+1 soit divisible par p ; si au contraire p est de la forme $4n+3$, x^2+1 n'est jamais divisible par p quel que soit le nombre entier x. C'est là une proposition qui se rattache à un beau théorème d'Arithmétique que je me contente d'énoncer :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre premier impair soit la somme de deux carrés est que ce nombre soit de la forme $4n+1$.

519. Nous avons rencontré, chemin faisant, une règle pour reconnaître s'il était, ou non, possible de satisfaire à la congruence

$$x^2 \equiv D \quad (\text{mod. } p),$$

où p est un nombre premier impair.

Les nombres D, non divisibles par p, pour lesquels cette congruence est possible, ou, si l'on veut, les nombres D qui sont congrus (mod. p) au reste du carré d'un nombre entier, suivant le même module, s'appellent *restes quadratiques* de p. Les nombres D pour lesquels cette congruence est impossible s'appellent *non-restes quadratiques* de p, ou, plus brièvement, non-restes.

Pour reconnaître, lorsque l'on se donne le nombre D non divisible par p, si la congruence est possible, on pourra, au lieu d'appliquer la règle précédente, former les carrés des nombres $1, 2, \ldots, p-1$ et chercher ceux qui sont congrus à D (mod. p) ; il est inutile d'aller plus loin (n° 501), à cause de la périodicité des restes (mod. p) des termes de la suite que l'on obtient en remplaçant, dans x^2, x par la suite des nombres entiers. Il suffira même de former la suite des carrés des nombres $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$, car les carrés de deux nombres a et $p-a$ étant congrus (mod. p), la suite des carrés des nombres suivants $\frac{p-1}{2}+1, \frac{p-1}{2}+2, \ldots, p-1$ reproduirait les restes précédemment obtenus en ordre inverse. Quant aux carrés des nombres $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$, ils sont certainement incongrus, puisque, comme on l'a vu au n° 516, les carrés de deux nombres pris dans la suite $1, 2, \ldots, p-1$

ne peuvent être congrus (mod. p) que si leur somme est égale à p. Ainsi, les restes (mod. p) des nombres

$$1,\ 4,\ 9,\ \ldots,\ \left(\frac{p-1}{2}\right)^2,$$

restes qui sont tous distincts, seront les seuls termes de la suite 1, 2, ..., $p-1$ qui soient restes quadratiques de p; les autres seront non-restes. Il y a donc, parmi ces nombres, $\frac{p-1}{2}$ restes quadratiques et $\frac{p-1}{2}$ non-restes. Par exemple, si $p = 17$, les restes quadratiques sont congrus (mod. 17) à 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16 ; les non-restes sont congrus à 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14.

520. Ce que l'on vient de dire des nombres 1, 2, ..., $p-1$ s'applique manifestement à un système complet de nombres incongrus suivant le module p, d'où l'on aurait exclu le nombre divisible par p; dans un tel système, il y a $\frac{p-1}{2}$ restes quadratiques, $\frac{p-1}{2}$ non-restes. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ les restes quadratiques pris dans un tel système, et $b_1, b_2, \ldots, b_{\frac{p-1}{2}}$ les non-restes.

Le produit de deux restes quadratiques ou de deux non-restes est un reste quadratique ; le produit d'un reste quadratique par un non-reste est un non-reste.

Soit en effet a un nombre entier non divisible par p ; la suite des nombres obtenus en remplaçant x dans ax par les éléments d'un système de $p-1$ nombres incongrus entre eux et à zéro (mod. p), forme un pareil système, car (n° 505) si l'on substituait à la place de x tous les éléments d'un système complet de nombres incongrus (mod. p), y compris le nombre divisible par p, on reproduirait un pareil système et il est clair que c'est l'élément divisible par p du premier système qui engendrerait l'élément divisible par p du second système. Par conséquent, parmi les nombres

$$aa_1,\ aa_2,\ \ldots,\ aa_{\frac{p-1}{2}},\ ab_1,\ ab_2,\ \ldots,\ ab_{\frac{p-1}{2}},$$

il y a $\frac{p-1}{2}$ restes quadratiques et $\frac{p-1}{2}$ non restes.

Or, la première partie du théorème est évidente : si α, β sont des restes quadratiques, il y a des nombres entiers x, y tels que l'on ait

$$x^2 \equiv \alpha, \qquad y^2 \equiv \beta \qquad (\text{mod. } p) :$$

on aura donc

$$(xy)^2 \equiv \alpha\beta \qquad (\text{mod. } p)$$

et $\alpha\beta$ est bien un reste quadratique.

Si donc a est un reste quadratique,

$$aa_1,\ aa_2,\ \ldots,\ aa_{\frac{p-1}{2}}$$

sont aussi des restes quadratiques, et par suite les $\frac{p-1}{2}$ nombres restants

$$ab_1,\ ab_2,\ \ldots,\ ab_{\frac{p-1}{2}}$$

sont des non-restes : donc le produit d'un reste quadratique par un non-reste est un non-reste.

Si maintenant a est un non-reste, les nombres

$$aa_1,\ aa_2,\ \ldots,\ aa_{\frac{p-1}{2}}$$

sont des non-restes, on vient de le démontrer; donc les nombres

$$ab_1,\ ab_2,\ \ldots,\ ab_{\frac{p-1}{2}}$$

sont des restes quadratiques; en d'autres termes, le produit d'un non-reste par un non-reste est un reste quadratique.

Ces propositions, que l'on vient d'établir directement, résulteraient sans aucune difficulté du caractère (n° 517) auquel on reconnaît qu'un nombre D est reste quadratique ou non-reste.

Si, par exemple, a, b sont non-restes, on a

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1,\quad b^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \qquad (\text{mod. } p),$$

et par suite

$$a^{\frac{p-1}{2}}\, b^{\frac{p-1}{2}} = (ab)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)(-1) \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p),$$

donc ab est un reste quadratique de p.

Je ne me suis occupé de la recherche des solutions de la congruence

$$x^2 \equiv \text{D} \qquad (\text{mod. } p)$$

que dans le cas où le module est un nombre premier impair. C'est que, en effet, les autres cas se ramènent à celui-là, comme il résultera facilement de théorèmes généraux dont je renvoie l'énoncé et la démonstration au § 7.

§ 5. — Loi de réciprocité.

521. Étant donné un nombre premier impair, p, il n'y a, comme on vient de le voir, aucune difficulté à déterminer les nombres D qui sont restes quadratiques de p; le problème inverse, « *étant donné un nombre* D, *reconnaître quels sont les nombres premiers impairs dont* D *est reste quadratique, ou ceux* *pour lesquels* D *est non-reste* », est beaucoup plus difficile : sa solution repose sur un des théorèmes les plus beaux et les plus importants de l'Arithmétique, théorème connu sous le nom de *loi de réciprocité*; il a été découvert par Euler et par Legendre. Il n'a été entièrement démontré que par Gauss, qui n'en a pas donné moins de six démonstrations distinctes. Ce théorème a depuis été l'objet de beaucoup d'autres travaux.

Avant d'y arriver, je donnerai d'abord une transformation du caractère qui permet de reconnaître si D est, ou non, reste quadratique de p (n° 517). Cette transformation est due à Gauss.

522. Désignons toujours par p un nombre premier impair positif et par D un nombre entier non divisible par p; considérons les $\frac{p-1}{2}$ nombres incongrus (mod. p)

$$D, 2D, 3D, \ldots, \frac{p-1}{2}D,$$

qui sont tous premiers à p; représentons l'un quelconque de ces nombres par aD et considérons leurs *restes minima* (mod. p); aucun n'est nul. Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\lambda$ ceux de ces restes minima qui sont positifs, par $-\beta_1, -\beta_2, \ldots, -\beta_\mu$ ceux qui sont négatifs. On aura $\lambda + \mu = \frac{p-1}{2}$.

Puisque tous les nombres D, 2 D, ..., $\frac{p-1}{2}$D sont incongrus (mod. p), tous les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\lambda$, d'une part, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu$, de l'autre, sont distincts. Deux nombres pris, l'un dans la première suite, l'autre dans la seconde, ne peuvent non plus être égaux; pour qu'il en fût ainsi, en effet, il faudrait que la somme de deux des nombres D, 2D, ..., $\frac{p-1}{2}$D fût divisible par le nombre premier p; or une pareille somme s'obtient en multipliant D, qui n'est pas divisible par p, par un nombre moindre que p. Les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\lambda, \beta_1, \beta_2, \beta_\mu$ pris dans leur ensemble ne sont donc autre chose que les nombres 1, 2, ..., $\frac{p-1}{2}$, puisque chacun d'eux doit être égal à quelqu'un de ces nombres, qu'ils sont tous distincts et qu'ils sont au nombre de $\frac{p-1}{2}$. Or les nombres D, 2D, ..., $\frac{p-1}{2}$D étant respectivement congrus (mod. p) aux nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\lambda, -\beta_1, -\beta_2, \ldots, -\beta_\mu$ pris dans un ordre convenable, on a

$$1.2.3\ldots D^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^\mu \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\lambda\beta_1\beta_2\ldots\beta_\mu \qquad (\text{mod. } p);$$

on a d'ailleurs

$$1.2\ldots\frac{p-1}{2} = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\lambda\beta_1\beta_2\ldots\beta_\mu$$

et, puisque p est premier avec l'un ou l'autre de ces produits, il résulte de la congruence précédente que l'on a

$$D^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\mu} \pmod{p}.$$

Ainsi D sera reste quadratique de p, ou non-reste, suivant que μ sera pair ou impair. Telle est la transformation annoncée, dont on verra bientôt toute l'importance.

523. Elle invite, en tous cas, à faire une étude approfondie de la parité des nombres tels que μ. Cette étude sera facilitée par les notations suivantes.

En désignant par p un nombre positif impair (qui n'est pas nécessairement premier) et par D un nombre entier quelconque premier à p, je désignerai par le symbole

$$\left(\frac{D}{p}\right)$$

l'unité affectée du signe + ou du signe — suivant que le nombre de restes minima négatifs (mod. p) fournis par les termes de la suite

$$D,\ 2D,\ 3D,\ \ldots,\ \frac{p-1}{2}D$$

est pair ou impair.

Je viens de démontrer que, lorsque p est un nombre premier, le symbole $\left(\frac{D}{p}\right)$ est positif ou négatif suivant que D est, ou non, reste quadratique de p et que, ainsi, l'on avait alors

$$\left(\frac{D}{p}\right) \equiv D^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p};$$

dans ce cas, $\left(\frac{D}{p}\right)$ est ce qu'on appelle le *symbole de Legendre*; dans le cas où p n'est pas premier, $\left(\frac{D}{p}\right)$, défini comme on vient de le faire, est le *symbole de Legendre généralisé* [1]. Observons que le signe de ce symbole, qui seul importe, est le signe du produit de tous les restes minima (mod. p) des termes de la suite D, 2D, 3D, ..., $\frac{p-1}{2}$D. Je vais en établir quelques autres propriétés.

