

UNIWERSYTET POLITECHNICZNY KRAKÓW

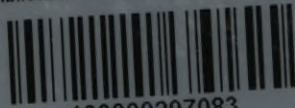
BIBLIOTEKA GŁÓWNA

I 1202

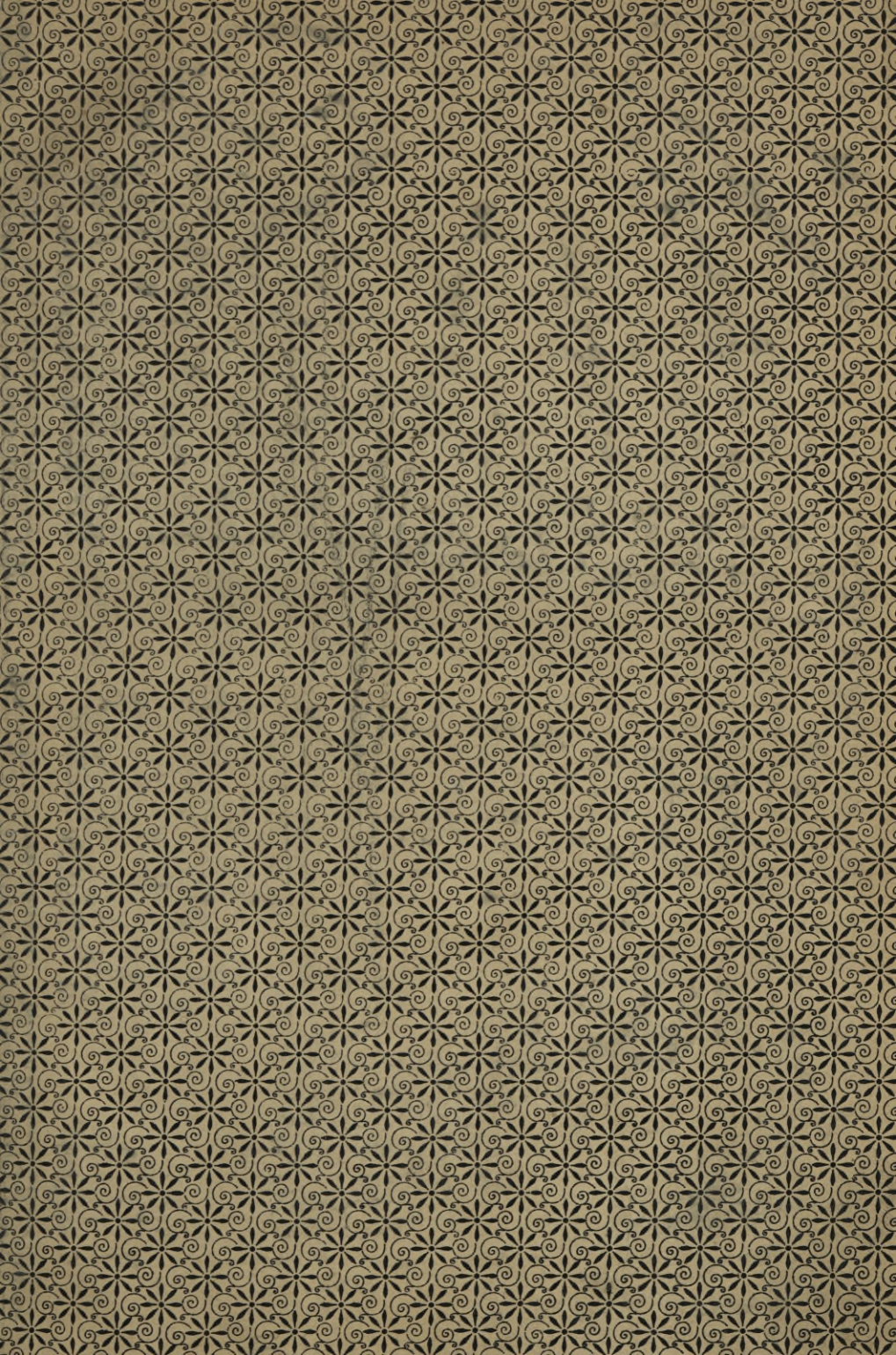
1202

inw.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000297083



H. F. B. MÜLLER-BRESLAU
GRAPHISCHE STATIK DER
BAUKONSTRUKTIONEN.

DIE

GRAPHISCHE STATIK

DER

BAUKONSTRUKTIONEN

VON

HEINRICH F. B. MÜLLER-BRESLAU,
GEH. REGIERUNGSRATH UND PROFESSOR AN DER KGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE
IN BERLIN.

Dritte wesentlich vermehrte Auflage.

Band I.

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte in der Ebene. — Trägheitsmomente und Centrifugalmomente ebener Querschnitte; Spannungen in geraden Stäben. — Theorie der statisch bestimmten Träger mit Ausschluss der Untersuchung der Formänderungen.

Mit 541 Textfiguren und 7 lithograph. Tafeln.

LEIPZIG,
Baumgärtner's Buchhandlung.

1901.

GRAPHISCHE STATIK

BAUKONSTRUKTIONEN

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

Akc. Nr. 145 | 47

II. 1202

Vorwort.

Die vorige Auflage dieses ersten Bandes meiner *Graphischen Statik der Baukonstruktionen* erschien 1887; sie war inzwischen durch zwei unveränderte Neudrucke ergänzt worden und hatte schliesslich länger als ein Jahr auf dem Büchermarkte ganz gefehlt, weil die Umarbeitung einiger Abschnitte mehr Zeit in Anspruch genommen hat, als sich vorher übersehen liess.

In der neuen, dritten Auflage ist der erste, die wichtigsten Sätze über das Kräftepolygon und das Seilpolygon enthaltende Abschnitt ungeändert geblieben, die Abschnitte II und III, die von den Trägheitsmomenten und Centrifugalmomenten und den Normalspannungen σ in geraden Stäben handeln, sind wesentlich erweitert worden. Besonderer Werth wurde auf Gewinnung einfacher Formeln gelegt, welche die Berechnung der Spannungen σ und die Bestimmung des Kerns ohne Zuhilfenahme der Hauptachsen und Hauptträgheitsmomente gestatten. Ueber die Schubspannungen in Folge einer durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehenden Querkraft ist nur das nöthigste mitgetheilt worden; auf die Drehungsfestigkeit wurde gar nicht eingegangen. In beiden Fällen liegen Aufgaben der Festigkeitslehre vor, die auf eine Integration partieller Differentialgleichungen mit meistens ausserordentlich schwierigen Grenzbedingungen führen und deshalb nicht in den Rahmen dieses Buches passen.

Den Hauptinhalt des vorliegenden Bandes bildet die Theorie der statisch bestimmten ebenen Träger, bei deren Ausarbeitung die grösste Vollständigkeit und grösste Einfachheit angestrebt worden ist. Von der vorigen Auflage bin ich insofern abgewichen, als ich diesmal die allgemeine Theorie des Fachwerks an den Schluss gestellt habe. So einfach die Aufgaben dieser Theorie auch immer sein mögen, sie bieten erfahrungsgemäss dem Anfänger — und an solche wendet sich dieser

erste Band — stets Schwierigkeiten, und da schliesslich das Endziel dieser allgemeinen Untersuchungen die planmässige Zurückführung schwierigerer Fälle auf leichtere ist, so erschien es mir am zweckmässigsten, mit den einfacheren Aufgaben zu beginnen und die umfangreiche, die Mehrzahl der Anwendungen umfassende Theorie des Dreiecksystems voranzustellen.

Hinsichtlich der Aufgaben über die Berechnung von Eisenbahnbrücken verweise ich besonders auf die während der Drucklegung dieses Buches erschienenen und im Nachtrage mitgetheilten neuen Belastungsvorschläge und auf das auf Seite 121 gesagte. Auch bemerke ich zu den aus der vorigen Auflage übernommenen Beispielen, dass die ausführliche Theorie der Brückenträger mit Gegendiagonalen noch nicht entbehrt werden kann, trotzdem neuerdings Träger mit steifen Diagonalen bevorzugt werden; allein die Umrechnung der älteren Brücken für die erheblich gestiegene Verkehrsbelastung verlangt ein Eingehen auf die Wirkungsweise der Gegendiagonalen.

Grunewald bei Berlin, den 15. März 1901.

H. Müller-Breslau.

Inhalt.

Seite

Einleitung	1
----------------------	---

I. Abschnitt.

Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften. Statische Momente.

1. Zusammensetzung der Kräfte in der Ebene. Gleichgewichtsbedingungen	3
2. Zerlegung der Kräfte in der Ebene	13
3. Von den statischen Momenten der Kräfte	15
4. Zusammensetzung der Kräfte im Raume	20

II. Abschnitt.

Höhere Momente paralleler, in derselben Ebene wirkender Kräfte.
Trägheitsmomente und Centrifugalmomente ebener Querschnitte.

5. Höhere Momente paralleler Kräfte	23
6. Trägheitsmomente und Centrifugalmomente ebener Querschnitte	26
7. Beziehungen zwischen den Trägheitsmomenten und Centrifugalmomenten für Achsen, welche durch einen und denselben Punkt gehen	44
8. Die Trägheitseellipse	53

III. Abschnitt.

Spannungen in geraden Stäben.

9. Die Normalspannungen	55
10. Der Kern des Querschnittes	73
11. Druckbelastung ausserhalb des Kerns bei Ausschluss von Zugfestigkeit	86
12. Schubspannungen und Hauptspannungen	101

IV. Abschnitt.

Einleitung in die Theorie der ebenen Träger.

13. Allgemeines über die äusseren Kräfte	109
14. Allgemeines über Einflusslinien	115

V. Abschnitt.

Querkräfte und Angriffsmomente für den einfachen Balken.

15. Ständige, unmittelbar wirkende Belastung	123
16. Ständige mittelbare Belastung	126
17. Einflusslinien. Grenzwerte von Q und M bei gleichförmiger ständiger und beweglicher Belastung	128
18. Die veränderliche Belastung besteht aus einem verschiebbaren Systeme von Einzellasten	136
19. Verwerthung der Einflusslinien des einfachen Balkens	157

VI. Abschnitt.

Querkräfte und Momente für den Gerber'schen Balken.

20. Beliebige ständige Belastung	159
21. Einflusslinien. Belastung durch ein verschiebbares System von Einzellasten	164
22. Gleichmässige Belastung	172

VII. Abschnitt.

Der vollwandige Bogen mit drei Gelenken.

23. Belastung durch beliebig gerichtete Kräfte	176
24. Belastung durch senkrechte Kräfte	182

VIII. Abschnitt.

Einleitung in die Theorie des ebenen Fachwerks.

25.	Erklärungen und Voraussetzungen	208
26.	Bestimmung der Spannkkräfte im Dreiecknetze nach den Verfahren von <i>Culmann</i> und <i>Ritter</i>	210
27.	Die Kräftepläne <i>Cremona's</i>	213
28.	Einfluss von Kräften, welche nicht in den Knotenpunkten angreifen	222
29.	Kräftepläne für Polonceau-Träger, in Verbindung mit einigen allgemeineren Untersuchungen	227

IX. Abschnitt.

Der einfache Fachwerkbalken.

30.	Die ungünstige Belastungsweise. Einflusslinien.	234
31.	Spannkkräfte in den Gurtungen	243
32.	Spannkkräfte in den Füllungsstäben	243
33.	Das Zimmermann'sche Verfahren	241
34.	Fachwerkträger mit Gegendiagonalen	273
35.	Gleichmässig belastete Parabelträger mit Gegendiagonalen	291
36.	Kräfteplan für einen Parallelträger (Eisenbahnbrücke)	300
37.	Kräfteplan für einen Fischbauchträger (Eisenbahnbrücke)	305
38.	Kräfteplan für einen Halbparabelträger (Eisenbahnbrücke) und Entwicklung einiger allgemeiner Formeln	301
39.	Ueber die Berechnung von Dachbindern	329

X. Abschnitt.

Der Gerber'sche Fachwerkbalken.

40.	Einflusslinien	330
41.	Kräfteplan für eine Eisenbahnbrücke mit Gerber'schen Balken	339
42.	Gerber'scher Fachwerkbalken mit Gelenkvierecken	354
43.	Gerber'scher Balken mit Hängegurtung	361

XI. Abschnitt.

Der Fachwerkbogen mit drei Gelenken.

44.	Anwendung der Verfahren von <i>Culmann</i> und <i>Ritter</i>	366
45.	Belastung durch senkrecht gerichtete Kräfte	371
46.	Zahlenbeispiel. Einflusslinien für einen Bogenträger von 30 m Stützweite	383

XII. Abschnitt.

Statisch bestimmte Hängebrücken und Gelenkbögen, versteift durch Balken.

47.	Hängebrücken, deren Hauptträger aus einfachen Dreiecknetzen bestehen	389
48.	Kette, versteift durch einen Balken	404
49.	Gelenkbogen, versteift durch einen Balken	422
50.	Verwerthung der Kettenlinie zur Linienführung der Gurtungen	427

XIII. Abschnitt.

Allgemeine Theorie des statisch bestimmten ebenen Fachwerks.

51.	Analytische Untersuchung	438
52.	Kinematische Theorie des Fachwerks	455
53.	Aufgaben über mehrtheilige Fachwerkbalken	501

Nachtrag.

I.	Neue Belastungsvorschläge für Eisenbahnbrücken	536
II.	Neue Belastungsvorschriften für die preussischen Staatsbahnen	538
III.	Zahlenbeispiele für die Benutzung der Tabellen	542
IV.	Zusammenstellung verschiedener Gewichtsvertheilungen für Lokomotiven und Tender	550

Literatur.

Literatur zu den Abschnitten I, II und III	552
Literatur zu den Abschnitten IV bis XIII, enthaltend die Theorie der statisch bestimmten ebenen Träger	553

Einleitung.

Die graphische Statik lehrt die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte auf geometrischem Wege und entwickelt in gleicher Art die Bedingungen, unter denen sich die auf einen Körper wirkenden Kräfte im Gleichgewichte befinden. Auch führt sie andere Aufgaben, z. B. die Ermittlung von Schwerpunkten und Trägheitsmomenten, die Bestimmung der Formänderungen fester Körper, auf Aufgaben über Kräfte zurück, wobei sie vielfach an analytische Untersuchungen anknüpft und diese auf zeichnerischem Wege zu Ende führt oder deren Ergebnisse geometrisch deutet.

Die Grösse und Lage einer Kraft wird in der graphischen Statik durch die Länge und Lage einer geraden Linie dargestellt. Eine Kraft ist der Lage nach bekannt, sobald ihre Richtung und ein Punkt, durch welchen diese Richtung geht, gegeben ist; ihre unzweideutige Bestimmung erfordert ferner die Hervorhebung des Sinnes, in welchem sie in der angegebenen Richtung wirkt. Dies geschieht am übersichtlichsten durch einen Pfeil, oder, falls die Kraft bei der Beschreibung einer Figur mittels der Zeichen ihres Anfangspunktes und Endpunktes angedeutet werden soll, durch die Aufeinanderfolge dieser Zeichen im Sinne der Kraft. Man sagt: Die Kraft P in Fig. 1 wird durch die Strecke ab dargestellt, weil sie von a nach b wirkt, und die Kraft P in Fig. 2 durch die Strecke ba , weil sie von b nach a wirkt.

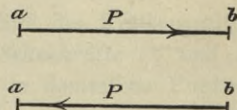


Fig. 1 u. 2.

Die graphische Darstellung der an einem Körper angreifenden Kräfte nennt man einen *Kräfteplan*. Die Aufzeichnung eines solchen setzt die Bildung eines *Kräftemaassstabes* voraus. In der Regel werden

wir festsetzen, dass einer Strecke von 1^{'''} Länge die Grösse einer Kraft von m Kilogrammen = $\frac{m}{1000}$ Tonnen gleichwerthig ist, so dass z. B. in einem im Maassstabe 10^{'''} = 2000^k = 2^t gezeichneten Kräfteplane durch eine Strecke von 62^{'''} Länge eine Kraft von 12,4^t dargestellt wird.

Einleitung

Die graphische Statik lehrt die Zusammenfassung und Veranschaulichung der Kräfte auf geometrischem Wege und entwickelt in gleicher Art die Bedingungen, unter denen sich die auf einem Körper wirkenden Kräfte im Gleichgewichte befinden. Auch führt sie andere Aufgaben, z. B. die Ermittlung von Schwerpunkten und Torsionsmomenten, die Bestimmung der Formänderungen fester Körper, auf Aufgaben über Kräfte zurück, wobei sie vielfach an analytische Untersuchungen anknüpft und diese auf rationalem Wege zu Ende führt, ohne dass eigentliche geometrische Beweise erforderlich sind.

Die Grösse und Lage einer Kraft wird in der graphischen Statik durch die Länge und Lage einer gewissen Linie dargestellt. Eine Kraft ist der Länge nach bekannt, sobald ihre Richtung und der Punkt, durch welchen diese Richtung geht, gegeben ist. Ihre wirkende Bestimmung erfordert ferner die Hervorhebung des Sinnes, in welchem sie in der angegebenen Richtung wirkt. Dies geschieht am übersichtlichsten durch einen Pfeil, oder, falls die Kraft bei der Hervorhebung einer Figur mittels der Kräfte ihrer Richtungen und Richtungen angegeben werden soll, durch die Richtungsbedeutung dieses Pfeiles im Sinne der Kraft. Man sagt: Die Kraft P ist die Kraft Q gleichwerthig, wenn die Strecke AB der Geraden AB in Fig. 1 gleichwerthig nach AB ist, und die Kraft Q in Fig. 2 gleichwerthig nach BC ist, weil sie von B nach A wirkt.

Die graphische Darstellung der an einem Körper wirkenden Kräfte muss man eben Kräfteplan. Die Abzeichnung eines solchen Kräfteplanes geschieht nach folgenden Regeln. In der Regel werden

I. Abschnitt.

Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften. Statische Momente.

§ 1.

Zusammensetzung der Kräfte in der Ebene. Gleichgewichtsbedingungen.

1. **Zusammensetzung von zwei Kräften.** Greifen an einem Punkte a zwei Kräfte P_1 und P_2 an, deren Richtungen und Grössen durch die Richtungen und die Längen der Strecken ab und ad dargestellt sind (Fig. 3a), so ist bekanntlich ihre *Mittelkraft* R gleich der Diagonale ac des über ihnen beschriebenen Parallelogrammes $abcd$. Man erhält aber auch R , indem man die beiden gegebenen Kräfte P_1 und P_2 nach Grösse, Richtung und Sinn aneinander setzt, entweder in der Reihenfolge P_2, P_1 (Fig. 3b) oder in der Reihenfolge P_1, P_2 (Fig. 3c), und

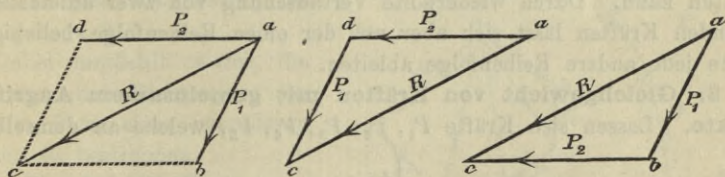


Fig. 3a, b u. c.

den Anfangspunkt a des so erhaltenen Kräftezuges mit dessen Endpunkte c durch die Gerade ac verbindet. Die Dreiecke adc und abc nennt man *Kräftedreiecke*.

Umgekehrt lässt sich eine Kraft R mit Hilfe des Kräfteparallelogrammes (bez. eines Kräftedreiecks) in zwei *Seitenkräfte* P_1 und P_2 , deren Richtungen gegeben sind, und welche R in demselben Punkte a schneiden, eindeutig zerlegen.

2. **Zusammensetzung beliebiger Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkte.** Fig. 4a und b. Sollen mehrere an demselben Punkte a angreifende Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 zu einer Mittelkraft R vereinigt werden, so setzt man (am zweckmässigsten in einer besonderen Figur)

P_1 und P_2 mittels des Kräfte dreiecks abc zu der Mittelkraft R_{1-2} zusammen, hierauf R_{1-2} mit P_3 zur R_{1-3} und diese schliesslich mit P_4 zur $R_{1-4} = R$.

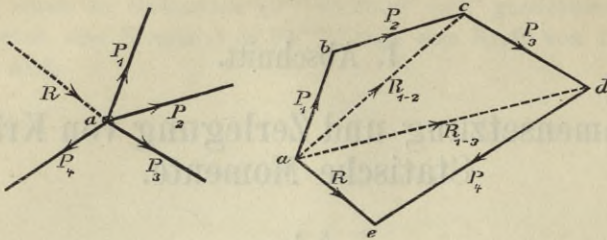


Fig. 4a u. b.

Zu demselben Ergebnisse gelangt man, wenn man P_1, P_2, P_3, P_4 nach Grösse, Richtung und Sinn zu dem Kräftezuge $abcde$ aneinander reiht und hierauf den Anfangspunkt a und den Endpunkt e desselben durch die Gerade $\overline{ae} = R$ verbindet.

Man sagt auch: Die Mittelkraft $\overline{ae} = R$ *unterspannt* den aus den Kräften P_1, P_2, P_3, P_4 gebildeten Kräftezug $abcde$.

Die Reihenfolge, in welcher die Kräfte P miteinander zusammengesetzt werden, ist gleichgültig; denn es wurde vorhin gezeigt, dass man die Mittelkraft zweier Kräfte P_1 und P_2 durch Unterspannen sowohl des Kräftezuges $P_2 P_1$ (Fig. 3 b) als auch des Zuges $P_1 P_2$ (Fig. 3 c) erhalten kann. Durch wiederholte Vertauschung von zwei aufeinander folgenden Kräften lässt sich aber aus der einen Reihenfolge beliebiger Kräfte jede andere Reihenfolge ableiten.

3. Gleichgewicht von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkte. Lassen sich Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , welche an demselben

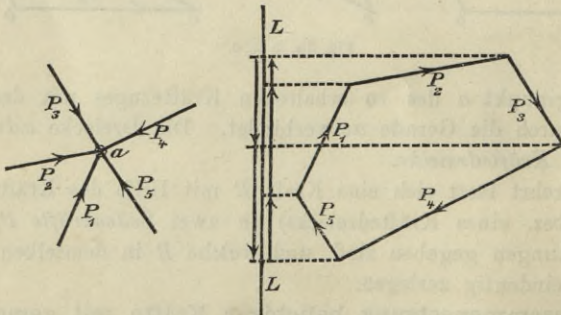


Fig. 5a u. b.

Punkte a angreifen (Fig. 5a) nach Grösse, Richtung und Sinn zu einem geschlossenen Kräftepolygone (Fig. 5b) aneinanderreihen, so ist ihre

Mittelkraft = 0. Es sind dann die Kräfte P mit einander im Gleichgewicht. Projicirt man das Kräftepolygon auf irgend eine Gerade LL und denkt jede der Kräfte P in eine Seitenkraft parallel zu LL und eine lothrecht zu LL zerlegt, so findet man, dass die Summe der nach der Richtung LL gebildeten Seitenkräfte, d. i. die Summe der Projektionen der Kräfte P auf die Gerade LL gleich Null ist.

Hervorzuheben ist, dass ein Kräftepolygon nur dann geschlossen heisst, wenn sich in demselben nie zwei Pfeile begegnen, wenn man also das Polygon, den Pfeilen folgend, ohne Unterbrechung umfahren kann.

Man sagt auch: Das Kräftepolygon in Fig. 5 b besitzt einen *stetigen Umfassungssinn*, während das Kräftepolygon in Fig. 4 b durch den Pfeil der Kraft R *unstetig* wird.

Keht man in einem geschlossenen Kräftepolygone den Sinn irgend einer Kraft um, so wird diese Kraft zur Mittelkraft aus allen übrigen.

4. Zusammensetzung von Kräften mit beliebigen Angriffspunkten. Wird die Mittelkraft R von Kräften $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$ gesucht, welche nicht an demselben Punkte angreifen, so denke man P_1 und P_2 in ihren Richtungen so weit verschoben, dass ihr Schnittpunkt gemeinsamer Angriffspunkt wird, und setze sie dann zur Kraft R_{1-2} zusammen. Hierauf vereinige man in gleicher Weise R_{1-2} mit P_3 zur R_{1-3} , diese letztere Kraft mit P_4 zur R_{1-4} u. s. f.

Dabei empfiehlt es sich, die Grössen und Richtungen der Kräfte R in einer besonderen Figur zu bestimmen.

In Fig. 6 ist die Zusammensetzung der Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 auf die beschriebene Weise ausgeführt worden. Nach Aneinanderreihung derselben zu dem stetigen Kräftezuge $abcdef$ ergaben sich (nach Grösse und Richtung) die Mittelkräfte

$$\overline{ac} = R_{1-2}; \quad \overline{ad} = R_{1-3}; \\ \overline{ae} = R_{1-4}; \quad \overline{af} = R_{1-5} = R.$$

Nun wurde durch den Schnittpunkt A von P_1 und P_2 eine Parallele zur R_{1-2} gezogen, welche P_3

in B schneidet, von hier aus eine Parallele zur R_{1-3} bis zu ihrem

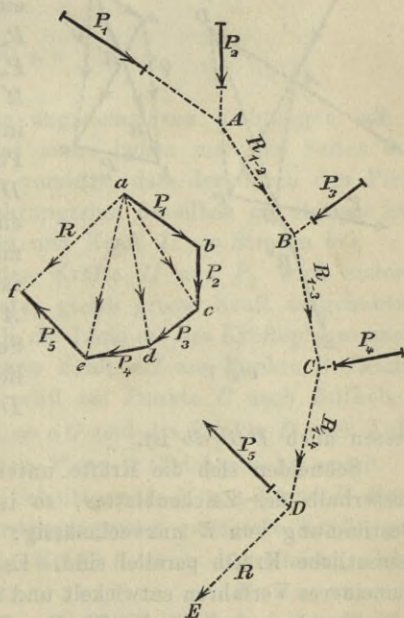


Fig. 6.

Schnittpunkt C mit P_4 , sodann von C aus eine Parallele zur R_{1-4} , welche P_5 in D trifft, und schliesslich die Gerade $DE \parallel R_{1-5}$. Es liegt dann die R_{1-2} in der Geraden AB , die R_{1-3} in der BC , die R_{1-4} in der CD und die R_{1-5} in der Geraden DE . Das Polygon $ABCDE$ heisst ein *Mittelkraftspolygon* der Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 . Da man die Ordnung, in der die gegebenen Kräfte miteinander zusammengesetzt werden, verschiedenartig wählen kann, ist man im Stande, verschiedene Mittelkraftspolygone zu zeichnen. Die letzten Seiten aller dieser Polygone decken sich, denn die Lage von R_{1-5} ist unabhängig von der Wahl jener Ordnung.

Um dies zu beweisen, genügt es, darzuthun, dass die Aenderung der Reihenfolge von zwei Kräften P_n und P_{n+1} ohne Einfluss auf die Lage von R ist, weil durch die Wiederholung einer solchen Aenderung aus der einen Reihenfolge jede andere abgeleitet werden kann.

Wird die Mittelkraft R' der Kräfte P_1 bis P_{n-1} zuerst mit P_n zur Kraft Q' (Fig. 7) und hierauf mit P_{n+1} zur R'' zusammengesetzt, so

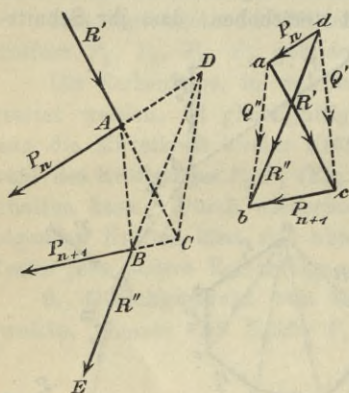


Fig. 7.

ergibt sich das Mittelkraftspolygon ABE , in welchem $AB \parallel dc$ ist. Vereinigt man hingegen R' zuerst mit P_{n+1} zur Q'' und hierauf Q'' mit P_n zur R'' , so muss man die Kraft R' soweit verlängern, bis sie P_{n+1} in C schneidet, von C aus eine Parallele zur Q'' ziehen, welche P_n in D trifft und schliesslich von D aus eine Parallele zur R'' . Diese fällt aber mit der vorhin gefundenen R'' zusammen, weil in den beiden Vierecken $ABCD$ und $abcd$ fünf entsprechende Seiten einander parallel sind, nämlich $AB \parallel dc$, $BC \parallel bc$, $CD \parallel ba$, $DA \parallel da$, $AC \parallel ac$, und in Folge

dessen auch $DB \parallel db$ ist.

Schneiden sich die Kräfte unter sehr spitzen Winkeln, womöglich ausserhalb des Zeichenblattes, so ist das beschriebene Verfahren zur Bestimmung von R unzweckmässig; dasselbe wird unbrauchbar, sobald sämtliche Kräfte parallel sind. Es soll deshalb noch ein zweites allgemeineres Verfahren entwickelt und zunächst die Aufgabe gelöst werden:

Gegeben sind die Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 (Fig. 8a), welche nicht an demselben Punkte angreifen und auch parallel sein können; gesucht ist die Grösse und die Lage derjenigen Kraft R , die zur *Herstellung des Gleichgewichts* hinzugefügt werden muss.

Zuerst werden die Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 zu dem Kräftezuge $abcde$ (Fig. 8b) aneinandergereiht und dieser durch die Gerade ea geschlossen. Es ist dann ea nach Grösse, Richtung und Sinn $= R$. Um die Lage von R in Fig. 8a zu bestimmen, wird die Kraft P_1 durch zwei beliebig gerichtete Kräfte I und II , deren Angriffspunkt A in der Richtung von P_1 willkürlich gewählt werden darf, aufgehoben. Die Grössen von I und II werden im Kräfteplane (Fig. 8b) durch Ziehen

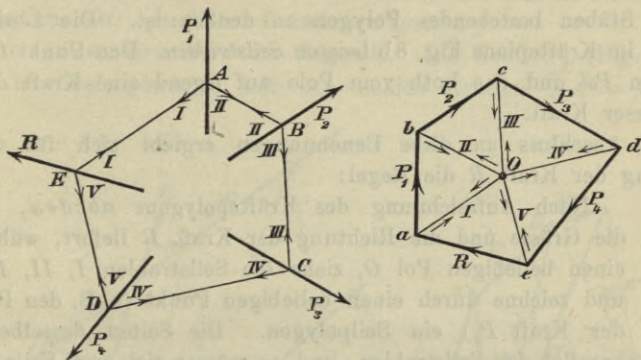


Fig. 8a u. b.

der Parallelen aO und bO zu den angenommenen Richtungen von I und II erhalten. Ihren Sinn findet man, indem man die Seiten des Kräftedreiecks abO so mit Pfeilen versieht, dass der durch den Pfeil der Kraft P_1 vorgeschriebene Umfahrungssinn desselben ein stetiger ist. Man erhält: Kraft $I =$ Strecke Oa und Kraft $II =$ Strecke bO .

Im Schnittpunkte B der beiden Kräfte II und P_2 wird erstere durch eine entgegengesetzt gerichtete, gleich grosse Kraft aufgehoben, worauf durch Hinzufügen der durch die Linie cO des Kräfteplanes nach Grösse, Richtung und Sinn gegebenen Kraft III am Punkte B Gleichgewicht hergestellt wird. Ebenso wird am Punkte C nach Aufheben von III durch Hinzufügen von $IV = \overline{dO}$ und am Punkte D nach Aufheben von IV durch Hinzufügen von $V = \overline{eO}$ Gleichgewicht erzielt.

Nachdem schliesslich noch im Schnittpunkte E von I und V diese Kräfte durch gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete Kräfte getilgt worden sind, wird durch die Kraft $R = ea$ das Gleichgewicht auch an dem Punkte E hergestellt.

Da nun an jedem der Punkte A, B, C, D, E drei im Gleichgewichte befindliche Kräfte angreifen und die Kräfte I, II, III, IV und V sich paarweise aufheben, ist R mit den Kräften P_1, P_2, P_3 und P_4 im Gleichgewichte.

Das Polygon $ABCDEA$ kann man als die Mittellinie eines Seiles betrachten, an welchem die Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 und R angreifen, und in dessen Seiten die Spannkkräfte (Seilkräfte) I, II, III, IV, V entstehen. Deshalb nennt man $ABCDEA$ ein *Seilpolygon* oder auch ein *Gelenkpolygon*. Die erste gebräuchlichere Bezeichnung ist allerdings weniger zutreffend, da, falls die in Fig. 8a angenommenen Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 und R sämtlich umgekehrt werden, in den Polygonseiten Drücke entstehen, und an Stelle des Seiles ein aus druckwiderstandsfähigen Stäben bestehendes Polygon zu denken ist. Die Linien $Oa, Ob \dots$ im Kräfteplane Fig. 8b heissen *Seilstrahlen*. Den Punkt O nennt man den *Pol* und das Loth vom Pole auf irgend eine Kraft die *Polweite* dieser Kraft.

Im Anschluss an diese Benennungen ergibt sich für die Bestimmung der Kraft R die Regel:

Nach Aufzeichnung des Kräftepolygons $abcdea$, welches die Grösse und die Richtung der Kraft R liefert, wähle man einen beliebigen Pol O , ziehe die Seilstrahlen $I, II, III \dots$ und zeichne durch einen beliebigen Punkt (z. B. den Punkt A der Kraft P_1) ein Seilpolygon. Die Seiten desselben sind parallel den Seilstrahlen, und es müssen sich zwei Seilpolygonseiten stets mit derjenigen Kraft P in einem Punkte schneiden, welche mit den zugeordneten Seilstrahlen ein Dreieck bildet. Durch den Schnittpunkt der ersten und letzten Polygonseite geht die Kraft R .

Die erste und letzte Seilpolygonseite nennen wir in der Folge die *äussersten Seiten für die fragliche Gruppe von Kräften*. So sind z. B. II und IV die beiden äussersten Seiten für die Gruppe (P_2, P_3) .

Ist die Aufgabe gestellt, die Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 zu einer *Mittelkraft* zu vereinigen, so hat man nur nöthig, die das Gleichgewicht herstellende Kraft R durch eine gleich grosse, entgegengesetzt wirkende zu ersetzen.

Zur Fig. 6 bemerken wir nachträglich, dass das Mittelkraftspolygon $ABCDE$ als ein Seilpolygon anzusehen ist, dessen Pol mit dem Anfangspunkte a des Kräftezuges $abcdef$ zusammenfällt. Den Begriff *Mittelkraftspolygon* aber erweitern wir noch, indem wir ihn auf jedes Seilpolygon ausdehnen, dessen Pol irgend ein Eckpunkt des Kräftepolygons ist. Die vom Pole aus gezogenen Strahlen sind in diesem Falle Seiten des Kräftepolygons oder die Mittelkräfte der durch sie unterspannten gegebenen Kräfte.

5. Beziehung zwischen zwei Seilpolygonen, die aus verschiedenen Polen zu denselben Kräften gezeichnet werden. Fig. 9a u. 9b. Sind I, II, \dots die vom Pole O aus gezogenen Seil-

strahlen und I' , II' , ... die zum Pole O' gehörigen, und bringt man die entsprechenden Seilpolygonseiten, nämlich I und I' , ferner II und II' u. s. w. mit einander zum Schnitt, so liegen alle diese Schnittpunkte auf einer Geraden, welche der Verbindungslinie OO' der beiden Pole parallel ist. Denn in den beiden Vierecken $ABOO'$ und $abcd$ sind 5 entsprechende Seiten einander parallel, nämlich $ad \parallel AO'$, $bc \parallel BO$, $dc \parallel AB$, $ac \parallel AO$ und $db \parallel O'B$. Es muss mithin auch $ab \parallel O'O$ sein. Ebenso folgt, dass $be \parallel O'O$ und $ia \parallel O'O$ ist, dass also die Punkte $iabe$ auf einer zur OO' parallelen Geraden liegen.

Ein zweiter Beweis ist der folgende. Die Kraft P_2 (Fig. 9 b) ist sowohl im Gleichwichte mit den beiden Kräften $\overline{OA} = II'$ und

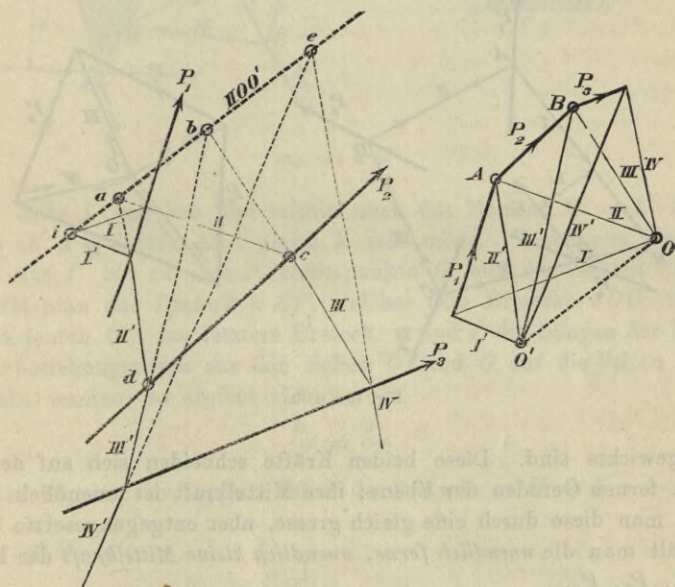


Fig. 9 a u. b.

$\overline{BO'} = III'$, als auch mit den beiden Kräften $\overline{OA} = II$ und $\overline{BO} = III$, und es müssen sich daher die 4 Kräfte $O'A$, BO' , $-\overline{OA} = AO$, $-\overline{BO} = OB$ das Gleichgewicht halten. Die Mittelkraft aus $\overline{OA} = II'$ und $\overline{AO} = II$ geht in Fig. 9a durch den Schnittpunkt a der Seilpolygonseiten II' und II , und die Mittelkraft aus $\overline{OB} = III$ und $\overline{BO'} = III'$ geht durch den Punkt b . Beide Mittelkräfte sind parallel zur Geraden OO' ; sie müssen sich gegenseitig tilgen, und dies ist nur möglich, wenn die Gerade $ab \parallel OO'$ ist. In gleicher Weise kann man schliessen, dass $ia \parallel OO'$ und $be \parallel OO'$ sein muss.

6. Eine unendlich ferne, unendlich kleine Kraft als Mittelkraft endlicher Kräfte. Das Kräftepaar. Entspricht den Kräften P_1, P_2, P_3 und P_4 (Fig. 10) ein geschlossenes Kräftepolygon, so ist die Mittelkraft gleich Null. Das mit dem Pole O gezeichnete Seilpolygon $ABCD$ wird sich im Allgemeinen nicht schliessen. Denkt man dann in den Punkten A, B, C, D die Seilkräfte thätig, so wird Gleichgewicht herrschen, da an jedem dieser Punkte drei miteinander im Gleichgewichte befindliche Kräfte angreifen. Nun heben sich aber von den Seilkräften nur die II, III, IV paarweise auf, so dass die Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 nicht für sich allein, sondern mit den beiden Kräften I im

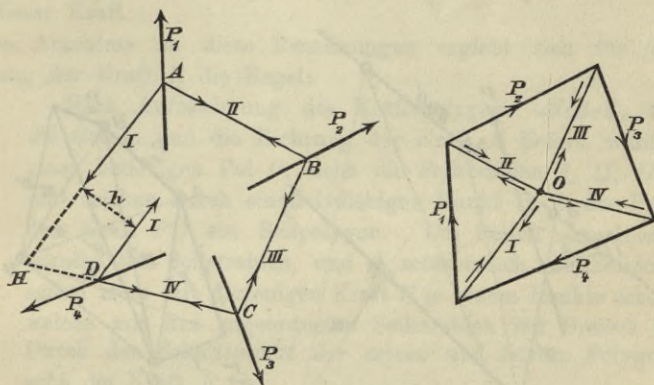


Fig. 10 a u. b.

Gleichgewichte sind. Diese beiden Kräfte schneiden sich auf der unendlich fernen Geraden der Ebene; ihre Mittelkraft ist unendlich klein; ersetzt man diese durch eine gleich grosse, aber entgegengesetzte Kraft, so erhält man die *unendlich ferne, unendlich kleine Mittelkraft* der Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 .

Die Kräfte I in Fig. 10 a bilden ein *Kräftepaar*; ihren gegenseitigen Abstand h nennt man den *Arm* und das Produkt

$$M = I \cdot h$$

aus Kraft und Arm das *Moment des Kräftepaares*; dasselbe ist *unabhängig von der Lage des Poles* und wird deshalb als das Maass des Kräftepaares beziehungsweise der diesem gleich zu achtenden unendlich fernen, unendlich kleinen Kraft angesehen.

Der Beweis für diesen Satz ist folgender. Ist O' ein neuer Pol (Fig. 11), so ist die Gerade, welche den Schnittpunkt E der einander entsprechenden ersten Seilpolygonseiten I und I' mit dem Schnittpunkte F der einander entsprechenden letzten Seiten IV und IV' verbindet, parallel

zur Verbindungslinie OO' der beiden Pole. Hiernach ist bei angenommener Lage der ersten Seite I' des neuen Seilpolygons die Lage der

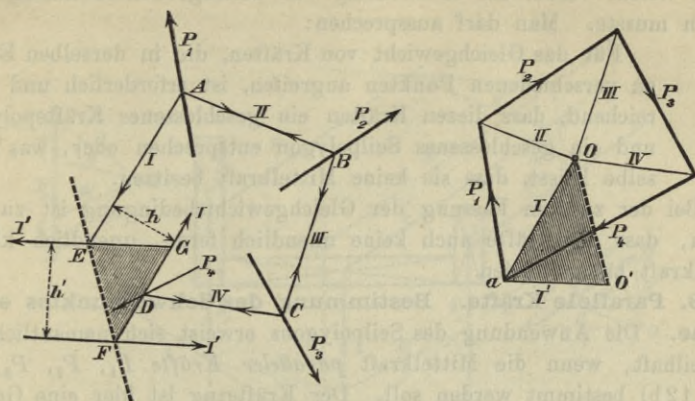


Fig. 11 a u. b.

letzten Seite I' gegeben und mithin auch das Moment $M = I' \cdot h'$ des Paares ($I' I'$), dessen Arm gleich h' sein möge. Verlängert man die erste Seite I' bis zu ihrem Schnittpunkte G mit der letzten Seite I , so erhält man das Dreieck GEF , welches dem Dreiecke aOO' ähnlich ist. Bedeuten für das letztere Dreieck: s und s' die Längen der Lothe, welche beziehungsweise aus den Ecken O' und O auf die Seiten I und I' gefällt werden, so ergibt sich

$$\frac{h}{h'} = \frac{s}{s'}$$

Nun ist aber der doppelte Inhalt des Dreiecks $aOO' = I \cdot s = I' \cdot s'$,

mithin $\frac{s}{s'} = \frac{I'}{I}$,

und es folgt deshalb $\frac{h}{h'} = \frac{I'}{I}$ und hieraus $I \cdot h = I' \cdot h'$,

was zu beweisen war.

Keht man in Fig. 11a den Sinn der beiden Kräfte I' um, so gelangt man zu einem Kräftepaare ($I' I'$), welches mit dem Kräftepaare ($I I$) im Gleichwichte ist; die Momente beider Paare sind entgegengesetzt gleich.

7. Gleichgewichtsbedingungen. Verschiebt man in Fig. 10a die Kraft P_4 parallel mit sich selbst, bis sie durch den Schnittpunkt H der Seilpolygonseiten I und IV geht, so schliesst sich das Seilpolygon. Die beiden Seilkräfte I tilgen sich, und die Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 sind miteinander im Gleichwichte. Das von der Lage des Poles unab-

hängige Moment $I \cdot h$ wird in Folge der Verlegung von P_4 gleich Null, und mit ihm verschwindet auch die unendlich ferne, unendlich kleine Kraft, welche vorher zur Herstellung des Gleichgewichtes hinzugefügt werden musste. Man darf aussprechen:

Für das Gleichgewicht von Kräften, die in derselben Ebene an verschiedenen Punkten angreifen, ist erforderlich und ausreichend, dass diesen Kräften ein geschlossenes Kräftepolygon und ein geschlossenes Seilpolygon entsprechen oder, was dasselbe heisst, dass sie keine Mittelkraft besitzen.

Bei der zweiten Fassung der Gleichgewichtsbedingung ist zu beachten, dass die Kräfte auch keine unendlich ferne, unendlich kleine Mittelkraft haben dürfen.

8. Parallele Kräfte. Bestimmung des Schwerpunktes einer Fläche. Die Anwendung des Seilpolygons erweist sich namentlich als vortheilhaft, wenn die Mittelkraft *paralleler Kräfte* P_1, P_2, P_3, P_4 (Fig. 12b) bestimmt werden soll. Der Kräftezug ist hier eine Gerade (Fig. 12a) O ist der beliebig gewählte Pol. Durch den Schnittpunkt

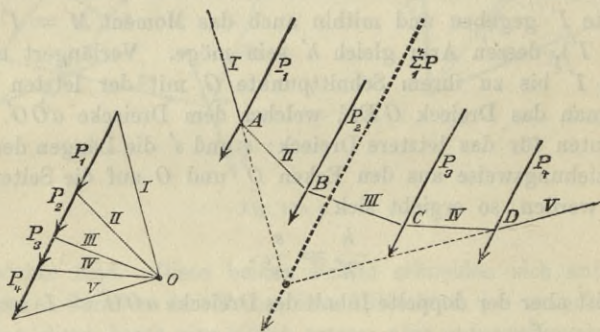


Fig. 12a u. b.

der beiden äussersten Seilpolygonseiten I und V geht

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \sum_1^4 P.$$

Es kann auch das Seilpolygon zur graphischen Bestimmung des Schwerpunktes einer Fläche, welche sich in einzelne Theile mit gegebenen Schwerpunkten zerlegen lässt, benutzt werden.

Um z. B. den Schwerpunkt der in Figur 13 dargestellten Fläche (welche etwa den Querschnitt eines gusseisernen Trägers bedeuten möge) zu finden, fasse man die Inhalte F_1, F_2, F_3 der 3 Rechtecke, aus denen die Fläche besteht, als parallele Kräfte auf, welche einmal in der Richtung AB , dann in der Richtung $A'B'$ wirken. Hierauf bestimme man für diese beiden Fälle die Lage der Mittelkraft ΣF .

Man findet auf diese Weise zwei Schwerachsen S und S' , deren Schnittpunkt der gesuchte Schwerpunkt ist. Die Richtungen AB und $A'B'$ sind willkürlich.

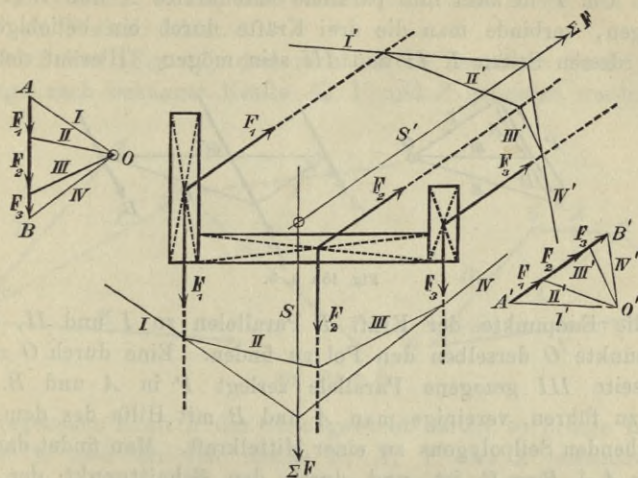


Fig. 13.

Da beim Zeichnen der Kräftezüge in Fig. 13 die Flächeninhalte der Rechtecke durch Linien dargestellt werden, welche sich zu einander verhalten wie $F_1 : F_2 : F_3$, so empfiehlt es sich, die drei Rechtecke in solche von gleicher, beliebig gewählter Grundlinie zu verwandeln, deren Höhen dann den Inhalten F_1, F_2, F_3 proportional sind.

Um z. B. das Rechteck $ABCD$, Fig. 14, in ein anderes zu verwandeln, dessen eine Seite $= DE$ ist, zieht man die Gerade CE und hierauf $AG \parallel EC$. Es ist dann DG die zweite Seite des Rechtecks, weil $ED : CD = AD : GD$, mithin $ED \cdot GD = CD \cdot AD$.

Wird der Schwerpunkt einer krummlinigen Figur gesucht, so ist diese in Streifen zu zerlegen, welche, wenn möglich, gleiche Breite erhalten und so schmal sein müssen, dass sie mit genügender Genauigkeit als Rechtecke, Trapeze oder Dreiecke betrachtet werden dürfen.

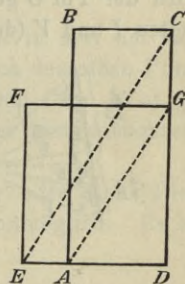


Fig. 14.

§ 2.

Zerlegung der Kräfte in der Ebene.

9. Die Zerlegung einer Kraft $R = \overline{ac}$ (Fig. 3a) in zwei Seitenkräfte, deren gegebene Richtungen die R in demselben Punkte a schneiden, erfolgt mit Hilfe des Parallelogramms der Kräfte. Vergl. No. 1.

Die eindeutige Zerlegung von R in mehr als zwei, die Kraft R in demselben Punkte treffende Seitenkräfte ist nicht möglich, vielmehr lässt diese Aufgabe unendlich viele Lösungen zu.

10. Um P in zwei ihm parallele Seitenkräfte A und B (Fig. 15) zu zerlegen, verbinde man die drei Kräfte durch ein beliebiges Seilpolygon, dessen Seiten I , II und III sein mögen. Hierauf ziehe man

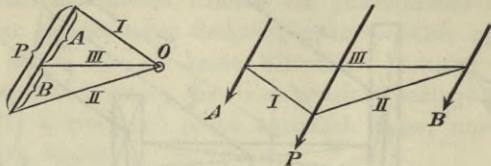


Fig. 15 a u. b.

durch die Endpunkte der Kraft P Parallelen zu I und II , um im Schnittpunkte O derselben den Pol zu finden. Eine durch O zur Seilpolygonseite III gezogene Parallele zerlegt P in A und B . Den Beweis zu führen, vereinige man A und B mit Hilfe des dem Pole O entsprechenden Seilpolygons zu einer Mittelkraft. Man findet dann, dass diese $= A + B = P$ ist und durch den Schnittpunkt der beiden äussersten Seilpolygonseiten I und II geht. Vergl. No. 8.

11. In gleicher Weise lässt sich jetzt die für die Folge wichtige Aufgabe lösen, zwei der Lage nach gegebene parallele Kräfte A und B (Fig. 16) zu finden, welche den ihnen parallelen Kräften P_1 , P_2 , P_3 und P_4 das Gleichgewicht halten.

Die Kräfte P werden in Fig. 16a aneinander gereiht; hierauf wird der Pol O gewählt und ein Seilpolygon gezeichnet, dessen äusserste Seiten I und V (durch deren Schnittpunkt die Mittelkraft $R = \Sigma P$ geht)

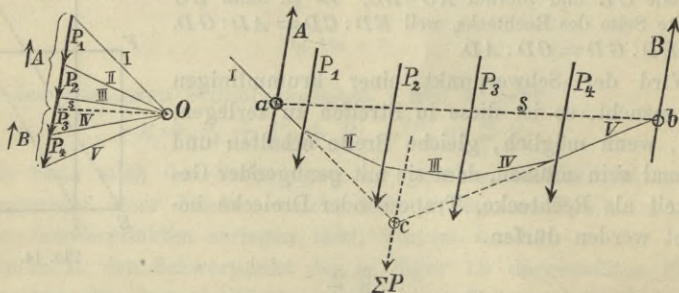


Fig. 16 a u. b.

die Richtungen von A und B beziehungsweise in a und b schneiden. Nachdem das Seilpolygon durch die Verbindungslinie s der Punkte a und b geschlossen worden ist, wird durch den Pol O zu s eine Parallele

gezogen. Diese zerlegt die Kraft $R = \Sigma P$ in A und B . Der obere Theil ist gleich A ; denn diese Kraft ist im Punkte a mit den Seilkräften I und s im Gleichgewichte, muss also mit den Seilstrahlen I und s ein Dreieck bilden, und ebenso folgt, dass B mit den Strahlen s und V ein Dreieck bildet.

12. Sollen (Fig. 17) drei nicht durch denselben Punkt gehende, der Lage nach bekannte Kräfte X , Y und Z gefunden werden, welche

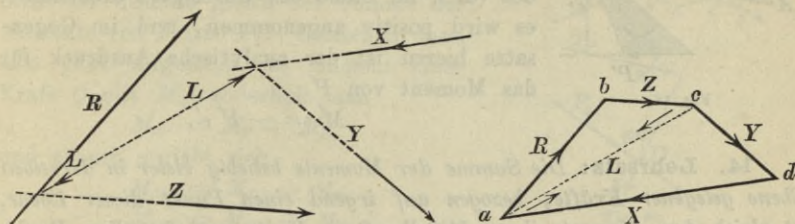


Fig. 17 a u. b.

einer gegebenen Kraft R das Gleichgewicht halten, so bringe man nach Belieben je zwei der vier Kräfte R , X , Y und Z miteinander zum Schnitt, z. B. R und Z , ferner X und Y , und addire, mit der Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte zusammenfallend, zwei sich aufhebende Kräfte L . Nun bestimme man L und Z aus der Bedingung, dass sich die Kräfte R , L und Z am Schnittpunkte $[RZ]$ das Gleichgewicht halten, dass ihnen also ein geschlossenes Dreieck $abca$ Fig. 17 b entsprechen muss und hierauf X und Y aus der Bedingung, dass diese beiden Kräfte am Punkte $[XY]$ mit der nunmehr gegebenen L im Gleichgewichte sind.

Ist die Aufgabe gestellt, eine gegebene Kraft R in drei der Lage nach bekannte Kräfte X , Y und Z , welche nicht durch denselben Punkt gehen, zu zerlegen, so hat man nur nöthig, die vorhin (Fig. 17 b) gefundenen Kräfte X , Y , Z durch gleich grosse aber entgegengesetzt wirkende zu ersetzen.

Die eindeutige Zerlegung einer Kraft nach vier oder mehr Richtungen, die mit ihr in derselben Ebene liegen, ist unmöglich. Es besitzt diese Aufgabe unendlich viele Lösungen.

§ 3.

Von den statischen Momenten der Kräfte.

13. **Begriffe.** Unter dem *statischen Momente* M einer Kraft P in Bezug auf den *Drehpunkt* (*Momentenpunkt* oder *Momentenpol*) C versteht man das aus P und seinem Abstände e von C gebildete Produkt; es ist also

$$M = Pe.$$

Geometrisch erklärt ist das Moment M gleich dem doppelten Inhalte des Dreiecks ABC , Fig. 18, dessen Grundlinie die Kraft P , und dessen Spitze der Drehpunkt C ist. Der Sinn dieses Dreiecks wird durch den Sinn der Kraft P bestimmt. Die Momente der Kräfte P und P' in Fig. 18 haben also entgegengesetzten Sinn. Das Moment $M = Pe$ heisst ein rechts drehendes (d. i. im Sinne der Uhrzeigers drehendes); es wird positiv angenommen, und im Gegensatze hierzu ist der analytische Ausdruck für das Moment von P'

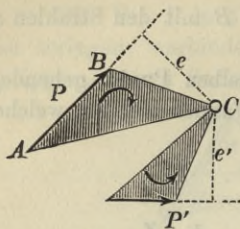


Fig. 18.

$$M' = -P'e'.$$

14. Lehrsatz: Die Summe der Momente beliebig vieler in derselben Ebene gelegener Kräfte, bezogen auf irgend einen Punkt dieser Ebene, ist gleich dem Momente ihrer Mittelkraft in Bezug auf denselben Punkt.

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir zunächst die beiden Kräfte P_1 und P_2 (Fig. 19), deren Mittelkraft $= R$ sein möge, ver-

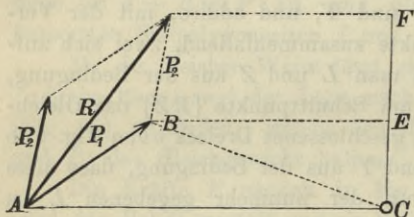


Fig. 19.

binden den Punkt A , in welchem sie sich schneiden, mit dem Drehpunkte C durch eine Gerade und projiciren die Kräfte P_1, P_2, R auf die zur AC Senkrechte CF . Sind die Projektionen jener Kräfte beziehungsweise: $CE = P'_1$; $EF = P'_2$; $CF = R'$, so ist das Moment der Kraft P_1

$$M = 2 \cdot \Delta ABC = \overline{AC} \cdot P'_1,$$

das Moment von P_2

$$M_2 = \overline{AC} \cdot P'_2$$

und dasjenige von R

$$M = \overline{AC} \cdot R'.$$

Da nun $R' = P'_1 + P'_2$ ist, so folgt

$$M = M_1 + M_2, \text{ w. z. b. w.}$$

Um den Satz für zerstreut in der Ebene wirkende Kräfte, z. B. P_1, P_2, P_3, P_4 (Fig. 20*) zu beweisen, setze man dieselben mittels eines Seilpolygons zu ihrer Mittelkraft R zusammen und denke in den Endpunkten des Seilpolygons die sich paarweise aufhebenden Seilkräfte

*) Vergl. auch Fig. 21.

thätig; dieselben wurden in Fig. 20 mit $I, I', II, II', III, III' \dots$ bezeichnet, wobei $I = I'; II = II'; III = III'$ u. s. w.

Da nun am Punkte A die drei Kräfte II, I' und P_1 miteinander im Gleichgewichte sind, so ist die der Kraft II entgegengesetzt gleiche II' die Mittelkraft aus den Kräften I' und P_1 , und ihr Moment ist deshalb gleich der Summe der Momente von I' und P_1 . Bezeichnet man also ganz allgemein das Moment einer Kraft Q mit M_Q , so erhält man

$$M_{II'} = M_{I'} + M_{P_1}$$

und ebenso ergibt sich

$$M_{III'} = M_{II'} + M_{P_2}$$

$$M_{IV'} = M_{III'} + M_{P_3}$$

$$M_{V'} = M_{IV'} + M_{P_4} = M_{I'} + M_{P_1} + M_{P_2} + M_{P_3} + M_{P_4}.$$

Da nun R die Mittelkraft aus V' und I ist, so folgt noch

$$M_R = M_I + M_{V'} \text{ d. i.}$$

$$M_R = M_I + M_{I'} + M_{P_1} + M_{P_2} + M_{P_3} + M_{P_4},$$

und in der letzten Gleichung tilgen sich auf der rechten Seite die entgegengesetzt gleichen Momente der entgegengesetzt gleichen Kräfte I und I' . Es ist deshalb

$$M_R = M_{P_1} + M_{P_2} + M_{P_3} + M_{P_4},$$

was zu beweisen war.

Ganz ebenso kann der Beweis für beliebig viele Kräfte geführt werden.

15. Bestimmung des statischen Momentes beliebig vieler in derselben Ebene wirkender Kräfte. Um das Moment der Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 in Bezug auf den Drehpunkt C zu ermitteln, wird man (Fig. 21) zunächst die Mittelkraft R aufsuchen, indem man den aus P_1, P_2, P_3 und P_4 gebildeten Kräftezug durch die Linie $\overline{LN} = R$ unterspannt und diese Linie mit einem Pfeile versieht, welcher den Umfangsgang des Kräftepolygons unsetzung macht. Nun wählt man den beliebigen Pol O , zeichnet das Seilpolygon und findet in dem Schnittpunkte E der beiden äussersten Seilpolygonseiten einen Punkt der Kraft R . Jetzt kann man $M = Rr$ berechnen oder auch konstruieren. Dazu schreibt man $M = \frac{Rr}{1}$ und fasst M als vierte Proportionale zu den Grössen R, r und 1 auf.

Der Werth M lässt sich aber noch in einer anderen, für die Folge sehr vortheilhaften Form darstellen. Zieht man durch den Drehpunkt C

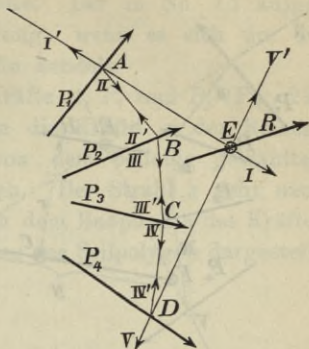


Fig. 20.

zu R eine Parallele, welche die Seilpolygonseiten I und V in J und F schneidet, und setzt $\overline{FJ} = y$, so folgt aus der Aehnlichkeit der beiden

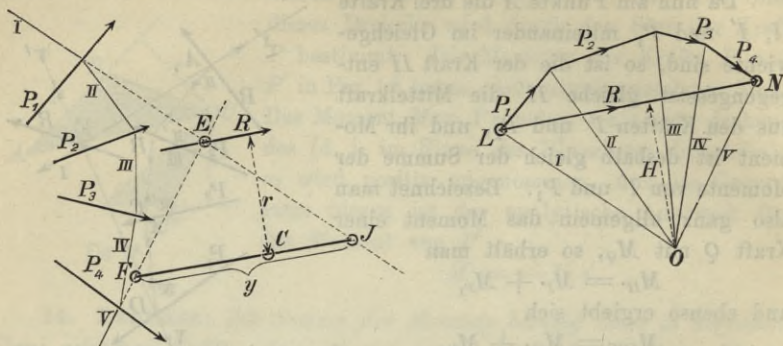


Fig. 21 a u. b.

Dreiecke EFJ und OLN (deren Seiten beziehungsweise parallel sind)

$$r : y = H : R,$$

wobei H die Polweite der Kraft R bedeutet. Es ist also $Hy = Rr$, mithin

$$M = Hy,$$

und es ergibt sich der Satz:

Das statische Moment beliebig vieler Kräfte in der Ebene ist gleich dem Produkte aus der Polweite ihrer Mittelkraft R und aus der Strecke, welche von den äussersten Seilpolygonseiten auf einer durch den Drehpunkt C zu R gezogenen Parallelen abgeschnitten wird.

Ueber das Vorzeichen des Momentes entscheidet sein Drehungssinn. Das Moment der Kraft R in Fig. 21 a ist rechtsdrehend, also positiv. Je näher C an R rückt, desto kleiner wird y und desto kleiner auch M . Fällt C mit R zusammen, so wird $y = 0$. Liegt C oberhalb R , so ist y negativ zu nehmen; man erhält dann ein negatives M .

Die letztbeschriebene Darstellungsweise des Momentes ist deshalb vortheilhaft, weil der Pol, dessen Lage willkürlich angenommen werden darf, so gewählt werden kann, dass die Polweite H durch eine runde Zahl ausgedrückt wird. Nimmt man $H = 1$, so folgt

$$M = y.$$

In dem Produkte Rr ist die Grösse R in Kräfteeinheiten (z. B. in Kilogrammen) und r in Längeneinheiten (z. B. in Metern) auszudrücken. Hingegen ist es bei der Berechnung von Hy gleichgiltig, ob H mit dem Kräftemaassstabe und y mit dem Längenmaassstabe gemessen wird, oder umgekehrt.

Wir werden in der Folge unter H (falls nicht das Gegentheil besonders hervorgehoben wird) eine Kraft verstehen.

16. Parallele Kräfte in der Ebene. Der in No. 15 ausgesprochene Satz findet namentlich Anwendung, wenn es sich um die Bestimmung des Momentes paralleler Kräfte handelt.

Ist z. B. das Moment der parallelen Kräfte A, P_1 und P_2 (Fig. 22) für den Drehpunkt C gesucht, so werden die Kräfte in der Reihenfolge A, P_1, P_2 aneinandergesetzt und von dem beliebig gewählten Pole aus die Strahlen s, I, II, III gezogen. Der Strahl s geht nach dem Anfangspunkte und der Strahl III nach dem Endpunkte des Kräftezuges; mithin sind in Figur 22 a, in welcher das Seilpolygon dargestellt

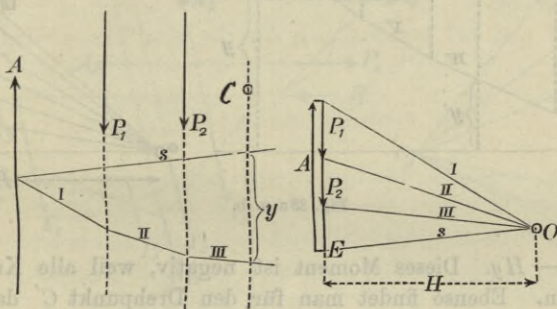


Fig. 22 a u. b.

ist, die Seiten s und III die äussersten; dieselben schneiden auf der durch C zur Mittelkraft $A - P_1 - P_2$ parallel gezogenen Geraden die Strecke y ab, welche mit der Polweite jener Kraft, d. i. mit dem vom Pole auf den Kräftezug gefällten Lothe H , multiplicirt das Moment liefert.

Das Moment $M = Hy$ ist positiv, denn es wirkt, wegen $A > P_1 + P_2$, die Mittelkraft $R = A - P_1 - P_2$ in demselben Sinne wie A , also aufwärts, und es liegt ausserdem R links vom Drehpunkte C , weil es durch den Schnittpunkt der nach links konvergirenden Seilpolygoneiten III und s geht. Daraus folgt aber, dass das Moment von R ein rechtsdrehendes ist.

17. Eine andere für die Folge sehr wichtige Aufgabe lautet: Gegeben sind die parallelen Kräfte $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$, gesucht wird das Moment M derselben für den Drehpunkt C , ferner das Moment M' der Kräfte P_1, P_2, P_3 für den Drehpunkt C' . Fig. 23.

Es werden die Kräfte in der Reihenfolge $P_6, P_5 \dots P_1$ (Fig. 23 b) aneinandergesetzt, und der Pol in beliebiger Weite H vom Kräftezuge so gewählt, dass der Seilstrahl I senkrecht zur Richtung der Kräfte P

ist. Hierauf wird (Fig. 23a) das Seilpolygon gezeichnet und die Seite *I* desselben verlängert. Zieht man jetzt durch *C* eine Parallele zur Mittelkraft $\sum_1^6 P$, und misst die Strecke *y*, welche auf jener Parallelen durch die äussersten Polygonseiten *I* und *VII* abgeschnitten wird, so erhält

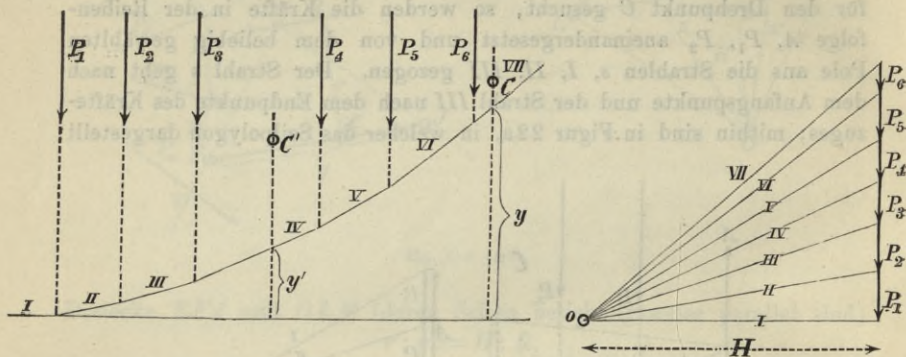


Fig. 23a u. b.

man $M_c = -Hy$. Dieses Moment ist negativ, weil alle Kräfte links um *C* drehen. Ebenso findet man für den Drehpunkt *C'* das Moment der Kräfte P_1, P_2, P_3 ,

$$M_{c'} = -Hy',$$

denn *I* und *IV* sind die äussersten Seilpolygonseiten in Bezug auf die Gruppe P_1, P_2, P_3 . Man kann hiernach aussprechen:

Irgend eine Ordinate des Seilpolygons paralleler Kräfte in Fig. 23a, bezogen auf die zur Krafttrichtung senkrechte Polygonseite I als Abscissenaxe, ist dem Momente proportional, welches die vor der Ordinate gelegenen Kräfte in Bezug auf irgend einen auf der Ordinate angenommenen Drehpunkt ausüben.

§ 4.

Zusammensetzung der Kräfte im Raume.*)

18. Statische Momente und Mittelkraft paralleler Kräfte.

Werden parallele Kräfte $P_1, P_2, P_3 \dots \dots \dots$ durch eine zu ihrer Richtung senkrechte Ebene *E* in den Punkten $A_1, A_2, A_3 \dots \dots \dots$

*) Eine eingehendere Theorie der Kräfte im Raume findet sich im dritten Bande dieses Buches.

(Fig. 24) geschnitten, und sind x_m, y_m (wo m eine beliebige Ordnungsziffer) die Koordinaten von A_m bezüglich eines in der Ebene E an-

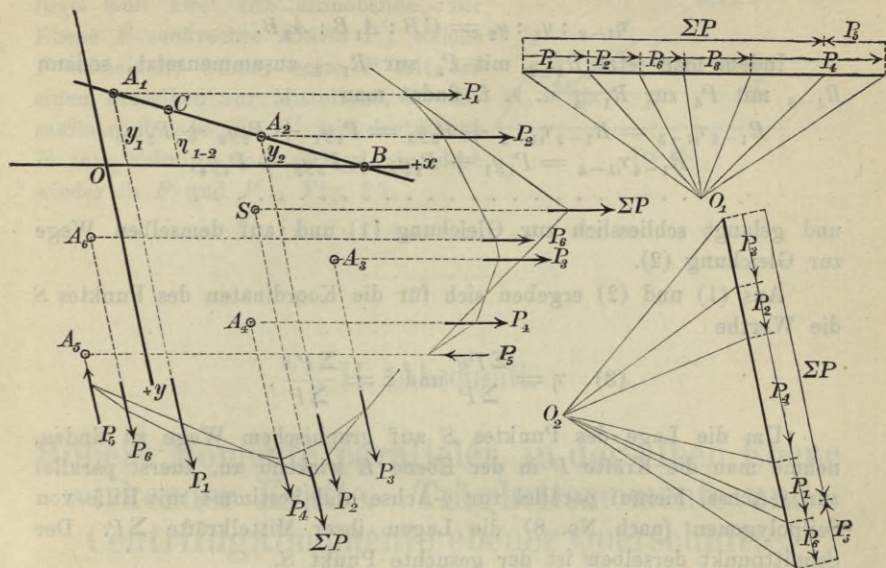


Fig. 24.

genommenen, im Allgemeinen schiefwinkligen Achsenkreuzes, so nennt man die Produkte $P_m x_m$ und $P_m y_m$ die statischen Momente der Kraft P_m in Bezug auf die Achsen y und x .

Sind weiter ξ und η die Koordinaten des Punktes S , in welchem die Ebene E von der Mittelkraft $R = P_1 + P_2 + \dots = \Sigma P$ geschnitten wird, so lässt sich nachweisen, dass

- (1) $R\eta = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \dots = \Sigma P y$ und
- (2) $R\xi = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \dots = \Sigma P x$

ist, dass also, bezogen auf irgend eine Achse, das Moment der Mittelkraft R gleich ist der Summe der Momente aller Kräfte P .

Vereinigt man nämlich P_1 und P_2 in einer durch diese beiden Kräfte gelegten Ebene E' zur Mittelkraft R_{1-2} , so ist nach No. 14 das Moment von R_{1-2} in Bezug auf den Punkt B , in welchem die Ebene E' die x -Achse schneidet, gleich der Summe der auf denselben Drehpunkt bezogenen Momente der Kräfte P_1 und P_2 . Trifft also R_{1-2} die Ebene E im Punkte C , so ist

$$R_{1-2} \overline{CB} = P_1 \overline{A_1 B} + P_2 \overline{A_2 B},$$

und hieraus folgt, wenn die Ordinate von C mit η_{1-2} bezeichnet wird,

$$R_{1-2}\eta_{1-2} = P_1y_1 + P_2y_2,$$

denn es verhält sich

$$\eta_{1-2} : y_1 : y_2 = \overline{CB} : \overline{A_1B} : \overline{A_2B}.$$

Indem man jetzt R_{1-2} mit P_3 zur R_{1-3} zusammensetzt, sodann R_{1-3} mit P_4 zur R_{1-4} u. s. f. findet man

$$R_{1-3}\eta_{1-3} = R_{1-2}\eta_{1-2} + P_3y_3 = P_1y_1 + P_2y_2 + P_3y_3,$$

$$R_{1-4}\eta_{1-4} = P_1y_1 + P_2y_2 + P_3y_3 + P_4y_4,$$

.....

und gelangt schliesslich zur Gleichung (1) und auf demselben Wege zur Gleichung (2).

Aus (1) und (2) ergeben sich für die Koordinaten des Punktes S die Werthe

$$(3) \quad \eta = \frac{\sum Py}{\sum P} \quad \text{und} \quad \xi = \frac{\sum Px}{\sum P}.$$

Um die Lage des Punktes S auf graphischem Wege zu finden, nehme man die Kräfte P in der Ebene E wirkend an, zuerst parallel zur x -Achse, hierauf parallel zur y -Achse und bestimme mit Hilfe von Seilpolygonen (nach No. 8) die Lagen ihrer Mittelkräfte $\sum P$. Der Schnittpunkt derselben ist der gesuchte Punkt S .

Beim Zeichnen der Kräftezüge ist auf das Vorzeichen der P zu achten. Es empfiehlt sich, die positiven P im Sinne der positiven Koordinatenachsen aufzutragen. Ist also beispielsweise für den in Fig. 24 dargestellten Fall die Ebene E wagerecht und die Krafrichtung im Sinne der Schwere die positive, so ist die im Sinne von $(-x)$ bezieh. $(-y)$ gezeichnete Kraft P_5 von unten nach oben wirkend.

19. Allgemeine Zusammensetzung der Kräfte im Raume.

Um beliebig gerichtete, im Raume zerstreute Kräfte zusammensetzen, bestimme man den Durchschnittspunkt A jeder Kraft P mit einer willkürlich angenommenen Ebene E , verschiebe die Kraft P in ihrer Richtung bis zum Punkte A und zerlege sie dort in zwei Seitenkräfte, deren eine in der Ebene E liegt, während die andere senkrecht hierzu ist. Sodann vereinige man alle zur E senkrechten Kräfte mit Hilfe des in No. 18 gelehnten Verfahrens zu ihrer Mittelkraft N und alle in der Ebene E gelegenen Kräfte nach § 1 zu ihrer Mittelkraft Q .

Schneiden sich N und Q , so können sie zu einer Kraft R vereinigt werden; im Gegenfalle aber lassen sie sich nicht weiter zusammensetzen, und es ist dann, wegen der willkürlichen Lage der angenommenen Ebene E , möglich, die gegebenen Kräfte auf unendlich viele verschiedene Weisen durch zwei Kräfte zu ersetzen.

Soll eine zur Ebene E parallele Kraft P auf die angegebene Art und ohne Benutzung der unendlich fernen Geraden jener Ebene zerlegt werden, so füge man zwei sich aufhebende, zur Ebene E senkrechte Kräfte P' , welche P schneiden, hinzu, setze P mit der einen derselben zur Mittelkraft P'' zusammen, bringe die P'' mit der Ebene E zum Schnitt und zerlege sie dort wieder in P und P' . Fig. 25.

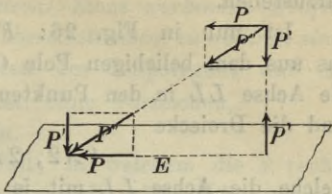


Fig. 25.

II. Abschnitt.

Höhere Momente paralleler, in derselben Ebene wirkender Kräfte. Trägheitsmomente und Centrifugalmomente ebener Querschnitte.

§ 5.

Höhere Momente paralleler Kräfte.

20. **Bestimmung höherer Momente mit Hilfe des Culmann'schen Verfahrens.** Sind $P_1, P_2, P_3 \dots$ (Fig. 26) parallele, in ein und derselben Ebene (E) gelegene Kräfte und $x_1, x_2, x_3 \dots$ die in irgend einer Richtung gemessenen Abstände derselben von einer ebenfalls in der Ebene E gelegenen Geraden LL , so nennt man die Summe

$$P_1 x_1^n + P_2 x_2^n + P_3 x_3^n + \dots = \Sigma P x^n$$

das *Moment n^{ter} Ordnung der Kräfte P in Bezug auf die Achse LL .*

Im Falle $n = 1$ heisst dieses Moment auch das *statische Moment* der Kräfte P (vergl. § 3) und im Falle $n = 2$ das *Trägheitsmoment*; das letztere werden wir in der Regel mit J bezeichnen.

Kennt man für irgend eine Kraft P den Werth $P x^{n-1}$, so findet man $P x^n = (P x^{n-1}) x$ als das Moment erster Ordnung der Grösse $P x^{n-1}$ in Bezug auf die Achse LL , und es leuchtet ein, dass man, um $\Sigma P x^n$ zu finden, nur nöthig hat, der Reihe nach die statischen Momente

$\Sigma Px, \Sigma (Px)x, \Sigma (Px^2)x \dots \Sigma (Px^{n-1})x$
darzustellen.

Ist nun in Fig. 26: FN das Kräftepolygon und $ABC\dots$ das aus dem beliebigen Pole O gezeichnete Seilpolygon, dessen Seiten die Achse LL in den Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6 schneiden mögen, so sind die Dreiecke

$$1A2, 2B3, 3C4 \dots,$$

welche die Achse LL mit je zwei aufeinander folgenden Seiten des

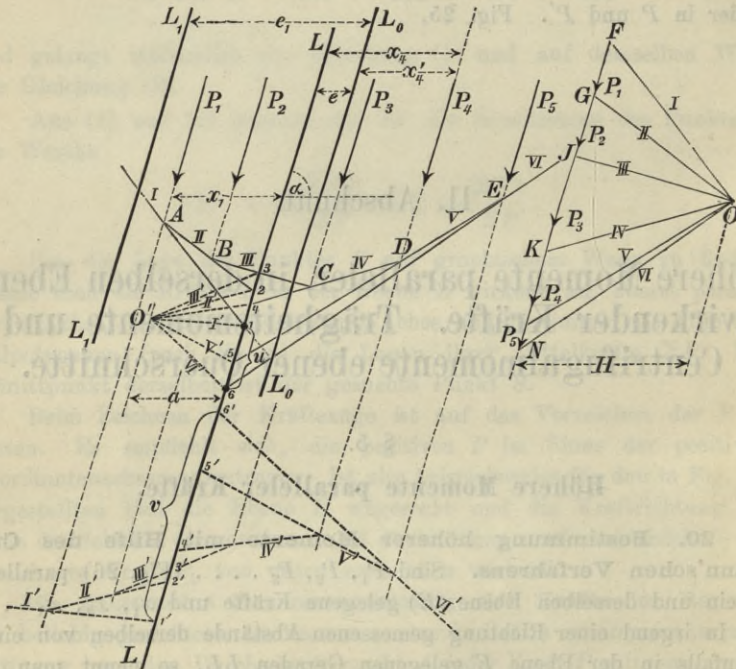


Fig. 26.

Seilpolygons bildet, den ihnen entsprechenden Kräftedreiecken

$$FOG, GOJ, JOK \dots$$

ähnlich, und es folgt, wenn H die in der Richtung x gemessene Polweite ist,

$$x_1 : 12 = H : P_1; x_2 : 23 = H : P_2; \text{ u. s. w.}$$

und hieraus

$$P_1 x_1 = H \overline{12}; P_2 x_2 = H \overline{23} \text{ u. s. w.}$$

mithin

$$\Sigma Px = H(\overline{12} + \overline{23} + \overline{34} + \dots)$$

wobei die einzelnen Strecken: $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$ mit Berücksichtigung ihrer Vorzeichen, welche bei im gleichen (positiven) Sinne wirkenden Kräften mit den Vorzeichen der entsprechenden x übereinstimmen, zu addiren sind.

Schneiden nun die äussersten Seiten des Seilpolygons auf der Achse LL die Strecke $\overline{16} = u$ ab, so ist, ohne Vorzeichen,

$$\Sigma Px = Hu.$$

Für den in Fig. 26 dargestellten Fall, in welchem die x rechts von LL positiv angenommen wurden, ergibt sich ΣPx positiv, weil die Summe der positiven Abschnitte $\overline{34}$, $\overline{45}$, $\overline{56}$ grösser ist als die Summe der negativen Abschnitte $\overline{12}$, $\overline{23}$.

Betrachtet man jetzt die Abschnitte $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$ als Kräfte, die in den Richtungslinien der Kräfte P_1, P_2, P_3 wirken, zeichnet zu ihnen aus dem beliebig gewählten Pole O' das Seilpolygon $I' II' III' \dots$, dessen Seiten die Achse LL in den Punkten $1' 2' 3' \dots$ schneiden, und setzt die der Richtung der x parallele zweite Polweite $= a$, so findet man, auf gleiche Weise wie vorhin

$$x_1: 1' 2' = a: \overline{12}; \quad x_2: 2' 3' = a: \overline{23}; \quad \text{u. s. w.},$$

hieraus (wegen $\overline{12} = \frac{P_1 x_1}{H}$; $\overline{23} = \frac{P_2 x_2}{H}$;)

$$P_1 x_1^2 = Ha \overline{1' 2'}; \quad P_2 x_2^2 = Ha \overline{2' 3'}; \quad \text{u. s. w.}$$

und schliesslich

$$J = \Sigma Px^2 = Ha (\overline{1' 2'} + \overline{2' 3'} + \overline{3' 4'} + \dots) = Hav,$$

wo v die Strecke bedeutet, welche die äussersten Seiten des zweiten Seilpolygons auf der Achse LL abschneiden und welche stets positiv ist, sobald alle Kräfte im gleichen (positiven) Sinne wirken. Wenn H mit dem Kräftemasstabe gemessen wird, stellen a und v Längen vor.

Es ist nun leicht einzusehen, wie man ein Moment beliebiger Ordnung zu bestimmen vermag. Wird ΣPx^3 gesucht, so fasst man die Abschnitte $\overline{1' 2'}$, $\overline{2' 3'}$, $\overline{3' 4'}$. . . (mit Berücksichtigung ihrer Vorzeichen) als parallele an die Stelle der entsprechenden P tretende Kräfte auf, zeichnet zu ihnen mit der Polweite b ein Seilpolygon und bestimmt die Strecke w , welche dessen äussere Seiten auf der LL abschneiden. Man findet (ohne Vorzeichen)

$$\Sigma Px^3 = Habw.$$

Um ΣPx^n zu finden, sind n Seilpolygone zu zeichnen. Alle Polweiten sind in der Richtung der x zu messen.

21. Bestimmung von J nach dem Verfahren von Mohr.

Die Statik der Bauwerke hat es ausser mit statischen Momenten hauptsächlich mit Trägheitsmomenten zu thun. Die Ermittlung derselben lässt sich auch mit Hilfe des ersten Seilpolygons ($I, II, III \dots$) vornehmen (Fig. 26). Der Inhalt \mathfrak{F} der von diesem Polygone, von dessen

äussersten Seiten (*I* und *VI*) und von der Achse *LL* eingeschlossenen Fläche (*1 ABCDE61*) ist nämlich

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \Delta 1A2 + \Delta 2B3 + \Delta 3C4 + \dots \\ &= \frac{1}{2} \sin \alpha (x_1 \overline{12} + x_2 \overline{23} + x_3 \overline{34} + \dots) \\ &= \frac{\sin \alpha}{2H} (P_1 x_1^2 + P_2 x_2^2 + P_3 x_3^2 + \dots) = \frac{\sin \alpha}{2H} \Sigma P x^2, \end{aligned}$$

wo α den Winkel bedeutet, welchen die Richtungen der *P* und *x* miteinander einschliessen und es folgt mithin

$$(1) \quad J = \Sigma P x^2 = \frac{2 \mathfrak{F} H}{\sin \alpha}.$$

22. Beziehungen zwischen zwei auf parallele Achsen bezogenen Trägheitsmomenten. Haben die Kräfte $P_1, P_2, P_3 \dots$ (Fig. 26) von der mit ihrer Mittelkraft ΣP zusammenfallenden, also durch den Schnittpunkt der äussersten Seilpolygonseiten *I* und *VI* gehenden Achse $L_0 L_0$ die in der Richtung der *x* gemessenen Abstände $x'_1, x'_2, x'_3 \dots$, so ist ihr Trägheitsmoment J_0 , bezogen auf die Achse $L_0 L_0$,

$$J_0 = \Sigma P x'^2$$

und ihr statisches Moment in Bezug auf $L_0 L_0$

$$\Sigma P x' = 0.$$

Bezeichnet man nun mit *e* den in der Richtung der *x* gemessenen Abstand der Achse *LL* von der $L_0 L_0$ und setzt $x = x' + e$, so erhält man

$$J = \Sigma P x^2 = \Sigma P (x' + e)^2 = \Sigma P x'^2 + 2e \Sigma P x' + e^2 \Sigma P$$

und hieraus ergibt sich

$$(2) \quad \dots \dots \dots J = J_0 + e^2 \Sigma P.$$

In gleicher Weise erhält man für eine zur $L_0 L_0$ parallele Achse $L_1 L_1$, welche von der $L_0 L_0$ den Abstand e_1 hat

$$J_1 = J_0 + e_1^2 \Sigma P,$$

und es folgt deshalb das Gesetz

$$(3) \quad \dots \dots \dots J_1 - J = (e_1^2 - e^2) \Sigma P.$$

§ 6.

Trägheitsmomente und Centrifugalmomente ebener Querschnitte.

23. Erklärungen. Die Theorie der Momente zweiter Ordnung findet namentlich Anwendung bei der Untersuchung von geraden Stäben, welche auf Biegungsfestigkeit beansprucht werden. Bezieht man den Querschnitt eines solchen Stabes auf ein (in der Regel rechtwinklig angenommenes) Achsenkreuz *x, y* (Fig. 27), und bezeichnet mit *dF* den

Inhalt eines unendlich kleinen Theilchens des Querschnittes, so nennt man die über den ganzen Querschnitt auszudehnenden Integrale

$$J_x = \int y^2 dF; \quad J_y = \int x^2 dF; \quad J_{xy} = \int xy dF$$

die *Querschnittsmomente zweiter Ordnung*. Es heisst auch

J_x das auf die x -Achse bezogene *Trägheitsmoment*,

J_y „ „ „ „ y „ „ „ „

J_{xy} das *Centrifugalmoment*.

Da die Biegungsspannungen in geraden Stäben in geraden Funktionen der 3 Integrale J_x, J_y, J_{xy} dargestellt werden können, so ist eine eingehende Untersuchung derselben für die Statik der Bauwerke von besonderer Wichtigkeit. Zunächst wollen wir uns nur mit den Trägheitsmomenten beschäftigen.

24. Bestimmung des Trägheitsmomentes einer unregelmässigen Figur nach dem Verfahren von Culmann. Das Trägheitsmoment $J_x = \int y^2 dF$ ist unabhängig von den Abscissen x der Querschnittstheilchen, und es darf mithin unter dF der Inhalt eines der x -Achse parallelen, unendlich schmalen Streifens verstanden werden. (Vergl. Fig. 31 und 32.)

Bei der graphischen Bestimmung von J muss man nun diese unendlich schmalen Streifen durch solche von endlicher Breite ersetzen (Fig. 27). Sind $F_1, F_2, F_3 \dots$ deren Inhalte und $y_1, y_2, y_3 \dots$ die Abstände ihrer Schwerpunkte von der x -Achse, so ist angenähert

$$J_x = F_1 y_1^2 + F_2 y_2^2 + F_3 y_3^2 + \dots = \Sigma F y^2.$$

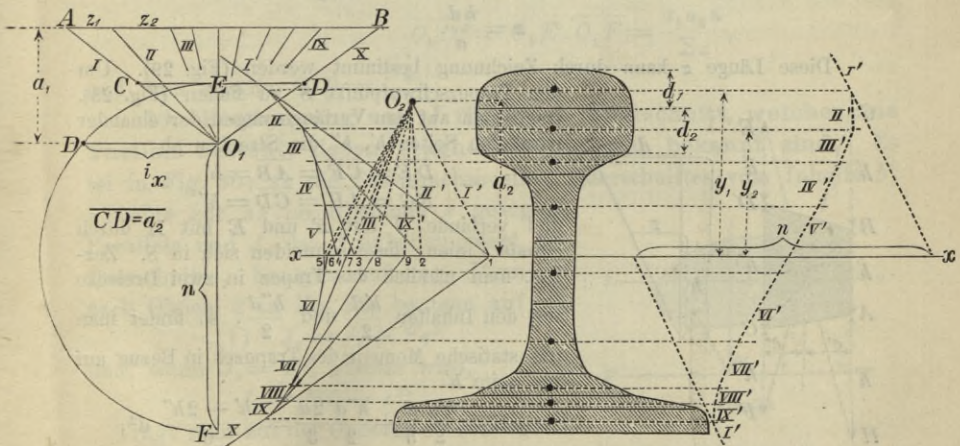


Fig. 27.

Verwandelt man sämmtliche Streifen, die im allgemeinen verschieden grosse Breiten $d_1, d_2, d_3 \dots$ erhalten werden, in Rechtecke

von der gleichen Grundlinie a und bezeichnet mit $z_1, z_2, z_3 \dots$ die Höhen dieser Rechtecke, so ist

$$F_1 = az_1; \quad F_2 = az_2; \quad F_3 = az_3 \dots$$

und man erhält

$$J_x = a \sum y^2 z.$$

Fasst man jetzt die Höhen z als Kräfte auf, die, in den Schwerpunkten der Streifen angreifend, parallel zur x -Achse wirken, bestimmt nach dem in No. 20 gelehrteten Verfahren das Moment zweiter Ordnung dieser Kräfte in Bezug auf die Achse x (welche in Fig. 27 die Schwerpunktsachse des Querschnittes ist) und bezeichnet hierbei

mit a_1 die Polweite für das erste Seilpolygon ($I II \dots$)

„ a_2 „ „ „ „ zweite „ ($I' II' \dots$)

„ n die Strecke, welche die äussersten Seiten des zweiten Seilpolygons auf der x -Achse abschneiden,

so erhält man zunächst

$$\sum y^2 z = a_1 a_2 n$$

und hierauf

$$J_x = a a_1 a_2 n.$$

Die Strecken a, a_1, a_2, n , sind mit dem Längenmassstabe zu messen. Für a, a_1, a_2 sind Längen zu wählen, die durch runde Zahlen ausgedrückt werden.

Die einzelnen Streifen, in welche der Querschnitt zerlegt wurde, dürfen als Trapeze betrachtet werden. Ist die mittlere Höhe eines Trapezes $= h$, die Breite $= d$, so ist sein Inhalt: $F = hd$, und es folgt aus $F = az$

$$z = \frac{hd}{a}.$$

Diese Länge z kann durch Zeichnung bestimmt werden (Fig. 29). Um den Trapezscherpunkt S zu finden (Fig. 28), trage man auf den Verlängerungen der einander parallelen Seiten h', h'' die Strecken ab

$$\overline{DE} = \overline{CF} = \overline{AB} = h'$$

$$\overline{BG} = \overline{AH} = \overline{CD} = h''$$

und verbinde G mit F und E mit H durch gerade Linien; diese schneiden sich in S . Zerlegt man nämlich das Trapez in zwei Dreiecke

mit den Inhalten $\frac{h'd}{2}$ und $\frac{h''d}{2}$, so findet man

das statische Moment des Trapezes in Bezug auf die Seite h'

$$M = \frac{h'd}{2} \frac{d}{3} + \frac{h''d}{2} \frac{2d}{3} = \frac{h' + 2h''}{6} d^2,$$

während sich andererseits, wenn e' die Länge des von S auf h' gefällten Lothes ist,

$$M = \frac{h' + h''}{2} d e'$$

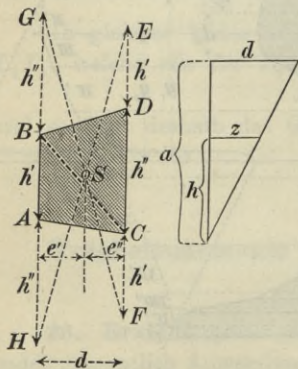


Fig. 28 u. 29.

ergiebt. Hieraus folgt aber

$$\frac{e'}{d} = \frac{h' + 2h''}{3(h' + h'')}, \text{ ebenso } \frac{e''}{d} = \frac{h'' + 2h'}{3(h' + h'')},$$

und schliesslich

$$\frac{e'}{e''} = \frac{h' + 2h''}{h'' + 2h'},$$

welcher Bedingung die in Fig. 28 gefundene Lage des Punktes S genügt. Eine dritte leicht erhaltliche Schwerlinie ist die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Seiten AB und CD .

25. Trägheitshalbmesser. Die durch die Gleichung

$$i_x^2 = \frac{J_x}{F},$$

(in welcher F den Inhalt des Querschnittes bedeutet) erklärte Länge i_x nennt man den auf die x -Achse bezogenen *Trägheitshalbmesser* des Querschnittes. Hat man mit Hilfe des in No. 24 entwickelten Verfahrens J_x in der Form aa_1a_2n dargestellt, und setzt man $F = a \Sigma z$, so erhält man

$$i_x^2 = \frac{a_1 a_2 n}{\Sigma z}.$$

Um diesen Werth zu finden, trage man zwischen die äussersten Seilstrahlen I und X des ersten Kräfteplanes, parallel zur $AB = \Sigma z$ (Fig. 27), die Gerade $CD = a_2$ ein, ziehe $EO_1F \perp CD$, mache $\overline{O_1F} = n$ und errichte in O_1 auf der EF ein Loth, welches den über EF beschriebenen Halbkreis in D schneidet. Es ist dann

$$\overline{O_1E} = a_1 \frac{a_2}{\Sigma z},$$

$$\overline{O_1D}^2 = \overline{O_1E} \cdot \overline{O_1F} = \frac{a_1 a_2 n}{\Sigma z},$$

und man erhält: $\overline{O_1D} = i_x$.*)

26. Bestimmung von J für einen Querschnitt, welcher aus Theilen besteht, deren Trägheitshalbmesser bekannt sind. Es sei in Fig. 30: ss die Schwerachse eines Querschnittes vom Inhalte F , xx eine zur ss im Abstände e gezogene Parallele und J_s das Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf ss . Dann ist nach Gleich. 2 in No. 22, bezogen auf xx

$$(1) J_x = J_s + Fe^2$$

und, wenn $J_s = Fi_s^2$ gesetzt wird,

$$J_x = F(i_s^2 + e^2).$$

Trägt man auf der Geraden ss von irgend

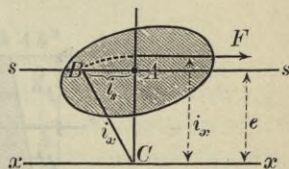


Fig. 30.

*) Wird nur i_x gesucht (nicht J_x), so nehme man $a_1 = \frac{1}{2} \Sigma z$. Es ergibt sich dann $i_x = \sqrt{\frac{a_2}{2} n}$ als mittlere Proportionale zu $\frac{1}{2} a_2$ und n .

einem Punkte A aus die Strecke $AB = i_s$ auf, zieht $AC \perp xx$ und verbindet C mit B durch eine Gerade, so hat diese die Länge

$$(2) \quad i_x = \sqrt{i_s^2 + e^2},$$

und es darf somit gesetzt werden

$$J_x = F i_x^2.$$

Es lässt sich also J_x deuten als das auf die Achse xx bezogene Moment 2^{ter} Ordnung einer Kraft F , welche im Abstände i_x von der xx und parallel zur xx wirkt.

i_x ist der Trägheitshalbmesser des Querschnittes F in Bezug auf die Achse xx .

Gelingt es nun, einen Querschnitt, dessen Trägheitsmoment J_x gesucht wird, in Theile F zu zerlegen, deren Trägheitshalbmesser i_s bekannt sind, so ist man im Stande, auch die Trägheitshalbmesser i_x jener Theile zu bestimmen und erhält dann J_x in der Form

$$J_x = \Sigma F i_s^2.$$

Will man also den Fehler, welcher bei der in Fig. 27 vorgenommenen Ermittlung von J_x durch die Zerlegung des Querschnittes in Streifen von endlicher Breite entstanden ist, beseitigen (was aber nur bei verhältnissmässig breiten Streifen nöthig ist), so muss man die Schwerpunktsabstände y_1, y_2, \dots der einzelnen Streifen durch deren auf die Achse xx bezogene Trägheitshalbmesser i_s ersetzen.

Geradlinig begrenzte Figuren lassen sich stets in Parallelogramme und Dreiecke zerlegen, deren eine Seite der Achse parallel ist, auf welche das Trägheitsmoment bezogen werden soll, und krummlinig begrenzte Figuren darf man immer mit genügender Genauigkeit durch geradlinige mit kurzen Seiten ersetzen. Es genügt also, die Trägheitshalbmesser i_s für das Parallelogramm und das Dreieck, bezogen auf deren der einen Seite parallele Schwerachse anzugeben.

a. *Das Parallelogramm.* Bedeutet b die Grundlinie und h die

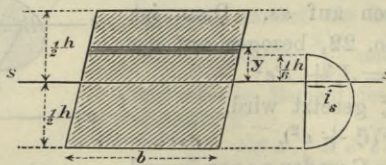


Fig. 31.

Höhe (Fig. 31), so erhält man in Bezug auf die zu b parallele Schwerachse:

$$J_s = \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} y^2 dF = 2 \int_0^{\frac{1}{2}h} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12} \text{ *) und}$$

$$i_s^2 = \frac{J_s}{F} = \frac{J_s}{bh} = \frac{h^2}{12}, \text{ woraus: } i_s = \sqrt{\frac{h}{2} \cdot \frac{h}{6}}.$$

Es ist also i_s die mittlere Proportionale zu $\frac{h}{2}$ und $\frac{h}{6}$; dieselbe wurde in Fig. 31 auf bekannte Weise mittels eines über der Strecke $\frac{h}{2} + \frac{h}{6}$ errichteten Halbkreises bestimmt.

b. *Das Dreieck.* Fig. 32. Man findet zunächst in Bezug auf eine durch die Spitze und parallel zur Grundlinie b gelegte Achse

$$J = \int_0^h y^2 dF = \int_0^h y^2 \frac{by}{h} dy = \frac{bh^3}{4}$$

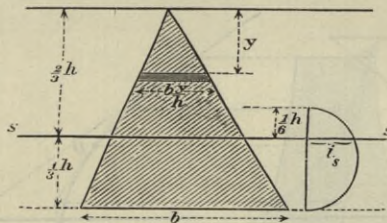


Fig. 32.

und hieraus (mittels Gleich. 2 in No. 22) in Bezug auf die zu b parallele Schwerachse

$$J_s = J - F \left(\frac{2h}{3} \right)^2 = \frac{bh^3}{4} - \frac{bh}{2} \frac{4h^2}{9} = \frac{bh^3}{36},$$

weshalb $i_s^2 = \frac{J_s}{F} = \frac{2J_s}{bh} = \frac{h^2}{18}$ und $i_s = \sqrt{\frac{h}{3} \cdot \frac{h}{6}}$.

Es ist also die i_s die mittlere Proportionale zu $\frac{h}{3}$ und $\frac{h}{6}$.

*) Bezogen auf eine mit b zusammenfallende Achse erhält man $J = \frac{bh^3}{3}$.

Von den vorstehenden Entwicklungen wird man namentlich bei der Bestimmung der Trägheitsmomente *geradlinig begrenzter Figuren* Gebrauch machen.

27. Das Mohr'sche Verfahren. Um das auf die Achse xx bezogene Trägheitsmoment J des in der Fig. 27 dargestellten Querschnittes mit Hilfe des ersten Seilpolygons ($I, II, III \dots$) zu bestimmen, wird der Inhalt \mathfrak{F} der Fläche ermittelt, welche von dem Seilpolygone und den äussersten Seiten desselben eingeschlossen wird. Sodann ergibt sich (nach No. 21)

$$\sum zy^2 = 2\mathfrak{F}a_1^* \text{ und, angenähert, } J = \sum azy^2 = 2aa_1\mathfrak{F}.$$

Je kleiner nun die Breiten der Streifen sind, in welche der Querschnitt zerlegt worden ist, desto genauer wird J erhalten. Bei unendlich schmalen Streifen geht das Seilpolygon in eine krumme Linie, die *Seillinie*, über, welche das für Flächenstreifen von endlicher Breite gezeichnete Seilpolygon in dessen Durchschnittspunkten mit den die Streifen trennenden Geraden berührt. Denn, werden in den Punkten A, D, E, B (Fig. 33), in denen die Seillinie von zur x -Achse parallelen Querschnitts senken geschnitten wird, Tangenten an jene Linie gelegt, so sind je

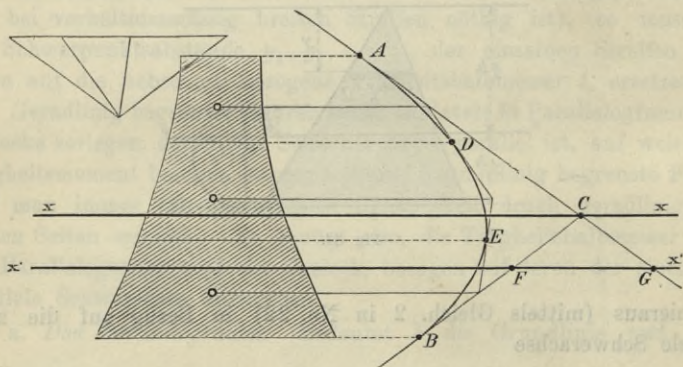


Fig. 33.

zwei aufeinander folgende dieser Tangenten für den zwischen ihren Berührungspunkten gelegenen Flächenstreifen äusserste Seilpolygonseiten; sie müssen sich daher auf der zur x -Achse parallelen Schwerlinie jenes Streifens schneiden und bilden ein der Seillinie umschriebenes Seilpolygon.

Meistens genügt bereits eine geringe Anzahl von Tangenten und Berührungspunkten zur hinreichend scharfen Aufzeichnung der Seil-

*) In Gleich. (1), Seite 26, ist $\alpha = 90^\circ$ und $H = a_1$ zu setzen.

linie, so dass die Breite der Streifen, in welche der Querschnitt zu zerlegen ist, bei der Anwendung des Mohr'schen Verfahrens grösser gewählt werden darf, als bei der Behandlungsweise nach Culmann. Auch bringt der von Mohr zur Bestimmung von J eingeschlagene Weg den Fehler gut zur Anschauung, der durch die Annahme von Querschnittstreifen endlicher Breite begangen wird und der mit dem Inhalte der Fläche zwischen Seilpolygon und Seillinie wächst.

Die Ermittlung des in die Gleichung $J = 2aa_1 \mathfrak{F}$ einzuführenden Flächeninhaltes \mathfrak{F} geschieht am schärfsten mit Hilfe der *Simpson'schen* Formel. Zu diesem Zwecke zerlegt man die Fläche ABC (Fig. 34), welche die Seillinie AB und deren äusserste Tangenten AC und BC einschliessen, in eine gerade Anzahl (m) gleichbreiter Streifen, deren Trennungslinien zu der einen Tangente (z. B. zur AC) parallel sind und die Längen $y_1, y_2, y_3 \dots$ haben mögen, und erhält, wenn man die Streifenbreite (senkrecht zu den Ordinaten y , mit e bezeichnet und $\overline{AC} = y_0$ setzt

$$\mathfrak{F} = \frac{e}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 4y_{m-1}).$$

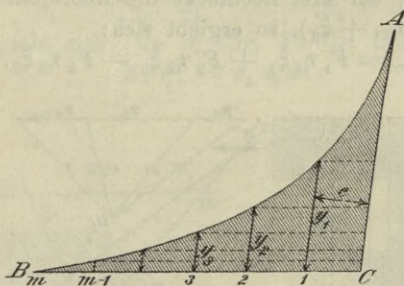


Fig. 34.

Soll das Trägheitsmoment J' des Querschnittes in Bezug auf eine zur xx parallele Achse $x'x'$ bestimmt werden (Fig. 33), so ist zu dem oben ermittelten Flächeninhalte \mathfrak{F} noch der Inhalt eines Dreiecks CFG zu fügen, welches von der Geraden $x'x'$ und den äussersten Tangenten an die Seillinie begrenzt wird.

28. Das Centrifugalmoment. Wir nehmen zunächst an, es sei das Centrifugalmoment $J_{x_1 y_1}$ einer Fläche F in Bezug auf zwei sich rechtwinklig schneidende Schwerachsen x_1, y_1 , gegeben, und suchen das Centrifugalmoment von F , bezogen auf die zu x_1, y_1 parallelen Achsen x, y . Der Schwerpunkt von F habe die Koordinaten ξ und η , Fig. 35.

Es ist

$$J_{xy} = \int (x_1 + \xi)(y_1 + \eta) dF$$

$$= \int x_1 y_1 dF + \xi \int y_1 dF + \eta \int x_1 dF + \eta \xi F,$$

worin zu setzen: $\int y_1 dF = 0$, $\int x_1 dF = 0$, als statische Momente der

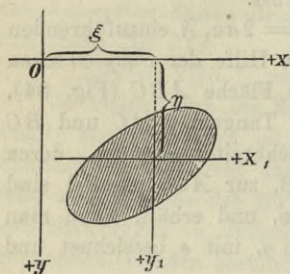


Fig. 35.

Fläche F , bezogen auf deren Schwerachsen, und es folgt mithin das Gesetz

$$(3) \quad J_{xy} = J_{x_1 y_1} + F \eta \xi.$$

Ist $J_{x_1 y_1} = 0$, ein Fall der z. B. vorliegt, sobald eine der beiden Achsen x_1 oder y_1 eine Symmetrieachse des Querschnitts ist, so ergibt sich

$$(4) \quad J_{xy} = F \eta \xi.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung lässt sich nun das Centrifugalmoment eines Querschnitts ermitteln, der aus Rechtecken besteht, dessen Seiten den Achsen x , y parallel laufen.

Figur 36 stellt einen solchen Querschnitt dar. Entsprechen den Schwerpunkten S_1, S_2, S_3 der drei Rechtecke die Koordinaten $(+ \eta_1, + \xi_1)$, $(- \eta_2, - \xi_2)$, $(- \eta_3, + \xi_3)$, so ergibt sich:

$$J_{xy} = F_1 \eta_1 \xi_1 + F_2 \eta_2 \xi_2 - F_3 \eta_3 \xi_3.$$

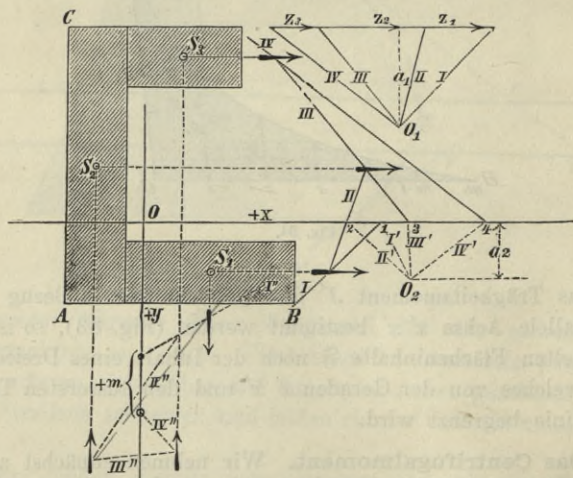


Fig. 36.

Um dieses Moment durch Zeichnung zu bestimmen, verwandeln wir die drei Rechtecke in solche von der gleichen Breite a , fassen die

Höhen $z_1 = \frac{F_1}{a}$, $z_2 = \frac{F_2}{a}$, $z_3 = \frac{F_3}{a}$ der neuen Rechtecke als Kräfte auf, welche parallel zu der x -Achse wirken, und zeichnen aus dem beliebigen Pole O_1 das Seilpolygon $I II III IV$, dessen Seiten auf der x -Achse die Abschnitte $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$ bestimmen. Es ist dann, wenn a_1 die Polweite bedeutet,

$$\overline{12} = \frac{z_1 \eta_1}{a_1}; \quad \overline{23} = -\frac{z_2 \eta_2}{a_1}; \quad \overline{34} = -\frac{z_3 \eta_3}{a_1}.$$

Jetzt betrachten wir diese Abschnitte als Kräfte, die in den Punkten S_1, S_2, S_3 angreifen und parallel zur y -Achse gerichtet sind, und zeichnen mit der Polweite a_2 das Seilpolygon $I'' II'' III'' IV''$, dessen Seiten senkrecht zu den Strahlen $I' II' III' IV'$ sind, die von O_2 aus nach den Endpunkten der auf der x -Achse bestimmten Abschnitte $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$ gezogen sind. *) Das Produkt aus der zweiten Polweite und aus der Strecke m , welche die äussersten Seiten (I'' u. IV'') dieses Polygons auf der y -Achse abschneiden, ist gleich dem statischen Momente der Kräfte $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$ in Bezug auf die y -Achse. Es folgt mithin

$$\begin{aligned} a_2 m &= \overline{12} \xi_1 - \overline{23} \xi_2 + \overline{34} \xi_3 \\ &= \frac{z_1 \eta_1 \xi_1}{a_1} + \frac{z_2 \eta_2 \xi_2}{a_1} - \frac{z_3 \eta_3 \xi_3}{a_1} = \frac{\Sigma z \eta \xi}{a_1}, \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich, da in Fig. 36 die Strecke m positiv ist, $\Sigma z \eta \xi = a_1 a_2 m$.

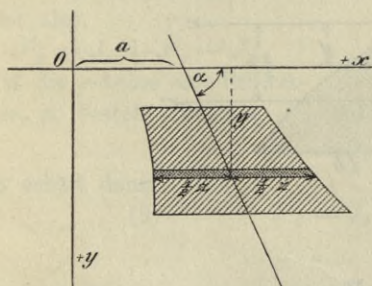


Fig. 37.

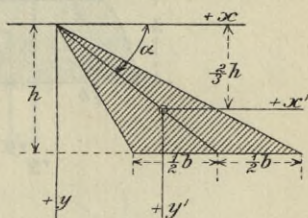


Fig. 38.

Nun ist aber $J_{xy} = \Sigma F \eta \xi = a \Sigma z \eta \xi$,
und es folgt deshalb

$$J_{xy} = a a_1 a_2 m.$$

*) Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man jene Abschnitte, und mit ihnen den Strahlenbüschel $I' II' III' IV'$, um 90° nach links dreht und hierauf $I'' \parallel I'$, $II'' \parallel II'$ u. s. w. zieht.

Es leuchtet ein, dass das beschriebene Verfahren zur Bestimmung der Centrifugalmomente beliebiger Querschnitte benutzt werden kann. Im Allgemeinen muss der Querschnitt in Streifen zerlegt werden, welche einer der beiden Koordinatenachsen parallel laufen und so schmal sein müssen, dass sie als Rechtecke aufgefasst werden dürfen.

Besonders wichtig ist der in Fig. 37 dargestellte Sonderfall. Die Mittelpunkte der zur x -Achse parallelen Querschnittssehnen liegen in einer Geraden, welche die x -Achse unter dem Winkel α und im Abstände a vom Ursprung O schneidet. Man erhält

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \int xy dF = \int (a + y \cotg \alpha) y dF \\ &= a \int y dF + \cotg \alpha \int y^2 dF, \end{aligned}$$

oder, wenn man mit η die Ordinate des Querschnitts-Schwerpunktes bezeichnet,

$$(5) \quad J_{xy} = Fa\eta + J_x \cotg \alpha.$$

Für das Dreieck (Fig. 38) ergibt sich z. B.

$$J_{xy} = \frac{bh^3}{4} \cotg \alpha \quad \text{und} \quad J_{x'y'} = \frac{bh^3}{36} \cotg \alpha.$$

Der in Fig. 39 abgebildete Querschnitt (Parabelabschnitt) sei durch die Gleichung bestimmt:

$$z = b \sqrt{\frac{y}{h}}.$$

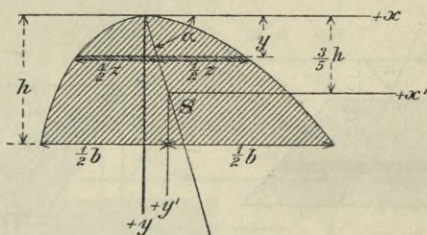


Fig. 39.

Der Flächeninhalt ist

$$F = \int z dy = \frac{2}{3} bh$$

und das statische Moment des Querschnitts in Bezug auf die x -Achse

$$\int zy dy = \frac{2}{5} bh^2.$$

Der Schwerpunkt S liegt also im Abstände $\frac{3}{5}h$ von der x -Achse. Weiter ist

$$J_x = \int z y^2 dy = \frac{2}{7} b h^3$$

$$J_{x'} = \frac{2}{7} b h^3 - \frac{2}{3} b h \left(\frac{3h}{5} \right)^2 = \frac{8}{175} b h^3.$$

Das Centrifugalmoment für das Achsenkreuz $x'y'$ ist also

$$(6) \quad J_{x'y'} = \frac{8}{175} b h^3 \cotg \alpha.$$

29. Das polare Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf einen in der Ebene des Querschnitts gelegenen Punkt O ist durch die Gleichung erklärt

$$(7) \quad J_p = \int r^2 dF,$$

wo r den Abstand des Querschnittsteilchens dF vom Punkte O bedeutet. Für rechtwinklige Koordinaten ist (Fig. 40)

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

mithin

$$(8) \quad J_p = J_y + J_x.$$

In Bezug auf einen in der x -Achse im Abstände e von O gelegenen Punkt O' erhält man das polare Trägheitsmoment

$$J'_p = J'_y + J_x,$$

es ist also

$$J'_p = J_p + J'_y - J_y.$$

Ist die y -Achse eine Schwerachse, so besteht zwischen J'_y und J_y die Beziehung

$$J'_y = J_y + F e^2;$$

man erhält dann

$$(9) \quad J'_p = J_p + F e^2.$$

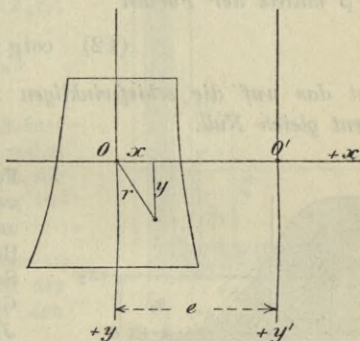


Fig. 40.

30. Einführung schiefwinkliger

Koordinaten. Ist ein Querschnitt anfänglich auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz x, y bezogen, und dreht man die x -Achse, bei festliegender y -Achse, um den Winkel $90^\circ - \beta$ in die Lage x' (Fig. 41), so ergeben sich die schiefwinkligen Koordinaten: $y' = y - x \cotg \beta$ und $x' = x \operatorname{cosec} \beta$.

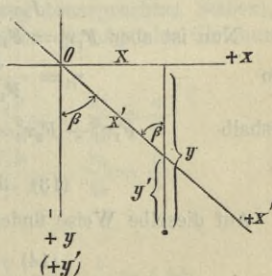


Fig. 41.

$$(15) \quad J_{xy} = J_{x_1y_1} + J_{x_2y_2} + \frac{F_1 F_2 a b}{F_1 + F_2}.$$

Sind die Achsen x_1y_1 und x_2y_2 Hauptachsen der Theile F_1 bezieh. F_2 , so ergibt sich $J_{x_1y_1} = 0$, $J_{x_2y_2} = 0$, und man erhält:

$$(16) \quad J_{xy} = \frac{F_1 F_2 a b}{F_1 + F_2}.$$

Mit Hilfe der Gleich. (13) bis (16) kann man J_x , J_y , J_{xy} finden, ohne die Lage des Schwerpunktes S zu kennen. Es bieten aber diese Formeln auch bei gegebener Lage von S zuweilen Vorteile, weil die in dieselben einzuführenden Zahlen meistens abgerundeter sind als die Zahlenwerte für η und ξ .

Ist die Lage von S bekannt, und sind $J_{x_1y_1}$ und $J_{x_2y_2}$ gleich Null, so kann man aus der Gleichung

$$J_{xy} = F_1 \eta_1 \xi_1 + F_2 \eta_2 \xi_2$$

mit Hilfe der Beziehungen: $F_1 \xi_1 = F_2 \xi_2$; $F_1 \eta_1 = F_2 \eta_2$ auch ableiten:

$$(17) \quad J_{xy} = F_1 \xi_1 a = F_2 \xi_2 a = F_1 \eta_1 b \\ = F_2 \eta_2 b.$$

Zahlenbeispiel. Für den in Fig. 43 dargestellten Winkeleisen-Querschnitt sollen die Werthe J_x , J_y , J_{xy} in Bezug auf die den Schenkeln parallelen Schwerachsen berechnet werden.

Ohne erst die Lage der Schwerachsen zu bestimmen, findet man, nach Zerlegung des Querschnittes in zwei Rechtecke mit den Inhalten $F_1 = 6 \delta^2$ und $F_2 = 9 \delta^2$:

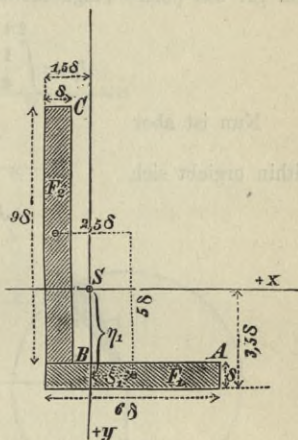


Fig. 43.

$$J_x = \frac{1}{12} (6 \cdot 1^3 + 1 \cdot 9^3) \delta^4 + \frac{6 \cdot 9}{6+9} 5^2 \delta^4 = 151,25 \delta^4$$

$$J_y = \frac{1}{12} (1 \cdot 6^3 + 9 \cdot 1^3) \delta^4 + \frac{6 \cdot 9}{6+9} 2,5^2 \delta^4 = 41,25 \delta^4$$

$$J_{xy} = \frac{6 \cdot 9}{6+9} \cdot 5 \cdot 2,5 \delta^4 = 45 \delta^4.$$

Muss man die Lage des Schwerpunktes aus irgend welchen Gründen haben (z. B. bei der Berechnung von auf Biegung beanspruchten Stäben), so bestimme man η_1 u. ξ_1 oder η_2 u. ξ_2 . Hierzu stehen die folgenden Gleichungen zur Auswahl (vergl. Fig. 42);

$$(18) \quad \begin{cases} \eta_1 = \frac{F_2 a}{F_1 + F_2}; & \xi_1 = \frac{F_2 b}{F_1 + F_2}; & \eta_1 = \frac{a}{b} \\ \eta_2 = \frac{F_1 a}{F_1 + F_2}; & \xi_2 = \frac{F_1 b}{F_1 + F_2}; & \eta_2 = \frac{a}{b}. \end{cases}$$

Im vorliegenden Falle findet man z. B.

$$\eta_1 = \frac{9 \delta^2 \cdot 5 \delta}{(6+9) \delta^2} = 3 \delta \quad \text{und} \quad \xi_1 = \eta_1 \frac{b}{a} = \eta_1 \frac{1}{2} = 1,5 \delta.$$

Durch diese beiden Werthe ist die Lage von S bekannt, und es ergibt sich jetzt:

$$J_{xy} = F_1 \xi_1 a = 6 \cdot 1,5 \cdot 5 \delta^4 = 45 \delta^4.$$

Dass bei einem so einfachen Querschnitte wie der in Fig. 43 dargestellte die Rechnung schneller zum Ziele führt wie die Zeichnung, braucht kaum hervorgehoben zu werden.

32. Aufgaben.

1. Berechnung der Trägheitsmomente des Kreisquerschnitts. Mit Hilfe der auf Seite 31 für das Dreieck abgeleiteten Formel $J = \frac{1}{4} b h^3$ findet man für das polare Trägheitsmoment des Kreises, Fig. 44, den Werth

$$J_p = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} r^4 d\varphi. \quad r^3 = \frac{r^4}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi r^4}{2}.$$

Nun ist aber

$$J_p = J_x + J_y$$

mithin ergibt sich

$$J_x = J_y = \frac{\pi r^4}{4}.$$

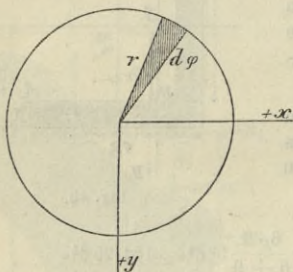


Fig. 44.

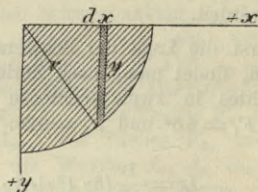


Fig. 45.

2. Für den Quadranten, Fig. 45, erhält man

$$J_x = J_y = \frac{\pi r^4}{16} \quad J_p = \frac{\pi r^4}{8}$$

$$J_{xy} = \int_0^r y dx \frac{y}{2} x = \frac{1}{2} \int_0^r x (r^2 - x^2) dx = \frac{r^4}{8}.$$

Das statische Moment dieses Querschnitts in Bezug auf die x -Achse ist

$$S_x = \int y dx \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{r^3}{3}.$$

Der Abstand des Schwerpunktes des Querschnitts von der x -Achse ist

$$\frac{S_x}{F} = \frac{4r}{3\pi}.$$

3. Für den in Fig. 46 dargestellten Querschnitt (Unterschied eines Quadrats und eines Quadranten) ist*)

$$J_x = J_y = \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16} \right) r^4$$

$$J_{xy} = r^2 \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} - \frac{r^4}{8} = \frac{r^4}{8}$$

$$S_x = S_y = r^2 \cdot \frac{r}{2} - \frac{r^3}{3} = \frac{r^3}{6}$$

$$F = r^2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right).$$

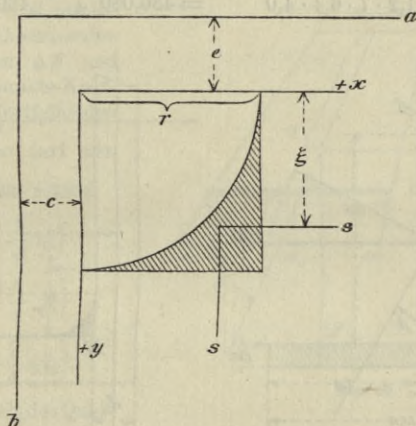


Fig. 46.

Die Ordinate des Schwerpunktes ist

$$\bar{\xi} = \frac{S_x}{F} = \frac{2r}{3(4 - \pi)} = 0,776632 r.$$

Die auf die Schwerachsen s, s bezogenen Querschnittsmomente sind

$$J_s = J_x - F \bar{\xi}^2 = J_x - S_x \bar{\xi}$$

$$J_{ss} = J_{xy} - F \bar{\xi}^2 = J_{xy} - S_x \bar{\xi}.$$

Das Trägheitsmoment für die zur x -Achse parallele Achse a ist

$$J_a = J_s + F(\bar{\xi} + e)^2 = J_s + F \bar{\xi}^2 + 2F \bar{\xi} e + F e^2$$

$$J_a = J_x + 2S_x e + F e^2$$

$$J_a = \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16} \right) r^4 + \frac{r^3 e}{3} + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) r^2 e^2.$$

*) Vergl. für das Quadrat die Fussnote auf Seite 31.

Das Centrifugalmoment für das Achsenkreuz ab ist

$$\begin{aligned} J_{ab} &= J_{ss} + F(\xi + e)(\xi + c) \\ &= J_{ss} + F\xi^2 + F\xi(e + c) + Fec \\ &= J_{xy} + S_x(e + c) + Fec \\ J_{ab} &= \frac{r^4}{8} + \frac{r^3}{6}(e + c) + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)r^2ec. \end{aligned}$$

4. Berechnung der Querschnittsmomente für das in Fig. 47 abgebildete Z-Eisen (Normalprofil No. 14 für Schiffbauzwecke). Der Querschnitt ist auf rechtwinklige Schwerachsen bezogen, die y -Achse ist parallel zum Steg. Wird die Abrundung der Ecken C und E vernachlässigt, so erhält man

$$J_x = \frac{1}{12} (8 \cdot 14^3 - 7 \cdot 11,6^3) = 918,811 \text{ rund} = 919 \text{ cm}^4$$

$$J_y = \frac{1}{12} (1,2 \cdot 15^3 + 12,8 \cdot 1^3) = 338,567 \text{ ,, } 339 \text{ ,,}$$

$$J_{xy} = 2 \cdot 1,2 \cdot 7 \cdot 6,4 \cdot 4,0 = 480,080 \text{ ,, } 480 \text{ ,,}$$

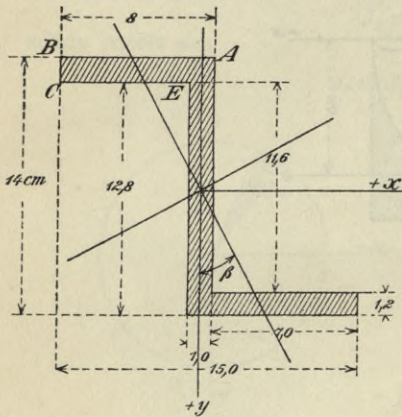


Fig. 47.

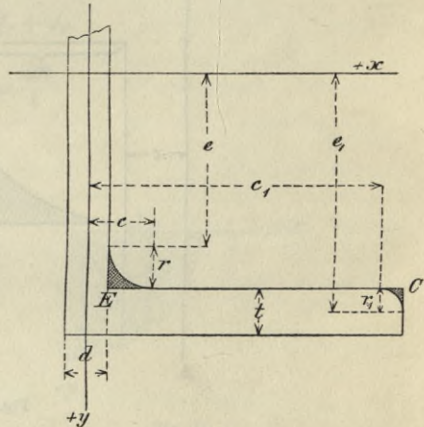


Fig. 48.

Infolge der Abrundung der Ecken E und C durch Viertelkreise mit den Halbmessern r und r_1 (Fig. 48) ändern sich diese Werthe um ΔJ_x , ΔJ_y , ΔJ_{xy} , wo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta J_x &= \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right)r^4 + \frac{r^3 e}{3} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)r^2 e^2 \\ &\quad - \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right)r_1^4 - \frac{r_1^3 e_1}{3} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)r_1^2 e_1^2\right] \\ \frac{1}{2} \Delta J_y &= \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right)r^4 - \frac{r^3 c}{3} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)r^2 c^2 \\ &\quad - \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right)r_1^4 + \frac{r_1^3 c_1}{3} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)r_1^2 c_1^2\right] \\ \frac{1}{2} \Delta J_{xy} &= -\frac{r^4}{8} - \frac{r^3}{6}(e - c) + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)r^2 ec \\ &\quad - \left[-\frac{r_1^4}{8} + \frac{r_1^3}{6}(e_1 - c_1) + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)r_1^2 e_1 c_1\right]. \end{aligned}$$

Für den Flächenstreifen $z dy$ erhält man, bezogen auf das schiefe Achsenkreuz $x' y'$:

$$d J_{y'} = d y' \sin \beta \int_{-\frac{z}{2}}^{+\frac{z}{2}} x'^2 dx' = \frac{z^3}{12} \sin \beta d y'.$$

Da nun $d y' = dz \frac{t}{(a_1 - a_2)}$, so folgt

$$J_{y'} = \frac{\sin \beta t}{12(a_1 - a_2)} \int_{a_2}^{a_1} z^3 dz = \frac{\sin \beta t (a_1^4 - a_2^4)}{48(a_1 - a_2)}.$$

Der Flächeninhalt ist

$$F = \frac{h(a_1 + a_2)}{2}.$$

Es ergibt sich also schliesslich

$$J_{y'} = \frac{F(a_1^3 + a_2^3)}{24}$$

§ 7.

Beziehungen zwischen den Trägheitsmomenten und Centrifugalmomenten für Achsen, welche durch einen und denselben Punkt gehen.

33. Analytische Beziehungen. Dreht man das rechtwinklige Achsenkreuz (x, y) , auf welches der Querschnitt bezogen ist, um den

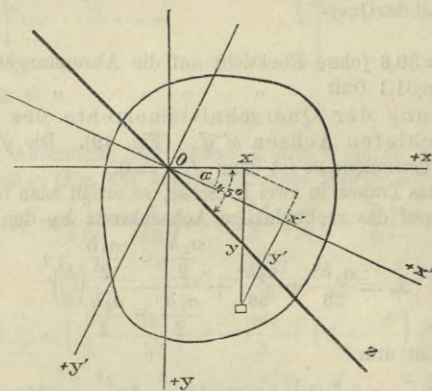


Fig. 50.

Winkel α in die Lage x', y' (Fig. 50), so sind die neuen Koordinaten:

$$\begin{aligned} y' &= y \cos \alpha - x \sin \alpha \\ x' &= y \sin \alpha + x \cos \alpha, \end{aligned}$$

und es ergeben sich für die Querschnittsmomente: $J_{x'} = \int y'^2 dF$; $J_{y'} = \int x'^2 dF$; $J_{x'y'} = \int x' y' dF$ in Bezug auf die Achsen x' und y' des neuen Koordinatensystems die Ausdrücke:

$$J_{x'} = \cos^2 \alpha \int y^2 dF + \sin^2 \alpha \int x^2 dF - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int xy dF,$$

$$J_{y'} = \sin^2 \alpha \int y^2 dF + \cos^2 \alpha \int x^2 dF + 2 \sin \alpha \cos \alpha \int xy dF,$$

$$J_{x'y'} = \sin \alpha \cos \alpha \left(\int y^2 dF - \int x^2 dF \right) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int xy dF.$$

Es bestehen also zwischen den auf die Achsen x , y bezogenen Werthen

$$J_x = \int y^2 dF; \quad J_y = \int x^2 dF; \quad J_{xy} = \int xy dF$$

und den Werthen $J_{x'}$, $J_{y'}$, $J_{x'y'}$ die Beziehungen

$$(1) \quad \begin{cases} J_{x'} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2 \alpha, \\ J_{y'} = J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2 \alpha, \\ J_{x'y'} = \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sin 2 \alpha + J_{xy} \cos 2 \alpha. \end{cases}$$

Addirt man die beiden ersten dieser Gleichungen, so erhält man das wichtige Gesetz

$$(2) \quad \dots \quad J_{x'} + J_{y'} = J_x + J_y,$$

nach welchem die Summe der Trägheitsmomente, bezogen auf irgend zwei durch einen und denselben Punkt gehende, rechtwinklige Achsen konstant ist.*)

Aus der ersten der Gleichungen (1) ergibt sich für eine unter 45° gegen die x -Achse geneigte, in der Fig. 50 mit z bezeichnete Achse das Trägheitsmoment

$$J_z = \frac{1}{2} (J_x + J_y) - J_{xy}$$

und hieraus folgt die Formel

$$(3) \quad J_{xy} = \frac{1}{2} (J_x + J_y) - J_z,$$

welche mitunter zur Berechnung des Centrifugalmomentes aus drei Trägheitsmomenten benutzt wird.

Setzt man

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2 \alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2 \alpha}{2}$$

so geht $J_{x'}$ über in

$$(4) \quad J_{x'} = \frac{1}{2} (J_x + J_y) + \frac{1}{2} (J_x - J_y) \cos 2 \alpha - J_{xy} \sin 2 \alpha.$$

*) Dies folgt auch nach Seite 37 aus $J_p = J_x + J_y = J_{x'} + J_{y'}$.

Dieser Werth wird ein Maximum bezw. Minimum sobald

$$-\frac{1}{2}(J_x - J_y) \sin 2\alpha - J_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

ist, woraus

$$(5) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2 J_{xy}}{J_x - J_y}.$$

Dieser Gleichung genügen zwei Winkel α , die sich von einander um 90° unterscheiden. Die beiden Achsen, für welche J ein Maximum oder Minimum ist, stehen also aufeinander senkrecht; sie führen den Namen *Hauptachsen*. Die Trägheitsmomente in Bezug auf die Hauptachsen heissen *Hauptträgheitsmomente*, sie sollen mit J_1 und J_2 bezeichnet werden. Aus den Gleichungen (4) und (5) folgt

$$\begin{aligned} J_x' &= \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2}(J_x - J_y) \cos 2\alpha \left[1 - \frac{2 J_{xy}}{J_x - J_y} \operatorname{tg} 2\alpha \right] \\ &= \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2}(J_x - J_y) \cos 2\alpha (1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2}(J_x - J_y) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}. \end{aligned}$$

Man erhält also für die beiden Hauptträgheitsmomente die Werthe

$$(6) \quad \begin{cases} J_1 = \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 J_{xy}^2} = J_{max} \\ J_2 = \frac{1}{2}(J_x + J_y) - \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 J_{xy}^2} = J_{min}. \end{cases}$$

Aus der dritten der Gleichungen (1) und aus Gleichung (5) folgt schliesslich noch, dass das *Centrifugalmoment für die Hauptachsen = 0 ist*. Jede *Symmetrieachse* ist zugleich eine Hauptachse.

34. Geometrische Beziehungen (nach Mohr). Durch einen beliebigen Punkt O eines Querschnitts (Fig. 51) seien zwei Achsen x und y gelegt, die miteinander irgend einen Winkel einschliessen. Die lothrechten Abstände des Querschnittstheilchens dF von diesen Achsen seien als dessen Koordinaten eingeführt. ρ sei der Abstand des Theilchens dF von O und α und β seien die Winkel, welche der von O nach dF führende Fahrstrahl mit den Achsen x und y bildet. Das Centrifugalmoment des Theilchens dF in Bezug auf die Achsen x und y ist dann

$$dJ_{xy} = dF \cdot \rho^2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Legt man nun durch O einen beliebigen Kreis, dessen Radius r ist, und bringt man die Achsen x , y und den Fahrstrahl ρ mit dem Kreise in A , B und C zum Schnitt, so ist $\angle BAC = \beta$ und Sehne $\overline{AC} = 2r \sin \alpha$, mithin ist der Abstand des Punktes C von der Kreis-

sehne \overline{AB} gleich $2r \sin \alpha \sin \beta$. Legt man also dem Punkte C eine Masse von der Grösse

$$\frac{dF \rho^2}{2r}$$

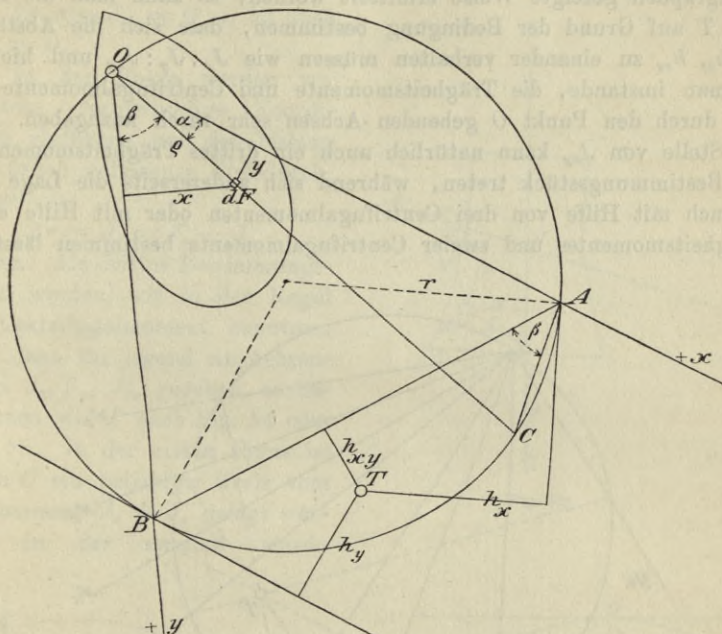


Fig. 51.

bei, so ist das statische Moment dieser Masse in Bezug auf die Kreissehne AB gleich dem Centrifugalmoment dJ_{xy} .

Denkt man sich nun zu jedem dF den zugehörigen Kreispunkt und die diesem Punkte beizulegende Masse bestimmt und schliesslich den Schwerpunkt T aller dieser Massenpunkte ermittelt, so erhält man, wenn T von der Sehne AB den Abstand h_{xy} hat:

$$J_{xy} = h_{xy} \int \frac{dF \rho^2}{2r} = \frac{h_{xy} J_p}{2r},$$

wo J_p das polare Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf den Punkt O bedeutet.

Fallen die beiden Achsen x und y zusammen, so wird aus dem Centrifugalmoment ein Trägheitsmoment und aus der Kreissehne AB

eine Tangente. Bezeichnen also h_x und h_y die Abstände des Punktes T von den in A und B an den Kreis gelegten Tangenten, so ist

$$J_x = h_x \frac{J_p}{2r} \qquad J_y = h_y \frac{J_p}{2r}.$$

Sind nun drei Querschnittsmomente: J_x, J_y, J_{xy} auf die im vorigen Paragraphen gezeigte Weise ermittelt worden, so kann man die Lage von T auf Grund der Bedingung bestimmen, dass sich die Abstände h_x, h_y, h_{xy} zu einander verhalten müssen wie $J_x : J_y : J_{xy}$ und hierauf ist man imstande, die Trägheitsmomente und Centrifugalmomente für alle durch den Punkt O gehenden Achsen sehr rasch anzugeben. An die Stelle von J_{xy} kann natürlich auch ein drittes Trägheitsmoment J_x als Bestimmungsstück treten, während sich andererseits die Lage von T auch mit Hilfe von drei Centrifugalmomenten oder mit Hilfe eines Trägheitsmomentes und zweier Centrifugalmomente bestimmen lässt.

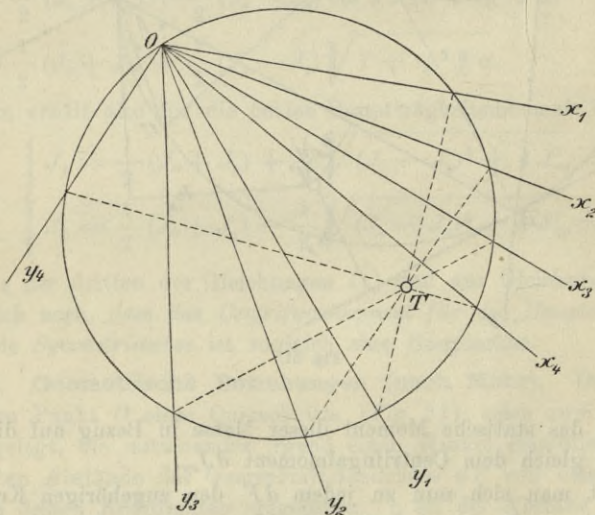


Fig. 52.

Geht die Kreissehne AB durch den Punkt T so ist das Centrifugalmoment $J_{xy} = 0$; die beiden Achsen x und y heissen dann *zugeordnete* oder *conjugirte* Achsen. In Fig. 52 ist eine Schaar zugeordneter Achsen $x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3, \dots$ dargestellt worden; sie bilden einen involutorischen Strahlenbüschel; das Centrum der Involution ist der Punkt T . Führt man als Koordinaten von dF nicht die lothrechten Achsenabstände x und y ein, sondern die schrägen Abstände

ξ und η (Fig. 53), deren Richtungen aber mit den Achsen x und y die von der Lage von dF unabhängigen also festen Winkel γ und ε einschliessen, so ist

$$J_{\xi\eta} = \int \xi\eta dF = \frac{1}{\sin \gamma \sin \varepsilon} \int xy dF.$$

Ist also $J_{xy} = 0$ so, ist auch $J_{\xi\eta} = 0$.

In der Folge werden wir meistens rechtwinklige Koordinaten einführen und den bislang willkürlich gelassenen Kreisdurchmesser

$$2r = J_x + J_y$$

wählen. Als drittes Bestimmungsstück werden wir in der Regel ein Centrifugalmoment benutzen. Sind dann für irgend ein Achsenkreuz J_x, J_y, J_{xy} gegeben, so bestimmen wir T nach Fig. 54 oder Fig. 55. In der ersten Figur ist durch O ein beliebiger Kreis vom Durchmesser $J_x + J_y$ gelegt worden, in der zweiten wurde

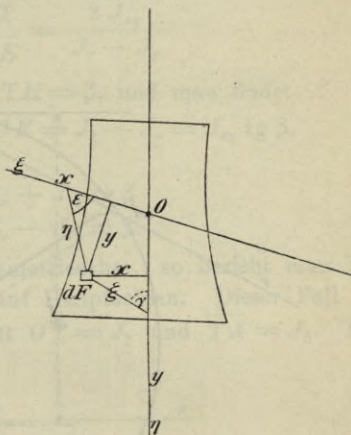


Fig. 53.

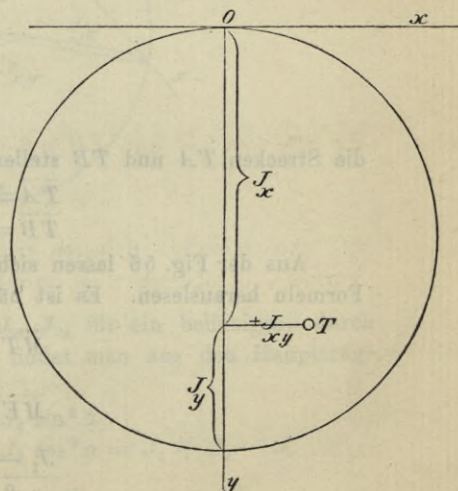
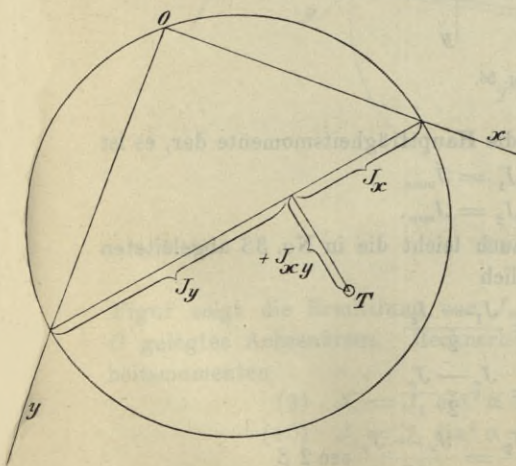


Fig. 54 und 55.

die x -Achse zur Kreistangente gemacht. Beim Auftragen von J_{xy} ist auf das Vorzeichen zu achten.

Fig. 56 zeigt die Ermittlung der Hauptachsen und Hauptträgheitsmomente. Es wurde ein die x -Achse berührender Kreis benutzt. Der durch T gelegte Durchmesser bestimmt die Hauptachsen OA und OB ;

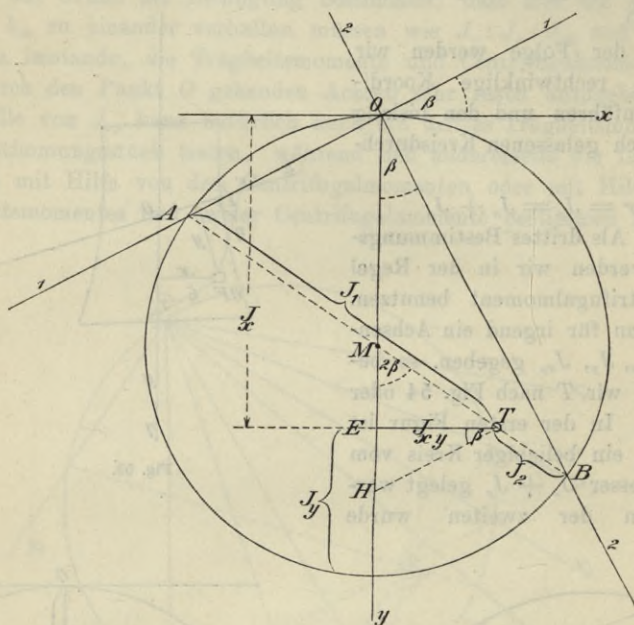


Fig. 56.

die Strecken TA und TB stellen die Hauptträgheitsmomente dar, es ist

$$\overline{TA} = J_1 = J_{max}$$

$$\overline{TB} = J_2 = J_{min}.$$

Aus der Fig. 56 lassen sich auch leicht die in No. 33 abgeleiteten Formeln herauslesen. Es ist nämlich

$$\overline{MT} = \frac{J_1 - J_2}{2}$$

$$\overline{ME} = \frac{J_x - J_y}{2}$$

$$\frac{J_1 - J_2}{2} = \frac{J_x - J_y}{2} \sec 2\beta$$

$$J_1 + J_2 = J_x + J_y$$

folglich

$$J_1 = \frac{1}{2} (J_x + J_y) + \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sec 2\beta$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (J_x + J_y) - \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sec 2\beta.$$

Der Winkel β ist bestimmt durch

$$(7) \quad \operatorname{tg} 2\beta = \frac{ET}{ME} = \frac{2 J_{xy}}{J_x - J_y}$$

Macht man $\overline{MH} = \overline{MT}$, so ist $\angle ETH = \beta$, und man findet

$$\overline{EH} = \overline{OH} - \overline{OE} = \overline{AT} - \overline{OE} = J_1 - J_x = J_{xy} \operatorname{tg} \beta,$$

so dass man auch erhält:

$$(8) \quad \begin{cases} J_1 = J_x + J_{xy} \operatorname{tg} \beta \\ J_2 = J_y - J_{xy} \operatorname{tg} \beta. \end{cases}$$

Besitzt ein Querschnitt eine Symmetrieachse, so bezieht man ihn zweckmässig gleich von vornherein auf Hauptachsen. Dieser Fall ist in Fig. 57 dargestellt worden. Es ist $OT = J_1$ und $TA = J_2$. Die

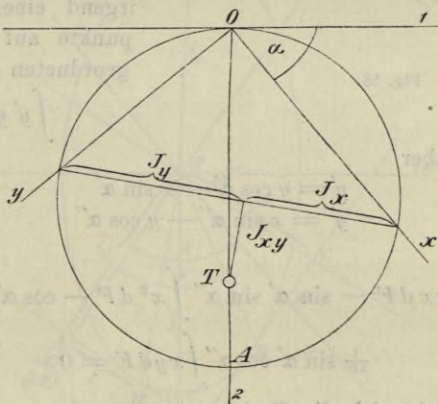


Fig. 57.

Figur zeigt die Ermittlung von J_x , J_y , J_{xy} für ein beliebiges, durch O gelegtes Achsenkreuz. Rechnerisch findet man aus den Hauptträgheitsmomenten

$$(9) \quad J_x = J_1 \cos^2 \alpha + J_2 \sin^2 \alpha$$

$$(10) \quad J_y = J_1 \sin^2 \alpha + J_2 \cos^2 \alpha = J_1 + J_2 - J_x$$

$$(11) \quad J_{xy} = \frac{1}{2} (J_1 - J_2) \sin 2\alpha.$$

Zahlenbeispiel. Für das auf Seite 42 untersuchte Z-Eisen wurden gefunden:

$$J_x = 928,423 \quad J_y = 332,948 \quad J_{xy} = 427,133.$$

Die Lage der Hauptachsen ist bestimmt durch

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\beta &= \frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} = \frac{854,266}{595,475} \\ \beta &= 27^\circ 33' 38'' \quad \operatorname{tg} \beta = 0,52191. \end{aligned}$$

Für die Hauptträgheitsmomente ergeben sich die Werthe

$$\begin{aligned} J_1 &= J_x + J_{xy} \operatorname{tg} \beta = J_x + 222,925 = 1151,35 \text{ cm}^4 \\ J_2 &= J_y - 222,925 = 110,02 \text{ „} \end{aligned}$$

35. Wichtige Beziehung zwischen zwei zugeordneten Richtungen.

Gegeben seien für rechtwinklige Koordinaten xy die Querschnittsmomente J_x, J_y, J_{xy} , gesucht eine Beziehung zwischen den Winkeln α' und α'' , welche zwei zugeordnete Richtungen mit der x -Achse bilden, Fig. 58. Sind y' und y'' die Lothe von irgend einem Querschnittspunkte auf die beiden zugeordneten Achsen, so muss

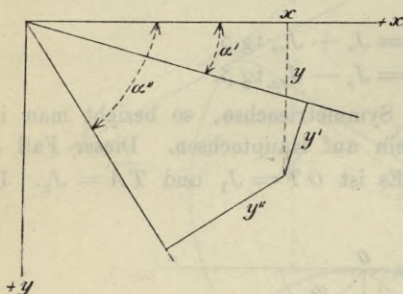


Fig. 58.

$$\int y' y'' dF = 0$$

sein. Nun ist aber

$$\begin{aligned} y' &= y \cos \alpha' - x \sin \alpha' \\ y'' &= x \sin \alpha'' - y \cos \alpha'' \end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned} \cos \alpha' \sin \alpha'' \int yx dF - \sin \alpha' \sin \alpha'' \int x^2 dF - \cos \alpha' \cos \alpha'' \int y^2 dF \\ + \sin \alpha' \cos \alpha'' \int xy dF = 0 \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich die Beziehung

$$(12) \quad J_{xy} (\operatorname{tg} \alpha' + \operatorname{tg} \alpha'') = J_x + J_y \operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha''.$$

Ist α' gegeben, so findet man

$$(13) \quad \operatorname{tg} \alpha'' = \frac{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha'}{J_{xy} - J_y \operatorname{tg} \alpha'} = \frac{J_x \operatorname{ctg} \alpha' - J_{xy}}{J_{xy} \operatorname{ctg} \alpha' - J_y}.$$

Für $\alpha' = 0$ erhält man $\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{J_x}{J_{xy}}$ (14)

„ $\alpha' = 90^\circ$ „ „ $\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{J_{xy}}{J_y}$. (15)

Sind die Achsen x und y Hauptachsen, so wird $J_{xy} = 0$ und
 $J_x + J_y \operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha'' = 0$.

§ 8.

Die Trägheitsellipse.

36. Annahme rechtwinkliger Koordinaten. Ein Querschnitt sei auf die irgend einem Punkte O entsprechenden Hauptachsen (1) und (2) bezogen.

Die Haupt-Trägheitshalbmesser $i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{F}}$ und $i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{F}}$ seien gegeben.

Dann findet man für den Trägheitshalbmesser i_x in Bezug auf eine unter dem Winkel α gegen die Hauptachse (1) durch den Punkt O gelegte x -Achse die Gleichung

$$(1) \quad i_x^2 = i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \sin^2 \alpha \quad (\text{nach Gleich. 9 auf Seite 51}).$$

Trägt man auf der zur x -Achse senkrechten y -Achse die Strecke $\overline{OA} = i_x$ ab (Fig. 59), legt durch den Punkt A eine Parallele zur x -Achse und wiederholt dies für alle möglichen Lagen der x -Achse, so umhüllen jene Parallelen

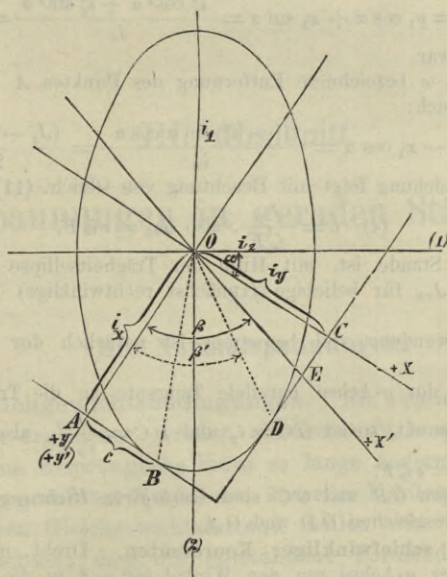


Fig. 59.

eine Ellipse, welche die *Trägheitsellipse* für den Punkt O heisst und den besonderen Namen *Centralellipse* führt, sobald O der Schwerpunkt des Querschnittes ist. Die Halbachsen der Trägheitsellipse fallen mit den Querschnittshauptachsen zusammen und sind $= i_1$ (senkrecht zur Achse 2) und $= i_2$ (senkrecht zur Achse 1).

Der Beweis für den vorstehenden Satz ist der folgende. Die Gleichung einer Ellipse lautet, bezogen auf ihre Hauptachsen i_1 und i_2 als Koordinatenachsen, und wenn die Koordinaten irgend eines Punktes B der Ellipse mit x_1 und y_1 bezeichnet werden (wobei $y_1 \parallel i_1$ sein möge):

$$(2) \quad \frac{y_1^2}{i_1^2} + \frac{x_1^2}{i_2^2} = 1;$$

aus derselben folgt durch Differenzieren:

$$\frac{y_1 dy_1}{i_1^2} + \frac{x_1 dx_1}{i_2^2} = 0 \text{ oder } x_1 = -y_1 \frac{i_2^2 dy_1}{i_1^2 dx_1},$$

und es müssen daher die Koordinaten des Ellipsenpunktes B , dem eine unter α gegen die Achse (1) geneigte Tangente entsprechen soll, ausser der Gleich. (2) noch der Gleichung genügen:

$$(3) \quad x_1 = -y_1 \frac{i_2^2}{i_1^2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Nun folgt aus (2) und (3) mit Beachtung von (1):

$$y_1^2 = \frac{i_1^4 \cos^2 \alpha}{i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \sin^2 \alpha} = \frac{i_1^4 \cos^2 \alpha}{i_x^2}$$

also:

$$y_1 = \frac{i_1^2 \cos \alpha}{i_x} \text{ und hierauf } x_1 = \frac{i_2^2 \sin \alpha}{i_x},$$

und es ist deshalb das Loth von O auf die in B an die Ellipse gelegte Tangente

$$\overline{OA} = y_1 \cos \alpha + x_1 \sin \alpha = \frac{i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \sin^2 \alpha}{i_x} = i_x,$$

was zu beweisen war.

Für die mit c bezeichnete Entfernung des Punktes A vom Berührungspunkte B ergibt sich:

$$c = y_1 \sin \alpha - x_1 \cos \alpha = \frac{(i_1^2 - i_2^2) \sin \alpha \cos \alpha}{i_x} = \frac{(J_1 - J_2) \sin 2\alpha}{2i_x F},$$

und aus dieser Gleichung folgt mit Beachtung von Gleich. (11) auf Seite 51:

$$(4) \quad c = \frac{J_{xy}}{i_x F}, \text{ also } J_{xy} = c i_x F,$$

so dass man im Stande ist, mit Hilfe der Trägheitsellipse die Querschnittsmomente J_x, J_y, J_{xy} für beliebige (zunächst rechtwinklige) Koordinatenachsen zu bestimmen.

Für die Anwendung viel bequemer ist natürlich der im § 7 benutzte Kreis.

Ist CD die der y -Achse parallele Tangente an die Trägheitsellipse und D ihr Berührungspunkt, so ist $\overline{OC} = i_y$ und $\overline{DC} = \frac{J_{xy}}{i_y F}$, also, wenn $\overline{DC} = e$ gesetzt wird, $J_{xy} = e i_y F$.

Die Richtungen OB und OC sind *konjugierte Richtungen bezüglich der Trägheitsellipse*, desgleichen OD und OA .

Einführung schiefwinkliger Koordinaten. Dreht man die x -Achse, bei liegenbleibender y -Achse um den Winkel $90^\circ - \beta$ in die Lage x' (Fig. 59 und 41), so erhält man (nach No. 30) in Bezug auf die schiefwinkligen Achsen y', x' :

$$J_{y'} = J_y \operatorname{cosec}^2 \beta \text{ und } J_{x'y'} = \operatorname{cosec} \beta (J_{xy} - J_y \cotg \beta),$$

woraus, mit $J_{y'} = F i_{y'}^2$; $J_y = F i_y^2$; $J_{xy} = e i_y F$, sich ergibt:

$$i_{y'} = i_y \operatorname{cosec} \beta \text{ und } J_{x'y'} = i_y \operatorname{cosec} \beta (e - i_y \cotg \beta) F.$$

Bezeichnet man den Schnittpunkt der x' -Achse und der Ellipsentangente DC mit E , so ist $\overline{OE} = i_{y'}$; $\overline{DE} = e - i_y \cotg \beta$, und es folgt daher:

$$J_{x'y'} = F \cdot \overline{OE}^2; \quad J_{x'y'} = F \cdot \overline{OE} \cdot \overline{ED}.$$

Erhält die x' -Achse die der y -Achse konjugirte Richtung OD , so wird $J_{x'y'} = 0$, und es ergibt sich der Satz:

Das auf konjugirte Durchmesser der Trägheitsellipse bezogene Centrifugalmoment des Querschnittes ist = 0.

Der Winkel β' , welchen die einander konjugirten Richtungen OD und OA einschliessen, ist bestimmt durch die Gleichung: $\cotg \beta' = \frac{J_{xy}}{J_y}$. Es ergibt sich dies sowohl aus dem am Schluss von No. 30 ausgesprochenen Gesetze, als auch aus Fig. 59; hier findet man

$$\cotg \beta' = \frac{\overline{DC}}{\overline{OC}} = \frac{e}{i_y} = \frac{J_{xy}}{J_y}.$$

Hat die x' -Achse die Lage OD , so ist der Trägheitshalbmesser $i_{y'}$ gleich dem Ellipsenhalbmesser OD .

Kennt man J_x , J_y , J_{xy} für irgend ein Achsenkreuz, so ist man im Stande, in jedem Ellipsenquadranten eine Tangente und deren Berührungspunkt anzugeben (in Fig. 59 die Punkte B , D , Tangenten AB , DC , sowie die entsprechenden 2 Punkte und 2 Tangenten auf der anderen Seite der y -Achse). Die Ellipse ist also durch 8 Stücke gegeben, mithin überbestimmt, da bereits 5 Stücke zur Bestimmung eines Kegelschnittes genügen.

III. Abschnitt.

Spannungen in geraden Stäben.

§ 9.

Die Normalspannungen.

37. Gleichgewichtsbedingungen. Ein von irgend welchen endlichen Kräften ergriffener gerader, elastischer Stab wird bei genügender Festigkeit seine ursprüngliche Form so lange ändern, bis die in seinem Inneren hervorgerufenen Kräfte den äusseren Kräften das Gleichgewicht halten. Diesen Gleichgewichtszustand wollen wir unter der Voraussetzung betrachten, dass die entstandene Formänderung sehr gering ist und ihr Einfluss auf die Lage der Angriffspunkte und die Richtungen der Kräfte vernachlässigt werden darf; wir denken uns also bei Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen alle Kräfte in denjenigen Lagen, welche sie im Falle eines vollkommen starren Stabes einnehmen würden.

Durch einen zur Stabachse AB (Fig. 60) senkrechten Querschnitt F zerlegen wir den Stab in zwei Theile und vereinigen alle an dem

einen der beiden Theile, z. B. an dem linken, angreifenden äusseren Kräfte $P_1, P_2, P_3 \dots$ (mittels des in No. 19 beschriebenen Verfahrens) zu zwei Kräften N und Q , deren erste senkrecht zum Querschnitte ist, während die andere in der Ebene des Querschnittes wirkt. N heisst die *Längskraft für den Querschnitt F* ; sie möge positiv angenommen werden, sobald sie das Bestreben hat, den linken Stabtheil von dem festgehalten gedachten rechten Theile zu entfernen. Die Kraft Q wird die *Querkraft für den Querschnitt F* genannt; ihr Vorzeichen ist vorläufig gleichgiltig.

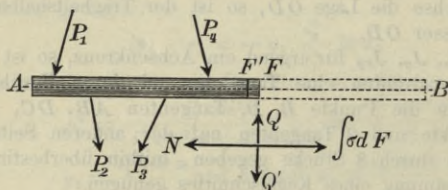


Fig. 60.

Neben den äusseren Kräften greifen an dem betrachteten linken Stabstücke noch die vom rechten Stabstücke auf den Querschnitt F ausgeübten inneren Kräfte an. Die auf ein unendlich kleines Querschnittstheilchen dF wirkende Kraft setzen wir gleichmässig über dF vertheilt voraus; wir zerlegen sie in die Seitenkräfte σdF und τdF , erstere rechtwinklig zur Querschnittsebene gerichtet, letztere mit dieser Ebene zusammenfallend. Hierbei bedeuten σ und τ die auf die Einheit von dF wirkenden Kräfte; sie werden *Spannungen* genannt, und zwar heisst σ eine *Normalspannung* und τ eine *Schubspannung*. σ wird in der Regel als *Zugspannung positiv* und als *Druckspannung (Presung) negativ* angenommen.

Sollen die inneren und äusseren Kräfte mit einander im Gleichgewicht sein, so muss

- 1) die Mittelkraft $\int \sigma dF$ aller zur Querschnittsebene senkrechten Kräfte σdF der Längskraft N entgegengesetzt gleich sein und mit N zusammenfallen,
- 2) die Mittelkraft Q' aller in der Querschnittsebene wirkenden Kräfte τdF der Querkraft Q entgegengesetzt gleich sein und mit Q zusammenfallen.

38. Ermittlung der Normalspannungen σ . Wir beschäftigen uns zunächst nur mit den Spannungen σ , beziehen den Querschnitt auf ein schiefwinkliges Achsenkreuz ξ, η und bezeichnen die Koordinaten des Angriffspunktes K der Längskraft N mit ξ_k, η_k . Dann lauten die Gleichgewichtsbedingungen, denen die Spannungen σ genügen müssen

$$(1) \quad N = \int \sigma dF$$

$$(2) \quad N\xi_k = \int \xi \sigma dF$$

$$(3) \quad N\eta_k = \int \eta \sigma dF,$$

sie sollen in diesem Bande unseres Buches nur für den Fall aufgelöst werden, dass σ eine lineare Funktion der Koordinaten ξ und η ist, dass also

$$(4) \quad \sigma = a + b\xi + c\eta$$

gesetzt werden darf, wo a, b, c für den betrachteten Querschnitt feste Werthe bedeuten. Trägt man dann in jedem Punkte $\xi\eta$ die daselbst

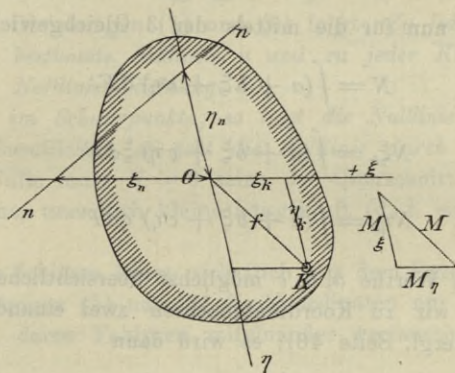


Fig. 61.

herrschende Spannung rechtwinklig zum Querschnitt als Ordinate auf, so liegen die Endpunkte der Strecke σ in einer Ebene, welche den Querschnitt in einer Geraden nn , der sogenannten Nulllinie schneidet. In den Punkten einer zur Nulllinie parallelen Geraden herrschen gleich grosse Spannungen; die grösste Spannung entsteht in dem von der Nulllinie am weitesten abgelegenen Querschnittspunkte.

Man erkennt, dass sich für den Fall der Proportionalität zwischen Spannungen und Formänderungen — also für den Fall der Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes — die Einführung der Gleichung (4) mit der in der Festigkeitslehre üblichen Voraussetzung deckt, dass bei der Berechnung der Spannungen σ die ursprünglich ebenen Querschnitte auch nach der Biegung des Stabes als Ebenen betrachtet werden dürfen und dass sowohl die Krümmung der materiellen Linien, welche entsprechende Punkte zweier benachbarten Querschnitte verbinden, als auch die Querkontraktion vernachlässigbar ist. Die Brauchbarkeit dieser Annahme

ist für gerade Stäbe mit im Verhältniss zur Stablänge kleinen Querschnitts-Abmessungen durch eine Reihe schärferer Untersuchungen nachgewiesen worden, so von *De Saint-Venant* in *Liouville's Journal*, 1856, von *Kirchhof* in *Crelle's Journal*, 1859, von *Pochhammer* in dessen Werke über das Gleichgewicht des elastischen Stabes (Kiel, 1879).

In erster Linie dürfen also die auf Grund der linearen Spannungsvertheilung gewonnenen Formeln für Stäbe aus Flusseisen, Schweisseisen und Stahl benutzt werden, solange die Beanspruchung innerhalb der für diese Stoffe nachgewiesenen Proportionalitätsgrenze liegt. Aber auch bei der Berechnung der Querschnitts-Abmessungen von Holz- und Steinbauten (bei letzteren vorzugsweise im Falle des Ueberwiegens von Druckspannungen) hat sich jenes überaus einfache Spannungsgesetz recht gut bewährt.

Damit sich nun für die mittels der 3 Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} N &= \int (a + b\xi + c\eta) dF \\ N\xi_k &= \int (a + b\xi + c\eta) \xi dF \\ N\eta_k &= \int (a + b\xi + c\eta) \eta dF \end{aligned}$$

zu berechnenden Werthe a, b, c möglichst übersichtliche Ausdrücke ergeben, wählen wir zu Koordinatenachsen zwei einander zugeordnete Schwerachsen (vergl. Seite 48); es wird dann

$$\int \xi dF = 0, \int \eta dF = 0, \int \xi\eta dF = 0$$

und die Gleichgewichtsbedingungen gehen über in

$$\begin{aligned} N &= aF \\ N\xi_k &= b \int \xi^2 dF = b J_\eta \\ N\eta_k &= c \int \eta^2 dF = c J_\xi \end{aligned}$$

Setzt man die hieraus berechneten Werthe a, b, c in die Gleichung (4) ein, so erhält man für die gesuchte Spannung den Ausdruck

$$(5) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{N\xi_k \xi}{J_\eta} + \frac{N\eta_k \eta}{J_\xi}$$

Die Nulllinie n hat die Gleichung

$$(6) \quad 0 = \frac{1}{F} + \frac{\xi_k \xi}{J_\eta} + \frac{\eta_k \eta}{J_\xi}$$

sie schneidet auf den Koordinatenachsen die Strecken

$$(7) \quad \begin{cases} \xi_n = -\frac{J_\eta}{F\xi_k} = -\frac{i_\eta^2}{\xi_k}, \\ \eta_n = -\frac{J_\xi}{F\eta_k} = -\frac{i_\xi^2}{\eta_k} \end{cases}$$

ab, ihre Lage ist unabhängig von der Grösse der Kraft N .

Die durch den Angriffspunkt K und den Schwerpunkt O gelegte Gerade führt den Namen *Kraftlinie*. Ihre Neigung ist durch das Verhältniss $\eta_k : \xi_k$ gegeben, und die Neigung der Nulllinie durch die Zahl $\eta_n : \xi_n$. Zwischen beiden Verhältnisszahlen besteht die Beziehung

$$(8) \quad \frac{\eta_n}{\xi_n} \cdot \frac{\eta_k}{\xi_k} = \frac{J_\xi}{J_\eta} = \frac{i_\xi^2}{i_\eta^2}.$$

Aus den Gleichungen (7) und (8) folgt: *Zu jedem Angriffspunkte K gehört eine bestimmte Nulllinie n und zu jeder Kraftlinien-Richtung eine bestimmte Nulllinien-Richtung.*

Liegt K im Schwerpunkte, so liegt die Nulllinie im Unendlichen; liegt K im Unendlichen, so geht die Nulllinie durch den Schwerpunkt. Im zweiten Falle muss $N=0$ sein; der Querschnitt wird durch eine unendlich ferne, unendlich kleine Längskraft (d. i. ein Kräftepaar) beansprucht.

Wichtige Schlüsse lassen sich auch aus dem Umstande ziehen, dass in den Gleichungen (5) und (6) die Koordinaten nur in den Produkten $\xi_k \xi$ und $\eta_k \eta$, deren Faktoren miteinander vertauscht werden dürfen, auftreten.

Betrachtet man in Gleich. (6) ξ_k und η_k als die laufenden Koordinaten eines Angriffspunktes K , der sich in einer durch diese Gleichung bestimmten Geraden n' bewegt, so sind ξ und η die festen Koordinaten desjenigen Punktes K' , durch den sämtliche zu den Punkten K gehörenden Nulllinien n gehen. Wird der Punkt K' Angriffspunkt, so wird die Gerade n' Nulllinie. Hieraus folgt der wichtige Satz:

Beschreibt eine Nulllinie nn einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt K' ist, so bewegt sich ihr Angriffspunkt K auf der dem Punkte K' entsprechenden Nulllinie $n'n$.

Bewegt sich der Angriffspunkt K auf einer Geraden $n'n$, so beschreibt seine Nulllinie nn einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt K' der zur Nulllinie $n'n$ gehörige Angriffspunkt ist.

Aus der Gleichung (5) aber folgt der Satz:

Die Spannung σ , welche eine im Punkte $\xi_k \eta_k$ angreifende Längskraft N im Punkte $\xi \eta$ erzeugt, ist ebenso gross wie die Spannung, welche die im Punkte $\xi \eta$ angreifende Kraft N im Punkte $\xi_k \eta_k$ hervorbringt.

Wir werden diesen Satz in der Folge durch die kurze Gleichung

$$\sigma_{AB} = \sigma_{BA}$$

ausdrücken, in welcher σ_{AB} die Spannung bedeutet, welche im Punkte A durch eine in B angreifende Last von der Grösse 1 erzeugt wird. Ganz ebenso ist σ_{BA} zu lesen.

39. Einführung des Biegemomentes. Das Produkt aus der Längskraft N und ihrer Entfernung f vom Schwerpunkte S nennt man das *Biegemoment* (auch das *Angriffsmoment* oder kurz das *Moment*) für den fraglichen Querschnitt; es möge mit M bezeichnet werden. Die Produkte

$$N\eta_b = M_\xi \text{ und } N\xi_k = M_\eta$$

wollen wir die auf die Achsen ξ und η bezogenen Seitenmomente von

$$(9) \quad M = Nf$$

nennen. Wir erhalten dann

$$(10) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi + \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta.$$

Ist $N = 0$, sind also beispielsweise sämtliche äusseren Kräfte senkrecht zur Stabachse gerichtet, so wird der Querschnitt nur durch ein Moment M beansprucht, und es ergibt sich

$$(11) \quad \sigma = \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi + \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta.$$

Es ist dies der Belastungsfall, den wir vorhin als Beanspruchung des Querschnitts durch eine unendlich kleine, unendlich ferne Längskraft bezeichneten. Die Nulllinie n geht durch den Schwerpunkt; sie ist parallel zu einer Geraden, die auf den Koordinatenachsen Strecken η_n und ξ_n abschneidet, welche die Bedingung

$$(12) \quad \frac{\eta_n}{\xi_n} = - \frac{i_\xi^2}{i_\eta^2} \cdot \frac{M_\eta}{M_\xi}$$

erfüllen. Die eine der beiden Strecken darf beliebig gross gewählt werden.

40. Einführung rechtwinkliger Koordinaten. Sollen die in No. 38 und No. 39 abgeleiteten Gleichungen für rechtwinklige Koordinaten gelten, so muss der Querschnitt auf Hauptachsen bezogen werden, denn diese sind die einzigen sich rechtwinklig schneidenden konjugirten Achsen. Besitzt der Querschnitt eine Symmetrieachse, so ist die Lage der Hauptachsen von vornherein bekannt, denn jede Symmetrieachse ist eine Hauptachse. Die Hauptachsen und Hauptträgheitsmomente der Walzeisen-Profile findet man in dem bekannten Normalprofilbuche und in vielen Taschenbüchern; hier lassen sich also die bisher gewonnenen Formeln ebenfalls sofort verwerthen. Für andere Fälle aber empfiehlt es sich, wenn rechtwinklige Koordinaten

eingeführt werden sollen, diese Gleichungen umzuformen. Zu diesem Zwecke vereinfachen wir die für schiefwinklige Koordinaten entwickelten Gleichungen zunächst dadurch, dass wir die Kraftlinie zur $\eta = \text{Achse}$ machen. Es wird dann $\xi_k = 0$, $M_\eta = 0$, $M_\xi = M$ und es ergibt sich

$$(13) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{N \eta_k \eta}{J_\xi} = \frac{N}{F} + \frac{M_\xi \eta}{J_\xi}.$$

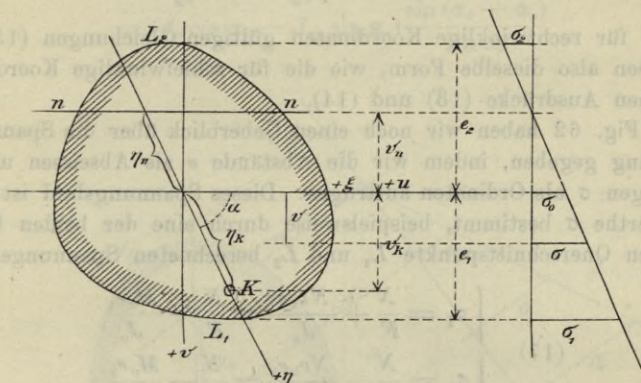


Fig. 62.

Die Nulllinie wird parallel zur ξ -Achse und schneidet die η -Achse im Abstande

$$(14) \quad \eta_n = -\frac{J_\xi}{F \eta_k} = -\frac{i_\xi^2}{\eta_k}$$

vom Schwerpunkte. Wir erkennen jetzt, dass die Richtungen von Nulllinie und Kraftlinie einander zugeordnet sind, eine Eigenschaft, die sich auch, allerdings weniger einfach, aus den in No. 38 aufgestellten Gleichungen hätte folgern lassen.

Nun beziehen wir den Querschnitt auf das rechtwinklige Achsenkreuz u, v und wählen die der Kraftlinie zugeordnete Achse (d. i. unsere bisherige ξ -Achse) zur u -Achse. Bezeichnet α den von den Achsen ξ und η eingeschlossenen Winkel, so bestehen zwischen den bisher benutzten und den neuen Koordinaten die Gleichungen

$$\eta = \frac{v}{\sin \alpha}, \quad \eta_k = \frac{v_k}{\sin \alpha}$$

und es ergibt sich

$$J_\xi = \int \eta^2 dF = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \int v^2 dF = \frac{J_u}{\sin^2 \alpha};$$

mithin ist

$$\frac{\eta \eta_k}{J_\xi} = \frac{v v_k}{J_u}.$$

Der für σ gefundene Ausdruck geht also über in

$$(15) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{Nv_k v}{J_u} = \frac{N}{F} + \frac{M_u v}{J_u},$$

wo $M_u = M \sin \alpha$ das auf die u -Achse bezogene Seitenmoment ist, und die Lage der Nulllinie ist bestimmt durch

$$(16) \quad v_n = -\frac{J_u}{Fv_k} = -\frac{i_u^2}{v_k}.$$

Die für rechtwinklige Koordinaten gültigen Gleichungen (15) und (16) haben also dieselbe Form, wie die für schiefwinklige Koordinaten gefundenen Ausdrücke (13) und (14).

In Fig. 62 haben wir noch einen Ueberblick über die Spannungsvertheilung gegeben, indem wir die Abstände v als Abscissen und die zugehörigen σ als Ordinaten auftrugen. Dieses Spannungsbild ist durch zwei Werthe σ bestimmt, beispielsweise durch eine der beiden für die äussersten Querschnittspunkte L_1 und L_2 berechneten Spannungen

$$(17) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{Nv_k e_1}{J_u} = \frac{N}{F} + \frac{M_u e_1}{J_u} \\ \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{Nv_k e_2}{J_u} = \frac{N}{F} - \frac{M_u e_2}{J_u} \end{cases}$$

und durch die Spannung

$$(18) \quad \sigma_0 = \frac{N}{F}$$

an der Stelle $v = 0$. Es kann sich aber auch als zweckmässig erweisen, σ für zwei Punkte, deren Abstände v durch runde Zahlen ausgedrückt sind, und die auch ausserhalb des Querschnittes angenommen werden dürfen, zu berechnen.

41. Weitere Umformungen für rechtwinklige Koordinaten.

Meistens ist es am zweckmässigsten, den Querschnitt auf solche rechtwinklige Schwerachsen xy zu beziehen, welche zu einer möglichst einfachen Berechnung von J_x , J_y , J_{xy} führen. Bildet dann die Kraftlinie mit der x -Achse den Winkel α_k (Fig. 63), so ist der Neigungswinkel α_n der zur Nulllinie parallelen u -Achse durch die auf Seite 52 abgeleitete Gleichung

$$(19) \quad \operatorname{tg} \alpha_n = \frac{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_k}{J_{xy} - J_y \operatorname{tg} \alpha_k} = \frac{J_x \operatorname{cotg} \alpha_k - J_{xy}}{J_{xy} \operatorname{cotg} \alpha_k - J_y}$$

bestimmt. Für das in die Formel (15) einzusetzende Trägheitsmoment J_u findet man nach Gleich. (1), Seite 45 den Werth

$$\begin{aligned} J_u &= J_x \cos^2 \alpha_n + J_y \sin^2 \alpha_n - 2 J_{xy} \sin \alpha_n \cos \alpha_n \\ &= \cos \alpha_n (J_x \cos \alpha_n - J_{xy} \sin \alpha_n) - \sin \alpha_n (J_{xy} \cos \alpha_n - J_y \sin \alpha_n) \end{aligned}$$

und dieser geht wegen der aus der Gleich. (19) folgenden Beziehung

$$\frac{J_{xy} \cos \alpha_n - J_y \sin \alpha_n}{J_x \cos \alpha_n - J_{xy} \sin \alpha_n} = \cotg \alpha_k = \frac{\cos \alpha_k}{\sin \alpha_k}$$

über in

$$J_u = (J_x \cos \alpha_n - J_{xy} \sin \alpha_n) \frac{\cos \alpha_n \sin \alpha_k - \sin \alpha_n \cos \alpha_k}{\sin \alpha_k}$$

$$= (J_x \cos \alpha_n - J_{xy} \sin \alpha_n) \frac{\sin (\alpha_k - \alpha_n)}{\sin \alpha_k}$$

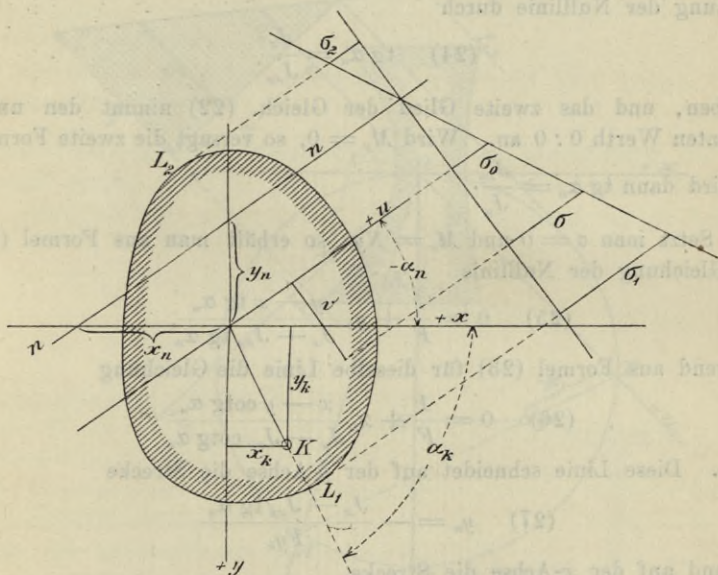


Fig. 63.

Setzt man diesen Werth in die Gleichung

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_u v}{J_u} = \frac{N}{F} + \frac{M \sin (\alpha_k - \alpha_n) v}{J_u}$$

ein und bezeichnet man das auf die x -Achse bezogene Seitenmoment mit M_x ,

$$(20) \quad M_x = M \sin \alpha_k,$$

so erhält man den einfachen Ausdruck

$$(21) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x v}{J_x \cos \alpha_n - J_{xy} \sin \alpha_n}.$$

Drückt man noch v durch x und y aus,

$$v = y \cos \alpha_n - x \sin \alpha_n,$$

so findet man für die Spannung an der Stelle $x y$ den Werth

$$(22) \quad \sigma = \frac{N}{F} + M_x \frac{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}.$$

In derselben Weise lässt sich auch die Formel ableiten

$$(23) \quad \sigma = \frac{N}{F} + M_y \frac{x - y \operatorname{ctg} \alpha_n}{J_y - J_{xy} \operatorname{ctg} \alpha_n}.$$

Beide Formeln sind nöthig. Ist $\alpha_n = 0$, also auch $M_x = 0$, so ist die Richtung der Nulllinie durch

$$(24) \quad \operatorname{tg} \alpha_n = \frac{J_x}{J_{xy}}$$

gegeben, und das zweite Glied der Gleich. (22) nimmt den unbestimmten Werth $0:0$ an. Wird $M_y = 0$, so versagt die zweite Formel;

es wird dann $\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{J_{xy}}{J_y}$.

Setzt man $\sigma = 0$ und $M_x = N y_k$, so erhält man aus Formel (22) die Gleichung der Nulllinie

$$(25) \quad 0 = \frac{1}{F} + y_k \frac{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n},$$

während aus Formel (23) für dieselbe Linie die Gleichung

$$(26) \quad 0 = \frac{1}{F} + x_k \frac{x - y \operatorname{ctg} \alpha_n}{J_y - J_{xy} \operatorname{ctg} \alpha_n}$$

folgt. Diese Linie schneidet auf der y -Achse die Strecke

$$(27) \quad y_n = - \frac{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}{F y_k}$$

ab und auf der x -Achse die Strecke

$$(28) \quad x_n = - \frac{J_y - J_{xy} \operatorname{ctg} \alpha_n}{F x_k}.$$

Kennt man den einen der beiden Werthe y_n, x_n , so findet man den anderen auch mittels der Gleichung

$$\frac{y_n}{x_n} = - \operatorname{tg} \alpha_n.$$

42. Zeichnerisches Verfahren. Wir setzen den in No. 41 behandelten Fall voraus, beziehen also den Querschnitt auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz xy , das eine möglichst einfache Ermittlung von J_x, J_y, J_{xy} gestattet. Hierauf benutzen wir zur Bestimmung der zur Kraftlinie k gehörigen Nulllinien-Richtung den von Mohr eingeführten Kreis, vergl. No. 34. Wir tragen auf der y -Achse die Strecken

$\overline{OE} = J_x$ und $\overline{EC} = J_y$ auf, und setzen von E aus rechtwinklig zur y -Achse die Strecke $\overline{ET} = +J_{xy}$ ab. Ist J_{xy} negativ, so liegt der Punkt T im zweiten Quadranten. Nun wird die Kraftlinie mit dem durch den Durchmesser \overline{OC} bestimmten Kreise in A zum Schnitt gebracht und mittels der Sehne \overline{ATB} die Richtung der u -Achse festgelegt. Der

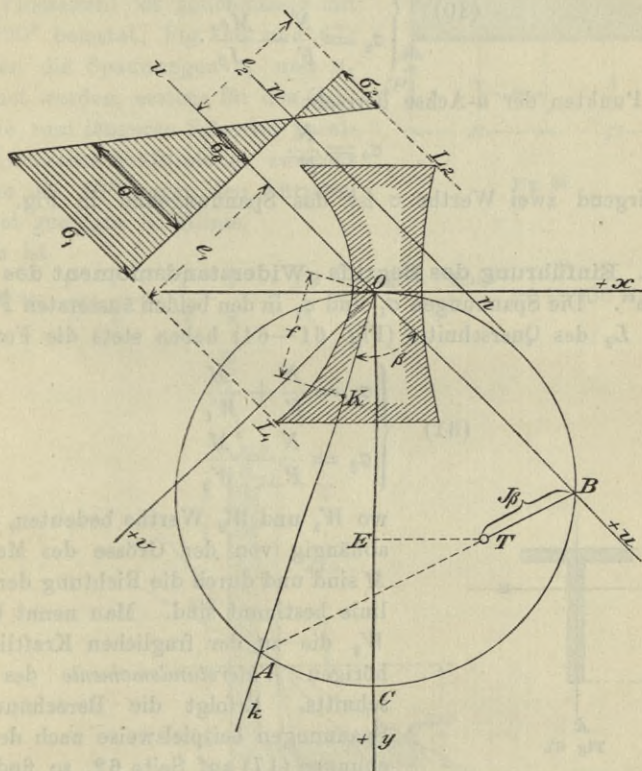


Fig. 64.

Abstand des Punktes T von der in B an den Kreis gezogene Tangente stellt das Trägheitsmoment J_u dar, weshalb die Strecke \overline{TB} den Werth $\frac{J_u}{\sin \beta}$ angiebt. Dieser Ausdruck soll in der Folge mit J_β bezeichnet werden. Nun ist nach Gleich. (15), wegen $M_u = M \sin \beta$, wo $M = Nf$,

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M \sin \beta v}{J_u},$$

und man erhält daher

$$(29) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{J_{\beta}}$$

Für die äussersten Querschnittspunkte ergibt sich

$$(30) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{Me_1}{J_{\beta}} \\ \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{Me_2}{J_{\beta}} \end{cases}$$

In den Punkten der u -Achse herrscht

$$\sigma_0 = \frac{N}{F}$$

Durch irgend zwei Werthe σ ist das Spannungsbild in Fig. 64 bestimmt.

43. Einführung des Begriffs „Widerstandsmoment des Querschnitts“. Die Spannungen σ_1 und σ_2 in den beiden äussersten Punkten L_1 und L_2 des Querschnitts (Fig. 61—64) haben stets die Form

$$(31) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{M}{W_1} \\ \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{M}{W_2} \end{cases}$$

wo W_1 und W_2 Werthe bedeuten, die unabhängig von der Grösse des Momentes M sind und durch die Richtung der Kraftlinie bestimmt sind. Man nennt W_1 und W_2 die zu der fraglichen Kraftlinie gehörigen *Widerstandsmomente* des Querschnitts. Erfolgt die Berechnung der Spannungen beispielsweise nach den Gleichungen (17) auf Seite 62, so findet man

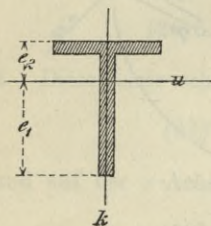


Fig. 65.

$$W_1 = \frac{J_u e_1}{\sin \beta} \quad \text{und} \quad W_2 = \frac{J_u e_2}{\sin \beta}$$

Wird das zeichnerische Verfahren gewählt, so ergibt sich

$$W_1 = \frac{J_{\beta}}{e_1}, \quad W_2 = \frac{J_{\beta}}{e_2}$$

Fällt die Kraftlinie mit einer Hauptachse zusammen, Fig. 65, so ist

$$(32) \quad W_1 = \frac{J_u}{e_1}, \quad W_2 = \frac{J_u}{e_2}$$

Für die Γ -Eisen und \square -Eisen sind die auf Hauptachsen bezogenen Widerstandsmomente W im Normalprofilbuche und in vielen Hilfsbüchern zu finden.

Es wäre aber zu wünschen, dass auch für die mit den Hauptachsen nicht zusammenfallenden Kraftlinien die Werthe W berechnet werden möchten, etwa in der Weise, wie dies für die Schiffbau- \perp -Eisen von Herrn Ingenieur Meyerhof in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrgang 1899, Seite 607—614 geschehen ist.

44. Zahlenbeispiele. 1. Aufgabe. Ein an beiden Enden frei aufliegendes 400 cm langes Winkel-eisen (Flusseisen) ist gleichmässig mit $P = 200^k$ belastet, Fig. 66 und 67; es sollen die Spannungen σ_1 und σ_2 berechnet werden, erstens für den Fall, dass die zum längeren Schenkel parallele Schwerachse Kraftlinie ist, zweitens für eine um 30° gegen den kürzeren Schenkel geneigte Kraftlinie.

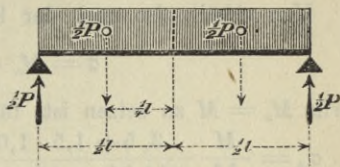


Fig. 66.

Es ist

$$M = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{Pl}{8} = \frac{200 \cdot 400}{8} = 10000 \text{ kcm.}$$

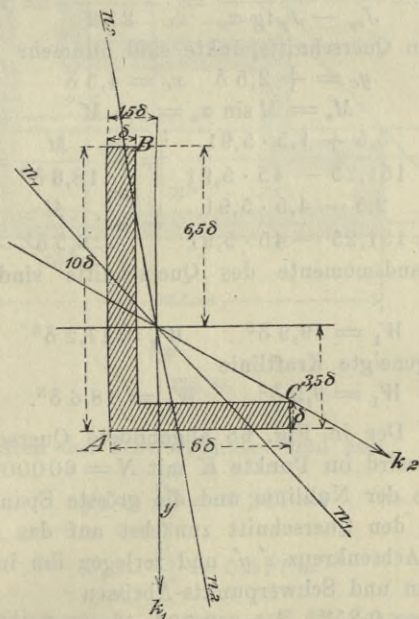


Fig. 67.

Die Querschnittsmomente für das Achsenkreuz xy sind (vergl. Seite 39):

$$J_x = 151,25 \delta^4 \quad J_y = 41,25 \delta^4 \quad J_{xy} = 45 \delta^4.$$

Fällt die Kraftlinie mit der y -Achse zusammen, so ist $\alpha_k = 90^\circ$ und

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{J_{xy}}{J_y} = \frac{45}{41,25} = 1,09.$$

Die Koordinaten der äussersten Querschnittspunkte A und B sind

$$\begin{aligned} y_A &= +3,5\delta & x_A &= -1,5\delta \\ y_B &= -6,5\delta & x_B &= -0,5\delta. \end{aligned}$$

Man erhält also nach der Formel (vergl. Seite 64)

$$\sigma = M_x \frac{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n},$$

worin $M_x = M$ zu setzen ist, für $\delta = 1 \text{ cm}$ die Spannungen

$$\sigma_A = \frac{M}{\delta^3} \frac{3,5 + 1,5 \cdot 1,09}{151,25 - 45 \cdot 1,09} = + \frac{M}{19,9\delta^3} = + 503 \text{ } \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_B = \frac{M}{\delta^3} \frac{-6,5 + 0,5 \cdot 1,09}{151,25 - 45 \cdot 1,09} = - \frac{M}{17,2\delta^3} = - 582 \text{ } \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Bildet die Kraftlinie mit der x -Achse den Winkel 30° so ist $\operatorname{tg} \alpha_k = 0,577$ mithin

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_k}{J_{xy} - J_y \operatorname{tg} \alpha_k} = \frac{125,285}{21,2} = 5,91.$$

Die äussersten Querschnittspunkte sind nunmehr A und C .

$$y_C = +2,5\delta \quad x_C = 4,5\delta$$

$$M_x = M \sin \alpha_k = 0,5 M$$

$$\sigma_A = 0,5 \frac{M}{\delta^3} \frac{3,5 + 1,5 \cdot 5,91}{151,25 - 45 \cdot 5,91} = - \frac{M}{18,6\delta^3} = - 538 \text{ } \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_C = 0,5 \frac{M}{\delta^3} \frac{2,5 - 4,5 \cdot 5,91}{151,25 - 45 \cdot 5,91} = + \frac{M}{9,5\delta^3} = + 1053 \text{ } \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Die Widerstandsmomente des Querschnitts sind für die senkrechte Kraftlinie

$$W_1 = 19,9\delta^3 \quad W_2 = 17,2\delta^3$$

für die um 30° geneigte Kraftlinie

$$W_1 = 9,5\delta^3 \quad W_2 = 18,6\delta^3.$$

2. Aufgabe. Der in Fig. 68 abgebildete Querschnitt eines gemauerten Pfeilers wird im Punkte K mit $N = 60000 \text{ kg}$ gedrückt. Gesucht ist die Lage der Nulllinie und die grösste Spannung σ .

Wir beziehen den Querschnitt zunächst auf das mit zwei Seiten zusammenfallende Achsenkreuz $x'y'$ und zerlegen ihn in drei Rechtecke, deren Abmessungen und Schwerpunkts-Abcissen

$$b_1 = 0,25 \text{ m}, \quad b_2 = 0,52 \text{ m}, \quad b_3 = 0,26 \text{ m}$$

$$h_1 = 0,77 \text{ m}, \quad h_2 = 0,51 \text{ m}, \quad h_3 = 0,25 \text{ m}$$

$$e_1 = 0,125 \text{ m}, \quad e_2 = 0,51 \text{ m}, \quad e_3 = 0,90 \text{ m}$$

sind. Dann erhalten wir

$$F = \Sigma bh = 0,5227 \text{ m}^2$$

$$S_{x'} = \frac{1}{2} \sum b h^2 = 0,1499 \text{ m}^3 \text{ (statisches Moment)}$$

$$J_{x'} = \frac{1}{3} \sum b h^3 = 0,0624 \text{ m}^4$$

$$J_{x'y'} = \frac{1}{2} \sum b h^2 e = 0,0511 \text{ m}^4$$

und auf ähnliche Weise

$$S_{y'} = 0,2178 \text{ m}^3$$

$$J_{y'} = 0,1320 \text{ m}^4.$$

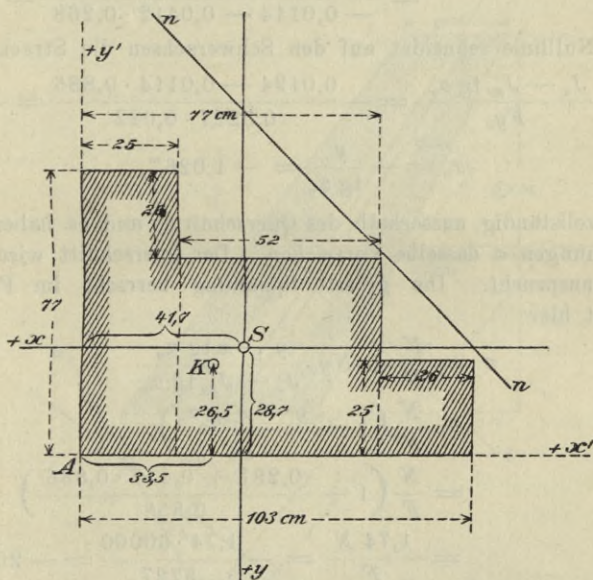


Fig. 68.

Die Koordinaten des Schwerpunktes sind nun

$$y'_s = \frac{S_{x'}}{F} = 0,287 \text{ m};$$

$$x'_s = \frac{S_{y'}}{F} = 0,417 \text{ m}$$

und die Querschnittsmomente, bezogen auf die Schwerachsen

$$J_x = J_{x'} - F y'_s{}^2 = J_{x'} - S_{x'} y'_s$$

$$J_x = 0,0624 - 0,1499 \cdot 0,287 = 0,0194 \text{ m}^4$$

$$J_y = 0,1320 - 0,2178 \cdot 0,417 = 0,0412 \text{ ,,}$$

$$J_{xy} = 0,0511 - 0,1499 \cdot 0,417 = -0,0114 \text{ m}^4.$$

Die Koordinaten des Angriffspunktes K seien

$$y'_k = 0,265^m \text{ und } x'_k = 0,335^m.$$

Dann erhält man

$$y_k = 0,287 - 0,265 = 0,022^m$$

$$x_k = 0,417 - 0,335 = 0,082^m$$

$$\operatorname{tg} \alpha_k = \frac{y_k}{x_k} = \frac{11}{41} = 0,268$$

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_k}{J_{xy} - J_y \operatorname{tg} \alpha_k} = \frac{0,0194 + 0,0114 \cdot 0,268}{-0,0114 - 0,0412 \cdot 0,268} = -0,836.$$

Die Nulllinie schneidet auf den Schwerachsen die Strecken ab:

$$y_n = -\frac{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}{F y_k} = -\frac{0,0194 - 0,0114 \cdot 0,836}{0,5227 \cdot 0,022} = -0,858^m$$

$$x_n = -\frac{y_n}{\operatorname{tg} \alpha_n} = -1,026^m,$$

sie liegt vollständig ausserhalb des Querschnitts, und es haben deshalb alle Spannungen σ dasselbe Vorzeichen. Der Querschnitt wird nur auf Druck beansprucht. Die grösste Spannung herrscht im Punkte A . Man findet hier

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{N}{F} + N y_k \frac{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n} \\ &= \frac{N}{F} \left(1 - \frac{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}{y_n} \right) \\ &= \frac{N}{F} \left(1 + \frac{0,287 + 0,417 \cdot 0,836}{0,858} \right) \\ &= \frac{1,74 N}{F} = -\frac{1,74 \cdot 60000}{5227} = -20^k / \text{qcm}. \end{aligned}$$

verlängertem Klinkermauerwerk *vergl. Seite 101* in Cementmörtel ist das beim Auftreten solcher Pressungen angezeigte Material.

3. Aufgabe. Der trapezförmige Querschnitt eines gemauerten Pfeilers habe die Abmessungen (Fig. 69)

$$a_1 = 2,6^m, a_2 = 1,4^m, t = 6^m \text{ (Transversale), } h = 5,1^m.$$

Im Eckpunkte A greife senkrecht zur Querschnittsebene der Druck $1'$ an. Verlangt wird die Darstellung der Spannungsverteilung.

Wir beziehen den Querschnitt auf die schiefwinkligen Schwerachsen ξ , η und erhalten (nach Seite 43)

$$J_\xi = \frac{ht^2}{36} \left(a_1 + a_2 + \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2} \right)$$

es schneidet also die Nulllinie auf den Achsen die Strecken ab (vergl. Seite 59):

$$\xi_n = -\frac{J_\eta}{F\xi_k} = -\frac{3,706}{10,2 \cdot 1,8} = -0,279^m$$

$$\eta_n = -\frac{J_\xi}{F\eta_k} = -\frac{29,682}{10,2 \cdot 2,7} = -1,078^m$$

und es ergibt sich für die Druckspannung in irgend einem Punkte ξ, η des Querschnitts (nach Gleich. 5, Seite 58) der Werth

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{N\xi_k\xi}{J_\eta} + \frac{N\eta_k\eta}{J_\xi};$$

derselbe wird zweckmässig umgeformt in

$$\sigma = \frac{N}{F} \left(1 - \frac{\xi}{\xi_n} - \frac{\eta}{\eta_n} \right)$$

und nun wird das Spannungsbild mit Hilfe des für die Stelle $\eta = 0$ und $\xi = -10\xi_n = 2,79^m$ berechneten Werthes

$$\sigma = \frac{11 N}{F} = -\frac{11 \cdot 1}{10,2} = -1,08 \frac{t}{q_m}^*)$$

bestimmt.

Dieses Spannungsbild gestattet jetzt mit Hilfe des auf Seite 59 bewiesenen Satzes

$$\sigma_{AB} = \sigma_{BA}$$

die Berechnung der Kantenpressung an der Stelle A infolge beliebiger Belastungen des Pfeilers. Ist nämlich σ' die einem Punkte B entsprechende Ordinate der Spannungslinie gg , so erzeugt ein in A angreifender Druck $N=1$ an der Stelle B die Spannung σ' , und es ruft deshalb ein in B angreifender Druck $N=1$ in A ebenfalls die Spannung σ' hervor. Wirken also auf den Pfeiler eine Reihe von Drücken N_1, N_2, N_3, \dots so erhält man für die in A entstehende Druckspannung den Werth

$$\sigma = \Sigma N\sigma'.$$

Man nennt die Linie gg auch die *Einflusslinie* für die Spannung σ im Punkte A .

