

Elastische Bogenträger

Von

Professor Dr. J. J. Weyrauch

Dritte Auflage

Stuttgart

Verlag von Konrad Wittwer

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000299796

*Dem lieben Segel
vom Stokhoff
Dessau 1920*

Elastische Bogenträger

einschließlich der
Gewölbe, Eisenbetonbogen
und
Bogenfachwerke.

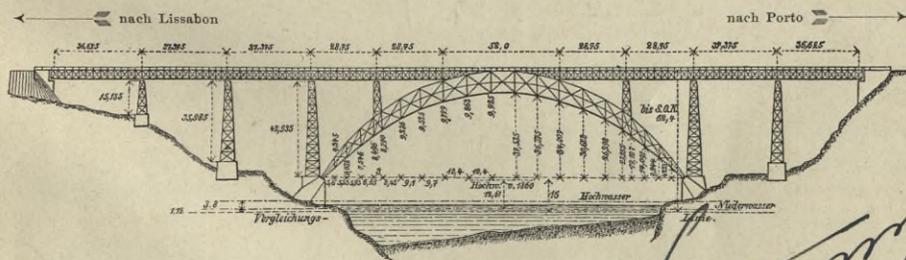


Ihre Theorie und Berechnung
mit
zahlreichen Beispielen und Aufgaben entsprechend den
Bedürfnissen der Praxis

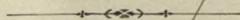
von

Dr. Jakob J. Weyrauch

Professor an der Kgl. Technischen Hochschule in Stuttgart.



Dritte vollständig neu bearbeitete Auflage
mit 322 Textfiguren und einer Tafel.



Stuttgart

Verlag von Konrad Wittwer

1911

Handwritten signature and date: 1927



Alle Rechte
besonders das Recht der Übersetzung in fremde Sprachen
vorbehalten.

Copyright 1911 by Konrad Wittwer
Stuttgart, Germany.

II 37.024

Akc. Nr. D. 3818/58

Aus dem Vorwort zur zweiten Auflage.

Die Anwendung von Bogenträgern hat in neuerer Zeit außerordentlich zugenommen. Es rührt dies zum Teil daher, daß ästhetische Gesichtspunkte bei Ingenieurkonstruktionen überhaupt mehr Berücksichtigung finden. Sodann ist infolge der mannigfaltigeren Bedürfnisse eine Mannigfaltigkeit der Anordnungen entstanden, durch welche der Bogen, sei es allein, sei es in Verbindung mit dem Balken, sehr verschiedenen Verhältnissen angepaßt werden kann. Man braucht in dieser Beziehung nur an die Dourobrücken und ihre zahlreichen Nachahmungen, an neuere Brückenkonkurrenzen und an bedeutendere Bahnhofshallen zu erinnern. Daß der Materialverbrauch für Bogen im allgemeinen geringer als für Balken ist, hat ebenfalls mehr und mehr Beachtung gefunden.

Die Notwendigkeit, sich mit der Theorie elastischer Bogenträger zu befassen, tritt also heute an viele Ingenieure heran. Schon die üblichen Belastungsproben mit Berechnung von Einsenkungen setzen eine gewisse Kenntnis derselben voraus. Die Ausbildung der Gewölbe und ihre Verwendung bis zu immer größeren Spannweiten drängen auf deren Berechnung als elastische Bogenträger, nachdem auch die verdienstvollen Versuche des Österreichischen Ingenieur- und Architektenvereins (S. 233) zu dem Schlusse geführt haben, daß die erprobten Gewölbe sich im allgemeinen wie elastische Bogenträger verhielten und daß es daher zutreffend sein werde, Gewölbe mit ähnlicher Gestalt und gleicher Ausführung wie die Versuchsgewölbe als elastische Bogenträger zu berechnen.

Die vorliegende zweite Auflage meiner elastischen Bogenträger dürfte demnach zu gelegener Zeit erscheinen. Allerdings mußte das Werk eine vollständige Neubearbeitung erfahren, da es in der ersten Auflage von 1879 zunächst nur auf die Durchführung einer genügend vollständigen Theorie ankam. Von Weiterbildungen derselben in dieser Ausgabe sei hier nur auf die genaueren Formeln für den Horizontal Schub und die Endmomente, die Berücksichtigung von Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten, von Bogen mit Zugstange und kontinuierlichen Bogen, die Formeln für die Einsenkungen, die Beziehungen für künstliche Überhöhung der Bogen und die Reduktion der

Normaltemperatur auf die mittlere Ortstemperatur hingewiesen (erstmalig ausgeführt bei der Cannstatter Neckarbrücke 1893, vergl. S. 497). Durch mühsame Kontrollrechnungen ist die Zulässigkeit vereinfachender Annahmen geprüft, wobei sich mitunter wesentliche Abweichungen gegen bisherige Meinungen ergaben.

Der Verfasser war bestrebt, durch geeignete Beispiele aus der Praxis die wichtigsten Berechnungen soweit zu zeigen, daß man auch ohne Verfolgung der allgemeinen Entwicklungen in ähnlichen Fällen danach vorgehen kann. Es genügt meist, den einschlagenden Paragraphen vorzunehmen, wo die häufigst gebrauchten Formeln, notwendige Verweisungen und für die Hauptfälle eine Anzahl Beispiele gegeben sind, während im übrigen das vollständige Inhaltsverzeichnis und die am Schlusse des Werkes angefügten Wort- und Buchstabenregister die Orientierung erleichtern können. — Beziehungen, welche selten oder nur unter gewissen Voraussetzungen nötig werden, sind vielfach in Form von Aufgaben vorgeführt, die alsdann auch Gelegenheit zur Selbsttätigkeit bieten. — — — — —

Stuttgart, im Dezember 1896.

Der Verfasser.

Vorwort zur dritten Auflage.

Die dritte Auflage der „Elastischen Bogenträger“ war schon vor einer Reihe von Jahren in Aussicht genommen, mußte aber mehrfach zurückgestellt werden. Inzwischen hat die Anwendung von Bogenträgern einschließlich der Gewölbe, Betonbogen und Bogenfachwerke immer weiter zugenommen und Eisenbetonbogen sind hinzugetreten. Auch mancherlei Versuche und gewollte wie ungewollte Erfahrungen waren zu verzeichnen und gaben Veranlassung, den betreffenden Anordnungen erhöhte Aufmerksamkeit zuzuwenden. Es braucht in dieser Hinsicht nur an die Versuche und Erfahrungen mit Gelenken erinnert zu werden (§§ 13—17, Beispiele 13—17, 20, 21, 23—25). Alle diese Verhältnisse haben in der dritten Auflage gebührende Berücksichtigung gefunden.

Angesichts der anerkannten Vorzüge der eisernen und steinernen Bogen wären dieselben wohl noch häufiger an Stelle weniger befriedigender Konstruktionen getreten, wenn nicht manche Ingenieure durch die vielbetonte Schwierigkeit und Umständlichkeit der Berechnung davon abge-

halten würden. Es kommt hierbei allerdings sehr auf die Methode der Berechnung an. Ich bin deshalb mit den Beispielen viel weiter als in der zweiten Auflage gegangen und glaube nun für alle wichtigeren Fälle genügende Anleitung gegeben zu haben. Nicht nur die Beanspruchungen und sonstigen Grundlagen der Dimensionierung wurden ausführlich behandelt, auch der Formberechnung und den Formänderungen ist entsprechende Beachtung geschenkt. Die nötige Beschränkung wurde in erster Linie bei Bogenarten geübt, welche vorläufig höchstens von solchen Ingenieuren angewandt werden, die keiner Beispiele mehr bedürfen.

Die Kontrollrechnungen zur Beurteilung gebräuchlicher Vernachlässigungen, Begründung von Vereinfachungen usw. sind in der neuen Auflage weiter geführt und auf statisch unbestimmte Bogenfachwerke ausgedehnt worden. Man sehe §§ 51, 58 und die dort angeführten Stellen, sodann §§ 43, 47, VI R, die Vergleichstabellen S. 44, 45, 95, 156, 168, 244, 247, 248, 249, 252, 256, 440, 442, 466, 513, 514 und die Bemerkungen zu einer großen Anzahl von Beispielen.

Wenn der Umfang des Werkes durch den reicheren Inhalt fast verdoppelt erscheint, so rührt dies vorwiegend von den Beispielen und Aufgaben her, deren Anzahl von 60 auf 168 gestiegen ist, während die Paragraphenzahl der allgemeinen Entwicklungen nur von 35 auf 60 zugenommen hat. Es geht schon hieraus hervor, daß das Studium keineswegs im Verhältnisse des Umfanges erschwert, sondern in betreff vieler Dinge erheblich erleichtert worden ist. Auch wird selbstverständlich nicht alles Vorgeführte gleichzeitig interessieren, wie z. B. dem Studierenden für das, was er gewöhnlich in der Theorie elastischer Bogen träger sucht, schon das Wesentliche der zwei ersten Abschnitte und etwa noch der erste Paragraph des vierten Abschnittes genügen kann. Um das Wesentliche von dem nicht immer gleichzeitig Notwendigen, also insbesondere die allgemeinen Entwicklungen von den Beispielen und Aufgaben zu unterscheiden, ist großer und kleiner Druck angewandt. Zu möglichst rascher Auffindung bestimmter Gegenstände oder der Einführung von Begriffen und Buchstabenbezeichnungen sollen die ausführlichen Verzeichnisse am Anfange und Ende des Werkes dienen.

Das Ganze zerfällt nun in sechs Abschnitte. Der erste Abschnitt enthält die Beziehungen für beliebige stabförmige Bogen träger, für die Schnittkräfte, Schnittmomente, Kämpferdrücke, Biegungsverhältnisse, Normalspannungen und Schubspannungen, Stützlinien und Kernlinien, die verschiedenen Belastungsarten, Einflußlinien, Grenzwerte usw., wobei als neu die ausführliche Behandlung der Gelenke hervorzuheben ist (§§ 13 bis 17, Beispiele 13–17). Diese gilt natürlich nicht nur für Bogen träger.

Im zweiten Abschnitt folgen die gebräuchlichen Bogenarten mit und ohne Gelenke einschließlich der Bogen mit Zugstange, kontinuierlichen Bogen und Ketten. Hier sind neben zahlreichen anderen Beispielen bereits solche über Gewölbe gegeben, die für Dreigelenk-

bogen zum Teil mit Rücksicht auf den Bauunfall der äußeren Maximilianbrücke in München gewählt wurden (§ 14, Aufgabe 11, Beispiele 20, 21, 23—25).

In dem neuen dritten Abschnitt kommen die Besonderheiten der Gewölbe zum Vortrage, wobei außer der Dimensionsierung und Feststellung der Beanspruchungen wie den schon in der zweiten Auflage berechneten Wiener Versuchen auch die Querexzentrizität der Lasten und selbstverständlich die Eisenbetonbogen Berücksichtigung finden. Da behufs geeigneter Behandlung der letzteren die Beziehungen für Stäbe beliebig ungleich widerstehenden Materials aufzustellen waren, die leicht auch auf Eisenbetonsäulen und Eisenbetonbalken angewandt werden können, während diese häufig in Verbindung mit Eisenbetonbogen auftreten, so ist dem dritten Abschnitt ein Anhang über Eisenbetonsäulen und Eisenbetonbalken beigegeben. Man wird also das Wesentliche der Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen vereinigt finden und auch hier die erwünschten Beispiele nicht vermissen (im ganzen 24).

Der vierte Abschnitt enthält die Ableitung der statisch unbestimmten Reaktionen, Einsenkungen und sonstigen Formänderungen vollwandiger Bogen, von welchen im zweiten Abschnitte bei Betrachtung der verschiedenen Bogenarten zur Erleichterung der Übersicht und praktischen Verwendung nur die wichtigsten Resultate angeführt wurden. Es ist demnach auf den vierten Abschnitt nicht nur dann zurückzugreifen, wenn man jene Ableitungen selbst verfolgen will, sondern auch wenn der Horizontalschub, die Endmomente, die vertikalen und horizontalen Verrückungen der Achspunkte stabförmiger Bogen für andere als die im zweiten und dritten Abschnitte angeführten Fälle interessieren. Die Beispiele geben Gelegenheit zu nützlichen Vergleichen und zur Begründung von Vereinfachungen.

Der neue fünfte Abschnitt ist den Bogenfachwerken gewidmet. Es werden wie bei den Vollwandbogen statisch bestimmte und statisch unbestimmte Arten, gegebene und ungünstigste Belastungen, Temperaturänderungen und Bewegungen der Stützpunkte berücksichtigt, und die Einsenkungen und sonstigen Verrückungen der Knotenpunkte festgestellt. Da behufs genügend genauer Berechnung statisch unbestimmter Bogenfachwerke die Stabquerschnitte bereits bekannt sein müssen, so kommt auch die vorläufige Berechnung der letzteren zur Sprache. Mitunter werden Bogenträger zum Teil aus Fachwerk, zum Teil mit voller Wand hergestellt, beispielsweise weil die Konstruktionshöhe nicht zur Durchführung des Fachwerks bis zur Mitte reicht; solchen Fällen ist ebenfalls Rechnung getragen.

Im sechsten Abschnitt endlich ist eine umfassende Berechnung der König-Karls-Brücke über den Neckar bei Cannstatt gegeben, deren Hauptträger vollwandige Zweigelenbogen mit parabolischer Achse darstellen. Für die Genauigkeit mancher Ableitungen war die weitere Be-

gründung vorausgegangener Vereinfachungen maßgebend (B, F, M). In der neuen Auflage sind mehreren Paragraphen Bemerkungen über abweichende Ermittlungen beigelegt; den Schluß des Werkes bildet jetzt ein Vergleich der Eisengewichte und Einsenkungen von Vollwandbögen und Bogenfachwerken.

Im Hinblick auf die Schwierigkeiten der Herstellung kann ich nicht unterlassen, mit Dank der Sorgfalt und Liberalität zu gedenken, welche die Verlagsbuchhandlung dieser Auflage gewidmet hat. So wurden sämtliche Figuren, 323 gegen 167 der zweiten Auflage, in vorzüglicher Weise neu hergestellt. Die Schönheit des mathematischen Satzes und die Zweckmäßigkeit der Ausstattung tragen erheblich zur Annehmlichkeit des Studiums bei.

Den Leser ersuche ich, vor Benützung des Werkes die auf Seite 539 angeführten Fehler berichtigen zu wollen, eine kleine Mühe gegenüber dem zwecklosen Zeitaufwand, welchen unbekannte Fehler verursachen können.

Ich selbst habe keine Mühe gescheut, die Darstellung nach Möglichkeit zu verbessern, und so auf einem wichtigen Gebiete praktischer Berechnungen die erwünschte weitere Klärung und Erleichterung zu schaffen.

Stuttgart, im Juli 1910.

Weyrauch.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	1
I. Abschnitt.	
Allgemeine Beziehungen.	
Vorbemerkungen	4
§ 1. Schnittkräfte. Schnittmomente	4
Aufgabe 1. Schnittkräfte und Schnittmomente bei beliebigen Richtungen der angreifenden Kräfte	7
§ 2. Schnittlinie und Umhüllungslinien der Kämpferdrücke	8
Aufgabe 2. Kämpferdrucklinie des Halbkreisbogens mit zwei Gelenken	12
Beispiel 1. Kämpferdrucklinie und Umhüllungslinien der Kämpfer- drücke eines Bogens ohne Gelenke von beliebiger Achsform und beliebigen Querschnitten (Wiener Bruchstein-Versuchs- gewölbe	12
Aufgabe 3. Allgemeines über Schnittlinien und Umhüllungslinien der Kämpferdrücke. Kämpferdrucklinie von Dreigelenkbogen für vertikale und horizontale Aktivkräfte	14
§ 3. Biegungsformeln	15
§ 4. Bemerkungen zu den abgeleiteten Biegungsformeln	19
§ 5. Wiener Versuche mit einem eisernen Bogen	20
§ 6. Trägheitsmoment und Krümmungsmoment. Vereinfachungen	21
Aufgabe 4 mit Beispiel 2. Trägheitsmoment und Krümmungs- moment des Rechtecks und Quadrats	23
Aufgabe 5 mit Beispiel 3. Trägheitsmoment und Krümmungs- moment der Ellipse und des Kreises	24
Aufgabe 6 mit Beispiel 4. Trägheitsmoment und Krümmungs- moment von Figurendifferenzen (I-Querschnitt usw.)	24
§ 7. Kleine Formänderungen. Naviersche Biegungsgleichung	26
§ 8. Normalspannungen. Stützlinie. Kernlinien. Kernpunktmomente	27
Beispiel 5. Prüfung der vereinfachten Formel für die Normal- spannungen (Cannstatter Neckarbrücke)	32
Beispiel 6. Normalspannungen bei gleichmäßig verteilter Last (Cannstatter Neckarbrücke)	33
Aufgabe 7 mit Beispiel 7. Normalspannungen durch einen be- liebigen Horizontalschub allein (Cannstatter Neckarbrücke)	33

§ 9.	Längsschubspannungen und Querschubspannungen	34
	Beispiel 8. Längsschubspannungen und Querschubspannungen (Cannstatter Neckarbrücke)	37
§ 10.	Grenzwerte der Schnittkräfte und Schnittmomente	39
	Allgemeines	39
	Normalkraft N_x	40
	Transversalkraft T_x	40
	Moment M_x	41
	Kernpunktsmomente	42
§ 11.	Grenzwerte der Normalspannungen und Schubspannungen	42
	Schubspannungen τ	42
	Normalspannungen σ	42
	Vereinfachungen	43
§ 12.	Einflußlinien. Bewegte Radlastzüge	44
	Beispiel 9. Einflußlinien und Grenzwerte	48
	Beispiel 10. Einflußlinien (Cannstatter Neckarbrücke)	49
	Beispiel 11. Berechnung von Grenzwerten mit Hilfe von Ein- flußlinien (Cannstatter Neckarbrücke)	50
	Beispiel 12. Verwendung gleichmäßig verteilter und konzen- trierter Eigengewichte (Cannstatter Neckarbrücke)	52
	Aufgabe 8. Ungünstigste Stellung von Radlastzügen	53
§ 13.	Berechnung der Berührungsgelenke	54
	Allgemeines	54
	Zylindrische Berührungsgelenke (Wälz Gelenke)	55
	Sphärische Berührungsgelenke	56
	Zulässige Beanspruchungen	57
	Beispiel 13. Zylindrisches Berührungsgelenk	58
	Beispiel 14. Sphärisches Berührungsgelenk (Konkurrenzprojekt zur Bonner Rheinbrücke)	58
	Beispiel 15. Elastische Eindrückungen	58
§ 14.	Bemerkungen betreffend Berührungsgelenke	59
§ 15.	Versuche mit Berührungsgelenken	61
	Beispiel 16. Versuche von Deslandres	65
§ 16.	Berechnung der Umschließungsgelenke	65
	Allgemeines	65
	Zylindrische Umschließungsgelenke (Zapfengelenke)	66
	Sphärische Umschließungsgelenke (Kugelgelenke)	66
	Beispiel 17. Umschließungsgelenke (Cannstatter Neckarbrücke)	67
§ 17.	Reibungsversuche mit Umschließungsgelenken	67
§ 18.	Spezielle Belastungsarten	69
	Allgemeines	69
	Gleichmäßig verteilte Last auf der ganzen Spannweite	70
	Gleichmäßig verteilte Last und konzentrierte Lasten	71
	Verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten auf der ersten und zweiten Hälfte der Spannweite	71
	Aufgabe 9. Parabolisch begrenzte Belastung	73

II. Abschnitt.

Besondere Bogenarten.

	Seite
Vorbemerkungen	75
§ 19. Einfache Bogen mit drei Gelenken	76
Allgemeines	76
Verschiedene Formen	76
Verschiedene Belastungen	78
Kämpferdrucklinie, Kernlinien	79
Grenzwerte bei bewegter Last	80
Formänderungen (Einsenkungen)	81
Beispiel 18. Gegebene symmetrische Belastung (Donaubrücke bei Inzigkofen)	83
Beispiel 19. Gegebene beliebige Belastung (Donaubrücke bei Inzigkofen)	84
Aufgabe 10. Einflußlinien von Schnittkräften und Normalspannungen	85
Beispiel 20. Bestimmung der Einflußlinien von Schnittkräften und Normalspannungen (Donaubrücke bei Inzigkofen)	87
Beispiel 21. Einflußlinien und Grenzwerte von Gelenkkraften und Normalspannungen (Donaubrücke bei Inzigkofen)	88
Beispiel 22. Berechnung eines Bogens mit drei Gelenken (Verhältnisse des Gewölbes der Pruthbrücke bei Jaremce)	90
Aufgabe 11. Größe und Richtung der resultierenden Kämpferreaktion	96
Beispiel 23. Größte resultierende Kämpferreaktion bei bewegten Radlastzügen (Donaubrücke bei Inzigkofen)	98
Beispiel 24. Grenzrichtungen der resultierenden Kämpferreaktion bei gleichmäßig verteilter Verkehrslast (Pruthbrücke bei Jaremce)	99
Beispiel 25. Grenzrichtungen der resultierenden Kämpferreaktion bei konzentrierten Verkehrslasten (Pruthbrücke bei Jaremce)	100
Aufgabe 12. Vorzeichen der Momente von Dreigelenkbogen bei gleichmäßig verteilter Last	102
Aufgabe 13. Dreigelenkbogen mit parabolisch begrenzter Belastung. Steil und flach ansetzende Bogen	102
Beispiel 26. Zur vorigen Aufgabe	104
Beispiel 27. Einsenkungen eines Bogens mit drei Gelenken (Donaubrücke bei Munderkingen)	105
Aufgabe 14. Einsenkungen von Dreigelenkbogen durch Temperaturänderungen und Stützenbewegungen	106
Aufgabe 15. Über schätzungsweise Berechnung von Einsenkungen bei einfachen Bogen mit drei Gelenken, zwei Gelenken und ohne Gelenk	107
Beispiel 28. Berechnung von Bogenlängen	109
Aufgabe 16. Dreigelenkbogen bei beliebigen Richtungen der angreifenden Kräfte	111
Ferner A 3, 22, 35, 36 und B 9, 49, 51.	
§ 20. Einfache Bogen mit zwei Gelenken	113
Allgemeines	113
Verschiedene Formen	114
Verschiedene Belastungen	117

Kämpferdrucklinie. Kernlinien	120
Grenzwerte bei bewegter Last	121
Formänderungen (Einsenkungen)	122
Beispiel 29. Berechnung eines Bogens mit zwei Gelenken (ausführlichere Berechnung solcher Bogen siehe VI. Abschnitt)	124
Beispiel 30. Horizontalschub eines parabolischen Bogens (Koblenzer Brücke)	128
Beispiel 31. Einfluß von Temperaturänderungen (Koblenzer Brücke)	129
Beispiel 32. Ausweichen eines Widerlagers (Koblenzer Brücke)	130
Beispiel 33. Einflußlinien und Grenzwerte parabolischer Bogen (Koblenzer Brücke)	131
Beispiel 34. Einsenkungen parabolischer Bogen (Koblenzer Brücke)	132
Aufgabe 17 mit Beispiel 35. Künstlicher Horizontalschub (Koblenzer Brücke)	133
Aufgabe 18 mit Beispiel 36. Reduktion der Normaltemperatur parabolischer Bogen auf die mittlere Ortstemperatur (Koblenzer Brücke)	134
Beispiel 37. Horizontalschub eines Bogens von beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten (Dourobrücke in Portugal)	135
Beispiel 38. Kämpferdrucklinie eines Bogens von beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten (Dourobrücke in Portugal)	138
Beispiel 39. Einsenkungen eines Bogens von beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten (Dourobrücke in Portugal)	138
Aufgabe 19 mit Beispiel 40. Reduktion der Normaltemperatur auf die mittlere Ortstemperatur bei Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten (Dourobrücke in Portugal)	140
Ferner A 15, 21, 22, 31 und B 10—12, 49, 93—97 sowie VI. Abschnitt.	
§ 21. Einfache Bogen ohne Gelenke	142
Allgemeines	142
Verschiedene Formen	143
Verschiedene Belastungen	144
Kämpferdrucklinie. Umhüllungslinien. Kernlinien	146
Grenzwerte bei bewegter Last	148
Formänderungen (Einsenkungen)	148
Beispiel 41. Gegebene Belastung (siehe auch die Beispiele 44, 63—65, 98 etc.)	150
Beispiel 42. Stützenreaktionen und Stützenmomente eines parabolischen Bogens ohne Gelenke (Verhältnisse des Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbes)	152
Aufgabe 20. Einflußlinien der Stützenreaktionen und Stützenmomente	157
Beispiel 43. Kämpferdrucklinie und Umhüllungslinien der Kämpferbrücke eines parabolischen Bogens ohne Gelenke (Verhältnisse des Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbes)	158
Beispiel 44. Berechnung eines parabolischen Bogens ohne Gelenke (Verhältnisse der Pruthbrücke bei Jaremce)	159
Beispiel 45. Anwendung der Formeln für parabolische Bogen bei andern Bogen (Pruthbrücke bei Jaremce)	168
Beispiel 46. Einfluß von Temperaturänderungen (Koblenz. Brücke)	169
Aufgabe 21. Stützlinie für Temperaturänderungen bei Bogen mit zwei Gelenken und ohne Gelenke	170
Beispiel 47. Einsenkungen parabolischer Bogen (Kobl. Brücke)	171

	Seite
Beispiel 48. Einsenkungen eines parabolischen Bogens (Verhältnisse des Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbes)	172
Aufgabe 22. Einflußlinien der Einsenkungen parabolischer Bogen mit drei Gelenken, zwei Gelenken und ohne Gelenke	173
Beispiel 49. Einflußlinien von Einsenkungen parabolischer Bogen mit drei Gelenken, zwei Gelenken und ohne Gelenke	174
Ferner A 15 und B 1, 63—67, 98, 99.	
§ 22. Bogen mit Zugstange	176
Allgemeines	176
Dreigelenkbogen mit Zugstange	177
Zweigelenkbogen mit Zugstange	177
Beispiel 50. Verschiedenheiten der Berechnungen von Bogen mit und ohne Zugstange	180
Aufgabe 23. Einsenkungen eines parabolischen Bogens mit zwei Gelenken und Zugstange	182
Aufgabe 24. Einsenkungen eines parabolischen Bogens mit drei Gelenken und Zugstange	183
Ferner A 32, 35.	
§ 23. Weitere Bogenarten. Durchlaufende (kontinuierliche) Bogen	184
Beispiel 51. Durchlaufender Bogen von statisch bestimmter Art	188
Beispiel 52. Durchlaufender Bogen von statisch unbestimmter Art	191
§ 24. Besonderer Fall durchlaufender Bogen	191
Allgemeines	191
Kämpferdrucklinie. Grenzwerte	193
Stützenreaktionen	194
Formänderungen (Einsenkungen)	194
Gleiche Öffnungen	195
Aufgabe 25. Horizontalschub und Kämpferdrucklinie für einen andern Fall	196
Beispiel 53. Durchlaufender Bogen von statisch unbestimmter Art. Zur vorigen Aufgabe	197
§ 25. Ketten (Kabel, Stabketten)	200
Beispiel 54. Telephondraht über den Wallensee von Quinten nach Murg	204
Aufgabe 26 mit Beispiel 55. Grenzen der Spannweiten flach gespannter Ketten konstanten Querschnitts	206
Beispiel 56. Über Grenzen der Spannweiten von Hängebrücken	207
§ 26. Bemerkungen betreffend Blechbogen	208

III. Abschnitt.

Gewölbe im besonderen. Betonbogen.

Eisenbetonbogen.

Vorbemerkungen	212
§ 27. Allgemeines	212
Hierzu fast alle Beispiele und Aufgaben der §§ 19, 21 sowie B 1, 63—67, 98, 99.	
§ 28. Korrektur eines vorläufig angenommenen Gewölbes	218
Beispiel 57. Gewölbekorrektur entsprechend dem vorigen Paragraphen	219

	Beispiel 58. Untersuchung einer korrigierten Fuge auf Zugspannungen	220
§ 29.	Zur Wahl der Gewölbemittellinie (Bogenachse)	222
	Beispiel 59. Stützlinie für Eigengewicht plus halbe Verkehrslast auf der ganzen Spannweite als Bogenachse (vergl. B 26)	223
§ 30.	Berücksichtigung der Querexzentrizität der Lasten	224
	Beispiel 60. Spannungen bei querexzentrischer Belastung	228
	Aufgabe 27. Reduktion querexzentrischer auf querschnittliche Schnittkräfte und Lasten	229
	Beispiel 61. Zur vorigen Aufgabe	230
	Beispiel 62. Über Querexzentrizität bei Eisenbahnbrücken	231
	Aufgabe 28. Über Querexzentrizität bei Straßenbrücken	232
§ 31.	Wiener Versuche mit Gewölben	233
	Beispiel 63. Stützenreaktionen und Stützenmomente eines Bogens ohne Gelenke von beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten (Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe)	236
	Beispiel 64. Beanspruchungen eines Bogens ohne Gelenke (Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe)	245
	Beispiel 65. Beanspruchungen bei Versuchen mit einem Bogen ohne Gelenke (Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe)	250
	Beispiel 66. Stützlinie eines Bogens ohne Gelenke (Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe)	253
	Beispiel 67. Änderungen der Temperatur und der Spannweite eines Bogens ohne Gelenke (Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe)	254
§ 32.	Über Eisenbetonkonstruktionen	257
§ 33.	Stäbe aus beliebig ungleich widerstehendem Material	259
	Allgemeines	259
	Wirkung einer Achsialkraft	261
	Wirkung eines Momentes	261
	Zusammenwirken von Achsialkraft und Moment	262
§ 34.	Eisenbetonbogen	263
	Allgemeines	263
	Der ganze Querschnitt ist wirksam	264
	Zugwiderstände des Betons vernachlässigt	266
	Berechnung der Schnittkräfte und Schnittmomente	267
	Beispiel 68. Druckspannungen allein	268
	Beispiel 69. Zugspannungen zugelassen	269
	Beispiel 70. Zugwiderstände vernachlässigt	270
	Aufgabe 29. Kernlinien von Eisenbetonbogen	271
§ 35.	Korrektur eines vorläufig angenommenen Eisenbetonbogens	271
	Beispiel 71. Bogenkorrektur entsprechend dem vorigen Paragraphen	273
	Beispiel 72. Untersuchung eines korrigierten Querschnitts auf Zugspannungen	274
§ 36.	Längs- und Querschubspannungen von Stäben beliebig ungleich widerstehenden Materials und speziell von Eisenbetonbogen. Gleitspannungen (Haftspannungen)	274
	Allgemeines	274
	Eisenbetonbogen	276

Gleitspannungen	277
Beispiel 73. Längs- und Querschubspannungen bei einem bestimmten Bogenquerschnitt	278
Anhang betreffend Eisenbetonsäulen und Eisenbetonbalken.	
Vorbemerkungen	279
§ 37. Säulen beliebig ungleich widerstehenden Materials. Eisenbetonsäulen	279
Allgemeines	279
Knickwirkungen	280
Beispiel 74. Säulenspannungen ohne Knickwirkungen	281
Beispiel 75. Zulässige Säulenbelastung ohne und mit Knickwirkungen	282
Beispiel 76. Exzentrisch belastete Säule	282
§ 38. Balken beliebig ungleich widerstehenden Materials. Eisenbetonbalken	283
Allgemeines	283
Rechteckige Druckzone. Zugwiderstände des Betons vernachlässigt	284
Rechteckiger Querschnitt. Zugwiderstände des Betons berücksichtigt	286
Beispiel 77. Einfach armierter rechteckiger Balken	288
Beispiel 78. Einfach armierter Plattenbalken. Neutrale Schicht durch die Platte	288
Beispiel 79. Doppelt armierter rechteckiger Balken	289
Beispiel 80. Doppelt armierter rechteckiger Balken. Wechsel von Zug und Druck (positive und negative Biegemomente)	289
Aufgabe 30 mit Beispiel 81. Querschnittsbemessung einfach armierter rechteckiger Balken	290
Beispiel 82. Einfach armierter Plattenbalken. Neutrale Schicht durch den Steg	291
Beispiel 83. Einfach armierter rechteckiger Balken. Zugwiderstände des Betons berücksichtigt	292
Beispiel 84. Doppelt armierter rechteckiger Balken. Zugwiderstände des Betons berücksichtigt	292
Beispiel 85. Einfach armierter Plattenbalken. Zugwiderstände des Betons berücksichtigt	293
§ 39. Schubspannungen und Gleitspannungen von Balken beliebig ungleich widerstehenden Materials und von Eisenbetonbalken	294
Allgemeines	294
Rechteckige Druckzone. Zugwiderstände des Betons vernachlässigt	295
Rechteckiger Querschnitt. Zugwiderstände des Betons berücksichtigt	295
Abbiegen von Einlagestäben	296
Beispiel 86. Einfach armierter rechteckiger Balken	298
Beispiel 87. Einfach armierter Plattenbalken. Neutrale Schicht durch die Platte	298
Beispiel 88. Doppelt armierter rechteckiger Balken	298

	Seite
Beispiel 89. Einfach armierter Plattenbalken. Neutrale Schicht durch den Steg. Abbiegen von Einlagestäben	299
Beispiel 90. Einfach armierter rechteckiger Balken. Zugwiderstände des Betons berücksichtigt	301
Beispiel 91. Doppelt armierter rechteckiger Balken. Zugwiderstände des Balkens berücksichtigt	302
Beispiel 92. Einfach armierter Plattenbalken. Zugwiderstände des Betons berücksichtigt	302

IV. Abschnitt.

Ableitung statisch unbestimmter Größen.

Weiteres über Bogen verschiedener Arten und Formen.

Vorbemerkungen	304
§ 40. Kleine Formänderungen im allgemeinen	304
Allgemeines	304
Öffnungen mit zwei Gelenken	307
Öffnungen ohne Gelenke	307
Öffnungen mit drei Gelenken	308
§ 41. Horizontalschub des symmetrischen Halbkreisbogens mit zwei Gelenken	310
Aufgabe 31. Horizontalschub beliebiger symmetrischer Kreisbogen mit zwei Gelenken durch Temperaturänderungen und Änderungen der Spannweite	311
Beispiel 93. Horizontalschub eines Kreisbogens mit zwei Gelenken (Verhältnisse der Koblenzer Brücke)	312
Ferner §§ 20, 22; A 2, 12, 25; B 29, 50, 52, 53.	
§ 42. Horizontalschub des symmetrischen Parabelbogens mit zwei Gelenken	313
Hierzu §§ 20, 22, 24; A 17, 18; B 30, 33, 95; VI B.	
§ 43. Bemerkungen zu den Formeln des § 42	315
§ 44. Horizontalschub und Endmomente des symmetrischen Parabelbogens ohne Gelenke	316
Hierzu § 21 und B 41—46.	
§ 45. Formänderungen symmetrischer Parabelbogen	319
Allgemeines	320
Öffnungen mit zwei Gelenken	320
Öffnungen ohne Gelenke	320
Öffnungen mit drei Gelenken	321
Hierzu §§ 19—21, 24; A 15, 23, 24; B 27, 34, 47—49, 97; VI M.	
§ 46. Horizontalschub von Zweigelenkbogen mit beliebiger symmetrischer Achse und beliebigen Querschnitten	322
§ 47. Horizontalschub vollständig symmetrischer Zweigelenkbogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten	324
Beispiel 94. Horizontalschub eines symmetrischen Zweigelenkbogens mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten (Dourobrücke in Portugal)	327

	Seite
Beispiel 95. Zur Anwendung der Formeln für den Horizontalschub von Parabelbogen bei andern Bogen (Dourobrücke in Portugal)	329
Aufgabe 32. Bogen von beliebiger symmetrischer Achse und beliebigen Querschnitten mit Zugstange	330
Ferner § 20, A 19 und B 37, 38.	
§ 48. Formänderungen von Bogen mit beliebiger symmetrischer Achse und beliebigen Querschnitten	331
Allgemeines	331
Öffnungen ohne Gelenke	334
Öffnungen mit zwei Gelenken	334
Öffnungen mit drei Gelenken	335
Beispiel 96. Genauere Berechnung (vergl. Beispiel 39) der Einsenkungen eines Zweigelenkbogens von beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten (Dourobrücke in Portugal)	335
Beispiel 97. Zur Anwendung der Formeln für die Einsenkung von Parabelbogen bei andern Bogen (Dourobrücke in Portugal)	338
Ferner B 39, 99.	
§ 49. Horizontalschub und Endmomente des Bogens ohne Gelenke mit beliebiger symmetrischer Achse und beliebigen Querschnitten	339
Allgemeines	339
Verschiedene Belastungen	340
Temperaturänderungen	342
Bewegungen der Kämpfer	343
Hierzu B 63.	
§ 50. Genauere Formeln zur Berechnung des Horizontalschubs und der Endmomente des Bogens ohne Gelenke mit beliebiger symmetrischer Achse und beliebigen Querschnitten	343
Allgemeines	343
Verschiedene Belastungen	344
Temperaturänderungen	346
Bewegungen der Kämpfer	346
Beispiel 98. Genauere Berechnung der Stützenreaktionen eines Bogens ohne Gelenke von beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten (Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe, vergl. Beispiel 63)	347
Beispiel 99. Einsenkungen eines Bogens ohne Gelenke mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten (Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe)	353
§ 51. Einige Ergebnisse der berechneten Beispiele	355
Bogenlängen, Trägheitsmoment und Krümmungsmoment	356
Ausdruck der Normalspannungen, Schubspannungen	356
Konzentrierte und gleichmäßig verteilte Lasten, Ungünstigste Belastungen	357
Temperaturänderungen, Einsenkungen	357
Bogenform, Parabolische Bogen	358
Bogen mit beliebiger Achse	359
Gewölbe	360

V. Abschnitt.

Bogenfachwerke.

	Vorbemerkungen	361
§ 52.	Statische Beziehungen	362
	Allgemeines	362
	Knotenpunktmethode	362
	Schnittmethode	363
	Momentenmethode (Rittersche Methode)	364
	Beispiel 100. Einfaches Bogenfachwerk mit gegebener Belastung	365
	Beispiel 101. Durchlaufendes Bogenfachwerk mit gegebener Belastung	367
§ 53.	Bogenfachwerke mit Vertikalen (Ständerfachwerke) mit beliebig geformten Gurtungen	369
	Allgemeines	369
	Öffnungen mit Endgelenken	371
	Horizontalschub	374
	Kämpferdrucklinie. Ungünstigste Belastungen	375
	Beispiel 102. Dachbinder mit gleichmäßig verteilter Last	378
	Beispiel 103. Dachbinder mit schiefer Winddruck	380
	Aufgabe 33. Besondere Ausdrücke für parabolische Sichelbogen	382
	Beispiel 104. Zur vorigen Aufgabe	383
§ 54.	Bogenfachwerke mit Vertikalen (Ständerfachwerke) und horizontalem Obergurt	384
	Die X-Gurtung ist horizontal	385
	Die Z-Gurtung ist horizontal	387
	Beispiel 105. Beliebige konzentrierte Lasten	389
	Aufgabe 34. Besondere Ausdrücke für Bogen mit einer horizontalen und einer parabolischen Gurtung	390
	Beispiel 106. Zur vorigen Aufgabe	391
§ 55.	Über Grenzwerte von Stabkräften und Reaktionskomponenten	392
	Beispiel 107. Berechnung eines Bogenfachwerks mit drei Gelenken und Vertikalen (Verhältnisse der Theißbrücke bei Szegedin).	396
	Bemerkungen betreffend weitere Beispiele über statisch bestimmte Bogenfachwerke	400
§ 56.	Verschiebungsarbeit (Deformationsarbeit, Formänderungsarbeit). Prinzip der virtuellen Verrückungen	403
	Aufgabe 35. Einsenkungen für einfachste Fälle (andere Fälle siehe Beispiele 120—123)	405
	Aufgabe 36. Einsenkungen durch Bewegungen der Stützpunkte	405
§ 57.	Beziehungen für statisch unbestimmte Stabkräfte und Reaktionskomponenten	406
	Allgemeines	406
	Fachwerke mit überzähligen Reaktionskomponenten allein	409
	Fachwerke mit überzähligen Stabkräften allein	410
	Vereinfachungen durch Beziehungen für Stablängen	412

	Seite
Beispiel 108. Zweigelenkbogenfachwerk. Ausdrücke für den Horizontalschub	412
Beispiel 109. Zweigelenkbogenfachwerk. Gleichmäßig verteilte Last (Eigengewicht)	415
Beispiel 110. Zweigelenkbogenfachwerk. Horizontalschub durch beliebige Belastung der Fahrbahn. Einflußlinie des Horizontalschubs	417
Beispiel 111. Zweigelenkbogenfachwerk. Horizontalschub und Stabkräfte durch beliebige bestimmte Belastungen	422
Beispiel 112. Zweigelenkbogenfachwerk. Kämpferdrucklinie	426
Aufgabe 37. Zweigelenkbogenfachwerk. Betreffend die Kämpferdrucklinie	427
Beispiel 113. Zweigelenkbogenfachwerk. Einflußlinien der Stabkräfte	427
Beispiel 114. Zweigelenkbogenfachwerk. Grenzwerte der Stützenreaktionen und Stabkräfte	429
Beispiel 115. Zweigelenkbogenfachwerk. Temperatureinflüsse. Ausweichen der Widerlager	432
Aufgabe 38. Bogenfachwerke mit Zugstange	433
Beispiel 116. Bogenfachwerk mit Zugstange	434
Aufgabe 39. Durchlaufende (kontinuierliche) Bogenfachwerke von einfach statisch unbestimmter Art	436
Beispiel 117. Durchlaufendes Bogenfachwerk	437
§ 58. Vorläufige Berechnung statisch unbestimmter Bogenfachwerke	438
Beispiel 118. Zweigelenkbogenfachwerk. Vorläufige Berechnung des Horizontalschubs nach Formeln für vollwandige Bogen	443
Beispiel 119. Zweigelenkbogenfachwerk. Vorläufige Berechnung des Horizontalschubs nach Fachwerkformeln	444
§ 59. Einsenkungen und sonstige Verrückungen der Knotenpunkte von Fachwerken. Gegenseitigkeit der Verrückungen	447
Aufgabe 40. Einsenkungen für einfachste Fälle	449
Aufgabe 41. Horizontale Verrückung eines Knotenpunktes	450
Aufgabe 42. Verrückungen von Knotenpunkten durch Bewegungen der Stützpunkte	450
Beispiel 120. Zweigelenkbogenfachwerk. Einsenkungen, direkt berechnet	451
Beispiel 121. Zweigelenkbogenfachwerk. Einsenkungen, mit Verwendung der Einflußlinie berechnet	454
Aufgabe 43. Künstlicher Horizontalschub. Reduktion der Normaltemperatur auf die mittlere Ortstemperatur	456
Beispiel 122. Zweigelenkbogenfachwerk. Zur vorigen Aufgabe	457
Beispiel 123. Bogenfachwerk mit Zugstange. Einsenkungen	458
§ 60. Träger aus Fachwerk und auf Biegung beanspruchten Stäben	460
Allgemeines	460
Verschiebungsarbeit. Prinzip der virtuellen Verrückungen	460
Beziehungen für statisch unbestimmte Größen	461
Aufgabe 44. Zweigelenkbogen aus Fachwerk und vollwandigem Teil	462
Beispiel 124. Zur vorigen Aufgabe. Bogenfachwerkbrücke an Stelle der König-Karls-Brücke (Cannstatter Neckarbrücke)	463

VI. Abschnitt.

Berechnung der König-Karls-Brücke über den Neckar
bei Cannstatt.

	Seite
Vorbemerkungen	468
A. Vorläufige Berechnung	469
B. Querschnittsverhältnisse. Horizontalschub	473
C. Belastungsverhältnisse	476
D. Momente und Normalkräfte durch das Eigengewicht allein	478
E. Künstlicher Horizontalschub	480
F. Ungünstigste Belastungen. Kämpferdrucklinie. Kernlinien	481
G. Erste Grenzwerte der Normalspannungen durch die Verkehrs- last allein	482
H. Normalspannungen bei Vollbelastung und zweite Grenzwerte der Normalspannungen durch die Verkehrslast allein	485
J. Resultierende Normalspannungen. Einfluß von Änderungen der Temperatur und der Spannweite	486
K. Bemerkungen zu den resultierenden Normalspannungen. Be- lastung durch die Straßenwalze. Knickwirkung. Winddruck	489
L. Kämpferdrücke. Auflager	491
M. Einsenkungen	493
N. Reduktion der Normaltemperatur auf die Stuttgarter mittlere Temperatur. Überhöhung der Bogen	497
O. Vertikalen der inneren Bogen	500
P. Vertikalen der Stirnbogen	504
Q. Weitere Berechnungen	508
R. Vollwandbogen und Bogenfachwerke. Vergleiche	511
—————	
Buchstabenbezeichnungen	516
Sachregister	528
Fehlerverzeichnis	539

Einleitung.

Als materielles System bezeichnet man die Gesamtheit beliebiger verbundener oder getrennter Teile der Materie, welche als Ganzes der Betrachtung unterworfen werden. Zwischen den Teilen des Systems unter sich können Kräfte wirken, sie heißen innere Kräfte; es können aber auch Kräfte zwischen Teilen des Systems und nicht zum letzteren gehörigen Ausgangspunkten wirken, diese werden äußere Kräfte genannt. Alle bei Untersuchung eines materiellen Systems auftretenden Kräfte sind also entweder innere Kräfte oder äußere Kräfte.

Jeder Teil s eines materiellen Systems S läßt sich als neues System betrachten, in welchem Falle alle Kräfte, welche von dem Reste $S-s$ des ursprünglichen Systems auf das Teilsystem s wirken, in bezug auf dieses äußere Kräfte darstellen, während sie in Hinsicht S innere Kräfte waren.

In Fig. 1 sind für das ganze System S die im Schnitte angedeuteten Kräfte innere Kräfte (sie wirken zwischen

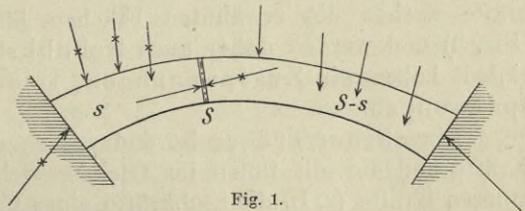


Fig. 1.

Teilsystem s sind die durchkreuzten und für das Teilsystem $S-s$ die nichtdurchkreuzten Kräfte als äußere Kräfte anzusehen.

Ist ein materielles System in sich und hinsichtlich seiner Umgebung in Ruhe, so müssen die in jedem Systempunkte angreifenden äußeren und inneren Kräfte (Fig. 2) im Gleichgewichte sein, und in jedem beliebig geformten Schnitte durch das System irgendwelchen von einer Seite her angreifenden Kräften von der andern Seite her genau gleich große Kräfte von entgegengesetzten Richtungen widerstehen (Fig. 1). Zu voller Bestimmtheit der Schnittkräfte muß also stets feststehen, von welcher Seite des Schnittes her dieselben

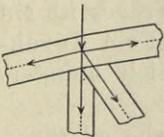


Fig. 2.

wirken, auf welche der beiden im Schnitte zusammenhängenden Flächen sie bezogen sind. Sodann müssen im Falle der Ruhe die am ganzen Systeme oder irgend einem Teilsysteme angreifenden äußeren Kräfte

für sich im Gleichgewichte sein. Dies folgt daraus, daß beim Ansatz der Bedingungsgleichungen für alle äußeren und inneren Kräfte des fraglichen Systems die inneren Kräfte wegen doppelten Auftretens in entgegengesetzten Richtungen (Fig. 1) ausfallen.

Ein Träger ist ein materielles System, welches zur Übertragung von Lasten und anderen äußeren Kräften auf außerhalb des Systems gelegene Stützen dient. Unter dem Einflusse jener zunächst angreifenden Kräfte, die wir Aktivkräfte nennen, und anderer Ursachen, zu welchen insbesondere die Wärme gehören kann, entstehen bei allen Trägern innere Kräfte und als weitere äußere Kräfte Stützenreaktionen. Die Beanspruchungen pro Flächeneinheit durch die inneren Kräfte werden Spannungen genannt. Da man sich jede auf ein Flächenelement oder eine ebene Fläche wirkende Kraft in eine Normalkraft (normal der Fläche) und eine Tangentialkraft (tangential der Fläche) zerlegt denken kann (Fig. 3), so pflegt auch von Normalspannungen und Tangentialspannungen die Rede zu sein, nämlich von den Normalkräften und Tangentialkräften pro Flächeneinheit. Die Normalkräfte suchen die im

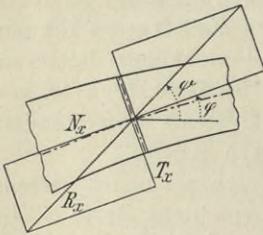


Fig. 3.

Schnitte zusammenhängenden Flächen auseinander zu ziehen oder gegen einander zu drücken (Fig. 3) und werden deshalb in Zugkräfte und Druckkräfte unterschieden; die Tangentialkräfte suchen die erwähnten Flächen längs einander zu verschieben (Fig. 3) und werden daher auch Schubkräfte genannt. Pro Flächeneinheit haben wir Zugspannungen, Druckspannungen und Schubspannungen.

Ein ebener Träger ist dadurch charakterisiert, daß alle äußeren Kräfte und die mit ihnen ins Gleichgewicht tretenden Resultanten der inneren Kräfte (z. B. die Stabkräfte eines Fachwerkes) beständig in einer Ebene wirken. Alle Untersuchungen lassen sich dann auf diese Träger ebene beschränken, welche bei Auftreten von Lasten unter den äußeren Kräften, also z. B. schon bei Berücksichtigung des Eigengewichtes, nur eine Vertikalebene sein kann. In diesem Falle heißen die Horizontalabstände zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Stützpunkten Spannweiten (bei manchen Stützweiten) oder Öffnungen, die Zwischenstützen Pfeiler, die Endstützen Widerlager. Der Träger ist ein einfacher Träger, wenn er nur eine Öffnung besitzt, er ist ein durchlaufender Träger (kontinuierlicher Träger), wenn er sich ununterbrochen über mehr als eine Öffnung erstreckt.

Balkenträger oder kurz Balken nennt man solche ebene Träger, bei welchen durch Lasten und andere vertikale Aktivkräfte nur vertikale Stützenreaktionen entstehen; bei Bogenträgern oder kurz Bogen kommen im gleichen Falle auch horizontale Stützenreaktionen hinzu. Einfache Balken und einfache Bogen haben nur eine Öffnung,

durchlaufende Balken und durchlaufende Bogen erstrecken sich ohne Unterbrechung über zwei oder mehr Öffnungen. Die Endauflager eines Bogens heißen Kämpfer und ihre Reaktionen Kämpferreaktionen. Diese Gegendrücke der Kämpfer sind von gleichen Größen aber entgegengesetzten Richtungen wie die Drücke des Bogens auf die Kämpfer, die Kämpferdrücke. Je nachdem die Horizontalkomponenten der Kämpferreaktionen bei Einwirkung von Lasten allein nach innen oder nach außen gerichtet sind (Fig. 4 u. 5), je nachdem sie die Bogenenden zu nähern oder zu entfernen suchen, hat man es mit einem Sprengbogen oder mit einem Hängebogen zu tun.

Häufig werden an den Bogenenden Gelenke angeordnet, sodaß die Enden, abgesehen von der Reibung, frei drehbar sind. Man bezweckt durch solche Kämpfergelenke, die Kämpferdrücke an möglichst unveränderlichen Stellen auf die Kämpfer zu übertragen, die Berechnung dadurch einfacher und zuverlässiger zu gestalten, sowie günstigere Beanspruchungen oder Materialersparnis zu erreichen. Nicht selten werden im Interesse jener Zuverlässigkeit und zur Fernhaltung gewisser zusätzlicher Beanspruchungen (durch Temperaturänderungen und kleine Änderungen der Spannweite) auch Gelenke in den Öffnungsmitten eingeschaltet (Zwischengelenke, Scheitelgelenke). Wir können also bereits einfache Bogen ohne Gelenke, mit zwei Gelenken und mit drei Gelenken unterscheiden. Mitunter hat man auch einfache Bogen mit einem Gelenk (einem Zwischengelenk ohne Kämpfergelenke) in Betracht gezogen. Die vollkommene Kette ist als ein Bogen mit stetig aufeinander folgenden Gelenken aufzufassen, wonach die Gleichungen beliebiger Kettenlinien aus den allgemeinen Formeln für stabförmige Bogen zu erhalten sein müssen.

Als elastische Bogenträger bezeichnete man früher solche Bogenträger, deren Stützenreaktionen oder deren innere Kräfte mittelst der technischen Biegungstheorie, welche einen Teil der Elastizitätslehre bildet, abgeleitet wurden. Es gehören hierher in erster Linie die stabförmigen Sprengbogen mit voller Wand, doch wurden meist auch die Stützenreaktionen von Fachwerkbogen und Gitterbogen mit ausgesprochener Achse bis zu den Stützpunkten auf Grund so entstandener Formeln berechnet. Gegenwärtig hat man zur Berechnung der Bogenfachwerke genauere Methoden, die wir ebenfalls berücksichtigen. Die Bezeichnung elastische Bogenträger aber ist mehr und mehr auf alle Bogenträger ausgedehnt worden, bei deren Berechnung die Elastizitätslehre Anwendung findet. Dem soll auch im folgenden Rechnung getragen werden.

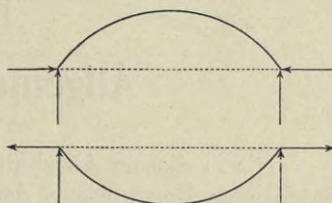


Fig. 4 u. 5.

I. Abschnitt.

Allgemeine Beziehungen.

Die in diesem Abschnitte abzuleitenden Formeln betreffen beliebige stabförmige Bogenträger, deren Achse immer in einer vertikalen Ebene, der Trägerebene, bleibt, während diese zugleich Symmetrieebene des Bogens ist (vergl. § 4). Als Stabachse wird bei Stäben gleichartigen Materials diejenige Linie bezeichnet, welche im spannungslosen Zustande bei normaler Temperatur die Schwerpunkte aller senkrecht zu ihr gedachten ebenen Schnitte durch den Bogen, d. h. aller

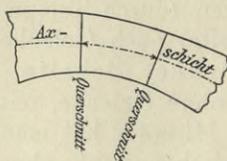


Fig. 6.

Querschnitte, enthält. Bezüglich der Achse von Stäben ungleichartigen Materials kann die Definition bis zur Behandlung der Eisenbetonkonstruktionen vorbehalten bleiben (§ 33). Die Trägerebene wird auch Bogenebene oder, weil die Biegungen der Bogenachse in ihr erfolgen, Biegungsebene genannt. Eine Faserschicht durch die Achse senkrecht zur Biegungsebene heißt Achsschicht.

Als Trägerlänge oder Bogenlänge zwischen zwei Querschnitten gilt die Achslänge zwischen denselben (Fig. 6). Die Formänderungen werden so klein vorausgesetzt, daß die Änderungen der Stababmessungen gegen deren anfängliche, dem spannungslosen Zustande bei normaler Temperatur entsprechende Werte vernachlässigt werden dürfen.

§ 1. Schnittkräfte. Schnittmomente.

Wir betrachten einen Stababschnitt zwischen zwei aufeinander folgenden Stützpunkten, welcher bei einfachen Bogen den ganzen Stab darstellt. Ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit horizontaler x -Achse und vertikaler y -Achse sei in der Trägerebene in fester Lage gegen die dem spannungslosen Zustande bei normaler Temperatur entsprechende Gruppierung der Stabpunkte angenommen. Ursprung der Koordinaten im Achspunkte des einen Endquerschnittes; die Querschnitte werden nach den anfänglichen Abszissen x ihrer Achspunkte bezeichnet. Für den Achspunkt des zweiten Endquerschnittes seien $x = l$, $y = k$; l heißt die Spannweite. Bei gleicher Höhenlage der Endquerschnitte, also

insbesondere in dem gewöhnlichen Falle, daß der Träger zur Vertikalen durch die Mitte der Spannweite symmetrisch angeordnet ist, wäre $k = 0$. φ bezeichne den Winkel der Stabachse bei x mit der positiven Richtung der x -Achse.

Der Stab werde in der Trägerebene beliebig belastet und durch Wärme beeinflusst. Der Gesamtbelastung wird nur durch die Gegenkräfte R, R' der Stützen und etwa

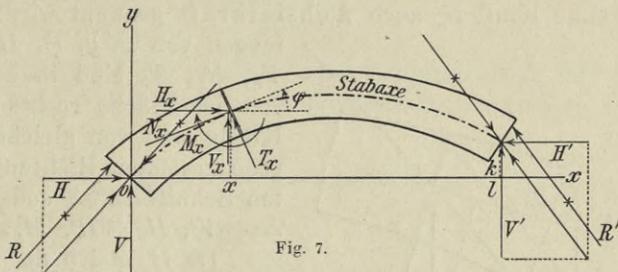


Fig. 7.

angrenzender Stababschnitte (im Falle durchlaufender Bogen) das Gleichgewicht gehalten (Fig. 7). Wir wollen der Kürze halber R, R' hier allgemein als Kämpferreaktionen bezeichnen, die Horizontalreaktion eines Kämpfers heißt der Horizontalschub daselbst. Lage, Größe und Richtung der Kämpferreaktionen sind zunächst unbekannt. Denkt man sich jedoch im Schwerpunkt des Querschnittes 0 parallel der Kämpferreaktion R deren Größe zweimal, in entgegengesetzten Richtungen, angebracht, wodurch am Gleichgewichte nichts geändert wird, so erkennt man, daß sich R immer ersetzen läßt durch eine im Achspunkte 0 angreifende Horizontalkraft H , eine ebendasselbst angreifende Vertikalkraft V , und ein Moment M (durchkreuztes Kräftepaar in Fig. 7) in Hinsicht des Achspunktes 0. Ebenso läßt sich die Kämpferreaktion R' ersetzen durch eine im Achspunkte l angreifende Horizontalkraft H' , eine ebendasselbst angreifende Vertikalkraft V' und ein Moment $-M'$ in Hinsicht des Achspunktes l .

Zwischen den Querschnitten 0 und x mögen bei Abszissen a_1, a_2, \dots beliebige Lasten P_1, P_2, \dots auf den Träger kommen (Fig. 8), wobei die P und Differenzen der a auch un-

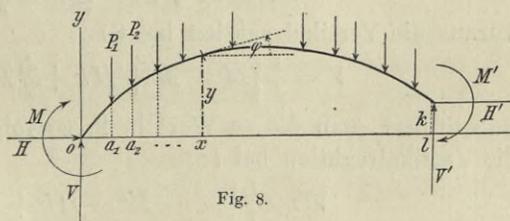


Fig. 8.

endlich klein sein dürfen (stetig verteilte Lasten, vergl. § 18). Die resultierende Kraft, mit welcher der Trägerteil links des Querschnittes x auf den Trägerteil rechts von x wirkt, sei R_x . Dieselbe kann man in eine Normalkraft N_x (normal dem anfänglichen Querschnitt bei x) und eine Transversalkraft T_x (transversal der anfänglichen Achse bei x) oder auch in eine Horizontalkraft H_x und eine Vertikalkraft V_x zerlegen. Die Formänderungen werden so klein vorausgesetzt, daß N_x, T_x auch nach denselben als normal dem Querschnitt und der Achse gelten können (§ 7). Denken wir uns parallel der resultierenden Schnittkraft R_x deren Größe zweimal, und entgegengesetzt im Achspunkte x ange-

tragen (Fig. 9), so zeigt sich, daß man R_x ersetzen kann durch ein Moment M_x in Hinsicht des Achspunktes und zwei in letzterem angreifende Kräfte H_x, V_x oder N_x, T_x , wobei die längs der Achse wirkende Kraft N_x auch Achsialkraft genannt wird. Die positiven Richtungen von $x, y, \varphi, H, H', V, V', M_x, H_x, V_x, N_x, T_x$ sind in Fig. 7 angedeutet. Die von der Fläche rechts von x her wirkenden Kräfte sind von gleichen Größen, aber entgegengesetzten Richtungen wie die angeführten Schnittkräfte, sodaß z. B. für $x = l, V_l = -V', H_l = H', M_l = M'$.

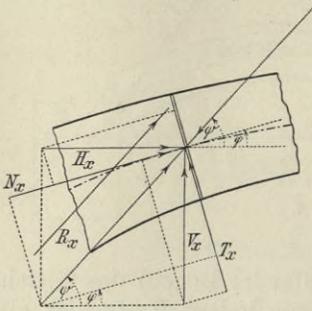


Fig. 9.

Da H_x gleich der Summe aller äußeren Horizontalkräfte, V_x gleich der Summe aller äußeren Vertikalkräfte und M_x gleich der Summe der Momente aller äußeren Kräfte des Trägers links vom Querschnitte x sein muß (letztere in Hinsicht des Achspunktes x), so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$H_x = H, \quad 1$$

$$V_x = V - \sum_0^x P, \quad 2$$

$$M_x = M + Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a) = M + V_x x - Hy + \sum_0^x Pa. \quad 3$$

Nach 1 ist die resultierende Horizontalkraft für alle Querschnitte einer beliebig belasteten Öffnung von gleichem Wert, nämlich gleich dem Horizontalschube H . Man hat also auch $H_x = H' = H$. Gleichung 3 lautet für $x = l$:

$$M' = M + Vl - Hk - \sum_0^l P(l-a),$$

woraus die Vertikalreaktion bei 0:

$$V = \frac{1}{l} \left[M' - M + Hk + \sum_0^l P(l-a) \right] = V_0. \quad 4$$

Substituiert man diesen Wert in 2, so folgt mit $x = l$ wegen $V_l = -V'$ die Vertikalreaktion bei l :

$$V' = \frac{1}{l} \left[M - M' - Hk + \sum_0^l Pa \right] = -V_l. \quad 5$$

Die Addition der beiden letzten Ausdrücke liefert:

$$V + V' = \sum_0^l P = V_0 - V_l, \quad 6$$

welche Gleichung besagt, daß die Summe der Vertikalreaktionen gegen einen Bogenabschnitt gleich der Belastungen derselben ist. Mit 4 ergeben sich aus 2, 3:

$$V_x = \frac{1}{l} \left[M' - M + Hk - \sum_0^x Pa + \sum_x^l P(l-a) \right] \quad 7$$

$$M_x = \frac{l-x}{l} \left[M + \sum_0^x Pa \right] + \frac{x}{l} \left[M' + \sum_x^l P(l-a) \right] - \left(y - \frac{k}{l} x \right) H \quad 8$$

Durch Zerlegen von V_x und $H_x = H$ in Komponenten parallel und senkrecht der Stabachse (Fig. 9) folgen:

$$N_x = V_x \sin \varphi + H \cos \varphi, \quad 9$$

$$T_x = V_x \cos \varphi - H \sin \varphi. \quad 10$$

Für die Richtungswinkel ψ , δ der resultierenden Schnittkraft R_x mit der positiven Richtung der x -Achse und der Stabachse (oder Normalen zum Querschnitt) hat man:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{V_x}{H}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{T_x}{N_x} = \operatorname{tg}(\psi - \varphi), \quad 11$$

und den Absolutwert von R_x bestimmt:

$$R_x = \sqrt{H^2 + V_x^2} = \sqrt{N_x^2 + T_x^2}. \quad 12$$

Denken wir uns vom Querschnitte x um die Achslänge ds entfernt, vor dem folgenden P , einen zweiten Querschnitt $x + dx$ geführt, so verlangt das Gleichgewicht (Fig. 10):

$$M_x + T_x ds = M_x + dM_x,$$

woraus:

$$\frac{dM_x}{ds} = T_x, \quad 13$$

und wegen $dx = ds \cos \varphi$ mit Rücksicht auf Gleichung 10:

$$\frac{dM_x}{dx} = V_x - H \operatorname{tg} \varphi, \quad 14$$

wonach für mathematische Maxima und Minima von M_x :

$$T_x = 0, \quad V_x = H \operatorname{tg} \varphi,$$

es wirkt an den betreffenden Stellen die resultierende Schnittkraft R_x normal dem Querschnitt oder parallel der Stabachse.

In 2 bis 8 bedeuten die Grenzen der Summen Σ Querschnitte nicht Abszissen von Achspunkten), zwischen welchen die Lasten P auf den Träger kommen; nur bei Vertikalschnitten ist es gleichgültig, ob man die Querschnitte oder Abszissen darunter versteht. Über spezielle Ausdrücke der Summenwerte Σ für gleichmäßig verteilte Lasten siehe § 18. Alle abgeleiteten Gleichungen gelten auch für Balken, in welchem Falle darin $H = 0$ zu setzen ist.

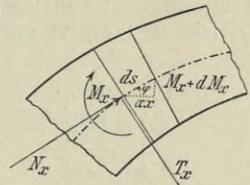


Fig. 10.

Aufgabe 1. Schnittkräfte und Schnittmomente bei beliebigen Richtungen der angreifenden Kräfte.

Die in § 1 ausgedrückten Größen für den Fall abzuleiten, daß nicht nur Lasten (vertikale Aktivkräfte), sondern in der Trägerebene beliebig gerichtete Aktivkräfte am Träger wirken.

Die äußeren Aktivkräfte R_1, R_2, \dots , deren wirklichen, nicht notwendig in der Stabachse liegenden Angriffspunkten die Abszissen a_1, a_2, \dots und die Ordinaten b_1, b_2, \dots entsprechen, mögen Vertikalkomponenten P_1, P_2, \dots und Horizontalkomponenten Q_1, Q_2, \dots besitzen. Positive Richtungen dieser Komponenten denjenigen der Reaktionen V, H entgegengesetzt (Fig. 11). Ganz wie in § 1 ergeben sich die Horizontalkraft, Vertikalkraft und das Moment in einen beliebigen Querschnitt x :

$$H_x = H - \sum_0^x Q, \quad 1$$

$$V_x = V - \sum_0^x P, \quad 2$$

$$M_x = M + Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a) + \sum_0^x Q(y-b), \quad 3$$

wobei die Grenzen der Summen Σ wieder Querschnitte, nicht Achspunkte oder Abszissen bedeuten.

Gleichung 3 liefert für $x=l$:

$$M' = M + Vl - Hl - \sum_0^l P(l-a) + \sum_0^l Q(l-b),$$

woraus die Vertikalreaktion bei 0:

$$V = \frac{1}{l} \left[M' - M + Hl + \sum_0^l P(l-a) - \sum_0^l Q(l-b) \right] = V_0. \quad 4$$

Durch Substitution dieses Ausdruckes in 2 folgt mit $x=l$ die Vertikalreaktion $V' = -V_l$ bei l :

$$V' = \frac{1}{l} \left[M - M' - Hl + \sum_0^l Pa + \sum_0^l Q(k-b) \right] = -V_l. \quad 5$$

Die Addition der beiden letzten Gleichungen liefert:

$$V + V' = \sum_0^l P = V_0 - V_l, \quad 6$$

wonach, wie selbstverständlich, die Summe der Vertikalreaktionen gegen einen Trägerabschnitt gleich der Summe der vertikalen Aktivkräfte an demselben ist. Gleichung 1 ergibt mit $x=l$ wegen $H' = H_l$ analog 6:

$$H - H' = \sum_0^l Q = H_0 - H_l.$$

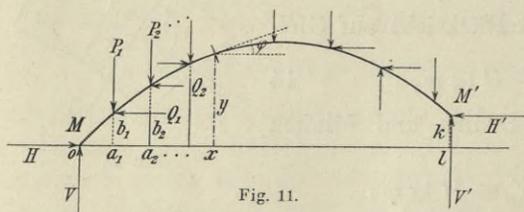


Fig. 11.

Durch Zerlegen von V_x und H_x in Komponenten parallel und senkrecht der Stabachse bei x folgen die Normalkraft und Transversalkraft daselbst (Fig. 9):

$$N_x = V_x \sin \varphi + H_x \cos \varphi, \quad 8$$

$$T_x = V_x \cos \varphi - H_x \sin \varphi, \quad 9$$

während die Richtungswinkel ψ , δ der resultierenden Schnittkraft R_x mit der positiven Richtung der x -Achse und der Stabachse sowie der Absolutwert von R_x bestimmt sind durch:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{V_x}{H_x}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{T_x}{N_x} = \operatorname{tg}(\psi - \varphi), \quad 10$$

$$R_x = \sqrt{H_x^2 + V_x^2} = \sqrt{N_x^2 + T_x^2}. \quad 11$$

Schließlich erhält man wie in § 1 durch Betrachtung eines Trägerstücks bei x von der Achslänge ds zwischen zwei aufeinander folgenden Aktivkräften R :

$$\frac{dM_x}{ds} = T_x, \quad \frac{dM_x}{dx} = V_x - H_x \operatorname{tg} \varphi, \quad 12$$

wonach für mathematische Maxima und Minima von M_x :

$$T_x = 0, \quad V_x = H_x \operatorname{tg} \varphi.$$

Die resultierende Schnittkraft R_x wirkt an solchen Stellen normal dem Querschnitt oder parallel der Stabachse.

§ 2. Schnittlinie und Umhüllungslinie der Kämpferdrücke.

Auf einen beliebigen einfachen Bogenträger (über durchlaufende Bogenträger siehe § 23) wirke eine Einzellast P . Hierdurch werden gewisse Reaktionen R , T' der Kämpfer hervorgerufen, welche sich mit

P ins Gleichgewicht setzen, sodaß P , R , R' durch einen Punkt S gehen (Fig. 12). Die Abszisse a des Schnittpunktes S ist diejenige des Angriffspunktes von P , die Ordinate b findet sich wie folgt. In Bezug auf S ist das Moment von R gleich 0. Da aber R durch H , V und M ersetzt wird (§ 1), so hat man:

$$M + Va - Hb = 0,$$

woraus:

$$b = \frac{M + Va}{H}. \quad 1$$

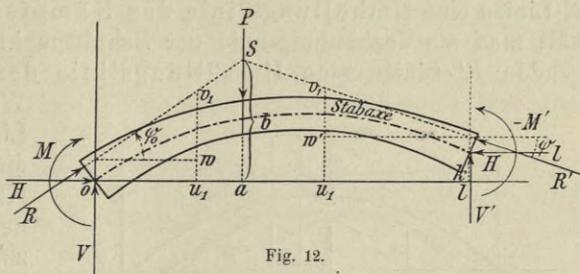


Fig. 12.

Mit der Abszisse a der Last P ändert sich auch die Lage des Schnittpunktes S . Läßt man P nach einander alle Lagen von $a = 0$ bis $a = l$ einnehmen, so beschreibt der Punkt S eine Linie S , welche Schnittlinie der Kämpferdrücke oder Kämpferdrucklinie heißt.

Die Ordinaten derjenigen Punkte, in welchen die von der Einzellast P herrührenden Kämpferdrücke R , R' die Vertikalen bei 0 und l schneiden, seien w , w' (Fig. 12). Da in Bezug auf den ersten dieser Schnittpunkte das Moment von R , in Bezug auf den zweiten das Moment von R' gleich 0 ist, während R durch H , V , M und R' durch $H' = H$, V' , $-M'$ ersetzt werden (§ 1), so folgen:

$$M - Hw = 0, \quad -M' + H(w' - k) = 0,$$

und hieraus:

$$w = \frac{M}{H}, \quad w' = k + \frac{M'}{H}. \quad 2$$

Für den Winkel, welchen die resultierende Schnittkraft R_x bei beliebigem x mit der positiven Richtung der x -Achse einschließt, gilt (§ 1, 11):

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{V_x}{H}.$$

Demnach hat man in unserem Falle für die entsprechenden Winkel bei 0 und l mit $V_0 = V$, $V_l = -V'$:

$$\operatorname{tg} \psi_0 = \frac{V}{H}, \quad \operatorname{tg} \psi_l = -\frac{V'}{H}. \quad 3$$

Die zweite Gleichung gilt auch für den Winkel der Richtung von R' mit der negativen Richtung der x -Achse.

Mit der Änderung des Angriffspunktes der Last P ändert nicht nur der Schnittpunkt S seinen Ort, sondern es geraten auch die Richtungslinien der Kämpferreaktionen R , R' in andere Lagen. Läßt man von irgend einer Lage a aus die Abszisse a und da wachsen, so ändern auch die erwähnten Richtungslinien ihre Lagen nur um unendlich wenig, wobei sich aber doch die vorige R -Linie und die neue R -Linie in einem Punkte u , v schneiden (Fig. 13), und ebenso die vorige R' -Linie und die neue R' -Linie in einem Punkte u' , v' . Gehen wir wieder um da weiter, so

wird die zweite R -Linie von der dritten R -Linie, die zweite R' -Linie von der dritten R' -Linie geschnitten. Führt man so fort, dann entsteht in der Verbindungslinie der Schnittpunkte aller aufeinander folgenden R -Linien eine Umhüllungslinie der Kämpferdrücke R . Ebenso erhält man als Verbindungslinie der Schnittpunkte aller aufeinander folgenden R' -Linien eine Umhüllungslinie der Kämpferdrücke R' .

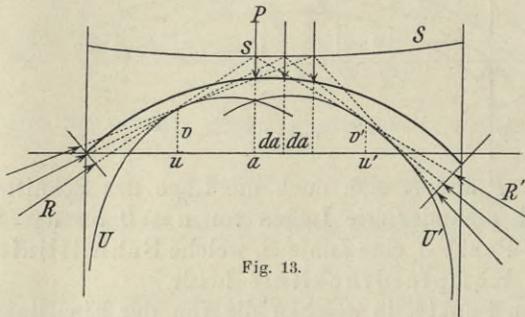


Fig. 13.

Wir wollen die erste dieser Linien auch kurz Linie U , die zweite Linie U' , die Kämpferdrucklinie Linie S nennen. Für Träger, welche zur Vertikalen durch ihre Mitte symmetrisch angeordnet sind, liegen auch diese Linien symmetrisch zu jener Vertikalen, sodaß es dann genügt, die Linie U zu bestimmen.

Es sollen nun für eine beliebige Lage a der Last P die Koordinaten des Schnittpunktes der zwei unendlich benachbarten R -Linien abgeleitet werden. Sind u_1, v_1 die laufenden Koordinaten der R -Linie für jene Lage (Fig. 12), so ist die Gleichung dieser Linie:

$$v_1 = w + u_1 \operatorname{tg} \psi_0.$$

Gehen wir nun mit P um da weiter, so ändern sich w um dw , $\operatorname{tg} \psi_0$ um $d \operatorname{tg} \psi_0$, und die Gleichung der neuen R -Linie lautet, wenn u_2, v_2 ihre laufenden Koordinaten:

$$v_2 = w + dw + u_2 (\operatorname{tg} \psi_0 + d \operatorname{tg} \psi_0).$$

Für den Durchschnitt beider Linien hat man $u_1 = u_2 = u$, $v_1 = v_2 = v$, sodaß durch Subtraktion:

$$0 = dw + u d \operatorname{tg} \psi_0,$$

woraus:

$$u = - \frac{dw}{d \operatorname{tg} \psi_0}$$

und damit nach der Gleichung für v_1 :

$$v = w - \operatorname{tg} \psi_0 \frac{dw}{d \operatorname{tg} \psi_0}.$$

Substituiert man in die beiden letzten Formeln die Ausdrücke 2, 3 von $w, \operatorname{tg} \psi_0$ und

$$dw = \frac{HdM - MdH}{H^2}, \quad d \operatorname{tg} \psi_0 = \frac{HdV - VdH}{H^2},$$

so folgen:

$$u = \frac{HdM - MdH}{VdH - HdV}, \quad 4$$

$$v = \frac{VdM - MdV}{VdH - HdV}, \quad 5$$

worin H, V, M einer bei a angreifenden Einzellast P entsprechen und die Differentiale sich auf ein veränderliches a beziehen.

Sind die Ausdrücke von H , V , M , bekannt, so kann man sie nach a differenzieren und aus 4, 5 die Koordinaten des Schnittpunktes je zweier aufeinander folgenden R -Linien erhalten. Wird dann mittelst einer der beiden Gleichungen a aus der andern eliminiert, so erhält man in der entstehenden Beziehung zwischen v und u die Gleichung der Umhüllungslinie U in gewöhnlicher Form (vergl. § 21). Es lassen sich jedoch H , V , M erst dann entsprechend ausdrücken, wenn Näheres über die Anordnung des Trägers bekannt ist.

Zur Ableitung der selten nötigen Beziehungen für die Umhüllungslinie U' haben wir die Gleichung der R' -Linie für den Angriffspunkt a der Last, bei Beachtung, daß in Fig. 9 Winkel ψ für $x=l$, d. h. ψ_l , einen negativen Wert erlangt:

$$v_1 = w' - (l - u_1) \operatorname{tg} \psi_l,$$

und für den Angriffspunkt $a + da$:

$$v_2 = w' + d w' - (l - u_2) (\operatorname{tg} \psi_l + d \operatorname{tg} \psi_l).$$

Für den Durchschnitt beider Linien erhält man wegen $u_1 = u_2 = u'$ und $v_1 = v_2 = v'$ durch Subtraktion:

$$0 = d w' - (l - u') d \operatorname{tg} \psi_l,$$

woraus und womit:

$$l - u' = \frac{d w'}{d \operatorname{tg} \psi_l},$$

$$v' = w' - \operatorname{tg} \psi_l \frac{d w'}{d \operatorname{tg} \psi_l}.$$

Substituiert man in diese Gleichungen w' , $\operatorname{tg} \psi_l$ nach 2, 3 und

$$d w' = \frac{H d M' - M' d H}{H^2}, \quad d \operatorname{tg} \psi_l = - \frac{H d V' - V' d H}{H^2},$$

so ergeben sich die Koordinaten des Durchschnitts der zwei benachbarten R' -Linien für die Lage a der Last, d. h. die Koordinaten des entsprechenden Punktes der Umhüllungslinie U' :

$$u' = l - \frac{H d M' - M' d H}{V' d H - H d V'}, \quad (6)$$

$$v' = k + \frac{V' d M' - M' d V'}{V' d H - H d V'}, \quad (7)$$

worin sich wieder H , V' , M' auf eine bei a angreifende Einzellast P und die Differentiale auf ein veränderliches a beziehen. Bezüglich der Elimination von a und der damit entstehenden Beziehung zwischen u' , v' als Gleichung der Umhüllungslinie U' gilt Analoges wie für die Umhüllungslinie U .

Sind für einen Bogen die Linien S , U , U' bestimmt, so ist es leicht, die von einer Last P an beliebiger Stelle a herrührenden Reaktionen R , R' , V , V' , H graphisch zu ermitteln, wie dies in Fig. 14 angedeutet ist. Die entsprechenden M , M' ergeben sich aus 2.

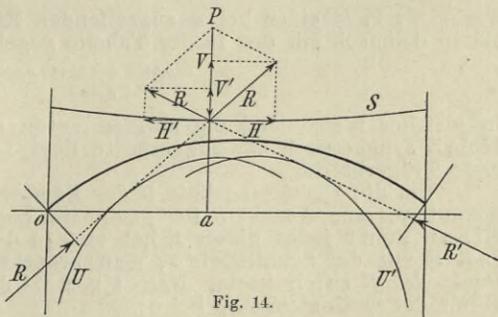


Fig. 14.

Es mag schon hier erwähnt werden, daß für frei drehbare Bogenenden (Bogen mit Kämpfergelenken in der Achse bei Vernachlässigung der Reibung) wegen $M = M' = 0$, $dM = dM' = 0$ nach 4–7 $u = 0$,

$v = 0$, $u' = l$, $v' = k$, die Umhüllungslien der Kämpferdrücke sind dann Punkte, die Kämpferdrücke R , R' gehen stets durch die Gelenkmittelpunkte bei 0 und l .

Aufgabe 2. Kämpferdrucklinie des Halbkreisbogens mit zwei Gelenken.

Für einen Halbkreisbogenträger konstanten Querschnitts mit Kämpfergelenken in gleicher Höhe hat man bei beliebiger Belastung die Vertikalreaktion bei 0 und den Horizontalschub (§ 41):

$$V = \frac{1}{l} \sum_0^l P(l-a), \quad H = \frac{4}{\pi l^2} \sum_0^l P a(l-a). \quad 1$$

Die Schnittlinie S der Kämpferdrücke zu bestimmen.

Da im vorliegenden Falle $M = 0$ und für eine Einzellast P bei a nach 1:

$$V = P \frac{l-a}{l}, \quad H = \frac{4P}{\pi l^2} a(l-a), \quad 2$$

so liefert § 2, 1 die Gleichung der Kämpferdrucklinie S :

$$b = \frac{\pi}{4} l = 0,7854 l. \quad 3$$

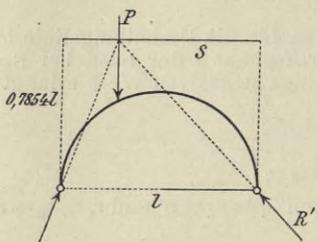


Fig. 15.

Die Kämpferdrucklinie ist also eine in der Höhe b über den Gelenkmittelpunkten liegende Horizontale, während die Umhüllungslien der Kämpferdrücke, wie immer bei Bogen mit Kämpfergelenken, die Gelenkmittelpunkte sind (S. 12). Weitere Anwendungen obiger Beziehungen siehe u. a. §§ 19 bis 21.

Beispiel 1. Kämpferdrucklinie und Umhüllungslien der Kämpferdrücke eines Bogens ohne Gelenke von beliebiger Achsform und beliebigen Querschnitt (Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe).

Für das in den Beispielen 63 bis 67 behandelte symmetrische Versuchsgewölbe des Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins von $l = 23,758$ m Spannweite und $f = 4,502$ m Pfeil der Achse erzeugten Einzellasten P an Stellen der in unten folgender Tabelle angeführten Abszissen a die in den Kolonnen 2—5 beigesetzten Werte des Horizontalschubs H , der Vertikalreaktion V bei 0 und der Endmomente M , M' (Beispiel 63). Die Schnittlinie und Umhüllungslien der Kämpferdrücke zu bestimmen.

Für die Schnittlinie S der Kämpferdrücke ist nach § 2, 1 die Ordinate b bei Abszisse a :

$$b = \frac{M + V a}{H}, \quad 1$$

worin M , V , H einer bei a angreifenden Einzellast P entsprechen. Wir erhalten demnach mit den in der Tabelle gegebenen Werten für $a = 0,629$ m:

$$b = \frac{-0,5789 + 0,9988 \cdot 0,629}{0,0092} = 5,364 \text{ m.}$$

In gleicher Weise sind die übrigen unten angeführten b berechnet. Da die Linie S symmetrisch zur Trägermitte liegt, so genügt ihre Berechnung für die erste Trägerhälfte.

Um die Umhüllungslien U der Kämpferdrücke R verzeichnen zu können, genügt es, eine Anzahl R für geeignete Lagen der Einzellast P aufzutragen. Einen Punkt jedes dieser R hat man in dem Durchschnitt der betreffenden Last P mit der Schnittlinie S , man braucht also nur noch je einen zweiten Punkt der R zu ermitteln. Nach § 2, 2 ist die Ordinate des Durchschnitts von R mit der Ordinatenachse bei 0:

$$w = \frac{M}{H}, \quad 2$$

also beispielsweise für $a = 0,629$ m:

$$w = -\frac{0,5789}{0,0092} = -62,924 \text{ m,}$$

und für $l - a = 0,629$ m oder $a = 23,129$ m:

$$w = \frac{0,0221}{0,0092} = 2,402 \text{ m.}$$

In gleicher Weise sind die übrigen angeführten w berechnet.

Man sieht, daß für kleine a die w so große negative Werte annehmen können, daß die Durchschnittspunkte der R mit der Ordinatenachse nicht mehr auf den Zeichenbogen fallen. Für solche Fälle kann man berücksichtigen, daß für die Abszisse z des Durchschnitts von R mit der Abszissenachse die Beziehung besteht (analog Gleichung 2 in § 2): $M + Vz = 0$, woraus:

$$z = -\frac{M}{V}$$

3

Beispielsweise erhalten wir für $a = 0,629$ m:

$$z = \frac{0,5789}{0,9988} = 0,580 \text{ m.}$$

In gleicher Weise sind die übrigen z der folgenden Tabelle berechnet.

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle I.

für a in m	$\frac{H}{P}$	$\frac{V}{P}$	$\frac{M}{P}$ in m	$\frac{M'}{P}$ in m	b in m	w in m	z in m	für $l - a$ in m	w in m
0,629	0,0092	0,9988	-0,5789	0,0221	5,364	-62,924	0,580	0,629	2,402
2,879	0,1818	0,9734	-1,8346	0,4131	5,322	-10,093	1,885	2,879	2,272
5,129	0,5242	0,9101	-1,8990	1,0952	5,282	-3,623	2,087	5,129	2,089
7,379	0,9322	0,8052	-1,0391	1,7116	5,259	-1,115	1,290	7,379	1,836
9,629	1,2652	0,6634	0,2450	1,8768	5,243	0,194	-0,369	9,629	1,483
11,879	1,3956	0,5000	1,3629	1,3629	5,232	0,977	-2,726	11,879	0,977

Die Kämpferdrucklinie S konnte hiernach in Fig. 16 verzeichnet werden und ebenso genügend genau die Umhüllungslinie U , soweit sie interessiert (der Teil nach etwa dem ersten Viertel kommt nicht zur Verwendung, weil daselbst keine R berühren), während die Umhüllungslinie U' bezüglich einer Vertikalen

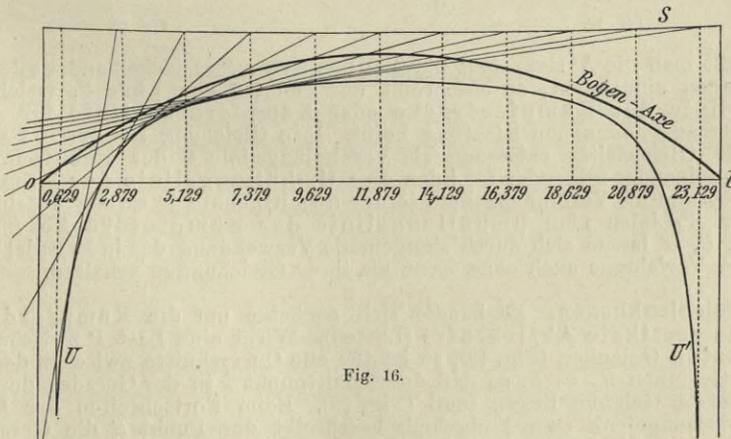


Fig. 16.

durch die Trägermitte symmetrisch zur Linie U liegt. Die Linien S , U , U' weichen im vorliegenden Falle nicht bedeutend von den für den parabolischen Bogenträger ohne Gelenke giltigen ab. So wäre S für letzteren eine horizontale Gerade, deren Ordinate genügend genau $b = \frac{6}{5}f = 5,402$ m (§ 21), während die obigen b zwischen 5,364 und 5,232 m variieren.

Aufgabe 3. Allgemeines über Schnittlinien und Umhüllungslinien der Kämpferdrücke. Kämpferdrucklinie von Dreigelenkbogen für vertikale und horizontale Aktivkräfte.

Es sollen für beliebige Dreigelenkbogen die Kämpferdrucklinien für vertikale und horizontale Aktivkräfte abgeleitet werden.

Bei allen Ableitungen betreffend Schnittlinien und Umhüllungslinien der Kämpferdrücke ist folgendes zu beachten. Wirkt auf den Bogenträger eine beliebig gerichtete Aktivkraft A , so setzt sich diese ins Gleichgewicht mit den durch sie erzeugten Kämpferreaktionen R, R' , so daß die Kräfte A, R, R' durch einen Punkt S gehen (Fig. 17). Bezeichnen a, b die Koordinaten des letzteren für ein rechtwinkliges Koordinatensystem durch den beliebigen Punkt 0 des einen Endquerschnitts, so ergibt sich ganz wie zu Beginn des § 2 (dort für vertikale Aktivkräfte):

$$b = \frac{M + Va}{H}, \quad 1$$

unter H, V, M die Horizontalkomponente, Vertikalkomponente und das Moment um den Punkt 0 der Kämpferreaktion R verstanden. Handelt es sich um einen Bogenträger mit Kämpfergelenken in den beliebigen Punkten 0 und l der Endquerschnitte, so gehen die Reaktionen R, R' stets durch die Mittelpunkte dieser Gelenke (Fig. 18), womit aus 1 wegen $M = 0$ wird:

$$b = \frac{V}{H} a. \quad 2$$

Auch in jedem anderen Querschnitt x , der ein Gelenk enthält, geht die resultierende Schnittkraft R_x durch den Mittelpunkt desselben, da sonst eine Drehung des sie erzeugenden Bogenteils um das Gelenk eintreten müßte.

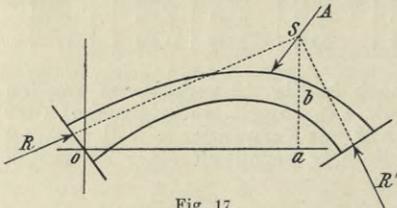


Fig. 17.

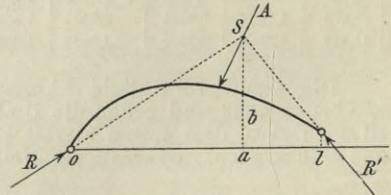


Fig. 18.

Läßt man die Aktivkraft A parallel mit sich selbst nacheinander alle möglichen Lagen einnehmen, so beschreibt der Punkt S eine Linie S , welche die Schnittlinie der Kämpferdrücke oder Kämpferdrucklinie für Aktivkräfte der angegebenen Richtung heißt. Ihre Gleichung ist durch 1 oder 2 bestimmt. Gleichzeitig entstehen als Verbindungslinie U der Schnittpunkte je zweier aufeinander folgender R -Linien eine Umhüllungslinie der Kämpferdrücke R und als Verbindungslinie U' der Schnittpunkte je zweier aufeinander folgender R' -Linien eine Umhüllungslinie der Kämpferdrücke R' . Die Linien S, U, U' lassen sich durch sinngemäße Verwendung des in Beispiel 1 vorgeführten Verfahrens auch ohne Kenntnis ihrer Gleichungen erhalten.

Dreigelenkbogen. Es handle sich zunächst um die Kämpferdrucklinie für vertikale Aktivkräfte (Lasten). Wirkt eine Last P zwischen den zwei letzten Gelenken (Fig. 19), so ist für alle Querschnitte zwischen den zwei ersten Gelenken $R_x = R$, so daß der Schnittpunkt S in der Geraden durch die zwei ersten Gelenke liegen muß (Fig. 19). Beim Fortschreiten der Last P vom Zwischengelenk zum Endgelenk beschreibt der Punkt S die Gerade bc . Wirkt dagegen die Last P zwischen den zwei ersten Gelenken (Fig. 20), dann hat man für alle Querschnitte zwischen den zwei letzten Gelenken $R_x = R'$ (nämlich gleich der Resultante von R und P), wonach der Schnittpunkt S nun in der Geraden durch die zwei letzten Gelenke liegen muß (Fig. 20). Beim Fortschreiten der Last P vom Zwischengelenk zum Anfangsgelenk beschreibt der Punkt S die Gerade ba . Die Kämpferdrucklinie für vertikale Aktivkräfte besteht also aus den beiden in Fig. 21 ausgezogenen geraden Strecken.

Gehen wir nun zur Kämpferdrucklinie für horizontale Aktivkräfte über. Wirkt eine solche Kraft Q zwischen den zwei letzten Gelenken (Fig. 22), so ist für alle Querschnitte zwischen den zwei ersten Gelenken $R_x = R$, so daß der Schnittpunkt S in der Geraden durch die zwei ersten

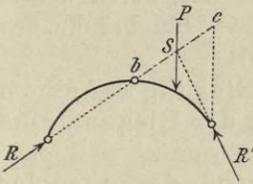


Fig. 19.

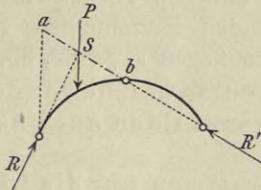


Fig. 20.

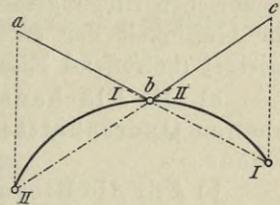


Fig. 21.

Gelenke liegen muß (Fig. 22). Beim Fortschreiten der Kraft Q von der höchsten zu tiefsten Lage beschreibt der Punkt S den entsprechenden Teil der Geraden $IIII$. Wirkt dagegen die Kraft Q zwischen den zwei ersten Gelenken (Fig. 23), dann hat man für alle Querschnitte zwischen den zwei letzten Gelenken $R_x = R'$ (nämlich gleich der Resultante von R und Q), wonach der Schnitt S jetzt in der Geraden durch die zwei letzten Gelenke liegen muß

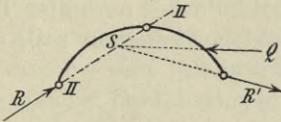


Fig. 22.

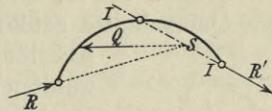


Fig. 23.

(Fig. 23). Beim Fortschreiten der Kraft Q von ihrer höchsten zu ihrer tiefsten Lage beschreibt der Punkt S den entsprechenden Teil der Geraden II . Die Kämpferdrucklinie für horizontale Aktivkräfte besteht also aus den beiden in Fig. 21 strichpunktierten geraden Strecken, derart, daß II für die Kräfte Q zwischen den zwei ersten, $IIII$ für die Kräfte Q zwischen den zwei letzten Gelenken zu verwenden ist.

§ 3. Biegungsformeln.

In den bisherigen Gleichungen kommen als Horizontalschub H und Endmomente M, M' drei Größen vor, welche im allgemeinen weder unmittelbar gegeben, noch in allen Fällen aus den gegebenen Größen allein auf rein statische Weise bestimmbar sind. Ihre Werte hängen alsdann von den Eigenschaften des Materials ab und müssen auf Grund von Anschauungen und Erfahrungen der Elastizitätslehre ermittelt werden. Aber auch wenn sämtliche in jenen Formeln auftretenden Größen gegeben oder durch die gegebenen Verhältnisse statisch bestimmt sind, ist es nötig, auf die Eigenschaften des Materials Rücksicht zu nehmen, sofern die Beanspruchungen des Stabes in den verschiedenen Elementen der Querschnitte und sonstigen Schnitte durch den Träger in Frage kommen.

Ein Stab mit einfach gekrümmter Achse werde durch irgendwelche Kräfte und Temperaturänderungen so deformiert, daß die Stabachse in einer Ebene bleibt, welche zugleich Symmetrieebene der Querschnitte ist, daß ferner für die folgende Betrachtung in jeder Senkrechten zu dieser Biegungsebene überall gleiche Biegungs- und Beanspruchungsverhält-

nisse bestehen, sodaß es genügt, die Untersuchung derselben in der Ebene der Stabachse durchzuführen. Von den Annahmen und Bezeichnungen der §§ 1, 2 wird zunächst abgesehen. Wir gehen von folgenden in der technischen Biegungstheorie üblichen Voraussetzungen aus, durch welche die Gültigkeit der entstehenden Beziehungen gewisse Beschränkungen erleidet (betreffend Eisenbetonbogen s. §§ 32, 33, 34):

a) Die Flächenelemente, welche vor der Biegung auf einem ebenen Querschnitte lagen, bilden auch nach der Biegung eine Ebene.

b) Für die Biegung kommen nur die Längenänderungen der zur Achse parallelen Fasern und für diese neben Temperaturänderungen nur die Zug- und Druckkräfte an den Querschnittselementen in Betracht.

c) Die Elastizitätsmoduln für Zug und Druck sind innerhalb der Biegungsgrenzen für alle unter b) erwähnten Fasern als gleich und konstant anzusehen.

Wir denken uns im spannungslosen Zustande bei normaler Temperatur zwei Querschnitte geführt, den einen, welcher x heißen soll, um die

Achslänge s von einem gewählten Ausgangspunkte entfernt, an der Stelle, wo r den Krümmungsradius der Stabachse und φ den Winkel derselben mit einer von der Achsschicht aus auf Seiten des Krümmungsmittelpunktes gegebenen Richtung bedeuten (Fig. 24 und 25), den andern

um die Achslänge ds weiter. Dann hat man:

$$ds = r(-d\varphi), \quad r = -\frac{ds}{d\varphi}, \quad 1$$

und die Länge der Fasern parallel der Stabachse in Entfernung v von der letzteren, wobei die v nach der dem Krümmungszentrum entgegengesetzten Seite als positiv gelten:

$$ds_v = ds + v(-d\varphi) = ds \left(1 + \frac{v}{r}\right). \quad 2$$

Wirken nun äußere Kräfte ein und finden Temperaturveränderungen statt, so ändern sich s , φ , s_v um Δs , $\Delta \varphi$, Δs_v , und wir haben nach dem Taylorschen Lehrsatz mit $\Delta s = f(s)$ die Änderung der Entfernung $s + ds$ des zweiten Querschnitts von dem gewählten Ausgangspunkte:

$$f(s + ds) = \Delta s + \frac{d\Delta s}{ds} ds + \frac{d^2\Delta s}{ds^2} \frac{ds^2}{1 \cdot 2} + \dots,$$

oder bei Vernachlässigung unendlich kleiner Größen zweiter und höherer Ordnung gegen solche erster Ordnung:

$$f(s + ds) = \Delta s + d\Delta s.$$

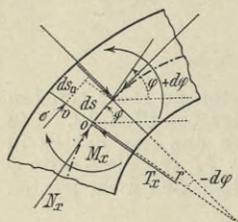


Fig. 24.

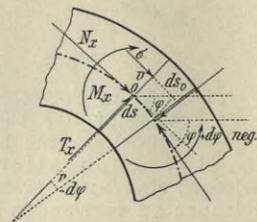


Fig. 25.

Die schließliche Länge der Fasern in der Achsschicht zwischen den angenommenen Querschnitten ist also:

$$s + ds + \Delta s + d\Delta s - (s + \Delta s) = d(s + \Delta s).$$

In ganz analoger Weise ergibt sich die schließliche Faserlänge bei v (anstatt der anfänglichen Faserlänge ds_v):

$$d(s_v + \Delta s_v),$$

und die schließliche Differenz der Richtungswinkel φ bei den zwei Querschnitten (anstatt der anfänglichen Differenz $d\varphi$):

$$d(\varphi + \Delta\varphi).$$

Da aber die Querschnitte zufolge der Voraussetzung a) auch nach der Biegung als Ebenen gelten sollen, so hat man analog dem Ausdrucke 2:

$$d(s_v + \Delta s_v) = d(s + \Delta s) - (v + \Delta v) d(\varphi + \Delta\varphi),$$

und durch Subtraktion jenes Ausdruckes unter Vernachlässigung von $\Delta v d\Delta\varphi$:

$$d\Delta s_v = d\Delta s - v d\Delta\varphi - \Delta v d\varphi. \quad 3$$

Änderungen Δv wurden früher überhaupt nicht in Betracht gezogen, doch können sich alsdann bei steilen Bogen (Halbkreisbogen etc.) Ungereimtheiten bezüglich des Einflusses der Temperaturveränderungen ergeben. Berücksichtigen wir letztere mit Müller-Breslau, indem wir unter Vernachlässigung sonstiger Änderungen von v setzen, $\Delta v = \alpha\tau v$, worin α den linearen Ausdehnungskoeffizienten, τ die Temperaturänderung bedeuten, so wird aus der letzten Gleichung:

$$d\Delta s_v = d\Delta s - v d\Delta\varphi - \alpha\tau v d\varphi. \quad 4$$

Wenn die Längenänderungen der Fasern bei v nur von Spannungen σ parallel der Stabachse herrührten, und diese, wie bei Bogenträgern zweckmäßig, als positiv angesehen werden, wenn sie Druck bedeuten, so hätte man die Längenänderungen pro Längeneinheit oder spezifischen Längenänderungen:

$$\frac{d\Delta s_v}{ds_v} = -\frac{\sigma}{E},$$

unter E den Elastizitätsmodul verstanden. Wenn dagegen nur eine Temperaturänderung τ eingetreten wäre, so würde sein:

$$\frac{d\Delta s_v}{ds_v} = \alpha\tau.$$

Beim Zusammenwirken beider Einflüsse haben wir:

$$\frac{d\Delta s_v}{ds_v} = \alpha\tau - \frac{\sigma}{E}, \quad 5$$

und nach Einsetzen von 2, 4:

$$\sigma = E \left(v \frac{d\Delta\varphi}{ds} - \frac{d\Delta s}{ds} + \alpha\tau \right) \frac{r}{r+v}. \quad 6$$

Dies ist die Normalspannung bei v im Querschnitt x , das heißt auch die Zug- oder Druckkraft längs einer Faser vom Querschnitt 1 parallel

der Stabachse bei x , v . Einer Faser vom Querschnitt dF entspricht eine dF -mal so große Kraft, und für sämtliche Fasern, welche im Querschnitt x von der Größe F endigen, hat man die Resultante aller dieser Kräfte, das heißt die ganze Normalkraft im Querschnitt x :

$$N_x = \int \sigma dF = E \left[\frac{d \Delta \varphi}{ds} \int \frac{rv}{r+v} dF - \left(\frac{d \Delta s}{ds} - \alpha \tau \right) \int \frac{r}{r+v} dF \right], \quad 7$$

wobei angenommen ist, daß wie E auch das Produkt $\alpha \tau$ aus Ausdehnungskoeffizient und Temperaturänderung bei allen Elementen des Querschnitts als gleich gelten soll.

Jede auf ein Flächenelement dF wirkende Kraft σdF erzeugt hinsichtlich der Achsschicht ein Moment $\sigma dF \cdot v$, und da die in der Ebene des Querschnittes wirkenden Kräfte kein Moment in Bezug auf die Achsschicht des letzteren erzeugen, so ist das resultierende Angriffsmoment bei x :

$$M_x = \int \sigma dF \cdot v = E \left[\frac{d \Delta \varphi}{ds} \int \frac{rv^2}{r+v} dF - \left(\frac{d \Delta s}{ds} - \alpha \tau \right) \int \frac{rv}{r+v} dF \right]. \quad 8$$

Dasselbe ist hier als positiv angenommen, wenn es die ursprüngliche Krümmung zu vermindern strebt (Fig. 24 und 25).

Die drei letzten Gleichungen wollen wir etwas umformen. Man hat:

$$\frac{rv}{r+v} = v - \frac{v^2}{r+v},$$

$$\frac{r}{r+v} = 1 - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{v^2}{r+v},$$

und damit nach 7, 8:

$$\frac{N_x}{E} = \frac{d \Delta s}{ds} \left(\int v dF - \int \frac{v^2}{r+v} dF \right) - \left(\frac{d \Delta s}{ds} - \alpha \tau \right) \left(\int dF - \frac{1}{r} \int v dF + \frac{1}{r} \int \frac{v^2}{r+v} dF \right),$$

$$\frac{M_x}{E} = \frac{d \Delta \varphi}{ds} r \int \frac{v^2}{r+v} dF - \left(\frac{d \Delta s}{ds} - \alpha \tau \right) \left(\int v dF - \int \frac{v^2}{r+v} dF \right).$$

Setzen wir hierin zur Abkürzung

$$K = r \frac{v^2}{r+v} dF \quad 9$$

und berücksichtigen weiter:

$$\int dF = F, \quad \int v dF = 0$$

(letztere Beziehung das Moment des Querschnitts in Hinsicht einer Achse durch seinen Schwerpunkt ausdrückend), so folgen:

$$\frac{N_x}{E} = - \frac{d \Delta \varphi}{ds} \frac{K}{r} - \left(\frac{d \Delta s}{ds} - \alpha \tau \right) \left(\frac{K}{r^2} + F \right) \quad 10$$

$$\frac{M_x}{E} = \frac{d \Delta \varphi}{ds} K + \left(\frac{d \Delta s}{ds} - \alpha \tau \right) \frac{K}{r}, \quad 11$$

Wir erhalten hieraus:

$$\frac{d \Delta s}{ds} = \alpha \tau - \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{1}{EF} = Y, \quad 12$$

$$\frac{d \Delta \varphi}{ds} = \frac{M_x}{EK} + \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{1}{EFr} = Z, \quad 13$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke in 6:

$$\sigma = \frac{N_x}{F'} + \frac{M_x}{F' r} + \frac{M_x}{K} \frac{r v}{r + v}. \quad 14$$

Vereinfachungen dieser Formeln siehe § 6.

§ 4. Bemerkungen zu den abgeleiteten Bieigungsformeln.

Die im vorigen Paragraphen angeführten Voraussetzungen der technischen Bieigungstheorie nebst den darauf beruhenden Beziehungen haben sich in gewissen Fällen auch nach der allgemeinen Elastizitätstheorie isotroper fester Körper als annähernd zutreffend erwiesen (Saint-Venant, Kirchhoff, Pochhammer), und mancherlei Versuche und Beobachtungen wie jahrzehntelange Erfahrungen mit den auf Grund jener Beziehungen berechneten Trägern konnten für ihre Zulässigkeit bei zahlreichen Ermittlungen über Balken und Bogen von rationeller Anordnung sprechen. In manchen Fällen jedoch genügte die gewöhnliche Bieigungstheorie nicht. So wurden bei gebogenen Gußeisenstäben wesentliche Abweichungen gegen dieselbe festgestellt, was begreiflich ist, da für Gußeisen die Voraussetzung c), gleiche und konstante Elastizitätsmoduln für Zug und Druck, auch nicht annähernd erfüllt zu sein pflegt. Bei gewissen Ableitungen, z. B. bei Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus Bieigungsversuchen mit eisernen Balken, mußte der Einfluß der Schubkräfte in den Querschnittelementen auf die Biegung berücksichtigt werden, welcher im vorigen Paragraphen durch die Voraussetzung b) ausgeschlossen war, usw.¹. Indessen werden elastische Bogen-träger nicht aus Gußeisen, sondern in erster Linie aus Schweißeisen, Flußeisen oder Stahl hergestellt (über Gewölbe, Betonbogen und Eisenbetonbogen s. §§ 27, 31 und §§ 32—34), und es kommt bei ihnen fast ausschließlich der Elastizitätsmodul für Druck in Betracht, während die Schubkräfte im allgemeinen weit kleiner als bei horizontalen Balkenträgern, ja in manchen Fällen gleich Null sind, (Beispiel 8, § 19), so daß sie bei der praktischen Berechnung vollwandiger Bogen gewöhnlich überhaupt nicht berücksichtigt wurden.

Auch bezüglich der Bieigungsfestigkeit scheinen die Verhältnisse für Bogen-träger nicht ungünstiger als für Balkenträger zu liegen. Auf Biegung beanspruchte vollwandige Balken brachen bei den sorgfältigsten der bisherigen Versuche meist infolge Nachgebens auf der Zugseite, oder sie verloren ihre Tragfähigkeit durch Strecken und Ausbiegen², wobei die gewöhnlichen Bieigungs-gleichungen schon wegen Überschreitung der Elastizitätsgrenze nicht mehr zu gelten brauchen. Setzt man gleichwohl die größte aus diesen Formeln folgende Normalspannung σ im Augenblicke des Nachgebens $\sigma = \beta z$, unter z die durch Zerreißversuche ermittelte Zugfestigkeit des Gurtmaterials verstanden, so läßt sich vorläufig etwa setzen³: für gewalzte Balken aus Schweißeisen oder Flußeisen $\beta = 1$, für genietete Blechbalken aus Schweißeisen $\beta = 0,9$, für ebensolche aus weichem Flußeisen $\beta = 0,8$, wobei selbstverständlich nur bestes Material und entsprechende Arbeit in Betracht gezogen sind. Bei Berechnung der σ , aus welchen vorstehende nicht zu günstige β entnommen wurden, kam das Trägheitsmoment oder Widerstandsmoment mit Rücksicht auf Nietverschwächung zur Verwendung. Dem Nachgeben der Balken auf der Zugseite gegenüber könnte es als günstig erscheinen, daß bei Bogen keine oder nur geringe Zugspannungen σ aufzutreten pflegen. Doch hat man dann um so mehr für gehörige Sicherheit gegen Einknickungen und seitliche Ausbiegungen zu sorgen, wie ja eine Reihe ungünstiger Erfahrungen bei eisernen Brücken auf mangelhafte Druckglieder und ungenügende Querversteifungen zurückzuführen waren.

In § 3 wurde vorausgesetzt, dass in jeder Senkrechten zur Trägerebene gleiche Bieigungs- und Beanspruchungsverhältnisse bestehen. Für den dabei an-

¹ Näheres über die hier angedeuteten Fragen nebst entsprechender Literatur siehe Lueger, Lexikon der gesamten Technik, Artikel Biegung, Bieigungselastizität, Bieigungsfestigkeit, Blechträger, Elastizitätsmodul.

² Vergl. z. B. Tetmajers Mitteilungen, Heft IV, Zürich 1890, S. 82, 220.

³ Näheres s. Luegers Lexikon, Artikel Bieigungsfestigkeit; Tetmajer, Die angewandte Elastizitäts- und Festigkeitslehre, Leipzig und Wien 1904, S. 438.

genommenen und soweit möglich zu realisierenden Fall, daß alle äußeren Kräfte in der Trägerebene wirken, folgt hieraus eine Bedingung für die Anordnung der Querschnitte. Da das Moment sämtlicher Normalkräfte eines Querschnitts in Hinsicht der Trägerebene gleich Null sein muß, so hat man (Fig. 26):

$$\int \sigma dF \cdot u = 0,$$

unter u die positive oder negative Entfernung eines Querschnittselements dF von der Trägerebene verstanden. Durch Substitution des Ausdrucks § 3, 14) folgt

$$\frac{N_x}{F} \int u dF + \frac{M_x}{Fr} \int u dF + \frac{r M_x}{K} \int \frac{uv}{r+v} dF = 0,$$

oder weil in Hinsicht der v -Achse als Schwerlinie des Querschnitts das statische Moment $\int u dF = 0$:

$$\int \frac{uv}{r+v} dF = 0. \quad 1$$

Dieser Bedingung wird z. B. genügt, wenn der Querschnitt symmetrisch zur Trägerebene angeordnet ist (Fig. 26), wie zu Beginn des I. Abschnitts und speziell des § 3 vorausgesetzt wurde. Werden alle v gegen r vernachlässigt, so liefert 1:

$$\int uv dF = 0, \quad 2$$

das Zentrifugalmoment des Querschnitts hinsichtlich der Achsen u, v muß verschwinden, diese müssen also die Hauptträgheitsachsen des Querschnitts sein, was ebenfalls zutrifft, wenn die v -Achse eine Symmetrieachse desselben ist. Selbstverständlich wird man den Querschnitt stets symmetrisch anordnen und danach trachten, daß auch die Schwerlinien anschließender Glieder in der Symmetrieebene liegen (Vertikalen, Füllungsstäbe) oder darin zum Schneiden kommen (horizontale und vertikale Querverbände), entsprechend der allgemeinen Konstruktionsregel, daß sich die Schwerlinien zusammentreffender Stäbe in einem Punkte schneiden sollen, eine Regel, welche z. B. bei der eingestürzten Mönchensteiner Brücke bezüglich der Gurtungen und Füllungsglieder unberücksichtigt geblieben war.

§ 5. Wiener Versuche mit einem eisernen Bogen.

In neuerer Zeit wurden von einem durch den Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Verein zur Prüfung von Gewölben gewählten Ausschuß (vergl. § 31) Versuche mit einem Bogen aus Martinflußeisen angestellt¹. Das Eisen zeigte bei Zugversuchen mit 6 Probestäben aus Winkeleisen, Stehblechen und Gurtlamellen (je 2) folgende Eigenschaften: Elastizitätsmodul 2080000 bis 2200000, im Mittel 2145000 kg pro Quadratcentimeter; Proportionalitätsgrenze 1720 bis 1840, im Mittel 1770 kg; Zugfestigkeit 3760 bis 4210, im Mittel 4040 kg; Bruchdehnung 19,5 bis 27,0, im Mittel 24,2%; Kontraktion 0,51 bis 0,60, im Mittel 0,55%. Der Bogen bestand aus zwei Trägern mit Kämpfergelenken, ohne Scheitelgelenk, von $l = 23$ m Spannweite und $f = 4,556$ m Pfeil der Achse, in Entfernung von 1,8 m, welche durch kräftige Querverbindungen vereinigt waren. Die Bogenachse war einer Parabel eingeschrieben, und zwar so, daß die auf einer Bogenhälfte angeordneten Vertikalen (ohne Diagonalen) bei der Mitte beginnend, in Entfernungen von 2,25 m auf Bogenecken trafen. Bogenhöhe nur 0,36 m. Als Belastung neben dem Eigengewicht von etwa $g = 270$ kg pro Meter Träger wurden über jenen Vertikalen Eisenbahnschienen bis zur Bogenmitte aufgebracht. Die Querschnitte beider Bogenträger bestanden aus einer Vertikalplatte von 30/1 cm, vier Winkeleisen von 8/8/1 cm und für jede Gurtung 1 bis 3 Horizontalplatten von 20/0,8 cm, derart, daß bei einer einseitigen Verkehrslast von $p = 1500$ kg pro Meter Träger, einschließlich der Vertikalen etc., rechnungsmäßige Normalspannungen von ca. 750 kg pro Quadratcentimeter entstanden und die Träger beim Aufbringen der verfügbaren Schienen von $2p = 18000$ kg pro Meter sicher zerstört werden sollten.

¹ Bericht des Gewölbeausschusses, Wien 1895, S. 1, 17, 37, 43, 70, 89, 98.

Die Versuche ergaben:

Proportionalitätsgrenze	Stauchgrenze	seitliches Ausknicken
für $p = 4350$,	6410,	7640 kg pro Meter,
entsprechend größten Normalspannungen nach der üblichen Berechnung, jedoch ohne den Beitrag des verhältnismäßig geringen Eigengewichts und ohne Rücksicht auf Nietverschwächungen:		
$\sigma = 1730$,	2550,	3030 kg pro qcm,

wobei Zugspannungen bis zu $\frac{4}{5}$ der Druckspannungen auftraten. Die genauen Erhebungen ergaben, daß der Bogen an keiner Stelle gerissen und keine Niete abgescheert waren. Man würde also etwa wie in § 4 für Balken aus weichem Flußeisen $\beta = 0,8$ setzen können.

Da nur die ganzen Formänderungen (elastische plus bleibende) gemessen wurden, so konnte der Elastizitätsmodul nicht berechnet werden. Bei Anwendung von Formeln für elastische Formänderungen auf die innerhalb der Proportionalitätsgrenze erhaltenen ganzen Formänderungen ergaben die vertikalen Verschiebungen $E = 1860000$ kg, die horizontalen $E = 1793000$ kg, beide zusammen im Mittel $E = 1826500$ kg pro Quadratcentimeter. Nach dem Berichte waren die bleibenden Verschiebungen groß genug, um die Differenz dieses Wertes gegen den durch Zugversuche erhaltenen Elastizitätsmodul $E = 2145000$ zu erklären.

Die Schlußfolgerungen aus den Versuchen faßt Professor Brick, einer der Berichtersteller, wie folgt zusammen:

„1. Die durch unmittelbare Messungen erhobenen Verschiebungen einzelner Punkte der Bogenachse erwiesen für die ersten Belastungsstufen die Gültigkeit des Proportionalitätsgesetzes zwischen Belastung und Verschiebung und bestätigen die auf Grund der Theorie des „elastischen Bogenträgers mit Kämpfergelenken“ berechneten diesbezüglichen Ergebnisse.

2. Die aus den Diagrammen der Verschiebungen entnommenen Belastungen für die Proportionalitätsgrenze ergaben für die berechneten größten Randspannungen in den gefährlichen Querschnitten Werte, welche mit den Ergebnissen der Festigkeitsuntersuchung an Probestäben aus dem Materiale der Träger in guter Übereinstimmung stehen.

3. Das Widerstandsvermögen der Versuchsträger wurde durch eine Belastung erschöpft, für welche die berechneten größten Randspannungen der gefährlichen Querschnitte rund 3000 kg pro Quadratcentimeter betragen. Hierbei gaben die Untergurte der unbelasteten Seite durch seitliches Ausknicken nach; die Gurtlamellen daselbst zeigten insbesondere zwischen den Nieten an den einspringenden Polygonecken, zunächst dem gefährlichen Querschnitte, starke Faltenbildung.

Durch diese Ergebnisse finden die auf Grund der Theorie des „elastischen Bogenträgers mit Kämpfergelenken“ berechneten Resultate eine praktische Bestätigung, womit der beabsichtigte Zweck des Versuches erreicht worden ist.“

§ 6. Trägheitsmoment und Krümmungsmoment. Vereinfachungen.

Wir bleiben bei den Bezeichnungen des § 3. Das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die Achsschicht, bekanntlich definiert durch

$$J = \int v^2 dF, \quad 1$$

ist lediglich vom Querschnitte selbst abhängig, während die durch § 3, 9) eingeführte Größe

$$K = r \int \frac{v^2}{r+v} dF \quad 2$$

auch vom Krümmungsradius der Stabachse beim fraglichen Querschnitte abhängt und deshalb kurz Krümmungsmoment heißen soll. Für

gerade Stäbe ist wegen $r = \infty$ das Krümmungsmoment gleich dem Trägheitsmoment.

Mit Rücksicht auf die Reihe:

$$\frac{r}{r+v} = \frac{1}{1+\frac{v}{r}} = 1 - \frac{v}{r} + \frac{v^2}{r^2} - \frac{v^3}{r^3} + \dots$$

können wir nach 2 das Krümmungsmoment auch ausdrücken:

$$K = \int v^2 \left(1 - \frac{v}{r} + \frac{v^2}{r^2} - \frac{v^3}{r^3} + \dots \right) dF, \quad 3$$

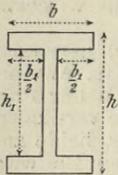


Fig. 27.

und speziell für den bei Bogenträgern gewöhnlichen Fall zur Achsschicht symmetrischer Querschnitte, weil die v auf beiden Seiten der Achsschicht von verschiedenen Vorzeichen sind:

$$K = \int v^2 \left(1 + \frac{v^2}{r^2} + \frac{v^4}{r^4} + \dots \right) dF. \quad 4$$

Setzen wir allgemein

$$K = \varphi J, \quad 5$$

und bezeichnen in der folgenden Zusammenstellung mit h die ganze Höhe eines Querschnittes (Fig. 27), so ergeben sich beispielsweise die folgenden φ (siehe die Berechnung in Aufgabe 4–6):

für $\frac{r}{h}$	Kreis und Ellipse	Quadrat und Rechteck	I-Querschnitt (Fig. 27) mit $b_1 = 0,9 b, h_1 = 0,9 h$
1	1,1452	1,1833	1,2614
2	1,0325	1,0393	1,0541
3	1,0141	1,0170	1,0233
4	1,0079	1,0095	1,0129
5	1,0050	1,0060	1,0082
6	1,0035	1,0042	1,0057
7	1,0026	1,0031	1,0042
8	1,0020	1,0023	1,0032
9	1,0015	1,0018	1,0025
10	1,0012	1,0015	1,0021
15	1,0006	1,0007	1,0009
20	1,0003	1,0004	1,0005
50	1,0000	1,0001	1,0001

Bei Bogenträgern für eiserne Brücken und Dächer pflegt $r:h$ noch größer als 50 zu sein (S. 32), sodaß dann jedenfalls J an Stelle von K gesetzt werden kann. Damit vernachlässigt man in 2 alle v gegen r . Geschieht dies auch in Gleichung 14 des § 3, so treten an Stelle der dortigen Gleichungen 12–14 die folgenden:

$$Y = \frac{d\Delta s}{ds} = \alpha \tau - \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{1}{EF}, \quad 5$$

$$Z = \frac{d\Delta \varphi}{ds} = \frac{M_x}{EJ} + \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{1}{EFr}, \quad 6$$

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{Fr} + \frac{M_x}{J} v. \quad 7$$

Vielfach werden in diesen Gleichungen noch die Glieder mit r im Nenner gegen die übrigen vernachlässigt, womit entstehen:

$$Y = \frac{d \Delta s}{ds} = a \tau - \frac{N_x}{EF},$$

$$Z = \frac{d \Delta \varphi}{ds} = \frac{M_x}{EJ},$$

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{J} v, \quad 8$$

doch beabsichtigen wir von den beiden ersten Formeln im folgenden keinen Gebrauch zu machen, während die Zulässigkeit der letzten mit Rücksicht auf praktische Fälle zu beurteilen ist (vergl. Beispiel 5).

Aufgabe 4 mit Beispiel 2. Trägheitsmoment und Krümmungsmoment des Rechtecks und Quadrats.

Es sollen J , K und das Verhältnis $K:J$ für den rechteckigen Querschnitt der Seiten b , h berechnet werden, wenn die Achsschicht parallel der Seite b liegt.

Wählen wir $dF = b dv$ (Fig. 28), so hat man nach § 6, 1), 2) mit $e = \frac{h}{2}$ das Trägheitsmoment:

$$J = b \int_{-e}^e v^2 dv,$$

und das Krümmungsmoment:

$$K = br \int_{-e}^e \frac{v^2}{r+v} dv = br \int_{-e}^e \left(v - r + \frac{r^2}{r+v} \right) dv.$$

Die Ausführung der Integrationen ergibt:

$$J = 2 \cdot \frac{b e^3}{3} = \frac{b h^3}{12},$$

$$K = br \left[\frac{v^2}{2} - r v + r^2 \log_n (v+r) \right]_{-e}^e,$$

$$K = br^3 \left(\log_n \frac{r+e}{r-e} - \frac{2e}{r} \right). \quad 2$$

Mit Rücksicht auf die bekannte Reihe

$$\log_n \frac{1 + \frac{e}{r}}{1 - \frac{e}{r}} = 2 \left[\frac{e}{r} + \frac{1}{3} \left(\frac{e}{r} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{e}{r} \right)^5 + \dots \right]$$

kann man auch schreiben:

$$K = 2 \cdot \frac{b e^3}{3} \left[1 + \frac{3}{5} \left(\frac{e}{r} \right)^2 + \frac{3}{7} \left(\frac{e}{r} \right)^4 + \frac{3}{9} \left(\frac{e}{r} \right)^6 + \dots \right], \quad 3$$

so daß wegen 1):

$$\frac{K}{J} = 1 + \frac{3}{5} \left(\frac{e}{r} \right)^2 + \frac{3}{7} \left(\frac{e}{r} \right)^4 + \frac{3}{9} \left(\frac{e}{r} \right)^6 + \dots, \quad 4$$

oder auch mit $e = \frac{h}{2}$:

$$\frac{K}{J} = 1 + \frac{3}{20} \left(\frac{h}{r} \right)^2 + \frac{3}{112} \left(\frac{h}{r} \right)^4 + \frac{1}{192} \left(\frac{h}{r} \right)^6 + \frac{3}{2816} \left(\frac{h}{r} \right)^8 + \frac{3}{13312} \left(\frac{h}{r} \right)^{10} + \dots \quad 5$$

Nach dieser Gleichung erhalten wir z. B. für $\frac{r}{h} = 3$:

$$\frac{K}{J} = 1 + 0,016667 + 0,000331 + 0,000007 = 1,01700.$$

Die Glieder vom fünften an haben hier keinen Einfluß mehr auf die ersten fünf Dezimalen. In gleicher Weise sind die übrigen in § 6 für das Quadrat und Rechteck gegebenen $K:J$ berechnet.

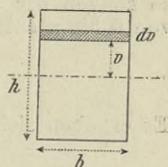


Fig. 28.

Aufgabe 5 mit Beispiel 3. Trägheitsmoment und Krümmungsmoment der Ellipse und des Kreises.

Es sollen J , K und das Verhältnis $K:J$ für den elliptischen Querschnitt der Halbachsen a , b berechnet werden, wenn die Achsschicht durch die Achse $2b$ geht.

Bei den in Fig. 29 ersichtlichen Bezeichnungen ist die Mittelpunkts-gleichung der Ellipse:

$$a^2 y^2 + b^2 v^2 = a^2 b^2,$$

wonach:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - v^2},$$

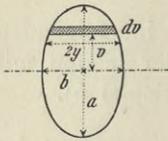


Fig. 29.

und der Inhalt des schraffierten Flächenelements:

$$dF = 2 y db = \frac{2b}{a} \sqrt{a^2 - v^2} v^2 dv.$$

Die Gleichungen 1 und 4 des § 6 liefern damit:

$$J = \frac{2b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - v^2} v^2 dv,$$

$$K = \frac{2b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - v^2} v^2 \left(1 + \frac{v^2}{r^2} + \frac{v^4}{r^4} + \dots\right) dv.$$

Da für die zu integrierende Funktion in beiden Fällen $f(-v) = f(v)$ ist, so können wir anstatt des Integrals von $-a$ bis a das Doppelte des Integrals von 0 bis a setzen. Für beliebige gerade m hat man:

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - v^2} v^m dv = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (m+2)} \frac{\pi}{2} a^{m+2}.$$

Es ergeben sich damit:

$$J = 2 \frac{2b}{a} \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{\pi}{2} a^4,$$

$$K = 2 \frac{2b}{a} \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{\pi}{2} a^4 \left(1 + \frac{3}{6} \frac{a^2}{r^2} + \frac{3 \cdot 5}{6 \cdot 8} \frac{a^4}{r^4} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{6 \cdot 8 \cdot 10} \frac{a^6}{r^6} + \dots\right),$$

das heißt:

$$J = \frac{\pi b a^3}{4}, \tag{1}$$

$$K = \frac{\pi b a^3}{4} \left(1 + \frac{3}{6} \frac{a^2}{r^2} + \frac{3 \cdot 5}{6 \cdot 8} \frac{a^4}{r^4} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{6 \cdot 8 \cdot 10} \frac{a^6}{r^6} + \dots\right). \tag{2}$$

Nach diesen Ausdrücken ist:

$$\frac{K}{J} = 1 + \frac{3}{6} \frac{a^2}{r^2} + \frac{3 \cdot 5}{6 \cdot 8} \frac{a^4}{r^4} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{6 \cdot 8 \cdot 10} \frac{a^6}{r^6} + \dots, \tag{3}$$

oder mit $a = \frac{h}{2}$:

$$\frac{K}{J} = 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{h}{r}\right)^2 + \frac{5}{256} \left(\frac{h}{r}\right)^4 + \frac{7}{2048} \left(\frac{h}{r}\right)^6 + \frac{31}{32768} \left(\frac{h}{r}\right)^8 + \dots \tag{4}$$

Diese Gleichung liefert z. B. für $\frac{r}{h} = 5$:

$$\frac{K}{J} = 1 + 0,00500 + 0,00003 = 1,00503.$$

Die Glieder in 4 vom vierten an haben für dieses und für alle größeren $r:h$ keinen Einfluß auf die fünf ersten Dezimalen von $K:J$. In gleicher Weise wie hier sind die übrigen in § 6 für den Kreis und die Ellipse angeführten $K:J$ berechnet.

Aufgabe 6 mit Beispiel 4. Trägheitsmoment und Krümmungsmoment von Figurendifferenzen (I-Querschnitt usw.).

Es sollen J , K und das Verhältnis $K:J$ für Querschnitte ausgedrückt werden, welche wie der I-Querschnitt, Ringquerschnitte und Blechträgerquerschnitte der Differenz verschiedener Figuren entsprechen.

Es seien J_v , K_v das Trägheitsmoment und Krümmungsmoment der vollen

Figur, J_h , K_h diejenigen des Hohlraums, durch dessen Abzug von der vollen Figur der gegebene Querschnitt entsteht (Fig. 30). Dann hat man das Trägheitsmoment und Krümmungsmoment des letzteren:

$$J = J_v - J_h, \quad K = K_v - K_h, \quad 1$$

und wenn gesetzt werden:

$$K_v = \varphi J_v, \quad K_h = \psi J_h \quad 2$$

das verlangte Verhältnis:

$$\frac{K}{J} + \frac{\varphi J_v - \psi J_h}{J_v - J_h}. \quad 3$$

Haben wir beispielsweise einen I-Querschnitt, L-Querschnitt oder rechteckigen Ringquerschnitt (Fig. 31 bis 33), für welche $b_1 = m b$, $h_1 = n h$ gesetzt werden mögen, dann gelten nach A 4, 1:

$$J_v = \frac{b h^3}{12}, \quad J_h = m n^3 \frac{b h^3}{12}$$

und damit zufolge 3:

$$\frac{K}{J} = \frac{\varphi - \psi m n^3}{1 - m n^3}, \quad 4$$

worin nach A 4, 5:

$$\varphi = 1 + \frac{3}{20} \left(\frac{h}{r}\right)^2 + \frac{3}{112} \left(\frac{h}{r}\right)^4 + \frac{1}{192} \left(\frac{h}{r}\right)^6 + \dots \quad 5$$

$$\psi = 1 + \frac{3 n^2}{20} \left(\frac{h}{r}\right)^2 + \frac{3 n^4}{112} \left(\frac{h}{r}\right)^4 + \frac{n^6}{192} \left(\frac{h}{r}\right)^6 + \dots \quad 6$$

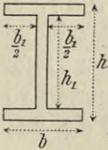


Fig. 31.

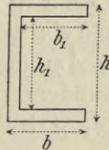


Fig. 32.



Fig. 33.

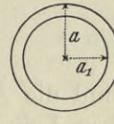


Fig. 34.

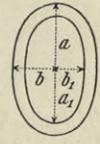


Fig. 35.

Handelt es sich dagegen um einen kreisförmigen oder elliptischen Ringquerschnitt (Fig. 34, 35), für welchen gesetzt werden $b_1 = m b$, $a_1 = n a$, so gelten nach A 5, 1

$$J_v = \frac{\pi b a^3}{4}, \quad J_h = m n^3 \frac{\pi b a^3}{4},$$

und damit zufolge 3 wieder Gleichung 4, worin jedoch jetzt nach A 5, 3:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{5}{16} \left(\frac{a}{r}\right)^4 + \frac{7}{32} \left(\frac{a}{r}\right)^6 + \dots \quad 7$$

$$\psi = 1 + \frac{m^2}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{5 m^4}{16} \left(\frac{a}{r}\right)^4 + \frac{7 m^6}{32} \left(\frac{a}{r}\right)^6 + \dots \quad 8$$

Bei konstanter Dicke des Ringes würden freilich innerer und äußerer Umfang nicht gleichzeitig genaue Ellipsen sein können, doch genügen die Formeln im allgemeinen auch für den genau elliptischen Ring.

Es soll nun z. B. das Verhältnis $K : J$ für einen I-Querschnitt von $b_1 = 0,9 b$, $h_1 = 0,9 h$ berechnet werden. Mit $m = n = 0,9$ erhält man für $\frac{r}{h} = 4$ nach 5 und 6:

$$\varphi = 1 + 0,009375 + 0,000105 = 1,00948$$

$$\psi = 1 + 0,007594 + 0,000068 = 1,00766$$

und nach 4:

$$\frac{K}{J} = \frac{1,00948 - 1,00766 \cdot 0,9^4}{1 - 0,9^4} = 1,0129.$$

In gleicher Weise sind die übrigen in § 6 für den I-Querschnitt gegebenen $K : J$ berechnet.

§ 7. Kleine Formänderungen. Naviersche Biegleichung.

Die in §§ 3, 6 abgeleiteten Gleichungen gelten unter den dortigen Voraussetzungen für beliebig große elastische Deformationen. Es handle sich nun aber, wie schon in §§ 1, 2 und in der Folge immer, um so kleine Formänderungen, daß die Änderungen der Stababmessungen gegen deren anfängliche, dem spannungslosen Zustande bei normaler Temperatur entsprechende Werte vernachlässigt werden dürfen. Wir wählen in der Trägerebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem in fester Lage gegen die anfängliche Gruppierung der Stabpunkte und verstehen unter den Koordinaten x, y eines Querschnitts die anfänglichen Koordinaten seines in der Stabachse gelegenen Schwerpunktes, unter φ den anfänglichen Winkel der Stabachse mit der positiven Richtung der Abszissenachse bei x (Fig. 36).

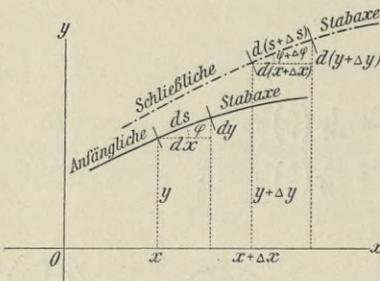


Fig. 36.

Entsprechend der Ableitung in § 3 seien im anfänglichen Zustande zwei Querschnitte geführt, der eine bei x, y , um die Achslänge s von einem beliebigen Ausgangspunkte entfernt, der andere bei $x + dx, y + dy$, um die Achslänge ds weiter. Bezeichnen $\Delta x, \Delta y, \Delta s, \Delta \varphi$ die mit der Deformation verbundenen Änderungen von

x, y, s, φ , so sind die Änderungen von $x + dx, y + dy, s + ds$ nach dem Taylorschen Lehrsatz (vergl. S. 16):

$$d(x + \Delta x), \quad d(y + \Delta y), \quad d(s + \Delta s),$$

und man hat (Fig. 36):

$$\begin{aligned} d(x + \Delta x) &= d(s + \Delta s) \cos(\varphi + \Delta \varphi), \\ d(y + \Delta y) &= d(s + \Delta s) \sin(\varphi + \Delta \varphi). \end{aligned}$$

Werden die Deformationen so klein vorausgesetzt, daß $\cos \Delta \varphi = 1$, $\sin \Delta \varphi = \Delta \varphi$ gesetzt werden dürfen, so liefern vorstehende Gleichungen mit

$$\cos(\varphi + \Delta \varphi) = \cos \varphi \cos \Delta \varphi - \sin \varphi \sin \Delta \varphi = \frac{dx}{ds} - \frac{dy}{ds} \Delta \varphi,$$

$$\sin(\varphi + \Delta \varphi) = \sin \varphi \cos \Delta \varphi + \cos \varphi \sin \Delta \varphi = \frac{dy}{ds} + \frac{dx}{ds} \Delta \varphi$$

nach Reduktion:

$$d \Delta x = -\Delta \varphi dy + \frac{d \Delta s}{ds} dx - \frac{d \Delta s}{ds} dy \cdot \Delta \varphi,$$

$$d \Delta y = \Delta \varphi dx + \frac{d \Delta s}{ds} dy + \frac{d \Delta s}{ds} dx \cdot \Delta \varphi.$$

Wegen der Kleinheit von $\Delta \varphi$ verschwinden die letzten Glieder dieser Gleichungen gegen die vorhergehenden, wir erhalten:

$$d \Delta x = -\Delta \varphi dy + \frac{d \Delta s}{ds} dx,$$

$$d\Delta y = \Delta\varphi dx + \frac{d\Delta s}{ds} dy, \quad 2$$

worin, wenn die zwischen x und $x + dx$ eintretenden Zunahmen $d\Delta\varphi$, $d\Delta s$ von $\Delta\varphi$, Δs nur von den Spannungen und Temperaturänderungen zwischen jenen Querschnitten herrühren:

$$\frac{d\Delta s}{ds} = Y, \quad \frac{d\Delta\varphi}{ds} = Z, \quad 3$$

unter Y , Z die Ausdrücke § 3, 12), 13) verstanden, welche in § 6 vereinfacht wurden.

Naviersche Biegungsgleichung. Es handle sich um einen anfänglich geraden Stab. Wird die Abszissenachse parallel oder so nahe einer Parallelen zur Stabachse angenommen, daß $ds = dx$ gesetzt werden darf, dann folgt aus § 3, 13) wegen $r = \infty$, $K = J$:

$$\frac{d\Delta\varphi}{dx} = Z = \frac{M_x}{EJ}. \quad 4$$

Werden die y im vorliegenden Falle auf die schließliche Stabachse bezogen (vor der Deformation wären bei einer der Stabachse parallelen Abszissenachse alle y gleich groß), dann hat man für die betrachteten kleinen Formänderungen:

$$\Delta\varphi = \text{tg } \Delta\varphi = \frac{dy}{dx},$$

und damit nach 4:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_x}{EJ}. \quad 5$$

Dies ist die Naviersche Biegungsgleichung, welche besonders in der Theorie der horizontalen Balkenträger eine Rolle spielt. Obige Ableitung zeigt, daß sie auch bei Auftreten von Axialkräften und Temperaturänderungen gültig bleibt, vorausgesetzt, daß letztere für je einen ganzen Querschnitt gleich groß sind¹. In dieser Schrift werden wir von 5 keinen Gebrauch machen.

§ 8. Normalspannungen. Stützlinie. Kernlinien. Kernpunktsmomente.

Die Gleichungen der §§ 3, 6 gelten unter den angeführten Voraussetzungen für beliebige Stäbe einfacher Krümmung, im folgenden setzen wir die hier in erster Linie interessierenden Sprengbogen mit Krümmung nach oben voraus.

Die Resultante aller Normalkräfte σdF für die einzelnen Flächenelemente dF eines Querschnittes x wurde durch N_x bezeichnet. Da nun die σdF in Hinsicht der Achsschicht das Moment M_x liefern, so muß N_x hinsichtlich derselben das gleiche Moment ergeben; man hat, wenn c die Entfernung des Angriffspunktes der Kraft N_x von der Achsschicht bedeutet (Fig. 37):

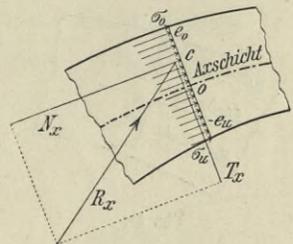


Fig. 37.

$$M_x = c N_x, \quad c = \frac{M_x}{N_x}. \quad 1$$

c ist positiv, d. h. der Angriffspunkt von N_x liegt oberhalb der Achs-

¹ Erweiterung mit Rücksicht auf ungleichmäßige Temperaturänderungen und den Einfluß der Transversalkräfte siehe Lueger, Lexikon der gesamten Technik, Artikel Biegung, I.

schicht, wenn M_x und N_x von gleichen Vorzeichen sind; c ist negativ und der Angriffspunkt von N_x liegt unterhalb der Achsschicht, wenn M_x und N_x von verschiedenen Vorzeichen sind. Denkt man sich die Angriffspunkte der N_x für alle Querschnitte ermittelt, so hat man in ihrer Gesamtheit eine Linie, welche die Stützlinie genannt wird. Da M_x , N_x von der Belastung abhängen, so ändert sich mit der Belastung eines Bogens im allgemeinen auch seine Stützlinie.

Die Normalspannung bei x , v ist nach § 6, 7):

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{F r} + \frac{M_x}{J} v = \frac{N_x}{F} \left(1 + \frac{c}{r} + \frac{F c}{J} v \right). \quad 2$$

Sie ändert sich also proportional der Entfernung v von der Achsschicht, welche nach oben positiv, nach unten negativ gerechnet wurde. Die äußersten Werte in jedem Querschnitt ergeben sich im obersten und untersten Querschnittselement, für welche mit $v = e_o$ und $v = -e_u$:

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{F r} + \frac{M_x}{J} e_o, \quad 3$$

$$\sigma_u = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{F r} - \frac{M_x}{J} e_u, \quad 4$$

oder wenn $M_x = c N_x$ und zur Abkürzung

$$k_o = \frac{J}{F e_u - \frac{J}{r}}, \quad k_u = \frac{J}{F e_o + \frac{J}{r}} \quad 5$$

gesetzt werden:

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} \left(1 + \frac{c}{k_o} \right), \quad \sigma_u = \frac{N_x}{F} \left(1 - \frac{c}{k_o} \right). \quad 6$$

Die Punkte, welche um $v = k_o$ und $v = -k_u$ von der Bogenachse entfernt in der Trägerebene liegen, heißen die Kernpunkte des Querschnitts; in der Gesamtheit der Kernpunkte aller Querschnitte erhalten wir zwei Linien, welche die obere und untere Kernlinie des Bogens heißen (Fig. 38). Dieselben sind nach 5 nur von den Abmessungen des Bogens, nicht von den Belastungsverhältnissen abhängig.

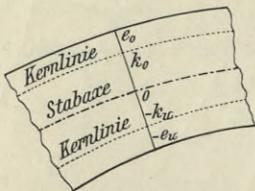


Fig. 38.

Sind die Grenzwerte σ_o , σ_u von einerlei Vorzeichen, so gilt das Gleiche für alle dazwischen liegenden σ , sämtliche Normalspannungen haben dann das gleiche Vorzeichen wie die resultierende Normalkraft N_x . Es ist aber nach 6

$$\begin{array}{l} \sigma_o \text{ mit } N_x \text{ von einerlei Vorzeichen, wenn } c > -k_u, \\ \sigma_u \text{ " } N_x \text{ " " " " " } c < k_o, \end{array}$$

wir können aussprechen: Sämtliche Normalspannungen eines Querschnittes haben unter sich und mit der Normalkraft N_x einerlei Vorzeichen (die neutrale Schicht liegt außerhalb des Querschnitts), wenn bei diesem Querschnitte die Stützlinie zwischen den

Kernlinien liegt. Andernfalls sind die Vorzeichen der Normalspannungen verschieden (die neutrale Schicht liegt innerhalb des Querschnitts) und hat für $c < -k_u$ die Normalspannung σ_o , für $c > k_o$ die Normalspannung σ_u das entgegengesetzte Vorzeichen wie die Normalkraft N_x .

Für die Zwecke, welchen die Kernlinien elastischer Bogenträger dienen (§ 11), können in 5 stets die Ausdrücke mit r im Nenner vernachlässigt werden (vergl. Beispiel 5), womit in 6:

$$k_o = \frac{J}{F e_o}, \quad k_u = \frac{J}{F e_u}. \quad 7$$

Geschieht dies, wie üblich und im allgemeinen zulässig, auch in 2—4, so folgen:

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{J} v = \frac{N_x}{F} \left(1 + \frac{F c}{J} v \right), \quad 8$$

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{J} e_o, \quad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{J} e_u, \quad 9$$

und für den gewöhnlichen Fall, daß der Querschnitt zur Achsschicht symmetrisch ist, mit $e_o = e_u = e$ und der Bezeichnung

$$W = \frac{J}{e} \quad 10$$

einfacher:

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}, \quad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{W}, \quad 11$$

$$k_o = k_u = \frac{W}{F}. \quad 12$$

Der Quotient W aus Trägheitsmoment J und Entfernung e der äußersten Faser von der Achsschicht heißt bekanntlich das Widerstandsmoment des Querschnitts; es ist wie das Trägheitsmoment nur vom Querschnitt abhängig. Im folgenden sollen auf Grund der Formeln 7—9 noch einige weitere Beziehungen abgeleitet werden.

Nach 8 ist derjenige Teil der Normalspannung σ , welcher vom Moment M_x herrührt, gleich $\frac{M_x}{J} v$, er liefert für ein Flächenelement dF die Normalkraft $\frac{M_x}{J} v dF$, und die Summe aller dieser Kräfte für einen ganzen Querschnitt ist

$$\frac{M_x}{J} \int v dF = 0,$$

weil das Integral als statisches Moment des Querschnitts in bezug auf eine Achse durch seinen Schwerpunkt den Wert 0 hat. Denkt man sich alle oberhalb, beziehungsweise alle unterhalb der Achsschicht wirkenden Normalkräfte der erwähnten Herkunft zu einer Resultante vereinigt (Fig. 39), so hat man für die erstere:

$$Q = \frac{M_x}{J} \int_0^{e_o} v dF,$$

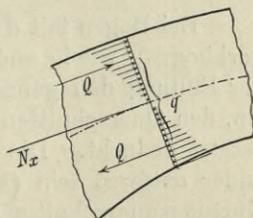


Fig. 39.

oder, mit der Bezeichnung

$$S_0 = \int_0^{e_o} v dF = \int_0^{e_u} v dF, \quad 13$$

einfacher:

$$Q = \frac{S_0}{J} M_x. \quad 14$$

Die Resultante unterhalb der Achsschicht ist numerisch gleich Q , aber von entgegengesetztem Vorzeichen, wobei für N_x wie bisher Druck als positiv gilt. Sind die Angriffspunkte dieser Resultanten um q von einander entfernt, so gilt:

$$M_x = Qq, \quad 15$$

woraus mit Q nach 14:

$$q = \frac{J}{S_0}. \quad 16$$

Da J das Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts, S_0 das statische Moment des auf einer Seite der Achsschnitt gelegenen Querschnittsteils in Hinsicht der letzteren, so ist auch q nur vom Querschnitt abhängig.

Speziell für rechteckige Querschnitte (Gewölbe etc.) der Breite b und Höhe h hat man in obigen Gleichungen $F = bh$, $J = \frac{bh^3}{12}$, $e = \frac{h}{2}$, $W = \frac{bh^2}{6}$, $S_0 = \frac{bh^2}{8}$ und damit nach 8 die Normalspannungen bei v :

$$\sigma = \frac{1}{bh} \left(N_x + \frac{12 M_x v}{h^2} \right) = \frac{N_x}{bh} \left(1 + \frac{12 v}{h^2} \right), \quad 17$$

sowie nach 11 bei Beachtung von 1 die Normalspannungen im obersten und untersten Querschnittselement:

$$\sigma_o = \frac{1}{bh} \left(N_x + \frac{6}{h} M_x \right) = \frac{N_x}{bh} \left(1 + \frac{6v}{h} \right), \quad 18$$

$$\sigma_u = \frac{1}{bh} \left(N_x - \frac{6}{h} M_x \right) = \frac{N_x}{bh} \left(1 - \frac{6v}{h} \right), \quad 19$$

nach 12 die Entfernungen der Kernpunkte von der Bogenachse:

$$k_o = k_u = \frac{h}{6}, \quad 20$$

und nach 14 16 die Kraftresultanten Q und ihrer Entfernung:

$$Q = \frac{3}{2h} M_x, \quad q = \frac{2}{3} h. \quad 21$$

Bei Bogen mit durchbrochenen Wandungen (Gitterbogen, Fachwerkbogen), wie in anderen Fällen hat man sich oft unter Vernachlässigung der Füllung den ganzen Bogenquerschnitt F nur aus zwei getrennten Teilen, den Querschnitten f_o und f_u des Obergurts und Untergurts zusammengesetzt gedacht. Die Schwerpunkte dieser Teile mögen um h von einander entfernt sein (Fig. 40). Da in solchen Fällen alle Elemente eines Gurtungsquerschnitts als gleich beansprucht zu gelten pflegen, so nimmt 15 die Form an:

$$M_x = Qh \quad 22$$

(im allgemeinen ist $q < h$), während die ganzen Beanspruchungen O , U des Obergurts und Untergurts bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$O \cos \alpha = \frac{f_o}{F} N_x + Q = \frac{f_o}{F} N_x + \frac{M_x}{h}, \quad 23$$

$$U \cos \beta = \frac{f_u}{F} N_x - Q = \frac{f_u}{F} N_x - \frac{M_x}{h}, \quad 24$$

worin α , β die Winkel der Gurtungsachsen mit der Stabachse bei x bezeichnen, welche bei parallel der Stabachse liegenden Gurtungen gleich 0 wären. Bedeuten ferner dann h_o , h_u die Entfernungen der Gurtungsschwerpunkte von der Achsschicht, so hat man:

$$f_o h_o = f_u h_u, \quad F h_u = f_o h, \quad F h_o = f_u h,$$

und nach § 6, 1) annähernd:

$$J = f_o h_o^2 + f_u h_u^2,$$

oder mit Rücksicht auf die erste der darüber stehenden Beziehungen

$$J = f_o h_o (h_o + h_u) = f_u h_u (h_o + h_u) = f_o h_o h = f_u h_u h.$$

Setzt man nun, da alle Elemente eines Gurtungsquerschnitts als gleich beansprucht gelten (abgesehen von Nebenspannungen), die Entfernungen der durch σ_o , σ_u beanspruchten Querschnittselemente von der Achsschicht $e_o = h_o$, $e_u = h_u$, so folgen aus 7:

$$k_o = \frac{J}{F h_u} = \frac{f_o h_o h}{f_o h} = h_o,$$

$$k_u = \frac{J}{F h_o} = \frac{f_u h_u h}{f_u h} = h_u.$$

Bei Bogen mit durchbrochenen Wandungen fallen die Kernlinien annähernd mit den Gurtungsschwerlinien zusammen.

Kernpunktsmomente. In obigen Gleichungen bedeutet M_x das Moment der äußeren Kräfte des Trägers links des Querschnitts x in bezug auf den Achspunkt von x . In bezug auf den oberen und unteren Kernpunkt des Querschnitts x hat man die Momente jener Kräfte (Fig. 41):

$$\left. \begin{aligned} M_{xo} &= M_x - N_x k_o = M_x - N_x \frac{J}{F e_u} \\ M_{xu} &= M_x + N_x k_u = M_x + N_x \frac{J}{F e_o} \end{aligned} \right\} 25$$

womit nach 9:

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_{xu}}{J} e_o - N_x \frac{J}{F e_o} \frac{e_o}{J},$$

$$\sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_{xo}}{J} e_u - N_x \frac{J}{F e_u} \frac{e_u}{J},$$

oder:

$$\sigma_o = \frac{M_{xu}}{J} e_o \quad \sigma_u = - \frac{M_{xo}}{J} e_u, \quad 26$$

und für zur Achsschicht symmetrische Querschnitte mit $e_o = e_u = e$ bei Berechnung von 10:

$$\sigma_o = \frac{M_{xu}}{W},$$

$$\sigma_u = - \frac{M_{xo}}{W},$$

worin speziell für rechteckige Querschnitte $W = \frac{b h^2}{6}$.

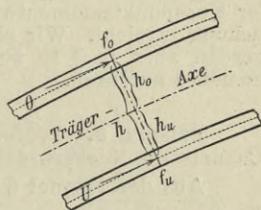


Fig. 40.

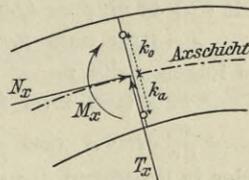


Fig. 41.

Die Ausdrücke 26, 27 der Normalspannungen im obersten und untersten Querschnittselement werden mitunter anstatt 9, 11 angewandt, wobei man natürlich die Kernpunktsmomente M_{x_0} , M_{x_u} der äußeren Kräfte links der Querschnitte in bezug auf deren oberen und unteren Kernpunkt anstatt nach 25 auch direkt berechnen und so die Ermittlung der Normalkräfte N_x vermeiden kann. Da aber dann immerhin für jeden Querschnitt anstatt M_x , N_x zwei Momente M_{x_0} , M_{x_u} zu bestimmen sind (wozu bei analytischer Berechnung vollwandiger Bogen nebenbei die Feststellung der sonst nicht nötigen Kernpunktskoordinaten gehört) und man N_x ohnehin mitunter braucht, so wird durch die Einführung der Kernpunktsmomente bei vollwandigen Bogen im allgemeinen keine Vereinfachung erreicht. Wir ziehen vor, für σ_o , σ_u die Ausdrücke 9, 11 zu verwenden, werden aber in § 10 auch die ungünstigsten Belastungen für die Kernpunktsmomente anführen.

Beispiel 5. Prüfung der vereinfachten Formel für die Normalspannung (Cannstatter Neckarbrücke).

Aus der Formel § 6, 7) oder § 8, 2) für die Normalspannung bei x , v :

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{F r} + \frac{M_x}{J} v \quad 1$$

entsteht durch Vernachlässigung des mittleren Gliedes die gewöhnlich verwendete Formel:

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{J} v. \quad 2$$

Wir wollen deren Zulässigkeit für den Fall der neuen Cannstatter Neckarbrücke (VI. Abschnitt) prüfen.

Die vorläufige Berechnung einer Öffnung von 48 m Spannweite und 4,505 m Pfeil ergab bei den ungünstigsten Belastungen und normaler Temperatur die Beanspruchungen pro Quadratzentimeter im obersten und untersten Querschnittselement auf Grund von 2:

bei $x = 0$	2,4	4,8	7,2	9,6	12,0	14,4	16,8	19,2	21,6	24,0 m
$\sigma_o = 776$	800	722	840	891	907	803	859	747	914	859 kg
$\sigma_u = 776$	852	762	869	913	890	881	800	740	880	858 „

Den betreffenden Belastungen entsprachen für σ_o und σ_u , d. h. in 2 für $v = e_o$ und $v = -e_u$:

$$+ M_x = 0 \quad 21200 \quad 37400 \quad 48600 \quad 54700 \quad 54400 \quad 52100 \quad 43800 \quad 34100 \quad 26200 \quad 22800 \text{ mkg}$$

während die vorläufigen Querschnitte waren:

$$F = 295,0 \quad 295,0 \quad 371,0 \quad 369,8 \quad 368,6 \quad 367,4 \quad 365,0 \quad 362,6 \quad 360,2 \quad 281,8 \quad 280,6 \text{ qcm}$$

Da nun für die parabolische Bogenachse die Krümmungsradien nach

$$r = \frac{l^2}{8f} \left[1 + \frac{16f^2}{l^4} (l - 2x)^2 \right] \quad 3$$

mit $l = 48$ m, $f = 4,505$ m sich ergeben:

$$r = 77,906 \quad 75,179 \quad 72,767 \quad 70,661 \quad 68,853 \quad 67,334 \quad 66,100 \quad 65,146 \quad 64,467 \quad 64,061 \quad 63,929 \text{ m,}$$

so folgen weiter:

$$F r = 22982 \quad 22178 \quad 26997 \quad 26130 \quad 25379 \quad 25106 \quad 24126 \quad 23662 \quad 23221 \quad 18006 \quad 17938 \text{ qcm.m}$$

$$\pm \frac{M_x}{F r} = 0 \quad 0,956 \quad 1,385 \quad 1,860 \quad 2,155 \quad 2,167 \quad 2,159 \quad 1,851 \quad 1,468 \quad 1,455 \quad 1,271 \text{ kg,}$$

oder in Prozenten der durch Zufügen dieser Werte zu obigen σ_o , σ_u entstehenden genaueren Werte der letzteren:

von σ_o	0	0,12	0,19	0,22	0,24	0,24	0,27	0,22	0,20	0,16	0,15 %
„ σ_u	0	0,11	0,18	0,21	0,24	0,24	0,25	0,23	0,20	0,17	0,15 %

Das sind keine Differenzen, welche bei den Beanspruchungen in Betracht kommen, so daß die Verwendung von 2 in Fällen wie dem vorliegenden berechtigt ist. Man hat zu beachten, daß 1, 2 Schlußresultate liefern, also eine etwaige Fortpflanzung der Abweichungen in vergrößertem Maße ausgeschlossen ist.

Beispiel 6. Normalspannungen bei gleichmäßig verteilter Last (Cannstatter Neckarbrücke).

Für einen symmetrischen parabolischen Bogen mit Kämpfergelenken von $l = 48$ m Spannweite und symmetrisch zur Achsschicht angeordneten Querschnitten sind die Normalkraft und das Moment durch eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von g pro Meter ausgedrückt (vergl. Abschnitt VI unter D):

$$N_x = \left[\left(\frac{l}{2} - x \right) \operatorname{tg} \varphi + 63,093 \right] g \cos \varphi, \quad \text{a}$$

$$M_x = 0,00654 x (l - x) g. \quad \text{b}$$

Die Normalspannungen σ_o , σ_u zu berechnen: 1. bei der Trägermitte, wo $F = 373,0$ qcm, $W = 11594$ ccm; 2. bei $x = 5,190$ m, wo $F' = 386,2$ qcm, $W = 13481$ ccm und $\operatorname{tg} \varphi = 0,29423$, $\cos \varphi = 0,95934$.

Für beliebige Querschnitte gelten die Gleichungen § 8, 11):

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}, \quad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{W}, \quad 1$$

mit a und b. Bei der Trägermitte liefern a, b wegen $x = 24$ m, $\operatorname{tg} \varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$:

$$N_x = 63,093 g, \quad M_x = 3,76704 g,$$

und damit 1 pro Quadratcentimeter:

$$\sigma_o = \frac{63,093}{373,0} g + \frac{3,76704}{11594} g = 0,201641 g,$$

$$\sigma_u = \frac{63,093}{373,0} g - \frac{3,76704}{11594} g = 0,136659 g.$$

Für $x = 5,190$ m ergeben a, b mit $\operatorname{tg} \varphi = 0,29423$, $\cos \varphi = 0,95934$:

$$N_x = 65,837 g, \quad M_x = 1,45308 g,$$

wonach pro Quadratcentimeter:

$$\sigma_o = \frac{65,837}{386,2} g + \frac{1,45308}{13481} g = 0,181252 g,$$

$$\sigma_u = \frac{65,837}{386,2} g - \frac{1,45308}{13481} g = 0,159695 g.$$

Die angegebenen Verhältnisse entsprechen den Bogen von Öffnung IV der Cannstatter Neckarbrücke (VI. Abschnitt), deren Eigengewicht ohne die sonstige feste Last $g = 340$ kg beträgt. Bei alleiniger Wirksamkeit desselben wären also in der Trägermitte:

$$\sigma_o = 68,6 \text{ kg}, \quad \sigma_u = 46,4 \text{ kg},$$

und bei $x = 5,190$ m:

$$\sigma_o = 61,6 \text{ kg}, \quad \sigma_u = 54,3 \text{ kg}.$$

Aufgabe 7 mit Beispiel 7. Normalspannungen durch einen beliebigen Horizontalschub allein (Cannstatter Neckarbrücke).

Für beliebige symmetrisch zur Achsschicht liegende Querschnitte diejenigen Normalspannungen im obersten und untersten Querschnittselement auszudrücken, welche ein beliebiger und auf beliebige Weise entstandener Horizontalschub allein (ohne Endmomente) erzeugt.

Die Normalkraft und das Moment durch den beliebigen Horizontalschub H allein sind nach § 1, 9), 3):

$$N_x = H \cos \varphi, \quad M_x = -H y, \quad 1$$

womit nach § 8, 11) die gesuchten Normalspannungen in beliebigen Querschnitten:

$$\sigma_o = \left(\frac{\cos \varphi}{F} - \frac{y}{W} \right) H, \quad 2$$

$$\sigma_u = \left(\frac{\cos \varphi}{F} + \frac{y}{W} \right) H. \quad 3$$

In den Bogenmitten von Öffnung IV der Cannstatter Neckarbrücke (VI. Abschnitt) hat man mit $y = 4,505$ m, $\cos \varphi = 1$, $F' = 373,0$ qcm, $W = 11594$ ccm

$$\frac{\cos \varphi}{F} = \frac{1}{373,0} = 0,002681,$$

$$\frac{y}{W} = \frac{450,5}{11594} = 0,038856,$$

so daß daselbst durch ein beliebiges H pro Quadratcentimeter:

$$\sigma_o = -0,036175 H,$$

$$\sigma_u = 0,041537 H.$$

Hiernach erzeugen insbesondere der zur Überhöhung der Bogen angewandte künstliche Horizontalschub von $H = 1950$ kg (VI E):

$$\sigma_o = -70,5 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = 81,0 \text{ kg},$$

der den angenommenen Temperaturänderungen um $\tau = \pm 25^\circ$ entsprechende Horizontalschub von $H = \pm 2888$ kg (VI J):

$$\sigma_o = \mp 104,5 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \pm 120,0 \text{ kg},$$

und der einer etwaigen Änderung der Spannweite (Ausweichen der Widerlager) um $\Delta l = \pm 1$ cm entsprechende Horizontalschub von $H = \mp 2093$ kg (VI J):

$$\sigma_o = \pm 75,7 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \mp 86,9 \text{ kg}.$$

§ 9. Längsschubspannungen und Querschubspannungen.

Wir bemerken von vornherein, daß die Schubspannungen bei elastischen Bogenträgern von geringerer Bedeutung als bei horizontalen Balkenträgern sind (vergl. Beispiel 8), sodaß sie bei der Dimensionierung vollwandiger Bogen gewöhnlich gar nicht berücksichtigt werden. Für symmetrische parabolische Bogen mit drei Gelenken, welche nur unter Einwirkung einer auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilten Last stehen, ergeben sich sogar mit $M_x = 0$, $T_x = 0$ (§ 19) die im folgenden abzuleitenden Schubspannungen τ , ξ gleich Null. Je nach Umständen kann also dieser § zunächst übergangen werden.

Es seien Normalkraft und Angriffsmoment für einen beliebigen Querschnitt x wie bisher durch N_x , M_x und für einen um die Achslänge ds von x entfernten Querschnitt vorübergehend durch N , M bezeichnet. Da nach § 3, 14) die Normalspannung bei x :

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{F r} + \frac{M_x}{K} \frac{r v}{r + v},$$

so folgt die Resultante sämtlicher Normalkräfte des von v bis e_o gelegenen Querschnittsteils bei x (Fig. 42):

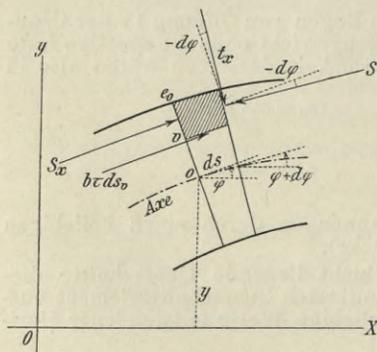


Fig. 42.

$$S_x = \int_v^{e_o} \sigma dF = \frac{N_x}{F} \int_v^{e_o} dF + \frac{M_x}{F r} \int_v^{e_o} dF + \frac{M_x}{K} r \int_v^{e_o} \frac{v}{r + v} dF,$$

und mit den Bezeichnungen:

$$L = r \int_v^{e_o} \frac{v}{r + v} dF = S_v - \int_v^{e_o} \frac{v^2}{r + v} dF,$$

$$S_v = \int_v^{e_0} v dF, \quad 2$$

wenn F_v die Querschnittsfläche von v bis e_0 vertritt:

$$S_x = \frac{N_x}{F} F_v + \frac{M_x}{F r} F_v + \frac{M_x}{K} L.$$

Die Resultante sämtlicher Normalkräfte für den entsprechenden Teil des zweiten Querschnitts ist

$$S = \frac{N}{F} F_v + \frac{M}{F r} F_v + \frac{M}{K} L.$$

Wäre nun genau $S = S_x$, so würde das in Fig. 42 schraffierte Trägerelement von v bis e_0 durch die S , S_x lediglich gedrückt oder gezogen, ein Bestreben desselben, sich längs des darunter liegenden Trägerstücks fortzubewegen, bestünde nicht. Da jedoch durch Subtraktion mit Rücksicht auf $N - N_x = dN_x$ und $M - M_x = dM_x$:

$$S - S_x = \frac{F_v}{F} dN_x + \left(\frac{F_v}{F r} + \frac{L}{K} \right) dM_x,$$

welcher Wert im allgemeinen von 0 verschieden ist, so sucht sich das erwähnte Trägerelement mit dieser Kraft in der Richtung von S längs der darunter liegenden Fläche wegzubewegen, und es muß in dieser, weil Gleichgewicht herrscht, eine numerisch gleiche Kraft entgegenwirken. Wir bezeichnen diese im unteren Flächenelement bei x , v wirkende Kraft durch $\tau b ds_v$, unter b die Trägerbreite daselbst, unter ds_v die Länge des Flächenelements verstanden, sodaß τ sich auf die Flächeneinheit bezieht. τ soll die Längsschubspannung bei x , v heißen und als positiv gelten, wenn sie von der Richtung von N_x ist. Wenn nun die beiden Querschnitte zwischen zwei aufeinander folgenden Lasten P liegen und t_x den auf den Querschnittsteil von v bis e_0 wirkenden Teil der Transversalkraft T_x bedeutet, so drückt sich die Gleichgewichtsbedingung „Summe aller äußeren Kräfte parallel S_x gleich Null“ für das in Fig. 42 schraffierte Trägerstück aus:

$$\tau b ds_v + S_x - S \cos d\varphi + t_x \sin d\varphi = 0,$$

oder mit $\cos d\varphi = 1$, $\sin d\varphi = d\varphi$ und dem in § 3 (S. 16) erhaltenen Ausdrucke $ds_v = ds \left(1 + \frac{v}{r} \right)$:

$$\frac{r+v}{r} \tau b ds = S - S_x - t_x d\varphi,$$

und nach Einsetzen des oben ermittelten $S - S_x$:

$$\frac{r+v}{r} b \tau = \frac{F_v}{F} \frac{dN_x}{ds} + \left(\frac{F_v}{F r} + \frac{L}{K} \right) \frac{dM_x}{ds} - t_x \frac{d\varphi}{ds}. \quad 3$$

Nach § 3, 1) und § 1, 13), 9), 10), 2) haben wir:

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{1}{r} \quad \frac{dM_x}{ds} = T_x,$$

$$N_x = V_x \sin \varphi + H \cos \varphi, \quad T_x = V_x \cos \varphi - H \sin \varphi,$$

$$V_x = V - \sum_0^x P,$$

wonach weiter folgt:

$$dN_x = V_x \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi dV_x - H \sin \varphi d\varphi = T_x d\varphi - \sin \varphi d \sum_0^x P,$$

oder, weil von x bis $x + dx$ kein P liegen soll:

$$\frac{dN_x}{ds} = -\frac{T_x}{r}.$$

Wir erhalten damit aus 3 für die Längsschubspannung τ :

$$\frac{r+v}{r} b\tau = \frac{L}{K} T_x + \frac{t_x}{r}. \quad 4$$

Werden in 4 entsprechend dem Vorgehen in § 6 die Entfernungen v der Querschnittselemente von der Achsschicht gegen den Krümmungsradius r der Achse vernachlässigt, so folgt mit $K = J$ (vergl. § 6) und dem aus 1 entstehenden Ausdruck

$$L = S_v - \frac{1}{r} \int_v^{e_0} v^2 dF \quad 5$$

für die Längsschubspannung τ :

$$b\tau = \frac{L}{J} T_x + \frac{t_x}{r}, \quad 6$$

und wenn auch hier, wie in § 6 als gebräuchlich erwähnt, die Glieder mit r im Nenner gegen die übrigen vernachlässigt werden,

$$\tau = \frac{S_v}{Jb} T_x. \quad 7$$

Diese Gleichung ist um so genauer, je größer r , für gerade Stäbe stimmt sie wegen $r = \infty$, $L = S_v$, $K = J$ vollständig mit 4 und 6 überein. In vorstehenden Gleichungen bedeutet J das Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts in Hinsicht der Achsschicht, S_v das statische Moment des Querschnittsteils von v bis e_0 in Hinsicht derselben.

Nach 7 wie nach 6 und 4 ändert sich $b\tau$ sowohl mit dem Querschnitt x als mit der Entfernung v von der Achsschicht. Für einen bestimmten Querschnitt ergibt 7 den Wert von $b\tau$ am größten in der Achsschicht, nämlich mit q nach § 8, 16):

$$\text{für } v = 0 \quad b\tau = \frac{S_0}{J} T_x = \frac{T_x}{q}, \quad 8$$

am kleinsten im obersten und untersten Querschnittselement, nämlich wegen $S_v = 0$

$$\text{für } v = e_0 \text{ und } -e_u \quad b\tau = 0. \quad 9$$

Bei konstantem S_v : J ändert sich $b\tau$ proportional T_x , sodaß mit den Grenzwerten von T_x auch diejenigen von $b\tau$ entstehen. Die Bedingung 9 ist selbstverständlich auch nach 6 und 4 erfüllt.

Es erübrigt uns noch, die Verteilung der Transversalkraft oder Querkraft T_x auf die Querschnittselemente festzustellen. Als Querschubspannung ξ bei x , v bezeichnen wir die Schubkraft pro Flächeneinheit der Querschnittselemente daselbst, wobei die positive Richtung der ξ mit derjenigen von T_x übereinstimmt. In dem durch die eben an-

genommenen Querschnitte zwischen zwei aufeinander folgenden P begrenzten Raum werde ein Körperelement der Dimensionen $dv, ds_v, 1$ ins Auge gefaßt (Fig. 43). Dasselbe ist nach dem bisherigen, abgesehen von unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung, durch die in Fig. 43 angedeuteten paarweise gleichen Kräfte ergriffen. Das Gleichgewicht gegen Drehung verlangt:

$$\xi dv \cdot ds_v = \tau ds_v \cdot dv, \quad \xi = \tau. \quad 10$$

An jeder Stelle x, v ist die Querschubspannung gleich der Längsschubspannung. Es genügt also für beide die Bezeichnung τ .

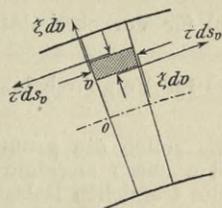


Fig. 43.

Nachdem die Normalspannungen σ für die Flächenelemente senkrecht der Achsschicht und die Schubspannungen τ für solche senkrecht und parallel derselben bestimmt sind, könnte man noch die Normalspannungen N und Schubspannungen S für Flächenelemente ableiten, welche beliebige Winkel mit der Achsschicht einschließen. Es genügt indessen anzuführen, daß die Maxima und Minima dieser Spannungen an beliebiger Stelle x, v ganz wie für horizontale Balkenträger ausgedrückt sind:

$$N = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}, \quad S = \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}, \quad 11$$

und für die Winkel α der durch sie ergriffenen Flächenelemente mit der positiven Richtung der Achsschicht gelten:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma} \quad \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{\sigma}{2\tau}, \quad 12$$

wobei nun drückende σ und die α, v nach oben als positiv anzusehen sind.

Die Gleichung 8 liefert die größte Längsschubspannung und Querschubspannung, welche in der Achsschicht, bei $v = 0$, eintritt, beispielsweise für rechteckige Querschnitte (Gewölbe etc.) der Breite b und Höhe h mit

$$J = \frac{bh^3}{12}, \quad S_0 = \frac{bh^2}{8}; \quad \tau = \frac{3}{2bh} T_x, \quad 13$$

sowie für elliptische und kreisförmige Querschnitte (vergl. Aufgabe 5) der horizontalen und vertikalen Halbachse c, a (Höhe $2a$) mit

$$J = \frac{\pi c a^3}{4}, \quad S_0 = \frac{2c a^2}{3}; \quad \tau = \frac{4}{3\pi a c} T_x. \quad 14$$

Beispiel 8. Längsschubspannungen und Querschubspannungen (Cannstatter Neckarbrücke).

Wird für einen Bogen die Belastung wenigstens von 0 bis x als gleichmäßig verteilt angenommen, so ist nach § 1, 10), 2) die Transversalkraft bei x :

$$T_x = (V - ux - H \operatorname{tg} \varphi) \cos \varphi, \quad 1$$

unter u jene Belastung pro Längeneinheit verstanden. Diese Gleichung drückt sich für die ersten Bogenhälften der im VI. Abschnitte berechneten Canntatter Neckarbrücke bei normaler Temperatur aus:

a) für Vollbelastung des ganzen Bogens

$$T_x = (82\,320 - 3430x - 218\,359 \operatorname{tg} \varphi) \cos \varphi,$$

b) für Verkehrsbelastung von 0 bis m (erste Bogenhälfte)

$$T_x = (73\,980 - 3430x - 174\,509 \operatorname{tg} \varphi) \cos \varphi,$$

c) für Verkehrsbelastung von m bis l (zweite Bogenhälfte)

$$T_x = (57\,300 - 2040x - 174\,509 \operatorname{tg} \varphi) \cos \varphi.$$

Es sollen die größten Längsschubspannungen und Querschubspannungen τ in den unten angeführten Querschnitten x (bezeichnet durch ihre Abszissen) für die fraglichen Belastungen berechnet werden.

Die größten Längsschubspannungen und Querschubspannungen treten in der Achsschicht ein und sind nach § 9, 8):

$$\tau = \frac{S_0}{Jb} T_x, \quad 2$$

worin J das Trägheitsmoment des Querschnitts x in Hinsicht der Achsschicht, S_0 das statische Moment des oberhalb der letzteren gelegenen Querschnittsteils in bezug auf dieselbe, b die Breite der Achsschicht (Dicke der Vertikalplatte). Die Achs- und Querschnittsverhältnisse einschließlich der Werte J sind im VI. Abschnitte in der Tabelle unter B gegeben. Man hat danach z. B. bei $x = 2,682$ m:

$$S_0 = 38 \cdot 46,4 \frac{46,4}{2} - 18,8 \cdot 45 \frac{45}{2} - 2 \cdot 7,8 \cdot 43,8 \frac{43,8}{2} - 2 \cdot 1,2 \cdot 36 \frac{36}{2} = 5352,21 \text{ ccm},$$

$$\tau = \frac{5352,21}{440\,150 \cdot 1,2} T_x = \frac{T_x}{98,684},$$

und bei $x = 5,190$ m:

$$S_0 = 38 \cdot 47,6 \frac{47,6}{2} - 18,8 \cdot 45 \frac{45}{2} - 2 \cdot 7,8 \cdot 43,8 \frac{43,8}{2} - 2 \cdot 1,2 \cdot 36 \frac{36}{2} = 7495,41 \text{ ccm},$$

$$\tau = \frac{7495,41}{641\,690 \cdot 1,2} T_x = \frac{T_x}{102,733}.$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werte der zweiten und dritten Kolonne nachstehender Tabelle berechnet.

Weiter erhalten wir mit Rücksicht auf die im VI. Abschnitt unter B gegebene Tabelle bei $x = 2,682$ m im Belastungsfalle a):

$$T_x = (82\,320 - 3430 \cdot 2,682 - 218\,359 \cdot 0,33346) 0,94865 = 290 \text{ kg},$$

$$\tau = \frac{290}{98,684} = 3 \text{ kg},$$

im Belastungsfalle b):

$$T_x = (82\,320 - 3430 \cdot 2,682 - 174\,509 \cdot 0,33346) 0,94865 = 6251 \text{ kg},$$

$$\tau = \frac{6251}{98,684} = 63 \text{ kg},$$

im Belastungsfalle c):

$$T_x = (57\,300 - 2040 \cdot 2,682 - 174\,509 \cdot 0,33346) 0,94865 = -6036 \text{ kg},$$

$$\tau = -\frac{6036}{98,684} = -61 \text{ kg};$$

ferner bei $x = 5,190$ m im Belastungsfalle a):

$$T_x = (82\,320 - 3430 \cdot 5,190 - 218\,359 \cdot 0,29423) 0,95934 = 269 \text{ kg},$$

$$\tau = \frac{269}{102,733} = 3 \text{ kg},$$

im Belastungsfalle b):

$$T_x = (73\,980 - 3430 \cdot 5,190 - 174\,509 \cdot 0,29423) 0,95934 = 4636 \text{ kg},$$

$$\tau = \frac{4636}{102,733} = 45 \text{ kg},$$

und im Belastungsfalle c)

$$T_x = (57\,300 - 2040 \cdot 5,190 - 174\,509 \cdot 0,29423) 0,95934 = -4445 \text{ kg,}$$

$$\tau = -\frac{4445}{102,733} = -43 \text{ kg.}$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werte der sechs letzten Kolonnen der folgenden Tabelle berechnet. Die T_x bedeuten kg, die τ kg pro Quadratcentimeter.

x in m	S_0 in cm	$\frac{Jb}{S_0} = \frac{T_x}{\tau}$	a		b		c	
			Vollbelastung		Verkehrslast 0 bis m		Verkehrslast m bis l	
			T_x	τ	T_x	τ	T_x	τ
2,682	5352,21	98,684	290	3	6251	63	-6036	-61
5,190	7495,41	102,733	269	3	4636	45	-4445	-43
7,698	7399,00	101,628	227	2	2981	29	-2814	-28
10,206	7302,89	100,579	195	2	1290	13	-1148	-11
12,714	7207,13	99,473	159	2	-430	-4	587	6
15,222	7016,36	97,324	124	1	-2173	-22	2264	23
17,730	6826,84	95,148	89	1	-3931	-41	3996	42
20,238	6638,52	92,986	53	1	-5696	-61	5735	62
22,746	6451,40	90,791	17	0	-7461	-82	7473	82

Bemerkungen. Für Belastung durch das Eigengewicht allein ist bei der Neckarbrücke (infolge eines künstlichen Horizontalschubes, vergl. VI E) in allen Querschnitten nahezu $M_x = 0$ und damit nach § 1, 13) auch nahezu $T_x = 0$, $\tau = 0$. Aus letzterem Grunde müssen die T_x , τ in den Belastungsfällen b) und c) zusammen nahezu gleich den Werten im Belastungsfalle a) sein.

§ 10. Grenzwerte der Schnittkräfte und Schnittmomente.

In jedem Querschnitte x kann man sich 2 Flächen zusammenhängend denken. Suchen die Kräfte und Momente links von x die Fläche daselbst von derjenigen rechts von x zu trennen, so müssen von dieser aus solche Kräfte und Momente widerstehen, welche den ersteren numerisch gleich aber von entgegengesetzten Richtungen sind. Um nun bezüglich der Vorzeichen konsequent zu verfahren, werden wir wie in § 1 unter den Kräften und Momenten im Querschnitt x stets die von der Fläche links von x (Seite des Koordinatenursprungs) her wirkenden verstehen. Wir werden ferner für Sprengbogen die Normalkraft N_x dann als positiv bezeichnen, wenn sie Druck bedeutet, also gegen den Querschnitt gerichtet ist, die Transversalkraft T_x , wenn sie von unterhalb nach oberhalb der Achsschicht wirkt, und das Moment M_x , wenn es wie der Zeiger der Uhr rechts um den Bezugspunkt dreht. Hält man hieran fest, so bietet es keine Schwierigkeit, die ungünstigsten Belastungen zunächst soweit festzustellen, als ohne bestimmte Annahmen über Art und Form des Bogens möglich ist. Für die Berechnung mit gleichmäßig verteilter Verkehrslast genügen diese Feststellungen, bezüglich der Berechnung für bewegte Radlastzüge wird auf § 12 verwiesen.

Auf einen beliebigen Bogenträger wirke eine Einzellast P an beliebiger Stelle a . Derselben halten das Gleichgewicht gewisse Kämpferreaktionen R, R' , deren Lagen und Richtungen durch die Tangenten vom Durchschnittspunkte S von P mit der Kämpferdrucklinie an die Um-

hüllungslinien U, U' bestimmt sind. Letztere stimmen bei Bogen mit Kämpfergelenken mit den Mittelpunkten der Gelenke überein (§ 2). Als Schnitt X bezeichnen wir einen Schnitt durch den Bogen, welcher den Querschnitt x enthält und von dessen äußersten Elementen senkrecht nach oben und unten geht. Dann ist die von der Last P herrührende resultierende Schnittkraft:

$$\begin{aligned} \text{für } P \text{ nach } X \text{ (Fig. 44)} \quad R_x &= R, \\ \text{„ } P \text{ vor } X \text{ („ 45)} \quad R_x &= R'. \end{aligned}$$

Die Angriffspunkte von N_x, T_x ergeben sich durch Zerlegen von R_x in Komponenten senkrecht und parallel der Querschnittsebene (Fig. 35, 36):

Normalkraft N_x . Der Beitrag einer Last P zu N_x würde gleich Null (Fig. 44, 45):

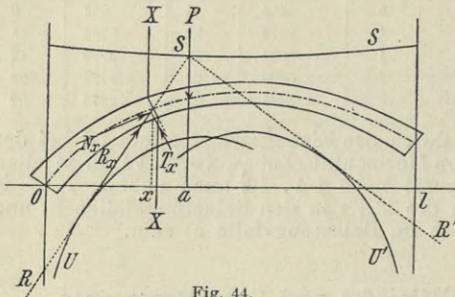


Fig. 44.

1. für P nach X , wenn die Tangente von Punkt S an Linie U parallel der Querschnittsebene stünde;
2. für P vor X , wenn die Tangente von Punkt S an Linie U' parallel der Querschnittsebene stünde.

Beide Fälle kommen aber praktisch gar nicht vor. Daher tragen alle Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne zu N_x bei, es wird N_x am größten, und zwar positiv und Druck, bei möglichst starker Belastung (Vollbelastung) des ganzen Trägers, am kleinsten bei möglichst schwacher Belastung desselben (Eigengewicht allein).

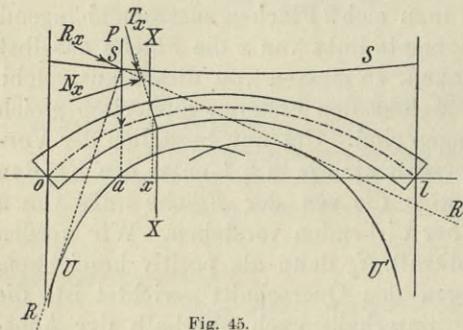


Fig. 45.

Transversalkraft T_x .

Der Beitrag einer Last P zu T_x wird gleich Null (Fig. 44, 45):

1. für P nach X , wenn die Tangente von Punkt S an Linie U senkrecht zur Querschnittsebene steht;
2. für P vor X , wenn die Tangente von Punkt S an Linie U' senkrecht zur Querschnittsebene steht;
3. wenn der Angriffspunkt von P im Schnitt X liegt, weil mit dem Übergang von Fig. 44 zu Fig. 45 der Beitrag sein Vorzeichen wechselt.

Für die zwischenliegenden Angriffspunkte lassen sich die Richtungen oder Vorzeichen von T_x nach Fig. 44, 45 beurteilen, wonach sich die Belastungen für die Grenzwerte wie folgt ergeben (Fig. 46, 47):

Man ziehe senkrecht zur Querschnittsebene eine Tangente an diejenige der Linien U, U' , an welche eine solche möglich ist, bis zum Durchschnitt mit der Kämpferdrucklinie S ; es ist einmal zwischen diesem Schnittpunkt und dem obersten Querschnittspunkt (bei unten liegender Fahrbahn dem untersten), das andre Mal auf den übrigen Strecken der Spannweite möglichst stark zu belasten.

Die erste Belastung liefert den positiven oder negativen Grenzwert von T_x , je nachdem die Tangente an U oder U' gezogen wurde. — In Fig. 46, 47 bedeuten hiernach fette Striche Vollbelastung, feine Striche Eigengewicht allein, was auch in der Folge gelten soll.

Moment M_x . Wie für eine Gesamtbelastung, so hat man nach § 8, 1) auch für eine Einzellast P :

$$M_x = c N_x,$$

worin N_x immer positiv (siehe oben) und c die Entfernung des Angriffspunkts von R_x von der Achsschicht, gemessen in der Querschnittsebene. Es ist also M_x positiv oder negativ, je nachdem c positiv oder negativ, d. h. je nachdem R_x oberhalb oder unterhalb der Achsschicht angreift. Greift R_x in der Achsschicht an, so ist $M_x = 0$. Für die Grenzwerte von M_x ergibt sich hernach folgendes (Fig. 48):

Man ziehe durch den Achspunkt des Querschnitts Tangenten an die Linien U, U' bis zu den Durchschnitten mit der Linie S ; für max. pos. M_x ist zwischen diesen Schnittpunkten für max. neg. M_x auf den übrigen Strecken der Spannweite möglichst stark zu belasten.

Häufig treten einzelne der hier und im nächsten § erwähnten Durchschnitte mit der Linie S nicht innerhalb der Spannweite ein; diese liefern also auch keine wirklichen Verkehrslastgrenzen, womit jedoch an der Allgemeinheit der angeführten Konstruktionen nichts geändert wird.

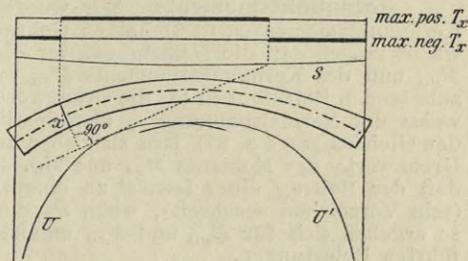


Fig. 46.

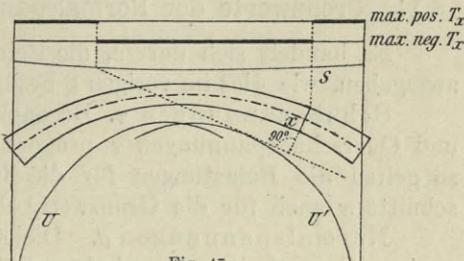


Fig. 47.

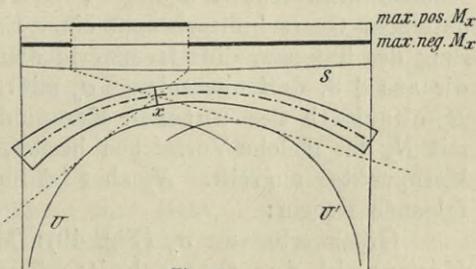


Fig. 48.

Kommen neben Lasten noch andere unabhängig davon wirkende Einflüsse in Betracht, wie Temperaturänderungen, Winddruck usw., so sind die durch letztere allein erzeugten Grenzwerte mit den von der Belastung herrührenden Grenzwerten so zu kombinieren, daß möglichst ungünstige (möglichst weit auseinander gelegene) Grenzwerte im Ganzen entstehen.

Kernpunktsmomente. Wir werden bei vollwandigen Trägern von den Kernpunktsmomenten (§ 8) keinen Gebrauch machen, wollen aber nicht unerwähnt lassen, daß die Belastungen für die Grenzwerte des Kernpunktsmoments M_{x_u} und des Kernpunktsmoments M_{x_o} mit den im nächsten Paragraphen abzuleitenden Belastungen für die Grenzwerte der Normalspannung σ_o , beziehungsweise der Normalspannung σ_u übereinstimmen. Dies folgt ohne weiteres aus den Gleichungen § 8, 27), läßt sich aber auch, wie oben die Belastungen für die Grenzwerte des Moments M_x , aus Fig. 44 und 45 entnehmen. Beachtet man, daß der Beitrag einer Last P zu einem Kernpunktsmoment gleich Null wird (sein Vorzeichen wechselt), wenn R_x durch den betreffenden Kernpunkt geht, so ergeben sich für M_{x_u} und M_{x_o} unmittelbar die in § 11 für σ_o und σ_u angeführten Belastungen.

§ 11. Grenzwerte der Normalspannungen und Schubspannungen.

Es handelt sich darum, die Belastungen für die Grenzwerte soweit anzugeben, wie dies im vorigen § bezüglich der N_x , T_x , M_x geschehen ist.

Schubspannungen τ . Da nach § 9, 7) die Längsschubspannungen und Querschubspannungen τ proportional der Transversalkraft T_x sind, so gelten die Belastungen für die Grenzwerte von T_x in einem Querschnitte x auch für die Grenzwerte der τ in diesem Querschnitte.

Normalspannungen σ . Diejenigen Werte der Normalspannungen σ eines Querschnitts x , zwischen welchen alle andern in diesem Querschnitte auftretenden σ liegen, treten als σ_o und σ_u im obersten und untersten Querschnittselement ein. Es genügt also bei der Dimensionierung des Trägers, die Grenzwerte dieser σ_o , σ_u zu kennen. Nun wissen wir aus § 8, daß nur solange σ_o mit N_x von einerlei Vorzeichen ist, als R_x oberhalb des unteren Kernpunktes angreift, und nur solange σ_u mit N_x das gleiche Vorzeichen besitzt, als R_x unterhalb des oberen Kernpunktes angreift. N_x aber ist immer positiv. Wir erhalten daher folgende Regeln:

Grenzwerte von σ_o (Fig. 49): Man ziehe durch den unteren Kernpunkt des Querschnitts Tangenten an die Linien U , U' bis zu den Durchschnitten mit der Linie S ; für max. druck σ_o ist zwischen diesen Schnittpunkten, für min. druck σ_o oder max. zug. σ_o auf den übrigen Strecken der Spannweite möglichst stark zu belasten.

Grenzwerte von σ_u (Fig. 50): Man ziehe durch den oberen Kernpunkt des Querschnitts Tangenten an die Linien U , U' bis zu den Durchschnitten mit der Linie S ; für min. druck σ_u oder max. zug. σ_u ist zwischen diesen Schnittpunkten, für max. druck. σ_u auf den übrigen Strecken der Spannweite möglichst stark zu belasten.

Vereinfachungen. Je geringer die Entfernungen der Kernlinien von der Stabachse unter sonst gleichen Verhältnissen, umso mehr nähern sich (Fig. 48—50) die angeführten Belastungsgrenzen für

- max. druck σ_o ,
- max. pos. M_x ,
- min. druck σ_u ,

sowie für

- min. druck σ_o ,
- max. neg. M_x ,
- max. druck σ_u .

Da nun der Einfluß der Lasten in der Nähe jener Belastungsgrenzen überhaupt verhältnismäßig klein ist (an den Grenzen selbst sind die Beiträge 0), so wird es in vielen Fällen genügen, die ungünstigsten Belastungen für die M_x auch als solche für die σ_o , σ_u zu verwenden, also die Kernlinien ganz aus dem Spiele zu lassen. Man erspart hierdurch nicht nur die Ermittlung der letzteren, sondern, was mehr ins Gewicht fällt, man braucht nur etwa halb soviel Belastungsfälle, als bei der genaueren Berechnung.

Auf der Tafel am Schlusse des Werkes sind die nach obigem Verfahren ermittelten Belastungen für die Grenzwerte max. druck σ_o , max. pos. M_x und min. druck σ_u einer Öffnung der neuen Cannstatter Neckarbrücke zusammengestellt (vergl. VI. Abschnitt unter F'). Um die Belastungen für min. druck σ_o , max. neg. M_x , max. druck σ_u zu erhalten, hat man sich nur fette Striche (Vollbelastung) und feine Striche (Eigengewicht allein) vertauscht zu denken. Man sieht, daß die Belastungen für die genauere und die angenäherte Berechnung der σ_o , σ_u mehrfach nicht unwesentlich voneinander abweichen. Um zu zeigen, in wieweit die Resultate der Berechnungen übereinstimmen, stellen wir in der folgenden Tabelle die auf beiden Wegen erhaltenen Grenzwerte von σ_o , σ_u zusammen (Druck positiv), sowohl für Verkehrslast allein, als auch beim Zusammenwirken der verschiedenen Einflüsse (Eigengewicht, Verkehrslast, Temperaturänderungen, künstlicher Horizontalschub). Von wesentlicher Bedeutung sind indessen nur die Grenzwerte max. druck σ_o und max. druck σ_u . Die abgekürzte Berechnung muß die Grenzwerte im allgemeinen etwas zu günstig ergeben, da sie meist nicht genau die ungünstigsten Belastungen verwendet. Jedoch treffen die größten Abweichungen gerade an diejenigen Stellen des Bogens (gegen die Mitte

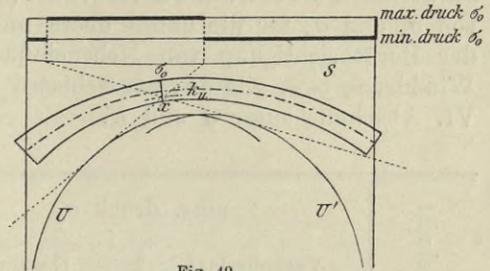


Fig. 49.

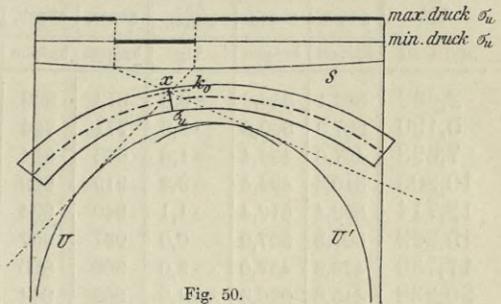


Fig. 50.

und Enden), wo ohnehin die Querschnitte nicht genau der Berechnung angepaßt zu werden pflegen.

Werden bei Bogen mit durchbrochenen Wandungen die Gurtungsschwerlinien als Kernlinien verwendet (S. 31), dann gelten die Grenzwerte von σ_0 und σ_u für die ganze obere und untere Gurtung. — Bezüglich der Berücksichtigung von Nebeneinflüssen wie Temperaturänderungen, Winddruck usw. gilt das am Schlusse des vorigen § Gesagte. Vergl. im VI. Abschnitt unter *J* und *K*.

Querschnitt <i>x</i> in m	max. druck σ_0						min. druck σ_0			
	Verkehrslast allein			Gesamtspannungen			Verkehrslast allein		Gesamtspannungen	
	genau	abgek.	Abweich.	genau	abgek.	Abweich.	genau	abgek.	genau	abgek.
	kg/qcm	kg/qcm	0/0	kg/qcm	kg/qcm	0/0	kg/qcm	kg/qcm	kg/qcm	kg/qcm
2,682	383,1	346,2	— 9,6	873	836	— 4,2	— 53,7	— 16,8	396	433
5,190	387,0	380,2	— 1,8	771	764	— 0,9	— 132,2	— 124,4	192	200
7,698	467,0	458,4	— 1,8	863	854	— 1,1	— 205,9	— 197,3	100	109
10,206	510,6	494,4	— 3,2	919	902	— 1,8	— 244,9	— 228,7	45	61
12,714	522,4	516,4	— 1,1	940	934	— 0,6	— 252,3	— 246,3	24	30
15,222	507,9	507,9	0,0	937	937	0,0	— 232,8	— 232,8	32	32
17,730	470,9	457,0	— 3,0	909	895	— 1,5	— 191,1	— 177,2	65	79
20,238	415,3	396,5	— 4,5	862	844	— 2,1	— 131,4	— 112,6	118	136
22,746	363,9	342,5	— 5,9	818	797	— 2,6	— 76,4	— 55,0	170	191
Mittel			— 3,4			— 1,6				

§ 12. Einflußlinien. Bewegte Radlastzüge.

Die in §§ 10, 11 gezeigten Ermittlungen der Belastungen für die Grenzwerte interessierender Größen genügen nicht, wenn die Berechnung für bewegte Züge konzentrierter Lasten in festen Entfernungen durchgeführt werden soll, die wir Radlastzüge nennen wollen. Es können alsdann bei Bogenträgern alle diejenigen Methoden zur Verwendung kommen, die im gleichen Falle auch bei anderen Trägern gebräuchlich sind (vergl. § 55).¹ Wir wollen jedoch hier nur die Berechnung mit Anwendung von Einflußlinien² andeuten.

Als Einflußlinie (Influenzlinie) einer Größe *B* bezeichnet man diejenige Linie, welche entsteht, wenn an jeder Stelle *a*

¹ Vergl. Weyrauch, Theorie und Berechnung der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer, Leipzig 1887, § 12. Luegers Lexikon der gesamten Technik, Artikel Grenzwerte.

² Die Methode der Einflußlinien zur Bestimmung von Grenzwerten wie der Name Einflußlinie (Influenzlinie) wurden eingeführt in den Schriften: Weyrauch, Allgemeine Theorie und Berechnung der kontinuierlichen und einfachen Träger, Leipzig 1873, S. 166 (s. auch S. 50, 54, 58, 62, 101); Derselbe, Die Maximalmomente einfacher Träger bei festen und bewegten Lastsystemen, Zeitschr. des Arch.- und Ing.-Vereins zu Hannover 1875, S. 467.

die Ordinate b gleich dem Beitrag gemacht wird, welchen eine bei a angreifende Last $P = 1$ zu B liefert. Ist also der Ausdruck von B für beliebige P bei beliebigen a gegeben, so erhält man die Gleichung der Einflußlinie von B , wenn man bei jeder Abszisse a die Ordinate b gleich dem Faktor macht, mit welchem P für diese Stelle a im Ausdruck von B multipliziert ist. Wir wollen dies beispielsweise für einige Größen betreffend den häufigst vorkommenden Fall symmetrischer Bogen mit Kämpfergelenken (ohne Zwischengelenk) zeigen.

max. druck σ_u						min. druck σ_u				Querschnitt x in m
Verkehrslast allein			Gesamtspannungen			Verkehrslast allein		Gesamtspannungen		
genau	abgek.	Abweich.	genau	abgek.	Abweich.	genau	abgek.	genau	abgek.	
kg/qcm	kg/qcm	0/0	kg/qcm	kg/qcm	0/0	kg/qcm	kg/qcm	kg/qcm	kg/qcm	
477,3	462,0	-3,3	982	967	-1,5	-176,5	-161,2	252	268	2,682
450,8	429,7	-4,7	848	827	-2,5	-230,9	-209,8	78	99	5,190
515,1	504,3	-2,1	926	915	-1,2	-304,2	-293,4	-13	-2	7,698
537,4	537,4	0,0	960	960	0,0	-334,0	-334,0	-59	-59	10,206
526,7	517,5	-1,7	960	951	-0,9	-330,4	-321,2	-69	-60	12,714
485,6	467,0	-3,8	930	911	-2,0	-294,5	-275,9	-44	-26	15,222
412,4	412,4	0,0	866	866	0,0	-225,6	-225,6	16	16	17,730
341,7	329,3	-3,6	805	792	-1,6	-157,9	-145,5	77	89	20,238
313,6	305,9	-2,5	783	776	-0,9	-131,4	-123,7	99	106	22,746
-2,4			-1,2							

Für Bogen mit Kämpfergelenken, welche zur Vertikalen durch die Mitte der Spannweite symmetrisch sind (womit in § 1 $M = M' = 0$, $k = 0$ werden), hat man die Vertikalreaktion bei 0 allgemein:

$$v = \frac{1}{l} \int_0^l P(l-a),$$

wonach die Gleichung der Einflußlinie von V :

$$v = \frac{l-a}{l}.$$

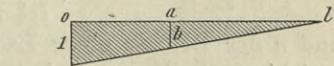


Fig. 51.

Die Linie ist in Fig. 51 verzeichnet. Der von einer beliebigen Belastung herührende Horizontalschub läßt sich in wichtigen Fällen ausdrücken (§§ 19, 20, 22):

$$H = \frac{1}{c} \int_0^l P f(a),$$

worin C unabhängig von a . Die Gleichung der Einflußlinie von H folgt daraus:

$$H = \frac{f(a)}{c}.$$

Für das Moment und die Normalkraft gelten bei beliebiger Belastung die Ausdrücke (§§ 1, 20):

$$M_x = Vx - Hy - \int_0^x P(x-a),$$

$$N_x = (V - \int_0^x P) \sin \varphi + H \cos \varphi.$$

Mit Rücksicht auf die durch 1, 2 bestimmten Werte von V , H für $P = 1$ erhalten wir die Gleichungen der Einflußlinien von M_x und N_x für $a < x$:

$$M_x = \frac{l-a}{l} x - \frac{f(a)}{C} y - (x-a),$$

$$N_x = \left(\frac{l-a}{l} - 1 \right) \sin \varphi + \frac{f(a)}{C} \cos \varphi,$$

oder auch für $a < x$:

$$M_x = \frac{l-x}{l} a - \frac{f(a)}{C} y,$$

$$N_x = -\frac{a}{l} \sin \varphi + \frac{f(a)}{C} \cos \varphi,$$

3

während für $a > x$:

$$M_x = \frac{l-a}{l} x - \frac{f(a)}{C} y,$$

$$N_x = \frac{l-a}{l} \sin \varphi + \frac{f(a)}{C} \cos \varphi.$$

4

Setzt man in den allgemeinen Ausdrücken der Normalspannungen im obersten und untersten Querschnittselement symmetrisch zur Achsschicht angeordneter Querschnitte § 8, 11):

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W},$$

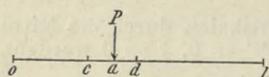
$$\sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{W},$$

5

für M_x , N_x die aus 3 und 4 folgenden Werte, so liefern diese Gleichungen 5 die Ordinaten der Einflußlinien für σ_o , σ_u . Für unsymmetrische Querschnitte würden nur § 8, 9) an Stelle von 5 treten.

In ähnlicher Weise wie hier für die Größen V , H , M_x , N_x , σ_o , σ_u können die Einflußlinien auch für andere Größen B ermittelt werden.

Wird die Belastung nur in bestimmten Knotenpunkten auf den betrachteten Träger übertragen, so verläuft die Einflußlinie zwischen je zwei aufeinander folgenden dieser Knotenpunkte geradlinig. Denn von einer bei a zwischen solchen Knotenpunkten der Abszissen c und d liegenden Last P kommen unter der hier üblichen Voraussetzung frei drehbarer Zwischenträgerenden bei c und d auf den Träger (Fig. 52):



$$\frac{d-a}{d-c} P \text{ bzw. } \frac{a-c}{d-c} P.$$

Fig. 52.

Ist nun m der Beitrag einer Last $P = 1$ bei c , und n der Beitrag einer Last $P = 1$ bei d , so folgt der Beitrag der an beliebiger Stelle a zwischen c und d wirkenden Last $P = 1$:

$$b = \frac{d-a}{d-c} m + \frac{a-c}{d-c} n,$$

und dies ist bei veränderlichem a die Gleichung einer geraden Linie. Es folgt hieraus auch, daß die Einflußlinie einer bestimmten Größe B je nach der Übertragungsart der in Frage kommenden Lasten etwas verschieden ausfallen kann. Gewöhnlich interessiert jedoch nur die Einflußlinie der Verkehrslast, welche eindeutig bestimmt ist.

Da eine bei a angreifende Last $P = 1$ zur Größe B den Beitrag b liefert, unter b die Ordinate der Einflußlinie bei a verstanden, so trägt eine beliebige Last P bei Pb , und für den Beitrag einer Lastenfolge von v bis w hat man:

$$B = \sum_v^w P b. \quad 6$$

Ist die Belastung von v bis w stetig verteilt und bezeichnet $p = \varphi(a)$ die Belastung pro Längeneinheit bei a , so folgt aus 6) mit $P = p da$:

$$B = \int_v^w p da \cdot b. \quad 7$$

Speziell wenn die Belastung gleichmäßig verteilt ist, erhält man wegen des alsdann konstanten p :

$$G = p \int_v^w b da = p F, \quad 8$$

worin F die Einflußfläche von v bis w bezeichnet (Fig. 53). Der von einer gleichmäßig verteilten Last p auf der ganzen Spannweite herührende Wert der obigen Vertikalreaktion V beispielsweise wäre also (vergl. Fig. 51):

$$V = p \frac{l}{2}.$$

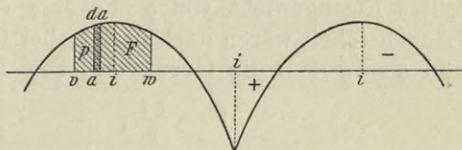


Fig. 53.

Der Beitrag einer Last und die Einflußfläche bei a sind positiv oder negativ, je nachdem die Einflußlinie daselbst auf der positiven oder negativen Seite der Abszissenachse liegt (wo b positiv oder negativ). Die Durchschnittspunkte der Einflußlinie mit der Abszissenachse bilden die Grenzpunkte der positiven und negativen Beitragsstrecken. Auf jeder Beitragsstrecke einerlei Sinns heißt derjenige Punkt i , bei welchem die Ordinate b und damit der Beitrag einer Last P größer als an allen andern Orten jener Strecke ist, der Einflußpunkt für die betreffende Strecke. Ihm hat man in praktischen Fällen die Lasten von den Streckengrenzen aus zu nähern, wenn ihre Beiträge zu B wachsen sollen. Im obigen Falle von V beispielsweise würde es der Punkt 0 sein, für H ist in allen später betrachteten Fällen $i = \frac{l}{2}$.

Ist die Einflußlinie einer Größe B verzeichnet, so kann man mit Rücksicht auf obige Eigenschaften der Einflußlinien die Belastungen für die Grenzwerte von B sehr leicht angeben und diese selbst ohne weitere Formeln berechnen.¹ Man hat bei Berechnung jedes der beiden Grenzwerte die Beitragsstrecken des betreffenden Sinnes möglichst stark und zwar derart zu belasten, daß alle Lasten, besonders die größten darunter, möglichst nahe an den Einflußpunkten ihrer Strecken liegen, während die Beitragsstrecken entgegengesetzten Sinnes von Lasten möglichst frei zu lassen sind. Verkehrslasten, welche trotzdem auf diese gelangen, kann man einfach unberücksichtigt lassen, womit in immer zulässiger

¹ Näheres und zahlreiche Anwendungen, auch zur Ableitung von Formeln für die Grenzwerte enthalten die Schriften: Weyrauch, Theorie der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer, Leipzig 1887; Derselbe, Beispiele und Aufgaben zur Berechnung der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer, Leipzig 1888; vergl. auch Luegers Lexikon der gesamten Technik, Artikel: Einflußlinien, Grenzwerte.

Weise etwas zu ungünstig gerechnet wird. Liegt die Einflußlinie einer Größe ganz auf einer Seite der Abszissenachse, dann tritt der obere Grenzwert bei möglichst starker Belastung des ganzen Trägers (besonders in der Nähe des Einflußpunktes), der untere für Eigengewicht allein aus.

In vielen Fällen lassen schon die allgemeinen Formeln für B auf die Grenzpunkte der Beitragsstrecken, sowie auf die ungünstigsten Zusammensetzungen und Richtungen der Lastsysteme schließen. Nach der oben angeschriebenen Formel für V beispielsweise erhält man den größten Wert von V bei Belastung durch Eisenbahnfahrzeuge, wenn ein Zug schwerster Lokomotiven mit den Schloten vorn von l nach 0 fahrend mit dem Vorderrade der ersten Lokomotive bei $a = 0$ angelangt ist, den kleinsten Wert von V für Eigengewicht allein. Für ein gleichmäßig verteiltes Eigengewicht von g und eine ebensolche Verkehrslast von p pro Längeneinheit wären nach dem bisher Gesagten mit Rücksicht auf Fig. 51 und $q = g + p$ die Grenzwerte von V :

$$V = \frac{q l}{2}, \quad \mathfrak{B} = \frac{g l}{2}.$$

Dieselben Grenzwerte durch gleichmäßig verteilte Lasten g, p ergeben sich für die Vertikalreaktionen V, V' in vielen später betrachteten Fällen. Auch die Grenzwerte des Horizontalschubs H treten für gleichmäßig verteilte Lasten g, p ein, wenn die ganze Spannweite einmal mit $q = g + p$ das andre Mal nur mit g belastet ist.

Beispiel 9. Einflußlinien und Grenzwerte.

Für die symmetrischen Bogen mit drei Gelenken einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke sei die Spannweite $l = 24$ m, der Pfeil der Achse $f = 3$ m, die gleichmäßig verteilt gedachte feste Last (Eigengewicht der Konstruktion) $g = 700$ kg pro Meter Spannweite. Zu bestimmen: a) die Einflußlinien für die Vertikalreaktionen V, V' der Kämpfer und den Horizontalschub, welcher letzterer für beliebige Belastung mit $m = \frac{l}{2}$ durch

$$H = \frac{1}{2f} \left[\sum_0^m P a + \sum_m^l P (l-a) \right] \quad 1$$

ausgedrückt ist (§ 19); b) die Grenzwerte von V, V', H , welche beim Befahren der Brücke durch Züge von Lokomotiven der in Fig. 54 angedeuteten Radanordnung entstehen.

a) Die Einflußlinie von V wurde bereits in § 12 festgestellt, diejenige von V' liegt bezüglich der Trägermitte symmetrisch zu ihr (Fig. 55). Nach 1 hat man zufolge § 12 die Gleichung der Einflußlinie von H :

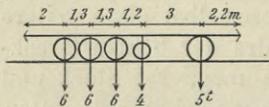


Fig. 54.

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } a < m \\ \text{für } a > m \end{array} \right\} \begin{array}{l} H = \frac{a}{2f}, \\ H = \frac{l-a}{2f}. \end{array} \quad 2$$

Die Linie liegt symmetrisch zur Trägermitte, hat bei $a = 0$ und l die Ordinaten 0, und da die Gleichungen 2 für $a = \frac{l}{2}$ liefern $H = \frac{l}{4f}$, in unserem Falle also $H = \frac{24}{4 \cdot 3} = 2$, so ist die Einflußlinie für H durch Fig. 56 dargestellt.

b) Da die drei Einflußlinien vollständig auf einer Seite der Abszissenachse liegen, so treten die unteren Grenzwerte von V, V', H für die feste Last allein ein. Ihre Werte sind nach § 12, 8):

$$V = V' = 700 \frac{24 \cdot 1}{2} = 8400 \text{ kg,}$$

$$H = 700 \frac{24 \cdot 2}{2} = 16800 \text{ kg.}$$

Der obere Grenzwert von V ergibt sich bei der in Fig. 55 angedeuteten Belastung aus § 12, 6):

$$V = 8400 + \frac{1}{24} \left[6000 (24 + 22,7 + 21,4 + 13 + 11,7 + 10,4 + 2 + 0,7) + 4000 (20,2 + 9,2) + 5 (17,2 + 6,2) \right] = 44650 \text{ kg.}$$

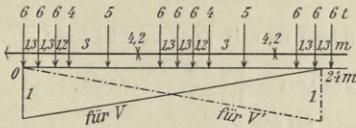


Fig. 55.

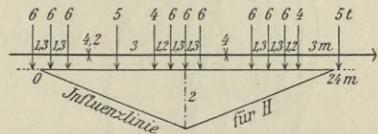


Fig. 56.

Derselbe Grenzwert tritt für V' ein, wenn der Zug in entgegengesetzter Richtung mit dem Vorderrad bei l steht. Den oberen Grenzwert von H erhält man bei der in Fig. 56 angedeuteten Belastung:

$$H = 16800 + \frac{1}{6} \left[6000 (12 + 10,7 + 2,3 + 1 + 10,7 + 6,7 + 5,4 + 4,1) + 4000 (9,5 + 2,9) + 5000 \cdot 6,5 \right] = 83380 \text{ kg.}$$

Beispiel 10. Einflußlinien (Cannstatter Neckarbrücke).

Für einen symmetrischen parabolischen Bogen mit Kämpfergelenken von $l = 48 \text{ m}$ Spannweite und $f = 4,505 \text{ m}$ Pfeil der Achse ist der von einer Last P an beliebiger Stelle a herrührende Horizontalschub für Meter als Längeneinheit ausgedrückt:

$$H = \frac{P f(a)}{806754}. \quad a$$

Die Verkehrslast wird durch Vertikalen in Abständen von $2,508 \text{ m}$ bei den unten angegebenen Abszissen a , welchen die beigesetzten $f(a)$ entsprechen, auf die Bogen übertragen. Es sind die Einflußlinien für $M_x, N_x, \sigma_o, \sigma_u$ in der Trägermitte festzustellen, wo der Querschnitt $F = 373 \text{ qcm}$ und das Widerstandsmoment $W = 11594 \text{ cm}$ ist.

Die Gleichungen der Einflußlinien von M_x, N_x für beliebige Querschnitte x sind nach § 12, 3), 4) mit $l = 48 \text{ m}, C = 806754$, wenn die Abszisse $a < x$:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{l-x}{48} a - \frac{y f(a)}{806754}, \\ N_x &= \left(-\frac{a}{48} \operatorname{tg} \varphi + \frac{f(a)}{806754} \right) \cos \varphi, \end{aligned} \right\} b$$

und wenn die Abszisse $a > x$:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{l-a}{48} x - \frac{y f(a)}{806754}, \\ N_x &= \left(\frac{l-a}{48} \operatorname{tg} \varphi + \frac{f(a)}{806754} \right) \cos \varphi. \end{aligned} \right\} c$$

Mit diesen Werten von M_x, N_x sind die Gleichungen der Einflußlinien von σ_o, σ_u für beliebige Querschnitte durch § 12, 5) bestimmt.

Für $x = 24 \text{ m}$ liegen die fraglichen Einflußlinien symmetrisch zur Trägermitte, so dass es genügt, die ersten Hälften zu ermitteln. Man erhält für dieselben mit $l - x = 24 \text{ m}, y = f = 4,505 \text{ m}, \operatorname{tg} \varphi = 0, \cos \varphi = 1$ nach b):

$$M_x = \frac{a}{2} - \frac{f(a)}{179980}, \quad N_x = \frac{f(a)}{806754},$$

und damit nach § 12, 5) pro qcm:

$$\sigma_o = \frac{N_x}{373} + \frac{100 M_x}{11594}, \quad \sigma_u = \frac{N_x}{373} - \frac{100 M_x}{11594}.$$

Diese Gleichungen liefern beispielsweise für $a = 0,174$ m mit $f(a) = 19212$:

$$M_x = 0,087 - \frac{19\ 212}{179\ 080} = -0,0203,$$

$$N_x = \frac{19\ 212}{806\ 754} = 0,0238,$$

$$\sigma_o = \frac{0,0238}{373} - \frac{2,03}{11\ 594} = -\frac{0,1113}{1000},$$

$$\sigma_u = \frac{0,0238}{373} + \frac{2,03}{11\ 594} = \frac{0,2389}{1000},$$

und für $a = 2,682$ m mit $f(a) = 294\ 406$:

$$M_x = 1,341 - \frac{294\ 406}{179\ 089} = -0,3030,$$

$$N_x = \frac{294\ 406}{806\ 754} = 0,3649,$$

$$\sigma_o = \frac{0,3649}{373} - \frac{30,3}{11\ 594} = -\frac{1,6351}{1000},$$

$$\sigma_u = \frac{0,3649}{373} + \frac{30,3}{11\ 594} = \frac{3,5917}{1000}.$$

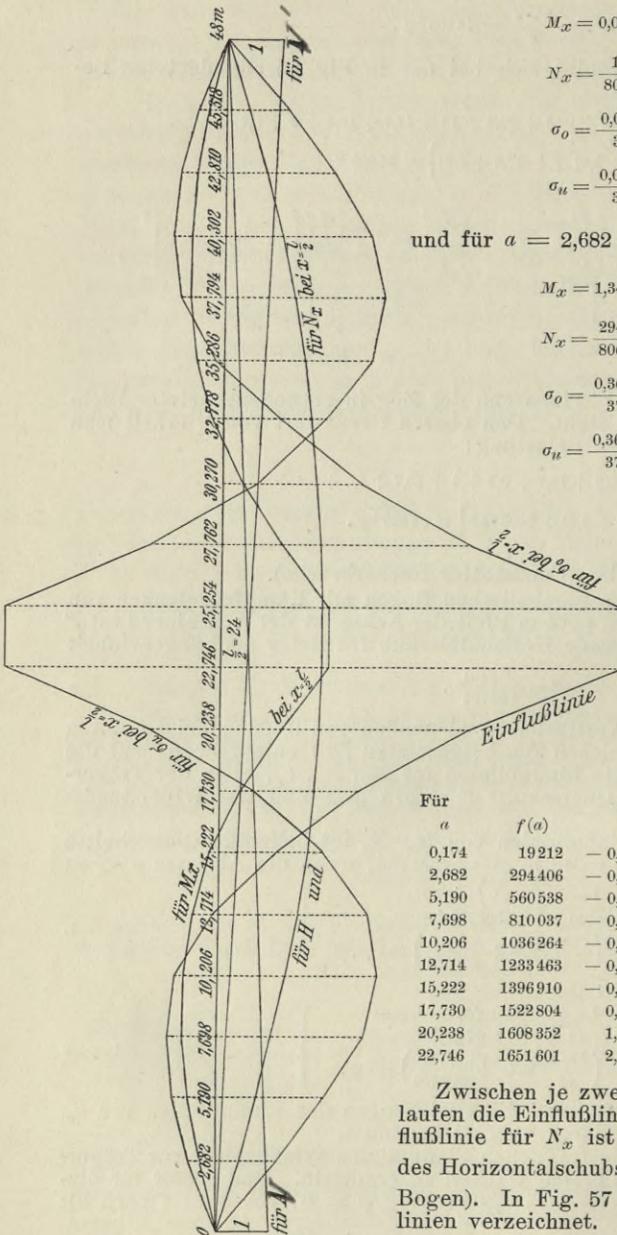


Fig. 57.

In gleicher Weise sind die übrigen Ordinaten b der Einflußlinien für $M_x, N_x, \sigma_o, \sigma_u$ in nachstehender Zusammenstellung berechnet.

Für a	$f(a)$	M_x b	N_x b	σ_o $1000\ b$	σ_u $1000\ b$
0,174	19212	-0,0203	0,0238	-0,1113	0,2389
2,682	294406	-0,3030	0,3649	-1,6351	3,5917
5,190	560538	-0,5351	0,6948	-2,7526	6,4780
7,698	810037	-0,6743	1,0041	-3,1239	8,5079
10,206	1036264	-0,6836	1,2845	-2,4525	9,3399
12,714	1233463	-0,5308	1,5289	-0,4793	8,6671
15,222	1396910	-0,1895	1,7315	3,0076	6,2766
17,730	1522804	0,3615	1,8876	8,1786	1,9426
20,238	1608352	1,1378	1,9936	15,1585	-4,4689
22,746	1651601	2,1503	2,0472	24,0351	-13,0581

Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden a verlaufen die Einflußlinien geradlinig (S. 46). Die Einflußlinie für N_x ist gleichzeitig die Einflußlinie des Horizontalschubs H (bei $x = \frac{l}{2}$ symmetrischer Bogen). In Fig. 57 sind die ermittelten Einflußlinien verzeichnet.

Beispiel 11. Berechnung von Grenzwerten mit Hilfe von Einflußlinien (Cannstatter Neckarbrücke).

Die Ordinaten b der symmetrisch zur Trägermitte liegenden Einflußlinien für die Normalspannungen σ_o, σ_u in der Mitte eines Bogens mit Kämpfergelenken

sind wie am Schlusse von Beispiel 10 ermittelt (Fig. 57). Man soll mit Hilfe dieser Einflußlinien bestimmen:

a) Die Werte von σ_o , σ_u für gleiche Lasten $P = 4264$ kg bei allen Knotenpunkten a , mit Ausnahme der beiden zunächst den Kämpfern gelegenen, wo nur $\frac{2}{3} P$ angreifen;

b) die ungünstigsten von einer Straßenwalze der in Fig. 58 ersichtlichen Lastanordnung allein herrührenden σ_o , σ_u , wenn die einzelnen parallelen Bogen in Abständen von 3,2 m liegen;

c) den größten von zwei der erwähnten Straßenwalzen allein herrührenden Druck σ_u im gleichen Falle;

d) den größten durch die Verkehrslast erzeugten Druck σ_o , wenn außer der nach b) gewählten Belastung durch die Straßenwalze noch bei $a = 15,222$ m, 17,730 m und den symmetrisch dazu gelegenen Knotenpunkten Lasten $P = 3486$ kg durch Menschengedränge kommen;

e) den größten durch die Verkehrslast erzeugten Druck σ_u , wenn außer der nach c) gewählten Belastung durch Straßenwalzen noch bei $a = 2,682$ m, 5,190 m, 15,222 m, 17,730 m Lasten $P = 3486$ kg, sowie bei $a = 0,174$ m zwei Drittel soviel durch Menschengedränge kommen und Analoges für die symmetrisch dazu liegenden Punkte gilt.

a) Für die unter a) angeführte Belastung hat man bei beliebigen P nach § 12, 6):

$$\sigma_o = \frac{2P}{1000} \left(-0,1113 \frac{2}{3} - 1,6351 - 2,7526 - \dots + 24,0351 \right) = 0,0797244 P,$$

$$\sigma_u = \frac{2P}{1000} \left(0,2389 \frac{2}{3} + 3,5917 + 6,4780 + \dots - 13,0581 \right) = 0,0550314 P,$$

also speziell für $P = 4264$ kg, entsprechend dem konzentrierten Eigengewicht der Konstruktion (bezüglich des gleichmäßig verteilten Eigengewichts der Bogen selbst siehe Beispiel 6, S. 33):

$$\sigma_o = 339,9 \text{ kg}$$

$$\sigma_u = 234,7 \text{ kg}.$$

b) Da die einzelnen Bogen um 3,2 m voneinander entfernt liegen, so können von der 20 t schweren Straßenwalze höchstens folgende Lasten auf einen Bogen kommen (Fig. 59):

$$2 \cdot 6 \frac{2,4}{3,2} = 9 \text{ t},$$

$$2 \cdot 4 \frac{2,9}{3,2} = 7,25 \text{ t}.$$

Steht nun die Last von 9 t bei $a = 25,254$ m, wo ihr Beitrag zu σ_o , σ_u am größten ist (Fig. 57), dann kommen auf die beiden vorhergehenden Knotenpunkte (Fig. 60):

bei $a = 22,746$ m
$$P = 7,25 \frac{2,116}{2,508} = 6,117 \text{ t},$$

bei $a = 20,238$ m
$$P = 7,25 \frac{0,392}{2,508} = 1,133 \text{ t}.$$

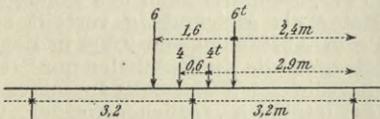


Fig. 59.

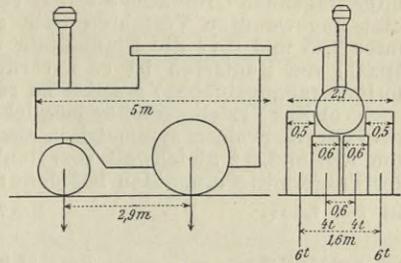


Fig. 58.

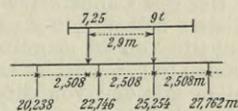


Fig. 60.

Mit Rücksicht hierauf erhält man nach § 12, 6) die numerisch größten durch die Straßenwalze erzeugten Normalspannungen genügend genau:

$$\sigma_o = 1,133 \cdot 15,1585 + (6,117 + 9) 24,0351 = 380,5 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = -1,133 \cdot 4,4689 - (6,117 + 9) 13,0581 = -202,5 \text{ kg}.$$

Die Berechnung der P bei den Knotenpunkten war übrigens nicht nötig, da wir nach § 12, 6) mit den Lasten von 7,25 und 9 t und den unmittelbar darunter liegenden Ordinaten b direkt rechnen konnten, doch braucht man bei dem jetzt angewandten Verfahren (wie auch bei numerischer Interpolation der b unter 7,25 und 9 t) die Einflußlinie nicht zu verzeichnen. Bei einer größeren Anzahl von Radlasten ist es natürlich bequemer, mit letzteren und den zugehörigen (abgegriffenen) b selbst zu rechnen.

c) Zur Erzielung eines möglichst großen Drucks σ_u genügt es nach Fig. 57 zwei Straßenwalzen symmetrisch zur Trägermitte so zu stellen, daß die Lasten von 7,25 und 9 t gleichweit vom Punkt 10,206 m abstehen, die Last von 9 t nach der Trägermitte hin. Man hat dann:

$$\text{bei } a = 7,698 \text{ m} \quad P = 7,25 \frac{1,45}{2,508} = 4,192 \text{ t,}$$

$$\text{bei } a = 10,206 \text{ m} \quad P = (7,25 + 9) \frac{1,058}{2,508} = 6,855 \text{ t,}$$

$$\text{bei } a = 12,714 \text{ m} \quad P = 9 \frac{1,45}{2,508} = 5,203 \text{ t,}$$

und für diese Belastung nach § 12, 6):

$$\sigma_u = 2 (4,192 \cdot 8,5079 + 6,855 \cdot 9,3399 + 5,203 \cdot 8,6671) = 289,6 \text{ kg.}$$

Auch hier gilt das am Schlusse von b) Gesagte.

d) Werden zur Erzeugung eines möglichst großen Druckes σ_o die oben unter d) erwähnten Verkehrslasten angenommen, so ergibt sich der Beitrag der Verkehrslast zu σ_o mit Rücksicht auf das Resultat unter b):

$$\sigma_o = 380,5 + 2 \cdot 3,486 (3,0076 + 8,1786) = 458,5 \text{ kg.}$$

e) Werden ferner zur Erzielung eines möglichst großen Druckes σ_u die oben unter e) angeführten Verkehrslasten angenommen, so folgt der Beitrag der Verkehrslast zu σ_u mit Rücksicht auf das Resultat unter c):

$$\sigma_u = 289,6 + 2 \cdot 3,486 (0,2389 \frac{2}{3} + 3,5917 + 6,4780 + 6,2766 + 1,9426) = 418,2 \text{ kg.}$$

Bemerkungen. Die angegebenen Verhältnisse entsprechen der Cannstatter Neckarbrücke (VI. Abschnitt). Beim Zusammenwirken des bei derselben angewandten künstlichen Horizontalschubes (Beispiel 7), des gesamten Eigengewichts (Beispiel 6 und oben a) und der unter d) und e) angenommenen Verkehrslasten werden die größten Drücke bei normaler Temperatur:

$$\sigma_o = -70,5 + 68,6 + 339,9 + 458,5 = 796,5 \text{ kg,}$$

$$\sigma_u = 81,0 + 46,4 + 234,7 + 418,2 = 780,3 \text{ kg,}$$

und bei Berücksichtigung der in Betracht gezogenen Temperaturveränderungen von $t = \pm 25^\circ$ (Beispiel 7):

$$\sigma_o = 796,5 + 104,5 = 901 \text{ kg,}$$

$$\sigma_u = 780,3 + 120,0 = 900 \text{ kg.}$$

Mit den unter b) und c) erwähnten Verkehrslasten (ohne Menschengedränge) hätten sich $\sigma_o = 823 \text{ kg}$, $\sigma_u = 771 \text{ kg}$ ergeben.

Beispiel 12. Verwendung gleichmäßig verteilter und konzentrierter Eigengewichte (Cannstatter Neckarbrücke).

Bei der Cannstatter Neckarbrücke (VI. Abschnitt) kann das Eigengewicht der Bogen selbst mit $g = 340 \text{ kg}$ pro Meter als gleichmäßig verteilt auf die Spannweite von 48 m gelten, während die in Abständen von 2,508 m liegenden Vertikalen je $P = 4264 \text{ kg}$ konzentriert übertragen (die Endvertikalen nur $\frac{2}{3}$ soviel). Es sollen mit den von dieser Belastung herrührenden Normalspannungen σ_o , σ_u im Scheitelquerschnitt diejenigen Werte der letzteren verglichen werden, welche man erhält, wenn das ganze Eigengewicht der Konstruktion entweder gleichmäßig verteilt oder bei den Vertikalen konzentriert angenommen wird.

Die fraglichen Normalspannungen durch das wirkliche Eigengewicht sind nach Beispiel 6 und Beispiel 11 a):

$$\sigma_o = 68,6 + 339,9 = 408,5 \text{ kg,}$$

$$\sigma_u = 46,4 + 234,7 = 281,1 \text{ kg.}$$

Hätten wir das ganze Eigengewicht als gleichmäßig verteilt angenommen, so würden sich mit $g = 340 + \frac{4264}{2,508} = 2040$ kg nach Beispiel 6 ergeben haben:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 0,201 \cdot 641 \cdot 2040 = 411,3 \text{ kg} & \text{d. i.} & \text{mehr } 0,69 \%, \\ \sigma_u &= 0,136 \cdot 659 \cdot 2040 = 278,8 \text{ kg} & & \text{weniger } 0,82 \%. \end{aligned}$$

Hätten wir dagegen das ganze Eigengewicht bei den Vertikalen konzentriert angenommen, so würde man mit $P = 4264 + 340 \cdot 2,508 = 5117$ kg nach Beispiel 11 a) erhalten haben:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 0,079 \cdot 7244 \cdot 5117 = 407,9 \text{ kg} & \text{d. i.} & \text{weniger } 0,15 \%, \\ \sigma_u &= 0,055 \cdot 8314 \cdot 5117 = 281,6 \text{ kg} & & \text{mehr } 0,18 \%. \end{aligned}$$

Bemerkungen. Die Beiträge 68,6 und 46,4 kg des gleichmäßig verteilten Eigengewichts zu σ_0 , σ_u wurden in Beispiel 6 mittelst der genauen Formeln berechnet. Annähernd können dieselben auch mit Hilfe der in Beispiel 10 festgestellten Einflußlinien erhalten werden, welche nur durch die geradlinige Verbindung aufeinanderfolgender Knotenpunkte von den jenem Eigengewichte entsprechenden abweichen. Bezeichnen $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{10}, b_{11}$ die Ordinaten der Einflußlinien bei $a=0$, bei den am Schlusse von Beispiel 10 angeführten a und bei $a=24$ m, dann hat man den Inhalt der ganzen Einflußflächen:

$$F = 2 \left(\frac{b_0 + b_1}{2} \cdot 0,174 + \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot 2,508 + \frac{b_2 + b_3}{2} \cdot 2,508 + \dots + \frac{b_9 + b_{10}}{2} \cdot 2,508 + \frac{b_{10} + b_{11}}{2} \cdot 1,254 \right),$$

oder auch

$$F = [0,174 b_0 + 2,682 b_1 + 5,016 (b_2 + b_3 + \dots + b_9) + 3,762 b_{10} + 1,254 b_{11}],$$

wonach speziell für die Einflußflächen von σ_0 , σ_u mit den am Schlusse von Beispiel 10 gegebenen b :

$$\begin{aligned} 1000 F_0 &= [-2,682 \cdot 0,1113 + 5,016 (-1,6351 - \dots + 15,1585) + (3,762 + 1,254) \cdot 24,0351] = 200,022, \\ 1000 F_u &= [2,682 \cdot 0,2389 + 5,016 (3,5917 + \dots - 4,4689) - (3,762 + 1,254) \cdot 13,0581] = 137,461. \end{aligned}$$

Die Normalspannungen durch ein gleichmäßig verteiltes Eigengewicht von g pro Meter Spannweite ergeben sich damit zufolge § 12, 8):

$$\sigma_0 = 0,200022 g, \quad \sigma_u = 0,137467 g,$$

d. i. um 0,80 % kleiner, bzw. um 0,59 % größer als in Beispiel 6, wo wir

$$\sigma_0 = 0,201641 g, \quad \sigma_u = 0,136659 g$$

erhalten hatten.

Aufgabe 8. Ungünstigste Stellung von Radlastzügen.

Für eine Größe G , deren Einflußlinie nach Art von Fig. 61 auf einer Strecke $v w$ aus zwei Geraden mit dem Einflußpunkt i zwischen v und w besteht, die ungünstigste Stellung eines Radlastzugs (ohne sonstige bewegte Lasten) auf dieser Strecke möglichst genau festzustellen.

Die Einflußlinie läßt erkennen, daß zur Erzeugung des größten G ein Lastzug zu wählen ist, welcher möglichst schwere Lasten möglichst dicht um ein schwerstes Rad O enthält. Mit diesem Rad über dem Einflußpunkt i wäre der Lastzug zunächst auf die fragliche Strecke zu bringen, und zwar so, daß die ungünstigste Zugseite von O aus auf die längste der beiden Teilstrecken von i aus kommt. Es handelt sich nun darum, die Laststellung, für welche das Maximum von G eintritt, vollkommen genau zu bestimmen. Hierzu genügt es, die entsprechende Bedingung für irgend eine Größe festzustellen, deren Einflußlinie den gegebenen Verlauf hat. Eine solche Größe ist das Moment im beliebigen Querschnitt x eines einfachen, beiderseits frei drehbaren Balkenträgers, das heißt nach § 1, 8) mit $H = 0$, $M = M' = 0$:

$$M_x = \frac{l-x}{l} \sum_0^x P a + \frac{x}{l} \sum_x^l P (l-a). \quad 1$$

Denn man hat als Gleichung seiner Einflußlinie (vergl. § 12):

$$\text{von } a = 0 \text{ bis } x \quad b = \frac{l-x}{l} a,$$

von $a = x$ bis l

$$b = \frac{x}{l}(l-a),$$

sodaß diese Linie wie in Fig. 61 oben angedeutet verläuft. Bewegt sich der Lastzug auf dem Träger, so ändern sich mit jeder unendlich kleinen Verrückung die Abszissen a aller Lasten P um das gleiche da , der Wert von M_x ändert sich um

$$dM_x = \left(\frac{l-x}{l} \sum_0^x P - \frac{x}{l} \sum_x^l P \right) da = \left(\sum_0^x P - \frac{l}{x} \sum_0^l P \right) da. \quad 1$$

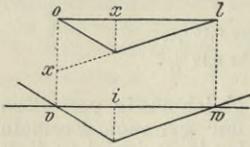


Fig. 61.

Für das Maximum von M_x jedoch besteht die Bedingung²:

$$\frac{dM_x}{da} = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_0^x P = \frac{x}{l} \sum_0^l P \quad 2$$

Ganz analog hat man für die Stellung eines bestimmten Lastzugs auf der Strecke v w , bei welcher die Größe G ihr Maximum erreicht (Fig. 61):

$$\sum_v^i P = \frac{i-v}{w-v} \sum_v^w P. \quad 3$$

Das Maximum tritt ein, wenn dasjenige Rad über den Einflußpunkt i gelangt, mit welchem die Summe links den Wert rechts durchschreitet.

Für den Horizontalschub des Dreigelenkbogens beispielsweise ist die Einflußlinie in Fig. 56 (S. 49) verzeichnet. Die Bedingung für sein Maximum lautet also nach 3 mit $v = 0$, $i = m = \frac{l}{2}$, $w = l$:

$$\sum_0^m P = \frac{1}{2} \sum_0^l P, \quad 4$$

wie wir auch durch Differentiation des Ausdrucks 1 in Beispiel 9 und Nullsetzen des ersten Differentialquotienten erhalten hätten.³ Die Bedingung 4 ist für die in Fig. 56 angedeutete Laststellung erfüllt, da $\sum_0^l P = 61$ t, während mit dem Übertritt des Rads über der Mitte von der zweiten auf die erste Trägerhälfte der Wert der Summe $\sum_0^m P$ von 27 auf 33 steigt, also den Wert $\frac{61}{2}$ durchschreitet. Auch in andern Fällen wird die Bedingung 3 meist schon dadurch erfüllt, daß man die Stellung des geeigneten Lastzugs in bekannter Weise auf Grund der Einflußlinie wählt.

§ 13. Berechnung der Berührungsgelenke.

Bei Bogenträgern kommen Berührungsgelenke (Tangentialgelenke, Wälzgelenke) und Umschließungsgelenke mit kreiszylindrischen und kugelförmigen Druckstücken vor. Wir wollen zunächst Berührungsgelenke ins Auge fassen. Die sie betreffende Aufgabe ist auf Grund der allgemeinen Elastizitätslehre zuerst von Hertz⁴ in Angriff genommen und teilweise gelöst worden. Da hier nicht die Grundgesetze der allgemeinen Elastizitätslehre behandelt werden können, so müssen wir uns auf die Vorführung der wichtigsten, bei Bogen in Betracht kommenden Resultate beschränken. Für die zwei in Berührung befind-

¹ Die Differentiation der Summe Σ erfolgt einfach hinter den Summenzeichen. Näheres enthält die in der Fußnote S. 69 erwähnte Literatur.

² Weyrauch, Die Maximalmomente einfacher Träger bei festen und mobilen Lastsystemen, Zeitschr. d. Arch.- und Ing.-Vereins zu Hannover 1875, S. 467.

³ Ähnliche Ableitungen ungünstiger Stellungen für Dreigelenkbogen auch bei Fachwerksgliederung s. Weyrauch, Theorie der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer, Leipzig 1887, S. 240.

⁴ Hertz, Über die Berührung fester elastischer Körper, Journal für reine und angewandte Mathematik 1882, S. 156 (auch Verhandlungen d. Vereins f. d. Beförderung d. Gewerbeleißes 1882, S. 449).

lichen Körper, welche homogen und isotrop vorausgesetzt werden, seien E_1, E_2 die Elastizitätsmoduln, μ_1, μ_2 die Elastizitätsquotienten, das heißt die Quotienten aus Quersammenziehung und Längsdehnung gezogener Prismen. Die Molekulartheorie der Elastizität ergibt μ_1, μ_2 für homogenes, isotropes Material gleich $1/4$, während durch Versuche mit Flußeisen, Stahl und Gußeisen meist Werte zwischen $1/4$ und $1/3$, für Steine aber auch stark veränderliche Werte erhalten wurden.¹ Wir führen weiter ein:

$$e_1 = \frac{4}{E_1} (1 - \mu_1^2), \quad e_2 = \frac{4}{E_2} (1 - \mu_2^2), \quad 1$$

und schließlich mögen r_1, r_2 die Radien der Berührungsflächen beider Körper im spannungslosen Zustande bedeuten (Fig. 62). Wenn beide Krümmungen konvex wären, das heißt beide Krümmungsmittelpunkte auf verschiedenen Seiten der Berührungsfläche lägen (innerhalb der betreffenden Körper), dann hätte man in den folgenden Gleichungen $-r_2$ an Stelle von r_2 zu setzen, doch kommt dieser Fall bei Bogen nicht vor.

Zylindrische Berührungsgelenke (Wälzgelenke). Für zwei kreiszylindrische Druckstücke, die sich im spannungslosen Zustande längs einer Erzeugungslinie berühren, hat man nach Hertz die Breite (senkrecht zur Zylinderachse) der durch einen Normaldruck R auf die wirksame Zylinderlänge l erzeugten rechteckigen Berührungsfläche:

$$b = 2 \sqrt{\frac{e_1 + e_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \frac{R}{\pi l}}, \quad 2$$

und den größten Druck pro Flächeneinheit, welcher unmittelbar unter R eintritt:

$$s = \frac{4}{\pi} \frac{R}{bl}. \quad 3$$

Der größte Druck pro Flächeneinheit ist also $4/\pi$ mal so groß als bei gleichmäßiger Verteilung des Gesamtdruckes R auf die Projektion bl der Berührungsfläche. Mit 2 liefert 3:

$$s^2 = \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{e_1 + e_2} \frac{4R}{\pi l}. \quad 4$$

Bei gleichem Material der beiden Körper folgen aus 2, 4 mit $e_1 = e_2 = \frac{4}{E} (1 - \mu^2)$:

$$b = 4 \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \frac{2R}{\pi E l}}, \quad 5$$

$$s^2 = \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{1 - \mu^2} \frac{ER}{2\pi l}. \quad 6$$

Ist die Berührungsfläche eines der beiden Körper eben (Fig. 63), so er-

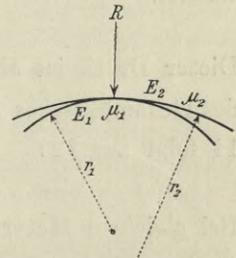


Fig. 62.

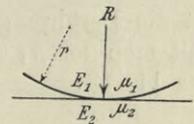


Fig. 63.

¹ Näheres und Literatur über E, μ siehe Luegers Lexikon der gesamten Technik, Artikel Elastizitätsmodul, Elastizitätsquotient.

hält man mit $r_1 = r$, $r_2 = \infty$ bei verschiedenem Material der Körper aus 2, 4:

$$b = 2 \sqrt{(e_1 + e_2) \frac{rR}{\pi l}}, \quad 7$$

$$s^2 = \frac{1}{e_1 + e_2} \frac{4R}{\pi r l}, \quad 8$$

und bei gleichem Material der zwei Körper aus 5, 6:

$$b = 4 \sqrt{(1 - \mu^2) \frac{2rR}{\pi E l}}, \quad 9$$

$$s^2 = \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{ER}{2\pi r l}. \quad 10$$

Natürlich gilt stets auch die allgemeine Gleichung 3. Man kann beispielsweise R in Tonnen, E , s in Tonnen pro qcm, l , r in cm einsetzen.

Sphärische Berührungsgelenke. Für zwei kugelförmige Druckstücke, die sich im spannungslosen Zustande in einem Punkte berühren, liefert die Ableitung von Hertz den Durchmesser der durch einen Normaldruck R erzeugten kreisförmigen Berührungsfläche:

$$a = \sqrt[3]{\frac{e_1 + e_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \frac{3R}{2}} \quad 11$$

und den größten Druck pro Flächeneinheit, der unmittelbar unter R eintritt:

$$s = \frac{6R}{\pi a^2} \quad 12$$

Dieser Druck ist also $3/2$ mal so groß als bei gleichmäßiger Verteilung des Gesamtdruckes R auf die Projektion $\frac{\pi a^2}{4}$ der Berührungsfläche. Mit 11 folgt aus 12:

$$s^3 = \left(\frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{e_1 + e_2} \right)^2 \frac{96R}{\pi^3}. \quad 13$$

Bei gleichem Material der beiden Körper ergeben 11, 13 mit $e_1 = e_2 = \frac{4}{E} (1 - \mu^2)$:

$$a = \sqrt[3]{\frac{1 - \mu^2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \frac{12R}{E}}, \quad 14$$

$$s^3 = \left(\frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{1 - \mu^2} \frac{E}{\pi} \right)^2 \frac{3R}{2\pi}. \quad 15$$

Ist die Berührungsfläche eines der beiden Körper eben (Fig. 63), so erhält man mit $r_1 = r$, $r_2 = \infty$ bei verschiedenem Material der Körper aus 11, 13:

$$a = \sqrt[3]{(e_1 + e_2) \frac{3rR}{2}}, \quad 16$$

$$s^3 = \frac{96R}{(e_1 + e_2)^2 r^2 \pi^3}, \quad 17$$

und bei gleichem Material der zwei Körper aus 14, 15:

$$a = \sqrt[3]{(1 - \mu^2) \frac{12rR}{E}}, \quad 18$$

$$s^3 = \left(\frac{E}{(1 - \mu^2) r \pi} \right)^2 \frac{3R}{2\pi}. \quad 19$$

Selbstverständlich gilt stets auch die allgemeine Gleichung 12. Man kann beispielsweise R in Tonnen, E , s in Tonnen pro qcm, r in cm einsetzen.

Zulässige Beanspruchungen. Bei Verwendung obiger Formeln zur Berechnung von Gelenken und Auflagern ist für s keineswegs die zulässige Druckbeanspruchung pro Flächeneinheit im gewöhnlichen Sinne maßgebend, schon deshalb nicht, weil die Druckstücke nur auf kleinen Teilen ihrer Oberflächen Druck erleiden, in welchem Falle bedeutend größere Kräfte als bei Beanspruchung der ganzen Querschnitte ausgehalten werden, und je nach dem Material die Zerstörung auch durch Zugspannungen erfolgen kann.¹ Da aber letztere bis jetzt nicht bekannt sind, so bleibt nichts übrig als von solchen bekannten Druckkräften oder Formänderungen auszugehen, bei welchen erfahrungsgemäß auch die Zugwiderstände nicht erschöpft wurden. Diesen Weg hat der Verfasser 1894 eingeschlagen, indem er angesichts des damaligen Fehlens direkter Versuche durch Vergleich der Hertzschen Formeln mit den bei ausgeführten Konstruktionen angewandten Regeln feststellte, welche Druckbeanspruchungen s bei letzteren ohne bekannte Nachteile zugelassen waren.² Inzwischen sind Versuche mit Stein und Kugelstahl (§ 15), aber keine mit Eisen und Stahl, wie sie bei Auflagern und Gelenken von Eisenkonstruktionen verwendet werden, hinzugekommen. Vorläufig kann man unter selbstverständlicher Voraussetzung besten Materials etwa verwenden für Gußeisen $s = 3 - 4$ t, für Schweißstahl $s = 4 - 5$ t, für Gußstahl $5 - 7$ t pro qcm. Bei der Abstufung ist zu beachten, daß sphärische Gelenke bezüglich des Zutreffens der angenommenen Druckverteilung günstiger erscheinen als zylindrische Gelenke von erheblicher Länge l .

Ein Hauptvorteil des Stahls gegenüber dem Gußeisen besteht darin, daß er neben großen Druckbeanspruchungen auch große Zugbeanspruchungen aushält, da der Bruch bei Versuchen mit Steingelenkquadranten durch Zugspannungen herbeigeführt wurde (§ 15). Sodann ist wegen der geringeren Formänderungen die Beweglichkeit größer, was allerdings noch mehr bei Rollenlagern als bei Bogengelenken in Betracht kommt. Nach 5 und 14 stehen die Breiten der elastischen Eindrücke für Gußstahl vom Elastizitätsmodul $E_s = 2200$ t und Gußeisen vom Elastizitätsmodul $E_e = 1000$ t pro qcm unter sonst gleichen Bedingungen im Verhältnis:

$$\frac{\sqrt{E_e}}{\sqrt{E_s}} = \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{2200}} = \frac{1}{1,5}.$$

Über die Absolutwerte der Eindrücke siehe Beispiel 15.

¹ Vergl. Luegers Lexikon, Artikel Druckfestigkeit und Festigkeitsbedingung.

² Weyrauch, Über die Berechnung der Brückenaufleger, Zeitschr. d. Arch.- und Ing.-Vereins zu Hannover 1894, S. 131, 571; Luegers Lexikon, Artikel Auflager.

Beispiel 13. Zylindrisches Berührungsgelenk.

Für eiserne Bogenträger mit Kämpfergelenken sollen letztere als Tangentiallager mit zylindrischen Druckstücken hergestellt werden (Fig. 64). Wirksame Länge $l = 118$ cm, Elastizitätsmodul $E = 2150$ t, zulässiger Druck $s = 5,5$ t pro qcm. Wenn nun der größte Kämpferdruck $R = 1180$ t beträgt und der Halbmesser des unteren Druckstücks $r_1 = 50$ cm gewählt ist, den höchstens zulässigen Halbmesser r_2 des oberen Druckstücks zu bestimmen.

Nach § 13, 6) hat man:

$$r_2 = \frac{r_1}{1 - r_1 s^2 (1 - \mu^2) \frac{2 \pi l}{E R}}$$

Diese Gleichung liefert mit den gegebenen l, E, s, R und $\mu = 1/3$:

$$r_2 = \frac{r_1}{1 - r_1 \cdot 5,5^2 \frac{8 \cdot 2 \cdot 3,1416 \cdot 118}{9 \cdot 2150 \cdot 1180}} = \frac{r_1}{1 - 0,007858 r_1},$$

und wenn $r_1 = 50$ cm gewählt wird:

$$r_2 = \frac{50}{0,6071} = 82 \text{ cm.}$$

Im Falle $s = 4$ t unter sonst gleichen Verhältnissen hätten wir erhalten $r_2 = \frac{r_1}{1 - 0,004156 r_1}$ und mit $r_1 = 50$ cm $r_2 = \frac{50}{0,7922} = 63$ cm. Hätten wir beide Halbmesser r_1, r_2 von vornherein angenommen, so würde sich die größte Druckbeanspruchung unmittelbar aus § 13, 6) ergeben haben.

Beispiel 14. Sphärisches Berührungsgelenk.

Bei dem Konkurrenzprojekt „Elastischer Bogen“ zur Bonner Rheinbrücke von Rieppel und Thiersch¹ waren die Kämpfergelenke der Bogenträger durch stählerne Druckstücke mit sich berührenden Kugelflächen verschiedener Radien gebildet (Fig. 64). Wenn nun der größte Kämpferdruck $R = 1180$ t betrug und der Elastizitätsmodul $E = 2150$ t, der zulässige Druck $s = 6$ t pro qcm gesetzt werden, welchen Halbmesser r_2 darf das obere Druckstück höchstens bei $r_1 = 300$ cm Halbmesser des unteren Druckstücks erhalten?

Aus § 13, 15) folgt:

$$r_2 = \frac{r_1}{1 - r_1 (1 - \mu^2) \frac{\pi s}{E} \sqrt{\frac{2 \pi s}{3 R}}},$$

und hieraus mit den gegebenen E, s, R und

$\mu = 1/3$:

$$r_2 = \frac{r_1}{1 - r_1 \frac{8 \cdot 3,1416 \cdot 6}{9 \cdot 2150} \sqrt{\frac{2 \cdot 3,1416 \cdot 6}{3 \cdot 1180}}} = \frac{r_1}{1 - 0,0008042 r_1}.$$

Diese Gleichung liefert für $r_1 = 300$ cm:

$$r_2 = \frac{300}{0,75874} = 395 \text{ cm.}$$

Im Falle $s = 4,5$ t unter sonst gleichen Verhältnissen hätten wir erhalten $r_2 = \frac{r_1}{1 - 0,0005224 r_1}$ und mit $r_1 = 300$ cm $r_2 = \frac{300}{0,84329} = 356$ cm. Hätte man beide Halbmesser r_1, r_2 von vornherein angenommen, so würde sich die größte Druckbeanspruchung s unmittelbar aus § 13, 15) ergeben haben.

Beispiel 15. Elastische Eindrückungen.

Es sollen unter den Voraussetzungen der zwei letzten Beispiele die Breiten der elastischen Berührungsflächen nach Einwirkung des Druckes $R = 1180$ t be-

¹ Zschetzschke, Der Wettbewerb um eine feste Rheinbrücke zwischen Bonn und Beuel, Zeitschr. d. Vereines deutsch. Ingenieure 1895, S. 794 (speziell S. 797).

rechnet werden, wenn anstatt der berechneten Halbmesser die nach unten abgerundeten $r_2 = 80$ cm beziehungsweise $r_3 = 390$ cm gewählt werden.

Man erhält im Falle des Beispiels 13 nach § 13, 5):

$$b = 4 \sqrt{\frac{8 \cdot 50 \cdot 80 \cdot 2 \cdot 1180}{9 \cdot 30 \cdot 3,1416 \cdot 2150 \cdot 118}} = 2,37 \text{ cm},$$

und im Falle des Beispiels 14 nach § 13, 14):

$$a = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 300 \cdot 390 \cdot 12 \cdot 1180}{9 \cdot 90 \cdot 2150}} = 19,67 \text{ cm}.$$

Hätten wir die berechneten r_1, r_2 gewählt, so würden sich b, a noch bequemer aus § 13, 3) und 12) ergeben haben.

Bemerkungen. Hertz hat auch die Annäherung c der Mittelpunkte beider Druckstücke zu bestimmen gesucht. Während c für zylindrische Druckstücke nicht nur von den Vorgängen an der Berührungsstelle, sondern auch wesentlich von der Form der ganzen Körper abhängig ist, und deshalb nicht weiter verfolgt wurde, ergab sich für sphärische Druckstücke mit den Bezeichnungen des § 13:

$$c = \frac{e_1 + e_2}{8a} 3R, \quad 1$$

also speziell bei gleichem Material der beiden Druckstücke wegen $e_1 = e_2 = \frac{4}{E}(1 - \mu^2)$:

$$c = (1 - \mu^2) \frac{3R}{aE}. \quad 2$$

Dies ergibt im Falle des Beispiels 14:

$$c = \frac{8 \cdot 3 \cdot 1180}{9 \cdot 19,67 \cdot 2150} = 0,074 \text{ cm},$$

dabei handelt es sich um einen eisernen Brückenbogen von 166 m Spannweite und 22 m Pfeil der Achse.

§ 14. Bemerkungen betreffend Berührungsgelenke.

Die Tangentiallager, zu welchen im weiteren Sinne auch die Roll-lager und Pendellager gehören, werden bekanntlich bei Balkenträgern sehr häufig angewandt. Bei Bogenträgern spielen sie erst seit Anwendung von Steinbogen mit Gelenken eine Rolle. Es ist dann des nicht vertikalen Auflagerdrucks wegen auf Sicherheit gegen Gleitung Bedacht zu nehmen, worauf besonders neuere Erfahrungen hinweisen. So trat während des Baues der äußeren Maximilianbrücke in München (Gewölbe mit drei Gelenken) an demjenigen Auflager (Fig. 65), bei welchem zur betreffenden Zeit der Richtungswinkel δ des resultierenden Kämpferdruckes mit der Normalen zur anfänglichen Berührungsebene am größten war und die dem Abgleiten des angrenzenden Gewölbeteils widerstehende Transversalkraft T_0 am stärksten in Anspruch genommen wurde, Abgleiten in der Richtung gegen T_0 ein. Bemerkt sei, daß das untere Druck-

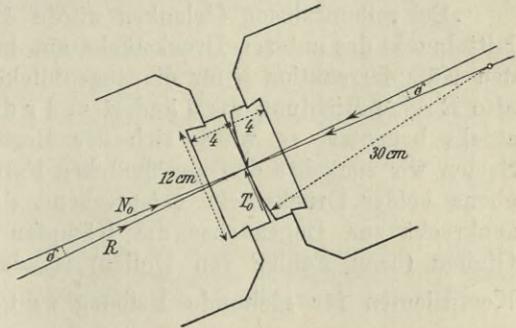


Fig. 65.

stück in der Richtung gegen T_0 ein. Bemerkt sei, daß das untere Druck-

stück eben (Fig. 65), die Reibung durch Schmieren mit Stearin stark herabgesetzt und keine Sicherheit gegen Gleiten geschaffen war. Diese hätte z. B. durch Dollen entsprechend Fig. 66 herbeigeführt werden können. Für den Augenblick des Gleitens ergab eine Berechnung von

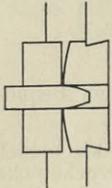


Fig. 66.

Dietz¹ N_0 (Normalkraft N_x für $x = 0$) = 117,80 t, $T_0 = 3,544$ t, $\operatorname{tg} \delta = \frac{T_0}{N_0} = 0,030084$, $\delta = 1^\circ 43' 24''$. Demgegen-

über muß auf die Versuche von Foeppel² hingewiesen werden, welche bei hohen Drücken eine derartige Verringerung der Reibung durch gewisse Schmiermittel, z. B. Stearin, gezeigt haben (§ 17), daß auf Sicherheit gegen Gleiten im vorliegenden Falle nicht mehr zu rechnen war.

Es kommt aber noch ein anderer Gesichtspunkt in Betracht. Ein ebenes Druckstück reagiert, abgesehen von der Reibung, nur senkrecht zur Druckebene; die Richtung des Kämpferdruckes aber ist unabhängig hiervon und ändert sich mit der Belastung. Ein Bogen mit ebenem Druckstück ohne besondere Vorrichtung gegen Gleiten kann also nur infolge der Reibung widerstehen, was schon an sich nicht empfehlenswert ist. Berücksichtigt man ferner, daß die Reibung zur Erzielung einer guten Gelenkwirkung so klein als möglich, zur Sicherung gegen Gleitung aber so groß als möglich sein sollte, so muß eine derartige Anordnung als gänzlich unrationell bezeichnet werden. Bei gekrümmten Druckstücken (Fig. 64) der üblichen Radien ist die Sache meist nicht viel besser, sodaß auch hier Vorsicht am Platze und eventuell eine Vorrichtung gegen Gleiten anzubringen ist. In dem Münchener Falle scheint nur die Gelenkwirkung in Betracht gekommen zu sein, wie aus dem Schmieren mit Stearin trotz fehlender Sicherung gegen Gleiten zu schließen ist. Allerdings waren die einschlagenden Fragen damals noch wenig behandelt, da bei den älteren eisernen Bogen nur Umschließungsgelenke (Zapfengelenke, Kugelgelenke) verwendet wurden.

Bei reibungslosen Gelenken würde die Berührungsstelle stets vom Mittelpunkt des unteren Druckstücks aus in der Richtung der resultierenden Kämpferreaktion R für die augenblickliche Belastung liegen. Wenn also R seine Richtung um δ ändert und r den Radius des unteren Druckstücks bedeutet, so würde sich der Berührungspunkt um $r\delta$ bewegen. Setzen wir zunächst den gewöhnlichen Fall voraus, daß die Berührungsebene beider Druckstücke entsprechend der theoretischen Kämpferfuge senkrecht zur Bogenachse am Kämpfer liegt. Die Sicherheit gegen Gleiten (beim Fehlen von Dollen) ist dann nach dem Verhältnis des Koeffizienten für gleitende Reibung zu $\operatorname{tg} \delta = \frac{T_0}{N_0}$ zu beurteilen. Die Dollen sind durch die Transversalkraft T_0 auf Abscheerung beansprucht. Die Richtung des resultierenden Kämpferdruckes R ist in dem ange-

¹ Dietz, Der Baunfall der äußeren Maximilianbrücke in München, Zeitschr. des Vereines deutsch. Ingenieure 1904, S. 1407.

² Siehe die Fußnote zu § 17.

nommenen Falle $\psi = \varphi + \delta$, unter φ den Winkel der Bogenachse mit der Horizontalen bei 0 verstanden, während man allgemein hat $\operatorname{tg} \psi = \frac{V}{H}$ (§ 1). Man kann also die Berührungsebene beider Druckstücke auch unabhängig von der Bogenachse wählen, beispielsweise senkrecht zur Kämpferreaktion R für Eigengewicht allein oder senkrecht zur Mittellinie zwischen den beiden Grenzrichtungen von R . Zimmermann wählt die Abmessungen so, daß diese Mittellinie mit der Richtung der Bogenachse bei 0 übereinstimmt. Mit Rücksicht auf alle diese Verhältnisse werden wir in der Folge nicht nur, wie üblich, die Grenzwerte von V , H , sondern auch diejenigen von R , T_0 , N_0 , δ , ψ bestimmen (Aufgaben 10, 11, Beispiele 20—25).

§ 15. Versuche mit Berührungsgelenken.

Früher wurden die Gelenke und Auflagervorrichtungen der Brückenträger nach sehr verschiedenen Formeln berechnet, die sämtlich weder genügend theoretisch begründet noch durch Versuche gestützt, ja teilweise sogar im Widerspruch miteinander waren. Als der Verfasser in dem S. 57 angeführten Aufsätze ihre Berechnung auf Grund der Hertzschen Formeln empfahl, fügte er gleich zu Beginn hinzu, „daß zur Bestimmung der in diesen Formeln auftretenden Beanspruchungen Versuche dringend erwünscht wären“ (der Weg, den er einstweilen einschlug, ist S. 57 angedeutet). Hertz hatte eine Anzahl Experimente mit einer Glaslinse gegen eine Glasplatte angestellt, deren Ergebnisse mit den Formeln im Einklang standen; Versuche mit einer Stahlrinne gegen ebene Flächen verschiedener Metalle führten zu Beobachtungsschwierigkeiten. Demgegenüber wurde auf die Notwendigkeit weiterer Versuche hingewiesen, „insbesondere mit Material, Abmessungen und Beanspruchungen, wie sie bei Brückenauflagern vorkommen“. Solche sind inzwischen mit Steinquadern, die bei Gelenken von Gewölben, Betonbogen und Eisenbetonbogen Verwendung finden, zur Ausführung gelangt. Über ihre wichtigsten Ergebnisse soll im folgenden zunächst berichtet werden. Zu beachten ist, daß die Hertzschen Formeln für elastische Deformationen homogenen, isotropen Materials von konstantem Elastizitätsmodul E und konstantem Elastizitätsquoten μ abgeleitet sind, so daß sie für Steine keineswegs genau und am wenigsten bis zum Bruche zu gelten brauchen.

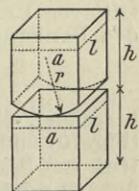


Fig. 67.

Die ersten Versuche sind von Bach¹ mit Granit aus Wunsiedel in Bayern von etwa 1,2—1,6 t pro qcm Druckfestigkeit angestellt worden. Die Versuchsstücke entsprachen Fig. 67 mit annähernd $a = 30$ cm, $l = 20$ cm, $h = 35$ u. 50 cm, sowie den Radien $r = 25, 35, 100$ und 375 cm. Bei verschiedenen Belastungen R , die von meist anfänglich 10 t bis zum Eintritt von Rissen gesteigert wurden, fand Feststellung der Berührungsbreiten b statt. Nach dem Ausdruck § 13, 9)

$$b = 4 \sqrt{(1 - \mu^2) \frac{2 r R}{\pi E l}} \quad 1$$

sollen sich die b bei bestimmten r , l wie die Quadratwurzeln aus den Belastungen R verhalten, was die Versuche genügend bestätigten. Die Risse traten bei folgenden Belastungen R ein, während die Gleichung § 13, 10)

$$s^2 = \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{E R}{2 \pi r l} \quad 2$$

für diese R mit den Mittelwerten $E = 326$ t pro Quadratcentimeter, $\mu = 1/3$ die beigesetzten größten Druckspannungen s ergaben.

¹ Bach, Versuche mit Granitquadern zu Brückengelenken, Zeitschr. d. Vereines deutsch. Ingenieure 1903, S. 1439.

Für	$r = 25$	25	35	35	100	100	375	375	375 cm
und	$l = 20,05$	$20,10$	$20,00$	$20,10$	$20,05$	$20,10$	$20,05$	$20,00$	$20,10$ cm:
	$R = 100$	$92,5$	$94,8$	95	95	100	120	130	150
nach 2)	$s = 3,41$	$3,28$	$3,33$	$2,81$	$2,81$	$1,70$	$1,87$	$1,94$	$1,08$
									$1,09$
									$1,11$ t pro qcm.

Die Bruchbelastungen R waren hiernach nicht proportional den Krümmungshalbmessern r , wie es sein müßte, wenn 2 mit konstanten E, μ bis zum Bruche gelten sollte und eine bestimmte Druckspannung s für den Bruch maßgebend wäre; es wurden im allgemeinen bei kleineren r höhere s als bei großen aus gehalten (Fig. 68). Werden die Bruchbelastungen R als Ordinaten bei den entsprechenden Radien r als Abszissen angetragen, so entspricht in Fig. 69 die obere Kurve im großen und ganzen den Versuchsergebnissen, die strichpunktierte Linie der Gleichung 2 mit bestimmten E, μ, l, s . Die Beobachtung der Risse führte zu dem Schlusse, daß der Bruch nicht durch Druckspannungen, sondern durch Zugspannungen herbeigeführt wurde.