1° Si l'on a

$$D' \equiv D \pmod{p},$$

on a

$$\left(\frac{D'}{p}\right) = \left(\frac{D}{p}\right);$$

cette proposition est évidente sur la définition.

1. La généralisation du symbole de Legendre, sous une forme équivalente, est due à Jacobi; la forme précédente a été indiquée par MM. Schering et Kronecker.

2° On a

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

En effet, en supposant $D = -1$, la suite des termes dont il faut prendre les restes *minima* (mod. p) se réduit à

$$-1, -2, -3, \ldots, -\frac{p-1}{2};$$

ces nombres sont les restes minima eux-mêmes; or, ils sont tous négatifs et au nombre de $\frac{p-1}{2}$. Cette proposition, dans le cas où p est premier, ne nous apprend rien de nouveau.

3° On a

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Soit en effet r le reste minimum de p (mod. 8); si l'on pose $p = 8n + r$, r sera l'un des nombres ± 1, ± 3. La suite des termes dont il faut prendre les restes minima est ici

$$2, 4, 6, \ldots, 4n, 4n+2, \ldots, 8n+r-1;$$

elle se compose de termes pairs, tous inférieurs à p; les termes qui fourniront des restes minima négatifs (mod. p) sont donc les termes plus grands que $\frac{p}{2} = 4n + \frac{r}{2}$, c'est-à-dire, si r est positif, tous les termes qui suivent $4n$, et, si r est négatif, tous les termes à partir de $4n$; puisqu'il y a, en tout, $\frac{p-1}{2} = \frac{8n+r-1}{2}$ termes et que les termes $2, 4, 6, \ldots, 4n$ sont au nombre de $2n$, il y a, dans le premier cas, $2n + \frac{r-1}{2}$ termes qui fournissent des restes minima négatifs; et dans le second cas, il y en a $2n + \frac{r+1}{2}$: il y aura donc un nombre pair de termes négatifs si l'on a $r = \pm 1$, un nombre impair si l'on a $r = \pm 3$; dans le premier cas $\left(\frac{2}{p}\right)$ sera $+1$, dans le second cas -1 : or on a évidemment

$$p^2 \equiv r^2 \pmod{16},$$

d'où (n° 512)

$$\frac{p^2-1}{8} \equiv \frac{r^2-1}{8} \pmod{2};$$

si r est égal à ± 1, $\frac{p^2-1}{8}$ est donc pair; si r est égal à ± 3, $\frac{p^2-1}{8}$ est impair; on a donc bien, comme on l'avait annoncé

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Lorsque p est un nombre premier, cette égalité nous apprend que 2 est reste quadratique de tous les nombres premiers congrus à ± 1 (mod. 8), et non-reste de tous les nombres premiers congrus à ± 3 (mod. 8).

4° Si D, D' sont des entiers quelconques premiers au nombre impair p, on a

$$\left(\frac{DD'}{p}\right) = \left(\frac{D}{p}\right)\left(\frac{D'}{p}\right).$$

Nous aurons besoin ici de cette remarque d'ailleurs évidente : les restes minima (mod. p) de deux nombres égaux et de signes contraires sont eux-mêmes égaux et de signes contraires.

Ceci posé, désignons toujours par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\lambda, -\beta_1, -\beta_2, \ldots, -\beta_\mu$ les restes minima, pris dans leur ensemble, des nombres $D, 2D, 3D, \ldots, \frac{p-1}{2}D$; les nombres positifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\lambda, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu$, pris dans leur ensemble, ne sont autre chose que les nombres $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$, et l'on a

$$\left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^\mu.$$

D'ailleurs les signes des trois symboles $\left(\frac{D}{p}\right)$, $\left(\frac{D'}{p}\right)$, $\left(\frac{DD'}{p}\right)$ sont les mêmes que ceux des trois produits P, P', P'' formés avec les restes minima que fournissent respectivement les nombres aD, aD', aDD' quand on y remplace a par $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$; pour évaluer le dernier produit P'' on peut commencer par remplacer, dans aDD', aD par son reste minimum (mod. p); P'' est donc égal au produit des restes minima des termes de la suite

$$\alpha_1 D', \alpha_2 D', \ldots, \alpha_\lambda D', -\beta_1 D', -\beta_2 D', \ldots, -\beta_\mu D',$$

ou, d'après la remarque du début, au produit des restes minima des termes de la suite

$$\alpha_1 D', \alpha_2 D', \ldots, \alpha_\lambda D', \beta_1 D', \beta_2 D', \ldots, \beta_\mu D'$$

multiplié par $(-1)^\mu$; mais comme les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\lambda, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu$ ne sont autres dans leur ensemble que les nombres $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$, les restes minima de la précédente suite ne sont autres que les restes minima de la suite.

$$D', 2D', \ldots, \frac{p-1}{2}D';$$

on a donc

$$P'' = (-1)^\mu P'$$

et par suite, en écrivant que les deux membres de cette égalité ont le même signe,

$$\left(\frac{DD'}{p}\right) = \left(\frac{D}{p}\right)\left(\frac{D'}{p}\right).$$

En particulier, on a, à cause de 2°,

$$\left(\frac{-D}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{D}{p}\right).$$

5° p, q étant des nombres positifs impairs, premiers entre eux, on a

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}};$$

c'est dans cette égalité, lorsque p et q sont premiers, que consiste la loi de réciprocité d'Euler et de Legendre.

La valeur du symbole $\left(\frac{q}{p}\right)$ dépend du nombre de restes minima (mod. p) négatifs fournis par la suite

$$q,\ 2q,\ \ldots,\ \frac{p-1}{2}q.$$

Soit a l'un quelconque des nombres $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$. Le reste minimum (mod. p) fourni par le terme aq est négatif ou positif, suivant qu'il existe, ou non, un nombre entier β tel que l'on ait

$$\frac{aq}{p} < \beta < \frac{aq}{p} + \frac{1}{2};$$

ce nombre entier, s'il existe, est évidemment unique.

Cette double inégalité peut être remplacée par l'inégalité unique

$$\left(\frac{aq}{p} - \beta\right)\left(\frac{aq}{p} + \frac{1}{2} - \beta\right) < 0,$$

qui est une conséquence des premières et qui les entraîne [1].

Cette dernière inégalité peut elle-même être remplacée par la suivante, obtenue en divisant chaque facteur par q,

$$\left(\frac{a}{p} - \frac{\beta}{q}\right)\left(\frac{a}{p} + \frac{1}{2q} - \frac{\beta}{q}\right) + 0.$$

Rappelons encore une fois que, si l'on regarde a, p, q comme donnés, il

1. C'est là un résultat bien connu du lecteur, s'il est familier avec la discussion du trinome du second degré.

ne peut y avoir qu'une seule valeur entière attribuée au nombre b qui rende négatif le produit

$$\left(\frac{a}{p}-\frac{b}{q}\right)\left(\frac{a}{p}+\frac{1}{2q}-\frac{b}{q}\right):$$

c'est la valeur entière β approchée de $\frac{aq}{p}$ à moins de $\frac{1}{2}$ si cette valeur est approchée par excès. On observera qu'elle est au plus égale à $\frac{q-1}{2}$; en effet, la différence entre le nombre entier $\frac{q+1}{2}$ immédiatement supérieur à $\frac{q-1}{2}$ et le plus grand des nombres fractionnaires $\frac{aq}{p}$, savoir $\frac{(p-1)q}{2p}$, est

$$\frac{q+1}{2}-\frac{(p-1)q}{2p}=\frac{p+q}{2p};$$

cette différence est plus grande que $\frac{1}{2}$, par conséquent la valeur entière approchée de $\frac{aq}{p}$, avec une erreur moindre que $\frac{1}{2}$, ne peut atteindre $\frac{q+1}{2}$. Si donc dans l'expression

$$\left(\frac{a}{p}-\frac{b}{q}\right)\left(\frac{a}{p}+\frac{1}{2q}-\frac{b}{q}\right)$$

on donne à b les valeurs $1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}$, tous les résultats seront positifs, sauf peut-être un; et il y en aura certainement un de négatif si le reste minimum (mod. p) de q est négatif: le signe de ce reste minimum sera donc le même que le signe du produit de tous les résultats obtenus en remplaçant b par $1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}$; remarquons que le second facteur du produit précédent peut s'écrire

$$\frac{a}{p}+\frac{\frac{q+1}{2}-b}{q}-\frac{1}{2},$$

et observons que, quand on donne à b les valeurs $1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}$, l'expression $\frac{q+1}{2}-b$ prend les mêmes valeurs en ordre inverse: il en résulte que l'ensemble des valeurs que prend le facteur $\frac{a}{p}+\frac{1}{2q}-\frac{b}{q}$, quand on donne à b les valeurs $1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}$, est le même que l'ensemble des valeurs que prend l'expression $\frac{a}{p}+\frac{b}{q}-\frac{1}{2}$ quand on donne à b les mêmes valeurs $1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}$; on peut donc dire que le signe du reste minimum (mod. p) de aq est le même que le signe du produit P_a de tous les nombres obtenus en remplaçant successivement b par les valeurs $1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}$ dans l'expression

$$\left(\frac{a}{p}-\frac{b}{q}\right)\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}-\frac{1}{2}\right),$$

qui offre cette propriété remarquable de changer simplement de signe, sans changer de valeur absolue, quand on échange entre elles, d'une part les lettres p, q, de l'autre les lettres a, b : ce double échange, en effet, laisse le second facteur invariable et change le signe du premier. Le signe de $\left(\frac{q}{p}\right)$ est le signe du produit de tous les restes minima (mod. p) des termes de la suite $q, 2q, \ldots, \frac{p-1}{2}q$; ce sera donc le signe du produit de tous les nombres $P_1, P_2, \ldots, P_{\frac{p-1}{2}}$ obtenus en prenant a égal à $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$; ce sera finalement le signe du produit de tous les facteurs obtenus en remplaçant dans l'expression

$$\left(\frac{a}{p}-\frac{b}{q}\right)\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}-\frac{1}{2}\right)$$

a par $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ et b par $1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}$; de même, le signe de $\left(\frac{p}{q}\right)$ sera le signe du produit obtenu en remplaçant dans l'expression

$$\left(\frac{b'}{q}-\frac{a'}{p}\right)\left(\frac{a'}{p}+\frac{b'}{q}-\frac{1}{2}\right)$$

a' par $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$, b' par $1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}$. Ces derniers facteurs, en vertu d'une observation qui vient d'être faite, sont en valeur absolue les mêmes que les précédents, leurs signes sont opposés ; comme il y a $\frac{p-1}{2}\,\frac{q-1}{2}$ facteurs, on voit que le second produit est égal au premier multiplié par $(-1)^{\frac{p-1}{2}\,\frac{q-1}{2}}$; on a donc bien

$$\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\,\frac{q-1}{2}}\left(\frac{q}{p}\right);$$

ou, ce qui revient au même [1],

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\,\frac{q-1}{2}}.$$

1. Cette démonstration est due à Kronecker.

Dans l'application de cette formule, on remarquera que les nombres $\frac{p-1}{2}$, $\frac{q-1}{2}$ ne sont impairs tous les deux que si les deux nombres p et q sont congrus à -1 (mod. 4); sauf dans ce cas, on a

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right);$$

dans le cas où l'on aurait $p \equiv q \equiv -1$ (mod. 4), on aurait

$$\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right).$$

On montrera tout à l'heure comment les cinq propriétés établies plus haut pour le symbole $\left(\frac{\mathrm{D}}{p}\right)$ suffisent pour résoudre la question posée « trouver les nombres premiers impairs p pour lesquels D est, ou non, un reste quadratique ». Débarrassons-nous auparavant d'une dernière propriété de ce symbole.