Wird der Einfluss eines Momentes M gesucht, welches in einer Ebene liegt, die den Querschnitt in der Geraden ll schneidet und zum Querschnitte rechtwinklig ist, so ersetze man dasselbe durch ein Kräftepaar Na mit beliebig grossem Arme a und lege den Angriffspunkt der einen der beiden, zum Querschnitte rechtwinkligen Gegenkräfte N in

* $1 \frac{t}{q_m} = 0,1 \frac{k}{q_{cm}}$.

den Schnittpunkt der Geraden ll und nn . Man findet dann für σ_A den Werth

$$\sigma_A = N\sigma'' = \frac{M\sigma''}{a}.$$

§ 10.

Der Kern des Querschnitts.

45. Erklärungen. Bestimmung des Kerns für einen beliebigen Querschnitt. Schneidet die Nulllinie nn den Querschnitt, so besitzen die Spannungen σ in den durch die nn getrennten Theilen des Querschnitts verschiedene Vorzeichen. In demjenigen Theile, welcher den Angriffspunkt K enthält, herrschen Zug- oder Druckspannungen, je nachdem die in K wirksame Längskraft N positiv oder negativ ist.

Nähert sich der Angriffspunkt dem Schwerpunkte S des Querschnitts, so entfernt sich die Nulllinie von S . Von dem Augenblicke an, in welchem die Nulllinie bei dieser Bewegung den Querschnitt berührt, ohne ihn zu schneiden, besitzen die Spannungen σ in allen Punkten des Querschnitts dasselbe Vorzeichen wie die Längskraft N .

Betrachtet man nun alle möglichen den Querschnitt berührenden, *aber nicht schneidenden* Geraden der Reihe nach als Nulllinien und bestimmt die zugehörigen Angriffspunkte, so begrenzt der Ort dieser Punkte denjenigen Theil des Querschnitts, innerhalb dessen der Angriffspunkt K einer Längskraft N liegen muss, wenn alle durch diese Kraft in dem Querschnitte hervorgerufenen Spannungen dasselbe Vorzeichen haben sollen wie N . Dieser Theil des Querschnitts heisst der *Kern*, und die von jenen den Querschnitt berührenden aber nicht schneidenden Geraden eingehüllte Linie wollen wir die *Umhüllungslinie* des Querschnittes nennen.

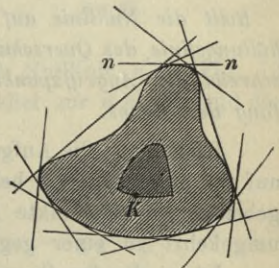


Fig. 70.

Der Kern ist u. A. von Bedeutung für die Beurtheilung der Steinbauten. Soll z. B. der durch einen Druck N beanspruchte Querschnitt eines gemauerten Pfeilers nur Druckspannungen erfahren, so muss der Angriffspunkt von N innerhalb des Kerns liegen.

Wird der Kern eines von geraden Linien begrenzten Querschnitts (Fig. 71) gesucht, so genügt es, die Seiten AB , BC , CD , DE , EA der Umhüllungslinie $ABCDEA$ der Reihe nach als Nulllinien anzu-

sehen und die ihnen entsprechenden Angriffspunkte (ab) , (bc) , (cd) , (de) , (ea) zu bestimmen. Die Verbindungslinien a , b , c , d , e dieser Punkte umschliessen den Kern. Denn, während sich die auf dem

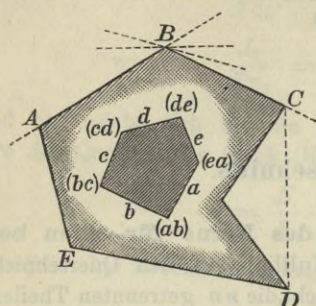


Fig. 71.

Umfange des Querschnittes rollende Nulllinie aus der Lage AB um den Eckpunkt B in die Lage BC dreht, beschreibt der Angriffspunkt die Verbindungslinie b der Punkte (ab) und (bc) ; dreht sie sich aus der Lage BC um den Punkt C in die Lage CD , so beschreibt der Angriffspunkt die Gerade c u. s. w.

Nun wurde aber früher bewiesen, dass sich bei der Drehung einer Nulllinie um einen festen Punkt der zugehörige

Angriffspunkt auf der jenem Drehpunkte entsprechenden Nulllinie bewegt, und hieraus folgt, dass man den Kern auch durch Bestimmung der den Endpunkten A , B , C , D , E entsprechenden Nulllinien a , b , c , d , e finden kann.

Es gilt die vorstehende Betrachtung auch für von krummen Linien eingeschlossene Querschnitte, da diese als von unendlich kurzen Geraden begrenzt angesehen werden dürfen, und man darf deshalb ganz allgemein den Kern durch den folgenden Doppelsatz erklären:

Rollt die Nulllinie auf der Umhüllungslinie des Querschnitts, so beschreibt der Angriffspunkt den Umfang des Kerns.	Beschreibt der Angriffspunkt die Umhüllungslinie des Querschnitts, so rollt die Nulllinie auf dem Umfange des Kerns.
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Hiermit ist die Aufgabe, den Kern eines Querschnitts zu bestimmen, auf die im vorigen § behandelte Aufgabe zurückgeführt, die einem gegebenen Angriffspunkte K entsprechende Nulllinie zu ermitteln oder umgekehrt zu einer gegebenen Nulllinie den Angriffspunkt zu suchen.

Ist z. B. der Querschnitt auf seine Haupt-Schwerachsen (1) und (2) bezogen, Fig. 72, und sind i_1 und i_2 die Haupt-Trägheitshalbmesser

$$i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{F}}, \quad i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{F}},$$

sind ferner v_1 und u_1 die Koordinaten des Angriffspunktes K und schneidet die Nulllinie auf den Hauptachsen die Strecken

$$\overline{SV'} = v_n \quad \text{und} \quad \overline{SU'} = u_n$$

ab, so ist nach Gleich. (7) Seite 59

$$v_1 v_n = -i_1^2$$

$$u_1 u_n = -i_2^2;$$

es ist also

i_1 die mittlere Proportionale zu v_1 und v_n
 i_2 " " " " u_1 " u_n

und es ergibt sich das folgende zeichnerische Verfahren:

Man trage auf den Hauptachsen (1) und (2) die Strecken $\overline{SA} = i_1$ und $\overline{SB} = i_2$ auf (gleichgültig, auf welcher Seite von S), verbinde die Fusspunkte V und U der Koordinaten u_1 und v_1 des Angriffspunktes K mit A bezieh. B und errichte in A und B auf den Geraden VA und UB Lothe, welche die Hauptachsen in den Punkten V' und U' schneiden. Dann ist

$i_1 = \overline{SA}$ die mittlere Proportionale zu \overline{SV} und $\overline{SV'}$

$i_2 = \overline{SB}$ die mittlere Proportionale zu \overline{SU} und $\overline{SU'}$

und hieraus folgt, dass U' und V' Punkte der gesuchten Nulllinie sind.

Bei grosser Entfernung des Angriffspunktes K vom Schwerpunkte S ist das beschriebene Verfahren un-
 bequem. Man bestimme dann zu

irgend einem auf der Geraden SK

und näher an S gelegenen Punkte K' die Nulllinie $n'n'$ (Fig. 73)

und beachte, dass die zu K gehörige nn parallel zur $n'n'$ ist, und dass

sich verhält: $\overline{SL} : \overline{SL'} = \overline{SK'} : \overline{SK}$, wobei

L und L' die Punkte sind, in denen die

Kraftlinie SK von den Nulllinien nn und $n'n'$ geschnitten sind. Liegt K im Un-

endlichen, so geht die nn durch den Schwerpunkt S ; sie bleibt aber parallel zur $n'n'$.

Dieser Fall liegt vor, sobald $N=0$ ist und der Querschnitt nur durch ein Biegemoment M beansprucht wird.

Wie man nun die umgekehrte Aufgabe löst, zu einer gegebenen Nulllinie nn den

Angriffspunkt K zu suchen, bedarf keiner Erläuterung.

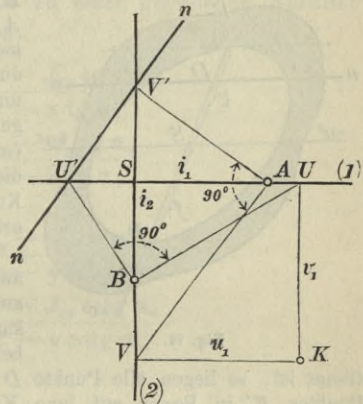


Fig. 72.

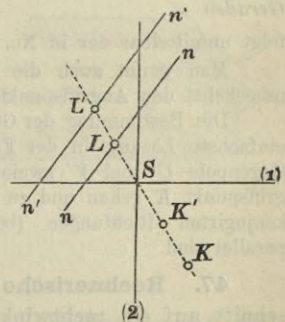


Fig. 73.

46. Bestimmung der Nulllinie mit Hilfe der Polaren-Theorie. Legt man durch den Schwerpunkt S des Querschnittes eine Parallele $u'u'$ zu der irgend einem Angriffspunkte K entsprechenden Nulllinie nn , Fig. 74, so ist

nach Seite 61 das auf die Achsen SK und $u'u'$ bezogene Centrifugalmoment des Querschnittes $= 0$, und hieraus folgt nach No. 36, dass die Richtungen SK und $u'u'$ bezüglich der Centralellipse einander konjugiert sind.

Die in den Schnittpunkten A und B von Kraftlinie und Centralellipse an die letztere gelegten Tangenten sind also parallel zur nn .

Der mit der Kraftlinie zusammenfallende Ellipsenhalbmesser $\overline{SA} = \overline{SB}$ ist gleich dem auf die u' -Achse bezogenen Trägheitshalbmesser i' des Querschnittes, und die Ordinate der Nulllinie ist: $\overline{SD} = \frac{i'^2}{f}$. Bestimmt man

nun auf der Kraftlinie einen bezüglich des Schwerpunktes S symmetrisch zu K gelegenen Punkt K' , so werden die Punkte A und B durch die Punkte K' und D harmonisch getrennt, und hieraus folgt, dass die durch den unendlich fernen Punkt der in A und B an die Centralellipse gelegten Tangenten gehende Nulllinie die *Polare des Punktes K' in Bezug auf die Centralellipse* ist. Denn die Polare eines Punktes bezüglich einer Kurve zweiter Ordnung ist durch den Satz erklärt:

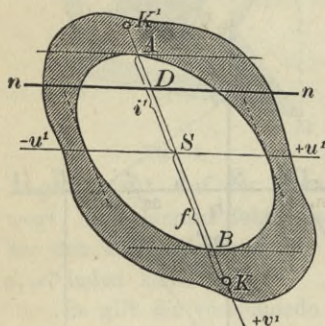


Fig. 74.

Legt man von irgend einem Punkte K' aus beliebig viele Sekanten durch eine Kurve zweiter Ordnung und bestimmt auf jeder Sekante den Punkt D , welcher von K' durch die beiden Kurvenpunkte A und B harmonisch getrennt ist, so liegen alle Punkte D auf einer Geraden, welche die Polare des Punktes K' in Bezug auf jene Kurve zweiter Ordnung genannt wird, und welche den Schnittpunkt der in den Punkten A und B einer beliebigen Sekante an die Kurve gelegten Tangenten enthält.

Aus dem Hauptsatze der Polarentheorie, nämlich:

Die Polaren sämtlicher Punkte einer Geraden gehen durch den Pol jener Geraden	Die Pole sämtlicher Strahlen eines Punktes liegen auf der Polaren dieses Punktes
-------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------

folgt unmittelbar der in No. 45 bewiesene Doppelsatz.

Man nennt auch die Nulllinie die *Gegenpolare* des Angriffspunktes und umgekehrt den Angriffspunkt den *Gegenpol* der Nulllinie.

Die Bestimmung der Gegenpolare nn ist eine Aufgabe ersten Grades, deren einfachste Lösung in der Festlegung der Nulllinie mittels der in ihr liegenden Gegenpole U' und V' zweier Geraden KU und KV besteht, die durch den Angriffspunkt K gehen und zu irgend zwei in Bezug auf die Centralellipse einander konjugierten Richtungen (beispielsweise zu den Schwerpunkts-Hauptachsen) parallel sind.

47. Rechnerische Bestimmung des Kerns. Ist der Querschnitt auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz x, y bezogen, und sind x_k, y_k die Koordinaten des Angriffspunktes K , so lautet die Gleichung der zugehörigen Nulllinie (Seite 64)

$$0 = \frac{1}{F} + y_k \frac{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}$$

oder

$$0 = \frac{1}{F} + x_k \frac{x - y \cotg \alpha_n}{J_y - J_{xy} \cotg \alpha_n}.$$

Ferner besteht, da Kraftlinie und Nulllinie zugeordnete Achsen sind, die Bezeichnung

$$(1) \quad \frac{y_k}{x_k} = \tg \alpha_k = \frac{J_x - J_{xy} \tg \alpha_n}{J_{xy} - J_y \tg \alpha_n} = \frac{J_x \cotg \alpha_n - J_{xy}}{J_{xy} \cotg \alpha_n - J_y}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen findet man zu einer gegebenen Nulllinie die folgenden Angriffspunkte-Koordinaten:

$$(2) \quad \begin{cases} y_k = -\frac{1}{F} \frac{J_x - J_{xy} \tg \alpha_n}{y - x \tg \alpha_n} \\ x_k = -\frac{1}{F} \frac{J_{xy} - J_y \tg \alpha_n}{y - x \tg \alpha_n} \end{cases}$$

oder

$$(3) \quad \begin{cases} y_k = -\frac{1}{F} \frac{J_{xy} - J_x \cotg \alpha_n}{x - y \cotg \alpha_n} \\ x_k = -\frac{1}{F} \frac{J_y - J_{xy} \cotg \alpha_n}{x - y \cotg \alpha_n} \end{cases}$$

In diese Formeln sind für x und y die Koordinaten irgend eines Punktes der Nulllinie einzusetzen. Beide Formelgruppen liefern dasselbe Ergebniss. Ist α_n gleich oder nahezu 90° , so wende man die Formeln (3) an; ist α_n gleich oder nahezu Null, so muss man die Formeln (2) benutzen.

Für $\alpha_n = 0$ erhält man

$$(4) \quad y_k = -\frac{J_x}{Fy}, \quad x_k = -\frac{J_{xy}}{Fy}$$

für $\alpha_n = 90^\circ$ wird

$$(5) \quad y_k = -\frac{J_{xy}}{Fx}, \quad x_k = -\frac{J_y}{Fx}.$$

Rollt die Nulllinie über einen Kreisbogen vom Halbmesser r und sind x_m, y_m die Koordinaten des Mittelpunktes, Fig. 75, so ist

$$\begin{aligned} y &= y_m - r \cos \alpha_n \\ x &= x_m + r \sin \alpha_n \end{aligned}$$

und man erhält

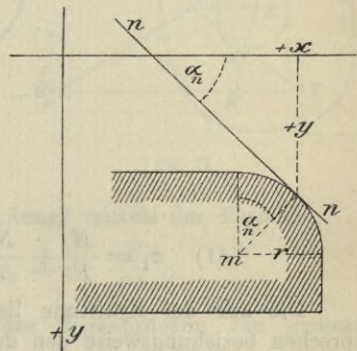


Fig. 75.

$$(6) \quad \begin{cases} -Fy_k = \frac{J_x \cos \alpha_n - J_{xy} \sin \alpha_n}{y_m \cos \alpha_n - x_m \sin \alpha_n - r} \\ -Fx_k = \frac{J_{xy} \cos \alpha_n - J_y \sin \alpha_n}{y_m \cos \alpha_n - x_m \sin \alpha_n - r} \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich bei der Berechnung der Kernfiguren der Normalprofile der Walzeisen die Abrundungen der Ecken berücksichtigen.

48. Benutzung des Kerns zur Ermittlung der Spannungen σ .

Bezieht man den in irgend einem Punkte K durch eine Längskraft N beanspruchten Querschnitt auf die Kraftlinie SK und die zur Nulllinie parallele Schwerachse u' als Koordinatenachsen, so findet man die Spannungen σ_1 und σ_2 in den von der Achse u' entferntesten Punkten L_1 und L_2 des Querschnitts (nach Gleich. 13, Seite 61):

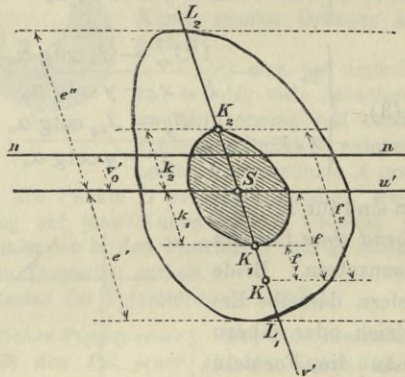


Fig. 76.

$$(1) \quad \sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{Nf'e'}{J_{u'}}; \quad \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{Nf'e''}{J_{u'}}.$$

Die auf der Kraftlinie liegenden Kernpunkte K_1 und K_2 entsprechen beziehungsweise den durch L_2 und L_1 parallel zur Geraden u' gedachten Nulllinien als Angriffspunkte, und es gelten deshalb für die zugehörigen Kernhalbmesser k_1 und k_2 die Formeln:

$$(2) \quad k_2 = \frac{J_{u'}}{F'e'}; \quad k_1 = \frac{J_{u'}}{F'e''},$$

woraus dann folgt: $\frac{J_{u'}}{e'} = Fk_2$; $\frac{J_{u'}}{e''} = Fk_1$.

Führt man diese Werthe in die Gleichungen (1) ein, so gehen diese über in:

$$(3) \quad \sigma_1 = \frac{N f + k_2}{F k_2}; \quad \sigma_2 = -\frac{N f - k_1}{F k_1},$$

und hierfür kann man schreiben:

$$(4) \quad \sigma_1 = \frac{N f_2}{F k_2}; \quad \sigma_2 = -\frac{N f_1}{F k_1},$$

wobei f_1 und f_2 die Abstände des Angriffspunktes K von den auf der Kraftlinie liegenden Kernpunkten K_1 und K_2 bedeuten.

Ist also der Kern eines Querschnittes gegeben, so ist man mit Hilfe der Gleichungen (4) im Stande, die Spannungen σ_1 und σ_2 auf eine sehr einfache Weise zu bestimmen, ohne dass man nöthig hat, die Richtung der Null-Linie und die äussersten Querschnittspunkte L_1 und L_2 aufzusuchen. Will man σ_1 und σ_2 nach Berechnung

der im Schwerpunkte S herrschenden Spannung $\sigma_0 = \frac{N}{F}$ durch Zeichnung finden, so trage man auf irgend einer von S ausgehenden Geraden die Spannung $\sigma_0 = \overline{SR}$ auf,

Fig. 77, lege durch K zur SR eine Parallele und ziehe von R aus durch die Kernpunkte K_1 und K_2 gerade Linien, welche diese Parallele in T_1 und T_2 schneiden. Man findet: $\sigma_1 = \overline{KT_2}$ und $\sigma_2 = \overline{KT_1}$.

Zuweilen sind die auf die Kernpunkte K_1 und K_2 bezogenen Angriffsmomente $M_1 = Nf_1$ und $M_2 = Nf_2$ bekannt, ohne dass N , f_1 , f_2 einzeln gegeben sind. Dann findet man die Spannungen σ_1 , σ_2 (am besten durch Rechnung) mittels der Formeln

$$(5) \quad \sigma_1 = \frac{M_2}{Fk_2}; \quad \sigma_2 = -\frac{M_1}{Fk_1},$$

welche namentlich für die Theorie der Bogenbrücken von grossem Werthe sind.

Die Benutzung des Kerns bietet bei der Berechnung der Spannungen σ gegenüber den im § 9 mitgetheilten Verfahren nur dann Vortheile, wenn sich der Kern schnell zeichnen lässt, oder wenn die grössten Spannungen σ_1 bezieh. σ_2 für verschiedene Lagen des Angriffspunktes mit einander zu vergleichen sind.

Wird z. B. der Querschnitt bei wechselnder Lage des Angriffspunktes durch eine unveränderliche Längskraft N und ein unveränderliches Moment M , welche beide positiv sein mögen, beansprucht, so

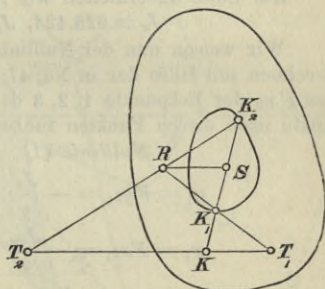


Fig. 77.

nimmt die Spannung $\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{M}{Fk_2}$ den grössten oder den kleinsten Werth an, je nachdem die Kraftlinie mit dem kleinsten oder grössten Kernhalbmesser zusammenfällt.

49. Die W -Fläche. Die Produkte Fk_2 und Fk_1 sind nach No. 43 gleich den der fraglichen Kraftlinie entsprechenden Widerstandsmomenten W_1 und W_2 . Man kann also auch den Kern in der Weise bestimmen, dass man nach dem im § 9 gezeigten Verfahren die Widerstandsmomente für hinreichend viele Kraftlinien berechnet. Für einen von Geraden begrenzten Querschnitt genügt es, die Rechnung für die durch die Eckpunkte des Umfanges gehenden Kraftlinien auszuführen.

Sehr oft erweist es sich als zweckmässig, nicht die Strecken k sondern Strecken $W = Fk$ anzutragen; an Stelle des Kerns entsteht dann die W -Fläche.

50. Zahlenbeispiel. *Rechnerische Bestimmung der W -Fläche und des Kerns für das in Fig. 78 dargestellte Z-Eisen.*

Auf Seite 42 erhielten wir für diesen Querschnitt

$$J_x = 928,423, \quad J_y = 332,948, \quad J_{xy} = 427,133.$$

Wir weisen nun der Nulllinie der Reihe nach die Lagen (1) (2) (3) zu und berechnen mit Hilfe der in No. 47 abgeleiteten Formeln die Koordinaten $y = Fy_{k_1}$, $x = Fx_{k_1}$ der Eckpunkte 1, 2, 3 der W -Fläche und die Längen der vom Schwerpunkte nach diesen Punkten führenden Fahrstrahlen Fk_1 , Fk_2 , Fk_3 .

$$\text{Nulllinie (1)} \quad \alpha_n = 0 \quad y = -7,0 \text{ cm}$$

$$y_1 = Fy_{k_1} = -\frac{J_x}{y} = +\frac{928,423}{7,0} = 132,632 \text{ cm}^3$$

$$x_1 = Fx_{k_1} = -\frac{J_{xy}}{y} = +\frac{427,133}{7,0} = 61,019 \text{ ,,}$$

$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{928,423}{427,133}, \quad \alpha_1 = 65^\circ 17' 40''$$

$$W_1 = Fk_1 = \frac{Fy_{k_1}}{\sin \alpha_1} = 146,00 \text{ cm}^3$$

$$\text{Nulllinie (2)} \quad \alpha_n = 90^\circ \quad x = -7,5 \text{ cm}$$

$$y_2 = Fy_{k_2} = -\frac{J_{xy}}{x} = +\frac{427,133}{7,5} = 56,951 \text{ cm}^3$$

$$x_2 = Fx_{k_2} = -\frac{J_y}{x} = +\frac{332,948}{7,5} = 44,393 \text{ ,,}$$

$$\text{tg } \alpha_2 = \frac{y_2}{x_2} = \frac{427,133}{332,948}, \quad \alpha_2 = 52^\circ 3' 50''$$

$$W_2 = Fk_2 = \frac{Fy_{k_2}}{\sin \alpha_2} = 72,21 \text{ cm}^3$$

$$\text{Nulllinie (3)} \quad \text{tg } \alpha_n = 1,88220, \quad \alpha_n = 62^\circ 1' 7'', \quad y = +7,0 \quad x = -0,5^*)$$

*) Koordinaten eines beliebigen Punktes der Nulllinie; wir haben den unteren linken Eckpunkt des Querschnittes gewählt. Die Berechnung von $\text{tg } \alpha_n$ ist oben nicht weiter ausgeführt, sie bereitet keine Schwierigkeit. α_n ist Neigungswinkel einer Kreistangente.

$$y_s = F' y_{k3} = - \frac{J_x - J_{xy} \operatorname{tg} \alpha_n}{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}$$

$$= - \frac{928,423 - 427,133 \cdot 1,88220}{7,0 + 0,5 \cdot 1,88220} = - 15,675 \text{ cm}^3$$

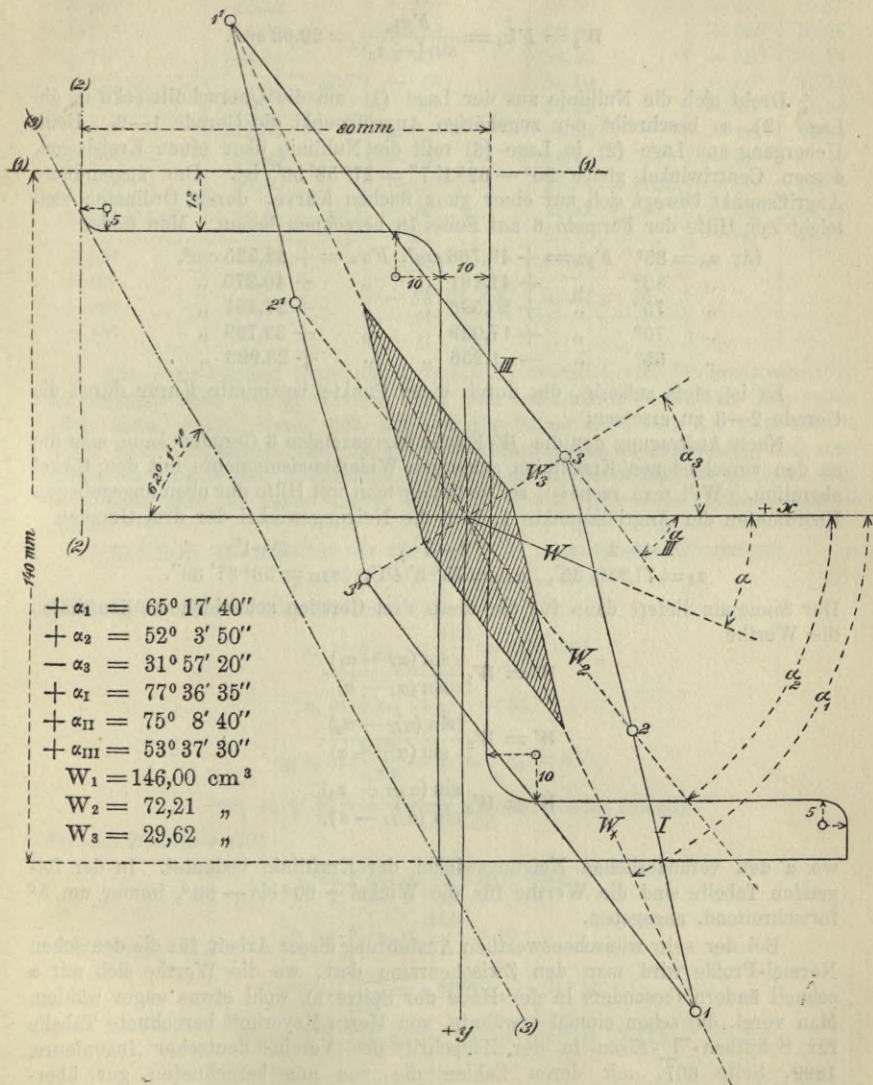


Fig. 78. (100 cm³ = 50 mm)

$$x_s = F' x_{k3} = - \frac{J_{xy} - J_y \operatorname{tg} \alpha_n}{y - x \operatorname{tg} \alpha_n}$$

$$= - \frac{427,133 - 332,948 \cdot 1,88220}{7,0 + 0,5 \cdot 1,88220} = + 25,128 \text{ cm}^3$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{y_3}{x_3} = \frac{-15,675}{25,128}, \quad \alpha_3 = - 31^\circ 57' 20''$$

$$W_3 = F k_3 = \frac{F y_{k_3}}{\sin(-\alpha_3)} = 29,62 \text{ cm}^3.$$

Dreht sich die Nulllinie aus der Lage (1) um die Querschnittsecke in die Lage (2), so beschreibt der zugehörige Angriffspunkt die Gerade 1—2. Beim Uebergang aus Lage (2) in Lage (3) rollt die Nulllinie über einen Kreisbogen, dessen Centriwinkel gleich $90^\circ - 62^\circ 1' 7'' = 27^\circ 58' 53''$ ist. Der zugeordnete Angriffspunkt bewegt sich auf einer ganz flachen Kurve, deren Ordinaten sich leicht mit Hilfe der Formeln 6 auf Seite 78 berechnen lassen. Man findet

für $\alpha_n = 85^\circ$	$F y_k = + 49,766 \text{ cm}^3,$	$F x_k = + 42,525 \text{ cm}^3,$
„ 80°	„ $+ 41,181$ „	„ $+ 40,275$ „
„ 75°	„ $+ 30,596$ „	„ $+ 37,481$ „
„ 70°	„ $+ 17,029$ „	„ $+ 33,799$ „
„ 65°	„ $- 1,256$ „	„ $+ 28,993$ „

Es ist stets zulässig, die durch diese Punkte bestimmte Kurve durch die Gerade 2—3 zu ersetzen.

Nach Auftragung der die W -Fläche begrenzenden 6 Geraden kann man die zu den verschiedenen Kraftlinien gehörigen Widerstandsmomente mit dem Cirkel abgreifen. Will man rechnen, so bestimme man mit Hilfe der oben angegebenen Koordinaten der Angriffspunkte 1, 2, 3 die Neigungswinkel der drei Geraden

$$\begin{array}{ccc} 1-2 & 2-3 & 3-1' \\ \alpha_I = 77^\circ 36' 35', & \alpha_{II} = 75^\circ 8' 40'', & \alpha_{III} = 53^\circ 37' 30''. \end{array}$$

Der Sinussatz liefert dann für die diese drei Geraden schneidenden Kraftlinien die Werthe

$$W = W_1 \frac{\sin(\alpha_I - \alpha_1)}{\sin(\alpha_I - \alpha)}$$

$$W = W_2 \frac{\sin(\alpha_{II} - \alpha_2)}{\sin(\alpha_{II} - \alpha)}$$

$$W = W_3 \frac{\sin(\alpha_{III} - \alpha_3)}{\sin(\alpha_{III} - \alpha)},$$

wo α den veränderlichen Neigungswinkel der Kraftlinie bedeutet. In der folgenden Tabelle sind die Werthe für die Winkel $+ 90^\circ$ bis $- 90^\circ$, immer um 5° fortschreitend, angegeben.

Bei der sehr wünschenswerthen Ausführung dieser Arbeit für die deutschen Normal-Profile wird man den Zwischenraum dort, wo die Werthe sich mit α schnell ändern (besonders in der Höhe der Spitze 1), wohl etwas enger wählen. Man vergl. die schon einmal erwähnte, von Herrn Meyerhoff berechnete Tabelle für Schiffbau- \perp -Eisen in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1899, Seite 607, mit deren Zahlen die von uns berechneten gut übereinstimmen.

Dividirt man die Widerstandsmomente W_1, W_2, W_3 durch $F = 31,1$, so erhält man die Kernradien $k_1 = 4,70 \text{ cm}, k_2 = 2,32 \text{ cm}, k_3 = 0,95 \text{ cm}$. Der Kern ist in Fig. 78 schraffirt worden.

α	W	α	W	α	W
+ 90°	49,79	+ 30°	39,93	— 35°	29,54
+ 85°	56,72	+ 25°	36,88	— 40°	29,59
+ 80°	66,48	+ 20°	34,50	— 45°	29,87
+ 75°	81,02	+ 15°	32,64	— 50°	30,38
+ 70°	104,74	+ 10°	31,20	— 55°	31,16
+ 65° 17' 40"	146,00 = W_1	+ 5°	30,10	— 60°	32,23
		0°	29,29	— 65°	33,64
+ 65°	142,64	— 5°	28,73	— 70°	35,64
+ 60°	102,93	— 10°	28,41	— 75°	37,80
+ 55°	81,00	— 15°*	28,31 = W_{min}	— 80°	40,79
+ 52° 3' 50"	72,21 = W_2	— 20°	28,42	— 85°	44,66
		— 25°	28,76	— 90°	49,79
+ 50°	66,22	— 30°	29,33		
+ 45°	56,37	— 31° 57' 20"	29,62 = W_3		
+ 40°	49,18				
+ 35°	43,91				

Die vorstehenden Rechnungen enthalten reichlich viel Decimalstellen; es soll deshalb noch gezeigt werden, dass man vollkommen brauchbare Ergebnisse auch dann erhält, wenn man auf die Abrundung der Ecken des Querschnitts keine Rücksicht nimmt und die ganze Zahlenrechnung so einrichtet, dass man immer nur zwei- oder dreistellige Zahlen zu multipliciren oder zu dividiren hat. Man kann dann die ganze Arbeit sehr schnell mit Hilfe einer Rechentafel ausführen.**)

Auf Seite 42 erhielten wir für den nicht abgerundeten Querschnitt:

$$J_x = 919, \quad J_y = 339, \quad J_{xy} = 430.$$

Nun ergibt sich für die *Nulllinie* (1):

$$y_1 = F y_{k1} = \frac{919}{7,0} = 131 \text{ cm}^3$$

$$x_1 = F x_{k1} = \frac{430}{7,0} = 61 \quad ,,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{919}{430} = 2,14, \quad \alpha_1 = 65^\circ$$

$$W_1 = \sqrt{131^2 + 61^2} = 145 \text{ cm}^3 \text{ (anstatt 146,00),}$$

für die *Nulllinie* (2):

$$y_2 = F y_{k2} = \frac{430}{7,5} = 57 \text{ cm}^3$$

$$x_2 = F x_{k2} = \frac{339}{7,5} = 45 \quad ,,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{430}{339} = 1,27, \quad \alpha_2 = 51^\circ 50'$$

$$W_2 = \sqrt{57^2 + 45^2} = 73 \text{ cm}^3 \text{ (anstatt 72,21),}$$

*) Genau wird W ein Minimum für $\alpha = 90^\circ - 75^\circ 8' 40'' = 14^\circ 51' 20''$.

**) Wir empfehlen hierzu die *Rechentafel von Dr. Zimmermann*, Berlin, Verlag von W. Ernst & Sohn, oder die grosse *Rechentafel von Crelle*, Berlin, Verlag von G. Reimer.

für die Nulllinie (3): $\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{12,8}{7,0} = 1,82$

$$y_3 = F y_{k_3} = -\frac{919 - 430 \cdot 1,82}{7,0 + 0,5 \cdot 1,82} = -\frac{136}{7,91} = -17 \text{ cm}^3$$

$$x_3 = F x_{k_3} = -\frac{430 - 339 \cdot 1,82}{7,0 + 0,5 \cdot 1,82} = +\frac{187}{7,91} = +24 \text{ ,,}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = -\frac{136}{187} = -0,72, \quad \alpha_3 = 35^\circ 50'$$

$$W_3 = \sqrt{17^2 + 24^2} = 29 \text{ cm}^3 \text{ (anstatt } 29,62\text{)}.$$

Die Ergebnisse dieser kurzen Rechnung sind genau so viel werth, wie der zuerst angestellten genaueren Untersuchung. Man darf nie ausser Acht lassen, dass die hier vorgetragene Lehre von der Biegefestigkeit auf der Voraussetzung einer linearen Spannungsvertheilung beruht und — ganz besonders bei der vorliegenden Querschnittsform — nur als Annäherungsrechnung angesehen werden darf. Dazu kommt, dass die von ^{den}Walzwerken gelieferten Profile nie genau mit den im Profilbuch beschriebenen übereinstimmen — nach den Erfahrungen des Verfassers fallen sie stets etwas stärker aus — und dass schliesslich eine scharfe Bestimmung der Richtung der Kraftlinie in Wirklichkeit nie möglich ist. Aus diesem letzten Grunde wird man, um sicher zu gehen, die Kraftlinie stets um einige Grade nach der Seite hin gedreht denken, nach welcher das Widerstandsmoment abnimmt.

51. Analytische Bestimmung des Kerns für einige häufiger vorkommende Querschnitte.

1. Das Dreieck. Fig. 79. Um den Kern zu ermitteln, genügt es, die eine Seite, z. B. b , als Nulllinie zu betrachten und den zugehörigen Angriffs-

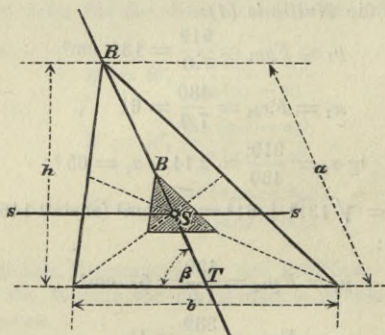


Fig. 79.

punkt B zu bestimmen. Derselbe liegt auf der zur Seite b gehörigen Transversale $\overline{RT} = a$, weil das Centrifugalmoment des Querschnitts in Bezug auf diese Transversale und die zu b parallele Schwerachse ss des Dreiecks als Koordinatenachsen $= 0$ ist. Der Abstand des Punktes B vom Schwerpunkte S ist $\overline{SB} = \frac{i'^2}{\frac{1}{3}a} = \frac{3J'}{Fa}$, wobei J' das für schiefwinklige Koordinaten auf die Achse ss bezogene Trägheitsmoment ist. Für rechtwinklige Koordinaten wurde in

Bezug auf die Achse ss auf Seite 31 gefunden: $J = \frac{bh^3}{36} = \frac{ba^3 \sin^3 \beta}{36}$, und hieraus folgt (nach Gleich. 10 auf Seite 38):

$$J' = J \operatorname{cosec}^2 \beta = \frac{ba^3 \sin \beta}{36}. \quad \text{Wegen } F = \frac{ba \sin \beta}{2} \text{ ergibt sich mithin } \overline{SB} = \frac{a}{6}.$$

Bestimmt man auf die gleiche Weise die den übrigen Dreieckseiten entsprechenden Kernpunkte, so findet man, dass der Kern ein Dreieck ist, dessen Seiten parallel zu den Querschnitts-Seiten sind, und dessen Schwerpunkt mit dem Querschnitts-Schwerpunkte zusammenfällt.

2. *Das Parallelogramm.* Fig. 80. Die zu den Seiten b und a parallelen Schwerachsen werden zu Koordinatenachsen gewählt; es entspricht ihnen das Centrifugalmoment $Z=0$. Macht man b zur Nulllinie, so liegt der Angriffspunkt B auf der Mittellinie RT im Abstände $\overline{SB} = \frac{i'^2}{\frac{1}{3}a} = \frac{2J}{Fa}$ vom Schwerpunkte S . Nun ist, nach Seite 31, für die Achse ss und für rechtwinklige Koordinaten: $J = \frac{bh^3}{12} = \frac{ba^3 \sin^3 \beta}{12}$, mithin $J' = J \operatorname{cosec}^2 \beta = \frac{ba^3 \sin \beta}{12}$. Weiter ist $F = bh = ba \sin \beta$, also $\overline{SB} = \frac{a}{6}$. Ebenso lassen sich die den übrigen Seiten des Parallelogramms entsprechenden Kernpunkte bestimmen. Der Kern ist ein Parallelogramm, dessen Ecken auf den gewählten Koordinaten-Achsen liegen, und dessen Diagonalen die Längen $\frac{1}{3}a$ und $\frac{1}{3}b$ haben.

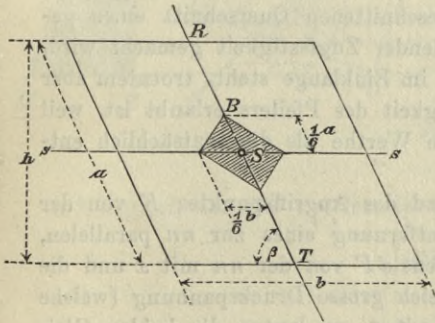


Fig. 80.

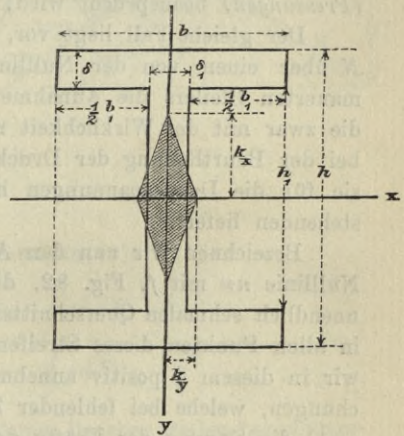


Fig. 81.

3. *Der I-Querschnitt.* Für die den Querschnittsseiten parallelen, in Fig. 81 mit x und y bezeichneten Schwerachsen, welche gleichzeitig Hauptachsen sind, findet man mit den angegebenen Bezeichnungen:

$$J_x = \frac{1}{12} (bh^3 - b_1 h_1^3); \quad J_y = \frac{1}{12} (2\delta b^3 + h_1 \delta_1^3).$$

Der Inhalt des Querschnitts ist: $F = bh - b_1 h_1$. Der Kern ist ein Paral-

lelogramm, dessen Ecken auf den Hauptachsen liegen, und dessen halbe Diagonalen die Längen haben

$$k_x = \frac{2J_x}{Fh} \text{ und } k_y = \frac{2J_y}{Fb}.$$

§ 11.

Druckbelastung ausserhalb des Kerns bei Ausschluss von Zugfestigkeit.

52. Lage der Nulllinie. Bisher wurden die Spannungen σ für den Fall einer den Querschnitt schneidenden Nulllinie unter der Voraussetzung bestimmt, dass der Längskraft N sowohl durch Druckspannungen als auch durch Zugspannungen das Gleichgewicht gehalten wird. Es kommt aber auch vor, dass Zugspannungen nicht entstehen können, beispielsweise dann, wenn sich ein Stab mit seinem Endquerschnitte gegen ein ebenes Widerlager stützt, ohne mit diesem irgendwie verbunden zu sein. Liegt hierbei der Angriffspunkt K des auf den Querschnitt vom Widerlager ausgeübten Druckes N ausserhalb des Kerns, so trennt die Nulllinie nn den Querschnitt in zwei Theile, von denen der eine, den Punkt K enthaltende, durch Druckspannungen (*Pressungen*) beansprucht wird, während der andere spannungslos ist.

Der gleiche Fall liegt vor, wenn bei der Vertheilung eines Druckes N über einen von der Nulllinie geschnittenen Querschnitt eines gemauerten Pfeilers die Annahme fehlender Zugfestigkeit gemacht wird, die zwar mit der Wirklichkeit nicht im Einklange steht, trotzdem aber bei der Beurtheilung der Druckfestigkeit des Pfeilers erlaubt ist, weil sie für die Druckspannungen höhere Werthe als die thatsächlich entstehenden liefert.

Bezeichnen wir nun den Abstand des Angriffspunktes K von der Nulllinie nn mit f , Fig. 82, die Entfernung eines zur nn parallelen, unendlich schmalen Querschnittsstreifens dF von der nn mit x und die in allen Punkten dieses Streifens gleich grosse Druckspannung (welche wir in diesem § positiv annehmen) mit σ , so lauten die beiden Gleichungen, welche bei fehlender Zugfestigkeit ausdrücken, dass

- 1) die Summe der Kräfte σdF gleich dem Drucke N ist,
- 2) die Summe der Momente der Kräfte σdF , bezogen auf die nn gleich dem Momente Nf des Druckes N ist:

$$(1) \quad N = \int \sigma dF \text{ und } Nf = \int x \sigma dF,$$

wobei sich die Integrale nur über denjenigen Theil des Querschnittes erstrecken, welcher mit dem Angriffspunkte K auf derselben Seite der Nulllinie liegt.

Die Pressung σ folgt dem Gesetze: $\sigma = Cx$, wo C eine Konstante ist, welche sich aus der Gleichung (1) ergibt.

Man erhält: $N = C \int x dF$, mithin:

$$(2) \quad C = \frac{N}{\int x dF} \text{ also } \sigma = \frac{Nx}{\int x dF},$$

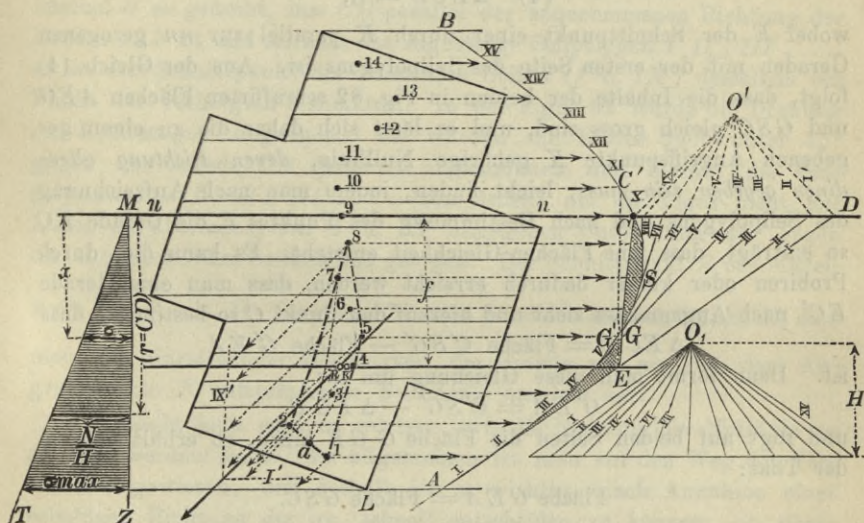


Fig. 82.

und hierauf, aus der zweiten der Gleichungen (1):

$$(3) \quad f = \frac{\int Cx^2 dF}{N} = \frac{\int x^2 dF}{\int x dF}.$$

Zähler und Nenner des für f gefundenen Bruches stellen beziehungsweise das Trägheitsmoment und das statische Moment des gedrückten Querschnittsteiles für die Achse nn vor; sie lassen sich mit Hilfe eines Seilpolygons bestimmen. Hierzu zerlege man den ganzen Querschnitt in schmale, zur Nulllinie parallele Streifen, fasse die Inhalte derselben als Kräfte auf, welche in der Richtung nn wirken, zeichne zu ihnen mit der willkürlichen Polweite H (die eine Fläche vorstellt) das Seilpolygon $AGCB$ und bestimme die von diesem und der ersten Polygon-

seite AD auf der nn abgeschnittene Strecke $\overline{CD} = r^*$). Man findet dann (nach No. 15 bis 17) das gesuchte statische Moment $= Hr$ und (nach Gleichung 1 auf Seite 26) das gesuchte Trägheitsmoment $= 2H\mathfrak{F}$, unter \mathfrak{F} den Inhalt der Fläche $AGCDA$ verstanden, welche von dem Seilpolygon und den Geraden CD und DA eingeschlossen wird. Die Gleichung (3) geht jetzt über in $f = \frac{2\mathfrak{F}}{r}$ und hieraus folgt $\frac{fr}{2} = \mathfrak{F}$, d. h.:

$$(4) \quad \Delta ECD = \mathfrak{F},$$

wobei E der Schnittpunkt einer durch K parallel zur nn gezogenen Geraden mit der ersten Seite des Seilpolygons ist. Aus der Gleich. (4) folgt, dass die Inhalte der beiden in Fig. 82 schraffirten Flächen AEG und GSC gleich gross sind, und es lässt sich daher die zu einem gegebenen Angriffspunkte K gehörige Nulllinie, deren Richtung allerdings gegeben sein muss, leicht finden, indem man nach Aufzeichnung des Seilpolygons und nach Bestimmung des Punktes E die Gerade EC so einträgt, dass jene Flächen-Gleichheit entsteht. Es kann dies durch Probiren oder kürzer dadurch erreicht werden, dass man eine Gerade EC' nach Augenmaass zieht und hierauf den Punkt C so bestimmt, dass

$$\Delta EC'C = \text{Fläche } C'SG' - \text{Fläche } G'EA$$

ist. Denn formt man diese Gleichung um in:

$$G'EA = C'SG' - \Delta EC'C$$

und fügt auf beiden Seiten die Fläche $G'GE$ hinzu, so erhält man in der That:

$$\text{Fläche } GEA = \text{Fläche } GSC.$$

Hat man die Nulllinie auf die beschriebene Weise bestimmt, so liegt der Angriffspunkt der Mittelkraft $\int \sigma dF$ sämtlicher Querschnittsbelastungen σdF , welche in den Schwerpunkten der entsprechenden Streifen dF angreifen, in der Geraden KE ; er muss aber, damit zwischen den Kräften $\int \sigma dF$ und N Gleichgewicht besteht, mit dem Angriffspunkte K zusammenfallen, und hierzu ist nöthig,

dass die Mittelkraft $\int \sigma dF$ der in der Querschnittsebene nach irgend einer Richtung angenommenen Kräfte σdF die Gerade KE im Punkte K schneiden muss.

*) Obgleich die Querschnittsstreifen von endlicher Breite sind, werden wir doch in der Folge für deren Inhalte die Bezeichnung dF beibehalten. Auch unterliessen wir es, um die Fig. 82 nicht undeutlich zu machen, das Seilpolygon durch die einbeschriebene Seil-Linie zu ersetzen.

Ist dies nicht der Fall, so muss eine andere Richtung für die Null-Linie gewählt und das ganze Verfahren wiederholt werden.

Bei Aufsuchung jener Mittekraft dürfen die Drücke $\sigma dF = CxdF$

durch die ihnen proportionalen Strecken $\frac{xdF}{H}$ dargestellt werden, welche

die Seiten des Seilpolygons $AGSC$ (nach No. 20) auf der Geraden nn abschneiden. Wählt man also den Pol O' , zieht die Strahlen $I', II', III' \dots$, denkt sich hierauf den Kräftezug CD sammt dem Strahlenbüschel O' so gedreht, dass CD parallel der angenommenen Richtung der Drücke σdF ist und zeichnet das zugehörige Seilpolygon $I' II', III' \dots$, so ist der Schnittpunkt der äussersten Seiten (I' u. IX') desselben ein Punkt der verlangten Mittelkraft. In der Figur 82 wurde die Drehung des Kräftezuges umgangen. Es wurden die Kräfte σdF unter 45° gegen die Gerade CD gerichtet angenommen und hierauf die Seilpolygonseiten $I', II', III' \dots$ (von denen, um die Figur nicht mit Linien zu überladen, nur I' u. IX' angegeben sind) unter 45° gegen die entsprechenden Seilstrahlen gezogen. Der Schnittpunkt R der Mittel-

kraft $\int \sigma dF$ mit der Geraden KE fällt so dicht an den Punkt K , dass man mit hinreichender Genauigkeit die Gerade nn als die dem Angriffspunkte K entsprechende Null-Linie ansehen darf.

Es bleibt jetzt noch zu erörtern, wie die Richtung der Nulllinie nn gewählt werden muss. Im allgemeinen ist man auf den Weg des Versuches angewiesen, und deshalb ist es wichtig, nach Annahme einer beliebigen Richtung der nn , schnell entscheiden zu können, ob überhaupt die Möglichkeit vorhanden ist, dass der gegebene Angriffspunkt K mit dem Punkte R zusammenfällt. Verbindet man zu diesem Zwecke die Schwerpunkte der gedrückten Querschnittsstreifen durch ein (in der Fig. 82 strichpunktirtes) Polygon, welches keinen einspringenden Winkel besitzt, mithin alle nicht auf ihm liegenden Schwerpunkte einschliesst, so liegt der Mittelpunkt R aller Querschnitts-Belastungen σdF innerhalb dieses Polygons, und es muss deshalb auch der gegebene Punkt K innerhalb dieses Polygons liegen, wenn ein Zusammenfallen desselben mit R möglich sein soll. Bei der in Fig. 82 gewählten Richtung der nn ist diese Bedingung erfüllt, und an diesem Ergebnisse wird nichts geändert, wenn auch die Nulllinie, deren Lage ja zunächst unbekannt ist, da die Wahl der Richtung der nn der Aufzeichnung des Seilpolygons voranzugehen hat, parallel mit sich selbst verschoben wird.

Man kann aber den Theil des Querschnitts in Fig. 82, innerhalb dessen der Punkt K liegen muss, auf einfache Weise noch enger begrenzen, indem man die auf die Flächenstreifen 1 und 2 wirkenden

Belastungen σdF , welche wir mit P_1 und P_2 bezeichnen wollen, zu einer Mittelkraft vereinigt, deren Angriffspunkt a auf der Geraden 12 liegt und diese so theilt, dass sich verhält: $1a : 2a = P_2 : P_1$. Die Belastungen P_1 und P_2 sind den auf die Achse nn bezogenen statischen Momenten der entsprechenden Streifen proportional. Bezeichnet man also die Abstände der Schwerpunkte 1 und 2 von der nn mit x_1 und x_2 und verwandelt die Streifen 1 und 2 in Rechtecke, welche bei gleicher, beliebiger Grundlinie die Höhen z_1, z_2 haben, so folgt $P_2 : P_1 = \frac{x_2 z_2}{c} : \frac{x_1 z_1}{c}$, wo c eine willkürlich zu wählende Strecke bedeutet.

Die Strecken $\frac{x_2 z_2}{c}$ und $\frac{x_1 z_1}{c}$ lassen sich leicht durch Zeichnung finden, worauf die Lage des Punktes a bestimmt werden kann. Ist dies geschehen, so ersetzt man die Seiten 41, 12, 27 des in der Fig. 82 gezeichneten strichpunktirten Polygons durch die Seiten $4a$ und $a7$ und erhält dann eine wesentlich kleinere Fläche, innerhalb welcher der Punkt K liegen muss, wenn sein Zusammenfallen mit R möglich sein soll.

Ergiebt sich nun, trotz aller Sorgfalt bei der Wahl der Richtung der nn , nachträglich eine unbefriedigende Uebereinstimmung der Lagen von K und R , so muss die Nulllinie in eine neue Lage $n'n'$ (Fig. 83) gedreht werden, und hierbei empfiehlt es sich, den von der nn abgegrenzten Querschnittstheil, dessen Inhalt $= F$ sei und der kurz als Fläche F bezeichnet werden soll, zunächst *unverändert beizubehalten* und in der Nähe der Nulllinie, innerhalb der in der Fig. 83 schraffirten Fläche, Zugspannungen anzunehmen. Man bestimme den Schwerpunkt S der Fläche F (wobei zu beachten ist, dass die zur Geraden KE parallele Schwerlinie mit Hilfe des bereits in der Fig. 82 vorhandenen Seilpolygons $AGCB$ ermittelt werden kann) und verbinde die Punkte R und S durch eine Gerade; dieselbe stellt die zur Nulllinie nn gehörige Kraftlinie vor. Wird die Fläche F auf ein schiefwinkliges Achsenkreuz (u, v) bezogen, dessen durch S gehende u -Achse parallel zur nn ist, und dessen v -Achse mit der Geraden RS zusammenfällt, so ist das Centrifugalmoment $\int uvdF = 0$, und es folgt nach S. 59,

dass bei einer Bewegung des Angriffspunktes R in die vorgeschriebene Lage K sich die Nulllinie um ihren Schnittpunkt T mit der Kraftlinie RS in eine solche Lage $n'n'$ dreht, dass sie auf der u -Achse die Strecke $\overline{ST} = u_c = \frac{i_v^2}{u_1}$ abschneidet, wobei $u_1 = \overline{RK}$ ist. Das auf die v -Achse bezogene Trägheitsmoment $J_v = F i_v^2$ wird am zweckmässigsten mittels des Mohr'schen Verfahrens bestimmt. Man zerlege

Rechtecks liegenden Angriffspunkte eine zur anderen Diagonale parallele Nulllinie entsprechen muss, Fig. 85.

53. **Ermittelung der Druckspannung σ .** Die auf Seite 87 abgeleitete Gleichung (2) liefert, wegen $\int x dF = Hr$ (wobei $r =$ Strecke CD in Fig. 82), für die Druckspannung σ den Ausdruck

$$(5) \quad \sigma = \frac{N}{H} \frac{x}{r},$$

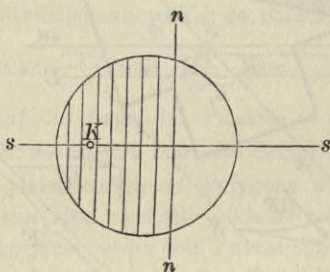


Fig. 84.

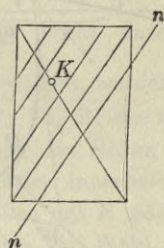


Fig. 85.

und hiernach ergibt sich im Abstände $x = r$ von der Nulllinie:

$\sigma = \frac{N}{H}$. Durch diesen Werth ist die Gerade MT in Fig. 82 be-

stimmt, deren Ordinaten, bezogen auf eine zur Nulllinie senkrechte x -Achse gleich den Pressungen σ sind, und man ist nun im Stande, den Werth σ_{max} für den äussersten Punkt L des Querschnitts anzugeben. Die willkürliche Polweite H wird man so wählen, dass sich der Aus-

druck $\frac{N}{H}$ bequem berechnen lässt.

54. **Das Rechteck, beansprucht durch einen Druck N , dessen Angriffspunkt auf einer Symmetrieachse liegt.** Sind die Längen der Seiten des Rechtecks $= b$ und $= h$, und liegt der Angriffspunkt auf der zur Seite h parallelen Mittelachse, so ist die Nulllinie parallel zur Seite b . Bedeutet ξ den Abstand des Angriffspunktes K von der Seite LL (vergl. Fig. 86), so hat die mn von dieser Seite den Abstand 3ξ , weil, wegen der gleichen Breite der zur mn parallelen Querschnittstreifen (bdx), eine durch K zur mn gezogene Parallele durch den Schwerpunkt S des Dreiecks MTZ gehen muss. Multiplicirt man den Inhalt $\left(\frac{3\xi}{2}\sigma_1\right)$ dieses Dreiecks mit der Streifenbreite b , so

erhält man die Summe aller auf die gedrückte Querschnittsfläche wirkenden Kräfte σdF . Diese Summe muss aber gleich N sein,

$$\text{und es folgt daher: } \frac{3 \xi \sigma_1 b}{2} = N,$$

woraus sich die Formel ergibt:

$$(6) \quad \sigma_1 = \frac{2N}{3 \xi b},$$

welche für die Berechnung von Gewölben, Pfeilern und Stützmauern besonders wichtig ist.

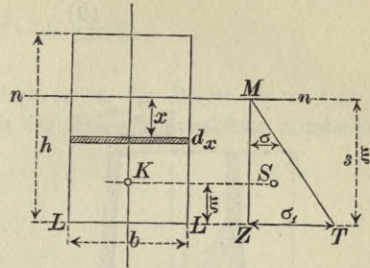


Fig. 86.

55. Untersuchung der Standsicherheit eines gemauerten runden Schornsteins. Zu den wichtigsten Anwendungen der in No. 52 und 53 abgeleiteten Gesetze gehört die Berechnung der durch Winddruck in den Querschnitten gemauerter Schornsteine hervorgerufenen Pressungen. Ist

G das Gewicht des Schaftes oberhalb des zu untersuchenden Querschnitts AB (Fig. 87),

H der wagerecht angenommene Winddruck,

M das Moment von H in Bezug auf AB ,

so schneidet die Mittelkraft D aus G und H den Querschnitt AB im Abstände

$$(7) \quad c = \frac{M}{G}$$

vom Schwerpunkte. Liegt der Angriffspunkt K innerhalb des Kerns, so treten im Querschnitt nur Druckspannungen auf; der grösste Werth derselben ist

$$(8) \quad \sigma = \frac{G}{F} + \frac{M}{W} = \frac{G}{F} \left(1 + \frac{c}{k} \right)$$

wo $k = \frac{W}{F}$ den Kernhalbmesser bedeutet.

Liegt K ausserhalb des Kerns, so entstehen auf der Windseite Zugspannungen, die aber zweckmässig vernachlässigt werden, weil auf ihre Mitwirkung nicht immer mit Sicherheit zu rechnen ist. Bedeutet dann, bezogen auf die Nulllinie nn ,

J_n das Trägheitsmoment der gedrückten Querschnitts-Fläche,

S_n das statische Moment „ „ „ „ „ „

f den Abstand der nn vom Angriffspunkte K ,

z den Abstand des stärkst gedrückten Querschnittstheilchens von der nn ,

Das statische Moment dieser Belastung in Bezug auf AB ist

$$(14) \quad M = \frac{2}{9} w h^2 (2 R_0 + R).$$

Im deutschen Binnenlande genügt es in der Regel, $w = 125 \frac{k}{qm}$ $= 0,125 \frac{t}{qm}$ anzunehmen, während an der freien Meeresküste mindestens mit $w = 0,150 \frac{t}{qm}$ gerechnet werden sollte. Im zweiten Falle hält der Verfasser sogar die Annahme von $w = 0,200 \frac{t}{qm}$ für rathsam, empfiehlt aber für diesen Ausnahmefall die Zulassung hoher Pressungen.

Besondere Vorsicht erheischt die Berechnung kleinerer und mittelgrosser Schornsteine. In Folge des geringen Gewichtes G kann es hier vorkommen, dass selbst bei einer recht kleinen gedrückten Fläche die Beanspruchung σ für den angenommenen Winddruck noch unterhalb der zulässigen Grenze bleibt, dass aber eine ganz geringe Steigerung dieser Windstärke

genügt, um die Pressung weit über das zulässige Maass zu erhöhen. Ein solcher Schornstein bietet gewiss nicht die gewünschte Sicherheit.

Man erhält nun ein recht anschauliches Bild von dem Sicherheitsgrade, wenn man die Pressungen σ für verschiedene Windstärken w berechnet, die Werthe w als Abscissen und die zugehörigen σ als Ordinaten aufträgt und auf diese Weise das Gesetz, nach welchem die σ mit den w zunehmen, durch eine Kurve darstellt, (Fig. 91). Die Ermittlung dieser σ -Linie gestaltet sich am einfachsten, wenn die Werthe σ , w für solche Nulllinien-Lagen bestimmt werden, denen möglichst einfache Ausdrücke der Grössen J_n , S_n und c entsprechen.

Solange die Nulllinie ausserhalb des Querschnitts bleibt, ist die σ -Linie eine Gerade; sie ist bestimmt durch die im Falle $w = 0$ auftretende Pressung

$$(15) \quad \sigma_0 = \frac{G}{F}$$

und durch die Pressung

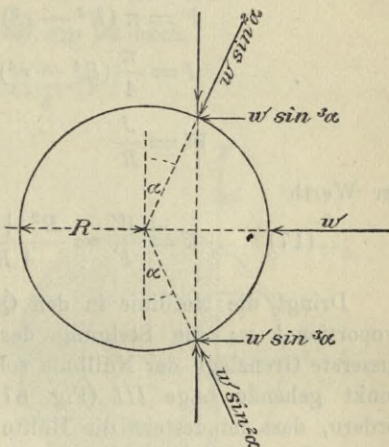


Fig. 88.

$$(16) \quad \sigma_I = \frac{2G}{F},$$

welche zu der den Querschnitt berührenden Nulllinie *I* (Fig. 87) gehört. Die Windstärke w_I , welche σ_I hervorbringt, wird aus der Gleichung

$$c = \frac{M}{G} = k$$

gefunden. Für den Kernhalbmesser k ergibt sich aus den Formeln

$$F = \pi (R^2 - r^2)$$

$$J = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) = \frac{F}{4} (R^2 + r^2)$$

$$W = \frac{J}{R}$$

der Werth

$$(17) \quad k = \frac{W}{F} = \frac{R^2 + r^2}{4R}.$$

Dringt die Nulllinie in den Querschnitt ein, so ist σ nicht mehr proportional w ; die Steigung der σ -Linie nimmt stetig zu. Als äusserste Grenzlage der Nulllinie sollte man stets die durch den Schwerpunkt gehende Lage *III* (Fig. 87) ansehen, d. h. man sollte stets fordern, dass mindestens die Hälfte des Querschnitts zur Wirkung gelangt. Für diese Lage ist

$$J_n = \frac{1}{2} J \text{ und } S_n = \frac{2}{3} (R^3 - r^3) \text{ (vergl. Seite 40)}$$

$$(18) \quad c = \frac{J_n}{S_n} = \frac{J}{2S_n} = \frac{3\pi}{16} \frac{1 - \frac{r^4}{R^4}}{1 - \frac{r^3}{R^3}} R$$

$$\sigma = \frac{GR}{S_n}.$$

Setzt man

$$G = \sigma_0 F = \frac{\sigma_I F}{2} \text{ und } S_n = \frac{J}{2c_{III}} = \frac{FkR}{2c_{III}} = \frac{FR}{2} \frac{c_I}{c_{III}}$$

so erhält man die übersichtliche Formel

$$\frac{\sigma_{III}}{\sigma_I} = \frac{c_{III}}{c_I} = \frac{w_{III}}{w_I}$$

und erkennt, dass die Endpunkte der Ordinaten σ_I und σ_{III} der σ -Linie in einer durch den Ursprung gehenden Geraden liegen (Abb. 91). Drückt man $c_I = k$ und c_{III} mit Hilfe von 17 und 18 aus, so findet man

$$\frac{\sigma_{III}}{\sigma_I} = \frac{w_{III}}{w_I} = \frac{c_{III}}{c_I} = \frac{3\pi}{4} \frac{1 + \frac{r}{R}}{1 + \frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2}}$$

und hierfür darf man genügend genau setzen

$$(19) \quad \frac{\sigma_{III}}{\sigma_I} = \frac{w_{III}}{w_I} = \frac{c_{III}}{c_I} = 2,5 = \frac{r}{R}.$$

Ein guter Näherungsausdruck für c_{III} ist auch

$$(20) \quad c_{III} = \frac{R}{2} + \frac{r}{4} \cdot *)$$

Zwischen den Nulllinien I und III nehme man noch die den inneren Kreis auf der Windseite berührende Nulllinie II an, Fig. 89. Den spannungslosen Querschnitt betrachte man als Parabelabschnitt, setze also mit den aus Fig. 90 ersichtlichen Bezeichnungen

$$y = \frac{s(l^2 - 4x^2)}{l^2}$$

$$J_n = J + Fr^2 - 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y^3 dx}{3}$$

$$= \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4} + \pi(R^2 - r^2)r^2 - \frac{16s^3 l}{3 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$S_n = Fr + 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y^2 dx}{2} = \pi(R^2 - r^2)r + \frac{4s^2 l}{3 \cdot 5}$$

$$c = f - r = \frac{J_n}{S_n} - r.$$

Man findet dann, da $\frac{l}{2} = \sqrt{R^2 - r^2}$ ist,

$$\sigma = \frac{G(R+r)}{S_n} = \sigma_0 \frac{(R+r)F}{S_n}$$

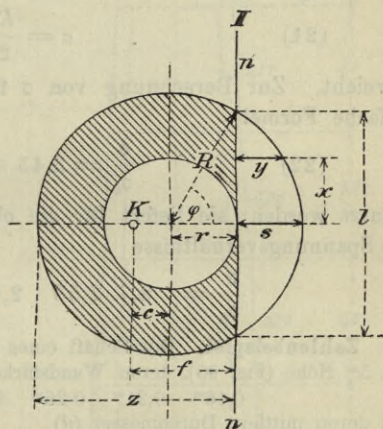


Fig. 89.

*) Auf die Näherungsformel für c hat bereits Professor Lang in seinem Buche *Der Schornsteinbau* aufmerksam gemacht.

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2}{\frac{r}{R} \left(1 + \frac{r}{R}\right) + \frac{8}{15\pi} \left(1 - \frac{r}{R}\right) \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}}$$

und erhält für

$$\begin{array}{cccccc} \frac{r}{R} = & 0,5 & 0,6 & 0,7 & 0,8 & 0,9 \\ \frac{\sigma}{\sigma_0} = & 2,73^*) & 2,52 & 2,36 & 2,22 & 2,10 \end{array}$$

während c für alle im Schornsteinbau vorkommenden Mauerstärken nur sehr wenig von

$$(21) \quad c = \frac{R}{2}^{**})$$

abweicht. Zur Berechnung von σ für die Nulllinie II darf stets die einfache Formel

$$(22) \quad \frac{\sigma}{\sigma_0} = 3,45 - 1,5 \frac{r}{R}$$

benutzt werden; sie liefert für die oben angegebenen Werthe von $r : R$ die Spannungsverhältnisse

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 2,7 \quad 2,55 \quad 2,4 \quad 2,25 \quad 2,10.$$

Zahlenbeispiel. Der Schaft eines Schornsteines bestehe aus 6 Trommeln von 5^m Höhe (Fig. 90), deren Wandstärken (s)

$$0,16^m \quad 0,21^m \quad 0,26^m \quad 0,31^m \quad 0,36^m \quad 0,41^m$$

und deren mittlere Durchmesser (d)

$$1,26^m \quad 1,41^m \quad 1,56^m \quad 1,71^m \quad 1,86^m \quad 2,01^m$$

sind. Die Stärken s nehmen um das gleiche Maass $\Delta s = 0,05^m$ zu, die Durchmesser d um $\Delta d = 0,15^m$.

*) Setzt man oben für y die Ordinaten der Kreislinie ein, an Stelle der Parabelordinaten, so findet man

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\pi \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \left(1 + \frac{r}{R}\right)}{\frac{1}{3} \sin \varphi \left(2 + \frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{r}{R} \left(\pi - \pi \frac{r^2}{R^2} - \varphi\right)}$$

wo $\cos \varphi = \frac{r}{R}$. Für $\frac{r}{R} = 0,5$ erhält man $\frac{\sigma}{\sigma_0} = 2,71$. Je grösser $\frac{r}{R}$ ist, desto kleiner ist der Fehler, der durch die Einführung der Parabelordinaten begangen wird.

**) Für $\frac{r}{R} = 0,5$ ergibt sich $c = 0,499 R$ oder $0,488 R$ je nachdem y nach der Parabel- oder Kreisgleichung berechnet wird. Je grösser $\frac{r}{R}$ ist, desto genauer ist der Näherungswerth $c = 0,5 R$.

Das Gewicht des Schafes, der aus dichten, schweren Lochsteinen in verlängertem Cementmörtel bestehen möge (einem Baustoff, der $1,9^t/cbm$ wiegt) beträgt

$$G = 1,9 \cdot \pi \cdot 5,0 [0,16 \cdot 1,26 + 0,21 \cdot 1,41 + 0,26 \cdot 1,56 + 0,31 \cdot 1,71 + 0,36 \cdot 1,86 + 0,41 \cdot 2,01] = 87,4^t \cdot *)$$

Der unterste Querschnitt hat den Inhalt

$$F = \pi (R^2 - r^2) \\ = \pi (1,26^2 - 0,85^2) = 2,72 \text{ qm,}$$

er erfährt in Folge von G die Pressung

$$\sigma_0 = \frac{G}{F} = \frac{87,4}{2,72} = 32^t/qm \\ = 3,2^k/qcm.$$

Der Winddruck erzeugt für den untersten Querschnitt das Moment

$$M = \frac{2}{9} w h^2 (2 R_0 + R) \\ = \frac{2}{9} w 30^2 (2 \cdot 0,66 + 1,26) \\ M = 516 w$$

und diesem entspricht

$$c = \frac{M}{G} = \frac{516 w}{87,4}$$

Zu einem bestimmten Abstände c gehört also die Windstärke

$$w = 0,17 c.$$

Hat die Nulllinie die Lage I, so ist

$$c_I = k = \frac{R^2 + r^2}{4 R} = \frac{1,26^2 + 0,85^2}{4 \cdot 1,26} \\ = 0,458 m;$$

die zugehörige Windstärke beträgt

$$w_I = 0,17 \cdot 0,458 = 0,078^t/qm \\ = 7,8^k/qcm$$

und die bei diesem Winddruck entstehende Pressung

$$\sigma_I = 2 \sigma_0 = 6,4^k/qcm.$$

Für die Nulllinien-Lage II erhält man

$$\left(\text{mit } \frac{r}{R} = \frac{0,85}{1,26} = 0,675 \right)$$

$$c_{II} = \frac{1}{2} R = 0,63 m$$

$$w_{II} = 0,17 \cdot 0,63 = 0,107^t/qm \\ = 10,7^k/qcm$$

$$\sigma_{II} = \sigma_0 \left(3,45 - 1,5 \frac{r}{R} \right)$$

$$= 3,2 (3,45 - 1,5 \cdot 0,675)$$

$$= 7,8^k/qcm$$

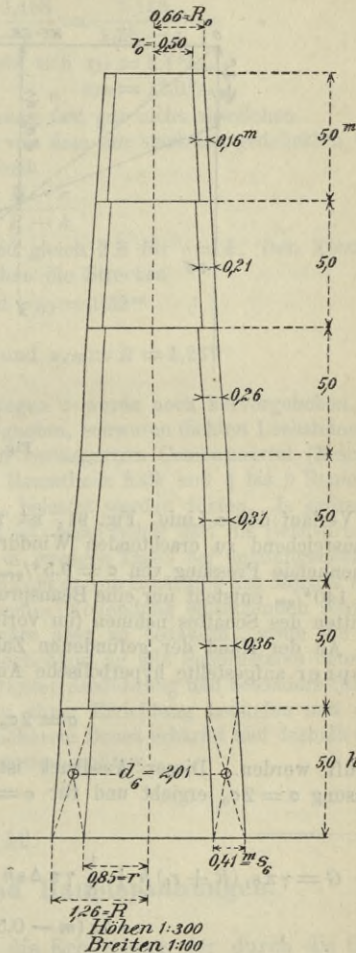


Fig. 90.

*) Sind die Trommeln gleich hoch und nehmen die Wandstärken um das gleiche Maass Δs zu, so findet man für das Gewicht G leicht den Ausdruck

und für die Lage III

$$\frac{\sigma_{III}}{\sigma_I} = \frac{w_{III}}{w_I} = 2,5 - \frac{r}{R} = 2,5 - 0,675 = 1,825$$

$$\sigma_{III} = 6,4 \cdot 1,825 = 11,7 \text{ k/qcm}$$

$$w_{III} = 78 \cdot 1,825 = 142 \text{ k/qm}$$

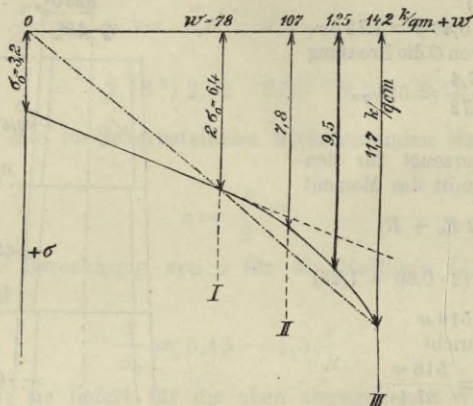


Fig. 91.

Der Verlauf der σ -Linie, Fig. 91, ist zufriedenstellend. Für den in der Regel als ausreichend zu erachtenden Winddruck von 125 k/qm ergibt sich die mässige zu nennende Pressung von $\sigma = 9,5 \text{ k/qcm}$ und selbst bei einem Winddruck von rund 140 k/qm entsteht nur eine Beanspruchung von 12 k/qcm . In den oberen Querschnitten des Schaftes nehmen (im vorliegenden Falle) die Pressungen ab.

An der Hand der gefundenen Zahlenwerthe möge noch die einfache von Huppner aufgestellte hyperbolische Annäherungsformel

$$\sigma = 2\sigma_0 \frac{R - k}{R - c}$$

geprüft werden. Dieser Ausdruck ist so gebildet, dass sich für $c = k$ die Pressung $\sigma = 2\sigma_0$ ergibt und für $c = R$ der Werth $\sigma = \infty$. Im Falle $c = R$

$$G = \gamma \pi s_1 (R + r_0) h + \frac{1}{3} \gamma \pi \Delta s h (m - 1) \left[3 r_0 + (R - R_0) \frac{2m + 0,5}{m} - \Delta s (m - 0,5) \right]$$

wo m die Anzahl der Trommeln bedeutet,

s_1 die Stärke der obersten Trommel

h die Höhe des Schaftes

r_0 den inneren Halbmesser des obersten Querschnitts.

R_0 „ äusseren „ „ „ „

R „ „ „ „ „

γ das Gewicht des Mauerwerks f. d. Raumeinheit.

wird bei fehlender Zugfestigkeit die wirksame Querschnittsfläche unendlich klein — ein Ergebniss das natürlich nur so zu deuten ist, dass die σ -Linie ausserhalb ihres Geltungsbereiches eine Asymptote besitzt; denn bereits für Werthe von c , die in der Nähe von R liegen, hat die Vernachlässigung der Zugfestigkeit keinen Sinn mehr. Hält man aber daran fest, dass die durch den Schwerpunkt gehende Nulllinie *III* die äusserste zu gestattende ist, so liefert die sehr übersichtliche Hüppner'sche Formel brauchbare Werthe. Im vorliegenden Falle wird

$$\sigma = 2 \cdot 3,2 \frac{1,26 - 0,458}{1,26 - c} = \frac{5,133}{1,26 - c}$$

Für $c = c_{II} = 0,63^m$ ergibt sich $\sigma_{II} = 8,1^k/gem$

„ $c = c_{III} = 0,84^m$ „ „ $\sigma_{III} = 12,0^k/gem$,

d. s. Zahlen, die von den oben gefundenen fast gar nicht abweichen.

Für den Abstand z der Nulllinie von dem am stärksten gedrückten Querschnittstheilchen giebt Hüppner den Werth

$$z = 2 R \frac{R - c}{R - k}$$

derselbe wird gleich Null für $c = R$ und gleich $2R$ für $c = k$. Den Abständen $c_{II} = 0,63^m$ und $c_{III} = 0,84^m$ entsprechen die Strecken

$$z_{II} = 1,98^m \text{ und } z_{III} = 1,32^m$$

welche von unseren Werthen

$$z_{II} = R + r = 2,11^m \text{ und } z_{III} = R = 1,26^m$$

schon etwas mehr abweichen.

Hinsichtlich der zulässigen Pressungen σ werde noch hervorgehoben, dass die für Schornsteinbauten besonders geeigneten, schweren dichten Lochsteine, desgleichen gute Hartbrandsteine, beide in verlängertem Cementmörtel (Mischung: 1 Raumtheil Portlandcement, 1 bis $2\frac{1}{2}$ Raumtheile Kalk und 4 bis 9 Raumtheile reiner scharfer Sand) mit 12 bis $30^k/gem$ belastet werden dürfen. Je grösser der Cementzusatz und je länger die Bauzeit ist, desto höher darf die Beanspruchung gewählt werden. Wird ein Schornstein in wenigen Tagen bei ungenügendem Cementzusatz in die Höhe getrieben, so schwebt er vor Erhärtung des Mörtels natürlich in Gefahr, von einem bald nach seiner Vollendung einsetzenden schweren Sturme umgeworfen zu werden; es wäre aber zu bedauern, wenn die Aufsichtsbehörden im Hinblick auf diese Möglichkeit an alle Schornsteine denselben Maassstab anlegen und auch bei sorgfältigster Ausführung und besonders für sehr hohe Schornsteine, die längere Zeit zu ihrer Errichtung bedürfen und deren Mörtel in den tieferen Schichten unter höherem Druck erhärtet und deshalb fester wird, nur die niedrigeren Werthe σ gestatten wollten.

§ 12.

Schubspannungen und Hauptspannungen.

56. Schubspannungen. Auf die Ermittlung der durch die Querkraft Q hervorgerufenen Schubspannungen τ (vergl. Seite 56) soll in diesem Buche nur ganz kurz und für einen bestimmten Belastungszustand eingegangen werden, weil es sich hier um Untersuchungen handelt, welche der zeichnerischen Behandlung wenig zugänglich sind. Dies gilt besonders von dem Falle einer nicht durch den Schwerpunkt

des Querschnitts gehenden, den Stab somit auf Drehungsfestigkeit beanspruchenden Kraft Q .

Wir beschränken uns deshalb darauf, an der Hand bekannter Gesetze der Festigkeitslehre, die Schubspannungen in einem prismatischen Stabe darzustellen, welcher durch äussere Kräfte beansprucht wird, die in ein und derselben, durch die Stabachse gehenden, den Stab in zwei symmetrische Hälften trennenden Ebene liegen. Die Kraftlinie ist dann eine Symmetrieachse des Stabes; sie sei zur v -Achse gewählt und eine auf ihr senkrechte Schwerlinie zur u -Achse. Fig. 92. Die Schubspannung τ in irgend einem Punkte (u, v) des Querschnitts werde in die Seitenspannungen $\tau_v \perp v$ und $\tau_u \perp u$ zerlegt.

Wird die Annahme gemacht, das τ_u für alle Punkte einer zur u -Achse parallelen Sehne AB gleich gross ist und wird vorausgesetzt, dass am Umfange des Stabes keine äusseren Kräfte in der Richtung der Stabachse auftreten, dass also die Schubspannungen für alle Punkte der Oberfläche (des Mantels) gleich Null sind, so folgen τ_u und τ_v den Gesetzen:

$$(1) \quad \tau_u = \frac{QS}{2zJ}; \quad \tau_v = \tau_u \operatorname{tg} \varphi \frac{u}{z},$$

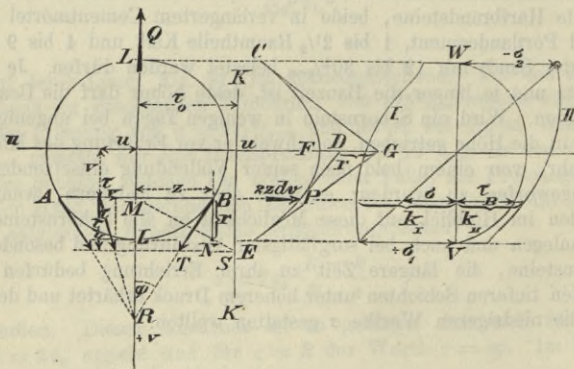


Fig. 92.

wobei $2z$ die Länge der Sehne AB ,

S das auf die u -Achse bezogene statische Moment des einen der beiden durch die Sehne AB begrenzten Querschnittsteile (z. B. des Theils ALB)

J das Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts in Bezug auf die u -Achse und

φ den Winkel bedeutet, welchen die in B an den Querschnitt gelegte Tangente mit der v -Achse bildet.

Die zweite der Gleichungen (1) sagt aus, dass die Spannungen τ für sämtliche Punkte der Sehne AB durch den auf der v -Achse gelegenen Schnittpunkt R der in A u. B an den Querschnitt gezogenen Tangenten gehen.

Denkt man den Querschnitt in unendlich schmale, zur v -Achse senkrechte Streifen zerlegt, betrachtet deren Inhalte $dF = 2zdv$ als Kräfte, welche in der Richtung der u -Achse wirken, und zeichnet mit der beliebigen Polweite H die Seillinie CFE jener Kräfte, so kann man das statische Moment S ermitteln, indem man an die Seillinie in ihrem Schnittpunkte P mit der Sehne AB eine Tangente PD legt und die Strecke $\overline{DG} = r$ bestimmt, die auf der u -Achse von der Geraden PD und den in der u -Achse sich treffenden äussersten Tangenten an die Seillinie abgeschnitten wird. Es ergibt sich dann $S = Hr$, ferner (nach No. 21) $J = 2H\mathfrak{F}$, wo \mathfrak{F} den Inhalt der von der Seillinie CFE und den äussersten Tangenten EG und CG begrenzten Fläche bedeutet. Mit der Bezeichnung:

$$\tau_0 = \frac{Q}{4\mathfrak{F}}$$

ergibt sich

$$\tau_u = \tau_0 \frac{r}{z},$$

ein Werth, welcher sich nach Berechnung von τ_0 leicht darstellen lässt. Kennt man τ_u , so kann man auch τ angeben, da die Richtung dieser Spannung gegeben ist. Es genügt, für jede Sehne AB den grössten Werth τ zu bestimmen, nämlich den in A oder B herrschenden. Zu diesem Zwecke ziehe man zur v -Achse in der Entfernung τ_0 eine Parallele KK , errichte in B auf der Sehne AB das Loth $\overline{BN} = r$, verbinde N mit dem Mittelpunkte M der AB und ziehe durch den Schnittpunkt S der beiden Geraden MN und KK eine Parallele zur u -Achse; dieselbe schneidet dann auf der Tangente BR die im Punkte B herrschende Schubspannung $\overline{BT} = \tau_B$ ab.

In dieser Weise wurden in der Fig. 92 die Schubspannungen τ_B für sämtliche Punkte des Querschnittsumfanges bestimmt und hierauf, von einer zur v -Achse parallelen Geraden WV aus, in den Verlängerungen der entsprechenden Sehnen AB als Ordinaten aufgetragen.

Die Annahme gleicher Spannungen τ_u für alle Punkte einer zur u -Achse parallelen Sehne ist um so zutreffender, je kürzer jene Sehne im Verhältniss zur Ausdehnung des Querschnitts in der Richtung von Q ist. Sie liefert also u. A. zuverlässige Ergebnisse, wenn es sich um die Schubspannungen τ im Stege des in der Fig. 93 dargestellten **I**-Querschnitts handelt, darf aber nicht auf die *Flanschen* dieses Querschnitts ausgedehnt werden. Da nämlich in allen Punkten des Umfanges

des Querschnitts die Schubspannungen tangential an den Umfang gerichtet sind, so ergibt sich für sämtliche Punkte der Geraden CD und EF in Fig. 93 die zur u -Achse senkrechte Spannung $\tau_u = 0$, und hieraus erkennt man ohne Weiteres die Unmöglichkeit, dass in allen Punkten einer zur u -Achse parallelen und der Geraden CF unendlich nahen Sehne eine der ersten der Gleich. (1) genügende Schubspannung τ_u auftreten kann.*) Das Gleiche gilt für alle Querschnitte mit seitlichen, in der Richtung der v -Achse schmalen Ansätzen.

Aus diesem Grunde hat Winkler vorgeschlagen, bei der Berechnung der Spannungen τ in den Flanschen der **I**-Querschnitte (und in ähnlichen Fällen) von der Annahme konstanter Spannungen τ_v für alle Punkte einer zur u -Achse senkrechten Sehne AB auszugehen, welche Voraussetzung zu der Formel

$$\tau_v = \frac{QS'}{z'J}$$

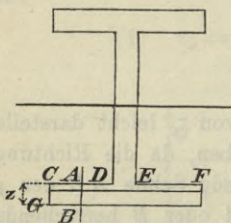


Fig. 93.

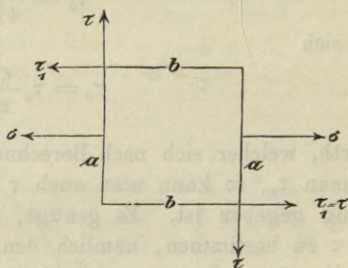


Fig. 94.

führt, unter S' das auf die u -Achse bezogene statische Moment des einen der beiden durch die Sehne AB begrenzten Querschnittsteile (z. B. des Theiles $ABGC$) verstanden und unter z' die Länge der Sehne AB . Es genügt aber, bei der Untersuchung der **I**-Querschnitte (und ähnlicher Querschnitte) die Spannungen τ im Stege zu ermitteln.

57. Hauptspannungen. Wir denken uns aus dem Stabe einen unendlich kleinen Würfel von den Kantenlängen a, b, c herausgetrennt. Fig. 94. Die eine Seitenfläche ac liege in der Ebene des zur Stabachse senkrechten Querschnitts und an der Stelle u, v . Die Kante a sei parallel zur Schubspannung τ , folglich Kante b parallel zur Normalspannung σ . Aendern sich die Spannungen stetig mit der Lage der

*) Die thörichte Annahme, es gelte Gleichung (1) auch für den Flansch, trifft man immer noch in einzelnen Büchern und Abhandlungen, wobei dann für die Sehne DE zwei Werthe τ_u herausgerechnet werden, weil sich dort die Breite $2z$ sprungweise ändert!

beanspruchten Fläche, so unterscheiden sie sich in 2 einander gegenüberliegenden Seitenflächen des Würfels nur um unendlich kleine Grössen, welche in der folgenden Untersuchung vernachlässigt werden dürfen. Bei unstetigen Spannungen aber muss der Stab vorerst in einzelne Theile zerlegt werden, innerhalb welcher sowohl σ als auch τ stetig sind, und es muss dann der betrachtete Würfel vollständig innerhalb eines dieser Theile liegen.

Die in den beiden Flächen ac wirksamen Schubkräfte τac bilden ein Kräftepaar mit dem Arme b und dem Momente τacb . Soll der Würfel im Gleichgewichte sein, so müssen in den Seitenflächen bc Schubkräfte $\tau_1 bc$ auftreten, welche (ein Paar mit dem Arme a bildend) das Moment τacb aufheben. Dazu ist nöthig, dass $\tau_1 bca = \tau acb$ also $\tau_1 = \tau$ ist, und dass die beiden Momente entgegengesetzten Drehungssinn haben.

Es soll nun untersucht werden, wie gross die Spannungen in den Seitenflächen eines Würfels (a', b', c') sind, der in den Würfel (a, b, c) so einbeschrieben ist, dass seine Kanten a' und b' mit a , bezieh. b den Winkel α bilden, während $c' \parallel c$ ist, und zwar möge diese Aufgabe in etwas allgemeinerer Form gelöst werden, insofern nämlich angenommen werden soll, dass auch in den Seitenflächen bc des Würfels (abc) Normalspannungen auftreten. Fig. 95.

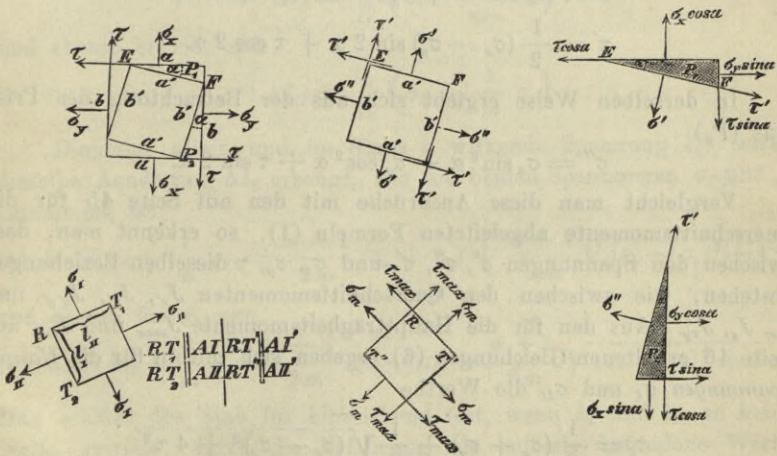


Fig. 95.

Wir bezeichnen die Spannungen für den Würfel (abc) mit σ_x, σ_y, τ und für den Würfel ($a'b'c'$) mit σ', σ'', τ' ; die letzteren ergeben sich aus den als bekannt angenommenen Spannungen σ_x, σ_y, τ durch Aufstellung

der Gleichgewichts-Bedingungen für die an den dreiseitigen Prismen (P_1) und (P_2) angreifenden Kräfte.

Wir betrachten zuerst das Prisma (P_1), setzen den Inhalt der in der Fig. 95 mit EF bezeichneten Seitenfläche desselben = 1 und erhalten dann, da die Inhalte der anderen Seitenflächen = $1 \sin \alpha$ und = $1 \cos \alpha$ sind, durch Multiplikation der Spannungen mit den Flächen die Belastungen σ' , τ' , $\sigma_x \cos \alpha$, $\tau \cos \alpha$, $\sigma_y \sin \alpha$, $\tau \sin \alpha$ dieser Flächen.

Es liessen sich nun σ' und τ' leicht in der Weise bestimmen, dass die bekannten Kräfte $\sigma_x \cos \alpha$, $\tau \cos \alpha$, $\sigma_y \sin \alpha$, $\tau \sin \alpha$ zu einem stetigen Zuge aneinander gesetzt werden, dessen Schlusslinie die das Gleichgewicht herstellende, auf die Fläche EF wirkende Mittelkraft ρ der Belastungen σ' und τ' angiebt. Durch Zerlegung von ρ würde man σ' und τ' finden. Wir ziehen es aber vor, um auf eine bemerkenswerthe Aehnlichkeit der vorliegenden Aufgabe mit einer früher gelösten schneller hinweisen zu können, die analytischen Ausdrücke für σ' und τ' anzugeben. Indem wir sämtliche Kräfte nach den Richtungen von σ' und τ' zerlegen und die Summen der nach den gleichen Richtungen wirkenden Seitenkräfte = 0 setzen, erhalten wir:

$$\sigma' - (\sigma_x \cos \alpha - \tau \sin \alpha) \cos \alpha - (\sigma_y \sin \alpha - \tau \cos \alpha) \sin \alpha = 0$$

$$\tau' - (\sigma_x \cos \alpha - \tau \sin \alpha) \sin \alpha + (\sigma_y \sin \alpha - \tau \cos \alpha) \cos \alpha = 0$$

und hieraus folgt dann

$$\sigma' = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau \sin 2 \alpha$$

$$\tau' = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2 \alpha + \tau \cos 2 \alpha.$$

In derselben Weise ergibt sich aus der Betrachtung des Prismas (P_2)

$$\sigma'' = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau \sin 2 \alpha.$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit den auf Seite 45 für die Querschnittsmomente abgeleiteten Formeln (1), so erkennt man, dass zwischen den Spannungen σ' , σ'' , τ' und σ_x , σ_y , τ dieselben Beziehungen bestehen, wie zwischen den Querschnittsmomenten $J_{x'}$, $J_{y'}$, $J_{x'y'}$ und J_{x_1} , J_{y_1} , $J_{x_1 y_1}$. Aus den für die Hauptträgheitsmomente J_{max} und J_{min} auf Seite 46 erhaltenen Gleichungen (6) ergeben sich mithin für die Hauptspannungen σ_I und σ_{II} die Werthe

$$\sigma_I = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau^2}$$

$$\sigma_{II} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau^2}$$

und die Lage der von diesen Spannungen beanspruchten Flächen I und II ist bestimmt durch

$$(3) \quad \operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{-2 \tau}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

In den Flächen I und II ist $\tau = 0$. Aus der Fig. 56, Seite 50, folgt

$$\max J_{xy} = TM = \frac{1}{2} (J_1 - J_2);$$

es ist also auch

$$(4) \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_I - \sigma_{II}),$$

und zwar entstehen die grössten Schubspannungen in Flächen, die mit den Flächen I und II Winkel von 45° bilden.

Wir betrachten jetzt einen unendlich kleinen Würfel, dessen Seitenflächen durch die Hauptspannungen σ_I und σ_{II} beansprucht werden, und bezeichnen die Längen der zu diesen Spannungen parallelen Kanten desselben mit l_I und l_{II} . Infolge von σ_I wird l_I um $\Delta' l_I = \frac{\sigma_I}{E} l_I$ verlängert ($E =$ Elasticitätsmodul) und infolge von σ_{II} um $\Delta'' l_I = \frac{\sigma_{II} l_I}{m E}$ verkürzt, wo m einen Erfahrungswerth bedeutet. Die gesammte Längenänderung ist

$$\Delta l_I = \frac{l_I}{E} \left(\sigma_I - \frac{1}{m} \sigma_{II} \right)$$

und ebenso ergibt sich

$$\Delta l_{II} = \frac{l_{II}}{E} \left(\sigma_{II} - \frac{1}{m} \sigma_I \right).$$

Diejenige allein und im Sinne l_I wirkende Spannung k_I , welche dieselbe Aenderung Δl_I erzeugt, wie die beiden Spannungen σ_I und σ_{II} zusammen, ist

$$(5) \quad k_I = \sigma_I - \frac{1}{m} \sigma_{II} = \frac{m-1}{2m} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{m+1}{2m} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau^2},$$

und ebenso findet man

$$(6) \quad k_{II} = \sigma_{II} - \frac{1}{m} \sigma_I = \frac{m-1}{2m} (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{m+1}{2m} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau^2}.$$

Man erklärt den Stab für hinreichend fest, wenn k_I und k_{II} an keiner Stelle gewisse, durch die Erfahrung als zulässig befundene Werthe überschreiten, muss dann aber bei der Beurtheilung dieser Grenzwerte

$\left(k_I = E \frac{\Delta l_I}{l_I} \text{ und } k_{II} = E \frac{\Delta l_{II}}{l_{II}} \right)$ darauf achten, dass es nicht gleichgiltig

ist, durch welche Ursachen die Verlängerungsverhältnisse $\frac{\Delta l_I}{l_I}$ und $\frac{\Delta l_{II}}{l_{II}}$

hervorgerufen werden. Die allgemeine Anwendung solcher Zahlenwerthe k , die nur aus der Beobachtung von auf reine Zug- oder Druckfestigkeit beanspruchten Stäben abgeleitet werden, kann beim Auftreten von Schubspannungen zu Ergebnissen führen, die mit der Erfahrung nicht im Einklange sind; sie sind höchstens zulässig, wenn die Spannungen τ eine so untergeordnete Bedeutung haben, wie bei den auf Biegungsfestigkeit beanspruchten, verhältnissmässig dünnen und langen Stäben.

Die Ziffer m ergibt sich nach der Molekulartheorie $= 4$, ist aber in Wirklichkeit für die verschiedenen Stoffe verschieden. Beispielsweise ist für Metalle nahezu $m = 3$. Für den in Fig. 94 dargestellten Fall ($\sigma^x = 0$) erhält man dann

$$(6) \quad \begin{cases} k_I = \frac{1}{3} \sigma + \frac{2}{3} \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} \\ k_{II} = \frac{1}{3} \sigma - \frac{2}{3} \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} \end{cases}$$

Hiernach lassen sich die Inanspruchnahmen k_I und k_{II} leicht durch Zeichnung finden, nachdem die Spannungen σ nach den in den §§ 9—10 entwickelten Verfahren mittels einer Geraden dargestellt worden sind. Der Werth $\sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2}$ ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten σ und 2τ .

In der Figur 92, welche eine durch den Schwerpunkt gehende Nulllinie der Spannungen σ voraussetzt, geben die der u -Achse parallelen, von der Geraden VW aus gemessenen Ordinaten der Linien I und II , die den Punkten des Querschnitts-Umfangs entsprechenden Werthe k_I und k_{II} an. Die Schubspannung τ_0 wurde verhältnissmässig gross angenommen, und es entspricht deshalb die grösste Inanspruchnahme nicht denjenigen Querschnittspunkten L , für welche σ am grössten ist. Meistens jedoch ist $k_{max} = \sigma_{max}$ oder doch nur so wenig grösser als σ_{max} , dass bei der Beurtheilung der Festigkeit des Stabes von dem Einflusse der Schubspannungen τ abgesehen werden darf.

IV. Abschnitt.

Einleitung in die Theorie der ebenen Träger.

§ 13.

Allgemeines über die äusseren Kräfte.

Die auf einen Träger wirkenden äusseren Kräfte sind theils gegeben und sollen dann *Lasten* heissen, theils bestehen sie aus den zu suchenden, an den Auflagerstellen angreifenden *Stützenwiderständen*.

58. Die Lasten. Eine Last heisst eine *ständige* (*bleibende, ruhende*) oder eine *veränderliche* (*bewegliche*), je nachdem sie stets oder nur zeitweise am Träger angreift. So bildet für einen Brückenträger sein Eigengewicht und das Gewicht von Fahrbahn und Querversteifung die ständige Belastung, während ein Eisenbahnzug, eine Schaar von Lastwagen oder Menschengedränge als eine veränderliche Belastung zu betrachten ist. *)

Eine endliche, in einem Punkte angreifende Last wird *Einzellast* (auch *koncentrirte Last*) genannt, im Gegensatze zu der *auf eine Linie oder eine Fläche vertheilten stetigen Last*.

In dem besonders häufigen Falle einer *gleichmässig* auf eine Linie vertheilten Belastung bezeichnen wir

die ständige Belastung der Längeneinheit der Linie mit g ,

„ veränderliche „ „ „ „ „ „ p

und deuten bei der Bestimmung einer von der Belastung abhängigen Grösse (z. B. eines Stützenwiderstandes, eines Momentes) durch einen Zeiger g oder p an, dass es sich nur um den Einfluss der ständigen oder der veränderlichen Belastung handelt.

Kann die Belastung in jedem beliebigen Punkte des Trägers angreifen, so nennen wir sie eine *unmittelbare Belastung*; wirkt sie hingegen in Folge

der Anordnung von Zwischenträgern (Fig. 96) auf bestimmte Punkte (*Knotenpunkte*) des fraglichen Trägers, so ist sie eine *mittelbar* wirkende. Die in den Knotenpunkten angreifenden Lasten heissen *Knotenlasten*

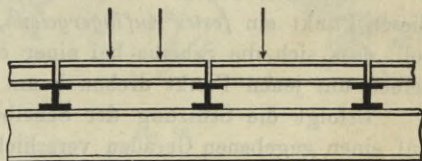


Fig. 96.

*) Angaben über die Belastungen von Brücken und Hochbauten finden sich im Anhang am Schluss des II. Bandes.

und ein zwischen zwei benachbarten Knotenpunkten gelegenes Trägerstück nennt man ein *Feld des Trägers*.

59. Auflager. Stützenwiderstände. Mittelgelenk. Ist es möglich, die durch die Lasten hervorgerufenen Stützenwiderstände ausschliesslich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen zu finden, so wird der Träger ein *äusserlich statisch bestimmter Träger* genannt; im Gegenfalle ist er *äusserlich statisch unbestimmt*. Um diese Frage für einige der wichtigsten Trägerarten, vorbehaltlich einer späteren allgemeineren Untersuchung, zu entscheiden, betrachten wir zunächst die verschiedenen Arten der Auflagerung. Hierbei setzen wir voraus, dass alle äusseren Kräfte in ein und derselben Ebene, der *Kraftebene*, liegen und dass es bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen zulässig ist, die durch jene Kräfte und durch Temperaturänderungen erzeugten Formänderungen der Träger und der dieselben stützenden Körper zu vernachlässigen. Es dürfen dann alle Kräfte in denjenigen Lagen gedacht werden, welche sie im Falle vollkommen starrer Träger und Stützen einnehmen würden.

In den folgenden Untersuchungen wollen wir den Träger als aus einer oder mehreren *starrten Scheiben* bestehend denken (vergl. die Figuren 97—104) und es dahingestellt sein lassen, ob er *vollwandig* oder *gegliedert* (d. h. aus Stäben zusammengesetzt) ist, oder ob er sowohl vollwandige als auch gegliederte Theile enthält. Bedingung ist nur, dass die gegliederten Scheiben ebenfalls starr sind, welcher Forderung beispielsweise durch die in den folgenden Figuren angenommenen Dreieckssysteme auch dann genügt wird, wenn die Stäbe an ihren Enden durch reibungslose Gelenke mit einander verbunden sind. In mehreren dieser Figuren sind gleichartig gestützte Träger aus vollen und gegliederten Scheiben einander gegenübergestellt worden.

Wird eine Scheibe in einem Punkte festgehalten, so nennen wir diesen Punkt ein *festes Auflagergelenk*, wobei das Wort *Gelenk* andeuten soll, dass sich die Scheibe bei einer etwa eintretenden Bewegung derselben um jenen Punkt drehen kann.

Erfolgt die Stützung der Scheibe in einem Punkte, welcher sich auf einer gegebenen Geraden verschieben kann, diese Gerade aber nicht verlässt, so entsteht ein *bewegliches Auflagergelenk*. Der an dem letzteren angreifende Stützenwiderstand wirkt, wenn keine Reibung stattfindet, senkrecht zur Bahn des Gelenkes (vergl. Auflager *A* in Fig. 98); man braucht nur die *Grösse* jenes Widerstandes anzugeben, während an einem festen Auflagergelenke *zwei* Unbekannte auftreten, nämlich *Grösse und Richtung* des Stützenwiderstandes.

Wenn die Scheibe in einer Linie festgehalten wird, so ist ausser der *Grösse* und der *Richtung* des Stützenwiderstandes auch der *An-*

griffspunkt desselben unbekannt. Wir bezeichnen eine derartige Auflagerung kurz als *feste Einspannung*.

Erfolgt hingegen die Stützung längs einer Linie, welche auf einer anderen widerstandslos gleiten kann, (z. B. *B* in Fig. 98) so liegt eine *bewegliche Einspannung* vor; der Stützenwiderstand wirkt rechtwinklig zur Auflagerbahn; er ist bestimmt, sobald seine Grösse und sein Angriffspunkt gefunden sind.

Hängen zwei Scheiben in einem Punkte *G* zusammen, um welchen sie sich beim Eintreten einer Bewegung widerstandslos drehen können (Fig. 104), so nennen wir sie gelenkartig mit einander befestigt. *G* heisst ein *Mittelgelenk*, es wird in Wirklichkeit, ebenso wie die Auflagergelenke, mittels cylindrischer oder kugelförmiger Zapfen oder mit Hilfe von zwei auf einander sich abwälzenden runden Theilen hergestellt, deren Reibungswiderstände in der Folge vernachlässigt werden sollen.

60. Stützung eines aus einer Scheibe gebildeten Trägers. Besteht der Träger aus *einer* Scheibe, und soll er äusserlich statisch bestimmt sein, so muss er in einer der folgenden Arten gestützt werden.

1. Der Träger wird an einer Stelle *fest eingespannt*. Fig. 97. Der Stützenwiderstand hat dann gleiche Grösse aber entgegengesetzten Sinn wie die Mittelkraft *R* der Lasten und fällt mit *R* in dieselbe Gerade.

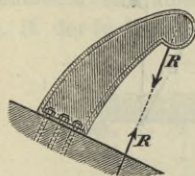


Fig. 97.

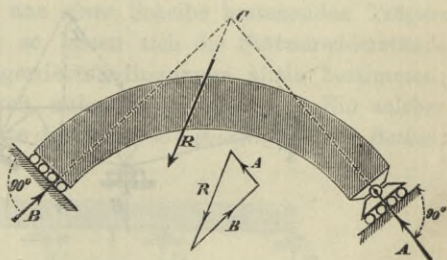


Fig. 98.

2. Der Träger besitzt ein *bewegliches Auflagergelenk (A)* und ist an einer Stelle *beweglich eingespannt*. Fig. 98. Die Stützenwiderstände sind senkrecht zu den Auflagerbahnen; ihre Richtungen sind somit bekannt. Von dem Widerstande *A* kennt man auch den Angriffspunkt, und es ist deshalb der Schnittpunkt *C* der Kräfte *A* und *R* gegeben. Sollen nun die drei Kräfte *A*, *B*, *R* miteinander im Gleichgewichte sein, so müssen sie sich in einem Punkte treffen, und hieraus

folgt, dass das Loth von C auf die Bahn des Lagers B die Richtung des Widerstandes B angiebt. Die Unbekannten A und B können jetzt mittels eines Kräfte dreiecks bestimmt werden.

3. Der Träger erhält ein festes und ein bewegliches Auflagergelenk, an denen beziehungsweise die Widerstände B und A angreifen. Fig. 99.

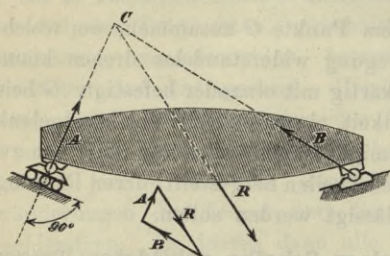


Fig. 99.

Von B kennt man den Angriffspunkt, von A Angriffspunkt und Richtung; letztere ist senkrecht zur Auflagerbahn und schneidet die Last R im Punkte C . Die Gerade BC giebt die Richtung des Widerstandes B an, und es können nun A und B mittels eines Kräfte dreiecks gefunden werden.

4. Der Träger erhält drei bewegliche Auflagergelenke, deren zu den Auflagerbahnen senkrechte Widerstände A, B, C sich nicht in einem Punkte treffen. Fig. 100. Ihre Ermittlung erfordert die (in der Fig. 100 ausgeführte) Lösung der in No. 12 auf Seite 15 behandelten Aufgabe: drei der

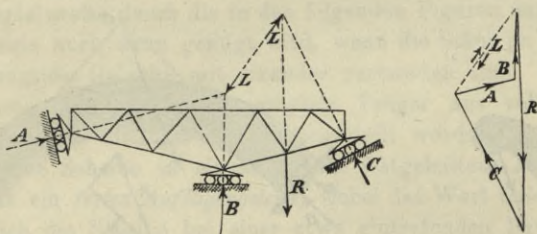


Fig. 100.

Lage nach bekannte Kräfte A, B, C zu bestimmen, welche einer gegebenen Kraft R das Gleichgewicht halten.

Am wichtigsten ist die dritte der angegebenen Stützungsarten. Ist bei dieser die Bahn des beweglichen Auflagergelenkes eine wagerechte Gerade, so rufen senkrechte Lasten nur senkrechte Stützenwiderstände hervor. Man nennt diesen Träger einen *Balken*. Fig. 101.

Die Anzahl der an den Auflagern auftretenden Unbekannten (nämlich Angriffspunkt, Richtung und Grösse eines jeden Stützenwiderstandes)

ist für sämtliche oben angegebenen Stützungsarten einer Scheibe = 3; sie ist ebenso gross wie die Anzahl der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen, welche für ein an einem starren Körper wirkendes ebenes Kräftesystem in der Weise aufgestellt werden können, dass die Kräfteebene

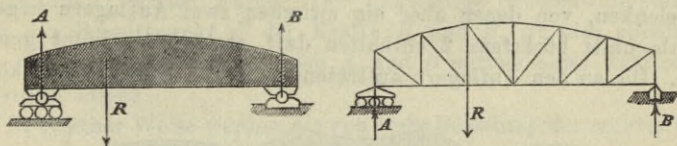


Fig. 101.

auf ein beliebiges Achsenkreuz (x, y) bezogen und jede Kraft nach den Richtungen der beiden Achsen zerlegt wird, worauf dann jede der folgenden drei Summen gleich Null gesetzt wird:

- die Summe aller nach der Richtung der x -Achse wirkenden Seitenkräfte,
- die Summe aller nach der Richtung der y -Achse wirkenden Seitenkräfte,
- die Summe der auf irgend einen Drehpunkt bezogenen Momente sämtlicher Kräfte.

Treten an den Auflagern eines aus *einer* Scheibe bestehenden Trägers mehr als drei Unbekannte auf, so lassen sich die Stützenwiderstände nicht mehr mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen allein bestimmen; es entsteht ein äusserlich statisch unbestimmter Träger. Ein solcher ist z. B. der in Fig. 102 dargestellte *durchlaufende (kontinuierliche) Balken*,

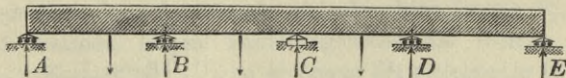


Fig. 102.

welcher *ein* festes und mehrere (mindestens 2) bewegliche Auflagergelenke besitzt; am ersteren treten zwei Unbekannte auf (nämlich Richtung und Grösse des Stützenwiderstandes) und an jedem der letzteren eine Unbekannte (die Grösse des Stützenwiderstandes). Im Ganzen sind bei n Auflagern $(n + 1)$ Unbekannte zu bestimmen, und es fehlen, da diesen nur 3 Gleichgewichtsbedingungen gegenüberstehen, $n - 2$ Bedingungen, welche sich, wie wir später zeigen werden, aus der Be-

trachtung der Formänderung des Balkens ergeben. Der Träger ist also hinsichtlich der äusseren Kräfte $(n - 2)$ -fach statisch unbestimmt.

61. Gelenkträger. Ein aus mehreren gelenkartig mit einander verbundenen Scheiben bestehender Träger kann auch bei beliebig vielen Stützen äusserlich statisch bestimmt sein. So kann z. B. der vorhin behandelte durchgehende Balken durch die Anbringung von $(n - 2)$ Mittelgelenken, von denen aber ein zwischen zwei Auflagern liegender Trägerabschnitt höchstens 2 enthalten darf, statisch bestimmt gemacht werden. Die an den Auflagern auftretenden $n + 1$ Unbekannten können

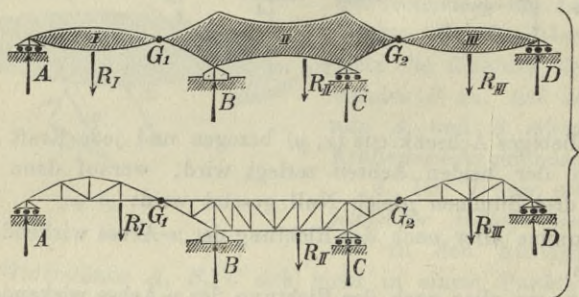


Fig. 103.

jetzt mittels der 3 allgemeinen und der $n - 2$ in Folge der Gelenke hinzutretenden besonderen Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden.

So ist z. B. der in Fig. 103 dargestellte Träger nur dann im Gleichgewicht, wenn die Mittelkraft aus dem Stützenwiderstande A und der Belastung R_I der Scheibe I durch das Gelenk G_1 geht, weil sich sonst diese Scheibe um G_1 drehen würde. Ebenso muss auch die Mittelkraft aus R_{III} und D durch das Gelenk G_2 gehen. Der Träger ist also äusserlich statisch bestimmt.

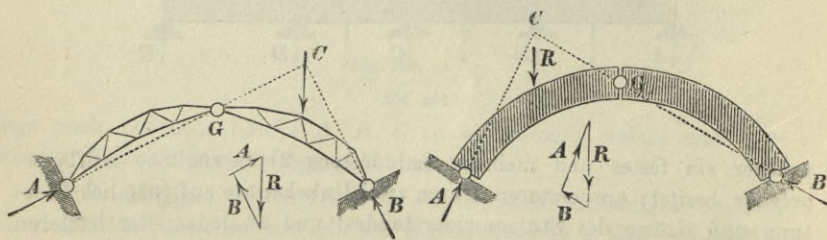


Fig. 104.

Ein zweites Beispiel für einen statisch bestimmten Gelenkträger ist der in Fig. 104 dargestellte. Derselbe besteht aus zwei Scheiben,

welche bei A und B feste Auflagergelenke haben und durch ein Mittelgelenk G mit einander verbunden sind; man nennt ihn den *Bogen mit drei Gelenken*. Eine auf die linke Scheibe wirkende Last R ruft bei unbelasteter rechter Scheibe (welche jetzt gewichtslos zu denken ist) am rechten Auflager einen Stützenwiderstand B hervor, der durch das Scheitelgelenk gehen muss, weil sich im Gegenfalle die unbelastete rechte Scheibe um G drehen würde. Der linksseitige Stützenwiderstand geht durch den Schnittpunkt C der Kräfte R und B , ist also ebenfalls der Lage nach bekannt, weshalb sich A und B mittels eines Kräftedreiecks bestimmen lassen.

In gleicher Weise werden die von einer Belastung der rechten Scheibe herrührenden Kräfte A und B ermittelt.

§ 14.

Allgemeines über Einflusslinien.

62. Voraussetzungen und Erklärungen. Zu den wichtigsten der in den folgenden Abschnitten zu lösenden Aufgaben gehört die Untersuchung des Einflusses beweglicher, paralleler Lasten auf irgend eine derjenigen Unbekannten Z , um deren Ermittlung es sich bei der Berechnung eines Trägers handelt, und deren Art wir vorläufig unbestimmt lassen. Es sei also zunächst dahingestellt, ob Z einen Stützenwiderstand (wie beispielsweise in Fig. 105), oder ein Biegemoment, oder eine Querkraft u. s. w. bedeutet, hingegen werde vorausgesetzt:

- 1) dass der durch irgend eine Last P hervorgerufene Werth Z dieser Last proportional ist, mithin die Form $Z = P\eta$ annimmt, wo η einen von P unabhängigen Koeffizienten bedeutet,
- 2) dass der durch irgend ein Lastensystem erzeugte Werth Z gleich der Summe der von den einzelnen Lasten herrührenden Werthe Z ist.

Entsprechen dann den einzeln aufgebrachten Lasten $P_1, P_2, P_3 \dots$ in irgend welchen Lagen beziehungsweise die Werthe $Z = P_1 \eta_1$; $Z = P_2 \eta_2$; $Z = P_3 \eta_3 \dots$, so erzeugen die gleichzeitig in jenen Lagen wirkenden Lasten zusammen:

$$(1) \quad Z = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + P_3 \eta_3 + \dots$$

Um Z zu bestimmen, empfiehlt es sich, den Einfluss η einer über den Träger wandernden Last $P = 1$ für alle möglichen Lagen dieser Last zu ermitteln und in der Richtungslinie der Last, von einer Geraden AB aus, als Ordinate aufzutragen (Fig. 105).

Die Endpunkte dieser Ordinaten bilden dann die *Einflusslinie für Z* ; die von dieser Linie und jener Geraden begrenzte Fläche heisst die *Einflussfläche für Z* .

Ist die Einflusslinie gegeben, so ist man im Stande, den durch irgend ein Lastensystem hervorgerufenen Werth Z zu finden. Man hat nur nöthig, die den einzelnen Lasten $P_1, P_2, P_3 \dots$ entsprechenden Ordinaten $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \dots$ der Einflusslinie zu messen, und hierauf die Gleichung (1) anzuwenden.

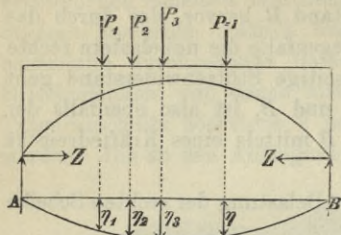


Fig. 105.

In der Folge wollen wir uns, der kürzeren Ausdrucksweise wegen, die Gerade AB wagerecht und die Lasten senkrecht denken.

63. Mittelbare Belastung.

Meistens handelt es sich um Lasten, welche durch einfache Zwischenträger auf die Knotenpunkte des in Frage stehenden Trägers vertheilt werden. Liegt dann zwischen zwei Knotenpunkten $(m-1)$ und m eine Last P im Abstände x von m (Fig. 106), so erhält man für die Knotenlasten P_{m-1} und P_m die Ausdrücke:

$$(2) \quad P_{m-1} = P \frac{x}{\lambda} \quad \text{und} \quad P_m = P \frac{\lambda - x}{\lambda},$$

wobei λ die Feldweite bedeutet. Besitzt nun die für irgend einen Werth Z gezeichnete Einflusslinie unter $(m-1)$ und m beziehungsweise die Ordinaten η_{m-1} und η_m und unter der Last P die Ordinate η , so muss offenbar sein:

$$P\eta = P_{m-1}\eta_{m-1} + P_m\eta_m$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf Gleich. (2):

$$(3) \quad \eta = \eta_{m-1} \frac{x}{\lambda} + \eta_m \frac{\lambda - x}{\lambda}.$$

Da dieser Ausdruck in Bezug auf die Veränderliche x vom ersten Grade ist, so ist die Einflusslinie zwischen je zwei Knotenpunkten eine gerade Linie.

64. Einfluss einer gleichmässigen Belastung. Wird das Trägerstück $(x_2 - x_1)$ gleichmässig mit p für die Längeneinheit belastet (Fig. 107) und bezeichnet η_x die an der Stelle x gemessene Ordinate der für irgend einen Werth Z gezeichneten Einflusslinie, so ist der Einfluss des Lasttheilchens $p dx$ gleich $p dx \cdot \eta_x$ und derjenige der gesammten gleichmässigen Belastung:

$$(4) \quad Z = p \int_{x_1}^{x_2} \eta_x dx = p \vartheta,$$

unter \mathfrak{F} den Inhalt des zur Strecke $(x_2 - x_1)$ gehörigen, in der Fig. 107 schraffirten Theiles der Einflussfläche verstanden.

Im Allgemeinen werden die Ordinaten η verschiedene Vorzeichen haben; man nennt dann die Punkte, in denen die Einflusslinie die Achse AB schneidet, *Belastungsscheiden* oder *Nullpunkte*; sie zerlegen

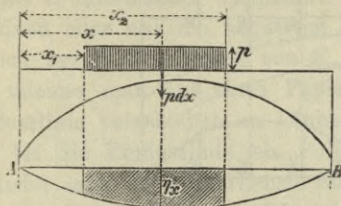


Fig. 107.

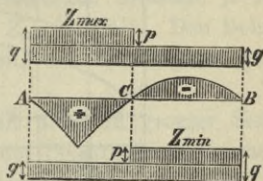


Fig. 108.

die AB in *positive* und *negative Beitragsstrecken*; den Punkten der ersteren entsprechen positive Ordinaten η , denjenigen der letzteren negative η . Vergl. Fig. 108, in welcher AC eine positive und CB eine negative Beitragsstrecke ist.

Besteht nun die gleichmässige Belastung aus einer *ständigen* Last (g für die Längeneinheit) und einer *veränderlichen* Last (p für die Längeneinheit), so erhält man den grössten positiven Werth Z (d. i. Z_{max}) oder den grössten negativen Werth Z (d. i. Z_{min}), je nachdem man die veränderliche Belastung nur innerhalb der positiven Beitragsstrecken oder nur innerhalb der negativen Beitragsstrecken aufbringt, Fig. 108. Im ersten Falle ergibt sich, wenn

\mathfrak{F}_+ den Inhalt des positiven Theils der Einflussfläche,*)

\mathfrak{F}_- „ „ „ negativen „ „ „

bedeutet, und wenn $p + g = q$ gesetzt wird,

$$(5) \dots Z_{max} = q\mathfrak{F}_+ - g\mathfrak{F}_-$$

und im zweiten Falle folgt:

$$(6) \dots Z_{min} = g\mathfrak{F}_+ - q\mathfrak{F}_-$$

Man nennt Z_{max} und Z_{min} die *Grenzwerte* von Z .**)

Bei mittelbarer Belastung und im Falle einer konstanten Feldweite λ , Fig. 109, ist häufig ein Näherungsverfahren zu empfehlen, welches darin besteht, dass bei der Berechnung von Z_{max} jeder Knotenpunkt, welchem ein positives η entspricht, mit $q\lambda$ belastet wird und jeder Knotenpunkt einer negativen Beitragsstrecke mit $g\lambda$, während bei der Ermittlung von Z_{min} die Lasten $q\lambda$ ersetzt werden durch Lasten $g\lambda$

*) Die an \mathfrak{F} gesetzten Zeichen $+$ und $-$ sind keine *Vorzeichen* sondern nur *Zeiger*, die \mathfrak{F} sind absolute Werthe.

***) Wird Z_{max} negativ, so stellt es den kleinsten negativen Werth von Z vor; ein positives Z_{min} bedeutet den kleinsten positiven Werth von Z .

und umgekehrt. Für den in Fig. 109 dargestellten Fall ergibt sich z. B.:

$$\begin{aligned} Z_{max} &= q\lambda (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) - g\lambda (\eta_4 + \eta_5 + \eta_6 + \eta_7) \\ Z_{min} &= g\lambda (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) - q\lambda (\eta_4 + \eta_5 + \eta_6 + \eta_7), \end{aligned}$$

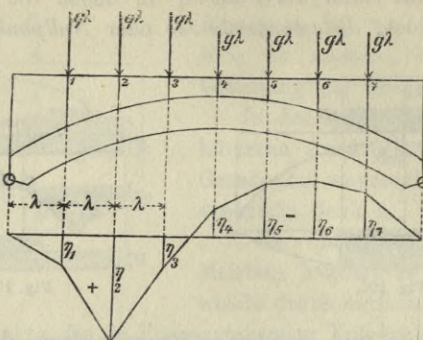


Fig. 109.

wobei $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \dots$ die den Knotenpunkten 1, 2, 3 \dots entsprechenden Ordinaten der Einflusslinie bedeuten. In der Folge bezeichnen wir mit

Σ_+ die Summe aller positiven, unter den Knotenpunkten gemessenen η , mit

Σ_- desgl. die Summe aller negativen η ,

und erhalten die Formeln:

$$(7) \quad \begin{cases} Z_{max} = q\lambda \Sigma_+ - g\lambda \Sigma_- \\ Z_{min} = g\lambda \Sigma_+ - q\lambda \Sigma_- \end{cases}$$

welche für Z_{max} und Z_{min} grössere Werthe liefern als die in Wirklichkeit entstehenden. Denn belastet man z. B. in Fig. 109 die positive Beitragsstrecke mit q für die Längeneinheit und die negative mit g , so ergibt sich die Belastung (P_3) des Knotenpunktes 3 kleiner als $q\lambda$ und diejenige (P_4) vom Knotenpunkt 4 grösser als $g\lambda$. Eine Verkleinerung von P_3 und eine Vergrösserung von P_4 haben aber eine Verkleinerung von Z zur Folge, so dass der aus Gleich. (7) gefundene Werth Z_{max} sich grösser ergeben muss als der genaue Werth aus Gleich. (5), und auf dieselbe Weise überzeugt man sich, dass der in Gleich. (7) für ($-Z_{min}$) angegebene Klammerausdruck grösser ist als der entsprechende Werth in Gleich. (6).

Der nur von der ständigen Last abhängige Theil von Z ist:

$$(8) \quad Z_g = g(\mathfrak{F}_+ - \mathfrak{F}_-)$$

und, bei gleich langen Feldern:

$$(9) \quad Z_g = g\lambda(\Sigma_+ - \Sigma_-).$$

Die aus (8) und (9) berechneten Werthe stimmen genau miteinander überein.

65. Einfluss verschiebbarer Einzellasten. Werden die Werthe Z_{max} und Z_{min} für den Fall gesucht, dass sich über den Träger eine Schaar von Einzellasten bewegt, beispielsweise ein Eisenbahnzug, so gelangt man im Allgemeinen am schnellsten durch Probiren zum Ziele, indem man die für verschiedene Stellungen des Belastungszuges bestimmten Werthe Z miteinander vergleicht. Dabei wird man thunlichst nur die positiven oder nur die negativen Beitragsstrecken belasten, je nachdem es sich um die Ermittlung von Z_{max} oder Z_{min} handelt. Den Belastungszug zeichne man auf einen Papierstreifen, um ihn bequem gegen die Einflusslinie verschieben zu können.

Ist die Einflusslinie ein Polygon mit nicht zu grosser Seitenzahl, so findet man die gefährlichste Stellung des Belastungszuges auch ziemlich schnell mit Hilfe der folgenden Untersuchung.

Es seien, Fig. 110, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ die Neigungswinkel der den Strecken $AC, CD, DE \dots$ entsprechenden Seiten des Einflusspolygons und $R_1, R_2, R_3 \dots$ die Mittelkräfte der auf jenen Strecken liegenden Lasten. Wird der Lastenzug um ξ nach rechts verschoben, so zwar, dass die Lasten, welche vor der Verschiebung einer bestimmten Strecke

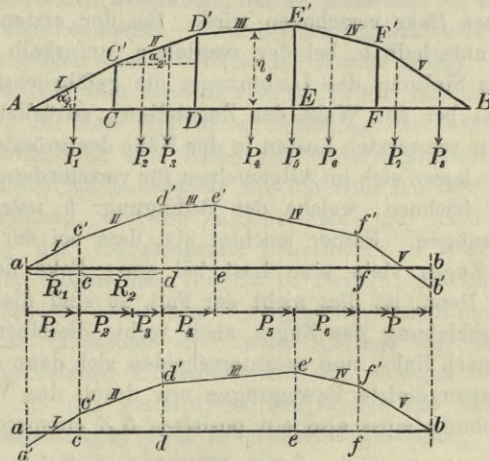


Fig. 110.

angehören, auch nach der Verschiebung innerhalb dieser Strecke an- greifen, so wächst die Ordinate η

für jede Last der Strecke AC um $\xi \operatorname{tg} \alpha_1$

„ „ „ „ „ CD „ $\xi \operatorname{tg} \alpha_2$, u. s. w.

und es nimmt mithin der Werth Z zu um

$$(10) \quad \Delta Z = (R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + R_3 \operatorname{tg} \alpha_3 + \dots) \xi.$$

Will man den vorstehenden Klammerausdruck durch Zeichnung finden, so reihe man die Kräfte R_1, R_2, R_3, \dots auf einer Wage-

rechten ab aneinander, mache also $\overline{ac} = R_1$, $\overline{cd} = R_2$, $\overline{de} = R_3, \dots$ und trage vom Punkte a aus ein Polygon auf, dessen Seiten I, II, III, \dots den gleichbezeichneten Seiten des Einflusspolygons parallel sind, und dessen Ecken auf den in den Punkten c, d, e, \dots errichteten Lothen cc', dd', ee', \dots liegen. Es schneidet dann dieses Polygon, welches wir einen *Parallelenzug* nennen wollen, auf dem Lothe in b die Strecke

$$\overline{bb'} = R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + R_3 \operatorname{tg} \alpha_3 + \dots$$

ab. Ist $\overline{bb'}$ positiv, d. h. liegt b' oberhalb b , so wird in Folge der vorgenommenen Verschiebung des Lastenzuges der Werth Z vergrößert, und es beweist dies dann, dass die zuerst angenommene Stellung dieses Zuges nicht die gefährlichste war.

Auf gleiche Weise findet man, dass der Werth Z in Folge einer Verschiebung des Zuges nach *links* vergrößert oder verkleinert wird, je nachdem der Endpunkt a' eines durch b gelegten Parallelenzuges oberhalb oder unterhalb a liegt.

In der Fig. 110 wurde eine Last, nämlich P_5 , unter einer Ecke des Einflusspolygons angenommen; dieselbe muss dann der Strecke EF oder der Strecke DE zugewiesen werden, jenachdem der Lastenzug nach rechts oder nach links verschoben wird. Bei der ersten Verschiebung ergab sich b' unterhalb b , bei der zweiten a' unterhalb a ; mithin ist die gezeichnete Stellung des Lastenzuges die gefährlichste.

Man muss bei der Wahl der Zugstellung natürlich auch darauf achten, dass die schwersten Lasten in der Nähe der grössten Ordinaten η liegen; denn es lassen sich im Allgemeinen für verschiedene Zugstellungen Parallelenzüge zeichnen, welche der Bedingung: b' unterhalb b und a' unterhalb a genügen. Ferner leuchtet ein, dass bei der gefährlichsten Stellung des Zuges stets eine Last bei einer Ecke der Einflusslinie liegen muss. Denn, ist dies nicht der Fall, so sind die Mittelkräfte R bei einer Verschiebung des Zuges nach rechts dieselben, wie bei der Verschiebung nach links, und es unterscheiden sich dann die Werthe ΔZ für zwei entgegengesetzte Bewegungen nur durch das Vorzeichen; der einen Verschiebung muss also ein positives ΔZ entsprechen.

66. Verkehrsbelastung der Eisenbahnbrücken. Die Einflusslinien sind besonders wichtig für die Berechnung der Eisenbahnbrücken. Als regelmässige Betriebsbelastung ist ein Zug aus zwei Lokomotiven in ungünstigster Stellung, bald vorwärts- bald rückwärtsfahrend (Fig. 111 bis 114) mit einer unbeschränkten Anzahl einseitig angehängter Güterwagen anzusehen, wobei man nicht nöthig hat, sich streng an die genauen Radstände und Achsbelastungen der schwersten auf der Bahnlinie verkehrenden Fahrzeuge zu halten, weil die in Rechnung gestellten Belastungen sich stets auf die still stehende Lokomotive beziehen,

während sie bei der fahrenden Maschine veränderlich sind und einem ziemlich verwickelten Gesetze folgen, dessen Berücksichtigung bei statischen Untersuchungen ausgeschlossen ist. Für die Annahme gut abgerundeter Werthe spricht aber auch die Vielheit der vorkommenden Abmessungen und Gewichtsvertheilungen von Lokomotiven schwerster Bauart und der Umstand, dass Radstand und Achslast Werthe sind, die sich bei Neubeschaffungen ändern.

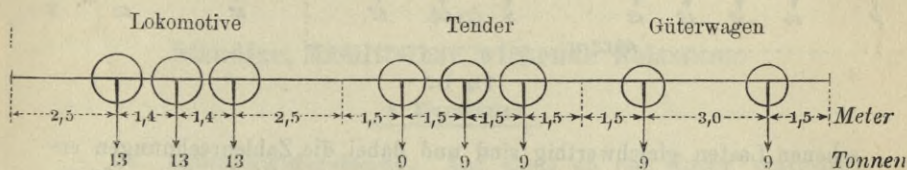


Fig. 111.

Die in Fig. 111 angegebenen Radstände und Achselbelastungen entsprachen bei der Drucklegung der vorigen Auflage dieses Buches (1887) den damals an eiserne Brücken zu stellenden Anforderungen; sie ergaben sich durch Abrundung der zu jener Zeit für die preussischen Staatsbahnen angenommenen Normal-Güterzuglokomotive und wurden allen Zahlenbeispielen dieses Buches zu Grunde gelegt. Dabei wurde, abweichend von dem jetzt herrschenden Gebrauch, mit drei Lokomotiven gerechnet und, für den Fall voller Belastung der Brücke, zu beiden Seiten der Lokomotiven eine Reihe von Güterwagen aufgestellt. Eine Umrechnung dieser Zahlenbeispiele für die neue Auflage hielt der Verfasser für überflüssig, weil die Zahlenbeispiele nur dazu dienen sollen, die Anwendung des vorgetragenen Lehrstoffes zu erläutern und das Verständniss der allgemeinen Gesetze zu fördern; die Zeichnung neuer Tafeln und Figuren hätte dem Verleger nur unnötige Kosten verursacht und das Erscheinen der neuen Auflage nur verzögert. Für alle neu hinzugetretenen Zahlenbeispiele sind dagegen Belastungen gewählt worden, die den gesteigerten Ansprüchen der Neuzeit genügen.

Die Achselbelastungen sind so erheblich gestiegen, die Radstände dabei kleiner geworden, dass selbst Brücken, die nur wenige Jahrzehnte im Betrieb sind, heute bereits umgerechnet und verstärkt werden müssen.

Die vom preussischen Minister der öffentlichen Arbeiten durch Erlass vom 15. September 1895 für die Berechnung der Brücken erlassenen Vorschriften nehmen die in Fig. 112 angegebenen Achselbelastungen und Radstände an.

Rundet man diese Werthe ab und führt man für die einzelnen Fahrzeuge eine möglichst gleichförmige Gewichtsvertheilung ein, so

gelangt man zu den in Fig. 113 dargestellten Lasten, welche in ihrer Wirkung auf die Brücke den in der preussischen Verordnung vorge-

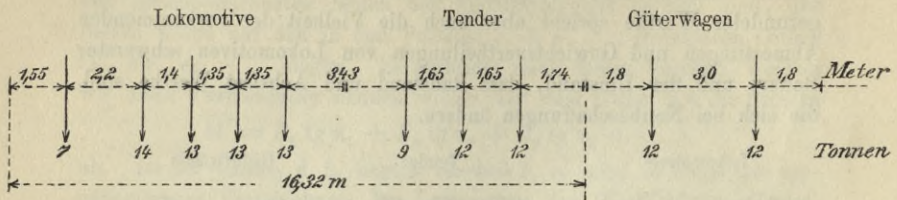


Fig. 112.

sehen Lasten gleichwertig sind und dabei die Zahlenrechnungen erheblich vereinfachen. Auch die Benutzung der Einflusslinien dürfte durch die Annahme des Ersatzzuges, Fig. 113, wesentlich erleichtert werden.

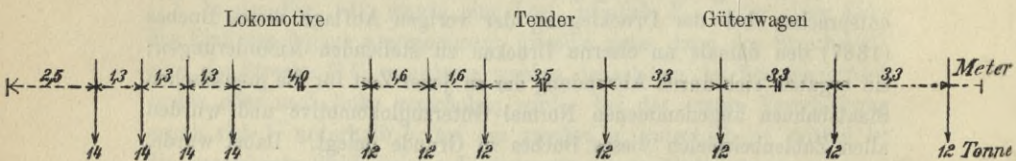


Fig. 113.

Noch besser aber ist es, die Belastung der Lokomotivachse auf 16^t zu erhöhen, den Radstand auf $1,2^m$ herabzusetzen und den in Fig. 114 angegebenen Belastungszug der Berechnung eiserner Brücken zu Grunde zu legen. Nur dann dürfte man gegen die Ansprüche der nächsten Zukunft genügend gedeckt sein. In unserem Buche wollen wir mit dieser Belastungsvorschrift bei allen neu hinzutretenden Zahlenbeispielen rechnen.

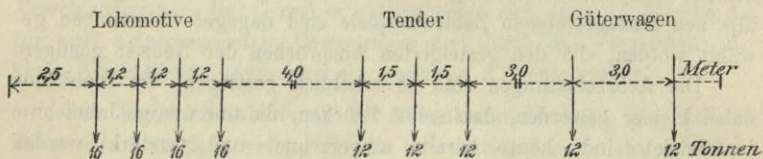


Fig. 114.

V. Abschnitt.

Querkräfte und Angriffsmomente für den einfachen Balken.

§ 15.

Ständige, unmittelbar wirkende Belastung.

a. Einzellasten.

67. **Stützenwiderstände.** Auf einen an den Enden gestützten wagerechten Balken AB , Fig. 115, wirken die senkrechten Lasten P_1, P_2, P_3, P_4 . Die Widerstände A und B der Stützen sind senkrecht gerichtet. Um dieselben zu bestimmen, reihe man die Lasten P auf einer Geraden DE aneinander, ziehe von einem beliebigen Pole O aus die Seilstrahlen I, II, III, IV, V und zeichne nach den bekannten Regeln das Seilpolygon. Dasselbe schneidet die Auflagersenkrechten in den Punkten a und b , welche durch die *Schlusslinie* s verbunden werden. Eine vom Pole zu der Linie s gezogene Parallele zerlegt die Lastensumme $P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ in die aufwärts gerichteten Auflagerkräfte A und B . Der Beweis ist in No. 11 (Seite 14) nachzusehen.

68. **Querkräfte.** Der Balken werde durch einen an irgend einer Stelle C (Fig. 115) geführten senkrechten Schnitt in zwei Theile zerlegt.

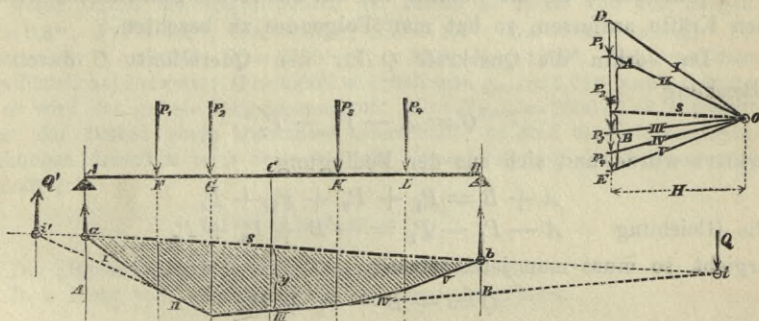


Fig. 115.

Die Mittelkraft aus den am linken Theile angreifenden Kräften A, P_1 und P_2 ist, wenn die Richtung nach oben positiv angenommen wird:

$$Q = A - P_1 - P_2;$$

sie heisst *Querkraft für den Querschnitt C* (auch *Vertikalkraft* oder *Transversalkraft*) und sucht das linke Balkenstück gegen das festgehalten gedachte rechte Stück in senkrechter Richtung zu verschieben, welche Bewegung durch die im Querschnitte *C* hervorgerufenen Schubspannungen verhindert wird. Vergl. Seite 101.

Im Kräfteplane wird Q als die auf dem Kräftezuge zwischen den Seilstrahlen s und III gelegene Strecke gewonnen, und zwar ist Q negativ, d. h. nach unten gerichtet, wenn $P_1 + P_2 > A$, d. h. wenn beim hängenden Seilpolygone (wie in Fig. 115) der Strahl III unterhalb s liegt. Man beachte auch, dass die Strahlen s und III den Seilpolygonseiten entsprechen, welche der bei C geführte Schnitt trifft, und dass Strahl III im Kräfteplane unterhalb s liegt, sobald sich die entsprechenden Seilpolygonseiten in einem rechts von C gelegenen Punkte i schneiden. Durch diesen Punkt i geht die Kraft Q ; sie ist gleich gross für alle Schnitte zwischen P_2 und P_3 .

Für die Schnitte zwischen P_1 und P_2 ergibt sich die Querkraft: $Q' = A - P_1$; dieselbe ist positiv, weil sich die Seilpolygonseiten s und II links vom Querschnitte schneiden.

Bezeichnet man die Strecke, welche Seilpolygon und Schlusslinie auf der Senkrechten durch den fraglichen Querschnitt abschneiden, mit y , so darf man den Satz aussprechen:

Die Querkräfte sind positiv, so lange die Strecken y wachsen, dagegen negativ bei abnehmenden y .

Man nennt y die auf die Schlusslinie bezogene Ordinate des Seilpolygons.

Will man Q als die Summe der auf das rechte Balkenstück wirkenden Kräfte auffassen, so hat man Folgendes zu beachten.

Da vorhin die Querkraft Q für den Querschnitt C durch die Gleichung

$$Q = A - P_1 - P_2$$

erklärt wurde und sich aus der Bedingung

$$A + B = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

die Gleichung $A - P_1 - P_2 = -B + P_3 + P_4$

ergiebt, so muss man jetzt setzen:

$$Q = -B + P_3 + P_4,$$

d. h. man muss am rechten Balkenstücke die Richtung nach unten als die positive einführen.

69. Momente. Das Moment der am Theile AC angreifenden Kräfte A, P_1, P_2 in Bezug auf den Schwerpunkt des Querschnittes C nennt man das *Angriffsmoment* (auch *Biegemoment* oder kurz das

Moment) für den Querschnitt C ; dasselbe sei positiv angenommen, sobald es im Sinne des Uhrzeigers dreht; es ist, nach No. 15 auf Seite 18, gleich dem Produkte aus der Polweite H und der Ordinate y des Seilpolygons und ergibt sich für sämtliche Querschnitte positiv, sobald, wie in Fig. 115, alle Lasten nach unten gerichtet sind. Liegt nämlich die Mittelkraft Q aus A , P_1 und P_2 rechts von C , so ist sie nach den früheren Ausführungen abwärts gerichtet, also rechts um C drehend; liegt sie links von C , so ist sie aufwärts gerichtet und dreht dann ebenfalls rechts um C .

Man sagt auch: das Moment M ist positiv, sobald die elastische Linie, d. i. die Linie, welche die Achse des belasteten Balkens bildet, nach oben hohl ist (\smile). Bei einem an den Enden unterstützten, nur durch abwärts gerichtete Lasten beanspruchten Balken ist dies an allen Stellen der Fall, es ist also hier durchweg

$$M = + Hy.$$

Betrachtet man M als das auf C bezogene Moment der am rechten Balkenstücke angreifenden Kräfte, so muss man die Drehung im Sinne des Uhrzeigers negativ annehmen; denn die Mittelkraft der am Theile BC wirksamen Kräfte ist der Mittelkraft aus den Kräften links von C entgegengesetzt gleich.

Die Bestimmung der Momente M mit Hilfe des Seilpolygons hat zuerst *Culmann* gezeigt. Daher nennt man auch die vom Seilpolygone und von der Schlusslinie begrenzte (in Fig. 115 schraffierte) Fläche die *Culmann'sche Momentenfläche*.

Zahlenbeispiel. Der Balken habe die Länge $\overline{AB} = 5^m$ (vergl. Fig. 115) und werde durch die Angriffspunkte der Lasten in Theile von den Längen: $\overline{AF} = 0,8^m$; $\overline{FG} = 1,2^m$; $\overline{GK} = 0,9^m$; $\overline{KL} = 1,4^m$; $\overline{LB} = 0,7^m$ zerlegt. Die Lasten seien: $P_1 = 2000^k$; $P_2 = 2500^k$; $P_3 = 800^k$; $P_4 = 1200^k$. Wählt man dann die (willkürliche) Polweite: $H = 2000^k$, so erhält man $y_{max} = 2,48^m$ (unter Last P_2), und es wird das grösste Biegemoment: $M = Hy_{max} = 2000 \cdot 2,48 = 4960^{km}$. Besitzt der Balken einen konstanten Querschnitt, so sind die grössten Beanspruchungen desselben nach Seite 60 (mit Vernachlässigung des Einflusses der Querkräfte):

$$\sigma_1 = \frac{M e_1}{J}; \quad \sigma_2 = - \frac{M e_2}{J}.$$

Die Stützenwiderstände sind $A = 3680^k$; $B = 2820^k$. Dem Leser wird empfohlen, die Zeichnung auszuführen.

b. Stetige Belastung.

70. Wenn die Lasten in unendlich kleinen Abständen von einander wirken, so geht das Seilpolygon in eine krumme Linie über. Es ist dies der Fall bei einer stetigen Belastung (Fig. 116); denn eine solche

besteht aus unendlich vielen unendlich kleinen Einzellasten, die einander unendlich nahe sind. Um nun die Seillinie zu ermitteln, ersetze man die stetige Belastung durch eine Reihe von in endlichen Entfernungen wirkenden Einzellasten, zeichne zu diesen ein Seilpolygon und beschreibe in dieses eine Kurve.

So wurde in Figur 116 die gleichförmig vertheilte Last P durch die drei Einzellasten $\frac{1}{3} P$ ersetzt, indem die *Belastungsfläche* durch

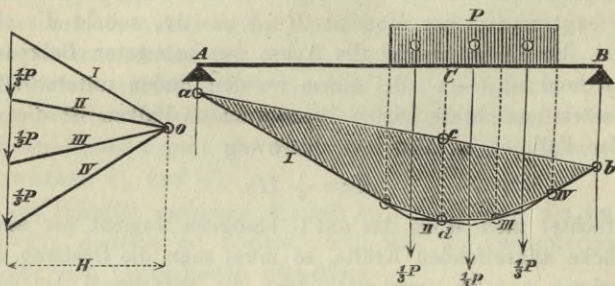


Fig. 116.

senkrechte Schnitte in drei Streifen zerlegt wurde. Für einen an der Grenze zweier Streifen befindlichen Querschnitt liefert das Seilpolygon die genaue Momentenordinate $cd = y$, denn, wenn man beispielsweise das Moment der links von C wirkenden Kräfte in Bezug auf C bildet, so darf man die stetige Belastung $\frac{1}{3} P$ im Schwerpunkte vereinigen.

Es folgt hieraus:

Die senkrechten Schnitte, welche die Belastungsfläche in Streifen zerlegen, treffen das Seilpolygon in den Berührungspunkten der in das Seilpolygon einzubeschreibenden Kurve.

Vergl. auch Seite 32.

§ 16.

Ständige mittelbare Belastung.

71. Beliebige Belastung. Werden die Lasten $P_1, P_2, P_3 \dots$ durch einfache Zwischenträger auf den Balken AB übertragen, Fig. 117, so entstehen Auflagerkräfte A und B , welche, falls die äussersten Querträger über den Stützen liegen, ebensogross sind, als wenn die Lasten

unmittelbar auf den Balken wirken. Denn es ist z. B. $A = \frac{M_B}{l}$, wobei M_B die Summe der statischen Momente sämtlicher Lasten P in Bezug auf den Drehpunkt B bedeutet, und man erhält für M_B denselben Werth, wenn man einmal die Lasten P und ein zweitesmal die in den Knotenpunkten, angreifenden Seitenkräfte derselben einführt, weil das Moment einer Mittelkraft stets gleich der Summe der Momente ihrer Seitenkräfte ist.

Aus dem gleichen Grunde ist das Moment der links von irgend einem Knotenpunkte angreifenden Kräfte, bezogen auf diesen Knotenpunkt, unabhängig von der Art der Vertheilung der Lasten durch die Zwischenträger, und es folgt daher der Satz:

Für alle durch Knotenpunkte gelegten Querschnitte stimmen die Momente für unmittelbare und für mittelbare Belastung überein.

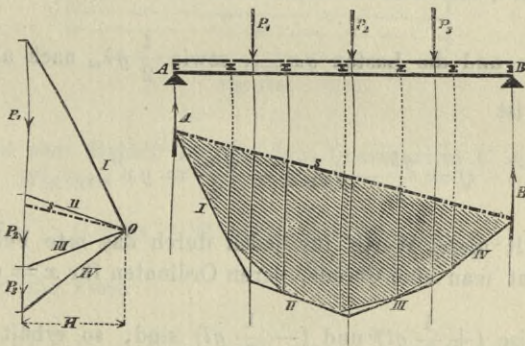


Fig. 117.

Hiernach ist man im Stande, die Momentenflächen für eine mittelbare Belastung zu finden, ohne erst die in den Knotenpunkten angreifenden Lasten zu bestimmen. Man zeichne das Seilpolygon für die unmittelbare Belastung und beschreibe in dieses ein Polygon, dessen Ecken senkrecht unter den Knotenpunkten liegen, und welches dann mit der Schlusslinie die gesuchte Momentenfläche einschliesst.

72. Querkräfte für einen gänzlich und gleichmässig belasteten Balken. Wir lösen an dieser Stelle noch die für die Folge wichtige Aufgabe, die Querkräfte für die Querschnitte eines nach Fig. 118 gleichmässig mit g für die Längeneinheit belasteten Balkens zu bestimmen.

Die Angriffspunkte der Querträger seien mit $0, 1, 2 \dots (m-1), m \dots$ bezeichnet, x_m und x'_m seien die Abstände des Punktes m von

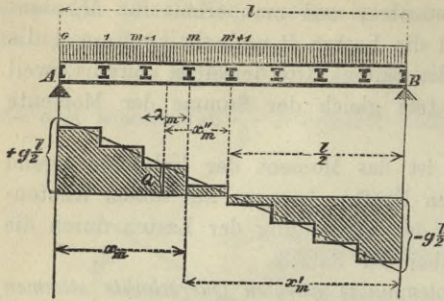


Fig. 118.

den Auflagern A und B , λ_m die Länge des m ten Feldes, x'_m der Abstand der Mitte des Feldes von der Mitte des Balkens. Um die Querkraft für einen durch das m te Feld geführten Schnitt zu finden, beachte man, dass die Belastung $g \lambda_m$ dieses Feldes zur Hälfte auf den Punkt $(m-1)$ und zur Hälfte auf den Punkt m

übertragen wird, dass also am linken Balkenstücke die Kraft $A = \frac{1}{2} g l$

nach aufwärts und die Lasten $g x_{m-1}$, sowie $\frac{1}{2} g \lambda_m$ nach abwärts wirken. Daher ist

$$(1) \quad Q = \frac{gl}{2} - g x_{m-1} - \frac{g \lambda_m}{2} = g x'_m,$$

und zwar gilt dieser Werth für jeden durch das m te Feld geführten Schnitt. Zieht man eine Gerade, deren Ordinaten für $x = 0$ und $x = l$

beziehungsweise $(+\frac{1}{2} g l)$ und $(-\frac{1}{2} g l)$ sind, so erhält man Q als

die unter der Feldmitte gemessene Ordinate dieser Geraden. Für die rechte Balkenhälfte wird Q negativ. Innerhalb eines Feldes ist Q konstant.

§ 17.

Einflusslinien. Grenzwerte von Q und M bei gleichförmiger ständiger und beweglicher Belastung.

a. Querkräfte für unmittelbare Belastung.

73. Einflusslinie. Es sei C ein beliebiger Querschnitt des Balkens AB ; links von demselben wirke an irgend einer Stelle die Last P_1 , rechts die Last P_2 . Fig. 119. Die Momentengleichung für den Stütz-

punkt B als Drehpunkt lautet mit den aus der Fig. 119 ersichtlichen Bezeichnungen:

$$Al - P_2 b - P_1 (l - a) = 0;$$

sie liefert für den Stützenwiderstand A den Ausdruck:

$$(1) \quad A = P_2 \frac{b}{l} - P_1 \frac{a}{l} + P_1,$$

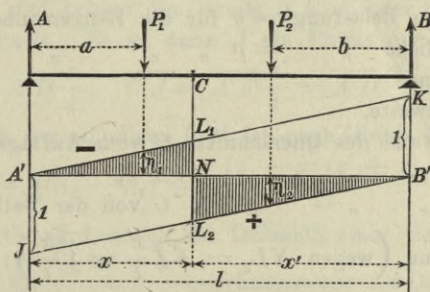


Fig. 119.

und es ergibt sich deshalb für die dem Querschnitte C entsprechende Querkraft der Werth:

$$(2) \quad Q = A - P_1 = P_2 \frac{b}{l} - P_1 \frac{a}{l};$$

derselbe besitzt die Form:

$$(3) \quad Q = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2, \text{ wo } \eta_1 = -\frac{a}{l} \text{ und } \eta_2 = +\frac{b}{l},$$

und es lässt sich mithin auf die Ermittlung von Q die im § 14 beschriebene Methode der Einflusslinien anwenden.

Zieht man eine Wagerechte, welche die Senkrechten durch die Auflager in A' und B' schneidet, trägt auf diesen Senkrechten die Strecken $A'J = 1$ und $B'K = 1$ auf, und zieht die Geraden $A'K$ und $B'J$, welche die Senkrechten durch C in L_1 und L_2 schneiden, so erhält man in der in Fig. 119 schraffirten Fläche die Einflussfläche für die dem Querschnitte C entsprechende Querkraft Q , und der Linienzug $A'L_1L_2B'$ stellt die Einflusslinie für Q vor. In der That ist die unter P_2 gemessene Ordinate dieser Linie:

$$\eta_2 = \overline{A'J} \frac{b}{l} = 1 \frac{b}{l} \text{ und die unter } P_1 \text{ gemessene, } \eta_1 = -\frac{a}{l}.$$

Jede Last rechts von C erzeugt für diesen Querschnitt eine positive Querkraft Q und jede Last links von C eine negative.

Wir wollen nun die Einflusslinie $A'L_1L_2B'$ benutzen, um im Anschluss an die Untersuchungen im § 15 diejenigen Grenzwerte $_{max}Q$ und $_{min}Q$ zu bestimmen, welche in Folge einer gleichmässigen Belastung entstehen. Der Einfluss beweglicher Einzellasten soll später auf anderem Wege (d. h. ohne die Benutzung der Einflusslinie) ermittelt werden.

74. Bestimmung von $_{max}Q$ und $_{min}Q$ bei gleichförmiger Belastung. Vergl. Fig. 119 u. 120. Wir setzen voraus:

eine ständige Belastung = g für die Längeneinheit von AB ,

„ bewegliche „ = p „ „ „ „ „ „ AB ,

und bezeichnen mit

l die Stützweite,

x den Abstand des Querschnitts C vom Auflager A

x' „ „ „ „ „ „ C „ „ „ B

x'' „ „ „ „ „ „ C von der Balkenmitte,

und erhalten dann (wegen $NL_2 = \overline{A'J} \frac{x'}{l} = 1 \frac{x'}{l}$):

1) den Inhalt des positiven Theiles der Einflussfläche:

$$\mathfrak{S}_2 = \Delta B'NL_2 = \overline{NL_2} \frac{x'}{2} = \frac{x'^2}{2l},$$

2) den Inhalt des negativen Theiles der Einflussfläche:

$$\mathfrak{S}_1 = \Delta A'NL_1 = \frac{x^2}{2l}.$$

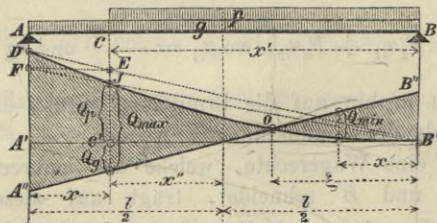


Fig. 120.

Wir untersuchen getrennt den Einfluss Q_p der beweglichen Last und den Einfluss Q_g der ständigen Last.

Der Werth $_{max}Q_p$ entsteht, wenn nur die positive Beitragsstrecke x' mit p belastet wird, Fig. 119. Man erhält (nach Gleich. 4 auf Seite 116):

$$(4) \quad \text{max } Q_p = p \mathfrak{S}_2 = \frac{p x'^2}{2l}$$

und kann diesen Werth durch die Ordinate $C'J$ einer Parabel $B'OJD$ darstellen, welche für $x' = 0$ und $x' = l$ beziehungsweise die Ordinaten 0 und $\frac{1}{2}pl$ besitzt, und deren Scheitel bei B' liegt. Man mache auf

der linken Auflager-Senkrechten: $A'D = \frac{1}{2}pl$, ziehe $B'D$, ferner durch den Schnittpunkt E dieser Geraden mit der Senkrechten durch C die Wagerechte EF und bringe die Gerade $B'F$ mit der Senkrechten durch C in J zum Schnitt. Es ist dann J ein Punkt der Parabel, weil

$$\overline{C'E} = \overline{A'D} \frac{x'}{l}; \quad \overline{C'J} = \overline{A'F} \frac{x'}{l} = \overline{A'D} \frac{x'^2}{l^2} = \frac{px'^2}{2l}.$$

Der Einfluss der ständigen Last ist nach Gleich. (8) auf Seite 118:

$$(5) \quad Q_g = g(\delta_2 - \delta_1) = g \frac{(x' - x)(x' + x)}{2l} = gx''.$$

Dieser Werth wird durch die Ordinate einer Geraden $A''B''$ dargestellt, welche für $x'' = \pm \frac{l}{2}$ beziehungsweise die Ordinaten $\pm \frac{gl}{2}$ besitzt. Die positiven Ordinaten dieser Geraden wurden in der Fig. 120 unterhalb der $A'B'$ aufgetragen, damit die Werthe Q_p und Q_g bequem addirt werden konnten. Es sind bei dieser Anordnung der Zeichnung die senkrechten Abstände der Geraden $A''B''$ von der Parabel DJB' gleich den Kräften

$$\max Q = \max Q_p + Q_g.$$

Für den Balkenquerschnitt senkrecht über O ist $\max Q = 0$; für die Querschnitte rechts hiervon ist $\max Q$ negativ.

Betrachtet man jetzt das Spiegelbild der Fig. 120, so wird der Balken nur links vom Querschnitte C eine bewegliche Belastung aufweisen. Da nun diesem Belastungszustande die Querkraft $\min Q$ entspricht, so folgt, dass der Werth $\min Q$ für den Querschnitt C gleich ist dem im Abstände x vom Auflager B gemessenen senkrechten Abstände der Parabel $B'JD$ von der Geraden $A''B''$. Man muss jedoch das Vorzeichen ändern, da vorhin Q als Mittelkraft des nur mit g belasteten linken Balkenstückes (AC) dargestellt worden ist und bei der Betrachtung des Spiegelbildes dieses nur mit g belastete Stück rechts von C liegt. Vergl. Seite 124. Es folgt hieraus, dass $\min Q$ positiv ist für $x < \xi$ und negativ für $x > \xi$.

b. Querkräfte für mittelbare Belastung.

75. Einflusslinie. Es sei C ein beliebiger Querschnitt des Balkenfeldes F_1F_2 , Fig. 121. Links von F_1 wirke auf den Balken an irgend einer Stelle eine Last P_1 , rechts von F_2 eine Last P_2 . Die Stützen-

widerstände A und B sind dieselben wie bei unmittelbarer Belastung (vergl § 16), und es ergibt sich deshalb wie in No. 73 die Querkraft für den Querschnitt C :

$$Q = A - P_1 = P_2 \frac{b}{l} - P_1 \frac{a}{l} = P_1 \gamma_1 + P_2 \gamma_2,$$

$$\text{wo } \gamma_1 = -\frac{a}{l}; \quad \gamma_2 = \frac{b}{l}.$$

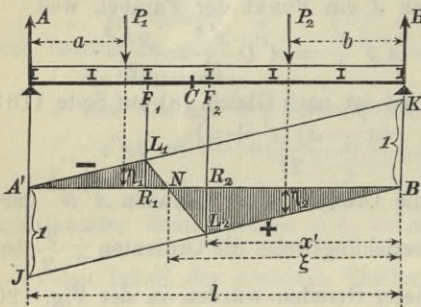


Fig. 121.

Ausserhalb des Feldes $F_1 F_2$ stimmt die Einflusslinie für Q mit der in No. 73 unter Voraussetzung einer unmittelbaren Belastung gefundenen überein, und innerhalb jenes Feldes ist sie nach Seite 116 eine Gerade, welche durch die beiden senkrecht unter F_1 und F_2 gelegenen Punkte L_1 und L_2 bestimmt ist. Mithin ist die in der Fig. 121 schraffierte Fläche die gesuchte Einflussfläche für

Q ; wir werden dieselbe wieder benutzen, um den Einfluss einer gleichförmigen Belastung festzustellen.

76. Bestimmung von $\max Q$ und $\min Q$ für gleichförmige Belastung. Der Inhalt \mathfrak{F}_2 des positiven Theiles der Einflussfläche ist mit den aus der Fig. 121 ersichtlichen Bezeichnungen (und wegen: $\overline{R_2 L_2} = \overline{A' J} \frac{x'}{l} = 1 \frac{x'}{l}$):

$$\mathfrak{F}_2 = \triangle N L_2 B' = \overline{R_2 L_2} \frac{\xi}{2} = \frac{x' \xi}{2l},$$

und man erhält deshalb die durch die bewegliche Belastung allein hervorgerufene grösste positive Querkraft:

$$(6) \quad \max Q = p \mathfrak{F}_2 = \frac{p l}{2} \cdot \frac{x'}{l} \cdot \frac{\xi}{l};$$

dieselbe entsteht, sobald nur die positive Beitragsstrecke $B' N$ mit p belastet wird und lässt sich leicht durch Zeichnung finden.

Zu diesem Zwecke bestimmt man, Fig. 122, mit Hilfe von zwei beliebigen Parallelen AK und BJ den Nullpunkt N des fraglichen Feldes und legt durch N und durch F_2 die Senkrechten I und II . Nun trägt man, von einer Wagerechten $A'B'$ aus, auf der Senkrechten $A'A$ die Kraft $p \frac{l}{2} = \overline{A'D}$ auf, bringt die Gerade $B'D$ mit II in E zum Schnitt,

Zahlenbeispiel. Für den in Fig. 122 gezeichneten Balken wurde $l = 18^m$, $\lambda = 3^m$, $g = 1,2^t$ und $p = 4,8^t$ für das Meter angenommen. Es ist dann $\overline{A'D} = \frac{pl}{2} = 43,2^t$, $\overline{A'A''} = \overline{B'B''} = \frac{gl}{2} = 10,8^t$, welche Werthe im Maassstabe: $20^t = 10^{mm}$ aufgetragen wurden. Nach Ausführung der oben beschriebenen Konstruktion ergab sich für das 1^{te} Feld:

$$\begin{array}{|l|l|l|} \hline \max Q_1 = + 45,00^t & \max Q_3 = + 14,76^t & \max Q_5 = - 3,96^t \\ \max Q_2 = + 28,44^t & \max Q_4 = + 3,96^t & \max Q_6 = - 9,00^t \\ \hline \end{array}$$

und aus diesen Werthen folgt, da der Balken in Bezug auf eine Senkrechte durch seine Mitte symmetrisch ist:

$$\begin{array}{|l|l|l|} \hline \min Q_1 = + 9,00^t & \min Q_3 = - 3,96^t & \min Q_5 = - 28,44^t \\ \min Q_2 = + 3,96^t & \min Q_4 = - 14,76^t & \min Q_6 = - 45,00^t \\ \hline \end{array}$$

Es sind also im 1^{ten} und 2^{ten} Felde die Querkräfte nur positiv, im 5^{ten} und 6^{ten} nur negativ, während sich für die beiden Mittelfelder je nach dem Belastungszustande positive oder negative Werthe Q ergeben.

c. Momente für unmittelbare Belastung.

77. Einflusslinie. Wirken auf den Balken AB die Lasten P_1 und P_2 , so ist das Moment für irgend einen zwischen ihnen gelegenen Querschnitt C (mit den Bezeichnungen in Fig. 123):

$$M = Ax - P_1(x - a)$$

und wegen $A = P_2 \frac{b}{l} - P_1 \frac{a}{l} + P_1$:

$$(7) \quad M = P_1 \frac{ax'}{l} + P_2 \frac{bx}{l}.$$

Es besitzt also M die Form

$$M = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2$$

$$\text{wobei } \eta_1 = \frac{ax'}{l} \text{ und } \eta_2 = \frac{bx}{l}.$$

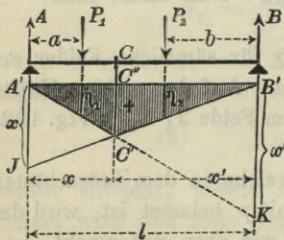


Fig. 123.

Trägt man auf der linken Auflager senkrechten, von einer Wagerechten $A'B'$ aus, die Strecke $A'J = x$ auf, zieht die Gerade JB' , welche die Senkrechte durch C in C' schneidet und verbindet A' mit C' , so ist der Linienzug $A'C'B'$ die Einflusslinie für M , denn er besitzt unter P_2

die Ordinate $\eta_2 = x \frac{b}{l}$ und (da die Gerade $A'C'$ auf der Senkrechten durch B die Strecke $\overline{B'K} = x'$ bestimmt)

unter P_1 die Ordinate $\eta_1 = x' \frac{a}{l}$.

78. Moment ${}_{max}M$ in Folge gleichmässiger Belastung. Das grösste Moment für irgend einen Balkenquerschnitt C entsteht bei gänzlicher Belastung des Balkens durch $p + g = q$ für die Längeneinheit.

Der Inhalt der Einflussfläche ist (vergl. Fig. 123): $\mathfrak{F} = \overline{C'C''} \frac{l}{2}$ und

wegen $\overline{C'C''} = \overline{A'J} \frac{x'}{l} = \frac{xx'}{l}$:

$$\mathfrak{F} = \frac{xx'}{2}.$$

Man erhält somit:

$$(8) \quad {}_{max}M = q\mathfrak{F} = \frac{qxx'}{2},$$

und kann hiernach das Moment ${}_{max}M$ für den an der Stelle x gelegenen Querschnitt durch die Ordinate CJ einer Parabel $AJSB$ (Fig. 124) darstellen, welche für $x = x' = \frac{1}{2}l$ die Ordinate $\overline{NS} = \frac{1}{8}ql^2$ besitzt.

Zieht man nach Auftragen von NS die Gerade SA , welche das in C auf der AB errichtete Loth in E schneidet, hierauf die Wagerechte EF bis zur linken Auflagersenkrechten und verbindet F mit S durch eine Gerade, so bestimmt diese auf der CE den Parabelpunkt J . Denn es ist:

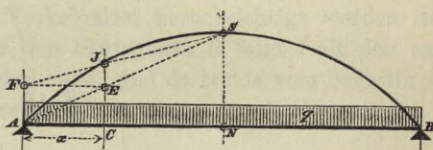


Fig. 124

$$\overline{CE} : \overline{NS} = x : \frac{1}{2}l \text{ also } \overline{CE} = \frac{qlx}{4}, \text{ ferner}$$

$$\overline{JE} = \overline{FA} \frac{\frac{1}{2}l - x}{\frac{1}{2}l} = \overline{CE} \frac{l - 2x}{l}, \text{ also}$$

$$\overline{JC} = \overline{EC} + \overline{JE} = \overline{EC} \left(1 + \frac{l - 2x}{l} \right) = \frac{qxx'}{2}.$$

d. Momente für mittelbare Belastung.

79. Einflusslinie. Fig. 125. Liegt der fragliche Querschnitt C zwischen zwei Querträgern F_1 und F_2 , so bestimme man zunächst die Einflussfläche $A'C'B'$ für das Moment M unter der Voraussetzung unmittelbarer Belastung und stumpfe dieses Dreieck durch eine Gerade L_1L_2

ab, deren Endpunkte senkrecht unter den Querträgern F_1 und F_2 liegen. So lange nämlich die über den Balken wandernde Einzellast links von F_1 oder rechts von F_2 liegt, stimmen die dem Querschnitte C entsprechenden Momente für mittelbare und für unmittelbare Belastung überein; zwischen F_1 und F_2 aber muss die Einflusslinie eine Gerade sein.

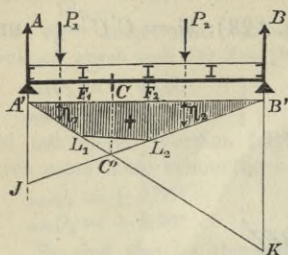


Fig. 125.

80. Momente M_{max} für gleichmässige Belastung. Die Momentenkurve für mittelbare gleichmässige Belastung ist nach § 16 ein Polygon, welches in die für die unmittelbare Belastung gefundene Parabel ASB (Fig. 124) so einbeschrieben wird, dass seine Ecken in den Senkrechten durch die Knotenpunkte liegen. Es genügt also, die den Knotenpunkten entsprechenden Parabelpunkte zu bestimmen und diese durch gerade Linien zu verbinden.

§ 18.

Die veränderliche Belastung besteht aus einem verschiebbaren Systeme von Einzellasten.

a. Mittelbare Belastung.

(Fig. 126, 128, 129, 130 auf Tafel I.)

Die Ermittlung der durch ein verschiebbares System von Einzellasten hervorgerufenen Momente und Querkräfte kann mit Hilfe der im § 17 gefundenen Einflusslinie nach dem im § 14 mitgetheilten allgemeinen Verfahren erfolgen, jedoch ist es zweckmässiger, einen anderen Weg einzuschlagen, der hier an der Hand eines Zahlenbeispiels beschrieben werden soll.

Es handele sich um eine zweigleisige Eisenbahnbrücke mit zwei Hauptbalken. Die Stützweite sei $l = 36^m$ und die Feldweite $\lambda = 3,6^m$, Fig. 126. Die veränderliche Belastung bestehe aus einem von drei Lokomotiven geführten Güterzuge (Anordnung Fig. 111). Jeder der beiden Balken trägt die Belastung eines Gleises, hat also die Achsen

belastungen aufzunehmen. Die ständige Belastung sei mit Hilfe der Erfahrungsformel

$g = 27,5l + 750 = 27,5 \cdot 36 + 750 = 1740^* = 1,74^t$ f. d. Meter Balkenlänge gefunden. *)

81. Querkräfte. In No. 75 auf Seite 132 (vergl. auch Fig. 121) wurde nachgewiesen, dass in einem Balkenfelde die grösste positive Querkraft Q entsteht, sobald nur Lasten rechts von der im fraglichen Felde gelegenen Belastungsscheide wirken. Führt nun von B aus ein Güterzug vor, mit drei vorwärtsgehenden Lokomotiven an der Spitze, so erhält man in den meisten Fällen $_{max}Q$, wenn die erste Last bei dem das fragliche Feld rechts begrenzenden Querträger liegt. Diese Laststellung wollen wir in der Folge die *Grundstellung* nennen. Handelt es sich nun beispielsweise um das 5^{te} Balkenfeld (Fig. 126), so ist der Eisenbahnzug zunächst von B aus bis zum Querträger 5 vorzuschieben. Links von dem durch dieses Feld an irgend einer Stelle geführten Schnitte ss greift nur der linke Stützenwiderstand A_5 an, und es er giebt sich $_{max}Q_{p5} = A_5$, wobei der Zeiger p daran erinnern soll, dass bis jetzt nur der Einfluss der Verkehrslast berücksichtigt worden ist. Aus der Momentengleichung für den Stützpunkt B folgt (mit den aus der Fig. 126 ersichtlichen Bezeichnungen, und da rechts vom Schnitte ss 9 Lasten auf den Balken wirken):

$$A_5 l - \sum_1^9 P b = 0; \quad A_5 = \frac{1}{l} \sum_1^9 P b,$$

und dieser Werth A_5 lässt sich auf eine sehr einfache Weise durch Zeichnung bestimmen. Dazu trägt man den Eisenbahnzug in der Richtung von A nach B fahrend und mit der ersten Achse bei B stehend auf und reiht die Lasten $P_1, P_2 \dots$ in der in Fig. 126 angegebenen Weise auf der Senkrechten durch den linken Stützpunkt aneinander. Nun wählt man im Abstände l von dem Kräftezuge den Pol O und zeichnet zu den Lasten ein Seilpolygon, dessen Seiten I und II mit den Seilstrahlen I und II zusammenfallen. Es ist dann nach No 17 auf Seite 20 das Produkt $l \cdot \overline{ab}$ aus der Polweite l und der beim Querträger 5 gemessenen Ordinate \overline{ab} des Seilpolygons gleich dem auf die Achse ab bezogenen Momente der rechts von ab gelegenen Lasten P_1, P_2, \dots, P_9 des von A nach B vorgerückten Zuges. Bezeichnet

*) Würde jedes Gleis durch zwei, bezüglich der Gleismitte symmetrisch liegende Balken gestützt, so kämen auf jeden Balken nur die **Rad**drücke der Fahrzeuge und die ständige Last $g = \frac{1}{2} \cdot 1,74 = 0,87^t$.

man also die Entfernung dieser Lasten von der ab mit b'_1, b'_2, \dots , so erhält man $\overline{ab} = \sum_1^n P b'$ und (wegen $b'_1 = b_1; b'_2 = b_2, \dots$):

$$\overline{ab} = \frac{1}{l} \sum_1^n P b = A_5.$$

Wir werden mit A_m stets denjenigen Widerstand bezeichnen, welcher am linken Auflager durch die von B aus bis zum Querträger m vorgeschobene Verkehrslast hervorgerufen wird, und erhalten dann, falls $\max Q_{pm}$ bei der Grundstellung entsteht, ganz allgemein für das m^{te} Feld:

$$\max Q_{pm} = A_m.$$

Das Seilpolygon in Fig. 126, dessen bei den Querträgern gemessene Ordinaten gleich den Stützenwiderständen A_m sind, nennen wir das A -Polygon.

Liegt die zweite Achse des von B vorrückenden Zuges beim Querträger 5, und bezeichnet man mit e_1 den ersten Radstand, so übt die erste Last P_1 auf den Querträger 4 den Druck $P_1 \frac{e_1}{\lambda}$ aus, und es wird die Querkraft für das 5^{te} Balkenfeld: $Q' = A - P_1 \frac{e_1}{\lambda}$. Dabei wird A durch die bei der Last P_1 gemessene Ordinate $a'b'$ des A -Polygons dargestellt; von derselben ist die Strecke $P' = \frac{P_1 e_1}{\lambda}$, deren Ermittlung ohne Weiteres aus der Fig. 126 zu ersehen ist, abzuziehen. Ist $Q' > A_5$, so ergibt sich $\max Q_{p5} = Q'$. So wird z. B. im ersten Felde Q ein Maximum, sobald die zweite Achse über dem Querträger 1 liegt.

Stellt man die dritte Achse des Zuges über den Querträger m , Fig. 127, so erfährt der Querträger $(m - 1)$ die Belastung $P_1 \frac{e_1 + e_2}{\lambda_m} + P_2 \frac{e_2}{\lambda_m}$, und es entsteht für sämtliche Querschnitte des m^{ten} Feldes die Querkraft:

$$Q'' = A - P_1 \frac{e_1 + e_2}{\lambda_m} - P_2 \frac{e_2}{\lambda_m} = A - P \frac{e_1 + e_2}{\lambda_m},$$

wobei $P = P_1 + P_2 \frac{e_2}{e_1 + e_2}$ und A gleich der unter P_1 gemessenen

Ordinate des A -Polygons. Die Ermittlung der Kräfte P und Q'' ist aus der Fig. 127 zu ersehen. Ist $Q'' > Q' > A_m$, so ist $\max Q_{pm} = Q''$.

Ein noch weiteres Verschieben des Zuges in das fragliche Feld ist überflüssig; schon der Fall, dass die dritte Achse über m stehen muss, ist sehr selten; er tritt nur ein bei verhältnismässig grosser Feldweite.

Um ein einfaches analytisches Kennzeichen für die gefährlichste Laststellung hinsichtlich $\max Q_{pm}$ zu finden, bezeichnen wir die Summe aller auf dem Balken sich befindenden Lasten mit ΣP und die Summe der im fraglichen Felde liegenden (einschliesslich der über m) mit $\frac{1}{\lambda_m} \Sigma P$. Haben dann die im m ten Felde liegenden Lasten von m die Abstände $c_1, c_2 \dots$, so ergibt sich $Q_m = \frac{1}{l} \Sigma P b - \frac{1}{\lambda_m} \frac{1}{2} \Sigma P c$. Verschiebt man den Zug um die unendlich kleine Strecke ξ nach links, so geht über: b in $b + \xi$ und c in $c + \xi$; es wächst also Q_m um $dQ_m = \xi \left[\frac{1}{l} \Sigma P - \frac{1}{\lambda_m} \frac{1}{2} \Sigma P \right]$.

Hieraus folgt aber, dass Q_m in Folge der Verschiebung vergrössert wird, falls $\frac{1}{l} \Sigma P > \frac{1}{\lambda_m} \frac{1}{2} \Sigma P$, d. h.

$$(1) \quad \frac{\Sigma P}{\frac{1}{2} \Sigma P} > \frac{l}{\lambda_m}$$

ist. Die Grundstellung ist also die gefährlichste, sobald $\frac{\Sigma P}{P_1} < \frac{l}{\lambda_m}$ ist. Im Gegenfalle stellt man die 2te Last über m und sieht nach, ob $\frac{\Sigma P}{P_1 + P_2} < \frac{l}{\lambda_m}$ ist; wird auch diese Ungleichung nicht erfüllt, so stellt man die Last P_3 über m u. s. w.

Für das 5te Feld ist bei der Grundstellung $\Sigma P = 105'$, mithin $\frac{\Sigma P}{P_1} = \frac{105}{13} < \frac{l}{\lambda} = 10$; es ist also diese Stellung die gefährlichste.

Man könnte auch den Werth $Q_m = \frac{1}{l} \Sigma P b - \frac{1}{\lambda_m} \frac{1}{2} \Sigma P c$ ermitteln, indem man den Ausdruck $\frac{1}{\lambda_m} \frac{1}{2} \Sigma P c$ in ähnlicher Weise mit Hilfe eines Seilpolygons (Polweite λ_m) bestimmt, wie den Ausdruck $A = \frac{1}{l} \Sigma P b$. Das oben gezeigte Verfahren führt aber schneller zum Ziele, namentlich bei verschiedenen langen

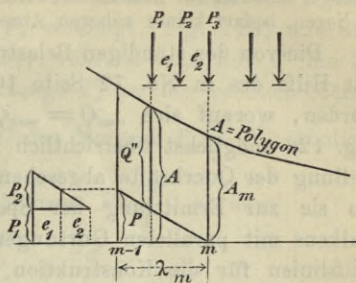


Fig. 127.

Feldern, da die vorhin eingeführte Kraft $P = P_1 + P_2 \frac{e_2}{e_1 + e_2}$ unabhängig von der Feldweite ist, mithin nur einmal bestimmt zu werden braucht. Wie sich dieses Verfahren für den Fall erweitern lässt, dass mehr als 2 Lasten im Felde λ_m liegen, bedarf keiner näheren Auseinandersetzung.

Die von der ständigen Belastung herrührenden Querkräfte Q_y können mit Hilfe des in No. 72 Seite 105 beschriebenen Verfahrens bestimmt werden, worauf sich ${}_{max}Q = {}_{max}Q_p + Q_y$ ergibt. Es wurde, um die Fig. 126 möglichst übersichtlich zu halten, von der vollständigen Darstellung der Querkräfte abgesehen. Man findet eine solche auf Tafel III, wo sie zur Ermittlung der Spannkkräfte in den Wandgliedern eines Balkens mit parallelen Gurtungen benutzt wird. Dafür sind dort alle Hilfslinien für die Konstruktion des Seilpolygons fortgelassen worden.

82. Momente. Als veränderliche Belastung sollen Güterzuglokomotiven angenommen werden, von denen zwei mit ihren Vordertheilen gegeneinander gekehrt sind; vor und hinter dieselben werden Lastwagen gestellt. *)

Um zunächst die Momente $M_1, M_2, M_3 \dots$ für die den Querschnitten 1, 2, 3 \dots entsprechenden Querschnitte zu bestimmen, wurde in Fig. 128 auf Tafel I für einen Zug, der länger als die Stützweite 36^m ist, ein Seilpolygon gezeichnet. Die von links nach rechts bezifferten 22 Lasten wurden in der Reihenfolge 22, 21, 20, \dots , 1 auf einer Senkrechten aneinander gesetzt und zwar im Maassstabe $2' = 1^{'''}$; die Polweite H wurde $= 4\lambda = 4 \cdot 3,6 = 14,4^m$ gewählt, so dass also, da der Längenmaassstab $1^m = 4^{'''}$ lautet, $H = 4 \cdot 14,4 = 57,6^{'''}$ ist. Fasst man H als eine Kraft auf, so ist $H = 57,6 \cdot 2 = 115,2'$. **)

Um das für den Querschnitt 1 durch die veränderliche Belastung hervorgerufene Moment M_{p1} zu erhalten, wurde der Balken AB so über den Lastenzug gestellt, dass eine schwere Last (hier die 7^{te}) bei dem fraglichen Querschnitte liegt. Hierauf wurden die Auflagersenkrechten in a und b mit dem Seilpolygone zum Schnitt gebracht und die Punkte a und b durch die Schlusslinie s_1 verbunden. Die auf der Senkrechten durch 1 von dem Seilpolygone und der Geraden s , abgeschchnittene Strecke y_{p1} giebt mit H multiplicirt das Moment M_{p1} . Man überzeugt sich leicht, dass dieses Moment verkleinert wird, sobald man

*) Wir beschränken uns hier auf diesen Fall. Zuweilen kommt es vor, dass drei vorwärtsgehende Maschinen etwas grössere Momente erzeugen, so dass es im Allgemeinen nöthig ist, die folgenden Untersuchungen zweimal durchzuführen.

**) Im Allgemeinen empfiehlt es sich, für H eine bequeme Zahl zu wählen, doch werden wir später auch Aufgaben zu lösen haben, bei denen es besser ist, H als ein Vielfaches der Feldweite anzunehmen. Um dann Tafel I benutzen zu können, wurde die obige Wahl getroffen.

den Träger nach links oder nach rechts gegen den Zug verschiebt, dass also das gewonnene Moment das grösste ist, welches für den Querschnitt 1 entsteht. Wenn man nämlich die Lasten links von irgend einem Querschnitte C zur Mittelkraft P_a vereinigt, Fig. 129, und die Lasten rechts von C zur Mittelkraft P_b , während man mit P' die in C angreifende Last bezeichnet, so erzeugt P_a an der rechten Stütze den Widerstand $P_a \frac{a}{l}$ und daher für C das Moment $P_a \frac{a}{l} x'$, ähnlich P_b das Moment $P_b \frac{b}{l} x$ und P' das Moment $P' \frac{xx'}{l}$, so dass

$$M = \frac{x}{l} P_b b + \frac{x'}{l} P_a a + \frac{xx'}{l} P'$$

wird. Verschiebt man nun den Zug um die unendlich kleine Strecke ξ nach links, so geht M über in

$$\begin{aligned} M + dM &= \frac{x}{l} P_b (b + \xi) + \frac{x'}{l} P_a (a - \xi) + \frac{xx'}{l} P' (x - \xi) \\ &= \frac{x}{l} P_b b + \frac{x'}{l} P_a a + \frac{xx'}{l} P' + \frac{\xi x}{l} P_b - \frac{\xi x'}{l} (P_a + P') \\ &= M + \frac{\xi}{l} [x P_b - x' (P_a + P')] \end{aligned}$$

und es muss, wenn der Zuwachs dM des Momentes negativ sein soll, werden, d. h.

$$(2) \quad \frac{P_b}{P_a + P'} < \frac{x'}{x}.$$

Ebenso folgt, dass einer Verschiebung nach rechts

$$(3) \quad \frac{P_b + P'}{P_a} > \frac{x'}{x}$$

entsprechen muss. Ist nun (Fig. 128) $\overline{EE'}$ gleich der Summe der auf dem Träger AB befindlichen Lasten (d. i. hier gleich der Summe der Lasten 6 bis 20) und zieht man $\overline{EF} = l = 36^m$, macht auf dieser Geraden $\overline{EJ} = x' = 32,4^{m**}$, verbindet F mit E' und zieht $JN \parallel \overline{FE'}$, so muss JN die über dem fraglichen Querschnitte liegende Last P' treffen. Es ist nämlich dann $\overline{EG} = P_b$, $\overline{GK} = P'$, $\overline{KE'} = P_a$ und es folgt:

*) Am einfachsten verfährt man, statt die nachfolgende Betrachtung anzustellen, dem Träger verschiedene Lagen gegen den Zug zuzuweisen, für diese Lagen yp_1 zu ermitteln und die Ergebnisse zu vergleichen.

***) In Fig. 128 wurde $\overline{EF} = \frac{1}{3} l$ und $\overline{EJ} = \frac{1}{3} x'$ gemacht.

$$\frac{\overline{EN}}{\overline{NE'}} = \frac{x'}{x} \text{ also } \frac{\overline{EG}}{\overline{GE'}} < \frac{x'}{x} \text{ und } \frac{\overline{EK}}{\overline{KE'}} > \frac{x'}{x}$$

d. h.

$$\frac{P_b}{P_a + P'} < \frac{x'}{x} \text{ und } \frac{P_b + P'}{P_a} > \frac{x'}{x}$$

In derselben Weise überzeugt man sich, dass das grösste Moment entsteht

für Querschnitt 2, wenn Last No. 7 über 2 steht,

„ „ 3, „ „ „ 7 „ 3 „

„ „ 4, „ „ „ 9 „ 4 „

„ „ 5, „ „ „ 10 „ 5 „

In Figur 128 wurden, um die Zeichnung nicht undeutlich zu machen, nur die Schlusslinien s_1 , s_2 und s_5 , sowie die Ordinaten y_{p1} , y_{p2} und y_{p5} eingetragen. Die anderen y_p wurden ähnlich ermittelt und in Figur 130 als Ordinaten des Momentenpolygons aufgetragen.

Zu den Werthen y_p sind die der ständigen Belastung (g) entsprechenden Ordinaten y_g zu fügen. Nach Seite 134 u. 135 sind die Momente M_g gleich den Ordinaten einer Parabel vom Pfeile $\frac{1}{8}gl^2$. Wird

$$H = 115,2' \text{ gesetzt, so ist } \frac{1}{8} \frac{gl^2}{H} = \frac{1,74 \cdot 36^2}{8 \cdot 115,2} = 2,45^m \text{ der Pfeil der}$$

die y_g liefernden Parabel. Diese ist in Fig. 130 dargestellt worden. Für die Ordinaten

$$y = y_p + y_g$$

und die Momente $M = Hy$ ergeben sich die Werthe

$$y_1 = 3,53^m \quad M_1 = 115,2 \cdot 3,53 = 407^m$$

$$y_2 = 6,09^m \quad M_2 = 115,2 \cdot 6,09 = 702^m$$

$$y_3 = 7,97^m \quad M_3 = 115,2 \cdot 7,97 = 918^m$$

$$y_4 = 9,03^m \quad M_4 = 115,2 \cdot 9,03 = 1040^m$$

$$y_5 = 9,46^m \quad M_5 = 115,2 \cdot 9,46 = 1090^m$$

Verbindet man die Endpunkte der Ordinaten y durch gerade Linien und sieht davon ab, dass ein Theil der ständigen Belastung, nämlich das Eigengewicht des Balkens, unmittelbar wirkend ist, so erhält man für alle zwischen den Querträgern gelegenen Querschnitte etwas zu grosse Momente. Für den Querschnitt C (Fig. 130) zwischen 3 und 4 ist z. B.

$$y = y_3 + (y_4 - y_3) \frac{\xi^x}{\lambda} = y_3 \frac{\xi^x}{\lambda} + y_4 \frac{\xi^x}{\lambda}$$

Da nun im Allgemeinen y_3 und y_4 bei verschiedenen Laststellungen Maxima werden, so wird durch gleichzeitiges Einführen von $max y_3$ und $max y_4$ in die vorstehende Gleichung der Werth y zu gross gefunden. Der hierbei begangene Fehler ist aber stets unbedeutend, er wird auch

durch den von der Vernachlässigung der unmittelbaren Wirkung des Trägergewichtes herrührenden Fehler verkleinert.

Will man für einen zwischen zwei Querträgern ($m - 1$) und (m) gelegenen Balkenquerschnitt C die grösste Ordinate y_p genauer bestimmen, Fig. 131, so muss man den Balken so unter den Lastenzug stellen, dass eine der schwersten Lasten über ($m - 1$) oder über (m) liegt. Ausser der Schlusslinie s ist noch die dem Feld λ entsprechende Schlusslinie s' einzutragen, worauf y_p als die Strecke gefunden wird, welche die Geraden s und s' auf der Senkrechten durch C abschneiden. Es folgt dies aus dem früher bewiesenen Gesetze, dass das Momentenpolygon für mittelbare Belastung ein dem Seilpolygone für unmittelbare Belastung eingeschriebenes Polygon ist; seine Ecken liegen senkrecht unter den Querträgern. Die gefährlichste Stellung des Lastenzuges findet man am schnellsten durch Probiren. Der Träger wird gegen den Zug verschoben, und die Ergebnisse für verschiedene Stellungen werden mit einander verglichen.

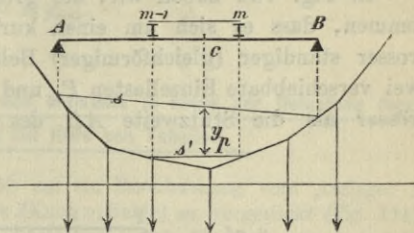


Fig. 131.

b. Unmittelbare Belastung.

83. Querkräfte. Entsteht für irgend einen Querschnitt die grösste positive Querkraft, sobald die erste Last des vom rechten Auflager aus vorrückenden Lastenzuges am fraglichen Querschnitte (und zwar unmittelbar rechts von demselben) liegt, so ist $_{max}Q_p$ gleich dem linken Stützenwiderstande A , also z. B. für den Querschnitt 5 in Fig. 126: $_{max}Q_p = A_5$. Rückt die zweite Last bis an diesen Querschnitt, so entsteht bei unmittelbarer Belastung: $Q_p = A - P_1$, wobei A die bei P_1 gemessene Ordinate ($a'b'$) des A -Polygons bedeutet. Ist $A - P_1 > A_5$, so ist $_{max}Q_p = A - P_1$, vorausgesetzt, dass der Zug nicht noch weiter nach A hin verschoben werden muss.

Der Fall einer unmittelbaren Belastung kommt nur bei verhältnissmässig kurzen Trägern vor, und es ergibt sich dann bei denjenigen Belastungen, für welche Eisenbahn- und Strassenbrücken berechnet zu werden pflegen, stets $_{max}Q$ gleich der unter dem fraglichen Querschnitte gemessenen Ordinate des A -Polygons.

84. Momente für bestimmte Querschnitte. Grösstes Maximalmoment. Die Ermittlung der Momente $_{max}M$ für bestimmte Quer-

schnitte wurde bereits in No. 82 erledigt (vergl. die Berechnung von $M_1, M_2 \dots$). Wird aber das grösste aller Maximalmomente gesucht, so muss ein anderer Weg eingeschlagen werden, da die Lage des Querschnitts, welchem dieses Moment entspricht, zunächst unbekannt ist, und weil ferner die veränderliche und die ständige Last nicht mehr getrennt behandelt werden dürfen.

In Fig. 132 haben wir, der grösseren Deutlichkeit wegen, angenommen, dass es sich um einen kurzen Träger mit verhältnissmässig grosser ständiger (gleichförmiger) Belastung g handelt, und dass nur zwei verschiebbare Einzellasten P_1 und P_2 in Betracht kommen. CD ist grösser als die Stützweite AB des Trägers. Die gleichförmige Be-

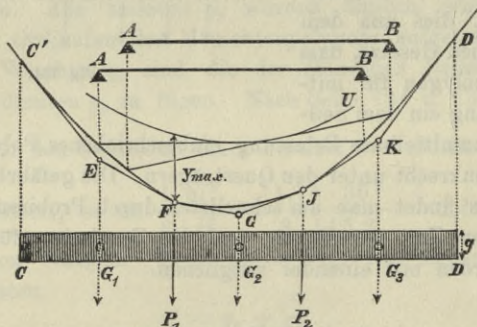


Fig. 132.

lastung wurde durch senkrechte, mit den Einzellasten zusammenfallende Schnitte in drei Streifen zerlegt, deren Gewichte G_1, G_2, G_3 sein mögen; sodann wurde zu den Einzellasten G_1, P_1, G_2, P_2, G_3 mit der beliebigen Polweite H das Seilpolygon $C'GD'$ gezeichnet. Rundet man die Ecken $C'EF, FGJ, JKD'$ desselben durch Parabelbögen ab, welche die jene Ecken bildenden Seilpolygonseiten in den Punkten C', F, J, D' berühren, so bilden diese Bögen (vergl. Seite 34) das Seilpolygon für die aus der gleichmässigen Belastung und den Einzellasten zusammengesetzte Belastung.

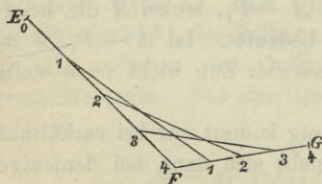


Fig. 133.

Die Parabelbögen bestimmt man am zweckmässigsten mit Hilfe von Tangenten nach dem in der Fig. 133 dargestellten Verfahren. Die Seiten EF und FG der abzurundenden Ecke wurden in gleiche Theile zerlegt

und die gleichbezeichneten Theilpunkte durch gerade Linien verbunden. Diese Geraden sind Tangenten an die gesuchte Parabel.

Nach Aufzeichnung des Seilpolygons giebt man dem zu untersuchenden Balken verschiedene Stellungen gegen das Lastensystem und bestimmt die zugehörigen Schlusslinien sowie die von diesen umhüllte Linie U . Ist dann y_{max} der grösste senkrechte Abstand der Linie U vom Seilpolygon, so erhält man das grösste Maximalmoment:

$$M = Hy_{max}.$$

c. Berechnung der Stützenwiderstände und Momente in Folge der Belastung durch einen Eisenbahnzug mit Hilfe von Tabellen.

85. Stützenwiderstand A_m . Es sei ein Eisenbahnzug vom Auflager B aus bis zu irgend einem Querschnitte (Knotenpunkte) m vorgerückt (Fig. 134). Die Lasten seien mit P_1, P_2, \dots, P_n bezeichnet, ihre Abstände von B mit b_1, b_2, \dots, b_n und die Abstände der Lasten von der letzten Last mit c_1, c_2, \dots . Der Widerstand der linken Stütze wird:

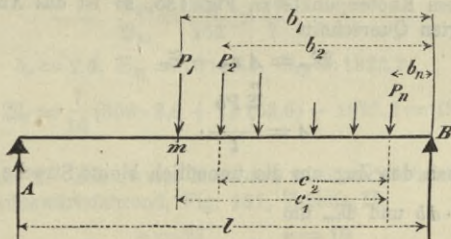


Fig. 134.

$$A_m = \frac{P_1 b_1 + P_2 b_2 + \dots + P_n b_n}{l} = \frac{\sum P b}{l} = \frac{\sum P (b_n + c)}{l} = \frac{1}{l} \left(b_n \sum P + \sum P c \right),$$

und mit der kurzen Bezeichnung:

$$\sum_1^n P = \mathfrak{P}_n, \quad \sum_1^n P c = \mathfrak{C}_n;$$

$$A_m = \frac{1}{l} (\mathfrak{P}_n b_n + \mathfrak{C}_n).$$

Die Werthe \mathfrak{P}_n und \mathfrak{C}_n können für einen bestimmten Lastenzug ein für allemal berechnet werden. Dazu beachte man, dass zwischen den statischen Momenten \mathfrak{C}_n und \mathfrak{C}_{n+1} die Beziehung

$$\mathfrak{C}_{n+1} = \mathfrak{C}_n + \mathfrak{P}_n e_n$$

besteht, wobei e_n den Abstand der Last P_n von der Last P_{n+1} bedeutet.

Für den von uns angenommenen Güterzug Fig. 114 ergeben sich, je nach der Stellung der beiden den Zug führenden Lokomotiven die in den Tabellen I, II und III aufgeführten Werthe. Die erste Spalte giebt die Anzahl n der Lasten an und die zweite den Abstand c_1 der Last P_1 von der Last P_n , das ist die *Zuglänge*.

Die Ansätze für die Berechnung der ersten Zahlenwerthe \mathfrak{C} lassen wir hier folgen. Es ist

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{P}_1 = 16^t & \mathfrak{C}_1 = 0 \\ \mathfrak{P}_2 = 32^t & \mathfrak{C}_2 = 0 + 16 \cdot 1,2 = 19,2^{tm} \\ \mathfrak{P}_3 = 48^t & \mathfrak{C}_3 = 19,2 + 32 \cdot 1,2 = 57,6^{tm} \\ \mathfrak{P}_4 = 64^t & \mathfrak{C}_4 = 57,6 + 48 \cdot 1,2 = 115,2^{tm} \\ \mathfrak{P}_5 = 76^t & \mathfrak{C}_5 = 115,2 + 64 \cdot 1,2 = 371,2^{tm} \end{array}$$

Beispiel. Die Stützweite des Balkens AB sei $52,2^m$. Ein von zwei vorwärtsfahrenden Lokomotiven geführter Güterzug (Tabelle I) rückt von B aus um $47,7^m$ vor. Es ergibt sich dann $c_1 = 46,2^m$, $b_n = 47,7 - 46,2 = 1,5^m$, $\mathfrak{P}_n = 284^t$, $\mathfrak{C}_n = 7650,4^{tm}$

$$\begin{aligned} Al &= 284 \cdot 1,5 + 7650,4 = 8076,4^{tm} \\ A &= \frac{8076,4}{52,2} = 155^t. \end{aligned}$$

86. Momente. Steht die r^{te} -Achse eines von B aus vorrückenden Eisenbahnzuges über dem Knotenpunkte m , Fig. 135, so ist das Angriffsmoment der den durch m gelegten Querschnitt

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_m &= Ax_m - \mathfrak{C}_r \\ \text{wo} \quad A &= \frac{\sum_1^n Pb}{l}. \end{aligned}$$

Verschiebt man den Zug um die unendlich kleine Strecke db nach links, so wächst A um $\sum_1^n P \cdot db$ und \mathfrak{M}_m um

$$d\mathfrak{M}_m = db \left[\frac{\sum_1^n P}{l} x_m - \sum_1^r P \right],$$

und es muss daher, wenn \mathfrak{M}_m abnehmen soll, wenn also die angenommene Zugstellung die gefährlichste sein soll,

$$\sum_1^n P \frac{x_m}{l} < \sum_1^r P$$

sein, d. h.

$$\leftarrow \quad \text{(I)} \quad \frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_r} < \frac{l}{x_m}.$$

Ebenso findet man, dass \mathfrak{M}_m in Folge einer kleinen Verschiebung des Eisenbahnzuges nach rechts abnimmt, sobald

$$\rightarrow \quad \text{(II)} \quad \frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_{r-1}} > \frac{l}{x_m}$$

ist. Die beiden Ungleichungen (I) und (II) müssen also erfüllt sein, wenn die Zugstellung den grössten Werth \mathfrak{M}_m hervorbringen soll. Es lassen sich im allgemeinen verschiedene Zugstellungen angeben, welche die Bedingungen I u. II befriedigen, doch weichen dann die Ergebnisse \mathfrak{M}_m nur wenig von einander ab.