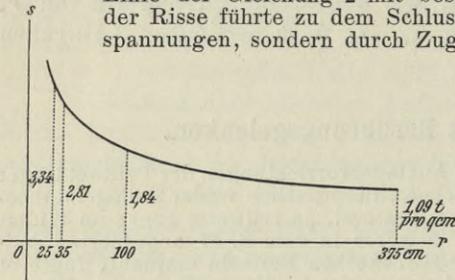


Fig. 68.

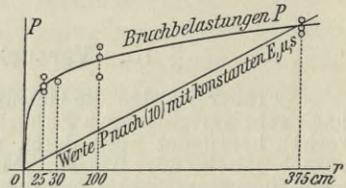


Fig. 69.

Weitere Versuche hat Bach¹ mit Heilbronner Keupersandstein von etwa 0,54—0,62 t pro qcm Druckfestigkeit und 0,23—0,32 t pro qcm Zugfestigkeit ausgeführt. Die Versuchsstücke entsprachen wieder Fig. 67 mit annähernd $a = 10,15, 20$ cm, $l = 15$ cm, $h = 15$ cm und den Radien $r = 10, 20, 40, 100, 375$ und ∞ cm, sie wurden, beginnend mit $R = 5$ oder 10 t, bis zum Eintritt von Rissen belastet. Die den verschiedenen Belastungen R entsprechenden Berührungsbreiten b ergaben sich durch Messung, worauf s aus § 13, 3),

$$s = \frac{4}{\pi} \frac{R}{b l} \quad 3$$

berechnet, die s als Ordinaten bei den zugehörigen R als Abszissen aufgetragen (Fig. 70) und durch Verlängerung der entstehenden Kurven die den R beim Eintritt von Rissen entsprechenden s erhalten wurden. Diese größten Druckspannungen s waren im Mittel von je zwei bis drei Versuchen

für	$r = 10$	20	40	100	375	∞ cm:
	$s = 1,312$	$1,037$	$0,772$	$0,616$	$0,619$	$0,5385$ t pro qcm.

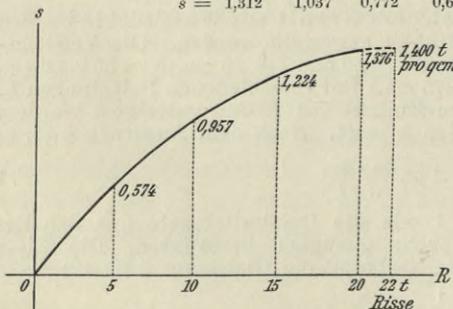


Fig. 70.

Die graphische Darstellung Fig. 71 zeigt, daß die Bruchdruckspannungen s von etwa $r = 100$ cm an nur noch wenig veränderlich waren. Für $r = \infty$ muß s gleich der Druckfestigkeit d sein, die Kurve der s legt sich daselbst asymptotisch an die Horizontale $d = 0,5385$ t. Bach schloß aus diesen Ergebnissen: „Der Genauigkeitsgrad, der technischen Rechnungen dieser Art innewohnt, gestattet deshalb in den meisten Fällen bei Annahme von s — unter Schätzung der zu erwartenden Ab-

weichungen — von der Würfel Festigkeit auszugehen, wenn es sich um Beurtei-

¹ Bach, Versuche mit Sandsteinquadern zu Brückengelenken, Mitteilungen über Forschungsarbeiten, herausgeg. v. Vereine deutsch. Ingenieure, Heft 20, Berlin 1904; Resultate auch Zeitschr. des Ver. deutsch. Ingenieure 1905, S. 1915.

lung der Widerstandsfähigkeit von würfelförmigen Gelenkquadrern in dem hier zur Erörterung stehenden Sinne handelt, wenn also nicht die örtlichen Formänderungen an der Berührungsstelle maßgebend sind.“ Auch aus den Versuchen mit Sandstein war zu schließen, daß die Risse durch Zugspannungen herbeigeführt wurden. Durch Verkleinerung oder Vergrößerung von a (Fig. 67) ohne Änderung von l und h wurde die Widerstandsfähigkeit erniedrigt oder erhöht.

Erwähnung verdienen hier auch die Versuche von Stribeck mit Kugeln aus gehärtetem Gußstahl (Kugelstahl) zu gewissen Lagern des Maschinenbaues. Denn wenn es sich hierbei auch um ein Material und um Verhältnisse handelt, wie sie im Brückenbau nicht vorliegen, so bestätigen die Versuche doch die Zuverlässigkeit der Hertz'schen Formeln und die vom Verfasser aus andern Erfahrungen entnommene Berechtigung, die Druckspannung s bei Tangentiallagern aus Eisen und Stahl weit höher als bei Konstruktionsteilen, die in gewöhnlicher Weise auf Druck beansprucht sind, zu wählen (§ 13).

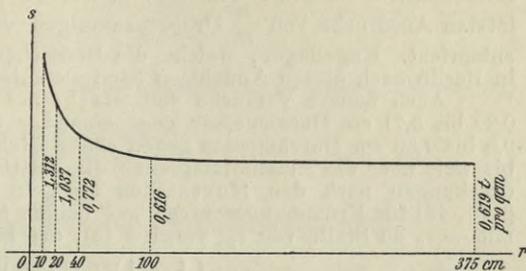


Fig. 71.

Nach § 13, 15) hat man für zwei Kugeln gleichen Materials von Halbmesser r mit $r_1 = r = r_2$:

$$\frac{R}{r^2} = \frac{(1 - \mu^2)^2}{E} \frac{\pi^3 s^3}{6}, \tag{4}$$

und nach § 13, 19) für eine Kugel und eine ebene Platte gleichen Materials, die Kugel vom Halbmesser r :

$$\frac{R}{r^2} = \frac{(1 - \mu^2)^2}{E} \frac{2 \pi^3 s^3}{3}, \tag{5}$$

woneben beidemal die Gleichung § 13, 12) gilt:

$$s = \frac{6 R}{\pi a^2}. \tag{6}$$

In jedem der beiden Fälle sollen also die bestimmten Druckspannungen s entsprechenden $\frac{R}{r^2}$ für beliebige Kugelhalbmesser r von gleichem Werte sein. Dies fand Stribeck¹ bei Versuchen mit Kugeln aus gehärtetem Gußstahl von 0,95 bis 2,86 cm Durchmesser und Platten aus gleichem Material für s gleich der Elastizitätsgrenze in beiden Fällen bestätigt. Für die gleichen Kugeln und Platten wurde die mit der Deformation verbundene Bewegung der beiden Körper gegeneinander gemessen, wobei sich selbst bis weit über die Elastizitätsgrenze hinaus nur geringe Abweichungen gegen entsprechende Formeln von Hertz ergaben (vergl. S. 59).

Gemäß 4 und 5 drückte Stribeck die zulässige Belastung in den obigen Fällen aus:

$$R = c r^2, \tag{7}$$

worin c auf Grund von Versuchen oder sonstigen Erfahrungen bestimmt werden soll. Für den von ihm untersuchten gehärteten Gußstahl (Kugelstahl) wurden ermittelt der Elastizitätsmodul $E = 2120 \text{ t}$ und die Elastizitätsgrenze bei gewöhnlichem Druck von Zylindern 9000 kg pro qcm, womit sich für die wirkliche Beanspruchungsart nach der Mariotte-Ponceletschen Reduktion auf lediglich gedrückte Prismen² eine Elastizitätsgrenze von $9 \cdot 1,92 = 17,28 \text{ t pro qcm}$ ergab. Setzt man nun mit Stribeck $\mu = 0,3$, so liefert 5 beim Drucke von Kugel gegen Platte:

$$\frac{R}{r^2} = \frac{0,91^2 \cdot 2 \cdot 3,1416^3 \cdot s^3}{2120^2 \cdot 3} = \frac{s^3}{262560}$$

¹ Stribeck, Kugellager für beliebige Belastungen, Mitteilungen aus der Zentralstelle für wissenschaftlich-technische Untersuchungen, Heft 1, Neubabelsberg 1900; auch Zeitschr. d. Vereins deutsch. Ingenieure 1901, S. 73, 332.

² Luegers Lexikon der gesamten Technik, Artikel Festigkeitsbedingung.

worin r in cm, s in t pro qcm einzusetzen. Speziell an Elastizitätsgrenze ergibt dies mit $s = 17,28$ t:

$$R = 0,02 r^2 t.$$

Stribeck bemerkt hierzu: „Wollte man jedoch die zulässige Beanspruchung gehärteter Stahlkugeln so niedrig wählen, daß die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird, so käme dies einem Verzicht auf Kugellager für größere Belastungen gleich.“ Mit Rücksicht auf Versuche über die Reibung bei Bewegung der Kugeln in Rinnen wählte er bei ebenen, kegelförmigen und zylindrischen Laufflächen $R = 0,12 r^2$ bis $0,20 r^2$ t, worin r in cm einzusetzen, was nach dem letzten Ausdrucke von $\frac{R}{r^2}$ Druckspannungen von $s = 31,58$ bis $37,45$ t pro qcm entspricht. Kugellager, welche die Deutschen Waffen- und Munitionsfabriken in Berlin nach diesen Annahmen herstellen ließen, haben sich bewährt.

Auch neuere Versuche von Stribeck¹ mit gehärteten Stahlkugeln von 0,32 bis 5,71 cm Durchmesser gegeneinander und ebensolcher Stahlkugeln von 0,5 bis 1,59 cm Durchmesser gegen ebene Stahlplatten ergaben, daß sich selbst bis weit über die Elastizitätsgrenze die elastischen und bleibenden Zusammenrückungen nach den Hertzschen Formeln beurteilen ließen. Die Formel § 13, 15) für Krümmungszentren auf beiden Seiten der Berührungsfläche (also mit $-r_2$ an Stelle von r_2 , vergl. § 13); das heißt:

$$R \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^2 = \left(\frac{1 - \mu^2}{E} \right)^2 \frac{2}{3} \pi s^3$$

genügte bis etwa

$$R \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^2 = 0,8 \quad (\text{für } R \text{ in t, } r_1, r_2 \text{ in cm})$$

und einer mittleren Beanspruchung der Berührungsfläche von $p = \frac{2}{3} s = 39$ t pro qcm, während die Elastizitätsgrenze schon bei sehr viel geringerer Belastung erreicht war. Für die noch größeren Belastungen von Kugeln gegen Kugeln

$$R \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^2 = \begin{matrix} 2 & 4 & 8 & 12 & 16 & 24 & 32 & 48 \\ p = 48,5 & 57 & 66 & 71 & 74 & 78,5 & 81 & 84 \text{ t pro qcm.} \end{matrix}$$

wurden ermittelt

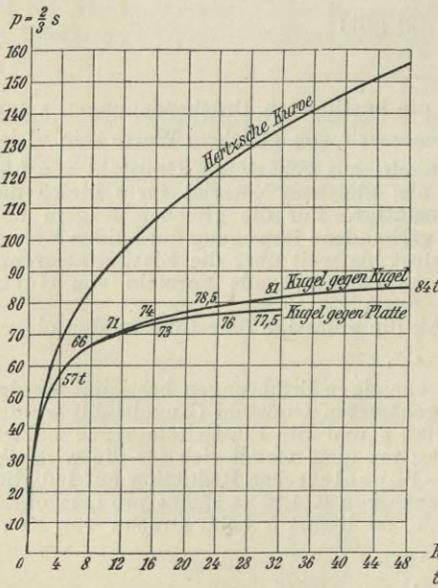


Fig. 72.

Für Kugeln gegen ebene Platten ergaben sich zu Werten $R \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^2 > 0,8$ etwas kleinere mittlere Beanspruchungen p . In Fig. 72 sind die Werte der $p = \frac{2}{3} s$ nach der Hertz'schen Gleichung und den Versuchen dargestellt, die Abweichungen liegen oberhalb der Elastizitätsgrenze. Die gewöhnliche Druckfestigkeit des verwendeten Materials war rund 50 t pro qcm, woraus schon hervorgeht, daß es sich um ein Material handelte, wie es im Brückenbau überhaupt nicht vorkommt. Auch hat man es im Brückenbau nie mit Berührungsgelenken von so kleinen Radien wie die verwendeten zu tun, während bei den Versuchen von Bach mit Granit und Sandstein bei kleinen Radien erheblich größere Druckspannungen s als bei großen ausgehalten wurden (vergl. Fig. 68, 71). Und schließlich pflegt man bei Brückenkonstruktionen, von welchen unbeschränkte Dauer beansprucht wird, nicht über die Elastizitätsgrenze hinauszugehen.

¹ Stribeck, Prüfverfahren für gehärteten Stahl unter Berücksichtigung der Kugelform, Zeitschr. d. Vereines deutsch. Ingenieure 1907, S. 1445, 1500, 1542.

Beispiel 16. Versuche von Deslandres.

Für Gußstahlzylinder gegen Gußeisenplatten wurde von Deslandres¹ auf Grund seiner Versuche über bleibende Formänderungen empfohlen:

$$\frac{R}{r l} = 0,036 \text{ t pro qcm.}$$

Welche zulässige Druckspannung s des Gußeisens würde hieraus folgen?

Nach § 13, 8) und 1) haben wir mit $\mu_1 = \mu_2 = 1/3$:

$$s^2 = \frac{1}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}} \frac{9 R}{8 \pi r l},$$

woraus mit dem gegebenen Wert, wenn daneben $E_1 = 2200 \text{ t}$, $E_2 = 1000 \text{ t}$ pro qcm gesetzt werden:

$$s = \sqrt{\frac{2200 \cdot 1000 \cdot 9 \cdot 0,036}{3200 \cdot 8 \cdot 3,1416}} = 3,0 \text{ t.}$$

§ 16. Berechnung der Umschließungsgelenke.

Für Umschließungsgelenke ist eine Ableitung der Druck- und Deformationsverhältnisse auf Grund der allgemeinen Elastizitätslehre bis jetzt nicht gelungen. Man geht daher, die Reibung vernachlässigend, von der Annahme aus, daß für die in Frage kommenden Körper und elastischen Formänderungen die Zusammendrückungen normal den ursprünglichen Berührungsflächen proportional den sie erzeugenden Normalspannungen gesetzt werden dürfen.

Die beiden Körper von zunächst beliebiger Berührungsfläche seien durch eine äussere Kraft R normal der Berührungsfläche bei ihrem Angriffspunkte gegeneinander gedrückt (Fig. 73). An beliebiger Stelle wo z_1, z_2 die normalen Eindrückungen der zwei Körper, hat man nach obiger Annahme die Normalspannung:

$$N = \frac{z_1}{\alpha} = \frac{z_2}{\beta}, \quad 1$$

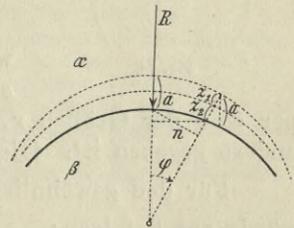


Fig. 73.

unter α, β vom Material abhängige Konstante verstanden. Bezeichnet a den Weg, um welchen die Körper bei der Deformation in der Richtungslinie von R gegeneinander rücken, und φ den Winkel der Normalen zur Berührungsfläche bei N mit der Richtung von R , so hat man (Fig. 73):

$$z_1 + z_2 = a \cos \varphi,$$

und nach Einsetzen von z_1, z_2 nach 1:

$$N = \frac{a \cos \varphi}{\alpha + \beta}. \quad 2$$

Die Normalspannung ist also am größten unmittelbar bei R , wo $\varphi = 0$, und bezeichnet man sie daselbst mit s , so ist nach 2 allgemein

$$N = s \cos \varphi. \quad 3$$

¹ Deslandres, Expériences sur la résistance des rouleaux métalliques, Annales des ponts et chaussées 1893, I, p. 1160.

Der Normaldruck auf ein Flächenelement dF bei N ist NdF , und die parallel R wirkende Komponente desselben:

$$dR = NdF \cdot \cos \varphi = s \cos^2 \varphi \cdot dF,$$

woraus

$$R = s \int \cos^2 \varphi dF. \quad 4$$

Die Integration ist auf die ganze Berührungsfläche zu erstrecken.

Bezeichnet n den Hebelarm der Normalspannung N bezüglich des Angriffspunktes von R , so verlangt das Gleichgewicht gegen Drehung

$$\int NdF \cdot n = s \int \cos \varphi n dF = 0 \quad 5$$

Für eine ebene Berührungsfläche lautet diese Bedingung wegen $\varphi = 0$

$$\int n dF = 0$$

R muß also dann im Schwerpunkte der Berührungsfläche angreifen.

Zylindrische Umschließungsgelenke (Zapfengelenke). Für die anfänglich kreiszylindrische Berührungsfläche sei r der Radius, l die wirksame Länge. Wir wählen $dF = lr d\varphi$ (Fig. 74) und haben dann nach 4:

$$R = srl \int \cos^2 \varphi d\varphi,$$

und wenn die Berührungsfläche auf der ganzen Länge l von $\varphi = -m\pi$ bis $\varphi = m\pi$ reicht:

$$R = srl(m\pi + \sin m\pi \cos m\pi), \quad 6$$

woraus bei einer zulässigen Druckbeanspruchung s des wenigst widerstandsfähigen der beiden Körper eine der Größen r , l berechnet werden kann, wenn neben R die andere gegeben ist. Gleichung 5 ist wegen $n = r \sin \varphi$ ebenfalls erfüllt.

Für den gewöhnlichen Fall, daß genügend angenähert $m\pi = \frac{\pi}{2}$ würde aus 6 folgen:

$$r = \frac{2R}{\pi sl}. \quad 7$$

Da jedoch auf eine Berührung längs der ganzen Fläche nicht allgemein zu rechnen ist, so kann man der Sicherheit wegen etwa setzen $m\pi = \frac{\pi}{4}$, womit abgerundet:

$$r = \frac{4R}{5sl}. \quad 8$$

Dieser Halbmesser ist mindestens zu wählen, wenn s nicht überschritten werden soll. Wenn beispielsweise R in t, l in cm, s in t pro qcm eingesetzt werden, so ergibt sich r in cm. Die Druckspannung s wird man unter den hier vorliegenden Verhältnissen vorläufig etwa wählen können: für Gußeisen 0,9 bis 1,2 t, für Gußstahl 1,5 bis 2 t.

Sphärische Umschließungsgelenke (Kugelgelenke). Für die anfänglich kugelförmige Berührungsfläche sei r der Radius. Wir wählen dF entsprechend einer Kugelzone, welche in der Richtung von R die Höhe dz hat (Fig. 75), erhalten dann mit $dF = 2\pi r dz$, $\cos \varphi = \frac{r-z}{r}$ aus 4:

$$R = - \frac{2 \pi s}{r} \int (r - z)^2 d(r - z),$$

und hieraus, wenn die Berührungsfläche von $z = 0$ bis $z = h$ reicht:

$$R = \frac{2}{3} \pi s r^2 \left[1 - \left(\frac{r-h}{r} \right)^3 \right]. \quad 9$$

Wenn neben dem Drucke R und der zulässigen Druckspannung s des wenigst widerstandsfähigen der beiden Körper noch eine der Größen r, h gegeben ist, kann die andere aus 8 berechnet werden.

Für den gewöhnlichen Fall, daß genügend angenähert $h = r$ ist, würde aus 9 folgen:

$$r = \sqrt{\frac{3 R}{2 \pi s}}. \quad 10$$

Da jedoch auf eine Berührung längs der ganzen Fläche nicht allgemein zu rechnen ist, so kann man der Sicherheit wegen setzen $h = \frac{r}{2}$, womit abgerundet:

$$r = \frac{4}{5} \sqrt{\frac{R}{s}}. \quad 11$$

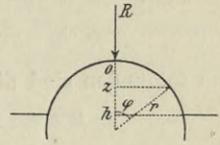


Fig. 75.

Dieser Halbmesser ist mindestens zu wählen, wenn die Beanspruchung s nicht überschritten werden soll. Werden beispielsweise R in t, s in t pro qcm eingesetzt, so ergibt sich r in cm. Für s gilt das oben bei zylindrischen Umschließungsgelenken Gesagte.

Beispiel 17. Umschließungsgelenke (Cannstatter Neckarbrücke).

Für die eisernen Bogen einer Öffnung der neuen Cannstatter Neckarbrücke (VI. Abschnitt) beträgt der resultierende Kämpferdruck im Maximum 235 970 kg, im Minimum 136 780 kg, für Eigengewicht allein bei normaler Temperatur (10^0) 139 470 kg. Die zylindrischen Gelenkstücke der Kämpfergelenke von $r = 6$ cm Halbmesser und $l = 24$ cm wirksamer Länge wie die sie umschließenden Teile des Lagerstuhls bestehen aus hartem Martin Stahl. Die größte Druckspannung s und die mittlere Druckbeanspruchung s_m pro qcm Längsschnitt des Gelenkstücks zu berechnen.

Man hat nach § 15, 8) und unmittelbar:

$$s = \frac{4 R}{5 r l}, \quad s_m = \frac{R}{2 r l},$$

wonach mit den gegebenen Zahlen im Maximum:

$$s = \frac{4 \cdot 235\,970}{5 \cdot 6 \cdot 24} = 1311 \text{ kg}, \quad s_m = \frac{235\,970}{12 \cdot 24} = 819 \text{ kg},$$

im Minimum:

$$s = \frac{4 \cdot 136\,780}{5 \cdot 6 \cdot 24} = 760 \text{ kg}, \quad s_m = \frac{136\,780}{12 \cdot 24} = 475 \text{ kg},$$

für Eigengewicht allein bei normaler Temperatur:

$$s = \frac{4 \cdot 139\,470}{5 \cdot 6 \cdot 24} = 775 \text{ kg}, \quad s_m = \frac{139\,470}{12 \cdot 24} = 484 \text{ kg pro qcm}.$$

§ 17. Reibungsversuche mit Umschließungsgelenken.

Versuche über die Reibung unter hohen Drücken hat in neuerer Zeit Foeppl vorgenommen, wobei sich ergab, daß der Reibungskoeffizient durch gewisse Schmiermittel wie Wachs, Talg, Stearin, Paraffin ganz bedeutend herabgesetzt werden kann, während andere, bei geringeren Drücken im Maschinenbau gebräuchliche Schmiermittel sich als unwirksam erwiesen.

Die meisten Versuche wurden mit einem gewöhnlichen Zapfengelenk nach der Andeutung in Fig. 76 ausgeführt¹. Der Zapfen, von 5 cm Durchmesser und 20 cm wirksamer Länge, war aus Stahl, die Lagerschalen bestanden aus Gußeisen. Die Schalen wurden durch Kräfte bis $R = 60\,000$ kg gegen den Zapfen gedrückt. Mit einem der Köpfe des letzteren war ein Hebel (Schraubenschlüssel) verbunden, dessen freies Ende solange belastet wurde, bis sich der Zapfen drehte. Bezeichnen r den Zapfenradius, l die Hebellänge, P die Belastung am Hebelende, einschließlich eines Zuschlags für das Eigengewicht des Hebels, so wirkt am Zapfenumfang eine drehende Kraft:

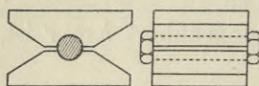


Fig. 76.

$$Q = \frac{Pl}{r}.$$

Die Reibung jeder Lagerschale im Augenblicke des Nachgebens ist halb so groß, wonach der Reibungskoeffizient:

$$f = \frac{Pl}{2rR}.$$

Im folgenden sind die wesentlichen Resultate angeführt.

Druck	$R = 5000$	10 000	20 000	30 000	40 000	50 000	60 000	kg
Ungeschmiert	$Q = 2350$	4470	8630					"
	$f = 0,235$	0,223	0,216					"
Mit Maschinenöl geschmiert	$Q =$	3830	7670					"
	$f =$	0,191	0,192					"
Mit Maschinenfett geschmiert	$Q =$	3420	6470	8870				"
	$f =$	0,171	0,162	0,148				"
Mit Talg geschmiert	$Q =$	304	304	384	384	464	464	"
	$f =$	0,015	0,0075	0,0064	0,0048	0,0046	0,0039	"
Mit Stearin geschmiert	$Q =$	444	524	604	604	604	604	"
	$f =$	0,022	0,013	0,010	0,0075	0,0060	0,0050	"
Mit 1 Talg und 3 Stearin geschmiert	$Q =$	224	184	254	324	384	394	"
	$f =$	0,011	0,0046	0,0042	0,0040	0,0038	0,0033	"
Mit Paraffin geschmiert	$Q =$	124	204	214	214	264	304	"
	$f =$	0,0062	0,0051	0,0036	0,0027	0,0026	0,0025	"

Die harten Schmiermittel Talg, Stearin, Paraffin waren erwärmt mit einem Pinsel aufgetragen worden. Mit zunehmendem Drucke floß ein Teil an den Rändern aus, so daß bei $R = 60\,000$ kg von der 0,8 mm dicken Talgschicht nur noch unter 0,1 mm, von der 0,9 mm dicken Stearinschicht noch etwa 0,25 mm und von der 1,4 mm dicken Talg- und Stearinschicht etwa 0,1 mm blieb. Die Paraffinschicht verhielt sich wie die Talg- und Stearinschicht.

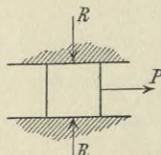


Fig. 77.

Die erhebliche Abnahme des Reibungskoeffizienten geschmierter Flächen mit wachsendem Drucke zeigte sich auch bei Versuchen über gleitende Reibung². Foeppl brachte einen Steinwürfel von 50 qcm Druckfläche, geschmiert mit einer Stearin-Talgmischung 75 : 25, zwischen die Druckflächen einer Festigkeitsmaschine und maß die Kräfte P zum Verschieben bei verschiedenen Drücken. Es ergab sich folgendes:

Druck	$R = 2000$	4000	6000	6830	8000	10 000	kg
" pro qcm	$\frac{R}{50} = 40$	80	120	136,6	160	200	"
Kraft zum Verschieben	$P = 160$	210	250	200	210	250	"
" für eine Fläche	$\frac{P}{2} = 80$	105	125	100	105	125	"
Reibungskoeffizient	$f = \frac{P}{2R} = 0,040$	0,026	0,021	0,0146	0,0131	0,0125	"

¹ Foeppl, Reibung in Brückengelenken, Zentralblatt der Bauverwaltung 1901, S. 197.

² Foeppl, Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der Technischen Hochschule zu München, Heft 27, 1900, S. 20, 33.

Das Ausfließen des Schmiermittels begann bei $R = 6830$ kg, unter den höheren Drucken floß noch nach.

Zu beachten ist selbstverständlich, daß die Wirksamkeit auch der haltbarsten Schmiermittel, wie Paraffin, nicht von unbeschränkter Dauer sein wird.

§ 18. Spezielle Belastungsarten.

Die bis jetzt abgeleiteten Gleichungen gelten für ganz beliebige Belastungen.¹ Alle Gleichungen können in der jetzigen Form auch für stetig verteilte Lasten verwendet werden, wenn man sich diese in einer Anzahl Punkte konzentriert denkt, wie die graphische Statik gewöhnlich verfährt. Man kann jedoch auch spezielle Formeln für stetig verteilte Lasten erhalten. Je nach der Belastung ändern sich dann in unseren allgemeinen Gleichungen nur diejenigen Ausdrücke, welche eben die Lasten enthalten, das heißt die Summen Σ .

Dabei ist zu beachten, daß eine stetig verteilte Last von

$$u = f(a) \quad 1$$

pro Längeneinheit für die Strecke da eine unendlich kleine konzentrierte Last ergibt (Fig. 78):

$$P = u da = f(a) da, \quad 2$$

und eine Summe solcher unendlich kleiner Summanden als Integral bezeichnet wird. Wir haben hiernach z. B. für die Last u von 0 bis x :

$$\Sigma_0^x P = \int_0^x u da = \int_0^x f(a) da,$$

und speziell für eine gleichmäßig verteilte Last wegen konstantem u :

$$\Sigma_0^x P = u \int_0^x da = ux,$$

$$\Sigma_0^x Pa = u \int_0^x a da = \frac{ux^2}{2},$$

$$\Sigma_0^x P(x-a) = u \int_0^x (x-a) da = \frac{ux^2}{2},$$

$$\Sigma_x^l P(l-a) = u \int_x^l (l-a) da = \frac{u}{2}(l-x)^2$$

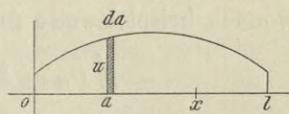


Fig. 78.

sowie für gleichmäßig verteilte Lasten u, u' von 0 bis z bzw. z bis x :

$$\text{wenn } x < z \quad \Sigma_0^x P = u \int_0^x da = ux,$$

¹ Derartige Theorien der Träger für beliebige Belastung mit Behandlung stetig verteilter Lasten als spezielle Fälle konzentrierter Lasten wurden zuerst vom Verfasser gegeben, um nicht für jede Belastung besondere Formeln ableiten zu müssen und die ungünstigsten Belastungen auf einfache Weise zu erhalten. Es wird dann nötig, Summen Σ wie die in diesem § auftretenden auch differenzieren und integrieren zu können und zwar bei veränderlichem x (beliebige Querschnitte) wie bei veränderlichem a (bewegte Radlastzüge). Näheres hierüber siehe Luegers Lexikon der gesamten Technik, Artikel Belastung der Träger, oder in den dort erwähnten Schriften: Weyrauch, Allgemeine Theorie und Berechnung der kontinuierlichen und einfachen Träger, Leipzig 1873, S. 70, 167; Zeitschr. f. Math. und Physik 1873, S. 396, und 1874, S. 547; Theorie der elastischen Bogenträger, Zeitschr. f. Bankunde 1878, S. 31, 367, 549; Theorie der statisch bestimmten Träger f. Brücken und Dächer, Leipzig 1887, §§ 4, 5, 6 usw.

wenn $x > z$
$$\sum_0^x P = u \int_0^z da + u' \int_z^x da = uz + u'(x - z) \text{ usw.}$$

In analoger Weise können andre gesetzmäßig verteilte Lasten behandelt werden.

Da die Verkehrslast bei Bogen entweder aus konzentrierten Lasten besteht (durch Vertikalständer übertragen) oder meist am einfachsten durch eine Anzahl konzentrierter Lasten ersetzt wird, so sollen im folgenden die erwähnten Summenwerte nur für eine über die ganze Spannweite l gleichmäßig verteilte Last und für zwei verschiedene auf je eine Trägerhälfte gleichmäßig verteilte Lasten angegeben werden. Der erste Fall wird häufig für das Eigengewicht der Konstruktion allein und Vollbelastung des ganzen Trägers als zutreffend angenommen (vergl. Beispiel 12), der zweite pflegt besonders bei vorläufigen und sonstigen näherungsweise Berechnungen in Betracht zu kommen.

A. Gleichmäßig verteilte Last auf der ganzen Spannweite l . Dieselbe sei innerhalb der Summengrenzen u pro Längeneinheit Träger, sodaß für die Strecke da bei konstantem u (Fig. 79):

$$P = u da.$$

Wir erhalten damit:

$$\begin{aligned} \sum_0^x P &= ux & \sum_0^x P(x-a) &= \frac{ux^2}{2} \\ \sum_0^x Pa &= \frac{ux^2}{2} & \sum_x^l P(l-a) &= \frac{u(l-x)^2}{2}, \end{aligned}$$

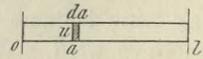


Fig. 79.

wonach beispielsweise für $x = l$ und $x = m = \frac{l}{2}$:

$$\begin{aligned} \sum_0^l Pa &= \frac{ul^2}{2} & \sum_0^l P(l-a) &= \frac{ul^2}{2} \\ \sum_0^m Pa &= \frac{ul^2}{8} & \sum_m^l P(l-a) &= \frac{ul^2}{8}. \end{aligned}$$

Weiter ergeben sich:

$$\begin{aligned} \sum_0^l Pa(l-a) &= \frac{ul^3}{6} & \sum_0^l Pa^2(l-a)^2 &= \frac{ul^5}{30} \\ \sum_0^l Pa(l-a)^2 &= \frac{ul^4}{12} & \sum_0^l Pa^2(l-a) &= \frac{ul^4}{12} \\ \sum_0^l Pa(l-a)^3 &= \frac{ul^5}{20} & \sum_0^l Pa^3(l-a) &= \frac{ul^5}{20} \\ \sum_0^m Pa(l-a) &= \frac{ul^3}{12} & \sum_0^m Pa^2(l-a)^2 &= \frac{ul^5}{60} \\ \sum_0^m Pa^3(l-a) &= \frac{3ul^5}{320} & \sum_0^m Pa(l-a)^3 &= \frac{13ul^5}{320} \\ \sum_0^m Pa(3l^2 - 4a^2) &= \frac{5ul^4}{16} & \sum_0^m Pa^2(3l - 4a) &= \frac{ul^4}{16} \end{aligned}$$

$$\sum_0^l Pa(l-a)(l+a) = \frac{ul^4}{4}$$

$$\sum_0^l Pa(l-a)(2l-a) = \frac{ul^4}{4}$$

$$\sum_0^l Pa(l-a)(l^2+la-a^2) = \frac{ul^5}{5}$$

$$\sum_0^l Pa(l-a)^2(5a-2l) = 0$$

$$\sum_0^l Pa^2(l-a)(3l-5a) = 0$$

$$\sum_0^l Pa(l-a)(l^2+la-a^2-\beta l^2) = \left(1 - \frac{5\beta}{6}\right) \frac{ul^5}{5}$$

$$\sum_0^l Pa(l-a)^2(5a-2l-12\epsilon l) = -\epsilon ul^5$$

$$\sum_0^l Pa^2(l-a)(3l-5a-12\epsilon l) = -\epsilon ul^5.$$

Oft kann die Berechnung einer Summe durch Zerfallung in einfachere Ausdrücke umgangen oder abgekürzt werden. So hat man:

$$\begin{aligned} \sum_0^l Pa(l-a)(l+a+3\zeta l) &= \sum_0^l Pa(l-a)(l+a) + 3\zeta l \sum_0^l Pa(l-a) = \\ &= \frac{ul^4}{4} + 3\zeta l \frac{ul^3}{6} = (1+2\zeta) \frac{ul^4}{4}. \end{aligned}$$

Auch manche der obigen Summen hätten sich so auswerten lassen.

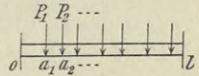


Fig. 80.

B. Gleichmäßig verteilte Last und konzentrierte Lasten. Es sei innerhalb der Summengrenzen g die gleichmäßig verteilte Last pro Längeneinheit (gewöhnlich das Eigengewicht). Die von ihr herührenden Teile der Summen Σ lassen sich aus A entnehmen. Beziehen sich im folgenden die Summen rechts nur noch auf die konzentrierten Lasten, während diejenigen links alle Lasten umfassen, so hat man:

$$\begin{aligned} \sum_0^x P &= gx + \sum_0^x P, & \sum_0^x P(x-a) &= \frac{gx^2}{2} + \sum_0^x P(x-a), \\ \sum_0^x Pa &= \frac{gx^2}{2} + \sum_0^x Pa, & \sum_x^l P(l-a) &= \frac{g(l-x)^2}{2} + \sum_x^l P(l-a) \\ &\text{usw.} & &\text{usw.} \end{aligned}$$

C. Verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten auf der ersten und zweiten Hälfte der Spannweite l . Dieselben mögen pro Längeneinheit betragen:

$$u \text{ von } a = 0 \text{ bis } a = m = \frac{l}{2}, \quad u' \text{ von } a = m = \frac{l}{2} \text{ bis } a = l.$$

Dann hat man auf der Strecke da (Fig. 81, 82):

$$P = u da \text{ von } a = 0 \text{ bis } m, \quad P = u' da \text{ von } a = m \text{ bis } l.$$

Die in Frage kommenden Summenausdrücke nehmen damit folgende Werte an:

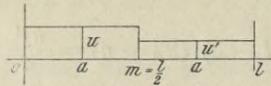


Fig. 81.

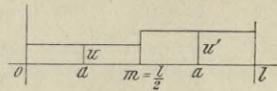


Fig. 82.

Für $x < m$:

$$\sum_0^x P = ux$$

$$\sum_0^x P(x-a) = \frac{ux^2}{2}$$

$$\sum_0^x Pa = \frac{ux^2}{2}$$

$$\sum_x^l P(l-a) = \frac{u(l-x)^2}{2} + \frac{u'-u}{8} l^2,$$

für $x > m$:

$$\sum_0^x P = u'x + \frac{u-u'}{2} l$$

$$\sum_0^x P(x-a) = \frac{u'x^2}{2} + \frac{u-u'}{8} l(4x-l)$$

$$\sum_0^x Pa = \frac{u'x^2}{2} + \frac{u-u'}{8} l,$$

$$\sum_x^l P(l-a) = \frac{u'(l-x)^2}{2}.$$

Hiernach sind beispielsweise

$$\sum_0^l Pa = \frac{u+3u'}{8} l^2$$

$$\sum_0^l P(l-a) = \frac{3u+u'}{8} l^2$$

$$\sum_0^m Pa = \frac{ul^2}{8}$$

$$\sum_m^l P(l-a) = \frac{u'l^2}{8}.$$

Weiter erhalten wir:

$$\sum_0^l Pa(l-a) = \frac{u+u'}{12} l^3$$

$$\sum_0^l Pa^2(l-a)^2 = \frac{u+u'}{60} l^5$$

$$\sum_0^l Pa(l-a)^2 = \frac{11u+5u'}{192} l^4$$

$$\sum_0^l Pa^2(l-a) = \frac{5u+11u'}{192} l^4$$

$$\sum_0^l Pa(l-a)^3 = \frac{13u+3u'}{320} l^5$$

$$\sum_0^l Pa^3(l-a) = \frac{3u+13u'}{320} l^5$$

$$\sum_0^m P(l-2a)^2 = \frac{ul^3}{6}$$

$$\sum_m^l P(l-2a)^3 = \frac{ul^4}{8}.$$

$$\sum_0^l Pa(l-a)(l+a) = \frac{7u+9u'}{64} l^4$$

$$\sum_0^l Pa(l-a)(2l-a) = \frac{9u+7u'}{64} l^4$$

$$\sum_0^l Pa(l-a)(l^2+la-a^2) = \frac{u+u'}{10} l^5$$

$$\sum_0^l P(l-a)(l^2-8la+4a^2) = -\frac{3u+5u'}{16} l^4$$

$$\sum_0^l P(l-a)(l^2-5la+4a^2) = \frac{u-u'}{16} l^4$$

$$\sum_0^l Pa(l-a)^2(5a-2l) = \frac{u'-u}{32} l^5$$

$$\sum_0^l Pa^2(l-a)(3l-5a) = \frac{u-u'}{32} l^5$$

$$\begin{aligned} \sum_0^l P a (l-a) (l^2 + la - a^2 - \beta l^2) &= \left(1 - \frac{5\beta}{6}\right) \frac{u+u'}{10} l^5 \\ \sum_0^l P a (l-a)^2 (5a - 2l - 12 \varepsilon l) &= \frac{u'-u}{32} l^5 - \frac{11u+5u'}{16} \varepsilon l^5 \\ \sum_0^l P a^2 (l-a) (3l - 5a - 12 \varepsilon l) &= \frac{u-u'}{32} l^5 - \frac{5u+11u'}{16} \varepsilon l^5 \\ \sum_0^l P a (l-a) (l+a+3\xi l) &= \frac{7u+9u'}{64} l^4 + \frac{u+u'}{4} \xi l^4. \end{aligned}$$

Auch hier läßt sich die Berechnung der Summen häufig in der am Schlusse von A erwähnten Weise vereinfachen. In praktischen Fällen pflegt $u - u' = \pm p$ zu sein, unter p die Verkehrslast pro Längeneinheit Träger verstanden. Selbstverständlich kann auch eine der Größen u, u' gleich Null sein.

Aufgabe 9. Parabolisch begrenzte Belastung.

Die Werte der Summen

$$\sum_0^x P \quad \sum_0^x P(x-a), \quad \sum_0^x P a \quad \sum_x^l P(l-a)$$

zu berechnen: a) wenn die Last u pro Längeneinheit von 0 bis l entsprechend Fig. 83 durch die Parabelgleichung ausgedrückt ist:

$$u = \frac{4b}{l^2} (l-a) a, \quad 1$$

worin b den Wert von u in der Mitte von l bedeutet; b) wenn die Last u pro Längeneinheit von 0 bis l entsprechend Fig. 84 durch die Gleichung ausgedrückt ist:

$$u = c - \frac{4n}{l^2} (l-a) a \quad \text{mit} \quad n = b - c = e - s, \quad 2$$

wobei e und $s = e + c - b = e - n$ die Werte von u an den Enden und in der Mitte von l bedeuten.

Erster Fall (Fig. 83). Wir haben bei a auf die Länge da :

$$P = u da = \frac{4b}{l^2} (l-a) a da,$$

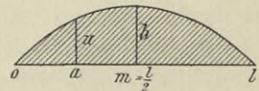


Fig. 83. 3

und erhalten damit:

$$\sum_0^x P = \frac{4b}{l^2} \int_0^x (l-a) a da = \frac{2b}{3l^2} x^3 (3l-2x), \quad 3$$

$$\sum_0^x P(x-a) = \frac{4b}{l^2} \int_0^x (x-a)(l-a) a da = \frac{b}{3l^2} x^3 (2l-x), \quad 4$$

$$\sum_0^x P a = \frac{4b}{l^2} \int_0^x (l-a) a^2 da = \frac{b}{3l^2} x^3 (4l-3x), \quad 5$$

$$\sum_x^l P(l-a) = \frac{4b}{l^2} \int_x^l (l-a)^2 a da = \frac{b}{3l^2} (l-x)^3 (l+3x). \quad 6$$

Diese Ausdrücke gelten selbstverständlich auch für $x = 0, m, l$ und liefern beispielsweise:

$$\sum_0^m P = \frac{bl}{3}, \quad \sum_0^m P a = \sum_m^l P(l-a) = \frac{5bl^2}{48}, \quad 7$$

$$\sum_0^l P = \frac{2bl}{3}, \quad \sum_0^l P a = \sum_0^l P(l-a) = \frac{bl^2}{3}. \quad 8$$

Zweiter Fall (Fig. 84). Die Werte der verlangten Summen für eine gleichmäßig verteilte Last von e pro Längeneinheit Spannweite lassen sich aus § 18 A entnehmen. Mit Rücksicht hierauf und die obigen Ausdrücke 3 bis 8 erhalten wir:

$$\sum_0^x P = e x - \frac{2n}{3l^2} x^2 (3l - 2x), \quad 9$$

$$\sum_0^x P(x-a) = \frac{e x^2}{2} - \frac{n}{3l^2} x^3 (2l - x), \quad 10$$

$$\sum_0^x P a = \frac{e x^2}{2} - \frac{n}{3l^2} x^3 (4l - 3a), \quad 11$$

$$\sum_x^l P(l-a) = \frac{e(l-x)^2}{2} - \frac{n}{3l^2} (l-x)^3 (l+3x), \quad 12$$

und beispielsweise:

$$\sum_0^m P = \frac{e l}{2} - \frac{n l}{3}, \quad \sum_0^m P a = \sum_0^l P(l-a) = \frac{e l^2}{8} - \frac{5 n l^2}{48}, \quad 13$$

$$\sum_0^l P = e l - \frac{2 n l}{3}, \quad \sum_0^l P a = \sum_0^l P(l-a) = \frac{e l^2}{2} - \frac{n l^2}{3}. \quad 14$$

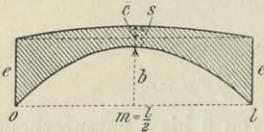


Fig. 84.

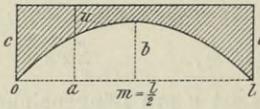


Fig. 85.

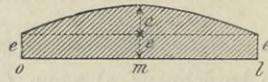


Fig. 86.

Spezielle Fälle der vorliegenden Belastung haben wir mit $s = e$, $c = b$, $n = 0$ (Fig. 79), mit $s = e - b$, $c = 0$, $n = b$ (Fig. 85) und mit $s = e + c$, $b = 0$, $n = -c$ (Fig. 86). Anwendungen siehe Aufgabe 13 und Beispiel 26.

II. Abschnitt.

Besondere Bogenarten.

Besondere Arten von Bogenträgern unterscheiden wir je nach der Anzahl und Anordnung der Auflager und Zwischengelenke (einfache Bogen mit drei Gelenken, zwei Gelenken und ohne Gelenk, durchlaufende Bogen, Bogen mit Zugstange usw.), besondere Formen je nach den Gesetzen der Bogenachse und äußeren Begrenzung (Parabelbogen, Kreisbogen, Sichelbogen usw.), besondere Systeme je nach der Gliederung der Füllung (Blecbogen, Fachwerkbogen einfachen und mehrfachen Systems usw.). Die Voraussetzungen des I. Abschnitts werden aufrecht erhalten. Obwohl die abgeleiteten Formeln auch für Balken gelten, und für nicht horizontale Balken unter Umständen zur Anwendung kommen müssen, so beschränken wir uns doch, dem Zwecke dieser Schrift entsprechend, im folgenden auf Bogenträger.¹ Um die praktische Verwendung des Gegebenen nicht unnötig zu erschweren, führen wir auf Grund der zur Ermittlung statisch unbestimmter Größen (Horizontal-schub H , Endmomente M , M' , Einsenkungen e) nötigen Integrationen zunächst nur die einfacheren Resultate an, und verweisen die Ableitungen selbst in den IV. Abschnitt, wo man sie, wenn Zeit und Lust dazu ausreichen oder ein Bedürfnis dafür eintritt, verfolgen kann. Zu empfehlen ist wenigstens die Durchsicht von § 40. Wir berücksichtigen beliebige feste und bewegte Lasten, beliebige für den ganzen Bogen gleichmäßige Temperaturänderungen und beliebige kleine Bewegungen der Widerlager und Pfeiler. Zwar sollen solche Bewegungen möglichst ausgeschlossen sein, und die erste Berechnung der Bogen wird auch dementsprechend durchgeführt, doch ist es gut, sich vom Einflusse unbeabsichtigter Ausweichungen der Stützpunkte von vornherein Rechenschaft zu geben. Auch kann dem Ingenieur die Frage gestellt werden, welchen Einfluß auf die Beanspruchungen eine tatsächlich eingetretene Bewegung eines Pfeilers oder Widerlagers ausgeübt hat. Aus diesen Gründen wurde der fragliche, nur bei statisch unbestimmten Bogenarten auftretende Einfluß erstmals in der ersten Auflage dieser Schrift in Betracht gezogen. Entsprechende Ableitungen für Bogenfachwerke s. V. Abschnitt.

¹ Über die Behandlung von Balken auf Grund der vorausgegangenen Formeln siehe Weyrauch, Aufgaben zur Theorie elastischer Körper, Leipzig 1885, S. 86–158 (insbesondere die Aufgaben 54, 58).

§ 19. Einfache Bogen mit drei Gelenken.

Der Bogen besitze in der Achse zwei Kämpfergelenke von gleicher Höhenlage¹ und ein Zwischengelenk bei $x = m = \frac{l}{2}$, $y = f$. (Fig. 87). Alsdann hat man in den Gleichungen des § 1:

$$M = M' = M_m = 0, \quad k = 0. \quad 1$$

Für das Moment und die Vertikalkraft in einem beliebigen Querschnitt x liefern die Ausdrücke § 1, 3) 8) und 2) 7):

$$M_x = Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a) = \frac{l-x}{l} \sum_0^x Pa + \frac{x}{l} \sum_x^l P(l-a) - Hy, \quad 2$$

$$V_x = V - \sum_0^x P = -\frac{1}{l} \sum_0^x Pa + \frac{1}{l} \sum_x^l P(l-a). \quad 3$$

Die Vertikalreaktionen der Kämpfer sind nach § 1, 4) 5):

$$V = \frac{1}{l} \sum_0^l P(l-a), \quad V' = \frac{1}{l} \sum_0^l Pa, \quad 4$$

während der Horizontalschub aus 2) mit $x = m$, $y = f$ folgt:

$$H = \frac{1}{2f} \left[\sum_0^m Pa + \sum_m^l P(l-a) \right]. \quad 5$$

Für die Normalkraft im Querschnitt x gilt ohne Änderung:

$$N_x = V_x \sin \varphi + H \cos \varphi, \quad 6$$

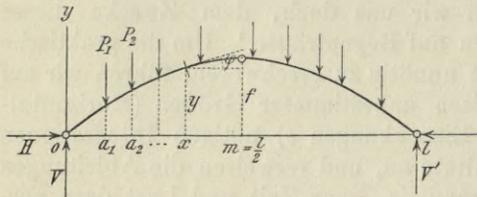


Fig. 87.

auch für die Transversalkraft T_x , die resultierende Schnittkraft R_x , die Normalspannungen σ , σ_o , σ_u , die Schubspannungen τ usw. bleiben die in §§ 1, 8, 9 abgeleiteten Formeln bestehen. Demnach hat man z. B. die Normalspannungen vollwandiger

Bogen von symmetrisch zur Achsschicht angeordneten Querschnitten im obersten und untersten Querschnittselement:

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}, \quad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{W}, \quad 7$$

unter F den nutzbaren Querschnitt, unter W das nutzbare Widerstandsmoment verstanden. Die Werte aller übrigen σ eines Querschnittes liegen zwischen diesen Werten σ_o , σ_u (§ 8).

Verschiedene Formen.

Obige Gleichungen gelten für beliebig geformte Bogen mit gleich

¹ Nachdem im ersten Abschnitt die allgemeinsten Beziehungen gegeben wurden, hat es selbstverständlich keinen Zweck, hier noch einmal Formeln für Fälle anzuführen, welche den meisten Konstrukteuren niemals vorkommen. Sollten beispielsweise einmal die Schnittkräfte und Schnittmomente von Dreigelenkbogen mit ungleich hohen Kämpfergelenken nötig sein, so würden sie aus § 1 ganz wie die hier gegebenen, nur ohne die Substitution $k=0$, hervorgehen. Über Dreigelenkbogen mit beliebig gerichteten (nicht nur vertikalen) Aktivkräften siehe die Aufgaben 1 und 16. Die Kämpferdrucklinien für beide Fälle wurden schon in Aufgabe 3 behandelt.

hohen Kämpfergelenken und in der Mitte liegendem Zwischengelenk. Die Ausdrücke für die Ordinate y und den Neigungswinkel φ der Bogenachse hängen jedoch von der Form der letzteren ab. So hat man bei einer Spannweite l und dem Pfeile f für den Parabelbogen (Fig. 88):

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{4f}{l^2} (l-2x), \quad 8$$

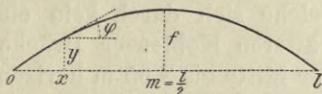


Fig. 88.

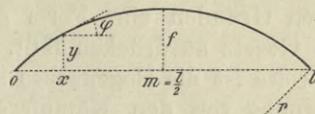


Fig. 89.

für den Kreisbogen (Fig. 89):

$$y = \sqrt{(r-f)^2 + x(l-x)} - (r-f), \quad 9$$

$$\sin \varphi = \frac{m-x}{r}, \quad \cos \varphi = \frac{r-f+y}{r}, \quad 10$$

wobei der Radius

$$r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2}. \quad 11$$

Für den Halbkreisbogen (Fig. 90) ergeben sich wegen $f = r = \frac{l}{2}$:

$$y = \sqrt{x(l-x)}, \quad 12$$

$$\sin \varphi = \frac{r-x}{r}, \quad \cos \varphi = \frac{y}{r}, \quad 13$$

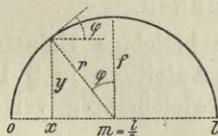


Fig. 90.

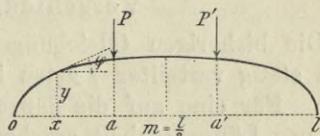


Fig. 91.

während für den Halbellipsenbogen (Fig. 91) gelten:

$$y = \frac{2f}{l} \sqrt{x(l-x)}, \quad 14$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2f^2}{l^2} \frac{l-2x}{y} = \frac{f}{l} \frac{l-2x}{\sqrt{x(l-x)}} \quad 15$$

Für geradlinige Bogen (Fig. 92) hätte man auf der ersten Hälfte:

$$y = \frac{2f}{l} x, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2f}{l}, \quad 16$$

auf der zweiten Hälfte:

$$y = \frac{2f}{l} (l-x), \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{2f}{l}. \quad 17$$

Mit $\operatorname{tg} \varphi$ sind bekanntlich bei allen Formen auch $\sin \varphi$ und

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \quad 18$$

bestimmt, doch genügen stets $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ oder $\operatorname{tg} \varphi$, $\cos \varphi$, da man z. B. N_x anstatt durch 6 ausdrücken kann:

$$N_x = (H + V_x \operatorname{tg} \varphi) \cos \varphi.$$

Die Gleichungen 8—18 gelten auch für Bogen mit zwei Gelenken, ohne Gelenke etc.

Häufig hat man der Bogenachse aus statischen, ästhetischen oder anderen Gründen eine Form gegeben, welche sich durch kein einheitliches Gesetz ausdrücken läßt. Bei der älteren Koblenzer Brücke beispielsweise ist die Bogenachse zwar von der Mitte bis 2,85 m horizontaler Entfernung von den Kämpfergelenken kreisförmig, von hier an jedoch folgt sie tangential anschließenden Geraden. Bei den sichelförmigen Bogen der Maria-Pia-Brücke über den Douro in Portugal wollte man die Gurtungen Parabeln einschreiben (womit auch die Achse parabolisch geworden wäre), es ergaben sich jedoch hierbei gegen die Enden hin zu geringe Höhen für die auftretenden Momente, und so änderte man die Form durch einen freien Linienzug mit Rücksicht auf gefälliges Aussehen ab. Bei Bogenträgern für Bahnhofshallen hat man sich durch Ansprüche an Raumentwicklung und monumentales Aussehen leiten lassen, bei Gewölbebogen ist möglichste Vermeidung von Zugspannungen von Bedeutung, usw.

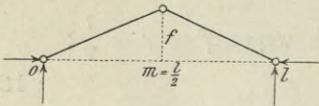


Fig. 92.

Verschiedene Belastungen.

Die bisherigen Gleichungen gelten für beliebige Belastung. Bezüglich stetig verteilter Lasten ist nach der Anleitung in § 18 zu verfahren. Für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit ergeben sich:

$$V = V' = \frac{ul}{2}, \quad H = \frac{ul^2}{8f}, \quad 19$$

damit für beliebige Querschnitte x :

$$V_x = u \left(\frac{l}{2} - x \right), \quad 20$$

$$M_x = \frac{u}{2} \left[x(l-x) - \frac{y^2}{4f} \right], \quad 21$$

und speziell bei parabolischen Bogen wegen 8 und § 1, 13):

$$M_x = 0, \quad T_x = 0. \quad 22$$

Beträgt dagegen die gleichmäßig verteilte Last pro Längeneinheit u auf der ersten, u' auf der zweiten Hälfte der Spannweite, so erhält man:

$$V = \frac{3u + u'}{8} l, \quad V' = \frac{u + 3u'}{8} l, \quad 23$$

$$H = \frac{u + u'}{16f} l, \quad 24$$

womit für beliebige Querschnitte x zwischen 0 und m :

$$V_x = V - ux, \quad 25$$

$$M_x = Vx - Hy - \frac{ux^2}{2}, \quad 26$$

also speziell bei Parabelbogen wegen 8:

$$M_x = \frac{u-u'}{4}x \left(\frac{l}{2} - x \right). \quad 27$$

Für Querschnitte x von m bis l lassen sich ähnliche Formeln angeben, welche aber der Symmetrie wegen im allgemeinen nicht zur Verwendung kommen. Selbstverständlich kann auch eine der Lasten u, u' gleich 0 werden. Bei praktischen Berechnungen pflegt $u - u' = \pm p$ zu sein, unter p die Verkehrslast pro Längeneinheit verstanden.

Für eine beliebige symmetrische Belastung entsprechen je zwei symmetrisch zur Trägermitte bei a, a' gelegenen Lasten P, P' (Fig. 91):

$$P' = P, \quad a' = l - a,$$

sodaß beispielsweise:

$$P(l - a) + P'(l - a') = Pl,$$

$$\sum_0^l P(l - a) = l \sum_0^m P.$$

Wir erhalten also für symmetrische Belastungen nach 4, 5:

$$V = V' = \sum_0^m P, \quad H = \frac{1}{f} \sum_0^m Pa. \quad 28$$

Liegt gerade in der Mitte eine konzentrierte Last, so ist dem Begriffe der Symmetrie gemäß nur die Hälfte derselben in $\sum_0^m P$ aufzunehmen. Für eine Einzellast P bei m folgen also:

$$V = V' = \frac{P}{2}, \quad H = P \frac{l}{4f}. \quad 29$$

Kämpferdrucklinie. Kernlinien.

Die Umhüllungslinien U, U' der Kämpferdrücke sind bei allen Bogen mit Kämpfergelenken Punkte, sie fallen mit den Mittelpunkten der Kämpfergelenke zusammen (§ 2). Die Schnittlinie S der Kämpferdrücke für Dreigelenkbogen wurde schon in Aufgabe 3 festgestellt, wir wollen sie jedoch hier auf anderem Wege ableiten. Nach § 2, 1) hat man als Gleichung der Kämpferdrucklinie S für beliebige Bogen mit Kämpfergelenken in der Achse wegen $M = 0$:

$$b = \frac{V}{H} a, \quad 30$$

worin V, H einer bei a angreifenden Einzellast P entsprechen. Für Dreigelenkbogen mit gleich hohen Kämpfergelenken und Zwischengelenk in der Mitte liefern 4, 5:

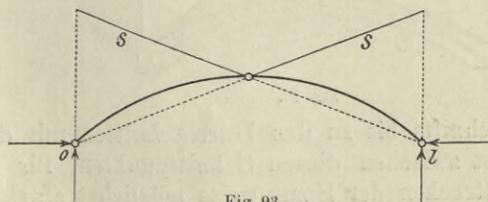


Fig. 93.

$$\begin{aligned} \text{von } a = 0 \text{ bis } a = m & \quad V = P \frac{l-a}{l}, & H = P \frac{a}{2f}, \\ \text{von } a = m \text{ bis } a = l & \quad V = P \frac{l-a}{l}, & H = P \frac{l-a}{2f}. \end{aligned}$$

Daher sind die Ordinaten der Schnittlinie S :

$$\left. \begin{aligned} \text{von } a = 0 \text{ bis } m & \quad b = 2f \frac{l-a}{l}, \\ \text{von } a = m \text{ bis } l & \quad b = 2f \frac{a}{l}. \end{aligned} \right\} 31$$

Die Linie und ihre graphische Ermittlung sind in Fig. 93 angedeutet.

Die Kernlinien bleiben durch § 8 bestimmt, wonach z. B. bei symmetrisch zur Achsschicht liegenden Querschnitt die Entfernungen des oberen und unteren Kernpunktes von der Achse:

$$k_o = k_u = \frac{W}{F}, \quad 32$$

während die Kernlinien bei Bogen mit durchbrochenen Wandungen (Gitterbogen, Bogenfachwerke) oder bei vernachlässigter Füllung mit den Gurtungsschwerlinien zusammenfallen.

Grenzwerte bei bewegter Last.

Will man bei Belastung durch bewegte Radlastzüge möglichst genau rechnen, so ist nach § 12 zu verfahren (Beispiele 9, 11 etc.). In anderen Fällen, insbesondere bei gleichmäßig verteilter, bewegter Last finden die in §§ 10, 11 vorgeführten Methoden Verwendung. Die ungünstigsten Belastungen ergeben sich danach beispielsweise für die Normalspannungen in den obersten und untersten Querschnittselementen, welche bei der Dimensionierung meist allein in Betracht kommen wie folgt:

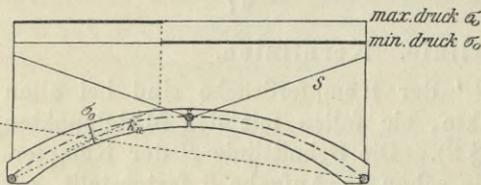


Fig. 94.

Grenzwerte von σ_o (Fig. 94).

Man ziehe aus beiden Kämpfergelenken Gerade durch den unteren Kernpunkt des Querschnitts bis zu den Durchschnitten mit der Linie S ; für max. druck σ_o ist zwischen diesen Schnittpunkten, für min. druck σ_o auf den übrigen Strecken der Spannweite möglichst stark zu belasten.

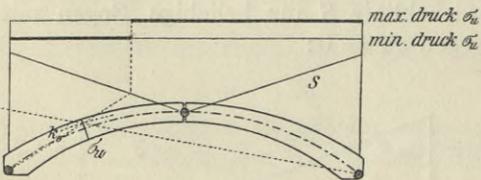


Fig. 95.

Grenzwerte von σ_u (Fig. 95).

Man ziehe aus beiden Kämpfergelenken Gerade durch den oberen Kernpunkt des Querschnitts bis zu den Durchschnitten mit der Linie S ; für min. druck σ_u ist zwischen diesen Schnittpunkten, für max. druck σ_u auf den übrigen Strecken der Spannweite möglichst stark zu belasten.

Vereinfachung (Fig. 96). Will man von der in § 11 besprochenen Vereinfachung Gebrauch machen, durch welche die Bestimmung der Kernlinien vermieden und die Anzahl zu berücksichtigender Belastungsfälle auf etwa die Hälfte reduziert wird, so ist wie folgt vorzugehen: Man ziehe aus beiden Kämpfergelenken Gerade durch den Achspunkt des Querschnitts bis zu den Durchschnitten mit der Linie S ; für max. druck σ_o ,

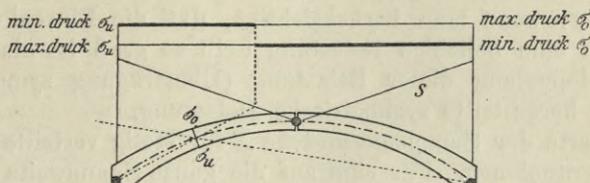


Fig. 96.

und min. druck σ_u ist zwischen diesen Schnittpunkten (wie für max. pos. M_x), für min. druck σ_o und max. druck σ_u auf den übrigen Strecken der Spannweite möglichst stark zu belasten (wie für max. neg. M_x).

Für die Querschnitte unmittelbar bei den Gelenken treten die Grenzwerte von σ_o , σ_u stets (auch nach der genaueren Bestimmung der ungünstigsten Belastungen) bei möglichst starker Belastung der ganzen Spannweite und für die feste Last allein ein.

Formänderungen.

Alle bis jetzt für den Bogen mit drei Gelenken erhaltenen Beziehungen ergaben sich rein statisch, ohne Rücksicht auf die elastischen Formänderungen. Es haben demnach auch bei jenen Bogen, im Gegensatz zu Bogen mit zwei Gelenken und ohne Gelenk (vergl. §§ 20, 21), für je einen ganzen Querschnitt gleichmäßige Temperaturänderungen, wie sie in § 3 zugelassen waren, und kleine Bewegungen der Widerlager keinen in Betracht kommenden Einfluß auf die Beanspruchungen. Da die angeführten Beziehungen für die Dimensionierung genügen, so braucht man bei Bogen mit drei Gelenken nur dann auf die Formänderungen Rücksicht zu nehmen, wenn die letzteren selbst interessieren. Dies trifft am ehesten bezüglich der Einsenkung e in der Trägermitte zu.

Für symmetrische Parabelbogen von konstantem (mittlerem) $c = J \cos \varphi$ ist nach der Ableitung in § 45 die von beliebiger Belastung herrührende Einsenkung in der Trägermitte (über ε siehe unten):

$$e = \frac{1}{48 E c} \left[\sum_0^m P (l - 2a)^3 - l^2 \sum_0^l P (l - a) + \frac{4}{l} \sum_0^l P a (l - a)^3 + \frac{7 + 32\varepsilon}{5} H f l^2 \right]. \quad 33$$

Speziell für eine zur Trägermitte symmetrische Belastung hat man:

$$e = \frac{1}{6 E c l} \left[\sum_0^m P a^3 (l - a) - \frac{3 - 32\varepsilon}{40} l^3 \sum_0^m P a \right]. \quad 34$$

Liegt gerade in der Mitte eine konzentrierte Last, so ist dem Begriffe der Symmetrie entsprechend nur die Hälfte derselben in \sum_0^m aufzunehmen, wonach z. B. für eine Einzellast P in der Trägermitte:

$$e = \frac{1 + 16 \varepsilon}{480} \frac{P l^3}{E c}. \quad 35$$

Von 34 kann auch bei unsymmetrischer Belastung Gebrauch gemacht werden, wenn man berücksichtigt, daß die Einsenkung in der Mitte durch eine beliebige Belastung halb so groß ist als durch eine mittelst Verdoppelung dieser Belastung (Übertragung symmetrisch zur Trägermitte) hergestellte symmetrische Belastung.

Die Werte der Summenausdrücke Σ für stetig verteilte Lasten sind aus § 18 zu entnehmen. Für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit folgt dann aus 34:

$$e = \frac{\varepsilon}{E c} \frac{u l^4}{60}, \quad 36$$

und für verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten von u, u' pro Längeneinheit auf der ersten und zweiten Trägerhälfte aus Gleichung 33:

$$e = \frac{\varepsilon}{E c} \frac{u + u'}{120} l^4. \quad 37$$

Diese Formel führt mit $u' = u$ wieder auf 36, wie man auch umgekehrt von 36 auf 37 hätte schließen können.

Eine Temperaturänderung τ gegen die Normaltemperatur (bei Zunahme τ positiv) bewirkt:

$$e = -\alpha \tau \left(f + \frac{l^2}{4f} \right) \quad 38$$

während einer Änderung Δl der Spannweite (für Zunahme Δl positiv) und einer Änderung Δk der ursprünglich gleichen Höhenlage der Stützpunkte (bei höherer Stütze l ist Δk positiv) entsprechen würde:

$$e = \frac{l \Delta l}{4f} - \frac{\Delta k}{2}. \quad 39$$

In 33—37 wie auch stets in der Folge ist mit r nach 11 ausgedrückt:

$$\varepsilon = \frac{15 \gamma}{8} \left(\frac{r-f}{rf} \right)^2. \quad 40$$

Hierin bedeutet

$$\gamma = \frac{c}{k} = \frac{J \cos \varphi}{F \cos \varphi} \quad 41$$

das Verhältnis der Mittelwerte c, k von $J \cos \varphi$ und $F \cos \varphi$, wofür jedoch mit kaum geringerer Genauigkeit auch der Mittelwert von $J:F$ gesetzt werden kann (§ 42). Ist der Bogen sehr flach, dann ergibt 40 unter Vernachlässigung von f gegen r als Näherungswert:

$$\varepsilon = \frac{15 \gamma}{8 f^2} = \frac{15 J}{8 F f^2}. \quad 42$$

In 40, 42 wäre als γ zu verwenden beispielsweise für Bogen recht-

eckiger Querschnitte der Breiten b und Höhen h , wegen $J = \frac{b h^3}{12}$, $F = b h$, der Mittelwert von
$$\gamma = \frac{h^2}{12}. \tag{43}$$

Für Gitterbogen, Blechbogen etc. könnte unter Vernachlässigung der Füllung mit h Entfernung der Gurtungsschwerpunkte annähernd $J = \frac{F h^2}{4}$ gesetzt und demgemäß als γ verwendet werden der Mittelwert von
$$\gamma = \frac{h^2}{4}. \tag{44}$$

Speziell für genügend flache Bogen ergibt sich dann aus 42 mit einem Mittelwert von h^2 für rechteckige Bogen (Gewölbe, Betonbogen, Eisenbetonbogen):
$$\varepsilon = \frac{5 h^2}{32 f^2} \tag{45}$$

und für Gitterbogen, Blechbogen:
$$\varepsilon = \frac{15 h^2}{32 f^2}. \tag{46}$$

Berücksichtigt man, daß überdies bei ersteren h kleiner als bei letzteren zu sein pflegt, so lassen schon die Ausdrücke 45, 46 erkennen, daß die ε bei Gewölben, Betonbogen und Eisenbetonbogen im allgemeinen wesentlich kleiner als bei Eisenbogen sein werden.

Weiteres über die Formänderungen parabolischer Bogen von konstantem $J \cos \varphi$ enthält § 45. Bezüglich der letzteren Annahme siehe § 42. Über die Formänderungen von Bogen mit beliebiger Achsform und beliebigen Querschnitten geben die §§ 40, 48 Aufschluß. Die Gleichungen 38, 39 gelten für beliebige symmetrische Bögen mit drei Gelenken, einschließlich der Gewölbe und Bogenfachwerke (Aufgabe 14). Vergl. § 48.

Beispiel 18. Gegebene symmetrische Belastung (Donaubrücke bei Inzigkofen).

Für die in Fig. 97 angedeutete Betonbrücke der Donaubrücke bei Inzigkofen in Hohenzollern¹ betrage das Eigengewicht der Brücke pro Meter Breite

bei $a =$	0,9	2,6	4,3	6,0	7,8	9,6	11,5	13,5	15,5	17,5	19,5	21 m
$P =$	10,2	9,6	9,7	9,2	8,6	8,1	7,9	7,4	6,4	5,7	5,3	2,4 t.

Die Lasten auf der zweiten Bogenhälfte liegen bezüglich der Vertikalen durch die Bogenmitte symmetrisch zu den angeführten. Es sollen die von dieser Belastung allein (ohne Verkehrslast) herrührenden Stützenreaktionen V, V', H sowie die Normalspannungen σ_o, σ_u im obersten und untersten Querschnittselement des Kämpferquerschnitts $x = 0$, wo $y = 0$, $\varphi = 17^\circ 6'$, des Querschnitts $x = 10,5$ m, wo $y = 3,4$ m, $\varphi = 12^\circ 24'$ (als Beispiel einer Zwischenfuge) und des Scheitelquerschnitts $x = m = 21,5$, wo $y = f = 4,468$ m, $\varphi = 0$, berechnet werden. Fugenstärken bei $0, x, l$ beziehungsweise $h = 0,70$ m, $1,1$ m und $0,78$ m.

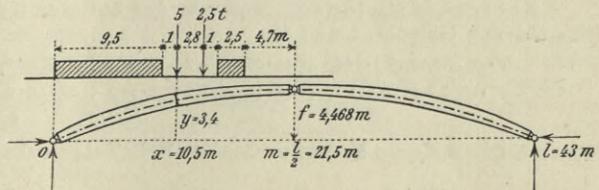


Fig. 97.

¹ Leibbrand, Betonbrücke mit offenen Gelenken über die Donau bei Inzigkofen, Monatschrift d. Württ. Vereins f. Baukunde 1896, S. 65, 73; Zeitschr. f. Bauwesen 1896, S. 279.

Stützenreaktionen. Nach § 19, 23), 29) haben wir bei symmetrischer Belastung die Vertikalreaktionen der Kämpfer und den Horizontalschub:

$$V = V' = \sum_0^m P, \quad H = \frac{1}{f} \sum_0^m P a.$$

Diese Ausdrücke liefern für unseren Fall:

$$V = V' = 10,2 + 9,6 + \dots + 5,3 + 2,4 = 90,500 \text{ t},$$

$$H = \frac{1}{4,468} (10,2 \cdot 0,9 + 9,6 \cdot 2,6 + \dots + 5,3 \cdot 19,5 + 2,4 \cdot 21) = 183,827 \text{ t}.$$

Beanspruchungen. Es gelten die Ausdrücke des § 19 für beliebige Belastung, wie sie im nächsten Beispiel zusammengestellt sind. Wir erhalten darnach für den Kämpferquerschnitt $x = 0$ mit $V_x = V$, $M_x = 0$:

$$N_x = 90,500 \cdot 0,2940 + 183,827 \cdot 0,9558 = 202,309 \text{ t},$$

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{N_x}{b h} = \frac{202309}{100 \cdot 70} = 28,90 \text{ kg/qcm},$$

für den Querschnitt $x = 10,5 \text{ m}$:

$$V_x = 90,50 - 10,2 - 9,6 - 9,7 - 9,2 - 8,6 - 8,1 = 35,100 \text{ t},$$

$$N_x = 35,100 \cdot 0,2147 + 183,827 \cdot 0,9767 = 187,080 \text{ t},$$

$$M_x = 90,500 \cdot 10,5 - 183,827 \cdot 3,4 - 10,2 \cdot 9,6 - 9,6 \cdot 7,9 -$$

$$9,7 \cdot 6,2 - 9,2 \cdot 4,5 - 8,6 \cdot 2,7 - 8,1 \cdot 0,9 = 19,428 \text{ mt},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{100 \cdot 110} \left(187080 + \frac{6}{1,1} 19428 \right) = 26,44 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{100 \cdot 110} \left(187080 - \frac{6}{1,1} 19428 \right) = 7,37 \text{ kg},$$

und für den Scheitelquerschnitt $x = m = 21,5 \text{ m}$, mit $N_x = H$, $M_x = 0$:

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{H}{b h} = \frac{183827}{100 \cdot 78} = 23,57 \text{ kg}.$$

Bemerkungen. Im Hinblick auf ein späteres Beispiel (21) fügen wir noch die Transversalkräfte bei. Die Gleichung § 1, 10):

$$T_x = V_x \cos \varphi - H \sin \varphi \quad \text{liefert}$$

für $x = 0$

$$T_x = 90,500 \cdot 0,9558 - 183,827 \cdot 0,2940 = 32,455 \text{ t},$$

„ $x = 10,5 \text{ m}$

$$T_x = 35,100 \cdot 0,9767 - 183,827 \cdot 0,2147 = -5,186 \text{ t},$$

„ $x = m = 21,5 \text{ m}$

$$T_x = 0, \text{ weil } \sin \varphi = 0 \text{ und bei symmetrischer}$$

Belastung $V_x = 0$.

Beispiel 19. Gegebene beliebige Belastung (Donaubrücke bei Inzigkofen).

Der im vorigen Beispiel behandelte Betonbogen der Donaubrücke bei Inzigkofen sei auf die Breite von 1 m wie in Fig. 97 angedeutet durch Menschengedränge von 0,46 t pro m und Räder einer Straßenwalze belastet. Es sollen die von dieser Verkehrslast allein (ohne das Eigengewicht) herrührenden Stützenreaktionen V , V' , H sowie die Normalspannungen σ_o , σ_u im obersten und untersten Element des Kämpferquerschnitts $x = 0$, des Querschnitts $x = 10,5 \text{ m}$ (als Beispiel einer Zwischenfuge) und des Scheitelquerschnitts $x = m = 21,5 \text{ m}$ berechnet werden.

Stützenreaktionen. Momente der äußeren Kräfte am ganzen Träger in Hinsicht der Gelenke l und 0 :

$$V \cdot 43 - 0,46 (9,5 \cdot 38,25 + 2,5 \cdot 27,45) - 2,5 (2 \cdot 32,5 + 29,7) = 0, \text{ woraus } V = 10,127 \text{ t}$$

$$-V' \cdot 43 + 0,46 (9,5 \cdot 4,75 + 2,5 \cdot 15,55) + 2,5 (2 \cdot 10,5 + 13,3) = 0, \quad \text{„} \quad V' = 2,893 \text{ t}$$

$$0,46 \cdot 12 + 7,5 = 13,020 \text{ t}.$$

Moment der äußeren Kräfte rechts des Scheitelgelenks in Hinsicht des letzteren:

$$-H \cdot 4,468 + V' \cdot 21,5 = 0, \quad \text{woraus} \quad H = 2,893 \frac{21,5}{4,468} = 13,921 \text{ t}.$$

Selbstverständlich hätten wir die Vertikalreaktionen V , V' auch bestimmen können aus den Gleichungen § 19, 4):

$$V = \frac{1}{l} \sum_0^m P(l-a), \quad V' = \frac{1}{l} \sum_0^l P a, \quad 1$$

in welchen die Summen Σ ebenfalls die oben angeschriebenen Momente aller Lasten in Hinsicht der Gelenke l und 0 ausdrücken, und den Horizontalschub auch aus der Gleichung § 19, 5):

$$H = \frac{1}{2l} \left[\sum_0^m P a + \sum_m^l P(l-a) \right], \quad 2$$

worin die Summen Σ das Moment der Lasten zwischen den zwei ersten Gelenken in Hinsicht des Punktes 0 und das Moment der Lasten zwischen den zwei letzten Gelenken in Hinsicht des Punktes l bedeuten.

Beanspruchungen. Nach § 8, 17), 18) hat man für rechteckige Querschnitte der Breite b und Höhe h :

$$\sigma_o = \frac{1}{b h} \left(N_x + \frac{6}{h} M_x \right), \quad \sigma_u = \frac{1}{b h} \left(N_x - \frac{6}{h} M_x \right), \quad 3$$

worin nach § 19 die Vertikalkraft, die Normalkraft und das Moment daselbst:

$$V_x = V - \sum_0^x P, \quad 4$$

$$N_x = V_x \sin \varphi + H \cos \varphi, \quad 5$$

$$M_x = V_x x - H y - \sum_0^x P(x-a). \quad 6$$

Die Summe Σ in 4 bedeutet die Gesamtlast von 0 bis x , diejenige in 6 das Moment dieser Gesamtlast in Bezug auf den Achspunkt des Querschnitts x .

Wir erhalten nun für den Kämpferquerschnitt $x = 0$ mit $V_x = V$, $M_x = 0$:

$$N_x = 10,127 \cdot 0,2940 + 13,921 \cdot 0,9558 = 16,283 \text{ t},$$

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{N_x}{b h} = \frac{16\,283}{100 \cdot 70} = 2,33 \text{ kg/qcm},$$

für den Querschnitt $x = 10,5$ cm:

$$V_x = 10,127 - 0,46 \cdot 9,5 = 5,757 \text{ t},$$

$$N_x = 5,757 \cdot 0,2147 + 13,921 \cdot 0,9767 = 14,832 \text{ t},$$

$$M_x = 10,127 \cdot 10,5 - 13,921 \cdot 3,4 - 0,46 \cdot 9,5 \cdot 5,75 = 33,875 \text{ mt},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{100 \cdot 110} \left(14\,832 + \frac{6}{1,1} 33\,875 \right) = 18,15 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{100 \cdot 110} \left(14\,832 - \frac{6}{1,1} 33\,875 \right) = -15,45 \text{ kg},$$

und für den Scheitelquerschnitt $x = 21,5$ m:

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{H}{b h} = \frac{13\,921}{100 \cdot 78} = 1,78 \text{ kg}.$$

Aufgabe 10. Einflußlinien von Schnittkräften und Normalspannungen.

Für symmetrische Dreigelenkbogen die Einflußlinien des Moments M_x , der Normalkraft N_x , der Transversalkraft T_x und der Normalspannungen σ_o , σ_u im obersten und untersten Querschnittselement beliebiger Querschnitte der ersten Bogenhälfte abzuleiten.

Nach § 12 entsteht die Einflußlinie einer Größe B , wenn an jeder Stelle a als Ordinate b der Beitrag angetragen wird, den eine Last $P = 1$ an dieser Stelle a zu B liefert. Ist der Ausdruck von B für beliebige Lasten P auf dem ganzen Träger bekannt, so ergibt sich die Gleichung der Einflußlinie von B , wenn zu jeder Abszisse a die Ordinate b gleich dem Faktor gemacht wird, mit welchem P für diese Stelle a in jenem Ausdruck von B multipliziert ist. Hiernach wurden bereits für Dreigelenkbogen in § 12 die Einflußlinien der Vertikalreaktionen der Kämpfer auf Grund der Ausdrücke:

$$V = \frac{1}{l} \sum_0^l P(l-a), \quad V' = \frac{1}{l} \sum_0^l P a, \quad 1$$

und in Beispiel 9 die Einflußlinie des Horizontalschubs auf Grund des Ausdrucks

$$H = \frac{1}{2f} \left[\sum_0^m P a + \sum_m^l P (l-a) \right] \tag{2}$$

erhalten; sie sind in Fig. 98 verzeichnet. Bezüglich der resultierenden Kämpferreaktion R siehe Aufgabe 11.

Für das Moment M_x , die Normalkraft N_x und die Transversalkraft T_x gelten nach § 19, 2), 6) und § 1, 10) bei beliebiger Belastung:

$$M_x = V x - H y - \sum_0^x P (x-a), \tag{3}$$

$$N_x = \left(V - \sum_0^x P \right) \sin \varphi + H \cos \varphi, \tag{4}$$

$$T_x = \left(V - \sum_0^x P \right) \cos \varphi - H \sin \varphi. \tag{5}$$

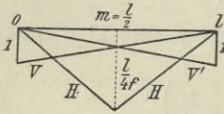


Fig. 98.

Diese Gleichungen liefern mit Rücksicht auf 1, 2 für eine Einzellast $P = 1$ bei a , wenn $a < x$:

$$M_x = \frac{l-a}{l} x - \frac{a}{2f} y - (x-a),$$

$$N_x = \left(\frac{l-a}{l} - 1 \right) \sin \varphi + \frac{a}{2f} \cos \varphi,$$

$$T_x = \left(\frac{l-a}{l} - 1 \right) \cos \varphi - \frac{a}{2f} \sin \varphi,$$

welche Ausdrücke sich etwas zusammenziehen lassen, während die nachstehenden für $a > x$ unmittelbar aus 3 bis 5 mit 1, 2 folgen.

Wir haben als Gleichungen der Einflußlinien, wenn deren Ordinaten b hier zur Unterscheidung wie die zugehörigen Größen selbst bezeichnet werden:

Für M_x	wo $a < x$	$M_x = a \left(\frac{l-x}{l} - \frac{y}{2f} \right),$	}	6
	„ $x < a < m$	$M_x = \frac{l-a}{l} x - \frac{a}{2f} y,$		
	„ $a > m$	$M_x = (l-a) \left(\frac{x}{l} - \frac{y}{2f} \right);$		

für N_x	wo $a < x$	$N_x = a \left(\frac{\cos \varphi}{2f} - \frac{\sin \varphi}{l} \right),$	}	7
	„ $x < a < m$	$N_x = \frac{l-a}{l} \sin \varphi + \frac{a}{2f} \cos \varphi,$		
	„ $a > m$	$N_x = (l-a) \left(\frac{\sin \varphi}{l} + \frac{\cos \varphi}{2f} \right);$		

für T_x	wo $a < x$	$T_x = -a \left(\frac{\cos \varphi}{l} + \frac{\sin \varphi}{2f} \right),$	}	8
	„ $x < a < m$	$T_x = \frac{l-a}{l} \cos \varphi - \frac{a}{2f} \sin \varphi,$		
	„ $a > m$	$T_x = (l-a) \left(\frac{\cos \varphi}{l} - \frac{\sin \varphi}{2f} \right).$		

Die Einflußlinien von M_x, N_x, T_x bestehen hiernach im allgemeinen (für beliebige x) aus je drei geraden Strecken (von 0 bis x , x bis m und m bis l), sodaß es genügt, die Ordinaten an den Enden dieser Strecken festzustellen. Es zeigt sich dann, wie schon obige Ausdrücke entnehmen lassen, daß man bei x zwei verschiedene Ordinaten der Einflußlinien von N_x, T_x erhält, wonach daselbst Unstetigkeiten dieser Einflußlinien auftreten. In vorstehenden Gleichungen hat man beispielsweise für den Kämpferquerschnitt $x = 0, y = 0$, für den Scheitelquerschnitt $x = m = \frac{l}{2}, y = f, \sin \varphi = 0, \cos \varphi = l$, womit bedeutende Vereinfachungen entstehen. Das Moment M_x ist in diesen Querschnitten immer gleich Null.

Für die Normalspannungen im obersten und untersten Element symmetrisch zur Achsschicht angeordneter Querschnitte hat man bei beliebiger Belastung nach § 8, 11):

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}, \quad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{W}, \quad 9$$

und beispielsweise für rechteckige Querschnitte der Breite b und Höhe h nach § 8, 17), 18):

$$\sigma_o = \frac{1}{b h} \left(N_x + \frac{6}{h} M_x \right), \quad \sigma_u = \frac{1}{b h} \left(N_x - \frac{6}{h} M_x \right), \quad 10$$

während für unsymmetrisch zur Achsschicht angeordnete Querschnitte die Formeln § 8, 9) gelten würden. Diese Ausdrücke bilden auch die Gleichungen der Einflußlinien von σ_o , σ_u , wenn für M_x , N_x die Werte 6, 7 eingesetzt werden. Auch die Einflußlinien von σ_o , σ_u bestehen also im allgemeinen (bei beliebigen x) aus je drei geraden Strecken (von 0 bis x , x bis m , m bis l) und sie enthalten wie diejenigen von N_x , T_x bei x Unstetigkeiten.

Spezielle Fälle der hier behandelten Einflußlinien sind im nächsten Beispiel berechnet und in Fig. 99 und 100 verzeichnet.

Beispiel 20. Bestimmungen der Einflußlinien von Schnittkräften und Normalspannungen (Donaubücke bei Inzigkofen).

Für den in den Beispielen 18 und 19 behandelten Dreigelenkbogen der Inzigkofener Brücke von $l = 43$ m Spannweite und $f = 4,468$ m Pfeil der Achse (also $\frac{l}{4f} = 2,406$) die Einflußlinien folgender Größen zu bestimmen: a) der Normalkraft N_x und Transversalkraft T_x für den Kämpferquerschnitt $x = 0$ und den Scheitelquerschnitt $x = m$; b) der Normalkraft N_x , des Moments M_x und der Normalspannungen σ_o , σ_u im obersten und untersten Element des Querschnitts $x = 10,5$ m.

a) Nach den Gleichungen 7 und 8 der letzten Aufgabe hat man für $x = 0$ allgemein und in unserem Falle mit $\varphi = \varphi_o = 17^\circ 6'$ die Ordinaten der Einflußlinie von $N_x = N_o$:

$$\begin{aligned} \text{bei } a = 0 & N_o = \sin \varphi_o = 0,2940, \\ \text{„ } a = m = \frac{l}{2} & N_o = \frac{\sin \varphi_o}{2} + \frac{l \cos \varphi}{4 f} = \frac{0,2940}{2} + 2,406 \cdot 0,9558 = 2,4466, \\ \text{„ } a = l & N_o = 0, \end{aligned}$$

und die Ordinaten der Einflußlinie von $T_x = T_o$:

$$\begin{aligned} \text{bei } a = 0 & T_o = \cos \varphi_o = 0,9558, \\ \text{„ } a = m = \frac{l}{2} & T_o = \frac{\cos \varphi_o}{2} - \frac{l \sin \varphi_o}{4 f} = \frac{0,9558}{2} - 2,406 \cdot 0,2940 = -0,2295, \\ \text{„ } a = l & T_o = 0. \end{aligned}$$

Für $x = m$ ist wegen $\varphi = 0$ stets $N_x = H$, daher die Einflußlinie von $N_x = N_m$ gleich der in der vorigen Aufgabe erwähnten und in Fig. 98 verzeichneten Einflußlinie von H . Aus den Gleichungen 8 der vorigen Aufgabe folgen die Ordinaten der Einflußlinie von $T_x = T_m$ allgemein:

$$\begin{aligned} \text{bei } a = 0 & T_m = 0, \\ \text{„ } a = m = \frac{l}{2} & T_m = -\frac{1}{2} \text{ und } \frac{1}{2}, \\ \text{„ } a = l & T_m = 0. \end{aligned}$$

Die vier Linien sind in Fig. 99 verzeichnet.

b) Aus den Formeln 6, 7 der vorigen Aufgabe ergeben sich die Gleichungen der Einflußlinien von M_x , N_x bei $x = 10,5$ m, wo $y = 3,4$ cm, $\varphi = 12^\circ 24'$:

$$\begin{aligned} \text{für } a < 10,5 \text{ m} & M_x = a \left(\frac{32,5}{43} - \frac{3,4}{2 \cdot 4,468} \right) = 0,3753 a, \\ & N_x = a \left(\frac{0,9767}{2 \cdot 4,468} - \frac{0,2147}{43} \right) = 0,1043 a; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{für } 10,5 < a < m & M_x = 10,5 - \frac{10,5}{43} a - \frac{3,4}{2 \cdot 4,468} a = 10,5 - 0,6247 a, \\ & N_x = 0,2147 - \frac{0,2147}{43} a + \frac{0,9767}{2 \cdot 4,468} a = 0,2147 + 0,1043 a. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 10 der vorigen Aufgabe ergeben als Einflußlinien der Normal-

spannungen σ_o, σ_u pro qcm bei $x = 10,5$ m, wo $h = 110$ cm, wenn die Lasten bei Er-

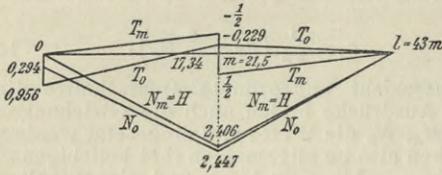


Fig. 99.

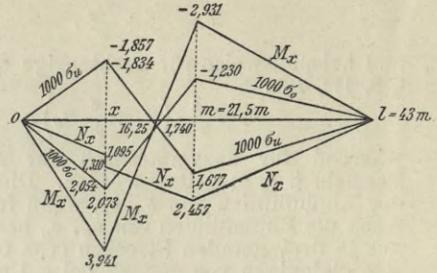


Fig. 100.

mittlung der wirklichen σ_o, σ_u auf die Breite $b = 100$ cm bezogen werden

$$\sigma_o = \frac{1}{11\,000} \left(N_x + \frac{6}{1,1} M_x \right), \quad \sigma_u = \frac{1}{11\,000} \left(N_x - \frac{6}{1,1} M_x \right).$$

Hierin sind M_x, N_x wie oben ausgedrückt. Setzt man sie ein (was zur Aufzeichnung der Einflußlinien nicht allgemein erforderlich wäre), so lauten die Gleichungen der Einflußlinien:

für $a < 10,5$ m $\quad 1000 \sigma_o = 0,1956 a,$
 $\quad 1000 \sigma_u = -0,1766 a;$
 für $10,5 < a < m$ $\quad 1000 \sigma_o = 5,2261 - 0,3003 a,$
 $\quad 1000 \sigma_u = -5,1871 + 0,3193 a.$

Nach den Gleichungen unter b) erhält man

die Ordinaten der Einflußlinien für	N_x	M_x	$1000 \sigma_o$	$1000 \sigma_u$
bei $a = 0$	0	0	0	0
unmittelbar vor $a = x = 10,5$ m	1,095	3,941	2,054	-1,854
„ nach $a = x = 10,5$ „	1,310	3,941	2,073	-1,834
bei $a = m = 21,5$ m	2,457	-2,931	-1,230	1,677
während bei $a = l = 43$ m	0	0	0	0

Die vier Linien sind in Fig. 100 verzeichnet.

Beispiel 21. Einflußlinien und Grenzwerte von Gelenkkräften und Normalspannungen (Donaubrücke bei Inzigkofen).

Die in den Beispielen 18, 19, 20 behandelte Donaubrücke bei Inzigkofen werde pro Meter Breite auf beliebige Strecken der Spannweite durch die in Fig. 97 angedeuteten Radlasten einer Straßenwalze und um 1 m davon beginnendes Menschengedänge von 0,46 t pro m belastet. Unter Verwendung der Einflußlinien des vorigen Beispiels zu berechnen: a) die von dieser Verkehrslast allein herrührenden Grenzwerte der Vertikalreaktionen V der Kämpfer, des Horizontalschubs H sowie der Normalkraft N_x und Transversalkraft T_x im Kämpferquerschnitt und Scheitelquerschnitt; b) die von der gleichen Verkehrslast allein herrührenden Grenzwerte der Normalspannungen σ im Kämpferquerschnitt, im Scheitelquerschnitt und im beliebigen Querschnitt $x = 10,5$ m; c) die Grenzwerte der unter a) und b) erwähnten Größen durch die obige Verkehrslast und das in Beispiel 18 angenommene Eigengewicht der Brücke.

Für jede der verlangten Größen ist der Beitrag beliebiger Lasten P an Stellen, wo b die Ordinaten ihrer Einflußlinien:

$$B = \Sigma P b, \quad 1$$

und der Beitrag einer gleichmäßig verteilten Last von p pro Längeneinheit auf Strecken, zu welchen die Einflußfläche F gehört:

$$B = p F. \quad 2$$

Die b, F können aus der Figur entnommen oder berechnet werden. Da das erste Verfahren nach dem in § 12 Gesagten keiner Erklärung weiter bedarf, so wollen wir das zweite wählen, bei dem man ohne eine genaue Figur aus-

kommen kann. Die Laststellungen sind selbstverständlich mit Rücksicht auf den Verlauf der Einflußlinie zu wählen (§ 12).

a) Kräfte durch die Verkehrslast. Größte Vertikalreaktion des Kämpfers 0 bei Belastung von 0 bis l , schwerstes Rad bei 0, das andere nach 0:

$$V = 5 + 2,5 \frac{40,2}{43} + 0,46 \frac{39,2^2}{2 \cdot 43} = 15,556 \text{ t},$$

kleinster Wert $V = 0$. Größter Horizontalschub bei Belastung von 0 bis l , schwerstes Rad bei m , das andere vor oder nach m :

$$H = 2,406 \left(5 + 2,5 \frac{18,7}{21,5} \right) + 0,46 \frac{2,406}{2 \cdot 21,5} (17,7^2 + 20,5^2) = 36,142 \text{ t},$$

kleinster Wert $H = 0$.

Größte Normalkraft im Kämpferquerschnitt 0 bei Belastung von 0 bis l , schwerstes Rad bei m , das andere vor m :

$$N_0 = 2,447 \left(5 + 2,5 \frac{21,69}{24,49} \right) + 0,46 \left(0,294 \cdot 17,7 + 2,153 \frac{17,7^2}{2 \cdot 21,5} + 2,447 \frac{20,5^2}{2 \cdot 21,5} \right) = 38,264 \text{ t},$$

kleinster Wert $N_0 = 0$. Größte positive Transversalkraft im Kämpferquerschnitt 0 (von unten nach oben wirkend, bei Berührungsgelenken entgegen der auf Abgleiten von oben nach unten wirkenden Kraft, § 14) bei Belastung von 0 bis 17,34 m, schwerstes Rad bei 0, das andere nach 0:

$$T_0 = 0,956 \left(5 + 2,5 \frac{14,54}{17,34} \right) + 0,46 \cdot 0,956 \frac{13,54^2}{2 \cdot 17,34} = 9,109 \text{ t}.$$

Größte negative Transversalkraft im Kämpferquerschnitt 0 (von oben nach unten wirkend, bei Berührungsgelenken eventuell entgegen der auf Abgleiten von unten nach oben wirkenden Kraft, § 14) bei Belastung von 17,34 m bis l , schwerstes Rad bei m , das andere nach m :

$$T_0 = -0,229 \left(5 + 2,5 \frac{18,7}{21,5} \right) - 0,46 \cdot 0,229 \left(\frac{3,16^2}{2 \cdot 4,16} + \frac{17,7^2}{2 \cdot 21,5} \right) = -2,537 \text{ t}.$$

Die Normalkraft im Scheitelquerschnitt ist stets $N_m = H$. Größte positive Transversalkraft im Scheitelquerschnitt bei Belastung von m bis l , schwerstes Rad bei m , das andere nach m :

$$T_m = 0,5 \left(5 + 2,5 \frac{18,7}{21,5} \right) + 0,46 \cdot 0,5 \frac{17,7^2}{2 \cdot 21,5} = 5,263 \text{ t}.$$

Größte negative Transversalkraft im Scheitelquerschnitt bei Belastung von 0 bis m , schwerstes Rad bei m , das andere vor m :

$$T_m = -5,263 \text{ t}.$$

b) Normalspannungen durch die Verkehrslast. Auf den Kämpferquerschnitt und Scheitelquerschnitt sind die Normalkräfte stets gleichmäßig verteilt (die Gelenke in der Bogenachse vorausgesetzt). Wir erhalten mit den Grenzwerten der letzteren die Grenzwerte der Normalspannungen im Kämpferquerschnitt:

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{N_0}{b \cdot h} = \frac{38 \ 264}{100 \cdot 70} = 5,47 \text{ kg pro qcm}, \quad \sigma_o = \sigma_u = 0,$$

im Scheitelquerschnitt:

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{H}{b \cdot h} = \frac{36 \ 142}{100 \cdot 78} = 4,63 \text{ kg pro qcm}, \quad \sigma_o = \sigma_u = 0.$$

Für den beliebigen Querschnitt $x = 10,5$ m ergeben sich die Grenzwerte der Normalspannungen σ_o , σ_u im obersten und untersten Querschnittselement wie folgt. Größtes positives σ_o bei Belastung von 0 bis 17,40 m, schwerstes Rad bei x das andere vor x :

$$\sigma_o = 2,054 \left(5 + 2,5 \frac{7,7}{10,5} \right) + 0,46 \left(2,054 \frac{6,7^2}{2 \cdot 10,5} + 2,073 \frac{5,9^2}{2 \cdot 6,9} \right) = 18,46 \text{ kg}.$$

Größtes negatives σ_o bei Belastung von 17,40 m bis l , schwerstes Rad bei m , das andere nach m :

$$\sigma_o = -1,230 \left(5 + 2,5 \frac{18,7}{21,5} \right) - 0,46 \cdot 1,230 \left(\frac{3,10^2}{2 \cdot 4,10} + \frac{17,7^2}{2 \cdot 21,5} \right) = -13,61 \text{ kg}.$$

Größtes positives σ_u bei Belastung von 16,25 m bis l , schwerstes Rad bei m das andere nach m :

$$\sigma_u = 1,677 \left(5 + 2,5 \frac{18,7}{21,5} \right) + 0,46 \cdot 1,677 \left(\frac{4,25^2}{2 \cdot 5,25} + \frac{17,7^2}{2 \cdot 21,5} \right) = 18,98 \text{ kg.}$$

Größtes negatives σ_u bei Belastung von 0 bis 16,25 m, schwerstes Rad bei x , das andere vor x :

$$\sigma_u = -1,854 \left(5 + 2,5 \frac{7,7}{10,5} \right) - 0,46 \left(1,854 \frac{6,7^2}{2 \cdot 10,5} + 1,834 \frac{4,75^2}{2 \cdot 5,75} \right) = -16,15 \text{ kg.}$$

c) Grenzwerte durch Eigengewicht und Verkehrslast. Diese ergeben sich durch Addition der obigen Grenzwerte durch die Verkehrslast allein und der in Beispiel 18 berechneten Werte durch das Eigengewicht allein. Man erhält für die Vertikalreaktionen der Kämpfer und den Horizontalschub:

$$\begin{aligned} V &= 90,500 + 15,556 = 106,06 \text{ t,} & V &= 90,50 \text{ t,} \\ H &= 183,827 + 36,142 = 219,97 \text{ t,} & H &= 183,83 \text{ t,} \end{aligned}$$

für die Normalkraft und Transversalkraft im Kämpferquerschnitt:

$$\begin{aligned} N_0 &= 202,309 + 38,264 = 240,57 \text{ t,} & N_0 &= 202,31 \text{ t,} \\ T_0 &= 32,455 + 9,109 = 41,56 \text{ t,} & T_0 &= 32,455 - 2,537 = 29,92 \text{ t,} \end{aligned}$$

für die Transversalkraft im Scheitelquerschnitt:

$$T_m = 5,26 \text{ t,} \quad T_m = -5,26 \text{ t.}$$

Ferner für die Normalspannungen im Kämpferquerschnitt:

$$\sigma_o = \sigma_u = 28,90 + 5,47 = 34,37 \text{ kg,} \quad \sigma_o = \sigma_u = 28,90 \text{ kg,}$$

im Scheitelquerschnitt:

$$\sigma_o = \sigma_u = 23,57 + 4,63 = 28,20 \text{ kg,} \quad \sigma_o = \sigma_u = 23,57 \text{ kg,}$$

im beliebigen Querschnitt $x = 10,5$ m:

$$\begin{aligned} \sigma_o &= 26,44 + 18,46 = 44,90 \text{ kg,} & \sigma_o &= 26,44 - 13,61 = 12,83 \text{ kg,} \\ \sigma_u &= 7,37 + 18,98 = 26,35 \text{ kg,} & \sigma_u &= 7,37 - 16,15 = -8,78 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Die erhebliche Zugbeanspruchung bei $x = 10,5$ m läßt erkennen, daß man gerade bei Bogen aus Beton und Stein allen Grund hat, die Grenzwerte der Normalspannungen möglichst genau oder eher zu ungünstig zu berechnen, da sonst leicht größere Zugspannungen auftreten können, als man zulassen wollte. Im vorliegenden Falle werden die berechneten Zugspannungen nicht ganz erreicht, weil die Belastung durch Menschengedränge im Einklange mit der ursprünglichen Berechnung nach oben abgerundet und für dieses erste Beispiel eine konstante Bogenbreite von 3,6 m vorausgesetzt wurde (im Gegensatz zu Beispiel 22), während die Breite in Wirklichkeit von 3,6 m im Scheitel bis 4,6 m bei den Kämpfern zunimmt.

Beispiel 22. Berechnung eines Bogens mit drei Gelenken (Verhältnisse des Gewölbes der Pruthbrücke bei Jaremcze).

Für das Gewölbe der Pruthbrücke bei Jaremcze (§ 27) beträgt die Spannweite $l = 67,62$ m, der Pfeil der Bogenachse $f = 18,1215$ m (Lichtweite 65 m, Pfeil der Gewölbelaibung 17,9 m). Gewölbstärke im Scheitel 2,1 m, bei den Kämpfern 3,1 m, die Lagerfugen können als senkrecht zur Bogenachse gelten. Brückenbreite im Bahnplanum 4,5 m, Anlauf der Stirnmauern beiderseits $\frac{1}{20}$, sodaß nach unten zunehmende Breiten der Lagerfugen entstehen. Radius der Gewölbelaibung 38,454 m, des Gewölberückens 42,792 m. Bei der Berechnung wurden die Bogenachse ebenfalls kreisförmig und die in den Kolonnen 6 und 8 der Tabelle des Beispiels 44 angeführten festen Lasten angenommen.¹ Es sollen unter diesen Voraussetzungen, jedoch für den Fall, daß an den Kämpfern und im Scheitel Gelenke angebracht wären, die Kämpferreaktionen und Beanspruchungen σ_o , σ_u in den obersten und untersten Querschnittselementen berechnet werden: a) für die feste Last allein; b) für Verkehrsbelastung des

¹ Hinsichtlich obiger Angaben siehe Kulka, Über die Berechnung großer gewölbter Brücken, Zeitschr. d. Öster. Ing.- und Arch.-Vereins 1894, S. 365, 377.

ganzen Bogens; c) für Verkehrsbelastung der ersten Bogenhälfte; d) für Verkehrsbelastung der zweiten Bogenhälfte; e) für die ungünstigsten Belastungen.

Bezeichnen h , b die Höhe und Breite der Lagerfuge x , so hat man unter Voraussetzung genügender Widerstandsfähigkeit derselben gegen die auftretenden Normalspannungen die Werte der letzteren im obersten und untersten Fugenelement nach § 8, 18), 19):

$$\sigma_o = \frac{1}{b h} (N_x + \frac{6}{h} M_x), \quad \sigma_u = \frac{1}{b h} (N_x - \frac{6}{h} M_x). \quad 1$$

Hierin sind nun nach § 19 für beliebige Belastung mit

$$V_x = V - \sum_0^x P \quad 2$$

die Normalkraft und das Moment bei x :

$$N_x = V_x \sin \varphi + H \cos \varphi, \quad 3$$

$$M_x = V_x x - H y - \sum_0^x P(x-a) = V_x x - H y + \sum_0^x P a. \quad 4$$

Die Vertikalreaktionen V , V' der Kämpfer und der Horizontalschub H sind durch § 19, 4), 5), 28) bestimmt.

Da die Bogenachse kreisförmig und die Lagerfugen senkrecht zu derselben angenommen sind, so hat man nach § 19, 9), 10) mit $m = \frac{l}{2}$:

$$y = \sqrt{(r-f)^2 + x(l-x)} - (r-f), \quad 5$$

$$\sin \varphi = \frac{m-x}{r}, \quad \cos \varphi = \frac{r-f+y}{r}, \quad 6$$

worin nach § 19, 11) der Radius der Bogenachse:

$$r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2}. \quad 7$$

Mit den gegebenen l , f liefern diese Gleichungen $r = 40,6010$ m und

$$y = \sqrt{505,3279 + x(l-x)} - 22,4795 \text{ m},$$

$$\sin \varphi = \frac{33,81 - x}{40,601}, \quad \cos \varphi = \frac{22,4795 - y}{40,601}.$$

Die Berechnung ist für alle Lagerfugen im wesentlichen die gleiche. Es genügt also, dieselbe für die Kämpferfuge, die Scheitelfuge und eine Zwischenfuge zu zeigen. Durch Berücksichtigung einiger weiterer Fugen könnte jedem Bedürfnis genügt werden. Nach vorstehenden Gleichungen hat man:

für	$x = 0$	20,81	33,81 m = $\frac{l}{2}$
	$y = 0$	15,9840	18,1215 m
	$\sin \varphi = 0,8327$	0,3202	0
	$\cos \varphi = 0,5537$	0,9474	1

während der Veröffentlichung über die Brücke entnommen wurden:

	$b = 6,60$	4,95	4,75 m
	$h = 3,1$	2,24	2,1 m,
womit	$b h = 20,460$	11,088	9,975 qm.

Bei der weiteren Berechnung machen wir von den in den Kolonnen 4, 5, 8, 9 der Tabelle des Beispiels 44 gegebenen Zahlen Gebrauch und nehmen auf die Symmetrie des Bogens Rücksicht. Die σ_o , σ_u werden in kg pro qcm gegeben.

a) Feste Last allein. Vertikalreaktionen der Kämpfer und Horizontalschub nach § 19, 28):

$$V = V' = 2216,9 \text{ t},$$

$$H = \frac{30 \ 836,14}{18,1215} = 1701,63 \text{ t}.$$

Entsprechend dem oben Gesagten ergeben sich für die Kämpferfuge mit $V_x = V$, $M_x = 0$:

$$N_x = 2216,9 \cdot 0,8327 + 1701,63 \cdot 0,5537 = 2788,20 \text{ t},$$

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{2788,20}{204,6} = 13,628 \text{ kg},$$

für die Fuge $x = 20,81 \text{ m}$:

$$V_x = 2216,9 - (114,8 + \dots + 101,9) = 562,00 \text{ t},$$

$$N_x = 562 \cdot 0,3202 + 1701,63 \cdot 0,9474 = 1792,08 \text{ t}.$$

$$M_x = 562 \cdot 20,81 - 1701,63 \cdot 15,9840 + (243,66 + \dots + 2037,75) = 465,17 \text{ mt}.$$

$$\sigma_o = \frac{1}{110,88} (1792,08 + \frac{6}{2,24} 465,17) = 27,400 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{110,88} (1792,08 - \frac{6}{2,24} 465,17) = 4,925 \text{ kg},$$

und für die Scheitelfuge mit $N_x = H$, $M_x = 0$:

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{1702,63}{99,75} = 17,059 \text{ kg}.$$

b) Vollbelastung. Für die Verkehrslast allein hat man nach den unter a) angewandten Formeln die Kämpferreaktionen:

$$V = V' = 180 \text{ t},$$

$$H = \frac{3175,419}{18,1215} = 175,23 \text{ t}.$$

Damit folgen für die Kämpferfuge wegen $V_x = V$, $M_x = 0$:

$$N_x = 180 \cdot 0,8327 + 175,23 \cdot 0,5537 = 246,91 \text{ t},$$

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{246,91}{204,6} = 1,207 \text{ kg},$$

für die Fuge $x = 20,81 \text{ m}$:

$$V_x = 180 - 108 = 72 \text{ t},$$

$$N_x = 72 \cdot 0,3202 + 175,23 \cdot 0,9474 = 189,07 \text{ t},$$

$$M_x = 72 \cdot 20,81 - 175,23 \cdot 15,9840 + (101,181 + \dots + 179,997) = -93,45 \text{ mt},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{110,88} (189,07 - \frac{6}{2,24} 93,45) = -0,552 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{110,88} (189,07 + \frac{6}{2,24} 93,45) = 3,963 \text{ kg},$$

für die Scheitelfuge mit $N_x = H$, $M_x = 0$:

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{175,23}{99,75} = 1,757 \text{ kg}.$$

Beim Zusammenwirken der festen Last und Verkehrslast erhalten wir:

$$V = V' = 2216,9 + 180 = 2396,9 \text{ t},$$

$$H = 1701,63 + 175,23 = 1876,86 \text{ t},$$

und bei

$$x = 0 \qquad 20,81 \qquad 33,81 \text{ m},$$

$$\sigma_o = 14,83 \qquad 26,85 \qquad 18,82 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = 14,83 \qquad 8,89 \qquad 18,82 \text{ kg}.$$

c) Verkehrslast von 0 bis m . Die Verkehrslast allein erzeugt nach § 19, 4), 5) die Kämpferreaktionen:

$$V' = \frac{3175,419}{67,62} = 46,96 \text{ t}, \qquad V = 180 - 46,96 = 133,04 \text{ t},$$

$$H = \frac{3175,419}{2 \cdot 18,1215} = 87,61 \text{ t}.$$

Damit ergeben sich für die Kämpferfuge wegen $V_x = V$, $M_x = 0$:

$$N_x = 133,04 \cdot 0,8327 + 87,61 \cdot 0,5537 = 159,29 \text{ t},$$

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{159,25}{204,6} = 0,779 \text{ kg},$$

für die Fuge $x = 20,81$ m:

$$V_x = 133,04 - 108 = 25,04 \text{ t},$$

$$N_x = 25,04 \cdot 0,3202 + 87,61 \cdot 0,9474 = 91,02 \text{ t},$$

$$M_x = 25,04 \cdot 20,81 - 87,61 \cdot 15,9840 + (101,182 + \dots + 179,977) = 329,83 \text{ mt},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{110,88} \left(91,02 + \frac{6}{2,24} 329,83 \right) = 8,789 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{110,88} \left(91,02 - \frac{6}{2,24} 329,83 \right) = -7,147 \text{ kg},$$

für die Scheitelfuge mit $N_x = H$, $M_x = 0$:

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{87,61}{99,75} = 0,878 \text{ kg}.$$

Beim Zusammenwirken von fester Last und Verkehrslast erhält man:

$$V = 2216,9 + 133,04 = 2349,94 \text{ t},$$

$$V' = 2216,9 + 46,96 = 2263,86 \text{ t},$$

$$H = 1701,63 + 87,61 = 1789,24 \text{ t},$$

und bei	$x = 0$	20,81	33,81 m,
	$\sigma_o = 14,41$	36,19	17,94 kg,
	$\sigma_u = 14,41$	- 2,22	17,94 kg.

d) Verkehrslast von m bis l . Mit Rücksicht auf die unter c) gefundenen Kämpferreaktionen sind im vorliegenden Falle:

$$V = 46,96 \text{ t}, \quad V' = 133,04 \text{ t}, \quad H = 87,61 \text{ t}.$$

Hiermit folgen für die Kämpferfuge, wo $V_x = V$, $M_x = 0$:

$$N_x = 46,96 \cdot 0,8327 + 87,61 \cdot 0,5537 = 87,61 \text{ t},$$

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{87,61}{204,6} = 0,428 \text{ kg},$$

für die Fuge $x = 20,81$ m:

$$V_x = 46,96 - 0 = 46,96 \text{ t},$$

$$N_x = 46,96 \cdot 0,3202 + 87,61 \cdot 0,9474 = 98,04 \text{ t},$$

$$M_x = 46,96 \cdot 20,81 - 87,61 \cdot 15,9840 = -423,12 \text{ mt},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{110,88} \left(98,04 - \frac{6}{2,24} 423,12 \right) = -9,337 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{110,88} \left(98,04 + \frac{6}{2,24} 423,12 \right) = 11,106 \text{ kg},$$

und für die Scheitelfuge mit $N_x = H$, $M_x = 0$:

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{87,61}{99,75} = 0,878 \text{ kg}.$$

Da die unter c) und d) verwendeten Verkehrslasten zusammen die Verkehrslast des ganzen Bogens ausmachen, so müssen die von der Verkehrslast allein herrührenden V , V' , H , V_x , N_x , M_x , σ_o , σ_u in den Fällen c) und d) zusammen gleich den entsprechenden Werten unter b) sein, was zur Abkürzung oder Kontrolle der Rechnung dienen kann.

Beim Zusammenwirken der festen Last und Verkehrslast hat man mit Rücksicht auf die Werte unter c) oder unmittelbar:

$$V = 2263,86 \text{ t}, \quad V' = 2349,49 \text{ t}, \quad H = 1789,24 \text{ t},$$

und bei	$x = 0$	20,81	33,81 m,
	$\sigma_o = 14,06$	18,06	17,94 kg,
	$\sigma_u = 14,06$	16,03	17,94 kg.

e) Grenzwerte (ungünstigste Belastungen). Die Grenzwerte von V , V' , H sowie der Beanspruchungen σ_o , σ_u in den Fugen unmittelbar bei den Gelenken treten in den Belastungsfällen b) und a) ein. Für die σ_o , σ_u in Fuge $x = 20,81$ m entstehen nach dem auf Seite 81 erwähnten einfacheren Verfahren die Grenzwerte, wenn einmal die 9 ersten Verkehrslasten, das andre Mal

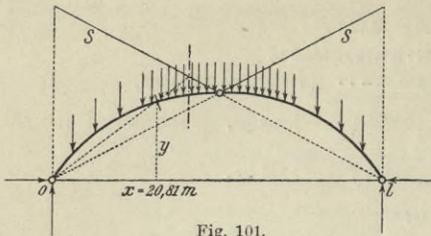


Fig. 101.

alle übrigen Verkehrslasten, auf den Bogen kommen (Fig. 101). Wir erhalten nach § 19, 4), 5) mit Rücksicht auf die Tabelle des Beispiels 44 und 253,102 + ... + 296,977 = 1100,158 für die erste dieser Belastungen:

$$H = \frac{3175,419 - 1100,158}{36,243} = 57,26 \text{ t,}$$

$$V' = \frac{3175,419 - 1100,158}{67,62} = 30,69 \text{ t,}$$

$$V = 144 - 30,69 = 113,31 \text{ t,}$$

$$V_x = 113,31 - 108 = 5,31 \text{ t,}$$

$$N_x = 5,31 \cdot 0,3202 + 57,26 \cdot 0,9474 = 55,95 \text{ t,}$$

$$M_x = 5,31 \cdot 20,81 - 57,26 \cdot 15,9840 + (101,182 + \dots + 179,977) = 404,36 \text{ mt,}$$

$$\sigma_o = \frac{1}{110,88} \left(55,95 + \frac{6}{2,24} 404,36 \right) = 10,273 \text{ kg,}$$

$$\sigma_u = \frac{1}{110,88} \left(55,95 - \frac{6}{2,24} 404,36 \right) = -9,264 \text{ kg,}$$

und für die zweite derselben:

$$H = \frac{3175,419 + 1100,158}{36,243} = 117,97 \text{ t,}$$

$$V = 30,69 + 4 \cdot 9 = 66,69 \text{ t,}$$

$$V' = 216 - 66,69 = 149,31 \text{ t,}$$

$$V_x = 66,69 - 0 = 66,69 \text{ t,}$$

$$N_x = 66,69 \cdot 0,3202 + 117,97 \cdot 0,9474 = 133,12 \text{ t,}$$

$$M_x = 66,69 \cdot 20,81 - 117,97 \cdot 15,9840 = -497,81 \text{ mt,}$$

$$\sigma_o = \frac{1}{110,88} \left(133,12 - \frac{6}{2,24} 497,81 \right) = -10,825 \text{ kg,}$$

$$\sigma_u = \frac{1}{110,88} \left(133,12 + \frac{6}{2,24} 497,81 \right) = 13,226 \text{ kg.}$$

Auch für die jetzt betrachteten beiden Belastungsfälle müssen die der Verkehrslast entsprechenden V , V' , H , V_x , N_x , M_x , σ_o , σ_u zusammen gerade so groß, wie im Falle b) sein.

Beim Zusammenwirken von fester Last und Verkehrslast sind die Grenzwerte:

$$\sigma_o = 27,400 + 10,273 = 37,67 \text{ kg,}$$

$$\sigma_o = 27,400 - 10,825 = 16,57 \text{ kg,}$$

$$\sigma_u = 4,925 - 9,264 = -4,34 \text{ kg,}$$

$$\sigma_u = 4,925 + 13,226 = 18,15 \text{ t.}$$

Hätten wir die ungünstigsten Belastungen nach dem genaueren Verfahren auf Seite 80 bestimmt, was bei Gewölben selten geschehen wird, so würden sich für die Grenzwerte von σ_u dieselben Belastungen wie nach dem einfacheren Verfahren ergeben haben, womit auch die berechneten Grenzwerte selbst gültig bleiben. Für die Grenzwerte von σ_o würden einmal die 10 ersten Verkehrslasten (anstatt wie oben die 9 ersten), das andermal alle übrigen Verkehrslasten auf dem Bogen wirksam anzunehmen sein. Man erhält in ganz gleicher Weise wie oben vorgehend für den ersten Fall: $H = 64,24 \text{ t}$, $V' = 34,43 \text{ t}$, $V' = 118,57 \text{ t}$, $V_x = 10,57 \text{ t}$, $N_x = 64,25 \text{ t}$, $M_x = 402,25 \text{ mt}$,

$$\sigma_o = \frac{1}{110,88} \left(64,25 + \frac{6}{2,24} 402,25 \right) = 10,297 \text{ kg,}$$

und für den zweiten Fall: $H = 110,99 \text{ t}$, $V = 61,43 \text{ t}$, $V' = 145,57 \text{ t}$, $V_x = 61,43 \text{ t}$, $N_x = 124,82 \text{ t}$, $M_x = -495,71 \text{ mt}$,

$$\sigma_o = \frac{1}{110,88} \left(124,82 - \frac{6}{2,24} 495,71 \right) = -10,849 \text{ kg,}$$

womit die Grenzwerte für feste Last und Verkehrslast zusammen werden:

$$\sigma_o = 27,400 + 10,279 = 37,70 \text{ kg,}$$

$$\sigma_o = 27,400 - 10,849 = 16,55 \text{ kg,}$$

anstatt wie oben 37,67 und 16,57 kg.

Bemerkungen.

Es haben sich die in der folgenden Tabelle eingetragenen Gesamtwerte ergeben, wobei wie oben die Kämpferreaktionen V, V', H in Tonnen, die Normalspannungen σ_o, σ_u in Kilogramm pro Quadratcentimeter ausgedrückt sind. Das einfachere Verfahren zur Bestimmung der Grenzwerte von σ_o, σ_u würde in den letzten zwei Kolonnen nur 37,67 und 16,57 kg an Stelle von 37,70 und 16,35 kg geliefert haben; es kann auch hiernach ohne weiteres angewandt werden (vergl. § 11 und Beispiel 44).

Größen	a)	b)	c)	d)	e)	
	festе Last allein	Vollbelastung	Verkehrslast 0 bis m	Verkehrslast m bis l	Grenzwerte (Ungünstigste Belastungen)	
$V =$	2216,90	2396,90	2349,94	2263,86	<u>2396,90</u>	<u>2216,90</u>
$V' =$	2216,90	2396,90	2263,86	2349,94	<u>2396,90</u>	<u>2216,90</u>
$H =$	1701,63	1876,86	1789,24	1789,24	<u>1876,86</u>	<u>1701,63</u>
$x = 0$	$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_o = \\ \sigma_u = \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 13,63 \\ 13,63 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 14,83 \\ 14,41 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 14,06 \\ 14,06 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 14,83 \\ 14,83 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 13,63 \\ 13,63 \end{array} \right.$
	$x = 20,81$	$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_o = \\ \sigma_u = \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 27,40 \\ 4,92 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 26,85 \\ 8,89 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 36,19 \\ -2,22 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 18,06 \\ 16,03 \end{array} \right.$
$x = m$		$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_o = \\ \sigma_u = \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 17,06 \\ 17,06 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 18,82 \\ 18,82 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 17,94 \\ 17,94 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 18,82 \\ 18,82 \end{array} \right.$

Werden die ungünstigsten Belastungen für σ_o, σ_u wie oben unter e) bestimmt, so brauchen die Belastungsfälle c) und d) nicht behandelt zu werden. Sie wurden hier berücksichtigt, weil bei Gewölben häufig nicht die ungünstigsten Belastungen, sondern nur einige im voraus gewählte Belastungsfälle betrachtet wurden, und um die hierbei möglichen Abweichungen zu zeigen. Zu beachten ist, daß die Fugen $x = 0$ und $x = m$ nur zweimal beziehungsweise einmal auftreten, während die Fuge $x = 20,81$ m als Repräsentantin aller übrigen angeführt ist, und daß bei Bogen ohne Gelenk die Verhältnisse auch bei 0 und m ungünstiger liegen. So tritt in dem Beispiel 44 der größte Druck, 44,32 kg, im Scheitel, der größte Zug, 10,63 kg, bei den Kämpfern ein.

Die Stützlinie (Verbindungsline der Angriffspunkte von R_x oder N_x in allen Fugen, § 8) braucht bei der obigen Berechnungsweise nicht verzeichnet zu werden, da sich die Beanspruchungen ohne sie ergeben. Entsteht in irgend einer Lagerfuge Zug (σ negativ, siehe in obiger Tabelle σ_u in den Fällen c), e) so tritt die Stützlinie in dem betreffenden Belastungsfall daselbst aus dem mittleren Drittel (§ 8). Übrigens genügen die obigen Ermittlungen auch zur Verzeichnung der Stützlinien. Da ihr Durchgangspunkt in Fuge x nach § 8, 1) um

$$c = \frac{M_x}{N_x} \tag{8}$$

von der Bogenachse entfernt ist, wobei die c nach oben positiv, nach unten negativ zu rechnen sind, so geht die Stützlinie für alle Belastungsfälle durch die Gelenke, während z. B. bei $x = 20,81$ m

in den Fällen	a)	b)	c)	d)
$c =$	0,260	0,187	0,422	0,022 m.

Die Stützlinie ist also im Falle c) um

$$0,422 - \frac{2,24}{6} = 0,049 \text{ m}$$

aus dem mittleren Bogendrittel getreten. In den Fällen a) und b) liegt die Stützlinie symmetrisch zur Bogenmitte, für den Fall c) gibt der Fall d) die

Stützlinie auf der zweiten Bogenhälfte und umgekehrt (durch Umklappen um die Vertikale bei $x = m$).

Auch der Winkel δ der resultierenden Fugenkraft R_x gegen die Normale zur Fuge kann aus

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{T_x}{N_x} \quad 9$$

mit

$$T_x = V_x \cos \varphi - H \sin \varphi \quad 10$$

leicht ermittelt werden. So hat man für die Gesamtbelastung im Falle c) $H = 1701,63 + 87,61 = 1789,24$ t, $V_x = 562 + 25,04 = 587,04$ t, $N_x = 1792,08 + 91,02 = 1883,10$ t,

$$T_x = 587,04 \cdot 0,9474 - 1789,24 \cdot 0,3202 = -16,753 \text{ t},$$

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{16,753}{1883,10} = -0,008896, \quad \delta = -0^\circ 31',$$

was weit unter den gebräuchlichen Reibungskoeffizienten und entsprechenden Reibungswinkeln von Steinen liegt. Bezüglich der Gelenke siehe §§ 14, 17, Aufgabe 11 und Beispiele 24, 25. Die größten Schubspannungen in den Fugen können wie in Beispiel 8 und noch einfacher nach der Formel § 9, 13)

$$\tau = \frac{3}{2bh} T_x \quad 11$$

berechnet werden (vergl. die Beispiele 64 und 65). Die Bestimmung ihrer Grenzwerte nach § 11 ist für praktische Zwecke jedenfalls überflüssig, abgesehen eventuell von den Gelenken, bezüglich welcher auf § 14 und Beispiele 20, 21 zu verweisen ist.

Aufgabe 11. Größe und Richtung der resultierenden Kämpferreaktion.

Für Dreigelenkbogen soll Anleitung gegeben werden: a) Zur Ermittlung der Grenzwerte des resultierenden Kämpferdruckes R ; b) zur Bestimmung der Grenzwerte des Winkels δ , welchen R mit der Bogenachse oder mit der Normalen zum Kämpferquerschnitt einschließt.

Für beliebige Belastung hat man nach § 19, 4), 5) die Vertikalreaktion, Horizontalreaktion und resultierende Kämpferreaktion bei 0:

$$V = \frac{1}{l} \sum_0^l P(l-a), \quad 1$$

$$H = \frac{1}{2f} \left[\sum_0^m P a + \frac{l}{m} \sum_m^l P(l-a) \right], \quad 2$$

$$R = \sqrt{V^2 + H^2}, \quad 3$$

und nach § 1, 11), 9), 10) bei 0 für den Winkel δ von R mit der Bogenachse oder der Normalen zum Kämpferquerschnitt sowie den Winkel ψ von R mit der horizontalen Abszissenachse:

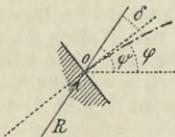


Fig. 102.

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg}(\psi - \varphi) = \frac{T_0}{N_0} = \frac{V \cos \varphi - H \sin \varphi}{V \sin \varphi + H \cos \varphi}, \quad 4$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{V}{H}, \quad 5$$

worin φ den Winkel der Bogenachse bei 0 mit der Abszissenachse bedeutet.

a) Größe der Kämpferreaktion. Da nach 1, 2 oder den Einflußlinien von V , H (Fig. 98) die Grenzwerte dieser Größen bei möglichst starker Belastung des ganzen Trägers und Eigengewicht allein eintreten, so gilt nach 3 das gleiche für die resultierende Kämpferreaktion R . Für gleichmäßig verteilte Verkehrslast ist der Fall damit erledigt. Da ferner zu V Lasten von 0 bis m größere Beiträge liefern als solche von m bis l , während zu H Lasten von 0 bis m und von m bis l gleich stark beitragen, so sind bei Belastung durch Radlastzüge zur Erzielung der größten Kämpferreaktion R besonders auf der ersten Trägerhälfte möglichst große Lasten anzunehmen.

Zu weiterer Übersicht kann man den Beitrag einer Einzellast $P = 1$ zu R an beliebigen Stellen a des Trägers feststellen. Da für $P = 1$ nach 1 allgemein

$$V = \frac{l-a}{l},$$

und wenn $a < m$ $H = \frac{a}{2f}$, wenn $a > m$ $H = \frac{l-a}{2f}$, so liefert 3:

$$\text{für } a < m \quad R = \frac{l-a}{l} \sqrt{1 + \left(\frac{a}{l-a}\right)^2 \frac{l^2}{4f^2}}, \quad 6$$

$$\text{„ } a > m \quad R = \frac{l-a}{l} \sqrt{1 + \frac{l^2}{4f^2}}. \quad 7$$

Die Differentiation von R^2 nach 6 ergibt:

$$2R dR = -\frac{l-a}{l} da + 2 \frac{a}{4f^2} da,$$

wonach $\frac{dR}{da} = 0$ ist und der Beitrag zu R ein Minimum erreicht bei nachstehendem $a = \mu$, während das Minimum selbst den aus 6 folgenden beigesetzten Wert hat.

$$a = \mu = \frac{l}{1 + \frac{l^2}{4f^2}}, \quad R = \frac{l}{2f \sqrt{1 + \frac{l^2}{4f^2}}}. \quad 8$$

Die Linie der Beiträge von Lasten $P = 1$ zu R für das anschließende Beispiel 23 ist in Fig. 103 verzeichnet, für beliebige P sind die Beiträge P mal so groß. Zu beachten ist jedoch, daß die Beiträge der einzelnen P sich nicht einfach addieren, da sie nicht von gleicher Richtung sind. Es kann also für eine Gesamtbelastung die Linie der Beiträge R nur dann wie eine gewöhnliche Einflußlinie zu unmittelbarer Berechnung von R verwendet werden, wenn man nichts dagegen hat, R etwas zu groß zu erhalten. Wohl aber läßt sich stets auf Grund jener Linie die ungünstigste Stellung eines Radlastzugs genügend genau beurteilen, worauf der entsprechende Wert von R aus der für beliebige Belastung gültigen Gleichung 3 mit V, H nach 1, 2 folgt (Beispiel 23).

Richtung der Kämpferreaktion. Da in Gleichung 4 φ konstant ist, so treten die Grenzwerte von δ zugleich mit den Grenzwerten von ψ ein. Gehen wir von irgend einer Belastung aus, der die Werte V_a, H_a von V, H entsprechen mögen. Kommt dann an beliebiger Stelle a eine Last P hinzu, welche für sich Werte V_p, H_p von V, H erzeugen würde, so hat man nach 5:

$$\text{zu Anfang } \operatorname{tg} \psi_a = \frac{V_a}{H_a}, \quad \text{zu Ende } \operatorname{tg} \psi = \frac{V_a + V_p}{H_a + H_p},$$

so daß die Änderung von $\operatorname{tg} \psi$ durch die Last P :

$$\Delta = \operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \psi_a = \frac{H_a V_p - H_p V_a}{H_a (H_a + H_p)}. \quad 9$$

Für eine Einzellast P bei a ergibt sich also:

$$\Delta \text{ und die Änderung von } \delta \text{ positiv,} \quad \text{wenn } \frac{V_p}{H_p} > \frac{V_a}{H_a}, \quad 10$$

$$\Delta \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \delta \text{ gleich Null,} \quad \text{„} \quad \frac{V_p}{H_p} = \frac{V_a}{H_a}, \quad 11$$

$$\Delta \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \delta \text{ negativ,} \quad \text{„} \quad \frac{V_p}{H_p} < \frac{V_a}{H_a}. \quad 12$$

$$\text{Da nun nach 1, 2:} \quad \text{für } a < m \quad \frac{V_p}{H_p} = \frac{l-a}{a} \frac{2f}{l}, \quad 13$$

$$\text{für } a > m \quad \frac{V_p}{H_p} = \frac{2f}{l}, \quad 14$$

so lassen sich nach 10 bis 12 die Belastungen für die Grenzwerte von δ, ψ feststellen, worauf diese selbst aus 4, 5 folgen.

In praktischen Fällen kann man jedoch weit einfacher verfahren. Für $a = 0$ ist nach 13 $\frac{V_p}{H_p} = \infty$, so daß Lasten in der Nähe von 0 zufolge 10 positive

Beiträge zu δ , ψ liefern. Lasten zwischen m und l dagegen pflegen negative Beiträge zu erzeugen, wie schon daraus hervorgeht, daß für eine beliebige auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last gemäß § 19, 19):

$$\frac{V_a}{H_a} = \frac{4f}{l},$$

und für eine wie in Aufgabe 13 parabolisch begrenzte Last

$$\frac{V_a}{H_a} = \frac{e + 2s}{e + 5s} \frac{8f}{l},$$

während $\frac{V_p}{H_p}$ nur den Wert 14 hat. Wir brauchen also obiges Verfahren jedenfalls nur auf der ersten Trägerhälfte, und zwar von $a = 0$ bis zu demjenigen Angriffspunkt a anzuwenden, bei welchem die Bedingung 10 erfüllt zu sein aufhört (vergl. Bemerkungen zum Beispiel 25).

Ist der Beitrag des Eigengewichts zu $\frac{V_a}{H_a}$ stark überwiegend (Gewölbe, Betonbogen, Eisenbetonbogen, chaussierte Eisenbrücken), so darf man in 11 die vom Eigengewicht allein herrührenden Werte V_e , H_e von V , H an Stelle von V_a , H_a setzen und erhält mit 13:

$$\frac{l-a}{a} \frac{2f}{l} = \frac{V_e}{H_e},$$

woraus der Grenzpunkt der positiven und negativen Beitragsstrecken für δ , ψ :

$$a = \nu = \frac{l}{1 + \frac{l}{2f} \frac{V_e}{H_e}}. \quad 15$$

Für ein auf die Spannweite gleichmäßig verteiltes Eigengewicht wäre wegen $\frac{V_e}{H_e} = \frac{4f}{l}$ der Grenzpunkt bei $\nu = \frac{l}{3}$, während in Wirklichkeit ν kleiner zu sein pflegt (Beispiele 24, 25).

Beispiel 23. Größte resultierende Kämpferreaktion bei bewegten Radlastzügen (Donaubrücke bei Inzigkofen).

Für die in den Beispielen 18, 19, 20, 21 behandelte Donaubrücke bei Inzigkofen sollen ermittelt werden: a) Die Linie der Beiträge einer Last $P = 1$ an beliebigen Stellen a zur resultierenden Kämpferreaktion R ; b) der größte Wert von R pro m Breite beim Befahren durch die in Fig. 97 angedeuteten Radlasten und um 1 m von diesen beginnendes Menschengedränge von 0,46 t pro m, wenn die Vertikalreaktion des Kämpfers und der Horizontalschub durch das Eigengewicht allein $V = 90,50$ t, $H = 183,83$ t betragen (Beispiel 18).

a) Linie der R für $P = 1$. Da im vorliegenden Falle

$$\frac{7^2}{4f^2} = \frac{43^2}{4 \cdot 4,468^2} = 23,155,$$

so sind nach den Gleichungen 6, 7 der Aufgabe 11 die Ordinaten der Linie R :

bei $a = 0$	$R =$	1
$a = \frac{l}{8}$	$R = \frac{7}{8} \sqrt{1 + \frac{23,155}{49}}$	$= 1,062$
$a = \frac{l}{4}$	$R = \frac{3}{4} \sqrt{1 + \frac{23,155}{9}}$	$= 1,418$
$a = \frac{3l}{8}$	$R = \frac{5}{8} \sqrt{1 + \frac{23,155 \cdot 9}{25}}$	$= 1,910$
$a = \frac{l}{2} = m$	$R = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 23,155}$	$= 2,457$
$a = l$	$R =$	0

Zwischen m und l verläuft die Linie gerade. Die Gleichungen 8 der Aufgabe 11 ergeben den Ort und Wert des Minimums zwischen 0 und m :

$$\alpha = \frac{43}{24,155} = 1,780 \text{ m}$$

$$R = \frac{43}{2 \cdot 4,468 \sqrt{24,155}} = 0,979 .$$

Die Linie ist in Fig. 103 verzeichnet.

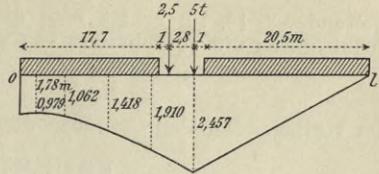


Fig. 103.

b) Größter Wert von R . Nach dem in der vorigen Aufgabe unter a) Gesagten tritt das größte R bei der in Fig. 103 ange deuteten Verkehrsbelastung ein. Da alsdann für die Verkehrslast allein:

$$V \cdot 43 - 0,46 (17,7 \cdot 34,15 + 20,5 \cdot 10,25) - 2,5 \cdot 24,3 - 5 \cdot 21,5 = 0, \quad V = 12,627 \text{ t},$$

$$12,63 \cdot 21,5 - H \cdot 4,468 - 0,46 \cdot 17,7 \cdot 12,65 - 2,5 \cdot 2,8 = 0, \quad H = 36,142 \text{ t},$$

so hat man für die Gesamtlast:

$$V = 90,500 + 12,627 = 103,13 \text{ t}, \quad H = 183,827 + 36,142 = 219,97 \text{ t},$$

$$R = \sqrt{103,13^2 + 219,97^2} = 242,95 \text{ t}.$$

Der zweite Grenzwert von R tritt für Eigengewicht allein ein:

$$R = \sqrt{90,50^2 + 183,83^2} = 204,90 \text{ t}.$$

Bemerkungen. Bei gleichmäßig verteilter Verkehrslast tritt der Maximalwert von R zugleich mit den Maximalwerten von V, H ein. Bei bewegten Radlastzügen trifft dies im allgemeinen nicht zu. Man würde dann R aus den Maximalwerten von V, H etwas zu groß, das heißt zu ungünstig erhalten, was jedoch meist zulässig ist. Im vorliegenden Falle hätte sich mit Rücksicht auf Beispiel 21 ergeben:

$$R = \sqrt{106,06^2 + 219,97^2} = 244,20 \text{ t},$$

anstatt wie oben $R = 242,96 \text{ t}$. — Auch der Maximalwert der Normalkraft N_0 (N_x für $x = 0$) ist nur wenig von dem Maximalwert von R verschieden, aber etwas kleiner. Für den vorliegenden Fall wurde er in Beispiel 21 festgestellt $N_0 = 240,57 \text{ t}$.

Beispiel 24. Grenzrichtungen der resultierenden Kämpferreaktion bei gleichmäßig verteilter Verkehrslast (Pruthbrücke bei Jaremcze).

Für den in Beispiel 22 behandelten Dreigelenkbogen (an Stelle der Pruthbrücke bei Jaremcze) ergaben sich die Vertikalreaktionen der Kämpfer und der Horizontalschub durch das Eigengewicht allein:

$$V_e = 2216,90 \text{ t}, \quad H_e = 1701,63 \text{ t}.$$

Es sind die Grenzwerte des Winkels δ der resultierenden Kämpferreaktion R mit der Bogenachse oder der Normalen zum Kämpferquerschnitt bei 0 für den Fall zu berechnen, daß die Verkehrslast pro m der ergriffenen Strecke 6 t beträgt.

Für den Grenzpunkt der positiven und negativen Beitragsstrecke gilt des überwiegenden Eigengewichts wegen ohne weiteres Gleichung 15 der vorigen Aufgabe. Sie liefert:

$$\nu = \frac{67,62}{1 + \frac{67,62}{36,243} \frac{2216,90}{1701,63}} = 19,71 \text{ m}.$$

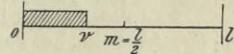


Fig. 104.

Da die statischen Momente einer gleichmäßig verteilten Verkehrslast von p pro Längeneinheit auf der Strecke 0 bis ν in Hinsicht der Gelenke l und 0 (Fig. 104):

$$\int_0^l P(l-a) = p \nu \left(l - \frac{\nu}{2} \right), \quad \int_0^m P a = \frac{p \nu^2}{2},$$

so folgen aus § 19, 4), 5) die Vertikalreaktion bei 0 und der Horizontalschub durch die Verkehrslast von 0 bis ν allein:

$$V = p \nu \left(1 - \frac{\nu}{2l} \right), \quad H = \frac{p \nu^2}{4f}. \quad 1$$

Mit diesen Ausdrücken und den für gleichmäßig verteilte Last von 0 bis l

geltenden § 19, 19) erhält man die Vertikalreaktion bei 0 und den Horizontal-
schub durch die Verkehrslast von v bis l allein:

$$V = \frac{p}{2l} (l-v)^2, \quad H = \frac{p}{8f} (l^2 - 2v^2). \quad 2$$

Im vorliegenden Falle ergeben diese Gleichungen für die erste Belastung:

$$V = 6 \cdot 19,71 \left(1 - \frac{19,71}{2 \cdot 67,62} \right) = 101,02 \text{ t},$$

$$H = \frac{6 \cdot 19,71^2}{4 \cdot 18,1215} = 32,16 \text{ t},$$

und für die zweite Belastung:

$$V = \frac{6 \cdot 47,91^2}{2 \cdot 67,62} = 101,83 \text{ t},$$

$$H = 6 \frac{67,62^2 - 2 \cdot 19,71^2}{8 \cdot 18,1215} = 157,08 \text{ t}.$$

Einschließlich der Beiträge des Eigengewichts hat man für die erste Belastung:

$$V = 2216,90 + 101,02 = 2317,92 \text{ t}, \quad H = 1701,63 + 32,16 = 1733,79 \text{ t},$$

und für die zweite Belastung:

$$V = 2216,90 + 101,83 = 2318,73 \text{ t}, \quad H = 1701,63 + 157,08 = 1858,71 \text{ t}.$$

Mit diesen Werten erhält man nach Gleichung 4 der vorigen Aufgabe für den größten positiven (oder kleinsten negativen) Winkel δ :

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2317,92 \cdot 0,5537 - 1733,79 \cdot 0,8327}{2317,92 \cdot 0,8327 + 1733,79 \cdot 0,5537} = -0,05546, \quad \delta = -3^\circ 10',$$

und für den größten negativen (oder kleinsten positiven) Winkel δ :

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2318,73 \cdot 0,5537 - 1858,71 \cdot 0,8327}{2318,73 \cdot 0,8327 + 1858,71 \cdot 0,5537} = -0,08915, \quad \delta = -5^\circ 6'.$$

Da der Winkel der Bogenachse mit der Horizontalen $\psi = 56^\circ 23'$, so sind die Grenzwerte des Winkels $\psi = \varphi + \delta$ der resultierenden Kämpferreaktion mit der Horizontalen:

$$\psi = 53^\circ 13', \quad \psi = 51^\circ 17'.$$

Bemerkung. Will man mit gleichmäßig verteilten Verkehrslasten anstatt tatsächlich wirkender konzentrierter Lasten rechnen, so sind natürlich die Lastäquivalente p eher zu groß als zu klein zu wählen. Dabei ist zu beachten, daß ein Äquivalent, welches für einen Grenzwert genügt, für einen andern zu klein sein kann. So wären für den Fall des nächsten Beispiels die Lastäquivalente von V und H im ersten Belastungsfall 5,9 und 5,3 t, im zweiten Falle 5,0 und 5,6 t, während für δ kaum $p = 6$ t genügt, da wir oben $\delta = -3^\circ 10'$ und $-5^\circ 6'$ erhielten, während sich im nächsten Beispiel $\delta = -3^\circ 9'$ und $-5^\circ 12'$ ergeben werden.

Beispiel 25. Grenzrichtungen der resultierenden Kämpferreaktionen bei konzentrierten Verkehrslasten (Pruthbrücke bei Jaremcze).

Für den in den Beispielen 22, 24 behandelten Dreigelenkbogen (an Stelle der Pruthbrücke bei Jaremcze) ergaben sich die Vertikalreaktionen der Kämpfer und der Horizontalschub durch das Eigengewicht allein (Beispiel 22):

$$V_g = 2216,90 \text{ t}, \quad H_g = 1701,63 \text{ t}.$$

Es sind die Grenzwerte des Winkels δ der resultierenden Kämpferreaktion R mit der Bogenachse oder der Normalen zum Kämpferquerschnitt bei 0 für den Fall zu berechnen, daß

Verkehrslasten	$P =$	27	27	27	18	9 t	usw.
bei	$a =$	3,7475	8,6225	16,4975	18,3725	19,9975 m	„

auf den Träger wirken können.

Es kommen die Beziehungen der Aufgabe 11 zur Verwendung. Für den Grenzpunkt der positiven und negativen Beitragsstrecke ergibt sich wie im vorigen Beispiel:

$$a = v = 19,71 \text{ m}.$$

Im Hinblick auf die gegebenen Angriffspunkte der Verkehrslasten P tragen also die Lasten von $a = 0$ bis 18,3725 m in positivem Sinne, die Lasten von $a = 19,9975$ m bis l in negativem Sinne zu δ bei. Die Gleichungen 1, 2 der Aufgabe 11 (S. 96) mit Werten der Tabelle des Beispiels 44 liefern für die Verkehrslast allein im ersten dieser Belastungsfälle:

$$V = \frac{1}{67,62} (1724,557 + 1592,932 + 1461,307 + 886,435) = 98,57 \text{ t,}$$

$$H = \frac{1}{36,243} (101,182 + 232,807 + 364,432 + 330,705) = 28,40 \text{ t,}$$

und im zweiten derselben:

$$V = 180 - 98,57 = 81,43 \text{ t,}$$

$$H = \frac{3175,419}{18,1215} - 28,40 = 146,83 \text{ t.}$$

Einschließlich der Beiträge des Eigengewichts hat man im ersten Belastungsfall:

$$V = 2216,90 + 98,57 = 2315,47 \text{ t,}$$

$$H = 1701,63 + 28,40 = 1730,03 \text{ t,}$$

und im zweiten Belastungsfall:

$$V = 2216,90 + 81,43 = 2298,33 \text{ t,}$$

$$H = 1701,63 + 146,83 = 1848,46 \text{ t.}$$

Mit diesen Werten erhält man nach Gleichung 4 der Aufgabe 11 für den größten positiven (oder kleinsten negativen) Winkel δ :

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2315,47 \cdot 0,5537 - 1730,03 \cdot 0,8327}{2315,47 \cdot 0,8327 + 1730,03 \cdot 0,5537} = -0,05493, \quad \delta = -3^{\circ} 9',$$

und für den größten negativen (oder kleinsten positiven) Winkel δ :

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2298,33 \cdot 0,5537 - 1848,46 \cdot 0,8327}{2298,33 \cdot 0,8327 + 1848,46 \cdot 0,5537} = -0,09108, \quad \delta = -5^{\circ} 12'.$$

Da der Winkel der Bogenachse mit der Horizontalen $\varphi = 56^{\circ} 23'$, so sind die Grenzwerte des Winkels $\psi = \varphi + \delta$ der resultierenden Kämpferreaktion mit der Horizontalen:

$$\psi = 53^{\circ} 14',$$

$$\psi = 51^{\circ} 11'.$$

Bemerkungen. Hätte man den Grenzpunkt ν der positiven und negativen Beitragsstrecke nicht, mit Rücksicht auf das Überwiegen des Eigengewichts, wie im vorigen Beispiel berechnen können, so wäre das andere in Aufgabe 11 gegebene Verfahren zu verwenden gewesen. Nach diesem hat man, entsprechend den Gleichungen 10 bis 13, mit Berücksichtigung der Tabelle des Beispiels 44 für $a = 3,7475$ m:

$$\frac{V_a}{H_a} = \frac{V_e}{H_e} = \frac{2216,90}{1701,63} = 1,30,$$

$$\frac{V_p}{H_p} = \frac{1724,557}{67,62} \frac{36,243}{101,182} = \frac{25,51}{2,79} > 1,30;$$

für $a = 8,6225$ m:

$$\frac{V_a}{H_a} = \frac{2216,90 + 25,51}{1701,03 + 2,79} = \frac{2242,41}{1704,42} = 1,32,$$

$$\frac{V_p}{H_p} = \frac{1592,932}{67,62} \frac{36,243}{232,807} = \frac{23,56}{6,42} > 1,32;$$

für $a = 13,4975$ m:

$$\frac{V_a}{H_a} = \frac{2242,41 + 23,56}{1704,42 + 6,42} = \frac{2265,97}{1710,84} = 1,32;$$

$$\frac{V_p}{H_p} = \frac{1461,307}{67,62} \frac{36,243}{364,432} = \frac{21,61}{10,05} > 1,32,$$

für $a = 18,3725$ m:

$$\frac{V_a}{H_a} = \frac{2265,97 + 21,61}{1710,84 + 10,05} = \frac{2287,58}{1720,89} = 1,33,$$

$$\frac{V_p}{H_p} = \frac{886,435}{67,62} \frac{36,243}{330,703} = \frac{13,11}{9,12} > 1,33;$$

$$\text{für } a = 19,9975 \text{ m: } \frac{V_a}{H_a} = \frac{2287,58 + 13,11}{1720,89 + 9,12} = \frac{2300,69}{1730,01} = 1,33,$$

$$\frac{V_p}{H_p} = \frac{428,602}{67,62} \frac{36,243}{179,977} = \frac{6,34}{4,97} = 1,28 < 1,33.$$

Hiernach tragen die Lasten bis einschließlich $a = 18,3775$ m in positivem Sinne, die Lasten von $a = 19,9975$ m an in negativem Sinne zum Winkel δ bei. Man sieht, daß sich $V_a : H_a$ nur wenig geändert hat, so daß man ohne weiteres den Anfangswert $V_e : H_e$ hätte beibehalten können, worauf die Gleichung 15 der Aufgabe 11 beruht.

Aufgabe 12. Vorzeichen der Momente von Dreigelenkbogen bei gleichmäßig verteilter Last.

Zu beweisen, daß für symmetrische Dreigelenkbogen von kreissegmentförmiger oder halbellipsenförmiger Achse, einschließlich der Halbkreisbogen, bei beliebiger auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilter Last nur negative Momente M_x auftreten, deren numerischer Maximalwert bei $y = \frac{f}{2}$ liegt¹. Auch sind diese Maximalwerte selbst anzugeben.

Für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit hat man nach § 19, 21) bei Dreigelenkbogen von beliebiger Achse:

$$M_x = \frac{u}{2} \left[x(t-x) - \frac{y^2 l^2}{4f} \right], \quad 1$$

und mit § 19, 8) bei solchen von parabolischer Achse:

$$\frac{y l^2}{4f} = x(t-x), \quad M_x = 0.$$

Für andere als parabolische Bogen wird demnach M_x positiv oder negativ, die resultierende Schnittkraft R_x greift oberhalb oder unterhalb der Achsschicht an, je nachdem bei x die Ordinate y kleiner oder größer als für den Parabelbogen von gleichen l, f ist (in den Gelenken $x = 0, m, l$ gilt stets $M_x = 0$). Die Achse des geradlinigen Bogens Fig. 92 beispielsweise liegt vollständig unter derjenigen des parabolischen Bogens von gleichen l, f , so daß für ihn nur positive Momente entstehen. Die Achsen der kreissegmentförmigen und halbellipsenförmigen Bogen dagegen liegen vollständig über der Achse des parabolischen Bogens von gleichen l, f , wonach für diese nur negative Momente auftreten (immer mit den Grenzwerten $M_x = 0$ in den Gelenken).

Das numerische Maximum von M_x entsteht nach 1 an der Stelle, wo

$$\frac{dM_x}{dx} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = (t-2x) \frac{4f}{l^2}. \quad 2$$

Diese Bedingung ist erfüllt für geradlinige Bogen wegen § 19, 16) bei $x = \frac{l}{4}$, für Kreissegmentbogen wegen § 19, 10), 11) bei $y = \frac{f}{2}$, für Halbellipsenbogen wegen § 19, 15) bei $y = \frac{f}{2}$, also in allen drei Fällen bei $y = \frac{f}{2}$. Das numerische Maximum selbst ergibt sich nach 1 für geradlinige Bogen

$$\text{mit } x = \frac{l}{4}, \quad y = \frac{f}{2}, \quad M_x = -\frac{u l^2}{32}, \quad 3$$

für Kreissegmentbogen wegen § 19, 9), 11)

$$\text{mit } x(t-x) = \frac{l^2}{8} - \frac{f^2}{4}, \quad y = \frac{f}{2}, \quad M_x = -\frac{u f^2}{8}, \quad 4$$

für Halbellipsenbogen wegen § 19, 14):

$$\text{mit } x(t-x) = \frac{l^2}{16}, \quad y = \frac{f}{2}, \quad M_x = -\frac{u l^2}{32}. \quad 5$$

Für Halbkreisbogen stimmen natürlich die Werte 4 und 5 überein (mit $f = \frac{l}{2}$).

Aufgabe 13. Dreigelenkbogen mit parabolisch begrenzter Belastung. Steil und flach ansetzende Bogen.

Für symmetrische Dreigelenkbogen zu berechnen: a) Die Vertikalreaktionen

¹ Briefliche Bemerkung des Herrn Dipl.-Ing. Paul Tezner in Budapest.

V der Kämpfer, den Horizontalschub H , sowie die Vertikalkraft V_x und das Moment M_x in beliebigen Querschnitten x durch eine beliebige parabolisch begrenzte Belastung (Fig. 105); b) die Bogenachse für den Fall, daß sie mit der Stützlinie für eine solche parabolisch begrenzte Belastung zusammenfallen soll.

a) Die Werte der Summenausdrücke Σ in den allgemeinen Gleichungen für die angeführte Belastung wurden in Aufgabe 9 festgestellt. Wir erhalten damit unter Beibehaltung der Bezeichnung

$$u = e - s = b - c$$

nach § 19, 4), 5), 3), 2) die verlangten Größen:

$$V = \left(\frac{e}{2} - \frac{n}{3}\right) l = (e + 2s) \frac{l}{6},$$

$$H = \left(e - \frac{5n}{6}\right) \frac{l^2}{8f} = (e + 5s) \frac{l^2}{48f},$$

$$V_x = V - ex + \frac{2n}{3l^2} x^2 (3l - 2x),$$

$$M_x = Vx - Hy - \frac{ex^2}{2} + \frac{n}{3l^2} x^3 (2l - x).$$

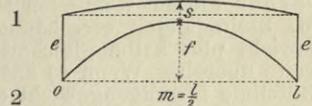


Fig. 105.

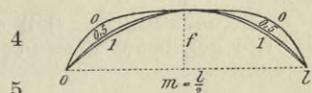


Fig. 106.

Hiermit sind nach § 19 auch N_x , T_x und alle anderen Beanspruchungen für die in Frage stehende Belastung bestimmt.

b) In den Gleichungen 4, 5 sind die Koordinaten x , y auf die Bogenachse bezogen (§ 1), die aber beliebig geformt sein kann. Verlangen wir nun, daß sie mit der Stützlinie für obige Belastung zusammenfällt, so folgt aus 5 mit $M_x = 0$ (§ 8) die Gleichung der Bogenachse:

$$y = \frac{1}{H} \left[Vx - \frac{ex^2}{2} + \frac{n}{3l^2} x^3 (2l - x) \right], \quad 6$$

und die Tangente ihres Neigungswinkels bei x :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} \left[V - ex + \frac{2n}{3l^2} x^2 (3l - 2x) \right] = \frac{V_x}{H}. \quad 7$$

In diesen Gleichungen sind V , H durch 2, 3 bestimmt; sie liefern beispielsweise:

für	$x = 0$	$\frac{l}{8}$	$\frac{l}{4}$	$\frac{l}{2}$
	(Kämpfer)		(nahe d. Bruchfuge)	(Scheitel)
$y =$	0	$\frac{25e + 71s}{e + 5s} \frac{7f}{256}$	$\frac{5e + 19s}{e + 5s} \frac{3f}{16}$	f
$\operatorname{tg} \varphi =$	$\frac{e + 2s}{e + 5s} \frac{8f}{l}$	$\frac{3e + 13s}{e + 5s} \frac{9f}{8l}$	$\frac{e + 11s}{e + 5s} \frac{f}{l}$	0,

und speziell wenn $\frac{s}{e} = 0$ (Grenzfall):

$y =$	0	$\frac{175}{256} f$	$\frac{15}{16} f$	f
$\operatorname{tg} \varphi$	$8 \frac{f}{l}$	$\frac{27}{8} \frac{f}{l}$	$\frac{f}{l}$	0,

wenn $\frac{s}{e} = \frac{1}{2}$:

$y =$	0	$\frac{121}{256} f$	$\frac{87}{112} f$	f
$\operatorname{tg} \varphi =$	$\frac{32}{7} \frac{f}{l}$	$\frac{171}{56} \frac{f}{l}$	$\frac{13}{7} \frac{f}{l}$	0,

wenn $\frac{s}{e} = 1$ (Grenzfall):

$y =$	0*	$\frac{7}{16} f$	$\frac{3}{4} f$	f
$\operatorname{tg} \varphi =$	$4 \frac{f}{l}$	$3 \frac{f}{l}$	$2 \frac{f}{l}$	0.

Die den drei Fällen $\frac{s}{e} = 0, \frac{1}{2}, 1$ entsprechenden Bogenachsen sind in Fig. 106 für einen Bogen angedeutet. Die Winkel φ lassen sich leicht mittels ihrer gegebenen Tangenten auftragen.

Ist es also zulässig, bei Dreigelenkbogen aus Stein, Beton etc. das Material und die Anordnung (insbesondere des Aufbaues) so zu wählen, daß für die maßgebende Belastung eine geeignete Stützlinie entsteht, die als Bogenachse dienen soll, so lassen sich durch Wahl parabolisch begrenzter Belastung von kleinerem oder größerem Verhältnis $s : e$ mehr oder weniger steil ansetzende Bogen erhalten. Dies kann z. B. aus ästhetischen Gründen oder mit Rücksicht auf das nötige Durchflußprofil erwünscht sein. Bekanntlich stimmt nach Tolkmitt und Färber die am wenigsten Material bedingende Achse eines Dreigelenkbogens aus Stein, Beton etc. häufig genügend genau mit der Stützlinie für Eigengewicht plus halbe gleichmäßig verteilte Verkehrslast auf der ganzen Spannweite überein. Wenn es auf etwas Material nicht ankommt, kann man auch die Stützlinie für Eigengewicht allein als Bogenachse wählen, womit in diesem am längsten annähernd zutreffenden Belastungsfall alle Querschnitte (Fugen) gleichmäßig beansprucht sind.

Bemerkungen. Soll die Bogenachse mit der Stützlinie für eine beliebige gegebene Belastung übereinstimmen, so hat man nach § 19, 2):

$$y = \frac{1}{H} \left[Vx - \sum_0^x P(x-a) \right], \quad 8$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} \left[V - \sum_0^x P \right] = \frac{Vx}{H}, \quad 9$$

worin V, H derselben Belastung entsprechen und durch § 19, 4), 5) bestimmt sind. Über die Werte der Summenausdrücke Σ für besondere Belastungsarten siehe § 18.

Nachdem die Bogenachse bekannt ist, können die Schnittkräfte N_x, T_x, R_x und Schnittmomente M_x , sowie bei bekannten Querschnitten die Normalspannungen σ_o, σ_u und alle sonstigen Beanspruchungen auch für jede andere Belastung berechnet werden. Das gleiche gilt für die Grenzwerte der Schnittkräfte, Schnittmomente und sonstigen Beanspruchungen bei bewegter Last. Sind die Querschnittsabmessungen teilweise unbekannt, so lassen sie sich je nach den gegebenen Größen auf Grund der Schnittkräfte und Schnittmomente oder ihrer Grenzwerte erhalten, beispielsweise die Gurtungsquerschnitte bei gegebener Entfernung der Gurtungsschwerpunkte (§ 8), oder die Fugenstärken von Bogen aus Stein und Beton, wenn Zugspannungen nicht auftreten sollen (§ 28).

Beispiel 26. Zur vorigen Aufgabe.

Für einen Dreigelenkbogen aus Beton von $l = 48$ m Spannweite und $f = 6$ m Pfeil der Achse soll letztere der Stützlinie für parabolisch begrenzte Belastung durch Eigengewicht plus halbe gleichmäßig verteilte Verkehrslast auf der ganzen Spannweite entsprechen. Hierzu seien gegeben: Eigengewicht im Scheitel 1 m Betonhöhe gleich 2,3 t pro qm, ganze Verkehrslast $p = 0,6$ t pro qm. Die Belastung e pro qm bei den Kämpfern und die Bogenachse zu bestimmen, wenn die Ordinate der letzteren um $1/8$ der Spannweite von den Kämpfergelenken entfernt $y = 3$ m betragen soll.

Wir fassen 1 m Bogenbreite ins Auge. Für die Berechnung der Bogenachse beträgt die Belastung pro m im Scheitel:

$$s = 2,3 + \frac{0,6}{2} = 2,6 \text{ t.}$$

Da nun bei $x = \frac{l}{8}$ die Ordinate der Bogenachse $y = 3$ m sein soll, so liefert die Zusammenstellung der vorigen Aufgabe S. 103:

$$3 = \frac{25e + 71 \cdot 2,6}{e + 5 \cdot 2,6} \cdot \frac{7 \cdot 6}{256}, \quad e = 7,91 \text{ t.}$$

Hiervon kommen auf das Eigengewicht 7,61 t pro m oder $\frac{7,61}{2,3} = 3,31$ m Betonhöhe. Weiter hat man nach der gleichen Zusammenstellung die Ordinate der Bogenachse bei $x = \frac{l}{4}$:

$$y = \frac{5 \cdot 7,91 + 19 \cdot 2,6}{7,91 + 5 \cdot 2,6} \cdot \frac{3 \cdot 6}{16} = 4,79 \text{ m,}$$

und für den Winkel der Bogenachse bei den Kämpfern mit der Horizontalen:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{7,91 + 2 \cdot 2,6}{7,91 + 5 \cdot 2,6} \frac{8 \cdot 6}{48} = 0,6270, \quad \varphi = 32^{\circ} 5'.$$

Da für $x = 0$ $y = 0$ und für $x = \frac{l}{2}$ $y = f$, $\operatorname{tg} \varphi = 0$, so könnte die Bogenachse hiernach mitunter schon genügend genau verzeichnet werden. Auch liefert die Zusammenstellung S. 103 noch $\operatorname{tg} \varphi$ bei $x = \frac{l}{8}$ und $\frac{l}{4}$.

Um jedoch die Bogenachse möglichst genau zu erhalten, setzen wir für die maßgebende Belastung nach 1, 2, 3 der vorigen Aufgabe:

$$n = 7,91 - 2,6 = 5,31 \text{ t}, \quad \frac{n}{3 l^2} = \frac{5,31}{3 \cdot 48^2} = 0,0007682,$$

$$V = (7,91 + 2 \cdot 2,6) \frac{48}{6} = 104,88 \text{ t},$$

$$H = (7,91 + 5 \cdot 2,6) \frac{48^2}{48 \cdot 6} = 167,28 \text{ t},$$

womit nach Formel 6 der vorigen Aufgabe die Gleichung der Bogenachse:

$$y = \frac{1}{167,28} [104,88 x - 3,955 x^2 + 0,0007682 x^3 (96 - x)],$$

und nach 7 die Tangente ihres Neigungswinkels bei x :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{167,28} [104,88 - 7,91 x + 0,0030728 x^2 (72 - x)].$$

Den letzten Ausdruck hätten wir auch durch Differentiation des vorhergehenden erhalten können.

Beispiel 27. Einsenkungen eines Bogens mit drei Gelenken (Donau-
brücke bei Munderkingen).

Für die Betonbogen der Donaubrücke bei Munderkingen¹ ist die Spannweite $l = 50,6$ m, der Pfeil der Achse $f = 5,04$ m (Lichtweite 50 m, Pfeil der Gewölbelaubung 5 m). Unter Voraussetzung voller Wirksamkeit der an den Kämpfern und im Scheitel angebrachten Gelenke zu berechnen:

a) die Scheitelsenkung durch Temperaturänderungen um $\tau = \pm 25^{\circ} \text{ C}$, wenn der Ausdehnungskoeffizient des Betons wie bei der ursprünglichen Berechnung $\alpha = 0,0000088$ gesetzt wird;

b) die Scheitelsenkung durch eine Änderung der Spannweite um $\Delta l = 0,0027$ m und eine Senkung des Kämpfergelenkes l gegen das Kämpfergelenk 0 um $0,0009$ d. h. für $\Delta k = -0,0009$ m, wie auf Grund der Drücke in den Widerlagern angenommen wurde;

c) die Scheitelsenkung durch eine gleichmäßig verteilte Last von 6400 kg auf den Quadratmeter Horizontalprojektion des Gewölbes (wie sie die feste Last bei dem vorausgesetzten Gewichte des Betons von 2300 kg pro Kubikmeter im Mittel ergeben würde), wenn der Bogen parabolisch und der mittlere Elastizitätsmodul für die angenommene Belastung pro qcm $E = 220000$ kg wären.

a) Nach § 19, 38) ist die Scheitelsenkung durch eine Temperaturänderung um τ° :

$$e = -\alpha \tau \left(f + \frac{l^2}{4f} \right) = -0,0000088 \tau \left(5,04 + \frac{50,6^2}{4 \cdot 5,04} \right) = -0,001162 \tau \text{ m} = -1,162 \tau \text{ mm},$$

also speziell für $\tau = 25^{\circ}$ $e = -29$ mm (Hebung),

„ $\tau = -25^{\circ}$ $e = 29$ mm (Senkung).

b) Für die angeführten Lagenänderungen der Kämpfergelenke hat man nach § 19, 39):

$$e = \frac{l \Delta l}{4f} - \frac{\Delta k}{2} = \frac{50,6 \cdot 2,7}{4 \cdot 5,04} + \frac{0,9}{2} = 7,2 \text{ mm}.$$

c) Die elastische Scheitelsenkung durch irgend eine Belastung eines parabolischen Gewölbes von konstantem (mittleren) $J \cos \varphi$ wäre nach derjenigen der Formeln § 19, 33)–37) zu berechnen, welche der fraglichen Belastung ent-

¹ v. Leibbrand, Betonbrücke über die Donau bei Munderkingen, Stuttgart 1894 (auch Zeitschrift f. Bauwesen 1894).

spricht (vergl. die Beispiele 34, 47, 48, 49, 97 und VI M). Bei beliebiger symmetrischer Achse und beliebigen Querschnitten hätten die Formeln des § 48 zur Verwendung zu kommen (vergl. Beispiele 39, 96, 99). Im vorliegenden Falle läßt sich nach A 15, 18) (S. 109) näherungsweise setzen:

$$e = \frac{u l^4}{32 E b h f^2}.$$

Nun beträgt die angenommene gleichmäßig verteilte Last pro qm $\frac{u}{b} = 6400$ kg. Da ferner die mittlere Höhe des Bogens genügend genau $h = 1,2$ m ist (bei einer Veränderlichkeit zwischen 1 und 1,4 m), so erhalten wir als Näherungswert für jene Belastung bei parabolischer Achse:

$$e = \frac{6400 \cdot 50,6^4}{32 \cdot 220000 \cdot 100^2 \cdot 1,2 \cdot 5,04^2} = 0,0221 \text{ m} = 22,1 \text{ mm}.$$

Aufgabe 14. Einsenkungen von Dreigelenkbogen durch Temperaturänderungen und Stützenbewegungen.

Die Einsenkungen des Zwischengelenks beliebig geformter und gegliederter Dreigelenkbogen mit gleich hohen Kämpfergelenken und Zwischengelenk in der Mitte durch gleichmäßige Temperaturänderungen τ , kleine Änderungen Δl der Spannweite und Änderungen Δk der Stützhöhen zu ermitteln.

Bezeichnen l, f, L die Spannweite, Höhe des Zwischengelenks über den Kämpfergelenken und Entfernung des ersteren von letzteren im anfänglichen Zustande, so hat man (Fig. 107):

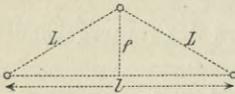


Fig. 107.

$$f^2 = L^2 - \frac{l^2}{4}. \quad 1$$

Tritt eine unendlich kleine Änderung von L bei konstantem l ein, so liefert 1:

$$2 f d f = 2 L d L.$$

Diese Gleichung gilt auch noch für genügend kleine endliche Änderungen Δf , ΔL , wofür also:

$$\Delta f = \frac{L}{f} \Delta L.$$

Einer Temperaturänderung τ entspricht $\Delta L = \alpha \tau L$, und da die Einsenkung $e = -\Delta f$, so folgt:

$$e = -\alpha \tau \frac{L^2}{f} = -\alpha \tau f \left(1 + \frac{l^2}{4f^2}\right). \quad 2$$

Eine unendlich kleine Änderung der Spannweite bei konstantem L ergibt nach 1:

$$2 f d f = -\frac{2 l d l}{4},$$

wonach bei genügend kleiner endlicher Änderung Δl mit $e = -\Delta f$:

$$e = \frac{l \Delta l}{4 f}. \quad 3$$

Daß eine Änderung der Stützhöhen um Δk , d. h. eine Erhöhung der Stütze l gegen die Stütze 0 um Δk oder eine Senkung der Stütze 0 gegen die Stütze l um Δk für das Mittelgelenk die Einsenkung

$$e = -\frac{\Delta k}{2} \quad 4$$

liefert, ist unmittelbar ersichtlich.

Die vorstehenden Resultate müssen sich natürlich auch speziell für parabolische Dreigelenkbogen von konstantem $J \cos \varphi$ und für stabförmige Dreigelenkbogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten sowie für Dreigelenkbogenfachwerke ergeben (vergl. §§ 45, 48 und Aufgabe 36).

Aufgabe 15. Über schätzungsweise Berechnungen von Einsenkungen.

Es sollen diejenigen Einsenkungen in der Mitte symmetrischer Bogen bestimmt werden, welche lediglich durch eine gleichmäßige Längenänderung der Bogenachse (abgesehen von sonstigen Formänderungen) bei gleichbleibender Spannweite bedingt wären, wenn die Achslänge vor wie nach der Einsenkung

$$s = l \left(1 + \frac{8f^2}{3l^2} \right) \quad a$$

gesetzt werden kann (vergl. Beispiel 28). Auch ist für letzteren Fall die Einsenkung durch eine Änderung Δl der Spannweite ohne Änderung der Achslänge s oder sonstige Einwirkungen anzugeben. Sodann sind möglichst einfache brauchbare Formeln für die Einsenkung von Bogen mit drei Gelenken, zwei Gelenken und ohne Gelenk anzugeben.

Gebräuchliche unrichtige Formeln. Aus a folgt durch Differentiation bei konstantem l

$$ds = \frac{16f}{3l} df.$$

Diese Beziehung müßte unter obigen Voraussetzungen a auch für genügend kleine endliche Änderungen von s gelten. Setzen wir demgemäß Δs und $\Delta f = -e$ an Stelle von ds und df , so ergibt sich die zuerst verlangte Einsenkung:

$$e = -\frac{3l}{16f} \Delta s. \quad b$$

Man hat diese Gleichung mitunter angewandt, um die Einsenkung durch Temperaturänderungen und gewisse Belastungen zu berechnen. So hätte man im Falle der Gültigkeit von b) für eine Temperaturänderung τ mit $\Delta s = \alpha \tau s$:

$$e = -\frac{3l}{16f} s \alpha \tau = \alpha \tau \left(\frac{f}{2} + \frac{3l^2}{16f} \right), \quad c$$

und für eine gleiche und gleichmäßige Druckbeanspruchung aller Bogenquerschnitte von σ pro Flächeneinheit mit $\Delta s = -\frac{\sigma}{E} s$:

$$e = \frac{3ls}{16f} \frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma}{E} \left(\frac{f}{2} + \frac{3l^2}{16f} \right). \quad d$$

Gleichung c ist schon deshalb nicht richtig, weil mit Temperaturänderungen bei Bogen mit zwei Gelenken und ohne Gelenke auch Biegemomente M_x verbunden sind, die bekanntlich auch ohne Achsialkraft (Balkenträger) erhebliche Einsenkungen zur Folge haben können, während für Bogen mit drei Gelenken die obige Bestimmung von ds durch Differentiation wegen der Winkelbildung beim Zwischengelenk nicht zulässig ist. Gleichung d hat auch wenig Wert, weil eine Belastung, welche gleiche Normalspannungen in allen Querschnittelementen des ganzen Bogens erzeugt, nicht leicht vorkommt. Man pflegt bei dieser Annahme an symmetrische Parabelbogen mit gleichmäßig auf die ganze Spannweite verteilter Last zu denken und nur eine Schätzung der Einsenkung zu beanspruchen. Allein, ohne künstliche Überhöhung der Bogen (Aufgabe 17) treten auch bei jener Belastung Biegemomente auf (abgesehen vom Dreigelenkbogen).

Zur Ableitung der unter a weiter verlangten Formel differentiiieren wir Gleichung a bei konstantem s und erhalten:

$$0 = dl + \frac{8}{3} d \frac{f^2}{l} \quad \text{oder}$$

$$-\frac{16f}{3l} df = \left(1 - \frac{8f^2}{3l^2} \right) dl,$$

und wenn $\Delta f = -e$ und Δl an Stelle von df , dl treten:

$$e = \left(\frac{3l}{16f} - \frac{f}{2l} \right) \Delta l. \quad e$$

Auch diese dem obigen unrichtigen Vorgehen entsprechende Formel ist deshalb praktisch kaum zu verwerten, weil mit Änderungen Δl der Spannweite bei Bogen mit zwei Gelenken und ohne Gelenk auch Änderungen der H , N_x , M_x , σ usw. eintreten, während für Bogen mit drei Gelenken wieder die Ableitung der Formel durch Differentiation unzulässig ist.

Neuere richtige Formeln¹. Die Scheitelsenkungen für beliebige symmetrische Belastungen von Bogen mit drei Gelenken, zwei Gelenken und ohne

¹ Wie die übrigen Formeln betreffend die Einsenkungen von Bogenträgern bereits in der zweiten Auflage dieser Schrift und zum Teil in der ersten Auflage von Luegers Lexikon (Artikel Einsenkung) gegeben.

Gelenk sind aus §§ 19, 20, 21, 45, 48 zu entnehmen (Beispiele 27, 34, 39, 47, 48, 49, 96, 97, 99 und IV *M*); hier handelt es sich nur um Formeln für möglichst einfache Berechnungen, soweit die Beziehungen für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ verwendbar sind¹.

Durch eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit hat man (über c , ε siehe am Schlusse des § 19):

bei 3 Gelenken	$e = \varepsilon \frac{u l^4}{60 E c},$	1
" 2 "	$e = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{5 u l^4}{384 E c},$	2
" 0 "	$e = \frac{\varepsilon}{1 + 6 \varepsilon} \frac{u l^4}{60 E c}.$	3

Durch eine in der Trägermitte wirkende Einzellast P entstehen:

bei 3 Gelenken	$e = \frac{1 + 16 \varepsilon}{480} \frac{P l^3}{E c},$	4
" 2 "	$e = \frac{3 + 128 \varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{P l^3}{6144 E c},$	5
" 0 "	$e = \frac{1 + 96 \varepsilon}{1 + 6 \varepsilon} \frac{P l^3}{3072 E c}.$	6

Für schätzungsweise Berechnungen kann in 1—6 bei flachen Bogen ε nach § 19, 42)—46) und c gleich einem mittleren Trägheitsmomente J gesetzt und oft noch ε im Nenner vernachlässigt werden (s. auch unten). Besonders für Gewölbe pflegt ε klein zu sein, so für die in Beispiel 27 behandelte Munderkinger Brücke 0,0088, für das in Beispiel 63 angenommene Wiener Bruchsteinversuchsgewölbe 0,00259, für die Beispiel 22 zugrunde gelegte Pruthbrücke bei Jaremeze 0,00102. Mit Rücksicht auf die Kleinheit von ε erkennt man nach 1—6, daß sowohl durch eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last als durch eine in der Trägermitte wirkende Einzellast die Einsenkung e bei Bogen mit drei Gelenken am größten ist. Für Bogen mit zwei Gelenken und ohne Gelenk ist sie im ersten Falle etwa $\frac{25}{32}$ und $\frac{15}{16}$ mal so groß, im zweiten Falle etwa $\frac{15}{64}$ und $\frac{5}{32}$ mal so groß als unter sonst gleichen Verhältnissen bei Bogen mit drei Gelenken. Vergl. die Einflußlinien Fig. 136.

Eine Temperaturänderung τ (für Zunahme τ positiv) erzeugt die Einsenkungen:

bei 3 Gelenken	$e = -\alpha \tau \left(f + \frac{l^2}{4f} \right),$	7
" 2 "	$e = -\alpha \tau \left(f + \frac{25}{128 f} \frac{l^2}{1 + \varepsilon} \right),$	8
" 0 "	$e = -\alpha \tau \left(f + \frac{15}{64 f} \frac{l^2}{1 + 6 \varepsilon} \right),$	9

Vielfach kann hierin ε vernachlässigt werden.

Durch eine Änderung Δl der Spannweite (für Zunahme Δl positiv) und eine Änderung der ursprünglich gleichen Höhenlage der Stützpunkte um Δk (bei höherem Stützpunkt l ist Δk positiv) ergeben sich

bei 3 Gelenken	$e = \frac{l}{4f} \Delta l - \frac{\Delta k}{2},$	10
" 2 "	$e = \frac{25 l}{128 f} \frac{\Delta l}{1 + \varepsilon} - \frac{\Delta k}{2},$	11
" 0 "	$e = \frac{15 l}{64 f} \frac{\Delta l}{1 + 6 \varepsilon} - \frac{\Delta k}{2},$	12

worin ebenfalls häufig ε vernachlässigt werden darf. Die Einsenkung durch eine

¹ Die Einsenkungen sind wesentlich durch die Momente M_x bedingt, welche ihrerseits stark von der Achsform abhängen. Siehe die Bemerkungen am Schlusse des Beispiels 42 und die Vergleiche in oben zitierten Beispielen, sowie in § 51.

Änderung Δl der Spannweite wächst in allen drei Fällen mit $\frac{l}{f}$, so daß bei flachen Bogen verhältnismäßig große e durch Δl bewirkt werden können.

Da bei Bogen vom Pfeile $f = 0$ durch eine Änderung der Achslänge oder eine Achsialkraft N_x keine Einsenkung entsteht, so müssen die für Bogen mit zwei Gelenken und ohne Gelenk gültigen Ausdrücke von e für $f = 0$ (womit $\varepsilon = \infty^2$, vergl. § 19, 40) in die entsprechenden Gleichungen für einfache Balken mit beiderseits frei drehbaren bzw. festgespannten Enden übergehen. Dies trifft für unsere vorstehenden und in §§ 20, 21 gegebenen Formeln zu, nicht aber für obige Ausdrücke b bis e .

In manchen Fällen lassen sich die erhaltenen Gleichungen noch weiter spezialisieren. So kann man für genügend flache Bogen rechteckigen Querschnitts (Gewölbe etc.) entsprechend § 19, 45) näherungsweise setzen:

$$e = J \cos \varphi = \frac{b h^3}{12}, \quad \varepsilon = \frac{5 h^2}{32 f^2}, \quad 13$$

unter b, h Mittelwerte der Breite und Höhe des Querschnitts verstanden. Damit gehen die Gleichungen 1–3 in die folgenden über:

$$\text{bei 3 Gelenken} \quad e = \frac{u l^4}{32 E b h f^2}, \quad 14$$

$$\text{„ 2 „} \quad e = \frac{25}{1 + \varepsilon} \frac{u l^4}{1024 E b h f^2}, \quad 15$$

$$\text{„ 0 „} \quad e = \frac{15}{1 + 6 \varepsilon} \frac{u l^4}{512 E b h f^2}. \quad 16$$

Ferner kann man für genügend flache Gitterbogen und Blechbogen, unter Vernachlässigung des Beitrags der Füllung, mit § 19, 46) näherungsweise setzen:

$$e = J \cos \varphi = \frac{F h^2}{4}, \quad \varepsilon = \frac{15 h^2}{32 f^2}, \quad 17$$

worin F, h Mittelwerte der Summe beider Gurtungsquerschnitte und ihrer Schwerpunktsentfernung bedeuten. Damit folgen aus 1–3:

$$\text{bei 3 Gelenken} \quad e = \frac{u l^4}{32 E F f^2}, \quad 18$$

$$\text{„ 2 „} \quad e = \frac{25}{1 + \varepsilon} \frac{u l^4}{1024 E F f^2}, \quad 19$$

$$\text{„ 0 „} \quad e = \frac{15}{1 + 6 \varepsilon} \frac{u l^4}{512 E F f^2}. \quad 20$$

Selbstverständlich lassen sich gerade in diesen für Schätzungsrechnungen bestimmten Gleichungen meist die ε in den Nennern vernachlässigen.

Für die in der Folge mehrfach behandelten Bogen der älteren Koblenzer Brücke beispielsweise liefert 19 mit $l = 11 f = 98,0775$ m, $F = 2 \cdot 0,08455 = 0,1691$ qm bei Vernachlässigung von ε :

$$e = \frac{25 u \cdot 11^2 \cdot 98,0775^2}{1024 \cdot 2 \cdot 000000 \cdot 100^2 \cdot 0,1691} \text{ m} = 0,007415 u \text{ mm},$$

während eine genauere Berechnung in Beispiel 34 ergeben wird $e = 0,007203 u$ mm. Für Vollbelastung mit $u = 7169$ kg erhalten wir nach diesen Ausdrücken 53 mm und 52 mm.

Beispiel 28. Berechnung von Bogenlängen.

Es sollen die Längen symmetrischer Parabelbogen und Kreisbogen von der Spannweite l und dem Pfeile f verglichen werden für $\frac{f}{l} = \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}$. Sodann sind die Bogenlängen der älteren Koblenzer Brücke, für welche $l = 11 f = 98,0775$ m ist, für beide Fälle zu berechnen.

Genau genommen hat man (Fig. 108) für den Parabelbogen:

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{l^2 + 16 f^2} + \frac{l^2}{16 f} \log_n \frac{\sqrt{l^2 + 16 f^2} + 4 f}{\sqrt{l^2 + 16 f^2} - 4 f}, \quad 1$$

und für den Kreisbogen:

$$s = 2r\varphi_0$$

mit

$$\sin \varphi_0 = \frac{l}{2r}, \quad r = \frac{l^2}{8f} + \frac{l}{2}$$

2

Für genügend flache Bogen kann man in beiden Fällen setzen:

$$s = l + \frac{8f^2}{3l} \quad 3$$

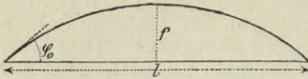


Fig. 108.

Pfeilverhältnis $\frac{f}{l} = \frac{1}{10}$. Man erhält für den Parabelbogen:

$$s = \frac{l}{2} \sqrt{1,16} + \frac{5l}{8} \log \frac{\sqrt{1,16 + 0,4}}{\sqrt{1,16 - 0,4}} = 1,02606 l,$$

für den Kreisbogen mit $r = 1,3 l$ und $\sin \varphi_0 = \frac{1}{2,6}$:

$$\varphi_0 = 22^\circ 37' 12'' = \frac{22,62 \cdot 3,14159}{180} = 0,394793,$$

$$s = 2 \cdot 1,3 \cdot 0,394793 l = 1,02646 l,$$

während nach 3 näherungsweise:

$$s = l \left(1 + \frac{8}{300} \right) = 1,02667 l.$$

Es liefern hiernach beispielsweise

für		$l = 25$	50	100	200 m:
	Gleichung 1)	$s = 25,65$	$51,31$	$102,61$	$205,21$ „ (Parabel)
	„ 2)	$s = 25,66$	$51,32$	$102,65$	$205,29$ „ (Kreis)
	„ 3)	$s = 25,67$	$51,33$	$102,67$	$205,33$ „ .

Pfeilverhältnis $\frac{f}{l} = \frac{1}{5}$. Es ergeben sich für den Parabelbogen:

$$s = \frac{l}{2} \sqrt{1,64} + \frac{5l}{15} \log \frac{\sqrt{1,64 + 0,8}}{\sqrt{1,64 - 0,8}} = 1,09823 l,$$

für den Kreisbogen mit $r = 0,725 l$, $\sin \varphi_0 = \frac{1}{1,45}$:

$$\varphi_0 = 43^\circ 36' 10'' = \frac{43,6028 \cdot 3,14159}{180} = 0,761012,$$

$$s = 2 \cdot 0,725 \cdot 0,761012 l = 1,10347 l,$$

und näherungsweise:

$$s = l \left(1 + \frac{8}{75} \right) = 1,10667 l.$$

Es liefern demnach beispielsweise

für		$l = 25$	50	100	200 m:
	Gleichung 1)	$s = 27,46$	$54,91$	$109,82$	$219,65$ „ (Parabel)
	„ 2)	$s = 27,59$	$55,17$	$110,35$	$220,69$ „ (Kreis)
	„ 3)	$s = 27,67$	$55,33$	$110,67$	$221,33$ „ .

Pfeilverhältnis $\frac{f}{l} = \frac{1}{2}$. Wir erhalten für den Parabelbogen:

$$s = \frac{l}{2} \sqrt{5} + \frac{l}{8} \log \frac{\sqrt{5 + 2}}{\sqrt{5 - 2}} = 1,47894 l,$$

für den Kreisbogen mit $r = 0,5 l$, $\sin \varphi_0 = 1$ (Halbkreis):

$$\varphi_0 = 90^\circ = \frac{90 \cdot 3,141592}{180} = 1,57096,$$

$$s = 2 \cdot 0,5 \cdot 1,57096 l = 1,57096 l,$$

während 3 liefert:

$$s = l \left(1 + \frac{8}{12} \right) = 1,66667 l.$$

Es ergeben danach beispielsweise:

für		$l = 25$	50	100	200 m:	
	Gleichung 1)	$s = 36,97$	$73,95$	$147,89$	$295,79$	„ (Parabel)
	„ 2)	$s = 39,27$	$78,55$	$157,10$	$314,19$	„ (Kreis)
	„ 3)	$s = 41,67$	$83,33$	$166,67$	$333,33$	„ .

Koblener Brücke: Es folgen mit $f = l/11 = 8,91614$ m aus Gleichung 1:

$$s = 4,45807 \sqrt{137} + \frac{11}{16} 98,0775 \log n \frac{\sqrt{137+4}}{\sqrt{137-4}} = 100,198 \text{ m},$$

und aus den Gleichungen 2:

$$r = \left(\frac{121}{8} + \frac{1}{2} \right) 8,91614 = 139,314 \text{ m},$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{98,0775}{2 \cdot 139,314},$$

$$\varphi_0 = 20^\circ 36' 35'' = \frac{20,6097 \cdot 3,1416}{180} = 0,35971,$$

$$s = 2 \cdot 139,314 \cdot 0,35971 = 100,225 \text{ m},$$

während 3 liefert:

$$s = 98,0775 \left(1 + \frac{8}{363} \right) = 100,239 \text{ m},$$

das ist 0,041 % mehr als im ersten und 0,014 % mehr als im zweiten Falle.

Häufig liegt $\frac{f}{l}$ in der Nähe von $\frac{1}{10}$ und fast immer unter $\frac{1}{5}$. Es stimmen dann die Resultate der Formeln 1, 2, 3 genügend überein, um in vielen praktischen Fällen eine an Stelle der andern verwenden zu können.

Aufgabe 16. Dreigelenkbogen bei beliebigen Richtungen der angreifenden Kräfte.

Die Vertikalreaktionen V, V' und Horizontalreaktionen H, H' der Kämpfer symmetrischer Bogen mit drei Gelenken für den Fall anzugeben, daß nicht nur Lasten, sondern beliebig gerichtete äußere Aktivkräfte in der Trägerebene wirken.

Für die Stützenreaktionen, Schnittkräfte und Schnittmomente gelten die Gleichungen der Aufgabe 1 (S. 7), worin nun wie in § 19:

$$k = 0, \quad M = M' = 0, \quad M_m = 0, \quad 1$$

so daß die Vertikalreaktionen der Stützen (Fig. 109):

$$V = \frac{1}{l} \left[\sum_0^l P (l - a) + \sum_0^l Q b \right], \quad 2$$

$$V' = \frac{1}{l} \left[\sum_0^l P a - \sum_0^l Q b \right], \quad 3$$

während ohne Änderung bleiben:

$$V + V' = \sum_0^l P, \quad H - H' = \sum_0^l Q. \quad 4$$

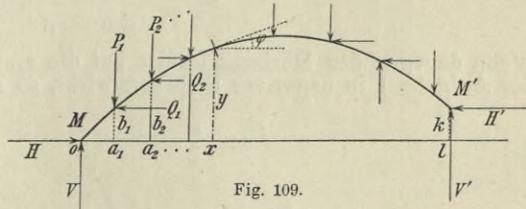


Fig. 109.

Gleichung 3 der Aufgabe 1 liefert für $x = \frac{l}{2} = m$, wo $y = f$:

$$0 = V \frac{l}{2} - H f - \sum_0^m P \left(\frac{l}{2} - a \right) + \sum_0^m Q (f - b),$$

woraus die Horizontalreaktion bei 0:

$$H = \frac{1}{2f} \left[V l - \sum_0^m P(l-2a) + 2 \sum_0^m Q(f-b) \right], \quad 5$$

und nach Einsetzen von 2, sowie mit Rücksicht auf 4 beide Horizontalreaktionen:

$$H = \frac{1}{2f} \left[\sum_0^m P a + \sum_m^l P(l-a) + \sum_0^m Q(2f-b) + \sum_m^l Q b \right], \quad 6$$

$$H' = \frac{1}{2f} \left[\sum_0^m P a + \sum_m^l P(l-a) - \sum_0^m Q b - \sum_m^l Q(2f-b) \right]. \quad 7$$

Sind die Q nach Größe und Richtung symmetrisch zur Trägermitte angeordnet (Erddruck etc.), dann ergeben obige Formeln wegen $\sum_m^l Q b = -\sum_0^m Q b$ und $\sum_0^l Q = 0$:

$$V = \frac{1}{l} \sum_0^l P(l-a), \quad V' = \frac{1}{l} \sum_0^l P a, \quad 8$$

$$H = H' = \frac{1}{2f} \left[\sum_0^m P a + \sum_m^l P(l-a) + 2 \sum_0^m Q(f-b) \right], \quad 9$$

und wenn auch die P symmetrisch zur Trägermitte liegen, wegen $\sum_0^m P a = \sum_m^l P(l-a)$ (vergl. S. 79):

$$V = V' = \sum_0^m P, \quad 10$$

$$H = H' = \frac{1}{f} \left[\sum_0^m P a + \sum_0^m Q(f-b) \right]. \quad 11$$

Liegt gerade in der Mitte eine konzentrierte Last, so ist dem Begriffe der Symmetrie entsprechend nur die Hälfte derselben in die Summen $\sum_0^m P$ von 10, 11 aufzunehmen.

Es wirke nur auf eine Trägerhälfte ein nach der Mitte gerichteter Horizontaldruck von v pro Höheneinheit von f , während H_p den von der Vertikalbelastung allein herrührenden Teil der Horizontalreaktionen darstellt. Dann hat man nach 2, 3, 6, 7 bei Wirkung der v auf die zweite Trägerhälfte (vergl. § 18):

$$\sum_0^l Q b = \sum_m^l Q b = v \int_0^f b \, db = \frac{v f^2}{2},$$

$$\sum_m^l Q(2f-b) = v \int_0^f (2f-b) \, db = \frac{3 v f^2}{2},$$

und damit:

$$V = \frac{1}{l} \sum_0^l P(l-a) + \frac{v f^2}{2l}, \quad V' = \frac{1}{l} \sum_0^l P a - \frac{v f^2}{2l}, \quad 12$$

$$H = H_p + \frac{v f}{4}, \quad H' = H_p - \frac{3 v f}{4}, \quad 13$$

$$H - H' = v f.$$

Wenn dagegen der Horizontaldruck auf die erste Trägerhälfte, also im Sinne der Aufgabe 1 in negativer Richtung wirkt, so erhält man:

$$\sum_0^l Q b = \sum_0^m Q b = -v \int_0^f b \, db = -\frac{v f^2}{2},$$

$$\sum_0^m Q(2f-b) = -v \int_0^f (2f-b) \, db = -\frac{3 v f^2}{2},$$

und mit diesen Werten:

$$V = \frac{1}{l} \sum_0^l P(l-a) - \frac{v f^2}{2l}, \quad V' = \frac{1}{l} \sum_0^l P a + \frac{v f^2}{2l}, \quad 15$$

$$H = H_p - \frac{3vf}{4}, \quad H' = H_p + \frac{vf}{4}. \quad 16$$

$$H - H' = -vf. \quad 17$$

In den Gleichungen 13, 16 hat man nach 6, 7 bei beliebiger Belastung:

$$H_p = \frac{1}{2f} \left[\sum_0^m P a + \sum_m^l P (l-a) \right], \quad 18$$

und speziell bei symmetrischer Belastung:

$$H_p = \frac{1}{f} \sum_0^m P a; \quad 19$$

ferner mit Rücksicht auf § 19 für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit:

$$H_p = \frac{u l^2}{8f}, \quad 20$$

und für verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten von u, u' pro Längeneinheit auf der ersten und zweiten Hälfte der Spannweite:

$$H_p = \frac{u + u'}{16f} l^2. \quad 21$$

Da nun M_x, N_x, T_x nach Aufgabe 1 berechnet werden können, so lassen sich nach §§ 8, 9 auch alle Normalspannungen und Schubspannungen erhalten. Die Kämpferdrucklinien für vertikale und horizontale Aktivkräfte wurden in Aufgabe 3 abgeleitet. Für Vertikalkräfte, die unabhängig von Horizontalkräften sind (Lasten), bleiben selbstverständlich die ungünstigsten Belastungen wie in § 19 bestimmt.

§ 20. Einfache Bogen mit zwei Gelenken.

Der Bogen habe nun zwar Kämpfergelenke in gleicher Höhe, aber kein Zwischengelenk (Fig. 110). In diesem Falle gelten in § 1:

$$M = M' = 0, \quad k = 0. \quad 1$$

Die Vertikalreaktionen der Kämpfer werden nach § 1, 4), 5) wie bei Bogen mit drei Gelenken:

$$V = \frac{1}{l} \sum_0^l P (l-a), \quad V' = \frac{1}{l} \sum_0^l P a, \quad 2$$

während der Horizontalschub H durch die statischen Gleichungen des § 1 nicht bestimmt ist, sondern aus Beziehungen für die elastischen Deformationen ermittelt werden muß. Er zeigt sich dann von der Form der Bogenachse und der Veränderlichkeit des Querschnitts abhängig.

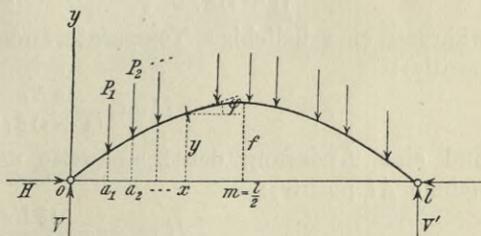


Fig. 110.

Das Moment und die Vertikalkraft in einem beliebigen Querschnitt x lassen sich nach § 1, 3), 8) und 2), 7) wie bei Bogen mit drei Gelenken ausdrücken:

$$M_x = Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a) = \frac{l-x}{l} \sum_0^x Pa + \frac{x}{l} \sum_x^l P(l-a) - Hy, \quad 3$$

$$V_x = V - \sum_0^x P = -\frac{1}{l} \sum_0^x Pa + \frac{1}{l} \sum_x^l P(l-a), \quad 4$$

und für die Normalkraft bei x gilt wie immer:

$$N_x = V_x \sin \varphi + H \cos \varphi. \quad 5$$

Auch für die in §§ 1, 8, 9 gegebenen Ausdrücke der Transversalkraft T_x , resultierenden Schnittkraft R_x , Normalspannungen σ , σ_o , σ_u , Schubspannungen τ usw. treten keine Änderungen ein. Man hat also z. B. bei vollwandigen Trägern mit symmetrisch zur Achsschicht angeordneten Querschnitten die Normalspannungen im obersten und untersten Querschnittselement (zwischen welchen die Werte aller übrigen σ des Querschnitts liegen):

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}, \quad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{W}, \quad 6$$

unter F den nutzbaren Querschnitt, unter W das Widerstandsmoment desselben verstanden.

Verschiedene Formen.

Bezüglich der Gleichungen der Bogenachse und ihrer Richtungswinkel wird auf das im vorigen Paragraphen Gesagte verwiesen (S. 77). Wir fassen hier nur symmetrische Parabelbogen mit konstantem (mittlerem) $J \cos \varphi$ (J Trägheitsmoment, φ Winkel der Bogenachse mit der Horizontalen) symmetrische Halbkreisbogen von konstantem J und Bogen mit beliebiger symmetrischer Achse und beliebigen Querschnitten spezieller ins Auge. Inwiefern diese Fälle genügen, ist in § 43 besprochen, während die Ableitungen der gegebenen H in §§ 41, 42, 47 zu finden sind. Über Kreisbogen siehe auch Aufgabe 31.

Für symmetrische parabolische Bogen vom Mittelwerte c des Ausdrucks $J \cos \varphi$ hat man nach § 42, 18) den durch eine beliebige Belastung erzeugten Horizontalschub:

$$H = \frac{5}{(1+\varepsilon) 8 f l^3} \sum_0^l P a (l-a) (l^2 + la - a^2 - \beta l^2), \quad 7$$

während eine beliebige Temperaturänderung τ bewirkt (für Zunahme τ positiv):

$$H = \frac{15 E c}{(1+\varepsilon) 8 f^2} a \tau, \quad 8$$

und eine Änderung der Spannweite um Δl bedingen würde (für Zunahme Δl positiv):

$$H = -\frac{15 E c}{(1+\varepsilon) 8 f^2} \frac{\Delta l}{l}. \quad 9$$

In diesen Ausdrücken wie in der Folge gilt für ε die Gleichung § 19, 40), während mit r nach § 19, 11)

$$\beta = \frac{3\gamma}{f} \frac{r-f}{r^2} = \frac{8}{5} \frac{f}{r-f} \varepsilon. \quad 10$$

Man hat beispielsweise für die ältere Koblenzer Brücke von $l = 98,0775$ m, $f = 8,91614$ m, $\frac{f}{l} = \frac{1}{11}$ (Beispiel 30):

$$\varepsilon = 0,045633, \quad \beta = 0,004992,$$

für Öffnung IV der Cannstatter Neckarbrücke von $l = 48$ m, $f = 4,505$ m, $\frac{f}{l} = \frac{1}{10,3}$ (Abschnitt VI, B):

$$\varepsilon = 0,012063, \quad \beta = 0,001411,$$

für die Maria-Pia-Brücke über den Douro in Portugal von $l = 160$ m, $f = 42,65$ m, $\frac{f}{l} = \frac{1}{3,75}$ (Beispiel 95):

$$\varepsilon = 0,004287, \quad \beta = 0,005447,$$

für das Gewölbe der Pruthbrücke bei Jaremce von $l = 67,62$ m, $f = 18,1215$ m, $\frac{f}{l} = \frac{1}{3,73}$ (Beispiel 44):

$$\varepsilon = 0,00102, \quad \beta = 0,00132,$$

und für das Wiener Bruchsteinversuchsgewölbe von $l = 23,758$ m, $f = 4,502$ m, $\frac{f}{l} = \frac{1}{5,28}$ (Beispiel 63):

$$\varepsilon = 0,002590, \quad \beta = 0,001390.$$

Schon hieraus läßt sich schließen, daß βl^2 in 7 fast immer vernachlässigt werden kann, womit für beliebige Belastung:

$$H = \frac{1}{(1 + \varepsilon) 8 f l^3} \sum_0^l P a (l - a) (l^2 + l a - a^2). \quad 11$$

Bei vorläufigen, überschlägigen und die Widerlager betreffenden Berechnungen darf in 7—9 neben β meist auch ε vernachlässigt werden, womit aus 7 oder 11 entsteht:

$$H = \frac{5}{8 f l^3} \sum_0^l P a (l - a) (l^2 + l a - a^2). \quad a$$

Hierin ist

für	$a = 0$	$\frac{l}{4}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{3l}{4}$	l
	$l^2 + l a - a^2 = l^2$	$\frac{19}{16} l^2$	$\frac{5}{4} l^2$	$\frac{19}{16} l^2$	l^2 .

Wird statt der letzteren, nicht sehr veränderlichen Größe deren durch die Methode der kleinsten Quadrate bestimmter Mittelwert:

$$\frac{1}{l} \int_0^l (l^2 + l a - a^2) da = \frac{7}{6} l^2$$

in a eingeführt, so folgt die Näherungsformel:

$$H = \frac{35}{48 f l} \sum_0^l P a (l - a). \quad b$$

Für symmetrische Halbkreisbogen vom Mittelwerte J des Trägheitsmoments liefert § 41 durch beliebige Belastung:

$$H = \frac{4}{\pi l^2} \sum_0^l P a (l - a), \quad 12$$

durch eine Temperaturänderung τ allein:

$$H = \frac{16 EJ}{\pi l^2} \alpha \tau, \tag{13}$$

und durch eine Änderung der Spannweite um Δl :

$$H = - \frac{16 EJ}{\pi l^3} \Delta l. \tag{14}$$

Über andere Kreisbogen siehe Aufgabe 31.

Bogen mit beliebiger Achsform und beliebiger Veränderlichkeit des Querschnitts denken wir uns durch Querschnitte oder sonst

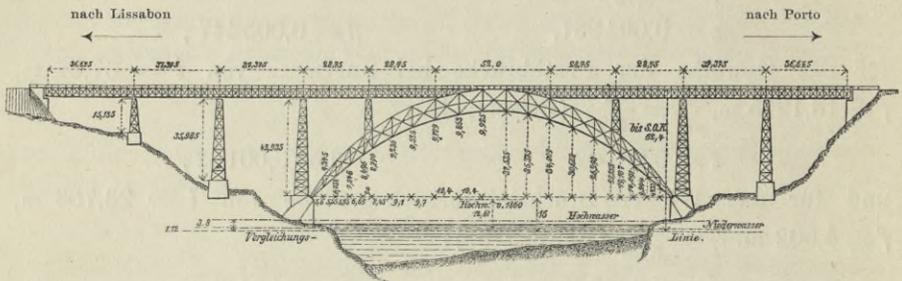


Fig. 111.

geeignete Schnitte in eine genügende Anzahl gleich oder verschieden langer Felder geteilt, welche z. B. bei der in Fig. 111 angedeuteten Maria-Pia-Brücke über den Douro in Portugal natürlich mit den Fachwerkfeldern übereinstimmen würden.

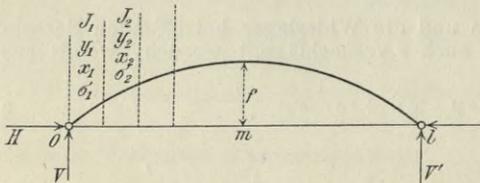


Fig. 112.

Die Achslänge σ und die Mittelwerte von x, y, J für die einzelnen Felder (z. B. die Werte in den Feldermitten) mögen wie in Fig. 112 angedeutet bezeichnet sein. Beziehen sich dann in den folgenden Gleichungen die Summen

Σ auf alle Felder zwischen den angesetzten Summengrenzen, so haben wir unter üblichen, aber nicht immer zulässigen Vernachlässigungen den von einer beliebigen Belastung herrührenden Horizontalschub:

$$H = \frac{1}{w} \left(Vv - \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} S_x \right) \quad \text{mit } S_x = \sum_0^x P(x-a). \tag{15}$$

den Beitrag einer beliebigen Temperaturänderung τ

$$H = \frac{l}{w} E \alpha \tau, \tag{16}$$

und den Einfluß einer Änderung der Spannweite um Δl :

$$H = - \frac{E}{w} \Delta l. \tag{17}$$

In diesen Gleichungen sind nur von der Achsform und den Querschnitten abhängig, also für alle Belastungen usw. gleichbleibend:

$$w = \sum_0^l \frac{\sigma y^2}{J}, \quad v = \sum_0^l \frac{\sigma x y}{J}, \quad 18$$

wenn jedoch, wie gewöhnlich, die Felderteilung und Querschnitte zur Trägermitte symmetrisch angeordnet sind, auch:

$$w = 2 \sum_0^m \frac{\sigma y^2}{J}, \quad v = l \sum_0^m \frac{\sigma y}{J}. \quad 19$$

In §§ 46, 47 sind genauere Formeln für den Horizontalschub der Zweigelenkbogen von beliebiger symmetrischer Achse und beliebigen Querschnitten abgeleitet. Die in § 47 vorgenommene Vergleichung der betreffenden Resultate für die Maria-Pia-Brücke mit den Resultaten der obigen einfacheren Formeln ergab Abweichungen von 0,5 bis 1 %. Bei flacheren Bogen können größere Differenzen entstehen. Auch geben die Abweichungen beim Horizontalschub keinen zuverlässigen Maßstab für die entsprechenden Abweichungen aller von ihm abhängigen Größen (vergl. die Beispiele 39 und 96).

Verschiedene Belastungen.

Die bis jetzt angeführten Gleichungen gelten für beliebige Belastung. Eine Spezialisierung derselben für stetig verteilte Lasten kann nach der Anleitung in § 18 erfolgen, wo die Werte der Summenausdrücke Σ für wichtigste Fälle gegeben sind.

Für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit erhält man:

$$V = V' = \frac{ul}{2}, \quad 20$$

$$V_x = u \left(\frac{l}{2} - x \right), \quad 21$$

$$M_x = \frac{u}{2} x(l-x) - Hy, \quad 22$$

worin für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$:

$$H = \frac{1 - \frac{5}{6} \beta}{1 + \varepsilon} \frac{ul^2}{8f}, \quad 23$$

für symmetrische Halbkreisbogen von konstantem J :

$$H = \frac{2u}{3\pi} l, \quad 24$$

und für Bogen von beliebiger symmetrischer Achse und beliebigen Querschnitten:

$$H = \frac{lv - z}{2w} u. \quad 25$$

In 23 kann β fast immer, ε jedoch im allgemeinen nur für vorläufige, überschlägige und die Widerlager betreffende Berechnungen vernach-

lässtig werden (§ 43). In 25 sind unter den Voraussetzungen der Formel 15 w , v durch 19 oder 18 bestimmt und

$$z = \frac{l}{0} \frac{\sigma y x^2}{J}, \quad 26$$

bei symmetrischer Felderteilung und symmetrischen Querschnitten hat man jedoch auch unmittelbar:

$$\frac{lv - z}{2} = l \frac{\sum_0^m \sigma x y}{J} - \frac{\sum_0^m \sigma y x^2}{J}, \quad 27$$

und daneben w nach 19.

Wirken auf der ersten und zweiten Trägerhälfte verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten von u , u' pro Längeneinheit, dann ergeben sich:

$$V = \frac{3u + u'}{8} l, \quad V' = \frac{u + 3u'}{8} l, \quad 28$$

und für Querschnitte x auf der ersten Trägerhälfte (die Berechnung dieser genügt für praktische Zwecke):

$$V_x = V - ux, \quad 29$$

$$M_x = Vx - Hy - \frac{ux^2}{2}. \quad 30$$

Hierin gelten für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$:

$$H = \frac{1 - \frac{5}{6} \beta}{1 + \varepsilon} \frac{u + u'}{16f} l^2, \quad 31$$

für symmetrische Halbkreisbogen von konstantem J :

$$H = \frac{u + u'}{3\pi} l, \quad 32$$

und für vollständig symmetrische Bogen mit beliebiger Achsform und beliebigen Querschnitten:

$$H = \frac{lv - z}{w} \frac{u + u'}{4}. \quad 33$$

Bezüglich der Vernachlässigung von β , ε und der Werte von w , v , z gilt das oben nach 25 Gesagte.

Für eine beliebige zur Trägermitte symmetrische Belastung erhalten wir aus 1 wie in § 19 (S. 79):

$$V = V' = \sum_0^m P, \quad 34$$

und speziell für den symmetrischen Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ nach 11 auf dem S. 79 gezeigten Wege:

$$H = \frac{5}{(1 + \varepsilon) 4f l^3} \sum_0^m P a (l - a) (l^2 + la - a^2), \quad 35$$

für den symmetrischen Halbkreisbogen von konstantem J nach 12:

$$H = \frac{8}{\pi l^2} \sum_0^m P a (l - a). \quad 36$$

Liegt gerade in der Mitte eine konzentrierte Last, so ist dem Begriffe der Symmetrie entsprechend nur die Hälfte derselben in \sum_0^m aufzunehmen.

Der Beitrag einer Einzellast P an beliebiger Stelle a zum Horizontalschub H ergibt sich für den Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ und den Halbkreisbogen von konstantem J , wenn man einfach in 7, 11 beziehungsweise 12 das Summenzeichen Σ wegläßt. Für Bogen von beliebiger symmetrischer Achse und beliebigen Querschnitten hat man:

$$H = \frac{P}{lw} \left[(l-a) \sum_0^a \frac{\sigma xy}{J} + a \sum_a^l \frac{\sigma(l-x)y}{J} \right]. \quad 37$$

Ist die Anordnung der Querschnitte und Felder symmetrisch zur Trägermitte, dann wird bequemer:

$$H = \frac{P}{w} \left[\sum_0^a \frac{\sigma xy}{J} + a \left(\sum_0^m \frac{\sigma y}{J} - \sum_0^a \frac{\sigma y}{J} \right) \right], \quad 38$$

also insbesondere:

$$\text{für } a < \frac{l}{2} \quad H = \frac{P}{w} \left(\sum_0^a \frac{\sigma xy}{J} + a \sum_a^m \frac{\sigma y}{J} \right), \quad 39$$

$$\text{„ } a > \frac{l}{2} \quad H = \frac{P}{w} \left(\sum_0^a \frac{\sigma xy}{J} - a \sum_m^a \frac{\sigma y}{J} \right). \quad 40$$

Alle drei Gleichungen liefern:

$$\text{für } a = \frac{l}{2} \quad H = \frac{P}{w} \sum_0^m \frac{\sigma xy}{J}. \quad 41$$

Für eine beliebige symmetrische Belastung ist bei Parabelbogen in 7, 11 und für Halbkreisbogen in 12 $\sum_0^l = 2 \sum_0^m$, während alsdann bei vollständig symmetrischen Bogen von beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten nach § 47, 4) (wie oben Glieder mit F vernachlässigt):

$$H = \frac{2}{w} \sum_0^m \frac{\sigma y}{J} (xV - S_x) = \frac{2}{w} \left[V \sum_0^m \frac{\sigma xy}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma y}{J} S_x \right], \quad 42$$

und in beiden Fällen gemäß § 49, 1), 5), 17) gesetzt werden können:

$$V = \sum_0^m P, \quad xV - S_x = \sum_0^x Pa + x \sum_x^m P, \quad 43$$

doch ist im zweiten Ausdruck 43 zu beachten, daß eine etwa gerade bei $a = x$ angreifende Last P nur in einer der Summen \sum_0^x und \sum_x^m berücksichtigt werden darf.

Falls die Bogenachse wirklich parabolisch ist, nicht nur so annähernd, daß man die für parabolische Bogen gültigen Ausdrücke des Horizontalschubes verwendet, so folgt aus 22 mit 23 und § 19, 8) für eine gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit auf der ganzen Spannweite:

$$M_x = \frac{\varepsilon + \frac{5}{6}\beta}{1 + \varepsilon} \frac{u}{2} x(l-x), \quad 44$$

und aus 30 mit 28, 31 und § 19, 8) für verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten von u, u' pro Längeneinheit auf der ersten und zweiten Hälfte der Spannweite:

$$M_x = \frac{\varepsilon + \frac{5}{6}\beta}{1 + \varepsilon} \frac{u + u'}{4} x(l - x) + \frac{u - u'}{4} x\left(\frac{l}{2} - x\right). \quad 45$$

Bei Vernachlässigung von β, ε liefert die Gleichung 44:

$$M_x = 0,$$

und die Gleichung 45:

$$M_x = \frac{u - u'}{4} x\left(\frac{l}{2} - x\right),$$

wonach die Stützzlinie (§ 8) im ersten Falle nahe der Stabachse liegt und im zweiten die letztere annähernd in der Trägermitte scheidet.

Kämpferdrucklinie. Kernlinien.

Die Umhüllungslinien U, U' der Kämpferdrücke sind Punkte, sie fallen mit den Mittelpunkten der Kämpfergelenke zusammen (§ 2). Für die Schnittlinie S der Kämpferdrücke ist nach § 2, 1) mit $M = 0$ die Ordinate b bei Abszisse a :

$$b = \frac{V}{H} a, \quad 46$$

worin V, H die durch eine Einzellast P bei a erzeugten Werte der Vertikalreaktion bei 0 und des Horizontalschubes bedeuten.

Für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ hat man nach 2, 7:

$$V = P \frac{l - a}{l}, \quad H = \frac{5Pa(l - a)(l^2 + la - a^2 - \beta l^2)}{(1 + \varepsilon)8fl^3}.$$

Die Gleichung der Schnittlinie S wird damit:

$$b = \frac{8}{5} \frac{(1 + \varepsilon)fl^2}{l^2 + la - a^2 - \beta l^2}, \quad 47$$

worin βl^2 jedenfalls wegbleiben darf (S. 115). Für die Zwecke, welchen die Kämpferdrucklinie dient (§§ 10, 11), kann jedoch meist auch ε vernachlässigt werden, so daß dann:

$$b = \frac{8}{5} \frac{fl^2}{l^2 + la - a^2}. \quad 48$$

und beispielsweise (Fig. 113):

für $a = 0$	$\frac{l}{8}$	$\frac{l}{4}$	$\frac{3l}{8}$	$\frac{l}{2}$
$\frac{b}{f} = 1,600$	1,442	1,347	1,296	1,280.

Bei Berücksichtigung von ε wären diese Werte mit $1 + \varepsilon$ zu multiplizieren.

Für symmetrische Halbkreisbogen von konstantem J ergeben 2, 12

$$V = P \frac{l - a}{l}, \quad H = \frac{4}{\pi l^2} Pa(l - a),$$

und damit 46 als Gleichung der Kämpferdrucklinie:

$$b = \frac{\pi}{4} l = 0,7854 l. \quad 49$$

Die Kämpferdrucklinie ist eine in der Höhe $0,7854 l$ über den Gelenkmittelpunkten liegende Gerade (Fig. 114), wie schon in Aufgabe 2 festgestellt wurde.

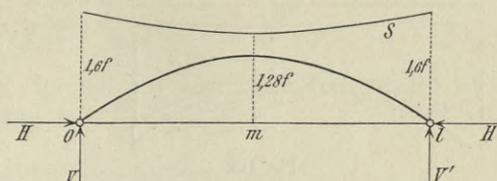


Fig. 113.

Für Bogen von beliebiger symmetrischer Achsform und beliebigen Querschnitten hat man in 46 V wie im vorigen Falle und H durch 37–40 bestimmt, wonach allgemein¹:

$$b = \frac{w a (l - a)}{(l - a) \sum_0^a \frac{\sigma x y}{J} + a \sum_a^l \frac{\sigma (l - x) y}{J}}, \quad 50$$

und, wenn die Felder und Querschnitte zur Mitte symmetrisch angeordnet sind, auf der ersten Trägerhälfte:

$$b = \frac{a (l - a)}{\sum_0^a \frac{\sigma x y}{J} + a \sum_a^m \frac{\sigma y}{J}} \frac{w}{l}. \quad 51$$

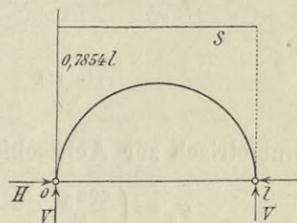


Fig. 114.

Selbstverständlich verläuft die Kämpferdrucklinie im letzteren Falle symmetrisch zur Vertikalen durch die Trägermitte. Die Gleichungen 50, 51 der Kämpferdrucklinie genügen auch dann, wenn der Horizontalschub anstatt nach 15–17 nach den genaueren Gleichungen der §§ 46, 47 berechnet wird.

Für die Kernlinie gilt das in § 8 Gesagte. Man hat also z. B. bei symmetrisch zur Achsschicht liegenden Querschnitten die Entfernungen des oberen und unteren Kernpunktes von der Stabachse:

$$k_o = k_u = \frac{W}{F'}, \quad 52$$

während die Kernlinien bei vernachlässigter Füllung (Gitterbogen etc.) mit den Gurtungsschwerlinien zusammenfallen.

Grenzwerte bei bewegter Last.

Es gilt ohne Änderung das im vorigen § für Bogen mit drei Gelenken Gesagte. Da jedoch jetzt die Kämpferdrucklinie S einen andern Verlauf hat, so gewinnen die angeführten Konstruktionen der ungünstigsten Belastungen ein etwas andres Aussehen, Fig. 115–117 treten an Stelle von Fig. 94–96.

¹ Formel 50 wie andre den Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten betreffende wurde erstmals publiziert und angewandt in dem Aufsätze: Weyrauch, Über die Berechnung der Dourobrücke, Zeitschr. f. Baukunde 1879, S. 421.

Bei Bogen mit Kämpfjunkten allein haben nun aber auch die Temperaturänderungen einen Einfluß auf den Horizontalschub H und damit auf die Beanspruchungen in allen Querschnitten. Es pflegen Abweichungen gegen die Normaltemperatur bis etwa $\tau = +30^\circ \text{C}$ berücksichtigt zu werden. Ein beliebiger Horizontalschub allein erzeugt nach 3, 5 bei x ein Moment und eine Normalkraft:

$$\begin{aligned} M_x &= -Hy, \\ N_x &= H \cos \varphi. \end{aligned} \quad 53$$

Die entsprechenden Normalspannungen im obersten und untersten Querschnittselement sind in dem gewöhnlichen Falle

symmetrisch zur Achsschicht liegender Querschnitte nach 6:

$$\sigma_o = \left(\frac{\cos \varphi}{F} - \frac{y}{W} \right) H, \quad \sigma_u = \left(\frac{\cos \varphi}{F} + \frac{y}{W} \right) H. \quad 54$$

Die Grenzwerte derselben entstehen also mit den Grenzwerten von H , d. h. für Temperaturänderungen mit H nach 8, 13, 16 oder entsprechenden

Formeln und den Grenzwerten von τ , bei obiger Annahme mit $\tau = 30^\circ$ und $\tau = -30^\circ$. Diese Grenzwerte von σ_o , σ_u sind mit den von der Belastung herrührenden

Grenzwerten von σ_o , σ_u so zu kombinieren, daß möglichst ungünstige (möglichst weit auseinander gelegene) Grenzwerte im ganzen entstehen.

Durch 53, 54 sind auch die durch eine Änderung Δl der Spannweite (Ausweichen der Widerlager) bewirkten Änderungen der Beanspruchungen bestimmt, wobei H aus 9, 14, 17 oder analogen Formeln folgt.

Formänderungen.

Wir führen wie bei Bogen mit drei Gelenken nur die Einsenkung parabolischer Bogen von konstantem $J \cos \varphi$ in der Trägermitte hier an, und verweisen bezüglich der sonstigen Formänderungen parabolischer Bogen auf § 45, bezüglich der Formänderungen von Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten auf §§ 40, 48.

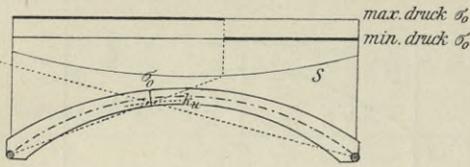


Fig. 115.

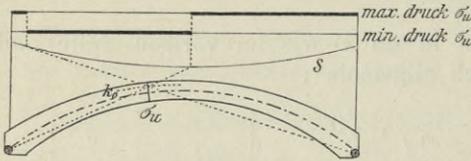


Fig. 116.

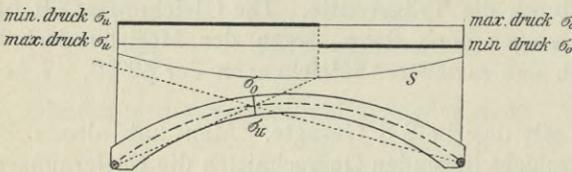


Fig. 117.

Für symmetrische Parabelbogen von konstantem $c = J \cos \varphi$ ist nach der Ableitung in § 45 unter Vernachlässigung von β die von einer beliebigen Belastung herrührende Einsenkung in der Mitte:

$$e = \frac{1}{48 Ec} \left[\sum_0^m P(l - 2a)^3 - \sum_0^l P(l - a)(l^2 - 8la + 4a^2) - 5Hf^2 \right], \quad 55$$

worin H durch 11 bestimmt. Speziell für eine zur Trägermitte symmetrische Belastung hat man mit H nach 35:

$$e = \frac{1}{24 Ec} \left[\sum_0^m Pa(3l^2 - 4a^2) - \frac{5}{2} Hf^2 \right]. \quad 56$$

Liegt gerade in der Mitte eine konzentrierte Last, so ist dem Begriffe der Symmetrie entsprechend nur die Hälfte derselben in \sum_0^m aufzunehmen. Für eine Einzellast P in der Trägermitte folgt hiernach beispielsweise:

$$e = \frac{3 + 128\varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{Pl^3}{6144 Ec}. \quad 57$$

Von 56 kann auch bei unsymmetrischer Belastung Gebrauch gemacht werden, wenn man berücksichtigt, daß die Einsenkung in der Mitte durch eine beliebige Belastung halb so groß ist als diejenige durch eine mittels Verdoppelung dieser Belastung hergestellte symmetrische Belastung.

Die Werte der Summenausdrücke Σ für stetig verteilte Lasten sind aus § 18 zu entnehmen. Für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit folgt dann aus 56 mit 23:

$$e = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{5ul^4}{384 Ec}, \quad 58$$

und für verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten von u, u' pro Längeneinheit auf der ersten und zweiten Trägerhälfte nach 55 mit 31:

$$e = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{u + u'}{768} \frac{5l^4}{Ec}. \quad 59$$

Selbstverständlich war auch in diesen Fällen β zu vernachlässigen. Gleichung 59 führt mit $u' = u$ wieder auf 58 und hätte umgekehrt aus 58 erhalten werden können.

Gleichung 56 liefert für $H = 0$ und Gleichung 57 sowie 58 für $f = 0, \varepsilon = \infty^2, c = J$ bekannte Ausdrücke für einfache Balken mit frei drehbaren Enden¹. Bei Vernachlässigung von ε würde diese notwendige Übereinstimmung wegfallen und z. B. bei beliebiger auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilter Last überhaupt keine Einsenkung sich ergeben (vergl. auch § 21 und S. 109).

Eine Temperaturänderung τ (bei Zunahme τ positiv) erzeugt die Einsenkung:

$$e = - \frac{5f^2}{48 Ec} H - \alpha \tau f, \quad 60$$

¹ Vergl. Weyrauch, Allgemeine Theorie und Berechnung der kontinuierlichen und einfachen Träger, Leipzig 1873, S. 78, 80; Lueger, Lexikon der gesamten Technik, 2. Auflage, Bd. I, S. 520; Bd. III, S. 247.

mit H nach 8. Durch Einsetzen des letzteren Ausdrucks folgt:

$$e = -\alpha \tau \left(f + \frac{25}{128f} \frac{l^2}{1+\varepsilon} \right). \quad 61$$

Durch eine Änderung Δl der Spannweite (bei Zunahme Δl positiv) und eine Änderung Δk der anfänglich gleichen Höhenlage der Stützen (bei höherer Stütze l ist Δk positiv) würde entstehen:

$$e = -\frac{5fl^2}{48Ec} H - \frac{\Delta k}{2}. \quad 62$$

Hierin ist H durch 9 ausgedrückt, so daß auch:

$$e = \frac{25l}{128f} \frac{\Delta l}{1+\varepsilon} - \frac{\Delta k}{2}. \quad 63$$

Für Näherungsrechnungen kann ε in 61, 63 häufig vernachlässigt werden.

Beispiel 29. Berechnung eines Bogens mit zwei Gelenken (ausführlichere Berechnung solcher Bogen siehe VI. Abschnitt).

Die flußeisernen Binder einer Halle sind als halbkreisförmige Blechbogen mit Kämpfergelenken von $l = 36$ m Spannweite, $F = 190$ qcm nutzbarem Querschnitt symmetrisch zur Achsschicht, $W = 4938$ cm³ nutzbarem Widerstandsmoment und $J = 226430$ cm⁴ Trägheitsmoment ohne Nietabzug angeordnet (s. Bemerkungen am Schluß).

Feste Last pro Meter Spannweite $g = 700$ kg, durch Schnee- und Winddruck können beliebige Strecken der Spannweite mit $p = 500$ kg pro Meter belastet werden. Es sind die Grenzwerte der vertikalen, horizontalen und resultierenden Kämpferreaktionen V , H , R , sowie der Normalspannungen σ_o , σ_u im obersten und untersten Element des Kämpferquerschnitts $x = 0$, des Scheitelquerschnitts $x = m = 18$ m und des in

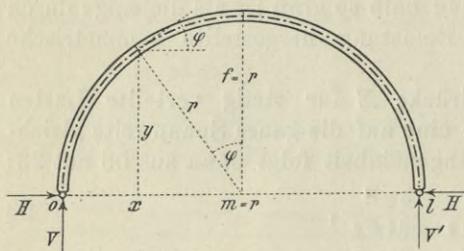


Fig. 118.

der Mitte zwischen diesen gelegenen Querschnitts $x = 5,272$ m (als Beispiel eines der übrigen Querschnitte, s. Bemerkungen) berechnet worden. Schließlich ist noch der Einfluß gleichmäßiger Temperaturänderungen $\tau = \pm 30^\circ$ gegen die Normaltemperatur auf die erwähnten Grenzwerte festzustellen.

Allgemeines. Für einen Halbkreisbogen konstanten Querschnitts mit zwei Gelenken hat man durch beliebige Belastung nach § 20, 2), 12):

$$V = \frac{1}{l} \int_0^l P(l-a), \quad H = \frac{4}{\pi l^2} \int_0^l P a(l-a), \quad 1$$

und durch eine beliebige Temperaturänderung τ , sowie durch eine Änderung Δl der Spannweite neben $V = 0$ nach § 20, 13), 14):

$$H = \frac{16EJ}{\pi l^2} \alpha \tau, \quad H = -\frac{16EJ}{\pi l^3} \Delta l. \quad 2$$

Die Gleichungen 1 liefern für eine beliebige gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit auf der ganzen Spannweite nach § 20, 20), 24):

$$V = \frac{ul}{2}, \quad H = \frac{2u}{3\pi} l, \quad 3$$

und für eine gleichmäßig verteilte Last von p pro Längeneinheit von 0 bis z (s. Bemerkungen):

$$V = pz \left(1 - \frac{z}{2l} \right), \quad H = \frac{2pz^2}{3\pi l^2} (3l - 2z). \quad 4$$

Für die Normalspannungen im obersten und untersten Element eines beliebigen Querschnitts x hat man nach § 20, 6):

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}, \quad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{W}, \quad 5.$$

worin durch beliebige Belastung die Normalkraft:

$$N_x = V_x \sin \varphi + H \cos \varphi \quad \text{mit} \quad V_x = V - \sum_0^x P, \quad 6$$

und das Moment:

$$M_x = Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a). \quad 7$$

Die Summe Σ in 6 bedeutet alle Lasten von 0 bis x , diejenige in 7 das statische Moment dieser Lasten in bezug auf den Achspunkt des Querschnitts x .

Die Kämpferdrucklinie S liegt nach § 20, 49) über den Gelenkmittelpunkten in der Höhe:

$$b = \frac{\pi}{4} l = 0,7854 l.$$

Im vorliegenden Falle ist

$$b = 0,7854 \cdot 36 = 28,274 \text{ m.}$$

Zur Bestimmung der Belastungen für die Grenzwerte von σ_o , σ_u wählen wir das auf S. 81 erwähnte einfachere Verfahren.

Grenzwerte durch Belastungen. Die Grenzwerte von V , H , R treten für Vollbelastung (Eigengewicht plus Verkehrslast) auf der ganzen Spannweite und Eigengewicht allein. Wir erhalten nach 3:

$$\begin{aligned} V &= 1200 \cdot 18 = 21600 \text{ kg}, & V &= 700 \cdot 18 = 12600 \text{ kg}, \\ H &= \frac{2 \cdot 1200 \cdot 36}{3 \cdot 3,1416} = 9167 \text{ kg}, & H &= 9167 \frac{7}{12} = 5347 \text{ kg}, \end{aligned}$$

und damit:

$$R = \sqrt{21600^2 + 9167^2} = 23465 \text{ kg}, \quad R = \sqrt{12600^2 + 5347^2} = 13688 \text{ kg}.$$

Im Kämpferquerschnitt $x = 0$ ist bei Bogen mit Kämpfergelenken $M_x = 0$. Daher folgen aus 5 mit 6 in unserem Falle die Grenzwerte der Normalspannungen pro qcm:

$$\begin{aligned} \sigma_o = \sigma_u &= \frac{N_x}{F} = \frac{21600}{190} = 114 \text{ kg}, \\ \sigma_o = \sigma_u &= \frac{12600}{190} = 66 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Im Querschnitt $x = 5,272$ m treten die Grenzwerte von σ , σ_u ein (Fig. 119), wenn die Verkehrslast einmal von 0 bis z , das andere Mal von z bis l wirkt, wobei z graphisch wie in Fig. 119 und analytisch wie folgt bestimmt ist:

$$z : x = b : y, \quad z = b \frac{x}{y} = 28,274 \frac{5,272}{12,728} = 11,711 \text{ m}.$$

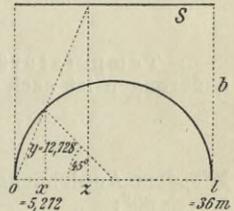


Fig. 119.

Für den ersten dieser Belastungsfälle ergeben sich mit Rücksicht auf 4:

$$\begin{aligned} V &= 12600 + 500 \cdot 11,711 \left(1 - \frac{11,711}{2 \cdot 36}\right) = 12600 + 4903 = 17503 \text{ kg}, \\ H &= 5347 + \frac{2 \cdot 500 \cdot 11,711^2}{3 \cdot 3,1416 \cdot 36^2} (3 \cdot 36 - 2 \cdot 11,711) = 5347 + 950 = 6297 \text{ kg}, \end{aligned}$$

und aus 6, 7 wegen $\sin \varphi = \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7071$:

$$\begin{aligned} N_x &= (17503 - 1200 \cdot 5,272 + 6297) 0,7071 = 12356 \text{ kg}, \\ M_x &= 17503 \cdot 5,272 - 6297 \cdot 12,728 - 1200 \frac{5,272^2}{2} = -6549 \text{ mkg}, \end{aligned}$$

womit nach 5:

$$\begin{aligned} \sigma_o &= \frac{12356}{190} - \frac{454900}{4938} = 65,0 - 92,1 = -27 \text{ kg}, \\ \sigma_u &= 65,0 + 92,1 = 157 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Für den zweiten Belastungsfall erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 V &= 21\,600 - 4903 = 16\,697 \text{ kg}, \\
 H &= 9\,167 - 950 = 8\,217 \text{ „}, \\
 N_x &= (16\,697 - 700 \cdot 5,272 + 8217) 0,7071 = 15\,007 \text{ kg}, \\
 M_x &= 16\,697 \cdot 5,272 - 8217 \cdot 12,728 - 700 \frac{5,272^2}{2} = -26\,287 \text{ mkg},
 \end{aligned}$$

und damit nach 5:

$$\begin{aligned}
 \sigma_o &= \frac{15\,007}{190} - \frac{2\,628\,700}{4938} = 79,0 - 532,3 = -453 \text{ kg}, \\
 \sigma_u &= 79,0 + 532,3 = 611 \text{ kg}.
 \end{aligned}$$

Im Scheitelquerschnitt $x = m = 18 \text{ m}$ ist $N_x = H$. Die Grenzwerte von σ_o, σ_u bei unserem Halbkreisbogen treten ein (Fig. 120), wenn die Verkehrslast einmal von 0 bis $l - b = 7,726 \text{ m}$ und von $b = 28,274 \text{ m}$ bis l , das andere Mal von $l - b = 7,726 \text{ m}$ bis $b = 28,274 \text{ m}$ wirkt. Für die erste dieser symmetrischen Belastungen ergeben sich (bezüglich H mit Rücksicht auf 4):

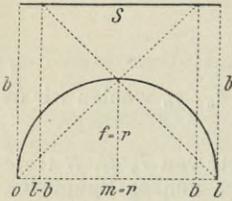


Fig. 120.

$$\begin{aligned}
 V &= 12\,600 + 500 \cdot 7,726 = 12\,600 + 3863 = 16\,463 \text{ kg}, \\
 H &= 5347 + 2 \frac{2 \cdot 500 \cdot 7,726^2}{3 \cdot 3,1416 \cdot 36^2} (3 \cdot 36 - 2 \cdot 7,726) = 5347 + 905 = 6252 \text{ kg}, \\
 M_x &= 16\,463 \cdot 18 - 6252 \cdot 18 - 700 \cdot 18 \cdot 9 - 500 \cdot 7,726 \cdot 14,137 = 15\,787 \text{ mkg}, \\
 \sigma_o &= \frac{6252}{190} + \frac{1\,578\,700}{4938} = 32,9 + 319,7 = 353 \text{ kg}, \\
 \sigma_u &= 32,9 - 319,7 = -287 \text{ kg}.
 \end{aligned}$$

Für die zweite Belastung erhält man:

$$\begin{aligned}
 V &= 21\,600 - 3863 = 17\,737 \text{ kg}, \\
 H &= 9\,167 - 905 = 8\,262 \text{ „}, \\
 M_x &= 17\,737 \cdot 18 - 8262 \cdot 18 - 700 \cdot 18 \cdot 9 - 500 \frac{10,274^2}{2} = 30\,761 \text{ mkg}, \\
 \sigma_o &= \frac{8262}{190} + \frac{3\,076\,100}{4938} = 43,5 + 622,9 = 666 \text{ kg}, \\
 \sigma_u &= 43,5 - 622,9 = -579 \text{ kg}.
 \end{aligned}$$

Temperaturänderungen. Der Horizontalschub durch Temperaturänderungen ist nach 2 bei einem Elastizitätsmodul pro qcm von $E = 2\,150\,000 \text{ kg}$

$$H = \frac{16 \cdot 2\,150\,000 \cdot 226\,430}{3,1416 \cdot 3600^2} \alpha \tau = 191\,309 \alpha \tau \text{ kg}.$$

Mit dem Ausdehnungskoeffizienten $\alpha = 0,0000115$ folgt $H = 2,200 \tau$ und für $\tau = \pm 30^\circ$:

$$H = \pm 66 \text{ kg}.$$

Auf die Vertikalreaktionen haben Temperaturänderungen keinen Einfluß. Dagegen sind mit Berücksichtigung der letzteren die Grenzwerte des Horizontalschubs:

$$H = 9167 + 66 = 9233 \text{ kg}, \quad H = 5347 - 66 = 5281 \text{ kg},$$

und die Grenzwerte der resultierenden Kämpferreaktionen:

$$R = \sqrt{21\,600^2 + 9233^2} = 23\,491 \text{ kg}, \quad R = \sqrt{12\,600^2 + 5281^2} = 13\,662 \text{ kg}.$$

Für $x = 0$ haben die Temperaturänderungen nach 5 wegen $N_x = V = 0, M_x = 0$ keinen Einfluß auf die Normalspannungen. Dagegen erhält man mit $\tau = 30^\circ$ bei $x = 5,272 \text{ m}$ nach 6, 7, 5:

$$\begin{aligned}
 N_x &= 66 \cdot 0,7071 = 46,7 \text{ kg}, & M_x &= -66 \cdot 12,728 = -840,0 \text{ mkg}, \\
 \sigma_o &= \frac{46,7}{190} - \frac{84\,000}{4938} = 0,2 - 17,0 = -17 \text{ kg}, \\
 \sigma_u &= 0,2 + 17,0 = 17 \text{ kg}.
 \end{aligned}$$

und bei $x = m = 18$ m :

$$N_x = H = 66 \text{ kg}, \quad M_x = -66 \cdot 18 = -1188 \text{ mkg},$$

$$\sigma_o = \frac{66}{190} - \frac{118800}{4938} = 0,3 - 24,1 = -24 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = 0,3 + 24,1 = 24 \text{ kg}.$$

Die Normalspannungen für $\tau = -30^\circ$ sind von gleichen Zahlenwerten und entgegengesetzten Vorzeichen wie für $\tau = 30^\circ$.

Mit Berücksichtigung der Temperaturänderungen ergeben sich nun die ganzen Grenzwerte der Normalspannungen (negative bedeuten Zug) bei $x = 0$:

bei $x = 5,272$ m:

$$\sigma_o = \sigma_u = 114 \text{ kg}, \quad \sigma_o = \sigma_u = 66 \text{ kg};$$

$$\sigma_o = -453 - 17 = -470 \text{ kg}, \quad \sigma_o = -27 + 17 = -10 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = 611 + 17 = 628 \text{ ,,}, \quad \sigma_u = 157 - 17 = 140 \text{ ,,};$$

und bei $x = m = 18$ m:

$$\sigma_o = 666 + 24 = 690 \text{ kg}, \quad \sigma_o = 353 - 24 = 329 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = -579 - 24 = -603 \text{ ,,}, \quad \sigma_u = -287 + 24 = -263 \text{ ,,}.$$

Bemerkungen. Man sieht, daß der Einfluß der Temperaturänderungen auf die Beanspruchungen verhältnismäßig gering ist, was an dem verhältnismäßig geringen Horizontalschub liegt. Gleiches gilt für etwaige kleine Bewegungen der Widerlager. Im vorliegenden Falle hätten wir durch eine Änderung der Spannweite um Δl cm nach 2 mit dem schon oben berechneten Bruche gehabt:

$$H = -\frac{191309}{3600} \Delta l = -53 \Delta l,$$

also für $\Delta l = 1$ cm $H = -53$ kg, noch kleiner als für $\tau = -30^\circ$.

Die Werte y , $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ für den Halbkreisbogen sind nach § 19, 12), 13) mit $r = \frac{l}{2}$ bestimmt durch die Gleichungen:

$$y = \sqrt{x(l-x)}, \quad 8$$

$$\sin \varphi = \frac{r-x}{r}, \quad \cos \varphi = \frac{y}{r}. \quad 9$$

Für den behandelten mittleren Querschnitt zwischen Kämpferquerschnitt und Scheitelquerschnitt waren hiernach

$$x = 18(1 - 0,7071) = 5,272 \text{ m}, \quad y = 18 \cdot 0,7071 = 12,728 \text{ m}.$$

Die verwendeten Werte von F , W , J entsprechen dem in Fig. 121 angedeuteten Querschnitt, für welchen ohne Nietabzug mit dem aus dem deutschen Normalprofilbuch entnommenen Winkeleisenquerschnitt von 17,9 qcm:

$$F = 77,6 \cdot 1 + 17,9 \cdot 4 + 2 \cdot 25 \cdot 1,2 = 209,2 \text{ qcm},$$

$$J = \frac{27}{3} (25 \cdot 40^3 - 8 \cdot 38,8^3 - 13,6 \cdot 37,6^3 - 2,4 \cdot 30,8^3) = 226430 \text{ cm}^4,$$

und mit Verschwächung durch die angedeuteten vier zwei-zölligen Niete:

$$F = 209,2 - 4 \cdot 2 \cdot 2,4 = 190,0 \text{ qcm},$$

$$J = 226430 - 4 \cdot 2 \cdot 2,4 \cdot 38,8^2 = 197526 \text{ cm}^4,$$

$$W = \frac{197526}{40} = 4938 \text{ cm}^3.$$

Von den Formeln 4 hat sich die erste aus der Gleichgewichtsbedingung

$$Vl - pz \left(l - \frac{z}{2} \right) = 0,$$

die zweite in bekannter Weise (§ 18) aus 1 mit $P = p da$ und

$$\int_0^l P a (l-a) = p \int_0^z a (l-a) da = \frac{p}{6} z^2 (3l - 2z)$$

ergeben.

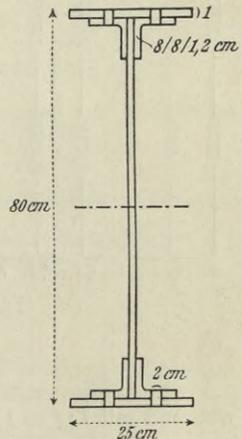


Fig. 121.

Wir haben oben bei Bestimmung der Belastungen für die Grenzwerte von σ_o , σ_u das einfachere Verfahren gewählt. Genauer wäre die Gerade zur Bestimmung der Lastgrenze z zu ziehen für σ_o durch den unteren, für σ_u durch den oberen Kernpunkt des Querschnitts. Diese liegen im vorliegenden Falle

$$k = \frac{W}{F} = \frac{4938}{190} = 26,0 \text{ cm}$$

unterhalb und oberhalb des Achspunkts in der Querschnittsebene.

Beispiel 30. Horizontalschub eines parabolischen Bogens (Koblenzer Brücke).

Bei Berechnung der älteren Koblenzer Brücke wurden für die symmetrischen Bogen mit Kämpfergelenken von $l = 98,0775 \text{ m}$ Spannweite und $f = \frac{l}{11} = 8,91614 \text{ m}$ Pfeil der Achse die letztere parabolisch, die Entfernung der Gurtungsschwerpunkte konstant $h = 2,97214 \text{ m}$, und das Trägheitsmoment des veränderlichen Bogenquerschnitts F' unter Vernachlässigung der Fachwerkfüllung

$$J = F \frac{h^2}{4}$$

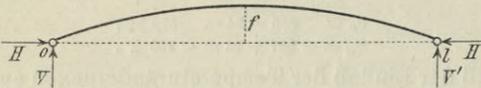


Fig. 122.

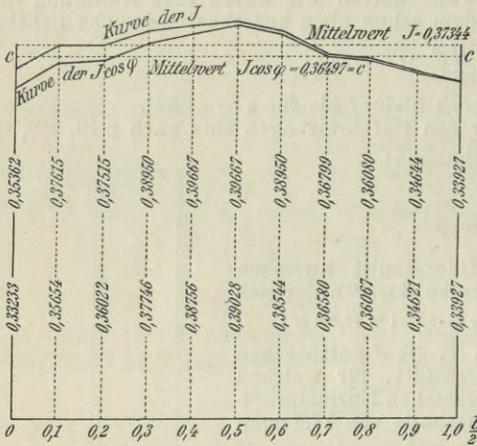


Fig. 123.

angenommen. Unter Aufrechterhaltung dieser Annahmen, den Horizontalschub für beliebige Belastung und speziell für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last u wie auch für verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten u , u' auf der ersten und zweiten Trägerhälfte auszudrücken. — Schließlich ist der Horizontalschub für beliebige Temperaturänderungen τ und für kleine Änderungen Δl der Spannweite anzugeben, wobei der Elastizitätsmodul $E = 2000000 \text{ kg pro cm}^2$, der Ausdehnungskoeffizient $\alpha = 0,000012$ und der Mittelwert von $J \cos \varphi$ für Meter als Längeneinheit $c = 0,36497$ (vergl. Fig. 123) einzuführen sind!

Unter obigen Annahmen erhält man für Meter als Längeneinheit nach § 19, 41):

$$\gamma = \frac{J}{F} = \frac{2,97214^2}{4} = 2,20840, \text{ m}$$

während mit $l : f = 11$ nach § 19, 11):

$$r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} = \frac{125}{8} l = 139,314 \text{ m.}$$

Nun liefern die Gleichungen § 19, 40) und § 20, 10):

$$\varepsilon = \frac{15 \gamma}{8} \left(\frac{r-f}{rf} \right)^2 = \frac{15 \cdot 2,2084}{8} \left(\frac{130,398}{139,314 \cdot 8,91614} \right)^2 = 0,04563,$$

$$\beta = \frac{8}{5} \frac{f}{r-f} \varepsilon = \frac{8 \cdot 8,91614 \cdot 0,04563}{5 \cdot 130,398} = 0,004992,$$

womit weiter folgt:

$$\frac{5}{(1 + \varepsilon) 8f \beta} = \frac{5 \cdot 11}{1,04563 \cdot 8 \cdot 7^4} = \frac{6,57498}{7^4},$$

¹ Letztere Angabe gilt für die mittleren (ein Geleise tragenden) Bogen, während für die ihnen parallelen äußeren Bogen (auf welche nur je eine halbe Geleiselast gerechnet wurde) c geringer ist.

und nach § 20, 7) der Horizontalschub durch beliebige Belastung:

$$H = \frac{6,5750}{l^4} \sum_0^l P a (l - a) (0,995 l^2 + l a - a^2), \quad a$$

Für eine gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit hat man nach § 20, 23):

$$H = \frac{1 - \frac{5}{6} \beta}{1 + \varepsilon} \frac{u l^2}{8 f} = \frac{0,99584}{1,04563} \frac{11 \cdot 98,0775}{8} u, \quad b$$

$$H = 128,436 u,$$

und für verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten u, u' auf der ersten und zweiten Trägerhälfte nach § 20, 31):

$$H = \frac{1 - \frac{5}{6} \beta}{1 + \varepsilon} \frac{u + u'}{16 f} l^2 = 128,436 \frac{u + u'}{2}, \quad c$$

$$H = 64,218 (u + u').$$

Wie schon in § 20 erwähnt, läßt sich fast immer β vernachlässigen (vergl. § 43). Dies trifft auch im vorliegenden Falle zu. Es treten dann in a, b, c die Zahlen 1 bzw. 128,973 und 64,486 an Stelle von 0,995 bzw. 128,436 und 64,218.

Zur Ermittlung der Beiträge von τ und Δl nach § 20, 8), 9) haben wir:

$$\frac{15 E c}{(1 + \varepsilon) 8 f^2} = \frac{15 \cdot 2\,000\,000 \cdot 100^2 \cdot 0,36497}{1,04563 \cdot 8 \cdot 8,91614^2} = 164\,648\,000,$$

womit der Horizontalschub durch eine Temperaturänderung τ :

$$H = 164\,648\,000 \cdot 0,000012 \cdot \tau = 1975,78 \tau \text{ kg}, \quad d$$

und der Horizontalschub durch eine Änderung Δl der Spannweite:

$$H = - \frac{164\,648\,000}{98,0775} \Delta l = - 1\,678\,754 \Delta l \text{ kg}. \quad e$$

In b c sind u, u' pro Meter, in e ist Δl in Metern einzusetzen.

Bemerkungen. Unter Voraussetzung eines Kreisbogens von konstantem Querschnitt hätten wir anstatt d und e erhalten (Beispiel 93):

$$H = 1984,21 \tau, \quad H = - 1\,685\,960 \Delta l,$$

d. i. 0,43 % größer als oben für den Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ gefunden wurde.

Wenn wir dagegen die Formeln § 20, 8), 9) mit der gebräuchlichen Annahme $\varepsilon = 0$ verwendet hätten, so würden sich ergeben haben:

$$H = 2065,93 \tau, \quad H = - 1\,721\,609 \Delta l,$$

d. h. um 4,56 % größer als oben.

Beispiel 31. Einfluß von Temperaturänderungen (Koblenzer Brücke).

Für die Koblenzer Brücke (vergl. Beispiel 30) seien angenommen: Normaltemperatur 10^0 C , größte Abweichungen von derselben $\tau = \pm 30^0$. Den Einfluß der Temperaturänderungen auf die Momente M_x , Normalkräfte N_x , Transversalkräfte T_x und Gurtungsbeanspruchungen O, U der mittleren (ein Geleise tragenden, s. die Fußnote S. 128) Bogen festzustellen und speziell für den Scheitelquerschnitt zahlenmäßig anzugeben.

Nach Formel d des vorigen Beispiels ist der Horizontalschub durch die Temperaturänderung $\tau = \pm 30^0$:

$$H = 1975,78 \tau = \pm 59\,273 \text{ kg},$$

während die Vertikalreaktionen der Kämpfer durch τ keine Änderung erleiden.

Nach § 20, 3)—5) und § 1, 10) entstehen durch einen beliebigen Horizontalschub H und speziell für $\tau = 30^0$ folgende weitere Änderungen:

$$M_x = - H y = - 59\,273 y \text{ mkg},$$

$$N_x = H \cos \varphi = 59\,273 \cos \varphi \text{ kg},$$

$$T_x = - H \sin \varphi = - 59\,273 \sin \varphi \text{ kg}.$$

Von den Kämpfern an bis zum Scheitel hin nimmt also M_x proportional y von 0 bis $-59253 f$ numerisch zu, N_x wächst von $59273 \cos \varphi_0$ bis 59273 kg , während T_x von $-59273 \sin \varphi_0$ bis 0 numerisch abnimmt.

Bei Berechnung der Gurtungsbeanspruchungen für die Koblenzer Brücke wurden die Gurtungsquerschnitte unter Vernachlässigung der Füllung (Gitter) gesetzt $f_o = f_u = \frac{F}{2}$. Da man alsdann zufolge § 8, 23), 24) für Bogen mit durchbrochenen Wandungen von konstanter Höhe h hat:

$$O = \frac{N_x}{2} + \frac{M_x}{h}, \quad U = \frac{N_x}{2} - \frac{M_x}{h},$$

so folgen mit obigen allgemeinen Ausdrücken die von einem beliebigen Horizontalschub H allein herrührenden Gurtungskräfte:

$$O = \left(\frac{\cos \varphi}{2} - \frac{y}{h} \right) H, \quad U = \left(\frac{\cos \varphi}{2} + \frac{y}{h} \right) H,$$

und in unserm Falle mit $h = 2,97214 \text{ m}$, $\tau = 30^\circ$:

$$O = 29636 \cos \varphi - 19943 \text{ y kg}, \quad U = 29636 \cos \varphi + 19943 \text{ y kg}.$$

Die größte Gurtungsbeanspruchung durch Temperaturänderungen tritt hiernach im Scheitel für den Untergurt ein. Man hat im Scheitel mit $\varphi = 0$, $y = f = 8,91614 \text{ m}$:

$$O = -148179 \text{ kg}, \quad U = 207451 \text{ kg},$$

und da die Gurtungsquerschnitte daselbst $f_o = f_u = 768,13 \text{ qcm}$, so sind die entsprechenden Beanspruchungen pro qcm:

$$\text{im Obergurt} \quad - \frac{148179}{768,13} = -192,9 \text{ kg (Zug)},$$

$$\text{im Untergurt} \quad \frac{207451}{768,13} = 270,1 \text{ „ (Druck)}.$$

Für $\tau = -30^\circ$ wechseln mit H (siehe oben) alle weiter genannten Beanspruchungen einfach ihr Vorzeichen.

Beispiel 32. Ausweichen eines Widerlagers oder Pfeilers (Koblenzer Brücke).

Infolge Nachgebens eines Widerlagers oder Pfeilers der älteren Koblenzer Brücke (vergl. Beispiel 30) möge die Spannweite $l = 98,0775 \text{ m}$ eines der mittleren (ein Geleise tragenden) Bogen um $0,02 \text{ m}$ zugenommen haben. Es sind die hierdurch eingetretenen Änderungen der Momente, Normalkräfte, Transversalkräfte und Gurtungsbeanspruchungen festzustellen und speziell für den Scheitelquerschnitt und die Kämpferquerschnitte zahlenmäßig anzugeben.

Durch das Nachgeben des Widerlagers um $\Delta l = 0,02 \text{ m}$ tritt nach der Gleichung e des Beispiels 30 eine Änderung des Horizontalschubs um

$$H = -1678754 \Delta l = -33575 \text{ kg}$$

ein, während die Vertikalreaktionen der Kämpfer ungeändert bleiben. Die Änderungen der Momente, Normalkräfte, Transversalkräfte und Gurtungsbeanspruchungen beliebiger Querschnitte sind (vergl. Beispiel 30):

$$\begin{aligned} M_x &= -Hy = 33575 \text{ g}, \\ N_x &= H \cos \varphi = -33575 \cos \varphi \text{ kg}, \\ T_x &= -H \sin \varphi = 33575 \sin \varphi \text{ „}, \\ O &= \frac{N_x}{2} + \frac{M_x}{h} = -16788 \cos \varphi + 11297 \text{ y kg}, \\ U &= \frac{N_x}{2} - \frac{M_x}{h} = -16788 \cos \varphi - 11297 \text{ y „}. \end{aligned}$$

Speziell für den Scheitelquerschnitt hat man wegen $y = f = 8,91614 \text{ m}$, $\varphi = 0$:

$$\begin{aligned} M_x &= 299359 \text{ mkg}, & N_x &= -33575 \text{ kg}, & T_x &= 0, \\ O &= 83938 \text{ kg}, & U &= -117514 \text{ kg}, \end{aligned}$$

und, mit den Gurtungsquerschnitten $f_o = f_u = 768,13 \text{ qcm}$, pro qcm:

$$\frac{83938}{768,13} = 109 \text{ kg}, \quad - \frac{117514}{768,13} = -153 \text{ kg}.$$

Bei den Kämpfern ist $y = 0$ und damit $M_x = 0$. Wird der Bogen, wie bei Berechnung der Koblenzer Brücke, parabolisch vorausgesetzt, so hat man mit Rücksicht auf § 19, 8) für $x = 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{4f}{l} = \frac{4}{11}, & \varphi &= 19^\circ 58' 59'', \\ \sin \varphi &= 0,34174, & \cos \varphi &= 0,93979, \\ N_x &= -31553 \text{ kg}, & T_x &= 11474 \text{ kg}, \end{aligned}$$

und für $x = l$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= -\frac{4f}{l} = -\frac{4}{11}, & \varphi &= -19^\circ 58' 59'', \\ \sin \varphi &= -0,34174, & \cos \varphi &= 0,93979, \\ N_x &= -31553 \text{ kg}, & T_x &= -11474 \text{ kg}, \end{aligned}$$

also an beiden Kämpfern:

$$O = -U = -16788 \cdot 0,93979 = -15777 \text{ kg},$$

und mit den Gurtungsquerschnitten $f_o = f_u = 800,624$ qcm pro qcm:

$$-\frac{15777}{800,624} = -20 \text{ kg}.$$

Beispiel 33. Einflußlinien und Grenzwerte parabolischer Bogen (Koblenzer Brücke).

Für die Bogen der Koblenzer Brücke (vergl. Beispiel 30) die Einflußlinien der Stützenreaktionen V, V', H anzugeben und die Grenzwerte dieser Größen festzustellen, wenn eine gleichmäßig verteilte feste Last von $g = 3983$ kg, eine ebensolche Verkehrslast von $p = 3186$ kg pro Meter (Annahmen bei der ursprünglichen Berechnung) und daneben Temperaturänderungen bis $\tau = \pm 30^\circ \text{C}$ gegen die Normaltemperatur sowie eine Änderung der Spannweite $\Delta l = 0,02$ m infolge Nachgebens eines Widerlagers in Betracht gezogen werden.

Die Einflußlinie von V wurde bereits in § 12 ermittelt, diejenige von V' liegt bezüglich der Trägermitte symmetrisch zu ihr (Fig. 124). Da die Einflußflächen in beiden Fällen den Inhalt $\frac{l}{2}$ haben und ganz auf einer Seite der Abszissenachse liegen, so sind zufolge § 12 die Grenzwerte beider Vertikalreaktionen mit $q = g + p = 7169$ kg:

$$\begin{aligned} V &= \frac{q l}{2} = 3584,5 \cdot 98,0775 = 351559 \text{ kg}, \\ V' &= \frac{q l}{2} = 1991,5 \cdot 98,0775 = 195321 \text{ „} \end{aligned}$$

Der allgemeine Ausdruck des Horizontalschubs für die fraglichen Bogen ist nach den Formeln a, d, e des Beispiels 30:

$$H = \frac{6,575}{l^4} \sum_0^l P a (l-a) (l^2 + l a - a^2) + 1888,68 \tau - 1678754 \Delta l.$$

Die Gleichung der Einflußlinie von H folgt daraus nach § 12:

$$b = \frac{6,575}{l^4} a (l-a) (l^2 + l a - a^2),$$

oder mit $\alpha = \mu l$:

$$b = 6,575 \mu (1-\mu) (1+\mu-\mu^2),$$

wonach bei $a = 0$

$$\frac{l}{8} \quad \frac{l}{4} \quad \frac{3l}{8} \quad \frac{l}{2}$$

die Ordinate $b = 0$

$$0,798 \quad 1,464 \quad 1,902 \quad 2,055.$$

Die Linie ist in Fig. 124 dargestellt, sie zeigt (wie schon der Ausdruck von H), daß die Grenzwerte von H für Vollbelastung der ganzen Spannweite und Eigengewicht allein eintreten. Da für eine beliebige auf die Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit mit Rücksicht auf § 18 der Beitrag der Belastung zu H nach obiger Formel:

$$H = \frac{6,575}{l^4} \frac{u l^5}{5} = 128,972 u,$$



Fig. 124.

so ergeben sich mit Berücksichtigung von τ , Δl die Grenzwerte von H im ganzen:

$$H = 128,972 \cdot 7169 + 1975,78 \cdot 30 - 1678754 \cdot 0,02 = 950299 \text{ kg,}$$

$$H = 128,972 \cdot 3983 - 1975,78 \cdot 30 - 1678754 \cdot 0,02 = 420847 \text{ „.}$$

Über Einflußlinien und Grenzwerte parabolischer Zweigelenkbogen siehe auch die Beispiele 10, 11, 49.

Beispiel 34. Einsenkungen parabolischer Bogen (Koblenzer Brücke).

Für die Bogen der Koblenzer Brücke (vergl. Beispiel 30) wurden pro Meter Spannweite angenommen: Feste Last $g = 3983 \text{ kg}$, Verkehrslast $p = 3186 \text{ kg}$, also Gesamtlast $q = g + p = 7169 \text{ kg}$. Es sind die Einsenkungen in der Trägermitte zu berechnen: a) für die feste Last allein; b) für Vollbelastung des ganzen Trägers; c) für feste Last auf der ersten oder zweiten, Vollbelastung auf der zweiten oder ersten Bogenhälfte; d) für eine Temperaturänderung τ und speziell für $\tau = \pm 30^\circ$; e) für eine Änderung Δl der Spannweite und speziell für $\Delta l = 0,02 \text{ m}$.

Für eine beliebige auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit ist nach § 20, 58) die Einsenkung in der Trägermitte:

$$e = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{5 u l^4}{384 E c}, \quad 1$$

also im vorliegenden Falle mit $l = 98,0775 \text{ m}$, $c = 0,36497$ für Meter als Längeneinheit, $\varepsilon = 0,04563$, $E = 2000000 \text{ kg pro qcm}$:

$$e = \frac{0,04563}{1,04563} \frac{5 \cdot u \cdot 98,0775^4}{384 \cdot 2000000 \cdot 100^2 \cdot 0,36497} = 0,0000072028 u \text{ m} = 0,00072028 u \text{ cm.}$$

Hieraus folgt für die feste Last (Eigengewicht der Brücke) allein mit $u = 3983 \text{ kg}$:

$$e = 2,869 \text{ cm,} \quad a$$

und für Vollbelastung des ganzen Bogens mit $u = 7169 \text{ kg}$:

$$e = 5,164 \text{ cm.} \quad b$$

Für Belastung der ersten Trägerhälfte mit u , der zweiten mit u' pro Längeneinheit hat man nach § 20, 59):

$$e = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{u + u'}{768} \frac{5 l^4}{E c}, \quad 2$$

also in unserem Falle c):

$$e = 0,00072028 \frac{3983 + 7169}{2} = 4,016 \text{ cm,} \quad c$$

das ist das Mittel der Werte a und b.

Durch eine Temperaturänderung τ entsteht nach § 20, 61):

$$e = -\alpha \tau \left(f + \frac{25}{128 f} \frac{l^2}{1 + \varepsilon} \right), \quad 3$$

und mit $l = 11 f = 11 \cdot 8,91614 \text{ m}$, $\alpha = 0,000012$ in Meter:

$$e = -0,000012 \cdot 8,91614 \tau \left(1 + \frac{25 \cdot 11^2}{128 \cdot 1,04563} \right), \quad d$$

$$e = -0,2525 \tau \text{ cm,}$$

also beispielsweise für $\tau = \pm 30^\circ$:

$$e = \mp 7,575 \text{ cm.}$$

Eine Änderung der Spannweite um Δl hat nach § 20, 63) zur Folge:

$$e = \frac{25 l}{128 f} \frac{\Delta l}{1 + \varepsilon}, \quad 4$$

und im vorliegenden Falle:

$$e = \frac{25 \cdot 11}{128} \frac{\Delta l}{1,04563} = 2,0547 \Delta l, \quad e$$

wonach für $\Delta l = 0,02 \text{ m} = 2 \text{ cm}$:

$$e = 2,0547 \cdot 2 = 4,109 \text{ cm.}$$

Über die Einsenkung parabolischer Zweigelenkbogen siehe auch die Aufgaben 15, 22 und die Beispiele 49, 97, VI M, N.

Aufgabe 17 mit Beispiel 35. Künstlicher Horizontalschub (Koblenzer Brücke).

Für einen symmetrischen Parabelbogen mit Kämpfergelenken soll durch Erzeugung eines künstlichen Horizontalschubs bewirkt werden, daß bei normaler Temperatur und Belastung durch eine gleichmäßig verteilte Last allein keine Momente entstehen, also die resultierenden Schnittkräfte in der Achse angreifen, und alle Querschnittselemente gleiche und möglichst kleine Normalspannungen erleiden.

Für beliebige symmetrische Bogen mit Kämpfergelenken hat man nach § 20, 22) bei gleichmäßig verteilter Last von u pro Längeneinheit Spannweite das Moment bei x :

$$M_x = \frac{u}{2} x (l - x) - Hy, \quad 1$$

also speziell für symmetrische Parabelbogen von Pfeile f wegen § 19, 8):

$$M_x = \frac{u}{2} x (l - x) \left(1 - \frac{8f}{u l^2} H\right). \quad 2$$

Wäre nun der von der angenommenen Belastung herrührende Horizontalschub

$$H = \frac{u l^2}{8 f}, \quad 3$$

(wie man ihn bei Vernachlässigung von β , ε annimmt), so würde ohne künstliche Mittel bei normaler Temperatur nach 2:

$$M_x = 0.$$

Genauer ist jedoch nach § 20, 23):

$$H = \frac{1 - \frac{5}{6} \beta}{1 + \varepsilon} \frac{u l^2}{8 f}, \quad 4$$

welcher Wert etwas unter dem Horizontalschub 3 liegt, sodaß nach 2 Momente entstehen. Sollen diese durch einen künstlichen Horizontalschub K aufgehoben werden, so ist K so zu bemessen, daß der Horizontalschub 4 auf den Wert 3 ergänzt wird, d. h. wir müssen wählen:

$$K = \left(1 - \frac{1 - \frac{5}{6} \beta}{1 + \varepsilon}\right) \frac{u l^2}{8 f} = \frac{\varepsilon + \frac{5}{6} \beta}{1 + \varepsilon} \frac{u l^2}{8 f}. \quad 5$$

Nach 5 ist der künstliche Horizontalschub proportional u . Es wäre also ein anderer Wert von K zu wählen, wenn die Momente M_x bei Vollbelastung des ganzen Trägers aufgehoben werden sollten, als wenn dies für Eigengewicht allein beabsichtigt ist. Da die wirkliche Belastung die längste Zeit der Belastung durch Eigengewicht allein nahe kommt, so ist letzteres vorzuziehen, also $u = g$ zu setzen. Über den künstlichen Horizontalschub bei nicht gleichmäßig verteilter Last siehe Abschnitt VI unter E.