6° Si p, p' sont deux nombres impairs positifs et D un nombre entier quelconque premier à p et à p', on a

$$\left(\frac{\mathrm{D}}{pp'}\right) = \left(\frac{\mathrm{D}}{p}\right) \times \left(\frac{\mathrm{D}}{p'}\right).$$

Supposons d'abord D impair et positif.

On a (5°)

$$\left(\frac{\mathrm{D}}{p}\right) = \left(\frac{p}{\mathrm{D}}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{\mathrm{D}-1}{2}}, \quad \left(\frac{\mathrm{D}}{p'}\right) = \left(\frac{p'}{\mathrm{D}}\right)(-1)^{\frac{p'-1}{2}\frac{\mathrm{D}-1}{2}},$$

d'où, en appliquant la propriété (4°),

$$\left(\frac{\mathrm{D}}{p}\right)\left(\frac{\mathrm{D}}{p'}\right) = \left(\frac{pp'}{\mathrm{D}}\right)(-1)^{\frac{p+p'-2}{2}\frac{\mathrm{D}-1}{2}}$$

et, en appliquant encore la loi de réciprocité (5°),

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{D}}{p}\right)\left(\frac{\mathrm{D}}{p'}\right) &= \left(\frac{\mathrm{D}}{pp'}\right)(-1)^{\frac{\mathrm{D}-1}{2}\frac{pp'-1}{2}} \times (-1)^{\frac{p+p'-2}{2}\frac{\mathrm{D}-1}{2}} \\
&= \left(\frac{\mathrm{D}}{pp'}\right)(-1)^{\frac{\mathrm{D}-1}{2}\frac{(p+1)(p'+1)-4}{2}} \\
&= \left(\frac{\mathrm{D}}{pp'}\right)(-1)^{\frac{(\mathrm{D}-1)(p+1)(p'+1)}{4}} \times (-1)^{-(\mathrm{D}-1)}.
\end{aligned}$$

Les trois nombres $\mathrm{D}-1$, $p+1$, $p'+1$ étant pairs, leur produit est divisible par 8, les exposants de -1 sont pairs, et l'on a bien

$$\left(\frac{\mathrm{D}}{pp'}\right) = \left(\frac{\mathrm{D}}{p}\right)\left(\frac{\mathrm{D}}{p'}\right).$$

Si, D, p, p' étant impairs, D était négatif, on aurait

$$\left(\frac{-D}{pp'}\right)=\left(\frac{-D}{p}\right)\left(\frac{-D}{p'}\right).$$

Or les deux membres de cette égalité sont respectivement égaux à

$$\left(\frac{D}{pp'}\right)(-1)^{\frac{pp'-1}{2}},\quad \left(\frac{D}{p}\right)\left(\frac{D}{p'}\right)(-1)^{\frac{p+p'-2}{2}},$$

et l'on a

$$\frac{pp'-1}{2}\equiv\frac{p+p'-2}{2}\qquad(\text{mod. } 2).$$

car cette congruence, en faisant tout passer dans le premier membre, devient

$$\frac{(p-1)(p'-1)}{2}\equiv 0\qquad(\text{mod. } 2);$$

sous cette forme, elle est évidente. On a donc bien encore

$$\left(\frac{D}{pp'}\right)=\left(\frac{D}{p}\right)\left(\frac{D}{p'}\right).$$

Il reste enfin à examiner le cas où D est pair; soit, en désignant par D′ un nombre impair,

$$D=2^\alpha D';$$

on aura, en utilisant les propriétés 3° et 4°,

$$\left(\frac{D}{p}\right)=\left(\frac{2^\alpha D'}{p}\right)=\left(\frac{2^\alpha}{p}\right)\left(\frac{D'}{p}\right)=(-1)^{\alpha\frac{p^2-1}{8}}\left(\frac{D'}{p}\right);$$

de même

$$\left(\frac{D}{p'}\right)=(-1)^{\alpha\frac{p'^2-1}{8}}\left(\frac{D'}{p'}\right),$$

$$\left(\frac{D}{pp'}\right)=(-1)^{\alpha\frac{p^2p'^2-1}{8}}\left(\frac{D'}{pp'}\right),$$

et l'on voit de suite, puisque l'on a

$$\left(\frac{D'}{pp'}\right)=\left(\frac{D'}{p}\right)\left(\frac{D'}{p'}\right),$$

que l'égalité à démontrer revient à prouver que l'on a

$$\alpha\frac{p^2p'^2-1}{8}\equiv\alpha\frac{p^2-1}{8}+\alpha\frac{p'^2-1}{8}\qquad(\text{mod. } 2),$$

congruence qui équivaut à celle-ci :

$$\alpha \frac{(p^2-1)(p'^2-1)}{8} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2) :$$

or cette dernière est évidente puisque $(p^2-1)(p'^2-1)$ est divisible par 64.

524. Les propositions qui précèdent permettent de calculer rapidement la valeur d'un symbole $\left(\frac{D}{p}\right)$ quand on se donne numériquement D et p; on rappelle que ces nombres sont premiers entre eux, que p est impair et positif. D'abord, si l'un de ces nombres contient en facteur un carré parfait, on pourra supprimer ce facteur. Si l'on a, par exemple, en désignant par A et B des nombres entiers, $D = A^2B$, on aura

$$\left(\frac{D}{p}\right) = \left(\frac{A^2}{p}\right) \times \left(\frac{B}{p}\right) = \left(\frac{A}{p}\right) \times \left(\frac{A}{p}\right) \times \left(\frac{B}{p}\right),$$

à cause de la propriété 4°; mais le produit $\left(\frac{A}{p}\right)\left(\frac{A}{p}\right)$ est positif; on a donc

$$\left(\frac{D}{p}\right) = \left(\frac{B}{p}\right).$$

La même démonstration s'applique au cas où p admettrait un facteur carré parfait : on pourra donc remplacer D par le produit des facteurs premiers qui entrent dans D avec des exposants impairs, chacun de ces facteurs étant affecté de l'exposant un. De même pour p. L'usage des propriétés 4° et 2° permet de ramener le calcul de $\left(\frac{D}{p}\right)$ au cas où D est impair et positif; ensuite on pourra remplacer $\left(\frac{D}{p}\right)$ par un produit de facteurs symboliques analogues avec des numérateurs et des dénominateurs symboliques premiers, positifs, impairs. En sorte qu'on pourrait se borner au cas où D et p sont de pareils nombres. Quoi qu'il en soit, on peut aussi, et cela dans tous les cas, remplacer D par son reste (mod. p). Si ce reste est pair, on pourra toujours en appliquant les propriétés 4° et 3° ramener le calcul du symbole $\left(\frac{D}{p}\right)$ au calcul d'un autre symbole $\left(\frac{D'}{p}\right)$ dans lequel D' est impair et moindre que p; en appliquant ensuite la loi de réciprocité, on ramènera le calcul de $\left(\frac{D'}{p}\right)$ à celui de $\left(\frac{p}{D'}\right)$. On remplacera de même p par son reste (mod. D'), etc..., on ramènera finalement le calcul à celui d'un symbole tel que $\left(\frac{1}{p}\right)$, qui est égal à 1. D'ailleurs il est clair que le calcul peut se faire de différentes façons.

Soit, par exemple, à calculer la valeur de $\left(\frac{3988}{887}\right)$.

On a

$$\left(\frac{3988}{887}\right) = \left(\frac{2^2}{887}\right) \times \left(\frac{997}{887}\right) = \left(\frac{997}{887}\right);$$

mais 997 est égal à 887 + 110; on a donc

$$\left(\frac{997}{887}\right) = \left(\frac{110}{887}\right) = \left(\frac{11}{87}\right) \times \left(\frac{5}{87}\right) \times \left(\frac{2}{87}\right);$$

le dernier facteur est égal à + 1, puisque 87 est congru à — 1 (mod. 8); d'ailleurs, puisque 5 est de la forme $4n + 1$, on a

$$\left(\frac{5}{87}\right) = \left(\frac{87}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) = -1;$$

11 et 87 sont de la forme $4n - 1$, on a donc

$$\left(\frac{11}{87}\right) = -\left(\frac{87}{11}\right) = -\left(\frac{-1}{11}\right) = +1;$$

finalement, on a

$$\left(\frac{3988}{887}\right) = 1.$$

525. Arrivons maintenant à la question posée au n°521 : le nombre D étant donné, trouver les nombres premiers p tels que D soit reste quadratique, ou non-reste, de p.

Cherchons, par exemple, les nombres premiers dont 3 est reste quadratique ; p étant un tel nombre on doit avoir

$$\left(\frac{3}{p}\right) = 1;$$

on a d'ailleurs, par la loi de réciprocité,

$$\left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}}:$$

la valeur du second membre dépend du reste de p (mod. 3) et de la parité de $\frac{p-1}{2}$, c'est-à-dire du reste de p (mod. 4) : elle dépendra donc finalement du reste minimum de p (mod. 12), qui peut être + 1, — 1, + 5, — 5.