Beispiel. Ein Balken von 80^m Stützweite wird durch die Knotenpunkte in 16 gleichlange Felder zerlegt. Für den *mittelsten Knotenpunkt* $m = 8$ erhält man, entsprechend der in Fig. 135 angegebenen Zugstellung mit Hilfe von Tabelle III:

$$\begin{aligned} n &= 26 & r &= 13 \\ \leftarrow \frac{\mathfrak{P}_{26}}{\mathfrak{P}_{13}} &= \frac{344}{184} < \frac{l}{x_8} = 2,0 \\ \rightarrow \frac{\mathfrak{P}_{26}}{\mathfrak{P}_{12}} &= \frac{344}{168} > 2,0 \\ b_n &= 1,8^m, \quad \mathfrak{S}_{26} = 12\,121,6^m, \quad \mathfrak{S}_{13} = 2124,8^m \\ \mathfrak{M}_m &= \frac{x_m}{l} (\mathfrak{P}_n b_n + \mathfrak{S}_n) - \mathfrak{S}_r \\ \mathfrak{M}_8 &= \frac{1}{2} (344 \cdot 1,8 + 12\,121,6) - 2124,8 = 4246^m. \end{aligned}$$

Für den *Knotenpunkt* 7 findet man, Fig. 136, Tabelle III,

$$\begin{aligned} n &= 27 & r &= 12 \\ \leftarrow \frac{\mathfrak{P}_{27}}{\mathfrak{P}_{12}} &= \frac{356}{168} < \frac{l}{x_7} = \frac{16}{7} \\ \rightarrow \frac{\mathfrak{P}_{27}}{\mathfrak{P}_{11}} &= \frac{356}{152} > \frac{16}{7} \\ b_n &= 2,6, \quad \mathfrak{S}_{27} = 13\,153,6, \quad \mathfrak{S}_{12} = 1923,2 \\ \mathfrak{M}_7 &= \frac{7}{16} (356 \cdot 2,6 + 13\,153,6) - 1923,2 = 4236^m. \end{aligned}$$

Knotenpunkt 6. Die zweite Maschine wird vorwärtsfahrend angenommen, die erste bleibt rückwärtsfahrend, Fig. 137, Tabelle II.

$$\begin{aligned} n &= 27 & r &= 10 \\ \leftarrow \frac{\mathfrak{P}_{27}}{\mathfrak{P}_{10}} &= \frac{356}{148} < \frac{l}{x_6} = \frac{8}{3} \\ \rightarrow \frac{\mathfrak{P}_{27}}{\mathfrak{P}_9} &= \frac{356}{132} > \frac{8}{3} \\ b_n &= 2,8^m, \quad \mathfrak{S}_{27} = 13\,228, \quad \mathfrak{S}_{10} = 1240,4, \\ \mathfrak{M}_6 &= \frac{3}{8} (356 \cdot 2,8 + 13\,228) - 1240,4 = 3094^m. \end{aligned}$$

Knotenpunkt 5, Fig. 138, Tabelle II.

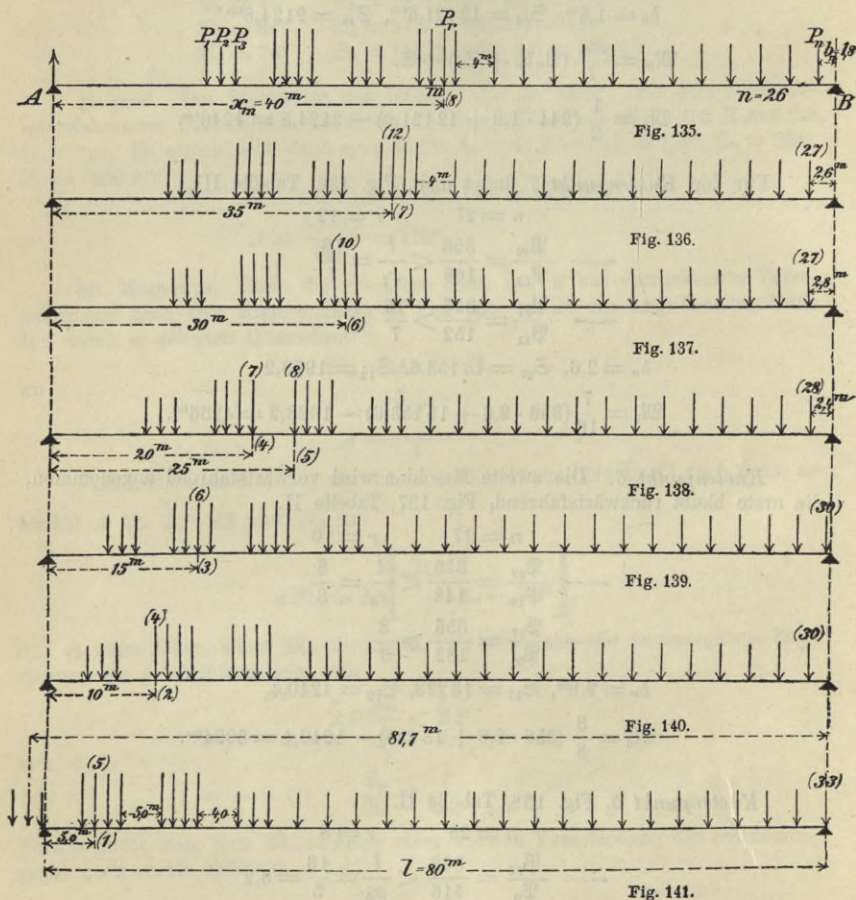
$$\begin{aligned} n &= 28 & r &= 8 \\ \leftarrow \frac{\mathfrak{P}_{28}}{\mathfrak{P}_8} &= \frac{368}{116} < \frac{l}{x_5} = \frac{16}{5} = 3,2 \\ \rightarrow \frac{\mathfrak{P}_{28}}{\mathfrak{P}_7} &= \frac{368}{100} > 3,2 \\ b_n &= 2,4^m, \quad \mathfrak{S}_{28} = 14\,296, \quad \mathfrak{S}_8 = 942,8 \\ \mathfrak{M}_5 &= \frac{5}{16} (368 \cdot 2,4 + 14\,296) - 942,8 = 3801^m. \end{aligned}$$

Knotenpunkt 4, Fig. 138, Tabelle II.

$$n = 28 \quad r = 7$$

$$\leftarrow \frac{\mathfrak{P}_{28}}{\mathfrak{P}_7} = \frac{368}{100} < \frac{l}{x_4} = 4$$

$$\rightarrow \frac{\mathfrak{P}_{28}}{\mathfrak{P}_8} = \frac{368}{84} > 4$$



$$b_n = 2,4^m, \mathfrak{E}_{28} = 14\,296, \mathfrak{E}_7 = 442,8$$

$$\mathfrak{M}_4 = \frac{1}{4} (368 \cdot 2,4 + 14\,296) - 442,8 = 3352^m.$$

Knotenpunkt 3, Fig. 139, Tabelle II.

$$\begin{aligned}
 & n = 30 \qquad r = 6 \\
 \leftarrow & \frac{\mathfrak{P}_{30}}{\mathfrak{P}_3} = \frac{392}{84} < \frac{l}{x_3} = \frac{16}{3} \\
 \rightarrow & \frac{\mathfrak{P}_{30}^*)}{\mathfrak{P}_5} = \frac{380}{68} > \frac{16}{3} \\
 & b_n = 0,2^m, \mathfrak{S}_{30} = 16540, \mathfrak{S}_6 = 342,0 \\
 & \mathfrak{M}_3 = \frac{3}{16} (392 \cdot 0,2 + 16540) - 342,0 = 2774^m.
 \end{aligned}$$

Knotenpunkt 2, Fig. 140, Tabelle II.

$$\begin{aligned}
 & n = 30 \qquad r = 4 \\
 \leftarrow & \frac{\mathfrak{P}_{30}}{\mathfrak{P}_4} = \frac{392}{52} < \frac{l}{x_2} = 8,0 \\
 \rightarrow & \frac{\mathfrak{P}_{30}}{\mathfrak{P}_3} = \frac{392}{36} > 8,0 \\
 & b_n = 2,8^m, \mathfrak{S}_{30} = 16540, \mathfrak{S}_4 = 198,0 \\
 & \mathfrak{M}_2 = \frac{1}{8} (392 \cdot 2,8 + 16540) - 198,0 = 2007^m.
 \end{aligned}$$

Knotenpunkt 1, Fig. 141, Tabelle II. Der Tender der ersten Maschine hat die Brücke verlassen.

$$\begin{aligned}
 & n = 33 \qquad r = 5, \mathfrak{P}_{33} = 428, \mathfrak{P}_5 = 68, \mathfrak{P}_3 = 36 \\
 \leftarrow & \frac{\mathfrak{P}_{33} - \mathfrak{P}_3}{\mathfrak{P}_5 - \mathfrak{P}_3} = \frac{392}{32} < \frac{l}{x_1} = 16 \\
 \rightarrow & \frac{\mathfrak{P}_{33} - \mathfrak{P}_3}{\mathfrak{P}_4 - \mathfrak{P}_3} = \frac{392 - 12}{16} > 16 \\
 & b_n = 0, \mathfrak{S}_n = 20176 \\
 & A l = 20176 - 36 \cdot 81,7 = 17234,8^m. \\
 & \mathfrak{M}_1 = A x - 16 \cdot 1,2 = \frac{1}{16} 17234,8 - 19,2 = 1058^m.
 \end{aligned}$$

*) Die letzte Achse liegt so nahe am Auflager B, dass sie in Folge einer kleinen endlichen Verschiebung des Zuges nach rechts, den Träger verlässt.

Tabelle I.

Tonnen Meter	Lokomotive				Tender				Lokomotive				Tender				Güterwagen							
	16	16	16	16	12	12	12	12	16	16	16	16	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
	1,2	1,2	1,2	4,0	1,5	1,5	1,5	4,0	1,2	1,2	1,2	4,0	1,5	1,5	1,5	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0

n	c_1	P_n	S_n	n	c_1	P_n	S_n
1	0	16	0	31	76,2	404	17 790,4
2	1,2	32	19,2	32	79,2	416	19 002,4
3	2,4	48	57,6	33	82,2	428	20 250,4
4	3,6	64	115,2	34	85,2	440	21 534,4
5	7,6	76	371,2	35	88,2	452	22 854,4
6	9,1	88	485,2	36	91,2	464	24 210,4
7	10,6	100	617,2	37	94,2	476	25 602,4
8	14,6	116	1 017,2	38	97,2	488	27 030,4
9	15,8	132	1 156,4	39	100,2	500	28 494,4
10	17,0	148	1 314,8	40	103,2	512	29 994,4
11	18,2	164	1 492,4	41	106,2	524	31 530,4
12	22,2	176	2 148,4	42	109,2	536	33 102,4
13	23,7	188	2 412,4	43	112,2	548	34 710,4
14	25,2	200	2 694,4	44	115,2	560	36 354,4
15	28,2	212	3 294,4	45	118,2	572	38 034,4
16	31,2	224	3 930,4	46	121,2	584	39 750,4
17	34,2	236	4 602,4	47	124,2	596	41 502,4
18	37,2	248	5 310,4	48	127,2	608	43 290,4
19	40,2	260	6 054,4	49	130,2	620	45 114,4
20	43,2	272	6 834,4	50	133,2	632	46 974,4
21	46,2	284	7 650,4	51	136,2	644	48 870,4
22	49,2	296	8 502,4	52	139,2	656	50 802,4
23	52,2	308	9 390,4	53	142,2	668	52 770,4
24	55,2	320	10 314,4	54	145,2	680	54 774,4
25	58,2	332	11 274,4	55	148,2	692	56 814,4
26	61,2	344	12 270,4	56	151,2	704	58 890,4
27	64,2	356	13 302,4	57	154,2	716	61 002,4
28	67,2	368	14 370,4	58	157,2	728	63 150,4
29	70,2	380	15 474,4	59	160,2	740	65 334,4
30	73,2	392	16 614,4	60	163,2	752	67 554,4

Tabelle II.

Tonnen Meter	Tender			Lokomotive				Lokomotive				Tender			Güterwagen		
	12	12	12	16	16	16	16	16	16	16	16	12	12	12	12	12	12
	1,5	1,5	4,0	1,2	1,2	1,2	5,0	1,2	1,2	1,2	4,0	1,5	1,5	3,0	3,0	3,0	3,0

n	c_1	\mathfrak{P}_n	\mathfrak{E}_n	n	c_1	\mathfrak{P}_n	\mathfrak{E}_n
1	0	12	0	31	77,2	404	17 716
2	1,5	24	18	32	80,2	416	18 928
3	3,0	36	54	33	83,2	428	20 176
4	7,0	52	198	34	86,2	440	21 460
5	8,2	68	260,4	35	89,2	452	22 780
6	9,4	84	342	36	92,2	464	24 136
7	10,6	100	442,8	37	95,2	476	25 528
8	15,6	116	942,8	38	98,2	488	26 956
9	16,8	132	1 082	39	101,2	500	28 420
10	18,0	148	1 240,4	40	104,2	512	29 920
11	19,2	164	1 418	41	107,2	524	31 456
12	23,2	176	2 074	42	110,2	536	33 028
13	24,7	188	2 338	43	113,2	548	34 636
14	26,2	200	2 620	44	116,2	560	36 280
15	29,2	212	3 220	45	119,2	572	37 960
16	32,2	224	3 856	46	122,2	584	39 676
17	35,2	236	4 528	47	125,2	596	41 428
18	38,2	248	5 236	48	128,2	608	43 216
19	41,2	260	5 980	49	131,2	620	45 040
20	44,2	272	6 760	50	134,2	632	46 900
21	47,2	284	7 576	51	137,2	644	48 796
22	50,2	296	8 428	52	140,2	656	50 728
23	53,2	308	9 316	53	143,2	668	52 696
24	56,2	320	10 240	54	146,2	680	54 700
25	59,2	332	11 200	55	149,2	692	56 740
26	62,2	344	12 196	56	152,2	704	58 816
27	65,2	356	13 228	57	155,2	716	60 928
28	68,2	368	14 296	58	158,2	728	63 076
29	71,2	380	15 400	59	161,2	740	65 260
30	74,2	392	16 540	60	164,2	752	67 480

Tabelle III.

Tonnen Meter	Tender			Lokomotive				Tender			Lokomotive				Güterwagen					
	12	—	12 — 12	16	—	16 — 16	— 16	12	—	12 — 12	16	—	16 — 16	— 16	12	—	12 — 12	12	—	12 — 12
	1,5	1,5	4,0	1,2	1,2	1,2	4,0	1,5	1,5	4,0	1,2	1,2	1,2	4,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0

n	c ₁	⊘ _n	⊘ _n	n	c ₁	⊘ _n	⊘ _n
1	0	12	0	31	77,2	404	17 641,6
2	1,5	24	18	32	80,2	416	18 853,6
3	3,0	36	54	33	83,2	428	20 101,6
4	7,0	52	198	34	86,2	440	21 385,6
5	8,2	68	260,4	35	89,2	452	22 705,6
6	9,4	84	342,0	36	92,2	464	24 061,6
7	10,6	100	442,8	37	95,2	476	25 453,6
8	14,6	112	842,8	38	98,2	488	26 881,7
9	16,1	124	1 010,8	39	101,2	500	28 345,6
10	17,6	136	1 196,8	40	104,2	512	29 845,6
11	21,6	152	1 740,8	41	107,2	524	31 381,6
12	22,8	168	1 923,2	42	110,2	536	32 953,6
13	24,0	184	2 124,8	43	113,2	548	34 561,6
14	25,2	200	2 345,6	44	116,2	560	36 205,6
15	29,2	212	3 145,6	45	119,2	572	37 885,6
16	32,2	224	3 781,6	46	122,2	584	39 601,6
17	35,2	236	4 453,6	47	125,2	596	41 353,6
18	38,2	248	5 161,6	48	128,2	608	43 141,6
19	41,2	260	5 905,6	49	131,2	620	44 965,6
20	44,2	272	6 685,6	50	134,2	632	46 825,6
21	47,2	284	7 501,6	51	137,2	644	48 721,6
22	50,2	296	8 353,6	52	140,2	656	50 653,6
23	53,2	308	9 241,6	53	143,2	668	52 621,6
24	56,2	320	10 165,6	54	146,2	680	54 625,6
25	59,2	332	11 125,6	55	149,2	692	56 665,6
26	62,2	344	12 121,6	56	152,2	704	58 741,6
27	65,2	356	13 153,6	57	155,2	716	60 853,6
28	68,2	368	14 221,6	58	158,2	728	63 001,6
29	71,2	380	15 325,6	59	161,2	740	65 185,6
30	74,2	392	16 465,6	60	164,2	752	67 405,6

87. Fortsetzung. Ueberschreitet die Abscisse x des Querschnitts bei einem Balken von grösserer Stützweite einen bestimmten Werth, so liegt bei der das Moment ${}_{max} M_m$ erzeugenden Laststellung eine Güterwagenachse über m . Man erhält in diesem Falle für ${}_{max} M_m$ einen besonders einfachen Ausdruck, wenn man die Güterwagen durch eine gleichförmige Belastung p , welche etwa 2,5^m hinter der letzten Lokomotivachse beginnt, ersetzt.

Mit den aus Fig. 142 ersichtlichen Bezeichnungen findet man nach dem auf Seite 141 zur Berechnung von M angegebenen Verfahren

$$\begin{aligned} M &= \frac{x}{l} \cdot \frac{p x'^2}{2} + \frac{x'}{l} \left[\Sigma P(\xi - e) + \frac{p(x^2 - \xi^2)}{2} \right] \\ &= \frac{p x x'}{2} - \frac{x'}{l} \Sigma P e + \frac{x'}{l} \left(\xi \Sigma P - \frac{p \xi^2}{2} \right). \end{aligned}$$

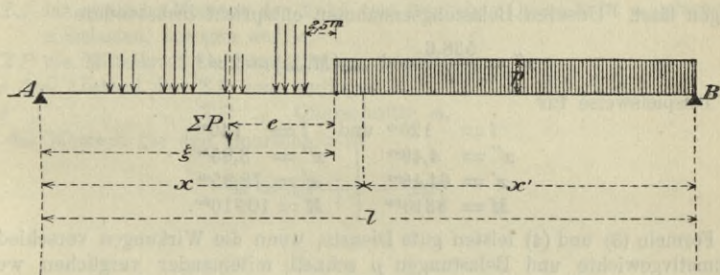


Fig. 142.

M wird ein Maximum, sobald ξ den festen, von der Lage des Querschnitts m unabhängigen Werth

$$(1) \quad \xi = \frac{\Sigma P}{p}$$

annimmt; es entsteht

$$(2) \quad M_{max} = \frac{p x x'}{2} + \frac{x'}{l} \left(\Sigma P \frac{\xi}{2} - \Sigma P e \right).$$

Für die von uns gewählte Zuanordnung (Tabelle III) ist

$$\Sigma P = 200^t, \quad p = \frac{12,0^t}{3,0^m} = 4,0^t/m, \quad \xi = 50^m,$$

woraus zunächst folgt, dass $x \geq 50^m$ sein muss, damit Formel (2) angewendet werden darf. Ferner ist

$$\Sigma P e = \textcircled{C}_{14} + \textcircled{F}_{14} 2,5 = 2345,6 + 200 \cdot 2,5 = 2845,6^{\text{tm}}$$

$$\Sigma P \frac{\xi}{2} - \Sigma P e = 5000 - 2845,6 = 2154,4^{\text{tm}},$$

und es ergibt sich daher die einfache Gleichung

$${}_{max} M = 2 x x' + 2154,4 \frac{x'}{l}.$$

Als Beispiel wählen wir eine Brücke von 140^m Spannweite und 5^m Feldweite. Wir erhalten

$${}_{max} M = 2 x x' + 15,4 x'$$

und finden für

$$x = 50^m, \quad 55^m, \quad 60^m, \quad 65^m, \quad 70^m$$

$$M = 10390^m, \quad 10660^m, \quad 10830^m, \quad 10900^m, \quad 10880^m.$$

Das grösste M entsteht bei $x = 65^m$, es unterscheidet sich aber nicht wesentlich von dem in der Mitte erhaltenen Werthe.

Wir führen noch an, dass das durch die Formel (2) gegebene Moment für

$$(3) \quad x'' = \frac{l}{2} - x = \frac{\Sigma P \frac{\xi}{2} - \Sigma Pe}{pl}$$

ein Maximum wird, und dass sich dieses grösste aller Maximalmomente auf die einfache Form

$$(4) \quad \max(M_{max}) = \frac{px'^2}{2}$$

bringen lässt. Unseren Belastungsannahmen entspricht insbesondere

$$x'' = \frac{538,6}{l} \text{ und } \max(M_{max}) = 2x'^2$$

also beispielsweise für

$$\begin{array}{l|l} l = 120^m & \text{und } l = 140^m \\ x'' = 4,49^m & | \quad x'' = 3,85^m \\ x' = 64,49^m & | \quad x' = 73,85^m \\ M = 8310^m & | \quad M = 10910^m \end{array}$$

Die Formeln (3) und (4) leisten gute Dienste, wenn die Wirkungen verschiedener Lokomotivgewichte und Belastungen p schnell miteinander verglichen werden sollen. Nimmt man z. B. zwei rückwärtsfahrende Lokomotiven mit den in

Fig. 113 (S. 122) angegebenen Achslasten und Radständen an, ferner $p = \frac{12,0}{3,3} = \frac{40}{11}^m$, so erhält man

$$\Sigma P = 2 \cdot 56 + 2 \cdot 36 = 184^t, \quad \xi = \frac{184 \cdot 11}{40} = 50,6^m,$$

$$\Sigma Pe = 56 \left(2,5 + 1,3 + \frac{1,3}{2} \right) + (36 + 56 + 36) \cdot 19,55 = 2751,60^m,$$

$$\Sigma P \frac{\xi}{2} - \Sigma Pe = 1903,6,$$

mithin

$$x'' = \frac{523,5}{l} \text{ und } \max(M_{max}) = \frac{20}{11} x'^2.$$

also für $l = 120^m$ und $l = 140^m$

$$\begin{array}{l|l} x'' = 4,36^m & | \quad x'' = 3,74^m \\ M = 7530^m & | \quad M = 9890^m \end{array}$$

88. Grösstes Moment M für unmittelbare Belastung. Wird die genaue Berechnung des grössten Momentes für unmittelbare Belastung verlangt, so dürfen Verkehrslast und Eigenlast nicht getrennt behandelt werden. Für weitgespannte Brücken ist also nicht der durch Gleich. (2) gegebene Werth M , sondern, wegen $M_p = \frac{gx x'}{2}$, der Werth

$$M_{max} = (p + g) \frac{x x'}{2} + \frac{x'}{l} \left(\Sigma P \frac{\xi}{2} - \Sigma Pe \right)$$

zu einem Maximum zu machen. Man findet dann

$$x'' = \frac{l}{2} - x = \frac{\Sigma P \frac{\xi}{2} - \Sigma P e}{(p + g)l} \text{ und}$$

$$\text{max}(M_{\text{max}}) = (p + g) \frac{x'^2}{2}.$$

Unmittelbare Belastung kommt indes nur bei kürzeren Trägern vor, z. B. den Schienenträgern von Eisenbahnbrücken, sobald die Schienen unmittelbar auf den Trägern liegen oder sobald dicht nebeneinander liegende Querswellen oder Langschwelen angeordnet sind.*) Der Einfluss des Eigengewichts spielt dann eine so untergeordnete Rolle, dass es sich empfiehlt, das Maximalmoment in Folge der Verkehrslast allein zu berechnen und hierzu das vom Eigengewichte in der Mitte des Trägers hervorgerufene Moment $\frac{1}{8} g l^2$ zu addiren. Bezeichnet, Fig. 143,

\mathcal{E}_m das statische Moment der links vom fraglichen Querschnitt m gelegenen Achslasten, bezogen auf m ,

ΣP die Mittelkraft aus sämtlichen Achslasten,

c den Abstand der ΣP vom Auflager B ,

s „ „ „ „ ΣP „ Querschnitte m ,

so ist das Moment für den Querschnitt m

$$M = \Sigma P \frac{c}{l} x - \mathcal{E}_m.$$

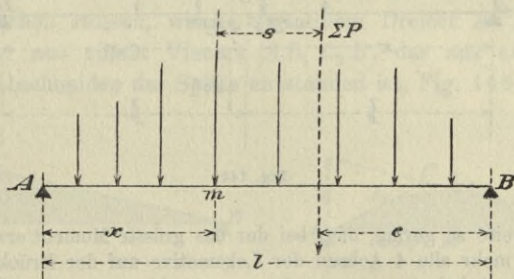


Fig. 143.

Der Werth

$$cx = (l - s - x)x$$

wird ein Maximum, sobald

$$l - s = 2x$$

ist. Daraus folgt

$$(5) \quad c = x:$$

*) Sehr oft rechnet man selbst bei grösseren Schwellenabständen mit unmittelbarer Belastung, weil man sich nicht an bestimmte Lagen der Schwellen binden will. Aus demselben Grunde werden auch — wenn die Querswellen fehlen — die zwischen Schiene und Träger liegenden Unterlagsplatten vernachlässigt.

d. h. der Querschnitt m und die Mittelkraft ΣP müssen von der Trägermitte gleich weit entfernt sein. Im allgemeinen wird man probeweise verschiedene Lasten über m annehmen und die berechneten Werthe

$$(6) \quad \max M = \Sigma P \frac{x^2}{l} - \mathcal{E}_m$$

miteinander vergleichen; in der Regel aber unterliegt die Wahl dieser Last keinem Zweifel.

Beispiel. Liegt die Stützweite zwischen rund 5^m und 11^m, so kommen für die ungünstigste Laststellung nur 4 Lokomotivachsen in Betracht, Fig. 144. Es ergibt sich dann

$$x = c = \frac{l}{2} - \frac{1,2}{4} = \frac{l}{2} - 0,3, \quad \Sigma P = 64^t, \quad \mathcal{E}_m = 16 \cdot 1,2 = 19,2^m,$$

$$M = \frac{64 \left(\frac{l}{2} - 0,3 \right)^2}{l} - 19,2.$$

$$(I) \quad M = 16l - 38,4 + \frac{5,76}{l}.$$

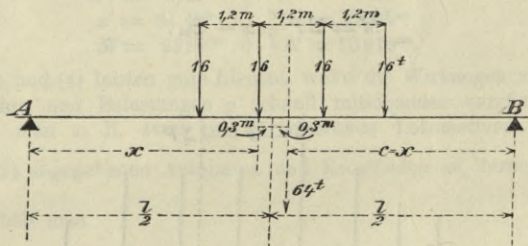


Fig. 144.

Ist die Stützweite so gering, dass bei der das grösste Moment erzeugenden Laststellung nicht mehr alle 4 Achsen der Lokomotive auf der Brücke liegen, so ist es rathsam, die Achslasten etwas grösser anzunehmen, um dem Umstande Rechnung zu tragen, dass einzelne Achsen in Folge der Bewegung der Maschine stärker belastet werden. Wir empfehlen, mit der Achslast 17^t oder 18^t oder 20^t zu rechnen, je nachdem sich nur 3 oder nur 2 Achsen oder nur eine Achse auf der Brücke befinden. Für diese drei Belastungsfälle findet man leicht die Gleichungen:

$$(II) \quad M = 12,75l - 20,4,$$

$$(III) \quad M = 9l - 10,8 + \frac{3,24}{l},$$

$$(IV) \quad M = 5l.$$

Bis zu $l = 2,35^m$ liefert Gleich. IV das grösste Moment, von $l = 2,35^m$ bis $2,86^m$ ist III anzuwenden und von $l = 2,86^m$ bis $5,2^m$ Formel II. Auf den Umstand, dass die Stützweite bereits mit $l = 4,8^m$ den vierfachen Radstand erreicht, nehmen wir keine Rücksicht, damit die Gültigkeitsbereiche der vier Gleichungen stetig ineinander übergehen.

§ 19.

Verwerthung der Einflusslinien des einfachen Balkens.

89. Bei der Ermittlung der von beweglichen Einzellasten hervorgerufenen Momente und Querkräfte haben wir von den Einflusslinien keinen Gebrauch gemacht. Es wäre auch umständlich, Grössen, deren Bestimmung mit Hilfe des Seilpolygons nur das Abgreifen einer einzigen Strecke und die Multiplikation derselben mit einem festen Werthe, der Polweite, erfordert, durch Angabe des Einflusses der einzelnen Lasten darstellen zu wollen, und hieran ändert auch der leicht zu beweisende, die Benutzung der Einflusslinien erleichternde Satz nichts, dass eine Lastengruppe innerhalb einer Strecke, der eine gerade Einflusslinie entspricht, durch ihre Mittelkraft ersetzt werden darf. Trotzdem sind die Einflusslinien des einfachen Balkens von grossem Nutzen. Ganz abgesehen von den Diensten, die sie uns im zweiten Bande unseres Buches bei der Berechnung statisch unbestimmter Träger leisten werden, gestatten sie häufig eine schnelle Zurückführung anderer Aufgaben auf die Berechnung der Momente und Querkräfte einfacher Balken. So werden wir bei der Untersuchung statisch bestimmter Träger häufig auf Einflussflächen stossen, welche aus einem Dreieck ACB (Fig. 145) bestehen, oder aus einem Viereck AL_1L_2B , das aus einem Dreieck ACB durch Abschneiden der Spitze entstanden ist, Fig. 146. Bezeichnet

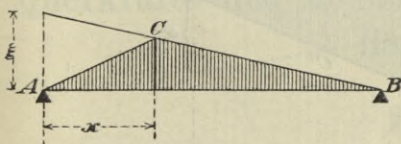


Fig. 145.

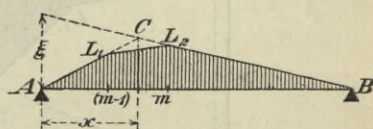


Fig. 146.

man dann mit x die Entfernung des Punktes C von der Lothrechten durch A und mit ξ die Strecke, welche die Gerade BC auf jener Lothrechten abschneidet, so kann man die Grösse Z , deren Einflusslinie das Dreieck ACB ist, in der Weise finden, dass man für den Querschnitt C eines einfachen Balkens das Moment \mathfrak{M} mit Hilfe eines Seilpolygons bestimmt und hierauf mit $\xi : x$ multiplicirt. Denn wäre $\xi = x$, so würde das Dreieck ACB vollständig mit der in Fig. 123, Seite 134 dargestellten Einflussfläche für M übereinstimmen.

Hat die Einflussfläche für Z die Form AL_1L_2B , so ermittle man mit Hilfe des in Fig. 131, Seite 143 angegebenen Verfahrens das

Moment $M = Hy$ für den zwischen den Querträgern $(m - 1)$ und m gelegenen Querschnitt C eines einfachen Balkens AB und multiplicire dasselbe wieder mit $\xi : x$. In beiden Fällen erhält man also Z in der Form

$$Z = \frac{\xi}{x} M = \frac{\xi}{x} Hy.$$

Auch die Berechnung von M mit Hilfe von Tabellen leistet häufig vortreffliche Dienste bei der Auswerthung derartiger Grössen Z .

90. Für viele Untersuchungen wird es sich als nützlich erweisen, die Aufgabe der Berechnung des Momentes M durch die Fragestellung zu erweitern. Das Feld F_1F_2 des Balkens AB (Fig. 147) wird durch-

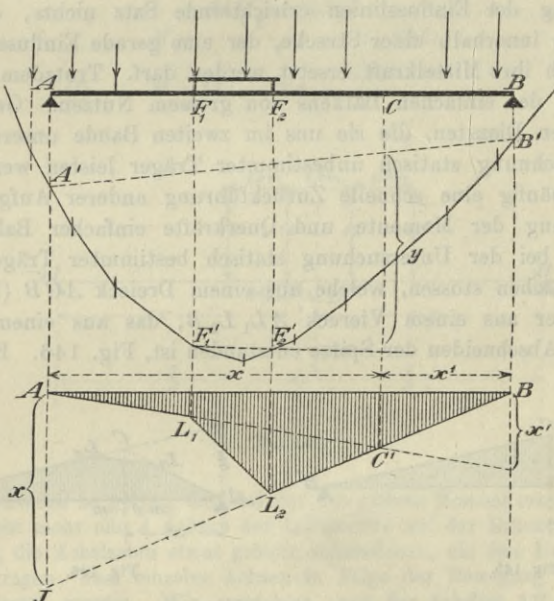


Fig. 147.

schnitten. Gesucht ist das Moment M der am Balkenstück AF_1 angreifenden äusseren Kräfte in Bezug auf einen Punkt C , der zwischen F_2 und B liegt.

Stellt man den Träger unter das die Lasten verbindende Seilpolygon und trägt man die Schlusslinien $A'B'$ und $F_1'F_2'$ ein, so sind diese Linien die äussersten Seilpolygonseiten für die an AF_1 angreifenden äusseren Kräfte. Sie schneiden auf der Lothrechten durch C die Strecke y ab und man erhält daher

$$M = Hy.$$

Die Einflusslinie für M aber wird folgendermaassen erhalten. Solange die über den Träger wandernde Last $P = 1$ rechts von F_2 liegt, greift am Balkenstück AF_1 nur die äussere Kraft A an; sie erzeugt $M = Ax$. Liegt P links von F_1 , so entsteht $M = Bx'$. Im ersten Falle wird die mit x multiplicirte A -Linie Einflusslinie für M , im zweiten die mit x' multiplicirte B -Linie, genau wie bei der Einflusslinie in Fig. 123, Seite 134, nur mit dem Unterschiede, dass der Schnittpunkt C' dieser beiden Linien jetzt zwischen F_2 und B liegt, lothrecht unter C . Innerhalb des Feldes F_1F_2 gilt die Gerade L_1L_2 .

Unterscheidet sich nun die Einflusslinie für eine Grösse Z von der in der Figur 147 abgebildeten lediglich dadurch, dass AJ nicht $= x$ sondern $= \xi$ ist, so wird

$$Z = \frac{\xi}{x} M = \frac{\xi}{x} Hy.$$

Die gefährlichste Zugstellung findet man am schnellsten durch Probiren; die schwersten Lasten müssen in der Nähe von F_2 stehen.

VI. Abschnitt.

Querkräfte und Momente für den Gerber'schen Balken.

§ 20.

Beliebige ständige Belastung.

91. Jeder durchgehende Balken mit n Stützpunkten kann nach No. 61, Seite 114, durch $(n - 2)$ Mittelgelenke statisch bestimmt gemacht werden. Einen solchen Gelenk-Balken (auch, nach dem Erfinder, Gerber'scher Balken genannt) zeigt die Fig. 148; derselbe besteht aus den gestützten Theilen ABG_1 und G_2CDG_3 , welche wir als Balken mit Auslegern bezeichnen wollen*), und aus den Koppelträgern G_1G_2

*) Die Balkenstücke BG_1 , CG_2 und DG_3 führen neben der Bezeichnung Ausleger auch noch den Namen Kragarm. Man nennt deshalb die Gerber'schen Balken vielfach Auslegerbalken oder Kragträger; auch die amerikanische Bezeichnung Cantilever hat sich in Deutschland leider eingebürgert.

und $G_3 E$. Die letzteren verhalten sich genau wie einfache Balken und können mit Hilfe der im vorigen Abschnitte entwickelten Gesetze behandelt werden. Dabei ergeben sich auch die Drücke, welche die Koppelträger auf die in je zwei Punkten gestützten Theile ausüben, und es lässt sich somit die Untersuchung des Gelenkbalkens stets auf

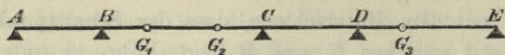


Fig. 148.

diejenige eines Balkens mit überstehenden Enden zurückführen, Fig. 149. Wir setzen nur senkrechte Lasten voraus, zeichnen mit der beliebigen Polweite H nach den bekannten Regeln das Seilpolygon $I, II, III \dots$ und schliessen dasselbe durch eine Gerade s , welche die Punkte c und d verbindet, in denen die Auflagersenkrechten durch die nach innen verlängerten äussersten Polygonseiten (I u. VII) geschnitten werden. Eine durch den Pol O gelegte Parallele zur Schlusslinie s bestimmt die Stützenwiderstände C und D ; der erstere ist im Punkte c mit den Seilkräften I und s im Gleichgewichte, der letztere im Punkte d mit den Seilkräften VII und s .

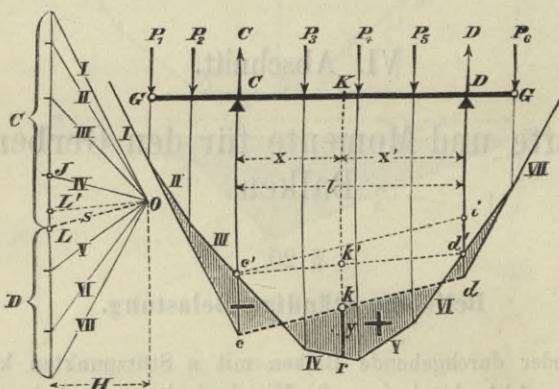


Fig. 149.

Zieht man durch irgend einen Querschnitt K eine Senkrechte und bestimmt die auf dieser Geraden vom Seileck und von der Schlusslinie abgeschnittene Strecke $kr = y$, so erhält man nach dem in No. 15 bewiesenen Satze (vergl. auch die ähnliche Untersuchung in No. 71) das Moment für den Querschnitt K

$$M = Hy;$$

dasselbe ist bei dem in der Fig. 149 benutzten hängenden Seilpolygone

positiv oder negativ, je nachdem y unterhalb oder oberhalb der Schlusslinie cd liegt.

Die Querkraft Q für den Querschnitt K ist die Mittelkraft der links von K angreifenden äusseren Kräfte. Es ergibt sich $Q = C - P_1 - P_2 - P_3 =$ Strecke \overline{LJ} , und zwar bildet Q im Kräfteplane ein Dreieck mit den Seilstrahlen (s und IV), welche parallel zu den vom Schnitte K getroffenen Seilpolygonseiten sind.

92. Andere Darstellung von M und Q . Um mit den Werthen M und Q eine für die Folge nützliche Umformung vorzunehmen, bringen wir in Fig. 149 die Auflagersenkrechten in c' und d' mit dem Seilpolygone zum Schnitt, ziehen die Gerade $c'd'$, welche die Senkrechte durch K in k' trifft, bezeichnen

mit y_0 die Länge der Strecke $k'r$,

„ x und x' die Abstände des Querschnittes K von den Stützen,

„ l die Stützweite

und setzen $Hy = Hy_0 - H\overline{kk'}$. Beachten wir jetzt, dass $\overline{kk'} = \overline{cc'} \frac{x'}{l} + \overline{dd'} \frac{x}{l}$ ist*), und dass ferner die Momente für die über

den Stützen C und D gelegenen Balkenquerschnitte die Werthe $M_C = -H\overline{cc'}$ und $M_D = -H\overline{dd'}$ annehmen, so erhalten wir

$$Hy = Hy_0 + M_C \frac{x'}{l} + M_D \frac{x}{l}.$$

Nun ist aber Hy_0 das Moment für den Querschnitt K eines einfachen Balkens CD , auf welchen nur die Lasten P_3, P_4, P_5 wirken; bezeichnen wir dasselbe mit M_0 , so erhalten wir die wichtige Beziehung

$$(1) \quad M = M_0 + M_C \frac{x'}{l} + M_D \frac{x}{l}.$$

Die Momente M_C und M_D nennt man die *Stützenmomente* und die vom Seilpolygone $c'r'd'$ und von der Schlusslinie $c'd'$ begrenzte Fläche die *einfache Momentenfläche* des Balkenstückes CD ; ist letztere gegeben, und kennt man ausserdem die Stützenmomente; so sind durch die Gleich. (1) die wirklichen Momente für alle zwischen C und D gelegenen Querschnitte bestimmt.

Um eine ähnliche Gleichung für Q abzuleiten, ziehen wir $\overline{c'i} \parallel \overline{cd}$ und $\overline{OL'} \parallel \overline{c'd'}$ und finden dann $\overline{L'J} = Q_0 =$ Querkraft für den Quer-

*) Die Richtigkeit dieser Gleichung übersieht man am schnellsten, indem man in Fig. 149 die Gerade $c'd$ einträgt und die Strecken bestimmt, in welche $k'k$ durch diese Gerade zerlegt wird.

schnitt K eines einfachen (mit P_3, P_4, P_5 belasteten) Balkens CD . Jetzt folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $c'ia'$ und $L'OL$

$$\overline{LL'} : \bar{d}'i = H : l$$

und hieraus (wegen $\overline{LL'} = Q - Q_0$ und $\bar{d}'i = \bar{c}'c - \bar{d}'d = -\frac{M_C}{H} + \frac{M_D}{H}$)

$$(2) \quad Q = Q_0 + \frac{M_D - M_C}{l}.$$

Liegt nun ein beliebiger durchgehender Balken $ABCDE$ vor, Fig. 150, so kann man jeden zwischen zwei aufeinander folgenden Stützen gelegenen Theil desselben, z. B. den Theil CD , als einen Balken mit überstehenden Enden und 2 Stützpunkten (C u. D) auffassen; man hat nur nöthig, die Widerstände der übrigen Stützpunkte (A, B, E) als Lasten zu betrachten, die natürlich negativ zu setzen sind, sobald sie von unten nach oben wirken. Kennt man dann die Stützenmomente

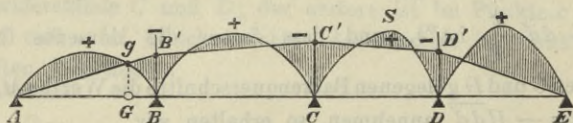


Fig. 150.

M_C und M_D , so erhält man die wirkliche Momentenfläche, indem man zu der einfachen Momentenfläche CSD ein Trapez $CC'D'D$ addirt, für welches (mit $H = 1$) $\overline{CC'} = M_C$ und $\overline{DD'} = M_D$ ist. In der Fig. 150 wurden M_C und M_D negativ angenommen; es ist dann die schraffierte Fläche zwischen den Senkrechten CC' und DD' die wirkliche Momentenfläche für den Theil CD . Wendet man das gleiche Verfahren auf die Theile AB, BC, DE an, so gelangt man zu der in der Fig. 150 dargestellten Momentenfläche für den durchgehenden Balken AE . Das Polygon $AB'C'D'E$, dessen Ordinaten $\overline{BB'}, \overline{CC'}, \overline{DD'}$ die Stützenmomente M_B, M_C, M_D angeben, nennt man den *Schlusslinienzug* und darf dann aussprechen:

Die Momentenfläche eines durchgehenden Balkens (mit oder ohne Gelenke) ist nach Aufzeichnung der einfachen Momentenpolygone bestimmt, sobald der Schlusslinienzug gegeben ist.

Da nun, falls Gleichgewicht bestehen soll, jedem Gelenke das Moment $M = 0$ entsprechen muss, so muss jeder senkrecht über einem Gelenke G befindliche Punkt g des einfachen Momentenpolygons auch ein Punkt des Schlusslinienzuges sein, und hieraus folgt, dass es mög-

lich ist, durch eine genügende Anzahl von Gelenken jenem Linienzuge eine bestimmte Lage vorzuschreiben. Auch leuchtet ein, dass zwischen

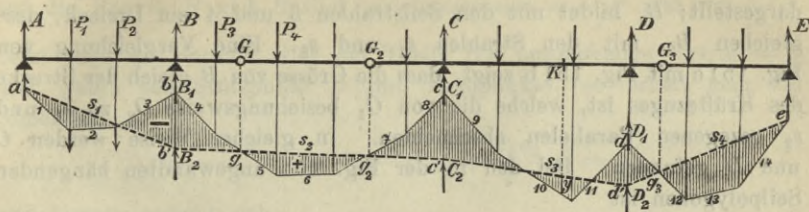


Fig. 151 a.

zwei benachbarten Stützpunkten höchstens zwei Gelenke angeordnet werden dürfen, und dass die Gesamtzahl der erforderlichen Gelenke $= n - 2$ ist, sobald der Balken auf n Stützen ruht.

Mit Hilfe des beschriebenen Verfahrens wurde in der Fig. 151 a die Momentenfläche für einen Balken mit 5 Stützpunkten und 3 Gelenken bestimmt. Es wurden mit ein und derselben (beliebig gewählten) Polweite H die den einzelnen Oeffnungen AB, BC, CD, DE entsprechenden aneinanderhängenden Seilpolygone gezeichnet, welche von den Senkrechten durch die Gelenke G_1, G_2, G_3 in den Punkten g_1, g_2, g_3 geschnitten werden. Durch g_1 und g_2 wurde die Schlusslinie s_2 gelegt, durch g_3 und e die Linie s_4 , und schliesslich wurden s_1 und s_3 eingetragen. Die schraffierte Fläche ist die gesuchte Momentenfläche. Für irgend einen Querschnitt K ergibt sich: $M = Hy$.

Um die Auflagerdrücke zu finden, betrachten wir den aus sämtlichen Seilpolygonseiten 1, 2, 3 . . . 14 und den Schlusslinien bestehenden Linienzug als geschlossenes Seilpolypon, in dessen Eckpunkten ausser den Lasten P_1, P_2, \dots noch senkrechte Kräfte $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E$ angreifen. Bestimmen wir nun die letzteren Kräfte so, dass an jedem der Eckpunkte des Seilpolygons Gleichgewicht besteht, so sind die Kräfte A und E gleich den Widerständen der Stützpunkte A und E , und weiter ist dann $B_1 + B_2 = B =$ Widerstand der Stütze B ; $C_1 + C_2 = C$; $D_1 + D_2 = D$.

Um A und E zu finden, haben wir nur nöthig, von den Polen O_1 und O_4 Parallelen zu den Schlusslinien s_1 und s_4 zu ziehen, Fig. 151 b; es

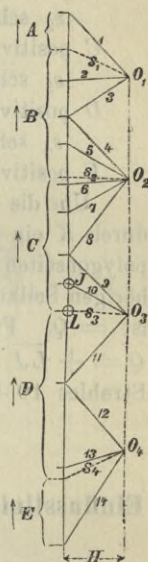


Fig. 151 b.

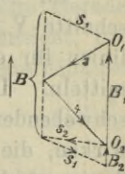


Fig. 151 c.

giebt dann die von 1 und s_1 auf dem Kräftezuge abgeschnittene Strecke die Grösse von A an, die von s_4 und 14 abgeschnittene Strecke die Grösse von E . Die Ermittlung von B_1 und B_2 wurde in Fig. 151 c dargestellt; B_1 bildet mit den Seilstrahlen 3 und 4 ein Dreieck, desgleichen B_2 mit den Strahlen s_1 und s_2 . Eine Vergleichung von Fig. 151 c mit Fig. 151 b zeigt, dass die Grösse von B gleich der Strecke des Kräftezuges ist, welche die von O_1 beziehungsweise O_2 zu s_1 und s_2 gezogenen Parallelen abschneiden. In gleicher Weise werden C und D gefunden. Bei den in der Fig. 151 angewandten hängenden Seilpolygonen ist

A positiv, sobald der erste Strahl (1) oberhalb des Strahles s_1 liegt,
 B positiv, sobald der Strahl s_1 den Kräftezug oberhalb des Strahles s_2 schneidet,

C positiv, sobald der Strahl s_2 den Kräftezug oberhalb des Strahles s_3 schneidet,

D positiv, sobald der Strahl s_3 den Kräftezug oberhalb des Strahles s_4 schneidet,

E positiv, sobald der Strahl s_4 oberhalb des letzten Strahles (14) liegt.

Um die Querkraft Q für irgend einen Querschnitt K zu finden, wird durch K ein senkrechter Schnitt geführt; derselbe trifft stets zwei Seilpolygonseiten. Sodann werden im Kräfteplane die zu diesen Seiten gehörigen Seilkräfte gesucht und deren Mittelkraft bestimmt; die letztere ist $= Q$. Für den Querschnitt K in Fig. 151 findet man z. B.: $Q = +LJ$ und zwar ist Q positiv, weil der Strahl s_3 unterhalb des Strahles 10 liegt.

§ 21.

Einflusslinien. Belastung durch ein verschiebbares System von Einzellasten.

a. Einflusslinien.

Da sich die Koppelträger ebenso verhalten wie die im Abschnitte V untersuchten einfachen Balken, so genügt es, die Einflusslinien für einen bei C und D gestützten Theil BE (Fig. 152) zu ermitteln. In den Gelenken B und E greifen die Drücke anliegender schwebender Theile AB und EF an. Lasten, welche auf Balkentheile wirken, die etwa links an A oder rechts an F stossen, sind ohne Einfluss auf den Theil BE . Wir setzen zunächst unmittelbare Belastung voraus.

93. Stützenwiderstände C und D . Es greife irgendwo zwischen A und B eine senkrechte Last P_1 an, zwischen B und E eine

Last P_2 (gleichgiltig, ob innerhalb oder ausserhalb CD^*) und zwischen E und F eine Last P_3 . Die Drücke der Koppelträger auf die Punkte B und E sind beziehungsweise $= \frac{P_1 a_1}{l'}$ und $= \frac{P_3 a_3}{l''}$.

Setzt man die Summe aller am Theile BE angreifenden Kräfte $= 0$ und wählt den Stützpunkt D zum Drehpunkte, so erhält man die Gleichung

$$Cl - \frac{P_1 a_1}{l'} (l + e') - P_2 a_2 + \frac{P_3 a_3}{l''} e'' = 0$$

und hieraus ergibt sich

$$C = P_1 \frac{l + e' a_1}{l l'} + P_2 \frac{a_2}{l} - P_3 \frac{e'' a_3}{l l''}.$$

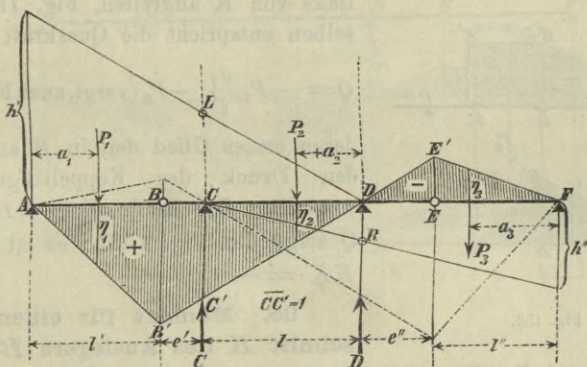


Fig. 152.

Es erscheint also C in der Form

$$C = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + P_3 \eta_3, \text{ wobei}$$

$$\eta_1 = \frac{l + e' a_1}{l l'}; \quad \eta_2 = \frac{a_2}{l}; \quad \eta_3 = - \frac{e'' a_3}{l l''}.$$

Macht man nun $\overline{CC'} = 1$, legt durch C' und D eine Gerade, welche die Senkrechten durch B und E in B' und E' schneidet, und zieht die Geraden AB' und FE' , so ist $AB'E'F'$ die gesuchte Einflusslinie. Es ist nämlich $\overline{BB'} = \overline{CC'} \frac{l + e'}{l} = 1 \frac{l + e'}{l}$; $\overline{EE'} = - \overline{CC'} \frac{e''}{l} = - 1 \frac{e''}{l}$ und man erhält deshalb unter P_1, P_2, P_3 beziehungsweise die Ordinaten

*) Liegt P_2 rechts von D , so wird a_2 in Fig. 152 negativ.

$$\eta_1 = \overline{BB'} \frac{a_1}{l'} = \frac{l + e'}{l} \frac{a_1}{l'}; \quad \eta_2 = \overline{CC'} \frac{a_2}{l} = \frac{a_2}{l};$$

$$\eta_3 = \overline{EE'} \frac{a_3}{l''} = - \frac{e''}{l} \frac{a_3}{l''}.$$

Lasten zwischen A und D erzeugen eine positive (nach oben gerichtete) Auflagerkraft C , während die rechts von D angreifenden Lasten einen negativen (nach unten gerichteten) Widerstand C hervorbringen.

Ganz ähnlich wird die in der Fig. 152 strichpunktirte Einflusslinie für den Stützenwiderstand D gefunden.

94. Querkraft für einen Querschnitt K des Auslegers BC .

Es kommen hier nur solche Lasten P_1 und P_2 in Betracht, welche links von K angreifen, Fig. 153; denselben entspricht die Querkraft

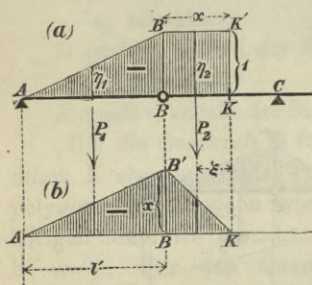


Fig. 153.

$$Q = - P_1 \frac{a_1}{l'} - P_2 \quad (\text{vergl. auch Fig. 152}),$$

deren erstes Glied den in B angreifenden Druck des Koppelträgers AB vorstellt. Die Einflusslinie $AB'K'$ für Q zeigt die Fig. 153a; es ist $\overline{BB'} = \overline{KK'} = -1$.

95. Moment für einen Querschnitt K des Auslegers BC . Die

Lasten P_1 und P_2 (Fig. 153) erzeugen

$$M = - P_1 \frac{a_1}{l'} x - P_2 \xi.$$

Das erste Glied dieses Ausdrucks rührt von dem in B angreifenden Drucke $P_1 \frac{a_1}{l'}$ des Koppelträgers her. Die Einflusslinie für M ist in der Fig. 153b aufgetragen worden; es ist $\overline{BB'} = -x$. Unter der Last P_1 misst man $\eta_1 = -x \frac{a_1}{l'}$ und unter der Last P_2 $\eta_2 = -\xi$.

96. Querkraft für einen Querschnitt K zwischen den Stützen C und D , Fig. 154. Greift nur eine rechts von K gelegene Last an, so entsteht für den Querschnitt K die Querkraft $Q = C$, weil links von K nur die eine äussere Kraft C wirkt. Wird der Balken hingegen ausschliesslich links von K belastet, so ist $Q = -D$; denn

es greift jetzt rechts von K nur die eine äussere Kraft D an. *) Hieraus folgt, dass die Einflusslinie für Q auf der linken Seite von K mit der Einflusslinie für $(-D)$ und auf der rechten Seite von K mit der Einflusslinie für $(+C)$ übereinstimmen muss, sie wurde in der Fig. 154a dargestellt.

97. Moment für einen Querschnitt K zwischen den Stützen. Je nachdem nur rechts oder nur links von K Lasten wirken, ist $M = Cx$ oder $M = Dx'$. Die Ordinaten der Einflusslinie für M sind also rechts von K gleich den mit x multiplicirten Ordinaten der C -Linie, und links von K gleich den mit x' multiplicirten Ordinaten der D -Linie. Hiernach ist die Linie $AB'K'E'F'$ in Fig. 154b die Einflusslinie für M .

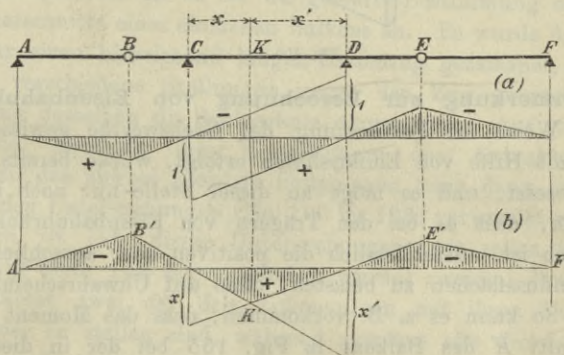


Fig. 154.

98. Mittelbare Belastung. Wird die Belastung durch Querträger übertragen, so zeichne man zuerst die Einflusslinien für unmittelbare Belastung und leite dann aus diesen diejenigen für mittelbare Belastung mit Hilfe des Satzes ab, dass jede Einflusslinie zwischen zwei benachbarten Querträgern eine Gerade ist. In der Fig. 155 ist die Einflusslinie des Momentes für einen zwischen den Stützen C und D gelegenen Querschnitt K dargestellt worden. Die Querträger sind beliebig vertheilt angenommen. $AB'K'E'F'$ ist die Einflusslinie bei unmittelbarer Belastung; die schraffierte Einflussfläche entspricht der mittelbaren Belastung. Das Gelenk A liege zwischen zwei Querträgern, desgleichen der Stützpunkt C und der Querschnitt K . Eine in O angreifende Last erzeugt für den fraglichen Querschnitt das Moment: $M = 0$ und eine

*) Betrachtet man Q als die Mittelkraft der rechts vom Querschnitte angreifenden äusseren Kräfte, so muss man die Richtung nach oben negativ annehmen. Vergl. Seite 124.

in 1 wirksame Last „Eins“ bringt $M = 1 \cdot \eta_1$ hervor. Zwischen den Querträgern 0 und 1 ist die Einflusslinie eine Gerade, und auf gleiche Weise erklären sich die Abstumpfungen der Ecken bei B' und K' .

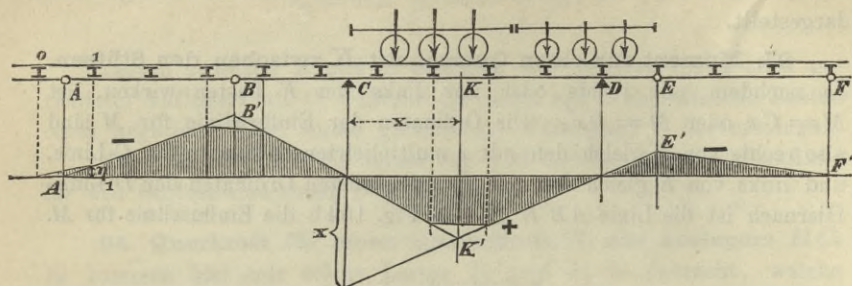


Fig. 155.

99. Anmerkung zur Berechnung von Eisenbahnbrücken.

Auf welche Weise die Bestimmung der Grenzwerte gewisser Unbekannten Z mit Hilfe von Einflusslinien erfolgt, wurde bereits im § 14 auseinandergesetzt, und es möge an dieser Stelle nur noch hervorgehoben werden, dass es bei den Trägern von Eisenbahnbrücken nicht immer möglich ist, ausschliesslich die positiven oder ausschliesslich die negativen Einflussflächen zu belasten, ohne auf Unwahrscheinlichkeiten zu stossen. So kann es z. B. vorkommen, dass das Moment $_{max}M$ für den Querschnitt K des Balkens in Fig. 155 bei der in dieser Figur angegebenen Stellung einer Lokomotive nebst Tender entsteht, und es leuchtet ein, dass in diesem und in ähnlichen Fällen die Länge der den Träger belastenden Fahrzeuge eine bei weitem grössere Rolle spielt, als beispielsweise bei der Berechnung eines einfachen Balkens (Abschnitt IV). Eine kürzere, wenn auch leichtere Lokomotive nebst entsprechendem Tender kann bei kurzer positiver oder negativer Beitragsstrecke ein grösseres Maximum oder Minimum der fraglichen Unbekannten bedingen, als längere und schwerere Fahrzeuge, und es erscheint hiernach nöthig, den Einfluss verschiedenartig zusammengesetzter Lastenzüge zu prüfen. Dabei wäre auch zu beachten, dass ein entlastend wirkender Tender nicht gefüllt angenommen werden darf. Will man diese umständlichen Vergleichen vermeiden, also nur mit einem Lastenzuge rechnen und trotzdem genügend sicher gehen, so vernachlässige man bei der Ermittlung des Maximums die Belastung der negativen Beitragsstrecken und bei der Bestimmung des Minimums die Belastung der positiven Strecken.*)

*) Ist eine Beitragsstrecke allerdings so kurz, dass sie nicht einmal die Aufstellung von drei Lokomotivachsen ermöglicht, so liefert das oben vorge-

Entscheidet man sich für dieses Verfahren, so kann man die Querkkräfte, Momente und Stützenwiderstände der Gelenkbalken auch sehr schnell auf dem folgenden Wege mit Hilfe von Seilpolygonen bestimmen. Dabei sei vorausgesetzt, dass im Falle mittelbarer Belastung über allen Stützen und Gelenken Querträger liegen, auch möge daran erinnert werden, dass die Berechnung der Momente nur für die bei Querträgern geführten Querschnitte zu erfolgen braucht. Vergl. Seite 142.

b. Ermittlung des Einflusses eines verschiebbaren Zuges von Einzellasten mit Hilfe des Seilpolygons.

Wir knüpfen an die in No. 82 gelehrt Bestimmung der Momente für die Querschnitte eines einfachen Balkens an. Es wurde dort ein Seilpolygon für einen hinreichend langen Lastenzug gezeichnet, hierauf der Balken in verschiedene Stellungen gegen den Zug gebracht und für jede Stellung desselben die Schlusslinie eingetragen. Auf gleiche Weise werden die Momente der Koppelträger des Gelenkbalkens bestimmt, und das hierbei benutzte Seilpolygon kann dann auch für die nachstehenden Untersuchungen (No. 100 bis 103) verwendet werden. Im Allgemeinen ist jede dieser Untersuchungen (wie schon in der Anmerkung auf Seite 140 hervorgehoben wurde) zweimal durchzuführen, indem zunächst zwei der drei Lokomotiven mit ihren Vordertheilen gegeneinander zu stellen sind, während zweitens alle drei Lokomotiven vorwärtsfahrend angenommen werden. Die gefährlichsten Zugstellungen werden am zweckmässigsten durch Probiren bestimmt. *)

100. Momente für einen Querschnitt K des Auslegers BC , Fig. 156. Man stellt das Balkenstück BC sammt dem angrenzenden Koppelträger AB so unter den Lastenzug, dass die schwersten Lasten in der Nähe von B und eine schwere Last über B selbst steht (vergl. die Einflusslinie in

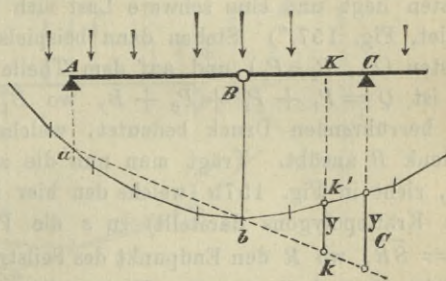


Fig. 156.

schlagene Verfahren allzu ungünstige Grenzwerte. Man nehme dann eine Lokomotive mit besonders stark belasteter Mittelachse an (zweckmässig ohne Tender) und berücksichtige auch den Einfluss der etwa über den angrenzenden Strecken stehenden Achsen dieser Lokomotive.

*) In No. 100 bis 103 handelt es sich nur um den Einfluss der Verkehrslast. Den Zeiger p haben wir der Kürze wegen fortgelassen.

Fig. 153b). Hierauf trägt man die zu AB gehörige Schlusslinie ab ein, und verlängert dieselbe über b hinaus bis zu ihrem Schnittpunkte k mit der Senkrechten durch K , welche letztere das Seilpolygon in k' treffen möge. Nach Messung der Strecke $\overline{kk'} = y$ erhält man $M = -Hy$. Auf gleiche Weise findet man auch das Stützenmoment $M_c = -Hy_c$. In Fig. 156 wurde vorausgesetzt, dass M_c bei derselben Zugstellung den grössten Werth annimmt wie das Moment M für den Querschnitt K ; es ist dies häufig, aber nicht immer der Fall. Das Stützenmoment $M_D = -Hy_D$ wird ebenso bestimmt wie M_c .

101. Querkraft für einen Querschnitt K des Auslegers BC . Man stellt den Träger so unter den Lastenzug, dass im Falle unmittelbarer Belastung der Querschnitt K in der Nähe der schwersten

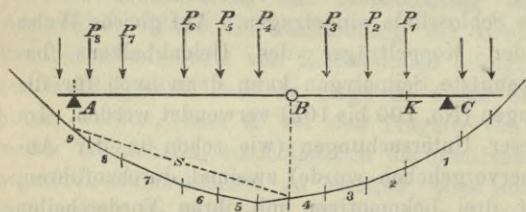


Fig. 157 a.

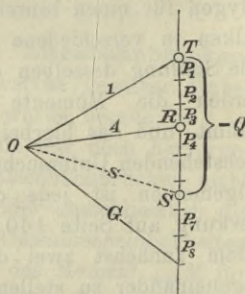


Fig. 157 b.

Lasten liegt und eine schwere Last sich unmittelbar links von K befindet, Fig. 157.*) Stehen dann beispielsweise zwischen B und K drei Lasten (P_1, P_2, P_3) und auf dem Theile AB die Lasten P_4 bis P_8 , so ist $Q = P_1 + P_2 + P_3 + B$, wo B den von den Lasten P_4 bis P_8 herrührenden Druck bedeutet, welchen der Koppelträger auf das Gelenk B ausübt. Trägt man nun die zu AB gehörige Schlusslinie s ein, zieht in Fig. 157b (welche den hier in Betracht kommenden Theil des Kräftepolygons darstellt) zu s die Parallele OS , so findet man $B = \overline{SR}$, wo R den Endpunkt des Seilstrahles bezeichnet, welcher die Kräfte P_3 und P_4 trennt. Hieraus folgt die Querkraft $Q = -\overline{ST}$.

102. Momente und Querkräfte für die Querschnitte zwischen den Stützen C und D (Fig. 158). Es ist nach Seite 161 für einen Querschnitt K im Abstand x von C

*) Ist die Belastung eine mittelbare, so tritt in Fig. 157 an die Stelle von K der diesem Querschnitte auf der linken Seite benachbarte Querträger.

$$M = M_0 + \frac{M_C x'}{l} + \frac{M_D x}{l} \text{ und}$$

$$Q = Q_0 + \frac{M_D - M_C}{l},$$

wo M_0 und Q_0 das Moment und die Querkraft für den Querschnitt K eines einfachen Balkens CD bedeuten; sie werden nach § 18 bestimmt. Die Stützenmomente M_C und M_D sind negativ; sie wurden in No. 100 in der Form gefunden: $M_C = -Hy_C$ und $M_D = -Hy_D$, und es folgt somit

$$\max M = M_0^*)$$

$$\min M = -H \frac{y_C x' + y_D x^{**})}{l}$$

$$\max Q = \max Q_0 + H \frac{y_C}{l}$$

$$\min Q = \min Q_0 - H \frac{y_D}{l}.$$

Trägt man in C und D die Ordinaten $\overline{CC'} = y_C$ und $\overline{DD'} = y_D$ auf, Fig. 158, und zieht die Gerade $C'D'$, so liefern deren Ordinaten y die Momente $\min M = -Hy$.

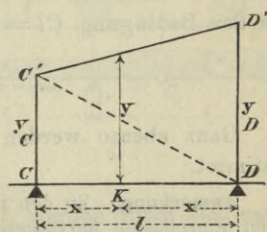


Fig. 158.

103. Stützenwiderstand C (Fig. 159). Um $\max C$ zu erhalten, stellt man den Balken so unter den Zug, dass die schwersten Lasten in der Nähe von B liegen, dass eine schwere Last in B selbst angreift

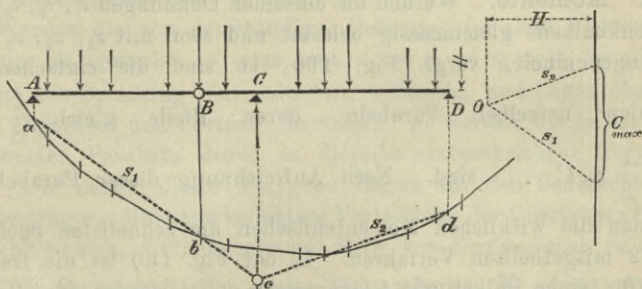


Fig. 159.

und der Träger, wenn möglich, rechts von D unbelastet bleibt. Beendet sich, wie in der Fig. 159, rechts von D die Achse eines Fahr-

*) Es wird jetzt nur der Balkenteil CD belastet angenommen.

**) Es wird nun CD unbelastet gedacht.

zeuges, dessen übrige Achsen links von D liegen, so wird dieselbe zweckmässig vernachlässigt. Nun trägt man die Schlusslinie s_1 des schwebenden Theiles AB ein, bringt dieselbe in c mit der Senkrechten durch C zum Schnitt, verbindet c mit dem Punkte d , in welchem das Seilpolygon von der Senkrechten durch D getroffen wird, und zieht vom Pole aus Parallelen zu s_1 und s_2 . Dieselben schneiden auf dem Kräftezuge den Stützenwiderstand ${}_{max}C$ ab.

Um ${}_{min}C$ zu finden, denke man die Balkentheile DE und EF (Fig. 152) so belastet, dass das grösste (negative) Moment $M_D = -Hy_D$ entsteht, und vernachlässige die hierbei etwa links von D angreifenden Lasten, nehme also die Strecke AD unbelastet an. Man erhält dann aus der Bedingung $Cl = M_D$ den Werth

$${}_{min}C = \frac{M_D}{l} = -H \frac{y_D}{l}.$$

Ganz ebenso werden die Grenzwerte des Stützenwiderstandes D bestimmt.

Anmerkung. Zu den in No. 100 bis 103 ermittelten, von den verschiebbaren Einzellasten hervorgerufenen Momenten M und Kräften Q und C sind noch die durch die ständige Belastung erzeugten M , Q , C zu addiren. Die Bestimmung der letzteren soll im folgenden § gezeigt werden.

§ 22.

Gleichmässige Belastung.

104. Momente. Werden die einzelnen Oeffnungen $l_1, l_2, l_3 \dots$ eines Gelenkbalkens gleichmässig belastet und zwar mit $z_1, z_2, z_3 \dots$ f. d. Längeneinheit, vergl. Fig. 160, so sind die einfachen Momentenlinien derselben Parabeln, deren Pfeile gleich $\frac{1}{8} z_1 l_1^2, \frac{1}{8} z_2 l_2^2, \frac{1}{8} z_3 l_3^2 \dots$ sind. Nach Aufzeichnung dieser Parabeln bestimmt man die wirklichen Momentenflächen am schnellsten nach dem in No. 92 mitgetheilten Verfahren. In der Fig. 160 ist die fragliche Aufgabe für einen Balken mit 4 Oeffnungen gelöst worden: der Schlusslinienzug ist durch die den Gelenken G_1, G_2, G_3 entsprechenden Parabelpunkte g_1, g_2, g_3 bestimmt.

Aus den im § 21 gezeichneten Einflusslinien geht hervor, dass man die Grenzwerte für sämtliche Momente M durch Untersuchung von zwei Belastungsfällen erhält. In dem einen Falle werden die durch ungerade Zeiger gekennzeichneten Belastungen z gleich $p + g = q$ an-

genommen und die z mit geraden Zeiger gleich g ; im zweiten Falle werden die ersteren z gleich g , die letzteren gleich q gesetzt. Für den Träger in Fig. 160 wird also zuerst angenommen

$$z_1 = z_3 = g; z_2 = z_4 = q$$

und hierauf

$$z_1 = z_3 = g; z_2 = z_4 = q.$$

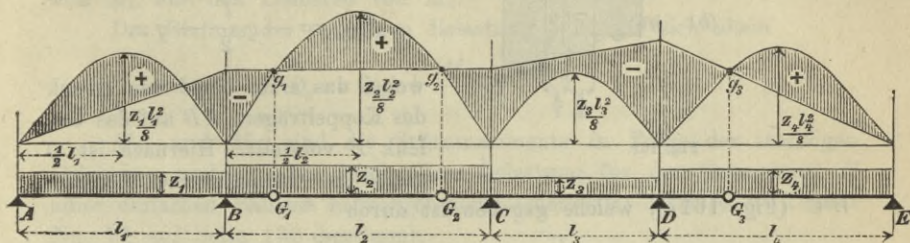


Fig. 160.

Für die Querschnitte der Theile l_1 und l_3 werden durch den ersten Belastungszustand die Momente $_{max}M$ und durch den zweiten die Momente $_{min}M$ hervorgerufen; einzelnen Querschnitten können in dem einen Falle positive, in dem anderen negative Momente entsprechen. Die Querschnitte der Koppelträger $G_1 G_2$ und $G_3 E$ werden nur durch positive, diejenigen der Ausleger $B G_1$, $G_2 C$, $D G_3$ nur durch negative Momente beansprucht, und zwar ergeben sich für alle diese Momente die kleinsten oder die grössten Werthe, je nachdem der erste oder der zweite Belastungszustand eintritt.

Werden die von der ständigen Belastung (g) allein hervorgerufenen Momente M_g gesucht, so setze man $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = g$.

Ist die Belastung eine mittelbar wirkende, und liegen über sämtlichen Gelenken und Stützen Querträger, so werden die in der Fig. 160 gezeichneten Parabeln durch in dieselbe eingeschriebene Polygone ersetzt. Die Ecken dieser Polygone liegen auf den Senkrechten durch die Querträger. Bei ganz beliebiger Vertheilung der Querträger (Fig. 155) empfiehlt es sich, die Momente mit Hilfe von Einflusslinien zu ermitteln.

105. Querkraft für einen Querschnitt K eines Auslegers. Bei der Bestimmung der Querkraften setzen wir im Falle mittelbarer Belastung voraus, dass über allen Gelenken und Stützen Querträger liegen. Die als einfache Balken aufzufassenden Koppelträger werden genau wie im § 17 (No. 76 und 78) behandelt, und es genügt daher, die Ermittlung der Querkraften Q für einen Balkentheil mit überragenden Enden zu zeigen.

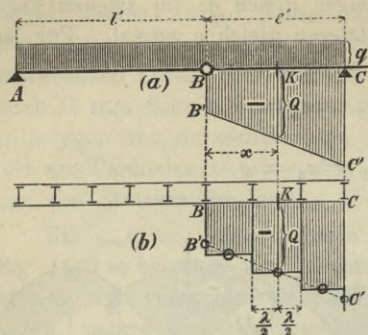


Fig. 161.

Gehört der fragliche Querschnitt K dem Ausleger BC an, so ist Q stets negativ; es wird am grössten bei voller Belastung der Strecke AK ; Lasten rechts von K sind ohne Einfluss auf Q . Man erhält

$$Q = -q \frac{l'}{2} - qx,$$

wobei das erste Glied den Druck des Koppelträgers AB auf das Gelenk B vorstellt. Hiernach ist Q gleich der Ordinate einer Geraden

$B'C'$ (Fig. 161 a), welche gegeben ist durch

$$\overline{BB'} = -q \frac{l'}{2} \text{ und } \overline{CC'} = -q \left(\frac{l'}{2} + e' \right).$$

Bei mittelbarer Belastung (Fig. 161 b) ist Q für alle Querschnitte innerhalb eines Feldes λ konstant und gleich der der Feldmitte entsprechenden Ordinate der Geraden $B'C'$. Die Belastung $p\lambda$ dieses Feldes übt nämlich auf den das Feld links begrenzenden Querträger den Druck $\frac{1}{2} q \lambda$ aus, und es ist deshalb die Summe der auf das Balkenstück BK wirkenden Kräfte

$$= q \frac{l'}{2} + q \left(x - \frac{\lambda}{2} \right) + q \frac{\lambda}{2} = q \frac{l'}{2} + qx,$$

woraus dann $Q = -q \frac{l'}{2} - qx$ folgt.

Handelt es sich nur um die durch die ständige Belastung g hervorgerufene Querkraft Q , so ersetzt man in der vorstehenden Untersuchung q durch g .

106. Querkraft für einen Querschnitt K zwischen den Stützen C und D , Fig. 154. Es ist nach Gleich. (1) und (2) auf Seite 162

$$Q = Q_0 + \frac{M_D - M_C}{l}$$

und man erhält

$$(1) \quad \max Q = \max Q_0 + \frac{M_D - M_C}{l},$$

$$(2) \quad \min Q = \min Q_0 + \frac{M_D - M_C}{l},$$

wobei $_{\max}Q_0$ und $_{\min}Q_0$ die nach No. 76 und 78 zu bestimmenden Grenzwerte der Querkraft Q für den Querschnitt K eines einfachen Balkens CD bedeuten. M_D und M_C sind die *negativen* Stützenmomente, ihre Grenzwerte ergeben sich bei der Durchführung der in No. 104 beschriebenen Untersuchung, und man wird natürlich in die vorstehende Gleichung (1) den kleinsten Werth von M_D und den grössten Werth von M_C einführen, in die Gleichung (2) hingegen den grössten Werth von M_D und den kleinsten von M_C .

Der Einfluss der ständigen Belastung g ist für sich allein

$$Q_g = Q_{0g} + \frac{M_{Dg} - M_{Cg}}{l}.$$

M_{Dg} und M_{Cg} sind die Stützenmomente in Folge der ständigen Belastung und Q_{0g} die durch diese Belastung für den Querschnitt K eines einfachen Balkens hervorgebrachte Querkraft; letztere wird nach No. 74 auf Seite 130 bestimmt.

107. Stützenwiderstand C . Der Inhalt des positiven Theiles der Einflussfläche für C ist mit den in der Figur 152 angegebenen Bezeichnungen (und wegen $\overline{BB'} = 1 \frac{l+e'}{l}$)

$$\mathfrak{F}_2 = \frac{1}{2} \overline{BB'} \cdot \overline{AD} = \frac{(l+e')(l+e'+l')}{2l}$$

und der Inhalt des negativen Theiles ist (wegen $\overline{EE'} = 1 \frac{e''}{l}$)

$$\mathfrak{F}_1 = \frac{1}{2} \overline{EE'} \cdot \overline{DF} = \frac{e''(e''+l'')}{2l}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{(l+e')(l+e'+l')}{2l} = h' \quad \text{und} \quad \frac{e''(e''+l'')}{2l} = h''$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \max C &= g \mathfrak{F}_2 - g \mathfrak{F}_1 = g h' - g h'' \\ \min C &= g \mathfrak{F}_2 - q \mathfrak{F}_1 = g h' - q h''. \end{aligned}$$

In Folge der ständigen Belastung allein entsteht

$$C_g = g (h' - h'').$$

h' und h'' lassen sich leicht durch Zeichnung bestimmen. Macht man nämlich in Fig. 152: $\overline{CL} = \frac{1}{2}(l+e')$ und $\overline{DR} = \frac{1}{2}e''$ und zieht die Geraden DL und CR , so schneiden deren Verlängerungen auf den Senkrechten durch A und F die Strecken h' und h'' ab.

VII. Abschnitt.

Der vollwandige Bogen mit drei Gelenken.

§ 23.

Belastung durch beliebig gerichtete Kräfte.

108. **Stützenwiderstände.** Auf einen einfach gekrümmten Stab, welcher ausser den festen Auflagergelenken A und B noch ein (in der Regel im Scheitel angeordnetes) Gelenk G besitzt, und dessen Mittellinie wir, der kürzeren Ausdrucksweise wegen, in einer lothrechten Ebene (der *Stabebene*) annehmen wollen, mögen beliebig gerichtete, in dieser Ebene liegende Lasten $P_1, P_2, P_3 \dots$ wirken. Fig. 162. Die Mittelkraft der links von G angreifenden Lasten sei R_1 , diejenige der Lasten rechts von G sei R_2 ; beide Kräfte können in der bekannten Weise mit Hilfe von Seilpolygonen, welche in der Fig. 162 mit den beliebigen Polen O_1 und O_2 gezeichnet wurden, bestimmt werden.

Um die in A und B angreifenden Stützenwiderstände (*Kämpferdrücke*) K_1 und K_2 zu ermitteln, nehme man zunächst an, es sei $R_2 = 0$ und bestimme die durch R_1 allein hervorgerufenen Kämpferdrücke K' und K'' . Am Bogenstücke GB greift jetzt nur K'' an. Soll Gleichgewicht bestehen, so muss die Kraft K'' durch das Gelenk G gehen, da sich sonst das Bogenstück GB um G drehen würde; ferner müssen sich die drei Kräfte K', R_1 und K'' in einem und demselben Punkte schneiden. Verbindet man also den Punkt T_1 , in welchem R_1 von der Geraden BG getroffen wird, mit A , so giebt AT_1 die Richtung von K' an, und man erhält nach Ziehen von $FL \parallel T_1A$ (Fig. 162b) und $JL \parallel BG$ die von R_1 herrührenden Kämpferdrücke: $K' = \overline{LF}$ und $K'' = \overline{JL}$.

Ganz ebenso findet man diejenigen Kämpferdrücke K''' und K'''' , welche im Falle $R_1 = 0$ durch die rechts von G angreifenden Lasten hervorgerufen werden. Man bringt die Gerade AG in T_2 mit R_2 zum Schnitt, verbindet T_2 mit B und zieht $JS \parallel GA$ und $HS \parallel BT_2$. Man erhält: $K''' = \overline{SJ}$ und $K'''' = \overline{HS}$.

Zeichnet man jetzt das Parallelogramm $JLOS$ und zieht die Geraden OF und HO , so stellt die erste derselben nach Grösse, Richtung

die Lasten rechts von G zur Mittelkraft DE , werden durch A und G Parallelen zu CD gezogen, welche die äussersten Seiten des ersten Seilpolygons in A' und G' schneiden, ferner durch G und B Parallelen zu DE , welche die äussersten Seiten des zweiten Seilpolygons in G'' und B' treffen. Nach Eintragung der Schlusslinien s_1 s_2 und nach Ziehen der Geraden: $O_1 F \parallel s_1$ und $O_2 J \parallel s_2$ erhält man in den Strecken CF und FD die zu CD parallelen, in A und G angreifenden Seitenkräfte der Mittelkraft CD . Ebenso stellen die Strecken DJ und JE die zu DE parallelen, in G bezieh. B wirksamen Seitenkräfte der Mittelkraft DE vor. Man darf jetzt die beiden Scheiben, aus denen der Bogenträger besteht, durch Stäbe AG und BG ersetzt denken, auf welche nur in den Knoten Lasten wirken. In G greift die Mittelkraft FJ aus den beiden Kräften FD und DJ an. Zieht man $FO \parallel GA$ und $JO \parallel GB$, so stellen OF und JO die in den Stäben AG und GB

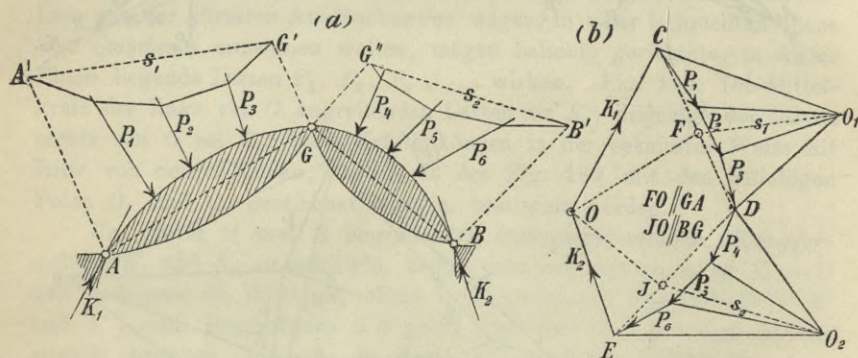


Fig. 163.

hervorgerufenen Spannkraften (Drücke) vor. Da nun im Punkte A der Kämpferdruck K_1 mit der Spannkraft FO und der in A angreifenden Last CF im Gleichgewichte sein muss, so giebt die Strecke OC nach Grösse, Richtung und Sinn den Kämpferdruck K_1 an, und ebenso findet man, dass $EO = K_2$ ist. Zeichnet man zu den Lasten P_1, P_2, \dots mit dem Pole O ein durch den Punkt A gehendes Seilpolygon, so geht dieses auch durch die Punkte G und B .

In Fig. 164 ist noch der besondere Fall paralleler Lasten dargestellt worden. Es wurde ein Seilpolygon $A'G'B'$ mit dem beliebigen Pole O' gezeichnet. Nach Eintragung der Schlusslinien s_1 und s_2 wurden gezogen: $O'E \parallel s_1$; $O'F \parallel s_2$; $EO \parallel GA$, $FO \parallel BG$.

Ein drittes Verfahren ist schliesslich in Fig. 165 vorgeführt worden. R_1 und R_2 sind die Mittelkräfte der auf die Scheiben AG und GB

wirkenden Lasten; sie wurden in beliebig angenommenen Punkten T_1 und T_2 in die Seitenkräfte A und C , B und D zerlegt. Hierauf wurde

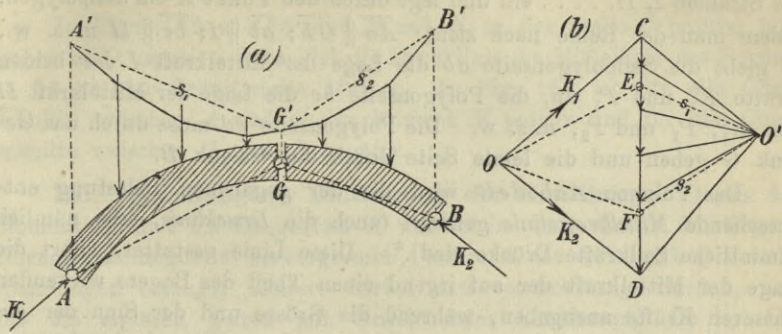


Fig. 164 a u. b.

die Mittelkraft aus C und D nach den Richtungen der Sehnen GA und GB in A' und B' zerfällt. Der Kämpferdruck K_1 muss nun den

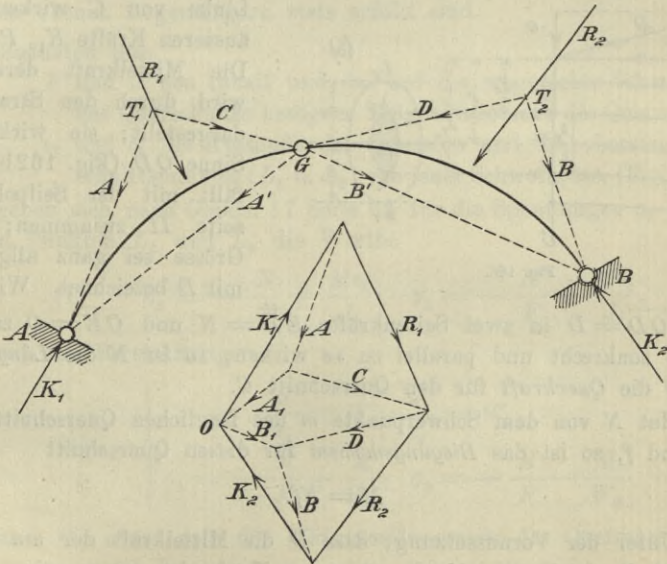


Fig. 165.

Kräften A und A' das Gleichgewicht halten und der Widerstand K_2 den Kräften B und B' .

109. Mittelkraftslinie (Drucklinie), Längskraft, Querkraft, Moment. Wählt man nach Bestimmung der Kämpferdrücke K_1 und K_2 den Eckpunkt O (Fig. 162b) des Kräftepolygons zum Pole, trägt die Strahlen I, II, \dots ein und legt durch den Punkt A ein Seilpolygon, indem man der Reihe nach zieht: $\overline{Aa} \parallel \overline{OF}$; $\overline{ab} \parallel I$; $\overline{bc} \parallel II$ u. s. w., so giebt die Seilpolygonseite ab die Lage der Mittelkraft I der beiden Kräfte K_1 und P_1 an, die Polygonseite bc die Lage der Mittelkraft II von K_1, P_1 und P_2 , u. s. w. Die Polygonseite cd muss durch das Gelenk G gehen und die letzte Seite durch das Gelenk B .

Das Polygon $AabcdeB$ wird die der gegebenen Belastung entsprechende *Mittelkraftslinie* genannt (auch die *Drucklinie*, falls nämlich sämtliche Seilkräfte Drücke sind).*) Diese Linie gestattet, sofort die Lage der Mittelkraft der auf irgend einen Theil des Bogens wirkenden äusseren Kräfte anzugeben, während die Grösse und der Sinn der gesuchten Mittelkraft aus dem Kräftepolygone entnommen werden können.

Es werde nun der Bogen an irgend einer Stelle durch einen zur Mittellinie senkrechten Schnitt ss in zwei Theile getrennt, beispielsweise

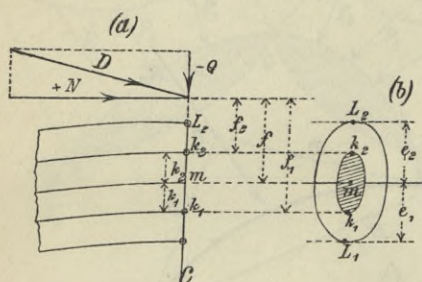


Fig. 166.

an einer Stelle C zwischen P_2 und P_3 (Fig. 162 u. 166). Links von C wirken die äusseren Kräfte K_1, P_1, P_2 . Die Mittelkraft derselben wird durch den Strahl II dargestellt; sie wirkt im Sinne OD (Fig. 162b) und fällt mit der Seilpolygonseite II zusammen; ihre Grösse sei ganz allgemein mit D bezeichnet. Wird die

Kraft $\overline{OD} = D$ in zwei Seitenkräfte $\overline{ED} = N$ und $\overline{OE} = Q$ zerlegt, welche senkrecht und parallel zu ss wirken, so ist N die *Längskraft* und Q die *Querkraft* für den Querschnitt C .

Hat N von dem Schwerpunkte m des fraglichen Querschnitts den Abstand f , so ist das *Biegemoment* für diesen Querschnitt

$$M = Nf.$$

Unter der Voraussetzung, dass D die Mittelkraft der am *linken* Bogenheile (AC) angreifenden äusseren Kräfte ist, setzen wir

M positiv, sobald D rechts um m dreht,

*) Vergleiche Seite 8.

Q positiv, sobald es von der hohlen nach der erhabenen Seite des Bogens wirkt,*)

N positiv, sobald es das Bestreben hat, den Theil AC an den Theil CB anzudrücken.

In Figur 162 u. 166 sind M und N an der Stelle C positiv, hingegen ist Q negativ. Schneidet die Drucklinie die Mittellinie des Bogens, so ist an der Schnittstelle $M=0$. In Fig. 162 ist für alle Querschnitte zwischen A und G das Moment M positiv und für alle Querschnitte zwischen G und B negativ.

110. Spannungen; Einführung der Kernlinien. Durch das Moment M und die Längskraft N werden im Querschnitte des Bogens Normalspannungen σ hervorgerufen, während die Querkraft Q Schubspannungen erzeugt; letztere dürfen stets vernachlässigt werden, und für die ersteren gelten mit hinreichender Annäherung die im Abschnitte III für den geraden Stab abgeleiteten Formeln. Vorausgesetzt ist hierbei, dass der Querschnitt eine im Verhältniss zum Krümmungshalbmesser der Bogen-Mittellinie geringe Höhe besitzt und dass der Stab in Bezug auf die durch seine Mittellinie gelegte Ebene symmetrisch ist, Bedingungen, welche bei den im Hochbau und Brückenbau zu behandelnden ebenen Bogenträgern stets erfüllt sind.

Bedeutungen

F und J den Inhalt und das auf die wagerechte Schwerachse des Querschnitts bezogene Trägheitsmoment des Querschnitts, e_1 und e_2 die Abstände des untersten und des obersten Querschnittspunktes (L_1 u. L_2) von jener Schwerachse, (Fig. 166b), so ergeben sich nach Gleich. 17 Seite 62 für die Spannungen σ_1 und σ_2 in den Punkten L_1 und L_2 die Werthe

$$(1) \quad \sigma_1 = -\frac{N}{F} + \frac{Me_1}{J}; \quad \sigma_2 = -\frac{N}{F} - \frac{Me_2}{J},$$

und mit den Bezeichnungen

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{J}{e_1} = W_1; \quad \frac{J}{e_2} = W_2, \\ \sigma_1 = -\frac{N}{F} + \frac{M}{W_1}; \quad \sigma_2 = -\frac{N}{F} - \frac{M}{W_2}. \end{array} \right.$$

W_1 und W_2 nennt man die *Widerstandsmomente* des Querschnitts.

*) Ist D die Mittelkraft der *rechts* von C wirksamen äusseren Kräfte, so ist das links drehende Moment M positiv, desgleichen die nach der hohlen Seite des Bogens gerichtete Querkraft.

Meistens ist es vortheilhaft, die *Kernhalbmesser* (s. Gleich. 2 auf Seite 78)

$$(3) \quad k_2 = \frac{J}{e_1 F} = \frac{W_1}{F} \quad \text{und} \quad k_1 = \frac{J}{e_2 F} = \frac{W_2}{F}$$

einzuführen. Trägt man diese Halbmesser vom Querschnittsschwerpunkte m aus auf der Senkrechten zur Bogenachse ab, indem man $\overline{mk_1} = k_1$ und $\overline{mk_2} = k_2$ macht, so erhält man die Kernpunkte k_1 und k_2 , welche wir stets mit denselben Buchstaben bezeichnen wollen, wie die entsprechenden Kernhalbmesser.

Hat N von diesen Punkten die Entfernungen f_1 und f_2 , so erhält man nach Gleich. 5 auf Seite 71 für die Spannungen σ_1 und σ_2 die übersichtlichen Formeln

$$(4) \quad \sigma_1 = \frac{Nf_2}{Fk_2} = \frac{M_2}{W_1} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = -\frac{Nf_1}{Fk_1} = -\frac{M_1}{W_2},$$

wobei M_2 und M_1 die auf die Kernpunkte k_2 und k_1 bezogenen Angriffsmomente bedeuten.

Die geometrischen Oerter der Punkte k_2 und k_1 nennt man die *Kernlinien*; ihre Einführung bei der Ermittlung der Spannungen erleichtert die Untersuchung der gefährlichsten Belastungsweisen ganz ausserordentlich, setzt aber voraus, dass die Werthe $k_1 = \frac{J}{Fe_2}$ und $k_2 = \frac{J}{Fe_1}$ mit Hilfe von überschläglichen Berechnungen festgestellt worden sind. Wie dies zu geschehen hat, soll am Ende dieses Abschnitts auseinandergesetzt werden.

§ 24.

Belastung durch senkrechte Kräfte.

a. Momente und Querkräfte in Folge beliebiger Belastung.

III. Momente. Die Kämpferdrücke eines durch irgend welche senkrechte Lasten beanspruchten Bogenträgers AGB (Fig. 167) seien in die senkrechten Seitenkräfte A und B und in die entgegengesetzt gleichen, nach der Richtung der Verbindungslinie AB der Kämpfergelenke wirkenden Seitenkräfte H' zerlegt; sodann sei gesetzt

$$(1) \quad H' \cos \alpha = H,$$

wobei α den Neigungswinkel der AB gegen die Wagerechte bedeutet. Man nennt H den *Horizontalschub* des Bogens.*)

*) Die Bezeichnung passt eigentlich nur für die wagerechte Seitenkraft des vom Bogen auf das Widerlager ausgeübten Druckes.

Wird zunächst $H' = 0$ angenommen, so lässt sich das Moment für irgend einen Querschnitts-Kernpunkt k , *gleichgültig ob der oberen oder der unteren Kernlinie angehörend*, in derselben Weise bestimmen, wie das Moment für den Querschnitt eines einfachen Balkens. Man zeichnet mit dem beliebigen Pole O_1 ein Seilpolygon $I II III \dots$, trägt die Schlusslinie ab ein, misst auf der Senkrechten durch k die Ordinate cn des Seilpolygons und multiplicirt diese mit der Polweite \mathfrak{S} . Das Produkt $\mathfrak{S} cn$ ist das gesuchte Moment; wir bezeichnen dasselbe mit M_{0k} .

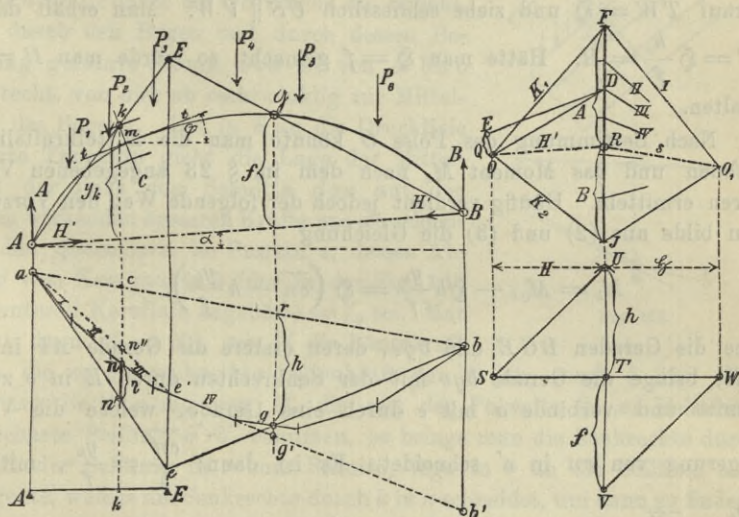


Fig. 167.

Treten nun die beiden Kräfte H' hinzu, welche in Bezug auf k am Hebelarme $y_k \cos \alpha$ angreifen, wobei y_k den in senkrechter Richtung gemessenen Abstand des Punktes k von der Geraden AB bedeutet, so entsteht das Moment

$$(2) \quad \begin{aligned} M_k &= M_{0k} - H' y_k \cos \alpha \\ M_k &= M_{0k} - H y_k. \end{aligned}$$

Für den Punkt G erhält man mit den in die Fig. 167 eingetragenen Bezeichnungen f und h

$$M_G = M_{0G} - Hf = \mathfrak{S}h - Hf$$

und hieraus folgt, da $M_G = 0$ sein muss, die wichtige Gleichung

$$(3) \quad H = \frac{M_{0G}}{f} = \frac{\mathfrak{S}h}{f}.$$

Legt man durch den Pol O_1 zur Schlusslinie ab eine Parallele s , welche den Kräftezug FJ in R schneidet, so ist (nach No. 67 Seite 123) $\overline{RF} = A$ und $\overline{JR} = B$. Zieht man von R aus eine Parallele zu AB und bestimmt auf derselben einen Punkt O im wagerechten Abstände H von \overline{FJ} , so stellt die Strecke RO die Kraft H' vor, und man erhält nun: $\overline{OF} = K_1$, $\overline{JO} = K_2$. Der Punkt O ist der Pol der durch die drei Punkte A, G, B gehenden Mittelkraftslinie. Will man die Lage des Poles O durch Zeichnung finden, so trage man auf der Verlängerung von FJ die Strecken $\overline{UT} = h$ und $\overline{TV} = f$ ab, mache $STW \perp UV$, hierauf $\overline{TW} = \mathfrak{H}$ und ziehe schliesslich $US \parallel VW$. Man erhält dann $\overline{ST} = \mathfrak{H} \frac{h}{f} = H$. Hätte man $\mathfrak{H} = f$ gemacht, so würde man $H = h$ erhalten.

Nach Bestimmung des Poles O könnte man die Mittelkraftslinie zeichnen und das Moment M_k nach dem im § 23 angegebenen Verfahren ermitteln. Häufig verdient jedoch der folgende Weg den Vorzug. Man bilde aus (2) und (3) die Gleichung

$$M_k = M_{0k} - \mathfrak{H} h \frac{y_k}{f} = \mathfrak{H} \left(\overline{cn} - h \frac{y_k}{f} \right),$$

ziehe die Geraden BGE und bge , deren erstere die Gerade Ak in E trifft, bringe die Gerade bge mit der Senkrechten durch E in e zum Schnitt und verbinde a mit e durch eine Gerade, welche die Verlängerung von cn in n' schneidet. Es ist dann: $\frac{\overline{cn'}}{h} = \frac{y_k}{f}$, mithin

$h \frac{y_k}{f} = \overline{cn'}$ und, wenn die Strecke $nn' = \eta$ gesetzt wird

$$(4) \quad M_k = \mathfrak{H} (\overline{cn} - \overline{cn'}) = -\mathfrak{H} \eta.$$

Das Moment M_k ist negativ oder positiv, jenachdem n' unterhalb (wie in Fig. 167) oder oberhalb des hängenden Seilpolygons agb liegt. Für \mathfrak{H} wird man natürlich einen runden Werth wählen.

An die allgemeine Bestimmung von M_k schliessen wir noch eine für die Folge sehr wichtige Untersuchung an, indem wir das Moment M_k für den Fall angeben, dass alle Lasten rechts von E verschwinden. Es ist dann die Seite IV die letzte Seite des Seilpolygons; ihr Schnittpunkt b' mit der Senkrechten durch B tritt an die Stelle von b , während g zu ersetzen ist durch g' , ferner e durch e' und n' durch n'' . Man erhält

$$M_k = + \mathfrak{H} \overline{nn''},$$

und dieses Moment stimmt mit dem Momente für den Querschnitt k

der Geraden DB' mit der Senkrechten durch A ist, und w den Abstand des Gelenkes G von der linken Auflagersenkrechten bedeutet. Macht man also $\overline{A'J} = \frac{w}{f}$, so ist das Dreieck $A'DB'$ die Einflussfläche für H . Der Einzellast P entspricht: $H = P\eta$. Bei mittelbarer Belastung setzt die Fig. 170 voraus, dass über jedem der drei Gelenke A, B, G ein Querträger liegt; ist dies nicht der Fall, so entsteht die in der Fig. 171 dargestellte Einflussfläche; denn zwischen je zwei Querträgern ist die Einflusslinie eine Gerade.*) In den folgenden Entwicklungen setzen wir voraus, dass senkrecht über den Gelenken A, B, G Querträger angeordnet sind.

114. Die Kämpferdrucklinie. Ist nur eine Last P vorhanden, so schneiden sich die beiden Kämpferdrücke in einem auf der Richtungslinie von P gelegenen Punkte S . Bewegt sich P von A nach B , so beschreibt der Punkt S die gebrochene Linie TGR , welche aus den Verlängerungen TG und GR der Geraden BG und AG besteht.

Es folgt dies ohne Weiteres aus der Untersuchung auf Seite 114; vergl. auch Fig. 104. Die Linie TGR nennt man die *Kämpferdrucklinie* des Bogens AGB ; sie wurde zu gleicher Zeit von *Fränkel* und *Winkler* in die Bogentheorie eingeführt.

115. Stützenwiderstände A, B und H in Folge gleichmässiger Belastung. Auf den Bogen möge eine gleichmässige Belastung wirken, welche $= p$ für die Längeneinheit der wagerecht gemessenen Stützweite $l = w + w'$ ist und von B aus die Strecke b bedeckt (Fig. 172). Aus der auf das Gelenk B als Drehpunkt bezogenen Momentengleichung

$$Al - pb \frac{b}{2} = 0 \text{ folgt}$$

$$(6) \quad A = \frac{pb^2}{2l}.$$

Trägt man diesen Werth unter dem Endpunkte E der belasteten Strecke von einer Wagerechten $A'B'$ aus als Ordinate auf, so liegt deren Endpunkt auf einer Parabel $B'LD$ mit senkrechter Achse und

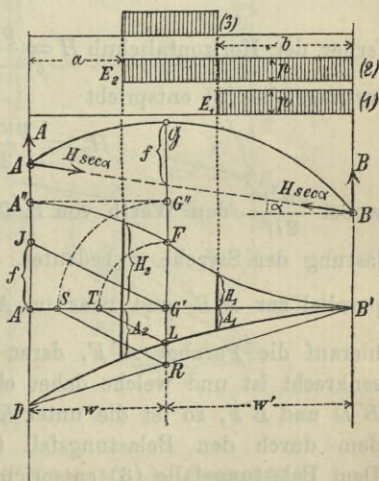


Fig 172.

*) Vergl. die ähnlichen Untersuchungen auf Seite 135.

mit dem Scheitel B' ; dieselbe besitzt an der Stelle $b = l$ die Ordinate $\overline{A'D} = \frac{pl}{2}$ und stimmt daher mit der in der Fig. 120 dargestellten Parabel $B'D$ überein. Hat man diese Parabel gezeichnet, so findet man für den Belastungsfall (1) in der Figur 172: $A = A_1$, für den Belastungsfall (2): $A = A_2$ und für den Fall (3): $A_3 = A_2 - A_1$. Ganz ebenso wird die Auflagerkraft B ermittelt; die B -Parabel ist das Spiegelbild der A -Parabel.

Den Stützenwiderstand H bestimmen wir mit Hilfe der Gleichung $H = \frac{M_{0G}}{f}$, bezeichnen mit w und w' die Abstände des Gelenkes G von den Auflagersenkrechten und finden im Falle $b < w'$ (Belastungsfall 1): $M_{0G} = Aw = \frac{pb^2w}{2l}$, mithin $H_1 = \frac{pb^2w}{2lf}$.

Wird H_1 von der Geraden $A'B'$ aus und unter dem Lastende E_1 als Ordinate aufgetragen, so liegt deren Endpunkt auf einer Parabel $B'F$ mit senkrechter Achse, deren Scheitel B' ist und welche für $b = w'$ die Ordinate $\overline{G'F} = \frac{pw'^2w}{2lf}$ besitzt; sie wird nach demselben Verfahren gezeichnet wie die Parabel $B'D$.

Im Falle gänzlicher Belastung ($b = l$) entsteht für den Querschnitt G eines einfachen Balkens AB das Moment $M_{0G} = \frac{pww'}{2}$ (nach S. 135), ferner der Horizontalschub $H = \frac{pww'}{2f}$ und hieraus folgt, dass dem Belastungsfall (2) entspricht

$$H_2 = \frac{pww'}{2f} - \frac{pa^2w'}{2lf},$$

wobei $\frac{pa^2w'}{2lf}$ den Werth von H für den Fall einer ausschliesslichen Belastung der Strecke a bedeutet. Zieht man also die Gerade $A''G''$ parallel zur $A'B'$ und zwar im Abstände $G'G'' = \frac{pww'}{2f}$ und zeichnet hierauf die Parabel $A''F$, deren Scheitel bei A'' liegt, deren Achse senkrecht ist und welche daher ebenso gefunden wird wie die Parabeln $B'D$ und $B'F$, so ist die unter E_2 gemessene Ordinate derselben gleich dem durch den Belastungsfall (2) hervorgerufenen Horizontalschub. Dem Belastungsfall (3) entspricht: $H_3 = H_2 - H_1$.

Um nach Aufzeichnung der A -Parabel die Punkte F und A'' der H -Parabeln schnell zu finden, bringe man die Senkrechte durch G in L und R mit der Parabel DB' und der Geraden DB' zum Schnitt,

trage $\overline{A'J} = f$ auf, ziehe $LT \parallel G'J$ und $RS \parallel G'J$ und mache $G'G'' = G'S$ ferner $G'F = G'T$. Dass die so gefundenen Strecken $G'G''$ und $G'F$ die oben vorgeschriebenen Werthe haben, ist leicht nachzuweisen; man beachte dass $\overline{G'L} = \frac{pw'^2}{2l}$ und $\overline{G'R} = \frac{pw'}{2}$ ist.

116. Stützenwiderstände A , B und H in Folge eines verschiebbaren Zuges von Einzellasten. Fig. 173. Die Auflagerkraft A , welche ein von B aus vorgeschobener Lastenzug hervorruft, ist nach No. 75 gleich der senkrecht unter der ersten Last P_1 gemessenen Ordinate ca eines Seilpolygons, das mit der Polweite l (Pol O) zu einem Lastenzuge gezeichnet worden ist, der von A aus bis B vorgerückt ist. Wir nannten dieses Seilpolygon das A -Polygon (vergl. Tafel I, Fig. 126).

Um H zu finden, bezeichnen wir die Abstände der Lasten P_1, P_2, \dots vom Gelenke G mit c_1, c_2, \dots , bestimmen zunächst $M_{0G} = Aw - \sum Pc$, wobei sich das Zeichen \sum nur auf die Lasten links von G bezieht, und erhalten hieraus

$$H = \frac{M_{0G}}{f} = \frac{Aw}{f} - \frac{\sum Pc}{f}.$$

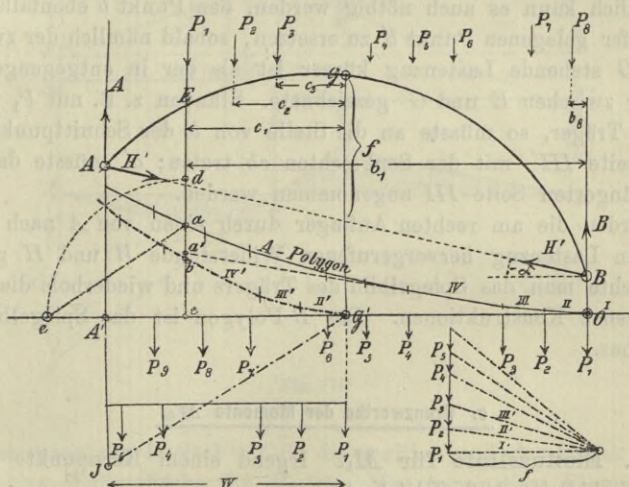


Fig. 173.

Zeichnet man nun für einen von A aus bis zur Senkrechten durch G vorgeschobenen Lastenzug ein (in der Fig. 173 strichpunktirtes) Seilpolygon I', II', \dots , dessen erste Ecke mit G' zusammenfällt, und wählt die Polweite $= f$, so ist die senkrecht unter E gemessene Ordinate dieses

Polygons: $\overline{cb} = \frac{\sum Pc}{f}$ (vergl. Seite 20). Macht man also auf der linken Auflager-Senkrechten: $A'J = f$, zieht die Gerade $G'J$ und hierauf $ae \parallel G'J$, so erhält man $\overline{ce} = A \frac{w}{f}$ und, nach Auftragen von $\overline{cd} = \overline{ce}$, den Horizontalschub: $H = \overline{db}$.

Solange die erste Last des von B aus vorgeschobenen Zuges rechts von G liegt, ist natürlich $H = A \frac{w}{f}$.

Es kann auch vorkommen, dass die Kräfte A und H für einen von B aus vorgeschobenen Lastenzug ermittelt werden müssen, der kürzer ist als der bei Aufzeichnung des Seilpolygons angenommene, von A bis B reichende. Ständen beispielsweise in Fig. 173 nur die Lasten P_1 bis P_3 auf dem Träger, so wäre die Seite IV die letzte Seite des A -Polygons, ihr Schnittpunkt a' mit der Senkrechten durch E müsste an die Stelle von a treten, und man würde erhalten

$$A = \overline{ca'}; \quad H = A \frac{w}{f} - \overline{cb} = \overline{ca'} \frac{w}{f} - \overline{cb}.$$

Der Werth H wird wie vorhin durch Zeichnung bestimmt.

Endlich kann es auch nöthig werden, den Punkt b ebenfalls durch einen tiefer gelegenen Punkt b' zu ersetzen, sobald nämlich der zwischen E und G stehende Lastenzug kürzer ist als der in entgegengesetzter Richtung zwischen E und G' gezeichnete. Ständen z. B. nur P_1 und P_2 auf dem Träger, so müsste an die Stelle von b der Schnittpunkt b' der Polygonseite III' mit der Senkrechten cb treten; a' müsste dann auf der verlängerten Seite III angenommen werden.

Werden die am rechten Auflager durch einen von A nach B vorrückenden Lastenzug hervorgerufenen Widerstände B und H gesucht, so betrachte man das Spiegelbild des Trägers und wiederhole die soeben beschriebenen Konstruktionen. Das B -Polygon ist das Spiegelbild des A -Polygons.

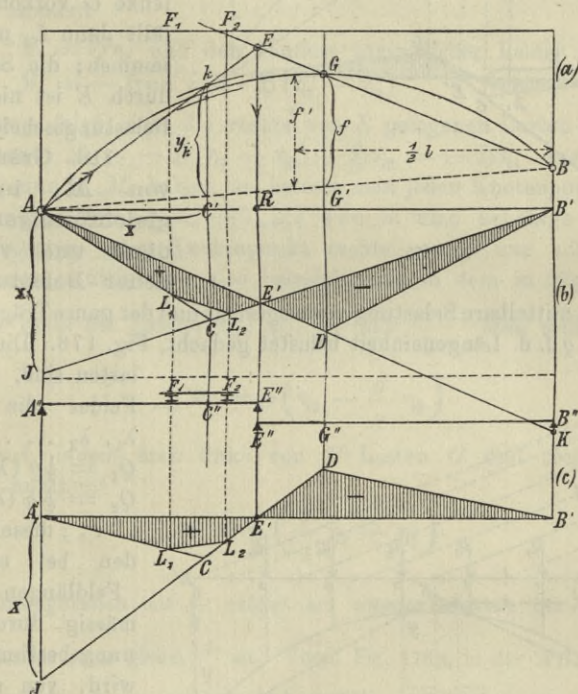
c. Grenzwerte der Momente M_k .

117. Einflusslinie für M_k . Irgend einem Kernpunkte k entspricht nach Seite 183 (Gleich. 2)

$$M_k = M_{0k} - Hy_k,$$

wobei M_{0k} das Moment für den senkrecht unter k gelegenen Querschnitt C' eines einfachen Balkens AB' (Fig. 174) bedeutet. Die Einflusslinie für M_k ist bei unmittelbarer Belastung nach No. 77, Seite 134, ein Dreieck ACB' , dessen Spitze C auf der Senkrechten durch C' liegt, und dessen Seite $B'C$ auf der linken Auflagersenkrechten die Strecke

$\overline{AJ} = x$ abschneidet. Subtrahirt man nun von dieser M_{0k} -Fläche die Hy_k -Fläche, so erhält man die M_k -Fläche. Die Hy_k -Fläche ist ebenso wie die in No. 113 dargestellte H -Fläche ein Dreieck (ADB'), dessen Spitze (D) auf der Senkrechten durch G liegt. Die Seite AD desselben schneidet die Gerade JB' auf der Senkrechten durch den Schnittpunkt E der Geraden BG und Ak ; denn eine durch E gehende Einzellast erzeugt einen in die Gerade AkE fallenden Kämpferdruck und verursacht daher das Moment $M_k = 0$. Hieraus folgt, dass bei unmittel-

Fig. 174^a

barer Belastung das Dreieck ACE' die positive und das Dreieck $E'DB'$ die negative Einflussfläche für M_k ist. Man kann diese Figuren noch etwas zweckmässiger anordnen, indem man nach Auftragen von $\overline{AJ} = x$ (Fig. 174c) die Gerade JD durch den senkrecht unter E gelegenen Punkt E' der Wagerechten $A'B'$ zieht, hierauf D mit B' verbindet und die Gerade $A'C$ einträgt.

☒ Wird die Belastung durch Querträger übertragen und liegt k zwischen zwei Knotenpunkten F_1 und F_2 , so ist noch die Gerade L_1L_2

zu ziehen, deren Endpunkte in der Fig. 174b auf AC und JB' und in der Fig. 174c auf $A'C$ und JD liegen. Es entstehen die in jenen

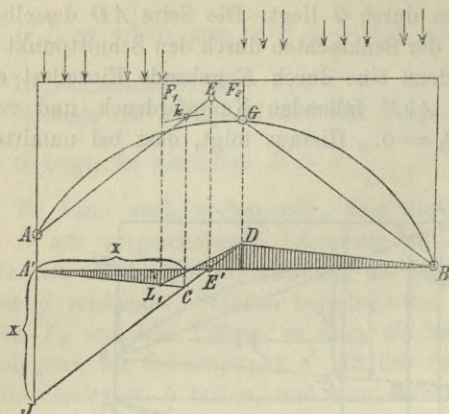


Fig. 175.

Figuren schraffirten Einflussflächen. Fig. 175 setzt voraus, dass k und E in demselben Felde liegen, ein Fall, der in der Regel nur in dem Felde neben dem Gelenke G vorkommt. Es fällt dann L_2 mit D zusammen; die Senkrechte durch E ist nicht mehr Belastungsscheide.

118. Grenzwerthe von M_k in Folge gleichförmiger ständiger und veränderlicher Belastung. Es

sei zunächst mittelbare Belastung vorausgesetzt und der ganze Träger gleichmässig mit q f. d. Längeneinheit belastet gedacht, Fig. 176. Die Knotenlasten sind, wenn die Felder die Längen $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ haben:

$$Q_1 = \frac{1}{2} q (\lambda_1 + \lambda_2);$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} q (\lambda_2 + \lambda_3);$$

$$\dots; \text{ dieselben werden bei ungleichen}$$

Feldlängen zweckmässig durch Zeichnung bestimmt. Dazu wird, von einer beliebigen Wagerechten $A'B'$ aus, auf der Senkrechten durch A die Last $\overline{A'C} = ql$ aufgetragen, die Gerade CB' gezogen und durch den Mittelpunkt jedes Feldes eine Parallele zur CB'

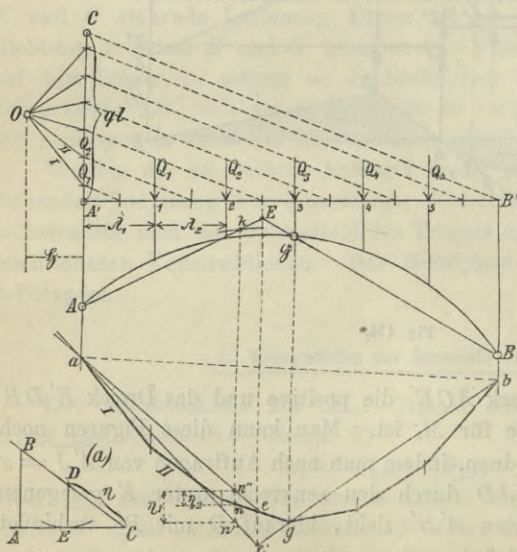


Fig. 176.

gelegt. Diese Parallelen schneiden auf der Geraden $A'C$ die gesuchten

Kräfte $Q_1, Q_2 \dots$ ab, für welche nun mit dem beliebigen Pole O (Polweite \mathfrak{S}) ein Seilpolygon agb gezeichnet wird, mit dessen Hilfe die Grenzwerte von M_k ermittelt werden können. Dazu bestimme man die Belastungsscheide E , bringe die Senkrechte durch E in e und e' mit dem Seilpolygone und der Geraden bg zum Schnitt und ziehe die Geraden ae und ae' , welche die Senkrechte durch k in n'' und n' schneiden mögen. Setzt man $\overline{n'n''} = \eta_1$ und $\overline{nn''} = \eta_2$, wo n den senkrecht unter k gelegenen Punkt des Seilpolygons bedeutet, so erhält man nach No. 111 den Einfluss der links von E angreifenden Lasten (Q_1 u. Q_2) auf das gesuchte Moment

$$M_k = \mathfrak{S} \eta_2 \text{ und den Einfluss sämtlicher Lasten:}$$

$$M_k = -\mathfrak{S} \overline{nn'} = -\mathfrak{S} (\eta_1 - \eta_2).$$

Hieraus folgt, dass die rechts von E gelegenen Lasten (Q_3 bis Q_5) das Moment $M_k = -\mathfrak{S} (\eta_1 - \eta_2) - \mathfrak{S} \eta_2 = -\mathfrak{S} \eta_1$ hervorbringen. Will man nun ${}_{max}M_k$ haben, so belaste man jeden Knotenpunkt m links von E mit $Q_m = \frac{1}{2}q (\lambda_m + \lambda_{m+1})$ (wo m eine beliebige Ordnungsziffer), hingegen jeden Knotenpunkt rechts von E nur mit $G_m = \frac{1}{2}g (\lambda_m + \lambda_{m+1})$, multiplicire also beispielsweise in dem in Fig. 176 dargestellten Falle die Lasten Q_3, Q_4, Q_5 mit $\frac{g}{q}$. Man erhält dann

$${}_{max}M_k = \mathfrak{S} \left(\eta_2 - \frac{g}{q} \eta_1 \right)$$

und hierauf, indem man links von E Lasten G und rechts von E Lasten Q annimmt

$${}_{min}M_k = \mathfrak{S} \left(\frac{g}{q} \eta_2 - \eta_1 \right).$$

Die Multiplikation mit $\frac{g}{q}$ erfolgt am zweckmässigsten mit Hilfe eines Winkels, dessen Sinus gleich $\frac{g}{q}$ ist. Vergl. Fig. 176 a, in der ABC ein rechtwinkliges Dreieck ist, in welchem sich verhält: $\overline{AB} : \overline{BC} = g : q$. Macht man $\overline{DC} = \eta$, so ist das Loth DE von D auf AC gleich $\frac{g}{q} \eta$. Man hat übrigens nicht nöthig, das Loth zu zeichnen, kann vielmehr DE messen, indem man mit dem Cirkel um D einen kleinen Kreisbogen beschreibt, welcher AC berührt.

Die mit Hilfe des beschriebenen Verfahrens erhaltenen Grenzwerte von M_k sind etwas grösser als die in Wirklichkeit auftretenden. Man vergleiche hierüber die auf Seite 118 an den Belastungsfall in Fig. 109 geknüpften Bemerkungen. Das Verfahren ist auch dann brauchbar, wenn die Gelenke AGB (wie in der Fig. 171) nicht senkrecht unter Querträgern liegen.

Bei *unmittelbarer Belastung* tritt in der Fig. 176 an die Stelle des Seilpolygons die in dieselbe einbeschriebene Seillinie, oder, wenn die Polweite $\xi = 1$ gewählt wird, eine über der Stützweite l errichtete Parabel, deren Pfeil $= \frac{ql^2}{8}$ ist. Vergl. Seite 135 und Fig. 124. Man erhält dann die genauen Grenzwerte $_{max}M_k$, $_{min}M_k$. Beschränkt man sich nun darauf, die Momente für die in den Senkrechten durch die Querträger gelegenen Kernpunkte k zu berechnen, so darf man stets unmittelbare Belastung annehmen, weil für diese Punkte die Momente für mittelbare und unmittelbare Belastung übereinstimmen. Dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass über den Gelenken A , B , G Querträger liegen. Ist in diesem Falle die Mittellinie des Bogens eine Parabel mit senkrechter Achse, so kann man die Aufzeichnung der Momentenparabel sparen. In der Fig. 177 ist ein in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte symmetrischer Parabelbogen vorausgesetzt worden. Um die Grenzwerte des Momentes M_{k_2} für einen oberen Kernpunkt k_2 zu ermitteln, ziehe man die Gerade Ak_2E_2 , bestimme auf der Bogenmittellinie die Punkte e_2 und m_2 senkrecht unter E_2 und k_2 und verbinde A mit e_2 durch eine Gerade, welche die Senkrechte durch k_2 in n_2 schneidet. Nach Messung von $\eta_{11} = \frac{k_2 n_2}{l}$ und $\eta_{12} = \frac{m_2 n_2}{l}$ findet man

$$_{max}M_{k_2} = \frac{ql^2}{8f} \left(\eta_{12} - \frac{g}{q} \eta_{11} \right) = \frac{l^2}{8f} (g\eta_{12} - q\eta_{11}) \quad \text{und}$$

$$_{min}M_{k_2} = \frac{l^2}{8f} (g\eta_{12} - q\eta_{11}).$$

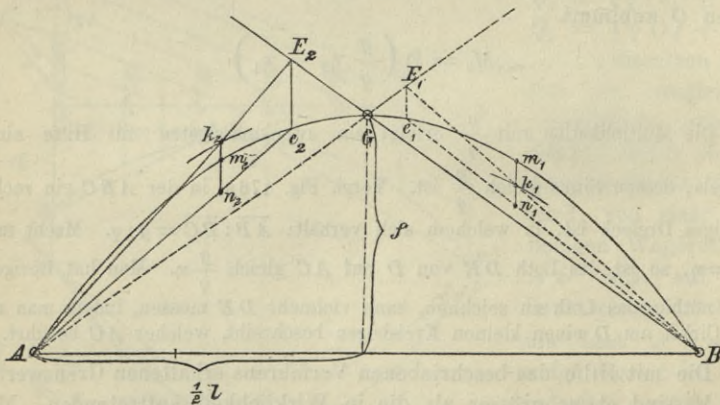


Fig. 177.

Die Multiplikation mit $\frac{ql^2}{8f}$ war nöthig, weil die Parabel mit dem Pfeile $\frac{1}{8}ql^2$ durch eine Parabel mit dem Pfeile f ersetzt wurde.

Ganz ebenso erhält man M_{k_1} für einen Punkt k_1 der unteren Kernlinie. Die betreffenden Hilfslinien wurden in der Fig. 177 gestrichelt und der Punkt k_1 wurde rechts von G angenommen. Man findet nach Messung von $\eta_1 = k_1 n_1$ und $\eta_2 = m_1 n_1$

$$\max M_{k_1} = \frac{l^2}{8f} (g\eta_2 - g\eta_1) \quad \text{und} \quad \min M_{k_1} = \frac{l^2}{8f} (g\eta_2 - g\eta_1).$$

Liegen die Kämpfergelenke A und B ungleich hoch und das Gelenk G nicht in der Mitte, so ist in den vorstehenden Gleichungen die Pfeilhöhe f durch die bei $x = \frac{1}{2}l$ gemessene Parabelordinate f' (Fig. 174) zu ersetzen.

119. Grenzwerte von M_k in Folge eines verschiebbaren Zuges von Einzellasten. 1. *Bestimmung von $\max M_k$.* Liegen die Punkte k und E nicht in demselben Felde, so stimmt die positive M_k -Fläche überein mit der Einflussfläche für das Moment in Bezug auf den senkrecht unter k gelegenen Querschnitt C'' eines einfachen Balkens $A''E''$ (Fig. 174b). Wird nicht nur die positive Beitragsstrecke belastet, sondern wirken auch rechts von E (aber links von G) Lasten, so ist der stellvertretende Balken $A''E''$ ein solcher mit überragendem Ende. Dieser allgemeinere Fall wurde in der Figur 178 vorausgesetzt; er kann vorkommen, sobald E'' in grösserer Entfernung von C'' liegt. Um nun $\max M_k$ zu finden, zeichne man für einen hinreichend langen Lastenzug mit der beliebigen Polweite \wp ein Seilpolygon und setze hierauf den stellvertretenden Balken $A''E''$ so unter den Zug, dass eine schwere Last über einem der beiden Querträger F_1 oder F_2 liegt. Die Lasten rechts von E'' denke man beseitigt, soweit dies thunlich ist, ohne unmögliche Belastungsfälle

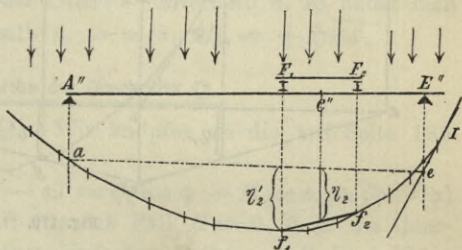


Fig. 178.

zu erhalten. Bei der Zugstellung in Fig. 178 liegt eine Last rechts von E'' . Die äusserste Seilpolygonebene I wurde mit der Senkrechten durch E'' in e zum Schnitte gebracht, und hierauf wurden die Schlusslinien ae (entsprechend $A''E''$) und f_1f_2 , entsprechend F_1F_2 eingetragen; dieselben schneiden auf der Senkrechten durch C'' die Strecke η_2 ab, und es ergibt sich nun

$$\max M_k = + \wp \eta_2.$$

2. Um $\min M_k$ zu ermitteln, beachte man, dass die negative Einfluss-

fläche in Fig. 174 b im Falle: $\overline{B'K} = \overline{B'G'}$ mit der Einflussfläche für das Moment in Bezug auf den Querschnitt G'' eines einfachen Balkens $E''B''$ übereinstimmen würde. Setzen wir also zunächst $B'K = B'G'$ voraus und nehmen ausserdem an, dass auch links von E (aber rechts von F_2) Lasten liegen, in welchem Falle der stellvertretende Balken ein solcher mit überragendem Ende ist, so ergibt sich $\min M_k$ wie folgt. Der Balken $E''B''$ wird so unter den Lastenzug gestellt, dass eine schwere Last über G'' steht, Fig. 179. Die Lasten links von E'' werden soweit als möglich beseitigt gedacht. Hierauf wird die äusserste Seilpolygonseite I mit der Senkrechten durch E'' in e zum Schnitt gebracht, die Schlusslinie eb eingetragen, unter G'' die Ordinate η' gemessen und $M_k = \mathfrak{S} \eta'$ erhalten. Nun ist aber in Fig. 174 b nicht $\overline{B'K} = \overline{B'G'}$, und es muss daher das Moment $\mathfrak{S} \eta'$ noch mit $\frac{B'K}{B'G'} = \frac{A''C'' \cdot E''B''}{A''E'' \cdot G''B''}$ (wegen $B'K = AJ \frac{E''B''}{A''E''}$ und $AJ = A''C''$) multiplicirt werden. Zieht man nun die Gerade bg bis zum Schnittpunkte e'' mit der Senkrechten durch E'' , verlängert be bis a (senkrecht unter A''), verbindet

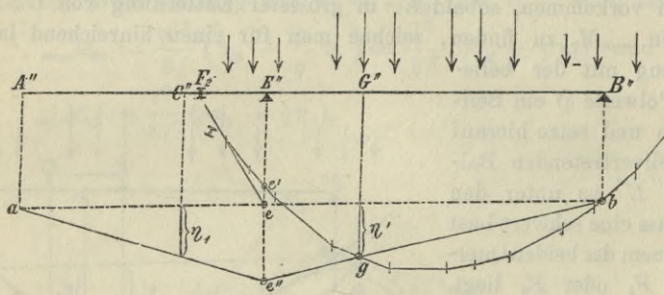


Fig. 179.

e'' mit a und misst unter C'' die in der Fig. 179 mit η_1 bezeichnete Ordinate, so ist $\eta_1 = \frac{ee''}{A''E''} \frac{A''C''}{G''B''} = \eta' \frac{E''B''}{G''B''} \frac{A''C''}{A''E''}$, und man erhält mithin

$$\min M_k = - \mathfrak{S} \eta_1.$$

Die gefährlichsten Zugstellungen werden am zweckmässigsten durch Probiren ermittelt.

Will man bei der Laststellung in Fig. 178 die rechts von E'' wirkende Last vernachlässigen und in Fig. 179 die links von E'' liegen-

den (was nach der Ansicht des Verfassers nur empfehlenswerth ist*), so treten an die Stelle der Punkte e die Punkte e' , in denen die Senkrechten durch E'' das Seilpolygon schneiden, und es ergeben sich etwas zu grosse Momente.

Bei nicht zu grossen Stützweiten wird das Moment $_{max}M_k$ meistens durch einen von A aus vorrückenden, von vorwärts gehenden Lokomotiven geführten Güterzug, dessen erste oder zweite Achse über F_1 steht, hervorgerufen, und das Moment $_{min}M_k$ durch einen von B aus vorrückenden Zug, dessen erste oder zweite Achse über G steht. Liegen k und E in demselben Felde, so darf man immer die erste Achse über F_1 beziehungsweise G stellen (Fig. 175); es bleiben dann die eben beschriebenen Verfahren brauchbar.

In der Regel genügt es, die Momente für die senkrecht unter Querträgern liegenden Kernpunkte zu bestimmen. Man spart dann bei der Bestimmung von $_{max}M_k$ die Einzeichnung der Schlusslinie f_1f_2 . Fiele z. B. in der Fig. 178 der fragliche Kernpunkt mit der Senkrechten durch F_1 zusammen, so würde man erhalten: $_{max}M_k = \xi \eta'_2$.

Zu den durch den Lastenzug erzeugten Momenten M_k sind noch die von der ständigen Belastung herrührenden Momente M_{kg} zu addiren. Die letzteren werden am zweckmässigsten mittels des in No. 118 beschriebenen und in der Fig. 176 dargestellten Verfahrens bestimmt. An Stelle der Lasten $Q_1, Q_2 \dots$ treten die Lasten $G_1, G_2 \dots$. Liegt dann (wie in Fig. 176) der Punkt n' unterhalb n , so findet man $M_{kg} = -\xi \overline{nn'}$; liegt n' oberhalb n , so wird: $M_{kg} = +\xi \overline{nn'}$.

d. Grenzwerte der Querkräfte Q .

120. Einflusslinie für Q . Wir knüpfen an die auf Seite 186 abgeleitete Gleichung

(1) $Q = Q_0 \cos \varphi - H' \sin (\varphi - \alpha) = Q_0 \cos \varphi - H \sec \alpha \sin (\varphi - \alpha)$
 an, in welcher Q_0 die Querkraft für den Fall $H = 0$, d. h. die Querkraft für den Querschnitt C eines einfachen Balkens AB ist. Trägt man nun, von einer Wagerechten $A'B'$ aus, auf den Auflagersenkrechten die Strecken $\overline{A'J} = \overline{B'J'} = 1 \cdot \cos \varphi$ auf (Fig. 180 b), zieht die Geraden $A'J'$ und $B'J$ und verbindet die auf diesen Geraden senkrecht unter den Querträgern F_1 und F_2 gelegenen Punkte L_1 und L_2 , so ist die gebrochene Linie $A'L_1L_2B'$ (nach No. 75 Seite 131) die Einflusslinie für $Q_0 \cos \varphi$. Die Einflusslinie für das zweite, von $Q_0 \cos \varphi$ in Abzug zu bringende Glied des oben für Q angegebenen Ausdruckes besteht, ebenso wie diejenige für H , aus zwei Geraden $A'D$ und DB' ; sie ist durch die Bedingung gegeben, dass sich die Geraden $A'D$ und

*) Vergl. die Auseinandersetzungen in No. 99, Seite 168.

$B'J$ auf der Senkrechten durch den Punkt E , in welchem die Kämpferdrucklinie BGE von einer durch A zur Tangente tt gezogenen Parallelen getroffen wird, schneiden müssen. Denn eine durch E gehende Einzellast erzeugt einen in die Gerade AE fallenden, also senkrecht zum fraglichen Querschnitte gerichteten Kämpferdruck und bringt mithin für den Querschnitt C die Querkraft $Q=0$ hervor. Die Senkrechte durch E ist deshalb eine Belastungsscheide und der Punkt E' ein Nullpunkt der Einflusslinie. Hieraus folgt aber, dass die in der Fig. 180 b schraffierte Fläche die Einflussfläche für Q ist. Eine etwas bequemere Anordnung dieser Fläche zeigt die Fig. 180 c; in dieser ist $AL_1 \parallel JE$.

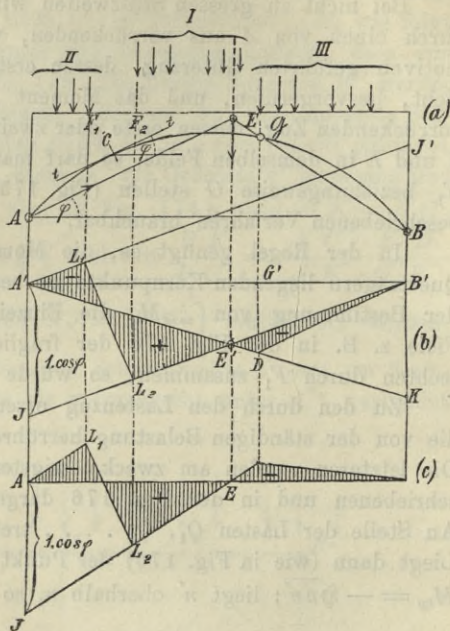


Fig. 180.

Liegt E unterhalb G , so entsteht die in der Fig. 181 dargestellte Einflussfläche, welche nur einen Nullpunkt besitzt.

Die Querkraft Q ist für die Querschnitte eines und desselben Feldes nahezu konstant; sie ist nur deshalb veränderlich, weil der Winkel φ sich ändert. Man begeht nur einen sehr geringen Fehler, wenn man Q für alle Querschnitte eines Feldes gleich gross annimmt und unter φ den Neigungswinkel der die Knotenpunkte verbindenden Bogensehne versteht. Vergl. Fig. 182 u. 183.

Mit Hilfe der Einflussflächen kann man die Grenzwerte $_{max}Q$ und $_{min}Q$ mittels des im § 14 angegebenen allgemeinen Verfahrens berechnen; man kann sich aber auch der folgenden Verfahren bedienen.

121. Querkräfte $_{max}Q$ und $_{min}Q$ in Folge von Einzellasten. Liegt der in Figur 181 dargestellte Fall (E rechts von G) vor, so schiebe man, um $_{max}Q$ zu erhalten, den Lastenzug von B aus bis zum Querträger F_2 vor, (Zugstellung I) und ermittle nach No. 116 die am Gelenke A angreifenden Kräfte A und H . Es wirkt dann links vom

lichste Stellung des Zuges *III* am schnellsten durch Probiren, indem man der Reihe nach die erste, zweite, dritte Achse der ersten Lokomotive über *G* stellt und die gewonnenen Werthe *Q* (deren Darstellung sehr schnell vor sich geht) vergleicht. Man kann auch die durch den Zug *III* hervorgerufene Querkraft $\min Q$ in ähnlicher Weise bestimmen wie $\min M_k$ (vergl. No. 119 und die Figur 174b); denn der zwischen *E'* und *B'* gelegene Theil der Einflussfläche hat dieselbe Form wie die Einflussfläche für das Moment in Bezug auf den Querschnitt *G''* eines einfachen Balkens *E''B''*. Man hat nur nöthig, das für den stellvertretenden Balken ermittelte Moment mit $\frac{B'K}{B'G'}$ (vergl. Fig. 180b) zu multipliciren.

Schliesst man die Belastung des Trägers durch zwei getrennte Züge als unwahrscheinlich aus, so muss man *Q* in Folge des Zuges *II* mit *Q* in Folge von Zug *III* vergleichen; der grössere der beiden Werthe ist dann die grösste negative Querkraft.

Zu den durch die Lastenzüge hervorgerufenen Querkräften ist noch die von der ständigen Belastung erzeugte Querkraft Q_g zu addiren; dieselbe wird zweckmässig mit Hilfe des in No. 112 (vergl. auch Fig. 167) beschriebenen Verfahrens ermittelt. Das hierzu erforderliche Seilpolygon wird nach No. 126 gezeichnet; man vergleiche die Fig. 176, in welcher die Knotenlasten $Q_1, Q_2 \dots$ durch die von der ständigen Belastung herrührenden Lasten $G_1, G_2 \dots$ ersetzt werden müssen. Bei Parabelbögen mit senkrechter Achse und auch bei flachen Kreisbögen (also in allen im Brückenbau üblichen Fällen) sind die Querkräfte Q_g stets so klein, dass sie = 0 gesetzt werden dürfen. Für den Parabelbogen werden sie bei unmittelbarer und gleichförmiger ständiger Belastung genau = 0, weil hier die Mittelkraftslinie mit der Bogenmittellinie zusammenfällt.

122. Querkräfte $\max Q$ und $\min Q$ in Folge einer gleichmässigen veränderlichen und ständigen Belastung. Es handle sich um die von der Verkehrslast (*p*) abhängige Querkraft Q_p für das Feld $F_1 F_2$. Fig. 182. Die Querkraft Q_g in Folge der ständigen Belastung (*g*) sei bereits auf die soeben angegebene Weise bestimmt worden.

Die zur Sehne $T_1 T_2$ der Bogenmittellinie parallele Gerade *AE* schneide die *BG* unterhalb *G*. Dann entsteht $\max Q_p$, sobald der Träger nur zwischen der Stütze *B* und der im Felde $F_1 F_2$ gelegenen Belastungsscheide *N* mit *p* belastet wird (Belastungsfall *I* in Fig. 182). Die Lage von *N* lässt sich zwar mit Hilfe der Einflusslinie schnell finden, es empfiehlt sich jedoch, $\max Q_p$ auf die folgende Weise angenähert zu bestimmen. Man nehme *N* in der Mitte des Feldes $F_1 F_2$ an und vernachlässige den Druck, welchen die zwischen *N* und F_2 liegende Last auf den Querträger F_1 ausübt. Es greifen dann links von dem durch das fragliche Feld geführten

Schnitte nur die äusseren Kräfte A und $H' = H \sec \alpha$ an, und man kann, nachdem man A und H auf die in No. 115 beschriebene Art ermittelt hat, den Kämpferdruck K_1 und durch Zerlegung desselben die Querkraft $max Q_p$ finden. Um $min Q_p$ zu bestimmen, beachte man, dass die beiden Belastungen I und II (Fig. 182), welche beziehungsweise $max Q_p$ und $min Q_p$ erzeugen, zusammen die gänzliche Belastung des Trägers ausmachen. Nun erzeugt aber gänzliche Belastung mit g die Querkraft Q_g ,

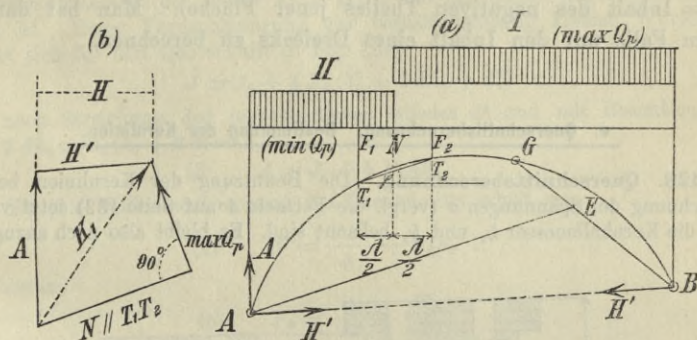


Fig. 182.

mithin gänzliche Belastung mit p die Querkraft $\frac{p}{g} Q_g$, und es folgt daher

$$max Q_p + min Q_p = \frac{p}{g} Q_g \text{ und hieraus: } min Q_p = -max Q_p + \frac{p}{g} Q_g.$$

Die Querkräfte, welche die ständige und die veränderliche Belastung zusammen hervorbringen, sind hiernach

$$(1) \quad \begin{cases} max Q = max Q_p + Q_g \\ min Q = min Q_p + Q_g = -max Q_p + \frac{p+g}{g} Q_g. \end{cases}$$

Liegt E oberhalb G , Fig. 183, so belastet man, um $max Q_p$ zu erhalten, den Träger zwischen E und der Mitte N des fraglichen Feldes mit p , bestimmt A und H (nach No. 115) und hierauf, wie vorhin, den Kämpferdruck K_1 und die Querkraft $max Q_p$. Schliesslich wendet man die Gleichungen (1) an.

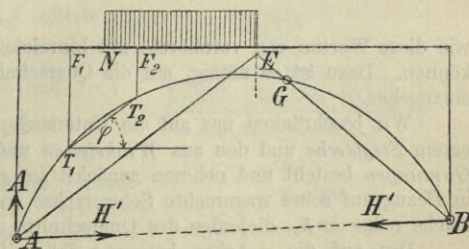


Fig. 183.

Ist die Bogenmittellinie eine Parabel oder ein flacher Kreisbogen, so ist genau oder nahezu $Q_g = 0$, und man findet dann

$$\max Q = \max Q_p = - \min Q_p = - \min Q.$$

Benutzt man in diesem Falle zur Ermittlung der Grenzwerte von Q die Einflussfläche, so bestimmt man, sobald E links von G liegt, den Werth $\max Q = + p \mathfrak{F}_2$ (wo $\mathfrak{F}_2 =$ Inhalt des positiven Theils der Einflussfläche) und, wenn E rechts von G liegt, $\min Q = - p \mathfrak{F}_1$ (wo $\mathfrak{F}_1 =$ Inhalt des negativen Theiles jener Fläche). Man hat dann in jedem Falle nur den Inhalt eines Dreiecks zu berechnen.

e. Querschnittsberechnung. Bestimmung der Kernlinien.

123. Querschnittsberechnung. Die Benutzung der Kernlinien bei der Berechnung der Spannungen σ (vergl. die Formeln 4 auf Seite 182) setzt voraus, dass die Kernhalbmesser k_1 und k_2 bekannt sind. Es bleibt also noch anzugeben,

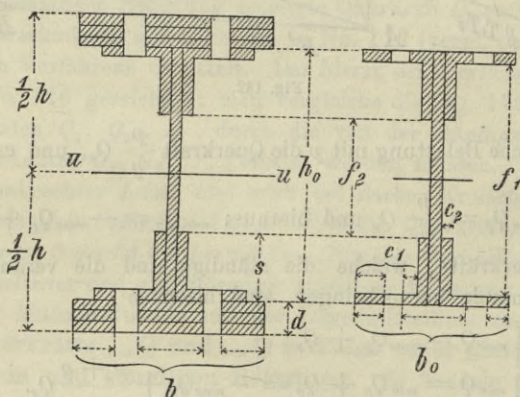


Fig. 184.

Fig. 185.

wie diese Werthe von vornherein mit hinreichender Genauigkeit ermittelt werden können. Dazu ist es nöthig, auf die Querschnittsberechnung selbst etwas näher einzugehen.

Wir beschränken uns auf die Untersuchung des *Blechträgers*, welcher aus einem *Stegbleche* und den aus *Winkelisen* und *Kopfplatten* zusammengesetzten *Gurtungen* besteht und nehmen zunächst an, es sei der Querschnitt symmetrisch in Bezug auf seine wagerechte Schwerachse uu , Fig. 184. Die Höhe des Stegblechs möge $= h_0$, diejenige des Querschnitts $= h$ gesetzt werden.

Das auf die u -Achse bezogene Trägheitsmoment des Querschnitts eines Blechträgers ohne Kopfplatten ist mit den in der Fig. 185 angegebenen Bezeichnungen

$$(1) \quad J_0 = \frac{1}{12} [b_0 h_0^3 - 2 c_1 f_1^3 - 2 c_2 f_2^3],$$

wobei b_0 und $\frac{c_1}{2}$ die betreffenden Breitenabmessungen nach Abzug der Nietdurchmesser bedeuten. Das Widerstandsmoment dieses Querschnittes ist

$$(2) \quad W_0 = \frac{2 J_0}{h_0}.$$

Treten Kopfplatten mit dem Gesamtinhalte $b d = F_k$ für jede Gurtung hinzu, Fig. 184, so wächst (nach Gleich. 2 auf Seite 26) das auf die u -Achse bezogene Trägheitsmoment des Querschnittes um $2 J_k + 2 F_k \left(\frac{h_0 + d}{2}\right)^2$, wo J_k das Trägheitsmoment der Fläche F_k in Bezug auf ihre eigene wagerechte Schwerachse ist. Unter Vernachlässigung des verhältnissmässig kleinen Werthes J_k ergibt sich für den Querschnitt in Fig. 184

$$J = J_0 + \frac{1}{2} F_k (h_0^2 + 2 d h_0 + d^2)$$

und nach Streichung des unwesentlichen Gliedes d^2 und mit Beachtung von $h_0^2 + 2 d h_0 = h_0 (h_0 + 2 d) = h_0 h$,

$$(3) \quad J = J_0 + \frac{1}{2} F_k h h_0.$$

Für das Widerstandsmoment des Querschnittes erhält man

$$(4) \quad W = \frac{2 J_0}{h} + F_k h_0$$

und hieraus

$$(5) \quad F_k = \frac{W}{h_0} - \frac{W_0}{h}.$$

Ist nun M_k das grössere der beiden auf die Kernpunkte k_1 und k_2 bezogenen Momente M_{k_1} und M_{k_2} , so ist bei gegebenener zulässiger Spannung σ das erforderliche Widerstandsmoment: $W = \frac{M_k}{\sigma}$,

und es ergibt sich daher zur Berechnung der notwendigen Kopfplatten die Gleichung

$$(6) \quad F_k = \frac{M_k}{\sigma h_0} - \frac{W_0}{h}.$$

Bei grösserem Unterschiede zwischen den Momenten M_{k_1} und M_{k_2} empfiehlt es sich, die Gurtungen ungleich stark zu machen (Fig. 186). Man findet dann, mit hinreichender Genauigkeit, die erforderlichen Querschnitte ($F_{k_1} = b_1 d_1$ und $F_{k_2} = b_2 d_2$) der Kopfplatten der unteren, beziehungsweise oberen Gurtung mittels der Gleichungen:

$$(7) \quad \begin{cases} F_{k_1} = \frac{M_{k_2}}{\sigma h_0} - \frac{W_0}{h} \text{ und} \\ F_{k_2} = \frac{M_{k_1}}{\sigma h_0} - \frac{W_0}{h}, \end{cases}$$

bei deren Anwendung der Umstand vernachlässigt wird, dass in Folge der ungleichen Gurtquerschnitte die u -Achse nicht mehr die Stegblechhöhe halbirt. Der begangene Fehler ist jedoch gering, und schliesslich könnte man nach Berechnung von F_{k_1} und F_{k_2} den Schwerpunkt, die Kernpunkte, die Momente M_{k_1} , M_{k_2} und die Spannungen σ_1 , σ_2 genauer ermitteln und die Unterschiede zwischen den letzteren

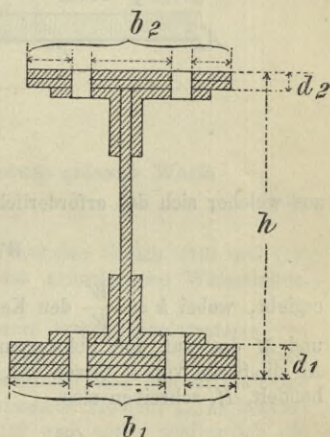


Fig. 186.

und der als zulässig erachteten Spannung feststellen. Der Verfasser hält aber diese umständliche Prüfung für überflüssig und höchstens für geeignet, eine ganz falsche Vorstellung von dem Genauigkeitsgrade der ganzen Rechnung zu erwecken; denn schon die Anwendung der Navier'schen Biegungstheorie auf die Bestimmung der Spannungen σ in Blechträgern ist eine ziemlich grobe Annäherung.

124. Vorläufige Querschnittsberechnung behufs Bestimmung der Kernlinien. Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf die im Brückenbau und Hochbau hauptsächlich angewandten symmetrischen flachen Bogenträger. Fig. 187. Um die Querschnittsabmessungen zunächst überschläglich zu berechnen, nehmen wir $F_{k1} = F_{k2} = F_k$ an und benutzen die Gleichung

$$\sigma = \frac{M}{W} + \frac{N}{F},$$

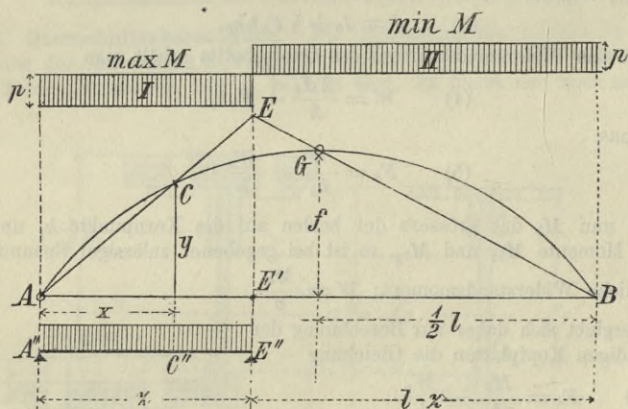


Fig. 187.

aus welcher sich das erforderliche Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{\sigma} (M + Nk)$$

ergiebt, wobei $k = \frac{W}{F}$ den Kernhalbmesser bedeutet, ferner N die Längskraft und M das auf den Schwerpunkt des Querschnitts bezogene Angriffsmoment. An die Stelle von N setzen wir, da es sich nur um eine angenäherte Berechnung handelt, H , schreiben also

$$(8) \quad W = \frac{1}{\sigma} (M + Hk)$$

und führen in diese Formel den Werth H für die Stellung der Verkehrslast ein, welche das grösste Moment M hervorbringt. Die Bogenmittellinie nehmen wir parabolisch an, heben jedoch hervor, dass die folgenden Rechnungen auch für flache Kreisbögen brauchbare Ergebnisse liefern. Es ist dann das Moment in Folge einer gleichmässigen und gänzlichen Belastung wegen des

Zusammenfallens der Drucklinie mit der Mittellinie des Bogens = 0; es verschwindet der Einfluss der ständigen Belastung g und es folgt für jeden Querschnitt: $\max M = -\min M$.

Gesucht sei nun $\max M$ für den Querschnitt C , Fig. 187. Zur Bestimmung der Belastungsscheide E dienen (mit den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen) die Gleichungen

$$\frac{z}{x} = \frac{EE'}{y}; \quad \frac{EE'}{l-z} = \frac{2f}{l}$$

und aus diesen folgt (wegen $y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$): $z = \frac{l^2}{3l-2x}$.

Belastet man nur die positive Beitragstrecke AE , so erhält man nach Seite 185 für den Bogenquerschnitt C ein Moment, welches eben so gross ist, wie das Moment für den Querschnitt C'' eines einfachen Balkens $A''E''$, und es folgt daher für den Fall einer *gleichförmigen* Verkehrslast p

$$(9) \quad \max M = \frac{px(z-x)}{2} = \frac{px(l^2-3lx+2x^2)}{2(3l-2x)} = -\min M.$$

Dieser Ausdruck wird am grössten für $x = 0,234l$, und zwar ergibt sich für das grösste aller Momente der Werth

$$(10) \quad M = 0,019 pl^2.$$

Die beiden in der Fig. 187 angegebenen Belastungsfälle (I) und (II) erzeugen entgegengesetzt gleiche Momente; dem Belastungsfalle II entspricht aber der grössere Werth H ; er soll also der weiteren Berechnung zu Grunde gelegt werden. Nach No. 115 entsteht nun in Folge der Verkehrslast $H = \frac{pl^2}{8f} - \frac{pz^2}{4f}$ und in Folge der ständigen Belastung $H = \frac{gl^2}{8f}$. Im ganzen erhält man

$$(11) \quad H = \frac{l^2}{8f} \left[g + p \left(1 - 2 \frac{z^2}{l^2} \right) \right]$$

und wegen $z = \frac{l^2}{3l-2 \cdot 0,234l} = 0,4l$

$$H = \frac{l^2}{8f} (g + 0,68p),$$

wofür (um begangene Fehler auszugleichen) der etwas grössere Werth

$$(12) \quad H = \frac{l^2}{8f} (g + \frac{3}{4}p)$$

angenommen werden soll. Die Werthe M und H aus den Gleich. (10) und (12) werden in die Gleich. (8) eingesetzt, worauf das erforderliche Widerstandsmoment W berechnet werden kann.

Besteht die veränderliche Belastung aus einem beweglichen Systeme von Einzellasten, so empfiehlt es sich, für den Querschnitt bei $x = \frac{1}{4}l$ das durch Einzellasten hervorgerufene Moment $\min M$ zu bestimmen und hierauf diejenige gleichmässige Belastung p zu ermitteln, welche dasselbe Moment $\min M$ hervorbringt. Nun berechne man H nach Gleichung (12) und setze schliesslich die Werthe $\min M$ und H in die Gleichung (8) ein.

Zur Erläuterung des Verfahrens diene das folgende *Zahlenbeispiel*.

Eine eingleisige Eisenbahn soll mit Hilfe von zwei Bogenträgern über eine 20^m weite Oeffnung geführt werden. Die Bogenmittellinie sei ein Kreisbogen, dessen Pfeil = 2,5^m ist; die ständige Belastung betrage für beide Träger zusammen $g = 1,25'$ f. d. Meter.

Es empfiehlt sich, den Kernhalbmesser k zunächst $= \frac{5}{12} h_0$ abzuschätzen, wobei $h_0 =$ Stegblechhöhe. Wird $h_0 = 50^{cm}$ gewählt, so folgt $k = \frac{5}{12} \cdot 50 = 21^{cm}$ und $W = 5370$.

Werden gleichschenklige Winkeleisen mit $s = 9^{cm}$ und $c_2 = 1,2^{cm}$ angenommen (vergl. Fig. 184 und 185), ferner ein 1^{cm} starkes Stegblech und Niete von $2,4^{cm}$ Dicke, so ergibt sich nach Gleich. (1 u. 2): $W_0 = 1772$ und nach

Gleich. (5): $F_k = \frac{W}{h_0} - \frac{W_0}{h}$, woraus dann mit $F_k = b d$ (vergl. Fig. 184)

$$b = \frac{1}{d} \left(\frac{W}{h_0} - \frac{W_0}{h_0 + 2d} \right) = \frac{1}{d} \left(\frac{5370}{50} - \frac{1772}{50 + 2d} \right).$$

Bei Annahme von drei $1,2^{cm}$ starken Platten ist $d = 3,6^{cm}$ und

$$b = \frac{1}{3,6} \left(\frac{5370}{50} - \frac{1772}{57,2} \right) = 21,2^{cm},$$

so dass die erforderliche Plattenbreite (wegen des Zuschlags von 2 Nietdurchmessern) $= 21,2 + 2 \cdot 2,4 = 26^{cm}$ beträgt. Der Inhalt des ganzen Querschnitts ist mit Berücksichtigung der Schwächung durch Niete: $F = 21,2 \cdot 1,2 \cdot 6 + 1,2 (9 + 9 - 1,2 - 2,4) 4 + 50 = 272^{cm^2}$ und für den Kernhalbmesser erhält

man: $k = \frac{W}{F} = \frac{5370}{272} = 20^{cm*}$. Wegen der geringen Abweichung dieses

Werthes k von dem zuerst geschätzten $k = 21^{cm}$ darf von einer Wiederholung der Berechnung von W , F und k abgesehen und die ausführliche Berechnung des Bogens unter der Annahme zweier Kernlinien durchgeführt werden, welche von der Mittellinie den konstanten Abstand $k = 20^{cm}$ haben.

*) Berechnet man W in ähnlicher Weise wie W_0 (Gleichung 1 u. 2), so erhält man $W = 5388$, ein Werth, der von dem mit Hilfe der Näherungsformel:

$W = h_0 \left[\frac{W_0}{h} + F_k \right]$ gefundenen $W = 5370$ fast gar nicht abweicht. Hervor-

zuheben ist, dass die Gleichungen 1 und 2 ebenfalls nur Näherungswerthe liefern, da sie die Abrundungen der Winkeleisen nicht berücksichtigen.

VIII. Abschnitt.

Einleitung in die Theorie des ebenen
Fachwerks.

§ 25.

Erklärungen und Voraussetzungen

125. Unter einem *ebenen Fachwerke* versteht man ein Gebilde aus Stäben, welche in ihren Endpunkten durch reibungslose Gelenke mit einander verbunden sind, und deren Achsen (Mittellinien) in ein und derselben Ebene liegen. Die Untersuchung derartiger Fachwerke soll hier unter der Annahme erfolgen, dass es zulässig ist, die durch die Elasticität der Fachwerksstäbe und der das Fachwerk stützenden Körper verursachten Formänderungen als verschwindend klein anzusehen und in Folge dessen bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen alle Kräfte in denjenigen Lagen zu denken, welche sie im Falle *starrer* Stäbe und Stützen einnehmen würden.

Zunächst werde vorausgesetzt, dass alle äusseren Kräfte in den Knotenpunkten, d. h. in den Punkten, in denen sich die Gelenke befinden, angreifen. Zerlegt man dann das Fachwerk durch einen Schnitt *tt* in zwei Theile (Fig. 189) und bringt, damit der eine der beiden Theile, z. B. der linke, für sich im Gleichgewichte ist, an den Schnittstellen Kräfte an, welche der Wirkung des weggenommenen rechten Theiles gleichwerthig sind, so müssen diese Kräfte mit den Achsen der Stäbe zusammenfallen, weil sie sonst die Stäbe um die an ihren Enden angeordneten Gelenke drehen würden, und hieraus folgt, dass alle Stäbe nur durch Längskräfte beansprucht werden. Wir nennen diese Kräfte *Spannkräfte* und werden dieselben als positiv oder negativ bezeichnen, je nachdem sie in den Stabquerschnitten Zug- oder Druckspannungen hervorrufen.

In den Untersuchungen dieses Abschnitts setzen wir alle äusseren Kräfte als bekannt voraus, indem wir uns die durch die gegebenen Lasten hervorgerufenen Stützenwiderstände auf irgend welche Weise gefunden denken. Für die wichtigsten Fälle äusserlich statisch bestimmter Träger, nämlich für den *einfachen Balken*, den *Gerber'schen Balken* und den *Bogen mit 3 Gelenken* sind diese Widerstände in den

Abschnitten V bis VII bestimmt worden. Die dort mitgetheilten Verfahren gelten sowohl für Träger aus vollwandigen, als auch für solche aus gegliederten Scheiben, wenn nur die gegliederten Scheiben starr sind. Man vergleiche die Untersuchungen im § 13 (No. 59 bis 61); werden die Stäbe, aus denen die dort erwähnten gegliederten Scheiben bestehen, in ihren Endpunkten gelenkartig mit einander verbunden (was in diesem Abschnitte stets vorausgesetzt werden soll), so sind diese Scheiben Fachwerke. Lassen sich die Spannkkräfte in sämtlichen Stäben einer Scheibe lediglich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen finden, so bezeichnen wir die Scheibe als *statisch bestimmt*.

Der einfachste Fall einer starren gegliederten Scheibe, d. h. einer Scheibe, deren Knotenpunkte sich gegeneinander nicht verschieben können, ist das in der Fig. 189 dargestellte *Dreiecknetz*. Dasselbe entsteht, wenn Dreiecke so aneinander gereiht werden, dass jedes Dreieck nur mit dem vorhergehenden und nachfolgenden eine Seite gemein hat. Die Ermittlung der Spannkkräfte im Dreiecknetze gestaltet sich besonders einfach, und da bei weitem die Mehrzahl der ausgeführten ebenen Fachwerkträger aus Dreiecknetzen besteht, so erscheint es angemessen, zunächst die Theorie dieses wichtigen Stabgebildes zu entwickeln, bevor auf die allgemeinere Untersuchung gegliederter Scheiben eingegangen wird.

Die Stabreihen, welche das in einer lothrechten Ebene gedachte *Dreiecknetz* nach oben und unten begrenzen, heissen die *Gurtungen*; ihre Spannkkräfte sollen mit O (obere Gurtung) und U (untere Gurtung) bezeichnet werden; vergl. Fig. 189. Die Stäbe, welche die Gurtungen mit einander verbinden, werden *Gitterstäbe*, *Wandglieder*, *Füllungsstäbe* genannt, auch *Diagonalen* (*Schrägen*) oder *Vertikalen* (*Pfosten*), je nachdem sie schräg oder senkrecht stehen; ihre Spannkkräfte bezeichnen wir mit D und V . Zuweilen aber wird in der Folge für sämtliche Spannkkräfte das Zeichen S gewählt werden, oder es werden die Stäbe und Spannkkräfte durch Ziffern bezeichnet.

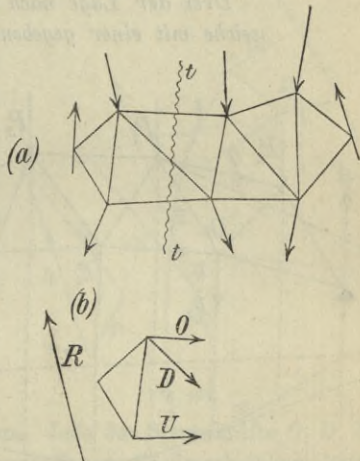


Fig. 189 a u. b.

§ 26.

Bestimmung der Spannkkräfte im Dreiecknetze nach den Verfahren von *Culmann* und *Ritter*.

126. Das Culmann'sche Verfahren. Durch ein einfaches Dreiecknetz (Fig. 189) sei ein Schnitt tt geführt, welcher drei Stäbe trifft, deren Mittellinien sich nicht in einem Punkte schneiden und deren Spannkkräfte gleich O , U und D seien. Die Mittelkraft aus den links von tt angreifenden äusseren Kräften sei $= R$; dieselbe muss mit den inneren Kräften O , U , D im Gleichgewichte sein, und man hat daher, um diese letzteren zu bestimmen, nur nöthig, die in No. 12 auf Seite 15 behandelte Aufgabe zu lösen:

Drei der Lage nach gegebene Kräfte O , D und U zu finden, welche mit einer gegebenen Kraft R im Gleichgewichte sind.

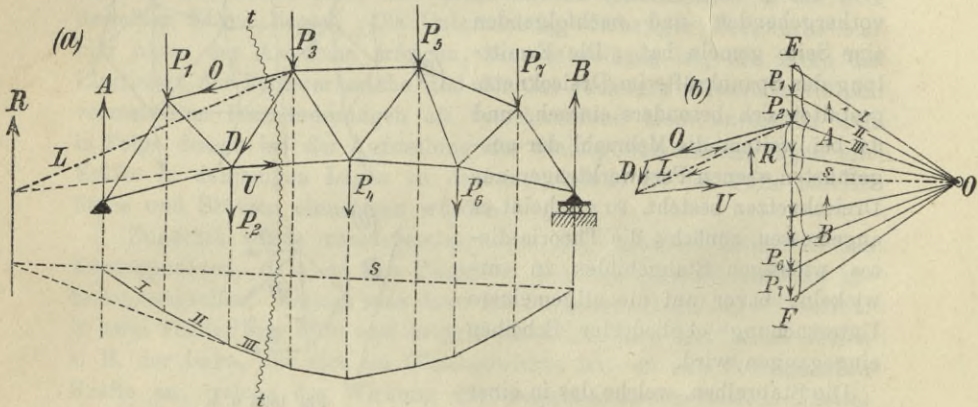


Fig. 190 a u. b.

Sollen beispielsweise nach diesem zuerst von *Culmann* angegebenen Verfahren die Spannkkräfte O , D , U für den in Fig. 190 dargestellten einfachen Fachwerkbalken, welcher durch senkrechte Lasten P beansprucht wird, bestimmt werden, so reihe man zunächst die Lasten auf einer Senkrechten EF aneinander, zeichne mit beliebigem Pole O ein Seilpolygon, trage die Schlusslinie s ein und ziehe durch O eine Parallele zu s ; dieselbe zerlegt FE in die Stützenwiderstände A und B . Die Mittelkraft aus den links von tt angreifenden äusseren Kräften ist

$$R = A - P_1 - P_2;$$

sie geht durch den Schnittpunkt der Seilpolygonseiten s und III , und

ist nach oben gerichtet, sobald, wie in Fig. 190, $A > P_1 + P_2$ ist. Nach Bestimmung von R bringe man je zwei der vier Kräfte R, O, D, U miteinander zum Schnitt, beispielsweise O mit D und R mit U , verbinde die Schnittpunkte durch die Gerade L , zerlege R nach den Richtungen von L und U , hierauf die Hilfskraft L nach den Richtungen von D und O und versehe schliesslich die Seiten des aus den Kräften R, O, D und U gebildeten Polygons so mit Pfeilen, dass der Umfahrungssinn desselben ein stetiger ist. Indem man nun O, D und U an den durchschnittenen Stäben des linken Balkentheiles in dem durch die entsprechenden Pfeile des Kräftepolygons gegebenen Sinne anbringt, erfährt man, dass im vorliegenden Falle die Kräfte O und D Druckspannungen erzeugen, während U Zugspannungen hervorruft.

Wird nur die eine der drei Spannkkräfte gesucht, beispielsweise D , so bringe man diese Kraft mit R in e zum Schnitt, Fig. 191, verbinde e mit dem Schnittpunkte c der beiden anderen Spannkkräfte (O und U) durch die Gerade L' , zerlege R nach den Richtungen von L' und D und versehe schliesslich das Kräftepolygon $RL'D$ so mit Pfeilen, dass der Umfahrungssinn desselben ein stetiger ist. Bei weit abliegendem Schnittpunkte e ist jedoch diese unmittelbare Bestimmung von D unbequem; sie wird unmöglich, sobald R und D parallel sind.

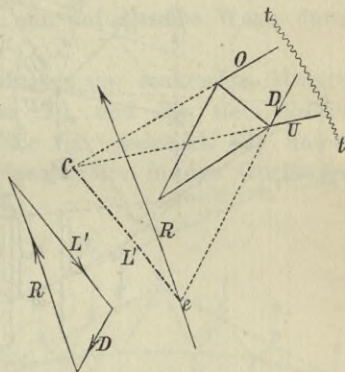


Fig. 191.

127. Das Ritter'sche Verfahren. Jede der Spannkkräfte O, D, U in den vom Schnitte tt (Fig. 189) getroffenen Fachwerkstäben lässt sich auch mittels einer aus dem Satze von den statischen Momenten gefolgerten Gleichung bestimmen. Denn wählt man den Schnittpunkt von irgend zweien der drei Spannkkräfte zum Drehpunkte und setzt die Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte gleich Null, so erhält man eine Gleichung, in der nur eine unbekannte Spannkraft vorkommt, weil die statischen Momente der durch den Drehpunkt gehenden Spannkkräfte gleich Null sind. Bei diesem Verfahren werden zuerst alle Spannkkräfte als Zugkräfte betrachtet; ergibt sich für die Spannkraft eines Stabes ein negativer Werth, so ist der Pfeil dieser Kraft umzukehren; sie ruft dann Druckspannungen hervor.

Es möge diese Bestimmungsweise der Spannkkräfte an dem bereits vorhin nach dem Culmann'schen Verfahren untersuchten Fachwerkbalken erläutert werden. Um zunächst U zu ermitteln, wird der Schnittpunkt a

Wird schliesslich der Schnittpunkt c von O und U zum Drehpunkte gewählt, so folgt, da die Spannkraft D als Zugkraft links um c dreht, die Gleichung: $M_c - Dr_c = 0$ und hieraus: $D = + \frac{M_c}{r_c}$. Das Moment M_c ist nach dem in No. 15 bewiesenen Satze gleich dem Produkte Hy_c aus der Polweite H und der Strecke y_c , welche die Seilpolygonseiten III und s (d. s. die äussersten in Bezug auf die Kräftegruppe A, P_1, P_2) auf einer durch den Drehpunkt c zur Mittelkraft R gezogenen Parallelen abschneiden. Im vorliegenden Falle ist y_c negativ und es ergibt sich daher

$$D = - H \frac{y_c}{r_c}.$$

Die Spannkraften O und D können nun auf dieselbe Weise durch Zeichnung bestimmt werden wie U .

Wirken auf den einfachen Fachwerkbalken nur senkrechte, abwärts gerichtete Lasten, so sind die Momente Hy_a und Hy_b stets positiv. Die obere Gurtung wird in diesem Falle nur gedrückt, die untere Gurtung nur gezogen. Die grössten Spannkraften in den Gurtungen entstehen bei gänzlicher Belastung.

Trifft der durch ein Wandglied geführte Schnitt tt zwei Gurtstäbe, deren Schnittpunkt C innerhalb der Stützweite liegt (Fig. 193), so ist auch y_c bei senkrechten, abwärts gerichteten Lasten stets positiv. Das fragliche Wandglied wird dann stets in demselben Sinne beansprucht; es wird entweder nur gezogen oder nur gedrückt; seine grösste Inanspruchnahme erfolgt bei gänzlicher Belastung des Balkens.

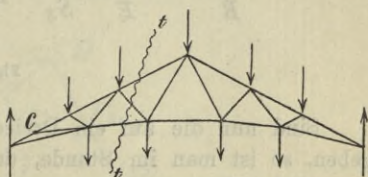


Fig. 193.

Für die späteren Untersuchungen ist es noch wichtig, hervorzuheben, dass die Spannkraft D in einem Wandgliede = Null wird, sobald die Mittelkraft R (Fig. 191) aus den links von tt wirkenden äusseren Kräften durch den Schnittpunkt der vom Schnitte tt getroffenen Gurtstäbe O und U geht, weil dann L' mit R zusammenfällt.

§ 27.

Die Kräftepläne Cremona's.

128. Die auf irgend einen Knotenpunkt eines starren Fachwerks wirkenden äusseren und inneren Kräfte sind mit einander im Gleich-

gewichte und lassen sich deshalb zu einem geschlossenen Polygone mit stetigem Umfahungssinne zusammensetzen. Dieses Kräftepolygon ist bestimmt, sobald nicht mehr als zwei jener Kräfte unbekannt sind. Kennt man z. B. für den in der Fig. 194 dargestellten Fall die Spannkraften S_1, S_2 und die Mittelkraft P der im fraglichen Knotenpunkte angreifenden äusseren Kräfte, so hat man nur nöthig, diese Kräfte in irgend einer Reihenfolge zu einem stetigen Kräftezuge $ABCD$ aneinander zu setzen und durch den Anfangspunkt A und den Endpunkt D Parallelen (AE und DE) zu den Richtungen der Stäbe 3 und 4 zu ziehen. Man erhält dann das geschlossene Kräftepolygon $ABCDEA$, dessen letzte Seiten DE und EA nach Grösse, Richtung und Sinn die Spannkraften S_3 und S_4 darstellen. Im vorliegenden Falle findet man, dass die Stäbe 3 und 4 auf Druck beansprucht werden.

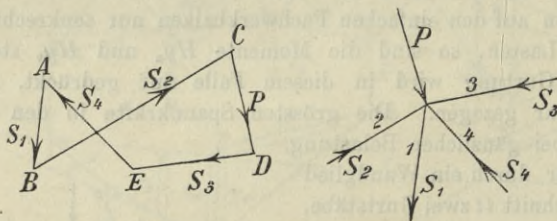


Fig. 194.

Sind nun die auf ein Dreiecknetz wirkenden äusseren Kräfte gegeben, so ist man im Stande, der Reihe nach die Kräftepolygone für sämtliche Knotenpunkte zu zeichnen, indem man bei einem der beiden Knotenpunkte beginnt, von welchem nur zwei Stäbe ausgehen. Hervorzuheben ist, dass sich beim Dreiecknetze die einzelnen Kräftepolygone so aneinander reihen lassen, dass jede Kraft nur einmal in der Figur vorkommt. Die auf diese Art erhaltenen Kräftepläne sollen als *Cremona'sche Pläne* bezeichnet werden, weil *Cremona* zuerst in allgemeiner Weise auf die bemerkenswerthen Eigenschaften derselben aufmerksam machte.

129. Beliebiges, einfaches Dreiecknetz. In den Knotenpunkten $1', 2', 3' \dots$ eines einfachen Dreiecknetzes (Fig. 195) mögen irgendwelche miteinander im Gleichwichte befindliche Kräfte $P_1, P_2, P_3 \dots$ angreifen. Denselben entspricht dann ein geschlossenes Polygon, in welchem die Kräfte P dieselbe Reihenfolge haben mögen, in der man ihnen bei Umfahung des Randes $1', 2', 3' \dots$ begegnet. Die Eckpunkte dieses Kräftepolygons seien mit $(8' 1'), (1' 2'), (2' 3'), \dots$ bezeichnet, so zwar dass beispielsweise die Ecke $(4' 5')$ von den Kräften P_4 und P_5 gebildet wird.

Um den Kräfteplan zu zeichnen, beginnt man beim Knotenpunkte 1 und bestimmt die Spannkraften 1 und 8 in den Stäben 1 und 8, indem man zu den Mittellinien dieser Stäbe durch die Endpunkte (1'2') und

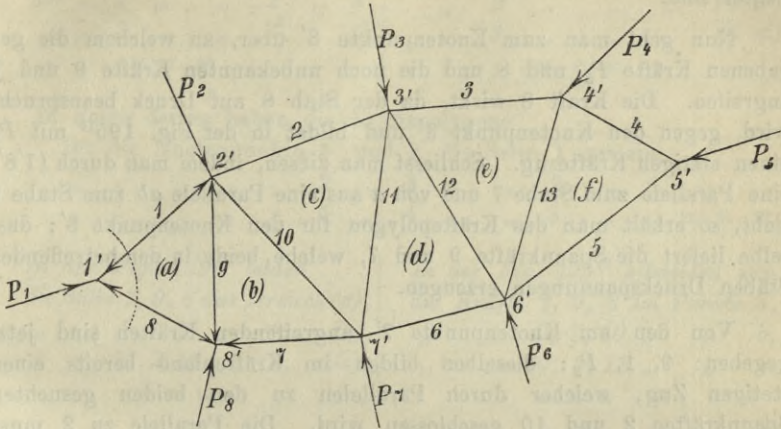


Fig. 195 I.

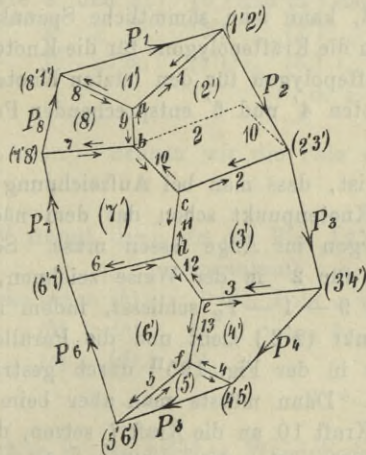


Fig. 195 II.

(8'1') der Kraft P_1 Parallelen zieht. Man erhält ein Kräftedreieck mit dem in der Fig. 195 II durch Pfeile, die innerhalb des Dreiecks stehen, angegebenen Umfassungssinne; dasselbe liefert nach Grösse, Richtung und Sinn die Spannkraften 1 und 8. Denkt man den Knotenpunkt 1'

durch den in der Fig. 195^I angedeuteten Schnitt vom Fachwerke abgetrennt und überträgt die Pfeile des Kräftedreiecks nach den Schnittstellen, so erfährt man, dass die Stäbe 1 und 8 gedrückt werden, weil ihre Spannkkräfte gegen den ruhenden Knotenpunkt 1' gerichtet sind.

Nun geht man zum Knotenpunkte 8' über, an welchem die gegebenen Kräfte P_8 und 8 und die noch unbekanntenen Kräfte 9 und 7 angreifen. Die Kraft 8 wirkt, da der Stab 8 auf Druck beansprucht wird, gegen den Knotenpunkt 8' und bildet in der Fig. 195^{II} mit P_8 einen stetigen Kräftezug. Schliesst man diesen, indem man durch (7'8') eine Parallele zum Stabe 7 und von a aus eine Parallele ab zum Stabe 9 zieht, so erhält man das Kräftepolygon für den Knotenpunkt 8'; dasselbe liefert die Spannkkräfte 9 und 7, welche beide in den betreffenden Stäben Druckspannungen erzeugen.

Von den am Knotenpunkte 2' angreifenden Kräften sind jetzt gegeben: 9, 1, P_2 ; dieselben bilden im Kräfteplane bereits einen stetigen Zug, welcher durch Parallelen zu den beiden gesuchten Spannkkräften 2 und 10 geschlossen wird. Die Parallele zu 2 muss durch den Punkt (2'3') gezogen werden, die Parallele zu 10 durch den Punkt b .

So fortfahrend, kann man sämtliche Spannkkräfte finden, indem man der Reihe nach die Kräftepolygone für die Knotenpunkte 7', 3', 6', 4' zeichnet. Das Kräftepolygon für den letzten Knotenpunkt 5' ist bereits durch die den Knoten 4' und 6' entsprechenden Polygone (4') und (6') bestimmt.

Zu beachten ist, dass man bei Aufzeichnung des Kräftepolygones für irgend einen Knotenpunkt schon das dem nächsten Knotenpunkte entsprechende Polygon ins Auge fassen muss. So könnte man z. B. das Kräftepolygon für 2' in der Weise zeichnen, dass man den gegebenen Kräftezug 9 — 1 — P_2 schliesst, indem man die Parallele zu 10 durch den Punkt (2'3') zieht und die Parallele zu 2 durch den Punkt b , wie dies in der Fig. 195^{II} durch gestrichelte Linien angedeutet worden ist. Dann müsste man aber beim Zeichnen des Polygones für 7' die Kraft 10 an die Kraft 7 setzen, da hier die gegebenen Kräfte P_7 , 7 und 10 aneinander gereiht werden müssen, und bei Konstruktion des Polygones für 3' müsste man 2 an P_3 setzen, da hier die Kräfte 11, 2, P_3 gegeben sind.

Derartige Ueberlegungen werden überflüssig, wenn man die folgenden Beziehungen zwischen den Figuren 195^I und 195^{II} beachtet.

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. In der Figur 195^I verbindet der zum Rande des Fachwerks gehörende</p> <p>Stab 1 die Knoten 1' und 2',
 der „ 2 „ „ 2' „ 3',
 „ „ 3 „ „ 3' „ 4',
 u. s. w.</p> | <p>In der Figur 195^{II} geht Kraft 1 durch den Punkt (1' 2')
 „ 2 „ „ „ (2' 3')
 „ 3 „ „ „ (3' 4')
 u. s. w.</p> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

In Folge dessen haben die Kräftepolygone

für die Knotenpunkte 1' und 2' die Seite 1 gemein,

„ „ „ 2' „ 3' „ „ 2 „ „ ,

„ „ „ 3' „ 4' „ „ 3 „ „ , u. s. w.

- | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>2. In der Figur 195^I bilden die Stäbe 1, 9, 8 das Dreieck (a),
 „ „ 9, 7, 10 „ „ (b),
 „ „ 10, 2, 11 „ „ (c),
 u. s. w.</p> | <p>In der Fig. 195^{II} schneiden sich die Kräfte 1, 9, 8 im Punkte a,
 „ „ 9, 7, 10 „ „ b,
 „ „ 10, 2, 11 „ „ c,
 u. s. w.</p> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

In der Fig. 195^I verbindet

Stab 9 die Punkte 8' und 2',

„ 10 „ „ 2' „ 7',

„ 11 „ „ 7' „ 3',
 u. s. w.

In der Figur 195^{II} haben die Kräftepolygone

(8' und 2') die Seite 9 gemein,

(2' „ (7' „ „ 10 „ „ ,

(7' „ (3' „ „ 11 „ „ ,
 u. s. w.

Die Punkte a, b, c, \dots nennen wir die Pole der Dreiecke (a), (b), (c)

In der Figur 195^I trennt der

Stab 9 die Dreiecke (a) u. (b),

„ 10 „ „ (b) „ (c),

„ 11 „ „ (c) „ (d),
 u. s. w.

In der Fig. 195^{II} verbindet die Spannkraft

9 die Pole a und b ,

10 „ „ b „ c ,

11 „ „ c „ d ,
 u. s. w.

Sind die Spannkraften in sämtlichen Wandgliedern gleich Null, so fallen die Pole a, b, c, \dots zusammen; es bilden dann die Gurten ein Seilpolygon für die Kräfte P_1, P_2, P_3, \dots .

Um Cremona'sche Kräftepläne schnell zeichnen zu können, genügt bereits die Beachtung der in liegender Schrift angeführten Beziehungen. Gute Dienste leistet auch die Regel: Die an einem Knotenpunkte angreifenden Kräfte müssen stets in der Reihenfolge aneinandergesetzt

werden, in der man ihnen bei Umkreisung des Knotenpunktes begegnet. Hierbei sind die äusseren Kräfte (wie in Fig. 195^I) immer ausserhalb des Randes liegend zu denken. Beispielsweise sind die auf den Knotenpunkt 2' wirkenden Kräfte in der Reihenfolge 9, 1, P_2 , 2, 10 zu nehmen, nicht etwa in der Reihenfolge 9, 1, P_2 , 10, 2, welche letztere die in der Fig. 195^{II} durch gestrichelte Linien angedeutete, unbrauchbare Lösung geben würde.

Anwendungen.

Die Tafel 2 enthält Cremona'sche Kräftepläne für eine Reihe von Dreiecknetzen. Zur Erläuterung derselben werden kurze Bemerkungen genügen, doch wird dem Anfänger empfohlen, jeden Kräfteplan, von Knotenpunkt zu Knotenpunkt vorgehend, nachzuzeichnen und den Umfahrungssinn jedes einzelnen Kräftepolygons festzustellen.

Die Pläne sind zur besseren Uebersicht in drei Farben ausgeführt worden. Für die Spannkraften und Stäbe der oberen Gurtung wurden blaue Linien gewählt, für die untere Gurtung rothe und für die Füllungsstäbe schwarze Linien.

130. Fachwerkbalken mit wagerechter oberer Gurtung. (Fischbauchträger.) Fig. 196 auf Tafel 2. Die Lasten mögen ausschliesslich in den Knotenpunkten der oberen Gurtung angreifen. Der Träger habe 8 gleichlange Felder und sei symmetrisch in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte. Jedes Feld sei gleichmässig mit $2P$ belastet. Dann kommt auf jeden Knotenpunkt die Last $2P$, mit Ausnahme der mit den Stützpunkten zusammenfallenden Knotenpunkte; diese werden mit P belastet. Jeder Stützenwiderstand ist $= 8P$, so dass an jedem Stützpunkte die Kraft $7P$, nach oben gerichtet, angreift. Es genügt, den Kräfteplan für die eine Hälfte zu zeichnen.

In der Figur 196b ist $ib'b''b'''$ das Polygon der äusseren Kräfte. Nach Ziehen von $b'a \parallel O_1$ und $ia \parallel U_1$ findet man in a den Pol des Dreiecks $I II III$. Nun werden die Parallelen zu O_2, O_3 gezogen, ferner die Parallelen zu U_2, U_3 Die ersteren gehen durch die Eckpunkte $b''b'''$ des Polygons der äusseren Kräfte und die letzteren bilden, da in den Knotenpunkten der unteren Gurtung keine Lasten angreifen, einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt i ist. Vom Pole a aus wird ein Linienzug $abcdefgh$ gezeichnet, dessen Seiten der Reihe nach parallel zu $V_1, D_2, V_2, D_3, V_3, D_4, V_4$ sind, und dessen Eckpunkte abwechselnd auf einer rothen und einer blauen Linie liegen. Eine Ausnahme bildet die zu V_4 parallele Seite gh , welche von O_4 zu O'_4 geht, da die Spannkraft V_4 im Knotenpunkte $VIII$ mit O_4, O'_4 und $2P$ im Gleichgewichte ist, mithin mit diesen drei Kräften ein geschlossenes

Polygon bilden muss. Aus dem Umfassungssinne der einzelnen Kräftepolygone findet man, dass sämtliche Stäbe der oberen Gurtung gedrückt und sämtliche Stäbe der unteren Gurtung gezogen werden. Zur Feststellung des Vorzeichens der Spannkraften V und D ergibt sich bei der hier gewählten Anordnung des Kräfteplanes die einfache Regel:

Versieht man, vom Anfangspunkte a ausgehend, den Linienzug $abcdefgh$ so mit Pfeilen, dass der Umfassungssinn $ab - bc - cd - de - \dots$ nicht unterbrochen wird, so geben diese Pfeile an, in welchem Sinne die Kräfte V und D an den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreifen.

Man findet auf diese Weise, dass in Fig. 196 sämtliche Vertikalen gedrückt und sämtliche Diagonalen gezogen werden.

131. Fachwerkbalken mit wagerechter unterer Gurtung. (Bogensehnenenträger.) Fig. 197 auf Tafel 2. Es mögen nur in den Knotenpunkten der unteren Gurtung Lasten angreifen. Belastung eines Knotenpunktes $= 2P$. An den Stützpunkten greifen die Widerstände $7P$ an. Man macht $b'i = 7P$, zieht $ia \parallel O_1$ und $b'a \parallel U_1$ und zeichnet dann für den ersten Knotenpunkt der unteren Gurtung das aus $2P = \overline{b''b'}$, $U_1 = \overline{b'a}$, $V_1 = \overline{ab}$ und $U_2 = \overline{bb''}$ bestehende Kräftepolygon. Nun werden die Parallelen zu den Richtungen U_2 , U_3 und U_4 der Stäbe der belasteten Gurtung so gezogen, dass diese Parallelen auf der Senkrechten ib' die Kräfte $2P$ abschneiden, ferner durch den Punkt i Parallelen zu den Richtungen O_2 , O_3 , O_4 und O'_4 der Stäbe der unbelasteten Gurtung. Der aus den Spannkraften V_1 , D_2 , V_2 , D_3 , V_3 , D_4 bestehende Linienzug $abcd \dots g$ wird nun so eingetragen, dass die Eckpunkte b , c , d , e , f , g wechselweise auf den rothen Linien U und den blauen Linien O liegen, und schliesslich wird $gh \parallel V_4$ gemacht. Von a ausgehend werden die Seiten des Polygonzuges $abcd \dots$ mit Pfeilen versehen. Diese Pfeile geben an, in welchem Sinne die Kräfte V und D an den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreifen. Man findet, dass V_1 und V_4 positiv sind, weil Zugspannungen erzeugend, dagegen V_2 und V_3 negativ. Die Spannkraften D sind durchweg positiv. Die obere Gurtung wird gedrückt, die untere gezogen.

132. Englischer Dachstuhl mit gezogenen Diagonalen (Fig. 198 auf Tafel 2), (Zahlenbeispiel). Die einzelnen Dachbinder sind einander parallel und in 5.1^m Abstand angenommen. Stützweite 24^m , Feldweite 3.0^m . Die senkrecht wirkende Belastung besteht für das Quadratmeter der Horizontalprojektion der Dachfläche aus

54^b Eigengewicht (Deckung: Schiefer auf Winkeleisen).

75^b Schneelast.

$120 \sin^2 (\beta + 10)^{kg}$ senkrechte Seitenkraft des Winddruckes*)

$\beta =$ Neigungswinkel der oberen Gurtung. $tg \beta = \frac{4,8}{12} = 0,4$, also

$\beta = 22^\circ$ und $\sin (\beta + 10) = 0,53$. Daher Windbelastung

$$120 \cdot 0,53^2 = 34^k$$

und Gesamtbelastung $54 + 75 + 34 = 163^k = 0,163^t$. Somit kommen auf jeden Knotenpunkt

$$0,163 \cdot 5,1 \cdot 3,0 = 2,5^t.$$

Die wagerechte Seitenkraft des Winddruckes darf bei der geringen Neigung der Dachfläche vernachlässigt werden, weil der grösste Winddruck und die grösste Schneelast kaum gleichzeitig auftreten werden. Hingegen werden beide Dachhälften mit dem senkrechten Winddrucke von 34^k belastet gedacht.

An jedem Stützpunkte greift die Kraft $A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2,5^t$ (nach oben gerichtet) an.

Die Parallelen zu den Spannkraften in der oberen, belasteten Gurtung schneiden auf dem Kräftezuge die Knotenpunktlasten ab. Die Parallelen zu den Spannkraften in der unteren, unbelasteten Gurtung gehen durch denselben Punkt; sie decken sich, da sie einerlei Richtung haben. Die Parallelen zu den Spannkraften in den Gitterstäben bilden einen bei a beginnenden zusammenhängenden Linienzug.

Nach Messung der Spannkraften wurden die Ergebnisse in die rechte Hälfte der Figur 198a eingetragen.

133. Binder eines Pultdaches (Fig. 199a auf Tafel 2). Der einer gleichförmigen gänzlichen Belastung entsprechende Kräfteplan (Fig. 199b) wurde ähnlich wie vorhin gezeichnet. Die Füllungsstäbe: 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13 werden bei den hier gewählten Verhältnissen gedrückt, die Füllungsstäbe: 2, 4, 6, 11 gezogen. Obere Gurtung gedrückt, untere Gurtung gezogen.

134. Kräfteplan für den Dachstuhl in Fig. 200 auf Tafel 2. Der in Fig. 200a dargestellte Dachbinder hat bei b ein festes Auflager und wird bei a durch eine Strebe gestützt. Ist bei D ein Gelenk angeordnet, so wirkt der Stützenwiderstand A in der Richtung der Strebe, und es muss dann der Widerstand B des rechten Auflagers durch den Schnittpunkt C der Strebe mit der Mittelkraft $12 P$ aus den Belastungen gehen. Nach Bestimmung von A und B (Fig. 200b) wird A mit der im Knotenpunkte a (Fig. 200a) angreifenden Last P zu der Mittelkraft A' zusammengesetzt, worauf die Spannkraften für die ersten Stäbe der oberen und unteren Gurtung bestimmt werden können. Die Spannkraften für die unbelastete, untere Gurtung gehen durch einen und den-

*) Vergl. den Anhang. siehe Fussnote Seite 109.

selben Punkt, die für die belastete, obere Gurtung schneiden auf dem Zuge der Lasten die Strecken $2P$ ab. Die Parallelen zu den Spannkraften in den Vertikalen und in den Diagonalen bilden einen zusammenhängenden Linienzug, dessen Anfangspunkt a ist. Die eingetragenen Pfeile geben an, in welchem Sinne die Kräfte an den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreifen. Man findet, dass die Vertikalen gedrückt und die Diagonalen gezogen werden. Die obere Gurtung wird gedrückt, die untere gezogen.

135. Kräfteplan für einen belgischen Dachstuhl. Berücksichtigung des schrägen Winddruckes (Fig. 201 bis 203 auf Tafel 2). Unter der Voraussetzung, dass jedes Feld der oberen Gurtung mit $2P_0$ belastet wird, während in 3 Knotenpunkten des Untergurtes Lasten $2P_u$ angreifen, zeigt Figur 201b den Kräfteplan für die senkrecht wirkende Belastung. Derselbe ist nur für die linke Hälfte gezeichnet. Die Spannkraften der Stäbe der rechten Hälfte sind gleich denen der entsprechenden Stäbe der linken Hälfte. Die obere Gurtung sowie die Wandglieder 1, 3, 5, 7 werden gedrückt. Alle übrigen Stäbe werden gezogen.

Weiter soll angenommen werden, dass auf dem Dachbinder ein starker Winddruck wirkt. Der Einfallswinkel des Windes sei β (Fig. 202a), und der Neigungswinkel der oberen Gurtung gegen die Senkrechte $= \alpha$. Dann bildet die Normale zur Dachfläche mit der Windrichtung den Winkel $(\alpha - \beta)$, so dass die Geschwindigkeit des Windes rechtwinklig zur Dachfläche gleich $c \cos(\alpha - \beta)$ wird, wo c die Geschwindigkeit des Windes überhaupt bedeutet. Der rechtwinklig zur Dachfläche F wirkende Winddruck ist erfahrungsgemäss

$$\Sigma W = 0,12248 c^2 \cos^2(\alpha - \beta) F;$$

er steht nämlich im geraden Verhältniss zur getroffenen Fläche und zu dem Quadrate der Geschwindigkeit, mit der sich der Wind rechtwinklig zur Dachfläche bewegt. Man kann etwa $c = 31^m$ und $\beta = 10^\circ$ setzen. Dann findet man $\Sigma W = 120 F \cos^2(\alpha - 10)$. F ist in Quadratmetern auszudrücken. Die Belastung eines Knotenpunktes ist in Fig. 202a

$$2W = \frac{1}{3} \Sigma W \text{ bezieh. } W = \frac{1}{10} \Sigma W.$$

Das bewegliche Lager sei auf der linken Seite angeordnet, und von dieser Seite möge auch der Wind kommen. Bei dieser Belastung sind die Füllungsglieder der rechten Hälfte spannungslos. Denn führt man durch irgend ein Feld der rechten Hälfte einen Schnitt (Fig. 204) und stellt die Momentgleichung für den rechtseitigen Stützpunkt auf, so erhält man, da B die einzige auf das rechte Trägerstück wirkende äussere Kraft ist,

$$Dr = 0,$$

wo r den Hebelarm von D bedeutet. Es sind aus diesem Grunde in

Fig. 202a die Füllungsglieder der rechten Hälfte fortgelassen worden.

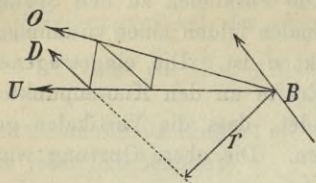


Fig. 204.

Der Stützenwiderstand A ist senkrecht und schneidet ΣW in C . Durch Punkt C muss der Widerstand B gehen. In Fig. 202b wurden aus dem gegebenen ΣW die Kräfte A und B bestimmt; hierauf wurde A mit der Belastung W des ersten Knotenpunktes zu A' zusammengesetzt. Die weitere Konstruktion des Planes ist aus der Fig. 202b

zu ersehen. Die obere Gurtung wird durchweg gedrückt, die untere Gurtung auf der linken Trägerhälfte gezogen, auf der rechten gedrückt. Die Füllungsstäbe 1, 3, 5, 7 werden gedrückt, die Füllungsstäbe 2, 4, 6, 8 gezogen.

Fig. 203a und 203b zeigen die Ermittlung der Spannkraften für den Fall, dass der Wind von der rechten Seite kommt. Es wird wieder ΣW mit dem senkrechten Stützenwiderstande A im Punkte C zum Schnitt gebracht und die Richtung des ebenfalls durch C gehenden Widerstandes B festgestellt. Die Füllungsstäbe auf der linken Hälfte werden spannungslos; sie sind in der Zeichnung fortgelassen worden. Man findet, dass die obere Gurtung gedrückt, die untere Gurtung gezogen wird. Die Füllungsstäbe 9, 11, 13, 15 werden gedrückt, die anderen gezogen.

Nachdem für jeden einzelnen Stab des Fachwerks durch Vergleichung der Pläne Fig. 202b und 203b festgestellt worden ist, ob durch den von der linken Seite oder durch den von der rechten Seite wirkenden Winddruck eine grössere Spannkraft erzeugt wird, muss die grössere Spannkraft zu der aus dem Plane Fig. 201b sich ergebenden addirt werden. In den meisten Fällen genügt es aber, die statische Berechnung eines Dachstuhles in der durch das Zahlenbeispiel in No. 135 erläuterten Weise durchzuführen und nur die lothrechte Seitenkraft des Winddruckes zu berücksichtigen. Nur bei hohen Dachstühlen zeichne man die Pläne für den schrägwirkenden Winddruck, stelle jedoch eine geringere Belastung durch Schnee in Rechnung, da es höchst unwahrscheinlich ist, dass bedeutende Winddrücke und grosse Schneelasten gleichzeitig wirken.

§ 28.

Einfluss von Kräften, welche nicht in den Knotenpunkten angreifen.

136. Auf einen Fachwerkstab ab (Fig. 205a) mögen irgend welche Lasten wirken, deren Mittelkraft $= R$ sei. Der Stab übt auf die Knoten

a und b gewisse Drücke aus, welche wir in die Seitenkräfte R_1 , R_2 , S zerlegt denken, deren erstere parallel zu R sind, während die entgegengesetzt gleichen Kräfte S in die Stabachse fallen. Die Kräfte R_1 und R_2 lassen sich schnell angeben. Man hat nur n \ddot{o} thig, auf der Kraft R einen beliebigen Punkt c anzunehmen, das Dreieck abc als Seilpolygon aufzufassen und den zugehörigen Kräfteplan, Fig. 205 b, zu zeichnen.

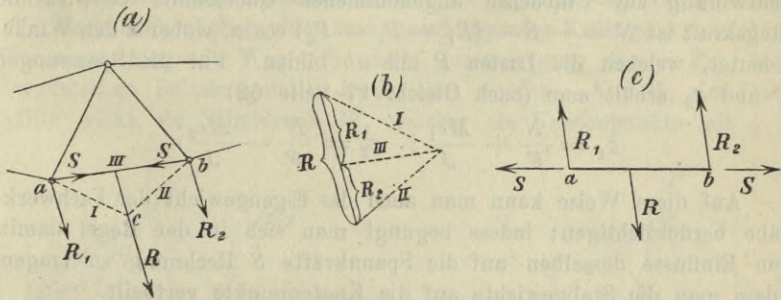


Fig. 205 a, b u. c.

Vergl. auch Seite 4, Fig. 15. Kennt man aber die von sämmtlichen Stäben auf die Knotenpunkte übertragenen Kräfte R_1 , R_2 , so ist die Aufgabe, die nach der Richtung der Stabachsen wirkenden Kräfte S zu bestimmen, auf die Ermittlung der Spannkkräfte S eines Fachwerks zurückgeföhrt, an welchem sämmtliche äusseren Kräfte nur in den Knotenpunkten angreifen.