Für die in Beispiel 30—34 betrachteten Bogen der Koblenzer Brücke erhält man nach 5 mit $l = 98,0775 \text{ m} = 11 f$, $\varepsilon = 0,04563$, $\beta = 0,004992$, $g = 3983 \text{ kg}$:

$$K = \frac{0,04979}{1,04563} \frac{3983}{8} \cdot 98,0775 \cdot 11 = 25577 \text{ kg}.$$

Bei Vernachlässigung von β hätte man $K = 23440 \text{ kg}$ oder um 8,36 % kleiner erhalten (vergl. VI E). Der Einfluß von β pflegt hier bei praktischen Berechnungen größer als sonst zu sein. Bezüglich der zur Erzeugung des künstlichen Horizontalschubs durch Anziehen von Keilen oder auf andere Weise (VI N) zu bewirkenden Verringerung v der Spannweite siehe die nächste Aufgabe. Im vorliegenden Falle hätte man nach der dortigen Gleichung 7 und den angeschlossenen Zahlen:

$$v = \frac{98,0775}{164648000} \cdot 25577 \text{ m} = 1,524 \text{ cm}.$$

Ein künstlicher Horizontalschub kann auch aus anderen Gründen und mit andern Werten als oben angewandt werden. Bei der 1893 dem Verkehr übergebenen Stuttgart—Cannstatter Neckarbrücke war er vorgeschrieben, um ein

Durchhängen der Träger bei niedriger Temperatur zu verhüten (VI E). Ist der künstliche Horizontalschub einmal hergestellt, so tritt er für alle Belastungs- und Temperaturfälle zu den von diesen herrührenden Werten des Horizontalschubs. Der Einfluß des künstlichen Horizontalschubs auf die Beanspruchungen läßt sich ganz wie derjenige des Horizontalschubs durch Temperaturänderungen und Änderungen der Spannweite ermitteln (Aufg. 7, Beispiele 7, 31, 32).

Aufgabe 18 mit Beispiel 36. Reduktion der Normaltemperatur parabolischer Bogen auf die mittlere Ortstemperatur (Koblenzer Brücke).

Es soll bei Herstellung eines künstlichen Horizontalschubes (vergl. Aufgabe 17) die Normaltemperatur parabolischer Bogen auf die mittlere Ortstemperatur (oder einen sonst gewünschten Wert) gebracht werden. Als Normaltemperatur ist diejenige Temperatur anzusehen, für welche bei fehlender Belastung der spannungslose Zustand eintreten würde.

Für einen parabolischen Bogen von konstantem $J \cos \varphi$ entsteht nach § 20, 7), 8), 9) durch beliebige Belastung, beliebige Temperaturänderung τ und eine Änderung der Spannweite um Δl (für Zunahmen τ , Δl positiv) ein Horizontalschub:

$$H = \frac{1}{(1 + \varepsilon) 8 f l^3} \int_0^l P a (l - a) (l^2 + l a - a^2 - \beta l^2) + \frac{15 E c}{(1 + \varepsilon) 8 f^2} \left(\alpha \tau - \frac{\Delta l}{l} \right). \quad 1$$

Die zur Erzeugung eines beliebigen künstlichen Horizontalschubs K nötige Verminderung ($-\Delta l$) der Spannweite folgt hieraus:

$$v = \frac{(1 + \varepsilon) 8 l f^2}{15 E c} K.$$

Die Temperatur t_1 bei Herstellung von K differiere um d^0 von der gewünschten Normaltemperatur t_n ($d = t_1 - t_n$), welche im allgemeinen die mittlere Ortstemperatur sein wird. Behufs der verlangten Reduktion fügen wir dann vorstehender Verringerung die weitere bei:

$$v = \alpha l d,$$

so daß die ganze (z. B. durch Anziehen von Keilen oder entsprechend VI N) herzustellende Verringerung der Spannweite beträgt:

$$v = \frac{(1 + \varepsilon) 8 l f^2}{15 E c} K + \alpha l d. \quad 2$$

d hat einen positiven oder negativen Wert, je nachdem die Montierungstemperatur t_1 (bei Herstellung von K , v) über oder unter der gewünschten Normaltemperatur (mittleren Ortstemperatur) liegt.

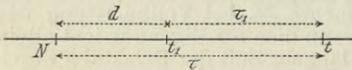


Fig. 125.

Sind nun in der Folge τ_1 die Abweichung der wirklichen Temperatur t gegen die Montierungstemperatur t_1 (Fig. 125) und Δl eine etwaige weitere Änderung der Spannweite, dann hat man nach 1 den ganzen von der Temperaturänderung und den Längenänderungen Δl , $-v$ herrührenden Horizontalschub:

$$H = \frac{15 E c}{(1 + \varepsilon) 8 f^2} \left(\alpha \tau_1 - \frac{\Delta l - v}{l} \right),$$

oder mit v nach 2:

$$H = \frac{15 E c}{(1 + \varepsilon) 8 f^2} \left(\alpha (d + \tau_1) - \frac{\Delta l}{l} \right) + K.$$

Bezeichnet $\tau = t - t_n$ die Abweichung der wirklichen Temperatur t gegen die gewählte Normaltemperatur, so ist in vorstehendem Ausdrucke (Fig. 125):

$$\tau = d + \tau_1 \quad 3$$

und wir erhalten bei Hinzukommen einer beliebigen Belastung, d. h. im allgemeinsten Falle:

$$H = \frac{5}{(1 + \varepsilon) 8 f l^3} \int_0^l P a (l - a) (l^2 + l a - a^2 - \beta l^2) + \frac{15 E c}{(1 + \varepsilon) 8 f^2} \left(\alpha \tau - \frac{\Delta l}{l} \right) + K. \quad 4$$

Der Horizontalschub und alle Spannungen hängen außer von der Belastung und dem festgesetzten künstlichen Horizontalschub K nur noch von der Temperatur-

änderung τ gegen die gewählte Normaltemperatur und etwaigen Änderungen Δl der Spannweite nach Erzeugung von K , v ab.

Der künstliche Horizontalschub, welcher bei seiner Herstellung durch Ver-
ringerung der Spannweite um v nach 1 mit $\Delta l = -v$ und 2 den Wert

$$K_1 = \frac{15 E c}{(1 + \varepsilon) 8 f^2} \frac{v}{l} = K + \frac{15 E c}{(1 + \varepsilon) 8 f^2} \alpha d \quad 5$$

hatte, erreicht nach 4 bei normaler Temperatur den vorausbestimmten Wert K ,
da sich ohne Belastung mit $\tau = 0$ und $\Delta l = 0$ $H = K$ ergibt.

Will man die Reduktion der Normaltemperatur auf die mittlere Orts-
temperatur ohne eine sonstige Überhöhung des Bogens vornehmen, so hat man
mit $K = 0$ nach 2, 5:

$$v = \alpha l d, \quad K_1 = \frac{15 E c}{(1 + \varepsilon) 8 f^2} \alpha d. \quad 6$$

Will man dagegen einen künstlichen Horizontalschub K ohne Reduktion der
Normaltemperatur erzeugen, d. h. die Montierungstemperatur als Normaltemperatur
belassen, so liefern mit $d = 0$ dieselben Gleichungen:

$$v = \frac{(1 + \varepsilon) 8 l f^2}{15 E c} K, \quad K_1 = K. \quad 7$$

Angenommen für die Koblenzer Brücke sei ein künstlicher Horizontalschub
 $K = 25577$ kg herzustellen gewesen (vergl. S. 137), während die gewünschte
Normaltemperatur 10° und die Montierungstemperatur 25° betragen. Dann ist
 $d = 25 - 10 = 15^\circ$, und da nach Beispiel 30 für Meter als Längeneinheit:

$$\frac{15 E c}{(1 + \varepsilon) 8 f^2} = 164\,648\,000,$$

so ergeben 2, 5 mit $l = 98,0775$ m, $\alpha = 0,000012$:

$$v = \left(\frac{25\,577}{164\,648\,000} + 0,000012 \cdot 15 \right) 98,0775 \text{ m} = 3,289 \text{ cm},$$

$$K_1 = 25\,577 + 164\,648\,000 \cdot 0,000012 \cdot 15 = 55\,214 \text{ kg}.$$

Für $K = 0$ hätten wir erhalten:

$$v = 1,765 \text{ cm}, \quad K_1 = 29\,637 \text{ kg}.$$

Die Reduktion der Normaltemperatur auf die mittlere Ortstemperatur
wurde zum erstenmal 1893 bei der König-Karlsbrücke über den Neckar zwischen
Stuttgart und Cannstatt ausgeführt (Näheres s. Abschnitt VI unter N).

Beispiel 37. Horizontalschub eines Bogens mit beliebiger Achse und
beliebigen Querschnitten (Dourobrücke in Portugal).

Für den Bogen der Maria-Pia-Brücke über den Douro, welchem die in
Fig. 126 und Tabelle S. 137 ersichtlichen Verhältnisse entsprechen, ist der Hor-
izontalschub H zu berechnen: a) für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig
verteilte Last von u pro Meter; b) für verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten
 u , u' auf der ersten und zweiten Trägerhälfte; c) für beliebige Einzellasten P
bei $a = 23,75$ m, $26,75$ m, 54 m, $64,4$ m, $74,8$ m, 80 m; d) für gleichzeitig wirkende
Lasten von $63\,400$ kg, $63\,400$ kg, $62\,400$ kg, $47\,000$ kg, $40\,500$ kg an Punkten der
fünf ersterwähnten Abszissen α und den symmetrisch dazu gelegenen Stellen
(der Verkehrslast bei Vollbelastung entsprechend); e) für eine beliebige Tem-
peraturänderung τ ; f) für eine Änderung der Spannweite um Δl .

Mit Rücksicht auf die in der Tabelle S. 137 für den halben Bogen ge-
gebenen Werte und $l = 160$ m erhält man nach § 20, 19), 27):

$$v = l \sum_0^m \frac{\sigma y}{J} = 160 \cdot 1000,92 = 160\,147,$$

$$w = 2 \sum_0^m \frac{\sigma y^2}{J} = 2 \cdot 25\,643 = 51\,286,$$

$$\frac{l v - z}{2} = l \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma y x^2}{J} = 160 \cdot 34\,066 - 1\,714\,494 = 3\,736\,066.$$

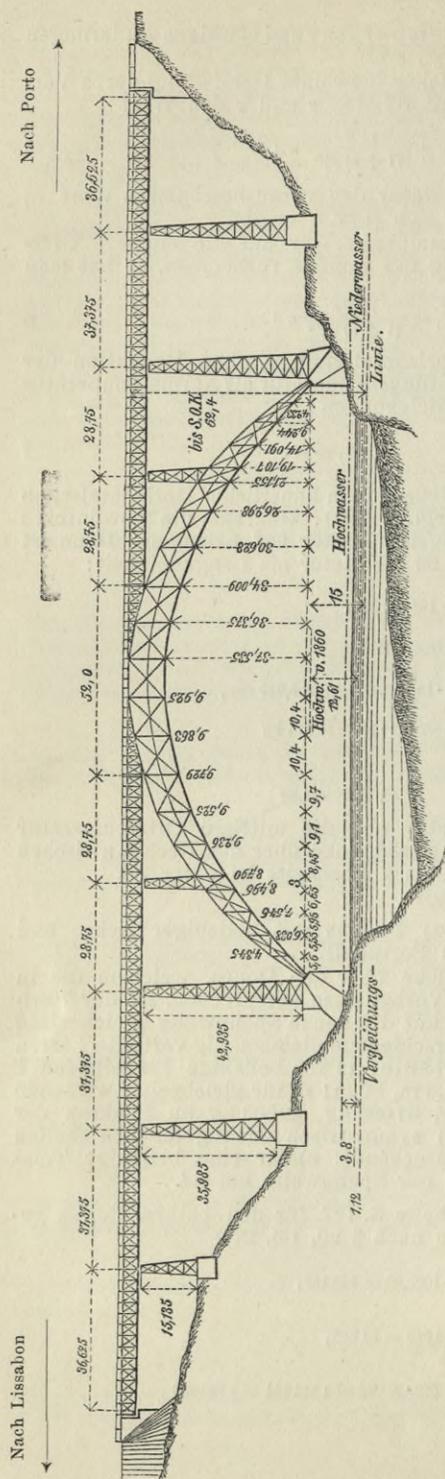


Fig. 126.

Weiter folgen der Horizontalschub durch eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit nach § 20, 25):

$$H = \frac{l v - z}{2 w} u = \frac{3736,066}{51286} u = 72,848 u,$$

derselbe durch verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten u, u' auf der ersten und zweiten Trägerhälfte nach § 20, 33):

$$H = \frac{l v - z}{4} \frac{u + u'}{w} = \frac{3736,066}{2 \cdot 51286} (u + u') = 36,424 (u + u').$$

Der Horizontalschub durch eine Einzellast P an beliebiger Stelle $a < \frac{l}{2}$ drückt sich nach § 20, 39) aus:

$$H = \frac{P}{w} \left(\sum_0^a \frac{\sigma x y}{J} + a \sum_a^{\frac{m}{a}} \frac{\sigma y}{J} \right).$$

Wir erhalten darnach, mit Rücksicht auf die Tabellenwerte S. 137:

$$\text{für } a = 23,75 \text{ m} \quad H = \frac{P}{51286} (4758 + 23,75 \cdot 577,32) = 0,36012 P,$$

$$\text{für } a = 26,75 \text{ m} \quad H = \frac{P}{51286} (5701 + 26,75 \cdot 539,98) = 0,39281 P,$$

Feld	x	y	σ	J	$\frac{\sigma y}{J}$	$\frac{\sigma y^2}{J}$	$\frac{\sigma x y}{J}$	$\frac{\sigma y x^2}{J}$
1	2,80	3,00	8,10	0,246	98,77	296	276	773
2	8,40	9,00	8,15	0,588	124,74	1123	1048	8803
3	14,10	14,55	8,15	1,153	102,85	1496	1450	20445
4	20,40	20,42	8,80	1,848	97,24	1986	1984	40474
5	25,25	24,20	3,80	2,463	37,34	904	943	23811
6	31,00	28,30	9,80	2,863	96,87	2741	3003	93093
7	39,75	32,75	10,05	3,486	94,42	3092	3753	149182
8	49,15	36,85	10,40	3,758	101,98	3758	5012	246340
9	59,20	40,35	10,75	4,220	102,79	4147	6085	360232
10	69,60	42,25	10,50	4,609	96,24	4066	6698	466181
11	80,00	42,65	2·5,25	4,696	2·47,68	2·2034	2·3814	2·305160
Für eine Bogenhälfte ¹			93,75		1000,92	25643	34066	1714494

$$\text{für } a = 54 \text{ m} \quad H = \frac{P}{51286} (17469 + 54 \cdot 246,71) = 0,60038 P,$$

$$\text{für } a = 64,4 \text{ m} \quad H = \frac{P}{51682} (23554 + 64,4 \cdot 143,92) = 0,63999 P,$$

$$\text{für } a = 74,8 \text{ m} \quad H = \frac{P}{51286} (30252 + 74,8 \cdot 47,68) = 0,65941 P,$$

$$\text{für } a = 80 \text{ m} \quad H = \frac{P}{51286} 34066 = 0,66424 P.$$

Im vorliegenden Falle kann übrigens bei $a = 80 \text{ m}$ keine konzentrierte Last angreifen, weil sich daselbst kein Knotenpunkt befindet. Auch die unter b) erwähnte Belastung kann nicht wohl eintreten, weil der über den fünf mittleren Feldern liegende kontinuierliche Balken (Fig. 126) die Belastung einer Brückenhälfte über die Brückenmitte hinaus verteilt. Für die Belastung d) ist der Horizontalschub mit Rücksicht auf die zuletzt berechneten H :

$$H = 2 (0,36012 \cdot 63400 + 0,39281 \cdot 63400 + 0,60038 \cdot 62400 + 0,63999 \cdot 47000 + 0,65941 \cdot 40500) = 283969 \text{ kg}$$

Für eine beliebige Temperaturänderung τ wird nach § 20, 16):

$$H = \frac{l}{w} E \alpha \tau = \frac{160}{51286} E \alpha \tau = \frac{E \alpha \tau}{320,537},$$

und für eine Änderung der Spannweite um Δl nach § 20, 17):

$$H = -\frac{E}{w} \Delta l = -\frac{E \Delta l}{51286}.$$

Wenn beispielsweise $E = 2000000 \text{ kg pro qcm}$, $\alpha = 0,000012$, dann liefert die erste Gleichung:

$$H = \frac{2000000 \cdot 100^2 \cdot 0,000012}{320,537} \tau = 748,744 \tau \text{ kg},$$

und die zweite:

$$H = -\frac{2000000 \cdot 100^2}{51286} \Delta l = -389970 \Delta l \text{ kg},$$

worin Δl in Meter einzusetzen.

Über die Genauigkeit vorstehender Berechnung siehe § 47 und Beispiel 94. Sie ist genügend und weit genauer als die Berechnung nach den Formeln für Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$. Vergl. Beispiel 95. Allerdings schwankt beim Dourobrückenbogen in den einzeln Feldern J zwischen 0,246 und 4,696 cm^4 oder 1 und 19 und $J \cos \varphi$ zwischen 0,170 und 4,652 cm^4 oder 1 und 27.

¹ Alle Zahlen gelten für Meter als Längeneinheit. Weiteres über die Verhältnisse des Dourobogens enthält die Tabelle in Beispiel 94, doch genügt das hier Gegebene für die Berechnung nach den Formeln für H in § 20.

Beispiel 38. Kämpferdrucklinie eines Bogens von beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten (Dourobrücke in Portugal).

Die Kämpferdrucklinie der in Beispiel 23 betrachteten Dourobrücke festzustellen.

Nach § 20, 51) hat man bei vollständig symmetrischen Bogen auf der ersten Bogenhälfte für beliebige Abszissen a die Ordinaten der Kämpferdrucklinie S :

$$b = \frac{a(l-a)}{\sum_0^a \frac{\sigma x y}{J} + a \frac{\sum_0^m \sigma y}{J} l} w, \tag{1}$$

also mit $l = 160$ m und dem im vorigen Beispiel berechneten $w = 51286$ wegen

$$\frac{w}{l} = \frac{51286}{160} = 320,537$$

speziell für den Dourobogen:

$$b = \frac{a(160-a)}{\sum_0^a \frac{\sigma x y}{J} + a \frac{\sum_0^m \sigma y}{J}} 320,537.$$

Diese Gleichung liefert mit Rücksicht auf die in der Tabelle S. 137 gegebenen Werte:

bei $a = 0$ m $b = \frac{0 \cdot 160}{0 + 0 \cdot 1000,62} 320,537 = 51,239$ m,

bei $a = 20$ m $b = \frac{20 \cdot 140}{2774 + 20 \cdot 674,56} 320,537 = 55,179$ m,

bei $a = 40$ m $b = \frac{40 \cdot 120}{12457 + 40 \cdot 348,69} 320,537 = 58,269$ m,

bei $a = 60$ m $b = \frac{60 \cdot 100}{23554 + 60 \cdot 143,92} 320,537 = 59,747$ m,

bei $a = 80$ m $b = \frac{80 \cdot 80}{34066 + 80 \cdot 0} 320,537 = 66,219$ m.

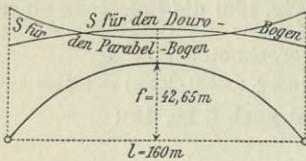


Fig. 127.

Da sich alle Ordinaten symmetrisch zur Mitte übertragen lassen, so konnte die Linie S hiernach verzeichnet werden (Fig. 127).

Bemerkungen. Für einen symmetrischen Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ hat man nach § 20, 47):

$$b = \frac{8}{5} \frac{(1 + \varepsilon) f l^2}{l^2 + l a - a^2 - \beta l^2}, \tag{2}$$

und mit den dem Dourobogen entsprechenden Werten $l = 160$ m, $\varepsilon = 0,004287$, $\beta = 0,005447$ (vergl. Beispiel 95):

$$\frac{b}{f} = \frac{41135,6}{25460 + a(160 - a)}.$$

Wir stellen die hieraus folgenden Werte mit den oben erhaltenen zusammen.

Für	$a = 0$	20	40	60	80 m:
beim Dourobogen	$\frac{b}{f} = 1,201$	1,294	1,366	1,401	1,412
„ Parabelbogen	$\frac{b}{f} = 1,616$	1,455	1,359	1,308	1,291.

Die Kämpferdrucklinie ist also im ersten Falle etwas konkav, im zweiten etwas konvex gegen die Verbindungsgerade der Stützpunkte. In Fig. 127 ist die Linie S für den Parabelbogen ebenfalls angedeutet.

Beispiel 39. Einsenkungen eines Bogens von beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten (Dourobrücke in Portugal).

Die Einsenkungen in der Mitte des Bogens der in Beispiel 37 betrachteten Dourobrücke sollen versuchsweise nach möglichst einfachen Formeln (unter Ver-

nachlässigung der Glieder mit F oder W in § 48) berechnet werden: a) für eine gleichmäßig verteilte Last von u pro Meter auf der ganzen Spannweite, und speziell für $u = 4800$ kg; b) für die in Beispiel 37 unter d) erwähnte Verkehrslast; c) für eine Temperaturänderung τ und speziell für $\tau = \pm 30^\circ$; d) für eine Änderung Δl der Spannweite und speziell für $\Delta l = 0,02$ m. (Siehe Bemerkungen am Schluß.)

a) Für eine beliebige auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit hat man nach § 48, 23):

$$e = \frac{u}{2E} \left(l \sum_0^m \frac{\sigma x^2}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma x^3}{J} - \frac{2H}{u} \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} \right), \quad 1$$

also im vorliegenden Falle mit $l = 160$ m, $E = 2000000$ kg pro qcm, H nach Beispiel 37 und den aus der Tabelle des Beispiels 94 zu entnehmenden Summenwerten Σ :

$$e = \frac{u}{E} (80 \cdot 47251 - 1287244 - 72,848 \cdot 34066) = \frac{11196 u}{2000000 \cdot 100^2} \text{ m} = 0,0000560 u \text{ cm},$$

wonach beispielsweise für $u = 4800$ kg:

$$e = 0,269 \text{ cm}.$$

b) Für die in Beispiel 37 unter d) erwähnte symmetrische Verkehrsbelastung hat man

bei	$a = 23,75$	$26,75$	54	$64,4$	$74,8$ m
	$P = 63400$	63400	62400	47000	40500 kg.

Die hierdurch erzeugten Vertikalreaktionen der Kämpfer sind:

$$V = 2 \cdot 63400 + 62400 + 47000 + 40500 = 276700 \text{ kg},$$

während der entsprechende Horizontalschub in Beispiel 36 berechnet wurde:

$$H = 283969 \text{ kg}.$$

Die Einsenkung in der Trägermitte durch eine beliebige symmetrische Belastung ist nach § 48, 11):

$$e = \frac{1}{E} \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} M_x, \quad 2$$

worin nach § 20, 3):

$$M_x = Vx - Hy - \sum_0^m P(x - a), \quad 3$$

und im vorliegenden Falle für die Felder 1 bis 11 mit den aus der Tabelle S. 137 zu entnehmenden Koordinaten x, y in mkg:

$$\begin{aligned} M_x &= 276700 \cdot 2,80 - 283969 \cdot 3,00 = -77147 \\ &276700 \cdot 8,40 - 283969 \cdot 9,00 = -231441 \\ &276700 \cdot 14,10 - 283969 \cdot 14,55 = -230279 \\ &276700 \cdot 20,40 - 283969 \cdot 20,42 = -153967 \\ &276700 \cdot 25,25 - 283969 \cdot 24,20 - 63400 \cdot 150 = 19525 \\ &276700 \cdot 31,00 - 283969 \cdot 28,30 - 63400 (7,25 + 4,25) = -187723 \\ &276700 \cdot 39,75 - 283969 \cdot 32,75 - 63400 (16,00 + 13,00) = -139760 \\ &276700 \cdot 49,15 - 283969 \cdot 36,85 - 63400 (25,40 + 22,40) = 105021 \\ &276700 \cdot 59,20 - 283969 \cdot 40,35 - 63400 (35,45 + 32,45) - 62400 \cdot 5,2 = 293151 \\ &276700 \cdot 69,60 - 283969 \cdot 42,25 - 63400 (45,85 + 42,85) - 62400 \cdot 15,6 - \\ &\quad 47000 \cdot 5,2 = 419210 \\ &276700 \cdot 80,00 - 283969 \cdot 42,65 - 63400 (56,25 + 53,25) - 62400 \cdot 26,0 - \\ &\quad 47000 \cdot 15,6 - 40500 \cdot 5,2 = 516222. \end{aligned}$$

Weiter erhalten wir nun mit Rücksicht auf die Tabelle des Beispiels 94 für Feld 1 bis 11:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma x}{J} M_x &= -92,20 \cdot 77147 = -7112953 \\ &-116,43 \cdot 231441 = -26946676 \\ &-99,66 \cdot 230279 = -22949605 \\ &-97,14 \cdot 153967 = -14956354 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma x}{J} M_x &= 38,96 \cdot 19525 = 760694 \\
 &- 106,11 \cdot 187723 = - 19919288 \\
 &- 114,60 \cdot 139760 = - 16016496 \\
 &136,00 \cdot 105027 = 14283672 \\
 &150,78 \cdot 293151 = 44201308 \\
 &158,55 \cdot 419210 = 66465746 \\
 &89,44 \cdot 516222 = \underline{46170896} \\
 \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} M_x &= 63980944,
 \end{aligned}$$

also nach 2 die Einsenkung durch die fragliche Belastung:

$$e = - \frac{63980944}{2000000 \cdot 100^2} m = 0,320 \text{ cm.}$$

c) Die Einsenkung durch eine beliebige Temperaturänderung τ liefert § 48, 24):

$$e = - \frac{H}{E} \frac{m}{0} \frac{\sigma x y}{J} - \alpha \tau f. \quad 4$$

Wir erhalten mit H nach Beispiel 37 und $f = 42,65$ m:

$$e = - \frac{\alpha \tau}{320,537} 34066 - 42,65 \alpha \tau = - 148,928 \alpha \tau,$$

also für $\alpha = 0,000012$:

$$e = - 0,001787 \tau m = - 0,1787 \tau \text{ cm.},$$

und beispielsweise für $\tau = \pm 30^\circ$:

$$e = \mp 5,361 \text{ cm.}$$

d) Die durch eine Änderung der Spannweite um Δl bewirkte Einsenkung ist nach § 48, 25):

$$e = - \frac{H}{E} \frac{m}{0} \frac{\sigma x y}{J}, \quad 5$$

wonach in unserm Fall bei Beachtung von Beispiel 37:

$$e = \frac{\Delta l}{51286} 34066 = 0,6642 \Delta l,$$

und speziell für $\Delta l = 2$ cm:

$$e = 1,328 \text{ cm.}$$

Bemerkungen. Wir haben im Falle

	a)	b)	c)	d)
nach obigem Verfahren	$e = 0,269$	$0,320$	$5,361$	$1,328 \text{ cm.}$
während sich bei genauerem Vorgehen ergeben				
nach Beispiel 96	$e = 1,545$	$1,359$	$5,321$	$1,315 \text{ „}$
und für den Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ wären				
nach Beispiel 97	$e = 0,316$	$0,299$	$5,739$	$1,459 \text{ „}$

Man sieht, daß das obige Verfahren bei Bogen von den Verhältnissen der Dourobrücke nicht zulässig wäre zur Berechnung der Einsenkungen durch Belastungen (Fälle a und b), wohl aber zur Berechnung der Einsenkungen durch Temperaturänderungen und Bewegungen der Widerlager (Fälle c und d). Aus letzterem Grunde wäre das Verfahren auch für Berechnungen wie die in der nächsten Aufgabe verwendbar. Die Formeln für Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ hätten noch weniger befriedigende Resultate ergeben. Allerdings schwankt $J \cos \varphi$ beim Dourobrückenbogen in den einzeln Feldern zwischen 0,170 und 4,652 cm⁴ das heißt zwischen 1 und 27.

Aufgabe 19 mit Beispiel 40. Reduktion der Normaltemperatur auf die mittlere Ortstemperatur bei Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten (Dourobrücke in Portugal).

Die in Aufgabe 18 verlangte Reduktion der Normaltemperatur auf die mittlere Ortstemperatur soll nun für symmetrische Bogen von beliebiger symmetrischer Achse und beliebigen Querschnitten vorgenommen werden.

Wir gehen wie in Aufgabe 18 vor und ziehen wieder die gleichzeitige Erzeugung eines beliebigen künstlichen Horizontalschubs in Betracht (vergl. am Schlusse von Aufgabe 17, S. 133).

Durch eine Temperaturänderung τ und eine Änderung Δl der Spannweite entsteht nach § 20, 16), 17) ein Horizontalschub:

$$H = \frac{\alpha \tau l - \Delta l}{w} E. \quad 1$$

Zur Erzeugung eines künstlichen Horizontalschubs K ist also eine Verringerung der Spannweite nötig um

$$v = \frac{w}{E} K.$$

Wir fügen derselben bei $v = \alpha l d$, unter $d = t_1 - t_n$ die Differenz der Montierungstemperatur t_1 und gewünschten Normaltemperatur t_n verstanden, womit die ganze vorzunehmende Verminderung der Spannweite beträgt:

$$v = \frac{w}{E} K + \alpha l d. \quad 2$$

Ist dann in der Folge $\tau_1 = t - t_1$ die Abweichung der wirklichen Temperatur t gegen die Montierungstemperatur t_1 (vergl. Fig. 125), und Δl eine etwaige weitere Änderung der Spannweite, dann liefert 1 den ganzen von der Temperaturänderung und den Längenänderungen Δl , v herrührenden Horizontalschub:

$$H = \frac{\alpha \tau_1 l - (\Delta l - v)}{w} E,$$

oder mit 2, wenn wieder

$$\tau = t - t_n = d + \tau_1 \quad 3$$

die Abweichung der wirklichen Temperatur t gegen die gewählte Normaltemperatur t_n bezeichnet (Fig. 125):

$$H = \frac{\alpha \tau l - \Delta l}{w} E + K, \quad 4$$

wozu in jedem Falle noch der Horizontalschub durch die Belastung kommt, für welchen die Formeln § 20, 15), 25), 33) u. a. gelten. Es hängt also H außer von der Belastung und dem festgesetzten künstlichen Horizontalschub K (vergl. S. 133) nur von der Temperaturänderung τ gegen die gewünschte Normaltemperatur und etwaigen Änderungen Δl der Spannweite nach Erzeugung von K , v ab.

Der künstliche Horizontalschub, welcher bei Herstellung der Überhöhung nach 1 mit Rücksicht auf 2 den Wert:

$$K_1 = \frac{v}{w} E = K + \frac{\alpha l d}{w} E \quad 5$$

hatte, erreicht nach 4 für $\tau = 0$, $\Delta l = 0$ den verlangten Wert K . Mit Verswinden der Verringerung v würde auch K wegfallen.

Will man die Reduktion der Normaltemperatur auf die mittlere Ortstemperatur ohne sonstige Überhöhung des Bogens vornehmen, so hat man mit $K = 0$ nach 2, 5:

$$v = \alpha l d, \quad K_1 = \frac{\alpha l d}{w} E. \quad 6$$

Will man dagegen einen künstlichen Horizontalschub K ohne Reduktion der Normaltemperatur erzeugen, so liefern jene Gleichungen mit $d = 0$:

$$v = \frac{w}{E} K, \quad K_1 = K. \quad 7$$

Dem Bogen der Dourobrücke von $l = 160$ m entspricht nach Beispiel 37 für Meter als Längeneinheit $w = 51286$. Ist nun die gewünschte Normaltemperatur 10^0 , die Montierungstemperatur $t_1 = 25^0$, so hat man $d = 25 - 10 = 15^0$ und mit $E = 20000000$ kg pro qcm, $\alpha = 0,000012$:

$$\alpha l d = 0,000012 \cdot 160 \cdot 15 = 0,02880 \text{ m}, \quad \frac{E}{w} = \frac{2000000 \cdot 100^2}{51286} = 386970,$$

so daß wir nach 2, 5 erhalten:

$$v = \frac{K}{389970} + 0,0288 \text{ m,}$$

$$K_1 = K + 11231 \text{ kg.}$$

Für $K = 0$ würden:

$$v = 2,88 \text{ cm,}$$

$$K_1 = 11231 \text{ kg.}$$

§ 21. Einfache Bogen ohne Gelenke.

Der Bogen besitze keine Gelenke, doch liegen die Achspunkte der Endquerschnitte in gleicher Höhe, sodaß $h = 0$ ist (Fig. 128, 129). Wir haben dann nach § 1, 4)–6) für die Vertikalreaktionen der Kämpfer:

$$V = \frac{1}{l} \left[M' - M + \sum_0^l P(l - a) \right], \tag{1}$$

$$V' = \frac{1}{l} \left[M - M' + \sum_0^l P a \right], \tag{2}$$

$$V + V' = \sum_0^l P, \tag{3}$$

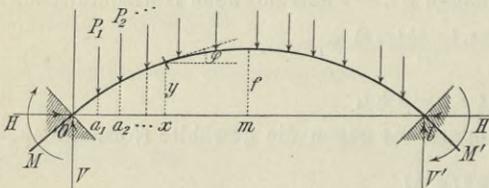


Fig. 128.

während der Horizontalschub H und die Endmomente M, M' durch die Statik allein nicht bestimmt sind und mit Rücksicht auf die Formänderungen ermittelt werden müssen. Sie werden damit von der Form der Bogenachse und der Ver-

änderlichkeit des Querschnittes abhängig (s. unten).

Das Moment und die Vertikalkraft in einem beliebigen Querschnitt x sind nach § 1, 3), 8) und 2), 7):

$$\begin{aligned} M_x &= M + Vx - Hy - \sum_0^x P(x - a) \\ &= \frac{l-x}{l} \left[M + \sum_0^x P a \right] + \frac{x}{l} \left[M' + \sum_x^l P(l - a) \right] - Hy, \end{aligned} \tag{4}$$

$$V_x = V - \sum_0^x P = \frac{1}{l} \left[M' - M - \sum_0^x P a + \sum_x^l P(l - a) \right], \tag{5}$$

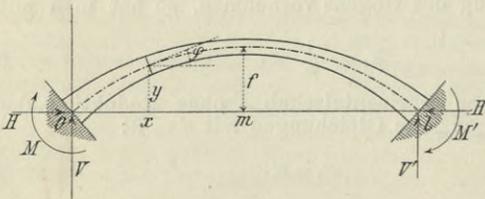


Fig. 129.

während die Normalkraft bei x wie immer ausgedrückt ist:

$$N_x = V_x \sin \varphi + H \cos \varphi. \tag{6}$$

Auch die in §§ 1, 8, 9 gegebenen Ausdrücke der Transversalkraft T_x , resultierenden Schnittkraft R_x , Normalspannungen

$\sigma, \sigma_0, \sigma_u$, Schubspannungen τ usw. bleiben ungeändert. Man hat also z. B. bei vollwandigen Bogen mit symmetrisch zur Achsschicht angeordneten Querschnitten die Normalspannungen im obersten und untersten

Querschnittselement (zwischen welchen die Werte aller übrigen σ des Querschnitts liegen):

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}, \quad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{W}, \quad 7$$

unter F den nutzbaren Querschnitt bei x , unter W dessen Widerstandsmoment verstanden.

Verschiedene Formen.

Bezüglich der Gleichungen und Richtungswinkel der Bogenachse in den wichtigsten Fällen wird wieder auf § 19 (S. 77) verwiesen. Da bei Bogen ohne Gelenke eine so weitgehende Veränderlichkeit des Querschnitts wie bei Bogen mit Kämpfergelenken nicht vorkommt (Sichelbogen sind ausgeschlossen), und dieselben, abgesehen von Gewölben (V. Abschnitt), überhaupt seltener ausgeführt werden, so geben wir in diesem § die speziellen Formeln nur für symmetrische Parabelbogen von konstantem (mittleren) $J \cos \varphi$ (J Trägheitsmoment, φ Winkel der Bogenachse mit der Horizontalen). Die betreffenden Ableitungen sind in §§ 44, 45 zu finden. Über entsprechende Beziehungen für Bogen ohne Gelenke von beliebiger symmetrischer Achse und beliebigen Querschnitten siehe §§ 48, 49, 50.

Für symmetrische Parabelbogen vom Mittelwerte c des Ausdrucks $J \cos \varphi$ hat man nach § 44, (27)–(29) die durch eine beliebige Belastung erzeugten Werte von H , M , M' :

$$H = \frac{15}{(1+6\varepsilon)4f^3} \sum_0^l P a^2 (l-a)^2, \quad 8$$

$$M = \frac{1}{(1+6\varepsilon)2l^3} \sum_0^l P a (l-a)^2 (5a - 2l - 12\varepsilon l), \quad 9$$

$$M' = \frac{1}{(1+6\varepsilon)2l^3} \sum_0^l P a^2 (l-a) (3l - 5a - 12\varepsilon l). \quad 10$$

An Stelle der beiden letzten Formeln kann man auch setzen:

$$M = H \frac{2f}{3} - \frac{1}{l^2} \sum_0^l P a (l-a)^2, \quad 11$$

$$M' = H \frac{2f}{3} - \frac{1}{l^2} \sum_0^l P a^2 (l-a), \quad 12$$

während sich nach 1, 2 die Vertikalreaktionen der Kämpfer mit 11, 12 auch ausdrücken lassen:

$$V = \frac{1}{l^3} \sum_0^l P (l+2a) (l-a)^2, \quad 13$$

$$V' = \frac{1}{l^3} \sum_0^l P (3l-2a) a^2. \quad 14$$

Eine beliebige Temperaturänderung τ bewirkt (für Zunahme τ positiv):

$$H = \frac{Ec}{1+6\varepsilon} \frac{45}{4f^2} \alpha \tau, \quad 15$$

$$M = M' = \frac{Ec}{1+6\varepsilon} \frac{15}{2f} \alpha \tau = H \frac{2f}{3}. \quad 16$$

Durch kleine Verrückungen und Verdrehungen der Bogenenden, mit welchen jedoch kein Abheben der Endquerschnitte von den Kämpfern verbunden sein darf, würden entstehen:

$$H = -\frac{15 Ec}{(1+6\varepsilon)2lf} \left(\frac{3 \Delta l}{2f} + \Delta \varphi_0 - \Delta \varphi_l \right), \quad 17$$

$$M = -\frac{3 Ec}{(1+6\varepsilon)l} \left[\frac{5 \Delta l}{2f} - \frac{2 \Delta k}{l} + 3 \Delta \varphi_0 - \Delta \varphi_l - 4\varepsilon \left(\frac{3 \Delta k}{l} - 2 \Delta \varphi_0 - \Delta \varphi_l \right) \right], \quad 18$$

$$M' = -\frac{3 Ec}{(1+6\varepsilon)l} \left[\frac{5 \Delta l}{2f} + \frac{2 \Delta k}{l} - 3 \Delta \varphi_l + \Delta \varphi_0 + 4\varepsilon \left(\frac{3 \Delta k}{l} - 2 \Delta \varphi_l - \Delta \varphi_0 \right) \right]. \quad 19$$

Wenn jedoch nur eine Änderung Δl der Spannweite (bei Zunahme Δl positiv) oder doch sonstige Bewegungen der Stützen nur derart stattgefunden haben, daß $\Delta \varphi_0 = \Delta \varphi_l = \frac{\Delta k}{l}$ ist (vergl. Bemerkungen zu § 40, 21)), so werden einfacher:

$$H = -\frac{Ec}{1+6\varepsilon} \frac{45}{4f^2} \frac{\Delta l}{l}, \quad 20$$

$$M = M' = -\frac{Ec}{1+6\varepsilon} \frac{15}{2f} \frac{\Delta l}{l} = H \frac{2f}{3}. \quad 21$$

In vorstehenden Gleichungen wie im weiteren gilt für ε das am Schlusse von § 19 Gesagte, während die in § 20 noch berücksichtigte, aber auch dort fast immer zu vernachlässigende Größe β angesichts der bei Bogen ohne Gelenke geringeren erreichbaren Genauigkeit weggeblieben ist. Zur Berücksichtigung derselben wären die Gleichungen (§ 44, 24) bis 26) anstatt der vorstehenden zu verwenden. Mit $f = 0$ wird $\varepsilon = \infty^2$, $H = 0$ und gehen alle obigen Gleichungen in die für horizontale Balken mit eingespannten Enden gültigen über.

Nach 15 und § 20, 8) ist der von einer Temperaturänderung τ herführende Horizontalschub bei Bogen ohne Gelenke im allgemeinen etwa sechsmal so groß als bei Bogen mit Kämpfergelenken allein, während bei Dreigelenkbogen überhaupt kein Horizontalschub durch Temperaturänderungen entsteht. Analoges gilt nach 20 und § 20, 9) für eine Änderung Δl der Spannweite.

Verschiedene Belastungen.

Die bis jetzt abgeleiteten Formeln gelten bei beliebiger Belastung. Eine Spezialisierung derselben für stetig verteilte Lasten kann mit Rücksicht auf § 18 erfolgen.

Für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit erhält man:

$$V = V' = \frac{ul}{2}, \quad 22$$

$$V_x = u \left(\frac{l}{2} - x \right), \quad 23$$

$$M_x = M - Hy + \frac{u}{2} x(l-x), \quad 24$$

worin speziell für Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$:

$$H = \frac{1}{1 + 6\varepsilon} \frac{u l^2}{8f}, \quad 25$$

$$M = M' = -\frac{\varepsilon}{1 + 6\varepsilon} \frac{u l^2}{2} = -4\varepsilon f H. \quad 26$$

Wirken dagegen auf die erste und zweite Trägerhälfte verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten von u, u' pro Längeneinheit, so gelten für Querschnitte x auf der ersten Trägerhälfte (die Behandlung dieser genügt für praktische Berechnungen):

$$V_x = V - ux, \quad 27$$

$$M_x = M + Vx - Hy - \frac{ux^2}{2}, \quad 28$$

und hierin für Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$:

$$V = \frac{13u + 3u'}{32} l, \quad V' = \frac{3u + 13u'}{32} l, \quad 29$$

$$H = \frac{u + u'}{1 + 6\varepsilon} \frac{l^2}{16f}, \quad 30$$

$$M = \frac{u' - u - 2\varepsilon(11u + 5u')}{1 + 6\varepsilon} \frac{l^2}{64}, \quad 31$$

$$M' = \frac{u - u' - 2\varepsilon(5u + 11u')}{1 + 6\varepsilon} \frac{l^2}{64}. \quad 32$$

Für eine beliebige zur Trägermitte symmetrische Belastung erhält man aus 1, 2 mit $M = M'$ und 8, 11, 12 auf dem in § 19 (S. 79) gezeigten Wege:

$$V = V' = \sum_0^m P, \quad 33$$

$$H = \frac{15}{(1 + 6\varepsilon) 2f l^3} \sum_0^m P a^2 (l - a)^2, \quad 34$$

$$M = M' = H \frac{2f}{3} - \frac{1}{l} \sum_0^m P a (l - a). \quad 35$$

Liegt gerade in der Mitte eine konzentrierte Last, so ist dem Begriffe der Symmetrie zufolge nur die Hälfte derselben in \sum_0^m aufzunehmen.

Ist die Bogenachse wirklich parabolisch, nicht nur so annähernd, daß man die für parabolische Bogen gültigen Ausdrücke von H, M, M' verwendet, dann folgt aus 24 mit 25, 26 und § 19, 8) für eine gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit auf der ganzen Spannweite:

$$M_x = \frac{3\varepsilon u}{1 + 6\varepsilon} \left[x(l - x) - \frac{l^2}{6} \right], \quad 36$$

und aus 28 mit 29—32 und § 19, 8) für verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten von u, u' pro Längeneinheit auf der ersten und zweiten Trägerhälfte:

$$M_x = \frac{u' - u - 12\varepsilon u}{(1 + 6\varepsilon) 64} (l - 2x)(l - 8x) - \frac{(u + u')\varepsilon l}{(1 + 6\varepsilon) 32} (5l - 18x), \quad 37$$

worin die Brüche konstante, für alle x gültige Werte haben. Bei Vernachlässigung von ε würde aus 36:

$$M_x = 0,$$

und aus 37 auf der ersten Trägerhälfte:

$$M_x = \frac{u' - u}{64} (l - 2x)(l - 8x),$$

so daß die Stützlinie (§ 8) im ersten Falle der Stabachse nahe liegt und im zweiten Falle die letztere nahe bei $x = \frac{l}{8}$ und $\frac{l}{2}$ schneidet.

Kämpferdrucklinie. Umhüllungslinien. Kernlinien.

Die Gleichung der Kämpferdrucklinie S ist nach § 2, 1) allgemein:

$$b = \frac{M + Va}{H}, \quad 38$$

worin H , M , V einer bei a angreifenden Einzellast P entsprechen. Für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ hat man nach 8, 9, 13:

$$H = \frac{15P}{(1 + 6\varepsilon) 4fl^3} a^2 (l - a)^2,$$

$$M = \frac{P}{(1 + 6\varepsilon) 2l^3} a (l - a)^2 (5a - 2l - 12\varepsilon l),$$

$$V = \frac{P}{l^3} (l + 2a)(l - a)^2.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in 38 ergibt sich die Gleichung der Kämpferdrucklinie S für den erwähnten Parabelbogen:

$$b = \frac{3 + 8\varepsilon}{5} 2f. \quad 39$$

Die Linie ist also dann eine horizontale Gerade, welche für die gewöhnlichen kleinen ε nur wenig höher als $\frac{f}{5}$ über dem Scheitel der Bogenachse hinläuft.

Für die Abszisse u und Ordinate v eines Punktes der Umhüllungslinie U der Kämpferdrücke R hat man nach § 2, 4), 5):

$$u = \frac{HdM - MdH}{VdH - HdV}, \quad v = \frac{VdM - MdV}{VdH - HdV}, \quad 40$$

worin wieder H , M , V einer bei a angreifenden Einzellast P entsprechen und die Differentiale sich auf ein variables a beziehen. Für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ sind die Ausdrücke von H , M , M' oben vor 39 angeschrieben, sie liefern:

$$dH = \frac{15P}{(1 + 6\varepsilon) 2f l^3} a (l - a) (l - 2a) da,$$

$$dM = - \frac{P}{(1 + 6\varepsilon) l^3} (l - a) [l^2 - 8la + 10a^2 + 6\varepsilon l (l - 3a)] da,$$

$$dV = - \frac{6P}{l^3} a (l - a) da.$$

Wir erhalten damit aus 40 für den der Lastlage a entsprechenden Berührungspunkt der Umhüllungslinie U (vergl. Fig. 13 auf S. 10):

$$u = \frac{a}{l+a} \frac{l}{2}, \tag{41}$$

$$v = - \frac{(1+6\varepsilon)l^2 - 5a(l+a)}{a(l+a)} \frac{2f}{15}. \tag{42}$$

Eliminiert man mittels der ersten dieser Gleichungen a aus der zweiten, so ergibt sich die Gleichung der Umhüllungslinie U in gewöhnlicher Form, als Beziehung zwischen den beiden Koordinaten:

$$v = \frac{2f}{3} - \frac{1+6\varepsilon}{15} \frac{f}{lu} (l-2u)^2. \tag{43}$$

Die Linie ist eine Hyperbel, und da nach 43:

$$\frac{dv}{du} = \frac{1+6\varepsilon}{15} \frac{f}{l} \left(\frac{l^2}{u^2} - 4 \right), \tag{44}$$

so erhält man:

für	$u = 0$	$\frac{l}{4}$	$\frac{l}{2}$	l
	$v = -\infty$	$\frac{3-2\varepsilon}{5} f$	$\frac{2}{3} f$	$\frac{3-2\varepsilon}{5} f$,
	$\frac{dv}{du} = \infty$	$\frac{1+6\varepsilon}{5} \frac{4f}{l}$	0	$-\frac{1+6\varepsilon}{5} \frac{f}{l}$.

Indessen wird die Linie nur von $u = 0$ bis $u = \frac{l}{4}$ gebraucht, da nach 41 der Berührungspunkt des Kämpferdrucks R für $a = 0$ bei $u = 0$ und für $a = l$ bei $u = \frac{l}{4}$ liegt. Die Umhüllungslinie U' der Kämpferdrücke R' liegt bezüglich der Vertikalen durch die Trägermittesymmetrisch zur Umhüllungslinie U , mit horizontaler Tangente in dieselbe übergehend (Fig. 130).

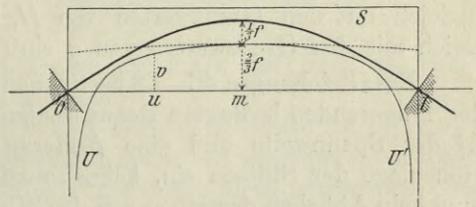


Fig. 130.

Mit Rücksicht auf den Zweck der Linien S , U , U' und den geringen Einfluß der Lasten in der Nähe der Grenzpunkte positiver

und negativer Beitragsstrecken könnte, falls die Berechnung damit erleichtert wird, häufig ε in 39–44 vernachlässigt werden. Für $f = 0$ jedoch hat man nach § 19, 40) $\varepsilon = \infty^2$ und damit:

$$b = \infty, \quad v = -\infty, \quad \frac{dv}{du} = \infty,$$

die Stützenreaktionen sind vertikal (vergl. Fig. 13, S. 10).

Bezüglich der Kernlinien gilt das in § 8 Gesagte, so daß z. B. bei symmetrisch zur Achsschicht liegenden Querschnitten die Entfernungen des oberen und unteren Kernpunktes von der Achse:

$$k_o = k_u = \frac{W}{F}, \tag{45}$$

während die Kernlinien bei vernachlässigter Füllung (Gitterbogen etc.) mit den Gurtungsschwerlinien zusammenfallen.

Grenzwerte bei bewegter Last.

Es gilt das in § 19 (S. 80) Gesagte, nur daß entsprechend § 11 an Stelle der Geraden aus beiden Kämpfergelenken Tangenten an die Umhüllungslinien U , U' und an Stelle der Fig. 94—96 die Fig. 49, 50, 48 treten. Bezüglich des Einflusses der Temperaturänderungen ist wie in § 20 zu verfahren, doch hat man zu berücksichtigen, daß jetzt durch Temperaturänderungen neben einem Horizontalschub H auch Endmomente M , M' entstehen.

Durch beliebige H , M , M' allein werden nach 4, 6 bei x erzeugt:

$$M_x = M - Hy, \quad N_x = H \cos \varphi. \quad 46$$

Die entsprechenden Normalspannungen im obersten und untersten Querschnittselement sind in dem gewöhnlichen Falle symmetrisch zur Achsschicht liegender Querschnitte nach 7:

$$\sigma_o = \left(\frac{\cos \varphi}{F} - \frac{y - \frac{M}{H}}{W} \right) H, \quad 47$$

$$\sigma_u = \left(\frac{\cos \varphi}{F} + \frac{y - \frac{M}{H}}{W} \right) H. \quad 48$$

Bei Ermittlung des Einflusses der Temperaturänderungen ist hierin nach 16 und § 49, 37) $\frac{M}{H}$ von H unabhängig, so daß die Grenzwerte von σ_o , σ_u zugleich mit den Grenzwerten von H , d. h. nach 15 und § 49, 36) zugleich mit den Grenzwerten von τ eintreten.

Die Gleichungen 46—48 bestimmen auch die durch Lagenänderungen der Trägerenden bedingten Beanspruchungen. Treten nur eine Änderung Δl der Spannweite und eine Änderung Δk der ursprünglich gleichen Höhenlage der Stützen ein, keine sonstige Drehung der Endquerschnitte (und kein Abheben derselben von den Widerlagern), dann sind nach 21 und § 49, 42) wieder $\frac{M}{H}$ konstant und σ_o , σ_u proportional H und Δl .

Formänderungen.

Wie bei Bogen mit zwei Gelenken führen wir nur die Einsenkungen parabolischer Bogen von konstantem $J \cos \varphi$ in der Trägermitte an und verweisen hinsichtlich der sonstigen Formänderungen parabolischer Bogen auf § 45, bezüglich der Formänderungen von Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten auf die §§ 40, 48.

Für symmetrische Parabelbogen von konstantem $c = J \cos \varphi$ erhält man nach der Ableitung in § 45 mit Beachtung von 11 und 12 die von einer beliebigen Belastung herrührende Einsenkung in der Mitte:

$$e = \frac{1}{48 Ec} \left[\sum_0^m P(l - 2a)^3 - \sum_0^l P(l - a)(l^2 - 5la + 4a^2) - Hfl^2 \right] \quad 49$$

worin H durch 8 bestimmt. Speziell für eine zur Trägermitte symmetrische Belastung hat man:

$$e = \frac{1}{24 Ec} \left[\sum_0^m P a^2 (3l - 4a) - \frac{1}{2} H f l^2 \right]. \quad 50$$

Liegt gerade in der Mitte eine konzentrierte Last, dann ist dem Begriffe der Symmetrie entsprechend nur die Hälfte derselben in \sum_0^m aufzunehmen, wonach z. B. für eine Einzellast P in der Trägermitte:

$$e = \frac{1 + 96 \varepsilon}{1 + 6 \varepsilon} \frac{P l^3}{3072 Ec}. \quad 51$$

Von 50 kann auch bei unsymmetrischer Belastung Gebrauch gemacht werden, wenn man berücksichtigt, daß die Einsenkung in der Mitte durch eine beliebige Belastung halb so groß ist als diejenige durch eine mittels Verdoppelung dieser Belastung hergestellte symmetrische Belastung.

Die Werte der Summenausdrücke Σ für stetig verteilte Lasten sind aus § 18 zu entnehmen. Wir erhalten dann für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit aus 50 mit Rücksicht auf 25:

$$e = \frac{\varepsilon}{1 + 6 \varepsilon} \frac{u l^4}{64 Ec}, \quad 52$$

und für verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten von u, u' pro Längeneinheit auf der ersten und zweiten Trägerhälfte aus 49 mit Rücksicht auf 30:

$$e = \frac{\varepsilon}{1 + 6 \varepsilon} \frac{u + u'}{128} \frac{l^4}{Ec}, \quad 53$$

welche Gleichung mit $u' = u$ wieder auf 52 führt und auch aus dieser Gleichung hätte erhalten werden können.

Formel 50 liefert für $H = 0$ und Formel 51 sowie 52 für $f = 0$, $\varepsilon = \infty^2$, $c = J$ bekannte Ausdrücke für Balken mit eingespannten Enden (Zitat S. 123). Bei Vernachlässigung von ε würde diese notwendige Übereinstimmung wegfallen und z. B. in den Fällen 52, 53 $e = 0$ werden.

Eine Temperaturänderung τ (bei Zunahme τ positiv) erzeugt die Einsenkung:

$$e = - \frac{l^2}{48 Ec} (5 H f - 6 M) - \alpha \tau f \quad 54$$

mit H, M nach 15, 16. Durch Einsetzen dieser Ausdrücke folgt:

$$e = - \alpha \tau \left(f + \frac{15}{64 f} \frac{l^2}{1 + 6 \varepsilon} \right). \quad 55$$

Durch irgendwelche Verrückungen und Verdrehungen der Bogenenden (ohne Abheben von den Kämpfern) würde entstehen:

$$e = \frac{l^2}{16 Ec} (M + M' - \frac{5}{3} H f) - \frac{\Delta k}{2} \quad 56$$

mit H, M, M' nach 17—19. Wenn jedoch nur eine Änderung Δl der Spannweite (bei Zunahme Δl positiv) und eine Änderung Δk der ur-

sprünglich gleichen Höhenlage der Stützen stattgefunden hat (bei höherer Stütze l ist Δk positiv), so folgt mit 20, 21:

$$e = \frac{15l}{64f} \frac{\Delta l}{1 + 6\varepsilon} - \frac{\Delta k}{2}. \quad 57$$

Für Näherungsrechnungen kann in 54–57 vielfach ε vernachlässigt werden. Vergl. Aufgabe 15, S. 106.

Beispiel 41. Gegebene Belastung (siehe auch die Beispiele 44, 63, 98 etc.).

Zur Vornahme von Versuchen mit einem $b = 2$ m breiten Betonbogen ohne Gelenke der Spannweite $l = 8$ m und des Pfeiles $f = 0,9$ m sei die in Fig. 131 skizzierte Anordnung getroffen. Es sind folgende durch die Last $G_* = 6000$ kg allein (ohne das Eigengewicht) entstehenden Größen zu berechnen: a) Der Horizontalschub H und die Kämpfermomente M, M' nach den Formeln für parabolische Bogen mit $\varepsilon = 0,008$ (s. Bemerkungen am Schluß), sowie die Vertikalreaktionen V, V' der Kämpfer; b) das Angriffsmoment M_x , die Normalkraft N_x und die Transversalkraft T_x in den Querschnitten

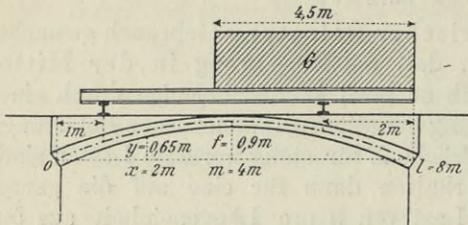


Fig. 131.

$x =$	0	2	4 m,	wo
$y =$	0	0,675	0,9 m	
$\operatorname{tg} \varphi =$	0,45	0,225	0	
$\cos \varphi =$	0,9119	0,9756	1	
Querschnittshöhe $h =$	0,25	0,20	0,15 m.	

c) Die Normalspannungen σ_o, σ_u im obersten und im untersten Querschnittselement und die größte Quer- und Längsschubspannung τ bei denselben Querschnitten.

Wir bestimmen zunächst die bei $a_1 = 1$ m und $a_2 = 6$ m auf den Träger kommenden Lasten P_1, P_2 :

$$\begin{aligned} P_1 \cdot 5 - 6000 \cdot 0,25 &= 0, & P_1 &= 300 \text{ t kg,} \\ -P_2 \cdot 5 + 6000 \cdot 4,75 &= 0, & P_2 &= 5700 \text{ „ „ .} \end{aligned}$$

a) Für die unter a) verlangten Größen gelten nach § 21, 8), 11), 12), 1), 2) folgende Gleichungen:

$$H = \frac{15}{(1 + 6\varepsilon) 4f l^3} \int_0^l P a^2 (l - a)^2, \quad 1$$

$$M = H \frac{2f}{3} - \frac{1}{l^2} \int_0^l P a (l - a)^2, \quad 2$$

$$M' = H \frac{2f}{3} - \frac{1}{l^2} \int_0^l P a^2 (l - a), \quad 3$$

$$V = \frac{1}{l} \left[M' - M + \int_0^l P (l - a) \right], \quad 4$$

$$V' = \frac{1}{l} \left[M - M' + \int_0^l P a \right]. \quad 5$$

Wir erhalten daraus den Horizontalschub:

$$H = \frac{15}{1,048 \cdot 4 \cdot 0,9 \cdot 8^3} (300 \cdot 1^2 \cdot 7^2 + 5700 \cdot 6^2 \cdot 2^2) = 6488 \text{ kg,}$$

die Kämpfermomente:

$$M = 6488 \cdot 0,6 - \frac{1}{8^2} (300 \cdot 1 \cdot 7^2 + 5700 \cdot 6 \cdot 2^2) = 1526 \text{ mkg,}$$

$$M' = 6488 \cdot 0,6 - \frac{1}{8^2} (300 \cdot 1^2 \cdot 7 + 5700 \cdot 6^2 \cdot 3) = -2552 \text{ „ „ ,}$$

und die Vertikalreaktionen der Kämpfer:

$$V = \frac{1}{8} (-2552 - 1526 + 300 \cdot 7 + 5700 \cdot 2) = 1178 \text{ kg},$$

$$V' = \frac{1}{8} (1526 + 2552 + 300 \cdot 1 + 5700 \cdot 6) = 4822 \text{ „}$$

Selbstverständlich muß $V + V' = 6000 \text{ kg}$ sein.

b) Für beliebige Querschnitte x hat man nach § 21, 4) das Moment:

$$M_x = M + V_x - H y - \sum_0^x P(x - \alpha) \quad 6$$

und nach § 1, 2), 9), 10) mit der Vertikalkraft

$$V_x = V - \sum_0^x P \quad 7$$

die Normalkraft und Transversalkraft:

$$N_x = (H + V_x \operatorname{tg} \varphi) \cos \varphi, \quad T_x = (V_x - H \operatorname{tg} \varphi) \cos \varphi. \quad 8$$

Diese Ausdrücke liefern für $x = 0$:

$$M_x = M = 1526 \text{ mkg},$$

$$N_x = (6488 + 1178 \cdot 0,45) 0,9119 = 6400 \text{ kg},$$

$$T_x = (1178 - 6488 \cdot 0,45) 0,9119 = -1588 \text{ „}$$

für $x = 2 \text{ m}$:

$$M_x = 1526 + 1178 \cdot 2 - 6488 \cdot 0,675 - 300 \cdot 1 = -797 \text{ mkg},$$

$$V_x = 1178 - 300 = 878 \text{ kg},$$

$$N_x = (6488 + 878 \cdot 0,225) 0,9756 = 6522 \text{ kg},$$

$$T_x = (878 - 6488 \cdot 0,225) 0,9756 = -568 \text{ „}$$

und für $x = 4 \text{ m}$:

$$M_x = 1526 + 1178 \cdot 4 - 6488 \cdot 0,9 - 300 \cdot 3 = -501 \text{ mkg},$$

$$N_x = H = 6488 \text{ kg},$$

$$T_x = V_x = 1178 - 300 = 878 \text{ kg}.$$

c) Für beliebige rechteckige Querschnitte x der Breite b und Höhe h sind nach § 8, 18), 19) die Normalspannungen im obersten und untersten Querschnittelement:

$$\sigma_o = \frac{1}{b h} \left(N_x + \frac{6}{h} M_x \right), \quad \sigma_u = \frac{1}{b h} \left(N_x - \frac{6}{h} M_x \right), \quad 9$$

und nach § 9, 13) die größte Quer- und Längsschubspannung, die bei der Achsschicht eintritt:

$$\tau = \frac{3}{2 b h} T_x. \quad 10$$

Es folgen hieraus mit den unter b) berechneten M_x , N_x , T_x pro qcm für $x = 0$:

$$\sigma_o = \frac{1}{200 \cdot 25} \left(6400 + \frac{6}{0,25} 1526 \right) = 8,60 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{200 \cdot 25} \left(6400 - \frac{6}{0,25} 1526 \right) = -6,04 \text{ „}$$

$$\tau = -\frac{3 \cdot 1588}{2 \cdot 200 \cdot 25} = -0,48 \text{ kg},$$

für $x = 2 \text{ m}$:

$$\sigma_o = \frac{1}{200 \cdot 20} \left(6522 - \frac{6}{0,20} 797 \right) = -4,33 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{200 \cdot 20} \left(6522 + \frac{6}{0,20} 797 \right) = 7,61 \text{ „}$$

$$\tau = -\frac{3 \cdot 568}{2 \cdot 200 \cdot 20} = -0,21 \text{ kg},$$

und für $x = 4 \text{ m}$:

$$\sigma_o = \frac{1}{200 \cdot 15} \left(6488 - \frac{6}{0,15} 501 \right) = -4,52 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{200 \cdot 15} \left(6488 + \frac{6}{0,15} 501 \right) = 8,84 \text{ „}$$

$$\tau = \frac{3 \cdot 878}{2 \cdot 200 \cdot 0,15} = 0,44 \text{ kg}.$$

Da durch das Eigengewicht allein zweifellos drückende σ_o , σ_u eintreten, so werden beim Zusammenwirken des Eigengewichts mit der oben angenommenen Belastung die für letztere allein berechneten Zugspannungen (negative σ_o , σ_u) ganz oder teilweise aufgehoben. Die τ durch das Eigengewicht sind sehr gering und zeigt sich also auch hier wieder, daß die Schubspannungen bei Bogenträgern meist unberücksichtigt bleiben können (vergl. Beispiel 8).

Bemerkungen. Die y , $\operatorname{tg} \varphi$, $\cos \varphi$ wurden in der Aufgabe gegeben, weil vorstehende Berechnung, abgesehen von den Formeln für H , M , M' , bei beliebiger symmetrischer Achsform gilt, die Ausdrücke 1, 2, 3 aber mitunter auch für andere als symmetrische Parabelbogen von konstantem (mittleren) $J \cos \varphi$ verwendet werden. Man sehe hierüber jedoch Beispiel 45 und § 51 und über die Berechnung von H , M , M' für beliebige Achse und beliebige Querschnitte die Beispiele 63, 98. Im vorliegenden Falle wurden y , $\operatorname{tg} \varphi$, $\cos \varphi$ aus § 19, 8), 18) mit $l = 8$ m, $f = 0,9$ m berechnet.

Der Wert von ε wurde hier nur überschlägig ermittelt, da es für die beispielsweise Berechnungen nicht auf besondere Genauigkeit ankam (bezüglich genauerer Feststellung s. die Beispiele 30, 63, 95). Für flache Bogen rechteckiger Querschnitte hat man nach § 19, 45) mit einem Mittelwert von h^2 :

$$\varepsilon = \frac{5h^2}{32f^2}.$$

Setzt man hierin $f = 0,9$ m und den Werten für $x = 0, 2, 4$ m entsprechend:

$$h^2 = \frac{0,25^2 + 2 \cdot 0,20^2 + 0,15^2}{4} = 0,04125,$$

so ergibt sich das verwendete $\varepsilon = 0,008$.

Bei Vernachlässigung von ε hätten wir erhalten $H = 6799$ kg, $M = 1712$ mkg, $M' = -2366$ mkg (Abweichungen gegen die obigen genaueren Werte 4,8 % bzw. 12,2 % und 7,3 %) und damit

bei	$x =$	0	2	4 m
	$\sigma_o =$	9,55	- 4,45	- 5,67 kg
anstatt		8,60	- 4,35	- 4,52 "
	$\sigma_u =$	- 6,88	7,86	10,20 "
anstatt		- 6,04	7,61	8,84 "

Es kommt in Betracht, daß bei Gewölben und Betonbogen ε verhältnismäßig klein ist (S. 83, 115).

Beispiel 42. Stützenreaktionen und Stützenmomente eines parabolischen Bogens ohne Gelenke (Verhältnisse des Wiener Bruchsteinversuchsgewölbes).

Für einen parabolischen Bogen ohne Gelenke seien die Spannweite $l = 23,758$ m, der Pfeil der Achse $f = 4,502$ m und in den Formeln für den Horizontalschub H und die Endmomente M , M' $\varepsilon = 0,002590$, sowie für Meter als Längeneinheit der Mittelwert von $J \cos \varphi c = 0,035780$. Es sind H , M , M' und die Vertikalreaktionen V , V' der Kämpfer zu ermitteln: a) für das Eigengewicht des Bogens allein, welchem die in der folgenden Tabelle I eingetragenen Lasten P bei den angeschriebenen Abszissen a und symmetrisch zu diesen Stellen (bezüglich einer Vertikalen durch die Trägermitte) entsprechen; b) durch beliebige Lasten P bei Abszissen $a = 0,629$ m, 2,879 m, 5,129 m, 7,379 m, 9,629 m, 11,879 m, c) durch beliebige Verkehrsbelastungen, zusammengesetzt aus Einzellasten an den unter b) angeführten und symmetrisch dazu gelegenen Stellen; d) durch eine beliebige Temperaturänderung τ ; e) für eine Änderung Δl der Spannweite ohne sonstige Bewegungen der Kämpfer, oder doch nur solche, für welche $\Delta \varphi_o = \Delta \varphi_l = \frac{\Delta k}{l}$ ist.

a) Eigengewicht. Für eine beliebige zur Mitte symmetrische Belastung hat man nach § 21, 34), 35), 33):

$$H = \frac{15}{(1 + 6\varepsilon) 2f l^3} \sum_0^m P a^2 (l - a)^2,$$

$$M = M' = H \frac{2f}{3} - \frac{1}{l} \sum_0^m P a (l - a), \quad 2$$

$$V = V' = \sum_0^m P, \quad 3$$

worin im vorliegenden Falle:

$$\frac{15}{(1 + 6 \varepsilon) 2 f l} = \frac{1}{1,01554 \cdot 2 \cdot 4,502 \cdot 23,758} = \frac{1}{14,4828}.$$

Mit Rücksicht auf die in der folgenden Tabelle I angeführten Werte ergeben sich also durch das Eigengewicht allein:

$$H = \frac{1}{14,4828} \left(897\,048 - \frac{2 \cdot 7\,712\,459}{23,758} + \frac{77\,710\,843}{23,758^2} \right) = 25\,882 \text{ kg},$$

$$M = M' = 25\,882 \frac{2 \cdot 4,502}{3} - 121\,464 + \frac{897\,048}{23,758} = -6026 \text{ mkg},$$

$$V = V' = 24\,095 \text{ kg}.$$

Parabolischer Bogen ohne Gelenke. Tabelle I. Eigengewicht.

a in m	P in kg	Pa	Pa^2	Pa^3	Pa^4
0,314	2117	665	209	66	21
1,192	3339	3 980	4 744	5 655	6 741
2,317	2898	6 715	15 559	36 050	83 528
3,442	2571	8 849	30 458	104 836	360 846
4,567	2296	10 486	47 890	218 714	998 867
5,692	2081	11 845	67 422	383 766	2 184 396
6,817	1923	13 109	89 364	609 194	4 152 875
7,942	1818	14 439	114 675	910 749	7 233 169
9,067	1739	15 768	142 968	1 296 291	11 753 470
10,192	1676	17 082	174 100	1 744 427	18 084 960
11,317	1637	18 526	209 659	2 372 711	26 851 970
	24 095	121 464	897 048	7 712 459	77 710 843

b) Beliebige Einzellasten. Nach § 21, 8), 11), 12), 1), 3) gelten für eine Einzellast P an beliebiger Stelle a :

$$\frac{H}{P} = \frac{15}{(1 + 6 \varepsilon) 4 f l^3} a^2 (l - a)^2, \quad 4$$

$$\frac{M}{P} = \frac{H}{P} \frac{2f}{3} - \frac{1}{l^2} a (l - a)^2, \quad \frac{M'}{P} = \frac{H}{P} \frac{2f}{3} - \frac{1}{l^2} a^2 (l - a), \quad 5$$

$$\frac{V}{P} = \frac{1}{l} \left(l - a + \frac{M' - M}{P} \right), \quad \frac{V'}{P} = 1 - \frac{V}{P}, \quad 6$$

worin in unserm Falle:

$$\frac{15}{(1 + 6 \varepsilon) 4 f l^3} = \frac{1}{14,8428 \cdot 23,758^2} = \frac{1}{16\,349}.$$

Mit Rücksicht auf die in der nachstehenden Tabelle II zusammengestellten Werte erhalten wir für $a = 0,629$ m:

$$\frac{H}{P} = \frac{211,84}{16\,349} = 0,01296,$$

$$\frac{M}{P} = 0,01296 \frac{2 \cdot 4,502}{3} - \frac{336,48}{23,758^2} = -0,55723,$$

$$\frac{M'}{P} = 0,01296 \frac{2 \cdot 4,502}{3} - \frac{9,16}{23,758^2} = 0,02267,$$

$$\frac{V}{P} = \frac{23,129 + 0,579\,90}{23,758} = 0,9979,$$

$$\frac{V'}{P} = 1 - 0,9979 = 0,0021.$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werte der Kolonnen 8 bis 12 von Tabelle II berechnet.

Parabolischer Bogen ohne Gelenke. Tabelle II. Einzellasten.

a in m	$l-a$ in m	a^2	$(l-a)^2$	$a(l-a)^2$	$a^2(l-a)$	$a^2(l-a)^2$	$\frac{H}{P}$	$\frac{M}{P}$	$\frac{M'}{P}$	$\frac{V}{P}$	$\frac{V'}{P}$
0,629	23,129	0,396	534,951	336,48	9,16	211,84	0,0130	-0,5572	0,0227	0,9979	0,0021
2,879	20,879	8,289	435,933	1255,05	173,07	3613,45	0,2210	-1,5602	0,3567	0,9595	0,0405
5,129	18,629	26,307	347,040	1779,97	490,07	9129,58	0,5584	-1,4775	0,8078	0,8803	0,1197
7,379	16,379	54,450	268,272	1979,58	891,84	14 607,41	0,8935	-0,8255	1,1015	0,7705	0,2295
9,629	14,129	92,718	199,629	1922,23	1310,01	18 509,20	1,1321	-0,0077	1,0770	0,6404	0,3596
11,879	11,879	141,111	141,111	1676,26	1676,26	19 912,31	1,2179	-0,6857	0,6857	0,5000	0,5000
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Für die zu den in Tabelle II berücksichtigten Lastangriffspunkten a der Lasten P bezüglich der Trägermitte $m = 11,879$ m symmetrisch gelegenen Lastangriffspunkte ergeben sich die verlangten Größen nun ohne Rechnung:

für	$a =$	14,129	16,379	18,629	20,879	23,129 m
	$H : P =$	1,2652	0,9322	0,5242	0,1818	0,0092
	$M : P =$	1,0770	1,1015	0,8078	0,3567	0,0227
	$M' : P =$	-0,0077	-0,8255	-1,4775	-1,5602	-0,5572
	$V : P =$	0,3596	0,2295	0,1197	0,0405	0,0021
	$V' : P =$	0,6404	0,7705	0,8803	0,9595	0,9979.

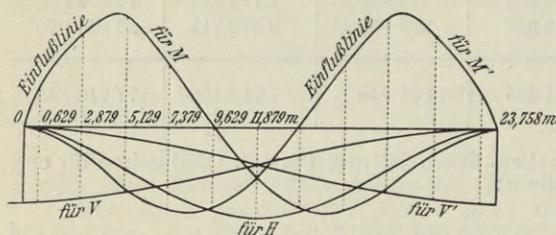


Fig. 132.

Werden die in den fünf letzten Kolonnen der Tabelle II angeführten und vorstehende Werte von H, M, M', V, V' für $P=1$ bei allen jetzt berücksichtigten a als Ordinaten aufgetragen, so ergeben sich die in Fig. 132 verzeichneten Einflußlinien von H, M, M', V, V' , aus denen die Beiträge beliebiger P zu jenen Größen auch für zwischenliegende a entnommen und mittels welcher ihre

Werte und Gegenwerte für beliebige Lasten berechnet werden können (§ 12).

c) Beliebige Verkehrsbelastungen. Um die H, M, M', V, V' für irgendwelche gleichzeitig wirkende Lasten P zu erhalten, braucht man nur deren Werte für die einzeln P zu addieren. Wirken z. B. auf der ersten Trägerhälfte bei $a = 0,629$ m und $a = 11,879$ m gleiche Lasten $\frac{P}{2}$, bei den übrigen in Tabelle II angeführten a gleiche Lasten P , so erhält man aus Kolonne 8 der Tabelle:

$$H = P \left(\frac{0,0130}{2} + 0,2210 + 0,5584 + 0,8935 + 1,1321 + \frac{1,2179}{2} \right) = 3,4204 P,$$

und in analoger Weise aus den Kolonnen 9 bis 12:

$$M = -3,8067 P, \quad M' = 3,6972 P,$$

$$V = 3,9996 P, \quad V' = 1,0004 P,$$

also beispielsweise für $P = 3430 \text{ kg}$:

$$\begin{aligned} H &= 11\,732 \text{ kg}, & M &= -13\,057 \text{ mkg}, & M' &= 12\,681 \text{ mkg}, \\ V &= 13\,719 \text{ kg}, & & & V' &= 3\,431 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Liegen die besprochenen Lasten, symmetrisch zur Trägermitte übertragen, auf der zweiten Trägerhälfte, so gelten:

$$\begin{aligned} H &= 3,4204 P, \\ M &= 3,6972 P, & M' &= -3,8067 P, \\ V &= 1,0004 P, & V' &= 3,9996 P, \end{aligned}$$

und wirken die erwähnten Lasten gleichzeitig auf beiden Bogenhälften, womit auch die Last in der Bogenmitte den Wert P erlangt, dann folgen:

$$\begin{aligned} H &= 2 \cdot 3,4204 P = 6,8408 P, \\ M = M' &= -3,8067 P + 3,6972 P = -0,1095 P, \\ V = V' &= 3,9996 P + 1,0004 P = 5 P. \end{aligned}$$

Sind die betrachteten Größen für die angenommenen Verkehrsbelastungen und das Eigengewicht zusammen zu bestimmen, so hat man den jetzt berechneten Werten die unter a) erhaltenen zu addieren.

Anstatt wie hier aus den Beiträgen der Einzellasten hätte man die H , M , M' , V , V' auch wie unter a) sofort für die ganze angenommene Belastung ermitteln können, wobei im Falle symmetrischer Belastung wieder die Formeln 1)–3), im Falle unsymmetrischer Belastung aber die Formeln § 21, 8), 9), 10), 1), 3) zu verwenden gewesen wären. Wenn es sich jedoch um Berechnung von Grenzwerten auf Grund der ungünstigsten Belastungen handelt (§§ 10, 11), so ist das obige Vorgehen oft bequem, weil eben die Beiträge aller für die verschiedenen Grenzwerte maßgebenden Belastungen aus den Beiträgen der einzelnen P rasch erhalten werden können. Vergl. auch das Vorgehen im VI. Abschnitt. Über die Ermittlung der Schnittlinie und Umhüllungslinien der Kämpferdrücke s. Beispiel 43.

d) Temperaturänderungen. Für eine beliebige Temperaturänderung τ hat man neben $V = V' = 0$ nach § 21, 15) 16):

$$H = \frac{45c}{(1+6\varepsilon)4f^2} E \alpha \tau, \quad 7$$

$$M = M' = H \frac{2f}{3}, \quad 8$$

woraus in vorliegendem Falle:

$$H = \frac{45 \cdot 0,03578}{1,01554 \cdot 4 \cdot 4,502^2} E \alpha \tau = \frac{E \alpha \tau}{51,135},$$

$$M = M' = 3,0013 H = \frac{E \alpha \tau}{17,037},$$

und beispielsweise mit $E = 175\,000 \text{ kg pro qcm}$, $\alpha = 0,000\,0118$ (Bruchsteingewölbe), da alsdann für Meter als Längeneinheit $E \alpha = 175\,000 \cdot 100^2 \cdot 0,000\,0118 = 20\,650$:

$$H = 404 \tau \text{ kg}, \quad M = M' = 1212 \tau \text{ mkg}.$$

Für $\tau = \pm 25^0$ werden $H = \pm 10\,100 \text{ kg}$, $M = M' = \pm 30\,000 \text{ mkg}$.

e) Bewegungen der Kämpfer. Durch eine Änderung der Spannweite um Δl ohne andere als die in der Aufgabe zugelassene Bewegung der Kämpfer entsteht nach § 21, 20):

$$H = -\frac{45c}{(1+6\varepsilon)4f^2} \frac{E \Delta l}{l}, \quad 9$$

während M , M' wieder durch 8 bestimmt und $V = V' = 0$ sind. In unserm Falle ergeben sich mit Rücksicht auf die Berechnung unter d):

$$H = -\frac{E \Delta l}{51,135 \cdot 23,758} = -\frac{E \Delta l}{1214,86},$$

$$M = M' = 3,0013 H = -\frac{E \Delta l}{404,77}.$$

und beispielsweise mit $E = 175000 \cdot 100^2$ kg pro qm, wenn Δl in cm eingesetzt werden soll, in welchem Falle nach Einsetzen des vorstehenden E noch mit 100 zu dividieren ist:

$$H = -14405 \Delta l \text{ kg,} \quad M = M' = -43234 \Delta l \text{ mkg.}$$

Für $\Delta l = 1$ cm werden $H = -14405$ kg, $M = M' = -43234$ mkg.

Für andere als die oben angenommenen Bewegungen der Kämpfer wären anstatt § 21, 20) 21) die Formeln § 21, 17), 18), 19) anzuwenden gewesen, wobei nach § 21, 1) 2) im allgemeinen auch V , V' beeinflusst werden.

Bemerkungen.

Wir haben oben die Werte ε , c als gegeben angenommen, weil ihre Berechnung je nach Umständen verschieden erfolgen kann, während vorstehendes Beispiel für beliebige parabolische Bogen ohne Gelenke gelten soll. In Wirklichkeit entsprechen die gegebenen ε , c dem in den Beispielen 63 bis 67 be-

Parabolischer Bogen ohne Gelenke. Tabelle III. Vergleiche.

Für	Größe	Mit $\varepsilon = 0$ berechnet	Mit $\varepsilon = 0,002590$ genauer berechnet	Abweichung in %
Eigengewicht allein	H	26284	25882	1,55
	$M = M'$	- 4819	- 6026	20,03
	$V = V'$	24095	24095	0
Verkehrsbelastung der ersten Bogen- hälfte allein	$\frac{H}{P}$	3,4736	3,4204	1,55
	$\frac{M}{P}$	- 3,6472	- 3,8067	4,19
	$\frac{M'}{P}$	3,8566	3,6972	4,31
	$\frac{V}{P}$	3,9996	3,9996	0
	$\frac{V'}{P}$	1,0004	1,0004	0
Verkehrsbelastung beider Bogenhälften	$\frac{H}{P}$	6,9472	6,8408	1,55
	$\frac{M}{P} = \frac{M'}{P}$	0,2094	- 0,1095	291,23
	$\frac{V}{P} = \frac{V'}{P}$	5	5	0
eine Temperatur- änderung um τ	$\frac{H}{E \alpha \tau}$	$\frac{1}{50,352}$	$\frac{1}{51,135}$	1,55
	$\frac{M}{E \alpha \tau} = \frac{M'}{E \alpha \tau}$	$\frac{1}{16,776}$	$\frac{1}{17,037}$	1,55
	$V = V'$	0	0	0
eine Änderung der Spannweite um Δl	$\frac{H}{E \Delta l}$	$-\frac{1}{1196,27}$	$-\frac{1}{1214,86}$	1,55
	$\frac{M}{E \Delta l} = \frac{M'}{E \Delta l}$	$-\frac{1}{398,58}$	$-\frac{1}{404,77}$	1,55
	$V = V'$	0	0	0

handelten Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe und ihre Berechnung ist am Schlusse des Beispiels 63 gegeben. Auch die übrige Berechnung hängt etwas von dem System des in Frage stehenden Bogens ab, bietet aber nach Ermittlung der Kämpferdrucklinie und Umhüllungslien der Kämpferdrücke (Beispiel 43

und 1) gegenüber der Berechnung von Bogen mit Kämpfergelenken nichts Neues. Über die Berechnung parabolischer Gewölbe ohne Gelenke siehe auch Beispiel 44.

Hätten wir in obigen Gleichungen $\varepsilon = 0$ gesetzt, was der üblichen Vernachlässigung des Einflusses der Achsialkraft und der Glieder mit r im Nenner (S. 23) oder der Vernachlässigung von X_2, Y_2, Z_2 in § 44 entspricht, so würden sich die Werte ergeben haben, welche mit den oben berechneten in der Tabelle III S. 156 zusammengestellt sind.

Die Abweichungen können hiernach für die Momente schon bei dem kleinen $\varepsilon = 0,00259$ erheblich werden. Nun pflegen aber für eiserne Bogen wesentlich größere ε als für Gewölbe einzutreten, z. B. für die Dourobrücke 0,004287, für die Öffnung IV der Cannstatter Brücke 0,012063, für die Koblenzer Brücke 0,04563 und da sich der Horizontalschub bei Vernachlässigung von ε allgemein $1 + 6\varepsilon$ mal so groß als nach den genaueren Formeln ergibt (bei Bogen mit Kämpfergelenken nur $1 + \varepsilon$ mal so groß), so erhielt man alsdann ihn in den letzterwähnten Fällen um 2,57% bzw. 7,24% und 27,38% zu groß, während für die Momente noch weit größere Differenzen entstünden.

Da für eine Einzellast P bei a nach § 21, 9):

$$M = \frac{P}{(1 + 6\varepsilon)^2 2\beta} a(l - a)^2 (5a - 2l - 12\varepsilon l),$$

oder mit der Bezeichnung $\mu = \frac{a}{l}$:

$$\frac{M}{Pl} = \mu(1 - \mu)^2 \frac{5\mu - 2 - 12\varepsilon}{2(1 + 6\varepsilon)},$$

so folgen z. B.

für	$\frac{a}{l} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
mit $\varepsilon = 0,015$	$\frac{M}{Pl} =$	-0,06242	-0,06928	-0,04585	-0,01189	0,01834
mit $\varepsilon = 0$	$\frac{M}{Pl} =$	-0,06075	-0,06400	-0,03675	0	0,03125
Abweichungen in %		2,68	7,62	19,85	100	70,39;
für	$\frac{a}{l} =$	0,6	0,7	0,8	0,9	
mit $\varepsilon = 0,015$	$\frac{M}{Pl} =$	0,03611	0,03815	-0,02672	0,00958	
mit $\varepsilon = 0$	$\frac{M}{Pl} =$	0,04800	0,04725	0,03200	0,01125	
Abweichungen in %		32,93	23,85	19,76	17,43.	

Ähnliche Abweichungen können für die übrigen Momente M_x entstehen. Wenn sich dieselben nun auch nicht in gleichem Maße auf die Normalspannungen durch die Gesamtbelastung fortzupflanzen brauchen (vergl. am Schlusse des Beispiels 65), so erkennt man doch, daß gerade bei Bogen ohne Gelenke ε im allgemeinen nicht vernachlässigt werden darf. Bezüglich der Einsenkungen ergibt sich dies schon daraus, daß mit $\varepsilon = 0$ für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last bei Bogen mit drei Gelenken, zwei Gelenken und ohne Gelenke die Einsenkung in der Mitte $\varepsilon = 0$ folgen würde. Vergl. Aufgabe 15 oder S. 82, 123, 149.

Bezüglich der in Tabelle III enthaltenen Größen für Bogen von anderer Achsform und anderen Querschnitten unter sonst gleichen Verhältnissen s. in Beispiel 63 die Tabelle VI.

Aufgabe 20. Einflußlinien für die Stützenreaktionen und Stützenmomente.

Es sollen die Gleichungen der Einflußlinien für die Vertikalreaktionen V, V' und Horizontalreaktionen H der Kämpfer, sowie für die Kämpfermomente M, M' parabolischer Bogen von konstantem $J \cos \varphi$ festgestellt werden.

Wie sich die Einflußlinien der fraglichen Größen mit anderen Größen zahlenmäßig ermitteln lassen, wurde im vorigen Beispiel unter b) gezeigt. Hier handelt es sich darum, ihre Gleichungen abzuleiten, wonach jede Linie für sich verzeichnet werden kann. Es genügt, die Gleichungen für V, H, M anzugeben, da die Einflußlinien von V', M' bezüglich der Vertikalen durch die Trägermitte

symmetrisch zu den Einflußlinien von V , M liegen. Nach § 21, 13), 8), 9), 11) haben wir für eine Einzellast $P=1$ bei a

$$V = \frac{1}{l^3} (l+2a)(l-a)^2, \quad 1$$

$$H = \frac{15 a^2 (l-a)^2}{4 f l^3 (1+6\varepsilon)}, \quad 2$$

$$M = \frac{a(l-a)^2(5a-2l-12\varepsilon l)}{(l+6\varepsilon)2l^3} = H \frac{2f}{3} - \frac{a}{l^2} (l-a)^2. \quad 3$$

Dies sind bereits die Gleichungen der Einflußlinien von V , H , M , wobei die Ordinaten b für beliebige Abszissen a zur Unterscheidung wie jene Größen selbst bezeichnet wurden. Setzt man $\frac{a}{l} = \mu$ und das Pfeilverhältnis $\frac{f}{l} = \varphi$, so folgen:

$$V = (1+2\mu)(1-\mu)^2, \quad 4$$

$$H = \frac{15 \mu^2 (1-\mu)^2}{4 \varphi (1+6\varepsilon)}, \quad 5$$

$$M = \frac{\mu(1-\mu)^2(5\mu-2-12\varepsilon)}{1+6\varepsilon} \frac{l}{2} = H \frac{2f}{3} - l\mu(1-\mu)^2. \quad 6$$

Bezüglich des Verlaufes der Linien s. beispielsweise Fig. 132, S. 154.

Die obigen Beziehungen genügen gewöhnlich zur Verzeichnung der Einflußlinien, doch können diese natürlich auch genauer untersucht werden. So hat die Einflußlinie von V nach 1) für $a=0$, $\frac{l}{2}$, l die Ordinaten $V=1$, $\frac{1}{2}$, 0 , sowie nach

$$\frac{dV}{da} = -\frac{6a}{l^3} (l-a), \quad \frac{d^2V}{da^2} = -\frac{6}{l^3} (l-2a)$$

bei $a=0$ und l horizontale Tangenten und bei $a=\frac{l}{2}$ einen Wendepunkt. Gleichung 2) läßt erkennen, daß die Einflußlinie von H bei $a=0$ und l die Ordinaten 0 und bei $\frac{l}{2}$ ein Maximum besitzt. Aus 3) ersehen wir ohne weiteres, daß die Einflußlinie von M nicht nur bei 0 und l , sondern auch bei

$$a = \frac{1+6\varepsilon}{5} 2l$$

die Abszissenachse durchschneidet, usw.

Beispiel 43. Kämpferdrucklinie und Umhüllungslinien der Kämpferdrücke eines parabolischen Bogens ohne Gelenke.

Für den im vorigen Beispiel betrachteten Bogen die Schnittlinie S und die Umhüllungslinien U , U' der Kämpferdrücke zu bestimmen.

Nach § 21, 39) hat man als Gleichung der Kämpferdrucklinie S :

$$b = \frac{3+8\varepsilon}{5} 2f, \quad 1$$

wonach in unserm Falle:

$$b = \frac{3+8 \cdot 0,00259}{5} 2 \cdot 4,502 = 5,440 \text{ m.}$$

Die Kämpferdrucklinie ist eine in der Höhe 5,440 m über den Achspunkten der Auflager liegende Gerade. Bei Vernachlässigung von ε hätten wir $b=5,402$ m erhalten. Vergl. S. 146.

Die Gleichung der Umhüllungslinie U ist nach § 21, 43) (u Abszisse, v Ordinate):

$$v = \frac{2f}{3} - \frac{1+6\varepsilon}{15u} \frac{4f}{l} \left(\frac{l}{2} - u\right)^2, \quad 2$$

und im vorliegenden Falle mit $l=23,758$ m, $f=4,502$ m, $\varepsilon=0,00259$:

$$v = 1,0013 - \frac{(11,879 - u)^2}{19,4868 u},$$

wonach beispielsweise:

für $u =$	0	0,629	2,879	5,129	7,379	9,629	11,879 m:
$v = -\infty$		9,324	-0,468	0,545	0,860	0,974	1,001 m,
$-\infty$		9,166	-0,420	0,552	0,863	0,975	1,001 m.

Die Werte der letzten Zeile hätten sich bei Vernachlässigung von ε ergeben.

Da die Linie nur bis $u = \frac{l}{4}$ gebraucht wird (S. 147), so genügt ihre Verzeichnung bis $u = \frac{l}{2} = 11,879$ m. Die Umhüllungslinie U' liegt bezüglich der Trägermitte symmetrisch zur Umhüllungslinie U und wird nur im letzten Viertel der Spannweite gebraucht.

Bemerkungen. Die oben nach Beispiel 42 angenommenen Verhältnisse entsprechen dem Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe (§ 31, Beispiele 63 bis 67), welches in Wirklichkeit nicht parabolisch ist und dessen Linien S, U, U' mit der den Resultaten des Beispiels 63 entsprechenden Annäherung im Beispiel 1 ermittelt wurden (S. 12).

Für den im nächsten Beispiel behandelten Bogen entsprechend der Pruthbrücke bei Jaremcze hätten wir mit $l = 67,62$ m, $f = 18,1215$ m, $\varepsilon = 0,00102$ in gleicher Weise wie oben erhalten die Gleichung der Kämpferdrucklinie:

$$b = 21,805 \text{ m,}$$

und für die Umhüllungslinie U der Kämpferbrücke:

bei	$u = 0$	1,81	3,81	7,81	13,81	21,81	33,81 m
	$v = -\infty$	-28,597	-4,904	5,858	9,998	11,606	12,081 m .

Beispiel 44. Berechnung eines Bogens ohne Gelenke (entsprechend dem Gewölbe der Pruthbrücke bei Jaremcze).

Für das Gewölbe der Pruthbrücke bei Jaremcze (Fig. 164, vergl. Beispiel 22) beträgt die Spannweite der Bogenachse $l = 67,62$ m, der Pfeil der letzteren $f = 18,1215$ m, die Lagerfugen können als senkrecht der Bogenachse gelten (als Querschnitte). Es sollen für die bei der ursprünglichen Berechnung angenommenen, in Kolonne 4 und 8 der folgenden Tabelle eingetragenen Lasten, jedoch unter der Voraussetzung, daß es sich um einen parabolischen Bogen von konstantem $J \cos \varphi$ handelte (siehe hierzu Beispiel 45), die Kämpferreaktionen und die Beanspruchungen σ_o, σ_u in den obersten und untersten Querschnittelementen berechnet werden: a) für die feste Last allein; b) für Verkehrsbelastung des ganzen Bogens; c) für Verkehrsbelastung der ersten Bogenhälfte; d) für Verkehrsbelastung der zweiten Bogenhälfte.

Die Normalspannungen im obersten und untersten Element der Lagerfuge x von der Höhe h und der Breite b sind unter Voraussetzung genügender Widerstandsfähigkeit der Fuge (eventuell auch gegen Zug) nach § 8, 18) 19):

$$\sigma_o = \frac{1}{b h} \left(N_x + \frac{6}{h} M_x \right), \quad \sigma_u = \frac{1}{b h} \left(N_x - \frac{6}{h} M_x \right), \quad 1$$

worin nach § 21, 6), 4) für beliebige Belastung, mit

$$V_x = V - \sum_0^x P, \quad 2$$

die Normalkraft und das Moment bei x :

$$N_x = (H + V_x \operatorname{tg} \varphi) \cos \varphi, \quad 3$$

$$M_x = M + V_x x - H y + \sum_0^x P a. \quad 4$$

Für parabolische Achse hat man nach § 19, 8):

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{4f}{l^2} (l-2x), \quad 5$$

und für beliebige Achse:
$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}. \quad 6$$

Die Gleichungen 5 liefern mit den gegebenen l, f für beliebige x :

$$y = \frac{x(67,62-x)}{63,0807}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{33,81-x}{31,5403}.$$

Bezüglich der entsprechenden Ermittlungen bei kreisförmiger Achse s. Beispiel 22, S. 91.

Da die Berechnung für alle Lagerfugen im wesentlichen gleich ist, so zeigen wir dieselbe wie in Beispiel 22 nur für die Kämpferfuge, die Scheitelfuge

II. Besondere Bogenarten.

Pruthbrücke bei Jaremeze¹.

a	$1-a$	$a(1-a)$	Feste Last						Verkehrslast					
			P	P^a	$P^a(1-a)$	$P^{a^2}(1-a)^2$	P	P^a	$P(1-a)$	$P^a(1-a)$	$P^{a^2}(1-a)$	$P^a(1-a)^2$	$P^{a^2}(1-a)^2$	
2,1225	65,4975	139,02	114,8	243,66	15,959	2218620	27	3175,419	8996,149	143043,5	3029869	6642733	131093893	
3,7475	63,8725	239,36	388,1	1454,40	92896	22235587	27	101,182	1724,557	6462,7	24219	412789	1546912	
5,3725	62,2475	334,42	82,2	441,62	29496	9864052	27	232,807	1592,932	13735,2	118432	810342	6987234	
6,9975	60,6225	424,21	78,2	547,20	33173	14072318	27	364,432	1461,307	19724,0	266225	1067512	14408776	
8,6225	58,9975	508,71	290,5	2504,84	38568	22674899	27	179,977	428,602	8571,0	171399	408172	8162420	
10,2475	57,3725	587,92	65,6	672,24	39910	26414833	27	194,602	413,977	8951,2	193547	411733	8902684	
11,8725	55,7475	661,86	60,3	715,91	39910	26414833	27	253,852	399,352	9283,9	215827	411950	9576807	
13,4975	54,1225	730,52	224,7	3032,89	164148	119913397	18	283,852	384,727	9569,2	238010	409059	10174386	
15,1225	52,4975	793,89	52,4	792,42	41600	33025824	18	296,977	311,602	10282,1	339234	355992	11746888	
16,7475	50,8725	851,99	48,5	812,25	41322	35205381	18	296,977	311,602	10282,1	339234	355992	11746888	
18,3725	49,2475	904,80	147,7	2713,62	133639	120916567	18	179,977	428,602	8571,0	171399	408172	8162420	
19,9975	47,6225	952,33	101,9	2037,75	97042	92416008	9	194,602	413,977	8951,2	193547	411733	8902684	
21,6225	45,9975	994,58	90,9	1965,49	90407	89916994	9	209,227	399,352	9283,9	215827	411950	9576807	
23,2475	44,3725	1031,55	81,3	1890,02	83865	86510941	9	223,852	384,727	9569,2	238010	409059	10174386	
24,8725	42,7475	1063,24	74,3	1848,03	78999	83994897	9	238,477	374,102	9806,8	259856	403280	10685882	
26,4975	41,1225	1089,64	68,2	1807,13	74313	80974417	9	253,102	355,477	9996,9	281138	394853	11104257	
28,1225	39,4975	1110,77	64,0	1759,84	71089	78963529	9	267,727	340,852	10139,5	301625	384008	11423262	
29,7475	37,8725	1126,61	61,0	1814,60	68723	77424019	9	282,352	326,227	10234,6	321085	370979	11638480	
31,3725	36,2475	1137,17	58,7	1841,57	66752	75908372	9	296,977	311,602	10282,1	339234	355992	11746888	
32,9975	34,6225	1142,46	57,6	1900,66	65806	75180723	9							
Für das halbe Gewölbe			2216,9	30836,14	1475,487	1223009092	180	3175,419	8996,149	143043,5	3029869	6642733	131093893	

¹ Die Längen a , l sind in Metern, die Lasten P in Tonnen gegeben.

und eine Zwischenfuge der ersten Bogenhälfte. Nach vorstehenden Gleichungen ergeben sich:

für	$x = 0$	20,81	$33,81 \text{ m} = \frac{l}{2}$:
	$y = 0$	15,4424	18,1215 m
	$\text{tg } \varphi = 1,0720$	0,4122	0,
	$\cos \varphi = 0,6821$	0,9245	1,

während nach Beispiel 22:

	$h = 3,1$	2,24	2,1 m,
	$bh = 20,460$	11,088	9,975 qm.

Zur Ermittlung der Vertikalreaktionen V , V' und der statisch unbestimmten Größen H , M , M' haben die in § 21 gegebenen Formeln zu dienen. Der Mittelwert von h^2 sei 7. Dann setzen wir den Mittelwert γ :

$$\gamma = \frac{J}{F} = \frac{h^2}{12} = \frac{7}{12},$$

und erhalten mit

$$r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} = 40,6010 \text{ m}$$

nach § 19, 40) in jenen Gleichungen:

$$\varepsilon = \frac{15 \cdot 7}{8 \cdot 12} \left(\frac{22,4795}{40,601 \cdot 18,1215} \right)^2 = 0,00102,$$

$$1 + 6\varepsilon = 1,00612, \quad \frac{15}{(1 + 6\varepsilon) 2f l^3} = \frac{1}{751637}.$$

Die weitere Berechnung hat auf Grund der in der Tabelle S. 160 gegebenen Zahlen zu erfolgen. Die σ_o , σ_u drücken wir pro qcm aus.

a) Feste Last allein. Vertikalreaktionen der Kämpfer und Horizontal Schub nach § 21, 33) 34):

$$V = V' = 2216,9 \text{ t},$$

$$H = \frac{1223009092}{751637} = 1627,13 \text{ t},$$

Endmomente nach § 21, 35):

$$M = M' = 1627,13 \cdot 12,081 - \frac{1475487}{67,62} = -2162,19 \text{ mt}.$$

Für $\varepsilon = 0$ hätten sich anstatt der beiden letzten Werte 1637,09 und 2042,59 ergeben (vergl. S. 152, 156, 157, auch S. 144, 147, 149).

Wir erhalten nun entsprechend dem oben Gesagten für die Kämpferfuge mit $V_x = V$, $M_x = M$:

$$N_x = (1627,13 + 2216,9 \cdot 1,0720) 0,6821 = 2730,89 \text{ t},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{204,6} \left(2730,89 - \frac{6}{3,1} 2162,19 \right) = -7,106 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{204,6} \left(2730,89 + \frac{6}{3,1} 2162,19 \right) = 33,801 \text{ „},$$

für die Fuge $x = 20,81 \text{ m}$:

$$V_x = 2216,9 - (114,8 + \dots + 101,9) = 562,00 \text{ t},$$

$$N_x = (1627,13 + 562 \cdot 0,4122) 0,9245 = 1718,45 \text{ t},$$

$$M_x = -2162,19 - 562 \cdot 2081 - 1627,13 \cdot 15,4424 + (243,66 + \dots + 2037,75) = 375,04 \text{ mt},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{110,88} \left(1718,45 - \frac{6}{2,24} 375,04 \right) = 24,558 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{110,88} \left(1718,45 + \frac{6}{2,24} 375,04 \right) = 6,438 \text{ „},$$

und für die Scheitelfuge mit $V_x = 0$, $N_x = H$:

$$M_x = -2162,19 - 1627,13 \cdot 18,1215 + 30836,14 = -812,09 \text{ mt},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{99,75} \left(1627,13 - \frac{6}{2,1} 812,09 \right) = -6,949 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{99,75} \left(1627,13 + \frac{6}{2,1} 812,09 \right) = 39,573 \text{ „}.$$

b) Vollbelastung. Durch die Verkehrslast allein ergeben sich nach den unter a) angewandten Formeln die Kämpferreaktionen:

$$V = V' = 180 \text{ t},$$

$$H = \frac{131093893}{751637} = 174,41 \text{ t},$$

und die Endmomente:

$$M = M' = 174,41 \cdot 12,081 - \frac{143043,5}{67,62} = -8,36 \text{ mt.}$$

Damit folgen weiter für die Kämpferfuge wegen $V_x = V$, $M_x = M$:

$$N_x = (174,41 + 180 \cdot 1,0720) 0,6821 = 250,58 \text{ t},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{204,6} \left(250,58 - \frac{6}{3,1} 8,36 \right) = 1,146 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{204,6} \left(250,58 + \frac{6}{3,1} 8,36 \right) = 1,304 \text{ „},$$

für die Fuge $x = 20,81 \text{ m}$:

$$V_x = 180 - 108 = 72 \text{ t},$$

$$N_x = (174,41 + 72 \cdot 0,4122) 0,9245 = 188,68 \text{ t},$$

$$M_x = -8,36 + 72 \cdot 20,81 - 174,41 \cdot 15,4424 + (101,182 + \dots + 179,977) = 5,75 \text{ mt.}$$

$$\sigma_o = \frac{1}{110,88} \left(188,68 + \frac{6}{2,24} 5,75 \right) = 1,841 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{110,88} \left(188,68 - \frac{6}{2,24} 5,75 \right) = 1,563 \text{ „},$$

und für die Scheitelfuge mit $V_x = 0$, $N_x = H$:

$$M_x = -8,36 - 174,41 \cdot 18,1215 + 3175,419 = 6,49 \text{ mt.}$$

$$\sigma_o = \frac{1}{99,75} \left(174,41 + \frac{6}{2,1} 6,49 \right) = 1,934 \text{ kg.}$$

$$\sigma_u = \frac{1}{99,75} \left(174,41 - \frac{6}{2,1} 6,49 \right) = 1,563 \text{ „}.$$

Beim Zusammenwirken der festen Last und Verkehrslast erhalten wir:

$$V = V' = 2216,9 + 180 = 2396,9 \text{ t},$$

$$H = 1627,13 + 174,41 = 1801,54 \text{ t},$$

$$M = M' = -2162,19 - 8,36 = -2170,55 \text{ mt.}$$

und bei	$x =$	0	20,81	33,81 m :
	$\sigma_o =$	5,960	26,399	— 5,015 kg,
	$\sigma_u =$	35,105	8,001	14,136 „ .

c) Verkehrslast von 0 bis m . Die Verkehrslast allein erzeugt nach § 21, 8), 11), 12) den Horizontalschub und die Endmomente:

$$H = \frac{131093893}{2 \cdot 751637} = 87,21 \text{ t},$$

$$M = 87,21 \cdot 12,081 - \frac{6642733}{67,62^2} = -399,19 \text{ mt.}$$

$$M' = 87,21 \cdot 12,081 - \frac{3029869}{67,62^2} = 390,95 \text{ „}.$$

womit nach § 21, 2), 3) die Vertikalreaktionen der Kämpfer:

$$V' = \frac{1}{67,62} (-399,19 - 390,95 + 3175,419) = 35,27 \text{ t},$$

$$V = 180 - 35,27 = 144,73 \text{ t}.$$

Wir erhalten nun für die Kämpferfuge wegen $V_x = V$, $M_x = M$:

$$N_x = (87,21 + 144,73 \cdot 1,0720) 0,6821 = 165,31 \text{ t},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{204,6} \left(165,31 - \frac{6}{3,1} 399,19 \right) = -2,968 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{204,6} \left(165,31 + \frac{6}{3,1} 399,19 \right) = 4,584 \text{ „}.$$

für die Fuge $x = 20,81$ m:

$$\begin{aligned} V_x &= 144,73 - 108 = 36,73 \text{ t,} \\ N_x &= (87,21 + 36,73 \cdot 0,4122) 0,9245 = 94,62 \text{ t,} \\ M_x &= -399,19 + 36,73 \cdot 20,81 - 87,21 \cdot 15,4424 + (101,182 + \dots + 179,977) = 227,53 \text{ mt,} \\ \sigma_o &= \frac{1}{110,88} \left(94,62 + \frac{6}{2,24} 227,53 \right) = 6,350 \text{ kg,} \\ \sigma_u &= \frac{1}{110,88} \left(94,62 - \frac{6}{2,24} 227,53 \right) = -4,643 \text{ „,} \end{aligned}$$

und für die Scheitelfuge mit $N_x = H$:

$$\begin{aligned} V_x &= 144,73 - 180 = -35,27 \text{ t,} \\ M_x &= -399,19 - 35,28 \cdot 33,81 - 87,21 \cdot 18,1215 + 3175,419 = 3,37 \text{ mt,} \\ \sigma_o &= \frac{1}{99,75} \left(87,21 + \frac{6}{2,1} 3,37 \right) = 0,965 \text{ kg,} \\ \sigma_u &= \frac{1}{99,75} \left(87,21 - \frac{6}{2,1} 3,37 \right) = 0,784 \text{ „.} \end{aligned}$$

Beim Zusammenwirken der festen Last und Verkehrslast ergeben sich:

$$\begin{aligned} V &= 2216,9 + 144,73 = 2361,63 \text{ t,} \\ V' &= 2216,9 + 35,27 = 2252,17 \text{ „,} \\ H &= 1627,13 + 87,21 = 1714,34 \text{ „,} \\ M &= -2162,19 - 399,19 = -2561,38 \text{ mt,} \\ M' &= -2162,19 + 390,95 = -1771,24 \text{ „,} \end{aligned}$$

und bei

$x =$	0	20,81	33,81 m:
$\sigma_o =$	-10,074	30,908	-5,988 kg,
$\sigma_u =$	38,385	1,795	40,360 „.

d) Verkehrslast von m bis l . Mit Rücksicht auf die im vorigen Falle gefundenen Werte hat man, von der Verkehrslast allein herrührend:

$$H = 87,21 \text{ t,} \quad M = 390,95 \text{ mt,} \quad M' = -399,19 \text{ mt,} \quad V = 35,27 \text{ t,} \quad V' = 144,73 \text{ t.}$$

Damit folgen für die Kämpferfuge wegen $V_x = V$, $M_x = M$:

$$\begin{aligned} N_x &= (87,21 + 35,27 \cdot 1,0720) 0,6821 = 85,28 \text{ t,} \\ \sigma_o &= \frac{1}{204,6} \left(85,28 + \frac{6}{3,1} 390,95 \right) = 4,115 \text{ kg,} \\ \sigma_u &= \frac{1}{204,6} \left(85,28 - \frac{6}{3,1} 390,95 \right) = -3,282 \text{ „,} \end{aligned}$$

für die Fuge $x = 20,81$ m:

$$\begin{aligned} V_x &= 35,27 - 0 = 35,27 \text{ t,} \\ N_x &= (87,21 + 35,27 \cdot 0,4122) 0,9245 = 94,07 \text{ t,} \\ M_x &= 390,95 + 35,27 \cdot 20,81 - 87,21 \cdot 15,4424 = -221,81 \text{ mt,} \\ \sigma_o &= \frac{1}{110,88} \left(94,07 - \frac{6}{2,24} 221,81 \right) = -4,510 \text{ kg,} \\ \sigma_u &= \frac{1}{110,88} \left(94,07 + \frac{6}{2,24} 221,81 \right) = 6,207 \text{ „,} \end{aligned}$$

und für die Scheitelfuge mit $N_x = H$:

$$\begin{aligned} V_x &= 35,27 - 0 = 35,27 \text{ t,} \\ M_x &= 390,95 + 35,27 \cdot 33,81 - 87,21 \cdot 18,1215 = 3,05 \text{ mt,} \\ \sigma_o &= \frac{1}{99,75} \left(87,21 + \frac{6}{2,1} 3,05 \right) = 0,962 \text{ kg,} \\ \sigma_u &= \frac{1}{99,75} \left(87,21 - \frac{6}{2,1} 3,05 \right) = 0,787 \text{ „.} \end{aligned}$$

Beim Zusammenwirken der festen Last und Verkehrslast hat man direkt oder mit Rücksicht auf die unter c) berechneten Werte:

$$V = 2252,17 \text{ t,} \quad V' = 2361,62 \text{ t,} \quad H = 1714,34 \text{ t,} \quad M = -1771,24 \text{ mt,} \quad M' = -2561,38 \text{ mt,}$$

und bei	$x = 0$	20,81	33,81 m:
	$\sigma_o = - 2,991$	20,048	— 5,987 kg,
	$\sigma_u = 30,519$	12,645	40,360 „ .

Da die unter c) und d) verwendeten Verkehrslasten zusammen die Verkehrslast unter b) ausmachen, so müssen die von der Verkehrslast allein herrührenden $V, V', H, M, M', V_x, N_x, M_x, \sigma_o, \sigma_u$ in den Fällen c) und d) zusammen gleich den entsprechenden Werten unter b) sein (abgesehen vom Einfluß vernachlässigter Dezimalen), was zur Abkürzung der Rechnung oder, wie hier, zur Kontrolle dienen kann. Analoges gilt bezüglich der Verkehrslast für je zwei der unter e) zusammen betrachteten Belastungen, welche vereinigt die ganze Verkehrslast des Trägers ergeben würden.

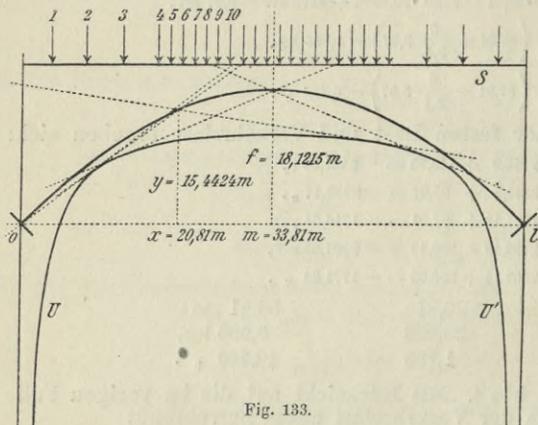


Fig. 133.

e) Grenzwerte (ungünstigste Belastungen). Die Grenzwerte der Reaktionen V, V', H treten in den Belastungsfällen b) und a) ein. Diejenigen der Normalspannungen σ_o, σ_u im Kämpferquerschnitt $x = 0$ entstehen nach dem auf S. 43 erwähnten einfacheren Verfahren, wenn einmal die 10 ersten, das andere Mal alle übrigen Verkehrslasten auf den Träger kommen (Fig. 133). Wir erhalten nach § 21, 8), 11), 12), 1) mit Rücksicht auf die Tabelle S. 160 und die daraus entnommenen Werte

$$\begin{aligned}
 &11\,423\,262 + 11\,638\,480 + 11\,746\,888 = 34\,808\,630 \\
 &384\,008 + 370\,979 + 335\,992 = 1\,110\,979 \\
 &301\,625 + 321\,085 + 339\,284 = 961\,994 \\
 &340,852 + 326,227 + 311,602 = 978,681
 \end{aligned}$$

für den ersten dieser Belastungsfälle:

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{131\,093\,893 - 34\,808\,630}{2 \cdot 751\,637} = 64,05 \text{ t,} \\
 M &= 64,05 \cdot 12,081 - \frac{6\,642\,733 - 1\,110\,979}{67,62^2} = -436,01 \text{ mt,} \\
 M' &= 64,05 \cdot 12,081 - \frac{3\,029\,869 - 961\,994}{67,62^2} = 321,54 \text{ „,} \\
 V &= \frac{1}{67,62} (321,54 + 436,01 + 8996,149 - 978,681) = 129,77 \text{ t,}
 \end{aligned}$$

womit nach den oben angeführten Gleichungen mit $V_x = V, M_x = M$:

$$\begin{aligned}
 N_x &= (64,05 + 129,77 \cdot 1,0720) \cdot 0,6821 = 138,58 \text{ t,} \\
 \sigma_o &= \frac{1}{204,60} \left(138,58 - \frac{6}{3,1} \cdot 436,01 \right) = -3,447 \text{ kg,} \\
 \sigma_u &= \frac{1}{204,60} \left(138,58 + \frac{6}{3,1} \cdot 436,01 \right) = 4,802 \text{ „.}
 \end{aligned}$$

Für den zweiten jener Belastungsfälle ergeben sich:

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{131\,093\,893 + 34\,808\,630}{2 \cdot 751\,637} = 110,36 \text{ t,} \\
 M &= 110,36 \cdot 12,081 - \frac{3\,029\,869 + 1\,110\,979}{67,62^2} = 427,65 \text{ mt,}
 \end{aligned}$$

$$M' = 110,36 \cdot 12,081 - \frac{6\,642\,733 + 961\,994}{67,62^2} = -329,90 \text{ mt},$$

$$V = \frac{1}{67,62} (-329,90 - 427,65 + 3175,419 + 978,681) = 50,23 \text{ t},$$

und nach den obigen Gleichungen weiter:

$$N_x = (110,36 + 50,23 \cdot 1,0720) 0,6821 = 112,00 \text{ t},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{204,60} \left(112,00 + \frac{6}{3,1} 427,65 \right) = 4,593 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{204,60} \left(112,00 - \frac{6}{3,1} 427,65 \right) = -3,498 \text{ „}.$$

Beim Zusammenwirken von fester Last und Verkehrslast entstehen die Grenzwerte der Momente und Normalspannungen:

$$M = M' = -2162,19 - 436,01 = -2598,20 \text{ mt},$$

$$M = M' = -2162,19 + 427,65 = -1734,54 \text{ „},$$

$$\sigma_o = -7,106 - 3,447 = -10,55 \text{ kg},$$

$$\sigma_o = -7,106 + 4,593 = -2,51 \text{ „},$$

$$\sigma_u = 33,801 + 4,802 = 38,60 \text{ „},$$

$$\sigma_u = 33,801 - 3,498 = 30,30 \text{ „}.$$

Verwenden wir jetzt im Kämpferquerschnitt $x = 0$ das genauere Verfahren zur Bestimmung der ungünstigsten Belastungen für σ_o , σ_u (Tangenten an U , U' durch den unteren bzw. oberen Kernpunkt anstatt durch den Achsenpunkt des Querschnitts, vergl. S. 42), dann ergeben sich für σ_u dieselben Belastungen wie oben und damit auch dieselben Grenzwerte, während für σ_o einmal die 9 ersten Verkehrslasten (oben 10), das andere Mal die übrigen Verkehrslasten wirkend anzunehmen sind. Wir erhalten, ganz wie oben vorgehend, jedoch mit den Tabellenwerten

$$10\,685\,882 + \dots + 11\,746\,888 = 45\,912\,887$$

$$394\,853 + \dots + 355\,992 = 1\,505\,832$$

$$281\,138 + \dots + 339\,284 = 339\,284$$

$$355,477 + \dots + 311,602 = 1\,334\,158,$$

für den ersten dieser Belastungsfälle: $H = 56,66 \text{ t}$, $M = -438,93 \text{ mt}$, $M' = 293,75 \text{ mt}$, $V = 124,15 \text{ t}$, $N_x = 129,43 \text{ t}$,

$$\sigma_o = \frac{1}{204,60} \left(129,43 - \frac{6}{3,1} 438,93 \right) = -3,520 \text{ kg};$$

und für den zweiten Fall: $H = 117,50 \text{ t}$, $M = 430,58 \text{ mt}$, $M' = -302,11 \text{ mt}$, $V = 55,85 \text{ t}$, $N_x = 121,15 \text{ t}$,

$$\sigma_o = \frac{1}{204,60} \left(121,15 + \frac{6}{3,1} 430,58 \right) = 4,665 \text{ kg}.$$

Beim Zusammenwirken von fester Last und Verkehrslast folgen die Grenzwerte:

$$\sigma_o = -7,106 - 3,520 = -10,63 \text{ kg}, \quad \sigma_o = -7,106 + 4,665 = -2,44 \text{ kg},$$

gegen beim einfacheren Verfahren erhaltene $-10,55$ und $-2,51 \text{ kg}$.

Im Querschnitt $x = 20,81 \text{ m}$ ergeben sich die Grenzwerte von σ_o , σ_u nach dem einfacheren Verfahren, wenn einmal die 10 ersten Verkehrslasten, das andere Mal die übrigen Verkehrslasten auf den Träger kommen (Fig. 133). Die gleichen Belastungen lieferte das einfachere Verfahren für $x = 0$, so daß jetzt auch die gleichen H , M , M' V wie hierfür berechnet gelten. Damit erhalten wir nach den oben angeführten Gleichungen mit Rücksicht auf die Tabelle S. 160 im ersterwähnten Belastungsfall:

$$V_x = 129,77 - 108 = 21,77 \text{ t},$$

$$N_x = (64,05 + 21,77 \cdot 0,4122) 0,9245 = 67,51 \text{ t},$$

$$M_x = -436,01 + 21,77 \cdot 20,81 - 64,05 \cdot 15,4424 + (101,182 + \dots + 179,977) = 237,04 \text{ mt},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{110,88} \left(67,51 + \frac{6}{2,24} 237,04 \right) = 6,334 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{110,88} \left(67,51 - \frac{6}{2,24} 237,04 \right) = -5,116 \text{ „};$$

und für den zweiten Fall:

$$V_x = V = 50,23 \text{ t}, \quad N_x = (110,36 + 50,23 \cdot 0,4122) 0,9245 = 121,17 \text{ t},$$

$$M_x = 427,65 + 50,23 \cdot 20,81 - 110,36 \cdot 15,4424 = - 231,29 \text{ mt},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{110,88} \left(121,17 - \frac{6}{2,24} 231,29 \right) = - 4,495 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{110,88} \left(121,17 + \frac{6}{2,24} 231,29 \right) = 6,680 \text{ „}.$$

Beim Zusammenwirken von fester Last und Verkehrslast entstehen die Grenzwerte:

$$\sigma_o = 24,588 + 6,334 = 30,92 \text{ kg},$$

$$\sigma_o = 24,588 - 4,495 = 20,09 \text{ „},$$

$$\sigma_u = 6,438 - 5,116 = 1,32 \text{ „},$$

$$\sigma_u = 6,438 + 6,680 = 13,12 \text{ „}.$$

Daß das einfachere Verfahren zur Bestimmung der ungünstigsten σ_o , σ_u im allgemeinen nicht vollständig genau ist, zeigt sich im vorliegenden Falle daran, daß wir danach die Grenzwerte von σ_o noch etwas günstiger erhielten als die Werte von σ_o in den Belastungsfällen c) und d) (30,92 und 20,09 kg gegen 30,91 und 20,05 kg). Verwenden wir nun bei $x = 20,81$ m das genauere Verfahren, so ergeben sich für σ_u dieselben Belastungen wie oben und damit auch dieselben Gegenwerte. Für σ_o sind einmal die 11 ersten Verkehrslasten (oben 10), das andere Mal alle übrigen Verkehrslasten wirkend anzunehmen. Man erhält dann wie in den zwei ersten Belastungsfällen unter e) vorgehend, jedoch mit den Tabellenwerten

$$116\,384\,480 + 11\,746\,888 = 23\,385\,368$$

$$370\,979 + 335\,992 = 726\,971$$

$$321\,085 + 329\,284 = 660\,369$$

$$326,227 + 311,802 = 637,829,$$

für den ersten der erwähnten Belastungsfälle: $H = 71,65$ t, $M = - 428,18$ mt, $M' = 347,39$ mt, $V = 135,08$ t, $N_x = 76,56$ t, $M_x = 238,01$ mt,

$$\sigma_o = \frac{1}{110,88} \left(76,56 + \frac{6}{2,24} 238,01 \right) = 6,440 \text{ kg},$$

und für den zweiten Fall: $H = 102,76$ t, $M = 419,82$ mt, $M' = - 355,75$ mt, $V = V_x = 44,92$ t, $N_x = 112,12$ t, $M_x = - 232,26$ mt,

$$\sigma_o = \frac{1}{110,88} \left(112,12 - \frac{6}{2,24} 232,26 \right) = - 4,600 \text{ kg}.$$

Beim Zusammenwirken von fester Last und Verkehrslast sind die Grenzwerte:

$$\sigma_o = 24,558 + 6,440 = 31,00 \text{ kg}, \quad \sigma_o = 24,558 - 4,600 = 19,96 \text{ kg},$$

während wir oben 30,92 und 20,09 kg erhalten haben.

Im Scheitelquerschnitt $x = 33,81$ m ergeben sich die Grenzwerte von σ_o , σ_u nach dem einfacheren Verfahren, wenn einmal die 10 mittleren Verkehrslasten, das andere Mal die übrigen Verkehrslasten auf den Träger kommen (Fig. 133). In beiden Fällen haben wir zur Trägermitte symmetrische Belastungen. Man erhält nach § 21, 34), 35) mit Rücksicht auf die Tabelle S. 160 und die daraus entnommenen Werte

$$10\,685\,882 + \dots + 11\,746\,888 = 56\,598\,769$$

$$9\,806,8 + \dots + 10\,282,1 = 50\,459,9$$

für den ersten Fall:

$$H = \frac{56\,598\,769}{751\,637} = 75,30 \text{ t},$$

$$M = M' = 75,30 \cdot 12,081 - \frac{50\,459,9}{67,62} = 163,47 \text{ mt},$$

womit nach den oben angeführten Gleichungen bei Beachtung von $V_x = 0$, $N_x = H$:

$$M_x = 163,47 - 75,30 \cdot 18,1215 + (238,477 + \dots + 296,977) = 137,56 \text{ mt},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{99,75} \left(75,30 + \frac{6}{2,1} 137,56 \right) = 4,695 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{99,75} \left(75,30 - \frac{6}{2,1} 137,56 \right) = -3,185 \text{ „}.$$

Für den zweiten Belastungsfall folgen:

$$H = \frac{131093893 - 56598769}{751637} = 99,11 \text{ t},$$

$$M = M' = 99,11 \cdot 12,081 - \frac{143043,5 - 50459,9}{67,62} = -171,83 \text{ mt},$$

und nach den obigen Gleichungen weiter:

$$M_x = -171,83 - 99,10 \cdot 18,1215 + (101,182 + \dots + 223,852) = -131,07 \text{ mt},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{99,75} \left(99,11 - \frac{6}{2,1} 131,07 \right) = -2,761 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{99,75} \left(99,11 + \frac{6}{2,1} 131,07 \right) = 4,748 \text{ „}.$$

Beim Zusammenwirken von fester Last und Verkehrslast erhalten wir die Grenzwerte:

$$\sigma_o = -6,949 + 4,695 = -2,25 \text{ kg},$$

$$\sigma_o = -6,949 - 2,761 = -9,71 \text{ „},$$

$$\sigma_u = 39,573 - 3,185 = 36,39 \text{ „},$$

$$\sigma_u = 39,573 + 4,748 = 44,32 \text{ „}.$$

Wenden wir nun auch auf den Scheitelquerschnitt $x = 33,81 \text{ m}$ das genauere Verfahren an, so ergeben sich wieder die Belastungen für die Grenzwerte von σ_u und damit diese selbst wie beim einfacheren Verfahren. Für σ_o sind einmal die 12 mittleren Verkehrslasten (oben 10), das andere Mal die übrigen Verkehrslasten wirkend anzunehmen. Wir erhalten wie beim einfacheren Verfahren vorgehend, jedoch mit den Tabellenwerten

$$10 \cdot 174 \cdot 356 + \dots + 11 \cdot 746 \cdot 888 = 66 \cdot 743 \cdot 125$$

$$9 \cdot 569,2 + \dots + 10 \cdot 282,1 = 60 \cdot 029,1,$$

im ersten der erwähnten Belastungsfälle: $H = 88,84 \text{ t}$, $M = M' = 185,53 \text{ mt}$, $M_x = 138,10 \text{ mt}$,

$$\sigma_o = \frac{1}{99,75} \left(88,84 + \frac{6}{2,1} 138,10 \right) = 4,846 \text{ kg},$$

und im zweiten Fall: $H = 85,57 \text{ t}$, $M = M' = -193,89 \text{ mt}$, $M_x = -131,61 \text{ mt}$,

$$\sigma_o = \frac{1}{99,75} \left(85,57 - \frac{6}{2,1} 131,61 \right) = -2,912 \text{ kg}.$$

Beim Zusammenwirken von fester Last und Verkehrslast entstehen die Grenzwerte:

$$\sigma_o = -6,949 + 4,846 = -2,10 \text{ kg}, \quad \sigma_o = -6,949 - 2,912 = -9,86 \text{ kg},$$

gegen oben erhaltene $-2,254$ und $-9,710 \text{ kg}$.

Bemerkungen.

Es haben sich die in der folgenden Tabelle angeführten Gesamtwerte ergeben, wobei wie oben die Kämpferreaktionen V , V' , H in Tonnen, die Kämpfermomente M , M' in Metertonnen, die Normalspannungen σ_o , σ_u in Kilogramm pro Quadratcentimeter ausgedrückt sind. Die für σ_o , σ_u in den beiden letzten Kolonnen unterstrichenen Zahlen entsprechen der genaueren Bestimmung der ungünstigsten Belastungen, die darunter stehenden Zahlen dem einfacheren Verfahren (S. 43). Man sieht, daß das letztere vollständig genügt hätte, wie es sich schon für das Gewölbe mit drei Gelenken des Beispiels 22 und den Eisenbogen mit zwei Gelenken der Tabelle S. 44, 45 ergeben hat.

Größen	a)	b)	c)	d)	e)		
	feste Last allein	Vollbelastung	Verkehrslast von 0 bis m	Verkehrslast von m bis l	Grenzwerte (ungünstigste Belastungen)		
$V =$	2216,90	2396,90	2361,63	2252,17	<u>2396,90</u>	<u>2216,90</u>	
$V' =$	2216,90	2396,90	2252,17	2361,63	<u>2396,90</u>	<u>2216,90</u>	
$H =$	1627,13	1801,54	1714,34	1714,34	<u>1801,54</u>	<u>1627,13</u>	
$M =$	- 2162,92	- 2170,55	- 2561,38	- 1771,24	- <u>2598,20</u>	- <u>1734,54</u>	
$M' =$	- 2162,92	- 2170,55	- 1771,24	- 2561,38	- <u>2598,20</u>	- <u>1734,54</u>	
$x = 0$	$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_o = \\ \sigma_u = \end{array} \right.$	$- 7,11$	$- 5,96$	$- 10,07$	$- 2,99$	<u>- 10,63</u>	<u>- 2,44</u>
		$33,80$	$35,10$	$38,38$	$30,52$	<u>- 10,55</u>	<u>- 2,51</u>
$x =$ 20,81 m	$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_o = \\ \sigma_u = \end{array} \right.$	$24,56$	$26,40$	$30,91$	$20,05$	<u>38,60</u>	<u>30,30</u>
		$6,44$	$8,00$	$1,79$	$12,64$	<u>38,60</u>	<u>30,30</u>
$x = m =$ 33,81 m	$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_o = \\ \sigma_u = \end{array} \right.$	$24,56$	$26,40$	$30,91$	$20,05$	<u>31,00</u>	<u>19,96</u>
		$6,44$	$8,00$	$1,79$	$12,64$	<u>30,89</u>	<u>20,06</u>
$x = m =$ 33,81 m	$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_o = \\ \sigma_u = \end{array} \right.$	$- 6,95$	$- 5,01$	$- 5,99$	$- 5,99$	<u>13,12</u>	<u>1,32</u>
		$39,57$	$41,14$	$40,36$	$40,36$	<u>13,12</u>	<u>1,32</u>
					<u>- 9,86</u>	<u>- 2,10</u>	
					<u>- 9,71</u>	<u>- 2,25</u>	
					<u>44,32</u>	<u>36,39</u>	
					<u>44,32</u>	<u>36,39</u>	

Werden die ungünstigsten Belastungen wie unter e) bestimmt, so brauchen die Belastungsfälle c) und d) natürlich nicht behandelt zu werden. Sie wurden hier, wie schon in Beispiel 22, berücksichtigt, weil für Gewölbe häufig nur einige im voraus gewählte Belastungsfälle in Betracht gezogen wurden, und um die hierbei entstehenden Abweichungen beurteilen zu lassen. Im vorliegenden Falle hätten wir, soweit die Berechnung reicht, mittels der Belastungsfälle a) bis d) die Beanspruchungen 41,14 und $- 10,07$ kg anstatt der genaueren Grenzbeanspruchungen des Bogens 44,32 und $- 10,63$ kg, im Scheitel aber nur die Zugbeanspruchung $- 6,95$ anstatt $- 9,86$ kg erhalten. Doch wurden oft noch weniger Belastungsfälle als oben berücksichtigt, und ist zu beachten, daß hier das Verhältnis des Eigengewichts zur Verkehrslast größer als in vielen anderen Fällen war ($g : p = 12,3 : 1$), bei kleinerem Werte dieses Verhältnisses aber größere Abweichungen entstehen können.

Das am Schlusse des Beispiels 22 bezüglich der Stützlinie, des Winkels δ der resultierenden Schnittkraft gegen die Normale zum Querschnitt und die größten Quer- und Längsschubspannungen τ Gesagte läßt sich in analoger Weise auf das vorliegende Beispiel anwenden.

Beispiel 45. Anwendung der Formeln für parabolische Bogen bei andern Bogen (Pruthbrücke bei Jaremcze).

Es ist die Frage gestellt, ob die kreisförmigen Bogen der Pruthbrücke bei Jaremcze als parabolische Bogen hätten berechnet werden dürfen.

Verwenden wir die im vorigen Beispiel für den Parabelbogen von gleichen l, f wie die Pruthbrücke gefundenen M, H , indem wir der Berechnung im übrigen die in Beispiel 22 ermittelte kreisförmige Achse zugrunde legen, so ergeben sich für den Belastungsfall a) die V_x wie im vorigen Beispiel und in der Lagerfuge $x = 20,81$ m mit $V_x = 562$ t:

$$N_x = 592 \cdot 0,3202 + 1627,13 \cdot 0,9474 = 1721,50 \text{ t,}$$

$$M_x = - 2162,19 + 562 \cdot 20,81 - 1627,13 \cdot 15,9840 + (243,66 + \dots + 2037,75) = - 506,22 \text{ mt,}$$

$$\sigma_o = \frac{1}{110,88} \left(1721,50 - \frac{6}{2,24} 506,22 \right) = 3,297 \text{ kg,}$$

$$\sigma_u = \frac{1}{110,88} \left(1721,50 + \frac{6}{2,24} 506,22 \right) = 27,755 \text{ ,,}$$

während für den parabolischen Bogen erhalten wurden: $N_x = 1718,45 \text{ t}$, $M_x = 375,04 \text{ mt}$, $\sigma_o = 24,558 \text{ kg}$, $\sigma_u = 6,438 \text{ kg}$. Die Abweichung von N_x beträgt hier nach nur $0,18\%$, dagegen ist infolge des um $15,9840 - 15,4424 = 0,5416 \text{ m}$ größeren y eine Änderung des Moments um $-1627,73 \cdot 0,5416 = -881,26 \text{ mt}$ eingetreten, der Angriffspunkt von N_x liegt zufolge § 8, 1) im ersten Falle um

$$\frac{375,04}{1718,75} = 0,218 \text{ m oberhalb,}$$

im zweiten um

$$\frac{506,22}{1721,50} = 0,294 \text{ m unterhalb}$$

der Bogenachse, wodurch sich die Verteilung von N_x auf die Fuge vollständig geändert hat.

Nun sind aber auch die verwendeten M , H für den Kreisbogen nicht genau, und da eine Verkleinerung von H um

$$\frac{881,26 \cdot 100}{1627,13 \cdot 15,984} = 3,39\%$$

die ganze Änderung wieder rückgängig gemacht hätte, so erkennt man, daß die Berechnung stets auf Grund der wirklichen Achsform durchzuführen ist, was nach den in §§ 49, 50 gegebenen Formeln für beliebige Querschnitte und beliebige Achse keine Schwierigkeiten bietet (Beispiele 63—67, und 1, 98, 99). Selbst für sehr flache Bogen sollten höchstens die statisch unbestimmten Größen H , M , M' nach den Formeln für Parabelbogen berechnet, für y , φ aber die der wirklichen Achse entsprechenden Werte angeführt werden. Für Gewölbe kommt dabei besonders in Betracht, daß man die Druckverteilung behufs Vermeidung größerer Zugspannungen genügend genau kennen muß. Nachdem die Achsverhältnisse und Größen H , M , M' bekannt sind, kann die übrige Berechnung natürlich ganz wie im letzten Beispiel durchgeführt werden. Die für Parabelbogen gültigen Schnittlinien und Umhüllungslinien der Kämpferdrücke lassen sich häufig auch bei etwas anderer Achsform verwenden, da die Lasten in der Nähe der Belastungsgrenzen nur wenig beitragen, kleine Änderungen der letzteren also ohne wesentlichen Einfluß sind. Bezüglich der Ermittlung jener Linien für Bogen von beliebiger Achsform und beliebigen Querschnitten s. Beispiel 1.

Beispiel 46. Einfluß von Temperaturänderungen (Koblenzer Brücke).

Den Einfluß von Temperaturänderungen bis $\tau = \pm 30^\circ$ auf die in Beispiel 30 betrachteten Bogen der Koblenzer Brücke unter der Annahme zu ermitteln, daß bei gleichen Dimensionen und parabolischer Achse anstatt der Kämpfergelenke festgespannte Enden angeordnet wären.

Unter den erwähnten Voraussetzungen hat man nach § 21, 16):

$$M = M' = \frac{Ec}{1 + 6\varepsilon} \frac{15}{2f} \alpha \tau = H \frac{2f}{3}. \quad 1$$

Im vorliegenden Falle ergeben sich mit $l = 98,0775 \text{ m}$, $f = 8,91614 \text{ m}$, $c = 0,36497 \text{ m}^4$, $\varepsilon = 0,04563$, $E = 2000000 \text{ kg pro qcm}$, $\alpha = 0,000012$ (Beispiel 30):

$$M = \frac{2000000 \cdot 100^2 \cdot 0,36497 \cdot 15 \cdot 0,000012}{1,27378 \cdot 2 \cdot 8,91614} \tau = \frac{1313892}{22,7144} \tau = 57844,01 \tau \text{ mkg,}$$

$$H = \frac{57844,01 \cdot 3}{8,91614 \cdot 2} \tau = 9731,33 \tau \text{ kg,}$$

und für $\tau = \pm 30^\circ$:

$$M = \pm 1735320 \text{ mkg,}$$

$$H = \pm 291940 \text{ kg.}$$

Bei Vernachlässigung von ε hätten sich M , H 1,27378 mal so groß wie hier, das heißt um $27,38\%$ zu groß ergeben.

Nach § 21, 1), 2), 16) ist die Temperaturänderung auf die Vertikalreaktionen

der Kämpfer ohne Einfluß, wogegen nach § 21, 4), 6) und § 1, 10) allgemein und speziell für $\tau = 30^0$ mit vorstehendem M, H :

$$M_x = M - Hy = 1735320 - 291940 y \text{ mkg,}$$

$$N_x = H \cos \varphi = 291940 \cos \varphi \text{ kg,}$$

$$T_x = -H \sin \varphi = -291940 \sin \varphi \text{ kg.}$$

Das Moment M_x ändert sich also von $M = 1735320$ mkg an den Kämpfern bis $1735320 - 191940 \cdot f = -867658$ mkg im Scheitel, während auf der gleichen Strecke N_x von $291940 \cos \varphi_0$ bis 291940 kg wächst und T_x von $-291940 \sin \varphi_0$ numerisch bis 0 abnimmt.

Für die Beanspruchungen des Obergurts und Untergurts durch Temperaturänderungen gelten wie in Beispiel 30:

$$O = \frac{N_x}{2} + \frac{M_x}{h}, \quad U = \frac{N_x}{2} - \frac{M_x}{h}, \quad 2$$

also in unserm Falle für $\tau = 30^0$ mit obigen Ausdrücken von N_x, M_x und $h = 2,97214$ m:

$$O = 145970 \cos \varphi + 583862 - 98226 y \text{ kg,}$$

$$U = 145970 \cos \varphi - 583862 + 98226 y \text{ „}$$

Man erhält z. B. im Scheitel mit $\varphi = 0, y = f = 8,91614$ m:

$$O = -145965 \text{ kg,} \quad U = 437605 \text{ kg,}$$

und, weil die Gurtungsquerschnitte daselbst $f_o = f_u = 768,13$ qcm sind, pro qcm:

$$\text{im Obergurt} \quad -\frac{145965}{768,13} = -190,0 \text{ kg (Zug),}$$

$$\text{im Untergurt} \quad \frac{437605}{768,13} = 569,7 \text{ „ (Druck).}$$

Bei $x = 0$ hat man $y = 0$ und nach § 19, 8):

$$\text{tg } \varphi_0 = \frac{4f}{l} = \frac{4}{11}, \quad \varphi_0 = 19^0 58' 59''$$

$$\cos \varphi_0 = 0,93971, \quad \sin \varphi_0 = 0,34193,$$

womit die ganzen Beanspruchungen des Obergurts und Untergurts an den Kämpfern:

$$O = 721031 \text{ kg,} \quad U = -446693 \text{ kg,}$$

und wegen $f_o = f_u = 800,624$ qcm pro qcm:

$$\text{im Obergurt} \quad \frac{721031}{800,624} = 900,6 \text{ kg (Druck),}$$

$$\text{im Untergurt} \quad -\frac{446693}{800,624} = -557,9 \text{ „ (Zug).}$$

Für $\tau = -30^0$ wechseln alle Beanspruchungen ihr Vorzeichen.

Da bei der Berechnung der Koblenzer Brücke die höchste zugelassene Beanspruchung pro qcm (für Zusammenwirken von Lasten und Temperaturänderungen) nicht über 783 kg betrug, so würden die jetzigen Querschnitte der Koblenzer Brücke bei eingespannten Enden nicht einmal überall zur Übertragung der von den Temperaturänderungen bis $\tau = \pm 30^0$ allein (ohne jede Belastung) herrührenden Beanspruchungen mit der vorgeschrieben gewesenen Sicherheit genügen.

Aufgabe 21. Stützlinie für Temperaturänderungen bei Bogen mit zwei Gelenken und ohne Gelenke.

Es sind die dem Einflusse der Temperaturänderungen allein entsprechenden Stützlinien zu ermitteln: a) für den symmetrischen Bogen mit Kämpfergelenken; b) für den symmetrischen Bogen ohne Gelenke.

Die Stützlinie ist die Verbindungslinie der Angriffspunkte der resultierenden Schnittkräfte R_{x_i} , und damit auch der Normalkräfte N_x und Transversalkräfte T_x in allen Querschnitten. Man hat nach § 8, 1) für die Entfernung dieses

Angriffspunktes vom Achspunkte im Querschnitt x , gemessen in der Querschnittsebene:

$$c = \frac{M_x}{N_x}, \quad 1$$

wobei die c nach oben positiv, nach unten negativ gerechnet werden.

a) Bogen mit zwei Gelenken. Für diesen Fall hat man (vergl. Beispiel 30) von der Temperaturänderung allein herrührend:

$$M_x = -Hy, \quad N_x = H \cos \varphi, \quad 2$$

so daß nach 1:

$$c = -\frac{y}{\cos \varphi}. \quad 3$$

Dieses Resultat war vorauszusehen, da durch Temperaturänderung bei Bogen mit zwei Gelenken nur ein in den letzteren angreifender Horizontalschub, keine

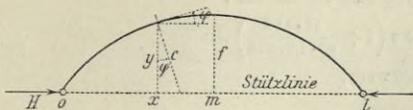


Fig. 134.

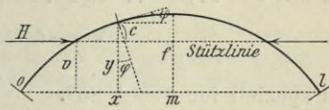


Fig. 135.

Vertikalreaktionen und keine Endmomente entstehen, so daß nach § 1, 11), 12) mit $V_x = 0$ für den Richtungswinkel und die Größe der resultierenden Schnittkraft bei x :

$$\operatorname{tg} \psi = 0, \quad R_x = H. \quad 4$$

Die Stützlinie ist nach 3 die horizontale Verbindungsgerade der Gelenkpunkte (Fig. 134).

b) Bogen ohne Gelenke. Für solche sind die Momente und Normalkräfte durch die Temperaturänderung ausgedrückt (vergl. Beispiel 46):

$$M_x = M - Hy, \quad N_x = H \cos \varphi, \quad 5$$

wonach Gleichung 1 mit der Bezeichnung $v = \frac{M}{H}$ für die Stützlinien liefert:

$$c = \frac{v - y}{\cos \varphi}. \quad 6$$

Die Stützlinie ist hier eine in der Höhe v über den Achspunkten der Endquerschnitte hinlaufende Gerade (Fig. 135). Für Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ hat man nach § 21, 16) $v = \frac{2}{3} f$, für symmetrische Bogen von beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten nach § 49, 37) $v = B : A$. Die Gleichungen 4 gelten auch für Bogen ohne Gelenke.

Beispiel 47. Einsenkungen parabolischer Bogen (Koblener Brücke).

Die in Beispiel 34 (S. 132) verlangten Einsenkungen für den Fall zu berechnen, daß anstatt der Kämpfergelenke festgespannte Enden angeordnet wären.

Eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit erzeugt nach § 21, 52) die Einsenkung:

$$e = \frac{\varepsilon}{1 + 6\varepsilon} \frac{u l^4}{64 E c} \quad 1$$

also im vorliegenden Falle mit $l = 98,0775$ m, $c = 0,36497$ m⁴, $\varepsilon = 0,04563$, $E = 2000000$ kg pro qcm:

$$e = \frac{0,04563}{1,27378} \frac{u \cdot 98,0775^4}{64 \cdot 2000000 \cdot 100^2 \cdot 0,36497} = 0,0000070075 u \text{ m} = 0,00070075 u \text{ cm},$$

beispielsweise für die feste Last von $u = 3983$ kg:

$$e = 2,791 \text{ cm}, \quad a$$

und für Vollbelastung des ganzen Bogens mit $u = 7169$ kg:

$$e = 5,024 \text{ cm}, \quad b$$

während sich für den gleichen Bogen bei Anwendung von Kämpfergelenken 2,869 und 5,164 cm ergeben haben.

Durch Belastung der ersten Trägerhälfte mit u , der zweiten mit u' entsteht nach § 21, 53):

$$e = \frac{\varepsilon}{1 + 6\varepsilon} \frac{u + u'}{128} \frac{l^4}{Ec}, \quad 2$$

wonach in unserm Falle:

$$e = 0,000\,700\,75 \frac{3983 + 7169}{2} = 3,906 \text{ cm}, \quad c$$

wie auch aus a und b zu entnehmen war (Mittel).

Eine Temperaturänderung τ liefert nach § 21, 55):

$$e = -\alpha \tau \left(f + \frac{15}{64f} \frac{l^2}{1 + 6\varepsilon} \right) \quad 3$$

und mit $l = 11f = 11 \cdot 8,91614 \text{ m}$, $\alpha = 0,000\,012$ in Meter:

$$e = -0,000\,012 \cdot 8,91614 \tau \left(1 + \frac{15 \cdot 11^2}{63 \cdot 1,273\,78} \right), \quad d$$

$$e = -0,2489 \tau \text{ cm},$$

und speziell für $\tau = \pm 30^\circ$:

$$e = \mp 7,467 \text{ cm},$$

gegen $\mp 7,575 \text{ cm}$ bei zwei Gelenken.

Eine Änderung der Spannweite um Δl ohne sonstige Bewegung der Bogenenden hätte nach § 21, 57) zur Folge:

$$e = \frac{15l}{64f} \frac{\Delta l}{1 + 6\varepsilon}, \quad 4$$

also mit den jetzt geltenden Zahlen:

$$e = \frac{15 \cdot 11}{64} \frac{\Delta l}{1,273\,78} = 2,0240 \Delta l, \quad e$$

und beispielsweise für $\Delta l = 2 \text{ cm}$:

$$e = 4,048 \text{ cm},$$

gegen 4,109 cm bei zwei Gelenken.

Während also für gleiche Dimensionen und Einwirkungen die Beanspruchungen ohne Gelenke bedeutend größer als bei zwei Gelenken werden können, (Beispiel 46), sind die Einsenkungen in der Mitte bei Bogen ohne Gelenke zwar etwas geringer, aber nicht so bedeutend, daß darin ein ausschlaggebender Grund für die Vermeidung von Kämpfergelenken läge (vergl. Beispiel 49).

Beispiel 48. Einsenkungen eines parabolischen Bogens ohne Gelenke (Verhältnisse des Wiener Bruchsteinversuchsgewölbes).

Für den in Beispiel 42 behandelten Bogen ohne Gelenke die Einsenkungen in der Mitte durch das Eigengewicht allein, durch die dort angenommenen Verkehrsbelastungen, durch eine Temperaturänderung τ und durch die in Beispiel 42 erwähnten Änderungen der Spannweite und Stützhöhen zu berechnen.

a) Für eine beliebige symmetrische Belastung hat man nach § 21, 50):

$$e = \frac{1}{24 Ec} \left[\sum_0^m P a^2 (3l - 4a) - H \frac{f l^2}{2} \right], \quad 1$$

woraus in unserm Falle mit Rücksicht auf die Tabelle I in Beispiel 42 (S. 153) und den dort berechneten Horizontalschub H für Eigengewicht allein:

$$e = \frac{1}{24 \cdot 0,035\,78 E} (3 \cdot 23,758 \cdot 897\,048 - 4 \cdot 7\,712\,459 - 25\,582 \cdot 2,251 \cdot 23,758^2) = \frac{234\,870}{E},$$

und mit $E = 175\,000 \text{ pro qcm}$ (Bruchsteingewölbe):

$$e = \frac{234\,870}{175\,000 \cdot 100^2} \text{ m} = 0,013 \text{ cm}.$$

b) Gleichung 1 läßt sich auch schreiben:

$$e = \frac{1}{24 Ec} \left[4 \cdot \sum_0^m P a^2 (l - a) - l \sum_0^m P a^2 - H \frac{f l^2}{2} \right]. \quad 2$$

Für die in Beispiel 42 unter c) behandelte symmetrische Verkehrsbelastung hat man mit Rücksicht auf die dortige Tabelle II (S. 154):

$$\begin{aligned} \sum_0^m P a^2 (l-a) &= P \left(\frac{9,16}{2} + 173,07 + 490,07 + 891,84 + 1310,01 + \frac{1676,26}{2} \right) = 3707,70, \\ \sum_0^m P a^2 &= P \left(\frac{0,396}{2} + 8,289 + 26,307 + 54,450 + 92,718 + \frac{141,111}{2} \right) = 252,517, \end{aligned}$$

und mit dem dort berechneten H :

$$e = \frac{P}{24 \cdot 0,03578 E} (4 \cdot 3707,70 - 23,758 \cdot 252,517 - 6,8408 \cdot 2,251 \cdot 23,758^2) = 162,894 \frac{P}{E},$$

also beispielsweise für $P = 3430 \text{ kg}$, $E = 175000 \cdot 100^2 \text{ kg pro qm}$:

$$e = \frac{162,894 \cdot 3430}{175000 \cdot 100^2} \text{ m} = 0,032 \text{ cm}.$$

c) Da bei symmetrisch zur Trägermitte liegender Belastung die Belastungen beider Trägerhälften gleichviel zur Einsenkung in der Trägermitte beitragen, so liefert die in Beispiel 42, S. 154 unter c) erwähnte einseitige Belastung:

$$e = \frac{0,032}{2} = 0,016 \text{ cm}.$$

d) Die Einsenkung in der Trägermitte durch eine beliebige Temperaturänderung τ ist nach § 21, 55):

$$e = -\alpha \tau \left(f + \frac{15}{64f} \frac{l^2}{1+6\varepsilon} \right), \quad 3$$

also im vorliegenden Falle:

$$e = -\alpha \tau \left(4,502 + \frac{15 \cdot 23,758^2}{64 \cdot 4,502 \cdot 1,01554} \right) = -34,437 \alpha \tau,$$

und für $\alpha = 0,000118$:

$$e = -0,000406 \tau \text{ m} = -0,0406 \tau \text{ cm},$$

beispielsweise für $\tau = \pm 25^{\circ}$: $e = \mp 1,015 \text{ cm}$.

e) Durch die in Beispiel 42 angenommenen Änderungen Δl , Δk der Spannweite und Stützhöhen ergibt sich nach § 21, 57):

$$e = \frac{15l}{64f} \frac{\Delta l}{1+6\varepsilon} - \frac{\Delta k}{2},$$

also in unserm Falle:

$$e = \frac{15 \cdot 23,758}{64 \cdot 4,502} \frac{\Delta l}{1,01554} - \frac{\Delta k}{2} = 1,218 \Delta l - 0,5 \Delta k,$$

und beispielsweise für $\Delta l = 1 \text{ cm}$, $\Delta k = 0$: $e = 1,218 \text{ cm}$.

Bezüglich der Einsenkung von Bogen mit anderer Achsform und anderen Querschnitten unter sonst gleichen Verhältnissen s. Beispiel 99.

Aufgabe 22. Einflußlinien der Einsenkungen parabolischer Bogen mit drei Gelenken, zwei Gelenken und ohne Gelenk.

Die Gleichungen der Einflußlinien für die Einsenkungen e in der Mitte parabolischer Bogen vom Mittelwert c des Ausdrucks $J \cos \varphi$ und die Tangenten der Neigungswinkel dieser Linien für beliebige Abszissen a festzustellen.

Da die fraglichen drei Einflußlinien symmetrisch zur Vertikalen durch die Trägermitte sind, so genügt es, ihren Verlauf auf der ersten Trägerhälfte zu kennen. Nach § 19, 34), § 20, 56) und § 21, 50) hat man die Einsenkung in der Mitte durch eine beliebige symmetrische Belastung für Bogen mit drei Gelenken:

$$e = \frac{1}{6Ec} \left[\sum_0^m P a^3 (l-a) - \frac{3-32\varepsilon}{40} l^3 \sum_0^m P a \right], \quad 1$$

für Bogen mit zwei Gelenken (H nach § 20, 35):

$$e = \frac{1}{24Ec} \left[\sum_0^m P a (3l^2 - 4a^2) - \frac{5}{2} H f l^2 \right], \quad 2$$

für Bogen ohne Gelenke (H nach § 21, 34):

$$e = \frac{1}{24Ec} \left[\sum_0^m P a^2 (3l - 4a) - \frac{1}{2} H f l^2 \right]. \quad 3$$

Da die Einsenkung in der Mitte durch eine Einzellast P bei a halb so groß ist als die Einsenkung durch diese und eine gleich große zu ihr symmetrisch gelegene Last, so folgen aus 1 bis 3 mit $P = 1$ die Gleichung der Einflußlinie auf der ersten Trägerhälfte für Bogen mit drei Gelenken:

$$b = \frac{a}{12 E c l} \left[a^2 (l - a) - \frac{3 - 32 \varepsilon}{40} l^3 \right], \quad 4$$

für Bogen mit zwei Gelenken:

$$b = \frac{a}{48 E c} \left[3 l^2 - 4 a^2 - \frac{25}{(1 + \varepsilon) 8 l} (l - a) (l^2 + l a - a^2) \right], \quad 5$$

für Bogen ohne Gelenke:

$$b = \frac{a^2}{48 E c} \left[3 l - 4 a - \frac{15}{(1 + 6 \varepsilon) 4 l} (l - a)^2 \right]. \quad 6$$

Durch Differentiation dieser Ausdrücke nach a ergeben sich die Tangenten der Neigungswinkel unserer Einflußlinien an beliebigen Stellen a der ersten Trägerhälfte für Bogen mit drei Gelenken:

$$\frac{d b}{d a} = \frac{1}{12 E c l} \left[3 l a^2 - 4 a^3 - \frac{3 - 32 \varepsilon}{40} l^3 \right], \quad 7$$

für Bogen mit zwei Gelenken:

$$\frac{d b}{d a} = \frac{1}{16 E c} \left[l^2 - 4 a^2 - \frac{25}{(1 + \varepsilon) 24 l} (l^3 - 6 l a^2 + 4 a^3) \right], \quad 8$$

für Bogen ohne Gelenk:

$$\frac{d b}{d a} = \frac{1}{16 E c} \left[2 l - 4 a - \frac{5}{(1 + 6 \varepsilon) 2 l} (l^2 - 3 l a + 2 a^2) \right]. \quad 9$$

Nach 4 bis 6 beginnen alle drei Einflußlinien bei $a = 0$ mit $b = 0$. Weiter ergeben unsere Gleichungen:

	bei drei Gelenken	bei zwei Gelenken	ohne Gelenk
für $a = 0$	$\frac{d b}{d a} = -\frac{3 - 32 \varepsilon}{480} \frac{l^2}{E c}$	$-\frac{1 - 24 \varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{l^2}{384 E c}$	0
für $a = m$	$\frac{d b}{d a} = \frac{7 + 32 \varepsilon}{480} \frac{l^2}{E c}$	0	0
für $a = m$	$b = \frac{1 + 16 \varepsilon}{480} \frac{l^3}{E c}$	$\frac{3 + 128 \varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{l^3}{6144 E c}$	$\frac{1 + 96 \varepsilon}{1 + 6 \varepsilon} \frac{l^3}{3072 E c}$

Die Einflußlinie besitzt also für Bogen mit zwei Gelenken in der Mitte, für Bogen ohne Gelenk in der Mitte und an beiden Kämpfern horizontale Tangenten, während die Einflußlinie für Bogen mit drei Gelenken in der Mitte eine Ecke aufweist (vergl. Fig. 136).

Für die zahlenmäßige Berechnung kann mitunter bequem sein, zu setzen $a = \mu l$ (Aufgabe 20, Beispiel 33) oder $l = n \lambda$, $a = m \lambda$ (Beispiel 119). Bezüglich des Verlaufes der Linien s. beispielsweise Fig. 136.

Beispiel 49. Einflußlinien von Einsenkungen parabolischer Bogen mit drei Gelenken, zwei Gelenken und ohne Gelenk.

Für einen parabolischen Bogen von $l = 23,758$ m Spannweite, $c = 0,035780$ Mittelwert von $J \cos \varphi$ für Meter als Längeneinheit, $\varepsilon = 0,002590$ und $E = 1750000$ t pro qm (entsprechend dem in den Beispielen 63–67 behandelten Wiener Bruchsteinversuchsgewölbe) sollen die Einflußlinien der Einsenkung e in der Bogenmitte für die drei Fälle verzeichnet werden, daß der Bogen drei Gelenke, zwei Gelenke oder kein Gelenk erhalte.

In den Gleichungen 4 bis 6 der vorigen Aufgabe hat man mit den gegebenen Zahlen, wenn Meter als Längeneinheit und Tonnen als Lasteinheit gelten:

$$\begin{aligned} E c &= 1750000 \cdot 0,03578 = 62615, \\ 48 E c &= 48 \cdot 62615 = 3005520, \\ 12 E c l &= 12 \cdot 62615 \cdot 23,758 = 17851286, \end{aligned}$$

$$3 l^2 = 3 \cdot 23,758^2 = 1693,33, \quad 3 l = 3 \cdot 23,758 = 71,274,$$

$$\frac{3 - 32 \varepsilon}{40} l^3 = \frac{3 - 32 \cdot 0,00259}{40} 23,758^3 = 977,96,$$

$$\frac{25}{(1 + \varepsilon) 8 l} = \frac{25}{1,00259 \cdot 8 \cdot 23,758} = 0,131195,$$

$$\frac{25}{(1 + \varepsilon) 8 l} l^2 = 0,131195 \cdot 23,758 = 74,052,$$

$$\frac{15}{(1 + 6 \varepsilon) 4 l} = \frac{15}{1,01554 \cdot 4 \cdot 23,758} = 0,155426.$$

Die Gleichungen bestehen damit für die Einsenkungen in Meter. Sollen diese in Zentimeter ausgedrückt werden, so haben wir rechts mit 100 zu multiplizieren und erhalten als Gleichungen der Einflußlinien von e für Bogen mit drei Gelenken:

$$b = \frac{\alpha}{178513} [a^2 (l - a) - 977,96],$$

für Bogen mit zwei Gelenken:

$$b = \frac{\alpha}{30055} [1693,33 - 4 a^2 - 74,052 (l - a) - 0,131195 a (l - a)^2],$$

für Bogen ohne Gelenke:

$$b = \frac{\alpha^2}{30055} [71,274 - 4 a - 0,155426 (l - a)^2].$$

Diese Gleichungen liefern mit Rücksicht auf Tabelle II des Beispiels 42 (S. 154) für $\alpha = 0,629$ m:

$$b = \frac{0,629}{178513} (9,16 - 977,96) = -0,00341,$$

$$b = \frac{0,629}{30055} (1693,33 - 4 \cdot 0,396 - 74,052 \cdot 23,129 - 0,131195 \cdot 336,48) = -0,00136,$$

$$b = \frac{0,396}{30055} (71,274 - 4 \cdot 0,629 - 0,155426 \cdot 534,951) = -0,00019.$$

In gleicher Weise sind die übrigen Ordinaten b der Einflußlinien von e in nachstehender Zusammenstellung berechnet.

Für	$\alpha =$	0,629	2,879	5,129	7,379	9,629	11,879 m
bei 3 Gelenken	$b =$	-0,00341	-0,01298	-0,01402	-0,00356	0,01791	0,04647
bei 2 Gelenken	$b =$	-0,00136	-0,00485	-0,00426	0,00010	0,00768	0,01158
ohne Gelenke	$b =$	-0,00019	-0,00221	-0,00278	0,00011	0,00534	0,00857.

Die drei Linien sind in Fig. 136 verzeichnet.

Man erhält beispielsweise die Einsenkung in der Mitte des Bogens ohne Gelenke durch beliebige gleiche Lasten P in allen Punkten der vorstehenden Abszissen a mit Ausnahme der beiden äußersten, wo nur $\frac{P}{2}$ wirken:

$$e = P \left(-\frac{0,00019}{2} - 0,00221 - 0,00278 \right. \\ \left. + 0,00011 + 0,00534 + \frac{0,00857}{2} \right) = 0,00465 P,$$

und speziell für $P = 3,43$ t:

$$e = 0,00465 \cdot 3,43 = 0,016 \text{ cm},$$

in Übereinstimmung mit der anderen Berechnung in Beispiel 48.

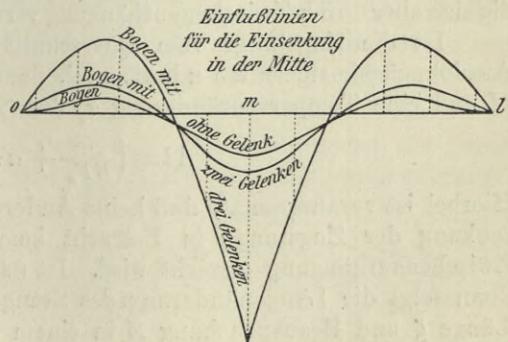


Fig. 136.

§ 22. Bogen mit Zugstange.

Es sind dies Bogen mit Endgelenken, deren Horizontalschub H nicht durch die Widerlager, sondern durch eine horizontale oder gesprengte Zugstange aufgenommen wird (Fig. 137—140, 275—278)¹. Der aus Bogen und Zugstange zusammengesetzte Träger erhält ein festes und ein horizontal verschiebbares Gelenkauflager, so daß bei beliebiger Belastung nur vertikale Stützenreaktionen entstehen (womit der kombinierte Träger als Balken wirkt, S. 2), was für die Stabilität der Stützen und die Beanspruchung des Fundamentbodens günstig ist. Da dies aber auch durch gewöhnliche Balkenträger, z. B. Balkenfachwerke von Segmentform oder Sichelform, erreicht werden kann, so pflegen für die Anwendung solcher Träger noch ästhetische, konstruktive oder sonstige Gesichtspunkte in Betracht zu kommen. Bei Brücken mit untenliegender Fahrbahn beispielsweise sollte eine Störung der Aussicht oder des Querverkehrs durch schiefe Füllungslieder vermieden werden, auch wollte man mitunter die Unterstützungen der Zwischenträger näher als bei entsprechenden einteiligen Balkenfachwerken bringen. Der Bogen mit Zugstange kann als vollwandiger Bogen oder Bogenfachwerk angeordnet werden, hier haben wir es nur mit dem ersten Fall zu tun (über Bogenfachwerke mit Zugstange s. Aufgabe 38).

Während die Stabkraft in einer horizontalen Zugstange überall gleich dem Horizontalschub H ist, ergibt sie sich bei gesprengter Zugstange für jeden Abschnitt der Länge ζ und Horizontalprojektion λ zwischen zwei aufeinander folgenden Knotenpunkten aus der Gleichgewichtsbedingung gegen horizontale Verschiebung für einen anliegenden Knotenpunkt $H \frac{\zeta}{\lambda}$. Man hat also die Zugkraft:

bei horizontaler Zugstange $Z = H$, bei gesprengter Zugstange $Z = H \frac{\zeta}{\lambda}$, 1

wonach Z im zweiten Falle mit $\zeta : \lambda$ am größten in den Endfeldern wird. Zu beachten ist, daß die Zugstange neben den Normalspannungen durch Z auch Biegungsspannungen erleidet, schon infolge des eigenen Gewichts, die sich aber durch Zwischenaufhängung vermindern lassen (Fig. 137—140).

Ist die Zugstange vom Querschnitt F_z , Elastizitätsmodul E und Ausdehnungskoeffizienten α horizontal, dann erzeugen der Horizontalschub H und eine Temperaturänderung τ_z der Stange die Längenänderung:

$$\Delta l = \left(\frac{H}{EF_z} + \alpha \tau_z \right) l. \quad 2$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß keine Änderung der Spannweite durch Einsenkung der Zugstange in Betracht kommt, was eventuell durch die Zwischenaufhängung erreicht wird. Ist dagegen die Zugstange gesprengt, dann folgt die Längenänderung des Stangenabschnittes der anfänglichen Länge ζ und Beanspruchung Z in einem beliebigen Feld:

$$\left(\frac{Z}{EF_z} + \alpha \tau_z \right) \zeta$$

¹ Bezüglich anderer Bogenarten mit Zugstange siehe § 23.

und die Änderung seiner Horizontalprojektion:

$$\left(\frac{Z}{EF_z} + \alpha \tau_z \right) \zeta \frac{\lambda}{\xi}$$

oder bei Beachtung von 1:

$$\frac{H \zeta}{EF_z} + \alpha \tau_z \lambda.$$

Als Summe aller dieser Änderungen folgt, wenn z die anfängliche Gesamtlänge der gesprengten Zugstange bezeichnet:

$$\Delta l = \frac{Hz}{EF_z} + \alpha \tau_z l, \tag{3}$$

welcher Ausdruck für $z = l$ (horizontale Zugstange) in 2 übergeht.

Für eine starre Zugstange würden die Gleichungen 1, 2 wegen $E = \infty$, $\alpha = 0$ selbstverständlich die Änderung $\Delta l = 0$ ergeben, woraus schon folgt, daß ein Bogen mit starrer Zugstange sich wie ein Bogen ohne Zugstange mit unnachgiebigen Widerlagern verhielte. Wir wollen jedoch im folgenden für Bogen und Zugstange Material gleicher E , α voraussetzen, während die Temperaturänderungen τ , τ_z beider Teile verschieden zugelassen werden. Da die Zugstange vor unmittelbarer Einwirkung geschützt oder in einem geheizten Raume liegen kann, so sind solche Verschiedenheiten nicht ausgeschlossen.

Dreigelenkbogen mit Zugstange. Erhält der betrachtete Bogen außer den Endgelenken noch ein Zwischengelenk (Fig. 137, 138), so entsteht eine statisch bestimmte Trägerart. Der Horizontalschub H wie

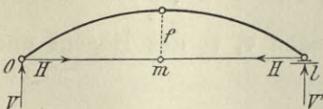


Fig. 137.

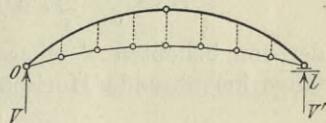


Fig. 138.

sämtliche Schnittkräfte und sonstigen Beanspruchungen können dann ganz wie bei Dreigelenkbogen ohne Zugstange (§ 19) berechnet werden, auch die Kämpferdrucklinie hat den gleichen Verlauf. Die Einsenkungen folgen aus den allgemeinen Beziehungen für die Formänderungen von Dreigelenkbogen (§§ 40, 45, 48) mit Rücksicht auf obige Δl (vergl. Aufgabe 24), doch dürften sie nur selten von Interesse sein.

Zweigelenkbogen mit Zugstange. Für diese ergeben sich gegenüber Zweigelenkbogen ohne Zugstange (§ 20) nur insofern Änderungen

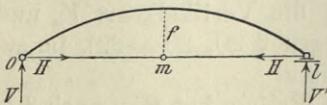


Fig. 139.

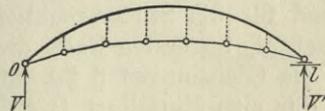


Fig. 140.

der Schnittkräfte und sonstigen Beanspruchungen, als der Horizontalschub H anders ausgedrückt ist. Es genügt also, diese Ausdrücke und die

davon abhängige Gleichung der Kämpferdrucklinie anzuführen, während im übrigen auf § 20 verwiesen werden kann, dessen Bezeichnungen im folgenden beibehalten werden. Die Einsenkungen lassen sich unter Verwendung obiger Δl aus den allgemeinen Beziehungen für die Formänderungen von Zweigelenkbogen entnehmen (§§ 40, 45, 48, vergl. Aufgabe 23).

Für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ (Mittelwert c) hat man nach § 42, 18) im allgemeinsten Falle:

$$H = \frac{5}{(1 + \varepsilon) 8 f l^3} \sum_0^l P a (l - a) (l^2 + l a - a^2 - \beta l^2) + \frac{15 E c}{(1 + \varepsilon) 8 f^2} \left(\alpha \tau - \frac{\Delta l}{l} \right),$$

worin wie in den folgenden Ausdrücken bezüglich β , ε und ihrer Vernachlässigung das in §§ 20, 43 Gesagte gilt. Führen wir Δl nach 2, 3 ein und setzen zur Abkürzung:

$$\text{bei horizontaler Zugstange} \quad h = (1 + \varepsilon) 8 f^2 + \frac{15 c}{F_z}, \quad 4$$

$$\text{„ gesprengter „} \quad h = (1 + \varepsilon) 8 f^2 + \frac{15 c}{F_z} \frac{z}{l}, \quad 5$$

so ergeben sich in beiden Fällen der von einer beliebigen Belastung herrührende Horizontalschub:

$$H = \frac{5 f}{h l^3} \sum_0^l P a (l - a) (l^2 + l a - a^2 - \beta l^2), \quad 6$$

der von einer beliebigen symmetrischen Belastung herrührende Horizontalschub mit $m = \frac{l}{2}$ (vergl. S. 79):

$$H = \frac{10 f}{h l^3} \sum_0^m P a (l - a) (l^2 + l a - a^2 - \beta l^2) \quad 7$$

und der von beliebigen Temperaturänderungen τ , τ_z des Bogens und der Zugstange herrührende Horizontalschub:

$$H = \frac{15 c}{h} E a (\tau - \tau_z). \quad 8$$

Gleichung 6 liefert mit Rücksicht auf § 18 für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit:

$$H = \left(1 - \frac{5}{6} \beta \right) \frac{u}{h} f l^2, \quad 9$$

und für verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten von u , u' pro Längeneinheit auf der ersten und zweiten Trägerhälfte:

$$H = \left(1 - \frac{5}{6} \beta \right) \frac{u + u'}{2 h} f l^2, \quad 10$$

während für die Stützenreaktionen V , V' , die Vertikalkraft V_x und das Moment M_x im ersten Falle die Gleichungen § 20, 20)—22), im zweiten Falle die Gleichungen § 20, 28)—30) gelten.

Für eine Einzellast P an beliebiger Stelle a hat man nach § 20, 2) und obigem Ausdruck 6:

$$V = P \frac{l - a}{l}, \quad H = \frac{5 f}{h l^3} P a (l - a) (l^2 + l a - a^2 - \beta l^2),$$

womit bei Vernachlässigung von β nach § 20, 46) die Gleichung der Kämpferdrucklinie:

$$b = \frac{h}{5f} \frac{l^2}{l^2 + la - a^2} \quad 11$$

der Vergleich mit § 20, 47) daß alle Ordinaten $\frac{h}{(1+\varepsilon)8f^2}$ mal so groß sind als bei parabolischen Zweigelenkbogen ohne Zugstange.

Wir wollen hier nur noch den Halbkreisbogen mit konstantem Trägheitsmoment (Mittelwert J) behandeln, indem wir bezüglich des Bogens mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten auf Aufgabe 32 verweisen (über Bogenfachwerke mit Zugstange siehe Aufgabe 38). Für den Halbkreisbogen hat man nach § 41 im allgemeinsten Falle:

$$H = \frac{4}{\pi l^2} \sum_0^l P a (l - a) + \frac{16 E J}{\pi l^3} (\alpha \tau l - \Delta l),$$

worin wieder Δl durch 2, 3 bestimmt ist. Setzen wir zur Abkürzung:

$$\text{bei horizontaler Zugstange} \quad \mu = 1 + \frac{16 J}{\pi F_z l^2}, \quad 12$$

$$\text{„ gesprengter „} \quad \mu = 1 + \frac{16 J z}{\pi F_z l^3}, \quad 13$$

so folgt in beiden Fällen der von einer beliebigen Belastung herrührende Horizontalschub:

$$H = \frac{4}{\pi \mu l^2} \sum_0^l P a (l - a), \quad 14$$

der von einer beliebigen symmetrischen Belastung herrührende Horizontalschub:

$$H = \frac{8}{\pi \mu l^2} \sum_0^m P a (l - a) \quad 15$$

und der von beliebigen Temperaturänderungen τ , τ_z des Bogens und der Zugstange herrührende Horizontalschub:

$$H = \frac{16 J}{\pi \mu l^2} E \alpha (\tau - \tau_z). \quad 16$$

Gleichung 14 liefert mit Rücksicht auf § 18 für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit:

$$H = \frac{2 u l}{3 \pi \mu}, \quad 17$$

und für verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten von u , u' pro Längeneinheit auf der ersten und zweiten Trägershälfte:

$$H = \frac{(u + u') l}{3 \pi \mu}, \quad 18$$

während bezüglich der Stützenreaktionen V , V' der Vertikalkraft V_x und des Moments M_x das nach 10 Gesagte gilt.

Für eine Einzellast P bei a hat man nach § 20, 2) und obiger Gleichung 14:

$$V = P \frac{l - a}{l}, \quad H = \frac{4}{\pi \mu l^2} P a (l - a),$$

womit nach § 20, 46) die Gleichung der Kämpferdrucklinie:

$$b = \frac{\pi}{4} \mu l = 0,7854 \mu l. \quad 19$$

Die Kämpferdrucklinie ist eine horizontale Gerade, deren Höhe über den Gelenkmittelpunkten μ mal so groß wie ohne Zugstange ist.

Liegt gerade in der Mitte des Bogens eine konzentrierte Last, so ist dem Begriffe der Symmetrie entsprechend nur die Hälfte derselben in die Summen \sum_0^m von 7, 15 aufzunehmen. Für $\tau = \tau_z$ ergeben 8, 16 den Horizontalschub durch Temperaturänderungen $H = 0$, wonach durch diese auch keine Spannungen entstehen. Der Horizontalschub durch Belastung des Bogens mit Zugstange ist unter sonst gleichen Verhältnissen kleiner als beim Bogen ohne Zugstange mit unnachgiebigen Widerlagern, was an dem elastischen Nachgeben der Zugstange liegt. Er entfernt sich von dem Werte für den letzteren Bogen um so mehr, je kleiner der Querschnitt F_z der Zugstange gewählt wird. Für $F_z = \infty$ wären der Horizontalschub durch Belastung und die Berechnung des Bogens mit Zugstange genau wie für den Bogen ohne Zugstange mit unnachgiebigen Widerlagern, während der zweite Grenzfall $F_z = 0$ mit $\mu = \infty$ dem gewöhnlichen Balken mit frei drehbaren Enden entspricht.

Beispiel 50. Verschiedenheit der Berechnungen von Bogen mit und ohne Zugstange.

Behufs Klarstellung der vorerwähnten Verschiedenheiten zu bestimmen für

den Fall, daß der in Beispiel 29 behandelte Halbkreisbogen zwischen den Endgelenken eine Zugstange mit Aufhängung in Entfernungen $\lambda = 4$ m auf einem Kreisbogen vom Pfeile $f = 6$ m erhalte (Fig. 141): a) Einen geeigneten Querschnitt F_z der Zugstange, wenn deren Beanspruchung nicht über $\sigma = 700$ kg pro qcm hinausgehen soll; b) den Horizontalschub H durch beliebige Belastungen und durch Temperaturdifferenzen $\tau - \tau_z = \pm 15^0$ vom Bogen und Zugstange; c) die Kämpferdrucklinie des Bogens.

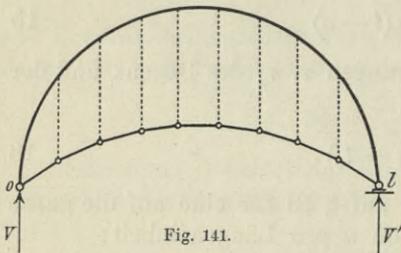


Fig. 141.

Nach den Formeln des vorigen Paragraphen haben wir für beliebige Belastung die ganze Beanspruchung der Zugstange in einem beliebigen Feld:

$$Z = H \frac{\xi}{\lambda}, \quad 1$$

und den Horizontalschub des Bogens:

$$H = \frac{4}{\pi \mu l^2} \sum_0^l P a (l - a), \quad 2$$

worin

$$\mu = 1 + \frac{16 J_z}{\pi F_z l^3}, \quad 3$$

während für den Bogen ohne Zugstange $\mu = 1$ wäre. Für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit hat man:

$$H = \frac{2 u l}{3 \pi \mu}, \quad 4$$

und für eine gleichmäßig verteilte Last von p pro Längeneinheit von 0 bis zu einem beliebigen z entsprechend Beispiel 29:

$$H = \frac{2 p z^2}{3 \pi l^2} \frac{3 l - 2 z}{\mu} . \quad 5$$

Durch Temperaturänderungen τ , τ_z von Bogen und Zugstange gegen die dem spannungslosen Zustande entsprechende Normaltemperatur entsteht:

$$H = \frac{16 J}{\pi \mu l^2} E \alpha (\tau - \tau_z) , \quad 6$$

das ist $\frac{\tau - \tau_z}{\tau \mu}$ mal so groß als beim Bogen ohne Zugstange. Gleichung der Kämpferdrucklinie

$$b = 0,7854 \mu l . \quad 7$$

Die übrigen bei vollständiger Berechnung des Bogens nötigen Formeln bleiben wie in Beispiel 29 unter „Allgemeines“ angeführt.

a) Zur Bestimmung des Querschnitts der Zugstange setzen wir den größten Horizontalschub, der bei Vollbelastung des ganzen Bogens eintritt, nach 4 zunächst mit $\mu = 1$ (unnachgiebiger Stange entsprechend):

$$H = \frac{2 \cdot 1200 \cdot 36}{3 \cdot 3,1416} = 9167 \text{ kg} ,$$

womit die größte Zugkraft in der Stange bei einer Stangenlänge $\zeta = 4,735$ m in den Endfeldern (siehe Bemerkungen am Schluß):

$$Z = 9167 \frac{4,735}{4} = 10851 \text{ kg} ,$$

und der nötige Querschnitt, soweit keine Biegungsspannungen in Betracht kommen:

$$\frac{10851}{700} = 15,5 \text{ qcm} .$$

Wir wählen zwei Platten von 10/1,2 cm, womit

$$F_z = 2 \cdot 10 \cdot 1,2 = 24 \text{ qcm} ,$$

und der Querschnitt auch abzüglich der Verschwächung an den Verbindungsstellen ausreicht (etwa bei doppelschnittigen Bolzen von 3,5 cm Stärke, womit nutzbar bleibt $24 - 2,4 \cdot 3,5 = 15,6$ qcm).

Das Widerstandsmoment dieses Querschnittes folgt:

$$W = \frac{2,4 \cdot 10^3}{6} = 40 \text{ cm}^3 .$$

Gewicht der Zugstange pro cm Länge bei einem Einheitsgewicht von 7850 kg pro cbm:

$$24 \cdot 0,007850 = 0,1884 \text{ kg} ,$$

das ist pro cm Spannweite in den Endfeldern:

$$q = 0,1884 \frac{4,735}{4} = 0,2230 \text{ kg} .$$

Größtes Biegemoment in letzteren:

$$\frac{q \lambda^2}{8} = \frac{0,2230 \cdot 400^2}{8} = 4460 \text{ cmkg} .$$

Die größte Biegungsspannung pro qcm Zugstangenquerschnitt ergibt sich hieraus:

$$\frac{4460}{40} = 111,5 \text{ kg} ,$$

und da am Orte derselben, inmitten der Endfelder, keine Verschwächung des Querschnitts stattfindet, so wird die ganze Beanspruchung pro qcm daselbst:

$$\sigma = \frac{10851}{24} + 111,5 = 564 \text{ kg} .$$

Es wird also auch hier die zulässige Beanspruchung von $\sigma = 700$ kg pro qcm nicht überschritten.

b) In den obigen Gleichungen ist nun nach 3 mit der Zugstangenlänge $z = 38,594$ m (s. Bemerkungen unten):

$$\mu = 1 + \frac{16 \cdot 226430 \cdot 3859,4}{3,1416 \cdot 24 \cdot 3600^3} = 1,00397.$$

Damit lassen sich alle erforderlichen Werte des Horizontalschubs berechnen, sie sind $1/1,00397$ mal so groß als bei gleicher Belastung in Beispiel 29. So wird der größte vorkommende Horizontalschub:

$$H = \frac{9167}{1,00397} = 9131 \text{ kg.}$$

Bei dieser geringen Änderung gegen 9167 kg hat es keinen Zweck, die Zugstange mit dem neuen Wert von H noch einmal zu berechnen, sie behält den gewählten Querschnitt. Durch Temperaturdifferenzen $\tau - \tau_z$ von Bogen und Zugstange entsteht:

$$H = \frac{16 \cdot 226430 \cdot 2150000 \cdot 0,0001115}{1,00397 \cdot 3,1416 \cdot 3600^2} (\tau - \tau_z) = 2,191 (\tau - \tau_z),$$

und für $\tau - \tau_z = \pm 15^\circ$ $H = \pm 33$ kg, das ist $\frac{15}{30 \cdot 1,00397}$ mal so groß als den Temperaturänderungen $\tau = \pm 30^\circ$ des Bogens ohne Zugstange entsprechen würde.

c) Die Kämpferdrucklinie ist eine in der Höhe

$$b = 0,7854 \cdot 1,00397 \cdot 36 = 28,387 \text{ m}$$

über den Gelenkmittelpunkten liegende Gerade, während sie beim Bogen ohne Zugstange in der Höhe 28,274 m lag. Damit erleiden auch die Belastungen für die Grenzwerte der Schnittkräfte und Spannungen sowie diese selbst dem Bogen ohne Zugstange gegenüber nur geringe Änderungen. Sie würden noch kleiner ausfallen, wenn unter sonst gleichen Verhältnissen die „Zugstange“ wie häufig bei Brücken auch Verkehrslast aufzunehmen hätte und damit des größeren F_z wegen μ noch näher an den dem Halbkreisbogen ohne Zugstange entsprechenden Wert 1 käme.

Bemerkungen. Die Längen z , ξ der Zugstange und ihres Abschnitts in den Endfeldern wurden oben als bekannt vorausgesetzt; sie haben sich wie folgt ergeben. Für den Kreisbogen, welchem die Axe der Zugstange eingeschrieben ist, hat man nach § 19, 11), 9) mit $l = 36$ m, $f = 6$ m:

$$r = \frac{36^2}{8 \cdot 6} + \frac{6}{2} = 30 \text{ m,} \quad r - f = 24 \text{ m,}$$

$$y = \sqrt{576 + x(36 - x)} - 24,$$

und hieraus für

$x =$	4	8	12	16	m
$y =$	2,533	4,284	5,394	5,993	„

Damit folgen die Längen der Zugstangenabschnitte von den Enden an:

$$\begin{aligned} \sqrt{16 + 2,533^2} &= 4,735 \text{ m} \\ \sqrt{16 + 1,751^2} &= 4,366 \text{ „} \\ \sqrt{16 + 1,110^2} &= 4,151 \text{ „} \\ \sqrt{16 + 0,599^2} &= 4,045 \text{ „} \\ \frac{s}{2} - 2 \text{ (Fig. 141)} &= 17,297 \text{ m,} \quad s = 38,594 \text{ m.} \end{aligned}$$

Die Berechnung der Zugstangenlänge nach der Näherungsformel für flache Parabelbogen

$$s = l + \frac{8f^2}{3l}$$

hätte ergeben:

$$s = 36 + \frac{8 \cdot 6^2}{3 \cdot 36} = 38,667 \text{ m.}$$

Aufgabe 23. Einsenkungen eines parabolischen Bogens mit zwei Gelenken und Zugstange.

Es sollen die Einsenkungen e in der Mitte eines parabolischen Bogens von konstantem $J \cos \varphi$ (Mittelwert c) mit Endgelenken und horizontaler oder ge-

sprengrter Zugstange durch Belastung und Temperaturänderungen festgestellt werden.

Wir gehen von den bereits in § 20 verwendeten Beziehungen des § 45 aus, worin nun der Horizontalschub H wie im vorigen Paragraph ausgedrückt ist. Bei Vernachlässigung von β hat man durch beliebige Belastung:

$$e \text{ nach § 20, 55)} \quad \text{mit} \quad H \text{ nach § 22, 6),} \quad 1$$

durch beliebige symmetrische Belastung:

$$e \text{ nach § 20, 56)} \quad \text{mit} \quad H \text{ nach § 22, 7),} \quad 2$$

und durch beliebige Temperaturänderungen τ , τ_z von Bogen und Zugstange nach § 20, 60) mit § 22, 8):

$$e = -\alpha \tau f - \alpha (\tau - \tau_z) \frac{25 f l^2}{16 h}, \quad 3$$

wonach die Einsenkung durch Temperaturänderungen für $\tau_z = \tau$ wäre $e = -\alpha \tau f$. In den angeführten Ausdrücken von H hat man natürlich ebenfalls $\beta = 0$ zu setzen.

Aus 2 folgen speziell für eine Einzellast P in der Bogenmitte mit $H = \frac{2fl}{16h} P$:

$$e = \left(1 - \frac{125 f^2}{16 h}\right) \frac{P l^3}{48 E c}, \quad 4$$

und für eine gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit auf der ganzen Spannweite mit Rücksicht auf § 18 und H nach § 22, 9):

$$e = \left(1 - \frac{8 f^2}{h}\right) \frac{5 u l^4}{384 E c}. \quad 5$$

Da zum letzten Wert die Belastungen beider Trägerhälften gleichviel beitragen, so folgt für verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten auf der ersten und zweiten Trägerhälfte:

$$e = \left(1 - \frac{8 f^2}{h}\right) \frac{u + u'}{768} \frac{5 u l^4}{E c}. \quad 6$$

Für Zweigelenkbogen mit Zugstange von beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten wären die Einsenkungen bei analogem Vorgehen wie oben aus § 48 zu entnehmen. Obige Formeln führen mit $f=0$, $c=J$ selbstverständlich auf die bekannten Einsenkungen für gewöhnliche einfache Balken mit frei drehbaren Enden.

Aufgabe 24. Einsenkungen eines parabolischen Bogens mit drei Gelenken und Zugstange.

Es sollen die Einsenkungen e in der Mitte eines parabolischen Bogens von konstantem $J \cos \varphi$ (Mittelwert c) mit drei Gelenken und horizontaler oder gesprengter Zugstange durch Belastung und Temperaturänderungen festgestellt werden.

Wir gehen von den bereits in § 19 verwendeten Beziehungen des § 45 aus, worin auch der Horizontalschub H wie in § 19 ausgedrückt ist, während für die Änderung Δl der Spannweite die Gleichungen § 22, 2), 3) bestehen. Die Einsenkung durch eine beliebige Änderung Δl ist damit nach § 19, 39) allgemein

$$e = \left(\frac{H z}{E F_z l} + \alpha \tau_z\right) \frac{l^2}{4 f},$$

worin z die ganze Länge der Zugstange bedeutet, so daß auch in den folgenden Gleichungen bei horizontaler Zugstange $z=l$ zu setzen ist. Mit Rücksicht auf vorstehenden Beitrag von Δl erhält man die ganzen Einsenkungen durch beliebige Belastung:

$$e = e_0 + \frac{H l z}{4 E F_z f} \quad \text{mit} \quad e_0 \text{ nach § 19, 33),} \quad 1$$

durch beliebige symmetrische Belastung:

$$e = e_0 + \frac{l z}{4 E F_z f^2} \sum_0^m P a \quad \text{mit} \quad e_0 \text{ nach § 19, 34),} \quad 2$$

und durch beliebige Temperaturänderungen τ , τ_z von Bogen und Zugstange mit § 19, 38):

$$e = -\alpha \tau \left(f + \frac{l^2}{4f} \right) + \alpha \tau_z \frac{l^2}{4f} = -\alpha \tau f - \alpha (\tau - \tau_z) \frac{l^2}{4f}, \quad 3$$

wonach die Einsenkung durch Temperaturänderungen für $\tau_z = \tau$ wie im gleichen Falle bei Zweigelenkbogen mit Zugstange $e = -\alpha \tau f$ wäre.

Mit Rücksicht auf die besonderen Ausdrücke § 19, 35), 36) von e_0 und § 18 erhält man nach 2 speziell für eine Einzellast P in der Bogenmitte:

$$e = \frac{1 + 16 \varepsilon}{480} \frac{P l^3}{E c} + \frac{z}{16 f^2} \frac{P l^2}{E F_z}, \quad 4$$

und für eine gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit auf der ganzen Spannweite:

$$e = \frac{\varepsilon}{E c} \frac{u l^4}{60} + \frac{z}{E F_z} \frac{u l^3}{32 f^2}. \quad 5$$

Da zum letzten Wert die Belastungen beider Trägerhälften gleichviel beitragen, so folgt für verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten von u , u' pro Längeneinheit auf der ersten und zweiten Trägerhälfte:

$$e = \frac{\varepsilon}{E c} \frac{u + u'}{120} l^4 + \frac{z}{E F_z} \frac{u + u'}{64} \frac{l^3}{f^2}. \quad 6$$

Für Dreigelenkbogen mit Zugstange von beliebiger Axe und beliebigen Querschnitten wären die Einsenkungen bei analogem Vorgehen wie oben aus § 48 zu entnehmen.

§ 23. Weitere Bogenarten. Durchlaufende Bogen.

Neben den bereits behandelten Bogenarten und den im nächsten Paragraphen zu besprechenden „Ketten“ sind noch andere Bogenarten denkbar und teilweise vereinzelt zur Ausführung gekommen. Wir bleiben zunächst bei den Bogen mit einer Öffnung (den einfachen Bogen).

Gleich den Bogen mit drei Gelenken, mit zwei Gelenken und ohne Gelenk bietet sich zunächst dar der Bogen mit einem Gelenk (Fig. 142, 143). Diese Bogenart ist zweifach statisch unbestimmt, da dem dreifach

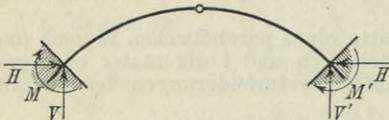


Fig. 142.

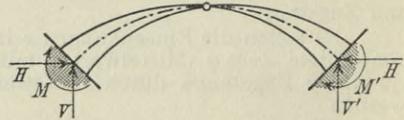


Fig. 143.

statisch unbestimmten Bogen ohne Gelenk gegenüber nur eine statische Gleichung hinzukommt, die Bedingung: Summe der Momente aller äußeren Kräfte auf einer Seite des Gelenks in Bezug auf den Gelenkmittelpunkt gleich Null. Nach Bohny, der dem Einzelgelenkbogen bessere Materialverteilung und damit leichtere Herstellung als den Drei- und Zweigelenkbogen nachrühmt, hat derselbe zwar nicht bei Brücken, wohl aber bei Dächern bereits Anwendung gefunden. Es wäre leicht, ihn auf Grund der allgemeinen Beziehungen des I. und IV. Abschnitts in ähnlicher Weise zu behandeln, wie dies mit den Bogen der §§ 19–22 geschehen ist, wobei die Endmomente M , M' als statisch unbestimmte Größen gewählt würden. Allein bei der Fülle wichtigerer Aufgaben müssen wir

hierauf verzichten, um so mehr als auf andere einschlagende Arbeiten verwiesen werden kann¹.

Bei Betrachtung des Zweigelenkbogens mit Zugstange in § 22 wurde angenommen, daß der aus Bogen und Zugstange kombinierte Träger ein festes und ein horizontal frei verschiebbares Gelenkauflager erhält, so daß die Zugstange den ganzen Horizontalschub des Bogens aufzunehmen hat. Es lassen sich jedoch auch Bogen mit zwei festen Gelenkauflagern und einem Zugband in beliebiger Höhe herstellen, bei welchen dann die Zugstange nur einen Teil des Horizontalschubs aufnimmt, während ein anderer Teil auf die Widerlager kommt. Derartige Bogen mit Zugstange können besonders in Betracht kommen, wenn der Bogen zum Teil oberhalb der Fahrbahn liegen soll, wobei die Zugstange zugleich dem Zwecke des Windverbandes dienen kann. Sie sind in bezug auf die äußeren Kräfte des Bogens einfach, zweifach oder dreifach statisch unbestimmt, je nachdem es sich um einen Dreigelenkbogen mit Zugstange, einen Zweigelenkbogen mit Zugstange² oder einen Eingelenkbogen mit Zugstange³ handelt, da dem gewöhnlichen Dreigelenkbogen, Zweigelenkbogen oder Eingelenkbogen gegenüber noch die Beanspruchung der Zugstange hinzukommt. Alle diese Träger kommen wohl nur als Fachwerke in Frage, weshalb bezüglich ihrer Berechnung auf den V. Abschnitt zu verweisen ist.

Weiter können, entsprechend dem Hinweise von Foepppl, alle Bogen anstatt gewöhnlicher reeller Gelenke auch sogenannte imaginäre Gelenke erhalten. In Fig. 144, 145 sind beispielsweise Bogen mit reellen

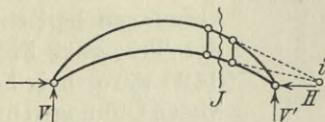


Fig. 144.

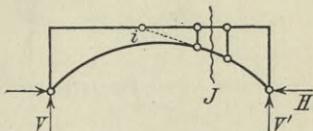


Fig. 145.

Kämpfergelenken und einem imaginären Zwischengelenk angedeutet. Als imaginäres Gelenk ist dabei der Schnittpunkt i der Richtungslinien zweier gerader Stäbe bezeichnet, durch welche sich ein Schnitt J so führen läßt, daß kein anderer Teil des Trägers getroffen wird und letzterer in zwei Teile zerlegt erscheint (Fig. 144, 145). Die beiden das imaginäre Gelenk bildenden Stäbe dürfen sich auch kreuzen, so daß z. B. Fig. 146 einen Eingelenkbogen mit imaginärem Gelenk darstellt. Da die äußeren Kräfte links oder rechts des Schnittes J mit den Stabkräften der beiden Gelenkstäbe im Gleichgewicht sein müssen,

¹ Bohny, Der Eingelenkbogen, Zeitschrift f. Architektur und Ingenieurwesen 1898, S. 147. Müller-Breslau, Neuere Methoden der Festigkeitslehre, Leipzig 1904, S. 158. Ritter, Anwendungen der graphischen Statik, IV. Der Bogen, Zürich 1906, S. 165.

² Bohny, Der Zweigelenkbogen mit Zugband in beliebiger Höhe, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1907, S. 695, 776. Landsberg, Der Zweigelenkbogen mit Zugband, ebenda 1909, S. 901.

³ Bohny, Der Eingelenkbogen mit Zugband, Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen 1908, S. 329.

so geht ihre Resultante stets durch deren Schnittpunkt i . Mit anderen Worten: Die Summe der Momente aller äußeren Kräfte auf einer Seite

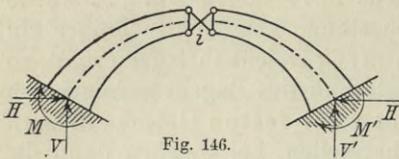


Fig. 146.

des Schnittes J in bezug auf das imaginäre Gelenk i ist gleich Null. Die statische Bestimmtheit oder der Grad der statischen Unbestimmtheit einer Bogenart wird also infolge des Ersatzes von reellen Gelenken durch imaginäre Gelenke nicht geändert. Auch

bezüglich der Bogen mit imaginären Gelenken, die überhaupt noch nicht ausgeführt wurden, genügt der Hinweis auf bereits vorhandene Schriften¹.

Von größerer Bedeutung sind die durchlaufenden oder kontinuierlichen Bogen, das heißt die Bogen, welche ungetrennt über mehr als eine Öffnung reichen. Sie können von verschiedener Anordnung sein, doch werden die Auflager über den Zwischenstützen meist horizontal frei verschiebbar angenommen, wonach deren Reaktionen für die Berechnung vertikal und der Horizontalschub bei nur vertikalen Aktivkräften in allen Öffnungen gleich groß sind. Infolge der vertikalen Drücke auf die Stützen können diese, wie bei Balken, schlanker als die Widerlager einfacher Bogen gehalten werden und auch der Fundamentboden ist günstiger beansprucht. Im Falle der Fig. 147 sind von den angedeuteten Reaktionskomponenten, welche alle Stützenreaktionen bestimmen,

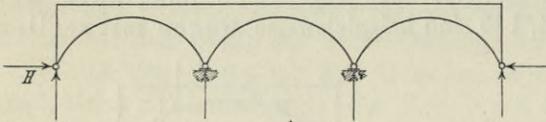


Fig. 147.

ebenso viele mit Hilfe der Elastizitätslehre zu ermitteln als der Bogen Öffnungen besitzt. Für die Trägerart Fig. 148, 149 wäre bei beliebig vielen Öffnungen nur eine

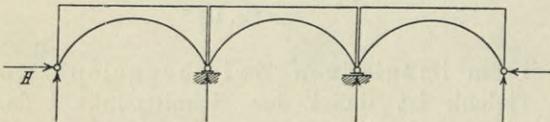


Fig. 148.

Reaktionskomponente, der Horizontalschub, statisch unbestimmt, während die Trägerart Fig. 150 statisch bestimmt ist.

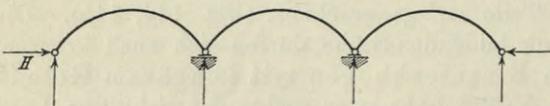


Fig. 149.

Durch Einschalten eines Zwischengelenks läßt sich auch die Trägerart Fig. 148, 149 in eine statisch bestimmte Trägerart verwandeln (Fig.

151, 152). Die Trägerart Fig. 153 ist dreifach statisch unbestimmt, durch Einschalten eines Zwischengelenks in der Mitte ließe sich daraus eine

¹ Foepl, Theorie des Fachwerks, Leipzig 1880, S. 115, 123. Weyrauch, Theorie der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer, Leipzig 1887, S. 297. Weyrauch, Beispiele und Aufgaben zur Berechnung der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer, Leipzig 1888, S. 471.

zweifach statisch unbestimmte Trägerart herstellen, wie sie bei der Mirabeau-
brücke¹ in Paris zur Anwendung kam. Dagegen ist die Trägerart Fig. 154
wieder statisch bestimmt, ihr entspricht die Viaurbrücke² der Eisenbahn
Carmaux–Rodez in Frank-
reich mit der größten
Bogenspannweite in Eu-
ropa (220 m).

Bogen der Anord-
nungen Fig. 147, 150, 153,
154 kommen nur als Fach-
werke in Betracht (V. Ab-
schnitt), dagegen sind
Bogen nach Fig. 149, 152
auch mit voller Wand oder

Gitterwerk ausführbar,
mitunter kann zum Teil
volle Wand, zum Teil
Fachwerk Verwendung fin-
den (Beispiele 51–53).
Meist werden kontinuier-
liche Bogen am zweck-
mäßigsten nicht nach all-
gemeinen Formeln für die
betreffenden Bogenarten,
sondern mit Rücksicht auf
die vorliegenden besonde-
ren Verhältnisse berech-
net (Beispiele 51, 52, 101,
117). Hierzu sind die geeig-
neten Beziehungen für volle
Wand im I. und IV. Ab-
schnitt oder schon in §§ 19
bis 21, für Fachwerke im

V. Abschnitt gegeben. Der statisch bestimmte Bogen Fig. 151, 152 be-
darf überhaupt keiner weiteren Erläuterung, da die Öffnung mit Zwischen-
gelenk ganz wie ein gewöhnlicher Dreigelenkbogen wirkt, und für die
übrigen Öffnungen einfachen Balken gegenüber nur der durch die Ver-
hältnisse in der Dreigelenköffnung allein bestimmte Horizontalschub H
hinzukommt (Beispiel 51, 101). Als Fachwerk ist er überdies vom Ver-
fasser an anderer Stelle ausführlich behandelt worden³. Dagegen wird
es zur Klärung beitragen, wenn wir den wichtigsten Fall statisch unbe-
stimmter kontinuierlicher Bogenarten auch allgemein behandeln (§ 24).

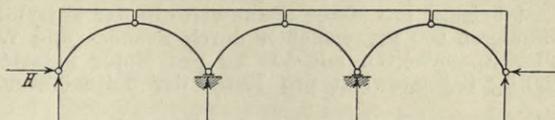


Fig. 150.

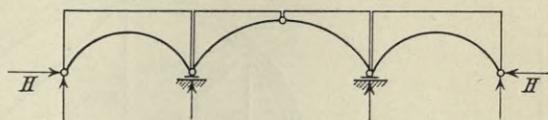


Fig. 151.

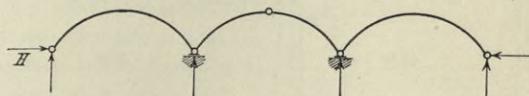


Fig. 152.

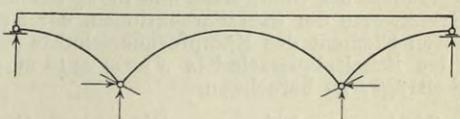


Fig. 153.

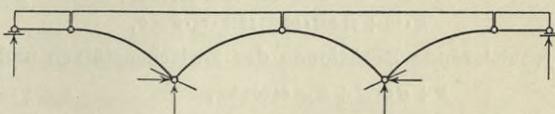


Fig. 154.

¹ Die Mirabeaubrücke in Paris, Zentralblatt der Bauverwaltung 1897, S. 241, 257.

² Théry, Notes sur la construction du viaduc du Viaur, Annales des ponts et chaussées 1898, I, S. 215, und II, S. 329; 1899, I, S. 57, und IV, S. 79; 1901, III, S. 244.

³ Weyrauch, Statisch bestimmte Träger, S. 272–288; Beispiele und Aufgaben hierzu, S. 412–464.

Beispiel 51. Durchlaufender Bogen von statisch bestimmter Art.

Für den in Fig. 155 skizzierten Hallenbinder ist der Dreigelenkbogen von $l = 30$ m Spannweite, $F = 190$ qcm nutzbarem Querschnitt symmetrisch zur Achsschicht und $W = 4938$ cm³ nutzbarem Widerstandsmoment halbkreisförmig, während die Obergurten der Segmentträger Parabeln eingeschrieben sind. Die feste Last beträgt pro Meter Spannweite in der Mittelöffnung 700 kg, in den Seitenöffnungen 600 kg, woneben durch Schnee- und Winddruck beliebige Strecken aller Spannweiten mit 500 kg pro Meter belastet werden können. Von den 600 kg Eigengewicht pro Meter der Seitenöffnungen kommen 450 kg auf die

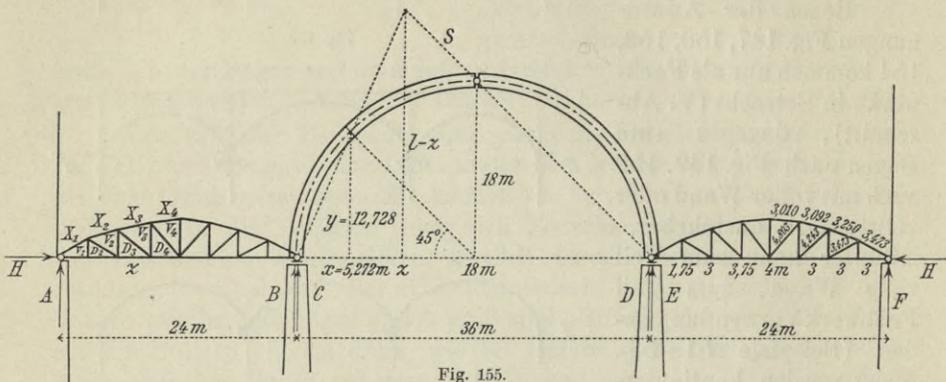


Fig. 155.

Knotenpunkte der Obergurten und 150 kg auf diejenigen der Untergurten. Es sind die Grenzwerte der Stützenreaktionen, der Normalspannungen im obersten und untersten Element des Kämpferquerschnitts $x = 0$, des Querschnitts $x = 5,272$ m und des Scheitelquerschnitts $x = m = 18$ m sowie sämtlicher Stabkräfte der Parabelträger zu berechnen.

Stützenreaktionen. Die oberen Grenzwerte aller Stützenreaktionen treten für Vollbelastung des ganzen Binders ein und ergeben sich wie folgt:

$$A = B = E = F = 1100 \cdot 12 = 13200 \text{ kg}, \quad C = D = 1200 \cdot 18 = 21600 \text{ kg},$$

$$-H \cdot 18 + 21600 \cdot 18 - 1200 \cdot 18 \cdot 9 = 0, \quad H = 10800 \text{ ,,}$$

resultierende Reaktionen der Zwischenstützen und Endstützen:

$$B + C = D + E = 34800 \text{ kg}, \quad R = \sqrt{13200^2 + 10800^2} = 17055 \text{ kg}.$$

Die unteren Grenzwerte der Stützenreaktionen entstehen durch die feste Last allein. Sie finden sich bei gleichem Vorgehen wie oben:

$$A = B = E = F = 600 \cdot 12 = 7200 \text{ kg}, \quad C = D = 700 \cdot 18 = 12600 \text{ kg},$$

$$-H \cdot 18 + 12600 \cdot 18 - 700 \cdot 18 \cdot 9 = 0, \quad H = 6300 \text{ ,,}$$

resultierende Reaktionen der Zwischenstützen und Endstützen:

$$B + C = D + E = 19800 \text{ kg}, \quad R = \sqrt{7200^2 + 6300^2} = 9567 \text{ kg}.$$

Bogenspannungen. Für die Normalspannungen im obersten und untersten Elemente eines beliebigen symmetrisch zur Achsschicht angeordneten Querschnitts x hat man:

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}, \quad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{W}, \quad 1$$

worin bei beliebiger Belastung die Normalkraft:

$$N_x = V_x \sin \varphi + H \cos \varphi \quad \text{mit} \quad V_x = V - \sum_0^x P, \quad 2$$

das Moment:

$$M_x = V_x x - H y - \sum_0^x P(x - a), \quad 3$$

und bei den in Fig. 155 gewählten Bezeichnungen $V=C$. Die Summe Σ in 2 bedeutet alle Lasten von 0 bis x , diejenige in 3 das statische Moment dieser Lasten in Bezug auf den Achspunkt des Querschnitts x .

Im Kämpferquerschnitt $x=0$ hat man des Gelenkes wegen $M_x=0$ und in unserem Falle $N_x=C$, womit nach 1 die Grenzwerte der Normalspannungen pro qcm:

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{21\,600}{190} = 114 \text{ kg}, \quad \sigma_o = \sigma_u = \frac{12\,600}{190} = 66 \text{ kg}.$$

Im Querschnitt $x=5,272$ m treten die Grenzwerte nach dem einfacheren Verfahren S. 81 ein, wenn die Verkehrslast einmal von 0 bis z , das andere Mal von z bis l wirkt, wobei z graphisch wie in Fig. 155 und analytisch für den Halbkreisbogen mit drei Gelenken wie folgt bestimmt ist:

$$l - z : y = z : x, \quad z = \frac{l}{1 + \frac{y}{x}} \quad 4$$

$$z = \frac{36}{1 + \frac{12,728}{5,272}} = 10,544 \text{ m}.$$

Für den ersten dieser Belastungsfälle ergeben sich:

$$C \cdot 36 - 700 \cdot 36 \cdot 18 - 500 \cdot 10,544 \cdot 30,728 = 0, \quad C = 17\,100 \text{ t},$$

$$17\,100 \cdot 18 - H \cdot 18 - 700 \cdot 18 \cdot 9 - 500 \cdot 10,544 \cdot 12,728 = 0, \quad H = 7072 \text{ kg},$$

$$V_x = 17\,100 - 1200 \cdot 5,272 = 10\,744 \text{ kg},$$

$$N_x = (10\,744 + 7072) \cdot 0,7071 = 12\,619 \text{ kg},$$

$$M_x = 17\,100 \cdot 5,272 - 7072 \cdot 12,278 - \frac{1200 \cdot 5,272^2}{2} = -16\,538 \text{ mkg},$$

und damit die ersten Grenzwerte der Normalspannungen:

$$\sigma_o = \frac{12\,619}{190} - \frac{1\,653\,800}{4938} = -268 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{12\,619}{190} + \frac{1\,653\,800}{4938} = 401 \text{ "}$$

Für den zweiten der erwähnten Belastungsfälle erhalten wir:

$$C \cdot 36 - 700 \cdot 36 \cdot 18 - 500 \cdot 25,456 \cdot 12,728 = 0, \quad C = 17\,128 \text{ kg},$$

$$17\,128 \cdot 18 - H \cdot 18 - 700 \cdot 18 \cdot 9 - 500 \cdot 7,456 \cdot 3,728 = 0, \quad H = 10\,056 \text{ kg},$$

$$V_x = 17\,128 - 700 \cdot 5,272 = 13\,438 \text{ kg},$$

$$N_x = (13\,438 + 10\,056) \cdot 0,7071 = 16\,613 \text{ kg},$$

$$M_x = 17\,128 \cdot 5,272 - 10\,056 \cdot 12,728 - \frac{500 \cdot 5,272^2}{2} = -47\,422 \text{ mkg},$$

und hiermit die zweiten Grenzwerte der Normalspannungen:

$$\sigma_o = \frac{16\,613}{190} - \frac{4\,742\,200}{4938} = -873 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{16\,613}{190} + \frac{4\,742\,200}{4938} = 1048 \text{ "}$$

Im Scheitelquerschnitt $x=m=18$ m sind $M_x=0$, $N_x=H$ und also die Grenzwerte der Normalspannungen:

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{10\,800}{190} = 57 \text{ kg}, \quad \sigma_o = \sigma_u = \frac{6\,300}{190} = 33 \text{ kg}.$$

Parabelträger. Diese unterscheiden sich von gewöhnlichen Balkenfachwerken nur dadurch, daß der Horizontalschub hinzukommt, der aber nur auf die Beanspruchungen des Untergurts einen Einfluß ausübt (bei horizontalem Untergurt). Es mögen bezeichnen l, f Spannweite und Pfeil des Parabelbogens, n, λ Felderzahl und Feldlänge, x_m, d_m Längen des Obergurttabes und der Diagonale im m -ten Felde, $g, p, q = g + p$ Eigengewicht, Verkehrslast und Gesamtlast pro Längeneinheit Träger, g_z denjenigen Teil von g , der auf die Knotenpunkte des

Untergurts kommt. Dann hat man¹ auf der ersten Trägerhälfte, die der Symmetrie wegen allein zu berechnen ist, die Grenzbeanspruchungen des Obergurts:

$$X_m = -\frac{q l}{8 f} n x_m, \quad \mathfrak{X}_m = \frac{q}{q} X_m, \quad 5$$

die Grenzbeanspruchungen des Untergurts:

$$Z = \frac{q l^2}{8 f} - H_u, \quad Z = \frac{q l^2}{8 f} - H_o, \quad 6$$

unter H_u, H_o den unteren und oberen Grenzwert des Horizontalschubs verstanden, die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen:

$$D_m = \frac{n}{n+1} \frac{p l}{8 f} d_m, \quad D'_m = -D_m, \quad 7$$

und die Grenzbeanspruchungen der Vertikalen:

$$V_m = \mathfrak{V}_m - (m-1)(n-m+1) \frac{p \lambda}{2(n+1)}, \quad 8$$

$$V_m = \mathfrak{V}_m + (m-1)(n-m+1) \frac{p \lambda}{2(n+1)}, \quad 9$$

worin \mathfrak{X}_m und $\mathfrak{V}_m = g_z \lambda$ vom Eigengewicht allein herrühren.

Mit den in der Aufgabe und in Fig. 155 gegebenen Zahlen liefern diese Gleichungen für den Obergurt:

$$\begin{aligned} X_m &= -\frac{1100 \cdot 24}{8 \cdot 4} 8 x_m = -6600 x_m, & \mathfrak{X}_m &= \frac{600}{1100} X_m = -3600 x_m, \\ X_1 &= -6600 \cdot 3,473 = -22922 \text{ kg} & \mathfrak{X}_1 &= -3600 \cdot 3,473 = -12503 \text{ kg} \\ X_2 &= -6600 \cdot 3,250 = -21450 \text{ " } & \mathfrak{X}_2 &= -3600 \cdot 3,250 = -11700 \text{ " } \\ X_3 &= -6600 \cdot 3,092 = -20407 \text{ " } & \mathfrak{X}_3 &= -3600 \cdot 3,092 = -11131 \text{ " } \\ X_4 &= -6600 \cdot 3,010 = -19866 \text{ " } & \mathfrak{X}_4 &= -3600 \cdot 3,010 = -10836 \text{ " } \end{aligned}$$

für den Untergurt:

$$Z = \frac{1100 \cdot 24^2}{8 \cdot 4} - 6300 = 19800 - 6300 = 13500 \text{ kg}, \quad Z = \frac{600 \cdot 24^2}{8 \cdot 4} - 10800 = 10800 - 10800 = 0,$$

für die Diagonalen:

$$\begin{aligned} D_m &= \frac{8 \cdot 500 \cdot 24}{9 \cdot 8 \cdot 4} d_m = \frac{1000}{3} d_m, & D'_m &= -D_m, \\ D_2 &= \frac{3473}{3} = 1158 \text{ kg} & D'_2 &= -1158 \text{ kg} \\ D_3 &= \frac{4243}{6} = 1414 \text{ " } & D'_3 &= -1414 \text{ " } \\ D_4 &= \frac{4803}{3} = 1601 \text{ " } & D'_4 &= -1601 \text{ " } \end{aligned}$$

und für die Vertikalen mit $\mathfrak{V}_m = 150 \cdot 3 = 450 \text{ kg}$, $\frac{p \lambda}{2(n+1)} = \frac{500 \cdot 3}{2 \cdot 9} = 83,3 \text{ kg}$:

$$\begin{aligned} V_1 = \mathfrak{V}_1 &= 450 \text{ kg} & V_1 = \mathfrak{V}_1 &= 450 \text{ kg} \\ V_2 &= 450 - 1 \cdot 7 \cdot 83,3 = -133 \text{ " } & V_2 &= 450 + 1 \cdot 7 \cdot 83,3 = 1033 \text{ " } \\ V_3 &= 450 - 2 \cdot 6 \cdot 83,3 = -550 \text{ " } & V_3 &= 450 + 2 \cdot 6 \cdot 83,3 = 1450 \text{ " } \\ V_4 &= 450 - 3 \cdot 5 \cdot 83,3 = -800 \text{ " } & V_4 &= 450 + 3 \cdot 5 \cdot 83,3 = 1700 \text{ " } \end{aligned}$$

Hierbei sind die Grenzwerte von V_4 zu ungünstig gerechnet, da mit $n=2\sigma$ und Δ Längendifferenz der mittleren und vorhergehenden Vertikale schon etwas zu ungünstig wären²:

$$V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma - p \lambda + \frac{p l}{2 f} \Delta, \quad V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma + \frac{n-2}{4 f} p \lambda \Delta, \quad 10$$

woraus im vorliegenden Falle folgen:

$$\begin{aligned} V_4 &= 450 - 500 \cdot 3 + \frac{500 \cdot 24}{2 \cdot 4} 0,25 = -675 \text{ kg}, \\ V_4 &= 450 + \frac{6 \cdot 500 \cdot 3}{4 \cdot 4} 0,25 = 591 \text{ kg}. \end{aligned}$$

¹ Weyrauch, Statisch bestimmte Träger, Leipzig 1887, S. 133; Beispiele und Aufgaben hierzu, Leipzig 1888, S. 239.

² Weyrauch, Beispiele und Aufgaben, Leipzig 1888, S. 108.

Doch würden die Vertikalen im vorliegenden Falle ohnehin stärker als theoretisch nötig dimensioniert werden.

Bemerkungen. Wir haben oben absichtlich wenig Formeln verwendet, sonst hätten wir ähnlich wie in Beispiel 29 vorgehen können, wozu C wie dort V und der Horizontalschub durch eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit sowie für eine gleichmäßig verteilte Last von p pro Längeneinheit von 0 bis z auf der ersten Trägershälfte bestimmt sind:

$$H = \frac{u l^2}{8f} \qquad H = \frac{p z^2}{4f} \qquad 11$$

Bezüglich der Berechnung von y , $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ für den Halbkreisbogen, der oben verwendeten Werte von F , W und der Kernpunkte zur genaueren Bestimmung der ungünstigsten Belastungen gilt das in den Bemerkungen zu Beispiel 29 Gesagte. Die Normalspannungen haben für den obigen Dreigelenkbogen erheblich größere Werte erreicht als für den Zweigelenkbogen von gleichen Dimensionen und gleicher Belastung (Maximum 1048 kg gegen 666 kg pro qcm).

Beispiel 52. Durchlaufender Bogen von statisch unbestimmter Art.

Dieselbe Berechnung wie im vorigen Beispiel für den Fall durchzuführen, daß die Mittelöffnung zwar Endgelenke aber kein Zwischengelenk erhält (Fig. 156) und bei Bestimmung des Horizontalschubs H zunächst von Temperatureinflüssen und Änderungen der Spannweiten abgesehen wird (Berücksichtigung derselben mit Vergleichen s. Beispiel 53).

Stützenreaktionen. Die Grenzwerte der Vertikalreaktionen bleiben sämtlich wie im vorigen Beispiel, während man die Grenzwerte des Horizontalschubs wie beim Bogen des Beispiels 29 hat:

$$H = 9167 \text{ kg}, \qquad H = 5347 \text{ kg},$$

und damit die Grenzwerte der Stützenreaktionen an den Trägertenden:

$$R = \sqrt{13200^2 + 9167^2} = 16071 \text{ kg}, \qquad R = \sqrt{7200^2 + 5347^2} = 8968 \text{ kg}.$$

Bogenspannungen. Für die durch die Belastung erzeugten Grenzwerte der Normalspannungen gilt die Berechnung des Beispiels 29. Die Belastung der Seitenöffnungen hat keinen Einfluß, weil die durch sie bedingte Änderung der Spannweite nach der Aufgabe hier außer Betracht bleiben soll.

Parabelträger. Gegenüber dem vorigen Beispiel treten nur Änderungen infolge des etwas anderen Horizontalschubs ein. Da dieser aber einen Einfluß nur auf die Beanspruchungen des Untergurts ausübt, so bleiben die Grenzbeanspruchungen des Obergurts und der Füllungsglieder wie im vorigen Beispiel, während die Grenzbeanspruchungen des Untergurts nach den dortigen Gleichungen 6:

$$Z = 19800 - 5347 = 14453 \text{ kg}, \qquad Z = 10800 - 9167 = 1633 \text{ kg}.$$

§ 24. Besonderer Fall durchlaufender Bogen.

Wir betrachten den Bogen Fig. 149 mit beliebig vielen Öffnungen und gleichhohen Stützpunkten. In jeder Öffnung l hat man:

$$M = M' = 0, \qquad k = 0, \qquad 1$$

womit nach § 1 für die Schnittkräfte und Schnittmomente dieselben Ausdrücke wie bei einfachen Bogen mit gleichhohen Kämpfergelenken entstehen und beispielsweise die Gleichungen § 20, 1)–6) gelten. Der in allen Öffnungen gleiche Horizontalschub H ist statisch unbestimmt und mit Rücksicht darauf zu ermitteln, daß durch Belastung und Temperatur-

änderungen zwar die einzelnen Spannweiten l kleine Änderungen Δl erleiden können, die Summe aller Spannweiten

$$L = \sum l \quad 2$$

aber konstant bleiben soll. Wir werden indessen, wie bei einfachen Bogen, unbeabsichtigte Änderungen ΔL von L berücksichtigen.

Bei Ableitung von H setzen wir in den einzelnen Öffnungen symmetrische Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ (Mittelwert c) voraus. Für Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten könnte in ganz analoger Weise auf Grund von § 46 verfahren werden, doch dürfte die Parabelform, da nur eiserne Bogen in Betracht kommen, meist zu empfehlen sein. Die in § 20 verwendeten Bezeichnungen werden beibehalten und auch das in §§ 19, 20, 43 über β , ε und ihre Vernachlässigung Gesagte bleibt in Gültigkeit.

Nach § 42, 15) mit den dortigen Bezeichnungen 16, 17 hat man für eine beliebige Öffnung l im allgemeinsten Falle:

$$\Delta l = \frac{f}{3 E c l^2} \sum_0^l P a (l-a) (l^2 + l a - a^2 - \beta l^2) + \alpha \tau l - H (1 + \varepsilon) \frac{8 l f^2}{15 E c}, \quad 3$$

wofür wir mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$Q = \frac{f}{c l^2} \sum_0^l P a (l-a) (l^2 + l a - a^2 - \beta l^2), \quad 4$$

$$T = \tau l, \quad 5$$

$$h = (1 + \varepsilon) \frac{l f^2}{c} \quad 6$$

auch schreiben können:

$$\Delta l = \frac{Q}{3 E} + \alpha T - H \frac{8 h}{15 E}. \quad 7$$

Hiernach gelten in den Öffnungen l_1, l_2, \dots, l_n , wenn gleiche E, α (gleiches Trägermaterial) in denselben vorausgesetzt werden:

$$\Delta l_1 = \frac{Q_1}{3 E} + \alpha T_1 - H \frac{8 h_1}{15 E},$$

$$\Delta l_2 = \frac{Q_2}{3 E} + \alpha T_2 - H \frac{8 h_2}{15 E},$$

$$\Delta l_n = \frac{Q_n}{3 E} + \alpha T_n - H \frac{8 h_n}{15 E}.$$

Die Addition dieser n Gleichungen ergibt:

$$\Delta L = \frac{1}{3 E} \sum Q + \alpha \sum T - \frac{8 H}{15 E} \sum h, \quad 8$$

woraus der gesuchte Horizontalschub im allgemeinsten Falle:

$$H = \frac{5}{8} \frac{\sum Q + 3 E \alpha \sum T - 3 E \Delta L}{\sum h}. \quad 9$$

Die Summen \sum sind auf sämtliche Öffnungen zu erstrecken. Ist hiernach H bestimmt, so kann aus 3 oder 7 auch die Änderung Δl jeder einzelnen Spannweite ermittelt werden, was jedoch für die Dimensionenfeststellung ohne Interesse ist. Nach 9 ist der Einfluß beliebiger Belastung aller

Öffnungen, beliebiger Temperaturänderungen der letzteren und einer Änderung der Gesamtlänge ΔL je allein:

$$H = \frac{5 \Sigma Q}{8 \Sigma h}, \quad H = \frac{15 E \alpha \Sigma T}{8 \Sigma h}, \quad H = -\frac{15 E \Delta L}{8 \Sigma h}. \quad 10$$

Wie bei einfachen Bogen (§ 20), so kann auch im vorliegenden Falle β fast immer vernachlässigt werden. Für vorläufige Berechnungen darf häufig auch ε in 6 unberücksichtigt bleiben und mitunter in 4 an Stelle von $l^2 + la - a^2$ der Mittelwert $\frac{7}{6} l^2$ gesetzt werden.

Für stetig verteilte Lasten können die allgemeinen Formeln mit Rücksicht auf § 18 spezialisiert werden. So gelten in einer Öffnung, welche mit u pro Längeneinheit überall gleichmäßig belastet ist:

$$Q = \left(1 - \frac{5}{6} \beta\right) \frac{u f l^3}{5 c} \quad 11$$

und die Gleichungen § 20, 20)–22); in einer Öffnung mit verschiedenen gleichmäßig verteilten Lasten u , u' auf der ersten und zweiten Hälfte:

$$Q = \left(1 - \frac{5}{6} \beta\right) \frac{u + u'}{10} \frac{f l^3}{c} \quad 12$$

und die Gleichungen § 20, 28)–30).

Kämpferdrucklinie. Grenzwerte. Bezüglich der Umhüllungs-
linien U , U' der Kämpferdrücke und der Kernlinien in jeder betrachteten
Öffnung l bleibt es bei dem in § 20 für einfache Bogen mit zwei Gelen-
ken Gesagten (S. 120, 121). Um die Schnittlinie S der Kämpferdrücke
zu erhalten, berücksichtigen wir, daß für eine bei a in l angreifende
Einzellast P nach § 20, 2) und obigen Gleichungen 4, 9:

$$V = P \frac{l-a}{l}, \quad H = \frac{5}{8 \Sigma h} \frac{f}{c l^2} P a (l-a) (l^2 + la - a^2 - \beta l^2),$$

womit nach § 20, 46) die Gleichung der Kämpferdrucklinie S in der
Öffnung l :

$$b = \frac{8l}{5f} \frac{c \Sigma h}{l^2 + la - a^2 - l \beta^2}. \quad 13$$

Der Vergleich mit § 20, 47) zeigt, daß alle Ordinaten b

$$\frac{c}{l f^2} \frac{\Sigma h}{1 + \varepsilon} \text{ mal}$$

so groß sind, als wenn der betrachtete Trägerabschnitt einen einfachen
Bogen mit Kämpfergelenken bildete. Für einen solchen geht 13 mit
 $\Sigma h = h$ und 6 in § 20, 47) über.

Bei bewegter Last sind die Grenzwerte der Beanspruchungen in
jeder bestimmten Öffnung l durch die Belastung der letzteren ganz so zu
berechnen, als wenn der Trägerabschnitt dieser Öffnung ein einfacher
Bogen mit zwei Gelenken wäre (§ 20), selbstverständlich unter Verwendung
der nun gültigen Kämpferdrucklinie 13. Mit diesen Grenzwerten sind
die durch die Belastung außerhalb l und die Temperaturänderungen er-

zeugten Grenzwerte, welche durch die Gleichungen § 20, 54) mit den betreffenden Grenzwerten von H nach 10 ausgedrückt sind, so zu kombinieren, daß möglichst ungünstige (möglichst weit auseinander gelegene) Grenzwerte im Ganzen entstehen.

Stützenreaktionen. Als Vertikalreaktionen der Endstützen hat man natürlich das V der ersten und das V' der letzten Öffnung, entsprechend § 20, 2), 20) etc. deren Grenzwerte auch für bewegte Radlastzüge stets leicht anzugeben sind (§ 12). Dagegen ist die Vertikalreaktion einer Zwischenstütze gleich dem V' der vorhergehenden, plus dem V der folgenden Öffnung, d. h. nach § 20, 2) im allgemeinsten Falle:

$$R = \frac{1}{l_v} \sum_v P a + \frac{1}{l_n} \sum_n P (l - a), \quad 14$$

worin die Summen \sum_v , \sum_n sich auf alle Lasten in der vorhergehenden und nachfolgenden Öffnung beziehen. Die Einflußlinie von R (vergl. § 12) verläuft hiernach wie in Fig. 154. Der untere Grenzwert \mathfrak{R} tritt stets bei Belastung durch das Eigengewicht der Konstruktion allein ein, er hat für ein gleichmäßig verteiltes Eigengewicht von g pro Längeneinheit nach 14 mit Rücksicht auf § 18 oder nach § 12 mit Rücksicht auf Fig. 155 den Wert:

$$\mathfrak{R} = (l_v + l_n) \frac{g}{2}. \quad 15$$

Der obere Grenzwert entsteht, wenn die beiden anliegenden Öffnungen möglichst stark belastet sind, wobei jedoch die einzelnen Lasten um so mehr beitragen, je mehr sie sich der betreffenden Stütze selbst nähern. Man erhält ihn bei gleichmäßig verteilter Verkehrslast von p pro Längeneinheit:

$$R = \mathfrak{R} + (l_v + l_n) \frac{p}{2}, \quad 16$$

und bei bewegten Radlastzügen, wenn ein Zug mit möglichst großen Lasten möglichst dicht um ein Rad O , mit diesem Rade über der fraglichen Stütze, beide anliegenden Spannweiten belastet:

$$R = \mathfrak{R} + \frac{1}{l_v} \sum_v P a + \frac{1}{l_n} \sum_n P (l - a), \quad 17$$

worin sich nun die Summen \sum nur noch auf die Radlasten beziehen.

Der größte Horizontalschub \bar{H} entsteht bei Vollbelastung (Eigengewicht plus Verkehrslast) aller Öffnungen und höchster Temperatur, wobei im Falle bewegter Radlastzüge die größten Lasten den Öffnungsmitten möglichst zu nähern sind, der kleinste Horizontalschub tritt für Eigengewicht allein und niederste Temperatur ein.

Formänderungen. Für die Formänderungen in jeder Öffnung l gelten die in § 45 für Öffnungen mit zwei Gelenken abgeleiteten Gleichungen, worin jedoch jetzt H durch 9 bestimmt ist. Die Einsenkungen in der

Mitte einer Öffnung l durch beliebige Belastung und beliebige Temperaturänderungen aller Öffnungen, sowie durch symmetrische Belastung der betrachteten Öffnung bei beliebiger Belastung der übrigen Öffnungen, bleiben demnach durch § 20, 55) 60) 56) mit H nach obigen Gleichungen 10 bestimmt, wobei β in Q zu vernachlässigen ist, wie es bei Angabe der Einsenkungen in § 20 geschah. Man erhält also z. B. für eine Einzelast P in der Mitte von l nach § 20, 56):

$$e = \frac{Pl - 5Hf}{48Ec} l^2, \quad 18$$

für eine gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit auf der ganzen Spannweite nach § 20, 56) mit Rücksicht auf § 18:

$$e = \frac{u l^2 - 8Hf}{384Ec} 5 l^2, \quad 19$$

für verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten von u, u' pro Längeneinheit auf der ersten und zweiten Hälfte der Spannweite nach § 20, 55) mit Rücksicht auf § 18:

$$e = \frac{(u + u') l^2 - 16Hf}{768Ec} 5 l^2. \quad 20$$

Hierbei können die anderen Öffnungen noch ganz beliebig belastet sein. Soll jedoch auch H nur von der angeführten Belastung herrühren, so hat man nach 10, 4 im Falle von 18:

$$H = \frac{25 P f l^2}{128 c \Sigma h},$$

im Falle von 19:

$$H = \frac{u f l^3}{8 c \Sigma h},$$

und im Falle von 20:

$$H = \frac{u + u'}{16} \frac{f l^3}{c \Sigma h}.$$

Eine Temperaturänderung τ in der betrachteten Öffnung l (für Zunahme τ positiv) erzeugt nach § 20, 60) mit H nach 10, 5:

$$e = -\alpha \tau f \left(1 + \frac{25 l^3}{128 c \Sigma h} \right), \quad 21$$

und eine Änderung ΔL der Gesamtlänge aller Öffnungen (für Zunahme ΔL positiv) nach § 20, 62) mit 10:

$$e = \frac{25 f l^2}{128 c} \frac{\Delta L}{\Sigma h}, \quad 22$$

während eine Änderung der relativen Höhenlage der Stützen, welche die Öffnung l begrenzen (bei höherem Stützpunkt l ist Δk positiv) ergibt:

$$e = -\frac{\Delta k}{2} \quad 23$$

Sonstige Höhenänderungen der Stützen sind ohne Einfluß auf e .

Gleiche Öffnungen. Werden die Trägerabschnitte in allen Öffnungen mit gleichen l, f und gleichen Dimensionen (Querschnitte etc.) hergestellt, dann erhält man mit der Bezeichnung

$$B = \sum_0^l P a (l - a) (l^2 + la - a^2 - \beta l^2) = Q \frac{c l^2}{f} \quad 24$$

nach 4–12 den Horizontalschub durch beliebige Belastung aller Öffnungen:

$$H = \frac{5}{(1 + \epsilon) 8 f l^3} \frac{\Sigma B}{n}, \quad 25$$

und speziell für beliebige gleichmäßig verteilte Lasten von u pro Längeneinheit in den einzelnen Öffnungen:

$$H = \frac{1 - \frac{5}{6} \beta}{1 + \epsilon} \frac{l^2}{8 f} \frac{\Sigma u}{n}. \quad 26$$

Der Horizontalschub durch beliebige Temperaturänderungen τ in den einzelnen Öffnungen ist:

$$H = \frac{c E}{1 + \epsilon} \frac{15 \alpha}{8 f^2} \frac{\Sigma \tau}{n}, \quad 27$$

und der Horizontalschub durch eine Änderung ΔL ihrer Gesamtlänge L :

$$H = - \frac{c E}{1 + \epsilon} \frac{15}{8 f^2} \frac{\Delta L}{n l}. \quad 28$$

Diese Ausdrücke ergeben bei Belastung und Temperaturänderung nur einer Öffnung sowie für eine bestimmte Längenänderung ΔL gerade $1/n$ so große Werte als bei gleicher Belastung, Temperaturänderung und Längenänderung eines einfachen Bogens mit Endgelenken von den Verhältnissen der Trägerabschnitte in den einzelnen Öffnungen. Sind jedoch die Belastungen und Temperaturänderungen in allen Öffnungen dieselben, dann hat man in 25–28:

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma B}{n} &= B, & \frac{\Sigma u}{n} &= u, \\ \frac{\Sigma \tau}{n} &= \tau, & \frac{\Delta L}{n} &= \Delta l, \end{aligned}$$

(die letzte Gleichung mit Rücksicht auf 3), womit die Gleichungen 25–28 vollständig mit den entsprechenden Formeln für den einfachen Bogen mit zwei Gelenken übereinstimmen.

Aufgabe 25. Horizontalschub und Kämpferdrucklinie für einen andern Fall.

Für den in Beispiel 52 und 53 behandelten Bogen, wenn die Mittelöffnung entsprechend Fig. 156 einen Halbkreisbogen mit zwei Gelenken darstellt, den Horizontalschub H durch beliebige Belastung, beliebige gleiche Temperaturänderungen τ aller drei Öffnungen und beliebige kleine Änderungen ΔL der Gesamtlänge $L = l + 2l'$ zu bestimmen. Auch ist die Kämpferdrucklinie der Mittelöffnung festzustellen. Die Untergurten der Segmentträger seien vom Querschnitt F und abgesehen vom Horizontalschub, d. h. als einfache Balkenfachwerke, im Ganzen durch U beansprucht (F und U eventuell Mittelwerte, für U Zug positiv).

Nach § 41 hat man die Längenänderung der mittleren Spannweite l bei konstantem Trägheitsmoment J des Halbkreisbogens (eventuell Mittelwert):

$$\Delta l = \alpha \tau l + \frac{\nu}{2 E J} \left[\sum_0^l P a (l - a) - H \pi r^2 \right], \quad 1$$

die Längenänderung der beiden äußeren Spannweiten ist unmittelbar:

$$2 \Delta l' = 2 \alpha \tau l' + \frac{U - H}{E F} 2 \nu l'. \quad 2$$

Durch Addition folgt die Längenänderung aller drei Spannweiten bei Beachtung von $l = 2r$:

$$\Delta L = \alpha \tau L + \frac{l}{4EJ} \int_0^l P a (l-a) - \frac{H \pi l^3}{16EJ} + \frac{U-H}{EF} 2l', \quad 3$$

und hieraus mit der abkürzenden Bezeichnung

$$\mu = 1 + \frac{32Jl'}{\pi F l^3} \quad 4$$

der Horizontalschub im allgemeinsten Falle:

$$H = \frac{4}{\pi \mu l^2} \int_0^l P a (l-a) + \frac{16EJ}{\pi \mu l^3} \left(\alpha \tau L + \frac{2Ul'}{EF} - \Delta L \right). \quad 5$$

Diese Gleichung liefert den Beitrag beliebiger Belastung der Mittelöffnung:

$$H = \frac{4}{\pi \mu l^2} \int_0^l P a (l-a), \quad 6$$

den Beitrag der Belastung der Seitenöffnungen:

$$H = \frac{32Jl'}{\pi \mu l^3} \frac{U}{F}, \quad 7$$

die Beiträge beliebiger gleicher Temperaturänderungen τ und kleiner Änderungen ΔL der Gesamtlänge aller drei Öffnungen:

$$H = \frac{16EJ}{\pi \mu l^3} \alpha \tau L, \quad H = - \frac{16EJ}{\pi \mu l^3} \Delta L. \quad 8$$

Gleichung 6 ergibt mit Rücksicht auf § 18 beispielsweise für eine gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit auf der ganzen Spannweite l :

$$H = \frac{2ul}{3\pi\mu}, \quad 9$$

und für eine gleichmäßig verteilte Last von p pro Längeneinheit von 0 bis z :

$$H = \frac{2p z^2}{3\pi l^2} \frac{3l - 2z}{\mu}. \quad 10$$

Da ferner nach 6 und § 20, 2) für eine Einzellast P bei a :

$$H = \frac{4}{\pi \mu l^2} P a (l-a), \quad V = P \frac{l-a}{l},$$

so folgt aus § 20, 46) die Gleichung der Kämpferdrucklinie:

$$b = \frac{\pi}{4} \mu l = 0,7854 \mu l. \quad 11$$

Die Kämpferdrucklinie ist eine horizontale Gerade, die wegen $\mu > 1$ etwas über derjenigen für den einfachen Halbkreisbogen mit Kämpfergelenken liegt (vergl. S. 121).

Für $F = \infty$ würden wegen $\mu = 1$ der Horizontalschub durch Belastung und die Kämpferdrucklinie genau wie für den einfachen Halbkreisbogen mit unnachgiebigen Widerlagern, während der zweite Grenzfall $F = 0$ mit $\mu = \infty$ dem Balken entspricht. Die erste Annahme $\mu = 1$ empfiehlt sich beispielsweise bei der vorläufigen Berechnung der Querschnitte (Beispiel 52). Im nächsten Beispiel wird sich ergeben $\mu = 1,00371$.

Beispiel 53. Durchlaufender Bogen von statisch unbestimmter Art. Zur vorigen Aufgabe.

Dieselbe Berechnung wie in Beispiel 51 für den Fall durchzuführen, daß der Halbkreisbogen zwar Endgelenke aber kein Zwischengelenk erhält (Fig. 157) und bei Bestimmung des Horizontalschubs H im Gegensatz zu Beispiel 52 auch Temperaturänderungen und Änderungen der einzelnen Spannweiten berücksichtigt werden. Trägheitsmoment des Halbkreisbogens $J = 226430 \text{ cm}^4$, Untergurtquerschnitt der Segmentträger $F = 32 \text{ qcm}$.

Stützenreaktionen. Die Vertikalreaktionen der Stützen bleiben wieder sämtlich wie in Beispiel 51 bestimmt. Zur Berechnung des Horizontalschubs hat man nach der letzten Aufgabe:

$$\mu = 1 + \frac{32 \cdot 226430 \cdot 2400^2}{3,1416 \cdot 32 \cdot 3600^3} = 1,00371,$$

$$\frac{16 E J}{\pi \mu l^3} = \frac{16 \cdot 2150000 \cdot 226430}{1,00371 \cdot 3,1416 \cdot 3600^3} = 52,945.$$

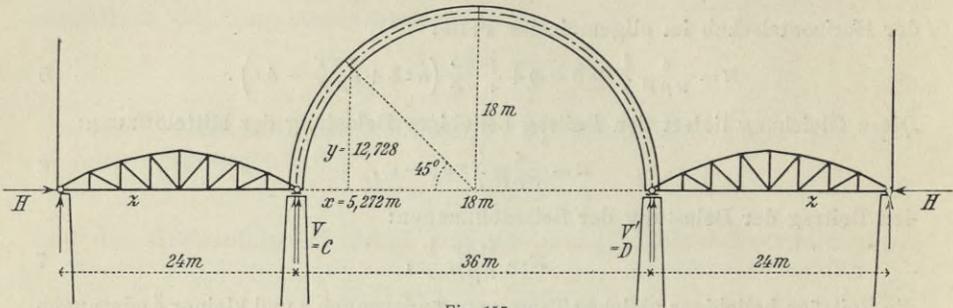


Fig. 157.

Damit liefert 9 die Grenzwerte des Horizontalschubs durch Belastung der Mittelöffnung:

$$H = \frac{2 \cdot 1200 \cdot 36}{3 \cdot 3,1416 \cdot \mu} = \frac{9167}{1,00371} = 9133 \text{ kg},$$

$$H = 9133 \cdot \frac{7}{12} = 5328 \text{ kg},$$

während nach 7 die Grenzbeiträge durch Belastung der Seitenöffnungen mit $U = 19800 \text{ kg}$ und 10800 kg (Beispiel 51):

$$H = \frac{52,945 \cdot 2 \cdot 19800 \cdot 2400}{2150000 \cdot 32} = 73 \text{ kg},$$

$$H = 73 \cdot \frac{10800}{19800} = 40 \text{ kg},$$

und die Grenzbeiträge durch Temperaturänderungen bis $\tau = \pm 30$:

$$H = \pm 52,945 \cdot 0,0000115 \cdot 30 \cdot 8400 = \pm 153 \text{ kg}.$$

Die Grenzwerte des Horizontalschubs im ganzen sind also:

$$H = 9133 + 73 + 153 = 9359 \text{ kg}, \quad H = 5328 + 40 - 153 = 5215 \text{ kg},$$

und die Grenzwerte der resultierenden Endreaktionen:

$$R = \sqrt{13200^2 + 9359^2} = 16181 \text{ kg}, \quad R = \sqrt{10800^2 + 5215^2} = 8890 \text{ kg},$$

gegen $H = 9167$ und 5347 kg sowie $R = 16071$ und 8968 kg nach der einfacheren Berechnung in Beispiel 52. Für eine Änderung ΔL der Summe aller Spannweiten würde nach 8 gelten:

$$H = -52,945 \Delta L,$$

also beispielsweise für $\Delta L = 1 \text{ cm}$ $H = -53 \text{ kg}$.

Bogenspannungen. Das Vorgehen entspricht ganz der Berechnung in Beispiel 29, nur daß der Horizontalschub und die Kämpferdrucklinie jetzt durch die letzte Aufgabe bestimmt sind. Die Kämpferdrucklinie ist danach eine Horizontale in der Höhe

$$b = 0,7854 \cdot 1,00371 \cdot 36 = 28,379 \text{ m}$$

über den Mittelpunkten der Gelenke, während sie bei dem einfachen Bogen des Beispiels 29 in der Höhe $28,274 \text{ m}$ lag.

Wir berücksichtigen zunächst den Einfluß der Belastung in der Mittelöffnung. Im Querschnitt $x = 0$ hat man die Grenzwerte der Normalspannungen pro qcm wie in Beispiel 29:

$$\sigma_o = \sigma_u = 114 \text{ kg}, \quad \sigma_o = \sigma_u = 66 \text{ kg}.$$

Im Querschnitt $x = 5,272$ m treten die Grenzwerte von σ_o , σ_u ein, wenn die Verkehrslast einmal von 0 bis z , das anderemal von z bis l wirkt, wobei z nach Fig. 119 (S. 125) bestimmt ist:

$$z = b \frac{x}{y} = 28,379 \frac{5,272}{12,728} = 11,755 \text{ m.}$$

Für den ersten dieser Belastungsfälle hat man:

$$\begin{aligned} V &= 12\,600 + 500 \cdot 11,755 \left(1 - \frac{11,755}{2 \cdot 36}\right) = 12\,600 + 4918 = 17\,518 \text{ kg,} \\ H &= 5328 + \frac{2 \cdot 500 \cdot 11,755^2}{3 \cdot 3,1416 \cdot 36^2} - \frac{3 \cdot 36 - 2 \cdot 11,755}{1,003\,71} = 5328 + 952 = 6280 \text{ kg,} \\ N_x &= (17\,518 - 1200 \cdot 5,272 + 6280) \cdot 0,7071 = 12\,354 \text{ kg,} \\ M_x &= 17\,518 \cdot 5,272 - 6280 \cdot 12,728 - 1200 \frac{5,272^2}{2} = -4253 \text{ mkg,} \end{aligned}$$

und die Grenzwerte:

$$\begin{aligned} \sigma_o &= \frac{12\,354}{190} - \frac{425\,300}{4938} = 65,0 - 86,1 = -21 \text{ kg,} \\ \sigma_u &= 65,0 + 86,1 = 151 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Für den zweiten Belastungsfall erhalten wir:

$$\begin{aligned} V &= 21\,600 - 4918 = 16\,682 \text{ kg,} \\ H &= 9133 - 952 = 8181 \text{ kg,} \\ N_x &= (16\,682 - 700 \cdot 5,272 + 8181) \cdot 0,7071 = 14\,971 \text{ kg,} \\ M_x &= 16\,682 \cdot 5,272 - 8181 \cdot 12,728 - 700 \frac{5,272^2}{2} = -25\,908 \text{ mkg,} \end{aligned}$$

und die Grenzwerte:

$$\begin{aligned} \sigma_o &= \frac{14\,971}{190} - \frac{2590\,800}{4938} = 78,8 - 524,7 = -446 \text{ kg,} \\ \sigma_u &= 78,8 + 524,7 = -604 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Im Scheitelquerschnitt $x = m = 18$ m ist $N_x = H$. Die Grenzwerte von σ_o , σ_u treten entsprechend Fig. 120 (S. 126) ein, wenn die Verkehrslast einmal von 0 bis $l - b = 7,621$ m und von $b = 28,379$ m bis l , das anderemal von $l - b = 7,621$ m bis $b = 28,379$ m reicht. Für die erste dieser symmetrischen Belastungen ergeben sich (bezüglich H nach Gleichung 10 der letzten Aufgabe):

$$\begin{aligned} V &= 12\,600 + 500 \cdot 7,621 = 12\,600 + 3810 = 16\,410 \text{ kg,} \\ H &= 5328 + 2 \frac{2 \cdot 500 \cdot 7,621^2}{3 \cdot 3,1416 \cdot 36^2} - \frac{3 \cdot 36 - 2 \cdot 7,621}{1,003\,71} = 5328 + 879 = 6207 \text{ kg,} \\ M_x &= 16\,410 \cdot 18 - 6207 \cdot 18 - 700 \cdot 18 \cdot 9 - 500 \cdot 7,621 \cdot 14,190 = 16\,183 \text{ mkg,} \end{aligned}$$

und die Grenzwerte:

$$\begin{aligned} \sigma_o &= \frac{6207}{190} + \frac{1\,618\,300}{4938} = 32,7 + 327,7 = 360 \text{ kg,} \\ \sigma_u &= 32,7 - 327,7 = -295 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Für den zweiten Belastungsfall erhält man:

$$\begin{aligned} V &= 21\,600 - 3810 = 17\,790 \text{ kg,} \\ H &= 9133 - 879 = 8254 \text{ kg,} \\ M_x &= 17\,790 \cdot 18 - 8254 \cdot 18 - 700 \cdot 18 \cdot 9 - 500 \frac{10,379^2}{2} = 31\,317 \text{ mkg,} \end{aligned}$$

und die Grenzwerte:

$$\begin{aligned} \sigma_o &= \frac{8254}{190} + \frac{3\,131\,700}{4938} = 43,4 + 634,2 = 678 \text{ kg,} \\ \sigma_u &= 43,4 - 634,2 = -591 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Die Belastungen der äußeren Öffnungen und die Temperaturänderungen haben auf die Beanspruchungen der Mittelöffnung nur infolge der durch sie bewirkten Änderungen des Horizontalschubs Einfluß. Die Grenzwerte dieser Änderungen sind nach dem oben unter „Stützenreaktionen“ Gesagten:

$$H = 73 + 153 = 226 \text{ kg,} \quad H = 40 - 153 = -113 \text{ kg.}$$

Für $x=0$ sind wegen $N_x = V = 0$, $M_x = 0$ die Einflüsse auf σ_o , σ_u gleich Null. Dagegen erhält man für $x = 5,272$ m mit $H = 226$ kg:

$$N_x = 226 \cdot 0,7071 = 160 \text{ kg}, \quad M_x = -226 \cdot 12,728 = -2876 \text{ mkg},$$

$$\sigma_o = \frac{160}{190} - \frac{287600}{4938} = 0,8 - 58,3 = -57 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = 0,8 + 58,3 = 59 \text{ kg},$$

und mit $H = -113$ kg:

$$N_x = -113 \cdot 0,7071 = -79,9 \text{ kg}, \quad M_x = 113 \cdot 12,728 = 1438 \text{ mkg},$$

$$\sigma_o = -\frac{79,9}{190} + \frac{143800}{4938} = -0,4 + 29,1 = 29 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = -0,4 - 29,1 = -29 \text{ kg}.$$

Für $x = m = 18$ m haben wir mit $H = 226$ kg:

$$N_x = H = 226 \text{ kg}, \quad M_x = -226 \cdot 18 = -4068 \text{ mkg},$$

$$\sigma_o = \frac{226}{190} - \frac{406800}{4938} = 1,2 - 82,4 = -81 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = 1,2 + 82,4 = 84 \text{ kg},$$

und mit $H = -113$ kg:

$$N_x = H = -113 \text{ kg}, \quad M_x = 113 \cdot 18 = 2034 \text{ mkg},$$

$$\sigma_o = -\frac{113}{190} + \frac{203400}{4938} = -0,6 + 41,2 = 41 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = -0,6 - 41,2 = -42 \text{ kg}.$$

Mit Berücksichtigung der Belastung der äußeren Öffnungen und der Temperaturänderungen sind nun die Grenzwerte der Normalspannungen (negative bedeuten Zug) bei $x=0$:

$$\sigma_o = \sigma_u = 114 \text{ kg (114 kg)}, \quad \sigma_o = \sigma_u = 66 \text{ kg (66 kg)},$$

bei $x = 5,272$ m:

$$\sigma_o = -446 - 57 = -503 \text{ kg (- 453 kg)}, \quad \sigma_o = -21 + 29 = 8 \text{ kg (- 27 kg)},$$

$$\sigma_u = 604 + 59 = 663 \text{ n (611 n)}, \quad \sigma_u = 151 - 29 = 122 \text{ n (157 n)},$$

und bei $x = 18$ m:

$$\sigma_o = 678 + 41 = 719 \text{ kg (666 kg)}, \quad \sigma_o = 360 - 81 = 279 \text{ kg (353 kg)},$$

$$\sigma_u = -591 - 42 = -633 \text{ n (- 579 n)}, \quad \sigma_u = -295 + 84 = -211 \text{ n (- 287 n)}.$$

Die in Klammer beigesetzten Zahlen haben sich bei der einfacheren Berechnung im vorigen Beispiel ergeben, welche hiernach zur vorläufigen Bestimmung der Querschnitte (behufs nachfolgender genauere Berechnung, bei der J , F nötig sind) genügt hätte. Noch näher wären wir den genaueren Werten gekommen, wenn wir entsprechend Beispiel 29 auch die Temperaturänderungen der Mittelöffnung berücksichtigt hätten (vergl. die dortigen Endwerte).

Parabelträger. Wie in Beispiel 52 treten gegenüber der Berechnung in Beispiel 51 nur Änderungen der Grenzbeanspruchungen des Untergurts ein. Infolge der neuen Grenzwerte des Horizontalschubs sind jetzt nach Formel 6 in Beispiel 51 die Grenzbeanspruchungen des Untergurts:

$$Z = 19800 - 5215 = 14585 \text{ kg}, \quad Z = 10800 - 9359 = 1441 \text{ kg},$$

gegen 14453 kg und 1633 kg im vorigen Beispiel.

§ 25. Ketten (Kabel, Stabketten).

Auch die Ketten sind zu den Bogenträgern zu rechnen. Eine vollkommene Kette ist ein Bogen mit stetig aufeinanderfolgenden (reibunglosen) Gelenken. Wir haben also für dieselben nach § 8, 1) in allen Querschnitten:

$$M_x = c N_x = 0, \quad c = 0, \quad 1$$

und damit nach § 1, 13): $\frac{dM_x}{ds} = T_x = 0, \quad 2$

das heißt auch nach § 1, 10) 11):

$$V_x \cos \varphi - H \sin \varphi = 0, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{V_x}{H} = \operatorname{tg} \psi. \quad 3$$

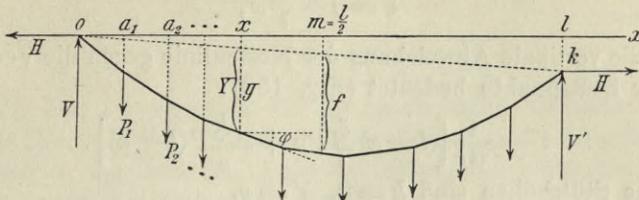


Fig. 158.

Die Transversalkräfte sind gleich Null, die resultierenden Schnittkräfte greifen in der Achse an und wirken tangential der letzteren oder normal den Querschnitten. In allen Beziehungen für Ketten wollen wir die Ordinaten y nach unten, den Horizontalschub H nach außen und ziehende Normalkräfte N_x als positiv ansehen (Fig. 158), was nach § 1 ohne Änderung der dortigen Formeln zulässig ist.

Wie für alle Querschnitte so sind auch bei den Stützen die Momente gleich Null. Mit $M = M' = 0$ hat man in jeder Öffnung nach § 1, 4), 5) die Vertikalreaktionen der Stützen:

$$V = \frac{1}{l} \sum_0^l P(l - a) + H \frac{k}{l}, \quad V' = \frac{1}{l} \sum_0^l Pa - H \frac{k}{l}, \quad 4$$

nach § 1, 2), 7) die Vertikalkraft in einem beliebigen Querschnitt x :

$$V_x = V - \sum_0^x P = \frac{1}{l} \left[Hk - \sum_0^x Pa - \sum_x^l P(l - a) \right] \quad 5$$

und nach § 1, 12) die resultierende Schnittkraft im Querschnitt x :

$$R_x = \sqrt{H^2 + V_x^2} = H \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}, \quad 6$$

oder nach § 1, 12), 9):

$$R_x = N_x = V_x \sin \varphi + H \cos \varphi. \quad 7$$

In jeder Öffnung und bei jeder Belastung tritt nach 6 die größte Beanspruchung der Kette beim größten Neigungswinkel φ der Achse, das heißt in praktischen Fällen beim höchsten Stützpunkt auf. Man hat dafür, wenn der Ursprung der Koordinaten im höchsten Stützpunkt liegt:

$$R = \sqrt{H^2 + V^2} = H \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}. \quad 8$$

Je nach der Belastung kann die Kettenachse sehr verschiedene Formen annehmen. Alle so entstehenden Linien heißen Kettenlinien. Die allgemeinste Gleichung der Kettenlinien, das heißt ihre Gleichung für beliebige Belastung, ist mit $M_x = M = M' = 0$ nach § 1, 3):

$$y = \frac{1}{H} \left[V_x - \sum_0^x P(x-a) \right], \quad 9$$

oder auch nach § 1, 8):

$$y = \frac{k}{l} x + \frac{1}{Hl} \left[(l-x) \sum_0^x P a + x \sum_x^l P(l-a) \right], \quad 10$$

und wenn gesetzt wird:

$$Y = y - \frac{k}{l} x, \quad 11$$

womit Y die vertikale Abweichung der Kettenlinie gegen die Verbindungsgerade der Stützpunkte bedeutet (Fig. 158):

$$Y = \frac{1}{Hl} \left[(l-x) \sum_0^x P a + x \sum_x^l P(l-a) \right]. \quad 12$$

Für gleiche Stützhöhen sind $k=0$, $Y=y$.

Kennt man für irgend einen Punkt x der Kettenlinie, abgesehen von den Stützpunkten, die Ordinate y oder den Wert Y , so liefern vorstehende Gleichungen auch den Horizontalschub H . Wird beispielsweise für $x = m = \frac{l}{2}$ gesetzt $Y=f$, so folgt aus 12:

$$H = \frac{1}{2f} \left[\sum_0^m P a + \sum_m^l P(l-a) \right]. \quad 13$$

Auch wenn für irgend einen Kettenpunkt, abgesehen vom Scheitel, der Neigungswinkel φ bekannt wäre, würde sich H berechnen lassen.

Für stetig verteilte Lasten können die obigen allgemeinen Beziehungen mit Rücksicht auf § 18 spezialisiert werden. Ist beispielsweise die Belastung mit u pro Längeneinheit auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilt, so liefert § 18:

$$\sum_0^x P a = \frac{u x^2}{2}, \quad \sum_x^l P(l-a) = \frac{u}{2} (l-x)^2,$$

und speziell:

$$\sum_0^l P a = \frac{u l^2}{2}, \quad \sum_0^l P(l-a) = \frac{u l^2}{2},$$

womit nach 4, 5):

$$V = \frac{u l}{2} + \frac{k}{l} H, \quad V' = \frac{u l}{2} - \frac{k}{l} H, \quad 14$$

$$V_x = \frac{u}{2} (l-2x) + H \frac{k}{l}, \quad 15$$

und nach 12, 11 die Gleichung der Kettenlinie:

$$Y = x(l-x) \frac{u}{2H} = y - \frac{k}{l} x. \quad 16$$

Wir haben in diesem Falle die parabolische Kettenlinie. Die Tangente ihres Neigungswinkels bei x folgt aus 3 mit 15:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k}{l} + (l-2x) \frac{u}{2H}, \quad 17$$

wie sich auch durch Differentiation von 16 nach x ergeben hätte. Wird wieder für $x = m$ gesetzt $Y = f$ (Fig. 159), so drückt sich zufolge 16 der Horizontalschub aus:

$$H = \frac{ul^2}{8f}, \quad 18$$

womit wir nach 16, 17 auch schreiben können:

$$y = x(l-x) \frac{4f}{l^2} = y - \frac{k}{l} x, \quad 19$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k}{l} + (l-2x) \frac{4f}{l^2}. \quad 20$$

Wie hier die Formeln für die parabolische Kettenlinie, so können auch die Gleichungen für andere Kettenlinien aus 1—13 erhalten werden. Die häufig in der höheren Analysis behandelte gemeine Kettenlinie entsteht, wenn die Belastung nicht wie bei der parabolischen Kettenlinie auf die Horizontalprojektion der Kette, sondern auf die Kettenlänge gleichmäßig verteilt ist. Dies trifft z. B. zu bei homogenen Ketten konstanten Querschnitts, welche nur ihr eigenes Gewicht tragen. Ihre Form nähert sich der parabolischen Kettenlinie um so mehr, je flacher gespannt die Kette, je kleiner das Pfeilverhältnis $\varphi = f:l$ ist. Übrigens ist die gemeine Kettenlinie praktisch von geringer Bedeutung. Die Kabel der Hängebrücken beispielsweise pflegen gegenwärtig parabolische Form zu erhalten, was voraussetzt, daß ihre „Normalbelastung“ auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilt ist. Es gilt dann als Aufgabe der sogenannten Versteifungsträger alle weiter hinzukommenden Lasten so auf die Ketten zu verteilen, daß diese ihre Form nicht zu ändern brauchen, das heißt, daß die Belastung pro Längeneinheit Spannweite konstant bleibt. Hierauf beruht die Berechnung der Versteifungsträger. Da alles dies jedoch in der Theorie der Hängebrücken eine besondere Behandlung findet¹, so haben wir keinen Grund, hier näher darauf einzugehen.

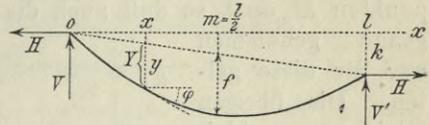


Fig. 159.

Hätten wir neben beliebigen konzentrierten Lasten eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit, so erhielte man nach den obigen allgemeinen Beziehungen durch Ausscheiden der gleichmäßig verteilten Last aus den Summen Σ oder einfacher durch Addition der gegebenen Ausdrücke für gleichmäßig verteilte und beliebige konzentrierte Lasten:

$$V = \frac{ul}{2} + \frac{1}{l} \sum_0^l P(l-a) + H \frac{k}{l}, \quad 21$$

$$V' = \frac{ul}{2} + \frac{1}{l} \sum_0^l Pa - H \frac{k}{l}, \quad 22$$

¹ Schwend, Über Berechnung und Konstruktion von Hängebrücken, Leipzig 1887. Müller-Breslau, Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Band 1, Leipzig 1901, S. 104; Band 2, 1. Abteilung, Leipzig 1903, S. 167, 265, 289, 418, 433; Band 2, 2. Abteilung, Leipzig 1908, S. 393. Bohny, Theorie und Konstruktion versteifter Hängebrücken, Leipzig 1905. Handbuch der Ingenieurwissenschaften, Band 2, 5. Abteilung: Eiserne Bogenbrücken und Hängebrücken, Leipzig 1906. Luegers Lexikon der gesamten Technik, Artikel Hängebrücken (dasselbst auch weitere Literatur).

$$V_x = H \operatorname{tg} \varphi = V - ux - \sum_0^x P = \frac{u}{2} (l - 2x) + \frac{1}{l} \left[Hk - \sum_0^x Pa + \sum_x^l P(l-a) \right], \quad 23$$

$$Y = \frac{1}{Hl} \left[x(l-x) \frac{ul}{2} + (l-x) \sum_0^x Pa + x \sum_x^l P(l-a) \right] = y - \frac{k}{l} x, \quad 24$$

$$H = \frac{1}{2f} \left[\frac{ul^2}{4} + \sum_0^m Pa + \sum_m^l P(l-a) \right]. \quad 25$$

Je flacher gespannt die Kette ist, desto eher kann ihr Eigengewicht als gleichmäßig verteilt auf die Spannweite angesehen werden.

Während Drahtseile (Kabel) als vollkommene Ketten berechnet zu werden pflegen, kommen bei Hängebrücken auch Ketten vor, welche aus gelenkartig verbundenen geraden Stäben von endlichen Längen bestehen (Stabketten, Fig. 160). Für solche ist nur in den betreffenden Gelenkpunkten $M_x = 0$, so daß auch die abgeleiteten Ausdrücke von y , Y , $\operatorname{tg} \varphi$ genau genommen nur für diese gelten. Die übrigen Gleichungen bleiben für praktische Zwecke ohne weiteres anwendbar.