La valeur de $\left(\frac{p}{3}\right)$ est + 1 dans le premier et le dernier cas, — 1 dans les deux autres; en examinant ensuite, suivant les cas, la valeur de $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$, on reconnaît que les seuls nombres premiers dont 3 est reste quadratique sont de la forme $12n \pm 1$. 3 est non-reste des nombres premiers de la forme $12n \pm 5$.

526. La recherche des nombres premiers p, qui ne divisent pas le nombre donné D et pour lesquels la congruence

$$x^2 - D \equiv 0 \pmod{p}$$

est possible, s'est présentée de la façon suivante.

C'est un problème très ancien, problème qui ne pouvait manquer de se poser quand on a connu la propriété du carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, que de chercher à reconnaître les nombres qui pouvaient être mis sous la forme de la somme de deux carrés, ou, ce qui est la même chose, des nombres que l'on pouvait obtenir en remplaçant dans l'expression $x^2 + y^2$, x et y par des nombres entiers. Une généralisation bien naturelle de cette question est de rechercher si un nombre donné peut être obtenu en remplaçant dans l'expression $ax^2 + bxy + cy^2$, où a, b, c sont des nombres entiers donnés, x et y par des nombres entiers, ou encore, comme l'on dit, de reconnaître les nombres qui peuvent être représentés par la forme $ax^2 + bxy + cy^2$. C'est là un des problèmes les plus intéressants de l'Arithmétique supérieure. Un autre problème analogue est simplement de reconnaître quels sont les *diviseurs* d'une telle forme, c'est-à-dire les diviseurs des nombres obtenus en remplaçant x, y, dans $ax^2 + bxy + cy^2$, par des nombres premiers entre eux. Un cas particulier de ce problème, auquel d'ailleurs se ramènent les autres, consiste à rechercher les diviseurs, et en particulier les diviseurs premiers, de la forme plus simple $x^2 - Dy^2$; il n'y a lieu que de chercher les diviseurs premiers qui ne divisent pas D, puisque ceux qui diviseraient D devraient diviser x et, ainsi, sont évidents. Il est clair que, si p est un nombre premier impair dont D soit reste quadratique, p est un diviseur de la forme $x^2 - Dy^2$, pour $y = 1$ et pour une valeur de x égale à une racine de la congruence

$$x^2 - D \equiv 0 \pmod{p}.$$

Réciproquement, si p est un diviseur premier impair de la forme $x^2 - Dy^2$, il existe deux nombres entiers premiers entre eux a, b tels que l'on ait

$$a^2 - Db^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Il est clair que p ne divise pas b, car, autrement, b diviserait aussi a. Il existe donc un nombre entier b' tel que l'on ait

$$bb' \equiv 1 \pmod{p};$$

en multipliant par b'^2 les deux termes de l'avant-dernière congruence et en remplaçant $(bb')^2$ par 1, il vient

$$a^2 - D \equiv 0 \pmod{p};$$

donc D est reste quadratique de p. Donc les diviseurs premiers impairs de la forme $x^2 - Dy^2$ sont les nombres premiers impairs dont D est reste quadratique, et ceux-là seuls. En particulier, les diviseurs premiers impairs de la forme $x^2 + y^2$ sont les nombres premiers de la forme $4n + 1$, les diviseurs premiers impairs de la forme $x^2 - 3y^2$ sont les nombres premiers de la forme $12n \pm 1$.

§ 6. — **Sur le nombre de nombres premiers à un nombre donné et non supérieurs à lui.**

527. Nous avons vu au n° 515 comment, dans certaines questions d'Arithmétique, s'introduisait le nombre des nombres premiers à un nombre entier positif a et inférieurs à lui. Ce nombre, si a n'est pas un, se désigne par le symbole $\varphi(a)$. Si a est égal à un, $\varphi(a) = \varphi(1)$ est par définition égal à un. C'est pour embrasser le cas de $a = 1$ qu'on dit habituellement que $\varphi(a)$ désigne le nombre de nombres premiers à a et non supérieurs à a. $\varphi(a)$ est une fonction numérique de a, c'est-à-dire que la valeur de $\varphi(a)$ est déterminée quand on se donne le nombre entier positif a.

Le calcul de la valeur de cette fonction repose sur l'important théorème que voici.

Si a, b, sont des nombres entiers, positifs, premiers entre eux, on a

$$\varphi(ab) = \varphi(a) \times \varphi(b).$$

Cette proposition est évidente quand l'un des nombres a, b est égal à un; excluons donc ce cas. Si l'on considère un nombre plus petit que ab, il pourra se mettre sous la forme $ax + y$, y étant le reste de ce nombre (mod. a) et x étant un nombre entier moindre que b; réciproquement, tous les nombres plus petits que ab s'obtiennent en remplaçant dans l'expression précédente x par $0, 1, 2, \ldots, b-1$ et y par $0, 1, 2, \ldots, a-1$. Les nombres $ax + y$ ainsi formés qui sont premiers à ab sont ceux qui sont premiers à a et à b; ceux qui sont premiers à a sont ceux pour lesquels y est premier à a. Donnons à y une des $\varphi(a)$ valeurs moindres que a et premières à a, et remplaçons ensuite dans $ax + y$, x par les nombres $0, 1, 2, \ldots, b-1$, on obtiendra ainsi un système complet de nombres incongrus (mod. b), puisque b est premier à a; parmi ces nombres il y en a $\varphi(b)$ qui sont premiers à b comme dans la suite $0, 1, 2, \ldots, b-1$, car un nombre est premier à b en même temps que son reste (mod. b). Chaque valeur de y première à a fournissant ainsi $\varphi(b)$ nombres premiers à ab, il est clair qu'on a

$$\varphi(ab) = \varphi(a) \times \varphi(b).$$

Cette proposition se généralise immédiatement : si a, b, c, d, par exemple, sont des nombres entiers, positifs, premiers deux à deux, on a

$$\varphi(abcd) = \varphi(abc)\varphi(d) = \varphi(ab)\varphi(c)\varphi(d) = \varphi(a)\,\varphi(b)\varphi(c)\varphi(d).$$

528. Supposons maintenant qu'on se donne un nombre A décomposé en facteurs premiers

$$A = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots,$$

$a, b, c, \ldots$ étant des nombres premiers distincts ; on aura

$$\varphi(A) = \varphi(a^{\alpha}) \times \varphi(b^{\beta}) \times \varphi(c^{\gamma}) \times \ldots,$$

et on est ramené à calculer des quantités telles que $\varphi(a^{\alpha})$, a étant premier.

Tout d'abord, on a évidemment $\varphi(a) = a - 1$, puisque les nombres premiers à a et inférieurs à lui sont $1, 2, \ldots, a - 1$. Les nombres premiers à a^{α} et moindres que a^{α} sont ceux des nombres

$$1, 2, 3, \ldots, a^{\alpha} - 1, a^{\alpha}$$

qui ne sont pas divisibles par a; les multiples de a qui sont contenus dans cette suite sont

$$a, 2a, 3a, \ldots, a^{\alpha-1} \times a = a^{\alpha},$$

leur nombre est $a^{\alpha-1}$; le nombre des termes de la suite $1, 2, 3, \ldots, a^{\alpha}$ qui ne sont pas divisibles par a est donc $a^{\alpha} - a^{\alpha-1} = a^{\alpha-1}(a - 1)$; on a donc

$$\varphi(a^{\alpha}) = a^{\alpha-1}(a - 1)$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \ldots (a - 1)(b - 1)(c - 1)\ldots \\ &= A\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\cdots. \end{aligned}$$

529. Soient $1, d, d', d'', \ldots, A$ les diviseurs de A, diviseurs que l'on a appris à former au n° 165, on a

$$A = \varphi(1) + \varphi(d) + \varphi(d') + \ldots + \varphi(A),$$

égalité que l'on écrit souvent sous la forme symbolique

$$A = \Sigma\varphi(d) ;$$

le signe Σ indique que le second membre est une somme de termes analogues à $\varphi(d)$, et il est entendu que d doit être remplacé successivement par chacun des diviseurs de A, y compris 1 et A.

La vérification de ce théorème est très facile en partant de l'expression donnée au n° 165 pour les diviseurs d'un nombre décomposé en facteurs premiers, et de l'expression précédente de la valeur de la fonction φ. En voici une démonstration purement arithmétique.

Le plus grand commun diviseur d'un nombre quelconque et de A est un des nombres $1, d, d', \ldots$, A. Séparons les nombres $1, 2, 3, \ldots$, A en groupes; dans chaque groupe mettons ceux qui ont avec A un même plus grand commun diviseur, d par exemple. Tous ces nombres, si on les divise par d, donneront des quotients premiers à $\frac{A}{d}$, et non supérieurs à $\frac{A}{d}$; inversement tout nombre non supérieur à $\frac{A}{d}$, premier à $\frac{A}{d}$, si on le multiplie par d, acquiert avec A le plus grand commun diviseur d. Donc, il y a dans le groupe considéré $\varphi\left(\frac{A}{d}\right)$ nombres; donc on a, en employant la notation précédemment expliquée,

$$A = \Sigma\varphi\left(\frac{A}{d}\right),$$

étant entendu que d doit être remplacé successivement par tous les diviseurs de A; mais les nombres $\frac{A}{d}$ que l'on obtient ainsi ne sont autre chose, dans leur ensemble, que les diviseurs de A; on peut donc écrire tout aussi bien

$$A = \Sigma\,\varphi(d).$$

§ 7. — Des congruences à une inconnue.

530. On a déjà traité des congruences à une inconnue, dans le cas où ces congruences étaient du premier degré, ou de la forme très spéciale

$$x^2 \equiv D \pmod{p},$$

p étant un nombre premier.

Dans le cas général d'une congruence de la forme

$$f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n \equiv 0 \pmod{m},$$

où $A, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n$ sont des nombres distincts, je me suis borné à définir ce qu'il fallait entendre par racine d'une telle congruence et par racines distinctes (n° 506). Le cas où le module m est un nombre premier offre un intérêt particulier et je vais bientôt m'y arrêter. Mais il convient de dire quelques mots sur la façon dont les autres cas se ramènent à celui-là.