Sind sämmtliche S gefunden, so kennt man die an jedem Stabe angreifenden Kräfte, Fig. 205 c, und ist nun im Stande, die auf die einzelnen Stabquerschnitte wirkenden Biegunsmomente M , Längskräfte N , Querkräfte Q und die durch diese hervorgerufenen Spannungen zu bestimmen.

Einen der wichtigsten Fälle stellt die Fig. 206 dar. Der Stab ab wird durch parallele Kräfte P_1 , P_2 . . . belastet; die Spannkkräfte S sind Drücke. (Obere Gurtung des Binders eines Pfettendaches.) Das Biegunsmoment für irgend einen Querschnitt C stimmt überein mit dem Biegunsmomente für den entsprechenden Querschnitt C' eines

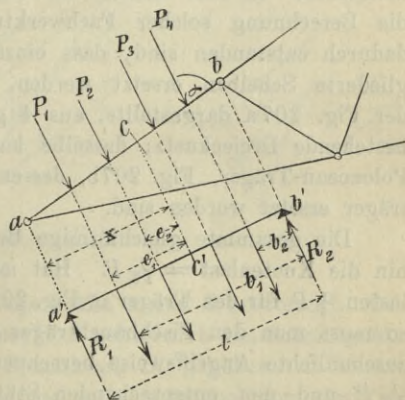


Fig. 206.

einfachen Balkens $a'b'$, welcher rechtwinklig zu den Lasten P ist, und dessen Stützpunkte den Punkten a und b entsprechen. Dieses Moment kann nach No. 69 mit Hilfe eines Seilpolygons bestimmt werden. Die Rechnung würde liefern, wenn z. B. C zwischen P_2 und P_3 liegt: $M = R_1 x - P_1 e_1 - P_2 e_2$, wobei $R_1 = \frac{\sum P b}{l}$. Die auf den rechtwinklig zur Stabachse angenommenen Querschnitt C wirkende Längskraft ist $N = -S - (R_1 - P_1 - P_2) \cos \alpha$, wobei α den Winkel bedeutet, welchen die Lasten P mit ab bilden. Für die Spannungen σ_1 und σ_2 erhält man (nach Gleich. 17 Seite 62)

$$\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{M e_1}{J}; \quad \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{M e_2}{J}.$$

Auf diese Weise kann man auch das Eigengewicht der Fachwerkstäbe berücksichtigen; indess begnügt man sich in der Regel damit, dem Einflusse desselben auf die Spannkkräfte S Rechnung zu tragen, indem man die Stabgewichte auf die Knotenpunkte vertheilt.

137. Dreiecknetze aus Stäben und gegliederten Scheiben.

Die vom Stabe ab (Fig. 205a) auf die Knotenpunkte a und b übertragenen Kräfte R_1, R_2, S sind unabhängig von der Gestalt desselben. Tritt an die Stelle jenes Stabes eine irgendwie geformte ebene, vollwandige oder starre gegliederte Scheibe, die nur in den Gelenken a und b mit den übrigen Theilen des Fachwerks zusammenhängt, und auf welche dieselbe Last R wirkt, so bleiben die Kräfte R_1, R_2, S die nämlichen. Es sind deshalb die Untersuchungen in No. 136 auch für die Berechnung solcher Fachwerkträger wichtig, die aus einfacheren dadurch entstanden sind, dass einzelne Stäbe der letzteren durch gegliederte Scheiben ersetzt werden. Ein Beispiel hierfür ist das in der Fig. 207a dargestellte, aus 4 gegliederten Scheiben und 7 Stäben bestehende Dreiecknetz; dasselbe kann aufgefasst werden als einfacher Polonceau-Träger, Fig. 207b, dessen obere Gurtstäbe durch Fischbauchträger ersetzt worden sind.

Die gesammte gleichförmige Belastung des Binders sei $= P$, mithin die Knotenlast $= \frac{1}{16} P$. Hat man unter Einführung der Knotenlasten $\frac{1}{4} P$ für den Träger in Fig. 207b den Kräfteplan 207c gezeichnet, so muss man den Fischbauchträger ab für die in der Fig. 207d veranschaulichte Angriffsweise berechnen. Ausser den senkrechten Lasten $\frac{1}{16} P$ und den entsprechenden Stützenwiderständen $\frac{3}{8} P$ wirken auf diesen Träger noch in der Richtung ab die Drücke O' , deren Grösse der Plan Fig. 207c angiebt. Fig. 207e zeigt den Kräfteplan für die senkrechte Belastung. Die Kräfte O' beanspruchen nämlich im vorliegenden Falle nur die obere Gurtung des Fischbauchträgers, und man

hat deshalb nur nöthig, zu den für diese Gurtung aus dem Plane Fig. 207e erhaltenen Spannkraften (Drücken) $1', 2', 3', 4'$ noch den Werth O' (Druck) zu addiren, während die in Fig. 207e für die untere Gurtung und die Diagonalen gegebenen Kräfte ungeändert bleiben. Der Fischbauchträger bc wird ebenso behandelt. Zu jedem der Drücke, welche der Plan Fig. 207e für die obere Gurtung liefert, ist der Druck O'' zu fügen. Die Vorzeichen sind in die Figuren eingetragen worden.

Es ist auch möglich, einen zusammenhängenden Kräfteplan zu zeichnen. Der einzuschlagende Weg soll unter Voraussetzung des in Fig. 208a dargestellten Belastungsfalles beschrieben werden. Auf die eine Dachhälfte wirke ein Winddruck W , welcher die Knotenpunkte mit $\frac{1}{8} W$

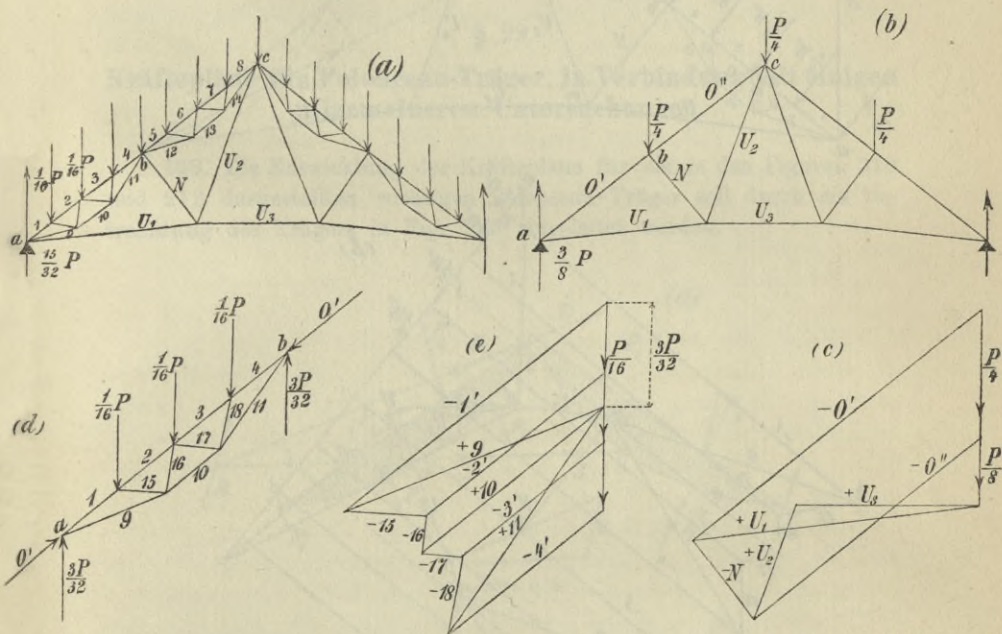


Fig. 207 a, b, c, d u. e.

bezieh. $\frac{1}{16} W$ belastet und die Auflagerkräfte A und B hervorruft. Der Widerstand A sei senkrecht gerichtet;*) B geht durch den Schnittpunkt der Kräfte A und W . Wäre die Spannkraft U_1 gegeben, so könnte man das dem Knotenpunkte a entsprechende Kräftepolygon $dmefgd$ (Fig. 208b) zeichnen. Um U_1 zu finden, denke man den Fischbauchträger ab durch einen geraden Stab ab ersetzt und die Belastung $3 \cdot \frac{1}{8} W$

*) Es liege also das bewegliche Auflager bei A .

desselben auf die Knotenpunkte a und b vertheilt. In a greift dann die Last $2 \cdot \frac{1}{8} W = mf$ an, und man erhält für a das Kräftepolygon $dmfgd$, in welchem $fg \parallel ab$ ist. Wird auch die Belastung des Fisch-

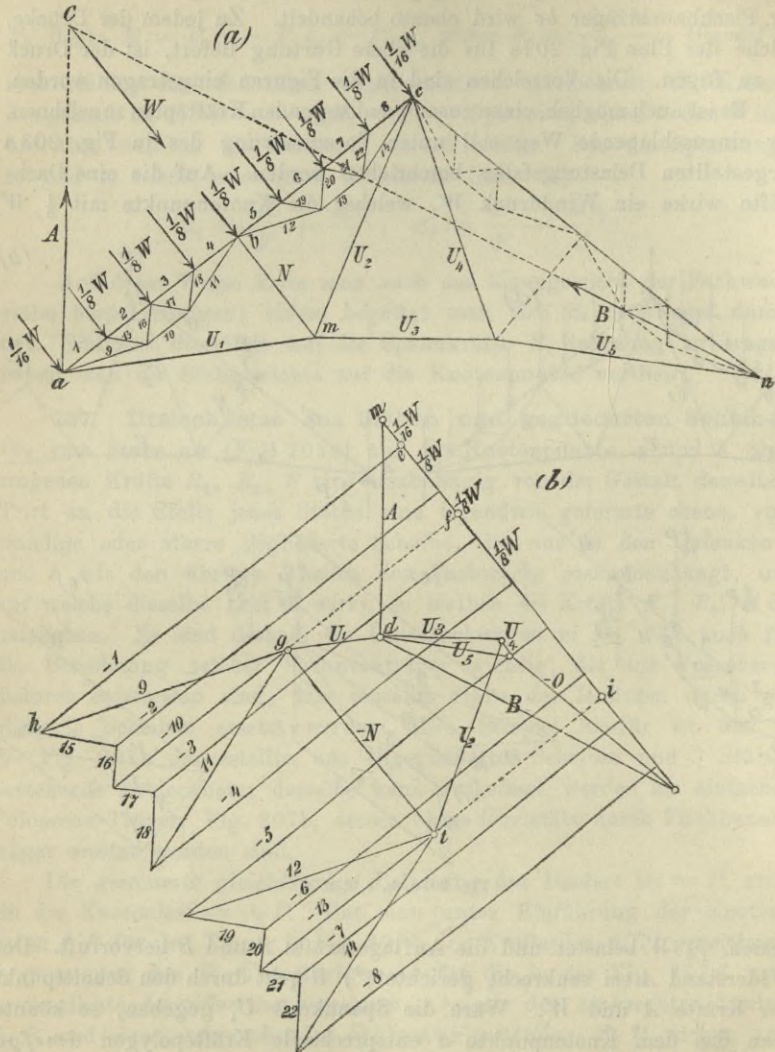


Fig. 208a u. b.

bauchträgers bc auf die Knotenpunkte b und c vertheilt und dieser Träger durch einen Stab bc ersetzt, so kommt auf b die Belastung

$4 \cdot \frac{1}{8} W = \overline{fi}$ und man erhält nach Ziehen der Geraden $gt \parallel N$ und $it \parallel bc$ die im Stabe bm auftretende Spannkraft N . Der Kräfteplan lässt sich jetzt nach den früher gegebenen Regeln fertigstellen; man kann von Knotenpunkt zu Knotenpunkt vorgehen, ohne jedesmal mehr als zwei unbekanntten Spannkraften zu begegnen. Die in der Fig. 208a gestrichelten Stäbe sind spannungslos. O bedeutet den Druck in der Gurtung cn .

Dem Leser wird empfohlen, in gleicher Weise den Belastungsfall in Fig. 207a, sowie den Einfluss eines auf die rechte Dachhälfte wirkenden Winddruckes zu untersuchen.

§ 29.

Kräftepläne für Polonceau-Träger, in Verbindung mit einigen allgemeineren Untersuchungen.

138. Die Entwicklung der Kräftepläne für die in den Figuren 210 und 212 dargestellten wichtigen Polonceau-Träger soll durch die Betrachtung des Trägers in Fig. 209 eingeleitet werden.

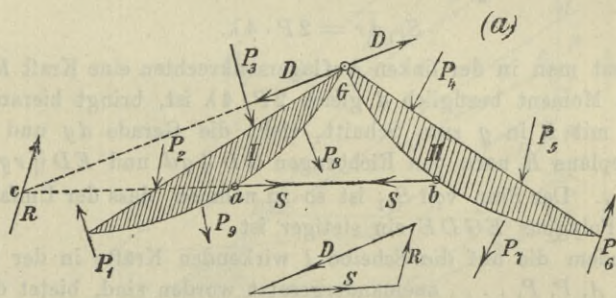


Fig. 209 a u. b.

Dieser Träger besteht aus zwei (vollwandigen oder gegliederten) Scheiben, welche mit einander durch ein Gelenk G und einen Stab ab verbunden sind. Bei a und b ist der Stab gelenkartig befestigt. An der Scheibe I greifen ausser den äusseren Kräften P_1, P_2, P_3, P_8, P_9 , welche sämtlich gegeben sein mögen und deren Mittelkraft $= R$ sei, noch an: die Spannkraft S des Stabes ab und die Kraft D , mit welcher die Scheibe II im Punkte G auf die Scheibe I wirkt. Da Gleichgewicht nur dann besteht, wenn die Kraft D durch den gegebenen Schnittpunkt c von R und S geht, so ist die Richtung von D bekannt, und es lassen sich S und D mit Hilfe eines Kräfte-dreiecks bestimmen.

Nun sind alle auf die Scheibe *I* wirkenden Kräfte bekannt, desgleichen die an der Scheibe *II* angreifenden. Sind die Scheiben gegliedert und einfache Dreiecknetze (wie beispielsweise in den Figuren 210 u. 212), so ist der Träger ein innerlich statisch bestimmter. Für jede der beiden Scheiben lässt sich ein Cremona'scher Kräfteplan zeichnen, wobei darauf zu achten ist, dass für das Kräftepolygon der Scheibe *I* die Reihenfolge $P_1, P_2, P_3, D, P_8, S, P_9$ zu wählen ist und für das Kräftepolygon der Scheibe *II* die Reihenfolge: D, P_4, P_5, P_6, P_7, S . In besonderen Fällen sind Vereinfachungen möglich, auf welche bei Lösung der beiden folgenden Aufgaben hingewiesen werden soll.

139. Kräfteplan für den Dachbinder in Fig. 210. Die Knotenlasten seien senkrecht und mögen zunächst gleich gross angenommen werden. Die Spannkraft im Stabe 11 sei S_{11} ; sie lässt sich auf dem in No. 138 angegebenen Wege finden, wird aber im vorliegenden Falle kürzer mit Hilfe des Ritter'schen Verfahrens abgeleitet. Führt man durch d einen senkrechten Schnitt und stellt die Momentengleichung für den Punkt d auf, so erhält man (wenn λ die Feldweite bedeutet)

$$A4\lambda - P(3\lambda + 2\lambda + \lambda) - S_{11} \cdot \bar{d}r = 0$$

und (wegen $A = \frac{7P}{2}$)

$$S_{11} \bar{d}r = 2P \cdot 4\lambda.$$

Nimmt man in der linken Auflagersenkrechten eine Kraft $R = 2P$ an, deren Moment bezüglich d gleich $2P \cdot 4\lambda$ ist, bringt hierauf Stabachse 11 mit R in g zum Schnitt, zieht die Gerade dg und zerlegt im Kräfteplane R nach den Richtungen $GD \parallel gd$ und $ED \parallel rg$, so ist $\overline{DE} = S_{11}$. Der Sinn von S_{11} ist so zu nehmen, dass der Umfahrungsinn des Polygons $EGDE$ ein stetiger ist.

Nachdem die auf die Scheibe *I* wirkenden Kräfte in der Reihenfolge S_{11}, A, P, P, \dots aneinandergesetzt worden sind, bietet die Aufzeichnung eines Cremona'schen Kräfteplanes keinerlei Schwierigkeiten; in Fig. 210b wurde derselbe nur für die linke Hälfte des symmetrischen Trägers dargestellt. Die Vorzeichen der Spannkkräfte wurden in der Fig. 210a angegeben.

Es mögen noch zwei andere Verfahren, den Punkt D in Fig. 210b zu bestimmen, mitgetheilt werden, welche beide auch bei ungleich grossen und schräg gerichteten Knotenlasten mit Vortheil anzuwenden sind.

Man beginne die Aufzeichnung des Kräfteplanes mit der Bestimmung der auf den Knoten f wirkenden Spannkkräfte 1 und 2, ermittle hierauf 3 und 4, sodann 5 und 6. An jedem der folgenden Knotenpunkte (b oder a) begegnet man drei unbekanntem Spannkkräften. Geht man zum Knoten b und nimmt für die eine der drei Unbekannten

z. B. für 7 den beliebigen Werth $A_1 S$ an, so kann man das dem Knotenpunkte b entsprechende Kräftepolygon $A_1 S F L J B_1 A_1$ zeichnen und

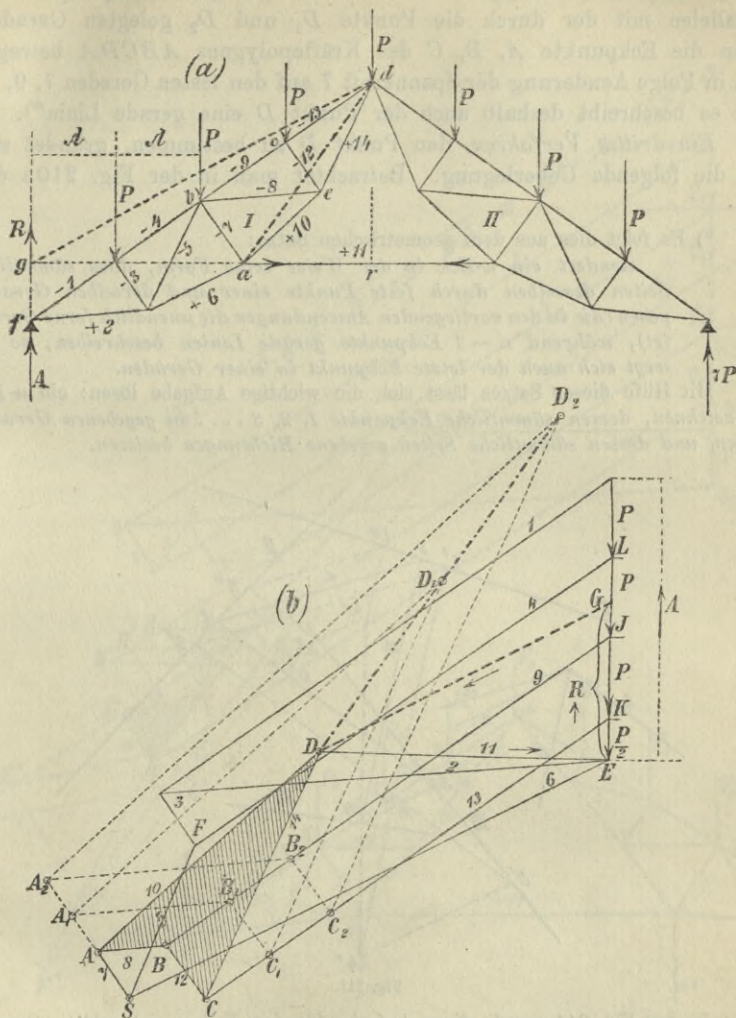


Fig. 210 a u. b.

hierauf die Kräftepolygone für die Knoten c und e , nämlich $B_1 J K C_1 B_1$ und $B_1 A_1 D_1 C_1 B_1$ (*). Eine zweite Annahme: $A_2 S =$ Spannkraft 7

*) In Fig. 210 b ist $A_1 B_1 \parallel A_2 B_2 \parallel 8$; $B_1 C_1 \parallel B_2 C_2 \parallel 12$; $C_1 D_1 \parallel C_2 D_2 \parallel 14$; $D_1 A_1 \parallel D_2 A_2 \parallel 10$.

liefert für e das Polygon $B_2 A_2 D_2 C_2 B_2$. Der Eckpunkt D des wirklichen Kräftepolygons für e muss aber auf der durch E zum Stabe 11 gezogenen Parallelen liegen; er ist bestimmt als Schnittpunkt dieser Parallelen mit der durch die Punkte D_1 und D_2 gelegten Geraden. Denn die Eckpunkte A, B, C des Kräftepolygons $ABCD$ bewegen sich in Folge Aenderung der Spannkraft 7 auf den festen Geraden 7, 9, 13 und es beschreibt deshalb auch der Punkt D eine gerade Linie*).

Ein drittes Verfahren, den Punkt D zu bestimmen, gründet sich auf die folgende Ueberlegung. Betrachtet man in der Fig. 210a den

*) Es folgt dies aus dem geometrischen Satze:

Aendert ein n -Eck in der Weise seine Form, dass sämtliche Seiten desselben durch feste Punkte einer und derselben Geraden gehen (die in den vorliegenden Anwendungen die unendlich ferne Gerade ist), während $n-1$ Eckpunkte gerade Linien beschreiben, so bewegt sich auch der letzte Eckpunkt in einer Geraden.

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich die wichtige Aufgabe lösen: ein n -Eck zu zeichnen, dessen sämtliche Eckpunkte 1, 2, 3... in gegebenen Geraden liegen, und dessen sämtliche Seiten gegebene Richtungen besitzen.

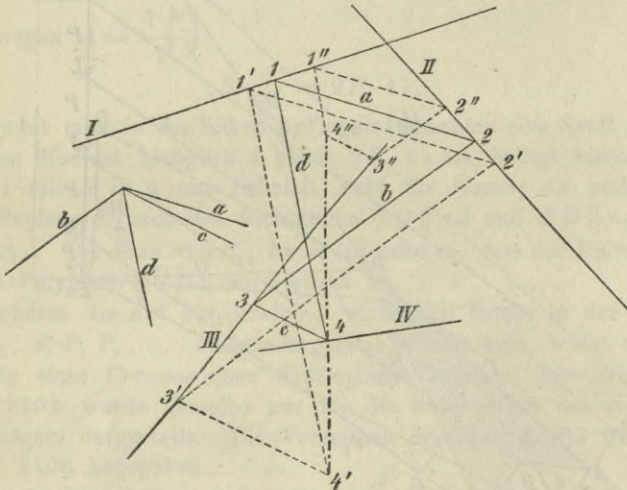


Fig. 211.

In der Fig. 211 wurde diese Aufgabe für den Fall $n=4$ gelöst. Gesucht ist ein Polygon, dessen Eckpunkte 1, 2, 3, 4 auf den Geraden I, II, III, IV , liegen, und dessen Seiten den gegebenen Geraden a, b, c, d parallel sind. Es wurden zwei beliebige Vierecke $1'2'3'4'$ und $1''2''3''4''$ gezeichnet, deren Seiten den Geraden a, b, c, d parallel sind, und deren Ecken $1', 2', 3'$ und $1'', 2'', 3''$ beziehungsweise in I, II, III liegen. Dann liegt, nach dem vorstehenden Satze, 4 auf der Geraden $4'4''$, und es ist dieser Punkt deshalb der Durchschnittspunkt der Geraden $4'4''$ und IV .

Linienzug $abcd$ als einen Kräftezug, e als den Pol desselben, und die Geraden 10, 8, 12, 14 als Seilstrahlen, so ist das Polygon $D_1A_1B_1C_1D_1$ ein zugehöriges Seilpolygon, ebenso das Polygon $D_2A_2B_2C_2D_2$. Die

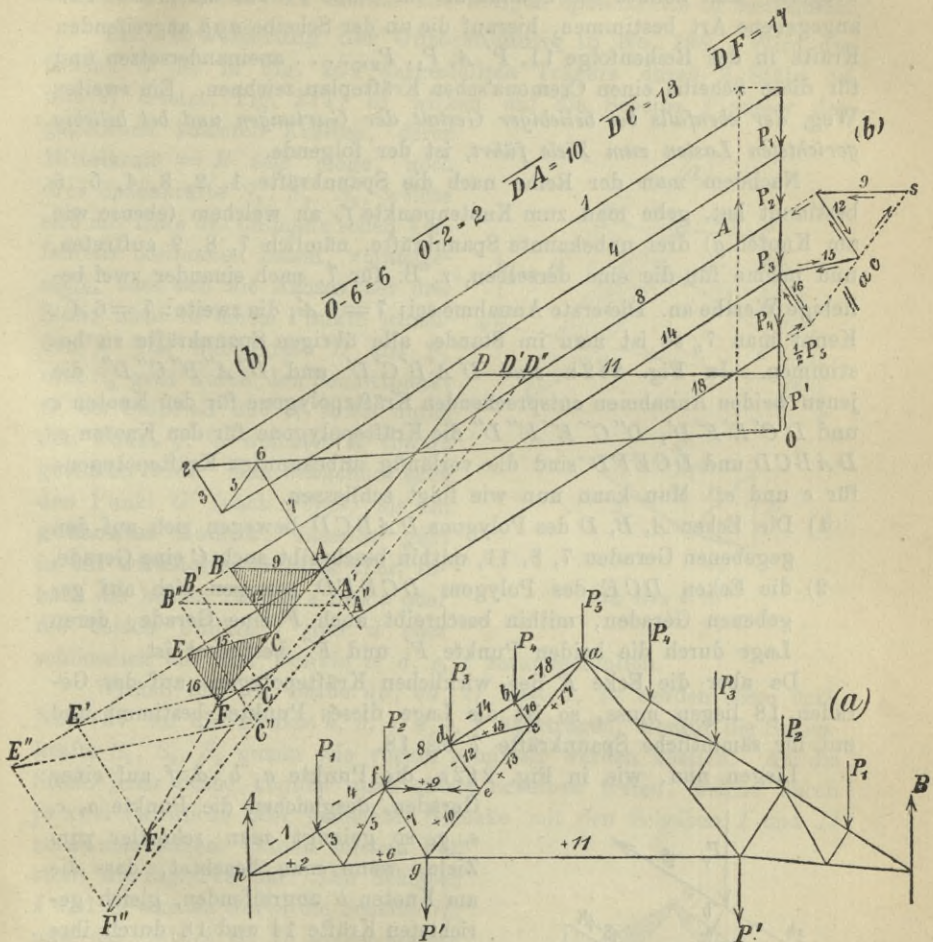


Fig. 212 a u. b.

Gerade D_1D_2 muss deshalb parallel zu der Mittelkraft ad der Kräfte ab, bc, cd sein, und es ist ersichtlich, dass man, um den Punkt D zu finden, nur nöthig hat, das eine der beiden Versuchspolygone, z. B.

$A_1B_1C_1D_1A_1$ zu zeichnen. Eine durch D_1 zur Geraden ad gezogene Parallele D_1D bestimmt auf der ED den Punkt D .

140. Kräfteplan für den Dachbinder in Fig. 212. Es handelt sich hier wieder um einen besonderen Fall des in Fig. 209 dargestellten Trägers. Man könnte die Spannkraft im Stabe 11 auf die in No. 139 angegebene Art bestimmen, hierauf die an der Scheibe agh angreifenden Kräfte in der Reihenfolge 11, $P'A$, P_1 , P_2 , . . . aneinandersetzen und für diese Scheibe einen Cremona'schen Kräfteplan zeichnen. Ein zweiter Weg, der ebenfalls bei beliebiger Gestalt der Gurtungen und bei beliebig gerichteten Lasten zum Ziele führt, ist der folgende.

Nachdem man der Reihe nach die Spannkraften 1, 2, 3, 4, 5, 6 bestimmt hat, gehe man zum Knotenpunkte f , an welchem (ebenso wie am Knoten g) drei unbekannte Spannkraften, nämlich 7, 8, 9 auftreten, und nehme für die eine derselben, z. B. für 7, nach einander zwei beliebige Werthe an. Die erste Annahme sei: $7 = 6A'$, die zweite: $7 = 6A''$. Kennt man 7, so ist man im Stande, alle übrigen Spannkraften zu bestimmen. In Fig. 212b sind $D'A'B'C'D'$ und $D''A''B''C''D''$ die jenen beiden Annahmen entsprechenden Kräftepolygone für den Knoten e und $D'C'E'F'D'$, $D''C''E''F''D''$ die Kräftepolygone für den Knoten c . $DABCD$ und $DCEFD$ sind die vorläufig unbekanntenen Kräftepolygone für e und c . Man kann nun wie folgt schliessen.

- 1) Die Ecken A, B, D des Polygons $DABCD$ bewegen sich auf den gegebenen Geraden 7, 8, 11, mithin beschreibt auch C eine Gerade.
- 2) die Ecken DCE des Polygons $DCEFD$ bewegen sich auf gegebenen Geraden, mithin beschreibt auch F eine Gerade, deren Lage durch die beiden Punkte F' und F'' bestimmt ist.

Da aber die Ecke F des wirklichen Kräftepolygons auf der Geraden 18 liegen muss, so ist die Lage dieses Punktes bestimmt und mit ihr sämtliche Spannkraften 7 bis 18.

Liegen nun, wie in Fig. 212a, die Punkte a, b, d, f auf einer

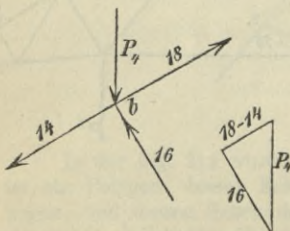


Fig. 213.

Geraden, desgleichen die Punkte a, c, e, g , so gelangt man schneller zum Ziele, wenn man beachtet, dass die am Knoten b angreifenden, gleich gerichteten Kräfte 14 und 18 durch ihre Mittelkraft 18—14 ersetzt werden dürfen, worauf es möglich ist, die Spannkraft 16 zu bestimmen. Zur Erläuterung des Verfahrens diene Fig. 213;

es wurden dort 14 und 18, deren Sinn noch unbekannt ist, als Zugkräfte angenommen. In gleicher Weise lässt sich nun am Knoten c die Spannkraft 15, am Knoten d die

Spannkraft 12 und schliesslich am Knoten e die Spannkraft 9 bestimmen. Die Ermittlung aller dieser Kräfte ist in der Fig. 212 angegeben worden. Jetzt ist man im Stande, das Kräftepolygon für den Knotenpunkt f , an welchem nur noch zwei Unbekannte (7 und 8) auftreten, zu zeichnen und hierauf alle übrigen Spannkräfte zu bestimmen.

141. Erweiterung der Untersuchung in No. 138, Wird das Gelenk G des in Fig. 209 dargestellten Trägers durch 2 Stäbe cd und ef ersetzt, Fig. 214, so wirken auf die Scheibe I^* ausser den gegebenen äusseren Kräften, deren Mittelkraft $= R$ sein möge, noch drei Spannkräfte S_1, S_2, S_3 , welche sich mit Hilfe des Culmann'schen Verfahrens bestimmen lassen, vorausgesetzt, dass sich die Achsen der drei Stäbe nicht in einem Punkte schneiden*). Die Mittelkraft D aus S_2 und S_3 geht durch den Schnittpunkt G' der Stäbe cd und ef sowie durch den Punkt g , in welchem R von ab getroffen wird. Man bezeichnet auch den Punkt G' (nach Föppl) als ein **gedachtes Gelenk**; dasselbe geht in ein **wirkliches Gelenk** über, sobald die beiden Punkte e und c oder die beiden Punkte f und d oder schliesslich alle vier Punkte c, d, e, f zusammenfallen.

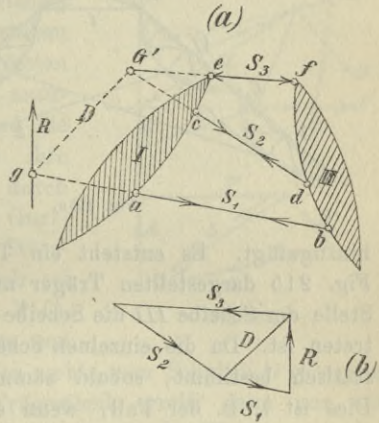


Fig. 214 a u. b.

Wirken auf die Stäbe ab, cd, ef Lasten, so werden diese nach No. 137 auf die Punkte a, b, c, d, e, f übertragen, worauf die Spannkräfte S_1, S_2, S_3 genau wie vorhin ermittelt werden können. An die Stelle jener Stäbe können auch starre Scheiben treten, welche durch je zwei (wirkliche oder gedachte) Gelenke mit den Scheiben I und II zusammenhängen. Einen solchen Fall stellt die Fig. 215 dar. Die Scheiben I und II wurden durch die Scheibe III und das Gelenk G_2 zu einem starren Gebilde verbunden. Indem man die auf die Scheibe III wirkenden Lasten auf die Punkte G_1 und G_3 vertheilt, führt man die Berechnung des fraglichen Trägers auf diejenige des in No. 139 untersuchten Trägers zurück.

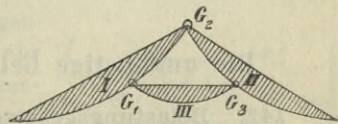


Fig. 215.

*) Die drei Geraden ab, cd, ef dürfen also auch nicht parallel sein.

Die vorstehenden Betrachtungen geben uns ein einfaches Mittel an die Hand, um aus statisch bestimmten gegliederten Scheiben und aus Stäben eine ganze Reihe von innerlich statisch bestimmten Fachwerkträgern herzuleiten. Ein Beispiel zeigt die Fig. 215 a. Die beiden Scheiben *V* und *VI* wurden durch das Gelenk G_1 und den Stab 5 zu einem starren Gebilde vereinigt, welches wir als Scheibe (*V*, *VI*, 5) bezeichnen wollen, und in gleicher Weise wurden die Scheiben *IV* und *III*

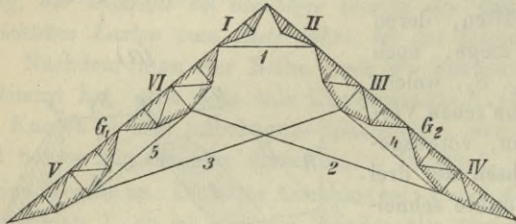


Fig. 215 a.

durch G_2 und 4 zur Scheibe (*IV*, *III*, 4) verbunden. Hierauf wurden die Scheiben (*V*, *VI*, 5) und (*III*, *IV*, 4) durch die Stäbe 1, 2, 3 zu einem starren Ganzen vereinigt und schliesslich die Scheiben *I* und *II*

hinzugefügt. Es entsteht ein Träger, welcher sich von dem in der Fig. 215 dargestellten Träger nur dadurch unterscheidet, dass an die Stelle der Scheibe *III* die Scheibe (*III*, *IV*, *V*, *VI*, 1, 2, 3, 4, 5) getreten ist. Da die einzelnen Scheiben Dreiecknetze sind, ist der Träger statisch bestimmt, sobald sämtliche äusseren Kräfte gegeben sind. Dies ist z. B. der Fall, wenn er nur ein festes und ein bewegliches Auflagergelenk erhält.

IX. Abschnitt.

Der einfache Fachwerkbalken.

§ 30.

Die ungünstige Belastungsweise. Einflusslinien.

142. **Belastungsgesetze.** Wir gehen jetzt dazu über, die wichtigsten statisch bestimmten Träger ausführlicher zu behandeln und beginnen mit dem in einer lothrechten Ebene angenommenen *einfachen Fachwerkbalken*. Die Lasten seien senkrecht und abwärts gerichtet. Dann sind auch beide Stützenwiderstände senkrecht, und es ist deshalb für die folgenden Betrachtungen gleichgiltig, auf welcher Seite das

festen oder das bewegliche Auflager liegt. Zunächst soll die Frage nach der ungünstigsten Belastungsweise entschieden werden. Wir setzen ein einfaches Dreiecknetz voraus und knüpfen an die im § 26 zur Erläuterung der Verfahren von *Culmann* und *Ritter* durchgeführten Untersuchungen an: dieselben zeigten, dass die Spannkraft in den Gurtungen des einfachen Fachwerkbalkens bei voller Belastung am grössten werden, und dass die obere Gurtung stets gedrückt, die untere Gurtung stets gezogen wird.

Sodann wurde durch jene Untersuchung der bei Satteldächern vorkommende besondere Fall ausgeschieden, in welchem auch die Spannkraft in den Gitterstäben bei voller Belastung des Balkens am grössten werden. Es bleibt also nur noch anzugeben, für welchen Belastungszustand die Spannkraft in einem Füllungsstabe ihre Grenzwerte annimmt, wenn ein durch diesen Stab geführter Schnitt tt zwei Gurtstäbe trifft, die sich ausserhalb der Stützweite schneiden. Der fragliche Stab sei eine links steigende Diagonale (Fig. 216), und es möge zunächst der Einfluss von

Lasten untersucht werden, die auf den rechts vom Schnitte tt gelegenen Trägertheil wirken. Am linken Trägertheile greift dann nur eine äussere Kraft an, nämlich der Stützenwiderstand A . Um D zu finden, werde das auf Seite 210 beschriebene *Culmann'sche* Verfahren angewendet. Der Schnittpunkt von A und U wird mit dem Schnittpunkt von O und D durch die Gerade L verbunden, und hierauf werden der Reihe nach die geschlossenen Kräftepolygone A, U, L und L, D, O gezeichnet (Fig. 216b). Es stellt sich heraus, dass die fragliche Diagonale gezogen wird, sobald sich O und U links von A oder rechts von tt schneiden. Der Fall, in welchem sich O und U zwischen A und tt treffen, ist durch die Voraussetzung ausgeschlossen. Um nun den Einfluss von Lasten zu bestimmen, welche auf den linken Trägertheil

wirken, wird zweckmässig der rechte Trägertheil betrachtet, weil jetzt an diesem nur eine einzige äussere Kraft, der Stützenwiderstand B , angreift. Das Kräftepolygon B, U, D, O wird ganz ebenso wie vorhin gefunden; dasselbe liefert für D einen Druck, sobald sich O und U links von tt oder rechts von B schneiden; ein zwischen tt und B liegender Schnittpunkt von O und U

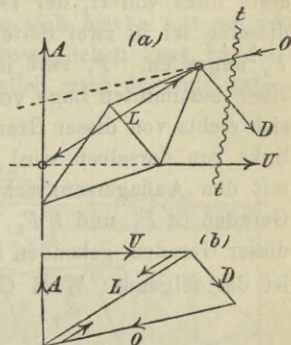


Fig. 216.

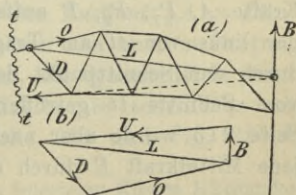


Fig. 217 a u. b.

ist durch die Voraussetzung ausgeschlossen. Es folgt also der Satz:

Schneiden sich O und U ausserhalb der Stützweite, so rufen alle Lasten, welche in Knotenpunkten rechts von tt angreifen, in der Diagonale D^) einen Zug hervor und alle Lasten, welche in Knotenpunkten links von tt angreifen, einen Druck.*

Wir setzen jetzt voraus, dass die Belastung an der unteren Gurtung angreift (Fig. 218). Zwischen den Knoten F_1 und F_2 , von denen der erste links von tt , der zweite rechts von tt liegt, wirke eine Last P ; dieselbe sei in zwei Seitenkräfte P_1 und P_2 zerlegt, welche in F_1 und F_2 angreifen. P_1 ruft in D einen Druck hervor, P_2 einen Zug. Bei einer bestimmten Lage von P wird $D = 0$ sein. Durch Lasten, welche sich rechts von dieser Grenzlage befinden, wird D gezogen, durch Lasten links von derselben wird D gedrückt. Bringt man nun den Gurtstab O mit den Auflagersenkrechten in A' und B' zum Schnitt und zieht die Geraden $A'F_1$ und $B'F_2$, so entspricht einer durch den Schnittpunkt E dieser Geraden gehenden Last P der Werth $D = 0$. Der Beweis hierfür ist der folgende: Wird $\overline{CG} = P$ gemacht (Fig. 218b) und $CO \parallel A'E$,

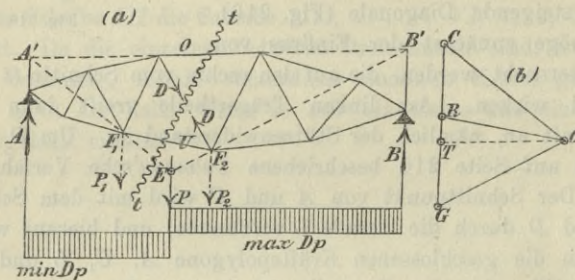


Fig. 218a u. b.

$GO \parallel EB'$ gezogen, sodann $OR \parallel F_1F_2$ und $OT \parallel A'B'$, so ist nach No. 100: $CR = P_1$ und $RG = P_2$, ferner: $GT = B$ und $TC = A$. Es lässt sich deshalb das Polygon $A'F_1F_2B'$ als ein Seilpolygon der Kräfte A, P_1, P_2, B auffassen und hieraus folgt, dass die Mittelkraft R der links von tt am Träger angreifenden äusseren Kräfte A und P_1 durch den Schnittpunkt der Gurtstäbe O und U geht, welche mit den vom Schnitte tt getroffenen Seilpolygoneiten zusammenfallen. Auf Seite 213 wurde aber nachgewiesen, dass sich $D = 0$ ergibt, sobald jene Mittelkraft R durch den Schnittpunkt von O und U geht. Es ist

*) In der Folge bezeichnen wir, um kurz zu sein, die Stäbe \overline{und} die in denselben wirksamen Spannkkräfte mit denselben Buchstaben.

demnach die Senkrechte durch E eine *Belastungsscheide*; links von E liegt die *negative*, rechts von E die *positive Beitragstrecke* des Trägers.

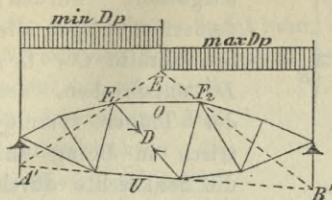


Fig. 219.

Die ausschliessliche Belastung der letzteren Strecke erzeugt in der fraglichen Diagonale den grössten Zug d. i. $\max D_p$ und die ausschliessliche Belastung der ersteren den grössten Druck, nämlich $\min D_p$. Durch den Zeiger p ist angedeutet, dass es sich hierbei nur um den Einfluss der beweglichen Last handelt.

Ganz ähnlich wird der Fall unter-

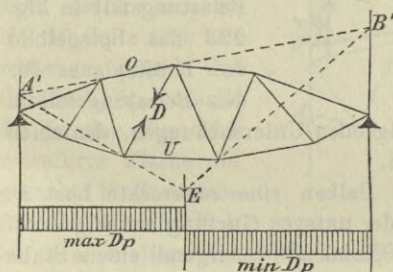


Fig. 220.

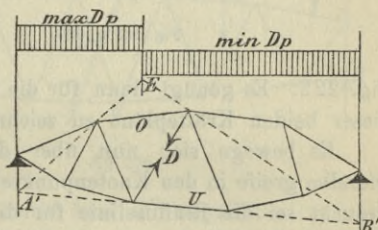


Fig. 221.

sucht, in welchem die Lasten in den Knotenpunkten der oberen Gurtung angreifen; derselbe ist in der Fig. 219 dargestellt worden, während die Figuren 220 und 221 die ungünstigsten Belastungsweisen für eine rechts steigende Diagonale angeben.

143. Einflusslinien. Die Einflusslinien für die Spannkraften in den Stäben eines einfachen Fachwerkbalkens lassen sich schnell zeichnen, sobald die Spannkraften in Folge der in den Figuren 222 und 223 dargestellten Belastungszustände bekannt sind. In Fig. 222 ist angenommen worden, dass nur der dem Stützpunkte B benachbarte Knoten K belastet ist und zwar so stark, dass am linken Auflager der Widerstand $A = 1$ hervorgerufen wird. Die Spannkraft, welche bei diesem Belastungszustande, den wir in der Folge kurz den Zustand „ $A = \text{Eins}$ “ nennen wollen, in irgend einem Stabe der oberen oder unteren Gurtung entsteht, soll mit O' und U' bezeichnet werden, die Spannkraft in einem Füllungsstabe mit D' . Man findet diese Kräfte am schnellsten mit Hilfe eines *Cremona'schen Planes*; vergl. Seite 255 und Fig. 233.*)

*) Es genügt, die Spannkraften in den links vom belasteten Knoten k liegenden Stäben zu bestimmen. Die Grösse der in k anzunehmenden Last braucht man also nicht zu kennen.

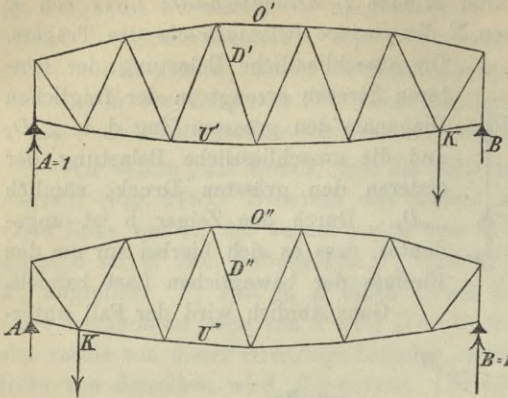


Fig. 222 u. 223.

In Fig. 223 ist der Zustand „B = Eins“ dargestellt worden; denselben mögen die Spannkraften O'' , U'' , D'' entsprechen. Ist der Träger symmetrisch in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte, so ist der Kräfteplan für den Belastungsfall in Fig. 223 das Spiegelbild des Kräfteplanes für den Belastungsfall in

Fig. 222. Es genügt dann für die folgenden Untersuchungen, den einen dieser beiden Kräftepläne zu zeichnen.

Es bewege sich nun über den Balken eine senkrechte Last P . Dieselbe greife in den Knotenpunkten der unteren Gurtung an, Fig. 224. Gesucht sei die Einflusslinie für die Spannkraft in irgend einem Stabe des Balkens, beispielsweise für die Spannkraft D im Füllungsstabe CF_2 . Liegt P rechts von F_2 , im Abstände b von B , so greift links von dem durch D und durch zwei Gurtstäbe geführten Schnitt tt nur eine äussere Kraft an, nämlich der Widerstand $A = P \frac{b}{l}$ der linken Stütze.

In dem fraglichen Füllungsstabe entsteht die Spannkraft

$$D = A \cdot D' = \frac{Pb}{l} D' = P\eta, \text{ wobei } \eta = D' \frac{b}{l}.$$

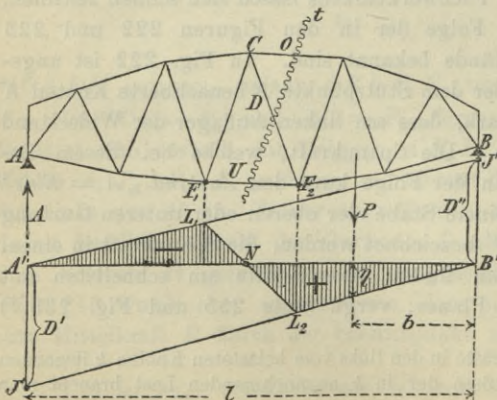


Fig. 224.

Trägt man also von einer Wagerechten $A'B'$ aus, auf der Senkrechten durch A die Strecke $A'J' = D'$ ab und verbindet J' mit dem senkrecht unter B gelegenen Punkte B' durch eine Gerade, welche die Senkrechte durch F_2 in L_2 schneidet, so ist die Gerade $B'L_2$ ein Theil der gesuchten

Einflusslinie; denn die unter der Last P gemessene Ordinate dieser Geraden ist $= D' \frac{b}{l} = \eta$.

Ganz ebenso findet man, dass der Einfluss einer zwischen A und F_1 angreifenden Last P gleich der mit P multiplicirten Ordinate einer Geraden AL_1 ist, welche auf der rechten Aufлагersenkrechten die Strecke $B'J'' = D''$ abschneidet. Dem Felde F_1F_2 , entspricht dann (nach dem in No. 63 Seite 116 bewiesenen Satze) die Gerade L_1L_2 , weshalb die in der Fig. 224 schraffierte Fläche die gesuchte Einflussfläche für die Spannkraft D ist. Im vorliegenden Falle ist D' positiv und D'' negativ.

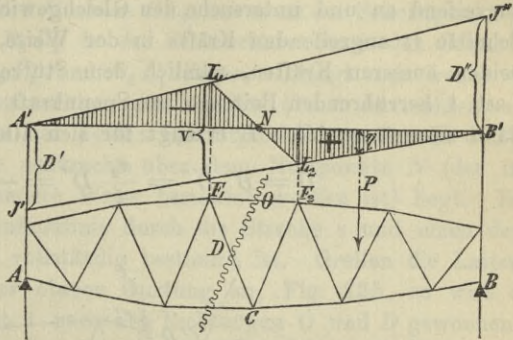


Fig. 225.

Fig. 225 stellt die Einflusslinie für die Spannkraft D im Stabe $F_1 C$ für den Fall vor, dass die Belastung an der oberen Gurtung angreift.

Man könnte auch die Einflusslinie $A'L_1L_2B'$ in der Weise finden, dass man die Gerade $B'L_2J'$ wie vorhin mittels der Ordinate $A'J' = D'$ festlegt, hierauf den Nullpunkt N in der auf Seite 237 angegebenen Weise bestimmt, durch N die Gerade L_2L_1 zieht und L_1 mit A' verbindet.

Man kann ferner den Einfluss des Stützenwiderstandes A auf die Spannkraft D mit Hilfe der Momentengleichung

$$Dr = Ax$$

bestimmen, wo r und x (Fig. 226) die Hebelarme von D und A in Bezug auf den Schnittpunkt F der Gurtstäbe O und U bedeuten, und findet dann für $A = 1$ den Werth

$$D' = +1 \frac{x}{r},$$

und ganz in derselben Weise für den Einfluss von $B = 1$

$$D'' = -1 \frac{x'}{r}.$$

Hieraus folgt dann, dass sich die Linien $A'L_1$ und $B'L_2$ in einem Punkte C der durch F gezogenen Senkrechten schneiden müssen, und

dass es also genügt, eine der beiden Strecken D' oder D'' aufzutragen. Bei weit abliegendem Punkte F ist dieses Verfahren allerdings un- bequem.

Zu einer anderen, sehr wichtigen Eigenschaft der Einflusslinie für D gelangt man durch folgende Betrachtung.

Man nehme die über den Balken wandernde Last 1 im Punkte F_2 angreifend an und untersuche den Gleichgewichtszustand der rechts vom Schnitte tt angreifenden Kräfte in der Weise, dass man die von den beiden äusseren Kräften, nämlich dem Stützenwiderstande B und der Last 1 herrührenden Beiträge zur Spannkraft D getrennt ermittelt und dann zusammenzählt. B erzeugt für sich allein

$$D = B \cdot D'' = \frac{a_2}{l} D'' = -z$$

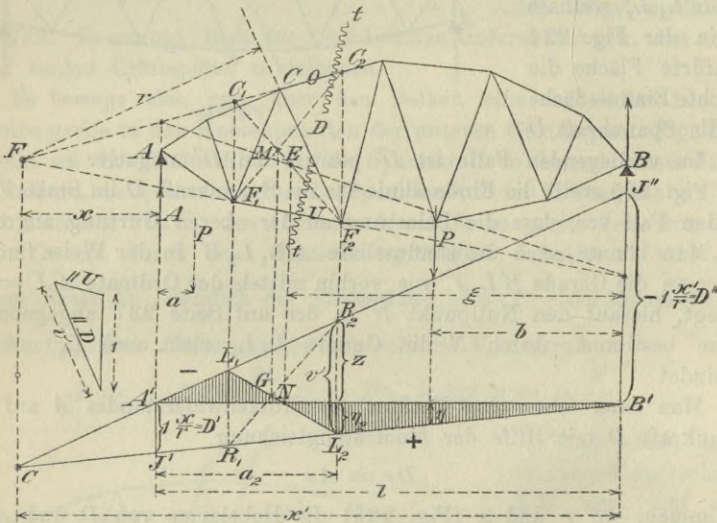


Fig. 226.

und die Wirkung der in F_2 angreifenden Kraft 1 erhält man durch Zerlegung von 1 nach den Richtungen von D und U , weil $O = 0$ ist, sobald B verschwindet. Die Seitenkraft parallel zu D sei v ; dann ent- steht infolge B und 1 zusammen:

$$D = v - z.$$

Dieser Werth muss aber gleich η_2 sein, und daraus folgt die wichtige Beziehung

$$\eta_2 + z = v,$$

mit deren Hilfe nach Auftragung der einen der beiden Geraden $B'J'$ oder $A'J''$ stets die andere schnell festgelegt werden kann.

Aus der Bedingung, dass sich die Geraden $A'L_1$ und $B'L_2$ in der Senkrechten durch den Schnittpunkt F der Gurtstäbe O und U treffen müssen, folgt noch: Bestimmt man in den Senkrechten durch F_1 und F_2 die Punkte C_1 und C_2 der Geraden O , ferner den Punkt R_1 der Geraden CL_2 und den Punkt R_2 der Geraden CL_1 , so muss der Schnittpunkt G der Geraden L_1L_2 und R_1R_2 in der Senkrechten durch den Schnittpunkt M der Geraden C_1F_2 und C_2F_1 liegen. Bringt man weiter O mit der linken Auflagersenkrechten zum Schnitt, U mit der rechten, so trifft die Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte die Gerade C_1F_2 in einem Punkte E , der senkrecht über dem Nullpunkte N (der in Figur 218 bereits auf andere Weise bestimmt worden ist) liegt. Es leuchtet ein, dass die Einflusslinie durch die Strecke v und einen der beiden Punkte G und N vollständig bestimmt ist. Greifen die Lasten in den Knotenpunkten der oberen Gurtung an, Fig. 225, so wird v durch Zerlegung der Last 1 nach den Richtungen O und D gewonnen.

Um die Einflusslinie für die Spannkraft in einem Gurtstabe zu finden, beachte man, dass diese Kraft im geraden Verhältnis steht zu dem Angriffsmoment für den dem fraglichen Stabe gegenüberliegenden Knotenpunkt. So ist z. B. die Spannkraft O_m der oberen Gurtung

(Fig. 227): $O_m = -\frac{M_m}{r_m}$, wo $M_m =$ Angriffsmoment in Bezug auf

Knotenpunkt m und $r_m =$ Abstand des Punktes m vom Stabe O_m . Greift nun die Belastung an der unteren Gurtung an und zeichnet man ein Dreieck $A'CB'$ dessen Spitze C senkrecht unter m liegt, und dessen Seite $B'C$ auf der Senkrechten durch A die Strecke $A'J' = x_m$ abschneidet, so ist dieses Dreieck die Einflussfläche für M_m .

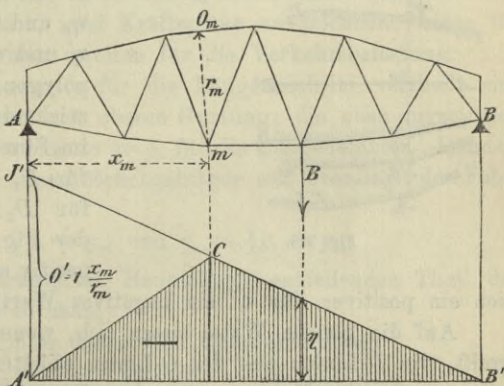


Fig. 227.

Macht man $A'J' = -\frac{x_m}{r_m}$, so ist Dreieck $A'CB'$ die Einflussfläche für O_m . Will man den für den Belastungszustand: $A = \text{Eins}$ gezeichneten

Kräfteplan benutzen, was namentlich dann zu empfehlen ist, wenn die Einflusslinien für die Spannkkräfte D auf die vorhin beschriebene Weise gezeichnet werden, so mache man $A'J' = O'$.

Dass $O' = -\frac{x_m}{r_m}$ ist, erkennt man, indem man das Ritter'sche Verfahren auf den Belastungszustand $A = 1$ anwendet.

Für spätere Untersuchungen wird sich noch die Lösung der folgenden Aufgabe als nützlich erweisen. Gegeben sind die Einflusslinien für die Spannkkräfte O und U in sämtlichen Gurtstäben eines Dreiecknetzes (gleichgiltig ob einfacher Balken, oder Gerber'scher Balken oder irgend eine andere Trägerart); gesucht sind die Einflusslinien für die Spannkkräfte D in den Füllungsstäben.

Zunächst werde vorausgesetzt, dass die über den Träger wandernde senkrechte Lasteinheit in den Knotenpunkten der oberen Gurtung angreift. Die an einem Knotenpunkte K der unteren Gurtung wirkenden Spannkkräfte mögen mit U_1, U_2, D_1, D_2 bezeichnet werden, Fig. 228.

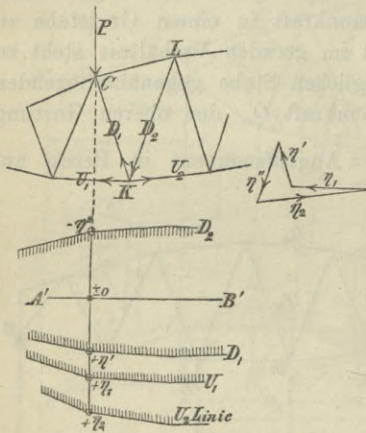


Fig. 228.

Die Ordinaten der Einflusslinien dieser Spannkkräfte seien an ein und derselben (beliebigen) Stelle C beziehungsweise $= \eta_1, \eta_2, \eta', \eta''$; dieselben stellen diejenigen Spannkkräfte U_1, U_2, D_1, D_2 vor, welche durch eine in C angreifende Last $P = 1$ hervorgerufen werden. Sind η_1 und η_2 bekannt, so findet man η' und η'' , indem man das Kräftepolygon für den Knotenpunkt K zeichnet; man ist auf diese Art im Stande, aus den Einflusslinien für U_1 und U_2 die Einflusslinien für D_1 und D_2 abzuleiten. In der Fig. 228 wurden η_1 und η_2 positiv angenommen; für η' ergab

sich ein positiver, für η'' ein negativer Werth.

Auf die gleiche Weise lassen sich, wenn die Belastung unten angreift, die D -Linien aus den O -Linien ableiten; es werden dann Kräftepolygone für die Knotenpunkte der oberen Gurtung gezeichnet.*)

*) Es ist in der Regel vortheilhaft, keineswegs aber Bedingung, die Kräftepolygone für die Knoten der unbelasteten Gurtung zu zeichnen. Man könnte z.B. auch D_2 in Fig. 228 mit Hilfe des Kräftepolygons für den oberen Knoten L bestimmen; nur muss man dann darauf achten, dass, falls P bei L liegt, diese Kraft in das fragliche Polygon einzureihen ist.

Bei statisch bestimmten Träger ist in der Regel die Einflusslinie für irgend eine Stabkraft bereits durch eine geringe Anzahl von Ordinaten gegeben. Beispielsweise lässt sich die Einflusslinie für die Spannkraft D im Stabe CF_2 des in der Fig. 224 dargestellten einfachen Balkens zeichnen, sobald zwei Ordinaten bekannt sind, nämlich irgend eine Ordinate der Geraden $B'L_2$ und irgend eine Ordinate der Geraden $A'L_1$. Ermittelt man den Nullpunkt N oder die Strecke v auf die früher beschriebene Weise, dann genügt es sogar, eine einzige Ordinate mit Hilfe eines Kräftepolygons zu bestimmen.

Hinsichtlich der Benutzung und Verwerthung der Einflusslinien für den einfachen Balken, die uns vor allem einen guten Ueberblick über die Wirkung der Lasten verschaffen, verweisen wir auf § 19, und gehen nunmehr zur Darstellung derjenigen Verfahren über, welche uns am schnellsten die gesuchten Spannkräfte liefern.

§ 31.

Spannkräfte in den Gurtungen.

a. Gleichmässige Belastung.

144. Die grössten Spannkräfte in den Gurtungen entstehen bei voller Belastung des Trägers; sie lassen sich daher bei gleichförmiger Verkehrslast sehr schnell mit Hilfe des *Cremona'schen* Verfahrens bestimmen. Es empfiehlt sich, zwei Kräftepläne zu zeichnen, einen für die ständige Belastung, einen zweiten für die Verkehrsbelastung.

Die ständige Belastung (g für die Längeneinheit) vertheilt sich auf die Knoten der unteren und oberen Gurtung; die oben angreifende Last sei $= g_o$, die unten wirkende $= g_u$ für die Längeneinheit. Handelt es sich beispielsweise um einen Brückenträger mit obenliegender Fahrbahn, so ist

$$g_o = g_f + \frac{1}{2}g_t + g_{qo} \quad \text{und} \quad g_u = \frac{1}{2}g_t + g_{qu},$$

wobei g_f den auf den fraglichen Hauptträger entfallenden Theil des Gewichtes der Fahrbahn,

g_{qo} desgl. des Gewichtes der oberen Querversteifung,

g_{qu} „ „ „ „ „ unteren „ „ „

g_t das Gewicht des Hauptträgers

bedeutet, alle Gewichte für die Längeneinheit der Stützweite l gerechnet. *)

*) Bei unten liegender Fahrbahn wäre: $g_o = \frac{1}{2}g_t + g_{qo}$ und $g_u = g_f + \frac{1}{2}g_t + g_{qu}$.

In dem in der Fig. 229 dargestellten Falle kommt dann auf einen Knotenpunkt der oberen Gurtung die Last $g_o\lambda$, auf einen Knotenpunkt der unteren Gurtung die Last $g_u\lambda$. Der für diesen Belastungsfall (nach den im § 27 entwickelten Regeln) gezeichnete Cremona'sche Plan liefert die in den Gurtungen und den Wandgliedern durch die ständige Belastung hervorgerufenen Spannkraften, O_g , U_g , D_g , V_g ; der Kräfteplan

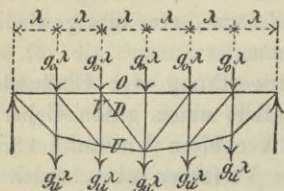


Fig. 229.

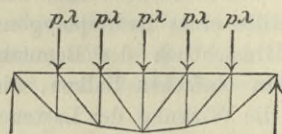


Fig. 230.

für den Belastungsfall in Fig. 230 liefert die grössten Werthe O_p und U_p , zu denen schliesslich die O_g und U_g addirt werden.

Meistens begeht man einen nur unwesentlichen Fehler, wenn man bei oberliegender Fahrbahn die gesammte Last g oben angreifend annimmt und bei unten liegender Fahrbahn nur die unteren Knoten mit g belastet. Es genügt dann im vorliegenden Falle, einen Kräfteplan für den in der Fig. 221 dargestellten Zustand gänzlicher Belastung zu zeichnen; derselbe liefert neben den grössten Werthen O und U noch für die Wandglieder gewisse Spannkraften D_q und V_q , aus denen sich die Spannkraften D_g und V_g mit Hilfe der Gleichungen

$$D_g = \frac{g}{q} D_q \quad \text{und} \quad V_g = \frac{g}{q} V_q$$

ermitteln lassen. Die Multiplikation mit $\frac{g}{q}$ wird zweckmässig in der auf Seite 193 beschriebenen Art durch Zeichnung ausgeführt.

b. Die Verkehrslast besteht aus einem Zuge von Einzellasten.

145. Die Spannkraft O in einem Stabe BC (Fig. 232), welchem der Knotenpunkt A gegenüberliegt, ist nach Seite 212: $O = -\frac{M}{r}$, wobei M das Angriffsmoment für den Knoten A und $r = \overline{AE}$ die Länge

des von A auf BC gefällten Lothes bedeutet. Hat man M mit Hilfe des in No. 82 beschriebenen Verfahrens in der Form $H y$ dargestellt ($H =$ Polweite des benutzten Seilpolygons), so ergibt sich (ohne Vorzeichen) $O = H \frac{y}{r}$. Trägt man also

auf AE die Strecke $AE' = y$ auf, macht $\overline{BD} = H$ und zieht durch E' zu BC eine Parallele, welche AB in B' und AD in D' schneidet, so ist $\overline{B'D'} = O$. Ist die in Fig. 233 mit a bezeichnete wagerechte Projektion der Gurtstäbe konstant, so empfiehlt es sich, für H ein Vielfaches von a zu wählen, also $H = \varepsilon a$ zu setzen, wobei ε eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Bezeichnet man dann die senkrechte Höhe des Trägers im Punkte A mit h und den Neigungswinkel des Gurtstabes gegen die Wagerechte mit β , so erhält man (wegen $r = h \cos \beta$) die Gleichung

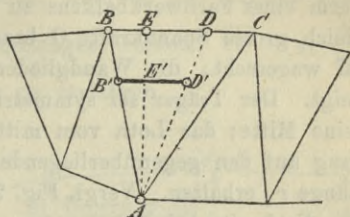


Fig. 232.

$$O = - \frac{M}{h} \sec \beta$$

und (wegen $M = \varepsilon a y$) ohne Vorzeichen: $\frac{1}{\varepsilon} O = a \sec \beta \frac{y}{h} = \overline{BC} \frac{y}{h}$;

denn es ist $\overline{BC} = a \sec \beta$.

Trägt man nun auf der Senkrechten AR die Strecke $\overline{AR'} = y$ auf und zieht durch R' zu BC eine Parallele, welche AB in B' und AC in C' schneidet, so erhält man

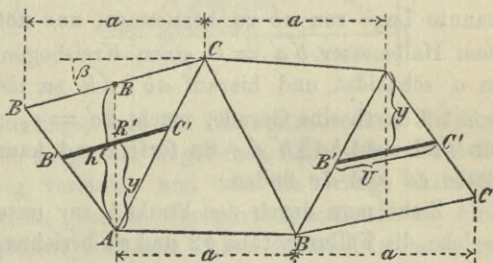


Fig. 233.

$\overline{B'C'} = \frac{1}{\varepsilon} O$ also

$$O = \varepsilon \cdot \overline{B'C'}$$

Auf dieselbe Weise werden die Kräfte U bestimmt.

Es empfiehlt sich, zur Ermittlung der O und U ein in möglichst grossem Maassstabe gezeichnetes Trägernetz zu benutzen, damit thunlichst alle Linien $B'C'$ innerhalb des Netzes liegen. Der Kräfteplan zeichnet sich dann durch grosse Uebersichtlichkeit aus. Die Multiplikation mit ε führt man am besten aus, indem man den Kräftemaassstab ändert. Hat man beispielsweise $H = \varepsilon a = 2a$ gewählt und bei

der Ermittlung der Momente den Kräftemaassstab $1^{\text{cm}} = 20^t$ angewendet, so geben die Strecken $B'C'$, im Maassstabe $1^{\text{cm}} = \varepsilon \cdot 20 = 40^t$ gemessen, die Kräfte O und U an.

146. Aufgabe. Pauli'scher Bogensehnenträger. Es ist die Form eines Fachwerkbalkens zu bestimmen, dessen Obergurtstäbe durch gleich grosse Spannkraften O beansprucht werden. Die untere Gurtung sei wagerecht; die Wandglieder seien abwechselnd senkrecht und geneigt. Der Träger sei symmetrisch in Bezug auf die Senkrechte durch seine Mitte; das Loth vom mittelsten Knotenpunkte der unteren Gurtung auf den gegenüberliegenden Obergurtstab soll die vorgeschriebene Länge r_4 erhalten. Vergl. Fig. 234, in welcher die Felderzahl $= 8$ ist. Die Feldweite sei λ .

Man ermittelt zunächst nach No. 82 (vergl. Fig. 128 u. 130 auf Tafel 1) die den Knotenpunkten 1, 2, 3, 4 entsprechenden Ordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 und zwar mit Hilfe einer Polweite $H = \varepsilon \lambda^*$). Hierauf findet man für

den Gurtstab ed die Spannkraft $O = \frac{Hy_4}{r_4} = \varepsilon \frac{y_4 \lambda}{r_4}$, wofür nach einer entsprechenden Aenderung des Kräftemaassstabes gesetzt werden darf;

$O = \frac{y_4 \lambda}{r_4}$. Dieser Werth wird zweckmässig durch Zeichnung bestimmt,

Fig. 234 b. Gesetzt nun, es sei die Lage des Gurtstabes ab bekannt. Macht man dann $\overline{1b'} = y_1$ und zieht $b'a' \parallel ba$, so stellt die Strecke $b'a'$ die Spannkraft im Stabe ba vor. Diese Spannkraft soll aber gleich dem vorhin gefundenen Werthe O sein; man hat also, um die unbekannte Lage von ab zu bestimmen, nur nöthig, um den Punkt b' mit dem Halbmesser $\overline{b'a'} = O$ einen Kreisbogen zu schlagen, welcher $a1$ in a' schneidet und hierauf $ab \parallel a'b'$ zu ziehen. Jetzt verbindet man b mit 2 durch eine Gerade, macht $\overline{2c'} = y_2$, trägt die Strecke $\overline{c'b''} = O$ ein und zieht $bc \parallel b''c'$. So fortfahrend kann man auch die Lagen der Stäbe cd und de finden.

Zieht man durch den Punkt b' zur unteren Gurtung eine Parallele, welche die Füllungsstäbe $b2$ und $c2$ beziehungsweise in b_1 und c_1 schneidet, so stellt die Strecke b_1c_1 die Spannkraft U_2 im Untergurtstabe 12 vor; denn es ist (mit $\overline{1b} = h_1$): $U_2 = \frac{M_1}{h_1} = \frac{Hy_1}{h_1} = \frac{\lambda y_1}{h_1}$, und für die Strecke b_1c_1 findet man leicht den Werth $\overline{b_1c_1} = \frac{\lambda y_1}{h_1}$. In gleicher Weise werden die Spannkraften U_3 und U_4 der Stäbe 23 und 34

*) Es wird daran erinnert, dass es sich um die durch Verkehrslast und ständige Belastung hervorgebrachten Momente Hy handelt.

gefunden. U_1 ist gleich der wagerechten Seitenkraft der Spannkraft O im Stabe ab .

In der Fig. 234 c ist noch der häufig vorkommende Fall dargestellt worden, in welchem der Träger an dem einen oder an beiden Enden ein Feld von der Länge λ_1 besitzt, während alle übrigen Feldweiten $= \lambda$ sind. Es muss dann aufgetragen werden: $\overline{1b'} = y_1 \frac{\lambda}{\lambda_1}$; im übrigen aber ist genau wie vorhin zu verfahren.

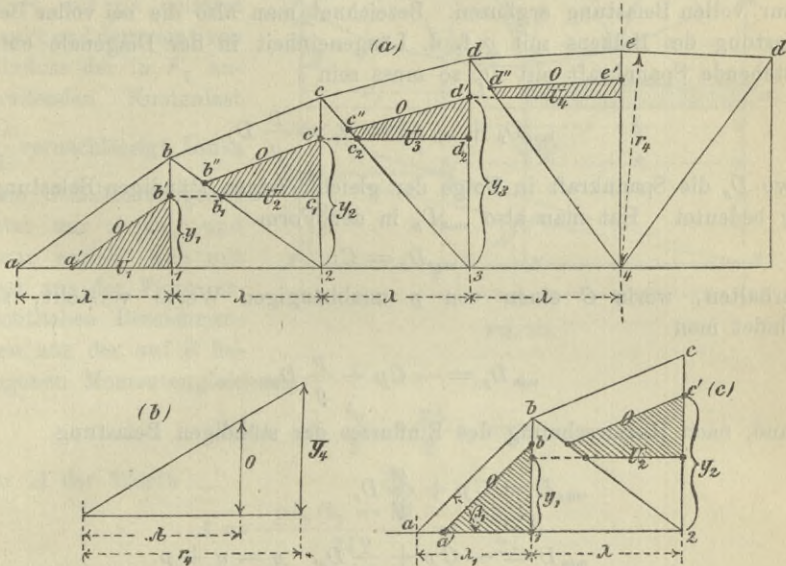


Fig. 234 a, b u. c.

Hervorzuheben ist allerdings, dass bei Eisenbahnbrücken die Linie der grössten Momente Hy in Folge der ungleichen Radstände und Achslasten, recht unregelmässig verläuft, und dass die strenge Erfüllung der Bedingung einer gleich grossen Obergurt-Spannkraft zu einer ästhetisch nicht befriedigenden Gurtform führt. Man wird also gut thun, die y -Linie vorher etwas abzurunden.

Bei gleichförmiger Verkehrslast ist die Linie der grössten Momente eine Parabel (Fig. 124 Seite 135); es müssen sich also auch die Längen r_1, r_2, r_3, r_4 der von den Knotenpunkten 1, 2, 3, 4 auf die gegenüberliegenden Obergurtstäbe gefällten Lothe zu einander verhalten, wie die Ordinaten einer über der Spannweite l errichteten Parabel, deren Pfeilhöhe zweckmässig gleich r_4 gemacht wird. Die Gurtstücke ab, bc, cd, \dots sind bestimmt als Tangenten der um die Punkte 1, 2, 3, \dots mit den Halbmessern r_1, r_2, r_3, \dots beschriebenen Kreisbögen.

§ 32.

Spannkraften in den Füllungsstäben.

a. Gleichmässige Belastung.

147. Aus den in No. 142 durchgeführten Untersuchungen geht hervor, dass die Laststellungen, welche $\max D_p$ und $\min D_p$ erzeugen, sich zur vollen Belastung ergänzen. Bezeichnet man also die bei voller Belastung des Balkens mit p f. d. Längeneinheit in der Diagonale entstehende Spannkraft mit D_p so muss sein

$$\max D_p + \min D_p = D_p = \frac{p}{g} D_g$$

wo D_g die Spannkraft in Folge der gleichförmigen ständigen Belastung g bedeutet. Hat man also $\max D_p$ in der Form

$$\max D_p = Cp$$

erhalten, worin C einen von p unabhängigen Werth vorstellt, so findet man

$$\min D_p = -Cp + \frac{p}{g} D_g$$

und, nach Hinzurechnung des Einflusses der ständigen Belastung

$$\max D = Cp + \frac{p}{g} D_g$$

$$\min D = -Cp + \frac{q}{g} D_g. \quad q = g + p.$$

Nun ist aber der Inhalt des positiven Theiles der Einflussfläche (Fig. 226 Seite 240) gleich $\frac{1}{2} \xi \eta_2$ und man erhält deshalb

$$\max D_p = \frac{1}{2} p \xi \eta_2.$$

Hiernach ist $\max D_p$ gleich der Spannkraft, die in der Diagonale CF_2 durch eine in F_2 angreifende Einzellast von der Grösse $\frac{1}{2} p \xi$ hervorgerufen wird, und es wird daher der oben mit C bezeichnete Werth:

$$C = \frac{1}{2} \xi \cdot D'.$$

Der Nullpunkt N wird nach dem auf Seite 236 beschriebenen Verfahren ermittelt.

148. Näherungsregel. Die Ermittlung der Grenzwerte der Spannkraft D wird etwas vereinfacht, wenn die bewegliche Last nur in den Knotenpunkten auf der einen Seite des Schnittes tt angreift. Handelt es sich z. B. um die Spannkraft $\max D_p$ in der linkssteigenden

Diagonale CF_2 (Fig. 235), so nehme man an, dass der Träger zwischen F_2 und B gleichförmig belastet ist und in F_2 noch die Einzellast $\frac{p\lambda}{2}$

trägt, wobei λ die wagerecht gemessene Stützweite des Feldes F_1F_2 bedeutet. Man rechnet

dann etwas zu ungünstig, weil man gewissermassen das Feld F_1F_2 mit $p\lambda$ belastet denkt und den negativen Einfluss der in F_1 angreifenden Knotenlast $\frac{p\lambda}{2}$ vernachlässigt. Links

vom Schnitte tt greift jetzt nur A an, und zwar ergibt sich mit den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen aus der auf B bezogenen Momentengleichung:

$$Al - pb_2 \frac{b_2}{2} - \frac{p\lambda}{2} b_2 = 0$$

für A der Werth

$$A = \frac{pb_2(b_2 + \lambda)}{2l} = \frac{pb_1b_2}{2l}$$

Um A durch Zeichnung zu bestimmen, trage man von einer Wagerechten $A'B'$ aus auf der linken Auflagersenkrechten die Strecke $\overline{A'J} = \frac{p\lambda}{2}$ auf und bringe die Gerade $B'J$ mit der Senkrechten durch F_1 in L zum Schnitt. Nun ziehe man $LR \parallel B'A'$ und verbinde R mit B' durch eine Gerade; letztere schneidet auf der Senkrechten durch F_2 den gesuchten Werth $ED = A$ ab. Denn es ist

$$\overline{ED} = \overline{A'R} \frac{b_2}{l} = \overline{FL} \frac{b_2}{l} = \overline{A'J} \frac{b_1}{l} \frac{b_2}{l} = \frac{pl}{2} \frac{b_1}{l} \frac{b_2}{l} = \frac{pb_1b_2}{2l} \text{ *)}$$

Nach Ermittlung von A findet man

$${}_{max}D_p = A \cdot D'$$

*) Bei gleich grossen Feldweiten findet man auch A sehr übersichtlich mittels eines die Knotenlasten verbindenden A -Polygons.

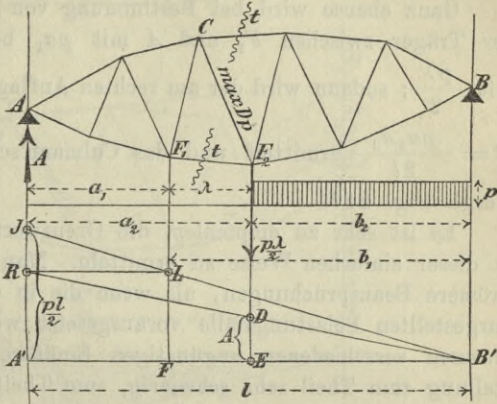


Fig. 235.

Gleichzeitig mit der Spannkraft $_{max}D_p$ der Diagonale CF_2 entsteht $_{min}D_p$ in der Diagonale CF_1 , es kann also jeder Werth A zur Berechnung zweier Diagonalen verwerthet werden.

Nach Ermittlung von A kann man die Spannkraft $_{max}D_p$ sehr schnell mit Hilfe des Culmann'schen Verfahrens bestimmen. Vergl. Fig. 216.

Ganz ebenso wird bei Bestimmung von $_{min}D_p$ verfahren. Es wird der Träger zwischen F_1 und A mit pa_1 belastet, ausserdem in F_1 mit $\frac{p\lambda^1}{2}$; sodann wird der am rechten Auflager angreifende Widerstand

$$B = \frac{pa_1 a_2}{2l}$$

Vergl. Fig. 217.

Es ist sehr zu empfehlen, die Grenzwerte $_{max}D_p$ und $_{min}D_p$ stets in dieser einfachen Weise zu ermitteln. Man erhält für die Diagonalen grössere Beanspruchungen, als wenn die in den Figuren 218 bis 221 dargestellten Belastungsfälle vorausgesetzt werden und trägt gewissermassen verschiedenen ungünstigen Einflüssen Rechnung, deren Feststellung zum Theil sehr schwierig, zum Theil noch gar nicht geglückt ist. Wir erinnern an dieser Stelle nur daran, dass alle bisherigen Entwicklungen an die Voraussetzung gelenkartiger Knotenpunkte gebunden sind, also an eine Annahme, welche bei Anwendung von Nietverbindungen gar nicht und selbst bei Anordnung von zweckmässig ausgebildeten Gelenkbolzen wegen der an diesen auftretenden Reibungswiderstände nur annähernd erfüllt ist. Wir werden uns mit den Spannungen, welche durch starre Knotenverbindungen hervorgerufen werden (und welche man als *Nebenspannungen* zu bezeichnen pflegt), später noch zu beschäftigen haben. Die betreffenden Untersuchungen führen meistens zu recht langwierigen Zahlenrechnungen und werden deshalb zur Zeit nur selten durchgeführt.

b. Beanspruchung durch einen Zug von Einzellasten.

149. Die ungünstigste Zugstellung. Wir betrachten eine linkssteigende Diagonale CF_2 , Fig. 236. Die Lasten mögen an den Knoten der unteren Gurtung angreifen. Es soll diejenige Stellung der Verkehrslast gefunden werden, welche $_{max}D_p$ hervorruft. Wir ermitteln auf die vorhin beschriebene Weise die Belastungsscheide E und nehmen an, es sei die Einflusslinie für D gegeben; dieselbe besteht nach der in No. 143 durchgeführten Untersuchung aus drei Geraden I, II, III , welche den Trägertheilen AF_1, F_1F_2, F_2B entsprechen; der Nullpunkt N liegt auf der Senkrechten durch E . Der Lastenzug sei von B aus bis in

das Feld F_1F_2 vorgeschoben. Eine Last P rechts von F_2 erzeugt, wenn die Einflusslinie für die Last „Eins“ gezeichnet worden ist: $D = P\eta$ und eine Last P zwischen F_1 und F_2 ruft $D = P(\eta - \eta')$ hervor. Bezüglich der Bezeichnungen sei auf die Figur verwiesen. In Folge sämtlicher Lasten entsteht

$$D = \sum P\eta - \sum' P\eta',$$

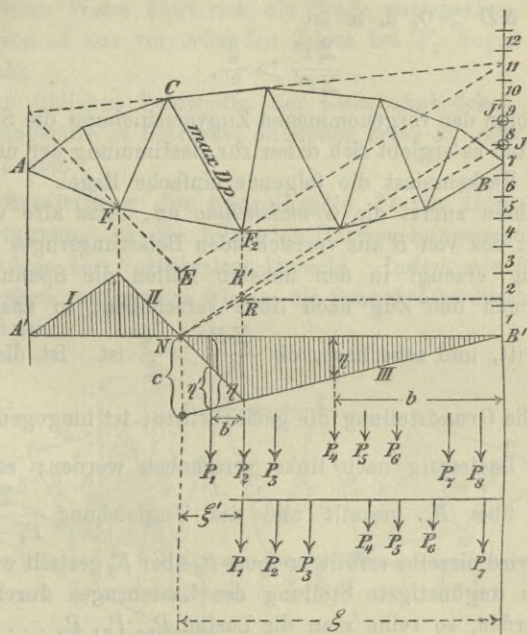


Fig. 236.

wobei sich das Zeichen Σ über alle Lasten erstreckt, das Zeichen Σ' hingegen nur über die Lasten zwischen F_1 und F_2 . Nach Einführung von $\eta = c \frac{b}{\xi}$ und $\eta' = c \frac{b'}{\xi'}$ ergibt sich

$$D = c \left\{ \frac{1}{\xi} \sum P b - \frac{1}{\xi'} \sum' P b' \right\}.$$

Hierbei bedeutet b den Abstand einer Last vom rechten Auflager und b' den Abstand einer im Felde F_1F_2 liegenden Last vom Querträger F_2 . Die übrigen Bezeichnungen sind der Figur zu entnehmen. Wird der Lastenzug um die Strecke Δb nach links verschoben, so geht b über in $b + \Delta b$ und b' in $b' + \Delta b$, und es ändert sich D um

$$\Delta D = c \Delta b \left\{ \frac{\sum P}{\xi} - \frac{\sum' P}{\xi'} \right\}.$$

Vorausgesetzt ist hierbei, dass keine neue Last auf den Träger gekommen ist und dass eine Last, welche vor der Verschiebung ausserhalb des Feldes $F_1 F_2$ lag, sich auch nach der Verschiebung noch rechts von F_2 befindet. Eine etwa in F_2 angreifende Last gehört nach der Verschiebung zu $\Sigma' P$; vor der Verschiebung ist sie ohne Einfluss auf die Summe $\Sigma' P b'$.

Ist nun $\Delta D > 0$, d. h. ist

$$\frac{\Sigma P}{\Sigma P'} > \frac{\xi}{\xi'},$$

so wird in Folge der vorgenommenen Zugverschiebung die Spannkraft D vergrössert, und es ergibt sich daher zur Bestimmung der ungünstigsten Stellung der Verkehrslast die folgende einfache Regel.

Man nehme zuerst die *Grundstellung* an, setze also voraus, dass die erste Last des von B aus vorrückenden Belastungszuges bei F_2 liegt. Diese Stellung erzeugt in den meisten Fällen die Spannkraft ${}_{max} D_p$. Nun denke man den Zug nach links verschoben, so dass P_1 in das

Feld $F_1 F_2$ tritt, und sehe nach, ob $\frac{\Sigma P}{P_1} > \frac{\xi}{\xi'}$ ist. Ist dies nicht der

Fall, so ist die Grundstellung die gefährlichste; ist hingegen $\frac{\Sigma P}{P_1} > \frac{\xi}{\xi'}$,

so muss der Lastenzug nach links verschoben werden; es wird dann

die Last P_2 über F_2 gestellt und die Ungleichung $\frac{\Sigma P}{P_1 + P_2} > \frac{\xi}{\xi'}$

untersucht; wird dieselbe erfüllt, so muss P_3 über F_2 gestellt werden u. s. w.

Soll die ungünstigste Stellung des Lastenzuges durch Zeichnung bestimmt werden, so reihe man die Lasten $P_1, P_2, P_3 \dots$ von B' aus auf einer Senkrechten aneinander;* den Belastungszug selbst zeichne man auf einen Papierstreifen, um ihn bequem gegen den Träger verschieben zu können. Nachdem festgestellt worden ist, wie viel Lasten sich in der Grundstellung auf dem Träger befinden (wobei eine etwa bei B liegende Last mitgezählt wird), bestimme man auf der Senkrechten durch B' die Strecke $\overline{B'J} = \Sigma P$ (also in Fig. 236: $\overline{B'J} = P_1 + P_2 + \dots + P_7$), und verbinde J mit dem Nullpunkte N durch eine Gerade, welche die Senkrechte durch F_2 in R schneiden möge. Trifft nun eine durch R gelegte Wagerechte die auf der Senkrechten $B'J$ aufgetragene Last P_1 , so ist die Grundstellung die gefährlichste, trifft sie eine andere Last P_m , so muss der Zug so weit nach links verschoben werden, dass P_m beim Knoten F_2 liegt. In dem in der Fig. 236 dargestellten Falle muss also P_2 in F_2 angreifen, damit ${}_{max} D_p$

*) In der Fig. 236 wurden die Lasten mit den Ziffern 1, 2, 3, . . . bezeichnet.

entsteht. In Folge der Verschiebung des Zuges ändert sich natürlich im Allgemeinen die Summe ΣP der auf dem Träger befindlichen Lasten. Rückt man z. B. den Zug in Fig. 236 so weit vor, dass P_2 bei F_2 liegt, so wächst ΣP um P_8 . Punkt J ist zu ersetzen durch J' , ferner R durch R' . Die Wagerechte durch R' trifft wieder die Last P_2 , und hieraus folgt dann, dass eine weitere Verschiebung des Zuges unterbleiben muss.

In gleicher Weise lässt sich die Frage entscheiden, die wievielte Last eines von A aus vorrückenden Zuges bei F_1 liegen muss, damit $\min D_p$ entsteht.

Bei den üblichen Feldweiten der Eisenbahnbrücken kommen nur zwei Belastungsfälle in Betracht; entweder muss P_1 oder P_2 über dem Querträger liegen.

150. Ermittlung der Spannkkräfte D für Grundstellungen. Erstes Verfahren. In den folgenden Untersuchungen soll es sich nur um den Einfluss der Verkehrslast handeln. Indem wir dies ausdrücklich hervorheben, unterlassen wir es, die Spannkkräfte durch den Zeiger p zu kennzeichnen.

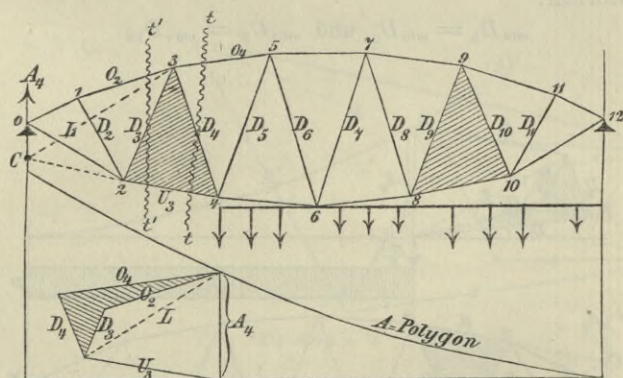


Fig. 237.

Um die Spannkraft $\max D_4$ in der Diagonale 34 des in Figur 237 dargestellten Balkens zu finden, belaste man den Balken rechts vom Schnitte tt' . Wirkt die Last am Untergurte, so muss die Verkehrslast vom rechten Auflager aus bis Knoten 4 vorrücken. Links von tt' greift nur der Stützenwiderstand A_4 an. Besteht die Verkehrslast aus einem beweglichen Lastenzuge, so wird A mit Hilfe des in No. 81 eingeführten A -Polygons bestimmt.

Bringt man nun U_3 mit A_4 in C zum Schnitt, verbindet C mit 3 durch die Gerade L , zerlegt A_4 nach den Richtungen von U_3 und L , hierauf Hilfskraft L nach den Richtungen von O_4 und D_4 , so erhält man

die Grösse von $max D_4$. Die den Sinn der Kräfte angegebenden Pfeile können fortbleiben; es ist ja bekannt, dass D_4 gezogen wird.

Die Spannkraft $min D_3$ entsteht, wenn der Balken rechts vom Schnitte $t't'$ belastet wird, also gleichzeitig mit $max D_4$. Man erhält $min D_3$ am schnellsten, indem man das Kräftepolygon für den Knotenpunkt 3 zeichnet; denn von den vier an diesem Punkte angreifenden Kräften O_4, D_4, D_3, O_2 sind die beiden ersten bekannt. In der Fig. 237 wurde dieses Kräftepolygon durch Schraffirung hervorgehoben, desgleichen das Dreieck, dessen zwei Seiten von den Diagonalen begrenzt werden, deren Spannkräfte gleichzeitig Grenzwerte annehmen; die dritte Seite dieses Dreiecks ist ein Stab derjenigen Gurtung, an welcher die Belastung angreift.

Auf die beschriebene Weise kann man die Spannkräfte $max D$ in allen links steigenden und die $min D$ in allen rechts steigenden Diagonalen bestimmen, indem man die Verkehrslast vom rechten Auflager aus der Reihe nach bis zu den Knotenpunkten 10, 8, 6, 4 vorschiebt. Ist der Träger symmetrisch in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte, so ist natürlich:

$$min D_4 = min D_9 \text{ und } max D_3 = max D_{10}.$$

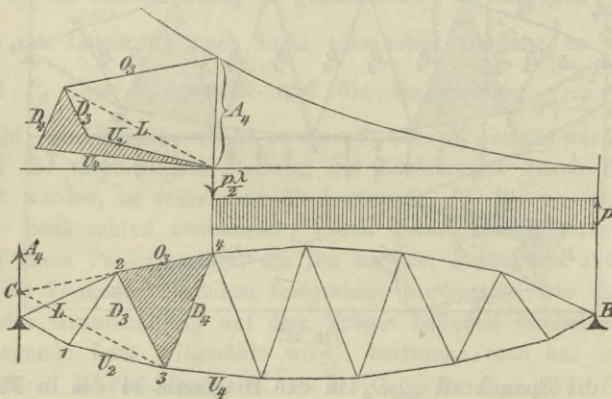


Fig. 238.

Bei unsymmetrischem Träger muss man, um $min D_2, min D_4, \dots, max D_3, max D_5, \dots$ zu erhalten, noch den Einfluss einer von A nach rechts vorrückenden Verkehrslast untersuchen. Man hat dann nur nöthig, das beschriebene Verfahren auf das Spiegelbild des Trägers anzuwenden.

In der Figur 238 ist angenommen worden, dass die Belastung an der oberen Gurtung angreift. Es wurde gleichförmige Belastung vorausgesetzt; dieselbe reicht von B bis 4, während in 4 noch die Einzellast

$\frac{p\lambda}{2}$ hinzugefügt wurde. Am linken Auflager greift A_4 an. In Folge dieser Belastung entstehen gleichzeitig: $max D_3$ und $min D_4$. Bei der Anwendung des Culmann'schen Verfahrens wurde O_3 mit A_4 in C zum Schnitte gebracht. Die Gerade L verbindet dann den Punkt C mit dem Knoten 3. Nach Ermittlung von D_4 ergab sich D_3 aus dem Kräftepolygone für den unteren Knoten 3*).

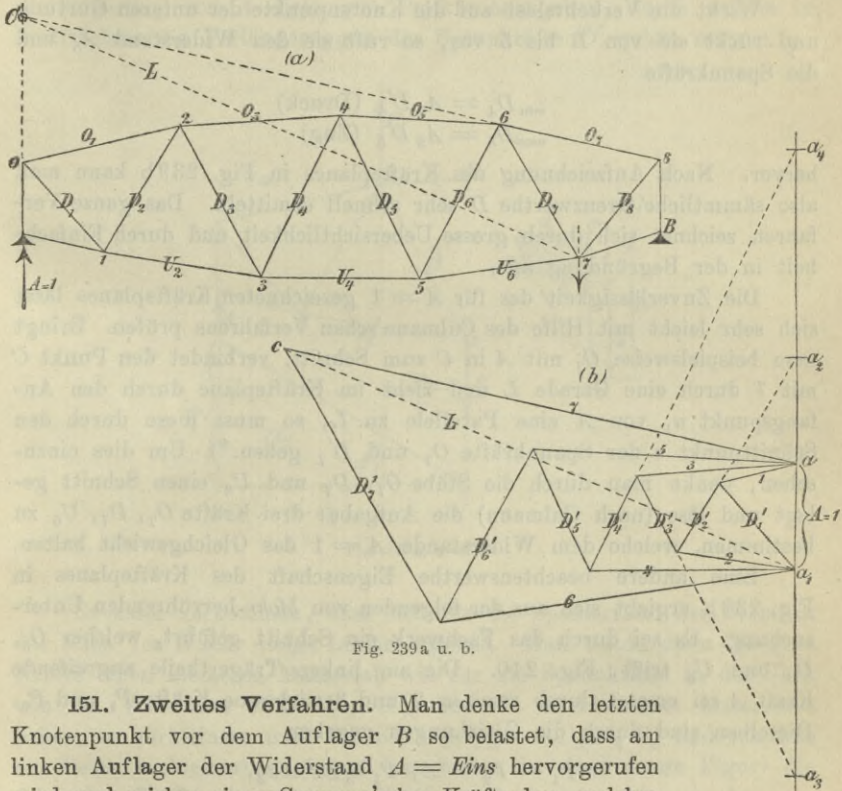


Fig. 239 a u. b.

151. Zweites Verfahren. Man denke den letzten Knotenpunkt vor dem Auflager B so belastet, dass am linken Auflager der Widerstand $A = \text{Eins}$ hervorgerufen wird und zeichne einen Cremona'schen Kräfteplan, welcher nur die Spannkkräfte in den links von jenem belasteten Knoten befindlichen Stäben zu enthalten braucht**), Fig. 239. Dieser Plan möge

*) Man könnte auch U_2 oder U_4 mit A zum Schnitt bringen. Im ersten Falle verbindet L den Punkt $A_4 U_2$ mit 2, im zweiten Falle den Punkt $A_4 U_4$ mit 4. Wir empfehlen dem Leser, stets mehrere Verfahren anzuwenden, um durch Vergleichung der Ergebnisse die Zuverlässigkeit der Zeichnung zu prüfen.

**) Es ist deshalb auch nicht nöthig anzugeben, wie gross die Last sein muss, welche $A = 1$ hervorbringt.

für die Diagonalen die Spannkkräfte D' liefern. Greift nun die Verkehrsbelastung in den Knotenpunkten der oberen Gurtung an, und ist dieselbe beispielsweise von B aus bis zum Knoten 4 vorgerückt, so entsteht gleichzeitig ${}_{max}D_3$ und ${}_{min}D_4$. Bei dieser Laststellung wirkt am linken Auflager der Widerstand A_4 ; er ruft die Spannkkräfte hervor

$$(1) \quad \begin{cases} {}_{max}D_3 = A_4 D'_3 \text{ (Zug)} \\ {}_{min}D_4 = A_4 D'_4 \text{ (Druck)} \end{cases}$$

Wirkt die Verkehrslast auf die Knotenpunkte der unteren Gurtung und rückt sie von B bis 5 vor, so ruft sie den Widerstand A_5 und die Spannkkräfte

$$\begin{aligned} {}_{min}D_4 &= A_5 D'_4 \text{ (Druck)} \\ {}_{max}D_5 &= A_5 D'_5 \text{ (Zug)} \end{aligned}$$

hervor. Nach Aufzeichnung des Kräfteplanes in Fig. 239b kann man also sämtliche Grenzwerte D sehr schnell ermitteln. Das ganze Verfahren zeichnet sich durch grosse Uebersichtlichkeit und durch Einfachheit in der Begründung aus.

Die Zuverlässigkeit des für $A = 1$ gezeichneten Kräfteplanes lässt sich sehr leicht mit Hilfe des Culmann'schen Verfahrens prüfen. Bringt man beispielsweise O_7 mit A in C zum Schnitt, verbindet den Punkt C mit 7 durch eine Gerade L und zieht im Kräfteplane durch den Anfangspunkt a_1 von A eine Parallele zu L , so muss diese durch den Schnittpunkt c der Spannkkräfte O_7 und D'_7 gehen. *) Um dies einzusehen, denke man durch die Stäbe O_7 , D_7 und U_6 einen Schnitt gelegt und löse (nach Culmann) die Aufgabe: drei Kräfte O_7 , D_7 , U_6 zu bestimmen, welche dem Widerstande $A = 1$ das Gleichgewicht halten.

Eine andere beachtenswerthe Eigenschaft des Kräfteplanes in Fig. 239b ergibt sich aus der folgenden von Mohr herrührenden Untersuchung. Es sei durch das Fachwerk ein Schnitt geführt, welcher O_3 , D_3 und U_2 trifft, Fig. 240. Die am linken Trägertheile angreifende Kraft A sei ersetzt durch zwei in 2 und 3 wirksame Kräfte P_1 und P_2 . Dieselben sind durch die Gleichungen gegeben

$$P_1 - P_2 = A; \quad P_1 \lambda_3 = A x_3.$$

Mit Hilfe der zweiten Bedingung lässt sich P_1 auf die in der Fig. 240b angegebene Weise durch Zeichnung finden. Wird nun P_1 nach den Richtungen von O_3 und D_3 zerlegt, P_2 nach den Richtungen von U_2 und D_3 , so ergibt sich das in der Fig. 240c dargestellte, aus A , O_3 , D_3 , U_2 bestehende Kräftepolygon, und hieraus folgt, dass

*) In der Fig. 239b haben wir die Spannkkräfte in den Gurtungen nur mit Ziffern bezeichnet.

in Fig. 239b die Verlängerung von D'_3 auf der Richtungslinie von A die Strecke $aa_3 = P_1$ abschneiden muss.

Sind die wagerechten Projektionen der Diagonalen gleich gross $= \lambda$, so ist $x_3 = 3\lambda$ und $P_1 = 3A$. Dieser Fall ist in der Fig. 239 vorausgesetzt worden; es ergibt sich dann $aa_3 = 3aa_1$ und ebenso findet man $a_1a_4 = 4a_1a$, wobei a_4 den Schnittpunkt von D'_4 und A bezeichnet. Auf diese Weise ist man im Stande, von vornherein auf der Verlängerung von A diejenigen Punkte anzugeben, durch welche im Kräfteplane die Verlängerungen der Spannkraften D' gehen müssen.

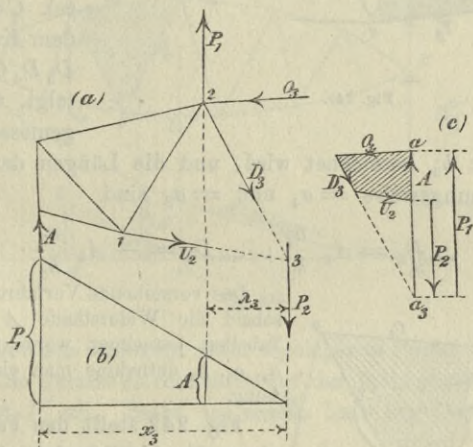


Fig. 240 a, b u. c.

Es kann vorkommen, dass sich für die Spannkraften der Stäbe in der Nähe von B sehr lange Linien ergeben. Man wähle dann für diese Kräfte einen kleineren Maassstab wie für die Spannkraften in der Nähe von A . Will man z. B. D'_8 , D'_6 und D'_7 in kleinerem Maassstabe haben, so verkleinere man das Kräftepolygon $AO_3D'_4U_4$ und schliesse an dieses verkleinerte Polygon (am besten in einer neuen Figur) die folgenden Kräftepolygone an. Noch zweckmässiger ist es, das verkleinerte Polygon $AO_3D'_4U_4$ mit Hilfe des Culmann'schen Verfahrens zu ermitteln.

152. Drittes Verfahren. In der Figur 241 wurde die Spannkraft $_{max}D_4$ für den Fall einer an der unteren Gurtung angreifenden Verkehrslast mittels des Culmann'schen Verfahrens bestimmt und hierauf behufs Ermittlung von D_3 das Kräftepolygon für den Knotenpunkt 3 gezeichnet. Es wurde jedoch die Reihenfolge der Kräfte in den einzelnen Polygonen anders gewählt wie früher. Die Last reicht von B bis 4,

so dass am linken Auflager der Widerstand A_4 angreift. Legt man durch den Schnittpunkt C von U_3 und A_4 Parallelen zu O_4 und O_2 , deren erste den Stab 34 in $4'$ und deren zweite den Stab 32 in $3'$

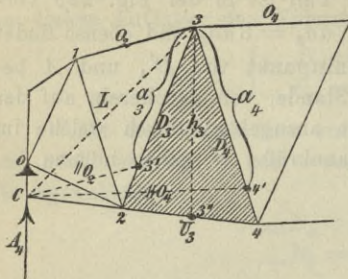


Fig. 241.

Trägerhöhe mit h_3 bezeichnet wird, und die Längen der Strecken $34'$ und $33'$ beziehungsweise $= a_4$ und $= a_3$ sind

$$(2) \quad \max D_4 = A_4 \frac{a_4}{h_3}; \quad \min D_3 = -A_4 \frac{a_3}{h_3}.$$

Das vorstehende Verfahren empfiehlt sich, sobald die Widerstände A mit Hilfe von Tabellen berechnet werden. Die Strecken a_4, a_3, h_3 entnehme man einer guten Zeichnung.

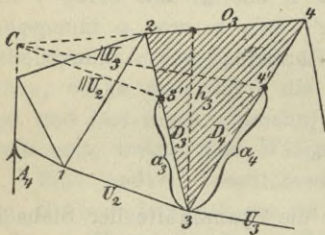


Fig. 242.

in $3'$ und den Stab 34 in $4'$ treffen. Nach Messung von $33' = a_3$ und $34' = a_4$ ergibt sich

$$\max D_3 = +A_4 \frac{a_3}{h_3}; \quad \min D_4 = -A_4 \frac{a_4}{h_3}.$$

153. Der Lastenzug überschreitet die Grundstellung. Zunächst seien die Spannkraften $\max D$ und $\min D$ eines Balkens mit oben angreifender Verkehrslast gesucht, beispielsweise $\max D_5$ und $\min D_6$ für den Träger in Fig. 243. Der von B aus vorrückende Lastenzug habe die Grundstellung überschritten. Es greift dann links von dem durch O_5, D_6, U_6 geführten Schnitte ausser dem Stützenwiderstande A noch der Druck P' an, welchen die zwischen den Knoten 4 und 6 wirkenden

schneidet, zieht man ferner durch 3 eine Senkrechte, welche U_3 in $3''$ trifft, so ist das Dreieck $C33''C$ ähnlich dem Kräfte-dreieck LA_4U_3 und das Viereck $C3'34'C$ ähnlich dem Kräfteviereck $O_2D_3D_4O_4$, und hieraus folgt, wenn die bei 3 gemessene senkrechte

Lasten auf den Knoten 4 ausüben. Der Widerstand A wird stets durch die unter der ersten Last gelegene Ordinate des A -Polygons dargestellt, und P' kann nach dem auf Seite 139 angegebenen Verfahren bestimmt werden. In der Fig. 243 ist angenommen worden, dass die 2^{te} Last beim Knoten 6 liegt. Es wird dann auf der Senkrechten durch 4, von der Wagerechten $A'B'$ aus die Strecke $\overline{ab} = P_1$ aufgetragen und die Gerade cb

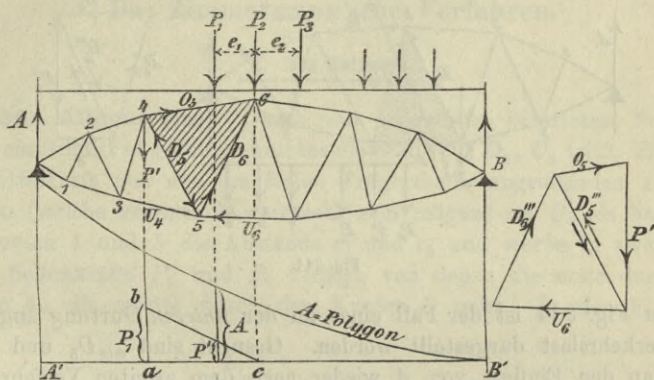


Fig. 243.

gezogen, wobei c den senkrecht unter 6 gelegenen Punkt der Geraden $A'B'$ bezeichnet. Die Gerade cb schneidet auf der Richtungslinie der Last P_1 die Knotenlast P' ab. Steht die ^{erste} ~~zweite~~ Last bei 6, so muss

$$\overline{ab} = P_1 + P_2 \frac{e_2}{e_1 + e_2}$$

gemacht werden (Seite 139).

Die durch den Stützendruck A in den Diagonalen hervorgerufenen Spannkkräfte bestimme man auf die vorhin beschriebene Weise. Die von P' erzeugten Spannkkräfte sollen mit D''' bezeichnet werden; um dieselben zu finden, löse man die Aufgabe: „drei Kräfte O_5, D'''_6 und U_6 zu bestimmen, welche mit P' im Gleichgewichte sind.“ Da nun die (früher stets mit L bezeichnete) Linie, welche den Schnittpunkt von P' und O_5 mit dem Schnittpunkte von U_6 und D_6 verbindet, mit D_5 zusammenfällt, so hat man P' nach den Richtungen von O_5 und D_5 zu zerlegen, und D_5 nach den Richtungen von D_6 und U_6 . Hierauf sind die Kräftepolygone so mit Pfeilen zu versehen, dass ihr Umfassungssinn ein stetiger ist. Man findet, dass P' in D_5 einen Druck und in D_6 einen Zug erzeugt.*) Schliesslich werden die durch A und P' hervorgerufenen

*) Es ist meistens zu empfehlen, den Kräfteplan, welcher den Einfluss von P' angiebt, in grösserem Maassstabe zu zeichnen.

Spannkkräfte addirt. Ist beispielsweise der Einfluss von A mit Hilfe des zweiten Verfahrens (No. 151) ermittelt worden, so findet man

$$\max D_5 = AD'_5 + D'''_5; \quad \min D_6 = AD'_6 + D'''_6.$$

Es ist auf die Vorzeichen der Spannkkräfte zu achten. D'_5 und D'''_6 sind positiv, D'''_5 und D'_6 sind negativ.

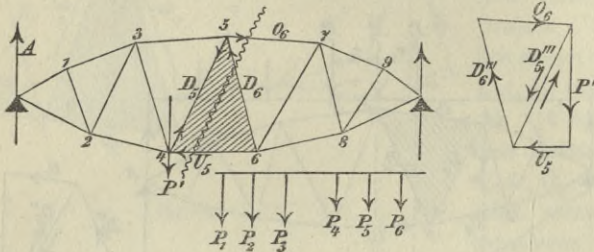


Fig. 244.

In Fig. 244 ist der Fall einer an der *unteren* Gurtung angreifenden Verkehrslast dargestellt worden. Gesucht sind $\min D_5$ und $\max D_6$. Hat man den Einfluss von A wieder nach dem zweiten Verfahren bestimmt, so findet man

$$\min D_5 = A_6 D'_5 + D'''_5; \quad \max D_6 = A_6 D'_6 + D'''_6.$$

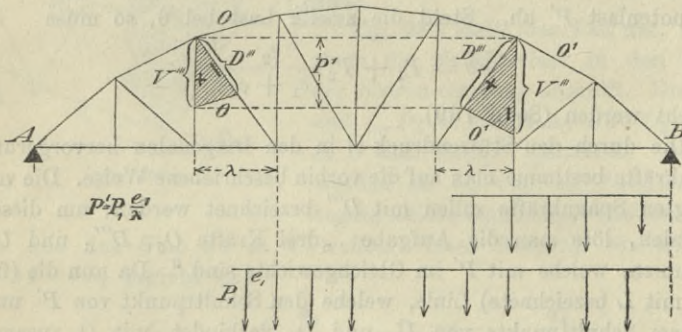


Fig. 245.

Die Spannkkräfte D'_6 und D'''_5 sind positiv; D'_5 und D'''_6 sind negativ.

Für den am häufigsten vorkommenden Fall eines Fachwerks mit Vertikalen und einer geraden Gurtung vereinfacht sich die vorstehende Untersuchung ganz erheblich. Liegt z. B. die Trägeranordnung in Fig. 245 vor, so findet man links von der Mitte $V''' = +P'$, während D'''_6

mittels einer Parallelen zu dem mit O bezeichneten Gurtstabe gewonnen wird. Rechts von der Mitte ist die senkrechte Projektion von D''' gleich P' ; V''' wird mittels einer Parallelen zum Gurtstabe O' bestimmt.

§ 33.

Das Zimmermann'sche Verfahren.

a. Das Netzwerk.

154. Allgemeines. Durch ein irgendwie belastetes Netzwerk werde ein Schnitt tt geführt, welcher die Stäbe O_5 , D_5 , U_4 trifft, Fig. 246. Die Mittelkraft aus den am linken Trägertheile angreifenden äusseren Kräften (welche sämmtlich senkrecht sein mögen) sei Q ; sie habe von den Knoten 4 und 5 die Abstände c_4 und c_5 und werde in zwei senkrechte Seitenkräfte P_1 und P_2 zerlegt, von denen die erste durch den Knoten 4, die zweite durch den Knoten 5 geht. In der Fig. 246

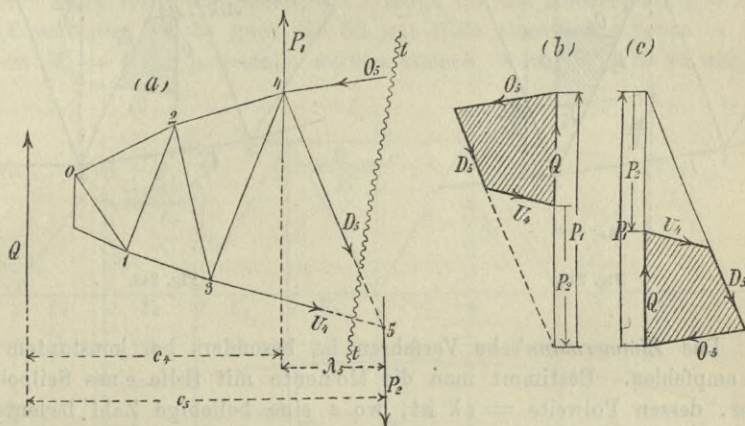


Fig. 246.

wurde die Querkraft Q positiv angenommen; sie ist dann nach oben gerichtet und liegt links vom Schnitte tt . P_1 wirkt aufwärts, P_2 abwärts; beide Kräfte sind, wenn die Horizontalprojektion der Länge des Stabes D_5 mit λ_5 bezeichnet wird, durch die Gleichungen gegeben

$$P_1 \lambda_5 = Q c_5; \quad P_2 \lambda_5 = Q c_4.$$

Ausserdem ist

$$P_1 - P_2 = Q.$$

Beachtet man, dass $Q c_5 = M_5$ das Angriffsmoment für den Knoten 5 ist und $Q c_4 = M_4$ das Angriffsmoment für den Knoten 4, so erhält man

$$P_1 = \frac{M_5}{\lambda_5} \quad \text{und} \quad P_2 = \frac{M_4}{\lambda_5}.$$

Kennt man P_1 und P_2 , so kann man auf die bereits auf Seite 257 beschriebene Weise die Spannkkräfte O_5 , D_5 , U_4 finden, indem man das Kräftepolygon in Fig. 246 b oder 246 c zeichnet. Dabei empfiehlt es sich, nach Zimmermann, das Kräftepolygon in das in entsprechend grossem Maassstabe gezeichnete Trägernetz einzutragen, so zwar, dass die Spannkraft D_5 mit dem Stabe D_5 zusammenfällt. Man erhält dann die sehr übersichtlichen Anordnungen in Fig. 247 oder Fig. 248, welche den Figuren 246 b und 246 c entsprechen. Der Umfassungssinn des geschlossenen Kräftepolygons ist durch den Sinn der Querkraft $Q = \frac{M_5}{\lambda_5} - \frac{M_4}{\lambda_5}$ gegeben.

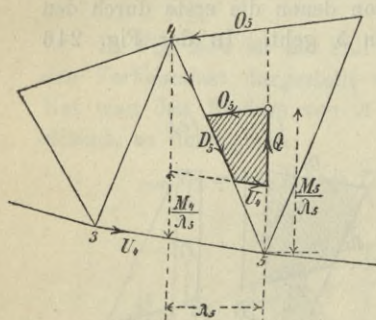


Fig. 247.

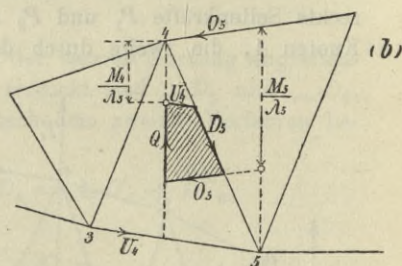


Fig. 248.

Das Zimmermann'sche Verfahren ist besonders bei konstantem λ zu empfehlen. Bestimmt man die Momente mit Hilfe eines Seilpolygons, dessen Polweite $= \epsilon \lambda$ ist, wo ϵ eine beliebige Zahl bedeutet, und bezeichnet man die bei den Knoten 4 und 5 gemessenen Ordinaten des Seilpolygons mit y_4 , y_5 , so erhält man (wegen $M_m = H y_m = \epsilon \lambda y_m$) sehr einfach:

$$\frac{M_5}{\lambda} = \epsilon y_5; \quad \frac{M_4}{\lambda} = \epsilon y_4.$$

Besitzen zwar nicht alle Diagonalen, jedoch die Mehrzahl derselben die gleiche Horizontalprojektion λ , so bleibt das Verfahren immerhin einfach, da man nur nöthig hat, für die wenigen Felder mit verschiedenen grossen λ eine kleine Hilfskonstruktion auszuführen. Hat z. B. die Horizontalprojektion der die Knoten 5 und 4 verbindenden Diagonale

die von $\lambda = \frac{H}{\varepsilon}$ abweichende Länge λ' , so sind an Stelle der Werthe εy_5 und εy_4 die Werthe $\frac{M_5}{\lambda'} = \frac{M_5}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\lambda'} = \varepsilon y_5 \frac{\lambda}{\lambda'}$ und $\frac{M_4}{\lambda'} = \varepsilon y_4 \frac{\lambda}{\lambda'}$ aufzutragen, welche nach Fig. 249 durch Zeichnung bestimmt werden können.*)

In der Regel wird es sich empfehlen, die Strecken εy durch die Ordinaten y zu ersetzen und den Kräftemaassstab entsprechend abzuändern. War dann beispielsweise der Kräftemaassstab für die Zeichnung, welche das Seilpolygon enthält: 1 Centimeter = n Tonnen, so ergeben sich die Spannkraften im Maassstabe: 1 Centimeter = εn Tonnen.

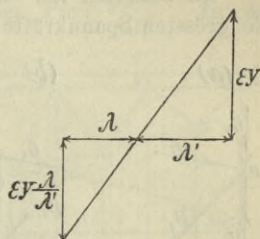


Fig. 249.

155. Spannkraften in den Gurtungen. Die Ermittlung der grössten Spannkraften in den Gurtungen soll an dem in der Fig. 250 dargestellten Netzwerke erläutert werden. Die Verkehrslast bestehe aus einem Zuge von Einzellasten; sie erzeugt für die Knotenpunkte m Angriffsmomente, welche nach No. 82 mit Hilfe eines Seilpolygons in der Form $M_m = H y_{pm}$ dargestellt werden können, wobei $H = \varepsilon \lambda$ zu wählen

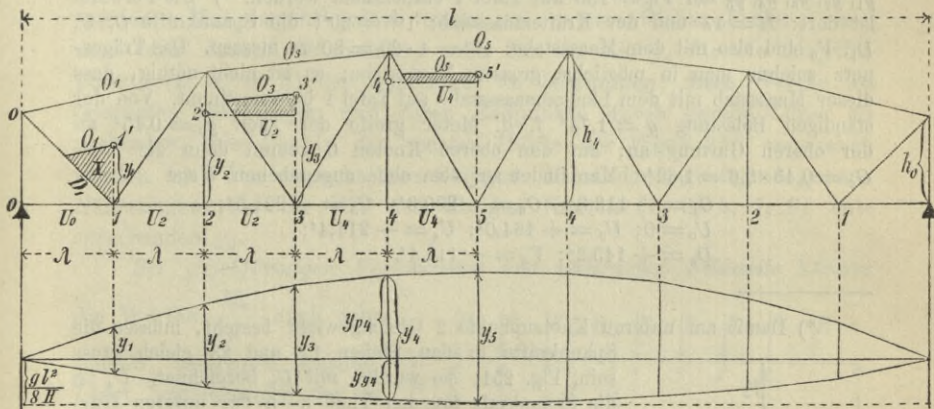


Fig. 250.

ist. Zu den Werthen y_{pm} sind noch die von der ständigen Belastung hervorgerufenen y_{gm} zu fügen; letztere sind (nach Seite 142) die Ordinaten einer Parabel, deren Pfeil = $\frac{g l^2}{8 H}$ ist. Hat man sämtliche

*) Dieser Fall kommt hauptsächlich bei schiefen Brücken vor, welche häufig ein kürzeres oder längeres Endfeld erhalten.

Werthe $y_m = y_{pm} + y_{gm}$ gefunden, so trägt man in das Trägernetz die Ordinaten ein: $11' = y_1$, $22' = y_2$, $33' = y_3$ u. s. w. und findet nun die Spannkkräfte O und U auf die angegebene Weise. In Fig. 250 wurde dieselbe Anordnung gewählt wie in Fig. 247.*)

Zu beachten ist, dass gleichzeitig mit der grössten Spannkraft O_1 die grössten Spannkkräfte V_0 und D_1 in der Endvertikale und der ersten Diagonale entstehen. V_0 und D_1 ergeben sich aus dem für den oberen Knoten 0 gezeichneten Kräftepolygone. Wird der in 0 angreifende Theil der ständigen Belastung mit G_0 bezeichnet, so findet man durch Vergleichung des Kräftepolygons in Fig. 252b mit dem Polygone I in Fig. 250: (ohne Vorzeichen)

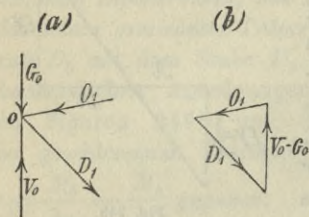


Fig. 252 a u. b.

$$V_0 - G_0 = y_1 \text{ und hieraus } V_0 = y_1 + G_0.$$

Die Endvertikale wird auf Druck beansprucht.

Zahlenbeispiel. Der in Fig. 250 abgebildete Träger habe eine Stützweite von 36^m ; ferner sei $h_4 = 4,92^m$, $h_2 = 4,28^m$; $h_0 = 3,00^m$. Der Träger sei ebenso belastet, wie der im § 19 untersuchte Balken. Es können dann die Werthe y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 der Figur 130 auf Tafel I entnommen werden.**) Die Polweite ist dort: $H = 4\lambda$ und der Kräftemaassstab: $1^{cm} = 20^t$; die Spannkkräfte O, U, D_1, V_0 sind also mit dem Maassstabe: $1^{cm} = 4 \cdot 20 = 80^t$ zu messen. Das Trägernetz zeichne man in möglichst grossem Maassstabe; es ist nicht nöthig, dass dieser Maassstab mit dem Längenmaassstabe auf Tafel I übereinstimmt. Von der ständigen Belastung $g = 1,74^t$ f. d. Meter greife der Theil $g_0 = 0,45^t$ an der oberen Gurtung an; auf den oberen Knoten 0 kommt dann die Last: $G_0 = 0,45 \cdot 3,6 = 1,62^t$. Man findet auf dem oben angegebenen Wege

$$O_1 = -113,3^t; O_3 = -200,3^t; O_5 = -221,5^t;$$

$$U_0 = 0; U_2 = +164,0^t; U_4 = +211,4^t;$$

$$D_1 = +145,2^t; V_0 = -114,4^t.$$

*) Damit am unteren Knotenpunkte 2 Gleichgewicht besteht, müssen die Spannkkräfte in den Stäben 12 und 23 gleich gross sein, Fig. 251; sie wurden mit U_2 bezeichnet. U_4 ist die Spannkraft für den Theil 3—5 der unteren Gurtung. Dem Stabe 0—1 entspricht $U_0 = 0$. Die Vertikalen werden nur gezogen; der grösste Zug in einer Vertikale ist gleich der grössten Belastung ihres unteren Knotenpunktes.

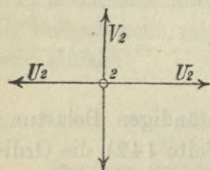


Fig. 251.

**) Dem Leser wird empfohlen, Tafel I neu zu zeichnen, da sich das Papier nach dem Drucke stets ungleichmässig verzieht, und in Folge dessen die Zeichnungen ungenau werden. Es wird noch hervorgehoben, dass Fig. 250 nur eine Skizze ist.

Liegen die Knotenpunkte eines Netzwerks zum Theil zwischen den Querträgern, wie bei dem in der Figur 253 dargestellten Träger, so muss, behufs Bestimmung der y_g , die ständige Belastung g in die Theile g_0 und g_u zerlegt werden. Sodann sind zwei Parabeln zu zeichnen; die eine erhält den Pfeil $\frac{g_0 l^2}{8H}$, die andere den Pfeil $\frac{g_u l^2}{8H}$. In die

erste Parabel wird ein Polygon beschrieben, dessen Ecken in den Senkrechten durch die oberen Knoten liegen, in die zweite ein Polygon, dessen Ecken den unteren Knoten entsprechen. Die Ordinaten beider Polygone werden addirt.

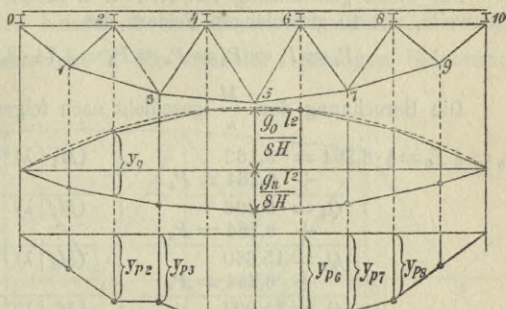


Fig. 253.

Die Angriffsmomente $H y_p$ für die zwischen den Querträgern liegenden Knoten (1, 3, 5, 7, 9) müssen streng genommen nach dem auf Seite 143 beschriebenen Verfahren ermittelt werden. Man begeht jedoch einen nur unwesentlichen Fehler, wenn man sich darauf beschränkt, nach No. 82 die y_p für die Angriffspunkte (2, 4, 6, 8) der Querträger zu bestimmen, diese Werthe als Ordinaten aufzutragen und deren Endpunkte durch gerade Linien zu verbinden, wie dies in der rechten Hälfte der Figur 253 angegeben worden ist. Das so erhaltene Polygon liefert dann genügend genaue Näherungswerthe für die den übrigen Knoten (1, 3, 5, 7, 9) entsprechenden y_p .

Bei gleichförmiger Verkehrslast und konstanter Feldweite können die Werthe $\frac{M_m}{\lambda}$ auch sehr

schnell berechnet werden. Liegt beispielsweise der in der Fig. 254 abgebildete symmetrisch belastete Balken

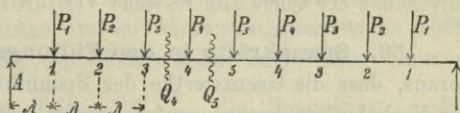


Fig. 254.

vor, so bestimme man zuerst die Querkräfte Q . Für das 5^{te} Feld erhält man

$$Q_5 = A - (P_1 + P_2 + P_3 + P_4)$$

und, da $A = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \frac{1}{2}P_5$ ist, $Q_5 = \frac{1}{2}P_5$. Für das 4^{te} Feld wird erhalten

$$Q_4 = A - (P_1 + P_2 + P_3) = Q_5 + P_4,$$

für das 3^{te} Feld $Q_3 = Q_4 + P_3$, u. s. f.

Nun ist aber $\frac{M_m}{\lambda} - \frac{M_{m-1}}{\lambda} = Q_m$ also $\frac{M_m}{\lambda} = \frac{M_{m-1}}{\lambda} + Q_m$ und man findet daher der Reihe nach (wegen $M_0 = 0$)

$$\frac{M_1}{\lambda} = Q_1; \quad \frac{M_2}{\lambda} = \frac{M_1}{\lambda} + Q_2; \quad \frac{M_3}{\lambda} = \frac{M_2}{\lambda} + Q_3 \text{ u. s. f.}$$

Für einen gleichmässig mit 1,74^t f. d. Meter belasteten Balken von 36^m Stützweite, mit 10 gleichlangen Feldern, ist

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = 1,74 \cdot 3,6 = 6,264^t.$$

Die Berechnung der $\frac{M}{\lambda}$ geschieht nach folgendem Ansatz

$Q_5 = \frac{1}{2} P_5 = \frac{1}{2} \cdot 6,264 = 3,132$	$(M_1 \lambda)^* = 28,188 = Q_1$
$\quad + 6,264 = P_4$	$\quad + 21,924 = Q_2$
$Q_4 = 9,396$	$(M_2 \lambda) = 50,112$
$\quad + 6,264 = P_3$	$\quad + 15,660 = Q_3$
$Q_3 = 15,660$	$(M_3 \lambda) = 65,772$
$\quad + 6,264 = P_2$	$\quad + 9,396 = Q_4$
$Q_2 = 21,924$	$(M_4 \lambda) = 75,168$
$\quad + 6,264 = P_1$	$\quad + 3,132 = Q_5$
$Q_1 = 28,188 \text{ Tonnen}$	$(M_5 \lambda) = 78,300 \text{ Tonnen.}$

Im vorliegenden Falle hätte man sich auch (der gleich grossen Lasten[⌣] wegen) der Parabelgleichung: $M = \frac{1}{2} z x (l - x)$ bedienen können, wo $z =$ Belastung für die Längeneinheit. Für den Knoten m erhält man mit $x = m \lambda$ und $l = 10 \lambda$

$$\frac{M_m}{\lambda} = \frac{z \lambda}{2} m (10 - m) = \frac{1,74 \cdot 3,6}{2} m (10 - m) = 3,132 m (10 - m)$$

und hieraus der Reihe nach für $m = 1, 2, 3, 4, 5$

$$\frac{M}{\lambda} = 28,188; 50,112; 65,772; 75,168; 78,300.$$

Bei dem in der Figur 253 dargestellten Träger sind die Belastungen der Knotenpunkte 1, 2, 3 . . . ungleich gross. Man muss hier entweder (wie leicht einzusehen) mit 2 Parabelgleichungen rechnen oder das zuerst angegebene, auf Berechnung der Querkräfte fussende Verfahren anwenden.

156. Spannkkräfte in den Füllungsstäben. Wir setzen zunächst voraus, dass die Grenzwerte der Spannkkräfte D durch Grundstellungen der Verkehrslast hervorgerufen werden und erläutern den einzuschlagenden Weg an dem in der Fig. 255 dargestellten Träger. Soll beispielsweise $_{max} D_3$ bestimmt werden, so ist der Lastenzug von B aus bis zum Knoten 3 vorzuschieben; er ruft am linken Auflager den Widerstand A_3 hervor und erzeugt die Momente: $M_3 = A_3 x_3$ und $M_2 = A_3 x_2$,

*) $(M_1 | \lambda) = \frac{M_1}{\lambda}$.

Die Auflager-Widerstände A wurden in No. 82 mit Hilfe eines Seilpolygons dargestellt, welchem die Polweite l entspricht; vergl. auch Fig. 126 auf Tafel I. Entschieden man sich nun für die Anwendung des *Zimmermann'schen* Verfahrens, so ist es zweckmässig, die Polweite l durch die Polweite $\varepsilon\lambda$ zu ersetzen; die Ordinaten des Seilpolygons stellen dann die Werthe $A \frac{l}{\varepsilon\lambda}$ vor. Wir werden dieses Seilpolygon in der Folge dass „ $A \frac{l}{\varepsilon\lambda}$ -Polygon“ nennen.

Zahlenbeispiel. Dem Leser wird empfohlen, auf dem angegebenen Wege die Spannkraft D für den bereits in No. 155 untersuchten Halbparabelträger von 36^m Stützweite zu bestimmen. Wird das $A \frac{l}{\varepsilon\lambda}$ -Polygon sowie die Parabel, welche die y_p liefert, im Maassstabe 1^{cm} = 20^t gezeichnet und $H = 4\lambda$ (also $\varepsilon = 4$) gewählt, so werden die Spannkraft D im Maassstabe 1^{cm} = 80^t erhalten. Man findet

$$\begin{array}{l} \min D_2 = -92,4^t \quad | \quad \min D_4 = -44,3^t \quad | \quad \min D_6 = -19,5^t \quad | \quad \min D_8 = +2,1^t \\ \max D_3 = +67,8^t \quad | \quad \max D_5 = +38,9^t \quad | \quad \max D_7 = +16,2^t \quad | \quad \max D_9 = -14,2^t \end{array}$$

und, da der Träger in Bezug auf die Senkrechte durch seine Mitte symmetrisch ist,

$$\max D_2 = \max D_9 = -14,2^t \quad | \quad \min D_3 = +2,1^t \quad | \quad \max D_4 = +16,2^t \quad | \quad \min D_5 = -19,5^t.$$

Die Diagonale D_2 wird nur gedrückt; D_3 wird nur gezogen. Die Diagonalen D_4 und D_5 werden abwechselnd gezogen und gedrückt. D_1 wurde bereits in No. 155 angegeben.

Bei konstanter Feldweite lassen sich die durch den Lastenzug hervorgerufenen Werthe $\frac{M_m}{\lambda}$ auch sehr schnell mit Hilfe der früher mitgetheilten Tabellen berechnen.

Wird z. B. der in Fig. 255 dargestellte Halbparabelträger durch einen von B bis zum Knoten 3 reichenden Lastenzug beansprucht, so entstehen die Momente $M_2 = A_2 2\lambda$; $M_3 = A_3 3\lambda$. Haben die Fahrzeuge die in der Fig. 111 angegebenen Radstände und Achsenbelastungen und wird der Zug von drei vorwärts fahrenden Lokomotiven gezogen, so gilt die Tabelle I auf Seite 310.

Nun ist die Länge der zu belastenden Strecke: $x'_3 = 7\lambda = 7 \cdot 3,6 = 25,2^m$; derselben entspricht laut Spalte 2 jener Tabelle die Zuglänge $c_1 = 23,6$ und die Achsenzahl $n = 12$; ferner ergibt sich: $\mathfrak{P}_n = 132$ $\mathfrak{S}_n = 1647,0$ und $b_n = x'_3 - c_1 = 1,6^m$, weshalb man erhält:

$$A_3 = \frac{\mathfrak{S}_n + \mathfrak{P}_n b_n}{l} = \frac{1647,0 + 132 \cdot 1,6}{36} = 51,6167$$

und

$$\frac{M_2}{\lambda} = 2 A_3 = 103,233; \quad \frac{M_3}{\lambda} = 3 A_3 = 154,850.$$

Die ständige Belastung ist $g = 1,74'$ f. d. Meter; derselben entspricht (vergl. das Zahlenbeispiel auf Seite 266): $\frac{M_2}{\lambda} = 50,112'$ und $\frac{M_3}{\lambda} = 65,772'$, so dass sich schliesslich ergibt: $\frac{M_2}{\lambda} = 103,233 + 50,112 = 153,34'$ und $\frac{M_3}{\lambda} = 154,850 + 65,772 = 220,62'$.

Besonders einfach gestaltet sich die Berechnung der $\frac{M}{\lambda}$

bei gleich grossen Feldweiten und Knotenlasten. Sollen z. B. für den in der Fig. 256 dargestellten Belastungsfall die

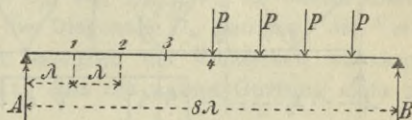


Fig. 256.

Werthe $\frac{M_3}{\lambda}$ und $\frac{M_4}{\lambda}$ bestimmt werden, so findet man

$$A = P \left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} \right) = \frac{10}{8} P$$

und $M_3 = A4\lambda$; $M_4 = A5\lambda$ also: $\frac{M_3}{\lambda} = \frac{40}{8} P$ und $\frac{M_4}{\lambda} = \frac{50}{8} P$.

Hierzu sind noch die von der ständigen Last herrührenden Werthe $\frac{M}{\lambda}$ zu addiren; dieselben werden auf die am Schluss von No. 165 angegebene Weise bestimmt.

Es sei noch der Fall untersucht, in welchem ein Zug von Einzelasten die Grundstellung überschreitet. Gesucht sei ${}_{max} D_3$ für den Träger in Fig. 257. Das zweite Rad des von B aus vorrückenden Zuges liege am Knoten 3. Verlangt wird die zeichnerische Bestimmung der Werthe $y = \frac{M}{\epsilon\lambda}$.

Nachdem man $A \frac{l}{\epsilon\lambda}$ auf die vorhin angegebene Weise bestimmt hat*), findet man: $M_2 = Ax_2$ und $M_3 = Ax_3 - P_1 e_1$ also $y_{p2} = \frac{M_2}{\epsilon\lambda} = A \frac{l}{\epsilon\lambda} \frac{x_2}{l}$ und $y_{p3} = \frac{M_3}{\epsilon\lambda} = A \frac{l}{\epsilon\lambda} \frac{x_3}{l} - \frac{P_1 e_1}{\epsilon\lambda}$. Nun streiche man zunächst das zweite Glied des für y_{p3} gefundenen Ausdrucks und

*) Zu beachten ist, dass $A \frac{l}{\epsilon\lambda}$ gleich der unter der ersten Last gemessenen Ordinate des $A \frac{l}{\epsilon\lambda}$ -Polygons ist.

bestimme y'_2 und y''_3 genau wie in Fig. 255. Schliesslich bringe man von y''_3 den Werth $\frac{P_1 e_1}{\epsilon \lambda}$ in Abzug; derselbe wird zweckmässig ge-

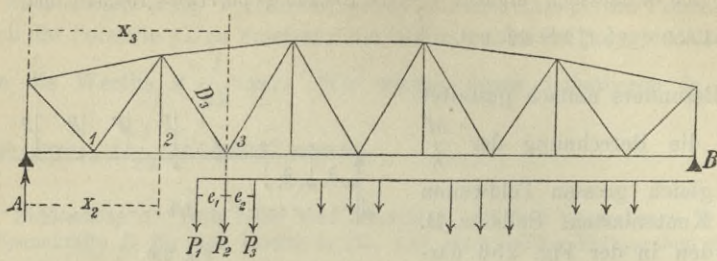


Fig. 257.

rechnet und ist für den vorhin untersuchten Halbparabelträger $= \frac{13 \cdot 1,4}{4 \cdot 3,6} = 1,27^t$. Läge P_3 am Knoten 3, so müsste y''_3 um $\frac{P_1(e_1 + e_2) + P_2 e_2}{\epsilon \lambda}$ verkleinert werden.

Durch Anwendung der eben entwickelten Regeln auf den vorhin untersuchten Halbparabelträger überzeugt man sich, dass die Grenzwerte der Spannkraften in den Diagonalen in Folge von Grundstellungen entstehen. (Eine Ausnahme bildet D_1 , welches gleichzeitig mit O_1 seinen Grenzwert annimmt.)

b. Das Fachwerk mit Vertikalen.

157. Die Verkehrslast greift in den Knotenpunkten der oberen

Gurtung an. Wir betrachten das

m^{te} Feld des Balkens (Fig. 258),

tragen auf der Vertikale mm

vom unteren Knotenpunkte m

aus die Strecke $\overline{ma} = \frac{M_m}{\lambda_m}$ ab

und auf der $(m-1)^{ten}$ Vertikale

die Strecke $\overline{(m-1)b} = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m}$,

ziehen durch a eine Parallele

zu O_m , welche die Diagonale D_m

in c schneidet, hierauf durch b

eine Parallele zu U_m , welche D_m

in d und V_m in e trifft, und er-

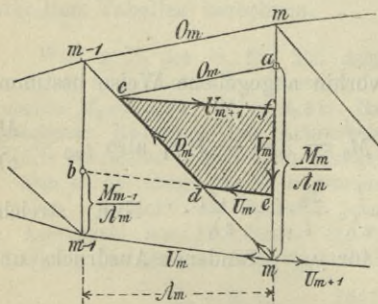


Fig. 258.

halten: Spannkraft $O_m =$ Strecke \overline{ac} , Spannkraft $U_m =$ Strecke \overline{de} ,

Spannkraft $D_m =$ Strecke \overline{dc} . Um die Spannkraft V_m zu finden, zeichnen wir das Kräftepolygon für den unteren Knotenpunkt m , ziehen also $cf \parallel U_{m+1}$ und finden $V_m = \overline{ef}$. Dabei ist angenommen worden, dass nicht nur die Verkehrslast, sondern auch die gesammte ständige Belastung in den Knoten der oberen Gurtung angreift. Die in das Kräftepolygon $edcfe$ des unteren Knotens m eingetragenen Pfeile geben an, in welchem Sinne die Kräfte U_m, D_m, U_{m+1}, V_m an diesem Knoten angreifen. In Figur 258 wird die Diagonale D_m gezogen, die Vertikale V_m gedrückt. Ein Irrthum bezüglich der Vorzeichen ist ausgeschlossen, wenn man daran denkt, dass die untere Gurtung stets gezogen ist.

Greift nun am unteren Knotenpunkte m die ständige Last G_u an, so entsteht das in der Fig. 259b dargestellte Kräftepolygon. Der vorhin ermittelte Druck $V_m = \overline{ef}$ ist um G_u zu verkleinern. Es empfiehlt sich nun, die Grenzwerte sämtlicher Kräfte V zunächst unter der Voraussetzung unbelasteter unterer Knotenpunkte zu ermitteln und hierauf zu jedem dieser Werthe (unter Berücksichtigung der Vorzeichen derselben) den Betrag $(+ G_u)$ zu addiren.

Die in der Figur 258 angegebene Anordnung des Kräfteplanes empfiehlt sich bei der Bestimmung der Grenzwerte der Spannkraft D_m und V_m . Um die grössten Spannkraften in den Gurtungen zu ermitteln, entscheidet man sich, (um das Zusammenfallen verschiedener Polygone zu vermeiden) zweckmässiger für die Anordnung in Fig. 260; alle diese Kräftepolygone werden in dasselbe Netz eingezeichnet.

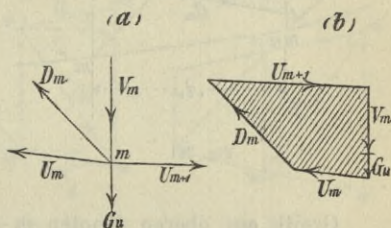


Fig. 259.

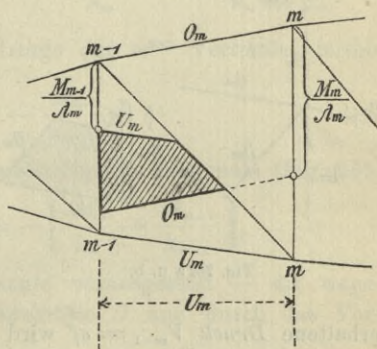


Fig. 260.

158. Die Verkehrslast greift in den Knotenpunkten der unteren Gurtung an. Trägt man auf den das Feld begrenzenden Vertikalen von den oberen Knotenpunkten m und $m - 1$ aus die Strecken $\overline{ma} = \frac{M_m}{\lambda_m}$

und $(m-1)b = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m} ab$, zieht $ade \parallel O_m$ und $bc \parallel U_m$ (Fig. 261)

so erhält man $\overline{bc} = U_m$, $\overline{cd} = D_m$ und $\overline{de} = O_m$. Wird noch $cf \parallel O_{m-1}$ gezogen, so ist $fcdef$ das Kräftepolygon für den oberen Knoten $m-1$ und man erhält $\overline{ef} = V_{m-1}$, vorausgesetzt, dass auch die ständige Belastung ausschliesslich in den Knoten der unteren Gurtung wirkt. Die in die Fig. 261 eingezeichneten Richtungspfeile geben an, in welchem Sinne die Spannkraften D_m , O_m , V_{m-1} , O_{m-1} am oberen Knoten $m-1$ angreifen. Im vorliegenden Falle wird Diagonale D_m gezogen und Vertikale V_{m-1} gedrückt.

Greift am oberen Knoten $m-1$ die ständige Last G_0 an, so entsteht das in der Fig. 262b dargestellte Kräftepolygon; der vorhin

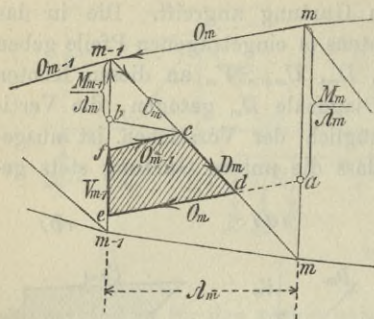


Fig. 261.

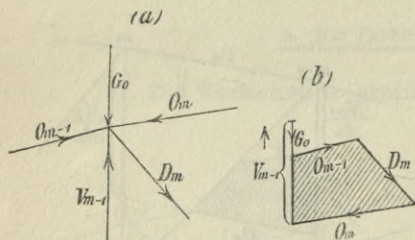


Fig. 262a u. b.

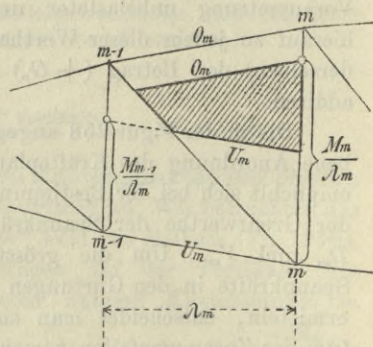


Fig. 263.

erhaltene Druck $V_{m-1} = \overline{ef}$ wird um den Druck G_0 vergrössert. Es ist rathsam, zunächst die Grenzwerte sämtlicher Kräfte V unter der Voraussetzung unbelasteter oberer Knoten zu bestimmen und hierauf zu jedem dieser Werthe den Betrag ($-G_0$) zu addiren.

Weiter empfiehlt es sich, in der Fig. 261 angegebene Anordnung des Kräfteplanes nur bei Bestimmung der Grenzwerte D und V beizubehalten und die grössten Spannkraften in den Gurtungen auf die in der Fig. 263 veranschaulichte Weise zu ermitteln.

§ 34.

Fachwerkträger mit Gegendiagonalen.

159. Hauptdiagonalen und Gegendiagonalen. Ein Fachwerkbalken, dessen Füllungsstäbe wechselweise Vertikalen und linkssteigende Diagonalen sind, Fig. 264, werde durch einen Schnitt tt in zwei Theile zerlegt. O_m , U_m , D_m sind die Spannkkräfte in den Stäben des m^{ten} Feldes, β_m , γ_m , φ_m deren Neigungswinkel gegen die Wagerechte. γ_m und φ_m werden nach unten positiv gezählt, β_m nach oben. Wirken auf den Träger nur senkrechte äussere Kräfte, so muss sein

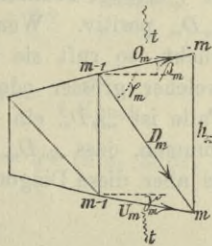


Fig. 264.

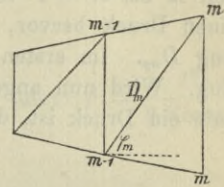


Fig. 265.

$$O_m \cos \beta_m + D_m \cos \varphi_m + U_m \cos \gamma_m = 0, \text{ also}$$

$$D_m \cos \varphi_m = -O_m \cos \beta_m - U_m \cos \gamma_m.$$

Nun ist aber (nach Seite 245): $O_m = -\frac{M_m \sec \beta_m}{h_m} = -\frac{M_m}{h_m \cos \beta_m}$ und

$U_m = +\frac{M_{m-1}}{h_{m-1} \cos \gamma_m}$, wobei $h_m =$ Länge der m^{ten} Vertikale, mithin

$$D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}.$$

Ganz ebenso ergibt sich für eine rechtssteigende Diagonale (Fig. 265)

$$D_m \cos \varphi_m = \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} - \frac{M_m}{h_m} = -\left[\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \right],$$

so dass sich also — dieselben Momente vorausgesetzt — die wagerechten Seitenkräfte der beiden Spannkkräfte D nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

Die Belastung des Trägers bestehe aus einer ständigen und einer beweglichen. Erstere sei gleichmässig über die Stützweite vertheilt und $=g$ für die Längeneinheit; sie erzeugt die Momente

$$M_{mg} = \frac{g x_m x'_m}{2} \text{ und } M_{(m-1)g} = \frac{g x_{m-1} x'_{m-1}}{2},$$

wo x_m und x'_m die Abstände des Knotens m von den Auflagersenk-

rechten A und B bedeuten, Fig. 266. Wird zur Abkürzung gesetzt

$$\frac{x_m x'_m}{2 h_m} = \eta_m,$$

so ergibt sich für die durch die ständige Belastung hervorgerufene Spannkraft in einer linkssteigenden Diagonale die Formel

$$D_{mg} \cos \varphi_m = g (\eta_m - \eta_{m-1}).$$

Es sei nun $\eta_m > \eta_{m-1}$, also D_{mg} positiv. Eine von B aus bis m vorrückende Verkehrslast*) erzeugt ebenfalls eine positive Spannkraft D , und es ist deshalb ${}_{max} D_m$ positiv. Wenn dagegen die Verkehrslast von A bis $m-1$ vorrückt, so ruft sie in der fraglichen Diagonale einen Druck hervor, welcher grösser oder kleiner sein kann als der Zug D_{mg} . Im ersten Falle ist ${}_{min} D_m$ ein Druck, im zweiten Falle ein Zug. Wird nun angenommen, dass ${}_{min} D_m$ für die linkssteigende Diagonale ein Druck ist, dass aber diese Diagonale aus einem Seile besteht,

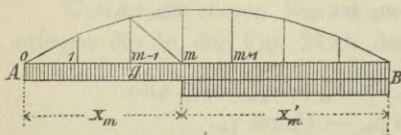


Fig. 266.

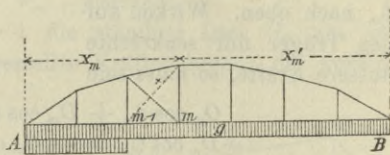


Fig. 267.

welches einem Drucke keinen Widerstand leistet, so muss, soll der Träger starr sein, in dem betreffenden Felde noch eine rechtssteigende Diagonale, die ebenfalls aus einem Seile bestehen darf, angeordnet werden. Bei jedem Belastungszustande, welcher die linkssteigende Diagonale auf Druck beansprucht, wird die rechtssteigende Diagonale gezogen.**)

Diejenige der beiden sich kreuzenden Diagonalen, für welche D_{mg} positiv ist; nennen wir die *Hauptdiagonale*, die andere die *Gegendiagonale*.

*) Wir sprechen, der kürzeren Ausdrucksweise wegen, nur von Grundstellungen der Verkehrslast.

**) Es giebt Laststellungen, bei denen beide Diagonalen gleichzeitig gezogen werden; die Aufgabe, die Spannkraft D zu berechnen ist dann statisch unbestimmt und fällt unter die im II. Bande unseres Buches vorgetragenen Untersuchungen. Für die Praxis genügen indessen die oben gegebenen Formeln. In neuerer Zeit sucht man Fachwerke mit Gegendiagonalen zu vermeiden, ihre Theorie darf aber hier nicht fehlen, schon weil sie für die Umrechnung älterer Brücken auf Grund der neuen Belastungsvorschriften wichtig ist.

Nehmen also die Werthe η von den Auflagern nach der Mitte hin zu, so sind auf der linken Hälfte des Trägers die linkssteigenden und auf der rechten Hälfte die rechtssteigenden Diagonalen die Hauptdiagonalen. Bei nach der Mitte hin abnehmenden η findet das Umgekehrte statt. Sind sämtliche η gleich gross, so ist das Eigengewicht — und überhaupt jede gleichmässig über den ganzen Träger vertheilte Belastung — ohne Einfluss auf die Spannkraft D . Die Trägerform, welche diesem Grenzfall entspricht, findet man mittels der Gleichung

$$\eta = \frac{xx'}{2h} = \text{Konst.},$$

woraus

$$h = \frac{xx'}{2 \text{Konst.}}.$$

Soll $h = f$ sein für $x = x' = \frac{1}{2}l$ (Fig. 268), so folgt: $f = \frac{l^2}{8 \text{Konst.}}$

und $\text{Konst.} = \frac{l^2}{8f}$, weshalb

$$h = \frac{4fx(l-x)}{l^2}.$$

Dies ist die Gleichung einer *Parabel*, deren Pfeil $= f$ ist, und der hiernach berechnete Träger heisst *Parabelträger*. Die eine Gurtung desselben darf beliebig geformt werden; die Lagen der Knotenpunkte der anderen Gurtung ergeben sich mit Hilfe der Gleichung

$$h_m = \frac{4fx_m x'_m}{l^2}.$$

Zu beachten ist, dass f stets die Parabelordinate für $x = \frac{1}{2}l$ bedeutet, dass also bei fehlender Mittelvertikale (Fig. 268) $h_{max} < f$ ist. Liegt h_{max} bei $x = \xi$, und besitzt es einen gegebenen Werth, so findet man (wegen $h_{max} = \frac{4f\xi(l-\xi)}{l^2}$)

$$f = \frac{h_{max} l^2}{4\xi(l-\xi)}.$$

Es ist aber stets zu empfehlen, f anzunehmen und hierauf die Längen h durch Rechnung oder Zeichnung zu bestimmen. Wie man den einer beliebigen Abscisse x_m entsprechenden Punkt J einer Parabel $AJSB$ durch Zeichnung findet, ist auf Seite 135 (Fig. 124) angegeben worden.

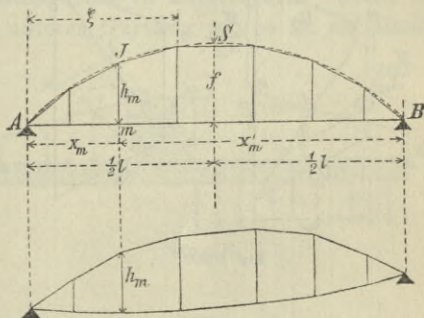


Fig. 268.

In den folgenden allgemeinen Untersuchungen über Träger mit ausschliesslich gezogenen Diagonalen beschäftigen wir uns nur mit dem Falle nach der Mitte hin wachsender Werthe η , da dieser bei allen im Hochbau und Brückenbau angewandten Trägern mit Gegendiagonalen vorliegt.

Um zu entscheiden, ob in irgend einem (z. B. dem m^{ten}) Felde der linken Trägerhälfte eine linkssteigende Zugdiagonale genügt, bestimme man für diese Diagonale die Spannkraft ${}_{\min}D$. Soll dies beispielsweise mittels des Zimmermann'schen Verfahrens geschehen, so werden die der gefährlichsten Belastung entsprechenden Werthe $\frac{M_m}{\lambda_m}$ und $\frac{M_{m-1}}{\lambda_m}$ auf die in No. 156 angegebene Weise ermittelt, hierauf die Strecken

$$\overline{ma} = \frac{M_m}{\lambda_m} \text{ und } \overline{(m-1)b} = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m} \text{ (vergl. Fig. 269 a)}$$

aufgetragen und durch die Punkte a und b zu O_m bezieh. U_m Parallelen gezogen, welche die fragliche Diagonale in den Punkten d und c schnei-

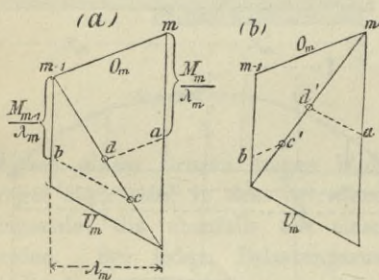


Fig. 269.

den mögen. Die Strecke \overline{dc} stellt dann die Spannkraft ${}_{\min}D$ vor, und zwar ist ${}_{\min}D$ positiv oder negativ, je nachdem c oberhalb oder unterhalb d liegt. Vergl. Fig. 262. In dem in der Fig. 269a dargestellten Falle ergibt sich mithin für ${}_{\min}D$ ein negativer Werth, und es ist deshalb eine Gegendiagonale nöthig.

Zieht man nun nach Einzeichnung dieser Gegendiagonale: $b'c' \parallel O_m$ und $ad' \parallel U_m$ (Fig. 269b), so findet man den grössten Zug in der Gegendiagonale: ${}_{\max}D = \text{Strecke } \overline{d'c'}$.

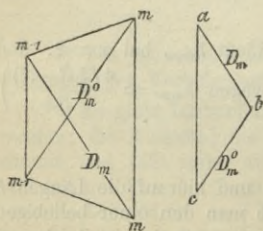


Fig. 270.

Hat man die Spannkraft ${}_{\min}D_m$ in der Hauptdiagonale des m^{ten} Feldes nach einem der im § 32 beschriebenen Verfahren bestimmt und einen negativen Werth erhalten, welcher in Fig. 270 nach Grösse und Richtung durch die Strecke ab dargestellt sein möge, so findet man den grössten Zug ${}_{\max}D_m^0$, durch welchen die in jenem Felde nöthig

werdende Gegendiagonale beansprucht wird, indem man durch b eine Parallele zur Gegendiagonale und durch a eine Senkrechte zieht, welche jene Parallele in c schneidet. Es ist dann $\overline{bc} = \max D_m^o$.

Bei gewissen Trägerarten, z. B. beim Parabelträger und auch bei dem in No. 146 untersuchten Pauli'schen Träger, sind in allen Feldern Gegendiagonalen nöthig, bei vielen Trägern (z. B. bei dem in der Fig. 271 dargestellten) nur in einzelnen und zwar dann in den mittelsten

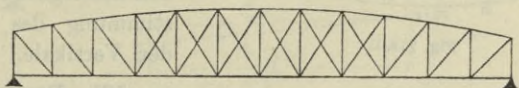


Fig. 271.

Feldern. Die Spannkkräfte O , U , V in den Stäben der Felder ohne Gegendiagonalen werden auf die früher gezeigte Weise bestimmt; die Ermittlung der Spannkkräfte in den Feldern mit Gegendiagonalen soll im Folgenden gelehrt werden. Wir beginnen mit der

160. Bestimmung von $\min V_m$. Die fragliche Vertikale gehöre der linken Trägerhälfte an, und trenne zwei Felder mit Gegendiagonalen. Es sind zwei Belastungsfälle zu untersuchen. Greift die veränderliche Belastung an der unteren Gurtung an, so ist sie einmal von B bis $m+1$ vorzuschieben, Fig. 272, ein zweites Mal von A bis $m-1$, Fig. 273. Im ersten Falle treten im m^{ten} und im $(m+1)^{\text{ten}}$ Felde die linkssteigenden Diagonalen in Thätigkeit, im zweiten Falle die rechtssteigenden. Die Bestimmung von $\min V_m$ kann mit Hilfe der in den §§ 32 und 33 angegebenen Verfahren erfolgen, wobei darauf zu achten ist, dass in dem in der Fig. 272 dargestellten Belastungsfalle neben der Spannkraft $\min V_m$ noch die grösste Spannkraft in der $(m+1)^{\text{ten}}$ Hauptdiagonale entsteht, während der Belastungsfall in Fig. 273 die grösste Spannkraft in der Gegendiagonale des m^{ten} Feldes hervorbringt.

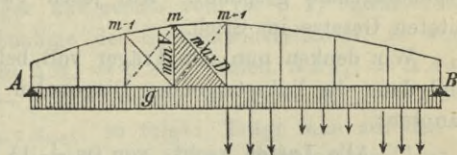


Fig. 272.

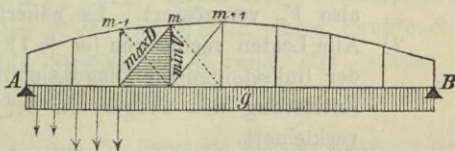


Fig. 273.

Greift die veränderliche Belastung an der oberen Gurtung an, so ist nach einander der Einfluss einer von B bis m und einer von A bis m reichenden Belastung zu untersuchen. Fig. 274 und 275.

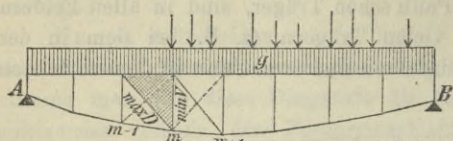


Fig. 274.

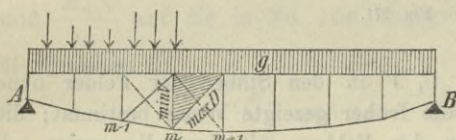


Fig. 275.

Die beiden, für $\min V_m$ erhaltenen Werthe werden schliesslich mit einander verglichen; der ungünstigere der beiden Werthe ist natürlich maassgebend für die Bestimmung des Querschnitts der Vertikale.

161. Bestimmung von $\max V_m$ (Fig. 276). Unter der Voraussetzung, dass die Belastung in den Knoten der unteren Gurtung angreift, entsteht, wenn keine Gegendiagonalen vorhanden sind, die Spannkraft $\max V_m$, sobald die veränderliche Belastung von A aus bis m vorgerrückt ist. Sind aber Gegendiagonalen vorhanden, so wird bei dieser Laststellung die Gegendiagonale des $(m+1)$ ten Feldes die grösste Inanspruchnahme erleiden, vielleicht wird auch im m ten Felde eine dort etwa vorhandene Gegendiagonale gespannt. Auf jeden Fall lassen die bis jetzt abgeleiteten Gesetze im Stich.

Wir denken nun den Träger voll belastet. Auf der linken Hälfte sind dann die linkssteigenden Diagonalen gespannt, und wir dürfen behaupten:

- 1) Alle Lasten rechts von $(m+1)$ tragen zu der Spannkraft V_m in negativem Sinne bei, alle Lasten links von m in positivem Sinne. Durch Entlastung des Trägers in der Nähe von B wird also V_m vergrössert. Es nähert sich V_m dem Werthe $\max V_m$.
- 2) Alle Lasten rechts von $(m+1)$ tragen zu der Spannkraft D_{m+1} der linkssteigenden Diagonale in positivem Sinne bei, so dass Entlastung des Trägers in der Nähe von B die Kraft D_{m+1} verkleinert.

Jetzt entlasten wir den Träger rechts von $(m+1)$, vergrössern dadurch V_m und verkleinern D_{m+1} und setzen diese Entlastung so lange fort,

$$\text{bis } D_{m+1} = 0,$$

$$\text{bis also } \frac{M_m}{h_m} = \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} \text{ ist.}$$

Sobald dies erreicht ist, Fig. 276, greift am oberen* Knotenpunkte m keine Diagonale an, und das Kräftepolygon für diesen Knotenpunkt ist

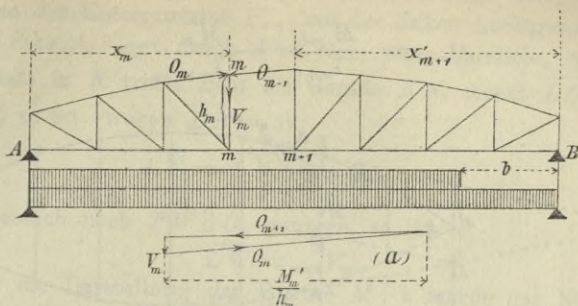


Fig. 276.

das in Fig. 276 a dargestellte. Es besteht aus V_m , O_m und O_{m+1} . Je grösser O_m und O_{m+1} sind, desto grösser wird V_m (*). Da nun durch weitere Entlastung die Spannkraften O_m und O_{m+1} verkleinert werden, wird auch V_m wieder verkleinert. Daraus folgt der Satz:

Entlastet man, von dem Zustande voller Belastung ausgehend, den Träger rechts von $(m+1)$ derart, dass beide Diagonalen des $(m+1)$ ten Feldes spannungslos sind, so nimmt die Spannkraft in der m ten Vertikale ihren grössten positiven Werth an.

Wir bezeichnen mit M_m und M_{m+1} die Momente in Folge voller Belastung, mit M'_m und M'_{m+1} die Momente nach der Entlastung und nehmen an, dass der Träger nur rechts von $(m+1)$ entlastet wird. Bedeutet dann ΔA die Abnahme des Stützenwiderstandes, so werden die Momente verkleinert um $\Delta M_m = \Delta A x_m$ bezieh. $\Delta M_{m+1} = \Delta A x_{m+1}$. Es entsteht $M'_m = M_m - \Delta M_m$, bezieh. $M'_{m+1} = M_{m+1} - \Delta M_{m+1}$. Da nun $\Delta M_m : \Delta M_{m+1} = x_m : x_{m+1}$, so folgt: Trägt man auf den verlängerten Vertikalen m und $m+1$ von einer Wagerechten aus die Werthe auf: $\overline{DE} = \frac{M_m}{\lambda_{m+1}}$ (***) und $\overline{FH} = \frac{M_{m+1}}{\lambda_{m+1}}$ (Fig. 277) und macht hierauf: $\overline{EE'} = \Delta M_m \mid \lambda_{m+1}$, ferner $\overline{HH'} = \Delta M_{m+1} \mid \lambda_{m+1}$, so schneiden sich die Geraden $\overline{E'H'}$ und \overline{EH} in einem Punkte S der Auflagersenkrechten A . Die Strecken $\overline{DE'}$ und $\overline{FH'}$ stellen beziehungsweise die Werthe $M'_m \mid \lambda_{m+1}$ und $M'_{m+1} \mid \lambda_{m+1}$ vor, und der

*) Wir nehmen zunächst an, dass die gesammte ständige Belastung in den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreift. Die unter dieser Voraussetzung ermittelten Spannkraften $_{max} V_m$ müssen dann auf die in No. 158 angegebene Weise verbessert werden.

**) $M_m \mid \lambda_{m+1} = \frac{M_m}{\lambda_{m+1}}$. Warum wir diese Verhältnisse (welche Kräfte sind) auftragen und nicht die Momente, wird sogleich einleuchten.

Schnittpunkt C' der Geraden $E'H'$ und DF ist (nach No. 68) ein Punkt in der Richtung der für das $(m+1)^{te}$ Feld sich ergebenden Querkraft

$$Q_{m+1} = \frac{M'_{m+1}}{\lambda_{m+1}} - \frac{M'_m}{\lambda_{m+1}}$$

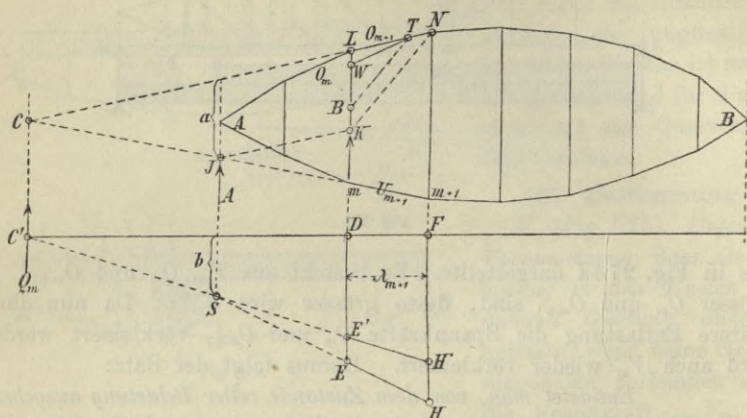


Fig. 277.

Um letzteres einzusehen, betrachte man $E'H'$ und DF beziehungsweise als Seite und Schlusslinie eines Seilpolygons, dessen Polweite $= \lambda_{m+1}$ ist.

Soll nun die vorgenommene Entlastung des Trägers zur Spannkraft $_{max}V_m$ führen, so müssen die Diagonalen des $(m+1)^{ten}$ Feldes spannungslos sein, und es muss dann die Querkraft Q_{m+1} durch den Schnittpunkt C der Gurtkräfte O_{m+1} und U_{m+1} gehen. Durch diese Bedingung ist die Lage der Geraden $C'S'E'$ vollständig bestimmt; man ist somit im Stande, den Werth $M'_m \mid \lambda_{m+1}$ und mithin auch $M'_m \mid h_m$ zu ermitteln, und zwar ohne erst angeben zu müssen, auf welche Weise der Träger rechts von $m+1$ entlastet werden muss. Kennt man aber $M'_m \mid h_m$, so lässt sich $_{max}V_m$ mit Hilfe des in der Fig. 276a dargestellten Kräftepolygons finden.

Da nun die Bestimmung des Punktes C in der Regel unbequem ist, so ist es zweckmässiger, die Gleichung zu benutzen (siehe Fig. 277):

$$\overline{DE'} : h_m = b : a, \text{ woraus } \frac{M'_m}{\lambda_{m+1}} = \overline{DE'} = \frac{h_m b}{a}.$$

Es folgt dann

$$O_{m+1} = \frac{M'_m}{h_m \cos \beta_{m+1}} = \frac{b}{a} \lambda_{m+1} \sec \beta_{m+1} = \frac{b}{a} \overline{LN},$$

wobei L und N die Endpunkte des Gurtstabes O_{m+1} (dessen Neigungswinkel $= \beta_{m+1}$ und dessen Länge $= \lambda_{m+1} \sec \beta_{m+1}$ ist) bezeichnen. Bringt man den Untergurtstab U_{m+1} mit der linken Auflagersenkrechten in J zum Schnitt, legt durch J zu O_{m+1} eine Parallele, welche die m^{te} Vertikale in K trifft, zieht die Gerade KN , macht $\overline{LB} = b$ und $BT \parallel KN$, so ist (wegen $\overline{LK} = a$)

$$\overline{LT} = \overline{LN} \frac{b}{a} = O_{m+1}.$$

Wird schliesslich noch $TW \parallel O_m$ gezogen, so ist

$$\overline{LW} = \max V_m.$$

Ueber die Darstellung der Werthe $M | \lambda$ wurde das Nöthige im § 31 mitgetheilt. Besteht die Verkehrslast aus einem Zuge von Einzellasten, so empfiehlt es sich, diejenige Laststellung anzunehmen, welche das grösste Moment M_m erzeugt.

Der Satz, auf welchen sich die beschriebene Darstellung von $\max V_m$ stützt, wurde vom Verfasser zuerst in der 11^{ten} Auflage von des „Ingenieur's Taschenbuch“ (Hütte) veröffentlicht unter gleichzeitiger Mittheilung von Formeln für gleichförmige Belastung. Wir lassen die Ableitung der letzteren hier folgen.

Die Entlastung der Strecke b (Fig. 276), welche zunächst kleiner als x'_{m+1} vorausgesetzt werden möge, bewirkt eine Verkleinerung von A um $\Delta A = \frac{pb^2}{2l}$. Es entsteht deshalb

$$M'_m = M_m - \frac{pb^2}{2l} x_m \text{ und } M'_{m+1} = M_{m+1} - \frac{pb^2}{2l} x_{m+1},$$

und man erhält zur Berechnung von b die Gleichung ($M'_m | h_m = M'_{m+1} | h_{m+1}$)

$$\frac{M_m}{h_m} - \frac{pb^2}{2l} \frac{x_m}{h_m} = \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} - \frac{pb^2}{2l} \frac{x_{m+1}}{h_{m+1}},$$

woraus (mit $M = \frac{qx x' }{2}$)

$$(I) \quad \frac{pb^2}{2l} = \frac{M_{m+1} h_m - M_m h_{m+1}}{x_{m+1} h_m - x_m h_{m+1}} \text{ und } b^2 = \frac{ql}{p} \frac{x_{m+1} x'_{m+1} h_m - x_m x'_m h_{m+1}}{x_{m+1} h_m - x_m h_{m+1}}.$$

Nun ergibt sich

$$\frac{M'_m}{h_m} = \frac{x_{m+1} M_m - x_m M_{m+1}}{x_{m+1} h_m - x_m h_{m+1}} = \frac{q x_m x_{m+1} \lambda_{m+1}}{2 (x_{m+1} h_m - x_m h_{m+1})}$$

und nach Fig. 276 a, mit Beachtung der Winkel-Bezeichnungen in Fig. 264

$$\max V_m = \frac{M'_m}{h_m} (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}),$$

wofür mit Rücksicht auf die oben angreifende ständige Belastung g_0 der verbesserte Werth

$$(II) \quad \max V_m = \frac{M'_m}{h_m} (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}) - \frac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1})$$

anzunehmen ist. Man erhält schliesslich

$$(III) \quad \max V_m = \frac{q x_m x_{m+1} \lambda_{m+1}}{2 (x_{m+1} h_m - x_m h_{m+1})} (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}) - \frac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1}).$$

Liefert Gleichung I für b einen Werth, der grösser ist als x'_{m+1} , so entsteht $M'_{m+1} = M_{m+1} - \frac{pb^2}{2l} x_{m+1} + \frac{p(b-x'_{m+1})^2}{2}$, und es müsste jetzt b aus der Bedingung

$$\frac{M_m}{h_m} - \frac{pb^2}{2l} \frac{x_m}{h_m} = \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} - \frac{pb^2}{2l} \frac{x_{m+1}}{h_{m+1}} + \frac{p(b-x'_{m+1})^2}{2h_{m+1}}$$

berechnet werden. Man findet aber dann $\max V_m$ genügend genau und etwas zu gross, wenn man $b = x'_{m+1}$ setzt. Es führt dies zu

$$(IV) \max V_m = \frac{x_m(q x'_m l - p x'_{m+1}{}^2)}{2l h_m} (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}) - \frac{1}{2} g_o (\lambda_m + \lambda_{m+1}).$$

Noch zweckmässiger ist es, mit Rücksicht auf die geringere Bedeutung, welche die $\max V$ gegenüber den $\min V$ für die Querschnittsermittlung besitzen, die Berechnung von b zu sparen und stets die Gleichung III anzuwenden. Man erhält dann für $\max V$ entweder einen genaueren oder einen etwas zu grossen Werth. Aus demselben Grunde ist es auch bei der oben gezeigten zeichnerischen Bestimmung von $\max V$ nicht nöthig, auf eine nähere Untersuchung der durch unseren Satz vorgeschriebenen Entlastung des Trägers einzugehen; vielmehr genügt es, vorauszusetzen, dass es möglich sei, durch Beseitigung von Lasten rechts von $m+1$ die Spannkraft in der $(m+1)$ ten Diagonale aufzuheben.

Wir wollen noch ein zweites und drittes Verfahren zur Ermittlung von $\max V_m$ mittheilen und betrachten hierbei eine auf der rechten Hälfte des Trägers befindliche Vertikale mm . Es entsteht dann $\max V_m$, wenn der Balken so belastet ist, dass im m ten Felde keine Diagonale gespannt wird.

Zweites Verfahren. Wir setzen zunächst eine gleichmässige Verkehrs-
last (p) voraus und nehmen an, dass die Strecke x'_m mit $p x'_m$ belastet ist,

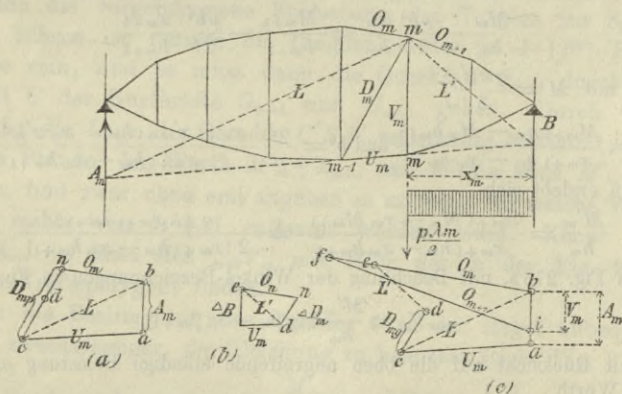


Fig. 278.

während in m die Einzellast $\frac{p \lambda_m}{2}$ angreift, Fig. 278. Im m ten Felde sei vorläufig eine rechtssteigende Diagonale angenommen; dieselbe wird

gemessene Ordinate des A -Polygons. Nach Aufzeichnung des Dreiecks abc (wobei wie vorhin $\overline{ab} = A$, $ac \parallel U_m$ und $bc \parallel L$) wird $aa' = P' = P_1 \frac{e_1}{\lambda_m}$ gemacht und durch a' zu U_m eine Parallele gezogen, welche eine durch c zur Diagonale D_m gelegte Parallele in c' schneidet; worauf cc' um $c'd = D_{mg}$ verlängert und im übrigen wie vorhin verfahren wird. Die Strecke cc' stellt den Einfluss der in $(m - 1)$ wirkenden Last P' auf die Spannkraft D_m dar.*)

Drittes Verfahren. Es wird angenommen, dass der Balken ausser der ständigen Belastung noch einen von B aus vorgeschobenen Zug von Einzellasten trägt, dessen zweite Last bei m liegt. Für diesen Belastungsfall werden die Werthe $M_m | \lambda_m$ und $M_{m-1} | \lambda_m$ ermittelt und auf den Verlängerungen der Vertikalen m und $m - 1$ als Ordinaten (DE und FH in Fig. 280) aufgetragen. Hierauf werden links von $m - 1$ so lange Lasten aufgebracht, bis die anfänglich gezogene linkssteigende Diagonale des m^{ten} Feldes spannungslos wird. Es ändert sich hierbei der Stützenwiderstand B um $+\Delta B$ und die Verhältnisse $M | \lambda$ wachsen beziehungsweise um

$$\overline{EE'} = \frac{\Delta M_m}{\lambda_m} = \frac{\Delta B}{\lambda_m} x'_m \quad \text{und} \quad \overline{HH'} = \frac{\Delta M_{m-1}}{\lambda_m} = \frac{\Delta B}{\lambda_m} x'_{m-1},$$

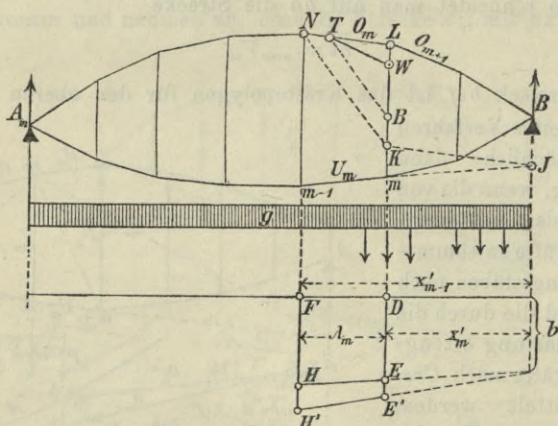


Fig. 280.

*) Man hat sich hierbei (nach No. 153) die Einflüsse der links vom Knoten $m - 1$ in Fig. 279 wirkenden äusseren Kräfte A und P' gesondert dargestellt zu denken. Die Spannkraft O_m wird dann durch P' nicht verändert.

wonach $\overline{EE'} : \overline{HH'} = x'_m : x'_{m-1}$. Hieraus folgt, dass sich die Geraden $H'E'$ und HE in einem Punkte der Richtungslinie von B schneiden müssen, während sich aus der Bedingung, dass die Spannkraft $D_m = 0$ sein soll, schliessen lässt, dass der Schnittpunkt der Geraden $H'E'$ und FD auf der Senkrechten durch den Schnittpunkt der Gurtstäbe O_m und U_m liegt. Ueberhaupt lassen sich jetzt Schritt für Schritt dieselben Schlüsse ziehen wie bei der Entwicklung des ersten Verfahrens, und es ergibt sich dann die folgende Darstellung von ${}_{max}V_m$.

Der Stab U_m der unteren Gurtung wird mit der Senkrechten durch B in J zum Schnitte gebracht und durch J zu O_m eine Parallele gezogen, welche die m^{te} Vertikale in K trifft. Vergl. Fig. 280. Nun wird die Gerade KN gezogen, LB gleich der Strecke b gemacht, welche die Geraden FD und HE auf der Richtungslinie von B abschneiden und $BT \parallel KN$ gezogen. Schliesslich wird noch $TW \parallel O_{m+1}$ gemacht und ${}_{max}V_m = \overline{LW}$ erhalten.

Unser drittes Verfahren ist hauptsächlich dann von Vortheil, wenn die Spannkraft ${}_{max}D$ und ${}_{min}V$ auf die von *Zimmermann* angegebene Weise (§ 31) bestimmt werden und die Verkehrslast aus einem Zuge von Einzellasten besteht, während das erste Verfahren namentlich bei gleichförmiger Belastung zu empfehlen ist.

Bei der Anwendung des zweiten und dritten Verfahrens braucht über Grösse und Stellung der links von $m - 1$ wirkenden Verkehrslast nichts bekannt zu sein. Es genügt, anzunehmen: der Träger ist links von $m - 1$ so belastet, dass die in der Gegendiagonale des m^{ten} Feldes durch die ständige Last und durch den von B aus bis ins m^{te} Feld vorgeschobenen Lastenzug erzeugte Spannkraft wieder aufgehoben wird. Nun kann es aber vorkommen, dass zur Aufbringung jener Belastung der Raum fehlt, und dass selbst bei voller Belastung des Trägertheiles links von $m - 1$ in jener Gegendiagonale ein kleiner Zug übrig bleibt. Trotzdem ist es zulässig, jene Verfahren anzuwenden, weil sie einen etwas zu grossen Werth ${}_{max}V_m$ liefern, der indes von dem genaueren Werthe nur wenig abweicht. Man kann übrigens den entstandenen Fehler leicht verkleinern, zuweilen sogar aufheben, wenn man sich an die Regel hält, dass bei der Ermittlung der ${}_{max}V_m$ in die Kräftepolygone für die oberen Knotenpunkte m (Fig. 276 a) nicht Kräfte O eingeführt werden dürfen, welche die vorher aus den Momenten ${}_{max}M$ gefolgerten grössten Spannkraft O übersteigen.

Greift die Belastung in den Knotenpunkten des Obergurtes an, so ist die Bestimmung der Spannkraft ${}_{max}V$ sehr umständlich; es genügt aber, die Kräfte ${}_{min}V$ zu ermitteln und bei Berechnung der zulässigen Inanspruchnahme die zweite Grenzspannkraft = Null zu setzen. Da die ${}_{max}V$

hier kleine Drücke sind, so erhält man die Querschnitte etwas zu gross. Eine Ausnahme bilden die Sichelträger. Diese werden aber in der Regel als Parabelträger construirt, und dann entstehen die $_{max}V$ bei gänzlicher Belastung; sie ergeben sich, da sämtliche Diagonalen spannungslos sind, aus den Kräften $_{max}U$. Es werden die Kräftepolygone für die Knotenpunkte der unteren Gurtung gezeichnet. Vergl. No. 169.

162. Spannkkräfte in den Gurtungen. Besteht die Verkehrslast aus einem Zuge von Einzellasten, so werden die Momente $_{max}M$ im Allgemeinen bei verschiedenen Laststellungen entstehen. Ist dann

$$\frac{_{max}M_m}{h_m} > \frac{_{max}M_{m-1}}{h_{m-1}}$$

so ist auch

$$\frac{_{max}M_m^2}{h_m} > \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}},$$

wo M_{m-1} dasjenige für den $(m-1)$ ten Knotenpunkt gebildete Moment ist, welches bei der das Moment $_{max}M_m$ erzeugenden Laststellung entsteht. Es ist also bei dieser Laststellung im m ten Felde die linkssteigende Diagonale gespannt und

$$O_m = - \frac{_{max}M_m}{h_m} \sec \beta_m.$$

Dagegen kann es vorkommen, dass im vorliegenden Falle

$$\frac{_{max}M_{m-1}}{h_{m-1}} > \frac{M_m}{h_m}$$

ist, wo M_m das gleichzeitig mit $_{max}M_{m-1}$ entstehende Moment bedeutet. Da nun in diesem Falle die rechtssteigende Diagonale gespannt wird, so darf streng genommen nicht

$$(I) \quad U_m = \frac{_{max}M_{m-1}}{h_{m-1}} \sec \gamma_m$$

gesetzt werden, vielmehr ist

$$U_m < \frac{_{max}M_{m-1}}{h_{m-1}} \sec \gamma_m.$$

Der Fehler, der durch Anwendung von Formel I entsteht, ist indes gering. Er darf um so mehr zugelassen werden, als sich U_m etwas zu gross ergibt, und der Werth einer allzupeinlichen Rechnung — wie nicht oft genug betont werden kann — höchst zweifelhaft ist.

Deshalb setzen wir

$$\left. \begin{aligned} O_m \cos \beta_m &= - \frac{_{max}M_m}{h_m} \\ U_m \cos \gamma_m &= + \frac{_{max}M_{m-1}}{h_{m-1}} \end{aligned} \right\} \text{ sobald } \frac{_{max}M_m}{h_m} > \frac{_{max}M_{m-1}}{h_{m-1}}$$

und ganz entsprechend

$$\left. \begin{aligned} O_m \cos \beta_m &= - \frac{\max M_{m-1}}{h_{m-1}} \\ U_m \cos \gamma_m &= + \frac{\max M_m}{h_m} \end{aligned} \right\} \text{ sobald } \frac{\max M_{m-1}}{h_{m-1}} > \frac{\max M_m}{h_m}.$$

Im ersten Falle ist bei der zeichnerischen Ermittlung von O_m und U_m im m^{ten} Felde eine linkssteigende Diagonale anzunehmen (Fig. 263), im zweiten Falle eine rechtssteigende (Spiegelbild der Fig. 263, in welcher dann aber $m-1$ und m mit einander zu vertauschen sind).

163. Der Schwedlerträger. Wird die Gurtung eines Fachwerkbalkens so geformt, dass die Spannkraft $_{\min}D$ jeder Diagonale gleich Null ist, so genügt in jedem Felde des Balkens eine schlaife Hauptdiagonale. Gegendiagonalen sind überflüssig. Ein solcher Träger heisst, nach seinem Erfinder, ein *Swedler-Träger*.

Bezeichnet man mit M_m und M_{m-1} die auf m und $m-1$ bezogenen Angriffsmomente für diejenige Laststellung, welche $_{\min}D_m$ erzeugt, so muss sein

$$(I) \quad \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} = 0, \text{ also } \frac{h_{m-1}}{h_m} = \frac{M_{m-1}}{M_m}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man, sobald h_m gegeben ist, die Länge h_{m-1} berechnen. Die Gestalt der einen Gurtung darf beliebig angenommen werden, diejenige der anderen ergibt sich dann durch wiederholte Anwendung der Gleichung (I).

Um h_{m-1} durch Zeichnung zu ermitteln, nehme man eine Gegendiagonale an (Fig. 281) und bestimme h_{m-1} so, dass die Spannkraft in dieser

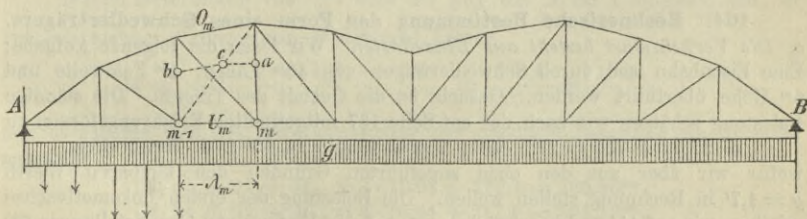


Fig. 281.

Gegendiagonale = 0 wird. Dazu trage man auf der m^{ten} und $(m-1)^{\text{ten}}$ Vertikale von den unteren Knoten m und $m-1$ aus die Strecken $\overline{ma} = \frac{M_m}{\lambda_m}$

und $(m-1)\bar{b} = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m}$ auf*), lege durch a zu U_m eine Parallele, welche die Gegendiagonale in c schneidet, verbinde c mit b durch eine Gerade und ziehe $O_m \parallel cb$. Die Richtigkeit dieses Verfahrens folgt aus dem Spiegelbilde der Figur 258 auf Seite 270; denn fallen in dieser Figur die Punkte d und c zusammen, so ist die Spannkraft $D_m = c\bar{d} = 0$.

Für die in der Nähe der Trägermitte liegenden Felder ergibt sich in der Regel $M_{m-1} > M_m$ also $h_{m-1} > h_m$, und es entsteht dann bei symmetrischer Anordnung des Trägers die in der Figur 281 dargestellte unschöne Form. Um diese zu vermeiden, führt man den mittleren Trägertheil mit parallelen Gurtungen aus, muss aber dann die Felder desselben mit Gegendiagonalen ausrüsten. Vergl. Fig. 282⁸⁷ und Fig. 281⁸⁵.

Bei Ermittlung der Höhen h_m ist insofern Vorsicht geboten, als die unter allen Umständen ungünstigste Belastung vorausgesetzt werden muss. Hat man z. B. für eine Eisenbahnbrücke die Verhältnisse $\frac{h_{m-1}}{h_m}$ so gewählt, dass für die gefährlichsten Stellungen eines bestimmten Lastenzuges die Spannkräfte ${}_{min}D_m = 0$ werden, so wird, falls die Brücke einmal von einem schwereren Zuge befahren werden sollte, eine negative Spannkraft ${}_{min}D_m$ entstehen, welche von einer nur gegen Zug widerstandsfähigen Diagonale nicht aufgenommen werden kann. Die Starrheit des Trägers wird dann nur durch die an den Knotengelenken auftretenden Reibungswiderstände, beziehungsweise durch die an Stelle jener Gelenke angeordneten Nietverbindungen gesichert, und es erfahren namentlich die Gurtungen grössere Beanspruchungen auf Biegung. Um diesen vorzubeugen, nehme man eine möglichst grosse Verkehrsbelastung an, schätze dagegen die günstig wirkende ständige Belastung nicht zu hoch ab.

164. Rechnerische Bestimmung der Form eines Schwedlerträgers.

a. Die Verkehrslast besteht aus Einzellasten. Wir lösen die folgende Aufgabe: Eine Eisenbahn soll durch Schwedlerträger von 40^m Länge, 4^m Feldweite und 6^m Höhe überführt werden. Gesucht ist die Gestalt des Trägers. Die ständige Belastung schätzen wir nach der auf Seite 137 mitgetheilten Erfahrungsformel zu $g = 27,5 l + 750 = 27,5 \cdot 40 + 750 = 1850^k = 1,85^f$ f. d. Meter Gleis, wofür wir aber aus den oben angeführten Gründen den kleineren Werth $g = 1,7^f$ in Rechnung stellen wollen. Die Belastung der ersten Lokomotivachse erhöhen wir auf 15^t und beschränken uns auf den Einfluss von Grundstellungen.**)

*) Die zeichnerische Ermittlung der Werthe $\frac{M}{\lambda}$ ist in No. 156 beschrieben worden.

**) Das Beispiel ist aus der vorigen Auflage übernommen. Ueber die z. Z. geltenden Belastungsannahmen vergl. man No. 66.

Das Angriffsmoment in Folge der ständigen Belastung beträgt für den Knoten m (wegen $x_m = m\lambda$ und $l = 10\lambda$)

$$M_{mg} = \frac{g x_m (l - x_m)}{2} = \frac{g \lambda^2 m (10 - m)}{2} = \frac{1,7 \cdot 4,0^2 m (10 - m)}{2} \\ = 13,6 m (10 - m),$$

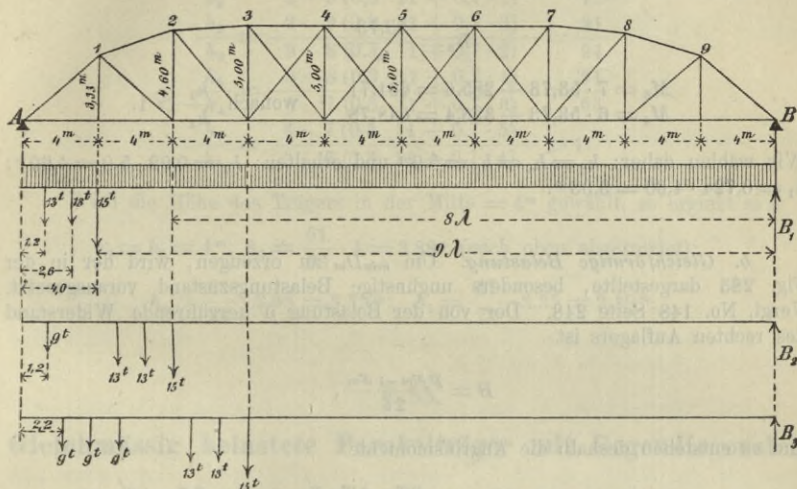


Fig. 282.

und hiernach ergibt sich der Reihe nach für $m = 1, 2, 3, 4, 5$

$$\left. \begin{aligned} M_{g1} &= 13,6 \cdot 1 (10 - 1) = 122,4^{tm} \\ M_{g2} &= 13,6 \cdot 2 (10 - 2) = 217,6^{tm} \\ M_{g3} &= 13,6 \cdot 3 (10 - 3) = 285,6^{tm} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} M_{g4} &= 13,6 \cdot 4 (10 - 4) = 326,4^{tm} \\ M_{g5} &= 13,6 \cdot 5 (10 - 5) = 340,0^{tm}. \end{aligned}$$

Behufs Berechnung von $\frac{h_1}{h_2}$ wird der Zug von A bis 1 vorgeschoben, er ruft am rechten Auflager den Widerstand hervor

$$B_1 = \frac{15 \cdot 4,0 + 13 (2,6 + 1,2)}{l} = \frac{109,4}{10\lambda} = \frac{10,94}{\lambda},$$

und es ergeben sich mit Berücksichtigung der ständigen Belastung die Angriffsmomente

$$\begin{aligned} M_1 &= B_1 9\lambda + M_{g1} = 9 \cdot 10,94 + 122,4 = 220,86^{tm}, \\ M_2 &= B_1 8\lambda + M_{g2} = 8 \cdot 10,94 + 217,6 = 305,12^{tm}, \end{aligned}$$

weshalb

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{M_1}{M_2} = \frac{220,86}{305,12} = 0,724.$$

Jetzt wird der Zug bis zum Knoten 2 vorgeschoben; er erzeugt

$$B_2 = \frac{28,42}{\lambda},$$

und es folgt daher

$$M_2 = 8 \cdot 28,42 + 217,6 = 444,96$$

$$M_3 = 7 \cdot 28,42 + 285,6 = 484,54$$

$$\frac{h_2}{h_3} = \frac{M_2}{M_3} = \frac{444,96}{484,54} = 0,92.$$

Reicht der Zug bis zum Knoten 3, so entsteht

$$B_3 = \frac{53,73}{\lambda}$$

$$\left. \begin{aligned} M_3 &= 7 \cdot 53,73 + 285,6 = 661,71 \\ M_4 &= 6 \cdot 53,73 + 326,4 = 648,78 \end{aligned} \right\} \text{wonach } \frac{h_3}{h_4} > 1.$$

Wir wählen daher: $h_3 = h_4 = h_5 = 5,0^m$ und erhalten: $h_2 = 0,92 \cdot 5,0 = 4,60^m$; $h_1 = 0,724 \cdot 4,60 = 3,33^m$.

b. *Gleichförmige Belastung.* Um $\min D_m$ zu erzeugen, wird der in der Fig. 283 dargestellte, besonders ungünstige Belastungszustand vorausgesetzt. Vergl. No. 148 Seite 248. Der von der Belastung p herrührende Widerstand des rechten Auflagers ist

$$B = \frac{p x_{m-1} x_m}{2l},$$

und es entstehen deshalb die Angriffsmomente

$$M_{m-1} = B x'_{m-1} + M_{(m-1)g} = \frac{p x_{m-1} x_m x'_{m-1}}{2l} + \frac{g x_{m-1} x'_{m-1}}{2}$$

$$M_m = B x'_m + M_{mg} = \frac{p x_{m-1} x_m x'_m}{2l} + \frac{g x_m x'_m}{2}.$$

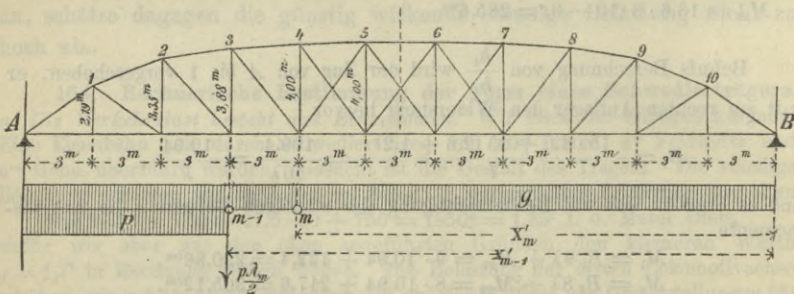


Fig. 283

Mithin ergibt sich

$$\frac{h_{m-1}}{h_m} = \frac{x_{m-1} x'_{m-1} (gl + p x_m)}{x_m x'_m (gl + p x_{m-1})}.$$

Sind die Feldweiten gleich gross, so darf in die vorstehende Gleichung der Werth $\lambda = 1$ eingeführt werden. Liegt also beispielsweise ein Träger von 33^m Stützweite vor mit 11 Feldern von 3^m Länge, so darf gesetzt werden: $x_3 = 3 \cdot 1$ und $x'_3 = (11 - 3) \cdot 1 = 8$. Man erhält dann, wenn $g = 0,3^t$ und $p = 0,7^t$ *) ist

$$\begin{aligned} \frac{h_1}{h_2} &= \frac{1 \cdot 10(0,3 \cdot 11 + 0,7 \cdot 2)}{2 \cdot 9(0,3 \cdot 11 + 0,7 \cdot 1)} = \frac{47}{72} \\ \frac{h_2}{h_3} &= \frac{2 \cdot 9(0,3 \cdot 11 + 0,7 \cdot 3)}{3 \cdot 8(0,3 \cdot 11 + 0,7 \cdot 2)} = \frac{81}{94} \\ \frac{h_3}{h_4} &= \frac{3 \cdot 8(0,3 \cdot 11 + 0,7 \cdot 4)}{4 \cdot 7(0,3 \cdot 11 + 0,7 \cdot 3)} = \frac{61}{63} \\ \frac{h_4}{h_5} &= \frac{4 \cdot 7(0,3 \cdot 11 + 0,7 \cdot 5)}{5 \cdot 6(0,3 \cdot 11 + 0,7 \cdot 4)} > 1. \end{aligned}$$

Wird die Höhe des Trägers in der Mitte $= 4^m$ gewählt, so ergibt sich

$$h_4 = h_5 = 4^m; \quad h_3 = \frac{61}{63} \cdot 4 = 3,88^m \text{ (nach oben abgerundet);}$$

$$h_2 = \frac{81}{94} \cdot 3,88 = 3,35^m; \quad h_1 = \frac{47}{72} \cdot 3,35 = 2,19^m.$$

§ 35.

Gleichmässig belastete Parabelträger mit Gegendiagonalen.

165. **Spannkräfte in den Gurtungen.** Wird die Gestalt der einen Gurtung bei *beliebig angenommener Form der anderen Gurtung* mittels der Parabelgleichung

$$(1) \quad h_m = \frac{4f x_m x'_m}{l^2}$$

bestimmt — vergl. Seite 275 und Fig. 268 —, so ergibt sich bei gänzlicher Belastung des Trägers mit q

$$\frac{M_m}{h_m} = \frac{q x_m x'_m}{2 h_m} = \frac{q l^2}{8f}.$$

Die Diagonalen sind spannungslos, und für die Spannkräfte O und U erhält man die Formeln

$$(2) \quad -O_m \cos \beta_m = \frac{q l^2}{8f} \quad \text{und} \quad U_m \cos \gamma_m = \frac{q l^2}{8f}.$$

*) Diese Belastungen entsprechen einer Fussgängerbrücke mit 2 Hauptträgern, deren Bahn aus Bohlenbelag auf hölzernen Längsträgern und eisernen Querträgern besteht. Breite der Brücke $3,5^m$. Verkehrsbelastung (Menschen- gedränge) $= 400^k$ f. d. qm., so dass auf jeden der beiden Träger $p = \frac{3,5 \cdot 0,4}{2} = 0,7^t$ entfällt. Das Eigengewicht ist $= 170^k$ f. d. qm Brückenbahn, also $= \frac{3,5 \cdot 0,17}{2} = 0,3^t$ f. d. m der Trägerlänge geschätzt worden.

Macht man also in Fig. 284 die Wagerechte $\overline{CE} = \frac{q l^2}{8 f}$, und zieht durch C zu den Stäben O_1, O_2, O_3, \dots Parallelen, welche das in E auf CE errichtete

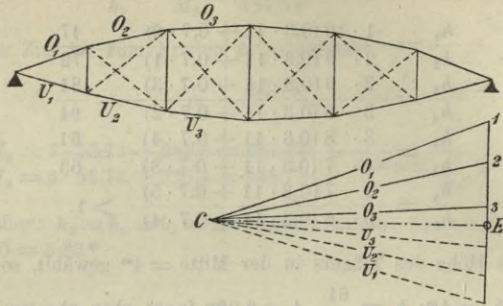


Fig. 284.

Loth in den Punkten 1, 2, 3, . . . schneiden, so stellen die Strecken $C1, C2, C3, \dots$ beziehungsweise die Spannkkräfte O_1, O_2, O_3, \dots dar. Ganz ebenso werden die Spannkkräfte U ermittelt.