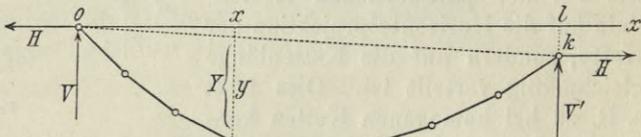


Fig. 160.

Die Ketten sind diejenigen Träger, durch welche die größten Spannweiten bewältigt werden können. Dies ist sowohl durch die hervorragenden Festigkeitseigenschaften des für sie erhältlichen Trägermaterials wie durch dessen vorteilhafte Ausnutzung bedingt. Während bisher für Balkenbrücken und Bogenbrücken meist Schweißeisen und Flußeisen von 3500 bis 4500 kg pro qcm Zugfestigkeit zur Verwendung kamen, wird jetzt ein zu Brückenkabeln geeigneter Gußstahldraht mit Festigkeiten von 12000 bis 15000 kg pro qcm hergestellt. Hierzu kommt, daß die Schnittkräfte, weil in der Achse angreifend (s. oben), sich gleichmäßig auf die Querschnitte verteilen, die Widerstandsfähigkeit also nicht wie bei Balkenträgern und gewöhnlichen Bogenträgern nur an gewissen Stellen ausgenutzt werden kann. Auch treten nur Zugkräfte auf, so daß keine Knickwirkungen in Betracht kommen. Selbstverständlich sind auch für Ketten um so größere Spannweiten erreichbar, je weniger fremde Last sie aufzunehmen haben, bei einer Fußgängerbrücke beispielsweise erheblich größere als bei Eisenbahnbrücken. Die größten überhaupt möglichen Spannweiten von Trägern würden sich ergeben für Ketten, die nur ihr eigenes Gewicht zu tragen hätten (Beispiel 55).

Beispiel 54. Telephondraht über den Wallensee von Quinten nach Murg¹.

Der bezeichnete Telephondraht besaß bei 2 mm Dicke und 140 kg pro qmm Zugfestigkeit eine Spannweite $l = 2400$ m, eine Differenz der Stützhöhen $k = 230$ m und den Pfeil $f = 180$ m (Fig. 161). Wenn nun der Draht parabolisch

¹ Weyrauch, Über die Zunahme der Brückenspannweiten im neunzehnten Jahrhundert, Zeitschrift für Bauwesen 1901, S. 465, 617 (speziell 631).

und frei von Biegungswiderständen vorausgesetzt wird, welche größte Beanspruchung desselben entstand bei ruhender Belastung durch das Eigengewicht allein von 0,027 kg pro Meter Drahtlänge, welche Sicherheit bestand hierfür und welche Vertikaldrücke hätte der Draht auf die Stützen ausgeübt, wenn er von diesen aus annähernd horizontal weiter geführt gewesen wäre?

Bei parabolischem Draht ohne Biegungswiderstände ist die Belastung auf die Spannweite gleichmäßig verteilt. Da nun die Länge flacher Parabelbogen der Spannweite l , Stützhöhendifferenz k und des Pfeiles f genügend genau:

$$s = l + \frac{k^2}{2l} + \frac{8f^2}{3l},$$

in unserem Falle:

$$s = 2400 + \frac{230^2}{2 \cdot 2400} + \frac{8 \cdot 180^2}{3 \cdot 2400} = 2447 \text{ m},$$

so hat man als Belastung pro Meter Spannweite zu rechnen:

$$u = 0,027 \frac{2447}{2400} = 0,0275288 \text{ kg}.$$

Es ergeben sich hiermit nach § 25, 18), 14), 8) der Horizontalschub

$$H = 0,0275288 \frac{2400^2}{8 \cdot 180} = 110,115 \text{ kg},$$

die Vertikaldrücke auf die Stützen (da die horizontalen Drahtstücke außerhalb der Spannweite l nichts beitragen):

$$V = 0,0275288 \cdot 1200 + \frac{230}{2400} 110,115 = 43,59 \text{ kg},$$

$$V' = 0,0275288 \cdot 1200 - \frac{230}{2400} 110,115 = 22,48 \text{ „},$$

und die größte resultierende Beanspruchung des Drahts (bei der höchsten Stütze):

$$R = \sqrt{110,115^2 + 43,59^2} = 118,43 \text{ kg},$$

oder bei 2 mm Drahtdurchmesser pro qmm Querschnitt:

$$\frac{118,43}{1^2 \pi} = 37,70 \text{ kg}.$$

Da nun die Festigkeit pro qmm 140 kg betrug, so war die Sicherheit gegen ruhende Belastung durch das Eigengewicht allein:

$$\frac{140}{37,70} = 3,71.$$

Bemerkungen. Hätten wir als Belastung pro Meter Spannweite das Eigengewicht pro Meter Draht angenommen, also $u = 0,027 \text{ kg}$, dann würden sich in ganz gleicher Weise wie oben ergeben haben: $H = 108,000 \text{ kg}$, $V = 42,75 \text{ kg}$, $V' = 22,05 \text{ kg}$, $R = 116,15 \text{ kg}$ und mit der Beanspruchung 36,97 kg pro qmm die Sicherheit 3,79.

Wäre anstatt des Pfeiles f die Drahtlänge s zwischen den Stützpunkten bekannt gewesen, so hätte man aus obigem Ausdruck von s erst f berechnen und dann ganz wie oben verfahren können. Angenommen beispielsweise, es sei gegeben $s = 2425 \text{ m}$, dann würden folgen:

$$2425 = 2400 + \frac{230^2}{2 \cdot 2400} + \frac{8 \cdot f^2}{3 \cdot 2400}, \quad f = 112,17 \text{ m},$$

und damit wie oben: $u = 0,0272812 \text{ kg}$, $H = 175,113 \text{ kg}$, $V = 49,52 \text{ kg}$, $V' = 15,96 \text{ kg}$, $R = 181,98 \text{ kg}$, Beanspruchung pro qmm 57,93 kg, Sicherheit 2,42.

Zu der oben berücksichtigten Belastung durch das Eigengewicht allein kommt die Belastung durch Winddruck, Eis- und Schneedruck, sodaß schon bei ruhender Belastung erheblich größere Beanspruchungen als oben berechnet entstehen konnten. In Wirklichkeit ging die Leitung nach Mitteilungen des Erstellers, Herrn von Schopfer, durch Mitwirkung lebendiger Kraft zu Grunde.

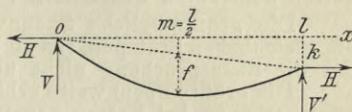


Fig. 161.

Bei den in jener Gegend häufig auftretenden Stürmen wird der Draht vom Winde gehoben und wieder fallen gelassen. Dies veranlaßt gegen die Enden Zwicke, wie wenn mit der Peitsche geknallt wird, womit sehr starke Beanspruchungen verbunden sind. Die Leitung wurde dreimal hergestellt, zweimal mit dem oben erwähnten Stahldraht von 2 mm Dicke und 440 kg Gesamtfestigkeit, das andere Mal mit einem Drahtseil aus drei Stahldrähten von 2 mm Dicke und 1650 kg Seilfestigkeit. Sie bestand vom April 1895 bis Mai 1898.

Aufgabe 26 mit Beispiel 55. Grenzen der Spannweiten flachgespannter Ketten konstanten Querschnitts.

Die größtmögliche Spannweite l von Ketten konstanten Querschnitts F mit gleichhohen Stützpunkten zu berechnen, wenn das Pfeilverhältnis $f/l = \varphi$ sein und die Beanspruchung nicht über σ pro Querschnittseinheit hinausgehen soll.

Die größte Spannweite erhält man, wenn die Kette nur ihr eigenes Gewicht trägt. Dies ist bei Ketten konstanten Querschnitts gleichmäßig auf die Kettenlänge s verteilt und damit bei den üblichen kleinen Pfeilverhältnissen φ auch annähernd gleichmäßig verteilt auf die Spannweite. Die Kette wird also nach § 25 annähernd parabolisch und die größte Beanspruchung des ganzen Querschnitts nach § 25, 8), 14), 18) mit $k = 0$:

$$R = \frac{u l^2}{8 f} \sqrt{1 + \frac{16 f^2}{l^2}}. \quad 1$$

Berücksichtigt man hierin neben $R = F \sigma$ und $f/l = \varphi$, daß die durchschnittliche Belastung pro Längeneinheit Spannweite, wenn γ das Gewicht der Volumeneinheit Kettenmaterial bezeichnet:

$$u = F \gamma \frac{s}{l} = F \gamma \left(1 + \frac{8 f^2}{3 l^2}\right), \quad 2$$

so folgt die gesuchte Grenzspannweite:

$$l = \frac{8 \varphi \sigma}{\gamma \left(1 + \frac{8}{3} \varphi^2\right) \sqrt{1 + 16 \varphi^2}}. \quad 3$$

Es sei z. B. pro Kubikmeter $\gamma = 7850$ kg und soll die größte Spannweite für das Pfeilverhältnis $\varphi = 1/10$ berechnet werden. Dann liefert 3, wenn σ in kg pro qcm eingesetzt werden soll:

$$l = \frac{8 \cdot 0,1 \cdot 10\,000 \sigma}{7850 \left(1 + \frac{8}{300}\right) \sqrt{1 + \frac{16}{100}}} = 0,9216 \sigma,$$

und für	$\sigma = 1000$	2000	4000	8000	16 000 kg
	$l = 922$	1843	3686	7373	14 746 m.

In gleicher Weise ergeben sich

im Falle $\varphi = 1/8$: $l = 1,0938 \sigma,$

und für	$\sigma = 1000$	2000	4000	8000	16 000 kg
	$l = 1094$	2188	4375	8750	17 501 m.

Bemerkungen. Die Resultate wären etwas genauer geworden, wenn wir als Belastung von 0 bis x nicht $u x$ sondern richtig $F' \gamma s_x$, dabei aber die Kettenlänge s_x von 0 bis x einer flachen Parabel entsprechend eingeführt hätten:

$$s_x = x \left[1 + \frac{8 f^2}{3 l^4} (3 l^2 - 6 l x + 4 x^2)\right]. \quad 4$$

Es würden sich anstatt 1, 3 ergeben haben:

$$R = F \frac{\gamma l^2}{8 f} \sqrt{\left(1 + \frac{4 f^2}{3 l^2}\right)^2 + \frac{16 f^2}{l^2} \left(1 + \frac{8 f^2}{3 l^2}\right)^2}, \quad 5$$

$$l = \frac{8 \varphi \sigma}{\gamma \sqrt{\left(1 + \frac{4}{3} \varphi^2\right)^2 + 16 \varphi^2 \left(1 + \frac{8}{3} \varphi^2\right)^2}}, \quad 6$$

und wie oben vorgehend speziell

wenn	$\varphi = 1/10:$	$l = 0,9320 \sigma,$		wenn	$\varphi = 1/8:$	$l = 1,1116 \sigma,$
z. B. für		$\sigma = 1000$	2000	4000	8000	16000 kg
mit $\varphi = 1/10$		$l = 932$	1864	3728	7456	14912 m
„ $\varphi = 1/8$		$l = 1112$	2223	4446	8893	17786 m.

Beispiel 56. Über Grenzen der Spannweiten von Hängebrücken.

Eine anlässlich der Frage einer Überbrückung des Hudson (North-River) in New-York vom Kriegsminister der Vereinigten Staaten eingesetzte Kommission zur Ermittlung der größten praktisch erreichbaren Spannweite von Hängebrücken¹ kam unter Voraussetzung einer sechsgeleisigen Eisenbahnbrücke, deren 16 parabolische Kabel mit gleichen Stützhöhen vom Pfeilverhältnis $1/8$ aus je 6000 Gußstahldrähten mit 2039 qcm Metallquerschnitt bestanden und mit $1/3$ der Zugfestigkeit von 12654 kg pro qcm beansprucht werden sollten, zu einer Gesamtbelastung pro Meter der Spannweite l :

$$u = \frac{12593940}{l} + 46913 + 15,8640 l + 0,0088645 l^2 + 0,0000001583 l^3 \text{ kg.}$$

Die größte alsdann mögliche Spannweite zu berechnen.

Nach § 25 hat man wie im vorigen Beispiel die größte Beanspruchung der parabolischen Kabel:

$$R = \frac{u l^2}{8 f} \sqrt{1 + \frac{16 f^2}{l^2}} = \frac{u l}{8} \sqrt{16 + \frac{l^2}{f^2}},$$

wonach bei einer Beanspruchung von σ pro qcm des Querschnitts F mit $R = F \sigma$:

$$u l = \frac{8 F \sigma}{\sqrt{16 + \frac{l^2}{f^2}}}.$$

Da hiernach in unserem Falle:

$$u l = \frac{8 \cdot 16 \cdot 2039 \cdot 4218}{\sqrt{16 + 8^2}} = 123079936,$$

so folgt mit dem gegebenen u die Bedingungsgleichung für die gesuchte Spannweite l :

$$0,0000001583 l^4 + 0,0088645 l^3 + 15,8640 l^2 + 46913 l - 110485996 = 0,$$

woraus:

$$l = 1320 \text{ m.}$$

Für diese Spannweite liefert der gegebene Ausdruck von u die größte Belastung der sechsgeleisigen Brücke pro Meter Spannweite $u = 93204 \text{ kg}$.

Bemerkungen. Die berechnete Spannweite gilt selbstverständlich nur unter einer Reihe spezieller Voraussetzungen, über welche die angeführten Schriften Aufschluß geben. Der Kriegsminister hatte eigentlich die größte erreichbare Spannweite für den Fall gewünscht, daß der Verkehr mit Wahrscheinlichkeit hinreiche, die Kosten zu decken. Es wurde jedoch die Kostenfrage zunächst ausgeschieden, sodaß bei obigen Angaben nur technische Gesichtspunkte berücksichtigt sind. Bezüglich der Kosten und ihrer Deckung durch den Verkehr konnte die Kommission nicht zu allgemeinen Schlüssen gelangen, weshalb sie vorzog, die Frage unter örtlichen Beschränkungen zu prüfen. Das Ergebnis war, daß eine sechsgeleisige Eisenbahnbrücke über den Hudson in New-York von etwa 975 m erforderlicher Spannweite sehr wohl ausgeführt und ihre Kosten durch den Verkehr eingebracht werden könnten. Die Anlagekosten waren von der Kommission auf mindestens 92 Millionen Mark, vom New-Yorker Bauausschuß bei leichter jedoch reichlich genügender Konstruktion auf 123 Millionen, von einem durch den Präsidenten der Vereinigten Staaten eingesetzten Ausschuß auf 140 Millionen geschätzt worden.

¹ Report of board of Engineer officers as to maximum span practicable for suspension bridges, Washington 1894. Weyrauch, Über die Zunahme der Brückenspannweiten im neunzehnten Jahrhundert, Zeitschrift für Bauwesen 1901, S. 465, 617 (speziell 633).

§ 26. Bemerkungen betreffend Blechbogen.

Bei Blechbogen lassen sich die Querschnitte im allgemeinen noch weniger als bei Blechbalken den wirkenden Kräften genau anpassen. Die Dimensionierung erfolgt gewöhnlich allein auf Grund der Normalspannungen σ in den Querschnittselementen, da die Schubspannungen τ bei Bogen meist nur geringe Werte erlangen (Beispiel 8). Für symmetrisch zur Achsschicht angeordnete Querschnitte pflegen die Grenzwerte der Normalspannungen σ_o , σ_u im obersten und untersten Querschnittselement (welche die Werte aller andern σ des Querschnitts einschließen) nicht gleich groß und auch ihre Veränderlichkeit von der Mitte nach den Auflagern keine einfache zu sein. Wollte man aber die Querschnitte den Beanspruchungen entsprechend unsymmetrisch herstellen, so würde die Stabachse nicht mehr die vorausgesetzte regelmäßige Form haben und die Konstruktion an Einfachheit verlieren, ohne daß die Einhaltung der vorausgesetzten Beanspruchungen gesichert erschiene. Durch geeignete Wahl der Trägerhöhen und Gurtungsquerschnitte läßt sich übrigens stets erreichen, daß auch bei symmetrischen Querschnitten keine übermäßige Verschiedenheit der Beanspruchungen entsteht.

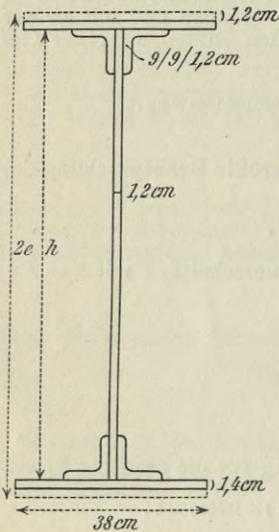


Fig. 162.

Für die Blechbogen mit zwei Gelenken der im VI. Abschnitt behandelten Neckarbrücke bei Cannstatt beispielsweise sind die Spannweite und der Pfeil der Achse in den Öffnungen

I	II	III	IV	V:
$l = 45,51$	48	50,48	48	45,51 m,
$f = 4,375$	4,735	4,855	4,505	3,695 „ .

Die Fahrbahnlast wird durch sechs parallele Bogen aus Martinflußeisen getragen (Fig. 162) bestehend aus je vier Winkeleisen von 9/9/1,2 cm, zwei durchgehenden Horizontalplatten von 38/1,4 cm, zwei horizontalen Verstärkungsplatten von 38/1,2 cm, die über dem Scheitel weggehend etwa 4 m von den Auflagern endigen, und einer Vertikalplatte von 1,2 cm Dicke, deren Höhe h vom Scheitel nach den Auflagern so zunimmt, daß

min $h = 75$	79	83	79	75 cm,
max $h = 86$	90	94	90	86 „ .

Bei dieser einfachen Anordnung ergaben sich die größten Normalspannungen einschließlich des Einflusses der Temperaturänderungen, wenn als Verkehrslast nur Menschengedränge angenommen wurde, z. B. für Öffnung IV in den Entfernungen von den Gelenken:

$x = 2,682$	$5,190$	$7,698$	$10,206$	$12,714$	$15,222$	$17,730$	$20,238$	$22,746$ m:
$\sigma_o = 836$	764	854	902	934	937	895	844	797 kg/qcm,
$\sigma_u = 967$	827	915	960	951	911	866	792	„ „ .

Bei Berücksichtigung der Straßenwalze wurden die Grenzwerte in der Nähe der Bogenmitte etwas größer, in der Mitte selbst $\sigma_o = 901$ kg, $\sigma_u = 900$ kg. Zu diesen Werten hat ein künstlicher Horizontal-schub (vergl. die Aufgaben 17, 19, 43 sowie VI E, N) von 1950 kg insofern beigetragen, als dadurch die σ_o um -13 bis -70 kg, die σ_u um 26 bis 81 kg geändert wurden. Für Belastung durch das Eigengewicht allein, der die wirkliche Belastung während der längsten Zeit nahe bleibt, wurde fast vollständige Gleichheit der größten σ_o , σ_u erreicht.

Die Querschnitte können vorläufig auf Grund der folgenden Gleichungen entweder lediglich versuchsweise oder nach einem der angeschlossenen Verfahren ermittelt werden. Auf etwaige Festsetzungen bezüglich der Trägerhöhe ist dabei Rücksicht zu nehmen. Die Dicke der Vertikalplatte pflegt von vornherein gewählt zu werden (unter gewöhnlichen Verhältnissen meist 1 bis 1,2 cm), da nicht nur die Kräfte in der Trägerebene, sondern auch die Quersteifigkeit, mögliche Schwächung durch Rost usw. in Betracht kommen. Den Winkeleisen gibt man gerne innerhalb einer Öffnung konstanten Querschnitt, so daß die Änderung der Trägerquerschnitte nur durch Zugeben oder Weglassen von Horizontalplatten erfolgt. Eventuell kann schon durch Änderung der Schenkeldicken weiter reguliert werden. Der Einfluß der Temperaturänderungen braucht bei der vorläufigen Berechnung nicht genau festgestellt zu werden, es genügt, ihn schätzungsweise zu berücksichtigen oder die zulässigen σ_o , σ_u entsprechend kleiner als bei Einrechnung desselben zu wählen. Ähnlich läßt sich je nach Umständen mit anderen Einflüssen verfahren. Bezeichnen beim Querschnitt x wie bisher M_x , N_x das Angriffsmoment und die Normalkraft, e_o , e_u die Entfernungen des obersten und untersten Querschnittselementes von der Achsschicht, dann sind nach § 8 die Normalspannungen in diesen Entfernungen:

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{J} e_o, \quad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{J} e_u, \quad 1$$

und für symmetrisch zur Achsschicht angeordnete Querschnitte:

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}, \quad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{W}. \quad 2$$

Einfachstes Verfahren. Man bestimmt für eine genügende Anzahl Querschnitte unter Verwendung zulässig einfacher Formeln für statisch unbestimmte Größen die M_x , N_x bei Belastung durch Eigengewicht allein, bei Vollbelastung des ganzen Trägers und bei einseitigen Belastungen bis zur Trägermitte, womit für jeden Querschnitt vier Werte von M_x , N_x bekannt sind, darunter diejenigen, welche für die Näherungswerte der Normalspannungen durch Belastung gelten sollen. Indem man zusammen-

gehörige Werte von M_x , N_x in 1, 2 verwendet und mit den größten Druckwerten σ_o , σ_u den noch ungünstigeren Belastungen und oben berührten Nebeneinflüssen entsprechend unter dem zulässigen Grenzdrucke bleibt, läßt sich der vorläufige Bogenquerschnitt durch einiges Probieren ermitteln. Näheres siehe VI. Abschnitt unter A.

Genauerer Verfahren. Man bestimmt für eine genügende Anzahl Querschnitte unter Verwendung zulässig einfacher Formeln für statisch unbestimmte Größen die M_x , N_x bei denjenigen Belastungen, welche die Grenzwerte der M_x und damit nach dem in § 11 gegebenen üblichen Näherungsverfahren (S. 43, 81, 121) auch die Grenzwerte der σ_o , σ_u liefern. Indem man mit diesen Spannungen den in Betracht kommenden Nebeneinflüssen entsprechend unter dem zulässigen Grenzdrucke bleibt (eher weniger als im vorigen Fall, da die ungünstigsten Belastungen besser berücksichtigt sind), läßt sich der vorläufige Bogenquerschnitt durch einiges Probieren bestimmen.

Endgültige Querschnitte. Nachdem die vorläufigen Querschnitte ermittelt sind, findet eine Revision, Berichtigung und Ausgleichung des Bogens nach ästhetischen, konstruktiven und statischen Gesichtspunkten statt. Alsdann erfolgt die endgültige Berechnung, wobei sämtliche Querschnitte bekannt sind, so daß auch die genauesten Formeln Verwendung finden können. Es handelt sich auch hier in erster Linie um die Grenzwerte von σ_o , σ_u beim Zusammenwirken von Belastung, Temperaturänderungen und sonst in Betracht kommenden Einflüssen. Festzustellen ist auch, daß genügende Sicherheit gegen seitliches Einknicken durch die Achsialkraft N_x besteht (vergl. IV. Abschnitt unter K). Sollten sich bei der genaueren Berechnung einzelne Änderungen als angebracht ergeben (meist auf Dicke, Länge oder Breite der Horizontalplatten beziehbar), so können diese in der Regel vorgenommen werden, ohne daß die Berechnung wiederholt zu werden braucht, da der Einfluß auf die M_x , N_x gering zu sein pflegt und vielfach kaum merklich ist, so daß es genügt, die betreffenden σ_o , σ_u nach 1, 2 entsprechend den neuen F und J oder W zu korrigieren.

Bei Bestimmung der theoretischen Nietteilung t (Entfernung der Niete voneinander) zur Verbindung der Winkeleisen mit der Vertikalplatte werden gewöhnlich Längsschubspannungen von τ etwa $\frac{4}{5}$ der zulässigen Normalspannung σ und doppelt so große Drücke als letztere auf die Flächeneinheit Projektion der Nietlochlaibung angenommen. Es ergibt sich dann als genügend genau, wenn T_x die größte Transversalkraft, δ die Dicke der Vertikalplatte, d den Nietdurchmesser und h die Entfernung der Gurtungsschwerpunkte bedeuten¹:

$$t = \frac{2 \sigma \delta d h}{T_x}, \quad 3$$

¹ Weyrauch, Die Festigkeitseigenschaften und Methoden der Dimensionenberechnung von Eisen- und Stahlkonstruktionen. Leipzig 1889, S. 149; Luegers Lexikon der gesamten Technik, Artikel Blechträger.

doch pflegt diese Formel zu große t zu liefern, da man aus konstruktiven Gründen (Dichtigkeit der Fuge usw.) nicht leicht über $6d$ bis $8d$ hinausgehen wird. Die Niete zum Anschluß der Horizontalplatten an die Winkeleisen werden selbstverständlich in die Mitten der Entfernungen zwischen den soeben besprochenen Nieten gesetzt, was mehr als ausreichend geringe Entfernungen voneinander ergibt. Für die nötige Nietzahl zum Stoß der Vertikalplatte auf jeder Seite der Stoßfuge kann man bei den stets angewandten doppelten Laschen setzen:

$$n = \frac{h_n}{2d}, \quad 4$$

unter h_n die nutzbare Höhe der Vertikalplatte (bei der äußersten Nietreihe nach der Fuge hin) verstanden. Zweckmäßige Anordnung ist natürlich vorausgesetzt, worauf näher einzugehen hier zu weit führen würde.

Beispiele zu diesen Paragraphen siehe VI. Abschnitt, sowie in diesem Abschnitt die Beispiele 29 und 50—53.

III. Abschnitt.

Gewölbe im besonderen. Betonbogen. Eisenbetonbogen.

Wir haben es nur mit solchen Gewölben zu tun, deren Berechnung mit der Theorie elastischer Bogenträger in Beziehung steht, also nur mit Tonnengewölben. Auch diese wurden früher nicht als elastische Bogenträger beurteilt. Da sich aber zeigte, daß die gesuchten Beanspruchungen mittels der Statik allein nicht bestimmt werden konnten, so wurde man zu willkürlichen Annahmen geführt, deren Unzulänglichkeit mit der Zeit erkannt werden mußte. Auf diesen Umstand und die zur Vorsicht mahnenden Erfahrungen bei der Ausführung größerer Gewölbe in erster Linie ist das geringe Fortschreiten des Gewölbebaues während der gewaltigsten Entwicklung des Eisenbaues zurückzuführen; es tritt darin hervor, daß Spannweiten von Gewölben wie die der 1370—77 erbauten Addabrücke bei Trezzo in Italien, über 72 m, erst in neuester Zeit wieder erreicht wurden.

Je mehr die Theorie elastischer Bogenträger ausgebildet und angewandt wurde, um so allgemeiner mußte sich die Erkenntnis verbreiten, daß auch die Gewölbe als elastische Bogenträger aufzufassen seien. Die wertvollste Bestätigung fand sie durch die umfassenden Versuche des Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins (§ 31), welche Risse durch Zugspannungen an Stellen ergaben, wo nach der früheren Berechnungsweise gar keine Zugspannungen auftraten (Beispiel 65), während die Gesamtheit der Ergebnisse mit der Theorie elastischer Bogenträger vollständig im Einklang stand. Wenn hiernach die Berechnung der Gewölbe der Hauptsache nach bereits durch das bisher Vorgetragene festgelegt ist und schon eine Reihe von Beispielen über Gewölbe zur Darstellung kam, Beispiele 1, 18—27, 41—45, 48, 49, so erfordern diese doch nach mancher Richtung eine speziellere Behandlung, die im folgenden innerhalb der durch den Zweck unserer Schrift gezogenen Grenzen gegeben werden soll.

§ 27. Allgemeines.

Schon vor Anwendung der Theorie elastischer Bogenträger auf Gewölbe wurde für letztere das gleiche (Naviersche) Verteilungsgesetz

der Normalkraft N_x auf die Lagerfugen angenommen, welches jene Theorie für die Querschnitte der Bogenträger ergibt (§§ 6, 8):

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{J} v. \quad 1$$

Wird hierin entsprechend § 8, 1) gesetzt:

$$M_x = c N_x, \quad 2$$

unter c die Entfernung des Angriffspunktes der Kraft N_x von der Bogenachse verstanden (positiv nach oben, negativ nach unten), so folgt:

$$\sigma = \frac{N_x}{F} \left(1 + \frac{c v}{J} \right). \quad 3$$

Diese Ausdrücke der Normalspannungen σ an beliebigen Stellen x, v wurden für Gewölbe aus einzelnen Steinen nur insofern anders aufgefaßt, als die Lagerfugen x an Stelle der Querschnitte x traten, so daß N_x, T_x die Komponenten der resultierenden Fugenkraft R_x senkrecht und längs der Fugen x und M_x das Moment von R_x oder N_x in Hinsicht des der Bogenachse angehörenden Punktes x, y der Fuge bezeichneten (Fig. 163). Die abgeleiteten rein statischen Beziehungen § 1, 1)—10) bleiben ebenfalls gültig, wenn die Grenzen der Summen Σ Lagerfugen anstatt Querschnitte und φ den Winkel der Normalen zur Lagerfuge mit der horizontalen x -Achse bedeuten, als Bogenachse aber die Verbindungslinie der Schwerpunkte aller Lagerfugen angesehen wird. Für Gewölbe mit Lagerfugen senkrecht zur Bogenachse und sogenannte homogene Gewölbe (Betonbogen) bestand bezüglich der erwähnten Beziehungen überhaupt kein Unterschied.

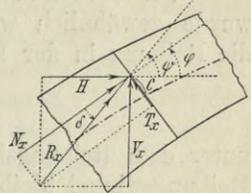


Fig. 163.

Die Grenzwerte der Normalspannungen einer Lagerfuge treten nach 1, 2 im obersten und untersten Fugenelemente ein. Sie sind durch § 8, 9) ausgedrückt und für den wichtigen Fall zur Achsschicht symmetrischer Fuge nach § 8, 11):

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}, \quad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{W}. \quad 4$$

Diese Gleichungen liefern für die bei Gewölben fast allein vorkommenden Fälle rechteckiger oder nahezu rechteckiger Fugen der Breite b und Höhe h mit $F = bh$ und $W = \frac{bh^2}{6}$ bei Beachtung von 2:

$$\sigma_o = \frac{1}{bh} \left(N_x + \frac{6}{h} M_x \right) = \frac{N_x}{bh} \left(1 + \frac{6c}{h} \right), \quad 5$$

$$\sigma_u = \frac{1}{bh} \left(N_x - \frac{6}{h} M_x \right) = \frac{N_x}{bh} \left(1 - \frac{6c}{h} \right). \quad 6$$

Sollen σ_o, σ_u von gleichen Vorzeichen wie N_x sein, also Druck bedeuten (§ 8), so muß c bei rechteckigen Fugen nach 5, 6 zwischen $-\frac{h}{6}$ und $\frac{h}{6}$ liegen, das heißt, die Stützlinie (Linie der Angriffspunkte von R_x, N_x

aller Lagerfugen) muß im mittleren Drittel des Gewölbebogens bleiben. Bei beliebigen Fugenformen hätte die Stützlinie zwischen den Kernlinien zu bleiben (§ 8), welche eben in jenem Falle mit den Grenzlinien des mittleren Drittels übereinstimmen.

Jedes Gewölbe ist selbstverständlich so anzuordnen, daß auch bei den ungünstigsten Belastungen und sonstigen Einwirkungen die Randspannungen σ_o , σ_u nicht über die zulässigen Grenzen hinausgehen. Wenn man sich im Hinblick auf das Überwiegen des Eigengewichts häufig darauf beschränkt hat, die σ_o , σ_u nur für wenige im voraus gewählte Belastungsfälle zu berechnen und von sonstigen Einwirkungen eventuell den Erd- druck, Wasserdruck und Auftrieb des Wassers zu berücksichtigen, so läßt sich leicht zeigen, daß ein solches Verfahren für Brückengewölbe nicht ausreicht (vergl. die Beispiele 22 und 44, insbesondere S. 95, 168). Diese sind ebenso genau wie eiserne Bogen zu berechnen, schon weil sonst leicht erhebliche Zugspannungen auftreten können, die bei losen Gewölbesteinen ein Klaffen der Fugen zur Folge hätten und auch sonst mit Rücksicht auf die Widerstandsfähigkeit der Steine und Bindemittel ausgeschlossen zu werden pflegen.

Vor Anwendung der Theorie elastischer Bogenträger auf Gewölbe wurde gewöhnlich weiter verlangt, daß der Transversalkraft T_x durch die Reibung in der Lagerfuge allein widerstanden werden könne, also

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{T_x}{N_x} \quad 7$$

unter dem Reibungskoeffizienten von Mauer auf Mauer oder δ unter dem Reibungswinkel bleibe; nur ausnahmsweise sollte auf die Schubfestigkeit des Bindemittels Rücksicht genommen werden. Da aber in Gewölbebogen bei Einhalten der zulässigen Grenzen von σ_o , σ_u die Bedingung für δ fast immer erfüllt ist (vergl. die Bemerkungen zu Beispiel 22), so werden bei ihrer Berechnung meist nur die Normalspannungen in Betracht gezogen. Man kann zwar nach § 9 leicht auch die Längsschubspannungen und Querschubspannungen erhalten, insbesondere ihre in der Achsschicht auftretenden Größtwerte für beliebige und rechteckige Fugen aus

$$\tau = \frac{S_o}{J_b} T_x, \quad \text{bzw.} \quad \tau = \frac{3}{2bh} T_x, \quad 8$$

allein auch diese sind im allgemeinen so klein (Beispiele 41, 65), daß sie nur selten festgestellt werden.

Es handelt sich nun um die Berechnung der M_x , N_x , T_x in obigen Gleichungen. Damit wird nach 2 auch die Stützlinie bekannt, doch ist diese zur Ermittlung der σ_o , σ_u und sonstigen Beanspruchungen bei Gewölben ebensowenig nötig wie bei eisernen Bogen. Die Beziehungen des § 1 für die Schnittkräfte und Schnittmomente enthalten drei Größen, zu deren Berechnung die Gesetze der reinen Statik zunächst nicht ausreichen, den Horizontalschub H und die Endmomente M , M' . Um dieser statischen Unbestimmtheit zu begegnen, machten alle älteren Gewölbe-

theorien willkürliche Annahmen über die Lage der Stützlinie. Brauchbare Begründungen wurden zwar versucht, aber nicht gefunden. Gewöhnlich ging man davon aus, daß ein Gewölbe genügende Sicherheit böte, wenn irgend eine statisch mögliche Stützlinie ohne Überschreiten der zulässigen Beanspruchungen eingezeichnet werden könne. Culmann¹ hat dies Vorgehen durch ein Raisonement zu stützen versucht, nach welchem von allen statisch möglichen Stützlinien diejenige die richtige sein sollte, für welche der Druck in der stärkstgedrückten Fugenkante ein Minimum erreicht, so daß jede den statischen Bedingungen entsprechende Stützlinie entweder die richtige oder eine ungünstigere wäre. Allein das Raisonement gipfelte in der Annahme: wenn nur eine Stützlinie ohne Überschreiten der augenblicklichen Widerstandsfähigkeit möglich sei, so müsse diese auch verwirklicht werden, durch Zunahme der Widerstandsfähigkeit aber (etwa infolge Erhärtung zunächst weich gedachten Materials) trete keine Änderung der Stützlinie ein; es setze also gerade das voraus, was bewiesen werden sollte.

Bei der üblich gewesenen Feststellung der Stützlinie wurden drei Punkte derselben frei gewählt, und zwar meist die Durchgangspunkte in der Scheitelfuge und den Kämpferfugen, womit drei neue Bedingungen gegeben waren, welche die Größen H , M , M' bestimmten. Wählte man die Durchgangspunkte in der Bogenachse, so waren ganz wie bei eisernen Bogen die Endmomente $M = M' = 0$ und der Horizontalschub H durch die Bedingung $M_x = 0$ für die Scheitelfuge bestimmt. Die Berechnung hätte sich dann einfach nach § 19 durchführen lassen (wie in Beispiel 22).

Die bloße Annahme ist jedoch noch keine Rechtfertigung. Wie verschieden die Beanspruchungen je nach den Lagen jener Durchgangspunkte selbst bei sehr starkem Überwiegen der festen Last ausfallen können, zeigen schon die Beispiele 22 und 44. Danach würden für die Belastungsverhältnisse der Pruthbrücke bei Jaremeze von 65 m Lichtweite im Falle des Durchganges der Stützlinie durch die Mitten der Scheitelfuge und Kämpferfugen im Scheitel bei beliebiger Bogenachse Druckspannungen von 18,8 kg, ohne solche Festlegung bei parabolischer Achse aber Druckspannungen von 44,3 kg entstehen. An den Kämpfern sanken im ersten Fall die Druckspannungen nicht unter 13,6 kg, während im zweiten selbst Zugspannungen bis 10,6 kg möglich wären.

Unter solchen Umständen ist es begreiflich, daß man bei Brücken von größeren Spannweiten, insbesondere wenn genügende Erfahrungen nicht vorlagen (z. B. bei Betonbrücken), den üblichen Annahmen durch die Wirklichkeit zu entsprechen suchte. Auf diese Weise sind die Gewölbe mit drei Gelenken entstanden, deren Einschalten die weiteren Vorteile mit sich bringt, daß zulässiges Setzen, sowie Temperaturänderungen und

¹ Culmann, Die graphische Statik, Zürich 1866, S. 444. Culmann spricht von der Drucklinie; aber die Drucklinie und Stützlinie, welche das Druckminimum ergeben, bedingen einander. Culmann bezeichnet wie wir als Stützlinie (Mittellinie des Drucks) die Verbindungslinie der Druckmittelpunkte, als Drucklinie (Richtungslinie des Drucks) das Seilpolygon aus Horizontalschub und Lasten oder sonstigen Aktivkräften. Manche wählen die Bezeichnungen umgekehrt. Unter gewissen Voraussetzungen stimmen beide Linien überein.

kleine Bewegungen der Widerlager keine in Betracht kommende Änderung der Beanspruchungen zur Folge haben. Besondere Nachteile sind bis jetzt nicht hervorgetreten. Der Unfall während des Baues der äußeren Maximilianbrücke in München war auf ungeeignete Anordnung der Gelenke zurückzuführen (S. 59). Über die Berechnung und sonstigen Verhältnisse der Gelenke siehe §§ 13—17 und Beispiele 13—17, 20, 21, 23—25.

Je mehr die Theorie elastischer Bogenträger auf Gewölbe angewandt wurde, um so mehr suchte man diese den Voraussetzungen jener Theorie anzupassen. Man hatte also besonders darauf zu achten, daß das Gewölbe bis zu den Kämpfern einen Bogen von angebbarer Achse mit Lagerfugen annähernd senkrecht zu dieser darstellt; daß es infolge geeigneter Wahl des Materials und sorgfältiger Behandlung der Fugen als Ganzes wirkt und mit Sicherheit auch auftretenden Zugspannungen widerstehen kann; daß es bis zum Ausrüsten möglichst spannungslos bleibt oder auf sonstige Weise möglichste Übereinstimmung des spannungslosen mit dem belastungslosen Zustand bei normaler Temperatur erreicht wird; daß die Übertragung der Lasten auf den Bogen eine feststehende oder doch nicht ungünstigere als die für die Berechnung angenommene

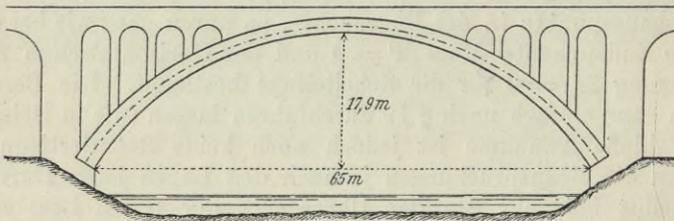


Fig. 164. Pruthbrücke bei Jaremce.

ist und unnötige Belastungen vermieden werden. Diese Forderungen führten dazu, die Gewölbe auch im Äußeren den eisernen Bogenträgern näher zu bringen, wovon schon die 1894 erstellte Pruthbrücke bei Jaremce¹, Fig. 164, ein Beispiel liefert, während die in armiertem Beton ausgeführte, 1908 vollendete Gmündertobelbrücke im Kanton Appenzel² in der Skizze Fig. 165 kaum noch von eisernen Bogen zu unterscheiden ist.

In neuester Zeit hat man auch der Formgebung der Gewölbe vom Standpunkte möglichst gleichmäßiger Ausnutzung der Materialwiderstände und entsprechender Herabsetzung des Materialverbrauchs größere Aufmerksamkeit geschenkt³, wie dies in anderen Fällen schon früher geschehen war (Körper von gleichem Widerstande, Lavessche Träger, Pau-

¹ Huß, Die großen gewölbten Brücken der K. K. Staatsbahn Stanislau-Woronienka, Zeitschr. d. Öst. Ing.-u. Arch.-Vereines 1893, S. 545, und 1894, S. 533.

² Mörsch, Die Gmündertobelbrücke bei Teufen im Kanton Appenzel, Schweizerische Bauzeitung 1909, LIII, S. 81, 95, 114, 122.

³ Mörsch, Bestimmung der Stärke von Brückengewölben mit drei Gelenken, Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen 1900, S. 175; Färber, Dreigelenkbogenbrücken und verwandte Ingenieurbauten, Stuttgart 1908; Zimmermann, Der Dreigelenkbogen in Stein, Beton oder Eisenbeton, Stuttgart 1909.

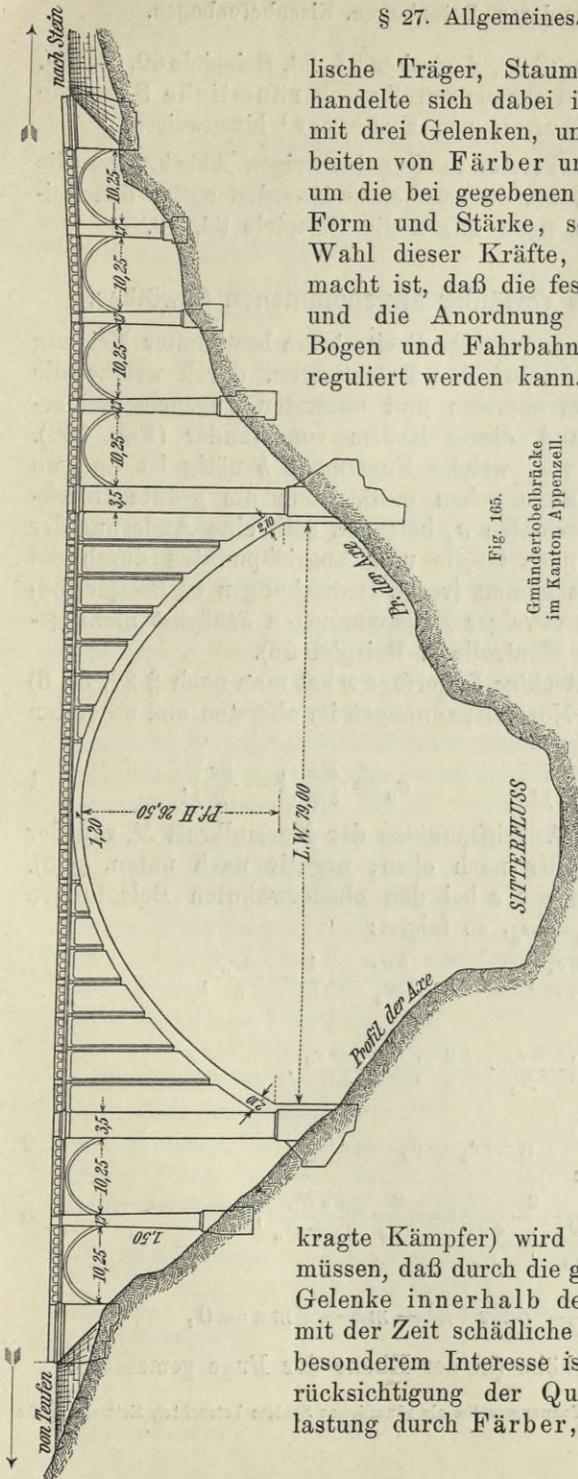


Fig. 165.

Gmündertobelbrücke
im Kanton Appenzell.

lische Träger, Staumauern, Eiffelturm usw.). Es handelte sich dabei in erster Linie um Gewölbe mit drei Gelenken, und in den ausführlichen Arbeiten von Färber und Zimmermann nicht nur um die bei gegebenen äußeren Kräften rationelle Form und Stärke, sondern auch um geeignete Wahl dieser Kräfte, wobei davon Gebrauch gemacht ist, daß die feste Last durch das Material und die Anordnung der Konstruktion zwischen Bogen und Fahrbahn innerhalb weiter Grenzen reguliert werden kann. Färber hat noch die mit

Rücksicht auf den Verbrauch an Bogenmaterial zweckmäßigste Lage der Seitengelenke bestimmt, allerdings nur für Fälle, in denen eine Beeinflussung des Verbrauches für die Widerlager durch Verschiebung jener Gelenke nicht in Betracht kommt.

Selbstverständlich ist die zweckmäßigste Form der Bogen nicht immer allein vom Standpunkte der Materialausnutzung bestimmt, es können auch ästhetische Rücksichten (Zusammenstimmen mit der Umgebung usw), das geeignete Durchfußprofil und gar manche andere Umstände mitsprechen. Bei einer Verlegung der Seitengelenke in den eigentlichen Bogen (nicht auf vorge-

krigte Kämpfer) wird man die Sicherheit haben müssen, daß durch die gewollten Bewegungen dreier Gelenke innerhalb des Bogens nicht für diesen mit der Zeit schädliche Wirkungen entstehen. Von besonderem Interesse ist noch die erstmalige Berücksichtigung der Querexzentrizität der Belastung durch Färber, auf welche wir im folgen-

den ebenfalls eingehen werden (§ 30, Aufgaben 27, 28, Beispiele 60, 61, 62). Bezüglich der Betrachtung von Tonnengewölben als räumliche Systeme mag es genügen, auf einen Aufsatz von Engesser¹ hinzuweisen.

Über Gewölbe wurden bereits in den bisherigen Abschnitten die Beispiele 1, 18—27, 41—45, 48, 49 gegeben und werden außer den Beispielen in diesem Abschnitte noch folgen die Beispiele 98, 99.

§ 28. Korrektur eines vorläufig angenommenen Gewölbes.

Für eine rechteckige Lagerfuge der Breite b von bestimmter Neigung seien N_o , N_u die Normalkräfte bei den Belastungen, durch welche die größten Druckspannungen im obersten und untersten Fugenelement erzeugt werden, a der Abstand dieser Kräfte voneinander (Fig. 166). Wir legen uns die Frage vor, welche Fughöhe h nötig ist und wo die Bogenachse durch die Fuge gehen muß, wenn die größte Druckspannung in beiden Randelementen σ_a betragen soll, eine Änderung der Belastung und von N_o , N_u nach Größe und Angriffspunkten durch die Korrektur nicht in Betracht kommt (vergl. Bemerkungen zu Beispiel 58) und Bedingungen bezüglich etwaiger Zugspannungen zunächst nicht gestellt werden (nachträgliche Kontrolle s. Beispiel 58).

Für eine beliebige rechteckige Lagerfuge x hat man nach § 27, 5), 6) bei beliebiger Belastung die Normalspannungen im obersten und untersten Fugenelement:

$$\sigma_o = \frac{N_x}{bh} \left(1 + \frac{6c}{h}\right), \quad \sigma_u = \frac{N_x}{bh} \left(1 - \frac{6c}{h}\right), \quad 1$$

unter c die Entfernung des Angriffspunktes der Normalkraft N_x von der Bogenachse verstanden (positiv nach oben, negativ nach unten, § 8). Bezeichnen c_o , c_u die Werte von c bei den obenerwähnten Belastungen für die Grenzwerte $\sigma_o = \sigma_u = \sigma_a$, so folgen:

$$\frac{b\sigma_a}{N_o} = \frac{1}{h} + \frac{6c_o}{h^2}, \quad \frac{b\sigma_a}{N_u} = \frac{1}{h} - \frac{6c_u}{h^2},$$

und durch Addition:

$$\frac{b\sigma_a}{N_o} + \frac{b\sigma_a}{N_u} = \frac{2}{h} + 6 \frac{c_o - c_u}{h^2}.$$

Beachten wir (Fig. 166):

$$a = c_o - c_u \quad 2$$

und setzen zur Abkürzung:

$$m = \frac{2}{\frac{b\sigma_a}{N_o} + \frac{b\sigma_a}{N_u}} = \frac{2}{b\sigma_a} \frac{N_o N_u}{N_o + N_u}, \quad 3$$

so ergibt sich:

$$\frac{2}{m} = \frac{2}{h} + \frac{6a}{h^2} \quad \text{oder} \quad h^2 - mh - 3ma = 0,$$

woraus die gesuchte Fughöhe (in der Ebene der Fuge gemessen):

¹ Engesser, Das elastische Tonnengewölbe als räumliches System betrachtet, Zeitschrift für Bauwesen 1909, S. 107.

$$h = \frac{m}{2} + \frac{m}{2} \sqrt{1 + \frac{12a}{m}}. \quad 4$$

Die zwei auf 1 zunächst folgenden Gleichungen aber liefern:

$$c_o = \left(\frac{\sigma_d}{N_o} b h - 1 \right) \frac{h}{6}, \quad c_u = - \left(\frac{\sigma_d}{N_u} b h - 1 \right) \frac{h}{6}, \quad 5$$

wodurch der Schnitt der Bogenachse mit der Fuge bestimmt ist (Fig. 166).

Durch vorstehende zuerst von Färber¹ abgeleiteten Beziehungen kann ein vorläufig angenommenes Gewölbe korrigiert werden im Sinne der Annäherung an die Bogenform möglichster Ausnutzung des zulässigen Drucks. Das Verfahren wäre nötigenfalls mit den N_o , N_u , a der verbesserten Form zu wiederholen, doch genügt die einmalige Anwendung, wenn die Belastung durch die Korrektur keine erhebliche Änderung erleidet. Diese kann zwar durch das Material und die Anordnung der Konstruktion zwischen Bogen und Fahrbahntafel reguliert werden, doch ist vorzuziehen, daß schon das anfängliche Gewölbe dem angestrebten nahe kommt. Nun wissen wir bereits, daß bei gleichmäßig auf die ganze Spannweite verteilter Last eine parabolische Bogenform diesem Zwecke entspreche (§§ 78, 119, 145), und daß die Bogenachse von den Kämpfern aus um so steiler beginnen und um so mehr über der Parabel durch ihre Kämpferpunkte und den Scheitel bleiben muß, jemehr die Belastung vom Scheitel aus gegen die Kämpfer hin zunimmt (Aufgabe 13). Einen weiteren wichtigen Anhaltspunkt wird der folgende § liefern.

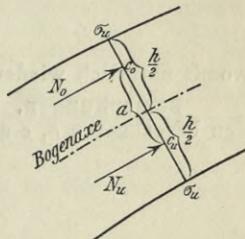


Fig. 166.

Bei Gewölben ohne Gelenke ist zu beachten, daß mit der Änderung der Bogenachse die Normalkräfte N_o , N_u selbst ohne Änderung der Belastung Änderungen erleiden, weil $N_x = V_x \sin \varphi + H \cos \varphi$ vom Horizontal Schub H und durch V_x auch von den Kämpfermomenten M , M' abhängt, deren Werte je nach der Form der Achse verschieden sind (§ 21). Wenn hiernach obiges Verfahren bei Gewölben ohne Gelenke weniger genau als bei solchen mit drei Gelenken erscheint, so kann es doch auch für sie zweckmäßige Verwendung finden. Man wird nur eher veranlaßt sein, eine zweite Berechnung vorzunehmen, und kann dann eventuell H , M , M' bei der ersten Berechnung nach den einfachen Formeln für parabolische Bogen (§ 21), bei der zweiten nach den Formeln für Bogen mit beliebiger Achse bestimmen (§§ 49, 50, Beispiele 1, 63—67, 98, 99).

Beispiel 57. Gewölbekorrektur entsprechend dem vorigen Paragraphen.

Für eine Lagerfuge der Breite $b = 495$ cm haben sich entsprechend der vorläufigen Gewölbeanordnung ergeben (s. unten) bei Eintritt des größten Drucks in der Oberkante:

$$N_o = 1856,33 \text{ t}, \quad c_o = \frac{M_o}{N_o} = \frac{867,42}{1856,33} 100 = 46,73 \text{ cm},$$

¹ Färber, Dreigelenkbogenbrücken, Stuttgart 1908, S. 22. Ähnliche Fugenformeln auch für andere Bedingungen s. Zimmermann, Der Dreigelenkbogen, Stuttgart 1909, S. 70.

bei Eintritt des größten Drucks in der Unterkante:

$$N_u = 1925,20 \text{ t}, \quad c_u = \frac{M_u}{N_u} = - \frac{32,64}{1925,20} 100 = - 1,70 \text{ cm},$$

womit der Abstand der Normalkräfte N_o , N_u :

$$a = 46,73 + 1,70 = 48,43 \text{ cm}.$$

Die nötige Höhe h der Lagerfuge und den Durchschnitt der Bogenachse mit ihr zu bestimmen, wenn die größte Druckspannung in Oberkante und Unterkante $\sigma_o = 40 \text{ kg pro qcm}$ betragen soll.

Gleichung 3 des § 27 liefert:

$$m = \frac{2}{\frac{495 \cdot 40}{1856330} + \frac{495 \cdot 40}{1925200}} = 95,46 \text{ cm},$$

und hiermit Gleichung 4 die Fugenhöhe:

$$h = \frac{95,46}{2} + \frac{95,46}{2} \sqrt{1 + \frac{12 \cdot 48,43}{95,46}} = 174,8 \text{ cm},$$

während nach 5 mit $bh = 495 \cdot 174,8 = 86526 \text{ qcm}$ die neuen Entfernungen der Kräfte N_o , N_u von der Bogenachse (positiv nach oben, negativ nach unten) bestimmt sind:

$$c_o = \left(\frac{40 \cdot 86526}{1856330} + 1 \right) \frac{174,8}{6} = 25,19 \text{ cm},$$

$$c_u = - \left(\frac{40 \cdot 86526}{1925200} - 1 \right) \frac{174,8}{6} = - 23,24 \text{ „}$$

womit natürlich wieder

$$a = c_o - c_u = 48,43 \text{ cm}.$$

Bemerkungen. Selbstverständlich ergeben die Gleichungen § 27, 1) mit den berechneten h , c die größten Druckspannungen:

$$\sigma_o = \frac{1856330}{86526} \left(1 + \frac{6 \cdot 25,19}{174,8} \right) = 40 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1925200}{86526} \left(1 + \frac{6 \cdot 23,24}{174,8} \right) = 40 \text{ „}$$

Bezüglich der unteren Grenzspannungen siehe das nächste Beispiel.

Für welche äußeren Kräfte die gegebenen N_o , N_u , a abzuleiten waren, und wie sie erhalten wurden, ist für obige Berechnung gleichgültig. Im vorliegenden Falle entsprechen sie der Fuge $x = 20,81 \text{ m}$ des in Beispiel 22 angenommenen Gewölbes und sie konnten dort unter a) und e) entnommen werden. Beim Zusammenwirken des Eigengewichts mit den für die größten Druckwerte von σ_o , σ_u nach dem genaueren Verfahren maßgebenden Belastungen hat man:

$$N_o = 1792,08 + 64,25 = 1856,33 \text{ t}, \quad M_o = 465,17 + 402,25 = 867,42 \text{ mt},$$

$$N_u = 1792,08 + 133,12 = 1925,20 \text{ „}, \quad M_u = 465,17 - 497,81 = - 32,64 \text{ „}$$

womit a wie zu Anfang gezeigt folgt. Die erwähnte Fuge hatte bei der Berechnung des Beispiels 22 entsprechend der Pruthbrücke bei Jaremce eine Höhe von 2,24 m, wobei die größten Druckbeanspruchungen $\sigma_o = 37,70 \text{ kg}$, $\sigma_u = 18,15 \text{ kg pro qcm}$ waren. In der erheblichen Verminderung der Fugenhöhe auf 1,75 m tritt der Vorteil der obigen Korrektur hervor. Daneben werden Zugbeanspruchungen vermieden (Beispiel 58).

Beispiel 58. Untersuchung einer korrigierten Fuge auf Zugspannungen.

Es sollen die zweiten Grenzwerte der Randspannungen σ_o , σ_u für die korrigierte Fuge des vorigen Beispiels berechnet und damit festgestellt werden, ob unzulässige Zugspannungen auftreten können.

Während die Bogenachse für das anfängliche Gewölbe in der Fugenebene um $c_o = 46,73 \text{ cm}$ unter dem Angriffspunkt von N_o lag, ist der Abstand nach der vorgenommenen Korrektur nur noch $c_o = 25,19 \text{ cm}$, sodaß die Bogenachse in der Fugenebene um

$$46,73 - 25,19 = 21,54 \text{ cm}$$

nach oben gerückt wurde. Damit ändern sich aber die Abstände $c = \frac{M_x}{N_x}$ der Angriffspunkte von N_x auch für alle andern Belastungen um 21,54 cm.

Im folgenden mögen (im Gegensatz zu § 27 und dem vorigen Beispiel) die N_x , c für die Belastung, welche den kleinsten Druckwert oder größten Zugwert der oberen Randspannung σ_o erzeugt, durch N_o , c_o , und für die Belastung, welche den kleinsten Druckwert oder größten Zugwert der unteren Randspannung σ_u erzeugt, durch N_u , c_u bezeichnet sein. Dann haben wir mit Rücksicht auf die in Beispiel 22 unter a) und e) für das anfängliche Gewölbe ermittelten Werte für die neue Anordnung:

$$N_o = 1792,08 + 124,82 = 1916,90 \text{ t},$$

$$c_o = -\frac{3054}{1916,90} - 21,54 = -23,13 \text{ cm},$$

$$N_u = 1792,08 + 55,95 = 1848,03 \text{ t},$$

$$c_u = \frac{86953}{1848,03} - 21,54 = 25,51 \text{ cm},$$

und damit nach § 27, 1) mit Beachtung von $bh = 495 \cdot 174,8 = 86526 \text{ qcm}$ die gesuchten unteren Grenzwerte der Randspannungen:

$$\sigma_o = \frac{1916900}{86526} \left(1 - \frac{6 \cdot 23,13}{174,8}\right) = 4,56 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1848030}{86526} \left(1 - \frac{6 \cdot 25,51}{174,8}\right) = 2,66 \text{ „}$$

Während also die anfängliche Fuge von $h = 2,24 \text{ m}$ Höhe nach Beispiel 22 an der Unterkante Zugspannungen von $4,34 \text{ kg}$ pro qcm erleiden konnte, kommen jetzt längs der ganzen Fuge nur Druckspannungen vor, deren unterer Grenzwert an der Unterkante $2,66 \text{ kg}$ beträgt.

Hätte sich eine unzulässige Zugbeanspruchung ergeben, so würde entweder auf vollständige Ausnutzung der zugelassenen Druckbeanspruchung zu verzichten oder eine weitergreifende Änderung des Gewölbes vorzunehmen gewesen sein. Es ist dies jedoch nicht zu erwarten, wenn schon das anfängliche Gewölbe dem gewünschten nahekommt (vergl. § 29), was in unserem Beispiel nicht einmal der Fall war.

Bemerkungen. Die oben verlangte Feststellung kann noch auf andere, allerdings weniger einfache Weise erfolgen, die wir jedoch zeigen wollen, weil sie das Wesen der in § 27 vorgetragenen Korrektur scharf hervortreten läßt. Durch diese tritt nach ihren Voraussetzungen keine in Betracht kommende Änderung der Normalkräfte N_x ein, und eine Änderung der Momente M_x nur insofern, als der Momentendrehpunkt mit der Bogenachse verlegt wird. Die Änderungen der Koordinaten des Momentendrehpunkts (des Achspunktes der Fuge) mögen durch Δx , Δy bezeichnet sein (Fig. 167), dann hat man nach § 1, 3) die Änderungen der Momente M_x (bei Gewölben ohne Gelenke nur bei ungeändert angenommenen H , M , M'):

$$\Delta M_x = V_x \Delta x - H \Delta y,$$

worin in unserem Falle:

$$\Delta x = 21,54 \sin \varphi = 21,54 \cdot 0,3202 = -6,90 \text{ cm},$$

$$\Delta y = 21,54 \cos \varphi = 21,54 \cdot 0,9474 = 20,41 \text{ „}$$

Wir entnehmen nun der vorläufigen Berechnung in Beispiel 22 für den Belastungsfall, welchem bereits das obige $N_x = N_o$ entspricht:

$$M_x = 465,17 - 495,71 = -30,54 \text{ mt},$$

$$V_x = 562,00 + 61,43 = 623,43 \text{ t},$$

$$H = 1701,63 + 110,99 = 1812,62 \text{ t},$$

womit

$$\Delta M_x = -623,43 \cdot 0,0690 - 1812,62 \cdot 0,2041 = -412,97 \text{ mt},$$

und nach Gleichung 1 des Beispiels 22 für die neue Anordnung:

$$\sigma_o = \frac{1}{86526} \left(1916900 - 6 \frac{30540 + 412970}{1,748}\right) = 4,56 \text{ kg}.$$

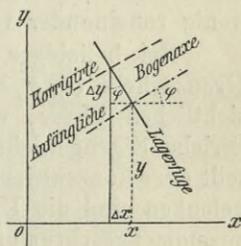


Fig. 167.

Weiter entnehmen wir der vorläufigen Berechnung des Beispiels 22 für den Belastungsfall, welchem bereits das obige $N_x = N_u$ entspricht:

$$M_x = 465,17 + 404,36 = 869,53 \text{ mt,}$$

$$V_x = 562,00 + 5,31 = 567,31 \text{ t,}$$

$$H = 1701,63 + 55,95 = 1757,58 \text{ t,}$$

womit

$$\Delta M_x = -567,31 \cdot 0,0690 - 1757,58 = -397,87 \text{ mt,}$$

und nach Gleichung 1 des Beispiels 22 für die neue Anordnung:

$$\sigma_u = \frac{1}{86\,526} \left(1848\,030 - 6 \frac{869\,530 - 397,87}{1,748} \right) = 2,66 \text{ kg.}$$

Die unteren Grenzwerte haben sich also genau wie oben ergeben.

§ 29. Zur Wahl der Gewölbemittellinie (Bogenachse).

Einige Gesichtspunkte betreffend die Wahl der Bogenachse wurden schon am Schlusse des vorigen Paragraphen berührt. Es hat nun aber Tolkmitt¹ zu begründen versucht, daß als Bogenachse zweckmäßig die Stützlina für Eigengewicht plus halbe Verkehrslast auf der ganzen Spannweite zu wählen sei. Ein schärferer Beweis, mit Hilfe einer eigenartigen Rückführung der Belastungen für die Grenzwerte der Randspannungen σ_o , σ_u auf jene Grundbelastung, wurde von Färber² gegeben. Von dieser Rückführung soll auch im folgenden Gebrauch gemacht werden. Wir ändern jedoch den Beweis insofern ab, als wir für den Fall der erwähnten Bogenachse die Maximaldruckwerte σ_o , σ_u selbst ausdrücken und so unmittelbar hervortreten lassen, daß diese nur wenig voneinander verschieden sind.

Bei beliebiger Bogenachse ergeben sich die Belastungen für die Grenzdrücke σ_o , σ_u bekanntlich genügend genau in der aus Fig. 168 ersichtlichen Weise, wobei oben feine Striche Eigengewicht allein, fette Striche Eigengewicht plus Verkehrslast bedeuten, die beide beliebig verteilt oder konzentriert sein können (S. 43, 81). Für Bogen mit Kämpfergelenken sind die Umhüllungslinien U , U' zu den Gelenkmittelpunkten zusammengeschrumpft (S. 12). Die Grenzdrücke selbst sind nach § 27, 5), 6) ausgedrückt:

$$\sigma_o = \frac{N_o}{bh} \left(1 + \frac{6c_o}{h} \right), \quad \sigma_u = \frac{N_u}{bh} \left(1 - \frac{6c_u}{h} \right), \quad 1$$

worin N_o , c_o und N_u , c_u die Werte der Normalkraft N_x und ihrer Entfernung $c = \frac{M_x}{N_x}$ (positiv nach oben, negativ nach unten, § 8) für die den Grenzdrücken σ_o , σ_u entsprechenden Belastungen bedeuten. Die Entfernung der Kräfte N_o , N_u voneinander ist (Fig. 166):

$$a = c_o - c_u. \quad 2$$

Es werde nun ein Gewölbe vorausgesetzt, dessen Mittellinie die Stützlina für Eigengewicht plus halbe Verkehrslast auf der ganzen Spann-

¹ Tolkmitt, Leitfaden für das Entwerfen und die Berechnung gewölbter Brücken, Berlin 1902, S. 21.

² Färber, Dreigelenkbogenbrücken, Stuttgart 1908, S. 25.

weite bildet. Für eine beliebige Lagerfuge x seien die von dieser Grundbelastung herrührenden Werte von N_x, M_x durch $N_g, M_g = 0$, die von halber Verkehrslast nach der Lastscheide S (Fig. 168) und zugleich negativer (nach oben wirkender) halber Verkehrslast vor der Lastscheide S herrührenden durch $n, -m$ bezeichnet. Dann entsprechen dem Grenzdrucke σ_o (Fig. 168):

$$N_o = N_g - n, \quad M_o = m = N_o c_o, \quad 3$$

und dem Grenzdrucke σ_u (Fig. 168):

$$N_u = N_g + n, \quad M_u = -m = N_u c_u, \quad 4$$

womit folgen (der zweite Ausdruck bei Beachtung von 2):

$$-\frac{c_u}{c_o} = \frac{N_o}{N_u}, \quad c_o = \frac{a}{1 + \frac{N_o}{N_u}}. \quad 5$$

Berücksichtigt man diese Beziehungen in 1, so folgen:

$$\sigma_u = \frac{N_u}{bh} + \frac{6c_o}{bh^2} N_o,$$

und die Grenzdrücke im obersten und untersten Fugenelement:

$$\sigma_o = \frac{N_g - n}{bh} + \frac{6c_o}{bh^2} (N_g + n), \quad \sigma_u = \frac{N_g + n}{bh} + \frac{6c_o}{bh^2} (N_g - n),$$

oder, für unseren Zweck geeigneter:

$$\sigma_o = \frac{N_g}{bh} \left(1 + \frac{6c_o}{h}\right) - \frac{n}{bh} \left(1 - \frac{6c_o}{h}\right), \quad 6$$

$$\sigma_u = \frac{N_g}{bh} \left(1 + \frac{6c_o}{h}\right) + \frac{n}{bh} \left(1 - \frac{6c_o}{h}\right). \quad 7$$

Die Beiträge der Grundbelastung zu σ_o, σ_u (Glieder mit dem Faktor N_g) sind hiernach gleich, und da diese auch das bei Gewölben weit überwiegende Eigengewicht enthält, so können die hinzukommenden Beiträge von Teilen der Verkehrslast (Glieder

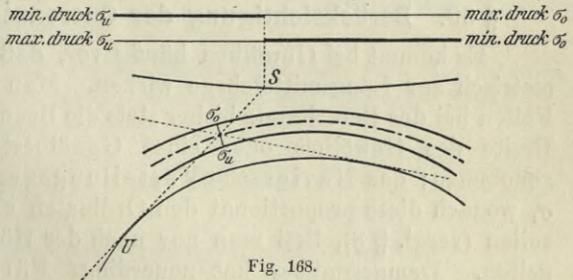


Fig. 168.

mit dem Faktor n), keine wesentliche Verschiedenheit der ganzen Grenzdrücke bedingen, um so weniger je kleiner das Verhältnis der Verkehrslast zum Eigengewicht ist (Beispiel 59).

Beispiel 59. Stützlinie für Eigengewicht plus halbe Verkehrslast auf der ganzen Spannweite als Bogenachse.

Das Ergebnis des vorigen Paragraphen an dem Fall zu erproben, daß das Gewölbe des Beispiels 22 als Bogenachse die Stützlinie für die dortige Grundbelastung erhalten hätte.

Wir fassen die Lagerfuge $x = 20,81$ m ins Auge und können dann in Beispiel 22 unter a), b) und c) entnehmen:

$$N_g = 1792,08 + \frac{189,07}{2} = 1886,61 \text{ t.}$$

$$n = \frac{133,12}{2} - \frac{55,95}{2} = 38,59 \text{ t,}$$

womit nach § 29, 3), 4):

$$N_o = 1886,61 - 38,59 = 1848,02 \text{ ,,}$$

$$N_u = 1886,61 + 38,59 = 1925,20 \text{ ,,}$$

Wenn auch die in Beispiel 22 gewählte Bogenachse jetzt nicht gilt, so können wir doch aus den ihr entsprechenden Werten

$$c_o = \frac{465,17 + 404,36}{1848,02} 100 = 47,05 \text{ cm,}$$

$$c_u = \frac{465,17 - 497,81}{1925,20} 100 = -1,70 \text{ ,,}$$

den Abstand der Kräfte N_o , N_u voneinander feststellen¹:

$$a = 47,05 + 1,70 = 48,75 \text{ cm.}$$

Für die jetzt maßgebende Bogenachse liefert § 29, 5):

$$c_o = \frac{48,75}{1 + \frac{1848,02}{1925,20}} = 24,87 \text{ cm,}$$

während die Ausdrücke § 29, 6), 7) mit den in Beispiel 22 angenommenen Werten² $b = 495 \text{ cm}$, $h = 224 \text{ cm}$ als größte Druckspannungen pro qcm im obersten und untersten Fugenelement ergeben:

$$\sigma_o = \frac{188661}{495 \cdot 224} \left(1 + \frac{6 \cdot 24,87}{224}\right) - \frac{38590}{495 \cdot 224} \left(1 - \frac{6 \cdot 24,87}{224}\right) = 28,35 - 1,16 = 27,2 \text{ kg,}$$

$$\sigma_u = 28,35 + 1,16 = 29,5 \text{ kg.}$$

Die von der Grundbelastung herrührenden Beiträge, 28,35 kg, sind also hier bei weitem überwiegend, die hinzukommenden Beiträge von $\mp 1,16 \text{ kg}$ machen nur 4% derselben aus. Allerdings ist das Verhältnis der Verkehrslast zum Eigengewicht bei der behandelten Brücke (entsprechend der Pruthbrücke bei Jaremcze) besonders klein, 1:12,3.

§ 30. Berücksichtigung der Querexzentrizität der Lasten.

Es kommt bei Gewölben häufig vor, daß die Verkehrslasten unsymmetrisch zur Längsmittlebene wirken. Man hat jedoch auch in solchen Fällen bei der Berechnung bisher stets die Beanspruchungen auf der ganzen Breite des Gewölbes oder eines Gewölbestreifens überall gleich angenommen; das Naviersche Verteilungsgesetz der Normalspannungen σ , wonach diese proportional den Ordinaten einer geraden Linie variieren sollen (vergl. § 8), ließ man nur nach der Höhenrichtung der Lagerfugen gelten. Demgegenüber hat neuerdings Färber³ bei Festsetzung der größten Druckspannungen σ_d in den Lagerfugen die Querexzentrizität der Lasten in der Weise berücksichtigt, daß er das Naviersche Verteilungsgesetz auch nach der Querrichtung des Gewölbes als zutreffend annahm. Wenn auch gegen diese Annahme bei der langgestreckten Form der Lagerfugen gewisse Bedenken bestehen können, so führt sie doch zweifellos zu einer konsequenteren und zuverlässigeren Beurteilung der Be-

¹ Dieser Abstand ergibt sich hier etwas verschieden von dem in Beispiel 57 berechneten (48,43 cm), weil dort die genaueren, mittels der Kernpunkte erhaltenen Belastungsgrenzen für σ_o , σ_u gewählt wurden, während hier entsprechend § 29 das am Schlusse des § 11 (S. 43) erwähnte einfachere Verfahren maßgebend ist.

² Wir könnten natürlich bei der jetzt gleichmäßigeren Beanspruchung der Fuge die Höhe h kleiner als in Beispiel 22 wählen. Vergl. Beispiel 57.

³ Färber, Dreigelenkbogenbrücken, Stuttgart 1908, S. 5.

anspruchungen als die bisherigen willkürlichen Auskunftsmitel. Wir wollen deshalb auf ihrer Grundlage im folgenden die Normalspannungen allgemein ableiten.

Für eine rechteckige Lagerfuge der Breite b und Höhe h seien bei beliebiger Belastung N_x die Normalkraft und e, c die Koordinaten ihres Angriffspunktes in bezug auf Achsen durch den Mittelpunkt der Fuge parallel den Seiten b, h (Fig. 169). Die positive Richtung von u ist so gewählt, daß e einen positiven Wert hat, während die v und $c = \frac{M_x}{N_x}$ wie bisher nach oben positiv, nach unten negativ gerechnet werden (§§ 3, 8). Unter der Voraussetzung, daß die Normalspannungen für beliebige Lagerfugenelemente sich ausdrücken lassen:

$$\sigma = \alpha + \beta u + \gamma v \tag{1}$$

mit konstanten α, β, γ (Naviersches Verteilungsgesetz), sollen bestimmt werden: a) die Normalspannungen σ für beliebige u, v und diejenigen Randspannungen σ_a, σ_z der betrachteten Fuge, zwischen welchen die Werte aller andern σ dieser Fuge liegen; b) die

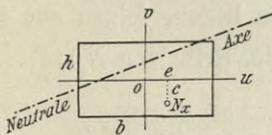


Fig. 170 (c negativ).

Lage der neutralen Achse $\sigma = 0$; c) der Reduktionsfaktor ρ in

$$\sigma = \rho \sigma', \tag{2}$$

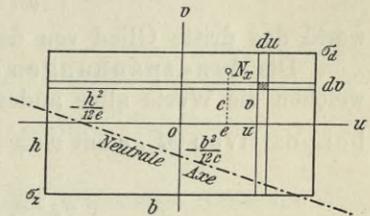


Fig. 169.

worin σ' den Wert von σ für $e = 0$, das heißt bei querezzentrischer Wirkung der in Frage stehenden Belastung, bedeutet.

a) Unter den angeführten Voraussetzungen hat man die Normalkraft für ein Flächenelement $du dv$ bei u, v (in Fig. 169 schraffiert):

$$\sigma du dv = (\alpha + \beta u + \gamma v) du dv,$$

also für einen Streifen der Höhe dv parallel der u -Achse:

$$dv \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma du = dv \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (\alpha + \beta u + \gamma v) du = (\alpha + \gamma v) b dv,$$

und für einen Streifen der Breite du parallel der v -Achse:

$$du \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma dv = du \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\alpha + \beta u + \gamma v) dv = (\alpha + \beta u) h du.$$

Mit Rücksicht auf diese Ausdrücke ergeben sich für die ganze Fuge die Normalkraft:

$$N_x = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\alpha + \gamma v) dv,$$

und die Momente in Hinsicht der v -Achse und u -Achse:

$$N_x e = h \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (\alpha + \beta u) u \, du,$$

$$N_x c = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\alpha + \gamma v) v \, dv = M_x,$$

woraus nach Ausführen der Integrationen:

$$\alpha = \frac{N_x}{b h}, \quad \beta = 12 \frac{e N_x}{h b^3}, \quad \gamma = 12 \frac{c N_x}{b h^3} = 12 \frac{M_x}{b h^3}. \quad 3$$

Mit diesen Werten der Konstanten liefert 1 die Normalspannungen für beliebige Fugenelemente der Koordinaten u, v :

$$\sigma = \frac{N_x}{b h} \left(1 + \frac{12 c}{h^2} v + \frac{12 e}{b^2} u \right), \quad 4$$

worin das dritte Glied von der Querexzentrizität e von N_x herrührt.

Die Randspannungen σ_d, σ_z (Druck positiv, Zug negativ), zwischen welchen die Werte aller andern Normalspannungen liegen, folgen aus 4 bei positiven M_x, c mit $v = \frac{h}{2}, u = \frac{b}{2}$ (Oberkante, Seite von N_x):

$$\sigma_d = \frac{N_x}{b h} \left(1 + \frac{6 c}{h} + \frac{6 e}{b} \right), \quad 5$$

und mit $v = -\frac{h}{2}, u = -\frac{b}{2}$ (Unterkante, entgegen der Seite von N_x):

$$\sigma_z = \frac{N_x}{b h} \left(1 - \frac{6 c}{h} - \frac{6 e}{b} \right); \quad 6$$

bei negativen M_x, c mit $v = -\frac{h}{2}, u = \frac{b}{2}$ (Unterkante, Seite von N_x):

$$\sigma_d = \frac{N_x}{b h} \left(1 - \frac{6 c}{h} + \frac{6 e}{b} \right), \quad 7$$

und mit $v = \frac{h}{2}, u = -\frac{b}{2}$ (Oberkante, entgegen der Seite von N_x):

$$\sigma_z = \frac{N_x}{b h} \left(1 + \frac{6 c}{h} - \frac{6 e}{b} \right). \quad 8$$

Für Gelenkfugen ist in allen diesen Ausdrücken $c = 0$.

b) Die Gleichung der neutralen Achse ist nach 4:

$$1 + \frac{12 c}{h^2} v + \frac{12 e}{b^2} u = 0. \quad 9$$

Da hiernach für $u = 0$ $v = -\frac{h^2}{12 c}$,

„ $v = 0$ $u = -\frac{b^2}{12 e}$,

so kann die neutrale Achse leicht verzeichnet werden (Fig. 169).

c) Für $e = 0$ hat man nach 4 bei beliebigem u, v (vergl. § 8):

$$\sigma' = \frac{N_x}{b h} \left(1 + \frac{12 c}{h^2} v \right) = \frac{1}{b h} \left(N_x + \frac{12 M_x}{h^2} v \right). \quad 10$$

Mit diesem Wert und 4 liefert 2 den Reduktionsfaktor:

$$\varrho = 1 + \frac{12 e u}{\left(1 + \frac{12 c}{h^2} v \right) b^2}. \quad 11$$

Man sieht, daß ϱ nicht nur von b, h, e, c , sondern auch von u, v , das heißt nicht nur von der Lagerfuge und Belastung, sondern auch von der Lage des durch σ beanspruchten Flächenelements abhängt¹.

Insbesondere erhält man in den Ausdrücken für die Randspannungen

$$\sigma_d = \varrho_d \sigma'_d, \quad \sigma_z = \varrho_z \sigma'_z \quad 12$$

bei positiven M_x, c mit $v = \frac{h}{2}, u = \frac{b}{2}$ (Oberkante, Seite von N_x):

$$\sigma'_d = \frac{N_x}{b h} \left(1 + \frac{6 c}{h} \right), \quad \varrho_d = 1 + \frac{6 e}{\left(1 + \frac{6 c}{h} \right) b}, \quad 13$$

und mit $v = -\frac{h}{2}, u = -\frac{b}{2}$ (Unterkante, entgegen der Seite von N_x):

$$\sigma'_z = \frac{N_x}{b h} \left(1 - \frac{6 c}{h} \right), \quad \varrho_z = 1 - \frac{6 e}{\left(1 - \frac{6 c}{h} \right) b}; \quad 14$$

bei negativen M_x, c mit $v = -\frac{h}{2}, u = \frac{b}{2}$ (Unterkante, Seite von N_x):

$$\sigma'_d = \frac{N_x}{b h} \left(1 - \frac{6 c}{h} \right), \quad \varrho_d = 1 + \frac{6 e}{\left(1 - \frac{6 c}{h} \right) b}, \quad 15$$

und mit $v = \frac{h}{2}, u = -\frac{b}{2}$ (Oberkante, entgegen der Seite von N_x):

$$\sigma'_z = \frac{N_x}{b h} \left(1 + \frac{6 c}{h} \right), \quad \varrho_z = 1 - \frac{6 e}{\left(1 + \frac{6 c}{h} \right) b}. \quad 16$$

Diese Gleichungen gehen speziell für Gelenkfugen wegen $c = 0$ in die folgenden über:

$$\sigma'_d = \sigma'_z = \frac{N_x}{b h}, \quad \varrho_d = 1 + \frac{6 e}{b}, \quad \varrho_z = 1 - \frac{6 e}{b}, \quad 17$$

wonach die Querezzentrität auf die Gelenkfugen am ungünstigsten wirkt; für $e > \frac{b}{6}$ sind ihre Reduktionsfaktoren ϱ_z, σ_z negativ.

Da nach 11 und 13 bis 17 der Faktor ϱ in 2, 12 in gewissen Fällen größer als 1, in anderen kleiner als 0 werden kann, so ergeben sich bei Berücksichtigung der Querezzentrität nicht nur größere Druckspannungen als ohne ihre Berücksichtigung, sondern bei genügend großer Exzentrität selbst Zugbeiträge an Stelle von Druckbeiträgen. Wenn dies auch im allgemeinen nur die Beiträge der Verkehrslast betrifft, da die feste

¹ Der Reduktionsfaktor ϱ von Färber entspricht dem folgenden ϱ_d .

Last querzentrisch zu wirken pflegt, so können doch schon dann merkliche Zugbeanspruchungen im ganzen entstehen, wenn ohne Berücksichtigung der Querexzentrizität die untere Grenze der Normalspannungen gleich Null gewählt wird (d. h. für $\sigma'_z = 0$ kann $\sigma_z < 0$ folgen). Auch wird sich zeigen, daß bei mehrgeleisigen Eisenbahnbrücken durch Belastung einzelner Geleise ungünstigere Druckspannungen entstehen können als durch Belastung aller Geleise (Beispiel 62), und bei Straßenbrücken durch Belastung gewisser Breitenteile ungünstigere Druckspannungen als durch Belastung der ganzen Breite (Aufgabe 28).

Die Ausdrücke von σ_d , σ_z , q_d , q_z sind oben für beliebige Belastungen mit positiven und negativen M_x , c gegeben. Man hat sie damit auch für die Belastungen, welche gemäß dem Verfahren am Schlusse des § 11 die Grenzwerte von σ_d , σ_z bei veränderlicher Belastung erzeugen, da diese Belastungen mit denjenigen für die positiven und negativen Grenzwerte der Momente M_x übereinstimmen.

Die Verschiedenheit der Beanspruchungen an beiden Stirnflächen eines Gewölbes kann erhöht werden durch Temperaturunterschiede derselben und infolge von Winddruck auf eine der Flächen¹. Für einen Betonbogen mit drei Gelenken von 62 m Spannweite und 6,2 m Pfeil der Achse, dessen zulässige Druckbeanspruchung durch Eigengewicht und ungünstigste Verkehrslasten 33 kg pro qcm angenommen war, konnten durch eine Temperaturdifferenz Δt Normalspannungen von $\sigma = 0,69 \Delta t$ an den Kämpfern bis $1,10 \Delta t$ im Scheitel entstehen, Zug auf der wärmeren, Druck auf der kälteren Seite, und an anderen Stellen Schubspannungen von $\tau = 0,76 \Delta t$ an den Kämpfern bis 0 im Scheitel. Für $\Delta t = 5^0$ würden hiernach Werte bis $\sigma = 5,5$ kg, $\tau = 3,8$ kg pro qcm auftreten können. Durch einen Winddruck von 200 kg pro qcm auf eine der Stirnflächen ergaben sich auf der Windseite Normalspannungen von $\sigma = -3,9$ kg (Zug) an den Kämpfern bis 0,7 kg (Druck) im Scheitel, auf der andern Seite gleich große Normalspannungen mit entgegengesetzten Vorzeichen. Die Schubspannungen erreichten Werte von $\tau = 1,0$ kg an den Kämpfern bis 0 im Scheitel.

Beispiel 60. Spannungen bei querexzentrischer Belastung.

Bei einem Versuchsgewölbe der Breite $b = 2$ m seien

für die Lagerfugen	$x =$	0	2	4 m
die Höhen	$h =$	25	20	15 cm,
und durch eine bestimmte Belastung				
die Normalkräfte	$N_x =$	6400	6522	6488 kg,
die Abstände	$c = \frac{M_x}{N_x} =$	23,84	- 12,22	- 7,72 cm

(vergl. Beispiel 41, S. 150). Wenn nun die Belastung und damit auch N_x um $e = 50$ cm querexzentrisch wirkt, die Randspannungen σ_d , σ_z (§ 30) in den drei Fugen zu berechnen.

Nach den Gleichungen 5 bis 8 des vorigen Paragraphen hat man bei Beachtung der Vorzeichen von c für die Fuge $x = 0$:

¹ Mörsch, Nebenspannungen in Brückengewölben mit drei Gelenken, Zeitschr. f. Architektur und Ingenieurwesen 1900, S. 193.

$$\sigma_d = \frac{6400}{200 \cdot 25} \left(1 + \frac{6 \cdot 23,84}{25} + \frac{6 \cdot 50}{200} \right) = 10,52 \text{ kg (oben),}$$

$$\sigma_z = \frac{6400}{200 \cdot 25} \left(1 - \frac{6 \cdot 23,84}{25} - \frac{6 \cdot 50}{200} \right) = - 7,96 \text{ „ (unten);}$$

für die Fuge $x = 2 \text{ m}$:

$$\sigma_d = \frac{6522}{200 \cdot 20} \left(1 + \frac{6 \cdot 12,22}{20} + \frac{6 \cdot 50}{200} \right) = 10,05 \text{ kg (unten),}$$

$$\sigma_z = \frac{6522}{200 \cdot 20} \left(1 - \frac{6 \cdot 12,22}{20} - \frac{6 \cdot 50}{200} \right) = - 6,79 \text{ „ (oben);}$$

und für die Fuge $x = 4 \text{ m}$:

$$\sigma_d = \frac{6488}{200 \cdot 15} \left(1 + \frac{6 \cdot 7,72}{15} + \frac{6 \cdot 50}{200} \right) = 12,09 \text{ kg (unten),}$$

$$\sigma_z = \frac{6488}{200 \cdot 15} \left(1 - \frac{6 \cdot 7,72}{15} - \frac{6 \cdot 50}{200} \right) = - 7,76 \text{ „ (oben).}$$

Von der Längsmittlebene des Gewölbes aus wirken alle Grenzwerte σ_d auf der Lastseite, alle Grenzwerte σ_z entgegengesetzt derselben.

Bemerkungen. Bei querzentrischer Belastung hätten sich anstatt obiger Normalspannungen mit $e = 0$ in gleicher Weise ergeben, wie schon in Beispiel 41 festgestellt wurde:

für die Fugen	$x =$	0	2	4 m
	σ'	= 8,60 und - 6,04	7,61 und - 4,33	8,84 und - 4,52 kg,
wonach	$\varrho = \frac{\sigma'}{\sigma}$	= 1,223 „ 1,318	1,321 „ 1,568	1,368 „ 1,717 .

Diese ϱ sind in § 30 durch die Gleichungen 13 bis 16 ausgedrückt, sie zeigen bereits, daß der Einfluß der Querezcentrität bedeutend werden kann.

Natürlich hätte man auch die Normalspannungen zunächst wie in Beispiel 41 für querzentrische Belastung berechnen und die obigen σ_d, σ_z entsprechend den Ausdrücken 12 des vorigen Paragraphen durch Multiplikation mit den nach den dortigen Gleichungen 13 bis 16 ermittelten Faktoren ϱ_d, ϱ_z (vergl. Beispiel 61) erhalten können.

Aufgabe 27. Reduktion querexzentrischer auf querzentrische Schnittkräfte und Lasten.

Unter den Voraussetzungen des letzten Paragraphen zu bestimmen: a) Diejenigen auf die Fugenbreite b querzentrisch (d. h. in der Längsmittlebene) wirkenden Normalkräfte oder Lasten

$$N_x' = \varrho N_x, \quad P' = \varrho P, \quad 1$$

welche gleiche Normalspannungen σ erzeugen wie die auf die Breite b um e exzentrisch wirkenden Normalkräfte N_x oder Lasten P ; b) die pro Meter Gewölbbreite querzentrisch wirkenden Normalkräfte und Lasten, welche gleiche Normalspannungen σ ergeben wie die auf die Breite b um e exzentrisch wirkenden Normalkräfte N_x und Lasten P .

a) Für diejenigen querzentrisch wirkenden Kräfte N_x', P' , welche gleiche Normalspannungen σ liefern wie die auf die gleiche Breite b um e exzentrisch wirkenden Kräfte N_x, P hat man nach § 30, 4) mit N_x nach obigem Ausdruck 1):

$$\sigma = \frac{\varrho N_x}{b h} \left(1 + \frac{12 e}{h^2} v \right) = \frac{N_x}{b h} \left(1 + \frac{12 e}{h^2} v + \frac{12 e}{b^2} u \right),$$

und hieraus in Übereinstimmung mit § 30, 11):

$$\varrho = 1 + \frac{12 e u}{\left(1 + \frac{12 e}{h^2} v \right) b^2}. \quad 2$$

Es ist also der Reduktionsfaktor ϱ in 1 gerade so ausgedrückt wie der Reduktionsfaktor in Gleichung 2 des § 30, was dann natürlich auch für die den Randspannungen σ_d, σ_z entsprechenden N_x', P' gilt, deren Reduktionsfaktoren durch die Gleichungen 13 bis 16 des § 30 bestimmt sind.

b) Soll die Berechnung für 1 m Gewölbebreite durchgeführt werden, wie dies häufig geschieht, während N_x , P sich auf die Fugenbreite b beziehen, so sind anstatt 1) mit den oben festgestellten Faktoren q als reduzierte querszentrische Normalkräfte und Lasten zu verwenden:

$$N'_x = \frac{q}{b} N_x, \quad P' = \frac{q}{b} P. \quad 3$$

Um also die Normalkraft N'_x oder Last P' pro Meter Gewölbebreite zu erhalten, mit welchen das gewöhnliche Verfahren für zentrische Belastung dieselbe Normalspannung σ ergibt wie die Berücksichtigung der Querexzentrizität in § 30, hat man die auf die ganze Fugenbreite b wirkende Normalkraft N_x oder Last P durch $\frac{b}{q}$ zu dividieren. Aus diesem Grunde bezeichnete Färber $\frac{b}{q}$ Meter oder $\frac{b}{q} \cdot 100$ Zentimeter als ideale Verteilungsbreite (speziell $\frac{b}{q\alpha}$ m oder $\frac{b}{q\alpha} \cdot 100$ cm als solche in Hinsicht σ_d).

Beispiel 61. Zur vorigen Aufgabe.

Für das in Beispiel 41 behandelte Versuchsgewölbe sei die aufgebrachte Verkehrslast $P = 6000$ kg. Wenn nun diese Belastung um $e = 50$ cm exzentrisch wirkt, mit welcher Last

$$P' = q P$$

hätte man die Berechnung für zentrische Belastung durchzuführen, um in den unten angeführten Lagerfugen die gleichen Druckspannungen σ_d wie durch die exzentrische Last zu erhalten.

Für die Fugen	$x =$	0	2	4 m
der Höhen	$h =$	25	20	15 cm

ergab sich durch die gegebene Belastung:

$$c = \frac{M_x}{N_x} = \quad 23,84 \quad - 12,22 \quad - 7,72 \text{ cm},$$

damit folgen gemäß Aufgabe 27 für $x = 0$ nach § 30, 13):

$$q = 1 + \frac{6 \cdot 50}{\left(1 + \frac{6 \cdot 23,84}{25}\right) 200} = 1,223, \quad P' = 1,223 \cdot 6000 = 7338 \text{ kg},$$

für $x = 2$ m nach § 30, 15):

$$q = 1 + \frac{6 \cdot 50}{\left(1 + \frac{6 \cdot 12,22}{20}\right) 200} = 1,321, \quad P' = 1,321 \cdot 6000 = 7926 \text{ „},$$

und für $x = 4$ m nach derselben Gleichung:

$$q = 1 + \frac{6 \cdot 50}{\left(1 + \frac{6 \cdot 7,72}{15}\right) 200} = 1,367, \quad P' = 1,367 \cdot 6000 = 8202 \text{ „}.$$

Bemerkungen. In gleicher Weise, nur mit q nach den Ausdrücken 14, 16 des § 30 hätte man die Lasten P' erhalten können, mit welchen die Berechnung für zentrische Belastung gleiche Zugspannungen σ_z wie die exzentrische Belastung geliefert hätte. Da die fraglichen Reduktionsfaktoren q bereits am Ende des Beispiels 60 gefunden wurden, so folgen ohne weiteres:

für	$x = 0$	$P' = 1,318 \cdot 6000 = 7908 \text{ kg},$
„	$x = 2 \text{ m}$	$P' = 1,568 \cdot 6000 = 9408 \text{ „}$
„	$x = 4 \text{ m}$	$P' = 1,717 \cdot 6000 = 10302 \text{ „}.$

Für etwaige Gelenkfugen an beliebigen Stellen der wirksamen Breite $b = 200$ cm hätte man nach den Gleichungen 17 des § 30 zur Berechnung von σ_d :

$$q = 1 + \frac{6 \cdot 50}{200} = 2,5, \quad P' = 2,5 \cdot 6000 = 15000 \text{ kg},$$

und zur Berechnung von σ_z :

$$q = 1 - \frac{6 \cdot 50}{200} = -0,5,$$

$$P' = -0,5 \cdot 6000 = -3000 \text{ kg},$$

welche Werte bestätigen, daß die Querezzentrität besonders ungünstig auf die Gelenkfugen wirkt (S. 227).

Beispiel 62. Über Querezzentrität bei Eisenbahnbrücken.

Für symmetrisch zur Längsmittlebene angeordnete Gewölbe diejenigen pro Meter Gewölbbreite querzentsch wirkenden Lasten P_d, P_z zu bestimmen, welche in Gelenkfugen gleiche Randspannungen σ_d, σ_z wie die wirklichen Belastungen von Q pro Geleise ergeben: a) Bei eingleisiger Brücke von 4 m Gewölbbreite; b) bei zweigeleisiger Brücke von 8 m Gewölbbreite; c) bei dreigeleisiger Brücke von 12 m Gewölbbreite; d) bei viergeleisiger Brücke von 16 m Gewölbbreite. Die Resultanten der Geleisbelastungen treffen auf die Mitten der Teilbreiten von 4 m (Fig. 171—174), die wirksamen Breiten b der Gelenkfugen für die in Betracht kommenden Gesamtbelastungen (Eigengewicht plus Verkehrslast) stimmen mit den gegebenen Gewölbbreiten überein.

Wir haben nach Gleichung 3 der Aufgabe 27 zur Berechnung der Randspannungen σ_d, σ_z mit den Ausdrücken 17 des § 30:

$$P_d = q_d \frac{P}{b} = \left(1 + \frac{6e}{b}\right) \frac{P}{b}, \quad P_z = q_z \frac{P}{b} = \left(1 - \frac{6e}{b}\right) \frac{P}{b}, \quad 1$$

wobei die Druckspannung σ_d durch eine exzentrische Last auf der Seite ihrer Exzentrität e von der Längsmittlebene liegt.

a) Für die eingleisige Brücke (Fig. 171) ergeben sich nach 1 mit $P = Q, b = 4 \text{ m}, e = 0$ (es besteht keine Querezzentrität):

$$q_d = q_z = 1, \quad P_d = P_z = \frac{Q}{4}, \quad 2$$

entsprechend dem gewöhnlichen Verfahren.

b) Für die zweigeleisige Brücke (Fig. 172) erhält man bei Belastung der beiden Geleise mit $P = 2Q, b = 8 \text{ m}, e = 0$ (keine Querezzentrität):

$$q_d = q_z = 1, \quad P_d = P_z = \frac{P}{8} = \frac{Q}{4}, \quad 3$$

dagegen bei Belastung nur eines Geleises mit $P = Q, b = 8 \text{ m}, e = 2 \text{ m}$:

$$q_d = 2,5, \quad q_z = -0,5, \quad P_d = \frac{5}{16} Q, \quad P_z = -\frac{1}{16} Q, \quad 4$$

also P_d um $Q/16$ größer als bei Belastung beider Geleise.

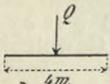


Fig. 171.

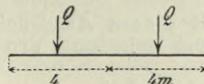


Fig. 172.

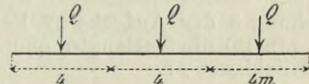


Fig. 173.

c) Für die dreigeleisige Brücke (Fig. 173) folgen bei Belastung aller Geleise mit $P = 3Q, b = 12 \text{ m}, e = 0$ (keine Querezzentrität):

$$q_d = q_z = 1, \quad P_d = P_z = \frac{P}{12} = \frac{Q}{4}, \quad 5$$

bei Belastung zweier Geleise mit $P = 2Q, b = 12 \text{ m}, e = 2 \text{ m}$:

$$q_d = 2, \quad q_z = 0, \quad P_d = \frac{P}{6} = \frac{Q}{3}, \quad P_z = 0, \quad 6$$

bei Belastung eines Geleises mit $P = Q, b = 12 \text{ m}, e = 4 \text{ m}$:

$$q_d = 3, \quad q_z = -1, \quad P_d = \frac{Q}{4}, \quad P_z = -\frac{Q}{12}, \quad 7$$

also P_d bei Belastung zweier Geleise um $Q/12$ größer, bei Belastung eines Geleises trotz nur $1/3$ so großer wirklicher Last P ebensogroß als bei Belastung aller drei Geleise.

d) Für die viergeleisige Brücke (Fig. 174) erhalten wir bei Belastung aller Geleise mit $P = 4Q$, $b = 16$ m, $e = 0$ (keine Querezentrizität):

$$e_d = e_z = 1, \quad P_d = P_z = \frac{P}{16} = \frac{Q}{4}, \quad 8$$

bei Belastung dreier Geleise nebeneinander mit $P = 3Q$, $b = 16$ m, $e = 2$ m:

$$e_d = 1,75, \quad e_z = 0,25, \quad P_d = \frac{7}{64}P = \frac{21}{64}Q, \quad P_z = \frac{1}{64}P = \frac{3}{64}Q, \quad 9$$

bei Belastung zweier Geleise auf gleicher Seite mit $P = 2Q$, $b = 16$ m, $e = 4$ m:

$$e_d = 2,5, \quad e_z = -0,5, \quad P_d = \frac{5}{32}P = \frac{5}{16}Q, \quad P_z = -\frac{1}{32}P = -\frac{1}{16}Q, \quad 10$$

bei Belastung eines äußeren Geleises mit $P = Q$, $b = 16$ m, $e = 6$ m:

$$e_d = 3,25, \quad e_z = -1,25, \quad P_d = \frac{13}{64}Q, \quad P_z = -\frac{5}{64}Q, \quad 11$$

also P_d bei Belastung dreier Geleise um $\frac{5}{64}Q$ größer, bei Belastung zweier Geleise um $\frac{4}{64}Q$ größer als bei Belastung aller vier Geleise.

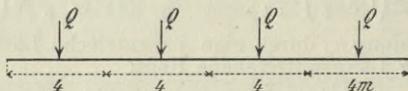


Fig. 174.

Aufgabe 28. Über Querezentrizität bei Straßenbrücken¹.

Für eine Straßenbrücke des Geländerabstandes b' kann die Verkehrslast von p pro qm auf beliebige Breiten $\beta b'$ von einem Geländer aus wirken (Menschengedränge). Zu berechnen: a) Die querzentrische Belastung p_d pro Meter der ergriffenen Strecke der Spannweite auf 1 m Gewölbbeite, welche in einer beliebigen Lagerfuge der Breite b die gleiche Druckspannung σ_d wie jene Verkehrslast auf die Breite $\beta b'$ ergibt; b) den Wert von β , für welchen die Maxima von p_d , σ_d eintreten und das Maximum von p_d selbst; c) die unter a) und b) verlangten Größen speziell für beliebige Gelenkfugen der wirksamen Breite b .

a) Die wirkliche Verkehrslast pro Meter der ergriffenen Strecke und deren Querezentrizität sind für die ganze Fugenbreite b :

$$P = p \beta b', \quad e = (1 - \beta) \frac{b'}{2}.$$

Gleichung 3 der Aufgabe 27 liefert mit diesen Ausdrücken und $e = e_d$ nach § 30, 13), 15) die verlangte querzentrische Belastung pro Meter Gewölbbeite bei beliebigem β :

$$p_d = \left[1 - \frac{3 b' (1 - \beta)}{b \left(1 \pm \frac{6c}{h} \right)} \right] \frac{b'}{b} \beta p, \quad 1$$

worin das + Zeichen und - Zeichen vor c positivem und negativem c oder M_x entsprechen, so daß mit der Bezeichnung

$$\alpha = 1 \pm \frac{6c}{h} \quad 2$$

immer $\alpha \geq 1$ und speziell für beliebige Gelenkfugen wegen $c = 0$ stets $\alpha = 1$ ist. Mit 2 läßt sich 1 schreiben:

$$p_d = \left(1 + 3 \frac{b' (1 - \beta)}{b \alpha} \right) \frac{b'}{b} \beta p. \quad 3$$

Da α nach 2 seinen Wert mit $c = \frac{M_x}{N_x}$, das heißt mit der Fuge und Belastung ändert, so wären nach 3 für verschiedene Fugen und Belastungen verschiedener Strecken der Spannweite auch verschiedene reduzierte Lasten p_d maßgebend.

¹ Vergl. Färber, Dreigelenkbogenbrücken, Stuttgart 1908, S. 9.

b) Die Maxima von p_d , σ_d bei veränderlichem β treten nach 3 ein zugleich mit dem Maximum von $\beta + 3 \frac{b'}{b} \frac{\beta - \beta^2}{\alpha}$, das heißt für $1 + 3 \frac{b'}{b} \frac{1 - \beta}{\alpha} = 0$ oder

$$\beta = \frac{1}{2} + \frac{\alpha b}{6 b'}. \quad 4$$

Mit diesem β liefert 3 das Maximum der reduzierten Last pro Meter Gewölbreite:

$$p_d = \left(1 + \frac{3 b'}{2 \alpha b} + \frac{\alpha b}{6 b'}\right) \frac{b'}{2 b} p. \quad 5$$

Auch dieser Wert ist wegen 2 von der Fuge und belasteten Strecke abhängig.

c) Für beliebige Gelenkfugen hat man in vorstehenden Gleichungen:

$$c = 0, \quad \alpha = 1, \quad 6$$

womit p_d nach 3 bei bestimmtem β seinen größten Wert annimmt (allgemein ist $\alpha \geq 1$). Dieser Wert ist beispielsweise für $\frac{b'}{b} = 1$

$$p_d = (4 - 3 \beta) \beta p, \quad 7$$

während nach 4, 5 im Falle $\frac{b'}{b} = 1$ für die Maxima von p_d , σ_d :

$$\beta = \frac{2}{3}, \quad p_d = \frac{4}{3} p. \quad 8$$

Bei einem Geländerabstand b' gleich der Fugenbreite b entsteht hiernach die größte Druckspannung σ_d in den Gelenkfugen, wenn nur $\frac{2}{3}$ der Breite b' belastet ist; die Druckspannung wird dann $\frac{4}{3}$ so groß als bei Belastung der ganzen Fugenbreite.

Nach 4, 5 mit $\alpha = 1$ erhält man für die Maxima von p_d , σ_d beliebiger Gelenkfugen:

wenn	$\frac{b'}{b} =$	0,8	0,9	1	1,1	1,2 :
	$\beta =$	0,708	0,685	0,667	0,652	0,639,
	$p_d =$	0,936 p	1,141 p	1,333 p	1,541 p	1,763 p.

§ 31. Wiener Versuche mit Gewölben.

Im letzten Jahrzehnt des vorigen Jahrhunderts hat der Österreichische Ingenieur- und Architekten-Verein durch einen Ausschuß von geeigneter Zusammensetzung umfassende Versuche über die Formänderungen und Widerstandsfähigkeit von Gewölben anstellen lassen¹. Neben je 7 Hochbaugewölben von 1,35 und 2,70 m Lichtweite, 3 solchen von 4,05 m Weite und 2 Unterbaugewölben von 10 m Weite wurden 4 größere Objekte von 23 m Lichtweite, 4,6 m Pfeil der Laibung und 2 m Breite erprobt, nämlich:

a) Ein Bruchsteinmauerwerkgewölbe mit kreisbogenförmiger Laibung, Stärke im Scheitel 0,60 m, an den Kämpfern 1,10 m. Versuche mit dem verwendeten Sandstein ergaben: Gewicht pro cbm 2580 bis 2620 kg, im Mittel 2590 kg; Elastizitätsmodul für Druck 137000 bis 271000, im Mittel 174000 kg pro qcm; Druckfestigkeit 610 bis 920 im Mittel 770 kg. Für Mörtelwürfel aus dem abgebrochenen Mauerwerk wurde das Gewicht pro cbm von 1790 bis 2030, im Mittel 1950 kg, die Druckfestigkeit von 56 bis 132, im Mittel 80 kg, gefunden. Inhalt des Gewölbemauerwerks 45 cbm (Beispiele 63 bis 67).

b) Ein Ziegelmauerwerkgewölbe mit kreisbogenförmiger Laibung, Stärke im Scheitel 0,60 m, an den Kämpfern 1,10 m. Für die verwendeten Ziegel wurden festgestellt: Gewicht des cbm 1420 bis 1700, im Mittel 1580 kg; Elastizitätsmodul für Druck 45000 bis 162000 kg, im Mittel 111000 kg pro qcm; Druckfestigkeit 100 bis 290, im Mittel 200 kg. Das Mischungsverhältnis des Mörtels war dasselbe wie im vorigen Falle: ein Raumteil langsam bindender Kirchdorfer Portlandzement auf ca. 2,6 Raumteile Sand. Inhalt des Gewölbemauerwerks 45 cbm.

¹ Bericht des Gewölbeausschusses, Wien 1895.

c) Ein Stampfbetongewölbe mit kreisbogenförmiger Laibung und konstanter Stärke von 0,70 m. Für Betonkörper der drei verwendeten Mischungsverhältnisse wurden folgende Zahlen ermittelt:

	1 Portland- zement 3 Sand 5 Schotter	1 Portland- zement 2 Sand 3 Schotter	1 Portland- zement 1 Sand 1 Schotter
Gewicht pro cbm	2170	2100	2220 kg
Elastizitätsmodul f. Druck pro qcm	74100	—	264000 "
Druckfestigkeit	107	260	156 "
Elastizitätsmodul f. Zug	98000	280000	250000 "
Zugfestigkeit	9	25	18 "

Der Kern des Gewölbes war aus Beton von 1:3:5 gebildet, die Mischungsverhältnisse 1:2:3 und 1:1:1 kamen an denjenigen Stellen des Rückens bzw. der Laibung zur Verwendung, an welchen infolge der einseitigen Belastung Zugspannungen zu erwarten waren. Mittelbindender Radotiner Portlandzement. Inhalt des Gewölbemauerwerks 38 cbm.

d) Ein Moniergewölbe mit parabolischer Laibung, Stärke im Scheitel 0,35 m, an den Kämpfern 0,60 m. Betonkörper desselben, aus einem Raumteil mittelbindendem Podoler Portlandzement auf 3 Teile Sand, ergaben folgende Eigenschaften im Mittel: Gewicht pro cbm 2310 kg, Elastizitätsmodul für Druck 364000 kg pro qcm, Druckfestigkeit 200 kg, Elastizitätsmodul für Zug 400000 kg, Zugfestigkeit 17 kg. Die beiden Einlegegitter bestanden aus Rundeisenstäben von 28,2 m Länge, 1,4 cm Dicke in der Längsrichtung und 2 m Länge, 0,7 cm Dicke in der Querrichtung. Die Verbindung der Stäbe erfolgte mit doppeltem Draht, Maschenweite 6,5 cm. Inhalt des Gewölbemauerwerks 38 cbm.

Aus den von Professor Brik, einem der Berichtersteller, auf Grund des gesamten Versuchsmaterials gezogenen wichtigen Schlußfolgerungen sei folgendes hervorgehoben:

I. Die Formänderungen der Bogenachse der Versuchsgewölbe während der ersten Belastungsstufen wuchsen nahezu proportional der Belastung.

II. Nach Überschreiten gewisser Belastungsgrenzen, hier „kritische Belastungen“ genannt, entstanden, meist an mehreren Orten der Gewölbe, Risse, welche bei den mit Fugen gemauerten Gewölben durch Überwinden des Adhäsionswiderstandes der Mörtelbänder, bei dem Betonbogen und Monierbogen durch Überwinden der Zugfestigkeit des Betons hervorgebracht worden sind (vergl. die folgende Tabelle). Es ist also im Einklange mit den bisherigen Anschauungen ratsam, die Querschnittsabmessungen so zu treffen, daß bei den mit Fugen gemauerten Gewölben Zugspannungen überhaupt nicht oder nur in geringem Maße auftreten.

III. Das Entstehen der ersten Risse erfolgte unmerklich und ohne Begleitung von plötzlichen Formänderungen der Bogenachse. Die Diagramme der Verschiebungen zeigen vor und nach den ersten Rissebildungen in der Regel keine Unterbrechung ihres stetigen Verlaufes. Die Risse in den mit Fugen gemauerten Gewölben folgten dem Verlaufe der Lagerfugen und bildeten wirkliche „Bruchfugen“. In dem Betonbogen und Monierbogen war die Gestalt und Lage der Risse unregelmäßig und lief in Verästelungen aus. Nach Entlastung der Gewölbe schlossen sich die Risse mehr oder weniger vollständig; nach erneuter Belastung kamen dieselben jedoch sogleich wieder zum Vorschein, erweiterten sich, auch kamen neue hinzu.

IV. Die Orte der Rissebildungen befanden sich in den Strecken zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ der Stützweite und an den Kämpfern. Sie entsprachen im allgemeinen den Orten der durch theoretische Untersuchungen ermittelten „gefährlichen“ Querschnitte. Nachstehende Tabelle enthält die von den Professoren Melan und Neumann auf Grund der Theorie elastischer Bogenträger berechneten Randspannungen in den Kämpferquerschnitten und gefährlichen Querschnitten (negative Werte bedeuten Zug). Hierbei wurden für den Monierbogen ein ideelles gleichmäßiges Material vorausgesetzt, für den Betonbogen

Wiener Versuche mit Gewölben.

Gewölbe	Proportionalitäts-Grenze				Kritische Belastung				Bruch				
	Einseitige Belastung 11,5 p in kg	Randspannungen in kg pro qcm		belastete Seite		unbelastete Seite		Einseitige Belastung 11,5 p in kg					
		Kämpferquersch.	Gefährl. Quersch.	Gefährl. Quersch.	Kämpferquersch.	Gefährl. Quersch.	Kämpferquersch.						
Bruchstein- gewölbe	35 075*	σ_o	— 5,4	14,2	— 3,4	11,2	56511*	σ_o	— 9,4	20,8	— 7,5	17,0	74 022
		σ_u	15,6	— 2,3	15,8	— 2,7	—	σ_u	21,4	— 6,7	21,9	— 7,4	
Ziegel- gewölbe	35 075	σ_o	— 4,7	15,8	— 2,5	9,1	42 200	σ_o	— 5,8	18,0	— 3,5	10,9	67 540
		σ_u	12,1	— 5,6	11,0	— 3,0	—	σ_u	13,8	— 7,0	12,8	— 4,4	
Beton- bogen	56 907	σ_o	—	28,8	— 13,6	—	63 250	σ_o	—	31,5	— 15,4	—	83 275
		σ_u	—	— 15,0	26,2	—	σ_u	—	— 17,0	28,4	—		
Monier- bogen	56 693	σ_o	— 30,3	58,4	— 37,0	36,8	78 525	σ_o	— 41,7	78,0	— 52,0	51,2	146 120
		σ_u	43,4	— 45,5	49,8	— 27,7	σ_u	58,6	— 63,8	68,4	— 40,0		

* An Stelle von 35075 und 56511 kg ergaben sich nach Abschluß der Berechnung genauer 34800 und 55736 kg. Auch andere Belastungen wurden nachträglich etwas abweichend von den bei der Berechnung verwendeten gefunden. Vergl. Bericht des Gewölbeausschusses, Wien 1885, Anmerkungen S. 45, 55, 65.

aber, welcher mit ebenen Flächen auf Asphaltplatten zwischen Bogenenden und Kämpferquadern ruhte, die arithmetischen Mittel der mit und ohne Kämpfergelenke erhaltenen Werte angeben.

V. Durch das Entstehen der ersten Risse war jedoch der Widerstand der Gewölbe noch nicht erschöpft. Wie die Tabelle zeigt, lag die Bruchbelastung höher als die kritische Belastung: beim Bruchsteingewölbe um 30%, beim Ziegelgewölbe um 59%, beim Betonbogen um 31%, beim Monierbogen um 86%. Nach Überwindung des Zugwiderstandes gelangt nämlich im zusammenhängenden Teile des Gewölbes der weit größere Druckwiderstand allein zur Geltung. Diese Eigenschaft der Gewölbe, bei gefährlichen Anlässen die schwächste Seite ihres Widerstands aufzugeben und dafür ihren größten Widerstand in Wirksamkeit treten zu lassen, ist von hervorragender Bedeutung für den Bestand der Gewölbe.

VI. Bei weiteren Erhöhungen der Belastung wachsen die Deformationen rascher und die Stützzlinie nähert sich mehr und mehr den gedrückten Kanten, wodurch die spezifischen Pressungen daselbst immer mehr gesteigert werden, bis der Druck- oder Schubwiderstand des Mauerwerks erschöpft ist und infolge der dadurch bewirkten örtlichen Zerstörungen der Zusammenbruch des ganzen Gewölbes eintritt. Die zulässige Beanspruchung auf Druck ist naturgemäß sowohl von der Qualität der Wölbsteine als von derjenigen des Mörtels abhängig. Zuverlässige Anhaltspunkte können jedoch nur Druckversuche mit gemauerten Versuchskörpern von der Zusammensetzung und Beschaffenheit der auszuführenden Gewölbe bieten.

VII. Aus den vertikalen Verschiebungen von Punkten der Bogenachsen wurden als Näherungswerte der entsprechenden mittleren „Elastizitätsmoduln“ E pro qcm berechnet (vergl. S. 21): für das Bruchsteingewölbe 60400 kg, für das Ziegelgewölbe 27800 kg, für den Betonbogen 246000 kg, für den Monierbogen 333800 kg. Inwiefern durch diese Zahlen auch das Gesetz des elastischen Verhaltens dieser Gewölbe zum Ausdruck kommt, entzieht sich der Beurteilung, weil nur die totalen Verschiebungen erhoben und in Rechnung gezogen wurden. Die Anwendung jener Elastizitätsmoduln auf näherungsweise Berechnung der Verdrehungswinkel der Scheitelquerschnitte aller Versuchsgewölbe für ein und dasselbe Belastungsintervall ergab befriedigende Übereinstimmung mit den gemessenen Ausschlagwinkeln.

VIII. Alle Ergebnisse, insbesondere jedoch das nachgewiesene Gesetz der Proportionalität von Belastung und Formänderung, führen zu dem Schlusse, daß die erprobten Gewölbe sich im allgemeinen wie elastische Bogenträger verhalten haben¹. Es wird daher zutreffend sein, Gewölbe mit ähnlicher Gestalt und gleicher Ausführung wie die Versuchsgewölbe auf Grund der Theorie elastischer Bogenträger ohne Gelenke zu berechnen².

Beispiel 63. Stützenreaktionen eines Bogens ohne Gelenke von beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten (Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe).

Für das vom Gewölbeausschuß des Österreichischen Ingenieur- und Architektenvereins erprobte Bruchsteingewölbe³ betragen die Spannweite $l = 2 m = 23,758 m$, die konstante Breite $2 m$, der Pfeil der Bogenachse $f = 4,502 m$ (Lichtweite $23 m$, Pfeil der Laibung $4,6 m$). Gewölbstärke im Scheitel $0,6 m$, an den Kämpfern $1,1 m$. Die senkrecht zur Laibung gerichteten Lagerfugen können für die Berechnung als senkrecht zur Bogenachse gelten. Es sollen zunächst nach den einfacheren Formeln für symmetrische Bogen ohne Gelenke von beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten (s. Bemerkungen am Schlusse) der Horizontalschub H , die Endmomente M, M' und die Vertikalreaktionen V, V' berechnet werden, welche durch folgende Einwirkungen entstehen: a) Durch das Eigengewicht des Gewölbebogens, b) durch beliebige Lasten P bei Abzissen $a = 0,629 m, 2,879 m, 5,129 m, 7,379 m, 9,629 m, 11,879 m$ (wo weitere Versuchslasten angebracht waren (Fig. 175) und symmetrisch zu diesen Punkten, c) durch beliebige

¹ Vergl. unser Beispiel 65.

² Bezüglich weiterer Versuche mit Gewölben sehe man: v. Emperger, Handbuch für Eisenbetonbau, I, Berlin 1908, S. 302 (Spitzer, Versuche mit Gewölben).

³ Bericht des Gewölbeausschusses, Wien 1895, S. 1, 13, 20, 26, 42, 46, 82.

Verkehrbelastungen, zusammengesetzt aus Einzellasten an den unter b) angeführten Stellen d) durch eine gleichmäßige Temperaturänderung τ , e) durch eine Änderung Δl der Spannweite ohne Änderungen der relativen Höhenlage der Kämpfer und ohne Verdrehungen der Endquerschnitte, oder doch nur solche, für welche $\Delta \varphi_0 = \Delta \varphi_1 = \frac{\Delta k}{l}$ ist.

Wir haben den Bogen zunächst in eine genügende Anzahl Felder zu teilen. Die Feldergrenzen mögen im vorliegenden Falle Lagerfugen durch die Punkte der Bogenachse unter den oben erwähnten P und mitten zwischen denselben sein (Fig. 175). Die Abszissen x , Ordinaten y und Gewölbbestärken h in den Mitten dieser Felder sind in den Kolonnen 2, 3, 4 der Tabelle II (s. unten) für die erste Bogenhälfte angeführt, während Kolonne 5 die Längen σ der Bogenachse in den fraglichen Feldern enthält (s. Bemerkungen am Schlusse). Die entsprechenden

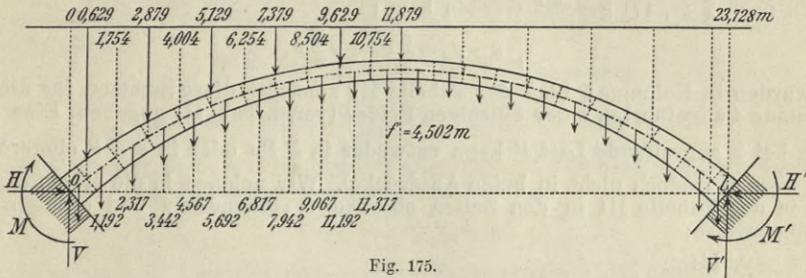


Fig. 175.

Größen für die zweite Bogenhälfte sind damit der Symmetrie halber ebenfalls bestimmt. Wir führen die Berechnung für die Gewölbbreite $b = 1$ m durch, dann folgen aus den h der Kolonne 5 unserer Tabelle II die Trägheitsmomente $J = \frac{b h^3}{12}$ der rechteckigen Lagerfugen in Kolonne 6. Die in den übrigen Kolonnen angeführten Werte ergeben sich ohne weiteres aus den vorausgegangenen. Alle gelten für Meter als Längeneinheit. Mit $A = 407,60$, $B = 1464,16$, $C = 5718,93$ erhalten wir nach § 49, 8):

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle II.
Achs- und Querschnittsverhältnisse.

Feld	x in m	y in m	h in m	σ in m	$\frac{h^3}{12} = J$	$\frac{\sigma}{J}$	$\frac{\sigma x}{J}$	$\frac{\sigma x^2}{J}$	$\frac{\sigma y}{J}$	$\frac{\sigma y^2}{J}$	$\frac{\sigma x y}{J}$
0	0,314	0,272	1,071	0,825	0,10237	8,06	2,53	0,79	2,19	0,60	0,69
1	1,192	0,967	0,992	1,403	0,08135	17,25	20,56	24,50	16,68	16,13	19,88
2	2,317	1,738	0,910	1,327	0,06280	21,13	48,96	113,44	36,72	63,82	85,09
3	3,442	2,392	0,838	1,278	0,04904	26,06	89,70	308,75	62,34	149,12	214,56
4	4,567	2,943	0,775	1,233	0,03879	31,79	145,18	663,04	93,56	275,35	427,26
5	5,692	3,400	0,722	1,199	0,03136	38,23	217,61	1238,64	129,98	441,93	739,87
6	6,817	3,772	0,683	1,172	0,02655	44,14	300,90	2051,24	166,50	628,04	1134,99
7	7,942	4,064	0,656	1,154	0,02353	49,04	389,48	3093,25	199,30	809,96	1582,85
8	9,067	4,280	0,635	1,140	0,02134	53,42	484,36	4391,69	228,64	978,58	2073,06
9	10,192	4,422	0,618	1,129	0,01967	57,40	585,02	5962,52	253,42	1122,39	2586,96
10	11,317	4,493	0,605	1,127	0,01845	61,08	691,24	7822,76	274,43	1233,01	3105,74
			Summe:	12,987		407,60	2975,54	25670,62	1464,16	5718,93	11970,95
						= A			= B	= C	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

¹ Eine Tabelle für dieses Gewölbe ist bereits S. 13 gegeben. Alle Werte gelten für Meter als Längeneinheit.

$$D = 407,60 \cdot 23,758^2 - 2 \cdot 23,758 \cdot 2975,54 + 2 \cdot 25670,62 = 140022,45,$$

und weiter:

$$AC - B^2 = 187271, \quad \frac{2}{l} D - Al = 2102,63.$$

a) Eigengewicht.

Die Abszissen a der Angriffspunkte und die Werte P des Eigengewichts in den einzelnen Feldern sind in den Kolonnen 1 und 2 der Tabelle II (S. 237) eingetragen, womit auch die Pa in der dritten Kolonne folgen. Da nun nach § 49, 15) 16) für beliebige symmetrische Belastung:

$$H = \frac{1}{AC - B^2} \left[A \sum_0^m \frac{\sigma y}{J} \left(\frac{x}{l} S - S_x \right) - B \sum_0^m \frac{\sigma}{J} \left(\frac{x}{l} S - S_x \right) \right], \quad 1$$

$$M = M' = \frac{1}{AC - B^2} \left[B \sum_0^m \frac{\sigma y}{J} \left(\frac{x}{l} S - S_x \right) - C \sum_0^m \frac{\sigma}{J} \left(\frac{x}{l} S - S_x \right) \right], \quad 2$$

wörin nach § 49, 17) gesetzt werden kann:

$$\frac{x}{l} S - S_x = \sum_0^x Pa + x \sum_x^m P, \quad 3$$

so wurden in Kolonne 5 bis 7 der Tabelle III zunächst diese Summen für die in Kolonne 4 angeführten x der einzelnen Felder (vergl. Tab. II) gegeben. Eine gerade bei x angreifende Last P kann entweder in $\sum Pa$ oder in $x \sum P$ eingerechnet werden (jedoch nicht in beide Ausdrücke). Wir nehmen in die erste Summe die in der Tabelle III in den Zeilen oberhalb x stehenden P und erhalten so beispielsweise:

für $x = 0,314$:

$$\sum_0^x Pa = 0, \quad \sum_x^m P = 24095 - 0 = 24094 \text{ kg},$$

$$\frac{x}{l} S - S_x = 0 + 0,314 \cdot 24095 = 7566 \text{ mkg},$$

für $x = 1,192$ m:

$$\sum_0^x Pa = 665, \quad \sum_x^m P = 24095 - 2117 = 21978 \text{ kg},$$

$$\frac{x}{l} S - S_x = 665 + 1,192 \cdot 21978 = 26863 \text{ mkg},$$

für $x = 2,314$ m:

$$\sum_0^x Pa = 665 + 3980 = 4645, \quad \sum_x^m P = 21978 - 3339 = 18639 \text{ kg},$$

$$\frac{x}{l} S - S_x = 4645 + 2,314 \cdot 18639 = 47832 \text{ mkg},$$

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle III. Eigengewicht.

a in m	P in kg	Pa	x in m	$\sum_0^x Pa$	$\sum_x^m P = V_x$	$\frac{x}{l} S - S_x$	$\frac{\sigma}{J} \left(\frac{x}{l} S - S_x \right)$	$\frac{\sigma y}{J} \left(\frac{x}{l} S - S_x \right)$	$\frac{\sigma x}{J} \left(\frac{x}{l} S - S_x \right)$
0,314	2117	665	0,314	0	24095	7566	60980	16590	19142
1,192	3339	3980	1,192	665	21978	26863	463390	448190	552303
2,317	2898	6715	2,317	4645	18639	47832	1010690	1756580	2341855
3,442	2571	8849	3,442	11360	15741	65541	1707800	4085060	5879028
4,567	2296	10486	4,567	20209	13170	80356	2554520	7517950	11666084
5,692	2081	11845	5,692	30695	10874	92590	3539720	12035050	20148510
6,817	1923	13109	6,817	42540	8793	102482	4523560	17062870	30836834
7,942	1818	14439	7,942	55649	6870	110211	5404750	21964900	42924980
9,067	1739	15768	9,067	70088	5052	115894	6191060	26497740	56134418
10,192	1676	17082	10,192	85856	3313	119622	6866300	30362780	69981262
11,317	1637	18526	11,317	102938	1637	121464	7419020	33333660	83960775
Summe:	24095	121464					39741790	155081280	324445191
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

für $x = 3,442$ m:

$$\sum_0^x P a = 4645 + 6715 = 11\,360, \quad \sum_x^m P = 18\,639 - 2898 = 15\,741 \text{ kg},$$

$$\frac{x}{l} S - S_x = 11\,360 + 3,442 \cdot 15\,741 = 65\,541 \text{ mkg},$$

und in gleicher Weise die übrigen Werte. Die in Kolonne 8 und 9 der Tabelle III eingetragenen Zahlen ergaben sich dann durch Multiplikation mit den in Tabelle II für die betreffenden x gegebenen $\frac{\sigma}{J}$ und der so entstehenden Werte mit den y der Tabelle II. Die Werte der letzten Kolonne in Tabelle III, welche wir durch Multiplikation der Zahlen in Kolonne 7 mit den $\frac{\sigma x}{J}$ in Tabelle II erhielten, wurden im Hinblick auf ein späteres Beispiel beigesetzt.

Mit Rücksicht auf die Summen der Kolonnen 8 und 9 von Tabelle III folgen aus 1 und 2 der Horizontalschub und die Endmomente durch das Eigengewicht allein:

$$H = \frac{407,60 \cdot 155\,081\,280 - 1464,16 \cdot 39\,741\,790}{187\,271} = 26\,821 \text{ kg},$$

$$M = M' = \frac{1464,16 \cdot 155\,081\,280 - 5718,93 \cdot 39\,741\,790}{187\,271} = -1157 \text{ mkg},$$

während mit Rücksicht auf Kolonne 2 unmittelbar oder nach § 21, 33) die entsprechenden Vertikalreaktionen der Kämpfer:

$$V = V' = \sum_0^m P = 24\,095 \text{ kg}.$$

Anstatt wie hier für das gesamte Eigengewicht gleichzeitig hätte man H, M, M', V, V' auch wie unter b) c) aus den Beiträgen der einzeln P oder aus den unter b) bestimmten Einflußlinien (Fig. 176) erhalten können.

b) Beliebige Einzellasten.

Nach § 49, 28) — 30) hat man für eine beliebige Einzellast P an beliebiger Stelle a :

$$H = \frac{1}{2} \frac{P}{AC - B^2} \left[a \left(B \sum_0^a \frac{\sigma}{J} - A \sum_0^a \frac{\sigma y}{J} \right) - B \sum_0^a \frac{\sigma x}{J} + A \sum_0^a \frac{\sigma x y}{J} \right], \quad 4$$

$$M + M' = \frac{P}{AC - B^2} \left[a \left(C \sum_0^a \frac{\sigma}{J} - B \sum_0^a \frac{\sigma y}{J} \right) - C \sum_0^a \frac{\sigma x}{J} + B \sum_0^a \frac{\sigma x y}{J} \right] - P a, \quad 5$$

$$M - M' = \frac{2 Pl}{2D - A l^2} \left[a \left(m \sum_0^a \frac{\sigma}{J} - \sum_0^a \frac{\sigma x}{J} \right) - m \sum_0^a \frac{\sigma x}{J} + \sum_0^a \frac{\sigma x^2}{J} \right] - P a, \quad 6$$

während § 21, 2) 3) liefern:

$$V' = \frac{1}{l} (P a + M - M'), \quad V = P - V'. \quad 7$$

Für $a = m$ können auch die Gleichungen § 49, 34), 35) Verwendung finden.

In nachstehender Tabelle IV sind zunächst gegeben die den Einzellasten P entsprechenden Abszissen a und sodann die nach Tabelle II erhaltenen Werte der

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle IV. Einzellasten.

a in m	$\frac{a \sigma}{\sum_0^a J}$	$\frac{a \sigma x}{\sum_0^a J}$	$\frac{a \sigma x^2}{\sum_0^a J}$	$\frac{a \sigma y}{\sum_0^a J}$	$\frac{a \sigma x y}{\sum_0^a J}$	$\frac{M + M'}{P}$	$\frac{M - M'}{P}$	$\frac{H}{P}$	$\frac{M}{P}$	$\frac{M'}{P}$	$\frac{V}{P}$	$\frac{V'}{P}$
0,629	8,06	2,53	0,79	2,19	0,69	-0,5568	-0,6010	0,0092	-0,5789	0,0221	0,9988	0,0012
2,879	46,44	72,05	138,73	55,59	105,66	-1,4215	-2,2477	0,1818	-1,8346	0,4131	0,9734	0,0266
5,129	104,92	306,93	1110,52	211,49	747,48	-0,8039	-2,9942	0,5242	-1,8990	1,0952	0,9101	0,0899
7,379	186,66	825,44	4400,40	507,97	2622,34	0,6725	-2,7507	0,9322	-1,0391	1,7116	0,8052	0,1948
9,629	289,12	1699,28	11885,34	935,91	6278,25	2,1219	-1,6318	1,2652	0,2450	1,8768	0,6634	0,3366
11,879	407,60	2775,54	25670,62	1464,16	11970,95	2,7259	0	1,3956	1,3629	1,3629	0,5000	0,5000
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Summen Σ in 4—6 für die Felder von 0 bis a (d. h. für die Felder, deren x kleiner als das jeweilige a sind, vergl. Fig. 175), beispielsweise:

$$\begin{aligned} \text{für } a = 0,629 \text{ m} \quad & \sum_0^a \frac{\sigma}{J} = 8,06, \\ \text{„ } a = 2,879 \text{ m} \quad & \sum_0^a \frac{\sigma}{J} = 8,06 + 17,25 + 21,13 = 46,44, \\ \text{„ } a = 5,129 \text{ m} \quad & \sum_0^a \frac{\sigma}{J} = 46,44 + 26,09 + 31,79 = 104,29. \end{aligned}$$

Damit folgen nach 4—7 für $a = 0,629 \text{ m}$:

$$\begin{aligned} H &= \frac{P}{374\,542} [0,629 (1464,16 \cdot 8,06 - 407,60 \cdot 2,19) - 1464,16 \cdot 2,53 + 407,60 \cdot 0,69] = 0,0092 P, \\ M + M' &= \frac{P}{187\,271} [0,629 (5718,93 \cdot 8,06 - 1464,16 \cdot 2,19) - 5718,93 \cdot 2,53 + 1464,16 \cdot 0,69] - 0,629 P \\ &= -0,5568 P, \\ M - M' &= \frac{2P}{2102,63} [0,629 (11,879 \cdot 8,06 - 2,53) - 11,879 \cdot 2,53 + 0,79] - 0,629 P = -0,6010 P, \\ M &= -0,5789 P, \quad M' = 0,0221 P, \\ V' &= \frac{P}{23,758} (0,629 - 0,6010) = 0,0012 P, \quad V = P - 0,0012 P = 0,9988 P. \end{aligned}$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werte der Kolonnen 7 bis 13 in Tabelle IV berechnet.

Für die zu den obigen Angriffspunkten a der Lasten P hinsichtlich der Bogenmitte symmetrisch gelegenen Lastangriffspunkte ergeben sich die verlangten Größen nun ohne Rechnung, nämlich

für	$a = 14,129$	$16,379$	$18,629$	$20,879$	$23,129 \text{ m}$:
$H: P =$	1,2652	0,9322	0,5242	0,1818	0,0092
$M: P =$	1,8768	1,7116	1,0952	0,4131	0,0221
$M': P =$	0,2450	- 1,0391	- 1,8990	- 1,8346	- 0,5789
$V: P =$	0,3366	0,1948	0,0899	0,0266	0,0012
$V': P =$	0,6634	0,8052	0,9101	0,9734	0,9988

Indem die Werte H, M, M', V, V' für $P=1$ bei allen jetzt berücksichtigten a in Fig. 176 als Ordinaten aufgetragen wurden, entstünden die verzeichneten Einflußlinien dieser Größen (§ 12), aus welchen die Beiträge zu letzteren auch für zwischenliegende a entnommen werden können.

c) Beliebige Verkehrsbelastungen.

Um die Größen H, M, M', V, V' für irgendwelche bei beliebigen a gleichzeitig wirkende Lasten P zu erhalten, hat man ihre Werte für die einzelnen P einfach zu addieren. Wirken z. B. auf der ersten Trägerhälfte bei $a = 0,629$ und $a = 11,879 \text{ m}$ gleiche Lasten $\frac{P}{2}$, bei den übrigen in Tabelle IV angeführten a gleiche Lasten P , wie dies bei den Wiener Versuchen der Fall war, dann erhält man aus Kolonne 9 der Tabelle IV:

$$H = P \left(\frac{0,0092}{2} + 0,1818 + 0,5242 + 0,9322 + 1,2652 + \frac{1,3956}{2} \right) = 3,6058 P,$$

und in gleicher Weise aus den Kolonnen 10 bis 13:

$$\begin{aligned} M &= -4,1357 P, & M' &= 5,7892 P, \\ V &= 4,1015 P, & V' &= 0,8985 P, \end{aligned}$$

also beispielsweise für $P = 3430 \text{ kg}$ (Proportionalitätsgrenze, vergl. S. 235):

$$\begin{aligned} H &= 12\,368 \text{ kg}, & M &= -14\,185 \text{ mkg}, & M' &= 19\,857 \text{ mkg}, \\ V &= 14\,068 \text{ kg}, & V &= 14\,068 \text{ kg}, & V' &= 3\,082 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Liegen die angeführten Lasten, symmetrisch zur Mitte übertragen, auf der zweiten Trägerhälfte, so hat man:

$$\begin{aligned}
 M &= 5,7892 P, & H &= 3,6058 P, & M' &= -4,1357 P, \\
 V &= 0,8985 P, & & & V' &= -4,1015 P,
 \end{aligned}$$

und wirken die Lasten gleichzeitig auf beiden Bogenhälften, wobei also auch die Last in der Bogenmitte den Wert P erlangt, dann folgen:

$$\begin{aligned}
 H &= 2 \cdot 3,6058 P = 7,2112 P, \\
 M = M' &= -4,1357 P + 5,7892 P = 1,6535 P, \\
 V = V' &= 4,1015 P + 0,8985 P = 5 P.
 \end{aligned}$$

Wären die berechneten Größen für die jetzt berücksichtigten Belastungen und das Eigengewicht zusammen zu bestimmen, so hätte man den vorstehenden Werten die unter a) erhaltenen zu addieren.

Anstatt wie hier aus den Beiträgen der Einzellasten hätte man die H, M, M', V, V' auch sofort für die ganze angenommene Verkehrsbelastung berechnen können. Es wären die Formeln § 49, 12)–14) zu verwenden gewesen, wozu sich die S_x enthaltenden Summen Σ wie in Beisp. 98 gefunden hätten. Doch ist die Bestimmung der Beiträge der Einzelverkehlasten besonders dann vorzuziehen, wenn man behufs Ermittlung der ungünstigsten Belastungen auch die Schnittlinien und Umhüllungslien der Kämpferdrücke erhalten will (Beisp. 1), ohne hierbei von den in § 21 gegebenen Gleichungen für Parabelbogen Gebrauch zu machen.

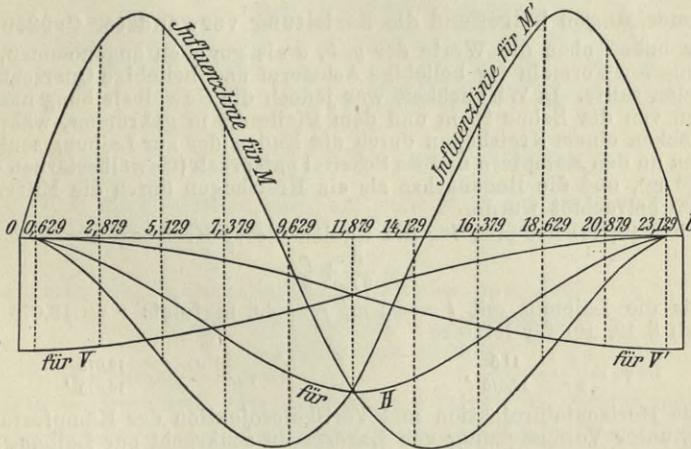


Fig. 176.

d) Temperaturänderungen.

Für eine beliebige Temperaturänderung τ gelten neben $V = V' = 0$ nach § 49, 36) 37):

$$H = \frac{A}{AC - B^2} m E \alpha \tau, \quad 8$$

$$M = M' = \frac{B}{A} H, \quad 9$$

also im vorliegenden Falle:

$$H = \frac{407,60 \cdot 11,879}{187\,271} E \alpha \tau = \frac{E \alpha \tau}{38,677},$$

$$M = M' = \frac{1464,16}{407,60} H = 3,5921 H = \frac{E \alpha \tau}{10,767},$$

und beispielsweise für $E = 175\,000$ kg pro qcm, $\alpha = 0,0000118$, mit $E \alpha = 175\,000 \cdot 100^2 \cdot 0,0000118 = 20650$ pro qm:

$$H = 534 \tau \text{ kg},$$

$$M = M' = 1918 \tau \text{ mkg}.$$

e) Bewegungen der Kämpfer.

Für eine Änderung der Spannweite um Δl , ohne andre als die in der Aufgabestellung zugelassenen Bewegungen der Kämpfer, hat man nach § 49, 41), 42) neben $V = V' = 0$:

$$H = - \frac{A}{AC - B^2} \frac{E \Delta l}{2}, \quad 10$$

$$M = M' = \frac{B}{A} H, \quad 11$$

also im vorliegenden Falle:

$$H = - \frac{407,60}{187\,271} \frac{E \Delta l}{2} = - \frac{E \Delta l}{918,90},$$

$$M = M' = 3,5921 H = - \frac{E \Delta l}{255,81},$$

und beispielsweise mit $E = 175\,000 \cdot 100^2$ kg pro qm, wenn Δl in Zentimeter eingesetzt werden soll, in welchem Falle nach Substitution vorstehenden Wertes von E in unsere für Meter als Längeneinheit geltenden Gleichungen noch mit 100 zu dividieren ist:

$$H = - 19\,045 \Delta l \text{ kg},$$

$$M = M' = - 68\,410 \Delta l \text{ mkg}.$$

Für andere als die oben angenommenen Bewegungen der Kämpfer würden anstatt 10, 11 die Formeln § 49, 38)–40) anzuwenden sein, wobei nach § 21, 1) 2) im allgemeinen auch die V , V' beeinflusst werden.

Bemerkungen betreffend die Herleitung verwendeter Größen.

Wir haben oben die Werte der y , h , σ als gegeben angenommen, da die Anwendung von Formeln für beliebige Achsform und beliebige Querschnitte gezeigt werden sollte. In Wirklichkeit war jedoch die Gewölbelaibung nach einem Kreisbogen von der Sehne 23 m und dem Pfeile 4,6 m gekrümmt, während der Gewölberücken einem Kreisbogen durch die Enden der zur Laibung senkrechten Lagerfugen an den Kämpfern und im Scheitel entsprach (Gewölbestärken daselbst 1,1 und 0,6 m), und die Bogenachse als ein Kreisbogen durch die Mitten dieser Lagerfugen betrachtet wurde.

Nach § 19, 11) hat man für die Radien dieser Kreisbogen

$$r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2},$$

woraus für die Laibung mit $l = 23$ m, $f = 4,6$ m folgt: $r = 16,675$ m. Da ferner nach § 19, 10) für letztere

$$\sin \varphi_0 = \frac{l}{2r} = \frac{11,5}{16,675},$$

$$\cos \varphi_0 = \frac{r-f}{r} = \frac{12,075}{16,675},$$

also für die Horizontalprojektion und Vertikalprojektion der Kämpferfugen der Stärken h_0 unter Voraussetzung von Lagerfugen senkrecht zur Laibung:

$$h_0 \sin \varphi_0 = 1,1 \frac{11,5}{16,675} = 0,758 \text{ m},$$

$$h_0 \cos \varphi_0 = 1,1 \frac{12,075}{16,675} = 0,796 \text{ m},$$

so folgen für den Gewölberücken $l = 23 + 2 \cdot 0,758 = 25,516$ m, $f = 4,6 + 0,6 - 0,796 = 4,404$ m, $r = 19,261$ m. Der Bogenachse aber, auf welche wir in der Folge die Bezeichnungen l , f , r allein beziehen, entsprechen:

$$\text{die Spannweite } l = 23 + 0,758 = 23,758 \text{ m},$$

$$\text{der Pfeil } f = 4,6 + 0,3 - 0,398 = 4,502 \text{ m},$$

$$\text{der Radius } r = \frac{23,758^2}{8 \cdot 4,502} + \frac{4,502}{2} = 17,923 \text{ m}.$$

Für beliebige Abszissen x der Bogenachse sind nach § 19, 9) die Ordinaten:

$$y = \sqrt{(r-f)^2 + x(l-x) - (r-f)},$$

während nach § 19, 10) dem Neigungswinkel φ bei x entsprechen:

$$\sin \varphi = \frac{m-x}{r},$$

$$\cos \varphi = \frac{r-f+y}{r}.$$

Nach Einsetzen der Werte von $l = 2 m$, f , r folgen:

$$y = \sqrt{13,421^2 x + (23,758 - x) - 13,421 m},$$

$$\sin \varphi = \frac{11,879 - x}{17,923}, \quad \cos \varphi = \frac{13,421 + y}{17,923}.$$

Diese Formeln haben sowohl die y der Feldermitten in Tabelle II als die y , $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ und φ der Feldergrenzen in Tabelle V geliefert.

Nachdem der Gewölbobogen auf Grund der angeführten l , f , r in großem Maßstabe verzeichnet und die Einteilung in Felder vorgenommen war, ließen sich die Gewölbbestärken h in den Mitten wie an den Enden der letzteren am einfachsten aus dieser Darstellung entnehmen (Tabellen II, V). Auch die Achslängen σ in den einzelnen Feldern hätten sich bei der geringen Krümmung der Achse in denselben graphisch ermitteln lassen. Indessen wurden sie aus

$$\sigma = r (\varphi - \varphi')$$

berechnet, worin r den Radius der Bogenachse und φ , φ' die Neigungswinkel der letzteren am Anfange und Ende des betreffenden Feldes in Bogenlängen bezeichnen. So ergab sich z. B. für Feld 1 (vergl. Tabelle V):

$$\sigma = 17,923 (0,724603 - 0,678595) = 0,825.$$

Die Achslänge für den halben Bogen findet sich:

$$\frac{s}{2} = r \varphi_0 = 17,923 \cdot 0,724603 = 12,987 m,$$

sie muß natürlich mit der Summe der σ für denselben übereinstimmen.

Das Gewicht des Gewölbemauerwerks betrug 2400 kg pro cbm. Es wurden demgemäß die Belastungen durch das Eigengewicht des Gewölbes in den einzelnen Feldern für die Breite 1 gesetzt:

$$P = 2400 \sigma \frac{h_a + 2 h + h_e}{4} = 600 \sigma (h_a + 2 h + h_e),$$

unter h_a , h , h_e die Gewölbbestärken am Anfang, in der Mitte und am Ende des betreffenden Feldes verstanden. Doch hätte es auch genügt, einfacher anzunehmen:

$$P = 2400 \sigma h.$$

So erhält man nach beiden Gleichungen für das erste Feld:

$$P = 600 \cdot 0,825 (1,1 + 2 \cdot 1,071 + 1,035) = 2117 \text{ kg},$$

$$P = 2400 \cdot 0,825 \cdot 1,071 = 2121 \text{ kg},$$

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle V. Feldergrenzen.

x in m	y in m	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	φ^0	$\varphi^0 \frac{\pi}{180}$	h in m
0	0	0,6628	0,7488	41,5167	0,724603	1,100
0,629	0,531	0,6277	0,7784	38,8806	0,678595	1,035
1,754	1,368	0,5649	0,8251	34,3953	0,600311	0,948
2,879	2,077	0,5023	0,8647	30,1522	0,526255	0,872
4,004	2,679	0,4394	0,8983	26,0656	0,454931	0,805
5,129	3,182	0,3766	0,9264	22,1233	0,386125	0,748
6,254	3,596	0,3138	0,9495	18,2883	0,319191	0,700
7,379	3,928	0,2511	0,9680	14,5425	0,253815	0,668
8,504	4,181	0,1883	0,9821	10,8536	0,189431	0,645
9,629	4,360	0,1255	0,9921	7,2097	0,125833	0,627
10,754	4,467	0,0628	0,9980	3,6006	0,062842	0,611
11,879	4,502	0	1	0	0	0,600

und für das letzte Feld der ersten Bogenhälfte:

$$P = 600 \cdot 1,127 (0,611 + 2 \cdot 0,605 + 0,600) = 1637 \text{ kg,}$$

$$P = 2400 \cdot 1,127 \cdot 0,605 = 1636 \text{ kg.}$$

Bemerkungen betreffend die Genauigkeit berechneter Größen.

Die in § 49 abgeleiteten Formeln zur unmittelbaren Berechnung von H , M , M' , welche oben verwendet wurden, beruhen auf den gewöhnlichen Vernachlässigungen des Einflusses der Achsialkraft N_x und der Glieder mit r im Nenner (d. h. auch der Ausdrücke X_2 , Y_2 , Z_2 in § 40, entsprechend der Vernachlässigung von ε , β bei Parabelbogen). Sie liefern also für Bogen von beliebiger symmetrischer Achse und beliebigen Querschnitten diejenigen Werte, welche man sonst auf umständlichere Weise zu berechnen pflegt. Daß jene Vernachlässigungen für Bogen mit zwei Gelenken zulässig sein können, ist in § 47 bewiesen und geht auch daraus hervor, daß der fragliche Einfluß für Halbkreisbogen mit zwei Gelenken verschwindet (wegen $f = r$, vgl. § 46, Gl. 8). Inwieweit die Vernachlässigung bei Bogen ohne Gelenke gestattet ist, können nur Proberechnungen lehren. Wir haben in § 50 auch genauere Formeln für Bogen von beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten abgeleitet, und nach diesen in Beispiel 98 die wichtigsten der oben verlangten Größen ermittelt. Die Resultate beider Berechnungen sind in der folgenden Tabelle VI zusammengestellt.

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle VI. Vergleiche.

Für	Größe	oben berechnet	in Beisp. 98 genauer berechnet	Abweichung in %
Eigengewicht allein	H	26821 kg	25796 kg	3,97
	$M = M'$	— 1157 mkg	— 4902 mkg	76,40
	$V = V'$	24095 kg	24095 kg	0
Verkehrsbelastung der ersten Bogen- hälfte allein	$\frac{H}{P}$	3,6058	3,4714	3,87
	$\frac{M}{P}$	— 4,1357	— 4,6540	11,14
	$\frac{M'}{P}$	5,7892	5,3240	8,74
	$\frac{V}{P}$	4,1015	4,1038	0,06
	$\frac{V'}{P}$	0,8985	0,8962	0,26
Verkehrsbelastung beider Bogenhälften	$\frac{H}{P}$	7,2116	6,9428	3,87
	$\frac{M}{P} = \frac{M'}{P}$	1,6535	0,6700	146,79
	$\frac{V}{P} = \frac{V'}{P}$	5	5	0
eine Temperatur- änderung um τ^0	$\frac{H}{E\alpha\tau}$	$\frac{1}{38,677}$	$\frac{1}{39,993}$	3,40
	$\frac{M}{E\alpha\tau} = \frac{M'}{E\alpha\tau}$	$\frac{1}{10,767}$	$\frac{1}{11,140}$	3,46
	$V = V'$	0	0	0
eine Änderung der Spannweite um Δl	$\frac{H}{E\Delta l}$	$\frac{1}{918,90}$	$\frac{1}{950,16}$	3,40
	$\frac{M}{E\Delta l} = \frac{M'}{E\Delta l}$	$\frac{1}{255,81}$	$\frac{1}{264,68}$	3,46
	$V = V'$	0	0	0

Hiernach können, besonders bezüglich der Momente durch Belastung, bedeutende Abweichungen gegen die genaueren Werte eintreten. Wie die Beanspruchungen pro qcm durch jene Vernachlässigungen beeinflusst werden, muß die Fortsetzung vergleichender Berechnungen ergeben, weshalb in den Tabellen der folgenden Beispiele den mit den genaueren H, M, M', V, V' berechneten Normalspannungen σ_o, σ_u und Schubspannungen τ , die mit den obigen in ganz gleicher Weise erhalten in kleinem Drucke beigesetzt sind. Die wichtigsten Resultate enthält die Tabelle des Beisp. 65 (S. 252), welche zeigt, daß die von der Belastung herrührenden Spannungen σ_o, σ_u, τ sehr erheblich durch die fraglichen Vernachlässigungen beeinflusst werden können. Vergl. auch die entsprechenden Stützlinsen in Beisp. 66 und die Berechnung der Einsenkungen in Beisp. 99.

Man könnte noch fragen, ob in Fällen wie dem vorliegenden die einfacheren Formeln für parabolische Bogen von konstantem (mittlerem) $J \cos \varphi$ zur Berechnung von H, M, M', V, V' verwendet werden dürfen. Wir haben deshalb in Beisp. 42 alle oben verlangten Größen nach diesen Formeln berechnet und die wichtigsten Resultate in einer der Tabelle VI (S. 244) ganz entsprechenden Tabelle zusammengestellt (S. 156). Der Vergleich zeigt, daß die Berechnung nach jenen Formeln nicht genügend gewesen wäre. Die in Beisp. 42 verwendeten Werte von c, ε ergaben sich wie folgt. Nach § 19 oder §§ 42, 44 sind Mittelwerte für den Bogen:

$$\gamma = \frac{J}{F}, \quad c = J \cos \varphi,$$

während

$$\varepsilon = \frac{15}{8} \gamma \left(\frac{r-f}{rf} \right)^2 \quad \text{mit } r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2}.$$

Da nun für rechteckige Querschnitte $\frac{J}{F} = \frac{h^3}{12}$, so hat man bei beliebigen Feldlängen $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ die Mittelwerte

$$\gamma = \frac{1}{6l} \sum_0^m \lambda h^3, \quad c = \frac{2}{l} \sum_0^m \lambda J \cos \varphi.$$

Verwendet man hierin die in Tabelle II (S. 237) gegebenen h, J für die Feldermitten und mit den dortigen y

$$\cos \varphi = \frac{13,421 + y}{17,923},$$

so folgen:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{6 \cdot 23,758} [0,629 \cdot 1,071^2 + 1,125 (0,992^2 + \dots + 0,605^2)] = 0,049922, \\ c &= \frac{1}{11,879} [0,629 \cdot 0,10237 \cdot 0,7640 + 1,125 (0,08135 \cdot 0,8028 + \dots + 0,01845 \cdot 0,9995)] = 0,035780, \\ \varepsilon &= \frac{15 \cdot 0,049922}{8} \left(\frac{17,923 - 4,502}{17,923 \cdot 4,502} \right)^2 = 0,002590. \end{aligned}$$

Anstatt wie hier hätten wir c, γ auch wie in Beispiel 95 berechnen können.

Beispiel 64. Beanspruchungen eines Bogens ohne Gelenke (Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe).

Für das im vorigen Beispiel behandelte Versuchsgewölbe des österreichischen Ingenieur- und Architektenvereins sollen die Momente M_x , Normalkräfte N_x , Transversalkräfte T_x , nebst den davon herrührenden Normalspannungen σ und Schubspannungen τ in den unten angeführten Querschnitten x (Lagerfugen, s. Tabelle V und Fig. 175) bestimmt werden: a) für Belastung durch das Eigengewicht des Gewölbebogens allein; b) für beliebige gleiche Lasten P bei $a = 2,879$ m, $5,129$ m, $7,379$ m, $9,629$ m und halb so große Lasten bei $a = 0,629$ m, $11,879$ m, — wie solche bei den Versuchen wirksam waren.

Nach § 21 hat man die Vertikalkraft, das Moment, die Normalkraft und die Transversalkraft bei x :

$$\begin{aligned} V_x &= V - \sum_0^x P, & 1 \\ M_x &= M + Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a) = M - Hy + Vx - \sum_0^x Pa, & 2 \end{aligned}$$

$$N_x = V_x \sin \varphi + H \cos \varphi, \quad 3$$

$$T_x = V_x \cos \varphi - H \sin \varphi. \quad 4$$

Speziell für symmetrische Belastung gilt:

$$v = \sum_0^m P, \quad \text{und für } x < m \quad V_x = \sum_x^m P. \quad 5$$

Die y , $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ zu den in Frage kommenden x (Feldgrenzen) sind in Tabelle V des Beispiels 63 (S. 243) gegeben.

Werden vorstehende Größen wie im vorigen Beispiel auf die Gewölbbreite $b = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ bezogen, so hat man nach § 27, 5) 6) die Normalspannungen σ_o , σ_u im obersten und untersten Querschnittselement, welche alle übrigen σ einschließen, pro qcm:

$$\sigma_o = \frac{1}{10000 h} \left(N_x + \frac{6}{h} M_x \right) \quad 6$$

$$\sigma_u = \frac{1}{10000 h} \left(N_x - \frac{6}{h} M_x \right) \quad 7$$

und nach § 27, 8) die numerisch größte Schubspannung, welche in der Achschicht auftritt, pro qcm:

$$\tau = \frac{1,5 T_x}{10000 h}. \quad 8$$

In diesen Formeln ist, wie schon im vorigen Beispiel, h in Metern auszudrücken.

Bei den folgenden Angaben bezüglich des Gangs der Berechnung verwenden wir die in den Schlußbemerkungen zum vorigen Beispiel angeführten genaueren H , M , V , während in den Tabellen die in ganz gleicher Weise mit den im vorigen Beispiel erhaltenen H , M , V berechneten Werte in kleinerem Drucke beigefügt sind. — Wie schon anderwärts erwähnt (§ 9 mit Beisp. 8) braucht man die Schubspannungen τ bei vollwandigen Bogen gewöhnlich nicht zu berücksichtigen, was durch die hier beabsichtigte Berechnung und die sich anschließende des Beispiels 65 insbesondere für Gewölbe bestätigt werden soll.

a) Eigengewicht.

Die Werte a , P , Pa sind entsprechend den Angaben des Beispiels 63 (S. 238) in der folgenden Tabelle VII angeführt. Mit $V = 24095 \text{ kg}$, $H = 25796 \text{ kg}$, $M = -4902 \text{ mkg}$ erhalten wir für $x = 0$:

$$V_x = V = 24095 \text{ kg}, \quad M_x = M = -4902 \text{ mkg},$$

$$N_x = 24095 \cdot 0,6628 + 25796 \cdot 0,7488 = 35286 \text{ kg},$$

$$T_x = 24095 \cdot 0,7488 - 25796 \cdot 0,6628 = 945 \text{ „},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{11000} \left(35286 - \frac{6}{1,1} 4902 \right) = 0,77 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{11000} \left(35286 + \frac{6}{1,1} 4902 \right) = 5,64 \text{ „},$$

$$\tau = \frac{1,5 \cdot 945}{11000} = 0,13 \text{ kg};$$

bei $x = 0,629 \text{ m}$:

$$V_x = 24095 - 2117 = 21978 \text{ kg}, \quad \sum_0^x P a = 665 \text{ mkg},$$

$$M_x = -4902 - 25796 \cdot 0,531 + 21978 \cdot 0,629 + 655 = -4110 \text{ mkg},$$

$$N_x = 21978 \cdot 0,6277 + 25796 \cdot 0,7784 = 33875 \text{ kg},$$

$$T_x = 21978 \cdot 0,7784 - 25796 \cdot 0,6277 = 916 \text{ „},$$

$$\sigma_o = \frac{1}{10350} \left(33875 - \frac{6}{1,035} 4110 \right) = 0,97 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{10350} \left(33875 + \frac{6}{1,035} 4110 \right) = 5,57 \text{ „},$$

$$\tau = \frac{1,5 \cdot 916}{10350} = 0,13 \text{ kg};$$

bei $x = 1,754 \text{ m}$:

$$V_x = 21978 - 3339 = 19639 \text{ kg}, \quad \sum_0^x P a = 665 + 3980 = 4645 \text{ mkg},$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= -4902 - 25796 \cdot 1,368 + 18639 \cdot 1,754 + 4645 = -2853 \text{ mkg}, \\
 N_x &= 18639 \cdot 0,5649 + 25769 \cdot 0,8251 = 31813 \text{ kg}, \\
 T_x &= 18639 \cdot 0,8251 - 25796 \cdot 0,5649 = 807 \text{ „}, \\
 \sigma_o &= \frac{1}{9489} \left(31813 - \frac{6}{0,948} 2853 \right) = 1,45 \text{ kg}, \\
 \sigma_u &= \frac{1}{9480} \left(31813 + \frac{6}{0,948} 2853 \right) = 5,26 \text{ „}, \\
 \tau &= \frac{1,5 \cdot 807}{9480} = 0,13 \text{ kg}.
 \end{aligned}$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werte der Tabelle VII berechnet.

b) Einseitige Belastung.

Die Abszissen a der Lastangriffspunkte sind in der ersten Kolonne der nachstehenden Tabelle VIII eingetragen! (vergl. Fig. 175). Aus den Schlussbemerkungen des Beisp. 63 entnehmen wir $V = 4,1038 P$, $H = 3,4714 P$, $M = -4,6540 P$. Es folgen damit nach 1-8 bei Beachtung der Tabelle VIII für $x = 0$:

$$\begin{aligned}
 V_x = V &= 4,1038 P, & \sum_0^x P a &= 0, & M_x = M &= -4,6540 P, \\
 \frac{N_x}{P} &= 4,1038 \cdot 0,6628 + 3,4714 \cdot 0,7488 = 5,3194, \\
 \frac{T_x}{P} &= 4,1038 \cdot 0,7488 - 3,4714 \cdot 0,6628 = 0,7721, \\
 \frac{10000 \sigma_o}{P} &= \frac{1}{1,1} \left(5,3194 - \frac{6}{1,1} 4,6540 \right) = -18,242, \\
 \frac{10000 \sigma_u}{P} &= \frac{1}{1,1} \left(5,3194 + \frac{6}{1,1} 4,6540 \right) = 27,914, \\
 \frac{10000 \tau}{P} &= \frac{1,5 \cdot 0,7721}{1,1} = 1,053;
 \end{aligned}$$

für $x = 0,629$ m, wobei zu beachten, daß die erste, bei $a = 0,629$ m wirkende Last nach dem Querschnitt x angreift (vergl. Fig. 297):

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle VII. Eigengewicht.

a in m	P in kg	Pa	x in m	V_x	$\sum_0^x P a$	M_x	N_x	T_x	σ_o	σ_u	τ
0,314	2117	665	0	24095	0	-4902	35286	945	0,77	5,64	0,13
1,192	3339	3980	0,629	21978	665	-4110	33875	916	0,97	5,57	0,13
2,317	2898	6715	1,754	18639	4645	-2853	31813	872	1,45	5,26	0,13
3,442	2571	8849	2,879	15741	11360	-1802	30212	654	2,04	4,89	0,11
4,567	2296	10486	4,004	13170	20209	-1068	28828	496	2,59	4,57	0,09
5,692	2081	11845	5,129	10874	30695	-517	27992	359	3,19	4,30	0,07
6,817	1923	13109	6,254	8793	42540	-133	27252	254	3,73	4,06	0,06
7,942	1818	14439	7,379	6870	55649	114	26696	173	4,15	3,84	0,04
9,067	1739	15768	8,504	5052	70088	295	26286	104	4,50	3,65	0,02
10,192	1676	17082	9,629	3313	85856	385	26008	55	4,74	3,56	0,01
11,317	1637	18526	10,754	1637	102938	410	25847	14	4,89	3,57	0,00
			11,879	0	121464	428	25796	0	5,01	3,59	0
						463	26821	0	3,78	5,21	0

$$\begin{aligned}
 V_x &= V = 4,1038 P, & \sum_0^x P a &= 0, \\
 \frac{M_x}{P} &= -4,6540 - 3,4714 \cdot 0,531 + 4,1038 \cdot 0,629 = -3,9160, \\
 \frac{N_x}{P} &= 4,1038 \cdot 0,6277 + 3,4714 \cdot 0,7784 = 5,2781, \\
 \frac{T_x}{P} &= 4,1038 \cdot 0,7784 - 3,4714 \cdot 0,6277 = 1,0154, \\
 \frac{10000 \sigma_o}{P} &= \frac{1}{1,035} \left(5,2781 - \frac{6}{1,035} \cdot 3,9160 \right) = -16,834, \\
 \frac{10000 \sigma_u}{P} &= \frac{1}{1,035} \left(5,2781 + \frac{6}{1,035} \cdot 3,9160 \right) = 27,033, \\
 \frac{10000 \tau}{P} &= \frac{1,5 \cdot 1,0154}{1,035} = 1,472;
 \end{aligned}$$

für $x = 1,754$ m, da vor x bei $a = 0,629$ m eine Last $\frac{P}{2}$ angreift:

$$\begin{aligned}
 V_x &= 4,1038 P - \frac{P}{2} = 3,6038, & \sum_0^x P a &= \frac{P}{2} \cdot 0,629 = 0,3145, \\
 \frac{M_x}{P} &= -4,6540 - 3,4714 \cdot 1,368 + 3,6038 \cdot 1,754 + 0,3145 = -2,7673, \\
 \frac{N_x}{P} &= 3,6038 \cdot 0,5649 + 3,4714 \cdot 0,8251 = 4,9000, \\
 \frac{T_x}{P} &= 3,6038 \cdot 0,8251 - 3,4714 \cdot 0,5649 = 1,0125, \\
 \frac{10000 \sigma_o}{P} &= \frac{1}{0,948} \left(4,9000 - \frac{6}{0,948} \cdot 2,7673 \right) = -13,335, \\
 \frac{10000 \sigma_u}{P} &= \frac{1}{0,948} \left(4,9000 + \frac{6}{0,948} \cdot 2,7673 \right) = 23,670, \\
 \frac{10000 \tau}{P} &= \frac{1,5 \cdot 1,0125}{0,948} = 1,599.
 \end{aligned}$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werte der Tabelle VIII berechnet.

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle VIII. Einseitige Verkehrslast. Belastete Seite.

a in m	Last	x in m	$\frac{V_x}{P}$	$\frac{\sum_0^x P a}{P}$	$\frac{M_x}{P}$	$\frac{N_x}{P}$	$\frac{T_x}{P}$	$\frac{10000 \sigma_o}{P}$	$\frac{10000 \sigma_u}{P}$	$\frac{10000 \tau}{P}$
0,629	$\frac{P}{2}$	0	4,1038	0	-4,6540	5,3194	0,7721	-18,242	27,914	1,053
		0,629	4,1038 4,1015	0 "	-4,1357 -3,9160	5,4185 5,2781	0,9813 1,0154	-18,582 -16,834	25,433 27,033	0,929 1,472
2,879	P	1,754	3,6038 3,6015	0,3145 "	-2,7673 -2,4369	4,9000 5,0096	1,0125 0,9347	-13,307 -10,985	23,644 21,554	1,602 1,479
		2,879	3,6038 3,6015	0,3145 "	-1,1743 -0,9417	4,8119 4,9299	1,3725 1,3080	-3,748 -1,781	14,784 18,081	2,361 2,341
5,129	P	4,004	2,6038 2,6015	3,1935 "	-0,3348 -0,1857	4,2625 4,3822	0,8137 0,7525	2,195 3,724	3,395 7,463	1,516 1,402
		5,129	2,6038 2,6015	3,1935 "	0,8484 0,9272	4,1965 4,3201	1,1048 1,0521	14,708 15,719	-3,488 -4,167	2,215 2,110
7,379	P	6,254	1,6038 1,6015	8,3225 "	1,2155 1,2361	3,7994 3,9263	0,4335 0,3801	20,311 20,745	-9,456 -9,527	0,929 0,834
		7,379	1,6038 1,6015	8,3225 "	1,8673 1,8407	3,7630 3,8925	0,6808 0,6449	30,745 30,877	-19,475 -18,923	1,529 1,448
9,629	P	8,504	0,6038 0,6015	15,7015 "	1,6683 1,6052	3,5230 3,6556	-0,0607 -0,0888	29,523 28,818	-18,599 -17,458	-0,157 0,205
		9,629	0,6038 0,6015	15,7015 "	1,7262 1,6363	3,5198 3,6528	0,1634 0,1442	31,959 30,799	-20,732 -16,148	0,391 0,345
11,879	$\frac{P}{2}$	10,754	-0,3962 -0,3985	25,3305 "	0,9090 0,8029	3,4396 3,5739	-0,6134 -0,6241	20,239 18,742	8,980 7,044	-1,506 -1,532
		11,879	-0,3962 -0,3985	25,3305 "	0,3418 0,2277	3,4714 3,6058	-0,3962 -0,3985	11,482 9,805	0,089 2,215	-0,990 -0,996

Zur unbelasteten Bogenhälfte übergehend, die wir nun als erste Bogenhälfte ansehen, entnehmen wir den Schlußbemerkungen des Beispiels 63 $\bar{V} = 0,8962 P$, $H = 3,4714 P$, $M = 5,3240 P$, und haben dann für alle Querschnitte (Lagerfugen) $V_x = V$, $\sum_0^x Pa = 0$, während die Hy , $H \sin \varphi$, $H \cos \varphi$ wie bei der Berechnung der belasteten Bogenhälfte bleiben und demgemäß vorgemerkt wurden. Wir erhalten damit bei $x = 0$, wo $M_x = M$:

$$\begin{aligned} \frac{N_x}{P} &= 0,8962 \cdot 0,6628 + 3,4714 \cdot 0,7488 = 3,1934, \\ \frac{T_x}{P} &= 0,8962 \cdot 0,7188 - 3,4714 \cdot 0,6628 = -1,6566, \\ \frac{10000 \sigma_o}{P} &= \frac{1}{1,1} \left(3,1934 + \frac{6}{1,1} 5,3240 \right) = 29,303 \\ \frac{10000 \sigma_u}{P} &= \frac{1}{1,1} \left(3,1934 - \frac{6}{1,1} 5,3240 \right) = -23,497, \\ \frac{10000 \tau}{P} &= -\frac{1,5 \cdot 1,6566}{1,1} = -2,259, \end{aligned}$$

und bei $x = 0,639$ m:

$$\begin{aligned} \frac{M_x}{P} &= 5,3240 - 3,4714 \cdot 0,531 + 0,8962 \cdot 0,629 = 4,0444, \\ \frac{N_x}{P} &= 0,8962 \cdot 0,6277 + 3,4714 \cdot 0,7784 = 3,2647, \\ \frac{T_x}{P} &= 0,8962 \cdot 0,7784 - 3,4714 \cdot 0,6277 = -1,4814, \\ \frac{10000 \sigma_o}{P} &= \frac{1}{1,035} \left(3,2647 + \frac{6}{1,035} 4,0444 \right) = 25,807, \\ \frac{10000 \sigma_u}{P} &= \frac{1}{1,035} \left(3,2647 - \frac{6}{1,035} 4,0444 \right) = -19,499, \\ \frac{10000 \tau}{P} &= -\frac{1,5 \cdot 1,4814}{1,035} = -2,147. \end{aligned}$$

In derselben Weise sind die übrigen Werte der Tabelle IX berechnet.

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle IX. Einseitige Verkehrslast. Unbelastete Seite.

x in m	$\frac{M_x}{P}$	$\frac{N_x}{P}$	$\frac{T_x}{P}$	$\frac{10000 \sigma_o}{P}$	$\frac{10000 \sigma_u}{P}$	$\frac{10000 \tau}{P}$
0	5,3240	3,1934	-1,6566	29,303	-23,497	-2,259
	5,7892	3,2955	-1,7171	31,703	-25,711	-2,341
0,629	4,0444	3,2647	-1,4814	25,807	-19,499	-2,147
	4,4397	3,3708	-1,5642	28,124	-21,610	-2,267
1,754	2,1471	3,3705	-1,2215	17,890	-10,779	-1,933
	3,4335	3,4827	-1,2955	19,014	-12,596	-2,050
2,879	0,6941	3,4519	-0,9687	9,436	-1,518	-1,666
	0,8868	3,5092	-1,0343	11,691	-2,904	-1,779
4,004	-0,3875	3,5121	-0,7203	0,775	7,951	-1,342
	0,2731	3,6339	-0,7778	1,986	7,043	-1,448
5,129	-1,1254	3,5534	-0,4771	-7,318	16,819	-0,957
	1,0761	3,6788	-0,5255	6,822	16,458	-1,054
6,254	-1,5543	3,5773	-0,2384	-13,922	24,143	-0,711
	1,5581	3,7056	-0,2784	-15,785	24,372	-0,897
7,379	-1,6986	3,5854	-0,0041	-17,472	28,207	-0,009
	1,7444	3,7190	-0,0357	-17,893	29,018	0,080
8,504	-1,5686	3,5780	0,2265	-17,075	28,170	0,527
	1,6458	3,7105	0,2044	-17,983	29,489	0,473
9,629	-1,1818	3,5564	0,4535	-12,365	23,709	1,085
	1,2804	3,8901	0,4389	-13,656	25,427	1,050
10,754	-0,5450	3,5207	0,6764	-2,968	14,521	1,661
	0,6554	3,8550	0,6703	-4,552	16,516	1,645
11,879	0,3418	3,4714	0,8962	11,482	0,089	2,260
	0,2292	3,8058	0,8985	9,830	2,190	2,249

In der Trägermitte müssen sich auf der belasteten und unbelasteten Bogenhälfte die gleichen M_x , N_x , σ_o , σ_u ergeben, was bei der genaueren Berechnung vollständig (Tabellen VIII und IX große Zahlen), bei der einfacheren Berechnung (dieselben Tabellen, kleine Zahlen), soweit bei Vernachlässigung von Dezimalen zu erwarten, zutrifft.

Beispiel 65. Beanspruchungen bei Versuchen mit einem Bogen ohne Gelenke (Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe).

Bei den Gewölbeversuchen des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins wurde das in Beisp. 63, 64 behandelte Bruchsteingewölbe durch sein Eigengewicht und einseitige Belastung bis zur Bogenmitte, bestehend aus gleichen Lasten P bei $a = 2,879$ m, $5,129$ m, $7,379$ m, $9,629$ m und halb so große Lasten bei $a = 0,629$ m, $11,879$ m zum Bruche gebracht (§ 31). Bis $P = 3430$ kg wuchsen die Formänderungen der Bogenachse nahezu proportional der Belastung durch die P (Proportionalitätsgrenze), während bei $P = 5574$ kg die ersten Risse in einer der Stirnflächen konstatiert wurden (kritische Belastung, vergl. Fig. 177 bis 179), und für $P = 7402$ kg der Bruch eintrat (Bruchbelastung)¹. Die ungünstigsten Normalspannungen σ und größten Schubspannungen τ in den unten angeführten Querschnitten x (Lagerfugen, s. Fig. 175, S. 237 und Tabelle V, S. 243) für die zwei ersterwähnten Belastungsstufen zu berechnen.

In Beispiel 64 haben wir bereits die σ_o , σ_u , τ durch das Eigengewicht allein erhalten, und für eine einseitige Belastung durch beliebige P allein die Werte:

$$\frac{10000 \sigma_o}{P} = Z_o, \quad \frac{10000 \sigma_u}{P} = Z_u, \quad \frac{10000 \tau}{P} = Z.$$

Hierbei bedeuten σ_o , σ_u die Normalspannungen im oberen und unteren Querschnittselement, wo die Grenzwerte der Normalspannungen eines Querschnitts eintreten, und τ die Querschubspannung und Längsschubspannung bei der Achsschicht, wo diese Schubspannungen ihre größten Zahlenwerte erreichen. Demnach erhalten wir als Beiträge der einseitigen Belastung für $P = 3430$ kg:

$$\sigma_o = 0,3430 Z_o, \quad \sigma_u = 0,3430 Z_u, \quad \tau = 0,3430 Z \text{ kg pro qcm,}$$

und für $P = 0,5574$ kg:

$$\sigma_o = 0,5574 Z_o, \quad \sigma_u = 0,5574 Z_u, \quad \tau = 0,5574 Z \text{ kg pro qcm.}$$

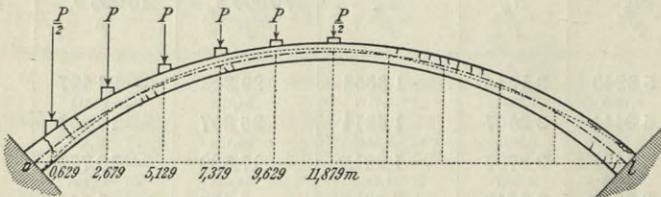


Fig. 177.

Die Zahlen Z_o , Z_u , Z sind obigen Ausdrücken zufolge für die belastete Bogenhälfte aus den drei letzten Columnen der Tabelle VIII, für die unbelastete Bogenhälfte aus den drei letzten Columnen der Tabelle IX zu entnehmen, während die σ_o , σ_u , τ durch das Eigengewicht allein nach den drei letzten Columnen der Tabelle VII in der folgenden Tabelle X, S. 252, wiederholt sind.

Wir erhalten nun die Gesamtspannungen durch Eigengewicht und einseitige Belastung im Falle $P = 3430$ kg z. B. für $x = 0$ auf der belasteten Seite:

$$\begin{aligned} \sigma_o &= 0,77 - 0,3430 \cdot 18,242 = - 5,49 \text{ kg,} \\ \sigma_u &= 5,64 + 0,3430 \cdot 27,914 = 15,21 \text{ „,} \\ \tau &= 0,13 + 0,3430 \cdot 1,053 = 0,49 \text{ „;} \end{aligned}$$

¹ Bericht des Gewölbeausschusses, Wien 1895, S. 87, 88. Bezüglich der Zahlen 3430 und 5574 kg siehe die zweite Fußnote auf S. 48 des Berichts.

auf der unbelasteten Seite:

$$\sigma_o = 0,77 + 0,3430 \cdot 29,303 = 10,82 \text{ kg,}$$

$$\sigma_u = 5,64 - 0,3430 \cdot 23,497 = - 2,42 \text{ „,}$$

$$\tau = 0,13 - 0,3430 \cdot 2,259 = - 0,64 \text{ „.}$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werte der Tabelle X für $P = 3430 \text{ kg}$ berechnet. Für $P = 5574 \text{ kg}$ tritt in vorstehenden und den übrigen Ansätzen nur $0,5574$ an Stelle von $0,3430$. Den Fall $P = 7402 \text{ kg}$ (Bruchbelastung) in gleicher Weise zu verfolgen, bietet kein Interesse, weil infolge der eingetretenen Risse und des Aufhörens der entsprechenden Zugwiderstände die angewandten Formeln nicht mehr zutreffend sind, auch abgesehen davon, daß ihre Voraussetzungen überhaupt nie bis zum Bruche Gültigkeit behalten.

Wir haben oben die Spannungen bis zu den ersten Rissebildungen auf Grund der Elastizitätslehre berechnet, wobei man sich einen mittleren Elastizitätsmodul eingeführt zu denken hat, welcher jedoch aus den Formeln für den Einfluß der Belastung wegfällt, also hierfür nicht gewählt zu werden braucht. Unter Voraussetzung der Zulässigkeit dieses Vorgehens und abgesehen von Einflüssen der Temperatur und Widerlagerbewegungen (s. über diese Beisp. 67) zeigt sich nun zunächst im Einklange mit § 9, daß die Schubspannungen τ für das Eintreten von Rissen nicht in Betracht kommen, da sie auch an den ungünstigsten Stellen (bei der Achsschicht, vergl. § 9) nicht über $1,43 \text{ kg pro qcm}$ hinausgehen. Die durch

$$\text{tg } \delta = \frac{T_x}{N_x}$$

bestimmten Winkel δ der resultierenden Kräfte R_x in den Querschnitten (Lagerfugen) mit den Normalen zu letzteren bleiben weit unter dem Reibungswinkel von Mauer auf Mauer (s. die N_x , T_x in Tabelle VII, VIII, IX), so daß die Reibung allein, ohne jedes Bindemittel, genügt hätte, den Transversalkräften T_x zu widerstehen. Auch die berechneten Druckspannungen erklären nicht den Eintritt von Trennungen, da sie noch nicht 23 kg pro qcm erreichen, während Würfel aus dem verwendeten Sandstein und Mörtel Druckfestigkeiten von etwa 850 kg bzw. 78 kg auswiesen¹.

Die ersten Risse entstanden denn auch an denjenigen Stellen, an welchen sich für $P = 5574 \text{ kg}$ die größten Zugspannungen ergaben (vergl. Tabelle X und Fig. 177). Wenn diese feinen Haarrisse zunächst nur an einer Stirnfläche beobachtet wurden, so läßt sich dies durch Ungleichmäßigkeiten des Materials und der Druckübertragung genügend erklären, vollständig radiale Bruchflächen von einer Stirnfläche bis zur andern wird hier niemand erwarten. Von diesem Standpunkte aus sehen wir auch die sonst schwer erklärlichen Längsrisse nächst dem Gewölberücken beim Kämpfer der unbelasteten Seite (Fig. 177, 179) als sekundäre Erscheinungen an, hervorgerufen durch Risse von der unteren Laibung aus und dementsprechende Konzentration des Druckes im oberen Teil der Fugen, da letzterwähnte Risse bis zum Bruche auch an den Stirnflächen aufs kräftigste hervortraten (Fig. 179), für die andern Versuchsgewölbe schon bei der kritischen Belastung. Über alle Risse in der Nähe der Kämpfer (Fig. 178, 179) kann die ältere Berechnungsweise der Gewölbe keinen Anschluß geben, da sie die Stützlinie durch das mittlere Drittel der Kämpferfugen gehen läßt und damit Zugspannungen bei letzteren willkürlich ausschließt. Die verdienstvolle Feststellung des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins, daß auch bei den Kämpfern erhebliche Zugspannungen auftreten können, welche mit den übrigen Zugspannungen allein für den Beginn der Zerstörung maßgebend sind, und nur durch die Theorie der elastischen Bogenträger rechnerisch nachgewiesen werden können, hätte längst dahin führen sollen, alle wichtigeren Gewölbe als elastische Bogenträger zu berechnen. Selbstverständlich sind dann auch die Voraussetzungen der Theorie elastischer Bogenträger soweit erreichbar zu erfüllen, und durch sorgfältige Formgebung und geeignete Ausführung Zugspannungen möglichst zu vermeiden.

Die in Tabelle X klein gedruckten Zahlen haben sich in gleicher Weise wie die darüber stehenden mit den in den Tabellen VII, VIII, IX klein gedruckten σ_o , σ_u , τ ergeben, sie entsprechen also den am Schlusse des Beispiels 63 er-

¹ Bericht des Gewölbeausschusses, Wien 1895, S. 42.

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle X. Beanspruchungen in kg pro qcm.

Belastungsstufe	Bogenhalfte	x in m	0 Kämpfer	0,629	1,754	2,879	4,004	5,129	6,254	7,379	8,504	9,629	10,754	11,879 Scheitel	
$P = 0$. Eigengewicht allein	σ_0	==	0,77 2,70	0,97 2,85	1,45 3,10	2,04 3,40	2,59 3,63	3,19 3,83	3,73 3,94	4,15 3,92	4,50 3,88	4,74 3,70	4,89 3,72	5,01 3,73	
	σ_u	==	5,64 3,85	5,57 3,86	5,26 3,79	4,89 3,68	4,57 3,76	4,30 3,01	4,06 4,12	3,84 4,37	3,84 4,68	3,65 4,83	3,56 4,83	3,57 5,08	3,59 5,31
	τ	==	0,13 0,04	0,13 0,04	0,13 0,04	0,11 0,02	0,09 0,01	0,09 0,01	0,07 0,01	0,06 0,01	0,04 0,03	0,02 0,03	0,01 0,02	0,00 0,01	0 0
$P = 3430$ kg. Proportionalitätsgrenze	σ_0	==	-5,49 2,04	-4,80 2,85	-3,11 0,07	0,75 4,01	3,34 4,01	8,23 8,22	10,70 11,06	14,70 14,41	14,63 13,76	15,70 14,35	11,83 10,15	8,95 7,00	
	σ_u	==	15,21 4,07	14,84 12,31	13,37 11,18	9,96 8,17	7,45 6,22	3,10 2,48	3,10 2,88	2,84 3,12	2,84 3,12	2,73 2,66	3,55 2,66	3,62 5,97	
	τ	==	0,49 0,36	0,63 0,50	0,68 0,55	0,92 0,70	0,61 0,49	0,83 0,71	0,38 0,48	0,38 0,48	0,38 0,48	0,03 0,00	0,14 0,10	0,52 0,34	0,34 0,34
unbelastete	σ_0	==	10,82 2,42	9,82 12,48	7,59 9,63	5,28 7,20	2,86 4,31	0,68 1,50	1,05 0,79	1,84 3,22	1,36 2,20	0,50 0,20	3,87 2,10	8,95 7,10	
	σ_u	==	-2,42 4,07	-1,12 3,53	1,56 0,25	4,37 2,68	7,30 6,18	10,07 9,50	12,34 13,48	13,52 14,02	13,52 14,02	13,31 14,00	11,69 13,55	8,55 10,74	3,62 5,98
	τ	==	0,64 0,76	0,61 0,74	0,53 0,66	0,46 0,59	0,37 0,40	0,26 0,37	0,18 0,21	0,18 0,21	0,04 0,01	0,20 0,14	0,38 0,34	0,57 0,55	0,78 0,77
belastete	σ_0	==	-9,40 5,99	-8,41 5,11	-5,97 3,02	0,05 2,47	3,81 5,71	11,39 12,59	15,05 15,40	21,29 20,90	21,29 20,90	20,96 19,94	22,55 20,96	16,17 14,17	11,41 9,30
	σ_u	==	21,20 18,08	20,64 17,49	18,44 15,80	13,13 10,97	9,25 7,75	2,36 1,50	1,21 1,19	7,02 6,18	7,02 6,18	6,72 5,17	8,00 5,84	1,44 1,15	3,64 0,44
	τ	==	0,72 0,56	0,95 0,79	1,02 0,86	1,43 1,27	0,94 0,79	1,30 1,17	0,58 0,45	0,58 0,45	0,58 0,45	0,07 0,13	0,23 0,17	0,84 0,86	0,55 0,50
unbelastete	σ_0	==	17,10 20,37	15,35 18,51	11,42 14,29	7,30 9,64	3,02 4,74	0,89 0,14	4,03 3,74	5,59 6,05	5,02 6,14	2,15 3,82	3,24 1,18	11,41 9,21	
	σ_u	==	-7,46 10,48	-5,30 8,19	-0,75 3,21	4,04 2,04	9,00 7,69	13,67 13,08	17,52 17,70	19,56 20,54	19,56 21,02	19,35 21,02	16,78 10,00	11,66 14,29	3,64 6,43
	τ	==	1,13 1,56	1,07 1,22	0,95 1,10	0,82 0,97	0,66 0,80	0,46 0,40	0,34 0,34	0,34 0,34	0,34 0,34	0,31 0,24	0,31 0,24	0,93 0,91	1,26 1,25

wählten häufig zugelassenen Vernachlässigungen. Man sieht, daß das genauere Verfahren empfohlen werden muß, welches auch die Einsenkung in guter Übereinstimmung mit der Beobachtung liefert (für Eigengewicht und die Lasten $P = 3430$ kg in der Trägermitte: berechnet $e = 0,172$ cm, beobachtet $e = 0,165$ cm, Beispiel 99). Aber selbst die Berechnung mit jenen Vernachlässigungen ist dem ganz willkürlichen älteren Verfahren bei weitem vorzuziehen.

Bei den obigen Ermittlungen kam die Lage der Stützlinie des Gewölbes überhaupt nicht zur Sprache, da ihre Feststellung für die Beurteilung der Standicherheit desselben überflüssig ist. Das gewöhnliche Verfahren, die Beanspruchungen nur an den Stellen zu berechnen, wo die Stützlinie den Gewölbegrenzen am nächsten kommt (Bruchfugen), ist nebenbei insofern nur annähernd richtig, als die Beanspruchungen auch von den ganzen Höhen der Lagerfugen und den Werten der Normalkräfte N_x abhängen, welche im allgemeinen von Fuge zu Fuge veränderlich sind. Will man jedoch aus irgend einem Grund, z. B. der Anschaulichkeit halber, die Stützlinie auftragen, so kann diese auf Grund der für obige Berechnung ermittelten Größen sofort erhalten werden (Beisp. 66).

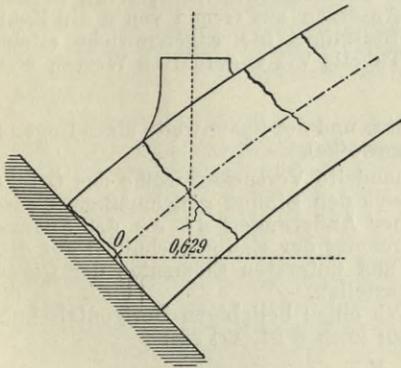


Fig. 178.

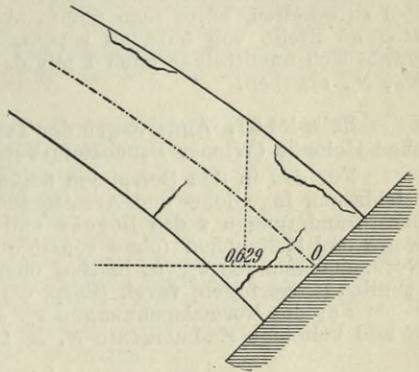


Fig. 179.

Beispiel 66. Stützlinie eines Bogens ohne Gelenke (Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe).

Für das in den Beispielen 63, 64, 65 behandelte Versuchsgewölbe des Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins die Stützlinie durch diejenige Belastung zu ermitteln, bei welcher die ersten Risse beobachtet wurden (einseitige Verkehrsbelastung bis $P = 5574$ kg). Vorausgesetzt sei, daß die Beziehungen der Theorie elastischer Bogenträger bis dahin als näherungsweise gültig angesehen werden dürfen.

Nach § 8, 1) hat man die Entfernung der Stützlinie von der Bogenachse beim Querschnitt x , gemessen in der Ebene des letzteren:

$$c = \frac{M_x}{N_x}, \quad 1$$

wobei die c nach oben positiv, nach unten negativ zu rechnen sind. Wir machen nun von den Resultaten des Beispiels 64 Gebrauch.

Bezeichnen M_e , N_e die Werte von M_x , N_x durch das Eigengewicht allein (Tabelle VII), $M_x = mP$, $N_x = nP$ ihre Werte durch die einseitige Verkehrslast allein (Tabellen VIII und IX), so erhalten wir beim Zusammenwirken von Eigengewicht und beliebigen Werten der P :

$$c = \frac{M_e + mP}{N_e + nP}. \quad 2$$

Speziell für die obenerwähnte Belastung mit $P = 5574$ kg wird auf der belasteten Seite bei $x = 0$:

$$c = \frac{-4902 - 4,6540 \cdot 5574}{35\,286 + 5,3194 \cdot 5574} = -0,475 \text{ m},$$

bei $x = 0,629$ m:

$$c = \frac{-4110 - 3,9160 \cdot 5574}{33\,875 + 5,2781 \cdot 5574} = -0,410 \text{ m};$$

auf der unbelasteten Seite bei $x = 0$:

$$c = \frac{-4902 + 5,3240 \cdot 5574}{35\,286 + 3,1934 \cdot 5574} = 0,504 \text{ m},$$

bei $x = 0,629$ m:

$$c = \frac{-4110 + 4,0444 \cdot 5574}{33\,875 + 3,2647 \cdot 5574} = 0,354 \text{ m}.$$

In gleicher Weise sind die übrigen c der Tabelle XI (S. 256) berechnet. Die entsprechende Stützlinie ist in Fig. 177 (S. 250) eingetragen.

Die in Tabelle XI klein gedruckten Werte von c haben sich in gleicher Weise wie die darüber stehenden mit den in den Tabellen VII, VIII, IX, klein gedruckten M_x , N_x ergeben, sie entsprechen also den am Schlusse des Beispiels 63 erwähnten Vernachlässigungen und bestätigen das am Schlusse des vorigen Beispiels bezüglich der letzteren Gesagte.

Um die Stützlinie für $P = 3430$ kg (Proportionalitätsgrenze, vergl. S. 234, 250) zu erhalten, hätte man nur in obigen Ansätzen auf Grund von 2 die Zahl 3430 an Stelle von 5574 zu setzen. Die Stützlinie für Eigengewicht allein würde sich unmittelbar nach 1 mit den in Tabelle VII angeführten Werten von M_x , N_x ergeben.

Beispiel 67. Änderungen der Temperatur und der Spannweite eines Bogens ohne Gelenke (Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe).

Für das in den Beispielen 63–66 behandelte Versuchsgewölbe des Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins den Einfluß gleichmäßiger Temperaturänderungen τ des Bogens und kleiner Änderungen Δl , Δk der Spannweite und Stützhöhen (ohne sonstige Verdrehung der Endquerschnitte) auf die Normalspannungen σ_o , σ_u in den obersten und untersten Elementen der Querschnitte (Lagerfugen, vergl. Beisp. 63) festzustellen.

Für die Normalspannungen σ_o , σ_u durch einen beliebigen Horizontalschub H und beliebige Endmomente M , M' hat man nach § 21, 47) 48):

$$\sigma_o = \left(\frac{\cos \varphi}{F} - \frac{y - \frac{M}{H}}{W} \right) H, \quad 1$$

$$\sigma_u = \left(\frac{\cos \varphi}{F} + \frac{y - \frac{M}{H}}{W} \right) H, \quad 2$$

und im vorliegenden Falle für den rechteckigen Querschnitt der Breite $b = 1$ m und Höhe h m mit $F = h$, $W = \frac{h^2}{6}$ pro qm:

$$\sigma_o = \left[\cos \varphi - \frac{6}{h} \left(y - \frac{M}{H} \right) \right] \frac{H}{h}, \quad 3$$

$$\sigma_u = \left[\cos \varphi + \frac{6}{h} \left(y - \frac{M}{H} \right) \right] \frac{H}{h}. \quad 4$$

Hierin ist unter obigen Voraussetzungen nach der genaueren Berechnung in Beispiel 98 $M:H = 3,5899$ (S. 244), während die Berechnung in Beispiel 63 $M:H = 3,5921$ ergab. Wir erhalten mit den genaueren Werten bei Beachtung der Tabelle V des Beispiels 63, wenn die σ_o , σ_u auf qcm bezogen werden, für $x = 0$:

$$10\,000 \sigma_o = \left(0,7488 - 6 \frac{0 - 3,5899}{1,1} \right) \frac{H}{1,1} = 18,48 H,$$

$$10\,000 \sigma_u = \left(0,7488 + 6 \frac{0 - 3,5899}{1,1} \right) \frac{H}{1,1} = -17,12 H,$$

und für $x = 0,629$ m:

$$10\,000 \sigma_o = \left(0,7784 - 6 \frac{0,531 - 3,5899}{1,035} \right) \frac{H}{1,035} = 17,89 H,$$

$$10\,000 \sigma_u = \left(0,7784 + 6 \frac{0,531 - 3,5899}{1,035} \right) \frac{H}{1,035} = -16,38 H.$$

In gleicher Weise sind die übrigen $\frac{\sigma_o}{H}$, $\frac{\sigma_u}{H}$ der folgenden Tabelle XII berechnet.

Nach der Zusammenstellung am Schlusse des Beispiels 63 hat man mit dem Elastizitätsmodul $E = 175\,000 \cdot 100^2$ kg pro qm und dem Ausdehnungskoeffizienten $\alpha = 0,000\,0118$ den Horizontalschub durch eine Temperaturänderung τ :

$$H = \frac{E \alpha \tau}{39,993} = 516 \tau \text{ kg,}$$

und den Horizontalschub durch die vorausgesetzten Δl , Δk wenn Δl in cm eingesetzt werden soll:

$$H = - \frac{E \Delta l}{95\,016} = - 18418 \Delta l \text{ kg,}$$

während die weniger genaue Berechnung des Beispiels 63 bezw. 534τ und $- 19045 \Delta l$ ergeben hatte.

Will man nun die Einflüsse der Kämpferbewegungen weiter verfolgen, so fehlen die entsprechenden Messungen. Bei den übrigen erprobten Gewölben waren z. B. für die Belastungsstufe $P = 3430$ kg $\Delta l = 0,075$ cm (Ziegelgewölbe), $0,065$ cm (Stapfbetongewölbe), $- 0,035$ cm (Moniergewölbe). Dem Mittelwerte $0,035$ dieser Zahlen würde entsprechen $H = - 18418 \cdot 0,035 = - 645$ kg. Nun können aber auch Verdrehungen der Endquerschnitte stattgefunden haben, welche H , M , M' beeinflussen würden (§§ 21, 49, 50) und ebenfalls nicht bekannt sind.

Unter diesen Umständen kann auch die Berücksichtigung des Einflusses von Temperaturänderungen kaum neue Aufklärung bringen, um so weniger, als die wirksame Temperaturänderung nicht angebar ist. Die Temperatur der Luft betrug am 26. 9. 91 vor der Ausschalung 19^0 R, am 28. 9. 91 nach der Ausschalung 18^0 R, am 12. 10. 91 bei der kritischen Belastung ($P = 5574$ kg, erste Rissebildungen) $14,1^0$ R. Daß aber die Differenz von $4,9^0$ R = $6,125^0$ C als Temperaturänderung gegen die dem spannungslosen Zustande entsprechende Normaltemperatur gelten kann, läßt sich nicht behaupten, da weder der Spannungszustand des Gewölbes vor der Ausschalung noch die Temperaturen des Gewölbeinnern am Anfang und Ende des Versuchs genau bekannt sind. Setzen wir jedoch beispielsweise $\tau = - 6,125^0$, so folgen

$$H = - 516 \cdot 6,125 = - 3160 \text{ kg,}$$

und aus den in Tabelle XII für beliebige H gegebenen Ausdrücken die entsprechenden Normalspannungen bei $x = 0$:

$$\sigma_o = - 18,48 \cdot 0,316 = - 5,84 \text{ kg,} \quad \sigma_u = 17,12 \cdot 0,316 = 5,41 \text{ kg,}$$

also einschließlich der in Tabelle X gegebenen Normalspannungen durch die kritische Belastung auf der belasteten Seite:

$$\sigma_o = - 5,84 - 9,40 = - 15,24 \text{ kg,} \quad \sigma_u = 5,41 + 21,20 = 26,61 \text{ kg,}$$

auf der unbelasteten Seite:

$$\sigma_o = - 5,84 + 17,10 = 11,26 \text{ kg,} \quad \sigma_u = 5,41 - 7,46 = - 2,05 \text{ kg.}$$

In gleicher Weise sind die übrigen σ_o , σ_u der folgenden Tabelle XII berechnet.

Mit Rücksicht auf das oben Gesagte läßt sich nicht behaupten, daß diese Werte den wirklichen Normalspannungen bei der kritischen Belastung näher kommen, als die für letztere allein in Tabelle X eingetragenen. Die Normalspannungen durch die kritische Belastung allein geben eine eher noch bessere Erklärung der eingetretenen Risse (vergl. die Tabellen X und XII), wie auch die durch das Eigengewicht und die Lasten $P = 3430$ kg allein berechnete Einsenkung in der Bogenmitte $e = 0,172$ cm (Beispiel 99) in guter Übereinstimmung mit der beobachteten Einsenkung $e = 0,165$ cm steht. Die Berücksichtigung von Temperaturänderungen und Stützenbewegungen bei Gewölben wird auch infolge des Zusammenhangs von Bogen und Widerlager immer an größerer Unsicherheit als bei eisernen Bogen leiden, womit aber der Nachweis seinen Wert nicht verliert, daß ein berechnetes Gewölbe auch derartigen Einflüssen gegenüber genügende Sicherheit bietet.

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle XI. Stützlinie (Fig. 177).

Für die Fuge $x = \frac{h}{6}$ wo		0	0,629	1,754	2,879	4,004	5,129	6,254	7,379	8,504	9,629	10,754	11,879 m
		0,183	0,172	0,158	0,145	0,134	0,125	0,117	0,111	0,107	0,104	0,102	0,100 m
Belastete Bogenhälfte	$c =$	- 0,475 - 0,305 Risse	- 0,410 - 0,313 oben	- 0,309 - 0,233	- 0,146 - 0,092	- 0,056 - 0,020	0,082 0,007	0,137 0,138	0,221 0,204 Risse	0,209 0,183 unten	0,219 0,185	0,122 0,087	0,052 m 0,018 m
	$c =$	0,504 0,372 (Risse)	0,354 0,446 unten)	0,180 0,251	0,042 0,004	- 0,067 - 0,032	- 0,142 - 0,122	- 0,186 - 0,179	- 0,200 - 0,204 Risse	- 0,183 - 0,196 oben	- 0,135 - 0,157	- 0,058 - 0,085	0,052 m 0,018 m

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle XII. Temperaturänderungen etc.

Für	$x =$	0	0,629	1,754	2,879	4,004	5,129	6,254	7,379	8,504	9,629	10,754	11,879 m Scheitel
beliebige $\tau, \Delta t$	$\frac{10000}{H} \sigma_o$	Kämpfer	18,48	17,89	15,70	12,93	9,55	5,61	1,28	- 3,10	- 7,00	- 10,17	13,53
	$\frac{10000}{H} \sigma_u$		- 17,12	- 16,38	- 13,96	- 10,95	- 7,32	- 3,14	1,43	6,00	10,05	13,34	16,87
$\tau = - 6,125^0$ oder $H =$ - 3160 kg	σ_o	-	5,84	- 4,96	- 4,09	- 3,02	- 1,77	- 0,40	0,98	2,21	3,21	3,94	4,28
	σ_u		5,41	4,41	3,46	2,31	0,99	- 0,45	- 1,90	- 3,18	- 4,22	- 4,97	- 5,33
die kritische Belastung und $\tau = - 6,125^0$	σ_o	belastete	- 15,24	- 14,06	- 10,93	4,14	0,79	9,62	14,65	22,27	23,17	25,76	15,69
	σ_u		26,61	25,82	22,85	16,59	11,56	3,35	- 1,66	- 8,92	- 9,90	- 12,22	- 6,41
$\tau = - 6,125^0$	σ_o	unten)	11,26	9,70	6,46	3,21	0,00	- 2,66	- 4,43	- 4,61	- 2,81	1,06	15,69
	σ_u		- 2,05	- 0,12	3,66	7,50	11,31	14,66	17,07	17,66	16,17	12,56	6,69
			(Risse	unten)					Risse	oben			15,69 - 1,69

§ 32. Über Eisenbetonkonstruktionen.

Bei Trägern und anderen Konstruktionen aus Stein oder Beton ist man Eisenkonstruktionen gegenüber dadurch in der Anwendung beschränkt, daß jene Baustoffe nur geringe Zugbeanspruchungen aushalten. Man hat deshalb bekanntlich in den letzten Jahrzehnten Konstruktionen aus Beton und Eisen eingeführt, in welchen die Eigenschaften beider Stoffe zweckmäßig zusammenwirken sollen, wonach das Eisen hauptsächlich da zu verwenden ist, wo erhebliche Zugwiderstände zu leisten sind, während der Beton im wesentlichen den Druck aufzunehmen hat. Da bei Bogen aus Stein und Beton größere Zugspannungen möglichst vermieden werden, so erklärt es sich, daß die Armierung mit Eisen bei Bogen bis jetzt weniger Verbreitung als bei Balken gefunden hat. Sie wird jedoch mit der Zunahme der Spannweiten wachsen. So hat Mörsch bei der Gmündertobelbrücke Fig. 165 (S. 217) von 79 m Lichtweite und 79,64 m Spannweite zwischen den Kämpfermitten Eiseneinlagen angewandt, obwohl sich für Beton allein rechnermäßig keine Zugspannungen ergaben, „denn es war nicht ausgeschlossen, daß durch geringes Nachgeben der Fundamente, ungenaue Ausführung der theoretisch ermittelten Form und namentlich infolge Schwindens des Betons Zugspannungen auftreten würden.“ Auch für die Betonbogen der projektierten Hudson-Gedächtnisbrücke bei Manhattan, New-York, von 215 m Lichtweite und 221 m Spannweite zwischen den Kämpfermitten sind Eiseneinlagen vorgesehen, die rechnermäßig nicht nötig wären. Es kommt weiter in Betracht, daß durch die Eiseneinlagen bei Bogen bedeutend an Mauerwerk gespart werden kann (Beispiel 71), und die Kernlinien näher an die Laibungen gelangen (Aufgabe 29), womit weniger leicht Zugspannungen im Beton entstehen. Schließlich kann infolge Aufnahme der Zugspannungen durch das Eisen bei der Formgebung mit größerer Freiheit auch ästhetischen Anforderungen Rechnung getragen werden.

Wir können an dieser Stelle nicht auf alle Unterlagen der Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen eingehen, die dem, der sich mit Eisenbetonbogen beschäftigt, bekannt sein sollen, und müssen insbesondere bezüglich der Festigkeitseigenschaften und Versuchsergebnisse auf die Spezialwerke verweisen¹. Im folgenden seien nur einige Punkte in Erinnerung gebracht. Die Möglichkeit der Verbindung von Eisen und Beton zu brauchbaren Konstruktionen war zunächst dadurch gegeben, daß Portlandzementbeton von geeignetem Mischungsverhältnis und Eisen sehr gut aneinander haften, beide nahezu den gleichen Ausdehnungskoeffizienten haben (0,0000135 bzw. 0,0000115 bis 0,0000125) und die Umhüllung mit Beton für Eisen erfahrungsgemäß ein ausgezeichnetes Rostschutzmittel bildet. Das Anwendungsgebiet wurde jedoch erheblich erweitert, als man erkannte, daß mit Eisen armerter Beton ohne Eintritt merkbarer Risse

¹ Mörsch, Der Eisenbetonbau, seine Theorie und Anwendung, Stuttgart 1908; v. Emperger, Handbuch für Eisenbetonbau, I. Entwicklungsgeschichte und Theorie des Eisenbetons, Berlin 1908; Förster, Das Material und die statische Berechnung der Eisenbetonbauten, Leipzig 1907; usw.

erheblich größere rechnungsmäßige Zugspannungen zuließ als Beton ohne Eiseneinlagen, so daß man dem Eisen in Eisenbetonbauten etwa die gleichen Beanspruchungen zumuten zu dürfen glaubte wie in den älteren Eisenkonstruktionen, wenn nicht die geringere Zuverlässigkeit der Berechnung zur Vorsicht mahnte.

Die Hauptschwierigkeit der Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen liegt in der Verschiedenheit des elastischen Verhaltens von Eisen und Beton. Während die Elastizitätsmoduln von Flußeisen und Schweißeisen etwa 2 150 000 kg und 2 000 000 kg pro qcm betragen und bei den zugelassenen Beanspruchungen nahezu konstant sind, gelten für Beton weit geringere Werte, die aber von der Zusammensetzung, dem Wasserzusatz, dem Alter und der Beanspruchungsart (Zug oder Druck) abhängen und mit dem Wachsen der Beanspruchungen meist erheblich abnehmen. Man rechnet vielfach mit Elastizitätsmoduln des Betons von 300 000 bis 150 000 kg pro qcm und oft wurde das Verhältnis der Elastizitätsmoduln von Eisen und Beton,

$$n = \frac{E_e}{E_b}, \quad 1$$

gleich 15 gesetzt. Die Leitsätze des Verbandes deutscher Architekten- und Ingenieurvereine¹ wählten diese Zahl, um den Verhältnissen in der Nähe des Bruches Rechnung zu tragen, die Bestimmungen des Preußischen Arbeitsministeriums für Hochbauten² von 1907 verlangen ihre Verwendung, wenn nicht ein anderes Verhältnis nachgewiesen wird, und auch die Vorschriften des Österreichischen Ministeriums des Innern³ von 1907 führen mit $E_e = 2\,100\,000$ kg, $E_b = 140\,000$ kg zu dem gleichen Wert. Dagegen ist beispielsweise nach den Schweizerischen Vorschriften⁴ von 1909 für Zug $n = 20$, für Druck $n = 10$, und nach den Bestimmungen der Eisenbahndirektion Berlin (Hütte I, 1908, S. 402) für Straßen- und Eisenbahnbrücken $n = 10$ anzunehmen. Die letzte Zahl ist bei den Berechnungen sehr bequem und erscheint häufig angemessen, besonders wenn man beachtet, daß E_b mit dem Alter wächst, so daß z. B. Bach⁵ mit 6 Jahre 8 Monate alten Probekörpern bei $\sigma = 0,18$ bis $20,25$ kg $E_b = 560\,000$ kg und bei $\sigma = 0,18$ bis $101,87$ kg $E_b = 527\,000$ kg erhielt. Die in Zürich ermittelten Werte von n variieren zwischen 4,3 und 29,2 (Schweiz. Bauzeitung 1909, LIV, S. 287).

Die Grundlage aller Berechnungsverfahren von Eisenbetonkonstruktionen bildet wie für Eisenkonstruktionen und Steinkonstruktionen die

¹ Vorläufige Leitsätze für die Vorbereitung, Ausführung und Prüfung von Eisenbetonbauten, Deutsche Bauzeitung 1904, Mitteilungen über Zement usw., S. 13.

² Bestimmungen über die Ausführung von Konstruktionen aus Eisenbeton bei Hochbauten, Zentralblatt d. Bauverwaltung 1907, S. 301.

³ Vorschriften des K. K. Ministeriums des Innern betreffend die Bauweise mit Stampfbeton oder Betonisen, Zeitschr. d. Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins 1908, S. 157.

⁴ Vorschriften über Bauten in armiertem Beton, aufgestellt von der Schweizerischen Kommission des armierten Beton am 30. April 1909, Schweizerische Bauzeitung 1909, LIV, S. 185; Erläuterungen von Schüle S. 270, 287.

⁵ Bach, Mitteilungen über die Druckelastizität und Druckfestigkeit von Betonkörpern mit verschiedenem Wasserzusatz, III. Teil, Stuttgart 1909, S. 4 (Zeitschr. d. Vereins deutscher Ingenieure 1909, S. 828).

Annahme, daß die Stabquerschnitte auch nach der Formänderung eben bleiben. Demgemäß müssen für Eisenfasern und Betonfasern zwischen zwei Querschnitten an der gleichen Stelle gleiche Längenänderungen entstehen. Wenn also daselbst für Eisen und Beton die Längenänderungen pro Längeneinheit (die spezifischen Längenänderungen oder Dehnungen) durch λ_e , λ_b , die Längskräfte pro Querschnittseinheit (die Normalspannungen des Querschnitts) durch σ_e , σ_b bezeichnet sind, so hat man:

$$\lambda_e = \lambda_b \quad \text{oder} \quad \frac{\sigma_e}{E_e} = \frac{\sigma_b}{E_b}, \quad 2$$

woraus mit Rücksicht auf 1 für die Normalspannungen an der gleichen Stelle:

$$\sigma_e = n \sigma_b. \quad 3$$

Wollte man nun dem Beton in Eisenbetonkonstruktionen nur diejenigen Zugspannungen zumuten, welche für Betonkonstruktionen ohne Eiseneinlagen gebräuchlich sind, so würde die zulässige Zugbeanspruchung pro qcm des Eisens betragen: für $\sigma_b = 4$ kg, $n = 10$ nur $\sigma_e = 40$ kg, und selbst für $\sigma_b = 8$ kg, $n = 20$ erst $\sigma_e = 160$ kg. Das wäre natürlich keine befriedigende Ausnutzung der Festigkeit des Eisens. Durch die oben erwähnte Erkenntnis ist man über diese Beschränkung hinausgekommen.

Wenn nun aber auch das Eisen in Eisenbetonkonstruktionen angemessen beansprucht werden kann, so ist damit doch nicht gesagt, daß der Beton allgemein die 3 entsprechenden Zugspannungen erleidet und aushält (für $\sigma_e = 600$ kg und $n = 15$ beispielsweise würde $\sigma_b = 40$ kg), da bleibende Formänderungen seine Mitwirkung bei der Kraftübertragung vermindern können und feine Risse angesichts der geringen Zugfestigkeit von meist nur 10 bis 20 kg pro qcm nicht ausgeschlossen sind. Aus diesem Grunde und zu größerer Sicherheit gegenüber den sonstigen Mängeln der Berechnung werden die Zugwiderstände des Betons bei der Dimensionierung von Eisenbetonkonstruktionen gegenwärtig gewöhnlich unberücksichtigt gelassen. Insbesondere ist dies nach den zu 1 erwähnten deutschen, österreichischen und schweizerischen Bestimmungen der Fall. Da aber der rechnungsmäßige Wert der Zugspannungen in gewissen Fällen nachzuweisen ist (nach den österreichischen Bestimmungen bei Biegung immer), so werden wir die nötigen Beziehungen so ableiten, daß Zugwiderstände des Betons vernachlässigt oder berücksichtigt werden können.

§ 33. Stäbe aus beliebig ungleich widerstehendem Material.

Während als Achse eines Stabes gleich widerstehenden Materials gewöhnlich diejenige Linie gilt, welche im spannungslosen Zustande bei normaler Temperatur die Schwerpunkte aller senkrecht zu ihr gedachten ebenen Schnitte, der Stabquerschnitte, enthält (S. 4), pflegt der Begriff der Stabachse für Stäbe beliebigen Materials nicht allgemein fest-

gestellt zu werden. Er läßt sich jedoch ohne willkürliche Annahmen nicht entbehren, da z. B. bei Bogenträgern die Momente M_x auf eine im voraus bekannte und immer gleichbleibende Achsschicht bezogen werden (§ 1). Sodann wird stets, ausdrücklich oder stillschweigend, vorausgesetzt, daß jede in der Achse normal dem Querschnitt wirkende Kraft N_x für alle Elemente gleich widerstehenden Materials eines Querschnitts gleiche Beanspruchungen zur Folge habe. Demgemäß bezeichnen wir als Achse eines Stabes beliebig widerstehenden Materials diejenige Linie, in welcher angreifend, Kräfte normal den Querschnitten daselbst gleiche spezifische Längenänderungen aller Fasern parallel der Achse erzeugen. Von Knickwirkungen wird hierbei abgesehen. Diese Stabachse setzen wir wie bisher von einfacher Krümmung und mit der Belastung des Stabes in einer Symmetrieebene des letzteren voraus (S. 4, 5). Die durch die Stabachse gehende Faserschicht senkrecht zu dieser Biegungsebene heißt Achsschicht.

Soll sich die Achsialkraft N_x so auf den Querschnitt x verteilen, daß durch sie gleiche spezifische Längenänderungen aller Fasern daselbst entstehen, so hat man diese Längenänderungen pro Längeneinheit für Fasern beliebiger Elastizitätsmoduln E in Entfernungen v von der Achsschicht und für Fasern bestimmten Elastizitätsmoduls E' in Entfernung 1 von derselben:

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma'}{E'},$$

unter σ , σ' die Beanspruchungen pro Querschnittseinheit jener Fasern verstanden (Normalspannungen des Querschnitts x), während E , E' Mittelwerte von 0 bis σ , σ' bedeuten. Die Normalkraft für ein Querschnittselement dF vom Elastizitätsmodul E bei v ist σdF und für die ganze Normalkraft des Querschnitts gilt:

$$N_x = \int \sigma dF = \frac{\sigma'}{E'} \int E dF,$$

worin die Integrale auf den ganzen Querschnitt zu erstrecken sind. Da N_x in der Achsschicht wirkt, so müssen hinsichtlich dieser auch sämtliche von N_x herrührenden σdF das Moment 0 ergeben, das heißt wir haben:

$$\int \sigma dF \cdot v = \frac{\sigma'}{E'} \int E v dF = 0,$$

und damit als Bedingung für die Stabachse und die Achsschicht:

$$\int E v dF = 0. \quad 1$$

Bei gleichem Elastizitätsmodul E aller Fasern folgt hieraus:

$$\int v dF = 0,$$

welche Gleichung besagt, daß die Stabachse alsdann durch die Schwerpunkte aller Querschnitte geht.

a) Wirkung einer Achsialkraft N_x . Mit der Bezeichnung

$$E' F' = \int E dF \quad 2$$

bei Erstreckung des Integrals auf den ganzen Querschnitt x liefert der obige Ausdruck von N_x :

$$\frac{\sigma'}{E'} = \frac{N_x}{E' F'}$$

und hiermit die erste der obigen Gleichungen die von N_x herrührende Normalspannung bei x , v und dem Elastizitätsmodul E :

$$\sigma = \frac{E N_x}{E' F'} \quad 3$$

wonach Querschnittselemente gleichen Materials durch N_x gleiche Beanspruchungen erleiden.

Bei gleichem Elastizitätsmodul E aller Fasern erhält man aus 2 $E' F' = E F$ und damit aus 3, gleichmäßiger Verteilung von N_x auf den ganzen Querschnitt entsprechend:

$$\sigma = \frac{N_x}{F}$$

b) Wirkung eines Momentes M_x . Der Stab soll zunächst als gerade, d. h. von gerader Achse, gelten. Wir denken uns durch ihn vor Einwirkung von Spannungen zwei Querschnitte gelegt, von welchen der eine x heißen soll, während der andere x unendlich nahe liegt. Diese anfänglich parallelen Querschnitte bilden nach

der Biegung konvergierende Ebenen. Es verhalten sich also die Längenänderungen der zwischenliegenden Faserabschnitte wie ihre positiven oder negativen Abstände v von derjenigen Schicht senkrecht zur Biegungsebene, für welche die Entfernung der Querschnittsebenen ungeändert geblieben ist. Man nennt sie bekanntlich die neutrale Schicht und ihre Durchschnittslinie mit der Querschnittsebene die neutrale Achse.

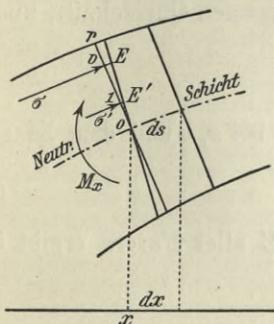


Fig. 180.

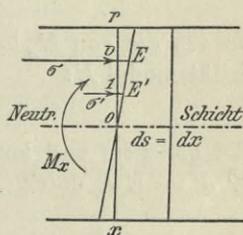


Fig. 181.

Man nennt sie bekanntlich die neutrale Schicht und ihre Durchschnittslinie mit der Querschnittsebene die neutrale Achse.

Es mögen bei Wirkung des Moment M_x allein (ohne Achsialkraft N_x) Fasern beliebiger Elastizitätsmoduln E in Entfernungen v von der neutralen Schicht und Fasern bestimmten Elastizitätsmoduls E' in Entfernung 1 von derselben Druck- oder Zugkräfte pro Querschnittseinheit σ , σ' entsprechen (Normalspannungen des Querschnitts x). Dann hat man wegen des Ebenbleibens der Querschnitte:

$$\frac{\sigma}{E} : \frac{\sigma'}{E'} = v : 1, \quad \sigma = \frac{\sigma'}{E'} E v.$$

Die Normalkraft für ein Querschnittselement dF vom Elastizitätsmodul E bei v ist σdF , und da die Summe dieser vom Moment allein herrührenden Normalkräfte für den ganzen Querschnitt gleich 0 ist, so hat man auf den ganzen wirksamen Querschnitt erstreckt:

$$\int \sigma dF = \frac{\sigma'}{E'} \int E v dF = 0 \quad \text{oder} \quad \int E v dF = 0. \quad 4$$

Durch Gleichung 4 ist die einem Momente M_x allein entsprechende neutrale Schicht bestimmt, sie fällt bei Wirksamkeit des ganzen Querschnitts mit der durch 1 bestimmten Achsschicht zusammen. Da dieser Fall bei Bogenträgern gewöhnlich vorliegt, so sei er zunächst vorausgesetzt, v bedeutet dann in 1 und 4 die Entfernung von der Achsschicht.

Jede Normalkraft σdF erzeugt hinsichtlich des Durchschnitts von Achsschicht und Querschicht ein Moment $\sigma dF \cdot v$, und da die längs des Querschnitts wirkenden Kräfte in Bezug auf diesen Durchschnitt kein Moment liefern, so ist das Gesamtmoment der im Querschnitt x wirkenden Kräfte in Hinsicht der Achsschicht:

$$M_x = \int \sigma dF \cdot v = \frac{\sigma'}{E'} \int E v^2 dF.$$

Mit der Bezeichnung

$$E' J' = \int E v^2 dF, \quad 5$$

bei Erstreckung des Integrials auf den ganzen wirksamen Querschnitt, und obigem Ausdruck von σ folgt:

$$M_x = \sigma' J' = E' J' \frac{\sigma}{E v},$$

woraus die von M_x herrührende Normalspannung bei x , v und dem Elastizitätsmodul E :

$$\sigma = \frac{M_x}{E' J'} E v. \quad 6$$

Bei gleichem und konstantem Elastizitätsmodul E aller Fasern ergibt 5 $E' J' = E J$, unter

$$J = \int v^2 dF$$

das Trägheitsmoment des Querschnitts hinsichtlich der Achsschicht verstanden, womit aus 6 der bekannte Ausdruck folgt:

$$\sigma = \frac{M_x}{J} v.$$

c) Zusammenwirken von Achsialkraft N_x und Moment M_x . Für diesen Fall bei Wirksamkeit des ganzen Querschnitts folgt durch Addition von 3 und 6 die Normalspannung bei x , v und dem Elastizitätsmodul:

$$\sigma = \frac{E}{E'} \left(\frac{N_x}{F'} + \frac{M_x}{J'} v \right), \quad 7$$

worin $E' F'$ und $E' J'$ durch 2 und 5 bestimmt sind. Als Bedingung für die neutrale Schicht hat man mit $\sigma = 0$:

$$J' N_x + F' v M_x = 0, \quad 8$$

worin J' , v , M_x sich auf die durch 1 bestimmte Achsschicht beziehen. Bei gleichem Elastizitätsmodul E aller Fasern geht 7 mit $E'F' = EF$ und $E'J' = EJ$ in den bekannten Ausdruck über:

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{J} v.$$

Wir haben oben bei Einwirkung des Momentes M_x vorläufig angenommen, daß die Stabachse vor der Deformation eine Gerade war. Wird diese Beschränkung fallen gelassen, während die Stabachse eine Linie einfacher Krümmung bleibt, so tritt bei Stäben gleich widerstehenden Materials an Stelle des letzten Ausdrucks die Formel § 6, 7):

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{F'r} + \frac{M_x}{J} v,$$

unter r den anfänglichen Krümmungsradius der Stabachse verstanden. Wie aber bei gebogenen Trägern gleich widerstehenden Materials unter Vernachlässigung des von der Krümmung herrührenden mittleren Gliedes der vorletzte Ausdruck von σ verwendet zu werden pflegt, so dürfen auch bei gebogenen Trägern beliebig widerstehenden Materials unter Vernachlässigung des Einflusses der Krümmung die Normalspannungen σ nach der zunächst für gerade Stäbe abgeleiteten Formel 7 berechnet werden.

Bemerkungen. Es wurde oben (S. 262) zunächst vorausgesetzt, daß N_x und M_x gegenüber der ganze Querschnitt wirksam ist oder daß doch der Normalkraft N_x und dem Moment M_x der gleiche Querschnitt als widerstehend gilt. Nur unter dieser Voraussetzung stimmt die Bedingung 4 für die neutrale Schicht bei Wirkung eines Momentes allein (ohne Normalkraft) mit der Bedingung 1 für die Achsschicht überein und bedeutet in 7 und 8 v die Entfernung des Querschnittselements dF von der durch 1 bestimmten Achsschicht. Dies kann bei gleichzeitigem Auftreten von N_x und M_x , also insbesondere bei Bogen (für achsial beanspruchte Säulen ist $M_x = 0$, für horizontale Balken $N_x = 0$) dann zu beachten sein, wenn nicht immer die ganzen Querschnitte als widerstehend angenommen werden, wie dies unter Vernachlässigung der Zugspannungen des Betons auch bei Eisenbetonbogen vorkommt (vergl. in § 34 unter b).

Die abgeleiteten Beziehungen gelten nicht nur für Stäbe verschiedenen Materials (§ 34), sondern auch für Stäbe gleichartigen Materials, deren Elastizitätsmodul mit der Spannung nach irgend einem Gesetze veränderlich ist¹. Doch haben wir jetzt keine Veranlassung, näher hierauf einzugehen. Ferner gelten die Gleichungen 4–6 auch für horizontale Balkenträger mit ganz oder teilweise widerstehenden Querschnitten, wobei die v Entfernungen von der neutralen Schicht bedeuten, welche dann durch die auf die wirksamen Querschnitte bezogene Bedingung 4 bestimmt ist.

§ 34. Eisenbetonbogen².

Wir fassen nun speziell Stäbe aus Beton und Eisen ins Auge und setzen zunächst Wirksamkeit der ganzen Querschnitte voraus. Beim Querschnitt x mögen für die Betonteile und Eisenteile bezeichnen F_b , F_e die Querschnitte, S_b , S_e deren statische Momente hinsichtlich der Achsschicht,

¹ Vergl. Luegers Lexikon der gesamten Technik, 2. Auflage, Artikel Elastizitätsgesetz.

² Leser, welche auch die Beziehungen für Säulen und Balken aus Eisenbeton verfolgen wollen, werden vor diesem Paragraphen zweckmäßig §§ 37 und 38 vornehmen.

J_b, J_e ihre Trägheitsmomente in Hinsicht derselben und E_b, E_e die mittleren Elastizitätsmoduln von 0 bis zu den in Frage stehenden Beanspruchungen. Wie in § 32 werde gesetzt:

$$n = \frac{E_e}{E_b}. \quad 1$$

Dann hat man zur Bestimmung der Achsschicht nach § 33, 1):

$$E_b S_b + E_e S_e = 0 \quad \text{oder} \quad S_b + n S_e = 0, \quad 2$$

während aus § 33, 2), 5) folgen:

$$E' F' = E_b F_b + E_e F_e = E_b (F_b + n F_e), \quad 3$$

$$E' J' = E_b J_b + E_e J_e = E_b (J_b + n J_e). \quad 4$$

Mit diesen Ausdrücken liefert § 33, 7) die Normalspannungen von Querschnittselementen der Elastizitätsmoduln E bei x, v :

$$\sigma = \frac{E N_x}{E_b F_b + E_e F_e} + \frac{E v M_x}{E_b J_b + E_e J_e}, \quad 5$$

also bei Beachtung von 1 speziell für Betonquerschnittselemente bei x, v mit $E = E_b$:

$$\sigma_b = \frac{N_x}{F_b + n F_e} + \frac{v M_x}{J_b + n J_e}, \quad 6$$

und für Eisenquerschnittselemente bei x, v mit $E = E_e$:

$$\sigma_e = \frac{n N_x}{F_b + n F_e} + \frac{n v M_x}{J_b + n J_e}. \quad 7$$

Als allgemeine Bedingung für die neutrale Schicht folgt aus 5 mit $\sigma = 0$:

$$(J_b + n J_e) N_x + (F_b + n F_e) n v M_x = 0, \quad 8$$

worin sich J_b, J_e, v, M_x auf die durch 2 bestimmte Achsschicht beziehen.

Vorstehende Formeln gelten nicht nur für Bogenträger bei Wirksamkeit der ganzen Querschnitte, sondern auch für horizontale Balkenträger ohne diese Beschränkung (mit $N_x = 0$ und v Entfernung von der neutralen Schicht, die dann durch die für den wirksamen Querschnitt bestehende Bedingung 2 bestimmt ist, auf welche sich in diesem Falle nun auch die Trägheitsmomente J_b, J_e beziehen, vergl. S. 263), deren ohne und mit Rücksicht auf Zugwiderstände des Betons gebräuchliche Beziehungen leicht durch Spezialisierung daraus erhalten werden können. Sie finden ferner unmittelbare Verwendung auf achsial und exzentrisch belastete Säulen (in ersterem Falle mit $M_x = 0$), soweit keine Knickwirkungen in Betracht kommen. Da wir jedoch hier speziell Eisenbetonbogen zu behandeln haben, so sollen im folgenden rechteckige Querschnitte vorausgesetzt werden. Es interessieren folgende zwei Fälle, der erste häufiger als der zweite.

a) Der ganze Querschnitt ist wirksam. Diesen Fall hat man stets, wenn alle Normalspannungen σ Druck bedeuten (vergl. Aufgabe 29) oder doch den auftretenden Zugspannungen des Betons von diesem

widerstanden gedacht wird. Dann sind die obigen Gleichungen unmittelbar verwendbar, doch wollen wir einige spezielle Ausdrücke beifügen.

Der rechteckige Querschnitt von der Breite b und Höhe h besitze in Entfernungen e, e' von der Unterkante (Fig. 182, 183) Eiseneinlagen der Gesamtquerschnitte f_e, f'_e . Dann hat man nach 2 zur Bestimmung der Entfernung d der Achsschicht von der Unterkante:

$$\frac{b(h-d)^2}{2} - \frac{b d^2}{2} + n f_e (e-d) - n f'_e (d-e')^2 = 0, \quad \text{woraus}$$

$$d = \frac{\frac{b h^2}{2} + n(e f_e + e' f'_e)}{b h + n(f_e + f'_e)}. \quad 9$$

In 6 und 7 gelten:

$$F_b + n F'_e = b h + n(f_e + f'_e), \quad 10$$

$$J_b + n J'_e = b \frac{d^3 + (h-d)^3}{3} + n f_e (e-d)^2 + n f'_e (d-e')^2. \quad 11$$

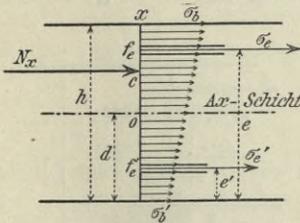


Fig. 182. M_x, c positiv.

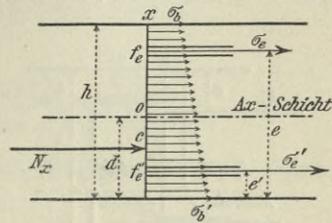


Fig. 183. M_x, c negativ.

Hiermit ergeben sich aus 6 die Beanspruchungen des Betons in der Oberkante und Unterkante:

$$\sigma_b \text{ mit } v = h - d, \quad \sigma'_b \text{ mit } v = -d, \quad 12$$

und aus 7 die Beanspruchungen des Eisens in den Entfernungen e, e' von der Unterkante:

$$\sigma_e \text{ mit } v = e - d, \quad \sigma'_e \text{ mit } v = e' - d. \quad 13$$

Es sind σ_b, σ_e oder σ'_b, σ'_e die größeren Werte, je nachdem M_x positiv oder negativ ist, je nachdem N_x oberhalb oder unterhalb der Stabachse angreift (Fig. 182, 183).

Selbstverständlich kann in 9–11 der Querschnitt einer der beiden Eiseneinlagen auch gleich Null sein, was jedoch bei Bogen nicht leicht vorkommt. Sind, wie häufig, beide Einlagen von gleichem Querschnitt und in gleichen Entfernungen von beiden Breitekanten, dann folgen aus 9–11 mit $f'_e = f_e, e' = h - e$:

$$d = \frac{h}{2}, \quad F_b + n F_e = b h + 2 n f_e, \quad 14$$

$$J_b + n J_e = \frac{b h^3}{12} + 2 n f_e \left(e - \frac{h}{2} \right)^2. \quad 15$$

Wir haben beim Ansatz von S_b, F_b, J_b für den rechteckigen Querschnitt, wie üblich, die durch Eisen ausgefüllten Teile der Betonrecht-

ecke nicht in Abzug gebracht. Sollte es geschehen, so würde in 9, 10, 11, 14, 15 rechts überall $n - 1$ an Stelle von n zu setzen sein. Das Unterlassen des Abzugs läuft also darauf hinaus, das ohnehin nicht zuverlässig angebbare n um 1 größer zu wählen. Wir werden auch im folgenden so verfahren.

b) Zugwiderstände des Betons vernachlässigt. Dieser Fall wird z. B. dann eintreten, wenn sich nach den unter a) verwendeten Beziehungen größere Zugspannungen des Betons ergeben, als letzterer mit genügender Sicherheit auszuhalten vermag. Wollte man die Momente M_x dann auf diejenige Achse beziehen, welche sich bei Anwendung der Bedingung 2 auf die gedrückten Querschnittsteile allein ergibt, so würde die Stabachse je nach der Belastung verschieden ausfallen, während die M_x hinsichtlich einer im voraus bekannten Achse zu berechnen sind (§ 1). Da nun die Zugbeanspruchungen bei Eisenbetonbogen klein zu sein pflegen und mit ihrer Vernachlässigung ohnehin auf einen genauen An-

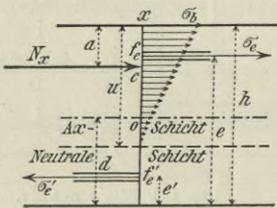


Fig. 184. M_x, c positiv.

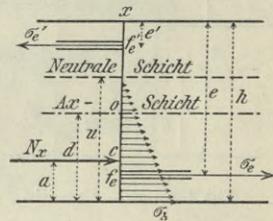


Fig. 185. M_x, c negativ.

schluß an die Wirklichkeit verzichtet wird, so hat man der Achse von Eisenbetonbogen ohne und mit vernachlässigten Zugspannungen des Betons immer die gleiche Lage zugeschrieben. Für uns ist sie damit durch die auf den ganzen Querschnitt, einschließlich des gezogenen Teils, angewandte Bedingung 2 und speziell beim rechteckigen Querschnitt durch die Gleichung 9 bestimmt.

Es mögen nun für den rechteckigen Querschnitt x der Breite b und Höhe h gelten:

bei positivem M_x und $c = \frac{M_x}{N_x}$ die Beziehungen Fig. 184 und $a = h - d - c$, 16

„ negativem M_x „ $c = \frac{M_x}{N_x}$ „ „ Fig. 185 „ $a = d + c$, 17

unter d die durch 9 bestimmte Entfernung der Achsschicht von der Unterkante verstanden, während u die Höhe des gedrückten Querschnittsteils bedeutet. Werden die Normalspannungen wie in 5–7 algebraisch eingeführt (Druck positiv, Zug negativ), so hat man die Normalkraft:

$$N_x = \sigma_b \frac{b u}{2} + \sigma_e f_e + \sigma_e' f_e' \tag{18}$$

und das Moment in Hinsicht der neutralen Schicht in den Fällen Fig. 184 und 185:

$$\pm N_x(u-a) = \pm \sigma_b \frac{b u^2}{3} \pm \sigma_e f_e (u-h+e) \mp \sigma'_e f'_e (h-u-e').$$

Wegen des Ebenbleibens der Querschnitte bestehen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_e}{E_e} : \frac{\sigma_b}{E_b} &= (u-h+e) : u, \\ -\frac{\sigma'_e}{E_e} : \frac{\sigma_b}{E_b} &= (h-u-e') : u, \end{aligned}$$

woraus die Beanspruchungen der Eisenstäbe:

$$\sigma_e = \frac{e+u-h}{u} n \sigma_b, \quad 19$$

$$\sigma'_e = -\frac{h-u-e'}{u} n \sigma_b, \quad 20$$

Mit diesen Ausdrücken liefert 18:

$$\sigma_b = \frac{N_x}{\frac{b u^3}{2} + \frac{n}{u} [f_e(e+u-h) - f'_e(h-u-e')]}, \quad 21$$

und die darauf folgende Gleichung:

$$\sigma_b = \frac{(u-a) N_x}{\frac{b u^3}{3} + \frac{n}{u} [f_e(e+u-h)^2 + f'_e(h-u-e')^2]}.$$

Durch Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke erhalten wir zur Bestimmung von u und damit der neutralen Schicht:

$$\begin{aligned} u^3 - 3a u^2 - \frac{6n}{b} [f'_e(e+a-h) - f'_e(h-a-e')] u \\ + \frac{6n}{b} [f_e(h-e)(e+a-h) - f'_e(h-e')(h-a-e')] = 0. \end{aligned} \quad 22$$

Auch im vorliegenden Falle kann der Querschnitt einer der beiden Eiseneinlagen gleich Null werden, womit sich vorstehende Gleichungen vereinfachen. Sind beide Eiseneinlagen von gleichem Querschnitt und in gleichen Entfernungen von den nächsten Breitekanten, so folgen mit $f'_e = f_e$ und $e' = h - e$ aus 9 wieder $d = \frac{h}{2}$ und aus 22, 20, 21:

$$u^3 - 3a u^2 + \frac{6n}{b} f_e (h-2a) u - \frac{6n}{b} f_e [h(h-a) - 2e(h-e)] = 0, \quad 23$$

$$\sigma'_e = -\frac{e-u}{u} n \sigma_b, \quad \sigma_b = \frac{N_x}{\frac{b u}{2} + \frac{2u-h}{u} n f_e}, \quad 24$$

während 19 ungeändert bleibt.

c) Berechnung der Schnittkräfte und Schnittmomente. In obigen Gleichungen wurden die Normalkraft N_x und das Moment M_x als bekannt vorausgesetzt. Für diese wie für alle anderen Schnittkräfte und Schnittmomente gelten dieselben statischen Beziehungen wie bei Bogen aus gleichartigem Material (§§ 1, 2, 10). In ihnen kommen jedoch als Horizontalschub H und Endmomente M, M' noch Größen vor, welche nicht allgemein gegeben oder durch die gegebenen Größen statisch bestimmt sind. Während also für einfache Dreigelenkbogen und andere

statisch bestimmte Bogen aus Eisenbeton dem Gesagten nichts hinzuzufügen ist, fragt es sich, wie bei statisch unbestimmten Eisenbetonbogen die fehlenden Größen zu ermitteln sind. Dies pflegt gegenwärtig nach denselben Formeln wie für Bogen aus gleichartigem Material zu geschehen, nur daß auch hierbei wie oben bei der Berechnung der Normalspannungen an Stelle von EF und EJ die Werte von $E'F'$ und $E'J'$ nach 3, 4 zu verwenden sind. Spitzer¹ fand, daß dieses Verfahren für das in § 31 erwähnte Monierversuchsgewölbe mit den Versuchsergebnissen im Einklang stand. Analoges ergaben Versuche mit kontinuierlichen Balkenträgern², für die sich das Verfahren auch leicht theoretisch begründen läßt³. Da also die bisherigen Beispiele der Berechnung von N_x , M_x auch für Eisenbetonbogen gelten, so genügt es hier noch einige Beispiele bezüglich der Normalspannungen beizufügen.

Beispiel 68. Druckspannungen allein.

Beim Querschnitt x der Höhe $h = 20$ cm eines Eisenbetonbogens kommen auf die Breite $b = 20$ cm zwei Eiseneinlagen von je $f_e = 20$ qcm in Abständen $e = 18$ cm von den entfernteren Breitkanten (Fig. 186). Wenn nun gesetzt wird

$$n = \frac{E_e}{E_b} = 10,$$

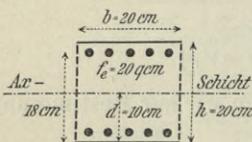


Fig. 186.

die Beanspruchungen des Betons und Eisens zu berechnen: a) für einen Belastungsfall, dem entsprechen $N_x = 18000$ kg, $M_x = 54000$ cmkg; b) für einen Belastungsfall, dem $N_x = 18000$ kg, $M_x = -54000$ cmkg entsprechen.

Der Symmetrie halber liegt die Achsschicht in der Mitte zwischen den zwei Breitkanten in Entfernung $d = 10$ cm von der Unterkante. Nehmen wir zunächst den ganzen Querschnitt wirksam an, so folgen aus § 34, 14), 15):

$$F_b + n F_e = 20 \cdot 20 + 2 \cdot 10 \cdot 20 = 800 \text{ qcm},$$

$$J_b + n J_e = \frac{20 \cdot 20^3}{12} + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 8^2 = 38933 \text{ cm}^4,$$

und damit aus § 34, 6), 7) die Normalspannungen des Betons und Eisens an beliebigen Stellen:

$$\sigma_b = \frac{N_x}{800} + \frac{v M_x}{38933}, \quad \sigma_e = \frac{N_x}{80} + \frac{v M_x}{3893,3}.$$

a) Im Falle $N_x = 18000$ kg, $M_x = 54000$ cmkg (Fig. 182) liefern vorstehende Gleichungen pro qcm bei beliebigem v :

$$\sigma_b = 22,5 + 1,39 v,$$

$$\sigma_e = 225 + 13,9 v,$$

also für den Beton

an der Oberkante mit $v = 10$ cm

$$\sigma_b = 22,5 + 1,39 \cdot 10 = 36,4 \text{ kg},$$

„ „ Unterkante „ $v = -10$ „

$$\sigma_b = 22,5 - 1,39 \cdot 10 = 8,6 \text{ „};$$

und für das Eisen

der oberen Einlage mit $v = 8$ cm

$$\sigma_e = 225 + 13,9 \cdot 8 = 336 \text{ kg},$$

„ unteren „ „ $v = -8$ „

$$\sigma_e = 225 - 13,9 \cdot 8 = 114 \text{ „}.$$

Da alle Normalspannungen positiv sind, so bedeuten sie alle Druck und ist der ganze Querschnitt wirksam.

b) Im Falle $N_x = 18000$ kg, $M_x = -54000$ cmkg (Fig. 183) ergeben dieselben Gleichungen pro qcm bei beliebigem v :

¹ Spitzer, Berechnung der Moniergewölbe, Zeitschr. d. Öster. Ing.-u. Arch.-Vereins 1896, S. 305. Über weitere Versuche mit Eisenbetonbogen siehe: v. Emperger, Handbuch für Eisenbetonbau, I, Berlin 1908, S. 302.

² Mörsch, Der Eisenbetonbau, Stuttgart 1908, S. 210.

³ Luegers Lexikon der gesamten Technik, 2. Auflage, Band 1, S. 745.

$$\sigma_b = 22,5 - 1,39 v,$$

$$\sigma_e = 225 - 13,9 v,$$

wonach für den Beton

an der Oberkante mit $v = 10$ cm

$$\sigma_b = 22,5 - 1,39 \cdot 10 = 8,6 \text{ kg},$$

„ „ „ „ „ „ „ „ $v = -10$ „

$$\sigma_b = 22,5 + 1,39 \cdot 10 = 36,4 \text{ „};$$

und für das Eisen

der oberen Einlage mit $v = 8$ cm

$$\sigma_e = 225 - 13,9 \cdot 8 = 114 \text{ kg},$$

„ unteren „ „ „ „ $v = -8$ „

$$\sigma_e = 225 + 13,9 \cdot 8 = 336 \text{ „}.$$

Da im zweiten Falle N_x von gleichem Werte wie im ersten und M_x nur von entgegengesetztem Vorzeichen war, so sind gegenüber dem ersten Fall die Beanspruchungen des Betons an der Oberkante und Unterkante und die Beanspruchungen des Eisens der oberen und unteren Einlage einfach vertauscht.

Bemerkungen. Daß unter den Voraussetzungen obigen Beispiels nur Druckspannungen entstehen würden, konnten wir schon daraus schließen, daß der Angriffspunkt der Normalkraft N_x in den Fällen a) und b) um

$$e = \frac{M_x}{N_x} = \pm \frac{54000}{18000} = \pm 3 \text{ cm}$$

von der Achsschicht entfernt liegt, also beidemal im mittleren Drittel der Querschnittshöhe von 20 cm. Die Kernpunkte, zwischen denen N_x angreifen muß, wenn nur Druckspannungen entstehen sollen, und die bei homogenen Bogen rechteckigen Querschnitts an den Grenzen des mittleren Drittels liegen (§ 8), gelangen nämlich durch die Eiseneinlagen mehr nach außen, in unserem Falle von $\pm 3,33$ cm nach $\pm 4,86$ cm von der Achsschicht (Aufgabe 29, S. 271).

Beispiel 69. Zugspannungen zugelassen.

Beim Querschnitt x des vorigen Beispiels (Fig. 186) die Beanspruchungen des Betons und Eisens zu berechnen: a) für einen Belastungsfall, dem entsprechen $N_x = 12000$ kg, $M_x = 60000$ cmkg; b) für einen Belastungsfall, dem $N_x = 12000$ kg, $M_x = -60000$ cmkg entsprechen.

Wird zunächst der ganze Querschnitt als wirksam angenommen, so ergeben sich wie im vorigen Beispiel die Normalspannungen des Betons und Eisens an beliebigen Stellen:

$$\sigma_b = \frac{N_x}{800} + \frac{v M_x}{38933},$$

$$\sigma_e = \frac{N_x}{80} + \frac{v M_x}{3893,3}.$$

a) Im Falle $N_x = 12000$ kg, $M_x = 60000$ cmkg (Fig. 182) erhält man aus vorstehenden Gleichungen pro qcm bei beliebigem v :

$$\sigma_b = 15,0 + 1,54 v,$$

$$\sigma_e = 150 + 15,4 v,$$

also für den Beton

an der Oberkante mit $v = 10$ cm

$$\sigma_b = 15,0 + 1,54 \cdot 10 = 30,4 \text{ kg},$$

„ „ „ „ „ „ „ „ $v = -10$ „

$$\sigma_b = 15,0 - 1,54 \cdot 10 = -0,4 \text{ „};$$

und für das Eisen

der oberen Einlage mit $v = 8$ cm

$$\sigma_e = 150 + 15,4 \cdot 8 = 273 \text{ kg},$$

„ unteren „ „ „ „ $v = -8$ „

$$\sigma_e = 150 - 15,4 \cdot 8 = 27 \text{ „}.$$

Die Zugspannung von 0,4 kg pro qcm hält der Beton natürlich aus, so daß zu weiteren Berechnungen keine Veranlassung vorliegt. Hätte sich eine Zugbeanspruchung ergeben, welche dem Beton nicht zugemutet werden soll, so würde wie im nächsten Beispiel zu rechnen sein.

b) Im Falle $N_x = 12000$ kg, $M_x = -60000$ cmkg (Fig. 183) ergeben die oben verwendeten Gleichungen pro qcm bei beliebigem v :

$$\sigma_b = 15,0 - 1,54 v,$$

$$\sigma_e = 150 - 15,4 v,$$

wonach für den Beton

an der Oberkante mit $v = 10$ cm

$$\sigma_b = 15,0 - 1,54 \cdot 10 = -0,4 \text{ kg},$$

„ „ „ „ „ „ „ „ $v = -10$ „

$$\sigma_b = 15,0 + 1,54 \cdot 10 = 30,4 \text{ „};$$

und für das Eisen

der oberen Einlage mit $v = 8$ cm

$$\sigma_e = 150 - 15,4 \cdot 8 = 27 \text{ kg},$$

„ unteren „ „ „ „ $v = -8$ „

$$\sigma_e = 150 + 15,4 \cdot 8 = 273 \text{ „}.$$

Da im zweiten Falle N_x von gleichem Werte wie im ersten und M_x nur von entgegengesetztem Vorzeichen war, so sind gegenüber dem ersten Fall die Beanspruchungen des Betons an der Oberkante und Unterkante und die Beanspruchungen des Eisens der oberen und unteren Einlage einfach vertauscht.

Beispiel 70. Zugwiderstände vernachlässigt.

Beim Querschnitt x des vorletzten Beispiels (Fig. 186) die Beanspruchungen des Betons und Eisens zu berechnen: a) für einen Belastungsfall, dem entsprechen $N_x = 6000$ kg, $M_x = 108000$ cmkg; b) für einen Belastungsfall, dem $N_x = 6000$ kg, $M_x = -108000$ kg entsprechen.

Da $M_x : N_x$ fast doppelt so groß als die halbe Querschnittshöhe 10 cm ist, so erkennt man auch ohne Anwendung des in den beiden letzten Beispielen gezeigten Verfahrens, daß sich nach diesem erhebliche Zugwiderstände ergeben (vergl. Aufgabe 29). Wir wollen nun voraussetzen, daß die Zugwiderstände des Betons vernachlässigt werden sollen.

a) Im Falle $N_x = 6000$ kg, $M_x = 108000$ cmkg hat man bei den Bezeichnungen der Fig. 184 nach § 34, 16):

$$c = \frac{108000}{6000} = 18 \text{ cm}, \quad a = 20 - 10 - 18 = -8 \text{ cm},$$

und nach § 34, 23) für die Höhe u der Druckzone:

$$u^3 + 3 \cdot 8 u^2 + \frac{60}{20} 20(20 + 2 \cdot 8) u - \frac{60}{20} 20(20 \cdot 28 - 2 \cdot 18 \cdot 2) = 0,$$

$$u^3 + 24 u^2 + 2160 u - 29280 = 0,$$

woraus

$$u = 11,4 \text{ cm}.$$

Damit folgen nach § 34, 24) die Beanspruchung pro qcm des Betons an der Oberkante (an der Unterkante ist sie gleich Null, Fig. 184):

$$\sigma_b = \frac{6000}{10 \cdot 11,4 + \frac{22,8 - 20}{11,4} 10 \cdot 20} = 36,8 \text{ kg},$$

und nach § 34, 19), 24) die Beanspruchungen pro qcm der oberen und unteren Eiseneinlage:

$$\sigma_e = \frac{18 + 11,4 - 20}{11,4} 10 \cdot 36,8 = 303 \text{ kg},$$

$$\sigma'_e = -\frac{18 - 11,4}{11,4} 10 \cdot 36,8 = -213 \text{ kg}.$$

Probe:

$$N_x = 36,8 \frac{20 \cdot 11,4}{2} + 20(303 - 213) = 6000 \text{ kg}.$$

b) Im Falle $N_x = 6000$ kg, $M_x = -108000$ cmkg hat man bei den Bezeichnungen der Fig. 185 nach § 34, 17):

$$c = -\frac{108000}{6000} = -18 \text{ cm}, \quad a = 10 - 18 = -8 \text{ cm}.$$

Damit ergeben sich bei genau den gleichen Ansätzen wie oben die Höhe der Druckzone:

$$u = 11,4 \text{ cm},$$

die Beanspruchung pro qcm des Betons an der Unterkante (an der Oberkante ist sie gleich Null, Fig. 185):

$$\sigma_b = 36,8 \text{ kg},$$

und die Beanspruchungen pro qcm der unteren und oberen Eiseneinlage:

$$\sigma_e = 303 \text{ kg},$$

$$\sigma'_e = -213 \text{ kg}.$$

Da im zweiten Falle N_x von gleichem Werte wie im ersten und M_x numerisch gleich und von entgegengesetztem Vorzeichen war, so sind gegenüber dem ersten Falle die Beanspruchungen des Betons an der Oberkante und Unterkante und die Beanspruchungen des Eisens der oberen und unteren Einlage einfach vertauscht.

Aufgabe 29. Kernlinien von Eisenbetonbogen.

Es sollen diejenigen in der Trägerebene gelegenen Punkte (Kernpunkte) des Querschnitts x bestimmt werden, zwischen welchen die resultierende Schnittkraft R_x oder Normalkraft N_x angreifen muß, damit alle Querschnittselemente Druck erleiden und deren Verbindungslinien für alle Querschnitte (Kernlinien) die in § 11 besprochene Verwendung finden können.

Wir gehen wie bei Bogen gleichartigen Materials in § 8 vor und beachten, daß für Druckspannungen allein der ganze Querschnitt wirksam ist. Nach § 34, 6) mit $M_x = c N_x$ hat man die Normalspannungen im obersten und untersten Querschnittselement, bei $v = e_o$ und $v = -e_u$:

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F_b + n F_e} \left(1 + \frac{F_b + n F_e}{J_b + n J_e} e_o c \right), \quad 1$$

$$\sigma_u = \frac{N_x}{F_b + n F_e} \left(1 - \frac{F_b + n F_e}{J_b + n J_e} e_u c \right), \quad 2$$

oder mit den Bezeichnungen

$$k_o = \frac{J_b + n J_e}{(F_b + n F_e) e_u}, \quad k_u = \frac{J_b + n J_e}{(F_b + n F_e) e_o} \quad 3$$

einfacher:

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F_b + n F_e} \left(1 + \frac{c}{k_u} \right), \quad \sigma_u = \frac{N_x}{F_b + n F_e} \left(1 - \frac{c}{k_o} \right). \quad 4$$

Es ist hiernach σ_o mit N_x von einerlei Vorzeichen wenn $c > -k_u$,
 σ_u „ N_x „ „ „ „ „ $c < k_o$.

Da nun N_x immer Druck bedeutet (§ 10), so sind der obere und untere Kernpunkt des Querschnitts um k_o und $-k_u$ von der Stabachse entfernt. Für die hierdurch bestimmten Kernlinien gilt der in § 8 abgeleitete Satz und das in § 11 bezüglich der Belastungen für die Grenzwerte von σ_o , σ_u Gesagte. Bei symmetrisch zur Achsschicht angeordneten Querschnitten der Höhe h hat man wegen $e_o = e_u = \frac{h}{2}$:

$$k_o = k_u = \frac{J_b + n J_e}{F_b + n F_e} \frac{2}{h}. \quad 5$$

Für den in Beispiel 68 behandelten rechteckigen Querschnitt der Höhe $h = 20$ cm beispielsweise hat man nach 5 mit $h = 20$ cm, $F_b + n F_e = 800$ qcm und $J_b + n J_e = 38933$ cm³:

$$k_o = k_u = \frac{38933}{800 \cdot 10} = 4,86 \text{ cm},$$

während bei gleichartigem Material wären:

$$k_o = k_u = \frac{h}{6} = 3,33 \text{ cm}.$$

Die Stützlinie hat also beim Eisenbetonbogen etwas mehr Spielraum, ohne daß Zug im Querschnitt entsteht, als wenn die Eiseneinlagen wegblieben. Allgemein sind $F_b + n F_e$ und $J_b + n J_e$ für rechteckige Querschnitte durch § 34, 10), 11), 14), 15) ausgedrückt.

Für Bogen des in § 33 angenommenen beliebig widerstehenden Materials ergeben sich bei den dortigen Bezeichnungen in analoger Weise wie oben:

$$k_o = \frac{J'}{F' e_u}, \quad k_u = \frac{J'}{F' e_o}, \quad 6$$

Die Ausdrücke 3 bilden spezielle Fälle dieser Gleichungen.

§ 35. Korrektur eines vorläufigen Eisenbetonbogens.

Für einen rechteckigen Querschnitt der Breite b von bestimmter Neigung seien N_o , N_u die Normalkräfte bei den Belastungen, durch welche die größten Druckspannungen im obersten und untersten Querschnittselement entstehen, a der Abstand dieser Kräfte voneinander (Fig. 166). Wie in § 28 legen wir uns die Frage vor, welche Quer-

schnittshöhe h nötig ist und wo die Bogenachse den Querschnitt schneiden muß, wenn die größte Druckspannung in beiden Randlelementen σ_d betragen soll, eine Änderung der Belastung und von N_o , N_u durch die Korrektur nicht in Betracht kommt und Bedingungen bezüglich etwaiger Zugspannungen zunächst nicht gestellt werden (nachträgliche Kontrolle siehe Beispiel 72), der ganze Querschnitt aber als widerstehend gilt. Es seien zwei gleiche Eiseneinlagen vom Gesamtquerschnitt $2 f_e = a b h$ in Entfernungen βh von der Höhenmitte (Achsschicht) vorausgesetzt.

Für einen beliebigen Querschnitt hat man nach § 34, 6) bei beliebiger Belastung die Normalspannungen im obersten und untersten Querschnittselement mit $M_x = c N_x$, $v = e_o$ und $v = -e_u$:

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F_b + n F_e} \left(1 + \frac{F_b + n F_e}{J_b + n J_e} e_o c \right), \quad 1$$

$$\sigma_u = \frac{N_x}{F_b + n F_e} \left(1 - \frac{F_b + n F_e}{J_b + n J_e} e_u c \right). \quad 2$$

Unserem rechteckigen Querschnitt entsprechen hierin (ohne Abzug des Eisenquerschnitts beim Ansatz von F_b , J_b , andernfalls wären in 3, 4, 5 $n-1$ an Stelle von n zu setzen, vergl. S. 265 unten):

$$e_o = e_u = \frac{h}{2}, \quad F_b + n F_e = (1 + n\alpha) b h, \quad 3$$

$$J_b + n J_e = \frac{b h^3}{12} + n\alpha \beta^2 b h^3 = (1 + 12 n\alpha \beta^2) \frac{b h^3}{12}, \quad 4$$

wonach mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$\mu = 1 + n\alpha, \quad \omega = \frac{1 + 12 n\alpha \beta^2}{1 + n\alpha} \quad 5$$

bei beliebiger Belastung:

$$\sigma_o = \frac{N_x}{\mu b h} \left(1 + \frac{6c}{\omega h} \right), \quad \sigma_u = \frac{N_x}{\mu b h} \left(1 - \frac{6c}{\omega h} \right). \quad 6$$

In 1, 2, 6 bedeutet c die Entfernung des Angriffspunktes der Normalkraft N_x von der Bogenachse, es ist positiv nach oben, negativ nach unten. Bezeichnen c_o , c_u die Werte von c bei den oben erwähnten Belastungen für die Grenzwerte $\sigma_o = \sigma_u = \sigma_d$, so folgen aus 6:

$$\frac{\mu b \sigma_d}{N_o} = \frac{1}{h} + \frac{6c_o}{\omega h^2}, \quad \frac{\mu b \sigma_d}{N_u} = \frac{1}{h} - \frac{6c_u}{\omega h^2},$$

und durch Addition:

$$\frac{\mu b \sigma_d}{N_o} + \frac{\mu b \sigma_d}{N_u} = \frac{2}{h} + 6 \frac{c_o - c_u}{\omega h^2}.$$

Berücksichtigen wir:

$$a = c_o - c_u, \quad 7$$

und setzen zur Abkürzung

$$m = \frac{2}{\frac{\mu b \sigma_d}{N_o} + \frac{\mu b \sigma_d}{N_u}} = \frac{2}{\mu b \sigma_d} \frac{N_o N_u}{N_o + N_u}, \quad 8$$

so ergibt sich:

$$\frac{2}{m} = \frac{2}{h} + \frac{6a}{\omega h^2} \quad \text{oder} \quad h^2 - m h - \frac{3ma}{\omega} = 0,$$

woraus die gesuchte Querschnittshöhe:

$$h = \frac{m}{2} + \frac{m}{2} \sqrt{1 + \frac{12a}{\omega m}} \quad 9$$

Die zwei auf 6 zunächst folgenden Gleichungen aber liefern:

$$c_o = \left(\frac{\sigma_d}{N_o} \mu b h - 1 \right) \frac{\omega h}{6}, \quad c_u = - \left(\frac{\sigma_d}{N_u} \mu b h - 1 \right) \frac{\omega h}{6}, \quad 10$$

wodurch der Schnitt der Bogenachse mit dem Querschnitt bestimmt ist. Im übrigen kann bezüglich des Verfahrens auf die beiden letzten Absätze des § 28 verwiesen werden.

Nach § 34, 7) lassen sich auch die Beanspruchungen der Eiseneinlagen berechnen. Da diese jedoch selbst an der Oberkante und Unterkante nur Normalspannungen

$$\sigma_e = n \sigma_d$$

erreichen würden, so gehen die wirklichen Beanspruchungen jedenfalls nicht über die zulässigen hinaus.

Beispiel 71. Bogenkorrektur entsprechend dem vorigen Paragraphen.

Unter den Voraussetzungen des Beispiels 57, S. 219, die nötige Querschnittshöhe h und den Durchschnitt der Bogenachse mit dem Querschnitt zu bestimmen, wenn der Querschnitt der beiden gleichen Eiseneinlagen zusammen $\alpha = 0,01$ des ganzen Querschnitts beträgt, die Einlagen in $\beta = 0,45$ der Höhe entfernt von der Höhenmitte liegen und $n = E_e : E_b = 15$ gesetzt wird.

Unter den Voraussetzungen des § 35 hat man nach den dortigen Gleichungen 5), 8):

$$\mu = 1 + 15 \cdot 0,01 = 1,15 \quad \omega = \frac{1 + 12 \cdot 15 \cdot 0,01 \cdot 0,45^2}{1,15} = 1,18,$$

$$m = \frac{2}{\frac{1,15 \cdot 495 \cdot 40}{1856330} + \frac{1,15 \cdot 495 \cdot 40}{1925200}} = 83,01 \text{ cm},$$

und hiermit nach 9) die Querschnittshöhe:

$$h = \frac{83,01}{2} + \frac{83,01}{2} \sqrt{1 + \frac{12 \cdot 48,43}{1,18 \cdot 83,01}} = 150,8 \text{ cm},$$

während ohne Eiseneinlagen $h = 174,8$ und vor der Korrektur $h = 224,0$ cm war (Beispiel 57, S. 220). Unter Verwendung von

$$\mu b h = 1,15 \cdot 495 \cdot 150,8 = 85843 \text{ qcm}$$

folgen aus 10) die neuen Entfernungen der Kräfte N_o, N_u von der Bogenachse:

$$c_o = \left(\frac{40 \cdot 85843}{1856330} - 1 \right) \frac{1,18 \cdot 150,8}{6} = 25,19 \text{ cm},$$

$$c_u = - \left(\frac{40 \cdot 85843}{1925200} - 1 \right) \frac{1,18 \cdot 150,8}{6} = -23,24 \text{ „},$$

womit wieder

$$\alpha = c_o - c_u = 48,43 \text{ cm}.$$

Die neue Achse ist wie die korrigierte Achse ohne Eiseneinlagen geblieben (Beispiel 57), was bei der symmetrischen Anordnung der Einlagen zu erwarten war.

Bemerkungen. Selbstverständlich ergeben die Gleichungen § 35, 6) mit vorstehenden c_o, c_u die größten Druckspannungen:

$$\sigma_o = \frac{1856330}{85843} \left(1 + \frac{6 \cdot 25,19}{1,18 \cdot 150,8} \right) = 40 \text{ kg}$$

$$\sigma_u = \frac{1925200}{85843} \left(1 + \frac{6 \cdot 23,24}{1,18 \cdot 150,8} \right) = 40 \text{ „},$$

wie vorgeschrieben war. Bezüglich der unteren Grenzwerte von σ_o , σ_u siehe das nächste Beispiel. Die Beanspruchungen beider Eiseneinlagen bleiben stets unter

$$\sigma_e = 15 \cdot 40 = 600 \text{ kg.}$$

Beispiel 72. Untersuchung eines korrigierten Querschnitts auf Zugspannungen.

Es sollen die unteren Grenzwerte der Randspannungen σ_o , σ_u für den korrigierten Querschnitt des vorigen Beispiels berechnet und damit festgestellt werden, ob und welche Zugspannungen im Querschnitt auftreten.

Während die Bogenachse nach der anfänglichen Anordnung des Bogens in der Querschnittsebene um $c_o = 46,73$ cm unter dem Angriffspunkt von N_o lag (Beispiel 57), ist der Abstand nach der im letzten Beispiel vorgenommenen Korrektur nur $c_o = 25,19$ cm, so daß die Bogenachse in der Querschnittsebene um

$$46,73 - 25,19 = 21,54 \text{ cm}$$

nach oben gerückt ist. Damit ändern sich die Abstände $c = \frac{M_x}{N_x}$ der Angriffspunkte von N_x für alle Belastungen.