Supposons d'abord que le module m soit un produit de nombres entiers premiers deux à deux $a, b, c, \dots$, je vais montrer que l'on saura résoudre la congruence

$$(1) \qquad f(x) \equiv 0 \pmod{m}$$

si l'on sait résoudre chacune des congruences

$$(2) \qquad \begin{aligned} f(x) &\equiv 0 \pmod{a},\\ f(x) &\equiv 0 \pmod{b},\\ f(x) &\equiv 0 \pmod{c},\\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Il est bien évident d'abord que chaque racine de la congruence (1) est une racine des congruences (2); car si pour une valeur entière de x, le nombre $f(x)$ est divisible par m, il sera divisible par a, b, c, ...; réciproquement, je vais montrer comment la connaissance de nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ qui vérifient respectivement les congruences (2) entraîne la connaissance d'une racine de la congruence (1). Pour cela, je résoudrai le problème suivant :

531. Étant donnés les nombres entiers $a, b, c, \ldots$ premiers entre eux deux à deux, et les nombres entiers $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, trouver un nombre x qui soit congru à α suivant le module a, à β suivant le module b, à γ suivant le module c, etc...

En désignant par m, comme plus haut, le produit $abc\ldots$, cherchons d'abord des nombres A, B, C,... respectivement divisibles par les nombres entiers $\frac{m}{a}$, $\frac{m}{b}$, $\frac{m}{c}$, ... et congrus au nombre 1, suivant les modules respectifs $a, b, c, \ldots$; il suffira de résoudre par rapport à A′, B′, C′, ... les congruences

$$\frac{m}{a}\mathrm{A}' \equiv 1 \qquad (\text{mod. } a),$$

$$\frac{m}{b}\mathrm{B}' \equiv 1 \qquad (\text{mod. } b),$$

$$\frac{m}{c}\mathrm{B}' \equiv 1 \qquad (\text{mod. } c),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

ce qui est possible, puisque $\frac{m}{a} = bc\ldots$ est premier à a, que $\frac{m}{b}$ est premier à b, etc...; on prendra ensuite

$$\mathrm{A} = \frac{m}{a}\mathrm{A}', \qquad \mathrm{B} = \frac{m}{b}\mathrm{B}', \qquad \mathrm{C} = \frac{m}{c}\mathrm{C}', \ldots;$$

le nombre

$$x_0 = \mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma + \ldots$$

satisfera aux conditions imposées : en effet, B, C, ... étant divisibles par a, on a

$$x_0 \equiv \mathrm{A}\alpha \equiv \alpha \qquad (\text{mod. } a),$$

etc... Tout autre nombre x satisfaisant aux mêmes conditions s'obtiendra en ajoutant à x_0 un multiple de m, puisque la différence $x - x_0$ doit être divisible par $a, b, c, \ldots$ et, par suite, par m. Cette méthode a cet avantage que le calcul des nombres A, B, C,... ne dépend pas de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, mais seulement de $a, b, c, \ldots$.

532. Ceci posé, revenons à la première question : les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

étant respectivement des racines des congruences (2) et le nombre x_0 étant pris comme on vient de l'expliquer, on a

$$\begin{aligned} f(x_0) &\equiv f(\alpha) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } a), \\ f(x_0) &\equiv f(\beta) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } b); \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

le nombre $f(x_0)$ étant ainsi divisible par $a, b, c, \ldots$ est divisible par m: ainsi x_0 est une racine de la congruence (1). On remarquera que tout nombre x congru respectivement à $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ suivant les modules respectifs $a, b, c, \ldots$, fournira la même racine que x_0, puisque ce nombre sera congru à x_0 (mod. m). Inversement toute racine x_0 de la congruence (1) fournissant un système de solutions (toutes égales à x_0) des congruences (2), on voit que le procédé précédent fournira certainement *toutes* les racines de la congruence (1), pourvu qu'on l'applique à *tous* les systèmes de nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ qui vérifient respectivement les congruences (2).

On observera que deux systèmes distincts $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \alpha', \beta', \gamma', \ldots$ de solutions des congruences (2), c'est-à-dire tels qu'on n'ait pas à la fois

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \alpha' \qquad (\text{mod. } a), \\ \beta &\equiv \beta' \qquad (\text{mod. } b), \\ \gamma &\equiv \gamma' \qquad (\text{mod. } c), \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

conduisent à deux solutions distinctes x_0, x_0' : on a en effet, par exemple,

$$x_0 - x_0' \equiv \alpha - \alpha' \qquad (\text{mod. } a);$$

si donc $x_0 - x_0'$ était divisible par m, $\alpha - \alpha'$ serait divisible par a, de même $\beta - \beta'$ serait divisible par b, etc ...; or nous venons de supposer qu'il n'en était pas ainsi.

On peut donc, en décomposant en facteurs premiers le module m d'une congruence

$$f(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } m),$$

où $f(x)$ est un polynome entier en x à coefficients entiers, ramener sa résolution à la résolution de congruences de la forme

$$f(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^n),$$

p étant un nombre premier.

533. Observons que toute racine de cette dernière congruence est une racine de la congruence

$$f(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^{n-1}).$$

Supposons qu'on sache résoudre cette dernière congruence; chaque racine de la première congruence devra être congrue (mod. p^{n-1}) à quelque racine de la seconde; si donc on désigne par x_0 une de ces dernières racines, on devra poser

$$x = x_0 + p^{n-1}y,$$

y étant un nombre entier que l'on cherchera à déterminer par la congruence

$$f(x_0 + p^{n-1}y) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^n);$$

le lecteur un peu familier avec l'Algèbre reconnaîtra sans peine que la résolution de cette congruence se ramène en général à la résolution d'une congruence du premier degré.

Si donc on sait résoudre la congruence

$$f(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

on saura résoudre la congruence

$$f(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^2),$$

puis la congruence

$$f(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^3), \text{ etc.}$$

Cette méthode, avec de légères modifications dans le cas où p est égal à 2, s'applique aux congruences de la forme

$$x^2 - \text{D} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^n),$$

en supposant que p soit un nombre premier qui ne divise pas D. Je me contenterai d'énoncer les résultats.

534. Si p est un nombre premier autre que 2, qui ne divise pas D, la condition nécessaire et suffisante pour que la congruence

$$x^2 - \text{D} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^n)$$

soit possible, est que la congruence

$$x^2 - \text{D} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

le soit-elle même. On reconnaît d'ailleurs directement que la congruence proposée ne peut avoir que *deux* racines incongrues (mod. p^n).

La congruence

$$x^2 - \text{D} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2^n),$$

où D est un nombre impair, admet pour solutions tous les nombres impairs, si n est égal à un ou à deux : elle admet donc une solution dans le premier cas, deux dans le second.

La congruence

$$x^2 - \text{D} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 8),$$

où D est un nombre impair, n'admet de solution que si D est congru à un (mod. 8). Si cette dernière condition est vérifiée, la congruence admet quatre racines distinctes, savoir 1, 3, 5, 7.

La congruence

$$x^2 - D \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2^n),$$

où D est un nombre impair et n un nombre plus grand que 3, n'est possible que si l'on a $D \equiv 1$ (mod. 8) [1].

Si cette condition est vérifiée, la congruence proposée a quatre racines distinctes.

D'après ces résultats partiels, il est aisé de reconnaître si la congruence

$$x^2 \equiv D \qquad (\text{mod. } m),$$

où D est un nombre premier à m et où m est de la forme $p^\alpha q^\beta \gamma^\gamma \ldots$, ou $2^n p^\alpha q^\beta \gamma^\gamma \ldots$, est possible ou non, et de calculer le nombre de ses solutions distinctes : p, q, r, ... désignent des nombres premiers autres que 2.

§ 8. — Des congruences à une inconnue. Cas où le module est un nombre premier.

535. Arrivons maintenant aux congruences prises suivant un module premier p. Mais auparavant faisons quelques remarques générales sur les nombres congrus suivant un module premier p.

En général, quand on considère un module quelconque m premier ou non, les nombres congrus suivant ce module peuvent être regardés comme équivalents, en ce sens qu'ils peuvent se substituer les uns aux autres dans les opérations faites sur des nombres entiers, qui ne comportent que des additions, soustractions et multiplications, à condition, bien entendu, qu'on néglige dans les résultats les multiples de m. Cela revient à dire que les congruences, prises toujours suivant le même module m, peuvent être traitées comme des égalités. En ce sens, les multiples de m doivent être regardés comme équivalents à 0. Toutefois, lorsque m n'est pas premier, il s'introduit une différence capitale avec les théories ordinaires ; c'est que, en effet, un produit de facteurs peut être divisible par m sans que l'un des facteurs soit divisible par m. En d'autres termes, un produit peut être congru à 0 (mod. m) sans que l'un de ses facteurs soit congru à 0, tandis qu'un produit de nombres entiers ne peut être nul que si l'un de ses facteurs est nul.

Au contraire, lorsque le module est un nombre premier p, cette analogie

1. C'est dans ce cas qu'il y a lieu de modifier la méthode générale ; pour déduire une racine x de la congruence proposée d'une racine x_0 de la congruence $x^2 \equiv D$ (mod. 2^{n-1}), on posera $x = x_0 + 2^{n-2}y$, et l'on cherchera à déterminer y de manière à satisfaire à la proposée.

subsiste. Si l'on convient de dire, en réservant essentiellement cette façon de parler au cas où le module est premier, d'un nombre congru à 0 (mod. p), qu'il est nul [1] (mod. p), on peut dire : Un produit de facteurs ne peut être nul (mod. p) sans que l'un de ses facteurs le soit. Dans le même ordre d'idées, en supposant toujours qu'il ne soit question que de congruences prises suivant le module premier p, il serait naturel de remplacer l'expression congrus (mod. p) par l'expression égaux (mod. p). Je conserverai toutefois le mode de langage habituel. En ce sens il n'y aurait que p nombres distincts, savoir $0, 1, 2, \ldots, p-1$, tous les autres étant congrus (mod. p) à ceux-là.

536. Étant donnés deux nombres a, b dont le second n'est pas nul (mod. p), il y a un nombre et un seul, si l'on néglige toujours les multiples de p, qui vérifie la congruence

$$bx \equiv a \qquad (\text{mod. } p).$$

Il serait naturel, ainsi que Gauss l'a proposé, de regarder ce nombre comme le quotient (mod. p) de a par b et de le représenter par le symbole $\frac{a}{b}$ (mod. p). Seule, la division par le nombre 0 demeure impossible. Ces fractions symboliques $\frac{a}{b}$ (mod. p), qui représentent en réalité des nombres entiers, pourraient être soumises à des règles de calcul pareilles à celles des fractions ordinaires : on pourrait multiplier leurs deux termes par un même nombre non nul (mod. p), etc...