166. Spannkkräfte in den Diagonalen. Der Einfluss der ständigen Belastung ist $= 0$. Die Spannkraft $_{max}D_m$ entsteht, wenn die Strecke $\overline{x'_m}$ mit $p x'_m$ und der Knoten m mit $\frac{p \lambda_m}{2}$ belastet wird (Fig. 285). Vergl. Seite 249. Am linken Auflager wird der Widerstand

$$A_m = \frac{p x'_m x'_{m-1}}{2l}$$

hervorgeufen, und es entsteht (wegen $x'_{m-1} - x'_m = \lambda_m$)

$$D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} = \frac{A_m x_m l^2}{4 f x_m x'_m} - \frac{A_m x_{m-1} l^2}{4 f x_{m-1} x'_{m-1}} = \frac{A_m l^2 \lambda_m}{4 f x'_m x'_{m-1}} = \frac{p l \lambda_m}{8 f}$$

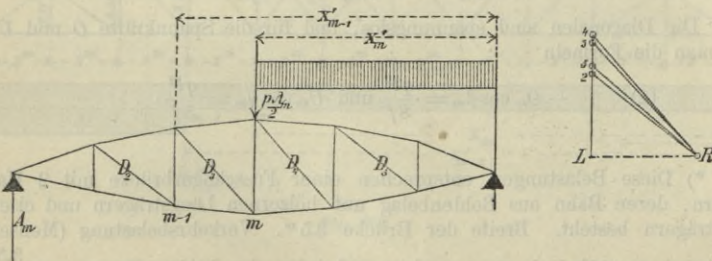


Fig. 285.

Macht man also in Fig. 285 die Wagerechte $\overline{RL} = \frac{p l \lambda_m}{8 f}$ und zieht durch

R zu den Diagonalen $D_2, D_3, D_4 \dots$ Parallelen, welche das in L auf RL erichtete Loth in den Punkten 2, 3, 4, . . . schneiden, so stellen die Strecken $R2, R3, R4, \dots$ beziehungsweise die Spannkraften $maxD_2, maxD_3, maxD_4, \dots$ vor.

Bezeichnet man die Länge der Diagonale des m ten Feldes mit d_m , so darf man auch (wegen $\lambda_m = d_m \cos \varphi_m$) schreiben

$$(3) \quad D_m = \frac{pl}{8f} d_m.$$

Wählt man den Kräftemaassstab $\frac{pl}{8} = f$ (also beispielsweise für $l = 40^m$, $f = 6^m$ und $p = 2,2^t$ den Maassstab $11,0^t = 6^m$), so erhält man

$$D_m = d_m.$$

167. Spannkraften $minV_{mp}$ in Folge der beweglichen Belastung. *a. Beliebige Form der einen Gurtung.* Greift die Belastung an der unteren Gurtung an, so entsteht $minV_m$ gleichzeitig mit $maxD_{m+1}$. Bringt man U_{m+1} mit A in C zum Schnitt, und zieht durch C Parallelen zu O_m und O_{m+1} , welche die fragliche Vertikale in E und die darauf folgende Diagonale in F schneiden, so ist nach

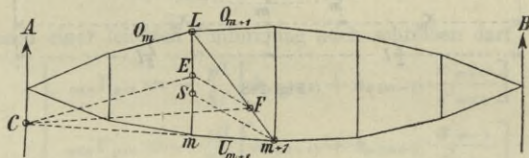


Fig. 286.

No. 152 und mit Bezugnahme auf No. 241

$$\frac{minV_{mp}}{maxD_{(m+1)p}} = - \frac{LE}{LF} \text{ woraus } minV_m = - \frac{pl}{8f} d_{m+1} \frac{LE}{LF}.$$

Zieht man durch den unteren Knoten $m+1$ zu FE eine Parallele, welche die fraglichen Vertikale in S schneidet und setzt $LS = c_m$, so findet man

$$(4) \quad minV_{mp} = - \frac{pl}{8f} c_m,$$

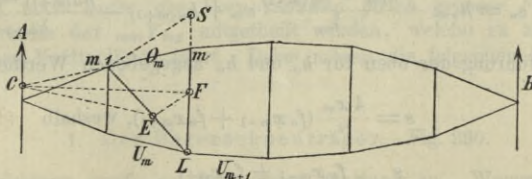


Fig. 287.

und es stellt demnach die im Kräftemaassstabe $\frac{pl}{8} = f$ gemessene Strecke c_m die Spannkraft $minV_{mp}$ vor.

Greift die Belastung an der oberen Gurtung an, so entsteht $\min V_m$ gleichzeitig mit $\max D_m$. Man bringt O_m mit A in C zum Schnitt, Fig. 287, zieht $CE \parallel U_m$, $CF \parallel U_{m+1}$ und $(m-1)S \parallel EF$. Mit $\overline{LS} = c'_m$ findet man

$$\min V_m = -\frac{pl}{8f} c'_m.$$

b. Die Knotenpunkte beider Gurtungen liegen auf Parabeln, deren Gleichungen mit den Bezeichnungen in Fig. 288 lauten

$$(5) \quad h_{om} = \frac{4f_o x_m x'_m}{l^2}; \quad h_{um} = \frac{4f_u x_m x'_m}{l^2}.$$

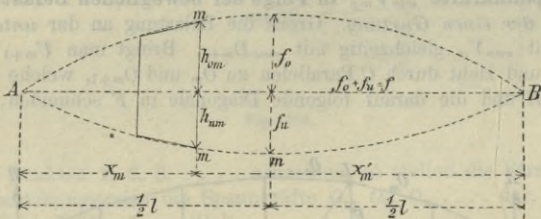


Fig. 288.

$$\text{Es ist dann } h_m = h_{om} + h_{um} = \frac{4f x_m x'_m}{l^2}$$

Die Spannkraft $\min V_{mp}$ wird hervorgerufen, wenn nur Lasten rechts von dem durch O_m , V_m , U_{m+1} geführten Schnitte wirken; sie ergibt sich aus der auf den Schnittpunkt von O_m und U_{m+1} bezogenen Ritter'schen Momentengleichung (vergl. Fig. 289)

$$-V_{mp} e_m - A(e_m - x_m) = 0 \quad \text{woraus } V_{mp} = -A \frac{e_m - x_m}{e_m} = -A \frac{s}{h_m}.$$

Für die Strecke s , welche die Verlängerungen von O_m und U_{m+1} auf der linken Auflagersenkrechten abschneiden, ergibt sich leicht der Ausdruck

$$s = s_o + s_u = h_{om} - \frac{h_{om} - h_{o(m-1)}}{\lambda_m} x_m + h_{u(m+1)} - \frac{h_{u(m+1)} - h_{um}}{\lambda_{m+1}} x_{m+1}$$

und nach Einführung der oben für h_o und h_u angegebenen Werthe

$$s = \frac{4x_m}{l^2} (f_o x_{m-1} + f_u x_{m+1}), \quad \text{weshalb}$$

$$\frac{s}{h_m} = \frac{f_o x_{m-1} + f_u x_{m+1}}{f x'_m}.$$

Jenachdem nun die Belastung an der unteren oder oberen Gurtung angegriffen, wirkt am linken Auflager (nach No. 148 Seite 249) der Widerstand:

$$A_{m+1} = \frac{p x'_m x_{m+1}}{2l} \quad \text{oder} \quad A_m = \frac{p x'_m x_{m-1}}{2l}, \quad \text{und man findet deshalb}$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{bei unten wirkender Belastung } \min V_{pm} = -\frac{p x'_{m+1}}{2lf} (f_o x_{m-1} + f_u x_{m+1}) \\ \text{,, oben ,, ,, ,, } \min V_{pm} = -\frac{p x'_{m-1}}{2lf} (f_o x_{m-1} + f_u \overline{x_{m+1}}), \end{array} \right.$$

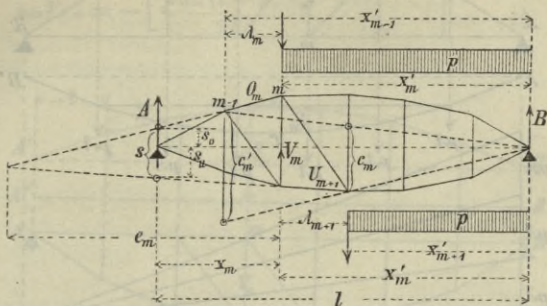


Fig. 289.

wofür man nach einer leichten Umformung auch schreiben darf

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min V_{pm} = -\frac{pl}{8f} \left[h_{u(m+1)} + h_{o(m-1)} \frac{x'_{m+1}}{x'_{m-1}} \right] \\ \min V_{pm} = -\frac{pl}{8f} \left[h_{o(m-1)} + h_{u(m+1)} \frac{x'_{m-1}}{x'_{m+1}} \right]. \end{array} \right.$$

Aus diesen Formeln ergeben sich die folgenden Gesetze. Greift die Belastung an der unteren Gurtung an, so lege man durch B und den oberen Knoten $m-1$ eine Gerade und bestimme die Strecke c_m , welche dieselbe auf der $(m+1)$ ten Vertikale abschneidet. Man erhält dann $\min V_{mp} = -\frac{pl}{8f} c_m$.

Bei oben angreifender Belastung ist $\min V_{mp} = -\frac{pl}{8f} c'_m$, wobei c'_m die Strecke ist, welche eine von B aus durch den unteren Knoten $m+1$ gelegte Gerade auf der $(m-1)$ ten Vertikale abschneidet.

Es soll noch *unter der Voraussetzung gleich grosser Feldweiten* eine Bestimmungsweise der $\min V_{mp}$ mitgeteilt werden, welche zu ausserordentlich übersichtlichen Kräfteplänen führt. Dabei mögen die folgenden Fälle behandelt werden.

1. Der Bogensehnenträger. Fig. 290.

Die Belastung greife an der unteren Gurtung an. Wegen $f_u = 0$ geht die erste der Gleichungen (6) nach Einsetzen der Werthe

$$x'_{m+1} = x'_m - \lambda; \quad x_{m+1} = x_m + \lambda; \quad x'_m = l - x_m$$

über in

$$(8) \quad \min V_{pm} = -\frac{p[x_m(l-x_m) - \lambda(l-\lambda)]}{2l}.$$

Nimmt man jetzt in jedem Knoten eine Last $p\lambda$ an (welche Annahme einer gleichmässigen Belastung des ganzen Trägers mit p f. d. Längeneinheit

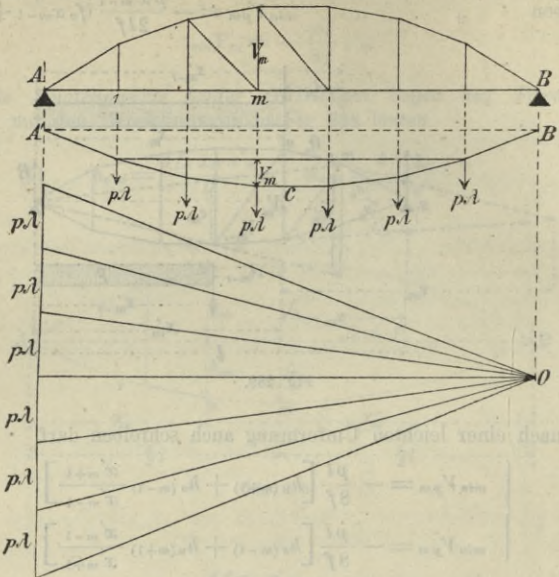


Fig. 290.

entspricht) und zeichnet zu dieser Belastung mit der Polweite l ein Seilpolygon $A'CB'$, so ist dessen Ordinate bei m : $= \frac{p x_m (l - x_m)}{2l}$, nämlich gleich dem durch die Polweite l getheilten, durch gänzliche Belastung des Trägers hervorgerufenen Angriffsmomente $\frac{p x_m (l - x_m)}{2}$. Die Ordinate bei 1 ist: $= \frac{p \lambda (l - \lambda)}{2l}$ und es folgt daher aus Gleichung (8)

$$\min V_{pm} = - Y_m,$$

wo Y_m den Unterschied der den Knoten m und 1 entsprechenden Ordinaten des Seilpolygons $A'CB'$ ist. Wir wollen dieses Seilpolygon in der Folge kurz das Polygon S nennen.

Man kann auch Gleich. (8) mit Rücksicht auf $h = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$ umformen in

$$\min V_{pm} = - \frac{pl}{8f} (h_m - h_1)$$

und erhält dann, wenn der Kräftemaassstab $\frac{pl}{8} = f$ gewählt wird,

$$\min V_{pm} = - (h_m - h_1).$$

2. Der Fischbauchträger. Fig. 291.

Die Belastung greife oben an. Dann gilt die zweite der Gleichungen (6). Dieselbe lässt sich umformen in

$$(9) \quad \min V_{pm} = - \left[\frac{p x_m (l - x_m)}{2l} + \frac{p \lambda (l + \lambda)}{2l} \right] = - Y_m$$

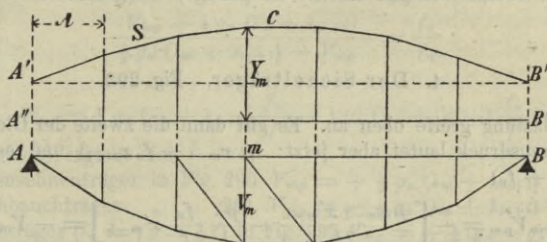


Fig. 291.

und hieraus folgt: Zieht man nach Aufzeichnung des Seilpolygons *S* im Abstände $\overline{A'A''} = \frac{p \lambda (l + \lambda)}{2l}$ zur Schlusslinie *A'B'* eine Parallele *A''B''*, so ist Y_m die auf die Gerade *A''B''* bezogene Ordinate des Seilpolygons.

3. Der Fischträger. Fig. 292.

Es ist $f_o = f_u = \frac{1}{2} f$. Die Gleichungen (6) gehen dann über in

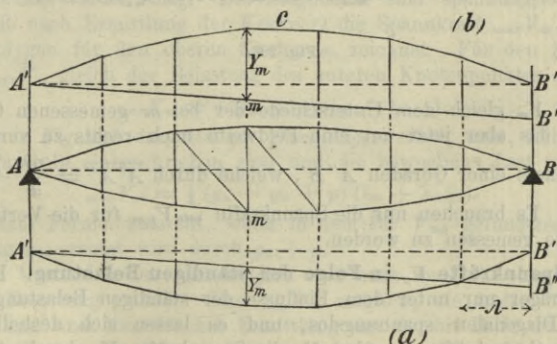


Fig. 292.

$$(10) \quad \begin{cases} \min V_{pm} = - \left[\frac{p x_m (l - x_m)}{2l} - \frac{p \lambda x_m}{2l} \right] = - Y_m \\ \min V_{pm} = - \left[\frac{p x_m (l - x_m)}{2l} + \frac{p \lambda x_m}{2l} \right] = - Y_m \end{cases}$$

Liegen die Knotenpunkte beider Gurtungen auf Parabeln, gelten also die Gleichungen (5) auf Seite 287, so ist es möglich, für die Spannkraft V_g sehr einfache Formeln abzuleiten. Da nämlich die obere Gurtung das Seilpolygon für die in den oberen Knotenpunkten m angreifenden Kräfte $V_{mg} + \frac{1}{2} g_o (\lambda_m + \lambda_{m+1})$ bildet und die untere Gurtung das Seilpolygon für die unten angreifenden Kräfte $\frac{1}{2} g_u (\lambda_m + \lambda_{m+1}) - V_{mg}$; da ferner das Verhältniss $\frac{h_{om}}{h_{um}}$ den festen Werth $\frac{f_o}{f_u}$ besitzt und beiden Seilpolygonen dieselbe Polweite $\frac{1}{8} g l^2$ entspricht, so folgt

$$\frac{V_{mg} + \frac{1}{2} g_o (\lambda_m + \lambda_{m+1})}{\frac{1}{2} g_u (\lambda_m + \lambda_{m+1}) - V_{mg}} = \frac{f_o}{f_u}$$

und hieraus

$$(12) \quad V_{mg} = \frac{1}{2} g_u (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \frac{f_o}{f} - \frac{1}{2} g_o (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \frac{f_u}{f}.$$

Insbesondere ergibt sich

- für den Bogensehenträger in Fig. 290 $V_{mg} = +\frac{1}{2} g_u (\lambda_m + \lambda_{m+1})$
 „ „ Fischbauchträger „ „ 291 $V_{mg} = -\frac{1}{2} g_o (\lambda_m + \lambda_{m+1})$
 „ „ Fischträger ($f_o = f_u = \frac{1}{2} f$) in Fig. 292 $V_{mg} = +\frac{1}{4} (g_u - g_o) (\lambda_m + \lambda_{m+1})$
 „ „ Sichelträger in Fig. 293 $V_{mg} = \frac{1}{2} g_u (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \frac{f_o}{f} + \frac{1}{2} g_o (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \frac{f_u}{f}$.

Für den Sichelträger kann man auch schreiben

$$V_{mg} = \frac{1}{2} \left(g \frac{f_u}{f} + g_u \right) (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \text{ wo } g = g_o + g_u.$$

169. Spannkraft $\max V_m$. Während es bei der Bestimmung der $\min V_m$ zweckmässig ist, den Einfluss der beweglichen und ständigen Belastung getrennt zu ermitteln, empfiehlt es sich, bei der Untersuchung der $\max V_m$ beide Belastungen gleichzeitig zu berücksichtigen.

Greift die bewegliche Belastung an der unteren Gurtung an, so entsteht $\max V_m$ stets bei gänzlicher Belastung des Trägers, wie auch die Form der einen Gurtung gewählt werden mag. Die Diagonalen sind spannungslos, und man findet deshalb nach Ermittlung der Kräfte O die Spannkraft $\max V_m$, indem man das Kräftepolygon für den oberen Knoten m zeichnet. Für den *Bogensehenträger* ist $\max V_m$ gleich der Belastung des unteren Knotenpunktes m d. h.

$$\max V_m = \frac{1}{2} (g_u + p) (\lambda_m + \lambda_{m+1}),$$

und für den in Fig. 292 dargestellten *Fischträger* erhält man, falls beide Gurtungen in Parabeln eingeschrieben sind und die bewegliche Last unten angreift

$$\max V_m = \frac{1}{4} (g_u - g_o + p) (\lambda_m + \lambda_{m+1}).$$

Die letzte Formel entsteht, wenn in dem für V_{mg} gefundenen Ausdrucke die Belastung g_u ersetzt wird durch $g_u + p$.

In den Vertikalen des *Sichelträgers* sind auch im Falle oben angreifender beweglicher Belastung grössere Züge $\max V_m$ möglich; sie treten ein bei gänzlicher Belastung und können nach Ermittlung der U mit Hilfe der Kräftepolygone für die Knoten der unteren Gurtung gefunden werden. Liegen die Knoten beider Gurtungen auf Parabeln (gelten also die Gleichungen 5) so ergibt sich

$$\max V_m = \frac{1}{2} \left(g \frac{f_u}{f} + g_u \right) (\lambda_m + \lambda_{m+1}).$$

§ 36.

Kräfteplan für einen Parallelträger (Eisenbahnbrücke).

Zahlenbeispiel. Tafel 3.

Eine zweigleisige Bahn soll mittels Parallelträger von der in der Fig. 294 angegebenen Anordnung überführt werden. Stützweite: $l = 36^m$, Trägerhöhe $h = 3,6^m$, Anzahl der Felder = 10 also Feldweite: $\lambda = 3,6^m$. Es sind zwei Hauptträger vorhanden; jeder derselben ist dann für die Belastung eines Gleises zu berechnen.

Die bewegliche Belastung besteht aus einem von drei Lokomotiven geführten Güterzuge, dessen Radstände und Achsenbelastungen in Fig. 111 angegeben sind. Die ständige Belastung (Eigengewicht) darf $g = 1,74^t$ geschätzt werden. Vergl. Seite 137.

a. Spannkkräfte in den Gurtungen. In den Gurtstäben des m^{ten} Feldes entstehen die Spannkkräfte

$$(1) \quad O_m = -\frac{M_m}{h}; \quad U_m = +\frac{M_{m-1}}{h} = -O_{m-1}.$$

Die grössten Momente in Folge der Verkehrslast sind in Fig. 128 auf Tafel 1 mit Hilfe eines Seilpolygons bestimmt worden, dessen Polweite $H = 115,2^t = 14,4^m$ beträgt.*) Wird $H = 14,4^m$ angenommen, so sind die Ordinaten y_p des Seilpolygons mit dem Kräftemaassstabe zu messen. Es ist dies beim Parallelträger empfehlenswerth, und zwar wird zweckmässig H gleich einem Vielfachen von h gewählt. Im vorliegenden Falle ist $H = 4h = 4 \cdot 3,6$ angenommen worden, und es ergibt sich dann $M_{mp} = 4hy_{mp}$.

Der Pfeil der Parabel, welcher die der ständigen Belastung entsprechenden Werthe $y_{mg} = \frac{M_{mg}}{H}$ liefert, ist

$$\frac{gl^2}{8H} = \frac{1,74 \cdot 36^2}{8 \cdot 4 \cdot 3,6} = 19,575^t.$$

Nach Aufzeichnung dieser Parabel (Fig. 294) wurden zu den y_{mg} die der Fig. 128 auf Tafel 1 entnommenen y_{mp} gefügt, worauf gemessen wurde

$$y_1 = y_{1p} + y_{1g} = 28,2^t; \quad y_2 = 48,7^t; \quad y_3 = 63,7^t; \quad y_4 = 72,2^t; \\ y_5 = 75,7^t.$$

Nun ist aber $\frac{M_m}{h} = \frac{4hy_m}{h} = 4y_m$, und es ergibt sich daher aus Gleichung (1)

*) Beschreibung auf Seite 140 u. f.

$$\begin{aligned}
 O_1 &= -4y_1 = -113^t; & U_1 &= 0 \\
 O_2 &= -4y_2 = -195^t; & U_2 &= 113^t \\
 O_3 &= -4y_3 = -255^t; & U_3 &= 195^t \\
 O_4 &= -4y_4 = -289^t; & U_4 &= 255^t \\
 O_5 &= -4y_5 = -303^t; & U_5 &= 289^t.
 \end{aligned}$$

Es ist hierbei gleichgiltig, ob die Fahrbahn an der unteren oder an der oberen Gurtung liegt. (Fig. ³⁰⁰295 u. 301.)

Werden die Diagonalen abwechselnd rechtssteigend und linkssteigend angeordnet, so entstehen die in den Figuren 302 und 303 dargestellten Trägerarten, welche man als *Netzwerke mit eingeschalteten Vertikalen* zu bezeichnen pflegt. Die Spannkraft in einem Gurtstabe ist $= \pm \frac{M}{h}$, wo M das Moment für den dem fraglichen Stabe gegenüberliegenden Knotenpunkt bedeutet. Es ergeben sich die in die Figuren 302 und 303 eingetragenen Kräfte.

b. Spannkräfte in den Diagonalen. Führt man durch das m^{te} Feld einen senkrechten Schnitt tt , Fig. 296, so findet man für irgend einen Belastungszustand zwischen der Querkraft $Q_m = A - P_1 - P_2 - \dots - P_{m-1}$ und der Spannkraft D_m die Beziehung

$$(2) \quad Q_m - D_m \sin \varphi = 0 \quad \text{d. i.} \quad D_m = Q_m \operatorname{cosec} \varphi.$$

Die Querkräfte Q_m und mithin auch die Spannkräfte D_m sind unabhängig von der Höhenlage der Fahrbahn; denn es ist für die Grösse von Q_m gleichgiltig, ob die Lasten P in den Knoten der unteren oder oberen Gurtung oder zwischen beiden angreifen. Aus diesem Grunde ist es bei der Berechnung der Q und D nicht nöthig, die ständige Belastung g in die Theile g_o und g_u zu zerlegen.

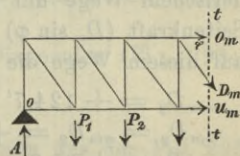


Fig. 296.

Die Querkräfte Q_m sind in der Fig. 295 dargestellt worden. Nach Eintragung der Geraden $A''B''$ mit den Endordinaten $\overline{A'A''} = +\frac{1}{2}gl = \frac{1}{2}1,74 \cdot 36 = 31,3^t$ und $\overline{B'B''} = -31,3^t$ wurden durch die Punkte, in denen diese Gerade die Senkrechten durch die Feldmitten schneidet, Parallelen zu $A'B'$ gezogen. Die Ordinaten dieser Parallelen geben die Querkräfte Q_g für die einzelnen Felder an; dieselben sind für die linke Hälfte des Trägers positiv, für die rechte Hälfte negativ.

Nun wurde für einen von B nach A sich bewegenden Güterzug das A -Polygon gezeichnet; dasselbe liefert die Querkräfte ${}_{\max} Q_p$. Vergl. Fig. 126 auf Tafel 1 und die Beschreibung in No. 81.

Für das vierte Feld entsteht ${}_{max}Q_p$ in Folge der Grundstellung der Verkehrslast; es muss die *erste Last* des von B nach A fahrenden Eisenbahnzuges beim Knoten 4 liegen. Man erhält ${}_{max}Q_{p4}$ gleich der unter dem Knoten 4 gemessenen Ordinate des A -Polygons. Addirt man hierzu Q_{p4} , so erhält man ${}_{max}Q_4$.

Die Querkraft Q_3 entsteht, sobald die 2^{te} Achse des von B aus vorrückenden Zuges beim Knoten 3 liegt. Man muss also, um ${}_{max}Q_3$ zu erhalten, die von Knoten 3 um $e_1 = 1,4^{m*}$) entfernte Ordinate des A -Polygons zu Q_{p3} addiren und von der so erhaltenen Summe die im Knoten 2 angreifende Last $P_1 \frac{e_1}{\lambda} = P'$ in Abzug bringen. Auch für das erste und zweite Feld ist die Grundstellung nicht die gefährlichste.

Die Querkräfte ergeben sich für die Felder 1 bis 7 positiv, für die Felder 8 bis 10 negativ. Da nun eine linkssteigende Diagonale (wie Gleichung 2 lehrt) gedrückt wird, sobald Q_m negativ ist, so müssen, wenn die Diagonalen stets gezogen sein sollen, in den Feldern 8, 9, 10 rechtssteigende Diagonalen angeordnet werden. Bewegt sich nun der Eisenbahnzug in der Richtung von A nach B über die Brücke, so sind in den Feldern 1 bis 3 linkssteigende und in den Feldern 4 bis 10 rechtssteigende Diagonalen erforderlich, und hieraus folgt, dass die Felder 4, 5, 6, 7 Gegendiagonalen erhalten müssen.

Aus den Querkräften Q lassen sich die Spannkkräfte D auf zeichnerischem Wege mit Hilfe der Bedingung finden, dass die senkrechte Seitenkraft ($D_m \sin \varphi$) von D_m gleich Q_m sein muss. Es ergeben sich auf diesem Wege die folgenden Werthe

$$\begin{array}{l|l} {}_{max}D_2 = + 124,7^t & {}_{max}D_4 = + 68,5^t \\ {}_{min}D_2 = {}_{min}D_9 = + 27,6^t & {}_{max}D_4 = {}_{max}D_7 = + 3,8^{t**}) \\ {}_{max}D_3 = + 95,3 & {}_{max}D_5 = + 44,4^t \\ {}_{min}D_3 = {}_{min}D_8 = + 13,1^t & {}_{max}D_5 = {}_{max}D_6 = + 22,3^t \end{array}$$

Die grösste Spannkraft in der Diagonale D_1 entsteht gleichzeitig mit dem grössten Drucke O_1 ; sie ergibt sich aus dem Kräftepolygone des oberen Knotens 0 (Fig. 294a) und ist ${}_{max}D_1 = 159,5^{t***})$. Wirkt nur die ständige Belastung, so entsteht ${}_{min}D_1 = {}_{min}D_{10} = + 39,7^t$.

*) Es bedeutet e_1 den ersten Radstand.

***) Die Spannkraft ${}_{max}D_7$ wurde (weil sehr klein) im Kräfteplane fortgelassen.

***)) Es ist stets $D_1 = -O_1 \sec \varphi$. In Fig. 296a wurde der obere Knoten 0 unbelastet angenommen; indes ist hervorzuheben, dass D_1 unabhängig ist von der Höhenlage der Belastung. Die grösste positive Querkraft des ersten Feldes ist: $Q_1 = -O_1 \operatorname{tg} \varphi$, also im vorliegenden Falle: $Q_1 = + 113^t$.

Die vorstehenden Zahlenwerthe sind in den Figuren 300. u. 301 übersichtlich zusammengestellt worden. In den Diagonalen des Netzwerkes mit eingeschalteten Vertikalen entstehen die in den Figuren 302 und 303 angegebenen Spannkkräfte.

c. Spannkkräfte in den Vertikalen. Legt man durch die m^{te} Vertikale einen Schnitt tt (Fig. 297), welcher ausserdem nur noch zwei Stäbe trifft, und setzt die Summe der auf den linken Trägertheil wirkenden senkrechten Kräfte gleich Null, so erhält man

$$(3) \quad V_m + Q = 0, \text{ also } V_m = -Q.$$

Je nachdem nun bei linkssteigenden Diagonalen sämtliche Lasten (auch das Eigengewicht) in den Knoten der unteren oder oberen Gurtung angreifen, ergibt sich

$$(4) \quad V_m = -Q_{m+1}, \text{ wo } Q_{m+1} = A - (P_1 + P_2 + \dots + P_m)$$

oder

$$(5) \quad V_m = -Q_m, \text{ wo } Q_m = A - (P_1 + P_2 + \dots + P_{m-1});$$

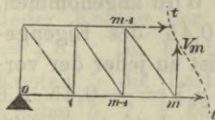


Fig. 297.

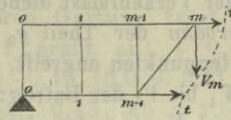


Fig. 298.

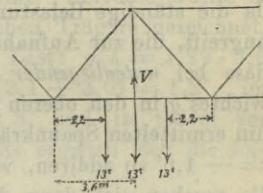


Fig. 299.

denn im ersten Falle gehört die m^{te} Knotenlast zum linken Trägertheile, im zweiten Falle zum rechten.

Aehnlich erhält man bei rechtssteigenden Diagonalen (Fig. 298):

$$(6) \quad V_m = +Q_{m+1} \text{ (Last oben)}$$

$$(7) \quad V_m = +Q_m \text{ (Last unten).}$$

Für den vorliegenden Träger ergeben sich nun aus der Fig. 295 die folgenden Querkräfte

$$\begin{aligned} \max Q_2 &= + 88,2^t \\ \max Q_3 &= + 67,4^t \\ \max Q_4 &= + 48,4^t \\ \max Q_5 &= + 31,4^t \\ \max Q_6 &= + 15,7^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max Q_7 &= + 2,7^t \\ \max Q_8 &= - 9,3^t \\ \max Q_9 &= - 19,5^t \\ \max Q_{10} &= - 28,1^t \end{aligned}$$

und es folgt mithin, wenn die Fahrbahn unten liegt

$$\begin{aligned} \min V_1 &= - 88,2^t \\ \min V_2 &= - 67,4^t \\ \min V_3 &= - 48,4^t \\ \min V_4 &= - 31,4^t \\ \min V_5 &= - 15,7^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max V_0 &= \max V_{10} = - 28,1^t \\ \max V_1 &= \max V_9 = - 19,5^t \\ \max V_2 &= \max V_8 = - 9,3^t \end{aligned}$$

$\min V_0$ entsteht gleichzeitig mit $\max D_1$ (Fig. 294a) und ist: $V_0 = - 113^t$.

Liegt die Fahrbahn oben, so findet man

$$\begin{array}{l|l} \min V_2 = -88,2^t & \max V_1 = \max V_9 = -28,1^t \\ \min V_3 = -67,4^t & \max V_2 = \max V_8 = -19,5^t \\ \min V_4 = -48,4^t & \\ \min V_5 = -31,4^t & \end{array}$$

Die Spannkraft $\min V_1$ entsteht gleichzeitig mit $\max D_1$ und $\max U_2$ und ergibt sich aus dem Kräftepolygone für den unteren Knotenpunkt 1; man erhält: $\min V_1 = -\max D_1 \sin \varphi = -113^{t*}$, während in der Endvertikale ein Druck wirkt, welcher gleich dem Auflagerwiderstande A ist; es wird

$$\begin{array}{l} \min V_0 = -\overline{A''C} = -130,8^t \text{ bei vollbelasteter Brücke;} \\ \max V_0 = -\overline{B'B''} = -31,3^t \text{ bei unbelasteter Brücke.} \end{array}$$

Die vorstehend angegebenen Werthe V sind noch zu verbessern, da die ständige Belastung g nicht ausschliesslich in den Knotenpunkten angreift, die zur Aufnahme der Verkehrslast dienen. Wird angenommen, dass bei *untenliegender Fahrbahn* der Theil $g_0 = 0,45^t$ des Eigengewichtes g in den oberen Knotenpunkten angreift, so ist zu jeder der vorhin ermittelten Spannkräfte V_1 bis V_5 der Betrag: $-g_0 \lambda = -0,45 \cdot 3,6 = -1,6^t$ zu addiren, während V_0 zu ändern ist um $-\frac{1}{2}g_0 \lambda = -0,8^t$. Es ergeben sich dann die in die Fig. 300 eingeschriebenen Werthe.

Bei *obenliegender Fahrbahn* ($g_0 = 1,29^t$ und $g_u = 0,45^t$) ändern sich V_1 bis V_5 um je: $+g_u \lambda = +1,6^t$ und V_0 um $+\frac{1}{2}g_u \lambda = 0,8^t$; man erhält die in Fig. 301 angegebenen Spannkräfte.

Die Vertikalen des in der Fig. 302 dargestellten Trägers werden nur auf Zug beansprucht. Ihre grösste Anstrengung erfolgt, wenn die mittelste Achse einer Lokomotive bei der fraglichen Vertikale liegt. Durch diese Belastung entsteht

$$V_p = 13 + 13 \frac{2,2}{3,6} \cdot 2 = +28,9^t \text{ (s. Fig. 299),}$$

wozu die ständige Knotenlast $g_u \lambda = (1,74 - 0,45) 3,6 = 4,6^t$ zu addiren ist. Es folgt

$$\max V = 28,9 + 4,6 = +33,5^t \text{ und } \min V = +4,6^t.$$

Bei *obenliegender Fahrbahn* werden die Vertikalen des Netzwerks nur gedrückt; Fig. 303.

*) Dieser Werth darf wieder der Fig. 294a entnommen werden. Ersetzt man dort $O_1 = -113^t$ durch $U_2 = +113^t$, so erhält man das Kräftepolygon für den unbelasteten unteren Knoten 2.

§ 37.

Kräfteplan für einen Fischbauchträger (Eisenbahnbrücke).

Zahlenbeispiel. Tafel 3.

Die Stützweite des in der Fig. 307 dargestellten Trägers ist $= 36^m$, die Feldweite $= 3,6^m$. Die Knotenpunkte der unteren Gurtung liegen auf einem Kreisbogen, dessen Radius $r = 36^m$ beträgt. Ständige Belastung $g = 1,74$ für d. Meter Gleis; dieselbe zerfällt in $g_o = 1,29^t$ und $g_u = 0,45^t$. Die bewegliche Belastung besteht aus einem von drei Lokomotiven geführten Güterzuge, dessen Radstände und Achsenbelastungen in Fig. 111 angegeben sind. Die Brücke ist zweigleisig und besitzt zwei Hauptträger.

a. Die Spannkkräfte in Folge der ständigen Belastung wurden mittels eines Cremona'schen Kräfteplanes bestimmt. Derselbe wurde in Fig. 305 für die linke Hälfte des symmetrischen Trägers gezeichnet. Jeder Knoten der oberen Gurtung trägt die Last: $g_o \lambda = 1,29 \cdot 3,6 = 4,6^t$. Im Knoten 1 greift an: $\frac{1}{2} \cdot 0,45 (2,4 + 3,0) = 1,2^t$, im Knoten 5 die Last: $\frac{1}{2} \cdot 0,45 (3,0 + 3,6) = 1,3^t$ und in jedem der Knoten 5, 7, 9 die Last: $0,45 \cdot 3,6 = 1,6^t$. Es ergeben sich die folgenden Spannkkräfte*)

$O_{1g} = -53^t$	$U_{1g} = +60^t$	$D_{2g} = -4,2^t$	$D_{8g} = -2,9^t$
$O_{3g} = -55^t$	$U_{2g} = +60^t$	$D_{3g} = -1,9^t$	$D_{9g} = -2,1^t$
$O_{5g} = -56^t$	$U_{4g} = +60^t$	$D_{4g} = -3,6^t$	$D_{10g} = -2,5^t$
$O_{7g} = -57^t$	$U_{6g} = +59^t$	$D_{5g} = -1,8^t$	
$O_{9g} = -57^t$	$U_{8g} = +58^t$	$D_{6g} = -3,1^t$	
	$U_{10g} = +58^t$	$D_{7g} = -1,8^t$	

b. Spannkkräfte in den Gurtungen. Um den Einfluss der Verkehrslast zu erhalten, wurde das in Fig. 233 auf Seite 245 dargestellte Verfahren angewendet. Mit Ausnahme der Stäbe U_1 und U_2 besitzen alle Gurtstäbe die gleiche Horizontalprojektion $3,6^m$, und es wurde deshalb die Polweite des für den Güterzug in Figur 128 auf Tafel I gezeichneten Seilpolygons $= 4 \cdot 3,6 = 14,4^m$ gewählt. Da nun der Zeichnung in Fig. 128 der Kräftemaassstab: $1^m = 20^t$ zu Grunde liegt, so liefert die ohne weitere Erläuterung verständliche Figur 306**) die

*) In der Fig. 305 wurde der Zeiger g fortgelassen.

**) Zu beachten ist nur, dass in Fig. 306 die Knotenpunkte andere Ziffern tragen, wie in Fig. 128. So ist z. B. das y_{p4} der Figur 306 gleich dem y_{p2} der Fig. 128. Nach Auftragung der durch die Figur 128 bestimmten Werthe y_{p2} , y_{p3} , y_{p4} , y_{p6} , y_{p8} , y_{p10} wurden die den unteren Knotenpunkten entsprechenden y_p mit Hilfe des auf Seite 142 begründeten Näherungsverfahrens ermittelt.

Spannkkräfte O_{p1} bis O_{p9} und U_{p4} bis U_{p10} im Maassstabe: $1^m = 4 \cdot 20 = 80^t$. Man erhält

$$O_{p1} = -160^t; \quad O_{p3} = -162^t; \quad O_{p5} = -163^t; \quad O_{p7} = -164^t; \\ O_{p9} = -165^t;$$

$$U_{p4} = +184^t; \quad U_{p6} = +175^t; \quad U_{p8} = +169^t; \quad U_{p10} = +169^t.$$

Die Spannkraft U_{p1} ist $= -O_{p1} \sec \gamma_1$, wo γ_1 den Neigungswinkel von U_1 bedeutet, während sich U_{p2} nach Bestimmung von U_{p1} aus dem Kräftepolygone für den Knoten 1 ergibt. Auf diesem Wege wurde in Fig. 309 erhalten

$$U_{p1} = +181^t \text{ und } U_{p2} = +186^t.$$

Zu gleicher Zeit mit $max U_{p1}$ und $max U_{p2}$ entsteht in der Diagonale D_2 der grösste Druck $min D_{p2} = -16,1^t$.

Addirt man für jeden Gurtstab und für die Diagonale D_2 die durch die ständige und die bewegliche Belastung erzeugten Spannkkräfte, so erhält man die in die Fig. 310 eingetragenen Werthe. *)

In Fig. 311 sind die Spannkkräfte in einem Bogensehnenträger mit gleichen Abmessungen angegeben worden. Die Verkehrslast ist dieselbe wie vorhin und greift unten an. Weiter ist $g_u = 1,29^t$ und $g_o = 0,45^t$.

c. Spannkkräfte in den Diagonalen. Der von B aus vorrückende Lastenzug erzeugt in den linkssteigenden Diagonalen die Spannkkräfte $max D$, in den rechtssteigenden die Spannkkräfte $min D$. Zuerst wurde auf die in No. 149 beschriebene Art festgestellt, dass die Grenzwerte der Spannkkräfte D_3 bis D_{16} in Folge von Grundstellungen der Verkehrslast eintreten, während $max D_{17}$ und $min D_{18}$ dann entstehen, wenn die zweite Achse des Lastenzuges beim Knoten 18 liegt. Um nun beispielsweise $max D_7$ und $min D_8$ zu bestimmen, wurde der Stützpunkt A mit dem Knoten 7 durch die (blaue) Hilfslinie 7 verbunden und hierauf die bei 8 gemessene Ordinate A_8 des A -Polygons nach den Richtungen der Linie 7 und der oberen Gurtung (O_7) zerlegt, indem durch den Endpunkt von A_8 eine Wagerechte bis zum Schnittpunkte a_7 mit der Verlängerung der Linie 7 gezogen wurde. Legt man nun durch a_7 Parallelen zu D_7 und D_8 , welche die von A aus zu U_6 und U_8 gezogenen Parallelen in den Punkten b_7 und b_8 schneiden, so ist

$$\text{Strecke } \overline{b_7 a_7} = max D_{7p} \text{ und } \overline{b_8 a_7} = min D_{8p};$$

die erstere Spannkraft bedeutet einen Zug, die letztere einen Druck. Es leuchtet ein, dass das vorstehende Verfahren mit dem in No. 150 auf Seite 253 entwickelten übereinstimmt und sich von diesem nur durch eine etwas übersichtlichere Lage der Kräftepolygone unterscheidet. Die Zeiger p wurden in der Figur 307 weggelassen.

*) Es wurden für die Gurtungen und die Diagonale D_2 nur die (ohne Vorzeichen genommen) grössten Spannkkräfte angegeben; die kleinsten Spannkkräfte sind für alle diese Stäbe gleich den von der ständigen Last herrührenden.

Fig. 308 zeigt die Bestimmung von $max D_{p17}$ und $min D_{p18}$; der Kräftemaassstab ist doppelt so gross wie in Fig. 307. Die zweite Achse des Lastenzuges liegt beim Knoten 18. Der erste Radstand ist $e_1 = 1,4^m$, und es ist deshalb A gleich der im Abstände $1,4^m$ vom Knoten 18 gemessenen Ordinate des A -Polygons. Wird zunächst die im Knoten 16 angreifende Last $P' = P_1 \frac{e_1}{\lambda}$ (wobei $P_1 =$ Belastung der ersten Achse $= 13^t$) vernachlässigt, so ergibt sich auf dem vorhin beschriebenen Wege $max D_{p17} = \overline{ab}_{17}$ und $min D_{p18} = \overline{ab}_{18}$. Trägt man nun in den Winkel nab_{17} die senkrechte Strecke $dc = P'$ ein und zieht $ce \parallel U_{18}$, so geben (nach No. 154) die Strecken ac und ae beziehungsweise den Einfluss der Kraft P' auf die Spannkkräfte D_{17} und D_{18} an, und es entsteht deshalb, da der Einfluss von P' demjenigen von A entgegengesetzt ist:

$$max D_{p17} = \overline{cb}_{17} \text{ (Zug) und } min D_{p18} = \overline{eb}_{18} \text{ (Druck).}$$

Auf dem angegebenen Wege erhält man

$max D_{p3} = + 11,0^t$	$max D_{p11} = + 20,2^t$
$min D_{p4} = - 21,7^t$	$min D_{p12} = - 29,7^t$
$max D_{p5} = + 15,6^t$	$max D_{p13} = + 19,2^t$
$min D_{p6} = - 26,1^t$	$min D_{p14} = - 29,6^t$
$max D_{p7} = + 19,2^t$	$max D_{p15} = + 16,1^t$
$min D_{p8} = - 28,9^t$	$min D_{p16} = - 27,8^t$
$max D_{p9} = + 20,7^t$	$max D_{p17} = + 12,5^{t*})$
$min D_{p10} = - 30,2^t$	$min D_{p18} = - 31,0^{t*}).$

Bewegt sich nun der Eisenbahnzug in der Richtung von B nach A über die Brücke, so findet man durch Untersuchung des Spiegelbildes von Fig. 307 die Werthe

$min D_{p3} = min D_{p18} = - 31,0^t$	$min D_{p7} = - 29,6^t$
$max D_{p4} = max D_{p17} = + 12,5^t$	$max D_{p8} = + 19,2^t$
$min D_{p5} = - 27,8^t$	$min D_{p9} = - 29,7^t$
$max D_{p6} = + 16,1^t$	$max D_{p10} = + 20,2^t \text{ u. s. w.}$

Es genügt natürlich, die beiden Grenzwerte für jede Diagonale der linken Hälfte des symmetrischen Trägers anzugeben. Die Addition der durch die Verkehrslast und das Eigengewicht erzeugten Spannkkräfte liefert

$max D_3 = + 11,0 - 1,9 = + 9,1^t$	$max D_4 = + 12,5 - 3,6 = + 8,9^t$
$min D_3 = - 31,0 - 1,9 = - 32,9^t$	$min D_4 = - 21,7 - 3,6 = - 25,3^t$

u. s. w.

*) Liegt die erste Achse des von B vorrückenden Zuges bei Knoten 18, so entsteht $max D_{p17} = + 11,4^t$ und $min D_{p18} = - 25,6^t$.

$max D_5 = + 13,8$	$max D_8 = + 16,3$
$min D_5 = - 29,6$	$min D_8 = - 31,8$
$max D_6 = + 13,0$	$max D_9 = + 18,6$
$min D_6 = - 29,2$	$min D_9 = - 31,8$
$max D_7 = + 17,4$	$max D_{10} = + 17,7$
$min D_7 = - 31,4$	$min D_{10} = - 32,7.$

Die vorstehenden Zahlen wurden in der Fig. 310 übersichtlich zusammengestellt, während in der Fig. 311 die Spannkkräfte in den Diagonalen des Bogensehntträgers angegeben worden sind.

Anmerkung. Soll der beschriebene Kräfteplan zuverlässige Ergebnisse liefern, so müssen vor Allem die Parallelen zu den Gurtstäben $U_1, U_2, U_3 \dots$ sowie die Verlängerungen der Hilfslinien 3, 5, 7, \dots in Fig. 307 möglichst genau festgelegt werden. Zu diesem Zwecke empfiehlt es sich, diejenigen Punkte durch Rechnung zu bestimmen, in welchen die von A aus zu ziehenden Linien $U_2, U_3 \dots, 3, 5, 7, \dots$ eine Senkrechte schneiden, die in beliebigem (möglichst grossem) Abstände e vom Auflager A angenommen wird. Vorher werden die Höhen $h_1, h_3, h_5 \dots$ mit Hilfe der Kreisgleichung

$$h_m = \sqrt{r^2 - (\frac{1}{2}l - x_m)^2} - c \text{ wo } c = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}l^2}$$

berechnet. Man erhält (wegen $r = 36^m$ und $l = 36^m$): $c = 31,1769^m$ und hierauf

$$\text{für } \frac{1}{2}l - x_1 = 15,6^m, \quad h_1 = 1,268^m$$

$$\text{,, } \frac{1}{2}l - x_3 = 7 \cdot 1,8, \quad h_3 = 2,546^m$$

$$\text{,, } \frac{1}{2}l - x_5 = 5 \cdot 1,8, \quad h_5 = 3,680^m$$

$$\text{,, } \frac{1}{2}l - x_7 = 3 \cdot 1,8, \quad h_7 = 4,416^m$$

$$\text{,, } \frac{1}{2}l - x_9 = 1,8, \quad h_9 = 4,778^m.$$

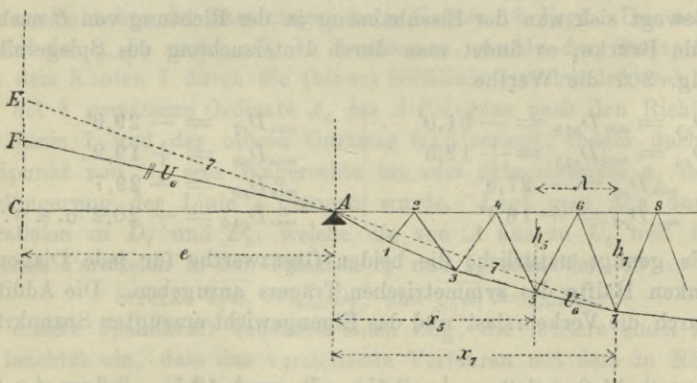


Fig. 312.

Nun kann man beispielsweise die von A aus zu U_6 gezogene Parallele durch Auftragen der Strecke

$$\overline{CF} = (h_7 - h_6) \frac{e}{\lambda}$$

festlegen und die Verlängerung der Linie 7 durch Auftragen der Strecke:

$$\overline{CE} = h_7 \frac{e}{x_7}.$$

Wählt man z. B. $e = 10 \lambda$ (was bei Aufzeichnung der Fig. 307 geschehen ist), so findet man: $\overline{CF} = 10 (h_7 - h_5) = 10 (4,416 - 3,680) = 7,36^m$ und $\overline{CE} = \frac{10}{3,5} h_7 = 12,617^m$.

§ 38.

Kräfteplan für einen Halbparabelträger (Eisenbahnbrücke) und Entwicklung einiger allgemeiner Formeln.

Zahlenbeispiel. Tafel 4.

Der zu untersuchende Träger (Fig. 316 auf Seite 311) besitzt eine Stützweite von 36^m und ist für dieselbe Belastung zu berechnen, wie die in den §§ 36 und 37 behandelten Fachwerke. Höhe am Ende: $h_0 = 3,00^m$, in der Mitte: $h_5 = 5,00^m$. Die Knotenpunkte der oberen Gurtung liegen auf einer Parabel. Der Träger soll schlaaffe Diagonalen erhalten. Zur Ermittlung der Spannkkräfte möge das Zimmermann'sche Verfahren dienen.

a. Die grössten Spannkkräfte der Gurtungen sind in die linke Hälfte der Fig. 314 (Tafel 4) eingezeichnet worden. y_1, y_2, y_3, \dots bedeuten die auf Tafel 1 (Fig. 128 und 130) gewonnenen Ordinaten des Polygons der grössten Momente*); die Polweite ist $H = 4 \lambda = 4 \cdot 3,6 = 14,4^m$. Da nun auf Tafel 1 der Kräfftemaassstab: $1^m = 20^t$ ist, so liefert Fig. 323 die grössten Spannkkräfte O und U im Maassstabe: $1^m = 4 \cdot 20 = 80^t$; (vergl. Seite 259, Absatz 2). Man findet $O_1 = -111^t$; $O_2 = -166^t$; $O_3 = -197^t$; $O_4 = -212^t$; $O_5 = -218^t$; $U_1 = 0$; $U_2 = +109^t$; $U_3 = +164^t$; $U_4 = +196^t$; $U_5 = +211^t$.

Gleichzeitig mit dem grössten Drucke O_1 entsteht der grösste Zug in der Diagonale D_1 und der grösste Druck V_0 in der Endvertikale. Aus dem Kräfftedreieck für den oberen Knoten 0 (Dreieck I in Fig. 314) ergibt sich

$$D_1 = +142,0^t \quad V_0 = -112,8^t. **)$$

*) Beschreibung in No. 82 Seite 140.

***) Es wird vorläufig vorausgesetzt, dass die gesammte ständige Belastung g in den Knoten der unteren Gurtung angreift. Die Diagonale D_1 wird stets gezogen, die Vertikale V_0 stets gedrückt. Bezeichnet man die ohne Vorzeichen zu nehmenden kleinsten und grössten Spannkkräfte in den Stäben O_1, D_1, V_0 beziehungsweise mit O'_1, D'_1, V'_0 und O''_1, D''_1, V''_0 , so besteht die Gleichung

$$\frac{O'_1}{O''_1} = \frac{D'_1}{D''_1} = \frac{V'_0}{V''_0} = \frac{y_{g1}}{y_1},$$

welche zu beachten ist, sobald bei der Querschnittsberechnung die zulässige Spannung vom Verhältniss der kleinsten zur grössten Inanspruchnahme abhängig gemacht werden soll.

b. Spannkraften in den Füllungsstäben. Wir wollen ein gemischtes rechnerisches und zeichnerisches Verfahren anwenden, so zwar, dass wir die Verhältnisse $M:\lambda$ für die in Frage kommenden Laststellungen mit Hilfe der folgenden Tabellen berechnen und hierauf das in No. 158 beschriebene Verfahren anwenden.

Zunächst sind die Stützenwiderstände A_2, A_3, \dots zu bestimmen, welche am linken Auflager durch einen Eisenbahnzug hervorgerufen werden, der von B aus bis Knoten 2, beziehungsweise bis Knoten 3 u. s. w. reicht. Die betreffenden Laststellungen wurden in Fig. 316 durch kräftige Striche angedeutet und sollen in der Folge als Zugstellung 2, Zugstellung 3, u. s. w. bezeichnet werden. Wir berechnen A auf die in No. 8 $\frac{1}{2}$ beschriebene Weise und benutzen die folgende Tabelle, welche für einen von drei vorwärts fahrenden Lokomotiven geführten Güterzug unter Voraussetzung der in Fig. 111, Seite 121 angegebenen Achslasten und Radstände berechnet ist.

Tabelle I.

1	2	3	4	1	2	3	4
n	c_1	\mathfrak{P}_n	\mathfrak{E}_n	n	c_1	\mathfrak{P}_n	\mathfrak{E}_n
1	0	13	0	26	61,4	270	9344,7
2	1,4	26	18,2	27	64,4	279	10154,7
3	2,8	39	54,6	28	67,4	288	10991,7
4	6,8	48	210,6	29	70,4	297	11855,7
5	8,3	57	282,6	30	73,4	306	12746,7
6	9,8	66	368,1	31	76,4	315	13664,7
7	13,8	79	632,1	32	79,4	324	14609,7
8	15,2	92	742,7	33	82,4	333	15581,7
9	16,6	105	871,5	34	85,4	342	16580,7
10	20,6	114	1291,5	35	88,4	351	17606,7
11	22,1	123	1462,5	36	91,4	360	18659,7
12	23,6	132	1647,0	37	94,4	369	19739,7
13	27,6	145	2175,0	38	97,4	378	20846,7
14	29,0	158	2378,0	39	100,4	387	21980,7
15	30,4	171	2599,2	40	103,4	396	23141,7
16	34,4	180	3283,2	41	106,4	405	24329,7
17	35,9	189	3553,2	42	109,4	414	25544,7
18	37,4	198	3836,7	43	112,4	423	26786,7
19	40,4	207	4430,7	44	115,4	432	28055,7
20	43,4	216	5051,7	45	118,4	441	29351,7
21	46,4	225	5699,7	46	121,4	450	30674,7
22	49,4	234	6374,7	47	124,4	459	32024,7
23	52,4	243	7076,7	48	127,4	468	33401,7
24	55,4	252	7805,7	49	130,4	477	34805,7
25	58,4	261	8561,7	50	133,4	486	36236,7

Berechnung von A_2 . Die Strecke $B2$ hat die Länge $8 \cdot 3,6 = 28,8^m$; ihr entspricht laut Tabelle I die Zuglänge $c_1 = 27,6^m$. Die Anzahl der

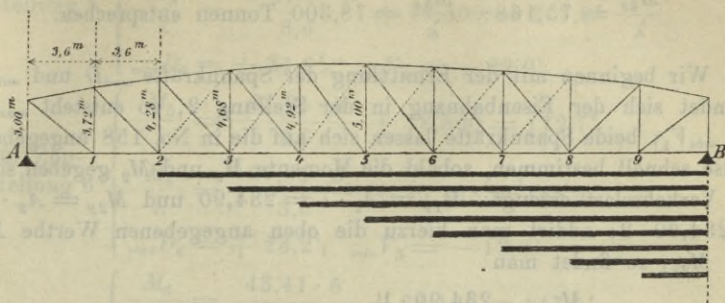


Fig. 316.

bei der Zugstellung 2 auf dem Balken ruhenden Lasten ist mithin: $n = 13$, und der Abstand der letzten Last vom Auflager B beträgt: $b_n = 28,8 - 27,6 = 1,2^m$. Man erhält: $\mathfrak{P}_n = 145^t$, $\mathfrak{S}_n = 2175,0^{tm}$ und

$$A_2 = \frac{1}{l} (\mathfrak{P}_n b_n + \mathfrak{S}_n) = \frac{1}{10\lambda} (145 \cdot 1,2 + 2175,0) = \frac{234,90}{\lambda}$$

Auf diese Weise sind die Werthe $A_2 \lambda$ bis $A_9 \lambda$ ermittelt und in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden.*)

Tabelle II.

Zugstellung $m =$	Strecke $\frac{Bm}{=}$	c_1	n	\mathfrak{P}_n	\mathfrak{S}_n	b_n	$A_m \lambda$
2	28,8	27,6	13	145	2175,0	1,2	234,90
3	25,2	23,6	12	132	1647,0	1,6	185,82
4	21,6	20,6	10	114	1291,5	1,0	140,55
5	18,0	16,6	9	105	871,5	1,4	101,85
6	14,4	13,8	7	79	632,1	0,6	67,95
7	10,8	9,8	6	66	368,1	1,0	43,41
8	7,2	6,8	4	48	210,6	0,4	22,98
9	3,6	2,8	3	39	54,6	0,8	8,58
	Meter	Meter		Tonnen	tm	Meter	tm

Ausser dem Eisenbahnzuge wirkt auf den Träger noch eine gleichförmige ständige Belastung: $g = 1,74^t$ f. d. Meter, welcher die (bereits auf Seite 266 berechneten) Werthe

*) Bei gleichen Feldweiten empfiehlt es sich (wie sogleich einleuchten wird), die Produkte $A \lambda$ an Stelle der Widerstände A zu berechnen.

$$\frac{M_{1g}}{\lambda} = 28,188; \quad \frac{M_{2g}}{\lambda} = 50,112; \quad \frac{M_{3g}}{\lambda} = 65,772;$$

$$\frac{M_{4g}}{\lambda} = 75,168; \quad \frac{M_{5g}}{\lambda} = 78,300 \text{ Tonnen entsprechen.}$$

Wir beginnen mit der Ermittlung der Spannkkräfte $_{max}D$ und $_{min}V$. Befindet sich der Eisenbahnzug in der Stellung 2, so entsteht $_{max}D_2$ und $_{min}V_1$; beide Spannkkräfte lassen sich auf die in No. 158 angegebene Weise schnell bestimmen, sobald die Momente M_1 und M_2 gegeben sind. Die Verkehrslast erzeugt: $M_{1p} = A_2 \cdot \lambda = 234,90$ und $M_{2p} = A_2 \cdot 2\lambda = 234,90 \cdot 2$; addirt man hierzu die oben angegebenen Werthe M_{1g} und M_{2g} , so findet man.

$$\frac{M_1}{\lambda} = \frac{234,90 \cdot 1}{3,6} + 28,188 = 93,4^t$$

$$\frac{M_2}{\lambda} = \frac{234,90 \cdot 2}{3,6} + 50,112 = 180,6^t$$

und kann nun das in der Figur 313 durch Schraffirung hervorgehobene Kräftepolygon (1) für den oberen Knotenpunkt 1 zeichnen. Es ergibt sich

$$_{max}D_2 = + 88,4^t, \quad _{min}V_1 = - 69,1^t.$$

Auf dieselbe Weise erhält man, unter der Annahme linkssteigender Diagonalen:*)

$$\text{für Zugstellung 3} \left\{ \begin{array}{l} \frac{M_2}{\lambda} = \frac{185,82 \cdot 2}{3,6} + 50,112 = 153,3^t \\ \frac{M_3}{\lambda} = \frac{185,82 \cdot 3}{3,6} + 65,772 = 220,6^t \\ \text{\textit{max}}D_3 = + 63,6^t, \quad \text{\textit{min}}V_2 = - 47,2^t \end{array} \right.$$

$$\text{für Zugstellung 4} \left\{ \begin{array}{l} \frac{M_3}{\lambda} = \frac{140,55 \cdot 3}{3,6} + 65,772 = 182,9^t \\ \frac{M_4}{\lambda} = \frac{140,55 \cdot 4}{3,6} + 75,168 = 231,3^t \\ \text{\textit{max}}D_4 = + 46,9^t, \quad \text{\textit{min}}V_3 = - 32,8^t \end{array} \right.$$

*) Zur Erzielung deutlicher Figuren wurden in den verschiedenen Feldern verschieden grosse Kräftemaassstäbe gewählt und neben den Kräftepolygonen angegeben. Der Längenmaassstab ist gleichgiltig; er lautet: $\lambda = 3,6^m = 4,2^cm$. Hervorzuheben ist, dass überall nur Grundstellungen des Eisenbahnzuges in Betracht kommen. Es wurde dies auf die in No. 149 beschriebene Weise festgestellt. Bei Ermittlung von $_{max}D_2$ und $_{min}V_1$ ist es gleichgiltig, ob die erste oder zweite Achse des von B vorrückenden Eisenbahnzuges beim Knoten 2 liegt.

$$\text{für Zugstellung 5} \left\{ \begin{array}{l} \frac{M_4}{\lambda} = \frac{101,85 \cdot 4}{3,6} + 75,168 = 188,3' \\ \frac{M_5}{\lambda} = \frac{101,85 \cdot 5}{3,6} + 78,300 = 219,8' \\ \max D_5 = + 34,6', \quad \min V_4 = - 22,2' \end{array} \right.$$

$$\text{für Zugstellung 6} \left\{ \begin{array}{l} \frac{M_5}{\lambda} = \frac{67,95 \cdot 5}{3,6} + 78,300 = 172,7' \\ \frac{M_6}{\lambda} = \frac{67,95 \cdot 6}{3,6} + 75,168 = 188,4' \\ \max D_6 = + 23,2', \quad \min V_5 = - 13,0' \end{array} \right.$$

$$\text{für Zugstellung 7} \left\{ \begin{array}{l} \frac{M_6}{\lambda} = \frac{43,41 \cdot 6}{3,6} + 75,168 = 147,5' \\ \frac{M_7}{\lambda} = \frac{43,41 \cdot 7}{3,6} + 65,772 = 150,2' \\ \max D_7 = + 12,8', \quad \min V_6 = - 5,1' \end{array} \right.$$

$$\text{für Zugstellung 8} \left\{ \begin{array}{l} \frac{M_7}{\lambda} = \frac{22,98 \cdot 7}{3,6} + 65,772 = 110,5' \\ \frac{M_8}{\lambda} = \frac{22,98 \cdot 8}{3,6} + 50,112 = 101,2' \\ \max D_8 = + 0,3', \quad \min V_7 = + 3,5' \end{array} \right.$$

Anmerkung 1. Die kleine Spannkraft $\max D_8$ konnte in Fig. 313 nicht deutlich dargestellt werden, sie erscheint dort = 0; um sie zu bestimmen, wähle man einen grösseren Kräftemaassstab, wenn dann auch das Kräftepolygon ausserhalb des Trägernetzes fällt. Will man D_8 berechnen, so findet man nach der auf Seite 273 abgeleiteten Formel (mit $h_8 = 4,28^m$ und $h_7 = 4,68^m$)

$$\max D \cos \varphi_8 = \frac{M_8}{h_8} - \frac{M_7}{h_7} = \frac{364,33}{4,28} - \frac{397,64}{4,68} = + 0,158'$$

und $\max D_8 = + 0,3'$.

Es möge an dieser Stelle noch eine bequeme Formel zur Berechnung der Spannkraft V_m abgeleitet werden. Führt man durch den Träger einen schrägen Schnitt, welcher die Stäbe O_m , V_m und U_{m+1} trifft, zerlegt jede am linken Trägertheile angreifende Kraft in eine senkrechte und eine wagerechte Seitenkraft und setzt die Summe aller senkrechten Seitenkräfte = 0, so erhält man (Fig. 317)

$$V_m + O_m \sin \beta_m + Q = 0,$$

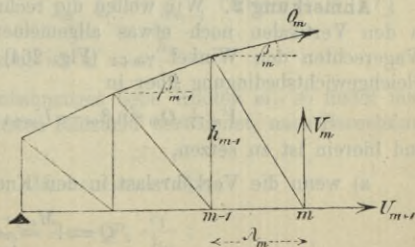


Fig. 317.

wo (nach Seite 273)

$$O_m = - \frac{M_m}{h_m \cos \beta_m}.$$

Da die Last in den Knoten der unteren Gurtung angreift und der untere Knoten m zum linken Trägertheile gehört, so ist die Querkraft

$$Q = \frac{M_{m+1} - M_m}{\lambda_{m+1}}$$

und man erhält

$$V_m = \frac{M_m - M_{m+1}}{\lambda_{m+1}} + \frac{M_m}{h_m} \operatorname{tg} \beta_m.$$

Setzt man: $\operatorname{tg} \beta_m = \frac{h_m - h_{m-1}}{\lambda_m}$, so findet man für den Fall gleich grosser Feldweiten den bequemen Ausdruck:

$$(I) \quad V_m \lambda = M_m \frac{2h_m - h_{m-1}}{h_m} - M_{m+1}.$$

Beispielsweise ergibt sich hiernach für die gleichzeitig mit $\max D_8$ entstehende Spannkraft $\min V_7$ die Gleichung

$$\begin{aligned} V_7 \cdot 3,6 &= M_7 \frac{2h_7 - h_6}{h_7} - M_8 \\ &= 397,64 \frac{2 \cdot 4,68 - 4,92}{4,68} - 364,33 = + 12,92 \end{aligned}$$

woraus

$$\min V_7 = + 3,5'.$$

Selbstverständlich wird man, wenn die Spannkräfte D und V mittels der hier angewandten Formeln bestimmt werden sollen, nicht erst die Verhältnisse $M:\lambda$, sondern sofort die Momente berechnen. Bei der Zugstellung 8 entstehen z. B. in Folge der Verkehrslast die Momente: $M_{7p} = A_8 \cdot 7\lambda = 7 \cdot 22,98$ und $M_{8p} = A_8 \cdot 8\lambda = 8 \cdot 22,98$, wozu dann M_{7g} und M_{8g} zu addiren sind. Für das Moment M_{mg} findet man die Gleichung

$$M_{mg} = \frac{1}{2} g x_m (l - x_m) = \frac{1}{2} 1,74 \lambda^2 m (10 - m) = 11,2752 m (10 - m)$$

aus welcher sich für $m = 1, 2, 3, 4, 5$ der Reihe nach die Werthe ergeben

$$M_g = 101,48; 180,40; 236,78; 270,60; 281,88 \text{ tm.}$$

Anmerkung 2. Wir wollen die rechnerische Bestimmung der Spannkräfte in den Vertikalen noch etwas allgemeiner behandeln. Bildet U_{m+1} mit der Wagerechten den Winkel γ_{m+1} (Fig. 264), so geht die vorhin angeschriebene Gleichgewichtsbedingung über in

$$V_m + O_m \sin \beta_m - U_{m+1} \sin \gamma_{m+1} + Q = 0,$$

und hierein ist zu setzen,

a) wenn die Verkehrslast in den Knoten der unteren Gurtung angreift

$$Q = \frac{M_{m+1} - M_m}{\lambda_{m+1}},$$

b) wenn sie in den Knoten der oberen Gurtung angreift $Q = \frac{M_m - M_{m-1}}{\lambda_m}$.

Beachtet man noch die Gleichungen

$$O_m = -\frac{M_m}{h_m \cos \beta_m}; \quad U_{m+1} = +\frac{M_m}{h_m \cos \gamma_{m+1}},$$

so gelangt man zu den bequemen Formeln

$$(II) \quad V_m \lambda_{m+1} = M_m \left[1 + \frac{\lambda_{m+1}}{h_m} (\operatorname{tg} \beta_m + \operatorname{tg} \gamma_{m+1}) \right] - M_{m+1} \text{ (Last unten)}$$

$$(III) \quad V_m \lambda_m = M_{m-1} - M_m \left[1 - \frac{\lambda_m}{h_m} (\operatorname{tg} \beta_m + \operatorname{tg} \gamma_{m+1}) \right] \text{ (Last oben).}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass — wie im vorliegenden Zahlenbeispiele — die gesammte ständige Belastung auf die Knotenpunkte derjenigen Gurtung vertheilt wird, an welcher die Verkehrslast angreift. Nachträglich ist im ersten Falle zu V_m der Betrag: $-\frac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1})$ zu addiren, im zweiten Falle der Betrag: $+\frac{1}{2} g_u (\lambda_m + \lambda_{m+1})$.

Liegt die Fahrbahn zwischen den beiden Gurtungen, so gelten für die Theile der Vertikalen $\frac{\text{oberhalb}}{\text{unterhalb}}$ der Fahrbahn die für den Fall $\frac{\text{unten}}{\text{oben}}$ angreifender Belastung abgeleiteten Formeln.

Die Formeln (II) und (III) setzen linkssteigende Diagonalen voraus. Bei rechtssteigenden Diagonalen betrachte man das Spiegelbild des Trägers.

Hervorgehoben werde, dass das Eigenthümliche der vorstehenden Entwicklungen darin besteht, *sämmtliche Spannkkräfte O, U, D, V durch die auf die Knotenpunkte bezogenen Angriffsmomente M auszudrücken.*

Anmerkung 3. Die für die Spannkkräfte D und V gegebenen Formeln lassen sich leicht noch weiter entwickeln. Gesucht sei beispielsweise $\max D_{m,p}$ und $\min V_{(m-1),p}$, in Folge der Verkehrslast, letztere Spannkraft für den Fall *unten* liegender Fahrbahn. Rückt der Eisenbahnzug von B aus bis m vor, so entsteht am linken Auflager der Widerstand A_m , welcher mit Hilfe der Tabelle I schnell berechnet werden kann; derselbe erzeugt die Momente

$$M_{m-1} = A_m x_{m-1}, \quad M_m = A_m x_m,$$

und es ergibt sich

$$(IV) \quad \max D_{m,p} \cos \varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} = A_m \varepsilon,$$

$$(V) \quad \min V_{(m-1),p} = -A_m \varepsilon'. \text{ (nach Gleich. II),}$$

$$\text{wo } \varepsilon = \frac{x_m}{h_m} - \frac{x_{m-1}}{h_{m-1}} \text{ und } \varepsilon' = \frac{x_m}{\lambda_m} - \frac{x_{m-1}}{\lambda_{m-1}} \left[1 + \frac{\lambda_m}{h_{m-1}} (\operatorname{tg} \beta_{m-1} + \operatorname{tg} \gamma_m) \right].$$

Bei wagerechter unterer Gurtung ist $\varepsilon' = \varepsilon \frac{h_m}{\lambda_m}$.

Liegt die zweite Last des Eisenbahnzuges beim Knoten m , so findet man, wenn P_1 die erste Last und e_1 den ersten Radstand bezeichnet, nach Berechnung des Auflagerdruckes A

$$M_{m-1} = A x_{m-1}; \quad M_m = A x_m - P_1 e_1;$$

$$(VI) \quad \max D_{m,p} \cos \varphi_m = A \varepsilon - P_1 \frac{e_1}{h_m};$$

$$(VII) \quad \min V_{(m-1),p} = -A \varepsilon' + P_1 \frac{e_1}{\lambda_m}.$$

Bezüglich der Bezeichnungen x und x' wird auf Fig. 267 verwiesen. In Spalte 13 deute man durch Eintragung von P_1 oder P_2 an, dass die erste oder zweite Last des von B aus vorrückenden Eisenbahnzuges beim Knoten m liegt. Spalte 15 ist nur auszufüllen, wenn Last P_2 in m liegt. In Spalte 19 kann auch $\left(\frac{d_m}{\lambda_m}\right)^2$ angegeben werden, an Stelle von $\cos \varphi_m$. Man rechnet dann

$$\max D_m = \max D_m \cos \varphi_m \cdot \sqrt{\left(\frac{d_m}{\lambda_m}\right)^2}$$

mittels Logarithmen. Bei gleichen Feldweiten achte man während der ganzen Rechnung darauf, dass $x_m = m\lambda$, $x_{m-1} = (m-1)\lambda$ u. s. w. ist. Die Werthe A werden in einer besonderen Tabelle zusammengestellt. Vergl. Seite 313.

In ähnlicher Weise lassen sich die Tabellen zur Berechnung von $\min V$, $\max V$ anordnen. Nach der Ansicht des Verfassers ist es indess zweckmässiger, die gefährlichsten Laststellungen mittels Zeichnung zu bestimmen und dann wie in Anmerkung 1 zu verfahren, also für jede Zugstellung die Momente zu berechnen und in die allgemeinen Formeln einzusetzen. Die Tabelle, welche $\max D$ und $\min V$ angibt, würde z. B. für den vorliegenden Halbparabelträger wie folgt einzurichten sein.

m	Zugstellung	$A\lambda$	Momente M_p	Momente M_g	$\frac{d_m^2}{\lambda^2}$	h_{m-1} u. h_m	$\max D_m = \left(\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}\right) \sqrt{\frac{d^2}{\lambda^2}}$	$\min V_{m-1} = \frac{1}{\lambda} \left(M_{m-1} \frac{2h_{m-1} - h_{m-2}}{h_{m-1}} - M_m \right)$
2	2	234,90	$M_1 = 234,9 \cdot 1$ $M_2 = 234,9 \cdot 2$	$M_1 = 101,48$ $M_2 = 180,40$	26,7984	$h_0 = 3,00_m$ $h_1 = 3,72$ $h_2 = 4,28$	$\max D_2 = + 88,4$ Tonnen	$\min V_1 = - 69,1$ „
3	3	185,82	$M_2 = 185,82 \cdot 2$ $M_3 = 185,82 \cdot 3$	$M_2 = 180,40$ $M_3 = 236,78$	31,2764	$h_1 = 3,72$ $h_2 = 4,28$ $h_3 = 4,68$	$\max D_3 = + 63,6$ „	$\min V_2 = - 47,2$ „

u. s. w.

Es leuchtet wohl ein, dass die Bildung solcher Tabellen die Prüfung der Rechnung ausserordentlich erleichtert.

Wir fahren nun in der Erläuterung unseres Kräfteplanes fort. Nimmt man im neunten Felde zunächst eine linkssteigende Diagonale an, so findet man, dass dieselbe in Folge der Zugstellung 9 auf Druck beansprucht wird. Da die Diagonalen aber schlaff sein sollen, so ist eine rechtssteigende Diagonale nöthig. Es ergibt sich

$$\text{für Zugstellung 9} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{M_8}{\lambda} = \frac{8,58 \cdot 8}{3,6} + 50,112 = 69,2^t \\ \frac{M_9}{\lambda} = \frac{8,58 \cdot 9}{3,6} + 28,188 = 49,6^t \\ \left(\min D_9 = \min D_2 = +14,6^{t*} \right); \max V_9 = \max V_1 = -10,0^{t**}. \end{array} \right.$$

Aus den vorstehenden Rechnungen folgt, dass die sechs mittelsten Felder des Trägers mit Gegendiagonalen auszurüsten sind, welche durch die in der Fig. 319 zusammengestellten Spannkkräfte beansprucht werden. Von den berechneten grössten Drücken $\min V_2$ bis $\min V_7$ sind natürlich nur die ersten vier maassgebend, weil $\min V_6 < \min V_4$ ist, während $\min V_7$ sogar positiv ist.

Es sind jetzt nur noch die Spannkkräfte $\max V_2, \max V_3, \max V_4, \max V_5$ in denjenigen Vertikalen zu bestimmen, an denen Gegendiagonalen angreifen.

Der grösste positive Werth von V_5 entsteht gleichzeitig mit dem grössten Drucke O_5 und ergibt sich aus dem für den oberen Knoten 5 in Fig. 315 auf Tafel 4 gezeichneten Krätedreieck. Man findet: $\max V_5 = +9,7^t$.

Die Spannkkräfte $\max V_2, \max V_3, \max V_4$ sollen nach dem dritten der in No. 161 beschriebenen Verfahren ermittelt werden. Die Vertikalen mögen von B aus mit den Ziffern 0, 1, 2, . . . versehen werden, Fig. 318. Um $\max V_2$ zu erhalten, wird von B aus ein Eisenbahnzug vorgeschoben, dessen zweite Last beim Knoten 2 steht; derselbe ruft am linken Auflager den mittels der Tabelle I berechneten Widerstand

$$A = \frac{1}{l} (\mathfrak{B}_n b_n + \mathfrak{S}_n) = \frac{1}{10\lambda} (57 \cdot 0,3 + 282,6) = \frac{29,97}{\lambda}$$

hervor und erzeugt die Momente

$$M_{3,p} = A \cdot 7\lambda = 29,97 \cdot 7 = 209,79^{tm}$$

$$M_{2,p} = A \cdot 8\lambda - 13 \cdot 1,4 = 29,97 \cdot 8 - 18,2 = 221,56^{tm},$$

*) Diagonale D_2 erleidet ihre kleinste Inanspruchnahme, wenn der Eisenbahnzug von A aus bis Knoten 1 vorrückt, und in D_9 entsteht $\max D_9 = \max D_2 = +88,4^t$, wenn der Zug von A bis zum Knoten 8 vorrückt.

**) Soll $\max V_9$ mittels der vorhin abgeleiteten Gleichung (I) berechnet werden, so betrachte man das Spiegelbild des Trägers, damit aus der rechtssteigenden Diagonale eine linkssteigende wird. Man findet dann (mit $M_9 = 178,70$; $M_8 = 249,13$; $h_9 = 3,72$; $h_{10} = 3,00$):

$$\max V_9 \lambda = 178,70 \frac{2 \cdot 3,72 - 3,00}{3,72} - 249,13 = -35,85 \text{ und } \max V_9 = -10,0^t$$

Das Dreieck 2''' III 2 ist das Kräftepolygon für den oberen Knotenpunkt 2.

Um ${}_{max}V_3$ zu bestimmen, wird für die Zugstellung (b) in Fig. 318 berechnet

$$A = \frac{52,65}{\lambda}, \text{ sodann } \frac{M_4}{\lambda} = \frac{52,65 \cdot 6}{3,6} + 75,168$$

$$\frac{M_3}{\lambda} = \frac{52,65 \cdot 7 - 13 \cdot 1,4}{3,6} + 65,772$$

$$b = \frac{4M_3 - 3M_2}{\lambda} = 163,6'.$$

Schliesslich ergibt sich für die Zugstellung (c) in Fig. 318 behufs Bestimmung von ${}_{max}V_4$

$$A = \frac{79,79}{\lambda}; \quad \frac{M_5}{\lambda} = \frac{79,79 \cdot 5}{3,6} + 78,300$$

$$\frac{M_4}{\lambda} = \frac{79,79 \cdot 6 - 13 \cdot 1,4}{3,6} + 75,168$$

$$b = \frac{5M_4 - 4M_5}{\lambda} = 259,0'.$$

Man erhält ${}_{max}V_3 = + 6,6'$ und ${}_{max}V_4 = + 9,0'$.

Bislang wurde vorausgesetzt, dass die gesammte ständige Belastung $g = 1,74'$ in den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreift. Wird

durch B abschneiden, während β_2 und β_3 die Neigungswinkel von O_2 und O_3 gegen die Wagerechte bezeichnen. Da nun $a = 3h_2 - 2h_3$, so folgt auch

$$(II) \quad {}_{max}V_2 = \frac{3M_2 - 2M_3}{3h_2 - 2h_3} (\text{tg } \beta_2 - \text{tg } \beta_3)$$

oder, wenn die Zeiger 2 und 3 durch die allgemeineren: m und $m+1$ ersetzt und ungleiche Feldweiten angenommen werden

$$(III) \quad {}_{max}V_m = \frac{x_{m+1} M_m - x_m M_{m+1}}{x_{m+1} h_m - x_m h_{m+1}} (\text{tg } \beta_m - \text{tg } \beta_{m+1}).$$

Liegen die Knoten der oberen Gurtung (wie im vorliegenden Falle) auf einer Parabel vom Pfeile f , so findet man: $\text{tg } \beta_m - \text{tg } \beta_{m+1} = \frac{4f}{l^2} (\lambda_m + \lambda_{m+1})$ und bei gleichen Feldweiten

$$(IV) \quad {}_{max}V_m = \frac{(m+1) M_m - m M_{m+1}}{(m+1) h_m - m h_{m+1}} \cdot \frac{8f\lambda}{l^2}.$$

Für unser Beispiel ist $f = 2,0^m$ also: $\frac{8f\lambda}{l^2} = \frac{8 \cdot 2 \cdot \lambda}{36 \cdot 10 \lambda} = \frac{1}{22,5}$ und

$${}_{max}V_2 = \frac{3M_2 - 2M_3}{3h_2 - 2h_3} \cdot \frac{1}{22,5}.$$

Mit $h_2 = 4,28^m$ und $h_3 = 4,68^m$ folgt nach Einsetzen der oben für M_2 und M_3 angegebenen Werthe: ${}_{max}V_2 = + 4,0'$.

nun angenommen, dass der Theil $g_0 = 0,45^t$ an der oberen Gurtung wirkt, so ist zu jeder der berechneten Spannkkräfte V der Werth:

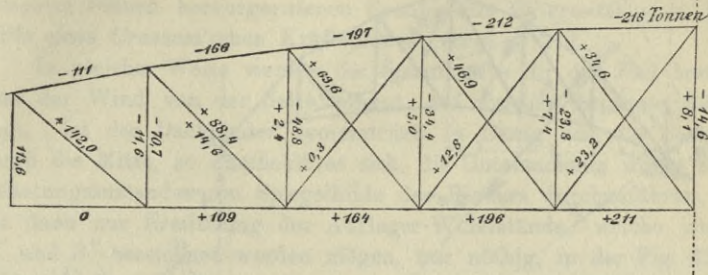


Fig. 319.

$-g_0 \lambda = -0,45 \cdot 3,6 = -1,6^t$ zu addiren, ausgenommen Spannkraft V_0 , zu welcher nur der Betrag $-0,8^t$ hinzutritt. Es ergeben sich dann die in die Fig. 319 eingeschriebenen Werthe.

§ 39.

Ueber die Berechnung von Dachbindern.

Bei der Berechnung eines Dachbinders empfiehlt es sich im Allgemeinen, die Einflüsse von Winddruck, Schneedruck und Eigengewicht getrennt zu bestimmen. Der Gang der auszuführenden Untersuchungen soll hier für den Fall besprochen werden, dass die Dachbinder einander parallel sind.

170. Einfluss des Winddruckes. Es möge der in Fig. 320 dargestellte sichelförmige Dachbinder untersucht werden. Die auf die Dachflächen $0 I, I II, II III$ wirkenden Winddrücke seien W_1, W_2, W_3 . Besitzen die Strecken $0 I, I II, II III$ die Längen o_1, o_2, o_3 und schliessen sie mit der Windrichtung (v) beziehungsweise die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ein, so findet man

$$W_1 = w e o_1 \sin^2 \alpha_1; \quad W_2 = w e o_2 \sin^2 \alpha_2; \quad W_3 = w e o_3 \sin^2 \alpha_3,$$

wo

e = Abstand zweier benachbarter Binder,

w = Druck auf die Einheit einer vom Winde rechtwinklig getroffenen ebenen Fläche.

Man pflegt durchschnittlich $w = 120^b$ f. d. qm anzunehmen.

Um W_1 zu bestimmen, berechne man die Belastung $w e o_1$, stelle dieselbe in irgend einem Kräftemaasstabe durch die dem Stabe $0 I$

parallele Strecke $R1$ dar, Fig. 320a, und fälle vom Punkte 1 das Loth $11'$ auf eine durch R zur Windrichtung gezogene Parallele und von $1'$ auf $R1$ das Loth $1'1''$. Man erhält: Winddruck $W_1 =$ Strecke $1'1''$. Ganz

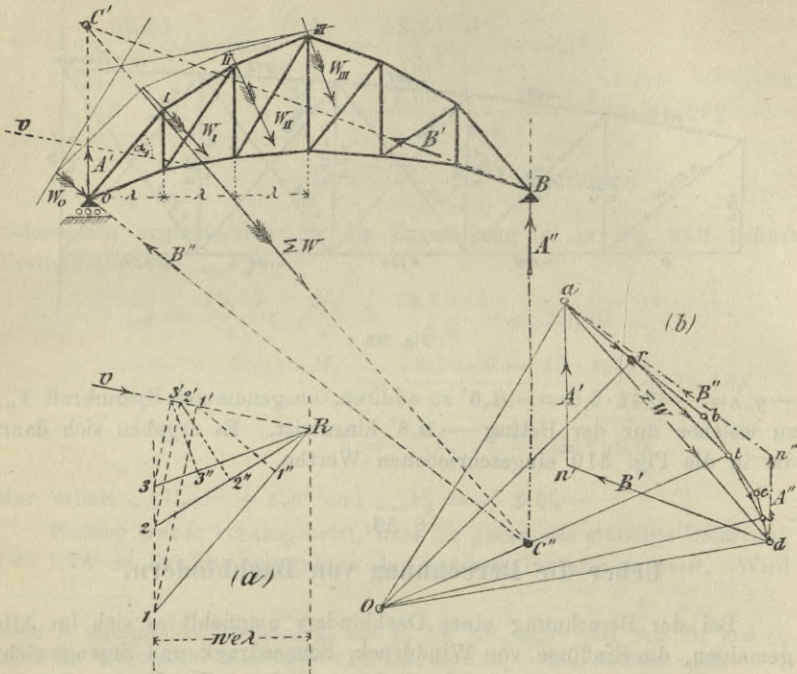


Fig. 320.

ebenso werden W_2 und W_3 gefunden. In Fig. 320 sind gleiche Feldweiten λ angenommen worden; es besitzen dann die Winddrücke W_1 , W_2 , W_3 die gleiche Horizontalprojektion $we\lambda$.

Reiht man W_1 , W_2 , W_3 zu einem Kräftezuge aneinander, indem man (Fig. 320b)

$$\overline{ab} = W_1; \quad \overline{bc} = W_2; \quad \overline{cd} = W_3$$

macht (wobei $ab \perp 0I$, $bc \perp III$, $cd \perp II III$), und halbiert hierauf die Strecken ab , bc , cd in den Punkten r , t , s , so stellen die Strecken ar , rt , ts , sd nach Grösse, Richtung und Sinn beziehungsweise die Belastungen W_0 , W_I , W_{II} , W_{III} der Knoten 0 , I , II , III dar; die Lage ihrer Mittelkraft: $\Sigma W = \overline{ad}$ kann mit Hilfe eines Seilpolygons bestimmt werden.

Um nun die Gegendrücke A' und B' der Auflager A und B , von denen das erstere auf wagerechter Bahn verschiebbar und das letztere

fest sein möge, zu bestimmen, wird der senkrecht gerichtete Widerstand A' mit ΣW in C' zum Schnitt gebracht, durch die Punkte C' und B die Richtung des Widerstandes B' festgelegt und $an' \parallel C'A$ sowie $dn' \parallel BC'$ gezogen. Man findet $\overline{n'a} = A'$ und $\overline{dn'} = B'$ und ist jetzt im Stande, die durch den vorliegenden Belastungsfall in den einzelnen Stäben hervorgerufenen Spannkkräfte zu ermitteln, z. B. mit Hilfe eines Cremona'schen Kräfteplanes (vergl. § 27).

In gleicher Weise werden die Spannkkräfte für den Fall bestimmt, dass der Wind von der Seite kommt, auf welcher das feste Auflager liegt. Ist der Dachbinder symmetrisch in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte, so empfiehlt es sich, die Untersuchung dieses zweiten Belastungszustandes am Spiegelbilde des Binders durchzuführen. Man hat dann zur Ermittlung der Auflager-Widerstände, welche jetzt mit A'' und B'' bezeichnet werden mögen, nur nöthig, in der Fig. 320 die beiden Auflager mit einander zu vertauschen, und erhält die in jener Figur durch strichpunktirte Linien dargestellten Werthe: $\overline{n''a} = B''$ und $\overline{dn''} = A''$.

171. Einfluss des Schneedrucks und des Eigengewichtes.

Bei Untersuchung der Einwirkung des Schneedrucks auf Dachbinder, deren Stäbe nicht durchweg in Folge gänzlicher Belastung am ungünstigsten beansprucht werden, beschränkt man sich meistens darauf, den Fall gänzlicher Belastung mit demjenigen der Belastung der linken, beziehungsweise rechten Dachhälfte zu vergleichen. Ist dann der Binder symmetrisch in Bezug auf die Senkrechte durch seine Mitte, und darf das Eigengewicht als eine gleichförmige, ausschliesslich auf die Knoten der oberen Gurtung vertheilte Belastung angesehen werden (was häufig der Fall ist), so lassen sich die Grenzwerte sämmtlicher Spannkkräfte mit Hilfe eines einzigen Kräfteplanes feststellen. Man nehme zunächst nur die rechte Dachhälfte gleichmässig belastet an, und zwar mit $q = p + g$ f. d. Längeneinheit, wo $g =$ ständige Belastung und $p =$ Schneedruck (Fig. 321), vertheile die Belastung auf die Knotenpunkte und ermittle nach irgend einem der beschriebenen Verfahren die in den Stäben hervorgerufenen Spannkkräfte. Für irgend einen Stab der linken Trägerhälfte möge sich die Spannkraft S' ergeben, für den entsprechenden Stab der rechten Hälfte die Spannkraft S'' .

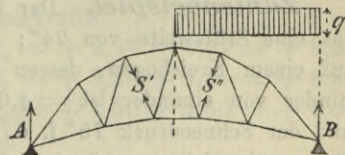


Fig. 321.

Wird nun gänzliche Belastung mit q vorausgesetzt (Fig. 322), so entsteht offenbar

$$(1) \quad S = S' + S''.$$

Wird die linke Dachhälfte mit g , die rechte mit q belastet, Fig. 323, so entsteht in einem Stabe der linken Trägerhälfte

$$(2) \quad S = S' + \frac{g}{q} S''.*)$$

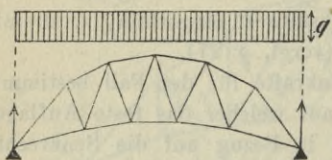


Fig. 322.

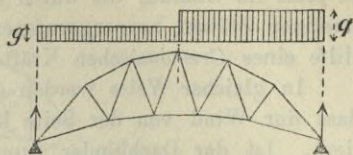


Fig. 323.

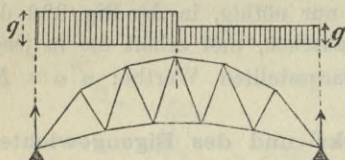


Fig. 324.

Ist schliesslich die rechte Dachhälfte mit g und die linke mit q belastet, so ergibt sich für einen Stab der linken Hälfte

$$(3) \quad S = \frac{g}{q} S' + S''.$$

Die Spannkkräfte der Gurtstäbe nehmen bei gänzlicher Belastung des Trägers ihre grössten Zahlenwerthe an; sie werden deshalb mittels Gleichung (1) bestimmt. Hingegen sind die Kräfte S der Füllungsstäbe für einseitige Belastung nach den Gleichungen (2) und (3) zu berechnen.

Ist die ständige Belastung keine gleichförmig vertheilte, oder ist es unzulässig, die gesammte Last g ausschliesslich auf die Knoten der oberen Gurtung zu vertheilen, so setze man in den vorstehender Entwicklungen zunächst $g = 0$ und bestimme hierauf den Einfluss der ständigen Belastung mittels eines besonderen Kräfteplanes.

Zahlenbeispiel. Der in der Fig. 325 dargestellte Dachbinder hat eine Stützweite von 24^m ; die Knoten der oberen Gurtung liegen auf einem Kreisbogen, dessen Radius $= 20^m$ ist. Der Abstand der Binder von einander ist $= 4,0^m$, die ständige Belastung beträgt 50^k und der Schneedruck 75^k f. d. qm der Horizontalprojektion der Dachfläche; also ist $g = 50 \cdot 4 = 200^k = 0,2^t$; $p = 75 \cdot 4 = 300^k = 0,3^t$ und $q = g + p = 0,5^t$. Die gesammte ständige Belastung möge auf die Knoten der oberen Gurtung vertheilt werden. Streng genommen greift allerdings ein Theil des Bindergewichts in den Knoten der unteren

*) Die Belastung der rechten Dachhälfte erzeugt für sich allein S' . Wäre nur die linke Dachhälfte und zwar mit q belastet, so würde in dem Stabe der linken Trägerhälfte S'' entstehen; tritt g an die Stelle von q , so ist S'' im Verhältniss $g : q$ zu verkleinern. Durch diese Ueberlegung gelangt man zur Gleichung (2).

Gurtung an, doch ist derselbe, verglichen mit dem Gewichte der Pfetten und der Dachdeckung in der Regel so gering, dass die oben gemachte Annahme vollkommen zulässig ist.

Zunächst wird der Einfluss der auf die rechte

Dachhälfte wirkenden Last q untersucht. Der Knoten (3) wird hierbei mit $\frac{1}{2} q \lambda = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 4,0$

$= 1,0^t$ belastet und jeder der Knoten (1) und (2) mit $0,5 \cdot 4,0 = 2,0^t$. Man erhält

$$A = 2,0 \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{6} \right) + 1,0 \frac{3}{6} = 1,5^t; \quad B = 3,5^t*$$

und findet (beispielsweise mit Hilfe eines Cremona'schen Planes) die in der folgenden Tabelle zusammengestellten, in Tonnen ausgedrückten Spannkraften S' und S'' .

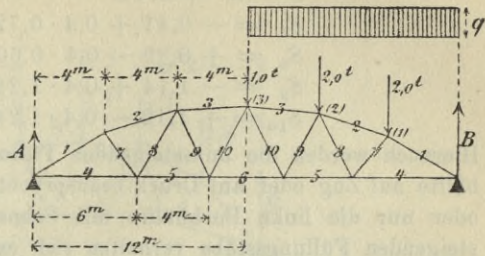


Fig. 325.

Gurtungen				Füllungsstäbe			
Linke Trägerhälfte		Rechte Trägerh.		Linke Trägerhälfte		Rechte Trägerh.	
Stab	S'	Stab	S''	Stab	S'	Stab	S''
1	- 2,98	1	- 6,95	7	+ 0,72	7	- 0,41
2	- 3,19	2	- 6,03	8	- 0,60	8	+ 0,39
3	- 3,97	3	- 5,01	9	+ 1,26	9	- 1,14
4	+ 2,57	4	+ 6,01	10	- 1,24	10	+ 1,12
5	+ 3,33	5	+ 5,56				
6	+ 4,50	6	+ 4,50				

Nun entstehen bei gänzlicher Belastung des Trägers mit q (Fig. 322) in den Stäben der Gurtungen die Spannkraften

$$S_1 = - 2,98 - 6,95 = - 9,93^t \quad S_4 = + 2,57 + 6,01 = + 8,58^t$$

$$S_2 = - 3,19 - 6,03 = - 9,22^t \quad S_5 = + 3,33 + 5,56 = + 8,89^t$$

$$S_3 = - 3,97 - 5,01 = - 8,98^t \quad S_6 = + 4,50 + 4,50 = + 9,00^t$$

Für die Füllungsstäbe ergibt sich

a. Im Belastungsfall Fig. 323.

$$S = S' + \frac{q}{q} S'' = S' + 0,4 S''$$

$$S_7 = + 0,72 - 0,4 \cdot 0,41 = + 0,56^t$$

$$S_8 = - 0,60 + 0,4 \cdot 0,39 = - 0,44^t$$

$$S_9 = + 1,26 - 0,4 \cdot 1,14 = + 0,80^t$$

$$S_{10} = - 1,24 + 0,4 \cdot 1,12 = - 0,79^t$$

*) B bedeutet den Stützenwiderstand nach Abzug von $\frac{1}{2} q \lambda$.

der Auflagersenkrechten A den Abstand $m'\lambda$, und die Knotenbelastung rechts neben tt von B den Abstand $m''\lambda$. Werden zunächst sämt-

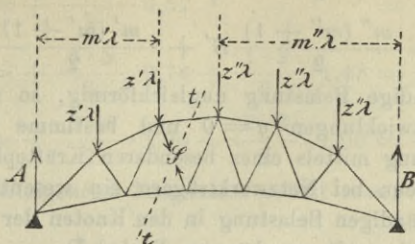


Fig. 327.

liche Lasten $z'\lambda$ entfernt, so greift links von tt nur die äussere Kraft

$$A = \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots + \frac{m''}{n} \right) z''\lambda = \frac{m''(m''+1)}{2} \frac{z''}{q} \frac{q\lambda}{n}$$

$$= \frac{m''(m''+1)}{2} \frac{z''}{q} A'$$

an, und es entsteht deshalb die Spannkraft

$$S = \frac{m''(m''+1)}{2} \frac{z''}{q} S',$$

und ebenso findet man, dass die Lasten $z'\lambda$ für sich allein die Spannkraft

$$S = \frac{m'(m'+1)}{2} \frac{z'}{q} S''$$

hervorbringen. Im Ganzen entsteht also:

$$S = \frac{m''(m''+1)}{2} \frac{z''}{q} S' + \frac{m'(m'+1)}{2} \frac{z'}{q} S''.$$

Gehört der fragliche Stab einer *Gurtung* an, so ist gänzliche Belastung des Trägers vorauszusetzen, also $z' = z'' = q$ einzuführen. Man findet dann

$$(1) \quad S = \frac{m''(m''+1)}{2} S' + \frac{m'(m'+1)}{2} S''.$$

In einem *linkssteigenden Füllungsstabe* entsteht $_{max}S$ oder $_{min}S$, je nachdem der Schneedruck nur rechts oder nur links vom Schnitte tt wirkt. Im ersten Falle setze man $z' = g$ und $z'' = q$, im zweiten Falle $z'' = g$ und $z' = q$. Es ergibt sich

$$(2) \quad \begin{cases} \max S = \frac{m''(m''+1)}{2} S' + \frac{m'(m'+1)}{2} \frac{g}{q} S'' \\ \min S = \frac{m''(m''+1)}{2} \frac{g}{q} S' + \frac{m'(m'+1)}{2} S'' \end{cases}$$

Stab	m''	m'	
4	5	0	$S_4 = + \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot 0,57 = + 8,55^t$
5	4	1	$S_5 = + \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 0,74 + \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot 1,48 = + 8,88^t$
6	3	2	$S_6 = + \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 1,00 + \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 1,00 = + 9,00^t$

Für die linkssteigenden Diagonalen erhält man, nach Gleich. (2), mit $\frac{g}{q} = 0,4$:

Stab	m''	m'	
7	4	1	$max S_7 = + \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 0,16 - \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot 1,25 \cdot 0,4 = + 1,10^t$
			$min S_7 = + \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 0,16 \cdot 0,4 - \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot 1,25 = - 0,61^t$
9	3	2	$max S_9 = + \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 0,28 - \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 0,52 \cdot 0,4 = + 1,06^t$
			$min S_9 = + \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 0,28 \cdot 0,4 - \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 0,52 = - 0,89$

und für die rechtssteigenden Diagonalen, nach Gleich. (3):

Stab	m''	m'	
8	4	1	$max S_8 = - \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 0,13 \cdot 0,4 + \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot 1,12 = + 0,60^t$
			$min S_8 = - \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 0,13 + \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot 1,12 \cdot 0,4 = - 0,85^t$
10	3	2	$max S_{10} = - \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 0,275 \cdot 0,4 + \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 0,51 = + 0,87^t$
			$min S_{10} = - \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 0,275 + \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 0,51 \cdot 0,4 = - 1,04^t$

Die Spannkraften in den Füllungsstäben ergeben sich hiernach wesentlich grösser, als nach der in No. 171 angestellten Rechnung; beispielsweise wird $max S_7$ fast doppelt so gross wie vorhin. Zu berücksichtigen ist allerdings, dass die zweite Rechnung sehr unwahrscheinliche Belastungsfälle annimmt.

X. Abschnitt.

Der Gerber'sche Fachwerkbalken.

§ 40.

Einflusslinien.

173. **Einleitung.** Wir betrachten den *Gerber'schen* Träger unter denselben Voraussetzungen, die im vorigen Abschnitte bei der Behandlung des einfachen Balkens gemacht wurden, nehmen also an, dass sich die beweglichen Auflager auf *wagerechten* Bahnen verschieben, dass nur *senkrecht* und *abwärts* gerichtete Lasten wirken, und dass die gegliederten Scheiben, aus denen der Träger besteht, *einfache Dreiecknetze* sind. Die Koppelträger (beispielsweise die Theile *AB* des in der Fig. 329 dargestellten Trägers) verhalten sich wie einfache Balken, und

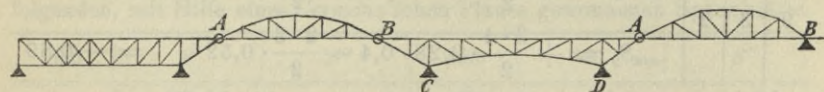


Fig. 329.

es bleibt also nur noch die Inanspruchnahme eines Balkens mit überstehenden Enden zu untersuchen. Dabei genügt es, die Gesetze für den Fall aufzustellen, dass *beide* Balkenenden ausserhalb der Stützen liegen und durch *angrenzende* Koppelträger belastet werden. Nimmt man dann das eine überstehende Stück gewichtslos und unbelastet an, so ergeben sich die Gesetze für den Balken mit nur *einem* überragenden Ende.

Die Frage nach der Bestimmung der in den Gurtungen entstehenden Spannkraft O und U ist bereits durch die früheren Untersuchungen erledigt; denn die in No. 145 (Seite 245 und 246) gegebenen Regeln, um die O und U aus den auf die Knotenpunkte bezogenen Momenten M abzuleiten, gelten für jedes einfache Dreiecknetz, und die Aufsuchung der grössten und kleinsten Momente M wurde bereits im Abschnitte VI gelehrt. Es ist daher hauptsächlich noch die Ermittlung der *Spannkraft in den Füllungsstäben* zu erörtern. Bei Parallelträgern mit wagerechten Gurtungen ergeben sich diese Kräfte am schnellsten aus den Querkraften, welche auf die im Abschnitte VI beschriebene und im folgenden § durch ein Zahlenbeispiel erläuterte Art bestimmt werden können.

Bei Trägern mit gebrochenen Gurtungen hingegen ist im Allgemeinen die Benutzung der Einflusslinien als das übersichtlichste Verfahren am meisten zu empfehlen, wobei die Untersuchungen im § 19 zuweilen gute Dienste leisten werden. Ausserdem verdient noch die Bestimmungsweise der Spannkraft^e nach *Zimmermann* hervorgehoben zu werden; zu der im § 36 gegebenen allgemeinen Entwicklung dieses Verfahrens, welche für jedes von parallelen äusseren Kräften ergriffene Dreiecknetz gilt, ist wenig hinzuzufügen. Es genügt, darauf hinzuweisen, dass beim *Gerber'schen* Balken Momente von verschiedenen Vorzeichen auftreten. In der, einen Theil eines Netzwerks darstellenden

Fig. 330 wurde vorausgesetzt, dass das Moment M_m positiv, hingegen M_{m-1} negativ ist. Die Strecken ma und bc , welche die Verhältnisse $M_m : \lambda_m$ und $M_{m-1} : \lambda_m$ darstellen, wurden von der unteren Gurtung aus aufgetragen (entsprechend der Anordnung in Fig. 247), beide aber in entgegengesetzter Richtung. Die Pfeile neben den die Spannkraft^e O , D , U darstellenden Strecken ad , de , ef deuten an, in welchem Sinne die Spannkraft^e an dem Trägertheile

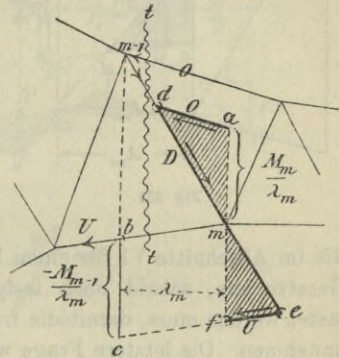


Fig. 330.

links von dem durch die Stäbe O , D , U geführten Schnitte tt angreifen. Um bei Feststellung dieses Sinnes keinen Fehler zu begehen genügt es, daran zu denken, dass ein Stab der oberen Gurtung

gedrückt wird, sobald das Moment M für den gegenüberliegenden Knotenpunkt positiv ist, und dass die wagerechte Projektion des aus den Spannkraft^e O , D , U bestehenden stetigen Kräftezug^e $= 0$ sein muss, weil sämtliche äusseren Kräfte senkrecht sind.

Man hätte in Fig. 330 auch den negativen Werth $M_{m-1} : \lambda$ von der unteren Gurtung aus nach oben und das positive $M_m : \lambda$ nach unten absetzen können; sind beide Momente negativ, so werden sie beide zweckmässig nach oben hin aufgetragen, damit der aus O , U , D bestehende Kräftezug innerhalb des Trägernetzes liegt. Ganz entsprechend ist zu verfahren, wenn die in der Figur 248 dargestellte Anordnung gewählt wird.

In der Fig. 331 ist ein Trägerstück mit Vertikalen abgebildet worden; die Belastung ist an den Knotenpunkten der unteren Gurtung

angreifend gedacht. Es wurde M_m positiv und M_{m-1} negativ angenommen und auf die in No. 158 beschriebene Weise das Kräftepolygon für den oberen Knoten $m-1$ gezeichnet. Es ergibt sich $O_m = de$; $V_{m-1} = ef$; $O_{m-1} = fc$; $D_m = cd$. Die in das Kräftepolygon eingetragenen Pfeile geben an, in welchem Sinne die Kräfte am oberen Knoten $m-1$ angreifen. Zur Feststellung des Umfassungssinnes dieses Kräftepolygons genügt es, zu wissen, dass O_m einen Druck bedeutet, weil M_m positiv ist.

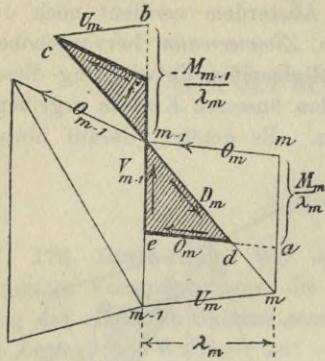


Fig. 331.

Um das Zimmermann'sche Verfahren anwenden zu können, braucht man nur die Momente für die Knotenpunkte zu bestimmen. Hierzu reichen

die im Abschnitte VI für einen beliebigen Belastungszustand entwickelten Gesetze aus, sobald noch festgestellt worden ist, wie der Träger belastet werden muss, damit die fraglichen Spannkkräfte ihre grössten Werthe annehmen. Die letztere Frage wird am schnellsten durch die Betrachtung der Einflusslinien entschieden.

174. Einflusslinie für die Spannkraft D in einem Füllungsstabe des Auslegers BC in Fig. 332. Wir führen durch den fraglichen Stab einen Schnitt tt , welcher ausserdem noch zwei Gurtstäbe (O und U) trifft, wählen den Schnittpunkt E von O und U zum Drehpunkte und setzen die Summe der Momente aller am linken Trägertheile wirkenden Kräfte gleich Null. F_1 und F_2 seien die dem Schnitte tt benachbarten Querträger. Irgendwo zwischen F_1 und dem Gelenke B greife eine Einzellast P_2 an, im Abstände a_2 von E , und auf den angrenzenden Koppelträger AB wirke eine Last P_1 in der Entfernung a_1 vom Gelenke A ; letztere übt auf B den Druck $\frac{P_1 a_1}{l'}$ aus. Wird zunächst angenommen, dass E zwischen B und F_1 liegt (im Abstände c von B) und dass a_2 positiv ist, sobald sich P_2 links von E befindet, so ergibt sich, wenn die Rechtsdrehung als die positive angesehen und das Loth von E auf den fraglichen Füllungsstab mit r bezeichnet wird, die Gleichgewichtsbedingung

$$\pm Dr - \frac{P_1 a_1}{l'} c - P_2 a_2 = 0,$$

in welcher das obere oder das untere Vorzeichen gilt, jenachdem die

Spannkraft D rechts oder links um E dreht. In dem in der Fig. 332 vorausgesetzten Falle ergibt sich

$$D = + \frac{1}{r} \left(\frac{P_1 a_1}{l'} c + P_2 a_2 \right).$$

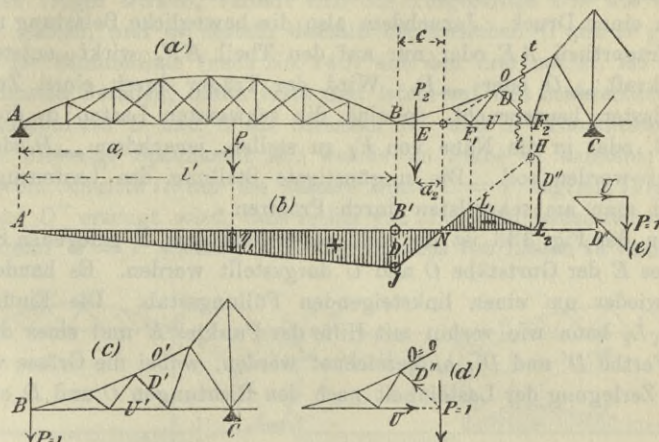


Fig. 332.

Da dieser Ausdruck in Bezug auf die Veränderlichen a_1 und a_2 vom ersten Grade ist, und da ferner eine in F_2 oder rechts von F_2 angreifende Last ohne Einfluss auf D ist, so besteht die Einflusslinie für D aus drei Geraden $A'J$, JL_1 und L_1L_2 (Fig. 332 b), welche den Trägertheilen AB , BF_1 und F_1F_2 entsprechen, und deren mittelste senkrecht unter E die Ordinate Null besitzt, da eine durch E gehende Last P_2 die Spannkraft $D = 0$ erzeugt. Kennt man also beispielsweise die Spannkraft $\overline{B'J} = D'$, welche eine in B angreifende Last $P = 1$ in dem fraglichen Stabe hervorruft, so ist man im Stande, die Einflusslinie aufzuzeichnen und den Einfluss jeder Last P in der Form $D = P\eta$ anzugeben. Die Kräfte D' aber findet man u. A. mit Hilfe eines Cremona'schen Planes, welcher für den in der Fig. 332 c dargestellten Belastungszustand gezeichnet wird. Sehr einfach ist auch die Festlegung der Einflusslinie mittels der Strecke $\overline{L_2H} = D''$, welche von der Geraden JL_1 auf der Senkrechten durch F_2 abgeschnitten wird und in folgender Weise bestimmt werden kann. Man betrachte das Trägerstück links vom Schnitte tt und suche diejenigen Kräfte O , D'' , U , welche mit einer durch den Punkt F_2 gehenden Last $P = 1$ im Gleichgewichte sind (Fig. 332 d). Man findet $O = 0$, während U und D''

durch das Kräfte-dreieck in der Fig. 332e gegeben sind. Im vorliegenden Falle ist D'' ein Druck, welcher bei vertikaler Lage des fraglichen Füllungsstabes $= 1$ wird.

Unsere Untersuchung lehrt: Liegt der Punkt E zwischen B und dem Schnitte tt , so erzeugen alle links von E gelegenen Lasten in dem linkssteigernden Füllungsstabe D einen Zug, alle rechts von E wirkenden Lasten einen Druck. Jenachdem also die bewegliche Belastung nur auf den Trägertheil AE oder nur auf den Theil EF_2 wirkt, entsteht die Spannkraft $_{max}D$ oder $_{min}D$. Wird der Träger durch einen Zug von Einzellasten beansprucht, so sind die schwersten Lasten in die Nähe von B , oder in die Nähe von F_1 zu stellen, jenachdem $_{max}D$ oder $_{min}D$ erzeugt werden soll. Die ungünstigste Stellung des Lastenzuges bestimmt man am schnellsten durch Probiren.

In der Fig. 333 ist der Fall eines links von B gelegenen Schnittpunktes E der Gurtstäbe O und U dargestellt worden. Es handelt sich dort wieder um einen linkssteigenden Füllungsstab. Die Einflusslinie $A'JL_1L_2$ kann wie vorhin mit Hilfe des Punktes E und eines der beiden Werthe D' und D'' aufgezeichnet werden, wobei die Grösse von D'' durch Zerlegung der Lasteinheit nach den Richtungen O und D erhalten

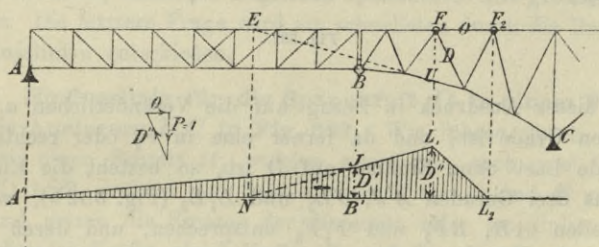


Fig. 333.

wird; es kann aber auch vortheilhaft sein (bei unbequem gelegenen Punkte E), die Lage der Geraden JL_1 durch Auftragung der Strecken D' und D'' zu bestimmen. Die Fig. 333 lehrt, dass in einem linkssteigenden Füllungsstabe bei links von B liegendem Punkte E nur Druckspannungen entstehen, welche bei gänzlicher Belastung des Trägertheiles AF_2 am grössten werden. Im Falle der Beanspruchung des Trägers durch einen Zug von Einzellasten sind die schwersten Lasten in der Nähe von F_1 aufzustellen.

Rechtssteigende Füllungsstäbe verhalten sich bezüglich der Vorzeichen entgegengesetzt wie linkssteigende. Liegt also beispielsweise der einem rechtssteigenden Füllungsstabe entsprechende Punkt E links von B , so entstehen in dem Stabe nur Zugspannungen.

Hinsichtlich der Benutzung der Einflusslinien zur Ermittlung der Grenzwerte der Spannkraft verweisen wir auf den § 14.

175. Einflusslinie für die Spannkraft D in einem Füllungsstabe des Trägertheiles CD in Fig. 334. Solange es sich nur um den Einfluss von Lasten handelt, welche zwischen den Stützen C und D auf den Träger wirken, verhält sich das Trägerstück CD wie ein einfacher Balken, und es besteht deshalb der zwischen C und D gelegene Theil der Einflusslinie (nach No. 143) aus den drei mit II , III und IV bezeichneten Geraden, deren erste und letzte auf den Senkrechten durch die Stützpunkte D und C die Strecken D'' und D' abschneiden, wobei D' diejenige Spannkraft ist, welche im Stabe D entsteht, sobald links vom Schnitte tt nur die äussere Kraft $C = 1$ angreift (Fig. 335), während D'' erzeugt wird, falls rechts von tt ausschliesslich der Stützwiderstand $D = 1$ wirkt.*) Um den Einfluss von Lasten zu bestimmen,

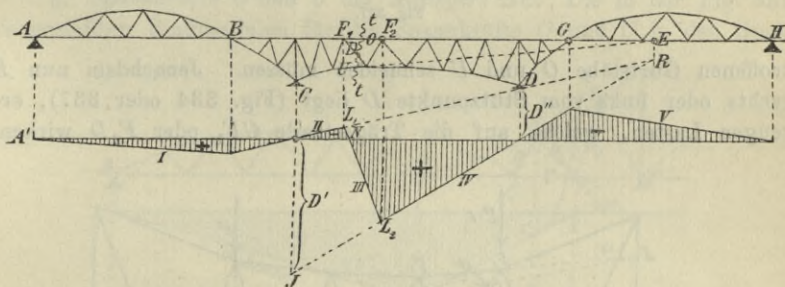


Fig. 334.

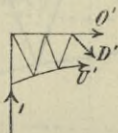


Fig. 335.

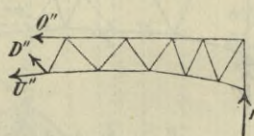


Fig. 336.

welche auf dem Ausleger DG und dem angrenzenden Koppelträger GH ruhen, erwäge man, dass im Falle ausschliesslicher Belastung des Trägertheiles F_2H am Trägerabschnitte links von tt nur der Stützwiderstand C als äussere Kraft angreift, woraus dann folgt, dass die Ordinaten der Einflusslinie für die Spannkraft D zwischen F_2 und H den entsprechenden Ordinaten der (in No. 93 bestimmten) Einflusslinie

*) In der Fig. 334 ist die Belastung an der oberen Gurtung angreifend gedacht. F_1 und F_2 sind die dem Schnitte tt benachbarten Auflager.

für C proportional sein müssen. Hiernach entspricht dem Trägerstücke DG die Verlängerung der Geraden IV und dem Stücke GH die Gerade V , welche die IV auf der Senkrechten durch G trifft. In gleicher Weise lässt sich auf den Einfluss von Lasten links von C schliessen. Hervorzuheben ist, dass sich die Geraden II und IV auf der Senkrechten durch den Schnittpunkt E der vom Schnitte tt ge-

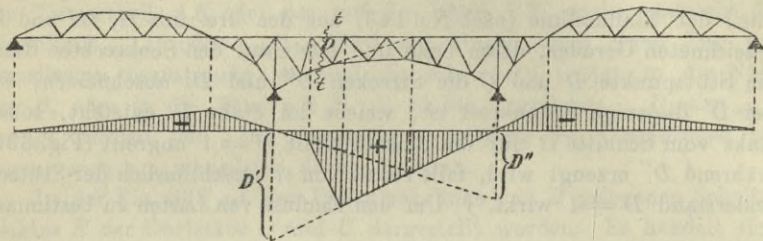


Fig. 337.

troffenen Gurtstäbe O und U schneiden müssen. Jenachdem nun E rechts oder links vom Stützpunkte D liegt (Fig. 334 oder 337), erzeugen Lasten, welche auf die Trägertheile CF_1 oder F_2D wirken,

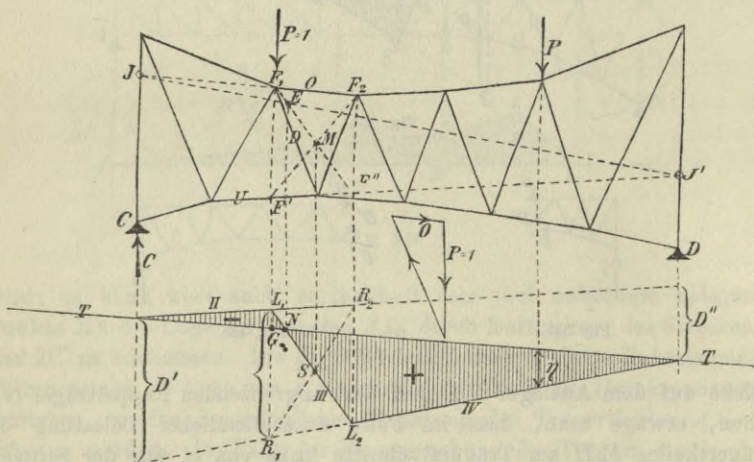


Fig. 338.

Spannkkräfte D von gleichem oder entgegengesetztem Vorzeichen. Bei bequemer Lage des Punktes E kann derselbe bei Aufzeichnung der Einflusslinie für D benutzt werden; es genügt dann, D' oder D'' aufzutragen.

Wir erinnern noch an die in No. 143, Fig. 226 nachgewiesenen wichtigen Eigenschaften, dass M und E senkrecht über S und N liegen und Strecke $\overline{L_1 R_1} = v$ ist.

Um die entsprechende Figur für eine rechtssteigende Diagonale zu erhalten, betrachte man das Spiegelbild der Fig. 338. Kehrt man Fig. 338 um, so dass $F_1 F_2$ der unteren Gurtung angehört, so hat man den Fall einer unten angreifenden Belastung; man muss aber die Vorzeichen umkehren. Das Verfahren gilt natürlich auch dann, wenn sich O und U zwischen den Stützen treffen. Wir empfehlen dem Leser, alle diese Fälle aufzuzeichnen.

176. Die Einflusslinien für die Spannkkräfte in den Gurtungen können aus den Einflusslinien für die den Gurtstäben gegenüberliegenden Momente mittels Division durch den Hebelarm der fraglichen Spannkraft abgeleitet werden. Kürzer ist aber das folgende Verfahren.

a. Spannkkräfte O und U des Auslegers BC . Die in der Fig. 339 dargestellten Einflusslinien für die Spannkkräfte O und U in den Gurt-

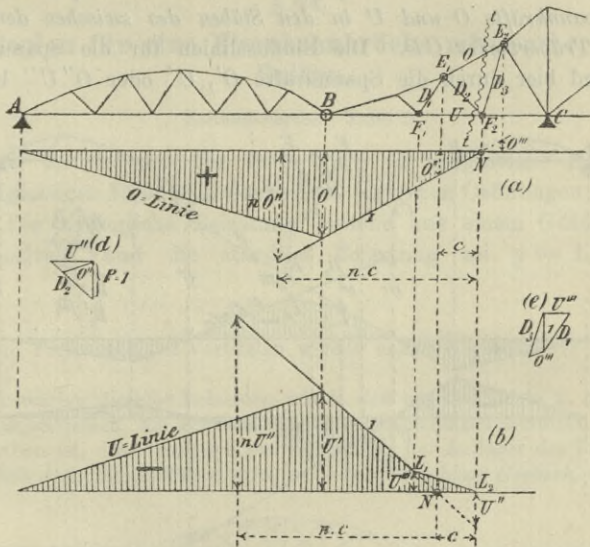


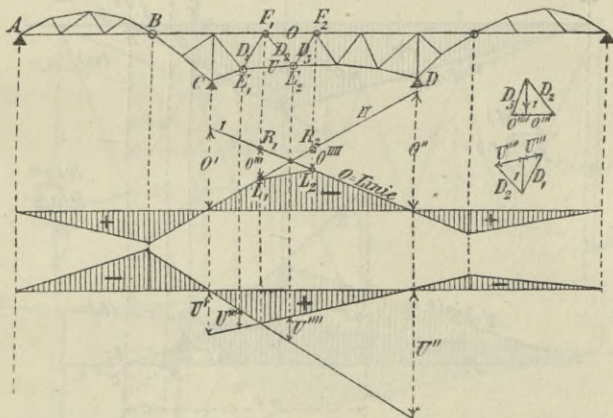
Fig. 339.

stäben, welche der zwischen den Querträgern F_1 und F_2 geführte Schnitt tt trifft, können in einfacher Weise durch die (mit Hilfe eines Cremona'schen Planes zu ermittelnden) Spannkkräfte O' und U' bestimmt werden, welche eine in B angreifende Last $P=1$ hervorbringt (Fig. 332c). Ferner können sie mit Hilfe der Spannkkräfte O'' und U''

gezeichnet werden. Die Grösse von O'' wird durch Zerlegung von $P=1$ nach den Richtungen von O und D_2 gewonnen, diejenige von U'' durch Zerlegung von $P=1$ nach den Richtungen von U und D_2 (Fig. 339d). Bei Anwendung der zweiten Bestimmungsart vermeidet man die Zeichenfehler, welche die Festlegung der Linien I durch kleine, den Nullpunkten N nahe Ordinaten leicht im Gefolge haben, wenn man in n -fachen Abständen von jenen Nullpunkten die durch Zerlegung einer Last $n \cdot 1$ gewonnenen Werthe nO'' und nU'' aufträgt, wobei n eine beliebige gerade Zahl bedeutet.

Man kann auch die Gerade I in Fig. 339a mit Hilfe der dem Punkte E_2 entsprechenden (negativen) Ordinate O''' festlegen, deren Grösse durch Zerlegung von $P=1$ nach den Richtungen von O und D_3 erhalten wird, und schliesslich lässt sich die Gerade I in Fig. 339b mittels der zu F_1 gehörigen Ordinate U''' bestimmen. Die Grösse der letzteren ergibt sich, wenn die Last $P=1$ nach den Richtungen der Stäbe U und D_1 zerlegt wird. Die Darstellung von O''' und U''' an Stelle von O'' und U'' wird nöthig, sobald der Stab D_2 vertikal liegt.

b. Spannkkräfte O und U in den Stüben des zwischen den Stützen liegenden Trägertheiles CD . Die Einflusslinien für die Spannkkräfte O und U sind hier durch die Spannkkräfte O', U' oder $O''U''$ bestimmt,



suchung der Eigenschaften der Einflusslinie für die Spannkraft D verweisen (Fig. 338), überlassen wir es dem Leser, selbst die folgenden Gesetze mittels ähnlicher Betrachtungen abzuleiten.

Die beiden durch die Werthe O' und O'' bestimmten Geraden I und II schneiden auf der Senkrechten durch F_1 eine Spannkraft $\overline{R_1 L_1} = O'''$ ab, deren Grösse durch Zerlegung der Last $P = 1$ nach den Richtungen der beiden im Punkte F_1 zusammentreffenden Stäbe O und D_2 erhalten wird, und die in der Figur 340 mit O'''' , U''' , U'''' bezeichneten Spannkräfte können der Reihe nach bestimmt werden durch Zerlegung von $P = 1$ nach den Richtungen O und D_3 beziehungsweise U und D_1 , beziehungsweise U und D_2 . Es leuchtet ein, dass im Allgemeinen *einer* der vier Werthe O' , O'' , O''' , O'''' zur Bestimmung der O -Linie und *einer* der vier Werthe U' , U'' , U''' , U'''' zur Bestimmung der U -Linie ausreicht.*) Besser ist es jedoch, stets mehrere dieser Werthe zu ermitteln, um die Zuverlässigkeit der Zeichnung prüfen zu können.

§ 41.

Kräfteplan für eine Eisenbahnbrücke mit Gerber'schen Balken.

Zahlenbeispiel. Tafel 5.

Es ist der in der Fig. 341 (Tafel 5) dargestellte Hauptträger einer zweigleisigen Eisenbahnbrücke mit mehreren Oeffnungen zu untersuchen. Die bewegliche Belastung bestehe aus einem Güterzuge mit 3 Lokomotiven, und die ständige Belastung sei $g = 1,74'$ f. d. Meter.**)

*) Beim Fachwerke mit Vertikalen werden einige Werthe O'' , O'''' , U'' , U'''' gleich Null.

**) Wir wählen dieselbe Belastung wie in den auf den Tafeln 1, 3, 4 behandelten Zahlenbeispielen, um Ergebnisse früherer Rechnungen benutzen zu können. Hervorzuheben ist, dass bezüglich der Ausbildung der Auflager des Trägers zwei Fälle möglich sind. Erstens kann man, nach dem Vorschlage *Gerbers*, die Koppel-

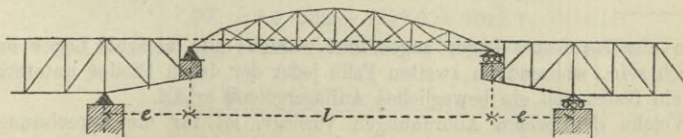


Fig. 342.

träger gelenkartig mit den Auslegern verbinden, und zweitens kann man jeden schwebenden Theil auf die in der Fig. 342 dargestellte Art mit einem festen und einem beweglichen Auflagergelenke versehen. Im ersten Falle darf auf den

I. Spannkkräfte in den Gurtungen des Auslegers BC . Wir wenden das *Zimmermann'sche* Verfahren an, und bestimmen die Werthe $M: \lambda$ theils durch Rechnung, theils durch Zeichnung.

1. *Momente in Folge der ständigen Belastung.* Die Feldweite ist für den überragenden Theil: $\lambda = 3,0^m$. Der Knoten 1 (Fig. 343) wird daher belastet mit: $g\lambda = 1,74 \cdot 3 = 5,22^t$ und Knoten 0, welcher

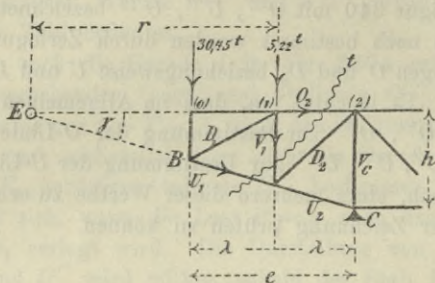


Fig. 343.

das halbe Gewicht des 32^m langen schwebenden Theiles aufzunehmen hat, mit: $\frac{1}{2} \cdot 1,74 \cdot 32 + \frac{1}{2} \cdot 5,22 = 30,45^t$. Es ergibt sich daher

$$(1) \begin{cases} M_{1g} = -30,45 \cdot \lambda \\ M_{2g} = -30,45 \cdot 2\lambda - 5,22\lambda = -66,12\lambda = \text{Stützenmoment } M_{Cg}. \end{cases}$$

2. *Momente in Folge der beweglichen Belastung.* Es wurde für einen hinlänglich langen Eisenbahnzug in der Fig. 344 (Tafel 5) ein Seilpolygon gezeichnet, und, um dieses Polygon auch zur Untersuchung der Parallelträger CD und $C'D'$ bequem benutzen zu können, die Polweite desselben gleich einem Vielfachen der Höhe jener Träger gewählt; sie ist: $H = 4 \cdot 3,6 = 14,4^m$. Nun wurde der Träger in die (roth eingezeichnete) Stellung I gegen den Eisenbahnzug gebracht und die dem Koppelträger entsprechende Schlusslinie s_1 eingetragen und nach rechts gehörig verlängert. Aus den auf den Senkrechten durch

Pfeilern nur ein festes Lager angeordnet werden; alle übrigen Lager müssen beweglich sein, während im zweiten Falle jeder der durch Pfeiler unterstützten Theile ein festes und ein bewegliches Auflagergelenk erhält.

Welche der beiden Anordnungen vorliegt, ist für die Berechnung der durch senkrechte Lasten hervorgerufenen Spannkkräfte und Stützenwiderstände gleichgiltig.

Die letzte Anordnung findet sich bei der im Jahrgange 1877 der Zeitschrift für Bauwesen (Seite 41 u. f.) beschriebenen *Warthe-Brücke bei Posen*, deren Hauptträger dem hier untersuchten Balken ähnlich sind.

Knoten 1 und Stütze C vom Seilpolygon und der Geraden s_1 abgeschnittenen Strecken y_1 und y_2 *) ergab sich

$$M_{1p} = -Hy_1 \quad \text{und} \quad M_{2p} = -Hy_2 = \text{Stützenmoment } M_{Cp}.$$

Die ungünstigste Stellung des Trägers gegen den Lastenzug wurde durch Probiren bestimmt, wobei sich herausstellte, dass beide Momente bei ein und derselben Stellung ihre grössten Werthe annahmen.

Nach Division durch $\lambda = 3^m$ folgt

$$\frac{M_{1p}}{\lambda} = -y_1 \frac{H}{\lambda} = -y_1 \cotg \alpha \quad \text{und} \quad \frac{M_{2p}}{\lambda} = -y_2 \cotg \alpha$$

wo $\cotg \alpha = \frac{H}{\lambda}$. Man findet

$$(2) \quad \frac{M_{1p}}{\lambda} = -92,1^t \quad \text{und} \quad \frac{M_{2p}}{\lambda} = -192,0^{***})$$

und nach Hinzurechnung der Wirkung der ständigen Belastung

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{M_1}{\lambda} = -92,1 - 30,4 = -122,5^t \\ \frac{M_2}{\lambda} = -192,0 - 66,1 = -258,1^t. \end{cases}$$

Mittels dieser Werthe sind in Fig. 345 (Tafel 5) die grössten Spannkraft U_1 , U_2 , O_2 , und die gleichzeitig mit U_1 ihren grössten Werth annehmende Spannkraft der ersten Diagonale nach dem Zimmermann'schen Verfahren bestimmt worden, wobei die Verhältnisse $M:\lambda$ von den oberen Knotenpunkten aus abgetragen worden sind. Die Kräftepolygone wurden (der roth eingetragenen Trägerstellung I entsprechend) durch rothe Schraffirung hervorgehoben und mit den Ziffern I versehen. Es ergab sich

$$U_1 = -142^t; \quad U_2 = -225^t; \quad O_2 = +136^t; \quad D_1 = +159^t.$$

Wir wollen noch die rechnerische Bestimmung der von der veränderlichen Belastung erzeugten Momente M erläutern. Gesucht sei M_C für die in der Fig. 346 angegebene Laststellung. Der Druck B , welchen die beiden auf dem Koppelträger ruhenden Lokomotiven auf das Gelenk B ausüben, bestimmen wir nach dem auf Seite 142 entwickelten Verfahren mittels der Tabelle I (Seite 142), und erhalten (wegen $b_n = 2,0$; $\mathfrak{P}_n = 132^t$; $\mathfrak{C}_n = 1647,0^t$)

$$Bl' = 2,0 \cdot 132 + 1647,0 = 1911^{tm}.$$

Rechnen wir die in B angreifende Last mit zur Belastung des Theiles AB , so entsteht

$$B = \frac{1911 + 13(32 - 1,4)}{32} + 13 = 85,15^t$$

*) Wir unterliessen es, die y mit dem Zeiger p zu versehen.

**) Diese Werthe lassen sich auf die in der Fig. 344 angegebene Weise durch Zeichnung bestimmen, werden aber besser gerechnet, nachdem y gemessen worden ist.

und, wegen $\lambda = 3,0^m$,

$$M_C = -85,15 \cdot 2\lambda - 9 \cdot 0,6 - 13 \cdot 4,6 = -192,03 \lambda.$$

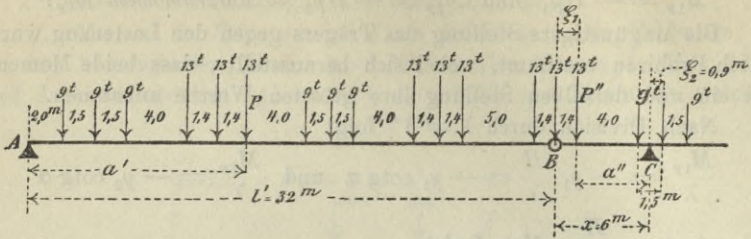


Fig. 346.

Bevor diese Rechnung ausgeführt wird, ist zu entscheiden, ob die angegebene Zugstellung auch am ungünstigsten wirkt. Bezeichnen wir zu diesem Zwecke jede zwischen A und B liegende Last mit P' , jede Last zwischen B und C mit P'' und die Abstände dieser Lasten von A beziehungsweise dem Querschnitte C mit a' und a'' so ergibt sich: $Bl' = \Sigma P' a'$ und

$$M_C = -Bx - \Sigma P'' a'' = -\left[\frac{x}{l'} \Sigma P' a' + \Sigma P'' a''\right].$$

Wird der Zug um die unendlich klein gedachte Strecke ξ nach rechts verschoben, so geht a' über in $a' + \xi$ und a'' in $a'' - \xi$, und es ändert sich $(-M_C)$ um $\left(\frac{x}{l'} \Sigma P' - \Sigma P''\right) \xi$. Soll nun $(-M_C)$ in Folge der Verschiebung abnehmen, so muss sein

$$(I) \quad x \Sigma P' < l' \Sigma P''$$

und ebenso folgt, dass $(-M_C)$ in Folge einer Verschiebung des Zuges nach links abnimmt, sobald

$$(II) \quad x \Sigma P' > l' \Sigma P''.$$

Die beiden Ungleichungen müssen erfüllt werden, falls die angenommene Laststellung die gefährlichste sein soll. Dabei ist zu beachten, dass die in B ruhende Last zu den Lasten P' oder P'' zu rechnen ist, jenachdem der Zug nach links oder nach rechts verschoben wird. Im vorliegenden Falle erhält man in Folge einer Verschiebung nach rechts: $\Sigma P' = 6 \cdot 9 + 7 \cdot 13 = 145^t$, $\Sigma P'' = 2 \cdot 13 + 9 = 35^t$ und (wegen $x = 6^m$ und $l' = 32^m$)

$$6 \cdot 145 < 32 \cdot 35$$

und in Folge einer Verschiebung nach links: $\Sigma P' = 145 + 13 = 158^t$, $\Sigma P'' = 35 - 13 = 22^t$ und

$$6 \cdot 158 > 32 \cdot 22.$$

Es werden mithin beide Ungleichungen (I) und (II) befriedigt.

Im Allgemeinen dürfte das zeichnerische Verfahren den Vorzug verdienen; denn man beachte wohl, dass die in obigen Ungleichungen gewonnenen Kennzeichen der ungünstigsten Zugstellungen an die Annahme unendlich kleiner Verschiebungen des Lastenzuges gebunden sind. Verschiebt man im vorliegenden Falle den Zug um $1,4^m$ nach links, so findet man zufällig eine andere

Stellung desselben, welche ebenfalls den Bedingungen *I* und *II* genügt. Die Summe $\Sigma P''$ hat hier nicht nur durch den Uebertritt der vorher in *B* angreifenden 18^t , sondern auch durch das Hinzutreten einer Last 9^t eine Aenderung erfahren. Nun begegnet es zwar keinerlei Schwierigkeiten, die in Folge endlicher Verschiebungen entstehenden Aenderungen der Summen $\Sigma P' a'$ und $\Sigma P'' a''$ zu verfolgen und die Bedingungen *I* und *II* entsprechend zu ergänzen; das Kennzeichen der gefährlichsten Stellung wird aber dadurch wesentlich umständlicher, namentlich gegenüber der so bequemen versuchsweisen zeichnerischen Ermittlung der grössten Momente. Wir wollen die Rechnung im vorliegenden Falle durchführen, wobei wir auf die Bezeichnungen ξ_1 und ξ_2 in Fig. 346 verweisen. In Folge einer Verschiebung des Zuges nach links um ξ_2 wächst $(-M_C)$ um $(\Sigma P'' - \frac{x}{l} \Sigma P') \xi_2$, wobei $\Sigma P' = 158^t$ und $\Sigma P'' = 22^t$.

Dieser Werth ist negativ, weil, wie vorhin gezeigt, die Ungleichung *II* befriedigt wird. In Folge einer weiteren Verschiebung um $\xi_1 - \xi_2$ wächst $(-M_C)$, da zur $\Sigma P''$ die Last $P_0 = 9^t$ hinzutritt, während die $\Sigma P'$ ungeändert bleibt, um $(\Sigma P'' + P_0 - \frac{x}{l} \Sigma P') (\xi_1 - \xi_2)$. Im Ganzen nimmt also $(-M_C)$ zu um

$$\begin{aligned} & \left(\Sigma P'' - \frac{x}{l} \Sigma P' \right) \xi_2 + \left(\Sigma P'' + P_0 - \frac{x}{l} \Sigma P' \right) (\xi_1 - \xi_2) \\ &= \left(\Sigma P'' - \frac{x}{l} \Sigma P' \right) \xi_1 + P_0 (\xi_1 - \xi_2) = \left(22 - \frac{6}{32} \cdot 158 \right) 1,4 \\ & \quad + 9 (1,4 - 0,9) = -6,18^t. \end{aligned}$$

Das Moment $(-M_C)$ wird also in Folge der Verschiebung des Zuges um $\xi = 1,4^m$ verkleinert.

II. Spannkkräfte in den Füllungsstäben V_1, D_2, V_C des Auslegers BC (Fig. 343). Bezeichnet man für irgend einen Belastungszustand mit M_E das auf den Schnittpunkt *E* der Gurtstäbe O_2 und U_1 als Drehpunkt bezogene Moment der links vom Schnitte *tt* angreifenden äusseren Kräfte und mit r den Abstand der Kraft V_1 von *E*, so ist

$$V_1 r + M_E = 0 \quad \text{und} \quad V_1 = -\frac{M_E}{r}.$$

Dem grössten Momente M_E entspricht mithin der grösste Druck V_1 . Nun geht aus der in No. 174 durchgeführten Untersuchung der Einflusslinie hervor, dass im Falle eines links von *B* gelegenen Drehpunktes in der (als linkssteigender Füllungsstab zu betrachtenden) Vertikale nur Druckspannungen entstehen, dass zur Erzielung von $\min V_1$ der Koppelträger *AB* und der Ausleger *B* (1) voll zu belasten sind und dass endlich die schwersten Lasten bei dem links vom Schnitte *tt* gelegenen Knoten (1) aufzustellen sind. Es wurde deshalb der Träger in die (in Fig. 344 blau eingezeichnete) Stellung *II* gegen den Lastenzug gebracht und nach Eintragung der dem Koppelträger entsprechenden Schlusslinie s_2 und der zum Felde 1—2 gehörigen Schlusslinie *s* die

Strecke η bestimmt, welche die Geraden s_2 und s auf der Senkrechten durch den Drehpunkt E abschneiden. Denkt man nämlich die am Koppelträger AB angreifenden Lasten auf die Auflager A und B vertheilt, desgleichen die im Felde 1—2 ruhende Last auf die Knoten 1 und 2, so sind s_2 und s als die äussersten Seilpolygonseiten für die auf das Trägerstück $B1$ wirkenden äusseren Kräfte zu betrachten, und es folgt dann nach dem auf Seite 18 bewiesenen Gesetze:

$$M_E = +H\eta, \text{ woraus sich schliesslich } (-V_1)_E = -\frac{H\eta}{r} \text{ ergibt. Dieser}$$

Werth ist in der Figur 348, in welcher $\overline{E(1)} = r$ und $\overline{ER} = H$ ist, dargestellt worden. Nach Bestimmung von $\min V_{p1}$ ergab sich (in Fig. 348) $\max D_{p2}$ durch Zerlegung von V_{p1} nach den Richtungen von U und D_2 .*) Die von der ständigen Belastung herrührenden Spannkkräfte V_{p1} und D_{p2} können nun mit Hilfe eines *Cremona'schen* Planes oder nach dem *Zimmermann'schen* Verfahren (mittels der bereits bekannten Werthe $M_{g1} : \lambda$ und $M_{g2} : \lambda$) bestimmt werden. Auf Tafel 5 wurde dieser Weg nicht weiter verfolgt; dafür ist in der Fig. 345 die (nach der Ansicht des Verfassers zweckmässiger**) Ermittlung von $\max D_2$ und $\min V_1$ aus den Werthen $M_2 : \lambda$ und $M_1 : \lambda$ dargestellt worden, wobei die von der beweglichen Belastung abhängigen Theile dieser Werthe mit Hilfe des Seilpolygons in Fig. 344 bestimmt wurden. Die Ergebnisse lauten***)

$$\begin{aligned} \frac{M_1}{\lambda} &= \frac{M_{g1}}{\lambda} + \frac{M_{p1}}{\lambda} = -30,4 - \frac{Hy'}{\lambda} = -30,4 - 78,7 = -109,1'; \\ \frac{M_2}{\lambda} &= -66,1 - \frac{Hy''}{\lambda} = -66,1 - 184,3 = -250,4'; \\ \max D_2 &= +118'; \quad \min V_1 = -104,8'. \end{aligned}$$

Bislang wurde die gesammte ständige Belastung g an der oberen Gurtung angreifend gedacht. Zerlegt man g in $g_u = 0,45'$ und $g_o = 1,74 - 0,45'$, so kommt auf den unteren Knoten (1) die Last $g_u \lambda = 0,45 \cdot 3,0 = 1,35'$, und es ergibt sich $V_1 = -104,8 + g_u \lambda = -103'$.

Die Spannkraft V_C in der Vertikale über dem zweiten Mittelpfeiler C , Fig. 343 und 341, folgt aus der Gleichgewichtsbedingung für den Knotenpunkt C . Es muss sein (vergl. Fig. 349):

*) Es ist diese bequeme Bestimmung von $\max D_{p2}$ hier möglich, weil U_1 und U_2 dieselbe Richtung haben; im Gegenfalle müsste D_{p2} aus der für den Schnittpunkt von O_2 und U_2 aufgestellten *Ritter'schen* Momentengleichung ermittelt werden.

***) Kleine Fehler bei Festlegung der vorhin benutzten Schlusslinie s können zu erheblichen Ungenauigkeiten Veranlassung geben.

****) In Fig. 345 ist durch ein Verfahren die von C aus abgetragene Strecke $M_1 : \lambda$ statt mit $M_2 : \lambda$ bezeichnet worden.

$V_C + U_2 \sin \gamma + C - G_u = 0$, also $V_C = -C - U_2 \sin \gamma + G_u$, wobei $G_u = 0,45 (3,0 + 3,6) \frac{1}{2} = 1,5^t$ die ständige Belastung des Knotens C bedeutet. Wegen $U_2 \cos \gamma = \frac{M_C}{h}$ ($h =$ Höhe der fraglichen Vertikale) ergibt sich

$$(4) \quad V_C = -C - \frac{M_C}{h} \operatorname{tg} \gamma + G_u.$$

Hiernach erhält man die Einflusslinie für V_C , indem man zu den Ordinaten der C -Linie (d. i. die Einflusslinie für C) die mit $\frac{1}{h} \operatorname{tg} \gamma$ multiplicirten Ordinaten der M_C -Linie addirt. Der feste Werth G_u wird zunächst $= 0$ gesetzt. Fig. 350 zeigt die aus den Geraden I, II, III bestehende C -Linie und die aus den Geraden IV, V bestehende M_C -Linie; erstere besitzt bei C die Or-

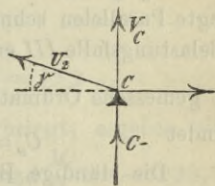


Fig. 349.

ordinate 1, letztere bei B die Ordinate e . Macht man also $\varepsilon = \operatorname{tg} \gamma \frac{e}{h}$, so stellt die in der Figur 350 schraffierte Fläche die Einflussfläche für die Spannkraft V_C dar. *) Aus dem Verlaufe der Einflusslinie folgt nun, dass die fragliche Vertikale den grössten Druck ($_{\min} V_C$) erleidet, sobald der Träger nur zwischen A und D belastet wird und die schwersten Lasten

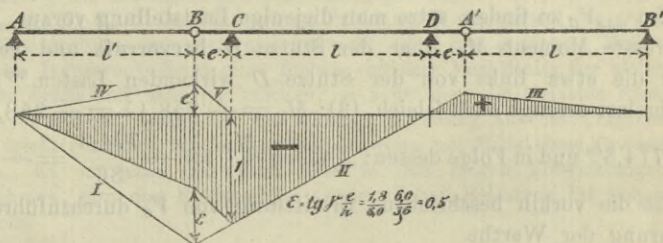


Fig. 350.

in der Nähe von C liegen, während der kleinste Druck, bezieh. der grösste Zug ($_{\max} V_C$) bei ausschliesslicher Belastung des über die Stütze D

*) Ist auch das rechts an C grenzende Gurtstück geneigt (und zwar unter γ') so muss $\varepsilon = \frac{h}{e} (\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma')$ gemacht werden; Fig. 351.

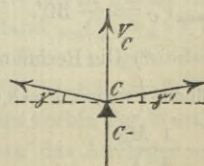


Fig. 351.

ragenden Trägerstückes DA' und des hieran grenzenden Koppelträgers $A'B'$ entsteht, wobei dann die schwersten Lasten in der Nähe von A' liegen müssen. Um zunächst $\min V_C$ zu bestimmen, wurde der Träger in die Stellung III (Fig. 344) gebracht, hierauf die dem schwebenden Theile AB entsprechende Schlusslinie s_3 eingezeichnet und die Gerade s'_3 gezogen, welche die beiden Punkte verbindet, in denen die Aufhängersekrechten D und C beziehungsweise vom Seilpolygon und der Linie s_3 geschnitten werden. Zwei durch den Pol zu s_3 und s'_3 gelegte Parallelen schneiden auf dem Kräftezuge den dem angenommenen Belastungsfalle III entsprechenden Widerstand C_p ab, und durch die unter C gemessene Ordinate y ist der Werth $\frac{M_{Cp}}{\lambda} = -\frac{Hy}{\lambda}$ bestimmt. Man findet

$$C_p = 191,0^t \text{ und } M_{Cp} = -157,6 \cdot \lambda.$$

Die ständige Belastung erzeugt

$$(5) \quad C_g = \frac{1}{2} gl' + ge + \frac{1}{2} gl = 1,74 \left[\frac{1}{2} 32 + 6 + \frac{1}{2} 36 \right] = 69,6^t$$

und, nach Gleich. (1): $M_{Cg} = -66,1 \lambda$.

Durch den Werth $\frac{M_C}{\lambda} = -157,6 - 66,1 = -223,7^t$ ist die Spannkraft U_2 bestimmt; sie wurde in Fig. 345 dargestellt, in welcher nach Auftragen von $a2 = 223,7^t$ erhalten wurde: Druck $U_2 =$ Strecke ac . Nun konnte nach Berechnung von $C - G_u = 191,0 + 69,6 - 1,5 = 259^t$ das Kräftepolygon für den Knoten C (Fig. 347) gezeichnet werden. Dasselbe liefert: $\min V_C = -203^t$.*)

Um $\max V_C$ zu finden, setze man diejenige Laststellung voraus, welche das grösste Moment M_D über der Stütze D hervorruft und vernachlässige die etwa links von der Stütze D wirkenden Lasten.***) Die Verkehrslast erzeugt nach Gleich. (3): $M_D = -258,1 \lambda = -258,1 \cdot 3,0 = -774,3^m$ und in Folge dessen: $\min C_p = \frac{M_D}{l} = -\frac{774,3}{36} = -21,5^t$.

Nun ist die vorhin beschriebene Ermittlung von V_C durchzuführen mit Einführung der Werthe

$$\min C = \min C_p + C_g = -21,5 + 69,6 = 48,1^t$$

$$\text{und } \frac{M_C}{\lambda} = \frac{M_{Cg}}{\lambda} = -66,1^t.$$

Die betreffende Figur wurde auf Tafel 5 fortgelassen; sie ergab $\max V_C = -30^t$.

*) Die Rechnung führt im vorliegenden Falle ebenso schnell zum Ziele. Man findet (wegen $\lambda = 3,0^m$; $\text{tg } \gamma = \frac{1,8}{6,0}$ und $h = 3,6^m$) den Werth $V_C = -C + G_u$

$$= -\frac{1}{4} \frac{M_C}{\lambda}.$$

**) Wir erinnern an die Auseinandersetzungen in No. 99, Seite 168.

Um die Spannkraft in der Vertikale über dem ersten Mittelpfeiler (D') zu erhalten (vergl. Fig. 341), braucht die soeben gezeigte Berechnung von V_C nur unter der Voraussetzung wiederholt zu werden, dass in der Fig. 350 (Seite 345) das Trägerstück DB' fehlt. Der durch die ständige Last erzeugte Stützenwiderstand C folgt dann aus der Gleichung

$$C_g l = g \frac{(l + e)^2}{2} + g \frac{l'}{2} (l + e). \quad \text{Man findet}$$

$$(6) \quad C_g = g \frac{(l + e)}{2l} [l + e + l']$$

$$= 1,74 \frac{36 + 6}{2 \cdot 36} [36 + 6 + 32] = 75,1$$

Bei derjenigen Stellung, welche $\min V$ hervorbringt, ergeben sich wieder die vorhin erhaltenen Werthe: $C_p = 191,0^t$ und $\frac{M_C}{\lambda} = -223,7^t$, und es ändert sich deshalb (weil früher $C_g = 69,6^t$ betrug) der grösste Druck V um $75,1 - 69,6 = 5,5^t$ (rund); er beträgt also $203 + 5,5 = 208,5^t$. Die fragliche Vertikale wird nur gedrückt. Ihre kleinste Inanspruchnahme ergibt sich, wenn nur die ständige Belastung vorhanden ist; um diese zu bestimmen, werden die vorhin beschriebenen Konstruktionen mit den Werthen $C = C_g = 75,1^t$ und $M_C = M_{C_g} = -66,1 \lambda$ durchgeführt. Man findet rund $V = -60^t$.

Eine übersichtliche Zusammenstellung der auf ganze Tonnen abgerundeten Spannkraft des Auslegers BC zeigt die Figur 359. Für jede der Kräfte $D_1, V_1, D_2, O_2, U_1, U_2$ ist nur der grösste Zahlenwerth angegeben; die entsprechenden Stäbe werden entweder nur gedrückt oder nur gezogen. Will man die zulässige Inanspruchnahme eines Stabes von dem Verhältniss der kleinsten zur grössten Spannkraft abhängig machen, so kann man die kleinsten Spannkraften, welche entstehen, sobald nur die ständige Belastung auf das Trägerstück BC wirkt, leicht gesondert bestimmen, beispielsweise mit Hilfe eines Cremona'schen Planes. Es empfiehlt sich dann aber in den obigen Entwicklungen $g = 0$ anzunehmen, also den Einfluss der veränderlichen Belastung für sich allein zu ermitteln.

III. Grenzwerte des Stützenwiderstandes C . Der Stützendruck C nimmt den grössten Werth an, sobald der Träger gegen den Lastenzug in die Stellung IV (Fig. 344) gebracht wird. Die Lasten links von D sind beseitigt zu denken. Es werden die Geraden s_4 und s'_4 eingetragen und zu ihnen durch den Pol die gleichbezeichneten Parallelen gelegt, welche letztere auf dem Kräftezuge den Widerstand $\max C_p = 193,7^t$ abschneiden. Die gefährlichste Laststellung ist durch Probieren gefunden worden. Wegen $C_g = 69,6$ folgt schliesslich $\max C = 193,7 + 69,6 = 263^t$.

Für den kleinsten Stützenwiderstand wurde bereits vorhin der Werth $\min C = 48^t$ angegeben. Wäre $\min C$ negativ, so müsste das Auflager an dem Pfeiler verankert werden.

Der Druck auf den ersten Mittelpfeiler ist stets positiv. Sein grösster Werth ist $193,7 + 80,0 = 273,7$ (s. Gleich. 6).

IV. Spannkraften in den Gurtungen der Parallelträger.

a. *Trägertheil mit zwei Auslegern (dritte Oeffnung)*. Um für irgend einen Belastungszustand das Moment M_m für den Knotenpunkt m zu bestimmen, denke man zunächst die Ausleger beseitigt, betrachte also das Trägerstück CD als einfachen Balken. Von dem unter dieser Voraussetzung für m erhaltenen Momente M_{0m} bringe man nun die dem Punkte m entsprechende Ordinate einer Geraden $C'D'$ in Abzug (Fig. 150, Seite 162), welche durch die negativen Stützenmomente: $\overline{CC'} = M_C$ und $\overline{DD'} = M_D$ bestimmt ist, und die wir in der Folge als *Schlusslinie* s bezeichnen wollen. Aus dem Momente M_m findet man für die Grösse der Spannkraft des dem Knoten m gegenüberliegenden Gurtstabes den Werth: $\frac{M_m}{h}$. Sind die Momente mit Hilfe eines Seilpolygons bestimmt worden, welchem die Polweite $H = \varepsilon h$ entspricht, wo ε eine beliebige Zahl bedeutet, so ergibt sich $\frac{M_m}{h}$

$$= \frac{Hy_m}{h} = \varepsilon y_m.$$

Die grössten und kleinsten Werthe y_m sind nun für den vorliegenden Träger in der Fig. 352 dargestellt worden. Die rechte Hälfte enthält die Werthe $max y_m$, die linke Hälfte die $min y_m$. Erstere entstehen, wenn das Trägerstück CD gänzlich belastet wird, während die Ausleger und die angrenzenden Koppelträger unbelastet bleiben. Die Stützenmomente M_C und M_D nehmen dann, nach der letzten der Gleichungen (1), die Werthe an

$$M_{Cg} = M_{Dg} = -66,1 \cdot 3,0;$$

denselben entspricht, da die Polweite $= 4h = 4 \cdot 3,6^m$ ist,

$$y_{Cg} = y_{Dg} = -\frac{66,1 \cdot 3,0}{4 \cdot 3,6} = -13,8^t$$

und hierdurch ist die (wagerechte) Schlusslinie s_1 in Fig. 352 bestimmt. Die Ordinaten des M_0 -Polygons stimmen mit denen des in der Fig. 130 auf Tafel 1 dargestellten Polygons der grössten Momente eines einfachen Balkens überein; die Ermittlung derselben ist in No. 82 beschrieben worden.*) Es ergibt sich (wegen $\varepsilon = 4$):

*) Es ist also beispielsweise die Ordinate $\overline{22'}$ in Fig. 352 gleich der Ordinate y_2 in Fig. 130. Man achte auf die Verschiedenheit der Kräftemaassstäbe der Tafeln 1 und 5.

$max y_0 = -13,8^t$	$min O_1 = -4 \cdot 14,4 = -58^t$	$max U_1 = -4 \cdot 13,8 = -55^t$
$max y_1 = +14,4^t$	$min O_2 = -4 \cdot 34,9 = -140^t$	$max U_2 = +58^t$
$max y_2 = +34,9^t$	$min O_3 = -4 \cdot 49,9 = -200^t$	$max U_3 = +140^t$
$max y_3 = +49,9^t$	$min O_4 = -4 \cdot 58,4 = -234^t$	$max U_4 = +200^t$
$max y_4 = +58,4^t$	$min O_5 = -4 \cdot 61,9 = -248^t$	$max U_5 = +234^t$
$max y_5 = +61,9^t$		

Wird der Träger links von C und rechts von D so belastet, dass die grössten Momente M_C und M_D entstehen, während auf den Theil CD nur die ständige Belastung wirkt, so ergeben sich die in der linken Hälfte der Fig. 352 dargestellten grössten negativen Werthe y . An die Stelle des M_0 -Polygon tritt das M_{0g} -Polygon, dessen Eckpunkte auf einer Parabel mit dem Pfeile $\frac{gl^2}{8H} = \frac{1,74 \cdot 36^2}{8 \cdot 4 \cdot 3,6} = 19,6^t$ liegen,

und die Schlusslinie s_1 ist durch die um $\frac{M_{Cp}}{H} = -y_C$ höher liegende s_2 zu ersetzen, wobei y_C mit dem in Figur 344 der Trägerstellung I entsprechenden y_2 übereinstimmt.

Man findet

$min y_0 = -53,8^t$	$max O_1 = +4 \cdot 46,7 = +187^t$	$min U_1 = -4 \cdot 53,8 = -215^t$
$min y_1 = -46,7^t$	$max O_2 = +4 \cdot 41,3 = +165^t$	$min U_2 = -187^t$
$min y_2 = -41,3^t$	$max O_3 = +4 \cdot 37,3 = +149^t$	$min U_3 = -165^t$
$min y_3 = -37,3^t$	$max O_4 = +4 \cdot 34,9 = +140^t$	$min U_4 = -149^t$
$min y_4 = -34,9^t$	$max O_5 = +4 \cdot 34,2 = +137^t$	$min U_5 = -140^t$
$min y_5 = -34,2^t$		

b. Trägertheil mit einem Ausleger (erste Oeffnung). Wir bezeichnen wieder die linke Stütze mit C , die rechte mit D und nehmen den Träger zwischen C und D gänzlich belastet, rechts von D unbelastet an. Die Schlusslinie s_1 geht durch den linken Stützpunkt (Fig. 353 a auf Tafel 5) und besitzt bei D die Ordinate $-13,8^t$. Das M_0 -Polygon ist dasselbe wie in der Fig. 352.

Da der grösste Werth y dem Knoten 5 entspricht, so sind bei der Berechnung der Spannkraften in den Gurtungen links und rechts von 5 beziehungsweise links- und rechtssteigende Diagonalen voranzusetzen.

Man findet

$max y_1 = +26,8^t$	$min O_1 = -4 \cdot 26,8 = -107^t$	$U_1 = 0$
$max y_2 = +45,9^t$	$min O_2 = -4 \cdot 45,9 = -184^t$	$max U_2 = +107^t$
$max y_3 = +59,6^t$	$min O_3 = -4 \cdot 59,6 = -238^t$	$max U_3 = +184^t$
$max y_4 = +66,7^t$	$min O_4 = -4 \cdot 66,7 = -267^t$	$max U_4 = +238^t$
$max y_5 = +68,8^t$	$min O_5 = -4 \cdot 68,8 = -275^t$	$max U_5 = +267^t$
$max y_6 = +63,9^t$	$min O_6 = min O_5 = -275^t$	$max U_6 = +256^t$
$max y_7 = +54,1^t$	$min O_7 = -4 \cdot 63,9 = -256^t$	$max U_7 = +216^t$
$max y_8 = +37,7^t$	$min O_8 = -4 \cdot 54,1 = -216^t$	$max U_8 = +151^t$
$max y_9 = +15,8^t$	$min O_9 = -4 \cdot 37,7 = -151^t$	$max U_9 = +63^t$
$max y_{10} = -13,8^t$	$min O_{10} = -4 \cdot 15,8 = -63^t$	$max U_{10} = -4 \cdot 13,8 = -55^t$

*) Die Multiplikationen mit 4 kann man umgehen, indem man in der Fig. 352 den Kräftemassstab $1^{cm} = 30^t$ ändert in $1^{cm} = 4 \cdot 30 = 120^t$. Dann stellen die Ordinaten y die Kräfte O und U dar.

Um nun die Werthe $\min y$ zu erhalten, ist der Träger rechts von D so zu belasten, dass das grösste Stützenmoment M_D entsteht, während zwischen C und D nur ständige Belastung anzunehmen ist.

Man gelangt dann zu der Figur 353b und findet, da der grösste (positive) Werth y dem Knoten 2 entspricht, dass bei der Berechnung der Gurtkräfte der in der Figur 354 angegebene Spannungszustand der

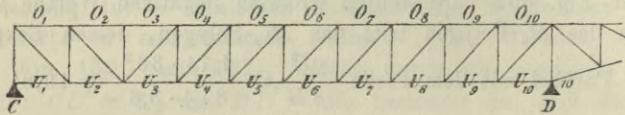


Fig. 354.

Diagonalen vorauszusetzen ist. Es ergibt sich:

$\min y_1 = +1,7^t$	$\max O_1 = -4 \cdot 1,7 = -7^t$	$U_1 = 0$
$\min y_2 = +1,8^t$	$\max O_2 = -4 \cdot 1,8 = -7^t$	$\min U_2 = +7^t$
$\min y_3 = +0,3^t$	$\max O_3 = \max O_2 = -7^t$	$\min U_3 = +1^t$
$\min y_4 = -2,7^t$	$\max O_4 = -4 \cdot 0,3 = -1^t$	$\min U_4 = -11^t$
$\min y_5 = -7,3^t$	$\max O_5 = +4 \cdot 2,7 = +11^t$	$\min U_5 = -29^t$
$\min y_6 = -13,5^t$	$\max O_6 = +4 \cdot 7,3 = +29^t$	$\min U_6 = -54^t$
$\min y_7 = -21,2^t$	$\max O_7 = +4 \cdot 13,5 = +54^t$	$\min U_7 = -85^t$
$\min y_8 = -30,5^t$	$\max O_8 = +4 \cdot 21,2 = +85^t$	$\min U_8 = -122^t$
$\min y_9 = -41,4^t$	$\max O_9 = +4 \cdot 30,5 = +122^t$	$\min U_9 = -166^t$
$\min y_{10} = -53,8^t$	$\max O_{10} = +4 \cdot 41,4 = +166^t$	$\min U_{10} = -4 \cdot 53,8 = -215^t$

Eine Zusammenstellung der Spannkkräfte O und U findet sich in der Fig. 359.

V. Spannkkräfte in den Füllungsstäben der Parallelträger.

a. Trägertheil mit zwei Auslegern (dritte Oeffnung). Die Spannkkräfte in den Füllungsstäben eines Parallelträgers lassen sich (nach § 36) schnell ermitteln, sobald die Querkräfte Q bekannt sind. Um $\max Q_m$ für das m^{te} Balkenfeld zu erhalten, belasten wir den Träger links von C so, dass das grösste Moment M_C entsteht, und nehmen ausserdem

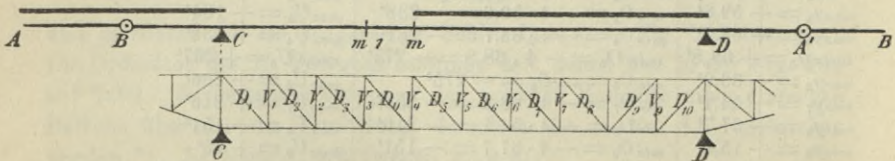


Fig. 355.

einen von D bis m reichenden Lastenzug an. Den Einfluss des letzteren bestimmen wir in bekannter Weise mit Hilfe des in No. 81 eingeführten

Seilpolygons, welches wir jetzt das C -Polygon nennen wollen; dasselbe ist in der Fig. 126 auf Tafel 1 für einen 36^m langen Balken ermittelt worden. *) Die negativen Beitragsstrecken wurden aus den in No. 151 angeführten Gründen frei von jeder Verkehrslast gedacht, hingegen wurde, um nicht allzu ungünstig zu rechnen, davon abgesehen, den Lastenzug über m hinaus in das fragliche Feld vorzuschieben. Der Einfluss der auf der Strecke Dm liegenden Verkehrslast auf die Querkraft Q ist dann gleich der dem Punkte m entsprechenden Ordinate C_m des C -Polygons. Die Wirkung der übrigen Belastung wird wie folgt bestimmt. Man betrachtet CD zunächst als einfachen Balken und bestimmt die von der ständigen Belastung abhängigen Querkräfte auf die in No. 72 beschriebene Weise mit Hilfe einer Geraden, welche auf der linken und rechten Auflagersenkrechten beziehungsweise die Ordinaten: $+\frac{1}{2}gl = \frac{1}{2} \cdot 1,74 \cdot 36 = +31,32'$ und $-31,32'$ abschneidet. Zu jedem der so gewonnenen Werthe Q addirt man nun (nach Gleichung 2 auf Seite 162) den Betrag: $\frac{1}{l}(M_D - M_C)$. Hierbei ist zu setzen

$$M_D = M_{Dg} = -66,1 \cdot 3,0 \text{ und } M_C = -258,15 \cdot 3,0, **)$$

so dass sich ergibt

$$\frac{1}{l}(M_D - M_C) = \frac{3}{36}(258,15 - 66,1) = +16,0'$$

Die vorstehenden Erörterungen führen zu der in der Fig. 356 gegebenen Darstellung der Querkräfte $_{max}Q$. Es wurde nach Aufzeichnung des C -Polygons die Gerade $C'D'$ mittels der Strecken $\overline{CC'} = +31,32 + 16,00 = +47,3'$ und $\overline{DD'} = -31,32 + 16,00 = -15,3'$ bestimmt. Durch die den Feldmitten entsprechenden Punkte der Linie $C'D'$ wurden wagerechte Gerade gezogen und deren Ordinaten mit Berücksichtigung der Vorzeichen zu den den Knoten 1, 2, 3, . . . entsprechenden Ordinaten der C -Linie addirt. Aus den Querkräften Q ergeben sich schliesslich auf die im § 36 erläuterte Weise und mit Bezugnahme auf Fig. 355 die folgenden Spannkkräfte D und V^{***} ;

*) In die Figuren 356—358 wurden nur die den Knotenpunkten entsprechenden Ordinaten dieser (früher als A -Polygon bezeichneten) Linie übertragen und zwar im Maassstabe $1^m = 25'$.

**) Siehe die Gleichungen (1) und (3) auf Seite 340 und 341, in welche $\lambda = 3,0^m$ einzusetzen ist.

***) Bei Berechnung der V ist das Glied $g_u \lambda = 0,45 \cdot 3,6 = 1,6'$ berücksichtigt worden. Wir erinnern noch daran, dass die Fahrbahn oben liegt.

$\min V_1 = -Q_1 + 1,6 = -124^t$	$\max D_1 = +178^t$	$\max V_9 = +Q_{10} + 1,6$
$\min V_2 = -Q_2 + 1,6 = -102^t$	$\max D_2 = +146^t$	$= -12,2 + 1,6 = -11^t$
$\min V_3 = -Q_3 + 1,6 = -82^t$	$\max D_3 = +118^t$	$\min D_9 = +5^t$
$\min V_4 = -Q_4 + 1,6 = -63^t$	$\max D_4 = +91^t$	$\min D_{10} = +17^t$
$\min V_5 = -Q_5 + 1,6 = -46^t$	$\max D_5 = +67^t$	
$\min V_6 = -Q_6 + 1,6 = -30^t$	$\max D_6 = +45^t$	
$\min V_7 = -Q_7 + 1,6 = -17^t$	$\max D_7 = +26^t$	
	$\max D_8 = +10^t$	

Um die Querkräfte $\min Q$ zu erhalten, genügt es, der im vorliegenden Falle bestehenden Symmetrie wegen, das Spiegelbild der Fig. 356 zu betrachten und die Vorzeichen der Kräfte Q umzukehren. Man findet dann, dass in den sechs Mittelfeldern Gegendiagonalen nöthig werden. Eine Zusammenstellung der Grenzwerte der Spannkräfte D und V zeigt die Figur 359; für die Vertikalen, an denen Gegendiagonalen angreifen, braucht nur der grösste Druck (also $\min V$) angegeben zu werden. *)

b. Trägertheil mit einem Ausleger (erste Oeffnung). Um zunächst die Kräfte $\max Q$ zu bestimmen, wurden in Fig. 357 zu den Ordinaten des C -Polygons die den Feldmitten entsprechenden Ordinaten einer Geraden $C'D'$ addirt, welche, wegen $M_C = 0$, auf den Senkrechten durch die Stützpunkte C und D die Strecken

$$\overline{CC'} = \frac{gl}{2} + \frac{M_D}{l} \quad \text{und} \quad \overline{DD'} = -\frac{gl}{2} + \frac{M_D}{l}$$

abschneidet. Rechts von D ist nur ständige Belastung anzunehmen, weshalb: $M_D = M_{Dg} = -66,1 \cdot 3,0$ zu setzen ist. Hiernach ergibt sich

$$\overline{CC'} = 31,32 - \frac{66,1 \cdot 3,0}{36} = +25,8^t$$

$$\text{und} \quad \overline{DD'} = -31,32 - \frac{66,1 \cdot 3,0}{36} = -36,8^t$$

und nach Aufzeichnung des Kräfteplanes in Fig. 357

$\min V_1 = -Q_1 + 1,6 = -103^t$	$\max D_1 = -O_1 \sec \varphi = +151^{t**}$	
$\min V_2 = -Q_2 + 1,6 = -80^t$	$\max D_2 = +115^t$	
$\min V_3 = -Q_3 + 1,6 = -60^t$	$\max D_3 = +87^t$	
$\min V_4 = -Q_4 + 1,6 = -41^t$	$\max D_4 = +61^t$	
$\min V_5 = -Q_5 + 1,6 = -25^t$	$\max D_5 = +37^t$	$\max D_6 = +14^t$
$\max V_7 = +Q_8 + 1,6 = -14,7 + 1,6 = -13^t$	$\min D_7 = +4^t$	
$\max V_8 = +Q_9 + 1,6 = -23^t$	$\min D_8 = +21^t$	
$\max V_9 = +Q_{10} + 1,6 = -32^t$	$\min D_9 = +35^t$	
	$\min D_{10} = +48^t$	

*) Macht man die zulässige Inanspruchnahme einer solchen Vertikale abhängig vom Verhältniss der Grenzwerte der Spannkräfte, so setze man $\max V = -g_0 \lambda$.

***) Der grösste Zug D_1 entsteht gleichzeitig mit dem grössten Drucke O_1 und wurde in Fig. 357 fortgelassen.

Damit im m^{ten} Felde die Querkraft ${}_{\min}Q_m$ entsteht, muss ein Eisenbahnzug von C aus bis $m - 1$ vorgeschoben werden. Ausserdem ist der Balken rechts von D so zu belasten, dass das Stützenmoment M_D seinen grössten negativen Werth: $M_D = -258,15 \cdot 3,0$ annimmt. Der Einfluss des von C bis $m - 1$ reichenden Lastenzuges auf Q_m ist gleich der dem Knoten $m - 1$ entsprechenden Ordinate des D -Polygons (Spiegelbild des C -Polygons); zu demselben ist, um die übrige Belastung zu berücksichtigen, die zur Feldmitte gehörige Ordinate einer Geraden $C'D'$ (Fig. 358) zu addiren, welche auf den Auflagersenkrechten die Strecken

$$\overline{CC'} = \frac{gl}{2} + \frac{M_D}{l} = 31,32 - \frac{258,15 \cdot 3,0}{36} = 31,32 - 21,51$$

$$= +9,8^t \text{ und } \overline{DD'} = -\frac{gl}{2} + \frac{M_D}{l} = -31,32 - 21,51 = -52,8^t$$

abschneidet. Man findet

$\min V_2 = Q_3 + 1,6 = -11^t$	$\min D_1 = +9^t$
$\min V_3 = Q_4 + 1,6 = -23^t$	$\max D_2 = +3^{t*})$
$\min V_4 = Q_5 + 1,6 = -36^t$	$\max D_3 = +17^t$
$\min V_5 = Q_6 + 1,6 = -51^t$	$\max D_4 = +34^t$
$\min V_6 = Q_7 + 1,6 = -68^t$	$\max D_5 = +53^t$
$\min V_7 = Q_8 + 1,6 = -87^t$	$\max D_6 = +75^t$
$\min V_8 = Q_9 + 1,6 = -107^t$	$\max D_7 = +99^t$
$\min V_9 = Q_{10} + 1,6 = -130^t$	$\max D_8 = +126^t$
	$\max D_9 = +154^t$
	$\max D_{10} = +186^t$

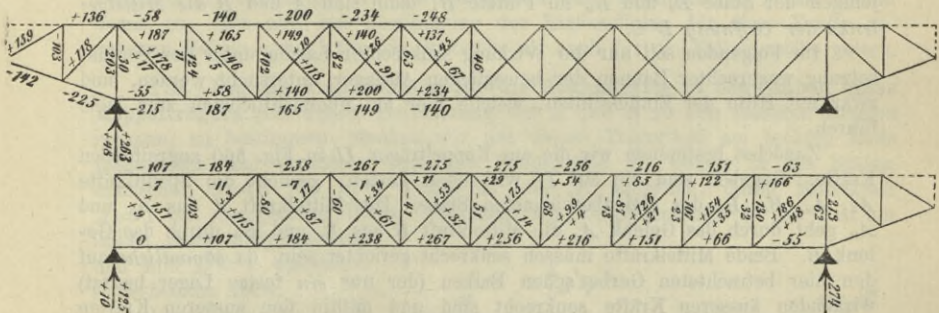


Fig. 359.

*) Dieser Werth D_2 entspricht selbstverständlich der rechtssteigenden Diagonale des zweiten Feldes und der vorhin angegebene Werth D_2 der linkssteigenden. Es erschien uns überflüssig, für die beiden Diagonalen eines Feldes verschiedene Bezeichnungen einzuführen, weil ein Blick auf die Figuren 357 und 358 jeden Zweifel beseitigt.

Für die Endvertikale ergeben sich, da der grösste Stützenwiderstand $C_{max} = \overline{C' C''}$ (in Fig. 357) = 125,3' und der kleinste $C_{min} = \overline{C C'}$ (in Fig. 358) = 9,8' ist, die Spannkkräfte

$$\begin{aligned} \min V_0 &= -C_{max} + \frac{1}{2} g_u \lambda = -125,3 + 0,8 = -125', \\ \max V_0 &= -C_{min} + \frac{1}{2} g_u \lambda = -9,8 + 0,8 = -9'. \end{aligned}$$

§ 42.

Gerber'scher Fachwerkbalken mit Gelenkvierecken.

177. **Einleitung.** Wir gehen jetzt zur Untersuchung eines Gerber'schen Balkens über, bei welchem an Stelle eines jeden der bislang vorausgesetzten *wirklichen* Mittelgelenke zwei Stäbe treten, deren Schnittpunkt (nach der in No. 141 gegebenen Erklärung) die Rolle des Gelenkes spielt. In der Fig. 360 ist ein Stück eines solchen Balkens dargestellt worden. Der schwebende Theil *II* ist mit den angrenzenden gestützten Theilen *I* und *III* durch je zwei Stäbe verbunden. Die Achsen der Stäbe A_o und A_u schneiden sich im Punkte *A*, die

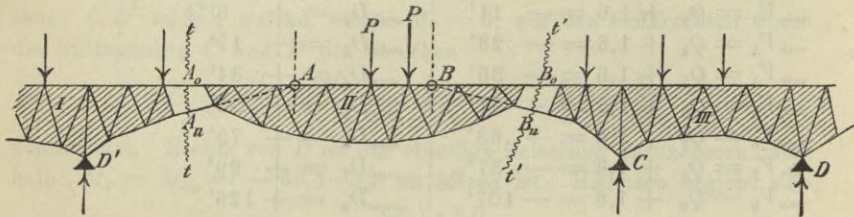


Fig. 360.

jenigen der Stäbe B_o und B_u im Punkte *B*; dann sind *A* und *B* die *Mittelgelenke der Öffnung D'C*.

Im Folgenden soll nur die Wirkung senkrechter Lasten unter der Voraussetzung wagerechter Bahnen der beweglichen Auflager untersucht werden, und zwar mit Hilfe der Einflusslinien, welche hier am übersichtlichsten zum Ziele führen.

Zunächst bestimmen wir die am Koppelträger *II* in Fig. 360 angreifenden Kräfte. Gegeben sind die auf *II* wirkenden Lasten, gesucht die Spannkkräfte A_o , A_u , B_o , B_u der gleichbezeichneten Stäbe. Die Mittelkraft *A* aus A_o und A_u geht durch das Gelenk *A*, die Mittelkraft *B* aus B_o und B_u durch das Gelenk *B*. Beide Mittelkräfte müssen senkrecht gerichtet sein, da *sämmtliche* auf den hier betrachteten Gerber'schen Balken (der nur *ein* festes Lager besitzt) wirkenden äusseren Kräfte senkrecht sind und mithin den äusseren Kräften links vom Schnitte *tt* (Fig. 360) sowie den äusseren Kräften rechts von *t't'* nur durch senkrechte Kräfte *A*, beziehungsweise *B* das Gleichgewicht gehalten werden kann. Wir nehmen *A* und *B* positiv an, wenn sie auf den Koppelträger nach *oben*, also auf die Ausleger nach *unten* wirken; beide Kräfte sind nur von den auf den Koppelträger wirkenden Lasten *P* abhängig. Man findet, mit den aus der Figur 361 ersichtlichen Bezeichnungen, den Einfluss einer Last $P=1$ mittels der auf die Punkte *B* und *A* bezogenen Momentengleichungen:

$$Al - Pb = 0 \text{ und } Bl - Pa = 0,$$

woraus

$$A = P \frac{b}{l} = 1 \frac{b}{l} \text{ und } B = P \frac{a}{l} = 1 \frac{a}{l}.$$

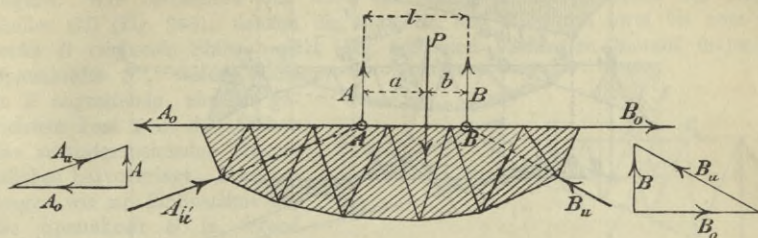


Fig. 361.

Liegt P rechts von B , so wird b negativ, befindet es sich links von A , so ändert a das Vorzeichen. Die Einflusslinien für A und B sind in den Figuren 363 u. 364 für zwei verschiedene gegenseitige Lagen der Gelenke A und B dargestellt worden. Die A -Linie besteht zwischen R_1 und T_1 aus einer Geraden, welche auf der Senkrechten durch A und B beziehungsweise die Ordinaten 1 und 0 abschneidet, und an welche sich links und rechts die den Feldern R_1R_2 und T_1T_2 entsprechenden Geraden schliessen. Lasten, welche durch R_2 und T_2 gehen, entspricht $A = 0$. Ebenso wird die B -Linie bestimmt. In den Figuren 363 und 364 wurde die A -Fläche durch Schraffur hervorgehoben. Aus den Grenzwerten der Kräfte A und B lassen sich die grössten und kleinsten Spannkraften in den Stäben A_0, A_u, B_0, B_u durch einfache Zerlegung von A und B ermitteln.

In den folgenden Untersuchungen, die sich auf das einfache Dreiecknetz beschränken, bezeichnen wir die Spannkraften ganz allgemein mit S und deuten damit an, dass alle zur Bestimmung der Einflusslinien für diese Kräfte gegebenen Regeln sowohl für die Gurtstäbe als auch für die Füllungsstäbe gelten.

178. Um die Einflusslinien für die Spannkraften in den Stäben eines Koppelträgers (bei dessen Betrachtung wir A und B zu den äusseren Kräften rechnen) zu bestimmen, denken wir uns diesen Trägertheil am rechten Ende festgehalten und ermitteln diejenigen Spannkraften S' , welche in den Stäben entstehen, sobald nur zwei Kräfte A_0 und A_u angreifen, deren Mittelkraft $A = 1$ ist. In gleicher Weise bestimmen wir die Spannkraften S'' für den am linken Ende festgehaltenen und mit $B = 1$ belasteten schwebenden Theil.

Liegt nun die über den Träger wandernde Last $P = 1$ rechts von dem Schnitte tt , welcher den Stab, für dessen Spannkraft S die Einflusslinie gesucht wird, höchstens noch zwei andere Stäbe trifft, so greift links von tt nur die äussere Kraft A an, und es entsteht daher $S = AS'$, während eine

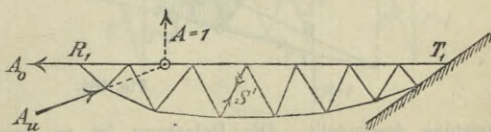


Fig. 362.

links von tt sich befindende Last 1 für sich allein die Spannkraft $S = BS''$ hervorruft. Sind F_1 und F_2 die Querträger links und rechts vom Schnitte tt (Fig. 363), so folgt:

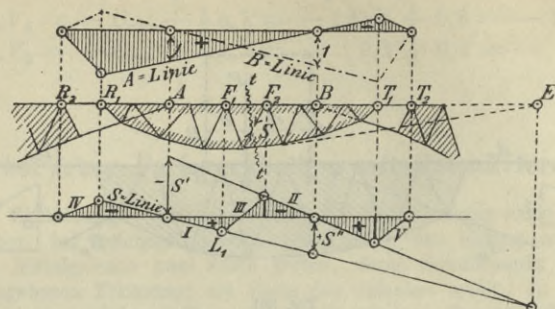


Fig. 363.

Die Ordinaten des rechts von F_2 gelegenen Theiles der Einflusslinie für S (kurz: S -Linie) sind gleich den mit S' multiplicirten entsprechenden Ordinaten der $\frac{A\text{-Linie}}{B\text{-Linie}}$.

Durch diesen Satz und durch die Werthe S' und S'' ist die S -Linie eines jeden Stabes vollständig bestimmt; sie wurde in den Figuren 363 und 364 für eine linkssteigende Diagonale unter Voraussetzung verschiedener gegenseitiger Lagen der Gelenke A und B und des Schnittpunktes E der von tt getroffenen

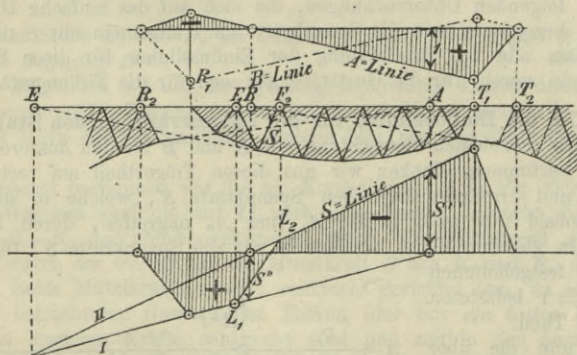


Fig. 364.

Gurtstäbe dargestellt. Die Belastung ist an der oberen Gurtung angreifend gedacht. Mit Hilfe der Werthe S' und S'' , deren erster im vorliegenden Falle positiv ist, während S'' einen Druck bedeutet, wurden die Geraden I und II festgelegt; erstere gilt zwischen F_1 und R_1 , letztere zwischen F_2 und T_1 . Den Feldern $R_2 R_1$, $F_1 F_2$, $T_1 T_2$ entsprechen beziehungsweise die Geraden IV , III , V .

Wir weisen noch besonders auf die ähnlichen Untersuchungen in No. 143 u. 175 hin, deren Ergebnisse auch im vorliegenden Falle zur Bestimmung der Geraden *I* und *II* verwendet werden können. Beispielsweise müssen sich *I* und *II* in einem Punkte der Senkrechten durch *E* treffen.

179. Einflusslinie für die Spannkraft *S* in einem Stabe eines Auslegers. Wir betrachten das über die Stütze *C* ragende Stück des Trägers *CD* (Fig. 360), denken die Stäbe *B_o* und *B_u* durch zwei bis zum Gelenke *B* reichende Stäbe ersetzt (Fig. 365) und bestimmen hierauf diejenigen Spannkraft *S'*, welche eine in *B* angreifende, abwärts gerichtete Last 1 in den Stäben des zu untersuchenden Trägerstückes hervorbringt. Nun gelangen wir zur Einflusslinie für die Spannkraft *S* in irgend einem Stabe durch die folgende einfache Ueberlegung:

Der Einfluss einer Einzelast $P=1$, welche auf den in der Fig. 365 dargestellten Träger wirkt und links von dem Felde $F_1 F_2$, durch welches der Schnitt *tt* geht, angreift, ist durch die Ordinate einer Geraden (*I*) gegeben, welche bei *B* die Ordinate S' besitzt und deren Nullpunkt *N* senkrecht unter dem Schnittpunkte *E* der beiden Stäbe liegt, die ausser dem fraglichen Stabe noch vom Schnitte *tt* getroffen werden. Diese Gerade darf für

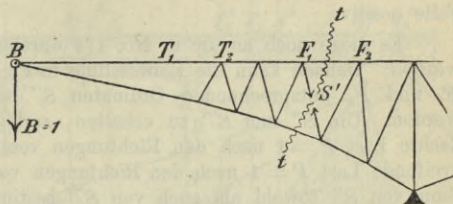


Fig. 365.

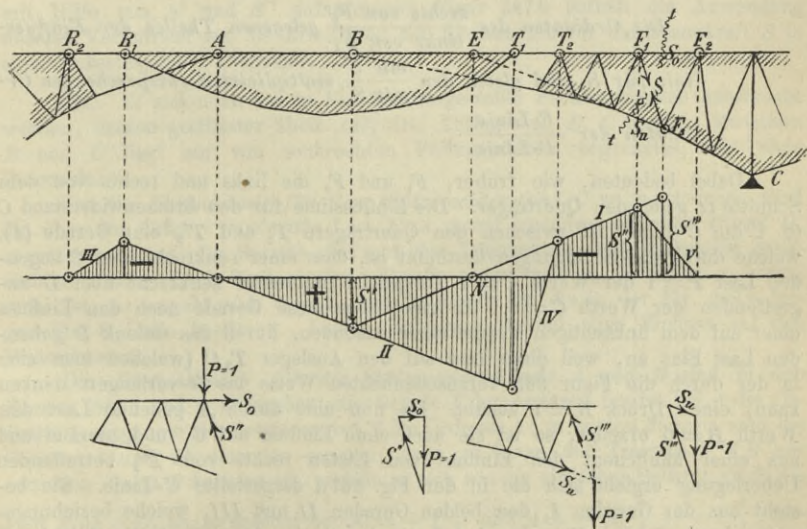


Fig. 366.

den Träger in Fig. 366 natürlich nur zwischen T_2 und F_1 benutzt werden. Ruht die über den Träger wandernde Lasteinheit auf dem anliegenden Koppel-

träger, so übt sie auf den Ausleger einen im Punkte B angreifenden Druck B aus und erzeugt die Spannkraft $S = B \cdot S'$. Die Ordinaten der links von T_1 gelegenen Theile II und III der gesuchten S -Linie sind also gleich den mit S' multiplicirten Ordinaten der B -Linie, während sich die den Feldern $T_1 T_2$ und $F_1 F_2$ entsprechenden Theile der S -Linie mit Hilfe des Satzes ergeben, dass jede Einflusslinie zwischen zwei benachbarten Querträgern eine Gerade ist. Der Nullpunkt von II entspricht dem Gelenke A .

In der Figur 366 ist die Einflusslinie für die Spannkraft in einer linkssteigenden Diagonale dargestellt worden. Die Spannkraft S' ist im vorliegenden Falle positiv.

Es möge noch an die in No. 174 durchgeführten Untersuchungen erinnert werden. Danach kann die Einflusslinie in Fig. 366 auch durch die den Punkten F_1 und F_2 entsprechenden Ordinaten S'' und S''' der Geraden I festgelegt werden. Um S'' und S''' zu erhalten, zerlegt man eine in F_1 angreifend gedachte Last $P=1$ nach den Richtungen von S und S_0 , sodann eine in F_2 angreifende Last $P=1$ nach den Richtungen von S und S_u . Auf welche Weise der Sinn von S'' sowohl als auch von S''' bestimmt wird, ist durch die neben die Kräffdreiecke (deren Umfahrungssinn ein stetiger sein muss) gesetzten Figuren angedeutet worden.

180. Die Einflusslinie für die Spannkraft in irgend einem Stabe des zwischen den Stützen C und D gelegenen Trägertheiles (Fig. 367) ist nach Ermittlung der Spannkraft S' und S'' , welche beziehungsweise mit den in No. 143 eingeführten Spannkraften O' , U' , D' und O'' , U'' , D'' übereinstimmen, durch den Satz gegeben:

Die Ordinaten des $\frac{\text{rechts von } F_2}{\text{links von } F_1}$ gelegenen Theiles der Einflusslinie für S sind gleich den $\frac{\text{mit } S'}{\text{mit } S''}$ multiplicirten entsprechenden Ordinaten der $\frac{C\text{-Linie}}{D\text{-Linie}}$.

Dabei bedeuten, wie früher, F_1 und F_2 die links und rechts von dem Schnitte tt gelegenen Querträger. Die Einflusslinie für den Stützenwiderstand C (d. i. die C -Linie) ist zwischen den Querträgern T_2 und T'_2 eine Gerade (I), welche durch die Bedingungen bestimmt ist, dass einer senkrecht über C liegenden Last $P=1$ der Werth $C=1$ entspricht und einer senkrecht über D angreifenden der Werth $C=0$. Es giebt aber diese Gerade auch den Einfluss einer auf dem linksseitigen Koppelträger ruhenden, durch das Gelenk B gehenden Last Eins an, weil diese Last auf den Ausleger $T_2 C$ (welchen man sich in der durch die Figur 365 veranschaulichten Weise bis B verlängert denken kann) einen Druck $B=1$ ausübt. Da nun eine durch A gehende Last den Werth $B=0$ erzeugt, so ist sie auch ohne Einfluss auf C , und hieraus und aus einer ähnlichen, den Einfluss von Lasten rechts von T'_2 betreffenden Ueberlegung ergibt sich die in der Fig. 367a dargestellte C -Linie. Sie besteht aus der Geraden I , den beiden Geraden II und III , welche beziehungsweise durch die Schnittpunkte der I mit den Senkrechten durch die Gelenke B und B' gehen, und deren Nullpunkte den Gelenken A und A' entsprechen, schliesslich aus den Geraden IV , V , VI , VII , gehörig zu den Feldern $R_2 R_1$, $T_1 T_2$, $T_2 T'_1$, $R'_2 R'_1$. In Fig. 367 wurden zu beiden Seiten der Oeffnung CD verschiedene gegenseitige Lagen der Mittelgelenke A und B , A' und B' vorausgesetzt.

Ganz ebenso wird die (in der Fig. 367 a strichpunktirte) Einflusslinie für den Stützenwiderstand D bestimmt, und nun unterliegt es keinerlei Schwierig-

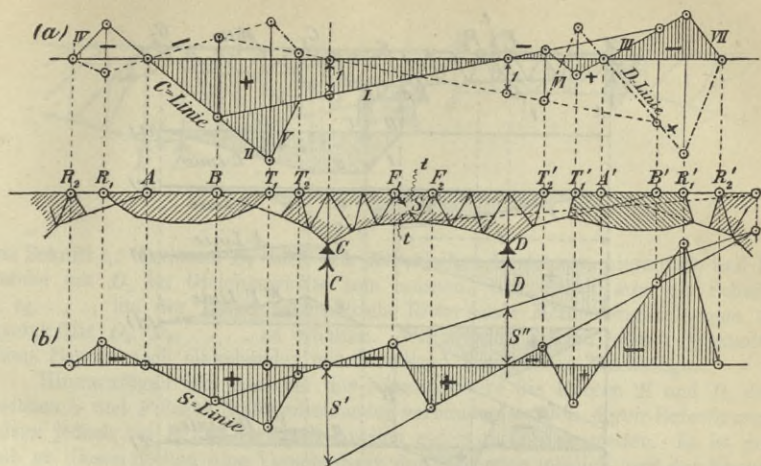


Fig. 367.

keit mehr, die Einflusslinie für die Spannkraft S in irgend einem Füllungsstabe mit Hilfe von S' und S'' aufzutragen. Figur 367 b enthält die Anwendung unseres Verfahrens auf die Ermittlung der Einflusslinie für die Spannkraft S in einer linkssteigenden Diagonale.

181. Es soll noch der in Fig. 368 dargestellte Fachwerkbalken untersucht werden, dessen gestützter Theil AG_1 drei Auflager A, B, C besitzt. Zwischen B und C liegt ein von senkrechten Füllungsstäben begrenztes Feld ohne Diagonale.

Um die Einflusslinie für den Stützenwiderstand C zu bestimmen, wird die über den Träger wandernde Last *Eins* zuerst irgendwo zwischen C und G_1 angenommen und die Summe der auf das Trägerstück CG_1 wirkenden senkrechten Kräfte gleich Null gesetzt. Da die Spannkraft S_0 im Stabe S_0 waagrecht ist, so ergibt sich $C = 1$, und hierdurch ist die in der Fig. 368 a dargestellte C -Linie bestimmt. Lasten links von B sind ohne Einfluss auf den Widerstand C .

Die Einflusslinien für die Stützenwiderstände A und B sind in den Figuren 368 b und c angegeben; die Gerade I der ersteren besitzt bei A die Ordinate 1, diejenige der letzteren bei B die Ordinate 1; in beiden Figuren sind die Geraden I und II einander parallel; denn so lange der Trägertheil AB nur zwischen A und B belastet ist, verhält er sich wie ein einfacher Balken; greift die Last *Eins* in G_1 an, so erzeugt sie: $S_0 = +1 \frac{e}{h}$ und $A = -S_0 \frac{h}{l} = -1 \frac{e}{l}$, ferner $B = -A = +1 \frac{e}{l}$.

Um die Einflusslinie für die Spannkraft in irgend einem Stabe des Trägerstückes AB zu finden, betrachte man AB zuerst als einfachen Balken

und verfähre nach No. 143 Seite 269. Sodann beachte man, dass der Einfluss von Lasten, welche auf den Trägertheil rechts vom Schnitte tt wirken, ganz

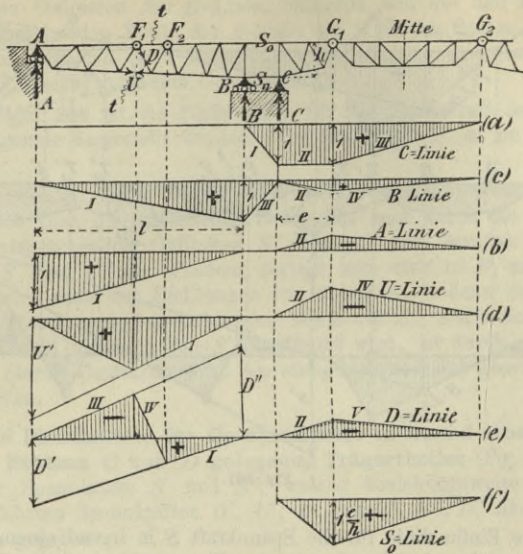


Fig. 368.

allgemein $= AS'$ ist, wo S' die Spannkraft für den in No. 143 erklärten Zustand $A=1$ ist. In den Figuren 368 d u. e sind die Einflusslinien für eine Spannkraft U und eine Spannkraft D dargestellt worden. Die links von B gelegenen Theile derselben sind durch die Werthe U' , D' , D'' bestimmt, und die Theile rechts von B durch die Bedingung, dass in beiden Figuren die Gerade II der Geraden I parallel sein muss.

Die Spannkräfte in den wagerechten Gurtstäben des Feldes BC sind für jeden Belastungszustand entgegengesetzt gleich ($S_u = -S_o$); die Einflusslinie für S_o (Fig. 368 f) ist durch die dem Mittelgelenke G_1 entsprechende Ordinate $1 \frac{e}{h}$ bestimmt.

Fig. 368 giebt im Wesentlichen die Anordnung der Hauptträger der neuen Eisenbahnbrücke an, welche den *Niagara* in kurzer Entfernung unterhalb der berühmten Fälle überspannt und im December 1883 dem Verkehr übergeben wurde.*) Eigenthümlich ist bei dieser Brücke auch die Anordnung der Füllungsstäbe. Fig. 369 zeigt den überragenden und den angrenzenden schwebenden Theil. Die Diagonalen 3, 4, 5, 6, 7 gehen durch je zwei Felder, die erste derselben vereinigt sich jedoch mit der einfeldrigen Diagonale 2 in der Nähe des unteren Knotens F zu einem Stabe 1, und in Folge dessen ist der Träger auch

*) Eine ausführliche Beschreibung dieser vom Ober-Ingenieur *C. C. Schneider* in *New-York* entworfenen Brücke findet sich in der *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure*, 1881, S. 385.

innerlich statisch bestimmt. Um beispielsweise die Spannkraften D_1, D_2, \dots, D_8 im Stabe 1 und in den Diagonalen 2, 3, 8 zu finden, führe man zuerst

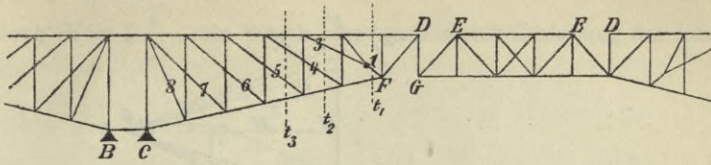


Fig. 369.

den Schnitt ζ_1 , bestimme D_1 nach dem Ritter'schen Verfahren, hierauf D_2 und D_3 , welche mit D_1 im Gleichgewichte sein müssen, und führe nun die Schnitte ζ_2, ζ_3, \dots , um der Reihe nach mittels Ritter'scher Momentengleichungen die Spannkraften D_4, D_5, \dots zu erhalten. Wir werden uns im letzten Abschnitte dieses Bandes noch eingehender mit derartigen Fachwerken beschäftigen.

Hinzuzufügen ist, dass bei der Niagarabrücke die Knoten E und D , desgleichen G und F durch Stäbe miteinander verbunden wurden, deren Befestigungsbolzen jedoch bei E und G durch länglich geformte Löcher greifen. Es ist deshalb an diesen Stellen eine Verschiebung der Stabenden möglich, und der Koppelträger verhält sich wie ein einfacher Balken.

§ 43.

Gerber'scher Balken mit Hängegurtung.