Es mögen nun (im Gegensatze zu § 35 und dem vorigen Beispiel) die N_x , c für die Belastung, welche den kleinsten Druckwert oder größten Zugwert der Randspannung σ_o erzeugt, durch N_o , c_o , und für die Belastung, welche den kleinsten Druckwert oder größten Zugwert der Randspannung σ_u erzeugt, durch N_u , c_u bezeichnet sein. Dann hat man wie in Beispiel 58, S. 221:

$$\begin{array}{ll} N_o = 1916,90 \text{ t,} & c_o = -23,13 \text{ cm,} \\ N_u = 1848,03 \text{ „,} & c_u = 25,51 \text{ „,} \end{array}$$

und damit nach § 35, 6) bei Verwendung der im vorigen Beispiel berechneten h , $\mu b h$, ω die gesuchten unteren Grenzwerte der Randspannungen:

$$\begin{aligned} \sigma_o &= \frac{1916900}{85843} \left(1 - \frac{6 \cdot 23,13}{1,18 \cdot 150,8} \right) = 4,91 \text{ kg,} \\ \sigma_u &= \frac{1848030}{85843} \left(1 - \frac{6 \cdot 25,51}{1,18 \cdot 150,8} \right) = 3,01 \text{ „.} \end{aligned}$$

Es treten also im behandelten Querschnitt bei keiner Belastung Zugspannungen auf. Die Eiseneinlagen dienen jedoch zur Sicherheit gegen außer Rechnung gebliebene Einfüsse, woneben infolge ihrer Mitwirkung erheblich an Mauerwerk gespart wird, da die Querschnittshöhe durch Eiseneinlagen von $\frac{1}{10}$ des Gesamtquerschnitts von 174,8 cm auf 150,8 cm herabgegangen ist, durch die Eiseneinlagen und Korrektur von 224,0 cm auf 150,8 cm (Beispiel 57, S. 220).

§ 36. Längs- und Querschubspannungen von Stäben beliebig ungleich widerstehenden Materials und speziell von Eisenbetonbogen. Gleitspannungen (Haftspannungen).

Wie bereits mehrfach erwähnt, sind die Längsschubspannungen und Querschubspannungen bei Bogenträgern meist so gering, daß sie gewöhnlich unberücksichtigt bleiben (vergl. die Beispiele 8, 41, 64, 65). Wir wollen sie trotzdem auch für Stäbe ungleich widerstehenden Materials ableiten, uns aber bei Bogen auf den für sie wichtigsten Fall beschränken, daß der ganze Querschnitt als wirksam gilt. Sodann werde von dem Ergebnis der Ableitung für gleich widerstehendes Material in § 9 Gebrauch gemacht, daß von der Krümmung abgesehen werden darf und alsdann nur die von den Biegemomenten herrührenden Normalspannungen der Querschnitte zu den Längsschubspannungen und Querschubspannungen beitragen. Im übrigen kann ähnlich wie in § 9 vorgegangen werden.

Für ein Querschnittselement dF bei x, v und dem Elastizitätsmodul E beträgt nach § 33, 6) die vom Biegemoment M_x herrührende Normalkraft:

$$\frac{M_x}{E' J'} E v dF.$$

Die Resultante aller dieser im Querschnitt x von einer beliebigen Stelle v bis zum obersten Element bei $v = r$ angreifenden Kräfte ist:

$$\frac{M_x}{E' J'} \int_v^r E v dF.$$

Für die Resultante aller im Querschnitt $x + dx$ von v bis r widerstehenden Normalkräfte hat man:

$$\frac{M_x + dM_x}{E' J'} \int_v^r E v dF.$$

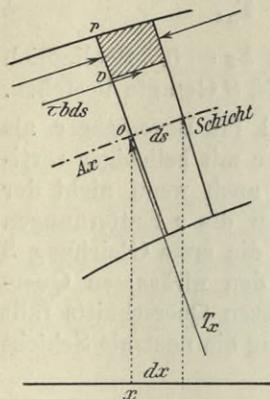


Fig. 187.

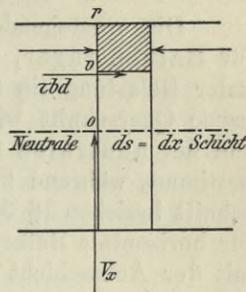


Fig. 188.

Da sich das in Fig. 187, 188 schraffierte Trägerstück mit der Differenz dieser beiden Kräfte längs der darunter liegenden Fläche fortzubewegen sucht, so muß in letzterer eine gleich große Kraft entgegenwirken. Wir bezeichnen sie mit $\tau b ds$, unter b die Trägerbreite bei v verstanden, so daß sich τ unter der erwähnten Vernachlässigung der Stabkrümmung auf die Flächeneinheit bezieht und deshalb wie in § 9 Längsschubspannung bei x, v heißt. Führen wir noch ein:

$$Z_v = \int_v^r E v dF, \quad \text{also} \quad Z_0 = \int_0^r E v dF, \quad 1$$

so ergibt die Subtraktion der beiden vorhergehenden Ausdrücke:

$$\tau b ds = \frac{dM_x}{E' J'} Z_v,$$

und mit Rücksicht auf § 1, 13) die gesuchte Schubspannung bei x, v :

$$\tau = \frac{Z_v}{b E' J'} T_x. \quad 2$$

Wie in § 33 hat man:

$$\int E v dF = 0, \quad E' J' = \int E v^2 dF, \quad 3$$

worin die Integrale auf den ganzen wirksamen Querschnitt zu erstrecken sind. Mit Rücksicht auf die erste dieser Gleichungen dürfen die Integrale 1 auf den Querschnittsteil von v bis zur obersten oder untersten Faser bezogen werden; sie sind dann als Absolutwerte aufzufassen.

Ganz wie in § 9 ergibt sich, daß an jeder Stelle x, v die Quer-

schubspannung gleich der Längsschubspannung, so daß die Bezeichnung τ für beide gilt. Auch ändert sich nach 2 wieder $b\tau$ sowohl mit dem Querschnitt x als mit der Entfernung v . In jedem Querschnitt ist nach 2 $b\tau$ am größten:

$$\text{für } v = 0 \qquad b\tau = \frac{Z_0}{E'J'} T_x, \qquad 4$$

am kleinsten bei der obersten und untersten Faser: $b\tau = 0$. Schließlich bleibt das in § 9 betreffs der schiefen Spannungen N, S Gesagte bestehen.

Die vorstehenden Beziehungen gelten sowohl für Bogenträger als für Balkenträger, für horizontale Balkenträger mit beliebiger vertikaler Belastung (in § 1 $N_x = H = 0, T_x = V_x$) auch wenn nicht der ganze Querschnitt wirksam ist. Es bedeuten dann die v Entfernungen von der neutralen Schicht und diese ist durch die erste Gleichung 3 bestimmt, während beide Gleichungen 3 sich auf den wirksamen Querschnitt beziehen (§ 33). Bei Wirksamkeit des ganzen Querschnitts fällt für horizontale Balkenträger mit vertikaler Belastung die neutrale Schicht mit der Achsschicht zusammen (S. 262).

Eisenbetonbogen. Für diese setzen wir, wie oben erwähnt (S. 274), die Wirksamkeit des ganzen Querschnitts voraus. Man hat dann nach 1, wenn S_{vb}, S_{ve} die Absolutwerte der statischen Momente des Betonquerschnittsteils und Eisenquerschnittsteils von v bis zur obersten oder untersten Faser in Hinsicht der durch § 34, 2) bestimmten Achsschicht bedeuten:

$$Z_v = E_b S_{vb} + E_e S_{ve} = E_b (S_{vb} + n S_{ve}). \qquad 5$$

Da nun nach § 34, 4) oder der zweiten obigen Gleichung 3:

$$E'J' = E_b J_b + E_e J_e = E_b (J_b + n J_e), \qquad 6$$

unter J_b, J_e die Trägheitsmomente des ganzen Betonquerschnitts und Eisenquerschnitts x hinsichtlich jener Achsschicht verstanden, so folgt aus 2 die Längsschubspannung und Querschubspannung bei x, v :

$$\tau = \frac{S_{vb} + n S_{ve}}{J_b + n J_e} \frac{T_x}{b}. \qquad 7$$

Haben wir speziell einen rechteckigen Querschnitt der Breite b und Höhe h , bei welchem sich in Entfernungen e, e' von der Unterkante Eiseneinlagen der Querschnitte f_e, f_e' befinden (Fig. 182, 183), so liefert 5 für die Achsschicht und die Höhe der oberen und unteren Eiseneinlage:

$$Z_v = E_b \left(\frac{b d^2}{2} + n f_e' (d - e') \right),$$

$$Z_v = E_b b e \left(d - \frac{e}{2} \right) + E_e f_e' (d - e'),$$

$$Z_v = E_b b e' \left(d - \frac{e'}{2} \right) + E_e f_e' (d - e'),$$

womit aus 2 bei Beachtung von 6 die Längs- und Querschubspannungen in den Höhen der Achsschicht und beider Eiseneinlagen:

$$\text{bei } v = 0 \quad \tau = \frac{b d^2 + 2 n f'_e (d - e')}{J_b + n J_e} \frac{T_x}{2 b}, \quad 8$$

$$\text{„ } v = e - d \quad \tau = \frac{b e (2 d - e) + 2 n f'_e (d - e')}{J_b + n J_e} \frac{T_x}{2 b}, \quad 9$$

$$\text{„ } v = e' - d \quad \tau = \frac{b e' (2 d - e') + 2 n f'_e (d - e')}{J_b + n J_e} \frac{T_x}{2 b}, \quad 10$$

worin d , $J_b + n J_e$ durch § 34, 9), 11) bestimmt; doch pflegen diese Größen bei der Berechnung der Schubspannungen schon bekannt zu sein. In 8 hätten wir als Zähler des ersten Bruches auch setzen können $(h - d)^2 + 2 n f'_e (e - d)$.

Wäre nur eine Eiseneinlage vorhanden, was jedoch bei Bogen nicht leicht vorkommt, so hätte man den Querschnitt der anderen gleich Null zu setzen. In dem bei Bogen gewöhnlichen Falle, daß beide Eiseneinlagen gleiche Querschnitte besitzen und in gleichen Entfernungen von den nächsten Breitekanten liegen, folgen aus 8–10 mit $f'_e = f_e$, $h = 2d$, $e' = h - e$ bei der Achsschicht:

$$\tau = \frac{b h^2 + 4 n f_e (2e - h)}{J_b + n J_e} \frac{T_x}{8 b}, \quad 11$$

und bei den zwei Eiseneinlagen:

$$\tau = \frac{b e (h - e) + n f_e (2e - h)}{J_b + n J_e} \frac{T_x}{2 b}, \quad 12$$

worin $J_b + n J_e$ durch § 34, 15) bestimmt.

Gleitspannungen. Wenn, wie oben für Bogen angenommen, der ganze Querschnitt widersteht, dann könnte die Längsschubkraft pro Längeneinheit, τb , bei einer Eiseneinlage eine Trennung am ehesten längs einer Fläche bewirken, deren Spur in Fig. 189 bei v ausgezogen ist. Auf Gleiten längs der entsprechenden Eisenoberfläche wirken Spannungen, welche durchschnittlich etwas kleiner als die oben ausgedrückten Schubspannungen τ bei v sind, weil für diese eine Verteilungsbreite b von τb vorausgesetzt wurde, während nach Fig. 189 auf die Trägerbreite b eine etwas größere Verteilungsbreite kommt. Man rechnet also bei vollständig wirksamen Querschnitten eher etwas zu ungünstig, wenn man die auf Gleiten längs einer Eiseneinlage wirkende Spannung, die Bach deshalb Gleitspannung nannte (in verschiedenen Werken und Vorschriften heißt sie Haftspannung), einfach gleich der Längs- und Querschubspannung τ an der betreffenden Stelle setzt.

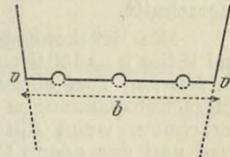


Fig. 189.

Anders, wenn ein Teil des Stabquerschnitts auf Zug beansprucht wird und die Zugwiderstände des Betons vernachlässigt werden, mit welchem Falle man es bei Eisenbetonbalken fast immer zu tun hat. Wie zu Beginn dieses Paragraphen festgestellt, steht die Längsschubkraft $\tau b ds$ bei v zwischen zwei um ds voneinander entfernten Quer-

schnitten im Gleichgewicht mit der Differenz der Normalkräfte von v bis zur obersten oder untersten Faser auf jene beiden Querschnitte (Fig. 187, 188). Wenn nun als solche Normalkräfte oberhalb oder unterhalb der Fasern bei v infolge Vernachlässigung der Zugwiderstände des Betons nur die Zugkräfte einer Eiseneinlage gelten, so kann deren Differenz der Längsschubkraft $\tau b ds$ nur an der Oberfläche dieser Einlage das Gleichgewicht halten. Man hat also, wenn τ_1 die Beanspruchung pro Flächeneinheit Oberfläche vom Umfang U bedeutet:

$$\tau_1 U ds = b ds,$$

woraus die Gleitspannung (Haftspannung):

$$\tau_1 = \frac{\tau b}{U}. \quad 13$$

Wenn diese Formel mitunter selbst dann Verwendung fand, wenn die Zugwiderstände des Betons in Rechnung gezogen werden sollten (wie in den Beispielen 3 und 4 zu den preußischen Bestimmungen von 1907), so setzt dies voraus, daß die zum Vergleiche dienende rechnungsmäßige Gleitfestigkeit (Haftfestigkeit) durch Biegungsversuche auf Grund von 13 bestimmt oder entsprechend geschätzt wurde. Solche Versuche hat insbesondere Bach vorgenommen¹, neben anderen, bei welchen sich die Gleitfestigkeit als Widerstand pro Einheit Eisenoberfläche gegen das Herausziehen oder Herausdrücken der Eisen ergab².

Mehrfach hat man den Eisenstäben zur Verhinderung des Gleitens andere als prismatische Formen gegeben, so in Amerika durch Anschwellungen bei gleichbleibendem Querschnitt (Tachereisen), durch spiralförmige Windungen bei quadratischem Querschnitt (Ransomeisen), durch zahnartige Auswüchse an den Seitenflächen (Johnsoneisen). Doch kommt bei Einlagen in der Nähe der Trägeraußenflächen die aufsprenge Wirkung der Knoten in Betracht, so daß sich bei Versuchen von Bach mit Tachereisen in Balken die Widerstandsfähigkeit der letzteren nur wenig größer als bei Einlagen gewöhnlicher Eisen ergab. Über Abbiegungen der Einlageeisen wie über Bügel und Haken siehe § 39.

Beispiel 73. Längs- und Querschubspannungen in einem bestimmten Bogenquerschnitt.

Ein Brückenbogen enthalte bei einem Querschnitt der Breite $b = 495$ cm und Höhe $h = 150,8$ cm Eiseneinlagen von je $f_e = 373$ qcm Querschnitt in 7,5 cm Entfernung vom oberen und unteren Rande (vergl. Beispiel 71). Die Längs- und Querschubspannungen τ bei der Achsschicht und den beiden Eiseneinlagen zu berechnen, wenn die Transversalkraft $T_x = 20000$ kg beträgt, $n = 15$ gesetzt wird und der ganze Querschnitt wirksam ist.

Wir haben im vorliegenden Falle $e = 150,8 - 7,5 = 143,3$ cm (Fig. 182, 183) und nach § 34, 15):

$$J_b + n J_e = \frac{495 \cdot 150,8^3}{12} + 30 \cdot 373 (143,3 - 7,5,4)^2 = 193\,048\,390 \text{ cm}^4.$$

¹ Bach, Versuche mit Eisenbetonbalken, Mitteilungen über Forschungsarbeiten, herausgegeben vom Vereine deutscher Ingenieure, Heft 39, 1907, S. 18, 43; Heft 45—47, 1907, S. 16, 148; Heft 72—74, 1909, S. 17 und Zusammenstellungen 40, 43. (Einfluß des Wasserzusatzes, Sandes, Mischungsverhältnisses usw.).

² Bach, Versuche über den Gleitwiderstand einbetonierten Eisens, Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 22, 1905, S. 1, 9, 39 usw.

Damit ergeben sich nach § 36, 11), 12) die Schubspannungen bei der Achsschicht:

$$\tau = \frac{495 \cdot 150,8^2 + 60 \cdot 373 (286,6 - 150,8)}{193\,048\,390} \frac{20\,000}{2 \cdot 495} = 0,37 \text{ kg.}$$

und bei den zwei Eiseneinlagen:

$$\tau = \frac{495 \cdot 143,3 \cdot 7,5 + 15 \cdot 373 (286,6 - 150,8)}{193\,048\,390} \frac{20\,000}{2 \cdot 495} = 0,14 \text{ kg.}$$

Über letzterem Wert würde auch Gleitspannung an den Eiseneinlagen nicht zu erwarten sein (§ 36).

Anhang

betreffend Eisenbetonsäulen und Eisenbetonbalken.¹

Säulen und Balken in Eisenbeton kommen häufig in Verbindung mit Eisenbetonbogen vor. Es ist deshalb erwünscht, sie auf Grund der abgeleiteten allgemeinen Beziehungen behandeln zu können, und so bei einheitlichem Vorgehen Anschluß an die gebräuchlichen Darstellungen und Vorschriften² zu erlangen, die vorwiegend Säulen und Balken im Auge haben. Dem soll im folgenden Rechnung getragen werden. Selbstverständlich müssen wir uns dabei beschränken, so daß auf Einzelheiten der Ausführung nicht eingegangen werden kann. Wie bisher sei gesetzt:

$$n = \frac{E_e}{E_b},$$

unter E_e , E_b den Elastizitätsmodul des Eisens für Zug und Druck und des Betons für Druck verstanden.

§ 37. Säulen beliebig ungleich widerstehenden Materials. Eisenbetonsäulen.

Bezüglich exzentrisch belasteter Säulen ohne Knickwirkung bleibt es bei den Beziehungen der §§ 33, 34. Im folgenden setzen wir achsial belastete Säulen voraus; dann genügt die Ableitung § 33, a).

Wirkt in der Säulenachse eine beliebige Last $N_x = P$, so sind nach § 33, 3) die Normalspannungen für Querschnittselemente von beliebigem Elastizitätsmodul E :

$$\sigma = \frac{EP}{E'F'}, \quad 1$$

während nach § 33, 1), 2) die Säulenachse und $E'F'$ bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$\int E v dF = 0, \quad E'F' = \int E dF, \quad 2$$

worin bezüglich jeder in Betracht gezogenen Achsschicht die v positive oder negative Entfernungen der Querschnittselemente bedeuten und die Integrale auf die ganzen Querschnitte zu erstrecken sind. Bei Quer-

¹ Vergl. die zweite Fußnote auf Seite 263.

² v. Emperger, Handbuch für Eisenbetonbau, Bd. IV, 3. Teil: Bestimmungen für die Ausführung von Eisenbetonbauten. Bauunfälle. Berlin 1909. — Siehe auch die Fußnoten S. 258.

schnitten mit zwei Symmetrieachsen der Figur und des Materials trifft natürlich die Säulenachse den Durchschnitt dieser Symmetrieachsen.

Für Säulen aus Beton und Eisen hat man nach 2 zur eventuellen Bestimmung der Achsschicht, wenn S_b, S_e die statischen Momente des Betonquerschnitts und Eisenquerschnitts in Hinsicht derselben bedeuten:

$$E_b S_b + E_e S_e = 0 \quad \text{oder} \quad S_b + n S_e = 0, \quad 3$$

welche Bedingung speziell für rechteckige Querschnitte auf § 34, 9) führt. Weiter liefert 2:

$$E' F' = E_b F_b + E_e F_e = E_b (F_b + n F_e), \quad 4$$

unter F_b, F_e den Betonquerschnitt und Eisenquerschnitt verstanden, womit nach 1 für alle Betonquerschnittselemente wegen $E = E_b$:

$$\sigma_b = \frac{P}{F_b + n F_e}, \quad 5$$

und für alle Eisenquerschnittselemente wegen $E = E_e$:

$$\sigma_e = \frac{n P}{F_b + n F_e} = n \sigma_b. \quad 6$$

Soll der Eisenquerschnitt bei gegebenen F_b, σ_b oder der Betonquerschnitt bei gegebenen F_e, σ_e berechnet werden, so entnimmt man aus 5, 6:

$$F_e = \frac{P}{n \sigma_b} - \frac{F_b}{n}, \quad F_b = \frac{n P}{\sigma_e} - n F_e. \quad 7$$

Knickwirkungen kommen bei Eisenbetonsäulen seltener als bei Eisensäulen in Betracht. Die Bestimmungen des Preussischen Arbeitsministeriums von 1907 beispielsweise betrachten sie als ausgeschlossen, wenn die Säulenhöhe unter dem 18fachen der kleinsten Querdimension bleibt. Hierzu ist vorgeschrieben, daß Querverbindungen, welche geeignet sind, die Eisenstäbe unveränderlich gegeneinander festzulegen, in Abständen annähernd gleich der kleinsten Säulendimension, aber nicht über dem 30fachen der Eisenstabstärke angeordnet sein müssen. Die Berechnung auf Knickung hat in besonderer, an einem Beispiel gezeigter Weise (Beispiel 9 daselbst) auf Grund der Eulerschen Formel zu erfolgen.

Vielfach wird für die Knickfestigkeit k (mittlere Beanspruchung pro Flächeneinheit Querschnitt Einknicken) von Eisenbetonsäulen die Schwarzsche Formel verwendet, mit folgender Begründung nach Ritter¹. Die Eulersche Knickformel

$$K = F k = \frac{\pi^2}{l^2} E J, \quad 8$$

welche für homogenes Material unter Voraussetzung der Proportionalität zwischen Spannungen σ und Dehnungen λ dem Beginn des Einknickens entspricht, hat sich bei Versuchen von Tetmajer mit Eisenstäben von genügend kleinem $J:l^2$ gut bewährt. Für Stäbe von größeren $J:l^2$ konnte sie deshalb nicht zutreffen, weil bei diesen der Beginn des Einknickens über der Proportionalitätsgrenze liegt, so daß an Stelle des konstanten Elastizitätsmoduls E der allgemeinere Ausdruck des letzteren $E = \frac{d\sigma}{d\lambda}$

¹ Ritter, Die Bauweise Hennebique, Schweiz. Bauztg. 1899, XXXIII, S. 41, 49, 59 (Säulen S. 60).

treten muß. Für Beton glaubte nun Ritter mit genügender Annäherung setzen zu können:

$$\sigma = b(1 - e^{-1000 \lambda}),$$

unter b eine Konstante, unter e die Basis der natürlichen Logarithmen verstanden. Mit dem hieraus folgenden Werte:

$$E = \frac{d\sigma}{d\lambda} = b \cdot 1000 e^{-1000 \lambda} = 1000(b - \sigma)$$

und $\sigma = k$ lautet die Eulersche Formel 8:

$$Fk = \frac{\pi^2}{l^2} 1000(b - k)J, \quad \text{woraus}$$

$$k = \frac{b}{1 + \frac{F l^2}{1000 \pi^2 J}}.$$

Setzt man hierin rund $\pi^2 = 10$, so ergibt sich die von Ritter für Betonsäulen angenommene Schwarzsche Knickformel¹:

$$k = \frac{K}{F} = \frac{b}{1 + 0,0001 \frac{F l^2}{J}}. \quad 9$$

Für Eisenbetonsäulen soll man darin im Einklang mit §§ 34, 38 setzen:

$$F = F_b + n F_e, \quad J = J_b + n J_e, \quad 10$$

unter J_b, J_e die Trägheitsmomente des Betonquerschnitts und Eisenquerschnitts in Hinsicht der Achsschicht senkrecht zur Ebene der Ausbiegung verstanden. Formel 9 ist z. B. in die neuen schweizerischen Vorschriften von 1909 übergegangen.

Wie in andern Fällen wird auch in obigen Formeln häufig für F_b der ganze Querschnitt (ohne Abzug des Eisenquerschnitts), für J_b das Trägheitsmoment desselben verwendet, was wegen

$$F = F_b + F_e + (n - 1) F_e, \quad J = J_b + J_e + (n - 1) J_e$$

darauf hinausläuft, n um 1 kleiner als bei Verwendung der genaueren F_b, J_b zu wählen.

Beispiel 74. Säulenspannungen ohne Knickwirkungen.

Eine mit $P = 40000$ kg achsial belastete Eisenbetonsäule sei entsprechend Fig. 190 mit 8 Rundeisen von je 2 cm armiert. Die Beanspruchungen des Betons und Eisens zu berechnen, wenn Knickwirkungen nicht in Betracht kommen und $n = 10$ gesetzt wird.

Ganzer Querschnitt	$30^2 - 2 \cdot 2,5^2 = 887,5$ qcm ,
Eisenquerschnitt	$F_e = 8 \cdot 1^2 \pi = 25,13$ " ,
Betonquerschnitt	$F_b = 887,5 - 25,1 = 862,4$ " .

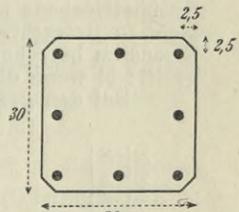


Fig. 190.

Nach § 37, 5), 6) erhält man die Beanspruchungen pro qcm des Betons und Eisens:

$$\sigma_b = \frac{40000}{862,4 + 251,3} = 37,1 \text{ kg}, \quad \sigma_e = 10 \cdot 37,1 = 371 \text{ kg}.$$

Hätten wir als Betonquerschnitt den ganzen Querschnitt $F_b = 887,5$ qcm eingeführt, so würden sich ergeben haben: $\sigma_b = 35,1$ kg, $\sigma_e = 351$ kg, welche Beanspruchungen $n = 9$ entsprechen.

¹ Vergl. Luegers Lexikon der gesamten Technik, 2. Auflage, Bd. 5, Artikel Knickfestigkeit.

Beispiel 75. Zulässige Säulenbelastung ohne und mit Knickwirkungen.

Eine Eisenbetonsäule von 25/25 cm Querschnitt enthält der Andeutung in Fig. 191 entsprechend 4 Rundeißen von 2,2 cm Durchmesser. Zu berechnen: a) den zulässigen Säulendruck P und den zulässigen mittleren Druck pro qcm Querschnitt, wenn keine Knickwirkung in Betracht kommt und $\sigma_b = 30$ kg, $n = 15$ gewählt sind; b) die Knickfestigkeit und den zulässigen Säulendruck bei 4 m Säulenlänge, wenn $b = 250$ kg, $n = 15$ angenommen werden.

a) Man hat den ganzen Querschnitt $25^2 = 625$ qcm, den Eisenquerschnitt $F_e = 4 \cdot 1,1^2 \pi = 15,2$ qcm und den Betonquerschnitt $F_b = 625 - 15,2 = 609,8$ qcm, womit nach § 37, 5) der zulässige Säulendruck:

$$P = 30 (609,8 + 15 \cdot 15,2) = 25134 \text{ kg,}$$

und der mittlere Druck pro qcm Querschnitt:

$$\sigma = \frac{25134}{625} = 40 \text{ kg.}$$

b) Die auf Beton reduzierten Werte des Querschnitts und Trägheitsmoments sind nach § 37, 10):

$$F' = 25^2 + 14 \cdot 15,2 = 838 \text{ qcm,}$$

$$J = \frac{25^4}{12} + 14 \cdot 15,2 \cdot 9,5^2 = 51757 \text{ cm}^4.$$

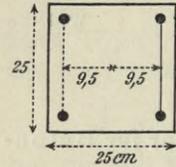


Fig. 191.

Wollte man nun die freie Knicklänge möglichst ungünstig gleich der ganzen Säulenlänge setzen $l = 400$ cm, so hätte man nach § 37, 9) die Knickfestigkeit pro qcm Säulenquerschnitt:

$$k = \frac{250}{1 + 0,0001 \frac{838 \cdot 400^2}{51757}} = 198 \text{ kg.}$$

Wenn jedoch die Säule mit den Endquerschnitten flach aufsitzt, so pflegt nicht zu günstig zu sein $l = 0,75 \cdot 400 = 300$ cm, womit in gleicher Weise folgt:

$$k = 218 \text{ kg.}$$

Bei achtfacher Sicherheit wäre alsdann der zulässige Säulendruck:

$$P = \frac{218 \cdot 625}{8} = 17030 \text{ kg,}$$

und pro qcm Säulenquerschnitt $\sigma = \frac{218}{8} = 27 \text{ kg.}$

Beispiel 76. Exzentrisch belastete Säule.

Eine Eisenbetonsäule von 25/25 cm Querschnitt, armiert mit vier Eisenstäben von 2 cm Durchmesser in 3 cm Abstand von den Seiten, werde in einer Symmetrieebene mit $P = 5000$ kg belastet (Fig. 192). Knickwirkungen kommen nicht in Betracht. Es sind für $n = 15$ die Normalspannungen des Betons und Eisens zu berechnen: a) wenn die Last P um $a = 9,5$ cm von einer Seite angreift; b) wenn die Last um $a = 2,5$ cm von einer Seite angreift.

Bei den gegebenen Exzentrizitäten besteht kein Zweifel, daß die neutrale Schicht im Falle a) außerhalb, im Falle b) innerhalb des Querschnitts liegt (vergl. Aufgabe 29), sodaß im Falle a) die Formeln § 34, a), im Falle b) bei Vernachlässigung der Zugwiderstände des Betons die Formeln des § 34, b) zur Verwendung kommen. Hätten wir dies nicht von vornherein erkannt oder aus der Lage der Kernpunkte geschlossen (Aufgabe 29), und in beiden Fällen zunächst nach § 34, a) gerechnet, so würden wir im zweiten Falle durch die erhaltenen Zugspannungen auf § 34, b) verwiesen worden sein. Querschnitt der Eiseneinlage auf jeder Seite der Achsschicht:

$$f_e = 2 \cdot 1^2 \pi = 6,28 \text{ qcm.}$$

a) Nach § 34, 14), 15) hat man:

$$F_b + n F_e = 25 \cdot 25 + 30 \cdot 6,28 = 813 \text{ qcm,}$$

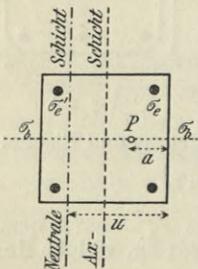


Fig. 192.

$$J_b + n J_e = \frac{25^4}{12} + 30 \cdot 6,28 (22 - 12,5)^2 = 49555 \text{ cm}^4,$$

und damit wegen $N_x = P = 5000 \text{ kg}$, $M_x = 5000 \cdot 4 = 20000 \text{ cmkg}$ nach § 34, 6), 7) die Normalspannungen des Betons und Eisens an beliebigen Stellen pro qcm:

$$\sigma_b = \frac{5000}{813} + \frac{20000}{49555} v = 6,15 + 0,42 v \text{ kg},$$

$$\sigma_e = 15 (6,15 + 0,42 v) = 92,2 + 6,3 v \text{ kg}.$$

Diese Gleichungen liefern die Beanspruchungen des Betons:

an der Kante zunächst P mit $v = 12,5 \text{ cm}$ $\sigma_b = 6,15 + 0,42 \cdot 12,5 = 12,4 \text{ kg}$,

„ „ „ gegenüber „ $v = -12,5 \text{ cm}$ $\sigma'_b = 6,15 - 0,42 \cdot 12,5 = 0,9 \text{ kg}$,

und die Beanspruchungen des Eisens:

für die Einlage zunächst P mit $v = 9,5 \text{ cm}$ $\sigma_e = 92,2 + 6,3 \cdot 9,5 = 152 \text{ kg}$,

„ „ „ gegenüber „ $v = -9,5 \text{ cm}$ $\sigma'_e = 92,2 - 6,3 \cdot 9,5 = 32 \text{ kg}$.

b) Für die Entfernung u der neutralen Schicht (Fig. 192) von der nächst P gelegenen Druckkante der Querschnitte haben wir nach § 34, 23):

$$u^3 - 3 \cdot 2,5 u^2 + \frac{90}{25} 6,28 \cdot 20 u - \frac{90}{25} 6,28 (25 \cdot 22,5 - 2 \cdot 22 \cdot 3) = 0, \quad \text{oder}$$

$$u^3 - 7,5 u^2 + 452,16 u - 9733 = 0, \quad \text{woraus}$$

$$u = 16,3 \text{ cm}.$$

Die größte Beanspruchung des Betons folgt aus § 34, 24):

$$\sigma_b = \frac{5000}{12,5 \cdot 16,3 + \frac{32,6 - 25}{16,3} 15 \cdot 6,28} = 20,2 \text{ kg},$$

womit aus § 34, 19), 24) die Beanspruchungen der Eiseneinlagen auf der Druckseite und Zugseite:

$$\sigma_e = \frac{22 + 16,3 - 25}{16,3} 15 \cdot 20,2 = 247 \text{ kg},$$

$$\sigma'_e = -\frac{22 - 16,3}{16,3} 15 \cdot 20,2 = -106 \text{ kg}.$$

§ 38. Balken beliebig ungleich widerstehenden Materials.

Eisenbetonbalken.

Bezüglich geneigter und schief belasteter Balken bleibt es bei den Beziehungen der §§ 33, 34. Im folgenden setzen wir horizontale Balken mit beliebiger vertikaler Belastung voraus (in den Gleichungen des § 1 $N_x = H = 0$, $T_x = V_x$). Dann genügt die Ableitung § 33, b).

Nach § 33, 4), 5), 6) hat man für jeden Querschnitt x die Normalspannungen von Querschnittelementen beliebiger Elastizitätsmoduln E in Entfernungen v von der neutralen Schicht:

$$\sigma = \frac{E M_x}{E' J'} v, \quad 1$$

während die neutrale Schicht und $E' J'$ bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$\int E v dF = 0, \quad E' J' = \int E v^2 dF, \quad 2$$

worin die Integrale die ganzen wirksamen Querschnitte umfassen (für

die übrigen Querschnittselemente kann $E = 0$ gelten). In diesen wie in allen folgenden Gleichungen sind wie in §§ 33, 34 drückende σ und die v nach oben als positiv anzusehen (Fig. 193).

Für Balken aus Eisen und Beton hat man nach 2 zur Bestimmung der neutralen Schicht, wenn S_b, S_e die statischen Momente des wirksamen Betonquerschnitts und Eisenquerschnitts in Hinsicht der letzteren bedeuten:

$$E_b S_b + E_e S_e = 0 \quad \text{oder} \quad S_b + n S_e = 0. \quad 3$$

Die zweite Gleichung 2 liefert:

$$E' J' = E_b J_b + E_e J_e = E_b (J_b + n J_e), \quad 4$$

unter J_b, J_e die Trägheitsmomente des wirksamen Betonquerschnitts und Eisenquerschnitts hinsichtlich der neutralen Schicht verstanden. Mit 4 folgt aus 1 für Betonquerschnittselemente an beliebigen Stellen x, v wegen $E = E_b$:

$$\sigma_b = \frac{M_x}{J_b + n J_e} v, \quad 5$$

und für Eisenquerschnittselemente an beliebigen Stellen x, v wegen $E = E_e$:

$$\sigma_e = \frac{n M_x}{J_b + n J_e} v, \quad 6$$

Diese Gleichungen lassen sich leicht unmittelbar verwenden (Beispiele 82, und 85); wir wollen sie jedoch für die wichtigsten Fälle noch spezialisieren, womit zugleich ihre Anwendung erleichtert wird.

Rechteckige Druckzone. Zugwiderstände des Betons vernachlässigt. Der gedrückte Querschnittsteil sei ein Rechteck der Breite b und Höhe d (Fig. 202, 203, 205); M_{xa} bezeichne den Absolutwert des Biegemomentes M_x .

Einfache Armierung (Fig. 194, 195). Befindet sich nur auf

der Zugseite eine Eiseneinlage des Querschnitts f_e in Entfernung e von der Druckkante, so lautet die Bedingung 3 für die neutrale Schicht:

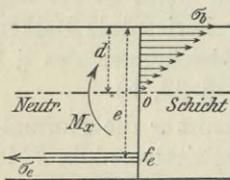


Fig. 194. M_x positiv.

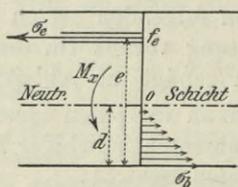


Fig. 195. M_x negativ.

$$\frac{b d^2}{2} - n f_e (e - d) = 0,$$

woraus deren Entfernung von der Druckkante:

$$d = \frac{n f_e}{b} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2 b e}{n f_e}} \right). \quad 7$$

In 5, 6 hat man:

$$J_b + n J_e = \frac{b d^3}{3} + n f_e (e - d)^2, \quad 8$$

oder mit Rücksicht auf die letzte Gleichung vor 7:

$$J_b + nJ_e = \frac{b d^2}{2} \left(e - \frac{d}{3} \right) = n f_e (e - d) \left(e - \frac{d}{3} \right). \quad 9$$

Bei Verwendung von 9 erhalten wir aus 5 die größte Druckspannung des Betons mit $v = d$ (Fig. 194) oder $v = -d$ (Fig. 195):

$$\sigma_b = \frac{2 M_x a}{\left(e - \frac{d}{3} \right) b d}, \quad 10$$

und aus 6 die Zugspannung des Eisens mit $v = \bar{\mp} (e - d)$:

$$\sigma_e = - \frac{e - d}{d} n \sigma_b = - \frac{M_x a}{\left(e - \frac{d}{3} \right) f_e} = - \frac{b d \sigma_b}{2 f_e}, \quad 11$$

worin σ_d durch 10 bestimmt. Bei den umfassenden Versuchen von Bach¹ mit einfach armierten Eisenbetonbalken hat sich ergeben, daß man bei Berechnung von σ_b , σ_e nach 10, 11 mit $n = 15$ die Beanspruchungen des Betons und besonders des Eisens eher zu ungünstig als zu günstig annimmt, was mit der Vernachlässigung der Zugwiderstände des Betons im Einklang steht.

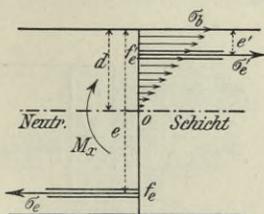


Fig. 196. M_x positiv.

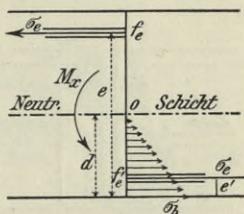


Fig. 197. M_x negativ.

Doppelte Armierung (Fig. 196, 197). Befinden sich auf der Zugseite und Druckseite Eiseneinlagen der Querschnitte f_e , f'_e in Entfernungen e , e' von der Druckkante, so lautet die Bedingung 3 für die neutrale Schicht:

$$\frac{b d^2}{2} - n f_e (e - d) + n f'_e (d - e') = 0,$$

woraus deren Entfernung von der Druckkante:

$$d = n \frac{f_e + f'_e}{b} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2b}{n} \frac{e f_e + e' f'_e}{(f_e + f'_e)^2}} \right). \quad 12$$

In 5, 6 haben wir:

$$J_b + nJ_e = \frac{b d^3}{3} + n f_e (e - d)^2 + n f'_e (d - e')^2, \quad 13$$

oder mit Rücksicht auf die letzte Gleichung vor 12:

$$J_b + nJ_e = n f_e (e - d) \left(e - \frac{d}{3} \right) + n f'_e (d - e') \left(\frac{d}{3} - e' \right). \quad 14$$

¹ Bach, Versuche mit Eisenbetonbalken, Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 45-47, 1907, S. 150, 151.

Mit $J_b + nJ_e$ nach 13 oder 14 gilt nach 5 für die größte Druckspannung des Betons wegen $v = \pm d$ (Fig. 196, 197):

$$\sigma_b = \frac{M_x \alpha d}{J_b + nJ_e}, \tag{15}$$

während nach 6 die Beanspruchungen der Eiseneinlagen auf der Zugseite und Druckseite mit $v = \mp (e - d)$ und $v = \pm (d - e')$:

$$\sigma_e = -\frac{e-d}{d} n \sigma_b, \quad \sigma'_e = \frac{d-e'}{d} n \sigma_b, \tag{16}$$

worin σ_b durch 15 bestimmt.

Die wichtigen Formeln 7, 10, 11, 12, 16, dem Inhalte nach auch 15, sind auf anderem Wege zuerst von Mörsch¹ abgeleitet worden und in verschiedene Vorschriften betreffend die Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen übergegangen.

Rechteckiger Querschnitt. Zugwiderstände des Betons berücksichtigt.

In manchen Vorschriften ist verlangt, daß unter gewissen Verhältnissen auch der Nachweis genügender Zugwiderstände des Betons zu führen sei, wobei für Zug und Druck der gleiche Elastizitätsmodul des Betons zugelassen zu werden pflegt. Die Berücksichtigung dieser Zugwiderstände kann überdies bei Beurteilung von Versuchsergebnissen für die ersten Belastungsstadien erforderlich sein. Es soll

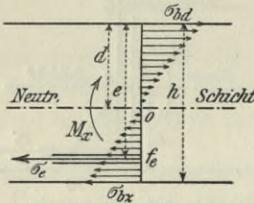


Fig. 198. M_x positiv.

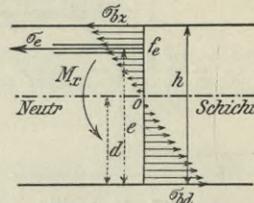


Fig. 199. M_x negativ.

deshalb im folgenden darauf eingegangen werden (s. auch § 39 und die Beispiele 83–85, 90–92), wobei wir den Elastizitätsmodul E_b für Zug und Druck gleich setzen. Auf Grund von 1, 2 und § 39, 1), 2), wie schon auf Grund von §§ 33, 36, könnten auch verschiedene Werte berücksichtigt werden.

Der Querschnitt sei ein Rechteck der Breite b und Höhe h . Es bezeichne wieder d den Abstand der neutralen Schicht von der Druckkante und M_x den Absolutwert des Biegemomentes M_x . Der Querschnitt gilt nun vollständig als wirksam, so daß die neutrale Schicht mit der Achsschicht übereinstimmt (§ 33), wovon wir jedoch keinen Gebrauch machen.

Einfache Armierung (Fig. 198, 199). Befindet sich nur auf der Zugseite eine Eiseneinlage vom Querschnitt f_e in Entfernung e von der Druckkante, so liefert 3 zur Bestimmung der neutralen Schicht:

$$\frac{b d^2}{2} - \frac{b (h - d)^2}{2} - n f_e (e - d) = 0,$$

woraus deren Entfernung von der Druckkante:

$$d = \frac{\frac{b h^2}{2} + n e f_e}{b h + n f_e}. \tag{17}$$

¹ Wayß und Freytag, Der Betoneisenbau, seine Anwendung und Theorie, Stuttgart 1902, S. 83, 85.

In 5, 6 hat man:

$$J_b + n J_e = b \frac{d^3 + (h-d)^3}{3} + n f_e (e-d)^2, \quad 18$$

womit aus 5 die größte Druckspannung des Betons wegen $v = d$ (Fig. 198) oder $v = -d$ (Fig. 199):

$$\sigma_b d = \frac{M_x \alpha d}{J_b + n J_e}, \quad 19$$

sowie aus 5, 6 die größte Zugspannung des Betons wegen $v = \mp (h-d)$ und die Zugspannung des Eisens wegen $v = \mp (e-d)$:

$$\sigma_{bz} = -\frac{h-d}{d} \sigma_b d, \quad \sigma_e = -\frac{e-d}{d} n \sigma_b d. \quad 20$$

Doppelte Armierung (Fig. 200, 201). Befinden sich auf der Zugseite und Druckseite Eiseneinlagen der Querschnitte f_e, f'_e in Entfernungen e, e' von der Druckkante, so liefert 3 als Bedingung für die neutrale Schicht:

$$\frac{b d^2}{2} - \frac{b(h-d)^2}{2} - n f_e (e-d) + n f'_e (d-e') = 0,$$

woraus deren Entfernung von der Druckkante:

$$d = \frac{\frac{b h^2}{2} + n (e f_e + e' f'_e)}{b h + n (f_e + f'_e)}. \quad 21$$

In 5, 6 hat man:

$$J_b + n J_e = b \frac{d^3 + (h-d)^3}{3} + n f_e (e-d)^2 + n f'_e (d-e')^2, \quad 22$$

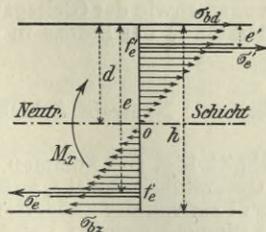


Fig. 200. M_x positiv.

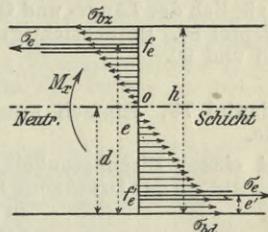


Fig. 201. M_x negativ.

womit aus 5 die größte Druckspannung und größte Zugspannung des Betons wegen $v = \pm d$ und $v = \mp (h-d)$ (Fig. 200, 201)

$$\sigma_b d = \frac{M_x \alpha d}{J_b + n J_e} \quad \sigma_{bz} = -\frac{h-d}{d} \sigma_b d, \quad 23$$

und aus 6 die Beanspruchungen der Eiseneinlagen auf der Zugseite und Druckseite wegen $v = \mp (e-d)$ und $v = \pm (d-e')$:

$$\sigma_e = -\frac{e-d}{d} n \sigma_b d, \quad \sigma'_e = \frac{d-e'}{d} n \sigma_b d. \quad 24$$

Selbstverständlich führen die Gleichungen 21–24 für $f'_e = 0$ wieder auf 17–20. Wären zwei Eiseneinlagen gleicher Querschnitte und in gleichen Entfernungen von den Breitkanten angeordnet, was jedoch bei Balken nicht leicht vorkommt, so hätte man nach 21, 22:

$$d = \frac{h}{2}, \quad J_b + n J_e = \frac{b h^3}{12} + 2 n f_e \left(e - \frac{h}{2} \right)^2. \quad 25$$

Bei Berücksichtigung des betonfreien Teils der Querschnitte beim Ansatz von S_b, J_b würden in 12–14 $(n-1) f'_e$ an Stelle von $n f'_e$ und in 17, 18, 21, 22, 25 überall $n-1$ an Stelle von n zu setzen sein.

Beispiel 77. Einfach armierter rechteckiger Balken.

Eine als frei aufliegend angenommene Deckenplatte von $l = 3$ m Spannweite und $h = 20$ cm Höhe enthalte auf $b = 100$ cm Breite zwölf Rundeisen von 1,2 cm Stärke in $e = 18$ cm Entfernung von der Oberkante. Die Lage der neutralen Schicht und die Normalspannungen σ_b , σ_e des Betons und Eisens zu berechnen, wenn die Belastung pro Quadratmeter 1600 kg beträgt und $n = 15$ gesetzt wird (Fig. 194).

Querschnitt der Eiseneinlage auf $b = 100$ cm Breite:

$$f_e = 12 \cdot 3,1416 \cdot 0,6^2 = 13,57 \text{ qcm},$$

Entfernung der neutralen Schicht von der Oberkante nach § 38, 7):

$$d = \frac{15 \cdot 13,57}{100} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{200 \cdot 18}{15 \cdot 13,57}} \right) = 6,28 \text{ cm}.$$

Da nun für jene Breite bei einer Belastung von $q = 1600$ kg pro m oder $q = 16$ kg pro cm Träger das größte Biegemoment (in der Trägermitte):

$$M_x = \frac{q l^2}{8} = \frac{16 \cdot 900^2}{8} = 180000 \text{ cmkg},$$

so folgen aus § 38, 10), 11) die größten Beanspruchungen pro qcm des Betons und Eisens:

$$\sigma_b = \frac{2 \cdot 180000}{\left(18 - \frac{6,28}{3}\right) 100 \cdot 6,28} = 36,0 \text{ kg} \quad (\text{Druck}),$$

$$\sigma_e = - \frac{11,72}{6,28} 15 \cdot 36,0 = - 1008 \text{ kg} \quad (\text{Zug}).$$

Bezüglich der Längs- und Querschubspannungen sowie der Gleitspannungen siehe Beispiel 86. Berücksichtigung der Zugwiderstände des Betons in den Beispielen 83 und 90.

Beispiel 78. Einfach armierter Plattenbalken. Neutrale Schicht durch die Platte.

Bei einem Eisenbetonbalken vom Querschnitt Fig. 202 kommen auf die Breite $b = 216$ cm der Druckzone Eisenstäbe vom Gesamtquerschnitt $f_e = 56,94$ qcm in Entfernung $e = 61$ cm von der äußersten Druckfaser. Das größte Biegemoment beträgt $M_x = 2721000$ cmkg. Die Lage der neutralen Schicht und die Normalspannungen σ_b , σ_e des Betons und Eisens zu berechnen, wenn $n = 10$ gesetzt wird (Fig. 194).

Die Entfernung der neutralen Schicht von der äußersten Druckfaser ist nach § 38, 7):

$$d = \frac{569,4}{216} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 216 \cdot 61}{569,4}} \right) = 15,49 \text{ cm}.$$

Damit erhalten wir aus § 38, 10, 11 die größten Beanspruchungen pro qcm des Betons und Eisens:

$$\sigma_b = \frac{2721000}{\left(61 - \frac{15,49}{3}\right) 216 \cdot 15,49} = 29,1 \text{ kg},$$

$$\sigma_e = - \frac{2721000}{\left(61 - \frac{15,49}{3}\right) 56,94} = - 856 \text{ kg}.$$

Mit $n = 15$ hätten wir erhalten: $d = 18,36$ cm. Die neutrale Schicht ginge dann durch den Steg, die Druckzone wäre nicht mehr rechteckig und die Berechnung entsprechend Beispiel 82 durchzuführen. Bezüglich der Längs- und Querschubspannungen, sowie der Gleitspannungen siehe Beispiel 87.

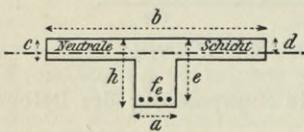


Fig. 202.

Beispiel 79. Doppelt armierter rechteckiger Balken.

Ein Eisenbetonbalken rechteckigen Querschnitts (Fig. 203) von $b = 20$ cm Breite und $h = 36$ cm Höhe enthalte in $e = 33$ cm Abstand von der Druckkante 4 Rundeisen von 1,2 cm Durchmesser und $f_e = 4,52$ qcm Gesamtquerschnitt, in $e' = 3$ cm Abstand von der Druckkante 3 Rundeisen von 0,8 cm Durchmesser und $f'_e = 1,51$ qcm Gesamtquerschnitt. Das größte Biegemoment beträgt $M_x = 120\,000$ cmkg (Fig. 196). Die Lage der neutralen Schicht und die Normalspannungen σ_b , σ_e des Betons und Eisens für den Fall zu berechnen, daß $n = 15$ gesetzt wird.

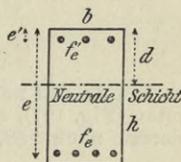


Fig. 203.

Die Entfernung der neutralen Schicht von der äußersten Druckfaser ist nach § 38, 12):

$$d = 15 \frac{4,52 + 1,51}{20} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{40}{15} \frac{33 \cdot 4,52 + 3 \cdot 1,51}{(4,52 + 1,51)^2}} \right) = 11,32 \text{ cm.}$$

Damit folgen aus § 38, 15) mit 14) die größte Beanspruchung pro qcm des Betons:

$$\sigma_b = \frac{11,32}{15} \frac{120\,000}{4,52 \cdot 21,68 \left(33 - \frac{11,32}{3} \right) + 1,51 \cdot 8,32 \left(\frac{11,32}{3} - 3 \right)} = 31,5 \text{ kg,}$$

und aus § 38, 16) die Beanspruchungen pro qcm des Eisens der Zueinlage und Druckeinlage:

$$\sigma_e = - \frac{21,68}{11,32} 15 \cdot 31,5 = -905 \text{ kg,}$$

$$\sigma'_e = \frac{8,32}{11,32} 15 \cdot 31,5 = 347 \text{ kg.}$$

In Beispiel 4 der preußischen Bestimmungen sind unter Berücksichtigung des betonfreien Teils beim Ansatz von S_b , J_b für den vorliegenden Fall ermittelt: $d = 11,35$ cm, $\sigma_b = 31,7$ kg, $\sigma_e = -908$ kg, $\sigma'_e = 350$ kg. Bezüglich der Längs- und Querschubspannungen τ sowie der Gleitspannungen τ_1 siehe Beispiel 88. Berücksichtigung der Zugwiderstände des Betons in den Beispielen 84 und 91.

Beispiel 80. Doppelt armierter rechteckiger Balken. Wechsel von Druck und Zug (positive und negative Biegemomente, Fig. 196, 197).

In den die Träger einer Brückenfahrbahn kontinuierlich verbindenden Betonplatten von 2,16 m Spannweite und 18 cm Höhe (Fig. 204) kommen auf die Breite von 1 m im mittleren Querschnitt 6 Rundeisen von 1,2 cm und 6 Rundeisen von 1 cm Stärke 2 cm von der Unterkante und 6 Rundeisen von 0,7 cm Stärke 2 cm von der Oberkante. Die Grenzwerte des Biegemoments im Querschnitt sind zu 103000 cmkg und $-76\,000$ cmkg ermittelt. Die größten Druckspannungen des Betons in Oberkante und Unterkante und die Grenzspannungen der beiden Eiseneinlagen zu berechnen, wenn $n = 10$ gesetzt wird.

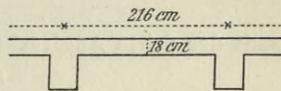


Fig. 204.

Querschnitt der unteren Eiseneinlage $\frac{6\pi}{4} (1,2^2 + 1^2) = 11,50$ qcm,

Querschnitt der oberen Eiseneinlage $\frac{6\pi}{4} 0,7^2 = 2,31$ qcm,

beide gültig für die Breite $b = 100$ cm.

Für das positive Grenzmoment $M_x = 103\,000$ cmkg liegt die Druckzone oben (Fig. 196), so daß $f_e = 11,50$ qcm, $e = 16$ cm, $f'_e = 2,31$ qcm, $e' = 2$ cm und damit nach § 38, 12) die Entfernung der neutralen Schicht von der Oberkante:

$$d = 10 \frac{11,50 + 2,31}{100} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{200}{10} \frac{16 \cdot 11,50 + 2 \cdot 2,31}{(11,50 + 2,31)^2}} \right) = 4,91 \text{ cm.}$$

Weiter folgen nach § 38, 15), 16) mit 13) pro qcm die Beanspruchungen des Betons und Eisens:

$$\sigma_b = \frac{103\,000 \cdot 4,91}{\frac{100}{3} 4,91^3 + 115 \cdot 11,09^2 + 23,1 \cdot 2,91^2} = 27,6 \text{ kg an der Oberkante,}$$

$$\sigma_e = -\frac{11,09}{4,91} 276 = -623 \text{ kg unten,}$$

$$\sigma'_e = \frac{2,91}{4,91} 276 = 164 \text{ kg oben.}$$

Für das negative Grenzmoment $M_x = -26\,000$ cmkg liegt die Druckzone unten (Fig. 197), so daß $f_e = 2,31$ qcm, $e = 16$ cm, $f'_e = 11,50$ qcm, $e' = 2$ cm und hiermit nach § 38, 12) die Entfernung der neutralen Schicht von der Unterkante:

$$a = 10 \frac{2,31 + 11,50}{100} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{200}{10} \frac{16 \cdot 2,31 + 2 \cdot 11,50}{(2,31 + 11,50)^2}} \right) = 2,35 \text{ cm.}$$

Weiter ergeben sich nach § 38, 15), 16) mit 13) pro qcm die Beanspruchungen des Betons und Eisens:

$$\sigma_b = \frac{26\,000 \cdot 2,35}{\frac{100}{3} 2,35^3 + 23,1 \cdot 13,65^2 + 115 \cdot 0,35^2} = 12,9 \text{ kg an der Unterkante,}$$

$$\sigma_e = -\frac{13,65}{2,35} 129 = -749 \text{ kg oben,}$$

$$\sigma'_e = \frac{0,35}{2,35} 129 = 19 \text{ kg unten.}$$

Die größte Beanspruchung des Betons ist also an der Oberkante 27,6 kg, an der Unterkante 12,9 kg pro qcm. Die Beanspruchung der unteren Eiseneinlage schwankt zwischen 623 kg Zug und 19 kg Druck pro qcm, die der oberen Eiseneinlage zwischen 749 kg Zug und 164 kg Druck pro qcm.

Aufgabe 30 und Beispiel 81. Querschnittsbemessung einfach armierter rechteckiger Balken.

Für einen einfach armierten Balken rechteckigen Querschnitts der Breite b sollen der Querschnitt f_e der Eiseneinlage und die Entfernung e letzterer von der äußersten Druckfaser berechnet werden (Fig. 194, 195), wenn das Biegemoment vom Absolutwert M_x und die zulässigen Beanspruchungen pro qcm des Betons auf Druck σ_b und des Eisens auf Zug σ_{ea} gegeben sind (durch Addition von 1,5 bis 2,5 cm zu e erhält man die nötige Balkenhöhe).

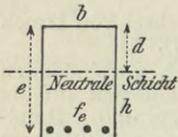


Fig. 205.

Mit $\sigma_e = -\sigma_{ea}$ liefert der erste Ausdruck § 38, 11) die Entfernung der neutralen Schicht von der äußersten Druckfaser:

$$a = \frac{en\sigma_b}{\sigma_{ea} + n\sigma_b}, \tag{1}$$

damit der dritte Ausdruck:

$$f_e = \frac{b\,a\,\sigma_b}{2\,\sigma_{ea}} = \frac{b\,en\,\sigma_b^2}{2\,\sigma_{ea}(\sigma_{ea} + n\sigma_b)}, \tag{2}$$

woraus mit f_e nach dem zweiten Ausdruck § 38, 11):

$$e = \frac{\sigma_{ea} + n\sigma_b}{\sigma_b} \sqrt{\frac{6\,M_x a}{b\,n(3\sigma_{ea} + 2\sigma_b)}}. \tag{3}$$

Diese Gleichungen ergeben beispielsweise für $n = 15$, $\sigma_{ea} = 1100$ kg, $\sigma_b = 45$ kg:

$$e = \frac{1100 + 15 \cdot 45}{45} \sqrt{\frac{6\,M_x a}{b \cdot 15(3 \cdot 1100 + 2 \cdot 45)}} = 0,366 \sqrt{\frac{M_x a}{b}},$$

$$a = \frac{e \cdot 15 \cdot 45}{1100 + 15 \cdot 45} = 0,380 e,$$

$$f_e = \frac{b \cdot 0,380 e \cdot 45}{2 \cdot 1100} = 0,00284 \sqrt{b\,M_x a}$$

und in gleicher Weise:

für $n = 15$ und

σ_b kg/qcm	σ_{ea} kg/qcm	e cm	d cm	f_e qcm
30	800	$0,459 \sqrt{\frac{M_x a}{b}}$	$0,360 e$	$0,00309 \sqrt{b M_x a}$
35	900	$0,420 \sqrt{\frac{M_x a}{b}}$	$0,368 e$	$0,00302 \sqrt{b M_x a}$
40	1000	$0,390 \sqrt{\frac{M_x a}{b}}$	$0,375 e$	$0,00293 \sqrt{b M_x a}$
45	1100	$0,366 \sqrt{\frac{M_x a}{b}}$	$0,380 e$	$0,00284 \sqrt{b M_x a}$
50	1200	$0,345 \sqrt{\frac{M_x a}{b}}$	$0,385 e$	$0,00277 \sqrt{b M_x a}$

worin b in cm, $M_x a$ für die Breite b in cmkg einzusetzen. Eine größere Tabelle solcher Ausdrücke enthalten die Bestimmungen des Preußischen Arbeitsministeriums von 1907 unter III. Selbstverständlich kann man nach Ermittlung von e, d den Eisenquerschnitt f_e auch aus dem ersten Ausdruck 2 oder aus § 38, 11) mit $\sigma_e = -\sigma_{ea}$ erhalten.

Es handle sich beispielsweise um eine frei aufliegende Decke, für welche auf $b = 100$ cm Breite ein Biegemoment $M_x = 144400$ cmkg kommt, während $n = 15$ $\sigma_b = 35$ kg, $\sigma_{ea} = 900$ kg gewählt sind. Dann erhalten wir:

$$e = 0,420 \sqrt{144400} = 15,96 \text{ cm,}$$

$$d = 0,368 \cdot 15,96 = 5,87 \text{ cm,}$$

$$f_e = 0,0302 \sqrt{144400} = 11,4 \text{ qcm,}$$

oder nach 2:

$$f_e = \frac{587 \cdot 35}{2 \cdot 900} = 11,4 \text{ qcm.}$$

Wir geben der Decke eine Stärke von 18 cm und legen auf je 1 m Breite 12 Rundeisen von 1,1 cm Durchmesser ein, womit $f_e = 12 \cdot 3,1416 \cdot 0,55 = 11,4$ qcm.

Beispiel 82. Einfach armierter Plattenbalken. Neutrale Schicht durch den Steg.

Ein frei aufliegender Plattenbalken von $l = 7,5$ m Spannweite und dem in Fig. 206 angedeuteten Querschnitt mit $h = 50$ cm, $a = 30$ cm, $b = 150$ cm und $c = 10$ cm enthalte in Entfernung $e = 47$ cm von der Oberkante 5 Rundeisen von 2,5 cm Stärke. Die neutrale Schicht und die Normalspannungen des Betons und Eisens zu berechnen, wenn die Belastung pro m Spannweite $q = 1300$ kg beträgt und $n = 15$ gesetzt wird (Fig. 194).

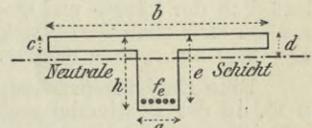


Fig. 206.

Die Bedingung § 38, 3 liefert zur Bestimmung der Entfernung d der neutralen Schicht von der Oberkante:

$$\frac{b d^2}{2} - \frac{(b-a)(d-c)^2}{2} - n f_e (e-d) = 0 \quad \text{oder}$$

$$a d^2 + [2c(b-a) + 2n f_e] - (b-a)c^2 - 2e n f_e = 0. \quad 1$$

Hierin gelten im vorliegenden Falle

$$f_e = 5 \cdot 3,1416 \cdot 1,25^2 = 24,54 \text{ qcm}$$

und die oben gegebenen Zahlen, so daß wir erhalten:

$$30 d^2 + (20 \cdot 120 + 30 \cdot 24,54) d - 120 \cdot 100 - 2 \cdot 47 \cdot 15 \cdot 24,54 = 0,$$

$$d = 13,19 \text{ m.}$$

Weiter haben wir:

$$J_b + n J_e = \frac{b d^3}{3} - \frac{(b-a)(d-c)^3}{3} + n f_e (e-d)^2, \quad 2$$

$$J_b + n J_e = \frac{150 \cdot 13,19^3}{3} - \frac{120 \cdot 3,19^3}{3} + 15 \cdot 24,54 \cdot 33,81^2 = 534320 \text{ cm}^4.$$

Da nun das größte Biegemoment (in der Trägermitte):

$$M_x = \frac{q l^2}{8} = \frac{13 \cdot 750^2}{8} = 914\,062 \text{ cmkg},$$

so ergibt § 38, 5) die Normalspannung pro qcm des Betons mit $v = d$:

$$\sigma_b = \frac{914\,062}{534\,220} \cdot 13,19 = 22,6 \text{ kg},$$

und § 38, 6) die Normalspannung pro qcm des Eisens mit $v = -(e - d)$:

$$\sigma_e = -\frac{914\,062}{534\,220} \cdot 15 \cdot 33,81 = -868 \text{ kg}.$$

Bezüglich der Längs- und Querschubspannungen τ und der Gleitspannungen τ_1 siehe Beispiel 89. Berücksichtigung der Zugwiderstände des Betons in den Beispielen 85 und 92.

Beispiel 83. Einfach armierter rechteckiger Balken. Zugwiderstände des Betons berücksichtigt.

Die in Beispiel 77 verlangte Berechnung für den Fall durchzuführen, daß Zugwiderstände des Betons berücksichtigt werden sollen (Fig. 198).

Entfernung der neutralen Schicht von der Oberkante nach § 38, 17:

$$d = \frac{50 \cdot 20^3 + 15 \cdot 18 \cdot 13,57}{100 \cdot 20 + 15 \cdot 13,57} = 10,74 \text{ m}.$$

Da nun nach § 38, 18):

$$J_b + n J_e = \frac{100}{3} (10,74^3 + 9,26^3) + 15 \cdot 13,57 \cdot 7,26^2 = 78\,490 \text{ cm}^4,$$

so folgen aus § 38, 19), 20) die größten Beanspruchungen pro qcm des Betons und Eisens:

$$\sigma_{bd} = \frac{180\,000 \cdot 10,74}{78\,490} = 24,9 \text{ kg},$$

$$\sigma_{bz} = -\frac{9,26}{10,74} \cdot 24,9 = -21,5 \text{ kg}, \quad \sigma_e = -\frac{7,26}{10,74} \cdot 15 \cdot 24,9 = -252 \text{ kg}.$$

Bezüglich der Längs- und Querschubspannungen siehe Beispiel 90. In Beispiel 77 ergaben sich ohne Berücksichtigung der Zugwiderstände des Betons $d = 6,28 \text{ cm}$, $\sigma_{bd} = 36,0 \text{ kg}$, $\sigma_e = -1008 \text{ kg}$.

Eine Zugbeanspruchung des Betons von 21,5 kg pro qcm wäre z. B. nach §§ 15, 16 der Bestimmungen des Preußischen Arbeitsministeriums von 1907 nur zulässig, wenn die durch Versuche nachgewiesene Zugfestigkeit $21,5 \cdot 1,5 = 32,2 \text{ kg}$ oder die Druckfestigkeit $21,5 \cdot 10 = 215 \text{ kg}$ betrüge. Wenn also nach § 15 jener Bestimmungen „bei Bauten oder Bauteilen, die der Witterung, der Nässe, den Rauchgasen und ähnlichen schädlichen Einflüssen ausgesetzt sind“, die Zugwiderstände des Betons berücksichtigt werden sollen, so wird hierdurch die Anwendung des Eisenbetons für solche Fälle bedeutend erschwert.

Beispiel 84. Doppelt armierter rechteckiger Balken. Zugwiderstände des Betons berücksichtigt.

Die in Beispiel 79 verlangte Berechnung für den Fall durchzuführen, daß Zugwiderstände des Betons berücksichtigt werden sollen (Fig. 200).

Entfernung der neutralen Schicht von der Oberkante nach § 38, 21):

$$d = \frac{10 \cdot 36^3 + 15 (33 \cdot 4,52 + 3 \cdot 1,51)}{20 \cdot 36 + 15 (4,52 + 1,51)} = 18,84 \text{ cm}.$$

Da nun nach § 38, 22):

$$J_b + n J_e = \frac{20}{3} (18,84^3 + 17,16^3) + 15 \cdot 4,52 \cdot 14,16^2 + 15 \cdot 1,51 \cdot 15,84^2 = 98\,622 \text{ cm}^4,$$

so ergeben sich aus § 38, 23), 24) pro qcm die größte Zugbeanspruchung und Druckbeanspruchung des Betons:

$$\sigma_{bd} = -\frac{120\,000 \cdot 18,84}{98\,622} = 22,9 \text{ kg}, \quad \sigma_{bz} = -\frac{17,16}{18,84} 22,9 = -20,7 \text{ kg},$$

und die Beanspruchungen des Eisens der Zugeinlage und Druckeinlage:

$$\sigma_e = -\frac{14,16}{18,84} 15 \cdot 22,9 = -258 \text{ kg}, \quad \sigma'_e = \frac{15,84}{18,84} 15 \cdot 22,9 = 289 \text{ kg}.$$

Bezüglich der Längs- und Querschubspannungen siehe Beispiel 91. In Beispiel 79 ergaben sich ohne Berücksichtigung der Zugwiderstände des Betons $d = 11,32 \text{ cm}$, $\sigma_{bd} = 31,5 \text{ kg}$, $\sigma_e = -905 \text{ kg}$, $\sigma'_e = 347 \text{ kg}$.

Beispiel 85. Einfach armierter Plattenbalken. Zugwiderstände des Betons berücksichtigt.

Die in Beispiel 82 verlangte Berechnung für den Fall durchzuführen, daß die Zugwiderstände des Betons berücksichtigt werden sollen (Fig. 198).

Wenn die neutrale Schicht durch den Steg geht (den anderen Fall s. unten), so liefert § 38, 3) auf Grund von Fig. 206 als Bedingung für die Entfernung der neutralen Schicht von der Oberkante:

$$\frac{b d^2}{2} - \frac{(b-a)(d-c)^2}{2} - \frac{a(h-d)^2}{2} - n f_e (e-d) = 0, \quad \text{woraus}$$

$$d = \frac{1}{2} \frac{(b-a)c^2 + a h^2 + 2 e n f_e}{(b-a)c + a h + n f_e}, \quad 1$$

woneben unmittelbar:

$$J_b + n J_e = \frac{1}{3} [b d^3 - (b-a)(d-c)^3 + a(h-d)^3] + n f_e (e-d)^2. \quad 2$$

Im vorliegenden Falle ergeben sich mit den aus Beispiel 82 bekannten Zahlen:

$$d = \frac{60 \cdot 10^2 + 15 \cdot 50^2 + 47 \cdot 15 \cdot 24,54}{120 \cdot 10 + 30 \cdot 50 + 15 \cdot 24,54} = 19,82 \text{ cm},$$

$$J_b + n J_e = \frac{1}{3} [150 \cdot 19,82^3 - 120 \cdot 9,82^3 + 30 \cdot 30,18^3] + 15 \cdot 24,54 \cdot 27,18^2 = 848\,321 \text{ cm}^4.$$

Da nun das größte Biegemoment $M_x = 914\,062 \text{ cmkg}$, so folgen aus § 38, 5), 6) mit

$$\frac{M_x}{J_b + n J_e} = \frac{914\,062}{848\,321} = 1,0775$$

pro qcm die größte Druckspannung und Zugspannung des Betons:

$$\text{bei } v = d = 19,82 \text{ cm} \quad \sigma_{bd} = 1,0775 \cdot 19,82 = 21,3 \text{ kg},$$

$$\text{,, } v = d - h = -30,18 \text{ ,,} \quad \sigma_{bz} = -1,0775 \cdot 30,18 = -32,5 \text{ ,,}$$

und die größte Normalspannung des Eisens:

$$\text{bei } v = d - e = -27,18 \text{ m} \quad \sigma_e = -1,0775 \cdot 15 \cdot 27,18 = -439 \text{ kg}.$$

Bezüglich der horizontalen und vertikalen Schubspannungen siehe Beispiel 92. In Beispiel 82 ergaben sich ohne Berücksichtigung der Zugwiderstände des Betons $d = 13,19 \text{ cm}$, $\sigma_{bd} = 22,6 \text{ kg}$, $\sigma_e = -868 \text{ kg}$. Vergl. Bemerkung zu Beispiel 83.

Bemerkungen. Bei Ableitung von 1, 2 wurde zunächst vorausgesetzt, daß die neutrale Schicht durch den Steg gehe, wie dies bei Berücksichtigung der Zugspannungen des Betons gewöhnlich der Fall ist. Ginge die neutrale Schicht durch die Platte, so erhielte man auf Grund von Fig. 202:

$$\frac{b d^2}{2} - \frac{(b-a)(c-d)^2}{2} - \frac{a(h-d)^2}{2} - n f_e (e-d) = 0,$$

$$J_b + n J_e = \frac{1}{3} [b d^3 + (b-a)(c-d)^3 + a(h-d)^3] + n f_e (e-d)^2,$$

wonach die Gleichungen 1, 2 gültig bleiben. Für $a = b$ oder $c = h$ führen dieselben natürlich auf die für rechteckige Querschnitte abgeleiteten Formeln § 38, 17), 18).

§ 39. Schubspannungen und Gleitspannungen von Balken beliebig ungleich widerstehenden Materials und von Eisenbetonbalken.

Bezüglich geneigter und schief belasteter Balken bleibt es bei den Beziehungen des § 36. Im folgenden setzen wir wie in § 38 horizontale Balkenträger mit beliebiger vertikaler Belastung voraus, womit in allen Querschnitten die Transversalkraft gleich der Vertikalkraft, $T_x = V_x$, und in den Gleichungen des § 1 $N_x = H = 0$ sind.

Bei horizontalen Balken beliebig ungleich widerstehenden Materials ist nach § 36, 2) die horizontale und vertikale Schubspannung beim Querschnitt x in Entfernung v von der neutralen Schicht (positiv nach oben), wo b die Trägerbreite:

$$\tau = \frac{Z_v}{b E' J'} V_x, \quad 1$$

und hierin, wenn $v = r$ dem obersten Querschnittselement entspricht, nach § 36, 1), 3):

$$Z_v = \int_v^r E v \, dF, \quad E' J' = \int E v^2 \, dF. \quad 2$$

Das erste Integral ist auf den wirksamen Querschnittsteil von v bis r , das zweite auf den ganzen wirksamen Querschnitt zu erstrecken. Wie bei Trägern gleich widerstehenden Materials (§ 9) ist nach 1) τ am größten in der neutralen Schicht, wo $v = 0$, am kleinsten in der obersten und untersten Faser: $\tau = 0$. Sodann nimmt τ vom Punkte $V_x = 0$ aus mit wachsendem V_x , das heißt nach den Stützen hin zu, so daß in praktischen Fällen sein größter Wert stets bei einer Stütze in der neutralen Schicht eintritt. Das in § 9 bezüglich der schiefen Spannungen N, S Gesagte bleibt bestehen.

Für Eisenbetonbalken hat man nach 2):

$$Z_v = E_b (S_{vb} + n S_{ve}), \quad E' J' = E_b (J_b + n J_e), \quad 3$$

unter S_{vb}, S_{ve} die Absolutwerte der statischen Momente des wirksamen Betonquerschnittsteils und Eisenquerschnittsteils von v bis zum obersten oder untersten Querschnittselement in Hinsicht der neutralen Schicht verstanden (vergl. S. 276), während J_b, J_e wie im vorigen Paragraphen die Trägheitsmomente des ganzen wirksamen Betonquerschnitts und Eisenquerschnitts hinsichtlich dieser Schicht bedeuten. Damit liefert 1) die horizontale und vertikale Schubspannung an beliebiger Stelle x, v :

$$\tau = \frac{S_{vb} + n S_{ve}}{J_b + n J_e} \frac{V_x}{b}. \quad 4$$

Wenn bei einfacher oder doppelter Armierung die Zugwiderstände des Betons unberücksichtigt bleiben, so hat man von der neutralen Schicht bis zur Eiseneinlage vom Querschnitt f_e auf der Zugseite in Entfernung e von der äußersten Druckfaser: $S_{vb} = 0, S_{ve} = f_e (e - \bar{d})$, worin \bar{d} die

Höhe der Druckzone bedeutet (Fig. 194—197). Damit liefert 4 für diese gewöhnliche Vernachlässigung die Schubspannungen von der neutralen Schicht bis zur Zugschicht:

$$\tau = \frac{n f_c (e - d)}{J_b + n J_e} \frac{V_x}{b} \quad 5$$

Bezüglich der längs der Eiseneinlagen wirkenden Gleitspannungen (vielfach Haftspannungen genannt) kann auf § 36, S. 277, 278 verwiesen werden.

Die vorstehenden Gleichungen sind leicht unmittelbar zu verwenden (Beispiele 89, 92). Wir wollen sie jedoch wie die entsprechenden des vorigen Paragraphen für zwei einfache Fälle spezialisieren, wobei von den dortigen Bezeichnungen Gebrauch gemacht wird.

Rechteckige Druckzone. Zugwiderstände des Betons vernachlässigt. Bei einfacher Armierung (vom Querschnitt f_c auf der Zugseite in Entfernung e von der Druckkante, Fig. 194, 195) gelten vorstehende Gleichungen mit § 38, 7), 8), 9). Insbesondere folgt aus 5 für die größte Schubspannung τ , welche von der neutralen Schicht bis zur Eiseneinlage wirkt:

$$\tau b = \frac{V_x}{e - \frac{d}{3}}, \quad 6$$

worin d durch § 38, 7) bestimmt. Diese Gleichung ist bekanntlich in den Bestimmungen des Preußischen Arbeitsministeriums von 1907 und andere Vorschriften betreffend Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen angewandt.

Bei doppelter Armierung (Einlagen auf der Zugseite und Druckseite von Querschnitten f_c, f'_c in Entfernungen e, e' von der Druckkante, Fig. 196, 197) bestehen obige Gleichungen mit § 38, 12), 13), 14). Wir erhalten aus 5 für die größte Schubspannung τ , welche wieder von der neutralen Schicht bis zur Eiseneinlage auf der Zugseite wirkt:

$$\tau b = \frac{V_x}{e - \frac{d}{3} + \frac{f'_c}{f_c} \frac{d - e'}{e - d} \left(\frac{d}{3} - e' \right)}. \quad 7$$

Bei der Eiseneinlage auf der Druckseite gilt 4 mit

$$S_{vb} + n S_{ve} = n f'_c (e - d) - \frac{b (d - e')^2}{2},$$

wonach daselbst auch gesetzt werden kann:

$$\tau = \left[1 - \frac{b (d - e')^2}{2 n f'_c (e - d)} \right] \tau_0, \quad 8$$

unter τ_0 hier den durch 7 ausgedrückten Wert in der neutralen Schicht verstanden. In 7, 8 ist d durch § 38, 12) bestimmt.

Rechteckiger Querschnitt. Zugwiderstände des Betons berücksichtigt. Bei einfacher Armierung (vom Querschnitt f_c auf der Zugseite in Entfernung e von der Druckkante, Fig. 198, 199) gilt Gleichung 4 mit § 38, 17) 18). Wir haben weiter darin insbesondere für die neutrale Schicht:

$$S_{vb} + n S_{ve} = \frac{b d^2}{2},$$

und in der Höhe der Eiseneinlage:

$$s_{vb} + n s_{ve} = \frac{b d^2}{2} - \frac{b(e-d)^2}{2} = b e \left(d - \frac{e}{2} \right),$$

womit die horizontalen und vertikalen Schubspannungen:

in der neutralen Schicht $\tau = \frac{d^2}{J_b + n J_e} \frac{V_x}{2},$ 9

bei der Eiseneinlage $\tau = \frac{e(2d-e)}{J_b + n J_e} \frac{V_x}{2}.$ 10

Hierin sind $d, J_b + n J_e$ durch § 38, 17) 18) bestimmt, aber bei Berechnung der Schubspannungen gewöhnlich schon bekannt, so daß gleich ihre Zahlenwerte eingesetzt werden können.

Bei doppelter Armierung (Einlagen auf der Zugseite und Druckseite von Querschnitten f_e, f'_e in Entfernungen e, e' von der Druckkante, Fig. 200, 201), gilt Gleichung 4 mit § 38, 21) 22). Wir haben darin beispielsweise für die neutrale Schicht:

$$s_{vb} + n s_{ve} = \frac{b d^2}{2} + n f'_e (d - e'),$$

in der Höhe der Eiseneinlage auf der Zugseite:

$$s_{vb} + n s_{ve} = b e \left(d - \frac{e}{2} \right) + n f'_e (d - e'),$$

und in der Höhe der Eiseneinlage auf der Druckseite:

$$s_{vb} + n s_{ve} = b e' \left(d - \frac{e'}{2} \right) + n f'_e (d - e'),$$

womit die horizontalen und vertikalen Schubspannungen:

in der neutralen Schicht $\tau = \frac{b d^2 + 2 n f'_e (d - e')}{J_b + n J_e} \frac{V_x}{2 b},$ 11

bei der Zugeinlage $\tau = \frac{b e (2 d - e) + 2 n f'_e (d - e')}{J_b + n J_e} \frac{V_x}{2 b},$ 12

bei der Druckeinlage $\tau = \frac{b e' (2 d - e') + 2 n f'_e (d - e')}{J_b + n J_e} \frac{V_x}{2 b},$ 13

worin $d, J_b + n J_e$ durch § 38, 21) 22) bestimmt.

Für $f'_e = 0$ führen die Formeln 11, 12 natürlich wieder auf 9, 10. Wären zwei Eiseneinlagen gleicher Querschnitte in gleichen Entfernungen von den beiden Breitekanten angeordnet, was jedoch bei Balken nicht leicht vorkommt, so erhielte man aus 11–13 mit $f'_e = f_e, e' = h - e, h = 2 d$:

in der neutralen Schicht $\tau = \frac{b h^2 + 4 n f_e (2 e - h)}{J_b + n J_e} \frac{V_x}{8 b},$ 14

bei den zwei Eiseneinlagen $\tau = \frac{b e (h - e) + n f_e (2 e - h)}{J_b + n J_e} \frac{V_x}{2 b},$ 15

worin $J_b + n J_e$ durch § 38, 25) bestimmt.

Abbiegen von Einlagestäben. Da die Schubspannungen τ bei konstantem Trägerquerschnitt (nach Fläche und Material) gegen die Enden der Öffnungen hin zunehmen, so sind zu große τ am ehesten in der Nähe der Stützen zu erwarten. Zu ihrer Verringerung können besondere Eiseneinlagen verwendet oder vorhandene Einlagestäbe in geeigneter Weise abgebogen werden. Bei gewöhnlichen einfachen Balken (mit beiderseits frei drehbaren Enden) nehmen die Biegemomente gegen die Auflager hin ab, so daß parallel der Stabachse bleibende Eisenstäbe auf der Zugseite nur um die Mitte der Öffnung ihre größten Beanspruchungen erreichen. Es pflegen daher diese Stäbe teilweise nach der Druckseite hin abgebogen und erst dort verankert zu werden (Fig. 207). Nach den Ausdrücken

§ 9, 11), 12) für die schiefen Zugspannungen N hat man für diese in der neutralen Schicht wegen $\sigma = 0$ den Absolutwerten nach:

$$N = \tau, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \infty, \quad \alpha = 45^\circ,$$

sie sind dort gleich den Längs- und Querschubspannungen τ und um 45° gegen die neutrale Schicht geneigt. Bei Vernachlässigung der horizontalen Zugwiderstände des Betons gilt dies bis zu den Eisenstäben auf der Zugseite. Die Abbiegung erfolgt deshalb meist genau oder annähernd unter 45° . Den Beginn des Abbiegens und die Beanspruchungen der abgelenkten Stäbe berechnen manche (z. B. die preußischen Bestimmungen von 1907 in Beispiel 6) aus der Bedingung, daß die Längs- und Querschubspannung τ nicht über die vorgeschriebene Grenze hinausgehen soll, andere (z. B. das S. 257 zitierte Werk von Mörsch S. 148, 169) aus der Bedingung, daß die schiefe Zugspannung $N = \tau$ ganz von jenen Stäben aufgenommen werden soll, wenn sie über eine für Beton festgesetzte Grenze hinausgeht. Das Vorgehen ist am einfachsten an Beispielen zu zeigen (Beispiel 89). Da keine Berechnungsweise theoretisch vollständig befriedigt, so ist die Feststellung um so wichtiger, daß bei den Versuchen von Mörsch und Bach die Tragfähigkeit der Balken durch das Aufbiegen der Eisen erheblich erhöht wurde.

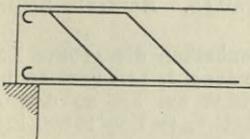


Fig. 207.

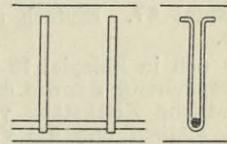


Fig. 208.

Als vorteilhaft haben sich auch die Bügel erwiesen, welche die Einlageisen umfassen und festhalten (Fig. 208). Sie bestehen aus Flacheisen oder Rundeisen von geringer Stärke, sind meist vertikal, oft auch schief (annähernd in den Richtungen der größten Zugspannungen in der neutralen Schicht) und durch Draht mit den Einlagestäben verbunden. Sie können einen Teil der schiefen Spannungen wie der Längs- und Querschubspannungen aufnehmen und überhaupt zur Wirksamkeit des Trägers als Ganzes beitragen. Versuche von Bach ergaben zwar die ersten Risse für Balken mit Bügeln bei geringeren Belastungen als für Balken ohne Bügel, und sie entstanden fast immer an Stellen, wo Bügel einbetoniert waren. Der Gleitwiderstand und die Höchstlast jedoch wurden durch die Bügel bedeutend vergrößert.

Die Enden der Einlagestäbe werden zur Erhöhung der Widerstandsfähigkeit mit Haken versehen. Früher geschah dies einfach durch rechtwinkliges Umbiegen. Bei Versuchen von Bach wurde der Beginn des Gleitens durch solche rechtwinklige Haken nicht erheblich verzögert. Nach Überwindung des Gleitwiderstandes aber verhinderten die Haken das völlige Nachgeben des Balkens solange, bis mit steigender Belastung

die Haken sich aufbogen und eventuell den entgegengewirkenden Beton absprengten. Neuerdings hat Considère Haken nach einem Halbkreis geformt (Fig. 209), die sich bei seinen Versuchen bewährt und seither Eingang gefunden haben.

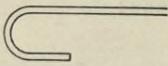


Fig. 209.

Beispiel 86. Einfach armierter rechteckiger Balken.

Für die in Beispiel 77 behandelte Deckenplatte die größte horizontale und vertikale Schubspannung τ sowie die größte Gleitspannung τ_1 zu berechnen, wenn sämtliche Eisenstäbe bis zu den Auflagern horizontal bleiben.

Die größte Vertikalkraft tritt bei den Auflagern ein und hat den Wert:

$$V_x = \frac{q l}{2} = \frac{16 \cdot 300}{2} = 2400 \text{ kg.}$$

Damit liefert § 39, 6) die horizontale und vertikale Schubspannung pro qcm von der neutralen Schicht bis zur Eiseneinlage:

$$\tau = \frac{2400}{100 \left(18 - \frac{6,28}{3} \right)} = 1,51 \text{ kg,}$$

und § 36, 13 die Gleitspannung pro qcm:

$$\tau_1 = \frac{1,51 \cdot 100}{12 \cdot 3,1416 \cdot 1,2} = 3,34 \text{ kg.}$$

Beide liegen unter den zulässigen Werten. Schubspannungen τ bei Berücksichtigung der Zugwiderstände σ des Betons s. Beispiel 90.

Beispiel 87. Einfach armierter Plattenbalken. Neutrale Schicht durch die Platte.

Für den in Beispiel 78 behandelten Plattenbalken die größte Längs- und Querschubspannung τ sowie die größte Gleitspannung τ_1 pro qcm zu berechnen, wenn sämtliche Eisenstäbe vom Umfang $U = 59,69 \text{ cm}$ bis zu den Auflagern horizontal bleiben und die Vertikalkraft daselbst $V_x = V = 19800 \text{ kg}$ beträgt.

Wir erhalten nach § 39, 6) die Längs- und Querschubspannung:

$$\tau = \frac{19800}{216 \left(61 - \frac{15,49}{3} \right)} = 1,64 \text{ kg,}$$

und nach § 36, 13) die Gleitspannung:

$$\tau_1 = \frac{1,64 \cdot 216}{59,69} = 5,93 \text{ kg.}$$

Wenn diese Gleitspannung zu groß wäre (die Bestimmungen des Preußischen Arbeitsministeriums von 1907 beispielsweise lassen Schubspannungen bis $\tau = 4,5 \text{ kg}$ oder $\frac{1}{5}$ der nachgewiesenen Schubfestigkeit und keine größere Gleitspannung τ_1 als die zulässige Schubspannung zu), so könnte entsprechend Beispiel 89 verfahren werden. Obige Werte haben wir mit $n = 10$ erhalten, mit $n = 15$ hätten sich ergeben $\tau = 1,67 \text{ kg}$, $\tau_1 = 6,04 \text{ kg}$. Schubspannungen τ bei Berücksichtigung der Zugwiderstände σ des Betons s. Beispiel 92.

Beispiel 88. Doppelt armierter rechteckiger Balken.

Für den in Beispiel 79 behandelten Balken die horizontalen und vertikalen Schubspannungen τ , sowie die Gleitspannungen τ_1 pro qcm zu berechnen, wenn sämtliche Eisenstäbe bis zu den Auflagern horizontal bleiben und die Vertikalkraft daselbst $V_x = V = 1200 \text{ kg}$ ermittelt ist.

Nach § 39, 7) haben wir die horizontale und vertikale Schubspannung von der neutralen Schicht bis zur Eiseneinlage:

$$\tau = \frac{1}{20} \frac{1200}{33 - \frac{11,32}{3} + \frac{1,51}{4,52} \frac{8,32}{21,68} \left(\frac{11,32}{3} - 3 \right)} = 2,05 \text{ kg,}$$

und nach § 36, 13) die Gleitspannung:

$$\tau_1 = \frac{2,05 \cdot 20}{4 \cdot 3,1416 \cdot 1,2} = 2,72 \text{ kg}.$$

Bei der Eiseneinlage auf der Druckseite ist die Schubspannung nach § 38, 8:

$$\tau = \left(1 - \frac{20 \cdot 8,32^2}{30 \cdot 4,52 \cdot 21,68}\right) 2,05 = 1,08 \text{ kg}.$$

Bezüglich der Gleitspannung daselbst siehe S. 277. Schubspannungen τ bei Berücksichtigung der Zugwiderstände σ des Betons s. Beispiel 91.

Beispiel 89. Einfach armierter Plattenbalken. Neutrale Schicht durch den Steg. Abbiegen von Einlagestäben.

Für den Plattenbalken des Beispiels 82 die größte horizontale und vertikale Schubspannung τ , die größte Gleitspannung τ_1 , sowie eventuell die Beanspruchungen abzubiegender Eisenstäbe zu berechnen.

Der angenommene Plattenbalken von $l = 7,5$ m Spannweite und den Querschnittsdimensionen $h = 50$ cm, $a = 30$ cm, $b = 150$ cm, $c = 10$ cm (Fig. 206) enthält in $e = 47$ cm Entfernung von der Oberkante 5 Rundisen der Stärke 1,2 cm von zusammen $f_e = 24,54$ qcm Querschnitt, wobei sich mit dem gewählten $n = 15$ der Abstand der neutralen Schicht von der Oberkante $d = 13,19$ cm und $J_b + n J_e = 534220$ cm⁴ ergaben. Wir erhalten nun, soweit alle Eisen horizontal bleiben, nach § 39, 5) die horizontale und vertikale Schubspannung pro qcm von der neutralen Schicht bis zur Eiseneinlage:

$$\tau = \frac{15 \cdot 24,54 \cdot 33,81}{534220} \frac{V_x}{30} = \frac{V_x}{1287,5} \quad \text{a}$$

Die größte Vertikalkraft, welche bei den Auflagern eintritt, beträgt im vorliegenden Falle:

$$V_x = V = \frac{q l}{2} = \frac{13 \cdot 750}{2} = 4875 \text{ kg},$$

womit nach a die Schubspannung:

$$\tau = \frac{4875}{1287,5} = 3,79 \text{ kg},$$

und nach § 36, 13) die Gleitspannung:

$$\tau_1 = \frac{3,79 \cdot 30}{5 \cdot 3,14 \cdot 2,5} = 2,90 \text{ kg}.$$

Beide sind zulässig, so daß Abbiegungen nicht erforderlich wären.

Abbiegungen. Um auch die üblichen Verfahren bei Abbiegungen vorzuführen, nehmen wir im folgenden an, die Belastung pro cm Träger sei $q = 18$ kg anstatt wie oben 13 kg. Dann hat man bei den Stützpunkten:

$$V_x = \frac{18 \cdot 750}{2} = 6750 \text{ kg},$$

und damit ohne Abbiegungen nach a:

$$\tau = \frac{6750}{1287,5} = 5,24 \text{ kg},$$

während z. B. nach den preußischen Bestimmungen von 1907 nur 4,5 kg, nach den neuen Schweizerischen Vorschriften von 1909 nur 4 kg gestattet sind.

I. Verfahren wir nun zunächst nach den preußischen Bestimmungen. Bei gleichmäßiger Belastung des ganzen Balkens mit q pro Längeneinheit ist die Vertikalkraft in Entfernung x von den Stützpunkten:

$$V_x = q \left(\frac{l}{2} - x \right). \quad 1$$

Für die Stelle, bei welcher die Grenze $\tau_x = 4,5$ kg erreicht wird, folgt damit aus a:

$$\tau_x = 4,5 = \frac{18(375 - x)}{1287,5}, \quad x = 53 \text{ cm}. \quad \text{b}$$

Erfolgt die Abbiegung unter 45°, so wachsen nach der im vorigen Paragraphen zuerst erwähnten Anschauung die durch die abgeboenen Eisen aufzunehmen.

den Zugspannungen von x nach den Stützen hin von 0 bis $\tau - \tau_x$. Da diese Spannungen für eine Fläche $ax \cos 45^\circ$ aufzunehmen sind (Fig. 210), so kommt auf die abgelenkten Eisen im ganzen die Zugkraft:

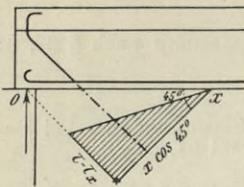


Fig. 210.

$$Z = \frac{\tau - \tau_x}{2} a x \cos 45^\circ = 0,3535 a x (\tau - \tau_x), \quad 2$$

das heißt in unserem Falle:

$$Z = 0,3535 \cdot 30 \cdot 53 (5,24 - 4,5) = 416 \text{ kg.}$$

Es genügt also, das mittlere der fünf Eisen aufzubiegen, welches dann bei 4,91 qcm Querschnitt pro qcm mit

$$\sigma = \frac{416}{4,91} = 85 \text{ kg}$$

beansprucht würde. Damit die Anordnung der Berechnung möglichst entspräche, müßte das Eisen in die strichpunktierte Schwerlinie der in Fig. 210 schraffierten Fläche gelegt werden (Beispiel 6 der preußischen Bestimmungen scheint ihn nach der beigegebenen Figur in ihre Parallele durch x zu legen), was jedoch wie die folgenden analogen Angaben nicht immer in konstruktiv geeigneter Weise durchführbar ist.

Bezüglich der Gleitspannungen ist in den preußischen Bestimmungen so gerechnet, als ob die bis zu den Balkenenden horizontal durchlaufenden Eisen dieselbe Horizontalkraft aufzunehmen hätten, welche ohne Abbiegungen auf sämtliche Eisen gekommen wäre. Dies ergäbe in unserem Falle:

$$\tau_1 = \frac{a \tau}{U} = \frac{30 \cdot 5,24}{4 \cdot 2,5 \cdot 3,14} = 5,01 \text{ kg.}$$

Es entspräche wohl eher der gewählten Anschauung zu setzen:

$$\tau_1 = \frac{a \tau_x}{U} = \frac{30 \cdot 4,5}{4 \cdot 2,5 \cdot 3,14} = 4,30 \text{ kg,}$$

doch ist zu beachten, daß mit dem Abbiegen auch die verwendeten d , $J_b + nJ_e$ nicht mehr gelten. Bei Versuchen von Bach ergab sich genügende Übereinstimmung mit der Wirklichkeit, wenn so gerechnet wurde, als wenn alle Eisen bis zu den Auflagern gerade geblieben wären, wonach wir hätten:

$$\tau_1 = \frac{30 \cdot 5,24}{5 \cdot 2,5 \cdot 3,14} = 4,01 \text{ kg.}$$

Zu beachten kann ferner sein, daß bei wechselnder Verkehrslast der oben nach Beispiel 6 der preußischen Bestimmungen verwendete Ausdruck 1 nicht die größte Vertikalkraft bei x liefert. Diese ist bei gleichmäßig verteilter Eigengewicht und ebensolcher Verkehrslast von g , p pro Längeneinheit Träger:

$$V_x = g \left(\frac{l}{2} - x \right) + \frac{p}{2l} (l - x)^2, \quad 3$$

Hätten wir beispielsweise $g = 8 \text{ kg}$, $p = 10 \text{ kg pro cm}$, so würde damit an Stelle der obigen Bedingung b für x treten:

$$\tau_x = 4,5 = \frac{8(375 - x) + \frac{10}{1500}(750 - x)^2}{1287,5}, \quad x = 54 \text{ cm,} \quad c$$

gegen $x = 53 \text{ cm}$ oben, sodaß im vorliegenden Falle keine erhebliche Änderung entsteht. Da für eine gegebene Grenze τ_x nach a der Grenzwert von V_x :

$$V_x = 1287,5 \tau_x.$$

so läßt sich auf Grund der für die verschiedenen Querschnitte ermittelten Maximalschubkräfte der Punkt x auch bei konzentrierten Lasten leicht bestimmen.

II. Wollte man durch die Abbiegungen erreichen, daß im Beton keine schiefen Zugspannungen von beispielsweise über 2 kg entstehen, so wäre (weil in der neutralen Schicht diese Zugspannung N gleich der Schubspannung τ ist) der Punkt x mit $\tau_x = 2 \text{ kg}$ ganz wie oben zu berechnen. Man erhielte anstatt b:

$$\tau_x = 2 = \frac{18(375 - x)}{1287,5}, \quad x = 232 \text{ cm.}$$

Sollten nun die abgebogenen Stäbe nur die Differenzen $\tau - \tau_x$ der Zugspannungen aufnehmen, was wir für genügend halten, weil ja auch für Querschnitte nach $x = 232$ cm Zugspannungen des Betons bis $\tau_x = 2$ kg zugelassen sind, so würde nach 2 die auf sie kommende Zugkraft:

$$Z = 0,3535 \cdot 30 \cdot 232 (5,24 - 2) = 7972 \text{ kg},$$

also beispielsweise bei zwei abgebogenen Stäben durchschnittlich pro qcm:

$$\sigma = \frac{7972}{4,91 \cdot 2} = 812 \text{ kg}.$$

Damit dieser Durchschnitt möglichst wenig überschritten würde, wären die Stäbe in die strichpunktieren Schwerlinien der in Fig. 211 verschieden schraffierten Flächen gleichen Inhalts zu legen.

Hätten wir für V_x wieder 3 mit $g = 8$ kg, $p = 10$ kg anstatt 1 mit $q = 18$ kg verwendet, so würden sich ergeben haben:

$$\tau_x = 2 = \frac{8(375 - x) + \frac{10}{1500}(750 - x)^2}{1287,5}, \quad x = 256 \text{ cm}.$$

und damit, ganz wie zuletzt vorgehend, $Z = 8796$ kg, $\sigma = 896$ kg.

III. Sollten jedoch die abgebogenen Stäbe nicht nur die Mehrbeträge $\tau - \tau_x$ der schiefen Zugspannungen über beispielsweise $\tau_x = 2$ kg hinaus, sondern (wie bei Mörsch a. a. O. S. 169) die ganzen schiefen Zugspannungen aufnehmen, wenn diese jenen Wert τ_x überschreiten, so hätte man entsprechend Fig. 212 die ganze auf sie kommende Zugkraft:

$$Z = \frac{\tau + \tau_x}{2} a x \cos 45^\circ = 0,3535 a x (\tau + \tau_x) \cdot 4$$

Mit $\tau_x = 2$ kg und dem unter II auf Grund von 1 erhaltenen $x = 232$ cm folgt:

$$Z = 0,3535 \cdot 30 \cdot 232 (5,24 + 2) = 17813 \text{ kg},$$

und bei vier abgebogenen Stäben durchschnittlich pro qcm:

$$\sigma = \frac{17813}{4,91 \cdot 4} = 907 \text{ kg}.$$

Damit dieser Durchschnitt möglichst wenig überschritten und zu diesem Zwecke auch die von der Biegungstheorie vorausgesetzte Symmetrie zur Trägerebene eingehalten würde, wären je zwei äußere Stäbe in die strichpunktieren Schwerlinien der in Fig. 212 verschieden schraffierten Flächen gleichen Inhalts zu legen.

Hätten wir V_x entsprechend bewegter Verkehrslast wie am Schlusse von II nach 3 anstatt nach 1 eingeführt, so würden wir mit dem dort ermittelten $x = 256$ cm, ganz wie soeben vorgehend, erhalten haben: $Z = 19658$ kg, $\sigma = 1000$ kg.

Die von den abgebogenen Stäben aufzunehmenden Zugkräfte Z ergeben sich am kleinsten bei dem Verfahren I, erheblich größer beim Verfahren II, am größten beim Verfahren III. Im vorliegenden Falle waren demgemäß bei den drei Verfahren 1, 2, 4 Stäbe nach oben abzubiegen, während 4, 3, 1 Stäbe horizontal bis zu den Auflagern durchzugehen hatten. — Schubspannungen τ bei Berücksichtigung der Zugwiderstände σ des Betons s. Beispiel 92.

Beispiel 90. Einfach armierter rechteckiger Balken. Zugwiderstände des Betons berücksichtigt.

Für den in den Beispielen 77 und 83 behandelten Balken die horizontalen und vertikalen Schubspannungen τ pro qcm zu berechnen, wenn sämtliche Eisenstäbe bis zu den Auflagern horizontal bleiben und im Gegensatz zu Beispiel 86 die Zugwiderstände des Betons berücksichtigt werden sollen (Fig. 198).

Mit der größten Vertikalkraft

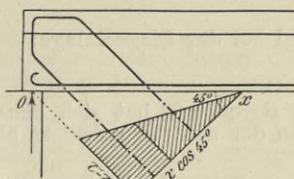


Fig. 211.

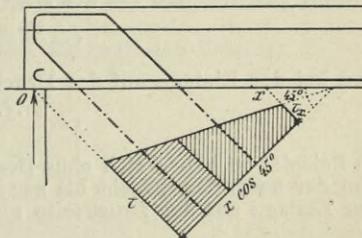


Fig. 212.

$$V_x = V = \frac{q l}{2} = \frac{16 \cdot 300}{2} = 2400 \text{ kg}$$

und den in Beispiel 83 bestimmten d , $J_b + n J_e$ liefern § 39, 9), 10) in der neutralen Schicht:

$$\tau = \frac{10,74^2}{78400} 1200 = 1,76 \text{ kg},$$

und bei der Eiseneinlage:

$$\tau = \frac{18 \cdot 3,48}{78400} 1200 = 0,96 \text{ kg}.$$

In Beispiel 86 hat sich ohne Berücksichtigung der Zugwiderstände des Betons von der neutralen Schicht bis zur Eiseneinlage $\tau = 1,51 \text{ kg}$ ergeben.

Beispiel 91. Doppelt armierter rechteckiger Balken. Zugwiderstände des Betons berücksichtigt.

Für den in den Beispielen 79 und 84 behandelten Balken die horizontalen und vertikalen Schubspannungen τ pro qcm zu berechnen, wenn sämtliche Eisenstäbe bis zu den Auflagern horizontal bleiben, die Vertikalkraft daselbst $V_x = V = 1200 \text{ kg}$ ist, aber im Gegensatze zu Beispiel 88 die Zugwiderstände des Betons berücksichtigt werden sollen (Fig. 200).

Mit den in Beispiel 84 berechneten d , $J_b + n J_e$ und

$$\frac{V_x}{2b} = \frac{1200}{2 \cdot 20} = 30 \text{ kg}, \quad 2 n f_e' (d - e) = 2 \cdot 15 \cdot 1,51 \cdot 15,84 = 717,55 \text{ cm}^2$$

ergeben sich aus § 39, 11)–13) in der neutralen Schicht:

$$\tau = \frac{20 \cdot 18,84^2 + 717,55}{98622} 30 = 2,38 \text{ kg},$$

bei der Eiseneinlage auf der Zugseite:

$$\tau = \frac{20 \cdot 33 \cdot 4,68 + 717,55}{98622} 30 = 1,16 \text{ kg},$$

und bei der Einlage auf der Druckseite:

$$\tau = \frac{20 \cdot 3 \cdot 34,68 + 717,55}{98622} 30 = 0,85 \text{ kg}.$$

In Beispiel 88 haben sich ohne Berücksichtigung der Zugwiderstände des Betons von der neutralen Schicht bis zur Eiseneinlage auf der Zugseite $\tau = 2,05 \text{ kg}$, bei der Einlage auf der Druckseite $\tau = 1,08 \text{ kg}$ ergeben.

Beispiel 92. Einfach armierter Plattenbalken. Zugwiderstände des Betons berücksichtigt.

Für den in den Beispielen 82 und 85 behandelten Plattenbalken die horizontalen und vertikalen Schubspannungen τ bei einem beliebigen Querschnitt x auszudrücken und speziell für den Fall anzugeben, daß alle Einlagestäbe bis zu den Auflagern horizontal bleiben, wenn im Gegensatze zu Beispiel 89 die Zugwiderstände des Betons berücksichtigt werden sollen (Fig. 198).

Wenn die neutrale Schicht durch den Steg geht (den anderen Fall s. unten), dann haben wir in § 39, 4) auf Grund von Fig. 206 bei der neutralen Schicht:

$$S_{vb} + n S_{ve} = \frac{b d^2}{2} - \frac{(b - a)(d - c)^2}{2},$$

und bei der Eiseneinlage:

$$S_{vb} + n S_{ve} = \frac{b d^2}{2} - \frac{(b - a)(d - c)^2}{2} - \frac{a(e - d)^2}{2}.$$

Damit ergeben sich (da in § 39, 4) b die Trägerbreite bei v bedeutet) die horizontale und vertikale Schubspannung bei der neutralen Schicht:

$$\tau = \frac{b d^2 - (b - a)(d - c)^2}{J_b + n J_e} \frac{V_x}{2a} \quad 1$$

oder

$$\tau = \frac{(b - a)(2d - c)e + a d^2}{J_b + n J_e} \frac{V_x}{2a}, \quad 2$$

und bei der Eiseneinlage:

$$\tau = \frac{b d^2 - (b-a)(d-c)^2 - a(e-d)^2}{J_b + n J_e} \frac{V_x}{2a}, \quad 3$$

oder

$$\tau = \frac{(b-a)(2d-c)c + a e (2d-c)}{J_b + n J_e} \frac{V_x}{2a}, \quad 4$$

worin d , $J_b + n J_e$ durch die Gleichungen 1, 2 des Beispiels 85 ausgedrückt sind, aber bei Berechnung der Schubspannungen schon bekannt zu sein pflegen.

Für den vorliegenden Fall liefern 1, 3 mit den in Beispiel 85 erhaltenen Werten bei der neutralen Schicht:

$$\tau = \frac{150 \cdot 19,82^2 - 120 \cdot 9,82^2}{848\,321} \frac{V_x}{60} = \frac{V_x}{1074,9}, \quad a$$

und bei der Eiseneinlage:

$$\tau = \frac{150 \cdot 19,82^2 - 120 \cdot 9,82^2 - 30 \cdot 27,18^2}{848\,321} \frac{V_x}{60} = \frac{V_x}{2020,6}. \quad b$$

Da an den Auflagern nach Beispiel 89 die größte Vertikalkraft $V_x = 4875$ kg, so erhielt man nach vorstehenden Ausdrücken, wenn alle Einlagestäbe bis zu den Auflagern horizontal blieben, die größten Schubspannungen τ bei der neutralen Schicht und der Eiseneinlage:

$$\tau = 4,53 \text{ kg}, \quad \text{bzw.} \quad \tau = 2,41 \text{ kg}.$$

Wenn diese nicht zulässig und Abbiegungen von Einlagestäben anzuordnen wären, könnte auf Grund der jetzt gültigen Ausdrücke a, b wie in Beispiel 89 vorgegangen werden. Dort ergab sich ohne Berücksichtigung der Zugwiderstände des Betons von der neutralen Schicht bis zur Eiseneinlage $\tau = 3,79$ kg.

Bemerkungen. Es würde bei Ableitung von 1 bis 4 zunächst vorausgesetzt, daß die neutrale Schicht durch den Steg geht, wie sich bei Berücksichtigung der Zugwiderstände des Betons gewöhnlich ergibt. Geht sie durch die Platte (Fig. 202), so hat man in § 39, 4) bei der neutralen Schicht:

$$S_{v b} + n S_{v e} = \frac{b d^2}{2},$$

bei Beginn des Stegs:

$$S_{v b} + n S_{v e} = b c \left(d - \frac{c}{2} \right),$$

und bei der Eiseneinlage:

$$S_{v b} + n S_{v e} = \frac{b a^2}{2} - \frac{(b-a)(c-d)^2}{2} - \frac{a(e-d)^2}{2}.$$

Damit erhalten wir die horizontale und vertikale Schubspannung bei der neutralen Schicht:

$$\tau = \frac{d^2}{J_b + n J_e} \frac{V_x}{2}, \quad 5$$

bei Beginn des Stegs (wo sie bei der jetzigen Lage der neutralen Schicht wegen der hier kleineren Trägerbreite am größten ist):

$$\tau = \frac{(2d-c) b c}{J_b + n J_e} \frac{V_x}{2a}, \quad 6$$

während τ bei der Eiseneinlage durch 3, 4 bestimmt bleibt und für d , $J_b + n J_e$ wieder die Ausdrücke 1, 2 des Beispiels 85 gelten. Gleichung 6 besteht auch, wenn die neutrale Schicht durch den Steg geht, bietet aber dann kein Interesse. Für $a = b$ liefern 1 bis 5 selbstverständlich die für den rechteckigen Querschnitt abgeleiteten Formeln § 39, 9), 10).

IV. Abschnitt.

Ableitung statisch unbestimmter Größen.

Weiteres über Bogen verschiedener Arten und Formen.

Es handelt sich in diesem Abschnitte in erster Linie um die Ableitung derjenigen Formeln, auf welche im Eingang zum II. Abschnitt hingewiesen wurde. Die wichtigsten derselben sind bereits bei den betrachteten Trägern angeführt und in bisherigen Beispielen verwendet; doch muß ihre Begründung zur Beurteilung ihrer Zuverlässigkeit und des Gültigkeitsbereichs eingesehen werden können. Andere Beziehungen betreffend die Formänderungen und daraus folgende Größen werden erst jetzt gegeben, weil sie weniger oft zur Verwendung kommen. Im ganzen beschränken wir uns auch hier auf das praktisch Nötige oder zur Aufklärung des Bedürfnisses Dienende. Soweit zweckmäßig, werden wie bisher Aufgaben und Beispiele zur Erläuterung dienen.

§ 40. Kleine Formänderungen im allgemeinen.

Wir haben in § 7 in der Trägerebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem von fester Lage gegen die anfängliche, dem spannungslosen

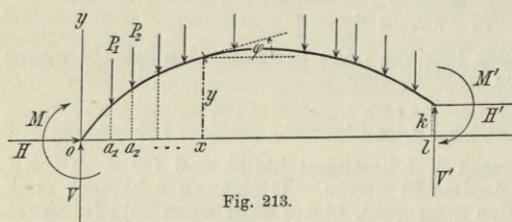


Fig. 213.

Zustande bei normaler Temperatur entsprechende Gruppierung der Stabpunkte angenommen (Fig. 213), und unter den Koordinaten x, y eines Querschnitts die anfänglichen Koordinaten seines in der Stabachse liegenden Schwerpunktes, unter φ

den anfänglichen Winkel der Stabachse bei x mit der positiven Richtung der Abszissenachse verstanden. Die den betrachteten Formänderungen entsprechenden Änderungen von x, y, φ, s wurden durch $\Delta x, \Delta y, \Delta \varphi, \Delta s$ bezeichnet. Nach § 7, 1) 2) hat man für kleine Formänderungen:

$$d \Delta x = - \Delta \varphi dy + \frac{d \Delta s}{ds} dx, \quad 1$$

$$d\Delta y = \Delta\varphi dx + \frac{d\Delta s}{ds} dy, \quad 2$$

worin, wenn die Zunahmen $d\Delta s$, $d\Delta\varphi$ von x bis $x+dx$ nur von den in den §§ 3, 4, 6 betrachteten Spannungen und Temperaturänderungen herrühren, nach § 6, 5), 6):

$$\frac{d\Delta s}{ds} = Y = \alpha\tau - \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right) \frac{1}{EF}, \quad 3$$

$$\frac{d\Delta\varphi}{ds} = Z = \frac{M_x}{EJ} + \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right) \frac{1}{EFr}. \quad 4$$

Die zuletzt erwähnte Voraussetzung trifft in den hier in Betracht kommenden Fällen nur dann nicht zu, wenn sich Zwischengelenke innerhalb einer Spannweite befinden, in welchem Falle die Änderungen $\Delta\varphi$ unmittelbar nach und vor dem Gelenke um einen endlichen Wert $\omega = \Delta\varphi_n - \Delta\varphi_v$ verschieden sein können. Denn selbst wenn die Tangente an die Bogenachse beim Zwischengelenke anfänglich horizontal war, wird sie im allgemeinen nach der Deformation einen endlichen Winkel ω überschlagen (Fig. 214). Wir wollen jedoch diese Ausnahme unten bei Bogen mit drei Gelenken behandeln und setzen zunächst auch die Gleichungen 3, 4 als gültig voraus.

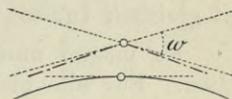


Fig. 214.

Mit Rücksicht auf die Ausdrücke der Differentiale von Produkten

$$d(y\Delta\varphi) = \Delta\varphi dy + y d\Delta\varphi,$$

$$d(x\Delta\varphi) = \Delta\varphi dx + x d\Delta\varphi,$$

und die Bezeichnung 4 können wir in den Gleichungen 1, 2 setzen:

$$\Delta\varphi dy = d(y\Delta\varphi) - y Z ds, \quad 5$$

$$\Delta\varphi dx = d(x\Delta\varphi) - x Z ds, \quad 6$$

womit dieselben bei Beachtung von 3 folgende Formen annehmen:

$$d\Delta x = -d(y\Delta\varphi) + y Z ds + Y dx,$$

$$d\Delta y = d(x\Delta\varphi) - x Z ds + Y dy.$$

Da hierin nach § 3, 1):

$$ds = -r d\varphi, \quad 7$$

so erhalten wir durch Substitution von 3, 4:

$$d\Delta x = -d(y\Delta\varphi) + \frac{M_x}{EJ} y ds - \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right) \frac{dx + y d\varphi}{EF} + \alpha\tau dx, \quad 8$$

$$d\Delta y = d(x\Delta\varphi) - \frac{M_x}{EJ} x ds - \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right) \frac{dy - x d\varphi}{EF} + \alpha\tau dy, \quad 9$$

$$d\Delta\varphi = \frac{M_x}{EJ} ds + \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right) \frac{ds}{EFr}. \quad 10$$

Bei der Integration dieser Gleichungen treten bestimmte Integrale auf, welche wir im allgemeinen wie folgt bezeichnen:

$$X_1 = \int_0^x \frac{M_x}{EJ} y ds, \quad X_2 = \int_0^x \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{dx + y d\varphi}{EF}, \quad 11$$

$$Y_1 = \int_0^x \frac{M_x}{EJ} x ds, \quad Y_2 = \int_0^x \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{dy - x d\varphi}{EF}, \quad 12$$

$$Z_1 = \int_0^x \frac{M_x}{EJ} ds, \quad Z_2 = \int_0^x \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{ds}{EFr}, \quad 13$$

während ihre Werte speziell für $x = l$ in der Folge durch die entsprechenden Buchstaben des großen deutschen Alphabets mit gleichen Indices bezeichnet werden sollen.

Es mögen nun die Voraussetzungen und Bezeichnungen des § 1 gelten. Für alle bisher betrachteten Bogen hat man bei beliebiger Belastung und beliebiger Temperaturänderung das Moment und die Normalkraft im Querschnitt x nach § 1, 3), 9):

$$M_x = M + Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a), \quad 14$$

$$N_x = V_x \sin \varphi + H \cos \varphi, \quad 15$$

worin nach § 1, 4), 2) die Vertikalkraft bei 0 und x :

$$V = \frac{1}{l} \left[M' - M + Hk + \sum_0^l P(l-a) \right], \quad 16$$

$$V_x = V - \sum_0^x P. \quad 17$$

In dem gewöhnlichen Falle gleich hoher Stützpunkte, welche stets in der Stabachse zu denken sind, ist bei $x = l$ die Ordinate $y = k = 0$.

Die Gleichungen 8–10 haben sowohl zur Ableitung der Formänderungen selbst, wie zur Bestimmung derjenigen in 14–17 auftretenden Größen zu dienen, welche nicht aus rein statischen Gleichungen folgen, also beispielsweise bei einfachen Bogen mit zwei Gelenken des Horizontalschubs H , bei einfachen Bogen ohne Gelenke des Horizontalschubs H und der Endmomente M, M' . Die Integrale 11–13 sind jedoch erst ausführbar, wenn die Form der Bogenachse und die Veränderlichkeit des Querschnitts gegeben sind. Damit werden auch jene statisch unbestimmten Größen und durch diese alle Beanspruchungen von der Bogenachse und den Querschnitten des Bogens, sowie nach 8, 9 von der Temperaturänderung und, wie sich zeigen wird, von etwaigen Bewegungen der Stützpunkte abhängig.

Wir ziehen nun die im zweiten Abschnitte betrachteten Bogenarten in Betracht. φ_0, φ_l mögen die Winkel φ für $x = 0$ und $x = l$ bedeuten. E und $\alpha\tau$ sollen für je eine betrachtete Öffnung als gleich gelten.

Öffnungen mit zwei Gelenken.

Für Öffnungen mit Endgelenken allein sind $M = M' = 0$, H aus den Formänderungen zu berechnen. Da der Ursprung der Koordinaten immer im Schwerpunkt eines Endquerschnitts bleibt, also für $x = 0$ $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ sind, so liefern die Gleichungen 8—10 mit 11—13 für beliebige x :

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= -y \Delta \varphi + X_1 - X_2 + \alpha \tau x, \\ \Delta y &= x \Delta \varphi - Y_1 - Y_2 + \alpha \tau y, \\ \Delta \varphi &= \Delta \varphi_0 + Z_1 + Z_2, \end{aligned} \right\} \quad 18$$

wonach für $x = l$ zur Bestimmung von H , $\Delta \varphi_0$, $\Delta \varphi_l$ bei unveränderlicher Lage der Endgelenke:

$$\left. \begin{aligned} \Delta l = 0 &= -k \Delta \varphi_l + \mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2 + \alpha \tau l, \\ \Delta k = 0 &= l \Delta \varphi_l - \mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{Y}_2 + \alpha \tau k, \\ \Delta \varphi_l &= \Delta \varphi_0 + \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2. \end{aligned} \right\} \quad 19$$

Wenn jedoch wie bei den in §§ 22—24 betrachteten Bogen mit Zugstange und kontinuierlichen Bogen, und unbeabsichtigt auch bei gewöhnlichen einfachen Bogen mit Kämpfergelenken, Änderungen Δl von l oder Δk von k eintreten, dann sind in 19 deren Werte an Stelle von 0 zu setzen, was durch die Vorausstellung angedeutet ist. Bei Öffnungen mit gleich hohen Endgelenken genügt wegen $k = 0$ die erste Gleichung 19 allein zur Bestimmung von H , wonach $\Delta \varphi_l$ aus der zweiten und schließlich $\Delta \varphi_0$ aus der dritten folgen. Damit werden auch die Gleichungen 18 für beliebige x verwendbar.

Öffnungen ohne Gelenke.

Für solche sind H , M , M' mit Rücksicht auf die Formänderungen zu bestimmen. Bei unveränderlich fest gespannten Endquerschnitten liefern die Gleichungen 8—10 mit 11—13 für beliebige x :

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= -y \Delta \varphi + X_1 - X_2 + \alpha \tau x, \\ \Delta y &= x \Delta \varphi - Y_1 - Y_2 + \alpha \tau y, \\ \Delta \varphi &= \Delta \varphi_0 + Z_1 + Z_2 \text{ mit } \Delta \varphi_0 = 0, \end{aligned} \right\} \quad 20$$

wonach für $x = l$ zur Bestimmung von H , M , M' :

$$\left. \begin{aligned} \Delta l = 0 &= -k \Delta \varphi_l + \mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2 + \alpha \tau l \text{ mit } \Delta \varphi_l = 0, \\ \Delta k = 0 &= l \Delta \varphi_l - \mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{Y}_2 + \alpha \tau k \text{ „ } \Delta \varphi_l = 0, \\ \Delta \varphi_l = 0 &= \Delta \varphi_0 + \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2 \text{ „ } \Delta \varphi_0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad 21$$

Treten Verrückungen und Verdrehungen der Endquerschnitte, jedoch ohne Abheben von den Kämpfern, ein, so sind die betreffenden Δl , Δk , $\Delta \varphi_0$, $\Delta \varphi_l$ in 21 an die Stelle der 0 zu setzen, was durch den gewählten Ausdruck der Gleichungen angedeutet ist. Da für eine Änderung Δk

der relativen Höhenlage der Stützen ohne andere als die hierdurch bei senkrecht zur Achse bleibenden Querschnitten bedingten Verdrehungen der Endquerschnitte:

$$\Delta \varphi_0 = \Delta \varphi_l = \frac{\Delta k}{l},$$

so fallen dann Δk , $\Delta \varphi_0$, $\Delta \varphi_l$ aus den Gleichungen 21, wonach eine solche Bewegung der Stützen keinen Einfluß auf H , M , M' ausübt. Wohl aber würde Δk allein, d. h. mit $\Delta \varphi_0 = \Delta \varphi_l = 0$, Änderungen von H , M , M' bedingen, wie dies auch stets für Δl gilt. Nach Ermittlung von H , M , M' werden auch die Gleichungen 20 für beliebige x anwendbar.

Öffnungen mit drei Gelenken.

Für Öffnungen mit Endgelenken und einem an beliebiger Stelle $x = m$, $y = f$ der Bogenachse liegenden Zwischengelenke sind $M = M' = 0$, H wegen $M_m = 0$ aus 14, 16 oder § 1, 8) mit $x = m$ statisch bestimmt:

$$H = \frac{1}{lf - mk} \left[(l - m) \sum_0^m Pa + m \sum_m^l P(l - a) \right], \quad 22$$

so daß man auf die Formänderungen nur Rücksicht zu nehmen hat, wenn letztere selbst interessieren. Formel 22 führt für $m = l/2$ auf § 19, 5).

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß bei $x = m$ eine Unstetigkeit der Winkeländerung $\Delta \varphi$ eintreten kann (S. 305). Zwischen 0 und m wie zwischen m und l hat jedoch auch hier $d\Delta \varphi$ den durch 4 ausgedrückten unendlich kleinen Wert. Demgemäß haben wir von $x = 0$ bei $x = m$ ganz wie bei Öffnungen mit zwei Gelenken:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= -y \Delta \varphi + X_1 - X_2 + \alpha \tau x, \\ \Delta y &= x \Delta \varphi - Y_1 - Y_2 + \alpha \tau y, \\ \Delta \varphi &= \Delta \varphi_0 + Z_1 + Z_2, \end{aligned} \right\} \quad 23$$

während zwischen $x = m$ und $x = l$ zunächst nach 1, 2 mit 3, 5, 6 gesetzt werden kann:

$$\begin{aligned} \Delta x &= - \int_0^m [d(y \Delta \varphi) - y Z ds] - \int_m^x [d(y \Delta \varphi) - y Z ds] + \int_0^x Y dx, \\ \Delta y &= \int_0^m [d(x \Delta \varphi) - x Z ds] + \int_m^x [d(x \Delta \varphi) - x Z ds] + \int_0^x Y dy. \end{aligned}$$

wozu nach 4 kommt, wenn $\Delta \varphi_v$, $\Delta \varphi_n$ die Werte von $\Delta \varphi$ unendlich wenig vor und nach m bezeichnen:

$$\Delta \varphi = \Delta \varphi_0 + \int_0^m Z ds + \Delta \varphi_n - \Delta \varphi_v + \int_m^x Z ds.$$

Diese Gleichungen können wir auch wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}\Delta x &= -f \Delta \varphi_v - y \Delta \varphi + f \Delta \varphi_n + \int_0^x y Z ds + \int_0^x Y dx, \\ \Delta y &= m \Delta \varphi_v + x \Delta \varphi - m \Delta \varphi_n - \int_0^x x Z ds + \int_0^x Y dy, \\ \Delta \varphi &= \Delta \varphi_0 + \Delta \varphi_n - \Delta \varphi_v + \int_0^x Z ds,\end{aligned}$$

wonach, wenn

$$\omega = \Delta \varphi_n - \Delta \varphi_v \quad 24$$

den Sprungwert von $\Delta \varphi$ beim Gelenk bedeutet (Fig. 214), nach Einsetzen der Ausdrücke 3, 4 mit den Bezeichnungen 11–13 von $x = m$ bis $x = l$:

$$\left. \begin{aligned}\Delta x &= -y \Delta \varphi + X_1 - X_2 + \alpha \tau x + \omega f, \\ \Delta y &= x \Delta \varphi - Y_1 - Y_2 + \alpha \tau y - \omega m, \\ \Delta \varphi &= \Delta \varphi_0 + Z_1 + Z_2 + \omega,\end{aligned} \right\} \quad 25$$

und speziell für $x = l$ zur Bestimmung von ω , $\Delta \varphi_0$, $\Delta \varphi_l$ bei unveränderlicher Lage der Endgelenke:

$$\left. \begin{aligned}\Delta l = 0 &= -k \Delta \varphi_l + X_1 - X_2 + \alpha \tau l + \omega f, \\ \Delta k = 0 &= l \Delta \varphi_l - Y_1 - Y_2 + \alpha \tau k - \omega m, \\ \Delta \varphi_l &= \Delta \varphi_0 + Z_1 + Z_2 + \omega.\end{aligned} \right\} \quad 26$$

Wenn jedoch Änderungen Δl , Δk von l , k eintreten, dann sind in 26 deren Werte an Stelle von 0 zu setzen, was durch die Vorausstellung angedeutet ist. Die Gleichungen 25, 26 unterscheiden sich von den Gleichungen 18, 19 für Öffnungen ohne Zwischengelenk nur dadurch, daß in letzteren $\omega = 0$ ist. Bei Öffnungen mit gleich hohen Endgelenken genügt wegen $k = 0$ zur Bestimmung von ω die erste Gleichung 26, worauf die zweite $\Delta \varphi_l$ und schließlich die dritte $\Delta \varphi_0$ liefert. Die Gleichungen 23, 25 für beliebige x werden dann ebenfalls verwendbar.

Durch die vorgeführten Beziehungen ist das die Ermittlung der statisch unbestimmten Größen H , M , M' und der Formänderungen betreffende Problem vom Standpunkte der Mechanik aus als gelöst zu betrachten. Die Ausführung der Integrale bietet für den Ingenieur im allgemeinen nur insofern Interesse, als die dabei gemachten Voraussetzungen und zugelassenen Vernachlässigungen die Gültigkeitsgrenzen und Genauigkeit der Resultate beeinflussen. Wir werden im folgenden die praktisch wichtigsten Fälle behandeln. Diese betreffen Halbkreisbogen, Parabel-

bogen und Bogen mit beliebiger Achse. Andere Kreisbogen werden im allgemeinen am zweckmäßigsten nach den Formeln für Bogen mit beliebiger Achse berechnet (siehe jedoch Aufgabe 31 und Beispiel 93).

§ 41. Horizontalschub des symmetrischen Halbkreisbogens mit zwei Gelenken.

Als einfachsten Fall einer Ableitung statisch unbestimmter Größen aus den Gleichungen des vorigen Paragraphen wollen wir zunächst den Horizontalschub H des Halbkreisbogens mit gleich hohen Endgelenken durch beliebige Belastung, eine beliebige gleichmäßige Temperaturänderung τ und eine beliebige kleine Änderung Δl der Spannweite l berechnen. Der Querschnitt werde konstant vorausgesetzt, bei veränderlichem Querschnitt bedeuten F, J Mittelwerte des Querschnitts und Trägheitsmoments. Nach § 40, 19) haben wir zur Bestimmung von H :

$$\Delta l = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \alpha \tau l, \tag{1}$$

worin \bar{x}_1, \bar{x}_2 die durch § 40, 11) ausgedrückten Größen X_1, X_2 für $x=l$ bedeuten, so daß bei konstanten $F, J, E, \alpha \tau$:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_x y \, ds, \tag{2}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{EF} \int_0^l \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) (dx + y \, d\varphi). \tag{3}$$

Hierin gelten für den Halbkreisbogen vom Radius r der Achse (Fig. 215):

$$\begin{aligned} x &= r(1 - \sin \varphi), & y &= r \cos \varphi, \\ dx &= -r \cos \varphi \, d\varphi, & dy &= -r \sin \varphi \, d\varphi, \\ d\varphi &= -\frac{dx}{r \cos \varphi} = -\frac{dx}{y}, & \text{oder} & \quad dx + y \, d\varphi = 0, \end{aligned}$$

womit $\bar{x}_2 = 0$ und

$$y \, ds = -y r \, d\varphi = r \, dx, \tag{4}$$

$$\Delta l = \frac{r}{EJ} \int_0^l M_x \, dx + \alpha \tau l.$$

Da nun für Öffnungen mit Endgelenken wegen $M = M' = 0$ nach § 1, 3) allgemein:

$$M_x = Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a), \tag{5}$$

und bei gleichen Höhen der Gelenke:

$$V = \frac{1}{l} \sum_0^l P(l-a), \tag{6}$$

so folgt durch Integration (s. die Fußnote S. 69):

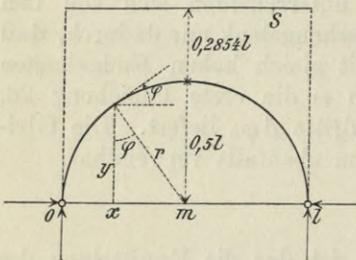


Fig. 215.

$$\begin{aligned} \int_0^l M_x \, dx &= V \frac{l^2}{2} + H r^2 \int_0^l \cos^2 \varphi \, d\varphi - \sum_0^l P \int_a^x (x-a) \, dx \\ &= V \frac{l^2}{2} - H \frac{\pi r^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_0^l P(l-a)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_0^l P a(l-a) - H \frac{\pi r^2}{2}, \end{aligned}$$

und damit nach 4:

$$\Delta l = \frac{r}{2EJ} \left[\sum_0^l P a(l-a) - H \pi r^2 \right] + \alpha \tau l. \tag{7}$$

Hieraus ergibt sich bei Beachtung von $2r=l$ der gesuchte Horizontalschub im allgemeinsten Falle:

$$H = \frac{4}{\pi l^2} \sum_0^l P a(l-a) + \frac{16EJ}{\pi l^3} (\alpha \tau l - \Delta l). \tag{8}$$

Man hat hiernach durch beliebige Belastung allein:

$$H = \frac{4}{\pi l^2} \sum_0^l P a (l - a), \quad 9$$

durch eine beliebige Temperaturänderung τ allein:

$$H = \frac{16 E J}{\pi l^2} \alpha \tau, \quad 10$$

und durch eine Änderung der Spannweite um Δl allein:

$$H = -\frac{16 E J}{\pi l^3} \Delta l. \quad 11$$

Die Gleichung 9 mit Rücksicht auf § 18 liefert beispielsweise für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit

$$H = \frac{2 u}{3 \pi} l, \quad 12$$

und für verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten von u, u' pro Längeneinheit auf der ersten und zweiten Hälfte der Spannweite:

$$H = \frac{u + u'}{3 \pi} l. \quad 13$$

Über die Kämpferdrucklinie s. Aufgabe 2 (S. 12).

Bemerkungen. Für den Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ (Mittelwert c) hat man in dem Falle $2f = l$ wegen $\varepsilon = \beta = 0$ (vergl. § 42) anstatt 12, 13:

$$H = \frac{u}{4} l, \quad H = \frac{u + u'}{8} l,$$

und anstatt 10, 11:

$$H = \frac{15 E c}{2 l^2} \alpha \tau, \quad H = -\frac{15 E c}{2 l^3} \Delta l.$$

Die Formeln für Parabelbogen sind also für Halbkreisbogen nicht verwendbar.

Aufgabe 31. Horizontalschub beliebiger symmetrischer Kreisbogen mit zwei Gelenken durch Temperaturänderungen und Änderungen der Spannweite.

Den von einer Temperaturänderung τ und einer Änderung Δl der Spannweite herrührenden Horizontalschub des Bogens mit kreisförmiger Achse und gleich hohen Endgelenken unter Voraussetzung konstanten Querschnitts zu berechnen (F, J eventuell Mittelwerte).

Es gelten die Gleichungen 1–3 des vorigen Paragraphen. Da hierin für den Einfluß von $\tau, \Delta l$ allein nach § 20, 3), 5) oder § 1, 3), 9):

$$M_x = -H y, \quad N_x = H \cos \varphi,$$

und neben $ds = -r d\varphi$ (S. 16) speziell beim Kreisbogen mit Rücksicht auf Fig. 216:

$$\begin{aligned} x &= r (\sin \varphi_0 - \sin \varphi), & y &= r (\cos \varphi - \cos \varphi_0), \\ dx &= -r \cos \varphi d\varphi, & dx + y d\varphi &= -r \cos \varphi_0 d\varphi, \end{aligned}$$

so erhalten wir:

$$\bar{x}_1 = -\frac{H}{EJ} \int_0^l y^2 ds = \frac{H r^3}{HJ} \int_0^l (\cos \varphi - \cos \varphi_0)^2 d\varphi,$$

und bei Beachtung von $\varphi_l = -\varphi_0$:

$$\bar{x}_1 = \frac{H r^3}{EJ} (3 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - 2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 - \varphi_0).$$

Wegen

$$N_x + \frac{M_x}{r} = H \cos \varphi_0$$

folgt weiter

$$\bar{x}_2 = -\frac{H r}{EF} \cos^2 \varphi_0 \int_0^l d\varphi = \frac{H r}{EF} 2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0.$$

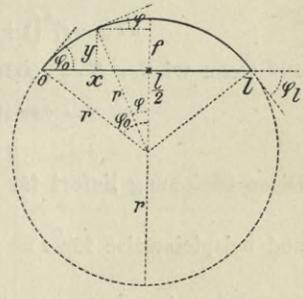


Fig. 216.

Die Substitution der gefundenen \bar{x}_1, \bar{x}_2 in § 41, 1) ergibt:

$$\Delta l = \frac{H r^3}{E J} (3 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - 2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 - \varphi_0) - \frac{H r}{E F} 2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 + \alpha \tau l, \quad 1$$

woraus der gesuchte Horizontalschub:

$$H = \frac{\alpha \tau l - \Delta l}{\varphi_0 - 3 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \left(1 + \frac{J}{F r^2}\right) 2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0} \frac{E J}{r^3}. \quad 2$$

Da hierin nach Fig. 216:

$$2 r \varphi_0 = s, \quad \sin \varphi_0 = \frac{l}{2 r}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{r-f}{r}, \quad 3$$

so können wir auch schreiben:

$$H = \frac{\alpha \tau l - \Delta l}{s r^2 - 3 l r (r-f) + 2 s (r-f)^2 \left(1 + \frac{J}{F r^2}\right)} 2 E J. \quad 4$$

Um den Einfluß von τ oder Δl allein zu erhalten, hat man Δl bzw. τ gleich 0 zu setzen. Bezüglich der Berechnung von s siehe auch Beisp. 28.

Speziell für den Halbkreisbogen wird aus 4 mit $f=r = \frac{l}{2}$:

$$H = \frac{\alpha \tau l - \Delta l}{s r^2} 2 E J = \frac{\alpha \tau l - \Delta l}{\pi l^3} 16 E J \quad 5$$

in Übereinstimmung mit § 41, 8).

Die Ausdrücke des Horizontalschubs durch beliebige Belastung, welche sich für den Kreisbogen ergeben, sind bei genügender Genauigkeit zu umständlich für praktische Zwecke, abgesehen vom Halbkreisbogen (s. § 41), weshalb wir anstatt ihrer eventuell die Formeln für Bogen von beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten verwenden (Beisp. 37, 94, ohne Gelenke 63, 98).

Beispiel 93. Horizontalschub eines Kreisbogens mit zwei Gelenken (Koblenzer Brücke).

Für die in Beisp. 30 betrachteten Bogen der Koblenzer Brücke den Horizontalschub durch Temperaturänderungen und kleine Änderungen der Spannweite nach den Formeln für Kreisbogen konstanten Querschnitts mit Kämpfergelenken zu berechnen. Mittelwerte des Querschnitts und Trägheitsmoments $F = 0,16910 \text{ qm}$, $J = 0,37344 \text{ m}^4$.

Nach Gleichung 4 der vorigen Aufgabe hat man:

$$H = \frac{\alpha \tau l - \Delta l}{s r^2 - 3 l r (r-f) + 2 s (r-f)^2 \left(1 + \frac{J}{F r^2}\right)} 2 E J, \quad 1$$

worin mit $l = 98,0775 \text{ m}$, $f = 8,91614 \text{ m}$, $r = 139,314 \text{ m}$, $s = 100,225 \text{ m}$ (Beisp. 28):

$$s r^2 = 100,225 \cdot 139,314^2 = 1945206,$$

$$2 l r (r-f) = 2 \cdot 98,0775 \cdot 139,314 \cdot 130,398 = 5345106,$$

$$\frac{J}{F r^2} = \frac{0,37344}{0,1691 \cdot 139,314^2} = 0,000114,$$

$$2 s (r-f)^2 \left(1 + \frac{J}{F r^2}\right) = 2 \cdot 100,225 \cdot 130,398^2 \cdot 1,000114 = 3408855,$$

und wenn wieder $E = 2000000 \text{ kg pro qcm}$, $x = 0,000012$ gesetzt werden:

$$H = (0,000012 \cdot 98,0775 \tau - \Delta l) \frac{2 \cdot 2000000 \cdot 100^2 \cdot 0,37344}{8860},$$

$$H = (0,0011769 \tau - \Delta l) 1685960 \text{ kg}.$$

Diese Gleichung liefert für eine Temperaturänderung τ allein:

$$H = 1984,21 \tau \text{ kg},$$

und beispielsweise für $\tau = \pm 30^0$:

$$H = \pm 59526 \text{ kg};$$

ferner für eine Änderung der Spannweite um Δl allein:

$$H = -1685960 \Delta l \text{ kg,}$$

und beispielsweise für $\Delta l = 0,02 \text{ m}$:

$$H = -33719 \text{ kg.}$$

Vergl. Bemerk. zu Beisp. 30, S. 128.

Hätten wir $\frac{J}{Fv^2} = 0,000114$ gegen 1 vernachlässigt (Einfluß vom \bar{x}_2 in Aufgabe 31), so würde sich

$$H = (0,0011769 \tau - \Delta l) 1763173 \text{ kg}$$

oder 4,58 % größer als oben gefunden haben. Dieser verhältnismäßig große Einfluß eines so kleinen Gliedes zeigt, daß bei Anwendung von 1 Genauigkeit erforderlich ist. Bezüglich parabolischer Achse s. Beisp. 30 (S. 128).

§ 42. Horizontalschub des symmetrischen Parabelbogens mit zwei Gelenken.

Nach § 40, 18) haben wir die Änderung der Abszisse eines beliebigen Querschnitts x :

$$\Delta x = -y \Delta \varphi + X_1 - X_2 + \alpha \tau x, \quad 1$$

worin nach § 40, 11) wenn $dx = ds \cos \varphi$ berücksichtigt und ein konstanter Mittelwert

$$c = J \cos \varphi \quad 2$$

eingeführt wird:

$$X_1 = \frac{1}{Ec} \int_0^x M_x y dx. \quad 3$$

Handelt es sich nun um einen zur Trägermitte symmetrischen Parabelbogen von der Spannweite l und dem Pfeile f mit gleich hohen Endgelenken, so hat man:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x). \quad 4$$

Mit diesem Werte und dem allgemeinen Ausdrucke des Momentes bei x ,

$$M_x = M + Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a), \quad 5$$

liefert die Integration von $\hat{3}^1$:

$$X_1 = \frac{f}{3Ec l^2} \left[2 M x^2 (3l - 2x) + V x^3 (4l - 3x) - H \frac{8f}{5 l^2} x^3 (10 l^2 - 15 l x + 6 x^2) - \sum_0^x P(x-a)^2 (4 l x - 3 x^2 + 2 l a - 2 x a - a^2) \right], \quad 6$$

und für Öffnungen mit Endgelenken in gleicher Höhe wegen

$$M = 0, \quad V = \frac{1}{l} \sum_0^l P(l-a), \quad 7$$

speziell bei $x = l$, wo wie in § 40 die Werte von X mit deutschen Buchstaben bezeichnet werden:

$$\bar{x}_1 = -H \frac{8 l f^2}{15 Ec} + \frac{f}{3 Ec l^2} \sum_0^l P a (l-a) (l^2 + l a - a^2). \quad 8$$

Bei Ausführung des Integrals

$$X_2 = \int_0^x \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{dx + y d\varphi}{EF},$$

welches häufig vernachlässigt wird, gestatten wir uns anstatt des Parabelbogens einen Kreisbogen von gleichen l, f (Fig. 217), also dem Radius

$$r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} \quad 9$$

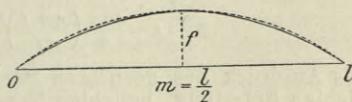


Fig. 217.

¹ Bezüglich der Integration von Summen Σ siehe Luegers Lexikon der gesamten Technik, Bd. 1, Artikel Belastung der Träger, oder die in der Fußnote S. 69 erwähnten Schriften.

zugrunde zu legen. Dies ist um so mehr berechtigt, als in jenem Ausdrucke der Beitrag von N_x bei weitem überwiegt, gerade N_x aber durch die Vertauschung, selbst bei steilen Bogen ohne Gelenke, nur wenig beeinflusst wird (vergl. z. B. Bemerk. zu Beisp. 45, S. 168). Da für den Kreisbogen (Fig. 216)

$$\begin{aligned} x &= r (\sin \varphi_0 - \sin \varphi), & y &= r (\cos \varphi - \cos \varphi_0), \\ \sin \varphi &= \frac{l - 2x}{2r}, & \cos \varphi &= \frac{r - f + y}{r}, \end{aligned}$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned} dx &= -r \cos \varphi d\varphi, \\ dx + y d\varphi &= -r \cos \varphi_0 d\varphi = \cos \varphi_0 ds = \frac{r-f}{r} ds, \end{aligned}$$

und wenn wieder $dx = ds \cos \varphi$ gesetzt und ein konstanter Mittelwert

$$k = F \cos \varphi \tag{10}$$

eingeführt wird:

$$X_2 = \frac{r-f}{Ekr} \int_0^x \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) dx, \tag{11}$$

worin nun r den durch 9 bestimmten konstanten Wert hat. Da nach § 1, 9), 2) in unserm Falle

$$N_x = V_x \sin \varphi + H \cos \varphi = \left(V - \frac{x}{0} P \right) \frac{l-2x}{2r} + H \frac{r-f+y}{r},$$

so folgt:

$$\int_0^x N_x dx = \frac{V}{2r} (lx - x^2) - \frac{1}{2r} \sum_0^x P(x-a) (l-x-a) + \frac{r-f}{r} Hx + \frac{H}{r} \int_0^x y dx,$$

während mit 5:

$$\int_0^x M_x dx = Mx + V \frac{x^2}{2} - H \int_0^x y dx - \frac{1}{2} \sum_0^x P(x-a)^2.$$

Wir erhalten demnach aus 11 allgemein:

$$X_2 = \frac{r-f}{2Ekr^2} \left[2Mx + Vlx + 2Hx(r-f) - \sum_0^x P(x-a)(l-2a) \right], \tag{12}$$

und für Öffnungen mit Endgelenken wegen 7 speziell bei $x=l$:

$$\bar{x}_2 = \frac{r-f}{Ekr^2} \left[Hl(r-f) + \sum_0^l Pa(l-a) \right]. \tag{13}$$

Nach Gleichung 1 hat man für $x=l$ wegen $y=0$:

$$\Delta l = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \alpha \tau l, \tag{14}$$

worin bei unveränderlicher Spannweite (Horizontalentfernung der Endgelenke) $\Delta l = 0$ wäre. Werden die Ausdrücke 8, 13 eingesetzt, so folgt für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi = c$:

$$\begin{aligned} \Delta l = -H \frac{8lf^2}{15Ec} \left[1 + \frac{15c}{8k} \left(\frac{r-f}{rf} \right)^2 \right] + \frac{f}{3Ec l^2} \sum_0^l Pa(l-a)(l^2 + la - a^2) - \\ - \frac{r-f}{Ekr^2} \sum_0^l Pa(l-a) + \alpha \tau l. \end{aligned} \tag{15}$$

Hieraus ergibt sich mit den abkürzenden Bezeichnungen:

$$\gamma = \frac{c}{k} = \frac{J \cos \varphi}{F \cos \varphi}, \tag{16}$$

$$\varepsilon = \frac{15\gamma}{8} \left(\frac{r-f}{rf} \right)^2, \quad \beta = \frac{3\gamma}{f} \frac{r-f}{r^2}, \tag{17}$$

als Ausdruck des gesuchten Horizontalschubes im allgemeinsten Falle (für beliebige Belastung, beliebige Temperaturänderung τ und beliebige kleine Änderung Δl der Spannweite):

$$H = \frac{5}{(1+\varepsilon) 8fl^3} \sum_0^l Pa(l-a)(l^2 + la - a^2 - \beta l^2) + \frac{15Ec}{(1+\varepsilon) 8f^2} \left(\alpha \tau - \frac{\Delta l}{l} \right). \tag{18}$$

Für γ nach 16 kann man entweder wie bei der obigen Ableitung von $\frac{H}{F}$ den Quotienten der Mittelwerte von c und k oder aber den Mittelwert von $\frac{J}{F}$ verwenden, da wir in 11 auch

$$\frac{dx}{F \cos \varphi} = \frac{J}{F} \frac{dx}{J \cos \varphi}$$

setzen und neben dem Mittelwert $c = J \cos \varphi$ einen zweiten, $\gamma = \frac{J}{F}$, einführen durften. Theoretisch erscheint die erste Annahme deshalb etwas genauer, weil mit ihr in X_2 nur ein Mittelwert zur Verwendung kommt. In praktischen Fällen führen beide Annahmen im allgemeinen zu kaum voneinander abweichenden Resultaten. So erhielten wir für die Öffnungen I–V der im VI. Abschnitt betrachteten Cannstatter Neckarbrücke nach der ersten bzw. zweiten Annahme (vergl. VI B):

1363,86	1504,42	1637,92	1504,74	1365,06,
1365,28	1504,31	1637,25	1504,31	1365,28.

§ 43. Bemerkungen zu den Formeln des § 42.

Die in den Gleichungen des vorigen Paragraphen auftretenden Größen ε , β sind mit γ nach § 42, 16) und r nach § 42, 9), wie folgt, ausgedrückt:

$$\varepsilon = \frac{15 \gamma}{8} \left(\frac{r-f}{r f} \right)^2 = \frac{15 \gamma}{8 f^2} \left(\frac{l^2 - 4 f^2}{l^2 + 4 f^2} \right)^2, \quad 1$$

$$\beta = 3 \gamma \frac{r-f}{f r^2} = 24 \gamma \frac{l^2 - 4 f^2}{(l^2 + 4 f^2)^2}, \quad 2$$

wonach dieselben in der Beziehung stehen:

$$\frac{\beta}{\varepsilon} = \frac{8}{5} \frac{f}{r-f} = \frac{64}{5} \frac{f^2}{l^2 - 4 f^2}. \quad 3$$

Bei den Formänderungen und Parabelbogen ohne Gelenk kommt hinzu:

$$\zeta = \frac{\gamma}{r^2} = \gamma \left(\frac{8 f}{l^2 + 4 f^2} \right)^2. \quad 4$$

Es fragt sich, welche dieser Größen vernachlässigt werden können. Da für $f=0$ mit $r = \infty$, $\cos \varphi = 1$, $\gamma = \frac{J}{F}$:

$$\varepsilon = \frac{15 J}{8 F} \infty^2, \quad \beta = \frac{24 J}{F l^2}, \quad \zeta = \frac{64 J}{F l^2} 0^2,$$

so ist klar, daß ε nicht bis zu beliebig flachen Bogen unberücksichtigt bleiben darf. Zur weiteren Beurteilung müssen praktische Fälle herangezogen werden. Für die ältere Koblenzer Brücke von $l = 98,0775 \text{ m} = 11 f$ hat man (Beisp. 30, S. 128):

$$\varepsilon = 0,045633, \quad \beta = 0,004992, \quad \zeta = 0,000114,$$

und für die im VI. Abschnitt behandelte Neckarbrücke zwischen Stuttgart und Cannstatt (vergl. VI B, M):

in Öffnung	I	II	III	IV	V
mit	$l = 45,51$	48	50,48	48	45,51 m
und	$f = 4,375$	4,735	4,855	4,505	3,695 m
	$\varepsilon = 0,011523$	0,010767	0,010464	0,012063	0,016870
	$\beta = 0,001415$	0,001395	0,001287	0,001411	0,001462
	$\zeta = 0,000036$	0,000038	0,000033	0,000034	0,000026.

Hiernach kann ζ wohl in allen praktischen Fällen und β meist ebenfalls vernachlässigt werden, während ε im allgemeinen zu berücksichtigen ist. In letzterer Hinsicht kommt in Betracht, daß eine geringe Änderung des Horizontalschubs wesentliche Änderungen der Momente und Beanspruchungen hervorbringen kann (vergl. Beisp. 45 u. Bemerk. zu Beisp. 42). Für H selbst würden z. B. bei der Koblenzer Brücke durch Vernachlässigung von ε Differenzen von etwa 4,56% (Beispiel 30), ohne Vorhandensein der Kämpfergelenke aber solche von 27,38% entstehen (Bemerk. zu Beisp. 42). Für die Momente und Normalspannungen könnten noch größere Abweichungen eintreten (Beisp. 45 und Bemerk. zu Beisp. 42).

Die Unzulässigkeit einer allgemeinen Vernachlässigung von ε zeigt sich auch in den Konsequenzen derselben. So würde danach bei Belastung der ganzen Spannweite durch eine beliebig große gleichmäßig verteilte Last keine Einsenkung e entstehen (§§ 19, 20, 21 und Aufgabe 15), während doch z. B. für $f=0$ bei Bogen mit zwei Gelenken und ohne Gelenk dieselben Einsenkungen entstehen müssen, wie bei Balken mit beiderseits frei drehbaren und beiderseits festgespannten Enden, da für $f=0$ ein Horizontalschub keinen Einfluß auf die Einsenkungen haben könnte. Nebenbei ergibt die Annahme $\varepsilon=0$ im Falle $f=0$ für Bogen mit zwei Gelenken und ohne Gelenk $H=\infty$ anstatt $H=0$, womit bei letzteren auch ganz unrichtige M, M' verbunden sind (vergl. S. 144).

Man könnte es auffallend finden, daß im allgemeinen zwar β , aber nicht ε vernachlässigt werden soll, während doch nach 3

$$\text{für } \frac{f}{r} > \frac{5}{13} \qquad \beta > \varepsilon$$

ist. Allein bei so steilen Bogen ergibt sich nicht etwa β so groß, daß es wie ε berücksichtigt werden muß, sondern umgekehrt ε so klein, daß es wie β vernachlässigt werden kann. Für die Bogen der Dourobrücke (S. 136) von $l=160$ m, $f=42,65$ m beispielsweise hat man (Beisp. 95):

$$\alpha = 0,004287, \qquad \beta = 0,005447, \qquad \zeta = 0,001442,$$

während für $f=r$ nach I und 2 ε und β gleich 0 werden. Übrigens würden wir für den Bogen der Dourobrücke die Formeln für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ nicht zur Verwendung bringen (vergl. Beisp. 95).

Die Annahme eines konstanten (mittleren) $J \cos \varphi$ bei der Berechnung statisch unbestimmter Größen parabolischer Bogenträger entspricht der Annahme eines konstanten J bei Ermittlung entsprechender Größen von Balkenträgern, sie erscheint oft berechtigter als diese. Während der Verfasser durch vergleichende Berechnungen nachweisen konnte¹, daß bei einem kontinuierlichen Balken von den Öffnungen 52, 65, 65, 52 m und einer Veränderlichkeit von J zwischen 1 und 2,17 die Annahme eines konstanten J bei den Vertikalkräften V_x kaum merkliche, bei den Momenten M_x im allgemeinen unter 3% bleibende Abweichungen ergab (jedoch an einer Stelle 6%), schwankt $J \cos \varphi$ z. B. bei der älteren Koblenzer Brücke zwischen 1 und 1,19, bei der obenerwähnten Neckarbrücke in der ungünstigsten Öffnung zwischen 1 und 1,50, die M_x aber sind bei Bogen weit kleiner als bei Balken unter sonst gleichen Verhältnissen.

Es gibt jedoch Fälle, in welchen die Annahme eines konstanten $J \cos \varphi$ nicht ohne weiteres zulässig ist. Hierher gehören insbesondere die steilen Sichelbogen nach Art des Bogens der Dourobrücke (S. 136), wie sie in neuerer Zeit mehrfach ausgeführt wurden. Bei diesen nehmen von den Kämpfern bis zum Scheitel gleichzeitig J und $\cos \varphi$ sehr bedeutend zu, sodaß z. B. beim Dourobogen in den Feldermitten J zwischen 1 und 19,09, $J \cos \varphi$ sogar zwischen 1 und 27,62 schwankt (Beisp. 94, 95). Mit Rücksicht auf solche Fälle und auf nicht parabolische Bogenachse sind in §§ 46, 47 auch Formeln für symmetrische Zweigelenkbogen von beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten abgeleitet (Vergleich der Resultate mit denjenigen für den Parabelbogen s. Beisp. 95, 97). Übrigens ist für die gewöhnlichen flachen Brückenbogen die Parabelform meist auch abgesehen von der einfachen Berechnung zu empfehlen, weil für sie bei gleichmäßig auf die ganze Spannweite verteilter Last (annähernd für Eigengewicht allein und Vollbelastung) die günstigsten Beanspruchungen erreicht werden können (vergl. Aufg. 17 und Abschnitt VI unter E).

§ 44. Horizontalschub und Endmomente des symmetrischen Parabelbogens ohne Gelenke.

Wir betrachten symmetrische Bogen ohne Gelenke von parabolischer Achse der Gleichung

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) \qquad 1$$

¹Weyrauch, Allgemeine Theorie und Berechnung der kontinuierlichen und einfachen Träger, Leipzig 1873, S. 129.

unter den in § 42 gemachten Voraussetzungen. Demgemäß wird ein konstanter Mittelwert

$$c = J \cos \varphi \quad 2$$

eingeführt, und bei Ausführung der durch § 40, 11)–13) ausgedrückten, gewöhnlich vernachlässigten Integrale X_2 , Y_2 , Z_2 neben einem Mittelwert

$$k = F \cos \varphi \quad 3$$

anstatt des Parabelbogens ein Kreisbogen von gleichen l , f wie der Parabelbogen, also dem Radius

$$r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} \quad 4$$

zugrunde gelegt. Über die Zulässigkeit dieses Vorgehens s. S. 313, 316.

Die Werte der Integrale X_1 , X_2 in den Gleichungen § 40, 20) für die Formänderungen von Bogen ohne Gelenke wurden bereits in § 42 unter vorstehenden Voraussetzungen abgeleitet. Die betreffenden Ausdrücke § 42, 6), 12) liefern im vorliegenden Falle mit dem durch § 21, 1) bestimmten

$$V = \frac{1}{l} \left[M' - M + \sum_0^l P(l-a) \right], \quad 5$$

speziell für $x = l$:

$$\bar{x}_1 = \frac{fl}{3Ec} \left[M + M' - H \frac{8f}{5} + \frac{1}{l^3} \sum_0^l P a (l-a) (l^2 + la - a^2) \right], \quad 6$$

$$\bar{x}_2 = \frac{(r-f)l}{2Ekr^2} \left[M + M' + 2H(r-f) + \frac{2}{l} \sum_0^l P a (l-a) \right]. \quad 7$$

Jetzt werden auch die übrigen Integrale § 40, 11)–13) nötig. Für die Ermittlung von H , M , M' würde es allerdings genügen, diese Integrale speziell für $x = l$ abzuleiten, da wir jedoch zur Berechnung der Formänderungen ihre Werte auch für andere x brauchen, so sollen die Ausdrücke, wie im vorigen Paragraphen, zunächst allgemein gegeben werden.

Nach § 40, 12), 13) haben wir mit Rücksicht auf $dx = ds \cos \varphi$ bei Einführung des Mittelwerts 2:

$$Y_1 = \frac{1}{Ec} \int_0^x M_x x dx, \quad Z_1 = \frac{1}{Ec} \int_0^x M_x dx. \quad 8$$

Diese Gleichungen liefern mit

$$M_x = M + Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a), \quad 9$$

und 1 für beliebige x :

$$Y_1 = \frac{1}{6Ec} \left[3Mx^2 + 2Vx^3 - H \frac{2f}{l^2} x^3 (4l - 3x) - \sum_0^x P(x-a)^2 (2x+a) \right], \quad 10$$

$$Z_1 = \frac{1}{2Ec} \left[2Mx + Vx^2 - H \frac{4f}{3l^2} x^2 (3l - 2x) - \sum_0^x P(x-a)^2 \right], \quad 11$$

wonach für $x = l$:

$$\eta_1 = \frac{l^2}{6Ec} \left[M + 2M' - 2Hf + \frac{1}{l^2} \sum_0^l P a (l-a) (l+a) \right], \quad 12$$

$$\zeta_1 = \frac{l}{2Ec} \left[M + M' - H \frac{4f}{3} + \frac{1}{l} \sum_0^l P a (l-a) \right]. \quad 13$$

Wird in § 40, 12), 13) dem Kreisbogen vom Radius 4 entsprechend gesetzt (vergl. § 42, S. 314):

$$dy - x d\varphi = -r \sin \varphi_0 d\varphi = \sin \varphi_0 ds = \frac{l}{2r} ds,$$

auch $dx = ds \cos \varphi$ berücksichtigt, und der Mittelwert 3 eingeführt, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} Y_2 &= \frac{l}{2Ekr} \int_0^x \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) dx, \\ Z_2 &= \frac{1}{Ekr} \int_0^x \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) dx, \end{aligned} \right\} \quad 14$$

oder wegen § 42, 11):

$$Y_2 = \frac{l}{2} \frac{X_2}{r-f}, \quad Z_2 = \frac{X_2}{r-f}, \quad 15$$

das heißt zufolge § 42, 12) für beliebige x :

$$Y_2 = \frac{l}{4 E k r^2} \left[2 M x + V l x + 2 H x (r-f) - \sum_0^x P (x-a) (l-2a) \right], \quad 16$$

$$Z_2 = \frac{1}{2 E k r^2} \left[2 M x + V l x + 2 H x (r-f) - \sum_0^x P (x-a) (l-2a) \right], \quad 17$$

und speziell für $x = l$ nach Einsetzen von 5 oder einfacher nach 15 mit 7:

$$\mathfrak{Y}_2 = \frac{l^2}{4 E k r^2} \left[M + M' + 2 H (r-f) + \frac{2}{l} \sum_0^l P a (l-a) \right], \quad 18$$

$$\mathfrak{Z}_2 = \frac{l}{2 E k r^2} \left[M + M' + 2 H (r-f) + \frac{2}{l} \sum_0^l P a (l-a) \right]. \quad 19$$

Nach § 40, 21) hat man für Öffnungen ohne Gelenke, wenn $k = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \Delta l &= \alpha \tau l + \mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2, \\ \Delta k &= l \Delta \varphi_l - \mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{Y}_2, \\ \Delta \varphi_l &= \Delta \varphi_0 + \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2, \end{aligned} \right\} \quad 20$$

worin bei unveränderlich festliegenden Endquerschnitten Δl , Δk , $\Delta \varphi_0$, $\Delta \varphi_l$ gleich Null wären. Durch Substitution der Ausdrücke 6, 7, 12, 13, 18, 19 mit den Bezeichnungen § 43, 1), 2), 4) nehmen die Gleichungen 20 folgende Formen an:

$$\Delta l = \alpha \tau l + (M + M') \left(1 - \frac{\beta}{2} \right) \frac{l f}{3 E c} - H (1 + \varepsilon) \frac{8 l f^2}{15 E c} + \frac{f}{3 E c l^2} \sum_0^l P a (l-a) (l^2 + l a - a^2 - \beta l^2), \quad 21$$

$$\Delta k = l \Delta \varphi_l - M \left(1 + \frac{3 \zeta}{2} \right) \frac{l^2}{6 E c} - M' \left(1 + \frac{3 \zeta}{4} \right) \frac{l^2}{3 E c} + H \left(1 - \frac{\beta}{2} \right) \frac{f l^2}{3 E c} - \frac{1}{6 E c} \sum_0^l P a (l-a) (l + a + 3 \zeta l), \quad 22$$

$$\Delta \varphi_l = \Delta \varphi_0 + (M + M') (1 + \zeta) \frac{l}{2 E c} - H \left(1 - \frac{\beta}{2} \right) \frac{2 l f}{3 E c} + \frac{1 + 2 \zeta}{2 E c} \sum_0^l P a (l-a). \quad 23$$

Aus diesen drei Gleichungen können die drei Unbekannten H , M , M' für parabolische Bogen ohne Gelenke berechnet werden. Gleichung 21 würde mit $M = M' = 0$ wieder auf den Horizontalschub des symmetrischen Parabelbogens mit zwei Gelenken führen (§ 42).

Nun wurde aber in § 43 nachgewiesen, daß ζ für elastische Bogen wohl stets verschwindend klein ist. Vernachlässigen wir es, so gehen die Gleichungen 21 bis 23 in die folgenden über:

$$\Delta l = \alpha \tau l + (M + M') \frac{2 - \beta}{6} \frac{l f}{E c} - H (1 + \varepsilon) \frac{8 l f^2}{15 E c} + \frac{f}{3 E c l^2} \sum_0^l P a (l-a) (l^2 + l a - a^2 - \beta l^2), \quad 24$$

$$\Delta k = l \Delta \varphi_l - (M + 2 M') \frac{l^2}{6 E c} + H \frac{2 - \beta}{6} \frac{f l^2}{E c} - \frac{1}{6 E c} \sum_0^l P a (l-a) (l + a), \quad 25$$

$$\Delta \varphi_l = \Delta \varphi_0 + (M + M') \frac{l}{2 E c} - H \frac{2 - \beta}{3} \frac{l f}{E c} + \frac{1}{3 E c} \sum_0^l P a (l-a). \quad 26$$

Aus diesen Gleichungen wären H , M , M' zu bestimmen, wenn man β berücksichtigen wollte.

Aber auch β pflegt in praktischen Fällen so klein zu sein, daß man es im allgemeinen vernachlässigen kann (§ 43). Alsdann ergeben sich aus 24–26 für parabolische Bogen ohne Gelenke im allgemeinsten Falle:

$$H = \frac{15}{(1 + 6 \varepsilon) 4 f l^3} \sum_0^l P a^2 (l-a)^2 + \frac{15 E c}{(1 + 6 \varepsilon) 2 l f} \left[\frac{\alpha \tau l - \Delta l}{2 f} 3 - \Delta \varphi_0 + \Delta \varphi_l \right], \quad 27$$

$$M = \frac{1}{(1+6\varepsilon)2l^3} \int_0^l P a (l-a)^2 (5a-2l-12\varepsilon l) + \frac{3Ec}{(1+6\varepsilon)l} \left[\frac{\alpha\tau l - \Delta l}{2f} 5 + \frac{2\Delta k}{l} - 3\Delta\varphi_0 + \Delta\varphi_l + 4\varepsilon \left(\frac{3\Delta k}{l} - 2\Delta\varphi_0 - \Delta\varphi_l \right) \right], \quad 28$$

$$M' = \frac{1}{(1+6\varepsilon)2l^3} \int_0^l P a^2 (l-a) (3l-5a-12\varepsilon l) + \frac{3Ec}{(1+6\varepsilon)l} \left[\frac{\alpha\tau l - \Delta l}{2f} 5 - \frac{2\Delta k}{l} + 3\Delta\varphi_l - \Delta\varphi_0 - 4\varepsilon \left(\frac{3\Delta k}{l} - 2\Delta\varphi_l - \Delta\varphi_0 \right) \right]. \quad 29$$

Der Einfluß der Belastung allein ist durch die Glieder mit Σ ausgedrückt.

§ 45. Formänderungen symmetrischer Parabelbogen.

Nach § 40 mit den in §§ 42, 44 berechneten Ausdrücken der Integrale § 42, 11)–13), also mit 6), 12) in § 42 und 10), 11), 16), 17) in § 44 können die Änderungen Δx , Δy , $\Delta \varphi$ von x , y , φ für jede Stelle des Bogens berechnet werden. Am häufigsten interessiert die Änderung Δy in der Bogenmitte, welche wir deshalb hier spezieller ins Auge fassen wollen. Wird bei $x = m = \frac{l}{2}$ gesetzt $\Delta y = \Delta f = -e$, so bedeutet e die Einsenkung (Durchbiegung) in der Bogenmitte. Neben dem allgemeinen Ausdrucke derselben werden wir ihren Wert für beliebige zur Bogenmitte symmetrische Belastungen ableiten, da die betreffenden Formeln einfacher sind und selbst bei Ableitung von Einsenkungen für unsymmetrische Belastungen Verwendung finden können, während auch das Eigengewicht im allgemeinen eine symmetrische Belastung darstellt.

Die Einsenkung in der Trägermitte ist nach § 40, 18), 20), 23) im allgemeinsten Falle:

$$e = Y_1 + Y_2 - \alpha\tau f - \frac{l}{2} \Delta\varphi_m, \quad 1$$

worin nach denselben Gleichungsgruppen die Änderung des Winkels φ_m in der Bogenmitte (bei Öffnungen mit drei Gelenken unmittelbar vor dem Scheitелgelenk):

$$\Delta\varphi_m = Z_1 + Z_2 + \varphi_0, \quad 2$$

und alle Y , Z für $x = m$ gelten. Wir haben also bei Berücksichtigung von

$$v = \frac{1}{l} \left[M' - M + \int_0^l P (l-a) \right]$$

nach § 44, 10), 16):

$$Y_1 = \frac{l^2}{24Ec} \left[2M + M' - H \frac{5f}{2} + \int_0^l P (l-a) - \frac{1}{l^2} \int_0^m P (l-2a)^2 (l+a) \right],$$

$$Y_2 = \frac{l^2}{8Ekv^2} \left[M + M' + 2H(v-f) + \int_0^l P (l-a) - \frac{1}{l} \int_0^m P (l-2a)^2 \right],$$

und nach § 44, 11), 17):

$$Z_1 = \frac{l}{8Ec} \left[3M + M' - H \frac{8f}{3} + \int_0^l P (l-a) - \frac{1}{l} \int_0^m P (l-2a)^2 \right],$$

$$Z_2 = \frac{l}{4Ekv^2} \left[M + M' + 2H(v-f) + \int_0^l P (l-a) - \frac{1}{l} \int_0^m P (l-2a)^2 \right],$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in 1, 2 ergeben sich mit den Bezeichnungen § 43, 1), 2), 4):

$$e = \frac{l^2}{24Ec} \left[(2+3\xi)M + (1+2\xi)M' - \left(1 - \frac{4\beta}{5}\right) \frac{5f}{2} H + (1+3\xi) \int_0^l P (l-a) - \frac{1+3\xi}{l} \int_0^m P (l-2a)^2 - \frac{1}{l^2} \int_0^m P a (l-2a)^2 \right] - \alpha\tau f - \frac{l}{2} \Delta\varphi_m,$$

$$\Delta\varphi_m = \frac{l}{8Ec} \left[(3+2\xi)M + (1+2\xi)M' - \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) \frac{8f}{3} H + (1+2\xi) \int_0^l P (l-a) - \frac{1+2\xi}{l} \int_0^m P (l-2a)^2 \right] + \Delta\varphi_0,$$

und durch Verwendung des letzten Ausdrucks im vorletzten:

$$e = \frac{l^2}{48 E c} \left[\frac{1}{l^2} \sum_0^m P(l-2a)^3 - \frac{l}{0} \sum_0^l P(l-a) + 3 H f - 5 M - M' \right] - \alpha \tau f - \frac{l}{2} \Delta \varphi_0. \quad 4$$

Speziell für symmetrische Belastung kann man wegen (S. 79):

$$\sum_0^l P(l-a) = l \sum_0^m P$$

nach dem vorletzten Ausdruck für e auch schreiben:

$$e = \frac{l^2}{24 E c} \left[\frac{1}{l^2} \sum_0^m P a (3 l^2 - 4 a^2) + \frac{12 \xi}{l} \sum_0^m P a (l-a) - \left(1 - \frac{4 \beta}{5}\right) \frac{5 f}{2} H + \right. \\ \left. (2 + 3 \xi) M + (1 + 3 \xi) M' \right] - \alpha \tau f - \frac{l}{2} \Delta \varphi_m. \quad 5$$

Im folgenden denken wir uns das für elastische Bogenträger gegen 1 wohl immer verschwindend kleine ξ vernachlässigt (vergl. § 43 und VI M).

Öffnungen mit zwei Gelenken.

Für Öffnungen mit Endgelenken haben wir $M = M' = 0$ und nach § 44, 25):

$$\Delta \varphi_l = \frac{\Delta k}{l} - H \frac{2-\beta}{6} \frac{f l}{E c} + \frac{1}{6 E c l} \sum_0^l P a (l-a) (l+a), \quad 6$$

womit nach § 44, 26):

$$\Delta \varphi_0 = \frac{\Delta k}{l} + H \frac{2-\beta}{6} \frac{f l}{E c} - \frac{1}{6 E c l} \sum_0^l P a (l-a) (2l-a). \quad 7$$

Die Einsenkung in der Bogenmitte durch beliebige Belastung, eine Temperaturänderung τ und kleine Bewegungen der Stützpunkte folgt nun aus 4:

$$e = \frac{1}{48 E c} \left[\sum_0^m P (l-2a)^3 - \sum_0^l P (l-a) (l^2 - 8 l a + 4 a^2) - (5-4\beta) H f l^2 \right] - \alpha \tau f - \frac{\Delta k}{2}, \quad 8$$

worin H durch § 42, 18) bestimmt. Speziell für symmetrische Belastung erhält man in der S. 79 erwähnten Weise:

$$\sum_0^l P (l-a) (l^2 - 8 l a + 4 a^2) = -l \sum_0^m P (l^2 - 12 l a + 12 a^2)$$

und damit einfacher:

$$e = \frac{1}{24 E c} \left[\sum_0^m P a (3 l^2 - 4 a^2) - \frac{5-4\beta}{2} H f l^2 \right] - \alpha \tau f - \frac{\Delta k}{2}, \quad 9$$

wie wir auch aus 5 entnehmen könnten, da bei symmetrischer Belastung $\Delta \varphi_m$ nur von Δk abhängt und gleich $\frac{\Delta k}{l}$ ist.

Öffnungen ohne Gelenke.

Für diesen Fall erhalten wir aus § 44, 25):

$$\Delta \varphi_l = \frac{\Delta k}{l} + (M + 2M') \frac{l}{6 E c} - H \frac{2-\beta}{6} \frac{f l}{E c} + \frac{1}{6 E c l} \sum_0^l P a (l-a) (l+a), \quad 10$$

und hiermit nach § 44, 26):

$$\Delta \varphi_0 = \frac{\Delta k}{l} - (M' + 2M) \frac{l}{6 E c} + H \frac{2-\beta}{6} \frac{f l}{E c} - \frac{1}{6 E c l} \sum_0^l P a (l-a) (2l-a). \quad 11$$

Durch Substitution des letzten Ausdrucks in 4 ergibt sich die Einsenkung in der Bogenmitte durch beliebige Belastung, eine Temperaturänderung τ und kleine Bewegungen der Stützen:

$$e = \frac{1}{48 E c} \left[\sum_0^m P (l-2a)^3 - \sum_0^l P (l-a) (l^2 - 8 l a + 4 a^2) - (5-4\beta) H f l^2 + (M + M') 3 l^2 \right] - \alpha \tau f - \frac{\Delta k}{2}, \quad 12$$

worin H , M , M' durch § 44, 24)–26) und bei Vernachlässigung von β durch § 44,

27)–29) bestimmt sind. Speziell bei symmetrischer Belastung folgt aus 12 mit dem über 9 angeschriebenen Summenwert:

$$e = \frac{1}{24 E c} \left[\sum_0^m P a (3 l^2 - 4 a^2) - \frac{5-4\beta}{2} H f l^2 + (M + M') \frac{3}{2} l^2 \right] - \alpha \tau f - \frac{\Delta k}{2}, \quad 13$$

und beispielsweise durch die Belastung allein bei Vernachlässigung von β :

$$e = \frac{1}{24 E c} \left[\sum_0^m P a^2 (3 l - 4 a) - \frac{1}{2} H f l^2 \right]. \quad 14$$

Mit $M = M' = 0$ gehen die Gleichungen 10–13 in 6–9 über.

Öffnungen mit drei Gelenken.

Nach § 40, 26) hat man zur Berechnung von $\Delta \varphi_0$, $\Delta \varphi_l$ und des Sprungwerts $\omega = \Delta \varphi_n - \Delta \varphi_v$ von $\Delta \varphi$ beim Zwischengelenk wegen $k = 0$:

$$\Delta l = \alpha \tau l + \mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2 + \omega f,$$

$$\Delta k = l \Delta \varphi_l - \mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{Y}_2 - \omega \frac{l}{2},$$

$$\Delta \varphi_l = \Delta \varphi_0 + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \omega.$$

Diese Beziehungen, abgesehen von den mit ω behafteten Gliedern, wurden für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ durch § 44, 24)–26) ausgedrückt. Denken wir uns den rechten Seiten letzterer Formeln ωf bzw. $-\omega \frac{l}{2}$ und ω beigegefügt, so liefert bei Beachtung von $M = M' = 0$ die erste derselben:

$$\omega = \frac{\Delta l}{f} + H(1 + \varepsilon) \frac{8 l f}{15 E c} - \frac{1}{3 E c l^2} \sum_0^l P a (l - a) (l^2 + l a - a^2) + \frac{\beta}{3 E c} \sum_0^l P a (l - a) - \frac{\alpha \tau l}{f}, \quad 15$$

damit die zweite:

$$\Delta \varphi_l = \frac{\Delta k}{l} + \frac{\Delta l}{2 f} - H \frac{l f}{E c} \left(\frac{1-4\varepsilon}{15} - \frac{\beta}{6} \right) + \frac{1}{6 E c l^2} \sum_0^l P a^3 (l - a) + \frac{\beta}{6 E c} \sum_0^l P a (l - a) - \frac{\alpha \tau l}{2 f}, \quad 16$$

und hiermit die dritte:

$$\Delta \varphi_0 = \frac{\Delta k}{l} - \frac{\Delta l}{2 f} + H \frac{l f}{E c} \left(\frac{1-4\varepsilon}{15} - \frac{\beta}{6} \right) - \frac{1}{6 E c l^2} \sum_0^l P a (l - a)^3 - \frac{\beta}{6 E c} \sum_0^l P a (l - a) + \frac{\alpha \tau l}{2 f}. \quad 17$$

Substituieren wir den letzten Ausdruck in 5 so folgt die Einsenkung in der Bogenmitte durch beliebige Belastung, beliebige Temperaturänderung τ und beliebige kleine Bewegungen der Stützpunkte:

$$e = \frac{1}{48 E c} \left[\sum_0^m P (l - 2a)^3 - l^2 \sum_0^l P (l - a) + \frac{4}{l} \sum_0^l P a (l - a)^3 + 4 \beta l \sum_0^l P a (l - a) + \left(\frac{7 + 32\varepsilon}{5} + 4\beta \right) H f l^2 \right] - \alpha \tau \left(f + \frac{l^2}{4 f} \right) + \frac{l \Delta l}{4 f} - \frac{\Delta k}{2}, \quad 18$$

worin H durch § 19, 5) bestimmt und also nur von der Belastung abhängig ist. Speziell bei symmetrischer Belastung erhält man in der S. 79 erwähnten Weise:

$$\sum_0^l P (l - a) = l \sum_0^m P, \quad \sum_0^l P a (l - a) = 2 \sum_0^m P a (l - a),$$

$$\sum_0^l P a (l - a)^3 = \sum_0^m P a (l^3 - 3 l^2 a + 4 l a^2 - 2 a^3),$$

womit bei gleichzeitiger Verwendung von § 19, 28) aus 18) die einfachere Gleichung entsteht:

$$e = \frac{1}{6 E c l} \left[\sum_0^m P a^3 (l - a) - \frac{3-32\varepsilon}{40} l^3 \sum_0^m P a + \beta l^2 \sum_0^m P a (l - a) \right] - \alpha \tau \left(f + \frac{l^2}{4 f} \right) + \frac{l \Delta l}{4 f} - \frac{\Delta k}{2}. \quad 19$$

Liegt gerade in der Mitte eine konzentrierte Last, so ist in den Summen \sum_0^m von 9, 13, 19 dem Begriffe der Symmetrie entsprechend nur die Hälfte derselben aufzunehmen.

Die nunmehr mit Berücksichtigung von ε , β erhaltenen Gleichungen lassen

im Hinblick auf § 43 erkennen, daß bei der praktischen Berechnung der Formänderungen elastischer Bogenträger im allgemeinen $\beta = 0$ gesetzt werden darf, was bei Anführung obiger Gleichungen im zweiten Abschnitte geschehen ist.

§ 46. Horizontalschub von Zweigelenbogen mit beliebiger symmetrischer Achse und beliebigen Querschnitten.

Entsprechend dem auf S. 316 Gesagten drücken wir nun den Horizontalschub von Bogen mit gleich hohen Endgelenken ohne Zwischengelenk für beliebige Querschnitte und beliebige symmetrische Achse aus. Den Ausgangspunkt bildet die erste Gleichung 19 des § 40 mit $k = 0$ und § 40, 11):

$$\Delta l = \int_0^l \frac{M_x}{EJ} y ds - \int_0^l \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{dx + y d\varphi}{EF} + \alpha \tau l, \quad 1$$

worin bei unveränderlicher Spannweite $\Delta l = 0$ ist. Bei Ausführen des häufig vernachlässigten zweiten Integrals denken wir uns anstatt der wirklichen Bogenachse einen Kreisbogen von gleicher Spannweite l und gleichem Pfeile f wie jene, also vom Radius

$$r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} \quad 2$$

zugrunde gelegt (über die Zulässigkeit dieses Verfahrens siehe S. 314 oben), womit wie im analogen Falle des § 42:

$$dx + y d\varphi = \frac{r-f}{r} ds,$$

und bei konstanten E und $\alpha \tau$ für den ganzen Bogen Gleichung 1 zunächst in folgende übergeht:

$$E \Delta l = \int_0^l \frac{M_x}{J} y ds - \frac{r-f}{r} \int_0^l \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{ds}{F} + E l \alpha \tau. \quad 3$$

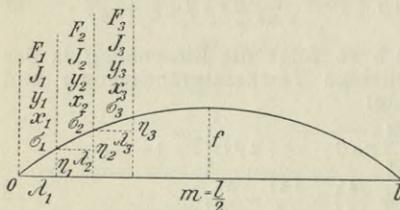


Fig. 218.

Wird nun der Bogen in eine genügende Anzahl gleich oder verschieden langer Felder geteilt (z. B. durch Querschnitte oder Vertikalebene), für welche die Achslänge σ , deren horizontale und vertikale Projektion λ , η , und die Mittelwerte von x , y , F , J (z. B. die Werte in den Feldermitten) wie in Fig. 218 bezeichnet sind, und beziehen sich die Summen Σ in den folgenden Gleichungen auf alle Felder zwischen den angesetzten Summengrenzen, so liefert 3 zunächst:

$$E \Delta l = \frac{\Sigma}{0} \frac{\sigma y}{J} M_x - \frac{r-f}{r} \frac{\Sigma}{0} \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{\sigma}{F} + E l \alpha \tau. \quad 4$$

Nach § 20, 3)–5) hat man in jedem Felde:

$$M_x = Vx - Hy - \frac{\sigma}{0} P(x - a),$$

$$N_x = \left(V - \frac{\sigma}{0} P \right) \frac{\eta}{\sigma} + H \frac{\lambda}{\sigma},$$

womit aus 4):

$$E \Delta l = \frac{\Sigma}{0} \frac{\sigma y}{J} \left[Vx - Hy - \frac{\sigma}{0} P(x - a) \right] - \frac{r-f}{r} \frac{\Sigma}{0} \frac{\eta}{F} \left[V - \frac{\sigma}{0} P \right] - \frac{r-f}{r} H \frac{\Sigma}{0} \frac{\lambda}{F} - \frac{r-f}{r} \frac{\Sigma}{0} \frac{\sigma}{F} \left[Vx - Hy - \frac{\sigma}{0} P(x - a) \right] + E l \alpha \tau.$$

Durch Auflösen dieser Gleichung nach H ergibt sich mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$v = \sum_0^l \frac{\sigma xy}{J} - \frac{r-f}{r} \sum_0^l \frac{\eta}{F} - \frac{r-f}{r^2} \sum_0^l \frac{\sigma x}{F}, \quad 5$$

$$w = \sum_0^l \frac{\sigma y^2}{J} + \frac{r-f}{r} \sum_0^l \frac{\lambda}{F} - \frac{r-f}{r^2} \sum_0^l \frac{\sigma y}{F}, \quad 6$$

$$\sum_0^x P = P_x, \quad \sum_0^x P(x-a) = S_x \quad 7$$

der gesuchte Horizontalschub bei beliebiger Belastung beliebiger Temperaturänderung τ und beliebiger kleiner Änderung Δl der Spannweite:

$$H = \frac{1}{w} \left[Vv - \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} S_x + \frac{r-f}{r} \sum_0^l \frac{\eta}{F} P_x + \frac{r-f}{r^2} \sum_0^l \frac{\sigma}{F} S_x + E l \alpha \tau - E \Delta l \right]. \quad 8$$

Wie ersichtlich, sind v, w nur von der Bogenform und den Querschnitten abhängig, so daß sie nur einmal berechnet zu werden brauchen, während in V, P_x, S_x die Lasten auftreten. Es bedeuten

$$V = \frac{1}{l} \sum_0^l P(l-a) = \frac{S}{l}, \quad 9$$

die Vertikalreaktion bei 0, P_x die angenommene Gesamtlast von 0 bis x , S_x das statische Moment dieser Gesamtlast in bezug auf den Punkt x .

Für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit hat man nach § 18:

$$V = \frac{ul}{2}, \quad P_x = ux, \quad S_x = \frac{ux^2}{2},$$

und damit nach 8 den von dieser Belastung allein herrührenden Horizontalschub:

$$H = \frac{lv - z}{2w} u, \quad 10$$

worin nur von der Achsform und den Querschnitten abhängt:

$$z = \sum_0^l \frac{\sigma y x^2}{J} - 2 \frac{r-f}{r} \sum_0^l \frac{\eta x}{F} - \frac{r-f}{r^2} \sum_0^l \frac{\sigma x^2}{F}. \quad 11$$

Für eine Einzellast P an beliebiger Stelle a allein hat man in 8:

$$\begin{array}{ll} \text{von } x=0 \text{ bis } x=a & P_x = 0, \quad S_x = 0, \\ \text{,, } x=a \text{ ,, } x=l & P_x = P, \quad S_x = P(x-a), \end{array}$$

womit zunächst folgt:

$$H = \frac{P}{w} \left[\frac{l-a}{l} \left(\sum_0^l \frac{\sigma xy}{J} - \frac{r-f}{r} \sum_0^l \frac{\eta}{F} - \frac{r-f}{r^2} \sum_0^l \frac{\sigma x}{F} \right) - \sum_a^l \frac{\sigma y}{J} (x-a) + \frac{r-f}{r} \sum_a^l \frac{\eta}{F} + \frac{r-f}{r^2} \sum_a^l \frac{\sigma}{F} (x-a) \right],$$

und mit Rücksicht auf $\sum_0^l = \sum_0^a + \sum_a^l$:

$$H = \frac{P}{wl} \left[(l-a) \left(\sum_0^a \frac{\sigma xy}{J} - \frac{r-f}{r} \sum_0^a \frac{\eta}{F} - \frac{r-f}{r^2} \sum_0^a \frac{\sigma x}{F} \right) + a \left(\sum_a^l \frac{\sigma(l-x)y}{J} + \frac{r-f}{r} \sum_a^l \frac{\eta}{F} - \frac{r-f}{r^2} \sum_a^l \frac{\sigma(l-x)}{F} \right) \right]. \quad 12$$

Im nächsten Paragraphen wird gezeigt, daß vielfach bei hier in Frage stehenden Bogenträgern alle Summen \sum , welche F im Nenner enthalten, vernachlässigt werden dürfen (S. 326), womit nach 8 im allgemeinsten Falle:

$$H = \frac{1}{w} \left(Vv - \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} S_x + E l \alpha \tau - E \Delta l \right) \quad 13$$

mit

$$v = \sum_0^l \frac{\sigma xy}{J}, \quad w = \sum_0^l \frac{\sigma y^2}{J}. \quad 14$$

Speziell für eine gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit auf der ganzen Spannweite gilt nach wie vor Gleichung 10, jedoch jetzt mit

$$z = \sum_0^l \frac{\sigma y x^2}{J}, \quad 15$$

während für eine Einzellast P an beliebiger Stelle a nach 12:

$$H = \frac{P}{wl} \left[(l-a) \sum_0^a \frac{\sigma xy}{J} + a \sum_a^l \frac{\sigma(l-x)y}{J} \right]. \quad 16$$

Aus diesen Gleichungen sind alle Glieder, bei deren Berechnung die Bogenachse kreisförmig angenommen wurde (S. 322), weggefallen.

§ 47. Horizontalschub vollständig symmetrischer Zweigelenkbogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten.

Wir wollen zunächst die Beziehungen des vorigen Paragraphen für den Fall spezialisieren, daß die Anordnung des Trägers einschließlich der Felderteilung vollständig symmetrisch zur Vertikalen durch die Trägermitte ist.

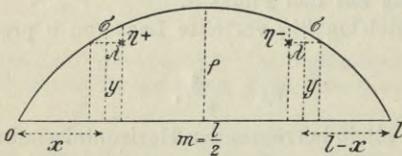


Fig. 219.

Man hat dann für je zwei symmetrisch zur Mitte liegende Felder (Fig. 219) gleiche Feldlängen λ und gleiche Achslängen σ , numerisch gleiche aber dem Vorzeichen nach verschiedene Vertikalprojektionen $\eta = \sigma \sin \varphi$ der letzteren, gleiche Ordinaten y und gleiche Entfernungen $x, l-x$ von den nächstgelegenen Stützpunkten. Mit Rücksicht hierauf ergibt sich:

$$\sum_0^l \frac{\sigma xy}{J} = \sum_0^m \frac{\sigma xy}{J} + \sum_m^l \frac{\sigma xy}{J} = \sum_0^m \frac{\sigma xy}{J} + \sum_0^m \frac{\sigma(l-x)y}{J} = l \sum_0^m \frac{\sigma y}{J},$$

während unmittelbar oder in analoger Weise weiter folgen im Ausdrucke § 46, 5) von v :

$$\sum_0^l \frac{\eta}{F} = 0, \quad \sum_0^l \frac{\sigma x}{F} = l \sum_0^m \frac{\sigma}{F},$$

im Ausdrucke § 46, 6) von w :

$$\sum_0^l \frac{\sigma y^2}{J} = 2 \sum_0^m \frac{\sigma y^2}{J}, \quad \sum_0^l \frac{\lambda}{F} = 2 \sum_0^m \frac{\lambda}{F}, \quad \sum_0^l \frac{\sigma y}{F} = 2 \sum_0^m \frac{\sigma y}{F},$$

und im Ausdrucke § 46, 11) von z :

$$\begin{aligned} \sum_0^l \frac{\sigma y x^2}{J} &= 2 \sum_0^m \frac{\sigma y x^2}{J} - 2l \sum_0^m \frac{\sigma xy}{J} + l^2 \sum_0^m \frac{\sigma y}{J}, \\ \sum_0^l \frac{\eta x}{F} &= 2 \sum_0^m \frac{\eta x}{F} - l \sum_0^m \frac{\eta}{F}, \\ \sum_0^l \frac{\sigma x^2}{F} &= 2 \sum_0^m \frac{\sigma x^2}{F} - 2l \sum_0^m \frac{\sigma x}{F} + l^2 \sum_0^m \frac{\sigma}{F}. \end{aligned}$$

Damit lassen sich bei gerader oder ungerader Felderzahl aus den Verhältnissen der ersten Trägerhälfte allein berechnen:

$$\frac{v}{l} = \sum_0^m \frac{\sigma y}{J} - \frac{r-f}{r^2} \sum_0^m \frac{\sigma}{F}, \quad 1$$

$$\frac{w}{2} = \sum_0^m \frac{\sigma y^2}{J} + \frac{r-f}{r} \sum_0^m \frac{\lambda}{F} - \frac{r-f}{r^2} \sum_0^m \frac{\sigma y}{F}, \quad 2$$

$$\frac{lv-z}{2} = l \sum_0^m \frac{\sigma xy}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma y x^2}{J} - \frac{r-f}{r} \left(l \sum_0^m \frac{\eta}{F} - 2 \sum_0^m \frac{\eta x}{F} \right) - \frac{r-f}{r^2} \left(l \sum_0^m \frac{\sigma x}{F} - \sum_0^m \frac{\sigma x^2}{F} \right). \quad 3$$

Mit diesen Ausdrücken von $v, w, lv-z$ gelten also jetzt die Gleichungen 8, 10 des vorigen Paragraphen.

Speziell bei beliebiger symmetrischer Belastung hat man für 2 symmetrisch zur Trägermitte bei x, x' gelegene Felder nach §§ 49, 50:

$$S_x + S'_x = 2 S_x + S - \frac{2x}{l} S, \quad P'_x - P_x = 2 \sum_x^m P,$$

und damit nach § 46, 8) durch jene Belastung allein:

$$H = \frac{2}{w} \left[\sum_0^m \frac{\sigma y}{J} \left(\frac{x}{l} S - S_x \right) - \frac{r-f}{r} \sum_0^m \frac{\eta}{F} Q_x - \frac{r-f}{r^2} \sum_0^m \frac{\sigma}{F} \left(\frac{x}{l} S - S_x \right) \right], \quad 4$$

worin S_x, P_x, S durch § 46, 7), 9) bestimmt und auch gesetzt werden kann:

$$\frac{x}{l} S - S_x = \sum_0^x P a + x Q_x \quad \text{mit} \quad Q_x = \sum_x^m P, \quad 5$$

doch ist dann zu beachten, daß eine etwa gerade bei $a = x$ angreifende Last P nur in einer der beiden Summen von 0 bis x und von x bis m aufgenommen werden darf. Gleichung 4 hätte sich auch aus § 50, 15), 17) mit $M = 0$ ergeben.

Hätten wir auf der ersten Trägerhälfte eine gleichmäßig verteilte Last von u , auf der zweiten eine solche von u' pro Längeneinheit, so würde nach § 18 aus § 46, 9)

$$V = \frac{3u + u'}{8} l,$$

und für x zwischen 0 und m bzw. zwischen m und l aus § 46, 7):

$$P_x = u x, \quad S_x = \frac{u x^2}{2},$$

$$P_x = \frac{u l}{2} + \frac{u'}{2} (2x - l), \quad S_x = \frac{u l}{8} (4x - l) + \frac{u'}{8} (2x - l)^2,$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in § 46, 8) unter Beachtung von $\sum_0^l = \sum_0^m + \sum_m^l$ und des oben einleitend Gesagten erhält man den Horizontalschub durch die erwähnte Belastung:

$$H = \frac{l v - z}{4} \frac{u + u'}{w}. \quad 6$$

Diese Gleichung führt mit $u' = u$ wieder auf § 46, 10), wie man aus letzterer Formel umgekehrt bei der jetzt vollständig symmetrischen Anordnung des Trägers auf 6 hätte schließen können.

Für eine Einzellast P an beliebiger Stelle a gilt die Gleichung § 46, 12), worin jetzt:

$$\begin{aligned} \frac{l}{a} \sum \frac{\sigma(l-x)y}{J} &= \frac{l}{0} \sum \frac{\sigma(l-x)y}{J} - \frac{a}{0} \sum \frac{\sigma(l-x)y}{J} \\ &= \frac{m}{0} \sum \frac{\sigma(l-x)y}{J} + \frac{m}{0} \sum \frac{\sigma x}{J} - \frac{a}{0} \sum \frac{\sigma(l-x)y}{J} \\ &= l \sum_0^m \frac{\sigma y}{J} - l \sum_0^a \frac{\sigma y}{J} + \frac{a}{0} \sum_0^a \frac{\sigma x y}{J}, \\ \frac{l}{a} \sum \frac{\eta}{F} &= \frac{l}{0} \sum \frac{\eta}{F} - \frac{a}{0} \sum \frac{\eta}{F} = - \frac{a}{0} \sum \frac{\eta}{F}, \\ \frac{l}{a} \sum \frac{\sigma(l-x)}{F} &= \frac{l}{0} \sum \frac{\sigma(l-x)}{F} - \frac{a}{0} \sum \frac{\sigma(l-x)}{F} \\ &= \frac{m}{0} \sum \frac{\sigma(l-x)}{F} + \frac{m}{0} \sum \frac{\sigma x}{F} - \frac{a}{0} \sum \frac{\sigma(l-x)}{F} \\ &= l \sum_0^m \frac{\sigma}{F} - l \sum_0^a \frac{\sigma}{F} + \frac{a}{0} \sum_0^a \frac{\sigma x}{F}, \end{aligned}$$

so daß wir erhalten:

$$H = \frac{P}{w} \left[\sum_0^a \frac{\sigma x y}{J} - \frac{r-f}{r} \sum_0^a \frac{\eta}{F} - \frac{r-f}{r^2} \sum_0^a \frac{\sigma x}{F} + a \left(\sum_0^m \frac{\sigma y}{J} - \sum_0^a \frac{\sigma y}{J} - \frac{r-f}{r^2} \sum_0^m \frac{\sigma}{F} + \frac{r-f}{r^2} \sum_0^a \frac{\sigma}{F} \right) \right], \quad 7$$

und beispielsweise für $a = m$:

$$H = \frac{P}{w} \left(\frac{\sum_0^m \sigma x y}{J} - \frac{r-f}{r} \frac{\sum_0^m \eta}{F} - \frac{r-f}{r^2} \frac{\sum_0^m \sigma x}{F} \right). \quad 8$$

Es handelt sich nun darum, zu entscheiden, welche Glieder in den oben und in § 46 gegebenen Gleichungen unter Umständen (für steile Bogen etc.) vernachlässigt werden dürfen. Dies kann mit Zuverlässigkeit nur durch vergleichende Berechnungen geschehen. Hierzu eignet sich beispielsweise die erwähnte Dourobrücke (Fig. 220), weil für sie alle in Betracht kommenden Größen nach Angaben von Seyrig¹ sehr genau berechnet werden können. Seyrig hat für die durch Vertikalen begrenzten Felder des Dourobogens die Längen λ und unter Berücksichtigung der Achskrümmung in den einzelnen Feldern die Achslängen σ wie auch die x, y in den Feldermitten und die F, J der wirklichen Querschnitte daselbst einschließlich der Beiträge der Füllungsglieder angegeben. Sie sind in den Kolonnen 2—8 der Tabelle S. 328, 329 mit den ebenfalls aus Seyrigs Aufsatz entnommenen Vertikalprojektionen η von σ zusammengestellt, während die in den übrigen Kolonnen angeführten Größen aus denjenigen der Kolonnen 2—8 berechnet wurden. Alle Größen betreffen die zwei parallelen Bogen zusammen. Daß sie in Wirklichkeit für Fachwerk gelten, ist hier gleichgültig, da Vollwandbogen die gleichen Werte entsprechen könnten.

Man erhält nun nach § 46, 8), 10), 12) und obigen Gleichungen (Beisp. 94) beziehungsweise bei Vernachlässigung sämtlicher Glieder mit F im Nenner (Beispiel 42) folgende Werte des Horizontalschubs H und die entsprechenden Differenzen im zweiten gegenüber dem ersten Falle.

H	Beisp. 94	Beisp. 37	Differenz
durch eine gleichmäßig verteilte Last von u pro Meter Spannweite	72,111 u	72,848 u	1,02%
durch verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten von u, u' pro Meter auf der ersten und zweiten Bogenhälfte durch eine Einzellast	36,056 ($u + u'$)	36,424 ($u + u'$)	1,02 „
P bei			
$a = 0$	0	0	0
$a = 23,75$ m	0,35656 P	0,36012 P	1,00 „
$a = 26,75$ „	0,38888 P	0,39281 P	1,01 „
$a = 54$ „	0,59425 P	0,60038 P	1,03 „
$a = 64,4$ „	0,63342 P	0,63999 P	1,04 „
$a = 74,8$ „	0,65263 P	0,65941 P	1,04 „
$a = 80$ „	0,65742 P	0,66424 P	1,04 „
durch eine Temperaturänderung τ des Bogens	$\frac{E a \tau}{322,125}$	$\frac{E a \tau}{320,537}$	0,50 „
durch ein Ausweichen der Widerlager um Δl	$\frac{E \Delta l}{51540}$	$\frac{E \Delta l}{51286}$	0,50 „

Wir fügen diesen Werten bei die in analoger Weise berechneten Größen:

$v =$	159787	160147	0,22%
$w =$	51540	51286	0,49 „
$z =$	18132662	18151388	0,10 „
$\frac{lv-z}{2} =$	3716629	3736066	0,52 „

Bei der Dourobrücke kommen nur an den in vorstehendem berücksichtigten Stellen a , mit Ausnahme von $a = 0$ und 80 m, Verkehrslasten auf den Bogen (Fig. 220, S. 327).

Nach allen diesen Resultaten können in obigen Gleichungen und denjenigen des § 46 die Glieder mit F im Nenner für steile Bogen (vergl. S. 316) vielfach vernachlässigt werden. Wir haben demgemäß im vorigen Paragraphen die ein-

¹ Seyrig, Le pont sur le Douro. Mémoires et Compte rendu des travaux de la société des ingénieurs civils 1878, p. 741.

facheren Gleichungen 13 bis 16 gegeben und können nun beifügen, daß sich nach denselben für Bogen, welche zur Trägermitte vollständig symmetrisch angeordnet sind, zufolge 1 bis 3 aus den Verhältnissen der ersten Trägerhälfte allein berechnen lassen:

$$v = l \sum_0^m \frac{\sigma y}{J}, \quad w = 2 \sum_0^m \frac{\sigma y^2}{J}, \quad 9$$

$$\frac{l v - z}{2} = l \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - \frac{m}{0} \frac{\sigma y x^2}{J}. \quad 10$$

Diese Werte sind natürlich auch in § 46, 10) und obiger Gleichung 6 zu verwenden, während aus 7 für eine Einzellast P an beliebiger Stelle a folgt:

$$H = \frac{P}{w} \left[\sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} + a \left(\sum_0^m \frac{\sigma y}{J} - \frac{a}{0} \frac{\sigma y}{J} \right) \right], \quad 11$$

und aus 4 durch eine beliebige symmetrische Belastung:

$$H = \frac{2}{w} \sum_0^m \frac{\sigma y}{J} \left(\frac{x}{l} s - s_x \right). \quad 12$$

Beispiel 94. Horizontalschub eines symmetrischen Zweigelenkbogens mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten (Dourobrücke in Portugal).

Für den Bogen mit Kämpfergelenken der Maria-Pia-Brücke über den Douro, welchem die in Fig. 220 und der unten folgenden Tabelle ersichtlichen Verhältnisse entsprechen, ist der Horizontalschub nach den in §§ 46, 47 gegebenen möglichst genauen Formeln zu berechnen: a) Für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit; b) für verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten von u , u' pro Längeneinheit auf der ersten und zweiten Bogenhälfte; c) für beliebige Einzellasten P bei $a = 23,75$ m, 26,75 m, 54 m, 64,4 m, 74,8 m, 80 m; d) für eine beliebige Temperaturänderung τ ; e) für eine beliebige kleine Änderung der Spannweite um Δl .

Mit $l = 160$ m und $f = 42,65$ m erhält man nach § 46, 2) $r = 96,354$ m, also $r - f = 53,704$ m, worauf mit Rücksicht auf die für den halben Bogen summierten Werte der nachstehenden Tabelle aus § 47, 1), 2), 3) weiter folgen:

$$v = 160 \left(1000,92 - \frac{53,704}{96,354^2} 389,07 \right) = 159787,$$

$$w = 2 \cdot 25643 + \frac{53,704}{96,354} 2 \cdot 335,59 - \frac{53,704}{96,354^2} 2 \cdot 10369,3 = 51540,$$

$$\frac{l v - z}{2} = 160 \cdot 34066 - 1714494 - \frac{53,704}{96,354} (160 \cdot 170,83 - 2 \cdot 4663,87) - \frac{53,704}{96,354^2} (160 \cdot 15135,3 - 796257) = 3716629.$$

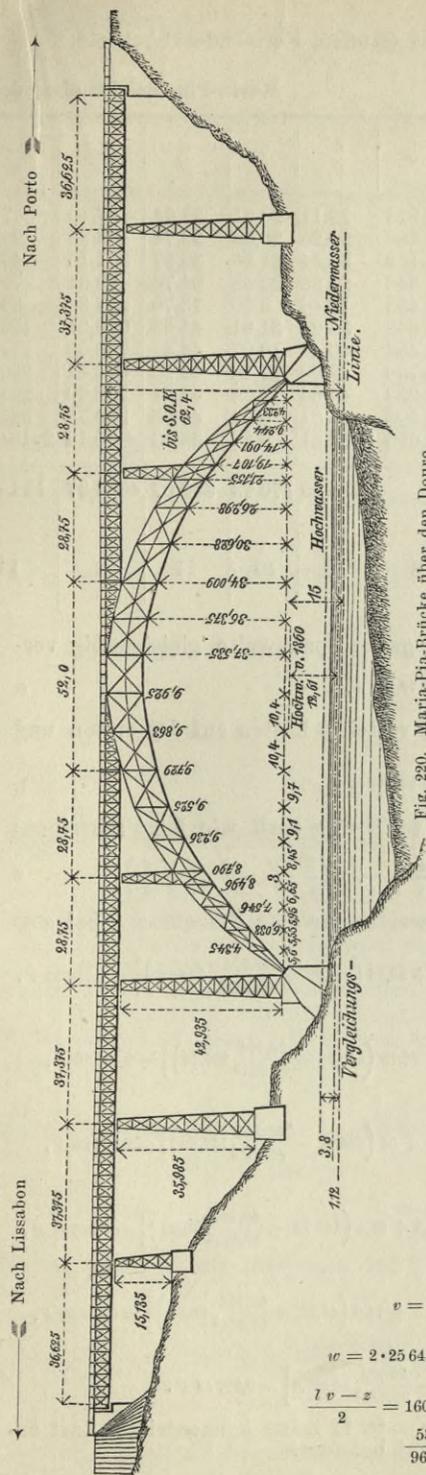


Fig. 220. Maria-Pia-Brücke über den Douro.

Maria-Pia-Brücke über den

Feld	x	y	λ	η	σ	F	J	$\frac{\lambda}{F}$	$\frac{\eta}{F}$	$\frac{\sigma}{F}$	$\frac{\eta x}{F}$	$\frac{\sigma x}{F}$
1	2,80	3,00	5,60	6,01	8,10	0,293	0,246	19,11	20,51	27,64	57,43	77,4
2	8,40	9,00	5,55	5,67	8,15	0,274	0,588	20,26	20,69	29,74	173,80	249,8
3	14,10	14,55	5,95	5,64	8,15	0,264	1,153	22,54	21,36	30,87	301,18	453,3
4	20,40	20,42	6,65	5,70	8,80	0,253	1,848	26,28	22,53	34,78	459,61	709,5
5	25,25	24,20	3,00	2,25	3,80	0,242	2,463	12,40	9,30	15,70	237,34	396,4
6	31,00	28,30	8,45	5,17	9,80	0,236	2,863	35,81	21,91	41,53	679,21	1287,4
7	39,75	32,75	9,10	4,29	10,05	0,225	3,486	40,44	19,07	44,67	758,03	1775,6
8	49,15	36,85	9,70	3,81	10,40	0,222	3,758	43,69	17,16	46,85	843,41	2302,7
9	59,20	40,35	10,40	2,76	10,75	0,223	4,220	46,64	12,38	48,21	732,90	2854,0
10	69,60	42,25	10,40	1,15	10,50	0,228	4,609	45,61	5,04	46,05	350,78	3205,1
11	80,00	42,65	2,5,20	±0,20	2,5,25	0,228	4,696	2,22,81	±0,88	2,23,03	±70,18	2,1842,1
Für den halben Bogen			80	42,65	93,75			335,59	170,83	389,07	4663,87	15135,3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Damit liefert § 46, 10) für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last:

$$H = \frac{3716629}{51540} u = 72,111 u, \quad a$$

und § 47, 6) für verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten auf der ersten und zweiten Trägerhälfte:

$$H = \frac{3716629}{2 \cdot 51540} (u + u') = 36,056 (u + u'). \quad b$$

Die Gleichung § 47, 7) können wir für $a < m$ auch wie folgt schreiben:

$$H = \frac{P}{w} \left[\frac{\sigma}{J} \frac{\sigma x y}{J} - \frac{r-f}{r} \frac{\sigma}{J} \frac{\eta}{F} - \frac{r-f}{r^2} \frac{\sigma}{J} \frac{\sigma x}{F} + a \left(\frac{\sigma}{J} \frac{\sigma y}{J} - \frac{r-f}{r^2} \frac{\sigma}{J} \frac{\sigma}{F} \right) \right]. \quad c$$

Sie liefert mit den betreffenden Tabellenwerten für eine Einzellast P bei $a = 23,75$ m:

$$H = \frac{P}{51540} \left[4758 - \frac{53,704}{96,354} 85,09 - \frac{53,704}{96,354^2} 1472,0 + 23,75 \left(577,32 - \frac{53,704}{96,354^2} 266,04 \right) \right] = 0,35656 P,$$

bei $a = 26,75$ m:

$$H = \frac{P}{51540} \left[5701 - \frac{53,704}{96,354} 94,39 - \frac{53,704}{96,354^2} 1868,4 + 26,75 \left(539,98 - \frac{53,704}{96,354^2} 250,34 \right) \right] = 0,38888 P,$$

bei $a = 54$ m:

$$H = \frac{P}{51540} \left[17469 - \frac{53,704}{96,354} 152,53 - \frac{53,704}{96,354^2} 7234,1 + 54 \left(246,71 - \frac{53,704}{96,354^2} 117,29 \right) \right] = 0,59425 P,$$

bei $a = 64,4$ m:

$$H = \frac{P}{51540} \left[23554 - \frac{53,704}{96,354} 164,91 - \frac{53,704}{96,354^2} 10088,1 + 64,4 \left(143,92 - \frac{53,704}{96,354^2} 69,08 \right) \right] = 0,63342 P,$$

bei $a = 74,8$ m:

$$H = \frac{P}{51540} \left[30252 - \frac{53,704}{96,354} 169,95 - \frac{53,704}{96,354^2} 13293,2 + 74,8 \left(47,68 - \frac{53,704}{96,354^2} 23,03 \right) \right] = 0,65263 P,$$

bei $a = 80$ m:

$$H = \frac{P}{51540} \left[34066 - \frac{53,704}{96,354} 170,83 - \frac{53,704}{96,354^2} 15135,3 \right] = 0,65742 P.$$

Im vorliegenden Falle kann übrigens bei $a = 80$ m keine konzentrierte Last angreifen, weil sich daselbst kein Knotenpunkt befindet.

Douro in Portugal.¹

$\frac{\sigma x^2}{F}$	$\frac{\sigma y}{F}$	$\frac{\sigma}{J}$	$\frac{\sigma x}{J}$	$\frac{\sigma x^2}{J}$	$\frac{\sigma x^3}{J}$	$\frac{\sigma y}{J}$	$\frac{\sigma y^2}{J}$	$\frac{\sigma y x}{J}$	$\frac{\sigma y x^2}{J}$	$\frac{F \lambda^2}{\sigma}$	$\frac{J \lambda^2}{\sigma}$
217	82,9	32,927	92,20	258	723	98,77	296	276	773	1,134	0,95
2098	267,7	13,861	116,43	978	8215	124,74	1123	1048	8803	1,036	2,22
6392	449,2	7,068	99,66	1405	19813	102,85	1496	1450	20445	1,147	5,01
14474	710,2	4,762	97,14	1982	40428	97,24	1986	1984	40474	1,271	9,29
10009	379,9	1,543	38,96	984	24840	37,34	904	943	23811	0,573	5,83
39909	1175,3	3,423	106,11	3289	101974	96,87	2741	3003	93093	1,719	20,86
70580	1462,9	2,883	114,60	4555	181074	94,42	3092	3753	149182	1,854	28,72
113178	1726,4	2,767	136,00	6684	328533	101,98	3758	5012	246340	2,008	34,00
168957	1945,3	2,547	150,78	8926	528436	102,79	4147	6085	360232	2,244	42,46
223075	1945,6	2,278	158,55	11035	768036	96,24	4066	6698	466181	3,349	47,08
2-147368	2-223,9	2-1,118	2-89,44	2-7155	2-572416	2-47,68	2-2034	2-3814	2-305160	1-1,174	2-24,19
796257	10369,3	75,177	1119,87	47251	2574488	1000,92	25643	34066	1714494	16,509	221,01
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Aus § 46, 8) folgt für eine Temperaturänderung τ :

$$H = \frac{160}{51540} E \alpha \tau = \frac{E \alpha \tau}{322,125}, \quad d$$

und für eine Änderung Δl der Spannweite:

$$H = - \frac{E \Delta l}{51540}. \quad e$$

In a) b) sind u, u' pro Meter, in d), e) ist E pro Quadratmeter einzusetzen, Vergleiche mit den Resultaten der einfacheren Formeln siehe S. 326.

Beispiel 95. Zur Anwendung der Formeln für den Horizontalschub von Parabelbogen bei andern Bogen (Dourobrücke in Portugal).

Für den im vorigen Beispiel betrachteten Bogen der Dourobrücke sollen die dort verlangten Werte des Horizontalschubs nach den Formeln für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ berechnet werden.

Mit Rücksicht auf die in der obigen Tabelle gegebenen Werte sind die Mittelwerte von $J \cos \varphi$ und $F \cos \varphi$ ausgedrückt:

$$c = \frac{2}{l} \sum_0^m J \frac{\lambda}{\sigma} \lambda, \quad k = \frac{2}{l} \sum_0^m F \frac{\lambda}{\sigma} \lambda,$$

wonach mit den in Kolumne 25 und 24 für den halben Bogen gegebenen Summen:

$$c = \frac{221,01}{80} = 2,76265 \text{ m}^4, \quad k = \frac{16,509}{80} = 0,20636 \text{ qm},$$

$$\gamma = \frac{c}{k} = \frac{221,01}{16,509} = 13,3872 \text{ qm}.$$

Weiter erhalten wir nun nach den bereits in Beisp. 30 verwendeten Formeln:

$$r = \frac{160}{8 \cdot 42,65} + \frac{42,65}{2} = 96,354 \text{ m},$$

$$\varepsilon = \frac{15 \cdot 13,3872}{8} \left(\frac{53,704}{96,354 \cdot 42,65} \right)^2 = 0,004287,$$

$$\beta = \frac{8 \cdot 42,65}{5 \cdot 53,704} \varepsilon = 1,27067 \varepsilon = 0,005447,$$

¹ Alle Zahlen der Tabelle sind für Meter als Längeneinheit gegeben.

also für eine gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit:

$$H = \frac{0,995461}{1,004287} \frac{160^2}{8 \cdot 42,65} u = 74,370 u,$$

und für verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten von u, u' pro Längeneinheit auf der ersten und zweiten Trägerhälfte:

$$H = \frac{u + u'}{2} 74,370 = 37,165 (u + u'),$$

in beiden Fällen 3,13% größer als die im vorigen Beispiel berechneten möglichst genauen Werte.

Durch beliebige Belastung ergibt sich mit

$$\frac{5}{(1 + \varepsilon) 8 f l^3} = \frac{5 \cdot 160}{1,004287 \cdot 8 \cdot 42,65 \cdot l^4} = \frac{2,33466}{l^4}$$

der Horizontalschub:

$$H = \frac{2,33466}{l^4} \sum_0^l P a (l - a) (0,99455 l^2 + l a - a^2),$$

worin im allgemeinen l^2 anstatt $0,99455 l^2$ gesetzt werden kann. Ohne diese Vernachlässigung von β ergeben sich für Einzellasten

P bei $a = 23,75$ m	$H = 0,33080 P,$	gegen Beisp. 94	$- 7,22\%$
$a = 26,75$ „	$H = 0,36856 P,$		$- 5,23$ „
$a = 54$ „	$H = 0,63589 P,$		$7,01$ „
$a = 64,4$ „	$H = 0,69344 P,$		$9,48$ „
$a = 74,8$ „	$H = 0,72272 P,$		$10,74$ „
$a = 80$ „	$H = 0,72640 P,$		$10,49$ „

Da ferner

$$\frac{15 c}{(1 + \varepsilon) 8 f^2} = \frac{15 \cdot 2,76265}{1,004287 \cdot 8 \cdot 42,65^2} = \frac{1}{352,670},$$

so liefert § 20, 8) für eine Temperaturänderung τ :

$$H = \frac{E \alpha \tau}{352,670}$$

und § 20, 9) für eine Änderung der Spannweite um Δl :

$$H = - \frac{E \Delta l}{352,670 \cdot 160} = - \frac{E \Delta l}{56427},$$

in beiden Fällen 8,66% kleiner als im vorigen Beispiel.

Die hier und in Beispiel 38 nachgewiesenen Differenzen sind für definitive Berechnungen zu groß (vergl. Beispiel 45, S. 168), weshalb man in ähnlichen Fällen, wenn es auf Einfachheit ankommt, zweckmäßiger wie in Beispiel 37 rechnen wird. Siehe die Vergleiche S. 326.

Aufgabe 32. Bogen von beliebiger symmetrischer Achse und beliebigen Querschnitten mit Zugstange.

Den Horizontalschub H des bezeichneten Bogens zu berechnen (Weiteres über Bogen mit Zugstange siehe § 22, Beispiele 50, 116 Aufgabe 23, 24, 38).

Für Zweigelenkbogen von beliebiger symmetrischer Achse hat man nach dem möglichst genauen Ausdrucke § 46, 8) im allgemeinsten Falle:

$$H = \frac{1}{w} \left(V v - \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} S_x + \frac{r-f}{r} \sum_0^l \frac{\eta}{F} P_x + \frac{r-f}{r^2} \sum_0^l \frac{\sigma}{F} S_x + E l \alpha \tau - E \Delta l \right),$$

worin v, w, P_x, S_x, V durch § 46, 5), 6), 7), 9) bestimmt sind. Δl aber ist bei horizontaler Zugstange durch § 22, 2), bei gesprengter Zugstange durch § 22, 3) ausgedrückt. Setzen wir nun

bei horizontaler Zugstange (Fig. 139) $\mu = 1 + \frac{l}{w F_z},$ 1

bei gesprengter Zugstange (Fig. 140) $\mu = 1 + \frac{s}{w F_z},$ 2

unter s , F_z Gesamtlänge und Querschnitt der Zugstange verstanden, so liefert der obige Ausdruck von H in beiden Fällen durch beliebige Belastung:

$$H = \frac{1}{\mu w} \left(Vv - \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} S_x + \frac{r-f}{r} \sum_0^l \frac{\eta}{F} P_x + \frac{r-f}{r^2} \sum_0^l \frac{\sigma}{F} S_x \right), \quad 3$$

und durch beliebige Temperaturänderungen τ , τ_z von Bogen und Zugstange:

$$H = \frac{lE}{\mu w} \alpha (\tau - \tau_z). \quad 4$$

Durch gleiche Temperaturänderungen von Bogen und Zugstange entsteht also kein Horizontalschub. Gleichung 3 ergibt mit den S. 323 angeführten Werten von V , P_x , S_x für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit:

$$H = \frac{lv - z}{2w} \frac{u}{\mu}, \quad 5$$

und mit den S. 325 angeführten V , P_x , S_x für verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten von u , u' pro Längeneinheit auf der ersten und zweiten Bogenhälfte:

$$H = \frac{lv - z}{4w} \frac{u + u'}{\mu}, \quad 6$$

worin z durch § 46, 11) bestimmt.

Für den Fall, daß die Glieder mit F im Nenner gegen die übrigen vernachlässigt werden sollen (vergl. S. 326), tritt an Stelle von 3:

$$H = \frac{1}{\mu w} \left(Vv - \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} S_x \right), \quad 7$$

während hierin wie in 4-6 alsdann v , w , z gemäß § 46, 14), 15) bestimmt sind:

$$v = \sum_0^l \frac{\sigma x y}{J}, \quad w = \sum_0^l \frac{\sigma y^2}{J}, \quad z = \sum_0^l \frac{\sigma y x^2}{J}. \quad 8$$

(Siehe auch S. 327 oben). Alle Formeln gehen mit $\mu = 1$ ($F_z = \infty$ entsprechend) in die für den Zweigelenkbogen mit unnachgiebigen Widerlagern geltenden über.

§ 48. Formänderungen von Bogen mit beliebiger symmetrischer Achse und beliebigen Querschnitten.

Das Allgemeine über die Berechnung der Formänderungen von Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten ist in § 40 gegeben. Im folgenden denken wir uns wie in §§ 46, 47 den Bogen in eine genügende Anzahl Felder geteilt, für welche die Mittelwerte von x , y , J , F , M_x , N_x in Rechnung gezogen werden. Der Fall, daß ein Zwischengelenk vorhanden ist (Bogen mit drei Gelenken), bleibe zunächst ausgeschlossen, er wird unten seine Erledigung finden.

In den Gleichungen 18), 20) des § 40 können nach § 47 für gewisse Fälle die Werte

$$X_2 = \int_0^x \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{dx + y d\varphi}{EF},$$

$$Y_2 = \int_0^x \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{dy - x d\varphi}{EF},$$

$$Z_2 = \int_0^x \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{ds}{EFr}.$$

vernachlässigt werden. Wir wollen zunächst keinen Gebrauch hiervon machen, jedoch wie in §§ 42-47 der Berechnung dieser Integrale auch dann einen Kreisbogen vom Radius

$$r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} \quad 1$$

zugrunde legen, wenn der Bogen nicht kreisförmig ist (vergl. S. 314 oben). Als-
dann hat man § 42 in obigen Ausdrücken:

$$dx + y dy = \frac{r-f}{r} ds, \quad dy - x dy = \frac{l}{2r} ds,$$

und demgemäß nach § 40, 18), 20) mit § 40, 11)–13) und der Bezeichnung

$$W_x = \sum_0^x \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{\sigma}{F} \quad 2$$

die Änderungen von x, y, φ allgemein:

$$\Delta x = -y \Delta \varphi + \frac{1}{E} \sum_0^x \frac{\sigma y}{J} M_x - \frac{r-f}{rE} W_x + \alpha \tau x, \quad 3$$

$$\Delta y = x \Delta \varphi - \frac{1}{E} \sum_0^x \frac{\sigma x}{J} M_x - \frac{l}{2rE} W_x + \alpha \tau y, \quad 4$$

$$\Delta \varphi = \Delta \varphi_0 + \frac{1}{E} \sum_0^x \frac{\sigma}{J} M_x + \frac{1}{rE} W_x. \quad 5$$

Die hierin auftretende Änderung $\Delta \varphi_0$ des Winkels φ_0 (Winkel φ bei $x = 0$) ergibt sich aus 5 mit $x = l$, nachdem die Änderung $\Delta \varphi_l$ des Winkels φ_l (Winkel φ bei $x = l$) aus 4 mit $x = l$ bestimmt ist. Die Ausdrücke lauten, wenn

$$W = \sum_0^l \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{\sigma}{F} \quad 6$$

gesetzt wird:

$$\Delta \varphi_0 = \frac{\Delta k}{l} - \frac{1}{lE} \sum_0^l \frac{\sigma (l-x)}{J} M_x - \frac{W}{2rE}, \quad 7$$

$$\Delta \varphi_l = \frac{\Delta k}{l} + \frac{1}{lE} \sum_0^l \frac{\sigma x}{J} M_x + \frac{W}{2rE}. \quad 8$$

Jedoch ist $\Delta \varphi_0$ für einfache Bogen nur dann zu berechnen, wenn Kämpfergelenke vorhanden sind, da für Bogen ohne Gelenke unter Voraussetzung vollkommen festliegender Endquerschnitte $\Delta \varphi_0, \Delta \varphi_l$ den Wert Null haben, und ohne jene Voraussetzung die angenommenen $\Delta \varphi_0, \Delta \varphi_l$ einzusetzen wären. Wenn die Stützen in gleicher Höhe bleiben, ist natürlich für Bogen mit und ohne Gelenke $\Delta k = 0$.

Wir wollen wie in § 40 noch besonders die Einsenkung in der Bogenmitte, d. h. $e = -\Delta y$ bei $x = \frac{l}{2} = m$ ausdrücken. Nach 4 hat man für dieselbe:

$$e = \frac{1}{E} \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} M_x + \frac{l}{2rE} W_m - \frac{l}{2} \Delta \varphi_m - \alpha \tau f,$$

worin nach 5 die Änderung von φ bei m :

$$\Delta \varphi_m = \Delta \varphi_0 + \frac{1}{E} \sum_0^m \frac{\sigma}{J} M_x + \frac{1}{rE} W_m,$$

sodaß man auch schreiben kann:

$$e = \frac{1}{2E} \sum_0^m \frac{\sigma (2x-l)}{J} M_x - \frac{l}{2} \Delta \varphi_0 - \alpha \tau f. \quad 9$$

Hierin ist für Bogen ohne Gelenke bei vollkommen festsitzenden Endquerschnitten $\Delta \varphi_0 = 0$, während allgemein $\Delta \varphi_0$ durch 7 ausgedrückt ist, womit bei

Beachtung von $\sum_0^l = \sum_0^m + \sum_m^l$ folgt:

$$e = \frac{1}{2E} \left[\sum_0^m \frac{\sigma x}{J} M_x + \sum_m^l \frac{\sigma (l-x)}{J} M_x \right] + \frac{lW}{4rE} - \frac{\Delta k}{2} - \alpha \tau f. \quad 10$$

Setzen wir den gewöhnlichen Fall voraus, daß nicht nur die Bogenachse, sondern die ganze Anordnung des Trägers einschließlich der Felderteilung zur Trägermitte symmetrisch ist. Dann sind in 10 die $\frac{\sigma (l-x)}{J}$ für die Felder von m bis l gleich den $\frac{\sigma x}{J}$ der symmetrisch dazu liegenden Felder von 0 bis m ,

womit sich die Berechnung besonders dann vereinfacht, wenn symmetrisch zur Trägermitte auch gleiche Momente M_x auftreten. So erhält man aus 10 die Einsenkung durch eine beliebige symmetrisch zur Mitte liegende Belastung allein:

$$e = \frac{1}{E} \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} M_x + \frac{l W}{4 r E}, \quad 11$$

was, weil in diesem Falle $\Delta \varphi_m = 0$ und

$$\frac{W}{2} = W_m = \sum_0^m \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{\sigma}{F}, \quad 12$$

auch unmittelbar aus 4 zu entnehmen war. Berücksichtigt man, daß nach § 1, 3) allgemein:

$$M_x = M + Vx - Hy - S_x \text{ mit } S_x = \sum_0^x P(x-a), \quad 13$$

so läßt sich anstatt 11 setzen:

$$e = \frac{1}{E} \left(M \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} + V \sum_0^m \frac{\sigma x^2}{J} - H \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} S_x \right) + \frac{l W}{4 r E}, \quad 14$$

welche Formel mitunter für die Anwendung bequemer ist.

Die Gleichungen 11, 14 können auch bei unsymmetrischer Belastung zur Verwendung kommen, wenn berücksichtigt wird, daß die Einsenkung in der Mitte durch eine beliebige Belastung halb so groß ist als die durch eine mittels Verdoppelung dieser Belastung (Übertragung symmetrisch zur Trägermitte) hergestellte symmetrische Belastung. Formel 12 drückt W bei symmetrischem Träger immer dann aus, wenn die M_x , N_x zur Mitte symmetrisch liegen, also beispielsweise auch bei Berechnung des Einflusses von τ oder Δl allein, doch sind in § 50 noch andere Ausdrücke von W gegeben.

Da die Glieder mit W , W_x in obigen Gleichungen durch Berücksichtigung von X_2 , Y_2 , Z_2 in § 40, 18), 20) entstanden sind, so hat man sie selbstverständlich gleich Null zu setzen, wenn bei Berechnung von H für Bogen mit zwei Gelenken bezw. von H , M , M' für Bogen ohne Gelenk die X_2 bezw. X_2 , Y_2 , Z_2 vernachlässigt werden (vergl. §§ 47, 49).

Es ist nun noch festzustellen, welche Abweichungen gegen vorstehende Formeln eintreten, wenn sich bei $x = m = l/2$ ein Zwischengelenk befindet. Als dann bleiben mit den Bezeichnungen 1, 2 die Ausdrücke 3 bis 5 zwar für x zwischen 0 und m ungeändert, für x zwischen m und l dagegen wären zufolge § 40, 25) den rechten Seiten von 3–5 bezw. ωf , $-\omega m$, ω beizufügen, womit anstatt 7, 8 folgen:

$$\Delta \varphi_0 = \frac{\Delta k}{l} - \frac{1}{l E} \sum_0^l \frac{\sigma(l-x)}{J} M_x - \frac{W}{2 r E} - \frac{\omega}{2}, \quad 15$$

$$\Delta \varphi_l = \frac{\Delta k}{l} + \frac{1}{l E} \sum_0^l \frac{\sigma x}{J} M_x + \frac{W}{2 r E} + \frac{\omega}{2}, \quad 16$$

worin der Sprungwert $\omega = \Delta \varphi_n - \Delta \varphi_v$ der Winkeländerung $\Delta \varphi$ bei m nach 3 mit $x = l$ unter Berücksichtigung von ωf :

$$\omega = \frac{\Delta l}{f} - \frac{1}{E f} \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} M_x + \frac{r-f}{r f E} W - \alpha \tau \frac{l}{f}. \quad 17$$

Gleichung 9 gilt auch für Bogen mit Zwischengelenk, während mit 15, 17 aus 9 an Stelle von 10 folgt:

$$e = \frac{1}{2 E} \left[\sum_0^m \frac{\sigma x}{J} M_x + \sum_m^l \frac{\sigma(l-x)}{J} M_x - \frac{l}{2 f} \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} M_x \right] + \frac{l W}{4 f E} + \frac{l \Delta l}{4 f} - \frac{\Delta k}{2} - \alpha \tau \left(f + \frac{l^2}{4 f} \right). \quad 18$$

Bei vollständig symmetrischer Anordnung des Trägers sind hierin wieder die $\frac{\sigma(l-x)}{J}$ auf der zweiten gleich den $\frac{\sigma x}{J}$ auf der ersten Trägerhälfte, so daß dann die Einsenkung des Dreigelenkbogens durch eine beliebige zur Trägermitte symmetrische Belastung allein anstatt durch 11 ausgedrückt ist:

$$e = \frac{1}{E} \left[\sum_0^m \frac{\sigma x}{J} M_x - \frac{l}{2 f} \sum_0^m \frac{\sigma y}{J} M_x \right] + \frac{l W}{4 f E}, \quad 19$$

worin W durch 12 oder § 50 bestimmt. Durch Einsetzen von M_x nach 13 kann auch die 14 entsprechende Gleichung gebildet werden. Beide Ausdrücke sind in der zu 13, 14 angegebenen Weise auch bei unsymmetrischer Belastung verwendbar.

Im folgenden sollen noch einige speziellere Formeln angeführt werden. Bei Vernachlässigung des Einflusses von X_2, Y_2, Z_2 wäre auch in diesen $W=0$ zu setzen.

Öffnungen ohne Gelenke.

Es gelten die Gleichungen 1 bis 14. Für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit sind

$$v = \frac{ul}{2}, \quad s_x = \frac{ux^2}{2},$$

so daß man nach 14 die Einsenkung durch eine solche ausdrücken kann:

$$e = \frac{u}{2E} \left(2M \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} + l \sum_0^m \frac{\sigma x^2}{J} - \frac{2H}{u} \sum_0^m \frac{\sigma xy}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma x^3}{J} \right) + \frac{lW}{4rE}. \quad 20$$

Hierin sind M, H, W durch § 50, 19)–21) und wenn W vernachlässigt wird M, H auch durch § 49, 18)–21) bestimmt. Eine Temperaturänderung τ allein bewirkt nach 10 mit $M_x = M - Hy$:

$$e = \frac{M}{E} \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} - \frac{H}{E} \sum_0^m \frac{\sigma xy}{J} + \frac{lW}{4rE} - \alpha \tau f, \quad 21$$

worin M, H, W durch § 50, 32)–34) und bei Vernachlässigung von W, M, H auch durch § 49, 36), 37) bestimmt. Durch Änderungen $\Delta l, \Delta k$ der Spannweite und Stützhöhen ohne sonstige Verdrehung der Endquerschnitte folgt ebenfalls nach 10 mit $M_x = M - Hy$:

$$e = \frac{M}{E} \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} - \frac{H}{E} \sum_0^m \frac{\sigma xy}{J} + \frac{lW}{4rE} - \frac{\Delta k}{2}, \quad 22$$

worin M, H, W durch § 50, 39), 40), 34) und bei Vernachlässigung von W die M, H durch § 49, 41), 42) bestimmt. Bei beliebigen $\Delta \varphi_0, \Delta \varphi_l$ würde M_x für symmetrisch zur Trägermitte liegende Querschnitte nicht gleich sein, so daß alsdann 10 mit $M_x = M - Hy$ und M, H, W nach § 50, 35)–38) bzw. § 49, 38)–40) zu verwenden wären.

Öffnungen mit zwei Gelenken.

Es gelten die Gleichungen 1 bis 14 und für gleichmäßig verteilte Last auf der ganzen Spannweite, eine Temperaturänderung τ und beliebige kleine Bewegungen der Stützen die Gleichungen 20 bis 22, sämtlich mit $M=0$, wie auch in den aus § 50 angeführten Ausdrücken von W die Stützenmomente $M=M'=0$ zu setzen wären. Wenn jedoch, wie für Bogen mit zwei Gelenken bei Berechnung von H oft zulässig, die W enthaltenden Glieder auch bei Ermittlung von e vernachlässigt werden (Glieder mit F im Nenner, vergl. 326), dann folgen durch eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit allein:

$$e = \frac{u}{2E} \left(l \sum_0^m \frac{\sigma x^2}{J} - \frac{2H}{u} \sum_0^m \frac{\sigma xy}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma x^3}{J} \right), \quad 23$$

mit H nach § 20, 25), ferner durch eine Temperaturänderung τ allein:

$$e = - \frac{H}{E} \sum_0^m \frac{\sigma xy}{J} - \alpha \tau f, \quad 24$$

mit H nach § 20, 16), und für kleine Bewegungen der Kämpfer, durch welche die Spannweite um Δl vergrößert (bei Verkleinerung Δl negativ) und der Stützpunkt l gegen den Stützpunkt 0 um Δk erhöht wird (bei Erniedrigung Δk negativ):

$$e = - \frac{H}{E} \sum_0^m \frac{\sigma xy}{J} - \frac{\Delta k}{2} \quad 25$$

mit H nach § 20, 17). Inwiefern die erwähnten Vernachlässigungen berechtigt sind, müssen Proberechnungen zeigen (Beispiele 39 u. 96).

Öffnungen mit drei Gelenken.

Die allgemeinen Gleichungen sind S. 333 nach Formel 14 gegeben. Für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit liefert 19 mit M_x nach § 19, 21).

$$e = \frac{u}{2E} \left(l \sum_0^m \frac{\sigma x^2}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma x^3}{J} - \frac{l^2}{4f} \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} \right) - \frac{u l}{4fE} \left(l \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma y x^2}{J} - \frac{l^2}{4f} \sum_0^m \frac{\sigma y^2}{J} \right) + \frac{l W}{4fE}, \quad 26$$

worin W durch § 50, 21) mit $M = 0$, $H = \frac{u l^2}{8f}$ bestimmt (§ 19). Speziell bei parabolischer Achse wäre nach § 19, 22) $M_x = 0$ und damit nach 19:

$$e = \frac{l W}{4fE}.$$

Durch eine Temperaturänderung τ allein entsteht nach 18 wegen $M_x = 0$, $W = 0$:

$$e = -\alpha \tau \left(f + \frac{l^2}{4f} \right), \quad 27$$

und durch kleine Bewegungen der Stützpunkte allein, welchen die zu 25 erwähnten Änderungen Δl , Δk entsprechen:

$$e = \frac{l \Delta l}{4f} - \frac{\Delta k}{2}. \quad 28$$

Beispiel 96. Genauere Berechnung (vergl. Beisp. 39) der Einsenkungen eines Zweigelenkbogens von beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten (Dourobrücke in Portugal).

Für den Bogen der in Beisp. 94 behandelten Dourobrücke die Einsenkung e in der Mitte möglichst genau zu berechnen: a) für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit; b) für verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten von u , u' pro Längeneinheit auf der ersten und zweiten Trägerhälfte; c) für eine zur Mitte symmetrische Belastung, welcher bei den Abszissen $a = 23,75$ m, $26,75$ m, 54 m, $64,4$ m, $74,8$ m die Lasten $P = 63400$ kg, 63400 kg, 62400 kg, 47000 kg, 40500 kg entsprechen; d) für eine einseitige Belastung gleich der im Falle c) auf einer Trägerhälfte angenommenen; e) für eine Temperaturänderung $\tau = \pm 30^\circ$; f) für eine Änderung der Spannweite um $\Delta l = 0,01$ m und eine Senkung des Stützpunktes 0 gegen den Stützpunkt l um $\Delta k = 0,01$ m.

a) Durch eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit hat man nach § 48, 20) mit $M = 0$:

$$e = \frac{u}{2E} \left(l \sum_0^m \frac{\sigma x^2}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma x^3}{J} - \frac{2H}{u} \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} \right) + \frac{l W}{4fE}, \quad 1$$

worin nach § 50, 21):

$$\frac{W}{2} = H \sum_0^m \frac{\lambda}{F} - \frac{H}{r} \sum_0^m \frac{\sigma y}{F} + u \sum_0^m \frac{\eta(m-x)}{F} + \frac{u}{2r} \sum_0^m \frac{\sigma x(l-x)}{F}. \quad 2$$

Mit Rücksicht auf $r = 96,354$ m, die Tabelle S. 328, 329 und den in Beisp. 79 erhaltenen Horizontalschub $H = 72,111 u$ liefert 2:

$$\frac{W}{2} = 72,111 u \left(335,59 - \frac{10\,369,3}{96,354} \right) + u \left(80 \cdot 170,83 - 4663,87 + \frac{80 \cdot 15\,135,3}{96,354} - \frac{796\,257}{2 \cdot 96,354} \right) =$$

$$u (24\,200 - 7833 + 13\,666 - 4664 + 12\,566 - 4132) = 33\,803 u,$$

und bei Beachtung der Tabelle S. 328, 329 Gleichung 1:

$$e = \frac{u}{E} (80 \cdot 47\,251 - 1\,287\,244 - 72,111 \cdot 34\,066) + \frac{80 \cdot 33\,803}{96,354 E},$$

$$e = 36\,303 \frac{u}{E} + 28\,066 \frac{u}{E} = 64\,369 \frac{u}{E},$$

als beispielsweise für $u = 4800$ kg, $E = 2\,000\,000$ kg pro qcm:

$$e = \frac{64\,369 \cdot 4800}{2\,000\,000 \cdot 100^2} = 0,015\,45 \text{ m} = 1,545 \text{ cm}.$$

Bei den in Beisp. 39 zugelassenen Vernachlässigungen (von X_2, Y_2, Z_2 in § 40) hätte 1 mit $H = 72,848 u$ und $W = 0$ wie in Beisp. 39 ergeben $e = 0,269$ cm, um 82,59 % zu klein.

b) Da bei gleichmäßig verteilter Last auf der ganzen Spannweite die Belastungen beider Trägerhälften gleichviel zur Einsenkung in der Trägermitte beitragen, so hat man für verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten von u, u' pro Längeneinheit auf der ersten und zweiten Trägerhälfte mit Rücksicht auf das Resultat unter a):

$$e = 32\,184 \frac{u + u'}{E}.$$

c) Für die unter c) vorgeschriebene symmetrische Belastung hat man nach § 48, 14) mit $M = 0$:

$$e = \frac{1}{E} \left(V \sum_0^m \frac{\sigma x^2}{J} - H \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} S_x \right) + \frac{1W}{4rE}, \quad 3$$

worin nach § 50, 17), 18):

$$\frac{W}{2} = H \sum_0^m \frac{\lambda}{F} - \frac{H}{r} \sum_0^m \frac{\sigma y}{F} + \sum_0^m \frac{\eta}{F} V_x + \frac{1}{r} \sum_0^m \frac{\sigma}{F} (xV - S_x). \quad 4$$

Im vorliegenden Falle sind die Vertikalreaktionen der Kämpfer:

$$V = 2 \cdot 63\,400 + 62\,400 + 47\,000 + 40\,500 = 276\,700 \text{ kg,}$$

und der Horizontalschub nach Beisp. 94:

$$H = 2 (0,35656 \cdot 63\,400 + 0,38888 \cdot 62\,400 + 0,59425 \cdot 62\,400 + 0,63342 \cdot 47\,000 + 0,65263 \cdot 40\,500) = 281\,089 \text{ kg,}$$

während die Gleichungen

$$V_x = V - \sum_0^x P, \quad S_x = \sum_0^x P(x - a) \quad 5$$

für die einzelnen Felder liefern:

bei $x = 2,80$ m	$V_x = 276\,700$ kg	$S_x = 0$
8,40	276 700	0
14,10	276 700	0
20,40	276 700	0
25,25	213 300	63 400 · 1,5 = 95 100 mkg
31,00	149 900	63 400 (7,25 + 4,25) = 729 100 mkg
39,75	149 900	63 400 (16,00 + 13,00) = 1 838 600 „
49,15	149 900	63 400 (25,40 + 22,40) = 3 030 520 „
59,20	87 500	63 400 (35,45 + 32,45) + 62 400 · 5,2 = 4 629 340 mkg
69,60	40 500	63 400 (45,85 + 42,85) + 62 400 · 15,6 + 47 000 · 5,2 = 6 841 420 mkg
80	0	63 400 (56,25 + 53,25) + 62 400 · 26,0 + 47 000 · 15,6 + 40 500 · 5,2 = 9 508 500 mkg.

Mit Rücksicht auf die Tabelle S. 328, 329 erhalten wir weiter:

$\frac{\eta}{F} V_x = 5\,675\,117$	$\frac{\sigma}{F} S_x =$	0	$\frac{\sigma x}{J} S_x =$	0
5 724 923		0		0
5 910 312		0		0
6 234 051		0		0
1 983 690	1 493 070		3 705 096	
3 284 309	30 279 523		77 364 801	
2 858 593	82 130 262		210 703 560	
2 572 284	141 979 862		412 150 720	
1 083 250	223 180 481		698 011 885	
204 120	315 047 391		1 084 707 141	
0	218 980 755		850 440 240	
Summe	35 510 649	1 013 091 344	3 337 083 443	

Aus 4 ergibt sich nun:

$$\frac{W}{2} = 281089 \left(335,59 - \frac{10369,3}{96,354} \right) - 35510649 + \frac{276700}{96,354} 15135,3 - \frac{1013091344}{96,354}$$

$$= 64054530 + 35510639 + 43464075 - 10514264 = 132514990,$$

und damit nach 3:

$$e = \frac{1}{E} (276700 \cdot 47251 - 281089 \cdot 34066 - 3337083443) + \frac{80 \cdot 132514990}{96,354},$$

$$e = \frac{161690383}{E} + \frac{110023447}{E} = \frac{271713830}{E},$$

also mit $E = 2000000$ kg pro qcm:

$$e = \frac{271713830 \cdot 100}{2000000 \cdot 100^2} \text{ cm} = 1,359 \text{ cm}.$$

Bei den in Beispiel 39 zugelassenen Vernachlässigungen hätten wir aus 3 mit $H = 283969$ kg und $W = 0$ erhalten $e = 0,318$ cm (in Beisp. 39 ergab sich bei anderem Vorgehen 0,320 cm), um 76,60% weniger.

d) Da bei symmetrisch zur Trägermitte liegender Belastung die Belastungen beider Trägerhälften gleichviel zur Einsenkung in der Trägermitte beitragen, so hat man für die unter d) erwähnte einseitige Belastung:

$$e = \frac{135856915}{E}.$$

e) Durch eine beliebige Temperaturänderung τ entsteht nach § 48, 21) mit $M = 0$ die Einsenkung:

$$e = -\frac{H}{E} \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} + \frac{l W}{4 r E} - \alpha \tau f, \quad 6$$

worin nach § 50, 34):

$$\frac{W}{2} = H \sum_0^m \frac{\lambda}{F} - \frac{H}{r} \sum_0^m \frac{\sigma y}{F}. \quad 7$$

Mit Rücksicht auf die Tabelle S. 328, 329 und den in Beispiel 94 berechneten Horizontalschub $H = \frac{E \alpha \tau}{322,125}$ ergibt sich:

$$\frac{W}{2} = \frac{E \alpha \tau}{322,125} \left(335,59 - \frac{10369,3}{96,354} \right) = \frac{E \alpha \tau}{1,4130},$$

also nach 6:

$$e = -\frac{\alpha \tau \cdot 34066}{322,125} + \frac{80 \alpha \tau}{96,354 \cdot 1,4130} - 42,65 \alpha \tau = -147,816 \alpha \tau,$$

und mit $\alpha = 0,000012$, $\tau = \pm 30^\circ$:

$$e = \mp 5,321 \text{ cm}.$$

Bei den in Beisp. 39 zugelassenen Vernachlässigungen hätten wir nach 6 mit $H = \frac{E \alpha \tau}{320,537}$ und $W = 0$ wie in Beispiel 39 erhalten $e = \mp 5,361$ cm, um 0,75% mehr.

f) Durch eine Änderung der Spannweite um Δl und eine Erhöhung des Stützpunktes l gegen den Stützpunkt 0 um Δk hat man nach § 48, 22) mit $M = 0$:

$$e = -\frac{H}{E} \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} + \frac{l W}{4 r E} - \frac{\Delta k}{2}, \quad 8$$

worin nach § 50, 38) W durch 7 bestimmt. Da nach Beisp. 94 durch Δl entsteht $H = -\frac{E \Delta l}{51540}$, während Δk keinen Horizontalschub erzeugt, so folgt:

$$\frac{W}{2} = -\frac{E \Delta l}{51540} \left(335,59 - \frac{10369,3}{96,354} \right) = -\frac{E \Delta l}{226,079},$$

und nach 8:

$$e = \frac{\Delta l \cdot 34066}{51540} - \frac{80 \cdot \Delta l}{96,354 \cdot 226,079} - \frac{\Delta k}{2},$$

$$e = 0,6573 \Delta l - 0,5 \Delta k,$$

und speziell für $\Delta l = 2$ cm $e = 1,3146$ cm.

Bei den in Beisp. 39 zugelassenen Vernachlässigungen hätten wir nach 8 mit $H = -\frac{E\Delta l}{51286}$, $W = 0$ wie in Beispiel 39 erhalten $e = 1,3284$ cm, um 1,05% zu groß.

Die obigen Vergleiche zeigen, daß die in Beisp. 39 zugelassenen Vernachlässigungen zwar bei Berechnung der Einsenkungen durch Temperaturänderungen und Stützenbewegungen, nicht aber bei Ermittlung der Einsenkungen durch Belastung berechtigt waren (vergl. die Bemerkungen zu Beispiel 39). Ebensovienig sind die Formeln zur Berechnung der Einsenkung von Parabelbogen mit konstantem $J \cos \varphi$ für den Dourobogen genügend (vergl. Beisp. 97).

Beispiel 97. Zur Anwendung der Formeln für die Einsenkungen von Parabelbogen bei andern Bogen (Dourobücke in Portugal).

Die in Beisp. 39, 96 verlangten Einsenkungen, welche dort nach den Gleichungen des § 48 berechnet wurden, für den Fall festzustellen, daß die Formeln für Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ zur Verwendung kommen sollten.

a) Für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit wäre die Einsenkung in der Trägermitte nach § 20, 58):

$$e = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{5 u l^4}{384 E c}, \quad 1$$

wonach im vorliegenden Falle mit $l = 160$ m, $c = 2,76265$ m⁴, $\varepsilon = 0,004287$ (Beisp. 95):

$$e = \frac{0,004287}{1,004287} \frac{5 u 160^4}{384 \cdot 2,76265 E} = 13185 \frac{u}{E} = \frac{13185 u}{2000000 \cdot 100^2} \text{ m} = 0,0000659 u \text{ cm},$$

und für $u = 4800$ kg:

$$e = 0,316 \text{ cm},$$

d. i. 17,47% größer als in Beisp. 39, aber 78,55% kleiner als in Beisp. 96.

b) Durch eine beliebige symmetrische Belastung entstände nach § 20, 56):

$$e = \frac{1}{24 E c} \left[\sum_0^m P a (3 l^2 - 4 a^2) - H \frac{5 f l^2}{2} \right], \quad 2$$

worin zufolge § 20, 35):

$$H \frac{5 f l^2}{2} = \frac{25}{(1 + \varepsilon) 8 l} \sum_0^m P a (l - a) (l^2 + l a - a^2) \quad 3$$

und in unserm Falle:

$$H \frac{5 f l^2}{2} = \frac{1}{51,4195} \sum_0^m P a (l - a) (l^2 + l a - a^2).$$

Wir können damit schreiben:

$$e = \frac{1}{66,3036 E} \sum_0^m P a \left(3 l^2 - 4 a^2 - \frac{(l - a) (l^2 + a (l - a))}{51,4195} \right).$$

Da nun angenommen sind:

bei	$a = 23,375$	$26,375$	54	$64,4$	$74,8$ m
	$P = 63400$	63400	62400	47000	40500 kg,

so liefert die letzte Gleichung:

$$e = \frac{1}{66,3036 E} (-63400 \cdot 23,75 \cdot 1865 - 63400 \cdot 26,75 \cdot 1639 + 62400 \cdot 54 \cdot 562 + 47000 \cdot 64,4 \cdot 11,69 + 40500 \cdot 74,8 \cdot 1442) = \frac{59870000}{E} = \frac{59870000}{2000000 \cdot 100^2} \text{ m}$$

$$e = 0,299 \text{ cm},$$

6,56% kleiner als in Beisp. 39, aber 78,00% kleiner als in Beisp. 96.

c) Die Einsenkung durch eine beliebige Temperaturänderung τ wäre nach § 20, 61):

$$e = -\alpha \tau \left(f + \frac{25}{128 f} \frac{l^2}{1 + \varepsilon} \right), \quad 4$$

woraus mit $f = 42,65$ m:

$$e = -\alpha \tau \left(42,65 + \frac{25 \cdot 160^2}{128 \cdot 42,65 \cdot 1,004287} \right) = -159,383 \alpha \tau,$$

und mit $\alpha = 0,000012$:

$$e = -0,001913 \tau \text{ m} = -0,1913 \tau \text{ cm},$$

beispielsweise für $\tau = \pm 30^\circ$: $e = \mp 5,739 \text{ cm}$,

7,02% größer als in Beisp. 25 und 7,83% größer als in Beisp. 96.

d) Durch eine Änderung der Spannweite um Δl ergäbe sich nach § 20, 63):

$$e = \frac{25 l}{128 f} \frac{\Delta l}{1 + \varepsilon}, \quad 5$$

also in unserm Falle:

$$e = \frac{25 \cdot 160}{128 \cdot 42,65} \frac{\Delta l}{1,004287} = 0,7296 \Delta l,$$

und beispielsweise für $\Delta l = 2 \text{ cm}$:

$$e = 1,459 \text{ cm},$$

9,86% größer als in Beisp. 39 und 11,00% größer als in Beisp. 96.

Vergl. die Bemerkungen zu Beisp. 39, S. 140.

§ 49. Horizontalschub und Endmomente des Bogens ohne Gelenke mit beliebiger symmetrischer Achse und beliebigen Querschnitten.

Nach § 46, 3)–5) hat man für $x = l$ mit Rücksicht auf $y = k = 0$ bei Vernachlässigung von W_x (siehe am Schlusse dieses Paragraphen, S. 343):

$$\Delta l = \alpha \tau l + \frac{1}{E} \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} M_x,$$

$$\Delta k = l \Delta \varphi_l - \frac{1}{E} \sum_0^l \frac{\sigma x}{J} M_x,$$

$$\Delta \varphi_l = \Delta \varphi_0 + \frac{1}{E} \sum_0^l \frac{\sigma}{J} M_x,$$

und durch Substitution von

$$M_x = M + Vx - Hy - \frac{x}{0} P(x - a)$$

mit der schon in § 46 angewandten Bezeichnung:

$$S_x = \sum_0^x P(x - a) \quad 1$$

im allgemeinsten Falle (für beliebige Belastung, beliebige Temperaturänderung und beliebige Bewegungen der Stützen):

$$E \Delta l = E l \alpha \tau + M \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} + V \sum_0^l \frac{\sigma x y}{J} - H \sum_0^l \frac{\sigma y^2}{J} - \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} S_x, \quad 2$$

$$E \Delta k = E l \Delta \varphi_l - M \sum_0^l \frac{\sigma x}{J} - V \sum_0^l \frac{\sigma x^2}{J} + H \sum_0^l \frac{\sigma x y}{J} + \sum_0^l \frac{\sigma x}{J} S_x, \quad 3$$

$$E \Delta \varphi_l = E \Delta \varphi_0 + M \sum_0^l \frac{\sigma}{J} + V \sum_0^l \frac{\sigma x}{J} - H \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} - \sum_0^l \frac{\sigma x}{J} S_x. \quad 4$$

Diese drei Gleichungen liefern H , V , M , womit wegen

$$V = \frac{1}{l} (M' - M + S) \text{ mit } S = \sum_0^l P(l - a) \quad 5$$

auch M' bestimmt ist. Für $M = M'$ genügen die beiden ersten Gleichungen. Dies trifft insbesondere für den Einfluß symmetrischer Belastung, einer Temperaturänderung τ und einer Änderung Δl der Spannweite zu. Wenn die Endquerschnitte als unwandelbar festliegend gelten, dann hat man in 2–4:

$$\Delta l = 0, \quad \Delta k = 0, \quad \Delta \varphi_0 = 0, \quad \Delta \varphi_l = 0. \quad 6$$

Soll jedoch der Einfluß irgendwelcher Änderungen von l , k , φ_0 , φ_l berücksichtigt werden, dann sind die betreffenden Werte derselben einzusetzen (§ 40).

Im weiteren wollen wir voraussetzen, daß nicht nur die Bogenachse, sondern die ganze Anordnung des Bogens einschließlich der Felderteilung zur Mitte symmetrisch ist. Dann treten die zu Beginn des § 47 erwähnten Vereinfachungen ein, so daß

$$\begin{aligned} \frac{l}{0} \frac{\sigma y}{J} &= 2 \frac{m}{0} \frac{\sigma y}{J}, & \frac{l}{0} \frac{\sigma x y}{J} &= l \frac{m}{0} \frac{\sigma y}{J}, & \frac{l}{0} \frac{\sigma y^2}{J} &= 2 \frac{m}{0} \frac{\sigma y^2}{J}, \\ \frac{l}{0} \frac{\sigma}{J} &= 2 \frac{m}{0} \frac{\sigma}{J}, & \frac{l}{0} \frac{\sigma x}{J} &= l \frac{m}{0} \frac{\sigma}{J}. \end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$A = \frac{m}{0} \frac{\sigma}{J}, \quad B = \frac{m}{0} \frac{\sigma y}{J}, \quad C = \frac{m}{0} \frac{\sigma y^2}{J}, \quad 7$$

$$D = \frac{l}{0} \frac{\sigma x^2}{J} = A l^2 - 2 l \frac{m}{0} \frac{\sigma x}{J} + 2 \frac{m}{0} \frac{\sigma x^2}{J}, \quad 8$$

welche Werte nur von den Querschnitten und der Achsform abhängen, während S_x , S nach 1, 5 Funktionen der Belastung sind, so gehen die Gleichungen 2 und 4 in die folgenden über:

$$E \Delta l = (M + M' + S) B - 2 H C - \frac{l}{0} \frac{\sigma y}{J} S_x + E l \alpha \tau, \quad 9$$

$$E \Delta \varphi_l = (M + M' + S) A - 2 H B - \frac{l}{0} \frac{\sigma}{J} S_x + E \Delta \varphi_0, \quad 10$$

während durch Addition der mit l multiplizierten Gleichung 4 zu der mit 2 multiplizierten Gleichung 3 folgt:

$$l E (2 \Delta k - l \Delta \varphi_0 - l \Delta \varphi_l) = (M' - M + S) (A l^2 - 2 D) + l \frac{l}{0} \frac{\sigma}{J} (2x - l) S_x. \quad 11$$

Aus diesen drei Gleichungen können H , M , M' berechnet werden. Wir wollen daraus einige direkt verwendbare Spezialformeln ableiten.

Verschiedene Belastungen.

Für eine beliebige Belastung allein erhält man mit $\tau = 0$, $\Delta l = \Delta k = 0$, $\Delta \varphi_0 = \Delta \varphi_l = 0$:

$$H = \frac{1}{2} \frac{1}{A C - B^2} \frac{l}{0} \frac{\sigma}{J} S_x (B - A y), \quad 12$$

$$M + M' + S = \frac{1}{A C - B^2} \frac{l}{0} \frac{\sigma}{J} S_x (C - B y), \quad 13$$

$$M - M' - S = \frac{l}{2 D - A l^2} \frac{l}{0} \frac{\sigma}{J} S_x (l - 2x). \quad 14$$

Die Summen auf der rechten Seite können nach Bedürfnis zerfällt werden, so daß z. B.

$$\frac{l}{0} \frac{\sigma}{J} S_x (B - A y) = B \frac{l}{0} \frac{\sigma}{J} S_x - A \frac{l}{0} \frac{\sigma y}{J} S_x.$$

Für eine beliebige symmetrische Belastung genügt zur Bestimmung der Momente $M = M'$ die Gleichung 13 allein. Da jedoch

$$\begin{aligned} S_x &= \sum_0^x P(x-a) = x \sum_0^x P - \sum_0^x P a \\ &= x \left(\sum_0^l P - \sum_x^l P \right) - \left(\sum_0^l P a - \sum_x^l P a \right) \\ &= \sum_0^l P (l-a) - (l-x) \sum_0^l P + (l-x) \sum_x^l P - \sum_x^l P (l-a), \end{aligned}$$

so hat man alsdann für je zwei symmetrisch zur Mitte bei x und x' liegende Felder wegen

$$x' = l - x, \quad l - x' = x, \quad S = \sum_0^l P (l-a) = l \sum_0^m P \quad (\text{vergl. S. 79});$$

$$\begin{aligned} S_x + S'_x &= S_x + S - x \sum_0^l P + x \sum_0^x P - \sum_0^x P a \\ &= S_x + S - \frac{2x}{l} S + \sum_0^x P(x-a) \\ &= 2 S_x + S - \frac{2x}{l} S, \end{aligned}$$

und damit aus 12, 13 bei Beachtung von 7 für beliebige symmetrische Belastung:

$$H = \frac{1}{AC - B^2} \sum_0^m \frac{\sigma}{J} \left(\frac{x}{l} S - S_x \right) (Ay - B), \quad 15$$

$$M = M' = \frac{1}{AC - B^2} \sum_0^m \frac{\sigma}{J} \left(\frac{x}{l} S - S_x \right) (By - C). \quad 16$$

In diesen Gleichungen kann man auch setzen:

$$\frac{x}{l} S - S_x = \sum_0^x P a + x \sum_0^m P, \quad 17$$

doch ist zu beachten, daß eine etwa gerade bei $a = x$ liegende Last P nur in einer (beliebigen) der beiden Summen rechts aufgenommen werden darf. Aus 15, 16 ergeben sich beispielsweise für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit mit

$$S_x = \frac{u x^2}{2}, \quad S = \frac{u l^2}{2},$$

(§ 18) der Horizontalschub und die Endmomente:

$$H = \frac{u}{2(AC - B^2)} \sum_0^m \frac{\sigma}{J} x(l-x) (Ay - B), \quad 18$$

$$M = M' = \frac{u}{2(AC - B^2)} \sum_0^m \frac{\sigma}{J} x(l-x) (By - C), \quad 19$$

wofür man, die Summen Σ zerfallend, auch setzen kann:

$$H = \frac{u}{2(AC - B^2)} \left[A \sum_0^m \frac{\sigma x(l-x)y}{J} - B \sum_0^m \frac{\sigma x(l-x)}{J} \right], \quad 20$$

$$M = M' = \frac{u}{2(AC - B^2)} \left[B \sum_0^m \frac{\sigma x(l-x)y}{J} - C \sum_0^m \frac{\sigma x(l-x)}{J} \right]. \quad 21$$

Für eine Einzellast P an beliebiger Stelle a hat man in 12–14 nach 5 $S = P(l-a)$, und nach 1:

von $x = 0$ bis $x = a$ $S_x = 0,$

„ $x = a$ „ $x = l$ $S_x = P(x-a),$

womit wir zunächst erhalten:

$$H = \frac{1}{2} \frac{P}{AC - B^2} \sum_a^l \frac{\sigma(x-a)}{J} (B - Ay), \quad 22$$

$$M + M' + P(l-a) = \frac{P}{AC - B^2} \sum_a^l \frac{\sigma(x-a)}{J} (C - By), \quad 23$$

$$M - M' - P(l-a) = \frac{Pl}{2D - Al^2} \sum_a^l \frac{\sigma(x-a)}{J} (l - 2x). \quad 24$$

Hierfür können wir auch schreiben:

$$H = \frac{1}{2} \frac{P}{AC - B^2} \left[\sum_a^l \frac{\sigma x}{J} (B - Ay) - a \sum_a^l \frac{\sigma}{J} (B - Ay) \right], \quad 25$$

$$M + M' + P(l-a) = \frac{P}{AC - B^2} \left[\sum_a^l \frac{\sigma x}{J} (C - By) - a \sum_a^l \frac{\sigma}{J} (C - By) \right], \quad 26$$

$$M - M' - P(l-a) = \frac{Pl}{2D - Al^2} \left[\sum_a^l \frac{\sigma x}{J} (l - 2x) - a \sum_a^l \frac{\sigma}{J} (l - 2x) \right]. \quad 27$$

Weiter ergeben sich bei beliebigem α in 25:

$$\begin{aligned} \sum_a^l \frac{\sigma x}{J} (B - A y) &= \sum_0^l \frac{\sigma x}{J} (B - A y) - \frac{\alpha}{0} \frac{\sigma x}{J} (B - A y) = \\ \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} (B - A y) + \sum_0^m \frac{\sigma(l-x)}{J} (B - A y) - \frac{\alpha}{0} \frac{\sigma x}{J} (B - A y) &= \\ l B \sum_0^m \frac{\sigma}{J} - l A \sum_0^m \frac{\sigma y}{J} - \frac{\alpha}{0} \frac{\sigma x}{J} (B - A y) &= - \frac{\alpha}{0} \frac{\sigma x}{J} (B - A y), \\ \sum_a^l \frac{\sigma}{J} (B - A y) &= \sum_0^l \frac{\sigma}{J} (B - A y) - \frac{\alpha}{0} \frac{\sigma}{J} (B - A y) = 2 \sum_0^m \frac{\sigma}{J} (B - A y) - \frac{\alpha}{0} \frac{\sigma}{J} (B - A y) = \\ 2 B \sum_0^m \frac{\sigma}{J} - 2 A \sum_0^m \frac{\sigma y}{J} - \frac{\alpha}{0} \frac{\sigma}{J} (B - A y) &= - \frac{\alpha}{0} \frac{\sigma}{J} (B - A y), \end{aligned}$$

und in analoger Weise in 26:

$$\begin{aligned} \sum_a^l \frac{\sigma x}{J} (C - B y) &= l (A C - B^2) - \sum_0^a \frac{\sigma x}{J} (C - B y), \\ \sum_a^l \frac{\sigma}{J} (C - B y) &= 2 (A C - B^2) - \sum_0^a \frac{\sigma}{J} (C - B y), \end{aligned}$$

sowie in 27:

$$\begin{aligned} \sum_a^l \frac{\sigma x}{J} (l - 2x) &= A l^2 - 2 D - \sum_0^a \frac{\sigma x}{J} (l - 2x), \\ \sum_a^l \frac{\sigma}{J} (l - 2x) &= - \sum_0^a \frac{\sigma}{J} (l - 2x). \end{aligned}$$

Die Gleichungen 25–27 für eine Einzellast P an beliebiger Stelle α nehmen damit folgende Formen an:

$$H = \frac{1}{2} \frac{P}{A C - B^2} \left[\alpha \sum_0^a \frac{\sigma}{J} (B - A y) - \sum_0^a \frac{\sigma x}{J} (B - A y) \right], \quad 28$$

$$M + M' + P \alpha = \frac{P}{A C - B^2} \left[\alpha \sum_0^a \frac{\sigma}{J} (C - B y) - \sum_0^a \frac{\sigma x}{J} (C - B y) \right], \quad 29$$

$$M - M' + P \alpha = \frac{P l}{2 D - A l^2} \left[\alpha \sum_0^a \frac{\sigma}{J} (l - 2x) - \sum_0^a \frac{\sigma x}{J} (l - 2x) \right]. \quad 30$$

Die Summen Σ in den Klammern kann man wieder nach Bedürfnis zerfällen oder vereinigen. In letzterem Falle erhält man:

$$H = \frac{1}{2} \frac{P}{A C - B^2} \sum_0^a \frac{\sigma(\alpha - x)}{J} (B - A y), \quad 31$$

$$M + M' + P \alpha = \frac{P}{A C - B^2} \sum_0^a \frac{\sigma(\alpha - x)}{J} (C - B y), \quad 32$$

$$M - M' + P \alpha = \frac{P l}{2 D - A l^2} \sum_0^a \frac{\sigma(\alpha - x)}{J} (l - 2x). \quad 33$$

Die Gleichungen 22–33 ergeben natürlich für $\alpha = 0$ und $\alpha = l$ $H = 0$, $M = M' = 0$, und beispielsweise für eine in der Trägermitte angreifende Last P mit $\alpha = l/2 = m$ bei Beachtung von 7, 8:

$$H = \frac{P}{2(A C - B^2)} \left(A \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - B \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} \right), \quad 34$$

$$M = M' = \frac{P}{2(A C - B^2)} \left(B \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - C \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} \right). \quad 35$$

Temperaturänderungen.