537. Dans le même ordre d'idées, il est naturel d'appeler *identiquement congru à zéro* (mod. p) un polynome dont les coefficients sont nuls (mod. p), c'est-à-dire tout polynome qui peut être mis sous la forme $p\psi(x)$, $\psi(x)$ étant un polynome entier en x à coefficients entiers. Deux polynomes à coefficients entiers seront identiquement congrus (mod. p) si leur différence est un polynome identiquement congru à zéro. On reconnaît de suite que, si on fait des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication sur divers polynomes à coefficients entiers, on peut remplacer dans ces opérations ces polynomes par d'autres polynomes qui leur soient identiquement congrus (mod. p). Les deux séries d'opérations fourniront deux polynomes identiquement congrus (mod. p). Si dans un polynome entier en x, à coefficients entiers, on appelle terme du plus haut degré le terme du plus haut degré dans ce polynome dont le coefficient ne soit pas nul (mod. p), si l'on définit de même le terme du plus bas degré, on reconnaît de suite que dans le produit de deux polynomes entiers en x, à coefficients entiers, les coefficients des termes de plus haut degré et de plus bas degré sont respectivement congrus (mod. p) aux produits des coefficients des termes du plus haut degré d'une part, et des termes du plus bas degré de l'autre, en sorte que

1. Je dois à M. Borel cette expression, ainsi que la forme donnée à quelques-unes des idées qui sont exposées ici.

le produit ne sera certainement pas identiquement congru à zéro, si l'un des deux facteurs n'est pas lui-même identiquement congru à zéro. Ce théorème s'étend immédiatement au produit d'autant de polynomes qu'on voudra. On voit aussi qu'en appelant degré d'un polynome le degré du terme le plus élevé défini comme plus haut, on peut dire que le degré du produit de deux polynomes entiers en x est égal à la somme des degrés des deux facteurs. Enfin étant donnés deux polynomes entiers en x, $f(x)$ et $\psi(x)$, on dira que $f(x)$ est divisible (mod. p) par $\psi(x)$ s'il existe un polynome $Q(x)$ entier en x, tel que le polynome $f(x)$ soit identiquement congru au produit des polynomes $\psi(x)$, $Q(x)$. Le lecteur qui connaît la théorie du plus grand commun diviseur algébrique reconnaîtra sans peine que cette théorie s'étend, ainsi que ses conséquences les plus importantes, à la divisibilité (mod. p). Je laisserai de côté ce sujet, malgré son importance, pour m'arrêter sur quelques résultats d'ordre plus élémentaire.

538. Si un polynome $f(x)$ entier en x devient nul (mod. p) quand on y remplace x par le nombre entier a, c'est-à-dire si $f(a)$ est divisible par p, le polynome $f(x)$ est divisible (mod. p) par $x - a$.

En effet $f(x) - f(a)$ est algébriquement divisible par $(x - a)$ et le quotient est un polynome à coefficients entiers $\psi(x)$; on a donc identiquement

$$f(x) = (x - a)\psi(x) + f(a);$$

mais, $f(a)$ étant, par hypothèse, un nombre divisible par p, la proposition est évidente.

Réciproquement, il est clair que, si le polynome $f(x)$ est divisible (mod. p) par $x - a$, a étant un nombre entier, le résultat de la substitution de a à x dans $f(x)$ est nul (mod. p).

539. Si, a, b, c, ... étant des nombres entiers dont deux quelconques ne sont pas congrus (mod. p), le polynome $f(x)$, entier en x, est divisible (mod. p) par $x - a$, par $x - b$, par $x - c$, ..., il est divisible (mod. p) par le produit $(x - a)(x - b)(x - c)\ldots$.

En effet $f(x)$ étant divisible (mod. p) par $x - a$, on peut écrire identiquement

$$f(x) = (x - a)f_1(x) + pA_1,$$

A_1 étant un nombre entier et $f_1(x)$ un polynome entier en x à coefficients entiers; en remplaçant dans le résultat x par b, on obtient, puisque $f(b)$ est divisible par p,

$$(b - a)f_1(b) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p);$$

puisque $b - a$ n'est pas nul (mod. p), on a donc

$$f_1(b) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p):$$

on en conclut que $f_1(x)$ est divisible (mod. p) par $x - b$, de même par $x - c$, etc...; on peut donc écrire identiquement

$$f_1(x) = (x - a)f_2(x) + pA_2,$$

A_2 étant encore un nombre entier et $f_2(x)$ un polynome entier en x, à coefficients entiers; en remplaçant dans $(x - a(f_1(x) + pA_1, f_1(x)$ par cette valeur, on en conclut qu'on peut écrire identiquement

$$f(x) = (x - a)(x - b)f_2(x) + p\Psi_1(x),$$

$\Psi_1(x)$ étant un polynome entier en x du premier degré, à coefficients entiers. En remplaçant dans cette identité x par c, on en conclut, puisque $f(c)$ est divisible par p,

$$0 \equiv (c - a)(c - b)f_2(c) \qquad (\text{mod. } p);$$

comme aucun des nombres $c - a$, $c - b$ n'est nul (mod. p), on en conclut que $f_2(c)$ est nul (mod. p), ou, si l'on veut, que $f_2(x)$ est divisible (mod. p) par $x - c$. Le raisonnement se continue; on pourra, dans l'identité

$$f(x) = (x - a)(x - b)f_2(x) + p\Psi_1(x),$$

remplacer $f_2(x)$ par un polynome de la forme $(x - c)f_3(x) + pA_3$, $f_3(x)$ ayant encore ses coefficients entiers et A_3 étant un nombre entier; on obtiendra une identité de la forme

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)f_3(x) + p\Psi_2(x),$$

où $\Psi_2(x)$ est un polynome entier en x, à coefficients entiers, du second degré, et cette identité montre bien que le polynome $f(x)$ est divisible (mod. p) par $(x - a)(x - b)(x - c)$. En général s'il y a r nombres $a, b, c, \ldots,$ on mettra $f(x)$ sous la forme.

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)\ldots f_r(x) + p\Psi_{r-1}(x),$$

$f_r(x)$ étant un polynome entier en x, dont le degré est $n - r$ si le degré du polynome $f(x)$ est n, et dans lequel le coefficient de la plus haute puissance de x est le même que dans $f(x)$, ainsi qu'il résulte de la théorie de la division algébrique. Quand à $\Psi_{r-1}(x)$, c'est un polynome entier en x de degré $r - 1$.

540. Il résulte de là qu'un polynome du degré n ne peut pas s'annuler (mod. p) pour plus de n valeurs de la variable, incongrues deux à deux (mod. p).

Si, en effet, dans l'identité précédente, on suppose que les nombres $a, b, c, \ldots, l$, incongrus deux à deux, soient en nombre n, on peut écrire identiquement, en désignant par K le coefficient de x^n dans $f(x)$

$$f(x) = K(x - a)(x - b)(x - c)\ldots(x - l) + p\Psi_{n-1}(x),$$

Ψ_{n-1} étant un polynome à coefficients entiers : si $f(x)$ pouvait s'annuler (mod. p) pour un nombre entier x_0 incongru (mod. p) à a, b, ..., l, on voit, en faisant $x = x_0$ dans l'identité précédente, qu'on aurait

$$K(x_0 - a)(x_0 - b)(x_0 - c)\ldots(x_0 - l) \equiv 0 \pmod{p},$$

ce qui est impossible.

Ainsi, une congruence du degré n à une inconnue

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p},$$

c'est-à-dire une congruence dans laquelle le premier membre $f(x)$ est un polynome entier en x de degré égal à n, ne peut avoir plus de n racines distinctes. Si elle admet n racines distinctes et que l'on connaisse ces n racines, on pourra mettre le premier membre sous une forme spéciale, comme on l'a vu au numéro précédent.

541. Il est clair qu'on obtient une congruence équivalente à la proposée en remplaçant son premier membre par un polynome qui lui soit identiquement congru (mod. p). Supposons en particulier que ce premier membre soit identiquement congru (mod. p) au produit de deux polynomes $\psi(x)$, $\theta(x)$ entiers en x, on aura, quel que soit le nombre entier x',

$$f(x') \equiv \psi(x')\,\theta(x') \pmod{p};$$

d'ailleurs, pour que le nombre entier $f(x')$ soit nul (mod. p), il faut et il suffit que l'un des nombres entiers $\psi(x')$, $\theta(x')$ soit nul (mod. p); on en conclut que les racines de la congruence

$$(1) \qquad f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

sont les mêmes que les racines, prises dans leur ensemble, des congruences

$$(2) \qquad \begin{aligned} \psi(x) &\equiv 0 \pmod{p}, \\ \theta(x) &\equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Si, en particulier, $f(x)$ est de degré égal à n et si la congruence (1) a n racines distinctes, la somme des degrés des polynomes $\psi(x)$, $\theta(x)$ sera égale a n; donc chacune des congruences (2) aura exactement autant de racines distinctes qu'il y a d'unités dans son degré.

Par exemple, la congruence

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

a $p - 1$ racines distinctes, d'après le théorème de Fermat, à savoir les nombres $1, 2, \ldots, p - 1$; on a d'ailleurs identiquement, en supposant $p > 2$,

$$x^{p-1} - 1 = \left(x^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(x^{\frac{p-1}{2}} + 1\right);$$

donc les congruences

$$\begin{aligned} x^{\frac{p-1}{2}} - 1 &\equiv 0 \pmod{p}, \\ x^{\frac{p-1}{2}} + 1 &\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

ont chacune $\frac{p-1}{2}$ racines distinctes; c'est ce qu'on savait déjà; les $\frac{p-1}{2}$ racines de la première sont les restes quadratiques de p, les $\frac{p-1}{2}$ racines de la seconde sont les non-restes.

Donnons maintenant une application du théorème du n° 539.

La congruence de degré $p-1$

$$x^{p-1}-1 \equiv 0 \pmod{p}$$

admet $p-1$ racines distinctes, par exemple les nombres $1, 2, \ldots, p-1$; il en résulte que le polynome $x^{p-1}-1$ est divisible (mod. p) par le produit $(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1)$, et comme le coefficient de la plus haute puissance de x est un, on peut écrire identiquement

$$x^{p-1}-1 = (x-1)(x-2)\ldots(x-p+1) + p\psi(x),$$

$\psi(x)$ étant un polynome entier en x, à coefficients entiers; il en résulte que tous les coefficients du polynome

$$x^{p-1}-1-(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1)$$

sont divisibles par p; en d'autres termes, si l'on veut, ce polynome est identiquement congru à zéro (mod. p). Le terme indépendant de x, en particulier, est $-1-1.2\ldots(p-1)$; on a donc

$$1.2.3\ldots(p-1)+1 \equiv 0 \pmod{p},$$

en sorte qu'on voit là un lien entre le théorème de Fermat et celui de Wilson. On voit en outre que dans le développement du produit

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1)$$

tous les coefficients, sauf le premier et le dernier, sont divisibles par p.