182. Fig. 370 stellt einen in neuerer Zeit öfter ausgeführten Gerber'schen Balken mit Hängegurtung dar. Die gestrichelten Gurtstäbe sind an dem einen Ende durch Bolzen, welche durch längliche Löcher gesteckt sind, befestigt; sie sind wirkungslos und werden nur mit Rücksicht auf das bessere Aussehen des Trägers angeordnet. Führt man durch das erste Feld rechts von der Mittelstütze einen Schnitt, so kann man die Spannkraft S'_1 in dem obersten Kettengliede aus der Momentengleichung für den Stützpunkt B bestimmen. Zerlegt man S'_1 nach wagerechter und senkrechter Richtung (Fig. 371), so findet man für den Einfluss einer am Ausleger BG_1 angreifenden Last P auf die wagerechte Seitenkraft H den Werth

$$H = P \frac{\xi'}{f}.$$

Die Einflussfläche für H ist demnach ein Dreieck (Fig. 370a) von der Höhe $1 \frac{v'}{f}$. Sind Ausleger und Koppelträger unbelastet, so ist $H = 0$. Lasten, welche auf das Trägerstück AB wirken, üben also keinen Einfluss auf H aus. Nach Ermittlung von H_{max} findet man die Spann-

kräfte S und S' in der Hängegurtung nach Fig. 370 b aus der Bedingung, dass die wagerechten Projektionen dieser Kräfte sämtlich

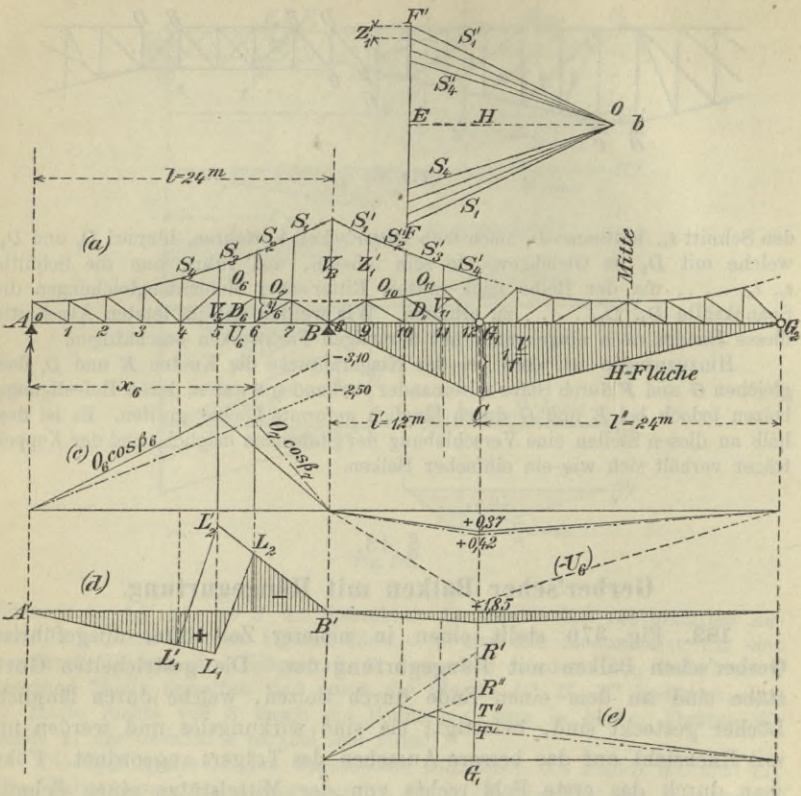


Fig. 370.

gleich H sind. Die Strecken, welche die S' und S auf der Vertikalen $F'F$ abschneiden, stellen die Spannkraft Z in den Hängestangen dar und die Strecke $F'F$ den Druck in der Vertikalen V_B .

Die Einflusslinien für die Spannkraft O , U , D und V der gegliederten Scheibe AB verlaufen zwischen A und B genau wie beim einfachen Balken; zwischen B und G_2 aber ist jede Einflussfläche ein Dreieck, dessen Spitze in der Senkrechten durch G_1 liegt und das durch den Einfluss einer in G_1 angreifenden Last 1 bestimmt ist. Zu den in No. 143 benutzten Kräfteplänen für die Zustände $A=1$ und $B=1$ tritt noch ein dritter über den Träger-Theil ABG_1 auszuwehnender Kräfteplan, für dessen Herstellung die folgende kurze An-

ist, so erzeugt $B = 1$ die Spannkraft

$$O_7 \cos \beta_7 = -1 \frac{2 \cdot 3,0}{2,4} = -2,50'$$

und durch diesen Werth ist die strichpunktirte Einflusslinie (Fig. 370 c) für $O_7 \cos \beta_7$ im Gebiete AB bestimmt. Die ausgezogene Linie gehört zu $O_6 \cos \beta_6$; sie ist festgelegt durch $-1 \frac{3 \cdot 3,0}{2,9} = -3,10$. Nun erzeugt eine in G_1 angreifende Last 1:

$$A = -0,5, \quad H = 1 \frac{12}{8,4} = \frac{10}{7}$$

$$O_7 \cos \beta_7 = -\frac{M_6}{h_6} = -\frac{Ax_6 + Hy_6}{h_6} = \frac{0,5 \cdot 18 - 1,0 \cdot 5,6}{2,4} = +0,42$$

$$O_6 \cos \beta_6 = -\frac{M_5}{h_5} = -\frac{Ax_5 + Hy_5}{h_5} = \frac{0,5 \cdot 15 - 1,0 \cdot 4,5}{2,9} = +0,37$$

und durch diese beiden, an der Stelle G_1 aufzutragenden Werthe sind die Einflusslinien für das Gebiet BG_2 bestimmt.

Führt man nun einen Schnitt durch die Stäbe S_2 , O_7 , V_6 und U_6 , und setzt man die Summe der am abgeschnittenen Fachwerkstheile angreifenden wagerechten Kräfte gleich Null, so erhält man

$$U_6 + O_7 \cos \beta_7 + H = 0$$

und hieraus folgt

$$-U_6 = O_7 \cos \beta_7 + H.$$

Die Einflusslinie für $(-U_6)$ stimmt also zwischen A und B mit der Einflusslinie für $O_7 \cos \beta_7$ überein, weil Lasten, die am Trägerstück AB angreifen, in den Kettenstäben keine Beanspruchungen erzeugen. Liegt

die Last 1 in G_1 , so erzeugt sie $H = \frac{10}{7} = 1,43$ und $-U_6 = +0,42 + 1,43 = 1,85$ und durch diesen Werth ist der zur Trägerstrecke BG_2 gehörige, in Fig. 370 c gestrichelte Theil der $(-U_6)$ -Linie bestimmt.

Bedeutet φ_6 den Neigungswinkel der Diagonale D_6 , so muss sein

$$D_6 \cos \varphi_6 = O_7 \cos \beta_7 - O_6 \cos \beta_6.$$

Der Unterschied der für $O_7 \cos \beta_7$ und $O_6 \cos \beta_6$ gezeichneten Einflussflächen ist also gleich der Einflussfläche für $D_6 \cos \varphi_6$. Diese Fläche wurde in Fig. 370 d — im doppelten Maasstabe — auf eine wagerechte Nulllinie zurückgeführt.

Jetzt lässt sich auch sofort die Einflussfläche für den Werth $(-V_5 \cotg \varphi_6)$ angeben. Solange nämlich der Knotenpunkt unbelastet ist, muss

$$V_5 = -D_6 \sin \varphi_6,$$

also

$$-V_5 \cotg \varphi_6 = D_6 \cos \varphi_6$$

sein; und da ferner die V_5 -Linie von Stütze B bis Knotenpunkt 5 geradlinig verlaufen muss, und im Felde 4—5 ihren Nullpunkt besitzt, so braucht man, um aus der $D_6 \cos \varphi_6$ -Linie die $(-V_5 \cotg \varphi_6)$ -Linie zu erhalten, nur die Gerade $L_1 L_2$ durch die Gerade $L'_1 L'_2$ zu ersetzen.

In derselben Weise wird bei der Untersuchung des Auslegers verfahren; es genügt auch hier die Berechnung der $O \cos \beta$ -Linien. Eine zwischen G_1 und Knoten 10 liegende Last $P = 1$ (Fig. 371) erzeugt

$$O_{10} \cos \beta_{10} = -\frac{M_{10}}{h_{10}} = -\left(\frac{Hy_{10}}{h_{10}} - 1 \frac{\xi''}{h_{10}}\right)$$

und aus dieser Gleichung folgt, dass die in Fig. 371 schraffierte Fläche den zum Gebiete BG_1 gehörenden Theil der Einflussfläche für $O_{10} \cos \beta_{10}$ darstellt; sie ist bestimmt durch die Strecken

$$1 \frac{l'}{f} \frac{y_{10}}{h_{10}} \quad \text{und} \quad 1 \frac{x_{10}}{h_{10}} \quad \text{für} \quad \xi'' = x_{10}.$$

In Fig. 370e sind die Einflusslinien für $O_{10} \cos \beta_{10}$ und $O_{11} \cos \beta_{11}$ in $\frac{2}{3}$ des der Fig. 370c zu Grunde gelegten Maassstabes aufgetragen worden; sie sind bestimmt durch die Strecken

$$\overline{G_1 R'} = \frac{10}{7} \cdot \frac{5,6}{2,4} = 3,33, \quad \overline{G_1 R''} = \frac{10}{7} \cdot \frac{4,5}{2,9} = 2,22$$

$$\overline{R' T'} = \frac{6,0}{2,4} = 2,50, \quad \overline{R'' T''} = \frac{3,0}{2,9} = 1,03.$$

Der Unterschied beider Flächen ist Einflussfläche für $D_{11} \cos \varphi_{11}$, aus welcher sich die V_{11} -Fläche mittels Ziehen einer Geraden ableiten lässt.

Hinsichtlich der aus der Form der Einflusslinien für die kürzeste Berechnung der grössten und kleinsten Spannkkräfte zu ziehenden Schlüsse verweisen wir auf die früheren Untersuchungen. Vergl. namentlich § 19, Seite 157.

der äusseren Kräfte gegeben*). Gesucht sei die Spannkraft U_4 in Fig. 372.

Durch die Stäbe U_4, D_5, O_5 wird ein Schnitt tt geführt; derselbe trifft die Seilpolygonseite IV , welche die Lage der Mittelkraft R der links von tt wirkenden äusseren Kräfte bestimmt, während der entsprechende Seilstrahl $\overline{IV} = R$ die Grösse und den Sinn dieser Kraft angiebt. Bezeichnen η und r die auf den Knotenpunkt 4 als Drehpunkt bezogenen Hebelarme von R und U_4 , so lautet die Momentengleichung $R\eta - U_4 r = 0$, und es folgt der leicht durch Zeichnung zu bestimmende Ausdruck $U_4 = \frac{R\eta}{r}$.

Ein anderer Weg ist der folgende: Ist $\eta < r$, so beschreibe man um den Drehpunkt 4 mit r einen Kreisbogen, bestimme dessen Schnittpunkt $4'$ mit der Seilpolygonseite IV und zerlege R in zwei im Punkte $4'$ angreifende Seitenkräfte R' und R'' , deren erste senkrecht auf der Geraden $4'4$ steht, während R'' mit dieser Geraden zusammenfällt. Die Momentengleichung geht dann über in $R' r - U_4 r = 0$ und liefert $U_4 = R'$. Ist $\eta > r$, so zerlege man R in einem beliebigen Punkte seiner Richtung in eine durch 4 gehende Seitenkraft R'' und eine zweite, welche den um 4 mit r beschriebenen Kreisbogen berührt. Fig. 373. Man findet dann wieder $U_4 = R'$.

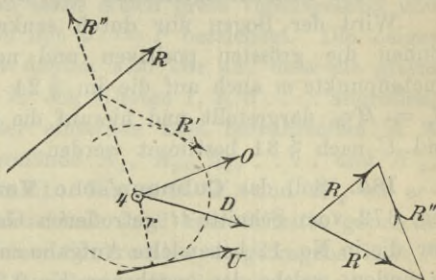


Fig. 373.

In gleicher Weise werden die Kräfte O gefunden. Zur Ermittlung der Spannkräfte

D in den Füllungsstäben ist indess das vorstehend beschriebene Verfahren, wegen der in der Regel unbequem gelegenen Drehpunkte, selten geeignet, und es empfiehlt sich deshalb, die D den Kräftepolygonen zu entnehmen, welche sich für die Knoten der unteren oder oberen Gurtung übersichtlich aufzeichnen lassen, sobald die Spannkräfte U oder O gegeben sind. Das Verfahren ist in den Figuren 372c u. d dargestellt worden; die dort von Parallelen zu den Gurtstäben O und U gebildeten Strahlenbüschel S_1 und S_2 lassen sich für alle zu untersuchenden Belastungsfälle verwenden. Es genügt natürlich, die eine der beiden Figuren zu zeichnen; entwirft man aber

*) Vergl. No. 116, 117, 158.

beide, so erhält man jede Kraft D zweimal und ist dann im Stande, durch Vergleichung der Ergebnisse, die Güte der Zeichnung zu prüfen*).

Das beschriebene Verfahren kann u. A. zur Ermittlung der in einem Dachbinder durch den Winddruck und die ständige Belastung hervorgerufenen Spannkraften empfohlen werden und ist dann häufig der Anwendung eines *Cremona'schen* Kräfteplanes (§ 27) vorzuziehen, denn bei Fachwerken mit grösserer Stabzahl pflanzen sich bei der letzteren Bestimmungsweise die Zeichenfehler zuweilen in recht unliebsamer Weise fort, und es ist zum mindesten empfehlenswerth, von Zeit zu Zeit eine Spannkraft durch unmittelbare Bestimmung derselben zu prüfen. Bei Bogenträgern ist aber im Allgemeinen die Feldweite geringer und mithin die Stabzahl grösser als bei Balkenträgern von gleicher Stützweite.

Auch das folgende, dem *Cremona'schen* ähnliche Verfahren verdient hier angeführt zu werden. Man zeichnet der Reihe nach die Kräftepolygone für die Knoten $A, 0, 1, 2 \dots$ und bestimmt nach einander: D_0 und U_0, D_1 und O_1, D_2 und U_2 , wobei man aber, anstatt die Kräftepolygone auf die im § 27 beschriebene Weise zu einer, jede Spannkraft nur einmal enthaltenden Figur zu vereinigen, abwechselnd die Strahlenbüschel S_1 und S_2 benutzt**). Zuweilen wird einer der Werthe U und O in der oben gezeigten Art mittels einer *Ritter'schen* Momentengleichung geprüft.

Wird der Bogen nur durch senkrechte Lasten beansprucht, so können die grössten positiven und negativen Momente M_m für die Knotenpunkte m auch auf die im § 24 angegebene Weise in der Form $M_m = H\eta_m$ dargestellt und hierauf die Grenzwerte der Spannkraft O und U nach § 31 bestimmt werden.

184. Soll das *Culmann'sche* Verfahren zur Ermittlung der in Fig. 372 vom Schnitte tt getroffenen Gurtstäbe benutzt werden, so ist nur die in No. 12 behandelte Aufgabe zu lösen: Drei Kräfte O, U und D zu finden, welche der gegebenen Kraft R das Gleichgewicht halten.

Die früher gegebene Lösung der Aufgabe stösst bei ihrer Anwendung auf Bogenträger zuweilen auf Schwierigkeiten. So ist es zum Beispiel in der Fig. 372 zwar möglich, den Schnittpunkt (RD) von R und D scharf zu bestimmen; die Schnittpunkte $(RO), (RU)$ und (OU) hingegen fallen häufig ausserhalb des Zeichenblattes. Man ersetze dann R in irgend einem Punkte seiner Richtung durch zwei Seitenkräfte R' und R'' , welche durch die Schnittpunkte (OD) und (UD) gehen, und

*) Um genaue Werthe zu erhalten, scheue man ja die kleine Mühe nicht, die Strahlenbüschel S_1 und S_2 in Fig. 372 in der auf Seite 308 angegebenen Weise durch Rechnung festzulegen. Parallelen zu den kurzen Gurtstäben zu ziehen, ist nach den Erfahrungen des Verfassers unbedingt zu verwerfen.

**) Es stimmt dieses Verfahren im Wesentlichen mit demjenigen überein, welches zuerst von *Lang* im Civilingenieur 1882 auf Tafel XIV zur Untersuchung eines sichelförmigen Balkens (Dachbinder) angewendet worden ist.

zerlege R' nach den Richtungen von O und D , ferner R'' nach den Richtungen von U und D . Man gelangt dann zu dem in der Fig. 374 dargestellten Kräftepolygone.

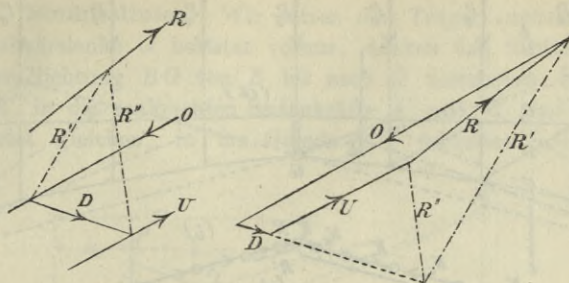


Fig. 374.

Es soll noch eine vielfach benutzte Anwendung des *Culmann'schen* Verfahrens zur Ermittlung der durch eine *gleichförmige bewegliche Belastung* hervorgerufenen Grenzwerte der Spannkraften an einem Beispiele erläutert werden. Die Feldweiten seien gleich gross vorausgesetzt und die Belastung eines Feldes werde mit $p\lambda = P$ bezeichnet. Die Zeiger 1, 2, 3, . . . in der Figur 375 deuten also nur an, dass die gleich grossen Lasten $P_1, P_2, P_3 \dots$ in den Knoten 1, 2, 3 . . . angreifen.

Zuerst werden die von jeder einzelnen Last herrührenden in A und B angreifenden Stützenwiderstände K_1, K_2, K_3, \dots und K'_1, K'_2, K'_3, \dots gesondert bestimmt. Um z. B. K_2 und K'_2 zu erhalten, wird P_2 mit der Kämpferdrucklinie in 2 zum Schnitte gebracht und hierauf die von A aus auf einer Senkrechten aufgetragene Last P nach den Richtungen $A2$ und $B2$ zerlegt. Es liegen dann die Endpunkte von K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 auf einer Geraden, desgl. die Endpunkte von $K'_5, K'_6, K'_7, K'_8, K'_9$. Nach Bestimmung sämtlicher K und K' werden die in A angreifenden Stützenwiderstände in der Reihenfolge $K_1, K_2 \dots$ zu einem Polygone LN zusammengesetzt, die in B angreifenden in der Reihenfolge $K'_9, K'_8 \dots$ zu einem Polygone $L'N^*$.

Jetzt kann zur Ermittlung der Spannkraften geschritten werden. Gesucht sei z. B. die Spannkraft O_3 , welche dem Momente M_3 für den gegenüberliegenden Knoten 3 proportional ist und den grössten positiven oder den grössten negativen Werth annimmt, je nachdem der Träger so belastet wird, dass $\min M_3$ oder $\max M_3$ entsteht. Legt man nun durch A und den Knoten 3 eine Gerade, welche die Kämpfer-

*) Für Fig. 375 b wurde ein kleinerer Kräftemaassstab gewählt wie für Fig. 375 a.

drucklinie in E schneidet, so ist die Senkrechte durch E nach § 24 eine Belastungsscheide; jede Last rechts von E erzeugt ein negatives

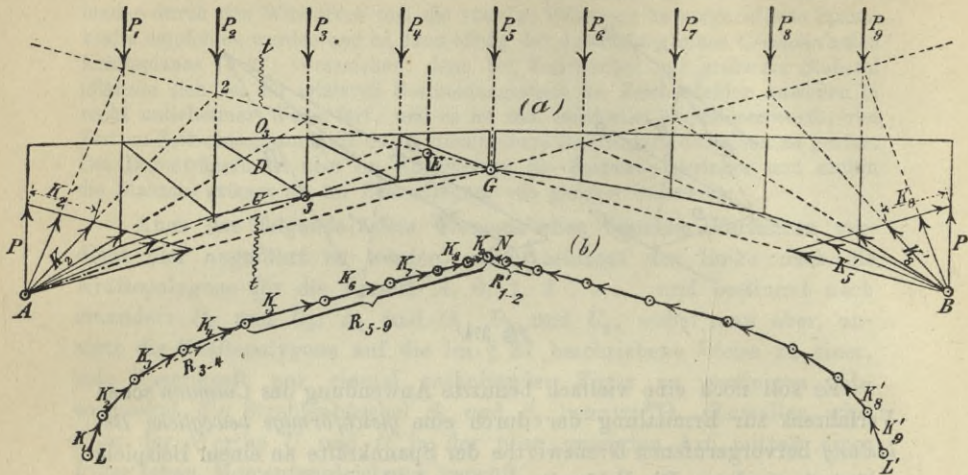


Fig. 375.

M_3 , jede Last links ein positives. Um also den grössten Zug O_3 zu erhalten, werden alle Lasten links von E beseitigt. Es greift dann am Trägertheile links vom Schnitte tt nur eine äussere Kraft an, nämlich die durch A gehende Mittelkraft R_{5-9} der Widerstände K_5 , K_6 , . . . bis K_9 , und mit dieser müssen die ebenfalls am linken Trägertheile angreifenden Spannkkräfte O , U , D im Gleichgewichte sein. Die Ermittlung der letzteren Kräfte erfolgt nun nach Fig. 374.

Um $\min O_3$ zu erhalten, ist der Träger rechts von E zu entlasten; die verbleibenden Lasten werden in die durch den Schnitt tt geschiedenen Gruppen P_1 , P_2 und P_3 , P_4 getrennt, deren Einflüsse gesondert bestimmt und schliesslich addirt werden. Wirken nur P_1 und P_2 , so zeichnet man das Kräftepolygon für die rechts vom Schnitte tt wirksamen Kräfte O , U , D , R'_{1-2} , wobei R'_{1-2} die in B angreifende Mittelkraft aus K'_1 und K'_2 ist, und um den Einfluss von P_3 und P_4 zu erhalten, wird der linke Trägertheil betrachtet, an welchem nur die äussere Kraft R_{3-4} , d. i. die Mittelkraft aus K_3 und K_4 angreift.

Auf dem beschriebenen Wege können auch die grössten Spannkkräfte in den Füllungsstäben (für welche die ungünstigste Belastung im folgenden § mit Hilfe der Einflusslinien ermittelt werden soll) bestimmt werden; doch halten wir das ganze Verfahren für wenig zweckmässig, weil dasselbe zu sehr unübersichtlichen und deshalb schwierig zu prüfenden Kräfteplänen führt.

§ 45.

Belastung durch senkrecht gerichtete Kräfte.

185. **Einflusslinien.** Wir setzen den Träger zunächst nur links vom Scheitelpunkte G belastet voraus, denken den Stützenwiderstand K' in der Richtung BG von B bis nach G verschoben und zerlegen K und K' in die senkrechten Seitenkräfte A' und B' und in die entgegengesetzt gleichen, in die Gerade AG fallenden Seitenkräfte Q ,

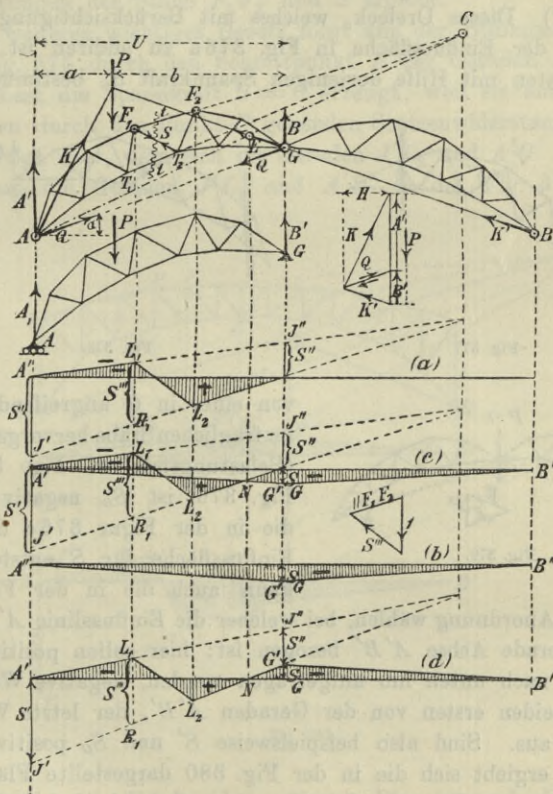


Fig. 376.

Fig. 376. Wäre $Q = 0$, so würde sich der Trägertheil AG wie ein einfacher Balken verhalten, und man könnte dann die Einflusslinie für irgend eine Spannkraft S (gleichgültig, ob diejenige eines Füllungs- oder Gurtstabes) auf die im § 30 beschriebene Weise mit Hilfe der den Belastungszuständen $A' = 1$ und $B' = 1$ (Fig. 377 und 378) ent-

sprechenden Spannkraften S' und S'' zeichnen;*) dieselbe ist in der Figur 376 a für einen linkssteigenden Füllungsstab unter der Voraussetzung eines positiven S' und eines negativen S'' dargestellt worden.

Um nun den Einfluss der beiden Kräfte Q zu bestimmen, beachte man, dass, wegen $Q = H \sec \alpha$ (wo $\alpha =$ Neigungswinkel der Geraden AG), der von Q herrührende und dieser Kraft proportionale Theil der Spannkraft S auch proportional H sein muss, dass also der noch fehlende, die Wirkung der Kräfte Q darstellende Theil der Einflussfläche ein Dreieck ($A''G'B''$ in Fig. 376 b) ist, dessen Spitze dem Gelenke G entspricht.**) Dieses Dreieck, welches mit Berücksichtigung des Vorzeichens zu der Einflussfläche in Fig. 376 a zu addiren ist, wird am zweckmässigsten mit Hilfe derjenigen Spannkraft S_G bestimmt, welche

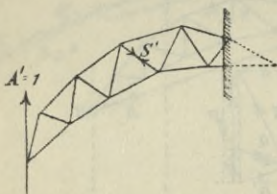


Fig. 377.

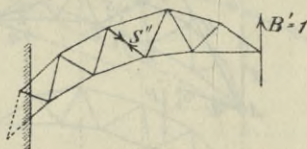


Fig. 378.

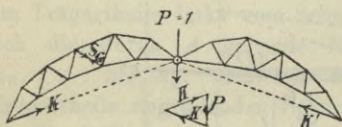


Fig. 379.

von einer in G angreifenden Last 1 im fraglichen Stabe hervorgerufen wird (Belastungsfall in Fig. 379). In Fig. 376 ist S_G negativ; so dass die in der Figur 376 c dargestellte Einflussfläche für S entsteht. Man kann auch die in der Figur 376 d

angegebene Anordnung wählen, bei welcher die Einflusslinie $A'L_1L_2G'B'$ auf eine gerade Achse $A'B'$ bezogen ist; hier sollen positive Werthe S' , S_G , S'' nach unten hin aufgetragen werden, negative Werthe nach oben, die beiden ersten von der Geraden $A'B'$, der letzte Werth vom Punkte G' aus. Sind also beispielsweise S' und S_G positiv, und S'' negativ, so ergibt sich die in der Fig. 380 dargestellte Fläche.

Bei bequemer Lage des Schnittpunktes C der beiden Stäbe, welche der Schnitt tt ausser S noch trifft, kann die Ermittlung eines der beiden Werthe S' , S'' gespart und z. B. die Gerade $A'L_1$ mit Hilfe der

*) In den Figuren 377 und 378 denke man sich den Träger rechts oder links von der anschraffirten Geraden festgehalten.

**) Vergl. No. 113. Dort ist gezeigt, dass die Einflussfläche für H ein Dreieck ist.

Bedingung festgelegt werden, dass sich die Geraden $A'L_1$ und $J'L_2$ auf der Senkrechten durch C schneiden müssen. Aber auch die übrigen im § 30 nachgewiesenen Eigenschaften der Einflusslinien für die Spannkraften einfacher Balken lassen sich zur Bestimmung oder Prüfung der Einflussfläche in Fig. 376a sowie des Liniengebildes in Fig. 376d benutzen. So ist beispielsweise für den in Fig. 376 behandelten Fall eines linkssteigenden Füllungsstabes und einer an der oberen Gurtung angreifenden Belastung die Länge der Strecke L_1R_1 gleich der Grösse einer Spannkraft S''' , die sich durch Zerlegung der Last $P=1$ nach den Richtungen der Stäbe F_1F_2 und S ergibt.

Ein weiteres wichtiges Gesetz folgt aus der Bedingung, dass eine in der Fig. 376 durch den Schnittpunkt E der Geraden AC und BG gehende Last die Spannkraft $S=0$ erzeugt, weil sie am linken Auflager einen durch den Punkt C gehenden Stützenwiderstand hervorruft. Hieraus folgt aber, dass sich die Geraden $J'L_2$ und $A'G'$ in Fig. 376c und ebenso die Geraden $J'L_2$ und $A'B'$ in der Fig. 376d auf der

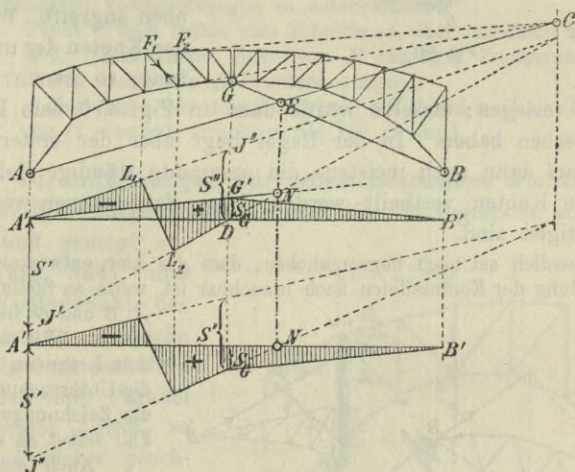


Fig. 380.

Senkrechten durch E schneiden müssen. Dies ist auch dann der Fall, wenn E unter G liegt, wie in Fig. 380; denn es geben hier die Unterschiede der Ordinaten der über die Scheitelsenkrechte verlängerten Geraden $J'L_2D$ und $A'G'$ den Einfluss S derjenigen beiden, links von tt wirksamen Kräfte A' und Q an, welche durch eine, rechts von G gelegene, jedoch auf den Trägertheil AG wirkende Last *Eins* hervorgerufen werden, und dieser Einfluss ist $=0$, sobald jene Last durch

E geht. Hinsichtlich der Spannkraften in den Gurtungen, welche den Momenten für die gegenüberliegenden Knotenpunkte proportional sind, kann auf dieses Gesetz auch auf Grund der im § 24 gewonnenen Ergebnisse geschlossen werden.

Die vorstehenden Untersuchungen lehren, dass bei bequemer gelegener Schnittpunkte C (also beispielsweise immer dann, wenn es sich um die Spannkraft in einem Gurtstabe handelt — Fig. 381 —) der eine der Werthe S' , S'' , S''' , S_G zur vollständigen Bestimmung der Einflusslinie ausreicht. In der Regel ist es dann am zweckmäßigsten, die Spannkraften S' zu ermitteln; vergl. das im § 46 durchgeführte Zahlenbeispiel.

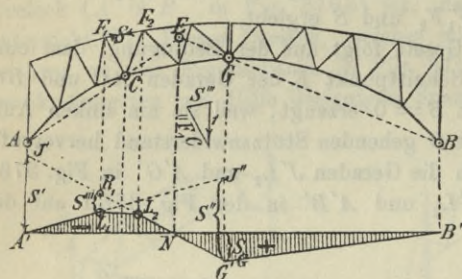


Fig. 381.

In allen hier vorgeführten Figuren wurde vorausgesetzt, dass die Belastung oben angreift. Wirkt sie an den Knoten der unteren Gurtung, so ist nur die Gerade

$L_1 L_2$ zu verlegen; dieselbe würde dann in Fig. 376 dem Felde $T_1 T_2$ zu entsprechen haben. In der Regel liegt aber der erstere Fall vor, und es darf dann auch meistens die gesammte ständige Belastung auf die oberen Knoten vertheilt werden, ohne dass nennenswerthe Fehler zu gewärtigen sind.

Schliesslich sei noch hervorgehoben, dass das hier entwickelte Verfahren zur Ermittlung der Einflusslinien auch brauchbar ist, wenn an Stelle der Gelenke A , B und G Gelenkvierecke

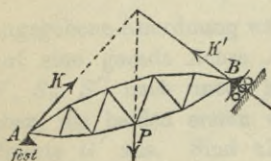


Fig. 382.

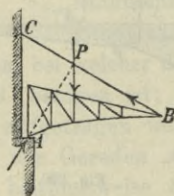


Fig. 383.

treten. Wir überlassen es dem Leser (im Anschluss an die Untersuchungen im § 42) die Zeichnungen für diesen Fall selbst zu entwerfen.

Auch empfehlen wir dem Leser, den in der Fig. 382 dargestellten Träger mit schräger Auflagerung und den in der Fig. 383 abgebildeten Dachbinder (der bei

A ein festes Auflagergelenk besitzt und bei B durch eine um C drehbare Stange gestützt wird) mit Hilfe der für den Bogen mit drei Gelenken entwickelten Gesetze zu untersuchen.

Die Theorie der Einflusslinien ist auch dann wichtig, wenn die Ermittlung der Spannkraften nach einem der im vorigen § beschriebenen Verfahren, beispielsweise dem zuletzt angegebenen, erfolgen soll, denn

sie gestatten eine sehr übersichtliche Feststellung der ungünstigsten Belastungsweise. Es genügt nämlich, das Vorzeichen der Spannkraft S' anzugeben (am besten durch Anwendung des Ritter'schen Verfahrens auf den Zustand $A' = 1$), um sofort mittels Ziehen von wenigen Geraden zum Ziele zu gelangen. Liegt z. B. der in Fig. 376 dargestellte Fall eines linkssteigenden Füllungsstabes S vor, so leuchtet sofort ein, dass der rechts um C drehenden äusseren Kraft $A' = 1$ nur durch eine am linken Trägerabschnitte angreifende, links drehende Spannkraft S' das Gleichgewicht gehalten werden kann; es muss also S von F_1 nach T_2 gerichtet, d. h. positiv sein, und hierdurch sind die Vorzeichen der einzelnen Theile der Einflussfläche bestimmt. Man findet, dass im vorliegenden Falle $max S_p$ entsteht, sobald nur die Knotenpunkte zwischen tt und der Senkrechten durch E belastet werden, während $min S_p$ durch ausschliessliche Belastung der übrigen Knoten hervorgerufen wird. Selbstverständlich genügt es, um dieses Ergebniss zu finden, die Einflusslinie aus freier Hand zu skizziren.*)

Dem Leser wird empfohlen, als Beispiel einen linkssteigenden Füllungsstab unter folgenden Voraussetzungen zu untersuchen:

1. Punkt C liegt rechts vom Schnitte tt , aber unterhalb der Geraden BG . (Alle Lasten links von E erzeugen Zugspannungen, alle Lasten rechts von E Druckspannungen.)
2. C liegt links von A und oberhalb der Geraden GA . (Lasten links von tt erzeugen Druck, rechts von tt Zug.)

186. Vereinfachungen für einen besonders wichtigen Fall parabelförmiger Bogenträger. Sind die Füllungsstäbe abwechselnd senkrecht und geneigt angeordnet (Fig. 384), und liegen die Knotenpunkte der unteren Gurtung — welche das Scheitelgelenk enthalten möge — auf einer Parabel mit senkrechter Achse, so fällt bei gänzlicher gleichförmiger Belastung das durch die drei Gelenke A, G, B geführte Seilpolygon vollständig mit der unteren Gurtung zusammen. Denn die Eck-

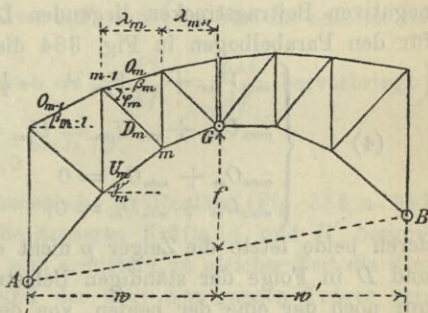


Fig. 384.

*) Wir setzen hierbei voraus, dass im Falle gleichförmiger Belastung nach Seite 118 (Fig. 109) mit festen Werthen der Knotenlasten gerechnet wird. Es ist dann die Aufsuchung der genauen Lage einer etwa im Felde $F_1 F_2$ vorhandenen Belastungsscheide nicht nöthig.

punkte dieses Seilpolygons gehören einer Parabel an, deren Achse senkrecht ist und welche durch drei Punkte A, G, B eindeutig bestimmt ist.

Hieraus folgt, dass die Momente M_m für sämtliche Knotenpunkte der unteren Gurtung und in Folge dessen auch sämtliche Spannkraft O gleich Null sind, und da nun für jeden oberen Knotenpunkt die Gleichgewichtsbedingung $D_m \cos \varphi_m = O_{m-1} \cos \beta_{m-1} - O_m \cos \beta_m$ besteht, so müssen auch alle Spannkraft $D = 0$ sein. Es werden also in Folge einer gänzlichen, gleichförmigen Belastung nur die Vertikalen und die Untergurtstäbe beansprucht, und zwar die ersteren durch Drücke, welche gleich den entsprechenden Knotenlasten sind, während sich für einen unter γ_m gegen die Wagerechte geneigten Stab der unteren Gurtung der Werth $U_m = -H \sec \gamma_m$ ergibt, wo $H =$ Horizontalschub. Ist also die ständige Belastung ($g = g_o + g_u$) eine gleichförmige, so erzeugt sie die Spannkraft

$$(1) \quad V_{mg} = -\frac{1}{2} g_o (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \quad \text{und} \quad U_{mg} = -\frac{g w w'}{2f} \sec \gamma_m, *$$

während einer gänzlichen, gleichförmigen beweglichen Belastung p die Werthe entsprechen

$$(2) \quad V_{mp} = -\frac{1}{2} p (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \quad \text{und} \quad U_{mp} = -\frac{p w w'}{2f} \sec \gamma_m.$$

Da nun für jede Spannkraft S eines beliebigen Trägers die Gleichung besteht

$$(3) \quad S_p = \max S_p + \min S_p,$$

wo $S_p =$ Spannkraft in Folge gänzlicher Belastung mit p , während $\max S_p$ und $\min S_p$ die Einflüsse der auf den positiven, beziehungsweise negativen Beitragstrecken liegenden Last p bedeuten, so ergeben sich für den Parabelbogen in Fig. 384 die wichtigen Beziehungen

$$(4) \quad \begin{cases} \max V_{pm} + \min V_{pm} = -\frac{1}{2} p (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \\ \max U_{pm} + \min U_{pm} = U_{pm} = -\frac{p w w'}{2f} \sec \gamma_m \\ \max O_m + \min O_m = 0 \\ \max D_m + \min D_m = 0, \end{cases}$$

deren beide letzte die Zeiger p nicht enthalten, weil die Spannkraft O und D in Folge der ständigen Belastung $= 0$ sind. Es braucht jetzt nur noch der eine der beiden, von der Belastung p abhängigen Grenzwerte V, U, O, D angegeben zu werden; der andere ist dann sofort durch die Gleich. (4) bestimmt. Werden die Einflusslinien benutzt, so genügt es zuweilen, Theile derselben aufzuzeichnen. So wird man sich beispielsweise, um die Spannkraft in einem Stabe der oberen Gurtung zu bestimmen (Fig. 381), darauf beschränken, die Geraden $J'G'$ und

*) Vergl. die auf S. 188 gezeigte Berechnung von H .

$G'B'$ mit Hilfe von S' und N festzulegen, da durch diese Geraden der positive Theil $NG'B'$ der Einflussfläche und mithin auch $_{max}S$ bestimmt ist, worauf dann $_{min}S = -_{max}S$ gefunden wird.

An Stelle der Einflusslinien kann man auch das folgende übersichtliche und schnell zum Ziele führende Verfahren benutzen, das hier an der Hand eines *Zahlenbeispiels* beschrieben werden soll. Verlangt sei die

187. Berechnung einer Fussgängerbrücke mit Parabelbögen.

Die 3,8^m breite Brücke besitzt zwei Hauptträger, deren Anordnung in der Fig. 385 angegeben ist. Die obere Gurtung ist wagerecht; die Knotenpunkte der unteren Gurtung liegen auf einer Parabel. Es ist $l = 30^m$; $\lambda = 3^m$; $f = 4,0^m$; $h_0 = 5,25^m$. Das Eigengewicht ist zu 194^{kg} f. d. qm der Brückenbahn geschätzt worden,*) die ständige Belastung

(Menschengedränge) zu 350^{kg} f. d. qm ,**) weshalb $g = 0,194 \cdot \frac{3,8}{2} = 0,37^t$;

$p = 0,350 \cdot \frac{3,8}{2} = 0,665^t$ und $q = g + p = 1,035^t$. Die bewegliche Belastung eines Feldes ist $p\lambda = 0,665 \cdot 3 = 2,0^t$. Eine Zerlegung von g in g_o und g_u ist überflüssig.

Wir beginnen mit der Bestimmung der Stützenwiderstände A und H , welche eine der Reihe nach in den Knotenpunkten 1, 2, 3 angreifende Last $p\lambda$ hervorruft. Liegt die Last bei 9, so möge $A = A'$ und $H = H'$ sein. Die den übrigen Knoten entsprechenden Werthe A und H sind durch die in Fig. 385 a u. b dargestellten Einflusslinien bestimmt. Im vorliegenden Falle ist $A' = \frac{1}{10} p\lambda = 0,2^t$ und (da eine im Scheitel angreifende Last $P = p\lambda$ den Schub $H = \frac{Pl}{4f} = \frac{p\lambda l}{4f}$ hervorbringt)

$H' = \frac{1}{5} \cdot p\lambda \frac{l}{4f} = \frac{1}{5} \cdot 2,0 \frac{30}{4 \cdot 4,0} = 0,75^t$.

Jetzt zeichnen wir zwei *Cremona'sche* Kräftepläne (Fig. 386 u. 387 auf Tafel 6), welche die durch die äusseren Kräfte A' und H' hervorgerufenen Spannkkräfte enthalten, und ermitteln zu gleicher Zeit die Einflüsse der ständigen Belastung und der über den ganzen Träger vertheilt gedachten beweglichen Last p . In Fig. 386 wurde die Wage-

*) Es wird vorausgesetzt, dass die Brückenbahn aus einem einfachen Bohlenbelage auf eisernen Querträgern besteht. Dann darf man nach *Heinzerling* die ständige Belastung für den qm der Brückenbahn $= 1,36l^m + 153^{kg}$ annehmen; dies giebt $1,36 \cdot 30 + 153 = 194^{kg}$. Vergl. *Heinzerling, die Brücken der Gegenwart*, Abtheil. I, Heft 5, Seite 22.

**) Für Brücken mit geringerem Verkehr, sonst 400 bis 450^{kg}.

Der Kräfteplan für $A' = 0,2'$ (Maassstab I) bedarf keiner Erläuterung; zu beachten ist, dass nach No. 151 die Verlängerungen der Spannkkräfte D auf der Senkrechten durch B die Strecken A' abschneiden müssen.

Der in Fig. 387 für den Zustand $H' = 0,75'$ gezeichnete Plan (Maassstab I) lässt sich in ähnlicher Weise prüfen. Bei gleichen Feldweiten müssen sich nämlich (wie zuerst Mohr gezeigt hat) die Verlängerungen sämtlicher D in einem Punkte T der durch R bestimmten Senkrechten treffen. Es folgt dies aus der nachstehenden Untersuchung.

Fügt man im Knotenpunkte 1 der Fig. 388a zwei sich aufhebende Kräfte H' hinzu, so wirkt

links vom Schnitte tt ein Kräftepaar, dessen Moment $= H' h_0$ ist und eine in 1 angreifende Kraft H' . Das Kräftepaar lässt sich ersetzen durch zwei in 1 und 2 wirksame, entgegengesetzt gleiche, senkrechte Kräfte Q , deren

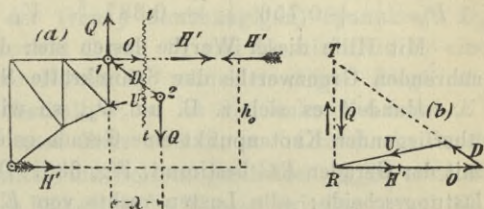


Fig. 388.

Moment $Q\lambda$ dem Momente $H'h_0$ entgegengesetzt gleich ist. Zeichnet man nun die Kräftepolygone der Knoten 1 und 2, so gelangt man zu der Figur 388b,

welche einen Theil der Fig. 387 ausmacht, und aus welcher hervorgeht, dass die Verlängerung von D auf der Senkrechten durch R die im vorliegenden Falle für alle Diagonalen gleich grosse Strecke

$$Q = \frac{H'h_0}{\lambda} = \frac{0,75 \cdot 5,25}{3} = 1,3125'$$

Für die durch A' und H' erzeugten Spannkkräfte ergeben sich die folgenden Werthe:*)

(mit $l = n\lambda$) verhalten muss $\overline{C_1 C_0} : \overline{C_0 B} = \frac{n-1}{2} g\lambda : \frac{gl^2}{8f} = \frac{(n-1)4f}{n^2\lambda}$. Im vorliegenden Falle ergibt sich: $\overline{C_1 C_0} : \overline{C_0 B} = \frac{9 \cdot 4 \cdot 4}{10^2 \cdot 3} = 0,48$. Es wurde in der

Fig. 386 die wagerechte Strecke $\overline{BN} = 12,5^m$ gemacht, die senkrechte Strecke $\overline{NL} = 0,48 \cdot 12,5 = 6,0^m$, hierauf NL in 9 gleiche Theile getheilt und mit Hilfe der Theilpunkte der Strahlenbüschel der Spannkkräfte U festgelegt. Natürlich wird man BN und NL nicht zu klein wählen.

*) Es lassen sich diese Werthe auch schnell berechnen. Man findet z. B. für den ersten Fall (Einfluss von A') mit den aus der Fig. 385 ersichtlichen Bezeichnungen mit Hilfe Ritter'scher Momentengleichungen die Spannkkräfte in der oberen Gurtung

$$O_1 = -\frac{A'x_1}{h_1}; O_2 = -\frac{A'x_2}{h_2} \text{ u. s. w.}$$

Stab	Spannkraft in Folge		Stab	Spannkraft in Folge	
	$A' = 0,2$	$H' = 0,75$		$A' = 0,2$	$H' = 0,75$
O_4	- 1,702	+ 2,043	U_5	+ 1,705	- 2,797
O_3	- 0,952	+ 1,333	U_4	+ 0,965	- 2,110
O_2	- 0,446	+ 0,714	U_3	+ 0,462	- 1,515
O_1	- 0,157	+ 0,283	U_2	+ 0,168	- 1,103
D_1	+ 0,255	- 0,458	V_0	- 0,200	+ 0,360
D_2	+ 0,388	- 0,578	V_1	- 0,259	+ 0,386
D_3	+ 0,598	- 0,732	V_2	- 0,319	+ 0,390
D_4	+ 0,828	- 0,784	V_3	- 0,352	+ 0,333
D_5	+ 0,756	- 0,387	V_4	- 0,291	+ 0,149

Mit Hilfe dieser Werthe lassen sich die von der Verkehrslast herührenden Grenzwerte der Spannkraft S schnell berechnen.

Handelt es sich z. B. um O_3 , so wird von A durch den gegenüberliegenden Knotenpunkt eine Gerade gelegt und deren Schnittpunkt E mit der Geraden BG bestimmt, Fig. 385. Die Senkrechte durch E ist Belastungsscheide; alle Lasten rechts von E erzeugen ein positives, alle Lasten links von E ein negatives O . Werden also nur die Knoten 5, 6, 7, 8, 9 belastet angenommen und zwar jeder mit $p\lambda^*$), so entsteht ${}_{max}O_3$. Links von E greifen nur die äusseren Kräfte A und H an; erstere ist $A = A' + 2A' + 3A' + 4A' + 5A' = 15A'$, letztere: $H = 15H'$. Da nun A' die Spannkraft $O_3 = -0,952$ erzeugt und H' die Spannkraft $O_3 = +1,333$, so entsteht

$${}_{max}O_3 = -0,952 \cdot 15 + 1,333 \cdot 15 = +5,7'.$$

Die ständige Belastung ist ohne Einfluss auf O .

Um den einen Grenzwert von $U_{3,p}$ zu ermitteln, wird der Schnittpunkt E' (Fig. 385) der von A durch den oberen Knoten 2 gelegten Geraden BG bestimmt. Ausschliessliche Belastung rechts von E' erzeugt ${}_{min}U_{3,p}$. Es entsteht: $A = A' (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)$

hierauf $U_1 = 0$; $U_2 = -O_1 \sec \gamma_2$; $U_3 = -O_2 \sec \gamma_3$; ...

sodann $D_1 = (O_1 - O_2) \sec \varphi_1$; $D_2 = (O_2 - O_3) \sec \varphi_2$; ...

schliesslich $V_0 = -D_1 \sin \varphi_1$; $V_1 = -D_2 \sin \varphi_2$; ...

In gleich einfacher Weise lassen sich die durch H' erzeugten Spannkraft berechnen. Hier ergibt sich

$$U_1 = -H' \sec \gamma_1; U_2 = -\frac{H'h_0}{h_1} \sec \gamma_2; U_3 = -\frac{H'h_0}{h_2} \sec \gamma_3; \dots$$

$$O_1 = +\frac{H'h_0}{h_1} - H'; O_2 = +\frac{H'h_0}{h_2} - H'; \dots$$

worauf die Werthe D und V wie vorhin bestimmt werden.

Bei ungleichen Feldweiten sind an Stelle der Belastungszustände $A = A'$ und $H = H'$ die Zustände $A = 1$ und $H = 1$ zu untersuchen.

*) Wir rechnen, nach Seite 118, mit festen Werthen der Knotenlasten.

$= 28 A'$ und $H = H' (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3) = 22 H'$, weshalb
 ${}_{\min} U_{3,p} = + 0,462 \cdot 28 - 1,515 \cdot 22 = - 20,4'$ *)

Befindet sich der dem Stabe U gegenüberliegende Knotenpunkt oberhalb der Geraden BG , so wird (wie aus der Gestalt der Einflusslinie hervorgeht) U bei gänzlicher Belastung des Trägers am grössten.***) Dies ist der Fall hinsichtlich U_5 , und man erhält deshalb (nach Hinzurechnung des Einflusses der ständigen Last) ${}_{\min} U_5 = U_{5,p} + U_{5,s} = - 18,8 - 10,4 = - 29,2'$. Ebenso nimmt, da für jeden Belastungszustand $U_1 = - H \sec \gamma_1$ ist, die Spannkraft U_1 bei gänzlicher Belastung ihren grössten negativen Werth an. Man findet ${}_{\min} U_1 = - 20,8 - 11,5 = - 32,3'$.

Wird ein Grenzwert der (von g unabhängigen) Spannkraft D_3 gesucht, so wird der Schnittpunkt C von O_3 und U_3 mit A durch eine Gerade verbunden, welche die BG in E'' schneiden möge. Liegt, wie in Fig. 385, der Punkt E'' oberhalb G , so ist die Senkrechte durch E'' Belastungsscheide; liegt E'' auch links von C , so ist auch ein durch das Feld 23 geführter Schnitt eine Belastungsscheide. ${}_{\max} D$ entsteht dann in Folge ausschliesslicher Belastung der Knoten zwischen tt und E'' , im vorliegenden Falle also, sobald nur die Knoten 3 und 4 belastet werden. Man findet $A = (7 + 6) A' = 13 A'$; $H = (3 + 4) H' = 7 H'$ und

$${}_{\max} D_3 = + 0,598 \cdot 13 - 0,732 \cdot 7 = + 2,7'$$

Die den Stäben D_1 und D_2 entsprechenden Punkte E liegen ebenfalls oberhalb G und links von den zugehörigen Punkten C . Dagegen entsprechen den Stäben D_4 und D_5 Punkte E , die unterhalb G liegen. Dann sind zur Erzielung von ${}_{\max} D$ alle Knoten rechts vom fraglichen Felde zu belasten. Würde E oberhalb G , aber rechts von C liegen, welcher Fall eintritt, sobald sich C unterhalb der Geraden BG befindet, so würde nur die Senkrechte durch E (nicht aber der Schnitt tt) eine Belastungsscheide sein. Man würde dann alle Knoten rechts von E belasten und ${}_{\min} D$ bestimmen.***)

Um einen Grenzwert von V_{p2} zu erhalten, wird der Schnitt $t't'$ geführt; und der Schnittpunkt von O_2 und U_3 mit A verbunden. Bezüglich der gegenseitigen Lage der Punkte E, C, G sind dieselben Fälle zu unterscheiden, wie bei der Berechnung der D . Im vorliegenden

*) Es empfiehlt sich, die Belastungsscheiden in einer (in nicht zu kleinem Maassstabe gezeichneten) besonderen Figur zusammenzustellen und an dieselben — in Klammern — die entsprechenden Spannkraft zu schreiben, wie dies z. B. in Fig. 385 hinsichtlich U_3 geschehen ist.

**) Wir verweisen auf Tafel 6 u. 7, auf denen die Einflusslinien für sämtliche Spannkraft des vorliegenden Trägers abgebildet sind.

***) Der Leser skizzire für diesen im vorliegenden Beispiele nicht enthaltenen Fall die Einflusslinie.

Falle entsteht in V_2 der grösste Druck, sobald nur die Knoten 2, 3, 4 (zwischen tt und E'') belastet werden. Man erhält $A = (8 + 7 + 6) A' = 21 A'$; $H = (2 + 3 + 4) H' = 9 H'$, also

$$\min V_{2p} = -0,319 \cdot 21 + 0,390 \cdot 9 = -3,2'.$$

Auf die beschriebene Weise ist für jede Spannkraft der eine der beiden von der beweglichen Belastung abhängigen Grenzwerte bestimmt und in die folgende Tabelle eingetragen worden.

Gesucht:	Zu belasten sind die Knoten	$\frac{A}{A'} =$	$\frac{H}{H'} =$	Spannkräfte in Tonnen
$\max O_4$	5, 6, 7, 8, 9	15	15	$\max O_4 = + 5,1$
$\max O_3$	5, 6, 7, 8, 9	15	15	$\max O_3 = + 5,7$
$\max O_2$	4, 5, 6, 7, 8, 9	21	19	$\max O_2 = + 4,2$
$\max O_1$	4, 5, 6, 7, 8, 9	21	19	$\max O_1 = + 2,1$
$\min U_4$	4, 5, 6, 7, 8, 9	21	19	$\min U_{p4} = - 19,8$
$\min U_3$	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,	28	22	$\min U_{p3} = - 20,4$
$\min U_2$	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	36	24	$\min U_{p2} = - 20,4$
$\max D_1$	1, 2, 3	24	6	$\max D_1 = + 3,4$
$\max D_2$	2, 3, 4	21	9	$\max D_2 = + 2,9$
$\max D_3$	3, 4	13	7	$\max D_3 = + 2,7$
$\max D_4$	4, 5, 6, 7, 8, 9	21	19	$\max D_4 = + 2,5$
$\max D_5$	5, 6, 7, 8, 9	15	15	$\max D_5 = + 5,5$
$\min V_0$	0, 1, 2, 3*)	29	6	$\min V_{p0} = - 3,6$
$\min V_1$	1, 2, 3, 4	30	10	$\min V_{p1} = - 3,9$
$\min V_2$	2, 3, 4	21	9	$\min V_{p2} = - 3,2$
$\min V_3$	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	28	22	$\min V_{p3} = - 2,5$
$\min V_4$	4, 5, 6, 7, 8, 9	21	19	$\min V_{p4} = - 3,3$

Nun ergibt sich, nach den Gleichungen (4) für sämtliche O und D

$$\min O = - \max O \text{ und } \min D = - \max D,$$

ferner

$$\max U_{pm} = - \min U_{pm} + U_{pm} \text{ also:}$$

$$\max U_{p2} = + 20,4 - 20,0 = + 0,4'$$

$$\max U_{p3} = + 20,4 - 19,4 = + 1,0'$$

$$\max U_{p4} = + 19,8 - 18,9 = + 0,9'$$

und

$$\max V_{pm} = - \min V_{pm} - p\lambda, \text{ d. i.}$$

$$\max V_{p1} = + 3,9 - 2,0 = + 1,9' \quad \max V_{p3} = + 2,5 - 2,0 = + 0,5'$$

$$\max V_{p2} = + 3,2 - 2,0 = + 1,2' \quad \max V_{p4} = + 3,3 - 2,0 = + 1,3'$$

Für die Endvertikale ist $\frac{1}{2} p\lambda$ statt $p\lambda$ zu setzen, weshalb

$$\max V_{p0} = + 3,6 - 1,0 = + 2,6'.$$

Addirt man zu den Grenzwerten von U_p und V_p noch die von

*) Zu beachten ist, dass der Knoten 0 nur die Last $\frac{1}{2} p\lambda$ trägt, weshalb $A = (\frac{1}{2} \cdot 9 + 9 + 8 + 7) A' = 29 A'$.

der ständigen Belastung herrührenden Spannkkräfte U_g und V_g , so erhält man (wegen $g\lambda = 1,1^t$) schliesslich

$\begin{aligned} \min U_2 &= -20,4 - 11,1 = -31,5^t \\ \min U_3 &= -20,4 - 10,8 = -31,2^t \\ \min U_4 &= -19,8 - 10,5 = -30,3^t \\ \min V_0 &= -3,6 - \frac{1}{2} \cdot 1,1 = -4,2^t \\ \min V_1 &= -3,9 - 1,1 = -5,0^t \\ \min V_2 &= -3,2 - 1,1 = -4,3^t \\ \min V_3 &= -2,5 - 1,1 = -3,6^t \\ \min V_4 &= -3,3 - 1,1 = -4,4^t \end{aligned}$	$\begin{aligned} \max U_2 &= +0,4 - 11,1 = -10,7^t \\ \max U_3 &= +1,0 - 10,8 = -9,8^t \\ \max U_4 &= +0,9 - 10,5 = -9,6^t \\ \max V_0 &= +2,6 - \frac{1}{2} \cdot 1,1 = +2,1^t \\ \max V_1 &= +1,9 - 1,1 = +0,8^t \\ \max V_2 &= +1,2 - 1,1 = 0 \text{ gesetzt} \\ \max V_3 &= +0,5 - 1,1 = -0,6^t \\ \max V_4 &= +1,3 - 1,1 = 0 \text{ gesetzt.} \end{aligned}$
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Jede der im Scheitel angeordneten beiden Vertikalen hat den Druck $\frac{1}{2} q\lambda = 1,6^t$ auszuhalten.

Eine übersichtliche Zusammenstellung sämtlicher Spannkkräfte findet sich in der folgenden Figur.

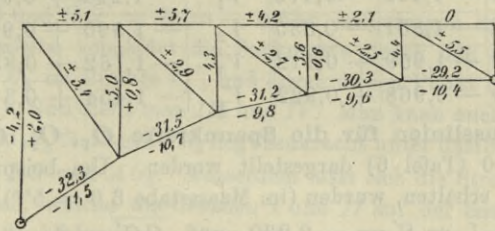


Fig. 389.

§ 46.

Zahlenbeispiel. Einflusslinien für einen Bogenträger von 30^m Stützweite.

Es sollen die Einflusslinien für den in der Fig. 385 abgebildeten Bogenträger dargestellt und zur Bestimmung der Spannkkräfte in Folge verschiedenartiger Belastungsfälle benutzt werden.*)

Zunächst sind die Spannkkräfte S' und S_G zu bestimmen. Die ersteren, dem Zustande $A' = 1$ entsprechend, können dem auf Tafel 6, Fig. 386, gezeichneten Kräfteplane entnommen werden. Wird dort $A' = 1$ vorausgesetzt, so gilt der Kräftemaassstab II. Die Ergebnisse enthält die nachfolgende Tabelle. Um die Spannkkräfte S_G in Folge einer im Scheitel angreifenden Last 1 zu bestimmen, zerlege man

*) Wir empfehlen dem Leser, dieses Beispiel auch mit Hilfe der im § 19 entwickelten Verfahren durcharbeiten und sämtliche Spannkkräfte mit Hilfe eines einzigen Seilpolygons zu ermitteln; sie lassen sich alle auf die Form $\frac{c}{x} \cdot Hy$ bringen. Vergl. die Figuren 145, 146 u. 147.

den Kämpferdruck in $A' = \frac{1}{2}$ und $H' = 1 \frac{l}{4f} = 1 \cdot \frac{30}{4 \cdot 4} = 1,875$ und bestimme die Einflüsse von A' und H' getrennt. Den von H' herührenden Theil von S_G liefert der Kräfteplan in Fig. 387 (Maassstab III); wird dieser Theil mit S_H bezeichnet, so folgt $S_G = \frac{1}{2} S' + S_H$.

Man findet

Stab	S'	S_H	S_G	Stab	S'	S_H	S_G
O_1	— 0,787	+ 0,709	+ 0,315	U_2	+ 0,840	— 2,758	— 2,338
O_2	— 2,230	+ 1,784	+ 0,669	U_3	+ 2,308	— 3,787	— 2,633
O_3	— 4,762	+ 3,333	+ 0,952	U_4	+ 4,822	— 5,275	— 2,864
O_4	— 8,511	+ 5,106	+ 0,851	U_5	+ 8,523	— 6,991	— 2,730
D_1	+ 1,273	— 1,145	— 0,509	V_0	— 1,000	+ 0,900	+ 0,400
D_2	+ 1,938	— 1,445	— 0,476	V_1	— 1,294	+ 0,965	+ 0,318
D_3	+ 2,992	— 1,831	— 0,335	V_2	— 1,595	+ 0,976	+ 0,179
D_4	+ 4,142	— 1,959	+ 0,112	V_3	— 1,762	+ 0,833	— 0,048
D_5	+ 3,780	— 0,968	+ 0,922	V_4	— 1,454	+ 0,372	— 0,355

Die Einflusslinien für die Spannkkräfte O_1, O_2, O_3, O_4 sind in der Fig. 390 (Tafel 6) dargestellt worden. Um beispielsweise die Linie für O_2 zu erhalten, wurden (im Maassstabe $3,0 = 5^{\text{mm}}$) die Strecken aufgetragen $\overline{A_2 J_2} = S' = -2,230$ und $\overline{G G'} = S_G = +0,669$,*) und hierauf die Geraden I, II, III gezogen. Will man die Ermittlung von S_G sparen, so lege man nach Bestimmung des Punktes J_2 die Gerade I mit Hilfe des senkrecht unter E_2 gelegenen Nullpunktes N_2 fest. E_2 ist der Schnittpunkt einer durch A und den unteren Knoten 2 gelegten Geraden mit der Geraden BG . Ist weder S_G noch S' gegeben, so bestimme man die Strecke $\overline{RT} = O_2'''$, welche die Geraden I und III auf der Senkrechten durch den Knoten 1 abschneiden, indem man die Last 1 nach den Richtungen von O_2 und D_2 zerlegt, Fig. 390f. Nun gebe man der Geraden I eine beliebige Lage (Fig. 390e), trage $\overline{RT} = O_2'''$ auf, ziehe III und, nach Ermittlung des Nullpunktes N_2 , die Geraden $A_2 B_2$ und II .

Das zuletzt beschriebene Verfahren führt am schnellsten zum Ziele, erfordert aber ein sehr genaues Zeichnen, nämlich scharfe Bestimmung des Punktes N . Im Allgemeinen liefert die Benutzung der Werthe S' und S_G die zuverlässigsten Zeichnungen, deren Güte man leicht prüfen kann, indem man nachträglich die Punkte N mit Hilfe der Punkte E und die Strecken $\overline{RT} = O'''$ durch Zerlegung einer Last 1 bestimmt.

*) Es genügen bereits zwei Decimalstellen. Die oben angegebenen Zahlenwerthe wurden vom Verfasser gerechnet.

Die Einflusslinien für U_2, U_3, U_4, U_5 *) zeigt Fig. 391. Bei gegebenen Werthen S' und S_G wird z. B. die Gerade I der U_3 -Linie mit Hilfe der Ordinaten $A_3 J_3 = S' = +2,308$ und $G G' = S_G = -2,633$ bestimmt. An Stelle von S_G kann man auch den Nullpunkt N_3 benutzen. Schliesslich lässt sich auch die Strecke $\overline{RT} = U_3'''$ auf der Senkrechten durch den Knoten 3 durch Zerlegung der Last 1 nach den Richtungen von D_3 und U_3 ermitteln, Fig. 391e, worauf die Bestimmung der U_3 -Linie mit Hilfe von U_3''' und Punkt N_3 erfolgen kann.

Die dem Stabe U_5 entsprechenden Punkte E_5 und N_5 befinden sich links von dem oberhalb der Kämpferdrucklinie gelegenen Knoten 4 der oberen Gurtung. In Folge dessen sind sämtliche Ordinaten der U_5 -Linie negativ.

Die Einflusslinien für die Spannkkräfte D und V in den Füllungsstäben sind auf Tafel 7 zusammengestellt worden. Wir beschreiben die Erzeugung der D_3 -Linie Fig. 392c. Es wird $A_3 J_3 = S' = +2,992$ und $G G' = S_G = -0,335$ aufgetragen und die Gerade I gezogen; dieselbe schneidet die Senkrechte durch den Schnittpunkt C_3 von O_3 und U_3 im Punkte C_3' , und durch diesen Punkt ist die Gerade II bestimmt. **) Nun zieht man III und IV . Man kann auch I mit Hilfe der Punkte J_3 und N_3 festlegen; N_3 liegt senkrecht unter dem Schnittpunkte E_3 der Geraden BG und AC_3 . Ausserdem lässt sich die Strecke $\overline{RT} = D_3'''$ leicht angeben, welche die Geraden I und II auf der Senkrechten durch den Knoten 2 abschneiden. Man hat nur nöthig, die Last 1 nach den Richtungen D_3 und O_3 zu zerlegen, Fig. 392f.

Am schnellsten gelangt man wieder zum Ziele, wenn man die Einflusslinie mit Hilfe der Strecke D''' und mittels der Punkte E und C bestimmt. Man zieht dann die Gerade I beliebig, setzt die Strecke $\overline{RT} = D'''$ ab, zieht III , bestimmt auf I die Punkte C' und N , legt durch C' und T die Gerade II und durch A und N die Gerade AB . Schliesslich zieht man IV . Es setzt dieses Verfahren allerdings eine bequeme Lage der Punkte E und C voraus, welcher Bedingung im vorliegenden Falle hinsichtlich sämtlicher Füllungsstäbe genügt wird.

Man vergleiche übrigens die Anmerkung am Schluss der Beschreibung der O -Linien. ***)

*) U_1 ist für jeden Belastungszustand (wenn nur senkrechte Lasten wirken) $= -H \sec \gamma_1$, hiernach ergeben sich die Grenzwerte von U_1 aus denen von H . Die Einflusslinie für H ist in No. 113 behandelt worden. Hervorzuheben ist, dass die Grenzwerte von H zur Berechnung der Widerlager gegeben sein müssen.

**) Die Punkte C werden zweckmässig durch Rechnung bestimmt. Die Entfernung des Punktes C_2 von der Vertikalen 2 ist z. B.

$$\lambda \frac{h_2}{h_2 - h_3} = 3,0 \frac{2,69}{2,69 - 1,89} = 10,0875^m.$$

***) N_1 in Fig. 392a hat dieselbe Lage wie in N_1 in Fig. 390a.

Um die Einflusslinie für V_2 (Fig. 393c) zu bestimmen, kann man die Lage der Geraden I mit Hilfe der Werthe finden $\overline{A_2 J_2} = S' = -1,595$ und $\overline{G G'} = S_G = +0,179$ oder mittels S' und des Nullpunktes N , welcher im vorliegenden Falle mit dem Nullpunkte N_3 in Fig. 392c übereinstimmt, weil sich O_2 und U_3 in demselben Punkte C_3 schneiden wie O_3 und U_3 . Nun wird die Senkrechte durch C_3 im Punkte C_3' mit I zum Schnitte gebracht, die Gerade II gezogen und hierauf III und IV . Auch die von I und II auf der Senkrechten durch den Knoten 2 abgeschnittene Strecke $\overline{RT} = V_2'''$ lässt sich schnell durch Zerlegung der Last 1 nach den Richtungen von O_2 und V_2 ermitteln. Man findet $V_2''' = 1$.

Wir gehen jetzt dazu über, die Benutzung der dargestellten Einflusslinien an einigen Beispielen zu erläutern, und behandeln zunächst den

Einfluss einer gleichförmigen Belastung. Gesucht seien die Grenzwerte für die Spannkraft U_3 unter der Voraussetzung, dass $g = 0,37'$, $p = 0,665'$ also $q = g + p = 1,035'$ ist.

Bedeutet F den Inhalt des negativen Theiles der Einflussfläche und F' den Inhalt des positiven Theiles, so ergibt sich nach Seite 117 (Gleich. 5 u. 6)

$$\begin{aligned} \max U_3 &= q F'_+ - g F'_- = qa \left(\frac{F'_+}{a} - \frac{g}{q} \frac{F'_-}{a} \right) \\ \min U_3 &= g F'_+ - q F'_- = qa \left(\frac{g}{q} \frac{F'_+}{a} - \frac{F'_-}{a} \right), \end{aligned}$$

wo a die Länge einer beliebigen Strecke bedeutet. Verwandelt man nun die Flächen F und F' in Dreiecke, deren Grundlinien $= a$ sind, und bezeichnet die Höhen dieser Dreiecke mit h_{II} und h_I , so erhält man

$$(1) \quad \max U_3 = \frac{qa}{2} \left(h_{II} - \frac{g}{q} h_I \right); \quad \min U_3 = \frac{qa}{2} \left(\frac{g}{q} h_{II} - h_I \right).$$

Die Länge a wähle man so, dass $\frac{1}{2} qa$ durch eine bequeme Zahl ausgedrückt wird. *) Wird im vorliegenden Falle $a = 19,324^m$ gewählt, so ergibt sich $\frac{1}{2} qa = 10,000'$. Man findet durch Zeichnung: $h_{II} = 0,12$; $h_I = 3,14$, also

*) Maassgebend für die Länge von a ist natürlich auch die Bedingung, dass sich bei der Flächenverwandlung nicht schleifende Schnitte ergeben dürfen. Zuweilen ist es zweckmässig, eine sehr kleine Fläche in ein Dreieck mit der Grundlinie $\frac{1}{n} a$ zu verwandeln und dann die Höhe dieses Dreiecks durch n zu dividiren, wobei n eine beliebige ganze Zahl ist.

$${}_{max}U_3 = 10 \left(0,12 - \frac{0,37}{1,035} \cdot 3,14 \right) = -10^t \text{ (abgerundet);}$$

$${}_{min}U_3 = 10 \left(\frac{0,37}{1,035} \cdot 0,12 - 3,14 \right) = -31^t \text{ *)}$$

In Fig. 391b wurden nur die Hilfslinien zur Ermittlung von h_I eingetragen. Es ist $B_3 K = a$, ferner $G'S$ wagerecht und $N_3 H \parallel KS$, schliesslich $B_3 H = h_I$.

Will man die Multiplikation mit $\frac{1}{2} qa$ sparen, so ersetze man bei Aufzeichnung der Einflusslinien die über den Träger wandernde Last 1 durch eine Last $\frac{1}{2} qa$. Dann erhält man für irgend eine Spannkraft S die Grenzwerte: ${}_{max}S = h_{II} - \frac{g}{q} h_I$ und ${}_{min}S = \frac{g}{q} h_{II} - h_I$.

Ein anderes, schon auf Seite 118 für den Fall gleich weiter Felder besprochenes Verfahren soll an der Bestimmung der Grenzwerte von V_2 erläutert werden. Um ${}_{max}V_2$ zu erhalten, wird jeder Knoten einer positiven Beitragstrecke mit $q\lambda = 1,035 \cdot 3,0 = 3,11^t$ belastet, jeder Knoten einer negativen Beitragstrecke mit $g\lambda = 0,37 \cdot 3,0 = 1,11$. Die Summe der den ersten Knoten entsprechenden Ordinaten ist in Fig. 393c: $\Sigma_2 = \eta_1 + \eta_5 + \eta_6 + \eta_7 + \eta_8 + \eta_9 = 0,59$ und die Summe der Ordinaten unter den übrigen Knoten: $\Sigma_1 = \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 = 1,59$, weshalb (nach Gleich. 7, Seite 118)

$${}_{max}V_2 = 3,11 \cdot 0,59 - 1,11 \cdot 1,59 = +0,1^t$$

und nach Vertauschung der Lasten $q\lambda$ und $g\lambda$

$${}_{min}V_2 = 1,11 \cdot 0,59 - 3,11 \cdot 1,59 = -4,3^t \text{ **)}$$

Besteht die bewegliche Belastung aus den Raddrücken von Fahrzeugen, während die ständige Belastung eine gleichförmige ist, so kann der Einfluss der letzteren auf die eben beschriebene Weise in der Form: $\frac{1}{2} ga (h_{II} - h_I)$ oder $g\lambda (\Sigma_2 - \Sigma_1)$ dargestellt werden. Die Verwandlungsrundlinie a wähle man dann so, dass ein bequemer Multiplikator $\frac{1}{2} ga$ entsteht.

Einfluss der aus Einzelkräften bestehenden Verkehrslast einer Eisenbahnbrücke. Es sollen Fahrzeuge mit den in Fig. 111 (Seite 121) angegebenen Radständen und Achsenbelastungen vorausgesetzt werden. Wegen der Kürze der Brücke kommen nur Lokomotiven und Tender in Betracht. Die Brücke sei eingleisig und besitze zwei

*) Vergl. das Zahlenbeispiel in No. 187.

**) Für den vorliegenden Parabelbogen muss sich bei gänzlicher Belastung mit p ergeben: $V_p = -p\lambda$. In der That ist auch $V_p = p\lambda [\Sigma_2 - \Sigma_1] = -p\lambda$. Die Spannkraft O und D werden in Folge gänzlicher Belastung $= 0$, und es muss also beispielsweise in Fig. 392c sein $\eta_1 + \eta_2 + \eta_5 + \eta_6 + \eta_7 + \eta_8 + \eta_9 = \eta_3 + \eta_4$.

Hauptträger. Es ist dann mit den Raddrücken $L = \frac{1}{2} 13^t$ (Lokomotive) und $T = \frac{1}{2} 9^t$ (Tender) zu rechnen.

Gesucht seien die Grenzwerte von U_4 , Fig. 391 c auf Tafel 6. Um $_{\min} U_4$ zu erhalten wird ein Zug auf die negative Beitragstrecke gestellt, so dass die schwersten Lasten in der Nähe von G und eine schwere Last bei G selbst liegt. Hierauf wird der Werth $_{\min} U_{p4} = L \Sigma \eta_L + T \Sigma \eta_T$ berechnet. Die gefährlichste Stellung des Lastenzuges findet man am schnellsten durch Probiren. Ist die Einflusslinie für eine Strecke eine Gerade, so dürfen beliebige innerhalb dieser Strecke liegende Lasten zu einer Mittelkraft vereinigt werden. Bei der in der Figur angegebenen Laststellung, welche sich als die gefährlichste erwies, ist die (mit dem Zirkel zu bestimmende) Summe der den fünf Lasten L entsprechenden Ordinaten = 8,33. Dem mittelsten Rade des Tenders, welcher ein Gewicht von 27^t besitzt, entspricht $\eta = 1,55$. Mithin ergibt sich

$$_{\min} U_{p4} = -\frac{1}{2} [13 \cdot 8,33 + 27 \cdot 1,55] = -75,1^t.$$

In gleicher Weise findet man, dass die Belastung der positiven Beitragstrecke erzeugt

$$_{\max} U_{p4} = +\frac{1}{2} 39 \cdot 0,18 + \frac{1}{2} 9 \cdot 0,07 = +3,8^t.$$

Es sollen noch die Grenzwerte von D_2 bestimmt werden. Die positive Beitragstrecke ist hier so kurz, dass bei Aufstellung einer Lokomotive nebst Tender der grössere Theil des letzteren jenseits der Belastungsscheide N_2 liegt. Der in Fig. 392 b abgebildeten ungünstigsten Zugstellung entspricht

$$_{\max} D_3 = \frac{1}{2} 13 \cdot 2,22 - \frac{1}{2} \cdot 27 \cdot 0,14 = +14,43 - 1,89 = +12,5^t.$$

Lässt man den Tender fort, so erhält man den Werth $_{\max} D_3 = 14,4^t$. Trotzdem diese Beanspruchung, des höchst unwahrscheinlichen Belastungszustandes wegen, etwas zu ungünstig gerechnet ist, dürfte es sich empfehlen, der fraglichen Diagonale einen entsprechend grossen Querschnitt zu geben. Jedenfalls ist der erstgerechnete Werth $_{\max} D_3 = 12,5^t$ als zu klein anzusehen, sobald nicht die Untersuchung der Wirkung kürzerer, wenn auch leichterer Fahrzeuge das Gegentheil bewiesen hat. Besonders aber wäre noch der Einfluss einer sogenannten Tenderlokomotive schwerster Art zu bestimmen.*)

Die negative Beitragstrecke der D_2 -Linie besteht aus zwei Theilen. Schliesst man die Belastung der eingleisigen Brücke durch zwei getrennte Züge als unwahrscheinlich aus, so erhält man für den in der Fig. 393 b von B aus vorgeschobenen Lastenzug

$$_{\min} D_2 = -\frac{1}{2} (39 \cdot 0,43 + 27 \cdot 0,21 + 13 \cdot 0,04) = -11,5^t.$$

*) Vergl. No. 99, Seite 168.

XII. Abschnitt.

Statisch bestimmte Hängebrücken und Gelenkbögen, versteift durch Balken.

§ 47.

Hängebrücken, deren Hauptträger aus einfachen Dreiecknetzen bestehen.

a. Untersuchung des in Fig. 394 dargestellten Hängewerks.

188. Der vorliegende Träger besteht aus vier gegliederten Scheiben *I*, *II*, *III*, *IV*, deren jede auf zwei wagerechten Gleitlagern ruht, und welche durch die Stäbe B_1C , CA , BD , DA_2 mit einander verbunden sind. Die Stützpunkte *C* und *D* werden ebenfalls auf wagerechten Geraden geführt. In A_1 und B_2 greifen die Rückhaltketten an. Die Spannkraften in den Kettengliedern A_1L und B_2N sollen zu den Stützen-

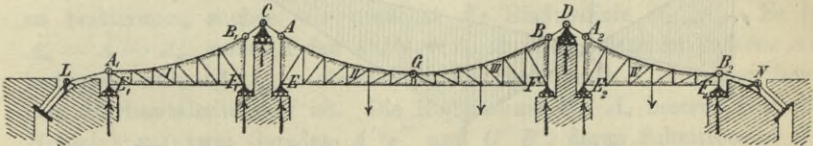


Fig. 394.

widerständen gerechnet werden. Jede der beiden Scheiben *I* und *IV* ist dann durch drei Widerstände gestützt, deren Richtungen sich nicht in einem und demselben Punkte schneiden, so dass alle auf *I* und *IV* wirkenden Kräfte in eindeutiger Weise auf die Widerlager übertragen werden. Die Scheiben *II* und *III* bilden einen Dreigelenkbogen, dessen Kämpferwiderstände sich aus den in *E* und *F* angreifenden lothrechten Auflagerkräften und den Spannkraften der Stäbe CA und BD zusammensetzen. Die Spannkraften der Stäbe CA und BD aber sind im Gleichgewicht mit den in *C* und *D* angreifenden lothrechten Widerständen der Mittelpfeiler und den Spannkraften der Stäbe B_1C und A_2D . Ergeben sich an den Gleitlagern negative Auflagerdrücke, so muss für eine Verankerung dieser Lager gesorgt werden.

189. **Untersuchung der Mittelöffnung.** Wir ziehen hier nur die Wirkung senkrechter, abwärts gerichteter Lasten in Betracht und verfolgen zunächst den Einfluss einer über der Mittelöffnung ruhenden Einzellast P . Dabei setzen wir den allgemeineren Fall ungleich hoch liegender Aufhängepunkte A und B voraus. Fig. 395. Die Spannkraften S_c und S_d^*) der in A und B angreifenden Stäbe zerlegen wir in die senkrechten Seitenkräfte A_o und B_o und in die beiden mit der Schlusslinie AB zusammenfallenden, entgegengesetzt gleichen Seitenkräfte H' . Hierauf denken wir uns die Angriffspunkte der an den

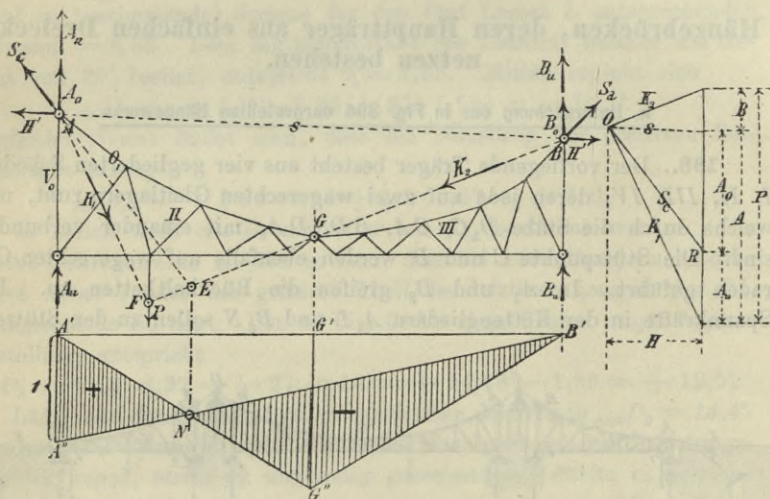


Fig. 395.

Auflagern der Scheiben II und III wirksamen senkrechten Widerstände A_u und B_u nach A und B verlegt, und vereinigen A_o und A_u zu $A = A_o + A_u$, desgl. B_o und B_u zu $B = B_o + B_u$. Es verhält sich jetzt der Trägertheil AGB wie ein Bogen mit drei Gelenken, auf welchen die Ergebnisse der im § 24 und im Abschnitte XI durchgeführten Untersuchungen angewendet werden können. Zu diesem Zwecke verwandele man das Hängewerk durch Umkehrung desselben in einen Bogenträger, berechne die Spannkraften auf die früher angegebene Weise und ändere schliesslich sämtliche Vorzeichen. Nur bei der Berechnung

*) Wir bezeichnen die Spannkraften in den Stäben LA_1 , B_1C , CA , BD , der Reihe nach mit S_a , S_b , S_c , S_d .

der Spannkraft V_0 in einer Endvertikalen ist die Verlegung von A_u unzulässig. Man bestimme S_c mit Hilfe der Bedingung, dass die wagerechte Projektion dieser Kraft $= H$ sein muss, zeichne hierauf das Kräftepolygon für den Knoten A und entnehme diesem V_0 . Fällt S_c mit O_1 zusammen, wie bei dem in der Fig. 396 abgebildeten Träger, so ergibt sich $V_0 = 0$. Die Endvertikale darf dann weggelassen werden.*)

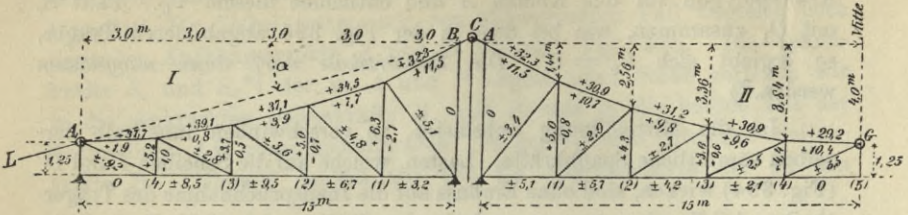
Ist die Mittelöffnung unbelastet, so verschwinden innerhalb derselben sämtliche Spannkräfte. Lasten, welche auf die Scheiben I und IV (Fig. 394) wirken, sind ohne Einfluss auf die Inanspruchnahme des Trägertheiles AGB ; sie erzeugen auch in den Stäben CA , BD , B_1C , DA_2 , LA_1 , B_2N keine Spannungen, und es verhalten sich dann die Scheiben I und IV wie einfache Balken.

Zahlenbeispiel. Fig. 396 stellt die Hälfte des einen Hauptträgers einer Fussgängerbrücke dar, welche die in dem Zahlenbeispiele in No. 187 angenommenen Belastungen $g = 0,37^t$, $p = 0,665^t$, $q = 1,035^t$ f. d. Meter erfährt. Die Mittelöffnung hat dieselben Abmessungen wie der früher behandelte Bogenträger (Fig. 385). Es entstehen dann im Trägertheile dieser Oeffnung Spannkräfte, welche sich von den in der Fig. 389 zusammengestellten nur durch die Vorzeichen unterscheiden, mit Ausnahme von V_0 , welches hier $= 0$ wird.

Um noch die Grenzwerte des Stützenwiderstandes A_u (Fig. 395) zu bestimmen, suchen wir zunächst die Einflusslinie für A_u . Es ist $A_u = A - A_o$, wobei A den Auflagerdruck eines einfachen Balkens AB bedeutet, während A_o — ebenso wie die Spannkraft S_c — proportional dem Horizontalschube H ist. Die Einflusslinie für A_o besteht (wie die H -Linie) aus zwei Geraden $A'G''$ und $G''B'$, deren Schnittpunkt G'' dem Scheitelgelenke entspricht, und es ist deshalb die schraffierte Fläche in der Figur 395 (in welcher die Gerade $B'A''$ die Einflusslinie für A bedeutet) die gesuchte Einflussfläche für A_u ; dieselbe ist bestimmt, sobald die Lage des Nullpunktes N gegeben ist. Um N zu finden, untersuchen wir den Einfluss einer links von G angreifenden Last P , welche die Gerade BG (Fig. 395) in F schneidet, zerlegen P in $K_2 \parallel BG$ und

*) Soll sich der Trägertheil AGB vollständig wie ein umgekehrter Fachwerkbogen verhalten, so müssen die in Fig. 394 angeordneten Auflager der Scheiben II und III fortbleiben, und die Mittellinien der Endvertikalen von II und I müssen in die Senkrechte durch C fallen; es können diese Stäbe in einem entsprechenden Hohlräume des Pfeilers untergebracht werden. C wird wie vorhin auf einer Wagerechten geführt. Diese Anordnung ist jedoch nicht zu empfehlen. Verfasser hält es für das beste, die Endvertikale fortzulassen und das Gelenk G in die untere Gurtung zu legen.

in $K_1 \parallel AF$ und ziehen hierauf im Kräfteplane den Strahl $s \parallel AB$; derselbe zerlegt P in A und B . Wird noch der Strahl $OR \parallel S_c$ gezogen, so giebt die Strecke OR die Grösse der Spannkraft S_c an, und der



190. **Untersuchung der Seitenöffnung.** So lange nur Lasten zwischen A_1 und B_1 wirken, verhält sich der Trägertheil A_1B_1 wie ein einfacher Balken; es gelten die im § 30 abgeleiteten Gesetze. Wird also die Einflusslinie für irgend eine Spannkraft S gesucht (Fig. 397), so ermittelt man die Spannkraft S' für den früher erklärten Zustand $A_1 = 1$ (vergl. No. 143) sowie den Schnittpunkt E der beiden anderen vom Schnitte tt getroffenen Stäbe und legt nun der Reihe nach die drei Geraden fest, aus denen die Einflusslinie besteht. Befindet sich E links von A_1 , so entsteht im m^{ten} Felde eine Belastungsscheide. Liegt E zwischen A_1 und B_1 , so tragen alle innerhalb A_1B_1 angreifenden Lasten zu der fraglichen Spannkraft in gleichem Sinne bei. Wie bei ungünstiger Lage des Punktes E zu verfahren ist, und auf welche Weise die Schärfe der Zeichnung geprüft werden kann, ist früher auseinandergesetzt worden. Vergl. Seite 336.

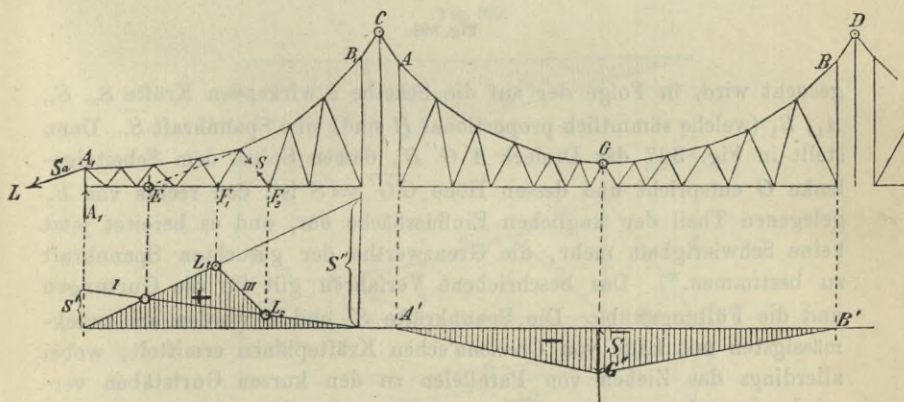


Fig. 397.

Es bleibt jetzt nur noch der Einfluss einer über der Mittelöffnung ruhenden Belastung anzugeben. Hat man den durch diese Belastung hervorgerufenen Horizontalschub H bestimmt, so findet man die Spannkraften S_b und S_a nach Fig. 398 mittels der Bedingung, dass Gleichgewicht nur möglich ist, wenn die wagerechte Projektion jeder dieser Kräfte $= H$ ist. Indem man jetzt LA_1B_1C als ein Seilpolygon auffasst, welches mit der Polweite H zu den Kräften A_1 und B_1 gezeichnet ist, und im Kräfteplane durch O zu A_1B_1 eine Parallele (s) zieht, kann man auf die in der Fig. 398 angegebene Weise die Größe und den Sinn von A_1 und B_1 feststellen. Fällt die Richtung von S_a mit der Geraden A_1B_1 zusammen, wie dies in dem Beispiele in Fig. 396 angenommen wurde, so ergibt sich $A_1 = 0$.

Gesetzt nun, es stelle die Kraft H in Fig. 398 den Horizontal-
schub in Folge einer im Scheitelgelenke G der Mittelöffnung angreifenden
Last *Eins* vor, und es entstehe in dem Stabe S , dessen Einflusslinie

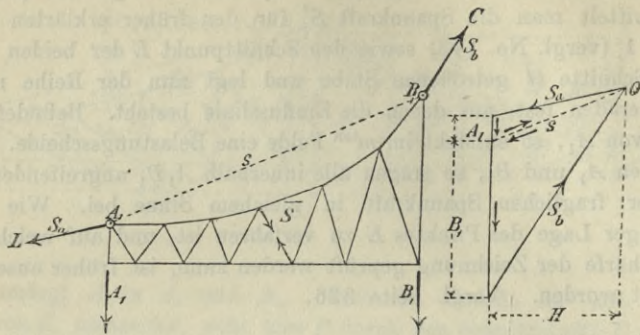


Fig. 398.

gesucht wird, in Folge der auf die Scheibe I wirkenden Kräfte S_a , S_b , A_1 , B_1 (welche sämtlich proportional H sind) eine Spannkraft \bar{S} . Dann stellt in Fig. 397 das Dreieck $A'G''B'$, dessen Spitze dem Scheitelgelenke G entspricht und dessen Höhe $\overline{GG'} = \bar{S}$ ist, den rechts von B_1 gelegenen Theil der fraglichen Einflussfläche dar, und es bereitet jetzt keine Schwierigkeit mehr, die Grenzwerte der gesuchten Spannkraft zu bestimmen.*) Das beschriebene Verfahren gilt für die Gurtungen und die Füllungsstäbe. Die Spannkräfte S' und \bar{S} werden am zweckmässigsten mit Hilfe von *Cremona'schen* Kräfteplänen ermittelt, wobei allerdings das Ziehen von Parallelen zu den kurzen Gurtstäben vermieden werden muss. Wir verweisen in dieser Beziehung auf Seite 308 und 378.

Zahlenbeispiel. Bei dem in der Fig. 396 dargestellten gleichmässig mit $g = 0,37'$ und $p = 0,665'$ belasteten Fachwerke mit Vertikalen lassen sich, da die Knotenpunkte der oberen Gurtung jeder der beiden kongruenten Scheiben I und II auf Parabeln liegen, deren senkrechte Achsen durch A , beziehungsweise G gehen, wesentliche Vereinfachungen erzielen, wie die folgenden Rechnungen zeigen werden.

Zunächst sollen diejenigen Spannkräfte S_M bestimmt werden, welche in den Stäben der Seitenöffnung entstehen, sobald die Mittelöffnung

*) Für den in der Fig. 397 dargestellten Fall ergibt sich S' positiv und \bar{S} negativ. Lasten, welche auf Scheibe IV wirken (Fig. 394) sind ohne Einfluss auf die Inanspruchnahme der Scheibe I .

gänzlich und zwar mit p belastet wird. Es greift dann am linken Ende nur eine von B_1 nach A_1 gerichtete äussere Kraft S_a an, Fig. 399,

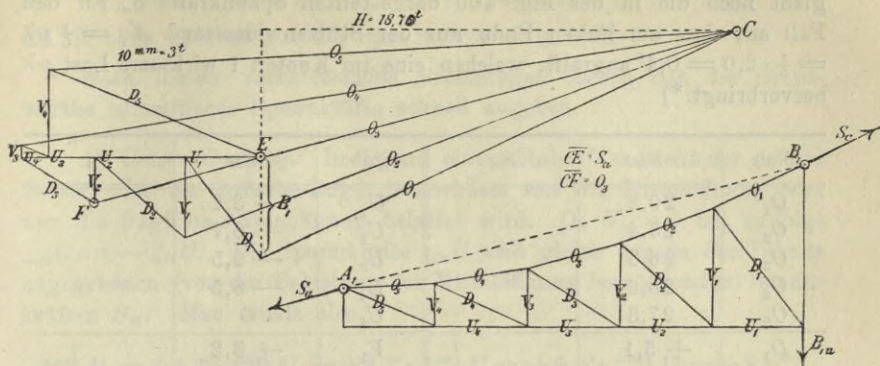


Fig. 399.

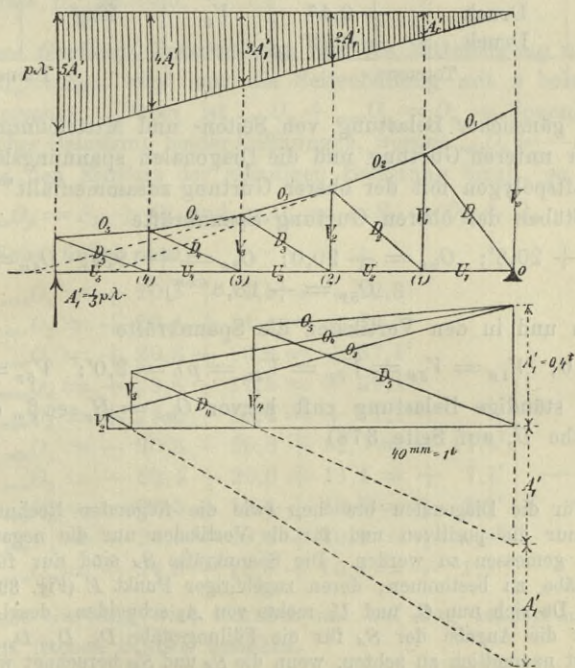


Fig. 400.

deren wagerechte Projektion $= H_p = \frac{pl^2}{8f} = 18,70^t$ ist. Der für diesen

Zustand in Fig. 399 gezeichnete *Cremona'sche* Plan liefert die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werthe S_M . Dieselbe Tabelle giebt noch die in der Fig. 400 dargestellten Spannkraften S_A für den Fall an, dass am linken Ende nur der Stützenwiderstand $A'_1 = \frac{1}{5} p\lambda = \frac{1}{5} \cdot 2,0 = 0,4^t$ angreift, welchen eine im Knoten 1 wirksame Last $p\lambda$ hervorbringt. *)

Stab	S_M	S_A	Stab	S_M	S_A
O_1	20,8		U_1	— 3,2	
O_2	23,4		U_2	— 6,7	
O_3	26,3		U_3	— 9,5	
O_4	28,6		U_4	— 8,5	
O_5	27,3		U_5	0	
D_1	+ 5,1		V_1	— 3,2	
D_2	+ 4,8		V_2	— 1,8	— 0,04
D_3	+ 3,35	+ 0,08	V_3	Zug	— 0,20
D_4	Druck	+ 0,47	V_4	Zug	— 0,35
D_5	Druck	+ 0,92			
		Tonnen			Tonnen

Bei gänzlicher Belastung von Seiten- und Mittelöffnung sind die Stäbe der unteren Gurtung und die Diagonalen spannungslos, weil das Mittelkraftspolygon mit der oberen Gurtung zusammenfällt**), während in den Stäben der oberen Gurtung Spannkraften

$$O_{1p} = + 20,8^t; \quad O_{2p} = + 20,0; \quad O_{3p} = + 19,4; \quad O_{4p} = + 18,9; \\ O_{5p} = + 18,8^{***})$$

entstehen und in den Vertikalen die Spannkraften

$$V_{0p} = 0; \quad V_{1p} = V_{2p} = V_{3p} = V_{4p} = p\lambda = 2,0^t; \quad V_{5p} = - A_{1p}.$$

Die ständige Belastung ruft hervor $O_{mp} = H_p \sec \beta_m$ d. i. (vergl. die Werthe U_p auf Seite 378)

*) Für die Diagonalen brauchen (wie die folgenden Rechnungen lehren werden) nur die positiven und für die Vertikalen nur die negativen Spannkraften S_M gemessen zu werden. Die Spannkraften S_A sind nur für diejenigen Füllungsstäbe zu bestimmen, deren zugehöriger Punkt E (Fig. 397) links von A_1 liegt. Da sich nun O_2 und U_2 rechts von A_1 schneiden, desgl. O_1 und U_1 , so genügt die Angabe der S_A für die Füllungsstäbe $D_5, D_4, D_3, V_4, V_3, V_2$. Hierauf ist namentlich zu achten, wenn die S_A und S_M berechnet werden sollen. Bei ungleichen Feldweiten ist nicht der Zustand $A_1 = A'_1$ zu untersuchen, sondern der Zustand $A_1 = 1$.

**) Vergl. Seite 375.

***) Es ist $O_{mp} = H_p \sec \beta_m$, wo $\beta_m =$ Neigungswinkel von O_m . Hiernach sind die O_{mp} entgegengesetzt gleich den auf Seite 378 ermittelten U_{mp} .

$$O_{1g} = + 11,5^t; \quad O_{2g} = + 11,1^t; \quad O_{3g} = + 10,8^t; \quad O_{4g} = + 10,5^t; \\ O_{5g} = + 10,4^t;$$

$$V_{0g} = 0; \quad V_{1g} = V_{2g} = V_{3g} = V_{4g} = g\lambda; \quad V_{5g} = - A_{1g};$$

sie ist ohne Einfluss auf die Spannkraften D und U .

Nach diesen vorbereitenden Rechnungen lassen sich die Grenzwerte sämtlicher Spannkraften schnell angeben.

1) *Untere Gurtung.* In irgend einem Stabe U entsteht der grösste Druck oder der grösste Zug, je nachdem nur die Mittelöffnung oder nur die fragliche Seitenöffnung belastet wird. Da $U_g = 0$ ist, so folgt ${}_{max}U = - {}_{min}U$. Die Spannkraften ${}_{min}U$ sind gleich den in der Tabelle angegebenen (von der Belastung der Mittelöffnung herrührenden) Spannkraften S_M . Man erhält also

$$\left. {}_{min} \right\} U_1 = \pm 3,2^t; \quad \left. {}_{min} \right\} U_2 = \pm 6,7^t; \quad \left. {}_{min} \right\} U_3 = \pm 9,5^t; \quad \left. {}_{min} \right\} U_4 = \pm 8,5^t.$$

Die Spannkraft U_5 ist $= 0$.

2) *Obere Gurtung.* Belastet man nur die Mittelöffnung mit p , so entsteht ${}_{max}O_p = S_M$; wird nur die Seitenöffnung mit p belastet, so wird ${}_{min}O_p$ erzeugt. Dabei ist ${}_{min}O_p + {}_{max}O_p = O_p =$ Spannkraft in Folge gänzlicher Belastung beider Oeffnungen, woraus ${}_{min}O_p = -S_M^* + O_p$. Rechnet man den Einfluss der ständigen Belastung hinzu, so entsteht

$${}_{max}O_p = S_M + O_g \quad \text{und} \quad {}_{min}O_p = -S_M + O_p + O_g.$$

Auf diese Weise findet man

$$\begin{aligned} {}_{max}O_1 &= + 20,8 + 11,5 = + 32,3^t \\ {}_{max}O_2 &= + 23,4 + 11,1 = + 34,5^t \\ {}_{max}O_3 &= + 26,3 + 10,8 = + 37,1^t \\ {}_{max}O_4 &= + 28,6 + 10,5 = + 39,1^t \\ {}_{max}O_5 &= + 27,3 + 10,4 = + 37,7^t \\ {}_{min}O_1 &= - 20,8 + 20,8 + 11,5 = + 11,5^t \\ {}_{min}O_2 &= - 23,4 + 20,0 + 11,1 = + 7,7^t \\ {}_{min}O_3 &= - 26,3 + 19,4 + 10,8 = + 3,9^t \\ {}_{min}O_4 &= - 28,6 + 18,9 + 10,5 = + 0,8^t \\ {}_{min}O_5 &= - 27,3 + 18,8 + 10,4 = + 1,9^t. \end{aligned}$$

Die obere Gurtung wird hiernach nur auf Zug beansprucht, darf also auch aus flachen Stäben bestehen.

Für die Rückhaltkette A_1L (Fig. 396), deren Neigungswinkel gegen die Wagerechte $= \alpha$ sei, erhält man

$$\begin{aligned} {}_{max}S_a &= (H_g + H_p) \sec \alpha = (10,4 + 18,75) 1,035 = + 30,2^t \\ {}_{min}S_a &= H_g \sec \alpha = 10,4 \cdot 1,035 = + 10,8^t. \end{aligned}$$

3) *Diagonalen*. Da der Schnittpunkt von O_1 und U_1 rechts von A_1 liegt, desgleichen der Schnittpunkt von O_2 und U_2 , so tragen alle über der Seitenöffnung befindlichen Lasten zu den Spannkraften D_1 und D_2 in gleichem Sinne bei. Ausschliessliche Belastung der Mittelöffnung erzeugt (da $D_g = 0$ ist) die Spannkraften

$$\max D_1 = S_M = + 5,1^t \text{ und } \max D_2 = + 4,8^t.$$

Ausschliessliche Belastung der Seitenöffnung erzeugt (wegen $\min D = - \max D$) die Spannkraften

$$\min D_1 = - 5,1^t \text{ und } \min D_2 = - 4,8^t.$$

In jeder der übrigen Diagonalen ruhen Lasten, welche auf der Seitenöffnung ruhen, Zug oder Druck hervor, je nachdem sie rechts oder links von der fraglichen Diagonale liegen. Da nun der Werth S_M für die Diagonale D_3 positiv ist, so entsteht $\max D_3$, wenn jeder der Knoten 2 und 1 mit $p\lambda$ und ausserdem die ganze Mittelöffnung belastet wird. Die in 2 und 1 angreifenden Lasten $p\lambda$ erzeugen: $A_1 = A'_1 + 2 A'_1 = 3 A'_1$ (siehe Fig. 400) und $D_3 = 3 S_A = 3 \cdot 0,08 = 0,24^t$, weshalb

$$\max D_3 = 0,24 + S_M = 0,24 + 3,35 = + 3,6^t = - \min D_3.$$

In D_4 und D_5 erzeugt die Belastung der Mittelöffnung Druckspannungen. Um $\max D_4$ zu erhalten, belastet man nur die Knoten 1, 2, 3 und um $\max D_5$ zu erzeugen, nur die Knoten 1, 2, 3, 4. Im ersten Falle ergibt sich

$$A_1 = A'_1 (1 + 2 + 3) = 6 A'_1;$$

$$\max D_4 = 6 \cdot 0,47 = + 2,8^t = - \min D_4.$$

Im zweiten Falle findet man

$$A_1 = A'_1 (1 + 2 + 3 + 4) = 10 A'_1;$$

$$\max D_5 = 10 \cdot 0,920 = + 9,2^t = - \min D_5.$$

4) *Vertikalen*. In der Vertikale V_1 erzeugt, da der Schnittpunkt von O_2 und U_1 rechts von A_1 liegt, jede Last über der Seitenöffnung einen Zug. Es entsteht also $\min V_{1p} = S_M$ in Folge ausschliesslicher und gänzlicher Belastung der Mittelöffnung mit p , ferner, wenn nur die Seitenöffnung mit p belastet wird, $\max V_{1p} = - S_M + V_p$.* Rechnet man $V_g = g\lambda = 1,11$ hinzu, so findet man

$$\min V_1 = S_M + g\lambda = - 3,2 + 1,1 = - 2,1^t;$$

$$\max V_1 = - S_M + p\lambda + g\lambda = + 3,2 + 2,0 + 1,1 = + 6,3^t.$$

In der Vertikale V_2 erzeugen (da der Schnittpunkt von O_3 und U_2 links von A_1 liegt) die Belastungen der Knoten 2, 3, 4, Zugspannungen.

*) Es ist $\max V_p + \min V_p$ gleich der in Folge gänzlicher Belastung beider Oeffnungen entstehenden Spannkraft V_p .

Um $\min V_{2p}$ zu erhalten, wird, da S_M negativ ist, die Mittelöffnung mit p belastet und ausserdem nur der Knoten 1 mit $p\lambda$. Letztere Last ruft hervor: $A_1 = A'_1$, also $V_{2p} = S_A = -0,04$, weshalb $\min V_{2p} = S_M + S_A = -1,8 - 0,04 = -1,84^t$. Man erhält nun

$$\min V_2 = -1,84 + g\lambda = -1,84 + 1,11 = -0,7^t$$

$$\max V_2 = +1,84 + p\lambda + g\lambda = +1,84 + 2,0 + 1,11 = +5,0^t.$$

In den Vertikalen V_3 und V_4 entstehen in Folge der Belastung der Mittelöffnung Zugspannungen. Man findet $\min V_{p3}$ und $\min V_{p4}$, indem man zuerst nur die Knoten 1 und 2, hierauf nur die Knoten 1, 2, 3 mit je $p\lambda$ belastet. Im ersteren Falle entsteht

$$A_1 = A'_1 (1 + 2) = 3 A'_1; \quad \min V_{p3} = 3 S_A = -3 \cdot 0,20 = -0,60^t$$

$$\min V_3 = -0,60 + g\lambda = +0,5^t$$

$$\max V_3 = +0,60 + p\lambda + g\lambda = +3,7^t,$$

und im zweiten Falle

$$A_1 = A'_1 (1 + 2 + 3) = 6 A'_1; \quad \min V_{p4} = 6 S_A = -6 \cdot 0,35 = -2,10$$

$$\min V_4 = -2,10 + g\lambda = -1,0^t$$

$$\max V_4 = +2,10 + p\lambda + g\lambda = +5,2^t.$$

Die gewonnenen Spannkkräfte sind in der Fig. 396 übersichtlich zusammengestellt worden.

Es sind noch die Grenzwerte der an der Scheibe I angreifenden Stützenwiderstände B_1 und A_1 anzugeben. Bei gänzlicher Belastung der 15^m weiten Seitenöffnung mit $p = 0,665^t$ und unbelasteter Mittelöffnung ergibt sich: $\max B_{1p} = \frac{1}{2} \cdot 0,665 \cdot 15 = 4,99^t$. Ausschliessliche und gänzliche Belastung der Mittelöffnung mit p erzeugt den grössten negativen Widerstand B_{1p} (d. i. $\min B_{1p}$); derselbe ist durch den Kräfteplan in Fig. 399 gegeben, kann aber auch im vorliegenden

Falle mittels der Gleichung $\min B_{1p} + \max B_{1p} = \frac{p\lambda}{2} = 1,0^t$ bestimmt

werden. Man findet: $\min B_{1p} = -4,99 + 1,0 = -3,99^t$. Die ständige Belastung ruft hervor: $B_{1g} = \frac{1}{2} g\lambda = \frac{1}{2} \cdot 1,11 = 0,56^t$ und es ergibt sich schliesslich

$$\max B_1 = 4,99 + 0,56 = +5,5^t; \quad \min B_1 = -3,99 + 0,56 = -3,4^t.$$

Da $\min B_1$ negativ ist, muss die Scheibe I bei B_1 an dem Pfeiler verankert werden.

Am Auflager A_1 ruft ausschliessliche und gänzliche Belastung der Seitenöffnung mit $p = 0,665^t$ den Widerstand $A_{1p} = \frac{1}{2} \cdot 0,665 \cdot 15 = 4,99^t$ hervor, ausschliessliche und gänzliche Belastung der Mittelöffnung den Widerstand $A_1 = 0$. Die ständige Belastung $g = 0,37^t$ erzeugt hiernach: $A_{1g} = \frac{1}{2} \cdot 0,37 \cdot 15 = 2,77^t$ und im Ganzen entsteht $A_1 = 4,99 + 2,77 = +7,8^t$. Der Widerstand A_1 ist stets positiv.

b. Untersuchung des aus Fischbauchträgern zusammengesetzten Hängewerks in Fig. 401.*)

191. Das vorliegende Hängewerk, dessen Auflagergelenke A und B auf wagerechten Geraden geführt werden, und welches an den Enden (bei A_1) in derselben Art gestützt wird, wie der vorhin untersuchte Träger (Fig. 394), kann auch in derselben Weise wie jener berechnet werden. Der mittlere Theil AGB ist ein umgekehrter Bogen mit drei Gelenken, während sich jede Seitenöffnung A_1A unter dem Einflusse der auf ihr ruhenden Lasten wie ein einfacher Balken verhält und

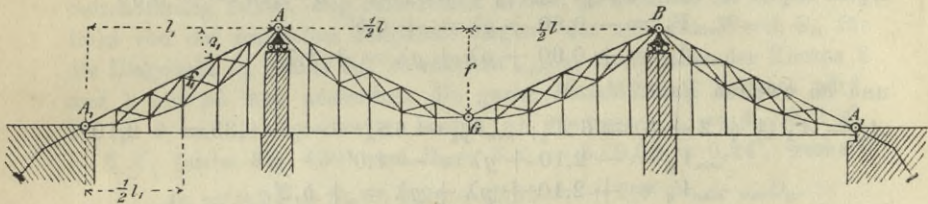


Fig 401.

in Folge Belastung der Mittelöffnung noch durch zwei in A_1 und A angreifende, entgegengesetzt gleiche Kräfte beansprucht wird, welche die Richtungen AA_1 und A_1A haben. Es möge nur noch auf einige Vereinfachungen hingewiesen werden, die wegen der geradlinigen oberen Gurtungen möglich ist.

Zerlegt man die am Trägertheile AG in A und G angreifenden Widerstände auf die in No. 185 angegebene Art in die Seitenkräfte A' , B' und Q (Fig. 402b) und denkt die Spannkkräfte U , D und V mittels Ritter'scher Momentengleichungen bestimmt, so sieht man sofort ein, dass alle diese Spannkkräfte unabhängig von Q sind, da sämtliche Drehpunkte in der Geraden AG liegen. Hieraus folgt aber, dass bei der Ermittlung der U , D und V das Trägerstück AG als einfacher Balken behandelt werden darf.

Ist also sowohl die ständige als auch die veränderliche Belastung eine gleichförmig vertheilte (g und p), und liegen die Knotenpunkte der unteren Gurtung auf einer Parabel mit senkrechter Achse, in welchem Falle, mit den in der Fig. 402a und b angegebenen Bezeichnungen,

*) In ähnlicher Weise ist die Hängebrücke über den *Monongahela* bei *Pittsburgh* (Nord-Amerika) ausgeführt. An Stelle der seitlichen Fischbauchträger sind (wie in Fig. 403) geradlinige Rückhaltketten vorhanden.

$$y_m = \frac{4fx_m(l-x_m)}{l^2} \text{ und } h_m = \frac{4f'x_m(l'-x_m)}{l'^2}, \text{ ferner } f' = \frac{1}{4} f^*$$

ist, so gelten die Gleichungen

$$(1) \quad \max U_m = \frac{ql'^2}{8f'} \sec \gamma_m = \frac{ql^2}{8f} \sec \gamma_m^{**}$$

$$(2) \quad \max D_m = \frac{pl'}{8f'} d_m$$

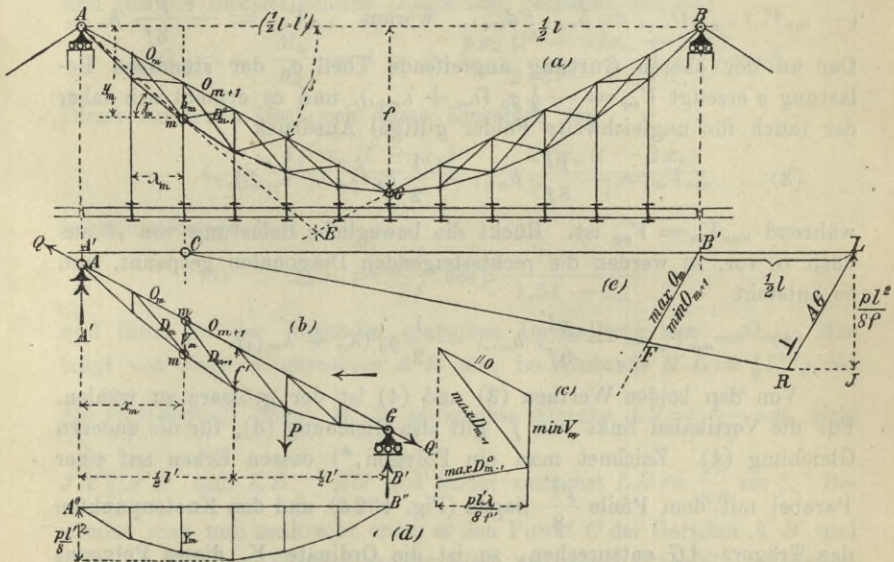


Fig. 402.

wo d_m = Länge der Diagonale. In der Fig. 402 sind in jedem Felde zwei sich kreuzende schlaife Diagonalen vorausgesetzt worden. Je nachdem sich die veränderliche Belastung (p) von G nach A oder von A nach G über die Brücke bewegt, treten die linkssteigenden oder die rechtssteigenden Diagonalen in Tätigkeit.

Zu beachten ist, dass bei gleich grossen Feldweiten λ die waagrechten Projektionen der Spannkraften D_m und D_m^0 sämtlicher links- und

*) Diese Beziehung gilt auch, wenn bei $x = \frac{1}{2} l'$ keine Vertikale vorhanden ist, in welchem Falle f' die auf die Gerade AG bezogene senkrechte Ordinate der umschriebenen Parabel bedeutet. Vergl. auch Fig. 268.

***) Vergl. § 35. Für die untere Gurtung ist $\frac{\min U}{\max U} = \frac{g}{q}$.

rechtssteigenden Diagonalen den gleichen Werth $\frac{pl'}{8f'} \lambda$ besitzen, vergleiche Fig. 402 c.

Um den in der m^{ten} Vertikale in Folge der von G nach A vorrückenden Belastung entstehenden grössten Druck ${}_{\min}V_m$ zu bestimmen, zeichne man (da ${}_{\min}V_m$ gleichzeitig mit ${}_{\max}D_{m+1}$ entsteht) ein Kräfte-dreieck, dessen Seiten parallel D_{m+1} , O und V_m sind, und dessen eine Seite $= {}_{\max}D_{m+1}$ ist. Fig. 402 c. Man findet dann leicht

$$(- {}_{\min}V_m) : {}_{\max}D_{m+1} = h_{m+1} : d_{m+1}, \text{ woraus } {}_{\min}V_m = - \frac{pl'}{8f'} h_{m+1}.$$

Der an der oberen Gurtung angreifende Theil g_0 der ständigen Belastung g erzeugt $V_{mg} = -\frac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1})$, und es ergibt sich daher der (auch für ungleichweite Felder gültige) Ausdruck

$$(3) \quad {}_{\min}V_m = - \frac{pl'}{8f'} h_{m+1} - \frac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1}),$$

während ${}_{\max}V_m = V_{mg}$ ist. Rückt die bewegliche Belastung von A aus nach G vor, so werden die rechtssteigenden Diagonalen gespannt, und es entsteht

$$(4) \quad {}_{\min}V_m = - \frac{pl'}{8f'} h_{m-1} - \frac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1}).$$

Von den beiden Werthen (3) und (4) ist der grössere zu wählen. Für die Vertikalen links von f' gilt also Gleichung (3), für die anderen Gleichung (4). Zeichnet man ein Polygon,* dessen Ecken auf einer Parabel mit dem Pfeile $\frac{pl'}{8}$ liegen (Fig. 402 d) und den Knotenpunkten des Trägers AG entsprechen, so ist die Ordinate Y_m dieses Polygons $= \frac{pl'}{8f'} h_m$, und es folgt für eine links von f' befindliche Vertikale der Ausdruck

$$(5) \quad {}_{\min}V_m = - Y_{m+1} - \frac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1})$$

und für eine rechts von f' gelegene

$$(6) \quad {}_{\min}V_m = - Y_{m-1} - \frac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1}).$$

Die Gleichungen (1) bis (6) gelten auch für die *Seitenöffnungen*, sobald l' und f' durch l_1 und f_1 ersetzt werden, Fig. 401.**)

*) Das Polygon in Fig. 402 d lässt sich als ein Seilpolygon betrachten, welches mit der Polweite l' zu den Knotenlasten eines gleichmässig belasteten Balkens $A''B''$ gezeichnet ist.

**) f_1 ist die in senkrechter Richtung gemessene Höhe des Fischbauchträgers bei $x = \frac{1}{2} l_1$. Ist an dieser Stelle keine Vertikale vorhanden, so ist f_1 die auf A_1A bezogene Höhe der umschriebenen Parabel.

Wir gehen nun zur Bestimmung der Spannkkräfte O für den Fall parabelförmiger unterer Gurtungen über und betrachten zuerst die Mittelöffnung. Der Punkt E , in welchem eine durch A und den unteren Knoten m gelegte Gerade die Gerade BG trifft, ist Belastungsscheide für das Moment M_m . Die von B bis E reichende bewegliche Belastung erzeugt

$$(7) \quad \min M_m = - \frac{p x_m (l^2 - 3 l x_m + 2 x_m^2)^*}{2 (3 l - 2 x_m)}$$

und (da die linkssteigenden Diagonalen gespannt werden)

$$\max O_m = - \frac{M_m}{h_m} \sec \beta = + \frac{p x_m (l^2 - 3 l x_m + 2 x_m^2)}{2 (3 l - 2 x_m) h_m} \sec \beta.$$

Dieser Ausdruck lässt sich durch Einsetzen von

$$h_m = \frac{4 f' x_m (l' - x_m)}{l'^2} = \frac{2 f x_m (l - 2 x_m)}{l^2}$$

leicht umformen in

$$(8) \quad \max O_m = \frac{p l^2}{8 f} \sec \beta \frac{l - x_m}{1,5 l - x_m}$$

und führt zu der folgenden einfachen Darstellung von $\max O_m$. Man trägt von einer Wagerechten $A'B'$ aus, im Abstände $\overline{B'L} = \frac{1}{2} l^{**}$ von der Senkrechten durch B die senkrechte Strecke $\overline{LJ} = \frac{p l^2}{8 f}$ auf, zieht $JR \parallel A'B'$ und $LR \perp AG$ und findet zunächst $\overline{LR} = \frac{p l^2}{8 f} \sec \beta$. Bestimmt man nun senkrecht unter m den Punkt C der Geraden $A'B'$ und zieht die Gerade CR , so schneidet diese auf einer durch B' parallel zu LR gelegten Geraden die Strecke ab

$$\overline{B'F} = \overline{LR} \frac{l - x_m}{1,5 l - x_m} = \max O_m.$$

Wird nur die positive Beitragstrecke AE mit p belastet, so entsteht das Moment $\max M_m$, welches sich von dem durch die Gleich. (7) gegebenen Momente $\min M_m$ nur durch das Vorzeichen unterscheidet, da gänzliche Belastung der Mittelöffnung den Werth $M_m = 0$ erzeugt. Es treten jetzt aber die rechtssteigenden Diagonalen in Thätigkeit, und es ergibt sich mithin

$$\min O_{m+1} = - \frac{M_m}{h_m} \sec \beta = - \max O_m.$$

*) Nach Gleich. (9) Seite 205.

***) In Fig. 402 wurde, um Raum zu sparen, $B'L$ kleiner als $\frac{1}{2} l$ gezeichnet.

Im ersten Felde ist $\min O_1 = -\max O_1$, und ebenso verhält sich auch das an G grenzende Feld.

Um die Spannkkräfte O für die Seitenöffnung zu finden, beachte man, dass ausschliessliche und gänzliche Belastung der Seitenöffnung in der oberen Gurtung die grössten Drücke erzeugt, während ausschliessliche und gänzliche Belastung der Mittelöffnung die stärkste Beanspruchung auf Zug hervorbringt. Im ersteren Falle entsteht in jedem Stabe der Gurtung $A_1 A$ Fig. 401

$$(9) \quad \min O_p = -\frac{pl_1^2}{8f_1} \sec \beta_1 \quad (\text{nach § 35})$$

und im zweiten

$$(10) \quad \max O_p = +\frac{pl^2}{8f} \sec \beta_1, \quad (\text{weil } H_p = \frac{pl^2}{8f}).$$

Die ständige Belastung erzeugt

$$(11) \quad O_g = \frac{g \sec \beta_1}{8} \left(\frac{l^2}{f} - \frac{l_1^2}{f_1} \right).$$

Wählt man $f_1 = f \frac{l_1^2}{l^2}$ (also, wenn $l_1 = l' = \frac{1}{2} l$ ist, $f_1 = \frac{1}{4} f = f'$),

so ergibt sich $O_g = 0$ und

$$(12) \quad \max O = \frac{pl^2}{8f} \sec \beta_1 = -\min O. *)$$

§ 48.

Kette, versteift durch einen Balken.

a. Kettenbrücke mit einer Oeffnung.

192. Einleitung. Eine aus geraden, gelenkartig mit einander verbundenen Stäben bestehende zunächst gewichtslos gedachte Kette, in deren Knotenpunkten Kräfte Z_1, Z_2, Z_3, \dots angreifen, nimmt die Form eines diesen Kräften entsprechenden Seilpolygons an. Sind Grösse und Lage sämtlicher Kräfte Z gegeben, so ist die von den Stabachsen gebildete Kettenlinie bestimmt, sobald drei Punkte derselben — in der Regel die beiden Stützpunkte R und T und ein Punkt W in der Nähe des Scheitels — bekannt sind (Fig. 404); denn durch

*) Der Bedingung $f_1 : f = l_1^2 : l^2$ müssen auch die in Parabeln eingeschriebenen oberen Gurtungen des Hängewerks in Fig. 396 genügen, sobald im Falle ungleicher Scheiben I und II bei gänzlicher Belastung sämtliche Spannkkräfte U und D gleich Null sein sollen.

drei Punkte lässt sich nur ein einziges Seilpolygon der Kräfte Z zeichnen.*) Mit der Belastung ändert sich im Allgemeinen auch die Form der Kette.

Betrachten wir nun die in Fig. 403 dargestellte Kettenbrücke. RWT ist die *Tragkette*, RL und TN sind die *Rückhaltketten*; bei R und T sind, um die hohen Pfeiler nur in senkrechter Richtung zu belasten, bewegliche Lager mit wagerechten Führungen angeordnet (Fig. 404). Die senkrechten Hängestangen tragen die Querträger, diese

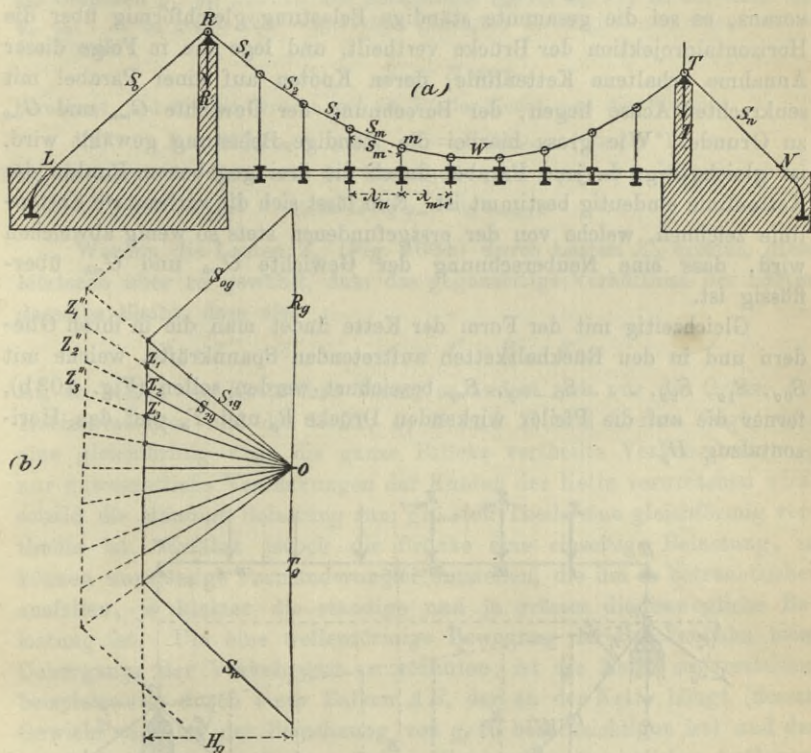


Fig. 403.

die Längsträger, letztere die Bahn. Die Brücke sei frei von Verkehrslast. Dann ist die Spannkraft in der m^{ten} Hängestange

$$Z_{mg} = \frac{1}{2} g_f (\lambda_m + \lambda_{m+1}) + G_{mh},$$

*) Die Aufgabe: Zu gegebenen Kräften durch drei vorgeschriebene Punkte ein Seilpolygon zu zeichnen, ist in No. 108 gelöst worden.

wo g_f das Gewicht der Längeneinheit der Brückenbahn (einschliesslich der Längs- und Quer-Träger) und G_{mh} das Gewicht der m^{ten} Hängestange, und es ist im Knoten m der Kette die Belastung

$$Z'_m = Z_{mg} + G_{mk}$$

anzunehmen, wenn mit G_{mk} die Summe der Gewichte der halben Kettenlieder s_m und s_{m+1} bezeichnet wird. Die Gewichte G_{mh} und G_{mk} hängen von der vorläufig noch unbekanntenen Form der Kette ab; um sie schnell und mit genügender Schärfe zu bestimmen, setze man zuerst voraus, es sei die gesammte ständige Belastung gleichförmig über die Horizontalprojektion der Brücke vertheilt, und lege die in Folge dieser Annahme erhaltene Kettenlinie, deren Knoten auf einer Parabel mit senkrechter Achse liegen, der Berechnung der Gewichte G_{mh} und G_{mk} zu Grunde. Wie gross hierbei die ständige Belastung gewählt wird, ist gleichgültig, da jene Parabel durch die drei gegebenen Punkte der Kettenlinie eindeutig bestimmt ist. Nun lässt sich die verbesserte Kettenlinie zeichnen, welche von der erstgefundenen stets so wenig abweichen wird, dass eine Neuberechnung der Gewichte G_{mh} und G_{mk} überflüssig ist.

Gleichzeitig mit der Form der Kette findet man die in ihren Gliedern und in den Rückhaltketten auftretenden Spannkkräfte, welche mit $S_{0g}, S_{1g}, S_{2g}, \dots, S_{(n-1)g}, S_{ng}$ bezeichnet werden sollen (Fig. 403 b), ferner die auf die Pfeiler wirkenden Drücke R_g und T_g und den Horizontalzug H_g .

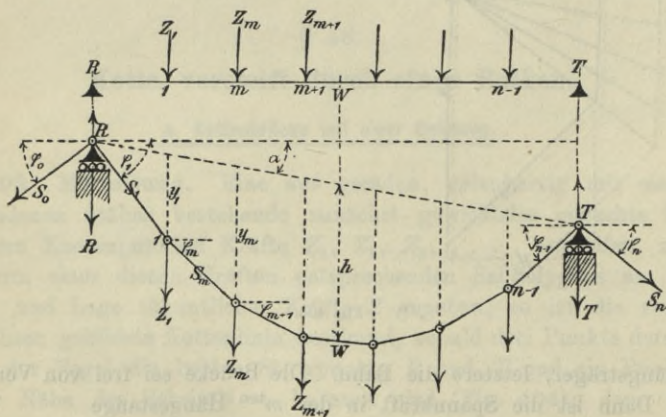


Fig. 404.

Um die auf die Schlusslinie RT bezogenen senkrechten Ordinaten y_1, y_2, y_3, \dots einer durch senkrechte Kräfte Z_1, Z_2, Z_3, \dots belasteten und durch die Punkte R, W, T gehenden Kettenlinie (Fig. 404) durch Rechnung zu bestimmen,

kann man u. A. auch den folgenden Weg einschlagen. Man ermittelt die Biegemomente M_1, M_2, M_3, \dots für die den Knotenpunkten der Kette entsprechenden Querschnitte 1, 2, 3 . . . eines einfachen Balkens RT , welcher die Lasten Z_1, Z_2, Z_3, \dots trägt, desgleichen das Moment M_w für den dem Punkte W entsprechenden Balkenquerschnitt W , und findet dann mittels der Gleichung

$$M_w = Hh,$$

wo h die gegebene Ordinate des Punktes W ist, den Horizontalzug H und hierauf mittels der Gleichungen

$$M_1 = Hy_1, M_2 = Hy_2, \dots$$

die Ordinaten y_1, y_2, \dots . Die Spannkkräfte $S_0, S_1, S_2, \dots S_n$ der unter $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ gegen die Wagerechte geneigten Kettenglieder werden mittels der Formel

$$(1) \quad S_m = H \sec \varphi_m$$

berechnet, und für die Drücke auf die Pfeiler findet man die Werthe

$$(2) \quad R = H(\operatorname{tg} \varphi_0 + \operatorname{tg} \varphi_1); \quad T = H(\operatorname{tg} \varphi_{n-1} + \operatorname{tg} \varphi_n).^*)$$

Ist die Gestalt der Kette und der Horizontalzug H gegeben, so ergibt sich

$$(3) \quad Z_m = H(\operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \varphi_{m+1}).$$

Werden die Lasten Z'_m (Fig. 403 b) durch Lasten Z''_m ersetzt, diese letzteren aber so gewählt, dass das gegenseitige Verhältniss der Lasten dasselbe bleibt, dass also

$$Z''_1 : Z''_2 : Z''_3 : \dots = Z'_1 : Z'_2 : Z'_3 : \dots$$

ist, so behält die Kette ihre Form; es ändert sich nur die Grösse des Horizontalzuges und der Kräfte S, R und T , und hieraus folgt, dass eine gleichförmig über die ganze Brücke vertheilte Verkehrsbelastung nur unwesentliche Verrückungen der Knoten der Kette verursachen wird, sobald die ständige Belastung zum grössten Theile eine gleichförmig vertheilte ist. Erfährt jedoch die Brücke eine einseitige Belastung, so können unzulässige Formänderungen entstehen, die um so beträchtlicher ausfallen, je kleiner die ständige und je grösser die bewegliche Belastung ist. Um eine wellenförmige Bewegung der Brückenbahn beim Uebergange der Verkehrslast zu verhüten, ist die Kette zu versteifen, beispielsweise durch einen Balken AB , der an der Kette hängt (dessen Gewicht also bei der Berechnung von g_f zu berücksichtigen ist) und der bei A ein festes, bei B ein auf einer Wagerechten bewegliches Auflagergelenk besitzt. Fig. 405. Die Ermittlung der an diesem Balken angreifenden Kräfte bildet den Gegenstand der folgenden Untersuchungen. Im Verlaufe derselben wird sich zeigen, dass, zur Erzielung statischer Bestimmtheit, der Balken aus zwei durch ein Gelenk G mit einander bestehenden Theilen herzustellen ist.

Die nachstehenden Entwicklungen knüpfen wir an die Annahme

*) φ_{n-1} = spitzer Winkel des Stabes gegen die Wagerechte.

vollkommener Starrheit des Balkens, der Hängestangen und der Kette. Wir setzen also wie in den früheren Abschnitten vernachlässigbar kleine elastische Formänderungen voraus, und dürfen dann die Kettenlinie auch als das Seilpolygon derjenigen Kräfte Z_p betrachten, welche in den Hängestangen durch die nach Ausführung der Versteifung aufgebrachtten Lasten P hervorgerufen werden.

Die Kräfte Z_p und die von ihnen in den Kettengliedern und an den Auflagern (R und T) erzeugten Kräfte S_p, R_p, T_p sind bekannt, sobald der — ebenfalls von den Lasten P herrührende — Horizontalzug H_p gegeben ist; man hat nur nöthig in Fig. 403 b H_g durch H_p zu ersetzen. Werden die dem grössten Werthe H_p entsprechenden Kräfte Z_p, S_p, R_p, T_p zu denjenigen addirt, die bereits vor der Versteifung der Kette wirksam waren, so ergeben sich die grössten Spannkraften, welche überhaupt in den Hängestangen und Kettengliedern auftreten, sowie die grössten Drücke auf die Kettenpfeiler. (Man erhält sie, sobald man in Fig. 403 H_g durch $H_p + H_g$ ersetzt.) Wir haben uns deshalb im Folgenden nur noch mit der Bestimmung von H_p und mit der Inanspruchnahme des Versteifungsbalkens zu beschäftigen. Bevor wir mit diesen Untersuchungen beginnen, heben wir noch besonders hervor, dass es bei der Berechnung der Inanspruchnahme einer Kettenbrücke stets zulässig ist, die Knotenpunkte der Kette auf einer Parabel mit senkrechter Achse liegend anzunehmen, entsprechend der Voraussetzung einer gleichförmigen ständigen Belastung g . Die vorhin gelehrt genauere Formbestimmung ist hauptsächlich von Werth für die Aufstellung der Brücke, muss aber noch durch die (im zweiten Bande dieses Buches gelehrt) Berücksichtigung der Dehnungen der elastischen Kette ergänzt werden.

193. Allgemeine Untersuchung des Versteifungsbalkens.

Bezeichnet

M_p das Moment für irgend einen Querschnitt C des an der Kette hängenden Balkens AB ,

M_{0p} das durch die Lasten P hervorgerufene Biegemoment für den Querschnitt C eines nur bei A und B gestützten (nicht an der Kette hängenden) einfachen Balkens AB ,

y die senkrechte Ordinate des dem Querschnitte C entsprechenden Punktes C' der Kette, bezogen auf die Verbindungslinie der Punkte A' und B' , in denen die Kette von den Senkrechten durch die Stützpunkte A und B geschnitten wird, Fig. 405,

so ist

$$(4) \quad M_p = M_{0p} - H_p y.$$

Das zweite Glied dieser Gleichung giebt den Einfluss der Kräfte Z_p an; man erhält es, indem man die Fläche zwischen der Schlusslinie $A'B'$ und der Kettenlinie $A'G'B'$ als die den Kräften Z_p entsprechende Culmann'sche Momentenfläche ansieht und nach No. 69 verfährt. — Für das Mittelgelenk G ergibt sich

$$M_G = M_{0G} - H_p f$$

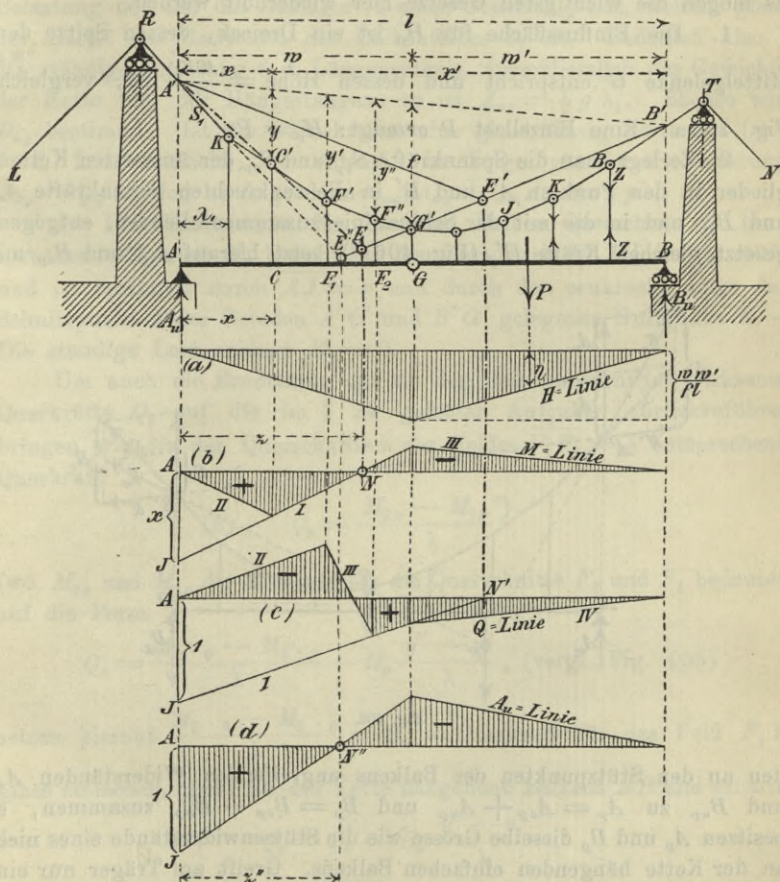


Fig. 405.

und hieraus folgt, da $M_G = 0$ sein muss

$$(5) \quad H_p = \frac{M_{0G}}{f}$$

3. Für den Stützenwiderstand $A_{u,p}$ erhält man die in der Fig. 405 d dargestellte Einflussfläche; sie ist bestimmt durch $\overline{AJ} = 1$ und durch den Nullpunkt N'' , welcher senkrecht unter dem Punkte E'' liegt, in dem die Gerade $B'G'$ vom ersten Kettengliede (S_1) getroffen wird. Da sich für $A_{u,p}$ (und ebenso für $B_{u,p}$) je nach dem Belastungszustande des Balkens positive und negative Werthe ergeben, so müssen die Auflagergelenke des Balkens mit den Pfeilern verankert werden. Die ständige Belastung übt auf das Auflager A einen Druck $A_{u,g}$ aus, welcher gleich der Hälfte des Gewichtes des Balkenfeldes λ_1 ist. Bedeutet also g' die ständige Belastung f. d. Längeneinheit, ausschliesslich des Gewichtes der Kette und der Hängestangen, so ist $A_{u,g} = \frac{1}{2} g' \lambda_1$. Ebenso wird $B_{u,g}$ bestimmt. Ist die Verkehrslast eine gleichförmig vertheilte ($= p$ f. d. Längeneinheit), so entsteht in Folge gänzlicher Belastung: $A_{u,p} = \frac{1}{2} p \lambda_1$ und es folgt dann: $_{max} A_{u,p} + _{min} A_{u,p} = \frac{1}{2} p \lambda_1$.

4. Die Einflusslinie für das den Balken-Querschnitt C beanspruchende Moment M_p besteht aus den Geraden I, II, III , in Fig. 405 b und ist bestimmt durch $\overline{AJ} = x$ und durch den senkrecht unter dem Schnittpunkt E der Geraden $A'C'$ und $B'G'$ gelegenen Nullpunkt N . — Die ständige Last erzeugt $M_p = 0$.

Um auch die Ermittlung der an den Balkenabschnitten wirksamen Querkräfte Q_p auf die im § 24 gelösten Aufgaben zurückzuführen, bringen wir die den Querschnitten des Feldes $F_1 F_2 = \lambda$ entsprechende Querkraft

$$(6) \quad Q_p = \frac{M_{2p} - M_{1p}^{**}}{\lambda}$$

(wo M_{2p} und M_{1p} die Momente für die Querschnitte F_2 und F_1 bedeuten) auf die Form

$$Q_p = \frac{M_2 \cdot 0 - M_1 \cdot 0}{\lambda} - H_p \frac{y'' - y'}{\lambda}, \quad (\text{vergl. Fig. 405})$$

setzen hierauf $\frac{M_2 \cdot 0 - M_1 \cdot 0}{\lambda} = Q_0 =$ Querkraft für das Feld $F_1 F_2$ eines einfachen, nicht an der Kette hängenden Balkens AB und erhalten

$$(7) \quad Q_p = Q_0 - H_p \frac{y'' - y'}{\lambda}.$$

Schliessen die Geraden $F'F''$ und $A'B'$ mit der Wagerechten die Winkel φ und α ein (Fig. 404), so ist

$$\frac{y'' - y'}{\lambda} = \text{tg } \varphi - \text{tg } \alpha = \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos \varphi \cos \alpha}$$

*) Vergl. Seite 262.

und $H_p = H'_p \cos \alpha$, und es ergibt sich dann

$$(8) \quad Q_p = Q_0 - \frac{H'_p \sin(\varphi - \alpha)}{\cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \left[Q_0 \cos \varphi - H'_p \sin(\varphi - \alpha) \right].$$

Die Klammergrösse dieses Ausdrucks stellt nach Gleich. (5) auf Seite 186 die Querkraft für einen Querschnitt des Feldes $F'F''$ eines steifen Bogens $A'G'B'$ vor; bezeichnen wir dieselbe mit \overline{Q} , so erhalten wir

$$(9) \quad Q = \overline{Q} \frac{1}{\cos \varphi},$$

und hieraus und aus den in No. 120 gewonnenen Ergebnissen lässt sich auf die in Fig. 405 c und in Fig. 407 dargestellte Einflusslinie für Q schliessen; dieselbe ist bestimmt durch $AJ = 1$ und den Nullpunkt N' der Geraden I . Es liegt nämlich N' auf der Senkrechten durch den Punkt E' , in welchem die Gerade $B'G'$ von einer durch A' zum Kettengliede $F'F''$ gezogenen Parallelen getroffen wird. Liegt E' links von G , so ist die Senkrechte durch E' eine Belastungsscheide, Fig. 407.

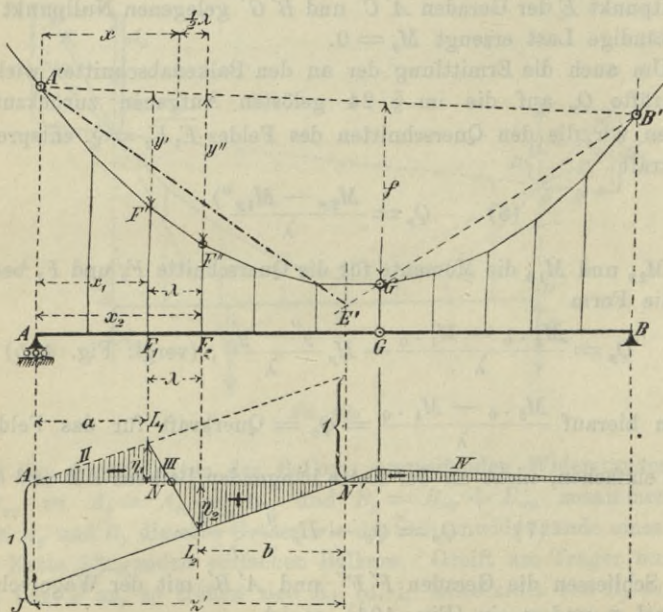


Fig. 407.

Mit Hilfe der angegebenen Einflusslinien lassen sich die Grenzwerte von M_p , Q_p , A_{up} , B_{up} , H_p nach § 15 bestimmen.

104. Gegliederter Versteifungsbalken. Die in Fig. 405 für H_p und $A_{u,p}$ angegebenen Einflusslinien gelten auch dann, wenn der Versteifungsbalken aus zwei gegliederten Scheiben besteht. Die Einflusslinien für die in den Gurtungen entstehenden Spannkkräfte lassen sich leicht aus denen für die Momente ableiten. Die schraffierte Fläche in Fig. 408a stellt die Einflussfläche für die Spannkraft O in dem dem Knotenpunkte C gegenüberliegenden Stabe der oberen Gurtung dar; sie ist bestimmt durch den Nullpunkt N und die Strecke $AJ = 1 \cdot \frac{x}{h}$

(welche an die Stelle von $AJ = x$ in Fig. 405 b tritt). h bedeutet den Hebelarm von O in Bezug auf den Drehpunkt C . Die zur Bestimmung der Belastungsscheide zu ziehende Gerade $A'E$ geht durch den dem Punkte C entsprechenden Punkt C' der Kette. Die Belastung

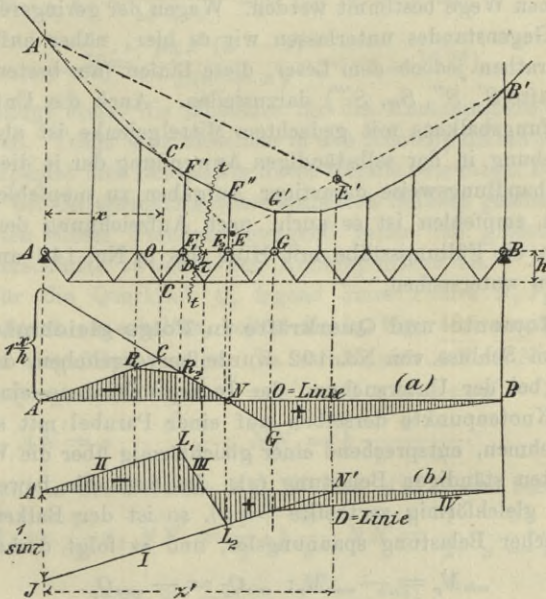


Fig. 408.

ist an den Knoten der oberen Gurtung des Balkens wirkend gedacht. Das beschriebene Verfahren gilt für Balken mit **beliebig geformten Gurtungen**.

Die schraffierte Fläche in Fig. 408b stellt die Einflussfläche für die Spannkraft D_p in der linkssteigenden Diagonale eines Balkens mit *wagerechten* Gurtungen dar. Man geht hier am zweckmässigsten von

der Gleichung $D_p \sin \tau = Q_p$ aus*) (wo τ den Neigungswinkel der Diagonale gegen die Wagerechte bezeichnet) und kann dann die in No. 193 hinsichtlich Q_p angestellten Untersuchungen benutzen. Zuerst wird die Gerade I mit Hilfe des Nullpunktes N' und der Ordinate $\overline{AJ} = \frac{1}{\sin \tau}$ (welche an die Stelle von $\overline{AJ} = 1$ in Fig. 407 tritt) festgelegt, wobei zu beachten ist, dass die Gerade $A'E'$ parallel zu demjenigen Kettengliede $F'F''$ sein muss, welches von dem durch die Diagonale D und zwei Gurtstäbe geführten Schnitte tt (der also im Ganzen vier Stäbe schneidet) getroffen wird. Nun wird $II \parallel I$ gezogen, hierauf III und IV . Fig. 408 b setzt eine an der oberen Gurtung wirkende Belastung voraus.

Der Einfluss der ständigen Belastung auf die Spannkraften O , U , D ist gleich Null. Bei beliebig geformten Gurtungen können die Einflusslinien für die Spannkraften in den Füllungsstäben auf dem im § 45 eingeschlagenen Wege bestimmt werden. Wegen der geringeren Wichtigkeit dieses Gegenstandes unterlassen wir es hier, näher auf denselben einzugehen, rathen jedoch dem Leser, diese Linien (am besten mit Hilfe der Spannkraften S' , S'' , S_G , S''') darzustellen. Auch die Untersuchung eines Versteifungsbalkens mit gedachtem Mittelgelenke ist als eine sehr lehrreiche Übung in der selbständigen Anwendung der in diesem Buche gelehrteten Behandlungsweise derartiger Aufgaben zu empfehlen.

Sehr zu empfehlen ist es auch, nach Aufzeichnung der O -Linien und U -Linien die Füllungsstäbe mit Hilfe des in No. 143 angegebenen Verfahrens zu untersuchen.

195. Momente und Querkräfte in Folge gleichmässiger Belastung. Am Schluss von No. 192 wurde hervorgehoben, dass es stets zulässig ist, bei der Untersuchung der Inanspruchnahme einer Kettenbrücke die Knotenpunkte derselben auf einer Parabel mit senkrechter Achse anzunehmen, entsprechend einer gleichförmig über die Wagerechte AB vertheilten ständigen Belastung (g). Ist auch die bewegliche Belastung eine gleichförmig vertheilte ($= p$), so ist der Balken bei Eintreten gänzlicher Belastung spannungslos, und es folgt deshalb

$$\min M_p = - \max M_p; \quad \min Q_p = - \max Q_p.$$

Es genügt also stets, den einen der beiden Grenzwerte der fraglichen Unbekannten anzugeben. Man gelangt hier auch sehr schnell durch Rechnung zum Ziele, indem man Formeln anwendet, die sich aus der Betrachtung der Einflusslinien ergeben. So findet man z. B. für das einem Knotenpunkte entsprechende Moment $\max M_p$, indem man den Inhalt der positiven Einflussfläche mit p multiplicirt, unter Einführung

*) Für eine rechtssteigende Diagonale ist $D_p \sin \tau = - Q_p$.

der in der Fig. 405 b angegebenen Bezeichnungen den Werth

$$(10) \quad M_{max} = + p \frac{x(z-x)^*}{2}.$$

Bedeutet nun c den senkrechten Abstand des Punktes E von der Schlusslinie $A'B'$, so ist einerseits: $c = y \frac{z}{x}$, andererseits: $c = f \frac{l-z}{w'}$, mithin

$$yzw' = fx(l-z) \text{ und } z = \frac{flx}{yw' + fx}.$$

Setzt man noch (nach der Parabelgleichung)

$$(11) \quad y = f \frac{xx'}{ww'},$$

so findet man

$$(12) \quad z = \frac{wl}{w+x'} \text{ und (da } M_g = 0 \text{ ist)}$$

$$(13) \quad {}_{max}M = \frac{pxx'(w-x)}{2(w+x')} = - {}_{min}M. **)$$

Es genügt stets, die Momente für die Knotenpunkte des Balkens zu berechnen. Trägt man dieselben in den Knotenpunkten als Ordinaten auf und verbindet ihre Endpunkte durch Gerade (wie dies z. B. in Fig. 130 auf Tafel 1 bei Untersuchung eines einfachen Balkens geschah), so geben die Ordinaten dieser Geraden genügend genau die grössten Momente für die Querschnitte zwischen den Knotenpunkten an.

Um für die Querkraft Q_p irgend eines Feldes $F_1 F_2$ einen einfachen Ausdruck zu erhalten, sollen die in Fig. 407 angegebenen Bezeichnungen eingeführt werden. Es verhält sich $\overline{AN} : \overline{NN'} = a : b$ und man findet (wegen $\overline{AN} + \overline{NN'} = z'$, und $a + b = z' - \lambda$)

$$\overline{AN} = a \frac{z'}{z' - \lambda}; \quad \overline{NN'} = b \frac{z'}{z' - \lambda}.$$

Die Inhalte der Dreiecke $NL_2 N'$ und $AL_1 N$ sind beziehungsweise

$$\mathfrak{F}_+ = \frac{1}{2} \eta_2 \overline{NN'} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{b}{z'} \cdot \overline{NN'} = \frac{1}{2} \frac{b^2}{z' - \lambda}$$

$$\text{und } \mathfrak{F}_- = \frac{1}{2} \frac{a^2}{z' - \lambda}. ***)$$

Liegt nun der Punkt E' links vom Scheitelgelenk, so besteht

*) Moment f. d. Querschnitt x eines einfachen Balkens von der Länge z .
Vergl. auch die Untersuchungen in No. 117, Seite 190.

**) Mit $w = \frac{1}{2} l$ entsteht die Gleich. (9) auf Seite 205.

***) Links von N' stimmt die Einflussfläche mit derjenigen überein, die sich für die Querkraft Q eines einfachen Balkens von der Länge z' ergibt. Vergl. Fig. 121.

der positive Theil der Einflussfläche nur aus dem Dreieck NL_2N' , und es ergibt sich dann (wegen $Q_g = 0$)

$$(14) \quad \max Q = + \frac{pb^2}{2(z' - \lambda)} = - \min Q.$$

Befindet sich E' rechts von G (Fig. 405c), so besteht der negative Theil der Einflussfläche aus einem einzigen Dreiecke, nämlich dem Dreiecke AL_1N (Bezeichnung in Fig. 407), und man findet dann

$$(15) \quad \min Q = - \frac{pa^2}{2(z' - \lambda)} = - \max Q.$$

Die Ausdrücke (14) und (15) gelten auch für ungleiche Feldweiten. Für z' findet man leicht den Werth

$$(16) \quad z' = \frac{lw}{l - 2x + w},$$

wo x = Abstand der Mitte des Gliedes $F'F''$ von der Senkrechten durch A bedeutet, Fig. 407.*

Der grösste Horizontalzug ist

$$(17) \quad \max H = q \frac{ww'}{2f}$$

und die grösste Spannkraft in der m^{ten} Hängestange

$$(18) \quad \max Z_m = \frac{1}{2} (p + g') (\lambda_m + \lambda_{m+1}),$$

wo g' = ständige Belastung nach Abzug des Gewichtes der Hängestangen und der Kette.

Um die Grenzwerte des Stützenwiderstandes A_u zu bestimmen, ermittelt man zuerst (vergl. Fig. 405d)

$$(19) \quad z'' = \frac{lw}{l - \lambda_1 + w} \text{ (nach Gleichung 16)}$$

und findet nun

$$\max A_{up} = \frac{pz''}{2}; \quad \min A_{up} + \max A_{up} = \frac{p\lambda_1}{2}; \quad A_{ug} = \frac{g'\lambda_1}{2}$$

mithin

$$(20) \quad \max A_u = \frac{pz'' + g'\lambda_1}{2}; \quad \min A_u = - \frac{pz'' - (p + g')\lambda_1}{2}.$$

Ganz ebenso werden die Grenzwerte von B_u bestimmt.

*) Um (16) zu erhalten, gehe man von der Gleichung aus: $(y'' - y') \frac{z'}{\lambda} = f \frac{l - z'}{w'}$ und setze (nach der Parabelgleichung)

$$\begin{aligned} y'' - y' &= \frac{f}{w w'} [x_2(l - x_2) - x_1(l - x_1)] = \frac{f(x_2 - x_1)}{w w'} [l - (x_1 + x_2)] \\ &= \frac{f\lambda}{w w'} (l - 2x). \end{aligned}$$

folgt:

$$\frac{w_1 w'_1}{2f_1} = \frac{w w'}{2f} \quad \text{und} \quad f_1 = f \frac{w_1 w'_1}{w w'}, *$$

womit sich für die Seitenöffnung ebenfalls die Gleichung ergibt

$$(1) \quad y = f \frac{x x'}{w w'}$$

Der Versteifungsbalken AB der Mittelöffnung wird genau so berechnet wie derjenige einer Kettenbrücke mit einer Oeffnung. Es gelten alle in No. 193 bis 195 abgeleiteten Gesetze. Ist AB unbelastet, so ist $H_p = 0$. Lasten, welche über einer Seitenöffnung ruhen, haben keinen Einfluss auf H_p . Die Balken $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ (von denen jeder, ebenso wie AB , ein festes und ein auf wagerechter Bahn bewegliches Lager erhält) verhalten sich unter der Einwirkung solcher Lasten wie einfache (nicht an der Kette hängende) Balken. Lasten über der Mittelöffnung erzeugen einen (nach No. 193 zu bestimmenden) Horizontalzug H_p und beispielsweise für den Querschnitt F_1 des Balkens $A_1 B_1$ das Biegemoment $M = -H_p y_1$, ferner für das Feld $F_1 F_2$ die Querkraft: $-H_p \frac{(y_1 - y_2)}{\lambda}$. Hiernach lassen sich die Grenzwerte von M und Q leicht angeben. Es sei z. B. die bewegliche Belastung (*welche ja allein in Betracht kommt*) eine gleichförmige ($= p$). Dann erzeugt gänzliche Belastung von $A_1 B_1$ bei unbelasteter Mittelöffnung AB für irgend einen Querschnitt x des Balkens $A_1 B_1$ das Moment

$$(2) \quad \max M = p \frac{x x'}{2}$$

Ausschliessliche und gänzliche Belastung der Mittelöffnung bringt hervor

$$(3) \quad \min M = -H_p y = -p \frac{w w'}{2f} \cdot f \frac{x x'}{w w'} = -p \frac{x x'}{2}$$

Es ergibt sich also in der That $\max M = -\min M$.

Um die Grenzwerte von Q für ein Feld $F_1 F_2$ des Balkens $A_1 B_1$ zu bestimmen, sind die Fälle $y_2 > y_1$ und $y_1 > y_2$ zu unterscheiden. Ist $y_2 > y_1$, so erzeugt die Belastung der Mittelöffnung einen negativen Werth Q . Um $\max Q$ zu erhalten, wird deshalb die Mittelöffnung unbelastet angenommen und der Balken $A_1 B_1$ nur zwischen B_1 und der im Felde $F_1 F_2$ gelegenen Belastungsscheide belastet. $A_1 B_1$ verhält sich dann wie ein einfacher Balken. Man findet (vergl. die in Fig. 121 auf Seite 132

*) Mit $w = w' = \frac{1}{2} l$ und $w_1 = w'_1 = \frac{1}{2} l_1$ entsteht (wie auf Seite 404):

$$f_1 = f \frac{l_1^2}{l^2}$$

abgeleitete Einflusslinie sowie die Entwicklungen auf Seite 416)

$$(4) \quad \max Q = + \frac{pb^2}{2(l_1 - \lambda)} = - \min Q,$$

wo b den Abstand des Querträgers F_2 vom Auflager B bedeutet (Fig. 409).

Im Falle $y_2 < y_1$ erzeugt die Belastung der Mittelöffnung ein positives Q , und man berechnet dann zweckmässig $\min Q$, indem man wieder nur A_1B_1 und zwar zwischen A_1 und der im Felde F_1F_2 gelegenen Belastungsscheide mit p belastet. Man erhält

$$(5) \quad \min Q = - \frac{pa^2}{2(l_1 - \lambda)} = - \max Q^*.$$

Das grösste Moment für den Balken AB ist im Falle $w = w' = \frac{1}{2}l$ (nach Seite 205) $M = 0,019 p l^2$, und für den Balken A_1B_1 ergibt sich $M = \frac{p l_1^2}{8}$. Sollen beide Momente gleich gross werden, so muss sein $l_1^2 = 8 \cdot 0,019 l^2$ also $l_1 = 0,39 l$.

197. Kettenbrücke mit beliebig vielen Oeffnungen und mit durchgehenden Versteifungsbalken. Sind drei Punkte der über eine der Oeffnungen zu spannenden Kette gegeben, so lässt sich die Form dieser Kette und die Grösse von H_y nach No. 192 bestimmen, und die Gestalt der Ketten über den Seitenöffnungen kann dann (da die Aufhängepunkte stets gegeben sind) durch Lösung der Aufgabe gefunden werden: zu gegebenen senkrechten Lasten ein Seilpolygon mit vorgeschriebener Polweite zu zeichnen, das durch zwei gegebene Punkte geht. Es ist stets zulässig, eine gleichförmige ständige Belastung anzunehmen, und es können dann die Ordinaten auch auf die in No. 196 angegebene Weise berechnet werden. Hierbei sind z. B. die Ketten der in der Fig. 410 dargestellten Brücke zunächst auf die Schlusslinien s'_1, s'_2, s'_3 zu beziehen.

Der durchgehende Versteifungsbalken A, B, C, \dots erhält ebenso viele Gelenke als die Brücke Oeffnungen zählt. Die Gelenke sind so zu vertheilen, dass nach Weglassung irgend eines derselben ein an der Kette hängender Gerber'scher Balken entsteht. Die Auflager seien — mit Ausnahme des einen festen Lagers — auf wagerechten Bahnen geführt.

Um die Momente und Querkräfte des Versteifungsbalkens schnell zu finden, denke man zunächst das eine Mittelgelenk beseitigt und betrachte den Gerber'schen Balken, an dem ausser den beweglichen Lasten P noch die Spannkkräfte Z_p der Hängestangen an-

*) Man kann auch $\max Q$ und $\min Q$ in der auf Seite 133 angegebenen Weise durch Zeichnung bestimmen, da man es ja in beiden Fällen ($y_2 \leq y_1$) nur mit einem einfachen Balken A_1B_1 zu thun hat.

greifen. Den Einfluss der P und Z_p bestimme man getrennt und löse den zweiten Theil der Aufgabe mit Hilfe des in No. 92 Seite 163 und Fig. 151 beschriebenen Verfahrens. Man findet dann

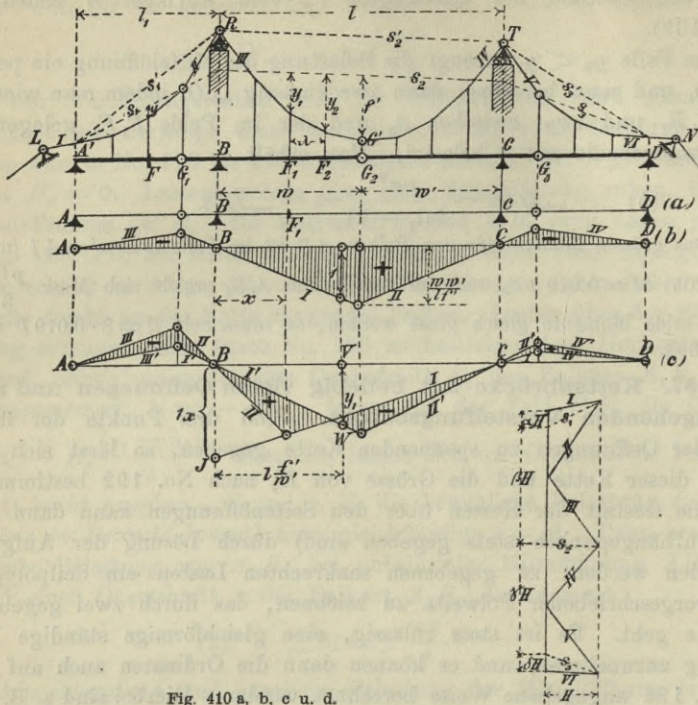


Fig. 410 a, b, c u. d.

das von den Kräften Z_p herrührende Moment in der Form $(-H_p y)$, wo y die Ordinate der Kettenlinie, bezogen auf den durch die Gelenke des Gerber'schen Balkens eindeutig bestimmten Schlusslinienzug $\frac{1}{2}$ bedeutet. Auf diese Weise gelangt man z. B. in dem in der Fig. 410 dargestellten Falle, wenn G_2 das vorübergehend beseitigte Gelenk ist, zu dem Gerber'schen Balken ABCD (Fig. 410 a) und zu dem Schlusslinienzuge $s_1 s_2 s_3$, dessen Ecken auf den Senkrechten durch B und C liegen, und welcher durch die den Gelenke G_1 und G_3 entsprechenden Punkte der Kettenlinie geht. Bezeichnet man dann für irgend einen Querschnitt F_1 oder irgend ein Feld $F_1 F_2$ (gleichgiltig innerhalb welcher Oeffnung) mit M_0 und Q_0 dasjenige Moment oder diejenige Querkraft, welche entstehen, wenn auf den Gerber'schen Balken nur die Kräfte P wirken, so ergibt sich im ganzen

$$M_p = M_0 - H_p y_1 \quad \text{und} \quad Q_p = Q_0 - H_p \frac{y_2 - y_1}{\lambda}.$$

Liegt die Kettenlinie oberhalb des Schlusslinienzuges, so ist y negativ. Dem Querschnitte G_2 entspricht

$$M_G = M_{0G} - H_p f',$$

und es folgt, da dieses Moment = 0 sein muss

$$H_p = \frac{M_{0G}}{f'}.$$

Hiernach erhält man die Einflusslinie für den Horizontalzug H_p , indem man die Einflusslinie für das dem Querschnitte G_2 entsprechende Moment eines Gerber'schen Balkens $ABCD$ bestimmt und die Ordinaten derselben durch f' dividirt. Auf diesem Wege ergibt sich die in der Fig. 410 b dargestellte Einflusslinie für H_p ; dieselbe besitzt bei G_2 die Ordinate $\frac{w w'}{l f'}$ und — was für die Folge wichtig ist — im Abstände $l \frac{f'}{w}$ von der Stütze B die Ordinate 1.

Um nun die Einflusslinie für das irgend einem Querschnitte entsprechende Biegemoment $M_p = M_0 - H_p y$ zu bestimmen, hat man nur nöthig, auf die im Abschnitte VI (Seite 167) angegebene Weise die Einflusslinie für M_0 zu zeichnen und von den Ordinaten derselben die mit y multiplicirten Ordinaten der H_p -Linie in Abzug zu bringen. Hiernach stellt z. B. die schraffierte Fläche in Fig. 410 c die Einflussfläche für das Moment M_p des Querschnittes F_1 vor. Es wurde zunächst $ABCD$ als ein nicht an der Kette hängender Gerber'scher Balken betrachtet und die Einflusslinie für M_0 aufgetragen; dieselbe besteht aus den Geraden I, II, III, IV und ist bestimmt durch $BJ = 1 \cdot x$. Von den Ordinaten dieser Linie wurden diejenigen der aus den Geraden $I' II', III' IV'$ bestehenden H_{y_1} -Linie abgezogen, wobei dieser zweite Linienzug durch die im Abstände $l \frac{f'}{w}$ von Stütze B gelegenen Ordinate $\overline{VW} = 1 \cdot y_1$ bestimmt werden konnte, da ja die H -Linie an dieser Stelle die Ordinate 1 besitzt.

In gleicher Weise kann die Einflusslinie für die in irgend einem Felde auftretende Querkraft Q_p ermittelt werden. Man betrachte den Balken zunächst als nicht an der Kette hängenden Gerber'schen Balken, zeichne nach No. 94 (Seite 166) die Einflusslinie für Q_0 und subtrahire von den Ordinaten derselben diejenigen der $H_p \frac{y_2 - y_1}{\lambda}$ -Linie. Letztere Linie besitzt im Abstände $l \frac{f'}{w}$ von B die (leicht durch Zeichnung zu bestimmende) Ordinate $1 \cdot \frac{y_2 - y_1}{\lambda}$.

bunden, welcher ein festes und ein auf wagerechter Bahn bewegliches Auflager besitzt und durch ein Mittelgelenk G in zwei starre Theile zerlegt wird. Es entsteht ein Träger, welcher als die Umkehrung der durch einen Balken versteiften Kette angesehen werden kann, und für welchen deshalb die in No. 192 bis 195 entwickelten Gesetze gelten. Die Spannkraft Z und S haben natürlich entgegengesetzte Vorzeichen wie die für die Kettenbrücke gefundenen; sie rufen jetzt Druckspannungen hervor. Auch ist zu beachten, dass die Endpunkte A' und B' der Schlusslinie s unterhalb der Kämpfergelenke auf den verlängerten Mittellinien der äussersten Glieder des Bogens liegen, sobald die Stützweite des Balkens (wie in Fig. 411) kleiner ist als diejenige des Bogens. In Fig. 411 wurden als Beispiele die Einflusslinien für eine Spannkraft U und eine Spannkraft V vorgeführt.

Die U -Linie ist bestimmt durch die Belastungsscheide E und durch $\overline{AJ} = 1 \frac{x}{h}$. Die Gerade $A'E$ geht durch den dem Knoten F_2 (welcher U gegenüberliegt) entsprechenden Punkt F'_2 des Bogens.

Die V -Linie ist (wegen $V = -Q$) bestimmt durch $\overline{AJ} = -1$ und durch den Punkt E' . Die Gerade $A'E'$ ist hierbei parallel zu dem vom Schnitte tt getroffenen Gliede des Bogens zu ziehen. In der Fig. 411 wurde vorausgesetzt, dass die Belastung, um deren Einfluss es sich handelt, in den Knoten der oberen Gurtung angreift. Wirkt sie in den Knoten der unteren Gurtung, so ist die Gerade L_1L_2 zu ersetzen durch $L'L''$.

Wird der Bogen so geformt, dass seine Mittellinie mit dem der ständigen Belastung entsprechenden und durch die Punkte A' , G' , B' geführten Seilpolygone zusammenfällt, so werden nur die Vertikalen des Versteifungsbalkens in Folge der ständigen Belastung beansprucht. In der die Felder λ_m und λ_{m+1} trennenden Vertikale V_m entsteht $V_{mg} = -\frac{1}{2} g_0 (\lambda_m + \lambda_{m+1})$, wobei g_0 der an der oberen Gurtung angreifende Theil der ständigen Last ist. Die Spannkraften O , U , D sind nur von der beweglichen Belastung abhängig, und es gelten die Gleichungen ${}_{max}O + {}_{min}O = 0$; ${}_{max}U + {}_{min}U = 0$; ${}_{max}D + {}_{min}D = 0$.

199. Gelenkbogen, versteift durch einen unter demselben liegenden, den Horizontalschub des Bogens aufnehmenden Balken. Einen solchen Träger zeigt die Fig. 412. An dem einen Ende ist ein festes Auflager, an dem andern ein bewegliches mit wagerechter Bahn angeordnet worden, so dass der Träger bei ausschliesslich senkrechten Lasten auf die Pfeiler nur senkrechte Drücke ausübt, welche mit denen eines einfachen Balkens AB übereinstimmen. Die Versteifung wird bewirkt durch zwei gegliederte, bei G gelenkartig mit einander befestigte

starre Scheiben, welche mit dem Bogen durch senkrechte Hängestangen verbunden sind.

Wir führen durch den Träger einen Schnitt, welcher vier Stäbe (U_{m-1} , D_m , O_m , S) trifft, Fig. 413, und betrachten das linke Trägerstück. Die Mittelkraft der an demselben angreifenden Lasten sei ΣP ; sie ruft im Verein mit dem Stützenwiderstande A in Bezug auf die Knoten m und $(m-1)$ Momente M_{0m} und $M_{0(m-1)}$ hervor, welche ebenso gross sind wie die Momente für dieselben Knoten eines einfachen,

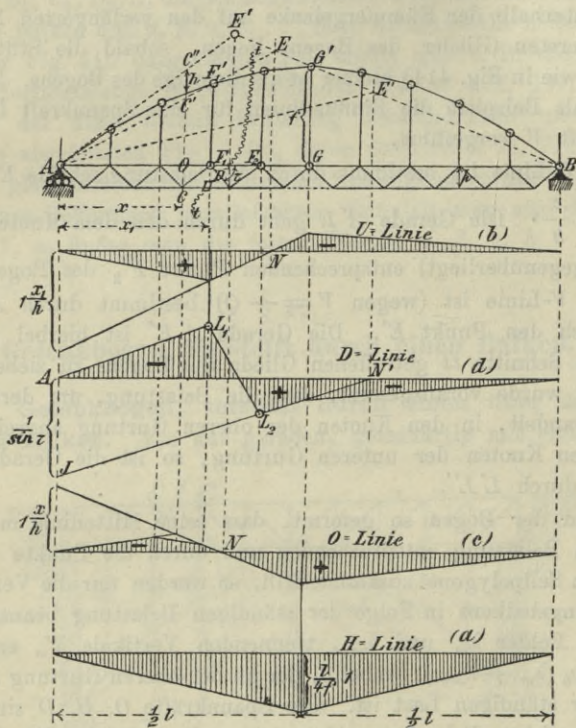


Fig. 412.

nicht am Bogen hängenden Balkens AB . Zerlegt man nun den im geschnittenen Bogengliede wirksamen Druck S im Punkte m' in eine wagerechte und in eine senkrechte Seitenkraft, von denen die erstere gleich dem Horizontalschube H ist, so lautet die auf den Knoten m bezogene Ritter'sche Momentengleichung

$$M_{0m} - H(y_m + h) + O_m h = 0$$

und hieraus folgt

$$O_m = -\frac{M_m}{h}, \text{ wo } M_m = M_{0m} - H(y_m + h).$$

Auf demselben Wege findet man

$$U_{m-1} = + \frac{M_{m-1}}{h}, \text{ wo } M_{m-1} = M_{0(m-1)} - Hy_{m-1}.$$

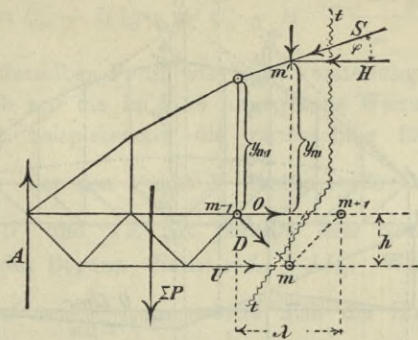


Fig. 413.

Für den Punkt G findet man (Fig. 412)

$$M_G = M_{0G} - Hf = 0$$

weshalb:

$$H = \frac{M_{0G}}{f}.$$

Die für M und H gefundenen Ausdrücke stimmen mit denen überein, die sich im § 48 für den Versteifungsbalken der Kette ergaben. Nur tritt, wenn der fragliche Knotenpunkt der unteren Balkengurtung angehört, an die Stelle von y_m der Werth $y_m + h$. Für den Horizontalanschub H und für die Spannkraft U und O ergeben sich deshalb die in den Figuren 412, a, b, c dargestellten Einflusslinien, wobei angenommen ist, dass die Belastung in den Knoten der oberen Gurtung angreift. Die Figuren (a) und (b) bedürfen keiner Erläuterung. Zu Figur (c) ist zu bemerken, dass die Belastungsscheide durch den Punkt E' geht, in welchem die Gerade BG' von der durch A und einen um h oberhalb C' gelegenen Punkt C'' bestimmten Geraden geschnitten wird.

In der Fig. 414 gehört das Mittelgelenk G der unteren Gurtung des Balkens an, während die Kämpfergelenke des Bogens wie vorhin in der oberen Gurtung liegen. Es ergibt sich jetzt

$$H = \frac{M_{0G}}{f + h}.$$

Die Höhe des die Einflussfläche für H darstellenden Dreiecks ist nicht mehr $= \frac{l}{4f}$, sondern $= \frac{l}{4(f+h)}$ und die Gerade $B'G'$ ist zu ersetzen durch die Gerade $B'G''$, wobei G'' um h höher liegt als G' .

Wir haben uns in den Figuren 412 und 414 auf die Darstellung zweier besonderer Fälle beschränkt. Bei beliebiger Form der Gurtungen

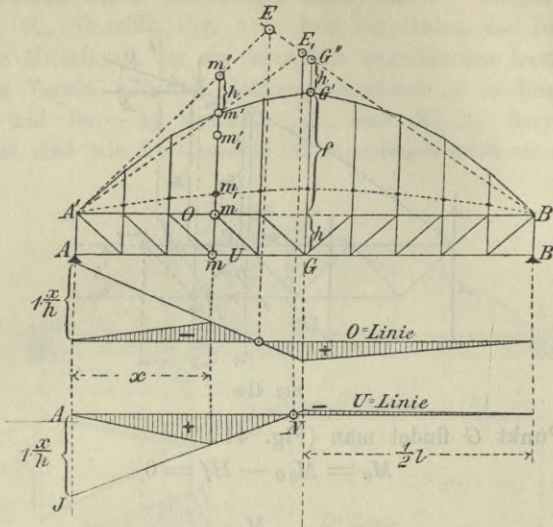


Fig. 414.

des Balkens gelten die Gleichungen

$$M_m = M_{0m} - Hy'_m \quad \text{und} \quad H = \frac{M_{0G}}{f'}$$

wo y'_m den Abstand des Knotens m von der Bogenachse
und f' " " " Gelenkes G " " "

bedeutet, beide Abstände in senkrechter Richtung gemessen. Ersetzt man also beispielsweise in Fig. 414 die gerade obere Gurtung $A'B'$ durch die gebrochene (durch gestrichelte Linien angedeutete) $A'm_1B'$,

so wird $U = + \frac{M^m}{r_m}$ und $M_m = M_{0m} - H(y_m - mm_1)$, wobei r_m das

Loth von m_1 auf U bedeutet. An die Stelle von $AJ = 1 \frac{x}{h}$ tritt:

$AJ = 1 \frac{x}{r_m}$ und die zur Bestimmung von N zu ziehende Gerade $A'E$

ist durch einen Punkt m'_1 zu ziehen, der von m' den Abstand $m'm'_1 = mm_1$ hat. Da m_1 oberhalb $A'B'$ liegt, muss m'_1 unterhalb m' liegen. Sind auf diese Weise die Einflusslinien für sämtliche Spannkraften O und U gefunden, so ist man im Stande, die Einflusslinien für die in den Füllungsstäben auftretenden Kräfte mittels des in No. 143 beschriebenen Verfahrens zu bestimmen.

Die Querkraft für den Schnitt tt in Fig. 413 ist, wenn $A - \Sigma P = Q_0$ (= Querkraft für den durch einen einfachen Balken geführten Schnitt tt) gesetzt wird

$$Q = Q_0 - H \operatorname{tg} \varphi = Q_0 - H \frac{y_{m+1} - y_m}{\lambda_m};$$

sie erscheint in derselben Form wie beim Versteifungsbalken der Kette und kann deshalb auf die im § 48 angegebene Weise ermittelt werden. Fig. 412 d zeigt beispielsweise die Einflusslinie für die Spannkraft

$D = + \frac{Q}{\sin \tau}$. Der den Punkt N' bestimmende Punkt E' liegt auf der Geraden $B'G'$ und AE' ist parallel dem vom Schnitte tt getroffenen Gliede des Bogens. Es ist $AL_1 \parallel JL_2$. Würde man $\overline{AJ} = 1$ machen, statt $\overline{AJ} = \frac{1}{\sin \tau}$, so würde man die Einflusslinie für die

dem Felde F_1F_2 entsprechende Querkraft Q erhalten. In dem in der Fig. 414 dargestellten Falle liegen die Punkte E' auf der Geraden $B'G''$.

Ist die ständige Belastung eine gleichförmige, und gehören die Knoten des Bogens einer Parabel mit senkrechter Achse an, so sind in dem in der Fig. 412 dargestellten Falle die Spannkraften D_g und $U_g = 0$, vorausgesetzt, dass es zulässig ist, den am Balken angreifenden Theil der ständigen Belastung ausschliesslich auf die oberen Knoten desselben zu vertheilen. Für sämtliche Stäbe der oberen Gurtung ergibt sich

$O_g = + H_g = + \frac{gl^2}{8f}$. Ist auch die bewegliche Belastung eine gleichförmige (= p), so entsteht bei gänzlicher Belastung des Balkens mit p in der oberen Gurtung $O_p = + \frac{pl^2}{8f}$, während D_p und U_p wieder = 0 werden. Es folgt dann

$$\max U + \min U = 0; \max D + \min D = 0.$$

§ 50.

Verwerthung der Kettenlinie zur Linienführung der Gurtungen.

200. Gelegentlich der Bearbeitung eines Brückenentwurfs kam der Verfasser auf den Gedanken, die Gurtungen eines Auslegerbalkens als Seillinien für eine gesetzmässig sich ändernde Belastung aufzufassen und gelangte auf diesem Wege zu einem Verfahren, das zu einer sehr einfachen Berechnung der für die Zulage der Eisenkonstruktion in der Werkstatt erforderlichen genauen Ordinaten führte und eine schnelle

der Momente findet man die Ordinaten mittels der Beziehung

$$y_m = y_0 \frac{M_m}{M_0} = 8,4 \frac{M_m}{558}.$$

Die nachstehende Tabelle enthält die vollständige Zahlenrechnung für die Mittelöffnung.

m	P_m	Q_m	M_m	y_m
0	6		558	8,400 ^m
1	6	3	555	8,355
2	6	9	546	8,219
3	6	15	531	7,994
4	6	21	510	7,677
5	6	27	483	7,271
6	7	33	450	6,774
7	9	40	410	6,172
8	12	49	361	5,434
9	16	61	300	4,516
10	21	77	223	3,357
11	27	98	125	1,882
12		125	0	

In ähnlicher Weise wird auch die Seitenöffnung AB behandelt. Man berechnet zuerst den linken Auflagerwiderstand des mit den Werthen 11, 12, 13, 21 belasteten Balkens und findet

$$Q_1 = A = \frac{1}{12} (21 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 19 + \dots + 11 \cdot 11) = \frac{946}{12} = 78,83$$

$$Q_2 = Q_1 - P_1,$$

$$Q_m = Q_{m-1} - P_{m-1},$$

$$M_1 = Q_1, \quad M_2 = M_1 + Q_2, \quad \text{u. s. w.} \quad M_m = M_{m-1} + Q_m.$$

Die Ordinaten der Gurtung sind

$$y_m = \frac{M_m}{100}.$$

Damit A den runden Werth 78 annimmt, wurde Last 21 durch 22 ersetzt, 11 durch 10, Aenderungen, welche die Gestalt der Gurtung nur wenig beeinflussen. Hiernach entstand die folgende Tabelle:

m	P_m	Q_m	M_m	y_m
1	10	+ 78	78	0,78 ^m
2	12	+ 68	146	1,46
3	13	+ 56	202	2,02
4	14	+ 43	245	2,45
5	15	+ 29	274	2,74
6	16	+ 14	288	2,88
7	17	— 2	286	2,86
8	18	— 19	267	2,67 [*])
9	19	— 37	230	2,30
10	20	— 56	174	1,74
11	22	— 76	98	0,98
12		— 98	0	0

Folgen die Lasten dem Gesetze

$$P_m = a + a_1 m + a_2 m^2 + a_3 m^3 + \dots$$

wo a, a_1, a_2, \dots feste Zahlenwerthe sind, und ist die Anzahl der Felder $= n$, so erhält man für die Reaktionen B und A die Werthe

$$B = \sum P_m \frac{m}{n} = \frac{1}{n} (a S_1 + a_1 S_2 + a_2 S_3 + a_3 S_4 + \dots);$$

$$A = \sum P - B$$

$$\text{wo } S_r = \sum_{m=1}^{n-1} m^r.$$

Man findet

$$S_1 = \frac{(n-1)n}{2}$$

$$S_2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{2 \cdot 3}$$

$$S_3 = \left[\frac{(n-1)n}{2} \right]^2$$

$$S_4 = \frac{n(n-1)(6n^3 - 9n^2 + n + 1)}{30}$$

$$\text{Ist } P_m = a, \text{ so wird } Q_1 = A = \frac{n-1}{2} a,$$

$$n \quad P_m = m, \quad n \quad n \quad Q_1 = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{3},$$

$$n \quad P_m = m^2, \quad n \quad n \quad Q_1 = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{6},$$

^{*}) In der auf Seite 428 angeführten Abhandlung in der Zeitschrift für Bauwesen ist verschentlich $y_7 = 2,67^m$ (statt $y_8 = 2,67^m$) angegeben worden.

Ist $P_m = m^3$, so wird $Q_1 = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{(n+1)(3n^2-2)}{30}$.

Wählt man also beispielsweise

$P_m = a + 0,5 m^2$, so erhält man

$$Q_1 = \frac{n-1}{2} \left(a + \frac{n(n+1)}{12} \right).$$

Wird $P_m = 10 + m$ angenommen, so ergibt sich für $n = 12$

$$Q_1 = \frac{n-1}{2} \left(10 + \frac{n+1}{3} \right) = \frac{11}{2} \left(10 + \frac{13}{3} \right) = 78,83.$$

201. Einhäufige Seilpolygone AB (Fig. 416a) können auch aus symmetrischen Seilpolygonen $B'A'B'$ (Fig. 416b) in der Weise abgeleitet werden, dass, nach Berechnung der auf die Gerade $B'B'$ bezogenen Ordinaten y , die lothrechten Abstände η der Knotenpunkte von der Sehne $A'B'$ bestimmt und von einer anders geneigten Sehne AB aus aufgetragen werden.

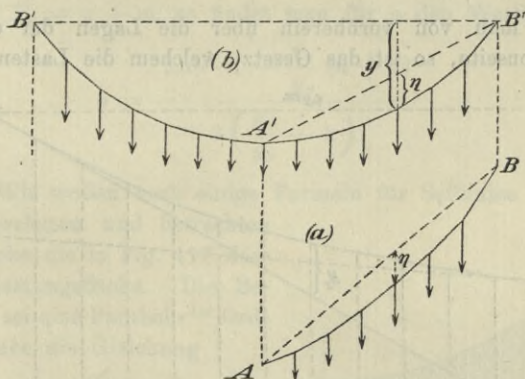


Fig. 416.

Sehr zweckmässig ist auch bei einhäufigen Seilpolygonen die Berechnung der auf die Verlängerung der ersten oder letzten Seite bezogenen Ordinaten (Fig. 417), da man häufig über die Richtung der einen dieser beiden Seiten von vornherein verfügen wird. Die Ordinaten y_m verhalten sich hier zu einander wie die Momente M_m eines Freitragers. Zählt man die Lasten von A aus und bezieht man das Seilleck auf die an B grenzende Seite, so erhält man, wenn man die konstant angenommene Feldweite wieder gleich 1 setzt,

$$Q_m = Q_{m+1} + P_m \text{ und } M_m = M_{m+1} + Q_{m+1}.$$

Für das in Fig. 417 dargestellte Seileck, welches von dem in Fig. 415 abgebildeten nur wenig abweicht, ergeben sich die folgenden Zahlenwerthe.

m	P_m	Q_m	M_m	$y_m = y_A \frac{M_m}{M_A} = \frac{12 M_m}{1166} = \frac{6 M_m}{583}$
11	21	21	0	0
10	20	41	21	0,216 ^m
9	19	60	62	0,638
8	18	78	122	1,256
7	17	95	200	2,058
6	16	111	295	3,036
5	15	126	406	4,178
4	14	140	532	5,475
3	13	153	672	6,916
2	12	165	825	8,491
1	11	176	990	10,189
			1166	12,000

Verfügt man von vornherein über die Lagen der ersten und letzten Polygonseite, so ist das Gesetz, welchem die Lasten P folgen,

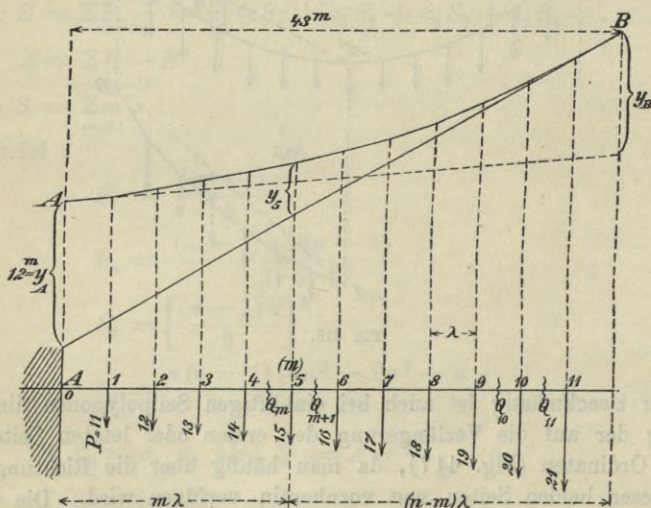


Fig. 417.

einer Einschränkung unterworfen. Es müssen sich nämlich die Strecken y_A und y_B , welche die äussersten Polygonseiten auf den Senkrechten durch die Endpunkte A und B abschneiden, zu einander verhalten wie die Biegemomente M_A und M_B zweier Freiträger, die bei A oder B

eingespannt und mit den Kräften P belastet sind. Zählt man die Lasten von A aus, so erhält man die Gleichung

$$\frac{y_A}{y_B} = \frac{\sum P_m m}{\sum P_m (n - m)} = \frac{\sum P_m m}{n \sum P_m - \sum P_m m},$$

wo (nach Seite 430)

$$\begin{aligned} \sum P_m m &= a S_1 + a_1 S_2 + a_2 S_3 + \dots \\ \sum P_m &= a (n - 1) + a_1 S_1 + a_2 S_2 + \dots \end{aligned}$$

Ist z. B.

$$P_m = a + a_1 m + a_2 m^2,$$

so wird

$$\sum P_m m = \frac{(n-1)n}{2} \left[a + \frac{1}{3} a_1 (2n-1) + \frac{1}{2} a_2 (n-1)n \right]$$

$$\sum P_m = (n-1) \left[a + \frac{1}{2} a_1 n + \frac{1}{6} a_2 n (2n-1) \right]$$

und

$$\frac{y_A}{y_B} = \frac{a + \frac{1}{3} a_1 (2n-1) + \frac{1}{2} a_2 (n-1)n}{a + \frac{1}{3} a_1 (n+1) + \frac{1}{6} a_2 (n+1)n}.$$

Wählt man $P_m = a + m$, so findet man für a den Werth

$$a = \frac{2n-1 - \frac{y_A}{y_B} (n+1)}{3 \left(\frac{y_A}{y_B} - 1 \right)}.$$

202. Wir wollen noch einige Formeln für Seillinien mit stetiger Belastung herleiten und betrachten zu dem Zwecke die in Fig. 418 dargestellte Belastungsfläche. Die Belastungslinie sei eine Parabel r^{ter} Ordnung und habe die Gleichung

$$z_x = z_l \frac{x^r}{l^r},$$

wo z_l die Belastungshöhe an der Stelle $x = l$ bedeutet. Der Inhalt der Belastungsfläche ist

$$F = \int_0^l z_x dx = \frac{z_l l}{r+1}$$

und das statische Moment der Fläche, bezogen auf die Senkrechte durch A

$$M_A = \int_0^l z_x x dx = \frac{z_l l^2}{r+2}.$$

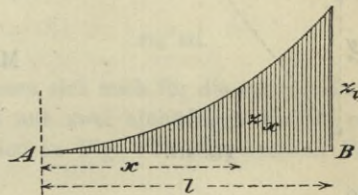


Fig. 418.

Die Abstände des Schwerpunktes der Fläche von den Senkrechten durch A und B sind demnach

$$\xi = l \frac{r+1}{r+2} \quad \text{und} \quad \xi' = l - \xi = l \frac{1}{r+2}$$

und das Moment der Fläche in Bezug auf die Senkrechte durch B

$$M_B = \frac{z_l l^2}{(r+1)(r+2)}$$

Wirkt die betrachtete Belastung auf einen bei B eingespannten Freitrag, so ist das Biegemoment an der Stelle x

$$M = \frac{z_x x^2}{(r+1)(r+2)} = \frac{z_l x^{r+2}}{(r+1)(r+2) l^r}$$

Besteht nun die Belastungsfläche einer einhäufigen Kettenlinie (Fig. 419) aus einem Rechteck von der Höhe z und einem von einer Parabel r^{ter} Ordnung begrenzten Theile, so lautet die Gleichung der Kettenlinie, bezogen auf die Tangente im Endpunkte A

$$y = y_B \frac{M}{M_B},$$

worin zu setzen

$$M = \frac{z x^2}{2} + \frac{z_l x^{r+2}}{(r+1)(r+2) l^r},$$

$$M_B = \frac{z l^2}{2} + \frac{z_l l^2}{(r+1)(r+2)}.$$

Man erhält demnach

$$y = y_B \frac{x^2 \frac{1}{2} + \varepsilon \frac{x^r}{l^r}}{\frac{l^2}{2} + \varepsilon},$$

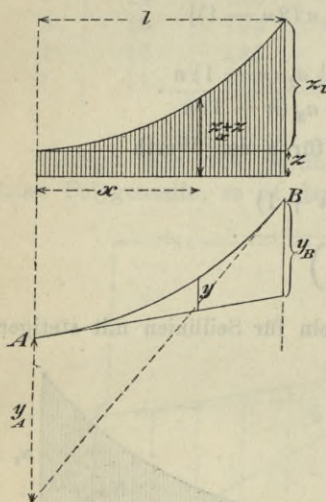


Fig. 419.

wo

$$\varepsilon = 2 \frac{z_l}{z} \frac{1}{(r+1)(r+2)}$$

ist. Schreibt man auch der Tangente in B eine bestimmte Lage vor, so muss sein

$$\frac{y_B}{y_A} = \frac{M_B}{M_A} = \frac{\frac{z l^2}{2} + \frac{z_l l^2}{(r+1)(r+2)}}{\frac{z l^2}{2} + \frac{z_l l^2}{(r+2)}}$$

$$\frac{y_B}{y_A} = \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon(r+1)}.$$

Beginnt die parabolische Belastung ($z_x = z_b \frac{x^r}{b^r}$) erst im Abstände $a = l - b$ von A, Fig. 420, so ist für den Abschnitt a

$$M = \frac{zx^2}{2}$$

und für den Abschnitt b

$$M = \frac{z(a+x)^2}{2} + \frac{z_b x^{r+2}}{(r+1)(r+2)b^r}$$

Ferner ist

$$M_B = \frac{zl^2}{2} + \frac{z_b b^2}{(r+1)(r+2)}$$

$$M_A = \frac{zl^2}{2} + \frac{z_b b}{r+1} \left(a + b \frac{r+1}{r+2} \right)$$

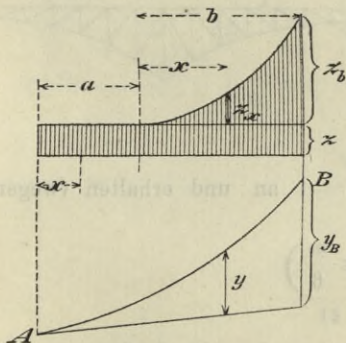


Fig. 420.

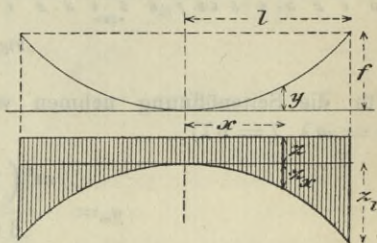


Fig. 421.

Die vorstehenden Gleichungen lassen sich auch für die symmetrische Kette verwerthen, denn diese besteht aus zwei einhäufigen Ketten mit wagerechter Scheiteltangente. Für den in Fig. 421 dargestellten Fall erhält man also

$$y = f \frac{x^2}{l^2} \frac{1 + \varepsilon \frac{x^r}{l^r}}{1 + \varepsilon}$$

Als **Beispiel** wählen wir die in Fig. 422 abgebildete Auslegerbogenbrücke. Stützweite der Seitenöffnung $6 \cdot 3 = 18$ m, der Mittelöffnung $24 \cdot 2 = 48$ m, Pfeilhöhe 6,0 m. Für die Mittelöffnung setzen wir $r = 2$ und erhalten für den Knotenpunkt m (wegen $x = m\lambda$ und $l = 8\lambda$)

$$y_m = 6,0 \frac{m^2}{64} \frac{1 + \varepsilon \frac{m^2}{64}}{1 + \varepsilon}$$

bögen ersetzt werden. Soll z. B. ein symmetrischer Korbbo gen (Fig. 423) durch die Punkte $C_0 C_1 C_2 C_3$ gelegt werden, so berechnet man die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ mittels der Gleichungen

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{h_1}{e_1}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{h_2}{e_2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{h_3}{e_3}$$

findet hierauf

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 \\ \beta_2 &= \alpha_2 - 2\beta_1 \\ \beta_3 &= \alpha_3 - 2\beta_1 - 2\beta_2 \end{aligned}$$

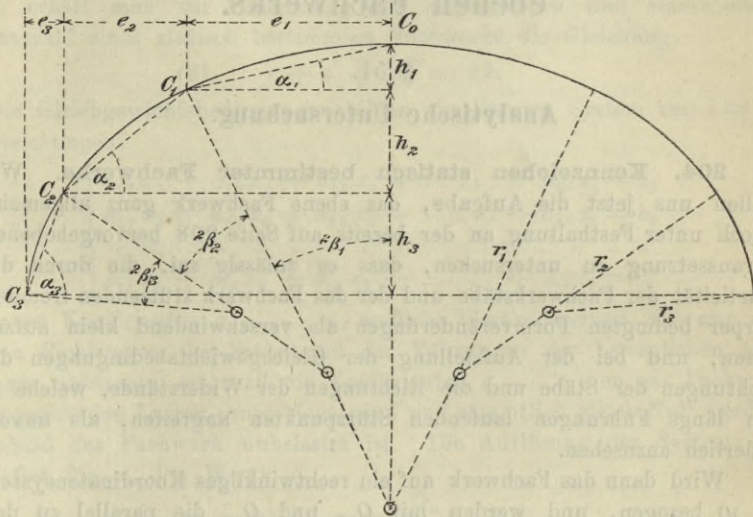


Fig. 423.

und erhält die Halbmesser

$$r_1 = \frac{e_1}{2 \sin \beta_1 \cos \alpha_1}, \quad r_2 = \frac{e_2}{2 \sin \beta_2 \cos \alpha_2}, \quad r_3 = \frac{e_3}{2 \sin \beta_3 \cos \alpha_3}.$$

Ist die Feldweite λ konstant, so achte man bei der Berechnung der Kreislinien-Ordinaten darauf, dass die Werthe y^2 eine Differenzreihe zweiter Ordnung bilden und sich auf die Form

$$y_m^2 = a + b m + c m^2$$

bringen lassen. Für die in Fig. 424 angenommenen Koordinaten ist beispielsweise $a = k^2$, $b = 2c\lambda$, $c = -\lambda^2$.

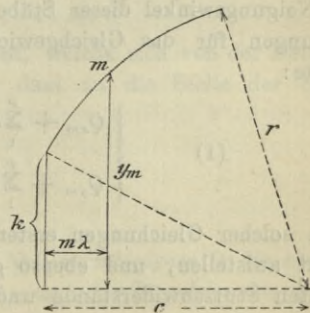


Fig. 424.

XIII. Abschnitt.

Allgemeine Theorie des statisch bestimmten ebenen Fachwerks.

§ 51.

Analytische Untersuchung.

204. Kennzeichen statisch bestimmter Fachwerke. Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, das ebene Fachwerk ganz allgemein, jedoch unter Festhaltung an der bereits auf Seite 208 hervorgehobenen Voraussetzung zu untersuchen, dass es zulässig sei, die durch die Elasticität der Fachwerkstäbe und der das Fachwerk stützenden fremden Körper bedingten Formveränderungen als verschwindend klein aufzufassen, und bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen die Richtungen der Stäbe und die Richtungen der Widerstände, welche in den längs Führungen laufenden Stützpunkten angreifen, als unveränderlich anzusehen.

Wird dann das Fachwerk auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem (x, y) bezogen, und werden mit Q_{xm} und Q_{ym} die parallel zu den Koordinatenachsen gebildeten Seitenkräfte der im Knotenpunkte m angreifenden äusseren Kraft Q_m (welche gegebene Last oder unbekannter Stützenwiderstand sein kann) bezeichnet, ferner mit S_1, S_2, \dots, S_p die Spannkkräfte in den von m ausgehenden Stäben und mit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ die Neigungswinkel dieser Stäbe gegen die x -Achse, so lauten die Bedingungen für das Gleichgewicht der auf den Knoten m wirkenden Kräfte:

$$(1) \quad \begin{cases} Q_{xm} + \sum_1^p S \cos \alpha = 0 \\ Q_{ym} + \sum_1^p S \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

Zwei solcher Gleichungen ersten Grades lassen sich für jeden Knotenpunkt aufstellen, und ebenso gross muss auch die Anzahl der unbekanntenen Stützenwiderstände und Stabkräfte sein, wenn das Fachwerk ein statisch bestimmtes sein soll.