Für eine beliebige Temperaturänderung τ (bei Zunahme τ positiv) des Bogens ergeben die Gleichungen 9, 10 mit $S = S_x = 0$, $\Delta l = \Delta k = 0$, $\Delta \varphi_0 = \Delta \varphi_l = 0$:

$$H = \frac{A E l}{A C - B^2} \frac{\alpha \tau}{2}, \quad 36$$

$$M = M' = \frac{B E l}{A C - B^2} \frac{\alpha \tau}{2} = \frac{B}{A} H. \quad 37$$

Bewegungen der Kämpfer.

Für irgendwelche kleine Bewegungen der Bogenenden ohne Abheben der Endquerschnitte von den Kämpfern folgen aus 9–11 mit $S = S_x = 0$ und $\tau = 0$:

$$H = - \frac{A \Delta l + B (\Delta \varphi_0 - \Delta \varphi_l) E}{A C - B^2} \frac{E}{2}, \quad 38$$

$$M + M' = - \frac{B \Delta l + C (\Delta \varphi_0 - \Delta \varphi_l) E}{A C - B^2} E, \quad 39$$

$$M - M' = \frac{2 \Delta k - l (\Delta \varphi_0 + \Delta \varphi_l) E l}{2 D - A l^2} E l. \quad 40$$

Wenn jedoch nur eine Änderung Δl der Spannweite (für Zunahme Δl positiv), keine Höhenänderung der Stützen und keine Verdrehungen der Endquerschnitte stattgefunden haben, oder doch nur solche, für welche (vergl. S. 308 oben):

$$\Delta \varphi_0 = \Delta \varphi_l = \frac{\Delta k}{l},$$

dann sind einfacher ausgedrückt:

$$H = - \frac{A}{A C - B^2} \frac{E \Delta l}{2}, \quad 41$$

$$M = M' = - \frac{B}{A C - B^2} \frac{E \Delta l}{2} = \frac{B}{A} H. \quad 42$$

Die in diesem Paragraphen zugelassene Vernachlässigung von W_x , d. h. von X_2, Y_2, Z_2 in § 40, welche sich in § 47 für die Berechnung des Horizontalschubs H gewisser Zweigelenkbogen als zulässig erwiesen hat, entspricht der Vernachlässigung von ε bei Parabelbogen (vergl. §§ 43, 51). — Hierzu Beisp. 63.

§ 50. Genauere Formeln zur Berechnung des Horizontalschubs und der Endmomente des Bogens ohne Gelenke mit beliebiger symmetrischer Achse und beliebigen Querschnitten.

Im folgenden soll von den im vorigen Paragraphen zugelassenen Vernachlässigungen abgesehen werden. Nach § 48, 3)–5) hat man für $x = l$ mit $y = k = 0$:

$$\Delta l = \alpha \tau l + \frac{1}{E} \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} M_x - W \frac{r-f}{r E},$$

$$\Delta k = l \Delta \varphi_l - \frac{1}{E} \sum_0^l \frac{\sigma x}{J} M_x - W \frac{l}{2 r E},$$

$$\Delta \varphi_l = \Delta \varphi_0 + \frac{1}{E} \sum_0^l \frac{\sigma}{J} M_x + W \frac{1}{r E}, \quad \text{worin:}$$

$$W = \sum_0^l \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{\sigma}{E}.$$

Substituieren wir in diese Gleichungen entsprechend § 21, 4), 5), 6) und Fig. 218:

$$M_x = M + V x - H y - \sum_0^x P(x-a),$$

$$N_x = V_x \sin \varphi + H \cos \varphi = \left(V - \sum_0^x P \right) \frac{\eta}{\sigma} + H \frac{\lambda}{\sigma},$$

so folgen mit den bereits in § 46 angewandten Bezeichnungen

$$P_x = \sum_0^x P, \quad S_x = \sum_0^x P(x-a) \quad 1$$

für beliebige Belastungen, eine beliebige Temperaturänderung τ und beliebige kleine Bewegungen der Stützen (selbstverständlich ohne Abheben der Endquerschnitte von den Kämpfern):

$$E \Delta l = E l \alpha \tau + M \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} + V \sum_0^l \frac{\sigma x y}{J} - H \sum_0^l \frac{\sigma y^2}{J} - \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} S_x - W \frac{r-f}{r}, \quad 2$$

$$E \Delta k = E l \Delta \varphi_l - M \sum_0^l \frac{\sigma x}{J} - V \sum_0^l \frac{\sigma x^2}{J} + H \sum_0^l \frac{\sigma x y}{J} + \sum_0^l \frac{\sigma x}{J} S_x - W \frac{l}{2r}, \quad 3$$

$$E \Delta \varphi_l = E \Delta \varphi_0 + M \sum_0^l \frac{\sigma}{J} + V \sum_0^l \frac{\sigma x}{J} - H \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} - \sum_0^l \frac{\sigma}{J} S_x + W \frac{1}{r}, \quad 4$$

mit

$$W = r \sum_0^l \frac{\eta}{F} + \frac{V}{r} \sum_0^l \frac{\sigma x}{F} + H \sum_0^l \frac{\lambda}{F} - \frac{H}{r} \sum_0^l \frac{\sigma y}{F} + \frac{M}{r} \sum_0^l \frac{\sigma}{F} - \sum_0^l \frac{\eta}{F} P_x - \frac{1}{r} \sum_0^l \frac{\sigma}{F} S_x. \quad 5$$

Die Gleichungen 2–4 liefern H, V, M , womit wegen

$$V = \frac{1}{l} (M' - M + S) \quad \text{mit } S = \sum_0^l P(l - a) \quad 6$$

auch M' bestimmt ist. Für $M' = M$, also beispielsweise für den Einfluß symmetrischer Belastungen, einer Temperaturänderung τ und einer Änderung Δl der Spannweite genügen die Gleichungen 2, 3. Wenn die Endquerschnitte unwandelbar festliegen, hat man in 2–4:

$$\Delta l = 0, \quad \Delta k = 0, \quad \Delta \varphi_l = 0, \quad \Delta \varphi_0 = 0. \quad 7$$

Soll jedoch der Einfluß irgendwelcher Änderungen von $l, k, \varphi_0, \varphi_l$ ermittelt werden, dann sind die betreffenden Werte von $\Delta l, \Delta k, \Delta \varphi_0, \Delta \varphi_l$ einzusetzen (§ 40).

Im weiteren wollen wir wieder voraussetzen, daß nicht nur die Bogenachse, sondern die ganze Anordnung des Bogens einschließlich der Felderteilung zur Bogenmitte symmetrisch ist. Dann treten die zu Beginn des § 47 erwähnten Vereinfachungen ein, wonach wir mit den Bezeichnungen § 49, 7), 8) und

$$W = 2 H \sum_0^m \frac{\lambda}{F} - \frac{2 H}{r} \sum_0^m \frac{\sigma y}{F} + \frac{M + M' + S}{r} \sum_0^m \frac{\sigma}{F} - \sum_0^m \frac{\eta}{F} P_x - \frac{1}{r} \sum_0^m \frac{\sigma}{F} S_x \quad 8$$

aus 2, 4 erhalten:

$$E \Delta l = (M + M' + S) B - 2 H C - \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} S_x - \frac{W}{r} (r - f) + E l \alpha \tau, \quad 9$$

$$E \Delta \varphi_l = (M + M' + S) A - 2 H B - \sum_0^l \frac{\sigma}{J} S_x + \frac{W}{r} + E \Delta \varphi_0, \quad 10$$

während durch Addition der mit l multiplizierten Gleichung 4 zu der mit 2 multiplizierten Gleichung 3 folgt:

$$l E (2 \Delta k - l \Delta \varphi_0 - l \Delta \varphi_l) = (M - M' - S) (2 D - A l^2) - l \sum_0^l \frac{\sigma}{J} (l - 2 x) S_x. \quad 11$$

Aus den Gleichungen 9–11 können H, M, M' für alle Fälle berechnet werden, während für $M' = M$ die Gleichungen 9, 10 genügen.

Wenn außer einer Änderung Δl der Spannweite keine Bewegungen der Stützen oder doch nur solche eintreten, für welche

$$\Delta \varphi_0 = \Delta \varphi_l = \frac{\Delta k}{l}$$

ist, dann fallen $\Delta k, \Delta \varphi_l$ aus den Gleichungen 10, 11, wonach die erwähnten Änderungen keinen Einfluß auf H, M, M' ausüben, wie sich dies schon beim Parabelbogen ergab (S. 144, vergl. S. 308 oben).

Verschiedene Belastungen.

Aus 9–11 ergeben sich für eine beliebige Belastung allein mit $\tau = 0, \Delta l = \Delta k = 0, \Delta \varphi_0 = \Delta \varphi_l = 0$:

$$(M + M' + S) B - 2 H C - \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} S_x - \frac{W}{r} (r - f) = 0, \quad 12$$

$$(M + M' + S) A - 2 H B - \sum_0^l \frac{\sigma}{J} S_x + \frac{W}{r} = 0, \quad 13$$

$$(M - M' - S) (2 D - A l^2) - l \sum_0^l \frac{\sigma}{J} (l - 2 x) S_x = 0, \quad 14$$

worin W durch 8 bestimmt. Speziell für eine beliebige symmetrische Belastung

ergeben sich bei Beachtung von $M' = M$ und des im vorigen Paragraphen (S. 340) bezüglich der S_x Gesagten, sowie der Bezeichnungen § 49, 7):

$$MB - HC + \sum_0^m \frac{\sigma y}{J} \left(\frac{x}{l} S - S_x \right) - \frac{W}{2r} (r - f) = 0, \quad 15$$

$$MA - HB + \sum_0^m \frac{\sigma}{J} \left(\frac{x}{l} S - S_x \right) + \frac{W}{2r} = 0, \quad 16$$

worin nach 8, da für zwei symmetrisch zur Mitte bei x, x' gelegene Felder $\eta' = -\eta$ und $P'_x - P_x = 2 \sum_x^m P = 2 V_x$ ist:

$$\frac{W}{2} = H \sum_0^m \frac{\lambda}{F} - \frac{H}{r} \sum_0^m \frac{\sigma y}{F} + \frac{M}{r} \sum_0^m \frac{\sigma}{F} + \frac{m}{0} \frac{\eta}{F} V_x + \frac{1}{r} \sum_0^m \frac{\sigma}{F} \left(\frac{x}{l} S - S_x \right). \quad 17$$

Wie im vorigen Paragraphen bei symmetrischer Belastung kann in 15–17 gesetzt werden:

$$\frac{S}{l} = V, \quad \frac{x}{l} S - S_x = \sum_0^x P a + x V_x \quad \text{mit} \quad V_x = \sum_x^m P. \quad 18$$

Aus 15, 16 ergeben sich beispielsweise für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit mit den im vorigen Paragraphen (S. 341) für diesen Fall verwendeten S, S_x :

$$MB - HC + \frac{u}{2} \sum_0^m \frac{\sigma x (l-x) y}{J} - \frac{W}{2r} (r - f) = 0, \quad 19$$

$$MA - HB + \frac{u}{2} \sum_0^m \frac{\sigma x (l-x)}{J} + \frac{W}{2r} = 0, \quad 20$$

worin nach 17 mit $V_x = u (m-x)$:

$$\frac{W}{2} = H \sum_0^m \frac{\lambda}{F} - \frac{H}{r} \sum_0^m \frac{\sigma y}{F} + \frac{M}{r} \sum_0^m \frac{\sigma}{F} + u \sum_0^m \frac{\eta (m-x)}{F} + \frac{u}{2r} \sum_0^m \frac{\sigma x (l-x)}{F}. \quad 21$$

Die Werte von S_x, P_x für verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten von u, u' pro Längeneinheit auf der ersten und zweiten Trägerhälfte sind in § 47 angeführt (S. 325).

Für eine Einzellast P an beliebiger Stelle a hat man in 12–14 und 8–11 neben $S = P (l-a)$:

$$\begin{array}{ll} \text{von } x=0 \text{ bis } x=a & S_x = 0, & P_x = 0, \\ \text{„ } x=a \text{ „ } x=l & S_x = P(x-a), & P_x = P, \end{array}$$

womit nach 12–14 für die von P allein herrührenden H, M, M' :

$$\left(M + M' + P(l-a) \right) B - 2HC - P \left(\sum_a^l \frac{\sigma x y}{J} - a \sum_a^l \frac{\sigma y}{J} \right) - \frac{W}{r} (r - f) = 0, \quad 22$$

$$\left(M + M' + P(l-a) \right) A - 2HB - P \left(\sum_a^l \frac{\sigma x}{J} - a \sum_a^l \frac{\sigma}{J} \right) + \frac{W}{r} = 0, \quad 23$$

$$\left(M - M' - P(l-a) \right) \left(\frac{2D}{l} - Al \right) + P \left(\sum_a^l \frac{\sigma x (2x-l)}{J} - a \sum_a^l \frac{\sigma (2x-l)}{J} \right) = 0. \quad 24$$

W ist nach 8 bestimmt durch

$$\begin{aligned} W r = 2H \left(r \sum_0^m \frac{\lambda}{F} - \sum_0^m \frac{\sigma y}{F} \right) + (M + M') \sum_0^m \frac{\sigma}{F} - \\ P \left(r \sum_a^l \frac{\eta}{F} - \sum_a^l \frac{\sigma (l-x)}{F} - (l-a) \sum_0^m \frac{\sigma}{F} + (l-a) \sum_a^l \frac{\sigma}{F} \right), \end{aligned} \quad 25$$

worin im Falle $a > m$:

$$(l-a) \sum_0^m \frac{\sigma}{F} - (l-a) \sum_a^l \frac{\sigma}{F} = (l-a) \sum_m^a \frac{\sigma}{F}. \quad 26$$

Die Gleichungen 22–25 gelten zwar für beliebige a , würden aber besonders für $a > m$ zu verwenden sein, während sich für $a < m$ wie folgt bequemere Formeln ableiten lassen.

Mit Rücksicht auf die vollständige Symmetrie des Trägers und die Bezeichnungen § 49, 7), 8) hat man in 22–25:

$$\begin{aligned} \frac{\int \sigma_{xy}}{a J} &= \frac{\int \sigma_{xy}}{0 J} - \frac{a}{0} \frac{\sigma_{xy}}{J} = \frac{m}{0} \frac{\sigma_{xy}}{J} + \frac{m}{0} \frac{\sigma(l-x)y}{J} - \frac{a}{0} \frac{\sigma_{xy}}{J} = \\ & \int \frac{m}{0} \frac{\sigma_{xy}}{J} - \frac{a}{0} \frac{\sigma_{xy}}{J} = Bl - \frac{a}{0} \frac{\sigma_{xy}}{J}, \end{aligned}$$

und in analoger Weise (vergl. auch § 49, S. 342):

$$\begin{aligned} \frac{\int \sigma_y}{a J} &= 2B - \frac{a}{0} \frac{\sigma_y}{J}, & \frac{\int \sigma_x}{a J} &= Al - \frac{a}{0} \frac{\sigma_x}{J}, \\ \frac{\int \sigma}{a J} &= 2A - \frac{a}{0} \frac{\sigma}{J}, & \frac{\int \sigma_x(2x-l)}{a J} &= 2D - Al^2 - \frac{a}{0} \frac{\sigma_x(2x-l)}{J}, \\ \frac{\int \sigma(2x-l)}{a J} &= -\frac{a}{0} \frac{\sigma(2x-l)}{J}, & \frac{\int \eta}{a F} &= -\frac{a}{0} \frac{\eta}{F}, \\ \frac{\int \sigma_x}{a F} &= l \frac{m}{0} \frac{\sigma}{F} - \frac{a}{0} \frac{\sigma_x}{F}, & \frac{\int \sigma}{a F} &= 2 \frac{m}{0} \frac{\sigma}{F} - \frac{a}{0} \frac{\sigma}{F}. \end{aligned}$$

Mit diesen Ausdrücken folgen aus 22–24 für die H, M, M' durch eine Einzellast P :

$$(M + M' + Pa)B - 2HC + P \left(\frac{a}{0} \frac{\sigma_{xy}}{J} - a \frac{a}{0} \frac{\sigma_y}{J} \right) - \frac{W}{r} (r-f) = 0, \quad 27$$

$$(M + M' + Pa)A - 2HB + P \left(\frac{a}{0} \frac{\sigma_x}{J} - a \frac{a}{0} \frac{\sigma}{J} \right) + \frac{W}{r} = 0, \quad 28$$

$$(M - M' + Pa) \left(\frac{2D}{l} - Al \right) + P \left(\frac{a}{0} \frac{\sigma_x(l-2x)}{J} - a \frac{a}{0} \frac{\sigma(l-2x)}{J} \right) = 0, \quad 29$$

und zur Bestimmung von W nach 25:

$$Wr = 2H \left(r \frac{m}{0} \frac{\lambda}{F} - \frac{m}{0} \frac{\sigma_y}{F} \right) + (M + M') \frac{m}{0} \frac{\sigma}{F} + P \left(r \frac{a}{0} \frac{\eta}{F} + \frac{a}{0} \frac{\sigma_x}{F} + a \frac{m}{0} \frac{\sigma}{F} - a \frac{a}{0} \frac{\sigma}{F} \right). \quad 30$$

Diese ebenfalls für beliebige a geltenden Gleichungen sind für $a < m$ bequemer als 22–25 und man hat für $a < m$ in 30:

$$\frac{m}{a} \frac{\sigma}{0 F} - a \frac{a}{0} \frac{\sigma}{F} = a \frac{m}{a} \frac{\sigma}{F}. \quad 31$$

Temperaturänderungen.

Für eine beliebige Temperaturänderung τ folgen aus 9, 10 mit $S = S_x = 0$, $\Delta l = \Delta k = 0$, $\Delta \varphi_0 = \Delta \varphi_l = 0$ zur Bestimmung von H und $M = M'$:

$$MB - HC - \frac{W}{2r} (r-f) + E m a \tau = 0, \quad 32$$

$$MA - HB + \frac{W}{2r} = 0, \quad 33$$

worin nach 8:

$$\frac{W}{2} = H \frac{m}{0} \frac{\lambda}{F} - \frac{H}{r} \frac{m}{0} \frac{\sigma_y}{F} + \frac{M}{r} \frac{m}{0} \frac{\sigma}{F}. \quad 34$$

Bewegungen der Kämpfer.

Für beliebige kleine Bewegungen der Kämpfer, bei welchen jedoch die Endquerschnitte vollständig mit den Kämpfern in Berührung bleiben müssen, hat man aus 9–11 mit $S = S_x = 0$ zur Berechnung von H, M, M' :

$$E \Delta l = (M + M')B - 2HC - \frac{W}{r} (r-f), \quad 35$$

$$B(\Delta \varphi_l - \Delta \varphi_0) = (M + M')A - 2HB + \frac{W}{r}, \quad 36$$

$$l E \left(2 \frac{\Delta k}{l} - \Delta \varphi_0 - \Delta \varphi_l \right) = (M - M') \left(2 \frac{D}{l} - Al \right), \quad 37$$

worin nach 8:

$$W = 2H \sum_0^m \frac{\lambda}{F} - \frac{2H}{r} \sum_0^m \frac{\sigma y}{F} + \frac{M + M'}{r} \sum_0^m \frac{\sigma}{F}. \quad 38$$

Wenn jedoch nur eine Änderung Δl der Spannweite, keine Änderung der Stützhöhen und keine Verdrehungen der Endquerschnitte entstanden sind, oder doch nur solche, für welche

$$\Delta \varphi_0 = \Delta \varphi_l = \frac{\Delta k}{l},$$

dann hat man zur Bestimmung von H und $M = M'$ nach 35, 36:

$$MB - HC - \frac{W}{2r} (r - f) - \frac{E \Delta l}{2} = 0, \quad 39$$

$$MA - HB + \frac{W}{2r} = 0, \quad 40$$

worin W durch 34 ausgedrückt.

Beispiel 98. Genauere Berechnung der Stützenreaktionen eines Bogens ohne Gelenke von beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten (Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe, vergl. Beisp. 63. und die Zusammenstellung S. 244).

Für das vom Gewölbeausschuß des Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins erprobte Bruchsteingewölbe von $l = 2m = 23,758$ m Spannweite und $f = 4,502$ m Pfeil der Achse (vergl. S. 233–256) sollen der Horizontal Schub H und die Endmomente M, M' nach den genaueren Formeln für symmetrische Bogen ohne Gelenke mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten

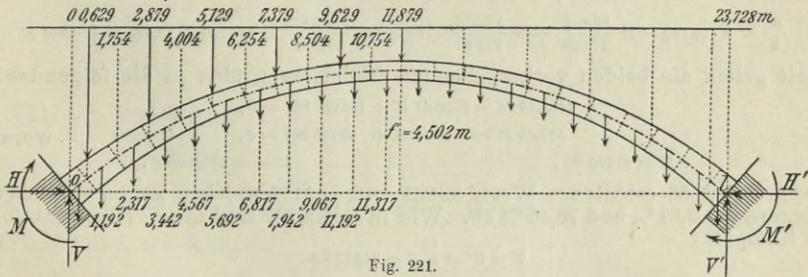


Fig. 221.

(§ 50) berechnet und auch die Vertikalreaktionen V, V' der Kämpfer beigelegt werden: a) für das Eigengewicht des Gewölbebogens; b) für eine einseitige Belastung bis zur Bogenmitte durch beliebige Lasten P bei $a = 2,879$ m, $5,129$ m, $7,379$ m, $9,629$ m und halb so große Lasten bei $a = 0,629$ m, $11,879$ m, wie sie bei der Probelastung angebracht waren; c) für eine bezüglich der Bogenmitte symmetrisch hierzu gelegene Belastung auf der zweiten Bogenhälfte und für diejenige symmetrische Belastung, welche durch Zusammenwirken der beiden letzt-erwähnten Belastungen entsteht; d) für eine Temperaturänderung τ ; e) für eine Änderung Δl der Spannweite ohne Änderung der relativen Höhenlage der Kämpfer und ohne Verdrehungen der Endquerschnitte, oder doch nur solche, für welche $\Delta \varphi_0 = \Delta \varphi_l = \frac{\Delta k}{l}$ ist. Die Berechnung soll für die Gewölbbeite $b = 1$ m erfolgen.

Wir verfahren zunächst ganz wie einleitend zu Beisp. 63 angegeben, doch kommen jetzt für die Berechnung der H, M, M' anstatt der Formeln des § 49 diejenigen des § 50 zur Verwendung. In Tabelle XIII sind aus den in Tabelle V jenes Beispiels (S. 243) gegebenen x, y an den Feldergrenzen der ersten Trägerhälfte zunächst die Horizontalprojektionen λ und Vertikalprojektionen η der Achslängen σ jener Felder angeführt, also beispielsweise

für Feld 0	$\lambda = 0,629$ m,	$\eta = 0,531$ m,
" " 1	$\lambda = 1,754 - 0,629 = 1,125$ m,	$\eta = 1,368 - 0,531 = 0,837$ m,
" " 2	$\lambda = 2,879 - 1,754 = 1,125$ m,	$\eta = 2,077 - 1,368 = 0,709$ m,

wonach sich mit Hilfe der aus Tabelle II desselben Beispiels (S. 237) entnommenen

Querschnitte $F = h$ und Koordination x, y in den Feldermitten die Werte der Kolonnen 6–11 ergaben, für welche Meter als Längeneinheit gelten.

a) Eigengewicht.

Für eine beliebige symmetrische Belastung hat man nach § 50, 15), 16):

$$M_B - H_C + \sum_0^m \frac{\sigma y}{J} \left(\frac{x}{l} S - S_x \right) - \frac{W}{2r} (r - f) = 0, \quad 1$$

$$M_A - H_B + \sum_0^m \frac{\sigma}{J} \left(\frac{x}{l} S - S_x \right) + \frac{W}{2r} = 0, \quad 2$$

worin nach § 50, 17):

$$\frac{W}{2} = H \sum_0^m \frac{\lambda}{F} - \frac{H}{r} \sum_0^m \frac{\sigma y}{F} + \frac{M}{r} \sum_0^m \frac{\sigma}{F} + \sum_0^m \frac{\eta}{F} V_x + \frac{1}{r} \sum_0^m \frac{\sigma}{F} \left(\frac{x}{l} S - S_x \right). \quad 3$$

V_x und $\frac{x}{l} S - S_x$ für Eigengewicht sind bereits in Beisp. 63 ermittelt und in der dortigen Tabelle III eingetragen. Damit folgen die Werte in Kolonne 12 und 13 der untenstehenden Tabelle. Die Gleichungen 1, 2 ergeben mit Rücksicht auf die Tabellen II und III des Beispiels 63 und $r = 17,923$ m (s. Bemerk. S. 242):

$$1464,16 M - 5718,93 H + 155081280 - \frac{W}{17,923} 13,421 = 0,$$

$$407,60 M - 1464,16 H + 39741790 + \frac{W}{17,923} = 0.$$

Bei Vernachlässigung von W würden diese Gleichungen die in Beisp. 63 unter a) gefundenen Werte von H, M liefern. Nach 3 ist

$$\frac{W}{2} = H \cdot 16,122 - H \frac{55,803}{17,923} + M \frac{17,366}{17,923} + 80118 + \frac{1516679}{17,923} = 164740 + 13,009 H + 0,969 M.$$

Damit gehen die beiden vorhergehenden Gleichungen über in die folgenden:

$$1463,43 M - 5728,67 H + 154957821 = 0,$$

$$407,65 M - 1463,43 H + 39750986 = 0,$$

woraus:

$$H = 25796 \text{ kg},$$

$$M = -4902 \text{ mkg}.$$

Die in Beisp. 63 erhaltenen Werte 26821 und -1157 weichen gegen vorstehende genauere um 3,97% und 76,40% ab. Wie in Beisp. 63 sind die Vertikalreaktionen der Kämpfer:

$$V = V' = \sum_0^m P = 24095 \text{ kg}.$$

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle XIII.

Feld	λ	η	σ	F	$\frac{\lambda}{F}$	$\frac{\eta}{F}$	$\frac{\sigma}{F}$	$\frac{\sigma x}{F}$	$\frac{\sigma y}{F}$	$\frac{\eta x}{F}$	$\frac{\eta}{F} V_x$	$\frac{\sigma}{F} \left(\frac{x}{l} S - S_x \right)$
0	0,629	0,531	0,825	1,071	0,587	0,496	0,770	0,242	0,209	0,158	11951	5826
1	1,125	0,837	1,403	0,992	1,134	0,844	1,414	1,685	1,367	1,006	18549	37984
2	1,125	0,709	1,327	0,910	1,236	0,779	1,458	3,378	2,534	1,805	14520	69739
3	1,125	0,602	1,278	0,838	1,342	0,718	1,525	5,249	3,648	2,471	11302	99950
4	1,125	0,503	1,233	0,775	1,452	0,649	1,578	7,207	4,644	2,964	8547	126802
5	1,125	0,414	1,199	0,722	1,558	0,573	1,661	9,454	5,647	3,262	6231	153792
6	1,125	0,332	1,172	0,683	1,647	0,486	1,716	11,698	6,473	3,313	4273	175859
7	1,125	0,253	1,154	0,656	1,715	0,386	1,759	13,970	7,149	3,066	2652	193861
8	1,125	0,179	1,140	0,635	1,772	0,282	1,795	16,275	7,683	2,557	1425	208030
9	1,125	0,107	1,129	0,618	1,820	0,173	1,827	18,621	8,079	1,763	573	218549
10	1,125	0,035	1,127	0,605	1,859	0,058	1,863	21,084	8,370	0,656	95	226287
Sa.	11,879	4,502	12,987		16,122	5,444	17,366	108,863	55,803	23,021	80118	1516679
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

b) Einseitige Belastung von 0 bis m .

Nach § 50, 12)–14) hat man für eine beliebige Belastung zur Bestimmung von H, M, M' :

$$(M + M' + S) B - 2 H C - \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} S_x - \frac{W}{r} (r - f) = 0, \quad 4$$

$$(M + M' + S) A - 2 H B - \sum_0^l \frac{\sigma}{J} S_x + \frac{W}{r} = 0, \quad 5$$

$$(M - M' - S) \left(\frac{D}{l} - \frac{A l}{2} \right) - \sum_0^m \frac{\sigma}{J} (m - x) S_x = 0, \quad 6$$

worin nach § 50, 8):

$$W = 2 H \sum_0^m \frac{\lambda}{F} - \frac{2 H}{r} \sum_0^m \frac{\sigma y}{F} + \frac{M + M' + S}{r} \sum_0^m \frac{\sigma}{F} - \sum_0^l \frac{\eta}{F} P_x - \frac{1}{r} \sum_0^l \frac{\sigma}{F} S_x, \quad 7$$

und nach § 50, 1), 6):

$$P_x = \sum_0^x P, \quad S_x = \sum_0^x P (x - \alpha) = x P_x - \sum_0^x P \alpha, \quad 8$$

$$S = \sum_0^l P (l - \alpha) = l P_l - \sum_0^l P \alpha. \quad 9$$

Mit Rücksicht auf die in den zwei ersten Kolonnen der folgenden Tabelle XIV angeführten α, P und der Abszissen x der Feldermitten in Kolonne 4 ergeben sich nach 8 für Feld 1 mit $x = 1,192$ m:

$$P_x = \frac{P}{2}, \quad \sum_0^x P \alpha = \frac{P}{2} 0,629 = 0,3145 P,$$

$$S_x = 1,192 \frac{P}{2} - 0,3145 P = 0,2815 P;$$

für Feld 2 mit $x = 2,317$ m:

$$P_x = \frac{P}{2}, \quad \sum_0^x P \alpha = 0,3145 P,$$

$$S_x = 2,317 \frac{P}{2} - 0,3145 P = 0,8440 P;$$

für Feld 3 mit $x = 3,442$ m:

$$P_x = \frac{3P}{2}, \quad \sum_0^x P \alpha = 0,3145 P + 2,879 P = 3,1935 P,$$

$$S_x = 3,442 \frac{3P}{2} - 3,1935 P = 1,9695 P;$$

für Feld 4 mit $x = 4,567$ m:

$$P_x = \frac{3P}{2}, \quad \sum_0^x P \alpha = 3,1935 P,$$

$$S_x = 4,567 \frac{3P}{2} - 3,1935 P = 3,6570 P;$$

für Feld 5 mit $x = 5,692$:

$$P_x = \frac{5P}{2}, \quad \sum_0^x P \alpha = 3,1935 P + 5,129 P = 8,3225 P,$$

$$S_x = 5,692 \frac{5P}{2} - 8,3225 P = 5,9075 P.$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werte der Kolonnen 5 bis 8 von Tabelle XIV (S. 350) berechnet, worauf sich diejenigen der Kolonne 9 durch Multiplikation der Werte in Kolonne 8 mit den in Tabelle II (S. 237) des Beispiels 63 angeführten $\frac{\sigma}{J}$, die Werte der Kolonnen 10 und 11 durch Multiplikation der Werte in Kolonne 9 mit den x, y derselben Tabelle des Beisp. 63, diejenigen in Kolonne 12 durch Multiplikation der Werte in Kolonne 9 mit $m - x$, und diejenigen der Kolonnen 13 und 14 durch Multiplikation der Werte in Kolonne 5 und 8 mit den aus obiger Tabelle XIII (S. 348) entnommenen $\frac{\eta}{F}, \frac{\sigma}{F}$ ergaben.

Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe. Tabelle XIV.

a in m	P	Field	x in m	$\frac{P_x}{P}$	$\frac{x P_x}{P}$	$\frac{1}{P_0} \sum P a$	$\frac{S_x}{P}$	$\frac{\sigma S_x}{J P}$	$\frac{\sigma x S_x}{J P}$	$\frac{\sigma y S_x}{J P}$	$\frac{\sigma(m-x) S_x}{J P}$	$\eta \frac{P_x}{P}$	$\frac{\sigma S_g}{F P}$
0,629	$\frac{1}{2}$	0	0,314	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0
2,879	1	1	1,192	$\frac{1}{2}$	0,5960	0,3145	0,2815	4,86	5,79	4,70	51,94	0,422	0,398
		2	2,317	$\frac{1}{2}$	1,1585	0,3145	0,8440	17,83	41,31	30,99	170,49	0,389	1,231
		3	3,442	$\frac{3}{2}$	5,1630	3,1935	3,1935	1,9695	51,33	176,68	122,78	433,07	1,077
5,129	1	4	4,567	$\frac{3}{2}$	6,8505	3,1935	3,6570	116,26	530,96	342,15	850,09	0,973	5,771
		5	5,692	$\frac{5}{2}$	14,2300	8,3225	8,3225	5,9075	225,84	1285,48	767,86	1397,27	1,423
7,379	1	6	6,817	$\frac{5}{2}$	17,0425	8,3225	8,7200	384,90	2623,86	1451,84	1948,36	1,215	14,092
		7	7,942	$\frac{7}{2}$	27,7970	15,7015	15,7015	12,0955	593,16	4710,88	2410,60	1,351	21,276
9,629	1	8	9,067	$\frac{7}{2}$	31,7345	15,7015	16,0330	856,48	7765,70	3665,73	2335,27	0,987	28,779
		9	10,192	$\frac{9}{2}$	45,8640	25,3305	25,3305	20,5335	1178,62	12012,50	5211,86	0,778	37,515
11,879	$\frac{1}{2}$	10	11,317	$\frac{9}{2}$	50,9265	25,3305	25,5960	1563,40	17693,00	7024,36	878,63	0,261	47,313
		11	12,442	$\frac{5}{2}$									
		bis	bis		$5 x$	31,2700	$5 x - 31,27$						
		21	23,444										
	5						Summe:	4992,68	46846,16	21032,87	12461,87	8,876	169,190
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Man hätte für alle Felder des ganzen Trägers wie zuletzt angegeben verfahren und alsdann die in 4–7 auftretenden Summen Σ mit S_x, P_x einfach durch Addition erhalten können. Da aber die zweite Bogenhälfte unbelastet ist, und für alle Felder derselben

$$P_x = \sum_0^l P = 5 P, \quad S_x = x P_x - \sum_0^l P a = 5 P x - 31,27 P,$$

so kann man berücksichtigen, daß den x, y, σ, η, J, F eines Feldes auf der zweiten Trägerhälfte die $l-x, y, \sigma, -\eta, J, F$ des symmetrisch dazu gelegenen Feldes auf der ersten Trägerhälfte gleich sind, wonach mit Rücksicht auf die obenerwähnten Tabellen II, XIII, XIV (S. 237, 348, 350):

$$\begin{aligned} \sum_0^l \frac{\sigma y}{J} S_x &= \sum_0^m \frac{\sigma y}{J} S_x + 5 P \sum_m^l \frac{\sigma x y}{J} - 31,27 P \sum_m^l \frac{\sigma y}{J} = \\ &= \sum_0^m \frac{\sigma y}{J} S_x + 5 P \sum_0^m \frac{\sigma(l-x)y}{J} - 31,27 P \sum_0^m \frac{\sigma y}{J} = \\ &= 21032,87 P + 5 P (23,758 \cdot 1464,16 - 11970,95) - 31,27 P \cdot 1464,16 = 89321,39 P, \\ \sum_0^l \frac{\sigma}{J} S_x &= \sum_0^m \frac{\sigma}{J} S_x + 5 P \sum_m^l \frac{\sigma x}{J} - 31,27 P \sum_m^l \frac{\sigma}{J} = \\ &= \sum_0^m \frac{\sigma}{J} S_x + 5 P \sum_0^m \frac{\sigma(l-x)}{J} - 31,27 P \sum_0^m \frac{\sigma}{J} = \\ &= 4992,68 P + 5 P (23,758 \cdot 407,60 - 2975,54) - 31,27 \cdot 407,60 = 25788,13 P, \\ \sum_0^l \frac{\sigma(m-x)}{J} S_x &= \sum_0^m \frac{\sigma(m-x)}{J} S_x + 5 P \sum_m^l \frac{\sigma(m-x)x}{J} - 31,27 P \sum_m^l \frac{\sigma(m-x)}{J} = \\ &= \sum_0^m \frac{\sigma(m-x)}{J} S_x - 5 P \sum_0^m \frac{\sigma(m^2 - 3mx + x^2)}{J} + 31,27 P \sum_0^m \frac{\sigma(m-x)}{J} = \\ &= 12461,87 P - 5 P (2 \cdot 11,879^2 \cdot 407,60 - 3 \cdot 11,879 \cdot 2975,54 + 25670,62) + \\ &= 31,27 P (11,879 \cdot 407,60 - 2975,54) = -102501,13 P, \\ \sum_0^l \frac{\sigma}{F} S_x &= \sum_0^m \frac{\sigma}{F} S_x + 5 P \sum_m^l \frac{\sigma x}{F} - 31,27 P \sum_m^l \frac{\sigma}{F} = \\ &= \sum_0^m \frac{\sigma}{F} S_x + 5 P \sum_0^m \frac{\sigma(l-x)}{F} - 31,27 P \sum_0^m \frac{\sigma}{F} = \\ &= 169,19 P + 5 P (23,758 \cdot 17,366 - 108,863) - 31,27 P \cdot 17,366 = 1144,75 P, \\ \sum_0^l \frac{\eta}{F} P_x &= \sum_0^m \frac{\eta}{F} P_x + 5 P \sum_m^l \frac{\eta}{F} P_x - 5 P \sum_0^m \frac{\eta}{F} P_x = 8,876 P - 5 P \cdot 5,444 = -18,344 P. \end{aligned}$$

Mit diesen Werten und dem aus 9 folgenden

$$S = 23,758 \cdot 5 P - 31,27 P = 87,520 P$$

nehmen die Gleichungen 4–6 folgende Formen an (bezüglich 2102,63 s. S. 238):

$$\begin{aligned} (M + M' + 87,52 P) 1464,16 - 2 \cdot 5718,93 H - 89321,39 P - \frac{W}{17,923} 13,421 &= 0, \\ (M + M' + 87,52 P) 407,60 - 2 \cdot 1464,16 H - 25788,13 P + \frac{W}{17,923} &= 0, \\ (M - M' - 87,52 P) \frac{2102,63}{2} + 102501,13 P &= 0. \end{aligned}$$

Bei Vernachlässigung von W würden diese Gleichungen die für dieselbe Belastung in Beisp. 63 unter c) gefundenen H, M, M' liefern. Setzen wir jedoch nach 7:

$$\begin{aligned} W = 2 H \cdot 16,122 - 2 H \frac{55,803}{17,923} + \frac{M + M' + 87,52 P}{17,923} 17,366 + 18,344 P - \frac{1144,75}{17,923} P = \\ 26,017 H + (M + M') \frac{17,366}{17,923} + 39,274 P, \end{aligned}$$

so erhalten wir zunächst:

$$\begin{aligned} (M + M') 1463,43 - 11457,34 H + 38792,48 P &= 0, \\ (M + M') 407,65 - 2926,87 H + 9887,21 P &= 0, \\ (M - M') 1051,31 + 10490,04 P &= 0, \end{aligned}$$

woraus: $H = 3,4714 P$, $M = -4,6540 P$, $M' = 5,3240 P$,
 gegen welche Werte die weniger genauen in Beispiel 63 erhaltenen $3,6058 P$,
 $-4,1357 P$, $5,7892 P$ abweichen um $3,87\%$, $11,14\%$ und $8,74\%$.

Für die Vertikalreaktionen der Kämpfer hat man nach § 21, 2), 3):

$$V' = \frac{1}{l} \left[\sum_0^l P a + M - M' \right], \quad V = \sum_0^l P - V'. \quad 10$$

Hierin ist nach den beiden ersten Spalten von Tabelle XIV (S. 350):

$$\sum_0^l P a = P \left(\frac{0,629}{2} + 2,879 + 5,129 + 7,379 + 9,629 + \frac{11,879}{2} \right) = 31,270 P,$$

womit:

$$V' = \frac{31,270 - 4,6540 - 5,3240}{23,758} P = 0,8962 P,$$

$$V = 5 P - 0,8962 P = 4,1038 P,$$

während sich bei der weniger genauen Berechnung in Beispiel 63 $0,8985 P$ und $4,1015 P$, also um $0,26\%$ und $0,06\%$ abweichende Werte ergaben.

Anstatt wie hier sofort für die ganze angenommene Verkehrsbelastung hätte man die H , M , M' , V , V' auch wie in Beispiel 63 aus den Beiträgen der einzelnen P berechnen können, wobei die Gleichungen § 50, 27)–31) nebst vorstehenden Formeln 10 mit Weglassen der Summenzeichen Σ zu verwenden gewesen wären. Dieser Weg ist besonders dann am Platze, wenn man die ungünstigsten Belastungen entsprechend §§ 10, 11 möglichst genau feststellen und zu diesem Zwecke auch die Schnittlinie und Umhüllungslinien der Kämpferdrücke genauer als nach den Formeln für Parabelbogen oder nach § 49 bestimmen will, was ganz wie in Beisp. 1 (S. 12) zu geschehen hätte.

c) Weitere Verkehrsbelastungen.

Ist die zweite Bogenhälfte so belastet, wie unter b) für die erste angenommen wurde, so ergeben sich mit Rücksicht auf die dort erhaltenen Werte:

$$H = 3,4714 P,$$

$$M = 5,3240 P, \quad M' = -4,6540 P,$$

$$V = 0,8962 P, \quad V' = 4,1038 P.$$

Wirken gleichzeitig die soeben und die unter b) angenommenen Lasten, so gelten für die resultierende symmetrische Belastung:

$$H = 2 \cdot 3,4714 P = 6,9428 P,$$

$$M = M' = -4,6540 P + 5,3240 P = 0,6700 P,$$

$$V = V' = 4,1038 P + 0,8962 P = 5 P,$$

gegen welche Werte die in Beispiel 63 für die gleiche Belastung erhaltenen $7,2116 P$, $1,6535 P$ und $5 P$ um $3,87\%$, $146,79\%$ und 0% abweichen.

d) Temperaturänderungen.

Für eine beliebige Temperaturänderung τ hat man neben $V = V' = 0$ nach § 50, 32), 33):

$$M B - H C - \frac{W}{2 r} (r' - f) + m E a \tau = 0, \quad 11$$

$$M A - H B + \frac{W}{2 r} = 0, \quad 12$$

worin zufolge § 50, 34):

$$\frac{W}{2} = H \sum_0^m \frac{\lambda}{F} - \frac{H}{r} \sum_0^m \frac{\sigma y}{F} + \frac{M}{r} \sum_0^m \frac{\sigma}{F}. \quad 13$$

Mit Rücksicht auf die bereits mehrfach verwendeten Werte nehmen 11, 12 die Formen an:

$$1464,16 M - 5718,93 H - \frac{W}{17,923} 13,421 + 11,879 E a \tau = 0,$$

$$407,60 M - 1464,16 M + \frac{W}{17,923} = 0.$$

Bei Vernachlässigung von W liefern diese Gleichungen die in Beisp. 63 unter d) erhaltenen H , M , während sie jetzt mit

$$\frac{W}{2} = H \cdot 16,122 - \bar{H} \frac{55,803}{17,923} + M \frac{17,366}{17,923} = 13,009 H + 0,969 M$$

zunächst in die folgenden übergehen:

$$1463,43 M - 5728,67 H + 11,879 E \alpha \tau = 0,$$

$$407,65 M - 1463,43 H = 0,$$

woraus:

$$H = \frac{E \alpha \tau}{39,993}, \quad M = M' = 3,5899 H = \frac{E \alpha \tau}{11,140}.$$

Die in Beispiel 63 gefundenen weniger genauen Werte, mit 38,677 und 10,767 in den Nennern, sind um 3,40% und 3,46% größer.

e) Bewegungen der Kämpfer.

Für eine beliebige kleine Änderung Δl der Spannweite, ohne andere als die in der Aufgabenstellung zugelassenen Bewegungen der Kämpfer hat man nach § 50, 39), 40) neben $V = V' = 0$:

$$MB - HC - \frac{W}{2r} (r - f) - \frac{E}{2} \Delta l = 0, \quad 14$$

$$MA - HB + \frac{W}{2r} = 0, \quad 15$$

worin W durch 13 ausgedrückt ist. Da in 14, 15 gegenüber 11, 12 lediglich Δl an Stelle von $2 m \alpha \tau$ getreten ist, so erhalten wir nach Einsetzen von W :

$$1463,43 M - 5728,67 H - \frac{E}{2} \Delta l = 0,$$

$$407,65 M - 1463,43 H = 0,$$

und hieraus:

$$H = - \frac{E \Delta l}{950,16}, \quad M = M' = 3,5899 H = - \frac{E \Delta l}{264,68},$$

Die in Beisp. 63 bei Vernachlässigung von W erhaltenen Werte, mit 918,90 und 255,81 in den Nennern, weichen um 3,40% und 3,46% von den vorstehenden genaueren Werten ab.

Beispiel 99. Einsenkungen eines Bogens ohne Gelenke mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten (Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe).

Die Einsenkungen in der Mitte des in den Beispielen 63 und 98 behandelten Bruchsteingewölbes nach den bei beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten gültigen Formeln des § 48 zu berechnen: a) Für das Eigengewicht des Gewölbebogens allein; b) für eine einseitige Belastung durch beliebige gleiche Lasten P bei $a = 2,879$ m, 5,129 m, 7,379 m, 9,629 m und halb so große Lasten bei $a = 0,629$ m und 11,879 m; c) durch eine Temperaturänderung τ ; d) durch eine Änderung Δl der Spannweite und eine Senkung Δk des Kämpfers 0 gegen den Kämpfer l ohne sonstige Verdrehung der Endquerschnitte.

a) Für eine beliebige zur Trägermitte symmetrische Belastung hat man nach § 48, 14) mit $S = Vl$ (gemäß § 49, 5) wegen $M = M'$):

$$e = \frac{1}{E} \left[M \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} - H \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} + \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} \left(\frac{x}{l} S - S_x \right) \right] + \frac{l W}{4 r E}. \quad 1$$

Die in der Klammer auftretenden Summen Σ wurden bereits in Beisp. 63 berechnet (S. 237, 238), während nach dem vorigen Beispiel für Eigengewicht allein:

$$M = -4902 \text{ mkg}, \quad H = 25796 \text{ kg},$$

$$\frac{W}{2} = 164740 + 13,009 H + 0,969 M = 495570,$$

so daß die Einsenkung durch das letztere:

$$e = \frac{1}{E} (-4902 \cdot 2975,54 - 25796 \cdot 11970,95 + 324445191) + \frac{23,758 \cdot 495570}{2 \cdot 17,923 E},$$

$$e = \frac{1384922}{E},$$

und beispielsweise für $E = 175000$ kg pro qcm:

$$e = \frac{1384922}{175000 \cdot 100^2} \text{ m} = 0,079 \text{ cm}.$$

Bei der gebräuchlichen Vernachlässigung des Einflusses von X_2, Y_2, Z_2 hätten wir mit $M = -1157$ mkg, $H = 26821$ kg (Beisp. 63), $W = 0$ erhalten:

$$e = -\frac{70359}{E}.$$

b) Wäre die zweite Bogenhälfte ebenso belastet wie in der Aufgabe unter b) für die erste verlangt, so hätten wir eine symmetrische Belastung und würde Formel 1 oder auch nach § 43, 14) gelten:

$$e = \frac{1}{E} \left(M \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} + V \sum_0^m \frac{\sigma x^2}{J} - H \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} - \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} S_x \right) + \frac{l W}{4 r E}. \quad 2$$

Da aber alsdann die Belastungen beider Bogenhälften der Symmetrie halber gleichviel zur Einsenkung in der Bogenmitte beitragen, so ist die wirkliche Einsenkung bei der unter b) verlangten Belastung halb so groß. Nun ergaben sich für die angeführte symmetrische Belastung im vorigen Beispiel:

$$M = 0,6700 P, \quad V = \frac{S}{l} = 5 P, \quad H = 6,9428 P,$$

womit nach der dortigen Gleichung 3 und den dortigen Tabellen XIII, XIV

wegen $V_x = V - \sum_0^x P = V - P_x$ und $r = 17,923$ m:

$$\begin{aligned} \frac{W}{2} &= 6,9428 P \cdot 16,122 - \frac{6,9428 P}{17,923} 55,803 + \frac{0,6700 P}{17,923} 17,366 + 5 P \cdot 5,444 - 8,876 P + \\ &\quad \frac{5 P \cdot 108,863 - 169,190 P}{17,923} = 130,238 P. \end{aligned}$$

Demgemäß erhalten wir nach 2 die Einsenkung durch die verlangte einseitige Verkehrsbelastung allein:

$$e = \frac{P}{2E} (0,6700 \cdot 2975,54 + 5 \cdot 25670,62 - 6,9428 \cdot 11970,95 - 46846,16) + \frac{23,758 \cdot 130,238 P}{4 \cdot 17,923 \cdot E},$$

$$e = 474,959 \frac{P}{E}$$

und beispielsweise für $P = 3430$ kg und $E = 175000$ kg pro qcm:

$$e = \frac{474,959 \cdot 3430}{175000 \cdot 100^2} \text{ m} = 0,093 \text{ cm}.$$

Bei Vernachlässigung des Einflusses von X_2, Y_2, Z_2 (§ 40) hätten wir mit $M = 1,6535 P$, $H = 7,2116 P$ (Beisp. 63) und $W = 0$ erhalten: $e = 97,292 \frac{P}{E}$.

c) Durch eine beliebige Temperaturänderung τ entsteht nach § 48, 21):

$$e = \frac{M}{E} \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} - \frac{H}{E} \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} + \frac{l W}{4 r E} - \alpha \tau f, \quad 3$$

worin im vorliegenden Falle nach Beispiel 98 (S. 353):

$$M = \frac{E \alpha \tau}{11,140}, \quad H = \frac{E \alpha \tau}{39,993},$$

$$\frac{W}{2} = 13,009 H + 0,969 M, \quad \text{so daß wir erhalten:}$$

$$e = \alpha \tau \left(\frac{2975,54}{11,140} - \frac{11970,95}{39,993} \right) + \alpha \tau \frac{23,758}{2 \cdot 17,923} \left(\frac{13,009}{39,993} + \frac{0,969}{11,140} \right) - \alpha \tau \cdot 4,502,$$

$$e = -36,451 \alpha \tau,$$

und beispielsweise für $\alpha = 0,0000118$:

$$e = -0,000430 \tau \text{ m} = -0,0430 \tau \text{ cm}.$$

Mit den in Beispiel 63 unter Vernachlässigung von X_2, Y_2, Z_2 berechneten M, H und $W = 0$ hätte sich ergeben: $e = -37,656 \alpha \tau$.

d) Die unter d) angenommene Bewegung der Stützen bewirkt nach § 48, 22):

$$e = \frac{M}{E} \sum_0^m \frac{\sigma x}{J} - \frac{H}{E} \sum_0^m \frac{\sigma x y}{J} + \frac{l W}{4 r E} - \frac{\Delta k}{2}. \quad 4$$

Da hierin nach Beispiel 98 in unserm Falle (S. 353):

$$M = -\frac{E \Delta l}{264,68}, \quad H = -\frac{E \Delta l}{950,16},$$

$$\frac{W}{2} = 13,009 H + 0,969 M, \quad \text{so erhalten wir:}$$

$$e = \Delta l \left(-\frac{2975,54}{264,68} + \frac{11970,95}{950,16} \right) + \Delta l \frac{23,758}{2 \cdot 17,923} \left(-\frac{13,009}{950,16} - \frac{0,969}{264,68} \right) - \frac{\Delta k}{2},$$

$$e = 1,345 \Delta l - 0,5 \Delta k.$$

Mit den in Beisp. 63 unter Vernachlässigung von X_2 , Y_2 , Z_2 berechneten M , H und $W = 0$ hätte sich ergeben: $e = 1,396 \Delta l - 0,5 \Delta k$.

Bemerkungen. Die obigen Resultate zeigen, daß die durch Belastung bewirkten Einsenkungen in der Trägerr mitte sehr gering sind und durch Einflüsse von Temperaturänderungen und kleinen Bewegungen der Kämpfer leicht aufgewogen werden können. Bei den angenommenen E , α würde die rechnungsmäßige Einsenkung durch das Eigengewicht und einseitige Belastung bis $P = 3430$ kg (Proportionalitätsgrenze, s. S. 235, 250) $e = 0,079 + 0,093 = 0,172$ cm, dagegen die Einsenkung durch eine Temperaturdifferenz $\tau = -6,625^\circ \text{C}$, wie sie die Luft bei $P = 3430$ kg gegen den Anfang des Versuchs aufwies ($13,7^\circ \text{R}$ am 12. 10. 91 gegen 19°R am 26. 9. 91¹⁾) $e = 0,043 \cdot 6,625 = 0,285$ cm. Die am Schlusse des Versuchs bis $P = 3430$ kg gemessene Einsenkung betrug 0,165 cm, in guter Übereinstimmung mit dem berechneten Werte $e = 0,172$ cm.

Beim Zusammenwirken der oben in Betracht gezogenen Einflüsse, zu welchen beliebige Verdrehungen $\Delta \varphi_0$, $\Delta \varphi_l$ der Kämpferquerschnitte nicht gehören, wäre in Zentimetern ausgedrückt:

$$e = \frac{13849,22 - 4,74959 P}{E} - 3645,1 \alpha \tau + 1,345 \Delta l - 0,5 \Delta k,$$

worin auch Δl , Δk in cm, P in kg, E in kg pro qcm einzusetzen sind. Aus dieser Gleichung ließe sich beispielsweise der Elastizitätsmodul E bei bekannten Werten aller übrigen Größen berechnen. Indessen werden die Vertikalbewegungen der Bogenmitte durch die Belastung meist zu klein, um zuverlässige Werte von E daraus ableiten zu können. Nach obigen Vergleichen mit den bei Vernachlässigung der X_2 , Y_2 , Z_2 ermittelten Werten (s. insbesondere am Schlusse von a) b)) können auch Vernachlässigungen bei der Berechnung die Resultate vollständig ändern. Weitergehende Schlüsse lassen sich also aus solchen Einsenkungsmessungen nicht ziehen. Die erwähnten Vernachlässigungen aber sind bei Berechnung der Einsenkungen unzulässig.

Die Einsenkungen, welche sich für das betrachtete Gewölbe durch die oben angenommenen Einwirkungen ergeben würden, wenn die Achse parabolisch und $J \cos \varphi$ konstant wären, sind in Beisp. 48 berechnet. Sie bestätigen, daß die Berechnung nach den einfacheren Formeln für Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ in Fällen wie dem vorliegenden, wenigstens für die Einsenkungen durch die Belastung, ebenfalls durchaus unzulässig ist.

§ 51. Einige Ergebnisse der berechneten Beispiele.

Bezüglich verschiedener Punkte, welche bei der Berechnung elastischer Bogenträger in Betracht kommen, lassen sich nur durch numerische Berechnungen unter praktisch vorkommenden Verhältnissen genügende Aufschlüsse erlangen. Bei der Umständlichkeit mancher dieser Berechnungen und den durch die Mängel der Theorie sowie ungenügende

¹ Bericht des Gewölbeausschusses, Wien 1895, S. 27.

tatsächliche Unterlagen bedingten Schwierigkeiten waren jene Feststellungen bisher durchaus unzureichend, und auch für die Folge bleiben vergleichende Berechnungen zur Anbahnung von Vereinfachungen und Begründung von Verbesserungen sehr wünschenswert. Es zeigt sich, daß manche gebräuchliche Vernachlässigungen keineswegs allgemein zulässig sind, während andererseits gewisse Erschwerungen entbehrt werden können. Die folgenden Schlüsse stützen sich auf die in vorliegender Schrift berechneten Beispiele, sie können also, soweit sie nicht Bekanntes bestätigen, zunächst nur unter ähnlichen Verhältnissen Gültigkeit beanspruchen. In erster Linie haben wir Brücken- und Dachkonstruktionen im Auge. Bei den angefügten Hinweisen werden Aufgaben und Beispiele durch A und B bezeichnet. Die Verweise auf VI beziehen sich auf den VI. Abschnitt.

Bogenlängen. Diese können für die gewöhnlichen Pfeilverhältnisse f/l (l Spannweite, f Pfeil) mitunter zweckmäßig nach der Näherungsformel für Parabelbogen

$$s = l \left(1 + \frac{8f^2}{3l^2} \right)$$

erhalten werden; doch bietet auch die genauere Berechnung keine Schwierigkeit. Vergl. S. 77 und B 28. Über $s = \Sigma \sigma$ siehe S. 137, 237, 243.

Trägheitsmoment und Krümmungsmoment. Die bei elastischen Bogenträgern übliche Verwendung des Trägheitsmoments anstatt des Krümmungsmoments, d. h. von

$$J = \int v^2 dF \quad \text{anstatt} \quad K = r \int \frac{v^2}{r+v} dF,$$

ist berechtigt. Vergl. § 6 und A 4, 5, 6 mit B 2, 3, 4.

Ausdruck der Normalspannungen. Die Verwendung der einfachen Formel für die Normalspannungen der Querschnitte:

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{J} v$$

anstatt der theoretisch genaueren:

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{F r} + \frac{M_x}{J} v$$

(S. 23) ist bei Berechnung der Materialbeanspruchungen zulässig. Vergl. B 5. Zur Ableitung der statisch unbestimmten Größen H , M , M' und der Formänderungen empfiehlt sich die Verwendung des genaueren Ausdrucks, entsprechend dem Vorgehen im IV. Abschnitt. Vergl. B 45, 99.

Schubspannungen. Die Querschubspannungen und Längsschubspannungen (§ 9), welche bei der Dimensionierung vollwandiger Bogen gewöhnlich unberücksichtigt bleiben, ergeben sich sowohl bei eisernen Bogen als bei Gewölben so gering, daß sich gegen die übliche Dimensionierung auf Grund der Normalspannungen σ allein gegenwärtig nichts einwenden läßt. B 8, 41, 64, 65, 73. Doch ist bei Wahl der zulässigen Beanspruchungen auf die aus Biegungsversuchen unter ähnlichen Verhältnissen erhaltenen σ Rücksicht zu nehmen. §§ 4, 5, 31, VI A; B 65, 67. Bezüglich der mitunter bei verschiedenen gleichzeitigen Ein-

wirkungen in Rechnung gezogenen „reduzierten Hauptspannungen“ siehe Luegers Lexikon der gesamten Technik, Art. Festigkeitsbedingung.

Konzentrierte und gleichmäßig verteilte Lasten. Zur Vereinfachung mancher Berechnungen kann an Stelle einer Anzahl in gleichen Abständen angreifender gleichgroßer konzentrierter Lasten eine entsprechende gleichmäßig verteilte Last (§ 18) eingeführt werden; in andern Fällen kann das Umgekehrte vorzuziehen und zulässig sein. *B 12*. Bei Berechnungen, für welche sich der Einfluß solcher Vereinfachungen nicht genügend übersehen läßt, rechnet man am besten mit den wirklichen Lasten (VI. Abschnitt). Vergl. Bemerkungen zu *B 24* (S. 100).

Ungünstigste Belastungen. Die Verwendung der Bogenachse anstatt der Kernlinien bei Bestimmung der Belastungen für die Grenzwerte der Normalspannungen σ (S. 43, 81, 122, 148), durch welche die Anzahl zu berücksichtigender Belastungsfälle auf etwa die Hälfte reduziert wird, ergibt in vielen Fällen hinreichend genaue Resultate. Vergl. *B 22* (S. 94), *B 44* (S. 165) und die Tabelle S. 44, 45 auf Grund der einfacheren Berechnung im VI. Abschnitt und der genaueren: Weyrauch, Berechnung der neuen Bogenbrücke über den Neckar zwischen Stuttgart und Cannstatt, Allgemeine Bauzeitung (Wien) 1895. Möglichste Genauigkeit läßt sich stets durch das Verfahren mittels Einflußlinien erreichen. § 12; *A 8, 10*; *B 9–11, 20, 21, 23*; VI M etc.

Temperaturänderungen. Die Berücksichtigung gleicher Temperaturänderungen nach oben und unten, z. B. $\tau = \pm 30^\circ$, gegen eine dem spannungslosen Zustande entsprechende Normaltemperatur ist willkürlich, wenn letztere gleich der Montierungstemperatur angenommen wird. So wären für $\tau = \pm 30^\circ$ bei 0° Montierungstemperatur Temperaturen von -30° bis 30° , bei 30° Montierungstemperatur jedoch solche von 0 bis 60° berücksichtigt (siehe auch VI N). Diese Willkür läßt sich vermeiden durch Reduktion der Normaltemperatur auf die mittlere Ortstemperatur, wie sie erstmals bei der König-Karls-Brücke bei Cannstatt in Verbindung mit der ohnehin beabsichtigten Überhöhung der Bogen (VI E, vergl. *A 17*) ohne jede Mehrarbeit vorgenommen worden ist. *A 18, 19* mit *B 36, 40*; VI N.

Die Beanspruchungen durch Temperaturänderungen und demgemäß auch durch kleine Stützenbewegungen können bei flachen eisernen Bogen ohne Gelenke so groß ausfallen, daß dieser Umstand bei der Wahl der Bogenart besonders in Betracht zu ziehen ist. *B 46*. Jedenfalls sollten für die Vermeidung von Kämpfergelenken bei flachen eisernen Bogen Gründe angeführt werden können, welche jenen Nachteil aufwiegen. Auch bei Gewölben ohne Gelenke kann der Einfluß von Temperaturänderungen und Stützenbewegungen auf die Beanspruchungen und Einsenkungen erheblich werden. *B 67, 99*.

Einsenkungen. Die mitunter vorgenommene Berechnung der Einsenkungen von Bogen auf Grund einer vorausgesetzten gleichmäßigen

Längenänderung der Bogenachse (*A* 15) entbehrt einer brauchbaren Grundlage und kann zu ganz falschen Resultaten führen. Sie ist um so weniger zulässig, als die Einsenkungen schon durch geringe Änderungen der Bogenachse, Lastverteilung usw. stark beeinflusst werden können. Siehe *A* 15, 22 und *B* 39, 47, 49, 96, 97, 99.

Bogenform. Die Berechnung parabolischer Bogen von konstantem (mittlerem) $J \cos \varphi$ mit zwei Gelenken und ohne Gelenk ist bei gleicher Genauigkeit wesentlich einfacher als die Berechnung anders geformter Bogen dieser Arten. Vergl. *B* 30 mit 37 und 94, 42 mit 63 und 98, 48 mit 99, 95 mit 94, 97 mit 96 etc. Eine Ausnahme macht nur der Halbkreisbogen mit Kämpfergelenken (§ 41, *A* 2, 25, *B* 29, 50, 51, 52, 53), während für andere Kreisbogen mit Kämpfergelenken zwar der Horizontalschub durch Temperaturänderungen und Stützenbewegungen verhältnismäßig einfach ausgedrückt ist (*A* 31, *B* 93), die der Belastung entsprechenden Ausdrücke aber so unbequem ausfallen, daß auch für flache Kreisbogen im allgemeinen die Formeln für beliebige Achse vorzuziehen sind (*B* 63—67, 98, 99), um so mehr als diese auch der Veränderlichkeit des Querschnittes Rechnung tragen. Da sich zudem die Beanspruchungen parabolischer Bogen nicht ungünstiger, sondern in wichtigen Fällen günstiger als für andere Bogen ergeben (weil bei gleichmäßig auf die Spannweite verteilter Last annähernd $M_x = 0$ und damit die Querschnitte annähernd gleichmäßig beansprucht sind; vergl. S. 78, 120, 146 und *A* 17, 18 mit *B* 35, 36, VI E), so wird man bei eisernen Bogen häufig zur Parabelform greifen. Selbstverständlich können andere Gründe gegen diese Wahl den Ausschlag geben (S. 78, 217, 222).

Die Anwendung der Formeln für parabolische Bogen auf andere Bogen ist nur dann zulässig, wenn sich ihre Tragweite übersehen läßt. Wenn auch die Abweichungen gegen die genaueren Werte für manche Größen wie die Stützenreaktionen H , V , V' , die Vertikalkräfte V_x und die Normalkräfte N_x mitunter gering oder gleich Null sind, so können sie doch für andere Größen wie die Momente M_x , die Normalspannungen σ und die Einsenkungen e so groß ausfallen, daß die ganze Berechnung damit unbrauchbar wird. Siehe die Bemerkungen zu *B* 38, 39, 45, 63, 96, § 43, sowie die Vergleiche in *B* 95, 97, die Verschiedenheit der Resultate von *B* 48 und 99 usw.

Parabolische Bogen. Bei der Berechnung parabolischer Bogen von konstantem (mittlerem) $J \cos \varphi$ mit zwei Gelenken darf in dem abgeleiteten möglichst genauen Ausdrücke des Horizontalschubs

$$H = \frac{1}{(1 + \varepsilon) 8 f l^3} \sum_0^l P a (l - a) (l^2 + l a - a^2 - \beta l^2) + \frac{15 E c}{(1 + \varepsilon) 8 f^2} \left(\alpha \tau - \frac{\Delta l}{l} \right)$$

und den daraus folgenden Spezialformeln zwar fast immer β , aber im allgemeinen nur für vorläufige Berechnungen ε vernachlässigt werden.

§§ 20, 43, *A* 15, 17, *B* 30, 34. Mit $\varepsilon = 0$ würde für $f = 0$ der Horizontalschub $H = \infty$, während in diesem Falle wegen $\varepsilon = \infty^2$ (S. 315) wie für Balken $H = 0$ ist. Der Einfluß von ε ist jedoch um so geringer, je steiler der Bogen und für $f = l/2$ hat man $\varepsilon = 0$ (S. 315).

Noch weniger darf in den Formeln für den Horizontalschub H und die Endmomente M, M' parabolischer Bogen ohne Gelenke (S. 143) die übliche Vernachlässigung des Einflusses der Achsialkraft etc. (der Integrale X_2, Y_2, Z_2 auf S. 306) und damit des hier mit 6 multiplizierten ε vorgenommen werden.¹ *B* 41, 42 (Bemerk. S. 152, 157) und 46. In dem Grenzfalle $f = 0$ würde auch hier $H = \infty$, während sich mit dem richtigen Werte $H = 0$ (S. 144) selbstverständlich die Endmomente wie beim beiderseits eingespannten Balken ergeben (S. 144). Doch nimmt wieder ε mit der Steilheit des Bogens ab und ist für $f = l/2$ $\varepsilon = 0$ (S. 315). Ferner pflegt ε für Gewölbe wesentlich kleiner als für eiserne Bogen zu sein (S. 83, 115, 152, 161, 245).

Bei Berechnung der Formänderungen parabolischer Bogen würde die Vernachlässigung von ε im allgemeinen zu unbrauchbaren Resultaten führen, so z. B. für beliebig große gleichmäßig verteilte Last zu einer Einsenkung in der Trägermitte gleich Null (S. 82, 123, 149), während sich im Grenzfalle $f = 0$ für einfache Bogen mit zwei Gelenken und ohne Gelenk dieselben Einsenkungen wie für den beiderseits frei drehbaren bzw. beiderseits festgespannten Balken ergeben müssen, was bei Berücksichtigung von ε zutrifft (S. 123, 149). Vergl. *A* 15, 22, *B* 34, 47, 48, 49, 97.

Bogen mit beliebiger Achse. Für so steile Bogen mit zwei Gelenken, wie sie nach dem Vorgange der Dourobrücke (Fig. 220) in neuerer Zeit vielfach zur Anwendung kamen, darf bei Ermittlung des Horizontalschubs H nach den Formeln für beliebige symmetrische Achse und beliebig veränderlichen Querschnitt mitunter von dem Beitrag der Achsialkraft etc. (dem Beitrag der Integrale X_2, X_2, Z_2 S. 306, welcher bei Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ durch ε, β berücksichtigt ist) abgesehen und also nach § 20, 15)—19), 25)—27), 33), 37)—43), 50), 51) gerechnet werden § 47 (S. 326), *B* 37, 94, auch 38, 40.

Für Bogen ohne Gelenke kann der Einfluß der Vernachlässigung jenes Beitrags in den Ausdrücken von H, M, M' bei beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten bedeutend werden, selbst in dem günstigsten Falle rechteckigen Querschnitts (Gewölbe) *B* 63 (S. 244), 64, 65, 66, 98.

Auch wenn bei Berechnung der Stützenreaktionen und Beanspruchungen von Bogen mit beliebiger Achse die einfachen Formeln der §§ 20, 49 zur Verwendung kommen, sind die Einsenkungen, wenn verlangt, möglichst genau zu berechnen, da diese durch Vernachlässigungen

¹ Nach der Korrektur dieses Paragraphen ging mir die Schrift zu: Binder, Über den Einfluß der Vernachlässigung der Achsialkraft bei Berechnung von Bogenbrücken mit eingespannten Kämpfern, Wien 1910 (nach der Allgemeinen Bauzeitung 1910), auf welche hier nur noch hingewiesen werden kann. Es wird darin die bezeichnete Vernachlässigung unter vielfacher Bezugnahme auf die zweite Auflage meiner „Bogenträger“ ausführlich behandelt. Der auf S. 24 der Binderschen Darstellung erwähnte Fehler in einem Beispiel ist in der neuen Auflage der „Bogenträger“ berichtigt. Zur Änderung der allgemeinen Schlüsse ergab sich hierbei keine Veranlassung.

selbst dann bis zur Unbrauchbarkeit beeinflusst werden können, wenn die erhaltenen Beanspruchungen für praktische Zwecke noch genügend genau sind. Siehe die Vergleiche in *B* 39, 96, 99.

Gewölbe. Die durch die Wiener Versuche (§ 31) als zutreffend bewiesene Berechnung von Tonnengewölben als elastische Bogenträger bestätigt zugleich die Willkür der früheren Berechnung. Die freie Wahl gewisser Durchgangspunkte der Stützlinie in einzelnen Fugen kommt auf die Annahme von Gelenken in den betreffenden Punkten hinaus, während bei eisernen Bogen niemand Gelenke annimmt, wo keine sind, und auch bei Gewölben, je nachdem Gelenke angewandt werden oder nicht, ganz verschiedene Beanspruchungen entstehen können. Vergl. die Resultate der Beispiele 22, 44 und die Bemerkungen S. 215. Gewölbe sind nicht weniger genau zu berechnen als eiserne Bogen, da für sie die Vermeidung größerer Zugspannungen von Wichtigkeit ist (§ 31). Man hat also entweder wirklich Gelenke anzuordnen (§ 27), oder die Gewölbe bei entsprechender Ausführung als elastische Bogen ohne Gelenk zu berechnen. *B* 1, 41—45, 48, 49, 63—67, 98, 99 etc. Abgesehen ist hierbei von solchen Gewölben (insbesondere des Hochbaus), für welche auf Grund genügender Erfahrungen das bisherige Vorgehen mit den üblichen geringen rechnungsmäßigen Beanspruchungen als empirische Methode gelten kann.

Während die Berechnung von Gewölben mit drei Gelenken nach § 19 erfolgen kann (*B* 18—27) und nur bezüglich der Einsenkungen bei nicht parabolischer Achse auf § 48 zu verweisen ist, wären Gewölbe ohne Gelenke nach § 21 zu berechnen (*B* 41—45, 48, 49, 63—67), wozu sich bei nicht parabolischer Achse die H , M , M' am einfachsten nach § 49 (*B* 63), am genauesten aus § 50 ergeben. (*B* 98). Die Ermittlung der H , M , M' nach den unter Vernachlässigung der Achsialkraft etc. entstandenen Formeln des § 49 (*B* 63) ist jedoch keineswegs allgemein genügend (S. 244). Für das Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe gestatten die Tabellen der Beispiele 65, 67, (S. 252, 256), in welchen die großen Zahlen die genaueren, die kleinen die weniger genauen Werte bedeuten, Vergleiche der schließlichen Rechnungsergebnisse ohne und mit jenen Vernachlässigungen. Auch die kleinen Zahlen stehen mit den Versuchsergebnissen noch genügend im Einklang, während das frühere Verfahren über dieselben überhaupt keinen Aufschluß geben kann (S. 251). Die Einsenkungen nicht parabolischer Gewölbe ohne Gelenke sind nach § 48 zu berechnen (*B* 99).

Das besonders bei Gewölben nicht seltene Vorgehen, der Berechnung nur einzelne im voraus gewählte Belastungsfälle zugrunde zu legen, ist für Brücken im allgemeinen nicht genügend. *B* 22, 44 (S. 95, 168). Dagegen ist die Verzeichnung der Stützlinie zur Berechnung von Gewölben ebensowenig nötig wie bei eisernen Bogen. Sie kann eventuell behufs größerer Anschaulichkeit für einzelne Belastungsfälle beigelegt werden. Vergl. § 8, S. 95, und *B* 65.

V. Abschnitt.

Bogenfachwerke.

Bogenfachwerke sind als Fachwerke gegliederte Bogen. Man kann also einfache und durchlaufende (kontinuierliche) Bogenfachwerke, ohne und mit Gelenken, verschiedener Formen und Systeme unterscheiden (S. 75). Wir setzen das auf Fachwerke im allgemeinen Bezügliche als bekannt voraus, wollen jedoch die wichtigsten Beziehungen und Methoden in Erinnerung bringen, soweit sie in der Folge Verwendung finden. Sie betreffen den Zustand des Gleichgewichts nach Einwirkung äußerer Aktivkräfte (Lasten etc.), deren Gesamtheit wir auch dann als Belastung bezeichnen, wenn nicht nur vertikale Aktivkräfte wirken. Temperaturänderungen und kleine Bewegungen der Stützpunkte werden, wie bisher, ebenfalls in Betracht gezogen.

Es handelt sich bei Bogenfachwerken stets um stabile Fachwerke, das heißt um Fachwerke, welche Formänderungen nur durch Überwindung von inneren Kräften (Stabkräften) zulassen abgesehen von solchen durch Temperaturänderungen und Bewegungen der Stützpunkte. Das Fachwerk kann dabei statisch bestimmt oder statisch unbestimmt sein, d. h. die Statik allein kann zur Bestimmung aller Stabkräfte und Stützreaktionen bei bekannten äußeren Aktivkräften ausreichen oder nicht. In letzterem Falle muß die Elastizitätslehre zu Hilfe genommen werden. Für die Theorie der Bogenfachwerke werden alle Stabachsen und äußeren Kräfte in einer Ebene vorausgesetzt. Sind die Stützenreaktionen eines solchen ebenen Fachwerks von k Knotenpunkten und s gleichzeitig wirksamen Stäben durch r von einander unabhängigen Komponenten bestimmt, so muß sein:

für stabile Fachwerke $2k \leq s + r$,

für statisch bestimmte Fachwerke $2k \geq s + r$,

also für stabile und statisch bestimmte Fachwerke $2k = s + r$.

Vorstehende Bedingungen betreffen die Anzahl der Stäbe und Reaktionskomponenten, es kommt jedoch auch auf die Anordnung derselben an. In dieser Beziehung gilt der Satz: Ein ebenes Fachwerk, welches bei k Knotenpunkten $s + r = 2k$ gleichzeitig wirksame Stäbe und Reaktionskomponenten besitzt, die sich für die vorkommenden Belastungen aus statischen Bedingungsgleichungen allein bestimmen lassen, ist für diese Belastungen statisch bestimmt und stabil. Ein statisch unbestimmtes stabiles Fachwerk aber enthält die zur statischen Bestimmtheit und

Stabilität notwendigen Stäbe und Reaktionskomponenten und daneben noch überzählige Stäbe oder Reaktionskomponenten. Das aus den notwendigen Stäben und Reaktionskomponenten allein gebildete Fachwerk heißt *Hauptsystem*, wie jene auch *Hauptstäbe* und *Hauptreaktionen* genannt werden. Das *Hauptsystem* läßt sich oft verschieden wählen, man wird dann die Wahl in der Regel so treffen, wie es für die beabsichtigte Berechnung am günstigsten ist.

§ 52. Statische Beziehungen.

Die folgenden Beziehungen gelten für statisch bestimmte und statisch unbestimmte ebene Fachwerke. Sie reichen jedoch zur Berechnung aller Stabkräfte und Stützenreaktionen nur bei statisch bestimmten Fachwerken aus, während bei statisch unbestimmten Fachwerken auch die besonderen Eigenschaften des Materials in Betracht kommen und demgemäß Beziehungen der Elastizitätslehre hinzutreten müssen (§§ 56, 57). Abgesehen ist hierbei von dem bekannten Verfahren zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke mehrfachen Systems auf Grund der Zerlegung in einfache Systeme¹, welches jedoch, weil zunächst willkürlich, durch genauere Berechnungen als zulässig zu erweisen ist.

Das betrachtete Fachwerk sei nach Einwirkung beliebiger äußerer Aktivkräfte (Lasten etc.) zum Gleichgewicht gelangt. Temperaturänderungen und Bewegungen der Stützpunkte sind zugelassen. Alle Verrückungen werden den anfänglichen Abmessungen gegenüber verschwindend klein vorausgesetzt.

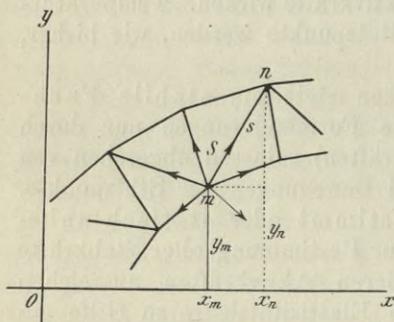


Fig. 222.

Knotenpunktmethode. Bezüglich eines rechtwinkligen Koordinatensystems in der Trägerebene in fester Lage gegen die anfängliche Gruppierung der Knotenpunkte seien x_m, y_m die anfänglichen Koordinaten eines Knotenpunktes m und x_n, y_n diejenigen eines Knotenpunktes n , welcher mit m durch einen Stab der anfänglichen Länge s und schließlich Stabkraft S verbunden ist (Fig. 222). X_m, Y_m mögen die resultierenden Komponenten der in m angreifenden äußeren Kräfte in den Richtungen x, y bezeichnen. Dann bestehen fürs Gleichgewicht am Knotenpunkt m die Bedingungsgleichungen:

$$X_m + \sum_m S \frac{x_n - x_m}{s} = 0, \quad Y_m + \sum_m S \frac{y_n - y_m}{s} = 0, \quad 1$$

worin die Summen \sum auf sämtliche in m eintreffenden Stäbe zu erstrecken.

¹ Weyrauch, Theorie der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer, Leipzig 1887, VIII. Abschnitt; Beispiele und Aufgaben hierzu, Leipzig 1888, VIII. Abschnitt; Luegers Lexikon der gesamten Technik, 2. Auflage, Artikel Fachwerke mehrfachen Systems.

Die S sind wie Zugkräfte von m weggerichtet einzuführen und bedeuten dann Zug oder Druck, je nachdem sie sich positiv oder negativ ergeben.

Bei k Knotenpunkten liefert die Statik $2k$ Gleichungen der Formen 1, welche durch die darin auftretenden Größen erfüllt sein müssen und also zur Bestimmung von Unbekannten dienen können. Unbekannt sind aber die Stabkräfte und die von einander unabhängigen Reaktionskomponenten, welche Größe und Richtung sämtlicher Stützenreaktionen bestimmen. Ist die Anzahl dieser Größen bei geeigneter Anordnung der Stäbe und Auflager gerade $2k$, so reichen die statischen Gleichungen zur Bestimmung aller Stabkräfte und Stützenreaktionen gerade aus, das Fachwerk ist statisch bestimmt (S. 361), während bei größerer Anzahl der Stabkräfte und unabhängigen Reaktionskomponenten das Fachwerk statisch unbestimmt sein muß. Da in obigen Gleichungen die Temperaturänderungen und Verrückungen der Knotenpunkte nicht vorkommen, so sind bei statisch bestimmten Fachwerken Temperaturänderungen und kleine Bewegungen der Stützpunkte ohne Einfluß auf die Stabkräfte und Stützenreaktionen, was einen Vorzug derselben bildet.

Schnittmethode. Man denke sich durch den Träger einen beliebig geformten Schnitt so gelegt, daß der Träger in zwei Teile I und II zerlegt erscheint (Fig. 223). Für diejenigen äußeren Kräfte des Trägers, welche am Trägerteil I wirken, seien H_s die resultierende Horizontalkraft, V_s die resultierende Vertikalkraft, M_s das resultierende Moment, letzteres in Hinsicht eines beliebig gewählten Drehpunktes in der Trägerebene. Mit H_s , V_s , M_s müssen diejenigen Kräfte im Gleichgewicht sein, welche als Stabkräfte vom Trägerteil II her auf den Teil I wirken, also für I ebenfalls zu den äußeren Kräften gehören (S. 1). Wir denken uns dieselben stets zunächst wie Zugkräfte vom betrachteten Trägerteil I weggerichtet, so daß sie Zug oder Druck bedeuten, je nachdem sie sich positiv oder negativ ergeben.

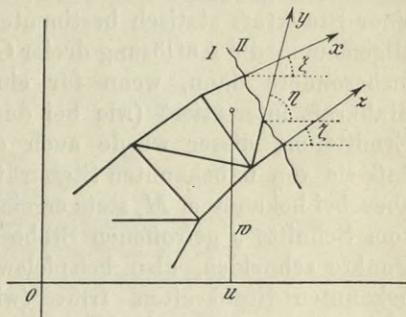


Fig. 223.

Ein rechtwinkliges Koordinatensystem in der Trägerebene werde in fester Lage gegen die anfängliche Gruppierung der Knotenpunkte so angenommen, daß die positiven Richtungen der Koordinatenachsen mit den positiven Richtungen von H_s , V_s übereinstimmen. Das Moment M_s soll als positiv gelten, wenn es wie der Zeiger der Uhr rechts um den gewählten Drehpunkt wirkt, dessen Koordinaten durch u , w bezeichnet sein mögen. Bedeuten dann für die vom Schnitte s getroffenen Stäbe X , Y , Z , \dots die Stabkräfte, ξ , η , ζ , \dots die Winkel ihrer Richtungen mit der positiven Richtung der Abszissenachse, x , y , z , \dots ihre Hebelarme in

Hinsicht des Drehpunktes u, w , so lauten die Bedingungen fürs Gleichgewicht am Trägerteil I:

$$H_s + X \cos \xi + Y \cos \eta + Z \cos \zeta + \dots = 0, \quad 2$$

$$V_s + X \sin \xi + Y \sin \eta + Z \sin \zeta + \dots = 0, \quad 3$$

$$M_s \pm Xx \pm Yy \pm Zz \pm \dots = 0. \quad 4$$

Die Momente Xx, Yy, Zz, \dots erhalten das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die vom Trägerteil I weggerichteten X, Y, Z, \dots (Fig. 223) auf Drehung rechts oder links um den Punkt u, w wirken.

Aus vorstehenden Gleichungen für einen Schnitt s lassen sich im allgemeinen drei unbekannte Größen berechnen. Man hat also nach Ermittlung der Stützenreaktionen, womit bei gegebenen Aktivkräften (Lasten etc.) die H_s, V_s, M_s bestimmt sind, die Schnitte s wenn möglich so zu legen, daß durch jeden Schnitt nicht mehr als drei Stäbe mit unbekanntem Stabkräften getroffen werden, die Stabkräfte der etwa weiter getroffenen Stäbe also durch Gleichungen für vorhergehende Schnitte bestimmt sind. Die H_s, V_s, M_s kann man unmittelbar numerisch berechnen oder aus geeigneten Formeln erhalten¹.

Momentenmethode (Rittersche Methode). Die Bestimmung einer Stabkraft statisch bestimmter Fachwerke aus 2 bis 4 erfordert im allgemeinen die Auflösung dreier Gleichungen. Dies ist häufig unbequem, insbesondere dann, wenn für eine angenommene Belastung nur eine Stabkraft interessiert (wie bei der Berechnung von Grenzwerten). Zur Ermittlung dieser würde auch eine Gleichung genügen, vorausgesetzt daß sie von unbekanntem Stabkräften nur die gesuchte enthält. Dies ist aber bei bekanntem M_s stets erreichbar, wenn sich die Achsen der übrigen vom Schnitte s getroffenen Stäbe mit unbekanntem Stabkräften in einem Punkte schneiden, also beispielsweise, wenn s nur drei Stäbe mit unbekanntem Stabkräften trifft (wie auch zur Berechnung aus 2 bis 4 nötig). Da nämlich die Wahl des Momentendrehpunkts freisteht, so legt man ihn nach dem Vorgange von August Ritter jeweils in den Durchschnitte der nicht gesuchten unbekanntem Stabkräfte. Bezeichnen B_x, B_y, B_z die Momente der etwa vom Schnitte s getroffenen bekannten Stabkräfte bezüglich der Drehpunkte für die unbekanntem X, Y, Z , so folgen aus 4 zur Berechnung von X , Drehpunkt im Durchschnitt von Y, Z :

$$M_s \pm Xx + B_x = 0, \quad 5$$

zur Berechnung von Y , Drehpunkt im Durchschnitt von Z, X :

$$M_s \pm Yy + B_y = 0, \quad 6$$

zur Berechnung von Z , Drehpunkt im Durchschnitt von X, Y :

$$M_s \pm Zz + B_z = 0. \quad 7$$

Bei den meisten statisch bestimmten Fachwerksystemen lassen sich die

¹ Bezüglich solcher Formeln siehe: Weyrauch, Theorie der statisch bestimmten Träger etc., Leipzig 1887, §§ 7, 8, 10; Luegers Lexikon der gesamten Technik, Artikel Schnittkräfte.

Schnitte s so legen, daß die B gleich Null und damit die Stabkräfte proportional den zugehörigen Momenten M_s werden.

Trifft Schnitt s , wie häufig an Trägerenden, nur zwei Stäbe mit unbekanntem Stabkräften, so darf man bei Berechnung der einen den Drehpunkt in einen beliebigen Punkt der andern legen. Die Momente M_s können wie bei der Schnittmethode unmittelbar numerisch berechnet oder aus Formeln erhalten werden¹.

Beispiel 100. Einfaches Bogenfachwerk mit gegebener Belastung.

Für den skizzierten Bogendachbinder mit drei Gelenken sind durch einseitigen Winddruck die angedeuteten vertikalen und horizontalen Knotenpunktskräfte entstanden. Es sollen die Reaktionen V, H, V', H' der Kämpfer und alle Stabkräfte berechnet werden.

Reaktionen. Für sämtliche äußeren Kräfte und für diejenigen vor dem Mittelgelenk bestehen hinsichtlich des Kämpfergelenks rechts und des Mittelgelenks folgende Momentengleichungen:

$$V \cdot 32 - 0,4 \left(\frac{16}{2} + 12 + 8 + 4 \right) - 0,1 \left(\frac{10}{2} + 9 + 8 + 7 \right) - 1,8 \cdot 6 = 0,$$

$$V \cdot 16 - H \cdot 8 = 0,$$

woraus $V = 0,83 \text{ t}, \quad H = 1,66 \text{ t}.$

Die Gleichgewichtsbedingungen „Summe aller äußeren Vertikalkräfte gleich Null“ und „Summe aller äußeren Horizontalkräfte gleich Null“ in Anwendung auf den ganzen Träger lauten:

$$V + V' - 0,4 \cdot 4 + 0, \quad H - H' - 0,1 \cdot 4 - 1,75 \cdot 2 = 0,$$

woraus mit obigen V, H :

$$V' = 0,77 \text{ t}, \quad H' = -2,24 \text{ t}.$$

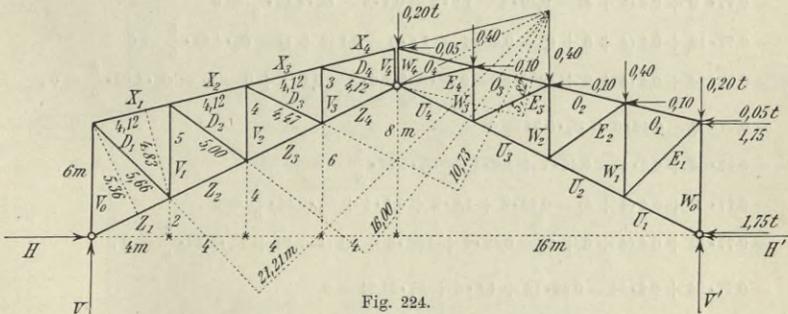


Fig. 224.

Stabkräfte der ersten Binderhälfte. Für die äußeren Kräfte des Trägerteils links der Schnitte s , welche nach der Anleitung zur Momentenmethode (S. 364) behufs Berechnung der Stabkräfte in üblicher Weise geführt sind, ergeben sich folgende Momentengleichungen. Die daraus folgenden Stabkräfte sind beigesetzt.

$$0,83 \cdot 4 - 1,66 \cdot 2 + X_1 \cdot 4,83 = 0 \quad X_1 = 0$$

$$0,83 \cdot 8 - 1,66 \cdot 4 + X_2 \cdot 4,83 \cdot \frac{4}{5} = 0 \quad X_2 = 0$$

$$0,83 \cdot 12 - 1,66 \cdot 6 + X_3 \cdot 4,83 \cdot \frac{3}{5} = 0 \quad X_3 = 0$$

$$0,83 \cdot 16 - 1,66 \cdot 8 + X_4 \cdot 4,83 \cdot \frac{2}{5} = 0 \quad X_4 = 0,$$

¹ Spezielle Ausdrücke von M_s und seinen Grenzwerten für einfache Bogenfachwerke mit drei Gelenken s. Weyrauch, Theorie der statisch bestimmten Träger, Leipzig 1887, §§ 66–68.

$$\begin{array}{rcl}
 0,83 \cdot 0 - 1,66 \cdot 6 - Z_1 \cdot 5,36 & = & 0 \\
 0,83 \cdot 4 - 1,66 \cdot 7 - Z_2 \cdot 5,36 \cdot \frac{5}{6} & = & 0 \\
 0,83 \cdot 8 - 1,66 \cdot 8 - Z_3 \cdot 5,36 \cdot \frac{4}{6} & = & 0 \\
 0,83 \cdot 12 - 1,66 \cdot 9 + Z_4 \cdot 5,36 \cdot \frac{3}{6} & = & 0 \\
 \\
 0,83 \cdot 24 - 1,66 \cdot 12 - D_1 \cdot 21,21 & = & 0 \\
 0,83 \cdot 24 - 1,66 \cdot 12 - D_2 \cdot 16,00 & = & 0 \\
 0,83 \cdot 24 - 1,66 \cdot 12 - D_3 \cdot 10,73 & = & 0 \\
 0,83 \cdot 24 - 1,66 \cdot 12 - D_4 \cdot 5,82 & = & 0 \\
 \\
 0,83 \cdot 24 - 1,66 \cdot 12 + V_0 \cdot 24 & = & 0 \\
 0,83 \cdot 24 - 1,66 \cdot 12 + V_1 \cdot 20 & = & 0 \\
 0,83 \cdot 24 - 1,66 \cdot 12 + V_2 \cdot 16 & = & 0 \\
 0,83 \cdot 24 - 1,66 \cdot 12 + V_3 \cdot 12 & = & 0 \\
 V_4 + X_4 \frac{1}{4,12} & = & 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 Z_1 = -1,86 \text{ t} \\
 Z_2 = -1,86 \text{ „} \\
 Z_3 = -1,86 \text{ „} \\
 Z_4 = -1,86 \text{ „} \\
 \\
 D_1 = 0 \\
 D_2 = 0 \\
 D_3 = 0 \\
 D_4 = 0, \\
 \\
 V_0 = 0 \\
 V_1 = 0 \\
 V_2 = 0 \\
 V_3 = 0 \\
 V_4 = 0.
 \end{array}$$

Die letzte Gleichung drückt ausnahmsweise die Bedingung „Summe aller Vertikalkräfte gleich Null“ für den höchsten Knotenpunkt des Obergurts aus (Knotenpunktmethode, S. 362).

Stabkräfte der zweiten Binderhälfte. Für die äußeren Kräfte des Trägerteils rechts der Schnitte s , welche nach der Anleitung zur Momentenmethode (S. 364) behufs Berechnung der Stabkräfte geführt werden, ergeben sich bei Beachtung von $H' + 1,75 = -2,24 + 1,75 = -0,49 \text{ t}$ folgende Momentengleichungen.

$$\begin{array}{l}
 -0,77 \cdot 4 + 0,2 \cdot 4 - 0,49 \cdot 2 - 1,8 \cdot 4 - O_1 \cdot 4,83 = 0 \\
 -0,77 \cdot 8 + 0,4(4+4) - 0,49 \cdot 4 - 1,8 \cdot 2 - 0,1 \cdot 3 - O_2 \cdot 4,83 \cdot \frac{4}{5} = 0 \\
 -0,77 \cdot 12 + 0,4(4+8+6) - 0,49 \cdot 6 - 1,8 \cdot 0 - 0,1(2+1) - O_3 \cdot 4,83 \cdot \frac{3}{5} = 0 \\
 -0,77 \cdot 16 + 0,4(4+8+12+8) - 0,49 \cdot 8 + 1,8 \cdot 2 - 0,1(1+0-1) - O_4 \cdot 4,83 \cdot \frac{2}{5} = 0, \\
 -0,77 \cdot 0 - 0,49 \cdot 6 + U_1 \cdot 5,36 = 0 \\
 -0,77 \cdot 4 + 0,2 \cdot 4 - 0,49 \cdot 7 + 1,8 \cdot 1 + U_2 \cdot 5,36 \cdot \frac{5}{6} = 0 \\
 -0,77 \cdot 8 + 0,4(4+4) - 0,49 \cdot 8 + 1,8 \cdot 2 + 0,1 \cdot 1 + U_3 \cdot 5,36 \cdot \frac{4}{6} = 0 \\
 -0,77 \cdot 12 + 0,4(4+8+6) - 0,49 \cdot 9 + 1,83 \cdot 3 + 0,1(1+2) + U_4 \cdot 5,36 \cdot \frac{3}{6} = 0, \\
 -0,77 \cdot 24 + 0,2 \cdot 24 - 0,49 \cdot 12 + 1,8 \cdot 6 + E_1 \cdot 21,21 = 0 \\
 -0,77 \cdot 24 + 0,4(12+20) - 0,49 \cdot 12 + 1,8 \cdot 6 + 0,1 \cdot 5 + E_2 \cdot 16,00 = 0 \\
 -0,77 \cdot 24 + 0,4(12+20+16) - 0,49 \cdot 12 + 1,8 \cdot 6 + 0,1(5+4) + E_3 \cdot 10,73 = 0 \\
 -0,77 \cdot 24 + 0,4(12+20+16+12) - 0,49 \cdot 12 + 1,8 \cdot 6 + 0,1(5+4+3) + E_4 \cdot 5,82 = 0, \\
 -0,77 \cdot 24 - 0,49 \cdot 12 - W_0 \cdot 24 = 0 \\
 -0,77 \cdot 24 + 0,2 \cdot 24 - 0,49 \cdot 12 + 1,8 \cdot 6 - W_1 \cdot 20 = 0 \\
 -0,77 \cdot 24 + 0,4(12+20) - 0,49 \cdot 12 + 1,8 \cdot 6 + 0,1 \cdot 5 - W_2 \cdot 16 = 0 \\
 -0,77 \cdot 24 + 0,4(12+20+16) - 0,49 \cdot 12 + 1,8 \cdot 6 + 0,1(5+4) - W_3 \cdot 12 = 0 \\
 W_4 + 0,2 + O_4 \frac{1}{4,12} = 0.
 \end{array}$$

Die letzte Gleichung drückt wieder ausnahmsweise die Bedingung „Summe aller Vertikalkräfte gleich Null“ für den höchsten Knotenpunkt des Obergurts aus.

Vorstehende Gleichungen, in denen je nur eine Unbekannte vorkommt, liefern die folgenden Stabkräfte:

$$\begin{array}{llll}
 O_1 = -2,17 \text{ t} & U_1 = 0,55 \text{ t} & E_1 = 0,41 \text{ t} & W_0 = -1,01 \text{ t} \\
 O_2 = -2,28 \text{ „} & U_2 = 0,88 \text{ „} & E_2 = 0,01 \text{ „} & W_1 = -0,44 \text{ „} \\
 O_3 = -1,82 \text{ „} & U_3 = 0,89 \text{ „} & E_3 = -0,61 \text{ „} & W_2 = -0,02 \text{ „} \\
 O_4 = 0,08 \text{ „} & U_4 = 0,28 \text{ „} & E_4 = -2,00 \text{ „} & W_3 = 0,54 \text{ „} \\
 & & & W_4 = -0,22 \text{ „}
 \end{array}$$

Beispiel 101. Durchlaufendes Bogenfachwerk mit gegebener Belastung.

Für das in Fig. 225 angedeutete kontinuierliche Bogenfachwerk betrage das Eigengewicht der äußeren Öffnungen 0,6 t, der Mittelöffnung 0,7 t pro Meter Träger. Hiervon kommen in allen Öffnungen 0,4 t auf die Knotenpunkte des Obergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, der Rest auf diejenigen des Untergurts. Es sind sämtliche Stützenreaktionen des Trägers sowie die Stabkräfte der ersten Trägerhälfte für den Fall zu berechnen, daß auf die zweite Trägerhälfte neben dem Eigengewicht eine Verkehrslast von 2,8 t pro Meter wirkt.

Stützenreaktionen. Der Belastung jeder Öffnung wirken gleich große Teile der vertikalen Stützenreaktionen entgegen. Es bestehen folgende Momentengleichungen, aus welchen sich die beige-setzten Reaktionen ergeben; für die äußeren Kräfte der beiden Seitenöffnungen:

$$\begin{array}{ll}
 A \cdot 21 - 0,6 \cdot 21 \cdot 10,5 = 0 & A = B = 6,3 \text{ t} \\
 -F \cdot 21 + 3,4 \cdot 21 \cdot 10,5 = 0 & F = E = 35,7 \text{ „}
 \end{array}$$

für die äußeren Kräfte der Mittelöffnung:

$$\begin{array}{ll}
 C \cdot 24 - 0,7 \cdot 12 \cdot 18 - 3,5 \cdot 12 \cdot 6 = 0 & C = 16,8 \text{ t} \\
 -D \cdot 24 + 3,5 \cdot 12 \cdot 18 + 0,7 \cdot 12 \cdot 6 = 0 & D = 33,6 \text{ „}
 \end{array}$$

und für die äußeren Kräfte am ersten Bogenschenkel der Mittelöffnung:

$$-H \cdot 4 + 16,8 \cdot 12 - 0,7 \cdot 12 \cdot 6 = 0 \quad H = 37,8 \text{ t.}$$

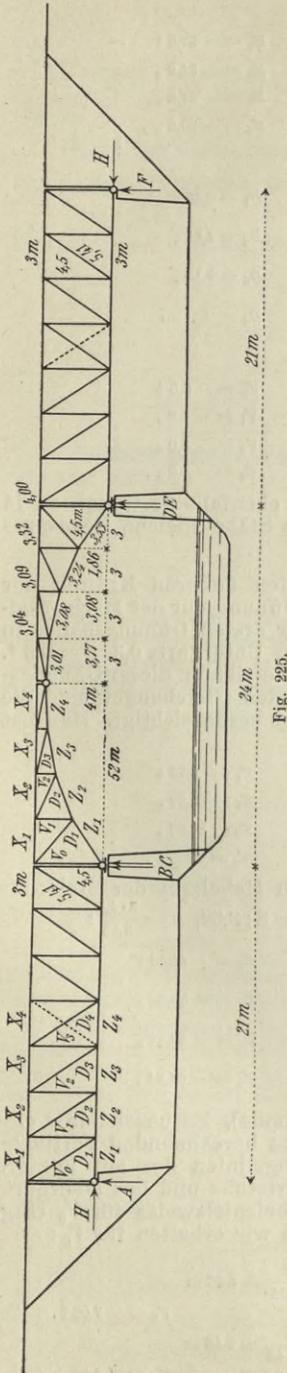
Hiernach sind die ganzen Vertikalreaktionen der vier Stützen:

$$\begin{array}{l}
 A = 6,3 \text{ t} \\
 B + C = 23,1 \text{ „} \\
 D + E = 69,3 \text{ „} \\
 F = 35,7 \text{ „}
 \end{array}$$

Probe $(0,6 + 3,4) 21 + (0,7 + 3,5) 12 = 134,6 \text{ t.}$

Stabkräfte der ersten Öffnung. An Last entfällt auf einen Knotenpunkt des Obergurts $0,4 \cdot 3 = 1,2 \text{ t}$, des Untergurts $0,2 \cdot 3 = 0,6 \text{ t}$. Ausnahmen bilden die Knotenpunkte der Endvertikalen, auf welche nur halb soviel kommt. Die Methoden des vorigen Paragraphen liefern folgende Gleichungen, in welchen die Knotenpunktlasten über A mit dessen Wert zusammen berücksichtigt sind. Für den Obergurt (Momentenmethode):

$$\begin{array}{ll}
 5,4 \cdot 3 + X_1 \cdot 4,5 = 0 & X_1 = -3,6 \text{ t} \\
 5,4 \cdot 6 - 1,8 \cdot 3 + X_2 \cdot 4,5 = 0 & X_2 = -6,0 \text{ „} \\
 5,4 \cdot 9 - 1,8(6 + 3) + X_3 \cdot 4,5 = 0 & X_3 = -7,2 \text{ „} \\
 5,4 \cdot 12 - 1,8(9 + 6 + 3) + X_4 \cdot 4,5 = 0 & X_4 = -7,2 \text{ „}
 \end{array}$$



für den Untergurt (Momentenmethode):

$$\begin{aligned} -(37,8 + Z_1) 4,5 &= 0 & Z_1 &= -37,8 \text{ t} \\ -(37,8 + Z_2) 4,5 + 5,4 \cdot 3 &= 0 & Z_2 &= -34,2 \text{ „} \\ -(37,8 + Z_3) 4,5 + 5,4 \cdot 6 - 1,8 \cdot 3 &= 0 & Z_3 &= -31,8 \text{ „} \\ -(37,8 + Z_4) 4,5 + 5,4 \cdot 9 - 1,8 (6 + 3) &= 0 & Z_4 &= -30,6 \text{ „} \end{aligned}$$

für die Diagonalen (Schnittmethode):

$$\begin{aligned} 5,4 - D_1 \frac{4,5}{5,41} &= 0 & D_1 &= 6,49 \text{ t} \\ 5,4 - 1,8 - D_2 \frac{4,5}{5,41} &= 0 & D_2 &= 4,33 \text{ „} \\ 5,4 - 1,8 \cdot 2 - D_3 \frac{4,5}{5,41} &= 0 & D_3 &= 2,16 \text{ „} \\ 5,4 - 8,1 \cdot 3 - D_4 \frac{4,5}{5,41} &= 0 & D_4 &= 0 \text{ „} \end{aligned}$$

und für die Vertikalen (Schnittmethode):

$$\begin{aligned} 6 + V_0 &= 0 & V_0 &= -6,0 \text{ t} \\ 6 - 1,2 + V_1 &= 0 & V_1 &= -4,8 \text{ „} \\ 6 - 3,0 + V_2 &= 0 & V_2 &= -3,0 \text{ „} \\ 6 - 4,8 + V_3 &= 0 & V_3 &= -1,2 \text{ „} \end{aligned}$$

Die übrigen Stabkräfte der ersten Öffnung sind damit ebenfalls bestimmt, da je zwei zur Mitte dieser Öffnung symmetrisch liegende Stäbe gleiche Beanspruchungen erleiden.

Stabkräfte der zweiten Öffnung. Von den äußeren Kräften der ersten Öffnung kommt für die Stabkräfte der zweiten Öffnung nur der Horizontalschub $H = 37,8 \text{ t}$ in Betracht. An Last wirkt auf der ersten Öffnungshälfte in den Knotenpunkten des Obergurts je $0,4 \cdot 3 = 1,2 \text{ t}$, des Untergurts $0,3 \cdot 3 = 0,9 \text{ t}$. Ausnahmen bilden die Knotenpunkte in den beiden Endvertikalen dieser Öffnungshälfte, auf welche halb soviel kommt. In den folgenden Gleichungen sind die Knotenpunktlasten über C mit dessen Wert zusammen berücksichtigt. Man hat für den Obergurt (Momentenmethode):

$$\begin{aligned} 15,75 \cdot 3 - 37,8 \cdot 1,86 + X_1 \cdot 2,64 &= 0 & X_1 &= 8,73 \text{ t} \\ 15,75 \cdot 6 - 37,8 \cdot 3,08 - 2,1 \cdot 3 + X_2 \cdot 1,42 &= 0 & X_2 &= 19,87 \text{ „} \\ 15,75 \cdot 9 - 37,8 \cdot 3,77 - 2,1 (6 + 3) + X_3 \cdot 0,73 &= 0 & X_3 &= 26,93 \text{ „} \\ 15,75 \cdot 12 - 37,8 \cdot 4 - 2,1 (9 + 6 + 3) + X_4 \cdot 0,5 &= 0 & X_4 &= 0 \text{ „} \end{aligned}$$

für den Untergurt (Momentenmethode), wenn z den Hebelarm der Stabkraft bezeichnet, da beispielsweise für Z_1 (Fig. 226) $z : 4,5 = 3 : 3,53$, $z = \frac{3 \cdot 4,5}{3,53}$:

$$\begin{aligned} -37,8 \cdot 4,5 - Z_1 \frac{3 \cdot 4,5}{3,53} &= 0 & Z_1 &= -44,48 \text{ t} \\ 15,75 \cdot 3 - 37,8 \cdot 4,5 - Z_2 \frac{3 \cdot 2,64}{3,24} &= 0 & Z_2 &= -50,26 \text{ „} \\ 15,75 \cdot 6 - 37,8 \cdot 4,5 - 2,1 \cdot 3 - Z_3 \frac{3 \cdot 1,42}{3,08} &= 0 & Z_3 &= -59,21 \text{ „} \\ 15,75 \cdot 9 - 37,8 \cdot 4,5 - 2,1 (6 + 3) - Z_4 \frac{3 \cdot 0,73}{3,01} &= 0 & Z_4 &= -64,94 \text{ „} \end{aligned}$$

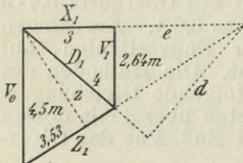


Fig. 226.

Vertikalen (Momentenmethode). Es bezeichne e diejenige Entfernung von der zu berechnenden Vertikale, in welcher sich die Richtungslinien des auf letztere zunächst folgenden Untergurtstabs und des Obergurts schneiden. Dann hat man beispielsweise für V_0 (Fig. 226) $e : 2,64 = e + 3 : 4,5$ und wir erhalten für V_0 :

$$e = \frac{3 \cdot 2,64}{4,5 - 2,64} = 4,26 \text{ m}$$

$$V_0 = 7,08 \text{ t,}$$

für V_1 :

$$e = \frac{3 \cdot 1,42}{2,64 - 1,42} = 3,49 \text{ m}$$

$$V_1 = 4,08 \text{ „,}$$

$$16,35 \cdot 7,26 - 37,8 \cdot 4,5 + V_0 \cdot 7,26 = 0$$

$$15,75 \cdot 9,49 - 37,8 \cdot 4,5 - 0,9 \cdot 6,49 + V_1 \cdot 6,49 = 0$$

für V_2
$$e = \frac{3 \cdot 0,73}{1,42 - 0,73} = 3,17 \text{ m}$$

$$15,75 \cdot 12,17 - 37,8 \cdot 4,5 - 2,1 \cdot 9,17 - 0,9 \cdot 6,17 + V_2 \cdot 6,17 = 0 \quad V_2 = 0,52 \text{ t ,}$$

für V_3
$$e = \frac{3 \cdot 0,5}{0,73 - 0,5} = 6,52 \text{ m}$$

$$15,75 \cdot 18,52 - 37,8 \cdot 4,5 - 2,1 \cdot (15,52 + 12,52) - 0,9 \cdot 9,52 + V_3 \cdot 9,52 = 0 \quad V_3 = -5,69 \text{ ,,}$$

für V_4 ausnahmsweise nach der Knotenpunktmethode:

$$0,6 + V_4 = 0 \quad V_4 = -0,60 \text{ ,,}$$

Diagonalen (Knotenpunktmethode). Es ergeben sich unmittelbar:

$$0,6 + V_0 + D_1 \frac{2,64}{4} = 0 \quad D_1 = -11,64 \text{ t}$$

$$1,2 + V_1 + D_2 \frac{1,42}{3,32} = 0 \quad D_2 = -12,34 \text{ ,,}$$

$$1,2 + V_2 + D_3 \frac{0,73}{3,09} = 0 \quad D_3 = -7,28 \text{ ,,}$$

$$1,2 + V_3 + D_4 \frac{0,5}{3,04} = 0 \quad D_4 = 27,30 \text{ ,,}$$

Bemerkungen. Von den Reaktionen hätten sich noch einfacher als oben erhalten lassen:

$$A = B = \frac{0,6 \cdot 21}{2} = 6,3 \text{ t}$$

$$E = F = \frac{3,4 \cdot 21}{2} = 35,7 \text{ t}$$

$$D = (0,7 + 3,5) 12 - C = 33,6 \text{ t .}$$

Auch die Stabkräfte lassen sich auf verschiedene Weise berechnen. Für die Diagonalen der zweiten Öffnung beispielsweise liefert die Momentenmethode folgende Gleichungen, wobei zu beachten, daß der Hebelarm d der Stabkraft für D_1 (Fig. 226) aus $d : e + 3 = 2,64 : 4$ mit $e + 3 : 4,5 = e : 2,64$ folgt $d = e \frac{4,5}{4}$, und sich analog für die übrigen Diagonalen ausdrückt.

$$15,75 \cdot 7,26 - 37,8 \cdot 4,5 - D_1 \cdot 4,26 \frac{4,5}{4} = 0$$

$$15,75 \cdot 9,49 - 37,8 \cdot 4,5 - 2,1 \cdot 6,49 - D_3 \cdot 3,49 \frac{2,64}{3,32} = 0$$

$$15,75 \cdot 12,17 - 37,8 \cdot 4,5 - 2,1 (9,17 + 6,17) - D_3 \cdot 3,17 \frac{1,42}{3,09} = 0$$

$$15,75 \cdot 18,52 - 37,8 \cdot 4,5 - 2,1 (15,52 + 12,52 + 9,52) - D_4 \cdot 6,52 \frac{0,73}{3,04} = 0 .$$

Es ergeben sich:

$$D_1 = -11,63 \text{ t ,} \quad D_2 = -12,35 \text{ t ,} \quad D_3 = -7,30 \text{ t ,} \quad D_4 = 27,28 \text{ t .}$$

Die kleinen Differenzen gegen die oben erhaltenen Werte erklären sich aus der Vernachlässigung von Dezimalen.

Die Berechnung der Grenzbeanspruchungen des hier behandelten Trägers mittelst Formeln für gleichmäßig verteilte bewegte Last und bewegte Radlastzüge siehe: Weyrauch, Beispiele und Aufgaben zur Berechnung der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer, Leipzig 1888, Beispiele 101 und 102 (entsprechende Berechnung des Dreigelenkbogens der Mittelöffnung daselbst Beispiele 87 und 88).

§ 53. Bogenfachwerke mit Vertikalen (Ständerfachwerke) und beliebig geformten Gurtungen.

Die Methoden des vorigen Paragraphen lassen sich nicht nur bei Zahlenrechnungen sondern auch zur Ableitung von Formeln verwenden. Solche Formeln bieten erhebliche Vorteile, wenn die betreffenden Träger häufig vorkommen. Die weitaus am meisten vorkommenden Bogenfach-

werke sind Ständerfachwerke (Felderteilung durch Vertikalen) einfachen Systems. Für diese sollen die wichtigsten Formeln im folgenden angeführt werden, während bezüglich der Einzelheiten ihrer Ableitung auf die Theorie der Fachwerke verwiesen werden muß¹, wo auch andere Systeme berücksichtigt sind. Erwähnt seien hier nur noch die Strebenfachwerke (Felderteilung ohne Vertikalen).

Der Träger sei zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stützpunkten durch Vertikalen in n Felder von gleichen Längen λ geteilt; Spannweite also $l = n\lambda$. In jedem Felde befindet sich eine wirksame Diagonale, die aber zweierlei Stellungen einnehmen kann (Fig. 227 und 228). Es werden die in Fig. 227, 228 ersichtlichen Bezeichnungen eingeführt, wonach die Stabkräfte derjenigen Gurtung durch X_m bezeichnet sind, welche man der Diagonale nach links hin folgend trifft, die Stabkräfte der andern Gurtung durch Z_m . Die beiden Gurtungen sollen dementsprechend kurz

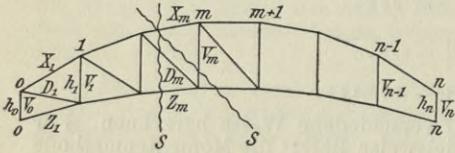


Fig. 227. Obere Vorzeichen.

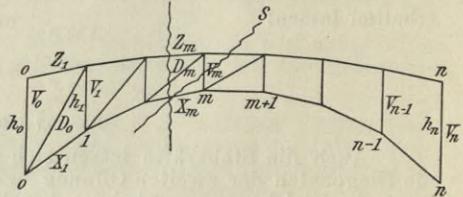


Fig. 228. Untere Vorzeichen.

X -Gurtung und Z -Gurtung heißen. x_m, z_m, d_m, h_m seien die Längen der Stäbe, welche durch X_m, Z_m, D_m, V_m beansprucht sind. Schließlich mögen für ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprung der Koordinaten im Auflager links und horizontaler Abszissenachse ξ_m, ζ_m die Ordinaten der Knotenpunkte m (d. h. auch der Knotenpunkte von Abszissen $m\lambda$) in X -Gurtung und Z -Gurtung bedeuten. Dann gelten in allen folgenden Gleichungen die oberen Vorzeichen bei oberliegender X -Gurtung (Fig. 227) die unteren Vorzeichen bei untenliegender X -Gurtung (Fig. 228).

Bei beliebig gerichteten Aktivkräften in der Trägerebene (Lasten, Winddruck usw.) ergibt die in § 52 vorgeführte Momentenmethode folgende Ausdrücke der Stabkräfte, denen wir die Koordinaten u, w der Drehpunkte für die Schnittmomente M_s beifügen:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} X_m &= \mp M_s \frac{x_m}{\lambda h_m} \\ w &= \zeta_m, \end{aligned} \right\} 1 \\
 \text{mit } u &= m\lambda \\
 & \left. \begin{aligned} Z_m &= \pm M_s \frac{z_m}{\lambda h_{m-1}} \\ w &= \xi_{m-1}, \end{aligned} \right\} 2 \\
 \text{mit } u &= (m-1)\lambda
 \end{aligned}$$

¹ I. Weyrauch, Theorie der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer, Leipzig 1887; II. Weyrauch, Beispiele und Aufgaben zur Berechnung der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer, Leipzig 1888. Wir werden diese beiden Werke in §§ 53, 54 durch I und II bezeichnen und daneben Aufgaben durch A, Beispiele durch B.

$$\left. \begin{aligned} D_m &= \mp M_s \frac{d_m}{\varepsilon \lambda h_{m-1}} \\ \text{mit } u &= (m - \varepsilon) \lambda \quad w_d = \xi_m - \varepsilon (\xi_m - \xi_{m-1}) = \delta_m - \varepsilon (\delta_m - \delta_{m-1}), \end{aligned} \right\} 3$$

$$\left. \begin{aligned} V_m &= \pm M_s \frac{1}{\nu \lambda} \\ \text{mit } u &= (m - \nu) \lambda \quad w_v = \xi_m - \nu (\xi_m - \xi_{m-1}) = \delta_m - \nu (\delta_{m+1} - \delta_m). \end{aligned} \right\} 4$$

Hierin bezieht sich M_s für X_m, D_m, Z_m auf einen Schnitt s durch die Stäbe x_m, d_m, z_m (Fig. 227, 228), für V_m auf einen Schnitt s durch die Stäbe x_m, h_m, z_{m+1} und sind allgemein:

$$\varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}}, \tag{5}$$

$$\nu = \frac{\xi_m - \delta_m}{\xi_m + \delta_m - \xi_{m-1} - \delta_{m+1}}. \tag{6}$$

Speziell bei horizontaler X-Gurtung hat man:

$$x_m = \lambda, \quad \nu = \frac{h_m}{h_{m+1} - h_m}, \quad \xi_m = w_d = w_v = h_0, \tag{7}$$

und bei horizontaler Z-Gurtung:

$$z_m = \lambda, \quad \nu = \varepsilon, \quad \delta_m = w_d = w_v = h_0, \tag{8}$$

unter h_0 die Länge der Vertikale beim Auflager 0 verstanden.

Die Formeln für X_m, Z_m, D_m gelten auch, wenn die Stellung der Diagonalen wechselt (die X-Gurtung also einmal oben und einmal unten liegt), die Formeln für V_m dagegen sind an die Bedingung geknüpft, daß sich zu beiden Seiten der Vertikale m Felder mit Diagonalen gleicher Stellung befinden (Fig. 227, 258), wobei jedoch eine Diagonale mit einem Gurtungsstabe zusammenfallen darf (Fig. 229, 230). Trifft dies nicht zu, so führen meist die Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte und Stabkräfte an einem der begrenzenden Knotenpunkte rasch zum Ziel. Vergl. S. 373 und II, A 39, 42.

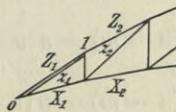


Fig. 229.

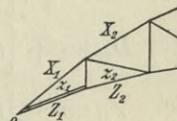


Fig. 230.

Näheres über vorstehende Gleichungen siehe I, §§ 16, 17. Bezüglich darin vorkommender statisch unbestimmter Größen wird das Nötige unten und in § 57 gegeben werden.

Öffnungen mit Endgelenken.

Wir wollen nun speziell solche einfache und durchlaufende Bogenfachwerke der angenommenen Systeme ins Auge fassen, welche an den Enden der betrachteten Öffnung l Gelenke in gleicher Höhe besitzen und nur durch vertikale Aktivkräfte (Lasten) ergriffen sind. Bezeichnen dann S, S' die statischen Momente der Knotenpunktslasten von Auflager 0 bis Schnitt s (Fig. 227, 228) in Hinsicht des Auflagers 0 und von Schnitt s bis Auflager l in Hinsicht des Auflagers l , so folgen aus 1 bis 4:

$$\left. \begin{aligned} X_m &= \mp \left[(n-m)S + mS' - Hn\delta_m \right] \frac{x_m}{lh_m}, \\ Z_m &= \pm \left[(n-m+1)S + (m-1)S' - Hn\zeta_{m-1} \right] \frac{z_m}{lh_{m-1}}, \\ D_m &= \mp \left[(n-m+\varepsilon)S + (m-\varepsilon)S' - Hnw_d \right] \frac{d_m}{\varepsilon lh_{m-1}}, \\ V_m &= \pm \left[(n-m+\nu)S + (m-\nu)S' - Hnw_v \right] \frac{1}{\nu l}. \end{aligned} \right\} 9$$

Für einen beliebigen Horizontalschub H allein, also z. B. auch für die Beiträge von Temperaturänderungen und kleinen Änderungen der Spannweite (bei statisch unbestimmten Bogenarten) sowie der Belastung angrenzender Öffnungen (bei durchlaufenden Bogen) ergeben sich aus 9:

$$\left. \begin{aligned} X_m &= \pm H \frac{x_m \delta_m}{\lambda h_m}, & Z_m &= \mp H \frac{z_m \zeta_{m-1}}{\lambda h_{m-1}}, \\ D_m &= \pm H \frac{d_m w_d}{\varepsilon \lambda h_{m-1}}, & V_m &= \mp H \frac{w_v}{\nu \lambda}. \end{aligned} \right\} 10$$

Ebenso lassen sich aus 9 die Beiträge der Belastung der betrachteten Öffnung l ohne den Einfluß des Horizontalschubs entnehmen (mit $H=0$), welche bei der Berechnung statisch unbestimmter Bogen auch für sich in Betracht kommen (als die A im Ausdruck 23).

Für eine auf die ganze Spannweite l gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit, wovon u_x auf die Knotenpunkte der X -Gurtung und u_z auf diejenigen der Z -Gurtung kommen, liefern die Gleichungen 9:

$$\left. \begin{aligned} X_m &= \mp \left[m(n-m) - H \frac{2\delta_m}{u\lambda^2} \right] \frac{x_m}{h_m} \frac{u\lambda}{2}, \\ Z_m &= \pm \left[(m-1)(n-m+1) - H \frac{2\zeta_{m-1}}{u\lambda^2} \right] \frac{z_m}{h_{m-1}} \frac{u\lambda}{2}, \\ D_m &= \mp \left[m(n-m) - \varepsilon(n-2m+1) - H \frac{2w_d}{u\lambda^2} \right] \frac{d_m}{\varepsilon h_{m-1}} \frac{u\lambda}{2}, \\ V_m &= \pm \left[m(n-m) - \nu(n-2m + \frac{u_x - u_z}{u}) - H \frac{2w_v}{u\lambda^2} \right] \frac{1}{\nu} \frac{u\lambda}{2}, \end{aligned} \right\} 11$$

worin H den Horizontalschub durch die angeführte Belastung allein bedeutet.

Für beliebige Lasten P_1, P_2, \dots , welche in der betrachteten Öffnung l bei Abszissen a_1, a_2, \dots auf die Fahrbahn kommen, folgen aus 9, wenn die Fahrbahnträger wie gewöhnlich nur je ein Feld überspannen (Beispiel eines anderen Falles siehe Fig. 220, S. 327):

$$X_m = \mp \left[(n-m) \sum_0^m Pa + m \sum_m^n P(l-a) - Hn\delta_m \right] \frac{x_m}{lh_m}, \quad 12$$

$$Z_m = \pm \left[(n+m+1) \sum_0^{m-1} Pa + (m-1) \sum_{m-1}^n P(l-a) - Hn\zeta_{m-1} \right] \frac{z_m}{lh_{m-1}}, \quad 13$$

$$\begin{aligned} D_m &= \mp \left[(n-m+\varepsilon) \sum_0^{m-1} Pa + \sum_{m-1}^m P \left((m-1)\varepsilon l + (n-m-n\varepsilon+\varepsilon)a \right) + \right. \\ &\quad \left. (m-\varepsilon) \sum_m^n P(l-a) - Hnw_d \right] \frac{d_m}{\varepsilon lh_{m-1}}. \quad 14 \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke gelten allgemein. Ferner hat man, wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkt m der X -Gurtung angreift:

$$V_m = \pm \left[(n - m + \nu) \sum_0^{m-1} P a + \sum_{m-1}^m P \left((m-1) \nu l + (n - m - n \nu + \nu) a \right) + (m - \nu) \sum_m^n P (l - a) - H n w_v \right] \frac{1}{\nu l}, \quad 15$$

und wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkt m der Z -Gurtung angreift:

$$V_m = \pm \left[(n - m + \nu) \sum_0^m P a + \sum_m^{m+1} P \left((\nu + 1) m l - (m + n \nu - \nu) a \right) + (m - \nu) \sum_{m+1}^n P (l - a) - H n w_v \right] \frac{1}{\nu l}. \quad 16$$

In 12 bis 16 bedeuten die Grenzen der Summen Σ Vertikalennummern (Fig. 227, 228), der Horizontalschub H rührt von den Lasten P allein her. Eine Last, welche gerade an der Grenze zweier Summen Σ liegt, kann nach Belieben in der einen oder andern aufgenommen werden, da z. B. in 12 mit $a = m \lambda$ bei Beachtung von $l = n \lambda$ folgt $(n - m) a = m (l - a)$ und entsprechende Gleichheiten für 13–16 bestehen. Unmittelbar lassen es die Einflußlinien der Stabkräfte erkennen (Fig. 274).

Für die Endvertikalen gelten ausnahmsweise:

im Falle von Fig. 231 $V_0 = K_u - V + H \frac{\delta_1}{\lambda}, \quad 17$

" " " 232 $V_0 = -K_o, \quad 18$

und für die Mittelvertikale beispielsweise bei zur Mitte symmetrischen Fachwerken ohne Zwischengelenk mit $n = 2\sigma$, $\Delta = \xi_\sigma - \xi_{\sigma-1}$:

im Falle von Fig. 233 $V_\sigma = -K_o - X_\sigma \frac{2\Delta}{x_\sigma}, \quad 19$

" " " 234 $V_\sigma = K_u + X_\sigma \frac{2\Delta}{x_\sigma}, \quad 20$

worin K_u, K_o die in den erwähnten Figuren angedeuteten Knotenpunktlasten bezeichnen. — Wenn sich die beiden Gurtungen in den End-

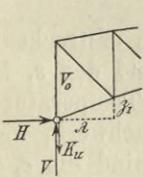


Fig. 231.

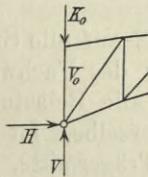


Fig. 232.

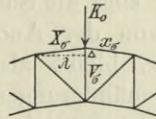


Fig. 233.



Fig. 234.

gelenken treffen, so ergeben die Gleichungen 9, 10, 11, 13 für $m = 1$ wegen $h_0 = 0, \xi_0 = 0$ den unbestimmten Ausdruck $Z_1 = 0 : 0$. Da jedoch alsdann fürs Gleichgewicht gegen horizontale Verschiebung des Knotenpunkts 1 im Z -Gurt (Fig. 227, 228) die Bedingung besteht

$Z_1 \frac{\lambda}{z_1} = Z_2 \frac{\lambda}{z_2}$, so gilt allgemein:

für $h_0 = 0$

$$Z_1 = Z_2 \frac{z_1}{z_2}. \quad 21$$

21

Obige Gleichungen lassen sich zum Teil für besondere Gurtungsformen vereinfachen, indem man die betreffenden speziellen Werte von ε , ν , h_m , r_m , z_m einsetzt, wobei sich auch besondere Eigenschaften der betreffenden Träger ergeben. Siehe z. B. die Aufgaben 33, 34 sowie I, §§ 72, 75. Ausdehnung der Gleichungen auf Öffnungen mit ungleichen Höhen der Endgelenke und ohne Endgelenke in I, §§ 18, 19.

Horizontalschub H . In allen obigen Gleichungen ist der Horizontalschub H von der Trägerart, d. h. hier von der Anordnung der Auflager und etwaiger Zwischengelenke abhängig. Für Öffnungen mit gleich hohen Endgelenken und einem Zwischengelenk in der Mitte beispielsweise ist H durch § 19, 5) bestimmt.

Handelt es sich um Bogenfachwerke von einer Öffnung mit Kämpfergelenken allein (Fig. 235, 242, 248), so mögen für irgend einen Stab bezeichnen s die Länge, F den Querschnitt, q die Beanspruchung durch einen Horizontalschub $H = 1$ allein, und A diejenige Beanspruchung, welche durch die in Frage stehende Belastung im Falle $H = 0$ erzeugt würde (d. h. für ein Balkenfachwerk der gewählten Anordnung). Dann hat man nach § 57, 27) mit

$$c = \frac{s}{F}, \quad 22$$

durch eine beliebige Belastung allein:

$$H = - \frac{\sum c q A}{\sum c q^2}, \quad 23$$

durch eine beliebige Temperaturänderung τ allein (bei Zunahme τ positiv):

$$H = \frac{E \alpha \tau l}{\sum c q^2}, \quad 24$$

und durch eine Änderung der Spannweite um Δl allein (bei Zunahme Δl positiv):

$$H = - \frac{E \Delta l}{\sum c q^2}. \quad 25$$

In diesen Gleichungen sind die Summen \sum auf alle Stäbe zu erstrecken. Der Nenner ist nur von der Anordnung des Fachwerks und den s , F seiner Stäbe abhängig, bleibt also für alle Belastungen, Temperaturänderungen und Längenänderungen Δl derselbe. Ist das Fachwerk, wie gewöhnlich, vollständig symmetrisch zur Trägermitte, dann sind die c , q symmetrisch liegender Stäbe gleich groß, so daß sich $\sum c q^2$ aus den Verhältnissen der ersten Trägerhälfte berechnen läßt. Nachdem der Horizontalschub bekannt ist, erhält man die ganze Beanspruchung eines beliebigen Stabes:

$$S = A + Hq, \quad 26$$

worin A , q die oben erwähnten Werte für diesen Stab bedeuten. Bei Ermittlung der Beiträge von τ , Δl ist $A = 0$. — Während die Gleichungen 22 bis 26 für beliebige einfache Bogenfachwerke mit Kämpfergelenken allein ohne überzählige Stäbe gelten, sind für das in diesem

Paragrafen betrachtete einfache System mit Vertikalen die ρ durch 10 mit $H = 1$, die A durch 9, 11 oder 12—16 mit $H = 0$ bestimmt. Abgesehen ist hierbei von den Ausnahmefällen, für welche die Gleichungen 17 bis 21 bestehen und also für $H = 1$ allein beziehungsweise für die gegebene Belastung mit $H = 0$ auch die ρ , A liefern.

Durchlaufende Bogenfachwerke werden meist am einfachsten unter Berücksichtigung der besonderen Verhältnisse des einzelnen Falles berechnet (vergl. die Beispiele 101, 117). Doch gelten auch für sie neben den Gleichungen 1 bis 21, wenn kein Zwischengelenk vorhanden ist, die Ausdrücke 22 bis 26, worin sich dann nur im allgemeinen die Summen Σ auf die Stäbe aller Öffnungen beziehen und L , ΔL an Stelle von l , Δl zu setzen sind, unter L die Summe aller Spannweiten verstanden (§ 57).

Kämpferdrucklinie. Ungünstigste Belastungen. Die Kämpferdrucklinie für Öffnungen mit drei Gelenken ist wie in § 19 oder Aufgabe 3 (S. 14) bestimmt. Mittels derselben können die ungünstigsten Belastungen in gleicher Weise ermittelt werden, wie dies unten für Öffnungen mit zwei Gelenken angegeben ist. Doch lassen sich für einfache Bogenfachwerke mit drei Gelenken und statisch bestimmte durchlaufende Bogenfachwerke der hier betrachteten Systeme leicht auch direkt verwendbare Formeln für die Grenzwerte der Stabkräfte selbst ableiten. Da wir dies an anderer Stelle gezeigt und auf Grund der erhaltenen Formeln eine ganze Reihe statisch bestimmter Bogenfachwerke berechnet haben (I, §§ 66–75, 78–81; II, B 84–91, 93–104, A 41–43), diese auch nicht allgemein zu den elastischen Bogenträgern gerechnet werden, so wollen wir uns nur auf ein Beispiel solcher Berechnungen beschränken unter anschließendem Hinweis auf entsprechende weitere Beispiele (Beisp. 107).

Bei statisch unbestimmten Bogenfachwerken handelt es sich in erster Linie um Regeln für die ungünstigsten Belastungen, ähnlich wie sie in §§ 10, 11 für vollwandige Bogen gegeben wurden, neben denen das in § 12 über Einflußlinien und Radlastzüge Gesagte gültig bleibt. Für Öffnungen mit Endgelenken ist die Gleichung der Kämpferdrucklinie nach § 2, 1):

$$b = \frac{a(l-a)}{\beta l}, \quad 27$$

worin β der Wert von H durch eine bei a angreifende Einzellast $P = 1$ allein. Näheres s. Beispiel 112 und Aufgabe 37. Bei Feststellung der ungünstigsten Belastungen in der betrachteten Öffnung ist das in § 10 bezüglich der Kämpferdrucke R , R' durch eine Einzellast P Gesagte zu beachten, wonach jetzt die von P herrührende resultierende Schnittkraft in unserem beliebig geformten Schnitte s (Fig. 227, 228):

$$\begin{array}{ll} \text{für } P \text{ nach Schnitt } s & R_s = R, \\ \text{„ } P \text{ vor „ } s & R_s = R'. \end{array}$$

Die P bedeuten am Träger selbst angreifende Lasten, das heißt hier Knotenpunktslasten. Man hat ferner zu beachten, daß M_s in 1—4 das

Moment dieser vom Trägerteil I (Fig. 223) her wirkenden Schnittkraft R_s und positiv oder negativ ist, je nachdem es rechts oder links um den betreffenden Momentendrehpunkt wirkt, während positive Stabkräfte Zug, negative Druck bedeuten. So ergeben sich zunächst für einfache Bogenfachwerke mit Endgelenken und Vertikalen bei gleich oder verschieden langen Feldern die folgenden Regeln, welche leicht auch auf Fachwerke ohne Vertikalen übertragen werden können. In Fig. 235—238 deuten wie früher fette Striche möglichst starke Belastung (Eigengewicht plus Verkehrslast), feine Striche möglichst schwache Belastung (Eigengewicht allein) der Knotenpunkte auf den betreffenden Strecken an.

Gurtungen (Fig. 235, 236, 244, 245, 271). Bei Berechnung eines beliebigen Gurtungsstabes ziehe man aus den Endgelenken 0 und l Gerade

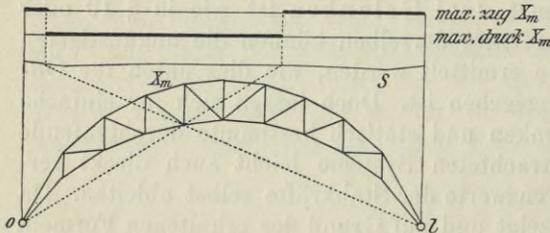


Fig. 235.

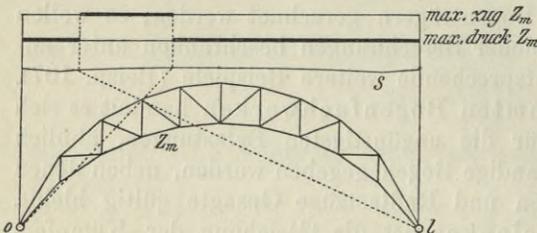


Fig. 236.

Diagonalen (Fig. 237, 246, 251, 271). Bei Berechnung einer Diagonale d_m ziehe man aus den Endgelenken 0 und l Gerade R, R' durch den Schnittpunkt der beiden Gurtungsstäbe x_m, z_m des Feldes von d_m bis zu den Durchschnitten mit der Kämpferdrucklinie S . Es sind dann Belastungsgrenzen: 1. Der Durchschnitt von S, R' , wenn er zwischen 0 und Vertikale h_{m-1} liegt; 2. der Durchschnitt von S, R , wenn er zwischen Vertikale h_m und l liegt; 3. der Schnitt s durch das Feld m selbst, wenn eine Kraft vom Gelenk 0 in der Richtung auf den Durchschnitt von S, h_m (Fig. 237) in andrem Sinne um den Schnittpunkt von x_m, z_m dreht, als eine Kraft vom Durchschnitt der Linien S, h_{m-1} in der Richtung auf das Gelenk l (Fig. 237).

Vertikalen (Fig. 238, 247, 252, 271). Bei Berechnung einer Vertikale h_m ziehe man aus den Endgelenken 0 und l Gerade R, R' durch

den Schnittpunkt der beiden übrigen Stäbe des gleichen Feldes bis zu den Durchschnitten mit der Kämpferdrucklinie S . Für die eine Grenzbeanspruchung sind die Knotenpunkte zwischen diesen Durchschnitten, für die andere die übrigen Knotenpunkte möglichst stark zu belasten. Im Falle beide Gurtungen in den Endgelenken zusammentreffen, gelten für die Grenzwerte von Z_1 dieselben Belastungen wie für die Grenzwerte von Z_2 (s. S. 373 unten).

Diagonalen (Fig. 237, 246, 251, 271). Bei Berechnung einer Diagonale d_m ziehe man aus den Endgelenken 0 und l Gerade R, R' durch den Schnittpunkt der beiden Gurtungsstäbe x_m, z_m des Feldes von d_m bis zu den Durchschnitten mit der Kämpferdrucklinie S . Es sind dann Belastungsgrenzen: 1. Der Durchschnitt von S, R' , wenn er zwischen 0 und Vertikale h_{m-1} liegt; 2. der Durchschnitt von S, R , wenn er zwischen Vertikale h_m und l liegt; 3. der Schnitt s durch das Feld m selbst, wenn eine Kraft vom Gelenk 0 in der Richtung auf den Durchschnitt von S, h_m (Fig. 237) in andrem Sinne um den Schnittpunkt von x_m, z_m dreht, als eine Kraft vom Durchschnitt der Linien S, h_{m-1} in der Richtung auf das Gelenk l (Fig. 237).

den Schnittpunkt der Gurtungsstäbe x_m, z_{m+1} in den anliegenden Feldern bis zu den Durchschnitten mit der Kämpferdrucklinie S . Es sind dann Belastungsgrenzen: 1. Der Durchschnitt von S, R' , wenn er zwischen 0 und dem letzten Angriffspunkte der Verkehrslast (Fahrbahnlast) vor dem Schnitte s durch x_m, h_m, z_{m+1} liegt; 2. der Durchschnitt von S, R , wenn er zwischen dem ersten Angriffspunkte der Verkehrslast nach jenem Schnitte s und l liegt; und der Schnitt s selbst, wenn eine Kraft vom Gelenk 0 in der Richtung auf den Punkt von S senkrecht über dem ersten Angriffspunkt der Verkehrslast nach s in anderem Sinne um den Schnittpunkt der Gurtungsstäbe x_m, z_{m+1} dreht, als eine Kraft von dem Punkte senkrecht über dem letzten Angriffspunkte der Verkehrslast vor s in der Richtung auf das Gelenk l . — Für die Kämpfervertikale 0 trifft

der Schnitt s nur die Stäbe h_0, z_1 und tritt dann im Falle von Fig. 231 der Knotenpunkt 1 des Untergurts an Stelle des Schnittpunktes von x_m, z_{m+1} , während im Falle von Fig. 232 die Grenzbeanspruchungen zufolge 18 bei möglichst großem und möglichst kleinem K_0 entstehen. Wenn bei Mittelvertikalen symmetrischer Bogenfachwerke $\Delta = x_\sigma - x_{\sigma-1} = 0$ ist (horizontale X-Gurtung), dann führen nach 19, 20 im Falle von Fig. 233 die Grenzwerte von K_0 , im Falle

von Fig. 234 die Grenzwerte von K_u zu den Grenzbeanspruchungen V_σ . Ist Δ von 0 verschieden, so kann man die Grenzbeanspruchungen V_σ (eventuell etwas zu ungünstig) aus 19, 20 mit den Grenzwerten von K_0, X_σ , bezw. K_u, X_σ ohne Rücksicht auf gleichzeitiges Eintreten dieser Grenzwerte berechnen (genaueres Vorgehen s. II, A 28).

Durch vorstehende Regeln sind für jeden Stab zwei Belastungen bestimmt, welche die Grenzbeanspruchungen desselben liefern. Welche der beiden Belastungen den größten Druck (oder kleinsten Zug) und den größten Zug (oder kleinsten Druck) bedingt, ergibt sich natürlich bei der Berechnung von selbst, es kann jedoch auch aus den S. 376 erwähnten allgemeinen Gesichtspunkten im voraus festgestellt werden (Fig. 235–238). Hierbei genügt es, den Sinn des Beitrags einer Last P auf irgend einer

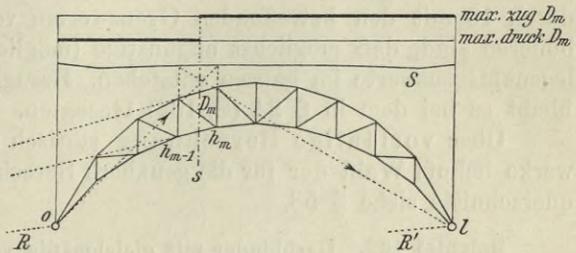


Fig. 237.

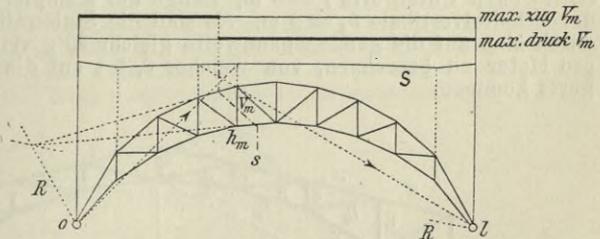


Fig. 238.

der Beitragsstrecken zu ermitteln, da bei allen Grenzpunkten der letzteren Zeichenwechsel des Beitrags stattfinden. Die Grenzwerte der Stützenreaktionen treten wie bei vollwandigen Bogen bei möglichst starker Belastung des Bogens ein. Mit den von der Belastung herrührenden Grenzwerten sind, wie in anderen Fällen, die durch andere Einwirkungen (Temperaturänderungen etc.) bedingten Grenzbeiträge so zu kombinieren, daß möglichst ungünstige, d. h. möglichst weit auseinander gelegene Grenzwerte im ganzen entstehen. Siehe Beispiel 114.

Für durchlaufende Bogenfachwerke der Art Fig. 148, 149 nach dem angenommenen Fachwerksystem liefern obige Regeln die von der Belastung innerhalb der betrachteten Öffnung l herrührenden Grenzwerte der Stabkräfte, mit welchen die von der Belastung außerhalb l wie die durch Temperaturänderungen erzeugten Grenzbeiträge (ausgedrückt durch 10 mit den betreffenden Grenzwerten von H) wieder so zu kombinieren sind, daß möglichst ungünstige (möglichst weit auseinander gelegene) Grenzwerte im ganzen entstehen. Bezüglich der Stützenreaktionen bleibt es bei dem in § 24 (S. 194) Gesagten.

Über vorläufige Berechnung statisch unbestimmter Bogenfachwerke behufs Wahl der für die genauere Berechnung erforderlichen Stabquerschnitte siehe § 58.

Beispiel 102. Dachbinder mit gleichmäßig verteilter Last.

Für den in Fig. 239 angedeuteten Bogendachbinder mit drei Gelenken seien gegeben: Spannweite $l = 8 \lambda = 32$ m, Pfeil des einem Kreisbogen eingeschriebenen Untergurts $f = 8$ m, Länge der Kämpfervertikale $h_0 = 6$ m, Länge der Scheitelvertikale $h_4 = 2$ m. Es sind die Stabkräfte und Stützenreaktionen durch eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von $u = 1,06$ t pro Meter zu berechnen, von welcher 0,25 t auf die Knotenpunkte des Untergurts kommen.

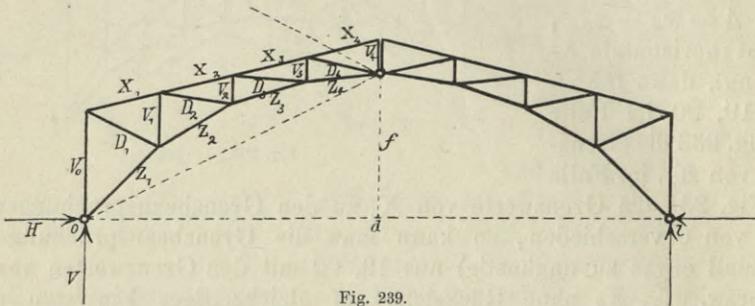


Fig. 239.

Formberechnung. Werden der Ursprung der Koordinaten in das Kämpfergelenk links und die Abszissenachse horizontal gelegt, so ist die Gleichung des Kreisbogens, der die Form des Untergurts bestimmt, mit

$$r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} = \frac{32^2}{8 \cdot 8} + \frac{8}{2} = 20 \text{ m}$$

nach § 19, 9):

$$y = \sqrt{(r-f)^2 + x(l-x)} - (r-f) = \sqrt{144 + x(32-x)} - 12.$$

Sie liefert für

$x = 0$	4	8	12	16 m
$y = 0$	4	6,33	7,60	8 m

Bezeichnen nun ξ_m, δ_m die Ordinaten der Knotenpunkte m in X-Gurtung und Z-Gurtung, so hat man nach § 53:

für	$m =$	0	1	2	3	4
	$\xi_m =$	6	7	8	9	10 m
	$\delta_m = y =$	0	4	6,33	7,60	8 "
	$h_m = \xi_m - \delta_m =$	6	3	1,67	1,40	2 "
	$z_m = \sqrt{\lambda^2 + (\delta_m - \delta_{m-1})^2} =$		5,66	4,63	4,20	4,02 "
	$d_m = \sqrt{\lambda^2 + (\xi_m - \xi_{m-1})^2} =$		4,47	4,06	4,02	4,12 "
	$\varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} =$		- 1	- 1,25	- 5,18	3,33 "
	$v = \frac{h_m}{\xi_m + \delta_m - \xi_{m-1} - \delta_{m+1}} =$		- 2,25	- 6,18	2,33	
	$w_d = \xi_m - \varepsilon (\xi_m - \xi_{m-1}) =$		8	9,25	14,18	6,67 "
	$w_v = \xi_m - v (\xi_m - \xi_{m-1}) =$		9,25	14,18	6,67	" ,

während die Länge aller Stäbe des Obergurts $x_m = \sqrt{4^2 + 1^2} = 4,12$ m ist.

Beanspruchungen. Bezeichnen u_x, u_z diejenigen Teile von u , welche auf die Knotenpunkte der X-Gurtung und Z-Gurtung kommen, so hat man nach § 53, 11) mit § 19, 19) und $l = n \lambda$ für die Stabkräfte:

$$X_m = - \left[m(n-m) - \frac{n^2}{4f} \delta_m \right] \frac{x_m}{h_m} \frac{u \lambda}{2},$$

$$Z_m = \left[(m-1)(n-m+1) - \frac{n^2}{4f} \xi_{m-1} \right] \frac{z_m}{h_{m-1}} \frac{u \lambda}{2},$$

$$D_m = - \left[m(n-m) - \varepsilon(n-2m+1) - \frac{n^2}{4f} w_d \right] \frac{d_m}{\varepsilon h_{m-1}} \frac{u \lambda}{2},$$

$$V_m = \left[m(n-m) - v(n-2m + \frac{u_x - u_z}{u}) - \frac{n^2}{4f} w_v \right] \frac{u \lambda}{2v}.$$

Die letzte Gleichung setzt voraus, daß der Vertikale m beiderseits Felder mit Diagonalen gleicher Stellung anliegen, sie gilt also im allgemeinen nicht für Kämpfervertikalen und Scheitelvertikalen. Mit $n = 8, \lambda = 4$ m, $f = 8$ m, $x_m = 4,12$ m, $u = 1,06$ t, $u_x = 0,81$ t, $u_z = 0,25$ t nehmen vorstehende Gleichungen die folgenden Formen an:

$$X_m = - \left[m(8-m) - 2 \delta_m \right] \frac{8,734}{h_m},$$

$$Z_m = \left[(m-1)(9-m) - 2 \xi_{m-1} \right] \frac{2,12 z_m}{h_{m-1}},$$

$$D_m = - \left[m(8-m) - \varepsilon(9-2m) - 2 w_d \right] \frac{2,12 d_m}{\varepsilon h_{m-1}},$$

$$V_m = \left[m(8-m+2v) - 2 w_v \right] \frac{2,12}{v} - 18,08,$$

und es ergeben sich hieraus mit $m = 1$ bis 4 nachstehende Stabkräfte in Tonnen:

$X_1 = 2,91$	$Z_1 = -23,99$	$D_1 = -3,16$	$V_1 = -3,00$
$X_2 = 3,49$	$Z_2 = -22,90$	$D_2 = -0,57$	$V_2 = -3,99$
$X_3 = 1,25$	$Z_3 = -21,33$	$D_3 = 2,11$	$V_3 = -3,85$
$X_4 = 0$	$Z_4 = -18,26$	$D_4 = 1,25$	

Für die Vertikalreaktionen der Kämpfer und den Horizontalschub hat man nach § 19, 19):

$$V = \frac{u l}{2} = 1,06 \cdot 16 = 16,96 \text{ t},$$

$$H = \frac{u l^2}{8 f} = \frac{1,06 \cdot 32^2}{8 \cdot 8} = 16,96 \text{ „}.$$

Die Bedingung „Summe aller Vertikalkräfte gleich Null“ in Anwendung auf die Knotenpunkte 0 des Untergurts und 4 des Obergurts ergibt:

$$V_0 + V + Z_1 \frac{4}{5,66} - 0,25 \cdot 2 = 0,$$

$$V_4 + X_4 \frac{1}{4,12} + 0,81 \cdot 2 = 0,$$

woraus mit den bereits berechneten V, Z_1, X_4 die noch fehlenden Stabkräfte:

$$V_0 = 0,50 \text{ t}, \quad V_4 = -1,62 \text{ t}.$$

Die Berechnung des hier behandelten Dachbinders für wechselnde Belastung einschließlich des im nächsten Beispiel behandelten schiefen Winddrucks siehe Weyrauch, Beispiele und Aufgaben etc., Leipzig 1888, S. 362.

Beispiel 103. Dachbinder mit schiefer Winddruck.

Für den im vorigen Beispiel behandelten Bogendachbinder Fig. 239 die Beiträge des Winddrucks zu den Stabkräften und Stützenreaktionen zu berechnen, wenn auf die vom Winde getroffene Binderhälfte kommen für die schiefe Dachfläche in jedem der drei inneren Knotenpunkte

ein Vertikaldruck von 0,40 t,

ein Horizontaldruck von 0,10 t,

in den beiden äußeren Knotenpunkten halb soviel; für die vertikale Fläche in jedem der beiden Knotenpunkte

ein Horizontaldruck von 1,75 t.

Es ist einmal die erste, einmal die zweite Binderhälfte vom Winde getroffen anzunehmen.

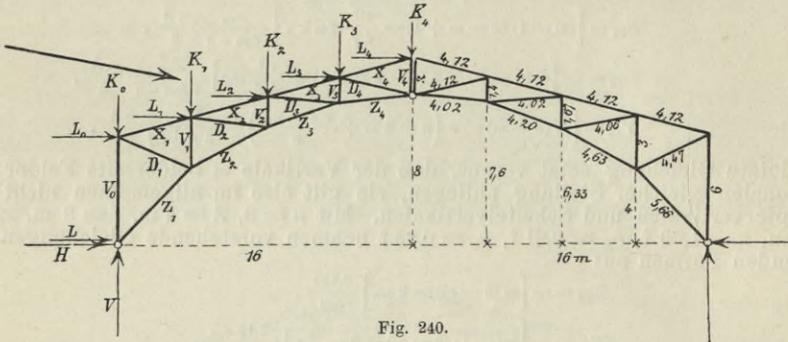


Fig. 240.

Greifen zwischen 0 und einem beliebigen Schritte s durch den Träger beliebige Vertikalkräfte K bei Abszissen e und beliebige Horizontalkräfte L bei Ordinaten c an (Fig. 240), wobei die K von oben nach unten, die L von links nach rechts als positiv gelten, so hat man das Moment der äußeren Kräfte des Trägers links von s in Hinsicht eines beliebigen Drehpunktes der Koordinaten u, w in der Trägerebene:

$$M_s = V u - H w - \sum_0^s K(u - e) - \sum_0^s L(w - c). \tag{1}$$

Wird Schnitt s zur Berechnung von X_m, Z_m, D_m durch das m -te Feld, zur Berechnung von V_m durch die Stäbe der Längen x_m, h_m, z_{m+1} gelegt, so hat man nach § 53, 1)–4):

$$X_m = -M_s \frac{x_m}{\lambda h_m} \quad \text{mit} \quad u = m \lambda, \quad w = 3m, \tag{2}$$

$$Z_m = M_s \frac{z_m}{\lambda h_{m-1}} \quad \text{,,} \quad u = (m-1) \lambda, \quad w = 3m-1, \tag{3}$$

$$D_m = -M_s \frac{d_m}{\varepsilon \lambda h_{m-1}} \quad \text{,,} \quad u = (m-\varepsilon) \lambda, \quad w = w_d, \tag{4}$$

$$V_m = M_s \frac{1}{\nu \lambda} \quad \text{,,} \quad u = (m-\nu) \lambda, \quad w = w_\nu. \tag{5}$$

Die Werte $x_m, z_m, d_m, h_m, \xi_m, \eta_m, \varepsilon, \nu, w_d, w_v$ sind schon im vorigen Beispiel bestimmt. Wie dort gilt auch hier die Gleichung für V_m nicht für die Kämpfervertikale und Scheitelvertikale.

Nach 1 bis 5 erhält man bei beliebigen K, L (Fig. 240) die Beanspruchungen des Obergurts:

$$X_1 = -(4V - 4H - 4K_0 - 4L + 2L_0) \frac{4,12}{4 \cdot 3},$$

$$X_2 = -(8V - 6,33H - 8K_0 - 4K_1 - 6,33L - 0,33L_0 + 0,67L_1) \frac{4,12}{4 \cdot 1,67},$$

$$X_3 = -(12V - 7,6H - 12K_0 - 8K_1 - 4K_2 - 7,6L - 1,6L_0 - 0,6L_1 + 0,4L_2) \frac{4,12}{4 \cdot 1,4},$$

$$X_4 = -(16V - 8H - 16K_0 - 12K_1 - 8K_2 - 4K_3 - 8L - 2L_0 - 1L_1 - 0L_2 + 1L_3) \frac{4,12}{4 \cdot 2},$$

die Beanspruchungen des Untergurts:

$$Z_1 = (0V - 6H - 6L) \frac{5,66}{4 \cdot 6},$$

$$Z_2 = (4V - 7H - 4K_0 - 7L - 1L_0) \frac{4,63}{4 \cdot 3},$$

$$Z_3 = (8V - 8H - 8K_0 - 4K_1 - 8L - 2L_0 - 1L_1) \frac{4,2}{4 \cdot 1,67},$$

$$Z_4 = (12V - 9H - 12K_0 - 8K_1 - 4K_2 - 9L - 3L_0 - 2L_1 - 1L_2) \frac{4,02}{4 \cdot 1,4},$$

die Beanspruchungen der Diagonalen:

$$D_1 = (10V - 8H - 10K_0 - 8L - 2L_0) \frac{4,47}{1 \cdot 24},$$

$$D_2 = (13V - 9,25H - 13K_0 - 9K_1 - 9,25L - 3,25L_0 - 2,25L_1) \frac{4,06}{1,25 \cdot 12},$$

$$D_3 = (32,72V - 14,18H - 32,72K_0 - 28,72K_1 - 24,72K_2 - 14,18L - 8,18L_0 - 1,18L_1 - 6,18L_2) \frac{4,02}{5,18 \cdot 6,68},$$

$$D_4 = -(2,68V - 6,67H - 2,68K_0 + 1,32K_1 + 5,32K_2 + 9,32K_3 - 6,67L - 0,67L_0 + 0,33L_1 + 1,33L_2 + 2,33L_3) \frac{4,12}{3,33 \cdot 5,6},$$

und die Beanspruchungen der Vertikalen:

$$V_1 = -(13V - 9,25H - 13K_0 - 9,25L - 3,25L_0) \frac{1}{2,25 \cdot 4}$$

$$V_2 = -(32,72V - 14,18H - 32,72K_0 - 28,72K_1 - 14,18L - 8,18L_0 - 7,18L_1) \frac{1}{6,18 \cdot 4},$$

$$V_3 = (2,68V - 6,67H - 2,68K_0 + 1,32K_1 + 5,32K_2 - 6,67L - 0,67L_0 + 0,33L_1 + 1,33L_2) \frac{1}{2,33 \cdot 4}.$$

Die Bedingung „Summe aller Vertikalkräfte gleich Null“ in Anwendung auf die Knotenpunkte 0 des Untergurts und 4 des Obergurts liefert zur Bestimmung von V_0 und V_4 die Gleichungen

$$V_0 + V + Z_1 \frac{4}{5,66} = 0, \quad V_4 + K_4 + X_4 \frac{1}{4,12} = 0.$$

Wegen vollständiger Symmetrie des Trägers genügt es, eine Trägerhälfte zu berechnen, was beim Balkendachbinder, angesichts der verschiedenen Auflager, für schiefen Winddruck nicht der Fall ist.

Dachfläche beim Auflager l getroffen. Für die äußeren Kräfte vor dem letzten und mittleren Gelenk bestehen hinsichtlich dieser Gelenke folgende Momentengleichungen:

$$V \cdot 32 - 0,4 \left(\frac{16}{2} + 12 + 8 + 4 \right) - 0,1 \left(\frac{10}{2} + 9 + 8 + 7 + \frac{6}{2} \right) - 1,75 \cdot 6 = 0,$$

$$V \cdot 16 - H \cdot 8 = 0,$$

woraus die Stützenreaktionen bei 0

$$V = 0,83 \text{ t},$$

$$H = 1,66 \text{ t}.$$

Mit diesen Werten und verschwindenden K, L liefern obige Gleichungen folgende Stabkräfte in Tonnen.

$X_1 = 1,14$	$Z_1 = -2,35$	$D_1 = -0,93$	$V_0 = 1,70$
$X_2 = 2,39$	$Z_2 = -3,20$	$D_2 = -1,24$	$V_1 = 1,71$
$X_3 = 1,95$	$Z_3 = -4,17$	$D_3 = 0,42$	$V_2 = -0,15$
$X_4 = 0$	$Z_4 = -3,58$	$D_4 = 1,95$	$V_3 = -0,57$
			$V_4 = 0$

Dachfläche beim Auflager 0 getroffen. Für die äußeren Kräfte vor dem letzten und mittleren Gelenke bestehen hinsichtlich dieser Gelenke folgende Momentengleichungen:

$$V \cdot 32 - 0,4 \left(\frac{32}{2} + 28 + 24 + 20 + \frac{16}{2} \right) + 0,1 \left(\frac{6}{2} + 7 + 8 + 9 + \frac{10}{2} \right) + 1,75 \cdot 6 = 0,$$

$$V \cdot 16 - H \cdot 8 - 0,4 \left(\frac{16}{2} + 12 + 8 + 4 \right) - 0,1 \left(\frac{2}{2} + 1 + 0 - 1 - \frac{1}{2} \right) - 1,75 (8 + 2) = 0,$$

woraus die Stützenreaktionen bei 0:

$$V = 0,77 \text{ tn}, \quad H = -2,25 \text{ tn}.$$

Mit diesen Werten und $2K_0 = K_1 = K_2 = K_3 = 2K_4 = 0,4, L = 1,75, L_0 = 1,75 + 0,05 = 1,8, L_1 = L_2 = L_3 = 2L_4 = 0,1$ liefern obige Gleichungen folgende Stabkräfte in Tonnen:

$X_1 = -2,71$	$Z_1 = 0,71$	$D_1 = 1,14$	$V_0 = -1,27$
$X_2 = -3,45$	$Z_2 = 1,54$	$D_2 = 0,64$	$V_1 = -0,69$
$X_3 = -2,16$	$Z_3 = 2,05$	$D_3 = -1,35$	$V_2 = 0,05$
$X_4 = 0,04$	$Z_4 = 0,75$	$D_4 = -2,19$	$V_3 = 0,70$
			$V_4 = -0,21$

Bezüglich der Berechnung des hier behandelten Dachbinders für wechselnde Belastung und schiefen Winddruck siehe den Hinweis am Ende des vorigen Beispiels.

Aufgabe 33. Besondere Ausdrücke für parabolische Sichelbogen.

Es sollen für parabolische Sichelbogen (Fig. 235–238, 241) mit Endgelenken ermittelt werden: a) Die speziellen Ausdrücke von $\xi_m, \delta_m, h_m, \varepsilon, v, w_d, w_v$ in den Gleichungen des § 53; b) die Beiträge eines beliebigen Horizontalschubs H zu den Stabkräften; c) die nicht vom Horizontalschub herrührenden Anteile der Stabkräfte speziell durch eine beliebige auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last.

a) Es seien f_x, f_z die Pfeile der Parabelbogen, welchen die Achsen der X -Gurtung und Z -Gurtung eingeschrieben sind. Dann hat man nach § 19, 8) mit $x = m\lambda, l = n\lambda$ die Ordinaten der Knotenpunkte m beider Gurtungen:

$$\xi_m = m(n-m) \frac{4f_x}{n^2}, \quad \delta_m = m(n-m) \frac{4f_z}{n^2} \quad 1$$

woraus, wenn f den Absolutwert der Pfeildifferenz beider Parabelbogen bezeichnet, wegen $\xi_m - \delta_m = \pm h_m, f_x - f_z = \pm f$ die Längen der Vertikalen:

$$h_m = m(n-m) \frac{4f}{n^2}. \quad 2$$

Da hiernach $h_{m-1} = (m-1)(n-m+1) \frac{4f}{n^2}$, so liefert § 53, 5):

$$\varepsilon = \frac{m(n-m)}{n-2m+1}. \quad 3$$

In analoger Weise folgt aus § 53, 6) mit Rücksicht auf 1:

$$v = \frac{m(n-m)}{n-2m+\omega}, \quad 4$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\omega = \frac{f_x + f_z}{f_x - f_z}. \quad 5$$

Mit 1, 3 und 5 erhalten wir aus § 53, 3), 4):

$$w_a = 0, \quad w_v = \frac{m(n-m)}{n-2m+\omega} \frac{f_x f_z}{f_x - f_z} \frac{8}{n^2}. \quad 6$$

Ist h die größte Vertikalenlänge (Trägerhöhe), welche bei gerader Felderzahl $n = 2\sigma$ und ungerader Felderzahl $n = 2\sigma + 1$ für $m = \sigma$ eintritt, so hat man nach 2:

$$\text{bei geradem } n \quad f = h, \quad \text{bei ungeradem } n \quad f = \frac{n^2}{n^2 - 1} h. \quad 7$$

b) Die Beiträge eines beliebigen Horizontalschubs H zu den Stabkräften ergeben sich aus § 53, 10) mit vorstehenden Ausdrücken bei Beachtung von $f_x - f_z = \pm f$:

$$X_m = \pm \frac{f_z}{f \lambda} H x_m, \quad Z_m = \mp \frac{f_x}{f \lambda} H z_m, \quad 8$$

$$D_m = 0, \quad V_m = -\frac{8 f_x f_z}{n l f} H. \quad 9$$

Der letzte Ausdruck gilt auch für die mittlere Vertikale (Fig. 233, 234), wie sich zeigt, wenn man in die für den mittleren Knotenpunkt der X -Gurtung gültige Gleichung

$$V_\sigma \pm 2 X_\sigma \frac{\xi_\sigma - \xi_{\sigma-1}}{x_\sigma} = 0$$

$\xi_\sigma, \xi_{\sigma-1}, X_\sigma$ nach 1 und 8 einsetzt. Bei parabolischen Sichelbogen liefert also ein beliebiger Horizontalschub zu den Beanspruchungen der Diagonalen überhaupt keine Beiträge, zu den Beanspruchungen der Vertikalen gleich große Beiträge, während die Beiträge zu den Beanspruchungen jeder Gurtung proportional den Längen der betreffenden Stäbe sind. Die Ausdrücke 8, 9 gelten auch für die Beiträge durch Temperaturänderungen und Änderungen der Spannweite.

c) Die nicht vom Horizontalschub herrührenden Anteile der Stabkräfte speziell durch eine beliebige auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von $u = u_x + u_z$ pro Längeneinheit ergeben sich aus § 53, 11) mit $H = 0$ und obigen Ausdrücken 1 bis 5 bei Beachtung von $f_x - f_z = \pm f$:

$$X_m = \mp \frac{u n l}{8 f} x_m, \quad Z_m = \pm \frac{u n l}{8 f} z_m, \quad 10$$

$$D_m = 0, \quad V_m = (u_x f_z + u_z f_x) \frac{\lambda}{f}. \quad 11$$

Der letzte Ausdruck gilt auch für die mittlere Vertikale, wie sich ergibt, wenn in die für den mittleren Knotenpunkt der X -Gurtung gültigen Gleichung

$$V_\sigma + \lambda u_x + 2 X_\sigma \frac{\xi_\sigma - \xi_{\sigma-1}}{x_\sigma} = 0$$

$\xi_\sigma, \xi_{\sigma-1}, X_\sigma$ nach 1 und 10 eingesetzt werden. Es sind also auch die jetzt betrachteten Anteile der Stabkräfte für die Diagonalen gleich Null, für alle Vertikalen gleich groß, und für jede Gurtung proportional den Stablängen, alle aber von entgegengesetzten Vorzeichen wie die Beiträge des Horizontalschubs. Mit Rücksicht auf den unter b) ausgesprochenen Satz sind damit auch die ganzen Stabkräfte eines parabolischen Sichelbogens durch eine beliebige auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last für die Diagonalen gleich Null, für alle Vertikalen gleich groß und für jede Gurtung proportional den Längen der betreffenden Stäbe.

Beispiel 104. Zur vorigen Aufgabe.

Für den in Fig. 241 angedeuteten Sichelbogen von $l = 20$ m Spannweite und $n = 10$ Feldern sind die beiden Gurtungen Parabeln der Pfeile $f_x = 4$ m, $f_z = 2,5$ m eingeschrieben, wobei sich die rechts eingetragenen Längen ergaben. Zu berechnen: a) Die Beiträge eines beliebigen Horizontalschubs H zu den Stabkräften; b) die Stabkräfte durch eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von $u = 1,6$ t pro m ohne die Beiträge des entsprechenden Horizontalschubs, wenn von dieser Last $u_x = 1,2$ t auf die Knotenpunkte des Ober-

gurts und $u_z = 0,4$ t auf diejenigen des Untergurts kommen (bezüglich der Berechnung des Horizontalschubs siehe die Beispiele 108, 109).

a) Für die Beiträge eines beliebigen Horizontalschubs H zu den Stabkräften hat man nach den Gleichungen 8, 9 der letzten Aufgabe:

$$D_m = 0, \quad X_m = \frac{2,5}{1,5 \cdot 2} H x_m = 0,8333 H x_m,$$

$$Z_m = -\frac{4}{1,5 \cdot 2} H z_m = -1,3333 H z_m,$$

$$V_m = -\frac{8 \cdot 4 \cdot 2,5}{10 \cdot 20 \cdot 1,5} H = -0,2667 H.$$

Hieraus folgen mit den in Fig. 241 gegebenen x_m, z_m :

$X_1 = 0,8333 H \cdot 2,46 = 2,050 H$	$Z_1 = -1,3333 H \cdot 2,19 = -2,920 H$
$X_2 = \quad \quad \quad 2,29 = 1,908 H$	$Z_2 = \quad \quad \quad \quad \quad 2,12 = -2,827 H$
$X_3 = \quad \quad \quad 2,15 = 1,792 H$	$Z_3 = \quad \quad \quad \quad \quad 2,06 = -2,747 H$
$X_4 = \quad \quad \quad 2,06 = 1,717 H$	$Z_4 = \quad \quad \quad \quad \quad 2,02 = -2,693 H$
$X_5 = \quad \quad \quad 2,01 = 1,675 H,$	$Z_5 = \quad \quad \quad \quad \quad 2,00 = -2,667 H.$

Diese Ausdrücke gelten auch für die Beiträge der Temperaturänderungen und kleiner Änderungen der Spannweite.

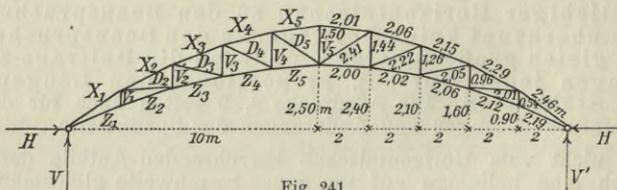


Fig. 241.

b) Für die Stabkräfte durch die gegebene gleichmäßig verteilte Last ohne die Beiträge des entsprechenden Horizontalschubs liefern die Formeln 10, 11 der vorigen Aufgabe:

$$D_m = 0, \quad X_m = -\frac{1,6 \cdot 10 \cdot 20}{8 \cdot 1,5} x_m = -26,667 x_m,$$

$$Z_m = \quad \quad \quad \quad \quad 26,667 z_m,$$

$$V_m = (1,2 \cdot 2,5 + 0,4 \cdot 4) \frac{2}{1,5} = 6,133 \text{ t},$$

und mit den aus Fig. 241 entnommenen x_m, z_m in Tonnen:

$X_1 = -26,667 \cdot 2,46 = -65,601$	$Z_1 = 26,667 \cdot 2,19 = 58,401$
$X_2 = \quad \quad \quad 2,29 = -61,067$	$Z_2 = \quad \quad \quad \quad \quad 2,12 = 56,534$
$X_3 = \quad \quad \quad 2,15 = -57,334$	$Z_3 = \quad \quad \quad \quad \quad 2,06 = 54,934$
$X_4 = \quad \quad \quad 2,06 = -54,934$	$Z_4 = \quad \quad \quad \quad \quad 2,02 = 53,867$
$X_5 = \quad \quad \quad 2,01 = -53,601,$	$Z_5 = \quad \quad \quad \quad \quad 2,00 = 53,334.$

Zu diesen Beanspruchungen wären also die Beiträge des betreffenden Horizontalschubs zu addieren.

§ 54. Bogenfachwerke mit Vertikalen (Ständerfachwerke) und horizontalem Obergurt.

Wir fassen nun Bogenfachwerke des im vorigen Paragraphen betrachteten Fachwerksystems mit Endgelenken in gleicher Höhe und horizontalem Obergurt ins Auge. Die Anordnung möge zur Mitte symmetrisch sein, so daß es genügt, die erste Bogenhälfte zu berechnen, auf welche

sich die folgenden Formeln beziehen. Selbstverständlich bleiben die für beliebige Gurtungsformen gegebenen Gleichungen des vorigen Paragraphen bestehen, also für beliebig gerichtete Aktivkräfte die Gleichungen § 53, 1)–4), für beliebige vertikale Aktivkräfte die Gleichungen § 53, 9) usw. Wir führen im folgenden nur die am meisten zur Verwendung kommenden Beziehungen in speziellerer Form an.

Die X-Gurtung ist horizontal
(Fig. 242, 243).

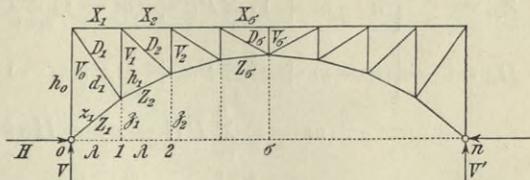


Fig. 242.

In diesem gewöhnlichen Fall gelten in den Gleichungen des § 53 die oberen Vorzeichen und gemäß § 53, 7), 5):

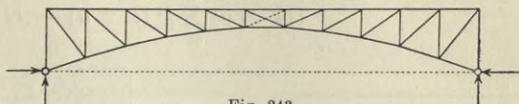


Fig. 243.

$$\begin{aligned} x_m &= \lambda, & X_m &= w_d = w_v = h_0, & 1 \\ \varepsilon &= \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}}, & v &= \frac{h_m}{h_{m+1} - h_m}. & 2 \end{aligned}$$

Wir erhalten nach § 53, 10) die Beiträge eines beliebigen Horizontalschubs H (also auch des bei statisch unbestimmten Bogenarten von Temperaturänderungen oder Bewegungen der Stützpunkte herrührenden Wertes von H) zu den Stabkräften:

$$\left. \begin{aligned} X_m &= H \frac{\delta_m}{h_m}, & Z_m &= -H \frac{h_0 z_m}{\lambda h_{m-1}}, \\ D_m &= H \frac{h_0 d_m}{\lambda \varepsilon h_{m-1}}, & V_m &= -H \frac{h_0}{\lambda v}. \end{aligned} \right\} 3$$

Für eine auf die ganze Spannweite l gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit, wovon u_x auf die Knotenpunkte des Obergurts und u_z auf diejenigen des Untergurts kommen, liefern die Gleichungen § 53, 11):

$$\left. \begin{aligned} X_m &= - \left[m(n-m) - H \frac{2 \delta_m}{u \lambda^2} \right] \frac{\lambda}{h_m} \frac{u \lambda}{2}, \\ Z_m &= \left[(m-1)(n-m+1) - H \frac{2 h_0}{u \lambda^2} \right] \frac{z_m}{h_{m-1}} \frac{u \lambda}{2}, \\ D_m &= - \left[m(n-m) - \varepsilon(n-2m+1) - H \frac{2 h_0}{u \lambda^2} \right] \frac{d_m}{\varepsilon h_{m-1}} \frac{u \lambda}{2}, \\ V_m &= \left[m(n-m) - v(n-2m + \frac{u_x - u_z}{u}) - H \frac{2 h_0}{u \lambda^2} \right] \frac{1}{v} \frac{u \lambda}{2}, \end{aligned} \right\} 4$$

worin H den Horizontalschub durch die erwähnte gleichmäßig verteilte Last allein bedeutet.

Bei Bogenfachwerken mit Horizontalgurt werden fast immer die Fahrbahnlasten bei allen Vertikalen auf die Bogen übertragen (Fahrbahnträger von Feldlänge). Alsdann hat man für beliebige Lasten P_1, P_2, \dots ,

welche bei Abszissen a_1, a_2, \dots auf die Fahrbahn kommen, nach § 53, 12)–15):

$$X_m = - \left[(n-m) \sum_0^m Pa + m \sum_m^n P(l-a) - Hn\delta_m \right] \frac{1}{nh_m}, \quad 5$$

$$Z_m = \left[(n-m+1) \sum_0^{m-1} Pa + (m-1) \sum_{m-1}^n P(l-a) - Hnh_0 \right] \frac{z_m}{lh_{m-1}}, \quad 6$$

$$D_m = - \left[(n-m+\varepsilon) \sum_0^{m-1} Pa + \sum_{m-1}^m P((m-1)\varepsilon l + (n-m-n\varepsilon+\varepsilon)a) + (m-\varepsilon) \sum_m^n P(l-a) - Hnh_0 \right] \frac{d_m}{\varepsilon lh_{m-1}}, \quad 7$$

$$V_m = \left[(n-m+\nu) \sum_0^{m-1} Pa + \sum_{m-1}^m P((m-1)\nu l + (n-m-n\nu+\nu)a) + (m-\nu) \sum_m^n P(l-a) - Hnh_0 \right] \frac{1}{\nu l}, \quad 8$$

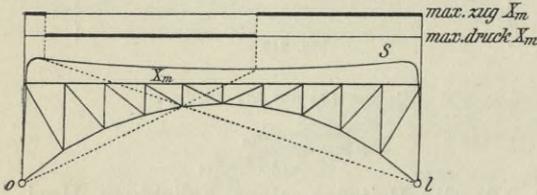


Fig. 244.

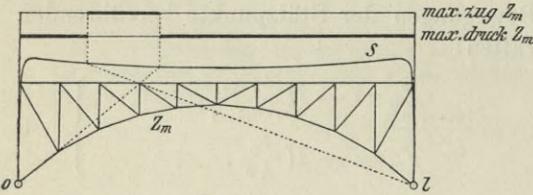


Fig. 245.

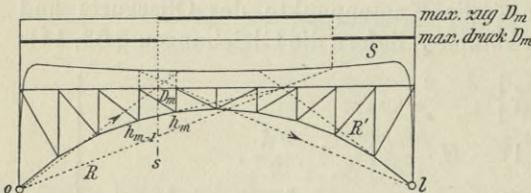


Fig. 246.

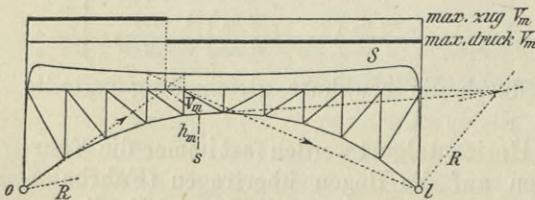


Fig. 247.

worin die Grenzen der Summen Σ Vertikalennummern bedeuten.

Für die Kämpfervertikale und Scheitelvertikale gelten obige Ausdrücke 3, 4, 8 von V_m im allgemeinen nicht, sondern nach § 53, 17), 19):

$$V_0 = K_u - V + H \frac{\delta_1}{\lambda}, \quad V_\sigma = -K_o, \quad 9$$

so daß beispielsweise durch einen beliebigen Horizontal-schub H allein:

$$V_0 = H \frac{\delta_1}{\lambda}, \quad V_\sigma = 0. \quad 10$$

Bezüglich des Horizontalschubs H bleibt es bei dem in § 53 Gesagten. Bei einfachen Bogenfachwerken ohne Zwischengelenk sind in den Ausdrücken § 53, 23) bis 26) die q durch 3, 10 mit $H = 1$, die A durch 4 bis 9 mit $H = 0$ bestimmt. Auch die Belastungen für die Grenzwerte der Stabkräfte ergeben sich nach den in § 53 angeführten

Regeln (Fig. 244 bis 247, 271), oder mittels der Einflußlinien nach § 12. Die Grenzbeanspruchungen der Scheitelvertikale treten nach 9 zugleich mit den Grenzwerten der darüber liegenden Knotenpunktlast ein.

Die Z-Gurtung ist horizontal (Fig. 248).

Der Fall ist weniger wichtig als der vorige. Es gelten in den Gleichungen des § 53 die unteren Vorzeichen und zufolge § 53, 8), 5):

$$z_m = \lambda, \quad 11$$

$$z_m = w_d = w_v = h_0,$$

$$\varepsilon = \nu = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}}. \quad 12$$

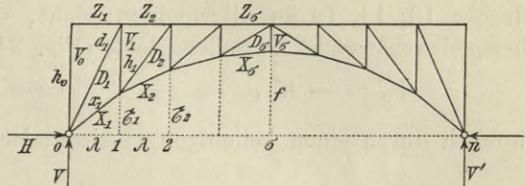


Fig. 248.

Nach den Gleichungen § 53, 10) hat man die Beiträge eines beliebigen Horizontalschubs H zu den Stabkräften:

$$\left. \begin{aligned} X_m &= -H \frac{h_0 x_m}{\lambda h_m}, & Z_m &= H \frac{z_{m-1}}{h_{m-1}}, \\ D_m &= H \frac{h_0 d_m}{\lambda \varepsilon h_{m-1}}, & V_m &= -H \frac{h_0}{\nu \lambda}. \end{aligned} \right\} 13$$

Für eine auf die ganze Spannweite l gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit, wovon u_x auf die Knotenpunkte des Obergurts und u_z auf diejenigen des Untergurts kommen, folgen aus § 53, 11):

$$\left. \begin{aligned} X_m &= \left[m(n-m) - H \frac{2 h_0}{u \lambda^2} \right] \frac{x_m}{h_m} \frac{u \lambda}{2}, \\ Z_m &= - \left[(m-1)(n-m+1) - H \frac{2 z_{m-1}}{u \lambda^2} \right] \frac{1}{h_{m-1}} \frac{u \lambda}{2}, \\ D_m &= \left[m(n-m) - \varepsilon(n-2m+1) - H \frac{2 h_0}{u \lambda^2} \right] \frac{d_m}{\varepsilon h_{m-1}} \frac{u \lambda}{2}, \\ V_m &= - \left[m(n-m) - \varepsilon \left(n-2m + \frac{u_x - u_z}{u} \right) - H \frac{2 h_0}{u \lambda^2} \right] \frac{1}{\varepsilon} \frac{u \lambda}{2}, \end{aligned} \right\} 14$$

worin H den Horizontalschub durch die angeführte gleichmäßig verteilte Last allein bedeutet.

Wird die Fahrbahnlast bei allen Vertikalen auf den Bogen übertragen (Fahrbahnträger von Feldlänge), dann ergeben die Gleichungen § 53, 12) bis 14) und 16) für beliebige Lasten P_1, P_2, \dots , welche bei Abszissen a_1, a_2, \dots auf die Fahrbahn kommen:

$$X_m = \left[(n-m) \sum_0^m P a + m \sum_m^n P (l-a) - H n h_0 \right] \frac{x_m}{l h_m}, \quad 15$$

$$Z_m = - \left[(n-m+1) \sum_0^{m-1} P a + (m-1) \sum_{m-1}^n P (l-a) - H n z_{m-1} \right] \frac{1}{n h_{m-1}}, \quad 16$$

$$\begin{aligned} D_m &= \left[(n-m+\varepsilon) \sum_0^{m-1} P a + \sum_{m-1}^m P \left((m-1) \varepsilon l + (n-m-n\varepsilon+\varepsilon) a \right) + \right. \\ &\quad \left. (m-\varepsilon) \sum_m^n P (l-a) - H n h_0 \right] \frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}}, \quad 17 \end{aligned}$$

$$V_m = - \left[(n - m + \varepsilon) \sum_0^m P a + \sum_m^{m+1} P \left((\varepsilon + 1) m l - (n \varepsilon - \varepsilon + m) a \right) + (m - \varepsilon) \sum_{m+1}^n P (l - a) - H n h_0 \right] \frac{1}{\varepsilon l}, \quad 18$$

worin wieder die Grenzen der Summen Σ Vertikalennummern bedeuten.

Für die Kämpfervertikale und Scheitelvertikale gelten obige Ausdrücke 13, 14, 18 im allgemeinen nicht, sondern nach § 53, 18), 20) beispielsweise ohne Zwischengelenk (Fig. 248):

$$V_0 = - K_u, \quad V_\sigma = K_u + 2 X_\sigma \frac{h_{\sigma-1} - h_\sigma}{x_\sigma}, \quad 19$$

wonach durch einen beliebigen Horizontalschub H allein mit X_σ aus 13):

$$V_0 = 0, \quad V_\sigma = - H \frac{2 h_0 h_{\sigma-1} - h_\sigma}{\lambda h_\sigma}. \quad 20$$

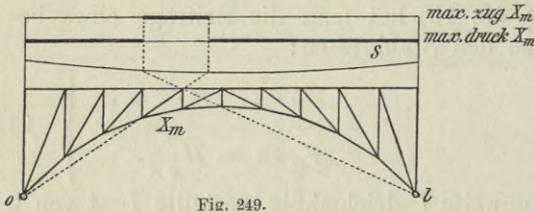


Fig. 249.

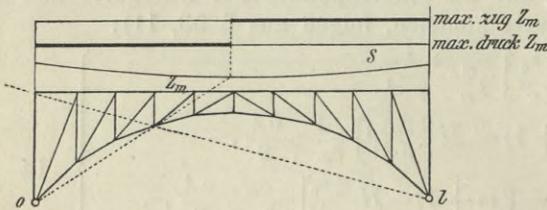


Fig. 250.

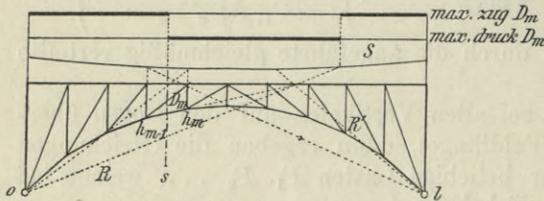


Fig. 251.

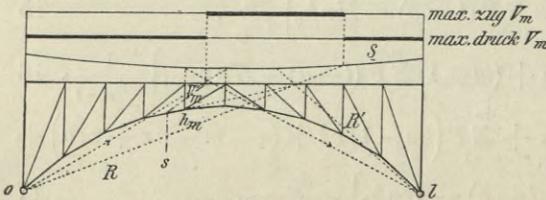


Fig. 252.

Bezüglich des Horizontalschubs H bleibt es bei dem in § 53 Gesagten. Bei einfachen Bogenfachwerken ohne Zwischengelenk sind in den Ausdrücken § 53, 23) bis 26) die q durch 13, 20 mit $H = 1$, die A durch 14 bis 19 mit $H = 0$ bestimmt. Auch die Belastungen für die Grenzwerte der Stabkräfte ergeben sich nach den in § 53 angeführten Regeln (Fig. 249 bis 252) oder mittels der Einflußlinien nach § 12 (vergl. Beispiel 114). Die Grenzbeanspruchungen der Kämpfervertikalen treten nach 19 zugleich mit den Grenzwerten der darüber liegenden Knotenpunktlast ein, diejenigen der Scheitelvertikalen im Falle von Fig. 248 zugleich mit den Grenzwerten von X_σ , weil K_u immer den gleichen Wert hat.

Beispiel 105. Beliebige konzentrierte Lasten.

Für die in Fig. 253, 269 angedeuteten Bogenfachwerke mit drei oder zwei Gelenken die Vertikalreaktionen V , V' und die Stabkräfte X_3 , Z_3 , D_3 , V_3 , V_0 , V_5 durch die angedeuteten Radlasten des deutschen Normalzugs für Brückenberechnungen von Hauptbahnen auszurücken und ihre Werte speziell für den Dreigelenkbogen in Zahlen anzugeben.

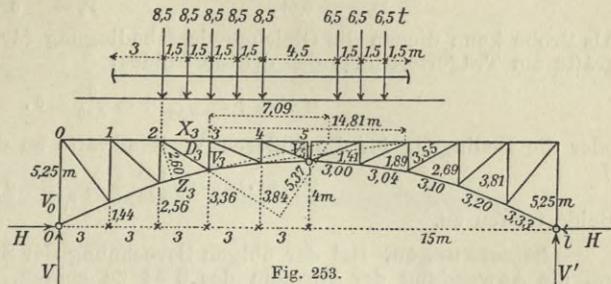


Fig. 253.

a) Für die Vertikalreaktionen hat man nach § 19, 4) und § 20, 2) mit und ohne Zwischengelenk:

$$V = \frac{1}{30} (8,5 \cdot 5 \cdot 21 + 6,5 \cdot 3 \cdot 12) = 37,55 \text{ t},$$

$$V' = \frac{1}{30} (8,5 \cdot 5 \cdot 9 + 6,5 \cdot 3 \cdot 18) = 24,45 \text{ ,,}$$

$$8,5 \cdot 5 + 6,5 \cdot 3 = 62,00 \text{ t}.$$

Der Horizontalschub ist bei Bogen mit zwei Gelenken auch von den Stabquerschnitten abhängig und kann also zunächst nicht angegeben werden.

Zur Berechnung von D_3 , V_3 sind ϵ , ν für $m=3$ erforderlich. Sie folgen aus § 54, 2):

$$\epsilon = \frac{1,89}{1,89 - 2,69} = -2,36, \quad \nu = \frac{1,89}{1,41 - 1,89} = -3,94.$$

Wir erhalten nun nach § 54, 5)—8):

$$X_3 = - \left[7 \cdot 8,5 (9 + 7,5 + 6) + 3 \cdot 8,5 (19,5 + 18) + 3 \cdot 6,5 (13,5 + 12 + 10,5) - 10 \cdot 3,36 H \right] \frac{1}{10 \cdot 1,89},$$

$$Z_3 = \left[2 \cdot 8,5 (24 + 22,5 + 21 + 19,5 + 18) + 2 \cdot 6,5 (13,5 + 12 + 10,5) - 10 \cdot 5,25 H \right] \frac{3,10}{30 \cdot 2,69},$$

$$D_3 = \left[4,64 \cdot 8,5 \cdot 6 + 8,5 (-2 \cdot 2,36 \cdot 30 + 7 \cdot 7,5 + 9 \cdot 2,36 \cdot 7,5) + 5,36 \cdot 8,5 (21 + 19,5 + 18) + 5,36 \cdot 6,5 (13,5 + 12 + 10,5) - 10 \cdot 5,25 H \right] \frac{3,55}{2,36 \cdot 30 \cdot 2,69},$$

$$V_3 = - \left[3,06 \cdot 8,5 \cdot 6 + 8,5 (-2 \cdot 3,94 \cdot 30 + 7 \cdot 7,5 + 9 \cdot 3,94 \cdot 7,5) + 6,94 \cdot 8,5 (21 + 19,5 + 18) + 6,94 \cdot 6,5 (13,5 + 12 + 10,5) - 10 \cdot 5,25 H \right] \frac{1}{3,94 \cdot 30},$$

oder nach Reduktion:

$$X_3 = -158,571 + 1,778 H \text{ t},$$

$$Z_3 = 86,554 - 2,017 H \text{ ,,}$$

$$D_3 = 88,590 - 0,978 H \text{ ,,}$$

$$V_3 = -50,155 + 0,444 H \text{ ,,}$$

Weiter hat man nach § 54, 9):

$$V_0 = -37,55 + H \frac{1,44}{3} = 0,48 H - 37,55 \text{ t},$$

und bei zwei Gelenken (Fig. 269): $V_5 = -3,25 \text{ t}$,

„ drei „ (Fig. 253): $V_5 = 0$.

Die vorstehenden Gleichungen gelten auch für ein Balkenfachwerk der skizzierten Anordnung, für welchen Fall $H=0$ wäre. Sie würden für den Zweigelenkbogen liefern zu den Ausdrücken § 53, 23)—26) die Werte der A durch die angenommene Belastung mit $H=0$, und die Werte der ρ mit $H=1$ allein (ohne alle Lasten, vergl. die Beispiele 110, 108).

b) Handelt es sich um einen Dreigelenkbogen, so liefert § 19, 5) den Horizontalschub:

$$H = \frac{1}{2 \cdot 4} (8,5 \cdot 5 \cdot 9 + 6,5 \cdot 3 \cdot 21) = 77,06 \text{ t}.$$

Damit ergeben die vorstehenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} X_3 &= -21,56 \text{ t} & Z_3 &= -68,88 \text{ t} \\ D_3 &= 13,22 \text{ „} & V_3 &= -15,94 \text{ „} \\ V_0 &= -0,56 \text{ „} & V_5 &= 0 \text{ „} . \end{aligned}$$

Als Probe kann dienen die Gleichgewichtsbedingung für die äußeren Horizontalkräfte am Trägerteil links des dritten Feldes:

$$H + X_3 + D_3 \frac{3}{3,55} + Z_3 \frac{3}{3,10} = 0 ,$$

oder die Bedingung für die äußeren Vertikalkräfte an demselben:

$$V - 8,5 \cdot 1,5 - D_3 \frac{1,89}{3,55} + Z_3 \frac{0,80}{3,10} = 0 .$$

Beide treffen zu.

Bemerkungen. Bei der obigen Berechnung der Stabkräfte kam es darauf an, die Anwendung der Formeln des § 54 zu zeigen. Sonst hätten wir nach Ermittlung von V und der nötigen Längen auch unmittelbar nach den Methoden des § 52 vorgehen können. Man erhält beispielsweise:

$$\begin{aligned} 37,550 \cdot 3 - H \cdot 1,44 + V_0 \cdot 3 &= 0 , & V_0 &= -37,550 + 0,480 H , \\ 37,550 \cdot 9 - H \cdot 3,36 - 8,5 \cdot 1,5 \cdot 3 + X_3 \cdot 1,89 &= 0 , & X_3 &= -158,571 + 1,778 H , \\ 37,550 \cdot 6 - H \cdot 5,25 - Z_3 \cdot 2,60 &= 0 , & Z_3 &= 86,654 - 2,017 H , \\ 37,550 \cdot 16,09 - H \cdot 5,25 - 8,5 \cdot 1,5 \cdot 10,09 - D_3 \cdot 5,37 &= 0 , & D_3 &= 88,553 - 0,978 H , \\ 37,550 \cdot 20,81 - H \cdot 5,25 - 8,5 \cdot 1,5 \cdot 14,81 + V_3 \cdot 11,81 &= 0 , & V_3 &= -50,177 + 0,445 H , \\ 6,5 \cdot 0,5 + V_5 &= 0 , & V_5 &= -3,25 \text{ t} . \end{aligned}$$

Die kleinen Differenzen gegen die oben erhaltenen Werte sind darauf zurückzuführen, daß alle Längen nur auf zwei Dezimalen (auf cm) genau eingeführt wurden.

Kommt für die Stäbe eine ganze Reihe von Belastungsfällen in Frage, so empfiehlt es sich, die betreffenden Ausdrücke zunächst soweit in Zahlen auszurechnen, als diese für alle Belastungsfälle gelten (Beispiele 110, 111).

Aufgabe 34. Besondere Ausdrücke für Bogen mit einer horizontalen und einer parabolischen Gurtung.

Für den angeführten Fall von Bogen mit Endgelenken (Fig. 242, 248) zu bestimmen: a) Die speziellen Ausdrücke von ξ_m , δ_m , h_m , ε , ν , w_d , w_v in den Formeln der §§ 53, 54; b) bei Dreigelenkbogen die Stabkräfte durch eine beliebige auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last.

a) Es bezeichne f den Pfeil des Parabelbogens, welchem die Achse des Untergurtes eingeschrieben ist. Dann setzen wir zur Abkürzung:

$$\beta = \frac{n^2 h_0}{4f} . \quad 1$$

Bei horizontaler X-Gurtung (Fig. 242) gelten neben den Ausdrücken § 54, 1) nach § 19, 8) mit $x = m\lambda$, $l = n\lambda$:

$$\delta_m = m(n-m) \frac{4f}{n^2} , \quad h_m = h_0 - \delta_m , \quad 2$$

und zufolge § 54, 2):

$$\varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} = \frac{m(n-m) - \beta}{n-2m+1} , \quad 3$$

$$\nu = \frac{h_m}{h_{m+1} - h_m} = \frac{m(n-m) - \beta}{n-2m-1} . \quad 4$$

Bei horizontaler Z-Gurtung (Fig. 248) ergeben sich neben § 54, 11) in analoger Weise:

$$\xi_m = m(n-m) \frac{4f}{n^2} , \quad h_m = h_0 - \xi_m , \quad 5$$

und hiermit nach § 54, 12):

$$\varepsilon = \nu = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} = \frac{m(n-m) - \beta}{n-2m+1} . \quad 6$$

b) Für Dreigelenkbogen mit dem Zwischengelenk in der Achse des Untergurts hat man bei gleichmäßig verteilter Last von u pro Längeneinheit auf der ganzen Spannweite, wovon u_x auf die Knotenpunkte der X-Gurtung und u_z auf diejenigen der Z-Gurtung kommen, nach § 19, 19):

$$H = \frac{u l^2}{8 f} . \quad 7$$

Mit 1 bis 7 folgen aus § 54, 4) bei Beachtung von § 54, 1) für horizontale X-Gurtung (Fig. 242):

$$X_m = 0 , \quad Z_m = -\frac{u l}{8 f} n x_m , \quad 8$$

$$D_m = 0 , \quad V_m = -u_x \lambda , \quad 9$$

und aus § 54, 14) bei Beachtung von § 54, 11) für horizontale Z-Gurtung (Fig. 248):

$$X_m = -\frac{u l}{8 f} n x_m , \quad Z_m = 0 , \quad 10$$

$$D_m = 0 , \quad V_m = -u_z \lambda . \quad 11$$

Bezeichnen für den Obergurt und Untergurt O_m , U_m die Stabkräfte, λ , u_m die Stablängen, u_o , u_u die Anteile an der Last u , so können 8, 9 und 10, 11 wie folgt zusammengefaßt werden:

$$O_m = 0 , \quad U_m = -\frac{u l}{8 f} n u_m , \quad 12$$

$$D_m = 0 , \quad V_m = -u_o \lambda . \quad 13$$

Die Ausdrücke 9, 11, 13 von V_m gelten nicht für die Kämpfervertikale und Scheitelvertikale, für welche man hat:

$$V_o = V_\sigma = -\frac{u_o \lambda}{2} . \quad 14$$

Beispiel 106. Zur vorigen Aufgabe.

Für den in Beispiel 105 behandelten Dreigelenkbogen Fig. 253 ist der Untergurt einer Parabel vom Pfeil $f = 4$ m eingeschrieben. Zu berechnen: a) die Stützenreaktionen und sämtliche Stabkräfte durch ein gleichmäßig verteiltes Eigengewicht von 1,25 t pro Meter Spannweite, von welchem $g_x = 0,6$ t auf die Knotenpunkte des Obergurts kommen; b) die Stützenreaktionen V , H und die Stabkräfte X_3 , Z_3 , D_3 , V_3 , V_o , V_5 beim Zusammenwirken dieses Eigengewichts und der in Beispiel 105 angenommenen Radbelastung.

a) Für das Eigengewicht allein hat man nach § 19, 19) die Stützenreaktionen:

$$V = \frac{g l}{2} = 1,25 \cdot 15 = 18,75 \text{ t} ,$$

$$H = \frac{g l^2}{8 f} = \frac{1,25 \cdot 30^2}{8 \cdot 4} = 35,16 \text{ t} ,$$

und nach den Gleichungen 8, 9 der vorigen Aufgabe die Stabkräfte:

$$X_m = 0 , \quad D_m = 0 ,$$

$$V_m = -g_x \lambda = -0,60 \cdot 3 = -1,80 \text{ t} ,$$

$$Z_m = -\frac{g l}{8 f} n z_m = -\frac{1,25 \cdot 30}{8 \cdot 4} 10 z_m = -11,719 z_m ,$$

also speziell:

$$Z_1 = -11,719 \cdot 3,33 = -39,02 \text{ t}$$

$$Z_2 = - \quad \quad \quad 3,20 = -37,50 \text{ „}$$

$$Z_3 = - \quad \quad \quad 3,10 = -36,33 \text{ „}$$

$$Z_4 = - \quad \quad \quad 3,04 = -35,63 \text{ „}$$

$$Z_5 = - \quad \quad \quad 3,00 = -35,16 \text{ „}$$

Ausnahmsweise sind nach Gleichung 14 der letzten Aufgabe:

$$V_o = V_5 = -\frac{g_x \lambda}{2} = -0,60 \cdot 1,5 = -0,90 \text{ t} .$$

b) Beim Zusammenwirken des Eigengewichts und der in Beispiel 105 angenommenen Radbelastung hat man mit den dort erhaltenen Werten:

$$\begin{aligned}
 V &= 18,75 + 37,55 = 56,30 \text{ t} \\
 H &= 35,16 + 77,06 = 112,22 \text{ „} \\
 X_3 &= -21,57 \text{ t} & Z_3 &= -36,33 - 68,86 = -105,19 \text{ t} \\
 D_3 &= 13,18 \text{ „} & V_3 &= -1,80 - 15,92 = -17,72 \text{ „} \\
 V_0 &= -0,90 - 0,56 = -1,46 \text{ t} & V_5 &= -0,90 \text{ „}
 \end{aligned}$$

§ 55. Über Grenzwerte von Stabkräften und Reaktionskomponenten.

Als Grenzwerte einer Stabkraft oder Reaktionskomponente bei veränderlichen Einwirkungen (Belastung usw.) bezeichnet man bekanntlich diejenigen beiden Werte derselben, zwischen welchen alle sonst vorkommenden eingeschlossen sind. Diese Grenzwerte und daneben etwa der Wert durch das Eigengewicht allein sind für die Dimensionierung von besonderer Bedeutung, am meisten interessiert der numerisch größte Grenzwert.

Für die Feststellung der Grenzwerte sind in erster Linie die vorausgesetzten (vertikalen) Lasten maßgebend. Kommen weitere Einwirkungen hinzu (Temperaturänderungen, Winddruck etc.), so sind deren Grenzbeiträge mit den von der Belastung herrührenden Grenzwerten so zu kombinieren, daß möglichst ungünstige, d. h. möglichst weit auseinandergelegene Grenzwerte im ganzen entstehen. Dies pflegt nachträglich zu geschehen und bietet keine Schwierigkeit, da die Bedingungen für jene Grenzbeiträge meist ohne weiteres angegeben werden können (größte Temperaturänderung in positivem und negativem Sinne, stärkster Winddruck von der einen und der andern Seite etc.). Um die von der Belastung herrührenden Grenzwerte zu erhalten, sind verschiedene Methoden im Gebrauch, von welchen wir hier diejenigen erwähnen wollen, die bei Bogenfachwerken in erster Linie in Betracht kommen¹.

Am schnellsten gelangt man zum Ziel, wenn die Grenzwerte selbst durch Formeln ausgedrückt sind, so daß sie durch Einsetzen bekannter Zahlenwerte ohne weitere Ableitungen erhalten werden können.

Die betreffenden Formeln sind allerdings für Bogen im allgemeinen weniger einfach als für Balken. Wir wollen hier einen wichtigen Fall als Beispiel anführen und auf andere Fälle unten hinweisen.

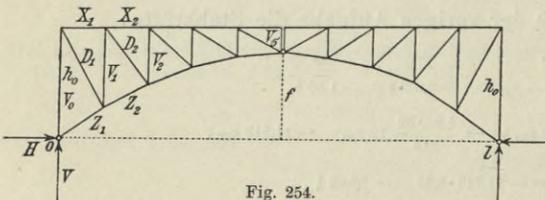


Fig. 254.

Es handle sich um ein Dreigelenkbogenfachwerk mit Vertikalen (Ständerfachwerk), horizontalem Obergurt und parabolischem Untergurt, nach der Anordnung Fig. 254, in welcher auch die Bezeichnungen der Stabkräfte eingetragen sind; positive Werte bedeuten Zug, negative Druck. Die Spannweite l ist durch Vertikalen in $n = 2\sigma$ Felder von gleichen Längen λ geteilt, so daß $l = n\lambda = 2\sigma\lambda$.

¹ Weiteres s. Luegers Lexikon der gesamten Technik, 2. Auflage, Artikel Grenzwerte.

Weiter seien z_m, d_m, h_m die Längen der durch Z_m, D_m, V_m beanspruchten Stäbe und

$$\varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}}, \quad \nu = \frac{h_m}{h_{m+1} - h_m}, \quad \omega = \frac{n h_0}{2 f}. \quad 1$$

Eigengewicht pro Längeneinheit Spannweite g , wovon g_x auf die Knotenpunkte des Obergurts und g_z auf diejenigen des Untergurts kommen. Verkehrslast pro Längeneinheit der ergriffenen Strecke p , Gesamtlast $q = g + p$. Dann hat man die Stabkräfte durch das Eigengewicht allein, die wir zur Unterscheidung mit deutschen Buchstaben bezeichnen:

$$x_m = 0, \quad \beta_m = -\frac{g l}{8 f} n z_m, \quad \mathfrak{D}_m = 0, \quad \mathfrak{B}_m = -g_x \lambda, \quad 2$$

nur für die Kämpfervertikalen und Scheitelvertikalen sind ausnahmsweise:

$$\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_\sigma = -\frac{g_x \lambda}{2}. \quad 3$$

Vertikalreaktionen und Horizontalreaktionen der Kämpfer durch das Eigengewicht allein:

$$\mathfrak{B} = \frac{g l}{2}, \quad \mathfrak{H} = \frac{g l^2}{8 f}. \quad 4$$

Im folgenden werden bei Angabe der zweiten Grenzbeanspruchungen die Werte der ersten durch eine Klammer ausgezeichnet. Es sind die Grenzbeanspruchungen des Obergurts:

$$\left. \begin{aligned} X_m &= -\frac{m(\sigma - m)(n - m)}{3\sigma - m} \frac{p \lambda^2}{2 h_m}, \\ X_m &= -(X_m), \end{aligned} \right\} \quad 5$$

und diejenigen des Untergurts:

$$\left. \begin{aligned} Z_m &= \beta_m - \frac{\omega - m + 1}{\omega + m - 1} \frac{\omega z_m}{h_{m-1}} \frac{p l}{4}, \\ Z_m &= \frac{2g + p}{g} \beta_m - (Z_m). \end{aligned} \right\} \quad 6$$

Nur in dem praktisch kaum vorkommenden Falle, daß $\frac{n-m+1}{\sigma} f < h_0$ wäre, würden an Stelle von 6 treten:

$$Z_m = \beta_m + \left[(m-1)(n-m+1) - \sigma \omega \right] \frac{z_m}{h_{m-1}} \frac{p \lambda}{2}, \quad Z_m = \beta_m. \quad 7$$

Für die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen hat man:

$$D_m = -(D_m), \quad 8$$

für jede Diagonale sind sie numerisch gleich und von verschiedenen Vorzeichen. Zur Ermittlung ihrer Absolutwerte berechne man zunächst die Hilfsgrößen:

$$\varphi = \frac{m - \varepsilon}{\sigma} f, \quad \chi = \frac{n - m + \varepsilon}{\sigma} f, \quad \psi = \frac{n - m}{m} \frac{m - \varepsilon}{\sigma} f. \quad 9$$

Man hat dann, wenn h_0 sowohl zwischen χ und ψ als auch zwischen ψ und φ liegt:

$$D_m = \frac{[(n-m)(m-\varepsilon) - m\omega]^2}{n-m-\omega-\varepsilon(n-1)} \frac{d_m}{\omega+m-\varepsilon} \frac{p \lambda}{2 h_m}, \quad 10$$

wenn h_0 zwischen χ und ψ , aber nicht zwischen ψ und φ liegt:

$$D_m = \frac{(n-m-\omega+\varepsilon)(m-1)^2}{n-m-\omega-\varepsilon(n-1)} \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{p \lambda}{2}, \quad 11$$

und wenn h_0 nicht zwischen χ und ψ , wohl aber zwischen ψ und φ liegt:

$$D_m = \frac{\omega - m + \varepsilon}{\omega + m - \varepsilon} \frac{\omega d_m}{\varepsilon h_{m-1}} \frac{p l}{4}. \quad 12$$

Ein vierter Fall, für den $D_m = 0$ wäre ($h_0 = f$), kommt praktisch nicht vor. — Zur Berechnung der Vertikalen bestimme man zunächst die Hilfsgrößen:

$$\varphi = \frac{m - \nu}{\sigma} f, \quad \chi = \frac{n - m + \nu}{\sigma} f, \quad \psi = \frac{n - m}{m} \frac{m - \nu}{\sigma} f. \quad 13$$

Man hat dann die eine Grenzbeanspruchung, wenn h_0 sowohl zwischen χ und ψ als auch zwischen ψ und φ liegt:

$$V_m = \mathfrak{S}_m + \frac{[(n-m)(m-v)-m\omega]^2}{n-m-\omega-v(n-1)} \frac{1-v}{\omega+m-v} \frac{p\lambda}{2v}, \quad 14$$

wenn h_0 zwischen χ und ψ , aber nicht zwischen ψ und φ liegt:

$$V_m = \mathfrak{S}_m - \frac{(n-m-\omega+v)(m-1)^2}{n-m-\omega-v(n-1)} \frac{p\lambda}{2}, \quad 15$$

wenn h_0 nicht zwischen χ und ψ , wohl aber zwischen ψ und φ liegt:

$$V_m = \mathfrak{S}_m - \frac{\omega-m+v}{\omega+m-v} \frac{\omega}{v} \frac{p\lambda}{4}. \quad 16$$

Die zweite Grenzbeanspruchung ist in allen drei Fällen:

$$V_m = -(V_m) - (p+2gx)\lambda. \quad 17$$

Ausnahmen bilden wieder die Kämpfervertikalen und Scheitelvertikalen. Grenzbeanspruchungen der Kämpfervertikalen:

$$V_0 = \mathfrak{S}_0 - \frac{n}{3\sigma-1} \frac{p\lambda}{4}, \quad V_0 = \mathfrak{S}_0 + \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{3\sigma-1} \frac{p\lambda}{4}, \quad 18$$

und der Scheitelvertikalen:

$$V_\sigma = \mathfrak{S}_\sigma - \frac{p\lambda}{2}, \quad V_\sigma = \mathfrak{S}_\sigma. \quad 19$$

Grenzwerte der Stützenreaktionen:

$$r = \frac{q\lambda}{2}, \quad r = \mathfrak{S}, \quad H = \frac{q\lambda^2}{8f}, \quad H = \mathfrak{S}. \quad 20$$

Die Ableitung dieser Ausdrücke und entsprechender Beziehungen für andere statisch bestimmte Bogenfachwerke siehe Weyrauch, Theorie der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer, Leipzig 1887. Da wir hier auf jene statisch bestimmten Fachwerke, welche häufig nicht zu den elastischen Bogenträgern gerechnet werden, wegen nötiger Raumersparnis und zur Vermeidung von Wiederholungen nicht allzuweit eingehen können, so sollen wenigstens genügende Angaben folgen, an welchen Stellen des erwähnten Werkes die etwa interessierenden Formeln nebst ihren Ableitungen zu finden sind:

§ 69. Dreigelenkbogenfachwerk mit Vertikalen und beliebig geformten Gurtungen. Allgemeines.

§ 70. Dreigelenkbogenfachwerk mit Vertikalen und beliebig geformten Gurtungen. Gleichmäßig verteilte bewegte Last.

§ 71. Dreigelenkbogenfachwerk mit Vertikalen und beliebig geformten Gurtungen. Bewegte Radlastzüge.

§ 72. Dreigelenkbogenfachwerk mit Vertikalen und horizontalem Obergurt, Untergurt nach zwei Geraden. Allgemeines.

§ 73. Dreigelenkbogenfachwerk mit Vertikalen und horizontalem Obergurt, Untergurt nach zwei Geraden. Gleichmäßig verteilte bewegte Last.

§ 74. Dreigelenkbogenfachwerk mit Vertikalen und horizontalem Obergurt, Untergurt nach zwei Geraden. Bewegte Radlastzüge.

§ 75. Dreigelenkbogenfachwerk mit Vertikalen, horizontalem Obergurt, und parabolischem Untergurt.

§ 79. Durchlaufendes Bogenfachwerk nach Art von Fig. 151, 152 mit Vertikalen und beliebigen (auch geraden oder parabolischen) Gurtungen.

Hierzu insbesondere das unten gegebene Beispiel 107 und die im Anschlusse daran erwähnten Beispiele.

Um für weniger häufig vorkommende und deshalb zunächst unbestimmt gelassene Fachwerksysteme (bei Bogen z. B. Strebenfachwerke) eine rasche Berechnung der Grenzbeanspruchungen vorzubereiten, kann man diejenigen Momente M_s und ihre Grenzwerte ausdrücken,

welchen die Stabkräfte bei einfachem Fachwerksystem proportional zu sein pflegen (vergl. S. 364, 370, 371).

Hierher gehören folgende Paragraphen des angeführten Werkes:

§ 66. Beliebige Belastung von Dreigelenkbogenfachwerken.

§ 67. Gleichmäßig verteilte bewegte Last bei Dreigelenkbogenfachwerken.

§ 68. Bewegte Radlastzüge bei Dreigelenkbogenfachwerken.

§ 78. Beliebige Belastung bei durchlaufenden Bogenfachwerken nach Art von Fig. 151, 152, S. 187.

§ 80. Gleichmäßig verteilte bewegte Last bei durchlaufenden Bogenfachwerken (Fig. 151, 152).

§ 81. Bewegte Radlastzüge bei durchlaufenden Bogenfachwerken (Fig. 151, 152).

Wenn die Formeln für die Grenzwerte der Stabkräfte und Stützenreaktionen oder ihre Herleitungen zu umständlich werden, so kann es sich empfehlen, wenigstens die Belastungen für die Grenzwerte, die ungünstigsten Belastungen, im voraus zu bestimmen, für welche dann die bei beliebiger Belastung gültigen Ausdrücke der betreffenden Größen oder sonstige allgemeine Beziehungen die Grenzwerte liefern. In dieser Weise ist in §§ 53, 54 für Bogenfachwerke mit zwei Gelenken verfahren und ähnlich kann in andern Fällen vorgegangen werden.

Bei den letzterwähnten Anwendungen werden nur die Strecken bestimmt, auf welchen die Lasten in positivem oder negativem Sinne zu der gesuchten Größe beitragen. Dies genügt bei gleichmäßig verteilter Verkehrslast, während bei bewegten Radlastzügen auch die Stellung der Züge auf jenen Beitragsstrecken von Einfluß ist. Soll dies berücksichtigt werden, oder sind weder die Grenzwerte selbst noch die Belastungen für sie festgestellt, dann ist am genauesten die Berechnung mit Hilfe von Einflußlinien. Diese ist in § 12 und den angeschlossenen Beispielen zur Darstellung gebracht, auf welche hiermit verwiesen wird. Siehe auch die Aufgaben 10, 11, 20, 22, 23, 33 und Beispiele 20, 21, 33, 42, 49, 114.

Bei statisch unbestimmten Bogenfachwerken wird auch häufig die Berechnung auf Grund einzelner Knotenpunktslasten durchgeführt. Man berechnet den von einer Last $P = 1$ in jedem verkehrbelasteten Knotenpunkte herrührenden Beitrag c zur gesuchten Größe X und kann dann auch den Wert von X für beliebige Kombinationen der P , sowie durch Berücksichtigung aller Beiträge von positivem oder negativem Einfluß allein die Grenzwerte von X erhalten. Für beliebige P hat man:

$$X = \Sigma cP, \quad 21$$

und für die Grenzwerte:

$$X_1 = \bar{x} + \Sigma_1 cP, \quad X_2 = \bar{x} + \Sigma_2 cP, \quad 22$$

worin \bar{x} den Beitrag des Eigengewichts der Konstruktion bedeutet und die Summen Σ_1, Σ_2 alle Beiträge der einen und andern Summe der Verkehrslasten P bei möglichst großen Werten der letzteren umfassen.

Ist die Ableitung genauer Grenzwerte zu umständlich oder für den

augenblicklichen Zweck nicht nötig, so wird nicht selten eine Berechnung für vorausgewählte Belastungsfälle vorgenommen. Je nach der Anzahl und Auswahl berücksichtigter Belastungsfälle läßt sich meist genügende Annäherung erreichen, doch werden mitunter zu wenig Fälle behandelt. Als Grenzwerte einer Größe X gelten diejenigen berechneten X , zwischen welchen alle sonst erhaltenen liegen. Bei Berechnung der älteren Koblenzer Rheinbrücke beispielsweise teilte man die ganze Spannweite von 98,0775 m der Bogenachwerke mit zwei Gelenken in zwanzig gleiche Teile und ließ die gleichmäßig verteilt gedachte Verkehrslast von einem Ende aus je um einen solchen Teil vorrücken, so daß 21 Belastungsfälle behandelt wurden. Für die Bogenfachwerke mit zwei Gelenken von 160 m Spannweite der Maria-Pia-Brücke über den Douro in Portugal (Fig. 220) wurden 4 Belastungsfälle berücksichtigt: Eigengewicht allein, Vollbelastung des ganzen Bogens, einseitige Belastung bis zur Bogenmitte und Belastung der mittleren Strecke von 80 m Länge. Entsprechend der geringeren Genauigkeit wurden auch die rechnermäßigen Beanspruchungen geringer gewählt (nicht über 620 kg pro bcm). Diese beiden Brücken dienen Eisenbahnen. Bei den Bogenfachwerken ohne Gelenk von 31,5—36,75 m Spannweite der Neue-Mainzerstraße-Brücke über den Main zu Frankfurt beschränkte man die Berechnung auf 2 Belastungsfälle: Vollbelastung des ganzen Bogens und einseitige Belastung bis zur Bogenmitte, indem man sich auf den überwiegenden Einfluß des Eigengewichts bei Straßenbrücken berief (es war $g : p = 3,25 : 1$). Für das große Gewölbe ohne Gelenke von 65 m Lichtweite der Pruthbrücke bei Jaremce (Fig. 164) zog man sogar nur einen Belastungsfall in Betracht: einseitige Belastung bis zur Bogenmitte. Wenn allerdings bei Gewölben das Eigengewicht besonders stark zu überwiegen pflegt (bei der Pruthbrücke durchschnittlich $g : p = 12,3 : 1$), so läßt sich doch nachweisen, daß die Behandlung nur eines Belastungsfalls bei Brückengewölben durchaus ungenügend ist (S. 95. 168).

Beispiel 107. Berechnung eines Bogenfachwerks mit drei Gelenken und Vertikalen. (Verhältnisse der Theißbrücke bei Szegedin).

Für die Bogenfachwerkträger mit drei Gelenken einer Brücke seien bei allgemeiner Anordnung entsprechend Fig. 255 folgende Voraussetzungen gemacht. Spannweite $l = 40$ m, Felderzahl $n = 2\sigma = 20$, Höhe des Obergurts über den Kämpfergelenken $h_0 = 5,5$ m, Pfeil des parabolischen Untergurts $f = 5$ m, ferner pro laufenden Meter Träger Eigengewicht $g = 1,2$ t, Verkehrslast $p = 2$ t. Vom Eigengewichte kommen $g_x = 0,6$ t auf die Knotenpunkte des Obergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und $g_x = 0,6$ t auf diejenigen des Untergurts. Die Grenzwerte der Stabkräfte und Stützenreaktionen zu berechnen.

Formberechnung. Ordinate des Knotenpunkts m im Untergurte und Länge der anstoßenden Vertikale nach § 19, 8):

$$\delta_m = m(n-m) \frac{4f}{n^2} = 0,05 m(20-m),$$

$$h_m = h_0 - \delta_m = 5,5 - \delta_m,$$

Länge des Untergurtstabes und der Diagonale im Felde m :

$$z_m = \sqrt{\lambda^2 + (h_m - 1 - h_m)^2}, \quad d_m = \sqrt{\lambda^2 + h_m^2}.$$

Diese Gleichungen liefern mit $m = 1$ bis $m = 10$ folgende Werte in Metern:

$\delta_1 = 0,95$	$h_1 = 4,55$	$z_1 = 2,214$	$d_1 = 4,970$
$\delta_2 = 1,80$	$h_2 = 3,70$	$z_2 = 2,173$	$d_2 = 4,206$
$\delta_3 = 2,55$	$h_3 = 2,95$	$z_3 = 2,136$	$d_3 = 3,564$
$\delta_4 = 3,20$	$h_4 = 2,30$	$z_4 = 2,103$	$d_4 = 3,048$
$\delta_5 = 3,75$	$h_5 = 1,75$	$z_5 = 2,074$	$d_5 = 2,658$
$\delta_6 = 4,20$	$h_6 = 1,30$	$z_6 = 2,050$	$d_6 = 2,385$
$\delta_7 = 4,55$	$h_7 = 0,95$	$z_7 = 2,030$	$d_7 = 2,214$
$\delta_8 = 4,80$	$h_8 = 0,70$	$z_8 = 2,016$	$d_8 = 2,119$
$\delta_9 = 4,95$	$h_9 = 0,55$	$z_9 = 2,006$	$d_9 = 2,074$
$\delta_{10} = 5,00$	$h_{10} = 0,50$	$z_{10} = 2,001$	$d_{10} = 2,062$

Weiter hat man nach § 55, 1)

$$\omega = \frac{n h_0}{2 f} = 10 \frac{5,5}{5} = 11.$$

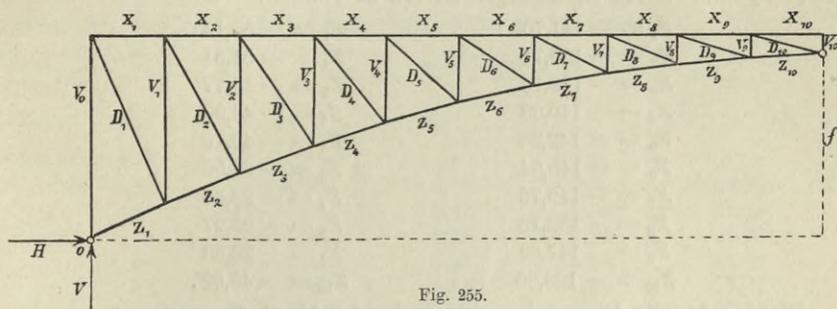


Fig. 255.

Eigengewicht allein. Nach § 55, 2) gelten für die X-Gurtung und Diagonalen in allen Feldern:

$$x_m = 0, \quad \mathfrak{D}_m = 0.$$

Die Eigengewichtsbeanspruchungen der Vertikalen sind:

$$\mathfrak{S}_m = -\lambda g_x = -1,2 t,$$

jedoch bilden Ausnahmen und folgen aus § 55, 3):

$$\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}_{10} = -\frac{\lambda g_x}{2} = -0,6 t.$$

Für die Z-Gurtung hat man nach § 55, 2):

$$\mathfrak{Z}_m = -\frac{g l}{8 f} n z_m = -24 z_m,$$

woraus mit den oben erhaltenen z_m in Tonnen:

$\mathfrak{Z}_1 = -53,14$	$\mathfrak{Z}_6 = -49,20$
$\mathfrak{Z}_2 = -52,15$	$\mathfrak{Z}_7 = -48,72$
$\mathfrak{Z}_3 = -51,26$	$\mathfrak{Z}_8 = -48,38$
$\mathfrak{Z}_4 = -50,47$	$\mathfrak{Z}_9 = -48,14$
$\mathfrak{Z}_5 = -49,78$	$\mathfrak{Z}_{10} = -48,02$

Die Vertikalreaktion und Horizontalreaktion der Kämpfer sind nach § 55, 4):

$$\mathfrak{S} = \frac{g l}{2} = 24 t, \quad \mathfrak{H} = \frac{g l^2}{8 f} = 48 t.$$

Grenzwerte. Nach § 55, 5) sind die beiden Grenzbeanspruchungen der Obergurtstäbe gleich groß und von verschiedenen Vorzeichen. Für den Absolutwert hat man:

$$X_m = \frac{m(\sigma - m)(n - m)}{(3\sigma - m)h_m} \frac{p\lambda^2}{2} = \frac{4m(10 - m)(20 - m)}{(30 - m)h_m}$$

also mit $m = 1$ bis $m = 10$ in Tonnen:

$X_1 = 5,19$	$X_6 = 43,08$
$X_2 = 11,12$	$X_7 = 49,98$
$X_3 = 17,93$	$X_8 = 49,87$
$X_4 = 25,69$	$X_9 = 34,20$
$X_5 = 34,29$	$X_{10} = 0$

Die Grenzbeanspruchungen des Untergurts sind nach § 55, 6), wenn im Ausdrucke der zweiten Grenzbeanspruchung (Z_m) den Wert der ersten bedeutet:

$$Z_m = 3m - \frac{\omega - m + 1}{\omega + m - 1} \frac{\omega z_m}{h_{m-1}} \frac{p l}{4} = 3m - \frac{12 - m}{10 + m} \frac{z_m}{h_{m-1}} \cdot 220,$$

$$z_m = \frac{q + g}{g} 3m - (Z_m) = \frac{11}{3} 3m - (Z_m),$$

worin $q = g + p$. Diese Gleichungen liefern in Tonnen:

$Z_1 = -141,70$	$Z_1 = -53,14$
$Z_2 = -139,71$	$Z_2 = -51,51$
$Z_3 = -139,19$	$Z_3 = -48,77$
$Z_4 = -140,09$	$Z_4 = -44,97$
$Z_5 = -142,36$	$Z_5 = -40,16$
$Z_6 = -145,84$	$Z_6 = -34,56$
$Z_7 = -149,76$	$Z_7 = -28,88$
$Z_8 = -152,13$	$Z_8 = -25,27$
$Z_9 = -147,69$	$Z_9 = -28,83$
$Z_{10} = -128,06$	$Z_{10} = -48,02$

Werden für die Diagonalen entsprechend § 55, 1), 9) gesetzt:

$$\varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}}, \quad \varphi = \frac{m - \varepsilon}{n} \cdot 2f = \frac{m - \varepsilon}{2},$$

$$\chi = \frac{n - m + \varepsilon}{n} \cdot 2f = 10 - \frac{m - \varepsilon}{2}, \quad \psi = \frac{n - m}{m} \frac{m - \varepsilon}{n} \cdot 2f = \frac{20 - m}{m} \frac{m - \varepsilon}{2},$$

so ergeben sich

	ε	φ	χ	ψ
für $m = 1$	— 4,789	2,89	7,11	54,99
2	— 4,354	3,18	6,82	28,59
3	— 3,933	3,47	6,53	19,64
4	— 3,538	3,77	6,23	15,08
5	— 3,182	4,09	5,91	12,27
6	— 2,889	4,44	5,56	10,37
7	— 2,712	4,85	5,14	9,02
8	— 2,800	5,40	4,60	8,10
9	— 3,667	6,33	3,67	7,74
10	— 10,000	10,00	0	10,00

Nach § 55, 8) sind die zwei Grenzbeanspruchungen jeder Diagonale gleich groß und von verschiedenen Vorzeichen. Eine Grenzbeanspruchung ist ausgedrückt: für die Diagonalen 1 bis 6, weil $h_0 = 5,5$ nicht zwischen χ und ψ , wohl aber zwischen ψ und φ liegt, nach § 55, 12):

$$D_m = \frac{\omega - m + \varepsilon}{\omega + m - \varepsilon} \frac{\omega d_m}{\varepsilon h_{m-1}} \frac{p l}{4} = \frac{11 - m + \varepsilon}{11 + m - \varepsilon} \frac{d_m}{\varepsilon h_{m-1}} \cdot 220,$$

für die Diagonalen 7 und 8, weil h_0 sowohl zwischen χ und ψ als zwischen ψ und φ liegt, nach § 55, 10):

$$D_m = \frac{[(n - m)(m - \varepsilon) - m\omega]^2}{n - m - \omega - \varepsilon(n - 1)} \frac{d_m}{\omega + m - \varepsilon} \frac{p \lambda}{2 h_m} = \frac{[(10 - m)(m - \varepsilon) - 11m]^2}{(9 - m - 19\varepsilon)(11 + m - \varepsilon)} \frac{d_m}{h_m} \cdot 2,$$

für die Diagonalen 9 und 10, weil h_0 zwischen χ und ψ , aber nicht zwischen ψ und φ liegt, nach § 55, 11):

$$D_m = \frac{(n-m-\omega+\varepsilon)(m-1)^2}{n-m-\omega-\varepsilon(n-1)} \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{p\lambda}{2} = \frac{(9-m+\varepsilon)(m-1)^2}{9-m-19\varepsilon} \frac{d_m}{h_{m-1}} 2.$$

Demgemäß erhalten wir die Absolutwerte beider Grenzbeanspruchungen der Diagonalen in Tonnen:

$D_1 = \frac{5,211 \cdot 4,970 \cdot 220}{16,789 \cdot 4,789 \cdot 5,5} = 12,88$ $D_2 = \frac{4,646 \cdot 4,202 \cdot 220}{17,354 \cdot 4,355 \cdot 4,55} = 12,50$ $D_3 = \frac{4,067 \cdot 3,564 \cdot 220}{17,933 \cdot 3,933 \cdot 3,7} = 12,22$ $D_4 = \frac{3,462 \cdot 3,048 \cdot 220}{18,538 \cdot 3,538 \cdot 2,95} = 12,00$ $D_5 = \frac{2,818 \cdot 2,658 \cdot 220}{19,182 \cdot 3,182 \cdot 2,3} = 11,74$	$D_6 = \frac{2,111 \cdot 2,385 \cdot 220}{19,889 \cdot 2,889 \cdot 1,75} = 11,01$ $D_7 = \frac{(13 \cdot 9,714 - 11 \cdot 7)^2 \cdot 2,124 \cdot 2}{(2 + 19 \cdot 2,714) \cdot 20,714 \cdot 0,95} = 10,59$ $D_8 = \frac{(12 \cdot 10,8 - 11 \cdot 8)^2 \cdot 2,119 \cdot 2}{(1 + 19 \cdot 2,8) \cdot 21,8 \cdot 0,70} = 9,29$ $D_9 = \frac{3,667 \cdot 64 \cdot 2,074 \cdot 2}{19 \cdot 3,667 \cdot 0,70} = 19,96$ $D_{10} = \frac{11 \cdot 81 \cdot 2,062 \cdot 2}{189 \cdot 0,55} = 35,35.$
--	---

Werden für die Vertikalen entsprechend § 55, 1), 13) gesetzt:

$$v = \frac{h_m}{h_{m+1} - h_m}, \quad \varphi = \frac{m-v}{n} 2f = \frac{m-v}{2},$$

$$\chi = \frac{n-m+v}{n} 2f = 10 - \frac{m-v}{2}, \quad \psi = \frac{n-m}{m} \frac{m-v}{n} 2f = \frac{20-m}{m} \frac{m-v}{2},$$

so ergeben sich

	für $m =$		v	φ	χ	ψ
	1	—	5,354	3,18	6,82	60,34
	2	—	4,933	3,47	6,53	31,19
	3	—	4,538	3,77	6,23	21,36
	4	—	4,182	4,09	5,91	16,36
	5	—	3,889	4,44	5,56	13,33
	6	—	3,714	4,86	5,14	11,33
	7	—	3,800	5,40	4,60	10,03
	8	—	4,667	6,33	3,67	9,50
	9	—	11,000	10,00	0	12,22.

Als Ausdruck einer Grenzbeanspruchung haben wir: für die Vertikalen 1 bis 5, weil $h_0 = 5,5$ nicht zwischen χ und ψ , aber zwischen ψ und φ liegt, nach § 55, 16):

$$V_m = \mathfrak{B}_m - \frac{\omega - m + v}{\omega + m - v} \frac{\omega}{v} \frac{p l}{4} = -1,2 - \frac{11 - m + v}{11 + m - v} \frac{220}{v},$$

für die Vertikalen 6 und 7, weil h_0 sowohl zwischen χ und ψ als zwischen ψ und φ liegt, nach § 55, 14):

$$V_m = \mathfrak{B}_m + \frac{[(n-m)(m-v) - m\omega]^2}{n-m-\omega-v(n-1)} \frac{1-v}{\omega+m-v} \frac{p\lambda}{2v} =$$

$$-1,2 + \frac{[(20-m)(m-v) - 11m]^2 (1-v)}{(9-m-19v)(11+m-v)v} 2,$$

für die Vertikalen 8 und 9, weil h_0 zwischen χ und ψ , aber nicht zwischen ψ und φ liegt, nach § 55, 15):

$$V_m = \mathfrak{B}_m - \frac{(n-m-\omega+v)m-1)^2}{n-m-\omega-v(n-1)} \frac{p l}{2} = -1,2 - \frac{(9-m+v)(m-1)^2}{9-m-19v} 2.$$

Die zweite Grenzbeanspruchung ist nach § 55, 17) in allen drei Fällen, wenn (V_m) die erste bezeichnet,

$$V_m = -(V_m) - (p + 2 g_x) \lambda = -(V_m) - 6,4.$$

Diese Gleichungen liefern folgende Grenzwerte in Tonnen:

$V_1 = -1,2 + \frac{4,646 \cdot 220}{17,354 \cdot 5,354} = 9,81$	$V_1 = -16,21$
$V_2 = -1,2 + \frac{4,067 \cdot 220}{17,933 \cdot 4,933} = 8,94$	$V = -15,34$

$V_3 = -1,2 + \frac{3,462 \cdot 220}{18,538 \cdot 4,538} = 7,85$	$V_3 = -14,25$
$V_4 = -1,2 + \frac{2,818 \cdot 220}{19,182 \cdot 4,182} = 6,53$	$V_4 = -12,93$
$V_5 = -1,2 + \frac{2,111 \cdot 220}{19,889 \cdot 3,889} = 4,80$	$V_5 = -11,20$
$V_6 = -1,2 - \frac{69,996^2 \cdot 4,714 \cdot 2}{73,566 \cdot 20,714 \cdot 3,714} = -9,35$	$V_6 = 2,95$
$V_7 = -1,2 - \frac{63,4^2 \cdot 4,8 \cdot 2}{74,2 \cdot 21,8 \cdot 3,8} = -7,48$	$V_7 = 1,08$
$V_8 = -1,2 + \frac{3,667 \cdot 49 \cdot 2}{89,673} = 2,80$	$V_8 = -9,20$
$V_9 = -1,2 + \frac{11 \cdot 64}{209} = 5,54$	$V_9 = -11,94$

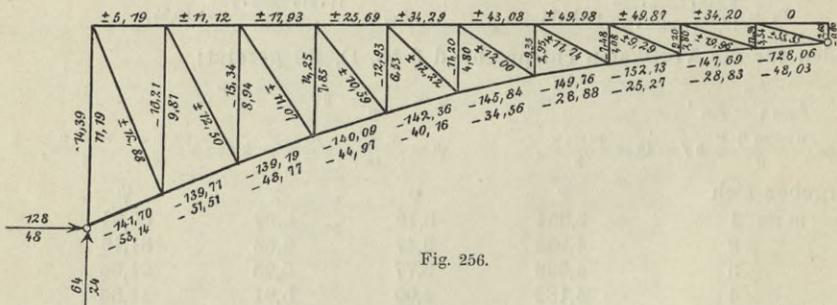


Fig. 256.

Die Grenzbeanspruchungen der Kämpfervertikalen sind nach § 55, 18):

$$V_0 = \mathfrak{B}_0 - \frac{n}{3n-2} \frac{pl}{2} = -14,39 \text{ t},$$

$$V_0 = \mathfrak{B}_0 + \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{3n-2} \frac{pl}{2} = 11,19 \text{ t},$$

und diejenigen der Scheitelvertikale nach § 55, 19):

$$V_{10} = \mathfrak{B}_{10} - \frac{pl}{2} = -2,6 \text{ t},$$

$$V_{10} = \mathfrak{B}_{10} = -0,6 \text{ t}.$$

Für die oberen Grenzwerte der Vertikalreaktion und Horizontalreaktion der Stützen schließlich hat man nach § 55, 20), mit $q = g + p = 3,2 \text{ t}$

$$V = \frac{ql}{2} = 64 \text{ t},$$

$$H = \frac{ql^2}{8f} = 128 \text{ t},$$

während die unteren Grenzwerte für Eigengewicht allein eintreten. Damit sind sämtliche verlangte Grenzwerte bestimmt. Dieselben wurden in Fig. 256 für eine Trägerhälfte bei ihren Stäben eingeschrieben.

Bemerkungen betreffend weitere Beispiele über statisch bestimmte Bogenfachwerke.

Entsprechend dem S. 394 Gesagten geben wir keine weiteren Beispiele über die Grenzbeanspruchungen statisch bestimmter Bogenfachwerke, sondern verweisen auf die im folgenden genau bezeichneten Beispiele des Werkes: Weyrauch, Beispiele und Aufgaben zur Berechnung der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer, Leipzig 1888. Es sind dort ähnliche Formeln wie im vorigen Beispiel verwendet. Bezüglich der Gelenkdrücke bleibt es bei dem in §§ 13–17, 19 und den zugehörigen Beispielen Vorgetragenen.

Beispiel 85. Dreigelenkbogendachbinder mit beliebig geformten Gurten (Fig. 239). Grenzbeanspruchungen durch Belastung und schiefen Winddruck.

Beispiel 87. Dreigelenkbogenfachwerk mit beliebig geformten Gurtungen (Fig. 254). Berechnung für gleichmäßig verteilte bewegte Last.

Beispiel 88. Dreigelenkbogenfachwerk mit beliebig geformten Gurtungen (Fig. 254). Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Beispiel 89. Dreigelenkbogenfachwerk mit zwei geradlinigen Gurtungen (Fig. 257). Berechnung für gleichmäßig verteilte bewegte Last.

Beispiel 90. Dreigelenkbogenfachwerk mit zwei geradlinigen Gurtungen (Fig. 257). Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Aufgabe 39. Kämpfervertikalen und Scheitelvertikalen von Dreigelenkbogenfachwerken.

Aufgabe 40. Dreigelenkbogenfachwerk mit Vertikalen und beliebig geformten Gurtungen. Maximalbedingungen für die Stabkräfte beim Befahren durch bewegte Radlastzüge.

Beispiel 93. Durchlaufendes Bogenfachwerk mit zwei geradlinigen Gurtungen (feste Hängebrücke mit einer Fachwerköffnung und Rückhaltgliedern). Berechnung für gleichmäßig verteilte bewegte Last.

Beispiel 94. Durchlaufendes Bogenfachwerk mit zwei geradlinigen Gurtungen (feste Hängebrücke oder Sprengbrücke, Fig. 258, 259). Berechnung für gleichmäßig verteilte bewegte Last.

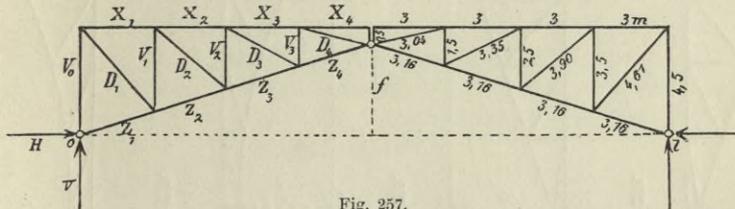


Fig. 257.

Beispiel 95. Durchlaufendes Bogenfachwerk mit zwei geradlinigen Gurtungen (feste Hängebrücke oder Sprengbrücke, Fig. 258, 259). Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Beispiel 96. Durchlaufendes Bogenfachwerk mit einer horizontalen und einer parabolischen Gurtung (feste Hängebrücke mit einer Fachwerköffnung und Rückhaltgliedern). Berechnung für gleichmäßig verteilte bewegte Last.

Beispiel 97. Durchlaufendes Bogenfachwerk mit einer horizontalen und einer parabolischen Gurtung (feste Hängebrücke oder Sprengbrücke ähnlich Fig. 260, 261 mit größeren Spannweiten und mehr Feldern). Berechnung für gleichmäßig verteilte bewegte Last.

Beispiel 98. Durchlaufendes Bogenfachwerk mit einer horizontalen und einer beliebig geformten Gurtung (feste Hängebrücke mit einer Fachwerköffnung und Rückhaltgliedern). Berechnung für gleichmäßig verteilte bewegte Last.

Beispiel 99. Durchlaufendes Bogenfachwerk mit einer horizontalen und einer beliebig geformten Gurtung (feste Hängebrücke oder Sprengbrücke, Fig. 260, 261). Berechnung für gleichmäßig verteilte bewegte Last.

Beispiel 100. Durchlaufendes Bogenfachwerk mit einer horizontalen und einer beliebig geformten Gurtung (feste Hängebrücke oder Sprengbrücke, Fig. 260, 261). Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Beispiel 101. Durchlaufendes Bogenfachwerk mit einer horizontalen und einer beliebig geformten Gurtung (Fig. 225). Berechnung für gleichmäßig verteilte bewegte Last.

Beispiel 102. Durchlaufendes Bogenfachwerk mit einer horizontalen und einer beliebig geformten Gurtung (Fig. 225). Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Beispiel 103. Durchlaufender Bogendachbinder mit beliebig geformten Gurtungen (Fig. 262). Berechnung für gleichmäßig verteilte bewegte Last.

Aufgabe 42. Pfeilvertikalen und Widerlagervertikalen durchlaufender Bogenfachwerke.

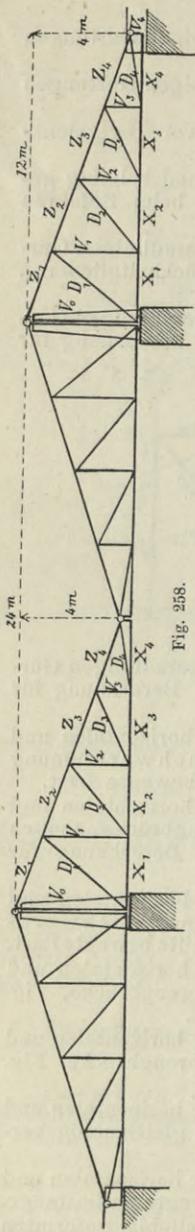


Fig. 258.

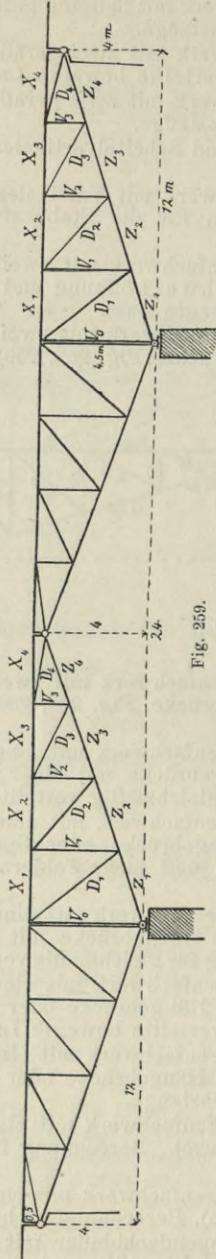


Fig. 259.

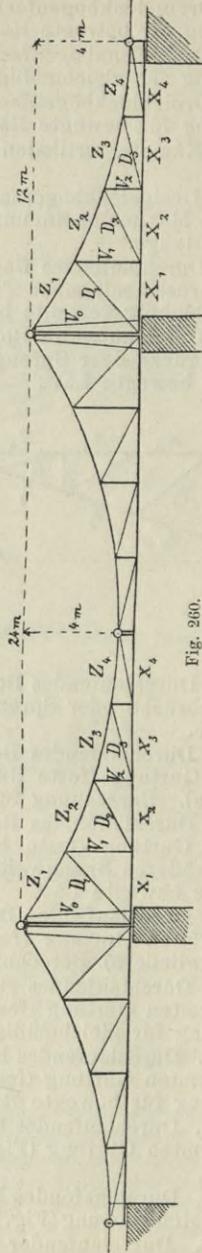


Fig. 260.

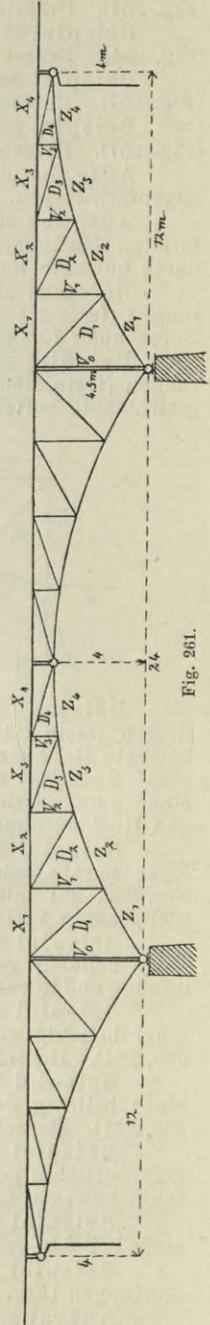


Fig. 261.

§ 56. Verschiebungsarbeit. Prinzip der virtuellen Verrückungen.

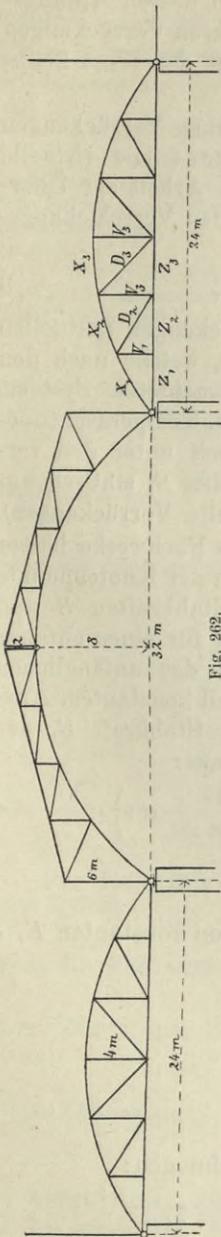


Fig. 262.

Die zur Überwindung der inneren Kräfte notwendige Arbeit während irgendwelcher Verrückungen der Knotenpunkte eines Fachwerks (oder der Punkte eines sonstigen Körpers) heißt Verschiebungsarbeit D , vielfach auch Deformationsarbeit oder Formänderungsarbeit, während die Arbeit, welche die Überwindung der inneren Kräfte erfordern würde, wenn diese konstant wie am Ende der Verrückungen wären, virtuelle Verschiebungsarbeit \mathfrak{D} (virtuelle Deformationsarbeit oder virtuelle Formänderungsarbeit) genannt wird. Für ein beliebiges System von Knotenpunkten (oder sonstigen Körperpunkten), zwischen welche nur Kräfte S in den Verbindungsgeraden wirken (für Zug S positiv), hat man während irgendwelcher Längenänderungen Δs der letzteren (für Verlängerungen Δs positiv), welche gegen deren anfängliche Längen s verschwindend klein sind, die Verschiebungsarbeit und virtuelle Verschiebungsarbeit:

$$D = \sum \int_0^{\Delta s} S ds, \quad \mathfrak{D} = \sum S \Delta s. \quad 1$$

Hierin sind die Summen Σ auf alle inneren Kräfte S , also bei Fachwerken auf alle Stabkräfte zu erstrecken¹.

Die Arbeit \mathfrak{A} der äußeren Kräfte, wenn diese konstant wie am Ende der Verrückungen wären, soll virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte heißen. Wirken nun am Ende der Verrückungen beliebige Lasten oder sonstige äußere Aktivkräfte Q , beliebige Reaktionen oder Reaktionskomponenten R , und bezeichnen q, r die Verrückungen der durch die Q, R ergriffenen Punkte in den Richtungslinien der Q, R (positiv, wenn in den Richtungen der Q, R selbst, negativ, wenn entgegengesetzt denselben), so ist die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte ausgedrückt:

$$\mathfrak{A} = \sum Qq + \sum Rr, \quad 2$$

worin die Summen Σ auf alle durch äußere Kräfte ergriffenen Systempunkte (Knotenpunkte des Fach-

¹ Ableitungen dieser und der folgenden Gleichungen siehe Weyrauch, Über statisch unbestimmte Fachwerke und den Begriff der Deformationsarbeit, Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, 1908, S. 91, wo auch weitere Literatur gegeben ist.

werks oder Punkte des sonstigen Körpers) zu erstrecken sind. Doch dürfen auch außerhalb des Systems gelegene, bezüglich dessen Anfangslage feste Punkte darin aufgenommen werden, weil deren Verrückungen q , r gleich Null sind, so daß die Summen und damit der Wert 2 un geändert bleiben.

Fürs Gleichgewicht nach beliebigen genügend kleinen Verrückungen besteht das Prinzip der virtuellen Verrückungen: Die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte ist gleich der virtuellen Arbeit zur Überwindung der inneren Kräfte, das heißt gleich der virtuellen Verschiebungsarbeit. Man hat also mit obigen Bezeichnungen:

$$\mathfrak{A} = \Sigma Qq + \Sigma Rr = \Sigma S \Delta s = \mathfrak{D}. \quad 3$$

Dieses Gesetz gilt nicht nur für die wirklichen Verrückungen (aktuellen Verrückungen), sondern für alle kleinen Verrückungen, welche nach den geometrischen und statischen Bedingungen des betrachteten Systems (einschließlich fester Punkte, vorgeschriebener Bahnen, Temperaturänderungen), zwar eintreten könnten, ohne daß sie jedoch unter den vorliegenden besonderen Umständen (Gesetze der Stabkräfte S , statisch unbestimmte Größen usw.) einzutreten brauchen (virtuelle Verrückungen).

Während die bisherigen Gleichungen für stabile Fachwerke existieren, welche Werte auch die kleinen Verrückungen der Knotenpunkte annehmen und welche Beziehungen zwischen den Stabkräften S und Längenänderungen Δs bestehen mögen, so drückt sich für einen anfangs spannungslosen Stab der anfänglichen Länge s und des anfänglichen Querschnitts F bei konstantem Elastizitätsmodul E und konstantem Ausdehnungskoeffizienten α die Beziehung zwischen der Stabkraft S , der Temperaturänderung τ und der Längenänderung Δs aus:

$$\Delta s = \left(\frac{S}{EF} + \alpha \tau \right) s, \quad S = EF \left(\frac{\Delta s}{s} - \alpha \tau \right). \quad 4$$

Da hiernach

$$ds = \left(\frac{dS}{EF} + \alpha d\tau \right) s,$$

so folgen für ein anfangs spannungsloses Fachwerk von konstanten E , α nach 1, 4 die Verschiebungsarbeit:

$$D = \Sigma \frac{s S^2}{2EF} + \Sigma \alpha s \int S d\tau, \quad 5$$

die virtuelle Verschiebungsarbeit:

$$\mathfrak{D} = \Sigma \frac{s S^2}{EF} + \Sigma \alpha s S \tau, \quad 6$$

und als Ausdruck des Prinzips der virtuellen Verrückungen:

$$\mathfrak{A} = \Sigma Qq + \Sigma Rr = \Sigma \left(\frac{S}{EF} + \alpha \tau \right) s S = \mathfrak{D}. \quad 7$$

Die letzte Gleichung ergibt

$$\text{speziell für } \tau = 0, \quad d\tau = 0 \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{D} = \Sigma \frac{s S^2}{EF} = 2D. \quad 8$$

Bei konstanter Temperatur ist nach Eintritt des Gleichgewichts die Arbeit \mathfrak{A} der mit ihren Endwerten konstant gedachten äußeren Kräfte gleich dem doppelten der Verschiebungsarbeit D . Diese spezielle Beziehung wird mitunter das Clapeyronsche Theorem¹ genannt.

Aufgabe 35. Einsenkungen für einfachste Fälle.

Die Einsenkungen e des Mittelgelenks für den Dreigelenkbogen Fig. 263 und den Dreigelenkbogen mit Zugstange Fig. 264 durch eine beliebige Last P bei beliebigen gleichen Temperaturänderungen τ aller Stäbe zu ermitteln. Die Bezeichnungen der Querschnitte, Stabkräfte und Längen sind in den Figuren angedeutet.

Wir gehen aus vom Prinzip der virtuellen Verrückungen in der Form § 56, 7), worin in beiden vorliegenden Fällen die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte $\mathfrak{A} = P e$, so daß

$$P e = \Sigma \left(\frac{S}{E F} + \alpha \tau \right) s, \quad 1$$

und die Summe Σ alle Stäbe umfaßt.

Für den Fall Fig. 263 verlangt das Gleichgewicht am Mittelgelenk:

$$P + 2 S \frac{h}{s} = 0, \quad S = -\frac{P s}{2 h}, \quad 2$$

womit nach 1:

$$P e = 2 \left(\frac{-P s}{2 h E F} + \alpha \tau \right) s \frac{-P s}{2 h},$$

sodaß die gesuchte Einsenkung:

$$e = \left(\frac{P s}{4 h E F} - \alpha \tau \right) \frac{s^2}{h}. \quad 3$$

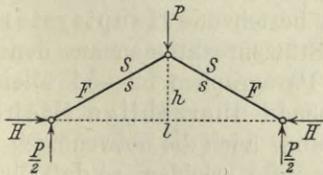


Fig. 263.

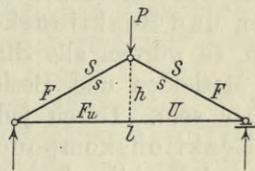


Fig. 264.

Für den Fall Fig. 264 verlangt das Gleichgewicht am Mittelgelenk und ersten Gelenk:

$$P + 2 S \frac{h}{s} = 0, \quad U + S \frac{l}{2 s} = 0,$$

woraus die Stabkräfte:

$$S = -\frac{P s}{2 h} \quad U = \frac{P l}{4 h} \quad 4$$

und mit diesen nach 1:

$$P e = 2 \left(\frac{-P s}{2 h E F} + \alpha \tau \right) s \frac{-P s}{2 h} + \left(\frac{P l}{4 h E F_u} + \alpha \tau \right) l \frac{P l}{4 h},$$

also die Einsenkung:

$$e = \frac{P}{2 E h^2} \left(\frac{s^3}{F} + \frac{l^3}{8 F_u} \right) - \alpha \tau h. \quad 5$$

Aufgabe 36. Einsenkung durch Bewegungen der Stützpunkte.

Im ersten Fall der vorigen Aufgabe soll eine Änderung Δl der Spannweite und eine Erhöhung der Endstütze gegen die Anfangsstütze (Senkung der Anfangsstütze gegen die Endstütze) um Δk berücksichtigt werden.

¹ Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, Paris 1866, S. 80, 83, 86.

Man hat dann in § 56, 7) die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte $\mathfrak{U} = Pe - H \Delta l + \frac{P}{2} \Delta k$, während die rechte Seite jener Gleichung und der Ausdruck der Stabkräfte S ungeändert bleiben. Da ferner

$$H + S \frac{l}{2s} = 0, \quad H = -S \frac{l}{2s} = \frac{Pl}{4h}, \quad 1$$

so liefert § 56, 7):

$$Pe - \frac{Pl}{4h} \Delta l + \frac{P}{2} \Delta k = \left(\frac{Ps}{2hEF} - \alpha \tau \right) \frac{Ps^2}{h},$$

woraus die Einsenkung:

$$e = \left(\frac{Ps}{2hEF} - \alpha \tau \right) \frac{s^2}{h} + \frac{l}{4h} \Delta l - \frac{\Delta k}{2}. \quad 2$$

Die Stützenbewegungen allein haben also zur Folge:

$$e = \frac{l}{4h} \Delta l - \frac{\Delta k}{2}, \quad 3$$

wie schon in Aufgabe 14 (S. 106) auf ganz anderem Wege erhalten wurde. Auch der Einfluß der Temperaturänderung wurde dort bereits festgestellt.

§ 57. Beziehungen für statisch unbestimmte Stabkräfte und Reaktionskomponenten.

Das anfangs spannungslose Fachwerk sei wieder nach Einwirkung beliebiger Lasten oder sonstiger äußerer Aktivkräfte und gleichmäßiger Temperaturänderungen τ der einzelnen Stäbe zum Gleichgewicht gelangt. Auch kleine Verrückungen der Stützpunkte sind zugelassen. Wäre nur das aus den zur statischen Bestimmtheit und Stabilität notwendigen Stäben und Reaktionskomponenten bestehende Hauptsystem vorhanden, so würden alle Stabkräfte und Stützenreaktionen aus den statischen Methoden und Beziehungen der Paragraphen 52—54 allein bestimmbar sein. Durch jede hinzukommende überzählige Stabkraft oder Reaktionskomponente können aber auch die notwendigen Stabkräfte und Reaktionskomponenten Änderungen erleiden, so daß für diese die überzähligen Größen als Unabhängigveränderliche anzusehen sind. Daß die überzähligen Größen oft verschieden gewählt werden können, wurde bereits in der Einleitung zu diesem Abschnitt erwähnt. So ließen sich in den Fällen Fig. 265, 266 sowohl die bezeichneten Reaktionskomponenten als die durchstrichenen Stäbe wählen, doch würde hier schon im Interesse möglichst einfacher Berechnung des verbleibenden Hauptsystems die erste Wahl vorzuziehen sein.

Es sei X eine gesuchte überzählige Stabkraft oder Reaktionskomponente und mögen für die betrachteten Verrückungen weiter bezeichnen: \mathfrak{U} die Arbeit der mit ihren Endwerten konstant gedachten überzähligen und von überzähligen abhängigen Größen notwendigen Reaktionskomponenten, ∂S die Änderung einer Stabkraft S durch irgend eine mit den geometrischen und statischen Bedingungen des Fachwerks verträgliche Änderung ∂X , und $\partial \mathfrak{U}$ die entsprechende Änderung von \mathfrak{U} , letztere jedoch bei konstanten Verrückungen (deshalb mit $\partial \mathfrak{U}$ bezeichnet). Dann hat man zur Bestimmung von X bei beliebigen Gesetzen der Stabkräfte:

$$\Sigma \Delta s \frac{\partial S}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial X}, \quad 1$$

und speziell für Fachwerke aus prismatischen Stäben von konstanten Elastizitätsmoduln E und konstanten Ausdehnungskoeffizienten α mit § 56, 4):

$$\Sigma \left(\frac{S}{EF} + \alpha \tau \right) s \frac{\partial S}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial X}. \quad 2$$

In diesen Gleichungen¹ sind die Summen Σ zunächst auf sämtliche Stäbe zu erstrecken. Da jedoch die Differentiation einer überzähligen Stabkraft S nach einer anderen überzähligen Größe X (das heißt nach einer anderen Unabhängigvariablen) $\frac{\partial S}{\partial X} = 0$ ergibt, so tragen zu den Summen Σ nur bei: wenn X eine überzählige Reaktionskomponente bedeutet, die notwendigen Stabkräfte; wenn X eine überzählige Stabkraft bedeutet, diese mit $\frac{\partial S}{\partial X} = 1$ und die notwendigen Stabkräfte.

Es können ebensoviele Gleichungen der Form 1 oder 2 angesetzt werden, als überzählige Größen X vorhanden sind, wonach diese sämtlich sich berechnen lassen. Man könnte, wenn nicht im einzelnen Falle andere Methoden sich als zweckmäßiger erweisen, beispielsweise wie folgt vorgehen: a) Auswahl der überzähligen Stabkräfte und Reaktionskomponenten X ; b) Bildung der Ausdrücke sämtlicher notwendiger Stabkräfte S in dem vollständigen Fachwerk (mit Einschluß der X) für den gegebenen Belastungsfall (S. 361, 408) und eventuell der Arbeit U sämtlicher überzähliger und von überzähligen Größen abhängiger Reaktionen für die angenommenen Verrückungen der Stützpunkte; c) auf Grund dieser Ausdrücke Bildung der Differentialquotienten in 1 oder 2 nach jeder der überzähligen Größen X und Einsetzen in letztere Gleichungen; d) Berechnung der Größen X aus den so entstandenen Gleichungen; e) Berechnung der wirklichen Werte der notwendigen Stabkräfte aus den unter b) erwähnten Ausdrücken, wonach die etwa noch fehlenden verlangten Stützenreaktionen aus rein statischen Gleichungen, z. B. aus solchen der Formen § 52, 1), folgen.

Nach § 52, 1) stehen alle Stabkräfte und Reaktionskomponenten in linearen Beziehungen zueinander, so daß für jede notwendige Stabkraft S und jede notwendige Reaktionskomponente K :

$$\frac{\partial S}{\partial X} = \varrho \text{ konstant}, \quad \frac{\partial K}{\partial X} = \varrho \text{ konstant}, \quad 3$$

wobei natürlich auch $\varrho = 0$ werden kann. Bezeichnet X eine überzählige Reaktionskomponente und $e = -\Delta l$ die Verrückung des durch sie ergriffenen Knotenpunktes in der Richtungslinie von X (positiv, wenn in der Richtung von X selbst, negativ, wenn entgegengesetzt derselben), so hat man:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = e = -\Delta l. \quad 4$$

¹ Bezüglich ihrer Ableitung siehe den S. 403 zitierten Aufsatz oder Weyrauch, Aufgaben zur Theorie elastischer Körper, Leipzig 1885, S. 233, 263.

Bezeichnet dagegen X eine überzählige Stabkraft, qX ihren Beitrag zu einer notwendigen Reaktionskomponente K , und $e = -\Delta l$ wieder die Verrückung des durch K ergriffenen Knotenpunktes in der Richtungslinie von K , dann gilt:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = qe = -q\Delta l. \quad 5$$

Δl bedeutet die Änderung der Entfernung l des durch X beziehungsweise K ergriffenen Knotenpunktes nach einem von ihm aus in der Richtung von X oder K gelegenen, bezüglich der anfänglichen Lagen der Knotenpunkte festen Punkte.

Es mögen für einen beliebigen gegebenen Belastungsfall (im allgemeinsten Sinne verstanden, eventuell auch nicht vertikale Aktivkräfte, Temperaturänderungen und Verrückungen der Stützpunkte einschließend) der Wert einer notwendigen Stabkraft S oder einer notwendigen Reaktionskomponente K , wenn nur das Hauptssystem wirkte, durch A bezeichnet sein. Kommen nun beliebige überzählige Stabkräfte und Reaktionskomponenten X_I, X_{II}, \dots hinzu, so ist der ganze (wirkliche) Wert der Stabkraft S oder Reaktionskomponente K :

$$S = A + q_I X_I + q_{II} X_{II} + \dots, \quad 6$$

$$K = A + q_I X_I + q_{II} X_{II} + \dots, \quad 7$$

unter q_I, q_{II}, \dots die obenerwähnten Konstanten verstanden. Diese bedeuten nach vorstehenden Gleichungen die Werte von S oder K , wenn an dem statisch bestimmten Hauptssystem von äußeren Aktivkräften allein wirkten $X_I = 1$ beziehungsweise $X_{II} = 1$ usw. Alle A, q ergeben sich also aus rein statischen Gleichungen.

Sind bei Fachwerken aus prismatischen Stäben von konstanten Elastizitätsmoduln E alle Temperaturänderungen $\tau = 0$ und daneben die virtuelle Arbeit der überzähligen und von überzähligen Größen abhängigen notwendigen Reaktionskomponenten $u = 0$, oder doch für eine zu bestimmende überzählige Größe X $\frac{\partial u}{\partial X} = 0$, dann hat man nach 2:

$$\Sigma \frac{sS}{EF} \frac{\partial S}{\partial X} = 0 \quad \text{d. h. nach § 56, 8)} \quad \frac{\partial D}{\partial X} = 0, \quad 2a$$

während nach § 56, 8) mit Rücksicht auf die erste obige Gleichung 3 weiter folgt:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial X^2} = \Sigma \frac{s}{EF} \left(\frac{\partial S}{\partial X} \right)^2 = \Sigma \frac{s q^2}{EF} \text{ positiv.}$$

Der erste Differentialquotient der Verschiebungsarbeit D ist gleich Null, der zweite positiv. Die überzählige Größe X ist also in dem angeführten Falle so bestimmt, daß die Verschiebungsarbeit ein Minimum wird (und damit, weil in jenem Falle $\mathfrak{D} = 2D$, auch die virtuelle Verschiebungsarbeit \mathfrak{D}). Dies Ergebnis hat man mitunter als Prinzip der kleinsten Verschiebungsarbeit bezeichnet, was jedoch angesichts seiner beschränkten Gültigkeit nicht zweckmäßig erscheint. Allgemeiner sind die statisch unbestimmten Größen X durch 1 oder 2 bestimmt.