§ 9. — Restes de puissances. Racines primitives. Théorie des indices. Congruences binomes.

542. En désignant par a et m deux nombres entiers premiers entre eux, dont le dernier est positif, considérons la suite indéfinie

$$(1) \qquad 1 = a^0,\ a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots$$

et les restes de ses termes (mod. m). Ces restes ne peuvent être tous distincts, puisqu'ils sont au plus en nombre $m-1$; aucun d'eux en effet ne peut être nul : supposons que a^n et a^{n+h} donnent le même reste, on aura

$$a^{n+h} \equiv a^n \pmod{m}$$

ou

$$a^n(a^h-1) \equiv 0 \pmod{m};$$

a^n étant premier avec m, a^h-1 est divisible par m. Il y a donc, dans la suite, des termes, autres que le premier, dont le reste (mod. m) est égal à un. C'est ce qu'on savait déjà par le théorème de Fermat généralisé, puisque l'on a, en désignant par $\varphi(m)$ le nombre de nombres premiers et inférieurs à m,

$$a^{\varphi(m)} - 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } m).$$

Quoi qu'il en soit, désignons par k le plus petit nombre entier positif pour lequel on a

$$a^k - 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } m);$$

il est clair que deux termes de la suite (1) seront congrus ou non (mod. m), suivant que la différence de leurs exposants sera ou non divisible par k. Les restes se reproduiront donc périodiquement de k en k; k termes consécutifs fourniront k restes différents, qui seront dans leur ensemble les restes fournis par les k premiers termes. En particulier, les restes égaux à 1 se reproduiront de k en k, et comme $a^{\varphi(m)}$ donne le reste 1, on voit que k est nécessairement un diviseur de $\varphi(m)$.

Ces remarques trouveraient des applications faciles dans la théorie des fractions décimales périodiques, en supposant $a = 10$; en effet, quand on réduit en fraction décimale une fraction de la forme $\frac{A}{m}$, où A et m désignent des nombres entiers premiers entre eux et où l'on suppose (pour nous borner à ce cas) que m est premier avec 10, on est amené à chercher les restes (mod. m) des nombres.

$$A,\ A \times 10,\ A \times 10^2,\ A \times 10^3,\ \ldots$$

et c'est la périodicité de ces restes qui règle la périodicité des chiffres de la fraction décimale périodique; or on aperçoit que cette périodicité est la même pour la suite qu'on vient d'écrire et la suite

$$1,\ 10,\ 10^2,\ 10^3,\ \ldots.$$

On est donc bien dans le cas considéré.

543. Sans m'arrêter à ces applications, qui sont faciles, je supposerai que le module m, que je désignerai désormais par p, soit un nombre premier. Alors $\varphi(m) = \varphi(p)$ est égal à $p - 1$; si d est le plus petit nombre entier positif tel que l'on ait

$$a^d \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p),$$

d est un diviseur de $p - 1$; on dit alors que a appartient à l'exposant d. Il est à peine utile de faire observer que les nombres congrus (mod. p) appartiennent au même exposant. La question suivante se pose immédiatement : étant donné un nombre d diviseur de $p - 1$, y a-t-il des nombres

a qui appartiennent à l'exposant d, c'est-à-dire des nombres dont la $d^{\text{ième}}$ puissance soit congrue à 1 (mod. p), les puissances d'ordre inférieur à d n'étant pas congrues à 1 (mod. p)? S'il y a un tel nombre a, il est facile de voir qu'il y en a exactement $\varphi(d)$ qui sont incongrus (mod. p).

Observons d'abord que tout nombre qui appartient à l'exposant d est une racine de la congruence

$$x^d - 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

qui ne peut avoir, d'après la théorie générale (n° 540), que d racines distinctes.

Si maintenant a appartient à l'exposant d, toute puissance a^n de a sera une racine de la congruence ; on a en effet

$$(a^n)^d = a^{nd} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p),$$

puisque nd est divisible par d. Parmi les puissances de a, il y en a d qui sont incongrues (mod. p), savoir :

$$a^0 = 1, \qquad a, \qquad a^2, \qquad \ldots, \qquad a^{d-1};$$

ce seront donc là les d racines distinctes de la congruence, et les nombres qui appartiennent à l'exposant d doivent être cherchés parmi ces nombres. Soit a^n l'un deux, la suite des puissances de a^n sera

$$1 = a^0, \qquad a^n, \qquad a^{2n}, \qquad a^{3n}, \ldots;$$

elles sont congrues aux nombres

$$a^0, \qquad a^{r_1}, \qquad a^{r_2}, \qquad a^{r_3}, \ \ldots,$$

en désignant par $0, r_1, r_2, r_3, \ldots$ les restes (mod. d) des exposants $0, n, 2n, 3n, \ldots$; deux termes de cette dernière suite qui ont des exposants différents sont incongrus (mod. p), les seuls termes pour lesquels le reste (mod. p) soit un sont ceux dont l'exposant est nul ; or, la suite $0, r_1, r_2, r_3, \ldots$ est périodique (n° 503) ; la période contient $\frac{d}{\delta}$ termes différents, en désignant par δ le plus grand commun diviseur de n et de d; les termes nuls se reproduisent de $\frac{d}{\delta}$ en $\frac{d}{\delta}$; il résulte clairement de là que a^n appartient à l'exposant $\frac{d}{\delta}$. Si donc on veut que a^n appartienne à l'exposant d, il faut et il suffit que n soit premier avec d; il y aura donc autant de nombres incongrus (mod. p) qui appartiennent à l'exposant d, diviseur de $p-1$, qu'il y a de nombres premiers à d et non supérieurs à d, à condition qu'il y ait *un* nombre qui appartienne à l'exposant d. Si donc on désigne par $\psi(d)$ le nombre des nombres incongrus (mod. p) qui appartiennent à l'exposant d, on aura soit

$$\psi(d) = 0,$$

soit

$$\psi(d) = \varphi(d).$$

Mais chacun des $p - 1$ nombres incongrus (mod. p) $1, 2, 3, \ldots, p - 1$ appartient à quelqu'un des diviseurs $1, d, d', \ldots, p - 1$ de $p - 1$; il faut donc que l'on ait

$$\psi(1) + \psi(d) + \psi(d') + \ldots + \psi(p - 1) = p - 1;$$

on a d'ailleurs (n° 529)

$$\varphi(1) + \varphi(d) + \varphi(d') + \ldots + \varphi(p - 1) = p - 1.$$

En remplaçant dans cette égalité l'un des termes par 0, elle ne pourrait subsister, puisque aucun de ses termes n'est nul ; il faut donc que l'on ait $\psi(d) = \varphi(d)$ quel que soit le diviseur d de $p - 1$. Ainsi :

A chaque diviseur d de $p - 1$ correspondent exactement $\varphi(d)$ nombres a, pris, si l'on veut, dans la suite $1, 2, \ldots, p - 1$, qui appartiennent à l'exposant d.

En particulier, il y a $\varphi(p - 1)$ nombres distincts qui appartiennent à l'exposant $p - 1$; ceux-là, on les appelle *racines primitives* du nombre p. Si g est une pareille racine primitive, tous les $p - 1$ nombres

$$g^0 = 1, \qquad g, \qquad g^2, \ldots, \qquad g^{p-2}$$

sont incongrus (mod. p); leurs restes (mod. p), dans leur ensemble, reproduisent les nombres $1, 2, \ldots, p - 1$: ce sont tous les restes possibles, sauf zéro, tous les nombres, sauf zéro, qu'il y a lieu de regarder comme distincts suivant le mod. p (n° 535).

Par exemple, 2 est une racine primitive de 11 ; aux puissances de 2 dont les exposants sont

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \quad 9$$

correspondent les restes

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad 5, \quad 10, \quad 9, \quad 7, \quad 3, \quad 6.$$

544. Soit en général g une racine primitive du nombre premier p, et a un nombre quelconque non divisible par p, il y a un nombre α pris dans la suite $0, 1, 2, \ldots, p - 2$, et un seul, tel que l'on ait

$$g^\alpha \equiv a \qquad (\text{mod. } p).$$

Tous les nombres α qui satisfont à cette condition sont d'ailleurs congrus entre eux (mod. $p-1$), l'un quelconque d'entre eux s'appelle l'*indice* de a dans la base g ; l'indice est déterminé à un multiple près de $p-1$, on pourra le prendre plus petit que $p-1$. On le représente par Ind. a.

Les indices jouent le même rôle dans les calculs relatifs aux nombres entiers, où l'on convient de négliger les multiples de p, que les *logarithmes* dans les calculs ordinaires.

L'indice de 1 est toujours 0.

L'indice du produit de deux nombres est congru (mod. $p-1$) à la somme des indices de ces nombres.

Si on a en effet

$$g^{\text{ind. } a} \equiv a, \quad g^{\text{ind. } b} \equiv b \qquad (\text{mod.} p),$$

on en déduira

$$g^{\text{ind. } a + \text{ind. } b} \equiv ab \qquad (\text{mod. } p),$$

et par suite

$$\text{Ind. } ab \equiv \text{Ind. } a + \text{Ind. } b \qquad (\text{mod. } p-1).$$

Ce théorème s'étend de suite à un nombre quelconque de facteurs.

L'indice de la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre est congru (mod. $p-1$) à n fois l'indice de ce nombre.

Quand on change de racines primitives, les indices changent ; en négligeant les multiples de $p-1$, on peut passer d'un système d'indices à un autre en les multipliant tous par un même nombre.

Soient en effet g et γ deux racines primitives, soit λ l'indice de g dans la base γ, on aura

$$\gamma^{\lambda} \equiv g \qquad (\text{mod. } p).$$

Soit maintenant α l'indice de a dans la base g, on aura

$$g^{\alpha} \equiv a \qquad (\text{mod. } p-1).$$

Si donc on élève à la puissance α les deux membres de l'avant-dernière congruence on aura

$$\gamma^{\lambda\alpha} \equiv g^{\alpha} \equiv a \qquad (\text{mod. } p).$$

Par suite $\lambda\alpha$ sera l'indice de a dans la base γ : on obtiendra donc les indices dans cette dernière base en multipliant par λ tous les indices dans la base g.

Toutes ces propriétés sont analogues à celles des logarithmes.

545. Observons que les indices peuvent servir à résoudre les congruences du premier degré prises par rapport à un module premier. Soit

$$ax \equiv b \qquad (\text{mod. } p)$$

une telle congruence; on devra avoir

$$\text{Ind. } a + \text{Ind. } x \equiv \text{Ind. } b \qquad (\text{mod. } p - 1),$$

d'où

$$\text{Ind. } x \equiv \text{Ind. } b - \text{Ind. } a \qquad (\text{mod. } p - 1).$$

Inversement un nombre dont l'indice sera congru à Ind. b — Ind. a sera une solution de la congruence proposée.