Der Widerstand eines beweglichen Auflagers ist nur der Grösse nach unbekannt; seine Richtung fällt in die Normale der Bahn, längs

Stützenwiderstände für jeden Belastungszustand eindeutig berechnen lassen, und zweitens ist es *unbeweglich*, weil die Gleichungen (1) und (3) ausdrücken, dass an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht besteht. Ist hingegen $D = 0$, so sind die Unbekannten $x_1 \dots x_i$ entweder nicht alle eindeutig bestimmt oder nicht alle endlich, oder es gelingt ihre Berechnung nur für gewisse Belastungsweisen, oder es ist ein Gleichgewichtszustand nur dann möglich, wenn die Kräfte bestimmten Bedingungen genügen. Welcher dieser Fälle auch vorliegen möge, das eine steht fest: *im Falle $D = 0$ ist das Fachwerk kein statisch bestimmtes.*

Es ist nun besonders hervorzuheben, dass sich durch geschickte Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen die zeitraubende Arbeit der Ausrechnung der Determinante D von $2k$ Gleichungen stets umgehen lässt. In den meisten Fällen der Praxis ist es sogar möglich, diese Bedingungen so zu bilden, dass jede Gleichung nur eine einzige Unbekannte enthält. Alle in den früheren Abschnitten behandelten Fachwerke lassen sich auf diesem Wege berechnen; man braucht nur Momentengleichungen aufzustellen und die Drehpunkte passend zu wählen. In anderen Fällen ist es wieder möglich, zwei Gleichungen mit je zwei Unbekannten zu bilden und nach Auflösung derselben jede der übrigen Unbekannten mittels einer Gleichung zu berechnen, die nur noch eine Unbekannte enthält; die Entscheidung der Frage nach der statischen Bestimmtheit erfordert dann nur die Ausrechnung einer Determinante zweiten Grades u. s. w. Unsere Aufgabe wird also darin bestehen, den Grad der Determinante, welche über die statische Bestimmtheit Aufschluss giebt, möglichst zu erniedrigen. Bevor wir dieselbe lösen, wollen wir diejenigen Bildungsgesetze statisch bestimmter Fachwerke zusammenstellen, welche zu Stabgebilden führen, die mit Hilfe der in den früheren Abschnitten entwickelten Verfahren berechnet werden können. Schwierigere Fälle werden wir dann auf einfachere zurückführen.

Bei dieser allgemeinen Untersuchung wird es zuweilen zweckmässig sein, die nach festen Richtungen wirkenden Seitenkräfte der Stützenwiderstände als die Spannkkräfte von Stäben aufzufassen, welche die Stützpunkte mit ausserhalb des Fachwerks gelegenen festen Punkten verbinden und *Auflagerstäbe* genannt werden. Zu einem festen Auflager gehören zwei, zu einem beweglichen Auflager ein Auflagerstab. Da man nun jene festen Punkte als Knotenpunkte eines die Gesamtheit aller Widerlager vorstellenden statisch bestimmten Fachwerks — z. B. eines Dreiecknetzes — ansehen darf, so erkennt man, dass man schliesslich jedes irgendwie gestützte Fachwerk auf eine einzige starre Scheibe zurückführen kann, an welcher ein System im Gleichgewicht befindlicher äusserer Kräfte angreift. Bedeutet k die Anzahl

der Knotenpunkte dieser Scheibe, so stehen $2k$ Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Da nun die äusseren Kräfte nicht beliebig angenommen werden dürfen, sondern drei Gleichgewichtsbedingungen, welche in jenen $2k$ Gleichungen mit enthalten sind, genügen müssen, so beträgt die nothwendige und hinreichende Anzahl der Stäbe einer Scheibe

$$(6) \quad r = 2k - 3.$$

Diese Beziehung kann auch aus der Gleichung (2) hergeleitet werden, denn zur Stützung einer starren Scheibe sind erforderlich und hinreichend: entweder ein festes und ein bewegliches Auflager ($n'' = 1$, $n' = 1$) oder drei bewegliche Auflager ($n' = 3$). Wenn wir also in der Folge bei allgemeineren Untersuchungen nur von unbekanntem Stabkräften reden (wie in No. 206) oder nur von einem Fachwerk von $2k - 3$ Stäben (wie in No. 207), so liegt darin keineswegs eine Einschränkung.

205. Die einfachsten Bildungsgesetze der statisch bestimmten Fachwerke. 1) Schliesst man an zwei Knotenpunkte A und B eines statisch bestimmten Fachwerks einen neuen, nicht in die Gerade AB fallenden Knotenpunkt C durch zwei Stäbe AC und BC an, so ist das neue Fachwerk ebenfalls statisch bestimmt. Die Spannkraften der hinzugefügten Stäbe sind nur von der in C angreifenden äusseren Kraft P_C abhängig und können mit Hilfe eines Kräftedreiecks bestimmt werden. Auf diese Weise kann man beliebig viele Knotenpunkte mit zwei festgehaltenen Stützpunkten in Verbindung bringen, oder man kann, von einem Dreieck ausgehend, eine gegliederte Scheibe bilden, deren Knotenpunkte sich gegeneinander nicht bewegen können. Die Festhaltung der Scheibe in der Konstruktionsebene erfolgt schliesslich mit Hilfe von drei Auflagerstäben, deren Achsen sich aber nicht in einem und demselben Punkte schneiden dürfen (vergl. S. 112).

Fällt der Knotenpunkt C in die Gerade AB , so haben die um A und B mit den Halbmessern AC und BC beschriebenen Kreise ein Bogenelement gemein, innerhalb dessen sich der Punkt C frei bewegen kann. Punkt C wird also nicht festgelegt, sondern behält eine *unendlich kleine Beweglichkeit*. Gleichgewicht ist nur dann möglich, wenn auch P_C in die Gerade BC fällt; der Gleichgewichtszustand ist aber unbestimmt, weil sich für die Stäbe AC und BC unendlich viele Spannkraften angeben lassen, deren Differenz gleich P_C ist. Liegt aber P_C nicht in der Geraden AB , so tritt der Gleichgewichtszustand erst nach einer unendlich kleinen Verrückung des Punktes C ein, und die Zerlegung von P_C nach den beiden nur unendlich wenig von einander abweichenden Richtungen AC und BC liefert unendlich grosse Spannkraften.

In Wirklichkeit ändern sich allerdings die Längen aller von P_c beanspruchten Fachwerkstäbe schon bei der geringsten Belastung des Knotens C . Dreht sich dann AC gegen BC , so liefert die Zerlegung von P_c nach den beiden Stabrichtungen endliche Spannkraften. Aber auch dann, wenn A , B und C in einer Geraden liegen bleiben und P_c in diese Gerade fällt, entstehen in AC und BC ganz bestimmte endliche Spannkraften, welche sich aus der Bedingung folgern lassen, dass die Summe der Aenderungen der Längen dieser beiden Stäbe gleich der Strecke ist, um die sich der Abstand AB in Folge der Verschiebungen der Knotenpunkte A und B ändert. Diese einfache Betrachtung lehrt ganz deutlich, dass beim Auftreten unendlich kleiner Beweglichkeit und dem damit stets Hand in Hand gehenden Auftreten unendlich grosser Wurzeln der linearen Gleichgewichtsbedingungen die Voraussetzung verschwindend kleiner Formveränderungen unzulässig ist. Schon in der Nähe der durch den Ausnahmefall gekennzeichneten Grenzlage wird jene Voraussetzung hinfällig.

2) Schliesst man an zwei Knotenpunkte A und B eines statisch bestimmten Fachwerks einen neuen, nicht in die Gerade AB fallenden Knotenpunkt C durch zwei statisch bestimmte Scheiben AC und BC an, so ist das neue Fachwerk ebenfalls statisch bestimmt. Die Kräfte mit denen die beiden Scheiben in C aufeinander wirken, und die Kräfte, welche sie bei A und B auf das ursprüngliche Fachwerk ausüben, findet man mit Hilfe der in No. 108, Seite 176 angegebenen Verfahren, denn es liegt gewissermassen ein Dreigelenkbogen vor, dessen Widerlager das ursprüngliche Fachwerk ist. Diese zweite Bildungsweise schliesst die erste als Sonderfall ein, da biegungsfeste Stäbe nur besondere Fälle von Scheiben sind.

3) Gliedert man an drei Knotenpunkte A , B , C eines statisch bestimmten Fachwerks eine statisch bestimmte Scheibe durch drei Stäbe AA_1 , BB_1 , CC_1 an, so ist das neue Fachwerk ebenfalls statisch bestimmt. Die Ermittlung der Spannkraften in den drei Stäben erfolgt mit Hilfe des Ritter'schen oder des Culmann'schen Verfahrens (§ 26). Zu vermeiden ist nur der Ausnahmefall, dass sich die drei Geraden AA_1 , BB_1 und CC_1 in einem Punkte schneiden, weil es sonst möglich ist, das Dreieck $A_1B_1C_1$ unendlich wenig zu verschieben. Sind die drei Stäbe parallel und gleich lang, so ist die Beweglichkeit sogar eine endliche; Gleichgewicht ist in diesem Falle nur möglich, wenn die Mittelkraft der auf die Scheibe $A_1B_1C_1$ wirkenden äusseren Kräfte parallel zu den Verbindungsstäben ist. An die Stelle der drei Verbindungsstäbe dürfen auch drei statisch bestimmte Scheiben treten; die an denselben angreifenden äusseren Kräfte werden nach den im § 28 gezeigten Verfahren auf die Knotenpunkte A , A_1 , B , B_1 , C , C_1 vertheilt.

4) Eine vierte Bildungsweise erhält man aus der zweiten, wenn man jedes der drei Gelenke A, B, C , in denen die beiden hinzugefügten Scheiben mit dem bereits vorliegenden Fachwerk und miteinander zusammenhängen, durch ein Stäbepaar ersetzt, dessen Schnittpunkt nach einer schon früher angestellten Untersuchung (No. 141, S. 233) dieselbe Rolle spielt wie ein Gelenk. An die Stelle der Verbindungsstäbe dürfen auch statisch bestimmte Scheiben treten. Liegen die drei Gelenkpunkte A, B, C in einer Geraden, so besitzt das Fachwerk unendlich kleine Beweglichkeit. Dieser Fall liegt z. B. bei dem in Fig. 426 dargestellten *Pascal'schen* Sechseck vor, denn dieses Stabgebilde besteht aus drei zu Stäben zusammengeschrumpften Scheiben I, II, III , welche durch drei Stäbepaare, deren Schnittpunkte A, B, C in eine Gerade fallen, miteinander verbunden sind.

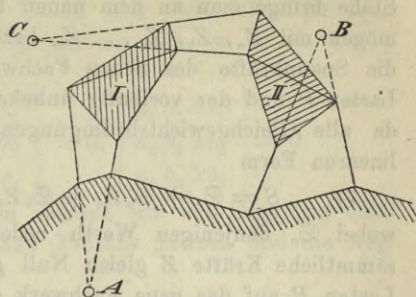


Fig. 425.

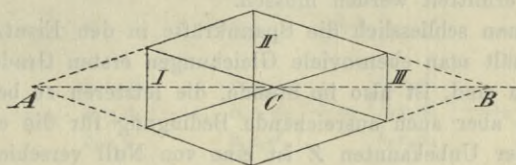


Fig. 426.

Es verdient noch hervorgehoben zu werden, dass die vierte Bildungsweise die drei anderen mit enthält. Lässt man z. B. zwei Gelenkvierecke zu einfachen Gelenken zusammenschrumpfen und eine der beiden hinzugefügten Scheiben zu einem Stabe, so erhält man die dritte Bildungsweise.

Wir haben die beschriebenen Bildungsgesetze die einfachsten genannt, weil sie Fachwerke liefern, deren statische Bestimmtheit ohne weiteres einleuchtet, und weil auch die Ausnahmefälle unendlich kleiner oder endlicher Beweglichkeit auf den ersten Blick zu erkennen sind.

206. Ein ganz allgemeines Verfahren zur Berechnung statisch bestimmter Fachwerke ist nun das folgende.

Man verwandle das Fachwerk durch Beseitigung von Stäben und Hinzufügung von ebensoviel neuen Stäben, welche kurz *Ersatzstäbe* genannt werden sollen, in ein Stabgebilde, dessen statische Bestimm-

1) Sind sämtliche Elemente einer Zeile oder einer Spalte einer Determinante gleich Null, so ist die Determinante gleich Null.

2) Sind die Elemente zweier Zeilen oder zweier Spalten einer Determinante entsprechend gleich oder proportional, so ist die Determinante gleich Null. Z. B.:

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1, -a_1 c_1 \\ a_2, -a_2 c_2 \\ a_3, -a_3 c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 b_1 \lambda b_1 \\ a_2 b_2 \lambda b_2 \\ a_3 b_3 \lambda b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

In den nachstehenden Anwendungen werden wir zur Erzielung einer kurzen Ausdrucksweise die Ersatzstäbe *Y*-Stäbe nennen und die weggenommenen Stäbe: *Z*-Stäbe.

Manchem Leser dürfte die folgende kurze Anweisung zur Berechnung der Determinanten erwünscht sein. Eine Determinante vom r -ten Grade lässt sich in r -Unterdeterminanten vom $(r-1)$ -ten Grade zerlegen. Die Unterdeterminante zum Element a_k findet man, indem man die Spalte a und die k -te Zeile der ursprünglichen Determinante streicht; sie erhält das Vorzeichen $+$ oder $-$, je nachdem der Zeiger k ungerade oder gerade ist. Hiernach ergibt sich das folgende Schema:

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 d_1 \\ a_2 b_2 c_2 d_2 \\ a_3 b_3 c_3 d_3 \\ a_4 b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_3 c_3 d_3 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_2 c_2 d_2 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \end{vmatrix}.$$

Besonders wichtig ist der folgende Satz.

Addirt man die mit einer beliebigen Grösse multiplicierten Elemente einer Zeile oder Spalte zu den entsprechenden Elementen einer anderen Zeile oder Spalte, so ändert sich der Werth der Determinante nicht. Z. B. ist

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, b_1 + \lambda a_1, c_1 + \lambda' a_1 \\ a_2, b_2 + \lambda a_2, c_2 + \lambda' a_2 \\ a_3, b_3 + \lambda a_3, c_3 + \lambda' a_3 \end{vmatrix}.$$

Wählt man nun $\lambda = -\frac{b_1}{a_1}$ und $\lambda' = -\frac{c_1}{a_1}$ so erhält man

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2, b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2, c_2 - \frac{c_1}{a_1} a_2 \\ a_3, b_3 - \frac{b_1}{a_1} a_3, c_3 - \frac{c_1}{a_1} a_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2, c_2 - \frac{c_1}{a_1} a_2 \\ b_3 - \frac{b_1}{a_1} a_3, c_3 - \frac{c_1}{a_1} a_3 \end{vmatrix}.$$

Damit ist gezeigt, wie man den Grad einer Determinante erniedrigen kann.

Beispiel. Figur 427 stellt ein symmetrisches Fachwerk vor, welches man ein *sechsfaches Netzwerk* zu nennen pflegt, weil jede von Gurtung zu Gurtung reichende Strebe durch die Schaar der anders gerichteten Streben in *sechs* Abschnitte zerlegt wird. Die Stützweite wird durch die Knotenpunkte der einen Gurtung in zwei halbe Felder und n ganze Felder eingetheilt.

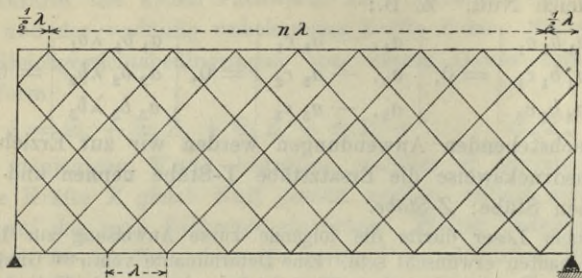


Fig. 427.

Sowohl die senkrechte als auch die wagerechte Mittellinie sind Symmetrieachsen. Die Abzählung der Stäbe und Knotenpunkte lehrt, dass das Fachwerk einen Stab zu wenig besitzt, wobei es ganz gleichgültig ist, ob die Streben an den Kreuzungsstellen miteinander verbunden sind oder nicht. Wir wollen den

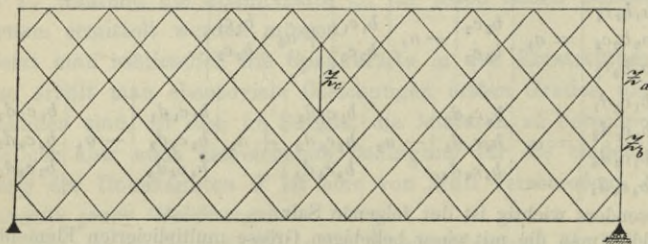


Fig. 428.

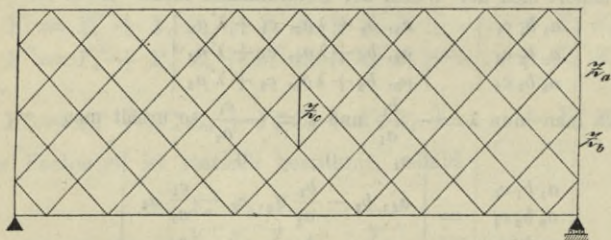


Fig. 429.

ersteren Fall voraussetzen, weil er der üblichen Ausführungsweise entspricht, und weil engmaschige Fachwerke ganz besonders für zerlegbare Brücken in Betracht kommen. Bei diesen aber sind kurze Stablängen am Platz, damit Transport und Zusammenbau leicht von statten gehen. Den fehlenden Stab fügen wir in der Weise hinzu, dass wir ein in der Mitte liegendes Viereck versteifen, wobei die in den Figuren 428 bis 430 dargestellten Anordnungen in Betracht

kommen können. Die ganze Abzählung ist übrigens überflüssig, denn ein Blick auf die Figur 431 lehrt, dass sich nach Einfügung von drei Y-Stäben und Wegnahme von drei Z-Stäben ein statisch bestimmtes Fachwerk ergibt, welches sich nach dem ersten Bildungsgesetze an eine aus aneinandergereihten Dreiecken

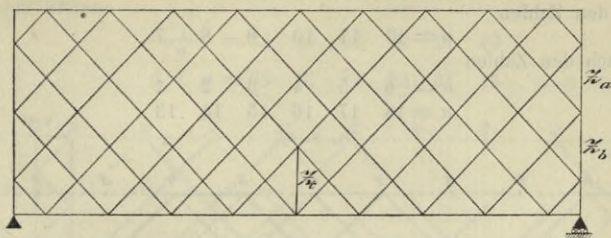


Fig. 430.

bestehende Scheibe angliedern lässt. Wäre die Aussteifung des einen Vierecks durch den Stab Z_c unterblieben, so würden den drei Y-Stäben nur zwei Z-Stäbe gegenüberstehen.

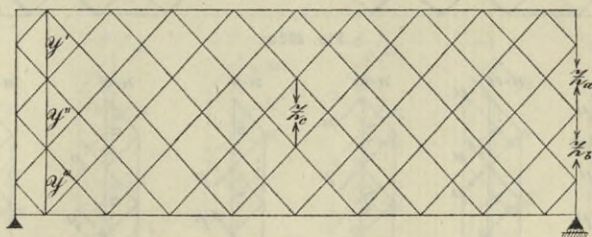


Fig. 431.

Nachdem nunmehr für die erforderliche Stabzahl gesorgt worden ist, muss zur Untersuchung der Determinante

$$(10) \quad D = \begin{vmatrix} Y_a' & Y_b' & Y_c' \\ Y_a'' & Y_b'' & Y_c'' \\ Y_a''' & Y_b''' & Y_c''' \end{vmatrix}$$

geschritten werden. Wir beginnen mit der Ermittlung der Spannkraft für den in Fig. 432a dargestellten Zustand $Z_a = 1$. Die gedrückten Streben und gedrückten Gurtstäbe sind unterstrichen, die spannungslosen Streben fortgelassen und die spannungslosen Gurtstäbe gestrichelt worden. Die Spannkraften in den Streben sind

$$\mu = \pm \frac{1}{2 \sin \varphi},$$

wo φ den Neigungswinkel der Streben gegen die Wagerechte bedeutet. In den Gurtungen entstehen die Spannkraften

$$\nu = \pm 1 \cdot \cotg \varphi.$$

In unserer Figur ist $n = 12$ angenommen worden; es greifen dann an der aus Dreiecken bestehenden Scheibe nur die Spannkraften von 4 Streben an. Rückt man die Scheibe um eine Feldweite nach rechts ($n = 11$), so gesellt sich zu den 4 Streben noch ein Gurtstab, dessen Spannkraft mit derjenigen der angrenzenden Strebe zu einer Mittelkraft von der Grösse μ und der Neigung φ vereinigt

werden kann. Es leuchtet ein, dass es stets genügt, die Spannkkräfte in den Streben zu verfolgen, weil sich die an der Scheibe angreifenden Gurtkräfte ohne weiteres aus der Bedingung ergeben, dass sich die Scheibe im Gleichgewicht befinden muss. Auf diese Weise gelangt man sehr schnell zu den sechs in Fig. 432 b dargestellten möglichen Belastungsweisen der Endscheibe; sie entsprechen nicht nur den Zahlen

$$\begin{aligned}
 n &= 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 \\
 n &= 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
 n &= 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 \\
 & & & & & & \text{u. s. w.}
 \end{aligned}$$

sondern auch den Zahlen

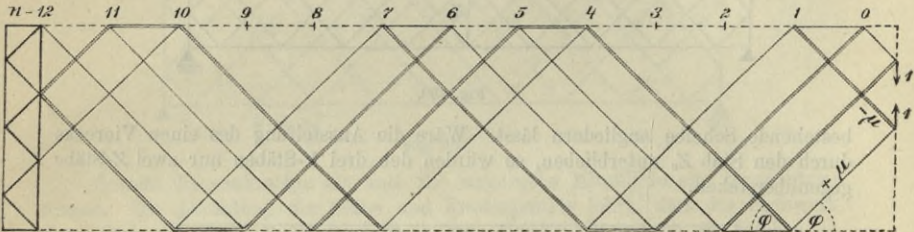


Fig. 432 a.

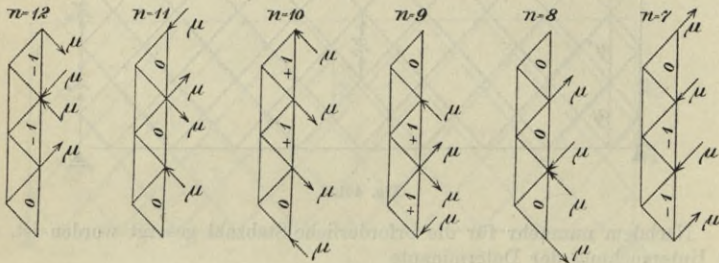


Fig. 432 b.

und liefern für die Spannkkräfte Y_a, Y_a', Y_a'', Y_a''' der Ersatzstäbe die in die Figuren eingetragenen Werthe. Da nun für

$$n = 2, 5, 8, 11, 14, 17, \dots$$

alle drei Werthe Y_a gleich Null sind, was zur Folge hat, dass auch die Determinante D gleich Null wird, so erweist sich das Fachwerk als unbrauchbar, sobald die Zahl $n - 2$ den Theiler 3 besitzt.

Der Belastungszustand $Z_b = 1$ ist das Spiegelbild des Zustandes $Z_a = 1$.

Für die weitere Untersuchung sind die drei in den Figuren 428, 429 und 430 dargestellten Fälle zu unterscheiden. Wir nehmen zunächst an, es sei n ungerade. Fig. 428.

Fig. 433 stellt den Spannungszustand $Z_c = 1$ dar. Die Spannkkräfte in den Streben sind wieder

$$\mu = \pm \frac{1}{2 \sin \varphi},$$

in den Gurtstäben:

$$\nu = \pm 1 \cdot \cotg \varphi.$$

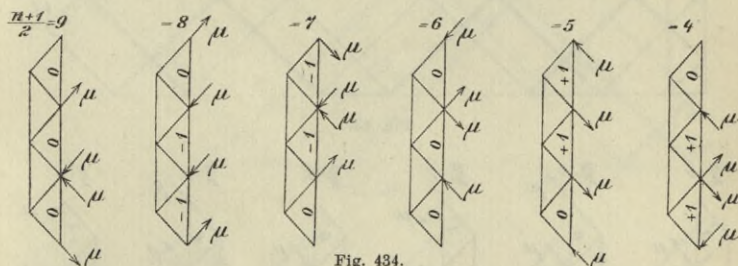
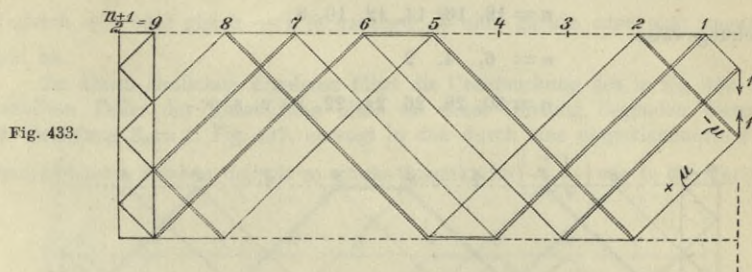
Die sechs verschiedenen Angriffsweisen, denen die Endscheibe ausgesetzt ist, zeigen die Figuren 434; sie entsprechen sowohl den Fällen

$$\frac{n+1}{2} = 9 \quad 8 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 4$$

als auch den Fällen

$$\frac{n+1}{2} = 15 \quad 14 \quad 13 \quad 12 \quad 11 \quad 10$$

$$d. i. n = \underline{17} \quad 27 \quad 25 \quad \underline{23} \quad 21 \quad 19 \quad u. s. w.$$



und liefern für die Spannkraften $Y_e' Y_e'' Y_e'''$ der Ersatzstäbe die in die Figuren 434 eingetragenen Werthe. Für die unterstrichenen n sind alle drei Werthe Y_e gleich Null, und es wird deshalb auch die Determinante D gleich Null. Scheidet man diese Fälle und die als unbrauchbar erkannten Fälle $n = 5, 11, 17, 23, \dots$ aus, so erhält man für alle noch übrig bleibenden die Determinanten

$$D = \begin{vmatrix} 0 & +1 & 0 \\ +1 & +1 & -1 \\ +1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{für } n = 3, 15, 27, \dots$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \end{vmatrix} \quad \text{für } n = 7, 19, 31, \dots$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{für } n = 9, 21, 33, \dots$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{für } n = 13, 25, 37, \dots;$$

dieselben sind gleich Null, weil die Elemente zweier Spalten entsprechend gleich oder proportional sind. Das untersuchte Fachwerk ist deshalb für jedes ungerade n unbrauchbar.

Ist n eine gerade Zahl, so sind die beiden in den Figuren 429 und 430 dargestellten Fälle zu unterscheiden. Für den ersten zeigt Fig. 435 den Spannungszustand $Z_e = 1$; die Figuren 436 geben Aufschluss über die 6 Angriffsweisen, denen die Endscheibe für verschiedene n ausgesetzt ist, und über die bei diesen Angriffsweisen in den Ersatzstäben hervorgerufenen Spannkraften. Sie entsprechen der Reihe nach den Werthen

$$n = 18, 16, 14, 12, 10, 8$$

beziehungsweise

$$n = 6, 4, 2$$

oder

$$n = 30, 28, 26, 24, 22, 20 \text{ u. s. w.}$$

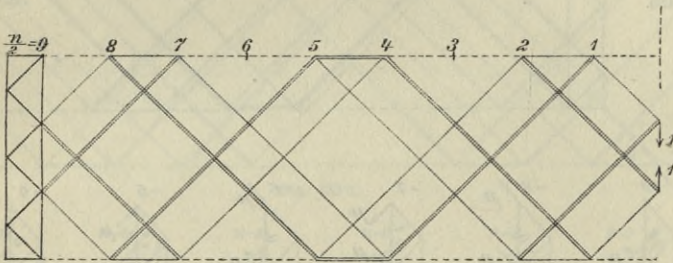


Fig. 435.

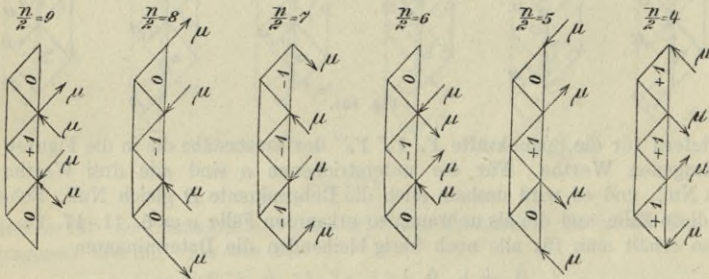


Fig. 436.

Nach Ausscheidung der bereits bei der Untersuchung des Zustandes $Z_a = 1$ als unbrauchbar erkannten Fälle

$$n = 2, 8, 14, 20, \dots$$

findet man für die Determinanten D die Werthe

$$D = \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & -1 \\ 0 & +1 & 0 \end{vmatrix} = +1 \text{ für } n = 4, 16, 28, \dots$$

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \text{ für } n = 6, 18, 30, \dots$$

$$D = \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \text{ für } n = 10, 22, 34, \dots$$

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = +1 \text{ für } n = 12, 24, 36, \dots$$

und erkennt, dass das Fachwerk in Fig. 429 statisch bestimmt ist, sobald $n - 2$ nicht durch 3 theilbar ist. Für die brauchbaren n ist die Determinante D gleich $+1$ oder gleich -1 je nachdem $\frac{n}{2}$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Zu einem ähnlichen Ergebniss führt die Untersuchung des in Fig. 430 dargestellten Falles der Aussteifung eines an einer Gurtung liegenden Vierecks. Die Belastung $Z_c = 1$, Fig. 437, erzeugt in den durch eine eingeklammerte 2 gekennzeichneten Streben doppelt so grosse Spannkraft ($\frac{+1}{\sin \varphi}$) wie in den übrigen.

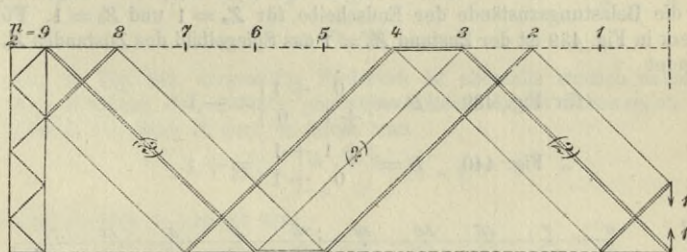


Fig. 437.

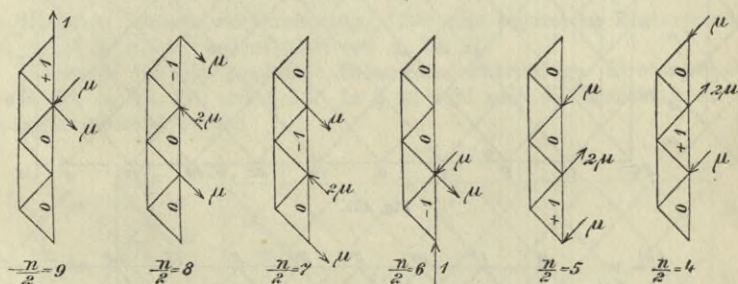


Fig. 438.

Die Spannkraften in den Gurtungen sind wieder gleich $+1 \cdot \cotg \varphi$. In den Figuren 438 sind die 6 verschiedenen Belastungsfälle für die Endscheibe angegeben. Man findet

$$D = \begin{vmatrix} +1 & 0 & -1 \\ +1 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \text{ für } n = 4, 16, 28, \dots$$

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & +1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = +1 \text{ für } n = 6, 18, 30, \dots$$

$$D = \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & +1 \end{vmatrix} = +1 \text{ für } n = 10, 22, 34, \dots$$

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \text{ für } n = 12, 24, 36, \dots$$

Das Fachwerk in Fig. 430 ist also statisch bestimmt, sobald $n - 2$ nicht durch 3 theilbar ist. Für die brauchbaren n ist die Determinante D gleich -1 oder gleich $+1$, je nachdem $\frac{n}{2}$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Weitere Übungsbeispiele liefern die Figuren 439 bis 442.

In den Figuren 439 und 440 bilden die Streben einen einzigen zusammenhängenden Stabzug $0\ 1\ 2\ 3\ 4\ \dots$, der von einem Eckknoten ausgeht und in einem anderen Eckknoten endet. Derartige mehrfache Strebenfachwerke sind stets statisch bestimmt. In jedem der beiden vorgeführten Beispiele sind zwei Y -Stäbe und zwei Z -Stäbe einzuführen. Die mit (a) und (b) bezeichneten Figuren zeigen die Belastungszustände der Endscheibe für $Z_a = 1$ und $Z_b = 1$. Für das Fachwerk in Fig. 439 ist der Zustand $Z_b = 1$ das Spiegelbild des Zustandes $Z_a = 1$. Man findet

$$\text{für Fig. 439} \quad D = \begin{vmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\text{„ Fig. 440} \quad D = \begin{vmatrix} +1 & +1 \\ 0 & +1 \end{vmatrix} = +1.$$

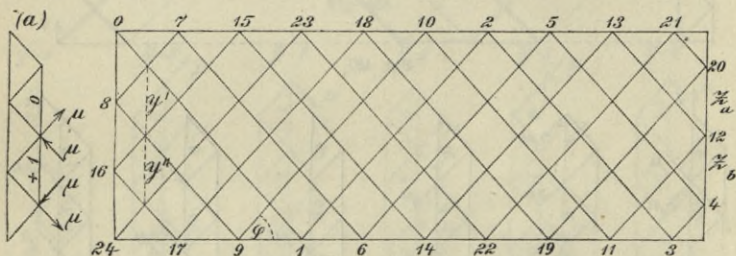


Fig. 439.

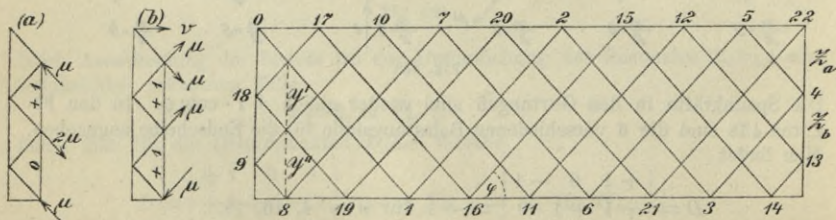


Fig. 440.

Das Fachwerk in Fig. 441 ist statisch unbestimmt, weil die Anzahl der Z -Stäbe um 1 grösser ist, als die Anzahl der Y -Stäbe. Dieser Fall liegt immer

vor, wenn ein Strebenzug vorkommt, der mit den Gurtungen und Endständern zusammen ein Dreiecknetz bildet (wie *I II III IV*); daneben treten dann stets *geschlossene* Strebenzüge auf, z. B. 0, 1, 2, 3, ... 8. Bei der Berechnung von D ist ein Z -Stab (gleichgültig, welcher) fortzulassen. Man findet stets $D = 0$. Um dies für Fig. 441 nachzuweisen, genügt es, den Zustand $Z_a = 1$ zu untersuchen; man findet $Y_a' = 0$, $Y_a'' = 0$. Das Fachwerk ist also beweglich, trotzdem es einen überzähligen Stab besitzt.

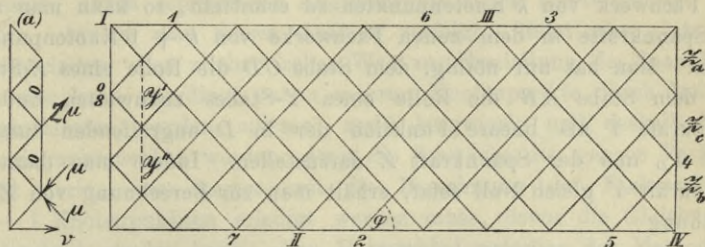


Fig. 441.

Das in Fig. 442 dargestellte Fachwerk ist ebenfalls statisch unbestimmt, weil zwei Y -Stäben drei Z -Stäbe gegenüberstehen. Es ist unbeweglich. Lässt man nämlich den Stab Z_c fort, so findet man

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Lässt man Z_b fort, so ergibt sich

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Das Fachwerk besitzt zwei Strebenzüge. Der eine beginnt im Knotenpunkte A_1 und endet in E_1 , der andere führt von A_2 bis E_2 .

Beispiele für die graphische Behandlung mehrtheiliger Strebenfachwerke finden sich in No. 210 und § 53. In § 53 wird auch die Ermittlung der Einflusslinien erläutert werden.

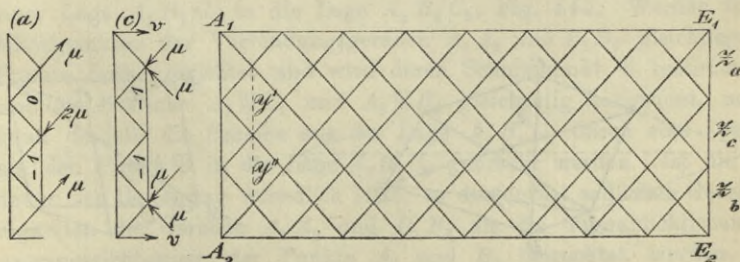


Fig. 442.

207. Das Verfahren von Henneberg. Aus einem statisch bestimmten Fachwerke von k Knotenpunkten und $2k - 3$ Stäben, bei welchem zwei Knotenpunkte A und B durch einen Stab verbunden

sind, kann man im allgemeinen ein solches von $k + 1$ Knotenpunkten in der Weise herleiten, dass man einen neuen Knotenpunkt D mit den Punkten A und B und einem dritten Knotenpunkte C durch Stäbe verbindet und den Stab AB wegnimmt. Das neue Fachwerk besitzt dann $2k - 3 + 2 = 2(k + 1) - 3$ Stäbe, und diese Anzahl ist notwendig und hinreichend. Ist man nun im Stande, die Spannkraften in dem Fachwerk von k Knotenpunkten zu ermitteln, so kann man auch die Spannkraften in dem neuen Fachwerke von $k + 1$ Knotenpunkten finden. Man hat nur nöthig, dem Stabe CD die Rolle eines Z -Stabes und dem Stabe AB die Rolle eines Y -Stabes zuzuweisen und die Spannkraft Y als lineare Funktion der in D angreifenden äusseren Kraft P_D und der Spannkraft Z darzustellen. Indem man dann die Spannkraft Y gleich Null setzt, erhält man zur Berechnung von Z die Gleichung

$$(11) \quad 0 = Y_0 + Y'Z.$$

Hat man aber Z gefunden, so kann man die Spannkraften in den Stäben DA und DB ermitteln und kennt nunmehr alle am Fachwerk von k Knotenpunkten angreifenden Kräfte. Ist $Y' = 0$, so ist das Fachwerk unbrauchbar; es kann von unendlich kleiner oder endlicher Beweglichkeit sein.

Ein Beispiel für den Fall unendlich kleiner Beweglichkeit ist das bereits in No. 205 behandelte Pascal'sche Sechseck (Fig. 443); hier tritt das Gleichgewicht erst nach einer unendlich kleinen Bewegung ein und erfordert bei vollkommen starren Stäben unendlich grosse Spannkraften. Ein Beispiel für endliche Beweglichkeit zeigt Fig. 444; hier liegen zwei durch gleichlange parallele Stäbe verbundene Dreiecke vor. Gleichgewicht ist bei diesem Fachwerk überhaupt nur dann möglich, wenn auch $Y_0 = 0$ ist; dann aber ist der Gleichgewichtszustand kein bestimmter. Der Nachweis, dass in beiden Fällen $Y' = 0$ ist, ist leicht zu führen.

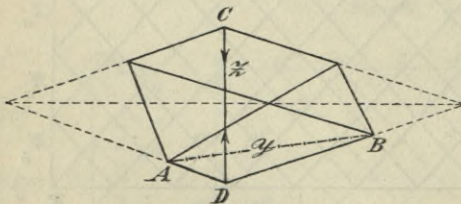


Fig. 443.

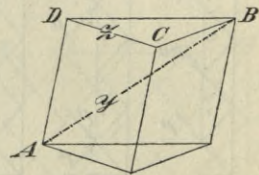


Fig. 444.

Da nun ein statisch bestimmtes Fachwerk von k Knotenpunkten und $2k - 3$ Stäben mindestens einen Knotenpunkt besitzt, in welchem höchstens drei Stäbe zusammenkommen (denn liefern in allen Knoten-

punkten mindestens vier Stäbe zusammen, so müssten wenigstens $\frac{4k}{2} = 2k$ Stäbe vorhanden sein), so setzt uns das Henneberg'sche Bildungsgesetz in Verbindung mit dem auf Seite 441 unter (1) beschriebenen einfachsten Bildungsgesetze in den Stand, jedes Fachwerk von k Knotenpunkten aus dem einfachsten statisch bestimmten Fachwerke, dem Dreieck, durch schrittweise Angliederung neuer Knotenpunkte herzu-
leiten. Indem man diesen Aufbau verfolgt, findet man stets einen rechnerischen oder zeichnerischen Weg zur Ermittlung der Spannkraft; derselbe kann allerdings, wenn mehrere Knotenpunkte durch drei Stäbe angeschlossen werden müssen, recht langwierig und deshalb für die Praxis unbrauchbar werden; denn die Schwäche des ganzen Verfahrens liegt darin, dass immer erst die Berechnung des Fachwerks von $k - 1$ Knotenpunkten erledigt werden muss, bevor die Gleichung 11 aufgestellt werden kann. Den Unterschied zwischen der Methode von Henneberg und dem in No. 206 mitgetheilten ganz allgemeinen Verfahren der Stabvertauschung wird man sofort deutlich erkennen, wenn man versucht, die vorhin gelösten Aufgaben nach der Vorschrift von Henneberg zu behandeln.*)

§ 52.

Kinematische Theorie des Fachwerks.

Zu weiteren Eigenschaften statisch bestimmter Fachwerke werden uns einige einfache Sätze der Bewegungslehre führen, die wir zunächst ableiten wollen.

208. Der Satz vom augenblicklichen Drehpunkte. Eine irgendwie begrenzte ebene Scheibe ABC bewege sich in ihrer Ebene aus einer Lage $A_1 B_1 C_1$ in die Lage $A_2 B_2 C_2$, Fig. 445. Werden in den Mittelpunkten der Verbindungsgeraden $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ gleichliegender Punkte Lothe errichtet und wird deren Schnittpunkt \mathfrak{P} bestimmt, so sind die Dreiecke $A_1 \mathfrak{P} B_1$ und $A_2 \mathfrak{P} B_2$ gleichartig kongruent, und es kann deshalb die Scheibe aus der Lage $A_1 B_1 C_1$ durch eine Drehung um den Punkt \mathfrak{P} in die Lage $A_2 B_2 C_2$ gebracht werden. Ist die Zeitdauer der Bewegung unendlich klein, so dürfen bei endlichen Geschwindigkeiten die Geraden $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ als die augenblicklichen Bewegungsrichtungen der Punkte A_1 und B_1 betrachtet werden, und hieraus folgt, dass sich die Bewegung der Scheibe in jedem Augenblicke

*) In seinem Buche: *Statik der starren Systeme* (Darmstadt 1886) beschränkt sich Henneberg darauf, sein Verfahren auf den allereinfachsten Fall, das Sechseck, anzuwenden.

auf eine Drehbewegung um einen festen Punkt \mathfrak{P} zurückführen lässt. Man nennt diesen Punkt den *augenblicklichen Drehpunkt* oder auch den *augenblicklichen Pol*; seine Lage ist bestimmt, sobald die augenblicklichen Bewegungsrichtungen von irgend zwei Punkten der Scheibe gegeben sind. Man errichtet in jenen Punkten auf deren Bewegungsrichtungen Lothe und findet den Pol als den Durchschnittspunkt dieser Lothe. Fig. 446.

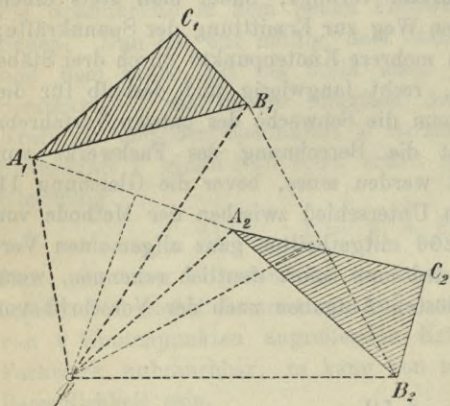


Fig. 445.]

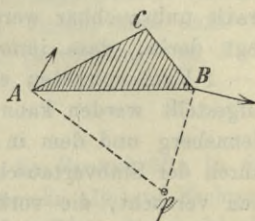


Fig. 446.

Werden z. B. zwei Scheiben *I* und *II* durch zwei Stäbe *AC* und *BD* miteinander verbunden, Fig. 447, und wird *II* festgehalten, so kann sich der Punkt *A* nur auf einem Kreisbogen bewegen, der mit der Stablänge *AC* um *C* beschrieben wird. Die Geschwindigkeit v_A des Punktes *A* ist also rechtwinklig zu *AC*. Ganz ebenso findet man, dass die Geschwindigkeit v_B des Punktes *B* rechtwinklig zu *BD* ist. Im Schnittpunkte *G* der beiden Stabachsen liegt mithin der augenblickliche Drehpunkt der Scheibe *I*. In diesem Punkte sind die Scheiben gewissermassen durch ein Gelenk miteinander befestigt, und man

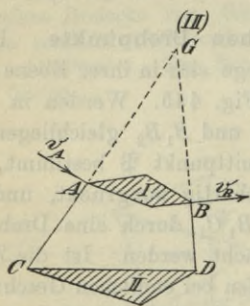


Fig 447.

darf deshalb, so lange es sich nur um unendlich kleine Bewegungen handelt, den Punkt *G* als den gemeinschaftlichen Punkt der beiden Scheiben ansehen. Wir werden *G* auch den Pol von *I* gegen *II* oder, was dasselbe ist, von *II* gegen *I* nennen und mit *(II)* bezeichnen.

209. Darstellung der Geschwindigkeiten. Bedeutet ω die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung um \mathfrak{P} , so ist die Geschwindigkeit irgend eines Punktes A der Scheibe $v_A = \omega \mathfrak{P}A$. Das gegenseitige Verhältniss der Geschwindigkeiten verschiedener Punkte A, B, C (Fig. 448) ist durch die Gleichung bestimmt

$$(1) \quad v_A : v_B : v_C = \overline{\mathfrak{P}A} : \overline{\mathfrak{P}B} : \overline{\mathfrak{P}C}.$$

Denkt man sämtliche Geschwindigkeiten in gleichem Sinne um einen rechten Winkel gedreht, so dass also

$$AA' = v_A; \quad BB' = v_B; \quad CC' = v_C$$

ist, so folgt unmittelbar aus der Gleichung (1), dass

$$A'B' \parallel AB \text{ ist, } B'C' \parallel BC \text{ und } C'A' \parallel CA.$$

Die Strecken AA', BB', CC' nennt man die *lothrechten Geschwindigkeiten der Punkte A, B, C* und erhält den Satz:

Die Endpunkte $A'B'C' \dots$ der lothrechten Geschwindigkeiten der Punkte $ABC \dots$ bilden eine Figur, welche ähnlich und ähnlich liegend zu der sich bewegenden Figur $ABC \dots$ ist. Der Pol \mathfrak{P} ist der Aehnlichkeitspunkt beider Figuren.

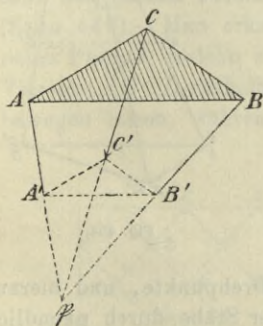


Fig. 448.

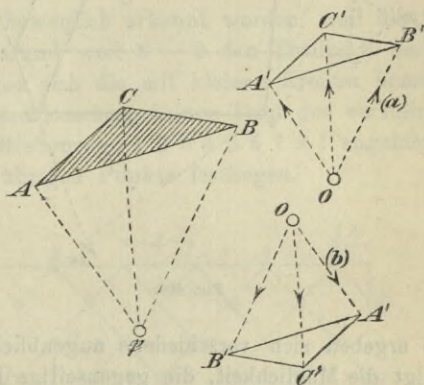


Fig. 449.

Die Figuren $ABC \dots$ und $A'B'C' \dots$ werden wir kurz mit \mathfrak{F} und \mathfrak{F}' bezeichnen und \mathfrak{F}' den Geschwindigkeitsplan von \mathfrak{F} nennen. Zuweilen wird es sich auch als nützlich erweisen, die lothrechten Geschwindigkeiten zu einem Strahlenbüschel zu vereinigen. Die Figuren 449 (a) und (b) veranschaulichen diese Darstellungsweise; die von irgend einem Nullpunkte O aus aufgetragenen Strecken OA', OB', OC' geben nach Grösse und Richtung die um 90° gedrehten Geschwindig-

keiten v_A, v_B, v_C der Punkte A, B, C an. Die Figuren \mathfrak{F}' und \mathfrak{F} sind wieder ähnlich, sie brauchen aber nicht mehr ähnlich zu liegen.

210. Geometrisches Kennzeichen eines beweglichen Fachwerks. Wir betrachten jetzt eine ebene Stabverbindung \mathfrak{F} mit den Knotenpunkten $1, 2, 3, \dots, k$ und denken uns irgend eine Figur \mathfrak{F}' gezeichnet, bestehend aus geraden Linien, durch welche die den Fachwerkknoten entsprechenden Punkte $1', 2', 3', \dots, k'$ miteinander verbunden werden, so zwar dass jedem Stabe ik eine zu ik parallele Gerade $i'k'$ entspricht. Werden dann die Strecken ii' und kk' als die augenblicklichen lothrechten Geschwindigkeiten der Knotenpunkte i und k aufgefasst, so ist der Schnittpunkt \mathfrak{P}_{ik} der Geraden ii' und kk' der augenblickliche Pol des Stabes ik . Gelingt es nun, zu der Fachwerkfigur \mathfrak{F} eine Figur \mathfrak{F}' zu zeichnen, welche der Figur \mathfrak{F} nicht ähnlich ist (wie bei dem unversteiften Viereck $1\ 2\ 3\ 4$ in Fig. 450),

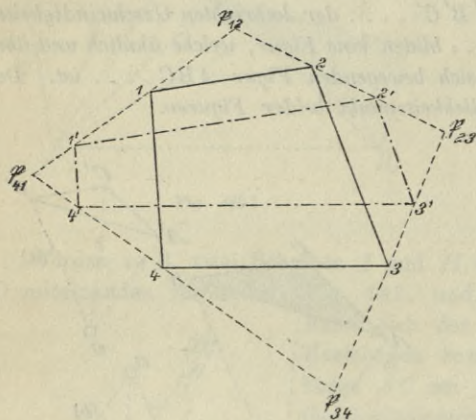


Fig. 450.

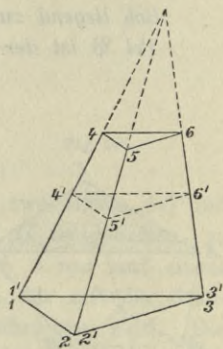


Fig. 451.

so ergeben sich verschiedene augenblickliche Drehpunkte, und hieraus folgt die Möglichkeit, die gegenseitige Lage der Stäbe durch unendlich kleine Drehungen der Stäbe um jene verschiedenen Pole zu ändern. Es folgt hieraus der Satz:

Ist es möglich, zu der Fachwerkfigur \mathfrak{F} eine Figur \mathfrak{F}' zu zeichnen, welche der Figur \mathfrak{F} nicht ähnlich ist, so ist das Fachwerk kein starres.

In diesem Satze besitzen wir ein in der Regel sehr leicht zu handhabendes Hilfsmittel, diejenigen Fachwerke zu erkennen, welche mindestens von unendlich kleiner Beweglichkeit sind, trotzdem sie die nothwendige Stabzahl oder sogar noch mehr Stäbe, als erforderlich sind,

a, b, n eingetragen worden. Der Geschwindigkeitsplan lässt sich danach leicht vervollständigen.

4) Das unsymmetrische sechstheilige Netzwerk in Fig. 454 ist ebenfalls schon in No. 206 untersucht und als beweglich erkannt worden. Der nur für die rechte Trägerhälfte durch Ziffern beschriebene Geschwindigkeitsplan dürfte einer besonderen Erläuterung nicht bedürfen.

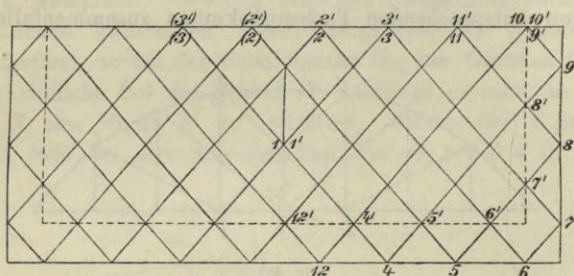


Fig. 454.

5) Soll das Sechseck in Fig. 455 untersucht werden, so zeichnet man zu dem Viereck 1 2 3 4 die unähnliche Figur 1' 2' 3' 4', bestimmt 5' mittels $2'5' \parallel 25$ und $4'5' \parallel 45$, schliesslich 6' mittels $3'6' \parallel 36$ und $1'6' \parallel 16$. Ist dann $5'6' \parallel 56$, so ist das Sechseck beweglich. Dass

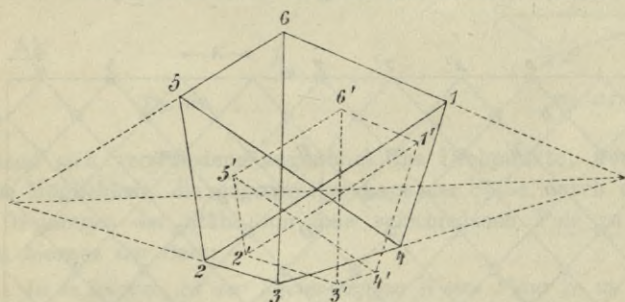


Fig. 455.

dies nur dann der Fall ist, wenn das Sechseck ein *Pascal'sches* ist, wurde auf Seite 443 gezeigt, liesse sich aber auch leicht geometrisch nachweisen.

6) Figur 456 zeigt ein Fachwerk mit drei festen Auflagerge-
lenken 1, 2, 8 und genügend viel Stäben. Man wise dem Knotenpunkte 3
des Gelenkvierecks 1 2 3 4 den in der Geraden 1 3 liegenden Punkt 3'
zu und bestimme nun schrittweise die Punkte 4' 5' 6' und 7'. Fällt 7'
in die Gerade 7 8, so ist das Fachwerk beweglich.

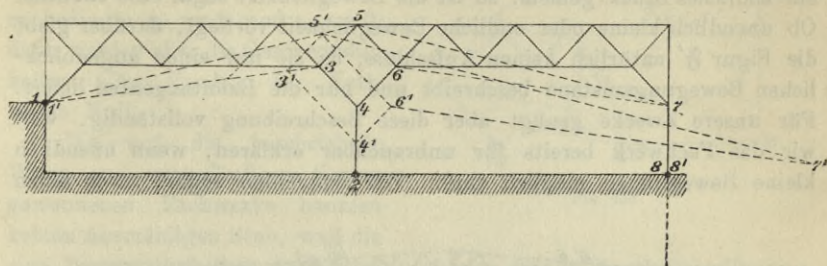


Fig. 456.

211. Die zwangläufige kinematische Kette. An das letzte
Beispiel wollen wir noch eine Betrachtung knüpfen, die uns zu wei-
teren Anwendungen hinüberleiten wird. Beseitigen wir den Stab 7 8
(Fig. 456), so wird das Fachwerk auf jeden Fall beweglich; es besitzt
aber nur *eine* Bewegungsfreiheit, weil durch Wegnahme des einen
Stabes nur *eine* Starrheitsbedingung fortgefallen ist. Alle Punkte des
Fachwerks sind gezwungen, sich nach *bestimmten Richtungen* zu be-
wegen, und nur über die *Grösse* der Geschwindigkeit *eines einzigen*
Punktes darf frei verfügt werden. Ändert sich diese *freie Geschwindig-*
keit, so beschreiben die Endpunkte der lothrechten Geschwindigkeiten
gerade ähnliche Punktreihen; das gegenseitige Verhältniss der Ge-
schwindigkeiten bleibt also ungeändert. Wird die freie Geschwindigkeit
gleich Null gesetzt, so werden auch die Geschwindigkeiten aller übrigen
Punkte gleich Null.

Wir nennen nun ein bewegliches Gebilde, dessen Glieder derart
miteinander *verkettet* sind, dass sie nach Feststellung *eines* Gliedes (des
Gestells oder *Widerlagers*) *gezwungen* sind, bestimmte Bewegungen zu
vollziehen, (nach *Reuleaux*) eine *zwangläufige kinematische Kette* oder
auch kurz eine *zwangläufige Kette* und sagen: *der Punkt 7 in Fig. 456*
wird mittels einer zwangläufigen Kette geführt. Zwingen wir nun diesen
Punkt, sich auf einer zweiten, die erste Bahn kreuzenden Bahn zu be-
wegen, indem wir ihn durch einen Stab mit einem festen Punkte ver-
binden, oder, allgemeiner, indem wir ihn mit Hilfe einer zweiten zwang-
läufigen Kette führen, so halten wir ihn offenbar in der Ebene fest
und rauben damit zugleich allen Gliedern der beiden Ketten die Fähig-

keit, sich zu bewegen. Aus den beiden zwangläufigen Ketten wird ein starres Fachwerk.

Besitzen jedoch die beiden Bahnen eine gemeinsame Tangente, so bleibt innerhalb eines beider Bahnen gemeinsamen Bogenelements eine unendlich kleine Beweglichkeit bestehen. Haben die beiden Bahnen ein endliches Stück gemein, so ist die Beweglichkeit sogar eine endliche. Ob unendlich kleine oder endliche Beweglichkeit vorliegt, darüber giebt die Figur 5' natürlich keinen Aufschluss, da sie nur einen augenblicklichen Bewegungszustand beschreibt und nur die Bahntangenten liefert. Für unsere Zwecke genügt aber diese Beschreibung vollständig, weil wir das Fachwerk bereits für unbrauchbar erklären, wenn unendlich kleine Bewegungen möglich sind. Wir empfehlen sogar, noch einen

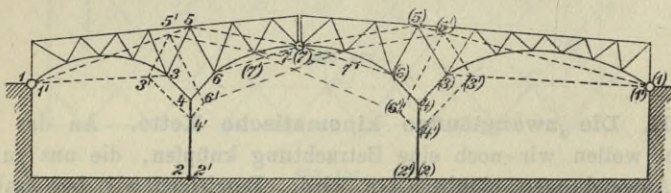


Fig. 457.

Schritt weiter zu gehen und dafür zu sorgen, dass sich die beiden Bahnen nicht unter zu spitzen Winkeln schneiden, damit die von der Elasticität der Stäbe und Widerlager herrührenden Verschiebungen der Knotenpunkte (deren Ermittlung zu den Aufgaben des zweiten Bandes dieses Buches gehört) nicht zu gross ausfallen.

Ein übersichtliches Beispiel zu den vorstehenden Ausführungen ist der in Fig. 457 dargestellte, über drei Oeffnungen gespannte Bogen-träger, dessen Scheitelgelenk durch zwei zwangläufige Ketten geführt wird, deren Gliederung mit der Gliederung der in Fig. 456 zur Führung des Punktes 7 benutzten Kette übereinstimmt. Fallen die Geraden 7 7' und (7) (7') zusammen, so ist das Fachwerk kein starres.

Ein anderes Verfahren, eine zwangläufige Kette in ein starres Gebilde zu verwandeln, besteht darin, zwei Punkte i und k durch einen Stab oder eine starre Scheibe miteinander zu verbinden. Allerdings darf die durch die Punkte i' und k' des Geschwindigkeitsplanes der Kette bestimmte Gerade $i'k'$ nicht parallel zu ik sein, sonst bleibt auch nach Einfügung der starren Verbindung ik mindestens eine unendlich kleine Beweglichkeit bestehen. In Fig. 458 mögen die Strecken $i(i)$ und $k(k)$ nach Grösse und Richtung die wirklichen Geschwindigkeiten

der Punkte i und k darstellen; die Punkte i und k nähern sich dann einander mit der Geschwindigkeit $c = v_{ik} + v_{ki}$, wo v_{ik} und v_{ki} die Längen der von i' und k' auf ik gefällten Lothe bedeuten. Die Einfügung einer starren Verbindung bewirkt nun, dass $c = 0$ wird. Dies erfordert aber entweder $v_{ki} = -v_{ik}$, woraus dann $i'k' \parallel ik$ folgt, oder es bedingt: $v_{ki} = 0$ und $v_{ik} = 0$; dann werden aber die Geschwindigkeiten aller Punkte der Kette gleich Null.

Die auf die beschriebene Weise aus zwangläufigen Ketten gewonnenen Fachwerke besitzen keinen überzähligen Stab, weil die eine Bewegungsfreiheit der Kette durch eine einzige Starrheitsbedingung vernichtet wurde. Dabei muss allerdings vorausgesetzt werden, dass die aus starren Scheiben bestehenden Glieder nicht mehr Stäbe enthalten, als erforderlich sind.

Die Herleitung starrer Fachwerke aus zwangläufigen Ketten giebt meistens einen besonders klaren Einblick in das Wesen der bei gewissen ausgezeichneten Lagen ihrer Glieder auftretenden Ausnahmefälle, und schon aus diesem Grunde halten wir es für nützlich, uns etwas eingehender mit den zwangläufigen Ketten zu beschäftigen.

212. Bildungsgesetze und Geschwindigkeitspläne zwangläufiger Ketten. 1) Das einfachste, schon in den beiden vorhin behandelten Beispielen (Fig. 456 und Fig. 457) benutzte Bildungsgesetz besteht darin, an zwei Knotenpunkte A und B einer zwangläufigen Kette, die kurz mit \mathfrak{K} bezeichnet werden möge, einen neuen Knoten C durch zwei starre Scheiben AC und BC anzuschliessen. Aus den lothrechten Geschwindigkeiten AA' und BB' der Punkte A und B findet man diejenige von C , indem man $A'C' \parallel AC$ und $B'C' \parallel BC$ zieht, Fig. 459. Durch die Punkte A' und C' ist die Bewegung der Scheibe AC vollständig bestimmt, ebenso durch B' und C' die Bewegung der Scheibe BC . Den zum Punkte D der Scheibe AC gehörigen Punkt D' findet man z. B. durch Ziehen der Geraden $A'D' \parallel AD$ und $C'D' \parallel CD$.

Dieses einfachste Bildungsgesetz setzt uns in den Stand, von einem Gelenkviercke ausgehend, leicht zu überschauende Ketten zu bilden; es birgt zwei Ausnahmefälle.

Liegt nämlich C in der Geraden AB und ist die Gerade $A'B'$ parallel zu AB , so darf man den Punkt C' nach Belieben in der Geraden $A'B'$ wählen. Die neue Kette ist also nicht zwangläufig, sondern besitzt zwei Bewegungsfreiheiten.

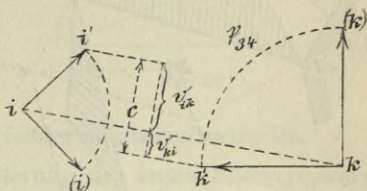


Fig. 458.

Fällt dagegen C in die Gerade AB und liegen A' und B' nicht in einer Parallelen zu AB , so führt unsere Konstruktion des Punktes C' zu einer unendlich grossen Geschwindigkeit $\overline{CC'}$. Damit nun diese Strecke endlich werde, müssen die Geschwindigkeiten der Punkte A und B gleich Null sein; es muss also die freie Geschwindigkeit der Kette \mathfrak{K} den Werth Null annehmen. Dann ruht die Kette \mathfrak{K} , und die Bewegung des Punktes C ist zwangläufig.

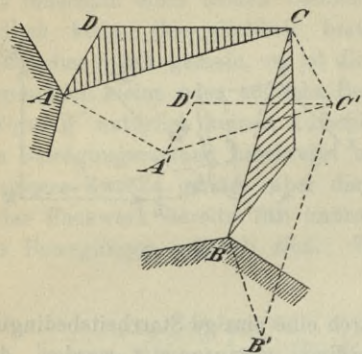


Fig. 459.

Dieses Ergebnis darf uns nicht überraschen. Würden wir nämlich die Knotenpunkte A und B der Kette \mathfrak{K} durch einen Stab verbinden, so würden wir ein starres Fachwerk erhalten; Kräfte, die an den Gliedern

desselben angreifen, sind nicht im Stande, eine Bewegung hervorzubringen. Dieser Gleichgewichtszustand bleibt aber auch dann bestehen, wenn wir den Stab AB durch ein in die Gerade AB fallendes Gelenk in zwei gegeneinander drehbare Theile zerlegen, wenn wir nur dafür sorgen, dass an den Theilen AC und CB keine äusseren Kräfte angreifen. Ruft die Belastung der übrigen Glieder der Kette \mathfrak{K} in AB einen Zug hervor, so besteht sogar sicheres Gleichgewicht; wird Stab AB gedrückt, so ist das Gleichgewicht zwar unsicher, es bleibt aber ungestört, so lange die drei Punkte A , C und B in einer Geraden liegen; und nur dieser augenblickliche Zustand steht hier zur Beurtheilung. Dagegen kann man C in Bewegung setzen, indem man das Glied AC oder das Glied BC oder irgend eines der mit C durch weitere Angliederung zwangläufig in Verbindung gebrachten Theile der aus \mathfrak{K} abgeleiteten neuen Kette \mathfrak{K}' durch eine äussere Kraft antreibt. Sämmtliche Glieder der Kette \mathfrak{K} bleiben hierbei in Ruhe, A' fällt mit A zusammen, B' mit B ; C' wird in der Geraden AB angenommen.

Von einer Kette, die sich den Belastungen gewisser Glieder gegenüber wie ein starres Gebilde verhält, sagt man, sie befindet sich gegenüber den an jenen Gliedern angreifenden Kräften in einer *Todtlage*. Sie verliert diese Eigenschaft im allgemeinen, sobald das festgestellte Glied freigegeben und dafür ein anderes Glied zum Widerlager gemacht wird.

So befindet sich ein Gelenkviereck 1 2 3 4, dessen Knotenpunkte 1 2 3 in einer Geraden liegen, in einer *Todtlage*, sobald das Glied 1 4

festliegt und die antreibende Kraft am Gliede 3 4 angreift. Wird aber eines der beiden Glieder 1 2 oder 2 3 zum Gestell gemacht, so kann die Kette mit Hilfe eines jeden der drei übrigen Glieder bewegt werden. Liegen alle vier Punkte in einer Geraden, so besitzt die Kette zwei Bewegungsfreiheiten. Man kann, wenn man das Glied 1 4 festhält, den Punkten 2 und 3 beliebig grosse, von einander unabhängige endliche Geschwindigkeiten erteilen.

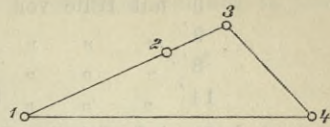


Fig. 460.

2) Zu einer wesentlichen Erweiterung des ersten Bildungsgesetzes gelangt man, wenn man jedes der drei Gelenke A, B und C auf die in Fig. 461 veranschaulichte Weise durch zwei Stäbe (an deren Stelle auch zwei Scheiben treten dürfen) ersetzt. Die Knotenpunkte 1, 2, 5, 6 mögen einer zwangsläufigen Kette \mathfrak{K} angehören, ihre lothrechten Geschwindigkeiten $1\ 1', 2\ 2', 5\ 5', 6\ 6'$ seien bekannt.

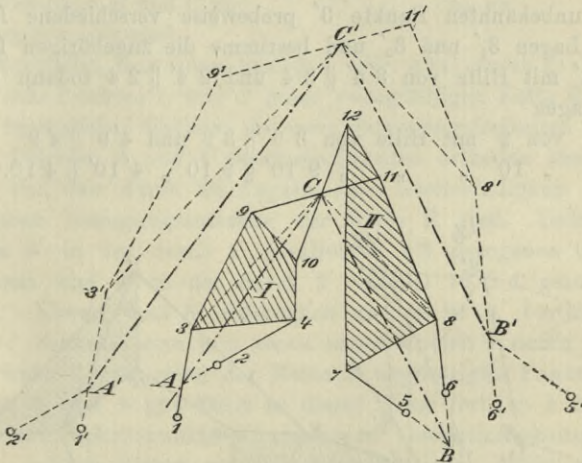


Fig. 461.

Die Schnittpunkte A, B, C der drei Stäbepaare

$$1-3, 2-4 \mid 5-7, 6-8 \mid 9-11, 10-12$$

spielen dieselbe Rolle wie vorhin die Gelenke A, B, C . Man bestimmt also

$$\begin{aligned} A' & \text{ mit Hilfe von } 1'A' \parallel 1A \text{ und } 2'A \parallel 2A, \\ B' & \text{ " " " } 5'B' \parallel 5B \text{ " } 6'B' \parallel 6B, \\ C' & \text{ " " " } A'C' \parallel AC \text{ " } B'C' \parallel BC, \end{aligned}$$

betrachtet nun C als gemeinschaftlichen Punkt der beiden Scheiben I und II und findet dann

$$\begin{array}{l} 3' \text{ mit Hilfe von } 1'3' \parallel 13 \text{ und } C'3' \parallel C3, \\ 9' \text{ " " " } 3'9' \parallel 39 \text{ " } C'9' \parallel C9, \\ 8' \text{ " " " } 8'C' \parallel 8C \text{ " } 6'8' \parallel 68, \\ 11' \text{ " " " } 8'11' \parallel 811 \text{ " } C'11' \parallel C11. \end{array}$$

Jetzt sind für jede Scheibe die Geschwindigkeiten zweier Punkte gegeben, und damit sind die Bewegungszustände der beiden Scheiben vollständig bestimmt. Man kann auch nach Aufsuchung der Punkte $A'B'C'$ die Geschwindigkeiten der anderen Punkte in einer anderen Reihenfolge ermitteln, z. B. erst $4'$ mit Hilfe von $2'4' \parallel 24$ u. $C'4' \parallel C4$ sodann $7'$ und $12'$ und gewinnt so verschiedene Proben für die Schärfe der Zeichnung.

Ein anderes Verfahren, welches voraussetzt, dass sich die Punkte ABC in unbequemer Lage befinden und deshalb nicht benutzt werden können, ist das folgende.

Man ziehe durch $1'$ eine Parallele zu 13 , weise in dieser dem vorläufig unbekanntem Punkte $3'$ probeweise verschiedene Lagen zu, z. B. die Lagen $3'_1$ und $3'_2$ und bestimme die zugehörigen Lagen des Punktes $4'$ mit Hilfe von $3'4' \parallel 34$ und $2'4' \parallel 24$ sodann die zugehörigen Lagen

$$\begin{array}{l} \text{von } 9' \text{ mit Hilfe von } 3'9' \parallel 39 \text{ und } 4'9' \parallel 49 \\ \text{" } 10' \text{ " " " } 9'10' \parallel 910 \text{ " } 4'10' \parallel 410. \end{array}$$

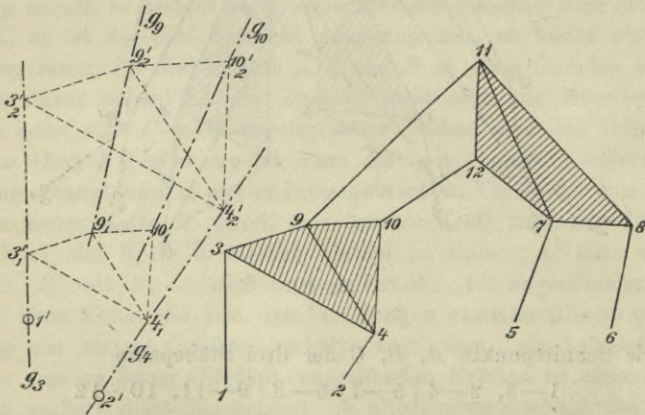


Fig. 462.

Da sich nun die Punkte $3'$ und $4'$ in Geraden g_3 und g_4 bewegen, so müssen auch die Punkte $9'$ und $10'$ gerade Linien g_9 und g_{10} be-

schreiben.*) In derselben Weise lassen sich auch die Geraden g_{11} und g_{12} finden, in denen die Punkte $11'$ und $12'$ liegen müssen, und es bleibt jetzt nur noch die auf Seite 230 erledigte Aufgabe zu lösen, ein Viereck zu zeichnen, dessen Ecken in gegebenen Geraden liegen und dessen Seiten gegebene Richtungen haben.

Besonders wichtig ist der in Fig. 463 dargestellte Sonderfall einer Scheibe, die mit den Punkten 1 2 und B einer zwangsläufigen Kette \mathfrak{K} durch drei Stäbe 1 3, 2 4 und BC verbunden ist. Wir haben schon durch die ganze Bezeichnung hervorgehoben, dass zwei der vorhin angenommenen Stäbepaare zu Gelenken B und C zusammengeschumpft sind.

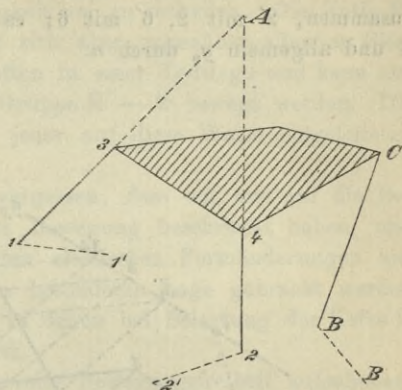


Fig. 463.

3) Verbindet man einen Stab 3 4 (Fig. 464) durch zwei Stäbe 1 3 und 2 4 mit Punkten 1 und 2 einer zwangsläufigen Kette \mathfrak{K} , so erhält man ein bewegliches Gebilde, das zwei Bewegungsfreiheiten besitzt, da man den Punkten 3 und 4 Geschwindigkeiten ertheilen kann, die unabhängig von dem durch die Angabe einer Geschwindigkeit vollständig beschriebenen Bewegungszustande der Kette \mathfrak{K} sind. Bedingung ist nur, dass $3'$ in der durch $1'$ parallel zu 1 3 gezogenen Geraden g_3 liegen muss und $4'$ in der durch $2'$ parallel zu 2 4 gezogenen Geraden g_4 . Nimmt man $3'$ willkürlich an, so ist $4'$ bestimmt durch $3'4' \parallel 34$. Schliesst man nun einen neuen Knoten 5 durch zwei Stäbe an den Punkt 3 und einen der Kette \mathfrak{K} angehörigen Punkt 6 an, sodann 7 an 4 und 5 und fährt in dieser Weise fort, so kann man die zum Geschwindigkeitspunkte $3'$ gehörigen Geschwindigkeitspunkte $5'$, $7'$, mittels Ziehen von Parallelen festlegen. Weist man $3'$ die beiden Lagen $3_1'$ und $3_2'$ zu, so erhält man für jeden auf die beschriebene Weise angeschlossenen Knotenpunkt n zwei Punkte n_1' und n_2' , und diese bestimmen eine Gerade g_n , in der sich n' bewegt, sobald $3'$ die Gerade g_3 beschreibt.

Die Lage der Geraden g_n hängt von der Grösse der freien Geschwindigkeit der Kette \mathfrak{K} ab. Da aber g_3, g_4, g_6 eine feste

*) Die zu den Punkten einer starren Scheibe gehörigen Geraden g schneiden sich in einem Punkte.

Richtung besitzen, weil sie der Reihe nach parallel zu den Stabachsen 1 3, 2 4 und 6 5 sind, so behalten auch alle übrigen Geraden g_n ihre Richtungen unverändert bei, wenn sich die Grösse der Geschwindigkeiten der Punkte 1, 2, 6 ändert. Ruht die Kette \mathfrak{R} , so fällt 1' mit 1 zusammen, 2' mit 2, 6' mit 6; es geht dann g_3 durch 3, g_4 durch 4 und allgemein g_n durch n .

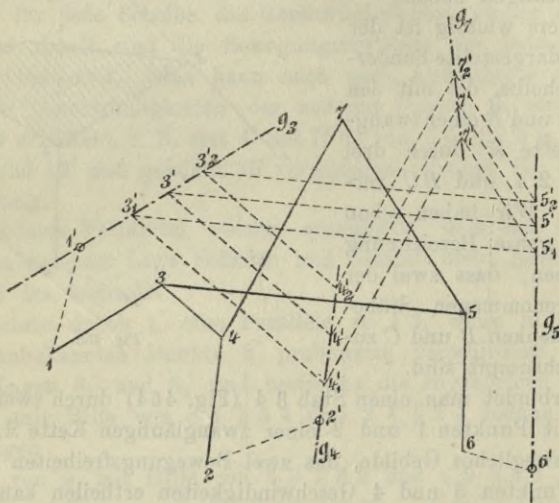


Fig. 464.

Soll nun die neue Kette zwangsläufig werden, so muss die zweite Bewegungsfreiheit verschwinden. Dies kann man dadurch erreichen, dass man irgend einen der an \mathfrak{R} angeschlossenen Knotenpunkte n durch eine andere zwangsläufige Kette führt, beispielsweise durch einen Stab nf , welcher n mit einem Punkte f des Widerlagers verbindet. Der Punkt n' muss dann in der Geraden nf liegen; er fällt also in den Schnittpunkt der Geraden g_n und nf . Durch diese Angabe sind aber die Geschwindigkeiten sämtlicher Punkte der an die Kette \mathfrak{R} und den Punkt f angeschlossenen Glieder eindeutig bestimmt.

Wir wollen die auf diesem Wege schliesslich erhaltene Kette mit \mathfrak{R}' bezeichnen, und die an die Kette \mathfrak{R} und den Punkt f angeschlossenen Glieder unter der kurzen Bezeichnung $\mathfrak{R}' - \mathfrak{R}$ zusammenfassen.

Es sind zwei Ausnahmefälle zu beachten. Geht nämlich die Gerade g_n durch die beiden Punkte n und f , so darf n' nach Belieben in der Geraden nf angenommen werden, die Kette \mathfrak{R}' ist also nicht zwangsläufig, sondern behält zwei Bewegungsfreiheiten. Ist zweitens fn parallel zu der nicht durch n gehenden Geraden g_n , so rückt n' zu-

nächst ins Unendliche. Es müssen dann die Geschwindigkeiten der Punkte 1, 2, 6 gleich Null gesetzt werden. Die Kette \mathfrak{K} ruht nunmehr, die Gerade g_n fällt mit der Achse des Stabes fn zusammen und es ist möglich, dem Punkte n und allen Gliedern der Gruppe $\mathfrak{K}' - \mathfrak{K}$ eine beliebige Geschwindigkeit nn' zu ertheilen. Die Kette \mathfrak{K}' ist also zwangläufig, sie befindet sich aber gegenüber allen an Gliedern der Kette \mathfrak{K} angreifenden Kräften in einer Todtlage und kann nur durch Antreiben von Gliedern der Gruppe $\mathfrak{K}' - \mathfrak{K}$ bewegt werden. Die Glieder der Kette \mathfrak{K} bleiben bei jeder auf diese Weise eingeleiteten Bewegung in Ruhe.

Wir dürfen natürlich nicht vergessen, dass wir uns auf die Beschreibung einer unendlich kleinen Bewegung beschränkt haben, und dass die Kette durch die geringsten elastischen Formänderungen aus der durch $fn \parallel g_n$ gekennzeichneten besonderen Lage gebracht werden kann. Es giebt aber auch Fälle, in denen bei Belastung der Kette \mathfrak{K} *sicheres* Gleichgewicht vorhanden ist.

Ein anderes Verfahren, die zweite Bewegungsfreiheit aufzuheben, besteht darin, zwei Knotenpunkte m und n , von denen aber wenigstens einer ein Knotenpunkt der an \mathfrak{K} angeschlossenen Gliedergruppe sein möge, durch einen Stab zu verbinden. Gehört nun m der Kette \mathfrak{K} an, so ist n' ohne weiteres als Schnittpunkt der Geraden g_n und der durch m' parallel zu mn gezogenen Geraden g bestimmt, vorausgesetzt, dass g und g_n nicht zusammenfallen oder nicht parallel sind. Fällt g mit g_n zusammen, so darf n' beliebig in g_n angenommen werden; die neue Kette \mathfrak{K}' ist trotz Einfügung des Stabes mn nicht zwangläufig, sondern behält zwei Bewegungsfreiheiten. Ist $g_n \parallel g$, so befindet sich die Kette nach Einfügung des Stabes mn gegenüber den an \mathfrak{K} angreifenden Kräften in einer Todtlage, sie ist aber zwangläufig.

Gehören beide Punkte m und n dem Theile $\mathfrak{K}' - \mathfrak{K}$ an, so läuft die Aufgabe, die Punkte m' und n' in den Geraden g_m und g_n so zu bestimmen, dass $m'n' \parallel mn$ ist und jedem Stabe ik des Theiles $\mathfrak{K}' - \mathfrak{K}$ eine zu ik parallele Gerade $i'k'$ entspricht, wieder darauf hinaus, ein Polygon $3'4'5' \dots m' \dots n'$ zu zeichnen, dessen Ecken in gegebenen Geraden $g_3, g_4, g_5, \dots g_m \dots g_n$ liegen und dessen Seiten gegebene Richtungen haben. Man erhält dann (s. Seite 230) für n' noch einen zweiten Ort g'_n . Fallen die Geraden g'_n und g_n zusammen, so bleibt die zweite Bewegungsfreiheit bestehen. Ist $g'_n \parallel g_n$, so besitzt die Kette \mathfrak{K}' wieder eine Todtlage und kann durch Glieder der Kette \mathfrak{K} nicht angetrieben werden, sie ist aber zwangläufig.

Eine zweite Lösung der vorliegenden Aufgabe stützt sich darauf, dass die Strecke nn' nicht nur als die um 90° gedrehte *endliche Geschwindigkeit* des Punktes n aufgefasst werden darf, sondern auch als die in unendlich grossem Maassstabe aufgetragene, um 90° gedrehte

verschwindend kleine Verschiebung dieses Punktes. Die Strecke λ_{mn} , um welche sich der Abstand l_{mn} der Punkte m und n ändert, wird durch den Abstand der durch m' und n' zu mn gezogenen beiden Parallelen dargestellt, Fig. 465 (vergl. auch Seite 463 Fig. 458); ihr Vorzeichen sei durch die Bestimmung gegeben, dass die lothrechten Verschiebungen mm' und nn' der Knotenpunkte durch Rechtsdrehung in ihre wirklichen Lagen $m(m)$ und $n(n)$ gebracht werden. Daraus folgt z. B. dass λ_{mn} in Fig. 465 positiv ist, weil sich m von n entfernt.

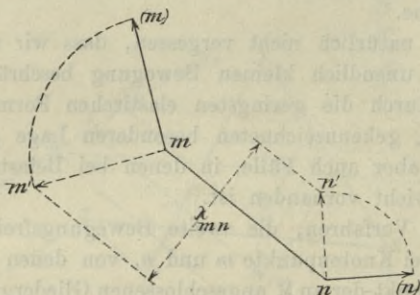


Fig. 465.

Nehmen wir nun an, es sei die lothrechte Verschiebung $3\ 3'$ des Knotenpunktes 3 der vorhin untersuchten Kette (Fig. 464) die Folge der Längenänderung λ_{23} eines dehnbaren Stabes, der 3 mit 2 verbindet, so können wir die Aenderung λ_{mn} der Strecke mn als Funktion ersten Grades der Grösse λ_{23} und der die Bewegung der Kette \mathfrak{R} bestimmenden freien Geschwindigkeit darstellen. Es geht dies ohne weiteres daraus hervor, dass die Punkte $3\ m\ n'$ ähnliche, gerade Punktreihen beschreiben, welche durch Angabe der Grösse der Geschwindigkeit eines Punktes der Kette \mathfrak{R} bestimmt sind.

Wir erhalten einen Ausdruck von der Form

$$(2) \quad \lambda_{mn} = \lambda'_{mn} + \lambda''_{mn} \cdot \lambda_{23}.$$

Hierin bedeutet λ'_{mn} die Aenderung, welche der Abstand mn für den Fall erfährt, dass $\lambda_{23} = 0$ ist, dass also der Stabzug $1\ 3\ 4\ 2$ durch Einfügung eines starren Stabes $2\ 3$ zwangsläufig an die Kette \mathfrak{R} angeschlossen ist, und λ''_{mn} bezeichnet den Einfluss der Ursache $\lambda_{23} = 1$ auf λ_{mn} , das ist die Aenderung, welche der Abstand mn erleidet, wenn $\lambda'_{mn} = 0$ gesetzt und der Stab $2\ 3$ um λ_{23} verlängert wird. Die Kette \mathfrak{R} bleibt bei der Ermittlung von λ''_{mn} in Ruhe, und der Punkt $3'$ wird in der Geraden $1\ 3$ so angenommen, dass die Länge des von $3'$ auf die Gerade $2\ 3$ gefällten Lothes gleich $+\lambda_{23}$ ist.

Werden nun die Punkte m und n durch einen starren Stab verbunden, so ergibt sich die Starrheitsbedingung $\lambda_{mn} = 0$, und aus dieser folgt dann für die dem Stabe 2 3 zuzuschreibende Längenänderung der Werth

$$(3) \quad \lambda_{23} = -1 \frac{\lambda'_{mn}}{\lambda''_{mn}}.$$

Ist $\lambda''_{mn} = 0$ und zugleich auch $\lambda'_{mn} = 0$, so bleibt λ_{23} unbestimmt; die Kette behält die zweite Bewegungsfreiheit. Verschwindet aber nur λ''_{mn} , während λ'_{mn} endlich ist, so muss, damit $\lambda'_{mn} = 0$ werde, die Kette \mathfrak{K} in Ruhe bleiben, und es tritt dann die mit Zwangläufigkeit verbundene Todtlage ein.

Durch die vorstehende Untersuchung sind wir nun zu dem folgenden ganz allgemeinen Verfahren geführt worden.

Hat man eine Kette \mathfrak{K}' durch Beseitigung von Stäben (deren Längen gleich z_a, z_b, \dots, z_r seien) und Einfügung von ebenso viel dehnbaren Ersatzstäben (welche die Längen y_a, y_b, \dots, y_r haben) in eine zwangläufige Kette \mathfrak{K} verwandelt, für welche die Konstruktion des Verschiebungsplanes bekannt ist, so ist man im Stande, die Längenänderungen $\zeta_a, \zeta_b, \dots, \zeta_r$ der Strecken z_a, z_b, \dots, z_r als Funktionen ersten Grades der Längenänderungen $\eta_a, \eta_b, \dots, \eta_r$ der dehnbaren Ersatzstäbe und der freien Geschwindigkeit der Kette \mathfrak{K} darzustellen. Man findet

$$(4) \quad \begin{cases} \zeta_a = \zeta_{a0} + \zeta_{aa}\eta_a + \zeta_{ab}\eta_b + \dots + \zeta_{ar}\eta_r \\ \zeta_b = \zeta_{b0} + \zeta_{ba}\eta_a + \zeta_{bb}\eta_b + \dots + \zeta_{br}\eta_r \\ \dots \\ \zeta_r = \zeta_{r0} + \zeta_{ra}\eta_a + \zeta_{rb}\eta_b + \dots + \zeta_{rr}\eta_r, \end{cases}$$

wo

$$\zeta_{a0}, \zeta_{b0}, \dots, \zeta_{r0}$$

die Aenderungen der Längen z_a, z_b, \dots, z_r für den Fall bedeuten, dass alle η gleich Null sind, dass also die Ersatzstäbe starr angenommen werden, während

$$\zeta_{aa}, \zeta_{bb}, \dots, \zeta_{rr}$$

die Längenänderungen der Strecken z_a, z_b, \dots, z_r in Folge der Ursache $\eta_a = 1$ sind, ebenso

$$\zeta_{ab}, \zeta_{bb}, \dots, \zeta_{rb}$$

die Aenderungen der z in Folge von $\eta_b = 1$, u. s. w.

Setzt man schliesslich sämtliche Werthe $\zeta_a, \zeta_b, \dots, \zeta_r$ gleich Null, so erhält man ein System linearer Gleichungen, deren Wurzeln

$\eta_a, \eta_b, \dots \eta_r$ diejenigen Längenänderungen angeben, welche die Ersatzstäbe erfahren müssen, wenn es möglich sein soll, die beseitigten Stäbe wieder einzusetzen, ohne die Bewegung der Kette aufzuheben. Verschwindet die Determinante jener r Gleichungen, so ist die Kette \mathfrak{K}' nicht zwangsläufig, trotzdem sie die erforderliche Gliederzahl besitzt, oder sie ist zwar zwangsläufig, lässt sich aber nicht mit Hilfe eines jeden Gliedes antreiben.

Ersetzt man z. B. den in Fig. 464 an die Knoten 1 und 2 einer zwangsläufigen Kette \mathfrak{K} angeschlossenen Stabzug 1 3 4 2 durch einen aus vier Stäben bestehenden Zug 1 3 4 5 2 und schliesst man, genau wie vorhin, weitere Knotenpunkte zweistäbig an, so erhält man zunächst eine Kette, welche drei freie Geschwindigkeiten besitzt. Die Zwangsläufigkeit kann dann im allgemeinen durch Hinzufügung von zwei Stäben z_a, z_b erreicht werden, denen zwei vom Knotenpunkte 2 nach den Knotenpunkten 3 und 4 gehende, eingefügte dehnbare Stäbe y_a, y_b gegenüberstehen. Zur Berechnung von η_a und η_b dienen die Gleichungen

$$(5) \quad \begin{cases} 0 = \zeta_{a0} + \zeta_{aa}\eta_a + \zeta_{ab}\eta_b \\ 0 = \zeta_{b0} + \zeta_{ba}\eta_a + \zeta_{bb}\eta_b, \end{cases}$$

sie liefern die Werthe

$$(6) \quad \eta_a = -\frac{D_a}{D}, \quad \eta_b = -\frac{D_b}{D}$$

wo

$$D = \begin{vmatrix} \zeta_{aa} & \zeta_{ab} \\ \zeta_{ba} & \zeta_{bb} \end{vmatrix} = \zeta_{aa}\zeta_{bb} - \zeta_{ba}\zeta_{ab}$$

$$D_a = \begin{vmatrix} \zeta_{a0} & \zeta_{ab} \\ \zeta_{b0} & \zeta_{bb} \end{vmatrix} = \zeta_{a0}\zeta_{bb} - \zeta_{b0}\zeta_{ab}$$

$$D_b = \begin{vmatrix} \zeta_{aa} & \zeta_{a0} \\ \zeta_{ba} & \zeta_{b0} \end{vmatrix} = \zeta_{aa}\zeta_{b0} - \zeta_{ba}\zeta_{a0}.$$

Ist $D \leq 0$, so sind η_a und η_b eindeutig bestimmt, und die Kette \mathfrak{K} ist zwangsläufig.

Ist $D = 0$ und $D_a \leq 0$, so ist $D_b \geq 0$, und man erhält $\eta_a = \mp \infty$, $\eta_b = \pm \infty$. Sollen also diese Strecken endlich werden, so müssen ζ_{a0} und ζ_{b0} gleich Null sein. Die Kette \mathfrak{K} muss also ruhen, und die Kette \mathfrak{K}' befindet sich gegenüber den an \mathfrak{K} angreifenden Kräften in einer Todtlage; sie ist aber zwangsläufig, denn zwischen η_a und η_b besteht die Beziehung

$$\eta_a : \eta_b = -\zeta_{ab} : \zeta_{aa} = -\zeta_{bb} : \zeta_{ba},$$

welche für die Verhältnisszahl $\eta_a : \eta_b$ einen endlichen Werth liefert.

In allen anderen Fällen ist die Kette \mathfrak{R}' nicht zwangsläufig, sondern besitzt zwei oder drei Bewegungsfreiheiten.

Das Verfahren, die Darstellung der Geschwindigkeiten einer kinematischen Kette auf die wiederholte Lösung einer einfachen geometrischen Aufgabe und die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen zurückzuführen, entspricht dem in No. 206 zur Berechnung der Spannkraften in den Stäben eines Fachwerks benutzten allgemeinen Verfahren der Stabvertauschung. Auch im zweiten Bande werden wir bei der Ermittlung der von den elastischen Längenänderungen der Fachwerkstäbe herrührenden Verschiebungen der Knotenpunkte in schwierigen Fällen mit einfachen geometrischen Konstruktionen und linearen Gleichungen, deren Wurzeln die Längenänderungen gewisser eingefügter Ersatzstäbe sind, arbeiten, so dass wir es hier mit einem sehr fruchtbaren allgemeinen Prinzip zu thun haben.*)

Wir heben schon an dieser Stelle unseres Buches hervor, dass die Aufgabe: die Verschiebungen der Knotenpunkte in Folge der Aenderungen *sämmtlicher* Stablängen zu finden, die vorhin gelöste Aufgabe als Sonderfall einschliesst, weil es sich bei dieser Untersuchung nur um den Einfluss der Längenänderungen *einzelner* Stäbe — der y -Stäbe — gehandelt hatte.

213. Abänderung der Auflagerbedingungen einer zwangsläufigen Kette. Es ist häufig zweckmässig, den Geschwindigkeitsplan einer zwangsläufigen Kette zunächst unter der Voraussetzung zu zeichnen, dass nicht das wirkliche Widerlager (w) sondern irgend ein anderes Glied der Kette festgestellt wird. Ist dann \mathfrak{P} der augenblickliche Drehpunkt des Widerlagers w und nn' die Geschwindigkeit irgend eines Punktes von w , so kann man die wirklichen Auflagerbedingungen nachträglich in der Weise leicht erfüllen, dass man die ganze Kette, die man nunmehr als starr ansieht, so um den Pol \mathfrak{P} dreht, dass sich der Punkt n mit einer Geschwindigkeit $n''n$ bewegt, die gleich und entgegengesetzt der Geschwindigkeit nn' ist. Es ergeben sich dann für alle Punkte i der Kette Geschwindigkeiten $i''i$, welche nach Seite 457 durch die Bedingung bestimmt sind, dass die Punkte i'' eine Figur \mathfrak{F}'' bilden müssen, welche ähnlich und ähnlich liegend zu der Figur \mathfrak{F} der Kette ist, so zwar dass der Pol \mathfrak{P} der Aehnlichkeitspunkt beider Figuren

*) Besonders werthvoll ist dieses Verfahren für das räumliche Fachwerk, dessen allgemeine Untersuchung der Verfasser in seiner Abhandlung: *Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks* im Centralblatt der Bauverwaltung 1891 und 1892 durchgeführt hat. Die Abhandlung ist auch im Verlage von Wilhelm Ernst u. Sohn in Berlin als Sonderabdruck erschienen.

ist. Die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten $i''i$ und ii' liefert schliesslich die Geschwindigkeiten $i''i'$. Die Ermittlung des Poles \mathfrak{F} ist übrigens nicht unbedingt erforderlich; es genügt, die Figur \mathfrak{F}'' durch Angabe zweier Punkte zu bestimmen.

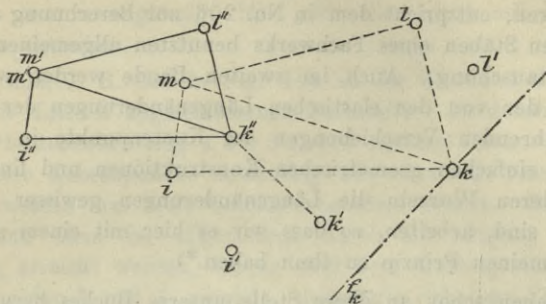


Fig. 466.

Es seien z. B. m, l, i, k (Fig. 466) Knotenpunkte einer zwangsläufigen Kette, und m', l', i', k' die Punkte eines für irgend eine Stützung gezeichneten Geschwindigkeitsplanes \mathfrak{F}' . Die in Fig. 466 die Punkte m, l, i, k verbindenden Linien sollen keine Stäbe vorstellen, es sei vielmehr über die Gliederung der Kette nichts festgesetzt. Nun sollen die Auflagerbedingungen wie folgt geändert werden: Punkt m soll ruhen, Punkt k soll in einer Geraden f_k geführt werden. Die erste Änderung verlangt, dass der Punkt m'' mit dem Punkte m' zusammenfällt, da ja die Strecke $m''m'$ gleich Null sein soll; die zweite fordert für den Punkt k eine zur Geraden f_k rechtwinklige Strecke $k''k'$. Da nun die Figuren \mathfrak{F}'' und \mathfrak{F}' ähnlich sein sollen, so muss $m''k'' \parallel mk$ sein. Damit ist aber der Punkt k'' und auch die Figur \mathfrak{F}'' vollständig bestimmt; man findet z. B. i'' mit Hilfe von $m''i'' \parallel mi$ und $k''i'' \parallel ki$, ist also im Stande, die Geschwindigkeiten $i''i'$ aller Punkte der Kette für die abgeänderte Stützung anzugeben.

Vereinigt man nach Fig. 449 die Geschwindigkeiten ii' und $i''i$ zu einem Strahlenbüschel, so sind die Figuren \mathfrak{F} und \mathfrak{F}'' ebenfalls ähnlich, sie brauchen aber nicht mehr ähnlich zu liegen.

214. Die Ermittlung der augenblicklichen Drehpole der Glieder einer zwangsläufigen Kette lässt sich häufig auch ohne die Konstruktion eines Geschwindigkeitsplanes mit Hilfe eines Satzes durchführen, der sich auf die gegenseitige Bewegung dreier in derselben Ebene befindlichen Scheiben bezieht.

Bewegt sich eine ebene Scheibe I gegen eine ruhende Scheibe II , so dreht sich I augenblicklich um einen festen Pol, der mit $(I II)$ bezeichnet werden möge; in ihm sind die beiden Scheiben I und II gewissermaassen gelenkartig miteinander verbunden. Wird nun beiden Scheiben gleichzeitig noch eine Bewegung gegen eine dritte Scheibe III ertheilt, so dreht sich I um einen augenblicklichen Pol $(I III)$ und II um einen augenblicklichen Pol $(II III)$. Der vorhin ruhende Pol $(I II)$ bewegt sich; ein in ihm auf seiner augenblicklichen Bewegungsrichtung errichtetes Loth muss sowohl durch den Pol $(I III)$ als auch durch den Pol $(II III)$ gehen, weil $(I II)$ als gemeinschaftlicher Punkt der beiden Scheiben I und II betrachtet werden darf. Hieraus folgt, dass die drei Pole $(I II)$, $(I III)$, $(II III)$ in einer Geraden liegen.

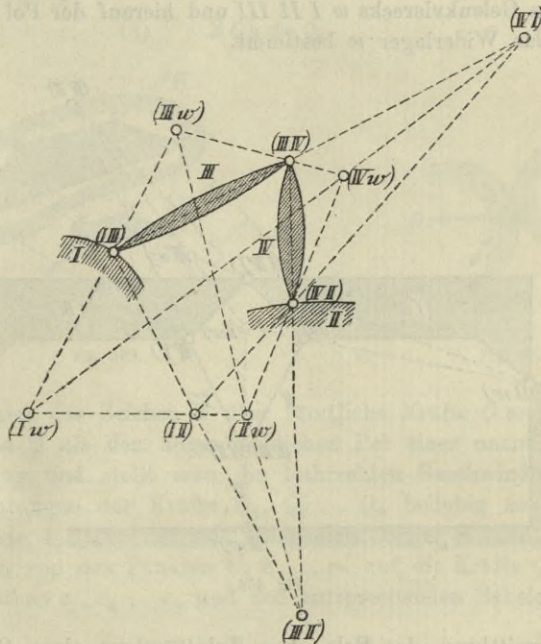


Fig. 467.

Folgt eine zwangläufige Kette einem der in No. 213 unter 1) und 2) beschriebenen Bildungsgesetze, so beruht die Ermittlung ihrer Pole auf der Lösung der *Grundaufgabe*: Seien (Fig. 467) I und II Glieder einer zwangläufigen Kette, $(I w)$ und $(II w)$ ihre Pole gegen das Widerlager w , $(I II)$ der Pol von I gegen II ; seien ferner III

und IV zwei Scheiben, die in der Weise an I und II zwangläufig angeschlossen sind, dass sich III gegen I um den Pol $(I III)$ dreht, IV gegen II um $(IV II)$ und III gegen IV um $(III IV)$; gesucht seien die Pole, um welche sich III und IV gegen w drehen.*)

Man findet mit Hilfe des oben bewiesenen Satzes der Reihe nach $(III II)$ als Schnittpunkt der Geraden $(III IV)$ $(IV II)$ und $(III I)$ $(I II)$

$(IV I)$	"	"	"	$(IV II)$	$(II I)$	"	$(IV III)$	$(III I)$
$(III w)$	"	"	"	$(III I)$	$(I w)$	"	$(III II)$	$(II w)$
$(IV w)$	"	"	"	$(IV II)$	$(II w)$	"	$(IV I)$	$(I w)$
		oder	"	$(III IV)$	$(III w)$	"	$(IV I)$	$(I w)$

Nach diesem Schema ist z. B. die Polconfiguration der in Fig. 468 dargestellten zwangläufigen Kette gezeichnet worden. Zuerst wurden die Pole des Gelenkvierecks $w I II III$ und hierauf der Pol der Scheibe IV gegen das Widerlager w bestimmt.

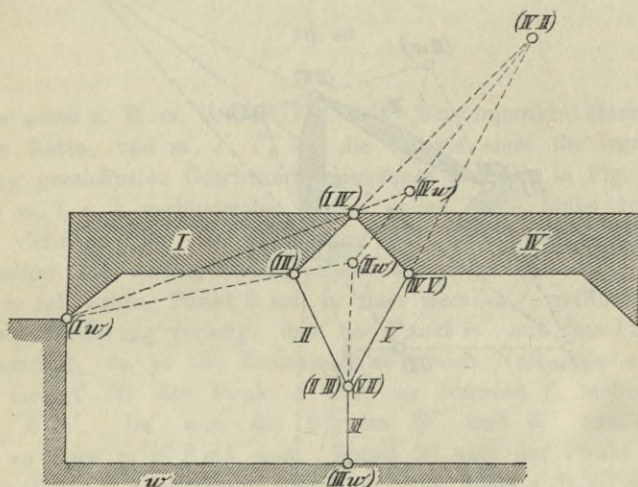


Fig. 468.

Die Ermittlung der Pole ohne Zuhilfenahme eines Geschwindigkeitsplanes lässt sich auch bei den zwangläufigen Ketten leicht durchführen, die aus Gebilden mit zwei Bewegungsfreiheiten durch Hinzufügung einer Starrheitsbedingung gewonnen werden. Sie stützt sich

*) Es ist nicht notwendig, dass die Scheiben I, III, IV, II in Gelenken $(I III)$, $(III IV)$, $(IV II)$ aneinanderhängen, wie dies in Fig. 467 vorausgesetzt ist.

darauf, dass, solange die zweite Bewegungsfreiheit besteht, für jeden Pol mindestens ein geometrischer Ort angegeben werden kann. Da dieses Verfahren aber meistens weniger einfach ist als die Polbestimmung mit Hilfe eines Geschwindigkeitsplanes (dessen Konstruktion ebenfalls auf der Ermittlung der Oerter g_n der Punkte n' beruht) so gehen wir hier nicht weiter darauf ein. Ein Beispiel findet sich in No. 216, Fig. 487.

215. Berechnung der innern Kräfte und Stützenwiderstände eines Fachwerks mit Hilfe der Figur \mathfrak{F}' . Auf eine starre Scheibe mögen beliebige äussere Kräfte $Q_1, Q_2, \dots Q_m$ wirken, welche miteinander im Gleichgewicht sind. Ihre Hebelarme in Bezug auf irgend einen Drehpunkt \mathfrak{P} seien $h_1, h_2, \dots h_m$ (Fig. 469). Dann besteht die Gleichgewichtsbedingung

$$(8) \quad \Sigma Qh = 0,$$

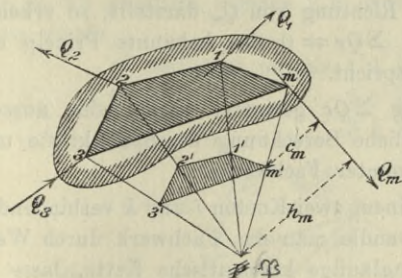


Fig. 469.

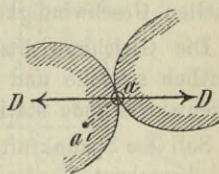


Fig. 470.

in welcher sich das Zeichen Σ über sämtliche Kräfte Q erstreckt. Betrachtet man \mathfrak{P} als den augenblicklichen Pol einer unendlich kleinen Drehbewegung und stellt man die lothrechten Geschwindigkeiten der in den Richtungen der Kräfte $Q_1, Q_2, \dots Q_m$ beliebig angenommenen Angriffspunkte $1, 2, \dots m$ mit Hilfe einer Figur \mathfrak{F}' dar, so besteht zwischen den von den Punkten $1', 2', \dots m'$ auf die Kräfte $Q_1, Q_2, \dots Q_m$ gefällten Lothen $c_1, c_2, \dots c_m$ und den entsprechenden Hebelarmen h die Beziehung

$$\frac{c_1}{h_1} = \frac{c_2}{h_2} = \dots = \frac{c_m}{h_m} = \text{Konstante},$$

denn es ist ja

$$\frac{1'1}{1\mathfrak{P}} = \frac{2'2}{2\mathfrak{P}} = \dots = \frac{m'm}{m\mathfrak{P}} = \text{Konstante}.$$

Die Gleichung 8 geht also über in

$$(9) \quad \Sigma Qc = 0.$$

Es liege nun ein aus mehreren Scheiben zusammengesetztes Gebilde vor, an welchem sich äussere Kräfte Q das Gleichgewicht halten. Das Gebilde sei kein starres; es sei vielmehr möglich, die einzelnen, in reibungslosen Gelenken aneinander hängenden Scheiben um verschiedene Pole zu drehen. Für irgend einen augenblicklichen Bewegungszustand sei eine Figur \mathfrak{F}' gezeichnet, und für jede Scheibe sei die Gleichgewichtsbedingung (2) aufgestellt. Dann werden in diesen Gleichungen neben den äusseren Kräften auch die Kräfte D vorkommen, mit denen die Scheiben in den Gelenken aufeinander wirken, Fig. 470. Werden aber schliesslich alle jene Gleichungen addirt, so heben sich die von den Kräften D herrührenden Glieder paarweise auf, und daraus folgt, dass die Gleichung (9) nicht nur für eine einzelne Scheibe, sondern auch für ein Scheibengebilde gilt, u. a. auch für ein Fachwerk, denn Stäbe sind besondere Fälle von Scheiben. Beachtet man schliesslich noch, dass c_m die Projektion der Geschwindigkeit des Angriffspunktes m der Kraft Q_m auf die Richtung von Q_m darstellt, so erkennt man auch, dass die Gleichung $\sum Qc = 0$ das bekannte Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ausspricht.

Die Gleichgewichtsbedingung $\sum Qc$ gestattet häufig eine ausserordentlich schnelle und übersichtliche Berechnung der Spannkraften und Stützenwiderstände statisch bestimmter Fachwerke.

Soll die Spannkraft S_{ik} in einem zwei Knoten i und k verbindenden Stabe berechnet werden, so verwandle man das Fachwerk durch Wegnahme jenes Stabes in eine zwangsläufige kinematische Kette, lasse an dieser in i und k die Spannkraften S_{ik} als äussere Kräfte angreifen, zeichne einen Geschwindigkeitsplan \mathfrak{F}' , wobei die Grösse der Geschwindigkeit irgend eines Punktes beliebig gross angenommen werden darf, und stelle für alle an der beweglichen Stabverbindung angreifenden Kräfte die Gleichgewichtsbedingung $\sum Qc = 0$ auf. Werden bei der gedachten unendlich kleinen Bewegung die Auflagerbedingungen erfüllt, so entspricht sämtlichen Stützenwiderständen der Werth $c = 0$ und die Gleichgewichtsbedingung enthält nur die eine Unbekannte S_{ik} .

Sind die Stützenwiderstände bereits bekannt, so darf irgend ein Glied der Kette als ruhend angenommen werden.

Wird eine nach bestimmter Richtung wirkende Seitenkraft eines Stützenwiderstandes gesucht, so wird die Beweglichkeit des Fachwerks durch Beseitigung der jenem Widerstande gleichwerthigen Auflagerbedingung erreicht.

Beispiel. An dem in Fig. 471a dargestellten Fachwerk von 6 Knotenpunkten mögen sich die äusseren Kräfte P_1, P_2, \dots, P_6 das Gleichgewicht halten. Gesucht ist die Spannkraft S im Stabe 16.

Der Stab 16 wird weggenommen; in den Knotenpunkten 1 und 6 werden die gesuchten Spannkraften S als äussere Kräfte angebracht. Sodann wird ein Geschwindigkeitsplan \mathfrak{F}' gezeichnet, am einfachsten in der Weise, dass die Punkte 1 und 2 festgelegt werden und dem Punkte 3 die beliebig grosse lothrechte Geschwindigkeit $33'$ ertheilt wird. Bedeutet c das Loth vom Punkte $6'$ auf S , so nimmt die Gleichung $\sum Qc = 0$ die Form an

$$P_3 c_3 - P_4 c_4 - P_5 c_5 - P_6 c_6 - S c = 0;$$

sie liefert für S einen endlichen Werth, solange c endlich ist. Wird $c = 0$, so ergibt sich der unbrauchbare Werth $S = \infty$. Das Fachwerk ist dann mindestens von unendlich kleiner Beweglichkeit.

Eine zweite Anordnung zeigt die Figur 471 b; in derselben sind die lothrechten Geschwindigkeiten von einem Nullpunkte O aus aufgetragen worden.*) Die Punkte $1'$ und $2'$ fallen mit O zusammen. Die zu 23 parallele Strecke $2'3'$ wurde beliebig gross gewählt. So dann wurde

$$\begin{array}{ll} 4' \text{ bestimmt mittels } 1'4' \parallel 14 \text{ und } 3'4' \parallel 34, \\ 5' \text{ " " " } 2'5' \parallel 25 \text{ " } 4'5' \parallel 45, \\ 6' \text{ " " " } 3'6' \parallel 36 \text{ " } 5'6' \parallel 56. \end{array}$$

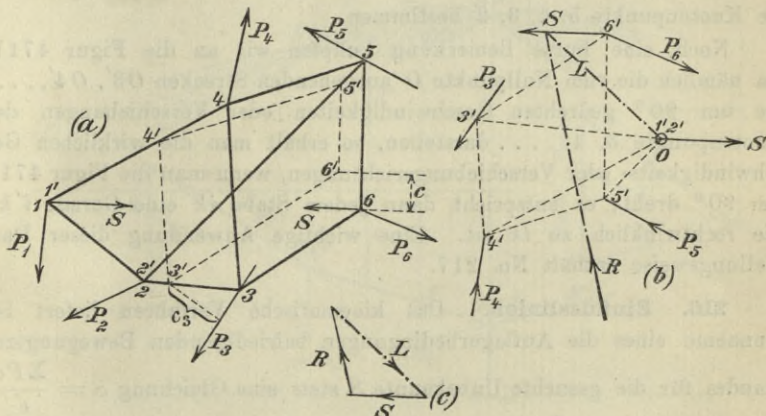


Fig. 471.

Die Gleichung $\sum Qc = 0$, ausgedehnt über alle Kräfte P und über die Spannkraften S drückt jetzt die Bedingung aus, dass die Summe der Momente der in den entsprechenden Punkten der Figur \mathfrak{F}' (b) angreifenden Kräfte P und S in Bezug auf den Drehpunkt O gleich Null sein muss.

*) Vergl. auch Fig. 449 a u. b auf Seite 457.

Bildet man also die Mittelkraft R der Kräfte P_3, P_4, P_5 und P_6 , so muss das Moment von S in Bezug auf den Drehpunkt O dem Momente von R entgegengesetzt gleich sein. Bei bequemer Lage des Schnittpunktes der Kraft R und der in $6'$ angreifenden Kraft S , verbinde man diesen Schnittpunkt mit dem Nullpunkte O durch eine Gerade L und zerlege R , nach den Richtungen von L und S . Das Kräfte-dreieck in Fig. 471 c liefert die gesuchte Spannkraft S , weil L durch den Drehpunkt O geht, mithin keinen Einfluss auf das Moment der Kraft R hat.

Schneiden sich R und S ausserhalb des Zeichenblattes, so ersetze man R durch zwei Seitenkräfte R' und R'' , von denen R'' durch den Punkt O geht. R'' ist ohne Einfluss auf S ; R' wird so angenommen, dass es S in einem bequem gelegenen Punkte schneidet und genau wie vorhin nach den Richtungen S und L zerlegt.

Wäre die Geschwindigkeit des Angriffspunktes 1 der zweiten Kraft S nicht gleich Null, so müsste man das in der Fig. 471 b auftretende aus zwei Kräften S bestehende Kräftepaar erst so verschieben, dass die eine der beiden Kräfte S durch den Nullpunkt O geht.

Nach Ermittlung von S kann man die Spannkräfte in den übrigen Stäben des Fachwerks der Reihe nach mit Hilfe der Kraftpolygone für die Knotenpunkte 5, 4, 3, 2 bestimmen.

Noch eine kurze Bemerkung knüpfen wir an die Figur 471 b. Da nämlich die vom Nullpunkte O ausgehenden Strecken $03', 04', \dots$ die um 90° gedrehten Geschwindigkeiten oder Verschiebungen der Knotenpunkte 3, 4, \dots darstellen, so erhält man die wirklichen Geschwindigkeits- oder Verschiebungsrichtungen, wenn man die Figur 471 b um 90° dreht; es entspricht dann jedem Stabe ik eine Gerade $i'k'$, die rechtwinklich zu ik ist. Eine wichtige Anwendung dieser Darstellungsweise enthält No. 217.

216. Einflusslinien. Das kinematische Verfahren liefert bei Annahme eines die Auflagerbedingungen befriedigenden Bewegungszustandes für die gesuchte Unbekannte S stets eine Gleichung $S = \frac{\sum Pc}{c'}$,

welche den Einfluss jeder einzelnen Last angiebt und deshalb ohne weiteres Schlüsse auf die ungünstigste Belastungsweise gestattet; es wird sich daher auch ganz besonders zur Ermittlung der Einflusslinien eignen. Hier handelt es sich um den Sonderfall paralleler Lasten. Wählt man $c' = 1$, so ist die Ordinate der Einflusslinien gleich der Projektion c der Geschwindigkeit des Angriffspunktes der Kraft P auf die Richtung von P , oder, etwas kürzer ausgedrückt, gleich der Geschwindigkeit des Angriffspunktes von P in der Richtung von P .

Dreht sich nun irgend eine der starren Scheiben, aus denen die zu untersuchende zwangläufige Kette besteht, mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihren augenblicklichen Pol (Fig. 472), so bewegt sich der Angriffspunkt einer im Abstände x von jenem Pole an der Scheibe angreifenden Kraft P in der Richtung von P mit der Geschwindigkeit $c = x\omega$; und aus dieser linearen Beziehung folgt der wichtige Satz: *Zu jeder starren Scheibe gehört eine gerade Einflusslinie, deren Nullpunkt dem augenblicklichen Pole der Scheibe entspricht.*

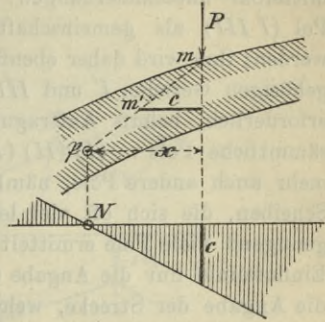


Fig. 472.

Besteht also die zwangläufige Kette, in welche das Fachwerk durch Beseitigung eines Stabes übergeht, aus den Scheiben $\dots I, II, III, \dots$ so setzt sich die Einflusslinie für S aus ebensoviel geraden Linien $\dots I', II', III' \dots$ zusammen, deren Nullpunkte $\dots N_1, N_2, N_3, \dots$ den Polen $\dots (I), (II), (III) \dots$ entsprechen, um welche sich die Scheiben gegen das Widerlager drehen.*) Sind die Scheiben so an-

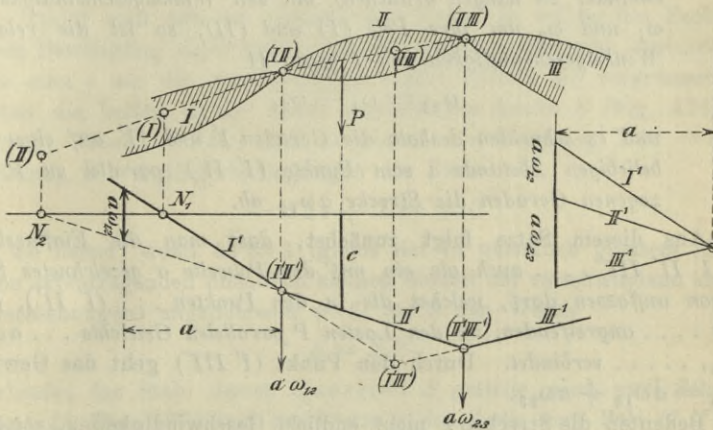


Fig. 473.

einander gereiht, dass jede Scheibe mit der vorhergehenden und der nachfolgenden durch ein Gelenk verbunden ist, Fig. 473, so fassen wir

*) Es sind also $\dots (I) (II) (III) \dots$ die abkürzenden Bezeichnungen für die früher gebrauchten $\dots (Iw), (IIw), (IIIw) \dots$ wo $\overset{N}{W}$ das Widerlager bedeutet. Der Satz: es liegen die drei Pole $(Iw) (IIw) (IIIw)$ in einer Geraden, nimmt dann die ebenso übersichtliche Form an: es liegen $(I) (III) (II)$ in einer Geraden.

sie unter dem Namen *Scheibenzug* zusammen. Den Gelenken . . . (*I II*), (*II III*) . . . als den gemeinschaftlichen Punkten zweier Scheiben entsprechen die Schnittpunkte . . . (*I' II'*), (*II' III'*) . . . der Geraden *I'*, *II'*, *III'*, Aber auch dann, wenn zwei Scheiben nicht unmittelbar aneinanderhängen, z. B. *I* und *III*, darf ihr gegenseitiger Pol (*I III*) als gemeinschaftlicher Punkt beider Scheiben angesehen werden; ihm wird daher ebenfalls der Schnittpunkt der zu jenen Scheiben gehörigen Geraden *I'* und *III'* entsprechen. Es ist deshalb keineswegs erforderlich, behufs Auftragung der Einflusslinie . . . *I'*, *II'*, *III'* . . . sämtliche Pole . . . (*I*) (*II*) (*III*) . . . zu bestimmen; es können vielmehr auch andere Pole, nämlich die gegenseitigen Drehpunkte einzelner Scheiben, die sich oft viel leichter finden lassen, benutzt werden. Sind genügend viele Pole ermittelt worden, so erfordert die Aufzeichnung der Einflusslinie nur die Angabe einer einzigen Ordinate *c* oder, allgemeiner, die Angabe der Strecke, welche irgend zwei dem Linienzuge . . . *I' II' III'* . . . angehörige Gerade auf irgend einer, zur Richtung der Kraft *P* parallelen Geraden abschneiden. Diese letztere Bestimmungsweise wird uns häufig durch den *Satz* ermöglicht werden:

Drehen sich zwei Scheiben I und II (die nicht unmittelbar aneinander zu hängen brauchen) mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 um ihre Pole (I) und (II), so ist die relative Winkelgeschwindigkeit von I gegen II

$$\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2,$$

*und es schneiden deshalb die Geraden *I'* und *II'* auf einer im beliebigen Abstände *a* vom Punkte (*I' II'*) parallel zu *P* gezogenen Geraden die Strecke $a\omega_{12}$ ab.*

Aus diesem Satze folgt zunächst, dass man die Einflusslinie . . . *I' II' III'* . . . auch als ein mit der Polweite *a* gezeichnetes Seilpolygon auffassen darf, welches die in den Punkten . . . (*I' II'*), (*II' III'*) . . . angreifenden, zu den Lasten *P* parallelen Gewichte . . . $a\omega_{12}$, $a\omega_{23}$, verbindet. Durch den Punkt (*I' III'*) geht das Gewicht $a\omega_{13} = a\omega_{12} + a\omega_{23}$.

Bedeutet die Strecken *c* nicht endliche Geschwindigkeiten, sondern unendlich kleine Verschiebungen, die in unendlich grossem Maassstabe aufgetragen worden sind, so sind . . . ω_1 , ω_2 , ω_3 . . . die unendlich kleinen Winkel, um welche sich die Scheiben . . . *I*, *II*, *III*, . . . drehen, und ω_{12} ist der Drehungswinkel der Scheibe *I* gegen die Scheibe *II*.

In Fig. 474 haben wir die Scheiben durch gerade Linien dargestellt und die unteren Winkel des Polygons . . . *I II III* . . . mit . . . \mathfrak{D}_1 , \mathfrak{D}_2 , . . . bezeichnet. Wählen wir dann die Richtung der *Schwerkraft* zur *positiven P-Richtung*, so dürfen wir die Einflusslinie

... $I' II' III'$... als *Kettenlinie* der Gewichte ... $\Delta \mathfrak{D}_1, \Delta \mathfrak{D}_2$... betrachten. Einem positiven $\Delta \mathfrak{D}_1$ entspricht eine Rechtsdrehung der Scheibe I gegen die Scheibe II und in Folge dessen ein nach unten zeigender Knick der Kettenlinie. Die Polweite ist gleich 1. Zwischen den Aenderungen der unteren und oberen Polygonwinkel \mathfrak{D} und α besteht die Beziehung $\Delta \mathfrak{D} = -\Delta \alpha$.

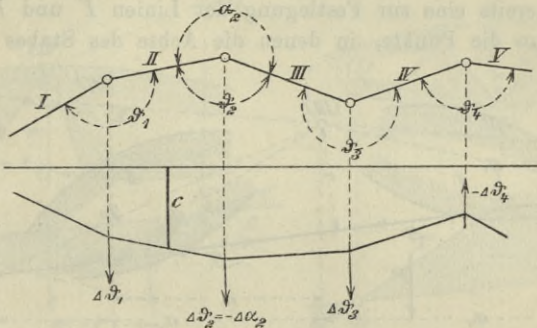


Fig. 474.

Treibt man nun die zwangläufige Kette, in welche das Fachwerk durch Beseitigung eines Stabes von der Länge s übergeht, dadurch an, dass man s um die verschwindend kleine Strecke Δs vergrößert, so leisten die beiden an der Kette angreifenden Kräfte S (Fig. 475) die virtuelle Arbeit $-S\Delta s$, und es nimmt die Gleichung $\sum Qc = 0$ bei Erfüllung der Auflagerbedingungen die Form

$$-S\Delta s + \sum Pc = 0$$

an, sie liefert, wenn $\Delta s = 1$ (gleich der in unendlich grossem Maassstabe aufzutragenden unendlich kleinen Einheit der verschwindend kleinen Verschiebungen) angenommen wird, für S den Werth

$$S = \sum Pc.$$

Verbindet der Stab, dessen Spannkraft S gesucht wird, zwei Scheiben I und II , Fig. 475, und bezeichnet r das Loth vom Pole (III) auf die Stabachse und $\Delta \mathfrak{D}$ den Winkel, um den sich I gegen II um den Pol (III) dreht, so ist offenbar

$$\Delta s = r\Delta \mathfrak{D},$$

folglich

$$\Delta \mathfrak{D} = \frac{\Delta s}{r} = \frac{1}{r},$$

und es schneiden daher die Geraden I' und II' auf einer im Abstände a

vom Pole (*I II*) parallel zu *P* gezogenen Geraden (*v*) die Strecken $v = a \Delta \vartheta = 1 \frac{a}{r}$ ab. Nimmt *v* die durch die Pole (*I*) und (*II*) bestimmten besonderen Lagen (v_1) und (v_2) an, so erhält man die Strecken

$$v_1 = 1 \frac{a_1}{r} \text{ und } v_2 = 1 \frac{a_2}{r},$$

von denen bereits eine zur Festlegung der Linien *I'* und *II'* genügt. Verbindet man die Punkte, in denen die Achse des Stabes *S* die Ge-

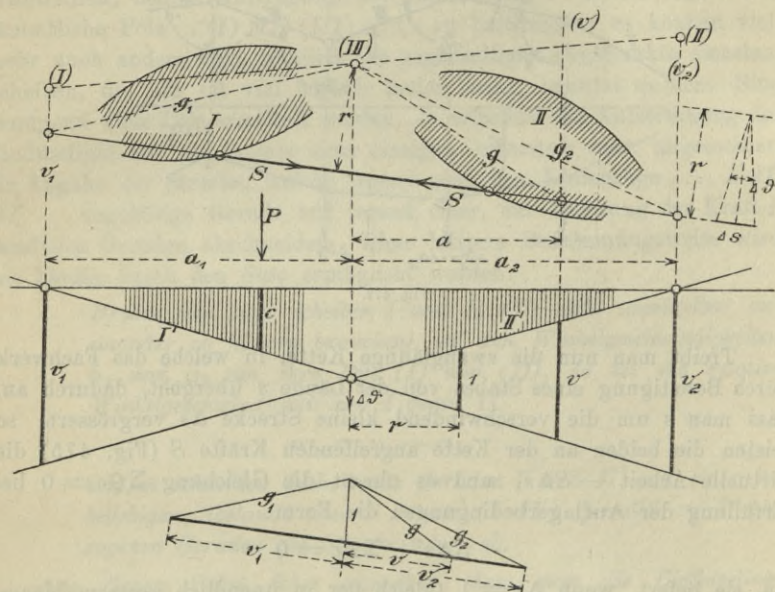


Fig. 475.

raden (*v*), (v_1), (v_2) schneidet, mit dem Pole (*I II*) durch die Geraden *g*, g_1 , g_2 und zerlegt man die zur Kraft *P* parallele Strecke 1 nach der Richtung *S* und, der Reihe nach, nach den Richtungen der Geraden *g*, g_1 , g_2 , so sind die zu *S* parallelen Seitenwerthe der Reihe nach gleich den Strecken *v*, v_1 , v_2 . Im Abstände *r* vom Pole (*III*) ist die senkrechte Entfernung der Geraden *I'* und *II'* gleich 1. Wählt man diese Strecke als Maass für die Lasteinheit, so giebt die Strecke *c* die von der Last $P = 1$ herrührende Spannkraft *S* an.

Stellt nun Fig. 476 einen Theil einer durch die Beseitigung eines Gurtstabes *U* gewonnenen zwangsläufigen Kette dar, so findet man zu der beliebig gezogenen Geraden *I'* nach Auftragung der Strecke 1 sofort die zugehörige Gerade *II'* und mit Hilfe der den Polen (*I*) und

(II) entsprechenden Nullpunkte N_1 und N_2 die Nullachse AB und kennt somit die zu den Scheiben I und II gehörigen Theile der Einflusslinie für U . Zu beachten ist, dass einer Dehnung des Gurtstabes U ein positives $\Delta \mathfrak{S}$, mithin ein nach unten zeigender Knick der Kettenlinie $I' II'$ entspricht.

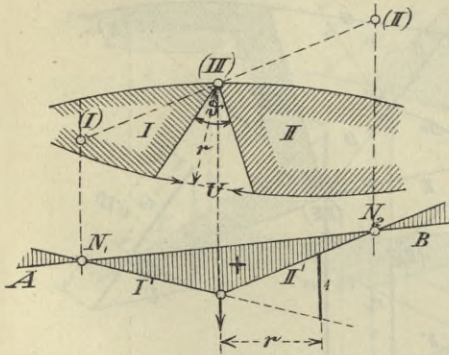


Fig. 476.

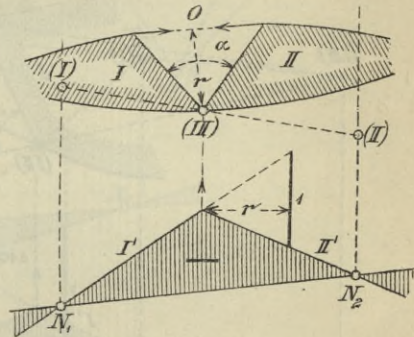


Fig. 477.

Handelt es sich um einen Stab O der oberen Gurtung, Fig. 477, so ist α der in Folge einer Dehnung des Stabes zunehmende Winkel; es zeigt dann der Knick der Kettenlinie $I' II'$ nach oben.

Vergleicht man diese Ergebnisse mit den auf Seite 241 für den einfachen Fachwerkbalken gewonnenen, so erkennt man, dass die zwischen den Polen (I) und (II) liegenden Theile der U -Linie und O -Linie übereinstimmen mit der U -Linie und O -Linie eines einfachen Balkens, dessen Stützweite gleich der wagerechten Projektion der Strecke $N_1 N_2$ ist.

Eine andere wichtige Anwendung der in der Fig. 475 angestellten allgemeinen Gesetze zeigt Fig. 478. Dieselbe veranschaulicht einen Theil einer kinematischen Kette, die aus einem Fachwerke durch Beseitigung einer Diagonale D entstanden ist. Die Lasten sind an der unteren Gurtung angreifend gedacht. Zu den Gliedern I, II, III gehören die drei Geraden $I' II' III'$. I' und III' treffen sich in der Senkrechten durch den Schnittpunkt ($I III$) der die Scheiben I und III verbindenden Gurtstäbe. I' und II' bilden, da α in Folge einer Dehnung der Diagonale D zunimmt, einen nach oben zeigenden Knick, sie schneiden

auf der Senkrechten durch den Knotenpunkt ($II III$) die Strecke $v = 1 \frac{\lambda}{r}$ ab, wo λ die Feldweite bedeutet. Da die zu dieser Senkrechten gehörige Gerade g mit dem Gurtstabe U zusammenfällt, kann v durch Zerlegung der senkrechten Strecke 1 nach den Richtungen der Stäbe U

und D gewonnen werden, und man erkennt, dass die D -Linie zwischen den Nullpunkten N_1 und N_3 mit der D -Linie für einen einfachen Balken von der Stützweite $N_1 N_3$ übereinstimmt. (Vergl. Seite 240, Fig. 226). Aber noch andere wichtige Eigenschaften der D -Linie lassen sich aus den vorstehenden Betrachtungen folgern.

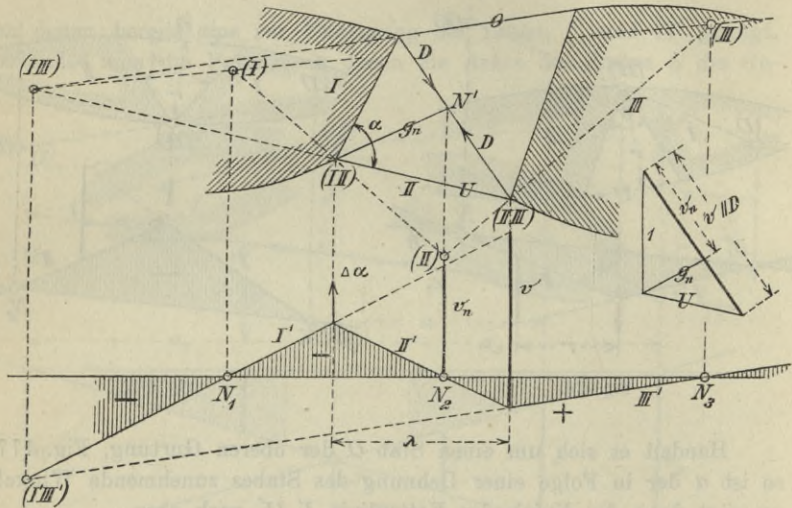


Fig. 478.

Da nämlich die drei Pole (I) (III) und (II) in einer Geraden liegen müssen und ebenso die drei Pole (III) $(III II)$ (II) , so ergibt sich (II) als der Schnittpunkt der von den Polen (I) und (III) durch die Endpunkte des Stabes II gelegten Geraden, und damit ist der Nullpunkt N_2 bestimmt. Verbindet man den Schnittpunkt N' der Geraden N_2 (II) und der Diagonalen mit dem Gelenk $(I II)$ durch die Gerade g_n , und zerlegt die Strecke 1 nach den Richtungen von D und g_n , so giebt der zu D parallele Seitenwerth den Abstand v_n der Geraden I' und II' an der Stelle N_2 und damit eine Ordinate der Geraden I' an.

Für die Aenderung des Winkels α in Folge einer Dehnung der Diagonale um die Strecke 1 fanden wir den einfachen Ausdruck $\Delta\alpha = \frac{1}{r}$,

und folgerten hieraus, dass die Geraden I' und II' in der Entfernung r vom Punkte $(I' II')$ den senkrechten Abstand 1 besitzen, Fig. 479. Es ist nun die Frage, ob sich nicht auch für die Aenderung des Winkels α' , den II mit III bildet, ein ebenso einfacher Ausdruck nachweisen lässt. Wir bezeichnen das Viereck, dem die Diagonale angehört mit 1 2 3 4, denken die Seite 1 2 festgehalten und schreiben dem

Punkte 3 eine lothrechte Verschiebung $2'3' \parallel 23$ zu, deren Projektion auf die Normale zu D gleich 1 ist. Sodann ermitteln wir die lothrechte

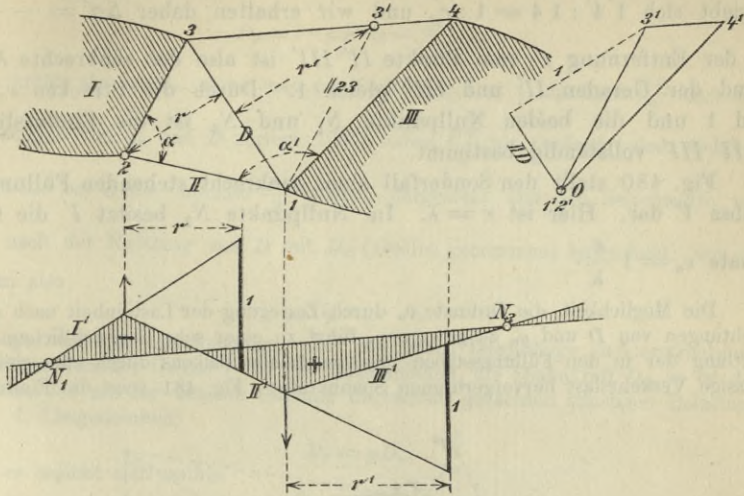


Fig. 479.

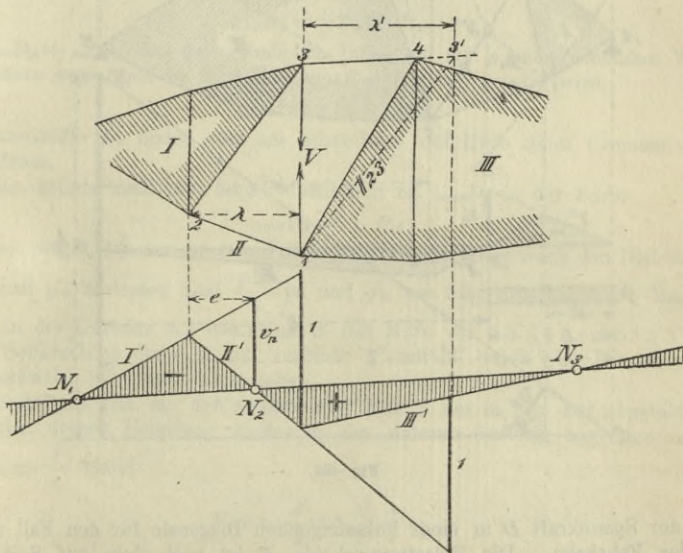


Fig. 480.

Verschiebung $1'4'$ mit Hilfe von $1'4' \parallel 14$ und $3'4' \parallel 34$ und erhalten den Winkel $\Delta\alpha'$, um den sich III gegen II dreht: $\Delta\alpha' = -\frac{1'4'}{14}$.

Bestimmen wir nun auf dem Stabe 34 einen Punkt 3' so, dass $13' \parallel 23 \parallel 2'3'$ ist und bezeichnen das Loth von 3' auf D mit r' , so ergibt sich $\overline{1'4'} : \overline{14} = 1 : r'$, und wir erhalten daher $\Delta\alpha' = -\frac{1}{r'}$.

In der Entfernung r' vom Punkte $II' III'$ ist also der senkrechte Abstand der Geraden II' und III' gleich 1. Durch die Strecken r , r' und 1 und die beiden Nullpunkte N_1 und N_3 ist die Einflusslinie $I' II' III'$ vollständig bestimmt.

Fig. 480 stellt den Sonderfall eines senkrecht stehenden Füllungsstabes V dar. Hier ist $r = \lambda$. Im Nullpunkte N_2 besitzt I' die Ordinate $v_n = 1 \frac{e}{\lambda}$.

Die Möglichkeit, die Ordinate v_n durch Zerlegung der Lasteinheit nach den Richtungen von D und g_n zu gewinnen, führt zu einer sehr übersichtlichen Ermittlung der in den Füllungsstäben eines einfachen Balkens durch eine gleichmässige Verkehrslast hervorgerufenen Spannkraften. Fig. 481 zeigt die Einfluss-

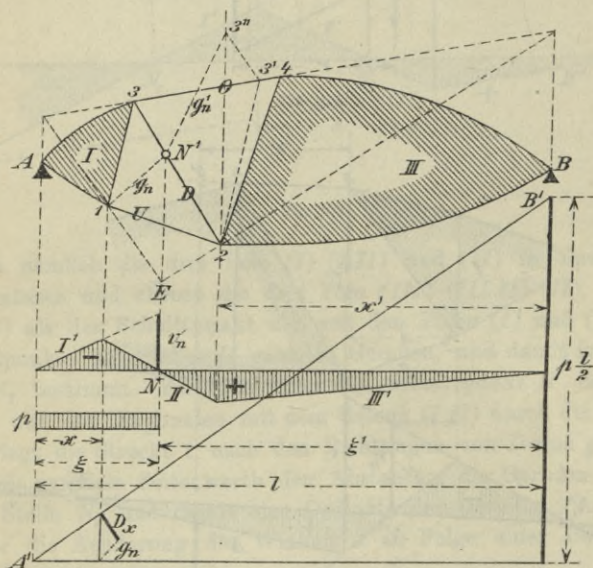


Fig. 481.

fläche der Spannkraft D in einer linkssteigenden Diagonale für den Fall untenliegender Fahrbahn. Die Belastungsscheide E ist nach dem auf Seite 237 beschriebenen Verfahren bestimmt worden. $\min D_p$ entsteht in Folge Belastung der Strecke ξ . Die negative Einflussfläche ist ein Dreieck von der Höhe $v_n \frac{x}{\xi}$ und dem Inhalte

$$\underline{F} = v_n \frac{x}{\xi} \cdot \frac{\xi}{2} = \frac{v_n x}{2}$$

und es ergibt sich deshalb

$$\min D_p = -p \underline{F} = -\frac{p x}{2} v_n.$$

Man erhält also $\min D_p$, wenn man (an Stelle der Last 1) die Last $\frac{p x}{2}$ nach den Richtungen von g_n und D zerlegt. Wir haben $\frac{p x}{2}$ als Ordinate einer Geraden $A'B'$, die bei B die Ordinate $\frac{p l}{2}$ besitzt, dargestellt und den Seitenwerth von $\frac{p x}{2}$ nach der Richtung von D mit D_x (absolut genommen) bezeichnet; wir erhalten also

$$\min D_p = -D_x.$$

Erzeugt nun eine gleichmässige, über die ganze Trägerlänge sich erstreckende Belastung von der Grösse 1 für die Längeneinheit, die Spannkraft D_o , so ist der Einfluss der an der unteren Gurtung angreifend gedachten ständigen Belastung (g f. d. Längeneinheit)

$$D_g = g D_o,$$

und es ergibt sich mithin

$$\min D = g D_o - D_x.$$

Die Belastung der Strecke ξ' erzeugt

$$\max D_p = p D_o + D_x,$$

weil $\max D_p + \min D_p$ den der gänzlichen Belastung mit p entsprechenden Werth $p D_o$ liefern muss, und es folgt also, wenn $g + p = q$ gesetzt wird,

$$\max D = q D_o + D_x.$$

Die Spannkraft D_o findet man am schnellsten mit Hilfe eines Cremona'schen Kräfteplanes.

Man könnte auch, wie leicht einzusehen ist, $\max D_p$ in der Form

$$\max D_p = +D_x'$$

darstellen, wobei D_x' der zu D parallele Seitenwerth einer nach den Richtungen von D und g'_n zerlegten Last $\frac{p x'}{2}$ ist und g'_n wie folgt erhalten wird. Man bestimme in der Geraden 34 den Punkt $3'$ mit Hilfe von $23' \parallel 13$, ziehe $3'3'' \parallel D$ bis zur Senkrechten durch 2 und verbinde $3''$ mit N' durch g'_n . Die erste Bestimmungsweise ist jedoch vorzuziehen.

Handelt es sich um den senkrechten Stab V des in Fig. 482 abgebildeten Fachwerks, dessen Belastung wieder an der unteren Gurtung angreifen möge, so ist $v_n = \frac{e}{\lambda} 1$ und

$$\underline{F} = v_n \frac{x'}{2} = \frac{x' e}{2 \lambda}.$$

Es ist also

$$\min V_p = -p \underline{F} = -\frac{p x' e}{2 \lambda} = -V_x',$$

wo V_x' gedeutet werden kann als der auf den Knotenpunkt 1 entfallende Theil

einer im Punkte N_2 des Zwischenträgers 12 angreifenden Last $\frac{p x'}{2}$. Nach Ermittlung von V_x auf dem in Fig. 482 angegebenen Wege findet man

$$\begin{aligned} \min V &= g V_o - V_x \\ \max V &= q V_o + V_x. \end{aligned}$$

V_o entsteht bei derselben Belastung wie D_o .*)

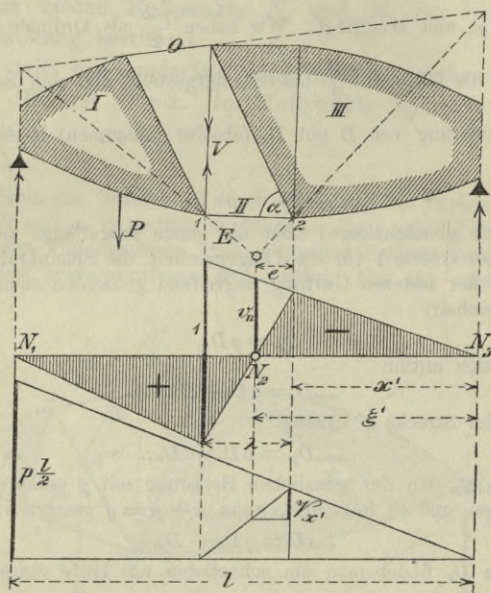


Fig. 482.

Wir lassen nun eine Reihe von Beispielen folgen, die nach den vorstehenden ausführlichen Erörterungen nur noch einer kurzen Erläuterung bedürfen werden.

1. Beispiel. Bogenträger mit einem festen Auflagergelenk B und einem auf schräger Bahn geführten Auflagergelenk A , Fig. 483. Gesucht ist die Einflusslinie für U . Der Pol (I) liegt in der Normalen zur Auflagerbahn und in der Geraden (II) ($I II$). Durch die Nullpunkte N_1 und N_2 und die Strecke v_1 ist die U -Linie bestimmt.

2. Beispiel, Bogenträger mit festem Auflager B und schrägem Gleitlager A , Fig. 484. Die Einflusslinie für D wurde mit Hilfe der

*) Für den Sonderfall eines Fachwerks mit Vertikalen ist die Ermittlung der Werthe $\min D_p = -D_x$, $\max D_p = +D_x$ und $\min V_p = -V_x$, bereits von Prof. Herzog (Zürich) gezeigt worden. Vergl. Schweiz. Bauzeitung, Bd. XV, No. 8.

Pole (I) und (II) und der Strecke v_n bestimmt. (I) ist der Schnittpunkt der Normalen zur Bahn des Auflagers A und der Geraden (III) (I III).

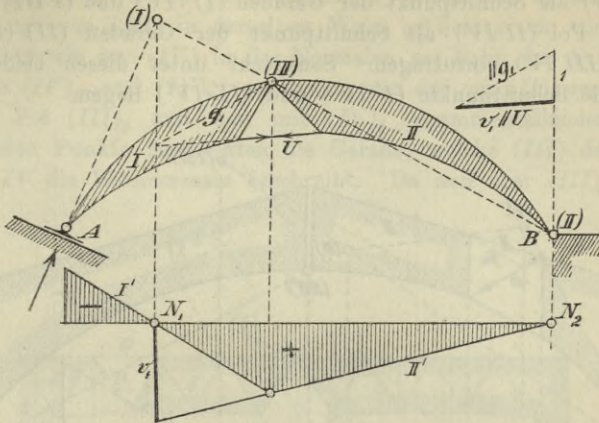


Fig. 483.

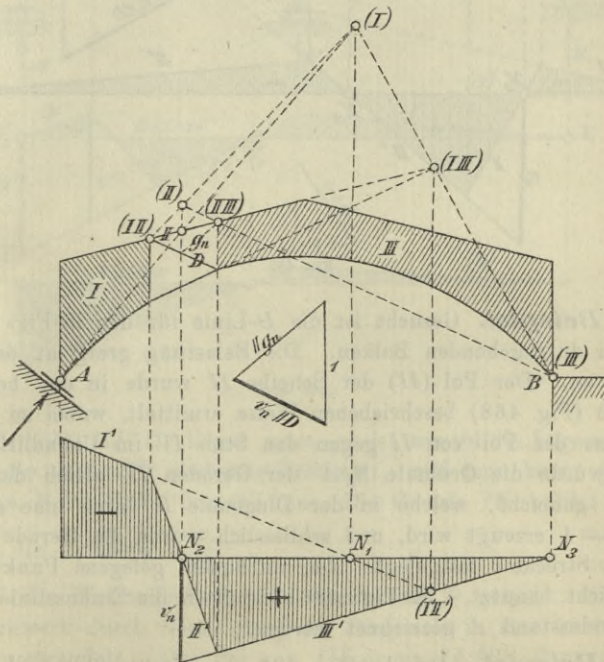


Fig. 484.

3. Beispiel, Dreigelenkbogen. Gesucht ist die Einflusslinie für D, Fig. 485. Es wurde der Pol (III) als Schnittpunkt der Geraden

lagern als gleichwerthig zu erachten sind, gestützt. Gesucht ist die Einflusslinie für O . Der Pol (II) wurde in derselben Weise ermittelt wie im Beispiel 4. Wäre die Lage von (IV) bekannt, so könnte man auf die Lage von (III) in derselben Weise schliessen wie von (I) auf (II) . Geben wir nun (IV) in der Normalen zur Bahn des Auflagers A die Lagen $(IV)_1$ und $(IV)_2$, so finden wir den zu (II) symmetrisch liegenden Pol $(III)_1$ und den mit $(IV)_2$ zusammenfallenden $(III)_2$. Diese beiden Punkte bestimmten die Gerade, welche (III) durchläuft, während IV die Bahnnormale beschreibt. Da nun aber (III) auch in

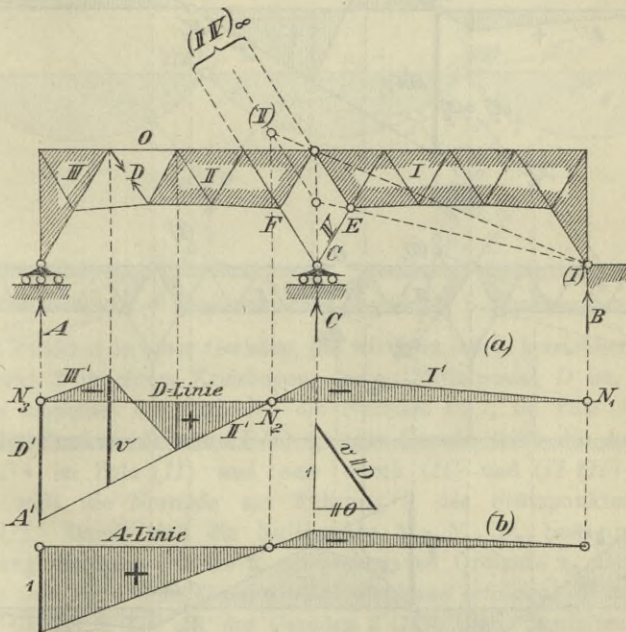


Fig. 486.

der Geraden (II) ($III II$) liegen muss, so ist sowohl die Lage von (III) als auch die von (IV) eindeutig bestimmt, und man kennt jetzt die Nullpunkte $N_1 N_2 N_3 N_4$ der O -Linie. Die Gerade II' besitzt an der Stelle N_3 die Ordinate $1 \frac{x_m}{h}$.

Wird die Einflusslinie für die Spannkraft D gesucht, so ist das starre Fachwerk durch Beseitigung der Diagonale in eine kinematische Kette zu verwandeln. Der Pol von III gegen II fällt dann mit dem unendlich fernen Schnittpunkte der wagerechten Gurtstäbe O und U zusammen, und es muss daher (III) in der Wagerechten durch (II)

wegliche Auflagergelenke besitzt. Gesucht ist die Einflusslinie für den Stützenwiderstand C . Die Lasten mögen an der oberen Gurtung angreifen. Wir denken uns die Führung des Punktes C beseitigt und bestimmen die Pole der Scheiben I , II und III .

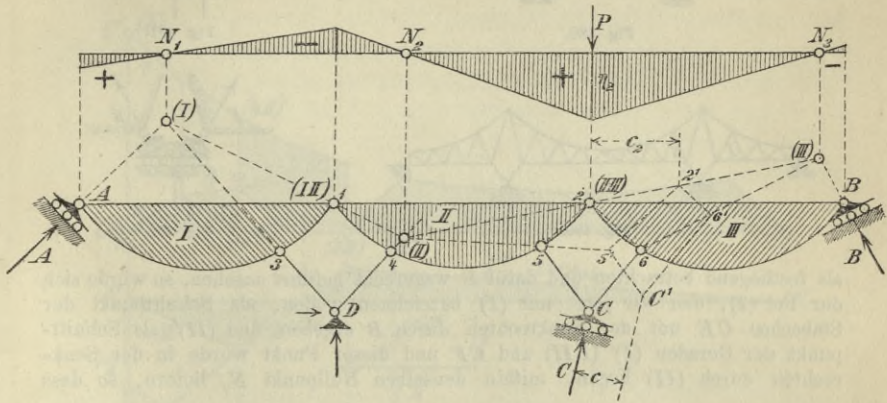


Fig. 488.

Da Punkt A in einer Geraden, die wir kurz mit l_a bezeichnen wollen, und Punkt 3 in einem Kreisbogen, dessen Mittelpunkt D ist, geführt wird, so schneidet der Stab $D3$ die Normale zu l_a im Pole (I) . Eine durch die Punkte (I) und $(I II)$ gelegte Gerade trifft die Achse des Stabes $D4$ im Pole (II) und eine durch (II) und $(II III)$ gelegte Gerade trifft die Normale zur Führung l_b des Stützpunktes B im Pole (III) . Damit sind die Nullpunkte N_1, N_2, N_3 bestimmt. Die Ermittlung der dem Punkte 2 entsprechenden Ordinate η_2 der C -Linie soll nun mit Hilfe eines Geschwindigkeitsplanes erfolgen. Wir nehmen für das Gelenk 2 die mit der Geraden $2 (III)$ zusammenfallende lothrechte Geschwindigkeit $2 2'$ beliebig an, legen durch $2'$ Parallelen zu den Geraden $2 5$ und $2 6$, welche die Geraden $5 (II)$ und $6 (III)$ beziehungsweise in $5'$ und $6'$ schneiden und ziehen $5' C' \parallel 5 C$ sowie $6' C' \parallel 6 C$. Bezeichnet c den Abstand des Widerstandes C vom Punkte C' und c_2 den Abstand der in 2 angreifenden Last P vom Punkte $2'$, so besteht die Gleichung $Cc - Pc_2 = 0$; sie liefert für η_2 den Werth

$$\eta_2 = 1 \frac{c_2}{c}.$$

Die Figuren 489, 490 und 491 zeigen verschiedenartig geformte, über mehrere Öffnungen gespannte Balkenbrücken, die sich zu Übungsaufgaben eignen. In Fig. 492 sind die von den Mittelstützen ausgehenden schrägen Stäbe durch gleichwerthige Gleitlager ersetzt worden. Treten nur senkrechte Lasten

auf, so ist es gleichgültig, welches Auflagergelenk das feste ist, und es empfiehlt sich daher, in jedem einzelnen Falle eine zu möglichst einfachen Polbestimmungen führende Annahme zu machen. Würde man z. B. in Fig. 486 das Gelenk C

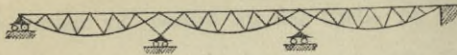


Fig. 489.



Fig. 491.

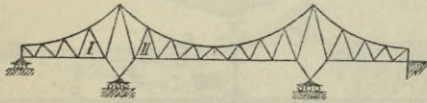


Fig. 490.

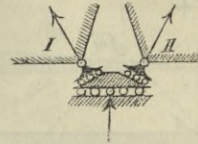


Fig. 492.

als festliegend betrachten und dafür B wagerecht geführt ansehen, so würde sich der Pol (I), den wir jetzt mit (I') bezeichnen wollen, als Schnittpunkt der Stabachse CE mit der Senkrechten durch B ergeben und (II') als Schnittpunkt der Geraden ($I' III'$) und CF und dieser Punkt würde in der Senkrechten durch (II) liegen, mithin denselben Nullpunkt N_2 liefern, so dass

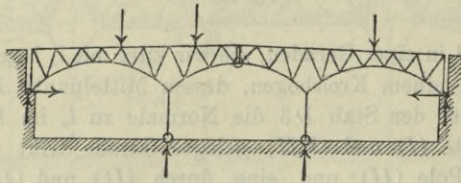


Fig. 493.

sich aus dieser Zulässigkeit der Auflagervertauschung eine ganze Reihe von Zeichnungsproben herleiten lassen. — Auch die Untersuchung des in Fig. 493 abgebildeten Bogenträgers ist als lehrreiche Übungsaufgabe zu bezeichnen.

7. Beispiel. Es soll der bereits im § 43, Fig. 370 auf anderem Wege untersuchte *Gerber'sche Balken mit Hängegürtung* nunmehr kinematisch behandelt werden.

Fig. 494 zeigt den Ausleger und den Koppelträger. Gesucht seien die Einflusslinien für die Spannkraft U der unteren Gürtung und die wagerechte Seitenkraft $O \cos \beta$ der unter β geneigten Spannkraft O des Auslegers. Handelt es sich um U , so ist der obere Knotenpunkt m der Pol von III gegen II . Die Pole ($a III$) und ($b III$) der Kettenglieder a und b gegen die Scheibe III fallen wegen der parallelen Hängestangen ins Unendliche, es liegen daher die Pole (a) und (b) der Glieder a und b gegen das Widerlager in der Senkrechten durch (III). Da nun der Knotenpunkt C mit dem über die Seitenöffnung gestreckten,

das Widerlager des Auslegers bildenden Träger AB (Fig. 495) fest verbunden ist, so fällt (a) mit C zusammen und es muss auch (b) mit C zusammenfallen, weil (a) , (ab) , (b) in einer Geraden liegen. Hätte die Scheibe III drei oder noch mehr Felder, so würden auch die Pole (c) (d) . . . , der übrigen mit (III) durch parallele Hängestangen verbundenen

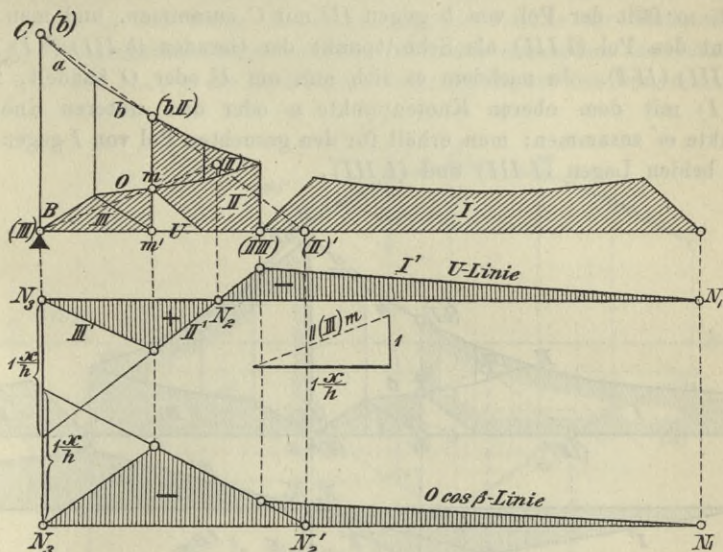


Fig. 494.

Kettenglieder c , d , . . . mit C zusammenfallen, weil (b) , (bc) , (c) in einer Geraden liegen, desgleichen (c) (cd) (d) u. s. w. Durch die beiden Geraden (b) $(b II)$ und (III) m ist jetzt der Pol (II) und damit auch der Nullpunkt N_2 bestimmt. Wird O gesucht, so hängen die Scheiben III und II in m' zusammen, und die Scheibe II dreht sich um den in den Geraden (b) $(b II)$ und (III) m' liegenden Pol $(II)'$. Nach Ermittlung der Nullpunkte wurden die Einflusslinien für U und $O \cos \beta$ mit Hilfe der Strecke $1 \frac{x}{h}$ bestimmt, wo h die Länge der Vertikale mm' bedeutet.

Wie man aus den U -Linien und $O \cos \beta$ -Linien sehr schnell die Einflusslinien für $D \cos \varphi$ und $-V \cotg \varphi$ finden kann, ist im § 43 beschrieben worden.

Fig. 495 zeigt die Einflusslinien für die Spannkraft U und $O \cos \beta$ in zwei Gurtstäben der Seitenöffnung AB . So lange die über den Träger wandernde Last zwischen A und B liegt, ist die Kettengurtung spannungslos, und das Trägerstück AB verhält sich wie ein einfacher Balken. Die $O \cos \beta$ -Linie unterscheidet sich von der U -Linie nur durch

das Vorzeichen; beide Linien sind durch ein und dieselbe Strecke $v = 1 \frac{x}{h}$ bestimmt. Um den Einfluss der Belastung des Auslegers und des Koppelträgers zu ermitteln, braucht man nur den Pol ($I III$) von I gegen III anzugeben. Da nun der Punkt C jetzt zur Scheibe III gehört, so fällt der Pol von b gegen III mit C zusammen, und man gewinnt den Pol ($I III$) als Schnittpunkt der Geraden ($b III$) ($b I$) und ($II III$) ($II I$). Je nachdem es sich nun um U oder O handelt, fällt ($II I$) mit dem oberen Knotenpunkte m oder dem unteren Knotenpunkte m' zusammen; man erhält für den gesuchten Pol von I gegen III die beiden Lagen ($I III$) und ($I III$)'.

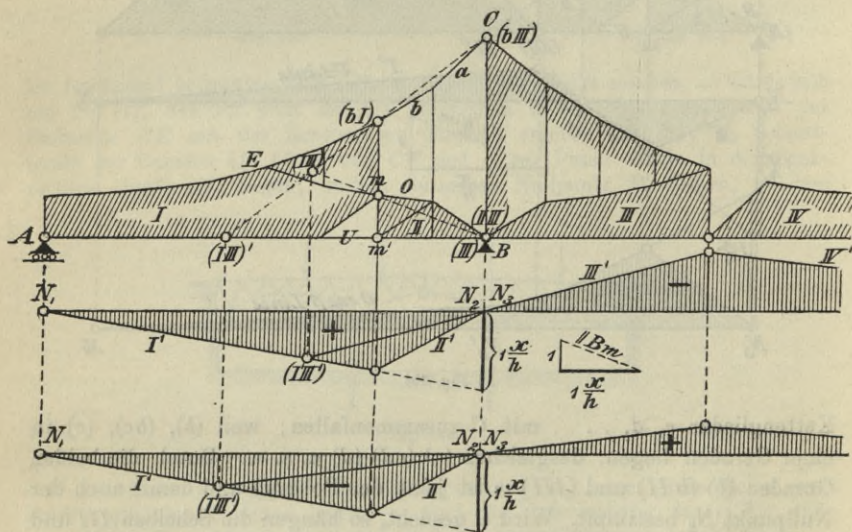


Fig. 495.

Wir empfehlen dem Leser, eine ähnliche Untersuchung über die D -Linie anzustellen und auch die (besonders einfache) Bestimmung des Poles ($I III$) für den Fall vorzunehmen, dass die fraglichen Stäbe links vom Endpunkte E der Hängegurtung liegen.

217. Herleitung der Einflussfiguren für schräge Lasten aus den Einflusslinien für senkrechte Lasten. Es seien $0, 1, 2, 3, \dots, n$ die Knotenpunkte eines Stabzuges oder Scheibenzuges einer zwangsläufigen Kette, in welche ein Fachwerk behufs Berechnung irgend einer Unbekannten S verwandelt worden ist, Fig. 496 a; es seien ferner (in Fig. 496 b) $0, 1, 2, 3, \dots, n$ die entsprechenden Punkte der auf eine wagerechte Nulllinie AB bezogenen Einflusslinie für S , gültig für senkrechte

Lasten P . Die Ordinaten $\eta_0, \eta_1, \eta_2 \dots \eta_n$ dieser Einflusslinie dürfen stets als die senkrechten Projektionen der Geschwindigkeiten der Knotenpunkte $0, 1, 2, 3, \dots, n$ aufgefasst werden, und daraus folgt, dass die Endpunkte $0', 1', 2', 3' \dots n'$ der von einem in der AB angenommenen Nullpunkte O aus aufgetragenen Geschwindigkeiten der Punkte $0, 1, 2, 3, \dots, n$ in den durch die entsprechenden Punkte der Einflusslinie gelegten Wagerechten liegen müssen. Da nun ausserdem die Geraden $0'1', 1'2', 2'3', \dots$ der Reihe nach rechtwinklig zu den Verbindungs-

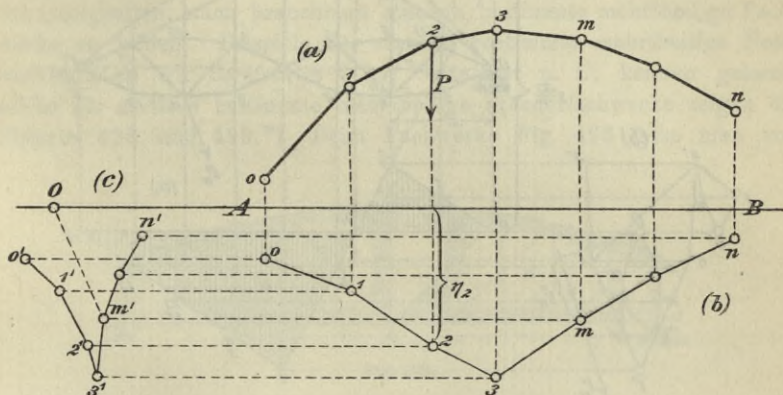


Fig. 496.

geraden $01, 12, 23, \dots$ der Knotenpunkte sein müssen, (vergl. den Schluss von No. 215) so ist der Geschwindigkeitsplan in Fig. 496c vollständig bestimmt, sobald die Richtung oder die Grösse der Geschwindigkeit eines einzigen Punktes m des Scheibenzuges gegeben ist. Die Ermittlung der Geschwindigkeiten der übrigen Punkte erfolgt dann mit Hilfe des durch den bekannten Punkt m' zu führenden *Normalenzuges* $0'1'2'3' \dots n'$.

Beispiel. Nach diesem Verfahren ist in Figur 497 der Einfluss schräger Lasten auf die Spannkraft O des Obergurtstabes 1—3 des Versteifungsfachwerks eines Gelenkbogens untersucht worden, indem zuerst die Einflusslinie für die lothrechte Belastung auf die im § 49 angegebene Weise gezeichnet wurde. Der dem fraglichen Stabe gegenüberliegende Knotenpunkt 4 liegt im Abstände h unterhalb der die Auflagergelenke verbindenden Geraden, und es wurde daher das Maass h vom entsprechenden Bogenpunkte b aus nach oben aufgetragen, hierauf durch O und den Endpunkt der Strecke h eine Gerade gelegt, welche die Verbindungslinie $14 - c$ in E trifft. Lothrecht unter E liegt der Null-

punkt der Einflusslinie, welche aus drei Geraden besteht, deren mittelste auf der Senkrechten durch O die Strecke $1 \frac{x}{r}$ abschneidet, wo r das Loth von 4 auf O bedeutet. Diese Einflusslinie gilt für oben und

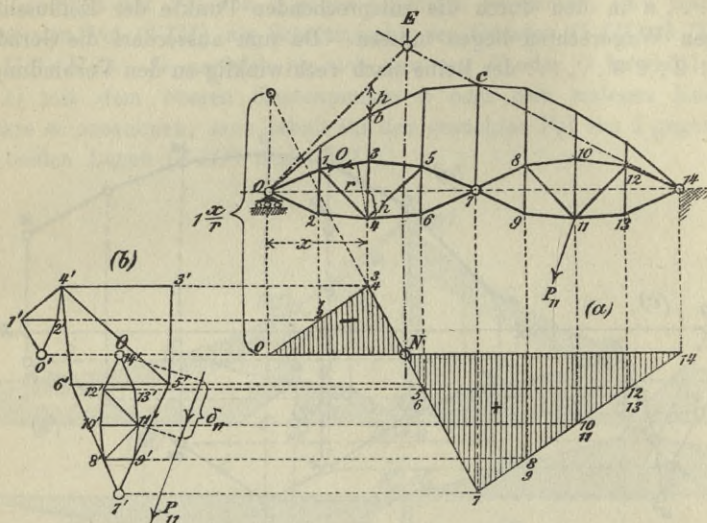


Fig. 497.

unten angreifende Lasten und kann nun zur Bestimmung der Fig. 497b benutzt werden. O ist der in der Nulllinie angenommene Pol. $14'$ fällt mit O zusammen. Sollen nur die unten angreifenden Lasten berücksichtigt werden, so genügt es, den der unteren Gurtung entsprechenden Normalenzug $14' 13' 11' 9' 7' 6' 4' 2' 0'$ zu zeichnen. Der Einfluss von P_{11} auf O ist z. B.

$$O = + P_{11} \delta_{11}.$$

Dreht man die Last P_{11} rechts herum um 90° und weist man ihr den Punkt $11'$ als Angriffspunkt zu, so ist $P_{11} \delta_{11}$ das Moment von P_{11} in Bezug auf den Nullpunkt O ; es ist positiv anzunehmen, sobald es rechts um O dreht. Auf diese Weise kann man den Ausdruck $\sum P\delta$, ganz ebenso wie dies in No. 215 mit dem Ausdruck $\sum Pc$ geschehen ist, als das Moment der Kräfte P in Bezug auf den Pol O deuten.

§ 53.

Aufgaben über mehrtheilige Fachwerke.

218. Ein Fachwerk wird ein t -theiliges genannt, wenn seine Gurtungen durch zwei einander kreuzende Schaaren von Füllungsstäben verbunden sind und ein von Gurtung zu Gurtung reichender Stab der einen Schaar durch Stäbe der anderen Schaar in t -Theile zerlegt wird.

Die bisher ausgeführten mehrtheiligen Fachwerke sind mit wenigen Ausnahmen statisch unbestimmt; es unterliegt aber nicht den geringsten Schwierigkeiten, auch brauchbare statisch bestimmte mehrtheilige Fachwerke zu bilden. Beispiele für statisch bestimmte mehrtheilige Netzwerke haben wir bereits im § 51, Seite 446 u. f., kennen gelernt, solche für statisch bestimmte mehrtheilige Ständerfachwerke zeigen die Figuren 498 und 499.*) Beim Fachwerke Fig. 498 gehe man von

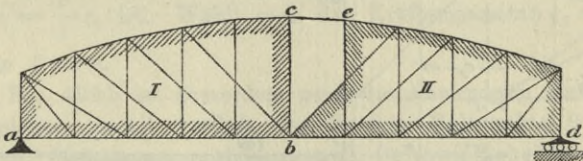


Fig. 498.

den Endständern aus, bilde mittelst zweiständigen Anschlusses der Knotenpunkte die Scheiben I und II und verbinde diese miteinander durch das Gelenk b und den Stab ce . Die Kreuzungspunkte der Diagonalen und Vertikalen dürfen auch als Knotenpunkte aufgefasst werden. Das Fachwerk in Fig. 499 wird vom Mittelständer aus, durch zweiständigen Anschluss der Knotenpunkte gebildet.

Die Berechnung mehrtheiliger Fachwerke erfolgt am zweckmässigsten mit Hilfe von Einflusslinien; sie soll durch eine Reihe von Beispielen, die sich auf Balken mit zwei Stützpunkten beziehen, erläutert werden.

a. Balken mit gebrochenen Gurtungen.

219. Einflusslinie für die Vertikale V des Ständerfachwerks in Fig. 499. Wird der Stab 87 beseitigt, so entsteht eine zwangläufige Kette. Der rechts vom Stabe 69 gelegene schraffierte Theil des Fachwerks ist eine starre Scheibe und soll zunächst als ruhend

*) Eine ähnliche Anordnung zeigt der auf Seite 361 abgebildete Ausleger der Niagarabrücke.

angesehen werden. An denselben schliesst sich das Gelenkviereck 6 4 7 9 an, und mit diesem sind die übrigen Knotenpunkte durch je zwei Stäbe verbunden. Fig. 499a stellt die um 90° gedrehten Geschwindigkeiten dar. Nach Uebertragung des ruhenden Stabes 6 9*) wurde der Punkt 7' auf der zum Stabe 7 9 parallelen Geraden 7'9' beliebig angenommen, und hierauf wurden der Reihe nach die Punkte 5', 4', 3', 2', 1' und 0' ermittelt.

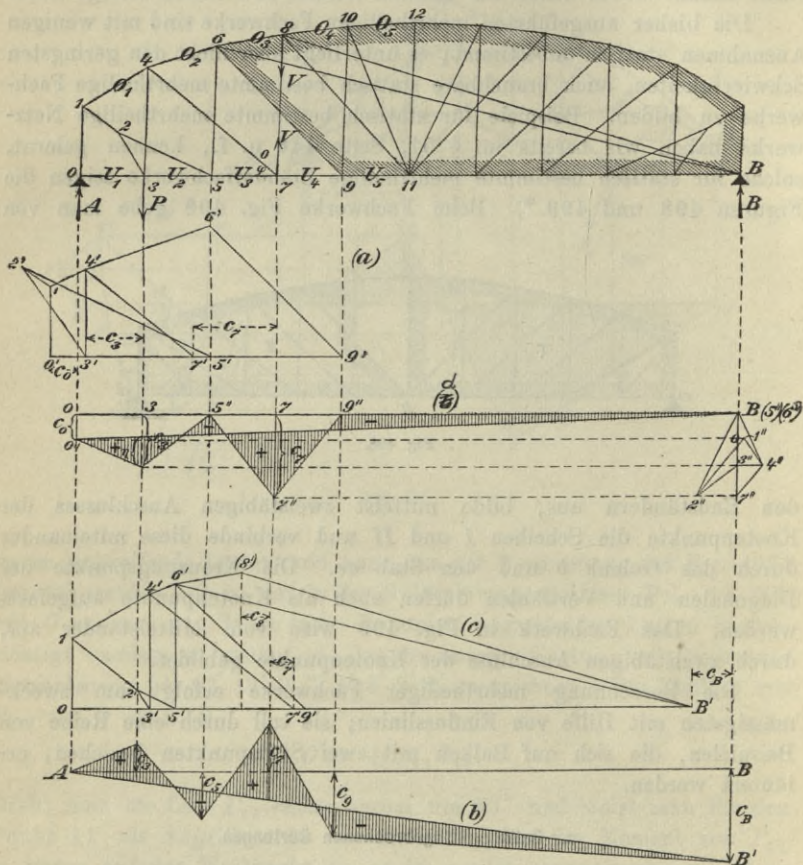


Fig. 499.

Der Einfluss irgend einer Last P ergibt sich nun aus der Gleichgewichtsbedingung $\sum Qc = 0$. Greift P in 3 an, so erhält man

$$Pc_3 - Ac_0 - Vc_7 = 0$$

*) Der grösseren Uebersichtlichkeit wegen empfiehlt es sich, den Geschwindigkeitsplan vom Trägernetz zu trennen.

und hieraus

$$V = \frac{P}{c_7} \left(c_3 - \frac{A}{P} c_0 \right) = \frac{P}{c_7} \left(c_3 - \frac{b}{l} c_0 \right),$$

wo b den Abstand der Last P von der Stütze B und l die Stützweite bedeutet. Setzt man

$$c_3 - \frac{b}{l} c_0 = \eta,$$

so findet man

$$V = P \frac{\eta}{c_7}.$$

Die Einflussfläche für V zeigt Fig. 499b. Es wurde gemacht: $0\ 0'' = c_0$, $3\ 3'' = c_3$, $7\ 7'' = c_7$; die Geschwindigkeiten der Punkte 5 und 9 und aller Knotenpunkte der Scheibe OB sind gleich Null. Weiter wurde $0''$ mit B durch eine Gerade verbunden, deren unter P gemessene Ordinate $= \frac{b}{l} c_0$ ist. Wählt man den Kräftemaassstab $c_7 = P$, so erhält man $V = \eta$.

In Fig. 499b ist ausserdem noch die Anwendung eines Geschwindigkeitsplanes gezeigt worden, der die vom Nullpunkte B aus in den wirklichen Richtungen aufgetragenen Geschwindigkeiten darstellt.*) Es wurde $B\ 7''$ gleich der beliebig anzunehmenden Geschwindigkeit c_7 gemacht; die Punkte $5''$, $6''$ fallen mit B zusammen.

$$\begin{array}{cccccccc} 4'' & \text{wurde bestimmt mit Hilfe von} & 6''\ 4'' & \perp & 6\ 4 & \text{und} & 7''\ 4'' & \perp & 7\ 4 \\ 3'' & \text{''} & \text{''} & \text{''} & 5''\ 3'' & \perp & 5\ 3 & \text{''} & 4''\ 3'' & \perp & 4\ 3 \end{array}$$

Eine dritte Lösung der vorliegenden Aufgabe zeigen die Figuren 499c und 499d. Es wurde der Stab $0\ 1$ als ruhend angesehen. Nach Annahme von $3'$ ergaben sich der Reihe nach $2'$, $4'$, $5'$, $6'$, $7'$, $9'$. Nun wurde, da der schraffierte Theil der kinematischen Kette starr ist, der Punkt B' bestimmt mit Hilfe von $9'\ B' \parallel 9\ B$ und $6'\ B' \parallel 6\ B$, und schliesslich wurde $8'$ bestimmt mittels $B'\ 8' \parallel B\ 8$ und $6'\ 8' \parallel 6\ 8$. Die Gleichgewichtsbedingung $\sum Qc = 0$ lautet, wenn die Last P in 3 angreift,

$$- P c_3 + V c_8 + V c_7 - B c_B = 0$$

woraus

$$V (c_7 + c_8) = P \left(c_3 + \frac{B}{P} c_B \right).$$

Die in der Fig. 499^d schraffierte Fläche ist Einflussfläche für $V (c_7 + c_8)$. Die dritte Lösung bietet den Vortheil, dass ein Theil der Fig. 499c

*) Vrgl. den Schluss von Nr. 215.

auch zur Berechnung anderer Spannkraften V benutzt werden kann. Handelt es sich beispielsweise um die Spannkraft V im Stabe 5 6, so können die Punkte 2', 3', 4', 5', 7' beibehalten werden. Die Division mit $(c_7 + c_8)$ braucht man nur mit einer Ordinate vorzunehmen, weil die Einflusslinie durch eine Ordinate und durch die Nullpunkte bestimmt ist.

Aus dem Geschwindigkeitsplane Fig. 499 c lassen sich mit wenigen Strichen die Einflusslinien für die Spannkraften D_{8-11} und D_{10-11} in den Stäben 8—11 und 10—11 folgern. Wird z. B. die kinematische Kette durch Beseitigung des Stabes 8—11 erzielt, so rückt 8' in die Senkrechten durch 7'; Punkt 10' wird in der Senkrechten durch 9' mittels $8'10' \parallel 8\ 10$ bestimmt, sodann werden in der Wagerechten durch 9' die Punkte 11' und B' durch Ziehen von $10'—11' \parallel 10—11$ und $10'B' \parallel 10\ B$ festgelegt. Die Spannkraften in den übrigen Diagonalen und in den Gurtungen werden mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen durch die Spannkraften V , D_{8-11} und D_{10-11} ausgedrückt. So besteht z. B. zwischen den Spannkraften V und D der Stäbe 7 8 und 7 4, falls Knotenpunkt 7 unbelastet ist, die Beziehung

$$D \sin \varphi = -V,$$

so dass sich die Ordinaten der Einflusslinien für $D \sin \varphi$ und V in allen Knotenpunkten mit Ausnahme des Punktes 7 nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Liegt P in 7, so ist $D \sin \varphi = -V + P$; es ist dann die Ordinate der $D \sin \varphi$ -Linie gleich der Lasteinheit, vermindert um die entsprechende Ordinate der V -Linie.

Zwischen U_4 , D und U_3 besteht die Gleichung

$$U_4 = U_3 + D \cos \varphi = U_3 + D \sin \varphi \cdot \cotg \varphi.$$

Da nun $U_1 = 0$ ist, so kann man aus den $D \sin \varphi$ -Linien schrittweise alle U -Linien herleiten und aus den Werthen U findet man die Spannkraften O_1 , O_2 , O_3 der unter den Winkeln β_1 , β_2 , β_3 gegen die Wagerechte geneigten Obergurtstäbe der ersten drei Felder

$$O_1 = -U_3 \sec \beta_1, \quad O_2 = -U_3 \sec \beta_2, \quad O_3 = -U_5 \sec \beta_5.$$

Die Spannkraft O_5 wird wie beim einfachen Dreieckssystem mittels der Gleichung

$$O_5 \cos \beta_5 = -\frac{2R_{11}}{h_{11}}$$

gefunden, wo h_{11} die Länge des Stabes 11—12 bedeutet und für O_4 gilt die Gleichung

$$O_4 \cos \beta_4 = O_5 \cos \beta_5 - (D \cos \varphi)_{10-11}.$$

Die Spannkraft V im Stabe 11—12 ist durch das Kräftepolygon für den Knotenpunkt 11 bestimmt.

220. Zweitheiliges Netzwerk mit einem Ständer in der Mitte. Fig. 500. Die Lasten mögen in den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreifen. Die Einflusslinien für die Stäbe O , U und D sollen mit Hilfe von Kräfteebenen bestimmt werden.

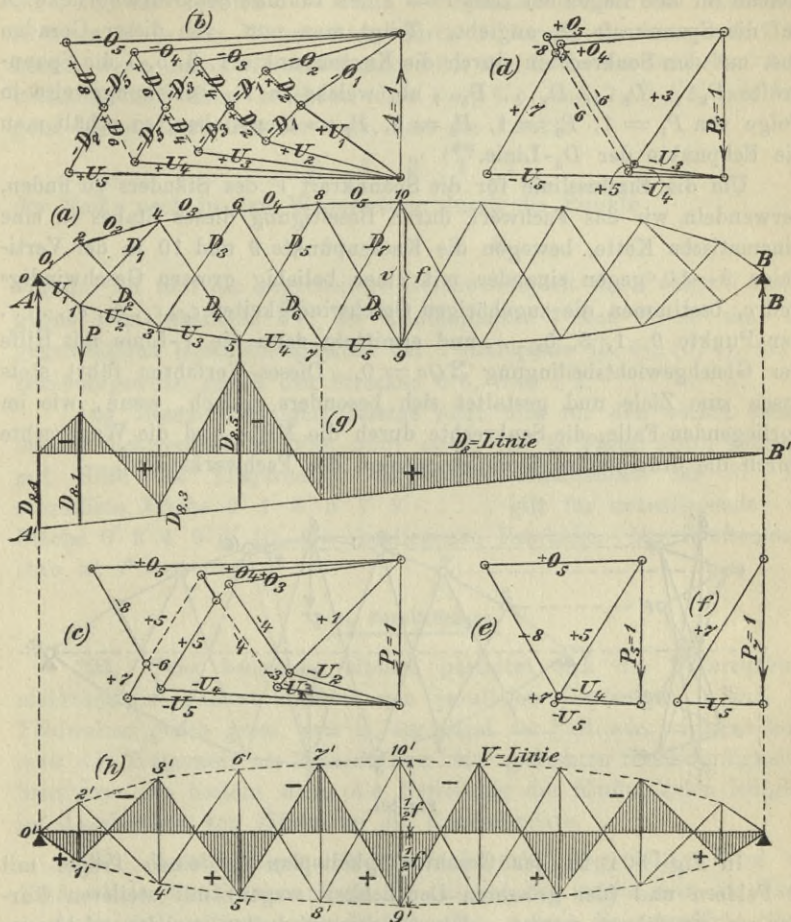


Fig. 500.

Wir betrachten die linke Trägerhälfte als einen an der Stelle 9—10 eingespannten, mit den äusseren Kräften A , P_1 , P_3 , P_5 , P_7 belasteten Freitragler und ermitteln der Reihe nach die Spannkraften in Folge der Belastungen

$$A = 1, P_1 = 1, P_3 = 1, P_5 = 1, P_7 = 1$$

mit Hilfe der einer näheren Erläuterung nicht bedürftigen Kräfte-

pläne $[b]$, $[c]$, $[d]$, $[e]$, $[f]$.)*) Durch diese 5 Pläne sind die Einflusslinien für sämtliche Diagonalen und Gurtstäbe bestimmt.

Figur 500 g zeigt die D_8 -Linie. Die dem Plane $[b]$ entnommene positive Spannkraft $D_{8,4}$ in Folge $A=1$ bestimmt die Gerade $A'B'$, welche für alle Lagen der Last $P=1$ den Einfluss des Stützdruckes A auf die Spannkraft D_8 angiebt. Trägt man nun, von dieser Geraden aus, auf den Senkrechten durch die Knotenpunkte 1, 3, 5, 7 die Spannkraften $D_{8,1}$, $D_{8,3}$, $D_{8,5}$, $D_{8,7}$ ab, welche in D_8 beziehungsweise in Folge von $P_1=1$, $P_3=1$, $P_5=1$, $P_7=1$ entstehen, so erhält man die Eckpunkte der D_8 -Linie.**)

Um die Einflusslinie für die Spannkraft V des Ständers zu finden, verwandeln wir das Fachwerk durch Beseitigung dieses Stabes in eine kinematische Kette, bewegen die Knotenpunkte 9 und 10 in der Vertikalen 9—10 gegen einander mit einer beliebig grossen Geschwindigkeit c , bestimmen die zugehörigen Geschwindigkeiten $c_0, c_1, c_3, c_5, \dots$ der Punkte 0, 1, 3, 5, \dots und ermitteln dann die V -Linie mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung $\sum Qc=0$. Dieses Verfahren führt stets rasch zum Ziele und gestaltet sich besonders einfach, wenn, wie im vorliegenden Falle, die Senkrechte durch die Mitte und die Wagerechte durch die Stützpunkte Symmetrieachsen des Fachwerks sind.

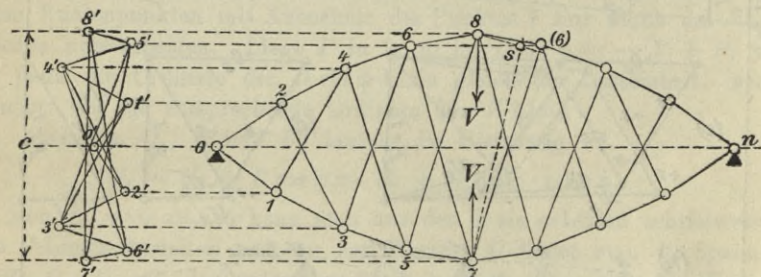


Fig. 501.

In Fig. 501 ist der Geschwindigkeitsplan für einen Träger mit 8 Feldern (und der grösseren Deutlichkeit wegen) mit steileren Gurtnungen gezeichnet worden. Die Geschwindigkeiten wurden nicht um 90° gedreht, sondern in ihren wirklichen Richtungen aufgetragen. Die in einer Senkrechten gelegenen Punkte $7'$ und $8'$ wurden in den Wagerechten durch die Knotenpunkte 7 und 8 angenommen; ihre

*) In den Plänen $[c]$ bis $[f]$ haben wir die Bezeichnungen D_1, D_2, D_3, \dots durch die kürzeren 1, 2, 3, \dots ersetzt.

**) Dieses Verfahren lässt sich natürlich auch zur Berechnung des in Fig. 499 dargestellten Trägers benutzen.

gegenseitige Geschwindigkeit wurde also durch die Länge des Stabes 7 8 dargestellt. Nun wurde 5' mittels 8'5' \perp 8 5 und 7'5' \perp 7 5 bestimmt

$$6' \quad \text{„} \quad 7'6' \quad \perp \quad 7 6 \quad \text{„} \quad 8'6' \quad \perp \quad 8 6 \quad \text{„}$$

u. s. w.

Sind nun die Geraden 0 — n und 7 8 Symmetrieachsen des Fachwerks, so muss 5' in der Wagerechten durch 6 liegen, was man sofort erkennt, wenn man den Schnittpunkt s der drei Lothe des Dreiecks 7 8 (6) bestimmt und dann beachtet, dass 8 s \parallel 8'5' und 7 s \parallel 7'5' ist; und ganz ebenso lässt sich beweisen, dass die Punkte

$$6' \quad 4' \quad 3' \quad 2' \quad 1'$$

der Reihe nach in den Wagerechten durch die Punkte

$$5 \quad 4 \quad 3 \quad 1 \quad 2$$

liegen. Ist also die gegenseitige Geschwindigkeit der Punkte 7 und 8 gleich dem Abstände 7 8 der Knotenpunkte 7 und 8, so sind die gegenseitigen Geschwindigkeiten der Punktepaare (5, 6), (3, 4), (1, 2) beziehungsweise gleich den Strecken 5 6, 3 4, 1 2.

Aus diesem wichtigen Gesetze folgt nun für den vorhin behandelten Fachwerkbalken (Fig. 500) sofort die in Figur 500h lediglich mit Hilfe des Trägernetzes dargestellte Einflusslinie für V. Die schraffierte Fläche 0' 1' 3' 5' 7' 9' gilt für untenliegende, die Fläche 0' 2' 4' 6' 8' 10' für obenliegende Fahrbahn. Der Kräftemaassstab ist $P = 1 = f$.

b. Parallelträger.

221. Ganz besonders einfach gestaltet sich die Untersuchung mehrtheiliger Fachwerkbalken mit parallelen Gurtungen. Sind die Feldweiten gleich gross, was in der Regel der Fall sein wird, so kann man das Trägernetz als Plan der um 90° gedrehten Geschwindigkeiten benutzen. Es besteht dann die Herleitung der Einflusslinien lediglich im Anschreiben von Ziffern an die Knotenpunkte.

222. Zweitheiliges Ständerfachwerk. Fig. 502. Wird die Einflusslinie für die Spannkraft D_5 gesucht, so mache man das Fachwerk durch Beseitigung von D_5 beweglich, nehme die schraffierte starre Scheibe ruhend an und schreibe dem Knotenpunkte 3 eine Geschwindigkeit $c_3 = \lambda$ zu. Punkt 3' fällt dann mit dem Knotenpunkte 1 zusammen, 4' mit 2, 6' mit 6, 5' mit 5, 8' mit 6, 7' mit 5 u. s. w., 11' mit 9. Der Hebelarm von D_5 in Bezug auf 4' ist $\lambda \sin \varphi$, und man erhält beispielsweise für eine in 3 angreifende Last P die Gleichung

$$A \lambda - P \lambda - D_5 \lambda \sin \varphi = 0$$

$$D_5 \sin \varphi = A - P$$

Figur 502a zeigt die $D_5 \sin \varphi$ -Linie sowohl für untenliegende als auch für obenliegende Fahrbahn.

Beseitigt man D_4 und bestimmt man in derselben Weise einen Geschwindigkeitsplan, so findet man, dass 11' mit 11 zusammenfällt.

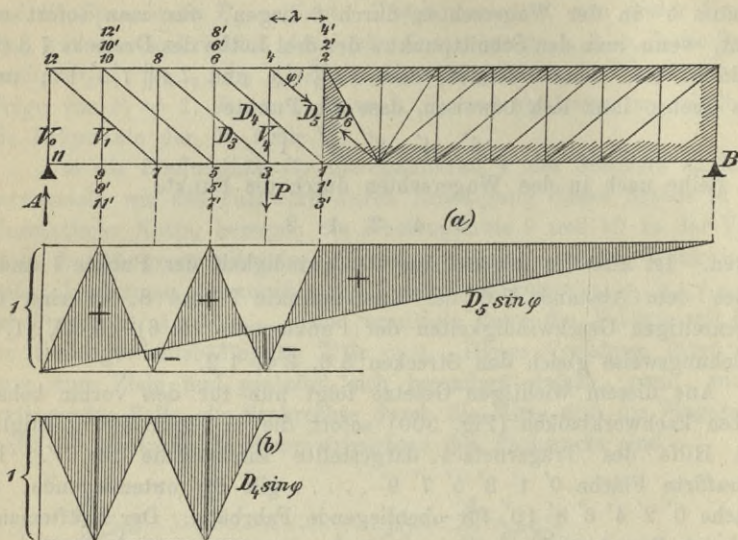


Fig. 502.

Es entsteht die in Fig. 503b gezeichnete $D_4 \sin \varphi$ -Linie. Damit sind die Bildungsgesetze für die $D \sin \varphi$ -Linien gefunden. Für alle Diagonalen, welche dem vom Endknoten 12 ausgehenden Stabzuge 12—7—8—3 . . . angehören, ergeben sich Einflusslinien von der Art Fig. 502a, für die anderen solche von der Art Fig. 502b. Dies gilt auch für $D_6 \sin \varphi$, welches im vorliegenden Falle zur zweiten Gruppe [Fig. 502b] gehört.

Kennt man die Grenzwerte $_{max} D \sin \varphi$ und $_{min} D \sin \varphi$, so findet man die Spannkraften in den Vertikalen mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen für die Knotenpunkte. Beispielsweise ergibt sich für V_4 bei untenliegender Fahrbahn der Werth

$$V_4 = -D_5 \sin \varphi - g_o \lambda$$

wo $g_o \lambda$ die ständige Belastung des Knotenpunktes 4 bedeutet, und bei obenliegender Fahrbahn wird

$$V_4 = -D_3 \sin \varphi + g_u \lambda$$

wo $g_u \lambda$ die ständige Belastung des Knotenpunktes 3 ist.

Fig. 503 zeigt die Einflusslinie für die Spannkraft U in einem Stabe der unteren Gurtung. Die schraffierte Scheibe ist wieder als ruhend angesehen worden; $1'$ fällt also mit 1 zusammen, $2'$ mit 2. Punkt $3'$ darf nach Belieben in der Geraden 2 3 angenommen werden;

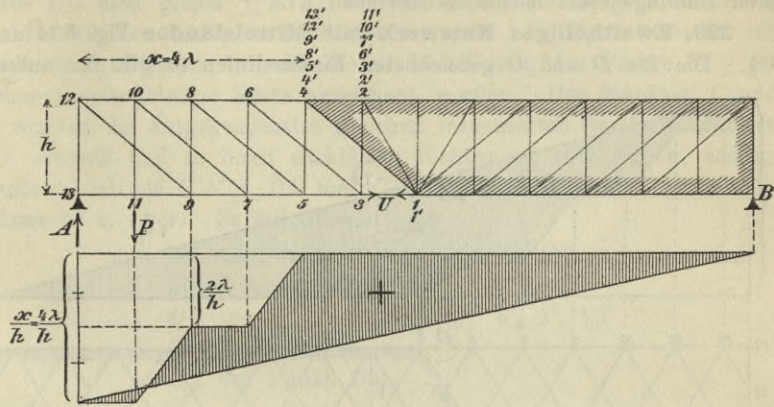


Fig. 503.

er wurde mit 2 zusammenfallend gewählt. Dann fallen auch $6'$, $7'$, $10'$, $11'$ mit 2 zusammen, während $4'$, $5'$, $8'$, $9'$, $12'$, $13'$ mit 4 zusammenfallen. Für eine in 11 angreifende Last P findet man

$$A \cdot 4\lambda - P4\lambda - Uh = 0$$

$$U = A \frac{4\lambda}{h} - P \frac{4\lambda}{h}.$$

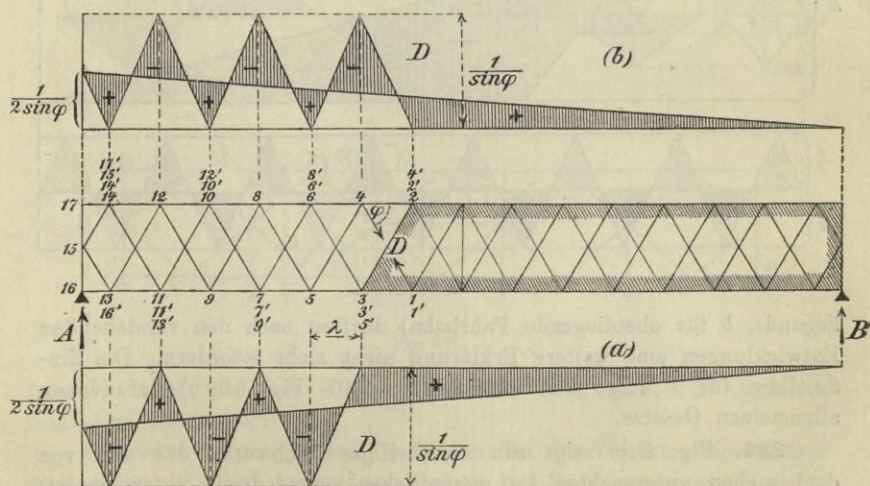


Fig. 504.

Den Knotenpunkten 9 und 7 entsprechen die Geschwindigkeiten 2λ ; die Knotenpunkte 5, 3, 1 . . . B bewegen sich nicht; es entsteht also die durch Schraffur hervorgehobene Einflussfläche für U , welche sowohl für untenliegende als auch für obenliegende Fahrbahn gilt und deren Bildungsgesetz leicht zu übersehen ist.

223. Zweitheiliges Netzwerk mit Mittelständer Fig. 504 und 505. Die für D und O gezeichneten Einflusslinien (a gilt für unten-

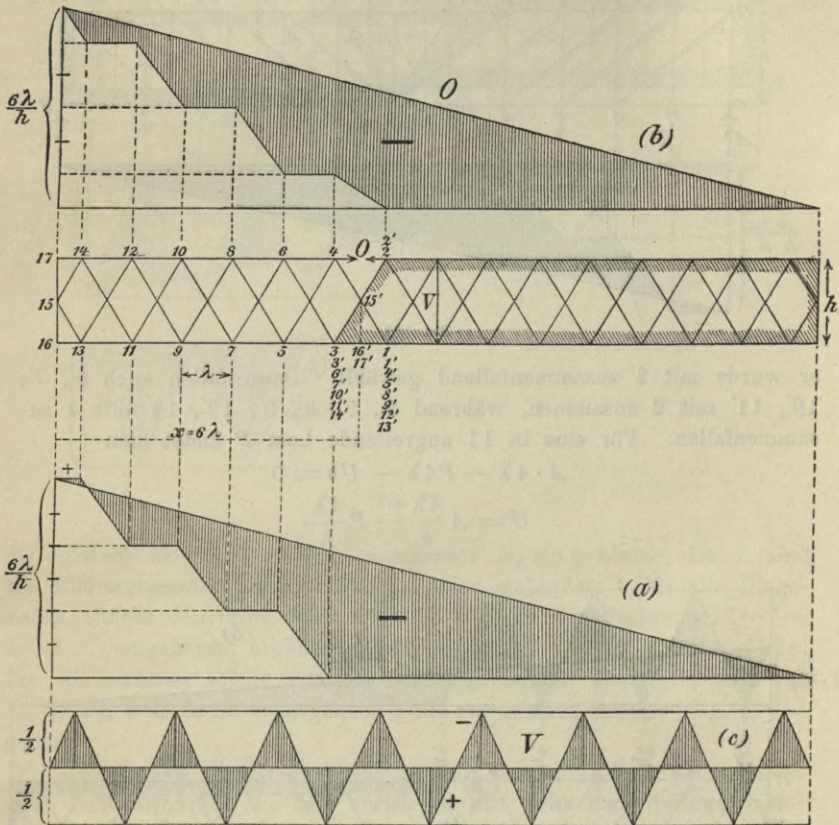


Fig. 505.

liegende, b für obenliegende Fahrbahn) dürften nach den vorstehenden Entwicklungen eine weitere Erklärung nicht mehr erfordern. Die Einflusslinie für V folgt aus dem in Nr. 220 (Fig. 500h) gefundenen allgemeinen Gesetze.

224. Fig. 506 zeigt ein zweitheiliges Fachwerk, das sich von dem soeben untersuchten im wesentlichen nur dadurch unterscheidet,

dass der Mittelständer durch einen wagerechten Stab CC_1 ersetzt worden ist. Ausserdem wurden durch Einschaltung von Vertikalen in der belasteten Gurtung neue Knotenpunkte zur Stützung von Querträgern geschaffen. Die Ordinaten der Einflusslinien für die Spannkraft H im Stabe CC sind gleich $\pm \lambda : h$; es hat diese Linie dieselbe Form wie die V -Linie des vorhin untersuchten Systems. In Figur 506a ist ein Geschwindigkeitsplan für die durch Beseitigung des Stabes CC_1 gewonnene zwangsläufige Kette gezeichnet worden. Den Punkten C und C_1 wurden die entgegengesetzt gleichen wagerechten Geschwindigkeiten OC' ertheilt und in ihren wirklichen Richtungen aufgetragen, sodann wurde $5'$ mittels $C'5' \perp C5$ und $C_1'5' \perp C_15$ bestimmt, hierauf $(5)'$ sodann $4'$ u. s. w. Es fallen zusammen

- mit $(5)'$ die Punkte $3'$, $(1)'$ und $7'$, $(9)'$
- " $5'$ " " $(3)'$, $1'$ " $(7)'$, $9'$
- " O " " $4'$, $2'$, $0'$ " $6'$, $8'$, $10'$
- " C' der Punkt A'
- " C_1' der Punkt B' .