Zur Erläuterung und weiteren Vorbereitung häufig vorkommender Berechnungen mögen noch zwei besondere Fälle von Fachwerken aus prismatischen Stäben gleicher und konstanter E , α ins Auge gefaßt werden. Wir setzen zur Abkürzung:

$$c = \frac{s}{F}.$$

8

Fachwerke mit überzähligen Reaktionskomponenten allein. Dieser Fall kommt bei Bogenfachwerken am meisten vor. Es seien A_1, A_2, \dots die Stabkräfte der Stäbe von anfänglichen Längen s_1, s_2, \dots , welche für den gegebenen Belastungszustand eintreten würden, wenn keine überzähligen Reaktionen vorhanden wären. Hierzu kommen die Beanspruchungen infolge der überzähligen Reaktionskomponenten X_I, X_{II}, \dots . Erhalten die Beanspruchungen q der Stäbe s_1, s_2, \dots , welche äußeren Aktivkräften $X_I = 1, X_{II} = 1, \dots$ allein entsprechen, den Index des betreffenden X neben demjenigen ihres Stabes, so hat man nach 6 die ganzen Beanspruchungen der Stäbe:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= A_1 + X_I q_{I1} + X_{II} q_{II1} + \dots \\ s_2 &= A_2 + X_I q_{I2} + X_{II} q_{II2} + \dots \\ s_3 &= A_3 + X_I q_{I3} + X_{II} q_{II3} + \dots \end{aligned} \right\} 9$$

womit nach 2 bei Beachtung von 3, 4, 8 zur Berechnung der überzähligen Reaktionskomponenten:

$$\left. \begin{aligned} E e_I &= -E \Delta l_I = E \alpha \sum \tau s q_{I1} + \sum c A q_{I1} + X_I \sum c q_{I1} q_{I1} + X_{II} \sum c q_{II1} q_{I1} + \dots \\ E e_{II} &= -E \Delta l_{II} = E \alpha \sum \tau s q_{II1} + \sum c A q_{II1} + X_I \sum c q_{I1} q_{II1} + X_{II} \sum c q_{II1} q_{II1} + \dots \\ E e_{III} &= -E \Delta l_{III} = E \alpha \sum \tau s q_{III1} + \sum c A q_{III1} + X_I \sum c q_{I1} q_{III1} + X_{II} \sum c q_{II1} q_{III1} + \dots \end{aligned} \right\} 10$$

Die Summen Σ sind auf alle Stäbe zu erstrecken. Man hat soviel Gleichungen der Form 9 als Stäbe und soviel Gleichungen der Form 10 als überzählige Reaktionskomponenten.

Häufig sind eine, zwei oder drei überzählige Reaktionskomponenten vorhanden. Für eine überzählige Reaktionskomponente X (beispielsweise Fig. 265 und 148, 235, 242, 248) hat man aus 10 im allgemeinsten Falle (beliebige Belastung und sonstige Aktivkräfte, Temperaturänderungen, Verrückungen der Stützpunkte):

$$X = - \frac{\sum c q A + E \alpha \sum \tau s q - E e}{\sum c q^2}. \quad 11$$

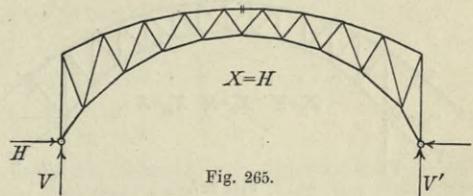


Fig. 265.

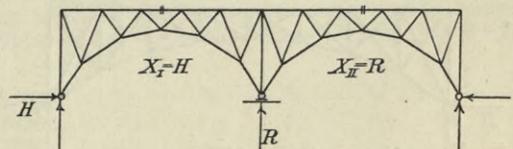


Fig. 266.

Für zwei überzählige Reaktionskomponenten X_I, X_{II} (beispielsweise Fig. 266 und 143, 146) liefert 10 mit den Bezeichnungen

$$\left. \begin{aligned} a &= \sum c q_I^2, & e &= \sum c q_I q_{II}, & v &= \sum c q_{II}^2, \\ U &= \sum c A q_I + E \alpha \sum \tau s q_I - E e_I, \\ V &= \sum c A q_{II} + E \alpha \sum \tau s q_{II} - E e_{II} \end{aligned} \right\} 12$$

$$\left. \begin{aligned} U &= \sum c A q_I + E \alpha \sum \tau s q_I - E e_I, \\ V &= \sum c A q_{II} + E \alpha \sum \tau s q_{II} - E e_{II} \end{aligned} \right\} 13$$

im allgemeinsten Falle:

$$X_I = \frac{Uv - Ve}{e^2 - av}, \quad X_{II} = \frac{Va - Ue}{e^2 - av}. \quad 14$$

Für drei überzählige Reaktionen X_I, X_{II}, X_{III} (beispielsweise Fig. 267 und 147) folgen aus 10 mit den Bezeichnungen 12, 13 und

$$m = \sum c q_I q_{III}, \quad n = \sum c q_{II} q_{III}, \quad r = \sum c q_{III}^2, \quad 15$$

$$W = \sum c A q_{III} + E \alpha \sum \tau s q_{III} - E e_{III} \quad 16$$

im allgemeinsten Falle:

$$\left. \begin{aligned} X_I &= -\frac{U(0r-n^2)+V(mn-er)+W(en-mo)}{a(0r-n^2)+e(mn-er)+m(en-mo)}, \\ X_{II} &= -\frac{U(mn-er)+V(ar-m^2)+W(em-an)}{e(mn-er)+o(ar-m^2)+n(em-an)}, \\ X_{III} &= -\frac{U(en-mo)+V(em-an)+W(ao-e^2)}{m(en-mo)+n(em-an)+r(ao-e^2)}. \end{aligned} \right\} 17$$

Mitunter lassen sich diese Formeln mit Rücksicht auf die Symmetrie der betreffenden Fachwerke vereinfachen. So hätte man bei symmetrisch zur Vertikalen durch die Trägermitte angeordneten Stäben im Falle von Fig. 267 wegen $r = a, n = e$:

$$X_{II} = -\frac{(U+W)e - V(a+m)}{2e^2 - o(a+m)}. \quad 18$$

Die Berechnung eines Fachwerkes mit überzähligen Reaktionskomponenten für einen beliebigen Belastungsfall könnte nun beispielsweise wie folgt vor sich gehen: a) Auswahl der überzähligen Reaktionskomponenten X_I, X_{II}, \dots , gewöhnlich mit Rücksicht auf möglichst bequeme Berechnung des nach Entfernung derselben verbleibenden statisch bestimmten stabilen Hauptsystems; b) unter Voraussetzung der Wirksamkeit des letzteren allein

Berechnung der Stabkräfte von	s_1	s_2	s_3	\dots
herrührend von äußeren Kräften $X_I = 1$	Q_{I1}	Q_{I2}	Q_{I3}	\dots
" " " " $X_{II} = 1$	Q_{II1}	Q_{II2}	Q_{II3}	\dots

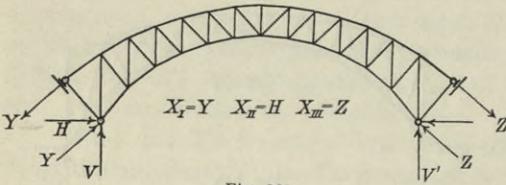


Fig. 267.

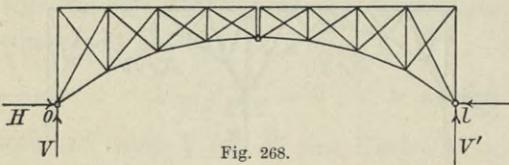


Fig. 268.

c) Bildung der nur von den c, e allein (nicht von den A, r, e) abhängigen Summen Σ , wie 12, 15, in den Ausdrücken für die überzähligen Reaktionskomponenten; d) Berechnung der Stabkräfte A_1, A_2, \dots , welche in den Stäben s_1, s_2, \dots für den gegebenen Belastungsfall eintreten würden, wenn keine überzähligen Reaktionen vorhanden wären; e) Berechnung der überzähligen Reaktionskomponenten nach 10 oder den spezielleren Ausdrücken 11, 14, 17, 18; f) Berechnung der wirklichen Stabkräfte für den gegebenen Belastungsfall nach 9). — Kommen, wie gewöhnlich, verschiedene Belastungs-

fälle zur Behandlung, so sind nur die Berechnungen d) bis f) zu wiederholen; bei Feststellung des Einflusses von Temperaturänderungen und Stützbewegungen allein fällt auch d) weg.

Fachwerke mit überzähligen Stabkräften allein. Wir betrachten hier im Gegensatz zu dem Bisherigen nur noch Fachwerke, deren sämtliche Reaktionen durch die Statik allein bestimmt und also auch unabhängig von den überzähligen Stabkräften sind (Fig. 268, 275, 276, 277).

Es seien s_1, s_2, \dots die anfänglichen Längen der notwendigen Stäbe, S_1, S_2, \dots ihre wirklichen Beanspruchungen (in dem vollständigen Fachwerk), ferner s_i, s_{ii}, \dots die anfänglichen Längen der überzähligen Stäbe, S_i, S_{ii}, \dots deren wirkliche Beanspruchungen. Die Beanspruchungen der notwendigen Stäbe, welche in dem gegebenen Belastungsfall eintreten würden, wenn keine überzähligen Stäbe vorhanden wären, bezeichnen wir wieder durch A_1, A_2, \dots . Zu diesen kommen nun Beanspruchungen infolge der Kräfte S_i, S_{ii}, \dots in den

überzähligen Stäben. Erhalten die Beanspruchungen q der Hauptstäbe s_1, s_2, \dots , welche Kräften $S_I = 1, S_{II} = 1, \dots$ allein entsprächen, den Index des betreffenden überzähligen Stabes neben demjenigen ihres Hauptstabes, so sind nach 6 die ganzen Beanspruchungen der Hauptstäbe:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= A_1 + S_I q_{I1} + S_{II} q_{II1} + \dots \\ S_2 &= A_2 + S_I q_{I2} + S_{II} q_{II2} + \dots \\ S_3 &= A_3 + S_I q_{I3} + S_{II} q_{II3} + \dots \end{aligned} \right\} 19$$

womit nach 2 bei Beachtung des zu dieser Gleichung Gesagten, sowie von 3, 8 und 11 = 0 zur Berechnung der überzähligen Stabkräfte S_I, S_{II}, \dots :

$$\left. \begin{aligned} S_I c_I + E a \tau_I s_I &= -E a \Sigma \tau s q_I - \Sigma c A q_I - S_I \Sigma c q_{I1} q_I - S_{II} \Sigma c q_{II1} q_I - \dots \\ S_{II} c_{II} + E a \tau_{II} s_{II} &= -E a \Sigma \tau s q_{II} - \Sigma c A q_{II} - S_I \Sigma c q_{I1} q_{II} - S_{II} \Sigma c q_{II1} q_{II} - \dots \\ S_{III} c_{III} + E a \tau_{III} s_{III} &= -E a \Sigma \tau s q_{III} - \Sigma c A q_{III} - S_I \Sigma c q_{I1} q_{III} - S_{II} \Sigma c q_{II1} q_{III} - \dots \end{aligned} \right\} 20$$

Die Summen Σ sind auf alle notwendigen Stabkräfte zu erstrecken. Man hat soviel Gleichungen der Form 19 als notwendige Stabkräfte und soviel Gleichungen der Form 20 als überzählige Stabkräfte¹.

Ist nur eine überzählige Stabkraft vorhanden, so folgt diese im allgemeinsten Falle aus 20:

$$S = - \frac{\Sigma c q A + E a \Sigma \tau s q + E a \tau s}{\Sigma c q^2 + c}, \quad 21$$

worin sich $E a \tau s$ und c ohne Σ auf den überzähligen Stab beziehen. Bei zwei überzähligen Stabkräften liefern die Gleichungen 20 mit den Bezeichnungen 12 und

$$\left. \begin{aligned} Y &= \Sigma c A q_I + E a \Sigma \tau s q_I + E a \tau_I s_I, \\ Z &= \Sigma c A q_{II} + E a \Sigma \tau s q_{II} + E a \tau_{II} s_{II} \end{aligned} \right\} 22$$

im allgemeinsten Falle:

$$\left. \begin{aligned} S_I &= \frac{Zc - Y(\sigma + e_{II})}{(a + e_I)(\sigma + e_{II}) - e^2}, \\ S_{II} &= \frac{Yc - Z(a + e_I)}{(a + e_I)(\sigma + e_{II}) - e^2}. \end{aligned} \right\} 23$$

Die Berechnung eines Fachwerks mit überzähligen Stabkräften für einen beliebigen Belastungsfall könnte nun beispielsweise wie folgt vor sich gehen: a) Auswahl der überzähligen Stabkräfte S_I, S_{II}, \dots , gewöhnlich mit Rücksicht auf möglichst bequeme Berechnung des nach Entfernung derselben verbleibenden statisch bestimmten stabilen Hauptsystems; b) unter Voraussetzung der Wirksamkeit des letzteren allein

Berechnung der Stabkräfte von	s_1	s_2	s_3	\dots
herrührend von äußeren Kräften $S_I = 1$	q_{I1}	q_{I2}	q_{I3}	\dots
„ „ „ „ $S_{II} = 1$	q_{II1}	q_{II2}	q_{II3}	\dots

wobei die Kräfte $S_I = 1, S_{II} = 1, \dots$ an den durch den betreffenden Stab verbundenen Knotenpunkten auf Annäherung der letzteren wirken; c) Bildung der von den c, q allein (nicht von den A, τ) abhängigen Summen Σ , wie 12, in den Ausdrücken für die überzähligen Stabkräfte; d) Berechnung der Stabkräfte A_1, A_2, \dots welche in den notwendigen Stäben s_1, s_2, \dots für den gegebenen Belastungsfall eintreten würden, wenn keine überzähligen Stabkräfte vorhanden wären; e) Berechnung der wirklichen Beanspruchungen der überzähligen Stäbe nach 20 oder den spezielleren Ausdrücken 21, 23; f) Berechnung der wirklichen Beanspruchungen der notwendigen Stäbe nach 19. — Kommen wie gewöhnlich verschiedene Belastungsfälle zur Behandlung, so sind nur die Berechnungen d) bis f) zu wiederholen; bei Feststellung des Einflusses von Temperaturänderungen fällt auch d) weg.

¹ Die Gleichungen 20 wurden zuerst von Mohr gegeben, der sie unter Einführung fingierter Stäbe auch auf Fachwerke mit überzähligen Reaktionen anwandte. Mohr, Beitrag zur Theorie des Fachwerkes, Zeitschr. des Architekten- und Ingenieurvereines zu Hannover 1874, S. 509, und 1875, S. 17.

Vereinfachungen durch Beziehungen für Stablängen. Es sei X eine überzählige Reaktionskomponente, welche in der Verbindungsgeraden $AB = l$ eines Knotenpunktes und eines bezüglich der Anfangslage des Fachwerkes festen Punktes wirkt. Dann hat man nach 1 mit 3 und 4 stets:

$$\sum \Delta s \cdot \rho = -\Delta l, \tag{24}$$

worin nach dem zu 2 Gesagten die Summe \sum nur die notwendigen Stäbe umfaßt (für die überzähligen sind die ρ gleich Null). Für den Fall nun, daß durch gleiche spezifische Längenänderungen aller notwendigen Stäbe (Längenänderungen pro Längeneinheit) auch $AB = l$ sich im gleichen Verhältnisse ändern müßte (wie z. B. im Falle Fig. 265, aber nicht im Falle Fig. 268), folgt durch Multiplikation mit dem betreffenden $\frac{s}{\Delta s} = \frac{l}{\Delta l}$ (s. die Fußnote S. 411):

$$\sum s \rho = -l, \tag{25}$$

womit manchmal Vereinfachungen ermöglicht werden, besonders bezüglich des Einflusses der Temperaturänderungen.

So hat man beispielsweise bei Bogenfachwerken mit zwei Gelenken, deren einzige statisch unbestimmte Größe der Horizontalschub H darstellt, bei gleichem Material aller Stäbe nach 11, 4 mit $X = H$, $e = -\Delta l$ im allgemeinsten Falle:

$$H = -\frac{\sum c \rho A + E \alpha \sum \tau s \rho + E \Delta l}{\sum c \rho^2}. \tag{26}$$

Da nun für gleiche spezifische Längenänderungen aller Stäbe auch die Spannweite l sich im gleichen Verhältnis ändern müßte (bei drei Gelenken wäre dies nicht der Fall), so gilt 25 und wir erhalten bei gleichen Temperaturänderungen τ aller Stäbe:

$$H = -\frac{\sum c \rho A - E \alpha \tau l + E \Delta l}{\sum c \rho^2}. \tag{27}$$

Wenn X eine überzählige Stabkraft bedeutet, so läßt sich aus 1 mit 3 und 5 eine ähnliche Beziehung wie 25 ableiten, die wir nur für den zweiten oben behandelten Spezialfall anschreiben wollen, daß alle Reaktionen statisch bestimmt sind. Alsdann ist die rechte Seite von 1 gleich Null und wir erhalten mit 3 bei Beachtung des zu 2 Gesagten allgemein:

$$\sum \Delta s \cdot \rho = -\Delta s, \tag{28}$$

worin die Summe links die notwendigen Stäbe umfaßt und Δs rechts dem durch $X = S$ beanspruchten überzähligen Stabe entspricht. Für den Fall nun, daß durch gleiche spezifische Längenänderungen aller notwendigen Stäbe auch dieser überzählige Stab seine Länge im gleichen Verhältnis ändern müßte, folgt aus 28 durch Multiplikation mit dem betreffenden $\frac{s}{\Delta s}$:

$$\sum s \rho = -s. \tag{29}$$

Beispiel 108. Zweigelenkbogenfachwerk. Ausdrücke für den Horizontalschub.

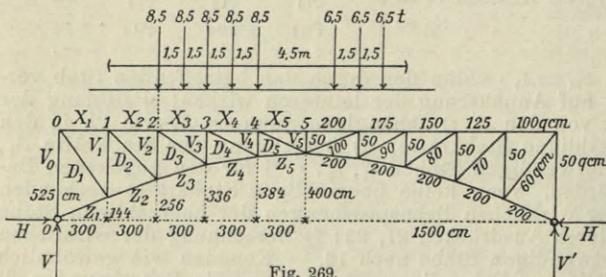


Fig. 269.

Für das in Fig. 269 angedeutete Bogenfachwerk mit zwei Gelenken von $l = 30$ m Spannweite, $f = 4$ m Pfeil des Untergurtes, $n = 10$ Feldern und $h_0 = 5,25$ m Länge der Endvertikalen sind die Stabquerschnitte auf der zweiten Hälfte in Quadratzentimetern eingeschrieben. Es sind die Ausdrücke

des Horizontalschubs H für beliebige Belastung, beliebige Temperaturänderungen τ der einzelnen Stäbe und eine Änderung Δl der Spannweite festzustellen. Bei den Ermittlungen betreffend die τ und Δl sollen Flußeisen entsprechend der Elastizitätsmodul $E = 2150000$ kg pro qcm, der Ausdehnungskoeffizient $\alpha = 0,0000115$, also $E\alpha = 24,725$ gesetzt werden.

Nach § 57, 25), 26) hat man mit $c = \frac{s}{F}$ durch beliebige Belastung:

$$H = - \frac{\sum c \rho A}{\sum c \rho^2} \quad 1$$

durch beliebige gleiche oder durch beliebige verschiedene Temperaturänderungen aller Stäbe:

$$H = \frac{E \alpha \tau l}{\sum c \rho^2} \quad \text{bzw.} \quad H = - E \alpha \frac{\sum s \rho \tau}{\sum c \rho^2}, \quad 2$$

und durch eine Änderung Δl der Spannweite:

$$H = - \frac{E \Delta l}{\sum c \rho^2}, \quad 3$$

worin die ρ Werte der Stabkräfte durch $H = 1$ allein und A ihre Werte durch die gegebene Belastung bei $H = 0$ bedeuten.

Formverhältnisse. Bei den Bezeichnungen der § 53, 54 erhalten wir:

für	$m =$	0	1	2	3	4	5
mit	$\delta_m =$	0	144	256	336	384	400 cm
	$h_m = h_0 - \delta_m =$	525	381	269	189	141	125 "
	$z_m = \sqrt{\lambda^2 + (\delta_m - \delta_{m-1})^2} =$		333	320	310	304	300 "
	$d_m = \sqrt{\lambda^2 + h_m^2} =$		485	403	355	331	325 "
	$\varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} =$		- 2,65	- 2,40	- 2,36	- 2,94	- 7,81
	$\nu = \frac{h_m}{h_{m+1} - h_m} =$		- 3,40	- 3,36	- 3,94	- 8,81	

Die Längen s aller Stäbe sind in Kolonne 2 der folgenden Tabelle 1 neben den wie ihre Beanspruchungen bezeichneten Stäben eingetragen.

Werte der ρ . Die durch einen Horizontalschub $H = 1$ allein entstehenden Stabkräfte ρ , welche wir zunächst zur Unterscheidung wie die ganzen Stabkräfte bezeichnen, hat man nach § 54, 3) mit $\frac{h_0}{\lambda} = \frac{5,25}{3} = 1,750$:

$$\left. \begin{aligned} X_m &= \frac{\delta_m}{h_m}, & Z_m &= - \frac{h_0 z_m}{\lambda h_{m-1}} = - 1,750 \frac{z_m}{h_{m-1}}, \\ D_m &= \frac{h_0 d_m}{\lambda \varepsilon h_{m-1}} = 1,750 \frac{d_m}{\varepsilon h_{m-1}}, & V_m &= - \frac{h_0}{\lambda \nu} = - \frac{1,750}{\nu}, \end{aligned} \right\} \quad 4$$

jedoch ausnahmsweise für die Kämpfervertikale und Scheitelvertikale nach § 54, 9):

$$V_0 = \frac{\delta_1}{\lambda} = \frac{144}{300} = 0,480, \quad V_5 = 0. \quad 5$$

Es ergeben sich mit den angeführten $\delta_m, h_m, z_m, d_m, \varepsilon, \nu$ für die Gurtungen:

$X_1 = \frac{144}{381} = 0,378$	$Z_1 = - 1,75 \frac{333}{525} = - 1,110$
$X_2 = \frac{256}{269} = 0,952$	$Z_2 = - 1,75 \frac{320}{381} = - 1,470$
$X_3 = \frac{336}{189} = 1,778$	$Z_3 = - 1,75 \frac{310}{269} = - 2,017$
$X_4 = \frac{384}{141} = 2,723$	$Z_4 = - 1,75 \frac{304}{189} = - 2,815$
$X_5 = \frac{400}{125} = 3,200$	$Z_5 = - 1,75 \frac{300}{141} = - 3,723,$

und für die Füllungsglieder:

$$\begin{aligned} D_1 &= - \frac{1,75 \cdot 485}{2,65 \cdot 525} = - 0,610 & V_1 &= \frac{1,75}{3,40} = 0,515 \\ D_2 &= - \frac{1,75 \cdot 403}{2,40 \cdot 381} = - 0,771 & V_2 &= \frac{1,75}{3,36} = 0,521 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_3 &= -\frac{1,75 \cdot 355}{2,36 \cdot 269} = -0,978 & V_3 &= \frac{1,75}{3,94} = 0,444 \\
 D_4 &= -\frac{1,75 \cdot 331}{2,94 \cdot 189} = -1,042 & V_4 &= \frac{1,75}{8,81} = 0,199 \\
 D_5 &= -\frac{1,75 \cdot 325}{7,81 \cdot 141} = -0,516
 \end{aligned}$$

Alle diese ϱ sind in Kolumne 5 der folgenden Tabelle eingetragen.

Zweigelenkbogenfachwerk Fig. 269. Tabelle I. Horizontalschub.

1	2	3	4	5	6	7	8
Stab, Stabkraft	Länge s in cm	Querschnitt F in qcm	$c = \frac{s}{F}$	ϱ	$c\varrho$	$c\varrho^2$	$s\varrho$
X_1	300	100	3,000	0,378	1,134	0,429	113,4
X_2	300	125	2,400	0,952	2,285	2,175	285,6
X_3	300	150	2,000	1,778	3,556	6,323	533,4
X_4	300	175	1,714	2,723	4,667	12,708	816,9
X_5	300	200	1,500	3,200	4,800	15,360	960,0
Z_1	333	200	1,665	-1,110	-1,848	2,051	-369,6
Z_2	320	200	1,600	-1,470	-2,352	3,457	-470,4
Z_3	310	200	1,550	-2,017	-3,126	6,305	-625,3
Z_4	304	200	1,520	-2,815	-4,279	12,045	-855,8
Z_5	300	200	1,500	-3,723	-5,584	20,789	-1116,9
D_1	485	60	8,083	-0,610	-4,931	3,008	-295,8
D_2	403	70	5,757	-0,771	-4,439	3,422	-310,7
D_3	355	80	4,437	-0,978	-4,339	4,244	-347,2
D_4	331	90	3,678	-1,042	-3,832	3,993	-344,9
D_5	325	100	3,250	-0,516	-1,677	0,865	-167,7
V_0	525	50	10,500	0,480	5,040	2,419	252,0
V_1	381	50	7,620	0,515	3,924	2,021	196,2
V_2	269	50	5,380	0,521	2,803	1,460	140,1
V_3	189	50	3,980	0,444	1,767	0,785	83,9
V_4	141	50	2,820	0,199	0,561	0,112	28,1
V_5	125	50	2,500	0,000	0,000	0,000	0,0

Für den halben Bogen	103,971
Für den halben Bogen ohne die Füllungsglieder	81,642

Horizontalschub. Aus den in vorstehender Tabelle angeführten Stab-
längen s und Stabquerschnitten F ergeben sich zunächst die in Kolumne 4 der
Tabelle eingetragenen Werte $c = s : F$. Durch Multiplikation der c mit den
daneben stehenden, oben berechneten ϱ folgen die in Kolumne 6 und 7 ent-
haltenen $c\varrho$ und $c\varrho^2$. Die angedeutete Summierung der letzteren für den halben
Bogen liefert für den ganzen Bogen $\Sigma c\varrho^2 = 103,97 \cdot 2$. Wir erhalten damit
nach 1—3 durch beliebige Belastung:

$$H = -\frac{\Sigma c\varrho A}{103,97 \cdot 2} \tag{6}$$

durch gleiche oder verschiedene Temperaturänderungen τ aller Stäbe:

$$H = \frac{E\alpha\tau l}{103,97 \cdot 2} \quad \text{bzw.} \quad H = -E\alpha \frac{\Sigma s\varrho\tau}{103,97 \cdot 2} \tag{7}$$

und durch eine Änderung Δl der Spannweite:

$$H = -\frac{E\Delta l}{103,97 \cdot 2} \tag{8}$$

Speziell für Flußeisen vom Elastizitätsmodul $E = 2150000$ kg pro qcm und
Ausdehnungskoeffizienten $\alpha = 0,0000115$ folgen aus 7, 8 mit $E\alpha = 24,725$ und
 $E\alpha l = 24,725 \cdot 3000 = 74175$:

$$H = 356,71 \text{ } \tau \text{ kg} \quad \text{bzw.} \quad H = -0,11890 \Sigma s \varrho \text{ } \tau \text{ kg}, \quad 9$$

$$H = -10\,340 \Delta l \text{ } \tau \text{ kg}, \quad 10$$

worin Δl in Zentimetern einzusetzen ist.

Bemerkungen. Die Achse des Untergurts ist einem Parabelbogen mit vertikaler Achse eingeschrieben, was aber für obige Berechnung ohne Einfluß war. Es kam in Betracht bei Feststellung der Knotenpunktsordinaten des Untergurts. Für diese hat man nach § 19, 8) mit $l = 10 \lambda$, $f = 400$ cm bei $x = m \lambda$:

$$\delta_m = \frac{4f}{l^2} x (l-x) = \frac{4 \cdot 400}{10^2} m (10-m) = 16 m (10-m) \text{ cm},$$

woraus sich die angeführten δ_m ergaben.

Bei Vernachlässigung des Einflusses der Füllungsglieder in 1–3 wäre in 6–8 81,64 an Stelle von 103,97 getreten, womit sich beispielsweise die Werte von H durch gleiche Temperaturänderungen τ aller Stäbe und durch eine Änderung Δl der Spannweite $\frac{103,97}{81,64} = 1,2735$ mal so groß wie oben, das heißt um 27,35%₀ zu groß ergeben hätten. Hierbei kommt in Betracht, daß bei Ableitung der ersten Gleichung 2 aus der zweiten durch die Gleichsetzung $\Sigma s \varrho = -l$ (S. 412) der Beitrag der Füllungsglieder im Zähler berücksichtigt ist. Hätten wir jedoch die zweite Gleichung 2, 7 mit Vernachlässigung der Füllungsglieder auch im Zähler verwendet, so würde sich mit Rücksicht auf die $s \varrho$ in Tabelle I durch die Temperaturänderungen ergeben haben:

$$H = -24,725 \frac{2709,3 - 3438,0}{81,64} = 220,69 \text{ } \tau,$$

also nur $\frac{220,69}{356,71} = 0,6187$ mal so groß als der rechnermäßige genaue Wert, um 38,13%₀ zu klein.

Beispiel 109. Zweigelenkbogenfachwerk. Gleichmäßig verteilte Last (Eigengewicht).

Für das in Beispiel 108 behandelte Bogenfachwerk Fig. 269 die Stützenreaktionen und Stabkräfte durch das gleichmäßig verteilt gedachte Eigengewicht von $g = 1250$ kg pro m Spannweite zu berechnen, wovon $g_x = 600$ kg auf die Knotenpunkte des Obergurts und $g_z = 650$ kg auf diejenigen des Untergurts kommen.

Stützenreaktionen. Die Vertikalreaktionen der Stützen sind wie bei vollwandigen Bogen:

$$V = \frac{g l}{2} = 625 \cdot 30 = 18\,750 \text{ kg}. \quad 1$$

Der Horizontalschub durch beliebige Belastung ist nach Gleichung 6 des vorigen Beispiels:

$$H = -\frac{\Sigma c \varrho A}{103,97 \cdot 2}, \quad 2$$

worin die Summe Σ sich auf alle Stäbe bezieht und die A die Werte der Stabkräfte für die gegebene Belastung bei $H = 0$ bedeuten. Bezeichnen wir diese hier zur Unterscheidung wie die ganzen Stabkräfte, so gelten für sie nach § 54, 4):

$$\left. \begin{aligned} X_m &= -m(n-m) \frac{g \lambda^2}{2 h_m}, \\ Z_m &= (m-1)(n-m+1) \frac{z_m}{h_{m-1}} \frac{g \lambda}{2}, \\ D_m &= -\left[m(n-m) - \varepsilon(n-2m+1) \right] \frac{d_m}{\varepsilon h_{m-1}} \frac{g \lambda}{2}, \\ V_m &= \left[m(n-m) - v \left(n-2m + \frac{g_x - g_z}{g} \right) \right] \frac{g \lambda}{2 v}, \end{aligned} \right\} 3$$

jedoch ausnahmsweise für die Kämpfervertikalen und Scheitelvertikale nach § 54, 9):

$$V_0 = \frac{g_z \lambda}{2} - V, \quad V_\sigma = -g_x \lambda. \quad 4$$

Mit der Felderzahl $n = 10$, der Feldlänge $\lambda = 3$ m und den gegebenen

Belastungen $g = 1250$ kg, $g_x = 600$ kg, $g_z = 650$ kg nehmen die Gleichungen 3 folgende Formen an:

$$X_m = -m(10-m) \frac{5625}{h_m},$$

$$Z_m = (m-1)(11-m) \frac{1875 \varepsilon_m}{h_{m-1}},$$

$$D_m = -\left[m(10-m) - \varepsilon(11-2m) \right] \frac{1875 d_m}{\varepsilon h_{m-1}},$$

$$V_m = \left[m(10-m) - \nu(9,96-2m) \right] \frac{1875}{\nu}.$$

Wir erhalten mit den in Beispiel 108 gegebenen $h_m, d_m, \varepsilon, \nu$ für die Gurtungen:

$$\begin{array}{ll} X_1 = -\frac{1 \cdot 9}{3,81} 5625 = -13287 \text{ kg} & Z_1 = 0 \\ X_2 = -\frac{2 \cdot 8}{2,69} 5625 = -33457 \text{ „} & Z_2 = 1 \cdot 9 \cdot 1875 \frac{3,20}{3,81} = 14173 \text{ kg} \\ X_3 = -\frac{3 \cdot 7}{1,89} 5625 = -62500 \text{ „} & Z_3 = 2 \cdot 8 \cdot 1875 \frac{3,10}{2,69} = 34572 \text{ „} \\ X_4 = -\frac{4 \cdot 6}{1,41} 5625 = -95745 \text{ „} & Z_4 = 3 \cdot 7 \cdot 1875 \frac{3,04}{1,89} = 63333 \text{ „} \\ X_5 = -\frac{5 \cdot 5}{1,25} 5625 = -112500 \text{ „} & Z_5 = 4 \cdot 6 \cdot 1875 \frac{3,00}{1,41} = 98936 \text{ „} \end{array}$$

und für die Füllungsglieder:

$$\begin{array}{l} D_1 = (1 \cdot 9 + 2,65 \cdot 9) \frac{1875 \cdot 4,85}{2,65 \cdot 5,25} = 21472 \text{ kg} \\ D_2 = (2 \cdot 8 + 2,40 \cdot 7) \frac{1875 \cdot 4,03}{2,40 \cdot 3,81} = 27105 \text{ „} \\ D_3 = (3 \cdot 7 + 2,36 \cdot 5) \frac{1875 \cdot 3,55}{2,36 \cdot 2,69} = 34391 \text{ „} \\ D_4 = (4 \cdot 6 + 2,94 \cdot 3) \frac{1875 \cdot 3,31}{2,94 \cdot 1,89} = 36657 \text{ „} \\ D_5 = (5 \cdot 5 + 7,81 \cdot 1) \frac{1875 \cdot 3,25}{7,81 \cdot 1,41} = 18156 \text{ „} \\ V_0 = 325 \cdot 3 - 18750 = -17775 \text{ kg} \\ V_1 = -(1 \cdot 9 + 3,40 \cdot 7,96) \frac{1875}{3,40} = -19888 \text{ „} \\ V_2 = -(2 \cdot 8 + 3,36 \cdot 5,96) \frac{1875}{3,36} = -20104 \text{ „} \\ V_3 = -(3 \cdot 7 + 3,94 \cdot 3,96) \frac{1875}{3,94} = -17419 \text{ „} \\ V_4 = -(4 \cdot 6 + 8,81 \cdot 1,96) \frac{1875}{8,81} = -8783 \text{ „} \\ V_5 = -600 \cdot 3 = -1800 \text{ „} \end{array}$$

Alle diese A sind in Kolumne 2 der unten folgenden Tabelle II eingetragen.

Durch Multiplikation der A mit den in Tabelle I (S. 414) gegebenen $c\varrho$ folgen die in Kolumne 3 der Tabelle II angeführten $c\varrho A$, deren Summe für den halben Bogen beigefügt ist. Damit liefert der obige Ausdruck 2 den Horizontal-schub durch das Eigengewicht:

$$H = \frac{3071499 \cdot 2}{103,97 \cdot 2} = 29542 \text{ kg,}$$

während die resultierenden Stützenreaktionen durch dasselbe werden:

$$R = \sqrt{18750^2 + 29542^2} = 34990 \text{ kg.}$$

Stabkräfte. Für alle Stabkräfte hat man nach § 53, 26) oder § 57, 9):

$$S = A + H\varrho = A + 29542 \varrho \text{ kg.}$$

5

Tabelle II zeigt die Berechnung derselben, wozu die A aus Kolumne 2, die ϱ aus der Tabelle I (S. 414) entnommen sind.

Zweigelenkbogenfachwerk Fig. 269. Tabelle II. Eigengewicht.

Stabkräfte (vergl. Fig. 269)	Werte für $H = 0$		Wirkliche Stabkräfte	
	A	kg	$c \varrho A$	$S = A + H \varrho$ kg
X_1	— 13287	— 15067	— 13287 + 29542 · 0,378 =	— 2120
X_2	— 33457	— 76449	— 33457 + „ 0,952 =	— 5333
X_3	— 62500	— 222250	— 62500 + „ 1,778 =	— 9974
X_4	— 95745	— 446842	— 95745 + „ 2,723 =	— 15302
X_5	— 112500	— 540000	— 112500 + „ 3,200 =	— 17966
Z_1	0	— 0	0 — 29542 · 1,110 =	— 32792
Z_2	14173	— 33335	14173 — „ 1,470 =	— 29254
Z_3	34572	— 108072	34572 — „ 2,017 =	— 25014
Z_4	63333	— 271002	63333 — „ 2,815 =	— 19828
Z_5	98936	— 552459	98936 — „ 3,723 =	— 11049
D_1	21472	— 105878	21472 — 29542 · 0,610 =	3451
D_2	27105	— 120319	27105 — „ 0,771 =	4328
D_3	34391	— 149223	34391 — „ 0,978 =	5499
D_4	36657	— 140470	36657 — „ 1,042 =	5874
D_5	18156	— 30448	18156 — „ 0,516 =	2912
V_0	— 17775	— 89586	— 17775 + 29542 · 0,480 =	— 3595
V_1	— 19888	— 78041	— 19888 + „ 0,515 =	— 4674
V_2	— 20104	— 56352	— 20104 + „ 0,521 =	— 4713
V_3	— 17419	— 30779	— 17419 + „ 0,444 =	— 4302
V_4	— 8783	— 4927	— 8783 + „ 0,199 =	— 2904
V_5	— 1800	— 0	— 1800 + „ 0,000 =	— 1800

Für den halben Bogen — 3071499
 Für diesen ohne die Beiträge der Füllungslieder . . — 2265476

Bemerkungen. Hätten wir, wie häufig geschieht, den Einfluß der Füllungslieder auf den Horizontalschub vernachlässigt, so würde sich ergeben haben:

$$H = \frac{2265476}{81,64} = 27750 \text{ kg,}$$

das ist 6,07% kleiner als der oben erhaltene genauere Wert. Bezüglich der üblichen Einführung eines konstanten Verhältnisses β der Querschnitte des Untergurts und Obergurts für vorläufige Berechnungen, um H ohne Kenntnis der einzelnen Querschnitte ermitteln zu können, siehe § 58 und Beispiel 119.

Wir haben oben zur Wahrung der Allgemeinheit des Beispiels keinen Gebrauch davon gemacht, daß der Untergurt einem Parabelbogen eingeschrieben ist (vergl. Bemerkungen zum vorigen Beispiel). Es würde sich indessen bei Berücksichtigung dieses Umstandes eine kleine Vereinfachung der Berechnung nur für die Diagonalen ergeben haben. Mit dem nach Gleichung 3 der Aufgabe 34 alsdann gültigen Ausdruck von ε folgt nämlich aus 3:

$$D_m = \frac{g n l}{8 f} \cdot \frac{d_m}{\varepsilon h_{m-1}} \quad 6$$

Beispiel 110. Zweigelenkbogenfachwerk. Horizontalschub durch beliebige Belastung der Fahrbahn. Einflußlinie des Horizontalschubs.

Für das in Beispiel 108 behandelte Bogenfachwerk Fig. 269 sind behufs Berechnung des Horizontalschubs und der Stabkräfte durch beliebige Belastung festzustellen: a) Die Stabkräfte A für $H = 0$ durch beliebige Belastung; b) die Stabkräfte A für $H = 0$ durch je zwei gleiche symmetrisch zur Bogenmitte gelegene Lasten; c) der Horizontalschub H durch einzelne Knotenpunktlasten und beliebige Belastung der Fahrbahn nebst der Einflußlinie von H .

Nach Beispiel 108 haben wir durch beliebige Belastung:

$$H = - \frac{\Sigma c \varrho A}{207,94}, \quad 1$$

worin die Summe Σ alle Stäbe umfaßt, die c , ϱ , $c \varrho$ in Beispiel 108 berechnet und in Tabelle I (S. 414) eingetragen sind, die A aber die Werte der Stabkräfte für die in Frage stehende Belastung bei $H=0$ bedeuten. Die ganzen Stabkräfte für jene Belastung folgen dann:

$$s = A + H \varrho. \quad 2$$

a) Stabkräfte A (bei $H=0$) durch beliebige Belastung der Fahrbahn. Wir bezeichnen die A hier zur Unterscheidung wie die ganzen Stabkräfte und haben dann nach § 54, 5)–8):

$$X_m = - \left[(n-m) \sum_0^m P a + m \sum_m^n P (l-a) \right] \frac{1}{n h_m}, \quad 3$$

$$Z_m = \left[(n-m+1) \sum_0^{m-1} P a + (m-1) \sum_{m-1}^n P (l-a) \right] \frac{z_m}{l h_{m-1}} = - \frac{z_m}{\lambda} X_{m-1}, \quad 4$$

$$D_m = - \left[(n-m+\varepsilon) \sum_0^{m-1} P a + \sum_{m-1}^m P \left((m-1) \varepsilon l + (n-m-n\varepsilon+\varepsilon) a \right) + (m-\varepsilon) \sum_m^n P (l-a) \right] \frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}}, \quad 5$$

$$V_m = \left[(n-m+\nu) \sum_0^{m-1} P a + \sum_{m-1}^m P \left((m-1) \nu l + (n-m-n\nu+\nu) a \right) + (m-\nu) \sum_m^n P (l-a) \right] \frac{1}{\nu l}, \quad 6$$

jedoch ausnahmsweise für die Kämpfervertikale 0 und Scheitelvertikale σ :

$$V_0 = -V, \quad V_\sigma = -K_0, \quad 7$$

unter K_0 die Belastung des mittleren Knotenpunktes im Obergurt verstanden. Die Grenzen der Summen Σ bedeuten Vertikale Nummern (Fig. 269). Eine Last P , welche gerade an der Grenze zweier Σ liegt, kann in der einen oder andern derselben aufgenommen werden (S. 373).

Handelte es sich nun nur um einen Belastungsfall, so würde man vorstehende Gleichungen am einfachsten unmittelbar auf diesen anwenden (vergl. Beispiel 105). Da jedoch verschiedene Belastungen in Betracht kommen sollen, so empfiehlt es sich, die Ausdrücke für die einzelnen Stabkräfte zunächst soweit zu spezialisieren, als dies für beliebige Belastung möglich ist. Mit $l=30$ m, $n=10$ und den in Beispiel 108 gegebenen h_m , z_m , d_m , ε , ν erhalten wir, wenn a , $l-a$ in Metern eingesetzt werden sollen, für die Obergurtstäbe:

$$X_1 = - \left[9 \sum_0^1 P a + 1 \sum_1^{10} P (l-a) \right] \frac{1}{38,10}$$

$$X_2 = - \left[8 \sum_0^2 P a + 2 \sum_2^{10} P (l-a) \right] \frac{1}{26,90}$$

$$X_3 = - \left[7 \sum_0^3 P a + 3 \sum_3^{10} P (l-a) \right] \frac{1}{18,90}$$

$$X_4 = - \left[6 \sum_0^4 P a + 4 \sum_4^{10} P (l-a) \right] \frac{1}{14,10}$$

$$X_5 = - \left[5 \sum_0^5 P a + 5 \sum_5^{10} P (l-a) \right] \frac{1}{12,50},$$

für die Untergurtstäbe:

$$Z_1 = 0, \quad Z_2 = \left[9 \sum_0^1 P a + 1 \sum_1^{10} P (l-a) \right] \frac{1}{35,72} = -1,067 X_1$$

$$Z_3 = \left[8 \sum_0^2 P a + 2 \sum_2^{10} P (l-a) \right] \frac{1}{26,03} = -1,033 X_2$$

$$Z_4 = \left[7 \sum_0^3 P a + 3 \sum_3^{10} P (l - a) \right] \frac{1}{18,65} = -1,013 X_3$$

$$Z_5 = \left[6 \sum_0^4 P a + 4 \sum_4^{10} P (l - a) \right] \frac{1}{14,10} = -1,000 X_4,$$

für die Diagonalen:

$$D_1 = \left[32,85 \sum_0^1 P a + 3,65 \sum_1^{10} P (l - a) \right] \frac{1}{86,06}$$

$$D_2 = \left[5,60 \sum_0^1 P a + \sum_1^2 P (29,60 a - 72,00) + 4,40 \sum_2^{10} P (l - a) \right] \frac{1}{68,07}$$

$$D_3 = \left[4,64 \sum_0^2 P a + \sum_2^3 P (28,24 a - 141,60) + 5,36 \sum_3^{10} P (l - a) \right] \frac{1}{53,65}$$

$$D_4 = \left[3,06 \sum_0^3 P a + \sum_3^4 P (32,46 a - 264,60) + 6,94 \sum_4^{10} P (l - a) \right] \frac{1}{50,63}$$

$$D_5 = \left[-2,81 \sum_0^4 P a + \sum_4^5 P (75,29 a - 937,20) + 12,81 \sum_5^{10} P (l - a) \right] \frac{1}{101,35}$$

und für die Vertikalen:

$$V_0 = -V = -\frac{1}{30} \sum_0^{10} P (l - a)$$

$$V_1 = - \left[39,60 \sum_0^1 P a + 4,40 \sum_1^{10} P (l - a) \right] \frac{1}{102,00}$$

$$V_2 = - \left[4,64 \sum_0^1 P a + \sum_1^2 P (38,24 a - 100,80) + 5,36 \sum_2^{10} P (l - a) \right] \frac{1}{100,80}$$

$$V_3 = - \left[3,06 \sum_0^2 P a + \sum_2^3 P (42,46 a - 236,40) + 6,94 \sum_3^{10} P (l - a) \right] \frac{1}{118,20}$$

$$V_4 = - \left[-2,81 \sum_0^3 P a + \sum_3^4 P (85,29 a - 792,90) + 12,81 \sum_4^{10} P (l - a) \right] \frac{1}{264,30}$$

$$V_5 = -K_0 = -\frac{1}{3} \sum_4^5 P (a - 12) - \frac{1}{3} \sum_5^6 P (18 - a).$$

Damit können nun Einzellasten (z. B. in den Knotenpunkten) wie beliebige Belastungen der Fahrbahn berücksichtigt werden. Bezüglich des Eigengewichts siehe Beispiel 109.

b) Stabkräfte A (bei $H=0$) durch je zwei Knotenpunktlasten. Zwei gleiche, zur Bogenmitte symmetrisch gelegene Lasten tragen gleichviel zum Horizontalschub H bei und erzeugen symmetrisch zur Mitte gleiche Stabkräfte A . Wir können daher die H für beliebige einzelne Knotenpunktlasten P erhalten, wenn wir je zwei solche Lasten behandeln, wobei die A nur für die erste Bogenhälfte zu berechnen und in 1 zu verwenden sind.

$P = 1$ bei $a = 0$ und 30 m. Nach den Ausdrücken unter a) hat man:

$$V_0 = -1,$$

während sich alle übrigen Stabkräfte gleich Null ergeben.

$P = 1$ bei $a = 3$ und 27 m. Die Ausdrücke unter a) liefern:

$$X_1 = -\frac{10 \cdot 3}{38,10} = -0,787$$

$$Z_1 = 0$$

$$X_2 = -\frac{10 \cdot 3}{26,90} = -1,115$$

$$Z_2 = \frac{10 \cdot 3}{35,72} = 0,840$$

$$X_3 = -\frac{10 \cdot 3}{18,90} = -1,587$$

$$Z_3 = \frac{10 \cdot 3}{26,03} = 1,153$$

$$X_4 = -\frac{10 \cdot 3}{14,10} = -2,128$$

$$Z_4 = \frac{10 \cdot 3}{18,65} = 1,609$$

$$X_5 = -\frac{10 \cdot 3}{12,50} = -2,400,$$

$$Z_5 = \frac{10 \cdot 3}{14,10} = 2,128,$$

$$\begin{array}{rcl}
 D_1 = \frac{36,5 \cdot 3}{86,06} = 1,272 & V_0 = & -1 \\
 D_2 = \frac{10 \cdot 3}{68,07} = 0,441 & V_1 = -\frac{44,0 \cdot 3}{102,00} = -1,294 \\
 D_3 = \frac{10 \cdot 3}{53,65} = 0,559 & V_2 = -\frac{10 \cdot 3}{100,80} = -0,298 \\
 D_4 = \frac{10 \cdot 3}{50,63} = 0,593 & V_3 = -\frac{10 \cdot 3}{118,20} = -0,254 \\
 D_5 = \frac{10 \cdot 3}{101,65} = 0,295, & V_4 = -\frac{10 \cdot 3}{264,30} = -0,113 \\
 & V_5 = & 0
 \end{array}$$

$P = 1$ bei $a = 6$ und 24 m. Die Ausdrücke unter a) ergeben:

$$\begin{array}{rcl}
 X_1 = -\frac{10 \cdot 3}{38,10} = -0,787 & Z_1 = & 0 \\
 X_2 = -\frac{10 \cdot 6}{26,90} = -2,230 & Z_2 = \frac{10 \cdot 3}{35,72} = 0,840 \\
 X_3 = -\frac{10 \cdot 6}{18,90} = -3,175 & Z_3 = \frac{10 \cdot 6}{26,03} = 2,305 \\
 X_4 = -\frac{10 \cdot 6}{14,10} = -4,255 & Z_4 = \frac{10 \cdot 6}{18,65} = 3,217 \\
 X_5 = -\frac{10 \cdot 6}{12,50} = -4,800, & Z_5 = \frac{10 \cdot 6}{14,10} = 4,255, \\
 \\
 D_1 = \frac{36,5 \cdot 3}{86,06} = 1,272 & V_0 = & -1 \\
 D_2 = \frac{44,0 \cdot 3}{68,07} = 1,939 & V_1 = -\frac{44,0 \cdot 3}{102,00} = -1,294 \\
 D_3 = \frac{10 \cdot 6}{53,65} = 1,118 & V_2 = -\frac{53,6 \cdot 3}{100,80} = -1,595 \\
 D_4 = \frac{10 \cdot 6}{50,63} = 1,185 & V_3 = -\frac{10 \cdot 6}{118,20} = -0,508 \\
 D_5 = \frac{10 \cdot 6}{101,65} = 0,590 & V_4 = -\frac{10 \cdot 6}{264,30} = -0,227 \\
 & V_5 = & 0
 \end{array}$$

$P = 1$ bei $a = 9$ und 21 m. Nach den Ausdrücken unter a) erhält man:

$$\begin{array}{rcl}
 X_1 = -\frac{10 \cdot 3}{38,10} = -0,787 & Z_1 = & 0 \\
 X_2 = -\frac{10 \cdot 6}{26,90} = -2,230 & Z_2 = \frac{10 \cdot 3}{35,72} = 0,840 \\
 X_3 = -\frac{10 \cdot 9}{18,90} = -4,762 & Z_3 = \frac{10 \cdot 6}{26,03} = 2,305 \\
 X_4 = -\frac{10 \cdot 9}{14,10} = -6,383 & Z_4 = \frac{10 \cdot 9}{18,65} = 4,826 \\
 X_5 = -\frac{10 \cdot 9}{12,50} = -7,200, & Z_5 = \frac{10 \cdot 9}{14,10} = 6,383, \\
 \\
 D_1 = \frac{36,5 \cdot 3}{86,06} = 1,272 & V_0 = & -1 \\
 D_2 = \frac{44,0 \cdot 3}{68,07} = 1,939 & V_1 = -\frac{44,0 \cdot 3}{102,00} = -1,294 \\
 D_3 = \frac{53,6 \cdot 3}{53,65} = 2,997 & V_2 = -\frac{53,6 \cdot 3}{100,80} = -1,595 \\
 D_4 = \frac{10 \cdot 9}{50,63} = 1,778 & V_3 = -\frac{69,4 \cdot 3}{118,20} = -1,761 \\
 D_5 = \frac{10 \cdot 9}{101,65} = 0,885, & V_4 = -\frac{10 \cdot 9}{264,30} = -0,341 \\
 & V_5 = & 0
 \end{array}$$

$P = 1$ bei $a = 12$ und 18 m. Nach den Ausdrücken unter a) ergeben sich:

$$\begin{array}{ll}
 X_1 = -\frac{10 \cdot 3}{38,10} = -0,787 & Z_1 = 0 \\
 X_2 = -\frac{10 \cdot 6}{26,90} = -2,230 & Z_2 = \frac{10 \cdot 3}{35,72} = 0,840 \\
 X_3 = -\frac{10 \cdot 9}{18,90} = -4,762 & Z_3 = \frac{10 \cdot 6}{26,03} = 2,305 \\
 X_4 = -\frac{10 \cdot 12}{14,10} = -8,511 & Z_4 = \frac{10 \cdot 9}{18,65} = 4,826 \\
 X_5 = -\frac{10 \cdot 12}{12,50} = -9,600, & Z_5 = \frac{10 \cdot 12}{14,10} = 8,511, \\
 \\
 D_1 = \frac{36,5 \cdot 3}{86,06} = 1,272 & V_0 = -1 \\
 D_2 = \frac{44,0 \cdot 3}{68,07} = 1,939 & V_1 = -\frac{44,0 \cdot 3}{102,00} = -1,294 \\
 D_3 = \frac{53,6 \cdot 3}{53,65} = 2,997 & V_2 = -\frac{53,6 \cdot 3}{100,80} = -1,595 \\
 D_4 = \frac{69,4 \cdot 3}{50,63} = 4,112 & V_3 = -\frac{69,4 \cdot 3}{118,20} = -1,761 \\
 D_5 = \frac{10 \cdot 12}{101,65} = 1,181, & V_4 = -\frac{128,1 \cdot 3}{206,30} = -1,454 \\
 & V_5 = 0
 \end{array}$$

$P = 2$ bei $a = 15$ m. Nach den Ausdrücken unter a) erhalten wir:

$$\begin{array}{ll}
 X_1 = -\frac{1 \cdot 30}{38,10} = -0,787 & Z_1 = 0 \\
 X_2 = -\frac{2 \cdot 30}{26,90} = -2,230 & Z_2 = \frac{1 \cdot 30}{35,72} = 0,840 \\
 X_3 = -\frac{3 \cdot 30}{18,90} = -4,762 & Z_3 = \frac{2 \cdot 30}{26,03} = 2,305 \\
 X_4 = -\frac{4 \cdot 30}{14,10} = -8,511 & Z_4 = \frac{3 \cdot 30}{18,65} = 4,826 \\
 X_5 = -\frac{5 \cdot 30}{12,50} = -12,00, & Z_5 = \frac{4 \cdot 30}{14,10} = 8,511, \\
 \\
 D_1 = \frac{3,65 \cdot 30}{86,06} = 1,272 & V_0 = -1 \\
 D_2 = \frac{4,40 \cdot 30}{68,07} = 1,939 & V_1 = -\frac{4,40 \cdot 30}{102,00} = -1,294 \\
 D_3 = \frac{5,36 \cdot 30}{53,65} = 2,997 & V_2 = -\frac{5,36 \cdot 30}{100,80} = -1,595 \\
 D_4 = \frac{6,94 \cdot 30}{50,63} = 4,112 & V_3 = -\frac{6,94 \cdot 30}{118,20} = -1,761 \\
 D_5 = \frac{12,81 \cdot 30}{101,65} = 3,781, & V_4 = -\frac{12,81 \cdot 30}{264,30} = -1,454 \\
 & V_5 = -2
 \end{array}$$

c) Horizontalschub H . Einflußlinie desselben. Die berechneten A durch je zwei Knotenpunktlasten 1 sind in Tabelle III mit den aus Tabelle I (S. 414) entnommenen $e\varrho$ zusammengestellt. Durch Multiplikation der beiden Werte folgen die neben den A eingetragenen Produkte $e\varrho A$, deren Summen für den halben Bogen ebenfalls angeführt sind. Mit Rücksicht auf diese Summen erhalten wir aus 1:

Für $P = 1$ bei $a = 0$ oder 30 m

$$H = \frac{5,040}{207,94} = 0,0242$$

„ $P = 1$ „ $a = 3$ „ 27 „

$$H = \frac{80,324}{207,94} = 0,3863$$

Für $P = 1$ bei $a = 6$ oder 24 m	$H = \frac{147,757}{207,94} = 0,7106$
„ $P = 1$ „ $a = 9$ „ 21 „	$H = \frac{206,817}{207,94} = 0,9946$
„ $P = 1$ „ $a = 12$ „ 18 „	$H = \frac{250,217}{207,94} = 1,2033$
„ $P = 1$ „ $a = 15$ m	$H = \frac{269,097}{207,94} = 1,2941$

Durch Auftragen dieser H als Ordinaten b bei den zugehörigen a erhält man die Einflußlinie des Horizontalschubs H (§ 12), sie ist in Fig. 270 (S. 424) verzeichnet. Die bereits bekannten Einflußlinien der Vertikalreaktionen V , V' der Kämpfer (S. 45) sind beigelegt.

Durch beliebige Belastung der Fahrbahn ergibt sich nun, wenn $P_0, P_1, P_2 \dots P_{10}$ die entsprechenden Knotenpunktlasten bei den Vertikalen $0, 1, \dots 10$ bedeuten:

$$H = 0,0242 (P_0 + P_{10}) + 0,3863 (P_1 + P_9) + 0,7106 (P_2 + P_8) + 0,9946 (P_3 + P_7) + 1,2033 (P_4 + P_6) + 1,2941 P_5, \quad 8$$

während mit Hilfe der Einflußlinie oder durch Interpolation bekanntlich auch

$$H = \Sigma P b \quad 9$$

ohne Bestimmung der Knotenpunktlasten erhalten werden kann, und für eine auf beliebiger Strecke der Fahrbahn gleichmäßig verteilte Last von p pro Längeneinheit gilt:

$$H = p F, \quad 10$$

unter F die Einflußfläche auf dieser Strecke verstanden (§ 12).

Bemerkungen. Hätten wir, wie häufig geschieht, die Beiträge der Füllungsglieder zum Horizontalschub vernachlässigt, so würde nach den Bemerkungen zu Beispiel 108 an Stelle obiger Gleichung 1 getreten sein:

$$H = - \frac{\Sigma c \varrho A}{163,28}.$$

Diese Formel würde mit Rücksicht auf Tabelle III anstatt der oben berechneten H durch einzelne Knotenpunktlasten geliefert haben:

Für $P = 1$ bei $a = 0$ oder 30 m	$H = 0$
„ $P = 1$ „ $a = 3$ „ 27 „	$H = \frac{54,882}{163,28} = 0,3361$ d. i. $- 13,00 \%$
„ $P = 1$ „ $a = 6$ „ 24 „	$H = \frac{106,883}{163,28} = 0,6546$ — $7,88$ „
„ $P = 1$ „ $a = 9$ „ 21 „	$H = \frac{152,745}{163,28} = 0,9355$ — $5,94$ „
„ $P = 1$ „ $a = 12$ „ 18 „	$H = \frac{186,079}{163,28} = 1,1396$ — $5,29$ „
„ $P = 1$ „ $a = 15$ m	$H = \frac{200,599}{163,28} = 1,2286$ — $5,06$ „

und durch beliebige Belastung der Fahrbahn anstatt 8:

$$H = 0,3361 (P_1 + P_9) + 0,6546 (P_2 + P_8) + 0,9355 (P_3 + P_7) + 1,1396 (P_4 + P_6) + 1,2286 P_5.$$

Beispiel 111. Zweigelenbogenfachwerk. Horizontalschub und Stabkräfte durch beliebige bestimmte Belastungen.

Für das in Beispiel 108 behandelte Bogenfachwerk zu ermitteln den Horizontalschub H und die Stabkräfte $X_3, Z_3, D_3, V_3, V_0, V_5$: a) durch die in Fig. 269 angedeuteten Radlasten des deutschen Normalzugs für Berechnung von Hauptbahnbrücken; b) durch gleiche Lasten P in allen Knotenpunkten der Fahrbahn mit Ausnahme der beiden äußersten, auf welche halb soviel kommt; c) durch eine auf die ganze Fahrbahn gleichmäßig verteilte Last von p pro Meter und speziell für $p = 1250$ kg.

Zweigelenkbogenfachwerk Fig. 269. Tabelle III. Zwei gleiche Einzellasten symmetrisch zur Mitte.

Stabkräfte	P = 1 bei a = 0 und 30 m		P = 1 bei a = 3 und 27 m		P = 1 bei a = 6 und 24 m		P = 1 bei a = 9 und 21 m		P = 1 bei a = 12 und 18 m		2 P = 2 bei a = 15 m	
	A	c q A	A	c q A	A	c q A	A	c q A	A	c q A	A	c q A
X ₁	1,134	0,892	0,787	0,892	0,787	0,892	0,787	0,892	0,787	0,892	0,787	0,892
X ₂	2,285	2,548	2,230	5,096	2,230	5,096	2,230	5,096	2,230	5,096	2,230	5,096
X ₃	3,556	5,643	3,175	11,290	3,175	11,290	3,175	11,290	3,175	11,290	3,175	11,290
X ₄	4,667	9,931	4,255	19,858	4,255	19,858	4,255	19,858	4,255	19,858	4,255	19,858
X ₅	4,800	11,520	4,800	23,040	4,800	23,040	4,800	23,040	4,800	23,040	4,800	23,040
Z ₁	1,848	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Z ₂	2,352	1,976	0,840	1,976	0,840	1,976	0,840	1,976	0,840	1,976	0,840	1,976
Z ₃	3,126	3,604	2,305	7,205	2,305	7,205	2,305	7,205	2,305	7,205	2,305	7,205
Z ₄	4,279	6,885	3,217	13,766	3,217	13,766	3,217	13,766	3,217	13,766	3,217	13,766
Z ₅	5,584	11,883	4,255	23,760	4,255	23,760	4,255	23,760	4,255	23,760	4,255	23,760
D ₁	4,931	6,272	1,272	6,272	1,272	6,272	1,272	6,272	1,272	6,272	1,272	6,272
D ₂	4,439	1,958	1,939	8,607	1,939	8,607	1,939	8,607	1,939	8,607	1,939	8,607
D ₃	4,339	2,426	1,118	4,851	2,997	13,004	2,997	13,004	2,997	13,004	2,997	13,004
D ₄	3,832	2,272	1,185	4,541	1,778	6,813	4,112	15,757	4,112	15,757	4,112	15,757
D ₅	1,677	0,495	0,590	0,989	0,885	1,484	1,181	1,981	1,181	1,981	1,181	1,981
V ₀	5,040	5,040	1,000	5,040	1,000	5,040	1,000	5,040	1,000	5,040	1,000	5,040
V ₁	3,924	5,078	1,294	5,078	1,294	5,078	1,294	5,078	1,294	5,078	1,294	5,078
V ₂	2,803	0,885	1,595	4,471	1,595	4,471	1,595	4,471	1,595	4,471	1,595	4,471
V ₃	1,767	0,449	0,508	0,898	1,761	3,112	1,761	3,112	1,761	3,112	1,761	3,112
V ₄	0,561	0,063	0,227	0,127	0,341	0,191	0,341	0,191	0,341	0,191	0,341	0,191
V ₅	0,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Für den halben Bogen				-147,757		-147,757		-206,817		-250,217		-269,097
Für diesen ohne die Beiträge der Füllungslieder . . .				-54,882		-106,883		-152,745		-186,079		-200,599
				-80,324		-147,757		-206,817		-250,217		-269,097
				-54,882		-106,883		-152,745		-186,079		-200,599

Horizontalschub. Wir stellen zunächst die Horizontalschübe durch die zu behandelnden Belastungen fest. Für die unter a) erwähnte Belastung liefert Gleichung 8 des vorigen Beispiels:

$$H = 0,7106 \cdot 12750 + 0,9946 (17000 + 3250) + 1,2033 (12750 + 13000) + 1,2941 \cdot 3250 = 64391 \text{ kg,}$$

während die der Einflußlinie entsprechende Gleichung 9 mit Rücksicht auf Fig. 270 ergibt:

$$H = 8500 (0,7106 + 0,8526 + 0,9946 + 1,0989 + 1,2033) + 6500 (1,2487 + 1,2033 + 1,0989) = 64391 \text{ kg.}$$

Für die unter b) erwähnte Belastung folgt aus Gleichung 8 oder 9 des vorigen Beispiels:

$$H = P [0,0242 + 2 (0,3863 + 0,7106 + 0,9946 + 1,2033) + 1,2941] = 7,9079 P,$$

welcher Ausdruck mit $P = 3p$ für die unter c) erwähnte Belastung ergibt:

$$H = 23,724 p,$$

und speziell für $p = 1250 \text{ kg}$:

$$H = 29655 \text{ kg.}$$

Im vorletzten Beispiel haben wir für ein gleichmäßig verteiltes Eigengewicht von 1250 kg pro

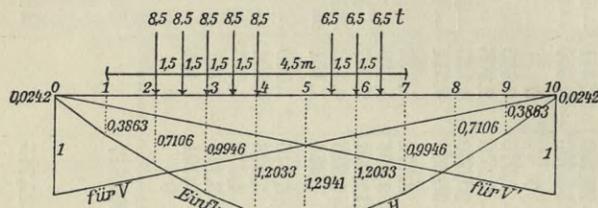


Fig. 270.

Meter Träger erhalten $H = 29542 \text{ kg}$. Der Unterschied rührt daher, daß das Eigengewicht im Gegensatz zur obigen Belastung zum Teil (mit 650 kg von 1250 kg) auf die Knotenpunkte des Untergurts wirkte.

Stabkräfte. Erstes Verfahren. Sind alle verlangten Stabkräfte für die gleiche Belastung zu bestimmen, so kann man die betreffenden Formeln oder Methoden unmittelbar auf diese anwenden, wie dies schon in den Beispielen 105 und 109 geschehen ist. Man erhält im vorliegenden Falle a) nach § 54, 5)–9) die in Beispiel 105 unter a) gegebenen Ausdrücke und nach diesen mit $H = 64391 \text{ kg}$:

$$X_3 = -158571 + 1,778 \cdot 64391 = -44084 \text{ kg,}$$

$$Z_3 = 86554 - 2,017 \cdot 64391 = -43323 \text{ „}$$

$$D_3 = 88590 - 0,978 \cdot 64391 = 25616 \text{ „}$$

$$V_3 = -50153 + 0,444 \cdot 64391 = -21565 \text{ „}$$

$$V_0 = -37550 + 0,480 \cdot 64391 = -6642 \text{ kg,}$$

$$V_5 = -3250 \text{ kg.}$$

Da man jedoch meist verschiedene Belastungen zu berücksichtigen hat, so wird das folgende Vorgehen im allgemeinen schneller zum Ziele führen.

Stabkräfte. Zweites Verfahren. Man drückt vor der Berechnung des Horizontalschubs H die Stabkräfte für $H = 0$ durch beliebige Belastung aus, wie dies in Beispiel 110 geschehen ist. Diese Ausdrücke dienen wie dort zur Bestimmung der A im Ausdrucke für den Horizontalschub, wenn dieser zunächst für einzelne Knotenpunktlasten bestimmt wird. Sie liefern aber auch für beliebige Belastung die Werte der A in den Ausdrücken der wirklichen Stabkräfte

$$S = A + H\varrho, \quad 1$$

worin ϱ den bei Berechnung des Horizontalschubs nötigen Wert von S durch $H = 1$ allein bedeutet.

Im vorliegenden Falle a) erhalten wir nach den S. 418, 419 gegebenen Ausdrücken die Werte der A für die verlangten Stabkräfte:

$$X_3 = - \left[7 \cdot 8500 (6 + 7,5 + 9) + 3 (8500 \cdot 19,5 + 8500 \cdot 18 + 19500 \cdot 12) \right] \frac{1}{18,90} = -158571 \text{ kg,}$$

$$Z_3 = 2 (42500 \cdot 21 + 19500 \cdot 12) \frac{1}{26,03} = 86554 \text{ kg,}$$

$$D_3 = \left[4,64 \cdot 8500 \cdot 6 + 8500 (28,24 \cdot 7,5 - 141,60) + 5,36 (25500 \cdot 19,5 + 19500 \cdot 12) \right] \frac{1}{53,65} = 88590 \text{ kg,}$$

$$V_3 = - \left[3,06 \cdot 8500 \cdot 6 + 8500 (42,46 \cdot 7,5 - 236,40) + 6,94 (25500 \cdot 19,5 + 19500 \cdot 12) \right] \frac{1}{118,20} = - 50 155 \text{ kg},$$

$$V_0 = - \frac{1}{30} (42500 \cdot 21 + 19500 \cdot 12) = - 37550 \text{ kg}, \quad V_5 = - \frac{1}{3} 6500 \cdot 1,5 = - 3250 \text{ kg},$$

und mit $H = 64391 \text{ kg}$ und den aus Tabelle I (S. 414) entnommenen ρ nach 1 dieselben Ansätze und Werte wie beim ersten Verfahren (abgesehen von kleinen Differenzen durch Vernachlässigung von Dezimalen).

Stabkräfte. Drittes Verfahren. Hat man für Einzellasten $P = 1$ in allen Knotenpunkten, auf welche die Fahrbahnlast wirkt, die Werte α der Stabkräfte A ($H = 0$ entsprechend) und die Werte β des Horizontalschubs H berechnet, so läßt sich ein drittes Verfahren verwenden. Es gelten für beliebige Belastung der Fahrbahn:

$$A = \sum P \alpha, \quad H = \sum P \beta, \quad 2$$

und damit nach 1:

$$S = \sum P \alpha + H \rho = \sum P (\alpha + \beta \rho), \quad 3$$

worin die Summen \sum sich auf alle belasteten Knotenpunkte beziehen. Bei Verwendung des ersten Ausdrucks 3 ist für den in Frage stehenden Belastungsfall zunächst H zu berechnen. Dieser Ausdruck empfiehlt sich, wenn für eine bestimmte Belastung eine Reihe von Stabkräften zu ermitteln sind, für die dann der gleiche Wert H einzusetzen ist.

Sind wie im vorigen Beispiel nur die Werte α der Stabkräfte A ($H = 0$ entsprechend) für je zwei gleiche und zur Mitte symmetrisch liegende Knotenpunktlasten $P = 1$ ermittelt, so lassen sich die vorstehenden Formeln ohne Vorausberechnung der fehlenden α nur auf beliebige symmetrische Belastungen anwenden, wobei die Summen \sum auf eine Bogenhälfte zu erstrecken sind. So erhalten wir für die unter b) erwähnte Belastung mit den α nach Tabelle III (S. 423), dem oben berechneten $H = 7,9079 P$ und den ρ nach Tabelle I (S. 414):

$$X_3 = - P \left(1,587 + 3,175 + 4,762 + 4,762 + \frac{4,762}{2} \right) + 1,778 \cdot 7,9079 P = - 2,607 P,$$

$$Z_3 = P \left(1,153 + 2,305 + 2,305 + 2,305 + \frac{2,305}{2} \right) - 2,017 \cdot 7,9079 P = - 6,730 P,$$

$$D_3 = P \left(0,559 + 1,118 + 2,997 + 2,997 + \frac{2,997}{2} \right) - 0,978 \cdot 7,9079 P = 1,436 P,$$

$$V_3 = - P \left(0,254 + 0,508 + 1,761 + 1,761 + \frac{1,761}{2} \right) + 0,444 \cdot 7,9079 P = - 1,653 P,$$

$$V_0 = - P \left(\frac{1}{2} + 1 + 1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} \right) + 0,480 \cdot 7,9079 P = - 1,204 P, \quad V_5 = P.$$

Für die unter c) angenommene, auf die ganze Fahrbahn gleichmäßig verteilte Last von p pro Meter ergeben vorstehende Ausdrücke mit $P = 3 p$:

$$X_3 = - 7,821 p \quad Z_3 = - 20,190 p \quad D_3 = 4,311 p$$

$$V_3 = - 4,962 p \quad V_0 = - 3,612 p \quad V_5 = - 3 p,$$

und speziell für $p = 1250 \text{ kg}$:

$$X_3 = - 9776 \text{ kg} \quad Z_3 = - 25237 \text{ kg} \quad D_3 = 5389 \text{ kg}$$

$$V_3 = - 6202 \text{ „} \quad V_0 = - 4515 \text{ „} \quad V_5 = - 3750 \text{ „}.$$

Diese Werte weichen zum Teil erheblich von den in Beispiel 109 für ein gleichmäßig auf den Träger verteiltes Eigengewicht von $g = 1250 \text{ kg}$ pro Meter ab. Dies rührt daher, daß letzteres zum Teil auf die Knotenpunkte des Untergurtes kam ($g_z = 650 \text{ kg}$ von 1250 kg), was die X_3, Z_3, D_3, V_3, V_0 durch das geänderte H (s. oben) und V_3, V_0, V_5 überdies unmittelbar beeinflusste, indem bei nur auf die Knotenpunkte des Obergurtes wirkender Belastung $g_x = g = 1250 \text{ kg}$, $g_z = 0$ zu setzen gewesen wären.

Bemerkungen. Außer nach den bis jetzt angeführten Verfahren kann die Berechnung der Stabkräfte durch beliebige Belastungen mit Hilfe der Einflußlinien erfolgen (§ 12), die wir für das vorliegende Bogenfachwerk in Beispiel 113 ableiten und in Beispiel 114 verwenden werden. Für gleichmäßig

verteilte Last auf der ganzen Spannweite können auch die in Beispiel 109 benutzten besonderen Ausdrücke der A zur Verwendung kommen.

Selbstverständlich hätten wir die bei Besprechung des dritten Verfahrens ermittelten Stabkräfte ebenso leicht nach dem zweiten Verfahren berechnen können. Es würden sich ergeben haben:

$$X_3 = -\frac{P}{18,90} [7 \cdot 3 (1+2+3) + 3 \cdot 3 (6+5+4+3+2+1)] + 1,778 \cdot 7,9079 P = -2,607 P,$$

$$Z_3 = \frac{P}{26,03} [8 \cdot 3 (1+2) + 2 \cdot 3 (7+6+5+4+3+2+1)] - 2,017 \cdot 7,9079 P = -6,730 P,$$

$$D_3 = \frac{P}{53,65} [4,64 \cdot 3 (1+2) + 5,36 \cdot 3 (7+6+5+4+3+2+1)] - 0,978 \cdot 7,9079 P = 1,437 P,$$

$$V_3 = -\frac{P}{118,20} [3,06 \cdot 3 (1+2) + 6,94 \cdot 3 (7+6+5+4+3+2+1)] + 0,444 \cdot 7,9079 P = -1,654 P,$$

$$V_0 = -5 P + 0,480 \cdot 7,9079 P = -1,204 P, \quad V_5 = -P.$$

Beispiel 112. Zweigelenkbogenfachwerk. Kämpferdrucklinie.

Für das in Beispiel 108 behandelte Bogenfachwerk Fig. 271 die Kämpferdrucklinie zu bestimmen.

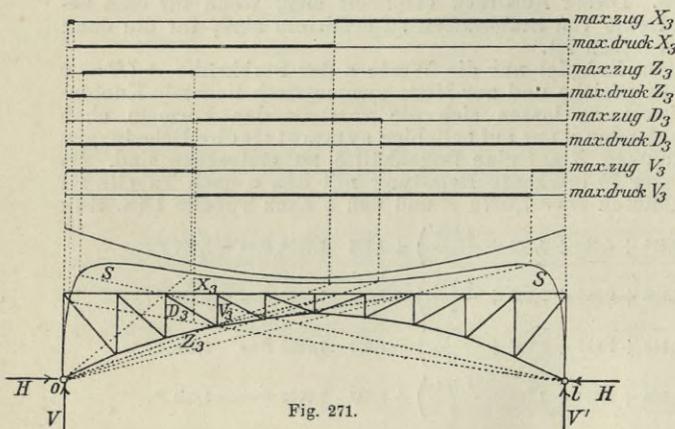


Fig. 271.

Die Gleichung der Kämpferdrucklinie S ist nach § 20, 46):

$$b = \frac{V}{H} a, \quad 1$$

worin V , H einer bei a angreifenden Einzelast P entsprechen. Wird für $P=1$ gesetzt $H = \beta$, während nach § 20, 2) alsdann $V = \frac{l-a}{l} a$, so hat man

$$\text{auch: } b = \frac{a(l-a)}{\beta l}. \quad 2$$

Diese Gleichung liefert mit den in Beispiel 110 unter c) bestimmten β :

für $a = 15$ m	$b = \frac{15 \cdot 15}{1,2941 \cdot 30} = 5,80$ m
„ $a = 12$ „	$b = \frac{12 \cdot 18}{1,2033 \cdot 30} = 5,98$ „
„ $a = 9$ „	$b = \frac{9 \cdot 21}{0,9946 \cdot 30} = 6,33$ „
„ $a = 6$ „	$b = \frac{6 \cdot 24}{0,7106 \cdot 30} = 6,75$ „
„ $a = 3$ „	$b = \frac{3 \cdot 27}{0,3863 \cdot 30} = 6,99$ „
„ $a = 1,5$ „	$b = \frac{1,5 \cdot 28,5}{0,2052 \cdot 30} = 6,94$ „
„ $a = 0,75$ „	$b = \frac{0,75 \cdot 29,25}{0,1147 \cdot 30} = 6,38$ „
„ $a = 0,3$ „	$b = \frac{0,3 \cdot 29,7}{0,0604 \cdot 30} = 4,92$ „
„ $a = 0,1$ „	$b = \frac{0,1 \cdot 29,9}{0,0363 \cdot 30} = 2,75$ „
„ $a = 0$ „	$b = \frac{0 \cdot 30}{0,0242 \cdot 30} = 0$ „

Die Linie ist in Fig. 271 verzeichnet.

Mit Hilfe der Kämpferdrucklinie können gemäß § 53 die Belastungen für die Grenzwerte der Stabkräfte bei gleichmäßig verteilter bewegter Last bestimmt werden, wie dies in Fig. 271 für X_3, Z_3, D_3, V_3 geschehen ist. Für bewegte Radlastzüge erhält man zwar auf diesem Wege ebenfalls die positiven und negativen Beitragsstrecken, doch ist damit noch nicht bestimmt, wohin die schwersten Räder zu stellen wären; zu möglichst genauer Berechnung dienen hier die Einflußlinien (Beispiele 113, 114). Nach Feststellung der Belastungen für die Grenzwerte lassen sich diese selbst natürlich auch nach den Methoden des vorigen Beispiels erhalten.

Bemerkungen. Wäre der Horizontalschub ohne Berücksichtigung des Einflusses der Füllungsglieder berechnet worden, so würden sich (mit den in den Bemerkungen zu Beispiel 110 bestimmten β) anstatt der obigen Ordinaten b ergeben haben: bei

$$a = \quad 15 \quad 12 \quad 9 \quad 6 \quad 3 \text{ m}$$

$$b = \quad 6,10 \quad 6,32 \quad 6,73 \quad 7,33 \quad 8,03 \text{ „}$$

und nach Formel 2 der folgenden Aufgabe mit β_1 gleich β für $a = \lambda$:

$$\text{bei } a = 0 \quad b = \frac{\lambda}{\beta_1} = \frac{3}{0,3361} = 8,93 \text{ m.}$$

Die Linie verläuft nach Aufgabe 37 in den beiden äußersten Feldern geradlinig, sie ist in Fig. 270 oberhalb der genaueren Kämpferdrucklinie angedeutet.

Aufgabe 37. Zweigelenkbogenfachwerk. Betreffend die Kämpferdrucklinie.

Für den Fall, daß bei $a = 0$ und l angreifende Verkehrslasten an diesen Stellen auf die Stützpunkte übertragen werden, aber durch eine Last P bei $a = 0$ oder l der Horizontalschub $H = 0$ entsteht (s. unten) den Verlauf der Kämpferdrucklinie an den Trägerebenen festzustellen.

Es sei nach $a = 0$ der erste Knotenpunkt mit Verkehrslast bei $a = \lambda_1$, und diesem $P = 1$ entsprechend $H = \beta_1$, dann hat man den Beitrag der Last $P = 1$ zu H für beliebige Lagen a zwischen 0 und λ_1 :

$$\beta = \frac{a}{\lambda_1} \beta_1$$

und damit nach Gleichung 2 des vorigen Beispiels die Gleichung der Kämpferdrucklinie von 0 bis λ_1 :

$$b = \frac{l-a}{l} \frac{\lambda_1}{\beta_1}. \quad 1$$

Die Kämpferdrucklinie verläuft hiernach zwischen 0 und λ_1 geradlinig und man hat:

$$\text{bei } a = 0 \quad b = \frac{\lambda_1}{\beta_1}. \quad 2$$

Meist ist wie im vorigen Beispiel $\lambda_1 = \lambda$. Analoges gilt bei Stütze l .

Der in der Aufgabe angenommene Fall trifft zu bei Fachwerken ohne Endvertikalen, weil dann für Lasten P bei $a = 0$ in den Ausdrücken § 53, 23) die Bogenstabkräfte A gleich Null sind; ferner für Fachwerke mit Endvertikalen nach der Anordnung Fig. 223, 243, weil dann durch Lasten P bei $a = 0$ nach § 53, 12)–16) und 18), 20), nur die Vertikale 0 beansprucht wird, für diese aber nach § 53, 18) und § 54, 20) die Beanspruchung durch einen Horizontalschub $H = 1$ allein $q = 0$ ist; schließlich auch bei Fachwerken mit Endvertikalen nach der Anordnung Fig. 227, 242 bei Vernachlässigung des Einflusses der Füllungsglieder, weil dann durch Lasten P bei $a = 0$ nach § 53, 12)–17) und 19) nur die Vertikale 0 beansprucht, ihr Beitrag zum Ausdrucke § 53, 23) aber nicht berücksichtigt wird.

Beispiel 113. Zweigelenkbogenfachwerk. Einflußlinien der Stabkräfte. Für das in Beispiel 108 behandelte Bogenfachwerk Fig. 269 die Einflußlinien der Stabkräfte $X_3, Z_3, D_3, V_3, V_0, V_5$ festzustellen.

Für jede Stabkraft hat man durch beliebige Belastung:

$$s = A + Hq, \quad 1$$

worin A ihren Wert durch diese Belastung für $H = 0$ und q den Wert durch

$H = 1$ allein bedeuten. Bezeichnen α, β die A, H durch eine Einzellast $P = 1$ bei α , so folgt gemäß § 12 die Ordinate der Einflußlinie von S zur Abszisse α :

$$b = \alpha + \beta \varrho. \quad 2$$

Für unseren Fall sind die β bereits in Beispiel 110 unter c), die ϱ in Tabelle I (S. 414) gegeben. Da jedoch nach § 54 oder den in Beispiel 110 unter a) angeführten speziellen Ausdrücken der A die Einflußlinien dieser Anteile der Stabkräfte für V_0 durch eine Gerade, für X_3, Z_3, V_5 durch zwei Gerade und für D_3, V_3 durch drei Gerade dargestellt sind und die Einflußlinien von $H\varrho$ symmetrisch zur Bogenmitte verlaufen, so empfiehlt es sich, zunächst die Einflußlinien der A durch Auftragen der wenigen erforderlichen Ordinaten α festzulegen und von ihnen aus die Beiträge $\beta\varrho$ von $H\varrho$ zu den Ordinaten b anzutragen. Wir bestimmen also im folgenden die α und $\beta\varrho$ je für sich, wobei wir diese zur Unterscheidung wie die ganzen Stabkräfte bezeichnen.

Werte α (Einflußlinien der A). Nach den in Beispiel 110 unter a) gegebenen Ausdrücken der A oder unmittelbar nach § 54, a) hat man:

für $\alpha = 0$ m	$X_3 = Z_3 = D_3 = V_3 = 0$	$V_0 = -1,$
„ $\alpha = 30$ „	$X_3 = Z_3 = D_3 = V_3 = 0$	$V_0 = 0,$
„ $\alpha = 12$ und 18 m	$V_5 = 0,$	für $\alpha = 15$ m $V_5 = -1,$
ferner für $\alpha = 9$ m	$X_3 = -\frac{7 \cdot 9}{18,90} = -3,333$	
„ $\alpha = 6$ „	$Z_3 = \frac{8 \cdot 6}{26,03} = 1,844$	
„ $\alpha = 6$ „	$D_3 = \frac{4,64 \cdot 6}{53,65} = 0,519$	
„ $\alpha = 9$ „	$D_3 = \frac{5,36 \cdot 21}{53,65} = 2,098$	
„ $\alpha = 6$ „	$V_3 = -\frac{3,06 \cdot 6}{118,20} = -0,155$	
„ $\alpha = 9$ „	$V_3 = -\frac{6,94 \cdot 21}{118,20} = -1,233.$	

Diesen Ordinaten α entsprechen die in Fig. 274 punktierten Linien, für V_5 jedoch die ausgezogene, weil für diese Stabkraft der Beitrag $H\varrho = 0$ ist.

Werte der $\beta\varrho$ (Einflußlinien der $H\varrho$). Mit den zu Gleichung 2 erwähnten β, ϱ erhalten wir:

für $\alpha = 0$ oder 30 m	$X_3 = 0,0242 \cdot 1,778 = 0,043$	$Z_3 = -0,0242 \cdot 2,017 = -0,049$
	$D_3 = -0,0242 \cdot 0,978 = -0,024$	$V_3 = 0,0242 \cdot 0,444 = 0,011$
	$V_0 = 0,0242 \cdot 0,480 = 0,012$	$V_5 = 0,$
für $\alpha = 3$ oder 27 m	$X_3 = 0,3863 \cdot 1,778 = 0,687$	$Z_3 = -0,3863 \cdot 2,017 = -0,779$
	$D_3 = -0,3863 \cdot 0,978 = -0,378$	$V_3 = 0,3863 \cdot 0,444 = 1,172$
	$V_0 = 0,3863 \cdot 0,480 = 0,185$	$V_5 = 0,$
für $\alpha = 6$ oder 24 m	$X_3 = 0,7106 \cdot 1,778 = 1,263$	$Z_3 = -0,7106 \cdot 2,017 = -1,433$
	$D_3 = -0,7106 \cdot 0,978 = -0,695$	$V_3 = 0,7106 \cdot 0,444 = 0,316$
	$V_0 = 0,7106 \cdot 0,480 = 0,341$	$V_5 = 0,$
für $\alpha = 9$ oder 21 m	$X_3 = 0,9946 \cdot 1,778 = 1,768$	$Z_3 = -0,9946 \cdot 2,017 = -2,006$
	$D_3 = -0,9946 \cdot 0,978 = -0,973$	$V_3 = 0,9946 \cdot 0,444 = 0,442$
	$V_0 = 0,9946 \cdot 0,480 = 0,477$	$V_5 = 0,$
für $\alpha = 12$ oder 18 m	$X_3 = 1,2033 \cdot 1,778 = 2,139$	$Z_3 = -1,2033 \cdot 2,017 = -2,427$
	$D_3 = -1,2033 \cdot 0,978 = -1,177$	$V_3 = 1,2033 \cdot 0,444 = 0,534$
	$V_0 = 1,2033 \cdot 0,480 = 0,578$	$V_5 = 0,$
für $\alpha = 15$ m	$X_3 = 1,2941 \cdot 1,778 = 2,301$	$Z_3 = -1,2941 \cdot 2,017 = -2,617$
	$D_3 = -1,2941 \cdot 0,978 = -1,266$	$V_3 = 1,2941 \cdot 0,444 = 0,575$
	$V_0 = 1,2941 \cdot 0,480 = 0,621$	$V_5 = 0.$

Durch Auftragen dieser βq von den Enden der Ordinaten α aus sind die in Fig. 274 ausgezogenen Einflußlinien der hier berücksichtigten sechs Stabkräfte entstanden. Für die übrigen Stabkräfte wäre ganz wie für X_3, Z_3, D_3, V_3 zu verfahren.

Zu bemerken ist, daß die Linien ganz nahe bei den Stützen nicht deutlich verzeichnet werden konnten. Um dies zu erreichen, hätte der Maßstab größer gewählt werden müssen, wovon hier schon deshalb abgesehen werden konnte, weil wir die Einflußlinien nur zur Ermittlung der ungünstigsten Laststellungen brauchen (Beispiel 114). Bei Vernachlässigung des Einflusses der Füllungsglieder auf H würden übrigens die Ordinaten der Einflußlinien von X_3, Z_3, D_3, V_3 an den Trägern gleich Null geworden sein, wie dies bei Trägern ohne Endvertikalen (beide Gurtungen an den Trägern zusammen treffend) auch sonst der Fall ist (S. 427).

Beispiel 114. Zweigelenbogenfachwerk. Grenzwerte der Stützenreaktionen und Stabkräfte.

Für das in Beispiel 108 behandelte Bogenfachwerk Fig. 269 zu berechnen: a) Die Grenzwerte der Stützenreaktionen V, H und der Stabkräfte $X_3, Z_3, D_3, V_3, V_0, V_5$ beim Befahren durch Lokomotiven der Radanordnung Fig. 272 ohne sonstige Beiträge; b) die Grenzwerte der Reaktionen V, H, R und derselben Stabkräfte beim Hinzutreten der Beiträge des Eigengewichts von $g = 1250$ kg

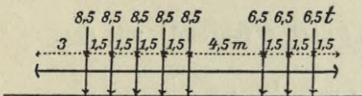


Fig. 272.

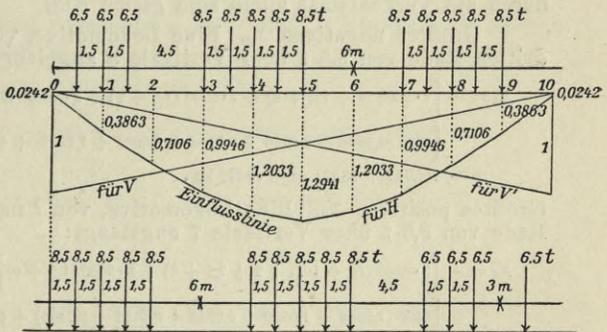


Fig. 273.

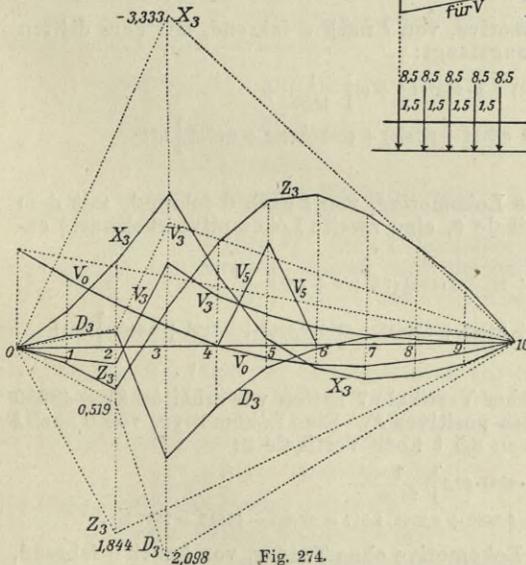


Fig. 274.

pro Meter Träger, wovon $g_x = 600$ kg auf die Knotenpunkte des Obergurts und $g_z = 650$ kg auf diejenigen des Untergurts kommen, und gleichmäßiger Temperaturänderungen aller Stäbe von $\tau = \pm 30^\circ$.

a) Wir machen von den in Fig. 273 verzeichneten Einflußlinien der Reaktionen V, H und den in Fig. 274 verzeichneten Einflußlinien der Stabkräfte $X_3, Z_3, D_3, V_3, V_0, V_5$ Gebrauch, von letzteren jedoch nur zur Bestimmung der ungünstigsten Belastungen, um die Einfluß-

linien nicht genauer, mit Angabe der Ordinaten, auftragen zu müssen. Weiter berücksichtigen wir, daß jede Stabkraft bei jeder Belastung:

$$S = A + H q,$$

und entnehmen die $H = 0$ entsprechenden Werte A aus Beispiel 110 unter a),

die Werte H aus Gleichung 9 des Beispiels 110, die Werte ϱ durch $H=1$ allein aus der Tabelle I (S. 414).

Die größte Vertikalreaktion V entsteht, wenn ein Zug von drei Lokomotiven, die erste rückwärts, die zweite vorwärts, die dritte rückwärts von l nach 0 fahrend, mit dem ersten Rad von 8,5 t bei 0 anlangt (Fig. 273 unten):

$$V = 8500(1 + 0,95 + 0,9 + 0,85 + 0,8 + 0,6 + 0,55 + 0,5 + 0,45 + 0,4) + 6500(0,25 + 0,2 + 0,15 + 0,05) = 63\,725 \text{ kg.}$$

Ohne die dritte Lokomotive, welche nur $6500 \cdot 0,05 = 325$ kg beiträgt, hätten wir erhalten 63400 kg, und wenn beim Fahren aller Lokomotiven mit den Schloten vorn das erste Rad von 8,5 t bei 0 angekommen wäre, $V = 63\,025$ kg. — Der größte Horizontalschub H entsteht, wenn zwei Lokomotiven mit den Schloten gegeneinander in beliebiger Richtung fahren und das Vorderrad einer Lokomotive bei der Trägermitte anlangt (Fig. 273 oben):

$$H = 8500(1,2941 + 1,2487 + 1,2033 + 1,09895 + 0,9946 + 0,9946 + 0,8526 + 0,7106 + 0,54845 + 0,3863) + 6500(0,54845 + 0,3863 + 0,20525) = 86\,734 \text{ kg.}$$

Hätten wir beide Lokomotiven symmetrisch zur Trägermitte gestellt, so würden sich ergeben haben 85604 kg, die zum größten V erwähnte Belastung (Fig. 273 unten) liefert 83837 kg und die zur größten Einsenkung in der Mitte führende Belastung (Fig. 290) 80135 kg. Die unteren Grenzwerte der Stützenreaktionen durch die Verkehrslast allein sind gleich Null.

Größtes negatives X_3 . Eine Lokomotive, von l nach 0 fahrend¹, mit dem dritten Rade von 8,5 t über Vertikale 3 anlangt:

$$X_3 = - \left[7 \cdot 8500(9 + 7,5 + 6) + 7 \cdot 6500(1,5 + 0) + 3 \cdot 8500(19,5 + 18) \right] \frac{1}{18,90} + \left[8500(0,9946 + 0,8526 + 0,7106 + 1,0989 + 1,2033) + 6500(0,2052 + 0,0242) \right] 1,778 = - 125\,040 + 75\,821 = - 49\,219 \text{ kg.}$$

Größtes positives X_3 . Eine Lokomotive, von l nach 0 fahrend, mit dem dritten Rade von 8,5 t über Vertikale 7 anlangt:

$$X_3 = - \left[3 \cdot 8500(12 + 10,5 + 9 + 7,5 + 6) + 3 \cdot 6500(1,5 + 0) \right] \frac{1}{18,90} + \left[8500(1,2033 + 1,0989 + 0,9946 + 0,8526 + 0,7106) + 6500(0,2052 + 0,0242) \right] 1,778 = - 62\,262 + 75\,821 = 13\,559 \text{ kg.}$$

Größtes negatives Z_3 . Eine Lokomotive, von l nach 0 fahrend, mit dem fünften Rade von 8,5 t über Vertikale 6, eine zweite Lokomotive rückwärts anschließend:

$$Z_3 = \left[2 \cdot 8500(18 + 16,5 + 15 + 13,5 + 12) + 2 \cdot 6500(7,5 + 6 + 4,5) \right] \frac{1}{26,03} + \left[8500(1,2033 + 1,2487 + 1,2941 + 1,2487 + 1,2033) + 6500(0,8526 + 0,7106 + 0,5484) \right] 2,017 = 58\,721 - 136\,638 = - 77\,917 \text{ kg.}$$

Mit dem fünften Rade von 8,5 t über Vertikale 7 hätten wir erhalten $Z_3 = 43\,680 - 115\,062 = - 72\,382$ kg. — Größtes positives Z_3 . Eine Lokomotive, von 0 nach l fahrend, mit dem zweiten Rade von 8,5 t über Vertikale 2:

$$Z_3 = \left[8 \cdot 8500(6 + 4,5 + 3 + 1,5) + 2 \cdot 8500 \cdot 22,5 \right] \frac{1}{26,03} - 8500(0,8526 + 0,7106 + 0,5484 + 0,3683 + 0,2052) 2,017 = 53\,880 - 46\,343 = 7\,537 \text{ kg.}$$

Größtes positives D_3 . Eine Lokomotive ohne Tender, von l nach 0 fahrend, mit dem zweiten Rade von 8,5 t über Vertikale 3:

$$D_3 = \left[8500(28,24 \cdot 7,5 - 141,60) + 5,36 \cdot 8500(21 + 19,5 + 18 + 16,5) \right] \frac{1}{53,65} - 8500(0,8526 + 0,9946 + 1,0989 + 1,2033 + 1,2487) 0,978 = 74\,813 - 44\,874 = 29\,939 \text{ kg.}$$

¹ Wenn nichts anderes gesagt ist, fährt die Lokomotive vorwärts (mit dem Schlotte vorn.)

Größtes negatives D_3 . Eine Lokomotive, von 0 nach l fahrend, mit dem Vorder-
rad von 8,5 t über Vertikale 2 und eine Lokomotive, von l nach 0 fahrend, mit
dem Vorderrad von 8,5 t über Vertikale 7:

$$D_3 = \left[4,64 \cdot 8500 (6 + 4,5 + 3 + 1,5 + 0) + 5,36 \cdot 8500 (9 + 7,5 + 6 + 4,5 + 3) \right] \frac{1}{53,65} - \\ 8500 (0,0242 + 0,2052 + 0,3863 + 0,5484 + 0,7106 + 0,9946 + 0,8526 + 0,7106 + \\ 0,5484 + 0,3863) 0,978 = 36\,503 - 44\,617 = -8114 \text{ kg.}$$

Größtes negatives V_3 . Eine Lokomotive, von l nach 0 fahrend, mit dem
zweiten Rade von 8,5 t bei Vertikale 3:

$$V_3 = - \left[8500 (42,46 \cdot 7,5 - 236,40) + 6,94 \cdot 8500 (21 + 19,5 + 18 + 16,5 + 4,5 + 3 + 1,5 + 0) + \right. \\ \left. 6,94 \cdot 6500 (12 + 10,5 + 9) \right] \frac{1}{118,20} + \left[8500 (0,8526 + 0,9946 + 1,0989 + 1,2033 + \right. \\ \left. 1,2487 + 0,5484 + 0,3863 + 0,2052 + 0,0242) + 6500 (1,2033 + 1,0989 + 0,9946) \right] 0,444 \\ = -59\,844 + 34\,280 = -25\,564 \text{ kg.}$$

Größtes positives V_3 . Eine Lokomotive, von 0 nach l fahrend, mit dem Vorder-
rad von 8,5 t bei Vertikale 2:

$$V_3 = -3,06 \cdot 8500 (6 + 4,5 + 3 + 1,5 + 0) \frac{1}{118,20} + 8500 (0,7106 + 0,5484 + 0,3863 + 0,2052 + \\ 0,0242) 0,444 = -3301 + 7075 = 3774 \text{ kg.}$$

Größtes negatives V_0 . Eine Lokomotive, von l nach 0 fahrend, mit dem
Vorderrad von 8,5 t bei Vertikale 0:

$$V_0 = - \left[8500 (30 + 28,5 + 27 + 25,5 + 24) + 6500 (19,5 + 18 + 16,5) \right] \frac{1}{30} + \\ \left[8500 (0,0242 + 0,2052 + 0,3863 + 0,5484 + 0,7106) + 6500 (1,0989 + 1,2033 + 1,2487) \right] 0,480 \\ = -49\,950 + 18\,728 = -31\,222 \text{ kg.}$$

Größtes positives V_0 . Eine Lokomotive, von l nach 0 fahrend, mit dem fünften
Rade von 8,5 t bei Vertikale 7:

$$V_0 = - \left[8500 (15 + 13,5 + 12 + 10,5 + 9) + 6500 (4,5 + 3 + 1,5) \right] \frac{1}{30} + \\ \left[8500 (1,2941 + 1,2487 + 1,2033 + 1,0989 + 0,9946) + 6500 (0,5484 + 0,3863 + 0,2052) \right] 0,480 \\ = -18\,950 + 27\,382 = 8432 \text{ kg.}$$

Mit dem fünften Rade von 8,5 t bei Vertikale 8 hätte sich ergeben $V_0 = -13400$
 $+ 20545 = 7145 \text{ kg.}$

Größtes negatives V_5 . Eine Lokomotive, von 0 nach l oder von l nach 0
fahrend, mit dem zweiten, dritten oder vierten Rade von 8,5 t über Vertikale 5:

$$V_5 = -8500 \cdot 2 = -17000 \text{ kg.}$$

Der zweite Grenzwert durch die Verkehrslast allein ist $V_5 = 0$.

b) Die Beiträge des Eigengewichts zu den Stützenreaktionen und Stab-
kräften wurden in Beispiel 109 bestimmt, diejenigen der Temperaturänderungen
sind aus dem nächsten Beispiel unter a) zu entnehmen. Wir erhalten damit die
Grenzwerte der Vertikalreaktionen:

$$V = 63\,725 + 18\,750 = 82\,475 \text{ kg,} \quad V = 18\,750 \text{ kg,}$$

die Grenzwerte des Horizontalschubs:

$$H = 86\,734 + 29\,542 + 8918 = 125\,194 \text{ kg,} \quad H = 29\,542 - 8918 = 20\,624 \text{ kg}$$

und die Grenzwerte der resultierenden Stützenreaktionen, die oberen in dem
Belastungsfall Fig. 273, unten, mit $H = 83837 + 29542 + 8918 = 122297 \text{ kg:}$

$$R = \sqrt{82475^2 + 122297^2} = 147\,508 \text{ kg,} \quad R = \sqrt{18750^2 + 20624^2} = 27\,873 \text{ kg.}$$

Für den Belastungsfall Fig. 273, oben, wäre $R = 143581 \text{ kg.}$

Die verlangten Grenzwerte der Stabkräfte ergeben sich:

$$\begin{aligned}
 X_3 &= -49219 - 9974 - 15856 = -75049 \text{ kg} \\
 X_3 &= 13559 - 9974 + 15856 = 19441 \text{ „} \\
 Z_3 &= -77917 - 25014 - 17988 = -120919 \text{ „} \\
 Z_3 &= 7537 - 25014 + 17988 = 511 \text{ „} \\
 D_3 &= 29939 + 5499 + 8722 = 44160 \text{ „} \\
 D_3 &= -8114 + 5499 - 8722 = -11337 \text{ „} \\
 V_3 &= -25564 - 4302 - 3960 = -33826 \text{ „} \\
 V_3 &= 3774 - 4302 + 3960 = 3432 \text{ „} \\
 V_0 &= -31222 - 3595 - 4281 = -39098 \text{ „} \\
 V_0 &= 8432 - 3595 + 4281 = 9118 \text{ „} \\
 V_5 &= -17000 - 1800 = -18800 \text{ kg} & V_3 &= -1800 \text{ kg.}
 \end{aligned}$$

In gleicher Weise wären natürlich die Grenzwerte der übrigen Stabkräfte zu berechnen.

Beispiel 115. Zweigelenbogenfachwerk. Temperatureinflüsse. Ausweichen der Widerlager.

Für das in Beispiel 108 behandelte Bogenfachwerk die Beiträge zum Horizontalschub und sämtlichen Stabkräften festzustellen: a) Durch eine gleichmäßige Temperaturänderung aller Stäbe um $\tau = \pm 25^\circ$; b) durch Temperaturänderungen des Obergurtes um 30° , der Füllungsglieder um 25° und des Untergurtes um 20° ; c) durch eine Änderung der Spannweite um Δl cm und 1 cm. Der Elastizitätsmodul und Ausdehnungskoeffizient sind zu $E = 2150000$ kg pro qcm, $\alpha = 0,0000115$ anzunehmen (Flußeisen).

Wir bezeichnen im folgenden die verlangten Beiträge wie die ganzen Größen. Für die Vertikalreaktionen der Kämpfer sind sie nach § 20, 2) gleich Null; für die Stabkräfte entstehen sie nur infolge der Änderungen des Horizontalschubs H , und da die Stabkraft S durch $H=1$ allein mit ϱ bezeichnet wurde, so liefern beliebige H allein:

$$S = H \varrho. \quad 1$$

Die ϱ können in unserem Falle aus Tabelle I (S. 414) entnommen werden.

a) Gleiche Temperaturänderungen. Nach der ersten Gleichung 9 des Beispiels 108 ist der von einer Temperaturänderung τ herrührende Horizontalschub:

$$H = 356,71 \tau \text{ kg,} \quad 2$$

also für $\tau = \pm 25^\circ$:

$$H = \pm 356,71 \cdot 25 = \pm 8918 \text{ kg.}$$

Mit $H = 8918$ kg und den aus Tabelle I entnommenen ϱ erhält man nach 1 beispielsweise:

$$\begin{aligned}
 X_3 &= 8918 \cdot 1,778 = 15856 \text{ kg} & Z_3 &= -8918 \cdot 2,017 = -17988 \text{ kg} \\
 D_3 &= -8918 \cdot 0,978 = -8722 \text{ „} & V_3 &= 8918 \cdot 0,444 = 3960 \text{ „} \\
 V_0 &= 8918 \cdot 0,480 = 4281 \text{ „} & V_5 &= 8918 \cdot 0 = 0 \text{ „.}
 \end{aligned}$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werte der folgenden Zusammenstellung für $\tau = 25^\circ$ berechnet. Die Stabkräfte durch $\tau = -25^\circ$ haben nach 1 gleiche Zahlenwerte mit entgegengesetzten Vorzeichen.

$$\begin{aligned}
 X_1 &= 3371 \text{ kg} & Z_1 &= -9899 \text{ kg} & D_1 &= -5440 \text{ kg} & V_0 &= 4281 \text{ kg} \\
 X_2 &= 8490 \text{ „} & Z_2 &= -13109 \text{ „} & D_2 &= -6876 \text{ „} & V_1 &= 4593 \text{ „} \\
 X_3 &= 15856 \text{ „} & Z_3 &= -17988 \text{ „} & D_3 &= -8722 \text{ „} & V_2 &= 4646 \text{ „} \\
 X_4 &= 24284 \text{ „} & Z_4 &= -25104 \text{ „} & D_4 &= -9293 \text{ „} & V_3 &= 3960 \text{ „} \\
 X_5 &= 28538 \text{ „} & Z_5 &= -33202 \text{ „} & D_5 &= -4602 \text{ „} & V_4 &= 1775 \text{ „} \\
 & & & & & & V_5 &= 0 \text{ „.}
 \end{aligned}$$

b) Verschiedene Temperaturänderungen. Nach der zweiten Gleichung 9 des Beispiels 108 ist der von beliebigen Temperaturänderungen τ der einzelnen Stäbe herrührende Horizontalschub:

$$H = -0,11890 \sum s \varrho \tau.$$

Nun liefert die Tabelle I (S. 414):

für die Stäbe des Obergurts	$\sum s \rho = 2709,3 \cdot 2,$
„ „ Füllungsglieder	$\sum s \rho = - 766,0 \cdot 2,$
„ „ Stäbe des Untergurts	$\sum s \rho = - 3438,0 \cdot 2.$

Damit erhalten wir für die unter b) gegebenen τ :

$$H = - 0,11890 \cdot 2 (30 \cdot 2709,3 - 25 \cdot 766,0 - 20 \cdot 3438,0) = 1577 \text{ kg.}$$

Die durch diesen Horizontalschub erzeugten Stabkräfte ergeben sich nach 1 in ganz gleicher Weise wie diejenigen unter a), und da sie alle $\frac{1577}{8918} = 0,17683$ mal so groß sind, so verzichten wir darauf, sie einzeln anzuführen. Man sieht aber, daß in praktischen Fällen, wenn der Obergurt mehr als der vor unmittelbarer Einwirkung der Sonne geschützte Untergurt erwärmt wird, dies einer dem mittleren τ entsprechenden gleichen Temperaturänderung aller Stäbe gegenüber günstig auf die Beiträge der Temperaturänderungen zu dem Horizontalschub und den Stabkräften wirkt.

c) Ausweichen der Widerlager. Durch eine positive oder negative Änderung der Spannweite um Δl cm entsteht nach Gleichung 10 des Beispiels 108 ein Horizontalschub:

$$H = - 10340 \Delta l \text{ kg,}$$

also speziell durch $\Delta l = 1$ cm:

$$H = - 10340 \text{ kg.}$$

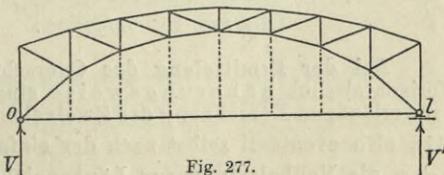
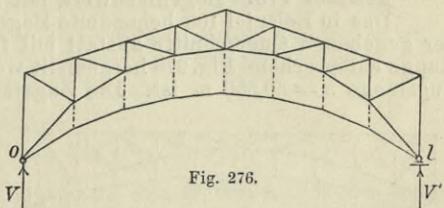
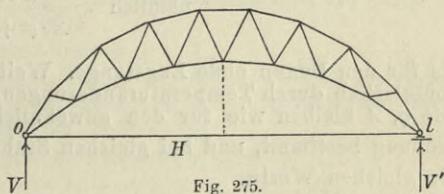
Die hierdurch bedingten Änderungen der Stabkräfte ergeben sich aus 1 ganz wie diejenigen unter a), und da sie sämtlich $\frac{-10340 \Delta l}{8918} = - 1,1595 \Delta l$ beziehungsweise $- 1,1595$ mal so groß sind, so verzichten wir darauf, sie einzeln anzuführen.

Wenn mit einer Temperaturerhöhung der Stäbe infolge des wachsenden Horizontalschubs eine geringe Zunahme der Spannweite erfolgen sollte, so wirkt dieser Einfluß nach a) und c) auf den Horizontalschub und alle Stabkräfte dem Einflusse der Temperaturerhöhung entgegengesetzt.

Aufgabe 38. Bogenfachwerke mit Zugstange.

Allgemeines über Bogenfachwerke mit Zugstange wurde in § 22 gegeben. Von Bogenfachwerken mit Zugstange interessieren hier nur Zweigelenkbogen, da für Dreigelenkbogen (die überdies bisher als Fachwerke nicht ausgeführt wurden) der Horizontalschub und die Stabkräfte ganz wie für die entsprechenden Dreigelenkbogen ohne Zugstange bestimmt sind. Die Berechnung von Zweigelenkbogen mit Zugstange unterscheidet sich von derjenigen gewöhnlicher Zweigelenkbogen von sonst gleicher Anordnung nur durch den Ausdruck des Horizontalschubs H . Es soll dieser Ausdruck für Zweigelenkbogen mit Zugstange ohne überzählige Bogenstäbe durch beliebige Belastung, sowie durch gleiche Temperaturänderungen τ aller Bogenstäbe bei einer beliebigen Temperaturänderung τ_s der horizontalen oder gesprengten Zugstange (womit im allgemeinen auch Änderungen der Spannweite verbunden sind) bestimmt werden.

Für beliebige Bogenfachwerke mit zwei Gelenken in gleicher Höhe ohne



überzählige Bogenstäbe hat man nach § 57, 26) durch beliebige Belastung, gleiche Temperaturänderungen τ aller Bogenstäbe und eine Änderung Δl der Spannweite:

$$H = - \frac{\Sigma c \varrho A - l E \alpha \tau + E \Delta l}{\Sigma c \varrho^2}.$$

Da nun nach § 22, 3), wenn z die Länge und F_z den Querschnitt der horizontalen oder gesprengten Zugstange bedeuten:

$$\Delta l = \frac{H z}{E F_z} + l \alpha \tau,$$

so ergibt sich durch Einsetzen und Auflösen der entstehenden Gleichung nach H unter Voraussetzung gleichen Materials von Bogen und Zugstange:

$$H = - \frac{\Sigma c \varrho A - l E \alpha (\tau - \tau_z)}{\Sigma c \varrho^2 + \frac{z}{F_z}}, \quad 1$$

Wir haben also speziell durch beliebige Belastung:

$$H = - \frac{\Sigma c \varrho A}{\Sigma c \varrho^2 + \frac{z}{F_z}} \quad 2$$

und durch Temperaturänderungen τ , τ_z von Bogen und Zugstange:

$$H = \frac{l E \alpha (\tau - \tau_z)}{\Sigma c \varrho^2 + \frac{z}{F_z}}, \quad 3$$

worin die Summen Σ sich nur auf den Bogen, nicht auf die Zugstange, beziehen.

Der Ausdruck 2 für beliebige Belastungen unterscheidet sich von dem entsprechenden Ausdruck für den gewöhnlichen Zweigelenkbogen nur dadurch, daß im Nenner $\frac{z}{F_z}$ zu $\Sigma c \varrho^2$ getreten ist. Der Horizontalschub ist also bei gleicher Stabanordnung und gleichen Stabquerschnitten jetzt kleiner,

$$\text{nämlich } \frac{\Sigma c \varrho^2}{\Sigma c \varrho^2 + \frac{z}{F_z}} \text{ mal so groß}$$

als für den Bogen ohne Zugstange. Weit erheblicher vermindert sich der Horizontalschub durch Temperaturänderungen, er würde für $\tau_z = \tau$ gleich Null sein. Die ϱ , A bleiben wie für den gewöhnlichen Zweigelenkbogen gleicher Stabanordnung bestimmt, und bei gleichen Stabquerschnitten F haben auch die $c = \frac{s}{F}$ die gleichen Werte.

Beispiel 116. Bogenfachwerk mit Zugstange.

Das in Beispiel 108 behandelte Bogenfachwerk Fig. 269 soll ohne Änderung der gegebenen Querschnitte anstatt mit festen Endgelenken als Bogen mit Zugstange entsprechend Fig. 278 hergestellt werden, wobei die Länge der gesprengten Zugstange $z = 30,350$ m ist. Die Zugstange soll nicht über 1000 kg pro qcm beansprucht werden. Den Querschnitt F_z der Zugstange festzustellen und die Ausdrücke des Horizontalschubs H durch beliebige Belastung und durch gleiche Temperaturänderung τ der Bogenstäbe bei einer beliebigen Temperaturänderung τ_z der Zugstange soweit möglich in Zahlen anzugeben.

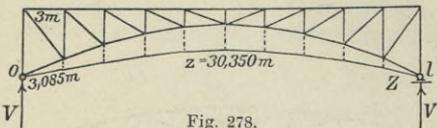


Fig. 278.

Bei der Ermittlung des Querschnitts der Zugstange kann der größte Horizontalschub näherungsweise eingeführt werden, beispielsweise wie bei der vorläufigen Berechnung des Zweigelenkbogens ohne Zugstange (§ 58, Beispiel 117), also eventuell selbst nach der einfachsten Gleichung $H = \frac{q l^2}{8f}$, wenn $q = g + p$ die Vollbelastung pro Längeneinheit Träger bedeutet. Da sich in Beispiel 114 als größter Horizontalschub durch Belastung des Bogens ohne Zugstange ergab:

$$H = 29542 + 86734 = 116276 \text{ kg,}$$

während durch die Zugstange eine erhebliche Verringerung eintritt und die Vergrößerung durch Temperaturänderungen weit kleiner als beim Bogen ohne Zugstange ist, so wollen wir von vorstehendem Werte ausgehen. Die größte Beanspruchung der Zugstange ergibt sich damit in den Endfeldern, wo bei $\lambda = 3$ m Feldlänge die Stangenlänge $\zeta = 3,085$ m, nach § 22, 1):

$$Z = H \frac{\zeta}{\lambda} = 116\,276 \frac{3,085}{3} = 119\,570 \text{ kg.}$$

Der Querschnitt der Zugstange wäre hiernach nicht über $\frac{119\,570}{1000}$ zu erwarten, er sei geeigneter Anordnung entsprechend gewählt $F_z = 112$ qcm.

Wir haben nun in den Formeln der vorigen Aufgabe:

$$\frac{z}{F_z} = \frac{3035}{112} = 27,10$$

und mit dem schon in Beispiel 108 berechneten Werte $\Sigma c \varrho^2 = 207,94$:

$$\Sigma c \varrho^2 + \frac{z}{F_z} = 207,94 + 27,10 = 235,04.$$

Demgemäß ergeben sich nach der vorigen Aufgabe durch beliebige Belastung:

$$H = - \frac{\Sigma c \varrho A}{235,04},$$

und durch Temperaturänderungen τ , τ_z , von Bogen und Zugstange, wenn wieder $Ea = 2150000 \cdot 0,0000115 = 24,725$ gesetzt wird (Flußeisen):

$$H = \frac{3000 \cdot 24,725}{235,04} (\tau - \tau_z) = 315,58 (\tau - \tau_z).$$

Die c , ϱ bleiben wie in Beispiel 108, die A wie in den Beispielen 109, 110 bestimmt.

Der Horizontalschub durch beliebige Belastungen ist also jetzt

$$\frac{207,94}{235,04} = 0,8847 \quad \text{mal so groß}$$

als für den Zweigelenkbogen ohne Zugstange, beispielsweise durch das Eigengewicht allein mit Rücksicht auf Beispiel 109:

$$H = 29\,542 \cdot 0,8847 = 26\,136 \text{ kg}$$

und durch beliebige Belastung der Fahrbahn, wenn $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{10}$ die entsprechenden Knotenpunktlasten bei den Vertikalen 0, 1, 2, \dots , 10 bedeuten, mit Rücksicht auf die Formel 8 des Beispiels 110:

$$H = 0,0214 (P_0 + P_{10}) + 0,3418 (P_1 + P_9) + 0,6287 (P_2 + P_8) + 0,8799 (P_3 + P_7) + 1,0646 (P_4 + P_6) + 1,1449 P_5.$$

Auch die Ordinaten der Einflußlinie für H sind sämtlich 0,8847 mal so groß als in Beispiel 110 oder Fig. 270 (S. 424).

Nehmen wir an, daß die größte Temperaturdifferenz zwischen Bogen und Zugstange $\tau - \tau_z = 10^0$, so folgt der größte Horizontalschub überhaupt:

$$H = 116\,276 \cdot 0,8847 + 3155,8 = 106\,025 \text{ kg}$$

und die größte Beanspruchung der Zugstange:

$$Z = 106\,025 \frac{3,085}{3} = 109\,029 \text{ kg}$$

oder pro qcm $\frac{109\,029}{112} = 973$ kg, während bis 1000 kg erlaubt waren. Wollte man diesem Werte noch näher kommen, so wäre die Berechnung mit vorstehendem Z wie oben noch einmal vorzunehmen. Bezüglich der Berücksichtigung von Biegungsspannungen s. Beispiel 50.

Bemerkungen. Die Längen z der Zugstange und ihrer Abschnitte ζ in den Endfeldern wurden oben nicht berechnet, um die Allgemeinheit des Vorgehens zu wahren. Sie haben sich im vorliegenden Falle wie folgt ergeben. Die Knotenpunkte der Zugstange liegen auf einer Parabel, sodaß ihre Höhen über der Verbindungsgeraden der Gelenke nach § 19, 8) mit $l = n\lambda = 10\lambda$, $x = m\lambda$, $f = 2$ m:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) = \frac{4f}{n^2} m \cdot (n-m) = \frac{8}{100} m(10-m),$$

das heißt für

$m =$	1	2	3	4	5
$y =$	0,72	1,28	1,68	1,92	2 m.

Damit folgen die Längen der Zugstangenabschnitte von den Endfeldern an:

$$\sqrt{3^2 + 0,72^2} = 3,085 \text{ m}$$

$$\sqrt{3^2 + 0,56^2} = 3,052 \text{ „}$$

$$\sqrt{3^2 + 0,40^2} = 3,027 \text{ „}$$

$$\sqrt{3^2 + 0,24^2} = 3,010 \text{ „}$$

$$\sqrt{3^2 + 0,08^2} = 3,001 \text{ „}$$

$$z = 15,175 \cdot 2 = 30,350 \text{ m.}$$

Für unsern Zweck hätte es natürlich genügt, die Zugstangenlänge nach der Näherungsformel für flache Parabelbogen (S. 110)

$$z = l + \frac{8 f^2}{3 l}$$

zu berechnen: $z = 30 + \frac{8 \cdot 2^2}{3 \cdot 30} = 30,356 \text{ m.}$

Aufgabe 39. Durchlaufende (kontinuierliche) Bogenfachwerke von einfach statisch unbestimmter Art.

Für durchlaufende Bogenfachwerke von beliebig vielen Öffnungen, bestehend aus Zweigelenkbogen (vergl. § 24), ohne überzählige Stäbe den Horizontalschub H durch beliebige Belastung, durch beliebige Temperaturänderungen τ aller Stäbe und durch eine Änderung ΔL der Summe aller Spannweiten $L = l_1 + l_2 + \dots + l_n$ festzustellen.

Die Trägerart ist einfach statisch unbestimmt, da durch Entfernung des Horizontalschubs n statisch bestimmte Balkenfachwerke entstünden. Man hat daher nach § 57, 11) durch beliebige Belastung:

$$H = - \frac{\sum c \rho A}{\sum c \rho^2}, \quad 1$$

durch beliebige Temperaturänderungen τ aller Stäbe:

$$H = - E \alpha \frac{\sum s \rho \tau}{\sum c \rho^2} \quad 2$$

und durch eine Änderung ΔL der Summe aller Spannweiten:

$$H = - \frac{E \Delta L}{\sum c \rho^2} \quad 3$$

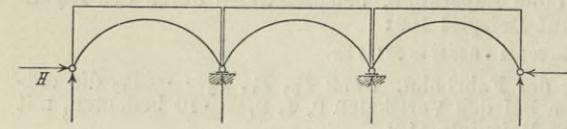


Fig. 279.

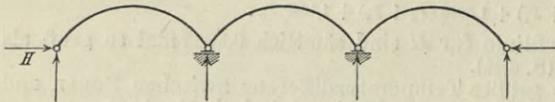


Fig. 280.

In diesen Gleichungen beziehen sich die Summen Σ auf die Stäbe aller Öffnungen, während die Stabkräfte ρ durch $H = 1$ allein und die Stabkräfte A durch die gegebene Belastung bei $H = 0$ die gleichen Werte wie für die einfachen Zweigelenkbogen ihrer Öffnungen haben.

Sind die Temperaturänderungen für alle Stäbe je einer Öffnung l_1, l_2, \dots, l_n von gleichem Werte $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, so ergibt 2 mit Rücksicht auf § 57, 25):

$$H = E \alpha \frac{l_1 \tau_1 + l_2 \tau_2 + \dots + l_n \tau_n}{\sum c \rho^2} \quad 4$$

und, wenn alle Temperaturänderungen den gleichen Wert τ haben:

$$H = \frac{L E \alpha \tau}{\sum c \rho^2}. \quad 5$$

Nach 1 und 2 tragen die Belastungen und Temperaturänderungen aller Öffnungen zum Horizontalschub bei, doch sind die Beiträge jeder bestimmten Öffnung, weil $\sum c \rho^2$ nun alle Öffnungen umfaßt, bedeutend kleiner, als wenn der

Zweigelenkbogen dieser Öffnung allein vorhanden wäre, bei lauter gleichen Öffnungen mit gleicher Anordnung ihrer Stäbe wären sie $1/n$ so groß. In letzterem Falle würden durch gleiche Belastungen wie durch gleiche Temperaturänderungen aller Öffnungen die gleichen Werte des Horizontalschubs wie beim einfachen Zweigelenkbogen entstehen (weil sowohl die Zähler als die Nenner in 1 und 2 n -mal so groß wären). Dagegen ergibt 3 den Horizontalschub durch Ausweichen eines Widerlagers um einen bestimmten Betrag ΔL bedeutend kleiner als bei einfachen Zweigelenkbogen der vorhandenen Anordnungen, bei lauter gleichen Öffnungen mit gleicher Anordnung ihrer Stäbe $1/n$ so groß (vergl. am Schlusse des § 24, S. 196).

Beispiel 117. Durchlaufendes Bogenfachwerk.

Für ein durchlaufendes Bogenfachwerk Fig. 281, bestehend aus drei gleichen Zweigelenkbogen der in Beispiel 108 gewählten Stabanordnung und Stabquerschnitte Fig. 269, zu bestimmen: a) Den Horizontalschub H durch beliebige Belastung aller Öffnungen, speziell auch durch das Eigengewicht von $g = 1250$ kg pro Meter, wovon $g_x = 600$ kg auf die Knotenpunkte des Obergurtes und $g_z = 650$ kg auf diejenigen des Untergurtes kommen; b) die Einflußlinien des Horizontalschubs und der Vertikalreaktionen der Stützpunkte; c) die Horizontalschübe durch gleiche Temperaturänderungen τ aller Stäbe, sowie durch verschiedene Temperaturänderungen τ_1, τ_2, τ_3 in den drei Öffnungen l_1, l_2, l_3 ; d) den Horizontalschub durch eine Änderung der Spannweitensumme L um ΔL .

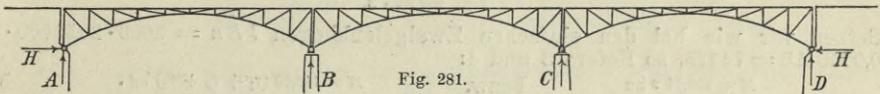
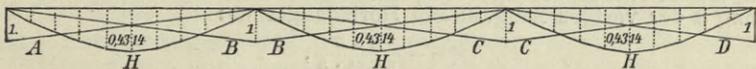


Fig. 281.



Einflusslinien

Fig. 282.

Da nach Beispiel 108 für jede der drei Öffnungen $\Sigma c \varrho^2 = 207,94$, so hat man für den ganzen durchlaufenden Bogen:

$$\Sigma c \varrho^2 = 207,94 \cdot 3 = 622,82.$$

a) Gleichung 1 der vorigen Aufgabe liefert für beliebige Belastung aller Öffnungen:

$$H = - \frac{\Sigma c \varrho A}{207,94 \cdot 3}, \quad 1$$

worin die $c \varrho, A$ jeder Öffnung in den Beispielen 108, 109, 110 bestimmt sind. Für das Eigengewicht allein hat man nach Beispiel 109 in jeder Öffnung $\Sigma c \varrho A = -3071499 \cdot 2$, womit der Horizontalschub durch das Eigengewicht allein:

$$H = \frac{3071499 \cdot 2 \cdot 3}{207,94 \cdot 3} = 29542 \text{ kg,}$$

wie beim einfachen Zweigelenkbogen des Beispiels 108, was nach der vorigen Aufgabe im voraus bekannt war. Da sich die Formel 1 von dem entsprechenden Ausdruck für jenen einfachen Zweigelenkbogen nur dadurch unterscheidet, daß im Nenner $207,94 \cdot 3$ an Stelle von $207,94$ getreten ist, so haben wir durch beliebige Belastung der Fahrbahn mit Rücksicht auf die Gleichung 8 des Beispiels 110:

$$3H = \left[0,0242 (P_0 + P_{10}) + 0,3863 (P_1 + P_9) + 0,7106 (P_2 + P_8) + 0,9946 (P_3 + P_7) + 1,2033 (P_4 + P_6) + 1,2941 P_5 \right]_1^3, \quad 2$$

worin die Grenzen der Klammer andeuten, daß der Klammerausdruck für alle drei Öffnungen anzusetzen ist, und P_0, P_1, \dots, P_{10} die Knotenpunktlasten der Fahrbahn bei den Vertikalen 0, 1, \dots 10 dieser Öffnungen bezeichnen.

b) Nach Formel 2 oder dem zuvor Gesagten sind die Werte von H für $P = 1$ an bestimmten Stellen der Fahrbahn, d. h. die Ordinaten b der Einflußlinie des Horizontalschubs für die betreffenden Abszissen a , ein Drittel so groß wie bei den entsprechenden einfachen Zweigelenkbogen (Maßstab beliebig). Wir haben in jeder Öffnung:

für $a = 0$ oder 30 m	3 $b = 0,0242$	für $a = 9$ oder 21 m	3 $b = 0,9946$
„ $a = 3$ „ 27 „	3 $b = 0,3863$	„ $a = 12$ „ 18 „	3 $b = 1,2033$
„ $a = 6$ „ 24 „	3 $b = 0,7106$	„ $a = 15$ „	3 $b = 1,2941$

Die Einflußlinie der Vertikalreaktion einer Stütze ergibt sich nach § 24 (S. 194), wenn man bei diesem Stützpunkt die Ordinate $b = 1$ anträgt und vom Endpunkt derselben gerade Linien nach den Punkten der Abszissenachse bei den links und rechts zunächst folgenden Stützpunkten zieht. Die verlangten Einflußlinien sind hiernach in Fig. 282 verzeichnet.

c) Durch gleiche Temperaturänderungen τ aller Stäbe hat man nach Gleichung 5 der vorigen Aufgabe mit $L = 3l$

$$H = - \frac{l E \alpha \tau}{207,94}, \quad 3$$

wie für den einfachen Zweigelenkbogen des Beispiels 108, was wir wieder im voraus wissen konnten. Beliebige Temperaturänderungen τ_1, τ_2, τ_3 in den Öffnungen l_1, l_2, l_3 ergeben nach Gleichung 4 der vorigen Aufgabe:

$$H = l E \alpha \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3}{207,94 \cdot 3}. \quad 4$$

Setzen wir wie bei den einfachen Zweigelenkbogen $l E \alpha = 3000 \cdot 2150000 \cdot 0,0000115 = 74175$, so liefern 3 und 4:

$$H = 356,71 \tau \text{ kg} \quad \text{bezw.} \quad H = 118,90 (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \text{ kg}. \quad 5$$

d) Durch eine Änderung der Spannweitensumme um ΔL cm entsteht nach Gleichung 3 der vorigen Aufgabe ein Horizontalschub:

$$H = - \frac{E \Delta L}{207,94 \cdot 3},$$

also mit $E = 2150000$ kg:

$$H = - 3447 \Delta L,$$

$\frac{1}{3}$ soviel wie für ein gleiches ΔL beim einfachen Zweigelenkbogen des Beispiels 108.

§ 58. Vorläufige Berechnung statisch unbestimmter Bogenfachwerke.

In den abgeleiteten Formeln für die überzähligen Größen statisch unbestimmter Bogenfachwerke treten die Stabquerschnitte auf (§ 57). Diese müssen also, wenn sie sich nicht auf Grund von Erfahrungen annähernd angeben lassen, zunächst durch eine vorläufige Berechnung festgestellt werden. Hierbei sind verschiedene Wege möglich.

Einmal kann man von Beziehungen für vollwandige Bogen ausgehen, die früher allgemein selbst für endgültige Berechnungen von Bogenfachwerken verwendet wurden, wenn diese eine ausgesprochene Achse bis zu den Stützen besaßen. Die letztere Voraussetzung pflegt bei Bogenfachwerken ohne Gelenke zuzutreffen, und kämen dann für den Horizontalschub H und die Endmomente M, M' in erster Linie die in § 21 für parabolische Bogen gegebenen Ausdrücke in Frage, und zwar, unter Vernachlässigung des Einflusses der Achsialkraft, mit $\varepsilon = 0$ (oder mit geschätztem ε). Für Bogenfachwerke mit zwei Gelenken in der Achse sind neben $M = M' = 0$ nach § 20 die entsprechenden Ausdrücke des Horizontalschubs durch beliebige Belastung:

$$H = \frac{5}{8fl^3} \sum_0^l Pa(l-a)(l^2 + la - a^2), \quad 1$$

durch eine gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit auf der ganzen Spannweite und durch verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten von u, u' pro Längeneinheit auf der ersten und zweiten Hälfte der Spannweite:

$$H = \frac{ul^2}{8f}, \quad H = \frac{u+u'}{16} \frac{l^2}{f}, \quad 2$$

durch eine gleichmäßige Temperaturänderung τ des ganzen Bogens und durch eine Änderung Δl der Spannweite:

$$H = \frac{15cE}{8f^2} \alpha \tau, \quad H = -\frac{15cE}{8f^2} \frac{\Delta l}{l}. \quad 3$$

Anstatt mit 1 könnte man versuchen, mit der in § 20 erwähnten einfacheren Näherungsformel auszukommen:

$$H = \frac{35}{48fl} \sum_0^l Pa(l-a), \quad a$$

wonach gemäß § 18 an Stelle von 2 treten würden:

$$H = \frac{35ul^2}{288f}, \quad H = \frac{35(u+u')l^2}{576f}. \quad b$$

Nun besitzt aber gerade das gewöhnlichste Zweigelenkbogenfachwerk Fig. 242, 248 keine ausgesprochene Achse bis zu den Stützpunkten, so daß für dieses die Verwendbarkeit vorstehender Formeln auch für vorläufige Berechnungen stets als ausgeschlossen oder zweifelhaft galt.

Die zweite, gegenwärtig meist empfohlene Methode der vorläufigen Berechnung von Bogenfachwerken geht von den Beziehungen für die überzähligen Größen der Fachwerke selbst aus. Man vernachlässigt den Einfluß der Füllungsglieder, führt konstante Querschnitte f_o, f_u des Obergurts und Untergurts ein, und erreicht damit, daß die einzelnen Stabquerschnitte aus den Formeln für die überzähligen Größen wegfallen. So liefern die Ausdrücke § 57, 27), 8) mit

$$\beta = \frac{f_o}{f_u} \quad 4$$

für Zweigelenkbogenfachwerke durch beliebige Belastung:

$$H = -\frac{\sum_0^l s \varrho A + \beta \sum_u^l s \varrho A}{\sum_0^l s \varrho^2 + \beta \sum_u^l s \varrho^2}, \quad 5$$

durch eine gleichmäßige Temperaturänderung τ aller Stäbe¹:

$$H = \frac{l f_o E \alpha \tau}{\sum_0^l s \varrho^2 + \beta \sum_u^l s \varrho^2}, \quad 6$$

¹ Genauer als die gebräuchliche Formel 6 könnte, abgesehen von dem schon am Schlusse des Beispiels 108 Gesagten, erscheinen:

$$H = -\frac{\sum_0^l s \varrho + \sum_u^l s \varrho}{\sum_0^l s \varrho^2 + \beta \sum_u^l s \varrho^2} f_o E \alpha \tau.$$

Diese Formel erweist sich jedoch z. B. für das den folgenden Vergleichen zugrunde liegende Fachwerk Fig. 269 als unbrauchbar (s. Schlußbemerkungen zu Beispiel 119).

Zweigenbogenfachwerk Fig. 269. Tabelle IV. Horizontalschub. Vergleiche.

Horizontalschub <i>H</i>	durch das Eigengew. von <i>g</i> = 1250 kg/m	durch eine Einzellast <i>P</i> = 1 bei					durch eine Temperaturänderung um τ_0	durch eine Änderung der Spannweite um Δl cm
		$a = 0$ oder 30 m	$a = 3$ oder 27 m	$a = 6$ oder 24 m	$a = 9$ oder 21 m	$a = 12$ oder 18 m		
1. Möglichst genaue Werte (Beispiele 108, 109, 110)	29 542 kg	0,0242	0,3863	0,7106	0,9946	1,2033	1,2941	356,71 τ kg — 10 340 Δl kg
2. Bei Vernachlässigung des Einflusses der Füllungslieder (Bemerk. zu den Beispielen 108, 109, 110)	27 750 kg — 6,07%	0	0,3361 — 13,00%	0,6546 — 7,88%	0,9355 — 5,94%	1,1396 — 5,29%	1,2286 — 5,06%	454,27 τ kg + 27,35%
3. Bei Vernachlässigung des Einflusses der Füllungslieder und Einführung eines konstanten Verhältnisses $\beta = \frac{f_0}{f_n}$ der Gurtungsquerschnitte (Beispiel 119), nämlich: wie in den zwei Mittelfeldern $\beta = 1$, $f_0 = 200$ qcm wie im Mittel $\beta = 0,75$, $f_0 = 150$ qcm wie in den zwei Endfeldern $\beta = 0,5$, $f_0 = 100$ qcm	27 347 kg — 7,43%	0	0,3152 — 18,41%	0,6406 — 9,85%	0,9196 — 7,54%	1,1268 — 6,39%	1,2011 — 7,19%	478,86 τ kg + 34,24%
	28 318 kg — 4,14%	0	0,3224 — 16,54%	0,6604 — 7,06%	0,9509 — 4,93%	1,1706 — 2,72%	1,2575 — 2,83%	419,62 τ kg — 17,63%
	29 670 kg + 0,43%	0	0,3325 — 13,93%	0,6882 — 3,15%	0,9950 + 0,04%	1,2322 + 2,40%	1,3367 + 3,29%	336,39 τ kg — 5,70%
4. Nach obigen Formeln <i>a</i> und <i>b</i> (Bemerk. zu Beisp. 118) mit $f = 4,625$ m, dieser Pfeil dem Schwerpunkt des Scheitelquerschnittes entsprechend	29 561 kg + 0,06%	0	0,4257 + 10,20%	0,7568 + 6,50%	0,9932 — 0,14%	1,1351 — 5,67%	1,1824 — 8,63%	9751 Δl kg + 5,70%
5. Nach obigen Formeln 1 und 2 (Beispiel 118) mit $f = 4,625$ m (dies f dem Schwerpunkt d. Scheitelquerschnittes entsprechend), die Beiträge von τ , Δl nach 3 mit c gleich dem Trägheitsmoment des Scheitelquerschnittes, 1 562 500 cm ⁴	30 405 kg + 2,92%	0	0,3978 + 2,98%	0,7524 + 5,88%	1,0301 + 3,57%	1,2065 + 0,27%	1,2669 — 2,10%	338,64 τ kg — 5,07%
								9815 Δl kg + 5,08%

und durch eine Änderung Δl der Spannweite:

$$H = - \frac{f_o E \Delta l}{\sum_o s q^2 + \beta \sum_u s q^2}, \quad 7$$

worin die Summen \sum_o , \sum_u alle Stäbe des Obergurts und Untergurts umfassen. Das Verhältnis β liegt meist zwischen 0,5 und 1, bei Bogenfachwerken mit ausgesprochener Achse bis zu den Stützpunkten nahe bei 1.

Welche der beiden vorläufigen Berechnungen am zuverlässigsten ist, läßt sich im einzelnen Falle durch Vergleiche mit den genauesten Resultaten feststellen. Man könnte geneigt sein, der ersten für Bogenfachwerke mit ausgesprochener Achse bis zu den Stützen, der zweiten in andern Fällen den Vorzug zu geben, wobei in Betracht kommt, daß beim zweiten Verfahren die nötige Schätzung von β unbequem ist. Die Zusammenstellung S. 440 von Ergebnissen unserer zahlenmäßig (nicht graphisch) berechneten Beispiele zeigt jedoch, daß für das Bogenfachwerk mit horizontalem Obergurt Fig. 269 (S. 412) die Formeln 1 bis 3 erheblich genauere Werte des Horizontalschubs H lieferten als 5 bis 7 und auch als die ursprünglichen Ausdrücke § 57, 26), 27) bei Vernachlässigung des Einflusses der Füllungsglieder, ohne Einführung mittlerer Gurtungsquerschnitte. Nebenbei zeigt sich, daß man die Resultate der Formeln für vollwandige Bogen nicht mit den Ergebnissen der Formeln für Fachwerkbogen unter Vernachlässigung des Einflusses der Füllungsglieder vergleichen darf, wenn man ihre Anwendbarkeit bei Fachwerkbogen kontrollieren will, da die letzteren Formeln bedeutend ungenauer als die ersteren sein können.

Da die Stabkräfte von Bogenfachwerken mit zwei Gelenken sich ausdrücken lassen:

$$S = A + H q, \quad 8$$

worin A von H unabhängig ist und von entgegengesetztem Vorzeichen wie H zu sein pflegt, so erkennt man, daß die Fehler im Werte des Horizontalschubs sich in erhöhtem Maße auf die Werte der Stabkräfte fortpflanzen können. Für die Beiträge der Temperaturänderungen τ und etwaiger Änderungen Δl der Spannweite hat man $A = 0$, so daß nach 8 die Fehler dieser Beiträge zu den Stabkräften proportional den Fehlern der zugehörigen Werte des Horizontalschubs werden. Die folgende Tabelle V, welche sich wie Tabelle IV auf das Zweigelenkbogenfachwerk Fig. 269 bezieht, zeigt im Einklang mit diesen Schlüssen, daß sich die vorläufige Berechnung auf Grund der Fachwerkformeln 5 bis 7 gegenüber derjenigen auf Grund der Vollwandformeln 1 bis 2 bezüglich der Stabkräfte noch weit ungünstiger als bezüglich des Horizontalschubs darstellt. Da die Vollwandformeln überdies viel einfacher zu verwenden sind (vergl. die Beispiele 118 und 119), so würden wir sie für die vorläufige Berechnung in vielen Fällen vorziehen. Jedenfalls aber ist für die endgültige Berechnung das genaueste Verfahren zu verwenden.

Zweigelenkbogenfachwerk Fig. 269. Tabelle V. Stabkräfte. Vergleiche.

Stabkräfte $S = A + Hq$ in kg		V_0	X_3	Z_3	D_3	V_3	V_5
durch das Eigengewicht von $g = 1250$ kg pro m allein	möglichst genau mit $H = 29542$ kg (Beispiel 109)	— 3595	— 9974	— 25014	5499	— 4302	— 1800
	mit $H = 27347$ kg (— 7,43 %) entsprechend der Fachwerkformel 5 für $\beta = 1$	— 4648 — 29,3%	— 13877 — 39,1%	— 20587 + 17,7%	7646 + 39,9%	— 5277 — 22,7%	— 1800 0 %
	mit $H = 30405$ kg (+ 2,92 %) entsprechend der Vollwandformel 2 für $f = 4,625$ m	— 3181 + 11,5%	— 8440 + 15,4%	— 26755 — 7,0%	4655 — 15,3%	— 3919 + 8,9%	— 1800 0 %
durch die Verkehrslast Fig. 269 allein	möglichst genau mit $H = 64391$ kg (Beispiel 111)	— 6642	— 48084	— 43323	25616	— 21565	— 3250
	mit $H = 59708$ kg ¹ (— 7,27 %) entsprechend der Fachwerkformel 5 für $\beta = 1$	— 8890 — 33,8%	— 52410 — 9,0%	— 33877 + 21,8%	30196 + 17,9%	— 23645 — 9,6%	— 3250 0 %
	mit $H = 65637$ kg ¹ (+ 1,94 %) entsprechend der Vollwandformel 1 für $f = 4,625$ m	— 6044 + 9,0%	— 41868 + 12,9%	— 45836 — 5,8%	24397 — 4,8%	— 21012 + 2,6%	— 3250 0 %
durch das Eigengewicht von $g = 1250$ kg pro m und die Verkehrslast Fig. 269	möglichst genau mit $H = 93933$ kg (Beispiele 109, 111)	— 10237	— 58058	— 68337	31115	— 25867	— 5050
	mit $H = 87055$ kg (— 7,32 %) entsprechend der Fachwerkformel 5 für $\beta = 1$	— 13538 — 32,2%	— 66287 — 14,2%	— 54464 + 20,3%	37842 + 21,6%	— 28922 — 11,8%	— 5050 0 %
	mit $H = 96042$ kg (+ 2,24 %) entsprechend den Vollwandformeln 1, 2 für $f = 4,625$ m	— 9225 + 9,9%	— 50308 + 13,3%	— 72591 — 6,2%	29052 — 6,6%	— 24931 + 3,6%	— 5050 0 %
durch eine Temperatur- änderung τ allein	möglichst genau mit $H = 356,71$ τ kg (Beispiel 115)	171,22 τ	634,23 τ	— 719,48 τ	— 348,86 τ	158,38 τ	0
	mit $H = 478,86$ τ kg (+ 34,24 %) entsprechend der Fachwerkformel 6 mit $\beta = 1$, $f_0 = 200$ qcm	229,85 τ 34,2%	851,41 τ 34,2%	— 965,86 τ 34,2%	— 468,33 τ 34,2%	212,61 τ 34,2%	0
	mit $H = 338,64$ τ kg (— 5,07 %) entsprechend der Vollwandformel 3 mit $f = 4,625$ m, $c = 1562500$ cm ⁴	162,55 τ 5,1%	602,10 τ 5,1%	— 683,04 τ 5,1%	— 331,19 τ 5,1%	150,36 τ 5,1%	0

¹ Diese Werte ergeben sich mit Rücksicht auf die durch Tabelle IV bestimmten Ordinaten der Einflußlinien wie in Beispiel 111:

$$H = 0,6406 \cdot 12750 + 0,9196 (17000 + 3250) + 1,1268 (12750 + 13000) + 1,2011 \cdot 3250 = 59708 \text{ kg,}$$

$$H = 0,7524 \cdot 12750 + 1,0301 (17000 + 3250) + 1,2065 (12750 + 13000) + 1,2669 \cdot 3250 = 65637 \text{ kg.}$$

Es wäre indessen voreilig, aus den in Tabelle IV und V zusammengestellten Ergebnissen schließen zu wollen, daß die vorläufige Berechnung auf Grund von Formeln für vollwandige Bogen ganz allgemein den Vorzug vor derjenigen auf Grund von Fachwerkformeln verdient. In Beispiel 124 sind die Resultate der beiden Berechnungen für den Zweigelenkbogen Fig. 293 angeführt (bei welchem in der Mitte wegen zu geringer Konstruktionshöhe ein vollwandiges Stück eingeschaltet ist). Der Vergleich der Werte des Horizontalschubs H in den Kolonnen 2, 3 und 5 der dortigen zweiten Tabelle zeigt, daß für diesen Fall die obigen Formeln für vollwandige Bogen erheblich weniger genaue Werte von H durch Belastung als die Fachwerkformeln lieferten. Die Formel a) ergab dort wie hier weit schlechtere Resultate wie 1, während die ihr entsprechenden Ausdrücke b) für gleichmäßig verteilte Lasten auf die ganze oder halbe Spannweite in beiden Beispielen zu fast vollständig genauen Werten führte.

Neuerdings ist die Frage nach dem Einfluß von Vernachlässigungen und Fehlern bei der Berechnung statisch unbestimmter Träger auch vom Standpunkte der mathematischen Fehlertheorie in Angriff genommen worden¹. Ein vorläufiges Ergebnis war: „Über die Vernachlässigung der Formänderungen der Füllungsstäbe bei Fachwerkträgern läßt sich nur sagen, daß der Einfluß dieser Fehlerquelle sich mit der Systemart und Belastungsart ändert, weshalb allgemeine Angaben über die Zulässigkeit oder Unzulässigkeit dieser Vernachlässigung nicht möglich sind. — Der Grund, weshalb erfahrungsgemäß ihr Einfluß vielfach so gering ist, liegt in gewissen Systemeigenschaften begründet, durch die bei der Quotientenform der X der Fehler gering bleibt, wie es z. B. in besonderem Maße bei hohen Sichelträgern der Fall ist.“ Ähnlich war das Ergebnis bezüglich der Einführung ungenauer Querschnitte, also beispielsweise eines konstanten Verhältnisses $\beta = f_o : f_u$.

Beispiel 118. Zweigelenkbogenfachwerk. Vorläufige Berechnung des Horizontalschubs nach Formeln für vollwandige Bogen.

Die im nächsten Beispiel verlangten Größen nach den in § 58 angeführten Formeln 1 bis 3 zu berechnen, wenn der Pfeil f dem Schwerpunkt des Scheitelquerschnitts entsprechend gewählt wird $f = 4,625$ m.

Durch ein gleichmäßig verteiltes Eigengewicht von $g = 1250$ kg pro m Träger erhält man nach § 58, 2):

$$H = \frac{g l^2}{8 f} = \frac{1250 \cdot 30^2}{8 \cdot 4,625} = 30405 \text{ kg}.$$

Eine Einzellast P bei a liefert nach § 58, 1):

$$H = \frac{5}{8 f l^3} P a (l - a) (l^2 + l a - a^2), \quad 1$$

oder, wenn λ die Feldlänge, n die Felderzahl bedeuten, mit $l = n \lambda$, $a = m \lambda$:

$$H = \frac{5 \lambda}{8 f n^3} P m (n - m) (n^2 + n m - m^2), \quad 2$$

¹ Pirlet, Fehleruntersuchungen bei der Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Systeme, Aachen 1909 (Dissertation). Siehe auch Hertwig, Beziehungen zwischen Symmetrie und Determinanten in einigen Aufgaben der Fachwerktheorie, Wüllner-Festschrift, Leipzig 1905.

und speziell in unserem Falle mit $\lambda = 3$ m, $n = 10$, $f = 4,625$ m für $P = 1$:

$$H = \frac{3}{7400} m(10 - m)(100 + 10m - m^2),$$

woraus für	$m =$	0	1	2	3	4	5
	$H =$	0	0,3978	0,7524	1,0301	1,2065	1,2669.

Setzen wir den in den Formeln § 58, 2), 3) für vollwandige Träger auftretenden Mittelwert c von $J \cos \varphi$ im vorliegenden Falle, dem Scheitelquerschnitt F vom Schwerpunktsabstand h der Gurtungsquerschnitte entsprechend, näherungsweise (wie vor Anordnung des Querschnitts bestimmbar):

$$c = J = F \frac{h^2}{4} = \frac{400 \cdot 125^2}{4} = 1562500 \text{ cm}^4,$$

so ergeben sich durch eine gleichmäßige Temperaturänderung τ aller Stäbe:

$$H = \frac{15 \cdot 1562500 \cdot 24,725}{8 \cdot 462,5^2} \tau = 338,64 \tau \text{ kg},$$

und durch eine Änderung der Spannweite um Δl :

$$H = - \frac{15 \cdot 1562500 \cdot 2150000}{8 \cdot 462,5^2 \cdot 3000} \Delta l = - 9815 \Delta l \text{ kg}.$$

Bemerkungen. Nach den Formeln § 58, a), b) hätten wir erhalten durch das Eigengewicht:

$$H = \frac{35 g l^2}{288 f} = \frac{35 \cdot 1250 \cdot 30^2}{288 \cdot 4,625} = 29561 \text{ kg},$$

durch eine Einzellast P bei a an Stelle von 1:

$$H = \frac{35}{48 f l} P a (l - a),$$

und mit $l = n \lambda$, $a = m \lambda$ an Stelle von 2:

$$H = \frac{35 \lambda}{48 f n} P m (n - m),$$

also speziell in unserem Falle mit $\lambda = 3$ m, $n = 10$, $f = 4,625$ m für $P = 1$:

$$H = \frac{7}{148} m(10 - m),$$

woraus für	$m =$	0	1	2	3	4	5
	$H =$	0	0,4257	0,7568	0,9932	1,1351	1,1824.

Vergleiche aller hier ermittelten Werte mit den Ergebnissen der genauen Berechnung siehe Tabelle IV (S. 440).

Beispiel 119. Zweigelenkbogenfachwerk. Vorläufige Berechnung des Horizontalschubs nach Fachwerkformeln.

Für das in Beispiel 108 behandelte Bogenfachwerk nach den Formeln 5 bis 7 des vorigen Paragraphen den Horizontalschub H zu berechnen: a) Durch das auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Eigengewicht von $g = 1250$ kg pro Meter; b) durch Einzellasten $P = 1$ in allen Knotenpunkten der Fahrbahn; c) durch gleiche Temperaturänderungen τ aller Stäbe und durch eine Änderung Δl der Spannweite, wobei zu setzen sind: $E = 2150000$ kg pro qcm. $\alpha = 0,0000115$ (Flußeisen), also $E\alpha = 21500000 \cdot 0,0000115 = 24,725$, $lE\alpha = 3000 \cdot 24,725 = 74175$. In den Formeln sollen probeweise verwendet werden: $\beta = 1$, $f_0 = 200$ qcm wie in den zwei Mittelfeldern, $\beta = 0,75$, $f_0 = 150$ qcm wie im dritten und achten Feld und im Mittel, $\beta = 0,5$, $f_0 = 100$ qcm wie in den zwei Endfeldern.

Die Stabkräfte q durch einen Horizontalschub $H = 1$ allein wurden bereits in Beispiel 108 berechnet; sie sind in nachstehender Tabelle VI für die Gurtungsstäbe mit deren Längen s zusammengestellt. Durch Multiplikation ergeben sich die beigesetzten $s q$ und $s q^2$, worauf letztere für den Obergurt und Untergurt addiert wurden (siehe Tabelle VI S. 446).

Wir haben damit nach § 58, 5)–7) durch beliebige Belastung:

$$H = - \frac{\sum s \varrho A + \beta \sum s \varrho A}{6560 \cdot 2 + 8930 \cdot 2 \beta} \quad 1$$

durch gleiche Temperaturänderungen τ aller Stäbe:

$$H = - \frac{74\,175 f_0 \tau}{6560 \cdot 2 + 8930 \cdot 2 \beta} \text{ kg.} \quad 2$$

und durch eine Änderung Δl der Spannweite:

$$H = - \frac{2\,150\,000 f_0 \Delta l}{6560 \cdot 2 + 8930 \cdot 2 \beta} \text{ kg.} \quad 3$$

a) Eigengewicht. Die diesem entsprechenden Stabkräfte A für $H = 0$ wurden bereits in Beispiel 109 berechnet; sie sind für die Gurtungsstäbe in der folgenden Tabelle VII angeführt und daneben die durch Multiplikation mit obigen $s \varrho$ erhaltenen $s \varrho A$. Mit Rücksicht auf die ebenfalls angegebenen Summen der letzteren erhalten wir durch das Eigengewicht allein:

$$H = \frac{230\,613\,655 + 192\,986\,850 \beta}{6560 + 8930 \beta}$$

und speziell für

$\beta =$	1	0,75	2
$H =$	27347	28313	29670 kg,

während der genaue Wert nach Beispiel 109 ist $H = 29542$ kg. Siehe auch die Vergleiche in Tabelle IV (S. 440).

b) Einzellasten. Die Stabkräfte A für $H = 0$, welche je zwei symmetrisch zur Bogenmitte gelegenen Knotenpunktlasten $P = 1$ entsprechen, wurden bereits in Beispiel 110 berechnet; sie sind in der folgenden Tabelle VII eingetragen und daneben die durch Multiplikation mit den $s \varrho$ der Tabelle VI erhaltenen $s \varrho A$. Die $a = 0$ und 30 m entsprechenden A konnten weglassen, da sie für alle Gurtungsstäbe gleich Null sind (siehe Tabelle III S. 423).

Mit Rücksicht hierauf ergeben sich nach 1:

für $a = 0$ oder 30 m		$H = 0,$
„ $a = 3$ „ 27 „		$H = - \frac{4896 + 4870 \beta}{13\,120 + 17\,860 \beta},$
„ $a = 6$ „ 24 „		$H = - \frac{10503 + 9342 \beta}{13\,120 + 17\,860 \beta},$
„ $a = 9$ „ 21 „		$H = - \frac{15392 + 13\,096 \beta}{13\,120 + 17\,860 \beta},$
„ $a = 12$ „ 18 „		$H = - \frac{19435 + 15\,472 \beta}{13\,120 + 17\,860 \beta},$
„ $a = 15$ „		$H = - \frac{21\,739 + 15\,472 \beta}{13\,120 + 17\,860 \beta}.$

Diese Ausdrücke liefern durch eine Einzellast $P = 1$:

	wenn	$\beta =$	1	0,75	0,5
für $a = 3$ oder 27 m		$H =$	0,3152	0,3224	0,3325
„ $a = 6$ „ 24 „		$H =$	0,6406	0,6604	0,6882
„ $a = 9$ „ 21 „		$H =$	0,9196	0,9509	0,9950
„ $a = 12$ „ 18 „		$H =$	1,1268	1,1706	1,2322
„ $a = 15$ „		$H =$	1,2011	1,2575	1,3367.

Vergleiche mit den Ergebnissen der genaueren Berechnung siehe in Tabelle IV.

c) Temperatureinflüsse. Ausweichen der Widerlager. Die Gleichungen 2, 3 liefern für

$$\beta = 1, f_0 = 200 \text{ qcm} \quad \beta = 0,75, f_0 = 150 \text{ qcm} \quad \beta = 0,5, f_0 = 100 \text{ qcm}$$

durch Temperaturänderungen τ :

$$H = 478,86 \tau \quad 419,62 \tau \quad 336,39 \tau$$

durch Änderungen Δl der Spannweite:

$$H = 13880 \Delta l \quad 12163 \Delta l \quad 9751 \Delta l.$$

Vergleiche mit den genaueren Ergebnissen enthält auch hierzu die Tabelle IV.

Zweigenbogenfachwerk Fig. 269. Tabelle VI. Zur vorläufigen Berechnung.

Stabkräfte	Stablängen s in cm	ϱ	$s \varrho$	$s \varrho^2$	Stabkräfte		$s \varrho$	$s \varrho^2$	
					Z_1	Z_2			
X_1	300	0,378	113,4	42,9	333	Z_1	369,6	410,3	
X_2	300	0,952	285,6	271,9	820	Z_2	470,4	691,5	
X_3	300	1,778	533,4	945,4	310	Z_3	625,3	1261,2	
X_4	300	2,723	816,9	2224,4	304	Z_4	855,8	2409,1	
X_5	300	3,200	960,0	3072,0	300	Z_5	1116,9	4158,2	
Für den halben Bogen					Für den halben Bogen				
					2709,3			8930,3	

Zweigenbogenfachwerk Fig. 269. Tabelle VII. Eigengewicht und Einzellasten.

Stabkräfte	Eigengewicht	$P=1$ bei $\alpha=3$ und 27 m		$P=1$ bei $\alpha=6$ und 24 m		$P=1$ bei $\alpha=9$ und 21 m		$P=1$ bei $\alpha=12$ und 18 m		$P=2$ bei $\alpha=15$ m	
		A	$s \varrho A$	A	$s \varrho A$	A	$s \varrho A$	A	$s \varrho A$	A	$s \varrho A$
X_1	13287	0,787	89,2	0,787	89,2	0,787	89,2	0,787	89,2	0,787	89,2
X_2	33457	1,115	318,4	2,230	636,9	2,230	636,9	2,230	636,9	2,230	636,9
Y_3	62500	1,587	846,5	3,175	1693,5	4,762	2540,1	4,762	2540,1	4,762	2540,1
X_4	95745	78214090	2,128	4,255	3475,9	6,383	5214,3	8,511	6952,6	8,511	6952,6
X_5	112500	108000000	2,400	4,800	4608,0	7,200	6912,0	9,600	9216,0	12,000	11520,0
Für den halben Bogen		-230613655		-4896		-10503		-15392		-19435	
Z_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Z_2	14173	6666979	0,840	395,1	0,840	395,1	0,840	395,1	0,840	0,840	395,1
Z_3	34572	21617872	1,153	721,0	2,305	1441,3	3,458	2161,7	4,762	3002,6	1801,3
Z_4	63333	54200381	1,609	1377,0	2,773,1	4826	4130,1	4,826	4130,1	4,826	4130,1
Z_5	98936	110501618	2,128	2376,8	4,255	4752,4	6,383	7129,2	8,511	9505,9	11520,0
Für den halben Bogen		-192986850		-4870		-9342		-13096		-15472	

Bemerkungen. Da für eine auf die ganze Fahrbahn gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit nach § 12, 8):

$$H = F u,$$

unter F den Inhalt der ganzen Einflußfläche für H verstanden, welcher durch obige Werte von H für Einzellasten $P=1$ bestimmt ist, so hätten wir den Horizontalschub durch das gleichmäßig verteilte Eigengewicht (welches allerdings nicht nur in den Knotenpunkten des Obergurts angreift), angesichts der hier erreichbaren geringen Genauigkeit auch ohne die unter a) vorausgesetzte Berechnung der Werte A ermitteln können. Für $\beta = 1$ beispielsweise ergeben sich:

$$F = 2 \cdot 3 \left(\frac{0,3152}{2} + \frac{0,3152 + 0,6406}{2} + \frac{0,6406 + 0,9196}{2} + \frac{0,9196 + 1,1268}{2} + \frac{1,1268 + 1,2011}{2} \right) =$$

$$6 (0,3152 + 0,6406 + 0,9196 + 1,1268 + 0,60055) = 21,6165,$$

$$H = 21,6165 u,$$

und mit $u = 1250 \text{ kg}$ $H = 27002 \text{ kg}$, um 1,2% kleiner als der oben für $\beta = 1$ erhaltene Wert $H = 27347 \text{ kg}$.

Den Beitrag der Temperaturänderungen hätte die in der Fußnote S. 439 angeführte Formel geliefert:

$$H = - \frac{2709 - 3438}{6560 + 8930 \beta} f_o \cdot 24,725 \tau = - \frac{18024,5 f_o \tau}{6560 + 8930 \beta},$$

und speziell für die obigen β, f_o :

$$H = 232,72 \tau \qquad 203,93 \tau \qquad 163,48 \tau,$$

gegenüber dem genauen Werte 356,71 τ :

$$- 34,76\% \qquad - 42,83\% \qquad - 54,17\%.$$

Sie wäre also im vorliegenden Falle ganz unbrauchbar. Es liegt dies nicht etwa an der Einführung mittlerer Gurtungsquerschnitte, denn mit den genauen Querschnitten hat sich am Schlusse des Beispiels 108 eine ähnliche Abweichung ergeben.

§ 59. Einsenkungen und sonstige Verrückungen der Knotenpunkte von Fachwerken. Gegenseitigkeit der Verrückungen.

Es handle sich um die Verrückung eines beliebigen Knotenpunktes K in beliebiger Richtung e für einen beliebigen Belastungsfall (Lasten oder sonstige äußere Aktivkräfte, Temperaturänderungen, Bewegungen der Stützpunkte), welchem Längenänderungen Δs der notwendigen Stäbe entsprechen. Für den Fall, daß die notwendigen Stäbe und Reaktionskomponenten (das Hauptssystem) allein vorhanden wären und nur eine äußere Kraft $Q = 1$ an K in der Richtung e wirkte, mögen die Beanspruchungen der notwendigen Stäbe durch ω und die virtuelle Arbeit (S. 403) der notwendigen Reaktionen durch a bezeichnet sein. Dann hat man die Verrückung des Knotenpunktes K in der Richtung e , bei vertikal nach unten gerichteten e also die Einsenkung von K :

$$e = \sum \omega \Delta s - a. \qquad 1$$

Diese Gleichung¹ liefert für den gewöhnlichen Fall prismatischer Stäbe von konstanten E, α mit § 56, 4):

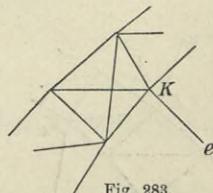


Fig. 283.

¹ Erste Ableitung auf Grund des Prinzips der virtuellen Verrückungen § 56, 3): Mohr, Beitrag zur Theorie des Fachwerks, Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereines zu Hannover 1874, S. 509. Bezüglich a siehe Luegers Lexikon der gesamten Technik, zweite Auflage, Band 3, S. 554, Artikel Fachwerke, statisch unbestimmte.

$$e = \Sigma \left(\frac{S}{EF} + \alpha \tau \right) s \omega - a, \quad 2$$

oder mit der bereits durch § 57, 8) eingeführten Bezeichnung $c = \frac{s}{F}$:

$$e = \Sigma \frac{c}{E} \omega S + \Sigma \alpha \tau s \omega - a, \quad 3$$

worin die Summen Σ sich auf die notwendigen Stabkräfte beziehen und S, τ die wirklichen Stabkräfte und Temperaturänderungen derselben in dem vollständigen Fachwerk für den gegebenen Belastungsfall bedeuten. Meist hat man in 1 bis 3 $a = 0$. Dies gilt insbesondere dann, wenn alle Stützpunkte mit Hauptreaktionen festliegen oder wenn das Hauptsystem ein Balkenfachwerk darstellt, weil dann die Knotenpunkte mit Hauptreaktionen gar nicht oder nur senkrecht zu den letzteren verschiebbar sind. Sind dann die Elastizitätsmoduln E und Ausdehnungskoeffizienten α für alle Stäbe gleich groß (gleiches Material), so folgt aus 3:

$$e = \frac{1}{E} \Sigma c \omega S + a \Sigma \tau s \omega. \quad 4$$

Die Berechnung der Einsenkungen und sonstigen Verrückungen beliebiger Knotenpunkte K in beliebigen Richtungen e könnte nun, abgesehen von vereinfachenden Besonderheiten des einzelnen Falles, beispielsweise wie folgt vor sich gehen. a) Auswahl der notwendigen Stäbe von Längen s_1, s_2, \dots , dieselben mögen in dem vollständigen Fachwerk durch die gegebenen äußeren Aktivkräfte (Lasten usw.) und Temperaturänderungen τ_1, τ_2, \dots Beanspruchungen S_1, S_2, \dots erleiden (bei statisch bestimmten Fachwerken oder solchen mit überzähligen Reaktionskomponenten allein sind dies alle Stabkräfte). b) Berechnung der Beanspruchungen $\omega_1, \omega_2, \dots$ der notwendigen Stäbe s_1, s_2, \dots , wenn allein am Knotenpunkte K eine äußere Kraft $Q = 1$ in der Richtung e wirkt, alle überzähligen Stäbe und Reaktionskomponenten aber wegbleiben. c) Sind dann F_1, F_2, \dots die Querschnitte, E_1, E_2, \dots die Elastizitätsmoduln, $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ die Ausdehnungskoeffizienten der notwendigen Stäbe s_1, s_2, \dots , so folgt die gesuchte Verrückung e in der Richtung e aus obigen Gleichungen. Ergibt sich e negativ, so hat die Verrückung entgegengesetzt der angenommenen Richtung e stattgefunden.

Nach 3 hat man im Falle $a = 0$ für die Verrückung eines beliebigen Knotenpunktes K_1 in beliebiger Richtung e_1 :

$$e_1 = \Sigma \frac{c}{E} \omega_1 S + \Sigma \alpha \tau s \omega_1,$$

und für die Verrückung eines beliebigen Knotenpunktes K_2 in beliebiger Richtung e_2 :

$$e_2 = \Sigma \frac{c}{E} \omega_2 S + \Sigma \alpha \tau s \omega_2.$$

Diese Gleichungen gelten für alle Belastungen und Temperaturänderungen. Es folgt daraus beispielsweise der Wert von e_1 durch eine Kraft $Q = 1$ an K_2 in der Richtung e_2 allein mit $S = \omega_2$:

$$e_1 = \Sigma \frac{c}{E} \omega_1 \omega_2,$$

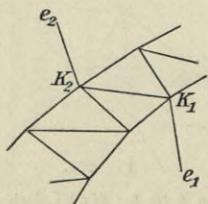


Fig. 284.

und der Wert von e_2 durch eine Kraft $Q = 1$ an K_1 in der Richtung e_1 allein mit $S = \omega_1$:

$$e_2 = \Sigma \frac{e}{E} \omega_2 \omega_1,$$

wonach $e_2 = e_1$ oder in Worten: Durch eine an dem beliebigen Knotenpunkte K_1 in beliebiger Richtung e_1 wirkende Kraft $Q = 1$ erleidet ein beliebiger Knotenpunkt K_2 in beliebiger Richtung e_2 die gleiche Verrückung, welche eine am Knotenpunkte K_2 in der Richtung e_2 wirkende Kraft $Q = 1$ für den Knotenpunkt K_1 in der Richtung e_1 zur Folge hat.

Dieser Satz von der Gegenseitigkeit der Verrückungen wurde zuerst 1864 von Maxwell ausgesprochen¹; er kann manche Ableitungen erheblich vereinfachen, die Berechnung der Einsenkungen insbesondere dann, wenn diese für verschiedene Knotenpunkte interessieren. Denn es ist danach die Einsenkung eines Knotenpunktes K_1 durch eine Last 1 in K_2 gerade so groß als die Einsenkung des Knotenpunktes K_2 durch eine Last 1 in K_1 . Auch läßt der Satz verschiedene Erweiterungen zu². So erhält man bei analogem Vorgehen wie oben: Durch zwei an beliebigen Knotenpunkten K_1, k_1 in deren Verbindungsgeraden einander entgegenwirkende Kräfte $Q = 1$ erleiden zwei beliebige Knotenpunkte K_2, k_2 die gleiche Entfernungsänderung, welche zwei an den Knotenpunkten K_2, k_2 in deren Verbindungsgeraden einander entgegenwirkende Kräfte $Q = 1$ für die Entfernungsänderung der Knotenpunkte K_1, k_1 zur Folge haben.

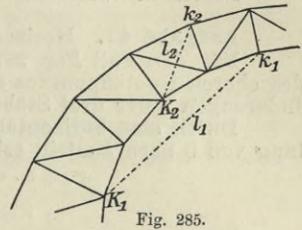


Fig. 285.

Aufgabe 40. Einsenkungen für einfachste Fälle.

Für die in Aufgabe 35 behandelten Fälle Fig. 286 (Bogen mit drei Gelenken) und 287 (Dreigelenkbogen mit Zugstange) die Einsenkungen e des oberen Knotenpunktes durch eine beliebige Last P und gleiche Temperaturänderungen τ der Stäbe nach dem Verfahren des § 59 zu bestimmen.

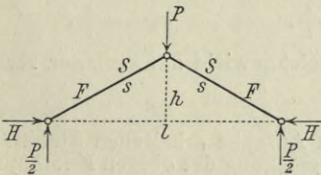


Fig. 286.

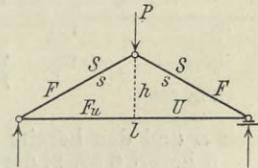


Fig. 287.

Im Falle Fig. 286 verlangt das Gleichgewicht am oberen Knotenpunkt:

$$P + 2 S \frac{h}{s} = 0, \quad S = - \frac{P s}{2 h},$$

wonach durch eine Kraft $Q = P = 1$ allein für beide Stäbe:

$$\omega = - \frac{s}{2 h}.$$

Durch Substitution dieser S, ω und $\alpha = 0$ in § 59, 2) folgt:

$$e = 2 \left(\frac{-P s}{2 h E F} + \alpha \tau \right) s \frac{-s}{2 h} \quad \text{oder} \quad e = \left(\frac{P}{2 h E F} - \alpha \tau \right) \frac{s^2}{h} \quad 1$$

Im Falle Fig. 287 sind Bedingungen fürs Gleichgewicht am oberen Knotenpunkt und am Auflager rechts:

$$P + 2 S \frac{h}{s} = 0, \quad U + S \frac{l}{2 s} = 0, \quad \text{woraus}$$

¹ Maxwell, On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames, Philosophical Magazine 1864, XXVII, S. 294. Mohr, Beitrag zur Theorie des Fachwerkes, Zeitschr. d. Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, 1875, S. 17.

² Müller-Breslau, Neuere Methoden der Festigkeitslehre, Leipzig 1904, S. 58, 181, 241.

$$s = -\frac{Ps}{2h}, \quad U = \frac{Pl}{4h},$$

und durch eine Kraft $Q = P = 1$ allein:

$$\omega = -\frac{s}{2h}, \quad \omega_u = \frac{l}{4h}.$$

Durch Substitution dieser S , ω und $\alpha = 0$ in § 59, 2) folgt:

$$e = 2 \left(\frac{-Ps}{2hEF} + \alpha\tau \right) s \frac{-s}{2h} + \left(\frac{Pl}{4hEF_u} + \alpha\tau \right) l \frac{l}{4h},$$

oder, bei Beachtung von $s^2 - \frac{l^2}{4} = h^2$:

$$e = \frac{P}{2EFh^2} \left(\frac{s^3}{F} + \frac{l^3}{8F_u} \right) - \alpha\tau h. \quad 2$$

Dieselben Werte haben sich in Aufgabe 35 ergeben (S. 405).

Aufgabe 41. Horizontale Verrückung eines Knotenpunktes.

Für den Fall Fig. 287 der vorigen Aufgabe die horizontale Verrückung des oberen Knotenpunktes durch eine beliebige Last P und gleiche Temperaturänderungen τ der drei Stäbe zu berechnen.

Durch eine horizontale Kraft $Q = 1$ am oberen Knotenpunkt in der Richtung von 0 nach l allein erhält man (Fig. 288):

$$\begin{aligned} V l + 1 \cdot h &= 0, & V + V' &= 0, & \text{woraus} \\ V &= -\frac{h}{l}, & V' &= \frac{h}{l}. \end{aligned}$$

Die Bedingung „Summe aller Vertikalkräfte gleich Null“ für diese Kraft $Q = 1$ allein in Anwendung auf die beiden unteren Knotenpunkte lautet:

$$V + \omega_1 \frac{h}{s} = 0, \quad V' + \omega_2 \frac{h}{s} = 0,$$

woraus mit den darüber stehenden Werten von V , V' :

$$\omega_1 = \frac{s}{l}, \quad \omega_2 = -\frac{s}{l},$$

während das Gleichgewicht am Auflager rechts erfordert:

$$\omega_u + \omega_2 \frac{l}{2s} = 0, \quad \omega_u = \frac{1}{2}.$$

Mit diesen ω und den bereits in der vorigen Aufgabe erhaltenen Stabkräften S sowie $\alpha = 0$ liefert § 59, 2) die horizontale Verrückung des oberen Knotenpunktes in der Richtung von 0 nach l :

$$\begin{aligned} e &= \left(\frac{-Ps}{2hEF} + \alpha\tau \right) s \left(\frac{s}{l} - \frac{s}{l} \right) + \left(\frac{Pl}{4hEF_u} + \alpha\tau \right) \frac{l}{2}, \\ e &= \frac{Pl^2}{8hEF_u} + \frac{\alpha\tau l}{2}. \end{aligned} \quad 3$$

Dies läßt sich auch auf andere Weise feststellen. Da die beiden oberen Stäbe symmetrisch zur Mitte liegen und bei gleichen E , α , F gleiche S , τ erleiden, so wird der obere Knotenpunkt über der Mitte des unteren Stabes bleiben. Durch die Stabkraft $\frac{Pl}{4h}$ und die Temperaturänderung τ erfährt dieser eine Längenänderung

$$\Delta l = \frac{Pl}{4hF_u} \frac{l}{E} + \alpha\tau l,$$

deren Hälfte 3 entspricht.

Aufgabe 42. Verrückungen von Knotenpunkten durch Bewegungen der Stützpunkte.

Für eine Änderung Δl der Spannweite (bei Abnahme Δl negativ) und eine Hebung Δk des Auflagers l gegen das Auflager 0 (bei Senkung Δk negativ) sollen festgestellt werden: a) Die Einsenkung des oberen Knotenpunktes im Stabsystem Fig. 286; b) die Einsenkung des oberen Knotenpunktes im Stabsystem Fig. 287; c) die horizontale Verrückung des oberen Knotenpunktes im Stabsystem Fig. 287.

Der Ursprung der Koordinaten liege im Auflager 0. Nach § 59, 2) ist die Verrückung eines Knotenpunktes K in bestimmter Richtung durch Bewegungen der Stützpunkte $e = -a$, unter a die Arbeit der notwendigen Reaktionskomponenten durch eine Kraft $Q = 1$ an K in jener Richtung während der fraglichen Verrückungen verstanden. Die Arbeit einer Kraft ist positiv oder negativ je nachdem die Bewegung ihres Angriffspunktes in der Richtung der Kraft oder entgegengesetzt derselben stattfindet (S. 403).

a) Beim Stabsystem Fig. 286 entstehen durch eine Vertikalkraft $Q = P = 1$ am oberen Knotenpunkt ein Horizontalschub $\frac{l}{4h}$ und die Vertikalreaktionen $\frac{1}{2}$, wonach die verlangte Einsenkung:

$$e = -a = -\frac{l}{4h} \Delta l - \frac{\Delta k}{2}. \quad 4$$

b) Beim Stabsystem Fig. 287 entstehen durch die Vertikalkraft $Q = P = 1$ am oberen Knotenpunkt nur Vertikalreaktionen $\frac{1}{2}$, so daß die verlangte Einsenkung:

$$e = -a = -\frac{\Delta k}{2}. \quad 5$$

c) Beim Stabsystem Fig. 287 entsteht durch eine Horizontalkraft $Q = 1$ am oberen Knotenpunkt in der Richtung von 0 nach l am Auflager l eine Vertikalreaktion $\frac{h}{l}$ (Aufgabe 41), womit die verlangte Verrückung jenes Knotenpunktes in dieser Richtung:

$$e = -a = -\frac{h}{l} \Delta k. \quad 6$$

Diese Werte wären also bei Berücksichtigung von Bewegungen der Stützpunkte den Ausdrücken 1, 2, 3 der Aufgaben 40, 41 zu addieren. Die Einsenkung 4 haben wir auf anderen Wegen bereits in den Aufgaben 14 und 36 erhalten, während sich 5 unmittelbar angeben läßt.

Beispiel 120. Zweigelenkbogenfachwerk. Einsenkungen, direkt berechnet.

Für das in Beispiel 108 behandelte Bogenfachwerk Fig. 269, 289 zu berechnen die Einsenkungen e des mittleren Knotenpunkts im Untergurt: a) Durch das Eigengewicht von $g = 1,25$ t pro m, wovon 0,60 t auf die Knotenpunkte des Obergurts und 0,65 t auf diejenigen des Untergurts kommen; b) durch gleiche Temperaturänderungen τ aller Stäbe; c) durch einen beliebigen Horizontalschub H allein; d) durch eine Änderung der Spannweite um Δl . Der Elastizitätsmodul und Ausdehnungskoeffizient sind zu setzen: $E = 2150$ t pro qcm, $\alpha = 0,0000115$ (Flußeisen).

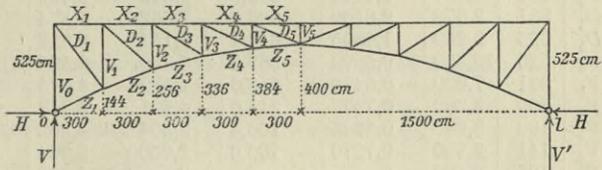


fig. 289.

Handelt es sich um beliebige Belastung und beliebige Temperaturänderungen τ der einzelnen Stäbe des Fachwerks, welchen die Stabkräfte S entsprechen, während durch eine an einem bestimmten Knotenpunkte vertikal nach unten wirkende Kraft 1 allein für $H = 0$ die Stabkräfte ω entstünden, so hat man nach § 59, 4) die Einsenkung dieses Knotenpunktes in jenem Belastungs- und Temperaturfall:

$$e = \frac{1}{E} \sum c \omega S + \alpha \sum s \omega \tau \quad \text{mit} \quad c = \frac{s}{F}. \quad 1$$

Da für unser Zweigelenkbogenfachwerk nach § 53, 26):

$$S = A + H \varrho, \quad 2$$

worin A den Wert der Stabkraft S in dem angenommenen Belastungs- und Temperaturfall für $H = 0$ und ϱ ihren Wert durch $H = 1$ allein bedeuten, so können wir auch schreiben:

$$e = \frac{1}{E} \sum c \omega A + \frac{H}{E} \sum c \omega \varrho + \alpha \sum s \omega \tau, \quad 3$$

Die Einsenkungen lassen sich nun wie folgt direkt nach diesen Ausdrücken, oder, sofern es sich um Belastungen der Fahrbahn handelt, wie im nächsten Beispiel mit Hilfe der Einflußlinie berechnen.

Für das vorliegende Bogenfachwerk wurden die Stablängen s und Werte c in Beispiel 108 gegeben; sie sind in der folgenden Tabelle VIII wieder angeführt. Die Stabkräfte ω durch eine Last $P=1$ am mittleren Knotenpunkte des Untergurts für $H=0$ sind statisch bestimmt und also nach bekannten statischen Methoden leicht zu berechnen. Für unseren Fall wurden die Stabkräfte 2ω ($P=2$ entsprechend) schon in Beispiel 110 unter b) erhalten, nur für V_5 ist zu beachten, daß dort P im mittleren Knotenpunkte des Obergurts angriff, während beim Wirken im mittleren Knotenpunkte des Untergurts das V_5 entsprechende ω gleich Null ist. Auch die ω konnten hiernach in der folgenden Tabelle eingetragen werden. Durch Multiplikation mit s, c ergaben sich die beigesetzten $s\omega, c\omega$ und durch Addition der $s\omega$ für den halben Bogen — 207,9.

Zweigelenbogenfachwerk Fig. 269. Tabelle VIII. Einsenkungen betreffend.

Stabkräfte	Stablängen s in cm	$c = \frac{s}{F}$	ω	$s\omega$	$c\omega$	Durch das Eigengewicht		Durch $H=1$	
						S in t	$c\omega S$	q	$c\omega q$
X_1	300	3,000	-0,3935	-118,0	-1,180	2,120	2,502	0,378	-0,446
X_2	300	2,400	-1,1150	-334,5	-2,676	5,333	14,271	0,952	-2,548
X_3	300	2,000	-2,3810	-714,3	-4,762	9,974	47,496	1,778	-8,467
X_4	300	1,714	-4,2555	-1276,6	-7,294	15,302	111,613	2,723	-19,862
X_5	300	1,500	-6,0000	-1800,0	-9,000	17,966	161,694	3,200	-28,800
Z_1	333	1,665	0	0	0	32,792	0	1,110	0
Z_2	320	1,600	0,4200	134,4	0,672	29,254	19,659	1,470	0,988
Z_3	310	1,550	1,1525	357,3	1,786	25,014	44,675	2,017	3,602
Z_4	304	1,520	2,4130	733,6	3,668	19,828	72,729	2,815	10,325
Z_5	300	1,500	4,2555	1276,7	6,383	11,049	70,526	3,723	23,764
D_1	485	8,083	0,6360	308,5	5,141	3,451	17,742	0,610	3,136
D_2	403	5,757	0,9695	390,7	5,581	4,328	24,155	0,771	4,303
D_3	355	4,437	1,4985	532,0	6,649	5,499	36,563	0,978	6,503
D_4	331	3,678	2,0560	680,6	7,562	5,874	44,419	1,042	7,880
D_5	325	3,250	1,8905	614,4	6,144	2,912	17,891	0,516	3,170
V_0	525	10,500	-0,5000	-262,5	-5,250	3,595	18,874	0,480	2,520
V_1	381	7,620	-0,6470	-246,6	-4,930	4,674	23,043	0,515	2,539
V_2	269	5,380	-0,7975	-214,6	-4,291	4,713	20,223	0,521	2,236
V_3	189	3,980	-0,8805	-166,4	-3,504	4,302	15,074	0,444	1,556
V_4	141	2,820	-0,7270	-102,6	-2,050	2,904	5,953	0,199	0,408
V_5	125	2,500	0	0	0	1,800	0	0	—
Für den halben Bogen				-207,9			353,924		-133,053

a) Eigengewicht. Die Stabkräfte S durch das Eigengewicht wurden in Beispiel 109 berechnet, sie sind in unserer Tabelle VIII angeführt und ebenso die entsprechenden durch Multiplikation mit $c\omega$ erhaltenen $c\omega S$. Mit Rücksicht auf deren beigefügte Summe für den halben Bogen liefert 1 die Einsenkung durch das Eigengewicht:

$$e = \frac{353,924 \cdot 2}{2150} = 0,329 \text{ cm.}$$

Selbstverständlich hätten wir unter Verwendung der in Beispiel 109 bestimmten A, H auch nach 3 rechnen können, und ebenso würde diese Gleichung mit den in Beispiel 110 bestimmten A, H für beliebige Belastung verwendbar sein.

b) Horizontalschub allein. Wir könnten natürlich wieder zunächst die Stabkräfte berechnen, die nach 2 mit $A=0$ jetzt $S=Hq$ wären, und die

Einsenkung damit aus 1 erhalten, doch führt 3 schneller zum Ziel. Die Stabkräfte q durch $H=1$ allein wurden in Beispiel 108 ermittelt; sie sind in der vorletzten Kolonne der Tabelle VIII eingetragen. Durch Multiplikation mit den bereits bekannten $c\omega$ ergeben sich die in der letzten Kolonne angeführten $c\omega q$. Mit ihrer Summe liefert 3 die Einsenkung durch einen beliebigen Horizontalschub H allein:

$$e = -\frac{133,053}{2150} H = -0,12377 H \text{ cm,}$$

wobei H in Tonnen einzusetzen.

c) Temperaturänderungen. Durch gleiche Temperaturänderungen τ aller Stäbe entsteht nach Beispiel 108 ein Horizontalschub $H = 0,35671 \tau$ Tonnen, und damit nach 3 bei Berücksichtigung von Tabelle VIII eine Einsenkung:

$$e = -0,12377 \cdot 0,35671 \tau - 0,0000115 \tau \cdot 207,9 \cdot 2 = -0,04893 \tau \text{ cm,}$$

also beispielsweise für $\tau = \pm 25^{\circ}$:

$$e = \mp 1,223 \text{ cm.}$$

d) Ausweichen der Widerlager. Durch eine Änderung der Spannweite um Δl cm entsteht nach Beispiel 108 ein Horizontalschub $H = -10,340 \Delta l$ Tonnen, und damit nach b) oder unmittelbar nach 3 eine Einsenkung:

$$e = 0,12377 \cdot 10,340 \Delta l = 1,280 \Delta l \text{ cm,}$$

also beispielsweise für $\Delta l = \pm 1$ cm:

$$e = \pm 1,280 \text{ cm.}$$

Käme eine (positive oder negative) Senkung des Stützpunktes 0 gegen den Stützpunkt l hinzu, so hätte man natürlich:

$$e = 1,280 \Delta l - 0,5 \Delta k.$$

Bemerkungen. Für parabolische Vollwandbogen von konstantem $J \cos \varphi$ hätte man nach § 20 bei Vernachlässigung von ε gegen 1 durch eine Temperaturänderung τ :

$$e = -\alpha \tau \left(f + \frac{25 l^2}{128 f} \right),$$

durch eine Änderung der Spannweite um Δl und eine Senkung des Stützpunktes 0 gegen den Stützpunkt l :

$$e = \frac{25 l}{128 f} \Delta l - \frac{\Delta k}{2}.$$

Diese Gleichungen liefern im vorliegenden Falle mit dem auf den Schwerpunkt des Scheitelquerschnitts bezogenen Pfeil $f = 462,5$ cm:

$$e = -0,0000115 \tau \left(462,5 + \frac{25 \cdot 3000^2}{128 \cdot 462,5} \right) = -0,04903 \tau \text{ cm,}$$

(für $\tau = \pm 25^{\circ}$ $e = \mp 1,226$ cm) und

$$e = \frac{25 \cdot 3000}{128 \cdot 462,5} \Delta l - \frac{\Delta k}{2} = 1,267 \Delta l - 0,5 \Delta k \text{ cm}$$

gegen oben erhaltene $e = 0,04893 \tau$ (für $\tau = \pm 25^{\circ}$ $e = \mp 1,223$ cm) und $e = 1,280 \Delta l - 0,5 \Delta k$, also nahezu richtig.

Ganz anders steht es mit den Einsenkungen durch Belastungen, wie schon ein Vergleich der Einflußlinien Fig. 136 und 290 erwarten läßt. So ergibt die für flache Parabelbogen aus Gleichung 19 der Aufgabe 15 bei Vernachlässigung von ε entstehende Näherungsformel für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit

$$e = \frac{25 u l^4}{1024 E F f^2}$$

durch das Eigengewicht unseres Bogens von 12,5 kg pro cm:

$$e = \frac{25 \cdot 12,5 \cdot 3000^4}{1024 \cdot 2150000 \cdot 400 \cdot 462,5^2} = 0,134 \text{ cm,}$$

während oben $e = 0,329$ cm erhalten wurde.

Beispiel 121. Zweigelenkbogenfachwerk. Einsenkungen mit Verwendung ihrer Einflußlinie berechnet.

Für das in Beispiel 108 und im vorigen Beispiel behandelte Bogenfachwerk zu bestimmen: a) die Einflußlinie der Einsenkung e des mittleren Knotenpunkts im Untergurt; b) diese Einsenkung durch die in Fig. 269 angedeutete Verkehrslast und die Grenzwerte der Einsenkung; c) die Einsenkung durch beliebige Lasten P in allen Knotenpunkten des Obergurts mit Ausnahme der beiden äußersten, in welchen $\frac{P}{2}$ wirken; d) die Einsenkung durch eine auf die Fahrbahn gleichmäßig verteilte Last von p und speziell von $p = 1,25$ t pro Meter.

a) Die Einflußlinie der Einsenkung e hat zu jeder Abszisse a als Ordinate b den Beitrag der Last $P=1$ bei a zu e (§ 12). Die Einsenkung in der Mitte durch eine bei a gelegene Last $P=1$ ist halb so groß als die Einsenkung dasselbe durch zwei um a von beiden Stützpunkten entfernte Lasten $P=1$. Für solche wurden die Stabkräfte A für $H=0$ bereits in Beispiel 110 berechnet, wir haben sie in der folgenden Tabelle IX wieder angeführt und daneben die durch Multiplikation mit den $c\omega$ des vorigen Beispiels erhaltenen $c\omega A$. Mit Rücksicht auf die beigefügten Summen der letzteren, den schon im vorigen Beispiel verwendeten Wert

$$\frac{\Sigma c\omega\varrho}{E} = -\frac{133,053 \cdot 2}{2150} = -0,12377$$

und die in Beispiel 110 bestimmten Horizontalschübe H durch Knotenpunktlasten $P=1$ ergeben sich nach Gleichung 3 des vorigen Beispiels die Ordinaten der Einflußlinie von e :

für $a = 0$ oder 30 m	$b = \frac{5,25}{2150} - 0,12377 \cdot 0,0242 = 0,002442 - 0,002995 = -0,00055$
„ $a = 3$ „ 27 „	$b = \frac{103,743}{2150} - 0,12377 \cdot 0,3863 = 0,048253 - 0,047812 = 0,00044$
„ $a = 6$ „ 24 „	$b = \frac{197,993}{2150} - 0,12377 \cdot 0,7106 = 0,092090 - 0,087951 = 0,00414$
„ $a = 9$ „ 21 „	$b = \frac{285,570}{2150} - 0,12377 \cdot 0,9946 = 0,132823 - 0,123102 = 0,00972$
„ $a = 12$ „ 18 „	$b = \frac{358,025}{2150} - 0,12377 \cdot 1,2033 = 0,166523 - 0,148932 = 0,01759$
„ $a = 15$ „ „	$b = \frac{395,599}{2150} - 0,12377 \cdot 1,2941 = 0,184000 - 0,160171 = 0,02382$

Die Linie ist in Fig. 290 verzeichnet, bei ihrer Verwendung sind die Lasten in Tonnen einzusetzen. Vorstehende Ansätze zeigen, daß ohne die subtraktiven Glieder, das heißt ohne den Horizontalschub, die Einsenkungen ganz bedeutend größer wurden.

Wir haben nun durch beliebige Belastung der Fahrbahn, wenn P_0, P_1, \dots, P_{10} die entsprechenden Knotenpunktlasten bei den Vertikalen 0, 1, ... 10 bedeuten:

$$e = -0,00055 (P_0 + P_{10}) + 0,00044 (P_1 + P_9) + 0,00414 (P_2 + P_8) + 0,00972 (P_3 + P_7) + 0,01759 (P_4 + P_6) + 0,02382 P_5 \text{ cm,} \tag{1}$$

worin die P in Tonnen einzusetzen sind, während mittels der Einflußlinie

$$e = \Sigma P b \tag{2}$$

auch ohne Bestimmung der Knotenpunktlasten erhalten werden kann. Speziell für eine auf eine beliebige Strecke der Fahrbahn gleichmäßig verteilte Last von p pro Längeneinheit hat man:

$$e = p F, \tag{3}$$

unter F die Einflußfläche auf dieser Strecke verstanden (§ 12).

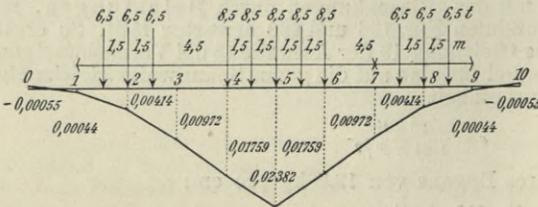


Fig. 290.

Zweigelentknotenfachwerk Fig. 269. Tabelle IX. Einsenkungen betreffend.

Stabkräfte	P = 1 bei $\alpha = 0$ und 30 m		P = 1 bei $\alpha = 3$ und 27 m		P = 1 bei $\alpha = 6$ und 24 m		P = 1 bei $\alpha = 9$ und 21 m		P = 1 bei $\alpha = 12$ und 18 m		P = 2 bei $\alpha = 15$ m	
	A	c ω A	A	c ω A	A	c ω A						
X ₁	—	1,180	—	0,787	—	0,929	—	0,787	—	0,929	—	0,787
X ₂	—	2,676	—	1,115	—	2,984	—	2,230	—	5,967	—	2,230
X ₃	—	4,762	—	1,587	—	7,557	—	4,762	—	22,677	—	4,762
X ₄	—	7,294	—	2,128	—	15,522	—	6,383	—	46,558	—	8,511
X ₅	—	9,000	—	2,400	—	21,600	—	7,200	—	64,800	—	12,000
Z ₁	—	0	—	0	—	0	—	0	—	0	—	0
Z ₂	—	0,672	—	0,840	—	0,564	—	0,840	—	0,564	—	0,840
Z ₃	—	1,786	—	1,153	—	2,059	—	2,305	—	4,117	—	2,305
Z ₄	—	3,668	—	1,609	—	5,902	—	4,826	—	17,702	—	4,826
Z ₅	—	6,383	—	2,128	—	13,583	—	6,383	—	40,743	—	8,511
D ₁	—	5,141	—	1,272	—	6,539	—	1,272	—	6,539	—	1,272
D ₂	—	5,581	—	0,441	—	2,461	—	1,939	—	10,822	—	1,939
D ₃	—	6,649	—	0,559	—	3,717	—	1,118	—	7,436	—	2,997
D ₄	—	7,562	—	0,593	—	4,484	—	1,185	—	8,961	—	1,778
D ₅	—	6,144	—	0,295	—	1,812	—	0,590	—	3,625	—	0,885
V ₀	—	5,250	—	1,000	—	5,250	—	1,000	—	5,250	—	1,000
V ₁	—	4,930	—	1,294	—	6,379	—	1,294	—	6,379	—	1,294
V ₂	—	4,291	—	0,298	—	1,279	—	1,595	—	6,844	—	1,595
V ₃	—	3,504	—	0,254	—	0,890	—	1,780	—	1,761	—	1,761
V ₄	—	2,050	—	0,113	—	0,232	—	0,341	—	0,699	—	1,454
V ₅	—	0	—	0	—	0	—	0	—	0	—	0
Für den halben Bogen												395,599
										285,570	358,025	
										197,993	103,743	5,250

b) Durch die in Fig. 290 angedeutete Verkehrslast entsteht eine Einsenkung:

$$e = 8,5 (0,02382 + 0,20705 \cdot 2 + 0,01759 \cdot 2) + 6,5 (0,00693 + 0,00414 + 0,00229) 2 = 1,027 \text{ cm.}$$

Es ist dies die größte Einsenkung durch den deutschen Normalzug für Berechnung von Hauptbahnbrücken. Beispielsweise hätte man mit einer rechts Schlot an Schlot anschließenden Lokomotive ohne Verrückung der linksstehenden erhalten $e = 0,999 \text{ cm}$. Mit Einschluß der im vorigen Beispiel bestimmten Beiträge des Eigengewichts und der Temperaturänderungen ergeben sich nun die Grenzwerte der Einsenkung, durch Belastung entsprechend Fig. 290 und $\tau = -25^\circ$:

$$e = 1,027 + 0,329 + 1,223 = 2,579 \text{ cm,}$$

durch Eigengewicht allein und $\tau = 25^\circ$:

$$e = 0,329 - 1,223 = -0,894 \text{ cm.}$$

Bezüglich der durch Änderungen der Spannweite bedingten Beiträge ist auf das vorige Beispiel zu verweisen.

c) Durch beliebige gleiche Lasten P in allen Knotenpunkten des Obergurts mit Ausnahme der beiden äußersten, in welchen $\frac{P}{2}$ wirken, entsteht nach I eine Einsenkung:

$$e = P[-0,00055 + 2(0,00044 + 0,00414 + 0,00972 + 0,01759) + 0,02382] = 0,08705 P \text{ cm,}$$

worin P in Tonnen einzusetzen.

d) Für eine auf die Fahrbahn gleichmäßig verteilte Last von $p \text{ t pro m}$ hat man in der letzten Gleichung $P = 3p$ und damit:

$$e = 0,26115 p \text{ cm.}$$

Speziell für $p = 1,25 \text{ t}$ folgt hieraus:

$$e = 0,326 \text{ cm.}$$

Im vorigen Beispiel haben wir durch ein auf die Spannweite gleichmäßig verteiltes Eigengewicht von $1,25 \text{ t pro m}$ erhalten $e = 0,329 \text{ cm}$. Der geringe Unterschied rührt daher, daß das Eigengewicht zum Teil auf die Knotenpunkte des Untergurts wirkte (mit $0,65 \text{ t}$ von $1,25 \text{ t}$), womit der Horizontalschub $29,542 \text{ t}$ anstatt $29,655 \text{ t}$ (Beispiele 109 und 111) und die Beanspruchungen der Vertikalen auch direkt beeinflußt wurden.

Aufgabe 43. Zweigelenkbogenfachwerk. Künstlicher Horizontalschub. Reduktion der Normaltemperatur auf die mittlere Ortstemperatur.

Wie bei vollwandigen Bogen (Aufgaben 17—19 mit Beispielen 35, 36, 40, VI N), so kann auch bei Bogenfachwerken ein künstlicher Horizontalschub K zu gewissen Zwecken angewandt werden, z. B. um eine bestimmte Einsenkung aufzuheben. Der nötige Wert von H wird natürlich von diesen Zwecken abhängen. Es soll nun für den Fall, daß die Montierungstemperatur t_1 um d Grad von der gewünschten Normaltemperatur abweicht (der bei fehlender Belastung und normaler Spannweite der spannungslose Zustand zu entsprechen hat), diese durch die Wahl von K zugleich auf einen gewünschten Wert, gewöhnlich die mittlere Ortstemperatur, gebracht werden.

Wir gehen wie in Aufgabe 18 vor. Für ein Zweigelenkbogenfachwerk entsteht nach § 57, 27) durch beliebige Belastung, gleiche Temperaturänderungen τ aller Stäbe und eine Änderung Δl der Spannweite ein Horizontalschub:

$$H = - \frac{\Sigma c \rho A - l E \alpha \tau + E \Delta l}{\Sigma c \rho^2} \quad 1$$

Die zur Erzeugung eines beliebigen künstlichen Horizontalschubs K nötige Verminderung der Spannweite folgt hieraus:

$$v = \frac{\Sigma c \rho^2}{E} K.$$

Behufs der verlangten Reduktion der Normaltemperatur verringern wir weiter um $l \alpha d$, so daß die ganze durch Anziehen von Keilen oder auf sonstige Weise (vergl. Abschnitt VI unter N) herbeizuführende Verminderung der Spannweite:

$$v = \frac{\Sigma c \varrho^2}{E} K + l \alpha d. \quad 2$$

Hierin hat d einen positiven oder negativen Wert, je nachdem die Montierungstemperatur über oder unter der gewünschten Normaltemperatur liegt.

Ist nun in der Folge τ_1 die Abweichung der wirklichen Temperatur t des Bogens gegen seine Montierungstemperatur t_1 (Fig. 291) und Δl eine etwaige neue Änderung der Spannweite, so hat man nach 1 den ganzen von der Temperaturänderung τ_1 und der Spannweiteänderung $\Delta l - v$ herrührenden Horizontalschub:

$$H = \frac{l E \alpha \tau_1 - E (\Delta l - v)}{\Sigma c \varrho^2},$$

oder mit v nach 2:

$$H = \frac{l E \alpha (d + \tau_1) - E \Delta l}{\Sigma c \varrho^2} + K.$$

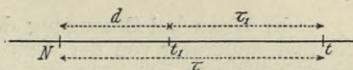


Fig. 291.

Bezeichnet τ die Abweichung der wirklichen Temperatur t gegen die gewählte Normaltemperatur, so ist in vorstehendem Ausdruck (Fig. 291):

$$\tau = d + \tau_1, \quad 3$$

und wir erhalten beim Hinzukommen einer beliebigen Belastung, der für $H=0$ die Stabkräfte A entsprechen würden, mit Rücksicht auf 1:

$$H = - \frac{\Sigma c \varrho A - l E \alpha \tau + E \Delta l}{\Sigma c \varrho^2} + K. \quad 4$$

Der wirkliche Horizontalschub H und damit alle Stabkräfte hängen also im allgemeinsten Falle außer von dem ein für allemal erzeugten künstlichen Horizontalschub K nur von der Belastung, der Temperaturänderung τ gegen die gewählte Normaltemperatur und etwaigen Änderungen Δl der Spannweite nach Erzeugung von K ab.

Der künstliche Horizontalschub, welcher bei seiner Herstellung durch Verringerung der Spannweite um v nach 1 mit $\Delta l = -v$ den Wert hatte:

$$K_1 = \frac{E v}{\Sigma c \varrho^2} = K + \frac{l E \alpha d}{\Sigma c \varrho^2}, \quad 5$$

erreicht nach 4 bei normaler Temperatur den vorausgesetzten Wert K , da sich für $A=0$, $\tau=0$ und $\Delta l=0$ ergibt $H=K$.

Will man die Reduktion der Normaltemperatur auf den gewünschten Wert ohne einen sonstigen künstlichen Horizontalschub vornehmen, so hat man nach 2, 5 mit $K=0$:

$$v = l \alpha d, \quad K_1 = \frac{l E \alpha d}{\Sigma c \varrho^2}. \quad 6$$

Will man dagegen einen künstlichen Horizontalschub K ohne Reduktion der Normaltemperatur erzeugen, das heißt die Montierungstemperatur als Normaltemperatur beibehalten, so liefern dieselben Gleichungen mit $d=0$:

$$v = \frac{\Sigma c \varrho^2}{E} K, \quad K_1 = K. \quad 7$$

Beispiel 122. Zweigelenkbogenfachwerk. Zur vorigen Aufgabe.

Für das in Beispiel 108 behandelte Bogenfachwerk 269, 289 zu berechnen: a) Den nötigen künstlichen Horizontalschub K und die vorzunehmende Verringerung v der Spannweite, wenn die durch das Eigengewicht erzeugte Einsenkung der Untergurtmitte aufgehoben werden soll; b) die entsprechenden Werte K_1 , v bei einer Montierungstemperatur $t_1 = 25^\circ$, wenn gleichzeitig die Normaltemperatur auf die mittlere Ortstemperatur von 10° gebracht werden soll.

a) Nach Beispiel 120 ist die Einsenkung des mittleren Knotenpunktes im Untergurt durch das Eigengewicht allein:

$$e = 0,329 \text{ cm}$$

und diejenige durch einen beliebigen Horizontalschub H allein:

$$e = -0,12377 H \text{ cm},$$

worin H in Tonnen einzusetzen. Soll nun die dem Eigengewicht allein ent-

sprechende Einsenkung durch einen künstlichen Horizontalschub $H = K$ gerade aufgehoben werden, so muß sein:

$$0,329 - 0,12377 K = 0, \quad K = \frac{0,329}{0,12377} = 2,658 t.$$

Die zur Erzeugung von K nötige Verringerung der Spannweite ist nach dem Ausdruck 10 des Beispiels 108 oder nach Formel 7 der vorigen Aufgabe mit $E = 2150 t$ pro qcm und dem in Beispiel 108 berechneten Werte $\mathcal{Z} c \varrho^2 = 207,94$:

$$v = \frac{2,658}{10,340} = 0,257 \text{ cm.}$$

b) Wenn bei Erzeugung des künstlichen Horizontalschubs gleichzeitig die Normaltemperatur von der Montierungstemperatur $t_1 = 25^\circ$ auf die mittlere Ortstemperatur von 10° reduziert werden soll, so hat man nach Gleichung 2 der vorigen Aufgabe mit $d = 25 - 10 = 15^\circ$ die vorzunehmende Verringerung der Spannweite:

$$v = 0,257 + 3000 \cdot 0,0000115 \cdot 15 = 0,775 \text{ cm.}$$

Der künstliche Horizontalschub hat dann bei seiner Erzeugung (bei der Temperatur $t_1 = 25^\circ$) nach Gleichung 5 der vorigen Aufgabe den Wert:

$$K_1 = 2,658 + \frac{3000 \cdot 2150 \cdot 0,0000115 \cdot 15}{207,94} = 8,009 t,$$

während er bei der Normaltemperatur 10° auf $K = 2,658 t$ zurückgeht.

Bemerkungen. Selbstverständlich tritt der bei normaler Temperatur wirkende künstliche Horizontalschub $K = 2,658 t$ in allen Fällen zu den von andern Einwirkungen herrührenden Werten von H , so daß z. B. die Grenzwerte des Horizontalschubs, anstatt wie in Beispiel 114 berechnet 125,194 t und 20,624 t, nun werden:

$$H = 125,194 + 2,658 = 127,852 t,$$

$$H = 20,624 + 2,658 = 23,282 t.$$

Ebenso treten die durch den künstlichen Horizontalschub erzeugten Stabkräfte $K \varrho = 2,658 \varrho$ stets zu den von sonstigen Einwirkungen herrührenden Stabkräften, so daß z. B. anstatt der in Beispiel 114 erhaltenen Grenzwerte $X_3 = -75,049 t$ und 19,441 t, mit Rücksicht auf S. 452 angeführten ϱ nun die Grenzwerte folgen:

$$X_3 = -75,049 + 2,658 \cdot 1,778 = -70,323 t,$$

$$X_3 = 19,441 + 2,658 \cdot 1,778 = 24,167 t.$$

Die Grenzwerte der Einsenkung in der Mitte des Untergurts sind nun anstatt der in Beispiel 121 (S. 465) berechneten 2,579 cm und $-0,894$ cm:

$$e = 1,027 + 1,223 = 2,250 \text{ cm} (= 2,579 - 0,329 \text{ cm}),$$

$$e = -1,223 \text{ cm} (= -0,894 - 0,329 \text{ cm}).$$

Beispiel 123. Bogenfachwerk mit Zugstange. Einsenkungen.

Für den mittleren Knotenpunkt im Bogenuntergurt des in Beispiel 116 behandelten Bogenfachwerks mit Zugstange Fig. 278 zu bestimmen: a) Die Einsenkung durch das Eigengewicht von $g = 1,25 t$ pro Meter Träger, wovon 0,60 t auf die Knotenpunkte des Obergurts und 0,65 t auf diejenigen des Untergurts kommen; b) die Einsenkung durch die in Fig. 290 angedeutete Verkehrslast und die Grenzwerte der Einsenkungen durch Eigengewicht und Lokomotivbelastung; c) die Einsenkung durch gleiche Temperaturänderungen τ aller Bogenstäbe und eine Temperaturänderung τ_z der Zugstange.

Es gelten die Gleichungen 1 bis 3 des Beispiels 120 und die Berechnung könnte nach diesen ganz wie für den Zweigelenkbogen ohne Zugstange in den Beispielen 120 und 121 durchgeführt werden, wobei auch die s , ω , ϱ , A und der übereinstimmenden Querschnitte der Bogenstäbe wegen die c wie dort bleiben, wogegen die Werte des Horizontalschubes H nun wie in Beispiel 116 bestimmt wären. Da diese Berechnung also nichts wesentlich Neues bietet, während erwünscht ist, die Einsenkungen e_m , e_o von Bogenfachwerken mit und ohne Zugstange unter sonst gleichen Verhältnissen miteinander vergleichen zu können, so wollen wir die gestellte Aufgabe im Hinblick auf die bereits durchgeführten Berechnungen für das Bogenfachwerk ohne Zugstange in den Beispielen 120, 121

behandeln. Von vornherein ist klar, daß die e_m durch Belastung (des Nachgebens der Zugstange wegen) größer sind als die entsprechenden e_o , während andererseits keine Beiträge zu e_m durch etwaiges Ausweichen der Widerlager entstünden, wie ja auch auf letztere kein Horizontalschub ausgeübt wird.

Bezeichnen für irgend einen Belastungs- oder Temperaturfall H_m, H_o die Werte des Horizontalschubs bei den Bogen mit und ohne Zugstange, so unterscheiden sich die Einsenkungen e_m, e_o nach der Gleichung 3 des Beispiels 120 nur dadurch, daß im ersten Falle H_m , im zweiten H_o für H zu setzen ist. Wir haben also in jedem Belastungs- und Temperaturfall:

$$e_m = e_o + (H_m - H_o) \frac{\Sigma c \omega \varrho}{E} \quad 1$$

und speziell für unseren Bogen mit dem bereits in Beispiel 120 (S. 453) ermittelten Werte des Bruches, wenn H_m, H_o in Tonnen eingesetzt werden:

$$e_m = e_o + 0,12377 (H_o - H_m). \quad 2$$

Durch beliebige Belastungen ergab sich in Beispiel 116 $H_m = 0,8847 H_o$, womit für solche:

$$e_m = e_o + 0,01427 H_o. \quad 3$$

a) Durch das Eigengewicht allein erhielten wir in den Beispielen 120, 109 $e_o = 0,329$ cm, $H_o = 29,542$ t, womit nach 3:

$$e_m = 0,329 + 0,01427 \cdot 29,542 = 0,751 \text{ cm},$$

gegen 0,329 cm beim entsprechenden Bogenfachwerk ohne Zugstange.

b) Durch die in Fig. 290 angedeutete Verkehrslast entstehen nach Beispiel 121 $e_o = 1,027$ cm und nach Gleichung 8 des Beispiels 110 oder der Einflußlinie Fig. 270:

$$H_o = (0,3863 \cdot 3,25 + 0,7106 \cdot 13 + 0,9946 \cdot 3,25 + 1,2033 \cdot 12,75) 2 + 1,2941 \cdot 17 = 80,135 \text{ t},$$

womit nach 3: $e_m = 1,027 + 0,01427 \cdot 80,135 = 2,171$ cm.

Die Grenzwerte durch Belastung sind nun:

$$e_m = 0,751 + 2,171 = 2,922 \text{ cm}, \quad e_m = 0,751 \text{ cm}$$

gegen 1,356 cm und 0,329 cm beim Bogenfachwerk ohne Zugstange (Beispiel 121).

c) Durch gleiche Temperaturänderungen τ aller Bogenstäbe und eine Temperaturänderung τ_z der Zugstange fanden sich in den Beispielen 120, 108, 116 $e_o = -0,04893 \tau$ cm, $H_o = 0,35671 \tau$ t, $H_m = 0,31558 (\tau - \tau_z)$ t, womit nach 2:

$$e_m = -0,04384 \tau + 0,03906 \tau_z. \quad 4$$

Beispielsweise erhält man für $\tau = \pm 25^0$, $\tau_z = \pm 20^0$:

$$e_m = \mp 0,315 \text{ cm}.$$

Mit diesen Beiträgen würden die Grenzwerte von e_m im ganzen (durch Belastungen und Temperaturänderungen):

$$e_m = 2,922 + 0,315 = 3,237 \text{ cm}, \quad e_m = 0,751 - 0,315 = 0,436 \text{ cm},$$

gegen 2,579 cm und $-0,894$ cm beim Bogenfachwerk ohne Zugstange (Beispiel 121).

Bemerkungen. Es kann auch die Einsenkung e_y des mittleren Knotenpunktes der Zugstange interessieren. Der Hängestange in der Mitte mögen die Länge y , der Querschnitt F_y , die Stabkraft Y und die Temperaturänderung τ_y entsprechen. Dann hat man:

$$e_y = e_m + \alpha y \tau_y + \frac{y Y}{E F_y}. \quad 5$$

Bezeichnen ferner G die Belastung des mittleren Knotenpunktes der Zugstange und δ dessen Höhe über den beiderseits in horizontalen Entfernungen λ zunächst folgenden Knotenpunkten der Zugstange, so folgt aus der Gleichgewichtsbedingung $G + 2 Z \frac{\delta}{\xi} - Y = 0$ mit $Z = H \frac{\xi}{\lambda}$ (S. 176):

$$Y = G + 2 H \frac{\delta}{\lambda}, \quad \text{bei horizontaler Zugstange} \quad Y = G. \quad 6$$

§ 60. Träger aus Fachwerk und auf Biegung beanspruchten Stäben.

Der Träger bestehe aus beliebig vielen achsial beanspruchten geraden Stäben, für welche s, F, S, τ, E, α Länge, Querschnitt, Stabkraft, Temperaturänderung, Elastizitätsmodul und Ausdehnungskoeffizient bedeuten, und beliebig vielen auf Biegung beanspruchten geraden oder einfach gekrümmten Stäben, für welche $F, J, M_x, N_x, T_x, \tau, E, G, k, \alpha, ds$ Querschnitt, Trägheitsmoment, Angriffsmoment, Normalkraft, Transversalkraft, Temperaturänderung, Elastizitätsmodul, Schubelastizitätsmodul, Koeffizient der Schubwirkung, Ausdehnungskoeffizient und Achsdifferential beim Querschnitt x bezeichnen. Die N_x sollen wie die S positiv für Zug gelten, während im übrigen die früher für achsial und auf Biegung beanspruchte Stäbe eingeführten Voraussetzungen und Bezeichnungen beibehalten werden. Wir setzen E, G, k, α konstant voraus (eventuell Mittelwerte). Der Koeffizient der Schubwirkung ist für rechteckige Querschnitte $k = 6/5$, für Kreisquerschnitte $k = 10/9$, für Blechträgerquerschnitte genügend genau $k = \frac{F}{h\delta}$, unter F, h, δ Flächeninhalt, Höhe und Stehblechdicke verstanden. Wird, wie besonders bei Bogen üblich, der Einfluß der Schubkräfte auf die Biegung vernachlässigt, so ist im folgenden $T_x = 0$ zu setzen, womit auch G, k nicht zur Verwendung kommen. Für horizontale Stäbe hat man $T_x = V_x$. Die Summen \sum_a und \sum_b in den folgenden Gleichungen mögen sich auf alle achsial beanspruchten beziehungsweise auf Biegung beanspruchten Stäbe beziehen.

Verschiebungsarbeit. Prinzip der virtuellen Verrückungen.

Als Verschiebungsarbeit (Deformationsarbeit, Formänderungsarbeit) D während irgendwelcher Verrückungen der Punkte eines Körpers wurde in § 56 die Arbeit zur Überwindung der inneren Kräfte während dieser Verrückungen bezeichnet. Virtuelle Verschiebungsarbeit \mathfrak{D} heißt die Arbeit zur Überwindung der inneren Kräfte, wenn diese konstant wie am Ende der Verrückungen wären, und virtuelle Arbeit \mathfrak{A} der äußeren Kräfte die Arbeit der letzteren bei konstanten Werten wie am Ende der Verrückungen. Nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen (§ 56) ist die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte gleich der virtuellen Arbeit zur Überwindung der inneren Kräfte oder virtuellen Verschiebungsarbeit:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{D} \quad 1$$

Für den jetzt vorliegenden Fall bleibt \mathfrak{A} wie in § 56 ausgedrückt, während die virtuelle Verschiebungsarbeit:

$$\mathfrak{D} = \sum_a \left(\frac{S}{EF} + \alpha \tau \right) s S + \sum_b \int_0^l \left[\frac{M_x^2}{EJ} + \left(\frac{N_x}{EF} + \alpha \tau \right) N_x + \frac{k T_x^2}{GF} \right] ds, \quad 2$$

und die wirkliche Verschiebungsarbeit:

$$D = \sum_a \left(\frac{s S^2}{2 E F} + \alpha s \int_0^\tau S d\tau \right) + \sum_b \int_0^l \left[\frac{M_x^2}{2 E J} + \frac{N_x^2}{2 E F} + \alpha \int_0^\tau N_x d\tau + \frac{k T_x^2}{2 G F} \right] ds, \quad 3$$

worin sich die Integrale von 0 bis l auf je einen ganzen auf Biegung beanspruchten Stab beziehen. Nach 1 mit 2, 3 gilt

speziell für $\tau = 0, d\tau = 0$

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{D} = \sum_a \frac{s S^2}{E F} + \sum_b \int_0^l \left[\frac{M_x^2}{E J} + \frac{N_x^2}{E F} + \frac{k T_x^2}{E F} \right] ds = 2 D \quad 4$$

eine Beziehung, welche mitunter als Clapeyronsches Theorem bezeichnet wird (§ 56).

Beziehungen für statisch unbestimmte Größen. Es seien X eine statisch unbestimmte Größe (Reaktionskomponente, Stabkraft, Moment etc.), \mathfrak{U} die Arbeit der mit ihren Endwerten konstant gedachten überzähligen und von überzähligen Größen abhängigen notwendigen Reaktionskomponenten, $\partial S, \partial M_x, \partial N_x, \partial T_x$ die Änderungen von S, M_x, N_x, T_x durch irgendwelche mit den geometrischen und statischen Bedingungen des Trägers verträgliche Änderung ∂X von X , und $\partial' \mathfrak{U}$ die entsprechende Änderung von \mathfrak{U} , diese jedoch bei konstanten Verrückungen wie am Ende der Deformation. Dann hat man als Bedingung für die Größe X :

$$\sum_a \left(\frac{S}{E F} + \alpha \tau \right) s \frac{\partial S}{\partial X} + \sum_b \int_0^l \left[\frac{M_x}{E J} \frac{\partial M_x}{\partial X} + \left(\frac{N_x}{E F} + \alpha \tau \right) \frac{\partial N_x}{\partial X} + \frac{k T_x}{G F} \frac{\partial T_x}{\partial X} \right] ds = \frac{\partial' \mathfrak{U}}{\partial X}. \quad 5$$

Da ebensoviele Gleichungen der Form 5 angesetzt werden können, als überzählige Größen vorhanden sind, so lassen sich diese sämtlich berechnen.

Nach 5 hat man für $\tau = 0, \mathfrak{U} = 0$ oder doch $\tau = 0, \partial' \mathfrak{U} = 0$:

$$\sum_a \frac{s S}{E F} \frac{\partial S}{\partial X} + \sum_b \int_0^l \left[\frac{M_x}{E J} \frac{\partial M_x}{\partial X} + \frac{N_x}{E F} \frac{\partial N_x}{\partial X} + \frac{k T_x}{G F} \frac{\partial T_x}{\partial X} \right] ds = 0 \text{ d. h. } \frac{\partial D}{\partial X} = 0. \quad 5a$$

Die Größe X ist in diesem speziellen Falle so bestimmt, daß die Verschiebungsarbeit ein Minimum wird (§ 56).

Die angeführten Gleichungen gelten auch, wenn nur achsial oder nur auf Biegung beanspruchte Stäbe vorhanden sind und damit \sum_b oder \sum_a wegfällt. Ferner kann für Stäbe, die in \sum_b berücksichtigt werden, $M_x = 0, T_x = 0$ sein, wie bei vollkommenen Ketten (§ 25), oder $N_x = 0$, wie bei horizontalen Balken mit nur vertikalen Aktivkräften. Bei Ableitung der Gleichungen ist der Ausdruck § 6, 7) der Normalspannungen σ ver-

wendet. Entsprechende Beziehungen für beliebige isotrope Körper siehe Weyrauch, Arbeitsbedingungen für statisch unbestimmte Systeme, Wochenschrift für Architekten und Ingenieure 1884, S. 290; Luegers Lexikon der gesamten Technik, 2. Auflage, Artikel Verschiebungsarbeit, wo auch weitere Literatur zu finden ist.

Aufgabe 44. Zweigelenbogen aus Fachwerk und vollwandigem Teil.

Bei Bogenfachwerken mit Kämpfergelenken der in Fig. 292 angedeuteten Form reicht mitunter die Konstruktionshöhe nicht aus, um das Fachwerk bis zur

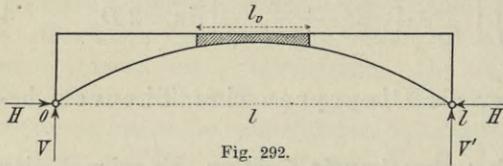


Fig. 292.

Mitte durchzuführen, so daß ein vollwandiges Stück eingeschaltet werden muß. Den Horizontalschub H für den Fall dieser Anordnung auszudrücken.

Nach § 60, 5) hat man zur Berechnung der statisch unbestimmten Größe $X = H$:

$$\Sigma \left(\frac{S}{EF} + \alpha \tau \right) s \frac{\partial S}{\partial H} + \int_0^l \left[\frac{M_x}{EJ} \frac{\partial M_x}{\partial H} + \left(\frac{N_x}{EF} - \alpha \tau \right) \frac{\partial N_x}{\partial H} + \frac{k T_x}{GF} \frac{\partial T_x}{\partial H} \right] ds = \frac{\partial' \Pi}{\partial H}, \quad 1$$

worin S für Zug, N_x für Druck und Π dann positiv, wenn die Verrückung des Auflagers l bezüglich des Auflagers 0 in der Richtung von H stattfindet (S. 403), und die Vorzeichen von H , M_x , T_x wie durch § 1 bestimmt bleiben. Es gelten dann für das Fachwerk und den vollwandigen Teil auch im übrigen die bisherigen Gleichungen.

Bezeichnen A , A_x die Werte von S , M_x in dem gegebenen Belastungsfall (S. 361, 408) für $H = 0$ und q den Wert von s durch eine Kraft $H = 1$ allein, so können wir in 1 setzen

$$\begin{aligned} S &= A + Hq, & M_x &= A_x - Hy, & \Pi &= -H\Delta l, \\ \frac{\partial S}{\partial H} &= q, & \frac{\partial M_x}{\partial H} &= -y, & \frac{\partial' \Pi}{\partial H} &= -\Delta l, \end{aligned}$$

und bei der Kleinheit von q neben $ds = dx$ nach § 1, 9), 10):

$$\begin{aligned} N_x &= H, & T_x &= V_x, \\ \frac{\partial N_x}{\partial H} &= 1, & \frac{\partial T_x}{\partial H} &= 0. \end{aligned}$$

Die Bedingungsgleichung für H lautet damit:

$$\Sigma \left(\frac{A + Hq}{EF} + \alpha \tau \right) sq + \int_0^l \left[\frac{Hy - A_x}{EJ} y + \left(\frac{H}{EF} - \alpha \tau \right) \right] dx = -\Delta l,$$

oder, wenn l_v vorübergehend die Länge des vollwandigen Trägerteils bedeutet:

$$\Sigma \frac{sqA}{EF} + H \Sigma \frac{s q^2}{EF} + \Sigma \alpha \tau sq + H \int_0^l \frac{y^2}{EJ} dx - \int_0^l \frac{y A_x}{EJ} dx + H \int_0^l \frac{dx}{EF} - \alpha \tau l_v = -\Delta l, \quad 2$$

und für gleiche E , α des ganzen Trägers mit der bisherigen Bezeichnung $c = \frac{s}{F}$:

$$\Sigma c q A + H \Sigma c q^2 + E \alpha \Sigma \tau sq + H \int_0^l \frac{y^2}{J} dx - \int_0^l \frac{y A_x}{J} dx + H \int_0^l \frac{dx}{F} - E \alpha \tau l_v = -\Delta l. \quad 3$$

Da für gleiche relative Längenänderungen aller Fachwerkstäbe und des vollwandigen Trägerteils der ganze Träger sich ähnlich bleiben würde, so hat man nach § 57, 25):

$$\Sigma sq = -(l - l_v),$$

und bei Verwendung dieses Ausdruckes aus 3 den Horizontalschub durch beliebige Belastung, eine gleichmäßige Temperaturänderung τ des Trägers und eine Änderung Δl der Spannweite (für Zunahmen τ , Δl positiv):

$$H = \frac{\int_0^l \frac{y A_x}{J} dx - \Sigma c \rho A + E \alpha \tau l - E \Delta l}{\int_0^l \frac{y^2}{J} dx + \int_0^l \frac{dx}{F} + \Sigma c \rho^2} \quad 4$$

Die Einzelbeiträge der Belastung, Temperaturänderung und einer etwaigen Änderung der Spannweite lassen sich daraus leicht entnehmen.

In allen vorstehenden Gleichungen beziehen sich die Integrale nur auf den vollwandigen Trägerteil, sie lassen sich beispielsweise mittels der Simsonschen Regel berechnen. Denkt man sich jedoch den Trägerteil in eine genügende Anzahl Felder der Längen $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ geteilt, welchen die Mittelwerte x_1, x_2, \dots und y_1, y_2, \dots von x, y , sowie J_1, J_2, \dots und F_1, F_2, \dots von J, F und ebenso Mittelwerte von A_x entsprechen (vergl. S. 116, 322), so tritt an Stelle von 4:

$$H = \frac{\sum_0^l \frac{\lambda y}{J} A_x - \Sigma c \rho A + E \alpha \tau l - E \Delta l}{\sum_0^l \frac{\lambda y^2}{J} + \sum_0^l \frac{\lambda}{F} + \Sigma c \rho^2} \quad 5$$

Nach § 20, 3), 22) gilt für beliebige Belastung:

$$A_x = Vx - \sum_0^l P(x-a) = \frac{l-x}{l} \sum_0^l Pa + \frac{x}{l} \sum_0^l P(l-a) \text{ mit } V = \frac{1}{l} \sum_0^l P(l-a), \quad 6$$

und beispielsweise für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit:

$$A_x = Vx - \frac{u x^2}{2} = \frac{u}{2} x(l-x) \text{ mit } V = \frac{u l}{2}, \quad 7$$

während spezielle Ausdrücke für andere Belastungen nach § 18 erhalten werden können. Das vom Querschnitt x unabhängige V kann natürlich, wenn erwünscht, in 2–5 vor die betreffenden Summenzeichen Σ gesetzt werden.

Bei der vorläufigen Berechnung (§ 58) von Bogen der hier besprochenen Anordnung hat man das Fachwerk bis zur Mitte fortgesetzt gedacht und für das so vervollständigte Bogenfachwerk das in § 58 erwähnte Verfahren auf Grund von Fachwerkformeln zur Anwendung gebracht. Man könnte natürlich auch das dort angeführte Verfahren auf Grund von Formeln für vollwandige Bogen zu verwenden versuchen (Beispiel 124).

Beispiel 124. Zur vorigen Aufgabe. Bogenfachwerk an Stelle der König-Karlsbrücke (Cannstatter Neckarbrücke).

Für den in Fig. 293 angedeuteten Zweigelenkbogen an Stelle von Öffnung IV der neuen Cannstatter Neckarbrücke (vergl. im VI. Abschnitt unter R) ergab eine Berechnung von Mörsch in dem von ihm auf Grund der Mohrschen Gleichung § 59, 4) abgeleiteten Ausdruck 4 der vorigen Aufgabe für em als Längeneinheit:

Den Beitrag der Obergurtstäbe zu $\Sigma c \rho^2$	186,0012
„ „ „ Untergurtstäbe „ „	135,1796
„ „ „ Diagonalen „ „	133,1700
„ „ „ Vertikalen „ „	17,2188
zusammen $\Sigma c \rho^2 =$	471,5696;

ferner für den vollwandigen Teil mittels der Simsonschen Regel

$$\int_0^l \frac{y^2}{J} dx = 800,0000$$

$$\int_0^l \frac{dx}{F} = 2,5309$$

wonach der Nenner im Ausdruck 4 war:

1274,1005

und der Horizontalschub durch beliebige Belastung, eine gleichmäßige Temperaturänderung τ und eine Änderung Δl der Spannweite:

$$H = \frac{1}{1274,1} \left(\int_0^l \frac{y A_x}{J} dx - \Sigma c \rho A + E \alpha \tau l - E \Delta l \right). \quad 1.$$

Die hierin von der Belastung abhängigen Glieder erlangten für je zwei symmetrisch zur Trägermitte in Abständen $a = m \lambda = m \frac{48}{19}$ m von den Auflagern wirkende Lasten $P = 1$ die folgenden Werte.

$a = m \lambda$	$\Sigma c \rho A$	$\int_0^l \frac{y A_x}{J} dx$	$\int_0^l \frac{y A_x}{J} dx - \Sigma c \rho A$
0 λ	— 5,2900	0	5,2900
1 λ	— 295,4220	438,2385	733,6605
2 λ	— 578,6926	876,4770	1455,1696
3 λ	— 851,9176	1314,7155	2166,6331
4 λ	— 1113,9052	1752,9540	2866,8592
5 λ	— 1355,0464	2191,1925	3546,2389
6 λ	— 1562,6240	2629,4310	4192,0550
7 λ	— 1715,8308	3067,6692	4783,5000
7,5 λ^1	— „	3279,3395	4995,1703
8 λ	— „	3451,3468	5167,1776
8,5 λ	— „	3595,8512	5311,6820
9 λ	— „	3674,8065	5390,6373
9,5 λ	— „	3714,3010	5430,1318

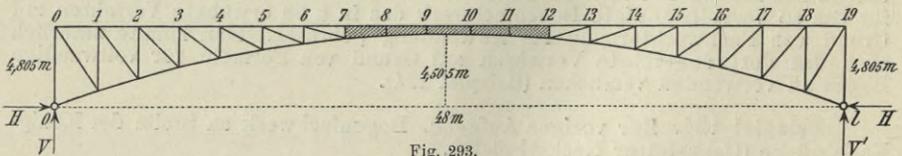


Fig. 293.

Zu bestimmen: a) Die Werte des Horizontalschubs H durch eine Last $P = 1$ an jeder der angeführten Stellen behufs Verzeichnung der Einflußlinie von H ; b) den Wert von H durch eine gleichmäßig verteilte Last auf der Fahrbahn von u pro Meter auf der ganzen Spannweite und durch verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten auf der Fahrbahn von u, u' pro Meter auf der ersten und zweiten Trägerhälfte; c) die Werte von H durch eine gleichmäßige Temperaturänderung τ des Bogens und durch eine Änderung Δl der Spannweite; d) die unter b) verlangten Werte bei der vorläufigen Berechnung mittels Fachwerkformeln (§ 58, Beispiel 119), wenn letztere nach Mörsch die in Kolonne 3 der folgenden Tabelle (S. 466) eingetragenen H durch Einzellasten $P = 1$ ergeben hat, und die unter c) verlangten Werte von H bei dieser vorläufigen Berechnung, wenn dabei dem Obergurt und Untergurt zusammen $\Sigma s \rho^2 = 252\,600 + 190\,400 = 442\,700$ entsprachen, und zur Ermittlung der Beiträge von $\tau, \Delta l$ neben $\beta = 1$ gesetzt wurde $r_o = 290$ qcm; e) die unter a), b), c) verlangten Werte von H nach der vorläufigen Berechnung auf Grund von Formeln für vollwandige Bogen (§ 58, Beispiel 118).

¹ Inmitten der Feldlängen λ trafen auch Querträger auf die Bogen, deren Auflagerdrücke aber in den Fachwerkfeldern durch die Obergurtstäbe als Längsträger auf die Felderenden übertragen wurden.

a) Von je zwei symmetrisch zur Mitte gelegenen Lasten $P=1$ trägt jede die Hälfte zum Horizontalschub H bei. Wir erhalten also nach 1 mit den Zahlen der letzten Kolumne der Tabelle S. 464 für eine Last $P=1$

$$\begin{aligned} \text{bei } a &= 0 & H &= \frac{5,2900}{1274,1 \cdot 2} = 0,0021 \\ a &= \lambda & H &= \frac{733,6605}{1274,1 \cdot 2} = 0,2879 \\ a &= 2\lambda & H &= \frac{1455,1696}{1274,1 \cdot 2} = 0,5711. \end{aligned}$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werte in Kolumne 2 der folgenden Tabelle berechnet. Die Einflußlinie von H konnte hiernach in Fig. 294 verzeichnet werden. Wir haben die bekannten Einflußlinien der Vertikalreaktionen V, V' der Kämpfer beigefügt (vergl. S. 45).

b) Bezeichnet F den Inhalt der ganzen Einflußfläche des Horizontalschubs H , so hat man durch eine gleichmäßig verteilte Last von u pro Meter auf der ganzen Spannweite und durch verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten von u, u' pro Meter auf der ersten und zweiten Trägerhälfte (§ 12):

$$H = F u \quad \text{bzw.} \quad H = F \frac{u + u'}{2} \quad 2$$

Nun ergibt sich mit den soeben berechneten Ordinaten in Kolumne 2 der folgenden Tabelle:

$$\begin{aligned} F &= \frac{48}{19} \left(\frac{0,0021 + 0,2879}{2} + \dots + \frac{1,6451 + 1,8772}{2} \right) 2 + \\ & \frac{48}{19 \cdot 2} \left(\frac{1,8772 + 1,9603}{2} + \dots + \frac{2,1155 + 2,1310}{2} \right) 2 = 60,1614 \end{aligned}$$

womit nach 2:

$$H = 60,1614 u \quad \text{bzw.} \quad H = 30,0807 (u + u').$$

Beispielsweise erhält man durch eine gleichmäßig verteilte Verkehrslast von $u = 1390$ kg pro m auf der ganzen Spannweite $H = 60,1614 \cdot 1390 = 83624$ kg.

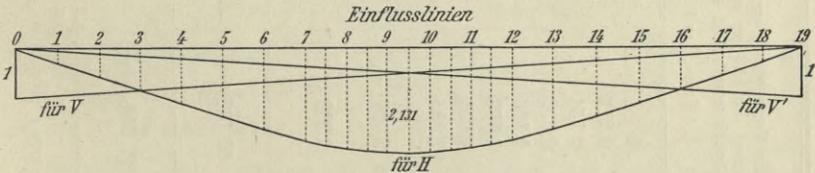


Fig. 294.

c) Setzt man in 1, Flußweisen entsprechend (die Cannstatter Brücke ist in Martinflußweisen ausgeführt), $E = 2150000$ kg pro qcm, $\alpha = 0,0000115$, $E\alpha = 24,725$, so folgen durch eine Temperaturänderung τ :

$$H = \frac{24,725 \cdot 4800}{1274,1} \tau = 93,148 \tau \text{ kg,}$$

und durch eine Änderung Δl der Spannweite:

$$H = - \frac{2150000}{1274,1} \Delta l = - 1687,5 \Delta l \text{ kg,}$$

worin Δl in cm einzusetzen. Wir erhalten beispielsweise für $\tau = \pm 25^{\circ}$ $H = \pm 2329$ kg und für $\Delta l = \pm 1$ cm $H = \mp 1687$ kg.

d) Die in Kolumne 3 der nachstehenden Tabelle angeführten Werte von H durch Einzellasten $P=1$ bestimmen den Inhalt der Einflußfläche von H für die vorläufige Berechnung:

$$F = \frac{48}{19} \left(\frac{0,277}{2} + \frac{0,277 + 0,554}{2} + \dots + \frac{2,097 + 2,232}{2} + \frac{2,232 + 2,232}{2 \cdot 2} \right) 2 = 60,561,$$

womit die unter b) verlangten Werte des Horizontalschubs nach 2:

$$H = 60,561 u \quad \text{bzw.} \quad H = 30,2805 (u + u').$$

Unter den Voraussetzungen d) ergeben sich als vorläufige Werte des Horizontalschubs durch eine Temperaturänderung τ nach § 58, 6):

$$H = \frac{4800 \cdot 290 \cdot 24,725}{442700} \tau = 77,744 \tau \text{ kg},$$

und durch eine Änderung der Spannweite um Δl nach § 58, 7):

$$H = -\frac{290 \cdot 2150000}{442700} \Delta l = -1404,4 \Delta l \text{ kg}.$$

Alle diese Werte wie die weiter folgenden sind in nebenstehender Tabelle eingetragen.

e) Wie in Beispiel 118 hat man nach § 58, 1) für eine Einzellast P bei $a = m \lambda$ mit $l = n \lambda$:

$$H = \frac{5 \lambda}{8 f n^3} P m (n - m) (n^2 + n m - m^2), \quad 3$$

und speziell mit $\lambda = \frac{48}{19} \text{ m}$, $n = 19$, $f = 4,655 \text{ m}$, $P = 1$:

$$H = \frac{m (19 - m) (361 + 19 m - m^2)}{20221,5},$$

woraus für $m = 1$ bis 9,5 die in Kolumne 5 der nebenstehenden Tabelle eingetragenen Werte folgen. Die 3 entsprechenden Formeln § 58, 2) liefern mit $\frac{l^2}{8f} = \frac{48^2}{8 \cdot 4,655} = 61,8690$ für die unter b) erwähnten gleichmäßig verteilten Lasten:

$$H = 61,8690 u \quad \text{bezw.} \quad H = 30,9345 (u + u').$$

Setzen wir in den Formeln § 58, 3) mit $h = 51,2 \text{ cm}$ Entfernung der Gurtungsschwerpunkte in den äußersten Vollwandfeldern und $F = 2f_0$ Trägerquerschnitt:

$$c = J = F \frac{h^2}{4} = 290 \cdot 2 \frac{51,2^2}{4} = 380110 \text{ cm}^4,$$

so ergeben sich durch eine Temperaturänderung τ :

$$H = \frac{15 \cdot 380110 \cdot 24,725}{8 \cdot 465,5^2} \tau = 81,322 \tau \text{ kg},$$

und durch eine Änderung Δl der Spannweite:

$$H = -\frac{15 \cdot 380110 \cdot 2150000}{8 \cdot 465,5^2 \cdot 4800} \Delta l = -1472,2 \Delta l \text{ kg},$$

worin Δl in cm einzusetzen.

Bemerkungen. Hätten wir unter e) anstatt der Gleichung § 58, 1) die Näherungsformel § 58, a) verwendet, so würde wie in Beispiel 118 an Stelle von 3 getreten sein:

$$H = \frac{35 \lambda}{48 f n} P m (n - m),$$

und mit $\lambda = \frac{48}{19} \text{ m}$, $f = 4,655 \text{ m}$, $n = 19$, $P = 1$:

$$H = \frac{m (19 - m)}{48,0130}.$$

Diese Gleichung mit $m = 1$ bis 9,5 hat die Werte in der vierten Kolumne obiger Tabelle geliefert. Die entsprechenden Ausdrücke § 58, b) ergeben mit $l = 48 \text{ m}$, $f = 4,655 \text{ m}$ für die unter b) erwähnten Lasten:

$$H = 60,1504 u \quad \text{bezw.} \quad H = 30,0752 (u + u').$$

Der Vergleich der in der letzten Tabelle zusammengestellten Ergebnisse unserer Berechnung zeigt, daß im vorliegenden Falle im Gegensatz zu den Beispielen 118, 119 (vergl. die Tabelle S. 440) die Fachwerkformel § 58, 5) erheblich bessere Werte des Horizontalschubs durch Belastungen lieferte als die Formeln für vollwandige Bogen § 58, 1), 2), und daß die Formel § 58, a) wieder die wenigst brauchbaren Resultate für Einzellasten ergibt. Wohl aber führten die ihr entsprechenden Formeln § 58, b) wieder zu sehr guten Werten für gleichmäßig verteilte Lasten auf der ganzen oder halben Spannweite.

VI. Abschnitt.

Berechnung der König=Karls=Brücke über den Neckar bei Cannstatt.

Die im Jahre 1893 dem Verkehr übergebene Straßenbrücke über den Neckar zwischen Stuttgart und Cannstatt ist 1891—93 durch die Württembergische Ministerialabteilung für den Straßen- und Wasserbau unter Präsident von Leibbrand erbaut worden. Bezüglich eingehenden Studiums aller Verhältnisse der Brücke wird auf dessen Schrift „Die König-Karlsbrücke“, Berlin 1895, verwiesen.

Die Lieferung der Eisenkonstruktion aus basischem Martinflußeisen, Nieten aus Schweißeisen, wurde infolge engeren Wettbewerbs der Eßlinger Maschinenfabrik übertragen. Die Konstruktion zeichnet sich durch Einfachheit, Übersichtlichkeit und bequeme Zugänglichkeit aus. Die Brückenbahn von 18 m Breite (Fahrbahn 11 m, Fußwege je 3,5 m) wird in jeder Öffnung durch sechs parabolische Blechbogen mit Kämpfergelenken, ohne Scheitelgelenk, in Abständen von 3,2 m getragen. Infolge der Bedingungen für das Längenprofil, die Lichtweiten, Höhenlage der Kämpfergelenke usw. ergaben sich folgende Spannweiten und Pfeilhöhen der Bogenachsen in der Öffnungsfolge von Stuttgart nach Cannstatt:

Für Öffnung	I	II	III	IV	V
$l =$	45,51	48	50,48	48	45,51 m,
$f =$	4,375	4,735	4,855	4,505	3,695 „.

Es sind also nicht zwei Öffnungen vollständig übereinstimmend.

Die erste Berechnung einer Öffnung wurde durch Oberingenieur Kübler von der Eßlinger Maschinenfabrik vorgenommen und den Plänen der Fabrik beigelegt. Ihr allgemeiner Gang ist aus der oben zitierten Schrift ersichtlich, wenn auch die Durchführung für letztere nachträglich auf Grund der definitiven Querschnitte wiederholt und in einzelnen Punkten modifiziert wurde. Unter Beziehung jener Berechnung fand eine Prüfung der Pläne an der Hand der Lieferungsbedingungen statt, worauf im Einvernehmen der Bauverwaltung, der Eßlinger Maschinenfabrik und des Verfassers vorliegenden Werks eine Anzahl Änderungen beschlossen wurde (Verstärkung der Stirnbogen und der Horizontalplatten aller Bogen, Wegfall der Unterbrechung der zweiten Horizontalplatten um die Bogenmitten, Ergänzung der Windkreuzverbände, Verstärkung der Vertikalständer und des Zorseisenbelags). Auf Grund der so erhaltenen Querschnitte und Gewichte wurde die definitive Berechnung durch den Verfasser entsprechend den Bauvorschriften für alle fünf Öffnungen getrennt durchgeführt. Diese vollständige Berechnung ist in der Wiener „Allgemeinen Bauzeitung“ 1895 veröffentlicht¹. Sie gestattet interessante Vergleiche und insbesondere auch Schlüsse darüber, inwieweit man in ähnlichen Fällen von vollständiger Berechnung der verschiedenen Öffnungen absehen kann. Selbstverständlich ist jedoch der Gang der Berechnung für alle Öffnungen derselbe.

Im folgenden geben wir als Beispiel einer umfassenderen Bogenberechnung die Berechnung von Öffnung IV mit folgenden Änderungen: 1. Entsprechend

¹ Weyrauch. Berechnung der neuen Bogenbrücke über den Neckar zwischen Stuttgart und Cannstatt, Allgemeine Bauzeitung 1895, S. 49, 57, 73, 85.

dem Zwecke dieses Buches ist eine vorläufige Berechnung zur Ermittlung der Querschnitte beigefügt; 2. anstatt des genaueren Verfahrens zur Bestimmung der Grenzwerte der Normalspannungen ist das in § 11 erwähnte einfachere Verfahren (S. 43, 121) verwendet, da letzteres in der Praxis meist vorgezogen wird, ersteres aber in dem erwähnten Aufsätze verfolgt werden kann (vergl. S. 485); 3. der Einfluß der Temperaturänderungen ist etwas anders als in diesem Aufsätze berücksichtigt (vergl. S. 17), Übereinstimmung würde erreicht, wenn in letzterem $\lambda = 1$ gesetzt würde, während mit $\lambda = 0,953021$ gerechnet ist; 4. an einigen Stellen sind Bemerkungen betreffend andere Berechnungsweisen beigefügt und am Schlusse ist ein Vergleich zwischen Bogenfachwerken und vollwandigen Bogen gegeben. — Bei der eingehaltenen Genauigkeit der Berechnung kommt es uns keineswegs immer auf den Wert der berücksichtigten Dezimalen für die Schlußresultate an, so wenig wie dem Kaufmann, welcher seine Bücher auf den Pfennig genau führt, dieser Betrag von Bedeutung ist. Rechnet man aber bei verwickelteren Ableitungen, wie sie besonders statisch unbestimmte Konstruktionen erfordern, zu ungenau, so wird nach und nach jede Kontrolle unmöglich, es entstehen Widersprüche, von welchen nicht mehr gesagt werden kann, ob sie in Fehlern oder in Vernachlässigungen ihren Grund haben. Eine allgemeine Empfehlung gewisser Vernachlässigungen (z. B. der Dezimalen) kann nur auf Unkenntnis dieser Verhältnisse beruhen.

Bemerkt sei noch, daß in der folgenden Darstellung manche Berechnungen vorkommen, welche häufig wegfallen (künstlicher Horizontalschub, Reduktion der Normaltemperatur usw.). Sodann rechnen wir mitunter deshalb genauer als unbedingt nötig wäre, um die Zulässigkeit gewisser Vereinfachungen (Vernachlässigung von β , Zusammenfassung des Eigengewichts usw.) wie in früheren Beispielen hervortreten zu lassen. Auch soll auf gewisse Modifikationen der Berechnung hingewiesen werden. Die praktische Berechnung einer Bogenbrücke wird also oft wesentlich kürzer als hier ausfallen. Wollte man sich gar unter Verzicht auf die Bestimmung der ungünstigsten Belastungen auf die Durchrechnung einiger im voraus gewählter Belastungsfälle beschränken (vergl. in Beispiel 22 und 44 unter a bis d), wie früher sehr häufig geschah, so wäre nach der vorläufigen Berechnung unter A für die Bogen selbst meist nicht viel mehr erforderlich, als eine nochmalige Behandlung der gleichen Belastungsfälle mit Verwendung der in VI B, C erhaltenen genaueren Werte, und Feststellung der entsprechenden σ_0 , σ_u . Der Einfluß der Temperaturänderungen könnte wie in J nachträglich berücksichtigt werden.

A. Vorläufige Berechnung.

Da es sich um parabolische Bogen von $l = 48$ m Spannweite und $f = 4,505$ m Pfeil der Achse handelt, so hat man nach § 19, 8), 18) an jeder Stelle x der Bogenachse:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) = 0,00782118 x(48-x),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4f}{l^2} (l-2x) = 0,01564236 (24-x),$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}.$$

Die Vertikalen, welche nach dem Bauprogramm ohne Diagonalen in Abständen von 2,5 m anzunehmen waren, gelangten mit Rücksicht auf die Anordnungen der Bogenenden, Fahrbahn, Geländer usw. an die in Fig. 295 ersichtlichen Stellen symmetrisch zur Trägermitte. Obige Gleichungen ergeben auf der ersten Trägerhälfte unter den Achsen der Vertikalen sowie am Kämpfer und Scheitel die in Kolonne 2—4 der Tabelle II (S. 474) eingetragenen Werte.

Als Verkehrslast waren (abgesehen von Fahrzeugen, vergl. unter VI K) 400 kg pro qm Fahrbahn und 560 kg pro qm Fußwege vorgeschrieben, also für jeden der sechs Bogen durchschnittlich pro m Spannweite:

$$\frac{400 \cdot 11 + 560 \cdot 7}{6} = 1387 \text{ kg,}$$

wofür hier rund 1400 kg gesetzt wird. Das Eigengewicht der Brücke sei auf Grund von Erfahrungen, empirischen Formeln oder überschlägigen Ermittlungen

zu 2100 kg pro m angenommen, wonach als größte Gesamtlast 3500 kg pro m Spannweite in Rechnung zu stellen ist.

Für die vorläufige Berechnung der Bogen ziehen wir nur gleichmäßig verteilte Lasten in Betracht und zwar: a) Vollbelastung des ganzen Bogens; b) Verkehrsbelastung der ersten Bogenhälfte; c) Verkehrsbelastung der zweiten Bogenhälfte. In den für diese Belastungen beim Parabelbogen von konstantem (mitt-

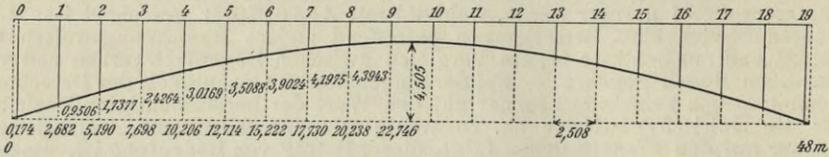


Fig. 295.

lerem) $J \cos \varphi$ gültigen Formeln des § 20 könnte vorläufig neben $\beta = 0$ auch $\varepsilon = 0$ gesetzt werden. Da wir jedoch übersehen, daß die mittlere Entfernung der Gurtungsschwerpunkte etwa $h = 0,8$ m betragen wird, so läßt sich entsprechend § 19, 44) setzen:

$$\gamma = \frac{h^2}{4} = 0,16 \text{ qm}, \quad \text{und mit} \quad r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} = 66,181 \text{ m},$$

nach § 19, 40):

$$\varepsilon = \frac{15 \gamma}{8} \left(\frac{r-f}{r f} \right)^2 = \frac{15 \cdot 0,16}{8} \left(\frac{56,676}{61,181 \cdot 4,505} \right)^2 = 0,012.$$

Für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von u pro Längeneinheit hat man nach § 20, 44), 5) mit § 20, 23) und $\beta = 0$:

$$M_x = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{u}{2} x(l - x), \tag{1}$$

$$N_x = \left[\left(\frac{l}{2} - x \right) u \operatorname{tg} \varphi + \frac{u}{1 + \varepsilon} \frac{l^2}{8f} \right] \cos \varphi, \tag{2}$$

während für verschiedene gleichmäßig verteilte Lasten von u, u' pro Längeneinheit auf der ersten und zweiten Bogenhälfte nach § 20, 28), 31) mit $\beta = 0$:

$$V = \frac{3u + u'}{8} l, \quad H = \frac{u + u'}{1 + \varepsilon} \frac{l^2}{16f} \tag{3}$$

und unter Verwendung dieser Werte nach § 20, 30), 5), 29) auf der ersten Bogenhälfte:

$$M_x = Vx - Hy - \frac{u x^2}{2}, \tag{4}$$

$$N_x = [(V - ux) \operatorname{tg} \varphi + H] \cos \varphi. \tag{5}$$

Da $l = 48$ m, $f = 4,505$ m, $\varepsilon = 0,012$, so erhalten wir für Vollbelastung, mit $u = 3500$ kg:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= 20,25 x(48 - x), \\ N_x &= [(84000 - 3500 x) \operatorname{tg} \varphi + 245938] \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \text{ a}$$

für Verkehrslast von 0 bis m , mit $u = 3500$ kg, $u' = 2100$ kg, wegen $V = 75600$ kg, $H = 176878$ kg:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= 75600 x - 176878 y - 1750 x^2, \\ N_x &= [(75600 - 3500 x) \operatorname{tg} \varphi + 176878] \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \text{ b}$$

für Verkehrslast von m bis l , mit $u = 2100$ kg, $u' = 3500$ kg, wegen $V = 58800$ kg, $H = 176878$ kg:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= 58800 x - 176878 y - 1050 x^2 \\ N_x &= [(58800 - 2100 x) \operatorname{tg} \varphi + 176878] \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \text{ c}$$

Mit Rücksicht auf die $y, \operatorname{tg} \varphi, \cos \varphi$ in Tabelle II (S. 474) ergeben sich z. B. bei $x = 12,714$ m, wo $y = 3,5088$ m, $\operatorname{tg} \varphi = 0,17654$, $\cos \varphi = 0,98477$,

- im Falle a): $M_x = 9309$ mkg, $N_x = 249060$ kg,
- im Falle b): $M_x = 57668$ mkg, $N_x = 179592$ kg,
- im Falle c): $M_x = -42775$ mkg, $N_x = 179765$ kg.

In gleicher Weise sind die übrigen Werte der folgenden Tabelle I berechnet.

Tabelle I.

Quer- schnitt	a		b		c	
	Vollbelastung		Verkehrslast von 0 bis m		Verkehrslast von m bis l	
x	M_x	N_x	M_x	N_x	M_x	N_x
m	mkg	kg	mkg	kg	mkg	kg
2,682	2522	256911	22031	188741	— 17992	184618
5,190	4610	254522	37865	185898	— 30472	183207
7,698	6437	252410	49049	183416	— 38757	181928
10,206	8004	250587	55668	181310	— 42880	180780
12,714	9309	249060	57668	179592	— 42775	179765
15,222	10358	247831	55043	178270	— 38489	178884
17,730	11136	246904	47825	177354	— 29992	178316
20,238	11658	246286	35978	176853	— 17317	177529
22,746	11919	245977	19521	176765	— 445	177060

Bei Belastung durch Eigengewicht allein stehen alle M_x , N_x im Verhältnis $\frac{2100}{3500} = \frac{3}{5}$ zu den in dieser Tabelle unter a) angeführten Werten.

Auf Grund vorstehender Tabelle hat nun die vorläufige Bestimmung der Querschnitte zu erfolgen. Einige Anhaltspunkte pflegen von vornherein gegeben zu sein. Bei Wahl der Höhe kommt neben statischen Gesichtspunkten (je höher die Vertikalplatte, desto kleiner die Gurtungsquerschnitte) das Aussehen in Betracht. Vielfach wurde die Höhe konstant angenommen. Für die Cannstatter Brücke war, wie ebenfalls häufig der Fall, eine Zunahme der Höhe nach den Kämpfern vorgeschrieben; die Veränderlichkeit der Vertikalplattenhöhe wird dann nach Ermittlung der statischen Bedürfnisse für einige Querschnitte, am besten graphisch, festgestellt. Die Querschnitte der Cannstatter Brücke wurden symmetrisch zur Achsschicht und die Dicke der Vertikalplatte gleich 1,2 cm gewählt (vergl. S. 208).

Bei den weiteren Ermittlungen können Profiltabellen, graphische Darstellungen und anderes Erfahrungsmaterial gute Dienste leisten. Wird z. B. bei $x = 12,714$ m ein Profil vom Querschnitt $F = 382,6$ qcm und Widerstandsmoment $W = 12959$ cm angenommen, so liefern die nach § 8, 11) bei symmetrischem Querschnitt gültigen Formeln

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}, \quad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{W} \quad 6$$

die Normalspannungen fürs oberste und unterste Querschnittselement pro qcm im Belastungsfalle a):

$$\sigma_o = \frac{249060}{382,6} + \frac{9309 \cdot 100}{12959} = 723 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{249060}{382,6} - \frac{9309 \cdot 100}{12959} = 580 \text{ kg},$$

im Belastungsfalle b):

$$\sigma_o = \frac{179592}{382,6} + \frac{5766800}{12959} = 914 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{179592}{382,6} - \frac{5766800}{12959} = 24 \text{ kg},$$

im Belastungsfalle c):

$$\sigma_o = \frac{179765}{382,6} - \frac{4277500}{12959} = 140 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \frac{179765}{382,6} + \frac{4277500}{12959} = 800 \text{ kg}.$$

Bei Beurteilung dieser Zahlen kommt es in erster Linie darauf an, welche Beanspruchungen unter den gegebenen Verhältnissen (Material etc.) zugelassen

werden sollen. Für die Cannstatter Brücke (Martinflußeisen) waren Beanspruchungen durch Belastung bis $800 \left(1 + \frac{\min \sigma}{2 \max \sigma}\right)$ gestattet, doch durfte unter Hinzurechnung der Temperatureinflüsse die Grenze von 1000 kg nicht überschritten werden. Hiernach wäre die Normalspannung $\sigma_0 = 914$ kg zu hoch, da wir nicht genau die ungünstigsten Belastungen berücksichtigt haben, während nach obigen Zahlen die Normalspannung im obersten Querschnittselement nicht über

$$800 \left(1 + \frac{140}{2 \cdot 914}\right) = 862 \text{ kg}$$

betragen sollte. Für die hinzukommenden Temperaturänderungen bliebe auch bei 914 kg genügend Spielraum. Im vorliegenden Falle ist jedoch zu beachten, daß ein künstlicher Horizontalschub (vergl. Aufgabe 17, S. 133) vorgesehen war, durch welchen der Druck im Obergurt vermindert wird. Da nun das Eigengewicht für die vorläufige Berechnung absichtlich etwas hoch gewählt wurde, und bei Zweigelenkbogen von wenig veränderlicher Höhe die Normalspannungen erfahrungsgemäß um die Grenzen der äußersten Viertel am ungünstigsten ausfallen, so kann der angenommene Querschnitt vorläufig belassen und zu andern Stellen übergegangen werden.

Im allgemeinen ist bei diesen vorläufigen Ermittlungen folgendes im Auge zu behalten: 1. Die größten zugelassenen Beanspruchungen lassen sich nicht für alle Teile vollständig ausnützen. Auf besondere Umstände und rechnerisch nicht verfolgbare Einflüsse kann schon bei der vorläufigen Berechnung Rücksicht genommen werden. 2. Die Querschnitte lassen sich nicht überall gleichmäßig den Beanspruchungen anpassen, besonders dann nicht, wenn die Winkeleisen in gleicher Stärke durchlaufen und die Veränderlichkeit der Querschnitte nur durch die Höhe der Vertikalplatte und Auflegen von Horizontalplatten bewirkt wird, was meist zu empfehlen ist. 3. Der ungünstigere Einfluß konzentrierter Lasten (Straßenwalze usw.) gegenüber der Belastung durch Menschengedränge macht sich besonders um die Bogenmitte und an den Bogenenden geltend (VI K und Beisp. 11). Es ist also gut, die Beanspruchungen durch Menschengedränge allein hier nicht bis zur zulässigen Grenze gelangen zu lassen. 4. Der Einfluß der Temperaturänderungen nimmt bei Zweigelenkbogen von den Kämpfern nach der Mitte hin zu, sodaß ohne Berücksichtigung der Temperaturänderungen besonders nach der Mitte hin genügend Spielraum für ein Anwachsen der Beanspruchungen bleiben muß. Übrigens können die Temperaturspannungen (bei Parabelbogen unter Einführung eines Schätzungswertes von c , vergl. Beispiel 30) schon bei der vorläufigen Berechnung berücksichtigt werden. 5. Auch der Einfluß eines künstlichen Horizontalschubs läßt sich übersehen (Aufgabe 7) und in dem Falle, daß er die Momente durch eine gleichmäßig verteilte Last (Eigengewicht) aufheben soll, im voraus annähernd berechnen (Aufgabe 7, 17). 6. Etwasige Bewegungen der Widerlager üben von den Kämpfern nach dem Scheitel hin wachsende Einflüsse aus (Beispiel 32).

Nachdem die vorläufige Ermittlung der Querschnitte in der angedeuteten Weise beendet ist, findet eine Revision, Ausgleichung und Berichtigung der Bogen nach statischen, konstruktiven und ästhetischen Gesichtspunkten statt. Das Endergebnis war für die Cannstatter Brücke, daß sämtliche Bogenquerschnitte entsprechend Fig. 296 durch eine Vertikalplatte von 1,2 cm Dicke und wechselnder Höhe h , vier Winkeleisen von $9/9,1,2$ cm und zwei Horizontalplatten von $38/1,4$ cm gebildet sind, wozu von den Mitten zwischen den zweiten und dritten Vertikalen noch horizontale Verstärkungsplatten von $38/1,2$ cm kommen. Die entsprechenden h und halben Querschnittshöhen e (Entfernungen der äußersten Fasern von der Achsschicht) sind in Kolonne 5 und 6 der Tabelle II (S. 474) eingetragen.

Bemerkungen. Man hätte beabsichtigen können, die Gurtungsquerschnitte nach den Formeln § 8, 23), 24) zu berechnen, welche mit einer vorläufigen zulässigen Beanspruchung σ und $O = \sigma f_0$, $U = \sigma f_u$ unter Vernachlässigung der Füllung liefern:

$$f_0 = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{N_x}{2} + \frac{M_x}{h} \right), \quad f_u = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{N_x}{2} - \frac{M_x}{h} \right), \quad 7$$

doch pflegen diese Formeln für Blechträger des vernachlässigten Widerstands

der Vertikalplatte wegen zu große Werte zu liefern. So würden sich oben bei $x = 12,714$ m mit $\sigma = 900$ kg ergeben haben im Belastungsfall b):

$$f_o = \frac{1}{900} \left(\frac{179592}{2} + \frac{57668}{0,87} \right) = 173 \text{ qcm,}$$

im Belastungsfall c):

$$f_u = \frac{1}{900} \left(\frac{179765}{2} - \frac{42775}{2} \right) = 154 \text{ qcm,}$$

während man tatsächlich mit $f_o = f_u = 139$ qcm ausreichte. Bei Verwendung der Formeln 7 wäre also hierauf Rücksicht zu nehmen.