Par exemple, pour le nombre premier 11, les indices des nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$$

sont respectivement, dans la base 2,

$$0,\ 1,\ 8,\ 2,\ 4,\ 9,\ 7,\ 3,\ 6,\ 5.$$

Soit la congruence

$$7x \equiv 8 \qquad (\text{mod. } 11).$$

On en tire

$$\text{Ind. } x \equiv \text{Ind. } 8 - \text{Ind. } 7 \equiv 3 - 7 \equiv -4 \equiv 6 \qquad (\text{mod. } 10).$$

Le nombre dont l'indice est 6 est 9; on a donc $x \equiv 9$, et, en effet, $7 \times 9 = 63 = 55 + 8$ est bien congru à 8 (mod. 11).

546. Observons que, quand on a une racine primitive d'un nombre premier p, il est aisé d'obtenir les autres; elles s'obtiendront en élevant cette racine primitive à une puissance première à $p - 1$: par exemple, les racines primitives de 11 seront

$$2,\ 2^3 = 8,\ 2^7 \equiv 7,\ 2^9 \equiv 6.$$

547. Ce qui précède suffit à montrer l'utilité qu'il y a à posséder une table de racines primitives et d'indices pour les nombres premiers. La table IV est extraite des *Disquisitiones arithmeticæ* de Gauss [1] : dans la première colonne verticale, marquée p en haut, sont les nombres premiers inférieurs à 100; en face de chacun de ces nombres, dans la colonne suivante, marquée g, est une racine primitive; les colonnes suivantes contiennent les indices des nombres premiers placés en haut de chaque colonne verticale, sur la première ligne horizontale. Il est clair, en effet, que, dès qu'on a les indices des nombres premiers, on peut former aisément les indices des nombres composés.

1. *Werke*, t. I.

Voici d'ailleurs, pour les mêmes nombres premiers, les plus petites racines primitives : lorsque 10 est une racine primitive, le nombre premier est marqué d'un astérisque (¹).

p	g	p	g	p	g
3	2	29*	2	61*	2
5	2	31	3	67	2
7*	3	37	2	71	7
11	2	41	6	73	5
13	2	43	3	79	3
17*	3	47*	5	83	2
19*	2	53	2	89	3
23*	5	59*	2	97*	5

548. Considérons une congruence de la forme

$$x^n - \mathrm{D} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

p étant un nombre premier et D un entier non divisible par p.

En désignant par g une racine primitive de p et en prenant les indices suivant cette base, on voit que si x est regardé comme une racine de la congruence précédente, on doit avoir

$$n \operatorname{Ind.} x \equiv \operatorname{Ind.} \mathrm{D} \qquad (\text{mod. } p-1)\,;$$

inversement, si cette dernière congruence du premier degré par rapport à Ind. x est vérifiée, il est clair que la proposée le sera. Pour qu'elle admette des solutions, il faut et il suffit que le plus grand commun diviseur δ de n et de $p-1$ divise Ind. D (nº 510). S'il en est ainsi, elle admettra, en regardant Ind. x comme l'inconnue, δ solutions incongrues (mod. $p-1$), auxquelles correspondent δ racines distinctes de la proposée. La condition de possibilité à laquelle nous parvenons ainsi dépend, au moins en apparence, de la racine primitive g, qui a servi de base aux indices. Il convient de la transformer.

En désignant par d l'indice de D, dans la base g, on aura

$$g^d \equiv \mathrm{D} \qquad (\text{mod. } p)$$

et, par suite,

$$g^{\frac{p-1}{\delta}d} \equiv \mathrm{D}^{\frac{p-1}{\delta}} \qquad (\text{mod. } p).$$

1. Ces derniers nombres sont tirés d'une table construite par M. Wertheim et qui contient les mêmes indications pour tous les nombres premiers inférieurs à 3000. (*Acta mathematica*, t. XVII, p. 315.)

Mais, si le plus grand commun diviseur δ de n et de $p-1$ divise d, le nombre $\frac{p-1}{\delta}d = (p-1)\frac{d}{\delta}$ est un multiple de $p-1$, par conséquent le premier membre est congru à 1 (mod. p). On doit donc avoir :

$$D^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p).$$

Inversement, si cette condition est vérifiée, δ doit diviser d; en effet, en élevant à la puissance $\frac{p-1}{\delta}$ les deux membres de la congruence

$$g^d \equiv D \qquad (\text{mod. } p),$$

on obtient alors

$$g^{d\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p),$$

d'où il résulte que le nombre entier $d\frac{p-1}{\delta}$ doit être divisible par $p-1$, ce qui suppose que d soit divisible par δ. Ainsi :

La condition nécessaire et suffisante pour que la congruence

$$x^n \equiv D \qquad (\text{mod. } p),$$

où p est un nombre premier et D un nombre entier non divisible par p, admette des solutions, est que l'on ait

$$D^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p),$$

en désignant par δ le plus grand commun diviseur de n et de $p-1$. Si cette condition est vérifiée, la congruence proposée admet δ racines distinctes.

Ce théorème contient, comme cas particulier, la proposition du n° 517, relative au cas où n est égal à 2.

TABLE I

1	101	211	307	401	503	601	701	809	907
2	103	223	311	409	509	607	709	811	911
3	107	227	313	419	521	613	719	821	919
5	109	229	317	421	523	617	727	823	929
7	113	233	331	431	541	619	733	827	937
11	127	239	337	433	547	631	739	829	941
13	131	241	347	439	557	641	743	839	947
17	137	251	349	443	563	643	751	853	953
19	139	257	353	449	569	647	757	857	967
23	149	263	359	457	571	653	761	859	971
29	151	269	367	461	577	659	769	863	977
31	157	271	373	463	587	661	773	877	983
37	163	277	379	467	593	673	787	881	991
41	167	281	383	479	599	677	797	883	997
43	173	283	389	487		683		887	
47	179	293	397	491		691			
53	181			499					
59	191								
61	193								
67	197								
71	199								
73									
79									
83									
89									
97									

TABLE II

1	1	26	676	51	2601	76	5776
2	4	27	729	52	2704	77	5929
3	9	28	784	53	2809	78	6084
4	16	29	841	54	2916	79	6241
5	25	30	900	55	3025	80	6400
6	36	31	961	56	3136	81	6561
7	49	32	1024	57	3249	82	6724
8	64	33	1089	58	3364	83	6889
9	81	34	1156	59	3481	84	7056
10	100	35	1225	60	3600	85	7225
11	121	36	1296	61	3721	86	7396
12	144	37	1369	62	3844	87	7569
13	169	38	1444	63	3969	88	7744
14	196	39	1521	64	4096	89	7921
15	225	40	1600	65	4225	90	8100
16	256	41	1681	66	4356	91	8281
17	289	42	1764	67	4489	92	8464
18	324	43	1849	68	4624	93	8649
19	361	44	1936	69	4761	94	8836
20	400	45	2025	70	4900	95	9025
21	441	46	2116	71	5041	96	9216
22	484	47	2209	72	5184	97	9409
23	529	48	2304	73	5329	98	9604
24	576	49	2401	74	5476	99	9801
25	625	50	2500	75	5625		

TABLE III

1	1	26	17576	51	132651	76	438976
2	8	27	19683	52	140608	77	456533
3	27	28	21952	53	148877	78	474552
4	64	29	24389	54	157464	79	493039
5	125	30	27000	55	166375	80	512000
6	216	31	29791	56	175616	81	531441
7	343	32	32768	57	185193	82	551368
8	512	33	35937	58	195112	83	571787
9	729	34	39304	59	205379	84	592704
10	1000	35	42875	60	216000	85	614125
11	1331	36	46656	61	226981	86	636056
12	1728	37	50653	62	238328	87	658503
13	2197	38	54872	63	250047	88	681472
14	2744	39	59319	64	262144	89	704969
15	3375	40	64000	65	274625	90	729000
16	4096	41	68921	66	287496	91	753571
17	4913	42	74088	67	300763	92	778688
18	5832	43	79507	68	314432	93	804357
19	6859	44	85184	69	328509	94	830584
20	8000	45	91125	70	343000	95	857375
21	9261	46	97336	71	357911	96	884736
22	10648	47	103823	72	373248	97	912673
23	12167	48	110592	73	389017	98	941192
24	13824	49	117649	74	405224	99	970299
25	15625	50	125000	75	421875		

TABLE IV

p	g	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89
3	2	1																							
5	2	1	3																						
7	3	2	1	5																					
11	2	1	8	4	7																				
13	6	5	8	9	7	11																			
17	10	10	11	7	9	13	12																		
19	10	17	5	2	12	6	13	8																	
23	10	8	20	15	21	3	12	17	5																
29	10	11	27	18	20	23	2	7	15	24															
31	17	12	13	20	4	29	23	1	22	21	27														
37	5	11	34	1	28	6	13	5	25	21	15	27													
41	6	26	15	22	39	3	31	33	9	36	7	28	32												
43	28	39	17	5	7	6	40	16	29	20	25	32	35	18											
47	10	30	18	17	38	27	3	42	29	39	43	5	24	25	37										
53	26	25	9	31	38	46	28	42	41	39	6	45	22	33	30	8									
59	10	25	32	34	44	45	23	14	22	27	4	7	41	2	13	53	28								
61	10	47	42	14	23	45	20	49	22	39	25	13	33	18	41	40	51	17							
67	12	29	9	39	7	61	23	8	26	20	22	43	44	19	63	64	3	54	5						
71	62	58	18	14	33	43	27	7	38	5	4	13	30	55	44	17	59	29	37	11					
73	5	8	6	1	33	55	59	21	62	46	35	11	64	4	51	31	53	5	58	50	44				
79	29	50	71	34	19	70	74	9	10	52	1	76	23	21	47	55	7	17	75	54	33	4			
83	50	3	52	81	24	72	67	4	59	16	36	32	60	38	49	69	13	20	34	53	17	43	47		
89	30	72	87	18	7	4	65	82	53	31	29	57	77	67	59	34	10	45	19	32	26	68	46	27	
97	10	86	2	11	53	82	83	19	27	79	47	26	41	71	44	60	14	65	32	51	25	20	42	91	18

IMPRIMERIE E. CAPIOMONT ET C^{ie}

PARIS

6, RUE DES POITEVINS, 6

(Ancien Hôtel de Thou)