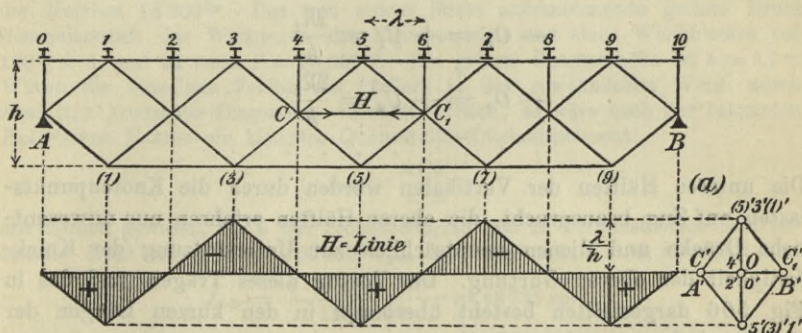


Fig. 506.

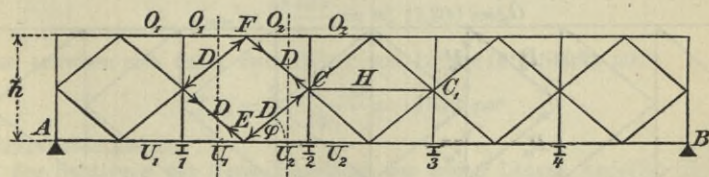


Fig. 507.

Lasten, welche in den Knotenpunkten 0, 2, 4, 6, 8, 10 angreifen, sind ohne Einfluss auf H .

Werden also nur in den Knotenpunkten der Vertikalen Querträger angeordnet (Fig. 507) so ist der Einfluss der Verkehrslast auf H gleich

Null. Auch das auf alle Knotenpunkte sich vertheilende Eigengewicht erzeugt im Stabe CC_1 nur eine geringe Beanspruchung. Sehr einfach gestaltet sich bei dieser Anordnung die Berechnung der Spannkkräfte in den Diagonalen und Gurtungen. Es ist nämlich immer zulässig, das Eigengewicht nur auf die Knotenpunkte 1, 2, 3 . . . zu vertheilen und die Knotenpunkte E und F unbelastet anzunehmen. Dann ergeben sich für die beiden in E angreifenden Diagonalen entgegengesetzt gleiche Spannkkräfte und ebenso auch für die beiden in F sich treffenden. Da nun aber die Querkraft Q für alle zwischen den beiden Knotenpunkten 1 und 2 geführten Schnitte gleich gross ist, so erhält man für alle vier dem Felde 1—2 angehörigen Diagonalen denselben Werth D , so zwar, dass die linkssteigenden Diagonalen bei positivem Q , mit

$$D = \frac{1}{2} \frac{Q}{\sin \varphi}$$

auf Zug und die rechtssteigenden ebenso stark auf Druck beansprucht werden. Für die Gurtungen erhält man aus den Angriffsmomenten $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots$ die Spannkkräfte

$$\begin{aligned} -O_1 &= +U_1 = \frac{\mathfrak{M}_1}{h} \\ -O_2 &= +U_2 = \frac{\mathfrak{M}_2}{h} \\ &\dots \end{aligned}$$

Die unteren Hälften der Vertikalen werden durch die Knotenpunktlasten auf Zug beansprucht, die oberen Hälften erfahren nur unwesentliche Drücke und dienen hauptsächlich zur Unterstützung der Knickfestigkeit der oberen Gurtung. Der Vorzug dieses Trägers und des in Fig. 506 dargestellten besteht überhaupt in den kurzen Längen der auf Druck beanspruchten Stäbe.

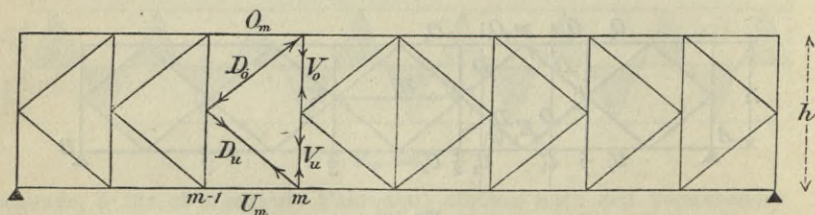


Fig. 508.

Eine verwandte Anordnung zeigt Fig. 508; sie ist in neuerer Zeit vielfach bei ebenen Windverstrebnungen zur Ausführung gekommen und vom Verfasser schon seit Jahren in seinen Uebungen im Entwerfen

eiserner Brücken empfohlen worden. Für die Spannkraft D gilt hier ebenfalls die Formel

$$(\text{Zug}) D_u = + \frac{1}{2} \frac{Q_m}{\sin \varphi} = D_o \text{ (Druck);}$$

In den Gurtungen entstehen die Spannkräfte

$$U_m = + \frac{M_{m-1}}{h}; \quad O_m = - \frac{M_{m-1}}{h}.$$

In den Vertikalen entsteht

$$V_o = D_o \sin \varphi = \frac{1}{2} Q_m \\ V_u = P_m - D_u \sin \varphi = P_m - \frac{1}{2} Q_m.$$

225. Eine umfangreiche Anwendung mehrtheiliger Fachwerke mit kurzen Stablängen zeigt das von mir im Jahre 1894 konstruirte, in Fig. 509 skizzirte **Baugerüst des Berliner Domes**. Es besteht aus Pfeilern, deren Stabwerk durch kräftigere Linien hervorgehoben wurde, und aus darauf ruhenden Sprengwerken. Die Stäbe s sollen nur den Anschluss leichter Maurer-Rüstungen und die Schaffung von Arbeitsböden ermöglichen. Seitenriss und Grundriss geben Auskunft über die Anordnung der Windverbrebungen. Das Gewicht der grossen Schiebebühne mit Electromotor, Winde, Katze und Drahtseil beträgt 14 400^{kg}, die Nutzlast 15 000^{kg}. Der von einem Stiele aufzunehmende grösste Druck (einschliesslich der Wirkungen des Eigengewichts und eines Winddruckes von 100^{kg} f. d. qm) ist rund $P = 25\ 000$ ^{kg}. Die grösste Geschosshöhe ist $h = 5,7$ m. Wären die einzelnen Felder des Pfeilers in der gewöhnlichen Weise durch zwei sich kreuzende Diagonalen versteift worden, so wäre nach der bekannten *Euler'schen* Formel ein kleinstes Querschnitts-Trägheitsmoment

$$J_{min} = \frac{n P h^2}{\pi^2 E}$$

erforderlich gewesen, wo n den Sicherheitsgrad und E den Elasticitätsmodul bedeutet. Setzt man $\pi^2 E = 1\ 000\ 000$ ^{kg/qcm} und wählt man $n = 6$, so erhält man

$$J_{min} = \frac{6 \cdot 25\ 000 \cdot 570^2}{1\ 000\ 000} = 48\ 735 \text{ cm}^4.$$

In Folge der Halbiring der freien Längen der Stirnwand geht dieser Werth herab auf

$$J_{min} = \frac{48\ 735}{4} = \text{rd. } 12\ 200 \text{ cm}^4,$$

und es erweisen sich daher zwei Hölzer von 13 cm \times 18 cm Stärke mit

$$J_{min} = \frac{2 \cdot 13 \cdot 18^3}{12} = 12\ 640 \text{ cm}^4$$

als vollkommen sicher.

Zur Schätzung der durch Halbiring der freien Längen erzielten Holzsparsinn genügt folgende kurze Ueberschlagsrechnung. Sind l_1 und l_2 die Längen zweier gleich stark auf Knicken beanspruchten Stäbe, F_1 und F_2 die Inhalte, J_1 und J_2 die kleinsten Trägheitsmomente ihrer Querschnitte, und sind die beiden Querschnitte einander ähnlich, so verhält sich

$$F_1 : F_2 = \sqrt{J_1} : \sqrt{J_2} = l_1 : l_2,$$

und man findet daher für $l_1 = \frac{1}{2} l_2$ das Verhältniss $F_1 = \frac{1}{2} F_2$.

Der Materialverbrauch ist deshalb für die erste Anordnung nur halb so gross wie für die zweite. In Wirklichkeit ändert sich natürlich diese Zahl etwas, wegen der gebotenen Anpassung an die im Handel vorkommenden Holzstärken, dafür tritt aber noch der Umstand hinzu, dass sehr starke Hölzer — wie sie hier für eine freie Länge von $5,7^m$ erforderlich gewesen wären — theurer sind, wie solche mittlerer Abmessungen. Ich hebe noch hervor, dass bei der Domrüstung an

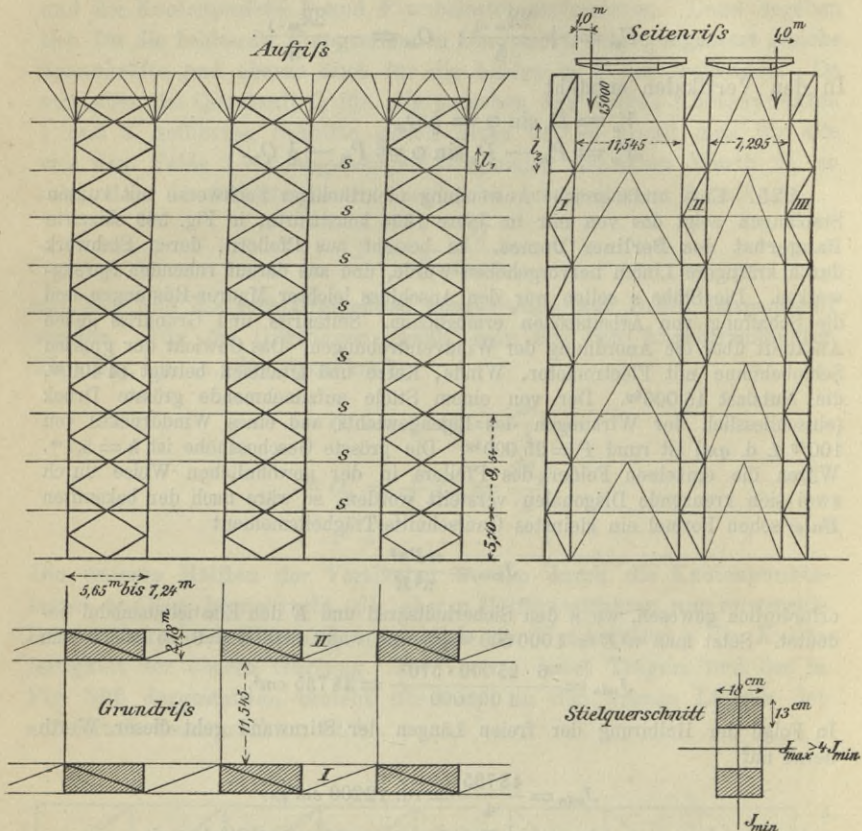


Fig. 509.

einer Stelle auch eine grössere Spannweite mit *Howe'schen* Trägern (d. h. Parallelträger mit hölzernen Gurtungen, hölzernen gedrückten Diagonalen und eisernen gezogenen Vertikalen) überbrückt worden ist und schliesse diese kurze Mittheilung mit dem Rathe, grosse Baugerüste auch für Hochbauten stets nach den im Brückenbau geltenden Grundsätzen zu entwerfen. Ob man nun eine sogenannte Gerüstbrücke (wie die in Fig. 509 dargestellte) baut, oder ob man Träger mit grösseren Spannweiten verwendet, muss von Fall zu Fall entschieden werden.

226. Unsymmetrisches zweitheiliges Netzwerk, Fahrbahn unten. Die Figuren 510 und 511 zeigen die Ermittlung der Einfluss-

linien für D_1 und O_5 . Das Fachwerk stimmt mit dem in Fig. 509 als Pfeiler verwendeten überein.

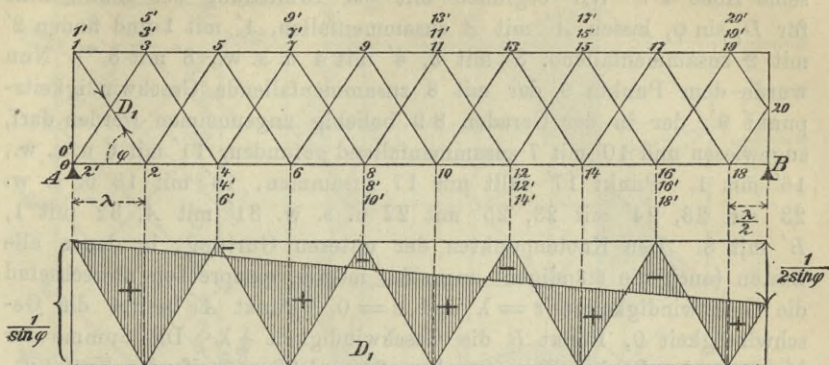


Fig. 510.

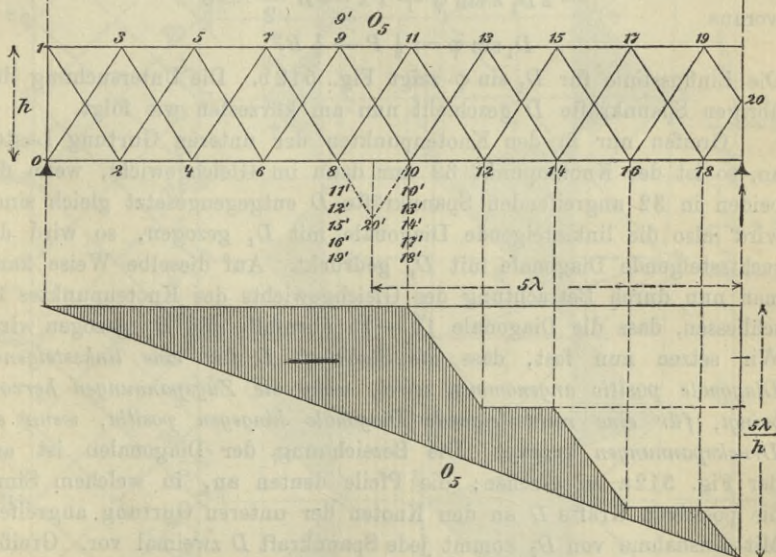


Fig. 511.

227. Unsymmetrisches viertheiliges Netzwerk. Fig. 512. Die Streben bilden einen zusammenhängenden Stabzug, der in einem Endknoten des linken Ständers beginnt und in dem anderen Endknoten

endigt; das Netzwerk ist statisch bestimmt (vergl. Seite 452). Der Träger besitzt 14 ganze und ein halbes Feld; seine Stützweite ist 29^m , seine Höhe 4^m . Wir beginnen mit der Ermittlung der Einflusslinie für $D_1 \sin \varphi$, lassen A' mit A zusammenfallen, $1'$ mit 1 und finden $2'$ mit 2 zusammenfallend, $3'$ mit 3, $4'$ mit 4 u. s. w., $8'$ mit 8.*) Nun wurde dem Punkte 9 der mit 8 zusammenfallende Geschwindigkeitspunkt $9'$, der in der Geraden 8 9 beliebig angenommen werden darf, zugewiesen und $10'$ mit 7 zusammenfallend gefunden, $11'$ mit 6 u. s. w., $16'$ mit 1. Punkt $17'$ fällt mit 17 zusammen, $18'$ mit 18 u. s. w. $23'$ mit 23, $24'$ mit 23, $25'$ mit 22 u. s. w. $31'$ mit A , $32'$ mit 1, B' mit 8. Den Knotenpunkten der unteren Gurtung, in denen alle Lasten (auch die ständigen) angreifen mögen, entsprechen abwechselnd die Geschwindigkeiten $c = \lambda$ und $c = 0$. Punkt A besitzt die Geschwindigkeit 0, Punkt B die Geschwindigkeit $\frac{1}{2} \lambda$. Die Summe der Momente der in den Knotenpunkten 31 und 32 angreifenden Kräfte D_1 in Bezug auf die zugehörigen Geschwindigkeitspunkte $31'$ und $32'$ ist $-2 D_1 \lambda \sin \varphi$, und es ergibt sich daher für jede, in einem der Knotenpunkte (1), (3), (5),**) angreifende Last die Gleichung

$$\text{woraus} \quad -2 D_1 \lambda \sin \varphi + P \lambda - B \frac{\lambda}{2} = 0$$

$$D_1 \sin \varphi = \frac{1}{2} P - \frac{1}{4} B.$$

Die Einflusslinie für $D_1 \sin \varphi$ zeigt Fig. 512 b. Die Untersuchung der übrigen Spannkkräfte D geschieht nun am kürzesten wie folgt.

Greifen nur in den Knotenpunkten der unteren Gurtung Lasten an, so ist der Knotenpunkt 32 nur dann im Gleichgewicht, wenn die beiden in 32 angreifenden Spannkkräfte D entgegengesetzt gleich sind; wird also die linkssteigende Diagonale mit D_1 gezogen, so wird die rechtssteigende Diagonale mit D_1 gedrückt. Auf dieselbe Weise kann man nun durch Betrachtung des Gleichgewichts des Knotenpunktes 16 schliessen, dass die Diagonale 16 — 15 ebenfalls mit D_1 gezogen wird. Wir setzen nun fest, dass die Stabkraft D für eine linkssteigende Diagonale positiv angenommen wird, wenn sie Zugspannungen hervorbringt, für eine rechtssteigende Diagonale hingegen positiv, wenn sie Druckspannungen erzeugt. Die Bezeichnung der Diagonalen ist aus der Fig. 512 a zu ersehen; die Pfeile deuten an, in welchem Sinne die positiven Kräfte D an den Knoten der unteren Gurtung angreifen. Mit Ausnahme von D_2 kommt jede Spannkraft D zweimal vor. Greifen in den Knoten (1), (2), (3), der unteren Gurtung die Lasten P_1, P_2, P_3, \dots an, so muss sein:

*) In Fig. 512 a sind die Knotenpunkte in der Reihenfolge nummeriert worden, in welcher die Geschwindigkeiten am zweckmässigsten bestimmt werden.

**) So wollen wir die Angriffsstellen der Lasten fortan bezeichnen, siehe Fig. 512 b.

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} D_4 \sin \varphi = D_1 \sin \varphi - P_1 \\ D_8 \sin \varphi = D_4 \sin \varphi - P_5 \\ D_{12} \sin \varphi = D_8 \sin \varphi - P_9 \\ D_{15} \sin \varphi = D_{12} \sin \varphi - P_{13} \\ D_{11} \sin \varphi = D_{15} \sin \varphi + P_{12} \\ D_7 \sin \varphi = D_{11} \sin \varphi + P_8 \\ D_3 \sin \varphi = D_7 \sin \varphi + P_4 \\ D_6 \sin \varphi = D_1 \sin \varphi - P_3 \\ D_{10} \sin \varphi = D_6 \sin \varphi - P_7 \\ D_{14} \sin \varphi = D_{10} \sin \varphi - P_{11} \\ D_{13} \sin \varphi = D_{14} \sin \varphi + P_{14} \\ D_9 \sin \varphi = D_{13} \sin \varphi + P_{10} \\ D_5 \sin \varphi = D_9 \sin \varphi + P_6 \\ D_2 \sin \varphi = D_5 \sin \varphi + P_2. \end{array} \right.$$

Ist der Knotenpunkt (1) unbelastet, so ist $D_4 \sin \varphi = D_1 \sin \varphi$. Die Ordinaten für diese beiden Werthe unterscheiden sich also nur an der Stelle (1) voneinander und zwar um die Lasteinheit P . Man kann also in der durch die vorstehenden Gleichungen bestimmten Reihenfolge aus der $D_1 \sin \varphi$ -Linie schrittweise die Einflusslinien für $D_4 \sin \varphi$, $D_8 \sin \varphi$, folgern. Dabei empfiehlt es sich, um Bruchziffern zu vermeiden, die Rechnung für $P = 29$ (weil $l = 29 \frac{\lambda}{2}$ ist) durchzuführen. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden. Die Ordinate, in welcher eine Linie von der vorhergehenden Linie abweicht, wurde durch Unterstreichung hervorgehoben; man beachte, dass $D_6 \sin \varphi$ wieder aus $D_1 \sin \varphi$ gefolgert wird.

	Knotenpunkt													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$D_1 \sin \varphi$	+ 14	- 1	+ 13	- 2	+ 12	- 3	+ 11	- 4	+ 10	- 5	+ 9	- 6	+ 8	- 7
$D_4 \sin \varphi$	- <u>15</u>	- 1	+ 13	- 2	+ 12	- 3	+ 11	- 4	+ 10	- 5	+ 9	- 6	+ 8	- 7
$D_8 \sin \varphi$	- <u>15</u>	- 1	+ 13	- 2	- <u>17</u>	- 3	+ 11	- 4	+ 10	- 5	+ 9	- 6	+ 8	- 7
$D_{12} \sin \varphi$	- 15	- 1	+ 13	- 2	- <u>17</u>	- 3	+ 11	- 4	- <u>19</u>	- 5	+ 9	- 6	+ 8	- 7
$D_{15} \sin \varphi$	- 15	- 1	+ 13	- 2	- 17	- 3	+ 11	- 4	- <u>19</u>	- 5	+ 9	- 6	- <u>21</u>	- 7
$D_{11} \sin \varphi$	- 15	- 1	+ 13	- 2	- 17	- 3	+ 11	- 4	- 19	- 5	+ 9	+ <u>23</u>	- <u>21</u>	- 7
$D_7 \sin \varphi$	- 15	- 1	+ 13	- 2	- 17	- 3	+ 11	+ <u>25</u>	- 19	- 5	+ 9	+ <u>23</u>	- <u>21</u>	- 7
$D_3 \sin \varphi$	- 15	- 1	+ 13	+ <u>27</u>	- 17	- 3	+ 11	+ <u>25</u>	- 19	- 5	+ 9	+ <u>23</u>	- <u>21</u>	- 7
$D_6 \sin \varphi$	+ 14	- 1	- <u>16</u>	- 2	+ 12	- 3	+ 11	- 4	+ 10	- 5	+ 9	- 6	+ 8	- 7
$D_{10} \sin \varphi$	+ 14	- 1	- <u>16</u>	- 2	+ 12	- 3	- <u>18</u>	- 4	+ 10	- 5	+ 9	- 6	+ 8	- 7
$D_{14} \sin \varphi$	+ 14	- 1	- 16	- 2	+ 12	- 3	- <u>18</u>	- 4	+ 10	- 5	- <u>20</u>	- 6	+ 8	- 7
$D_{13} \sin \varphi$	+ 14	- 1	- 16	- 2	+ 12	- 3	- 18	- 4	+ 10	- 5	- <u>20</u>	- 6	+ 8	+ <u>22</u>
$D_9 \sin \varphi$	+ 14	- 1	- 16	- 2	+ 12	- 3	- 18	- 4	+ 10	+ <u>24</u>	- 20	- 6	+ 8	+ <u>22</u>
$D_5 \sin \varphi$	+ 14	- 1	- 16	- 2	+ 12	+ <u>26</u>	- 18	- 4	+ 10	+ <u>24</u>	- 20	- 6	+ 8	+ <u>22</u>
$D_2 \sin \varphi$	+ 14	+ <u>28</u>	- 16	- 2	+ 12	+ <u>26</u>	- 18	- 4	+ 10	+ 24	- 20	- 6	+ 8	+ <u>22</u>

Fig. 512 c enthält sämtliche $D \sin \varphi$ -Linien; sie ist bestimmt durch 3 parallele Geraden; die Einflussfläche für die am stärksten beanspruchte Diagonale, die D_2 , ist durch Schraffirung hervorgehoben worden.

Aus den D -Linien findet man die U -Linien mit Hilfe der Gleichungen

$$(II) \quad \begin{cases} U_1 = D_3 \cos \varphi \\ U_2 = U_1 + D_1 \cos \varphi + D_4 \cos \varphi \\ U_3 = U_2 + D_2 \cos \varphi + D_5 \cos \varphi \end{cases}$$

u. s. w.

Im vorliegenden Falle ist $\varphi = 45^\circ$, also $\cos \varphi = \sin \varphi$. Sonst würde man an Stelle der U -Linien die $U \operatorname{tg} \varphi$ -Linien bestimmen, damit man die Ordinaten der $D \sin \varphi$ -Linien ohne weiteres benutzen kann. Führt man dann die ganze Rechnung für $P = 29$ aus, so hat man es mit einfachen Zahlenwerthen zu thun. Ganz ebenso werden die $O \operatorname{tg} \varphi$ -Linien ermittelt.

Handelt es sich um eine Eisenbahnbrücke, so wird man bei der Berechnung der grössten Spannkraften D die Radstände und gegenseitigen Abstände der Lokomotiven und Tender mit den Feldweiten thunlichst so in Einklang bringen, dass möglichst hohe D -Werthe erzielt werden. Im vorliegenden Falle empfiehlt sich z. B. für die Berechnung von ${}_{max}D_{2p}$ die in Fig. 512 dargestellte Zusanordnung; sie liefert

$${}_{max}D_{2p} \sin \varphi = 101^t.$$

Die ständige Belastung sei $g = 1,6 \frac{t}{m}$ Gleis, also $g\lambda = 3,2^t$ für einen Knotenpunkt. Die Summe der Ordinaten der Einflusslinie ist, für $P = 29$,

$$14 + 28 + 12 + 26 + 10 + 24 + 8 + \frac{3}{4} 22^*) \\ - (16 + 2 + 18 + 4 + 20 + 6) = 72,5$$

folglich ergibt sich

$$D_{2g} \sin \varphi = 72,5 \frac{3,2}{29} = 8,0^t. **)$$

Im ganzen entsteht also

$${}_{max}D_2 \sin \varphi = 109^t \text{ und } {}_{max}D_2 = 154^t.$$

Mit diesem Werthe wollen wir die Spannkraft ${}_{max}D$ im 4^m langen Endfelde eines eintheiligen Parallelträgers von 29^m Spannweite vergleichen. Es ergibt sich (Fig. 513) für einen Zug mit den früher festgesetzten Radständen

$$D_p \sin \varphi = A_p - \frac{16 \cdot 1,2}{4} = 102,2 - 4,8 = 97^t$$

$$D_g \sin \varphi = g x'' = 1,2 \cdot 12,5 = 20^t$$

$${}_{max}D \sin \varphi = 117^t \text{ und } D = 165^t.$$

*) Knotenpunkt 14 ist nur mit $\frac{3}{4} g\lambda$ belastet.

**) Werden sämtliche D_g gesucht, so berechne man einen Werth $D_g \sin \varphi$ mit Hilfe der Ordinaten der Einflusslinie, die übrigen aber mittels der Gleichungen I.

Die Diagonale D_2 des ^{vier}zweitheiligen Fachwerks erfährt also im vorliegenden Falle nahezu dieselbe Beanspruchung wie die eines eintheiligen₂ Systems, ein Ergebniss, welches hinreicht, um den Träger in Fig. 513 als unvortheilhaft zu kennzeichnen. Ein weiterer, für die Ausführung sehr ins Gewicht fallender Nachtheil dieses Fachwerks ist seine unsymmetrische Anordnung. Würde man nur in den Knotenpunkten (1), (3), (5) . . . Querträger anordnen, so würde D_2 wesentlich kleiner werden, weil dann die grossen Ordinaten der D -Linie fortfallen.

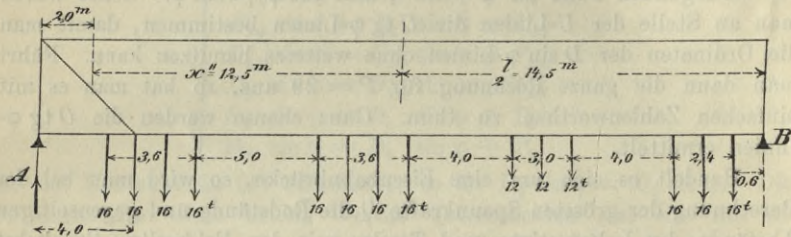


Fig. 513.

228. Symmetrisches ^{vier}zweitheiliges Netzwerk mit einem halben Ständer in der Mitte. Fig. 514. *) Der Träger besitzt 14 ganze und 2 halbe Felder; seine Stützweite ist 30 m, seine Höhe 4 m. Die Fahrbahn liege an der unteren Gurtung. Wir beginnen mit der Darstellung der Einflusslinie für $D_2 \sin \varphi$, nehmen die schraffierte Scheibe ruhend an, weisen dem Knotenpunkte 1 den Punkt 1' zu und bestimmen der Reihe nach zu den Punkten 2, 3, 4, 5, 33 die Punkte 2', 3', 4', 5', . . . 33'.

Die Lothe von den Punkten 27' und 32' auf die in den Knoten 27 und 32 angreifenden Kräfte D_2 sind $2\lambda \sin \varphi$ und $\lambda \sin \varphi$. Punkt 33 besitzt die Geschwindigkeit $1,5\lambda$, Punkt 12 die Geschwindigkeit 2λ , Knoten 23 die Geschwindigkeit $c = 1,5\lambda$. Man erhält also für eine in 23 angreifende Last:

$$D_2 (2\lambda \sin \varphi - \lambda \sin \varphi) + A 1,5\lambda - B 2,0\lambda - P 1,5\lambda = 0$$

und hieraus

$$D_2 \sin \varphi = -1,5A + 2,0B + 1,5P.$$

Die Gerade $A''B''$ ist Einflusslinie für den Ausdruck $(-1,5A + 2,0B)$; trägt man von dieser Geraden aus auf den Senkrechten

*) Man vergl. die Untersuchung des in Fig. 429 dargestellten Trägers auf Seite 446 u. f. und bilde zur Uebung die Determinante D . Auch empfiehlt sich Untersuchung des Falles eines von Gurtung zu Gurtung reichenden Mittelständers, der mit den ihn kreuzenden Diagonalen nicht verbunden ist.

durch die Knotenpunkte der unteren Gurtung die entsprechenden $\frac{c}{\lambda}$ auf, so erhält man die $D_2 \sin \varphi$ -Linie. Für die ersten drei Knotenpunkte ist $\frac{c}{\lambda} = +1,5$, für die nächsten drei $\frac{c}{\lambda} = +0,5$, für die folgenden $\frac{c}{\lambda} = -0,5$, für die letzten $\frac{c}{\lambda} = -1,5$.

Die dritte Zeile der Tabelle I auf Seite 524 enthält die Ordinaten der $D_2 \sin \varphi$ -Linie für $P = 30$. Die Ordinaten der $D_1 \sin \varphi$ -Linie ergeben sich aus der Gleichgewichtsbedingung, denen die am linken Endständer angreifenden Kräfte D genügen müssen, Fig. 515,

$$\begin{aligned} 2D_1 \sin \varphi + 2D_2 \sin \varphi &= A, \\ (D_1 + D_2) \sin \varphi &= \frac{1}{2} A. \end{aligned}$$

Die Ordinaten der Einflusslinie für $\frac{1}{2} A$ sind in der ersten Zeile der folgenden Tabelle angegeben. Nach Berechnung der $D_1 \sin \varphi$ -Linie findet man die Ordinaten der übrigen $D \sin \varphi$ -Linien der Reihe nach mit Hilfe der Gleichungen:*)

$$\begin{aligned} D_3 \sin \varphi &= D_1 \sin \varphi - P_1 \\ D_4 \sin \varphi &= D_2 \sin \varphi - P_2 \\ D_5 \sin \varphi &= D_2 \sin \varphi - P_3 \\ D_6 \sin \varphi &= D_1 \sin \varphi - P_4 \\ D_7 \sin \varphi &= D_3 \sin \varphi - P_5 \\ D_8 \sin \varphi &= D_4 \sin \varphi - P_6 \\ D_9 \sin \varphi &= D_5 \sin \varphi - P_7. \end{aligned}$$

Die Einflusslinien für $D'_8 \sin \varphi$ und $D_8 \sin \varphi$ sind Spiegelbilder. Die V -Linie ist bestimmt durch

$$V = D_8 \sin \varphi + D'_8 \sin \varphi;$$

sie besitzt, wie die V -Linie des in Fig. 505 dargestellten zweitheiligen Fachwerks, in den Knotenpunkten abwechselnd Ordinaten $+\frac{1}{2} P$ und $-\frac{1}{2} P$.

In Figur 515 sind alle D -Linien zusammengestellt worden; ihre Eckpunkte liegen in 6 parallelen Geraden. Die Einflusslinie für $D_7 \sin \varphi$ ist durch Schraffur hervorgehoben worden.

Tabelle II auf Seite 524 enthält die Ordinaten sämtlicher U -Linien.

Es ist

$$U_1 = 0$$

$$U_2 = D_1 \cos \varphi + D_3 \cos \varphi = D_1 \sin \varphi + D_3 \sin \varphi \text{ weil } \varphi = 45^\circ \text{**)}$$

u. s. w.

*) Für die $\frac{\text{linkssteigenden}}{\text{rechtssteigenden}}$ Diagonalen der linken Trägerhälfte bedeutet ein

$\frac{\text{positives}}{\text{negatives}}$ D einen Zug.

**) Ist dies nicht der Fall, so berechne man die Werthe $U \operatorname{tg} \varphi$.

Tabelle I.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\frac{1}{2}A$	14,5	13,5	12,5	11,5	10,5	9,5	8,5	7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5
$D_1 \sin \varphi$	11	10,5	10	9,5	9	8,5	8	7,5	7	6,5	6	5,5	5	4,5	4
$D_2 \sin \varphi$	19	17,5	17	15,5	15	14,5	14	13,5	13	12,5	12	11,5	11	10,5	10
$D_3 \sin \varphi$	3,5	3	3	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
$D_4 \sin \varphi$	3,5	19,5	17,5	15,5	15	14,5	14	13,5	13	12,5	12	11,5	11	10,5	10
$D_5 \sin \varphi$	3,5	10,5	12,5	15,5	18,5	21,5	24,5	27,5	30,5	33,5	36,5	39,5	42,5	45,5	48,5
$D_6 \sin \varphi$	11	8	5	3	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$D_7 \sin \varphi$	19	3	5	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61
$D_8 \sin \varphi$	3,5	19,5	17,5	15,5	15	14,5	14	13,5	13	12,5	12	11,5	11	10,5	10
$D_9 \sin \varphi$	3,5	10,5	12,5	15,5	18,5	21,5	24,5	27,5	30,5	33,5	36,5	39,5	42,5	45,5	48,5
$D_{10} \sin \varphi$	11,5	4,5	2,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
V	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15

Tabelle II.

	Knotenpunkt														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$U_2 = D_1 \sin \alpha + D_3 \sin \alpha$	8	6	10	34	18	2	14	30	14	2	18	26	10	6	22
$U_3 = D_2 \sin \alpha + D_4 \sin \alpha$	7	9	35	11	3	17	31	15	1	13	27	19	5	9	23
$U_4 = D_5 \sin \alpha + D_6 \sin \alpha$	7	21	5	11	3	17	31	15	1	13	27	19	5	9	23
$U_5 = D_1 \sin \alpha + D_6 \sin \alpha$	6	18	30	12	24	36	48	0	12	24	36	12	0	12	24
$U_6 = D_3 \sin \alpha + D_7 \sin \alpha$	22	6	10	4	18	2	14	30	14	2	18	26	10	6	22
$U_6 = D_3 \sin \alpha + D_7 \sin \alpha$	28	24	20	16	42	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2
$U_6 = D_3 \sin \alpha + D_7 \sin \alpha$	38	6	10	34	12	2	14	30	14	2	18	26	10	6	22
$U_7 = D_4 \sin \alpha + D_8 \sin \alpha$	10	30	10	50	30	40	20	60	40	20	0	40	20	0	20
$U_7 = D_4 \sin \alpha + D_8 \sin \alpha$	7	39	35	11	3	13	31	15	1,0	13	27	19	5	9	23
$U_7 = D_4 \sin \alpha + D_8 \sin \alpha$	3	9	45	39	33	27	51	45	39	33	27	21	15	9	3
$U_8 = D_5 \sin \alpha + D_9 \sin \alpha$	7	21	25	11	3	17	31	15	1	13	27	19	5	9	23
$U_8 = D_5 \sin \alpha + D_9 \sin \alpha$	4	12	20	28	36	44	52	30	38	46	54	2	10	18	26

Den grössten Werth D erhielten wir für die Diagonale D_2 . Die in Figur 514 angegebene Zugstellung erzeugt

$$\max D_{2p} = + 64,7^t$$

In Folge der ständigen Belastung, welche für die Knoten (1) und (15) je $\frac{3g\lambda}{2}$ und für die übrigen $g\lambda$ beträgt, entsteht

$$\begin{aligned} D_{2p} \sin \varphi &= \frac{g\lambda}{30} \left[\frac{3}{4} \cdot 3,5 + 10,5 + 17,5 + 1,5 + 8,5 + 15,5 + 6,5 \right. \\ &\quad \left. + 13,5 + 4,5 + \frac{3}{4} 11,5 - 5,5 - 7,5 - 0,5 - 9,5 - 2,5 \right] \\ &= g\lambda \cdot 2,125 = 1,6 \cdot 2,0 \cdot 2,125 = 6,8^t, \end{aligned}$$

mithin im ganzen

$$\max D_2 \sin \varphi = 64,7 + 6,8 = 71,5^t \text{ und } D_2 = 101^t.$$

c. Angenäherte Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke.

229. Allgemeines. Die Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke erfolgt in der Regel in der Weise, dass das t -theilige Fachwerk in t eintheilige statisch bestimmte Fachwerke zerlegt und jedes Theil-

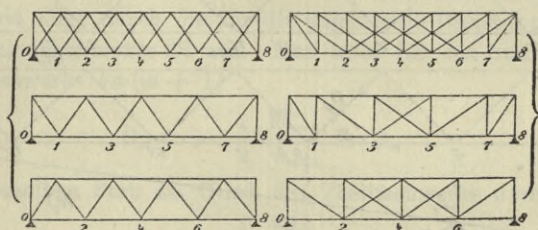


Fig. 516.

Fig. 517.

system nur für die in seinen Knotenpunkten angreifenden Lasten berechnet wird. Gehört ein Knotenpunkt mehreren Theilsystemen an, so wird seine Belastung gleichmässig auf diese Systeme vertheilt. Sodann werden die Theilfachwerke wieder vereinigt und die Spannkkräfte zusammenfallender Stäbe und Stababschnitte addirt. In den Figuren 516 und 517 sind die Zerlegungen eines zweitheiligen Strebenfachwerks und eines zweitheiligen Ständerfachwerks mit Gegendiagonalen dargestellt worden; es wird in beiden Fällen angenommen, dass auf das obere Theilsystem nur die in den Knotenpunkten 1, 3, 5, 7 angreifenden Lasten von Einfluss sind, während die Belastungen der Punkte 2, 4, 6 lediglich von dem unteren Theilsystem auf die Auflager übertragen werden.

Auch die bislang ausgeführten mehrtheiligen Netzwerke mit Diagonalenzügen, die von beliebigen Punkten der Endständer ausgehen, also nicht von Gurtung zu Gurtung führen, Fig. 518, sind nach dem Verfahren der Theilsysteme berechnet worden. Sie sind statisch unbestimmt, weil sie biegungsfeste Endständer, welche die Rolle starrer Scheiben spielen, besitzen. In Figur 518 ist die Zerlegung eines derartigen viertheiligen Systems angegeben worden; alle vier Teil-

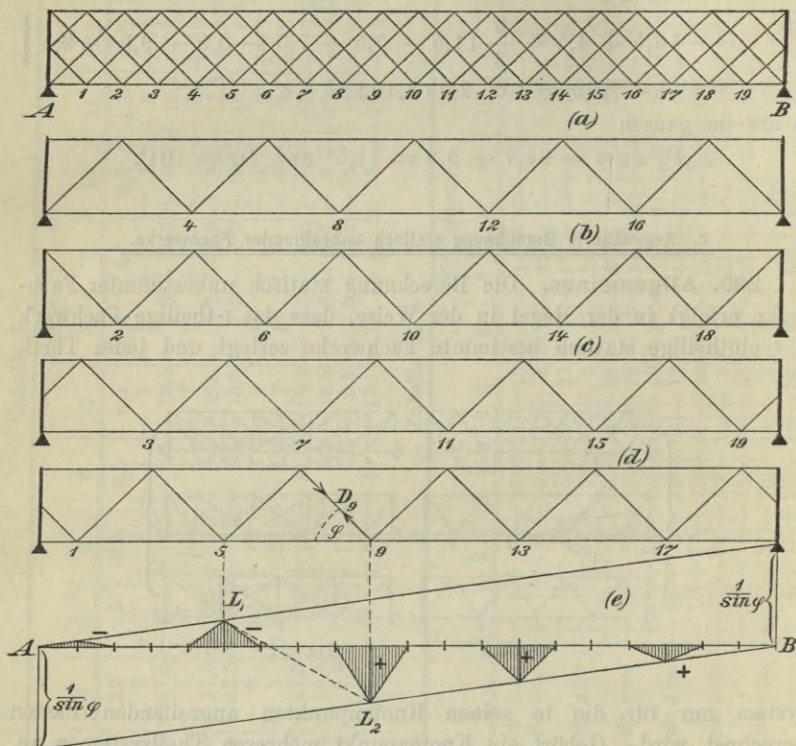


Fig. 518.

systeme sind statisch bestimmt. Hat man die Spannkraften der an den Endständern angreifenden Stäbe berechnet, so kann man für jeden Querschnitt des Endständers die Längskraft N , die Querkraft Q und das Angriffsmoment M angeben und die im Querschnitte auftretenden Spannungen σ und τ (s. Abschnitt II) ermitteln. Statt biegungsfester Endständer kann man auch gegliederte Scheiben (Fig. 520 und 522) anordnen.

Fig. 518e zeigt die Einflussfläche für die Spannkraft D_9 in einer Diagonale für den Fall untenliegender Fahrbahn. Sie wird aus der Einflussfläche AL_1L_2B für die Diagonale eines eintheiligen Parallelträgers mittels der Annahme gefolgert, dass nur die in den Knotenpunkten 1, 5, 9, 13, 17 angreifenden Lasten einen Einfluss auf D ausüben, während die übrigen Knotenlasten von den drei anderen Theilfachwerken aufgenommen werden.

Bei gebrochenen Gurtungen führt die Zerlegung in Theilsysteme zu Gurtstäben, die einen oder mehrere Knicke aufweisen und durch gerade Stäbe ersetzt werden müssen. So werden z. B. in Fig. 519 bei

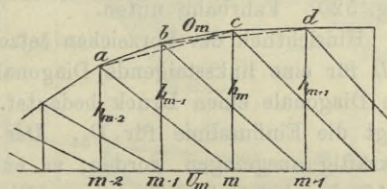


Fig. 519.

Betrachtung der beiden Theilfachwerke behufs Berechnung der Füllungsstäbe an Stelle der Gurtungen abc und bcd die Stäbe ac und bd eingeführt. Die Spannkraft O und U drückt man hingegen zweckmässiger wie folgt durch die für die ungetheilte Belastung berechneten grössten Angriffsmomente \mathfrak{M} aus. Man setze für den Stab bc als Glied des Theilfachwerks $bd(m+1)$

$$O_m = -\frac{1}{2} \frac{\mathfrak{M}_{m+1}}{h_{m+1}} \sec \beta_m$$

und für denselben Stab als Glied des Theilfachwerks acm

$$O_m = -\frac{1}{2} \frac{\mathfrak{M}_m}{h_m} \sec \beta_m$$

im Ganzen also

$$O_m = -\frac{1}{2} \left(\frac{\mathfrak{M}_m}{h_m} + \frac{\mathfrak{M}_{m+1}}{h_{m+1}} \right) \sec \beta_m$$

und hierin verstehe man unter β_m den Neigungswinkel des Stabes bc . Ganz ebenso findet man für den wagerechten Stab U_m

$$U_m = +\frac{1}{2} \left(\frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{h_{m-1}} + \frac{\mathfrak{M}_m}{h_m} \right).$$

Eine genauere Berechnung der statisch unbestimmten Fachwerke enthält der 2te Band dieses Buches; mit ihren Ergebnissen stimmen die auf Grund der Zerlegung in einfache Fachwerke gefundenen Spannkraft in vielen Fällen ganz gut überein. Dies gilt besonders von den

für die Praxis besonders wichtigen mehrtheiligen Parallelträgern. Bei gebrochenen Gurtungen weichen dagegen die genauen Werthe der Spannkkräfte in den Füllungsstäben von den Ergebnissen des Verfahrens der Zerlegung oft so erheblich ab, dass dem einer schärferen Untersuchung nicht gewachsenen Ingenieur nur gerathen werden kann, von derartigen Fachwerken Abstand zu nehmen.

Wir wollen nun die Darstellung der Einflusslinien nach dem Verfahren der Zerlegung in eintheilige Fachwerke an einem Zahlenbeispiele erläutern.

230. Viertheiliges Netzwerk von 30^m Spannweite mit steifen Endscheiben. Fig. 520. Fahrbahn unten.

1. *Diagonalen.* Hinsichtlich der Vorzeichen setzen wir wieder fest, dass ein positives D für eine linkssteigende Diagonale einen Zug, für eine rechtssteigende Diagonale einen Druck bedeutet.

Fig. 520a zeigt die Einflusslinie für D_3 . Der Strebenzug, dem D_3 angehört, ist kräftig ausgezogen worden; er enthält die Knotenpunkte 3, 7, 11, 15 der belasteten Gurtung. Die Knotenpunkte 1 und 15 gehören eigentlich jedem der vier Theilsysteme an, da diese 4 Systeme ohne die starren Endscheiben beweglich wären; wir wollen aber, der Einfachheit wegen, den Knotenpunkt 15 nur zu dem Theilsystem rechnen, welchem D_3 angehört und den Knotenpunkt 1 nur zu dem Systeme, welches die Diagonale D_5 enthält. Die Einflüsse der Belastungen dieser beiden Knotenpunkte sind unwesentlich. In Fig. 520a ist ferner der Lastenzug angegeben worden, welcher möglichst grosse Werthe D erzeugt. Man erkennt, dass dreiachsige Lokomotiven im vorliegenden Falle grössere Spannkkräfte erzeugen als vierachsige. Bezeichnet η die Höhe eines der Dreiecke, aus denen die Einflussfläche besteht, so ist der Einfluss einer Lokomotive

$$(I) \quad D = 16 \eta \left(1 + 2 \frac{0,8}{2,0} \right) = 28,8 \eta$$

und der eines Tenders

$$(II) \quad D = 12 \eta \frac{2 \cdot 1,05 + 0,8}{2,0} = 17,4 \eta.$$

Berechnen wir den unwesentlichen Einfluss der Belastung des Knotenpunktes 15 der Kürze wegen ebenfalls mittels Formel (I), so erhalten wir für D_3 den Werth

$$\begin{aligned} \max D_{3p} &= \left(\frac{25}{30} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{17}{30} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} \right) 28,8 \\ &\quad + \frac{9}{30} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} \cdot 17,4, \text{ d. i.} \end{aligned}$$

$$\max D_{3p} = 1,36 (25 + 17 + 1) + 0,82 \cdot 9 = 65,9^t.$$

In der folgenden Tabelle sind die Ordinaten aller D -Linien (und in der ersten und letzten Zeile auch die der A -Linie und B -Linie)

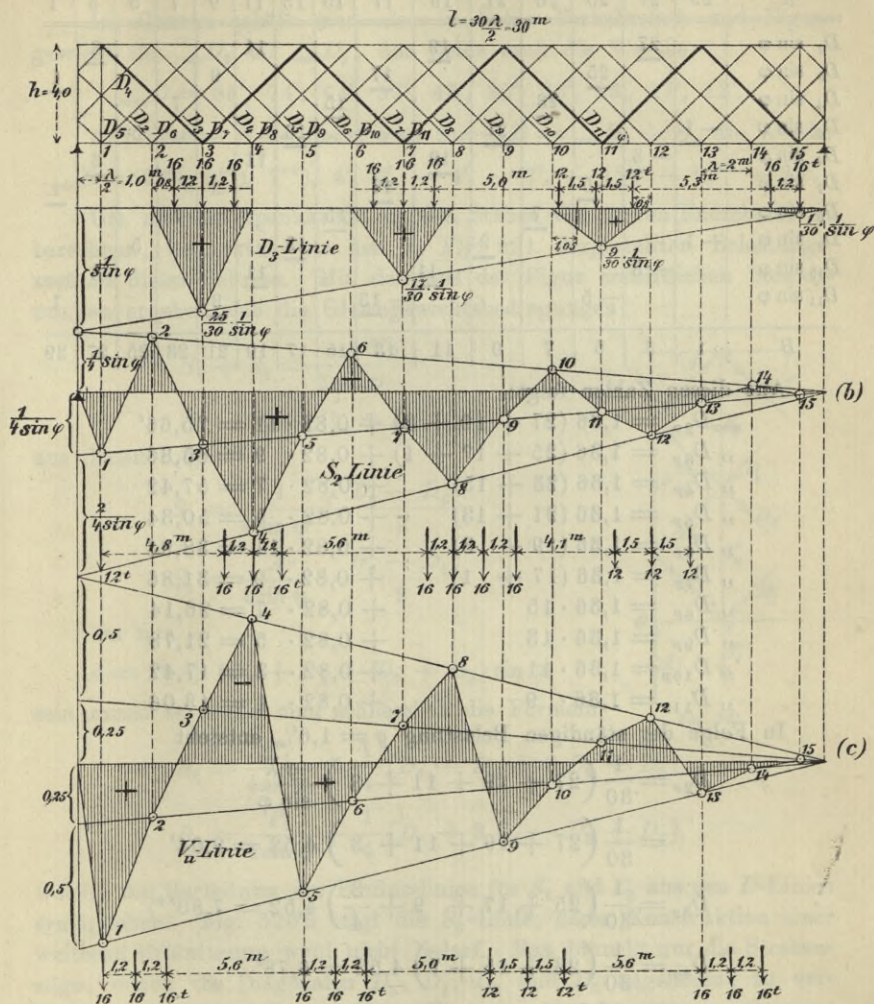


Fig. 520.

für $P = 30$ zusammengestellt worden. Die Zahlen für die mit Lokomotiven belasteten Knotenpunkte wurden durch Unterstreichung hervorgehoben.

Knotenpunkt	Knotenpunkt														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
<i>A</i>	29	27	25	23	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1
$D_2 \sin \varphi$		27				19				11				3	
$D_3 \sin \varphi$			25				17				9				1
$D_4 \sin \varphi$				23				15				7			
$D_5 \sin \varphi$	-1				21				13				5		
$D_6 \sin \varphi$		-3				19				11				3	
$D_7 \sin \varphi$			-5				17				9				1
$D_8 \sin \varphi$				-7				15				7			
$D_9 \sin \varphi$	-1				-9				13				5		
$D_{10} \sin \varphi$		-3				-11				11				3	
$D_{11} \sin \varphi$			-5				-13				9				1
<i>B</i>	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29

Aus diesen Zahlen folgt:

$$\begin{aligned}
 {}_{max} D_{2p} &= 1,36 (27 + 19 + 3) + 0,82 \cdot 11 = 75,66^t \\
 ,, D_{3p} &= 1,36 (25 + 17 + 1) + 0,82 \cdot 9 = 65,86 \\
 ,, D_{4p} &= 1,36 (23 + 15) + 0,82 \cdot 7 = 57,42 \\
 ,, D_{5p} &= 1,36 (21 + 13) + 0,82 \cdot 5 = 50,34 \\
 ,, D_{6p} &= 1,36 (19 + 3) + 0,82 \cdot 11 = 38,94 \\
 ,, D_{7p} &= 1,36 (17 + 1) + 0,82 \cdot 9 = 31,86 \\
 ,, D_{8p} &= 1,36 \cdot 15 + 0,82 \cdot 7 = 26,14 \\
 ,, D_{9p} &= 1,36 \cdot 13 + 0,82 \cdot 5 = 21,78 \\
 ,, D_{10p} &= 1,36 \cdot 11 + 0,82 \cdot 3 = 17,42 \\
 ,, D_{11p} &= 1,36 \cdot 9 + 0,82 \cdot 1 = 13,06.
 \end{aligned}$$

In Folge der ständigen Belastung $g = 1,6^t/m$ entsteht

$$\begin{aligned}
 D_{2g} &= \frac{1}{30} (27 + 19 + 11 + 3) \frac{g \lambda}{\sin \varphi} \\
 &= \frac{1}{30} (27 + 19 + 11 + 3) 4,52 = 9,04^t \\
 D_{3g} &= \frac{1}{30} (25 + 17 + 9 + \frac{3}{4}) 4,52 = 7,80^{t*}) \\
 D_{4g} &= \frac{1}{30} (23 + 15 + 7) 4,52 = 6,78^t \\
 D_{5g} &= \frac{1}{30} (21 + 13 + 5 - \frac{3}{4}) 4,52 = 5,76^{t*}) \\
 D_{6g} &= D_{2g} - \frac{g \lambda}{\sin \varphi} = D_{2g} - 4,52
 \end{aligned}$$

*) Die Knotenpunkte 1 und 15 sind nur mit je $\frac{3}{4} g \lambda$ belastet.

$$\begin{array}{l|l} D_{6g} = 9,04 - 4,52 = 4,52^t & D_{9g} = 5,76 - 4,52 = 1,24^t \\ D_{7g} = 7,80 - 4,52 = 3,28^t & D_{10g} = 4,52 - 4,52 = 0 \\ D_{8g} = 6,78 - 4,52 = 2,26^t & D_{11g} = 3,28 - 4,52 = -1,24^t \end{array}$$

Im Ganzen erhält man also in Folge Verkehrslast und Eigengewicht für $max D_2$ bis $max D_{11}$ der Reihe nach die Werthe:

$$max D = 85^t, 74^t, 64^t, 56^t, 43^t, 35^t, 28^t, 23^t, 17^t, 12^t.$$

Auf dieselbe Weise findet man für $min D = min D_p + D_g$ die Werthe $min D = 9^{t*}, 8^{t*}, 7^{t*}, 4^t, 0^t, -4^t, -7^t, -12^t, -17^t, -23^t$.

Um nun die Spannkraften in den Stäben der linken Endscheibe zu berechnen, betrachten wir den in Fig. 521 dargestellten Belastungszustand dieser Scheibe. Mit den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen

$$S_1 + S_2 = \frac{A^{**})}{2 \sin \varphi}$$

$$S_1 - S_2 = D_2 - D_4,$$

aus denen folgt:

$$S_1 = \frac{A}{4 \sin \varphi} + \frac{D_2 - D_4}{2}$$

$$S_2 = \frac{A}{4 \sin \varphi} - \frac{D_2 - D_4}{2}.$$

Da nun

$$A = P_1 + (D_3 + D_4 + D_2 + D_5) \sin \varphi$$

sein muss, so erhält man schliesslich die Formeln

$$S_1 = \frac{P_1}{4 \sin \varphi} + \frac{1}{4} [D_3 - D_4 + 3 D_2 + D_5]$$

$$S_2 = \frac{P_1}{4 \sin \varphi} + \frac{1}{4} [D_3 + 3 D_4 - D_2 + D_5],$$

welche die Herleitung der Einflusslinien für S_1 und S_2 aus den D -Linien ermöglichen. Fig. 520 b zeigt die S_2 -Linie, deren Konstruktion einer weiteren Erläuterung wohl nicht bedarf. Man braucht nur die Strebenzüge, denen die Diagonalen D_3, D_4, D_2 und D_5 angehören, zu verfolgen und festzustellen, welche Knotenpunkte der unteren Gurtung in ihnen liegen.

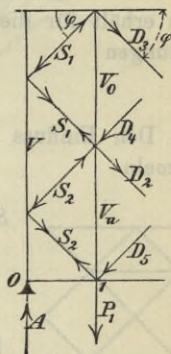


Fig. 521.

*) Die ersten drei Werthe sind nur von g abhängig.

***) A bedeutet den um die Belastung des Knotenpunktes 0 verminderten Stützenwiderstand.

Nach Berechnung von S_1 findet man

$$V = + 2 S_1 \sin \varphi \quad (\text{als Druck positiv})$$

während die in der üblichen Weise als Zugkräfte positiv angenommenen Stabkräfte V_o und V_u den Gleichgewichtsbedingungen genügen müssen

$$\begin{aligned} V_o &= S_1 \sin \varphi - D_3 \sin \varphi \\ V_u &= P_1 - S_2 \sin \varphi + D_5 \sin \varphi. \end{aligned}$$

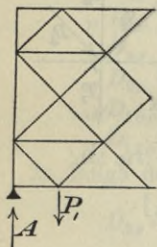
Man findet

$$\begin{aligned} V_o &= \frac{1}{4} P_1 + \frac{1}{4} [3 D_2 - 3 D_3 - D_4 + D_5] \sin \varphi \\ V_u &= \frac{3}{4} P_1 + \frac{1}{4} [D_2 - D_3 - 3 D_4 + 3 D_5] \sin \varphi. \end{aligned}$$

Die Einflusslinie für V_u ist in Figur 520c dargestellt worden. Man erhält für die in den Figuren 520b und 520c gezeichneten Laststellungen

$$\max S_{2p} = 59^t \quad \text{und} \quad \max V_{up} = 44^t.$$

Den Einfluss des Eigengewichts berechnet man mit Hilfe der Formeln



$$\begin{aligned} S_{2g} &= \frac{A_g}{4 \sin \varphi} - \frac{D_{2g} - D_{4g}}{2} \\ &= \frac{1}{4 \sin \varphi} \left(\frac{gl}{2} - \frac{g\lambda}{4} \right) - \frac{1}{2} (D_{2g} - D_{4g}) = 7,07^t \\ V_{ug} &= P_{1g} - (S_{2g} - D_{5g}) \sin \varphi \\ &= \frac{3}{4} g \lambda - (S_{2g} - D_{5g}) \sin \varphi = 1,01^t. \end{aligned}$$

Fig. 522.

$$\text{Im Ganzen entsteht also } \max S_2 = 66^t \quad \text{und} \quad \max V_u = 45^t.$$

Wir empfehlen dem Leser, in gleicher Weise auch die Spannkkräfte der in der Fig. 522 dargestellten Anordnung der Endscheibe zu untersuchen und wenden uns jetzt zu den Gurtstäben. Wir beschränken uns darauf, die Konstruktion der Einflusslinie für U_8 zu beschreiben.

Zunächst fassen wir U_8 als Stab des in der Figur 523 kräftig ausgezogenen Theilsystems auf, dem die unteren Knotenpunkte 1, 5, 9 und 13 angehören. Es folgt dann aus dem Momente $M_{(7)}$ in Bezug auf den oberen Knotenpunkt (7) für U_8 der Werth

$$U = + \frac{M_{(7)}}{h};$$

die Punkte 1', 5', 9', 13' der Einflusslinie gehören also dem Linienzuge A'(7)'B' an, der durch $A'J_7 = 1 \frac{x_7}{h} = 6,5 \frac{\lambda}{h}$ bestimmt ist.

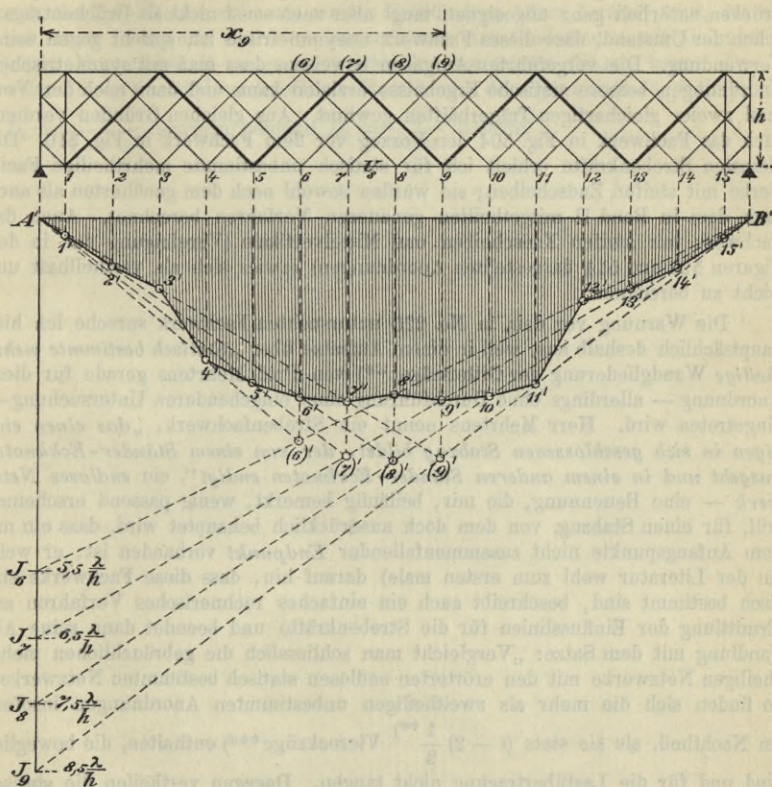


Fig. 523.

Und ganz ebenso lässt sich folgern:

- Die Punkte 2', 6', 10', 14' liegen auf dem Linienzuge A'(8)'B'
 „ „ 3', 7', 11', 15' „ „ „ „ A'(9)'B'
 „ „ 4', 8', 12' „ „ „ „ A'(6)'B'.

Durch diese Angaben ist die Einflusslinie für U_8 bestimmt.

Anmerkung. Zu einer eingehenden Untersuchung mehrtheiliger Strebenfachwerke wurde ich bereits in den Jahren 1894 und 1895 gelegentlich einer im dienstlichen Auftrage ausgeführten Prüfung von Entwürfen für zerlegbare

eiserne Brücken veranlasst. Es stellte sich bei dieser Untersuchung heraus, dass es vor allen Dingen darauf ankommt, geringe Spannkraften in den Diagonalen zu erhalten, damit die Durchmesser der auf Biegung beanspruchten Gelenkbolzen möglichst klein ausfallen. Ein viertheiliges Fachwerk, wie das in No. 225 behandelt, in welchem sich in einer Diagonale eine Spannkraft entwickeln kann, die beinahe ebenso gross ist wie bei einem eintheiligen System, ist für zerlegbare Brücken natürlich ganz ungeeignet, taugt aber auch sonst nicht als Brückenträger. Schon der Umstand, dass dieses Fachwerk unsymmetrisch ist, spricht gegen seine Verwendung. Die vorgeführten Aufgaben beweisen, dass man mit symmetrischen Anordnungen bessere statische Ergebnisse erzielen kann und dann noch den Vortheil zweier gleichartigen Trägerhälften gewinnt. Aus gleichen Gründen verdient auch das Fachwerk in Fig. 504 den Vorzug vor dem Fachwerk in Fig. 510. Die kleinsten Strebenkräfte erhielt ich für statisch unbestimmte mehrtheilige Fachwerke mit steifen Endscheiben; sie wurden sowohl nach dem genäherten als auch nach dem in Band II mitgetheilten genaueren Verfahren berechnet. Auch das Fachwerk mit steifen Endscheiben und Mittelvertikale (Vereinigung der in den Figuren 520 und 514 dargestellten Anordnungen) erwies sich als vortheilhaft und leicht zu berechnen.

Die Warnung vor dem in No. 225⁴ untersuchten Fachwerk spreche ich hier hauptsächlich deshalb aus, weil in einem Aufsätze über „*Statisch bestimmte mehrtheilige Wandgliederung der Gitterträger*“*) von Prof. Mehrrens gerade für diese Anordnung — allerdings ohne Durchführung einer eingehenderen Untersuchung — eingetreten wird. Herr Mehrrens nennt ein Strebenfachwerk, „*das einen einzigen in sich geschlossenen Stabzug bildet, der von einem Ständer-Eckknoten ausgeht und in einem anderen Ständer-Eckknoten endigt*“, ein *endloses Netzwerk* — eine Benennung, die mir, beiläufig bemerkt, wenig passend erscheinen will, für einen Stabzug, von dem doch ausdrücklich behauptet wird, dass ein mit dem Anfangspunkte nicht zusammenfallender *Endpunkt* vorhanden ist; er weist (in der Literatur wohl zum ersten male) darauf hin, dass diese Fachwerke statisch bestimmt sind, beschreibt auch ein einfaches rechnerisches Verfahren zur Ermittlung der Einflusslinien für die Strebenkräfte und beendet dann seine Abhandlung mit dem Satze: „Vergleicht man schliesslich die gebräuchlichen mehrtheiligen Netzwerke mit den erörterten endlosen statisch bestimmten Netzwerken, so finden sich die mehr als zweitheiligen unbestimmten Anordnungen insofern im Nachtheil, als sie stets $(t - 2) \frac{1}{2}$ **) Viereckzüge***) enthalten, die beweglich sind und für die Lastübertragung nicht taugen. Dagegen vertheilen die statisch bestimmten mehrtheiligen Netzwerke alle Lasten gleichmässig über das gesammte Stabwerk der Wand, der Gurte und der Ständer.“

Alle in diesem Satze aufgestellten Behauptungen sind unrichtig. Herr Mehrrens übersieht, dass die *gebräuchlichen* mehrtheiligen Netzwerke steife Endständer besitzen. Zweitens haben wir in Fig. 442 (Seite 453) ein mehrtheiliges Fachwerk ohne steifen Endständer kennen gelernt, welches statisch unbestimmt

*) Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, Wochen-Ausgabe, 1898, Seite 329.

**) t ist die Theilungsziffer.

***) So nennt Herr Mehrrens die geschlossenen Stabzüge, wie 0123 . . 8 in Fig. 441, Seite 453.

Nachtrag.

I.

Neue Belastungsvorschläge für Eisenbahnbrücken.

Während der Drucklegung dieses Buches wurde vom *Verein Deutscher Eisenbahnverwaltungen* ein Bericht über Verhandlungen des Ausschusses für technische Angelegenheiten veröffentlicht, welcher u. A. neue Vorschläge für die beim Entwerfen von Brücken anzunehmenden Belastungen enthält. Fig. 524 giebt die Achslasten der Lokomotive und des Tenders an. Sie wird in jenem Berichte von der Vorschrift begleitet:

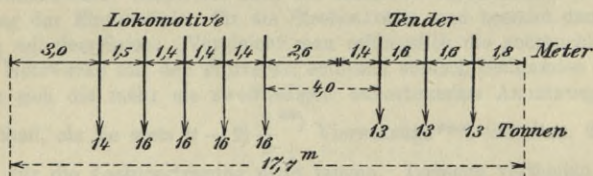


Fig. 524.

„Der Berechnung der Brücken ist ein Zug aus zwei Lokomotiven sammt Tendern in ungünstigster Stellung und einseitig angereihten Wagen von 3,6 Tonnen Gewicht auf das laufende Meter Wagenlänge (einschliesslich Bufferlänge) zu Grunde zu legen.“

„Insofern für kleine Stützweiten oder Belastungslängen vier je 1,4^m von einander abstehende Achsen, von denen eine an der ungünstigsten Stelle mit 18 Tonnen Belastung anzunehmen ist, grössere Beanspruchungen ergeben, als die oben skizzirte Lokomotive, ist dieser Belastungsfall der Rechnung zu Grunde zu legen.“

Der Bericht ist reich mit Tabellen ausgestattet, denen wir folgende Werthe entnehmen.

Grösste Biegemomente für verschiedene Stützweiten l .

l	M_{max}	l	M_{max}	l	M_{max}	l	M_{max}
m	tm	m	tm	m	tm	m	tm
1,0	4,5	15	235,0	44	1607	78	4 158
1,5	6,75	16	261,0	46	1737	80	4 329
2,0	9,0	17	289,4	48	1872	82	4 504
2,5	11,5	18	318,45	50	2007	84	4 680
3,0	15,5	19	349,5	52	2147	86	4 859
3,5	21,35	20	380,9	54	2286	88	5 039
4,0	27,6	22	448,1	56	2430	90	5 223
5,0	40,1	24	525,8	58	2574	92	5 407
6,0	55,5	26	604,0	60	2723	94	5 595
7,0	71,8	28	693,2	62	2874	96	5 783
8,0	90,9	30	790,4	64	3027	98	5 976
9,0	110,4	32	891,9	66	3182	100	6 172
10,0	129,9	34	997,0	68	3339	110	7 180
11,0	149,4	36	1108	70	3499	120	8 269
12,0	168,9	38	1226	72	3660	130	9 425
13,0	188,4	40	1350	74	3824	140	10 642
14,0	210,9	42	1477	76	3990	150	11 933

Die zweite Tabelle dient zur Berechnung der grössten Querkräfte und entspricht unserer Tabelle I auf Seite 150. Die Strecke b_1 giebt (nach Fig. 527,

Statische Momente \mathcal{E}_n .

b_1	\mathcal{E}_n	b_1	\mathcal{E}_n	b_1	\mathcal{E}_n
0,5	9,0	22*)	2 030	64	13 359
1,0	18,0	24*)	2 398	68	14 780
1,5	28,6	26*)	2 788	72	16 257
2,0	45,6	28*)	3 186	76	17 790
2,5	62,6	30*)	3 615	80	19 385
3,0	82,8	32	4 075	84	21 034
3,5	107,8	34	4 546	88	22 743
4,0	132,8	36	5 032	92	24 509
4,5	162,6	38	5 535	96	26 330
5,0	195,6	40	6 051	100	28 212
6,0	261,6	42	6 581	105	30 644
7,0*)	327,6	44	7 124	110	33 166
8,0*)	393,6	46	7 682	115	35 778
9,0*)	471,6	48	8 256	120	38 480
10,0*)	553,5	50	8 844	125	41 271
12,0	744,6	52	9 446	130	44 153
14,0	966,9	54	10 061	135	47 125
16,0	1201	56	10 691	140	50 187
18,0	1453	58	11 338	145	53 339
20,0*)	1719	60	11 998	150	56 580

*) Ist die Stützweite $l \leq b_1 + 4,0 m$ so sind folgende Werthe zu nehmen:

l	\mathcal{E}_n	l	\mathcal{E}_n
7,0	331,8	22	2083
8,0	409,8	24	2434
9,0	487,8	26	2816
10,0	566,3	28	3209
20,0	1763	30	3617

Seite 540) die Entfernung der ersten Last von der rechten Stütze an. Die Tabellen des Berichtes, aus denen wir hier einen Auszug geben, enthalten nur die statischen Momente \mathcal{S}_n , nicht aber die Lastensummen \mathfrak{P}_n , was offenbar ein Mangel ist, da man diesen Werth zur schnellen Entscheidung der Frage nach der ungünstigsten Laststellung braucht. Man vergleiche die Zahlenbeispiele am Schluss dieses Nachtrages.

II.

Neue Belastungsvorschriften für die Preussischen Staatsbahnen.

Das Preussische Ministerium der öffentlichen Arbeiten hat eine neue Belastungsvorschrift aufgestellt, welche noch etwas grössere Momente und Querkkräfte liefert wie die Vorschläge unter I.*) Sie zeichnet sich durch die grösste Einfachheit aus und erleichtert deshalb die Berechnung auch in solchen Fällen, in denen die für einfache Balkenbrücken ausgearbeiteten Tabellen nicht benutzt werden können. Fig. 525 zeigt die Anordnung von Lokomotive, Tender und Güterwagen.

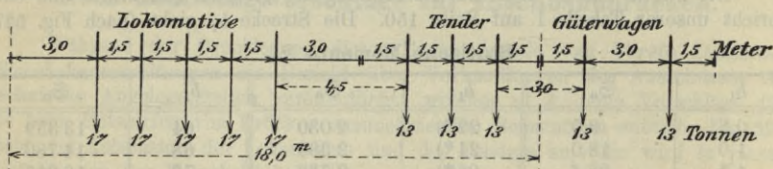


Fig. 525.

Güterwagen. Alle Radstände sind durch 1,5 theilbar. Es ist, wie nach der früheren Vorschrift, ein Zug aus zwei Lokomotiven in ungünstigster Stellung mit einer unbeschränkten Anzahl einseitig angehängter Güterwagen anzunehmen.

So lange sich weniger als 5 Lokomotivachsen auf der Brücke befinden, sind grössere Achslasten in Rechnung zu stellen, und zwar ist für jede Achse anzunehmen:

18 ^t	bei Belastung mit vier Achsen,
19 ^t	„ „ „ drei Achsen,
20 ^t	„ „ „ einer oder zwei Achsen.

a. Momente.

Die Tabelle A enthält die grössten Momente für Stützweiten von 1,0 bis 150^m. Für dazwischenliegende Stützweiten ist geradlinig einzuschalten, wobei die angegebenen Werthe $\Delta M_{max} : \Delta l$ benutzt werden können.

*) Vorschrift vom April 1901.

A. Grösste Biegemomente.

l	M_{max}	$\frac{\Delta M_{max}}{\Delta l}$	l	M_{max}	$\frac{\Delta M_{max}}{\Delta l}$	l	M_{max}	$\frac{\Delta M_{max}}{\Delta l}$
m	tm	t	m	tm	t	m	tm	t
1,0	5,00	5,00	15	243,9	26,1	60	2 900	81,5
1,2	6,00	5,00	16	270,0	27,8	62	3 063	84,5
1,4	7,00	5,00	17	297,8	29,2	64	3 232	85,0
1,6	8,00	5,00	18	327,0	32,8	66	3 402	86,5
1,8	9,00	5,00	19	359,8	34,2	68	3 575	88,0
2,0	10,00	5,00	20	394,0	37,5	70	3 751	88,0
2,2	11,00	5,00	22	469,0	40,8	72	3 927	91,0
2,4	12,00	5,80	24	550,5	40,8	74	4 109	93,0
2,6	13,16	9,25	26	632,0	48,1	76	4 295	94,5
2,8	15,01	9,80	28	728,2	52,1	78	4 484	95,0
3,0	16,88	9,40	30	832,3	53,5	80	4 674	97,0
3,2	18,76	9,50	32	939,2	55,4	82	4 868	97,5
3,5	21,61	13,8	34	1050	57,5	84	5 063	100
4,0	28,50	14,2	36	1165	60,5	86	5 263	101
4,5	35,63	14,2	38	1286	65,0	88	5 464	103
5,0	42,75	14,3	40	1416	68,0	90	5 669	104
6	57,00	16,4	42	1552	68,5	92	5 876	107
7	73,45	20,1	44	1689	71,5	94	6 089	107
8	93,50	21,2	46	1832	72,0	96	6 303	109
9	114,7	21,2	48	1976	73,5	98	6 520	110
10	135,9	21,2	50	2123	75,0	100	6 740	118
11	157,1	21,3	52	2273	75,0	110	7 918	126
12	178,4	21,3	54	2423	77,0	120	9 176	134
13	199,7	21,3	56	2577	80,0	130	10 520	144
14	221,6	22,9	58	2737	81,5	140	11 965	155
15	243,9		60	2900		150	13 510	

Die Kurven der grössten Momente M_x an den verschiedenen Stellen (x) einer Brücke wird genau genug durch zwei Parabelstücke und eine gerade Linie, deren Länge gleich $0,12 l$ ist, dargestellt. Zur Berechnung von M_x dient die Zahlenreihe B. Für die dazwischenliegenden Werthe $x:l$ ist geradlinig einzuschalten, wobei die angegebenen Werthe $\frac{\Delta M_x}{M_{max}} : \Delta \frac{x}{l}$ benutzt werden können.

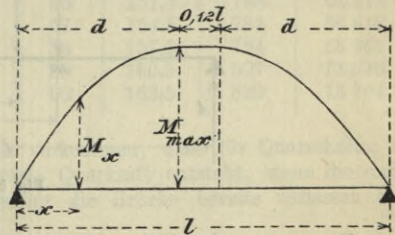


Fig. 526.

B.

$\frac{x}{l}$	$\frac{M_x}{M_{max}}$	$\frac{\Delta M_x}{M_{max}}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{M_x}{M_{max}}$	$\frac{\Delta M_x}{M_{max}}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{M_x}{M_{max}}$	$\frac{\Delta M_x}{M_{max}}$
0,00	0,000	4,45	0,18	0,651	2,60	0,36	0,967	0,70
0,02	0,089	4,25	0,20	0,703	2,35	0,38	0,981	0,55
0,04	0,174	4,00	0,22	0,750	2,15	0,40	0,992	0,30
0,06	0,254	3,85	0,24	0,793	2,00	0,42	0,998	0,10
0,08	0,331	3,60	0,26	0,833	1,75	0,44	1,000	
0,10	0,403	3,40	0,28	0,868	1,55			
0,12	0,471	3,20	0,30	0,899	1,35			
0,14	0,535	3,00	0,32	0,926	1,10			
0,16	0,595	2,80	0,34	0,948	0,95			
0,18	0,651		0,36	0,967				

Die Werthe der Tabelle B folgen dem Gesetze

$$\frac{M_x}{M_{max}} = \frac{x(2d-x)}{d^2}$$

wo $d = 0,44 l$ ist.

b. Querkräfte.

Der Tabelle C, welche zur Berechnung des Stützenwiderstandes dient, der am linken Auflager einer Balkenbrücke durch einen vom rechten Auflager aus vorrückenden Eisenbahnzug hervorgerufen wird, haben wir genau dieselbe Anordnung gegeben, wie der Tabelle I auf Seite 152. Wir verweisen daher auf Seite 145, No. 85. Der Auflagerdruck A wird mittels der Gleichung berechnet

$$A = \frac{1}{l} (\mathfrak{P}_n b_n + \mathfrak{S}_n).$$

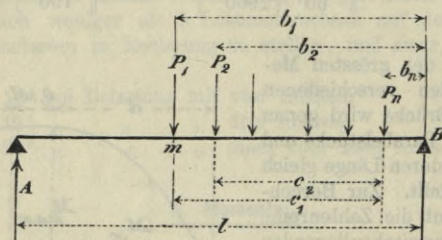


Fig. 527.

Die ersten vier Zeilen sind nicht für den über der Tabelle stehenden Lastenzug berechnet, sondern nach der für die Belastung durch eine kleinere Anzahl von Achsen geltenden Vorschrift. Es ist also gesetzt worden:

$$\mathfrak{P}_1 = 20^t, \mathfrak{P}_2 = 2 \cdot 20 = 40^t, \mathfrak{P}_3 = 3 \cdot 19 = 57^t, \mathfrak{P}_4 = 4 \cdot 18 = 72^t$$

und für diese schwereren Lasten sind auch die Momente \mathfrak{S}_n berechnet worden.

C.

Tonnen	Lokomotive					Tender			Lokomotive					Tender			Güterwagen		
	17	17	17	17	17	13	13	13	17	17	17	17	17	13	13	13	13	13	13

Meter 1,5 1,5 1,5 1,5 4,5 1,5 1,5 4,5 1,5 1,5 1,5 1,5 4,5 1,5 1,5 3,0 3,0 3,0 3,0

n	c_1	P_n	S_n	n	c_1	P_n	S_n
1	0,	20	0	31	76,5	443	19 389
2	1,5	40	30	32	79,5	456	20 718
3	3,0	57	85,5	33	82,5	469	22 086
4	4,5	72	162	34	85,5	482	23 493
5	6,0	85	255	35	88,5	495	24 939
6	10,5	98	637,5	36	91,5	508	26 424
7	12,0	111	784,5	37	94,5	521	27 948
8	13,5	124	951	38	97,5	534	29 511
9	18,0	141	1 509	39	100,5	547	31 113
10	19,5	158	1 720,5	40	103,5	560	32 754
11	21,0	175	1 957,5	41	106,5	573	34 434
12	22,5	192	2 220	42	109,5	586	36 153
13	24,0	209	2 508	43	112,5	599	37 911
14	28,5	222	3 448,5	44	115,5	612	39 708
15	30,0	235	3 781,5	45	118,5	625	41 544
16	31,5	248	4 134	46	121,5	638	43 419
17	34,5	261	4 878	47	124,5	651	45 333
18	37,5	274	5 661	48	127,5	664	47 286
19	40,5	287	6 483	49	130,5	677	49 278
20	43,5	300	7 344	50	133,5	690	51 309
21	46,5	313	8 244	51	136,5	703	53 379
22	49,5	326	9 183	52	139,5	716	55 488
23	52,5	339	10 161	53	142,5	729	57 636
24	55,5	352	11 178	54	145,5	742	59 823
25	58,5	365	12 234	55	148,5	755	62 049
26	61,5	378	13 329	56	151,5	768	64 314
27	64,5	391	14 463	57	154,5	781	66 618
28	67,5	404	15 636	58	157,5	794	68 961
29	70,5	417	16 848	59	160,5	807	71 343
30	73,5	430	18 099	60	163,5	820	73 764

Bei gewissen Stützweiten kann es vorkommen, dass für Querschnitte in der Nähe des linken Auflagers die grösste Querkraft entsteht, wenn die erste Maschine rückwärts fährt und der Tender die Brücke bereits verlassen hat,

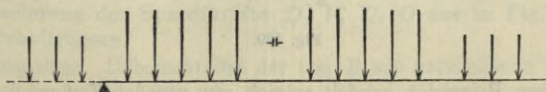


Fig. 528.

Fig. 528. Es gilt dann die Tabelle D, deren fünf erste Zeilen mit denen der Tabelle C übereinstimmen. Sobald $b_1 > 33,23^m$ ist, liefert die Tabelle C stets den grösseren Stützenwiderstand A . Die Unterschiede zwischen den für die beiden Zuganordnungen sich ergebenden Werthe sind übrigens unwesentlich, wie aus den beiden folgenden Zahlenreihen hervorgeht. Die obere Reihe ist mittels Tabelle C berechnet worden, die untere mittels Tabelle D.

$l = 10$	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32 Meter
$A = 59,5$	65	72	79	84	90	97	104	113	119	126	133 Tonnen
$A = 59,5$	64	70	77	85	94	100	107	114	121	127	134 „

D.

Tonnen Meter	Lokomotive					Lokomotive					Tender			Güterwagen				
	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	13	13	13	13	13	13	13	13
	1,5	1,5	1,5	1,5	6,0	1,5	1,5	1,5	1,5	4,5	1,5	1,5	3,0	3,0	3,0	3,0		

n	c_1	β_n	ϵ_n	n	c_1	β_n	ϵ_n
1	0	20	0	9	16,5	153	1300,5
2	1,5	40	30	10	18,0	170	1530,5
3	3,0	57	85	11	22,5	183	2295,0
4	4,5	72	162	12	24,0	196	2569,5
5	6,0	85	255	13	25,5	209	2863,5
6	12,0	102	765	14	28,5	222	3490,5
7	13,5	119	918	15	31,5	235	4156,5
8	15,0	136	1096,5	16	34,5	248	4861,5

III.

Zahlenbeispiele für die Benutzung der Tabellen.*)

1. Berechnung der Querkräfte und Gurtspankräfte für einen Parallelträger von 36^m Stützweite und $3,6^m$ Feldweite. Fig. 529.

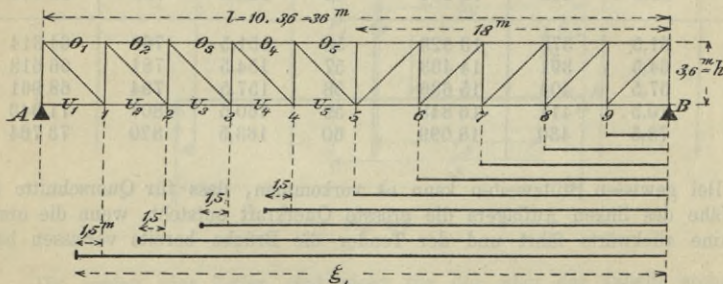


Fig. 529.

*) In diesen Beispielen handelt es sich nur um den Einfluss der Verkehrslast. Den Zeiger p haben wir überall fortgelassen.

a. Querkräfte. Nach Seite 139 muss der von B nach A vorrückende Eisenbahnzug die Grundstellung überschreiten, sobald $\mathfrak{P}_n > \mathfrak{P}_1 \frac{l}{\lambda}$ wird. Da nun $\mathfrak{P}_1 \frac{l}{\lambda} = 17 \cdot 10 = 170^t$ ist, so lehrt ein Blick auf die Tabelle C, dass \mathfrak{P}_n erst bei einer Zuglänge von $21,0^m$ grösser also 170^t wird. Für die Felder 5 bis 9 sind also die Grundstellungen massgebend; in den anderen entsteht Q_{max} , wenn die zweite Achse an dem das Feld rechts begrenzenden Knotenpunkte liegt. Im linken Knotenpunkte des Feldes greift dann die Last $17 \frac{1,5}{3,6} = 7^t$ an. Den Zug noch weiter vorzuziehen ist nirgends nöthig, weil \mathfrak{P}_n den Werth $(P_1 + P_2) \frac{l}{\lambda} = 340^t$ erst bei einer Zuglänge von $52,5^m$ überschreitet. Nach dieser Entscheidung über die Zugstellungen, die in Fig. 529 durch kräftige Linien angedeutet worden sind, wurde die Berechnung der $maxQ$ in der folgenden Tabelle durchgeführt. Der Abstand der ersten Last vom rechten Auflager ist mit ξ bezeichnet worden.

Feld	ξ	c_1	$b_n = \xi - c_1$	\mathfrak{P}_n	\mathfrak{E}_n	$A = \frac{1}{36} (\mathfrak{P}_n b_n + \mathfrak{E}_n)$	$maxQ = A - 7,0$
	m	m	m	t	tm	t	t
1	33,9	31,5	2,4	248	4134	131	124
2	30,3	30,0	0,3	235	3782	107	100
3	26,7	24,0	2,7	209	2508	85	78
4	23,1	22,5	0,6	192	2220	65	58
5	18,0	18,0	0		1509	$A = 42 = maxQ$	
6	14,4	13,5	0,9	124	951	30	„
7	10,8	10,5	0,3	98	638	19	„
8	7,2	6,0	1,2	85	255	10	„
9	3,6	3,0	0,6	57	86	3,3	„

Die Benutzung der den früher üblichen Belastungen entsprechenden Tabelle I auf Seite 310 liefert folgende Querkräfte

$$maxQ = 83^t, 66^t, 52^t, 40^t, 28^t, 19^t, 12^t, 6,4^t, 2,4^t$$

dieselben sind wesentlich (nämlich um 50 v. H.) kleiner als die oben berechneten Werthe.

b. Gurtspannkkräfte. Das grösste Moment ist, nach Tabelle A, $maxM = 1165^m$.

Man erhält $-O_5 = \frac{M_5}{h} = \frac{1165}{3,6} = 324^t$ und mit Hilfe der Tabelle B

$$\text{für } \frac{x}{l} = 0,1 \quad -O_1 = +U_2 = 0,403 \cdot 324 = 131^t$$

$$0,2 \quad -O_2 = +U_3 = 0,703 \cdot 324 = 228^t$$

$$0,3 \quad -O_3 = +U_4 = 0,899 \cdot 324 = 291^t$$

$$0,4 \quad -O_4 = +U_5 = 0,992 \cdot 324 = 321^t.$$

U_1 ist gleich Null.

2. Berechnung der Spannkkräfte D , V , U , O des in Fig. 530 dargestellten Parabelträgers.

a. Füllungsstäbe. Ueberschreitet der von B aus vorrückende Eisenbahnzug die Grundstellung soweit, dass die Lasten P_1 bis P_r im m^{ten} Felde liegen, Fig. 531, so wird der Knotenpunkt $m - 1$ mit

$$P' = \frac{\sum Pe}{\lambda_m}$$

belastet. Am linken Auflager entsteht

$$A = \frac{\sum Pb}{l}$$

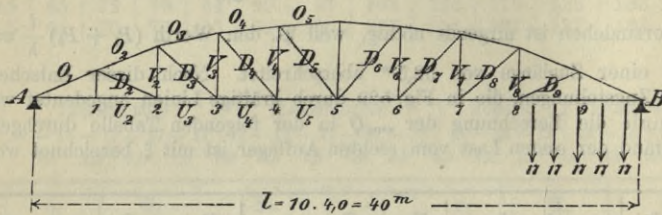


Fig. 530.

Die Spannkraft in der Diagonale nimmt die Form an

$$D = AD' + P'D''$$

und für die Vertikale erhält man

$$V = AV' + P'V''$$

Hierin sind D' und V' die Spannkräfte in Folge $A = 1$, deren Ermittlung in No. 151, Seite 255 gezeigt worden ist. D'' und V'' sind die Werthe, welche die in Fig. 245 auf Seite 260 dargestellten Spannkräfte D''' und V''' für $P = 1$ annehmen. Auf der linken Trägerseite gehören bei untenliegender Fahrbahn zum m ten Felde die Stäbe D_m und V_{m-1} , auf der rechten Trägerseite die Stäbe D_m und V_m . Wir wollen die ganze Untersuchung rechnerisch durchführen.

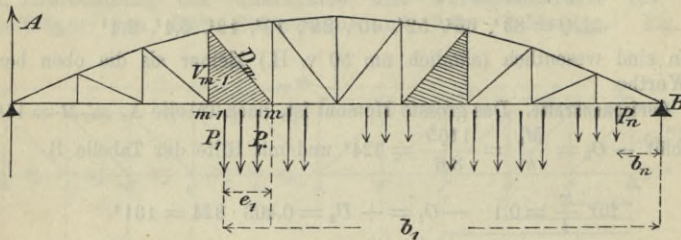


Fig. 531.

Für die linke Trägerhälfte ergibt sich für den Zustand $A = 1$ die Gleichgewichtsbedingung (Fig. 532)

$$1 + V'_m + O'_m \sin \beta_m = 0$$

und hieraus folgt, da

$$O'_m \cos \beta_m = -\frac{M_m}{h_m} = -1 \frac{x_m}{h_m} \text{ also } O'_m \sin \beta_m = -1 \frac{x_m}{h_m} \operatorname{tg} \beta_m$$

ist, die einfache Beziehung

$$-V'_m = \frac{x_m}{\lambda_m} \frac{h_{m-1}}{h_m} - \frac{x_{m-1}}{\lambda_m} = D'_m \sin \varphi_m^*);$$

und ebenso findet man für die rechte Trägerhälfte

$$-V'_m = \frac{x_m}{\lambda_{m+1}} \frac{h_{m+1}}{h_m} - \frac{x_{m+1}}{\lambda_{m+1}} = D'_{m+1} \sin \varphi_{m+1}.$$

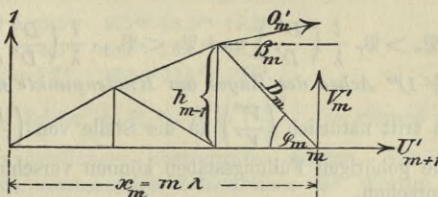


Fig. 532.

Sind alle Felder gleichlang, so ergibt sich (mit $x_m = m\lambda$)

$$(1) \begin{cases} \text{linke Seite} & -V'_m = +D'_m \sin \varphi_m = m \frac{h_{m-1}}{h_m} - (m-1) \\ \text{rechte Seite} & -V'_m = +D'_{m+1} \sin \varphi_{m+1} = m \frac{h_{m+1}}{h_m} - (m+1). \end{cases}$$

Da nun die Höhen h des Parabelträgers dem einfachen Gesetze folgen

$$h_m = \frac{4fx_m(l-x_m)}{l^2} = \frac{4fm(k-m)}{k^2},$$

wo k die Anzahl der Felder und f die Trägerhöhe in der Mitte bedeuten, so erhält man schliesslich die einfachen Werthe

$$(2) \begin{cases} \text{linke Seite} & -V'_m = +D'_m \sin \varphi_m = \frac{m-1}{k-m} \\ \text{rechte Seite} & +V'_m = -D'_{m+1} \sin \varphi_{m+1} = \frac{m+1}{k-m}. \end{cases}$$

Für die Spannkkräfte V'' und D'' findet man (nach Fig. 245 Seite 260)

$$(3) \begin{cases} \text{linke Seite} & V''_m = +1, \quad D''_m = -\frac{d_m}{h_m}, \quad D''_m \sin \varphi_m = -\frac{h_{m-1}}{h_m} \\ \text{rechte Seite} & V''_m = -\frac{h_{m-1}}{h_m}, \quad D''_m = +\frac{d_m}{h_m}, \quad D''_m \sin \varphi_m = +1. \end{cases}$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zur Untersuchung der gefährlichsten Laststellung über. Verschieben wir den Zug unendlich wenig nach links, so ändert sich, da $de = db$ ist, D um

$$dD = \left(D' \frac{\sum P}{l} + D'' \frac{\sum P}{\lambda} \right).$$

*) Diese Gleichung kann auch aus $D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} = \frac{x_m}{h_m} - \frac{x_{m-1}}{h_{m-1}}$ gefolgert werden.

Die Spannkraft D nimmt also zu, sobald

$$\sum_1^n P > - \sum_1^r P \frac{l}{\lambda} \frac{D''}{D'}$$

ist. Eine etwa am Knotenpunkte m gelegene Last gehört nach der Verschiebung zur $\sum_1^n P$. Verstehen wir also unter $\left(\frac{D''}{D'}\right)$ das absolute Verhältniss der Zahlen D'' und D' , und führen wir die Bezeichnung \mathfrak{P} für $\sum P$ ein, so erhalten wir den Satz:

$$\text{Ist } \mathfrak{P}_n > \mathfrak{P}_r \frac{l}{\lambda} \left(\frac{D''}{D'}\right) \text{ und } \mathfrak{P}_n < \mathfrak{P}_{r+1} \frac{l}{\lambda} \left(\frac{D''}{D'}\right) \text{ so muss die} \\ (r+1)^{\text{te}} \text{ Achse des Zuges am Knotenpunkte } m \text{ liegen.}^*)$$

Bei den Vertikalen tritt natürlich $\left(\frac{V''}{V'}\right)$ an die Stelle von $\left(\frac{D''}{D'}\right)$. Den beiden zu demselben Felde gehörigen Füllungsstäben können verschiedene gefährlichste Zugstellungen entsprechen.

Für den in Fig. 532 abgebildeten Parabelträger erhält man nun mit $k=10$ und $f=5,0^m$

$$h_1 = 1,800^m, h_2 = 3,200^m, h_3 = 4,200^m, h_4 = 4,800^m, h_5 = 5,000^m$$

$$\frac{1}{\sin \varphi} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + h^2}}{h} = 2,4369 \quad 1,6008 \quad 1,3810 \quad 1,3017$$

ferner

linke Seite	$D'_2 \sin \varphi_2 = + \frac{1}{8} = - V'_2$	$D'_2 = + 0,305$		
	$D'_3 \sin \varphi_3 = + \frac{2}{7} = - V'_3$	$D'_3 = + 0,457$		
	$D'_4 \sin \varphi_4 = + \frac{3}{6} = - V'_4$	$D'_4 = + 0,690$		$V''_4 = + 1,00$
	$D'_5 \sin \varphi_5 = + \frac{4}{5}$	$D'_5 = + 1,04$		
	<hr/>			
rechte Seite	$D'_6 \sin \varphi_6 = - \frac{6}{5}$	$D'_6 = - 1,56$		
	$D'_7 \sin \varphi_7 = - \frac{7}{4} = - V'_6$	$D'_7 = - 2,42$	$D''_7 = + 1,38$	$V''_6 = - 1,04$
	$D'_8 \sin \varphi_8 = - \frac{8}{3} = - V'_7$	$D'_8 = - 4,27$	$D''_8 = + 1,60$	$V''_7 = - 1,14$
	$D'_9 \sin \varphi_9 = - \frac{9}{2} = - V'_8$	$D'_9 = - 10,97$	$D''_9 = + 2,44$	$V''_8 = - 1,31$

Es sind nur die Werthe D' und V'' angegeben worden, welche gebraucht werden, was durch die folgende Aufsuchung der ungünstigsten Zugstellungen entschieden wird. Die Zahlen $\left(\frac{D''}{D'}\right)$ folgen beim Parabelträger auf der linken und rechten Seite dem einfachen Gesetze

$$\left(\frac{D''}{D'}\right) = \frac{k+1-m}{m} \text{ d. i. hier } = \frac{11-m}{m}$$

*) Hierbei ist natürlich auch darauf zu achten, dass beim Vorziehen des Zuges um eine endliche Strecke neue Lasten auf die Brücke kommen können.

und man erhält daher, weil $P_1 \frac{l}{\lambda} = 170^t$ ist, die folgenden Zahlenreihen für die Belastungslängen $\xi = x'_m + 1,5^m$ (zweite Achse in m):

$$\begin{array}{cccccccc} \text{für } m = & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ \left(\frac{D''}{D'}\right) = & \frac{2}{9} & \frac{3}{8} & \frac{4}{7} & \frac{5}{6} & \frac{6}{5} & \frac{7}{4} & \frac{8}{3} & \frac{9}{2} \\ P_1 \frac{l}{\lambda} \left(\frac{D''}{D'}\right) = & 38^t & 64^t & 97^t & 142^t & 204^t & 298^t & 453^t & 765^t \\ \xi = & 5,5^m & 9,5^m & 13,5^m & 17,5^m & & & & \\ c_1 = & 4,5^m & 6,0^m & 13,5^m & 13,5^m & & & & \\ \mathfrak{P}_n = & 72^t & 85^t & 124^t & 124^t & & & & \end{array}$$

Für die ersten drei Felder ist $\mathfrak{P}_n > P_1 \frac{l}{\lambda} \left(\frac{D''}{D'}\right)$, es müssen also hier (und nur hier allein) die Grundstellungen überschritten werden. Für die anderen Felder braucht man in die vorstehenden Zahlenreihen die Werthe \mathfrak{P}_n erst gar nicht aufzunehmen, da die Werthe $P_1 \frac{l}{\lambda} \left(\frac{D''}{D'}\right)$ viel stärker anwachsen als die \mathfrak{P}_n .

Man erkennt, dass der Parabelträger sich in dieser Beziehung ganz entgegengesetzt verhält wie der Parallelträger; bei letzterem ist $\left(\frac{D''}{D'}\right) = 1$ und die Grundstellung muss gerade bei den Feldern in der Nähe von A überschritten werden.

Es ist nun noch nachzusehen, ob nicht noch ein weiteres Vorrücken des Zuges für irgend ein Feld geboten ist. Dies ist in der That erforderlich für das 9te Feld. Sobald sich nämlich der Zug um $1,5^m$ weiter vorschiebt, wird $\mathfrak{P}_n = 85^t > (P_1 + P_2) \frac{l}{\lambda} \left(\frac{D''}{D'}\right) = 2 \cdot 38 = 76^t$. Man erhält für diese Stellung

$$A = \frac{1}{10} \cdot 85^t = 8,5^t, \quad P' = \frac{17(1,5 + 3,0)}{4,0} = 19^t$$

$$\min D_9 = -10,97 \cdot 8,5 + 2,44 \cdot 19 = -47^t \cdot *)$$

Die folgende Tabelle enthält die Berechnung der $\min D$ und $\max D$. ξ bedeutet wieder die Länge der belasteten Strecke. Es ist $P' = 17 \frac{1,5}{4,0} = 6,4^t$.

Feld	ξ m	c_1 m	$b_n = \xi - c_1$ m	\mathfrak{P}_n t	\mathfrak{C}_n tm	$A = \frac{\mathfrak{P}_n b_n + \mathfrak{C}_n}{l}$ t	$D = AD' + P'D''$
8	9,5	6,0	3,5	85	255	13,8	$\min D_8 = -4,27 \cdot 13,8$ $+ 1,60 \cdot 6,4 = -49$
7	13,5	13,5	0		951	23,8	$\min D_7 = -2,42 \cdot 23,8$ $+ 1,38 \cdot 6,4 = -49$
6	16,0	13,5	2,5	124	951	31,5	$\min D_6 = -1,56 \cdot 31,5 = -49$
5	20,0	19,5	0,5	158	1721	45,0	$\max D_5 = +1,04 \cdot 45,0 = +47$
4	24,0	24,0	0		2508	62,7	$\max D_4 = +0,690 \cdot 62,7 = +43$
3	28,0	24,0	4,0	209	2508	83,6	$\max D_3 = +0,457 \cdot 83,6 = +38$
2	32,0	31,5	0,5	248	4134	106	$\max D_2 = +0,305 \cdot 106 = +32$

*) Für die Grundstellung würde sich ergeben: $c_1 = 3,0^m$; $b_n = 4,0 - 3,0 = 1,0^m$; $\mathfrak{P}_n = 57^t$; $\mathfrak{C}_n = 85,5^t$; $A = \frac{1}{4,0} (57 \cdot 1,0 + 85,5) = 3,56^t$ und 35^t

Bezüglich der Vertikalen geben zunächst die folgenden Zahlenreihen Aufschluss über die ungünstigste Laststellung

$$\begin{array}{cccc}
 m = & 8 & 7 & 6 & 4 \\
 \left(\frac{V''}{V'}\right) = & 0,29 & 0,43 & 0,59 & 2,00 \\
 P_1 \frac{l}{\lambda} \left(\frac{V''}{V'}\right) = 170 \left(\frac{V''}{V'}\right) = & 49^t & 73^t & 100^t & 340^t \\
 \xi = & 9,5^m & 13,5^m & 17,5^m & 21,5^m \\
 c_1 = & 6,0^m & 13,5^m & 13,5^m & 21,0^m \\
 \mathfrak{B}_n = & 85^t & 124^t & 124^t & 175^t
 \end{array}$$

Für die Vertikalen 4, 3 und 2 kommen also Grundstellungen in Betracht und zwar entstehen $\min V_4$, $\min V_3$, $\min V_2$ der Reihe nach gleichzeitig mit $\max D_5$, $\max D_4$, $\max D_3$. Man erhält mit den oben berechneten Werthen A :

$$\min V_4 = -\frac{3}{6} \cdot 45,0 = -22,5^t; \quad \min V_3 = -\frac{2}{7} \cdot 62,7 = -18^t;$$

$$\min V_2 = -\frac{1}{8} \cdot 83,6 = -10,5.$$

Weiter entsteht $\max V_6$, wenn die zweite Achse bei 6 liegt. Es ist dann $\xi = 16,0 + 1,5 = 17,5$; $c_1 = 13,5$; $b_n = 4,0$; $\mathfrak{B}_n = 124$; $\mathfrak{C}_n = 951$; $A = 36,2^t$

$$\max V_6 = +\frac{7}{4} \cdot 36,2 - 1,04 \cdot 6,4 = 57^t$$

$\max V_7$ und $\min D_7$ entstehen bei derselben Laststellung; ebenso $\max V_8$ und $\min D_8$. Man erhält daher

$$\max V_7 = \frac{8}{3} \cdot 23,8 - 1,14 \cdot 6,4 = 56^t$$

$$\max V_8 = \frac{9}{2} \cdot 13,8 - 1,31 \cdot 6,4 = 54^t.$$

Die Vertikalen 1 und 9 werden nur auf Zug beansprucht. Bei der in Fig. 529 angegebenen Laststellung entsteht $\max V_9 = 17 + 2 \cdot 17 \frac{1,0 + 2,5}{4,0} = 47^t$.

Für die Vertikale 5 ergibt sich für jede Laststellung

$$V_5 = -2 O_5 \sin \beta_5 = +2 \frac{M_5}{h_5} \operatorname{tg} \beta_5 = 0,10 \frac{M_5}{h_5}$$

Dieser Werth ist stets positiv. Aus der Tabelle A auf Seite 539 entnehmen wir $\max M_5 = 1420^m$ und erhalten daher

$$\max V_5 = 0,10 \frac{1420}{5,0} = +28^t.$$

b. Berechnung der Spannkkräfte in den Gurtungen. Es ist

$$-O_m \cos \beta_m = +U_{m+1} = +\frac{M_m}{h_m}$$

$\min D_9 = -10,97 \cdot 3,56 = -39^t$. Das bedeutet aber einen Fehler von 20 v. H. Im vorliegenden Falle ist nicht nur die Grösse der Achsenbelastung, sondern auch die des Radstandes wichtig. Ermässigt man z. B. die Achslast auf 16^t und den Radstand auf $1,3^m$, so erhält man $A = \frac{1}{10} \cdot 80 = 8^t$ und $P' = \frac{16(1,3 + 2,6)}{4,0} = 15,6^t$ und findet dann $\min D_9 = -10,97 \cdot 8,0 + 2,44 \cdot 15,6 = -50^t$.

wo

$$M_m = M_{max} \frac{x_m(2d - x_m)}{d^2}$$

$$h_m = 4f \frac{x_m(l - x_m)}{l^2} \quad \text{und} \quad d = 0,44l$$

mithin für $x < 0,44l$

$$\frac{M_m}{h_m} = 1,29 \frac{M_{max}}{f} \frac{0,88l - x_m}{l - x_m}$$

Setzt man $l = 10\lambda$, $x_m = m\lambda$, $f = 5,0^m$, $M_{max} = 1420^tm$, so erhält man für $x < 0,44l$ d. h. für $m < 4,4$

$$\frac{M_m}{h_m} = 366 \frac{8,8 - m}{10 - m}$$

$m = 1$	2	3	4
---------	---	---	---

liefert $\frac{M_m}{h_m} = 317^t$ 311^t 303^t 293^t .

In der Mitte ist $\frac{M_m}{h_m} = \frac{1420}{5,0} = 284^t$. Man erhält nun weiter für

$m = 1$	2	3	4	5
$\sec \beta_m = 1,10$	1,06	1,03	1,01	1,00

$$-O_m = \frac{M_m}{h_m} \sec \beta_m = 349^t \quad 330^t \quad 312^t \quad 296^t \quad 284^t$$

Die berechneten Spannkkräfte sind in Fig. 533 zusammengestellt worden.

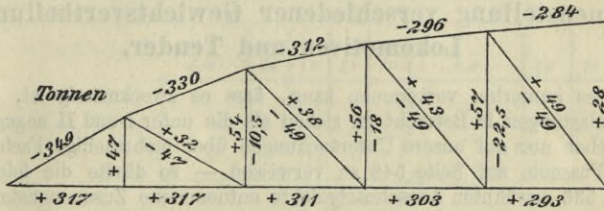


Fig. 533.

3. Aufgabe. Es sind die von der Verkehrslast herrührenden Stützenwiderstände A_{max} und A_{min} des in Fig. 534 dargestellten Gerber-Balkens zu berechnen. Die positive A -Fläche unterscheidet sich von der Einflussfläche für

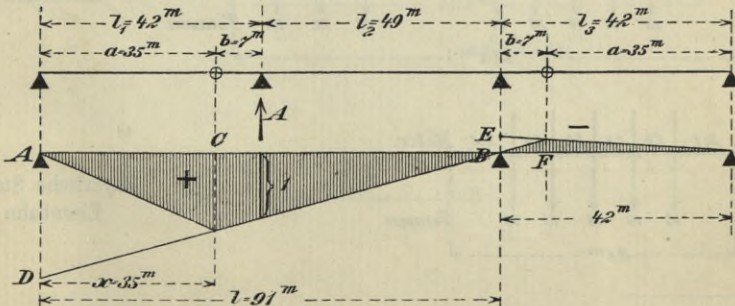


Fig. 534.

das Moment M_x an der Stelle C eines gewöhnlichen Balkens AB nur dadurch dass $\frac{AD}{AC}$ nicht gleich 1, sondern gleich $1 \cdot \frac{l}{l_2 \cdot a}$ ist.*) Man erhält also

$$\max A = \frac{l}{l_2 a} M_x = \frac{91}{49 \cdot 35} M_x = 0,0531 M_x.$$

Nach Tabelle (A) ist für $l = 91^m$

$$\max M = 5670 + 105 = 5775^{tm} = \text{rd. } 5780^{tm}$$

und nach Tabelle (B) für $x:l = 35:91 = 0,385$

$$M_x = (0,981 + 0,005 \cdot 0,55) \cdot 5780 = 0,984 \cdot 5780 = 5690^{tm}$$

Man erhält also schliesslich $A_{\max} = 302^t$.

Für die negative Einflussfläche ist $\frac{BE}{BP} = 1 \cdot \frac{a}{l_2 l_3} = \frac{35}{49 \cdot 42} = 0,0170$

$$\max M = 1550^{tm} \text{ für } l = 42^m;$$

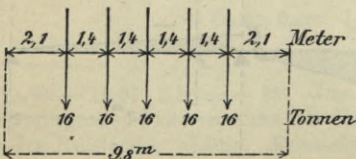
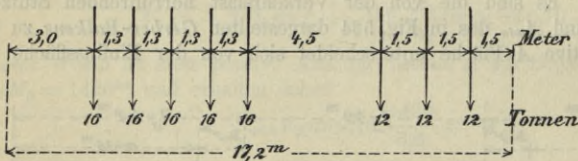
$$\frac{x}{l} = \frac{7}{42} = 0,17, \quad M_x = (0,595 + 0,01 \cdot 2,80) 1550 = 966^{tm}$$

$$A_{\min} = -0,0170 \cdot 966 = -16^t.$$

IV.

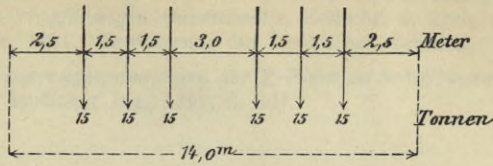
Zusammenstellung verschiedener Gewichtsvertheilungen für Lokomotiven und Tender.

Da es immerhin vorkommen kann, dass es zweckmässig ist, auch noch andere Belastungen in Betracht zu ziehen als die unter I und II angegebenen — wir brauchen nur auf unsere Untersuchungen über mehrtheilige Fachwerke und auf die Fussnote auf Seite 548 zu verweisen — so dürfte die folgende dem auf Seite 536 erwähnten Ausschussberichte entnommene Zusammenstellung nicht überflüssig sein.

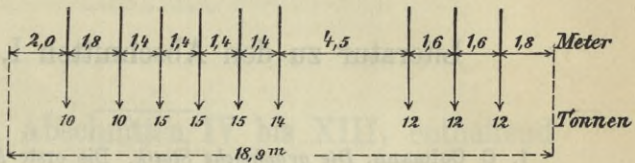


*) Vergl. Seite 157, § 19 und Seite 168 No. 99.

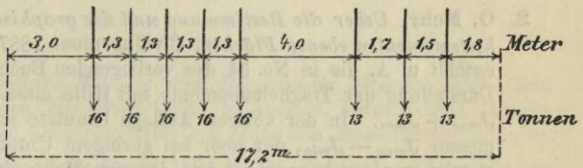
Sächsische Staats-Eisenbahn



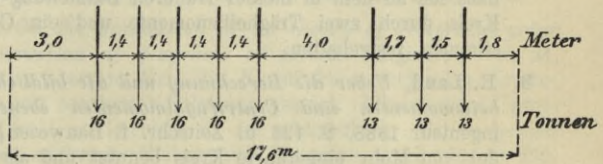
Kaiser Ferdinands-Nordbahn



K. K. Oesterreichische Staatsbahnen



Oesterreich.-Ungar. St.-E.-G.



K. Ungarische Staatsbahn

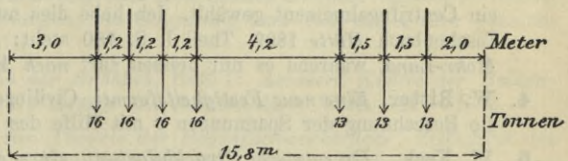


Fig. 535—541.

Literatur zu den Abschnitten I, II und III.

1. C. Culmann, *Die graphische Statik*. Die erste Auflage dieses grundlegenden Werkes erschien 1864, die zweite 1875.
2. O. Mohr, *Ueber die Bestimmung und die graphische Darstellung von Trägheitsmomenten ebener Flächen*, Civilingenieur 1887, S. 43. Diese Abhandlung enthält u. A. die in No. 34 des vorliegenden Buches mitgetheilte graphische Darstellung der Trägheitsmomente mit Hilfe eines Kreises vom Durchmesser $J_{max} + J_{min}$. In der vorigen Auflage benutzte ich einen Kreis vom Durchmesser $J_{max} - J_{min}$, der aber bei geringem Unterschiede der beiden Grenzwerte weniger bequem ist wie der von Mohr eingeführte Kreis. Dagegen habe ich an dem in meiner früheren Darstellung befolgten Verfahren, den Kreis durch zwei Trägheitsmomente und ein Centrifugalmoment zu bestimmen, festgehalten.
3. R. Land, *Ueber die Berechnung und die bildliche Darstellung von Trägheitsmomenten und Centrifugalmomenten ebener Massenfiguren*, Civilingenieur 1888, S. 123 u. Zeitschr. f. Bauwesen, 1892, S. 550. Es wird der von Mohr eingeführte Kreis benutzt und als drittes Bestimmungsstück (in Uebereinstimmung mit der vorigen Auflage meiner Graphischen Statik) ein Centrifugalmoment gewählt. Ich hebe dies nur deshalb hervor, weil im Taschenbuch *Hütte* 1899, Theil I, S. 180 steht: *Der Trägheitskreis nach Mohr-Land*, während es nur heißen darf *nach Mohr*.
4. W. Ritter, *Eine neue Festigkeitsformel*, Civilingenieur 1876, S. 309. Zeigt die Berechnung der Spannungen σ mit Hilfe des Kerns
5. W. Keck. *Excentrische Druckbelastung eines cylindrischen Mauerwerkkörpers ausserhalb des Kerns*, Zeitschr. des Arch. u. Ing. Vereins in Hannover 1882, S. 301 und *Excentrische Druckbelastung ausserhalb des Kerns bei Mauerwerkskörpern von ringförmigem Querschnitte*, dieselbe Zeitschrift, 1882, S. 627. Enthält u. A. werthvolle Formeln und Tabellen zur Berechnung von Schornsteinen auf Winddruck.
6. O. Mohr, *Ueber die Vertheilung der excentrischen Druckbelastung eines Mauerwerkkörpers*, Zeitschr. d. Arch. u. Ing. Vereins in Hannover, 1883, S. 163. Giebt die auf Seite 87, Fig. 82 mitgetheilte Konstruktion der Nulllinie an.
7. Hüppner, *Zur Ermittlung der Druckvertheilung in Mauerwerksquerschnitten*, Civilingenieur, 1885, S. 39. Behandelt zum ersten Male den Fall eines nicht in einer Symmetrieachse liegenden Angriffspunktes.

8. **F. Heinemann**, *Excentrische Druckbelastung ausserhalb des Kerns bei Mauerwerkskörpern ringförmigen Querschnitts*, Zeitschr. d. Arch. u. Ing. Vereins in Hannover, 1891. *Erweiterung der Keck'schen Tabellen.
9. **A. Meyerhof**, *Die Biegungsspannungen der Z-Eisen zu Schiffbauzwecken*, Zeitschr. d. Vereins deutscher Ing., 1899, S. 607.

Literatur zu den Abschnitten IV bis XIII, enthaltend die Theorie der statisch bestimmten ebenen Träger.

1. **Aug. Ritter**, *Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenkonstruktionen*, Hannover 1863. 5. Auflage, Leipzig 1894. Untersuchung des einfachen Dreiecksystems mit Hilfe von Momentengleichungen.
2. **C. Culmann**, *Die graphische Statik*, 1864, 1875. Behandlung des einfachen Dreiecksystems mittels der Zerlegung einer Kraft nach drei Richtungen.
3. **J. Clark Maxwell**, *On the application of the theory of reciprocal polar figures to the construction of diagrams of forces*. Engineer, Vol. 24, S. 402. Hier wird zum ersten Male die Konstruktion reziproker Kräftepläne für Fachwerke mit constanter Belastung gezeigt. Allgemeinere Untersuchungen hat Maxwell niedergelegt in der Abhandlung: *On reciprocal figures and diagrams of forces*. Philosophical Magazine, April 1864, S. 250.
4. **L. Cremona**, *Le figure reciproche nella Statica Grafica*. Milano, J. Giugno, 1872. Die Untersuchungen von Cremona sind viel allgemeiner gehalten als die von Maxwell.
5. **E. Winkler**, *Theorie der Brücken*, Heft I: *Aeusserere Kräfte der Balkenträger*, Heft II: *Innere Kräfte der Balkenträger*, Wien, 1873—1886.
6. **O. Mohr**, *Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerkträger*, Zeitschrift des Architekt. u. Ing. Vereins in Hannover, 1874, S. 223. Enthält in Form einer Anmerkung ein beachtenswerthes Verfahren zur graphischen Berechnung des Fachwerkbalkens.
7. **H. Zimmermann**, *Das Momentenschema*, Zeitschr. d. Architekt. u. Ing. Vereins in Hannover 1877, S. 61. Aufstellung von Tabellen zur Erleichterung der Berechnung der Eisenbahnbrücken für Einzellasten.
8. **A. Foepll**, *Theorie des Fachwerks*, Leipzig 1880. Enthält eine Reihe grundlegender Untersuchungen.
9. **Henneberg**, *Statik der starren Systeme*, Darmstadt 1886.
10. **Grübler**, *Beitrag zur Theorie des ebenen einfachen Fachwerks*, Rigasche Industrie-Zeitung 1887. Behandelt die Frage der Starrheit eines Fachwerks mit Hilfe der Polbestimmungen für kinematische Ketten.

11. Müller-Breslau, *Beitrag zur Theorie des ebenen Fachwerks*, Schweiz. Bauzeitung 1887, Mai S. 121, und Nov. S. 129. Entwicklung der kinematischen Theorie des Fachwerks sowohl mit Hilfe der Figur F' als auch mittels der augenblicklichen Drehpunkte der Glieder kinematischer Ketten. Hinweis auf die Williot'sche Darstellungsweise der Verrückungen der Knotenpunkte eines elastischen Fachwerks.*)
12. Mohr, *Ueber Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne kinematischer Ketten*, Civilingenieur 1887. Anwendung des Williot'schen Verfahrens auf die Darstellung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen kinematischer Ketten.
13. R. Land. *Kinematische Theorie der statisch bestimmten Träger*, Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Vereins 1888, S. 11 u. 162. Stützt sich hauptsächlich auf die Anwendung der Williot'schen Darstellungsweise.
14. F. Schur, *Ueber ebene einfache Fachwerke*, Mathematische Annalen 1897, S. 142. Knüpft an meine unter 11 aufgeführte kinematische Theorie des Fachwerks an. Wenn Schur die Einführung eines einzigen Momentenpunktes als ein neues Verfahren hinstellt, so beruht dies wohl auf Uebersehen meiner späteren Arbeiten (vergl. u. A. Centralblatt d. Bauverwaltung 1892, S. 246).
15. G. Mehrtens, *Statisch bestimmte mehrtheilige Wandgliederung der Gitterträger*, Zeitschr. f. Architektur u. Ingenieurwesen, Wochenausgabe, 1898, S. 329. Vergl. die Anmerkung auf Seite 533 des vorliegenden Buches.
16. W. Dietz, *Beitrag zum statisch bestimmten gegliederten Balkenträger mit zweifachem Ausfüllsystem*, Zeitschr. d. Vereins Deutscher Ingenieure 1899, S. 230. Enthält eine beachtenswerthe vergleichende Untersuchung verschiedener Doppelfachwerke.

*) Vergl. Abschnitt I, § 1 der ersten Abtheilung des II. Bandes.

Berichtigungen.

- Seite 34. In Fig. 36 müssen sich die Seilpolygonseiten I'' und II'' in der Senkrechten durch S_1 schneiden.
- „ 70, Zeile 11 von unten soll es heissen: „Klinkermauerwerk in verlängertem Cementmörtel, vergl. Seite 101“ statt: „Klinkermauerwerk in Cementmörtel.“
- „ 82, Zeile 8 von unten: „in der Nähe“ statt: „in der Höhe“.
- „ 84, Zeile 11 von oben: „von den Walzwerken“ statt „von Walzwerken“.
- „ 97, Zeile 3 von oben: $2,5 - \frac{r}{R}$ statt: $2,5 = \frac{r}{R}$.
- „ 109 und ~~209~~²⁷⁰. Der in den beiden Fussnoten erwähnte Anhang konnte nicht so schnell umgearbeitet werden und wird deshalb erst am Schluss des II. Bandes gebracht werden.
- „ 298, Zeile 12 von unten: $A' A'' = p\lambda \frac{f_u}{f}$ statt: $A' A'' = \frac{p\lambda}{l} \frac{f_u}{f}$.
- „ 305, Zeile 17 von oben: „Knoten 3“ statt: „Knoten 2“.
- „ 341, Zeile 10 von unten: „Seite 145“ statt: „Seite 122“ und „Seite 310“ statt: „Seite 124“.
- „ 345, Fig. 350: $\frac{1,8}{6,0} \cdot \frac{6,0}{3,6} = 0,5$ statt: $\frac{1,8}{6,0} \cdot \frac{6,0}{36} = 0,5$.
- „ 378, Fig. 384: 2,69 und 3,81 statt: 269 und 381.
- „ 395, Fig. 399: $H = 18,70^t$ statt: $H = 18,75^t$.
- „ 435, Zeile 3 von unten: $16 \cdot 3 = 48^m$ statt: $24 \cdot 2 = 48^m$.
- „ 453, Fig. 441 a: Der zweite Pfeil von oben erhält die Bezeichnung 2μ statt: μ .
- „ 457, Fig. 449 b: C' statt C .

Vom gleichen Herrn Verfasser erschien:

Die neueren Methoden der Festigkeitslehre

von **H. F. B. Müller-Breslau.**

2. vermehrte und verbesserte Auflage.

15 $\frac{1}{2}$ Bogen. Gr. 8°. Brosch. Mit 123 Textfiguren. Mk. 7.20.

Bekanntlich ein ausgezeichnetes Werkchen, wichtig für Jeden, der sich mit dem jetzigen Standpunkte der Festigkeitslehre vertraut machen will. Die neue Auflage ist gegen die frühere wesentlich verbessert und vermehrt, der Umfang ist von 12 Bogen auf 15 $\frac{1}{2}$ Bogen gestiegen, die Zahl der Textfiguren von 121 auf 188.

In unserm Verlag erschienen ferner:

Elementare Theorie und Berechnung

Eiserner Dach- u. Brückenbau-Constructionen

von

August Ritter, Dr. phil.,

Geh. Reg.-Rath und Professor an der Technischen Hochschule zu Aachen.

5. neudurchgesehene Auflage.

Mit 495 Textabbildg. Gr. 8°. Preis brosch 10 Mk.; in Halbfrz. geb. 12 Mk.

Das Gesetz des Hebels — in seiner besonderen Form, das Gesetz der statischen Momente — lässt sich auf einfache Weise zur Bestimmung der Spannungen benutzen, welche in den einzelnen Constructionstheilen der Dach- und Brücken-Constructionen durch Belastungen derselben hervorgebracht werden.

Die Resultate dieser Methode der statischen Momente, welche so gut wie gar keine Vorkenntnisse voraussetzt, sind klar und scharf, wie die Resultate der Geometrie, und von unmittelbar praktischer Anwendbarkeit.

Das Buch enthält eine grössere Reihe von Anwendungen dieser Methode. Aufgabenberechnungen und Anwendungen auf ausgeführte Constructionen bilden hierbei der Natur der Sache nach den grösseren Theil des Inhalts.

sowie:

Die Geometrie der Lage.

Vorträge von

Dr. Theodor Reye,

ord. Professor an der Universität Strassburg i. Els.

Abth. I 4. Aufl. Mit 90 Textfiguren. Brosch. 8 Mk., in Halbfrz. geb. 10 Mk.

Abth. II 3. Aufl. Mit 26 Textfiguren. Brosch. 9 Mk., in Halbfrz. geb. 11 Mk.

Abth. III 3. Aufl. Broschirt 6 Mk., in Halbfranz geb. 8 Mk.

Als vortrefflich geeignet zur Einführung in die Lehren der Graphischen Statik zu empfehlen.

Fig. 196^a (Seite 213).

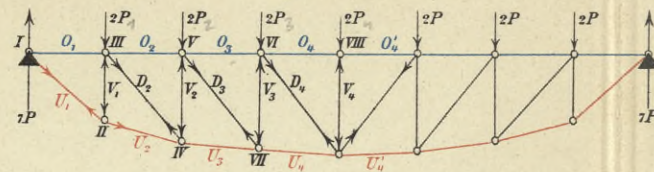


Fig. 196^b

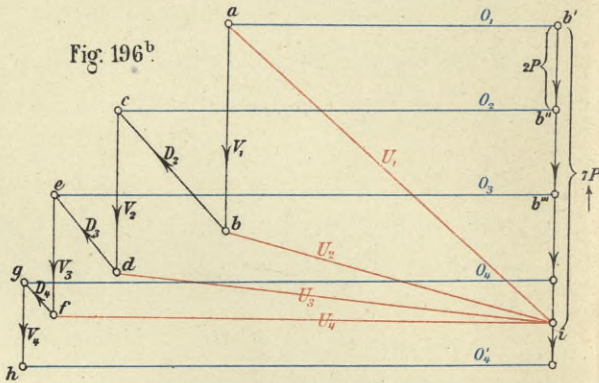


Fig. 197^a (Seite 219).

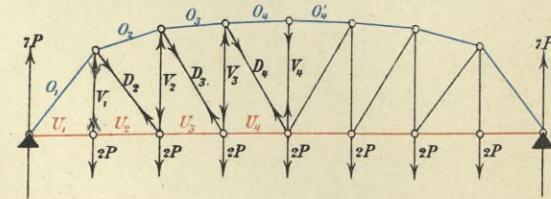


Fig. 197^b

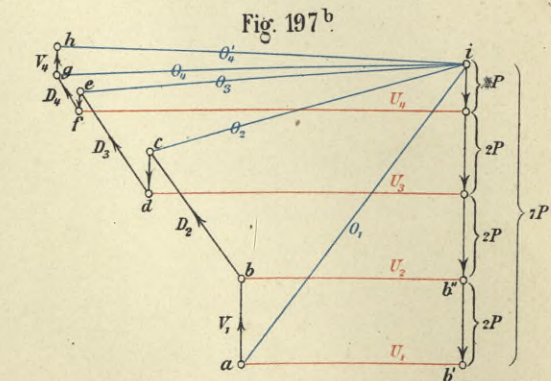
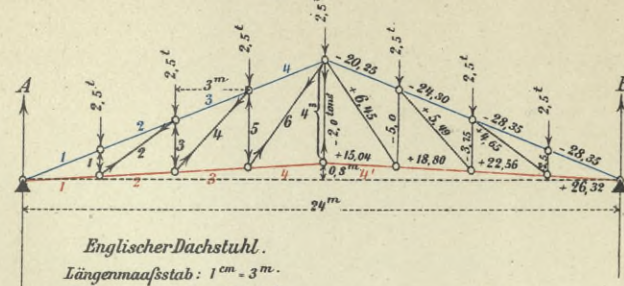


Fig. 198^a (Seite 219).



Englischer-Dachstuhl.
Längenmaßstab: 1 cm = 3 m.
Kräftemaßstab: 1 cm = 4 t.

Fig. 198^b

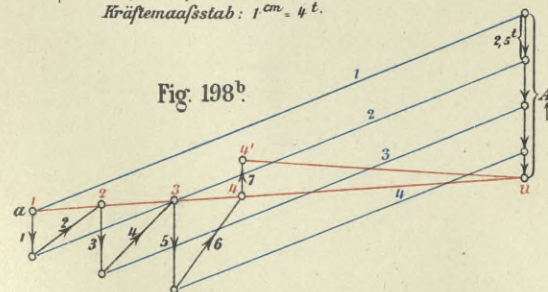


Fig. 201^a (Seite 221).
Belgischer-Dachstuhl.

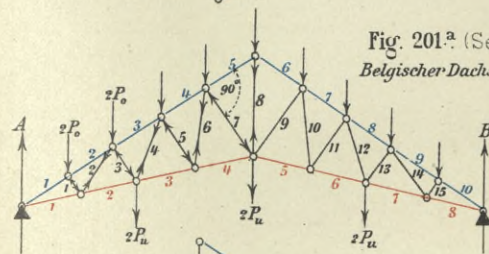


Fig. 201^b

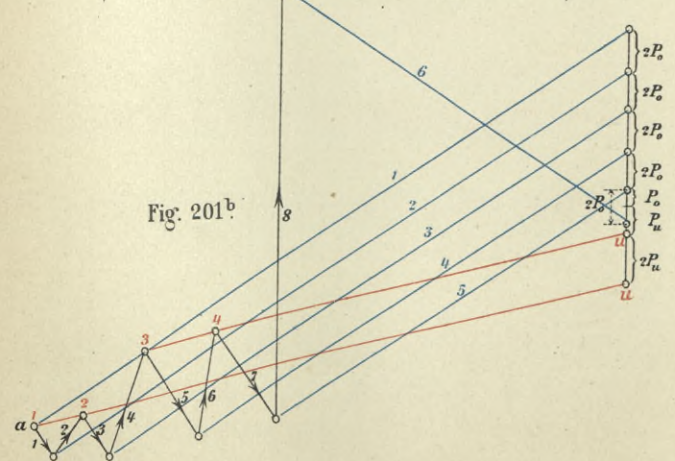


Fig. 199^a (Seite 220).

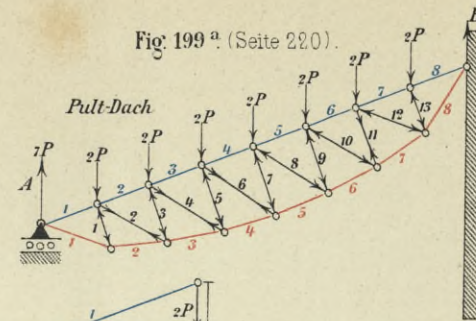


Fig. 199^b

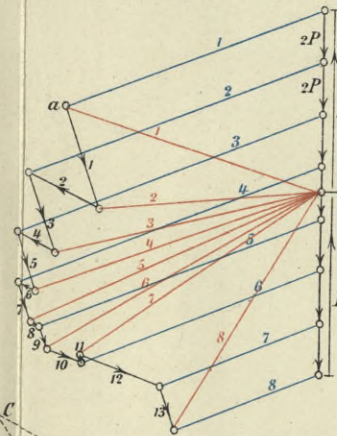


Fig. 200^a (Seite 220).

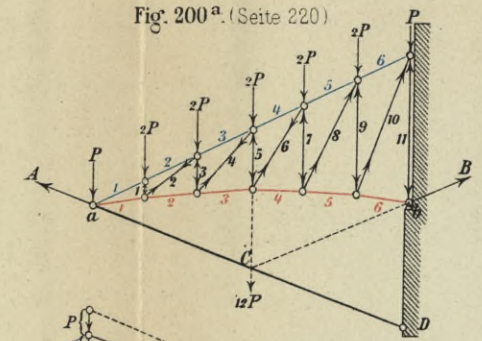


Fig. 200^b

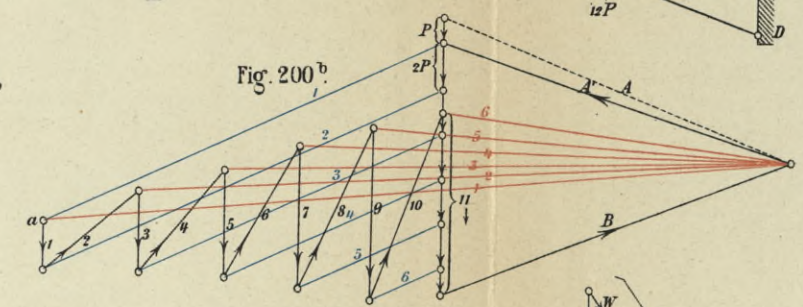


Fig. 202^b

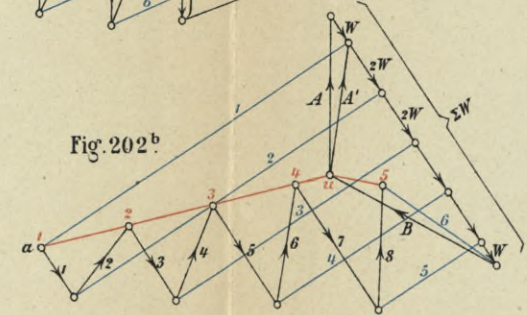


Fig. 202^a (Seite 222).

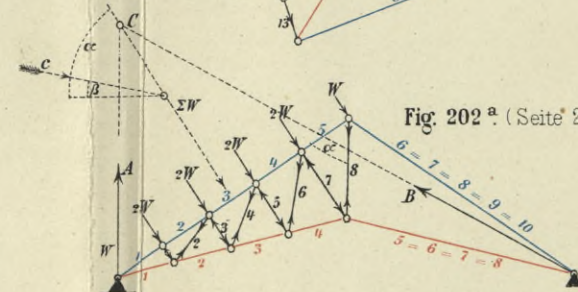


Fig. 203^a (Seite 222).

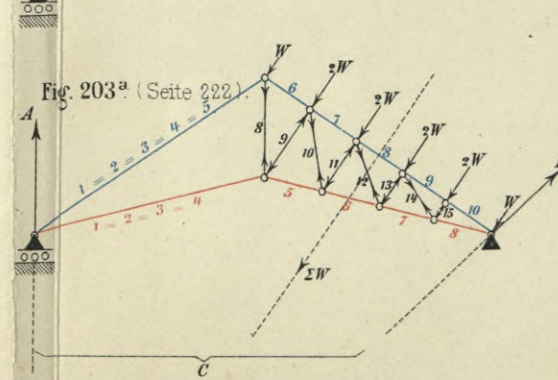
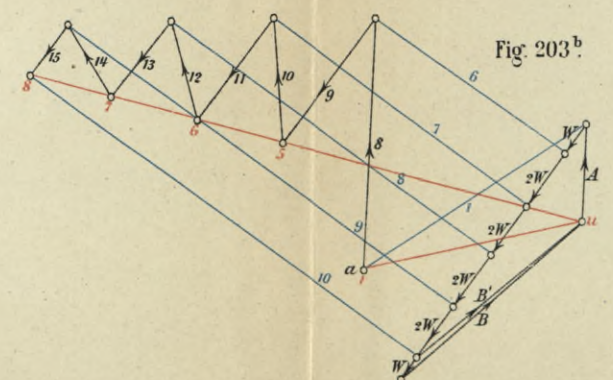
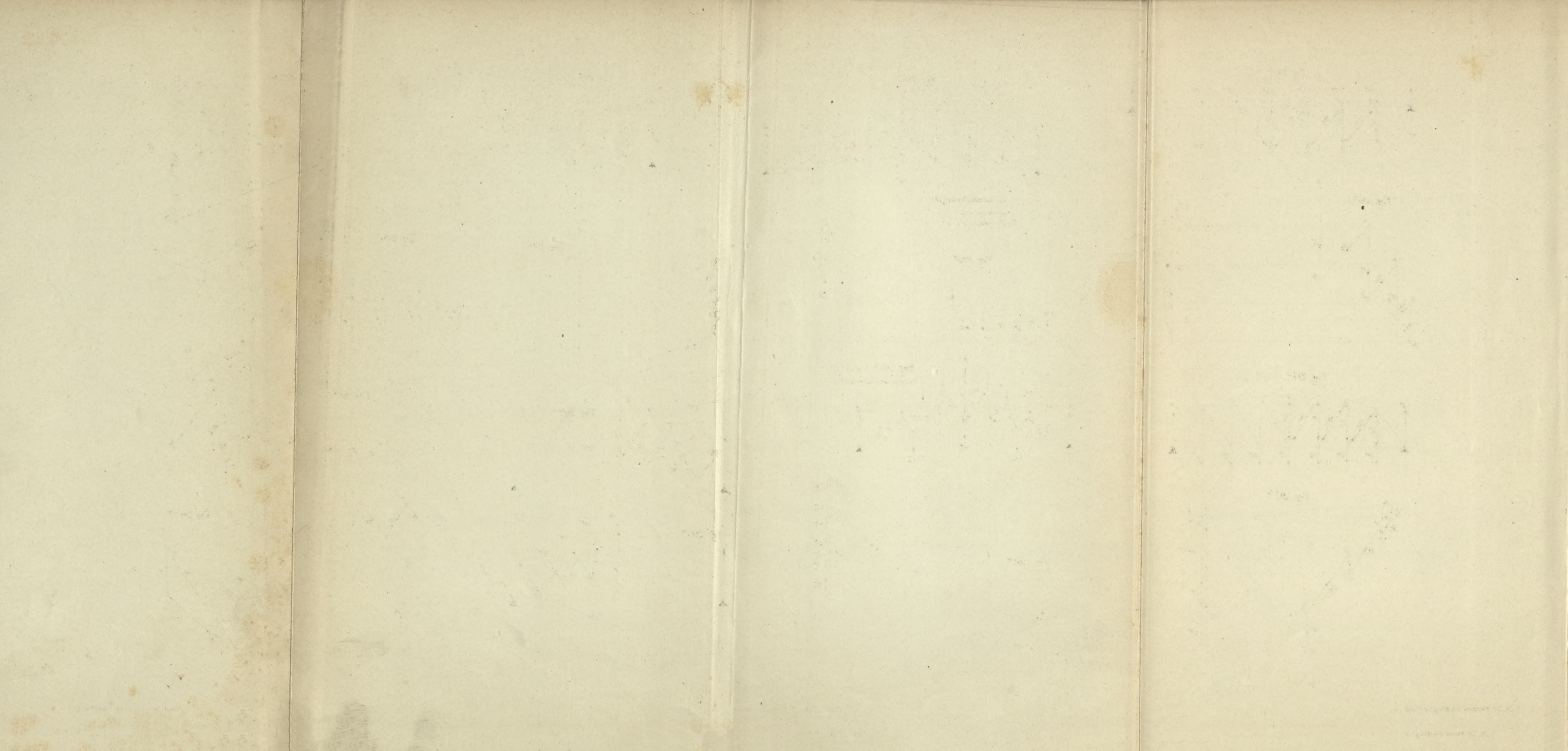
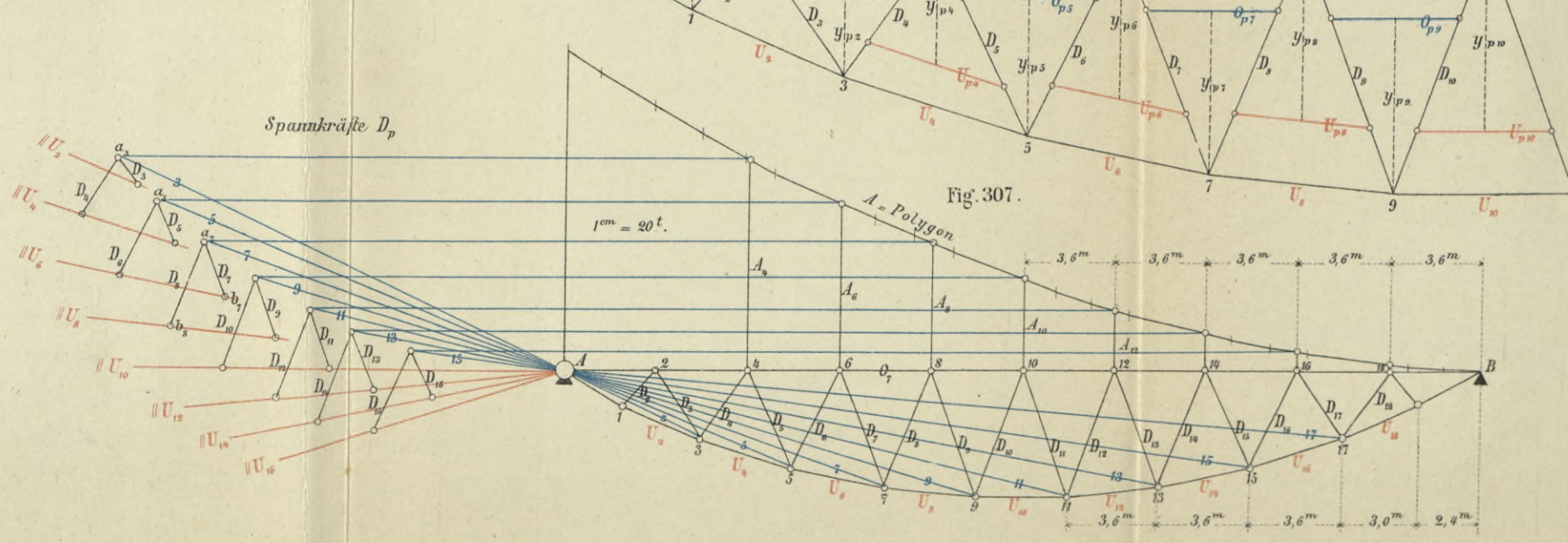
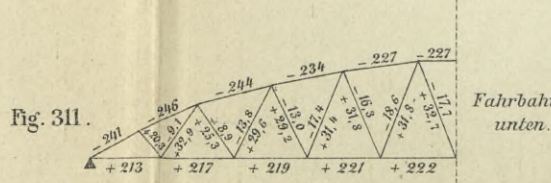
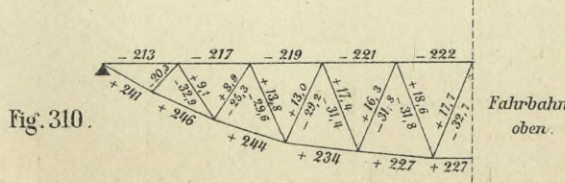
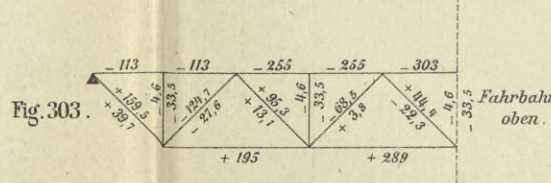
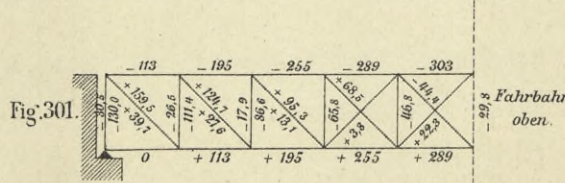
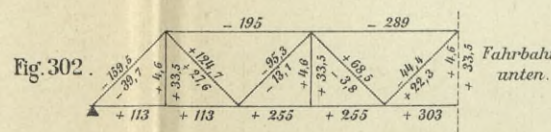
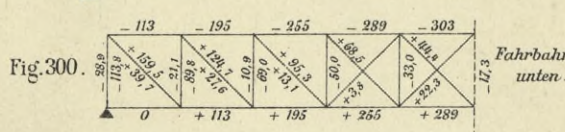
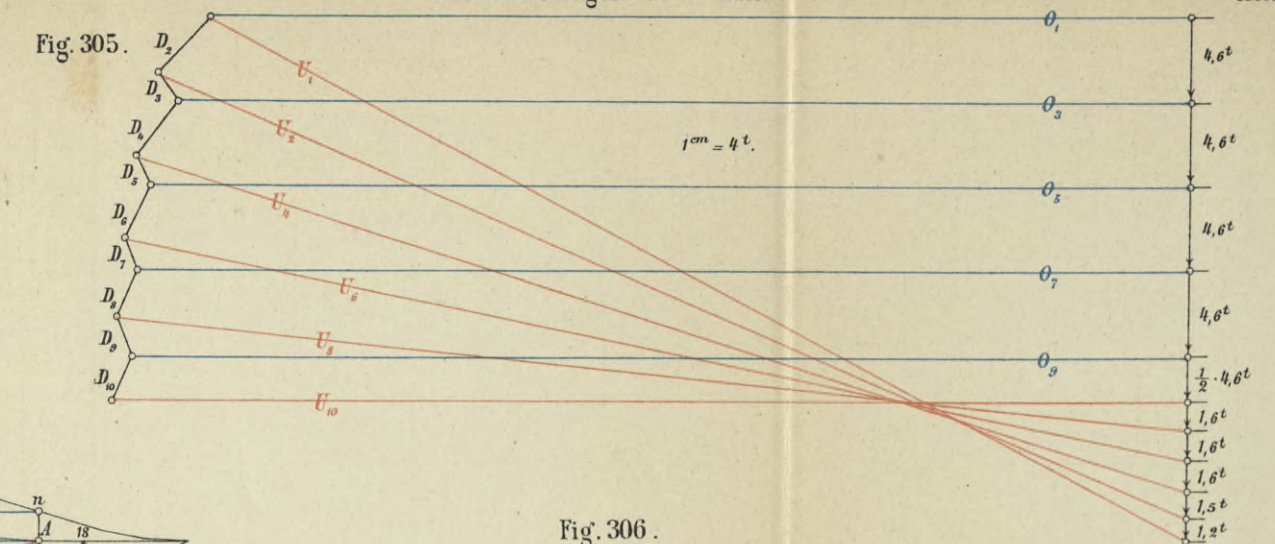
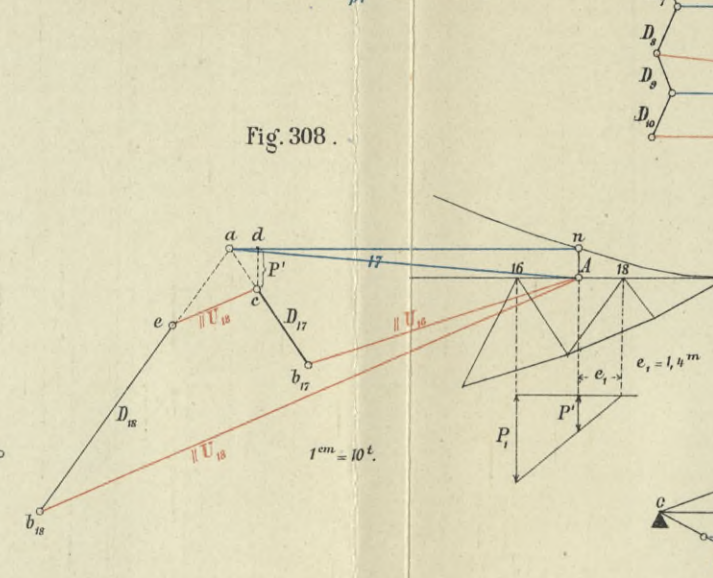
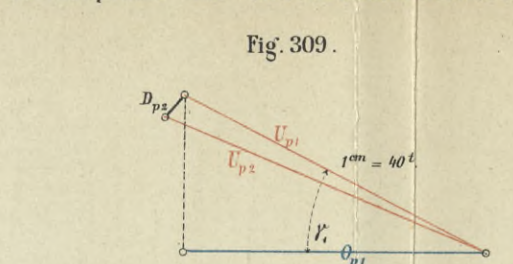
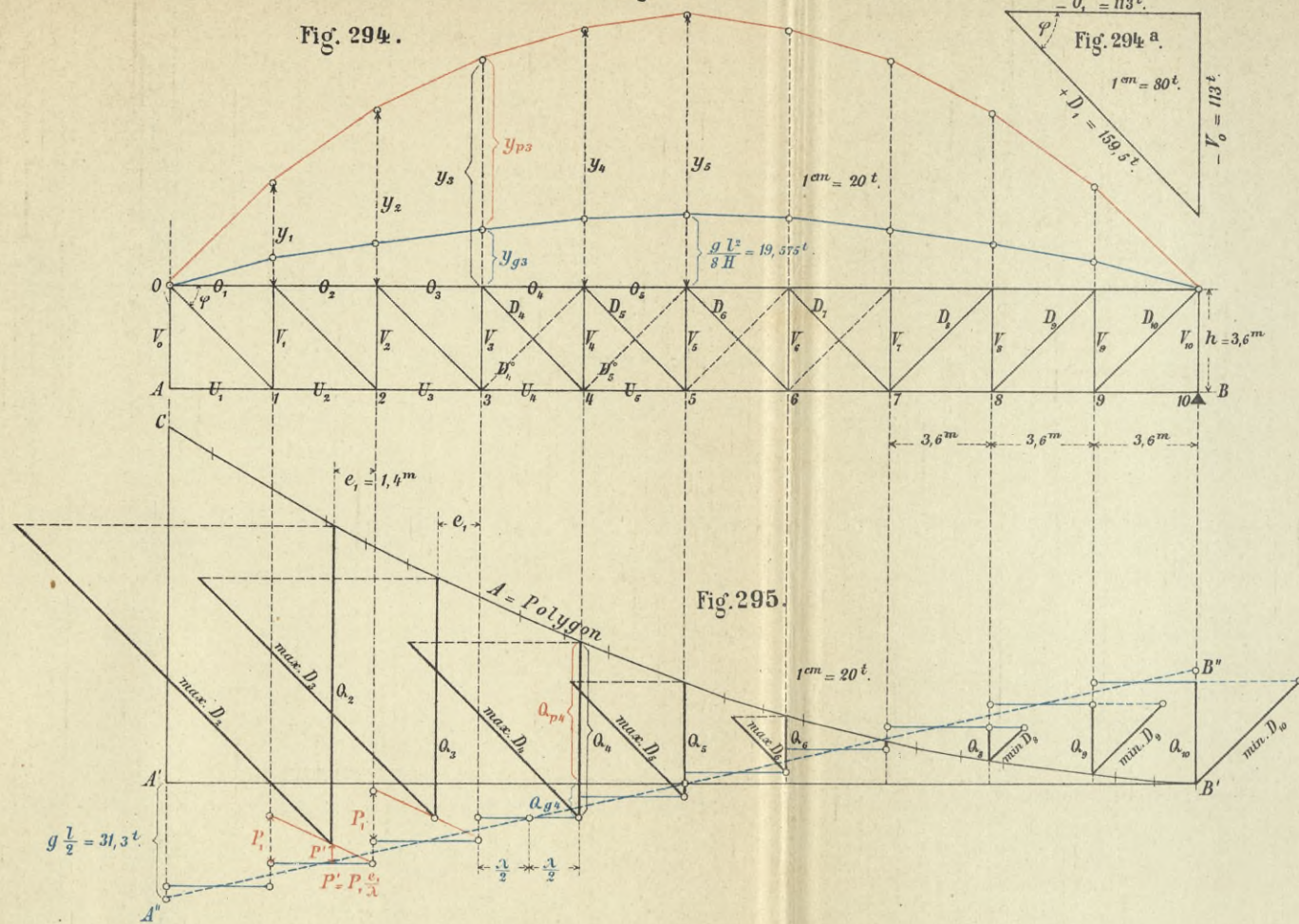


Fig. 203^b







Eisenbahnbrücke mit Halbparabelträgern

Stützweite 36^m (§ 39 Seite 309/310)

Fig. 313.

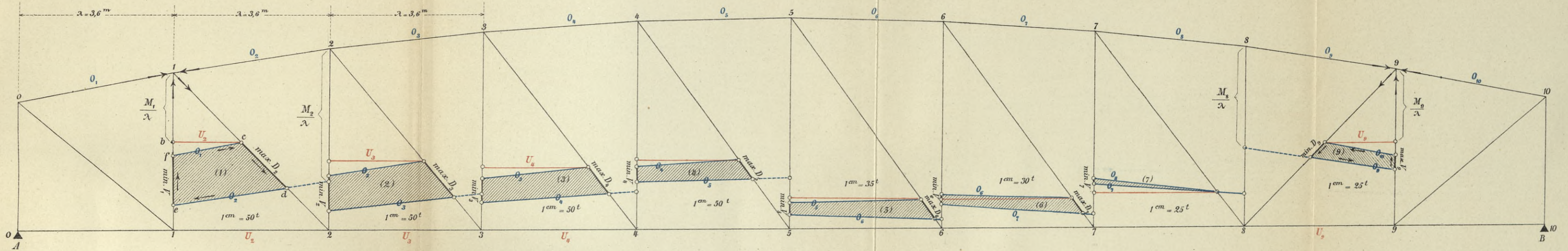


Fig. 314.

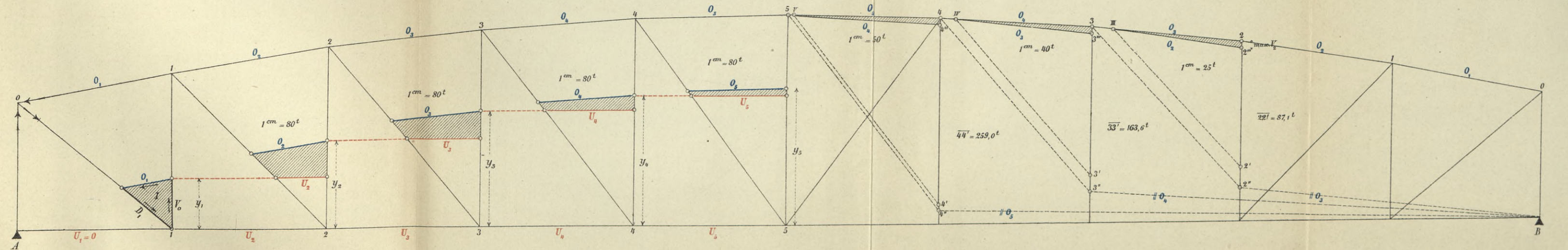
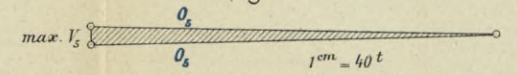
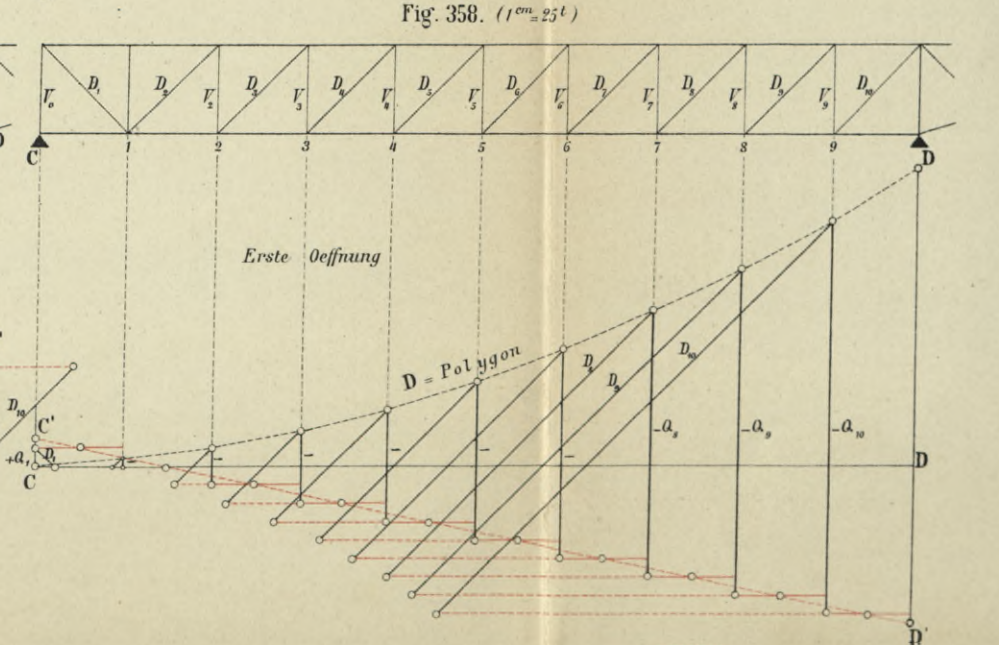
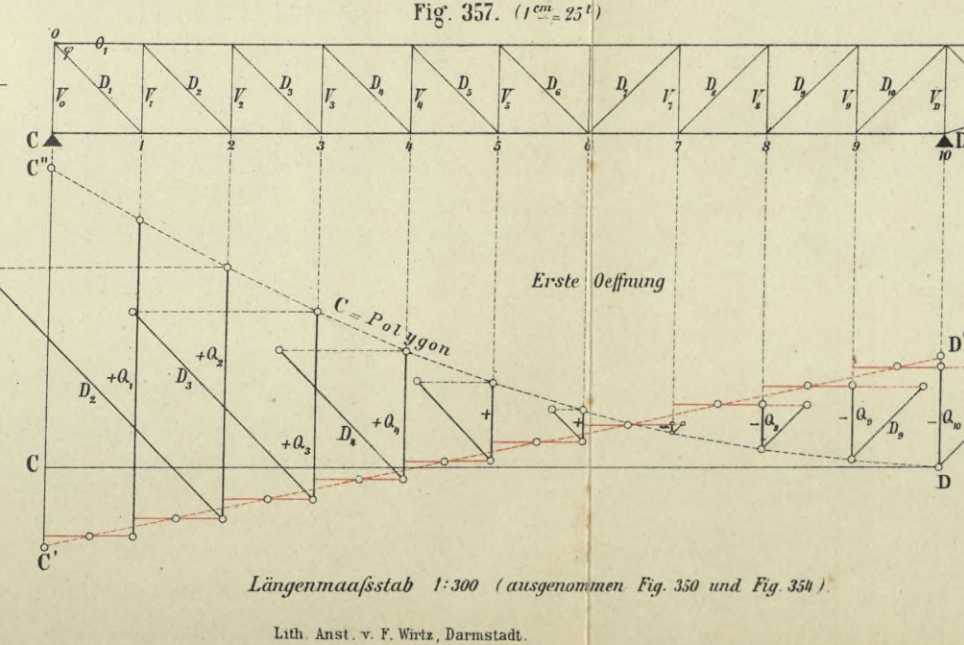
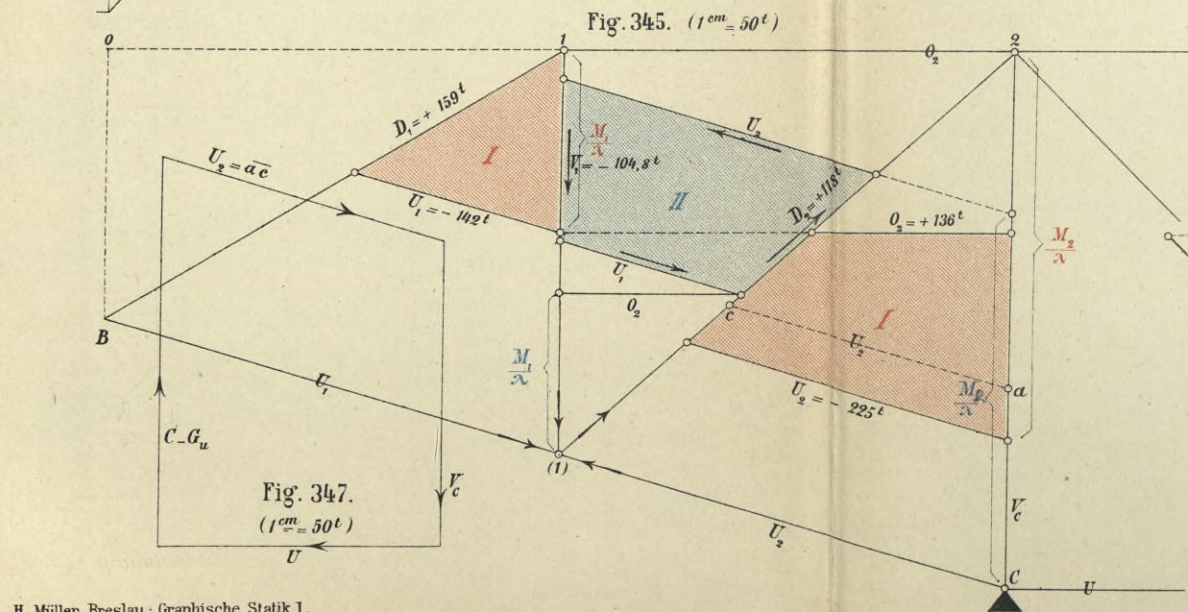
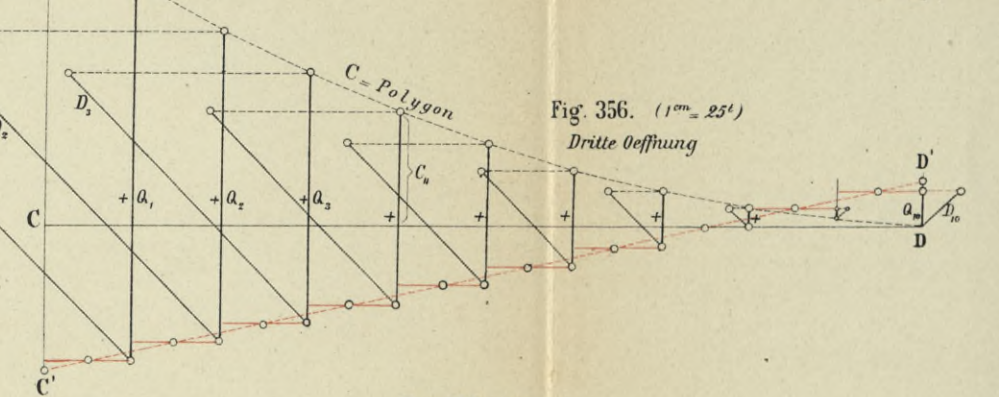
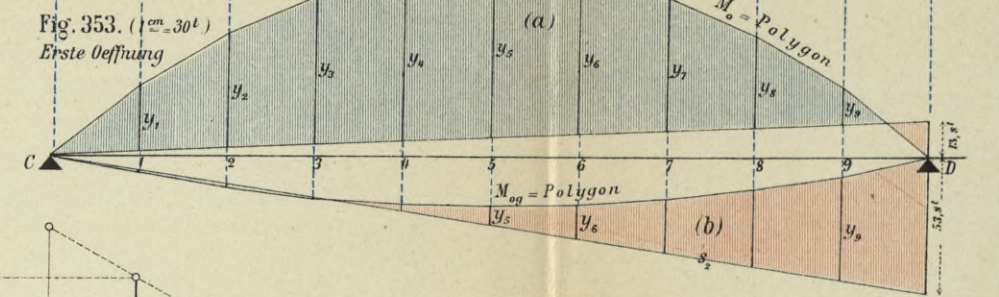
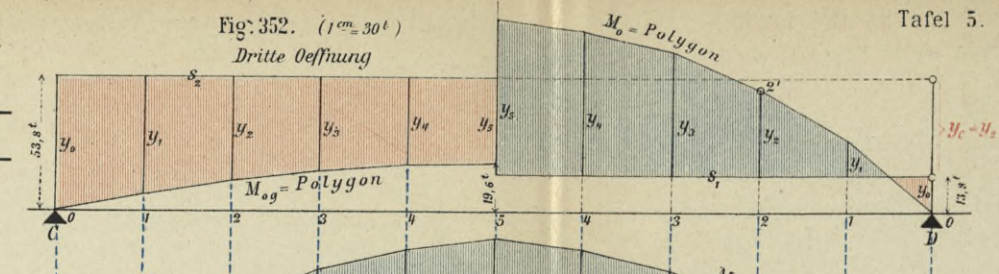
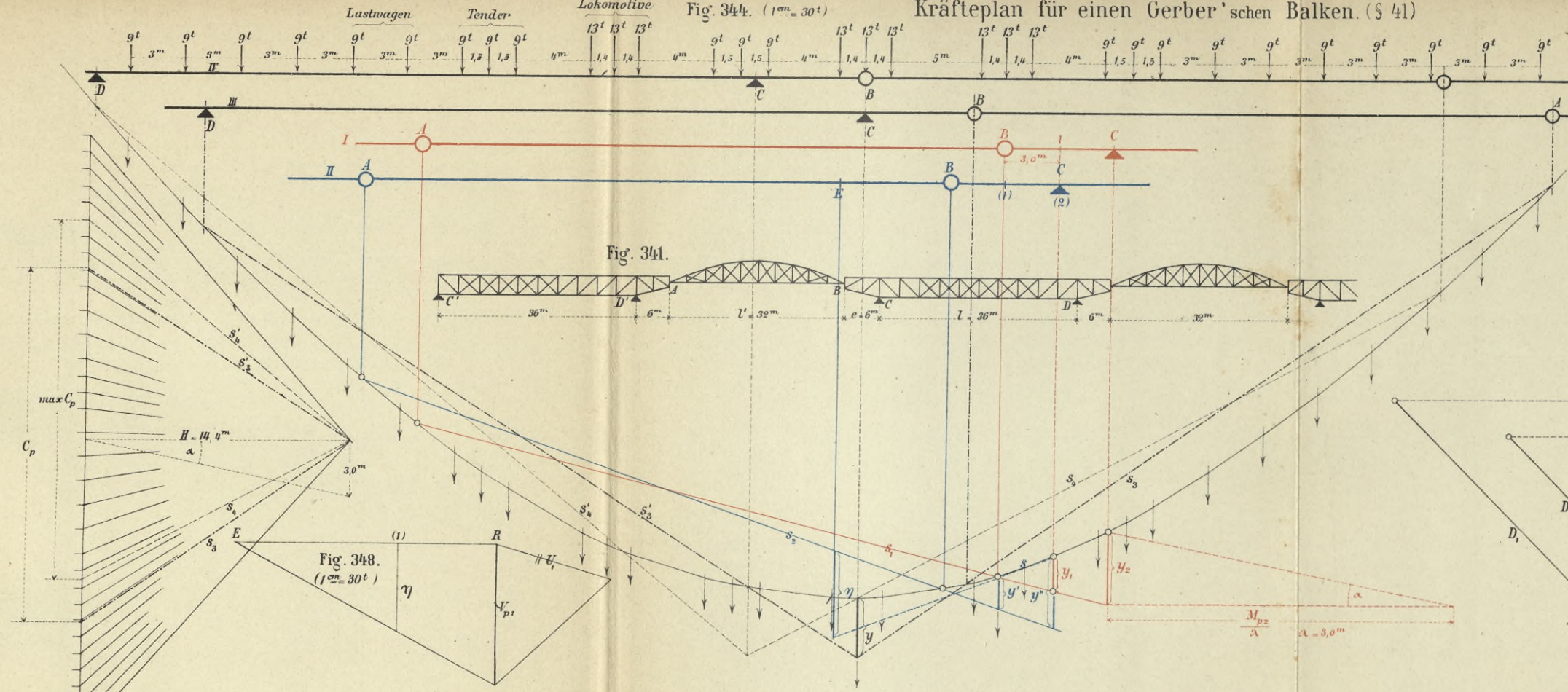


Fig. 315.

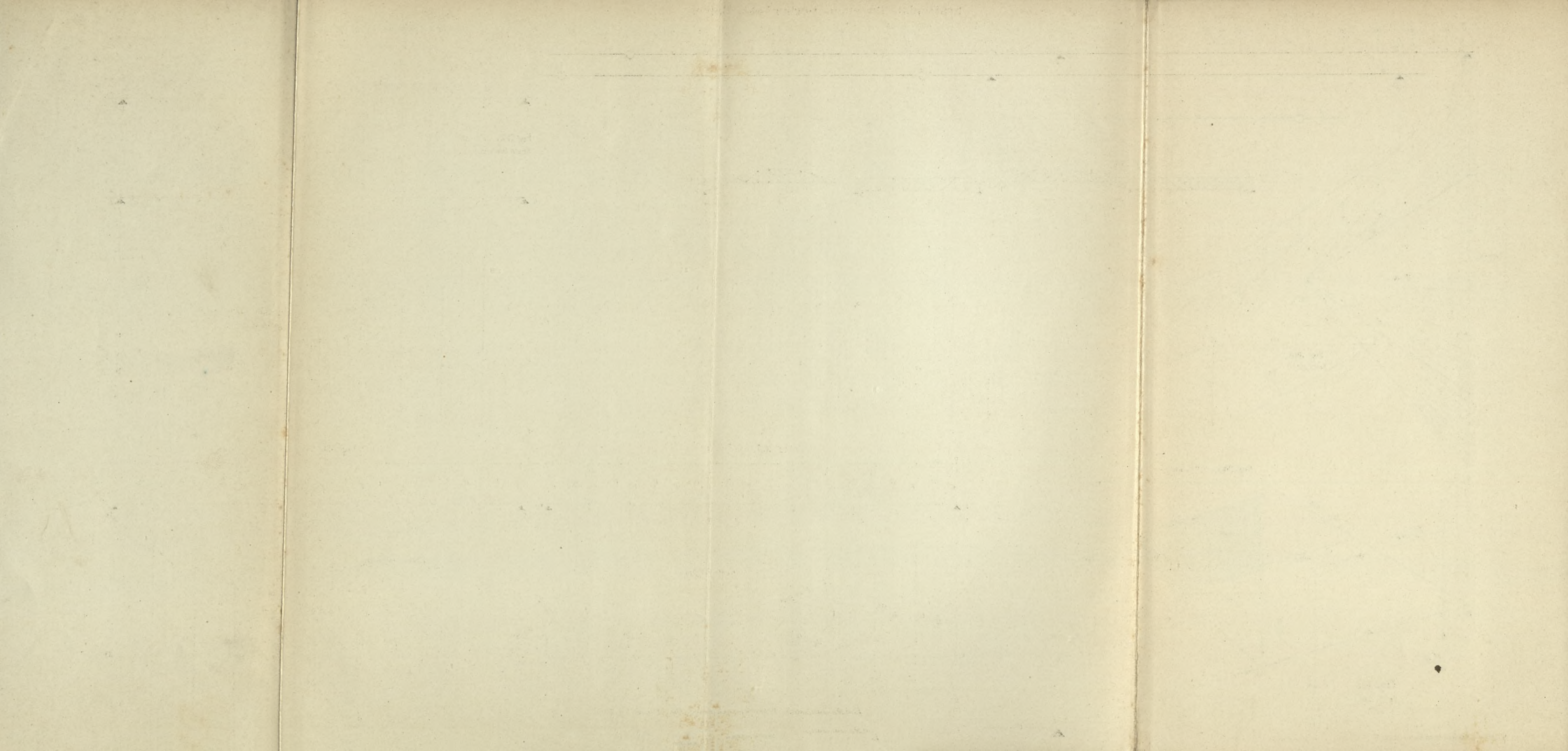


Kräfteplan für einen Gerber'schen Balken (§ 41)



Längenmaßstab 1:300 (ausgenommen Fig. 350 und Fig. 354).

Lith. Anst. v. F. Wirtz, Darmstadt.



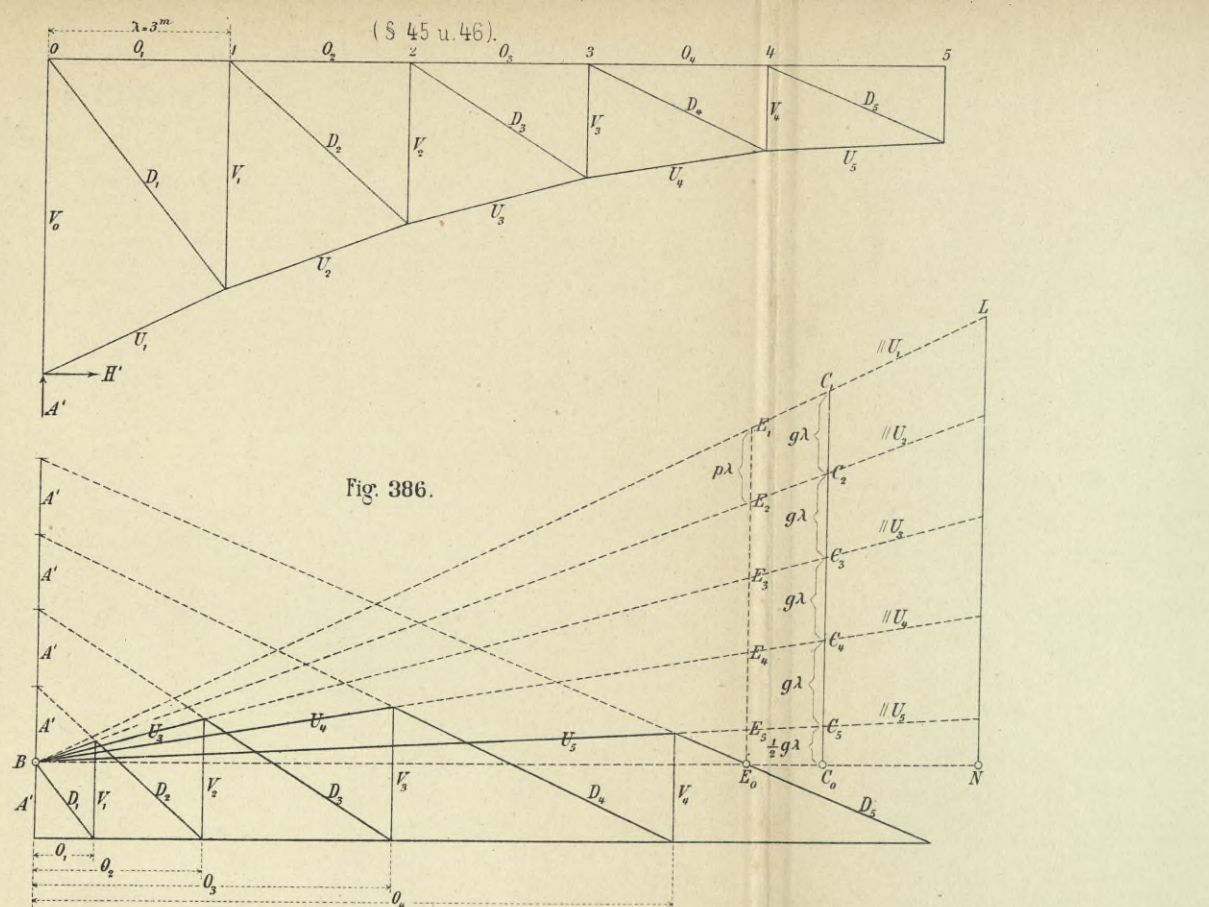


Fig. 386.

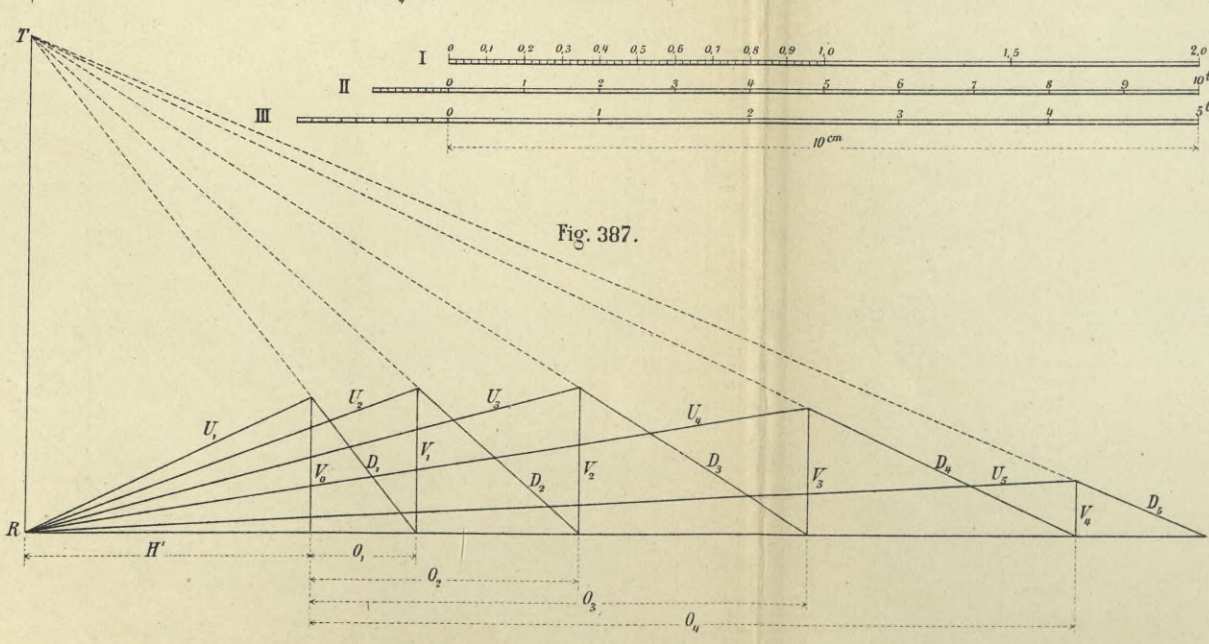
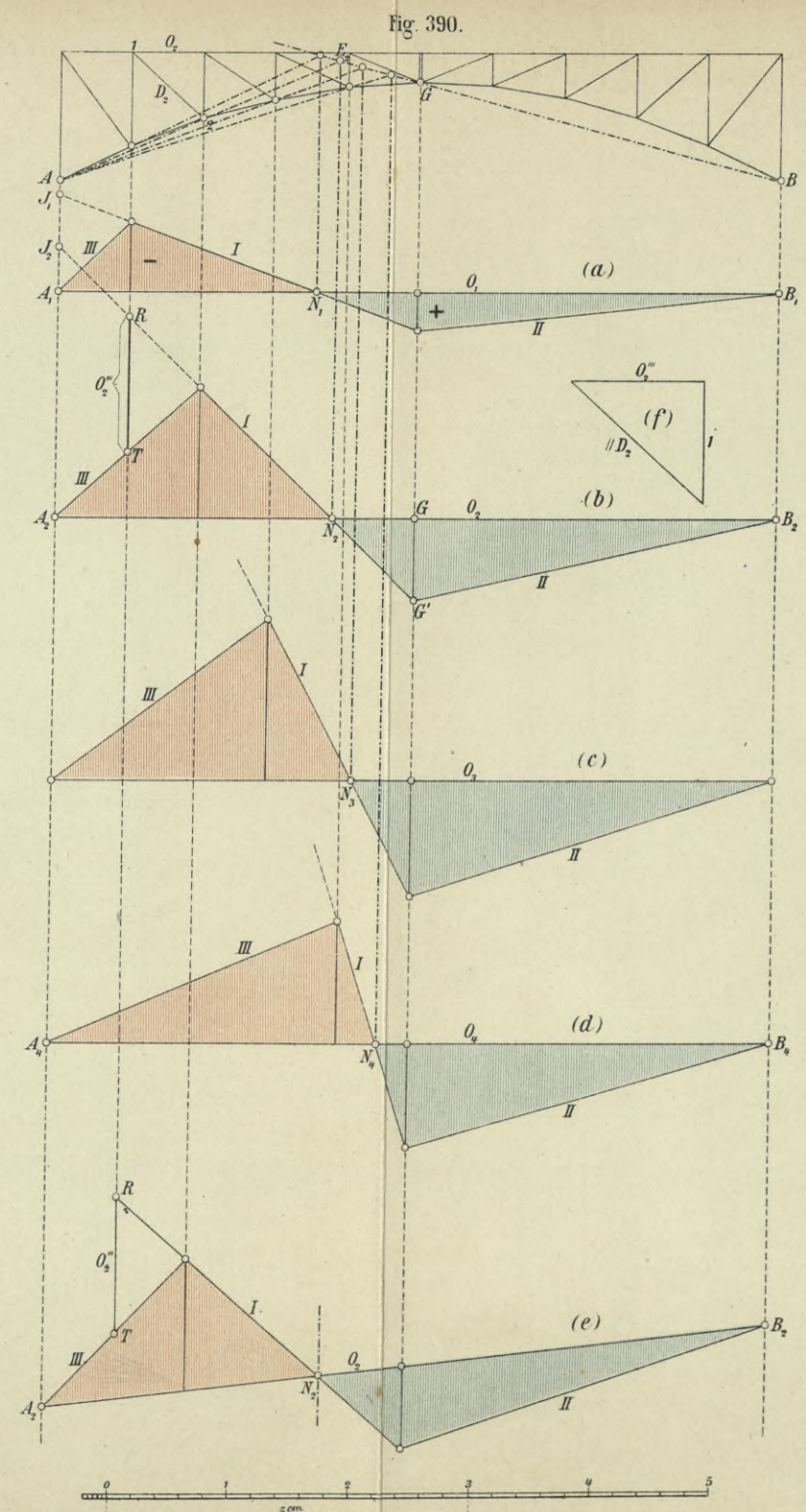
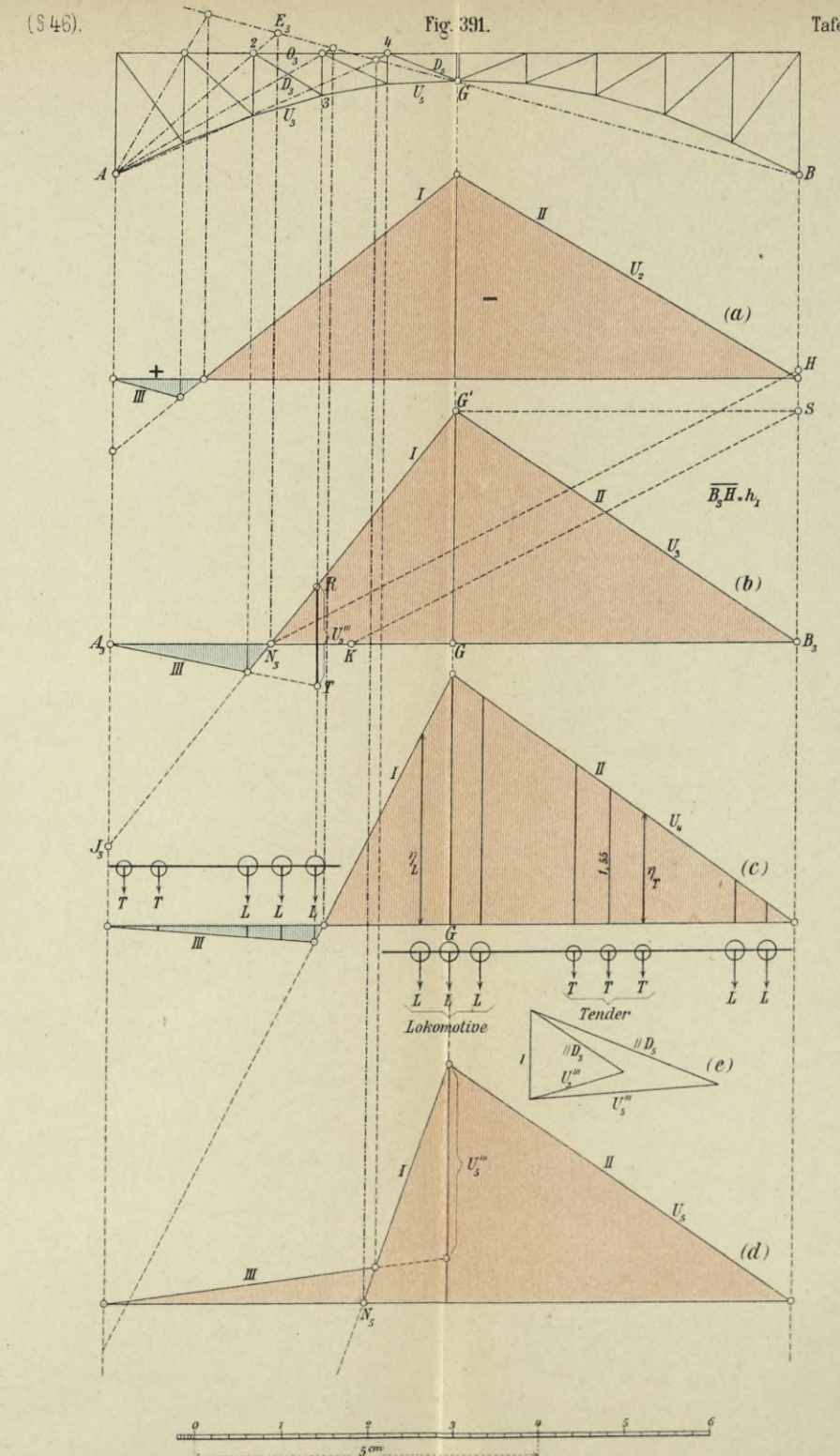


Fig. 387.



Lith. Anst. v. F. Wirtz, Darmstadt.



Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.

Fig. 392. (S. 46).

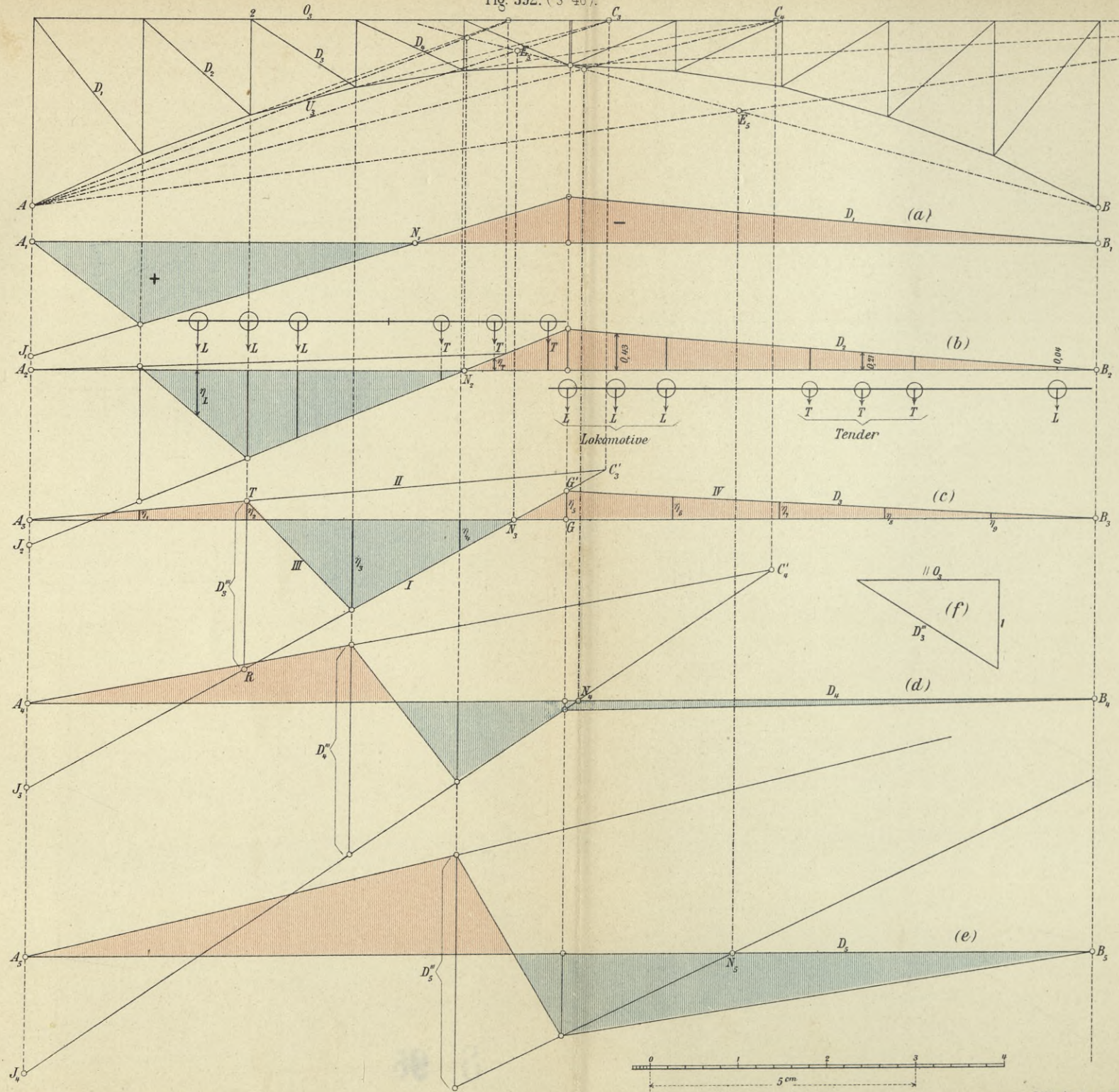
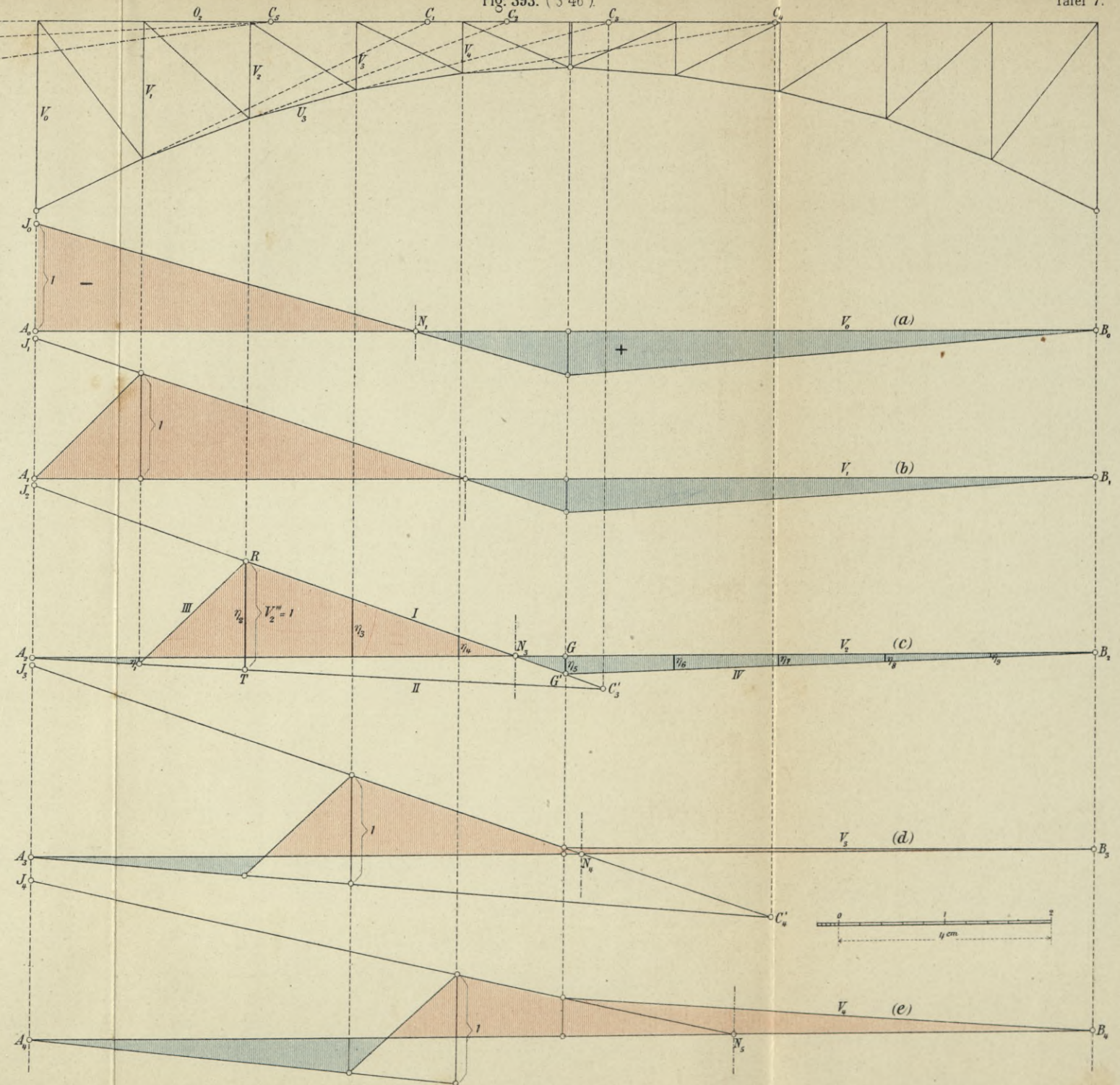
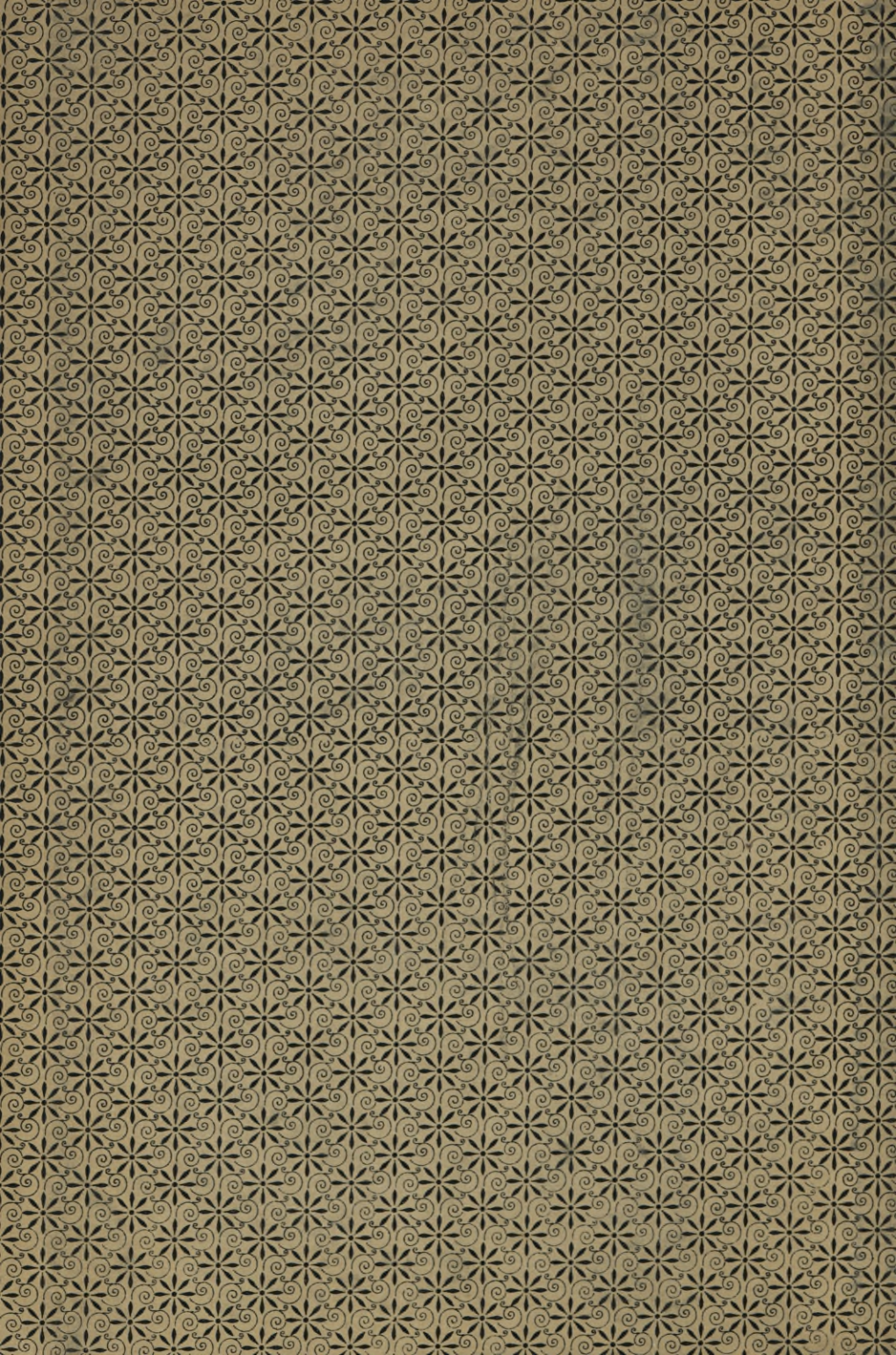


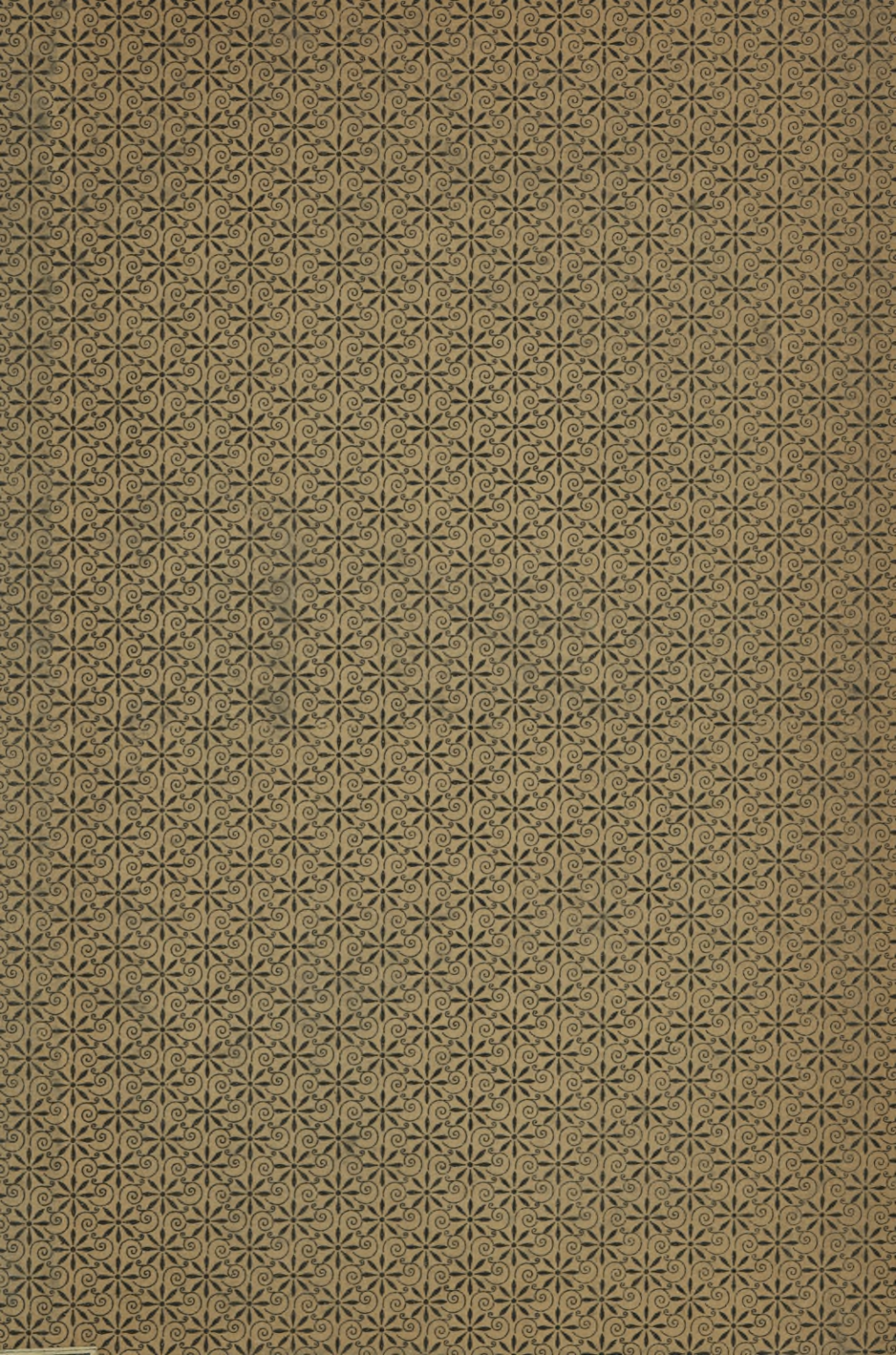
Fig. 393. (S. 46).



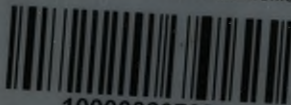
S-96

S. 61





Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000297083