Bezüglich der zulässigen Beanspruchungen von Bogen ist zu beachten, daß bei den meisten praktischen Ausführungen eine Nietverschwächung nicht gerechnet wurde, wie dies für gedrückte Teile bei vollkommener Ausfüllung der Nietlöcher theoretisch berechtigt wäre. Eine solche Ausfüllung ist aber bei warmer Nietung wegen des Zusammenziehens der Niete mit der Erkaltung nicht anzunehmen. Wird nun beim Ausschreiben eines Bauwerkes mit elastischen Bogenträgern eine gewisse zulässige Beanspruchung vorgeschrieben, so rechnet entweder keiner der Bewerber eine Nietverschwächung, oder diejenigen, welche eine solche rechnen, befinden sich den übrigen gegenüber im Nachteil. Dies gilt auch, wenn die Nietverschwächungen für das Bauwerk im allgemeinen in Rechnung zu ziehen sind, da man eben für die Bogen keine annehmen zu müssen glaubt. Berücksichtigt man nun, daß das Maß der tatsächlichen Schwächung allerdings zweifelhaft ist und jedenfalls von der Güte der Arbeit abhängt, so empfiehlt es sich, bei Ausschreibung von Bogenträgern entweder genau anzugeben, welche Nietverschwächung zu rechnen ist (wie bei gezogenen Teilen, halb soviel usw.), oder die zulässige Beanspruchung für den Bogen so festzusetzen, daß eine Nietverschwächung überhaupt nicht mehr gerechnet zu werden braucht. Letzteres Vorgehen hat den Vorteil, daß alsdann bei Berechnung der Beanspruchungen und der Formänderungen die gleichen F, J, W verwendet werden können, während andernfalls für die Beanspruchungen die verschwächten, für die Formänderung und daraus folgende statisch unbestimmte Größen (H, M, M' usw.) die unverschwächten Querschnitte in Betracht zu ziehen sind. Im folgenden gelten die erwähnten zulässigen Beanspruchungen ohne besondere Berücksichtigung von Nietverschwächungen.

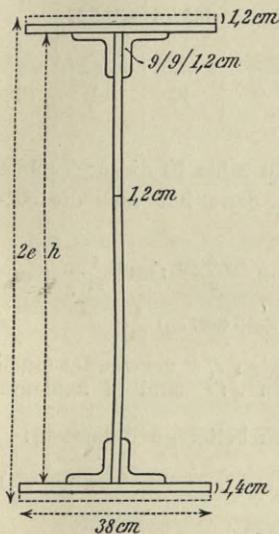


Fig. 296.

B. Querschnittsverhältnisse. Horizontalschub.

Die Bogenquerschnitte sind wie am Schlusse von VI A angegeben bestimmt (S. 472, Fig. 296).

Da die vier Winkeleisen und zwei durchgehenden Horizontalplatten zusammen den Querschnitt

$$2 \cdot 16,8 \cdot 1,2 + 2 \cdot 38 \cdot 1,4 = 187,04 \text{ qcm}$$

und die zwei Verstärkungsplatten den Querschnitt

$$2 \cdot 38 \cdot 1,2 = 91,2 \text{ qcm}$$

haben, während das Trägheitsmoment eines Rechtecks der Seiten a, b in Hinsicht einer der Seiten a durch $\frac{a b^3}{3}$ ausgedrückt ist, so ergeben sich der ganze Bogenquerschnitt und das Trägheitsmoment desselben hinsichtlich der Achschicht bei $x = 0,174$ m, wo $h = 90$ cm, $e = 46,4$ cm (Tab. II, S. 474):

$$F = 90 \cdot 1,2 + 187,04 = 295,0 \text{ qcm,}$$

$$J = \frac{2}{3} (38 \cdot 46,4^3 - 18,8 \cdot 45^3 - 15,6 \cdot 43,8^3 - 2,4 \cdot 36^3) = 440150 \text{ cm}^4,$$

und bei $x = 22,746$ m, wo $h = 79$ cm, $e = 42,1$ cm:

$$F = 79 \cdot 1,2 + 187,04 + 91,2 = 373,0 \text{ qcm,}$$

$$J = \frac{2}{3} (38 \cdot 42,1^3 - 18,8 \cdot 39,5^3 - 15,6 \cdot 38,3^3 - 2,4 \cdot 30,5^3) = 488110 \text{ cm}^4.$$

In gleicher Weise sind die übrigen J, F der Tabelle II berechnet, worauf auch die in Kolumne 9 eingetragenen $W = J : e$ und mit den $\cos \varphi$ der Kolumne 4 die in Kolumne 10 und 11 enthaltenen $F \cos \varphi$ und $J \cos \varphi$ folgen.

Tabelle II.

x	y	$\text{tg } \varphi$	$\cos \varphi$	h	e	F	J	W	$F \cos \varphi$	$J \cos \varphi$	$\frac{W}{F}$
m	m			cm	cm	qcm	cm ⁴	cm ³	qcm	cm ⁴	$\frac{\text{cm}}{\text{cm}}$
0	0	0,37542	0,93620	90	46,4	295,0	440 150	9 486	276,18	412 068	32,16
0,174	0,0651	0,37269	0,93688	90	46,4	295,0	440 150	9 486	276,38	412 368	32,16
2,682	0,9506	0,33346	0,94865	90	46,4	295,0	440 150	9 486	279,85	417 548	32,16
5,190	1,7377	0,29423	0,95934	90	47,6	386,2	641 690	13 481	370,50	615 599	34,91
7,698	2,4264	0,25500	0,96899	89	47,1	385,0	626 620	13 304	373,06	607 189	34,56
10,206	3,0169	0,21577	0,97750	88	46,6	383,8	612 100	13 135	375,16	598 328	34,22
12,714	3,5088	0,17654	0,98477	87	46,1	382,6	597 430	12 959	376,77	588 331	33,87
15,222	3,9024	0,13731	0,99070	85	45,1	380,2	569 050	12 617	376,66	563 758	33,19
17,730	4,1975	0,09808	0,99522	83	44,1	377,8	541 300	12 274	375,99	538 713	32,49
20,238	4,3943	0,05885	0,99827	81	43,1	375,4	514 410	11 935	374,75	513 520	31,79
22,746	4,4927	0,01962	0,99981	79	42,1	373,0	488 110	11 594	372,93	488 017	31,08
24,000	4,5050	0	1	79	42,1	373,0	488 110	11 594	373,00	488 110	31,08
Mittel M							=		358,75	539 827	
									= k	= c	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Wenn $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{11}$ die in einer der Kolumnen 2 bis 10 dieser Tabelle für $x = 0$ bis $x = \frac{l}{2}$ angeführten Zahlen bezeichnen, dann hat man die entsprechenden Mittelwerte für den ganzen Bogen:

$$M = \left(\frac{z_0 + z_1}{2} \cdot 0,174 + \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot 2,508 + \dots + \frac{z_9 + z_{10}}{2} \cdot 2,508 + \frac{z_{10} + z_{11}}{2} \cdot 1,254 \right) \frac{1}{24}$$

oder auch:

$$M = (0,087 z_0 + 1,341 z_1 + 2,508 (z_2 + \dots + z_9) + 1,881 z_{10} + 0,627 z_{11}) \frac{1}{24} \tag{a}$$

Dieser Ausdruck wurde für die der Tabelle II beigefügten c, k verwendet (auch die am Schlusse von § 42 erwähnten Mittelwerte von $J : F$ sind in analoger Weise berechnet).

Nach § 20, 7) hat man den Horizontalschub durch beliebige Belastung:

$$H = \frac{5}{(1 + \epsilon) 8 f l^3} \int_0^l P f(a) \tag{1}$$

mit

$$f(a) = a(l - a)(l^2 + la - a^2 - \beta l^2) \tag{2}$$

und nach § 20, 23) speziell durch eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von g pro Längeneinheit:

$$H = \frac{1 - \frac{5}{6} \beta}{1 + \epsilon} \frac{g l^2}{8 f} \tag{3}$$

Durch eine beliebige Temperaturänderung τ entsteht nach § 20, 8):

$$H = \frac{15 c}{(1 + \epsilon) 8 f^2} E \alpha \tau, \tag{4}$$

während eine Änderung Δl der Spannweite nach § 20, 9) zur Folge hätte:

$$H = - \frac{15 c}{(1 + \epsilon) 8 f^2} \frac{E \Delta l}{l} \tag{5}$$

In diesen Ausdrücken gelten mit $l = 48$ m, $f = 4,505$ m :

$$\frac{l^2}{8f} = 63,929 \text{ m}, \quad \frac{8f^2}{15} = 11,4164 \text{ qm}, \quad \frac{8fl^3}{5} = 797138 \text{ m}^4,$$

$$r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} = 66,181 \text{ m}, \quad \left(\frac{rf}{r-f}\right)^2 = 23,388 \text{ qm},$$

und mit den Tabelle II entnommenen Werten $c = 539827 \text{ cm}^4$, $k = 358,75 \text{ qcm}$

$$\gamma = \frac{c}{k} = 1504,74 \text{ qcm},$$

wonach mit Rücksicht auf § 19, 40) und § 20, 10) weiter folgen :

$$\varepsilon = \frac{15\gamma}{8} \left(\frac{r-f}{rf}\right)^2 = \frac{15 \cdot 1504,74}{8 \cdot 233880} = 0,012063,$$

$$\beta = \frac{3\gamma}{r^2} \frac{r-f}{f} = \frac{3 \cdot 1504,74 \cdot 61,676}{6618,1^2 \cdot 4,505} = 0,001411,$$

$$\frac{1 - \frac{5}{6}\beta}{1 + \varepsilon} = \frac{0,998824}{1,012063} = 0,98692,$$

$$\frac{1 - \frac{5}{6}\beta}{1 + \varepsilon} \frac{l^2}{8f} = 0,98692 \cdot 63,929 = 63,093 \text{ m},$$

$$\frac{(1 + \varepsilon) 8fl^3}{5} = 1,012063 \cdot 797138 = 806754 \text{ m}^4,$$

$$\frac{15c}{(1 + \varepsilon) 8f^2} = \frac{539827}{1,012063 \cdot 114164} = 4,6722 \text{ qcm}.$$

Wir erhalten damit nach 1–5 den Horizontalschub durch beliebige Belastung :

$$H = \frac{\sum_0^l P f(a)}{806754}, \quad \text{b}$$

durch eine gleichmäßig verteilte Last von g pro Längeneinheit:

$$H = 63,093 g, \quad \text{c}$$

durch eine beliebige Temperaturänderung τ :

$$H = 4,6722 E a \tau, \quad \text{d}$$

und durch eine Änderung der Spannweite um Δl :

$$H = -4,6722 E \frac{\Delta l}{l}, \quad \text{e}$$

worin E pro qcm in den Einheiten von P , H einzusetzen ist; wir werden dieselben in kg ausdrücken.

Bei Vernachlässigung von $\beta = 0,001411$ wären in b mit 2 l^2 an Stelle von $(1 - \beta) l^2 = 0,998589 l^2$ und in c 63,167 an Stelle von 63,093 getreten, was im letzteren Falle eine Abweichung von 0,12% gegen den genaueren Wert ausmacht. In den Ausdrücken von H für τ , Δl kommt β überhaupt nicht vor.

Wird wie bei der Cannstatter Brücke ein künstlicher Horizontalschub K angewandt, so tritt dieser den aus andern Einflüssen herrührenden Werten von H bei jeder Belastung hinzu.

Bemerkungen. Bei der vorgeführten Berechnung der Cannstatter Brücke war die Einflußlinie des Horizontalschubs nicht nötig; sie möge jedoch hier festgestellt werden. Ihre Gleichung ergibt sich bei Anwendung von b) auf eine Einzellast $P = 1$ bei a :

$$H = \frac{f(a)}{806754},$$

worin $f(a)$ für m als Längeneinheit einzusetzen ist. Mit den in Tabelle III (S. 477) gegebenen Werten von $f(a)$ erhalten wir

$$\text{bei } a = 0,174 \quad 2,682 \quad 5,190 \quad 7,698 \quad 10,206 \quad 12,714 \quad 15,222 \quad 17,730 \quad 20,238 \quad 22,746 \text{ m}$$

$$b = 0,0238 \quad 0,3649 \quad 0,6948 \quad 1,0041 \quad 1,2845 \quad 1,5289 \quad 1,7315 \quad 1,8867 \quad 1,9936 \quad 2,0472 \text{ m}.$$

Da die Einflußlinie des Horizontalschubs symmetrisch zur Trägermitte liegt und (für die Verkehrslast) zwischen je zwei Vertikalen geradlinig verläuft (§ 12), so kann die Linie nun verzeichnet werden; es ist bereits in Fig. 57, S. 50, geschehen. Der Horizontalschub läßt sich mit ihrer Hilfe wie schon mittels ihrer vorstehenden Ordinaten in bekannter Weise für beliebige Belastungen feststellen (§ 12). Bezüglich der Einflußlinien für die Vertikalreaktionen V , V' siehe S. 45 und Fig. 124.

C. Belastungsverhältnisse.

Die Verteilung der Fahrbahnlast auf die einzelnen Bogenträger läßt sich mit Rücksicht auf die Kontinuität der Querträger (welche alternierend über alle 6 Tragwände bezw. nur über die 4 inneren weglauen, Fig. 314, 315) und andere Umstände nicht genau ermitteln, es wurden die feste Last und die größte Verkehrslast für die 6 Bogen jeder Öffnung als gleich groß angenommen. Auf Grund der vorgeschriebenen Belastungen durch Menschengedränge (400 kg pro qm Fahrbahn, 560 kg pro qm Fußwege) und die Anordnung der Konstruktion würden allerdings die Stirnbogen etwas mehr als die mittlere Verkehrslast neben etwas weniger als der mittleren festen Last erhalten, da aber auch jene Vorschriften einer gewissen unvermeidlichen Willkür nicht entbehren, so konnte man sich mit der angenommenen Verteilungsweise um so mehr zufrieden geben, als damit die Berechnung vereinfacht wurde und alle 6 Bogen gleiche Querschnitte erhielten.

Nach dem Bauprogramm sollten als Eigengewicht von 1 cbm Material gelten:

für Holz	1000 kg,
„ Asphalt	2200 „ ,
„ Beton	2500 „ ,
„ Flußeisen	7850 „ .

Mit Rücksicht hierauf und die Anordnung der Brückenbahn setzte sich das Eigengewicht pro Meter der letzteren, einschließlich der zum Belage verwendeten Zoreseisen wie folgt zusammen.

Fahrbahn.

41 Zoreseisen von 1 m Länge und 24,2 qm Querschnitt (D N P Nr. 11)	41	$0,00242 \cdot 7850 = 777$ kg
Betonierung auf 11,4 m Breite und 0,15 m Höhe, abzüglich des Raums für die Zoreseisen	$(11,4 \cdot 0,15 - 41 \cdot 0,11 \frac{0,24 + 0,063}{2})$	$2500 = 2567$ „
11 qm Holzpflaster von 0,15 m Höhe	$11 \cdot 0,15 \cdot 1000 =$	1650 „
Fußwege.		
8 Zoreseisen von 3,35 m Länge und 10,1 qcm Querschnitt	$8 \cdot 3,35 \cdot 0,00101 \cdot 7850 =$	212 „
Betonierung auf 2 · 3,35 m Breite und 0,11 m Höhe, abzüglich des Raums der Zoreseisen	$6,7 (0,11 - 4 \cdot 0,06 \frac{0,16 + 0,042}{2})$	$2500 = 1436$ „
Asphaltierung auf 2 · 3,35 m Breite und 0,03 m Höhe	$6,7 \cdot 0,03 \cdot 2200 =$	442 „
2 Randsteine von 124 kg pro m	$2 \cdot 124 =$	248 „
2 Geländer von 150 kg pro m	$2 \cdot 150 =$	300 „
		zusammen pro m 7632 kg.

Das Fahrbahngewicht pro m beträgt also für jeden der 6 Bogen nach oben abgerundet 1280 kg, wovon $\frac{777 + 212}{6} = 165$ auf die Zoreseisen kommen.

Das Eisengewicht in der hier betrachteten Brückenöffnung ohne Zoreseisen und Auflager ergab sich auf Grund der vorläufigen Berechnung und Konstruktion mit Berücksichtigung der nachträglich vorgenommenen Änderungen (vergl. S. 468) pro Meter Bogen 756 kg. Da jedoch die Vertikalplatten in der mittleren Öffnung 0,04 m höher, also bei 1,2 cm Dicke pro m um $0,04 \cdot 0,012 \cdot 7850 = 4$ kg schwerer

sind, so wurde das fragliche Eisengewicht pro m für alle Bogen der Brücke gleich 760 kg gesetzt, wovon 340 kg auf das Eigengewicht der Bogen selbst entfallen.

Als Verkehrslast war für die Berechnung der Bogen Menschengedränge anzunehmen (über die Belastung durch eine Straßenwalze siehe VI K), und zwar nach dem Bauprogramm 400 kg pro qm der 11 m breiten Fahrbahn und 560 kg pro qm der zwei 3,5 m breiten Fußwege. Bei gleichmäßiger Verteilung auf alle 6 Bogen macht dies pro m Bogen $\frac{400 \cdot 11 + 560 \cdot 7}{6} = 1387$ kg, was für die endgültige Berechnung auf 1390 kg abgerundet wurde.

Für jeden Bogen kamen also pro m Spannweite in Rechnung:

Eigengewicht der Brücke $G = 1280 + 760 = 2040$ kg,

Eigengewicht des Bogens allein $g = \frac{G}{6} = 340$ „ ,

Eigengewicht ohne Bogen 1700 „ ,

Verkehrslast $p = 1390$ „ .

Das Eigengewicht der Bogen selbst kann als gleichmäßig verteilt auf diese gelten, (g pro m Spannweite), während das übrige Eigengewicht der Brücke und die Verkehrslast durch die Vertikalständer konzentriert auf die Bogen übertragen werden. Da die Entfernungen der Vertikalständer 2,508 m betragen, so sind die übertragenen Lasten für das Eigengewicht:

$$P = 1700 \cdot 2,508 = 4264 \text{ kg,}$$

für die Verkehrslast:

$$P = 1390 \cdot 2,508 = 3486 \text{ kg,}$$

für das Eisengewicht einschließlich der Zoreisen, ohne sonstige Fahrbahnteile und Geländer:

$$P = (760 - 340 + 165) \cdot 2,508 = 1467 \text{ kg.}$$

Die Vertikalständer bei den Kämpfern erhalten zwar mit Rücksicht auf die Anordnung der Fahrbahnaufleger über den Pfeilern usw. nur $\frac{2}{3}$ dieser Lasten, doch kann man mit lauter gleichen P rechnen, wenn bei den Kämpfervertikalen der jeweilige Faktor von P nur mit $\frac{2}{3}$ seines Wertes in Rechnung gezogen wird.

Die Abszissen a der Vertikalständer und damit der Angriffspunkte konzentrierter Lasten am Bogen nebst einigen davon abhängigen Größen sind in Tabelle III zusammengestellt. Da wegen $l = 48$ m, $\beta = 0,001411$:

$$l^2 + l a - a^2 - \beta l^2 = a(l - a) + 2300,75,$$

so war die letzte Zahl zu den Werten der vierten Kolumne zu addieren, um diejenigen der fünften zu erhalten. Bei Vernachlässigung von β wäre 2304 an Stelle von 2300,75 getreten, was keine nennenswerten Unterschiede bedingt hätte

Tabelle III.

Knotenpunkte	a	$l - a$	$a(l - a)$	$l^2 + l a - a^2 - \beta l^2$	$f(a)$	b	$3l^2 - 4a^2$	$a(3l^2 - 4a^2)$
	m	m	qm	qm	m ⁴	m	qm	cm ³
0	0,174	$\frac{3}{2}$ 31,884	$\frac{3}{2}$ 5,55	2309,1	$\frac{3}{2}$ 12808	7,279	6911,88	$\frac{3}{2}$ 802
1	2,682	45,318	121,54	2422,3	294406	6,939	6883,24	18461
2	5,190	42,810	222,18	2522,9	560538	6,662	6804,24	35314
3	7,698	40,302	310,24	2611,0	810037	6,437	6674,96	51384
4	10,206	37,794	385,73	2686,5	1036264	6,256	6495,36	66292
5	12,714	35,286	448,63	2749,4	1233463	6,113	6265,40	79658
6	15,222	32,778	498,95	2799,7	1396910	6,004	5985,16	91106
7	17,730	30,270	536,69	2837,4	1522804	5,924	5654,60	100256
8	20,238	27,762	561,85	2862,6	1608352	5,872	5273,68	106729
9	22,746	25,254	574,43	2875,2	1651610	5,846	4842,48	110147
	Summe:	349,418	3665,79		10127183			660149
1	2	3	4	5	6	7	8	9

(abgesehen etwa von der Berechnung eines künstlichen Horizontalschubs, vergl. Aufgabe 17 und VI E). Durch Multiplikation der Zahlen in der vierten und fünften Kolonne ergaben sich zufolge VI B 2) die $f(a)$ in der sechsten. Die $a(l-a)$, $l^2 + la - a^2 - \beta l^2$, $f(a)$ haben für je zwei symmetrisch zur Mitte liegende Lastangriffspunkte gleiche Werte, so daß die in der Tabelle angeführten Werte nicht nur für die danebenstehenden a , $l-a$, sondern auch bei deren Vertauschung gelten. Entsprechend dem oben Gesagten sind die $l-a$, $a(l-a)$, $f(a)$ und $a(3l^2 - 4a^2)$ der Kämpfervertikale in zwei Faktoren eingesetzt, deren erster $3/2$ ist, während der zweite $2/3$ des ganzen Wertes beträgt. Bei der Addition sind nur die zweiten Faktoren berücksichtigt.

Mit Rücksicht auf die S. 475 gegebenen Formeln c, b und § 20, 20), 34) hat man den Horizontalschub und die Vertikalreaktionen der Kämpfer durch die feste Last allein:

$$H = 63,093 \cdot 340 + 4264 \frac{2 \cdot 10\,127\,183}{806\,754} = 21\,439 + 107\,052 = 128\,491 \text{ kg},$$

$$V = 340 \cdot 24 + 4264 \left(\frac{2}{3} + 9 \right) = 8160 + 41\,219 = 49\,379 \text{ kg}$$

und durch die Verkehrslast allein bei Vollbelastung des Bogens:

$$H = 107\,052 \frac{1390}{1700} = 87\,531 \text{ kg},$$

$$V = 41\,219 \frac{1390}{1700} = 33\,703 \text{ kg}.$$

D. Momente und Normalkräfte durch das Eigengewicht allein.

Für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von g pro Längeneinheit hat man nach § 20, 22), 23), 5), 21) mit § 19, 8):

$$M_x = \left(1 - \frac{1 - \frac{5}{6} \beta}{1 + \varepsilon} \right) \frac{g}{2} x (l - x), \quad 1$$

$$N_x = \left[\left(\frac{l}{2} - x \right) \operatorname{tg} \varphi + \frac{1 - \frac{5}{6} \beta}{1 + \beta} \frac{l^2}{8f} \right] g \cos \varphi, \quad 2$$

wonach mit den unter VI B festgestellten Werten der Brüche für das gleichmäßig verteilte Eigengewicht der Bogen allein von $g = 340$ kg:

$$M_x = 2,2236 x (l - x), \quad a$$

$$N_x = [(24 - x) \operatorname{tg} \varphi + 63,093] 340 \cos \varphi. \quad b$$

Durch beliebige Belastung entstehen nach § 20, 3)–5):

$$M_x = Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a), \quad 3$$

$$N_x = \left[\left(V - \sum_0^x P \right) \operatorname{tg} \varphi + H \right] \cos \varphi, \quad 4$$

wonach für das konzentrierte (durch die Vertikalen übertragene) Eigengewicht mit den am Schlusse von VI C bestimmten V , H :

$$M_x = 41\,219 x - 107\,052 y - \sum_0^x P(x-a), \quad c$$

$$N_x = \left[\left(41\,219 - \sum_0^x P \right) \operatorname{tg} \varphi + 107\,052 \right] \cos \varphi. \quad d$$

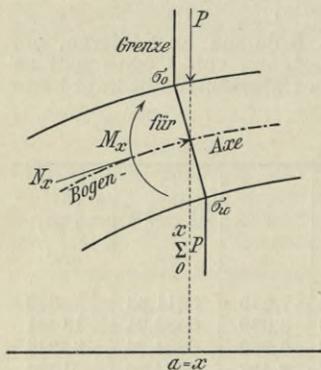


Fig. 297.

Liegt eine konzentrierte Last P gerade bei $a = x$ (Fig. 297), so ist es bei Berechnung von M_x nach 3) gleichgültig, ob man dieselbe in $\sum_0^x P(x-a)$ berücksichtigt oder nicht, da sich auch im ersteren Falle wegen $x - a = 0$ ihr Beitrag zu dieser Summe gleich Null ergibt. Dagegen kann es sich bei der Berechnung von N_x fragen, ob eine solche Last in $\sum_0^x P$ aufzunehmen ist. Die Frage ist für die allein nötige Berechnung der ersten Trägerhälfte zu verneinen, da die

Summengrenzen von $\sum_0^x P$ genau genommen nicht Punkte oder Abszissen, sondern Querschnitte bedeuten (S. 7) und auf der ersten Trägerhälfte eine Last P bei Abszisse $a = x$ nach dem Querschnitt x auf den Träger kommt (Fig. 297).

Die Werte der y , $\operatorname{tg} \varphi$, $\cos \varphi$ für die in der folgenden Tabelle IV angeführten Querschnitte x sind in Tabelle II gegeben, die x ($l-x$) stimmen mit den in Tabelle III enthaltenen a ($l-a$) überein, bezüglich der durch die Vertikalen übertragenen Lasten P wurde in VI C das Nötige festgestellt. Wir erhalten z. B. bei $x = 2,682$ m für das gleichmäßig verteilte Eigengewicht:

$$M_x = 2,2236 \cdot 121,54 = 270 \text{ mkg},$$

$$N_x = (21,318 \cdot 0,33346 + 63,093) 340 \cdot 0,94865 = 22643 \text{ kg},$$

für das konzentrierte Eigengewicht:

$$M_x = 41219 \cdot 2,682 - 107052 \cdot 0,9506 - 4264 \cdot 2,508 \cdot \frac{2}{3} = 1656 \text{ mkg},$$

$$N_x = (38376 \cdot 0,33346 + 107052) 0,94865 = 113695 \text{ kg},$$

also für das gesamte Eigengewicht:

$$M_x = 270 + 1656 = 1926 \text{ mkg},$$

$$N_x = 22643 + 113695 = 136338 \text{ kg};$$

ferner bei $x = 5,190$ m für das gleichmäßig verteilte Eigengewicht:

$$M_x = 2,2236 \cdot 222,18 = 494 \text{ mkg},$$

$$N_x = (18,810 \cdot 0,29423 + 63,093) 340 \cdot 0,95934 = 22384 \text{ kg},$$

für das konzentrierte Eigengewicht:

$$M_x = 41219 \cdot 5,190 - 107052 \cdot 1,7377 - 4264 \cdot 2,508 \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + 1 \right) = 2950 \text{ mkg},$$

$$N_x = (34112 \cdot 0,29423 + 107052) 0,95934 = 112328 \text{ kg}$$

und für das gesamte Eigengewicht:

$$M_x = 494 + 2950 = 3444 \text{ mkg},$$

$$N_x = 22384 + 112328 = 134712 \text{ kg}.$$

In gleicher Weise sind die übrigen M_x , N_x der Tabelle IV berechnet.

Tabelle IV.

bei x m	durch das gleichmäßig verteilte Eigengewicht		durch das konzentrierte Eigengewicht		durch das gesamte Eigengewicht			
	M_x mkg	N_x kg	M_x mkg	N_x kg	M_x mkg	N_x kg	σ_o kg pro qcm	σ_u kg pro qcm
2,682	270	22643	1656	113695	1926	136338	482,9	441,5
5,190	494	22384	2950	112328	3444	134712	374,3	323,3
7,698	690	22156	4083	111107	4773	133263	382,1	310,3
10,206	858	21959	5034	110039	5892	132098	389,1	299,3
12,714	998	21792	5846	109128	6844	130920	395,0	289,4
15,222	1110	21658	6488	108377	7598	130035	402,2	281,8
17,730	1193	21557	6980	107789	8173	129346	409,0	275,8
20,238	1249	21490	7301	107368	8550	128858	414,9	271,7
22,746	1277	21456	7462	107116	8739	128572	420,1	269,3

Mit den gegebenen M_x , N_x durch das gesamte Eigengewicht und den aus Tabelle II (S. 474) zu entnehmenden F , W erhält man aus

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}, \quad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{W} \quad 5$$

die entsprechenden Normalspannungen im obersten und untersten Querschnittselement pro qcm bei $x = 2,682$ m:

$$\sigma_o = \frac{136338}{295,0} + \frac{192600}{9486} = 482,9 \text{ kg,}$$

$$\sigma_u = \frac{136338}{295,0} - \frac{192600}{9486} = 441,5 \text{ „}$$

und bei $x = 5,190 \text{ m}$:

$$\sigma_o = \frac{134712}{386,2} + \frac{344400}{13481} = 374,3 \text{ kg,}$$

$$\sigma_u = \frac{134712}{386,2} - \frac{344400}{13481} = 323,3 \text{ „}$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werte der beiden letzten Kolonnen der Tabelle IV berechnet.

Bemerkungen. Hätten wir das ganze Eigengewicht als gleichmäßig verteilt angenommen, so würde unter Wegfall der Berechnungen nach 3, 4 die $M_x, N_x, \sigma_o, \sigma_u$ durch das gesamte Eigengewicht nach 1, 2, 5 $\frac{2040}{340} = 6$ mal so groß als oben durch das gleichmäßig verteilte Eigengewicht. Hätten wir dagegen das Eigengewicht der Bogen in die konzentrierten Lasten eingeschlossen, so würden unter Wegfall der Berechnungen nach 1, 2 die $M_x, N_x, \sigma_o, \sigma_u$ nach 3, 4, 5 $\frac{2040}{1700} = 1,2$ mal so groß, als oben durch das konzentrierte Eigengewicht (vergl. Beisp. 12).

E. Künstlicher Horizontalschub.

Während sich bei Vernachlässigung von β, ϵ im Ausdrucke des Horizontalschubs für beliebige auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Lasten in allen Querschnitten $M_x = 0$ ergäbe, haben wir in IV D durch das Eigengewicht allein Momente erhalten, welche keineswegs ohne weiteres zu vernachlässigen sind. Seitens der Eßlinger Maschinenfabrik war die Beseitigung der vom Eigengewicht herrührenden Momente durch künstliche Überhöhung der Bogen vorgeschlagen worden.

Nach den „besonderen Bestimmungen“ für die Lieferung der Eisenkonstruktion sollte eine Überhöhung der Bogen derart stattfinden, daß auch bei der größten Kälte kein Einschlagen der Längsträger (Obergurten der Tragwände) unter eine Gerade stattfinden könne. Die Überhöhung hat durch einen künstlichen Horizontalschub zu erfolgen, welcher bei vollständig gleichmäßig verteilter Last so gewählt werden kann, daß alle durch die letzteren erzeugten Momente M_x aufgehoben werden (Aufgabe 17). Damit würde für die betreffende Belastung die resultierende Schnittkraft gleich der Normalkraft N_x und in der Achse angreifen, so daß die kleinstmöglichen Spannungen σ_o, σ_u entstünden. In unserm Falle läßt sich dies zwar wegen des teilweise konzentrierten Eigengewichts nicht für alle Querschnitte vollständig, aber doch genügend annähernd erreichen (siehe die Tabelle S. 486).

Die Momente M_x durch das gesamte Eigengewicht allein sind positiv. Durch einen beliebigen Horizontalschub H allein dagegen wird nach § 20, 53):

$$M_x = -H y. \quad 1$$

Dividiert man also die in Tabelle IV (S. 479) zuletzt angeführten M_x durch die in Tabelle II (S. 474) gegebenen y der zugehörigen Querschnitte, so erhält man diejenigen H , durch welche jene Momente aufgehoben werden könnten. Beispielsweise folgen für $x = 2,682 \text{ m}$ und $5,190 \text{ m}$:

$$\frac{1926}{0,9506} = 2026 \text{ kg,}$$

$$\frac{3444}{1,7377} = 1982 \text{ kg.}$$

Die so berechneten Werte sind in Kolonne 2 der Tabelle V (S. 481) eingetragen. Mit Rücksicht auf diese Werte wurde der künstliche Horizontalschub gewählt:

$$K = 1950 \text{ kg,}$$

womit die Momente gerade da fast vollständig beseitigt werden, wo ohnehin die größten Beanspruchungen entstehen (Tabelle S. 486).

Ein beliebiger Horizontalschub H allein erzeugt nach § 20, 54) die Normalspannungen:

$$\sigma_o = \left(\frac{\cos \varphi}{F} - \frac{y}{W} \right) H, \quad \sigma_u = \left(\frac{\cos \varphi}{F} + \frac{y}{W} \right) H. \quad 2$$

Die Werte y , $\cos \varphi$, F , W sind aus Tabelle II (S. 474) zu entnehmen. Wir erhalten als Beitrag des künstlichen Horizontalschubs allein bei $x = 2,682$ m:

$$\sigma_o = \left(\frac{0,94865}{295,0} - \frac{95,06}{9486} \right) H = -0,006805 \cdot 1950 = -13,3 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \left(\frac{0,94865}{295,0} + \frac{95,06}{9486} \right) H = 0,013237 \cdot 1950 = 25,8 \text{ „}$$

und bei $x = 5,190$ m:

$$\sigma_o = \left(\frac{0,95934}{386,2} - \frac{173,77}{13481} \right) H = -0,010406 \cdot 1950 = -20,3 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \left(\frac{0,95934}{386,2} + \frac{173,77}{13481} \right) H = 0,015374 \cdot 1950 = 30,0 \text{ „}$$

In gleicher Weise sind die übrigen σ_o , σ_u der folgenden Tabelle V berechnet.

Die Werte der Klammerausdrücke wurden in den beiden letzten Kolonnen vorgemerkt, weil sie auch bei Ermittlung der Einflüsse von Änderungen der Temperatur und der Spannweiten zur Verwendung kommen.

Tabelle V.

x	$\frac{M_x}{y}$	durch K allein		$\frac{\cos \varphi}{F} - \frac{y}{W}$		$\frac{\cos \varphi}{F} + \frac{y}{W}$
		σ_o	σ_u			
m	kg	kg pro qcm	kg pro qcm			
2,682	2226	-13,3	25,8	-0,006805		0,013237
5,190	1982	-20,3	30,0	-0,010406		0,015374
7,698	1967	-30,7	40,5	-0,015721		0,020755
10,206	1953	-39,8	49,8	-0,020421		0,025515
12,714	1950	-47,8	57,8	-0,024502		0,029650
15,222	1947	-55,2	65,4	-0,028324		0,033536
17,730	1947	-61,5	71,8	-0,031564		0,036832
20,238	1946	-66,6	77,0	-0,034159		0,039477
22,746	1945	-70,3	80,8	-0,036070		0,041430

Bemerkungen. Bei vollständig gleichmäßig verteiltem Eigengewicht wäre nach Formel 5 der Aufgabe 17 mit Rücksicht auf VI B (S. 475) und $u = 2040$ kg der künstliche Horizontalschub $K = 1705$ kg oder 14,5% kleiner als oben geworden. Unter Vernachlässigung von β würde sich im gleichen Falle $K = 1554$ kg oder 25,5% kleiner als oben ergeben haben. Wenn keine künstliche Überhöhung stattfinden soll, so fällt natürlich die ganze K betreffende Berechnung weg. Die Berücksichtigung von β kann dann um so eher unterbleiben.

F. Ungünstige Belastungen. Kämpferdrucklinie. Kernlinien.

Zur Bestimmung der Belastungen für die Grenzwerte der Normalspannungen σ_o , σ_u in beliebigen Querschnitten x haben wir in §§ 19, 20 (S. 80, 81, 121) ein genaueres und ein einfacheres Verfahren angeführt. Beide erfordern die Ermittlung der Kämpferdrucklinie.

Die Gleichung der letzteren ist nach § 20, 47):

$$v = \frac{1 + \varepsilon}{l^2 + l a - a^2 - \beta l^2} \frac{8 f l^2}{5} \quad 1$$

und in unserm Falle mit Rücksicht auf VI B (S. 475):

$$v = \frac{16808}{l^2 + l a - a^2 - \beta l^2},$$

worin $l = 48$ m, $l^2 - \beta l^2 = 2300,75$ qm (S. 477). Hieraus folgen z. B.

für	$a = 0$	$b = 7,306 \text{ m,}$
"	$a = 24 \text{ m}$	$b = 5,843 \text{ ,,}$

während die übrigen Ordinaten b bereits in Tabelle III (S. 477) eingetragen sind. Die Kämpferdrucklinie konnte hiernach auf der Tafel am Schlusse des Werkes verzeichnet werden. Selbstverständlich hätten wir β und selbst ε in 1 vernachlässigen können.

Die Kernlinien sind nur für die genaueren Bestimmungen der ungünstigsten Belastungen nötig. Sie liegen im Falle symmetrisch zur Achsschicht angeordneter Querschnitte zufolge § 20, 52) um

$$k = \frac{W}{F}$$

oberhalb und unterhalb der Bogenachse. Diese Werte k sind bereits in Kolumne 12 der Tabelle II (S. 474) angeführt. Die Kernlinien wurden darnach auf der am Schlusse des Werkes gegebenen Tafel durch die punktierten Linien oberhalb und unterhalb der ausgezogenen Bogenachse dargestellt.

Auf der gleichen Tafel sind die Belastungen für die Grenzwerte max. druck σ_o , max. pos. M_x , min. druck σ_u in den Querschnitten unter den Achsen der Vertikalen zusammengestellt. Um die Belastungen für min. druck σ_o , max. neg. M_x , max. druck σ_u zu erhalten, hat man nur feine Striche (Eigengewicht allein) und fette Striche (Vollbelastung) vertauscht zu denken. Bei der genaueren Berechnung der Grenzwerte von σ_o , σ_u ist die Ermittlung der Belastungen für die Grenzwerte von M_x , bei der einfacheren Berechnung die Ermittlung der übrigen Belastungen überflüssig. Über die Resultate beider Verfahren siehe am Schlusse von § 11 (S. 43).

Wir haben bereits S. 469 erwähnt, daß die genauere Berechnung der σ_o , σ_u in der „Allgemeinen Bauzeitung“ von 1895 mitgeteilt ist, während hier das einfachere Verfahren vorgeführt werden soll. Bei diesem sind für max. druck σ_o und min. druck σ_u die Belastungen für max. pos. M_x , für max. druck σ_u und min. druck σ_o die Belastungen für max. neg. M_x zu verwenden.

Bezüglich der Einflußlinien zu möglichst genauer Berechnung von M_x , N_x , σ_o , σ_u , die bei der vorgeführten Berechnung der Cannstatter Brücke nicht gebraucht wurden, siehe § 12 und Beispiel 10.

G. Erste Grenzwerte der Normalspannungen durch die Verkehrslast allein.

Diejenigen Knotenpunkte (vergl. Fig. 295, S. 470), welche sich durch die am Schlusse von VI F erwähnte Konstruktion für die max. druck σ_o und min. druck σ_u als vollbelastet ergaben (s. Tafel), sind in der zweiten Kolumne von Tabelle VI (S. 484) bei den betreffenden Querschnitten angeführt. Im folgenden ist bezüglich der Kämpfervertikalen, welche nur zwei Drittel so große Lasten wie die übrigen Vertikalen übertragen, das unter VI C Gesagte (S. 477) zu beachten.

Da im Falle beliebig vieler gleicher Lasten P die Vertikalreaktion des Kämpfers 0 und der Horizontalschub zufolge § 20, 2) und S. 475):

$$V = \frac{P}{48} \sum_0^l (l-a), \quad H = \frac{P}{806754} \sum_0^l f(a), \quad a$$

und speziell für die Verkehrslasten $P = 3486 \text{ kg}$:

$$V = 72,625 \sum_0^l (l-a), \quad H = \frac{\sum_0^l f(a)}{231,425}, \quad b$$

so wurden zunächst die hierin auftretenden Summen für die in Frage kommenden Belastungsfälle auf Grund von Tabelle III berechnet. Man erhält für $x = 2,682 \text{ m}$:

$$\sum_0^l (l-a) = 31,884 + 45,318 + 42,810 + 40,302 + 37,794 + 35,286 + 32,778 = 266,172 \text{ m,}$$

$$\sum_0^l f(a) = 12808 + 294406 + 560538 + 810037 + 1036264 + 1233463 + 1396910 = 5344426 \text{ m}^2,$$

für $x = 5,190 \text{ m}$, $x = 7,698 \text{ m}$, $x = 10,206 \text{ m}$:

$$\sum_0^l (l-a) = 266,172 + 30,270 = 296,442,$$

$$\sum_0^l f(a) = 5344426 + 1522804 = 6867230,$$

für $x = 12,714$ m:
$$\sum_0^l (l - a) = 296,442 + 27,762 = 324,204,$$

$$\sum_0^l f(a) = 6\,867\,230 + 1\,608\,352 = 8\,475\,582,$$

für $x = 15,222$ m, $x = 17,730$ m:

$$\sum_0^l (l - a) = 324,204 + 25,254 = 349,458,$$

$$\sum_0^l f(a) = 8\,475\,582 + 1\,651\,601 = 10\,127\,183,$$

für $x = 20,238$ m:

$$\sum_0^l (l - a) = 40,302 + 37,794 + 35,286 + 32,778 + 30,270 + 27,762 + 25,254 + 22,746 = 252,192,$$

$$\sum_0^l f(a) = 810\,037 + 1\,036\,264 + 1\,233\,463 + 1\,396\,910 + 1\,522\,804 + 1\,608\,352 + 1\,651\,601 \cdot 2 = 10\,911\,032,$$

und für $x = 22,746$ m:

$$\sum_0^l (l - a) = 32,778 + 30,270 + 27,762 + 25,254 + 22,746 + 20,238 = 159,048,$$

$$\sum_0^l f(a) = 1\,396\,910 + 1\,522\,804 + 1\,608\,352 \cdot 2 + 1\,651\,601 \cdot 2 = 9\,439\,620.$$

Mit diesen Summen, welche in der dritten und vierten Kolumne von Tabelle VI (S. 484) aufgeführt sind, ergaben sich nach b) die in der fünften und sechsten Kolumne eingesetzten V, H .

Für die gleichen Belastungsfälle erhalten wir bei den neun in der Tabelle angeführten Querschnitten x der Reihe nach:

$$\begin{aligned} V_x &= V - \sum_0^x P = 19\,331 - 3486 \cdot \frac{2}{3} = 17\,007 \text{ kg} \\ &'' &'' & 21\,529 - 3486 \cdot \frac{5}{3} = 15\,719 \text{ ''} \\ &'' &'' & 21\,529 - 3486 \cdot \frac{8}{3} = 12\,233 \text{ ''} \\ &'' &'' & 21\,529 - 3486 \cdot \frac{11}{3} = 8\,747 \text{ ''} \\ &'' &'' & 23\,545 - 3486 \cdot \frac{14}{3} = 7\,277 \text{ ''} \\ &'' &'' & 25\,380 - 3486 \cdot \frac{17}{3} = 5\,626 \text{ ''} \\ &'' &'' & 25\,380 - 3486 \cdot \frac{20}{3} = 2\,140 \text{ ''} \\ &'' &'' & 18\,315 - 3486 \cdot 5 = 885 \text{ ''} \\ &'' &'' & 11\,551 - 3486 \cdot 3 = 1\,093 \text{ ''} \end{aligned}$$

und ebenso:
$$\sum_0^x P(x - a) = 3486 \cdot 2,508 \cdot \frac{2}{3} = 5829 \text{ mkg}$$

''
$$3486 \cdot 2,508 \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + 1 \right) = 20\,400 \text{ mkg}$$

''
$$3486 \cdot 2,508 \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + 2 + 1 \right) = 43\,714 \text{ mkg}$$

''
$$3486 \cdot 2,508 \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + 3 + 2 + 1 \right) = 75\,772 \text{ mkg}$$

''
$$3486 \cdot 2,508 \left(\frac{2}{3} \cdot 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \right) = 116\,572 \text{ mkg}$$

''
$$3486 \cdot 2,508 \left(\frac{2}{3} \cdot 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \right) = 166\,115 \text{ mkg}$$

''
$$3486 \cdot 2,508 \left(\frac{2}{3} \cdot 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \right) = 224\,401 \text{ mkg}$$

''
$$3486 \cdot 2,508 (5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 131\,143 \text{ mkg}$$

''
$$3486 \cdot 2,508 (3 + 2 + 1) = 52\,457 \text{ mkg}.$$

Tabelle VI.

x m	Belastete Knoten- punkte	$\sum_0^l (l-a)$ m	$\sum_0^l f(a)$ m ⁴	V kg	H kg	V_x kg
2,682	0 bis 6	266,172	5344 426	19331	23 094	17 007
5,190	0 " 7	296,442	6867 230	21 529	29 674	15 719
7,698	0 " 7	296,442	6867 230	21 529	29 674	12 233
10,206	0 " 7	296,442	6867 230	21 529	29 674	8 747
12,714	0 " 8	324,204	8 475 582	23 545	36 623	7 277
15,222	0 " 9	349,458	10 127 183	25 380	43 760	5 626
17,730	0 " 9	349,458	10 127 183	25 380	43 760	2 140
20,238	3 " 10	252,192	10 911 032	18 315	47 147	885
22,746	6 " 11	159,048	9 439 620	11 551	40 789	1 093
1	2	3	4	5	6	7

Mit den nun bekannten, in Tabelle VI zusammengestellten Werten folgen nach

$$M_x = Vx - Hy - \sum_0^x P(x-a), \quad 1$$

$$N_x = (V_x \operatorname{tg} \varphi + H) \cos \varphi, \quad 2$$

unter Verwendung der in Tabelle II (S. 474) gegebenen y , $\operatorname{tg} \varphi$, $\cos \varphi$, für die von der Verkehrslast allein herrührenden max. druck σ_o und min. druck σ_u die Momente:

$$\begin{aligned} M_x &= 19331 \cdot 2,682 - 23094 \cdot 0,9506 - 5829 = 24064 \text{ mkg} \\ &'' \quad 21529 \cdot 5,190 - 29674 \cdot 1,7377 - 20400 = 39771 \quad '' \\ &'' \quad 21529 \cdot 7,698 - 29674 \cdot 2,4264 - 43714 = 50015 \quad '' \\ &'' \quad 21529 \cdot 10,206 - 29674 \cdot 3,0169 - 75772 = 54430 \quad '' \\ &'' \quad 23545 \cdot 12,714 - 36623 \cdot 3,5088 - 116572 = 54276 \quad '' \\ &'' \quad 25380 \cdot 15,222 - 43760 \cdot 3,9024 - 166115 = 49450 \quad '' \\ &'' \quad 25380 \cdot 17,730 - 43760 \cdot 4,1975 - 224401 = 41903 \quad '' \\ &'' \quad 18315 \cdot 20,238 - 47147 \cdot 4,3943 - 131143 = 32338 \quad '' \\ &'' \quad 11551 \cdot 22,746 - 40789 \cdot 4,4927 - 52457 = 27029 \quad '' \end{aligned}$$

und die Normalkräfte:

$$\begin{aligned} N_x &= (17007 \cdot 0,33346 + 23094) 0,94865 = 27288 \text{ kg} \\ &'' \quad (15719 \cdot 0,29423 + 29674) 0,95934 = 32904 \quad '' \\ &'' \quad (12233 \cdot 0,25500 + 29674) 0,96899 = 31776 \quad '' \\ &'' \quad (8747 \cdot 0,21577 + 29674) 0,97750 = 30851 \quad '' \\ &'' \quad (7277 \cdot 0,17654 + 36623) 0,98477 = 37331 \quad '' \\ &'' \quad (5626 \cdot 0,13731 + 43760) 0,99070 = 44119 \quad '' \\ &'' \quad (2140 \cdot 0,09808 + 43760) 0,99522 = 43760 \quad '' \\ &'' \quad (885 \cdot 0,05885 + 47147) 0,99827 = 47117 \quad '' \\ &'' \quad (1093 \cdot 0,01962 + 40789) 0,99981 = 40802 \quad '' \end{aligned}$$

wonach sich aus

$$\sigma_o = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}, \quad \sigma_u = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x}{W}. \quad 3$$

mit den in Tabelle II (S. 474) angeführten F , W auch die betreffenden Grenzwerte selbst ergeben. Beispielsweise erhält man in kg pro qcm bei $x = 2,682$ m:

$$\begin{aligned} \frac{N_x}{F} &= \frac{27288}{295,0} = 92,5, & \frac{M_x}{W} &= \frac{2406400}{9486} = 253,7, \\ \sigma_o &= 92,5 + 253,7 = 346,2, & \sigma_u &= 92,5 - 253,7 = -161,2, \end{aligned}$$

und bei $x = 5,190$ m:

$$\begin{aligned} \frac{N_x}{F} &= \frac{32904}{386,2} = 85,2, & \frac{M_x}{W} &= \frac{3977100}{13481} = 295,0, \\ \sigma_o &= 85,2 + 295,0 = 380,2, & \sigma_u &= 85,2 - 295,0 = -209,8. \end{aligned}$$

Tabelle VI.

$\sum_0^x P(x-a)$	M_x	N_x	$\frac{N_x}{F}$	$\frac{M_x}{W}$	σ_o	σ_u
mgk	mgk	kg	kg	kg	kg pro qcm	kg pro qcm
5829	24064	27288	92,5	253,7	346,2	- 161,2
20400	39771	32904	85,2	295,0	380,2	- 209,8
43714	50015	31776	82,5	375,9	458,4	- 293,4
75772	54430	30851	80,4	414,4	494,4	- 334,0
116572	54276	37331	97,6	418,8	516,4	- 321,2
166115	49450	44119	116,0	391,9	507,9	- 275,9
224401	41903	43760	115,8	341,4	457,2	- 225,6
131143	32338	47117	125,5	271,0	396,5	- 145,5
52457	27029	40802	109,4	233,1	342,5	- 123,7
8	9	10	11	12	13	14

In gleicher Weise sind die übrigen Werte der Kolonnen 11 bis 14 der Tabelle VI berechnet.

Bemerkungen. Hätten wir das genauere Verfahren zur Bestimmung der ungünstigsten Belastungen gewählt (S. 80, 121), so würden zwei Tabellen wie die vorstehende zu berechnen gewesen sein¹, indem dann die Belastungen für max. druck σ_o (bei deren Ermittlung die untere Kernlinie anstatt der Bogenachse zu verwenden ist) mit den Belastungen für min. druck σ_u (bei deren Ermittlung die obere Kernlinie an Stelle der Bogenachse tritt) nicht mehr übereinstimmen. Die weiter folgenden Ermittlungen würden jedoch keinerlei Änderung erfahren.

H. Normalspannungen bei Vollbelastung und zweite Grenzwerte der Normalspannungen durch die Verkehrslast allein.

Die M_x , N_x , σ_o , σ_u durch die Verkehrslast bei Vollbelastung der ganzen Öffnung stehen zu den entsprechenden Werten durch das konzentrierte Eigengewicht im Verhältnis

$$\frac{1390}{1700} = 0,81765$$

vergl. S. 477). Mit Rücksicht auf Tabelle IV (S. 479) und II (S. 474) erhält man also bei Vollbelastung für $x = 2,682$ m pro qcm:

$$\sigma_o = \left(\frac{113695}{295,0} + \frac{165600}{9486} \right) 0,81765 = 329,4 \text{ kg,}$$

$$\sigma_u = \left(\frac{113695}{295,0} - \frac{165600}{9486} \right) 0,81765 = 300,8 \text{ „}$$

und für $x = 5,190$ m:

$$\sigma_o = \left(\frac{112328}{386,2} + \frac{295000}{13481} \right) 0,81765 = 255,8 \text{ kg,}$$

$$\sigma_u = \left(\frac{112328}{386,2} - \frac{295000}{13481} \right) 0,81765 = 219,9 \text{ „}$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werte der zweiten und dritten Kolonne nachstehender Tabelle VII berechnet.

Die Beiträge der Verkehrslast allein zu den ersten Grenzwerten der Normalspannungen σ_o , σ_u , nämlich zu max. druck σ_o und min. druck σ_u , wurden in Tabelle VI (oben) gegeben. Subtrahiert man diese Werte von den soeben erwähnten Normalspannungen durch die Verkehrslast allein bei Vollbelastung, so ergeben sich die Beiträge der Verkehrslast zu den zweiten Grenzwerten der Normalspannungen σ_o , σ_u , nämlich zu min. druck σ_o und max. druck σ_u . Man erhält z. B. bei $x = 2,682$ m:

$$\sigma_o = 329,4 - 346,2 = - 16,8 \text{ kg,}$$

$$\sigma_u = 300,8 + 161,2 = 462,0 \text{ kg}$$

¹ Siehe dieselben „Allgemeine Bauzeitung“ 1895, S. 76 (Tab. XV).

und bei $x = 5,190$ m:

$$\sigma_o = 255,8 - 380,2 = -124,4 \text{ kg,}$$

$$\sigma_u = 219,9 + 209,8 = 429,7 \text{ kg.}$$

In dieser Weise wurden auch die übrigen Werte der beiden letzten Kolonnen von Tabelle VII berechnet.

Tabelle VII.

x m	bei Vollbelastung		Grenzwerte	
	σ_o kg pro qcm	σ_u kg pro qcm	σ_o kg pro qcm	σ_u kg pro qcm
2,682	329,4	300,8	— 16,8	462,0
5,190	255,8	219,9	— 124,4	429,7
7,698	261,1	210,9	— 197,3	504,3
10,206	265,7	203,4	— 228,7	537,4
12,714	270,1	196,3	— 246,3	517,5
15,222	275,1	191,1	— 232,8	467,0
17,730	279,8	186,8	— 177,2	412,4
20,238	283,9	183,8	— 112,6	329,3
22,746	287,5	182,2	— 55,0	305,9

J. Resultierende Normalspannungen. Einfluß von Änderungen der Temperatur und der Spannweite.

Die durch das gesamte Eigengewicht allein erzeugten Normalspannungen sind in Tabelle IV (S. 479) zusammengestellt. Zugleich mit dem Eigengewicht, wie mit jeder Belastung, wirkt im vorliegenden Falle der künstliche Horizontalschub, dessen Beiträge zu σ_o , σ_u in Tabelle V (S. 481) gegeben sind. Mit Rücksicht hierauf erhalten wir die ganzen Normalspannungen bei Belastung durch das Eigengewicht allein für $x = 2,682$ m:

$$\sigma_o = 482,9 - 13,3 = 470 \text{ kg,}$$

$$\sigma_u = 441,5 + 25,8 = 467 \text{ kg}$$

und für $x = 5,190$ m:

$$\sigma_o = 374,3 - 20,3 = 354 \text{ kg,}$$

$$\sigma_u = 323,3 + 30,0 = 353 \text{ kg.}$$

Auf gleiche Weise sind die übrigen Werte der zweiten und dritten Kolonne von Tabelle VIII (S. 488) berechnet worden.

Man sieht an der Gleichheit der σ_o , σ_u , daß infolge der getroffenen Wahl des künstlichen Horizontalschubs fast auf der ganzen Länge des Bogens gleichmäßige Verteilung der Beanspruchungen auf die Querschnitte erreicht ist.

In Tabelle VII wurden die Normalspannungen durch die Verkehrslast allein bei Vollbelastung der ganzen Öffnung gegeben. Addiert man zu diesen Werten die Normalspannungen bei Belastung durch das Eigengewicht allein, einschließlich der Beiträge des künstlichen Horizontalschubs, so ergeben sich die ganzen Normalspannungen bei Vollbelastung. Wir erhalten für $x = 2,682$ m:

$$\sigma_o = 329 + 470 = 799 \text{ kg,}$$

$$\sigma_u = 301 + 467 = 768 \text{ kg,}$$

und für $x = 5,190$ m:

$$\sigma_o = 256 + 354 = 610 \text{ kg,}$$

$$\sigma_u = 220 + 353 = 573 \text{ kg.}$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werte der Kolonnen 4 und 5 von Tabelle VIII (S. 488) berechnet.

Die Grenzwerte der Normalspannungen bei normaler Temperatur im ganzen finden sich, wenn man zu den in Tabelle VI und VII (S. 485, 486) gegebenen Grenzwerten durch die Verkehrslast allein die in Kolonne 2 und 3 der Tabelle VIII enthaltenen Normalspannungen für Eigengewicht allein addiert. Es folgen so bei $x = 2,682$ m:

$$\sigma_o = 470 + 346 = 816 \text{ kg,}$$

$$\sigma_o = 470 - 17 = 453 \text{ kg,}$$

$$\sigma_u = 467 - 161 = 306 \text{ kg,}$$

$$\sigma_u = 467 + 462 = 929 \text{ kg}$$

und bei $x = 5,190 \text{ m}$:

$$\begin{aligned} \sigma_o &= 354 + 380 = 734 \text{ kg}, & \sigma_o &= 354 - 124 = 230 \text{ kg}, \\ \sigma_u &= 353 - 210 = 143 \text{ kg}, & \sigma_u &= 353 + 430 = 783 \text{ kg}. \end{aligned}$$

In derselben Weise sind die übrigen Werte der Kolonnen 6 bis 9 nachstehender Tabelle VIII berechnet.

Der von einer Temperaturänderung um τ° gegen die Normaltemperatur herrührende Horizontalschub ist nach Formel d) auf S. 475:

$$H = 4,6722 E \alpha \tau.$$

Elastizitätsmodul und Ausdehnungskoeffizient des verwendeten Flußeisens (welches in Längs- und Querrichtung mindestens 3700 kg und höchstens 4400 kg pro qcm Zugfestigkeit bei mindestens 20% Dehnung aufweisen mußte) wurden nicht besonders festgestellt. Indem man auf Grund sonstiger Erfahrungen annahm:

$$E = 2150000 \text{ kg pro qcm}, \quad \alpha = 0,000115 \text{ für Grad C},$$

ergab sich mit $E \alpha = 24,725$:

$$H = 115,520 \tau.$$

Nach dem Bauprogramm waren als Grenzen der Temperaturänderungen $\tau = \pm 25^\circ$ anzunehmen, für die in den Brückenstirnen gelegenen Bogen jedoch $\pm 5^\circ$ mehr. Die Berechnung wurde jedoch für alle Bogen mit $\tau = \pm 25^\circ$ durchgeführt, wonach zunächst für die sechs Bogen jeder Öffnung gleiche Querschnitte resultierten (vergl. S. 476). Dem für die Stirnbogen um $\frac{1}{5}$ größeren Einfluß der Temperaturänderungen ist durch aufgenietete Winkeleisen von 10/10/1 cm, welche zur Befestigung der Vertikalständer an den Stirnbogen dienen, mehr als genügend Rechnung getragen.

Mit $\tau = + 25^\circ$ liefert die letzte Gleichung

$$H = \pm 2888 \text{ kg},$$

während die entsprechenden Normalspannungen aus den auf S. 481 angeführten Formeln 2 folgen. Da die Klammerausdrücke dieser Formeln in Tabelle V (S. 481) vorgemerkt wurden, so erhalten wir z. B. bei $x = 2,682 \text{ m}$:

$$\sigma_o = \mp 0,006805 \cdot 2888 = \mp 20 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \pm 0,013237 \cdot 2888 = \pm 38 \text{ „}$$

und bei $x = 5,190 \text{ m}$:

$$\sigma_o = \mp 0,010406 \cdot 2888 = \mp 30 \text{ kg},$$

$$\sigma_u = \pm 0,015374 \cdot 2888 = \pm 44 \text{ „}.$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werte der Kolonnen 12 und 13 von Tabelle VIII berechnet.

Fügt man den in Kolonne 6 und 8 der Tabelle VIII gegebenen größten Grenzwerten der Normalspannungen bei normaler Temperatur die Normalspannungen gleichen Sinnes durch eine Temperaturänderung $\tau = \pm 25^\circ$ bei, so ergeben sich die größten Gesamtspannungen. Wir erhalten bei $x = 2,682 \text{ m}$:

$$\sigma_o = 816 + 20 = 836 \text{ kg}, \quad \sigma_u = 929 + 38 = 967 \text{ kg}$$

und bei $x = 5,190 \text{ m}$:

$$\sigma_o = 734 + 30 = 766 \text{ kg}, \quad \sigma_u = 783 + 44 = 827 \text{ kg}.$$

In derselben Weise sind die übrigen Werte der Kolonnen 14 und 15 der Tabelle VIII berechnet.

Die unteren Grenzwerte der Gesamtspannungen pflegen selten zu interessieren, sie würden sich ergeben, wenn man zu den in Kolonne 7 und 9 der Tabelle VIII enthaltenen unteren Grenzspannungen bei normaler Temperatur die in Kolonne 12 und 13 gegebenen negativen Beiträge der Temperaturänderungen addierte. Die betreffenden Werte sind übrigens in den Kolonnen 11 und 21 der Tabelle des § 11 (S. 44, 45) eingestellt.

Änderungen der Spannweite sollen natürlich möglichst vermieden werden. Indessen erschien es doch zweckmäßig, über den eventuellen Einfluß derselben Rechenschaft zu geben (vergl. S. 512). Der durch eine Änderung Δl der Spannweite l bewirkte Horizontalschub ist nachher auf S. 475 erhaltenen Formel e):

$$H = - 4,6722 E \frac{\Delta l}{l}.$$

Tabelle VIII. Resultierende Normalspannungen in kg pro qcm (Einfluß der Straßenwalze siehe S. 489).

Quer- schnitt x	bei normaler Temperatur						für eine Temperatur- änderung um $\pm 25^{\circ}$		größte Gesamt- span- nungen		für eine Änderung der Spann- der Spann- weite um ± 1 cm		Quer- schnitt x				
	für Eigen- gewicht allein		für Voll- belastung		Grenzwerte (Druck)		$800 \left(1 + \frac{\psi}{2}\right)$ für	σ_o	σ_u	σ_o	σ_u	σ_o		σ_u			
	σ_o	σ_u	σ_o	σ_u	σ_o	σ_u									σ_o	σ_u	σ_o
m														m			
2,682	470	467	799	768	816	453	929	306	1022	932	∓ 20	± 38	836	967	± 14	∓ 28	2,682
5,190	354	353	610	573	734	230	783	143	925	873	∓ 30	± 44	764	827	± 22	∓ 32	5,190
7,698	351	351	612	562	809	154	855	58	876	827	∓ 45	± 60	854	915	± 33	∓ 43	7,698
10,206	349	349	615	552	843	120	886	15	857	807	∓ 59	± 74	902	960	± 43	∓ 53	10,206
12,714	347	347	617	543	863	101	865	26	847	812	∓ 71	± 86	934	951	± 51	∓ 62	12,714
15,222	347	347	622	538	855	114	814	71	853	835	∓ 82	± 97	937	911	± 59	∓ 70	15,222
17,730	347	348	627	535	804	170	760	122	885	864	∓ 91	± 106	895	866	± 66	∓ 77	17,730
20,238	348	349	632	533	745	235	678	203	926	920	∓ 99	± 114	844	792	± 71	∓ 83	20,238
22,746	350	350	637	532	693	295	656	226	970	938	∓ 104	± 120	797	776	± 75	∓ 87	22,746
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Dieser Horizontalschub wie nach 2 auf S. 481 die davon herrührenden Normalspannungen sind also innerhalb der Gültigkeitsgrenzen unsrer Formeln proportional Δl und wir wollen sie für $\Delta l = \pm 1$ cm ausdrücken. Mit $E = 2150000$ kg pro qcm und $l = 4800$ cm wird für Δl cm:

$$H = \mp 2093 \Delta l \text{ kg,}$$

wonach für $\Delta l = 1$ cm bei Beachtung von Tabelle V (S. 481) im Querschnitt $x = 2,682$ m:

$$\sigma_o = \pm 0,006805 \cdot 2093 = \pm 14 \text{ kg}$$

$$\sigma_u = \mp 0,013237 \cdot 2093 = \mp 28 \text{ „}$$

und im Querschnitt $x = 5,190$ m:

$$\sigma_o = \pm 0,010406 \cdot 2093 = \pm 22 \text{ kg,}$$

$$\sigma_u = \mp 0,015374 \cdot 2093 = \mp 32 \text{ „}$$

In gleicher Weise sind die übrigen Werte der Kolonnen 16 und 17 von Tabelle VIII berechnet.

K. Bemerkungen zu den resultierenden Normalspannungen. Belastung durch die Straßenwalze. Knickwirkung. Winddruck.

Die wichtigsten Ergebnisse betreffend die resultierenden Normalspannungen sind in Tabelle VIII (S. 488) zusammengestellt.

Nach dem Bauprogramm sollte die Dimensionierung der Eisenkonstruktion auf Grund einer zulässigen Beanspruchung von

$$b = 800 \left(1 + \frac{\psi}{2} \right) = 800 + 400 \psi \text{ kg}$$

pro qcm mit der oberen Grenze 1000 kg erfolgen (ψ Verhältnis der numerisch kleineren zur numerisch größeren Grenzspannung mit Berücksichtigung der Vorzeichen). Aus diesem Grunde sind den Grenzspannungen bei normaler Temperatur in den Kolonnen 10 und 11 die entsprechenden $800 \left(1 + \frac{\psi}{2} \right)$ beigesetzt, also z. B. bei $x = 2,682$ m:

$$\text{für } \sigma_o \quad 800 + 400 \frac{453}{816} = 1022 \text{ kg,}$$

$$\text{„ } \sigma_u \quad 800 + 400 \frac{306}{929} = 932 \text{ „}$$

Man sieht, daß die Grenzspannungen nur an wenigen Stellen etwas größer als $800 \left(1 + \frac{\psi}{2} \right)$ sind. Die ebenfalls in der Tabelle angeführten größten Gesamtspannungen, mit Einschluß des Beitrags der Temperaturänderungen überschreiten den vorgeschriebenen Maximalwert von 1000 kg an keiner Stelle. Die vereinbarten, unserer Berechnung zugrunde gelegten Dimensionen (vergl. S. 468) wurden demnach in der hier betrachteten Öffnung beibehalten.

Nach dem Bauprogramm war für die Berechnung der Eisenkonstruktion „als größte Einzellast eine Dampfwalze mit 20 Tonnen Dienstgewicht“ entsprechend Fig. 298 anzunehmen, wenn durch dieselbe eine größere Beanspruchung als durch die vorgeschriebenen Belastungen durch Menschengedränge erzeugt werden sollte. Bei der vorläufigen Berechnung wurden die Fahrbauteile und Vertikalständer für Belastung durch die Straßenwalze, die Bogen für Belastung durch Menschengedränge berechnet. Für die definitive Berechnung bedarf letzteres Verfahren einer Begründung.

Nach der Lastverteilung der Straßenwalze und der Entfernung der Hauptträger von 3,2 m können durch erstere ungünstigstenfalls 2 Lasten von 9 und 7,25 t in Entfernung von 2,9 m auf einen Bogen kommen (Beisp. 11). Die der

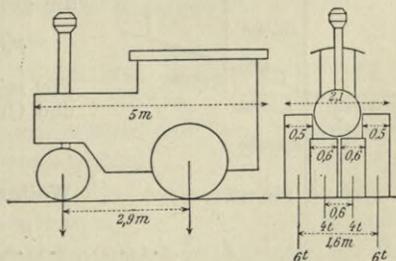


Fig. 298.

Berechnung zu Grunde gelegte Verkehrslast durch Menschengedränge beträgt 1390 kg pro m. Die Belastung eines Bogens durch die Straßenwalze entspricht also, abgesehen von der Konzentration der Lasten $\frac{16250}{1390} =$ zirka 12 m Belastung durch Menschengedränge. Da die Belastungsstrecken für die Grenzspannungen meist weit größer sind (vergl. die Tafel am Schlusse des Werkes), so konnte die übliche Berechnung der Hauptträger für Menschengedränge im allgemeinen beibehalten werden. Nur für die σ_o, σ_u an den Trägerenden und besonders um die Trägermitte kommen kleinere Belastungsstrecken vor, welche gleichwohl noch eine Straßenwalze aufnehmen können. Hier wurden aber auch die Querschnitte auf Grund der vorläufigen Berechnung so gewählt, daß die größten Gesamtspannungen wesentlich unter der zulässigen Grenze von 1000 kg bleiben. Die Berechnung der größten Gesamtspannungen in der Trägermitte ergab (Beispiel 11) für die Straßenwalze ohne Menschengedränge $\sigma_o = 823$ kg, $\sigma_u = 771$ kg, für die Straßenwalze mit Menschengedränge (soweit der Raum reicht) $\sigma_o = 901$ kg, $\sigma_u = 900$ kg. Da auch kleine Änderungen der Spannweite in der Mitte am meisten zur Geltung kommen, so erkennt man, daß die ursprünglich beabsichtigt gewesene Unterbrechung der horizontalen Verstärkungsplatten auf eine Strecke von 6,6 m um die Bogenmitten (S. 468) nicht berechtigt gewesen wäre (in Öffnung V können selbst mit diesen Platten größte Gesamtspannungen bis 1000 kg in der Mitte entstehen).

Dem Bauprogramm zufolge waren die Querschnitte von Stäben mit achsialem Druck entsprechend der Schwarzschen Knickformel¹ aus

$$F = (1 + \mu) F_d$$

zu berechnen, worin $F_d = \frac{D}{d}$ der dem Maximaldrucke D bei einer zulässigen Beanspruchung ohne Rücksicht auf Knickwirkung von d pro Flächeneinheit entsprechenden Querschnitt und

$$\mu = \frac{F l^2}{J \nu}$$

mit l Stablänge, J Trägheitsmoment, $\nu = 24000$. Bei Brückenbogen wird allerdings gewöhnlich eine Zerknickungsgefahr nicht angenommen. Da jedoch die Achsialkraft N_x bedeutende Werte annehmen kann, so wurde (schon bei der ursprünglichen Berechnung) ein seitliches Einknicken in Betracht gezogen.

Nach S. 491 sind die größte Horizontalreaktion und Vertikalreaktion:

$$H = 235\,970 \text{ kg}, \quad V = 83\,082 \text{ kg},$$

damit wird im ersten Felde die größte Vertikalkraft (vergl. S. 477 und Fig. 299):

$$V_x = 83\,082 - (2040 + 1390) \frac{2 \cdot 2,508}{3} = 77\,347 \text{ kg},$$

während nach

$$N_x = (V_x \operatorname{tg} \varphi + H) \cos \varphi$$

die größte Achsialkraft:

$$N_x = \left(77\,347 \frac{0,885}{2,508} + 235\,970 \right) \frac{2,508}{2,660} = 248\,219 \text{ kg}.$$

Für reinen Druck wäre mit dem hier maßgebenden Grenzwert $d = 1000$ kg (vergl. S. 489):

$$F_d = \frac{248\,219}{1000} = 248,219 \text{ qcm}.$$

Weiter hat man nach S. 473:

$$F = 295 \text{ qcm},$$

$$J = \frac{2}{3} (2 \cdot 1,4 \cdot 19^3 + 2 \cdot 1,2 \cdot 9,6^3 + 2 \cdot 7,8 \cdot 1,8^3 + 72 \cdot 0,6^3) = 14\,290 \text{ cm}^4,$$

$$\mu = \frac{295 \cdot 266^2}{14\,290 \cdot 24\,000} = 0,06086,$$

sod daß der verlangte wirkliche Querschnitt:

$$F = 1,06086 \cdot 248,219 = 263,33 \text{ qcm}$$

¹ Luegers Lexikon der gesamten Technik, 2. Auflage, Artikel Knickfestigkeit. Andere Berücksichtigung der Knickspannungen siehe VI O, P.

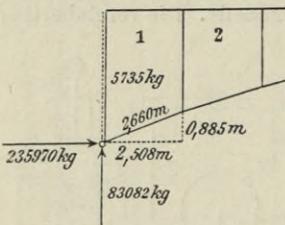


Fig. 299.

während der tatsächliche Querschnitt mindestens 295 qcm, durchschnittlich aber wegen der nach den Auflagern hin angebrachten Verstärkungen noch größer ist.

Man könnte noch fragen, ob nicht durch die Transversalkraft T_x übermäßige Beanspruchungen entstehen. Dies pflegt für Bogenträger nicht der Fall zu sein, weshalb man T_x hier gewöhnlich unberücksichtigt läßt. Wollte man sich jedoch durch Rechnung davon überzeugen, so würde die Untersuchung einzelner geeigneter Belastungsfälle genügen. In Beispiel 8 sind die größten Längs- und Querschubspannungen τ der König-Karls-Brücke berechnet a) für Vollbelastung des ganzen Bogens, b) für Verkehrslast auf der ersten Bogenhälfte, c) für Verkehrslast auf der zweiten Bogenhälfte. Die erhaltenen τ (in der Achsschicht) schwanken zwischen 0 und ± 82 kg pro qcm (Tabelle S. 39).

Der Winddruck, welcher nach dem Bauprogramm zu 150 kg pro qm getroffener Fläche anzunehmen war, blieb bei Berechnung der Bogen außer Betracht. Da zwei Horizontalverbände der in Fig. 300 angedeuteten Art in Höhe der Fahrbahn und des Obergurts der Bogen die sechs Tragwände verbinden, und der Zoreisenbelag der Brücke einen dritten Horizontalverband bildet, so sind die Beanspruchungen der einzelnen Bogen durch den Winddruck gering. Am ehesten kommen sie für die Stirnbogen in Betracht, welche aber durch die Winkeleisen von 10/10/1 cm zur Befestigung der Vertikalen (S. 487) eine bei Berechnung der obigen Normalspannungen nicht berücksichtigte Verstärkung erhalten haben. Auch dürften stärkste Winddruckfälle kaum jemals mit ungünstigsten Belastungsfällen und Temperaturfällen zusammentreffen.

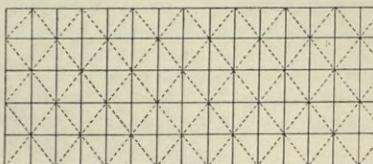


Fig. 300.

L. Kämpferdrücke. Auflager.

In VI C (S. 478) ergaben sich die Vertikalreaktionen und Horizontalreaktionen der Kämpfer durch die gesamte feste Last:

$$V = 49379 \text{ kg}, \quad H = 128491 \text{ kg}$$

und durch die Verkehrslast allein bei Vollbelastung des Bogens:

$$V = 33703 \text{ kg}, \quad H = 87531 \text{ kg}.$$

Nach S. 480 beträgt der künstliche Horizontalschub $K = 1950$ kg und nach S. 487 können durch die in Betracht gezogenen Temperaturänderungen bis $\pm 25^\circ$ Horizontalschübe von $H = \pm 2888$ kg entstehen.

Demnach erhalten wir die größte Vertikalreaktion durch Belastung, bei Vollbelastung:

$$V = 49379 + 33703 = 83082 \text{ kg},$$

die kleinste Vertikalreaktion durch Belastung, für Eigengewicht allein:

$$V = 49379 \text{ kg},$$

den größten Horizontalschub, bei Vollbelastung und Temperaturänderung um $\tau = 25^\circ$:

$$H = 128491 + 87531 + 1950 + 2888 = 220860 \text{ kg}$$

den kleinsten Horizontalschub, für Eigengewicht allein und Temperaturänderung um $\tau = -25^\circ$:

$$H = 128491 + 1950 - 2888 = 127553 \text{ kg},$$

und den Horizontalschub für Eigengewicht allein bei normaler Temperatur:

$$H = 128491 + 1950 = 130441 \text{ kg};$$

ferner die größte resultierende Kämpferreaktion, bei Vollbelastung und Temperaturänderung um $\tau = 25^\circ$:

$$R = \sqrt{83082^2 + 220860^2} = 235970 \text{ kg},$$

die kleinste resultierende Kämpferreaktion, für Eigengewicht allein und Temperaturänderung um $\tau = -25^\circ$:

$$R = \sqrt{49379^2 + 127553^2} = 136780 \text{ kg}$$

und die resultierende Kämpferreaktion für Eigengewicht allein bei normaler Temperatur:

$$R = \sqrt{49379^2 + 130441^2} = 139470 \text{ kg.}$$

Die Auflager sind entsprechend Fig. 301, 302 angeordnet. Gelenkstück, Keile und oberer Teil des Lagerstuhls bestehen aus hartem Martinstahl, der untere Teil des letzteren aus Gußeisen. Die Gelenkstücke haben $l = 24$ cm wirksame Länge und 12 cm Durchmesser. Mit Rücksicht auf die soeben berechneten Kämpferdrücke R erhält man die mittlere Beanspruchung pro qcm Längsschnitt des Gelenkstückes aus

$$s_m = \frac{R}{2 r l} \quad 1$$

im Maximum:

$$s_m = \frac{235970}{12 \cdot 24} = 819 \text{ kg,}$$

im Minimum:

$$s_m = \frac{136780}{288} = 475 \text{ kg,}$$

für Eigengewicht allein bei normaler Temperatur:

$$s_m = \frac{139470}{288} = 484 \text{ kg.}$$

Die Beanspruchung s_m bleibt unter der größten Beanspruchung des Gelenkstückes. Diese tritt in der Richtungslinie von R ein und läßt sich unter

den Voraussetzungen des § 16 nach § 16, 8 setzen:

$$s = \frac{4 R}{5 r l}, \quad 2$$

wonach ermittelt wurden als Maximum:

$$s = \frac{4 \cdot 235970}{5 \cdot 6 \cdot 24} = 1311 \text{ kg,}$$

als Minimum:

$$s = \frac{136780}{180} = 760 \text{ kg,}$$

für Eigengewicht allein bei normaler Temperatur:

$$s = \frac{139470}{180} = 775 \text{ kg.}$$

Da die Richtung der größten resultierenden Kämpferreaktion fast genau mit der Richtung der Bogenachse beim Kämpfer zusammenfällt (Tangenten der Richtungswinkel gegen die Horizontale 0,3764 und 0,3754), so erscheint bei der geringen Höhe des Auflagers in unserm Falle (von Gelenkmittelpunkt bis Grundfläche etwa 30 cm) die übliche Annahme gleichmässiger Verteilung des größten Kämpferdrucks auf die getroffene Fläche des Auflagersteins gerechtfertigt. Das gleiche gilt für den kleinsten Kämpferdruck, und da sich übersehen läßt, daß auch bei andern Belastungen keine ungünstigere Beanspruchung des Auflager-

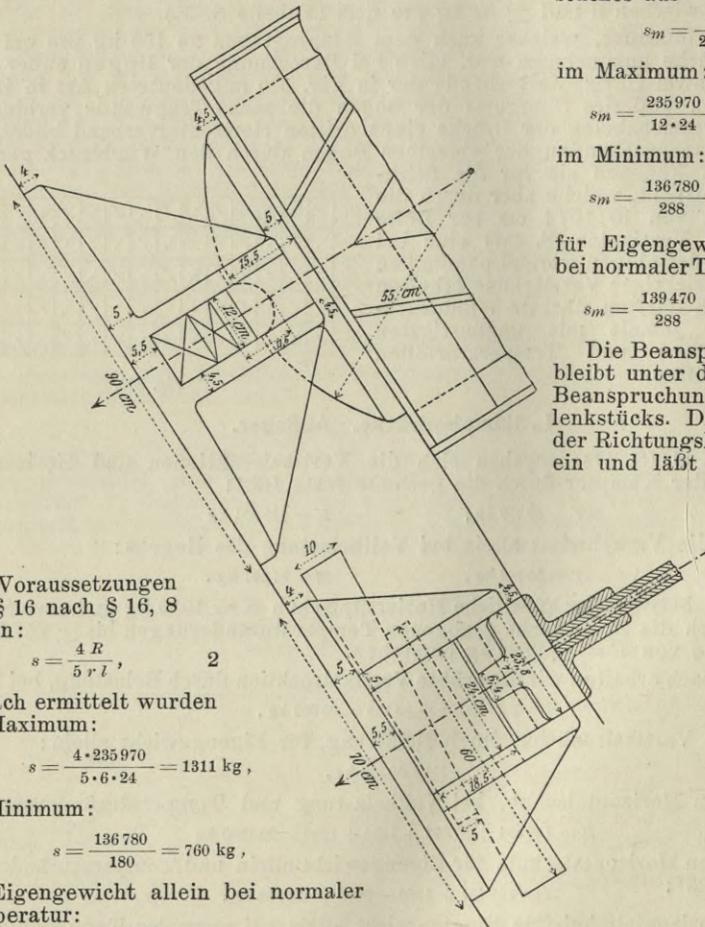


Fig. 301.

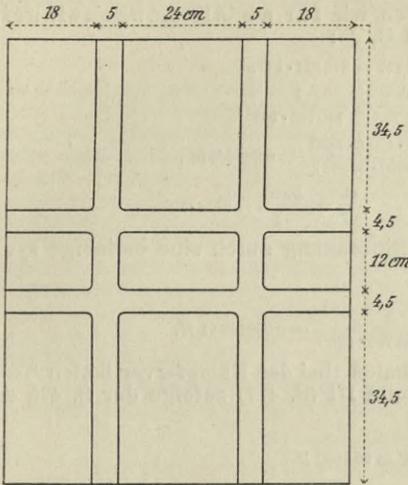


Fig. 302.

naugigkeit vorgehen. Die Zulässigkeit jener Vernachlässigungen für die meisten Fälle (§ 43) wird dabei um so klarer hervortreten.

Sollte zwar nicht β , aber doch ξ vernachlässigt werden, so wäre von den Formeln § 45, 8), 9) auszugehen. Wir werden jedoch auch ξ berücksichtigen, und demgemäß die Gleichungen § 45, 4), 5) zur Verwendung bringen, in welchen für Bogen mit Kämpfergelenken $M = M' = 0$ ist.

Nach § 45, 5) ist die von einer beliebigen zur Trägermitte symmetrischen Belastung herrührende Einsenkung des Bogenseitels wegen $\Delta \varphi_m = 0$:

$$e = \frac{1}{24 E c} \left[\sum_0^m P a (3 l^2 - 4 a^2) + 12 \xi l \sum_0^m P a (l - a) - \left(1 - \frac{4 \beta}{5} \right) \frac{5 f l^2}{2} H \right], \quad 1$$

worin H durch § 20, 7) bestimmt. Speziell für eine auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Last von g pro Längeneinheit hat man nach § 18 in 1):

$$\sum_0^m P a (3 l^2 - 4 a^2) = \frac{5 g l^4}{16}, \quad \sum_0^m P a (l - a) = \frac{g l^3}{12}, \quad 2$$

so daß wir auch schreiben können:

$$e = \left(1 + \frac{16 \xi}{5} \right) \frac{5 g l^4}{384 E c} - \left(1 - \frac{4 \beta}{5} \right) \frac{5 f l^2}{48 E c} H, \quad 3$$

während H durch § 20, 23) ausgedrückt ist.

Weiter liefert § 45, 5) für eine beliebige Temperaturänderung τ allein:

$$e = - \left(1 - \frac{4 \beta}{5} \right) \frac{5 f l^2}{48 E c} H - \alpha \tau f \quad 4$$

mit H nach § 20, 8), und für einen beliebigen Horizontalschub H allein:

$$e = - \left(1 - \frac{4 \beta}{5} \right) \frac{5 f l^2}{48 E c} H. \quad 5$$

Diese Gleichung gilt also beispielsweise auch für den künstlichen Horizontalschub $H = K$, sowie für den durch eine Änderung der Spannweite um Δl bedingten Horizontalschub, welcher durch § 20, 9) bestimmt ist.

Da im vorliegenden Falle nach VI B (S. 475) $\beta = 0,001411$ und mit $\gamma = 1504,74$ qcm, $r = 6618,1$ cm:

$$\xi = \frac{\gamma}{r^2} = \frac{1504,74}{6618,1^2} = 0,000034,$$

so erkennt man schon, daß in ähnlichen Fällen β und ganz besonders ξ ver-

steins entsteht, so erhalten wir bei 90/70 cm Grundfläche des Lagerstuhls (Fig. 302) den Druck pro qcm Auflagerstein

$$\text{im Maximum: } \frac{235970}{6300} = 37,5 \text{ kg,}$$

$$\text{im Minimum: } \frac{136780}{6300} = 21,7 \text{ kg,}$$

für Eigengewicht allein bei normaler Temperatur:

$$\frac{139470}{6300} = 22,1 \text{ kg.}$$

M. Einsenkungen.

Zur Berechnung der Einsenkungen symmetrischer Parabelbogen mit Kämpfergelenken reichen im allgemeinen die entsprechenden Formeln des § 20 aus (vergl. Beispiel 34, 49, 97), für welche im Gegensatze zu den dort gegebenen Ausdrücken des Horizontalschubs H die Größen β , ξ (§ 43) vernachlässigt wurden. Wir wollen jedoch hier mit möglichster Ge-

nachlässigt werden dürfen. Weiter erhalten wir für cm als Längeneinheit und kg als Gewichtseinheit (vergl. VI B, J):

$$24 E c = 24 \cdot 2\,150\,000 \cdot 539\,827 = 278\,551 \cdot 10^8,$$

$$\frac{\zeta l}{2 E c} = \frac{12 \cdot 1504,74 \cdot 4800}{6618,1^2 \cdot 278\,551 \cdot 10^8} = \frac{1}{140\,763 \cdot 10^8},$$

$$\left(1 - \frac{4\beta}{5}\right) \frac{5 f l^2}{48 E c} = \frac{0,998\,87 \cdot 5 \cdot 450,5 \cdot 4800}{48 \cdot 2\,150\,000 \cdot 539\,827} = 0,000\,930\,51,$$

$$\frac{5 l^4}{16} = \frac{5}{16} \cdot 4800^4 = 1\,658\,880 \cdot 10^8 \quad \frac{l^3}{12} = \frac{4800^3}{12} = 9216 \cdot 10^6.$$

Mit diesen Werten folgt aus 1 die Einsenkung durch eine beliebige symmetrische Belastung:

$$e = \frac{\sum_0^m P a (3 l^2 - 4 a^2)}{278\,551 \cdot 10^8} + \frac{\sum_0^m P a (l - a)}{140\,763 \cdot 10^8} - 0,000\,930\,51 H. \quad a$$

Für lauter gleiche Lasten P bei den Vertikalen (bei den Kämpfervertikalen $\frac{2}{3} P$, vergl. S. 477) ist mit Rücksicht auf Tabelle III (S. 477) zufolge der S. 475 erhaltenen Formeln b der Horizontalschub:

$$H = \frac{2 \cdot 10\,127\,183}{806\,754} P = 25,1060 P$$

und die Einsenkung:

$$e = \frac{660\,149}{278\,551} \frac{P}{100} + \frac{36,6579}{140\,763} \frac{P}{100} - 0,000\,930\,51 \cdot 25,1060 P,$$

$$e = (2,369\,94 + 0,000\,26 - 2,336\,14) \frac{P}{100} = 0,034\,06 \frac{P}{100}. \quad b$$

Beispielsweise erhält man durch das konzentrierte Eigengewicht mit $P = 4264$ kg:

$$e = 0,034\,06 \cdot 42,64 = 1,452 \text{ cm}$$

und durch die Verkehrslast bei Vollbelastung des ganzen Bogens mit $P = 3486$ kg:

$$e = 0,034\,06 \cdot 34,86 = 1,187 \text{ cm}.$$

Eine beliebige gleichmäßig verteilte Last von g pro Meter, oder $\frac{g}{100}$ pro Zentimeter Spannweite erzeugt nach 1, 2 mit Rücksicht auf die Formel c auf S. 475:

$$e = \frac{1\,658\,880}{278\,551} \frac{g}{100} + \frac{92,16}{140\,763} \frac{g}{100} - 0,000\,930\,51 \cdot 63,093 g,$$

$$e = (5,955\,39 + 0,000\,65 - 5,870\,87) \frac{g}{100} = 0,085\,17 \frac{g}{100}, \quad c$$

also beispielsweise das Eigengewicht von $g = 340$ kg der Bogen allein:

$$e = 0,085\,17 \cdot 3,4 = 0,290 \text{ cm}.$$

Bei Vernachlässigung von $\zeta = 0,000\,034$ wären in den vorstehenden Klammerausdrücken für konzentrierte und gleichmäßig verteilte Lasten die Summanden 0,00026 und 0,00065 weggefallen, womit sich in beiden Fällen e um 0,76% kleiner ergeben hätte. In den Ausdrücken von e durch Temperaturänderungen und einen beliebigen Horizontalschub, also auch durch Änderungen der Spannweite, kommt ζ überhaupt nicht vor. Im Falle der Vernachlässigung von $\beta = 0,001411$ wären in a und den folgenden Gleichungen d, e, f 0,00093156 an Stelle von 0,00093051 getreten, was in d, e, f Abweichungen von 0,11% gegen die genaueren e ergeben hätte.

Für eine beliebige Temperaturänderung allein erhält man nach 4 mit Rücksicht auf S. 487:

$$e = -0,000\,930\,51 \cdot 115,520 \tau - 0,000\,011\,5 \cdot 450,5 \tau = -0,112\,67 \tau, \quad d$$

woraus für $\tau = \pm 25^\circ$: $e = \mp 2,817 \text{ cm}.$

Durch einen beliebigen Horizontalschub H entsteht:

$$e = -0,000\,930\,51 H, \quad e$$

also beispielsweise durch den künstlichen Horizontalschub $H = K = 1950$ kg:

$$e = -1,814 \text{ cm}$$

und durch eine Änderung der Spannweite um Δl wegen Formel e auf S. 475:

$$e = 0,000\,930\,51 \cdot 4,6722 \frac{2\,150\,000}{4800} \Delta l = 1,9473 \Delta l, \quad f$$

das heißt für jeden Millimeter Vergrößerung oder Verkleinerung der Spannweite (Δl positiv oder negativ) 1,947 mm Einsenkung oder Erhebung des Bogenscheitels. Dieser verhältnismäßig große Einfluß kleiner Änderungen der Spannweite erklärt die Empfindungen des Schwankens, welche auf manchen Bogenbrücken mit mehreren Öffnungen beim Überfahren von Lasten für den Fußgänger eintreten (vergl. S. 512). Die Bewegungen e für bestimmte Δl wachsen mit dem Verhältnis $l:f$, sind also um so größer, je flacher der Bogen, während die Größe der Trägheitsmomente bei Bogen mit drei Gelenken gar keinen, bei Bogen mit zwei Gelenken einen unwesentlichen, bei Bogen ohne Gelenk einen etwas größeren Einfluß auf Verringerung der e ausübt (vergl. die Formeln 10—12 der Aufgabe 15, S. 108, in welchen die Trägheitsmomente zufolge § 19, 40)—42) durch ϵ zur Geltung kommen). Über den Einfluß von Δl auf die Beanspruchungen in unserm Falle siehe S. 488, 489.

Die resultierende Einsenkung ist für Belastung durch das Eigengewicht der Konstruktion allein bei normaler Temperatur:

$$e = 1,452 + 0,290 - 1,814 = -0,072 \text{ cm},$$

für Eigengewicht allein bei $\tau = -25^\circ$:

$$e = -0,072 + 2,817 = 2,74 \text{ cm};$$

sie erreicht für Eigengewicht allein bei $\tau = 25^\circ$:

$$e = -0,072 - 2,817 = -2,89 \text{ cm},$$

für Vollbelastung bei $\tau = -25^\circ$:

$$e = -0,072 + 1,187 + 2,817 = 3,93 \text{ cm}.$$

Bei Beurteilung dieser resultierenden Einsenkungen ist zu beachten, daß Vollbelastung einer Öffnung (größte Verkehrslast auf der ganzen Länge) nur selten vorkommt, und kaum jemals zugleich mit der niedrigsten Temperatur, daß ferner jede Verkehrslast nur vorübergehend wirkt. Von wesentlichem Interesse dagegen sind die Scheitelbewegungen für Eigengewicht allein, da die wirklichen Belastungen meist nicht viel von letzterem abweichen. Infolge des gewählten künstlichen Horizontalschubes liegt der Bogenscheitel für Eigengewicht allein bei normaler Temperatur nur um 0,072 über der dem spannungslosen Zustande entsprechenden Bogenachse (für geringe Verkehrsbelastungen etwa in derselben) und er bewegt sich bei höherer und niedriger Temperatur um nahezu gleichviel nach oben und unten gegen diese Lage.

Ohne künstlichen Horizontalschub wäre dessen Beitrag $e = -1,814$ cm weggefallen, und damit für Eigengewicht allein bei normaler Temperatur $e = 1,742$ cm, bei $\tau = -25^\circ$ $e = 4,56$ cm, bei $\tau = 25^\circ$ $e = -1,07$ cm, die Bogenachse wäre also fast immer unter ihrer normalen Lage geblieben. Bei Vollbelastung und $\tau = -25^\circ$ hätten wir $e = 5,75$ cm erhalten. Die Anwendung eines künstlichen Horizontalschubs ist also sowohl für die Beanspruchungen (vergl. VI E, J) als für die Einsenkungen günstig gewesen.

Bemerkungen. Es wurden oben nicht genau die Grenzwerte der Einsenkung e ermittelt. Um diese zu erhalten, empfiehlt es sich, zunächst die Einflußlinie von e festzustellen. Da zwei zur Mitte symmetrische Lasten gleichviel zur Einsenkung in der Mitte beitragen, so liefert Gleichung a) mit $P = 1$ für cm als Längeneinheit und kg als Gewichtseinheit die Gleichung der Einflußlinie von e auf der ersten Trägerhälfte:

$$b = \frac{a(3l^2 - 4a^2)}{2 \cdot 278\,551 \cdot 10^8} + \frac{a(l-a)}{2 \cdot 140\,763 \cdot 10^8} - 0,000\,930\,51 H,$$

worin auch H einer bei a angreifenden Einzellast $P = 1$ entspricht, also nach VI B:

$$H = \frac{f(a)}{806\,754},$$

welche Werte aber schon in den Bemerkungen zu VI B gegeben sind (S. 475).

Die Zähler vorstehender Brüche lassen sich aus der Tabelle III, S. 477, entnehmen. Wir erhalten damit für $a = 0$ $b = 0$ und für $a = 0,174$ m:

$$100 b = \frac{1203 \cdot 10^6}{557 102 \cdot 10^8} + \frac{8.32 \cdot 10^4}{281 526 \cdot 10^6} - 0,093 051 \cdot 0,0238 = 0,002 159 + 0,000 000 - 0,002 215 = - 0,000 056,$$

für $a = 2,682$ m:

$$100 b = \frac{184 61}{557 102} + \frac{121,54}{28 152 600} - 0,093 051 \cdot 0,3649 = 0,033 138 + 0,000 004 - 0,033 954 = - 0,000 812,$$

für $a = 5,190$ m:

$$100 b = \frac{353 14}{557 102} + \frac{222,18}{28 152 600} - 0,093 051 \cdot 0,6948 = 0,063 389 + 0,000 008 - 0,064 652 = - 0,001 255,$$

für $a = 7,698$ m:

$$100 b = \frac{51 384}{557 102} + \frac{310,24}{28 152 600} - 0,093 051 \cdot 1,0041 = 0,092 234 + 0,000 011 - 0,093 433 = - 0,001 188,$$

für $a = 10,206$ m:

$$100 b = \frac{66 292}{557 102} + \frac{385,73}{28 152 600} - 0,093 051 \cdot 1,2845 = 0,118 994 + 0,000 014 - 0,119 524 = - 0,000 516,$$

für $a = 12,714$ m:

$$100 b = \frac{79 658}{557 102} + \frac{448,63}{28 152 600} - 0,093 051 \cdot 1,5289 = 0,142 986 + 0,000 016 - 0,142 266 = 0,000 736,$$

für $a = 15,222$ m:

$$100 b = \frac{91 106}{557 102} + \frac{498,95}{28 152 600} - 0,093 051 \cdot 1,7315 = 0,163 535 + 0,000 018 - 0,161 118 = 0,002 435,$$

für $a = 17,730$ m:

$$100 b = \frac{100 256}{557 102} + \frac{536,69}{28 152 600} - 0,093 051 \cdot 1,8876 = 0,179 960 + 0,000 019 - 0,175 643 = 0,004 336,$$

für $a = 20,238$ m:

$$100 b = \frac{106 729}{557 102} + \frac{561,85}{28 152 600} - 0,093 051 \cdot 1,9936 = 0,191 579 + 0,000 020 - 0,185 506 = 0,006 093,$$

für $a = 22,746$ m:

$$100 b = \frac{110 147}{557 102} + \frac{574,43}{28 152 600} - 0,093 051 \cdot 2,0472 = 0,197 714 + 0,000 020 - 0,190 494 = 0,007 240.$$

Die Ansätze bestätigen, daß der Beitrag des zweiten Summanden in Gleichung a), d. h. der Beitrag der Glieder mit ζ hätte vernachlässigt werden dürfen, wie dies in § 20 gesehen ist.

Bei Vernachlässigung von β wäre in den Ansätzen 0,093156 an Stelle von 0,093051 getreten bei nur geringer Änderung der damit multiplizierten Werte von H (S. 475), so daß sich die Werte von $100 b$ um $0,000 105 \cdot 0,0238 = 0,000 002$ bis $0,000 105 \cdot 2,0472 = 0,000 215$ geändert hätten. Auch β wurde bei Angabe der Einsenkungen e in § 20 vernachlässigt.

Da die betrachtete Einflußlinie symmetrisch zur Trägermitte liegt und zwischen zwei aufeinander folgenden Knotenpunkten, in welchen Verkehrslast auf den Träger kommt, geradlinig verläuft (§ 12), so konnte die Linie nun in Fig. 303 verzeichnet werden. Die Einsenkungen lassen sich mittels derselben in bekannter Weise

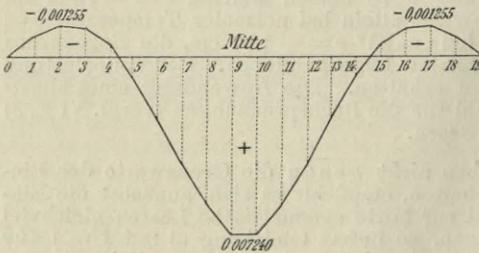


Fig. 303.

für beliebige Verkehrsbelastungen bestimmen (§ 12).

Wir wollen im folgenden die Grenzwerte von e durch gleichmäßig verteilte Verkehrslasten von p pro Längeneinheit Träger berechnen. Die Entfernung x des Durchschnittspunktes der Einflußlinie von e mit der Abszissenachse von der Vertikale 4 ($a = 10,206$ m) folgt aus

$$x : (2,508 - x) = 0,000 516 : 0,000 736$$

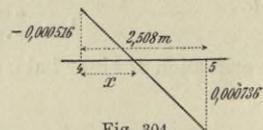


Fig. 304.

$$x = 1,034 \text{ m.}$$

Man erhält nun für die negative Einflußfläche F_n der ganzen Spannweite:

$$-100 F_n = 2 \cdot 17,4 \frac{0,000056}{2} + 2 \cdot 250,8 \left(\frac{0,000056 + 0,000812}{2} + \frac{0,000812 + 0,001225}{2} + \frac{0,001225 + 0,001188}{2} + \frac{0,001188 + 0,000516}{2} \right) + 2 \cdot 103,4 \frac{0,000516}{2} = 1,8154,$$

für die positive Einflußfläche F_p der ganzen Spannweite:

$$100 F_p = 2 \cdot 147,4 \frac{0,000736}{2} + 2 \cdot 250,8 \left(\frac{0,000736 + 0,002435}{2} + \frac{0,002435 + 0,004336}{2} + \frac{0,004336 + 0,006093}{2} + \frac{0,006093 + 0,007240}{2} \right) + 250,8 \cdot 0,007240 = 10,3772$$

und für die resultierende Einflußfläche F der ganzen Spannweite:

$$100 F = 10,3772 - 1,8154 = 8,5618.$$

Damit ergeben sich bei einer gleichmäßig verteilten Verkehrslast von $p = 13,90$ kg pro cm Träger der größte negative Beitrag der Verkehrslast:

$$e = p F_n = -13,90 \cdot 0,018154 = -0,252 \text{ cm},$$

der größte positive Beitrag der Verkehrslast:

$$e = p F_p = 13,90 \cdot 0,103772 = 1,442 \text{ cm}$$

und der Beitrag der Verkehrslast auf der ganzen Spannweite:

$$e = p F = 13,90 \cdot 0,085618 = 1,190 \text{ cm}.$$

Die kleine Differenz gegen den oben für letzteren Fall erhaltenen Wert 1,187 cm rührt daher, daß wir dort die Verkehrslast auf Vertikale 0 (welche negativ beiträgt) etwas zu groß $\frac{2}{3}$ 3486 kg gesetzt haben.

Die äußersten Grenzwerte der Einsenkung beim Zusammenwirken von Eigengewicht, Verkehrslast, Temperaturänderungen und künstlichem Horizontalschub sind nun

$$e = 1,742 - 0,252 - 2,817 - 1,814 = -3,14 \text{ cm},$$

$$e = 1,742 + 1,442 + 2,817 - 1,814 = 4,19 \text{ cm},$$

während wir ohne den künstlichen Horizontalschub $-1,33$ cm und $6,00$ cm erhalten hätten. Bezüglich der Einsenkungen siehe auch unter VI R.

N. Reduktion der Normaltemperatur auf die mittlere Ortstemperatur. Überhöhung der Bogen.

Die Bogen wurden an Ort und Stelle in möglichst spannungslosem Zustande montiert, wobei alle Teile gehörig unterstützt und die Keile unter den Gelenkstücken der Auflager leicht angezogen waren. Es sollte dann die künstliche Überhöhung der Bogen entsprechend dem gewählten künstlichen Horizontalschub K (vergl. VI E) durch weiteres Antreiben der Keile stattfinden. Die zur Erzeugung eines künstlichen Horizontalschubs K nötige Verminderung $v = -\Delta l$ der Spannweite ist nach Aufgabe 18 (S. 134):

$$v = \frac{(1 + \epsilon) 8 l f^2}{15 E c} K. \quad 1$$

Hätte man sich nun hiermit begnügt, so würde die Temperatur bei Erzeugung des künstlichen Horizontalschubs als Normaltemperatur der Bogen zu betrachten gewesen sein, wie ja früher immer die Montierungstemperatur der Bogen als Normaltemperatur derselben gegolten hat. Als späteste Aufstellungszeiten waren vorgeschrieben:

für die Öffnungen	V	IV	III	II	I
Beginn ¹	1. 10. 92	1. 11. 92	1. 3. 93	1. 4. 93	1. 5. 93
Beendigung	1. 11. 92	1. 12. 92	1. 4. 93	1. 5. 93	1. 6. 93

¹ Die Eisenkonstruktion sollte ursprünglich unter Verwendung des gleichen Gerüsts für alle Öffnungen aufgestellt werden. Wegen der alsdann nötigen Vorkehrungen gegen die einseitigen Horizontalschübe auf die Pfeiler wurden jedoch alle Öffnungen vor Beginn der Aufstellung eingerüstet, womit auch die obigen Aufstellungszeiten im einzelnen nicht mehr eingehalten zu werden brauchten. Die Horizontalschübe aller Bogen ließ man möglichst gleichzeitig zur Wirkung kommen. Siehe S. 499.

Angenommen demgemäß, man hätte als Temperaturen bei Herstellung des künstlichen Horizontalschubs K gehabt

	5°	0°	5°	15°	25° C,
so würden durch die vorgenommene Berechnung für Temperaturänderungen bis $\tau = \pm 25^\circ$ die Temperatureinflüsse berücksichtigt gewesen sein:					
von	-20°	-25°	-20°	-10°	0° C
bis	+30°	+25°	+30°	+40°	+50° „

Um solche für die wirklichen Beanspruchungen ungünstige Zufälligkeiten zu vermeiden, wurde nach dem Vorschlage des Verfassers bei der ohnehin vorgeschriebenen Überhöhung der Bogen (VI E) die Normaltemperatur der letzteren in allen Öffnungen auf die Stuttgarter mittlere Temperatur reduziert, welche nach Mitteilung der meteorologischen Zentralstation in Stuttgart auf Grund fünfjähriger Beobachtungen rund 10° gesetzt werden kann.

Die für die fragliche Reduktion nötigen Beziehungen sind für symmetrische Parabelbogen von konstantem $J \cos \varphi$ in Aufgabe 18, S. 134, abgeleitet. Die Temperatur t_1 , bei Erzeugung des künstlichen Horizontalschubs differiere um d von der gewünschten Normaltemperatur (für welche ohne künstlichen Horizontalschub und ohne Belastung, d. h. auch bei normaler Spannweite ohne Belastung der spannungslose Zustand eintreten würde). Anstatt der Verringerung 1 der Spannweite ist dann eine solche

$$v = \frac{(1 + \varepsilon) 8 l f^2}{15 E c} K + \alpha l d, \quad 2$$

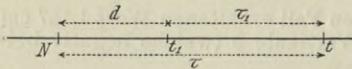


Fig. 305.

vorzunehmen, womit nach S. 135 zwar der künstliche Horizontalschub bei Herstellung der Überhöhung den Wert

$$K_1 = K + \frac{15 c}{(1 + \varepsilon) 8 f^2} E \alpha d \quad 3$$

besitzt, bei normaler Temperatur aber den vorausbestimmten Wert K erlangt.

In unserm Falle erhält man mit Rücksicht auf $K = 1950$ kg und die schon in VI E und M verwendeten Werte nach 2:

$$v = \frac{4800 \cdot 1950}{4,6722 \cdot 2150000} + 0,0000115 \cdot 4800 d,$$

$$v = 0,932 + 0,0552 d \text{ cm.} \quad I$$

Während dieser Verringerung der Spannweite entsteht nach 3 ein künstlicher Horizontalschub:

$$K_1 = 1950 + 4,6722 \cdot 24,725 d = 1950 + 115,520 d \text{ kg.}$$

Derselbe bewirkt nach S. 494 eine negative Einsenkung, d. h. Hebung, des Bogenscheitels:

$$e' = -0,00093051 (1950 + 115,520 d) = -1,814 - 0,1075 d \text{ cm.}$$

Diese Einsenkung tritt zu derjenigen durch das Eigengewicht der Konstruktion, welches mit dem Abheben der Bogen von den Unterstutzungsflächen wirksam zu werden beginnt. Bezeichnet P das alsdann durch eine Vertikale auf den Bogen übertragene Eigengewicht, so hat man nach den hier und S. 494 erhaltenen Werten die resultierende Einsenkung bei Herstellung der Überhöhung:

$$e = 0,290 + 0,0003406 P - 1,814 - 0,1075 d \text{ cm.}$$

Im vorliegenden Falle war während der letzteren das Eigengewicht der Konstruktion mit Belag durch Zoreisen, aber ohne die übrigen Teile der Fahrbahn wirksam, also nach S. 477 $P = 1467$ kg, womit wir erhalten:

$$e = -1,024 - 0,1075 d \text{ cm.} \quad II$$

Vor Herstellung der Überhöhung war die Eisenkonstruktion in möglichst spannungslosem Zustande soweit zu montieren, daß ein seitliches Ausweichen der Bogen nicht mehr stattfinden konnte, und andererseits unkontrollierbare Spannungen in den Vertikalen und Obergurten der Tragwände durch die Überhöhung nicht in Betracht kamen. Sollte nun die Überhöhung für eine Öffnung vorgenommen werden, so war zunächst die augenblickliche Temperatur t_1 und deren Differenz

$$d = t_1 - 10^\circ C$$

gegen die Stuttgarter mittlere Temperatur festzustellen. Die d sind positiv oder negativ, je nachdem t_1 über oder unter der mittleren Temperatur liegt.

Die Überhöhungen hatten alsdann für alle Bogen einer Öffnung möglichst gleichzeitig bis zu denjenigen Verringerungen der Spannweiten und Erhebungen (negative Einsenkungen) der Bogenscheitel zu erfolgen, welche durch die Gleichungen I, II und entsprechende Gleichungen für die übrigen Öffnungen im voraus bestimmt waren. Für $d = 15^\circ$ beispielsweise liefern die obigen Gleichungen:

$$v = 1,760 \text{ cm}, \quad e = -2,636 \text{ cm}, \quad K_1 = 3683 \text{ kg}.$$

Bei Differenzen d bis 20° waren Verringerungen v bis etwa 2 cm zu erwarten, was bei Anordnung der Auflager von Interesse sein kann, da der Anlauf der Keile mit Rücksicht auf Erleichterung des Anziehens und Erschwerung des Zurückgehens nicht größer als nötig sein soll. Es empfiehlt sich, die Keile zu gradieren und im voraus zu ermitteln, welche Verringerung der Spannweite dem Vordringen der Keile um einen der betreffenden Grade entspricht, auch den schließlichen Sitz der Keile zu markieren, so daß deren richtiger Sitz jederzeit kontrolliert und eventuell wiederhergestellt werden kann.

Die Herstellung der Überhöhung erfolgte für alle Bogen im Sommer 1893 unter Leitung des Oberingenieurs Kübler von der Eßlinger Maschinenfabrik, und zwar durch die Arbeit der Sonnenwärme. Wenn sich in der wärmsten Tageszeit (nachmittags) die Bogen infolge der Temperaturerhöhung von den als Unterlagen dienenden Holzkeilen abgehoben hatten, wurden die letzteren angezogen. Nachdem durch die Kühlung der Nacht eine Verkürzung der Bogen eingetreten war, wurden die Stahlkeile an den Auflagern nachgeschoben. Diese Prozedur war so oft zu wiederholen, bis alle Bogen die den augenblicklichen t_1 , d entsprechenden v , e erreicht hatten, was bezüglich v durch Feststellung der Verschiebung der Stahlkeile, bezüglich e durch genaue Nivellements und Entnahme der entsprechenden e' in geeigneten Zeitabschnitten kontrolliert wurde. Da der Anlauf der Keile $\frac{1}{12}$ betrug, so war für jede Verringerung der Spannweite um 1 cm ein Eintreiben der Keile an beiden Auflagern um $\frac{1}{2} 12 = 6$ cm nötig.

Das Ablassen der Bogen aller Öffnungen erfolgte am 5. und 7. August 1893, wobei die Holzkeile unter den sechs Bogen einer Öffnung von den Kämpfern gegen den Scheitel fortschreitend gelöst wurden, was ohne besondere Schwierigkeiten vor sich ging. Die Senkung des Bogenscheitels während des Ablassens hätte nach obigen Gleichungen bei konstanter Temperatur für Öffnung IV betragen sollen:

$$e - e' = -1,024 + 1,814 = 0,79 \text{ cm}.$$

Die Beobachtung ergab 0,6 cm. Diese Abweichung ist am einfachsten dadurch zu erklären, daß das Eigengewicht zum Teil schon vor dem Ablassen wirkt hatte. Man ersieht daraus, daß die genaue Kontrolle der Verringerungen v der Spannweite wichtiger als diejenige der Scheitelsenkungen ist. — Die erzeugte Überhöhung war auch nach dem Ablassen der Bogen in der Flucht der Zoresen deutlich sichtbar.

Bemerkungen. Die von Kübler erdachte Verwendung der Sonnenwärme zur Herstellung der Überhöhung dürfte auch in Zukunft zu empfehlen sein. Unter Umständen (kleine Bogen, ungünstige Jahreszeit usw.) kann in Frage kommen, die Überhöhung lediglich durch Antreiben der Auflagerkeile herzustellen. Der hierbei zu überwindende Kämpferdruck ist um so größer, je grösser das bereits wirksame Eigengewicht. Sein Wert pro Bogen würde für die oben betrachtete Öffnung zu Beginn des Anziehens wegen

$$V = 8160 + 41219 \frac{1467}{4264} = 22341 \text{ kg},$$

$$H = 21439 + 107052 \frac{1467}{4264} = 58270 \text{ „},$$

(vergl. S. 477, 478) betragen haben:

$$R = \sqrt{22341^2 + 58270^2} = 62403 \text{ kg}.$$

Mit dem Vorrücken der Keile wäre der zu überwindende Kämpferdruck um etwas

weniger als den entstehenden künstlichen Horizontalschub K_1 gewachsen, im Falle $\bar{d} = 15^\circ$ beispielsweise, mit $H = 58270 + K_1 = 61953$ kg, auf

$$R = \sqrt{22341^2 + 61953^2} = 65858 \text{ kg.}$$

Angesichts der bedeutenden Kräfte zum Eintreiben der Keile könnte man das letzterwähnte Verfahren durch Mitwirkung hydraulischer Pressen zu erleichtern suchen wollen, die in den Bogenmitten einen Druck D von unten nach oben ausüben, doch gäbe dann die Möglichkeit lokaler Schwächungen zu Bedenken Anlaß. Wir bemerken deshalb nur, daß die Änderung keinen Einfluß auf die oben festgestellten Verringerungen v der Spannweiten und Einsenkungen e der Bogenscheitel nach dem Absetzen der Pressen hätte, daß aber die Einsenkungen während des Wirkens von D um den diesem Drucke allein entsprechenden (negativen) Wert der Einsenkung geändert würden, während die Kämpferdrücke abnehmen, womit das Eintreiben der Keile erleichtert würde. Für den oben betrachteten Fall ergab eine Berechnung die Scheitelsenkung unter Mitwirkung von D :

$$e = -1,024 - 0,1075 \bar{d} - 0,007416 \frac{D}{100} \text{ cm}$$

und die Auflagerreaktionen bei Beginn des Anziehens in kg

$$V = 22341 - \frac{D}{2}, \quad H = 58270 - 2,0539 D,$$

wonach zur vollständigen Aufhebung von H nötig wäre:

$$D = \frac{58270}{2,0539} = 28370 \text{ kg}$$

und alsdann zu überwinden bliebe:

$$V = 22341 - \frac{28370}{2} = 8156 \text{ kg.}$$

O. Vertikalen der inneren Bogen.

Zu den wichtigsten Konstruktionsteilen der Brücke gehören die Vertikalen (Vertikalständer), welche die Fahrbahnlast auf die Bogen übertragen. Die Vertikalen der Stirnbogen sollen im nächsten Paragraphen behandelt werden, während wir uns hier mit den Vertikalen der 4 inneren Bogen beschäftigen.

Die ungünstigste Belastung einer solchen Vertikale tritt ein, wenn eines der beiden Hinterräder der Straßenwalze (Fig. 298, S. 489) gerade über die Vertikale gelangt. Der Druck durch die Straßenwalze ist alsdann, bei 3,2 m Entfernung der Tragwände:

$$6000 + 6000 \frac{1,6}{3,2} = 9000 \text{ kg.}$$

Da vom Eigengewicht der Brücke auf eine Vertikale im allgemeinen 4264 kg, für die Kämpfervertikalen jedoch $\frac{2}{3}$ soviel kommt (S. 477), so beträgt die größte Gesamtbelastung für eine Kämpfervertikale:

$$9000 + \frac{2}{3} 4264 = 11842 \text{ kg,}$$

für eine der übrigen Vertikalen:

$$9000 + 4264 = 13264 \text{ kg.}$$

Indem jedoch diese Belastungen nur ganz ausnahmsweise und allmählich eintreten, konnte die sonst vorgeschriebene gewesene (S. 472) Berücksichtigung der Spannungswechsel in diesem Falle unterbleiben.

Die Berechnung erfolgte auf Grund der Versuchsergebnisse von Tetmajer, wozu bemerkt sei, daß die Dimensionen auch nach der unter VI K erwähnten Berücksichtigung der Zerknickungsgefahr reichlich genügen. Die Tetmajerschen Versuche führten für Flußeisenstäbe von etwa 4150 kg Zugfestigkeit (vorgeschrieben war im Mittel 4050 kg, vergl. S. 487) zu folgenden Formeln für die Knickfestigkeit¹, abgerundet:

¹ Tetmajer, Mitteilungen der Anstalt zur Prüfung von Baumaterialien am eidgenös. Polytechnikum, 4. Heft, Zürich 1890, S. 167. Vergl. Bemerkungen unten.

wenn $\frac{l}{r} < 105$ $k = 3200 - 11,6 \frac{l}{r}$ kg pro qcm, 1

„ $\frac{l}{r} > 105$ $k = 22 \pm 00000 \left(\frac{r}{l}\right)^2$ kg pro qcm, 2

worin l die „freie Knicklänge“ und

$$r = \sqrt{\frac{J}{F}} \quad 3$$

der kleinste in Betracht kommende Trägheitsradius für Achsen durch den Schwerpunkt des Querschnitts bedeuten. Unter $\frac{l}{r} = 20,4$ traten überhaupt keine Knickerscheinungen ein. Gleichung 2 entspricht der Eulerschen Knickformel.

Die Vertikalen der 4 inneren Tragwände bestehen je aus zwei Winkeleisen, angeordnet nach Fig. 306, welche nach der Querrichtung der Brücke durch vernietige Zwischenplatten in Abständen von 76,5 cm verbunden sind (Entfernung zwischen den äußersten Nieten 66,5 cm, lichte Entfernung 58,5 cm). Die Verbindung mit den Obergurten der Tragwände bewirken je 4 Nieten in Anschlußblechen nach der Längsrichtung der Brücke (Fig. 307), wozu unten noch je 6 Nieten in den

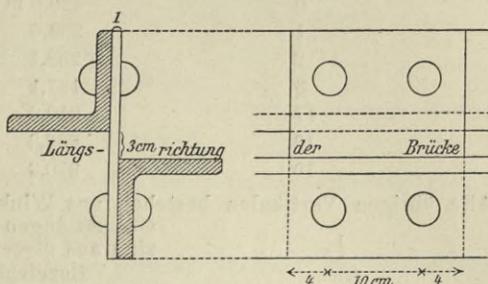


Fig. 306.

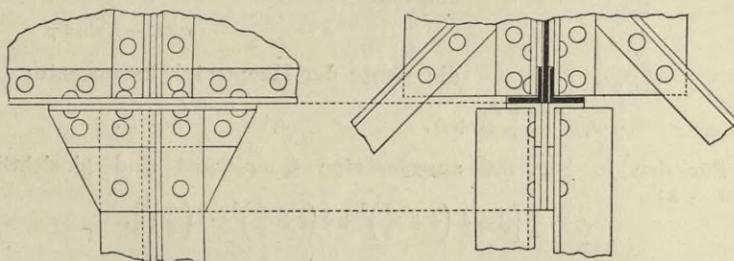


Fig. 307.

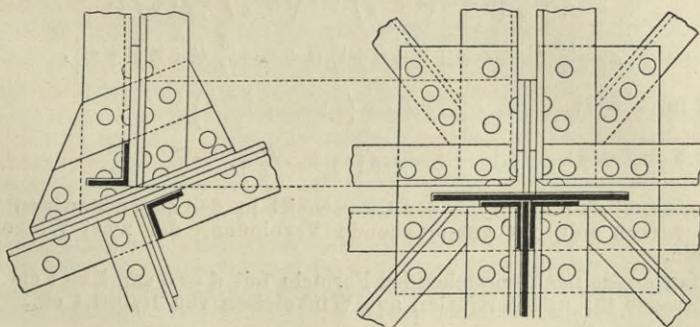


Fig. 308.

Anschlußblechen der vertikalen Querkonstruktionen kommen (Fig. 308). Auch sitzen die Vertikalen beiderseits auf. Für diese Endenhaltung wurde die freie Knicklänge, welche bei frei drehbaren Enden gleich der Stablänge, bei vollkommen festgespannten Enden gleich der halben lichten Länge des Stabes wäre, gleich 0,75 der Gesamtlänge zwischen den anschließenden Gurtungsplatten, gemessen in der Vertikalenachse, gesetzt, was mindestens 0,83 der Entfernung zwischen den äußersten Anschlußnieten und mindestens 0,85 der Entfernung

zwischen den äußersten Kanten der Anschlußbleche ausmacht. Zur Bildung der Vertikalen sind 4 Winkeleisensorten verwendet und zwar (vergl. Fig. 295, S. 470)

für die Vertikale	Gesamtlänge	Winkeleisen
0	429,6 m	10/10/1,4 cm
1	339,6	10/10/1,2
2	258,1	10/10/1,0
3	187,1	9/ 9/1,0
17	210,9	9/ 9/1,0
18	286,3	10/10/1,0
19	370,2	10/10/1,2 .

Alle übrigen Vertikalen bestehen aus Winkeleisen von 9/9/1 cm. Die größten Gesamtlängen für die verschiedenen Querschnitte sind aus dieser Zusammenstellung zu entnehmen.

Bezeichnen für eine beliebige ebene Figur J_x, J_y die Trägheitsmomente in Hinsicht zweier zueinander senkrechter Achsen x, y in ihrer Ebene, und L das Zentrifugalmoment in Hinsicht dieser Achsen, so ergeben sich bekanntlich die Winkel φ und $\varphi + 90^\circ$ der entsprechenden Hauptträgheitsachsen mit der x -Achse aus

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2L}{J_x - J_y} \quad 4$$

und mit

$$D = \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\varphi - L \sin 2\varphi \quad 5$$

die Werte der Hauptträgheitsmomente:

$$J_1 = \frac{J_x + J_y}{2} + D, \quad J_2 = \frac{J_x + J_y}{2} - D. \quad 6$$

Für den in Fig. 309 angedeuteten Querschnitt sind hinsichtlich der Achsen x, y :

$$J_x = \frac{2}{3} \left[(l - \delta) \left(\delta + \frac{a}{2} \right)^3 + \delta \left(l + \frac{a}{2} \right)^3 - l \left(\frac{a}{2} \right)^3 \right], \quad 7$$

$$J_y = \frac{2}{3} \left[(l - \delta) \left(\delta + \frac{b}{2} \right)^3 + \delta \left(l + \frac{b}{2} \right)^3 - l \left(\frac{b}{2} \right)^3 \right], \quad 8$$

$$L = \frac{l\delta}{2} \left[(l+a)(\delta+b) + (l+b)(\delta+a) - \frac{\delta}{l}(\delta+b)(\delta+a) \right], \quad 9$$

speziell für $b = a$:
$$L = l\delta(\delta+a) \left(l+a - \delta \frac{\delta+a}{2l} \right) \quad 10$$

und für $b = a = \delta$:
$$L = 2l\delta \left(l + \delta - \frac{\delta^2}{l} \right). \quad 11$$

Selbstverständlich muß, wenn der Querschnitt in der angenommenen Weise als Ganzes wirken soll, für entsprechende Verbindung der zwei Winkeleisen gesorgt sein.

Man erhält nach vorstehenden Formeln mit $a = 3$ cm, $b = 1$ cm (Fig. 306) beispielsweise für die Vertikalen aus Winkeleisen von 10/10/1,4 cm:

$$J_x = \frac{2}{3} (8,6 \cdot 2,9^3 + 1,4 \cdot 11,5^3 - 10 \cdot 1,5^3) = 1537 \text{ cm}^4,$$

$$J_y = \frac{2}{3} (8,6 \cdot 1,9^3 + 1,4 \cdot 10,5^3 - 10 \cdot 0,5^3) = 1119 \text{ cm}^4,$$

$$L = \frac{10 \cdot 1,4}{2} (13 \cdot 2,4 + 11 \cdot 4,4 - 0,14 \cdot 2,4 \cdot 4,4) = 547 \text{ cm}^4,$$

$$\frac{J_x - J_y}{2} = 209 \text{ cm}^4, \quad \frac{J_x + J_y}{2} = 1328 \text{ cm}^4,$$

$$\operatorname{tg} 2 \varphi = -\frac{547}{209}, \quad 2 \varphi = -69^{\circ} 5' 20'',$$

$$D = 209 \cos 2 \varphi - 547 \sin 2 \varphi = 586 \text{ cm}^4,$$

Hauptträgheitsmomente für die Richtungen φ und $\varphi + 90^{\circ}$:

$$J_1 = 1328 + 586 = 1914 \text{ cm}^4, \quad J_2 = 1328 - 586 = 742 \text{ cm}^4.$$

Weiter folgen nun der Querschnitt:

$$F = 2 \cdot 1,4 \cdot 18,6 = 52,08 \text{ qcm},$$

der kleinste Trägheitsradius:

$$r = \sqrt{\frac{742}{52,08}} = 3,77 \text{ cm}$$

und mit der freien Knicklänge 0,75 · 429,6 das maßgebende Verhältnis $l:r$:

$$\frac{l}{r} = \frac{3 \cdot 429,6}{4 \cdot 3,77} = 85,4.$$

Die Knickfestigkeit (mittlere Tragkraft pro qcm mit Rücksicht auf Zerknickungsgefahr) liefert 1:

$$k = 3200 - 11,6 \cdot 85,4 = 2209 \text{ kg}.$$

Da nun die wirkliche mittlere Beanspruchung pro qcm höchstens

$$\frac{11842}{52,08} = 227 \text{ kg},$$

so ist der Sicherheitsgrad:

$$\frac{2209}{227} = 9,7.$$

In gleicher Weise wie hier sind die übrigen Zahlen der folgenden Zusammenstellung berechnet, wobei jedoch als Belastung der Vertikalen 13264 kg anstatt 11842 kg anzunehmen war (siehe S. 500).

Vertikalen aus Winkeleisen von	10/10/1,4	10/10/1,2	10/10/1	9/9/1	cm
Maßgebende Länge	429,6	339,6	286,3	210,9	cm
Querschnitt	$F = 52,08$	45,12	38	34	qcm
Trägheitsmoment	$J = 742$	656	562	403	cm ⁴
Trägheitsradius	$r = 3,77$	3,81	3,85	3,44	cm
Maßgebendes $l:r$	$\frac{l}{r} = 85,4$	66,8	55,8	46	
Knickfestigkeit pro qcm	$k = 2209$	2425	2553	2666	kg
Mittl. Beanspruchung pro qcm	227	294	349	390	
Sicherheit	$m = 9,7$	8,2	7,3	6,8.	

Für die Endvertikalen 19 (Fig. 295) aus Winkeleisen von 10/10/1,2 cm ist zwar die Länge größer als 339,6 cm, nämlich 370,2 cm, womit $\frac{l}{r} = 72,9$, $k = 2354$ kg; allein da die Belastung derselben nur 11842 kg erreicht (S. 500), so werden die mittlere Beanspruchung und Sicherheit noch etwas günstiger als 294 kg und 8,2, nämlich 262 kg und 9,0. Durch die große Sicherheit der Endvertikalen ist auch den Erschütterungen beim Übertritt konzentrierter Lasten von den Pfeilern auf die Eisenkonstruktion Rechnung getragen, welche allerdings bei chaussierten Straßenbrücken weit geringer als bei Eisenbahnbrücken sind.

Bemerkungen. Nach Versuchen Tetmajers¹ mit Kreuzstreben ähnlich den hier verwendeten konnte die Annahme des Zusammenwirkens der beiden Winkeleisen in Verbindung mit der getroffenen Wahl der freien Knicklänge als angemessen gelten². Wenn die Winkeleisen ganz für sich wirkten, wie dies

¹ Tetmajer, Die Knickfestigkeit der mittleren Streben und der Gütewert des Materials der Mönchensteiner Brücke. Schweizerische Bauzeitung 1893 I, S. 99.

² Beim Vergleiche mit den Resultaten Tetmajers ist zu beachten, daß derselbe die freie Knicklänge bei günstigster Endenhaltung (kreuzweise Anschlußbleche, Vernietung der Vertikalen auch mit den Anschlußwinkeln dieser Bleche) gleich der halben Stablänge zwischen den äußersten Nietensetzen, bei ungünstiger Endenhaltung (einfache Anschlußbleche, keine Vernietung mit den Anschlußwinkeln der letzteren) gleich der halben Stablänge zwischen jenen Nietensetzungen folgte bei Tetmajer kreuzweise in Entfernungen von 110 cm (hier gleichgerichtet in Entfernungen von 76,5 cm), Gesamtlänge bei Tetmajer 744 cm (hier bis 430 cm), Winkeleisen bei Tetmajer 10/10/1,4 cm (hier 10/10/1,4 cm bis 9/9/1 cm), bei Tetmajer $d = b = 1$ cm (hier $d = 3$ cm, $b = 1$ cm).

ohne Verbindung durch Zwischenplatten zuträfe, wäre ein Einknicken senkrecht zu den Achsen für die kleinsten Trägheitsmomente der einzelnen Winkelleisen zu berücksichtigen (Fig. 310). Aber selbst in diesem hier jedenfalls nicht maßgebenden Falle würden, wie ebenfalls rechnermäßig festgestellt wurde, für die vier oben behandelten Vertikalen noch Sicherheiten von 3,6 — 4,3 — 5,4 — 5,6 bestehen, ein Einknicken also nicht zu befürchten sein.

Tetmajer hat später auf Grund seines gesamten Versuchsmaterials für Flußeisen der Zugfestigkeit $\sigma < 4500$ kg anstatt 1, 2 gesetzt¹:

wenn $10 < \frac{l}{r} < 105$ $k = 3100 - 11,4 \frac{l}{r}$ kg pro qcm, 12

„ $\frac{l}{r} > 105$ $k = 21220000 \left(\frac{r}{l}\right)^2$ kg pro qcm. 13

Diese Formeln liefern für die Vertikalen der vier Querschnitte mit den berechneten $\frac{l}{r}$ die Knickfestigkeit pro qcm $k = 2126 \quad 2338 \quad 2464 \quad 2576$ kg, die Sicherheit $m = 9,4 \quad 8,0 \quad 7,1 \quad 6,6$,

also nur wenig anders wie oben. Dagegen hätte die für exzentrische und zentrische Knickung bestimmte Formel P, 9) mit den angeführten, auf Tetmajers Versuche begründeten Konstanten von Ostenfeld und $c = 0$ ergeben

die Knickfestigkeit pro qcm $k = 1454 \quad 1865 \quad 2155 \quad 2435$ kg, die Sicherheit $m = 6,4 \quad 6,3 \quad 6,2 \quad 6,2$.

Für $b = d$ wäre bei gleichschenkligen Winkelleisen das kleinste Hauptträgheitsmoment J des Gesamtquerschnitts gleich dem Doppelten des größten Hauptträgheitsmoments jedes der beiden Winkelleisen (Fig. 311). Wir hätten in diesem Falle

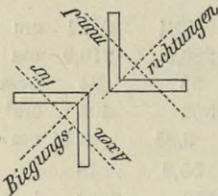


Fig. 310.

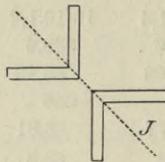


Fig. 311.

für $l = 10$ cm und

$\delta = 1,4 \quad 1,2 \quad 1,0$ cm

nach dem deutschen Normalprofilbuch:

$J = 744 \quad 656 \quad 560$ cm⁴,

während sich oben im Falle $d = 3$ cm, $b = 1$ cm ergaben:

$J = 742 \quad 656 \quad 562$ cm⁴.

In vielen Fällen wird man sich also die Ableitung der Hauptträgheitsmomente auch bei verschiedenen d, b ersparen können.

P. Vertikalen der Stirnbogen.

Die Vertikalen der Stirnbogen bestehen aus einer von außen allein sichtbaren Vertikalplatte von 30/1 cm und einem Winkelleisen von 12/8/1 cm, welche entsprechend Fig. 312 angeordnet und durch Nieten in Abständen von 15,5 cm miteinander verbunden sind, so daß sie jedenfalls als Ganzes wirken. Die Befestigung erfolgt unten an Anschlußblechen in Quer- und Längsrichtung, oben an Anschlußblechen in der Querrichtung und den längslaufenden Obergurten der Tragwände derart, daß die Einspannung unten etwa ebenso günstig, oben etwas günstiger als bei den inneren Bogen ist. Indessen soll die freie Knicklänge nur gleich 0,75 der Gesamtlänge bis zum Ende der Einspannung in der Querrichtung gesetzt werden, was mindestens 0,85 der Entfernung zwischen den äußersten Nieten oder 0,86 der Entfernung zwischen den nächstgelegenen Kanten der Anschlußbleche ausmacht.

Wird das auf die Vertikalen kommende Eigengewicht für die Stirnbogen ebenso groß wie für die inneren Bogen und die Verkehrslast entsprechend Menschengedränge von 560 kg pro qm auf die ganze Breite vom Brückengeländer

¹ v. Tetmajer, Die Gesetze der Knickungs- und der zusammengesetzten Druckfestigkeit, Leipzig und Wien 1903, S. 138; Derselbe, Die angewandte Elastizitäts- und Festigkeitslehre, Leipzig und Wien 1904, S. 441. Über die hier gegebenen und andere Formeln siehe auch Luegers Lexikon der gesamten Technik, Artikel Knickfestigkeit und Druck, exzentrischer.

bis zur Mitte zwischen den zwei äußersten Bogen angenommen (vergl. S. 477), so kommt auf eine Vertikale im ganzen:

$$4264 + 560 \cdot 2,508 \cdot 2,7 = 8056 \text{ kg,}$$

auf die Kämpfervertikalen jedoch (vergl. S. 477):

$$\frac{2}{3} 8056 = 5370 \text{ kg.}$$

Für reinen Druck würde bei Wechseln zwischen 4264 kg und 8056 kg die Beanspruchung $800 \left(1 + \frac{\psi}{2}\right)$ größer als 1000 kg, so daß letztere Zahl die zulässige Grenze wäre (S. 472) und die Spannungswechsel bei Berechnung der Vertikalen außer Betracht bleiben können, wie sie ja auch bei Belastung durch Menschengedränge nur langsam vor sich gehen.

Der Nachweis genügender Querschnitte wurde auf Grund Tetmajerscher Versuche über exzentrische Druckbelastung von Stäben aus schmiedbarem Eisen durchgeführt. Auf Grund derselben setzte Tetmajer für exzentrischen Druck¹ die zulässige mittlere Beanspruchung pro Querschnittseinheit:

$$\sigma_e = \frac{\sigma_k}{1 + \xi \frac{h}{w}}, \quad 1$$

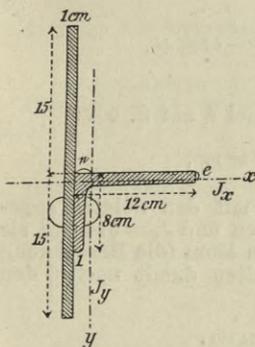


Fig. 312.

worin σ_k die zulässige mittlere Beanspruchung für zentrischen Druck mit Rücksicht auf Zerknickungsgefahr. Bezeichnen c die anfängliche Exzentrizität der parallel der Stabachse wirkenden Druckkräfte P , l die freie Knicklänge, F den Stabquerschnitt, e die Entfernung des am weitesten nach innen (auf der Seite der P) gelegenen Querschnittelements von der Stabachse, J das Trägheitsmoment des Querschnitts hinsichtlich der zur Biegungebene senkrechten Achse durch den Schwerpunkt, und E den Elastizitätsmodul, dann hat man in 1:

$$h = \frac{c}{\cos \frac{l}{2a}} \quad \text{mit} \quad a^2 = \frac{EJ}{P}, \quad 2$$

$$w = \frac{J}{Fe}. \quad 3$$

ξ ist ein Erfahrungskoeffizient, welchen Tetmajer für schmiedbares Konstruktionsisen ausdrückte:

$$\text{wenn } \frac{l}{r} < 112 \quad \xi = 0,877 - 0,0028 \frac{l}{r}, \quad 4$$

$$\text{,, } \frac{l}{r} > 112 \quad \xi = 7158 \left(\frac{r}{l}\right)^2 + 5,87 \frac{r}{l} - 0,058, \quad 5$$

worin wie bei zentrischer Knickung

$$r = \sqrt{\frac{J}{F}} \quad 6$$

der kleinste in Betracht kommende Trägheitsradius für Achsen durch den Schwerpunkt ist (S. 501). Wird gegen zentrische Knickung und exzentrischen Druck die gleiche Sicherheit m gewählt, so entspricht zufolge 1 der zentrischen Knickfestigkeit $k = m \sigma_k$ eine rechnungsmäßige mittlere Festigkeit gegen exzentrischen Druck:

$$d_e = m \sigma_e = \frac{k}{1 + \xi \frac{h}{w}}. \quad 7$$

Im vorliegenden Falle (Fig. 312) hat man den Gesamtquerschnitt $F = 49$ qcm. Entfernung e des Schwerpunkts von der 12 cm-Kante des Winkeleisens

aus $Fe = 30 \cdot 0 + 8 \cdot 4 + 11 \cdot 0,5 = 37,5$ ecm : $e = \frac{37,5}{49} = 0,77$ cm .

¹ Tetmajer, Mitteilungen etc., 4. Heft, Zürich 1890, S. 179. Siehe indessen Bemerkungen unten.

Entfernung e des Schwerpunktes von der 8 cm-Kante des Winkeleisens

$$\text{aus } F e = 7 \cdot 0,5 + 12 \cdot 6 - 30 \cdot 0,5 = 60,5 \text{ cm: } e = \frac{60,5}{49} = 1,23 \text{ cm.}$$

Trägheitsmomente des Gesamtquerschnitts in Hinsicht dieser Kanten als Achsen:

$$2 \frac{1 \cdot 15^3}{3} + \frac{1 \cdot 8^3}{3} + \frac{11 \cdot 1^3}{3} = 2424 \text{ cm}^4,$$

$$\frac{30 \cdot 1^3}{3} + \frac{7 \cdot 1^3}{3} + \frac{1 \cdot 12^3}{3} = 588 \text{ " ,}$$

Trägheitsmomente für Achsen, parallel den soeben verwendeten, jedoch durch den Schwerpunkt:

$$J_x = 2424 - 49 \cdot 0,77^2 = 2395 \text{ cm}^4,$$

$$J_y = 588 - 49 \cdot 1,23^2 = 514 \text{ " ,}$$

Zentrifugalmoment hinsichtlich dieser letzten Achsen, mit Rücksicht auf den Ausdruck desselben für ein Rechteck (Fig. 313):

$$L = \frac{1}{4} (x_2^2 - x_1^2) (y_2^2 - y_1^2) \quad 8$$

$$L = \frac{1}{4} [(10,77^2 - 1,23^2) (0,23^2 - 0,77^2) + (0,23^2 - 1,23^2) (7,23^2 - 0,23^2) + (1,23^2 - 2,23^2) (14,23^2 - 15,77^2)] = 5,448.$$

Für die Richtungen der Hauptträgheitsachsen nach Formel 4 auf S. 502:

$$\text{tg } 2 \varphi = - \frac{2 \cdot 5,448}{2395 - 514}, \quad 2 \varphi = - 0^\circ 20' 16'',$$

wonach dieselben (wie vorauszusehen war) fast genau mit den zuletzt angenommenen Achsen durch den Schwerpunkt zusammenfallen und $J_y = 514 \text{ cm}^4$ als kleinstes Trägheitsmoment gelten kann (die Berechnung bestätigt diese Zahl). Wir erhalten damit nach 6 den kleinsten Trägheitsradius:

$$r = \sqrt{\frac{514}{49}} = 3,24 \text{ cm.}$$

Der Mittelpunkt der Druckbelastung wurde der konstruktiven Anordnung entsprechend in der Ecke zwischen Winkeleisen und Platte angenommen (Fig. 312), inmitten der letzteren, d. h. in Entfernung

$$\sqrt{1,23^2 + 0,77^2} = 1,45 \text{ cm}$$

vom Schwerpunkt des Gesamtquerschnitts. Die Verbindungsgerade der beiden Punkte fällt nicht mit der Richtung des kleinsten Trägheitsradius r zusammen, so daß eine einfache Biegung in der Vertikalebene durch letzteren nicht zu erwarten ist. Wir rechnen jedoch jedenfalls zu ungünstig, wenn wir unter Zugrundelegung einer solchen die anfängliche Exzentrizität setzen:

$$c = 1,45 \text{ cm.}$$

Nach 3 haben wir:

$$w = \frac{514}{49 \cdot 2,23} = 4,70 \text{ cm.}$$

Im weiteren sind der verschiedenen Längen und Belastungen wegen die Kämpfervertikalen von den übrigen Vertikalen getrennt zu behandeln.

Kämpfervertikalen. Die längste Kämpfervertikale hat 460 cm Länge. Freie Knicklänge $l = 0,75 \cdot 460 = 345$ cm. Maßgebendes Verhältnis l/r :

$$\frac{l}{r} = \frac{345}{3,24} = 106,5,$$

Knickfestigkeit pro qcm nach Formel 2 auf S. 501:

$$k = \frac{22 \cdot 200 \cdot 000}{106,5^2} = 1957 \text{ kg.}$$

Aus 4, 2 folgen, mit $P = 5370$ kg (vergl. S. 505 oben):

$$\zeta = 0,877 - 0,0028 \cdot 106,5 = 0,579,$$

$$a = \sqrt{\frac{2150000 \cdot 514}{5370}} = 453,6,$$

$$\cos \frac{l}{2a} = \cos \frac{345}{2 \cdot 453,6} = \cos \frac{345}{907,2} \frac{1080}{\pi} = 0,9286,$$

$$h = \frac{1,45}{0,9286} = 1,56 \text{ cm}.$$

Die rechnermäßige mittlere Druckfestigkeit pro qcm gegen exzentrischen Druck ist nach 7:

$$d_e = \frac{1957}{1 + 0,579 \frac{1,56}{4,70}} = 1642 \text{ kg}.$$

Da nun die wirkliche mittlere Druckbeanspruchung pro qcm:

$$\frac{P}{F} = \frac{5370}{49} = 110 \text{ kg},$$

so folgt die Sicherheit:

$$m = \frac{1642}{110} = 14,9.$$

Zwischenvertikalen. Größte Länge 370 cm. Maßgebendes Verhältnis l/r bei $l = 0,75 \cdot 370 = 277,5$ cm freier Knicklänge:

$$\frac{l}{r} = \frac{277,5}{3,24} = 85,6.$$

Knickfestigkeit pro qcm nach Formel 1 auf S. 501:

$$k = 3200 - 11,6 \cdot 85,6 = 2207 \text{ kg}.$$

Weiter folgen aus 4, 2, mit $P = 8056$ kg (vergl. S. 505 oben):

$$\zeta = 0,877 - 0,0028 \cdot 85,6 = 0,637 \text{ kg},$$

$$a = \sqrt{\frac{2150000 \cdot 514}{8056}} = 370,4,$$

$$\cos \frac{l}{2a} = \cos \frac{277,5}{2 \cdot 370,4} = \cos \frac{277,5}{740,8} \frac{1800}{\pi} = 0,9307,$$

$$h = \frac{1,45}{0,9307} = 1,56 \text{ cm}.$$

Rechnermäßige mittlere Festigkeit gegen exzentrischen Druck nach 7 pro qcm:

$$d_e = \frac{2207}{1 + 0,637 \frac{1,56}{4,70}} = 1822 \text{ kg}.$$

Wirkliche mittlere Druckbeanspruchung pro qcm:

$$\frac{P}{F} = \frac{8056}{49} = 164 \text{ kg},$$

Sicherheit

$$m = \frac{1822}{164} = 11,1.$$

Bemerkungen. Während sich oben die Sicherheit der Kämpfervertikale gegen exzentrische Knickung $m = 14,9$ ergab, würden wir erhalten haben bei Berechnung auf zentrische Knickung $m = \frac{1957}{110} = 17,8$, und unter Annahme einer Druckfestigkeit von 4050 kg (gleich der vorgeschrieben gewesenen mittleren Zugfestigkeit, S. 487) bei Berechnung auf exzentrischen Druck mit Biegung ohne Knickung¹ $m = 27,6$, auf exzentrischen Druck ohne Biegung¹ $m = 28,1$, auf reinen zentrischen Druck $m = \frac{4050}{110} = 36,8$. Für die Zwischenvertikale fanden wir oben die Sicherheit gegen exzentrische Knickung $m = 11,1$, während sich ergeben

¹ Vergl. Luegers Lexikon der gesamten Technik, Artikel Druck, exzentrischer.

hätte bei Berechnung auf zentrische Knickung $m = \frac{2207}{164} = 13,5$, auf exzentrischen Druck mit Biegung ohne Knickung $m = 18,6$, auf exzentrischen Druck ohne Biegung $m = 18,8$, auf reinen zentrischen Druck $m = \frac{4050}{164} = 24,7$. Es genügt also nicht, solche Stäbe auf exzentrischen Druck zu berechnen, viel wichtiger ist die Berücksichtigung der Knickwirkung.

Tetmajer hat sein Verfahren für exzentrischen Druck später modifiziert¹, ohne damit eine Vereinfachung zu erreichen. Nach v. Emperger und Ostefeld² wird die mittlere Beanspruchung pro Querschnittseinheit beim Bruche gesetzt:

$$d_e = \frac{\sigma_b}{1 + \frac{c}{w} + \frac{\alpha F l^2}{J}} \quad 9$$

worin Ostefeld auf Grund der Versuche Tetmajers für Flußeisen wählt $\alpha = 0,00018$ und pro qcm $\sigma_b = 3363$ kg. Die Bezeichnungen stimmen mit den oben verwendeten überein, so daß in unserem Falle:

$$\frac{c}{w} = \frac{1,45}{4,70} = 0,3085.$$

Wir erhalten nach diesem neueren Verfahren für die Kämpfervertikale:

$$\frac{F l^2}{J} = \frac{49 \cdot 345^2}{514} = 11347,$$

$$d_e = \frac{3363}{1,3085 + 0,00018 \cdot 11347} = 1004 \text{ kg}, \quad m = \frac{1004}{110} = 9,1,$$

für die Zwischenvertikale:

$$\frac{F l^2}{J} = \frac{49 \cdot 277,5^2}{514} = 7341,$$

$$d_e = \frac{3363}{1,3085 + 0,00018 \cdot 7341} = 1279 \text{ kg}, \quad m = \frac{1279}{164} = 7,8,$$

während oben nach dem ersten Verfahren von Tetmajer erhalten wurden $m = 14,9$ und $11,1$.

Q. Weitere Berechnungen.

Neben den bis jetzt mitgeteilten Berechnungen waren noch manche andere vorzunehmen, welche jedoch auch bei andern Konstruktionen vorkommen, so daß wir sie hier übergangen. Nur bezüglich der Querträger und der Obergurten der Haupttragwände sei noch einiges beigefügt.

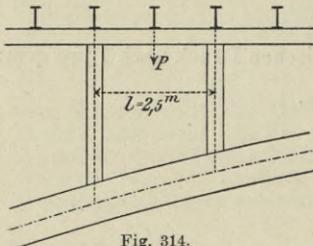


Fig. 314.

Für die Abschnitte dieser Obergurten zwischen zwei benachbarten Vertikalen (Fig. 314) ist in der Mitte eine durch einen Querträger übertragene feste Last von 2000 kg und ungünstigstenfalls eine Verkehrslast durch die Dampfwalze von 9000 kg anzunehmen (S. 500). Da die Obergurten durchlaufen und mit den Vertikalen, Querverbänden und Querträgern vernietet sind, so können sie nicht als frei aufliegend, aber auch

nicht als vollkommen festgespannt gelten; die Wahrheit liegt zwischen diesen Extremen.

In dem ungünstigsten Falle freier Auflagerung würde, abgesehen von dem geringen Eigengewicht der fraglichen Gurten selbst, das größte Biegemoment:

$$M = \frac{Pl}{4} = \frac{11\,000 \cdot 2,5}{4} = 6875 \text{ mkg},$$

¹ v. Tetmajer, Die Gesetze der Knickungs- und der zusammengesetzten Druckfestigkeit der technisch wichtigsten Baustoffe, Leipzig und Wien 1903, S. 19, 186; Derselbe, Die angewandte Elastizitäts- und Festigkeitslehre, Leipzig und Wien 1904, S. 349, 357, 362, 369.

² v. Emperger, Die Bruchlasten und die zulässigen Beanspruchungen gußeiserner Säulen, Zeitschrift des Vereines deutsch. Ingenieure 1898, S. 1114; Ostefeld, Exzentrische und zentrische Knickfestigkeit mit besonderer Berücksichtigung der für schmiedbares Material vorliegenden Versuchsergebnisse, ebenda 1898, S. 1462; Ostefeld, Einige Bemerkungen über die Bestimmung der Abmessungen exzentrisch und zentrisch beanspruchter Säulen, ebenda 1902, S. 1858.

während dasselbe bei vollkommener Festspannung halb so groß wäre. Da nun für den gewählten Gurtungsquerschnitt (Fig. 315) das Trägheitsmoment:

$$J = \frac{2}{3} (16 \cdot 15^3 - 13 \cdot 14^3 - 2 \cdot 7,5^3) - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11^2 = 10204 \text{ cm}^4,$$

und das Widerstandsmoment: $W = \frac{10204}{15} = 680 \text{ cm}^3,$

so würde die größte Beanspruchung pro qcm bei freier Auflagerung:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{6875 \cdot 100}{680} = 1011 \text{ kg},$$

bei absoluter Festspannung $\frac{1011}{2} = 505 \text{ kg}$

und in Wirklichkeit angesichts der guten Einspannung wohl eher kleiner als

$$\frac{1011 + 505}{2} = 758 \text{ kg},$$

während nach dem Bauprogramm zugelassen waren (S. 472):

$$800 + 400 \frac{2000}{11000} = 873 \text{ kg}.$$

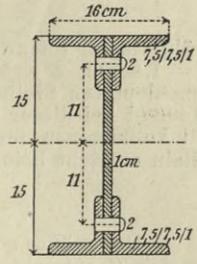


Fig. 315.

Die Obergurten sind hiernach reichlich stark dimensioniert.

Eine weitergehende Berechnung wäre zwar möglich, aber schon der Art der Einspannung wegen kaum zuverlässiger gewesen. Will man in Zweifelsfällen ganz sicher gehen, so braucht man nur die Querschnitte und Verbindungen dem jeweils ungünstigsten der beiden Extreme anzupassen, besonders wenn aus andern Gründen ohnehin etwas kräftiger als nötig dimensioniert werden soll (siehe den folgenden Fall).

Die Querträger liegen auf den soeben betrachteten Gurtungen und laufen alternierend über 4 und 6 Hauptträger weg (Fig. 316, 317), sind also kontinuierliche Balken mit nicht ganz festliegenden Stützen und weder vollkommen fest-

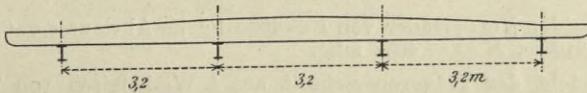
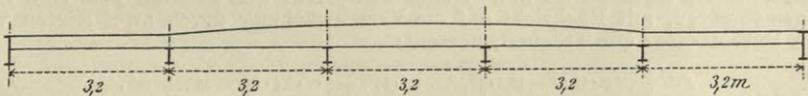


Fig. 316 und 317.



gespannten noch vollständig frei drehbaren Enden. Die Trägerhöhe wechselt zwischen den vier inneren Bogen von 25 bis 41 cm, entsprechend der Wölbung der Fahrbahn.

Die Abschnitte zwischen zwei Hauptträgern wurden als einfache Balken behandelt, auf denen zwei Räder der Straßenwalze (S. 489) Platz finden. Das größte positive Biegemoment durch das Eigengewicht und zwei gleiche Lasten P in Entfernung d voneinander ergibt sich unter Voraussetzung frei aufliegender Enden, wenn die erste Last bei

$$a = \frac{l}{2} - \frac{P d}{4 P + g l}$$

steht¹ (Fig. 318) und es hat den Wert:

$$M = (4 P + g l) \frac{a^2}{2 l}.$$

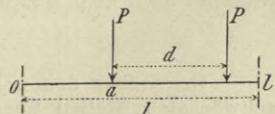


Fig. 318.

¹ Weyrauch, Die Maximalmomente einfacher Träger bei festen und mobilen Lastsystemen, Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereines zu Hannover 1875, S. 467; Luegers Lexikon der gesamten Technik, Artikel Balken, einfache.

Diese Gleichungen liefern für die zwei Hinterräder der Straßenwalze mit $P = 6000$ kg, $d = 1,6$ m:

$$a = 1,6 - \frac{6000 \cdot 1,6}{4 \cdot 6000 + 570 \cdot 3,2} = 1,228 \text{ m,}$$

$$M = (4 \cdot 6000 + 570 \cdot 3,2) \frac{1,228^2}{2 \cdot 3,2} = 6085 \text{ mkg,}$$

während für die zwei Vorderräder von $P = 4000$ kg im Abstand $d = 0,6$ m folgen: $a = 1,465$ m, $M = 5977$ mkg. Mit letzteren zwei Rädern in der durch Fig. 319 angedeuteten Stellung symmetrisch zur Mitte hätte sich das größte positive Moment bei dieser ergeben, und zwar für frei aufliegende Enden $M = 5930$ mkg, für vollkommen festgespannte Enden $M = 2356$ mkg. Durch das Eigengewicht allein entsteht beim frei aufliegenden Träger für $a = 1,228$ m:

$$M = \frac{g}{2} a (l - a) = 285 \cdot 1,228 \cdot 1,972 = 690 \text{ mkg.}$$

Das größte negative Moment durch das Eigengewicht und die zwei gleichen Lasten P entsteht an den Enden des betrachteten Abschnitts; es hat für frei aufliegende Enden den Wert Null, für vollkommen festgespannte Enden ohne Änderung der Stützhöhen, wenn die erste Last bei

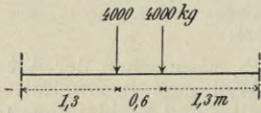


Fig. 319.

$$a = \frac{1}{6} (4l - 3d - \sqrt{4l^2 - 9a^2})$$

steht (Fig. 318), den Wert:

$$M = -\frac{g l^2}{12} - \frac{P}{l^2} [a(l-a)^2 + (a+d)(l-a-d)^2].$$

Diese Gleichungen liefern für die zwei Hinterräder der Straßenwalze (S. 489):

$$a = \frac{1}{6} (4 \cdot 3,2 - 3 \cdot 1,6 - \sqrt{4 \cdot 3,2^2 - 9 \cdot 1,6^2}) = 0,628 \text{ m}$$

$$M = -\frac{570 \cdot 3,2^2}{12} - \frac{6000}{3,2^2} (0,628 \cdot 2,572^2 + 2,228 \cdot 0,972^2) = -486 - 3668 = -4154 \text{ mkg,}$$

während die beiden Vorderräder von $P = 4000$ kg im Abstand $d = 0,6$ m ergeben hätten: $a = 0,810$ m, $M = -4058$ mkg.

Nun besteht der Trägerquerschnitt aus 4 Winkeleisen von $7,5/7,5/0,8$ cm und einer Vertikalplatte, welche in der Mitte der betrachteten Trägerabschnitte mindestens die Höhe 35 cm hat. Daher entspricht den größten positiven Biegemomenten, mit Rücksicht auf die Verschwächung durch zwei Niete von 2 cm Durchmesser ein Trägheitsmoment:

$$J = \frac{2}{3} (15,8 \cdot 17,5^3 - 13,4 \cdot 16,7^3 - 1,6 \cdot 10^3) - 2 \cdot 2 \cdot 2,4 \cdot 14^2 = 12531 \text{ cm}^4,$$

und ein Widerstandsmoment

$$W = \frac{12531}{17,5} = 716 \text{ ccm,}$$

wonach die größte Normalspannung pro qcm, selbst unter Voraussetzung frei aufliegender Enden, also jedenfalls zu ungünstig:

$$\sigma = \frac{608500}{716} = 850 \text{ kg,}$$

während nach dem Bauprogramm alsdann zulässig wären (S. 472):

$$800 + 400 \frac{690}{6085} = 845 \text{ kg.}$$

Gegenüber den negativen Momenten wären im angenommenen Falle die schwächsten Stellen über den zwei inneren Bogen zunächst den Stirnbogen (Fig. 316, 317), wo die Querträgerhöhe nur 27 cm beträgt. Hier ergibt sich jedoch das Trägheitsmoment:

$$J = \frac{2}{3} (15,8 \cdot 13,5^3 - 13,4 \cdot 12,7^3 - 1,6 \cdot 6^3) - 2 \cdot 2 \cdot 2,4 \cdot 10^2 = 6427 \text{ cm}^4.$$

und das Widerstandsmoment:

$$W = \frac{6427}{13,5} = 476 \text{ cm} ,$$

womit die größte Normalspannung pro qcm, selbst unter Voraussetzung vollkommen festgespannter Enden, also jedenfalls zu ungünstig:

$$\sigma = \frac{415\,400}{476} = 873 \text{ kg} ,$$

während alsdann zulässig wären (S. 472):

$$800 + 400 \frac{486}{4154} = 847 \text{ kg} .$$

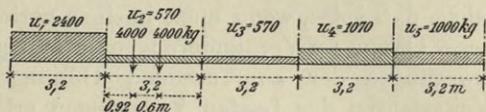


Fig. 320.

Die vorstehende Berechnung liefert ungünstigere Werte, als wenn man die Querträger als gewöhnliche kontinuierliche Balken mit 5 Öffnungen und festen Stützen berechnet hätte. Für solche würde die schwächste Stelle über dem zweiten Bogen liegen, und das numerisch größte Moment daselbst bei der in Fig. 320 angedeuteten Belastung eintreten¹, unter den u gleichmäßig verteilte Lasten pro m Träger verstanden. Es ergibt sich dann²

$$M = -735 - 1988 = -2723 \text{ mkg}$$

und hiermit die größte Normalspannung pro qcm nur

$$\sigma = \frac{272\,300}{476} = 572 \text{ kg} .$$

Für die Endabschnitte der Querträger (Fig. 317) von 25 cm Höhe sind die gewählten Querschnitte, selbst unter Voraussetzung frei aufliegender Enden, mehr als ausreichend. Man erhält mit der nicht erreichten Belastung pro m von

$$q = 2,5 (400 + 560) = 2400 \text{ kg}$$

(vergl. S. 477) das Maximalmoment:

$$M = \frac{q l^2}{8} = \frac{2400 \cdot 3,2^2}{8} = 3072 \text{ mkg} ,$$

während $J = 5324 \text{ cm}^4$, $W = 426 \text{ cm}$ und die entsprechende Normalspannung:

$$\sigma = \frac{307\,200}{426} = 720 \text{ kg} .$$

Für die überragenden Enden (Fig. 316, 321) der kürzeren Querträger ergibt sich, selbst wenn man sich die ganze Belastung von

$$1,25 (400 + 560) 1,6 = 1920 \text{ kg}$$

unter dem \lceil = Eisen konzentriert denkt, das größte Moment

$$M = -Pl = -1920 \cdot 0,9 = -1728 \text{ mkg}$$

und damit die größte Normalspannung $\sigma = 363 \text{ kg}$.

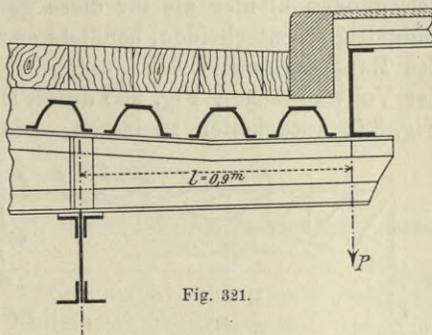


Fig. 321.

R. Vollwandbogen und Bogenfachwerke. Vergleiche.

Für die fünf Öffnungen der Cannstatter Brücke waren Vollwandbogen (Vermeidung von Schrägstäben) vorgeschrieben. Nach Eröffnung der Brücke trat mehrfach die Frage auf, ob nicht bei Verwendung von Bogenfachwerken die Vertikalbewegungen, welche der Fußgänger um die Öffnungsmitten beim Überfahren von Lasten empfindet,

¹ Weyrauch, Allgemeine Theorie und Berechnung der kontinuierlichen und einfachen Träger, Leipzig 1873, S. 40.

² Siehe die Formeln für M_1 : Luegers Lexikon der gesamten Technik, 2. Aufl., Artikel Balken, durchlaufende Gleichungen 29, 33.

geringer geworden wären. Solche Bewegungen machen sich insbesondere dann geltend, wenn die Lasten nicht auf der gleichen Öffnung mit dem Fußgänger, sondern auf einer benachbarten Öffnung fahren. Dies rührt daher, daß jedes, wenn auch noch so geringe Ausweichen der Pfeilerköpfe dieser Öffnungen Verminderungen ihrer Spannweiten und damit Scheitelbewegungen der angrenzenden Öffnungen verursachen, die mit dem Weiterfahren der Lasten Änderungen erleiden, während der Mensch für Bewegungen des Bodens, auf dem er steht oder geht, sehr empfindlich ist. Bei der Vorausberechnung der Brücke war auf die möglichen Änderungen der Spannweiten ausdrücklich hingewiesen und ihr Einfluß auf die Beanspruchungen berücksichtigt worden¹.

Der Verfasser bezweifelte von vornherein, daß durch Anwendung von Bogenfachwerken, deren Untergurten, wie leicht zu übersehen war, bedeutend schwächer als die Vollwandbogen ausfallen, die Scheitelbewegungen kleiner als für diese geworden wären. Um jedoch die Frage endgültig zu entscheiden, benützte er zwei Gelegenheiten, unter Einhaltung des Bauprogrammes der ausgeführten Brücke Projekte für den Ersatz der Vollwandbogen Fig. 295 durch Bogenfachwerke nach der Anordnung Fig. 322 ausarbeiten zu lassen. Die erste Gelegenheit bot sich bei einer

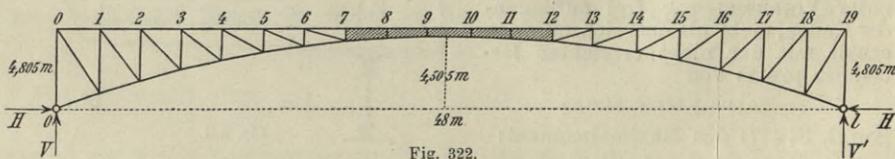


Fig. 322.

der alljährlichen Preisbewerbungen an der Stuttgarter Hochschule, wobei jedoch von allen Ermittlungen, welche zur Bestimmung der Querschnitte und Scheitelbewegungen der Hauptträger nicht nötig waren, abgesehen werden mußte; sie führte innerhalb dieses Rahmens zu einer durchaus gelungenen Lösung des gegenwärtigen Regierungsbaumeisters Dr. ing. Wilhelm Frank in Stuttgart. Die zweite Gelegenheit lieferte die Stellung der großen Aufgabe für die zweite Staatsprüfung des gegenwärtigen Direktors der Firma Wayß und Freytag, Professors Emil Mörsch in Neustadt a. H., wobei von vornherein auf die besondere Leistungsfähigkeit dieses Ingenieurs Rücksicht genommen werden konnte. Es wurde ein vollständig durchgearbeitetes Projekt der ganzen Brücke verlangt und eine in jeder Hinsicht hervorragende Lösung erhalten. Einige Angaben über die Hauptträger enthält unser Beispiel 124 (S. 463).

Von Interesse ist zunächst ein Vergleich der Eisengewichte bei Anwendung von Vollwandbogen und Bogenfachwerken. Es ergaben sich für die in diesem Abschnitte behandelte Öffnung IV der Cannstatter Brücke von 48 m Spannweite und 4,505 m Pfeil der Bogenachse bezw. Untergurtachse folgende Werte:

¹ Siehe in dem S. 468 zitierten Aufsatz §§ 1, 23 und die Tabellen XX bis XXIV.

	Vollwandbogen (ausgeführt)	Bogenfachwerke (Projekt Mörsch)
Sechs parallele Hauptträger	122 857 kg	134 794 kg
Querverbände	29 109 "	17 448 "
Oberer Horizontalverband	3 398 "	5 927 "
Unterer Horizontalverband	3 084 "	4 375 "
Auflager	8 040 "	5 266 "
Querträger	36 188 "	36 188 "
Belageisen	48 185 "	48 185 "
Zuschlag für Nietköpfe, Stoß- platten etc. wie bei der aus- geführten Brücke	13 539 "	13 539 "
zusammen rund	264 400 kg	265 700 kg .

Das Eisengewicht pro Meter jedes der sechs Bogen ohne die Auflager folgt hieraus für die Vollwandbogen:

$$\frac{264\,400 - 8040}{48 \cdot 6} = 890 \text{ kg,}$$

für die Bogenfachwerke:

$$\frac{265\,700 - 5266}{48 \cdot 6} = 904 \text{ kg,}$$

während für beide Fälle $2040 - 1280 + 165 = 925$ kg in Rechnung gezogen worden waren (S. 476, 477).

Die Berechnungen der Einsenkungen lieferten folgende Vertikalbewegungen der Bogenscheitel, wobei positive Werte Senkungen, negative Werte Hebungen bedeuten.

Einzelbeiträge	Vollwand- bogen (ausgeführt)	Bogenfach- werke (Projekt Frank)	Bogenfach- werke (Projekt Mörsch)
1. Durch das Eigengewicht der Brücke	1,74 cm	2,86 cm	2,75 cm
2. Durch gleichmäßig verteilte Verkehrslast auf der ganzen Spannweite	1,19 "	1,91 "	1,87 "
3. Durch eine Temperaturänderung $\tau = \pm 25^{\circ}$	\mp 2,82 "	\mp 3,17 "	\mp 3,07 "
4. Durch eine Änderung der Spannweite $\Delta l = 1$ cm	\pm 1,95 "	\pm 2,14 "	\pm 2,13 "
5. Durch den künstlichen Horizontalschub (so bemessen, daß durch seine Mitwirkung der Bogenscheitel für Eigengewicht allein bei normaler Temperatur 0,07 cm über der planmäßigen Lage im spannungslosen Zustande liegt, vergl. VI E, M)	- 1,81 "	- 2,93 "	- 2,82 "

Gesamtwerte (einschließlich des Beitrags des beständig wirkenden künstlichen Horizontalschubs)	Vollwandbogen (ausgeführt)	Bogenfachwerke (Projekt Frank)	Bogenfachwerke (Projekt Mörsch)
I. Für Eigengewicht allein bei normaler Temperatur	— 0,07 cm	— 0,07 cm	— 0,07 cm
II. Für Eigengewicht allein bei $\tau = 25^\circ$	— 2,89 „	— 3,24 „	— 3,14 „
III. Für Vollbelastung der ganzen Spannweite und $\tau = -25^\circ$	3,94 „	5,01 „	4,87 „
Ohne den künstlichen Horizontalschub wären allen diesen Werten I, II, III zuzufügen	1,81 „	2,93 „	2,82 „
womit an Stelle von III getreten wären	5,75 „	7,94 „	7,69 „.

Die Zahlen II, III bedeuten die negativen und positiven Grenzwerte der Einsenkungen aus den S. 513 berücksichtigten Einzelbeiträgen. Da jedoch die Lasten auf gewissen Strecken der Spannweite negative Beiträge liefern (Fig. 136 und 303), so ergeben sich die genauen Grenzwerte, wenn die Verkehrslast einmal nur die ganzen negativen Beitragsstrecken, das andere Mal nur die ganzen positiven Beitragsstrecken belastet. So sind die folgenden Einsenkungen erhalten (vergl. Bemerkungen zu VI M).

Grenzwerte	Vollwandbogen (ausgeführt)	Bogenfachwerke (Projekt Mörsch)
6. Durch gleichmäßig verteilte Verkehrslast allein	—0,25 cm u. 1,44 cm	—0,05 cm u. 1,92 cm
IV. Durch Eigengewicht, Verkehrslast, Temperaturänderungen und den künstlichen Horizontalschub	—3,14 „ 4,19 „	—3,19 „ 4,92 „
Ohne den künstlichen Horizontalschub wäre den Werten IV zuzufügen	1,81 „ 1,81 „	2,82 „ 2,82 „
womit an Stelle dieser Grenzwerte getreten wären	—1,33 „ 6,00 „	—0,37 „ 7,74 „.

Die gegebenen Zahlen nach Frank und Mörsch zeigen zunächst, daß die Einsenkungen der beiden Brücken mit Bogenfachwerken, die auf Grund des gleichen Bauprogrammes zu verschiedenen Zeiten unter verschiedenen Verhältnissen ganz unabhängig voneinander projektiert wurden, in recht gutem Einklang miteinander stehen. Der Vergleich dieser Zahlen mit den entsprechenden der Vollwandbogen aber zeigt, daß die Scheitelmovements der Bogenfachwerke erheblich größer als diejenigen der ausgeführten Vollwandbogen geworden wären, womit die obenerwähnte Frage entschieden war.

Mörsch hat die Einsenkungen der ausgeführten Brücke nach den unter VI M vorbereiteten Ausdrücken auch für die dem Betriebe vorausgegangenen Probelastungen berechnet. Er fand die Ergebnisse in Berücksichtigung aller Umstände befriedigend mit den Beobachtungen übereinstimmen. Es war insbesondere zu beachten, daß die jeweilige Verkehrslast (Straßenwalzen) sich in unbestimmter Weise auf alle sechs parallelen Hauptträger verteilte, wonach z. B. die Summe der sechs Scheitelsenkungen durch eine Straßenwalze gleich der Scheitelsenkung eines Hauptträgers sein sollte, wenn dieser allein die Straßenwalze aufzunehmen gehabt hätte.

Buchstabenbezeichnungen.

Die Seitenzahlen beziehen sich vorwiegend auf das erste Auftreten der Bezeichnungen mit der angeführten Bedeutung. Bezeichnungen, welche nur in einem Paragraphen, einer Aufgabe oder einem Beispiele vorkommen, sind im allgemeinen weggelassen.

	Seite
<i>a</i> Abszisse des Angriffspunktes einer Last P	5, 7, 9
<i>a</i> Abszissen der Kämpferdrucklinie (Schnittlinie S der Kämpferdrücke)	9
<i>a</i> Abszissen von Einflußlinien	45
<i>a</i> Durchmesser der deformierten Berührungsfläche bei sphärischen Berührungsgelenken	56
<i>a</i> Abstand der Normalkraft N_x eines rechteckigen Querschnitts x von der benachbarten Breitekante bei Eisenbetonkonstruktionen	226
<i>a</i> Abstand derjenigen Normalkräfte N_o, N_u eines Querschnitts x von einander, welche den größten Druckspannungen σ_o, σ_u im obersten und untersten Querschnittselement entsprechen . . .	218, 271
<i>a</i> Arbeit der Reaktionen des Hauptsystemes eines Fachwerkes durch eine Kraft $Q = 1$, wenn die Reaktionen konstant wie am Ende der entsprechenden Deformation wären	447
<i>a, b</i> oder <i>a, c</i> Halbachsen einer Ellipse	24, 37
<i>a, b, c</i> Querschnittsdimensionen eines Plattenbalkens bei Eisenbetonkonstruktionen	288, 291
a_1, a_2, \dots Abszissen der Angriffspunkte von Lasten P_1, P_2, \dots	5, 7, 372
<i>b</i> Ordinate des Angriffspunktes einer Last P	7
<i>b</i> Ordinaten der Kämpferdrucklinie	9
<i>b</i> Ordinaten von Einflußlinien	45
<i>b</i> Breite eines Rechteckes	23, 30
<i>b</i> Breite eines Querschnittes in Entfernung v von der Achsschicht	22, 35, 275
<i>b</i> Breite der deformierten Berührungsfläche bei zylindrischen Berührungsgelenken	55
<i>b</i> Bezeichnung bei parabolisch begrenzter Belastung	73, 103
<i>b, a</i> Halbachsen einer Ellipse	24
<i>b, c, a</i> Querschnittsdimensionen eines Plattenbalkens bei Eisenbetonkonstruktionen	288, 291
b_1, b_2, \dots Ordinaten der Angriffspunkte von Lasten P_1, P_2, \dots	7

c	Entfernung des Angriffspunktes der resultierenden Schnittkraft R_x eines Querschnittes x und ihrer Komponenten N_x, T_x , also auch der Stützlinie, von der Achsschicht (nach oben positiv), gemessen in der Querschnittsebene	27, 225
c	Bezeichnung bei parabolisch begrenzter Belastung	73, 103
c	Mittelwert von $J \cos \varphi$ bei parabolischen Bogen. (J Trägheitsmoment des Querschnittes, φ Winkel der Stabachse mit der horizontalen x -Achse)	81, 313
$c = s : F$	Quotient aus Länge und Querschnitt von Fachwerkstäben	374, 419
c_o, c_u	Entfernungen c der Angriffspunkte derjenigen Normalkräfte N_o, N_u eines Querschnittes x von der Achsschicht, welche den größten Druckspannungen σ_o, σ_u im obersten und untersten Querschnittselement entsprechen	218, 272
$d = t_1 - t_n$	Differenz der Montierungstemperatur t_1 und der gewünschten Normaltemperatur t_n	134, 141
d	Entfernung der Achsschicht von der Unterkante bei Eisenbetonbogen	265
d	Entfernung der neutralen Schicht von der Druckkante (Höhe der Druckzone) bei Eisenbetonbalken	284
d_m	Länge der Diagonale im m -ten Felde eines Ständerfachwerkes (Fig. 227, 228)	370
e	Entfernung des obersten und untersten Querschnittselementes von der Achsschicht bei symmetrisch zu letzterer angeordneten Querschnitten	23, 29
e	Belastung pro Längeneinheit an den Enden einer Öffnung bei parabolisch begrenzter Belastung	73, 103
e	Einsenkung der Bogenachse in der Mitte einer Öffnung	81, 319, 332
e	Entfernung des Angriffspunktes der resultierenden Schnittkraft R_x eines Querschnittes x und ihrer Komponenten N_x, T_x von der Längsmittlebene eines Gewölbes (Querexzentrizität)	225
$e = - \Delta l$	Verrückung eines durch eine überzählige Reaktionskomponente ergriffenen Fachwerkknotenpunktes in der Richtungslinie jener Komponente	407, 408
e	Verrückung eines Fachwerkknotenpunktes in beliebiger Richtung e	447
e, e'	Entfernungen von Eiseneinlagen der Querschnitte f_e, f'_e von der Unterkante bei Eisenbetonbogen	265
e, e'	Entfernungen von Eiseneinlagen der Querschnitte f_e, f'_e von der Druckkante bei Eisenbetonbalken	284, 285
e_1, e_2	Abkürzende Bezeichnungen bei Berührungsgelenken	55
e_I, e_{II}, \dots	Verrückungen e der durch überzählige Reaktionskomponenten X_I, X_{II}, \dots ergriffenen Fachwerkknotenpunkte in den Richtungslinien jener Komponenten	407, 409
e_o, e_u	Entfernungen des obersten und untersten Querschnittselementes von der Achsschicht, für symmetrisch zu dieser angeordnete Querschnitte $e_o = e_u = e$	28
f	Pfeil der Achse eines Bogens, bei symmetrisch zur Mitte angeordneten Bogen und bei Ketten Ordinate y für $x = m = \frac{l}{2}$	20, 32, 48, 202
f	Ordinate eines Zwischengelenkes	76, 308

	Seite
f_o, f_u Querschnitte des Obergurtes und Untergurtes eines Bogens . . .	31
f_e, f'_e Querschnitte der Eiseneinlagen in Entfernungen e, e' von der Unterkante eines Eisenbetonbogens	265
f_e, f'_e Querschnitte der Eiseneinlagen in Entfernungen e, e' von der Druckkante eines Eisenbetonbalkens	284, 285
f (a) Abkürzende Bezeichnung (Funktion von a) beim Ausdrücke des Horizontalschubes in gewissen Fällen	45, 474
g Gleichmäßig verteiltes Eigengewicht pro Längeneinheit der Spannweite eines Trägers	20, 391
g_x, g_z Diejenigen Teile von g , welche bei Ständerfachwerken auf die Knotenpunkte der X -Gurtung und Z -Gurtung kommen	391, 393
h Ganze Höhe eines Querschnittes, z. B. eines Rechteckes	22, 265
h Entfernung der Gurtungsschwerpunkte voneinander	30
h Abkürzende Bezeichnungen bei Bogen mit Zugstange und bei durchlaufenden Bogen	178, 192
h_m Länge der Vertikale eines Ständerfachwerkes am Ende des m -ten Feldes (Fig. 227, 228)	370
h_o Länge der Vertikale eines Ständerfachwerkes beim Auflager 0 (h_m für $m = 0$)	371
h_o, h_u Entfernungen der Schwerpunkte des Obergurtes und Untergurtes von der Achsschicht	31
i Allgemeine Bezeichnung eines Einflußpunktes und seiner Abszisse	47
k Ordinate des Endpunktes der Bogenachse einer Öffnung, für $x = l$ ist $y = k$ (l Spannweite)	4
k Mittelwert von $F \cos \varphi$ bei parabolischen Bogen (F Stabquerquerschnitt, φ Winkel der Stabachse mit der horizontalen x -Achse)	82, 314
k Knickfestigkeit	280, 501
k Koeffizient der Schubwirkung	460
k_o, k_u Entfernungen des oberen und unteren Kernpunktes eines Querschnittes von der Achsschicht, für symmetrisch zu dieser angeordnete Querschnitte $k_o = k_u = k$	28, 29, 271
l Spannweite, Abszisse des Endpunktes der Bogenachse einer Öffnung, für $x = l$ ist $y = k$	4, 370
l Wirksame Länge eines zylindrischen Berührungsgelenkes (Wälzgelenkes) oder Umschließungsgelenkes (Zapfengelenkes)	55, 66
l Freie Knicklänge	501, 505
l_1, l_2, \dots, l_n Spannweiten eines durchlaufenden Bogens	192, 436
$m = l/2$ Abszisse der Bogenmitte symmetrischer Bogen und von Ketten	71, 202
m Abszisse eines Zwischengelenkes	76, 308
m Abkürzende Bezeichnung bei Gewölben und Eisenbetonbogen	218, 272
m Index eines beliebigen Feldes eines Ständerfachwerkes und damit auch der entsprechenden Stablängen x_m, z_m, d_m, h_m und Stabkräfte X_m, Z_m, D_m, V_m	370
m Sicherheitsgrad	503, 505
m, n Moment — M_x und Normalkraft N_x eines Querschnittes x durch die halbe Verkehrslast vor und die negative halbe Verkehrslast nach dem Grenzpunkte S der Beitragsstrecken verschiedenen Sinnes	223

n	Abkürzende Bezeichnung bei parabolisch begrenzter Belastung	73, 103
$n = E_e : E_b$	Verhältnis der Elastizitätsmoduln von Eisen und Beton bei Eisenbetonkonstruktionen	258
n	Anzahl der Felder in einer Öffnung eines Ständerfachwerkes, Spannweite $l = n \lambda$ mit λ Feldlänge	370
n	Anzahl der Öffnungen eines durchlaufenden Bogens	192, 436
p	Gleichmäßig verteilte Verkehrslast pro Längeneinheit der Spannweite	47, 73, 393
q	Entfernung der Resultanten aller vom Momente M_x allein herührenden positiven und negativen Normalkräfte eines Querschnittes	30
$q = g + p$	Gleichmäßig verteilte Gesamtlast (Eigengewicht plus Verkehrslast) pro Längeneinheit der Spannweite	48, 393
r	Krümmungshalbmesser der Stabachse an beliebiger Stelle x , bei kreisförmiger Achse Radius derselben	16, 77, 310
r	Halbmesser eines zylindrischen oder sphärischen Umschließungsgelenkes	66
r	Abkürzende Bezeichnung, Halbmesser eines Kreisbogens von gleichen l, f wie die wirkliche Bogenachse	77, 82, 313, 322
r	Trägheitsradius	501, 505
r, r_1, r_2	Halbmesser der Berührungsfächen zylindrischer oder sphärischer Berührungsgelenke	55, 56
s	Achslänge eines Bogens oder Bogenabschnittes	7, 16, 26
s	Größter Normaldruck pro Flächeneinheit auf ein Gelenk	55, 56, 66
s	Belastung pro Längeneinheit in der Mitte einer Öffnung bei parabolisch begrenzter Belastung	73, 103
s	Allgm. Bezeichnung der Länge eines Fachwerkstabes	362, 374, 403, 460
s_1, s_2, \dots	Längen der notwendigen Stäbe eines Fachwerkes	409, 410
s_1, s_{II}, \dots	Längen der überzähligen Stäbe eines Fachwerkes	410
s_m	Mittlerer Druck pro Flächeneinheit Längsschnitt des Gelenkstückes	67, 492
t	Temperatur nach Celsius	134, 141
t_1	Montierungstemperatur eines Bogens	134, 141
t_n	Normaltemperatur eines Bogens (bei welcher ohne Belastung keine Beanspruchungen eintreten würden)	134, 141
u	Entfernung eines Querschnittselementes von der Längsmittlebene des Bogens	20, 225
u	Stetig verteilte Last pro Längeneinheit der Spannweite an beliebiger Stelle a	69, 372
u	Höhe des gedrückten Querschnittsteiles in gewissen Fällen bei Eisenbetonkonstruktionen	266
u, u'	Abszissen der Kämpferdruckumhüllungslinien U, U'	9
u, u'	Gleichmäßig verteilte Lasten pro Längeneinheit Spannweite und speziell auf der ersten und zweiten Hälfte derselben	69, 71
u, w	Abszisse und Ordinate des Drehpunktes für das Moment M_s im Schnitte s durch ein Fachwerk	363, 370
u_x, u_z	Diejenigen Teile der gleichmäßig verteilten Last von u pro Längeneinheit Spannweite, welche bei Ständerfachwerken auf die Knotenpunkte der X-Gurtung und Z-Gurtung kommen	372

<i>v</i>	Entfernung eines Querschnittselementes von der Achsschicht (nach oben positiv)	16, 21, 225, 260
<i>v</i>	Verminderung der Spannweite bei künstlicher Überhöhung der Bogen und bei Reduktion ihrer Normaltemperatur auf die mittlere Ortstemperatur	134, 141
<i>v</i>	Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten	117, 323, 324
<i>v, v'</i>	Ordinaten der Kämpferdruckumhüllungslinien U, U'	9
<i>v, w</i>	Grenzpunkte einer Beitragsstrecke und Abszissen dieser Grenzpunkte	47, 54
<i>w</i>	Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten	117, 323, 324
<i>w, w'</i>	Ordinaten der Schnittpunkte der Kämpferreaktionen R, R' mit den Vertikalen bei 0 und l	9
<i>w_d, w_v</i>	Ordinaten w des Drehpunkts für das Moment M_s im Schnitte s zur Berechnung der Diagonalen und Vertikalen von Ständerfachwerken	371, 385, 387
<i>x</i>	Abszisse des Achspunktes eines Querschnittes, Bezeichnung des letzteren	4, 26, 304
<i>x₁, x₂, . . .</i>	Mittelwerte der Abszissen x in den Feldern 1, 2, . . . von Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten	116, 322
<i>x_m</i>	Länge des Stabes der X -Gurtung von Ständerfachwerken im m -ten Felde (Fig. 227, 228)	370
<i>y</i>	Ordinate des Achspunktes eines Querschnittes	4, 26, 304
<i>y₁, y₂, . . .</i>	Mittelwerte der Ordinaten y in den Feldern 1, 2, . . . von Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten	116, 322
<i>z</i>	Abszisse des Grenzpunktes einer gleichmäßig verteilten Last	69, 124, 189
<i>z</i>	Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten	118, 323, 324
<i>z</i>	Länge der Zugstange bei Bogen mit Zugstange, für eine horizontale Zugstange $z = l$	176, 434
<i>z_m</i>	Länge des Stabes der Z -Gurtung von Ständerfachwerken im m -ten Felde (Fig. 227, 228)	370
<i>A</i>	Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten	237, 340
<i>A</i>	Stabkräfte eines Ständerfachwerkes mit Endgelenken ohne überzählige Stäbe, wenn der Horizontalschub H gleich Null wäre	374
<i>A</i>	Wert einer notwendigen Stabkraft oder einer notwendigen Reaktionskomponente, wenn nur das aus den notwendigen Stäben und Reaktionskomponenten gebildete Hauptsystem wirkte	408
<i>A, B, . . . R</i>	Bezeichnungen der Paragraphen im VI. Abschnitt	469
<i>B</i>	Bezeichnung einer beliebigen Größe, um deren Einflußlinie es sich handelt	44
<i>B</i>	Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten	237, 340
<i>C</i>	Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten	237, 340

<i>C</i>	Abkürzende Bezeichnung beim Ausdrucke des Horizontalschubes in gewissen Fällen	45
<i>D</i>	Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten	238, 340
<i>D</i>	Verschiebungsarbeit (Deformationsarbeit, Formänderungsarbeit)	403, 460
<i>D</i>	Abkürzende Bezeichnung bei Berechnung von Trägheitsmomenten	502
<i>D_m</i>	Stabkraft der Diagonale im <i>m</i> -ten Felde eines Ständerfachwerkes (Fig. 227, 228)	370
<i>E</i>	Elastizitätsmodul	17, 55, 260, 404, 460
<i>E'</i>	Elastizitätsmodul bestimmten Materials in Entfernung <i>l</i> von der Achsschicht bei Stäben beliebig ungleich widerstehenden Materials	260
<i>E_b, E_e</i>	Elastizitätsmoduln von Beton und Eisen bei Eisenbetonkonstruktionen	258, 264
<i>F</i>	Querschnitt eines Bogens oder sonstigen Stabes	18, 261, 280, 460
<i>F</i>	Einflußfläche	47
<i>F</i>	Querschnitt eines Fachwerkstabes	374, 404, 460
<i>F'</i>	Reduzierter Querschnitt bei Bogen und sonstigen Stäben beliebig ungleich widerstehenden Materials	261, 279
<i>F₁, F₂, . . .</i>	Mittelwerte der Querschnitte in den Feldern 1, 2, . . . von Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten	322
<i>F_b, F_e</i>	Betonquerschnitt und Eisenquerschnitt (des Querschnittes <i>x</i>) eines Eisenbetonbogens oder einer Eisenbetonsäule	263, 280
<i>F_z</i>	Querschnitt der Zugstange bei Bogen mit Zugstange	176, 434
<i>G</i>	Schubelastizitätsmodul	460
<i>H</i>	Horizontalschub, eventuell auch nur von einer Einzellast <i>P</i> herführend	5, 6, 9, 372
<i>H, H'</i>	Horizontalkomponenten bei 0 und <i>l</i> (Horizontalkomponenten der Kämpferreaktionen <i>R, R'</i>), wenn nur vertikale Aktivkräfte wirken <i>H' = H</i>	5, 8, 14
<i>H_s</i>	Resultierende Horizontalkraft im Schnitte <i>s</i> durch ein Fachwerk	363
<i>H_x</i>	Horizontalkraft im Querschnitt <i>x</i> , d. h. Horizontalkomponente der resultierenden Schnittkraft <i>R_x</i> ; wenn nur vertikale Aktivkräfte wirken <i>H' = H</i>	5, 6, 8
<i>H₀, H_l</i>	Werte von <i>H_x</i> für <i>x = 0</i> und <i>l</i>	5, 8
<i>J</i>	Trägheitsmoment eines Querschnittes	21, 262, 280, 460
<i>J'</i>	Reduziertes Trägheitsmoment bei Bogen und sonstigen Stäben beliebig ungleich widerstehenden Materials	262, 283
<i>J₁, J₂</i>	Hauptträgheitsmoment eines Querschnittes	502
<i>J₁, J₂, . . .</i>	Mittelwerte der Trägheitsmomente in den Feldern 1, 2, . . . von Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten	116, 322
<i>J_b, J_e</i>	Trägheitsmomente des Betonquerschnittes und Eisenquerschnittes eines Eisenbetonbogens oder einer Eisenbetonsäule	264, 281
<i>J_b, J_e</i>	Trägheitsmomente des wirksamen Betonquerschnittes und Eisenquerschnittes von Eisenbetonbalken	284
<i>J_x, J_y</i>	Trägheitsmomente einer ebenen Figur in Hinsicht der <i>x</i> -Achse und <i>y</i> -Achse in ihrer Ebene	502
<i>K</i>	Krümmungsmoment	18, 21
<i>K</i>	Künstlicher Horizontalschub	133, 141

K_1	Künstlicher Horizontalschub bei Herstellung desselben im Falle einer Reduktion der Normaltemperatur des Bogens auf die mittlere Ortstemperatur	135, 141, 498
K_o, K_u	Belastung eines Knotenpunktes im Obergurt und Untergurt von Ständerfachwerken	373, 386, 388
$L = l_1 + l_2 + \dots + l_n$	Summe der Spannweiten durchlaufender Bogen	192, 436
L	Zentrifugalmoment einer ebenen Figur in Hinsicht rechtwinkliger Achsen x, y in ihrer Ebene	502
M, M'	Endmomente in einer Öffnung, Werte von M_x für $x = 0$ und l	5, 6, 143, 339
M_o, M_u	Momente M_x bei den Belastungen, welchen die größten Druckspannungen σ_o, σ_u im obersten und untersten Elemente des Querschnittes x entsprechen (und damit auch N_o, N_u und c_o, c_u)	219, 220
M_s	Moment im Schnitte s durch ein Fachwerk	363, 364, 370, 380
M_x	Angriffsmoment im Querschnitt x , Moment der resultierenden Schnittkraft R_x oder Normalkraft N_x in Hinsicht der Achsschicht	6, 8, 18, 460
$M_{x\alpha}$	Absolutwert des Momentes M_x bei Eisenbetonbalken	284
M_{x_o}, M_{x_u}	Kernpunktmomente bezüglich des oberen und unteren Kernpunktes eines Querschnittes x	31
N	Größte Zug- oder Druckspannung beim Querschnitt x in Entfernung v von der Achsschicht	37, 297
N_y	Normalkraft N_x für Eigengewicht plus halbe Verkehrslast auf der ganzen Spannweite (Grundbelastung von Gewölben)	223
N_o, N_u	Normalkräfte N_x bei den Belastungen, welchen die größten Druckspannungen σ_o, σ_u im obersten und untersten Elemente des Querschnittes x entsprechen (und damit auch M_o, M_u und c_o, c_u)	218, 271
N_x	Normalkraft im Querschnitte x , d. h. Komponente der resultierenden Schnittkraft R_x senkrecht dem Querschnitt x	5, 6, 8, 18, 460
N'_x	Querzentrische Normalkraft, welche die gleiche Normalspannung σ erzeugt, wie die querexzentrisch wirkende Normalkraft N_x (bei Gewölben)	229, 230
O	Ganze Beanspruchung des Obergurts beim Querschnitt x	31
P	Einzellast, konzentrierte Last	5, 8, 69
P'	Querzentrische Last, welche dieselbe Normalspannung σ erzeugt, wie die querexzentrisch wirkende Last P (bei Gewölben)	229, 230
P_1, P_2, \dots	Folge beliebiger konzentrierter Lasten	5, 372
P_1, P_2, \dots	Vertikalkomponenten beliebig gerichteter Aktivkräfte R_1, R_2, \dots	7
P_d, P_z	Werte von P' für $\sigma = \sigma_d$ und $\sigma = \sigma_z$, wenn σ_d die größte drückende, σ_z die größte ziehende Normalspannung im Querschnitt x bedeutet	231
P_x	Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten	323, 325, 343
Q	Vom Momente M_x allein herrührender Teil der Gurtungsbeanspruchungen in einem Querschnitt x	29
Q, Q_1, Q_2, \dots	Abkürzende Bezeichnungen bei durchlaufenden Bogen in einem besonderen Fall	192

Q_1, Q_2, \dots	Horizontalkomponenten beliebig gerichteter Aktivkräfte	
R_1, R_2, \dots		7
Q_x	Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten	325
R	Resultierender Druck auf ein Gelenk	55, 56, 65
R, R'	Kämpferreaktionen bei 0 und l , eventuell auch nur von einer Einzellast P herrührend	5, 8, 14, 39, 375
R_1, R_2, \dots	Beliebig gerichtete Aktivkräfte	7
R_x	Resultierende Schnittkraft im Querschnitt x	5, 8
S	Bezeichnung der Kämpferdrucklinie (Schnittlinie der Kämpferdrücke R, R')	9, 14
S	Größte Schubspannung beim Querschnitt x in Entfernung v von der Achsschicht	37
S	Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten	323, 339, 344
S	Allgem. Bezeichnung einer Stabkraft bei Fachwerken	362, 374, 404, 460
S_0	Statisches Moment des oberhalb der Achsschicht gelegenen Querschnittsteils in Bezug auf die Achsschicht	30, 36
S_1, S_2, \dots	Stabkräfte der notwendigen Stäbe eines Fachwerkes	409, 410
S_1, S_{11}, \dots	Stabkräfte der überzähligen Stäbe eines Fachwerkes	410
S_b, S_e	Statische Momente des Betonquerschnitts und Eisenquerschnitts (eines Querschnittes x) in bezug auf die Achsschicht bei Eisenbetonbogen	263
S_v	Statisches Moment des Querschnittsteiles von v bis e_0 (äußerste Faser) in Hinsicht der Achsschicht	35, 36
S_{vb}, S_{ve}	Absolutwerte der statischen Momente des Betonquerschnittsteiles und Eisenquerschnittsteiles von v bis zur obersten oder untersten Faser in Bezug auf die Achsschicht	276, 294
S_x	Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten	116, 323, 339
T, T_1, T_2	Abkürzende Bezeichnungen bei durchlaufenden Bogen in einem besonderen Fall	192
T_x	Transversalkraft im Querschnitt x , d. h. Komponente der resultierenden Schnittkraft R_x längs des Querschnittes	5, 6, 8, 36, 460
U	Ganze Beanspruchung des Untergurtes beim Querschnitt x	31, 405
U	Umfang einer Eiseneinlage bei Eisenbetonkonstruktionen	278
U, U'	Bezeichnungen der Kämpferdruckumhüllungslinien (Umhüllungslinien der Kämpferdrücke R, R')	10
V, V'	Vertikalreaktionen bei 0 und l (Vertikalkomponenten der Kämpferreaktionen R, R'), eventuell auch nur von einer Einzellast P herrührend)	5, 8, 9, 14
V_0, V_l	Werte von V_x für $x=0$ und l	6, 8
V_0, V_σ	Stabkräfte der Kämpfervertikale 0 und Scheitelvertikale σ bei Ständerfachwerken	373, 386, 388
V_m	Stabkraft der Vertikale eines Ständerfachwerkes am Ende des m -ten Feldes (Fig. 227, 228)	370
V_s	Resultierende Vertikalkraft im Schnitte s durch ein Fachwerk	363
V_x	Vertikalkraft im Querschnitte x , d. h. Vertikalkomponente der resultierenden Schnittkraft R_x	5, 8

W	Widerstandsmoment eines Querschnittes	29
W	Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten, Wert von W_x für $x=l$	332, 333, 343—347
W_m	Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten, Wert von W_x für $x=m=l/2$	332, 333
W_x	Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten	332
X	Allgemeine Bezeichnung einer überzähligen Stabkraft oder einer überzähligen Reaktionskomponente bei Fachwerken	406, 461
X_1, X_2	Abkürzende Bezeichnungen bei Ermittlung statisch unbestimmter Größen (spezielle Ausdrücke für Kreisbogen und parabolische Bogen in §§ 41, 42 und A 31)	306
X_I, X_{II}, \dots	Verschiedene überzählige Stabkräfte und Reaktionskomponenten	408
X_m	Stabkraft der X -Gurtung im m -ten Felde eines Ständerfachwerkes (Fig. 227, 228)	370
Y	Abkürzende Bezeichnung bei den Biegungsformeln	18, 22, 23
Y	Vertikale Abweichung eines Kettenpunktes bei x von der Verbindungsgeraden der Stützpunkte, bei gleich hohen Stützpunkten $Y=y$	202
Y_1, Y_2	Abkürzende Bezeichnungen bei Ermittlung statisch unbestimmter Größen (spezielle Ausdrücke für parabolische Bogen in § 44)	306
Z	Abkürzende Bezeichnungen bei den Biegungsformeln	18, 22, 23
Z	Stabkraft der Zugstange bei Bogen mit Zugstange, für eine horizontale Zugstange $Z=H$	176, 435
Z_0	Wert von Z_v für $v=0$	275, 276, 294
Z_1, Z_2	Abkürzende Bezeichnungen bei Ermittlung statisch unbestimmter Größen (spezielle Ausdrücke für parabolische Bogen in § 44)	306
Z_m	Stabkraft der Z -Gurtung im m -ten Felde eines Ständerfachwerkes (Fig. 227, 228)	370
Z_v	Abkürzende Bezeichnung bei Stäben beliebig ungleich widerstehenden Materials und bei Eisenbetonstäben	275, 276, 294
ξ_m	Ordinate des Knotenpunktes m der X -Gurtung von Ständerfachwerken (Fig. 227, 228)	370
ζ_m	Ordinate des Knotenpunktes m der Z -Gurtung von Ständerfachwerken (Fig. 227, 228)	370
\mathfrak{A}	Virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte	403, 460
\mathfrak{D}	Virtuelle Verschiebungsarbeit (virtuelle Deformationsarbeit oder Formänderungsarbeit)	403, 460
\mathfrak{D}_m	Wert der Stabkraft D_m durch das Eigengewicht allein	393
\mathfrak{H}	Horizontalschub H durch das Eigengewicht allein	393
\mathfrak{U}	Arbeit der mit ihren Endwerten konstant gedachten überzähligen Reaktionskomponenten und von überzähligen Größen abhängigen notwendigen Reaktionskomponenten (bezügl. \mathfrak{U} siehe S. 406)	406, 461
\mathfrak{V}	Vertikalreaktion V durch das Eigengewicht allein	393
$\mathfrak{V}_m, \mathfrak{V}_0, \mathfrak{V}_\sigma$	Stabkräfte V_m, V_0, V_σ durch das Eigengewicht allein	393

X_m	Stabkraft X_m durch das Eigengewicht allein	398
X_1, X_2	Abkürzende Bezeichnungen bei Ermittlung statisch unbestimmter Größen, Werte von X_1, X_2 für $x = l$ (spezielle Ausdrücke für Kreisbogen und parabolische Bogen in §§ 41, 42, 44 und A 31)	306
Y_1, Y_2	Abkürzende Bezeichnungen bei Ermittlung statisch unbestimmter Größen, Werte von Y_1, Y_2 für $x = l$ (spezielle Ausdrücke für parabolische Bogen in § 44)	306
Z_1, Z_2	Abkürzende Bezeichnungen bei Ermittlung statisch unbestimmter Größen, Werte von Z_1, Z_2 für $x = l$ (spezielle Ausdrücke für parabolische Bogen in § 44)	306
α	Ausdehnungskoeffizient (linearer)	17, 374, 404, 460
α	Winkel der Obergurtachse mit der Bogenachse	31
α	Winkel der durch die größten Zug- oder Druckspannungen N und der durch die größten Schubspannungen S ergriffenen Flächenelemente mit der positiven Richtung der Stabachse	37, 297
α	Verhältnis des Querschnittes der Eiseneinlagen zum Gesamtquerschnitt bei Eisenbetonbogen	272
α	Wert der $H = 0$ entsprechenden Stabkräfte A (s. bei A) durch eine Einzellast $P = 1$	425, 428
β	Verhältnis der Biegungsfestigkeit zur gewöhnlichen Zugfestigkeit	19
β	Winkel der Untergurtachse mit der Bogenachse	31
β	Abkürzende Bezeichnung bei parabolischen Bogen	114, 178, 315
β	Verhältnis der Entfernung der Eiseneinlagen von der Achsschicht zur Querschnittshöhe bei Eisenbetonbogen	272
β	Horizontalschub H durch eine Eisenlast $P = 1$	375, 425
$\beta = f_o : f_u$	Verhältnis der Querschnitte des Obergurtes und Untergurtes bei Bogenfachwerken	439
γ	Abkürzende Bezeichnung bei parabolischen Bogen	82, 314
δ	Winkel der resultierenden Schnittkraft mit der Normalen zum Querschnitt	7, 96
ε	Abkürzende Bezeichnung bei parabolischen Bogen	82, 115, 178, 315
ε	Abkürzende Bezeichnung bei Ständerfachwerken	371, 385, 387
ζ	Abkürzende Bezeichnung bei parabolischen Bogen	315, 319
ζ	Länge der Zugstange, in einem Felde der Länge λ bei Bogen mit Zugstange	176, 435
η_1, η_2, \dots	Vertikalprojektionen der Achslängen $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ in den Feldern 1, 2, . . . von Bogen mit beliebiger Achse	322
λ	Feldlänge eines Ständerfachwerkes, Spannweite $l = n \lambda$	370
$\lambda_1, \lambda_2, \dots$	Horizontalprojektionen der Achslängen $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ in den Feldern 1, 2, . . . von Bogen mit beliebiger Achse	322
μ, μ_1, μ_2	Quotienten aus Querszusammenziehung und Längsdehnung gezoGENER Prismen (Elastizitätsquotient, Poissonsche Konstante)	55
$\mu = a/l$	Quotient aus Abszisse a einer Last P und Spannweite l	157
μ	Abkürzende Bezeichnung bei Halbkreisbogen mit Zugstange	179
μ	Abkürzende Bezeichnung bei Eisenbetonbogen	272
ν	Abszisse des Grenzpunktes der positiven und negativen Beitragsstrecke für die Kämpferreaktion R eines Dreigelenkbogens	98

ν	Abkürzende Bezeichnung bei Ständerfachwerken	371, 385, 387
ρ	Reduktionsfaktor bei Reduktion querexzentrischer auf querzentriscbe Lasten	225, 227, 229
ρ	Stabkraft eines Bogenfachwerkes ohne überzählige Stäbe durch einen Horizontalschub $H = 1$ allein	374
ρ	Wert einer notwendigen Stabkraft oder Reaktionskomponente durch eine überzählige Stabkraft oder Reaktionskomponente $X = 1$ allein	407
ρ_1, ρ_{II}, \dots	Werte dieser ρ durch verschiedene überzählige Größen $X_I = 1, X_{II} = 1, \dots$	408
ρ_d, ρ_z	Werte des Reduktionsfaktors ρ bei Berücksichtigung der Querexzentrizität der Lasten für die Randspannungen σ_d, σ_z	227, 231
σ	Normalspannung bei x, v , das heißt beim Querschnitt x in Entfernung v von der Achsschicht	17, 19, 23, 260, 264, 283
$\sigma = n/2$	mit n Felderzahl der Öffnung $l = n\lambda$ eines Ständerfachwerkes, Index der mittleren Vertikale	373, 386, 388
σ'	Wert der Normalspannung σ für die Querexzentrizität $e = 0$ der in Frage stehenden Belastung bei Berücksichtigung der Querexzentrizität (ρ in $\sigma = \rho\sigma'$ der Reduktionsfaktor)	225, 227
σ'	Normalspannung für Fasern bestimmten Elastizitätsmoduls E' in Entfernung 1 von der Achsschicht bei Stäben beliebig ungleich widerstehenden Materials	260
σ_1, σ_2	· · · Achslängen in den Feldern 1, 2, · · · eines Bogens mit beliebiger Achse	116, 322
σ_b	Allgemeine Bezeichnung der Normalspannungen des Betons bei Eisenbetonkonstruktionen	259, 264, 284
σ_b, σ'_b	Normalspannungen des Betons in Oberkante und Unterkante von Eisenbetonbogen, wenn der ganze Querschnitt als wirksam gilt	265
σ_{bd}, σ_{bz}	Größte Druckspannung und größte Zugspannung des Betons von Eisenbetonbalken bei Berücksichtigung der Zugwiderstände des Betons	286, 287
σ_d	Größte zugelassene Druckspannung in den beiden Randelementen eines Querschnittes von Gewölben und Eisenbetonbogen 218, 224, 272	
σ_d, σ_z	Randspannung eines querexzentrisch beanspruchten Gewölbequerschnittes, zwischen welchen die Werte aller anderen Normalspannungen σ desselben liegen	226, 227
σ'_d, σ'_z	Werte der Randspannungen σ_d, σ_z für die Querexzentrizität $e = 0$ der in Frage stehenden Belastung bei Berücksichtigung der Querexzentrizität (ρ_d, ρ_z in $\sigma_d = \rho_d \sigma'_d, \sigma_z = \rho_z \sigma'_z$ die Reduktionsfaktoren)	227
σ_e	Allgemeine Bezeichnung der Normalspannungen des Eisens bei Eisenbetonkonstruktionen	259, 264, 284
σ, σ'_e	Normalspannungen von Eiseneinlagen der Querschnitte f_e, f'_e in Entfernungen e, e' von der Bezugskante bei Eisenbetonbogen und Eisenbetonbalken	265, 266, 284, 285
σ_o, σ_u	Normalspannungen im obersten und untersten Querschnittselement	28, 29, 31
τ	Temperaturänderung ohne Belastung gegen die dem spannungslosen Zustande entsprechende Normaltemperatur 17, 305, 374, 404, 460	

τ	Längsschubspannung und Querschubspannung bei x, v , das heißt beim Querschnitt x in Entfernung v von der Achsschicht 35, 37, 275, 276, 294	
τ_1	Abweichung der wirklichen Temperatur gegen die Montierungs-temperatur	134, 141, 498
τ_1	Gleitspannung (Haftspannung) zwischen Beton und Eisen	278
$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$	Temperaturänderungen der Öffnungen l_1, l_2, \dots, l_n eines durchlaufenden Bogens	192, 436
τ_1, τ_{II}, \dots	Temperaturänderungen der überzähligen Stäbe eines statisch unbestimmten Fachwerkes	411
τ_z	Temperaturänderung der Zugstange bei Bogen mit Zugstange 176, 433	
φ	Winkel der Bogenachse an beliebiger Stelle mit der positiven Richtung der x -Achse	5, 26, 304
φ	Winkel der Bogenachse mit einer von der Achsschicht aus auf Seiten des Krümmungsmittelpunktes der Achse gegebenen Richtung	16
φ	Verhältnis des Krümmungsmomentes K zum Trägheitsmoment J	22
$\varphi = f/l$	Pfeilverhältnis	158, 206
φ	Winkel der Hauptträgheitsachsen eines Querschnittes mit der Abszissenachse	502
φ, χ, ψ	Hilfsgrößen bei der Berechnung von Ständerfachwerken	393
φ_0, φ_l	Winkel φ der Bogenachse mit der positiven Richtung der x -Achse bei $x=0$ und $x=l$	306
φ_m	Winkel φ der Bogenachse mit der positiven Richtung der x -Achse bei $x=m$ (für Öffnungen mit drei Gelenken unmittelbar vor dem Zwischengelenk)	319, 332
φ_v, φ_n	Winkel φ der Bogenachse mit der positiven Richtung der x -Achse unmittelbar vor und nach einem Zwischengelenk	305, 308
ψ	Winkel der resultierenden Schnittkraft R_x (eventuell auch von einer Einzellast P herrührend) mit der positiven Richtung der x -Achse	7, 8, 96
ψ_0, ψ_l	Wert des Winkels ψ für $x=0$ und l	9
ω	Abkürzende Bezeichnung bei Eisenbetonbogen	272
$\omega = \Delta \varphi_n - \Delta \varphi_v$	Sprungwert der Winkeländerung beim Zwischengelenk in Öffnungen mit drei Gelenken	305, 309
ω	Abkürzende Bezeichnung bei Ständerfachwerken	382, 393
ω	Stabkraft eines notwendigen Stabes eines Fachwerkes durch eine an dem beliebigen Knotenpunkte K in beliebiger Richtung e wirkende Kraft $Q=1$ allein	447
$\omega_1, \omega_2, \dots$	Werte dieser ω für verschiedene Stäbe oder für verschiedene K, e	448, 449
$\Delta x, \Delta y, \Delta s, \Delta \varphi, \Delta l, \dots$	Änderungen von $x, y, s, \varphi, l, \dots$, bei unendlich kleinen Änderungen $\Delta x = dx, \Delta y = dy, \dots$	16, 26, 403, 408
Σ	Summenzeichen (die unten und oben beigesetzten Größen deuten meist an, zwischen welchen Grenzen die Summen zu nehmen sind), bei unendlich kleinen Summanden $\Sigma = \int$	6
Σ_o, Σ_u	Bei Bogenfachwerken auf den Obergurt und Untergurt bezügliche Summen	439, 441

Sachregister.

Die Seitenzahlen beziehen sich im allgemeinen auf das erste Auftreten der Bezeichnungen. §, *A*, *B* sind Abkürzungen für Paragraph, Aufgabe, Beispiel, VI mit einem Buchstaben entspricht dem durch diesen Buchstaben bezeichneten Teile des VI. Abschnittes.

	Seite		Seite
Abbiegen von Einlagestäben bei Eisenbetonkonstruktionen (§ 39; <i>B</i> 89)	296	neren Kräfte s. Verschiebungsarbeit und Verschiebungsarbeit, virtuelle	403, 460
Achse eines Stabes (gleich widerstehenden Materiales)	4, 259	Art, Form und System von Bogen und sonstigen Trägern, s. auch Bogenarten, Bogenformen, Bogensysteme	75, 184, 361
Achse eines Stabes ungleich widerstehenden Materiales	260	Aufbiegen von Einlagestäben bei Eisenbetonkonstruktionen (§ 39; <i>B</i> 89)	296
Achse, neutrale (§§ 30, 33, 34, 38)	.225, 261, 264	Auflager (VI L), s. auch Gelenke, Stützenreaktionen	492
Achsialkraft (§§ 1, 3, 33, 34, 37; <i>B</i> 74—76 etc.; bezüglich der Vernachlässigung ihres Einflusses auf die statisch unbestimmten Größen vergl. § 51), s. auch Normalkraft N_x	6	Ausdehnungskoeffizient	17, 257, 487
Achslänge (<i>B</i> 28; über $s = \Sigma \sigma$ siehe S. 137, 237, 243)	4, 260	Ausweichen der Widerlager siehe Stützenbewegungen	75
Achsschicht	4, 260	Äußere Kräfte	1
Addabrücke bei Trezzo in Italien	212	Äußere Kräfte, virtuelle Arbeiten \mathfrak{A} , \mathfrak{U} , a derselben (§§ 56, 57, 60; <i>A</i> 35, 36, 44)	403, 406, 447, 460
Aktivkräfte, siehe auch Belastung, Winddruck	2, 361	Balken, Balkenträger (§§ 38, 39; <i>B</i> 77—89, VI Q), s. auch Eisenbetonbalken, Plattenbalken	2, 7, 75, 189
Aktivkräfte, beliebig gerichtete (§§ 52, 53, 55—60; <i>A</i> 1, 3, 16; <i>B</i> 100, 103)	2, 7	Balken beliebig ungleich widerstehenden Materials (§§ 33, 36, 38, 39)	283
Aktivkräfte, horizontale (<i>A</i> 1, 3, 16; <i>B</i> 100, 103), s. auch Winddruck	7	Balken, durchlaufende oder kontinuierliche (<i>B</i> 80, VI Q)	3, 316
Aktuelle Verrückungen	404	Balken, einfache (<i>B</i> 77—79, 81—89, VI Q), s. auch Plattenbalken	2
Arbeit der äußeren Kräfte siehe Äußere Kräfte, virtuelle Arbeiten derselben	403, 460	Balken, genietet und gewalzte	19
Arbeit der Sonnenwärme	499		
Arbeit zur Überwindung der in-			

	Seite		Seite
Beanspruchungen, zulässige (§§ 4, 5, 13, 15, 31, 32; <i>B</i> 16, 65, 75) vergl. Knickfestigkeit	57, 259, 472	Bogen, kreisförmige (§§ 19, 20, 22, 31, 41; <i>A</i> 2, 12, 25, 31; <i>B</i> 28, 29, 50—53, 93, s. auch S. 129, 242, 358), vergl. die Bemerkung Seite 310 oben	77
Beitragsstrecken, Grenzpunkte der positiven und negativen s. Einflußlinien (auch §§ 10, 11, 53; <i>A</i> 11; <i>B</i> 24, 25, 112, S. 189, 199)	47	Bogen mit beliebiger Achse (§§ 20, 46—51 sowie I. Abschnitt und §§ 19, 21—23, 26—28, 30, 32—36, 40; <i>A</i> 19, 32, auch 1, 3, 8, 10, 11, 14, 16 etc.; <i>B</i> 1, 37—40, 63—67, 94—99, auch 7, 8, 18—25, 31, 32 usw.)	77, 78
Belastung (§ 18) s. gleichmäßig verteilte Last, stetig verteilte Last, parabolisch begrenzte Belastung, konzentrierte Lasten, Radlastzüge, Winddruck	69, 361	Bogen mit drei Gelenken (§§ 19, 22, 27, 40, 45, 48; <i>A</i> 3, 10—16, 22, 24, 35, 36, 40, 41; <i>B</i> 9, 18—27, 49, 51), s. auch Bogenfachwerke mit drei Gelenken	3, 76
Belastung, kritische bei Gewölben	234, 235, 250	Bogen mit einem Gelenk	184
Belastungen, ungünstigste, siehe Grenzwerte	395	Bogen mit imaginären Gelenken	185
Belastungsarten	69	Bogen mit Zugstange (§§ 22, 23; <i>A</i> 23, 24, 32, 35; <i>B</i> 50), s. auch Bogenfachwerk mit Zugstange	176, 185
Belastungsfall, Belastungszustand	361, 408	Bogen mit zwei Gelenken (§§ 5, 12, 20, 22, 40—43, 45—48, 51; <i>A</i> 2, 3, 15, 17—19, 21—23, 31, 32; <i>B</i> 29 bis 40, 49, 93—97, VI; auch <i>A</i> 3, <i>B</i> 5—8, 10—12 usw.), siehe auch Bogenfachwerke mit zwei Gelenken	3, 113
Berührungsgelenke (§§ 13—15; <i>B</i> 13—16)	54	Bogen ohne Gelenke (§§ 21, 27, 31, 40, 44, 45, 48—51; <i>A</i> 3, 15, 20—22; <i>B</i> 1, 41—49, 63—67, 98, 99), siehe auch Bogenfachwerke ohne Gelenke	3, 142
Betonbogen (<i>B</i> 18—21, 26, 27, 41)	213, 234	Bogen, parabolische (§§ 5, 19—22, 24, 25, 42—45, 51; <i>A</i> 15, 17, 18, 20, 22—24, 26; <i>B</i> 27, 28, 30, 33 bis 36, 41—49, 54—56, 95, 97, 118; VI. Abschn.; auch <i>B</i> 5—8, 10—12 usw.), s. auch Bogenfachwerke, parabolische	77, 81, 114, 143
Bewegte Radlastzüge siehe Radlastzüge	44	Bogenachse (§§ 19, 29, 34; <i>A</i> 13; <i>B</i> 26)	4, 77, 260
Biegungsebene	4, 15, 260	Bogenarten (II. u. V. Abschn.)	75, 361
Biegungsfestigkeit	19	Bogenebene	4
Biegungsformeln (§§ 3, 4, 6, 7, 40)	15	Bogenfachwerke (§§ 52—60; <i>A</i> 33 bis 44; <i>B</i> 100—124, auch 51—53), s. auch Fachwerke	30, 75, 361
Biegungsgleichung, Naviersche (§ 7)	27		
Biegungsversuche (§§ 4, 5, 31)	19		
Blechbalken (VI Q)	19, 75		
Blechbogen (§§ 5, 26; <i>B</i> 29, 50 bis 53, VI)	75, 208		
Bogen, Bogenträger	2		
Bogen beliebig ungleich widerstehenden Materiales (§§ 33, 36)	259		
Bogen, durchlaufende oder kontinuierliche (§§ 23, 24; <i>A</i> 25; <i>B</i> 51 bis 53), s. auch Bogenfachwerke, durchlaufende	3, 186		
Bogen, einfache, s. Bogen mit drei Gelenken, mit zwei Gelenken, mit einem Gelenk, ohne Gelenk, mit Zugstange, Ketten, Gewölbe	2		
Bogen, elliptische (<i>A</i> 12)	77		
Bogen, geradlinige (§ 19; <i>A</i> 14, 35, 36, 40; s. auch <i>B</i> 100)	75, 77		

	Seite		Seite
Bogenfachwerke, durchlaufende oder kontinuierliche (§§ 23, 53, 54, 57; A 33, 34, 39; B 101, 117, auch 51—53, 104, 105 und Seite 401, 402)	361	Cannstatter Neckarbrücke (B 5—8, 10—12, 17; VI. Abschnitt; auch S. 43—45, 115, 157, 208, 315)	468
Bogenfachwerke, einfache, siehe Bogenfachwerke mit drei Gelenken, mit zwei Gelenken, mit einem Gelenk, ohne Gelenk, mit Zugstange	361	Clapeyrons Theorem	405, 461
Bogenfachwerke mit drei Gelenken (§ 55; A 34—36, 40—42; B 100, 102, 103, 105—107, auch S. 400, 401)	361, 371, 384	Coblener Brücke siehe Koblenzer Rheinbrücke	128
Bogenfachwerke mit einem Gelenk	184	Dachbinder (B 29, 50—53, 100, 102, 103; auch A 25, 33, 38, B 104; Fig. 262)	124
Bogenfachwerke mit imaginären Gelenken	185	Deformationsarbeit siehe Verschiebungsarbeit	403, 460
Bogenfachwerke mit Zugstange (§ 23; A 35, 38, 40, 41; B 116, 123)	433	Diagonalen bei Ständerfachwerken (§§ 53, 54, Fig. 227, 228, 242, 248; A 33, 34; B 100—110 etc.)	370
Bogenfachwerke mit zwei Gelenken (§§ 53, 54, 57, 58; A 33, 34, 37, 43, 44; B 104, 105, 108 bis 115, 118—122, 124)	361, 371, 374, 384	Donaubrücke bei Inzigkofen (B 18 bis 21, 23)	83
Bogenfachwerke ohne Gelenk	410	Donaubrücke bei Munderkingen (B 27)	105
Bogenfachwerke, parabolische (§ 55; A 33, 34; B 104, 106, 107, auch S. 415, 417, 435)	382, 390, 392	Dourobrücke in Portugal (Fig. 111, 126, 220; B 37—40, 94—97, auch S. 115, 116, 316, 326, 396)	135
Bogenformen, s. auch Bogen, geradlinige, parabolische, kreisförmige, elliptische, mit beliebiger Achse, Bogenachse	75, 77, 361	Drahtseile, Kabel (§ 25; A 26; B 54, 56)	204
Bogenlänge (B 28; über $s = \Sigma \sigma$ s. S. 137, 237, 243)	4	Dreigelenkbogen s. Bogen mit drei Gelenken und Bogenfachwerke mit drei Gelenken	3, 76
Bogensysteme (§§ 25—27, 34, V. Abschnitt)	75, 361	Dreigelenkbogen mit imaginärem Zwischengelenk	185
Bogenträger, Bogen	2	Dreigelenkbogen mit Zugstange (§§ 22, 23; A 24, 40, 41; S. 433)	177
Bogenträger, elastische (über Gewölbe als solche S. 212, 216, 236, 251, 360)	3	Druck, exzentrischer (VI P)	505, 508
Bruchbelastung und kritische Belastung von Gewölben (§ 31; B 65—67)	234, 235, 236	Drucklinie (vergl. Stützlinie)	215
Bruchstein-Versuchsgewölbe, Wiener (§ 31; B 1, 42, 43, 48, 49, 63 bis 67, 98, 99, auch S. 115)	233	Druckspannungen siehe Normalspannungen	2
Bruchversuche (§§ 4, 5, 15, 31; B 65—67)	19	Durchbiegung siehe Einsenkung	81
Bügel b. Eisenbetonkonstruktionen	297	Durchlaufende oder kontinuierliche Balken (B 80, VI Q, S. 316)	3
		Durchlaufende oder kontinuierliche Bogen (§§ 23, 24; A 25; B 51 bis 53), siehe auch Bogenfachwerke, durchlaufende	3, 186
		Durchlaufende oder kontinuierliche Träger	2
		Ebene Träger	2
		Eigengewicht (§ 31; B 18, 44, 63 etc.; VI C, R), siehe auch Lasten	476

	Seite		Seite
Einfache Balken s. Balken, einfache	2	Endvertikalen von Ständerfach-	
Einfache Bogen s. Bogen, einfache,		werken (§§ 53—55; <i>A</i> 34; <i>B</i> 102,	
und Bogenfachwerke, einfache	2, 361	103, 105—111, 114)	373, 386, 388
Einflußfläche s. Einflußlinie	47	Euler'sche Knickformel	280, 501
Einflußlinie (§ 12; Fig. 55—57, 98		Fachwerkbogen siehe Bogenfach-	
bis 100, 103, 124, 132, 136, 156,		werke	30, 75, 361
176, 270, 273, 274, 282, 290, 294,		Fachwerke, ebene	361
303; <i>A</i> 8, 10, 11, 20, 22; <i>B</i> 9—12,		Fachwerke, Knotenpunktmethode	
20, 21, 23, 33, 49, 110, 111, 113,		(§ 52; <i>S.</i> 369)	362
114, 117, 121, 124; <i>VI B, M</i> ; auch		Fachwerke, Momentmethode (§ 52;	
<i>S.</i> 154, 194, 240, 395)	44	<i>B</i> 100, 101)	364
Einflußpunkt s. Einflußlinie	47	Fachwerke, Schnittmethode (§ 52;	
Eingelenkbogen	184	<i>S.</i> 368)	363
Eingelenkbogen mit imaginärem		Fachwerke, stabile	361
Gelenk	185	Fachwerke, statisch bestimmte	
Eingelenkbogen mit Zugstange	185	(§§ 52—54; <i>A</i> 34—36, 40—42;	
Einlagestäbe bei Eisenbetonkon-		<i>B</i> 100—103, 105—107, <i>S.</i> 400)	361
strukturen, Abbiegen derselben		Fachwerke, statisch unbestimmte	
(§ 39; <i>B</i> 89)	296	(§§ 52—60; <i>A</i> 33, 37—39, 43, 44;	
Einsenkungen (§§ 19—21, 24, 40,		<i>B</i> 108—124)	361
45, 48, 51, 59; <i>A</i> 14, 15, 22—24,		Festigkeitsbedingung	357
35, 36, 40, 42; <i>B</i> 27, 34, 39,		Form, System und Art von Bogen	
47—49, 96, 97, 99, 120, 121, 123;		und sonstigen Trägern, s. auch	
<i>VI M, N, R</i>), s. auch Überhöhung		Bogenformen, Bogensysteme,	
der Bogen	81, 319, 332	Bogenarten	75, 184, 361
Eisenbetonbalken (§§ 32, 38, 39;		Formänderungen (§§ 3, 5, 7, 31,	
<i>A</i> 30; <i>B</i> 77—92; auch <i>S.</i> 263, 264,		40, 45, 48, 56, 59; <i>A</i> 41), s. auch	
276, 277)	279, 283	Einsenkungen, Knotenpunktsver-	
Eisenbetonbogen (§§ 31, 32, 34—36;		rückungen	15, 403
<i>A</i> 29; <i>B</i> 68—73)	257, 263	Formänderungsarbeit s. Verschie-	
Eisenbetonkonstruktionen (§§ 31		bungsarbeit	403
bis 39; <i>A</i> 29, 30; <i>B</i> 68—92)	257	Frankfurter Neue - Mainzerstraße-	
Eisenbetonkonstruktionen, Abbie-		Brücke	396
gen von Einlagestäben (§ 39; <i>B</i> 89)	296	Fugenkorrektur siehe Gewölbekor-	
Eisenbetonkonstruktionen, Bügel	297	rektur	218, 271
Eisenbetonkonstruktionen, Haken	297	Gegenseitigkeit der Verrückungen	
Eisenbetonsäulen (§ 37, auch 34, 36;		(§ 59)	449
<i>B</i> 74—76)	279	Gelenke (§§ 13—17; <i>B</i> 13—17, <i>VI L</i> ,	
Elastische Bogenträger (über Ge-		auch <i>A</i> 11, <i>B</i> 21, 23—25), vergl.	
wölbe als solche <i>S.</i> 212, 216, 236,		Berührungsgelenke, Umschließ-	
251, 360)	3	ungsgelenke	3
Elastizitätsgrenze s. Proportionali-		Gelenke, imaginäre	185
tätsgrenze	20	Gewichte (<i>VI C, R</i>)	476
Elastizitätsmodul (§§ 5, 31, 32, auch		Gewölbe (§§ 27—36; <i>A</i> 27, 28;	
<i>S.</i> 355, 412, 487 etc.)	16, 17	<i>B</i> 57—73, auch <i>B</i> 1, 18—27, 41	
Ellipsenbogen (<i>A</i> 12)	77	bis 45, 48, 49, 98, 99), vergl.	
Endmomente (§§ 21, 40, 44, 49—51,		Betonbogen, Eisenbetonbogen,	
<i>S.</i> 267; <i>A</i> 20; <i>B</i> 41, 42, 44, 46,			
63, 98, auch <i>VI Q</i>)	5		

	Seite		Seite
Bogen mit drei Gelenken, Bogen ohne Gelenk	212	Grundbelastung von Gewölben (§ 29; B 26, 59)	222
Gewölbe, Berücksichtigung der Querezentrität der Lasten (§ 30; A 27, 48; B 60—62)	224	Gurtungen, X-Gurtung und Z-Gurtung von Ständerfachwerken (§§ 53, 54, Fig. 227, 228, 242, 248; A 33, 34; B 102—110 etc.)	370
Gewölbe, Grundbelastung (§ 29; B 26, 59)	222	Gurtungsbeanspruchungen (B 31, 32, 46, 51, 100, 101), siehe auch Gurtungen	31
Gewölbe, homogene, s. Betonbogen	213		
Gewölbe, kritische Belastung und Bruchbelastung (§ 31; B 65—67)	234, 235, 236	Haken b. Eisenbetonkonstruktionen	297
Gewölbe mit drei Gelenken (§§ 19, 27—30, 32—36; A 27, 28; B 57 bis 73 sowie 18—27, 49), s. auch Bogen mit drei Gelenken	215	Hängebogen (§ 25; A 26; B 54, 56)	3, 203
Gewölbe ohne Gelenk (§§ 21, 27—36; A 27, 28; B 57—73 sowie 1, 41 bis 45, 48, 49, 98, 99)	212	Hängebrücken (§ 25; B 56)	203, 204
Gewölbekorrektur (§§ 28, 35; B 57, 58, 71, 72)	218, 271	Hängebrücken, feste	401, 402
Gewölbemittellinie (§ 29; B 26, 59), s. auch Bogenachse	77, 78, 222	Hängebrücken, Versteifungsträger	203
Gewölbeversuche (§ 31; B 41, 63 bis 67)	233	Haftspannungen oder Gleitspannungen bei Eisenbetonkonstruktionen (§§ 36, 39; B 86—89, auch 73, 90—92)	277
Gitterbogen	3, 30	Halbellipsenbogen (A 12)	77
Gleichmäßig verteilte Last (§§ 12, 18—22, 24, 25, 41, 46—51, 53—55, 58; A 12, 15, 16, 23—26, 28, 32 bis 34; B 6, 8, 12, 18, 19, 21, 23, 24, 27, 29, 30, 33, 34, 37, 39, 47, 50, 51, 54—56, 94—97, 101, 102, 104, 106, 109, 111, 117—121, 123, 124; VI A, B, D)	69, 70	Halbkreisbogen (§§ 19, 20, 22, 41; A 2, 31; B 29, 50—53)	77, 310
Gleitspannungen oder Haftspannungen bei Eisenbetonkonstruktionen (§§ 36, 39; B 86—89, auch 73, 90—92)	277	Hauptreaktionen eines Fachwerkes	362, 406
Gmündertobelbrücke im Kanton Appenzell (Fig. 165)	216, 257	Hauptspannungen, reduzierte	357
Grenzpunkte der positiven und negativen Beitragsstrecken siehe Einflußlinien (auch §§ 10, 11, 53, A 11, B 24, 25, 112, S. 189, 199)	47	Hauptstäbe eines Fachwerkes	362, 406
Grenzwerte bei veränderlicher Belastung (§§ 10—12, 19—21, 24, 53—55; A 8, 11; B 9, 11, 17, 21 bis 25, 29, 44, 50, 51, 53, 58, 72, 107, 114, 121, 123; VI F, G, H, J, K, L, M, O, P, Q)	39, 42, 44, 392	Hauptsystem eines Fachwerkes	362, 406
		Homogene Gewölbe s. Betonbogen	213
		Horizontale Aktivkräfte (A 1, 3, 16; B 100, 103), s. auch Winddruck	7
		Horizontalkraft H_s in einem Schnitte s durch ein Fachwerk	363
		Horizontalkraft H_x in einem Querschnitte x (§ 1; A 1, 16), s. auch Horizontalreaktionen, Horizontalschub	5
		Horizontalreaktionen der Kämpfer (§ 1; A 1, 16), s. auch Horizontalschub	5
		Horizontalschub (§§ 1, 2, 12, 19—22, 24, 25, 40—44, 46, 47, 49—51, 53, 57, 58; A 7, 13, 16, 20, 25, 31, 32, 33, 38, 39, 44; B 7, 9, 10, 18, 19, 21—25, 29, 30, 37, 41, 42, 44, 46, 50, 51, 53, 54, 63, 93—95, 98, 100—103, 105, 108 bis 111, 114—120, 124; VI A, B, G, J, L, M, N)	5

	Seite		Seite
Horizontalschub, künstlicher (<i>A</i> 7, 17—19, 43; <i>B</i> 7, 35, 36, 40, 122; VI E, J, M, N, auch S. 209, 513, 514)	133, 134, 498	Kernlinien (§ 8, 11; <i>A</i> 29; VI F und Tafel am Schlusse des Werkes; vergl. S. 80, 120, 128, 147, 193, 214)	28
Horizontalverbände	491	Kernpunkte s. Kernlinien	28
Imaginäre Gelenke	185	Kernpunktsmomente (§§ 8, 10)	31, 42
Influenzlinie, Influenzfläche, Influenzpunkt s. Einflußlinie, Einflußfläche, Einflußpunkt	44	Ketten (§ 25; <i>A</i> 26; <i>B</i> 54—56)	3, 200
Innere Kräfte, s. auch Stabkräfte	1	Ketten aus Stäben (Stabketten)	204
Innere Kräfte, Arbeit <i>D</i> und virtuelle Arbeit \mathcal{D} derselben, siehe Verschiebungsarbeit	403, 460	Ketten, vollkommene	3, 200
Inzigkofener Donaubrücke (<i>B</i> 18 bis 21, 23)	83	Kettenlinien (§ 25)	201
Johnson-eisen bei Eisenbetonkonstruktionen	278	Kettenlinien, gemeine	203
Kabel, Drahtseile (§ 25; <i>A</i> 26; <i>B</i> 54, 56)	204	Kettenlinien, parabolische	202
Kämpfer	3	Knickfestigkeit, Knickwirkungen (§ 37; <i>B</i> 75; VI K, O, P), s. auch Druck, exzentrischer	280, 281, 501
Kämpferdrücke, s. auch Kämpferreaktionen	3	Knotenpunktmethode bei Fachwerken (§ 52; S. 369)	362
Kämpferdrucklinie <i>S</i> oder Schnittlinie der Kämpferdrücke (§§ 2, 10, 11, 19—22, 24, 53; Fig. 15, 16, 21, 101, 127, 130, 133, 271; <i>A</i> 2, 3, 25, 37; <i>B</i> 1, 22, 38, 43, 50, 53, 112; VI F, auch S. 177, 223)	9, 14	Knotenpunktsverrückungen (§ 59; <i>A</i> 40—42; <i>B</i> 120, 121, 123)	447
Kämpferdruckumhüllungslinien <i>U</i> , <i>U'</i> (§§ 2, 10, 11, 21; Fig. 16, 130, 133; <i>A</i> 3; <i>B</i> 1, 43)	10, 14	Konzentrierte Lasten (§§ 1, 12, 18 bis 22, 24, 41, 42, 44—51, 53, 54 etc.; <i>A</i> 1, 16, 24, 25, 27, 32, 35; <i>B</i> 9, 11, 12, 18, 19, 21—23, 25, 30, 37, 39, 41, 42, 48, 61—64, 74—76, 94—100, 103, 105, 108, 110, 114, 118, 119, 121, 123, VI D, auch 65, 116, 117 usw.)	5, 69
Kämpfergelenke (§§ 19, 20, 22—25, 40—42, 45—48, 53—55, 57, 58; Aufgaben und Beispiele s. Bogen und Bogenfachwerke mit drei Gelenken, mit zwei Gelenken und ohne Gelenk, Bogen und Bogenfachwerke, durchlaufende und mit Zugstange), vergl. Gelenke, Berührungsgelenke, Umschließungsgelenke	3	Koblenzer Rheinbrücke (<i>B</i> 30—36, 46, 47, 93, auch S. 109, 111, 115, 315, 396)	128
Kämpfermomente s. Endmomente	5	König-Karls-Brücke s. Cannstatter Neckarbrücke	4
Kämpferreaktionen s. Horizontalreaktionen, Horizontal Schub, Vertikalreaktionen, resultierende Stützenreaktionen, Endmomente	2, 5	Kontinuierliche Balken s. Balken, durchlaufende	3
Kämpfervertikalen s. Endvertikalen von Ständerfachwerken	373, 386, 388	Kontinuierliche Bogen s. Bogen, durchlaufende	3
		Kontinuierliche od. durchlaufende Träger	2
		Kräfte, äußere	1
		Kräfte, innere	1
		Kreisförmige Bogen siehe Bogen, kreisförmige	77
		Kritische Belastung und Bruchbelastung von Gewölben (§ 31; <i>B</i> 65—67)	234, 235, 236
		Krümmungsmoment (§§ 5, 6; <i>A</i> 4—6 mit <i>B</i> 2—4)	21
		Künstliche Überhöhung der Bogen, s. auch Horizontalschub, künstl.	480

	Seite		Seite
Künstlicher Horizontalschub siehe		Neckarbrücke bei Cannstatt siehe	
Horizontalschub, künstlicher		Cannstatter Neckarbrücke	468
	133, 134, 480	Neutrale Achse, neutrale Schicht	
Kugelgelenke (§ 16)	66	(§§ 30, 33, 34, 38)	225, 261, 264
Lagerfugen	213, 216	Nietteilung	210
Längenänderungen, spezifische	17	Nietverschwächung	19, 127, 473, 509
Längsschubspannungen (§§ 9, 11,		Normaldrücke bei Gelenken (§§ 13,	
36, 39; <i>B</i> 8, 41, 64, 65, 73, 86 bis		15, 16; <i>B</i> 16, 17)	54, 65
92, auch <i>S.</i> 96, 214, 356, 491)		Normalkraft N_x in einem Quer-	
	35, 275	schnitt x (§§ 1, 3, 8, 10, 12, 19 bis	
Lastäquivalente	100	21, 25, 28, 29, 33, 34 etc.; <i>A</i> 10,	
Lasten, gleichmäßig verteilte, s.		27; <i>B</i> 18—22, 29, 31, 32, 41, 44,	
Gleichmäßig verteilte Last	69, 70	45, 51, 53, 54, 57—59, 64, 71, 72;	
Lasten, konzentrierte, s. konzen-		VI <i>A, D, G</i>)	2, 5, 7, 8
triierte Lasten	5, 69	Normalspannungen (§§ 3, 4, 8, 11, 12,	
Lasten, parabolisch begrenzte (<i>A</i> 9,		19—21, 27—35, 37, 38; <i>A</i> 7, 10,	
13; <i>B</i> 26)	73	27—29; <i>B</i> 5—7, 10—12, 18—22,	
Lasten, stetig verteilte, siehe auch		29, 41, 44, 45, 51, 53, 54, 57—62,	
Gleichmäßig verteilte Last und		64, 67—72, 74, 76—80, 82—85;	
Parabolisch begrenzte Last	69	VI <i>A, D, G, H, J, K, L, Q</i>), s.	
Linie <i>S</i> s. Kämpferdrucklinie	10, 14	auch Gurtungen, Diagonalen, Ver-	
Linien <i>U, U'</i> siehe Kämpferdruck-		tikalen, Normaldrücke bei Ge-	
umhüllungslinien	10, 14	lenken usw.	2, 17, 27, 262
Maria-Pia-Brücke s. Dourobrücke		Normalspannungen, größte in ein-	
in Portugal	135	nem Punkte (§ 9)	37, 297
Materielles System	1	Normaltemperatur, siehe Reduktion	
Maximilianbrücke, äußere, in Mün-		derselben	4, 137, 357
chen	59, 216	Notwendige Stäbe und Reaktions-	
Menschengedränge (<i>B</i> 11, 19, 21;		komponenten eines Fachwerkes	362
VI <i>A, C, K</i> etc.)	51	Öffnungen	2
Mirabeaubrücke in Paris	187	Parabelträger (<i>B</i> 51—53)	188
Mittelvertikale bei Ständerfach-		Parabolisch begrenzte Belastung	
werken (§ 53—55; <i>A</i> 33, 34; <i>B</i> 51,		(<i>A</i> 9, 13; <i>B</i> 26)	73
102—111, 114)	373, 386, 388	Parabolische Bogen s. Bogen, para-	
Moment M_x in einem Querschnitt x		bolische	77, 81, 114, 143
(§§ 1, 3, 8, 10, 12, 19—21, 29, 33;		Parabolische Bogenfachwerke (§ 55;	
<i>A</i> 1, 8, 10, 12, 13; <i>B</i> 10, 18—20, 22,		<i>A</i> 33, 34; <i>B</i> 104, 106, 107, auch	
29, 31, 32, 41, 44, 45, 51, 53, 64		<i>S.</i> 415, 417, 435)	382, 390, 392
usw.), s. auch Endmomente	6, 8	Parabolische Fachwerksichelbogen	
Momentenmethode bei Fachwerken		(<i>A</i> 33; <i>B</i> 104)	382
(§ 52; <i>B</i> 100, 101)	364	Pfeil f	7, 201
Moniergewölbe (§ 31, <i>S.</i> 255), siehe		Pfeiler	2
auch Eisenbetonbogen	234	Pfeilverhältnis	158, 203
Munderkinger Donaubrücke (<i>B</i> 27)	105	Plattenbalken (<i>B</i> 78, 82, 85, 87,	
Naviersche Biegungsgleichung (§ 7)	27	89, 92)	288
Naviersches Verteilungsgesetz der		Prinzip der kleinsten Verschiebungs-	
Normalspannungen	212, 224, 225	arbeit (§§ 57, 60)	408, 461

	Seite		Seite
Prinzip der virtuellen Verrückungen (§§ 56, 60; A 35, 36)	404, 460	Ransomeisen bei Eisenbetonkonstruktionen	278
Proportionalitätsgrenze (§§ 5, 31; B 65)	21, 235	Reaktionskomponenten, notwendige	362, 406
Pruthbrücke bei Jaremcze (Fig. 164; B 22, 24, 25, 44, 45, auch S. 115, 159, 215, 216, 396)	159	Reaktionskomponenten, überzählige (§§ 57, 58, 60; A 38, 39, 43, 44; B 108—111, 114—119, 122, 124)	362, 406
Querexzentrizität der Lasten bei Gewölben (§ 30; A 27, 28; B 60 bis 62)	224	Reduktion der Normaltemperatur auf die mittlere Ortstemperatur (A 18, 19, 43 mit B 36, 40, 122, VI N, auch S. 357)	134, 497
Querkraft oder Transversalkraft T_x in einem Querschnitt x (§§ 1, 9, 10, 25, 36, 39; A 1, 10; B 8, 18, 20, 21, 31, 32, 41, 64 und S. 491), s. auch Vertikalkraft V_x bei horizontalen Balkenträgern	5, 8	Reduktion querexzentrischer auf querzentrische Lasten bei Gewölben (§ 30; A 27, 28; B 61, 62)	224
Querschnitte	4, 16, 259	Reduktionsfaktor ρ bei der soben erwähnten Reduktion (s. die bezeichneten Stellen)	225, 229
Querschnitte, Bedingung für dieselben	20	Reibungsversuche mit Umschließungsgelenken (§ 17)	67
Querschnitte, elliptische und kreisförmige (A 5 mit B 3, auch S. 22, 37)	24	Resultierende Schnittkraft R_x in einem Querschnitt x (§§ 1, 2, 25; A 1; B 54—56), s. auch Resultierende Stützenreaktionen	5
Querschnitte, rechteckige und quadratische (A 4 mit B 2, auch S. 22, 30, 37, 213, 214), s. auch Gewölbe, Betonbogen, Eisenbetonbogen, Eisenbetonbalken, Eisenbetonsäulen	23	Resultierende Stützenreaktionen (§§ 1, 2, 10, 13, 16, 24; A 3, 11; B 23—25, 51, 53, 114; VI L, N)	5
Querschnitte, ringförmige (A 6)	24	Rheinbrücke bei Koblenz s. Koblenzer Rheinbrücke	128
Querschnitte, U-förmige (A 6)	25	Rittersche Methode bei Fachwerken (Momentmethode, § 52, B 100, 101)	364
Querschnitte, T-förmige, s. Plattenbalken	288	Säulen beliebig ungleich widerstehenden Materials (§ 37)	279
Querschnitte, I-förmige (A 6 mit B 4, auch S. 22)	25	Scheitelgelenke siehe Zwischen-gelenke	3
Querschnitte von Blechträgern (§ 26; A 6; B 29; VI A, B, Q, auch S. 20)	25	Schnittkräfte bei Fachwerken siehe Horizontalkraft H_s , Vertikalkraft V_s , Moment M_s	363
Querschubspannungen gleich den Längsschubspannungen, s. diese	37	Schnittkräfte bei vollwandigen Trägern s. Horizontalkraft H_x , Vertikalkraft V_x , Normalkraft N_x , Querkraft T_x , Moment M_x , Resultierende Schnittkraft R_x	5, 8
Querträger (VI Q)	509	Schnittkräfte und Schnittmomente bei Eisenbetonkonstruktionen	267
Radlastzüge (§ 12; A 8; B 9, 11, 19, 21, 23, 105, 111, 114, 121, 123, auch S. 489)	44	Schnittlinie der Kämpferdrücke s. Kämpferdrucklinie	9, 14
Randspannungen bei Berücksichtigung der Querexzentrizität von Lasten auf Gewölben (§ 30; B 60, 62)	225		

	Seite		Seite
Schnittmethode bei Fachwerken (§ 52; S. 368)	363	Stampfbetongewölbe (§ 31)	234
Schnittmomente M_s bei Fachwerken (§ 52, 53; B 103)	363, 370	Statisch unbestimmte Größen (V. Abschnitt; §§ 57, 60), s. auch Horizontalschub, Endmomente, Fachwerke, statisch unbestimmte	15, 267, 361
Schnittmomente M_x bei vollwan- digen Bogen s. Moment M_x , End- momente	5, 6, 8	Stellungen der Diagonalen eines Ständerfachwerkes, siehe auch Diagonalen	370
Schubkräfte, s. auch Querkraft oder Transversalkraft T_x	2	Stetig verteilte Lasten (§ 18; A 9, 13; B 26), s. auch Gleichmäßig verteilte Last und Parabolisch begrenzte Belastung	69
Schubspannungen, s. auch Längs- schubspannungen und Querschub- spannungen	2, 356	Straßenwalze (B 11, 19, 21; VI K, O, P, Q)	51, 489
Schubspannungen, größte, in einem Punkte (§ 9)	37, 297	Stützenbewegungen (§§ 20, 21, 24, 40—42, 44—50, 53, 56—60; A 7, 14, 15, 25, 31, 36, 39, 42—44; B 27, 30, 32—34, 37, 39, 42, 48, 63, 69, 93—99, 108, 115—120, 124; VI B, J, M, R)	75
Schwarzsche Knickformel	281, 490	Stützenmomente s. Endmomente	5
Sichelbogen (§ 53; A 33; B 104), s. auch Dourobrücke	376, 382	Stützenreaktionen s. Horizontal- schub, Horizontalreaktionen, Ver- tikalreaktionen, Resultierende Stützenreaktionen, Endmomente, auch Kämpferdrucklinie und Kämpferdruckumhüllungslinien, Reaktionskomponenten, notwen- dige und überzählige	5, 361
Sonnenwärme, Anwendung der- selben	499	Stützweite = Spannweite	2
Spannungen s. Normalspannungen, Längsschubspannungen, Quer- schubspannungen, sowie Normal- spannungen u. Schubspannungen, größte, in einem Punkte	2	System, materielles	1
Spannungen, reduzierte	357	System, Art und Form eines Bogens oder sonstigen Trägers, siehe auch Bogensysteme, Bogen- arten, Bogenformen	75, 134, 361
Spannungen, schiefe	37, 297	Szegedin, Theißbrücke bei	396
Spannweite	2, 4	Tachereisen bei Eisenbeton- konstruktionen	278
Spannweiten, größte (A 26; B 55, 56)	204	Tangentialgelenke s. Berührungs- gelenke	54
Spezifische Längenänderungen	17	Tangentialkraft, s. auch Querkraft	2
Sphärische Berührungsgelenke (§§ 13—15; B 14, 15)	56	Tangentialspannungen, s. a. Längs- schubspannungen, Querschub- spannungen, Schubspannungen, größte, in einem Punkte	2
Sphärische Umschließungsgelenke (§ 16)	66	Teilsystem	1
Sprengbogen	3	Telephondraht über den Wallensee von Quinten nach Murg (B 54)	204
Stabachse	4, 259		
Stabketten	204		
Stabkräfte (§§ 37, 52—58, 60; A 33, 34; B 51, 53, 74—76, 100—107, 111, 113—115; VI O, P), s. auch Gurtungen, Diagonalen, Verti- kalen	361, 362, 404		
Stabquerschnitte	4, 259		
Stäbe, Stabkräfte, notwendige	362, 406		
Stäbe, Stabkräfte, überzählige (§§ 57, 60)	362, 406		
Ständerfachwerke (§§ 53, 54; A 33, 34; B 100—124)	369		

	Seite		Seite
Temperaturänderungen (§§ 20—22, 24, 40—42, 44—51, 53, 56—60; <i>A</i> 7, 14, 15, 21, 24, 31, 32, 35, 38 bis 41, 44; <i>B</i> 27, 29—31, 33, 34, 37, 39, 42, 46, 48, 50, 53, 63, 67, 93—99, 108, 115, 117—120, 123, 124; VI B, J, M, R), s. auch Reduktion der Normaltemperatur	17, 75	Verrückungen eines Fachwerk-knotenpunktes (§ 59; <i>A</i> 35, 36, 40—42; <i>B</i> 120, 121, 123)	447
Temperaturunterschiede zwischen den Stirnflächen eines Gewölbes	228	Verrückungen, aktuelle	404
Theißbrücke bei Szegedin	396	Verrückungen, virtuelle	404
Tonnengewölbe, s. auch Gewölbe	212	Verrückungen, virtuelle, Prinzip derselben (§§ 56, 60; <i>A</i> 35, 36)	404, 460
Träger, s. auch Balken, Bogen, Gewölbe, Ketten usw.	2	Verschiebungsarbeit, Deformationsarbeit, Formänderungsarbeit (§§ 56, 57, 60)	403, 460
Träger, durchlaufende oder kontinuierliche, siehe auch Balken, Bogen und Bogenfachwerke, durchlaufende	2	Verschiebungsarbeit, Prinzip der kleinsten (§§ 57, 60)	408, 461
Träger, ebener	2	Verschiebungsarbeit, virtuelle (§§ 56, 57, 60; <i>A</i> 35, 36)	403, 460
Träger, einfacher, s. auch Balken, Bogen und Bogenfachwerke, einfache, Gewölbe, Ketten	2	Versteifungsträger b. Hängebrücken	203
Trägerebene	2, 4, 20	Versuche (§§ 4, 5, 15, 17, 31; <i>B</i> 16, 41, 65—67, auch S. 57, 258, 268, 278, 297, 500, 505, 515 usw.)	20
Trägerlänge, s. auch Achslänge	4	Verteilungsbreite, ideelle, bei Berücksichtigung der Querezentrität der Lasten auf Gewölben	228
Trägheitsmoment (§§ 6, 8; <i>A</i> 4—6 mit <i>B</i> 2—4; VI B, O, P, Q; auch S. 83, 127, 356 usw.)	21	Vertikalen bei Ständerfachwerken (§§ 53, 54, Fig. 227, 228, 242, 248; <i>A</i> 33, 34; <i>B</i> 100—110 usw.), s. auch Endvertikalen, Mittelvertikalen	370
Trägheitsradius (VI O, P)	501	Vertikalen bei Vollwandbogen (VI O, P)	500, 504
Transversalkraft s. Querkraft	5, 36	Vertikalkraft V_s in einem Schnitte s durch ein Fachwerk	363
Transversalspannungen oder Querschubspannungen gleich den Längsschubspannungen, s. diese	37	Vertikalkraft V_x in einem Querschnitt x (§§ 1, 19—21; <i>A</i> 1, 13; <i>B</i> 18, 19, 22, 41, 44, 45, 51, 64 usw.)	5
Überhöhung der Bogen (IV E, N), s. auch Horizontalschub, künstlicher, und Reduktion der Normaltemperatur	480, 499	Vertikalplatte bei Blechbogen und Blechbalken (§ 26; <i>B</i> 29; VI A, Q)	208
Überzählige Stäbe oder Stabkräfte u. Reaktionskomponenten (§§ 57, 58, 60; <i>A</i> 38, 39, 43, 44; <i>B</i> 108 bis 111, 114—119, 122, 124)	362, 406	Vertikalreaktionen (§§ 1, 2, 12, 19 bis 21, 24; <i>A</i> 1, 13, 16, 20; <i>B</i> 18, 19, 21—25, 29, 33, 41, 42, 44, 51, 53, 54, 63; VI A, G, L, N)	5
Umhüllungslinien der Kämpferdrücke siehe Kämpferdruckumhüllungslinien	10, 14	Viaurbrücke in Frankreich	187
Umschließungsgelenke (§§ 16, 17; <i>B</i> 17, VI L)	54	Virtuelle Arbeiten \mathfrak{A} , \mathfrak{U} , \mathfrak{a} der äußeren Kräfte (§§ 56, 57, 60; <i>A</i> 35, 36, 44)	403, 406, 447, 460
Ungünstigste Belastungen, s. Grenzwerte	395, 481	Virtuelle Arbeit \mathfrak{D} der inneren Kräfte oder virtuelle Verschiebungsarbeit (§§ 56, 57, 60; <i>A</i> 35, 36)	403, 460

	Seite		Seite
Virtuelle Verrückungen	404	Z-Gurtung bei Ständerfachwerken (§§ 53, 54, Fig. 227, 228, 242, 248; B 102—110 usw.)	370
Vorläufige Berechnungen (§§ 26, 58; B 118, 119, 124, VI A; auch S. 181, 463 usw.)	209, 438	Zapfengelenke (§§ 16, 17; B 17, VII)	54
Wälzgelenke (§§ 13—15; B 13, 15, 16)	55	Zugstange siehe Bogen mit Zug- stange	176, 185, 433
Widerlager	2	Zweigelenkbogen siehe Bogen mit zwei Gelenken u. Bogenfachwerke mit zwei Gelenken	3, 133, 361, 409
Widerlager, Ausweichen derselben, s. Stützenbewegungen	75	Zweigelenkbogen mit Zugstange (§§ 22, 23; A 23, 32, 35, 38; B 50, 116, 123), vergl. Bogen und Bogen- fachwerke mit Zugstange	177, 185, 433
Widerstandsmoment (§ 8; VI B, Q)	29	Zwischengelenke (§§ 19, 22, 23, 40, 45, 48, 55; A 3, 10—16, 22, 24, 34—36, 40, 41; B 9, 18—28, 49, 51, 100—103, 105—107), s. auch Gelenke	3
Wiener Bruchstein-Versuchsge- wölbe (§ 31; B 1, 42, 43, 48, 49, 63—67, 98, 99, auch S. 115)	233	Zylindrische Berührungsgelenke, Wälzgelenke, (§§ 13—15; B 13; 15, 16)	55
Wiener Gewölbeversuche (§ 31)	233	Zylindrische Umschließungsgelenke, Zapfengelenke, (§§ 16, 17; B 17, VI L)	66
Wiener Versuchs-Eisenbogen (§ 5)	20		
Winddruck (B 100, 103, auch S. 228, 392)	42, 228, 491		
Windverband (VI K)	491		
X-Gurtung bei Ständerfachwerken (§§ 53, 54, Fig. 227, 228, 242, 248; B 102—110 usw.)	370		
Zentrifugalmoment (VI O, P)	502, 506		



Fehlerverzeichnis.

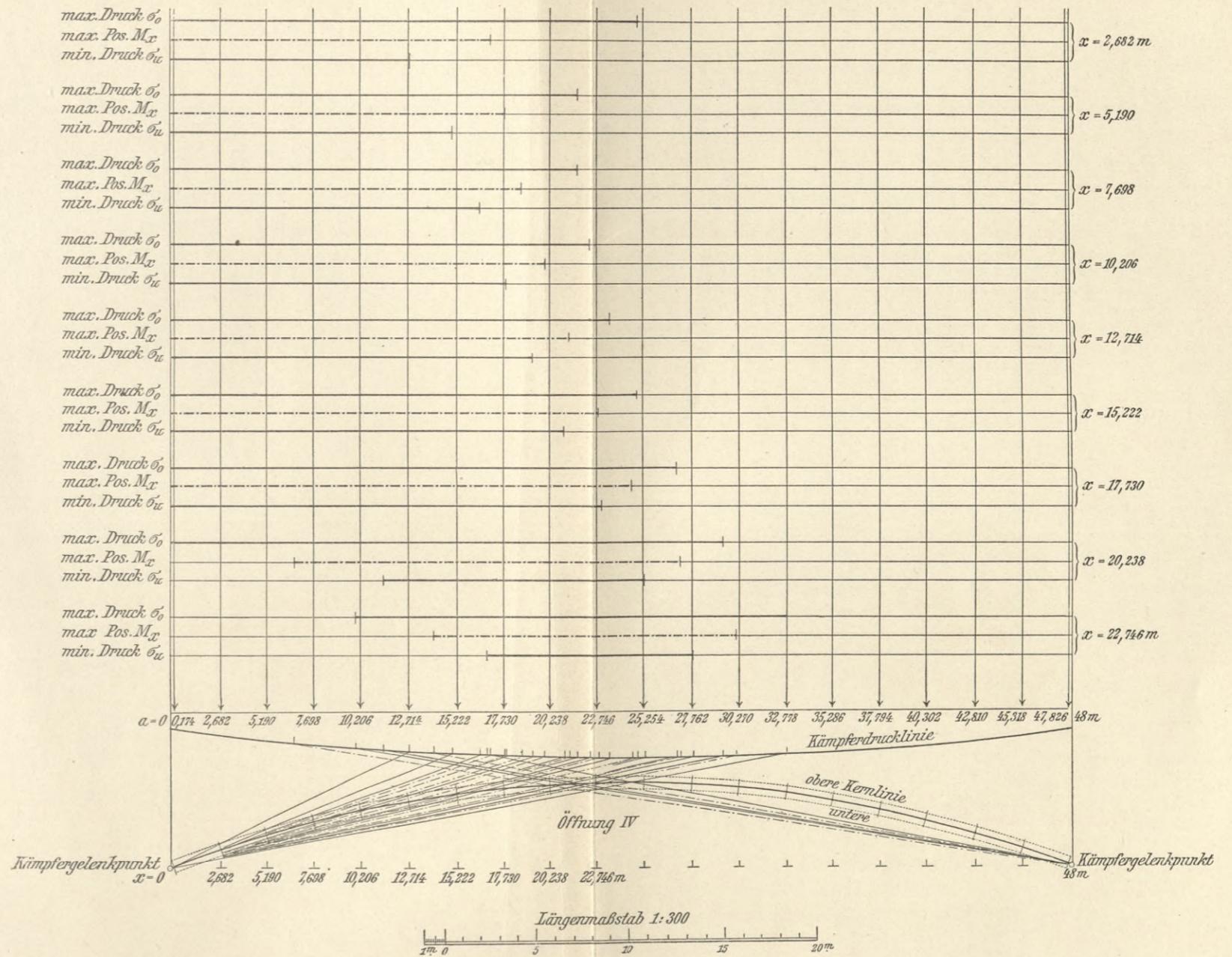
Seite	Zeile, Formel od. Figur	an Stelle von	zu setzen
18	Zeile 13 von unten	$\frac{d \Delta S}{d s}$	$\frac{d \Delta \varphi}{d s}$
18	Formel 9	$r \frac{v^2}{r+v} dF$	$r \int \frac{v^2}{r+v} dF$
21	Zeile 21 von oben	Brick	Brik
40	" 9 " "	Angriffspunkt	Angriffspunkte und Richtungen
40	" 10 " "	Fig. 35, 36	Fig. 44, 45
47	Formel 8	G	B
50	Fig. 57, links	für A	für V
50	" 57, rechts	für A	für V'
62	Fig. 69	P	R
64	" 72	$R \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$	$R \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^2$
74	" 85	e	e
75	Zeile 17 von oben	e	e
78	Formel 24	l	l^2
83	Zeile 20 von unten	angedeutete Betonbrücke	angedeuteten Betonbogen
85	Erste Formel	\sum_0^m	\sum_0^l
123	Formel 56	48	24
130	Zeile 10 von unten	g	mkg
131	" 14 " oben	8000,624	800,624
131	" 14 " unten	1888,68	1975,74
150	Fig. 131	0,65	0,675
189	Zeile 14 von oben	kg	kg
189	" 14 " unten	500	700
266	Zeile 9 von unten	Beziehungen	Bezeichnungen
282	Fig. 192, links	σ_a	σ_b
287	Fig. 201	Pfeilspitze oben	Pfeilspitze unten
395	Zeile 15 von unten	10, 11, 20, 22, 23, 33	10, 11, 20, 22
405	Formel 3	4	2
475	Zeile 1 von unten	1,8867	1,8876
480	Zeile 3 u. 16 von unten	486	488

Weitere selbständig erschienene Schriften des Verfassers:

- Grundriß der Wärmetheorie.** Mit zahlreichen Beispielen und Anwendungen. Nach Vorträgen an der Kgl. Technischen Hochschule in Stuttgart. Stuttgart, Verlag von Konrad Wittwer. Erste Hälfte, 324 S. gr. 8^o mit 107 Textfiguren 1905, zweite Hälfte, 412 S. gr. 8^o mit 128 Textfiguren 1907.
- Die Mechanik der Wärme,** in gesammelten Schriften von **Robert Mayer.** Dritte ergänzte und mit historisch-literarischen Mitteilungen versehene Auflage, herausgegeben von **Weyrauch.** Stuttgart, Verlag der J. G. Cotta'schen Buchhandlung Nachfolger, 1893. — 464 S. gr. 8^o mit einem Facsimile und zwei Bildnissen.
- Kleinere Schriften und Briefe von Robert Mayer,** nebst Mitteilungen aus seinem Leben, herausgegeben von **Weyrauch.** Stuttgart, Verlag der J. G. Cotta'schen Buchhandlung Nachfolger, 1893. — 503 S. gr. 8^o mit zwei Bildnissen.
- Robert Mayer, der Entdecker des Prinzips von der Erhaltung der Energie.** Aus Anlaß der Enthüllung seines Stuttgarter Denkmals. Stuttgart, Verlag von Konrad Wittwer, 1890. — 75 S. gr. 8^o mit dem Bildnisse Robert Mayers.
- Die Festigkeitseigenschaften und Methoden der Dimensionenberechnung** von Eisen- und Stahlkonstruktionen. Zweite vollständig neu bearbeitete Auflage. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner, 1888. — 223 S. gr. 8^o mit 4 Figurentafeln.
- Theorie der statisch bestimmten Träger** für Brücken und Dächer. Nach Vorträgen an der Technischen Hochschule zu Stuttgart. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner, 1887. — 366 S. gr. 8^o mit 20 Figurentafeln.
- Beispiele und Aufgaben zur Berechnung der statisch bestimmten Träger** für Brücken und Dächer. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner, 1888. — 532 S. gr. 8^o mit 20 Figurentafeln.
- Das Prinzip von der Erhaltung der Energie seit Robert Mayer.** Zur Orientierung. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner, 1885. — 48 S. gr. 8^o.
- Theorie elastischer Körper.** Eine Einleitung zur mathematischen Physik und technischen Mechanik. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner, 1884. — 279 S. gr. 8^o mit 42 Textfiguren.
- Aufgaben zur Theorie elastischer Körper.** Leipzig, Verlag von B. G. Teubner, 1885. — 350 S. gr. 8^o mit 110 Textfiguren.
- Theorie des Erddrucks auf Grund der neueren Anschauungen.** Wien, R. v. Waldheim, 1881. — 52 S. gr. 8^o mit 34 Textfiguren.
- Über die graphische Statik.** Zur Orientierung. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner, 1874. — 36 S. gr. 8^o mit Literaturverzeichnis.
- Allgemeine Theorie und Berechnung der kontinuierlichen und einfachen Träger.** Für den akademischen Unterricht und zum Gebrauch der Ingenieure. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner, 1873. — 176 S. gr. 8^o mit 4 Figurentafeln.
- Der Escher-Linth-Kanal.** Historisch-technische Studie. Zürich, Verlag von Orell, Füßli & Comp., 1868. — 131 S. gr. 8^o mit 2 Figurentafeln.
- Luegers Lexikon der gesamten Technik** und ihrer Hilfswissenschaften. Bearbeitung der Wärmetheorie, Elastizitätstheorie, Festigkeitslehre und Statik der Baukonstruktionen von **Weyrauch.** Zweite vollständig neu bearbeitete Auflage. Stuttgart und Leipzig, Deutsche Verlagsanstalt, 1904—1909.

Berechnung der König-Karls-Brücke über den Neckar bei Cannstatt.

Graphische Bestimmung der Belastungsstrecken für die Grenzwerte der Normalspannungen.



POLITECHNIKA KRAKOWSKA
BIBLIOTEKA GŁÓWNA

II 37024
L. inw.

Kdn. Zam. 480/55 20.000

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299796